

FOTOGRAMETRIA ANALITICA

DR. HANS PETER BAHR
INSTITUTO DE FOTOGRAMETRIA
DE LA UNIVERSIDAD DE HANNOVER
NIENBURGER STRABE 1
D-3,000 HANNOVER
REPUBLICA FEDERAL DE ALEMANIA
TEL: 0049-511-762-2481

DR. GOTTFRIED KONECNY
INSTITUTO DE FOTOGRAMETRIA
DE LA UNIVERSIDAD DE HANNOVER
NIENBURGER STRABE 1
D-3,000 HANNOVER
REPUBLICA FEDERAL DE ALEMANIA
TEL: 0049-511-762-2481

ING. FEDERICO ALONSO LERCH (COORDINADOR)
JEFE DEL DEPARTAMENTO DE GEODESIA Y CARTOGRAFIA
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 548. 96.69

M. EN C. GUALTERIO LUTHE GARCIA (COORDINADOR)
PROFESOR DE FOTOGRAMETRIA
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA
FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM
CIUDAD UNIVERSITARIA
MEXICO 20, D.F.
TEL: 548. 96. 69

FOTOGRAMETRIA ANALITICA 1981.

| Fecha | Tema | Horario | Profesor |
|----------|--|--------------|--|
| Marzo 30 | 1. FUNDAMENTOS MATEMATICOS | | Dr. Gottfried Konecny Dr. Hans Peter Bahr |
| | Repaso de la teoría de vectores y matrices | 9 a 11 a. m. | |
| | Ejercicios de vectores y matrices | 11:15 a 13 h | |
| | Repaso de ajuste por el método de mínimos cuadrados y de la fotogrametría analógica. | 14 a 16 h | |
| | Ejercicios de invertir matrices y de propagación de errores | 16:15 a 18 h | |
| Marzo 31 | 2. SISTEMAS DE COORDENADOS | | |
| | Ecuación fundamental de la fotogrametría y matrices de la rotación | 9 a 11 a. m. | |
| | Ejercicios sobre matrices de la rotación ; Transformación de coordenadas entre el sistema geodésico y del modelo. | 11:15 a 13 h | |
| | 3. CORRECCIONES A LA COORDENADAS FOTOGRAFICAS | | |
| | Orientación interior; Distorsiones del objetivo; Deformaciones de la película Refracción | 14 a 16 h | |
| | Ejercicios sobre la función distorsión, la distancia focal y errores en altura | 16:15 a 18 h | |
| Abril 1º | 4. DETERMINACION DE LAS COORDENADAS TRIDIMENSIONALES DE UN PUNTO | 9 a 11 a. m. | |

| Fecha | Tema | Horario | Profesor |
|-------|--|--------------|----------|
| | 17. ORIENTACION ABSOLUTA CON APARATOS ANALOGICOS | | |
| | 18. AJUSTE DE FAJAS Y BLOQUES POR INTERPOLACION | | |
| | Repasos de 15, 16, 17 y 18 | 11:15 a 13 h | |
| | 19. RESTITUDORES ANALITICOS | 14 a 16 h | |
| | 20. MODELOS DE TERRENO DIGITAL | 16:15 a 18 h | |



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAFIA ANALITICA

FORMULAS Y DERIVACIONES

DR. GOTTFRIED KONECNY

TRADUCIDO POR:

M. EN C. GUALTERIO LUTHE GARCIA

REVISADO POR:

ING. FEDERICO ALONSO LERCH

MARZO, 1981

FOTOGRAMETRIA

ANALITICA

-Formulas y derivaciones-

de: Dr. G. Konecny

Traducido por: M. en C. Gualterio Luthe G.

Revisado por: Ing. Federico Alonso Lerch.

CONTENIDO

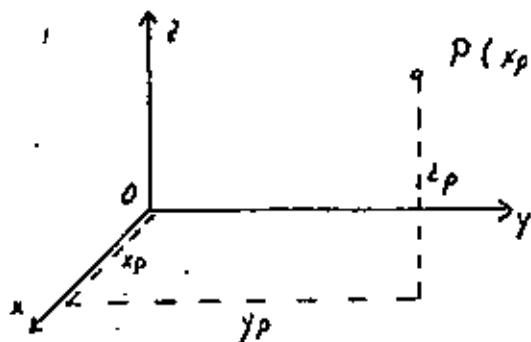
| | página |
|--|--------|
| 1. Fundamentos matemáticos, | 1 |
| 1.1 Vectores. | 1 |
| 1.2 Matrices. | 5 |
| 1.3 Solución de ecuaciones lineales por métodos matriciales. | 7 |
| 1.4 Métodos para invertir matrices. | 8 |
| 1.5 Métodos iterativos para solución de igualdades. | 18 |
| 1.6 Ajuste por el método de mínimos cuadrados. | 19 |
| 1.7 Propagación de errores. | 24 |
| 1.8 Precisión de los parámetros. | 25 |
| 1.9 Corrección de los elementos de una matriz invertida según Hotelling. | 28 |
| 2. Sistemas de coordenadas. | 29 |
| 2.1 Transformación de coordenadas de la foto al modelo tridimensional. | 29 |
| 2.2 Transformaciones ortogonales. | 32 |
| 2.3 Elementos de las matrices de rotación. | 33 |
| 2.4 Transformación de coordenadas entre el sistema geodésico de referencia y el del modelo. | 40 |
| 3. Correcciones, aplicables en coordenadas fotografi-- cas, debido a la orientación interior, deformación de película, distorsión del objetivo y refracción. | 47 |
| 3.1 Correcciones por imprecisiones del comparador. | 48 |
| 3.2 Orientación interior. | 48 |
| 3.3 Deformaciones de la película | 54 |
| 3.4 Distorsión del objetivo. | 56 |
| 3.5 Refracción. | 61 |
| 4. Determinación de las coordenadas tridimensionales de un punto con ayuda de dos fotografías. | 68 |

| | |
|--|-----|
| 5. Determinación de la orientación exterior de una cámara métrica (resección espacial) | 70 |
| 6. Aerotriangulación sobre un mayor número de estaciones de toma ("Triangulación Aérea de Estaciones Múltiples") | 84 |
| 7. Ajuste de bloque con parámetros adicionales. | 104 |
| 8. Ajuste de bloque con condiciones adicionales. | 105 |
| 9. Orientación Relativa. | 107 |
| 10. Ecuaciones de transferencia de escala. | 120 |
| 11. Orientación Absoluta. | 128 |
| 12. Ajuste de la Orientación Absoluta. | 135 |
| 13. Orientación Absoluta mediante el uso de modelos independientes. | 157 |
| 14. Ajuste planimétrico (método Anblock) | 163 |
| 15. Fórmulas diferenciales para la Orientación Absoluta. | 171 |
| 15.1 Orientación relativa de pares fotográficos dependientes. | 171 |
| 15.2 Orientación relativa de pares fotográficos independientes. | 178 |
| 15.3 Orientación relativa de pares fotográficos dependientes - método numérico para aparatos analógicos - | 181 |
| 15.4 Orientación Relativa para pares fotográficos - dependientes - orientación óptico mecánica en - aparatos analógicos. | 186 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 15.5 | Precisión en la determinación de los parámetros de orientación en la orientación relativa. | 190 |
| 15.6 | Orientación Relativa de pares fotográficos independientes -método numérico para aparatos analógicos- | 194 |
| 15.7 | Errores de los parámetros de orientación después de la orientación relativa -pares fotográficos - independientes- | 198 |
| 15.8 | Orientación Relativa con pares fotográficos independientes -orientación óptico mecánica de fotografías verticales- | 199 |
| 15.9 | Orientación Relativa para terreno con alturas mayores -método numérico para aparatos analógicos- | 202 |
| 15.10 | Determinación del factor de sobrecorrección en terreno abrupto según KASPER. | 205 |
| 15.11 | Superficies Críticas. | 208 |
| 16. | Deformaciones del modelo. | 209 |
| 17. | Orientación Absoluta en aparatos analógicos. | 217 |
| 18. | Ajuste de franjas y bloques por interpolación. | 226 |
| 19. | Problemas al hacer el ajuste en bloque fotogramétrico. | 234 |
| 20. | Métodos de interpolación para puntos nuevos. | 238 |
| 21. | Comparación de la precisión entre el ajuste de Modelo y de Haces. | 246 |
| 22. | Ejemplos de aplicación para la fotogrametría analítica. | 247 |

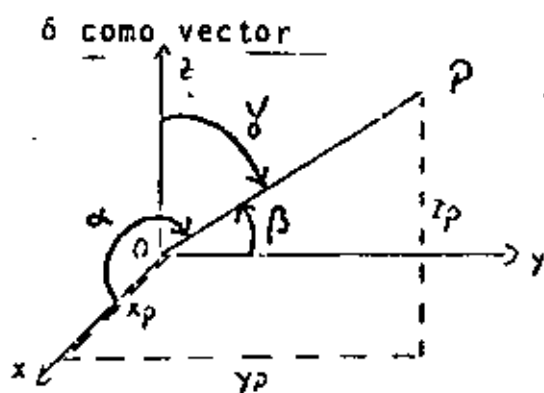
1.1 Vectores.

a) Un punto puede definirse por sus coordenadas.



origen O

punto P (x_p, y_p, z_p)



vector $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$

Longitud del vector = Magnitud.

$$|OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

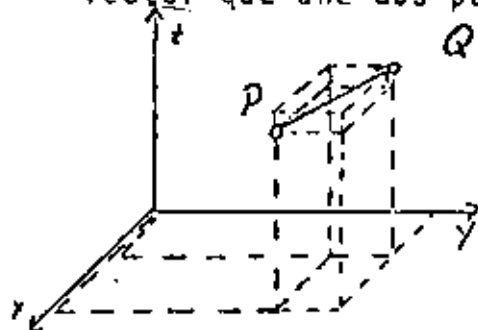
Cosenos directores: cosenos de los ángulos comprendidos entre el vector y c/u de los ejes coordenados.

$$\cos \alpha = \frac{x_p}{|OP|}$$

$$\cos \beta = \frac{y_p}{|OP|}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_p}{|OP|}$$

b) Vector que une dos puntos:



$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} x_q - x_p \\ y_q - y_p \\ z_q - z_p \end{pmatrix} = -\vec{QP}$$

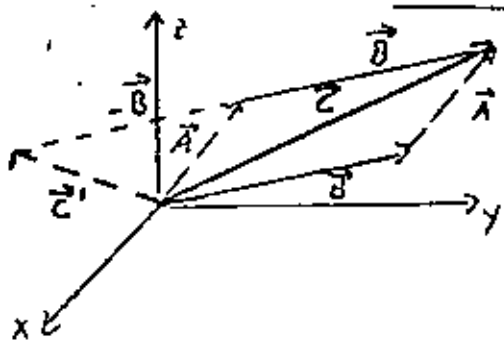
Longitud del vector:

$$|PQ| = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}$$

Cosenos directores:

$$\cos \alpha = \frac{x_Q - x_P}{|PQ|} ; \cos \beta = \frac{y_Q - y_P}{|PQ|} ; \cos \gamma = \frac{z_Q - z_P}{|PQ|}$$

c) Suma y resta de vectores:



$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}'$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \\ z_A + z_B \end{pmatrix}$$

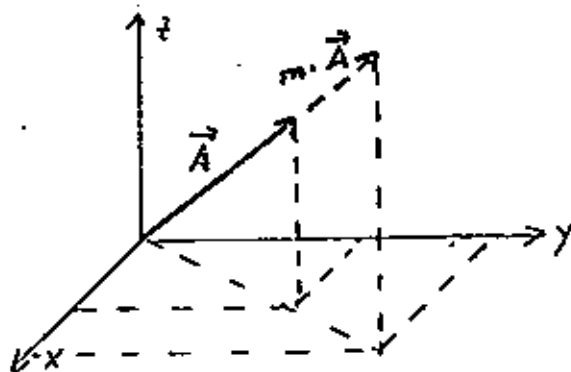
$$\vec{C}' = \begin{pmatrix} x_{C'} \\ y_{C'} \\ z_{C'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$$

La suma y resta vectoriales son

conmutativas $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

y distributivas $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

d) Multiplicación por un escalar:



$$m \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m A_x \\ m A_y \\ m A_z \end{pmatrix}$$

La multiplicación de un vector por un escalar es

conmutativa $m \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot m$

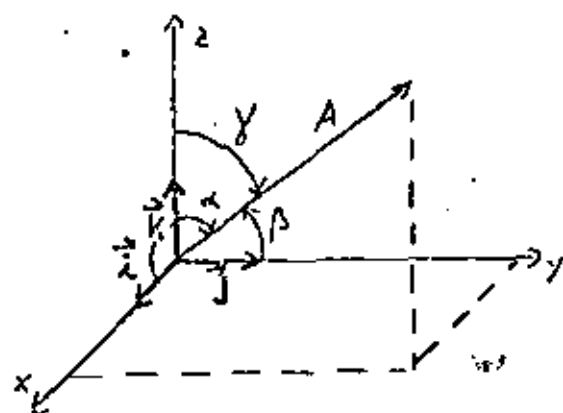
distributiva $m(n \cdot \vec{A}) = (m \cdot n) \cdot \vec{A}$

y asociativa

$$(m \pm n) \cdot \vec{A} = m \cdot \vec{A} \pm n \cdot \vec{A}$$

$$m (\vec{A} \pm \vec{B}) = m \cdot \vec{A} \pm m \cdot \vec{B}$$

e) Vectores unitarios (en dirección de los ejes coordenados).



$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}$$

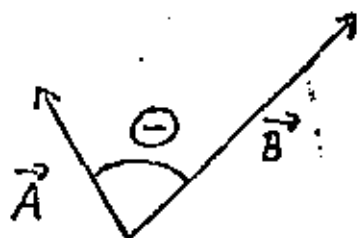
f) Vectores unitarios (en cualquier dirección).

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \begin{pmatrix} A_x^0 \\ A_y^0 \\ A_z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_x}{|\vec{A}|} \\ \frac{A_y}{|\vec{A}|} \\ \frac{A_z}{|\vec{A}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$

Longitud del vector

$$\left(\frac{A_x}{|\vec{A}|}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{|\vec{A}|}\right)^2 + \left(\frac{A_z}{|\vec{A}|}\right)^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{|\vec{A}|^2} = \frac{|\vec{A}|^2}{|\vec{A}|^2} = 1$$

g) Producto escalar.



Definición:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \Theta \equiv \text{Escalar}$$

El producto escalar es

conmutativo $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

distributivo $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

y asociativo $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = m\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot m\vec{B} = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot m$

Si los vectores \vec{A} y \vec{B} están representados por sus componentes

$$\vec{A} = x_A \cdot \vec{i} + y_A \cdot \vec{j} + z_A \cdot \vec{k}$$

$$\vec{B} = x_B \cdot \vec{i} + y_B \cdot \vec{j} + z_B \cdot \vec{k}$$

entonces el producto escalar será:

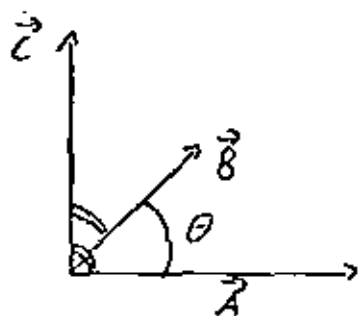
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B + z_A \cdot z_B$$

Mediante el uso de los cosenos directores se obtiene el ángulo

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \cos \alpha_A \cos \alpha_B + \cos \beta_A \cos \beta_B + \cos \gamma_A \cos \gamma_B$$

h) Producto vectorial.

Definición:



$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{C} \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{C} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{C} \perp \vec{A} \\ \vec{C} \perp \vec{B} \end{array}$$

(1.1.12)

El producto vectorial es distributivo

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

y también asociativo

$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = m\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times m\vec{B} = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot m$$

pero la ley conmutativa no es válida

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Cálculo del vector producto por formación de determinantes.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = (y_A z_B - z_A y_B) \vec{i} + (z_A x_B - x_A z_B) \vec{j} + (x_A y_B - y_A x_B) \vec{k}$$

de donde

$$\vec{A} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

$$\vec{B} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}$$

i) Productos múltiples.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \end{vmatrix}$$

El producto de $(\vec{A}\vec{B}\vec{C})$ es una cifra que es a la vez el volumen del paralelepipedo formado por los vectores \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} .

El intercambio cíclico de los 3 factores no cambia el resultado.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

Más productos múltiples:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \times \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \times \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C}) \times \vec{A}$$

La ley asociativa no es valida en productos múltiples.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} \neq \vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

1.2 Matrices.

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos a_{ij} . Los a_{ij} pueden ser cifras, funciones o submatrices.

$$[A]_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m : número de los renglones. n : número de las columnas.

a) Suma y resta de matrices.

$$[A]_{m,n} \pm [B]_{m,n} = [C]_{m,n}$$

para los elementos unitarios se cumple:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Las sumas y restas matriciales son

conmutativas $[A] + [B] = [B] + [A]$.

y

asociativas $[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C]$

b) Multiplicación de matrices.

Multiplicación de una matriz por un escalar

$$k \cdot [A]_{m,n} = [B]_{m,n}$$

para los elementos unitarios se cumple

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

Multiplicación de dos matrices

$$[A]_{m,n} \cdot [B]_{n,r} = [C]_{m,r}$$

para los elementos unitarios

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

mas leyes

$$[A][B] \neq [B][A]$$

$$[A][B] = [0] \quad \text{no significa que } [A] \text{ o } [B] = [0]$$

$$[A][B] = [A][C] \quad \text{no significa que } [B] = [C]$$

La multiplicación de matrices es asociativa

$$([A][B])[C] = [A]([B][C])$$

y también distributiva

$$[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$$

c) Trasposición de matrices

se cumple: $a_{ij}^T = a_{ji}$

La matriz transpuesta $[A]^T_{nm}$ se obtiene de $[A]_{m,n}$ intercambiando los renglones por las columnas.

Leyes:

$$\begin{aligned}
 [A^T]^T &= [A] \\
 k[A]^T &= [kA]^T \\
 ([A]+[B])^T &= [A]^T + [B]^T \\
 ([A][B])^T &= [B]^T [A]^T
 \end{aligned}$$

d) Inversión de matrices.

Si $[A]_{m,m} \cdot [B]_{m,m} = [E]_{m,m}$

entonces $[B] = [A]^{-1}$

y $[A] = [B]^{-1}$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz unitaria

Esto significa que:

$$\begin{aligned}
 [A][A]^{-1} &= [E] \\
 [B]^{-1}[B] &= [E]
 \end{aligned}$$

Leyes:

$[A]^{-1}_{m,m}$ nada más se puede obtener, si el determinante $|A| \neq 0$

Si $[A]$ y $[B]$ son matrices cuadradas y si $[B] \neq [A]^{-1}$,

entonces para la inversa se obtiene:

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1} \cdot [A]^{-1}$$

Los métodos de inversión de matrices se pueden usar para reducir sistemas de igualdades lineales.

1.3 Solución de ecuaciones lineales por métodos matriciales.

Un sistema de igualdad lineal.

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= l_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= l_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= l_3 \\
 \vdots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= l_m
 \end{aligned}$$

También se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n,1} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}_{m,1}$$

6

$$[A] \cdot \vec{x} = \vec{L}$$

matriz vector. Vector.

en general. $A X = L$ (en donde las letras mayúsculas pueden indicar tanto matrices como vectores)

Si:

1) $m = n$ y $|A| \neq 0$, entonces hay una solución única para X
se cumple:

$$\boxed{X = A^{-1} L} \quad (1.3./1)$$

$$[A]^{-1} [A] X = [A]^{-1} L$$

$$[E] X = [A]^{-1} L \quad \Rightarrow X = [A]^{-1} L$$

2) $m = n$ y $|A| = 0$, son las igualdades independientes la una de la otra, por eso no hay solución para X

3) $m < n$, tampoco existe una solución.

4) $m > n$, existen más de una solución para X .

El método de mínimos cuadrados nos lleva a una solución de - variación mínima (= Cuadrados de la desviación standard).

Este es el método más usado para repartir los errores simétricamente.

1.4 Métodos para invertir matrices.

Dado: $[A]$ se busca: $[B] = [A]^{-1}$

Los algoritmos se ejemplifican para matrices de 3,3: igualdad de partida:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.4./1)

- a) Solución de igualdades lineales por inversión.
1er. Paso:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Del 1er. renglón se obtiene la igualdad:

$$a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{11} = \frac{1}{a_{11}} (1 - a_{12} b_{21} - a_{13} b_{31})} \quad (1.4.12)$$

2o. renglón:

$$a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} = 0$$

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} (1 - a_{12} b_{21} - a_{13} b_{31}) + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} = 0$$

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} b_{21} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}} b_{31} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} = 0$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right) b_{21} + \left(a_{23} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}} \right) b_{31} + \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{21} = \frac{1}{\left(a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right)} \left[-\frac{a_{21}}{a_{11}} - \left(a_{23} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}} \right) b_{31} \right]} \quad (1.4.13)$$

3er. renglón:

$$a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31} = 0$$

$$\frac{a_{31}}{a_{11}} (1 - a_{12} b_{21} - a_{13} b_{31}) + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31} = 0$$

$$\frac{a_{31}}{a_{11}} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}} b_{21} - \frac{a_{31} a_{13}}{a_{11}} b_{31} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31} = 0$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}} \right) b_{21} + \frac{a_{31}}{a_{11}} + \left(a_{33} - \frac{a_{31} a_{13}}{a_{11}} \right) b_{31} = 0$$

$$\frac{\left(a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}} \right)}{\left(a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right)} \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) + \frac{a_{31}}{a_{11}} + \left[\frac{\left(a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}} \right)}{\left(a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right)} \left(-a_{23} + \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}} \right) + \left(a_{33} - \frac{a_{31} a_{13}}{a_{11}} \right) \right] b_{31} = 0$$

$$b_{31} = \frac{- \left\{ \frac{(a_{32} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}}) (-\frac{a_{21}}{a_{11}}) + \frac{a_{31}}{a_{11}}}{(a_{22} - \frac{a_{11} a_{12}}{a_{11}}) (-\frac{a_{21}}{a_{11}}) + \frac{a_{31}}{a_{11}}} \right\}}{\left\{ \frac{(a_{32} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}}) (-a_{23} + \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}}) + (a_{33} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}})}{(a_{22} - \frac{a_{11} a_{12}}{a_{11}}) (-a_{23} + \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}}) + (a_{33} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}})} \right\}} \quad (7.4.1)$$

Esto conduce a una solución continua pero cada vez más complicada para b_{31} , b_{21} , b_{11} .

En forma análoga se calculan b_{32} , b_{22} , b_{12} de

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y b_{33} , b_{23} , b_{13} :

$$[A] \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución se simplifica si dividimos $[A]$ en submatrices.

b) Método según Gauss.

Este se basa en la descomposición de $[A]$ en matrices triangulares y diagonales.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}$$

Cada uno de los coeficientes a_{ij} se obtienen por multiplicación matricial.

$$a_{11} = s_{11} ; \quad a_{21} = s_{21} ; \quad a_{31} = s_{31}$$

$$a_{12} = s_{12} ; \quad a_{22} = \frac{s_{21} s_{12}}{s_{11}} + s_{22} ; \quad a_{32} = \frac{s_{31} s_{12}}{s_{11}} + s_{32}$$

$$a_{13} = s_{13} ; \quad a_{23} = \frac{s_{21} s_{13}}{s_{11}} + s_{23} ; \quad a_{33} = \frac{s_{31} s_{13}}{s_{11}} + \frac{s_{32} s_{13}}{s_{22}} + s_{33}$$

Estas igualdades hacen posible expresar los coeficientes s_{11} - s_{33} en función de a_{11} - a_{33}

$$s_{11} = a_{11} ; \quad s_{21} = a_{21} ; \quad s_{31} = a_{31}$$

$$s_{12} = a_{12} ; \quad s_{22} = a_{22} - \frac{s_{21} s_{12}}{s_{11}} ; \quad s_{32} = a_{32} - \frac{s_{31} s_{12}}{s_{11}}$$

$$s_{13} = a_{13} ; \quad s_{23} = a_{23} - \frac{s_{21} s_{13}}{s_{11}} ; \quad s_{33} = a_{33} - \frac{s_{31} s_{13}}{s_{11}} - \frac{s_{32} s_{13}}{s_{22}}$$

Para simplificar se hace un cambio de variables en las 3 submatrices, quedando así:

$$A = S \cdot T \cdot U = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

A causa de $\underline{A} \underline{B} = \underline{E}$ y con las nuevas submatrices se obtiene:

Estas submatrices son más fáciles de invertir que la matriz de partida A.

Inversión de U con ayuda de igualdades lineales (1.4./2 - /4)

1er. Paso:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{-1} \\ u_{21}^{-1} \\ u_{31}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema:

$$u_{11} u_{11}^{-1} + u_{12} u_{21}^{-1} + u_{13} u_{31}^{-1} = 1$$

$$\boxed{u_{11}^{-1} = \frac{1}{u_{11}} \left(1 - u_{12} u_{21}^{-1} - u_{13} u_{31}^{-1} \right)} \quad (1.4./5)$$

$$u_{22} u_{21}^{-1} + u_{23} u_{31}^{-1} = 0$$

$$\boxed{u_{21}^{-1} = \frac{1}{u_{22}} \left(-u_{23} u_{31}^{-1} \right)} \quad (1.4./6)$$

$$u_{33} \cdot u_{31}^{-1} = 0$$

$$\boxed{u_{31}^{-1} = 0}$$

$$\boxed{u_{21}^{-1} = 0}$$

$$\boxed{u_{11}^{-1} = \frac{1}{u_{11}}} \quad (1.4./7)$$

2o. Paso:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{12}^{-1} \\ u_{22}^{-1} \\ u_{32}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución análoga da:

$$u_{11} u_{12}^{-1} + u_{22} u_{22}^{-1} + u_{33} u_{32}^{-1} = 0$$

$$\boxed{u_{12}^{-1} = \frac{1}{u_{11}} \left(-u_{22} u_{22}^{-1} - u_{33} u_{32}^{-1} \right)} \quad (1.4./8)$$

$$u_{22} u_{22}^{-1} + u_{23} u_{32}^{-1} = 1$$

$$\boxed{u_{22}^{-1} = \frac{1}{u_{22}} (1 - u_{23} u_{32}^{-1})} \quad (1.4./9)$$

$$u_{33} u_{32}^{-1} = 0$$

$$\boxed{u_{32}^{-1} = 0}$$

$$\boxed{u_{22}^{-1} = \frac{1}{u_{22}}}$$

$$\boxed{u_{12}^{-1} = \frac{-u_{12}}{u_{11} u_{22}}} \quad (1.4./10)$$

3er. Paso:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11}^{-1} \\ u_{22}^{-1} \\ u_{33}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$u_{11} u_{13}^{-1} + u_{12} u_{23}^{-1} + u_{13} u_{33}^{-1} = 0$$

$$\boxed{u_{13}^{-1} = \frac{1}{u_{11}} (-u_{12} u_{23}^{-1} - u_{13} u_{33}^{-1})} \quad (1.4./11)$$

$$u_{22} u_{23}^{-1} + u_{23} u_{33}^{-1} = 0$$

$$\boxed{u_{23}^{-1} = \frac{1}{u_{22}} (-u_{23} u_{33}^{-1})} \quad (1.4./12)$$

$$u_{33} u_{33}^{-1} = 1$$

$$\boxed{u_{33}^{-1} = \frac{1}{u_{33}}}$$

$$\boxed{u_{23}^{-1} = \frac{-u_{23}}{u_{22} u_{33}}}$$

$$\boxed{u_{13}^{-1} = \frac{1}{u_{11}} \left(\frac{u_{12} u_{23}}{u_{22} u_{33}} - \frac{u_{13}}{u_{33}} \right)} \quad (1.4./13)$$

Inversión de T, la cual como matriz diagonal se invierte simplemente por construcción recíproca.

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11}^{-1} \\ t_{22}^{-1} \\ t_{33}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{t_{11}^{-1} = \frac{1}{t_{11}}}$$

$$\boxed{t_{22}^{-1} = \frac{1}{t_{22}}}$$

$$\boxed{t_{33}^{-1} = \frac{1}{t_{33}}} \quad (1.4./14)$$

$$\underline{t_{12}^{-1} = t_{13}^{-1} = t_{21}^{-1} = t_{31}^{-1} = t_{32}^{-1} = 0}$$

Continúa la inversión de S en forma análoga a U;

1er. Paso:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^{-1} \\ S_{21}^{-1} \\ S_{31}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en la solución:
$$S_{11}^{-1} = \frac{1}{S_{11}} \quad (1.4./15)$$

$$S_{21} S_{11}^{-1} + S_{22} S_{21}^{-1} = 0 \quad ; \quad \frac{S_{21}}{S_{11}} + S_{22} S_{21}^{-1} = 0 \quad \boxed{S_{21}^{-1} = \frac{1}{S_{22}} \left(-\frac{S_{21}}{S_{11}} \right)} \quad (1.4./16)$$

$$S_{31} S_{11}^{-1} + S_{32} S_{21}^{-1} + S_{33} S_{31}^{-1} = 0$$

$$\frac{S_{31}}{S_{11}} + \frac{S_{32}}{S_{22}} \left(-\frac{S_{21}}{S_{11}} \right) + S_{33} S_{31}^{-1} = 0$$

$$\boxed{S_{31}^{-1} = \frac{1}{S_{33}} \left(\frac{-S_{31}}{S_{11}} + \frac{S_{32} S_{21}}{S_{22} S_{11}} \right)} \quad (1.4./17)$$

2o. Paso:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{12}^{-1} \\ S_{22}^{-1} \\ S_{32}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_{12}^{-1} = 0}$$

$$\boxed{S_{22}^{-1} = \frac{1}{S_{22}}} \quad (1.4./18), (1.4./19)$$

$$\frac{S_{32}}{S_{22}} + S_{33} S_{32}^{-1} = 0$$

$$\boxed{S_{32}^{-1} = \frac{1}{S_{33}} \left(-\frac{S_{32}}{S_{22}} \right)} \quad (1.4./20)$$

3er. Paso:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{13}^{-1} \\ S_{23}^{-1} \\ S_{33}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{S_{13}^{-1} = 0}$$

(1.4./21)

$$\boxed{S_{23}^{-1} = 0}$$

(1.4./22)

$$\boxed{S_{33}^{-1} = \frac{1}{S_{33}}}$$

(1.4./23)

Este algoritmo esta apropiado para usarse con computadoras.

c) Método de Cholesky - Rubin.

Descomposición del sistema de partida en 2 matrices triangulares

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes se obtienen de

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_{11}^2 & ; & & a_{21} &= q_{21} q_{11} & ; & & a_{31} &= q_{31} q_{11} \\ a_{12} &= q_{11} q_{12} & ; & & a_{22} &= q_{21} q_{12} + q_{22}^2 & ; & & a_{32} &= q_{31} q_{12} + q_{32} q_{22} \\ a_{13} &= q_{11} q_{13} & ; & & a_{23} &= q_{21} q_{13} + q_{22} q_{23} & ; & & a_{33} &= q_{31} q_{13} + q_{32} q_{23} + q_{33}^2 \end{aligned}$$

Despejando se obtiene

$$\begin{aligned} q_{11} &= \sqrt{a_{11}} & ; & & q_{21} &= \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}} & ; & & q_{31} &= \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}}} \\ q_{12} &= \frac{a_{12}}{a_{11}} & ; & & q_{22} &= \sqrt{a_{22} - q_{21}^2} & ; & & q_{32} &= \frac{1}{q_{22}} (a_{32} - q_{31} q_{12}) \\ q_{13} &= \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} & ; & & q_{23} &= \frac{1}{q_{22}} (a_{23} - q_{21} q_{13}) & ; & & q_{33} &= \sqrt{a_{33} - q_{31}^2 - q_{32}^2} \end{aligned}$$

En una matriz simétrica A se simplifica el sistema ya que $q_{ij} = q_{ji}$.

Introduciendo las matrices triangulares G y Q se obtiene $A = G Q$; donde

$$G = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix}$$

y la inversa $A^{-1} = Q^{-1} G^{-1}$

Como con S y U (1.4./5 - /23) se obtienen los elementos de

$$\begin{aligned} q_{11}^{-1} &= \frac{1}{q_{11}} & ; & & q_{11}^{-1} &= \frac{1}{q_{11}} \\ q_{21}^{-1} &= \frac{1}{q_{22}} \left(-\frac{q_{21}}{q_{11}} \right) & ; & & q_{21}^{-1} &= q_{31}^{-1} + q_{32}^{-1} = 0 \\ q_{31}^{-1} &= \frac{1}{q_{33}} \left(-\frac{q_{31}}{q_{11}} + \frac{q_{32} \cdot q_{21}}{q_{22} \cdot q_{11}} \right) & ; & & q_{12}^{-1} &= \frac{1}{q_{11}} \left(-\frac{q_{12}}{q_{22}} \right) \\ q_{12}^{-1} &= q_{13}^{-1} = q_{23}^{-1} = 0 & ; & & q_{22}^{-1} &= \frac{1}{q_{22}} \\ q_{22}^{-1} &= \frac{1}{q_{22}} & ; & & q_{13}^{-1} &= \frac{1}{q_{11}} \left(-\frac{q_{13}}{q_{33}} + \frac{q_{12} \cdot q_{23}}{q_{22} \cdot q_{33}} \right) \\ q_{32}^{-1} &= \frac{1}{q_{33}} \left(-\frac{q_{32}}{q_{22}} \right) & ; & & q_{23}^{-1} &= \frac{-q_{23}}{q_{22} \cdot q_{33}} \\ q_{23}^{-1} &= \frac{1}{q_{33}} & ; & & q_{33}^{-1} &= \frac{1}{q_{33}} \end{aligned}$$

Este método también es apropiado para calculadoras.

d) Método de Cholesky - Banachiewicz.

Descomposición en 2 matrices triangulares, en donde una diagonal está integrada por unos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de A se obtienen de

$$\begin{aligned} a_{11} &= r_{11} & ; & & a_{21} &= t_{21} r_{11} & ; & & a_{31} &= t_{31} r_{11} \\ a_{12} &= r_{12} & ; & & a_{22} &= t_{21} r_{12} + r_{22} & ; & & a_{32} &= t_{31} r_{12} + t_{32} r_{22} \\ a_{13} &= r_{13} & ; & & a_{23} &= t_{21} r_{13} + r_{23} & ; & & a_{33} &= t_{31} r_{13} + t_{32} r_{23} + r_{33} \end{aligned}$$

Los r_{ij} y t_{ij} se obtienen por despeje

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_{11} & ; & & r_{12} &= a_{12} & ; & & r_{13} &= a_{13} \\ t_{21} &= \frac{a_{21}}{r_{11}} & ; & & t_{31} &= \frac{a_{31}}{r_{11}} \\ r_{22} &= a_{22} - t_{21} r_{12} & ; & & r_{23} &= a_{23} - t_{21} r_{13} \\ t_{32} &= \frac{1}{r_{22}} (a_{32} - t_{31} r_{12}) \\ r_{33} &= a_{33} - t_{31} r_{13} - t_{32} r_{23} \end{aligned}$$

generalizando:

| | |
|---|-----------|
| $r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} r_{kj}$ | (1.4./24) |
| $t_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} t_{jk} r_{ki}}{r_{ii}}$ | " |

La inversa se obtiene de

$$A^{-1} = R^{-1} \cdot T^{-1} = U \cdot S$$

Cálculo de las matrices triangulares inversas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de ahí se concluye que:

$$1 = s_{11}$$

$$0 = s_{12} \quad ; \quad 1 = s_{22}$$

$$0 = s_{13} \quad ; \quad 0 = s_{23} \quad ; \quad 1 = s_{33}$$

y

$$t_{21} + s_{21} = 0 \quad ; \quad s_{21} = -t_{21}$$

$$t_{31} + t_{32}s_{21} + s_{31} = 0 \quad ; \quad s_{31} = -t_{31} - t_{32}s_{21}$$

$$t_{32} + s_{32} = 0 \quad ; \quad s_{32} = -t_{32}$$

en general:

$$s_{ij} = e_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} \cdot s_{kj} \quad (1.4./25)$$

para la 2a. matriz:

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_{31} = 0 \quad ; \quad u_{21} = 0 \quad ; \quad u_{11} = \frac{1}{r_{11}}$$

$$u_{32} = 0 \quad ; \quad u_{22} = \frac{1}{r_{22}} \quad ; \quad u_{12} = \frac{-r_{12}}{r_{11} r_{22}}$$

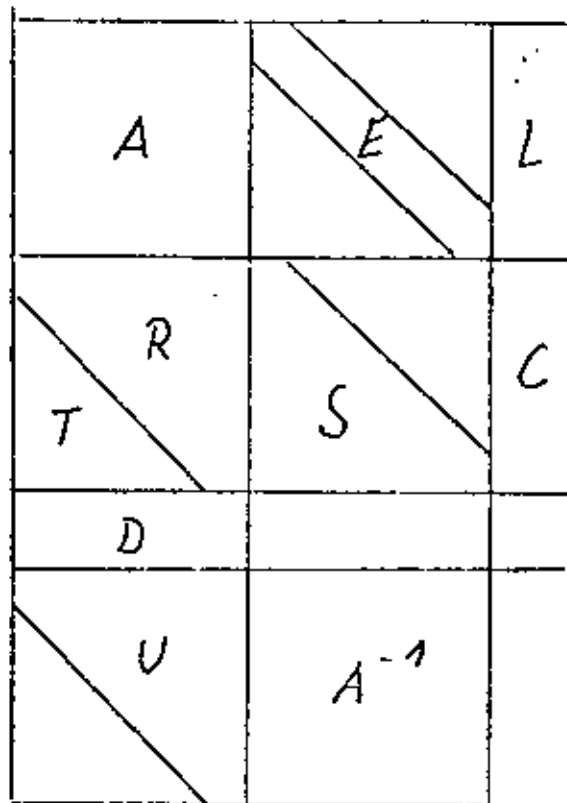
$$u_{33} = \frac{1}{r_{33}} \quad ; \quad u_{23} = \frac{-r_{23}}{r_{22} r_{33}} \quad ; \quad u_{13} = \frac{r_{12} r_{23} - r_{13} r_{22}}{r_{11} r_{22} r_{33}}$$

en general:

$$u_{ij} = \frac{e_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ik} \cdot u_{kj}}{r_{ii}} \quad (1.4./26)$$

Las fórmulas (1.4./24 - /26) son ideales para programarlas.

El uso de la memoria de las computadoras, para invertir y obtener una solución definitiva del sistema de igualdades $AX = L$; es consecuencia del siguiente diagrama:



Para la solución definitiva se necesitan las siguientes fórmulas, donde l_j representa las observaciones:

$$c_i = l_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} c_k$$

resultado

$$d_i = \frac{l_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} c_k}{r_{ii}} \quad \cdot \quad \frac{c_j}{r_{jj}} \hat{=} \hat{x} \text{ desconocida}$$

Para matrices simétricas A se simplifican las fórmulas a:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} r_{kj} \\ t_{ji} = \frac{r_{ij}}{r_{ii}} \\ s_{ij} = e_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ik} s_{kj} \\ u_{ji} = \frac{s_{ij}}{r_{ii}} \end{array} \right.$$

1.5 Métodos iterativos para solución de igualdades.

Aquí no es posible una inversión directa:

Método de Gauss - Seidel.

Sistema de partida: $A X = L$

En seguida debe modificarse el sistema de igualdad de tal manera que en la matriz $A \rightarrow A'$ se obtengan unos en la diagonal principal. Para ello se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\boxed{a_{ij}'} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad \boxed{k_i} = \frac{l_i}{a_{ii}} \quad (1.5.11)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & 1 & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Esto también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & 0 & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

en general:

$$X - A'' X = K \quad \text{con } A'' = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}' & -a_{13}' & \dots & -a_{1n}' \\ -a_{21}' & 0 & -a_{23}' & \dots & -a_{2n}' \\ -a_{31}' & -a_{32}' & 0 & \dots & -a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}' & -a_{n2}' & -a_{n3}' & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Iteración:

$$\boxed{X_{(i+1)}^{\text{Iteral.}} = K + A'' X_{(i)}^{\text{Iteral.}}} \quad (1.5.12)$$

Se debe iterar hasta que los elementos de la diagonal convergen.

Los métodos iterativos se utilizan en la solución de grandes - sistemas de igualdades o cuando se trabaja con calculadoras pequeñas.

Esto puede acarrear problemas de convergencia.

Para más métodos iterativos, consultar Faddejewa & Faddejewa: "Métodos Lineales de Álgebra".

1.6 Ajuste por el método de mínimos cuadrados.

Para un sistema de m - ecuaciones y n - incógnitas, $m > n$ obtiene uno para una solución m - correcciones v_j las cuales se agrupan en el vector V .

La tarea se puede resolver de dos maneras:

a) Ecuación de residuos:

$$V = AX - L$$

(1.6./1)

Cada corrección v_j y con ello cada observación l_j obtiene un peso p_j . En observaciones independientes se forma con los pesos el vector P .

En observaciones dependientes (correlacionadas) se obtiene una matriz de pesos.

En el método de mínimos cuadrados, la suma de los cuadrados de las correcciones pesadas debe ser mínima.

En forma esquemática se puede representar el problema así:

| | | |
|-------|---------|-----------|
| | P | V |
| V^T | $V^T P$ | $V^T P V$ |

Matemáticamente por substitución en (1.6/1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 V^T P V &= (AX - L)^T P (AX - L) = \\
 &= (X^T A^T - L^T) P (AX - L) = \\
 &= X^T A^T P A X - X^T A^T P L - L^T P A X + L^T P L
 \end{aligned}$$

Del control de las dimensiones del producto matricial resulta que en el miembro derecho de la igualdad nada más hay escalares. $V^T P V$ también es un escalar.

Según la regla de transposición de matrices.

$$X^T A^T P L = L^T P A X$$

Para la suma de los cuadrados se obtiene:

$$\boxed{V^T P V = X^T A^T P A X - 2 X^T A^T P L + L^T P L \stackrel{!}{=} \min.} \quad (1.6./2)$$

(1.6/2) se cumple si la derivada con respecto a x se iguala a cero.

$$\boxed{\frac{\partial V^T P V}{\partial x} = 0} \quad (1.6./3)$$

Para una sola observación 1 (según 1.6/1 para una corrección v) se obtiene:

$$v = ax - l \\ v^2 = (ax - l)^2 = a^2 x^2 - 2axl + l^2$$

introduciendo el peso p :

$$pv^2 = a^2 px^2 - 2apxl + pl^2$$

la derivada con respecto a x :

$$\frac{\partial pv^2}{\partial x} = 2a^2 px - 2apl = 2(a^2 px - apl)$$

La última ecuación en notación matricial da:

$$\frac{\partial V^T P V}{\partial x} = 2(A^T P A X - A^T P L) \stackrel{!}{=} 0$$

Despejando X da el vector de incógnitas:

$$\boxed{X = (A^T P A)^{-1} A^T P L} \quad (1.6./4)$$

b) Ecuaciones de condición.

En casode formar una matriz B , tal que:

$$B \cdot A = 0$$

se obtiene con(1.6/1):

$$B(V + L) = B A X = 0$$

$$B V + B L = 0$$

En esta igualdad se puede ver al producto matricial BV como opuesto a W y se cumple que

$$\boxed{B V = W ; B L + W = 0 ; W = -B L}$$

Con esto se obtiene como condición del sistema:

$$\boxed{B V - W = 0} \quad (1.6./5)$$

Ahora se puede aplicar a este sistema la condición de mínimos del método de mínimos cuadrados. Con (1.6/5) como condición adicional se obtiene:

$$V^T P V - (B V - W) \stackrel{!}{=} \min.$$

Para obtener una fórmula que se pueda derivar, se multiplica $(BV-W)$ con $2K^T$, donde el vector K contiene las correlaciones, y la función F se vuelve escalar.

$$F = V^T P V - 2 K^T (BV - W) \stackrel{!}{=} \min. \quad (1.6./6)$$

La derivada con respecto a V da:

$$\frac{\partial F}{\partial V} = 2 [V^T P - K^T B] \stackrel{!}{=} 0$$

de donde se obtiene el vector de las coordenadas:

$$V^T = K^T B P^{-1} \quad V = P^{-1} B^T K \quad (1.6./7)$$

La fórmula 1.6/7 también se conoce como ecuación de correlativos. Las ecuaciones normales se obtienen a partir de $BV=W$.

$$B P^{-1} B^T K = W \quad (1.6./8)$$

El ajuste por el método de mínimos cuadrados se lleva a cabo calculando, en seguida las constantes correlativas con base en la fórmula (1.6./8)

$$K = (B P^{-1} B^T)^{-1} W \quad (1.6./9)$$

Finalmente se substituyen las así calculadas constantes correlativas en (1.6/7) con lo que se obtiene el vector de correcciones V .

$$V = P^{-1} B^T K = P^{-1} B^T (B P^{-1} B^T)^{-1} W \quad (1.6./10)$$

c) Ecuaciones de condición con incógnitas.

Una solución general que comprende a a) y b) se puede lograr con:

$$BV + AX - L = 0 \quad (1.6./11)$$

donde según (1.6/5) y (1.6/1):

$$\begin{aligned} BV &= W & V &= AX - L \\ W &= B(AX - L) & BA &= 0 ; W = -BL \end{aligned}$$

Con eso se obtiene un sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} BV & - W & = & 0 \\ V + AX - L & = & 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6./12)$$

La función a minimizar queda como:

$$\boxed{\phi = V^T P V - 2 K^T (B V + A X - L)} \quad (1.6./13)$$

Donde la V y X del lado derecho de la igualdad son variables y por lo tanto las derivadas parciales deben ser con respecto a V y X .

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial V} &= 2 V^T P - 2 K^T B = 0_{1,m} \\ \frac{\partial \phi}{\partial X} &= \quad \quad - 2 K^T A = 0_{1,n} \end{aligned}} \quad (1.6./14)$$

Las correcciones se obtienen con la primera ecuación:

$$V = P^{-1} B^T K$$

y las ecuaciones normales se obtienen con (1.6/11 + 14):

$$\boxed{\begin{aligned} B P^{-1} B^T K + A X - L &= 0 \\ A^T K &= 0 \end{aligned}} \quad (1.6./15)$$

Resolviendo la primera ecuación para las constantes correlati--vas:

$$K = - (B P^{-1} B^T)^{-1} (A X - L)$$

substituidas en la 2a. ecuación:

$$A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A X - A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} L = 0$$

y despejando X :

$$\boxed{X = [A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} A]^{-1} A^T (B P^{-1} B^T)^{-1} L} \quad (1.6./16)$$

Esta solución también se puede usar con observaciones correla--cionadas. En estas se trata fundamentalmente de las observacio--nes L para los cuales se da una continuidad funcional hacia ob--servaciones independientes. Esto se expresa en V y B .

También se pueden introducir condiciones con ayuda de ecuacio--nes de correcciones. Con eso, obtienen un peso muy grande.

d) Condiciones entre las correcciones (incógnitas).

En este caso se obtiene un sistema de ecuaciones formado por --ecuaciones de correcciones y por ecuaciones que expresan las --condiciones entre las observaciones.

$$\begin{aligned} V + A_1 X - L_1 &= 0_{m,1} \\ A_2 X - L_2 &= 0_{(m-n),1} \end{aligned}$$

(1.6./17)

La función minimizadora adquiere la forma:

$$\phi = V^T P V - 2 K_1^T (V + A_1 X - L_1) - 2 K_2^T (A_2 X - L_2) \stackrel{!}{=} \min \quad (1.6./18)$$

La derivación parcial da:

$$\frac{\partial \phi}{\partial V} = 2 V^T P - 2 K_1^T = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X} = -2 K_1^T A_1 - 2 K_2^T A_2 = 0 \quad (1.6./19)$$

De la primera ecuación se obtiene V:

$$V = P^{-1} K_1$$

Con la sustitución en (1.6./17) de la 1a. ecuación y con la 2a. ecuación y la derivada $\frac{\partial \phi}{\partial X}$ se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$P^{-1} K_1 + A_1 X - L_1 = 0 \quad (a)$$

$$A_2 X - L_2 = 0 \quad (b)$$

$$A_1^T K_1 + A_2^T K_2 = 0 \quad (c)$$

a) Multiplicando por $A_1^T P$

$$A_1^T P P^{-1} K_1 + A_1^T P A_1 X - A_1^T P L_1 = 0$$

$$(c) \quad A_1^T K_1 + A_2^T K_2 = 0$$

haciendo la resta:

$$A_1^T P A_1 X - A_2^T K_2 - A_1^T P L_1 = 0$$

despejando X:

$$X = - [A_1^T P A_1]^{-1} [A_2^T K_2 + A_1^T P L_1] \quad (1.6./20)$$

sustituyendo en (b)

$$- A_2 [A_1^T P A_1]^{-1} [A_2^T K_2 + A_1^T P L_1] - L_2 = 0$$

despejando K_2

$$K_2 = [A_2 (A_1^T P A_1)^{-1} A_2^T]^{-1} [A_2 (A_1^T P A_1)^{-1} A_1^T P L_1 - A_2 (A_1^T P A_1)^{-1} L_2] \quad (1.6./21)$$

La solución también se obtiene por las fórmulas

(1.6./21), (1.6./20) y (1.6./17)

$$V = - A_1 X + L_1$$

e) Linealización de las ecuaciones de corrección y de condición.

En ecuaciones no lineales se puede aplicar la serie de Taylor en el punto 0.

$$F(L, X, \text{const.}) = 0 \quad (1.6./22)$$

Despreciando términos de mas alto grado, se obtiene en el desarrollo de Taylor:

$$F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_0 dL + \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0 dX = 0$$

o en términos matriciales: $F_0 + BV + AX = 0$

F_0 representa la desviación entre valores medidos y aproximaciones calculadas. B y A contienen los coeficientes diferenciales de las observaciones e incógnitas:

Ejemplo:

$$F \equiv 4 l_1^3 - 2 l_2 - 3 x_1^2 + \sin^2 x_2 - 10 = 0$$

Observaciones: $l_1 = 2$; $l_2 = 8$

Incógnitas (aproximadas) $x_1 \approx 1$; $x_2 \approx \pi/4$

$$F_0 = 32 - 16 - 3 + \frac{1}{2} - 10 = 3 \frac{1}{2}$$

$$(B) = 12 l_1^2 - 2 = (48 \quad -2)$$

$$(A) = -6 x_1 + \sin 2 x_2 = (-6 \quad +1)$$

$$(V) = \begin{pmatrix} dl_1 \\ dl_2 \end{pmatrix} ; (X) = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones linealizadas:

$$3,5 + 48 dl_1 - 2 dl_2 - 6 dx_1 + dx_2 = 0$$

$$3,5 + 48 v_1 - 2 v_2 - 6 dx_1 + dx_2 = 0$$

Como consecuencia de que la serie de Taylor es una aproximación el ajuste con ecuaciones linealizadas es también una aproximación que debe iterarse. Si los valores que se usan para sustituir a las incógnitas se acercan mucho a los reales, sólo se requieren una o pocas iteraciones. Esto se puede demostrar cambiando v por X :

1.7 Propagación de errores.

a) Matriz covariante X de variables independientes.

(observaciones no correlacionadas)

$$\left(\sum X\right) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{x_3}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s_0^2} \begin{pmatrix} s_{x_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_{x_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_{x_3}^2 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

σ_{x_i} \equiv desviación standard de las observaciones.

$\sigma_{x_i}^2 \equiv$ variancia $= \frac{s_{x_i}^2}{s_0^2}$

$s_0^2 \equiv$ variancia de la unidad de peso.

b) Matriz covariante de magnitudes dependientes (observaciones correlacionadas):

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

se obtiene la matriz de derivadas parciales de la función con respecto a las incógnitas.

$$R = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

La matriz covariante de las magnitudes derivadas se obtiene según la propagación de errores con ayuda de la matriz covariante para observaciones independientes:

$$(\Sigma_y)_{2,2} = (R)_{2,3} \cdot (\Sigma_x)_{3,3} \cdot (R)^T_{3,2} = \begin{pmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 y_2} \\ \sigma_{y_1 y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{pmatrix} \quad (1.7.12)$$

c) Matriz de pesos. La matriz de pesos es la inversa de matriz de covariancias.

$$(P) = (\Sigma)^{-1} \quad (1.7.13)$$

1.8 Precisión de los parámetros.

a) Con valores a priori para la variancia de la unidad de peso σ_0^2 se obtiene (con base en la propagación de los errores):

$$(\sigma_x^2) = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}$$

b) Después del ajuste por el método de mínimos cuadrados se cumple:

$$s_i^2 = (AX - L)^T P (AX - L) = V^T P V$$

Una aproximación para la variancia de la unidad de peso se obtiene con:

$$s_0^2 = \sum_{i=1}^n \frac{s_i^2}{m-n} \quad (1.8.11)$$

y debido a a) para la matriz de covariancias se obtiene:

$$(\sigma_x^2) = s_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (1.8.12)$$

c) Interpretación de los elementos de la matriz de covariancias. La matriz se interpreta como una ordenación geométrica de coordenadas de puntos:

| | x_i | y_i |
|-------|-------------------|-------------------|
| x_i | ρ_{x_i, x_i} | ρ_{x_i, y_i} |
| y_i | ρ_{y_i, x_i} | ρ_{y_i, y_i} |

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma_0^2 (\rho_{x_i, x_i})$$

$$\sigma_{y_i}^2 = \sigma_0^2 (\rho_{y_i, y_i})$$

$$\sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2 = \sigma_{\rho_i}^2 : \text{Punktfehler}$$

Las variancias en dirección de los ejes coordenados no corresponden a la realidad; errores máximos y mínimos se obtienen en los puntos mediante una transposición de las submatrices de -- tal manera que las covariancias (a ambos lados de la diagonal) se vuelven cero. Los valores que así se obtienen en la diagonal principal corresponden entonces a máximos por ejemplo errores de puntos mínimos.

A este problema se le conoce como: determinación propia de valores.

Ecuación de transformación para variables independientes en el plano:

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad ; \quad R = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad \text{matriz de rotación}$$

Aplicación de la ley de propagación de errores para determinar una matriz covariante para variables independientes:

$$\langle \Sigma_y \rangle = R \langle \Sigma_x \rangle R^T$$

con (1.7/1 + /2) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\xi_i}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta_i}^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 R \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix} R^T = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \lambda_2$ se llaman valores propios.

La solución del problema se obtiene con:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_{1,2} \quad ; \quad \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_{1,2} = 0$$

resuelto se obtiene para el determinante:

$$\begin{vmatrix} (q_{11} - \lambda_{1,2}) & q_{12} \\ q_{21} & (q_{22} - \lambda_{1,2}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 - \lambda_{1,2}(q_{22} + q_{11}) + q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(q_{11} + q_{22}) \pm \sqrt{(q_{11}^2 + 2q_{11}q_{22} + q_{22}^2) - 4q_{11}q_{21} + 4q_{12}q_{21}}}{2}$$

En el método de mínimos cuadrados se cumple: $q_{12} = q_{21}$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{q_{11}^2 + q_{22}^2 + 2q_{12}^2}{2}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{q_{22}q_{11} - q_{12}^2}$$

(1.8./3)

como errores
máximo y
mínimo

En 3 dimensiones para un elipsoide de error se cumple:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega \cos \phi & \sin \omega & \cos \omega \sin \phi \\ -\sin \omega \cos \phi & \cos \omega & -\sin \omega \sin \phi \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \text{ matriz de rotación}$$

La propagación de errores en forma análoga al caso bidimensional da:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\xi_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\xi_3}^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 R \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} R^T = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

y como determinante a resolver:

$$\begin{vmatrix} (q_{11} - \lambda_{1,2,3}) & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & (q_{22} - \lambda_{1,2,3}) & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & (q_{33} - \lambda_{1,2,3}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2,3}^3 - \lambda_{1,2,3}^2 (q_{11} + q_{22} + q_{33}) - \lambda_{1,2,3} (q_{23}^2 - q_{22} q_{33} + q_{11} q_{22} + q_{33} q_{11} + q_{12}^2 + q_{13}^2) - (q_{11} q_{22} q_{33} - q_{11} q_{13}^2 + 2 q_{12} q_{13} q_{23} - q_{12}^2 q_{33} - q_{13}^2 q_{22}) = 0$$

Un elipsoide de error se puede describir con:

$$\frac{\xi^2}{\sigma_0^2 \lambda_1} + \frac{\eta^2}{\sigma_0^2 \lambda_2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_0^2 \lambda_3} = 1$$

El error del punto adquiere la forma:

$$\sigma_p^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \sigma_0^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$$

O sea que hay que resolver una ecuación de 3er. grado:

$$\lambda^3 + \lambda^2 \underbrace{(-q_{11} - q_{22} - q_{33})}_a + \lambda \underbrace{(-q_{23}^2 + q_{22} q_{33} - q_{11} q_{22} - q_{33} q_{11} - q_{12}^2 - q_{13}^2)}_b + \underbrace{(-q_{11} q_{22} q_{33} + q_{11} q_{13}^2 - 2 q_{12} q_{13} q_{23} + q_{12}^2 q_{33} + q_{13}^2 q_{22})}_c = 0$$

substituyendo:

$$\lambda = \mu - \frac{a}{3}$$

se obtiene como ecuación a resolver:

$$\mu^3 + d\mu + e = 0 \quad \text{con} \quad d = -\frac{a^2}{3} + b; \quad e = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c$$

y como solución:

$$\mu_1 = A + B$$

$$\mu_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}$$

con

$$A = \sqrt[3]{-\frac{e}{2} + \sqrt{Q}}; \quad B = \sqrt[3]{-\frac{e}{2} - \sqrt{Q}}; \quad Q = \left(\frac{d}{3}\right)^3 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

Debe tenerse en cuenta que:

Si Q es positivo, existe 1 solución real y 2 complejas conjugadas.

Si Q es cero, existen 3 soluciones reales. Este es el caso común.

1.9 Corrección de los elementos calculados de una matriz invertida (errores de redondeo) según Hotelling.

Debido a que los errores de redondeo la matriz A^{-1} no es totalmente simétrica, a pesar de que $A \cdot A^{-1} \stackrel{!}{=} E$ debería cumplirse. Este acarreo puede usarse para corregir las inversas. La inversa plagada con errores de redondeo es A_0^{-1} . Se establece el producto de matrices

$$A A_0^{-1} = A_0^{-1} A = E_0$$

El opuesto es:

$$\Delta E_0 = E - E_0 = E - A A_0^{-1}$$

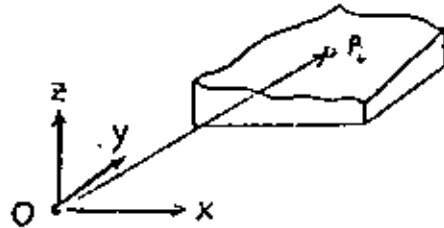
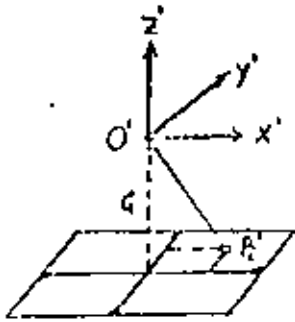
Esto conduce a una corrección iterativa de la inversa con:

$$\begin{array}{l} A_1^{-1} = A_0^{-1} (E + \Delta E_0) \\ \Delta E_1 = E - A A_1^{-1} \\ A_2^{-1} = A_1^{-1} (E + \Delta E_1) \\ \Delta E_2 = E - A A_2^{-1} \\ A_3^{-1} = A_2^{-1} (E + \Delta E_2) \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$

(1.9./1)

2. Sistemas de Coordenados.

2.1 Transformación de coordenadas de la foto al modelo tridimensional:



FOTO

Un punto en la foto se puede determinar por

$$\vec{O'P_i'} = \rho_i' = \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

MODELO

Un punto en el modelo se puede determinar por:

$$\vec{OP} = \xi_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

Entre las coordenadas de la foto y del modelo existe la siguiente relación:

Una imagen perspectiva se forma por la proyección de los puntos objeto desde el Centro sobre el plano de la fotografía. Esto se expresa por la ECUACION FUNDAMENTAL DE LA FOTOGRAMETRIA.

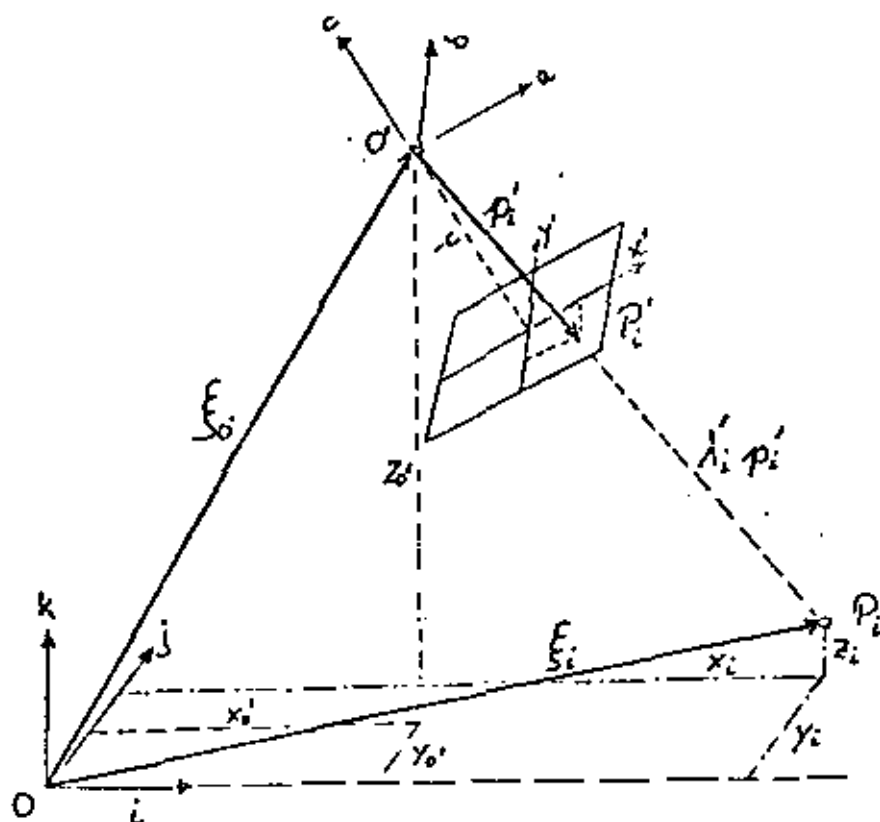
$$\boxed{\xi_i = \xi_0' + \lambda_i' \rho_i'} \quad (2.1./1)$$

En esta igualdad deben expresarse todos los componentes en un sistema de coordenadas común.

Para lograr compatibilidad de usa el sistema de coordenadas del modelo. En el dibujo superior de la página 30 los símbolos significan:

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vectores en el sistema coordenado de la foto $(x', y', -c)$
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Factores unitarios en el sistema coordenado del modelo (x, y, z)
- ξ_i Vector al punto objeto P_i en el modelo
- ξ_0' Vector al centro de toma en el modelo.
- λ_i' Factor de escala entre la foto y el modelo
- c constante de la cámara.

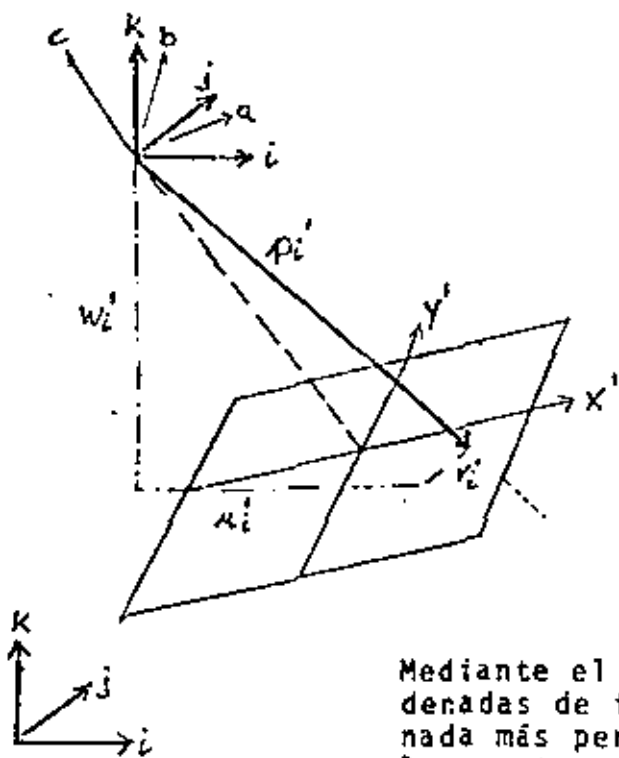
Relación entre los sistemas de coordenadas del modelo y de la foto:



Desplazando paralelamente los vectores unitarios al centro de toma O' la fórmula (1) se puede representar como:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \\ z_{o'} \end{pmatrix} + \lambda_i' \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix}$$

u_i', v_i', w_i' : Componentes del vector de la foto en el sistema de modelo.



Mediante el uso de componentes, en sistemas de coordenadas de igual escala, pero diferente orientación, nada más permanecen invariables las longitudes de los vectores obtenidos,

El factor de escala λ_i' se obtiene por la división de las longitudes del vector $\overline{O'P}$, $\overline{O'P'}$:

$$\lambda_i' = \frac{|\lambda_i' p_i'|}{|p_i'|} = \frac{10' P1}{10' P'} = \frac{\sqrt{(x_i - x_0')^2 + (y_i - y_0')^2 + (z_i - z_0')^2}}{\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + c^2}} = (2.1./2)$$

$$= \frac{\sqrt{(x_i - x_0')^2 + (y_i - y_0')^2 + (z_i - z_0')^2}}{\sqrt{u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2}}$$

Los componentes del vector de la foto en el sistema de coordenadas del modelo se pueden obtener finalmente mediante una transformación. Una transformación tridimensional queda definida con ayuda de la matriz de rotación A, cuyo contenido exacto se describe en el capítulo 2.3. Las componentes del vector de posición del punto de la foto en el sistema coordenada de la foto se obtiene por multiplicación de la matriz de rotación y los componentes del vector de la foto en el modelo.

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} \quad (2.1./3)$$

donde A queda representado por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha x') & \cos(\gamma x') & \cos(\epsilon x') \\ \cos(\alpha y') & \cos(\gamma y') & \cos(\epsilon y') \\ \cos(\alpha z') & \cos(\gamma z') & \cos(\epsilon z') \end{pmatrix}$$

($\alpha x'$)...($\epsilon z'$) son los ángulos tridimensionales entre el paralelo correspondiente en el origen O de los ejes de la foto desplazados y del sistema de coordenadas del modelo. A contiene los cosenos directores de esos ángulos.

Como la transformación es independiente de la escala, para los sistemas de los vectores unitarios se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

Para calcular el factor de escala λ_i' de (2) se requiere la inversa de la matriz de rotación, ya que existe la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} \quad (2.1./4)$$

2.2 Transformaciones Ortogonales.

Las relaciones del capítulo anterior se simplifican, cuando la transformación de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$ y viceversa, es ortogonal:

Esto significa: ambos sistemas de vectores unitarios (a,b,c) e (i,j,k) deben tener sus ejes ortogonalmente.

$$a \perp b \perp c \quad . \quad i \perp j \perp k$$

Además la escala de a,b, c e i,j,k deben ser iguales (en este caso ambos sistemas deben ser vectores unitarios).

Matrices rotacionales tridimensionales son suficientes en el caso de los siguientes postulados.

$$\begin{aligned}
 a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 &= 1 \\
 a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 &= 1 \\
 a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 \\
 a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0 \\
 a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0 \\
 a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0 \\
 a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0 \\
 a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0 \\
 a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0
 \end{aligned}$$

lo que es unívoco con

$$\boxed{A^{-1} = A^T} \quad \text{ist} \quad (2.2./1)$$

Substituido en (2.1./4) se obtiene la relación:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

y finalmente para las componentes de los fotovectores en el modelo:

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} \quad (2.2./2)$$

2.3 Elementos de las matrices de la rotación.

El uso de cosenos directores en matrices de rotación conduce a cálculos desagradables. Es más fácil usar las siguientes posibilidades.

A) Rotaciones secuenciales ω, ϕ, κ .

Los instrumentos analógicos usan bastante este método. Las relaciones se establecen de la siguiente manera:

Para el postulado:
$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

Normalmente se escoge como orden de rotación

ω - rotación primaria

ϕ - rotación secundaria

κ - rotación terciaria

La matriz de rotación se compone de la multiplicación de cada una de las matrices de rotación:

En los instrumentos WILD
$$A^T = A^T_{\omega} \cdot A^T_{\phi} \cdot A^T_{\kappa}$$

donde A se obtiene de:

$$A = A_{\kappa} \cdot A_{\phi} \cdot A_{\omega}$$

Otros productores de equipo escogieron otro orden de las rotaciones:

$$A^T = A^T_{\phi} \cdot A^T_{\omega} \cdot A^T_{\kappa}$$

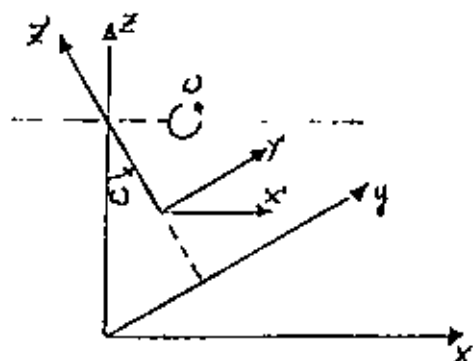
$$A^T = A^T_{\kappa} \cdot A^T_{\phi} \cdot A^T_{\omega}$$

En cálculos analíticos la secuencia de las rotaciones es a voluntad. Pero debe tomar en cuenta la opción de las rotaciones positivas.

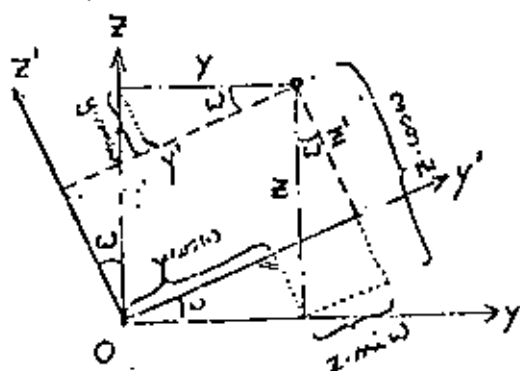
Para la reconstrucción de la situación de toma se establece el siguiente orden de rotaciones positivas para el punto cero del sistema.

(ω rotación primaria; ϕ rotación secundaria; κ rotación terciaria)

ROTACION PRIMARIA
Representación de la rotación
en un sistema tridimensional



Representación bidimensional
(El eje positivo x sale del --
plano de la hoja hacia arriba)



x, y, z pasan a x', y', z' por
una primera rotación positiva:
rotación + w

las coordenadas lineales se ob-
tienen por la siguiente relación:

$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= y \cos \omega + z \sin \omega \\z' &= z \cos \omega - y \sin \omega\end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.3./1)$$

Rotación + w de + y a + z

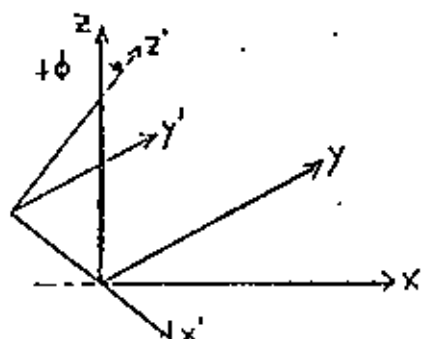
Por lo tanto la rotación +w no origina ningún cambio en la direc-
ción x.

El eje primario y se gira hacia el eje z y origina en la foto nue-
vos ejes positivos y' y z'. En este caso la matriz de rotación
tiene un elemento sen w positivo arriba de la diagonal, y un ele-
mento sen w negativo abajo de la diagonal.

ROTACION SECUNDARIA.

Se trata de una rotación alrededor del eje y con ángulo de rota-
ción secundario φ.

Representación de la rotación
en un sistema tridimensional:



en un procedimiento análogo al de
la rotación primaria se obtiene -
en forma similar para la segunda
rotación positiva.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La rotación $+\phi$ (ningún cambio en y) origina un giro de $+z$ contra $+x$, y como resultado nuevos ejes $+z'$ y $+x'$.

El valor de $\sin \phi$ arriba de la diagonal es negativo para que -- las direcciones positivas se conserven.

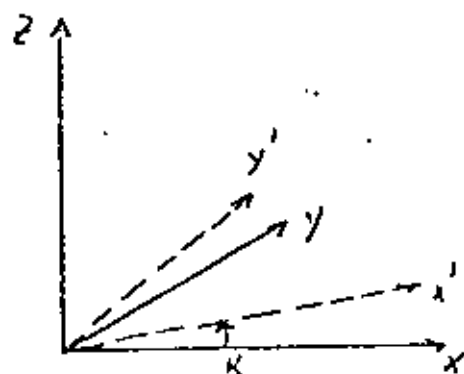
ROTACION TERCIARIA.

La rotación alrededor de eje z con el ángulo de giro K origina un giro de $+x$ contra $+y$ y con ello nuevos ejes $+x'$ y $+y'$.

Representación de la rotación en un sistema tridimensional.

No existe ningún cambio en z .

Como resultado se obtiene:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos K & \sin K & 0 \\ -\sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.3./3)$$

Con ayuda de las definiciones (1) - (3) se obtiene la matriz de rotación A .

$$A = \begin{pmatrix} \cos K & \sin K & 0 \\ -\sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

ó como transpuesta:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos K & -\sin K & 0 \\ \sin K & \cos K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectuando las multiplicaciones matriciales se obtienen para las diferentes secuencias de giro las matrices generales totales A .

Integración de la matriz A para el Estereoplanígrafo Zeiss C-8.

$$A^* = A_{\bar{u}}^* A_{\bar{w}}^* A_{\bar{\phi}}^*$$

A:

| | | | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|--|-----------------------------|--|
| 1 | 0 | 0 | $\cos \bar{\phi}$ | 0 | $-\sin \bar{\phi}$ |
| 0 | $\cos \bar{w}$ | $\sin \bar{w}$ | 0 | 1 | 0 |
| 0 | $-\sin \bar{w}$ | $\cos \bar{w}$ | $\sin \bar{\phi}$ | 0 | $\cos \bar{\phi}$ |
| $\cos \bar{k}$ | $\sin \bar{k}$ | 0 | $\cos \bar{\phi} \cos \bar{k}$ $+ \sin \bar{\phi} \sin \bar{w} \sin \bar{k}$ | $\cos \bar{w} \sin \bar{k}$ | $-\sin \bar{\phi} \cos \bar{k}$ $+ \cos \bar{\phi} \sin \bar{w} \sin \bar{k}$ |
| $-\sin \bar{k}$ | $\cos \bar{k}$ | 0 | $-\cos \bar{\phi} \sin \bar{k}$ $+ \sin \bar{\phi} \sin \bar{w} \cos \bar{k}$ | $\cos \bar{w} \cos \bar{k}$ | $\sin \bar{\phi} \sin \bar{k}$ $+ \cos \bar{\phi} \sin \bar{w} \cos \bar{k}$ |
| 0 | 0 | 1 | $\sin \bar{\phi} \cos \bar{w}$ | $-\sin \bar{w}$ | $\cos \bar{\phi} \cos \bar{w}$ |

En el caso del Estereoplanígrafo Zeiss C8 los giros están definidos de la siguiente manera:

- giro + ϕ del eje z al eje x
- giro + w del eje y al eje z
- giro + K del eje x al eje y

(de igual forma para la foto).

Con la definición anterior de las rotaciones, nada más se necesita en las fórmulas 1-3 substituir el valor del ángulo por el respectivo valor transversal.

$$(\quad \omega \rightarrow \bar{\omega} \quad \phi \rightarrow \bar{\phi} \quad K \rightarrow \bar{K} \quad)$$

Comparando las rotaciones $\bar{\phi}$ \bar{w} \bar{K} del Planígrafo con las rotaciones w ϕ K del Autógrafo WILD de cada uno de los coeficientes matriciales se obtiene la siguiente relación:

- para el ángulo de giro ϕ

$$a_{31} = a_{31}^*$$

$$\boxed{\sin \phi = \sin \bar{\phi} \cos \bar{\omega}}$$

- para el ángulo de giro w

$$a_{32} = a_{32}^*$$

$$\sin \bar{\omega} = \sin w \cos \phi$$

$$\boxed{\sin w = \frac{\sin \bar{\omega}}{\cos \phi}}$$

$$a_{33} = a_{33}^*$$

$$\cos w \cos \phi = \cos \bar{\phi} \cos \bar{\omega}$$

$$\boxed{\cos w = \frac{\cos \bar{\phi} \cos \bar{\omega}}{\cos \phi}}$$

Si $w \approx 0^\circ$ se obtienen mejores resultados si se usa la función seno.

- para el ángulo de giro K

$$\frac{a_{11}}{a_{11}} = \frac{a_{11}^*}{a_{11}^*}$$

$$\frac{-\cos \phi \sin K}{\cos \phi \cos K} = \frac{-\cos \bar{\phi} \sin \bar{K} + \sin \bar{\phi} \sin \bar{\omega} \cos \bar{K}}{\cos \bar{\phi} \cos \bar{K} + \sin \bar{\phi} \sin \bar{\omega} \sin \bar{K}}$$

$$\boxed{-\tan K = \frac{-\cos \bar{\phi} \sin \bar{K} + \sin \bar{\phi} \sin \bar{\omega} \cos \bar{K}}{\cos \bar{\phi} \cos \bar{K} + \sin \bar{\phi} \sin \bar{\omega} \sin \bar{K}}}$$

B) Formación de las matrices de rotación por giros secuenciales.
Cabeceo t , banqueo s , azimut α

En las tomas fotogramétricas los giros de la cámara son alrededor de los ejes de una suspensión cardán, o sea alrededor de los ejes de un soporte de 3 apoyos que participa en los giros. La matriz de rotación para una fotografía se forma de los siguientes giros:

$$A = A_{\alpha} \cdot A_t \cdot A_s$$

El cabeceo s gira x contra y $z = z'$
El banqueo t gira z contra y $x = x'$
y el azimut α y contra x alrededor de eje z que también gira.

Integración de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos s + \sin \alpha \cos t \sin s & \cos \alpha \sin s - \sin \alpha \cos t \cos s & \sin \alpha \sin t \\ \sin \alpha \cos s - \cos \alpha \cos t \sin s & \sin \alpha \sin s + \cos \alpha \cos t \cos s & -\sin \alpha \sin t \\ -\sin t \sin s & \sin t \cos s & \cos t \end{pmatrix}$$

Surgen dificultades, si hay que determinar el banqueo y el azimut cuando el cabeceo $t = 0$.

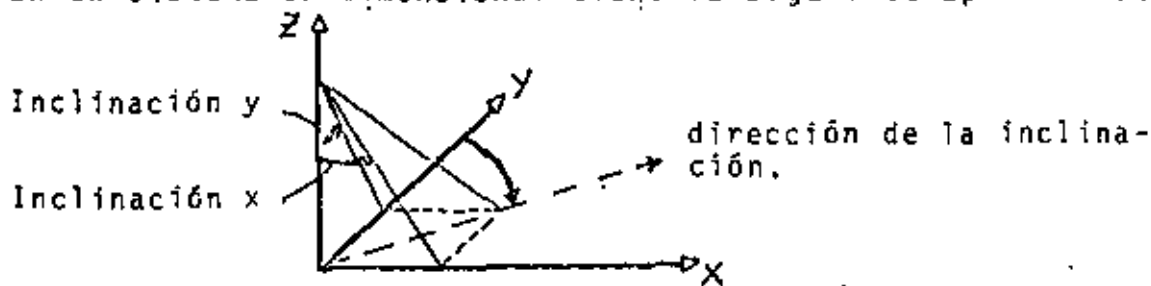
C) Giros que no son secuenciales.

Surgen como giros individuales.

- Inclinación en la dirección x (cabeceo)
- Inclinación en la dirección y (banqueo)
- y - Distancia nadiral.

Se trata de 3 ángulos tridimensionales. En la formación de A se introducen sus cosenos directores.

En un sistema tridimensional tiene la siguiente apariencia:



y la matriz A

$$\begin{pmatrix} \cos(xx') & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \cos(yy') & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cos(zz') \end{pmatrix}$$

Si se fija otro elemento por ejemplo $a_{12} = \sin(xx') \cos(yy')$ entonces se pueden determinar los demás por relaciones de ortogonalidad.

2.4 Transformación de coordenadas entre el sistema geodésico de referencia y el del modelo.

En la práctica existen más sistemas coordenadas de proyección. Ejemplo: Sistema UTM 3°, utilizado en partes lejanas de Europa y en Canadá.

Las alturas se definen como alturas elipsoidales perpendiculares a las coordenadas de proyección.

Se pueden transformar estas coordenadas de proyección y alturas en un sistema que permita una comparación con el sistema coordenado del modelo. Son sistemas utilizables:

- el sistema geocéntrico rectangular tridimensional.
- sistemas rectangulares tridimensionales locales.
- 6 - aplicación directa de las coordenadas de proyección/alturas detectando pequeñas correcciones (de uso muy generalizado en la práctica).

Siguen algunas posibilidades de transformación:

- 1) Transformación de coordenadas UTM 3° en coordenadas geográficas.

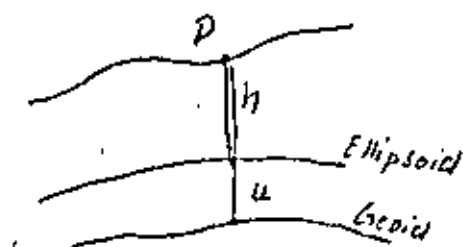
Esta transformación se usa en sistemas locales y geocéntricos. La solución exacta está descrita en "Cálculos Geodésicos y Representaciones en la Topografía" de GROSSMANN. Aquí nada más se van a mencionar los pasos más importantes.

Para el cálculo de transformación sirve:

$$\phi = f_1(X, Y) \quad ; \quad \lambda = f_2(X, Y)$$

La solución se puede obtener por desarrollo lineal ó por solución numérica directa.

Al introducir las alturas, normalmente se usa la altura ortométrica "H". Está integrada por la altura elipsoidal "h" y la ondulación geoidal "u".

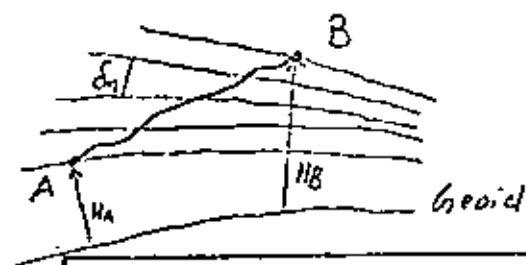


$$H = h + u \quad (2.4./1)$$

Si se tiene que usar la altura elipsoidal, se obtiene con (1)

$$h = \frac{\text{altura nivelada} + \text{corrección ortométrica}}{H} + \underbrace{\text{ondulación geoidal}}_{-u}$$

La corrección ortométrica entre 2 puntos A y B (= O.C._{AB}) se determina con:



$$O.C._{AB} = \sum_A^B \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \delta_n + \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A - \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B \quad (2.4./2)$$

donde γ = gravedad normal a lo largo de la trayectoria de A hacia B.

γ_0 = gravedad normal para la latitud = 45°

\bar{g} = gravedad media desde el Geoide hasta la altura H del punto final, representable por la fórmula integral:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g(z) dz \quad (2.4./3a)$$

Como la integral (3a) no se puede determinar por mediciones, se usa como aproximación aceptable la reducción de Bouguer y "aire libre" también reconocida como reducción Prey's.

$$\bar{g} = g + 0,0424 \cdot H \quad (2.4./3b)$$

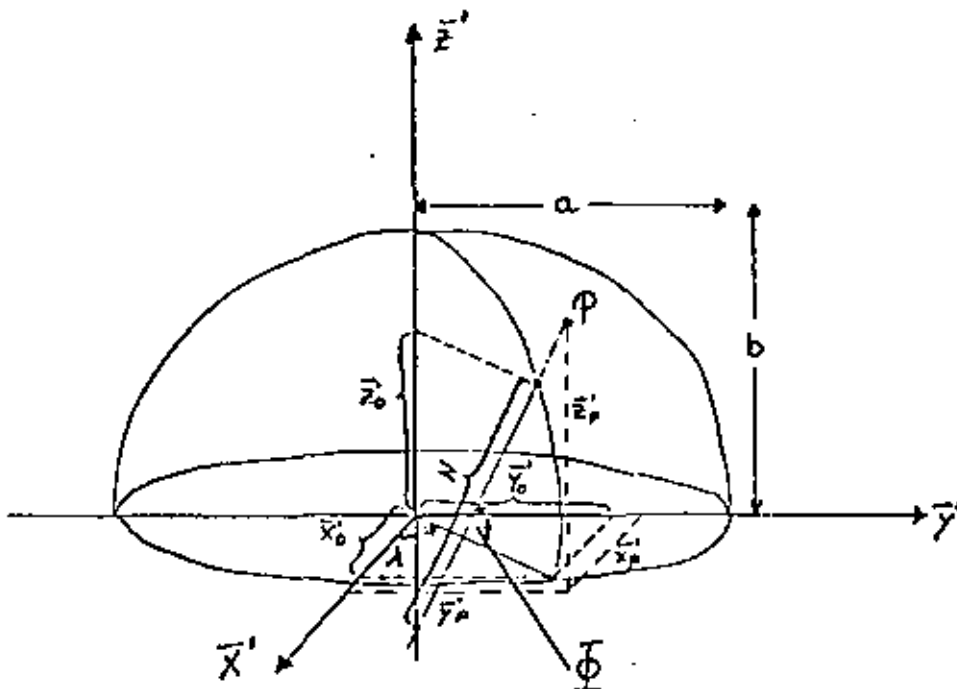
H debe estar en cm.

La corrección ortométrica alcanza valores máximos de 30 mm en las montañas (consúltese Bodemüller & Campbell; Investigación en el Harz). Dentro de una carta 1:5000 tiene variaciones de 1 mm y es por lo tanto despreciable.

La ondulación geoidal es en terreno montañoso de mayor significado. (En los Alpes se obtiene para más de los 50 km una variación de 50 cm - Meier investigó que la Variación máxima fue de 10 cm para valores extremos de más de 2 km en el túnel de - St. Gotthard).

En fotogrametría no se hacen consideraciones sobre la dirección de la gravedad. Por lo anterior la variación en la altura condicionada por la ondulación geoidal debe ignorarse.

- 2) Transformación de las coordenadas geográficas al sistema geocéntrico rectangular.



- a, b : semidiámetro elipsoidal (semieje mayor)
 N : Radio de curvatura del primer vertical o normal mayor.
 ϕ, λ : latitud geográfica, longitud geográfica.

La excentricidad numérica se obtiene por:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

y para la Normal Mayor

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

El cálculo de las coordenadas cartesianas tridimensionales con ayuda de las coordenadas geográficas se obtiene por:

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\ \bar{y}' &= (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\ \bar{z}' &= [N(1-e^2) + h] \sin \phi \end{aligned} \quad (2.4./4)$$

así como:

$$t = N e^2 \sin \phi$$

La inversión del problema conduce a ecuaciones no-lineales ϕ , λ nada más se pueden determinar iterativamente.

La longitud geográfica se obtiene con ayuda de la relación trigonométrica.

$$\text{tg } \lambda = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} \quad (2.4./5a)$$

El cálculo de la latitud geográfica esta ligado a mayores dificultades, ya que la normal mayor es una función de ϕ . Como primer paso iteracional se propone: $h = 0$

para que:

$$\bar{z}' = N(1 - e^2) \sin \phi \quad | \cdot e^2$$

Se desechan los términos con e^4

$$t_1 = e^2 \cdot \bar{z}'$$

Se obtiene una relación para $N+h$ utilizando el teorema de Pitágoras tridimensionalmente:

$$N+h = \sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + (\bar{z}' + t_1)^2}$$

con (4) se obtiene:

$$\bar{z}' + t_1 = (N+h) \sin \phi,$$

despejando ϕ , y substituyendo la relación para $N+h$:

$$\phi_1 = \arcsin \frac{\bar{z}' + t_1}{\sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + (\bar{z}' + t_1)^2}} \quad (2.4./5b)$$

Con este valor ϕ_1 se calcula una nueva normal mayor. Más adelante se obtiene un nuevo valor de t :

$$\phi_1 \longrightarrow N \longrightarrow t_2$$

El desarrollo converge rápidamente (2-3 iteraciones) ya que

$$N \gg h$$

Con ayuda de la relación $N+h$ también se obtiene la altura h sobre el elipsoide.

$$h = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + (\bar{z} + t_1)^2} - N \quad (2.4./5c)$$

El sistema rectangular tridimensional tiene aplicación en el ajuste de sistemas fotogramétricos.

Da una transformación llena de errores si los giros w, ϕ, K no son más o menos cero. Si no se cumple esta condición, se debe hacer una corrección al giro antes de la transformación.

3) Sistema tridimensional rectangular local.

El origen del sistema geocéntrico en el centro terrestre se desplaza a un punto en la superficie P_0 (con las coordenadas geocéntricas $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$). Después de efectuar un giro de tal manera que el eje \bar{Z} este en dirección de la normal y el eje X hacia el Este, y el eje y hacia el Norte. Esto se puede representar con ayuda de la relación:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = k \cdot M \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}' - \bar{x}_0' \\ \bar{y}' - \bar{y}_0' \\ \bar{z}' - \bar{z}_0' \end{pmatrix} \quad (2.4./6)$$

K representa un rescalar, que sirve como factor de escala. La matriz de rotación se designa con M .

$$M = \begin{pmatrix} -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ -\sin \phi_0 \cos \lambda_0 & -\sin \phi_0 \sin \lambda_0 & \cos \phi_0 \\ \cos \phi_0 \cos \lambda_0 & \cos \phi_0 \sin \lambda_0 & \sin \phi_0 \end{pmatrix}$$

La inversión de la relación queda así:

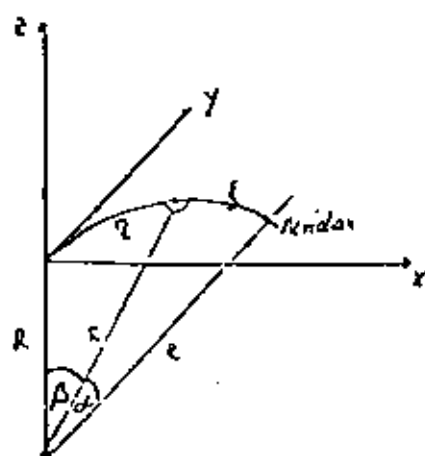
$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_0' \\ \bar{y}_0' \\ \bar{z}_0' \end{pmatrix} + \frac{1}{k} M^T \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \quad (2.4./7)$$

En modelos fotogramétricos se puede considerar el sistema $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, como un sistema de referencia para el sistema global x, y, z (a escala 1:1). Naturalmente que las transformaciones de escala también son posibles.

4) Aproximación con ayuda de la esfera osculadora de Gauss.

Como superficie de referencia se usa la superficie exterior de la esfera osculadora de Gauss con el radio $R = \sqrt{MN}$

Se puede lograr una aproximación sin pérdida de precisión en terrenos hasta de 50 km. de diámetro.



Se trata de determinar las coordenadas esféricas ξ y η . X_0, Y_0 , son las coordenadas (UTM) de un origen libre colocado en el meridiano central.

Para el punto $P (X, Y)$ se obtienen entonces las siguientes diferencias en las coordenadas.

$$\Delta X = X - X_0$$

$$\Delta Y = Y - Y_0$$

Las coordenadas esféricas ξ y η se obtienen por el siguiente desarrollo en serie.

$$\xi = \Delta X - \frac{\Delta X^3}{6r^2} + \dots$$

$$\eta = \Delta Y$$

considerando el ángulo central:

$$\alpha = \frac{\xi}{r} \quad ; \quad \beta = \frac{\eta}{r}$$

conduce a las relaciones:

$$\begin{aligned} x &= (r + h) \sin \alpha \\ y &= (r + h) \cos \alpha \sin \beta \\ z &= (r + h) \cos \alpha \cos \beta - r \end{aligned}$$

Puesto que en los ángulos centrales se trata de magnitudes pequeñas, es posible un desarrollo en serie.

obteniéndose para las coordenadas individuales:

$$x = \Delta X - \frac{\Delta X^3}{3r^2} + \frac{\Delta X \cdot h}{r}$$

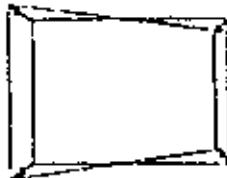
$$y = \Delta Y - \frac{\Delta Y^3}{3r^2} + \frac{\Delta Y \cdot h}{r}$$

$$z = h - \frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2r} + \dots$$

Orden dimensional de las diferencias entre:

| ΔX | $\frac{\Delta X^3}{r^2}$ | x und X | für X= 100 km \Rightarrow 10m |
|------------|--------------------------|---------|--|
| 20 km | 3 cm | z und h | für X= 10 km \Rightarrow 10m für X= 100 km \Rightarrow 1km (Erdkrümmung) |
| 50 km | 51 cm | | |
| 80 km | 2,10 m | | |
| 100 km | 4,09 m | | |

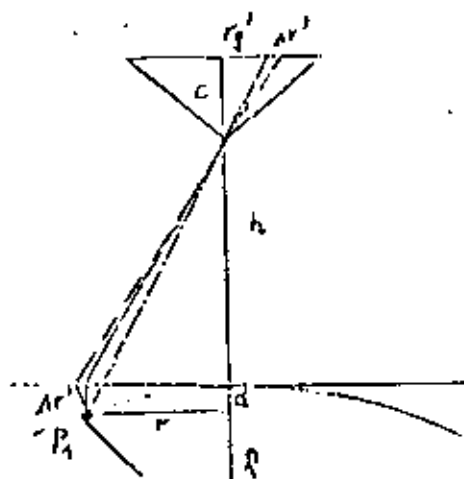
En ajustes de bloque las desviaciones de este tipo de compensan mediante un giro ϕ común



Los errores residuales son del orden dimensional de 1 cm.

Por este motivo en la práctica se usan directamente las coordenadas UTM; cuando se requiera una mayor precisión se deberán usar sistemas rectangulares tridimensionales.

La Curvatura terrestre debe estar considerada diferencialmente en la fotografía.



La representación de un punto P de la superficie terrestre en el plano de la carta se puede llevar a cabo de dos formas:

- ortogonal
- proyectiva

El punto P_1 a una distancia r del punto radial se encuentra abajo del plano tangente debido a la curvatura terrestre: Se obtienen las siguientes aproximaciones suficientes.

$$d = \frac{r^2}{2R} \quad ; \quad \frac{\Delta r'}{r_1'} = \frac{d}{h}$$

por transformación numérica y debido a $h \gg d$ se obtiene :

$$r = r_g' \frac{h+d}{c} \approx r_g' \frac{h}{c}$$

para la reducción dimensional radial $\Delta r'$ se obtiene:

para la representación ortogonal: $\Delta r' = \frac{r_g'^3}{2R} \cdot \frac{h}{c^2}$

para la representación por proyección:

$$\Delta r' = \frac{r_g'^3}{2R} \cdot \frac{h}{c^2} \left(1 + \frac{h}{R} \right)$$

ejemplo:

| h | $\Delta r'$ | |
|--------|------------------------|------------------------|
| | $r_g' = 10 \text{ cm}$ | $r_g' = 15 \text{ cm}$ |
| 1000 m | 7 μm | 14 μm |
| 2000 m | 14 μm | 29 μm |

Se obtiene un $\Delta r'$ incorrecto

1) Se desprecia las diferencias de altura para

$$r_g' = 15 \text{ cm hasta } 3 \mu\text{m}$$

2) Si se desprecia una inclinación: *for* $h = 2000 \text{ m}$, $r_g' = 15 \text{ cm}$,
 $\nu = 3^\circ$ bis $24 \mu\text{m}$

Entonces ya no se puede aplicar una corrección simétrica. En lugar de curvas de corrección concéntricas intervienen curvas complicadas.

En cálculos analíticos donde se requiere $5 \mu\text{m}$ de precisión se aplica un sistema coordenado rectangular tridimensional local.

3. Correcciones, aplicables en coordenadas fotográficas, debido a la orientación interior, deformación de película, distorsión del objetivo y refracción.

El modelo de coordenadas fotográficas mediante el uso de la perspectiva central es el fundamento para la solución de problemas fotogramétricos. Si se conforma uno con una precisión en la foto de $20 \mu\text{m}$, entonces se pueden usar directamente las coordenadas medidas en base a la calidad de las cámaras actualmente en uso y del material fotográfico. Si se requiere una precisión de $5 \mu\text{m}$ se aparta la geometría de la foto aérea notablemente del modelo matemático. Por eso se deben aplicar correcciones a las coordenadas fotográficas.

Se originan por los siguientes factores:

- imprecisión de los comparadores
- orientación interior
- deformaciones de la película
- distorsión del objetivo
- y - refracción.

3.1 Correcciones por imprecisiones del comparador.

Un comparador debiera proporcionar las coordenadas fotográficas con una precisión de $\pm 1..2\mu\text{m}$. Errores típicos, que impiden esa precisión, son entre otros:

- eje no perfectamente verticales
- error de curso (debido al movimiento muerto del huesillo)
- error de reproducción.

Los comparadores que usan placas de vidrio con una retícula grabada en ellas minimizan estos errores usando vidrios que obedecen a normas de calidad muy estrictas, con las cuales se miden separaciones muy pequeñas. Como ejemplo se pueden mencionar: el Zeiss - PSK, el Space Optic y el Monocomparador -- Wild.

Para determinar las desviaciones es necesario calibrar el comparador y establecer un modelo de corrección matemático.

Un modelo para resolver esta tarea idéntica se lleva a cabo - con ayuda de una retícula RESEAU (Ver Cap. 3:3).

3.2 Orientación Interior.

Consiste de la determinación de las coordenadas del punto principal de la foto con respecto de las marcas fiduciales y la determinación de la distancia focal (constante de la cámara).

Estas tareas están ligadas con la determinación del registro - (como función de la constante de la cámara).

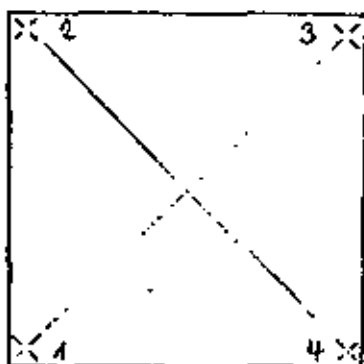
En la práctica se toma la distancia focal del certificado del aparato. "Se trata de los certificados de calibración (inglés: calibration certificate)".

Estos contienen datos, que se necesitan en los vuelos fotográficos. Como ejemplo se muestra aquí un certificado - WILD

Objetivo: Aviogon Nr 86 (objetivo de alto rendimiento)

C = 152.49mm

A continuación se proporcionan la distancia de las líneas que unen marcas fiduciales opuestas considerando su intersección como punto cero.



Punto con propiedades simétricas óptimas. S13 $0 \mu m$ S24 -3 μ

Punto de autocolimación (se trata del punto en la fotografía, en -- donde se forman rayos paralelos -- infinitos).

P13 $-9 \mu m$ P24 $-4 \mu m$

Más datos (necesarios para los factores descritos en los cap. 3.3 y 3.4):

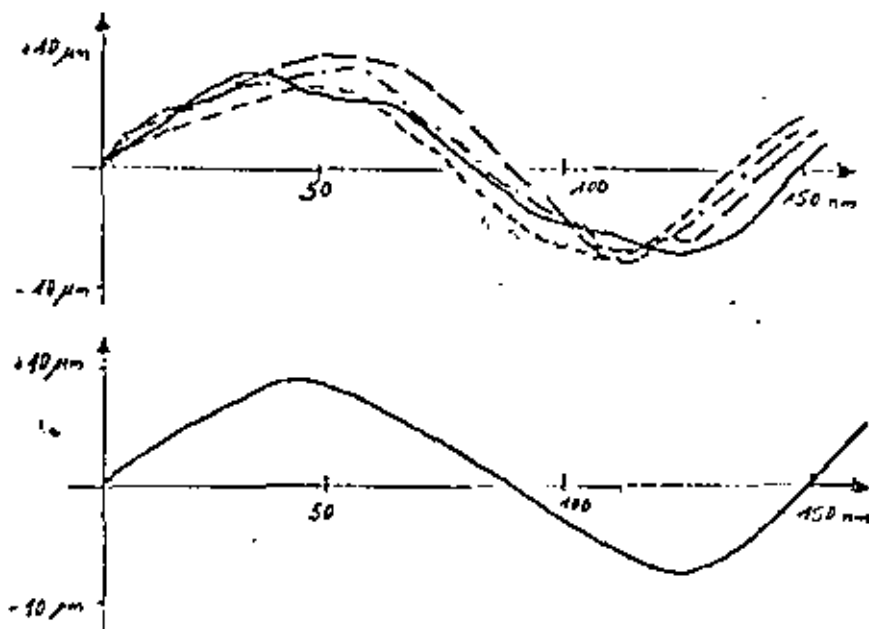
- Distancias entre marcas fiduciales:

| | | | | | |
|-------|---|-----------|-------|---|-----------|
| 1 - 2 | = | 212,002mm | 1 - 3 | = | 299,814mm |
| 2 - 3 | = | 212,001mm | 2 - 4 | = | 299,816mm |
| 3 - 4 | = | 211,994mm | | | |
| 4 - 1 | = | 212,004mm | | | |

- Distorsión, obtenida con ayuda de mediciones con teodolito, - sin usar un filtro:

| Radio (mm) | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Distorsión (mm) | +0,006 | +0,009 | +0,007 | +0,002 | -0,006 | -0,010 |
| | | | | | 140 | 148 |
| | | | | | -0,001 | +0,007 |

- Representación gráfica de la curva de distorsión del punto -- principal de la foto a las 4^{as} marcas fiduciales y una curva -- promedio de la distorsión.



Lens Cone/Camera

Lens

Calibration date: 26.11.73

Type: 305/50P

Type: Avicogen

Format: 5" x 9"

Noz 35 Ag-160 f = 157.31 mm

Coordinates (Origin Fiducial Center) of

Point of Best Symmetry (S):

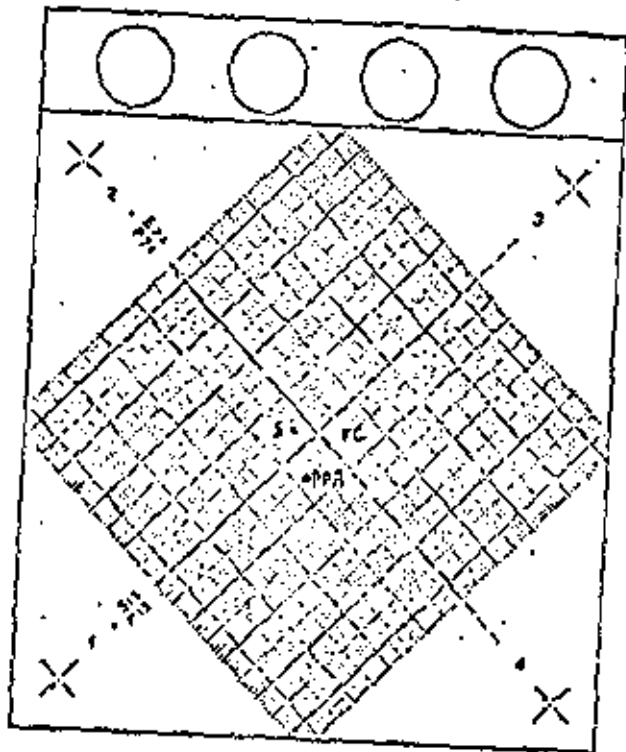
S13 = 4 μm S24 = 4 μm

Principal Point of Autoresimulation (PPA):

P13 = 0 μm P24 = -5 μm

(Calibration without film)

(Seen on Focal Plane Frame)

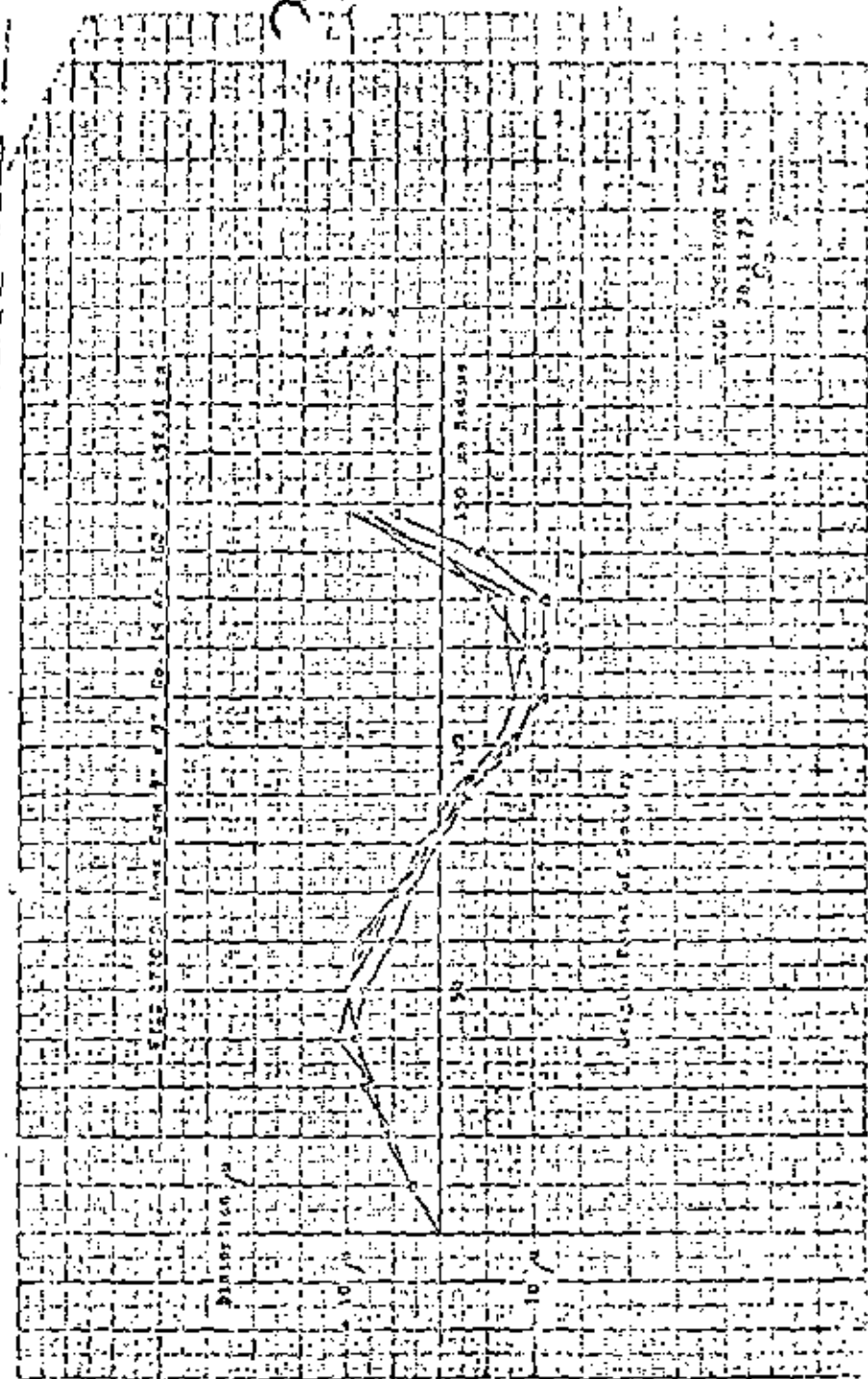


SCALE: 1000:1

Distances between Fiducial Marks in mm:

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1 - 2 = 212.009 | 1 - 3 = 299.870 |
| 2 - 3 = 212.007 | 2 - 4 = 299.874 |
| 3 - 4 = 212.010 | |
| 4 - 1 = 212.000 | |

WILD HEERHOLDS LTD



Copia de un certificado WILD:

153,05

Distortion μ

+10 μ

-10 μ

50

100

150

mm Radius

Mean Radial Distortion Curve

WILD INSTRUMENTS LTD.

29.11.73

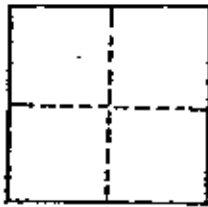
50

Un certificado ZEISS contiene los siguientes datos:

Platagon A98101

$c = 152,64 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$

El punto intersección de las líneas entre marcas fiduciales se encuentra a una distancia no mayor de $\pm 0.02 \text{ mm}$ del punto de autocolimación. La distancia entre las marcas fiduciales vale en ambas direcciones $226.00 \text{ mm} \pm .02 \text{ mm}$.



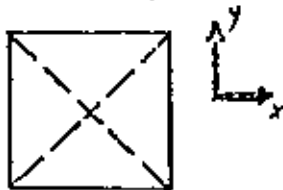
Distorsión radial, medida con un teodolito

(Utilización de un filtro tipo D con $530\mu\text{m}$).

| | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| Radio (mm) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
| Distorsión (μm) | 0 | -4 | -5 | -5 | -5 | -4 | -4 | -3 | -3 | -2 | -1 | -4 | -4 |
| | | | | | | | | | | | | 130 | 140 |
| | | | | | | | | | | | | -5 | 0 |

Para objetivos fotogramétricos se presenta además:

Distorsión a lo largo de los 4 radios: A B C D a intervalos de 10 mm de 0 hasta 150 mm (de dónde se puede derivar una curva de distorsión - promedio).



Distancia entre marcas fiduciales: en dirección x 226.01 mm
en dirección y 226.00 mm

Distorsión tangencial: máxima menor que $10\mu\text{m}$.

Filtro: Ambas superficies del filtro son paralelas con desviaciones máximas de 5 segundos de arco.

tipos: K sin color

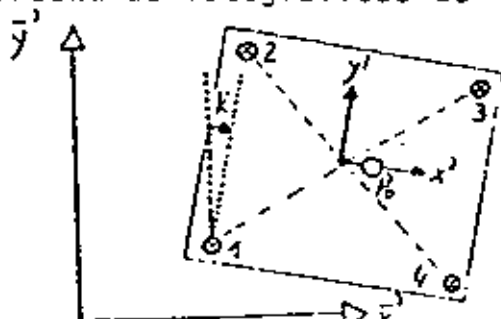
B amarillo

D naranja

Placas de almacen: Las placas montadas en el almacen - ZEISS tipo FK 24/120 Nr.36129 tienen una desviación máxima con respecto a un plano de $\pm .010 \text{ mm}$.

Debido a que la orientación exterior está fuertemente relacionada con la orientación interior (por ej. $h = c \cdot$ factor de escala de la foto), no se hacen aquí más reflexiones sobre su desarrollo. Es suficiente considerar la intersección de las rectas que unen marcas fiduciales opuestas (dada con seguridad de 20µm) como punto principal de la foto y usar la distancia focal calibrada con la precisión de 1/100 mm garantizada por el certificado.

Las mediciones del comparador se pueden relacionar con las -- coordenadas fotográficas de la siguiente manera:



x', y' : valores medidos en el sistema del comparador

\bar{x}, \bar{y} : coordenadas fotográficas.

Las coordenadas del comparador del punto principal se obtienen por la siguiente relación:

$$\bar{x}_0' = \frac{\bar{x}_1' + \bar{x}_2' + \bar{x}_3' + \bar{x}_4'}{4} + d \bar{x}_0'$$

$$\bar{y}_0' = \frac{\bar{y}_1' + \bar{y}_2' + \bar{y}_3' + \bar{y}_4'}{4} + d \bar{y}_0'$$

Ángulos direccionales en el sistema del comparador:

$$\tan k_1 = \frac{\bar{x}_2' - \bar{x}_1'}{\bar{y}_2' - \bar{y}_1'} \quad ; \quad \tan k_2 = \frac{\bar{y}_4' - \bar{y}_1'}{\bar{x}_4' - \bar{x}_1'}$$

$$\tan k_3 = \frac{\bar{x}_3' - \bar{x}_4'}{\bar{y}_3' - \bar{y}_4'} \quad ; \quad \tan k_4 = \frac{\bar{y}_2' - \bar{y}_3'}{\bar{x}_2' - \bar{x}_3'}$$

El ángulo de giro K entre el sistema fotográfico y el del comparador se obtiene de allí como media aritmética:

$$K = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{4} \quad (3.2./1)$$

La relación de transformación queda así:

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \cos K & -\sin K \\ \sin K & \cos K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_i' - \bar{x}_0' \\ \bar{y}_i' - \bar{y}_0' \end{pmatrix} \quad (3.2./2)$$

El factor de escala μ que interviene en (2) se obtiene por -- las relaciones de segmento.

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{(x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2}}{\sqrt{(\bar{x}_3' - \bar{x}_1')^2 + (\bar{y}_3' - \bar{y}_1')^2}}$$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{(x_4' - x_2')^2 + (y_4' - y_2')^2}}{\sqrt{(\bar{x}_4' - \bar{x}_2')^2 + (\bar{y}_4' - \bar{y}_2')^2}}$$

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \quad (3.2./3)$$

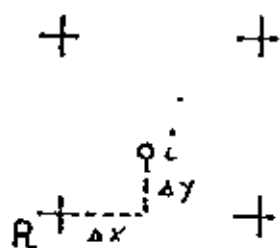
Los valores $\sqrt{(x_3' - x_1')^2 + (y_3' - y_1')^2}$ y $\sqrt{(x_4' - x_2')^2 + (y_4' - y_2')^2}$ los puede uno tomar del certificado (distancia entre marcas fiduciales). Igualmente están en el certificado los valores de dx_0' y dy_0' (Punto de simetría óptima) y pueden ser considerados - esto también es válido para los certificados WILD.

Al introducir el factor de escala μ ya se consideran también - parcialmente las deformaciones de la película.

3.3 Deformaciones de la película.

Para determinar la deformación de la película deben colocarse en la cámara una escala o un Reseau.

Un Reseau consiste en cruces, marcadas paralelamente entre -- ellas, y cuya separación es conocida. Se miden las coordenadas \bar{x}' , \bar{y}' del comparador y con ayuda de las fórmulas (3.2/1) ... (3.2/3) se transforman en \bar{x}' , \bar{y}' .



La cruz Reseau mas cercana a las -- coordenadas \bar{x}' , \bar{y}' (de coordenadas -- conocidas) se usa como origen de un sistema de referencia (X_R' , Y_R')

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_i' &= X_R' + (\bar{x}_i' - \bar{x}_R) = x_R' + \Delta x \\ y_i' &= Y_R' + (\bar{y}_i' - \bar{y}_R) = y_R' + \Delta y \end{aligned} \quad (3.3./1)$$

Así se eliminan las deformaciones de la película, considera-- das en las mediciones de la cruz Reseau en el comparador.

Según Brown, Zemann & Visser es ventajoso, determinar primero todas las coordenadas del comparador de las cruces Reseau. El contenido fotográfico se aproxima entonces con un polinomio de 3er. grado.

$$\begin{aligned}
 x_i' &= a_0 + a_1 \bar{x}_i + a_2 \bar{x}_i^2 + a_3 \bar{y}_i + a_4 \bar{y}_i^2 + a_5 \bar{x}_i \bar{y}_i \\
 &\quad + a_6 \bar{x}_i^2 \bar{y}_i + a_7 \bar{y}_i^2 \bar{x}_i + a_8 \bar{x}_i^3 + a_9 \bar{y}_i^3 \\
 y_i' &= b_0 + b_1 \bar{y}_i + b_2 \bar{y}_i^2 + b_3 \bar{x}_i + b_4 \bar{x}_i^2 + b_5 \bar{x}_i \bar{y}_i \\
 &\quad + b_6 \bar{x}_i \bar{y}_i^2 + b_7 \bar{x}_i^2 \bar{y}_i + b_8 \bar{y}_i^3 + b_9 \bar{x}_i^3
 \end{aligned} \tag{3.3./2}$$

Según Ziemann & Visser, a pesar del mayor número de mediciones no existe ninguna relación con el incremento mínimo de precisión. Brown alcanzó muy buenos resultados usando una cámara -- Reseau, sin embargo en Alemania apenas si se usa (1977).

En cámaras aéreas normales la deformación de la película se corrige con ayuda de las marcas fiduciales. WILD afirma que las 6 distancias posibles entre las 4 marcas fiduciales están dentro de $\pm 1\mu\text{m}$. ZEISS nada más proporciona 2 distancias dentro de $\pm 20\mu\text{m}$, lo que no es suficiente. De allí que se necesite establecer una copia en vidrio de la retícula en el laboratorio y finalmente determinar las coordenadas de las marcas fiduciales fotocopiadas en el comparador dentro de $\pm 1..2\mu\text{m}$.

De las marcas fiduciales existen valores en el certificado. Esto hace posible una transformación a las coordenadas fiduciales conocidas. Ahora se utilizan en la determinación de los -- coeficientes del polinomio.

- ya sea para un ajuste según el método de mínimos cuadrados (8 observaciones, 6 incógnitas) "transformación afin"
- ó para una solución directa (8 observaciones, 8 incógnitas)

Los cálculos quedan así:

-affin

$$\begin{aligned}
 x_i' &= a_1 + a_2 \bar{x}_i' + a_3 \bar{y}_i' \\
 y_i' &= a_4 + a_5 \bar{x}_i' + a_6 \bar{y}_i'
 \end{aligned}$$

(3.3./3)

La transformación se puede realizar directamente con las coordenadas medidas en el comparador (la transformación del Cap. 3.2 no es necesaria).

Otras posibilidades de cálculo (con 8 coeficientes):

pseudo - afín

$$\begin{aligned} x_i' &= a_1 + a_2 \bar{x}_i' + a_3 \bar{x}_i' \bar{y}_i' + a_4 \bar{y}_i' \\ y_i' &= a_5 + a_6 \bar{x}_i' + a_7 \bar{x}_i' \bar{y}_i' + a_8 \bar{y}_i' \end{aligned}$$

perspectiva

(3.3./4)

$$\begin{aligned} x_i' &= a_1 + a_2 \bar{x}_i' + a_3 \bar{y}_i' + a_4 \bar{x}_i' \bar{y}_i' - a_8 \bar{x}_i'^2 \\ y_i' &= a_5 + a_6 \bar{x}_i' + a_7 \bar{y}_i' - a_8 \bar{x}_i' \bar{y}_i' + a_4 \bar{y}_i'^2 \end{aligned}$$

(3.3./5a)

o

$$\begin{aligned} x_i' &= a_1 + a_2 \bar{x}_i' + a_3 \bar{y}_i' + a_4 \bar{x}_i' \bar{y}_i' + a_8 \bar{y}_i'^2 \\ y_i' &= a_5 + a_6 \bar{x}_i' + a_7 \bar{y}_i' + a_8 \bar{x}_i' \bar{y}_i' + a_4 \bar{x}_i'^2 \end{aligned}$$

(3.3./5b)

Es muy útil una observación de la deformación de la película en cámaras con marcas fiduciales en las esquinas de la foto. En otras cámaras se debería extrapolar, lo que es mejor evitar.

3.4 Distorsión del objetivo.

Las distorsiones, originadas por el objetivo, no deben despreciarse. Esta corrección es importante.

En los certificados de calibración normalmente nada más se considera la distorsión radial. En cámaras modernas esta es menor a 10µm para radios menores a 140mm (ZEISS: la indica a cada 10mm; WILD: para cada 20mm de distancia radial).

La distorsión tangencial alcanza nada más 1/3 de la distancia radial.

En los certificados no está tomada en cuenta y en la mayoría de los casos puede despreciarse.

Con ayuda de los siguientes modelos se puede tomar en cuenta la distorsión radial.

1) Interpolación entre los valores dados.

$$\begin{aligned} \Delta v_i &= \frac{dr'_{(n+1) 10mm} - dr'_{(n) 10mm}}{10mm} \cdot \Delta r_i'_{mm} \\ \Delta r_i'_{mm} &= r_i' - r'_{(n) 10mm} \\ r_i' &= \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} \\ x_i' &= x_i' \left(1 + \frac{\Delta v_i}{r_i'} \right) ; \quad y_i' = y_i' \left(1 + \frac{\Delta v_i}{r_i'} \right) \end{aligned} \quad (3.4./1)$$

Para aclarar los parámetros en (1)

x_i', y_i' : coordenadas fotográficas

x_{i_c}', y_{i_c}' : coordenadas fotográficas mejoradas debido a la --
distorsión radial.

$dr\{n\}, dr\{n+1\}$: distorsiones indicadas en el certificado para ca-
da intervalo de 10mm.

r_i' : distancia radial

$\Delta r_i'$: diferencia entre la distancia radial i y el inter-
valo de 10 mm contiguo.

2) Representación de la corrección por distorsión radial -
 ΔV_i mediante un polinomio con potencias exactas de r_i'

$$\Delta V_i = a_1 \cdot r_i'^2 + a_2 \cdot r_i'^4 + a_3 \cdot r_i'^6 + a_4 \cdot r_i'^8$$

referido a la distancia radial r_i' :

$$\boxed{\frac{\Delta V_i}{r_i'} = a_1 \cdot r_i' + a_2 \cdot r_i'^3 + a_3 \cdot r_i'^5 + a_4 \cdot r_i'^7} \quad (3.4./2)$$

Los nuevos certificados de calibración contienen 4 curvas para representar la distorsión. Según Hallert los valores de $\pm 5\mu\text{m}$ son precisos. Debido a las magnitudes es de preguntarse si debe aplicarse una corrección por distorsión asimétrica (más o menos de la misma magnitud). Nada más se debe hacer notar, que tales distorsiones asimétricas existen. De la misma manera -- existe la distorsión radial. WILD no la toma en cuenta, ZEISS la estima con un valor menor a $10\mu\text{m}$.

El desarrollo de las distorsiones tangencial + asimétrica nada más se puede determinar con suficiente precisión mediante:

- a) una precalibración en un campo de prueba
- ó b) introducción de parámetros adicionales en un ajuste de -
bloque.

Una precalibración (según D. Brown) tiene un cálculo de ajuste que es muy parecido al cálculo de ajuste de bloque con parámetros adicionales (Bauer - Muller).

En ambos casos, no parece ilógico, introducir esos parámetros, que muestran una alta correlación con la orientación exterior.

A continuación se consideran los cálculos para la corrección por distorsión:

- distorsión radial.

Los siguientes términos parecen no tener sentido:

$$\Delta r_1' = a_1 \cdot r'^3 \quad ; \quad \Delta r_2' = a_2 \cdot r'^6$$

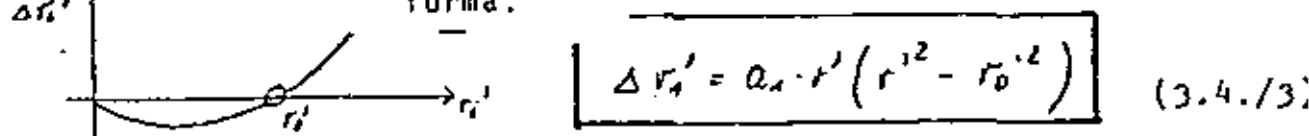
Estos términos no incrementan rápidamente con incrementos de r' .

$$r' = 5 \text{ cm} \quad (r')^3 = 125$$

$$r' = 10 \text{ cm} \quad (r')^3 = 1000$$

Por eso no tiene sentido determinar una r_0' , ya que $\Delta r'$ se vuelve cero. Se escoge este lugar por ej. con un radio de 10 cm.

El cálculo anterior adquiere entonces la forma.



$$\Delta r_1' = a_1 \cdot r' (r'^2 - r_0'^2) \quad (3.4./3)$$

y para las aproximaciones de las coordenadas fotográficas se obtiene:

$$\Delta x' = x_i \cdot \frac{\Delta r_1'}{r'_i} \quad ; \quad \Delta y' = y_i \cdot \frac{\Delta r_1'}{r'_i}$$

$$\Delta x_1' = a_1 x_i' (r'^2 - r_0'^2) \quad ; \quad \Delta y_1' = a_1 y_i' (r'^2 - r_0'^2)$$

análogicamente para $\Delta r_2'$:

$$\Delta r_2' = a_2 \cdot r' (r'^5 - r_0'^5) \quad (3.4/4)$$

- distorsión radial asimétrica.

Se calcula con ayuda del término:

$$\Delta r_3' = a_5 \cdot r' \cos 2(\alpha - \epsilon_1) \quad (3.4/5)$$

ϵ_1 , la dirección de referencia debería escogerse de tal manera que la corrección máxima no se determine mediante las direcciones del sistema coordenado.

El término " $\cos (2(\alpha - \epsilon_1))$ " debe determinarse de tal manera que la corrección se vuelva independiente de la dirección del vuelo en el bloque. La ecuación (5) no es lineal. Pero desarrollando en bloque. La ecuación (5) no es lineal. Pero desarrollando la suma esto se puede remediar:

se substituye: $a_5 \cdot r' \cos 2\alpha \cos 2\epsilon_1 + a_5 r' \cdot \sin 2\alpha \sin 2\epsilon_1 = \Delta r_3'$

$$a_5 \cdot \cos 2\epsilon_1 = a_3$$

$$a_5 \cdot \sin 2\epsilon_1 = a_4$$

de donde:

$$a_5 = \sqrt{a_3^2 + a_4^2} \quad , \quad \tan 2\epsilon_1 = \frac{a_4}{a_3}$$

Con ésto se transforma (5) en:

$$\Delta r_3' = a_3 r' \cos 2\alpha + a_4 r' \sin 2\alpha$$

Entonces la distorsión radial se integra en su totalidad por:

$$\Delta r' = \Delta r_1' + \Delta r_2' + \Delta r_3'$$

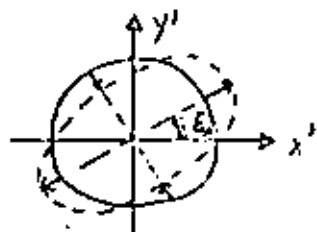
$$\Delta r' = a_1 r' (r'^2 - r_0'^2) + a_2 r' (r'^5 - r_0'^5) + a_3 r' \cos 2\alpha + a_4 r' \sin 2\alpha$$

oder

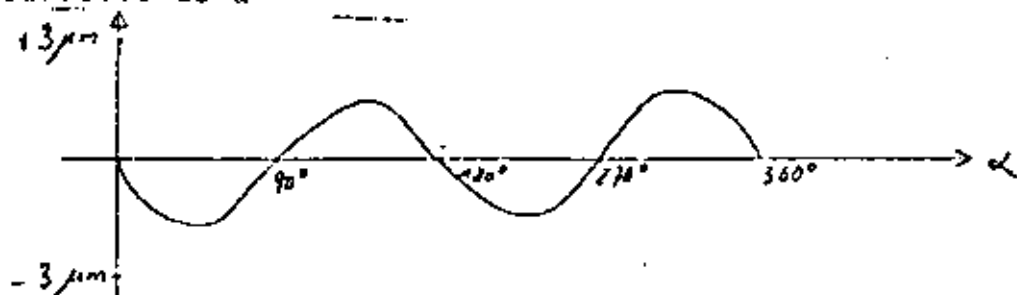
$$\Delta x' = a_1 x' (r'^2 - r_0'^2) + a_2 x' (r'^5 - r_0'^5) + a_3 x' \cos 2\alpha + a_4 x' \sin 2\alpha \quad (3.4.17)$$

Como ejemplo se muestran las gráficas de cada uno de los términos de (5):

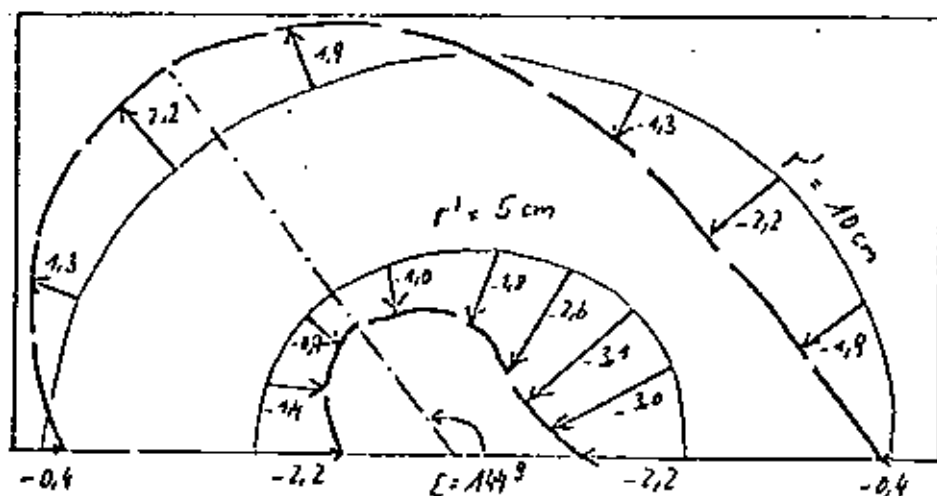
- desarrollo de E_1 (se muestran las curvas de igual distorsión)



- desarrollo de a



Para la distorsión radial total (7) se obtiene el siguiente cuadro:



- distorsión tangencial.

Se introduce un término de corrección similar al de la igualdad (5):

$$\Delta t'' = b_5 r' \cos 2(\alpha - \epsilon_2) \quad (3.4./8)$$

transformaciones análogas para linealizar nos dan:

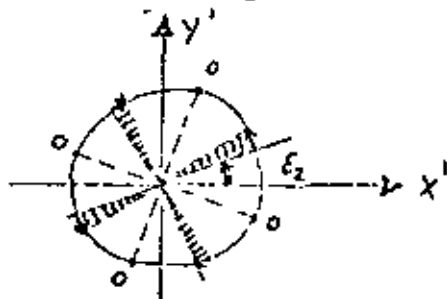
$$\Delta t' = b_5 r' \cos 2\alpha \cos 2\epsilon_2 + b_5 r' \sin 2\alpha \sin 2\epsilon_2$$

$$b_3 = b_5 \cdot \cos 2\epsilon$$

$$b_4 = b_5 \cdot \sin 2\epsilon$$

$$\Delta t' = b_3 r' \cos 2\alpha + b_4 r' \sin 2\alpha \quad (3.4./9)$$

Representación gráfica del desarrollo de ϵ_2 :



De (9) se obtiene con las relaciones fundamentales:

$$\Delta y' = \Delta t' \cdot \cos \alpha ; \Delta x' = -\Delta t' \sin \alpha ; \cos \alpha = \frac{x_i'}{r_i'} ; \sin \alpha = \frac{y_i'}{r_i'}$$

Los siguientes términos de corrección para las coordenadas fotográficas:

$$\begin{aligned} \Delta x_i' &= -b_3 y_i' \cos 2\alpha - b_4 y_i' \sin 2\alpha \\ \Delta y_i' &= b_3 x_i' \cos 2\alpha + b_4 x_i' \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.4./10)$$

Para finalizar el capítulo también se puede introducir con -- ventaja una calibración durante el vuelo. En este caso también se pueden determinar y tomar en cuenta otros errores sistemáticos (de tamaño desconocido), los cuales se presentan como -- distorsiones radiales o tangenciales.

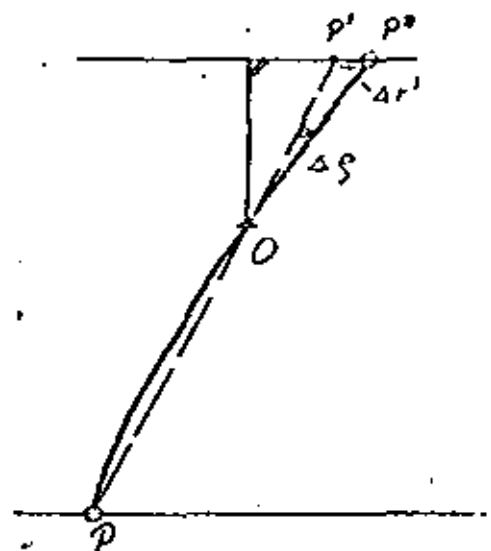
3.5 Refracción.

En el modelo matemático perspectivo de la fotogrametría se presupone que un punto sobre el terreno, el centro del objetivo, y el punto en la foto están contenidos en una recta. Sin embargo la atmósfera origina una curvatura en el rayo. La desviación de esta curva de la recta es tan grande, que en la fotogrametría analítica debe tomarse en cuenta.

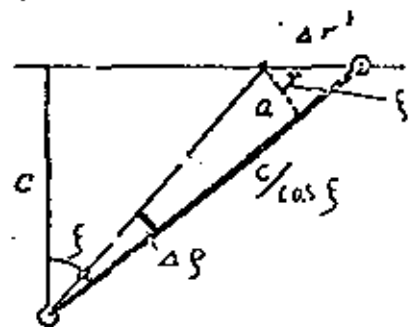
A que se debe la curvatura? En general la temperatura decrece a mayor altura ("la atmósfera se vuelve menos densa). Según la ley de Snell los rayos que pasan a un medio menos denso sufren una desviación de la normal. Debido a una constante "disminución de densidad" se origina una línea curvaada.

Relación entre punto objeto P, centro del objetivo O y punto en la foto p"

p' : debe estar
p" : está (debido a la refracción)



Determinación de la distorsión radial originada por la refracción



Del segundo dibujo se obtienen las siguientes relaciones:

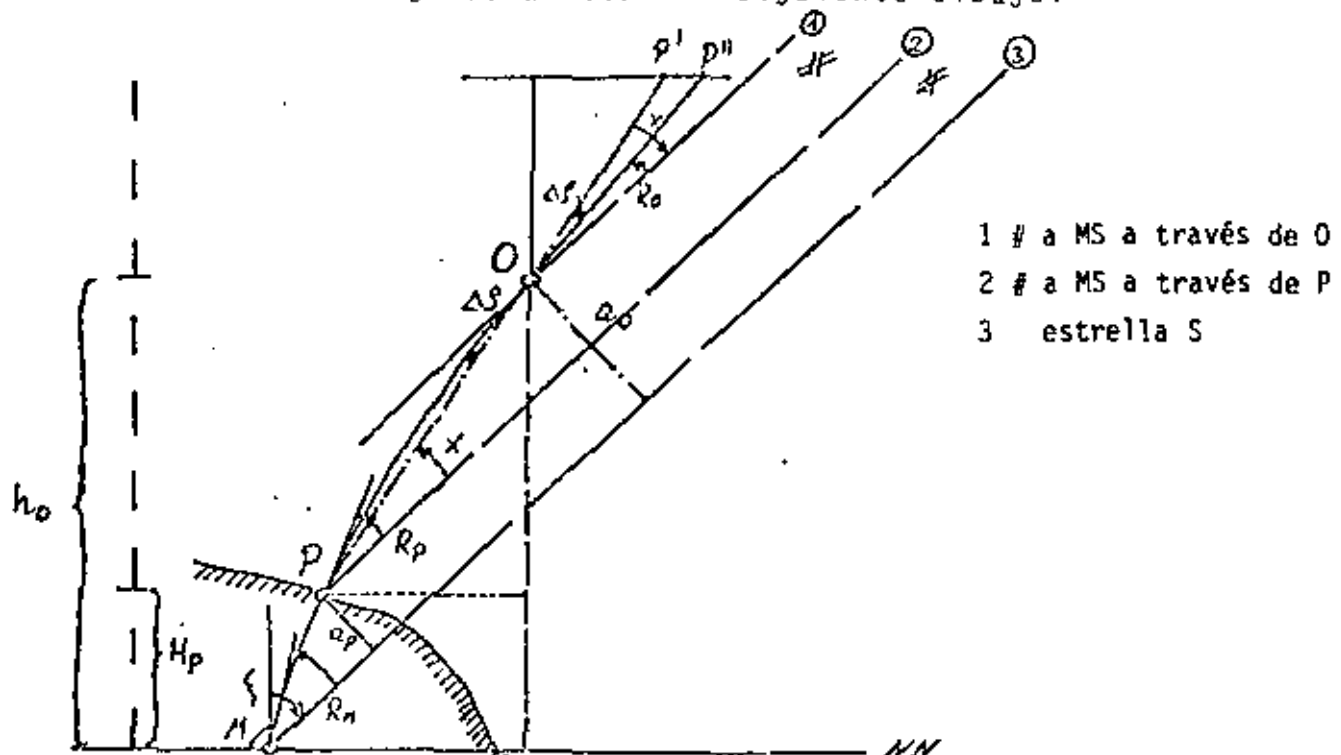
$$\Delta r' = \frac{a}{\cos \xi}$$

$$a = \frac{\Delta \beta}{\rho''} \cdot \frac{c}{\cos \xi}$$

mit $\rho'' = 636620''$

$$\Delta r' = \frac{c}{\cos^2 \xi} \cdot \frac{\Delta \beta}{\rho''} \quad (3.5.11)$$

Para determinar $\Delta \xi$ se utiliza el siguiente dibujo:



Tan luego se observa una estrella en un punto M sobre la superficie de referencia M-NN, no mide uno la distancia zenital ξ , sino $\xi - R_M$.

En el punto P con la altura H_p se observa $\xi - R_p$, y en O: $\xi - R_o$.

Para el ángulo diferencia entre la recta \overline{MPOPT} y las paralelas \overline{M} -estrella se cumple:

$$R_o < R_p < R_M$$

El ángulo de refracción $\Delta \xi$ se obtiene:

$$\Delta \xi = x - R_o$$

$$\text{con } x = \frac{a_o - a_p}{h_o - H_p} \cdot \cos \xi \cdot \rho$$

$$\Delta \xi = \frac{a_o - a_p}{h_o - H_p} \cdot \cos \xi \cdot \rho - R_o \quad (3.5./2)$$

Con ayuda de los valores ξ , R_o , a_o , a_p , H_p , se puede determinar la refracción. Pero, ¿Cómo se pueden obtener esos valores?

Para ello se utiliza la relación para la refracción astronómica (Para los fines de la Fotogrametría tiene un significado mayor que la relación para la refracción terrestre, ya que el campo angular observado generalmente tiene distancias cenitales $\xi < 60^\circ$)

La relación para el ángulo resta R queda así:

$$R = K \cdot \tan \left\{ \right. \quad (3.5./3)$$

con: $K = 21,91 \frac{p}{T}$ p: presión en el lugar de observación.
 T: temperatura absoluta en el lugar de observación en grados Kelvin.

En mediciones fotogramétricas no se puede llevar un registro de p y T (toma fotográfica aérea). Por eso se establece una atmósfera modelo:

La temperatura y la presión deben, al incrementarse la altura, comportarse según las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} T &= T_0 - \beta \cdot h \\ p &= p_0 \left(\frac{T_0 - \beta \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{g}{a\beta}} \end{aligned} \quad (3.5./4)$$

- T: temperatura en grados Kelvin
- T_0 : temperatura en el punto de referencia en grados Kelvin
- β : gradiente de temperatura
- p: presión atmosférica en mm-Hg
- p_0 : presión atmosférica en el punto de referencia.
- g: aceleración de la gravedad.
- a: constante adiabática para el aire.

En Europa las constantes tienen los siguientes valores:

$$\beta = 0,65^\circ\text{C}/100\text{m} \quad g/a = 3,4165$$

$$T_0 = 288^\circ\text{K} \hat{=} 15^\circ\text{C}$$

$$p_0 = 760 \text{ mm}$$

Substituyendo de (4) en (3) dá:

$$K = 21,91 \frac{760}{288} \left(1 - \frac{6,5 \cdot h}{288} \right)^{\frac{3,4165}{0,65} - 1} \quad (\text{para } h \text{ en km})$$

El desarrollo de Taylor conduce a:

$$K = 57,848 - 5,5539h + 0,2040h^2 - 0,0034h^3 + 0,00002h^4 \quad \text{en segundos} \quad (3.5./5)$$

Después de que son calculables K (con (5)) y R (con (3)) también se puede determinar el parámetro a :

Diferencialmente se cumple:
(ver dibujo)

$$\frac{da}{dh} \cos \xi = \frac{R}{\rho}$$

Despejando da de la anterior:

$$da = \frac{R}{\cos \xi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot dh = \frac{\tan \xi}{\cos \xi} \cdot \frac{K}{\rho} \cdot dh$$

La integración da (con el desarrollo lineal de (5)):

$$\begin{aligned} a &= \frac{\tan \xi}{\cos \xi} \int_{h_0}^{h_1} \frac{K}{\rho} \cdot dh \\ &= \frac{\tan \xi}{\cos \xi} (57,818h - 5,5539h^2 + 0,2040h^3 - 0,0034h^4 + 0,0002h^5) \end{aligned}$$

Con esto se tiene a y R como función de ξ y h . Substituyendo en (2) conduce a la siguiente ecuación para $\Delta \rho$:

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= \frac{a_0 - a_p}{h_0 - H_p} \cdot \cos \xi \cdot \rho - K_0 \cdot \tan \xi \\ &= \left(\frac{\cos \xi}{\tan \xi} \cdot \rho \cdot \frac{\tan \xi}{\cos \xi} \cdot \frac{1}{\rho_0} \int_0^{h_p} K dh - \int_0^{h_p} K dh - K \right) : \tan \xi \\ &= \left(\frac{\int_{H_p}^{h_0} K dh}{h_0 - H_p} - K \right) \cdot \tan \xi \end{aligned}$$

Quedando este termino sólo en función de la altura h

Por lo tanto el ángulo de refracción $\Delta \rho$ se obtiene de:

$$\text{con: } \boxed{\Delta \rho = \Delta \rho_0 \cdot \tan \xi} \quad (3.5.16)$$

$$\Delta \rho_0 = f(h) = \frac{1}{h_0 - H_p} \int_{H_p}^{h_0} K \cdot dh - K$$

$\Delta \rho$ es el ángulo entre el rayo que es incidente en O y la recta $\overline{POP'}$, que se puede determinar mediante (6).

Para Alemania del Norte $h_p = 0$ aproximadamente. Con esto se simplifica (6) usando (5):

$$\Delta \rho'' = 8,57 h - 0,4197 h^2 + 0,00803 h^3 - 0,000062 h^4$$

En segundos

(3.5./7)

válido para h hasta = 10 km (gradiente de temperatura: $0.65^\circ\text{C}/100\text{m}$).

Tabla para $\Delta \rho$ en segundos:

| h_0 en km | Altura del terreno en Km | | | | | |
|-------------|--------------------------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
| 0 | 0 | | | | | |
| 0.5 | 4.2 | 0 | | | | |
| 1.0 | 8.2 | 4.0 | 0 | | | |
| 1.5 | 11.9 | 7.9 | 3.9 | 0 | | |
| 2.0 | 15.5 | 11.5 | 7.6 | 3.7 | 0 | |
| 2.5 | 18.9 | 14.9 | 11.1 | 7.3 | 3.6 | 0 |
| 3.0 | 22.2 | 18.2 | 14.4 | 10.6 | 7.0 | 3.5 |
| 3.5 | 25.2 | 21.3 | 17.5 | 13.8 | 10.2 | 6.7 |
| 4.0 | 28.1 | 24.2 | 20.5 | 16.8 | 13.3 | 9.8 |
| 4.5 | 30.8 | 27.0 | 23.3 | 19.7 | 16.2 | 12.8 |
| 5.0 | 33.8 | 29.6 | 25.9 | 22.4 | 18.9 | 15.6 |
| 5.5 | 35.7 | 32.0 | 28.4 | 24.9 | 21.5 | 18.2 |
| 6.0 | 38.0 | 34.3 | 30.8 | 27.3 | 23.9 | 20.6 |
| 6.5 | 40.1 | 36.5 | 33.0 | 29.5 | 26.2 | 23.0 |
| 7.0 | 42.0 | 38.5 | 35.0 | 31.6 | 28.3 | 25.1 |
| 7.5 | 43.9 | 40.3 | 36.9 | 33.6 | 30.3 | 27.2 |
| 8.0 | 45.6 | 42.1 | 38.7 | 35.4 | 32.2 | 29.1 |
| 8.5 | 47.1 | 43.7 | 40.4 | 37.1 | 33.9 | 30.8 |
| 9.0 | 48.6 | 45.2 | 41.9 | 38.7 | 35.6 | 32.5 |
| 9.5 | 49.9 | 46.6 | 43.3 | 40.1 | 37.0 | 34.0 |
| 10.0 | 51.2 | 47.8 | 44.6 | 41.5 | 38.4 | 35.5 |

En el "Manual de Fotogrametría" -pág. 476- se encuentra para la siguiente fórmula (para $\Delta \rho$ ellos usan K).

$$\Delta \rho'' = \left(\frac{-2440 h_0}{h^2 - 6h + 250} - \frac{2440 h}{h^2 - 6h + 250} \left(\frac{h}{H} \right) \right) \cdot 10^{-6}$$

En grados centesimales.

Para el desplazamiento radial en la foto $\Delta r'$ se obtiene (sustituyendo (6) en (1) tomando en cuenta las relaciones geométricas de una cámara métrica):

$$\Delta r' = \frac{c}{\cos^2 \xi} \cdot \frac{\Delta \rho}{S} = \frac{c \Delta \rho_0 \tan \xi}{\cos^2 \xi \cdot S}$$

$$= \frac{r'}{\cos^2 \xi} \cdot \frac{\Delta \rho_0}{S} = \frac{r' (r'^2 + c^2) \Delta \rho_0}{c^2 \cdot S}$$

$$\Delta r' = r' \left(1 + \frac{r'^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\Delta \rho_0}{S} \quad (3.5./1a)$$

Ejemplo: Determinación de la máxima corrección para:

- ángulo normal- (c=31cm; 23 x 23 cm)
- gran angular- (c=153mm; 23 x 23 cm)
- supergran angular-foto (c=88 mm; 23 x 23 cm).
- Un $\Delta r'$ se le puede alcanzar con:
 - $\Delta \rho_0$ de 3^{cc} para NW
 - $\Delta \rho_0$ de 2^{cc} para WW
 - y - $\Delta \rho_0$ de 1^{cc} para SWW
- Cambio de las estipulaciones atmosféricas actuales contra la atmósfera normal:

| ICAN campo de oscilación | 15°C -15° - +35° C | 0.65°C/100m 0.35° - 0.95° C/100 m | 760 mm |
|--------------------------------|-----------------------------|---|------------------------------|
| h (km) | $\Delta \rho_0' / ^\circ C$ | $\Delta \rho_0' / 0.01 ^\circ C / 100m$ | $\Delta \rho_0' / \text{mm}$ |
| 1 | +0.056 | +0.015 | -0.011 |
| 4 | +0.178 | +0.052 | -0.037 |
| 10 | +0.262 | +0.122 | -0.068 |

ICAN = atmósfera normal.

- Transformación en base a una inclinación de la cámara.
fórmulas:

$$\Delta r' = \frac{c \cdot \Delta \rho_0}{S_0} \cdot \frac{\tan(\xi + d\xi)}{\cos^2(\xi + d\xi)} = \frac{c \cdot \Delta \rho_0}{S} \cdot \frac{\sin(\xi + d\xi)}{\cos^3(\xi + d\xi)}$$

$$d(\Delta r') = \frac{c \cdot \Delta \rho_0}{S^2} \cdot \frac{\cos^4 \xi + 3 \cos^2 \xi \sin^2 \xi}{\cos^6 \xi} d\xi^2$$

Con $d f = 1^{\circ} \hat{=} d(\Delta r')$ se obtienen los siguientes valores para $\Delta \rho$:

| h | NW | WW | SWW | Transformación de $\Delta \rho / 100$ m de h |
|------|-----|-----|-----|--|
| 1km | 0.1 | 0.3 | 1.0 | para h=1km 0,8" |
| 4km | 0.5 | 0.9 | 3.4 | 4km 0.6" |
| 10km | 0.9 | 1.7 | 6.2 | 10km 0.3" |

Recopilación de las precisiones a alcanzar para $\Delta r'$ Refr.

| Cámara | Altura de vuelo | factor de escala de la foto | Inclinación de 2° | 100m-dif. a la altura h adaptada. | Diferencia a la atmosfera normal | |
|--------|-----------------|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|------|
| | km | | m | m | m | m |
| NW | 1 | 3000 | 0.2 | 0.2 | 0.3 | 0.7 |
| | 4 | 12000 | 1.0 | 0.2 | 0.8 | 2.0 |
| | 10 | 30000 | 1.8 | 0.1 | .. | .. |
| WW | 1 | 6000 | 0.6 | 0.4 | 0.5 | 1.5 |
| | 4 | 24000 | 1.8 | 0.3 | 1.5 | 3.6 |
| | 10 | 60000 | 3.4 | 0.2 | .. | .. |
| SWW | 1 | 12000 | 2.0 | 0.9 | 1.2 | 4.1 |
| | 4 | 50000 | 6.8 | 0.7 | 3.2 | 10.7 |
| | 10 | 100000 | 12.4 | 0.3 | .. | .. |
| | | | | | | SUMA |

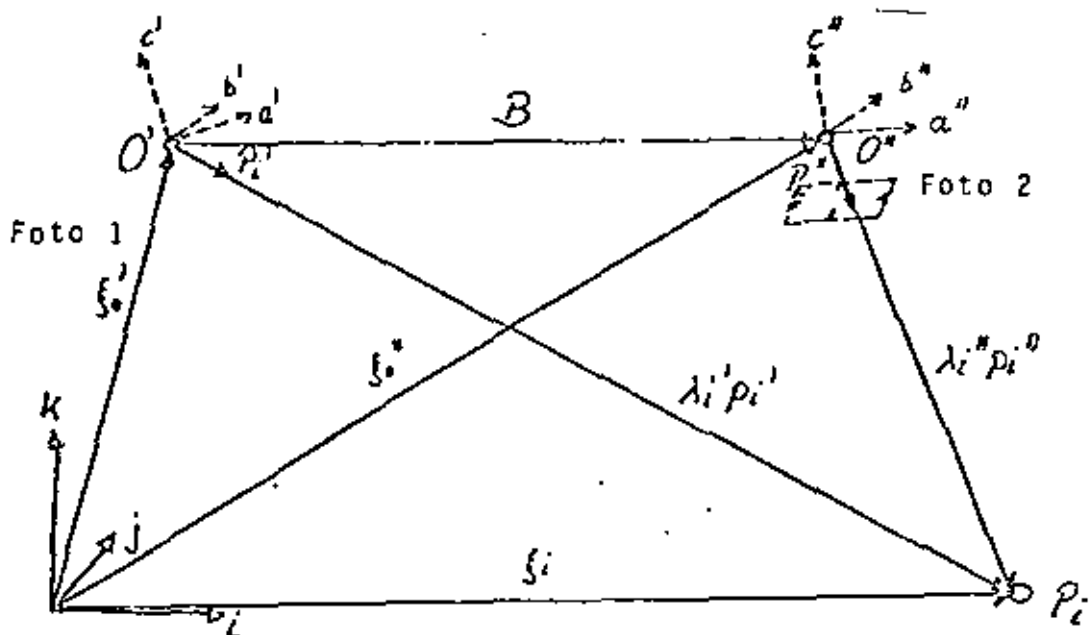
Sobre todo en escalas mayores se establecen fuertes exigencias en la precisión.

Los errores descritos en el capítulo 3.1 al 3.5 y sus correcciones se pueden tomar en cuenta con mayor facilidad, si se usan en la Aerotriangulación fotografías en vez de modelos. En este caso se pueden calcular todas las correcciones en un Anteprograma (programa de procesamiento). Esto corrige con ayuda de $\Delta r, \Delta t \rightarrow \Delta x', \Delta y'$ las coordenadas fotográficas medidas \bar{x}', \bar{y}' , de tal forma que de aquí en adelante las coordenadas x', y' , se pueden usar en el modelo teórico matemático.

4. Determinación de las coordenadas tridimensionales de un punto con ayuda de dos fotografías.

En el capítulo 4 se maneja el problema normal de la fotogrametría analítica: la obtención de una información tridimensional a partir de 2 fotografías bidimensionales, de las cuales se conoce la orientación exterior e interior (caso standard en la fotogrametría terrestre).

Se presenta la siguiente situación tridimensional:



- i, j, k vectores unitarios en el sistema coordenado terrestre. (X, Y, Z)
- a', b', c' } vectores unitarios en el sistema coordenado fotográfico
- a'', b'', c'' } de la foto 1(') y 2('').
- o', o'' centros de proyección
- ξ_0', ξ_0'', ξ_i Vectores tridimensionales a los centros de proyección o sea al punto P_i .
- P_i', P_i'' vectores tridimensionales de los centros de proyección a las imágenes del punto P_i .
- λ_i', λ_i'' factores de escala entre las coordenadas de las fotografías y el terreno.

Las coordenadas fotográficas se giran a un sistema (u', v', w') - paralelo a (X, Y, Z) con ayuda de matrices de rotación.

Planteamiento del problema: - dados: x_i^1, y_i^1 y x_i^2, y_i^2

se busca: ξ_i mediante: λ_i^1 y λ_i^2

Existe la siguiente relación fundamental (Ecuación fundamental de la fotogrametría (2.1./1)):

$$\xi_i = \xi_o^1 + \lambda_i^1 \rho_i^1 = \xi_o^2 + \lambda_i^2 \rho_i^2$$

y para la distancia tridimensional entre los centros de proyección (Base B).

$$\xi_o^2 - \xi_o^1 = \lambda_i^1 \rho_i^1 - \lambda_i^2 \rho_i^2 \quad (4./1)$$

Para cada uno de los componentes se obtiene:

- mediante las coordenadas fotográficas en el sistema (u, v, w)

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o^1 \\ Y_o^1 \\ Z_o^1 \end{pmatrix} + \lambda_i^1 \begin{pmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \\ w_i^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o^2 \\ Y_o^2 \\ Z_o^2 \end{pmatrix} + \lambda_i^2 \begin{pmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \\ w_i^2 \end{pmatrix}$$

- relaciones al sistema coordenado del terreno.

$$\begin{pmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \\ w_i^1 \end{pmatrix} = A^1 \begin{pmatrix} x_i^1 \\ y_i^1 \\ -c \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \\ w_i^2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_i^2 \\ y_i^2 \\ -c \end{pmatrix}$$

y - para la base:

$$\begin{pmatrix} X_o^2 - X_o^1 \\ Y_o^2 - Y_o^1 \\ Z_o^2 - Z_o^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx \\ by \\ bz \end{pmatrix} = \lambda_i^1 \begin{pmatrix} u_i^1 \\ v_i^1 \\ w_i^1 \end{pmatrix} - \lambda_i^2 \begin{pmatrix} u_i^2 \\ v_i^2 \\ w_i^2 \end{pmatrix}$$

Para la determinación de los escalares λ_i^1 y λ_i^2 del último sistema de igualdad son suficientes dos igualdades, ya que --

$(Z_o^2 - Z_o^1)$ normalmente es muy pequeña, o sea que los coeficientes w_i^1, w_i^2 son muy grandes en comparación con $u_i^1, v_i^1, u_i^2, v_i^2$, la 3a. igualdad es de poca influencia.

Si también $bz \ll bx$ y $bz \ll by$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} u_i^1 - u_i^2 \\ v_i^1 - v_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i^1 \\ \lambda_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bx \\ by \end{pmatrix}$$

Solución según los factores de escala λ_i' , λ_i'' :

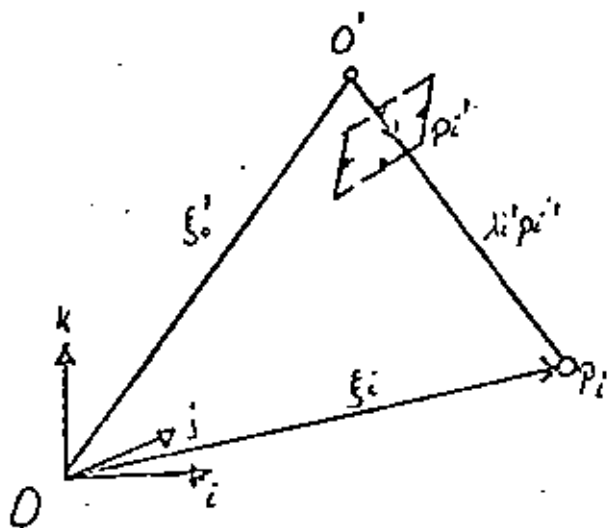
$$\lambda_i' = \frac{\begin{vmatrix} bx & -u_i'' \\ by & -v_i'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} bx & u_i'' \\ by & v_i'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i' & u_i'' \\ v_i' & v_i'' \end{vmatrix}} = \frac{bx \cdot v_i'' - by u_i''}{u_i' \cdot v_i'' - u_i'' v_i'}$$

$$\lambda_i'' = \frac{\begin{vmatrix} u_i' & bx \\ v_i' & by \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix}} = \frac{by u_i' - bx v_i'}{u_i' v_i'' - u_i'' v_i'}$$

(4./2)

Substituyendo (2) en (1) se obtiene el vector buscado de dos maneras (con el mismo resultado).

5. Determinación de la orientación exterior de una cámara métrica (resección espacial).



Para el significado de la nomenclatura, consultar el capítulo 2.1. ó 4.

Relaciones fundamentales - necesarias:

$$\xi_i = \xi_{o'} + \lambda_i' p_i'$$

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{o'} \\ Y_{o'} \\ Z_{o'} \end{pmatrix} + \lambda_i' \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

- Planteamiento del problema: - dados: $X_i, Y_i, Z_i, x_i', y_i'$
 Coordenadas terrestres y fotográficas de por lo menos 3 puntos.
- buscados: la matriz de rotación A' con sus 3 parámetros (ángulos de giro ϕ, ω, k) y las coordenadas del centro de proyección $X_{o'}, Y_{o'}, Z_{o}'$.

En base a estas relaciones existe la siguiente coherencia entre las coordenadas de la foto y del terreno:

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_i'} \begin{pmatrix} X_i - X_0' \\ Y_i - Y_0' \\ Z_i - Z_0' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_i'} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_i - X_0' \\ Y_i - Y_0' \\ Z_i - Z_0' \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_i'} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0' \\ Y_i - Y_0' \\ Z_i - Z_0' \end{pmatrix}$$

La eliminación de λ_i' , se obtiene dividiendo las primeras dos -- igualdades entre la tercera. El resultado son las siguientes -- Ecuaciones de Colinealidad:

$$x_i' = -c \frac{a_{11}(X_i - X_0') + a_{12}(Y_i - Y_0') + a_{13}(Z_i - Z_0')}{a_{31}(X_i - X_0') + a_{32}(Y_i - Y_0') + a_{33}(Z_i - Z_0')}$$

$$y_i' = -c \frac{a_{21}(X_i - X_0') + a_{22}(Y_i - Y_0') + a_{23}(Z_i - Z_0')}{a_{31}(X_i - X_0') + a_{32}(Y_i - Y_0') + a_{33}(Z_i - Z_0')}$$

(5./1a)

a_{11} hasta a_{33} : coeficientes de la matriz de rotación elegida (por ej. para el WILD A7)

En esta matriz intervienen como incógnitas los siguientes parámetros independientes:

3 rotaciones w, ϕ, k

además las coordenadas terrestres del centro de toma

X_0', Y_0', Z_0'

Cada punto pase (X_i, Y_i, Z_i) origina 2 ecuaciones de colinealidad (o mejor dicho ecuaciones de errores de la colinealidad). Las coordenadas fotográficas de los puntos pase -- (x_i', y_i') . son valores medidos.

3 puntos de pase originan 6 ecuaciones. Por lo tanto para la -- solución de la resección espacial se necesita un mínimo de 3 -- puntos de pase. Debe notarse que estos puntos no están en una recta. Deben formar un triángulo, para que sea posible una solución (colinealidad).

(1) es un sistema de ecuaciones no lineales. Para resolver una resección espacial o una nivelación, en caso de que debido a un mayor número de puntos de pase se requieran ajustes, todavía se tiene que llevar a cabo una linealización según TAYLOR. Con ello se permiten cambios de las coordenadas de los puntos de pase (dx_i, dy_i, dz_i). Despreciando términos de grado mayor de la unidad se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x_i' &= (x_i')_0 + \frac{\partial x_i'}{\partial X_0'} dX_0' + \frac{\partial x_i'}{\partial Y_0'} dY_0' + \frac{\partial x_i'}{\partial Z_0'} dZ_0' \\
 &\quad + \frac{\partial x_i'}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial x_i'}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x_i'}{\partial k} dk + \\
 &\quad \left(+ \frac{\partial x_i'}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial x_i'}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial x_i'}{\partial z_i} dz_i \right) \\
 y_i' &= (y_i')_0 + \frac{\partial y_i'}{\partial X_0'} dX_0' + \frac{\partial y_i'}{\partial Y_0'} dY_0' + \frac{\partial y_i'}{\partial Z_0'} dZ_0' \\
 &\quad + \frac{\partial y_i'}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial y_i'}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y_i'}{\partial k} dk + \left(+ \frac{\partial y_i'}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial y_i'}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial y_i'}{\partial z_i} dz_i \right) \quad (5./2)
 \end{aligned}$$

La solución de las diferenciales se simplifica con ayuda del cálculo matricial (y dividiendo en submatrices). Se utilizan las siguientes matrices:

- Matriz de rotación y su traspuesta:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} ; \quad A^T = \begin{pmatrix} A_1^{*T} \\ A_2^{*T} \\ A_3^{*T} \end{pmatrix}$$

- Diferencias de coordenadas al centro de toma en el terreno.

$$B = \begin{pmatrix} x_i - x_0' \\ y_i - y_0' \\ z_i - z_0' \end{pmatrix}$$

- Coordenadas fotográficas.

$$C = \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

Entonces (1) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 x_i' &= -c \frac{A_1 B}{A_3 B} = \frac{1}{\lambda_i'} A_1 B \\
 y_i' &= -c \frac{A_2 B}{A_3 B} = \frac{1}{\lambda_i'} A_2 B
 \end{aligned}$$

Otra posibilidad, describir las coordenadas fotográficas como función de coordenadas terrestres, la da la notación por determinantes (1b) queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_i' & -c & \\ \hline A_1 B & A_3 B & = 0 \\ \hline \\ \hline y_i' & -c & \\ \hline A_2 B & A_3 B & = 0 \\ \hline \end{array} \quad (5./1c)$$

Para la tarea inversa (coordenadas terrestres como función de coordenadas fotográficas) se obtiene:

Notación de submatrices:

$$\begin{array}{|c|} \hline X_i - X_0' = (z_i - z_0') \frac{A_1^{*T} C}{A_3^{*T} C} = \lambda_i' A_1^{*T} C \\ \hline \\ \hline Y_i - Y_0' = (z_i - z_0') \frac{A_2^{*T} C}{A_3^{*T} C} = \lambda_i' A_2^{*T} C \\ \hline \end{array} \quad (5./3a)$$

Notación de determinantes:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline X_i - X_0' & z_i - z_0' & \\ \hline A_1^{*T} C & A_3^{*T} C & = 0 \\ \hline \\ \hline Y_i - Y_0' & z_i - z_0' & \\ \hline A_2^{*T} C & A_3^{*T} C & = 0 \\ \hline \end{array} \quad (5./3b)$$

Con estas fórmulas preparadas se obtiene para la linealización de (1) según TAYLOR (la aproximación calculada + la derivada - parcial con respecto a la incógnita multiplicada por las aproximaciones dif.) el siguiente sistema de fórmulas en notación de determinantes:

Ver el sistema de fórmulas en la pág. 74.

Diferencia con las ecuaciones linealizadas de (2):

Las coordenadas fotográficas se pasaron al lado derecho de la ecuación, de tal manera que en el lado derecho queda cero (debido al comportamiento especial de la notación por determinantes).

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ A_1 B & A_3 B \end{vmatrix} = 0 &= \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ (A_1 B) & (A_3 B) \end{vmatrix} \text{ genähert} + \\
 + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(A_1 \frac{\partial B}{\partial x_0'} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial x_0'} \right) & \end{vmatrix} d x_0' + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(A_1 \frac{\partial B}{\partial y_0'} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial y_0'} \right) & \end{vmatrix} d y_0' + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(A_1 \frac{\partial B}{\partial z_0'} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial z_0'} \right) & \end{vmatrix} d z_0' \\
 + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(\frac{\partial A_1}{\partial \omega} B \right) \left(\frac{\partial A_3}{\partial \omega} B \right) & \end{vmatrix} d \omega + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(\frac{\partial A_1}{\partial \phi} B \right) \left(\frac{\partial A_3}{\partial \phi} B \right) & \end{vmatrix} d \phi + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(\frac{\partial A_1}{\partial \kappa} B \right) \left(\frac{\partial A_3}{\partial \kappa} B \right) & \end{vmatrix} d \kappa \\
 + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(A_1 \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) & \end{vmatrix} d x_i + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(A_1 \frac{\partial B}{\partial y_i} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial y_i} \right) & \end{vmatrix} d y_i + \begin{vmatrix} x_i' & -c \\ \left(A_1 \frac{\partial B}{\partial z_i} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial z_i} \right) & \end{vmatrix} d z_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ A_2 B & A_3 B \end{vmatrix} = 0 &= \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ (A_2 B) & (A_3 B) \end{vmatrix} \text{ genähert} + \\
 + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(A_2 \frac{\partial B}{\partial x_0'} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial x_0'} \right) & \end{vmatrix} d x_0' + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(A_2 \frac{\partial B}{\partial y_0'} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial y_0'} \right) & \end{vmatrix} d y_0' + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(A_2 \frac{\partial B}{\partial z_0'} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial z_0'} \right) & \end{vmatrix} d z_0' \\
 + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(\frac{\partial A_2}{\partial \omega} B \right) \left(\frac{\partial A_3}{\partial \omega} B \right) & \end{vmatrix} d \omega + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(\frac{\partial A_2}{\partial \phi} B \right) \left(\frac{\partial A_3}{\partial \phi} B \right) & \end{vmatrix} d \phi + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(\frac{\partial A_2}{\partial \kappa} B \right) \left(\frac{\partial A_3}{\partial \kappa} B \right) & \end{vmatrix} d \kappa \\
 + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(A_2 \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial x_i} \right) & \end{vmatrix} d x_i + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(A_2 \frac{\partial B}{\partial y_i} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial y_i} \right) & \end{vmatrix} d y_i + \begin{vmatrix} y_i' & -c \\ \left(A_2 \frac{\partial B}{\partial z_i} \right) \left(A_3 \frac{\partial B}{\partial z_i} \right) & \end{vmatrix} d z_i
 \end{aligned}$$

Para el sistema de fórmulas de la pág. 74, las derivadas parciales con respecto a las incógnitas $X_i, Y_i, Z_i, X_0', Y_0', Z_0', w, \phi, \kappa$, son:

- Las derivadas del factor B (ver pág. 72) con respecto al sistema coordenado terrestre:

$$\frac{\partial B}{\partial X_0'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial B}{\partial Y_0'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial B}{\partial Z_0'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial B}{\partial Y_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial B}{\partial Z_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Las derivadas de la matriz A (ver pág. 72) rotación w :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial w} &= A_\kappa \cdot A_\phi \cdot \frac{\partial A_w}{\partial w} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin w & \cos w \\ 0 & -\cos w & -\sin w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin w \sin \kappa + \cos w \sin \phi \cos \kappa & \cos w \sin \kappa + \sin w \sin \phi \cos \kappa \\ 0 & -\sin w \cos \kappa - \cos w \sin \phi \sin \kappa & \cos w \cos \kappa - \sin w \sin \phi \sin \kappa \\ 0 & -\cos w \cos \phi & -\sin w \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_{13} & a_{12} \\ 0 & -a_{23} & a_{22} \\ 0 & -a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rotación ϕ

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \phi} &= A_\kappa \cdot \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \cdot A_w = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & \sin w \\ 0 & -\sin w & \cos w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \kappa & \sin w \cos \phi \cos \kappa & -\cos w \cos \phi \cos \kappa \\ +\sin \phi \sin \kappa & -\sin w \cos \phi \sin \kappa & \cos w \cos \phi \sin \kappa \\ \cos \phi & \sin w \sin \phi & -\cos w \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

rotación k

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial k} &= \frac{\partial A_u}{\partial k} \cdot \hat{A}_\phi \cdot A_\omega = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin k & \cos k & 0 \\ -\cos k & -\sin k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin k \cos \phi & \cos \omega \cos k - \sin \omega \sin k \sin \phi & \sin \omega \cos k + \cos \omega \sin k \sin \phi \\ -\cos k \cos \phi & -\cos \omega \sin k - \sin \omega \cos k \sin \phi & -\sin \omega \sin k + \cos \omega \cos k \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con la matriz de rotación A en la fórmula general:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se obtiene para cada uno de los términos:

$$A_1 \frac{\partial B}{\partial X_0'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_{11}$$

$$A_2 \frac{\partial B}{\partial X_0'} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_{21}$$

$$A_3 \frac{\partial B}{\partial X_0'} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_{31}$$

$$A_4 \frac{\partial B}{\partial Y_0'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_{12}$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial \omega} B = \begin{pmatrix} 0 & -a_{13} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0' \\ Y_i - Y_0' \\ Z_i - Z_0' \end{pmatrix} = -a_{13}(Y_i - Y_0') + a_{12}(Z_i - Z_0')$$

Substituidas en los coeficientes del desarrollo de Taylor se obtiene para cada uno de los miembros del sistema de fórmulas - pág. 74.

- para las fotocoordenadas x' :

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (A_1 \frac{\partial B}{\partial X_0'}) (A_3 \frac{\partial B}{\partial X_0'}) \end{array} \right| dX_0' = (-x_i' a_{31} - c a_{11}) dX_0'$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (A_1 \frac{\partial B}{\partial Y_0'}) (A_3 \frac{\partial B}{\partial Y_0'}) \end{array} \right| dY_0' = (-x_i' a_{32} - c a_{12}) dY_0'$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (A_1 \frac{\partial B}{\partial Z_0'}) (A_3 \frac{\partial B}{\partial Z_0'}) \end{array} \right| dZ_0' = (-x_i' a_{33} - c a_{13}) dZ_0'$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (\frac{\partial A_1}{\partial \omega} B) (\frac{\partial A_3}{\partial \omega} B) \end{array} \right| d\omega = \left[x_i' \left\{ -a_{33}(Y_i - Y_0') + a_{32}(Z_i - Z_0') \right\} + c \left\{ -a_{13}(Y_i - Y_0') + a_{12}(Z_i - Z_0') \right\} \right] d\omega$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (\frac{\partial A_1}{\partial \phi} B) (\frac{\partial A_3}{\partial \phi} B) \end{array} \right| d\phi = \left[x_i' \left\{ \cos \phi (X_i - X_0') + \sin \omega \sin \phi (Y_i - Y_0') - \cos \omega \sin \phi (Z_i - Z_0') \right\} + c \left\{ -\sin \phi \cos \omega (X_i - X_0') + \sin \omega \cos \phi \cos \omega (Y_i - Y_0') - \cos \omega \cos \phi \cos \omega (Z_i - Z_0') \right\} \right] d\phi$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (\frac{\partial A_1}{\partial \kappa} B) (\frac{\partial A_3}{\partial \kappa} B) \end{array} \right| d\kappa = \left[c \left\{ a_{21}(X_i - X_0') + a_{22}(Y_i - Y_0') + a_{23}(Z_i - Z_0') \right\} \right] d\kappa$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (A_1 \frac{\partial B}{\partial X_i'}) (A_3 \frac{\partial B}{\partial X_i'}) \end{array} \right| dX_i' = (x_i' a_{31} + c a_{11}) dX_i'$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (A_1 \frac{\partial B}{\partial Y_i'}) (A_3 \frac{\partial B}{\partial Y_i'}) \end{array} \right| dY_i' = (x_i' a_{32} + c a_{12}) dY_i'$$

$$\left| \begin{array}{c} x_i' - c \\ (A_1 \frac{\partial B}{\partial Z_i'}) (A_3 \frac{\partial B}{\partial Z_i'}) \end{array} \right| dZ_i' = (x_i' a_{33} + c a_{13}) dZ_i'$$

y - para las fotocoordenadas y'

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (A_2 \frac{\partial B}{\partial X_0'}) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (A_3 \frac{\partial B}{\partial X_0'}) \end{array} \left. \right| dX_0' = (-y_i' a_{31} - c a_{21}) dX_0'$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (A_2 \frac{\partial B}{\partial Y_0'}) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (A_3 \frac{\partial B}{\partial Y_0'}) \end{array} \left. \right| dY_0' = (-y_i' a_{32} - c a_{22}) dY_0'$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (A_2 \frac{\partial B}{\partial Z_0'}) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (A_3 \frac{\partial B}{\partial Z_0'}) \end{array} \left. \right| dZ_0' = (-y_i' a_{33} - c a_{23}) dZ_0'$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (\frac{\partial A_2}{\partial \omega} B) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (\frac{\partial A_3}{\partial \omega} B) \end{array} \left. \right| d\omega = \left[y_i' \left\{ -a_{33}(Y_i - Y_0') + a_{32}(Z_i - Z_0') \right\} + c \left\{ -a_{23}(Y_i - Y_0') + a_{22}(Z_i - Z_0') \right\} \right] d\omega$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (\frac{\partial A_2}{\partial \phi} B) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (\frac{\partial A_3}{\partial \phi} B) \end{array} \left. \right| d\phi = \left[y_i' \left\{ \cos \phi (X_i - X_0') + \sin \omega \sin \phi (Y_i - Y_0') - \cos \omega \sin \phi (Z_i - Z_0') \right\} + c \left\{ \sin \phi \sin \kappa (X_i - X_0') - \sin \omega \cos \phi \sin \kappa (Y_i - Y_0') + \cos \omega \cos \phi \sin \kappa (Z_i - Z_0') \right\} \right] d\phi$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (\frac{\partial A_2}{\partial \kappa} B) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (\frac{\partial A_3}{\partial \kappa} B) \end{array} \left. \right| d\kappa = \left[c \left\{ -a_{11}(X_i - X_0') - a_{12}(Y_i - Y_0') - a_{13}(Z_i - Z_0') \right\} \right] d\kappa$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (A_2 \frac{\partial B}{\partial X_i}) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (A_3 \frac{\partial B}{\partial X_i}) \end{array} \left. \right| dX_i = (y_i' a_{31} + c a_{21}) dX_i$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (A_2 \frac{\partial B}{\partial Y_i}) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (A_3 \frac{\partial B}{\partial Y_i}) \end{array} \left. \right| dY_i = (y_i' a_{32} + c a_{22}) dY_i$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i' \\ (A_2 \frac{\partial B}{\partial Z_i}) \end{array} \right| \begin{array}{l} -c \\ (A_3 \frac{\partial B}{\partial Z_i}) \end{array} \left. \right| dZ_i = (y_i' a_{33} + c a_{23}) dZ_i$$

Usando las fórmulas expuestas en las págs. 77 y 78, la solución de la "Resección Espacial" queda así:

- Datos: X_i, Y_i, Z_i para 3 puntos.
- aproximaciones: - para las coordenadas terrestres de los centros de proyección.
 $(X'_0) \quad (Y'_0) \quad (Z'_0)$
- para los giros:
 $w, \phi, k = 0$

Se miden las fotocoordenadas x'_i, y'_i de 3 puntos. A la vez con ayuda de las aproximaciones existe la posibilidad de calcular aproximaciones para las coordenadas fotográficas.

$$(x'_i)_0 = -c \frac{x_i - (X'_0)}{z_i - (Z'_0)}$$

$$(y'_i)_0 = -c \frac{y_i - (Y'_0)}{z_i - (Z'_0)}$$

Discrepancia entre el valor medido y el calculado:

$$d x'_i = (x'_i)_0 - x'_i$$

$$d y'_i = (y'_i)_0 - y'_i$$

Recopilación en el vector de observación L

, Ya se pueden establecer ecuaciones de residuos para los puntos $P_i, i = 1, 2, 3 \dots$ Sin embargo los coeficientes de los últimos dos lados deben antes dividirse entre $A_3 \cdot B$ (en base a la diferencia entre (2) y el paquete de fórmulas pág. 74).

Entonces se obtienen para el punto P_i las relaciones de la siguiente página, las cuales se pueden terminar con ayuda de cálculos matriciales (gran avance con respecto a los machotes; en los - Af ya no se trata de matrices de rotación, sino de submatrices de la matriz de coeficientes).

Ajuste de los errores para las fotocoordenadas x'

$$\boxed{V_{x_i'}} = -\frac{1}{A_3 B} \left[\begin{aligned} & (-x_i' a_{31} - c a_{11}) dX_0' + (-x_i' a_{32} - c a_{12}) dY_0' \\ & + (-x_i' a_{33} - c a_{13}) dZ_0' \\ & + [x_i' \{-a_{33}(Y_i - Y_0') + a_{32}(Z_i - Z_0')\} \\ & \quad + c \{-a_{13}(Y_i - Y_0') + a_{12}(Z_i - Z_0')\}] d\omega \\ & + [x_i' \{\cos \phi (X_i - X_0') + \sin \omega \sin \phi (Y_i - Y_0') \\ & \quad - \cos \omega \sin \phi (Z_i - Z_0')\} \\ & \quad + c \{-\sin \phi \cos \kappa (X_i - X_0') + \sin \omega \cos \phi \cos \kappa (Y_i - Y_0') \\ & \quad - \cos \omega \cos \phi \cos \kappa (Z_i - Z_0')\}] d\phi \\ & + [c \{a_{21}(X_i - X_0') + a_{22}(Y_i - Y_0') + a_{23}(Z_i - Z_0')\}] d\kappa \end{aligned} \right]$$

$A_3 X_1$

$$-\frac{1}{A_3 B} \left[\begin{aligned} & (x_i' a_{31} + c a_{11}) dX_i \\ & + (x_i' a_{32} + c a_{12}) dY_i \\ & + (x_i' a_{33} + c a_{13}) dZ_i \end{aligned} \right]$$

$A_2 X_2$

$$- \frac{(x_i'_{\text{gemessen}} - (x_i')_0)}{\text{beobachtete Richtung}}$$

L

(5./4a)

$$A_3 B = a_{31}(X_i - X_0') + a_{32}(Y_i - Y_0') + a_{33}(Z_i - Z_0')$$

Ajuste de los errores para las fotocoordenadas y'

$$\begin{aligned}
 \boxed{v_{y_i'}} &= -\frac{1}{A_3 B} \left[(-y_i' a_{31} - c a_{21}) dX_0' \right. \\
 &\quad + (-y_i' a_{32} - c a_{22}) dY_0' \\
 &\quad + (-y_i' a_{33} - c a_{23}) dZ_0' \\
 &\quad + \left[y_i' \left\{ -a_{33} (Y_i - Y_0') + a_{32} (Z_i - Z_0') \right\} \right. \\
 &\quad \quad \left. + c \left\{ -a_{23} (Y_i - Y_0') + a_{22} (Z_i - Z_0') \right\} \right] d\omega \\
 A_1 X_1 &\quad + \left[y_i' \left\{ \cos \phi (X_i - X_0') + \sin \omega \sin \phi (Y_i - Y_0') \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. - \cos \omega \sin \phi (Z_i - Z_0') \right\} \right. \\
 &\quad \quad \left. + c \left\{ \sin \phi \sin \omega (X_i - X_0') - \sin \omega \cos \phi \sin \omega (Y_i - Y_0') \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + \cos \omega \cos \phi \sin \omega (Z_i - Z_0') \right\} \right] d\phi \\
 &\quad \left. + \left[c \left\{ -a_{11} (X_i - X_0') - a_{12} (Y_i - Y_0') - a_{13} (Z_i - Z_0') \right\} \right] d\lambda \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{A_3 B} \left[(y_i' a_{31} + c a_{21}) dX_i \right. \\
 &\quad + (y_i' a_{32} + c a_{22}) dY_i \\
 &\quad \left. + (y_i' a_{33} + c a_{23}) dZ_i \right]
 \end{aligned}$$

 $A_2 X_2$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(y_i'_{\text{observada}} - (y_i')_0)}{L} \\
 &\quad L
 \end{aligned}$$

(5./4b)

Notas para precedentes:

- 1) Si nada más se dan 3 puntos de pase, y no se permiten cambios en las coordenadas de los puntos de pase, entonces se obtiene el siguiente algoritmo:

$$A_{1,6,6} \cdot X_{1,6,1} = L_{6,1}$$

se busca X_1

solución: (5./5a)

$$\boxed{X_1 = A_1^{-1} \cdot L}$$

La matriz de variancias - covariancias se obtiene con ayuda de la variancia de la unidad de peso determinada a-priori.

$$\boxed{[\sigma_{X_1}^2]} = \sigma_0^2 \cdot A_1^{-1} \quad (5.15b)$$

Este es el caso de la "Resección Espacial" sin observaciones redundantes.

2) Se tienen más de 3 puntos de pase.

Las dimensiones usadas son para el caso de 4 puntos de pase.

$$A_{1,6,8}^T \cdot A_{1,6,8} \cdot X_{1,6,8} = A_{1,6,8}^T \cdot L_{8,1}$$

solución: $\boxed{X_{1,6,8} = (A_{1,6,8}^T A_{1,6,8})^{-1} \cdot (A_{1,6,8}^T L)_{6,1}} \quad (5.16a)$

residuos: $V_{8,1} = A_{1,6,8} \cdot X_{1,6,8} - L_{8,1}$

variancias - covariancias:

$$\boxed{[\sigma_{X_1}^2]_{6,6} = \sigma_0^2 [A_{1,6,8}^T A_{1,6,8}]^{-1}} \quad (5.16b)$$

donde: $\sigma_0^2 = \frac{V_{1,2}^T \cdot V_{8,1}}{8 - 6}$

3) Los elementos de $A_2 X_2$ son nada más de interés en el ajuste de un mayor número de estaciones de exposición ("ajuste de estaciones múltiples"). Aquí se determinan las coordenadas tridimensionales del punto a partir no sólo de una fotografía. En un caso como ése se permiten cambios en las coordenadas de los puntos de pase en el caso de los incisos 1) y 2) se pueden dejar de tomar en cuenta.

4) Existe también la posibilidad de introducir correcciones, que se trataron en el capítulo 3.4, como parámetros adicionales. Aquí se debe contar con puntos de pase bien ajustados (matriz de rotación $A \neq 0$). Este es por ejemplo el caso en la calibración de una cámara métrica. Los parámetros adicionales se agrupan en el vector X_3 y (4) contiene el término adicional $A_3 X_3$.

$$\boxed{V = A_1 X_1 + (A_2 X_2) + A_3 X_3 - L} \quad (5.17)$$

Del capítulo 3 se toman los siguientes resultados:

- para la distorsión radial

$$\Delta x_1' = a_1 x_i' (r_i'^2 - r_0'^2) \quad ; \quad r_i' = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}$$

$$\Delta y_1' = a_1 y_i' (r_i'^2 - r_0'^2)$$

$$\Delta x_2' = a_2 x_i' (r_i'^5 - r_0'^5)$$

$$\Delta y_2' = a_2 y_i' (r_i'^5 - r_0'^5)$$

- distorsión asimétrica

$$\Delta x_3' = a_3 x_i' \cos 2\alpha + a_4 x_i' \sin 2\alpha$$

$$\Delta y_3' = a_3 y_i' \cos 2\alpha + a_4 y_i' \sin 2\alpha$$

- distorsión tangencial

$$\Delta x_4' = -b_3 y_i' \cos 2\alpha - b_4 y_i' \sin 2\alpha$$

$$\Delta y_4' = b_3 x_i' \cos 2\alpha + b_4 x_i' \sin 2\alpha$$

y - deformación de película

$$\Delta x_{0,5}' = -b_1 x_i'$$

$$\Delta y_{0,5}' = b_1 y_i' + b_2 x_i'$$

La corrección por refracción se suma a las observaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x_{iR}' &= x_i' \left(1 + \frac{r_i'^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\Delta \rho^0}{\rho} \\ \Delta y_{iR}' &= y_i' \left(1 + \frac{r_i'^2}{c^2} \right) \cdot \frac{\Delta \rho^0}{\rho} \end{aligned}} \quad (5./8)$$

Los coeficientes a_1, \dots, b_4 son los parámetros adicionales, - agrupados en el vector X_3 . Con ésto se introducen en las ecuaciones de errores (4a) y (4b) los siguientes términos

para (4a): v_{x_i}'

$$v_{x_i}' \equiv \begin{aligned} & (x_i' [r_i'^2 - r_0'^2]) a_1 + (x_i' [r_i'^5 - r_0'^5]) a_2 \\ & + (x_i' \cos 2\alpha) a_3 + (x_i' \sin 2\alpha) a_4 \\ & - x_i' \cdot b_1 - (y_i' \cos 2\alpha) b_3 - (y_i' \sin 2\alpha) b_4 \end{aligned} \quad A_3 X_3$$

y para (4b): $v_{y'}$

$$v_{y'} \equiv \boxed{\begin{aligned} & (y_i' [r_i'^2 - r_0'^2]) a_1 + (y_i' [r_i'^5 - r_0'^5]) a_2 \\ & + (y_i' \cos 2\alpha) a_3 + (y_i' \sin 2\alpha) a_4 \\ & + y_i' \cdot b_1 + x_i' \cdot b_2 + (x_i' \cos 2\alpha) b_3 + (x_i' \sin 2\alpha) b_4 \end{aligned}}$$

(5./8b)

(añadible todavía la corrección por refracción en el vector de observación (8))

6. Aerotriangulación sobre un mayor número de estaciones de toma.
- "Triangulación Aérea de Estaciones Múltiples" -

La Aerotriangulación se puede definir como un método fotogramétrico para determinar puntos (con ayuda de la resección espacial) con más de 2 fotografías (Schwidefsky/Ackermann). La solución del problema es idéntica con la reconstrucción tridimensional de la situación de toma para un mayor número de fotos, las cuales contienen algunos puntos de liga desconocidos. H. - SCHMID, ya planteó este problema de una triangulación sobre un mayor número de fotografías aéreas en 1957, así:

- a) valores medidos: coordenadas fotográficas de los puntos de pase, puntos de liga, etc.
b) se busca: coordenadas terrestres de esos puntos.
c) incógnitas: análogo al capítulo 5, se deben determinar los $p \cdot 6$ parámetros de orientación (p = número de fotografías aéreas).

fotografía aérea 1 $\omega^1, \phi^1, \kappa^1, X_0^1, Y_0^1, Z_0^1$
fotografía aérea 2 $\omega^2, \phi^2, \kappa^2, X_0^2, Y_0^2, Z_0^2$

fotografía aérea p: $\omega^p, \phi^p, \kappa^p, X_0^p, Y_0^p, Z_0^p$

adicionalmente intervienen las coordenadas de los puntos lliga como incógnitas.

Se trata aquí de un problema de ajuste. Debido a los valores medidos se tienen (a partir de un determinado número mínimo de puntos) sobredeterminaciones.

Cada coordenada fotográfica observada conduce a una ecuación de errores de la forma conocida en el capítulo 5. (5./4).

Debe añadirse que los puntos se midieron en diferentes fotografías (símbología para diferenciación de las fotografías: ', ', ', ..., (p))

Para las n- observaciones en los p- cuadros se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de error:

$$\boxed{V = A_1 X_1 + A_2 X_2 - L} \quad (6./1a)$$

Donde la nomenclatura significa:

V: residuos de las fotocoordenadas observadas.

$$V^T = (v_{x_1'} \quad v_{y_1'} \quad v_{x_2'} \quad v_{y_2'} \quad \dots \quad v_{x_n'} \quad v_{y_n'})$$

L: vector de los valores medidos.

$$L^T = (x_1' \quad y_1' \quad x_2' \quad y_2' \quad \dots \quad x_n' \quad y_n')$$

x₁: parámetros de orientación de las fotografías:

$$X_1^T = (dX_0' \quad dY_0' \quad dZ_0' \quad d\omega' \quad d\theta' \quad d\kappa' \quad dX_0'' \dots d\kappa'')$$

x₂: coordenadas terrestres desconocidas de los k - puntos de lliga:

$$X_2^T = (dX_1 \quad dY_1 \quad dZ_1 \quad dX_2 \quad \dots \quad dZ_k)$$

A₁: derivadas parciales de las coordenadas fotográficas con respecto a los parámetros de orientación (Cap. 5 pág. 77/78).

A₂: derivadas parciales con respecto a las coordenadas terrestres desconocidas.

número de incógnitas $u = 6p + 3k$

p -fotografías = $6p$ parámetros de orientación

k -puntos de liga = $3k$ parámetros de coordenadas.

número de las sobredeterminaciones: n observaciones.

$$\underline{f = n - u = n - (6p + 3k)} \quad (6./2)$$

Transformación de (1a) con ayuda del álgebra matricial:

$$\begin{array}{l} V = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} - L \\ V = A \cdot X - L \end{array} \quad (6./1b)$$

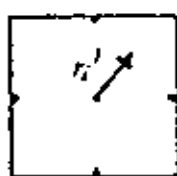
(1b) forma el punto de partida del algoritmo de ajuste. En este punto existen varias posibilidades de solución:

- 1) Si se considera (como usualmente), que las fotocoordenadas medidas no están correlacionadas y son de igual peso la solución queda así:

$$\begin{array}{l} X = (A^T A)^{-1} \cdot A^T L \\ \sigma_x^2 = (A^T A)^{-1} \cdot \sigma_0^2 \\ V = A_1 X_1 + A_2 X_2 - L \\ \sigma_0^2 = \frac{V^T V}{n - u} \end{array} \quad (6./3a)$$

incógnitas
variancia de las incógnitas.
residuos a las observaciones.
variancia de la unidad de peso.

- 2) Las observaciones tienen pesos diferentes.



HALLERT, por ejemplo, fija el peso como una función de la distancia al punto de intersección de las marcas fiduciales. Un punto en el centro tiene peso 1, en la orilla ($r_i' = 15\text{cm}$) 0.75 - función de peso calculada empíricamente -.

El camino de solución que entronca

$$P = f(r_i') = f(\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2})$$

en (1b) queda así:

$$\begin{array}{l} X = (A^T P A)^{-1} A^T P L \\ \sigma_x^2 = (A^T P A)^{-1} \cdot \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u} \end{array} \quad (6./3b)$$

- 3) Los valores medidos están correlacionados entre sí. Este es el caso por ejemplo en la observación estereoa de las coordenadas fotográficas en un estereocomparador. Aquí debe necesariamente establecerse la relación entre los valores observados independientes \bar{x}_i' , \bar{y}_i' , $\bar{p}\bar{x}_i'$, $\bar{p}\bar{y}_i'$ (los últimos valores son mediciones de paralaje) y los valores independientes x_i'' , y_i'' , x_i'' , y_i'' .

Ejemplo: para las fotocoordenadas debe cumplirse:

$$\begin{aligned} x_i' &= \bar{x}_i' & ; & \quad x_i'' = \bar{x}_i' + \bar{p}\bar{x}_i' \\ y_i' &= \bar{y}_i' & ; & \quad y_i'' = \bar{y}_i' + \bar{p}\bar{y}_i' \end{aligned}$$

esto se puede describir con ayuda de la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz de pesos se obtiene invirtiendo la matriz BB^T :

$$P = (BB^T)^{-1}$$

Y del método de solución siguiente:

$$\begin{aligned} X &= [A^T (BB^T)^{-1} A]^{-1} [A^T (BB^T)^{-1} L] \\ \sigma_{x^2} &= [A^T (BB^T)^{-1} A]^{-1} \cdot \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 &= \frac{V^T (BB^T)^{-1} V}{n - u} \quad (6./3c) \end{aligned}$$

Supuesto que: la inversión de $A^T (BB^T)^{-1} A$ sea posible; por consiguiente:

$$|A^T (BB^T)^{-1} A| \neq 0, \quad |BB^T| \neq 0$$

o con palabras: la orientación absoluta debe ser conocida de la siguiente manera:

7 parámetros (escala, centro de proyección y giros) son dados por ej. a través de puntos de pase.

¿cómo se puede realizar esto?

- Los parámetros correspondientes a los puntos de pase (por ej. $dx_2 \dots$) se igualan a cero. Las coordenadas fotográficas se afectan ahora por

parámetros de orientación; o dicho de otra manera: las coordenadas fotográficas se consideran libres de errores.

- se usan ecuaciones de observación adicionales para los puntos de pase:

$$\begin{array}{rcl} X_2 & = & x_2 + V_{x_2} \\ Y_2 & = & y_2 \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_2 & = & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

A estas ecuaciones se les asigna peso ∞ .

Con un ejemplo debe de quedar más claro el algoritmo solución. Las partes de las matrices ocupadas con elementos diferentes de cero se representa con hachuras:

Ejemplo: Se usan 8 fotografías con los puntos a, b, c, ... r, s, t de los cuales como puntos de pase: c, r, k, o.

c & r son conocidos en el plano y en cota

$$(X_c \ Y_c \ Z_c \quad X_r \ Y_r \ Z_r)$$

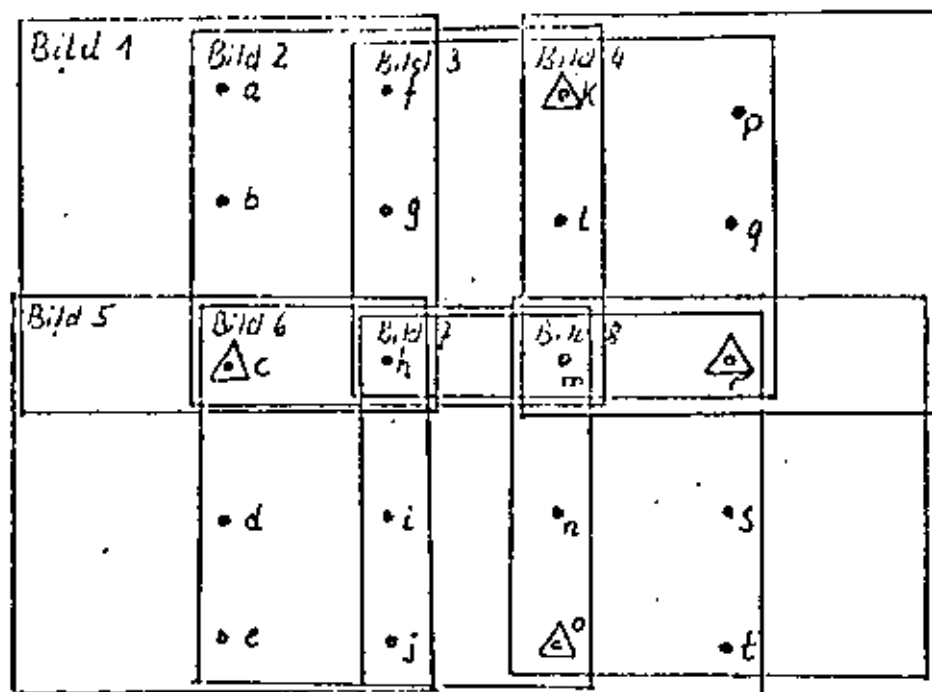
k & o son conocidos en cota

$$(Z_k \ Z_o)$$

(estas 8 coordenadas son suficientes, para determinar los 7 parámetros de la orientación absoluta: - sin embargo adicionalmente se considera a $X_k \ Y_k$ y $X_o \ Y_o$ como conocidos).

Las observaciones no son correlacionadas y tienen el mismo peso (caso 1). Para los casos 2) y 3) se obtienen esquemas similares (sólo que con otros valores numéricos).

Acomodo de las fotografias:



Se trata ahora de establecer el sistema de ecuaciones de los errores, y en la forma de la ecuación (1a):

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 - L$$

En las páginas 90 y 91 se presentan esas matrices gráficamente (los elementos diferentes a cero \llcorner), o sea

para las fotografias 1...4 pág. 90

para las fotografias 5...8 pág. 91

Las ecuaciones normales se obtienen mediante la fórmula:

$$(A^T A) X - A^T L = 0.$$

En las páginas 94...98 se muestran gráficamente las posibilidades de construcción del producto $A^T A$.

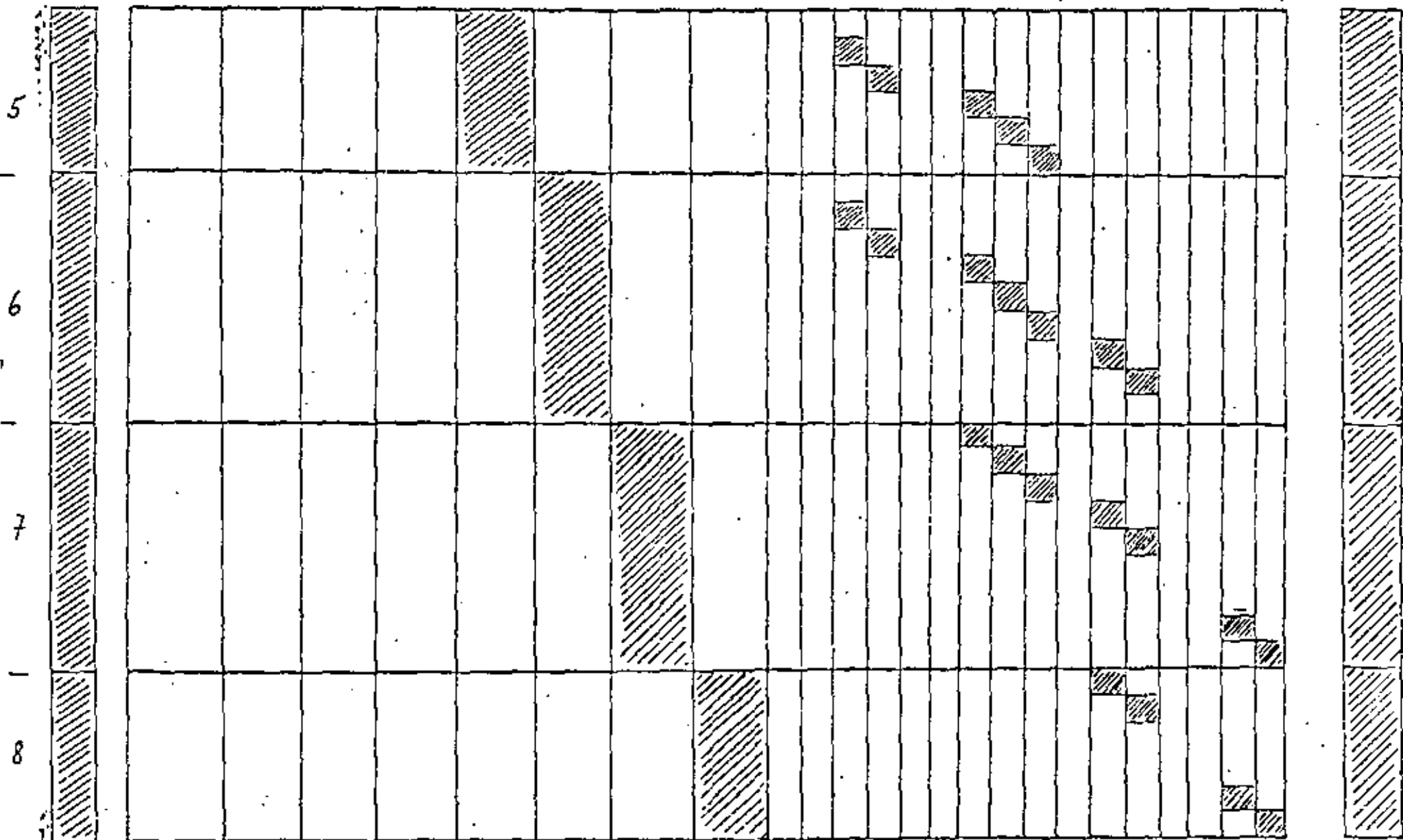
La dificultad consiste en el tamaño de la matriz de las ecuaciones normales la cual hay que invertir, y que además está ocupada en exceso con ceros. Una solución ventajosa de este problema es la descomposición de la matriz de las ecuaciones normales -- en submatrices (método de BOLTZ).

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 - l$$

| Bild | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Plat | a | b | d | e | f | g | h | i | j | L | m | n | p | q | s | t | |
|------|---------|---------|---------|---------|---|---|---|---|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| 1 | xyzaudv | | | | | | | | xyzaudv | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | xyzaudv | | | | | | | xyzaudv | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | xyzaudv | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | xyzaudv | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ecuaciones de error fotografias 1...4

Ecuaciones de error fotografías 5 ... 8



AcYoloWpR

... do/ol/ol/ol XP XYZ ...

... XYZ

1 7 3 4 5 6 7 8 P l a b d e f o b i l - n o c t

El sistema de ecuaciones se puede representar de la siguiente manera (con las relaciones de (1b)):

Matriz de ecuaciones normales:

$$N = \begin{array}{|cc|} \hline N_{11} & N_{12} \\ \hline N_{21} & N_{22} \\ \hline \end{array} \quad (6./4a)$$

Ecuaciones normales:

$$\begin{array}{|cc|} \hline N_{11} & N_{12} \\ \hline N_{21} & N_{22} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|cc|} \hline A_1 & A_2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline L_1 \\ \hline L_2 \\ \hline \end{array} = 0$$

Si se escogen las abreviaciones:

$$\boxed{A_1 L_1 = B_1 \quad ; \quad A_2 L_2 = B_2} \quad (6./4b)$$

Se obtienen las siguientes expresiones para las ecuaciones normales:

$$N_{11} X_1 + N_{12} X_2 = B_1$$

$$N_{21} X_1 + N_{22} X_2 = B_2$$

Despejando X_1 de la primera ecuación:

$$\boxed{X_1 = N_{11}^{-1} (B_1 - N_{12} X_2)} \quad (6./4c_2)$$

y substituyéndola en la segunda ecuación:

$$N_{21} N_{11}^{-1} (B_1 - N_{12} X_2) + N_{22} X_2 = B_2$$

$$N_{21} N_{11}^{-1} B_1 - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12} X_2 + N_{22} X_2 = B_2$$

se obtiene para el vector desconocido X_2 :

$$\boxed{X_2 = (N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})^{-1} (B_2 - N_{21} N_{11}^{-1} B_1)} \quad (6./4c_1)$$

Para las soluciones presentadas en (4a) hasta (4c) nada más se necesita:

- una inversión de N_{11}
- y - una inversión de $(N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})$

Los resultados restantes se obtienen por multiplicaciones matriciales sencillas.

N_{11} del ejemplo anterior se puede invertir sin dificultades. Se trata de una matriz diagonal, cuya diagonal principal está ocupada por matrices de 6×6 y cuya inversión no ocasiona problema. La 2a. inversión si es ya más difícil. De todas maneras hay que invertir una matriz de 44×48 (ver pág. 94). Pero contiene muchos elementos cero (submatrices cero, si se agrupan las coordenadas de los puntos o sea los parámetros de orientación de cada fotografía).

Se puede simplificar mucho el trabajo si la matriz a invertir se forma con una anchura de banda mínima.

Anchura de banda mínima significa que: de ser posible todos los elementos diferentes a cero deben colocarse lo más cerca posible a la diagonal principal. Este efecto se puede lograr mediante una selección hábil en el manejo de las fotografías y puntos.

A continuación se dan, del ej. de la pág. 88, diferentes posibilidades de manejo las cuales se representan en forma gráfica (Se trata, si es el caso de la matriz a invertir N).

Caso 1: Pág. 94

Aquí se muestra la matriz- N , la que proviene del sistema de la pág. 90/91.

Secuencia de la elaboración:

- primero las fotografías (incógnitas de la orientación) después los puntos (incógnitas de las coordenadas).
- las fotografías se trabajan a lo largo de la línea de vuelo, los puntos liga secuencialmente perpendiculares a las franjas.

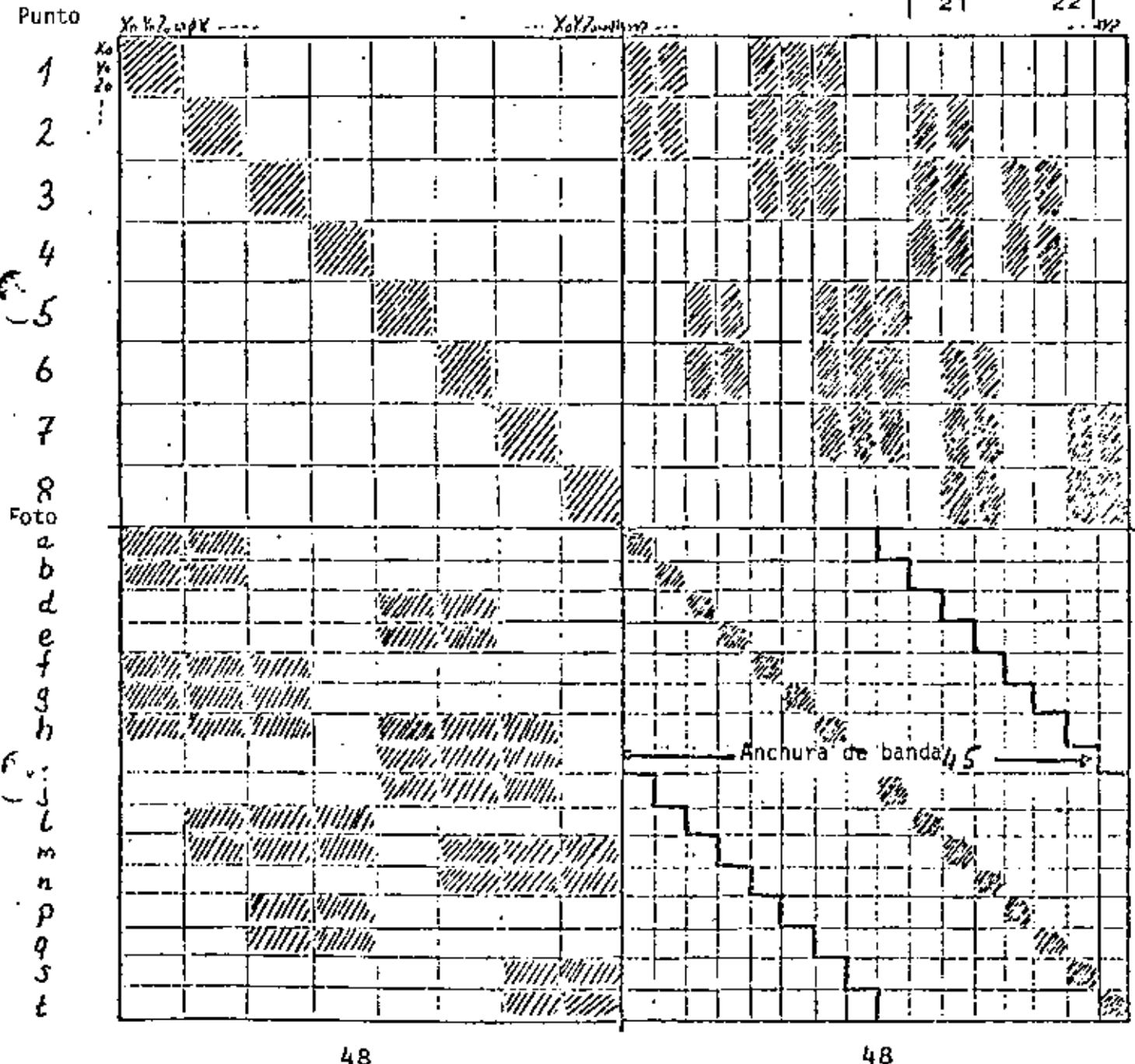
Resultado: N_{11} : Se tienen que invertir 8 submatrices de 6×6 en la diagonal principal (es posible sin problemas).


($N_{22} \dots$): hay que invertir una matriz de 48×48 con una anchura de banda de 45.

En la siguiente página se muestran en forma gráfica las matrices de ecuaciones normales N ; el correspondiente texto comienza de nuevo en la pág. 99.

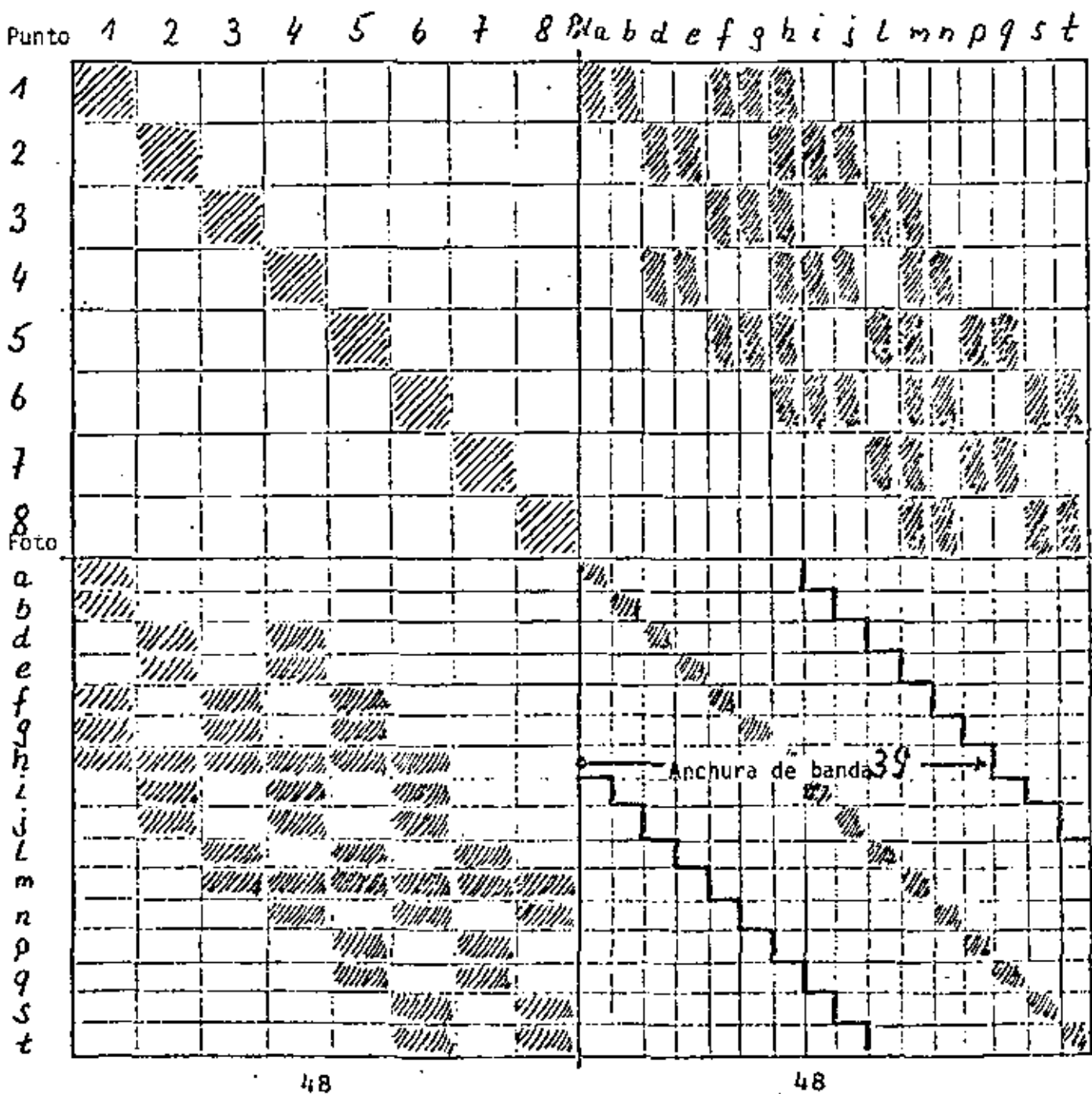
Caso 1: matriz de ecuaciones normales $N =$
 anchura de banda: 45.

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$



La línea  en N_{22} representa la anchura de banda de la matriz solución $(N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})$

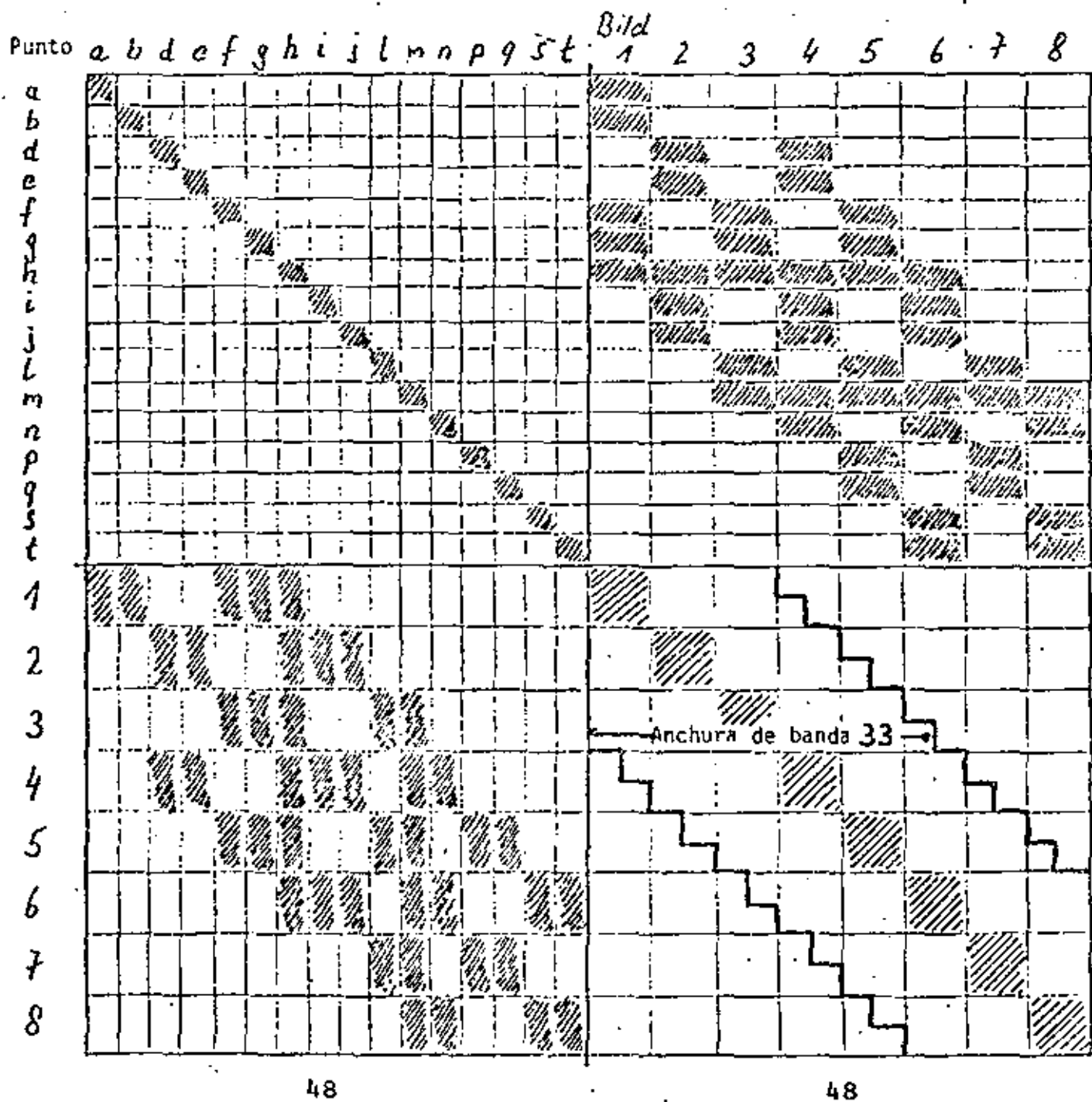
Caso 2: Matriz de ecuaciones normales N.
 Anchura de banda: 39.



Tómese nota de la observación de la pág. 94.

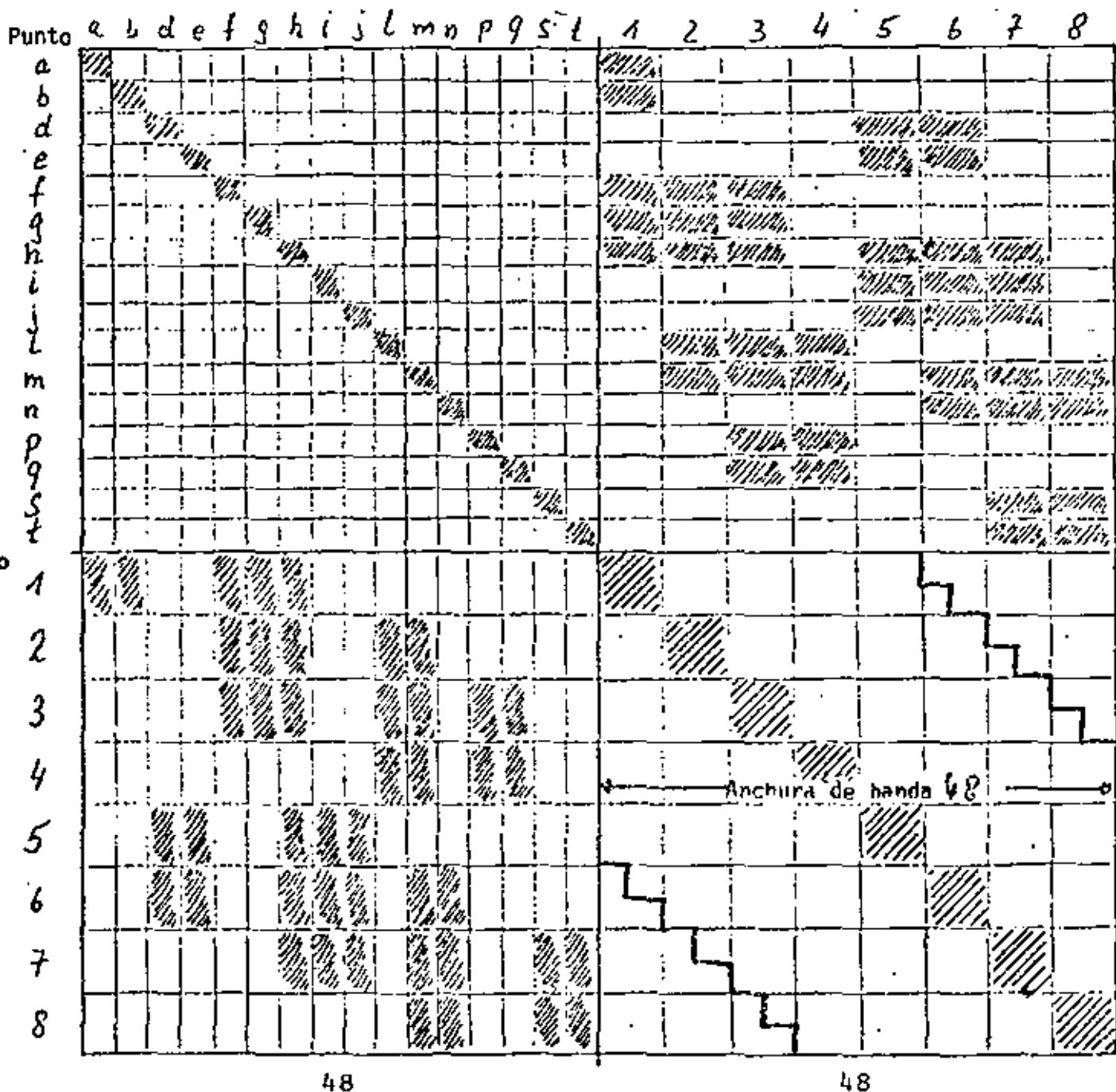
Caso 3: Matriz de ecuaciones normales N.

Anchura de banda: 33.



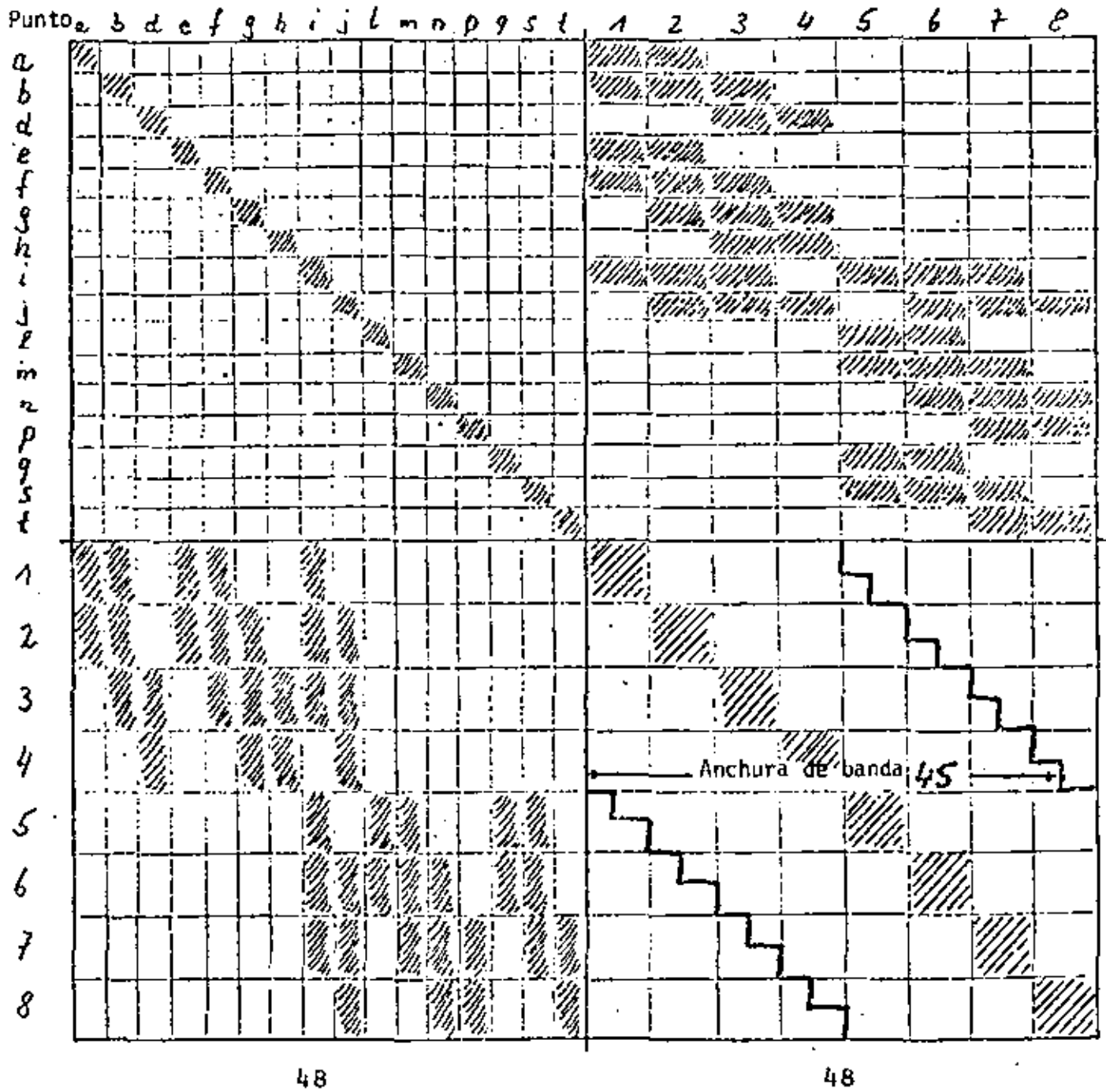
Tómese nota de la observación de la pág. 94.

Caso 4: Matriz de ecuaciones normales N.
 Anchura de banda: 48.



Tómese nota de la observación de la pág. 94.

Caso 5: Matriz de ecuación normal N.
 Anchura de banda: 45.



Tómese nota de la observación de la pág. 94.

Caso 2: página 95.

Secuencia de elaboración:

- primero las fotograffas.

- después los puntos.

Las fotograffas y los puntos se manejan en forma perpendicular a las franjas.

Resultado: N_{11} : 8 submatrices de 6x6 en la diagonal principal.

($N_{22} - \dots$) : Matriz de 48x48 con una anchura de banda de 39.

segundo mejor resultado

Caso 3: página 96.

Secuencia de elaboración:

- primero los puntos.

- después las fotograffas.

Los puntos y las fotografías se trabajan en forma perpendicular a las franjas.

Resultado: N_{11} : 16 submatrices de 3x3 en la diagonal principal.

($N_{22} - \dots$) : Matriz de 48x48 con una anchura de banda de 33.

DISTRIBUCION OPTIMA

Caso 4: página 97.

Secuencia de elaboración:

- primero los puntos.

- después las fotografías.

Los puntos se trabajan perpendicularmente a las franjas y las fotografías a lo largo de las franjas.

Resultado: N_{11} : 16 submatrices de 3x3 en la diagonal principal.

($N_{22} - \dots$) : Matrices de 48x48 con una anchura de banda de 48.

Caso 5: página 98.

Secuencia de elaboración:

- primero los puntos.
- después las fotografías.

Los puntos y las fotografías se trabajan a lo largo de las franjas.

Resultado: N_{11} : 16 submatrices de 3×3 en la diagonal principal.

($N_{22} - \dots$): Matriz de 48×48 con una anchura de banda de 45.

Resumen: Si se tienen en total más fotografías por franja que franjas (en nuestro ejemplo: 2 franjas con 4 fotografías cada una), el trabajo de puntos de liga y fotografías perpendiculares a la línea de vuelo da una matriz a invertir con la menor anchura de banda.

Después de que ésto fue determinado y que los correspondientes puntos/fotografías fueron trabajados, se plantea ahora el problema de la inversión de la matriz.

$$M = (N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12})$$

Ciertamente que se trata de la matriz con la anchura de banda más pequeña, sin embargo todavía tiene un tamaño considerable.

Observando más detalladamente a M se puede establecer que:

M se puede invertir con ayuda del Método de Partición Recurrente.

La ecuación de partida es (4c₁) en la forma:

$$(N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12}) \cdot X_2 = B_2 - N_{21} N_{11}^{-1} B_1$$

$$\underline{M} \cdot \underline{Y} = \underline{C}$$

Dividiendo en submatrices se obtiene el siguiente cuadro para M:

| | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| M_{11} | M_{12} | 0 | 0 |
| M_{21} | M_{22} | M_{23} | 0 |
| 0 | M_{32} | M_{33} | M_{3n} |
| 0 | 0 | M_{n3} | M_{nn} |

Anchura de banda: submatriz
la diagonal principal
+ matrices diferentes a cero
del triángulo superior
(Número de divisiones si
es el caso)

Mediante la ordenación simultánea de submatrices en Y o bien C se obtienen las siguientes ecuaciones en la solución:

$$\underline{C}^T = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots \end{vmatrix}$$

$$\underline{Y}^T = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 & \dots \end{vmatrix}$$

$$M_{11} Y_1 + M_{12} Y_2 = C_1$$

$$M_{21} Y_1 + M_{22} Y_2 + M_{23} Y_3 + \dots = C_2$$

$$M_{32} Y_2 + M_{33} Y_3 + \dots = C_3$$

...

....

Despejando las incógnitas (a continuación a manera de ejemplo se divide $Y = X_2$ en 3 bloques parciales) da:

$$Y_1 = M_{11}^{-1} (C_1 - M_{12} Y_2)$$

(6.15a)

$$M_{21} M_{11}^{-1} (C_1 - M_{12} Y_2) + M_{22} Y_2 + M_{23} Y_3 = C_2$$

$$Y_2 = (M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12})^{-1} (C_2 - M_{21} M_{11}^{-1} C_1 - M_{23} Y_3)$$

$$M_{32} (M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12})^{-1} (C_2 - M_{21} M_{11}^{-1} C_1 - M_{23} Y_3) + M_{33} Y_3 = C_3$$

$$Y_3 = (M_{33} - M_{32} (M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12})^{-1} M_{23})^{-1} (C_3 - M_{32} (M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12})^{-1} (C_2 - M_{21} M_{11}^{-1} C_1))$$

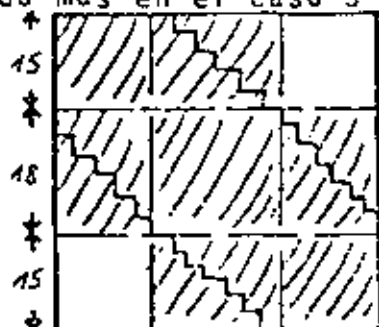
A la numeración (5a) - (5c) siguiente primero debe calcularse \underline{Y}_3 , después substituirlo en \underline{Y}_2 y finalmente incluir \underline{Y}_2 en \underline{Y}_1 .

La inversión más grande a realizar tiene ahora la dimensión de \underline{M}_{11} , \underline{M}_{22} o \underline{M}_{33} . Seria ventajoso si M_{11} , M_{22} y M_{33} tienen más o menos la misma dimensión.

El método de partición se puede aplicar solamente que se cumpla que:

La anchura de banda $\leq \frac{2}{3}$ de tamaño de la matriz.

Nada más en el caso 3 (pág. 96) se cumple esta condición.



La aplicación del algoritmo lleva a la inversión de una matriz de un máximo de 18x18

Para el ajuste de bloques mayores es especialmente útil este método.

Ejemplo: un bloque de 100 fotografías.

60% traslape frontal (a lo largo de la dirección de vuelo)

30% traslape lateral

En este caso se tienen 600 incógnitas de orientación y más ó menos 600 coordenadas incógnitas.

(200 puntos)

O sea se necesitan 1800 observaciones para x' y y' . Con esto tiene la matriz de coeficientes A una dimensión de 1800x1200. Cada observación nada más deja 9 elementos "diferentes a cero". para la matriz A : 3 para los puntos y 6 para los parámetros de orientación (ver esquema pág. 91/92). Los A -elementos restantes son cero:

\sim 1% de todos los coeficientes de A son diferentes a cero. En el cálculo de $A^T A$ son nada más el

0.1% de las multiplicaciones $\neq 0$

El resto de 999.9 % originan operaciones nulas. Por eso no tiene sentido realizar una partición.

Ahorra una memoria y aumenta la velocidad de operación.

¿Cómo se debe proseguir?

A continuación se debe ordenar el sistema de partida de tal forma, que se tengan matrices simétricas. Los elementos de la matriz debajo de la diagonal principal en este caso - no requieren ser almacenados en memoria.

Como 2o. paso se numeran los puntos y las fotografías en -- forma óptima (ver caso 3). En el caso ideal 6 puntos por mo delo, se obtiene con 2 franjas de vuelo una anchura de banda "mitad" de 18, con 3 bandas de 24. La anchura de banda - "mitad" se obtiene mediante:

$$\text{Anchura de banda "mitad"} = (\text{Número de bandas} + 1) \times 6$$

La anchura de banda "completa" (hasta ahora, nada más llamada anchura de banda) se obtiene en el caso ideal:

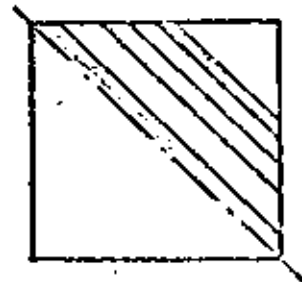
$$\text{para 2 bandas. } 2 \times 18 - 3 = 33$$

$$\text{para 3 bandas } 2 \times 24 - 3 = 45$$

⋮
⋮
⋮
etc

$$\text{Anchura de banda total} = 2 \times (\text{número de bandas} + 1) \times 6 - 3$$

Con más bandas existen junto a las diagonales principales otras 2 bandas laterales:



La magnitud arriba descrita como anchura de banda "mitad" - indica en forma aproximada el máximo tamaño de la matriz que puede usarse como Unidad para la partición: por lo tanto se tiene que invertir una matriz con esa dimensión. En un ajuste simultáneo de 3 franjas se tiene por tanto que invertir una matriz máxima de 24x24. En el caso de un mayor número de franjas (o sea más) no tiene sentido seguir subdividiendo. Para este problema: ver Jordan - Eggert - Kneissl

Tomo III, A3, Aerotriangulación.

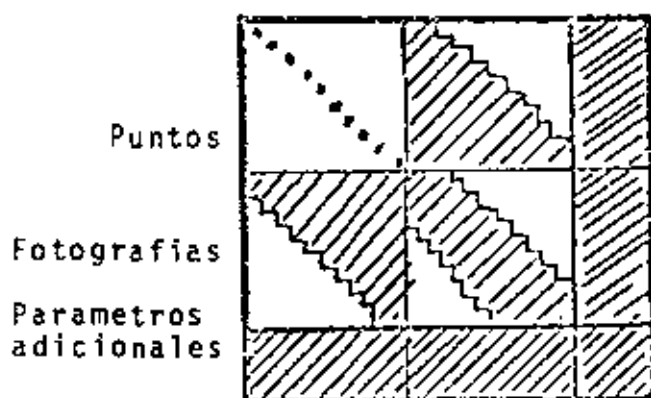
o bien los reportes de Simposios, etc.

7. Ajuste de bloque con parámetros adicionales.

Al igual que en el capítulo 5 se pueden incluir parámetros adicionales (presentados en el cap. 3.4) en el ajuste. Las ecuaciones de residuos quedan análogas a (5.17):

$$V = A_2 X_2 + A_1 X_1 + A_3 X_3 - L \quad (7.1)$$

En la formación de la Matriz-A (y como resultado de ella: la matriz de ecuaciones normales) se deben suponer las condiciones del capítulo anterior en la reducción de $A_2 X_2 + A_1 X_1$. Los términos $A_3 X_3$ son sin embargo influidos por cada punto y cada fotografía. Por eso deberían ser reducidos al final. La matriz de ecuaciones normales tiene entonces esquemáticamente la siguiente forma:



La reducción de los parámetros adicionales puede ahora llevarse a cabo en un solo paso. El peligro que existe es que los puntos de liga estén colocados incorrectamente (por ej. muy pocos puntos en la zona de traslape).

El determinante de A se tiende a cero, la inversión lleva a un resultado no muy confiable.

Es más sencillo, posteriormente considerar nada más 4 correcciones. Estos se prueban mediante $V^T P V$, antes de considerar los parámetros restantes (Ajuste por etapas).

8. Ajuste de bloque con condiciones adicionales.

Mientras que en el capítulo 7 se trata de parámetros, los cuales se colocaron como correcciones en las fotocoordenadas, -- ahora se consideran como observaciones adicionales.

Se consideran como observaciones adicionales con un correspondiente peso (determinado por σ^2_{obs})

bibliografía: Jordan-Eggert-NkeiBl III, A3 pág. 132,3.

Algunas posibilidades para una condición así, puede ser:

a) Valores absolutos para los parámetros de orientación.

Estos valores se obtiene con ayuda de aparatos de navegación.

Ejemplo: X'_0 Y'_0 con AERODIST

Z'_0 con ALTIMETRO-LASER

ϕ' ω' κ' con PLATAFORMA DE SOPORTE

bibliografía: JEK III, A1.

b) Diferencias de parámetros de orientación de dos centros de proyección.

$$\Delta \phi = \phi'' - \phi' \quad \text{Cámara de horizonte}$$

$$\Delta \omega = \omega'' - \omega'$$

$$\Delta \kappa = \kappa'' - \kappa'$$

$$z_0'' - z_0' = \Delta b_z \quad \text{Estatóscopo}$$

$$x_0'' - x_0' = \Delta b_x \quad \text{Aerodist}$$

$$y_0'' - y_0' = \Delta b_y$$

bibliografía: JEK III, A1 y A3

c) Diferencias planimétricas y altimétricas.

$$z_2 - z_1 = \Delta z_{12} \quad \text{Alturas de radar}$$

$$\Delta z_{12} = 0$$

(Registrador de perfiles aéreo sustentado, et

Alturas sobre el nivel del mar

$$\Delta d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancias tridimensionales medidas con instrumentos

bibliografía: JEK III, A1 y A3

Informe de la comisión (3) IGP.

d) coordenadas terrestres de los puntos de pase,

Ecuaciones de error:

$$X_i = X_{igem} + V_{x_i}$$

$$Y_i = Y_{igem} + V_{y_i}$$

$$Z_i = Z_{igem} + V_{z_i}$$

El algoritmo de ajuste para estas condiciones adicionales queda así:

$$AX - L = V \quad \text{mit } P_1$$

$$BX - C = W \quad \text{mit } P_2$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A' ; \quad \begin{pmatrix} L \\ C \end{pmatrix} = L' ; \quad \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = V'$$

$$A'X - L' = V'$$

$$X = (A'^T P A')^{-1} A'^T P L' ; \quad \sigma_X^2 = \sigma_0^2 (A'^T P A')^{-1} \quad (8./1)$$

Los pesos para las condiciones (P_2) incluidos en el ajuste deberían probarse mediante un FISHER-test. Para ello se compara la anteriormente incluida variancia $\sigma_{X_i}^2$ con el valor obtenido después del ajuste. Esto se hace para cada uno de los grupos de condiciones.

Valor del FISHER-test: $\frac{\sigma_{X_i}^2 \text{ vor}}{\sigma_{X_i}^2 \text{ nach}}$ (debería acercarse a 1)

La importancia de las desviaciones puede ser probada con ayuda del χ^2 -test. Si no se lleva a cabo ningún test, entonces debe hacerse otro ajuste con pesos mejor aproximados (por ej. valores tomados de la matriz de covariancias).

Las bases del capítulo 6,ff ya habían sido presentadas por H. Schmid en 1957 (publicados en PHOTOGRAMMETRIA 1957).

La inclusión de observaciones terrestres y de ecuaciones de observación adicionales en un ajuste simultáneo vino años después (por ej. Krauss, Bildmessung und Luftbildwesen, "Tramos entre puntos en un modelo" - Wong, Photogr. Engineering, "Tramos entre puntos en modelos diferentes" - Reducción de la anchura de banda, etc.)

La desventaja de este método de ajuste consiste en que las -- aproximaciones para todas las coordenadas de los puntos y para todos los otros parámetros deben ser conocidos (una desventaja en todos los cálculos de ajuste no lineales). Entre mejor sean las aproximaciones menor número de iteraciones son necesarias (- se debe iterar a pesar de la linealización-) Un método de prueba posible, para determinar si se requiere otra iteración, está dado por:

$$\left| [V^T P V]_n - [V^T P V]_{n-1} \right| > .5\% \text{ von } [V^T P V]_n$$

Por solución directa (según GAUSS, CHOLESKY, etc.) más o menos 3... 5 iteraciones.

$$\left| [V^T P V]_n - [V^T P V]_{n-1} \right| > 0,1\% \text{ von } [V^T P V]$$

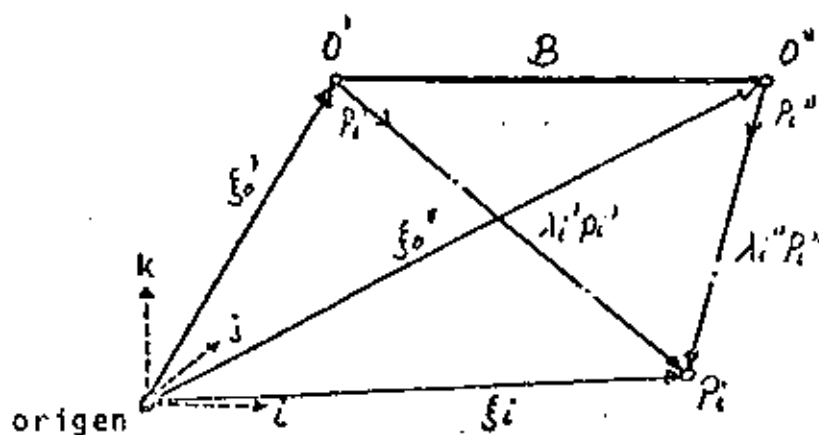
mediante la aplicación del método de iteraciones de GAUSS - SEIDEL.

9. Orientación Relativa.

Se conoce también como Orientación recíproca.

A. Planteamiento del problema en general.

Suposición: la orientación interior es conocida.



Mediante la Orientación Relativa se giran los haces de rayos en \$O'\$ y \$O''\$ de tal manera que tengan la misma posición que al ser tomadas las fotografías. Los puntos tridimensionales se-

originan entonces por intersecciones tridimensionales. Este método es, a diferencia del capítulo 6 independiente del conocimiento de los componentes del vector ξ_i (coordenadas del punto). Basados en SCHUT 1956 la solución queda así:

Para el vector tridimensional al punto P_i se cumple la siguiente relación (4./1):

$$\xi_i = \xi_0' + \lambda_i' \rho_i' = \xi_0'' + \lambda_i'' \rho_i''$$

$$\underbrace{\xi_0'' - \xi_0'}_B + \lambda_i'' \rho_i'' - \lambda_i' \rho_i' = 0$$

Los 3 vectores ρ_i' , ρ_i'' , B están contenidos en un plano (coplanar). Por lo tanto el producto punto da cero (el volumen del tetraedro).

$$B \times \rho_i' \cdot \rho_i'' = 0$$

(9./1)

CONDICION DE COPLANARIDAD

En este problema se tienen 2 parámetros (λ_i' , λ_i'') y una condición (1).

Otras maneras de escribir (1), es con ayuda de:

- vectores mediante sus componentes.

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} = 0$$

(9./1a)

- el determinante.

$$\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i' & v_i' & w_i' \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \end{vmatrix} = 0$$

(9./1b)

o - aplicando el cálculo de RODRIGUEZ (Consultar Buchholtz/Ruger, Photogrammetrie: Representación de las relaciones proyectivas entre la foto y el espacio tridimensional).

$$\begin{pmatrix} u_i'' & v_i'' & w_i'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = 0$$

(9./1c)

La igualdad de las fórmulas (1a) hasta (1c) se puede demostrar efectuando las multiplicaciones.

La división de (1c) entre b_x da:

$$(u_i'' \ v_i'' \ w_i'') \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b_z}{b_x} & \frac{b_y}{b_x} \\ \frac{b_z}{b_x} & 0 & -1 \\ \frac{b_y}{b_x} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = 0$$

donde se cumple:

$$b_x = X_0'' - X_0', \quad b_y = Y_0'' - Y_0', \quad b_z = Z_0'' - Z_0'$$

De la solución de este sistema se obtienen 12 términos, los cuales se pueden escribir fácilmente como un determinante de 4o. orden:

$$\begin{vmatrix} u_i' & v_i' & w_i' & 1 \\ X_0' & Y_0' & Z_0' & 1 \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' & 1 \\ X_0'' & Y_0'' & Z_0'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La solución según las reglas para determinantes lleva a la siguiente igualdad (con determinantes de 3er. orden más sencillos)

$$0 = 1 \cdot \begin{vmatrix} X_0' & Y_0' & Z_0' \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ X_0'' & Y_0'' & Z_0'' \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} u_i' & v_i' & w_i' \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ X_0'' & Y_0'' & Z_0'' \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} u_i' & v_i' & w_i' \\ X_0' & Y_0' & Z_0' \\ X_0'' & Y_0'' & Z_0'' \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} u_i' & v_i' & w_i' \\ X_0' & Y_0' & Z_0' \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \end{vmatrix}$$

En la forma vectorial:

$$0 = \xi_0' \times \rho'' \xi_0'' - \rho_i' \times \rho_i'' \xi_0'' + \rho_i' \times \xi_0' \cdot \xi_0'' - \rho_i' \times \xi_0' \cdot \rho_i''$$

Las últimas dos igualdades están integradas por 4 términos independientes y el postulado, la suma da cero. O sea que se tiene que manejar 5 magnitudes independientes.

Otra posibilidad para aclarar el número de magnitudes independientes en la orientación relativa está dada mediante el siguiente razonamiento.

2 x 9 = 18 parámetros

para las orientaciones interior y exterior, desconocidas, de un par de fotos.

de allí 2 x 3 = 6 parámetros

para la orientación interior de un par fotográfico.

12 parámetros como resta

La orientación exterior (12 parámetros) se compone de la -- orientación relativa y absoluta. La orientación absoluta es un estiramiento y giro tridimensional (1 parámetro de esca- la, 3 de giro y 3 de traslación).

Para la orientación relativa sobran entonces 5 parámetros in- dependientes (ver JEK III, A1). Estos 5 parámetros se pueden escoger de todos los posibles. Se podría tratar de by, bz, - ui", vi", wi", donde las 3 últimas son funciones de los ángu- los de giro φ, ω, κ. Según (2.1./3) se cumple que:

$$\begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} = A''^T \begin{pmatrix} x_i'' \\ y_i'' \\ -c \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = A'^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

B. Linealización de la ecuación de partida.

Se podría haber partido de cualquiera de las ecuaciones (1...) Se utiliza la ecuación de determinantes (1b) y se deriva con - respecto a los 5 elementos desconocidos (by, bz, ui", vi", wi") Se obtiene:

| |
|--|
| $0 = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ u_i' & v_i' & w_i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ u_i' & v_i' & w_i' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & db_y & db_z \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ u_i' & v_i' & w_i' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \\ du_i' & dv_i' & dw_i' \end{vmatrix}$ <p style="text-align: right; margin-right: 50px;">(y./2a)</p> |
|--|

| | | |
|-----------|--------------|--|
| Condición | Aproximación | Derivación con respecto a las incógnitas |
|-----------|--------------|--|

Aquí no se tomó en cuenta que u", v", w" son funciones de los - ángulos de giro φ, ω, κ. El 2o. término de la derivada aún tie- ne que especificarse.

Se obtiene como forma general de la derivada:

$$\begin{aligned}
 0 = & \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i' & v_i' & w_i' \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_i' & u_i' \\ w_i'' & u_i'' \end{vmatrix} db_y + \begin{vmatrix} u_i' & v_i' \\ u_i'' & v_i'' \end{vmatrix} db_z + \\
 & + \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i' & v_i' & w_i' \\ \frac{\partial u_i''}{\partial k} & \frac{\partial v_i''}{\partial k} & \frac{\partial w_i''}{\partial k} \end{vmatrix} dk + \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i' & v_i' & w_i' \\ \frac{\partial u_i''}{\partial \phi} & \frac{\partial v_i''}{\partial \phi} & \frac{\partial w_i''}{\partial \phi} \end{vmatrix} d\phi + \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u_i' & v_i' & w_i' \\ \frac{\partial u_i''}{\partial \omega} & \frac{\partial v_i''}{\partial \omega} & \frac{\partial w_i''}{\partial \omega} \end{vmatrix} d\omega \quad (9./2b)
 \end{aligned}$$

A continuación se deben determinar los coeficientes diferenciales en esta fórmula:

- Determinación de la derivada parcial con respecto a los ángulos de giro. Existe la siguiente relación entre u_i'' , v_i'' , w_i'' y las coordenadas fotográficas.

$$\begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}'' & a_{21}'' & a_{31}'' \\ a_{12}'' & a_{22}'' & a_{32}'' \\ a_{13}'' & a_{23}'' & a_{33}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i'' \\ y_i'' \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ A_3^T \end{pmatrix} \cdot C$$

Las derivadas parciales se pueden expresar con ayuda de las submatrices así:

$$\frac{\partial u_i''}{\partial k} = \frac{\partial A_1^{*T}}{\partial k} \cdot C$$

$$\frac{\partial v_i''}{\partial k} = \frac{\partial A_2^{*T}}{\partial k} \cdot C$$

$$\frac{\partial w_i''}{\partial k} = \frac{\partial A_3^{*T}}{\partial k} \cdot C$$

Ahora se utiliza una matriz de giro especial (indicada por: *) y se forman las derivadas con respecto a ω , ϕ , k .

$$A^{*T} = A_\omega^T \cdot A_\phi^T \cdot A_k^T = \begin{pmatrix} A_1^{*T} \\ A_2^{*T} \\ A_3^{*T} \end{pmatrix}$$

Derivación con respecto a k:

$$\frac{\partial A^{*T}}{\partial k} = A_{\omega}^T \cdot A_{\phi}^T \cdot \frac{\partial A_k^T}{\partial k} = \begin{pmatrix} a_{21} & -a_{11} & 0 \\ a_{22} & -a_{12} & 0 \\ a_{23} & -a_{13} & 0 \end{pmatrix}$$

Derivación con respecto a phi:

$$\frac{\partial A^{*T}}{\partial \phi} = A_{\omega}^T \cdot \frac{\partial A_{\phi}^T}{\partial \phi} \cdot A_k^T = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \kappa & \sin \phi \sin \kappa & \cos \phi \\ \sin \omega \cos \phi \cos \kappa & -\sin \omega \cos \phi \sin \kappa & \sin \omega \sin \phi \\ -\cos \omega \cos \phi \cos \kappa & \cos \omega \cos \phi \sin \kappa & -\cos \omega \sin \phi \end{pmatrix}$$

Derivación con respecto a w:

$$\frac{\partial A^{*T}}{\partial \omega} = \frac{\partial A_{\omega}^T}{\partial \omega} \cdot A_{\phi}^T \cdot A_k^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Substituyendo en las expresiones de submatrices se obtienen finalmente las diferenciales:

| | |
|--|--------|
| $\frac{\partial u_i''}{\partial k} = a_{21} \cdot x_i'' - a_{11} \cdot y_i''$ | |
| $\frac{\partial v_i''}{\partial k} = a_{22} \cdot x_i'' - a_{12} \cdot y_i''$ | |
| $\frac{\partial w_i''}{\partial k} = a_{23} \cdot x_i'' - a_{13} \cdot y_i''$ | |
| $\frac{\partial u_i''}{\partial \phi} = -\sin \phi \cos \kappa \cdot x_i'' + \sin \phi \sin \kappa \cdot y_i'' - \cos \phi \cdot c$ | |
| $\frac{\partial v_i''}{\partial \phi} = x_i'' \cdot \sin \omega \cos \phi \cos \kappa - y_i'' \sin \omega \cos \phi \sin \kappa - c \cdot \sin \omega \sin \phi$ | |
| $\frac{\partial w_i''}{\partial \phi} = -x_i'' \cos \omega \cos \phi \cos \kappa + y_i'' \cos \omega \cos \phi \sin \kappa + c \cos \omega \sin \phi$ | |
| $\frac{\partial u_i''}{\partial \omega} = 0$ | (9.13) |
| $\frac{\partial v_i''}{\partial \omega} = -x_i'' a_{13} - y_i'' a_{23} + c \cdot a_{33}$ | |
| $\frac{\partial w_i''}{\partial \omega} = x_i'' \cdot a_{12} + y_i'' a_{22} - c \cdot a_{32}$ | |

Las 5 incógnitas db_y , db_z , dk , $d\phi$, $d\omega$ se pueden determinar mediante 5 ecuaciones semejantes (ecuación (2) en combinación con (3)). Ya que se llevó a cabo una linealización, se debe iterar. Después de cada iteración se deben recalcular todos los coeficientes. Los residuos de los parámetros se calculan a continuación mediante:

$$\begin{aligned} Y_0'' &= (Y_0')_{gen.} + db_y \\ Z_0'' &= (Z_0')_{gen.} + db_z \\ K'' &= (K_0')_{gen.} + dk \\ \phi'' &= (\phi_0')_{gen.} + d\phi \\ \omega'' &= (\omega_0')_{gen.} + d\omega \end{aligned} \quad (9./4)$$

A estas alturas ya se ve que es posible un ajuste. Este problema se aborda posteriormente.

C. Simplificación mediante el uso de nuevos ejes de rotación después de cada iteración (método de SCHUT).

Se trata de un método con ejes que participan en el giro. Esto conduce en el siguiente algoritmo de solución a algunas simplificaciones.

SCHUT utiliza como 1a. aproximación:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_i'' \\ \bar{v}_i'' \\ \bar{w}_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}'' & \bar{a}_{21}'' & \bar{a}_{31}'' \\ \bar{a}_{12}'' & \bar{a}_{22}'' & \bar{a}_{32}'' \\ \bar{a}_{13}'' & \bar{a}_{23}'' & \bar{a}_{33}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i'' \\ y_i'' \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i'' \\ y_i'' \\ -c \end{pmatrix}$$

en los siguientes giros x_i'' , y_i'' , $-c$ se substituyen por u_i'' , v_i'' , w_i'' .

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_i'' \\ \bar{v}_i'' \\ \bar{w}_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix}$$

2a. aproximación:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_i'' \\ \bar{v}_i'' \\ \bar{w}_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}'' & \bar{a}_{21}'' & \bar{a}_{31}'' \\ \bar{a}_{12}'' & \bar{a}_{22}'' & \bar{a}_{32}'' \\ \bar{a}_{13}'' & \bar{a}_{23}'' & \bar{a}_{33}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_i'' \\ \bar{v}_i'' \\ \bar{w}_i'' \end{pmatrix}$$

En la 2a. aproximación la matriz de rotación A está dada --
por $A(w, \phi, k) = A\phi \cdot A\psi \cdot A\omega$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos k & -\cos \phi \sin k & \sin \phi \\ \cos \omega \sin k + \sin \omega \sin \phi \cos k & \cos \omega \cos k - \sin \omega \sin \phi \sin k & -\sin \omega \cos \phi \\ \sin \omega \sin k & \sin \omega \cos k + \cos \omega \sin \phi \sin k & \cos \omega \cos \phi \end{pmatrix}$$

Debido a ángulos pequeños de giro se cumple que:

$$\cos \phi = \cos \omega = \cos k = 1$$

$$\sin \phi = d\phi$$

$$\sin \omega = d\omega$$

$$\sin k = dk$$

Los términos de orden superior se eliminan. Con eso se obtiene para A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -dk & d\phi \\ dk & 1 & -d\omega \\ -d\phi & d\omega & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto se calculan ahora las diferencias de coordenadas diferenciales du_i , dv_i , dw_i , con lo que se obtiene:

$$\begin{pmatrix} du_i \\ dv_i \\ dw_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -dk & d\phi \\ dk & 1 & -d\omega \\ -d\phi & d\omega & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & -dk & d\phi \\ dk & 0 & -d\omega \\ -d\phi & d\omega & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix}$$

y ya resuelto:

$$du_i'' = -v_i'' dk + w_i'' d\phi$$

$$dv_i'' = u_i'' dk - w_i'' d\omega$$

$$dw_i'' = -u_i'' d\phi + v_i'' d\omega$$

Las últimas relaciones se substituyen ahora en el 2o. término derivado de (2a) o sea en (2b):

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline bx & by & bz \\ \hline ui' & vi' & wi' \\ \hline dui'' & dvi'' & dwi'' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline bx & by & bz \\ \hline ui'' & vi'' & wi'' \\ \hline -vi'' & ui'' & 0 \\ \hline \end{array} dR + \begin{array}{|c|c|c|} \hline bx & by & bz \\ \hline ui' & vi' & wi' \\ \hline wi'' & 0 & -ui' \\ \hline \end{array} d\phi + \begin{array}{|c|c|c|} \hline bx & by & bz \\ \hline ui' & vi' & wi' \\ \hline 0 & -wi'' & vi'' \\ \hline \end{array}$$

$$(9./2a, b2w, 2b, 1)$$

La ventaja de este método es que no se requiere formar las -diferenciales parciales de acuerdo a (3). Vale la pena hacer notar, que después de cada iteración los coeficientes no se modifican. A cambio de ello los ejes - a b c en el centro de toma giran después de cada iteración. Debido a eso, los ángulos de giro absolutos ϕ , w , k nada más se pueden determinar mediante matrices de rotación.

$$A = \bar{A} \times \bar{A}$$

De esta manera es posible una solución directa en la determinación de las incógnitas (en caso de tener 5 ecuaciones).

El uso de 6 ecuaciones (si se utiliza bx) conduce a la vaguedad del problema. El determinante de N se vuelve cero (se tiene una ecuación dependiente).

La solución queda así:

$$\boxed{N_{55} X_{5,1} = L_{5,1} \dots X_{5,1} = N_{55}^{-1} \cdot L_{5,1}} \quad (9./5)$$

N representa en este caso la matriz de coeficientes (para diferenciarla de la matriz de rotación A)

Ajuste: Se tiene más de 5 observaciones. Se tienen observaciones de más; se requiere un ajuste. En la orientación relativa se tiene una ecuación de condición (ecuación de coplanaridad (1)) en la cual intervienen las incógnitas by, bz, ϕ , w, k.

La ecuación de ajuste queda así:

$$L + B \cdot V = A \cdot X$$

(9./6)

Ax representa: (2a) o bien (2b) como cálculo general

(2a + 2a₁) o bien (2b + 2b₁) como cálculo simplificado según SCHUT.

Como observaciones están las fotocoordenadas del punto P_i o sea X_i' , Y_i' , X_i" , Y_i". Con ésto se presenta el problema de linealizar las observaciones que se obtuvieron como valores correlacionados de las ecuaciones de coplanaridad.

Implica que:

$$X_3^T = (dx_i' \ dy_i' \ dx_i'' \ dy_i'')$$

Entonces para la linealización se cumple:

$$B X_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} b_x & b_y & b_z & \\ \hline \frac{\partial x_i'}{\partial u_i'} & \frac{\partial x_i'}{\partial v_i'} & \frac{\partial x_i'}{\partial w_i'} & dx_i' + \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' & \end{array} \\ + \\ \begin{array}{ccc|c} b_x & b_y & b_z & \\ \hline u_i' & v_i' & w_i' & dx_i'' + \\ \frac{\partial x_i''}{\partial u_i''} & \frac{\partial x_i''}{\partial v_i''} & \frac{\partial x_i''}{\partial w_i''} & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} b_x & b_y & b_z & \\ \hline \frac{\partial y_i'}{\partial u_i'} & \frac{\partial y_i'}{\partial v_i'} & \frac{\partial y_i'}{\partial w_i'} & dy_i' + \\ u_i'' & v_i'' & w_i'' & \end{array} \\ \begin{array}{ccc|c} b_x & b_y & b_z & \\ \hline u_i' & v_i' & w_i' & dy_i'' \\ \frac{\partial y_i''}{\partial u_i''} & \frac{\partial y_i''}{\partial v_i''} & \frac{\partial y_i''}{\partial w_i''} & \end{array} \end{array} \quad (9./7)$$

Se substituye ahora para

$$\begin{array}{l} dx_i' = dX_i' \quad dy_i' = dY_i' \\ dx_i'' = dX_i'' \quad dy_i'' = dY_i'' \end{array}$$

y con eso se obtiene:

$$B X_3 = B V$$

Por este medio se definen prácticamente los residuos simulados (Vx_i' , Vy_i' , Vx_i" , Vy_i" en la realidad nada más se presentan en 1 ecuación de condición) o sea que se trata de un ajuste de "observaciones cuasiintermediarias".

Bibliografía: Buchholtz/Ruger Photogrammetrie: Cálculo de los datos de la orientación relativa,

(10.3. - 3a. edición 1973).

En fotografías verticales se tiene una simplificación. Aquí se cumple que: $K = \phi = w = by = bz = 0$; $bx = b$.

Con esto (7) se transforma en:

$$\begin{aligned}
 BV &= \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x_i'' & y_i'' & -c \end{vmatrix} v_{x_i'} + \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_i'' & y_i'' & -c \end{vmatrix} v_{y_i'} \\
 &+ \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ x_i' & y_i' & -c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} v_{x_i''} + \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ x_i' & y_i' & -c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} v_{y_i''} \\
 &= \cancel{0 \cdot v_{x_i'}} - b \cdot c \cdot v_{y_i'} + \cancel{0 \cdot v_{x_i''}} + b \cdot c \cdot v_{y_i''} \\
 &= b \cdot c (v_{y_i''} - v_{y_i'}) = b \cdot c \cdot p_{y''}
 \end{aligned}$$

La diferencia en los valores y_i de las fotografías individuales origina la paralaje en y p_y . O sea que la orientación relativa es independiente de las observaciones $x'x''$ ($0 \times v_{x_i'}$; $0 \times v_{x_i''}$).

Para formar las ecuaciones de error para $BV = AX - L$ se dividen ahora todos los elementos entre bxc .

Como alternativa a esta división se pueden considerar aquí los pesos correspondientes. Entonces se puede utilizar directamente la ecuación $BV = AX - L$ de la forma anterior.

El peso para una "Observación cuasintermediaria" se obtiene mediante:

$$P = [B \cdot B^T]^{-1}$$

$$B \cdot B^T = \begin{vmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2c^2 & 0 \\ 0 & b^2c^2 \end{vmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2 b^2 c^2}$$

Las observaciones contienen el mismo peso independientemente de la posición del punto en la fotografía. En las ecuaciones de error que siguen se utiliza el cálculo explicado anteriormente (división entre $b \times c$).

La ecuación de coplanaridad linealizada finalmente para ejes fijos (cálculo general (2a) o bien (2b) usando una fotografía vertical) queda como ecuación de error:

$$\boxed{V_{pyi''}}$$

$$= \frac{1}{b \cdot c} \left[\begin{aligned} & (w_i' u_i'' - u_i' w_i'') \, dby \\ & + (u_i' v_i'' - v_i' u_i'') \, dbz \\ & + \left\{ (bx \cdot v_i' - by \cdot u_i') (a_{13} x_i'' - a_{13} y_i'') \right. \\ & \quad + (by \cdot w_i' - bz \cdot v_i') (a_{21} x_i'' - a_{21} y_i'') \\ & \quad \left. - (bx \cdot w_i' - bz \cdot u_i') (a_{22} x_i'' - a_{22} y_i'') \right\} \, dk \\ & + \left\{ (bx \cdot v_i' - by \cdot u_i') (-x_i'' \cos \omega \cos \phi \cos \kappa - y_i'' \sin \omega \cos \phi \sin \kappa \right. \\ & \quad \left. - c \sin \omega \sin \phi) \right. \\ & \quad + (by \cdot w_i' - bz \cdot v_i') (-x_i'' \sin \phi \cos \kappa + y_i'' \sin \phi \sin \kappa - c \cdot \cos \phi) \\ & \quad \left. - (bx \cdot w_i' - bz \cdot u_i') (x_i'' \sin \omega \cos \phi \cos \kappa - y_i'' \cos \omega \cos \phi \sin \kappa \right. \\ & \quad \left. - c \cdot \sin \omega \sin \phi) \right\} \, d\phi \\ & + \left\{ (bx \cdot v_i' - by \cdot u_i') (x_i'' a_{12} + y_i'' a_{22} - c a_{32}) \right. \\ & \quad \left. - (bz \cdot w_i' - by \cdot u_i') (-x_i'' a_{13} - y_i'' a_{23} + c a_{33}) \right\} \, d\omega \end{aligned} \right]$$

$$- \left[p y_i'' g_{em} - \frac{1}{b \cdot c} \left\{ \begin{aligned} & bx [(v_i' w_i'') - (w_i' v_i'')] \\ & - by [(u_i' w_i'') - (w_i' u_i'')] \\ & + bz [(u_i' v_i'') - (v_i' w_i'')] \end{aligned} \right\} \right]$$

- L -

$$\kappa = \kappa_0 + d\kappa$$

$$\phi = \phi_0 + d\phi$$

$$\omega = \omega_0 + d\omega$$

$$; \quad y_0'' = (y_0'') g_{em} + dby$$

$$; \quad z_0'' = (z_0'') g_{em} + dbz$$

(9./8a)

En forma análoga se puede formar la ecuación de error para ejes que participan en el giro (cálculo de SCHUT (2a + a₁) o bien (2b + b₁) usando una fotografía vertical)

$$V = \frac{1}{bc} \left[\begin{aligned} & (w_i' u_i'' - u_i' w_i'') \, db_y \\ & + (u_i' v_i'' - v_i' u_i'') \, db_z \\ & + (-b_x \cdot w_i' u_i'' + b_y \cdot w_i' v_i'' \\ & \quad + b_z \cdot u_i' u_i'' + b_z \cdot v_i' v_i'') \, dK \\ & + (-b_x \cdot v_i' u_i'' + b_y \cdot u_i' u_i'' \\ & \quad + b_y \cdot w_i' w_i'' - b_z \cdot v_i' \cdot w_i'') \, d\phi \\ & + (b_x \cdot v_i' v_i'' + b_x \cdot w_i' w_i'' \\ & \quad - b_y \cdot u_i' v_i'' - b_z \cdot u_i' w_i'') \, d\omega \end{aligned} \right]$$

$$- \left[\rho y_i'' \, q_{om} - \frac{1}{bc} \left\{ \begin{aligned} & b_x [(v_i' w_i'') - (w_i' v_i'')] \\ & - b_y [(u_i' w_i'') - (w_i' u_i'')] \\ & + b_z [(u_i' v_i'') - (v_i' w_i'')] \end{aligned} \right\} \right]$$

- L

(9./8a₁)

Esta relación también se puede considerar como un ajuste de condición con incógnitas (B = -E y w = L). De esta manera se consigue de (1.6/11) en forma conocida:

$$AX + BV = w$$

10. Ecuación de transferencia de escala.

Bibliografía: Jordan-Eggert-Kneiss/ III, Al pág. 46
 Buchholtz/Ruger, Photogrammetrie: Transferen-
 cia de escala a la fotografía contigua.
 (10.3.4 3a. edición 1973).

El ajuste con las referencias del capítulo 6 (ver ecuación - de error (6./1)) tiene la desventaja que las coordenadas de todos los puntos de liga se determinaron simultáneamente en - el ajuste. Para ello se debieron dar coordenadas de aproxima- ción. (Desde que existen métodos de partición efectivos para simplificar el proceso de inversión de las ecuaciones norma- les, el ajuste simultáneo de las coordenadas de los puntos ya no es una desventaja verdadera, constituida por el tamaño del sistema).

De todas maneras debe ser posible en principio, resolver este problema de ajuste nada más mediante ecuaciones de condición sin conocimiento de las coordenadas de los puntos:

Para 1 modelo se tiene el caso de la "orientación relativa".

Las fórmulas necesarias se dedujeron en el capítulo 9.

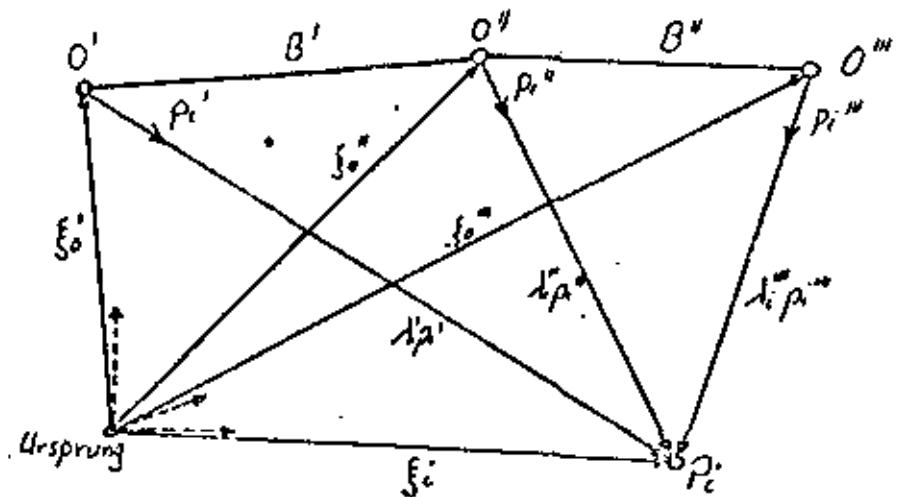
Si se tienen más modelos, entonces las ligas se obtienen me- diante:

- 1) condiciones de coplanaridad.
- y 2) condición en la transferencia de la escala.

De cada punto a los n - rayos de los n - centros de proyec- ción se tiene:

- $n - 1$ condiciones de coplanaridad
- $n - 2$ condiciones de transferencia de escala.

Las ecuaciones de coplanaridad ya se trataron en el capítulo 9 (para el caso especial $n = 2$). Ahora ya nada más se debe for- mar la fórmula de la transferencia de escala (y seguramente li- nealizada para el ajuste). Las referencias del capítulo 4 son - nuevamente el punto de partida (modelo tridimensional). La de- rivada se lleva a cabo por ejemplo con 3 centros de proyección; una extensión a n -centros de toma se puede entonces hacer fáci- lmente.



Ecuación de partida (ver (4./1)):

$$\xi_i = \xi_0' + \lambda_i' \rho_i' = \xi_0'' + \lambda_i'' \rho_i'' = \xi_0''' + \lambda_i''' \rho_i'''$$

Con los componentes:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{pmatrix} + \lambda_i' \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0'' \\ y_0'' \\ z_0'' \end{pmatrix} + \lambda_i'' \begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0''' \\ y_0''' \\ z_0''' \end{pmatrix} + \lambda_i''' \begin{pmatrix} u_i''' \\ v_i''' \\ w_i''' \end{pmatrix}$$

De la última relación se pueden calcular los componentes de la base:

$$\lambda_i'' \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} - \lambda_i'' \begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0'' - x_0' \\ y_0'' - y_0' \\ z_0'' - z_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_i'' \begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} - \lambda_i''' \begin{pmatrix} u_i''' \\ v_i''' \\ w_i''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0''' - x_0'' \\ y_0''' - y_0'' \\ z_0''' - z_0'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{x''} \\ b_{y''} \\ b_{z''} \end{pmatrix}$$

Con las transformaciones conocidas del capítulo 4, se obtiene para los factores de escala λ_i :

$$\lambda_i' = \frac{\begin{vmatrix} b_{x'} & -u_i'' \\ b_{y'} & -v_i'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_{x'} & u_i'' \\ b_{y'} & v_i'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i' & u_i'' \\ v_i' & v_i'' \end{vmatrix}}$$

En el modelo 1:
(O' O'')

(10./1a)

$$\lambda_i'' = \frac{\begin{vmatrix} u_i' & b_{x'} \\ v_i' & b_{y'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix}}$$

(10./1b)

$$\lambda_i'' = \frac{\begin{vmatrix} b_x'' & -u_i'' \\ b_y'' & -v_i'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i'' & -u_i'' \\ v_i'' & -v_i'' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_x'' & u_i'' \\ b_y'' & v_i'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix}} \quad (10./1b_2)$$

- en el modelo 2:
(0'' 0''')

$$\lambda_i'' = \frac{\begin{vmatrix} u_i'' & b_x'' \\ v_i'' & b_y'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_i'' & -u_i'' \\ v_i'' & -v_i'' \end{vmatrix}} \quad (10./1c)$$

La condición de transferencia de escala debe quedar así:

la λ_i'' del modelo 1 debe ser igual a la λ_i'' de los modelos 2... n, por consiguiente:

$$\lambda_{i, Mod. 1}'' - \lambda_{i, Mod. 2}'' = 0 \quad (10./2)$$

Substituyendo (1b₁) y (1b₂) se obtiene:

$$\begin{vmatrix} b_x'' & u_i'' \\ b_y'' & v_i'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i'' & -u_i'' \\ v_i'' & -v_i'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_i'' & b_x'' \\ v_i'' & b_y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} = 0$$

La condición (2) se debe ahora linealizar con respecto a las incógnitas. En el presente caso (2 modelos o sea 3 fotografías) se necesitan 11 incógnitas (5 para la orientación relativa de las fotografías 1 y 2, 6 para la conexión de la fotografía 3... de aquí viene el nombre: transferencia de escala - la fotografía de conexión siguiente).

Como incógnitas están (ya anteriormente se tomó en cuenta la dependencia de u v w de los ángulos de giro ϕ, w, k):

$\phi_i'', \kappa_i'', \omega_i'', \phi_i''', \kappa_i''', \omega_i''', b_y', b_z', b_x'', b_y'', b_z''$
Los parámetros restantes $\phi_i', \kappa_i', \omega_i', b_x', X_0', Y_0', Z_0'$ se consideran conocidos (-conducen a ecuaciones dependientes cuando se usan-).

Para n- fotografías se necesitan $6n - 7$ incógnitas.

Al igual que en el capítulo 9, se tienen nuevamente ecuaciones de condición con incógnitas, de tal manera que el cálculo de ajuste general según (1.6./11) queda así:

$$\underline{BV} = \underline{AX} - \underline{W}$$

Substituyendo las aproximaciones dif. para las incógnitas - en la ecuación (2):

$$\begin{vmatrix} (bx'' + dbx'') & (u_i''' + du_i''') \\ (by'' + dby'') & (v_i''' + dv_i''') \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i' & -(u_i'' + du_i'') \\ v_i' & -(v_i'' + dv_i'') \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & (by' + dby') \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} (u_i'' + du_i'') & (u_i''' + du_i''') \\ (v_i'' + dv_i'') & (v_i''' + dv_i''') \end{vmatrix} = 0$$

La resolución de los determinantes y la ordenación de acuerdo a las incógnitas despreciando los términos de orden superior, da para los términos individuales del cálculo de ajuste general:

-w

$$-w = + \begin{vmatrix} bx'' & u_i''' \\ by'' & v_i''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_i'' & u_i''' \\ v_i'' & v_i''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix}$$

-- A . x x

$$AX = -u_i' \begin{vmatrix} u_i'' & u_i''' \\ v_i'' & v_i''' \end{vmatrix} dby' + \left(v_i' \begin{vmatrix} bx'' & u_i''' \\ by'' & v_i''' \end{vmatrix} + v_i''' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) du_i''$$

$$- \left(u_i' \begin{vmatrix} bx'' & u_i''' \\ by'' & v_i''' \end{vmatrix} - u_i''' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) dv_i''$$

$$+ v_i''' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} dbx'' - u_i''' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} dby''$$

$$- \left(by'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - v_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) du_i'''$$

$$+ \left(bx'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - u_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) dv_i''' \quad (9./3)$$

$$\begin{aligned}
 BV = & - \left(v_i'' \begin{vmatrix} b_x'' & u_i'' \\ b_y'' & v_i'' \end{vmatrix} + b_{y'} \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} \right) du_i' \\
 & + \left(u_i'' \begin{vmatrix} b_x'' & u_i'' \\ b_y'' & v_i'' \end{vmatrix} + b_{x'} \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} \right) dv_i' \\
 & + \left(v_i'' \begin{vmatrix} b_x'' & u_i'' \\ b_y'' & v_i'' \end{vmatrix} + v_i'' \begin{vmatrix} u_i' & b_{x'} \\ v_i' & b_{y'} \end{vmatrix} \right) du_i'' \\
 & - \left(u_i' \begin{vmatrix} b_x'' & u_i'' \\ b_y'' & v_i'' \end{vmatrix} - u_i'' \begin{vmatrix} u_i' & b_{x'} \\ v_i' & b_{y'} \end{vmatrix} \right) dv_i'' \\
 & - \left(b_{y'} \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - v_i'' \begin{vmatrix} u_i' & b_{x'} \\ v_i' & b_{y'} \end{vmatrix} \right) du_i'' \\
 & + \left(b_{x'} \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - u_i'' \begin{vmatrix} u_i' & b_{x'} \\ v_i' & b_{y'} \end{vmatrix} \right) dv_i''
 \end{aligned}$$

En este punto existe una diferencia entre:

a) giros alrededor de ejes fijos (ver (9./2a, 3a, 8a))

u_i', v_i' son funciones de los ángulos de giro k', ϕ', ω'
se cumple:

$$du_i' = \frac{\partial u_i'}{\partial k'} dk' + \frac{\partial u_i'}{\partial \phi'} d\phi' + \frac{\partial u_i'}{\partial \omega'} d\omega'$$

$$dv_i' = \frac{\partial v_i'}{\partial k'} dk' + \frac{\partial v_i'}{\partial \phi'} d\phi' + \frac{\partial v_i'}{\partial \omega'} d\omega'$$

o con la ayuda de los elementos de la matriz de giro A' :

$$\begin{aligned}
 du_i' = & (a_{21} x_i' - a_{11} y_i') dk' + (-\sin \phi' \cos k' \cdot x_i' + \sin \phi' \sin k' \cdot y_i' \\
 & - \cos \phi' \cdot c) d\phi'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dv_i' = & (a_{22} x_i' - a_{12} y_i') dk' + (x_i' \sin \omega' \cos \phi' \cos k' - y_i' \sin \omega' \cos \phi' \sin k' \\
 & - c \sin \omega' \sin \phi') d\phi' \\
 & + (-x_i' a_{13} - y_i' a_{23} + c \cdot a_{33}) d\omega'
 \end{aligned}$$

Análogamente se procede con las fotografías 2...n.

En la última fórmula se utiliza para:

$$\left. \begin{array}{l} du_i'' \\ dv_i'' \end{array} \right\} \phi'', w'', k'', x'', y'', a_{11}'' \dots a_{33}''$$

y para:

$$\left. \begin{array}{l} du_i''' \\ dv_i''' \end{array} \right\} \phi''', w''', k''', x''', y''', a_{11}''' \dots a_{33}'''$$

En el sistema de ecuaciones (3) $BV = AX - W$ todavía se tiene que substituir estas ecuaciones. Con esto se han formado las ecuaciones de error. Aquí no se hace todo el procedimiento - sino que se aplica el método de SCHUT, que utiliza fórmulas más sencillas.

b) Utilización de ejes que participan en el giro
ver (9./2a₁ + 3a₂ + 8a₃) :

Con ayuda de las diferenciales de (9./3) se obtiene para las aproximaciones diferenciales $du' \dots dv'''$

$$\begin{aligned} du_i' &= -v_i' dx' + w_i' d\phi' = a_{11}' dx_i' + a_{21}' dy_i' \\ dv_i' &= u_i' dx' - w_i' d\phi' = a_{12}' dx_i' + a_{22}' dy_i' \\ du_i'' &= -v_i'' dx'' + w_i'' d\phi'' = a_{11}'' dx_i'' + a_{21}'' dy_i'' \\ dv_i'' &= u_i'' dx'' - w_i'' d\phi'' = a_{12}'' dx_i'' + a_{22}'' dy_i'' \\ du_i''' &= -v_i''' dx''' + w_i''' d\phi''' = a_{11}''' dx_i''' + a_{21}''' dy_i''' \\ dv_i''' &= u_i''' dx''' - w_i''' d\phi''' = a_{12}''' dx_i''' + a_{22}''' dy_i''' \end{aligned}$$

Estas relaciones deben substituirse ahora en (3). Aquí se aplica además la restricción adicional: se trata de fotografías verticales. Con esto se simplifican más las fórmulas, se cumple que: $a_{11} = a_{22} = 1$; $a_{21} = a_{12} = 0$

Por lo tanto se obtiene:

-- para -w

$$-W = \begin{vmatrix} bx'' & u_i''' \\ by'' & v_i''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_i'' & u_i''' \\ v_i'' & v_i''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 AX = & - u_i'' \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} dby' + \left\{ (-v_i' v_i'' - u_i' u_i'') \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} + \right. \\
 & \left. (-v_i'' v_i'' + u_i' u_i'') \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right\} dx'' + \\
 & \left(w_i'' v_i' \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} + w_i'' v_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) dq'' + \\
 & \left(u_i' w_i'' \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} - u_i'' w_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) d\omega'' + \\
 & v_i'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} dbx'' - u_i'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} dby'' + \\
 & \left[(u_i'' bx'' + v_i'' by'') \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} + (-u_i'' u_i'' - v_i'' v_i'') \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right] d\eta'' + \\
 & + \left(-by'' w_i'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} + v_i'' w_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) d\phi'' + \\
 & \left(-bx'' w_i'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} + u_i'' w_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) d\omega''
 \end{aligned}$$

y - para B x V

$$\begin{aligned}
 BV = & - \left(v_i'' \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} + by' \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} \right) dx_i' \\
 & + \left(u_i'' \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} + bx' \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} \right) dy_i' \\
 & - \left(v_i'' \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} + v_i' \begin{vmatrix} u_i'' & u_i'' \\ v_i'' & v_i'' \end{vmatrix} \right) dx_i'' \\
 & + \left(-u_i' \begin{vmatrix} bx'' & u_i'' \\ by'' & v_i'' \end{vmatrix} + u_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) dy_i'' \\
 & + \left(-by'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - v_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) dx_i''' \\
 & + \left(bx'' \begin{vmatrix} u_i' & -u_i'' \\ v_i' & -v_i'' \end{vmatrix} - u_i'' \begin{vmatrix} u_i' & bx' \\ v_i' & by' \end{vmatrix} \right) dy_i''' \quad (10./4)
 \end{aligned}$$

dónde nuevamente deben colocarse (observaciones cuasiinterme-

diarias). $dx_i' = V_{xi}'$; $dx_i'' = V_{xi}''$; $dx_i''' = V_{xi}'''$

$dy_i' = V_{yi}'$; $dy_i'' = V_{yi}''$; $dy_i''' = V_{yi}'''$

Refiriéndonos al ejemplo del capítulo 6 (pág. 89) con 8 fotografías y los puntos a... t se describe el siguiente camino de ajuste. la constelación allí dada conduce al siguiente número de condiciones:

| Punto j | fotografía i | Número de las condiciones de coplanaridad (i - 1) | Condiciones de transferencia de escala (i-2) |
|---------|-----------------|--|--|
| a | 1,2 | 1 | 0 |
| b | 1,2 | 1 | 0 |
| c | 1,2,5,6 | 3 | 2 |
| d | 5,6 | 1 | 0 |
| e | 5,6 | 1 | 0 |
| f | 2,3,4 | 2 | 1 |
| g | 2,3,4 | 2 | 1 |
| h | 2,3,4,6,7,8 | 5 | 4 |
| i | 6,7,8 | 2 | 1 |
| j | 6,7,8 | 2 | 1 |
| k | 2,3,4 | 2 | 1 |
| l | 2,3,4 | 2 | 1 |
| m | 2,3,4,6,7,8 | 5 | 4 |
| n | 2,3,4 | 2 | 1 |
| o | 2,3,4 | 2 | 1 |
| p | 3,4 | 1 | 0 |
| q | 3,4 | 1 | 0 |
| r | 3,4,7,8 | 3 | 2 |
| s | 7,8 | 1 | 0 |
| t | 7,8 | 1 | 0 |
| SUMA | | 40 | 20 |

En total se tienen 60 condiciones y el cálculo de ajuste -- (1.6./11) queda así:

$$- B_{60,10} V_{10,1} + A_{60,40} X_{40} = W_{60,1}$$

(10./5)

En dificultades se puede ahora proceder con el algoritmo. Se pueden utilizar las fórmulas (1.6./11) a (1.6./16).

La X_2 (incógnita de coordenadas) no está contenida en la ecuación (5). Debido a eso no se puede llevar a cabo una orientación absoluta del bloque. Sin embargo sí se puede hacer después del ajuste y mediante una transformación de coordenadas tridimensionales (Transformación Helmert).

El resultado final se puede probar mediante la comparación con las coordenadas terrestres de los puntos de pase.

11. Orientación Absoluta.

La orientación absoluta ajusta el modelo al sistema coordenado terrestre (antes ya se debió hacer una orientación relativa). Se puede llevar a cabo una transformación de coordenadas, si por lo menos se conocen los siguientes valores:

$$P_1 (x_1 \ y_1 \ z_1 \ ; \ X_1 \ Y_1 \ Z_1)$$

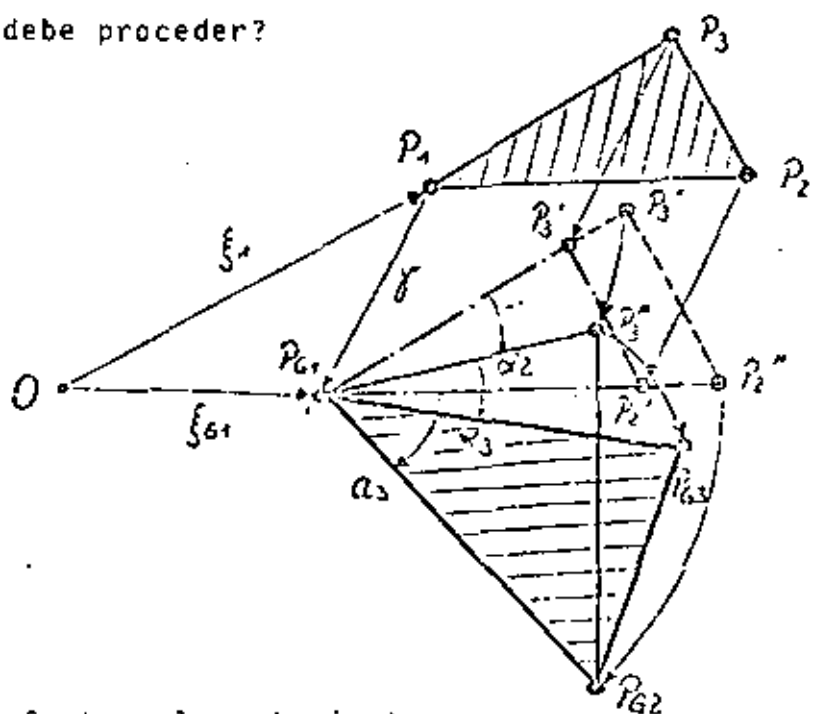
$$P_2 (x_2 \ y_2 \ z_2 \ ; \ X_2 \ Y_2 \ Z_2)$$

$$P_3 (x_3 \ y_3 \ z_3 \ ; \ \quad \quad \quad Z_3)$$

$x_i \ , \ y_i \ , \ z_i$ Coordenadas del modelo

$X_i \ , \ Y_i \ , \ Z_i$ Coordenadas terrestres

Por lo tanto se deben determinar 7 parámetros independientes. ¿Cómo se debe proceder?

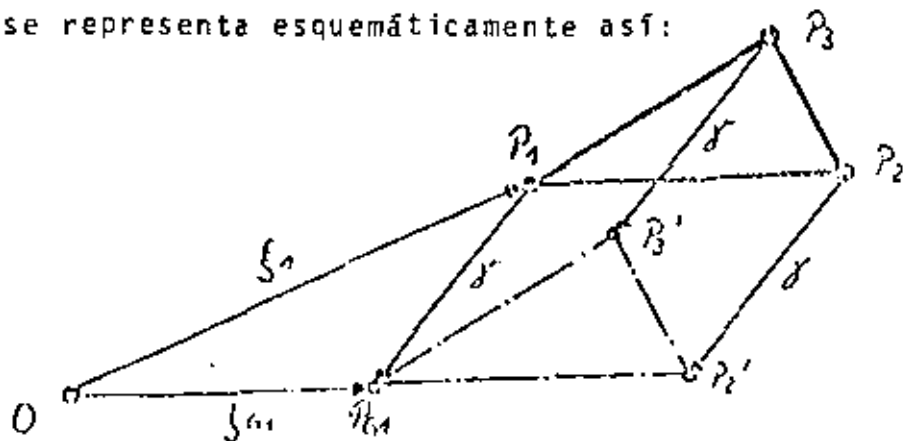


Se deben efectuar los siguientes pasos:

- 1) Traslación del triángulo del modelo (3 parámetros).

Se trata de un corrimiento del triángulo de partida $P_1P_2P_3$ a causa del vector de corrimiento γ .

Esto se representa esquemáticamente así:



El vector de corrimiento γ se obtiene por:

$$\gamma = \xi_{G_1} - \xi_1$$

con los componentes:

$$\begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - x_1 \\ Y_1 - y_1 \\ Z_1 - z_1 \end{pmatrix}$$

y con ello se obtienen para P_2' y P_3' las siguientes coordenadas nuevas:

$$\begin{pmatrix} X_2' \\ Y_2' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 + \gamma_x \\ Y_2 + \gamma_y \\ Z_2 + \gamma_z \end{pmatrix}$$

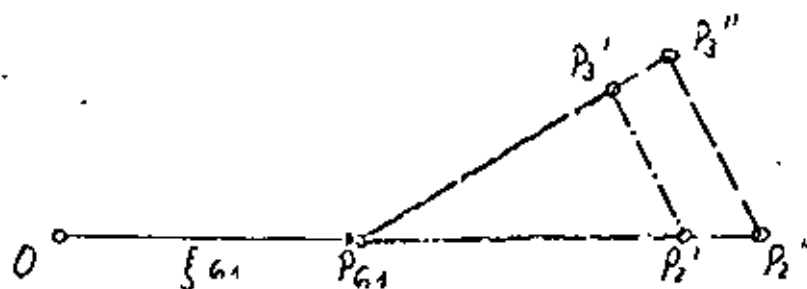
$$\begin{pmatrix} X_3' \\ Y_3' \\ Z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 + \gamma_x \\ Y_3 + \gamma_y \\ Z_3 + \gamma_z \end{pmatrix}$$

en general: $\xi_i' = \xi_i + \gamma$

(11./1)

Con este paso el punto P_1 del modelo pasa a ser el punto P_{G_1} terrestre.

2) Determinación del factor de escala (1 parámetro).



El establecimiento de las fórmulas está tratado en el cap. 4. Para el factor de aumento λ se obtiene:

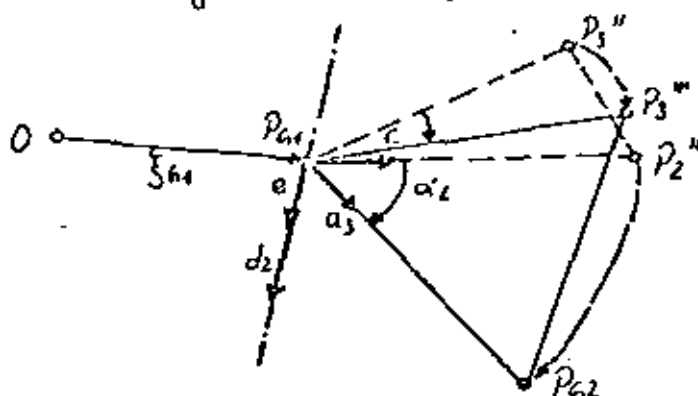
$$\lambda = \frac{|\xi_{G_2} - \xi_{G_1}|}{|\xi_2 - \xi_1|} = \frac{|\xi_{G_2} - \xi_{G_1}|}{|\xi_2' - \xi_1'|} = \frac{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}{\sqrt{(X_2 - \lambda)^2 + (Y_2 - \lambda)^2 + (Z_2 - \lambda)^2}}$$

(11./2)

Las rectas $P_{G_1}P_2''$ y $P_{G_1}P_3''$ tiene ahora la misma longitud que las distancias terrestres $\overline{P_{G_1}P_2}$ y $\overline{P_{G_1}P_3}$. (esto también se cumple para $\overline{P_2''P_3''}$).

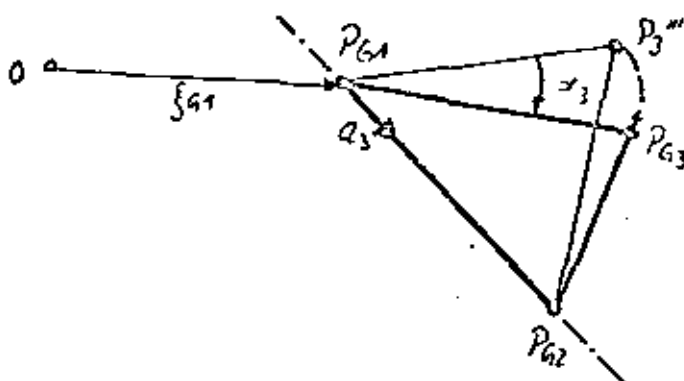
Los 3 parámetros restantes se determinan por giros en P_{G1} :

2a) Giro de P_2'' a P_{G2} mediante α_2 .



El eje de giro pasa por P_{G1} y es perpendicular a la superficie - definida por P_{G1} , P_2'' , P_3'' (puede ser descrita con ayuda de una matriz de giro A_2). Debido a este giro P_3'' pasa a ser P_3''' .

3b) Giro de P_3''' a P_{G3} mediante α_3 .



El eje de giro es P_{G1} , P_{G2} . Se puede describir con ayuda de la - matriz de giro A_3 .

El giro total se obtiene por $A = A_3 \cdot A_2$.

La solución para la orientación absoluta está dada con los pasos 1) ... 3b). Para cada punto terrestre se cumple la siguiente relación:

$$\xi_{Gi} = A \cdot A \cdot \xi_i + \gamma$$

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{pmatrix}$$

El problema surge ahora al determinar A.

Nuevamente se hace una diferenciación en A y A.

para 3a) El ángulo α_2 entre los vectores $\vec{P}_{G1}^2, \vec{P}_{G2}^3$ y $\vec{P}_{G1}^1, \vec{P}_2^1$ o sea $\vec{P}_{G1}^1, \vec{P}_2^1$ es idéntico al ángulo tridimensional entre los vectores unitarios \vec{c} y \vec{d} . Estos se determinan por:

$$\vec{c} = \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{|\xi_2 - \xi_1|}$$

$$\vec{d} = \frac{(\xi_{G2} - \xi_{G1})}{|\xi_{G2} - \xi_{G1}|}$$

y para su escalar - o sea el vector producto:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha_2 = \cos \alpha_2$$

$$|\vec{c} \times \vec{d}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \sin \alpha_2 = \sin \alpha_2$$

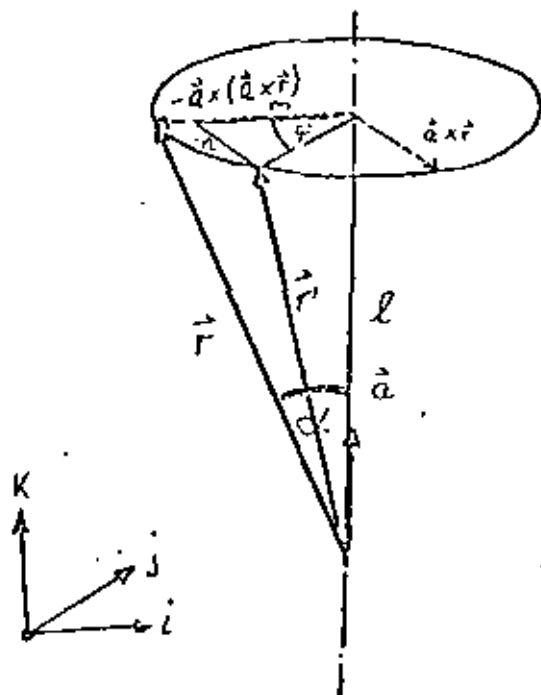
Un siguiente vector \vec{d}_2 se define como:

$$\vec{d}_2 = \vec{c} \times \vec{d} = |\vec{c}| |\vec{d}| \cdot \sin \alpha_2 \cdot \vec{e}$$

$$\text{con } \vec{e} = \frac{\vec{c} \times \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}| \cdot \sin \alpha_2} = \frac{\vec{c} \times \vec{d}}{\sin \alpha_2}$$

\vec{e} es el vector unitario en la dirección del eje de giro en el problema 3a).

En este punto, hay que adentrarse en el giro alrededor de -- ejes tridimensionales fijos (se debe formar la matriz de giro para un giro de esa naturaleza). El problema se plantea de la siguiente manera:



El vector \vec{r} está dado en el sistema $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Este debe girarse alrededor del eje fijo \vec{a} (donde \vec{a} es un vector unitario en el eje) con el ángulo ϕ al vector \vec{r} .

Se conoce:

Un vector normal a la superficie definida por \vec{a} y \vec{r} es $\vec{a} \times \vec{r}$.
 Un vector normal a la superficie definida por \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{r}$ es $-\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})$.

El vector \vec{r}' se puede expresar en el sistema $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, mediante los siguientes componentes:

$$\vec{r}' = r_x' \vec{i} + r_y' \vec{j} + r_z' \vec{k}$$

y el ángulo entre \vec{r} y \vec{a} es:

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = |\vec{r}| |\vec{a}| \cos \alpha \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{r}| |\vec{a}|}$$

Los componentes del vector r' , marcados en el dibujo como l, m, n se obtienen por:

$$l = \vec{r}' \cdot (-\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})) = \vec{a} (|\vec{r}| \cos \alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{r}}{|\vec{a}|} = \vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{r}$$

$$m = \cos \phi (-\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r}))$$

$$n = \sin \phi (\vec{a} \times \vec{r})$$

substituyendo esto para el vector r'

$$\vec{r}' = \vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{r} - \cos \phi (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})) + \sin \phi (\vec{a} \times \vec{r})$$

sacando a r como factor común del lado derecho

$$\vec{r}' = \vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{a} - \cos \phi [\vec{a} \cdot \vec{a} - E] - \sin \phi (\vec{a} \times E))$$

La expresión entre paréntesis es la matriz de giro buscada - para este giro alrededor de ejes fijos:

$$\vec{r}' = A \cdot \vec{r}$$

$$\text{con } A = (E - \vec{a} \cdot \vec{a}) \cos \phi - (\vec{a} \times E) \sin \phi + \vec{a} \cdot \vec{a}$$

o expresada en el sistema i, j, k

$$A = \begin{pmatrix} (1 - \cos \phi) a_x^2 + \cos \phi & (1 - \cos \phi) a_x a_y - a_z \sin \phi & (1 - \cos \phi) a_z a_x + a_y \sin \phi \\ (1 - \cos \phi) a_x a_y + a_z \sin \phi & (1 - \cos \phi) a_y^2 + \cos \phi & (1 - \cos \phi) a_z a_y - a_x \sin \phi \\ (1 - \cos \phi) a_x a_z - a_z \sin \phi & (1 - \cos \phi) a_y a_z + a_x \sin \phi & (1 - \cos \phi) a_z^2 + \cos \phi \end{pmatrix} \quad (11, 11)$$

Después de que, en general, se formo la matriz de rotación para giros alrededor de ejes fijos (por conocimiento de un vector unitario en dirección del eje de giro), se puede pasar a la tarea especial en 3a):

El vector unitario en la dirección del eje de giro es \vec{e} :

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

Una rotación con el ángulo α_2 conduce análogamente con (4) a la siguiente matriz de rotación A_2 :

$$A_2 = (E - \vec{e} \vec{e}) \cos \alpha_2 - \vec{e} \times E \sin \alpha_2 + \vec{e} \cdot \vec{e}$$

con los componentes unitarios:

$$A_2 = \begin{pmatrix} (1 - \cos \alpha_2) e_x^2 + \cos \alpha_2 & (1 - \cos \alpha_2) e_x e_y - e_z \sin \alpha_2 & (1 - \cos \alpha_2) e_y e_x + e_z \sin \alpha_2 \\ (1 - \cos \alpha_2) e_x e_y + e_z \sin \alpha_2 & (1 - \cos \alpha_2) e_y^2 + \cos \alpha_2 & (1 - \cos \alpha_2) e_z e_y - e_x \sin \alpha_2 \\ (1 - \cos \alpha_2) e_x e_z - e_y \sin \alpha_2 & (1 - \cos \alpha_2) e_y e_z + e_x \sin \alpha_2 & (1 - \cos \alpha_2) e_z^2 + \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$$

(11./5)

donde se cumple: $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$

para 3b). A continuación se tiene que formar la matriz A_3 para el giro alrededor del eje $\vec{P}_{G1} \vec{P}_{G2}$. El vector unitario necesario es \vec{d} .

Con:
$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz de rotación:

$$A_3 = \begin{pmatrix} (1 - \cos \alpha_3) d_x^2 + \cos \alpha_3 & (1 - \cos \alpha_3) d_x d_y - d_z \sin \alpha_3 & (1 - \cos \alpha_3) d_z d_x + d_y \sin \alpha_3 \\ (1 - \cos \alpha_3) d_x d_y + d_z \sin \alpha_3 & (1 - \cos \alpha_3) d_y^2 + \cos \alpha_3 & (1 - \cos \alpha_3) d_z d_y - d_x \sin \alpha_3 \\ (1 - \cos \alpha_3) d_x d_z - d_y \sin \alpha_3 & (1 - \cos \alpha_3) d_y d_z + d_x \sin \alpha_3 & (1 - \cos \alpha_3) d_z^2 + \cos \alpha_3 \end{pmatrix}$$

(11./6)

Ahora el problema es (a diferencia de 3a):

El ángulo α_3 aún se desconoce. El punto de partida para su obtención es (1) y (3):

$$\xi_{G3} = \lambda \cdot A_3 \cdot A_2 \cdot \xi_3 + \gamma \quad ; \quad \gamma = \xi_{G1} - \xi_1$$

Para la determinación de α_3 es suficiente con una componente.

Una transformación de la última ecuación da:

$$\begin{aligned} \xi_{63} - \gamma &= \xi_{63} - \xi_{61} + \xi_1 = \lambda \cdot A_3 \cdot A_2 \cdot \xi_3 \\ &= A_3 (\lambda \cdot A_2 \cdot \xi_3) \end{aligned}$$

Se escoge por ejemplo la última componente. Esto conduce a:

$$\begin{aligned} &[(1 - \cos \alpha_3) dx dz - dy \sin \alpha_3] (x_3'' - X_1) + [(1 - \cos \alpha_3) dy dz \\ &+ dx \sin \alpha_3] (y_3'' - Y_1) + [(1 - \cos \alpha_3) dz^2 + \cos \alpha_3] (z_3'' - Z_1) = Z_3 - Z_1 \end{aligned}$$

Reordenando para las funciones de la incógnita α_3 y usando otra nomenclatura para las variables se obtiene:

$$(\sin \alpha_3) \cdot A^* + (\cos \alpha_3) B^* + C^* = 0$$

Mediante algunas transformaciones trigonométricas se obtiene de allí como solución:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha_3}{2} &= \frac{1}{B^* - C^*} \left(A^* \mp \sqrt{A^{*2} + B^{*2} - C^{*2}} \right) \\ \sin \alpha_3 &= \frac{2 \tan \frac{\alpha_3}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha_3}{2}} \\ \cos \alpha_3 &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha_3}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha_3}{2}} \end{aligned} \quad (11./7)$$

Se obtienen 2 soluciones para α_3 (para diferenciación de giros positivos o bien negativos).

Las nuevas variables tienen las siguientes dimensiones:

$$A^* = dx (y_3'' - Y_1) - dy (x_3'' - X_1)$$

$$B^* = -dz \cdot D^* + (z_3'' - Z_1)$$

$$C^* = dz \cdot D^* - (z_3'' - Z_1)$$

$$D^* = dx (x_3'' - X_1) + dy (y_3'' - Y_1) + dz (z_3'' - Z_1)$$

La solución correcta se puede determinar fácilmente escogiendo el signo correcto para el giro.

La matriz de rotación final se obtiene de la multiplicación de (5) y (6).

Bibliografía: Giro alrededor de ejes fijos JEK, III, A1.

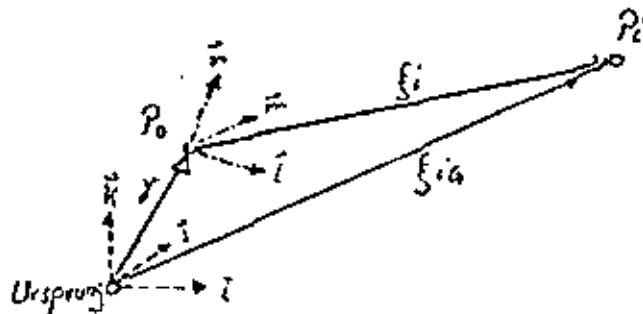
Orientación Absoluta JEK, III, A1 pag. 44, 1972.

Finsterwalder pág. 3. 4., 1968.

12. Ajuste de la Orientación absoluta.

Después de que en el capítulo anterior se mostró el camino general para la solución de la orientación absoluta (dados 7 valores), ahora se considera un ajuste para este problema debido a que se tienen observaciones de más.

En general es válida la relación tridimensional:



$\bar{i} \quad \bar{j} \quad \bar{k}$ Vectores unitarios -
en el sistema coord_e
nado del modelo.
 $i \quad j \quad k$ Vectores unitarios en
el sistema coord_e
nado terrestre.

Para el vector ξ_i en el modelo se cumple:

$$\xi_i^T = (x_i \quad y_i \quad z_i)$$

y para el vector ξ_{Gi} que se dirige al mismo punto en el terreno.

$$\xi_{Gi}^T = (X_i \quad Y_i \quad Z_i)$$

El vector entre los orígenes de los sistemas coordenados se designa como vector de traslación: para él se cumple (el sistema coordenado terrestre tiene el origen (0/0/0)):

$$\gamma^T = (X_0 \quad Y_0 \quad Z_0)$$

Según (11./3) permanecen entonces como relaciones válidas generales:

$$\boxed{\xi_{Gi} = A \cdot \xi_i + \gamma} \quad (12./1a)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \kappa & \cos \Omega \sin \kappa + \sin \Omega \sin \varphi \cos \kappa & \sin \Omega \sin \kappa - \cos \Omega \sin \varphi \cos \kappa \\ -\cos \varphi \sin \kappa & \cos \Omega \cos \kappa - \sin \Omega \sin \varphi \sin \kappa & \sin \Omega \cos \kappa + \cos \Omega \sin \varphi \sin \kappa \\ \sin \varphi & -\sin \Omega \cos \varphi & \cos \Omega \cos \varphi \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación A se presenta como función de los ángulos: κ, φ, Ω . Se cumple:

$$A^{-1} = A^T \quad \cdot A: \text{matriz ortogonal.}$$

Se escogieron letras mayúsculas para diferenciar.

de los ángulos de giro en la orientación relativa.

En la orientación absoluta se gira todo el sistema del modelo.

(1) despejando ξ_i se obtiene:

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda} \cdot A^T (\xi_{Gi} - \delta)$$

con los componentes individuales:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} A_1^{*T} \\ A_2^{*T} \\ A_3^{*T} \end{pmatrix} \cdot B \quad (12./1)$$

Debido a esta solución, las "observaciones" - o sea las coordenadas del modelo x_i' , y_i' , z_i' - se agruparon en el lado izquierdo de la igualdad, lo que es una ventaja para el cálculo del ajuste. Las incógnitas en (1a) son: λ , X_0 , Y_0 , Z_0 , $\bar{\varphi}$, Ω , K

y eventualmente (X_2) las coordenadas del punto X_i , Y_i , Z_i .

En la ecuación (1a) se necesitan valores calculados para X , Y , Z . Estos se pueden calcular aproximadamente con ayuda de las aproximaciones para las incógnitas: λ_0 , $\bar{\varphi}_0$, Ω_0 , K_0 , X_0 , Y_0 , Z_0 .

Linealizando se obtiene con ello

- las aproximaciones dx_i , dy_i , dz_i para las coordenadas del modelo pueden considerarse como residuos -.

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial x_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial x_i}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \bar{\varphi}} d\bar{\varphi} + \frac{\partial x_i}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial x_i}{\partial K} dK \\ \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial y_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial y_i}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial y_i}{\partial \bar{\varphi}} d\bar{\varphi} + \frac{\partial y_i}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial y_i}{\partial K} dK \\ \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial z_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial z_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial z_i}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial z_i}{\partial \bar{\varphi}} d\bar{\varphi} + \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial z_i}{\partial K} dK \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 X_0 \\ - \\ - \\ - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \text{ gem.} - x_i \text{ br.} \\ y_i \text{ gem.} - y_i \text{ br.} \\ z_i \text{ gem.} - z_i \text{ br.} \end{pmatrix} - L$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial x_i}{\partial Y_i} dY_i + \frac{\partial x_i}{\partial Z_i} dZ_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial y_i}{\partial Y_i} dY_i + \frac{\partial y_i}{\partial Z_i} dZ_i \\ \frac{\partial z_i}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial z_i}{\partial Y_i} dY_i + \frac{\partial z_i}{\partial Z_i} dZ_i \end{pmatrix} + A_2 X_2 \quad (12./2)$$

Los cocientes diferenciales se obtienen según el esquema ya varias veces considerado (ver por ej. el cap. 9):

- para las incógnitas de orientación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{\lambda^2} A_i^{*T} B & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} A_2^{*T} B & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} A_3^{*T} B \\ \frac{\partial x_i}{\partial X_0} &= -\frac{1}{\lambda} a_{11} & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial X_0} = -\frac{1}{\lambda} a_{12} & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial X_0} = -\frac{1}{\lambda} a_{13} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Y_0} &= -\frac{1}{\lambda} a_{21} & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial Y_0} = -\frac{1}{\lambda} a_{22} & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial Y_0} = -\frac{1}{\lambda} a_{23} \\ \frac{\partial x_i}{\partial Z_0} &= -\frac{1}{\lambda} a_{31} & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial Z_0} = -\frac{1}{\lambda} a_{32} & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial Z_0} = -\frac{1}{\lambda} a_{33} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \Phi} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_i^{*T}}{\partial \Phi} \right) B & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial \Phi} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_2^{*T}}{\partial \Phi} \right) B & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial \Phi} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_3^{*T}}{\partial \Phi} \right) B \\ \frac{\partial x_i}{\partial \Omega} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_i^{*T}}{\partial \Omega} \right) B & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial \Omega} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_2^{*T}}{\partial \Omega} \right) B & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial \Omega} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_3^{*T}}{\partial \Omega} \right) B \\ \frac{\partial x_i}{\partial \kappa} &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_i^{*T}}{\partial \kappa} \right) B & ; & \quad \frac{\partial y_i}{\partial \kappa} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_2^{*T}}{\partial \kappa} \right) B & ; & \quad \frac{\partial z_i}{\partial \kappa} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial A_3^{*T}}{\partial \kappa} \right) B \end{aligned}$$

donde las derivadas de la matriz de giro A con respecto a los ángulos de giro quedan así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^{*T}}{\partial \Phi} &= \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cos \kappa & \sin \Phi \sin \kappa & \cos \Phi \\ \sin \Omega \cos \Phi \cos \kappa & -\sin \Omega \cos \Phi \sin \kappa & \sin \Omega \sin \Phi \\ -\cos \Omega \cos \Phi \cos \kappa & \sin \Omega \cos \Phi \sin \kappa & -\cos \Omega \sin \Phi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1^{*T}}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial A_2^{*T}}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial A_3^{*T}}{\partial \Phi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A^{KT}}{\partial \Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1^{KT}}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial A_2^{KT}}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial A_3^{KT}}{\partial \Omega} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial A^{KT}}{\partial K} = \begin{pmatrix} a_{21} & -a_{11} & 0 \\ a_{22} & -a_{12} & 0 \\ a_{23} & -a_{13} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1^{KT}}{\partial K} \\ \frac{\partial A_2^{KT}}{\partial K} \\ \frac{\partial A_3^{KT}}{\partial K} \end{pmatrix}$$

- para las derivadas parciales con respecto a las coordenadas terrestres.

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \frac{1}{\lambda} a_{11} \quad ; \quad \frac{\partial y_i}{\partial X_i} = \frac{1}{\lambda} a_{12} \quad ; \quad \frac{\partial z_i}{\partial X_i} = \frac{1}{\lambda} a_{13}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial Y_i} = \frac{1}{\lambda} a_{21} \quad ; \quad \frac{\partial y_i}{\partial Y_i} = \frac{1}{\lambda} a_{22} \quad ; \quad \frac{\partial z_i}{\partial Y_i} = \frac{1}{\lambda} a_{23}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial Z_i} = \frac{1}{\lambda} a_{31} \quad ; \quad \frac{\partial y_i}{\partial Z_i} = \frac{1}{\lambda} a_{32} \quad ; \quad \frac{\partial z_i}{\partial Z_i} = \frac{1}{\lambda} a_{33}$$

La ecuación de error en forma matricial queda así:

$$\boxed{V = A_1 X_1 - L + A_2 X_2} \quad (12./2)$$

En la orientación absoluta de únicamente un modelo se eliminan los términos $A_2 X_2$, de tal forma que 2 cambia a:

$$V = A_1 X_1 - L$$

y como vector solución X_1

$$X_1 = (A_1^T (B P^{-1} B^T) A_1)^{-1} (A_1^T (B P^{-1} B^T) L)$$

En esta solución de X_1 existen correlaciones entre las coordenadas del modelo observadas (debido a la orientación relativa hecha previamente, etc.) que ya se consideraron mediante $B P^{-1} B^T$ - ver capítulo 10.

Regresando al caso general: Las derivadas parciales (pág. 137/138) se substituyen en (2), obteniéndose como ecuaciones de error para las coordenadas del modelo mediante el uso de ejes fijos.

para X_i

$$\begin{aligned}
 V_{X_i} &= - \frac{1}{\lambda^2} \left[a_{11}(X_i - X_0) + a_{21}(Y_i - Y_0) + a_{31}(Z_i - Z_0) \right] d\lambda \\
 &- \frac{1}{\lambda} a_{11} dX_0 - \frac{1}{\lambda} a_{21} dY_0 - \frac{1}{\lambda} a_{31} dZ_0 \\
 &+ \frac{1}{\lambda} \left[-\sin \varphi \cos \kappa (X_i - X_0) + \sin \varphi \sin \kappa (Y_i - Y_0) + \cos \varphi (Z_i - Z_0) \right] d\varphi \\
 &+ \frac{1}{\lambda} \left[a_{21}(X_i - X_0) - a_{11}(Y_i - Y_0) \right] d\kappa + \cancel{0} \cdot d\Omega \\
 &+ \frac{1}{\lambda} a_{11} dX_i + \frac{1}{\lambda} a_{21} dY_i + \frac{1}{\lambda} a_{31} dZ_i \\
 &- \left(X_i \text{ gemessen} - X_i \text{ berechnet} \right)
 \end{aligned}$$

También se obtiene el valor aproximado a calcular para X_i como:

$$X_{i \text{ ber.}} = \frac{1}{\lambda} \left[a_{11}(X - X_0) + a_{21}(Y - Y_0) + a_{31}(Z - Z_0) \right]$$

Para Y_i

$$\begin{aligned}
 V_{Y_i} &= - \frac{1}{\lambda^2} \left[a_{12}(X_i - X_0) + a_{22}(Y_i - Y_0) + a_{32}(Z_i - Z_0) \right] d\lambda \\
 &- \frac{1}{\lambda} a_{12} dX_0 - \frac{1}{\lambda} a_{22} dY_0 - \frac{1}{\lambda} a_{32} dZ_0 \\
 &+ \frac{1}{\lambda} \left[\sin \Omega \cos \varphi \cos \kappa (X_i - X_0) - \sin \Omega \cos \varphi \sin \kappa (Y_i - Y_0) + \sin \Omega \sin \varphi (Z_i - Z_0) \right] d\Omega \\
 &+ \frac{1}{\lambda} \left[-a_{13}(X_i - X_0) - a_{23}(Y_i - Y_0) - a_{33}(Z_i - Z_0) \right] d\Omega \\
 &+ \frac{1}{\lambda} \left[a_{22}(X_i - X_0) - a_{12}(Y_i - Y_0) \right] d\kappa \\
 &+ \frac{1}{\lambda} a_{12} dX_i + \frac{1}{\lambda} a_{22} dY_i + \frac{1}{\lambda} a_{32} dZ_i - \left(Y_i \text{ gemessen} - Y_i \text{ berechnet} \right)
 \end{aligned}$$

Para el valor Y_i aproximado se cumple:

$$y_i = \frac{1}{\lambda} \left[a_{12}(X - X_0) + a_{22}(Y - Y_0) + a_{32}(Z - Z_0) \right]$$

y para Z_i

$$\begin{aligned}
 V_{Z_i} = & -\frac{1}{\lambda^2} \left[a_{13} (X_i - X_0) + a_{23} (Y_i - Y_0) + a_{33} (Z_i - Z_0) \right] d\lambda \\
 & - \frac{1}{\lambda} a_{13} dX_0 - \frac{1}{\lambda} a_{23} dY_0 - \frac{1}{\lambda} a_{33} dZ_0 \\
 & + \frac{1}{\lambda} \left[-\cos \Omega \cos \Phi \cos \kappa (X_i - X_0) + \sin \Omega \cos \Phi \sin \kappa (Y_i - Y_0) - \cos \Omega \sin \Phi (Z_i - Z_0) \right] d\Phi \\
 & + \frac{1}{\lambda} \left[a_{12} (X_i - X_0) + a_{22} (Y_i - Y_0) + a_{32} (Z_i - Z_0) \right] d\Omega \\
 & + \frac{1}{\lambda} \left[a_{23} (X_i - X_0) - a_{13} (Y_i - Y_0) \right] d\kappa \\
 & + \frac{1}{\lambda} a_{13} dX_i + \frac{1}{\lambda} a_{23} dY_i + \frac{1}{\lambda} a_{33} dZ_i - \underbrace{\left(\text{Zigemessen} - \text{Zihschott} \right)}_{(12./3_i)}
 \end{aligned}$$

el valor aproximado calculado Z_i aproximado:

$$Z_i = \frac{1}{\lambda} \left[a_{13} (X - X_0) + a_{23} (Y - Y_0) + a_{33} (Z - Z_0) \right]$$

El problema completo debe ahora considerarse para ejes que participan en el giro: -ya se había hecho una consideración análoga en la orientación relativa. En el caso de ejes que participan en el giro se simplifican los coeficientes para cada iteración como sigue:

Para la 1a. aproximación se obtuvo la matriz de giro $A_{(1)}^T$

$$A_{(1)}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la 2a. aproximación, debido a los ángulos de giro pequeños, se obtuvo $A_{(2)}^T$

$$A_{(2)}^T = \begin{pmatrix} 1 & d\kappa & -d\Phi \\ -d\kappa & 1 & d\Omega \\ d\Phi & -d\Omega & 1 \end{pmatrix}$$

La diferencia dió como suplemento a la matriz de giro:

$$A_{(2)}^T - A_{(1)}^T = dA^T = \begin{pmatrix} 0 & d\kappa & -d\Phi \\ -d\kappa & 0 & d\Omega \\ d\Phi & -d\Omega & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se coloca $\frac{1}{\lambda} = \lambda'$. (1) queda así:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \lambda' \cdot A^T \cdot \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix}$$

Linealización:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = (\lambda_0' + d\lambda') (A_0^T + dA^T) \cdot \begin{pmatrix} X_i - X_0 + dX_i - dX_0 \\ Y_i - Y_0 + dY_i - dY_0 \\ Z_i - Z_0 + dZ_i - dZ_0 \end{pmatrix}$$

El lado izquierdo de la igualdad (valores intrínsecos para las observaciones) se puede escribir como la suma de las observaciones más los residuos. En el lado derecho se efectúan las multiplicaciones, se ordena de acuerdo a las incógnitas (despreciando productos similares a $d\lambda' \cdot dA^T \dots$, también designados como productos de 2o. orden), se obtiene con ello:

$$\begin{pmatrix} V_{x_i} \\ V_{y_i} \\ V_{z_i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \lambda_0' A_0^T \begin{pmatrix} (X_i)_0 - X_0 \\ (Y_i)_0 - Y_0 \\ (Z_i)_0 - Z_0 \end{pmatrix} + A_0^T \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix} d\lambda'$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}_{\text{berechnet}} + \lambda_0' \begin{pmatrix} 0 & d\kappa & -d\bar{\varphi} \\ -d\kappa & 0 & d\Omega \\ d\bar{\varphi} & -d\Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix}$$

$$- \lambda_0' A_0^T \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} + \lambda_0' A_0^T \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{pmatrix}$$

(12./2₂)

Este sistema de ecuaciones ya se puede resolver nuevamente, para las coordenadas individuales.

Entonces se obtiene para ejes que participan en el giro --
 considerando que: $d\lambda' = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot d\lambda$

para X_i $\lambda_0' = \frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned} v_{xi} &= -\frac{1}{\lambda^2} [a_{11}(X_i - X_0) + a_{21}(Y_i - Y_0) + a_{31}(Z_i - Z_0)] d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} a_{11} dX_0 - \frac{1}{\lambda} a_{21} dY_0 - \frac{1}{\lambda} a_{31} dZ_0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (Z_i - Z_0) d\bar{\varphi} - \frac{1}{\lambda} (Y_i - Y_0) d\bar{\kappa} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} a_{11} dX_i + \frac{1}{\lambda} a_{21} dY_i + \frac{1}{\lambda} a_{31} dZ_i \\ &\quad - (X_i \text{ medido} - X_i \text{ calculado}) \end{aligned}$$

para Y_i

$$\begin{aligned} v_{yi} &= -\frac{1}{\lambda^2} [a_{12}(X_i - X_0) + a_{22}(Y_i - Y_0) + a_{32}(Z_i - Z_0)] d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} a_{12} dX_0 - \frac{1}{\lambda} a_{22} dY_0 - \frac{1}{\lambda} a_{32} dZ_0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (X_i - X_0) d\bar{\kappa} - \frac{1}{\lambda} (Z_i - Z_0) d\bar{\Omega} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} a_{12} dX_i + \frac{1}{\lambda} a_{22} dY_i + \frac{1}{\lambda} a_{32} dZ_i \\ &\quad - (Y_i \text{ medido} - Y_i \text{ calculado}) \end{aligned}$$

para Z_i

$$\begin{aligned} v_{zi} &= -\frac{1}{\lambda^2} [a_{13}(X_i - X_0) + a_{23}(Y_i - Y_0) + a_{33}(Z_i - Z_0)] d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} a_{13} dX_0 - \frac{1}{\lambda} a_{23} dY_0 - \frac{1}{\lambda} a_{33} dZ_0 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} (Y_i - Y_0) d\bar{\Omega} - \frac{1}{\lambda} (X_i - X_0) d\bar{\varphi} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} a_{13} dX_i + \frac{1}{\lambda} a_{23} dY_i + \frac{1}{\lambda} a_{33} dZ_i \\ &\quad - (Z_i \text{ medido} - Z_i \text{ calculado}) \end{aligned}$$

Para el ajuste de un solo modelo se simplifica la linealización (2₂), ya que el término:

$$\lambda_0' \lambda_0^T \cdot \begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{pmatrix}$$

Se cancela: Por lo tanto -

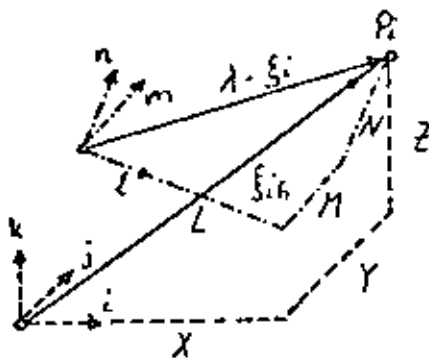
para la ecuación de errores se obtiene:

$$\begin{pmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [a_{11}(X_i - X_0) + a_{21}(Y_i - Y_0) + a_{31}(Z_i - Z_0)] \\ [a_{12}(X_i - X_0) + a_{22}(Y_i - Y_0) + a_{32}(Z_i - Z_0)] \\ [a_{13}(X_i - X_0) + a_{23}(Y_i - Y_0) + a_{33}(Z_i - Z_0)] \end{pmatrix} d\lambda'$$

$$+ \begin{pmatrix} \lambda_0' (Y_i - Y_0) dK - \lambda_0' (Z_i - Z_0) d\bar{Q} \\ -\lambda_0' (X_i - X_0) dK + \lambda_0' (Z_i - Z_0) d\Omega \\ \lambda_0' (X_i - X_0) d\bar{Q} - \lambda_0' (Y_i - Y_0) d\Omega \end{pmatrix} - \lambda_0' \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix}$$

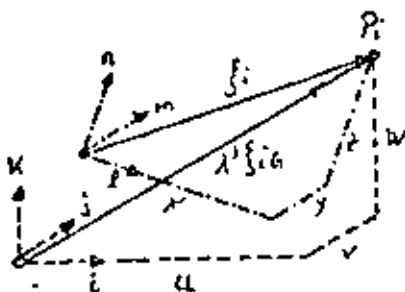
$$+ \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}_{\text{bracketed}} - \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}_{\text{free}}$$

Ahora, se introduce una nomenclatura nueva partiendo de las coordenadas terrestres X Y Z se designan con L M N a las componentes en el sistema del modelo. Se cumple:



$$\begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix}$$

partiendo de las coordenadas del modelo X Y Z se designan con u, v, w las componentes en el sistema terrestre, y se cumple:



$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{pmatrix}$$

Además, para la relación entre las coordenadas del modelo y las coordenadas terrestres del centro de proyección, se cumple:

$$A_0' A^T \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{pmatrix}$$

Con estas referencias, el sistema de igualdades para las ecuaciones de error con ejes que participan en el giro de la pág. 143, adquiere la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}}_V = \underbrace{\begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{pmatrix} d\lambda' + \begin{pmatrix} -w_i \\ 0 \\ u_i \end{pmatrix} d\bar{\varphi} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_i \\ -v_i \end{pmatrix} d\Omega}_{AX} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_i \\ -u_i \\ 0 \end{pmatrix} dK - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dX_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dY_0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dZ_0}_{-L} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}}_{\text{berechnet}} - \underbrace{\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}}_{\text{gemessen}}$$

Ahora se consideran las coordenadas del centro de gravedad o sea se aplica una transformación de coordenadas para todos los puntos en el centro de gravedad. Esto se debe hacer tanto para las coordenadas del modelo como para las coordenadas terrestres.

Entonces el sistema de ecuaciones normales se subdivide en un sistema de 3 x 3 y 4 ecuaciones independientes.

En la pág. siguiente se presenta gráficamente la ecuación normal. En este esquema aún no se puede notar, que la solución se simplifica si hay una descomposición. Pero tampoco se toma en cuenta, la existencia de las coordenadas del centro de gravedad- el texto continúa en la página 146.-

$$X = \begin{pmatrix} dX' \\ d\bar{\Phi} \\ d\Omega \\ dK \\ dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix}; L = \begin{pmatrix} X_{1N} - X_{1G} \\ Y_{1N} - Y_{1G} \\ Z_{1N} - Z_{1G} \\ \vdots \\ Z_{nN} - Z_{nG} \end{pmatrix}$$

()

| | | $\bar{\Phi}$ | $() \Omega$ | K | X_0 | Y | Z_0 |
|-------|-------|--------------|--------------|--------|-------|------|-------|
| x_1 | L_1 | $-w_1$ | 0 | v_1 | -1 | 0 | 0 |
| y_1 | M_1 | 0 | w_1 | $-u_1$ | 0 | -1 | 0 |
| z_1 | N_1 | u_1 | $-v_1$ | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x_2 | L_2 | $-w_2$ | 0 | v_2 | -1 | 0 | 0 |
| y_2 | M_2 | 0 | w_2 | $-u_2$ | 0 | -1 | 0 |
| z_2 | N_2 | u_2 | $-v_2$ | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x_3 | L_3 | $-w_3$ | 0 | v_3 | -1 | 0 | 0 |
| y_3 | M_3 | 0 | w_3 | $-u_3$ | 0 | -1 | 0 |
| z_3 | N_3 | u_3 | $-v_3$ | 0 | 0 | 0 | -1 |
| x_n | L_n | $-w_n$ | 0 | v_n | -1 | 0 | 0 |
| y_n | M_n | 0 | w_n | $-u_n$ | 0 | -1 | 0 |
| z_n | N_n | u_n | $-v_n$ | 0 | 0 | 0 | -1 |

| L_1 | M_1 | N_1 | L_2 | M_2 | N_2 | L_3 | M_3 | N_3 | L_n | M_n | N_n |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $-w_1$ | 0 | u_1 | $-w_2$ | 0 | u_2 | $-w_3$ | 0 | u_3 | $-w_n$ | 0 | u_n |
| 0 | v_1 | $-v_1$ | 0 | w_2 | $-v_2$ | 0 | w_3 | $-v_3$ | 0 | w_n | $-v_n$ |
| v_1 | $-u_1$ | 0 | v_2 | $-u_2$ | 0 | v_3 | $-u_3$ | 0 | v_n | $-u_n$ | 0 |
| -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 |

| | | | | | | |
|--|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\sum_{i=1}^n (L_i^2 + M_i^2 + N_i^2)$ | $\sum_{i=1}^n (-w_i L_i + u_i M_i)$ | $\sum_{i=1}^n (w_i M_i - v_i N_i)$ | $\sum_{i=1}^n (v_i L_i - u_i M_i)$ | $-\sum_{i=1}^n L_i$ | $-\sum_{i=1}^n M_i$ | $-\sum_{i=1}^n N_i$ |
| | $\sum_{i=1}^n (w_i^2 + u_i^2)$ | $\sum_{i=1}^n (-u_i v_i)$ | $\sum_{i=1}^n (-w_i v_i)$ | $\sum_{i=1}^n v_i$ | 0 | $\sum_{i=1}^n -u_i$ |
| | | $\sum_{i=1}^n (w_i^2 + v_i^2)$ | $\sum_{i=1}^n (-w_i u_i)$ | 0 | $\sum_{i=1}^n -v_i$ | $\sum_{i=1}^n v_i$ |
| | | | $\sum_{i=1}^n (v_i^2 + u_i^2)$ | $\sum_{i=1}^n -v_i$ | $\sum_{i=1}^n u_i$ | 0 |
| | | | | n | 0 | 0 |
| | | | | | n | 0 |
| | | | | | | n |

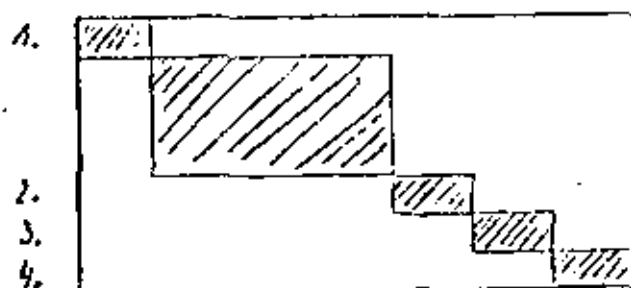
Los sistemas coordinados experimentan un desplazamiento paralelo en el conjunto de puntos si se calculan las coordenadas del centro de gravedad. Para la suma de las L_i , M_i , N_i o bien u_i , v_i , w_i se obtiene entonces:

$$\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i = 0$$

Pero entonces también las correlaciones con dX_0 , dY_0 , dZ_0 se vuelven cero (ver N en la última página). Esto significa que: los parámetros se vuelven independientes entre ellos. Pero todavía queda un sistema de 4 x 4. En las coordenadas del centro de gravedad, el origen del sistema $L_i M_i N_i$ coincide con el del sistema $u_i v_i w_i$ (-ese es justamente el centro de gravedad). Debido a la ortogonalidad del sistema se cumple que:

$$\sum_{i=1}^n (-w_i L_i + u_i N_i) = \sum_{i=1}^n (w_i M_i - v_i N_i) = \sum_{i=1}^n (v_i L_i - u_i M_i) = 0$$

Se obtiene una 4a. igualdad independiente y queda a invertir un sistema de 3 x 3. Por lo tanto la matriz de ecuaciones normales se ve de la siguiente forma:



o en caso de anteponer ecuaciones
- para las 4 igualdades independientes

$$dX_0 = \frac{\sum (x_{i \text{ gem.}} - x_{i \text{ bec.}})}{n}$$

$$dY_0 = \frac{\sum (y_{i \text{ gem.}} - y_{i \text{ bec.}})}{n}$$

$$dZ_0 = \frac{\sum (z_{i \text{ gem.}} - z_{i \text{ bec.}})}{n}$$

$$d\lambda' = \frac{\sum (L_i [x_{i \text{ gem.}} - x_{i \text{ bec.}}] + M_i [y_{i \text{ gem.}} - y_{i \text{ bec.}}] + N_i [z_{i \text{ gem.}} - z_{i \text{ bec.}}])}{\sum (L_i^2 + M_i^2 + N_i^2)}$$

y

- para el sistema de 3 x 3:

$$\sum (w_i^2 + u_i^2) d\Phi - \sum (u_i v_i) d\Omega - \sum (w_i v_i) dK - \sum (-w_i [x_{igem} - x_{iber}] + u_i [z_{igem} - z_{iber}]) = 0$$

$$- \sum (u_i v_i) d\Phi + \sum (w_i^2 + v_i^2) d\Omega - \sum (w_i u_i) dK - \sum (w_i [y_{igem} - y_{iber}] - v_i [z_{igem} - z_{iber}]) = 0$$

$$- \sum (w_i v_i) d\Phi - \sum (u_i w_i) d\Omega + \sum (w_i^2 + u_i^2) dK - \sum (v_i [x_{igem} - x_{iber}] - u_i [y_{igem} - y_{iber}]) = 0$$

Para este sencillo cálculo consultar como bibliografía:

JEK pág. 43, 1972 Orientación absoluta.

Finsterwalder 1968 pág. 3.4.

Buchholtz/Rüger 1973 pág. 10.3.5 Transformación de coordenadas del modelo en terrestres.

Hasta aquí la orientación absoluta se ha manejado para el caso de ecuaciones de observación con coordenadas del modelo medidas (estas mediciones se pudieron hacer por ej. en un instrumento Analógico). El cálculo general para el ajuste es:

$$AX - L = V$$

La ventaja de este método consiste en los algoritmos de solución sencillos para el ajuste. Sin embargo tiene como desventaja que las incógnitas x_0, y_0, z_0, λ y $a_{11} \dots a_{33}$ -las últimas como funciones de los ángulos de giro ϕ, Ω, K -intervinieron - como aproximaciones en los coeficientes de la matriz A. Esto puede traer dificultades, por ej. en la iteración.

En lo que resta de este capítulo se parte ahora de la relación inicial inversa al cálculo hasta aquí expuesto. Ya se había establecido como fórmula (1a): Las coordenadas terrestres se consideran como función de las coordenadas del modelo.

La relación de partida queda así:

$$\begin{aligned} \xi_{ig} &= \lambda \cdot A \cdot \xi_i + \gamma \\ \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} &= \lambda \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12./1a)$$

Las coordenadas del modelo con magnitudes medibles; las cuales están del lado derecho de la ecuación.

En los puntos de pase, que fueron medidos en el modelo, surgen ahora condiciones en base a las coordenadas terrestres conocidas.

El cálculo (1a) conduce al problema del ajuste de ecuaciones - de condición con incógnitas (ver 1.6./11 ff).

$$\text{En general se cumple: } AX + BV - L = 0$$

La linealización de (1a) conduce a las siguientes ecuaciones para los suplementos dx_i , dy_i , dz_i :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial X_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial X_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial X_i}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial X_i}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial X_i}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial X_i}{\partial K} dK \\ \frac{\partial Y_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial Y_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial Y_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial Y_i}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial Y_i}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial Y_i}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial Y_i}{\partial K} dK \\ \frac{\partial Z_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial Z_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial Z_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial Z_i}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial Z_i}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial Z_i}{\partial \Omega} d\Omega + \frac{\partial Z_i}{\partial K} dK \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} v_{xi} + \frac{\partial X_i}{\partial y_i} v_{yi} + \frac{\partial X_i}{\partial z_i} v_{zi} \\ \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} v_{xi} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} v_{yi} + \frac{\partial Y_i}{\partial z_i} v_{zi} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial x_i} v_{xi} + \frac{\partial Z_i}{\partial y_i} v_{yi} + \frac{\partial Z_i}{\partial z_i} v_{zi} \end{pmatrix} - \lambda \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_{i\text{gen}} \\ y_{i\text{gen}} \\ z_{i\text{gen}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{i\text{gen}} \\ Y_{i\text{gen}} \\ Z_{i\text{gen}} \end{pmatrix} \quad (12./2a) \end{aligned}$$

Las derivadas parciales se obtienen con ayuda de las sintetizaciones conocidas.

- derivadas con respecto a λ

$$\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} = A_1 C \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \lambda} = A_2 C \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial \lambda} = A_3 C$$

- derivadas con respecto a X_0, Y_0, Z_0

$$\frac{\partial X_i}{\partial X_0} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial X_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial X_0} = 0$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial Y_0} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial Y_0} = 0$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial Z_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial Z_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial Z_0} = 1$$

y - derivadas con respecto a los ángulos de giro.

$$\frac{\partial X_i}{\partial \Phi} = \lambda \left(\frac{\partial A_1}{\partial \Phi} \right) C \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \Phi} = \lambda \left(\frac{\partial A_2}{\partial \Phi} \right) C \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial \Phi} = \lambda \left(\frac{\partial A_3}{\partial \Phi} \right) C$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial \Omega} = \lambda \left(\frac{\partial A_1}{\partial \Omega} \right) C \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \Omega} = \lambda \left(\frac{\partial A_2}{\partial \Omega} \right) C \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial \Omega} = \lambda \left(\frac{\partial A_3}{\partial \Omega} \right) C$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial K} = \lambda \left(\frac{\partial A_1}{\partial K} \right) C \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial K} = \lambda \left(\frac{\partial A_2}{\partial K} \right) C \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial K} = \lambda \left(\frac{\partial A_3}{\partial K} \right) C$$

con las diferenciales de A con respecto a los ángulos de giro, se obtiene:

$$\frac{\partial A}{\partial \Phi} = \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cos K & \sin \Omega \cos \Phi \cos K & -\cos \Omega \cos \Phi \cos K \\ \sin \Phi \sin K & -\sin \Omega \cos \Phi \sin K & \cos \Omega \cos \Phi \sin K \\ \cos \Phi & \sin \Omega \sin \Phi & -\cos \Omega \sin \Phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{13} & a_{12} \\ 0 & -a_{23} & a_{22} \\ 0 & -a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial K} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la substitución da:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \Phi} = \left(\begin{array}{l} -x \sin \Phi \cos K + y \sin \Omega \cos \Phi \cos K \\ -z \cos \Omega \cos \Phi \cos K \end{array} \right) \cdot \lambda \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \Phi} = \left(\begin{array}{l} x \sin \Phi \sin K \\ -y \sin \Omega \cos \Phi \sin K \\ + z \cos \Omega \cos \Phi \sin K \end{array} \right) \cdot \lambda \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial \Phi} = \left(\begin{array}{l} x \cos \Phi \\ + y \sin \Omega \sin \Phi \\ - z \cos \Omega \sin \Phi \end{array} \right) \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial \Omega} = (-y a_{13} + z a_{12}) \cdot \lambda \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \Omega} = (-y a_{23} + z a_{22}) \cdot \lambda \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial \Omega} = (-y a_{33} + z a_{32}) \cdot \lambda$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial K} = (x a_{21} + y a_{22} + z a_{23}) \cdot \lambda \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial K} = (-x a_{11} - y a_{12} - z a_{13}) \cdot \lambda \quad ; \quad \frac{\partial Z_i}{\partial K} = 0$$

Substituyendo estas derivadas en (2a) conduce a los siguientes incrementos para las coordenadas terrestres:

- para X_i

$$\begin{aligned} dX_i &= (x a_{11} + y a_{12} + z a_{13}) d\lambda + dX_0 \\ &+ (-x \sin \Phi \cos \kappa + y \sin \Omega \cos \Phi \cos \kappa - z \cos \Omega \cos \Phi \cos \kappa) \lambda \cdot d\Phi \\ &+ (-y a_{13} + z a_{12}) \lambda \cdot d\Omega + (x a_{11} + y a_{22} + z a_{23}) \lambda \cdot d\kappa \\ &- \lambda (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z) + X_{i0} - \lambda (a_{11} v_x + a_{12} v_y + a_{13} v_z) \end{aligned}$$

- para Y_i

$$\begin{aligned} dY_i &= (x a_{21} + y a_{22} + z a_{23}) d\lambda + dY_0 \\ &+ (x \sin \Phi \sin \kappa - y \sin \Omega \cos \Phi \sin \kappa + z \cos \Omega \cos \Phi \sin \kappa) \lambda \cdot d\Phi \\ &+ (-y a_{23} + z a_{22}) \lambda \cdot d\Omega + (-x a_{11} - y a_{12} - z a_{13}) \lambda \cdot d\kappa \\ &- \lambda (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z) + Y_{i0} - \lambda (a_{21} v_x + a_{22} v_y + a_{23} v_z) \end{aligned}$$

y - para Z_i

$$\begin{aligned} dZ_i &= (x a_{31} + y a_{32} + z a_{33}) d\lambda + dZ_0 \\ &+ (x \cos \Phi + y \sin \Omega \sin \Phi - z \cos \Omega \sin \Phi) \lambda \cdot d\Phi \\ &+ (-y a_{33} + z a_{32}) \lambda \cdot d\Omega \\ &- \lambda (a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z) + Z_{i0} - \lambda (a_{31} v_x + a_{32} v_y + a_{33} v_z) \end{aligned}$$

(12./3a₁)

En estas ecuaciones X, Y, Z son valores medidos.

Para los puntos de pase (con el peso $P = \infty$) se obtiene para las v .

$$v_{xp} = -\lambda (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z) + X_{ip}$$

$$v_{yp} = -\lambda (a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z) + Y_{ip}$$

$$v_{zp} = -\lambda (a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z) + Z_{ip}$$

Después de que con (3a₁) se formó las "ecuaciones de error" para giros alrededor de ejes tridimensionales fijos, se debe ahora nuevamente regresar a ejes que participan en el giro.

Entonces los coeficientes de la matriz A se simplifican a :

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \cos \bar{\varphi} = \cos \Omega = \cos \mathcal{K} = 1$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = \cos \bar{\varphi} \sin \mathcal{K} = \dots = 0$$

y con ello se obtiene en forma análoga a (3a₁):

- para suplementos a X_i

$$dX_i = x \cdot d\lambda - z \cdot \lambda \cdot d\bar{\varphi} + y \cdot \lambda \cdot d\mathcal{K} + dX_0$$

$$- \lambda (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{i\text{gen}}$$

$$- \lambda (a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z)$$

- para suplementos a Y_i

$$dY_i = y \cdot d\lambda + z \cdot \lambda \cdot d\Omega - x \cdot \lambda \cdot d\mathcal{K} + dY_0$$

$$- \lambda (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{i\text{gen}}$$

$$- \lambda (a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z)$$

y - para suplementos a Z_i

$$dZ_i = z \cdot d\lambda + x \cdot \lambda \cdot d\bar{\varphi} - y \cdot \lambda \cdot d\Omega + dZ_0$$

$$- \lambda (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{i\text{gen}}$$

$$- \lambda (a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z)$$

así como para puntos de pase:

$$v_{xp} = - \lambda (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{ip}$$

$$v_{yp} = - \lambda (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{ip}$$

$$v_{zp} = - \lambda (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{ip}$$

(12./3a₂)

Para (3a₂) generalmente no se usa en esta forma, sino que se agrupa con respecto a las coordenadas del modelo.

X, Y, Z (valores medidos). Sin embargo los v_{ip} se dejan en su forma anterior. Esto da:

$$\begin{aligned} dX_i &= d\lambda \cdot x + \lambda d\mu \cdot y - \lambda d\bar{\mu} \cdot z + dX_0 \\ &\quad - \lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{igen} - \lambda(a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z) \\ dY_i &= -\lambda d\mu \cdot x + d\lambda \cdot y + \lambda d\Omega \cdot z + dY_0 \\ &\quad - \lambda(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{igen} - \lambda(a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z) \\ dZ_i &= \lambda d\bar{\mu} \cdot x - \lambda d\Omega \cdot y + d\lambda \cdot z + dZ_0 \\ &\quad - \lambda(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{igen} - \lambda(a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z) \end{aligned}$$

Usando notaciones nuevas para los coeficientes:

$$d\lambda = a ; \quad \lambda \cdot d\mu = b ; \quad \lambda \cdot d\bar{\mu} = c ; \quad \lambda \cdot d\Omega = d$$

conduce a:

$$\begin{aligned} dX_i &= ax + by - cz + dX_0 - \lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{igen} \\ &\quad - \lambda(a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z) \\ dY_i &= -bx + ay + dz + dY_0 - \lambda(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{igen} \\ &\quad - \lambda(a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z) \\ dZ_i &= cx - dy + az + dZ_0 - \lambda(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{igen} \\ &\quad - \lambda(a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z) \end{aligned}$$

Lo que se puede representar en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & -c \\ -b & a & d \\ c & -d & a \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} - \lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{igen} \\ Y_{igen} \\ Z_{igen} \end{pmatrix} - \lambda A \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \\ v_{zp} \end{pmatrix} = -\lambda A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{ip} \\ Y_{ip} \\ Z_{ip} \end{pmatrix} \quad (12. / \mu a_2)$$

En lugar de las observaciones originales v_x, v_y, v_z se pueden usar también las "cuasiobservaciones v_x^*, v_y^*, v_z^* ".

Esto es posible con ayuda de:

$$\begin{pmatrix} v_{xi}^* \\ v_{yi}^* \\ v_{zi}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xp} \\ v_{yp} \\ v_{zp} \end{pmatrix} + \lambda D \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ -b & a & d \\ c & -d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} - \lambda D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

(12./5a)

En este caso se tienen que hacer algunas consideraciones sobre la matriz de covariancias (ver cuasiobservaciones en la orientación relativa, cap. 9).

La matriz de covariancias se integra de la siguiente forma -- (propagación de error):

$$[\Sigma_{x^*}] = [\Sigma_{x_p}] + \lambda^2 D [\Sigma_x] D^T$$

donde $[\Sigma_{x_p}]$ y $[\Sigma_x]$ se integran como matrices diagonales por:

$$[\Sigma_{x_p}] = \sigma_{x_p}^2 E$$

$$[\Sigma_x] = \sigma_x^2 E$$

Para la matriz de covariancias se cumple que:

$$[\Sigma_{x^*}] = \begin{pmatrix} \sigma_{x_p}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{y_p}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{z_p}^2 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} a & b & -c \\ -b & a & d \\ c & -d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & c \\ b & a & -d \\ -c & d & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\sigma_{x_p}^2 + \lambda^2 [a^2 \sigma_x^2 + b^2 \sigma_y^2 + c^2 \sigma_z^2]) & \lambda^2 (-ab \sigma_x^2 + ab \sigma_y^2 - cd \sigma_z^2) & \lambda^2 (ac \sigma_x^2 - bd \sigma_y^2 - ac \sigma_z^2) \\ \lambda^2 (-ab \sigma_x^2 + ab \sigma_y^2 - cd \sigma_z^2) & (\sigma_{y_p}^2 + \lambda^2 [b^2 \sigma_x^2 + a^2 \sigma_y^2 + d^2 \sigma_z^2]) & \lambda^2 (-bc \sigma_x^2 - ad \sigma_y^2 + ad \sigma_z^2) \\ \lambda^2 (ac \sigma_x^2 - bd \sigma_y^2 - ac \sigma_z^2) & \lambda^2 (-bc \sigma_x^2 - ad \sigma_y^2 + ad \sigma_z^2) & (\sigma_{z_p}^2 + \lambda^2 [c^2 \sigma_x^2 + d^2 \sigma_y^2 + a^2 \sigma_z^2]) \end{pmatrix}$$

Suponiendo que:

$$\sigma_{x_p}^2 = \sigma_{y_p}^2 = \sigma_{z_p}^2$$

y

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$$

se simplifica por la matriz ortogonal

D - la matriz de covariancias decisiva. (ortogonalidad para D significa por ej.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \text{y} \quad -ab + b'a - c \cdot d = 0$$

Debido a esta suposición la matriz de covariancias pasa a ser una matriz diagonal:

$$[\Sigma_{X^*}] = \begin{pmatrix} (\sigma_{xp}^2 + \lambda^2 \sigma_p^2) & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{yp}^2 + \lambda^2 \sigma_p^2) & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{zp}^2 + \lambda^2 \sigma_p^2) \end{pmatrix}$$

y si se hace que $\sigma_{xp}^2 = \sigma_{yp}^2 = \sigma_{zp}^2 = \sigma_p^2$

entonces se puede formar sin dificultades la matriz de pesos como inversa de la matriz de covariancias. En el ajuste, se tienen ahora ecuaciones paramétricas con cuasiobservaciones, se obtiene como peso para los puntos de pase:

$$[P_{X^*}] = [\Sigma_{X^*}]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_p^2 + \lambda^2 \sigma_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_p^2 + \lambda^2 \sigma_p^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_p^2 + \lambda^2 \sigma_p^2} \end{pmatrix} \quad (12./6a_2)$$

Si en vez de puntos de pase se tiene por ej. puntos de liga, entonces estos obtienen por peso:

$$[P_{X^*}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2} \end{pmatrix} \quad (12./7a_2)$$

El método de cuasiobservaciones se puede usar también como ejes fijos; nada más que las fórmulas correspondientes se vuelven -- más complicadas.

Otra forma del ajuste es la subdivisión en pasos individuales: ajuste por pasos. Las matrices de las ecuaciones normales de -- 7 x 7 de la orientación y las matrices de las ecuaciones de puntos normales de 3 x 3 se subdividen (o sea: ya sea para un modelo, o para un bloque -ver cap. 13 f.):

a) Ajuste planimétrico (también Anblock).

matrices de orientación de 4 x 4

y matrices de puntos de 2 x 2.

y b) Ajuste altimétrico.

con matrices de orientación de 3 x 3
y matrices de puntos de 3 x 3.

Las correlaciones de los ajustes consecutivos a) y b) se introducen por aproximaciones. Si se itera lo suficiente, se alcanza un resultado, al cual también se hubiera llegado mediante el uso de las correlaciones verdaderas (con menos iteraciones).

Existen varios métodos de cálculo para la solución:

- AMER (Ordn. Survey) y ACKERMANN (Univ. Stuttgart) los utilizan para ajustar bloques (ver cap. 13).
- EBNER (Stuttgart) utiliza el siguiente cálculo:

.. ajuste planimétrico

$$dX_i = ax + by + dX_0 - \lambda(a_{11}x + a_{12}y) + X_{i, gm} - \lambda(a_{11}v_x + a_{12}v_y)$$

$$dY_i = -bx + ay + dY_0 - \lambda(a_{21}x + a_{22}y) + Y_{i, gm} - \lambda(a_{21}v_x + a_{22}v_y)$$

$$v_{Xip} = -\lambda(a_{11}x + a_{12}y) + X_{ip}$$

$$v_{Yip} = -\lambda(a_{21}x + a_{22}y) + Y_{ip}$$

.. ajuste altimétrico

$$dX_i = -cz - \lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{i, gm} - \lambda(a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z)$$

$$dY_i = dz - \lambda(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{i, gm} - \lambda(a_{21}v_x + a_{22}v_y + a_{23}v_z)$$

$$dZ_i = cx - dy + dZ_0 - \lambda(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{i, gm} - \lambda(a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z)$$

$$-\lambda(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{ip}$$

La reducción de la fórmula a posibles cuasiobservaciones según WROBEL (Bonn) da esto:

.. ajuste planimétrico (1 iteración si es el caso)
para la determinación de a, b, dX₀, dY₀, dX_i, dY_i.

$$v_{X_i}^* = ax + by + dX_0 - \lambda(a_{11}x + a_{12}y) + X_{i, gm} + dX_i$$

$$v_{Y_i}^* = -bx + ay + dY_0 - \lambda(a_{21}x + a_{22}y) + Y_{i, gm} + dY_i$$

y para el ... ajuste altimétrico (1 a 2 iteraciones)
para la determinación de c , d , dZ_0 , dX_i , dY_i ,
 dZ_i

$$V_{X_i}^{**} = -c \quad -\lambda (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + X_{iym} + dX_i$$

$$V_{Y_i}^{**} = d \quad -\lambda (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) + Y_{igen} + dY_i$$

$$V_{Z_i}^{**} = cx - dy + dZ_0 - \lambda (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + Z_{igen} + dZ_i$$

Como pesos se consideran

para puntos de pase .. ajuste planimétrico

$$p_{X_i}^* = \frac{1}{\sigma_x^2 + \lambda^2 \sigma_p^2}$$

$$p_{Y_i}^* = \frac{1}{\sigma_y^2 + \lambda^2 \sigma_p^2}$$

.. ajuste altimétrico

$$p_{X_i}^{**} = \frac{1}{\sigma_x^2 + \lambda^2 \sigma_p^2}$$

$$p_{Y_i}^{**} = \frac{1}{\sigma_y^2 + \lambda^2 \sigma_p^2}$$

$$p_{Z_i}^{**} = \frac{1}{\sigma_z^2 + \lambda^2 \sigma_p^2}$$

Para puntos de liga

.. ajuste planimétrico

$$p_{X_i}^* = \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2}$$

$$p_{Y_i}^* = \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2}$$

.. ajuste altimétrico

$$p_{X_i}^{**} = \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2}$$

$$p_{Y_i}^{**} = \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2}$$

$$p_{Z_i}^{**} = \frac{1}{\lambda^2 \sigma_p^2}$$

Aclaraciones para el capítulo 12:

Nomenclatura de fórmulas:

- (1) Cálculo de coordenadas del modelo como función de - coordenadas terrestres (ajuste sin condiciones).
- (1a) ... Cálculo de coordenadas terrestres como función de - coordenadas del modelo (ajuste con ecuaciones de condición).
- (2₁) ... Cálculos de ajuste para giros alrededor de ejes fijos.
- (2₂) ... Cálculos de ajuste para giros con ejes que participan en el giro.

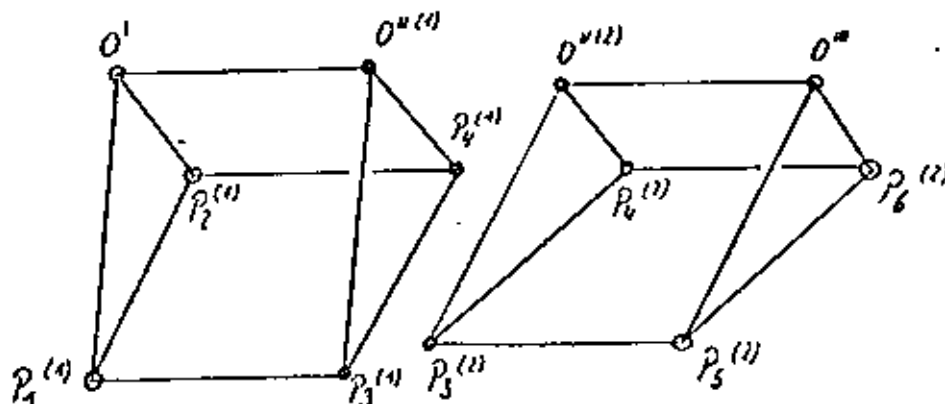
Bibliografía:

Jordan - Eggert - Kneissl III, A1 1972 pág. 43f.

13. Orientación Absoluta mediante el uso de modelos independientes.

En este capítulo se trata de un ajuste de modelo tridimensional y las fórmulas derivadas en el capítulo anterior se puede usar aquí.

Se tienen varios modelos orientados relativamente independientes entre ellos. Se supone que se tiene un mínimo de 3 puntos comunes en los diferentes modelos (-estos puntos deben formar un triángulo en 3 dimensiones-). En el dibujo se muestra esta suposición mediante los 2 puntos de liga P3, P4 y 1 centro de orientación O".



(Se puede hacer una expansión a n modelos sin dificultades).

Existen las siguientes posibilidades:

- a) Primero se hace la orientación absoluta en el modelo 1.
 Con $\xi_G = \lambda \cdot A \cdot \xi_i + \gamma$ se tiene la posibilidad de determinar con precisión todas las coordenadas de este modelo:
 Así también se determinan los puntos comunes.

Ahora se hace la orientación absoluta del modelo 2 en base a los puntos comunes. Con esto se obtienen también coordenadas terrestres para este modelo mediante la relación - arriba citada $\xi_G = \lambda \cdot A \cdot \xi_i + \gamma$ pero ahora con otros valores λ, A, γ .

Es posible una simplificación mediante el uso de coordenadas del centro de gravedad.

- b) Ajuste simultáneo de todos los modelos independientes.

Para ello se requieren coordenadas de aproximación para todos los puntos de l \grave{a} ga y centros de proyección (o sea para $X_0, Y_0, Z_0, X_i, Y_i, Z_i$).

Entonces se cumple:

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 - L$$

donde L puede contener observaciones correlacionadas.

Para el ejemplo de la p \acute{a} g. 89 se describe esquem \acute{a} ticamente un ajuste simult \acute{a} neo.

| | | | | |
|---------------------|-------------|---|-------|----|
| El ejemplo contenfa | Fotografias | 1 | hasta | 8 |
| | Puntos | a | hasta | t |
| | Centros de | | | |
| | toma | 1 | hasta | 8 |
| | Modelos | I | hasta | VI |

Los modelos independientes se integraron mediante la orientaci \acute{o} n relativa de:

| | | |
|------------|-------------|-------|
| Modelo I | fotografias | 1 + 2 |
| Modelo II | fotografias | 2 + 3 |
| Modelo III | fotografias | 3 + 4 |
| Modelo IV | fotografias | 5 + 6 |
| Modelo V | fotografias | 6 + 7 |
| Modelo VI | fotografias | 7 + 8 |

Incógnitas: 7 parámetros por modelo (I hasta VI)

$d\lambda$, dX_0 , dY_0 , dZ_0 , $d\phi$, $d\Omega$, dK

3 parámetros por punto (a hasta t)

dX_i , dY_i , dZ_i

3 parámetros por centro de toma

(nada más intervienen los centros de toma que tienen puntos comunes en varios modelos o --

sea para 2, 3, 6, 7)

dx_j , dy_j , dz_j .

En la pág. 160 se muestra una representación esquemática de la matriz de coeficientes. Este esquema es una parte de las ecuaciones de residuos, que dicen:

$$V = A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 - L$$

Cada ecuación de error tiene su peso especial:

Puntos a...t si es el caso, pesos iguales para X Y
y peso diferente para Z.

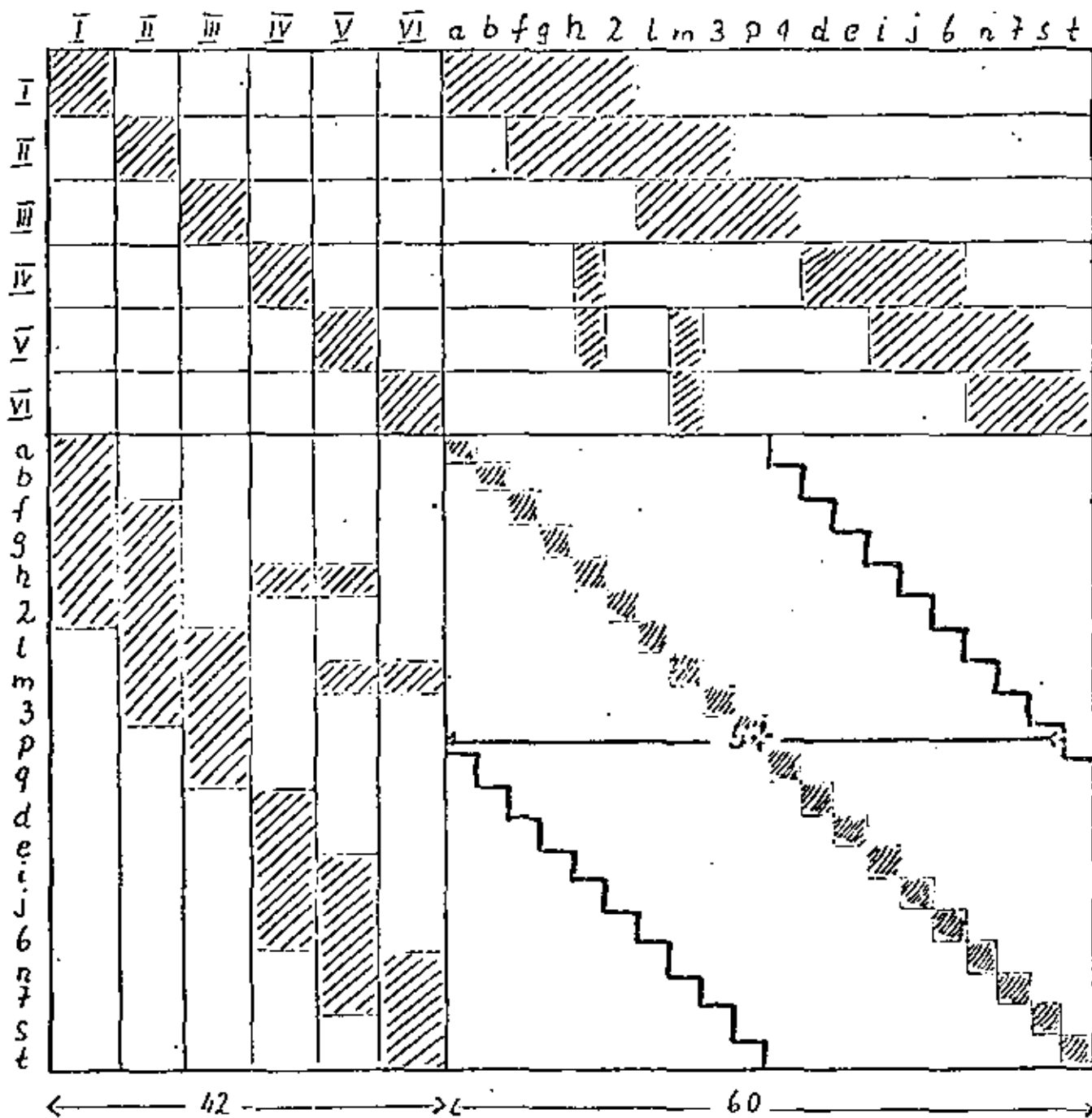
Centros de toma 2, 3, 6, 7 peso para X_0 Y_0 y peso diferente para Z_0 .

Los centros de toma 1, 4, 5, 8 no intervienen en observaciones por ej. incógnitas. No vienen como puntos comunes en modelos - secuenciales y por lo tanto no tienen influencia en la orientación absoluta.

Para la representación de la matriz de ecuaciones normales se vuelven a tomar en cuenta las reflexiones conocidas del capítulo 6 para una anchura de banda mínima. En las páginas 161 y 162 se muestran 2 posibilidades esquemáticamente.

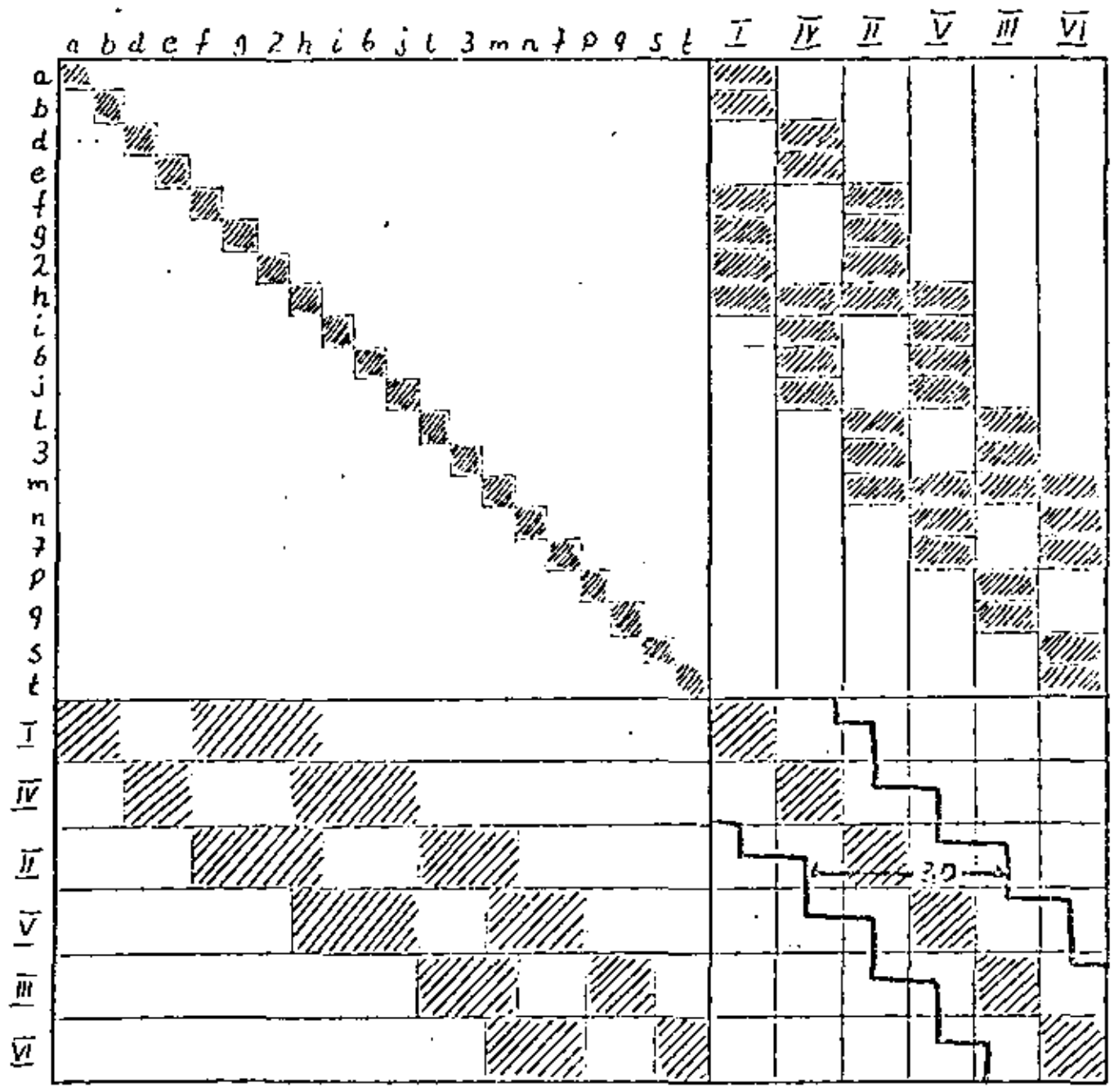
La solución continúa después de aplicar las fórmulas de ajuste conocidas.

Matriz de ecuaciones normales N Caso de estudio 1.



En este caso primero se trabajaron los modelos, y después los puntos. La ordenación de los modelos a lo largo de la franja de vuelo ocasionó para la reducción (ver pág. 94 ff) una anchura de banda de 57. Esto no parece muy ventajoso.

Matriz de ecuaciones normales N Caso de estudio 2.



Se trabajaron los puntos antes que los modelos, y una secuencia de trabajo por hileras perpendiculares a la franja de vuelo condujo a una fuerte reducción de la anchura de banda. Nada más -- queda una anchura de banda de 30; el método de la partición recursiva (ver pág. 99 ff) se podría utilizar en la inversión. El caso de estudio 2 representa lo óptimo.

14. Ajuste planimétrico (método Anblock).

Se trata de un caso especial de la transformación similar tri-dimensional: nada más se trabaja un problema en 2 dimensiones (transformación Helmert). La fórmula (12./1) -como punto de partida- se simplifica a

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del modelo (medidas) se describen como función de las coordenadas terrestres.

La matriz de giro se obtiene aquí como función de un solo ángulo de giro (deriva K). Queda así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos K & \sin K \\ -\sin K & \cos K \end{pmatrix} \quad (14./1)$$

observaciones: coordenadas del modelo X_i, Y_i

incógnitas: λ, X_0, Y_0, K o bien los incrementos diferenciales dK, dX_0, dY_0, dK

se requieren valores aproximados para $\lambda_0, (X_0)_0, (Y_0)_0, K_0$.

El ejemplo del capítulo 6 pág. 89 ff. se va a hacer usando para aclarar este método de ajuste:

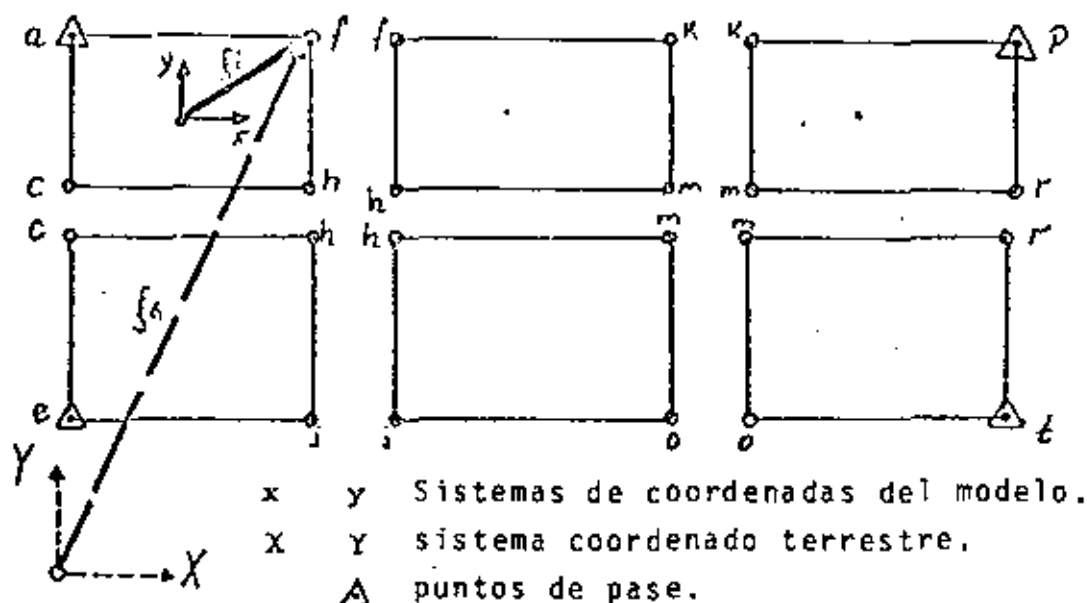
contiene las fotografías 1 hasta 8
modelos I hasta VI
puntos a hasta t
centros de
toma 1 hasta 8

incógnitas: 4 por modelo (I...VI) $d\lambda, dX_0, dY_0, dK$

2 por punto (a... t) dx_i, dy_i .

En este método se trata de un método de aproximaciones, ya que se desprecian las coordenadas Z. En terrenos planos (Holanda) se utiliza gustosamente este método, debido a sus fórmulas sencillas. Antes de derivar las fórmulas debe hacerse notar en el ejemplo, que los puntos a, e, p, t se consideran como puntos planimétricos dados. Con esto existen puntos de pase en todas las esquinas del bloque (Adicionalmente se obtiene una precisión uniforme en el bloque).

¿Cómo se presenta ahora la situación de partida en el ejemplo?



Se cumple como relación fundamental para el vector ξ_G en el sistema terrestre.

$$\xi_G = \lambda \cdot A \cdot \xi_i + \gamma \quad (14./1a)$$

y como relación inversa para el vector del modelo ya se había formado anteriormente la ecuación (1).

Dice:

$$\xi_i = \frac{1}{\lambda} A^T (\xi_G - \gamma)$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \lambda^{-1} A^T \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa \\ -\sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \end{pmatrix}$$

La linealización de (1) mediante la aplicación de incrementos diferenciales a las incógnitas y mediante el uso de residuos en las observaciones da:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_{gem} + \begin{pmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{pmatrix} = (\lambda_0^{-1} + d\lambda^{-1}) (A_0^T + dA^T) \begin{pmatrix} X_i - X_0 + dX_i - dX_0 \\ Y_i - Y_0 + dY_i - dY_0 \end{pmatrix}$$

Efectuando las multiplicaciones y reordenando de acuerdo a las incógnitas, da como ecuaciones de error:

$$\begin{pmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa [X_i - X_0] + \sin \kappa [Y_i - Y_0] \\ -\sin \kappa [X_i - X_0] + \cos \kappa [Y_i - Y_0] \end{pmatrix} d\lambda' + \begin{pmatrix} \lambda_0' (Y_i - Y_0) \\ -\lambda_0' (X_i - X_0) \end{pmatrix} d\kappa \\ + \begin{pmatrix} \lambda_0' \cos \kappa \\ -\lambda_0' \sin \kappa \end{pmatrix} dX_i + \begin{pmatrix} \lambda_0' \sin \kappa \\ \lambda_0' \cos \kappa \end{pmatrix} dY_i - \begin{pmatrix} \lambda_0' \cos \kappa \\ -\lambda_0' \sin \kappa \end{pmatrix} dX_0 \\ - \begin{pmatrix} \lambda_0' \sin \kappa \\ \lambda_0' \cos \kappa \end{pmatrix} dY_0 + \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_{\text{berechnet}} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_{\text{gemessen}} \quad (14./2)$$

La linealización también se puede describir de otra manera.

Se recurre a la fórmula de Taylor para las ecuaciones individuales obteniéndose como relación diferencial:

Ecuación de partida (1):

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa \\ -\sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \end{pmatrix}$$

relación diferencial:

$$\begin{pmatrix} dx_i \\ dy_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial x_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \kappa} d\kappa \\ \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial y_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial y_i}{\partial \kappa} d\kappa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_{\text{gem}} + \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_{\text{ber.}} \\ + \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial x_i}{\partial Y_i} dY_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial y_i}{\partial Y_i} dY_i \end{pmatrix}$$

en dónde para las diferenciales parciales se debe incluir lo siguiente:

- derivadas parciales de las x_i

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} [\cos \kappa (X_i - X_0) + \sin \kappa (Y_i - Y_0)]$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_0} = -\frac{1}{\lambda} \cos \kappa \quad ; \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \frac{1}{\lambda} \cos \kappa$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial Y_0} = -\frac{1}{\lambda} \sin \kappa \quad ; \quad \frac{\partial x_i}{\partial Y_i} = \frac{1}{\lambda} \sin \kappa$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \kappa} = \frac{1}{\lambda} [-\sin \kappa (X_i - X_0) + \cos \kappa (Y_i - Y_0)]$$

y para - derivadas parciales de las y_i .

$$\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\lambda^2} [-\sin \kappa (X_i - X_0) + \cos \kappa (Y_i - Y_0)]$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial X_0} = \frac{1}{\lambda} \sin \kappa \quad ; \quad \frac{\partial y_i}{\partial X_i} = -\frac{1}{\lambda} \sin \kappa$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial Y_0} = -\frac{1}{\lambda} \cos \kappa \quad ; \quad \frac{\partial y_i}{\partial Y_i} = \frac{1}{\lambda} \cos \kappa$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial \kappa} = \frac{1}{\lambda} [-\cos \kappa (X_i - X_0) - \sin \kappa (Y_i - Y_0)]$$

Aplicando el cálculo inverso (1a) conduce, mediante linealización (según el método antes descrito), a:

$$\begin{pmatrix} dX_i \\ dY_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial X_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial X_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial X_i}{\partial \kappa} d\kappa \\ \frac{\partial Y_i}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial Y_i}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial Y_i}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial Y_i}{\partial \kappa} d\kappa \end{pmatrix}$$

$$= \lambda A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} v_{x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial y_i} v_{y_i} \\ \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} v_{x_i} + \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} v_{y_i} \end{pmatrix}$$

dónde con la relación de partida:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa \\ \sin \kappa & \cos \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

las derivadas parciales deben quedar así:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \lambda} = X_i \cos \kappa - Y_i \sin \kappa \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \lambda} = X_i \sin \kappa + Y_i \cos \kappa$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial X_0} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial X_0} = 0$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_0} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial Y_0} = 1$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial \kappa} = -\lambda (X_i \sin \kappa + Y_i \cos \kappa) \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \kappa} = \lambda (X_i \cos \kappa - Y_i \sin \kappa)$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i} = \lambda \cos \kappa \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} = \lambda \sin \kappa$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial y_i} = -\lambda \sin \kappa \quad ; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} = \lambda \cos \kappa$$

En este caso se tienen nuevamente ecuaciones de condición con incógnitas (-los valores de las coordenadas del modelo medidas intervienen junto con las incógnitas en el lado derecho de la igualdad). Como ya se hizo varias veces en el capítulo anterior, se pueden incluir pseudoobservaciones. Se cumple:

$$V_{X_i}^* = (x_i \cos \kappa - y_i \sin \kappa) d\lambda + dX_0 - \lambda (x_i \sin \kappa + y_i \cos \kappa) d\kappa - \lambda (x_i \cos \kappa + y_i \sin \kappa) + X_i + dX_i$$

$$V_{Y_i}^* = (x_i \sin \kappa + y_i \cos \kappa) d\lambda + dY_0 + \lambda (x_i \cos \kappa - y_i \sin \kappa) d\kappa - \lambda (x_i \sin \kappa + y_i \cos \kappa) + Y_i + dY_i$$

con el peso:

$$p_{X_i}^* = \frac{1}{\sigma_x^2 + \lambda^2 \sigma_p^2} \quad ; \quad p_{Y_i}^* = \frac{1}{\sigma_y^2 + \lambda^2 \sigma_p^2} \quad ; \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2$$

en donde para los puntos de liga: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 0$

Debido a ángulos de giro pequeños en el método Anblock se puede considerar que $\cos \kappa = 1$ y $\sin \kappa = 0$. Con esto se obtienen coeficientes muy sencillos (reordenados de acuerdo a las coordenadas del modelo) para $V_{X_i}^*$ y $V_{Y_i}^*$:

$$V_{X_i}^* = d\lambda \cdot x_i + dX_0 - \lambda d\kappa \cdot y_i - \lambda (x_i \cos \kappa - y_i \sin \kappa) + X_{igen} + dX_i$$

$$V_{Y_i}^* = d\lambda \cdot y_i + dY_0 + \lambda d\kappa \cdot x_i - \lambda (x_i \sin \kappa + y_i \cos \kappa) + Y_{igen} + dY_i$$

Utilizando nomenclatura nueva a o bien b para $d\lambda$ o bien $\lambda d\kappa$ dá como relación final:

$$V_{X_i}^* = a \cdot x_i - b \cdot y_i + dX_0 - \lambda (x_i \cos \kappa - y_i \sin \kappa) + X_{igen} + dX_i$$

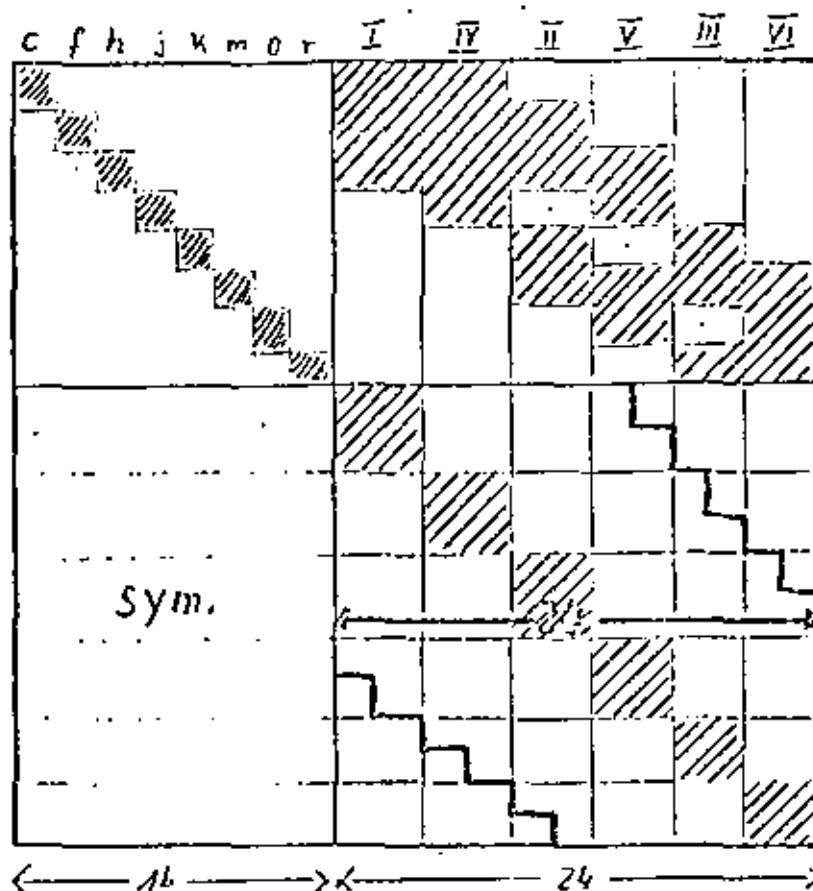
$$V_{Y_i}^* = b \cdot x_i + a \cdot y_i + dY_0 - \lambda (x_i \sin \kappa + y_i \cos \kappa) + Y_{igen} + dY_i$$

La matriz de ecuaciones normales se vuelve a establecer:

- caso de estudio 1 manejo de los puntos, entonces la anchura de banda del modelo es 24 (anchura de banda completa).
- caso de estudio 2 modelos, después puntos; numeración perpendicular a la franja de vuelo. Anchura de banda 10.
- caso de estudio 3 modelos, después puntos; numeración a lo largo de la franja de vuelo. Anchura de banda 10.

- Aclaraciones:
- No tiene sentido poner en primer lugar los modelos, y después los puntos (1 en comparación con 2 y 3).
 - Mientras la anchura de banda sea 2/3 del ancho de la matriz (supuestamente para el método de la partición recurrente), la dirección de la numeración en el ajuste planimétrico carece de interés. En ambos casos se obtuvo una anchura de banda de 10 (ver partición recurrente pág. 99 ff).

Matriz de ecuaciones normales N Caso de estudio 1



15. Fórmulas diferenciales para la orientación relativa.

En el capítulo 9 se trató la orientación relativa con validez general. Pero en la práctica de la fotogrametría intervienen una gran cantidad de situaciones diferentes, en las cuales muchos parámetros de las fórmulas adquieren valores especiales. Este es por ej. el caso en:

- la orientación relativa de fotografías perpendiculares (fotografías verticales).
- o - la orientación relativa con métodos independientes.
- o - la orientación relativa en terreno montañoso, etc.

En los subcapítulos de este capítulo 15 se deducen matemáticamente algunos de estos casos.

15.1 Orientación relativa de pares fotográficos independientes.

La tarea de la orientación relativa consiste en eliminar la paralaje vertical. Para ello se deducen ecuaciones de residuos.

En secciones posteriores de este capítulo se determina la ecuación de error para la paralaje $-y$ y por dos cálculos diferentes. Como primer cálculo se escoge como punto de partida la ecuación de error para las fotocoordenadas y' en la resección tridimensional (5./46). La segunda deducción parte de la ecuación de paralaje obtenida en el capítulo 9 en la orientación relativa. Con ambos cálculos se llega a ecuaciones de error para las coordenadas fotográficas. De estas finalmente se pasa a coordenadas del modelo. ¿Cuál de los problemas arriba mencionados puede resolverse con las ecuaciones finales de este inciso?

Las ecuaciones de error para los paralajes y en coordenadas del modelo pueden usarse por ej. para la orientación relativa de instrumentos analógicos. La ecuación de error para coordenadas fotográficas se aplicó en los primeros intentos de la fotogrametría analítica mediante el uso de calculadoras de mesa (medición del terreno)-

La fórmula diferencial para la resección espacial (5.4b) dice - así:

$$\begin{aligned}
 v_{y'} = - \frac{1}{A_3 B} & \left\{ (-y_i' a_{31} - c a_{21}) dX_0' + (-y_i' a_{32} - c a_{22}) dY_0' \right. \\
 & + (-y_i' a_{33} - c a_{23}) dZ_0' \\
 & + [y_i' \{-a_{33}(Y_i - Y_0') + a_{32}(Z_i - Z_0')\} \\
 & \quad + c \{-a_{23}(Y_i - Y_0') + a_{33}(Z_i - Z_0')\}] d\omega \\
 & + [y_i' \{\cos \phi (X_i - X_0') + \sin \omega \sin \phi (Y_i - Y_0') \\
 & \quad - \cos \omega \sin \phi (Z_i - Z_0')\} \\
 & \quad + c \{\sin \phi \sin K (X_i - X_0') - \sin \omega \cos \phi \sin K (Y_i - Y_0') \\
 & \quad + \cos \omega \cos \phi \sin K (Z_i - Z_0')\}] d\phi \\
 & + [c \{-a_{11}(X_i - X_0') - a_{12}(Y_i - Y_0') - a_{13}(Z_i - Z_0')\}] dK \\
 & + (y_i' a_{31} + c a_{21}) dX_i + (y_i' a_{32} + c a_{22}) dY_i \\
 & + (y_i' a_{33} + c a_{23}) dZ_i \left. \right\} - (Y_i'_{gen} - Y_i'_{loc.})
 \end{aligned}$$

$A_3 B$ queda así:

$$A_3 B = a_{31}(X_i - X_0') + a_{32}(Y_i - Y_0') + a_{33}(Z_i - Z_0')$$

De allí se puede deducir que para el ángulo de giro se cumple:

$$\omega = \phi = K = 0$$

y con ello surgen simplificaciones en la matriz de giro adoptada.

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$$

Con las simplificaciones se obtiene para las fórmulas diferenciales para la fotografía 1:

$$v_{y_i'} = - \frac{1}{(z_i - z_0')} \left\{ -c \, dY_0' - y_i' \, dz_0' + [-y_i' (Y_i - Y_0') + c(z_i - z_0')] \, d\omega \right. \\ \left. + [y_i' (X_i - X_0')] \, d\phi' - c(X_i - X_0') \, d\kappa' \right. \\ \left. + c \, dY_i + y_i' \, dz_i \right\} - (y_i' \text{gem.} - y_i' \text{ber.})$$

y de la misma forma para la fotografía 2:

$$v_{y_i''} = - \frac{1}{(z_i - z_0'')} \left\{ -c \, dY_0'' - y_i'' \, dz_0'' + [-y_i'' (Y_i - Y_0'') + c(z_i - z_0'')] \, d\omega'' \right. \\ \left. + [y_i'' (X_i - X_0'')] \, d\phi'' - c(X_i - X_0'') \, d\kappa'' \right. \\ \left. + c \, dY_i + y_i'' \, dz_i \right\} - (y_i'' \text{gem.} - y_i'' \text{ber.})$$

La resta de estas dos igualdades da una ecuación de error para la paralaje -y

$$\boxed{v_{py_i''} = v_{y_i''} - v_{y_i'}} \quad (15.1./1)$$

En fotografías dependientes una fotografía se considera como corrrectamente orientada. En este caso se escoge la fotografía 1. La segunda fotografía se orienta (conexión de fotografía secuencial). Con esto se cumple:

$$dY_0' + dz_0' + d\omega' = d\phi' + d\kappa' = 0$$

y si adicionalmente se conocen todas las coordenadas de los puntos:

$$dY_i^{(1)} - dY_i^{(2)} = dz_i^{(1)} - dz_i^{(2)} = 0$$

adicionalmente se hace notar que:

$$dY_0'' - dY_0' = dby; \quad dz_0'' - dz_0' = dbz$$

Con ello se obtiene para (1):

$$v_{py_i''} = - \frac{1}{z_i - z_0''} \left\{ -c \, dY_0'' - y_i'' \, dz_0'' + [-y_i'' (Y_i - Y_0'') + c(z_i - z_0'')] \, d\omega'' \right. \\ \left. + [y_i'' (X_i - X_0'')] \, d\phi'' - c(X_i - X_0'') \, d\kappa'' \right\} - (y_i'' \text{gem.} - y_i'' \text{ber.}) \\ - \left[- \frac{1}{z_i - z_0'} \left\{ -c \, dY_0' + y_i' \, dz_0' \right\} - (y_i' \text{gem.} - y_i' \text{ber.}) \right]$$

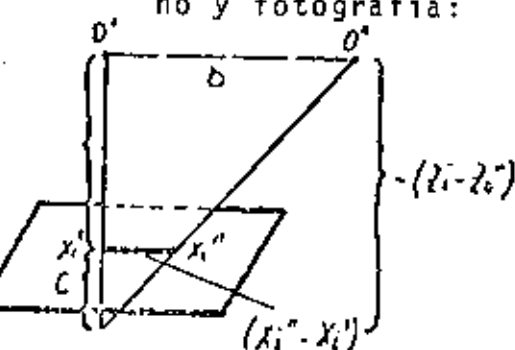
En la última ecuación se substituye:

$$z_0' = z_0'' ; Y_0'' = 0 ; X_0'' = b$$

y se obtiene:

$$v_{py}'' = - \frac{1}{z_i - z_0''} \left\{ -c \, dby - y_i'' \, dz_0'' + y_i' \, dz_0' + \left[-y_i'' y_i' + c(z_i - z_0'') \right] d\omega'' \right. \\ \left. + \left[y_i'' (X_i - b) \right] d\phi'' - c(X_i - b) dk'' \right\} - (y_i''_{gem} - y_i''_{ber}) \\ + (y_i'_{gem} - y_i'_{ber})$$

Basándonos en el dibujo son válidas como relaciones entre terreno y fotografía:



$$y_i = \frac{(z_i - z_0')}{c} y_i'$$

$$- \frac{b}{z_i - z_0''} = \frac{(X_i'' - X_i')}{c} ; - \frac{1}{z_i - z_0''} = \frac{(X_i'' - X_i')}{bc}$$

$$X_i - b = X_i - X_0'' = (z_i - z_0'') \frac{X_i''}{c}$$

Esto se tiene que substituir y después de algunas transformaciones algebraicas (que ocuparían una página) se obtiene finalmente como ecuación de error para la paralaje vertical en coordenadas fotográficas:

$$v_{py}'' = - \frac{X_i'' - X_i'}{b} dby + \frac{X_i' y_i'' - X_i'' y_i'}{bc} dbz \\ + \left(\frac{y_i' y_i''}{c} + c \right) d\omega'' - \frac{X_i'' y_i''}{c} d\phi'' + X_i'' dk'' \\ - (py_i''_{gemessen} - py_i''_{berechnet})$$

(15.1./2)

donde se cumple:

$$py_i''_{gem} = y_i''_{gem} - y_i''_{ber}$$

$$py_i''_{ber} = y_i''_{ber} - y_i''_{ber}$$

Se puede obtener el mismo resultado con la ecuación de paralaje de la orientación relativa. Para la linealización de la ecuación de coplanaridad se obtuvo en (9./8a):

$$\begin{aligned}
 p y_{i''}'' = \frac{1}{bc} & \left[(v_i' u_i'' - u_i' w_i'') dby + (u_i' v_i'' - v_i' u_i'') dbz \right. \\
 & + \left\{ (bx v_i' - by u_i') (a_{13} x_i'' - a_{13} y_i'') \right. \\
 & + (by w_i' - bz v_i') (a_{21} x_i'' - a_{21} y_i'') \\
 & \left. - (bx w_i' - bz u_i') (a_{22} x_i'' - a_{22} y_i'') \right\} d\kappa'' \\
 & + \left\{ (bx v_i' - by u_i') (-x_i'' \cos \omega \cos \phi \cos \kappa - y_i'' \sin \omega \cos \phi \sin \kappa \right. \\
 & \quad \left. - c \sin \omega \sin \phi) \right. \\
 & + (by w_i' - bz v_i') (-x_i'' \sin \phi \cos \kappa + y_i'' \sin \phi \sin \kappa - c \cos \phi) \\
 & \left. - (bx w_i' - bz u_i') (x_i'' \sin \omega \cos \phi \cos \kappa - y_i'' \cos \omega \cos \phi \sin \kappa \right. \\
 & \quad \left. - c \sin \omega \sin \phi) \right\} d\phi'' \\
 & + \left\{ (bx v_i' - by u_i') (x_i'' a_{12} + y_i'' a_{22} - c a_{32}) \right. \\
 & \left. - (bx w_i' - bz u_i') (-x_i'' a_{13} - y_i'' a_{23} + c a_{33}) \right\} d\omega'' \\
 & + bx (v_i' w_i'' - w_i' v_i'') - by (u_i' w_i'' - w_i' u_i'') \\
 & \left. + bz (u_i' v_i'' - v_i' w_i'') \right]
 \end{aligned}$$

En base a la dependencia de las fotografías se adoptan como simplificaciones:

$$\begin{aligned}
 \omega'' &= \phi'' = \kappa'' = 0 \\
 bx &= X_0'' - X_0' = X_0'' - 0 = X_0'' = b \\
 by &= Y_0'' - Y_0' = Y_0'' - 0 = Y_0'' = 0 \\
 bz &= Z_0'' - Z_0' = Z_0'' - Z_0' = 0
 \end{aligned}$$

Para la interrelación entre el sistema $u v w$ y las fotocoordenadas se cumple:

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_i'' \\ v_i'' \\ w_i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i'' \\ y_i'' \\ -c \end{pmatrix}$$

El vector aproximado calculado para la paralaje vertical da:

$$\rho y_i''_{ber.} = b_x (v_i' w_i'' - w_i' v_i'') - b_y (u_i' w_i'' - w_i' u_i'') + b_z (u_i' v_i'' - v_i' u_i'')$$

Con estas suposiciones se cumple para las ecuaciones de residuos:

$$\begin{aligned} v_{py_i''} &= \frac{1}{bc} \left[(-c x_i'' + x_i' c) db_y + (x_i' y_i'' - y_i' x_i'') db_z \right. \\ &\quad + (b \cdot c x_i'') dk'' + (-b y_i' x_i'') d\phi'' \\ &\quad + (b y_i' y_i'' + b c^2) d\omega'' \\ &\quad \left. - (\rho y_i''_{gem} - \rho y_i''_{ber.}) \right] \end{aligned}$$

y con:
$$- \frac{b}{z_i - z_i''} = \frac{(x_i'' - x_i')}{c}; \dots \quad (s.c)$$

Se obtienen nuevamente la ecuación de error (2) para las paralajes -y en fotocoordenadas (además los valores medidos son - paralajes en la fotografía).

$$\begin{aligned} v_{py_i''} &= - \frac{x_i'' - x_i'}{b} db_y + \frac{x_i' y_i'' - y_i' x_i''}{bc} db_z \\ &\quad + x_i'' dk'' - \frac{x_i'' y_i'}{c} d\phi'' \\ &\quad + \left(\frac{y_i' y_i''}{c} + c \right) d\omega'' \\ &\quad - (\rho y_i''_{gem} - \rho y_i''_{ber.}) \end{aligned}$$

Después de que se obtuvieron de dos maneras diferentes las ecuaciones de error para las paralajes -y en coordenadas fotográficas- estas se usaron como primeros cálculos de la fotogrametría analítica- ya no se debe de partir de fotografías. Ahora se elaboran relaciones para modelos.

Se establece nuevamente:

$$\begin{array}{lll} X_0' = 0 & X_0'' = b & Z_i - Z_0' = h \\ Y_0' = 0 & Y_0'' = 0 & Z_0' = Z_0'' \end{array}$$

Las relaciones entre coordenadas fotográficas y del modelo en fotografías verticales están dadas por (ver cap. 2 o bien 5.):

$$\begin{aligned} X_i' &= -c \frac{A_1' B'}{A_3' B'} = -c \frac{X_i - X_0'}{Z_i - Z_0'} = -c \frac{X_i}{h} \\ Y_i' &= -c \frac{A_2' B'}{A_3' B'} = -c \frac{Y_i - Y_0'}{Z_i - Z_0'} = -c \frac{Y_i}{h} \\ X_i'' &= -c \frac{A_1'' B''}{A_3'' B''} = -c \frac{X_i - X_0''}{Z_i - Z_0''} = -c \frac{X_i - b}{h} \\ Y_i'' &= -c \frac{A_2'' B''}{A_3'' B''} = -c \frac{Y_i - Y_0''}{Z_i - Z_0''} = -c \frac{Y_i}{h} \end{aligned}$$

Con esto existe la posibilidad de cambiar las coordenadas del modelo por las coordenadas fotográficas (2) se convierte en:

$$\begin{aligned} v_{py}'' &= -v_{py} \frac{c}{h} = -\frac{c \cdot b'}{h \cdot b'} dby + \frac{c}{b'} \frac{y_i}{h^2} dbz \\ &\pm c \frac{X_i - b}{h} dk'' - \frac{c}{h^2} (X_i - b) y_i d\phi'' \\ &+ c \left(1 + \frac{y_i^2}{h^2} \right) d\omega'' - (p y_i'' g_{em.} - p y_i'' b_{rr.}) \end{aligned}$$

Con ligeras transformaciones e la última igualdad se obtienen las ecuaciones de residuos para las paralajes -y en coordenadas del modelo:

$$\begin{aligned} v_{py} = & db_y - \frac{y_i}{h} db_z \mp (x_i - b) dK'' \\ & + \frac{(x_i - b) y_i}{h} d\phi'' - h \left(1 + \frac{y_i^2}{h^2} \right) d\omega'' \\ & - (\rho y_i \sin \alpha - \rho y_i \cos \alpha) \end{aligned}$$

(15.1/3)

Aclaración de los signos para dK'' : El arreglo \mp proviene de - del sentido de giro del ángulo de giro K (Se puede tratar de un giro a la izquierda o a la derecha).

(3) también se puede usar para la orientación relativa en aparatos analógicos. ¿Cómo se debe proceder? Todos los parámetros de orientación de una cámara nueva 2 deben ser determinados. El proyector 2 depende del proyector conocido 1.

Este es el caso: Orientación de fotografías dependientes. En este caso deben medirse las coordenadas fotográficas (coordenadas del modelo) en la fotografía 1 y las paralajes -y. El ajuste continúa con las ecuaciones (2) o (3), así como las ecuaciones de error para coordenadas fotográficas del cap. 9.

15.2 Orientación relativa de pares fotográficos independientes.

En el capítulo 15.1. se describió una conexión de fotografía secuencial (la fotografía 1 se consideró como fija, la fotografía 2 se orientó). Ahora no se hace esa suposición. Por lo tanto no se puede uno apoyar en la traslación de las componentes de la base (b_y, b_z), sino debe uno limitarse a los elementos de rotación de ambos proyectores.

La ecuación de partida es (15.1./1). Las hipótesis de la pág. 172 y la parte superior de la pag. 173 siguen siendo válidas - (fotografías casi verticales).

Entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}
 v_p y_i'' &= v y_i'' - v y_i' = \\
 &= -\frac{1}{z_i - z_0''} \left\{ -c \, dY_0'' - y_i'' \, dz_0'' + \left[-y_i'' (Y_i - Y_0'') + c (z_i - z_0'') \right] d\omega'' \right. \\
 &\quad \left. + \left[y_i'' (X_i - X_0'') \right] d\phi'' - c (X_i - X_0'') dK'' \right. \\
 &\quad \left. + c \, dy_i + y_i'' \, dz_i \right\} - (y_i'' g_{em} - y_i'' b_{ev}) \\
 &+ \frac{1}{z_i - z_0'} \left\{ -c \, dY_0' - y_i' \, dz_0' + \left[-y_i' (Y_i - Y_0') + c (z_i - z_0') \right] d\omega' \right. \\
 &\quad \left. + \left[y_i' (X_i - X_0') \right] d\phi' - c (X_i - X_0') dK' \right. \\
 &\quad \left. + c \, dy_i + y_i' \, dz_i \right\} + (y_i' g_{em} - y_i' b_{ev})
 \end{aligned}$$

Otras relaciones que deben considerarse:

$$z_i - z_0' = z_i - z_0'' = h$$

$$x_i' = -\frac{c}{h} x_i \quad ; \quad x_i'' = -\frac{c}{h} (x_i - b)$$

$$y_i' = -\frac{c}{h} y_i \quad ; \quad y_i'' = -\frac{c}{h} y_i$$

Con esto se obtiene una ecuación de error de paralaje.

$$\begin{aligned}
 v_p y_i'' &= -\frac{1}{h} \left\{ -c \, dY_0'' - y_i'' \, dz_0'' + \left[-y_i'' y_i + c h \right] d\omega'' \right. \\
 &\quad \left. + \left[y_i'' (x_i - b) \right] d\phi'' - c (x_i - b) dK'' \right. \\
 &\quad \left. + c \, dy_i + y_i'' \, dz_i \right\} - (y_i'' g_{em} - y_i'' b_{ev}) \\
 &+ \frac{1}{h} \left\{ -c \, dY_0' - y_i' \, dz_0' + \left[-y_i' y_i + c h \right] d\omega' \right. \\
 &\quad \left. + \left[y_i' x_i \right] d\phi' - c x_i dK' \right. \\
 &\quad \left. + c \, dy_i + y_i' \, dz_i \right\} - (y_i' g_{em} - y_i' b_{ev})
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de residuos para las paratajes -y quedan entonces en forma general así:

- para coordenadas fotográficas:

$$\begin{aligned}
 vpy_i'' &= \frac{c}{h} dY_0'' - \frac{c}{h} dY_0' + \frac{Y_i''}{h} dZ_0'' - \frac{Y_i'}{h} dZ_0' \\
 &- c \left[1 + \frac{Y_i''^2}{c^2} \right] d\omega'' + c \left[1 + \frac{Y_i'^2}{c^2} \right] d\omega' \\
 &- \frac{x_i'' y_i''}{c} d\phi'' + \frac{x_i' y_i'}{c} d\phi' \\
 &- x_i'' dk'' + x_i' dk' - \left[(y_i'' g_{em} - y_i'' b_{em}) - (y_i' g_{em} - y_i' b_{em}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{15.2./1}$$

y - para coordenadas del modelo

$$\begin{aligned}
 vpy &= dY_0'' - dY_0' - \frac{Y_i}{h} dZ_0'' + \frac{Y_i}{h} dZ_0' \\
 &+ h \left[1 + \frac{Y_i^2}{h^2} \right] d\omega'' - h \left[1 + \frac{Y_i^2}{h^2} \right] d\omega' \\
 &+ \frac{(x-b)y}{h} d\phi'' - \frac{xy}{h} d\phi' \\
 &\pm (x-b) dk'' \mp x dk' - (py_i g_{em} - py_i b_{em})
 \end{aligned}
 \tag{15.2./2}$$

En estas ecuaciones se pueden escoger 5 incógnitas:

$$\left. \begin{aligned}
 dY_0'' - dY_0' &= db_y \\
 dZ_0'' - dZ_0' &= db_z \\
 d\omega'' \\
 d\phi'' \\
 dk''
 \end{aligned} \right\}$$

Una vez escogidas, entonces la orientación relativa de pares fotográficos dependientes es posible.

En pares fotográficos independientes se usa como incógnitas:

$$dK' \quad d\phi' \quad dK'' \quad d\phi'' \quad d\omega''$$

o bien: $dK' \quad d\phi' \quad dK'' \quad d\phi'' \quad d\omega''$

con esto la ecuación (2) se simplifica a:

$$\begin{aligned} v_{py} = & \mp x \, dK' \pm (x-b) \, dK'' \\ & - \frac{xy}{h} \, d\phi' + \frac{(x-b)y}{h} \, d\phi'' \\ & \mp h \left[1 + \frac{y^2}{h^2} \right] d\omega'' - (p_{y1}q_{2x} - p_{y2}q_{1x}) \end{aligned}$$

(15.2/3)

Apropiada para la orientación relativa de pares fotográficos independientes en coordenadas del modelo.

15.3 Orientación relativa de pares fotográficos dependientes.

- Método numérico para instrumentos analógicos -

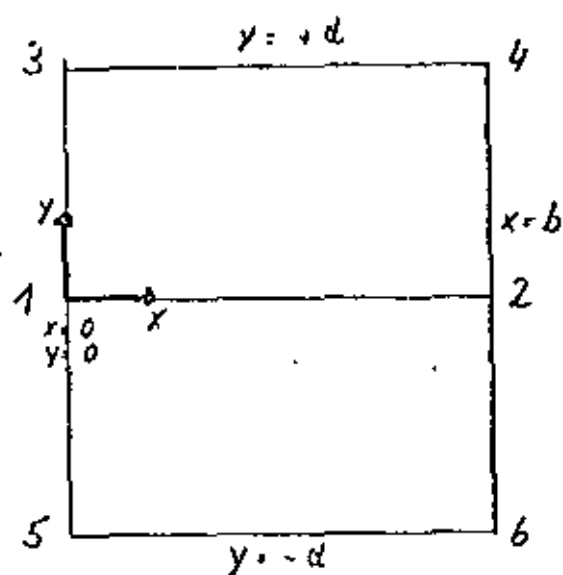
Los 5 grados de libertad de la orientación relativa dependen de un solo haz de rayos, por eso las rotaciones dK , y $d\phi$, se substituyen por las traslaciones db_y y db_z del otro haz de rayos. Con esto se obtienen pares fotográficos dependientes. En modelos numéricos se utiliza la fórmula para paralajes -y en coordenadas del modelo (15.1./3) en un modelo estéreo. Ahí se había obtenido para las paralajes verticales:

$$p_{yi} = db_y - \frac{y_i}{h} db_z - (x_i - b) dK'' + \frac{(x_i - b)y_i}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{y_i^2}{h^2} \right) d\omega''$$

El punto nadir izquierdo coincide con el punto de orientación 1 y es a la vez el origen del sistema coordenado del modelo. El punto nadir derecho coincide con 2.

Se miden las paralajes -y en 6 puntos, para calcular mediante un ajuste la magnitud de las 5 incógnitas.

Representación gráfica de la situación de partida:



Esto conduce al siguiente esquema de igualdades:

| Pkt. | x_i | y_i | p_{y_i} | db_1 | db_2 | dk^* | df^* | dw^* |
|------|-------|-------|-----------|--------|----------------|--------|-----------------|----------------------|
| 1 | 0 | 0 | p_1 | 1 | 0 | b | 0 | -h |
| 2 | b | 0 | p_2 | 1 | 0 | 0 | 0 | -h |
| 3 | 0 | d | p_3 | 1 | $-\frac{d}{h}$ | b | $-\frac{bd}{h}$ | $-h - \frac{d^2}{h}$ |
| 4 | b | d | p_4 | 1 | $-\frac{d}{h}$ | 0 | 0 | $-h - \frac{d^2}{h}$ |
| 5 | 0 | -d | p_5 | 1 | $\frac{d}{h}$ | b | $\frac{bd}{h}$ | $-h - \frac{d^2}{h}$ |
| 6 | b | -d | p_6 | 1 | $\frac{d}{h}$ | 0 | 0 | $-h - \frac{d^2}{h}$ |

$\equiv X^T$

$\equiv L$

$\equiv A$

La solución se continúa mediante:

$$V = AX - L \quad ; \quad X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

Esto se puede describir mediante el siguiente esquema:

| |
|-------|
| p_1 |
| p_2 |
| p_3 |
| p_4 |
| p_5 |
| p_6 |

L

| |
|--|
| $\sum_{i=1}^6 p_i$ |
| $\frac{d}{h} (p_5 - p_3 + p_6 - p_4)$ |
| $b (p_1 + p_3 + p_5)$ |
| $\frac{bd}{h} (p_5 - p_3)$ |
| $-h \sum_{i=1}^6 p_i$ |
| $-\frac{d^2}{h^2} (p_3 + p_4 + p_5 + p_6)$ |

A^TL

| | | | | | |
|---|----------------|---|-----------------|------------------|------------------|
| 1 | 0 | b | 0 | 0 | -h |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -h |
| 1 | $-\frac{d}{h}$ | b | $-\frac{bd}{h}$ | $-\frac{d^2}{h}$ | $-\frac{d^2}{h}$ |
| 1 | $-\frac{d}{h}$ | 0 | 0 | $-\frac{d^2}{h}$ | $-\frac{d^2}{h}$ |
| 1 | $\frac{d}{h}$ | b | $\frac{bd}{h}$ | $-\frac{d^2}{h}$ | $-\frac{d^2}{h}$ |
| 1 | $\frac{d}{h}$ | 0 | 0 | $-\frac{d^2}{h}$ | $-\frac{d^2}{h}$ |

A

| | | | | | |
|----------------------------------|----------------------|------------------------------------|-------------------------|------------------------------------|----------------------|
| 6 | 0 | 3b | 0 | $-\frac{6h}{-4} \frac{d^2}{h^2}$ | 0 |
| 0 | $4 \frac{d^2}{h^2}$ | 0 | $2 \frac{bd^2}{h^2}$ | 0 | 0 |
| 3b | 0 | $3b^2$ | 0 | $-\frac{3bh}{-2} \frac{bd^2}{h^2}$ | 0 |
| 0 | $2 \frac{bd^2}{h^2}$ | 0 | $2 \frac{b^2 d^2}{h^2}$ | 0 | 0 |
| $-\frac{6h}{-4} \frac{d^2}{h^2}$ | 0 | $-\frac{3bh}{-2} \frac{bd^2}{h^2}$ | 0 | $6h^2 + 8d^2$ | $+4 \frac{d^4}{h^2}$ |

A^TA

Una inversión de $A^T A$ es ahora fácilmente posible. Si se observa este producto matricial, se nota, que 3 renglones de las 3 incógnitas db_y , dk'' , $d\omega''$ y los restantes 2 renglones de las otras incógnitas db_z , $d\phi''$ son influenciados. Por eso se originan 2 sistemas independientes entre ellos.

Las ecuaciones normales quedan así:

- en el sistema de 3×3

$$6 db_y + 3b dk'' - \left(6h + 4 \frac{d^2}{h^2}\right) d\omega'' = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 \quad (a)$$

$$3b db_y + 3b^2 dk'' - \left(3bh + 2 \frac{bd^2}{h^2}\right) d\omega'' = b(\rho_1 + \rho_3 + \rho_5) \quad (b)$$

$$\begin{aligned} -\left(6h + 4 \frac{d^2}{h^2}\right) db_y + \left(3bh + 2 \frac{bd^2}{h^2}\right) dk'' + \left(6h^2 + 8d^2 + 4 \frac{d^4}{h^2}\right) d\omega'' \\ = -h(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6) - \frac{d^2}{h}(\rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6) \quad (c) \end{aligned}$$

y - en el sistema de 2×2

$$4 \frac{d^2}{h^2} db_z + 2 \frac{bd^2}{h^2} d\phi'' = \frac{d}{h}(\rho_5 - \rho_3 + \rho_6 - \rho_4) \quad (d)$$

$$2 \frac{bd^2}{h^2} db_z + 2 \frac{b^2 d^2}{h^2} d\phi'' = \frac{bd}{h}(\rho_5 - \rho_3) \quad (e)$$

(d) y (e) se utilizan para determinar db_z y $d\phi''$. Se multiplica (e) por $2/b$ y el resultado (e') se resta de (d):

$$-2 \frac{bd^2}{h^2} db_z = -\frac{bd}{h}(\rho_6 - \rho_4) \quad (d) - (e')$$

De allí se obtiene inmediatamente para la incógnita db_z :

$$\boxed{db_z = \frac{h}{2d}(\rho_6 - \rho_4)} \quad (15.3./1)$$

Para el cálculo de $d\phi''$ se multiplica (d) con b y de allí se resta (e):

$$-2 \frac{bd^2}{h^2} d\phi'' = \frac{d}{h}(\rho_5 - \rho_3 + \rho_6 - \rho_4 - 2\rho_5 + 2\rho_3) \quad (d) - (e)$$

Agrupando se obtiene de allí la incógnita:

$$d\psi'' = -\frac{h}{2bd} \left[(p_6 - p_4) \cdot (p_3 - p_5) \right] \quad (15.3./2)$$

El sistema de 2 x 2 ha proporcionado en forma sencilla 2 de - la 5 ecuaciones buscadas. Ahora se utilizan las relaciones (a) hasta (c).

(b) se amplía a (b') mediante $-(2/b)$:

$$\begin{aligned} 6 dby + 3b dk'' - \left(6h + 4 \frac{d^2}{h}\right) d\omega'' &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \quad (a) \\ -6 dby - 6b dk'' + \left(6h + 4 \frac{d^2}{h}\right) d\omega'' &= -2(p_1 + p_3 + p_5) \quad (b') \\ -3b dk'' &= \sum_{i=1}^6 p_i - 2(p_1 + p_3 + p_5) \quad (a) + (b') \end{aligned}$$

después de eso la relación para la incógnita dk'' queda así:

$$dk'' = -\frac{1}{3b} \left[(p_2 - p_1) + (p_4 - p_3) + (p_6 - p_5) \right] \quad (15.3./3)$$

Calculando las 2 últimas incógnitas (a) se divide entre 6:

$$dby + \frac{b}{2} dk'' - \left(h + \frac{2}{3} \frac{d^2}{h}\right) d\omega'' = \frac{1}{6} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \quad (a')$$

despejando dby :

$$dby = \frac{1}{6} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) + \left[h + \frac{2}{3} \frac{d^2}{h}\right] d\omega'' - \frac{b}{2} dk''$$

Aquí se debe substituir (3) por dk'' . Con esto se obtiene para la incógnita dby :

$$dby = \frac{1}{3} (p_2 + p_4 + p_6) + \left[h + \frac{2}{3} \frac{d^2}{h}\right] d\omega'' \quad (15.3./4)$$

Una segunda ecuación con las incógnitas $d\omega''$ y dby se obtiene con (c) y (3). De allí se puede calcular $d\omega''$ después de algunos cálculos:

$$d\omega'' = \frac{h}{4d^2} (2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) \quad (15.3./5)$$

substituyendo (5) en (4) da dby .

Con las ecuaciones (1) hasta (5) se tienen formadas las relaciones para todas las incógnitas. Se necesitan todas las 6 - observaciones para la solución. Si se miden los paralajes -y en los 6 puntos de orientación, entonces por medio de estas 5 ecuaciones se pueden determinar las correcciones que se -- aplican a los parámetros de orientación.

Bibliografía: Buchholtz/Rüger 1974.

8.5.2 Determinación numérica de la orientación relativa.

Jordan-Eggert-Kneissl 1972, III A2 pág. 93

15.4 Orientación Relativa para pares fotográficos dependientes. - Orientación óptica-mecánica en instrumentos analógicos -

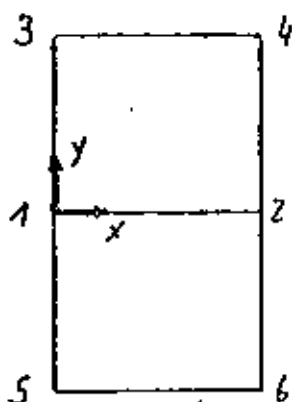
En lugar de llevar a cabo una medición directa de los paralajes -y aplicando una corrección, se pueden usar los principios del capítulo 15.3, para hacer una orientación óptica-mecánica en aparatos analógicos. Esto conduce a un método de aproximaciones. Se requieren varias iteraciones. Prácticamente, por cada punto de orientación donde se elimina el paralaje -y se resuelve una de las ecuaciones de aproximación. Se procede de la siguiente manera:

- Se modifican únicamente los elementos en el proyector de secuencia.

- 1) Eliminación de P2 con db_y
- 2) Eliminación de P1 con dk''

Si los puntos 1 y 2 no coinciden exactamente con los puntos Nadir de las fotografías (- que en la práctica es lo normal-) entonces tiene que iterarse.

- 3) Eliminación de P4 con db_z
- 4) Eliminación de P3 con $d\phi''$



Si los puntos 3 y 4 no están colocados simétricamente y perpendiculares a la base 12, entonces también tiene que iterarse.

y finalmente.

5) Eliminación de dw'' en el punto 5 ó 6

En los pasos 1) á 4) no se consideró dw'' , a pesar que aparece en las fórmulas. Esto significa: intervienen -sobrecorrecciones en el método. Por eso en el paso 5) no nada más se tiene que eliminar la paralaje -y sino que se tiene que sobre corregir.

Los pasos 1) á 5) se representan ahora con fórmulas. Para empezar se tenían los siguientes paralajes:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= db_y && + b dk'' && - h dw'' \\
 p_2 &= db_y && && - h dw'' \\
 p_3 &= db_y - \frac{d}{h} db_z + b dk'' - \frac{bd}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{d^2}{h}\right) dw'' \\
 p_4 &= db_y - \frac{d}{h} db_z && && - \left(h + \frac{d^2}{h}\right) dw'' \\
 p_5 &= db_y + \frac{d}{h} db_z + b dk'' + \frac{bd}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{d^2}{h}\right) dw'' \\
 p_6 &= db_y + \frac{d}{h} db_z && && - \left(h + \frac{d^2}{h}\right) dw''
 \end{aligned}$$

1) La paralaje vertical p_2 que aparece en el punto 2 se elimina con db_y .

Entonces se cumple:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_2 &= 0 = db_y - h dw'' - d\bar{b}_y \\
 d\bar{b}_y &= db_y - h dw''
 \end{aligned}$$

dw'' también se corrigió simultáneamente (sobre corrección)

Las nuevas paralajes quedan así:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1 &= p_1 - d\bar{b}_y = b dk'' \\
 \bar{p}_2 &= p_2 - d\bar{b}_y = 0 \\
 \bar{p}_3 &= p_3 - d\bar{b}_y = -\frac{d}{h} db_z + b dk'' - \frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} dw'' \\
 \bar{p}_4 &= p_4 - d\bar{b}_y = -\frac{d}{h} db_z - \frac{d^2}{h} dw'' \\
 \bar{p}_5 &= p_5 - d\bar{b}_y = \frac{d}{h} db_z + b dk'' + \frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} dw'' \\
 \bar{p}_6 &= p_6 - d\bar{b}_y = \frac{d}{h} db_z - \frac{d^2}{h} dw''
 \end{aligned}$$

- 2) En el punto 1 se aplica la inclinación $b \cdot dk''$. Con esto se elimina la paralaje \bar{p}_1 . La inclinación se elimina inmediatamente en la magnitud correcta, con lo que todos los coeficientes de dk'' se vuelven cero.

Después de este paso se obtiene como nuevas paralajes:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{p}}_1 &= \bar{p}_1 - b dk'' = 0 \\ \bar{\bar{p}}_2 &= \bar{p}_2 = 0 \\ \bar{\bar{p}}_3 &= \bar{p}_3 - b dk'' = -\frac{d}{h} dbz - \frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega'' \\ \bar{\bar{p}}_4 &= \bar{p}_4 = -\frac{d}{h} dbz - \frac{d^2}{h} d\omega'' \\ \bar{\bar{p}}_5 &= \bar{p}_5 - b dk'' = \frac{d}{h} dbz + \frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega'' \\ \bar{\bar{p}}_6 &= \bar{p}_6 = \frac{d}{h} dbz - \frac{d^2}{h} d\omega'' \end{aligned}$$

- 3) En el punto 4 se elimina la paralaje $\bar{\bar{p}}_4$ mediante $-\frac{d}{h} dbz$. Se obtienen como paralajes:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\bar{p}}}_1 &= \bar{\bar{p}}_1 = 0 \\ \bar{\bar{\bar{p}}}_2 &= \bar{\bar{p}}_2 = 0 \\ \bar{\bar{\bar{p}}}_3 &= \bar{\bar{p}}_3 - \left(-\frac{d}{h} dbz\right) = -\frac{bd}{h} d\phi'' \\ \bar{\bar{\bar{p}}}_4 &= \bar{\bar{p}}_4 - \left(-\frac{d}{h} dbz\right) = 0 \\ \bar{\bar{\bar{p}}}_5 &= \bar{\bar{p}}_5 - \left(+\frac{d}{h} dbz\right) = \frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{2d^2}{h} d\omega'' \\ \bar{\bar{\bar{p}}}_6 &= \bar{\bar{p}}_6 - \left(+\frac{d}{h} dbz\right) = -\frac{2d^2}{h} d\omega'' \end{aligned}$$

- 4) En el punto 3 se elimina la paralaje $\bar{\bar{\bar{p}}}_3$ mediante $-\frac{bd}{h} d\phi''$. Con esto, para el paso 5, quedan como paralajes sobrantes:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \bar{\bar{\bar{p}}}_1 = 0 \\ \tilde{p}_2 &= \bar{\bar{\bar{p}}}_2 = 0 \\ \tilde{p}_3 &= \bar{\bar{\bar{p}}}_3 - \left(-\frac{bd}{h} d\phi''\right) = 0 \\ \tilde{p}_4 &= \bar{\bar{\bar{p}}}_4 = 0 \\ \tilde{p}_5 &= \bar{\bar{\bar{p}}}_5 - \left(+\frac{bd}{h} d\phi''\right) = -\frac{2d^2}{h} d\omega'' \\ \tilde{p}_6 &= \bar{\bar{\bar{p}}}_6 = -\frac{2d^2}{h} d\omega'' \end{aligned}$$

5) Nada más \tilde{p}_5 y \tilde{p}_6 son diferentes a cero.

Ahora tiene que eliminarse en el punto 5 ó 6 la paralaje restante $-\frac{2d^2}{h} d\omega'' = p_y$. Según la ecuación de partida se tiene - que corregir sin lugar a dudas con $-(h \frac{d^2}{h}) d\omega' = p_y$. Con esto prevalece la relación:

$$p_y = \tilde{p}_y \frac{p_y}{\bar{p}_y} = \bar{p}_y \frac{-(h + \frac{d^2}{h}) d\omega'}{-(2 + \frac{d^2}{h}) d\omega''} = \bar{p}_y \frac{-\frac{h^2+d^2}{h}}{-2 \frac{d^2}{h}} =$$

$$= \bar{p}_y \frac{h^2+d^2}{2d^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{d^2} \right) \bar{p}_y$$

o sea que la paralaje existente no se corrige, sino que la correspondiente relación de arriba se sobrecorrigió con el factor.

$$k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{d^2} \right)$$

La expresión $\ddot{u} = (K - 1) \times p_5$ se denomina factor de sobrecorrección. Se obtiene con:

$$\ddot{u} = p_5 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{d^2} \right) \right] - 1 \right\} = p_5 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{h^2}{2d^2} - 1 \right\} =$$

$$= p_5 \left\{ \frac{h^2}{2d^2} - \frac{1}{2} \right\} =$$

$$\ddot{u} = p_5 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{d^2} - 1 \right) \right]$$

(15.4./1)

y para la paralaje: $\tilde{p}_5 = p_5 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{d^2} \right) \right]$

Dependiendo de la posición de los puntos 1 hasta 6 con respecto al tipo de cámara el factor de sobrecorrección \ddot{u} puede tomar valores de 0.5 hasta 4.

Después de aplicar la sobrecorrección se obtiene en todos los puntos de orientación restantes nuevas paralajes. Esto conduce a iteraciones.

El procedimiento de sobrecorrección quedará más claro mediante un ejemplo:

Como modelo se tiene:



$$c = 152 \text{ mm}$$

$$a' = 230 \text{ mm}$$

$$a'/2 = 115 \text{ mm}$$

Con esto se cumple:

$$d' = 90 \text{ mm}$$

$$\frac{c}{d'} = \frac{h}{d} = \frac{152}{90} \quad ; \quad \frac{c^2}{d'^2} = \frac{h^2}{d^2} = \frac{152^2}{90^2} = \frac{23104}{8100} = 2,85$$

y para la paralaje \tilde{p}_5

$$\tilde{p}_5 = p_5 \left[\frac{1}{2} (1 + 2,85) \right] = p_5 \cdot 1,925$$

La paralaje \tilde{p}_5 se tiene que eliminar y se sobrecorrige con $\tilde{p}_5 \times 0,925$

Bibliografía: Buchholtz/Ruger 1974.

8.5.1 Determinación óptica-mecánica de la orientación relativa en fotografías verticales.

Jordan - Eggert - Kneissl 1972 III, A2 pág. 93

15.5 Precisión para la determinación de los parámetros de orientación en la orientación relativa.

La ejecución de la orientación relativa basada en la eliminación o medición de paralajes verticales. Con ello se tiene un gran número de errores que juntos influyen en la precisión de la orientación relativa. En parte serán errores de caracteres sistemáticos. Por lo tanto una apreciación es muy difícil. Se puede hacer un tanteo de la apreciación para el cálculo numérico del capítulo 15.3 con ayuda de la propagación de errores.

El algoritmo de ajuste dice:

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L = Q A^T L$$

y con ello se obtiene para las variancias:

$$\sigma_x^2 = (A^T A)^{-1} \cdot \sigma_0^2 = Q \cdot \sigma_0^2$$

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{n - u}$$

La inversión (determinación de Q) es numérica fácilmente posible. Las interrelaciones se pueden ver fácilmente si expresamos a x como función lineal de L . Para ello hay que usar las ecuaciones (15.3/1...5).

Estas se tienen que derivar con respecto a las paralajes p_i que entraron en escena. Las derivadas parciales se agrupan en la matriz B . El cálculo para las incógnitas x queda así:

$$\boxed{X = B \cdot L}$$

(15:5./1)

$$\text{con } B = (A^T A)^{-1} A^T = Q A^T$$

Las observaciones L (paralajes) tienen el mismo peso y se consideran independientes ($P_{11} = E$).

Después de eso la propagación de error da para:

$$B B^T = (A^T A)^{-1} A^T A [(A^T A)^{-1}]^T$$

$$B B^T = \frac{(A^T A)^{-1} (A^T A) (A^T A)^{-1}}{E}$$

Con esto queda demostrada la igualdad de los cálculos:

$$\begin{aligned} \underline{B} \times \underline{B}^T &= (\underline{A}^T \times \underline{A} \cdot)^{-1} \\ &= \underline{Q} \end{aligned}$$

$\underline{B} \underline{B}^T$ se obtiene fácilmente con ayuda del ya bastante usado esquema:

| | p_1 | p_2 | p_3 | p_4 | p_5 | p_6 | p_7 | dby | d^2by | d^3by | d^4by | d^5by | |
|---------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-------|-----------------------------------|--|-----------------|----------------------|---------------------|-----------------------------|
| p_1 | | | | | | | | $\frac{1}{3} + \frac{h^2}{2d^2}$ | 0 | $\frac{1}{3b}$ | 0 | $\frac{1}{2d^2}$ | |
| p_2 | | | | | | | | $\frac{2}{3} + \frac{h^2}{2d^2}$ | 0 | $-\frac{1}{3b}$ | 0 | $\frac{h}{2d^2}$ | |
| p_3 | | | | | | | | $-\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | 0 | $\frac{1}{3b}$ | $-\frac{h}{2bd}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | |
| p_4 | | | | | | | | $\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | $-\frac{h}{2d}$ | $-\frac{1}{3b}$ | $\frac{h}{2bd}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | |
| p_5 | | | | | | | | $-\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | 0 | $\frac{1}{3b}$ | $\frac{h}{2bd}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | |
| p_6 | | | | | | | | $\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | $\frac{h}{2d}$ | $-\frac{1}{3b}$ | $-\frac{h}{2bd}$ | $\frac{h}{4d^2}$ | |
| p_7 | | | | | | | | $\frac{1}{3} + \frac{h^2}{2d^2}$ | $\frac{2}{3} + \frac{h^2}{2d^2} + \frac{3b^4}{4d^4}$ | 0 | $-\frac{1}{3b}$ | 0 | $\frac{3h^3 + 2hd^2}{4d^4}$ |
| dby | $\frac{1}{3} + \frac{h^2}{2d^2}$ | $\frac{2}{3} + \frac{h^2}{2d^2}$ | $-\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | $\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | $-\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | $\frac{1}{6} - \frac{h^2}{4d^2}$ | | | | | | | |
| d^2by | 0 | 0 | 0 | $-\frac{h}{2d}$ | 0 | $\frac{h}{2d}$ | | 0 | $\frac{h^2}{2d^2}$ | 0 | $-\frac{h^2}{2bd^2}$ | 0 | |
| d^3by | $\frac{1}{3b}$ | $-\frac{1}{3b}$ | $\frac{1}{3b}$ | $-\frac{1}{3b}$ | $\frac{1}{3b}$ | $-\frac{1}{3b}$ | | $-\frac{1}{3b}$ | 0 | $\frac{2}{3b}$ | 0 | 0 | |
| d^4by | 0 | 0 | $-\frac{h}{2bd}$ | $\frac{h}{2bd}$ | $\frac{h}{2bd}$ | $-\frac{h}{2bd}$ | | 0 | $-\frac{h^2}{2bd^2}$ | 0 | $\frac{h^2}{b^2d^2}$ | 0 | |
| d^5by | $\frac{h}{2d^2}$ | $\frac{h}{2d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | | $\frac{3h^3 + 2hd^2}{4d^4}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3h^2}{4d^4}$ | |

$\equiv 3$

$\equiv 6$

Con ayuda de la matriz Q se obtiene para la desviación standard de los parámetros de orientación para pares fotográficos dependientes:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{dby} &= \pm \sqrt{Q_{dby\ dby}} \cdot \sigma_0 \\
 \sigma_{dbz} &= \pm \sqrt{Q_{dbz\ dbz}} \cdot \sigma_0 \\
 \sigma_{dk} &= \pm \sqrt{Q_{dk\ dk}} \cdot \sigma_0 \\
 \sigma_{d\phi} &= \pm \sqrt{Q_{d\phi\ d\phi}} \cdot \sigma_0 \\
 \sigma_{d\omega} &= \pm \sqrt{Q_{d\omega\ d\omega}} \cdot \sigma_0
 \end{aligned}
 \tag{15.5./2}$$

con

$$\begin{aligned}
 Q_{dby\ dby} &= \frac{2}{3} + \frac{h^2}{d^2} + \frac{3h^4}{4d^4} \quad ; \quad Q_{d\phi\ d\phi} = \frac{h^2}{b^2 d^2} \\
 Q_{dbz\ dbz} &= \frac{h^2}{2d^2} \quad ; \quad Q_{d\omega\ d\omega} = \frac{3h^2}{4d^4} \\
 Q_{dk\ dk} &= \frac{2}{3b}
 \end{aligned}$$

En (2) todavía se tiene que determinar la desviación standard σ_0 . Para los residuos se obtiene como cálculo de ajuste:

$$V = AX - L$$

y substituyendo las relaciones para X

$$V = A(A^T A)^{-1} A^T L - L$$

Con esto se puede calcular $V^T V$ para ser usada en la fórmula de la desviación standard de la unidad de peso:

$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{V^T V}{n-u}}$$

$$n - u = 6 - 5 = 1 \quad \text{para este caso}$$

Es más sencillo el cálculo de $V^T V$ pero con ayuda de la suposición de que la suma de los residuos debe ser cero.

Partiendo de las ecuaciones de paralaje (ver esquema 15.3, para la integración de AlX) se modifican las ecuaciones tantas veces hasta que sumen cero. Con esto tienen la siguiente apariencia:

$$\begin{aligned}
 -2 p_1 &= -2 dby & -2b dk & -2h dw \\
 +2 p_2 &= +2 dby & & +2h dw \\
 + p_3 &= +1 dby - \frac{d}{h} dbz + b dk - \frac{bd}{h} d\phi + \left(-h - \frac{d^2}{h}\right) dw \\
 - p_4 &= -1 dby + \frac{d}{h} dbz & & - \left(-h - \frac{d^2}{h}\right) dw \\
 + p_5 &= +1 dby + \frac{d}{h} dbz + b dk + \frac{bd}{h} d\phi + \left(+h - \frac{d^2}{h}\right) dw \\
 - p_6 &= -1 dby - \frac{d}{h} dbz & & - \left(+h - \frac{d^2}{h}\right) dw
 \end{aligned}$$

$$\sum v_i \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 0 dby + 0 dbz + 0 dk + 0 d\phi + 0 dw = (-2p_1 + 2p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6)$$

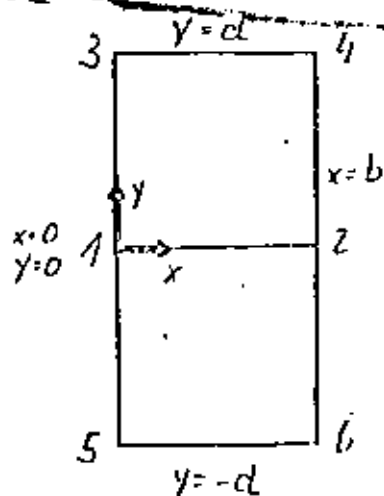
y para $V^T V$ se obtiene:

$$\boxed{V^T V = (-2p_1 + 2p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6)^2} \quad (15.5./3)$$

15.6 Orientación Relativa de pares fotográficos independientes. - método numérico para instrumentos analógicos - En forma opuesta al capítulo 15.3, aquí nada más se escogen giros como parámetros de orientación independientes. La ecuación de partida (15.2./3) es:

$$v_{py} = \mp x du' \pm (x-b) du'' - \frac{xy}{h} d\phi' + \frac{(x-b)y}{h} d\phi'' \mp h \left[1 + \frac{y^2}{h^2}\right] dw'' - p_{yij} - p_{yio}$$

El desarrollo subsecuente es análogo al capítulo 15.3.:



| p_{yi} | x_i | y_i | p_{yij} | du' | du'' | $d\phi'$ | $d\phi''$ | dw'' |
|----------|-------|-------|-----------|-------|--------|-----------------|-----------------|------------------------|
| 1 | 0 | d | p_1 | 0 | +b | 0 | 0 | -h |
| 2 | b | d | p_2 | +b | 0 | 0 | 0 | -h |
| 3 | b | 0 | p_3 | 0 | +b | 0 | $-\frac{bd}{h}$ | $-(h + \frac{d^2}{h})$ |
| 4 | 0 | 0 | p_4 | +b | 0 | $-\frac{bd}{h}$ | 0 | $-(h + \frac{d^2}{h})$ |
| 5 | 0 | -d | p_5 | 0 | +b | 0 | $+\frac{bd}{h}$ | $-(h + \frac{d^2}{h})$ |
| 6 | b | -d | p_6 | +b | 0 | $+\frac{bd}{h}$ | 0 | $-(h + \frac{d^2}{h})$ |

| | dx | dy | dz | dx^2 | dy^2 | dz^2 |
|--|------|------|-----------------|-----------------|--------|----------------------|
| | 0 | +b | 0 | 0 | 0 | -h |
| | +b | 0 | 0 | 0 | 0 | -h |
| | 0 | +b | 0 | $-\frac{bd}{h}$ | 0 | $-h - \frac{d^2}{h}$ |
| | +b | 0 | $-\frac{bd}{h}$ | 0 | 0 | $-h - \frac{d^2}{h}$ |
| | 0 | +b | 0 | $+\frac{bd}{h}$ | 0 | $-h - \frac{d^2}{h}$ |
| | +b | 0 | $+\frac{bd}{h}$ | 0 | 0 | $-h - \frac{d^2}{h}$ |

| | | | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| dx | 0 | +b | 0 | +b | 0 | +b | $3b^2$ | 0 | 0 | 0 | $-3bh$ $-\frac{2bd^2}{h}$ |
| dy | +b | 0 | +b | 0 | +b | 0 | 0 | $3b^2$ | 0 | 0 | $-3bh$ $-\frac{2bd^2}{h}$ |
| dz | 0 | 0 | 0 | $-\frac{bd}{h}$ | 0 | $+\frac{bd}{h}$ | 0 | 0 | $\frac{2b^2d^2}{h^2}$ | 0 | 0 |
| dx^2 | 0 | 0 | $-\frac{bd}{h}$ | 0 | $+\frac{bd}{h}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2b^2d^2}{h^2}$ | 0 |
| dy^2 | -h | -h | $-h - \frac{d^2}{h}$ | $-h - \frac{d^2}{h}$ | $-h - \frac{d^2}{h}$ | $-h - \frac{d^2}{h}$ | $-3bh$ $-\frac{2bd^2}{h}$ | $-3bh$ $-\frac{2bd^2}{h}$ | 0 | 0 | $6h^2 + 8d^2$ $+\frac{4d^4}{h^2}$ |

A^T

$A^T A$

| |
|-------|
| p_1 |
| p_2 |
| p_3 |
| p_4 |
| p_5 |
| p_6 |

L

| |
|---|
| $+b(p_2 + p_4 + p_6)$ |
| $+b(p_1 + p_3 + p_5)$ |
| $-\frac{bd}{h}(p_4 - p_6)$ |
| $-\frac{bd}{h}(p_3 - p_5)$ |
| $-h \sum_{i=1}^6 p_i$ |
| $-\frac{d^2}{h}(p_3 + p_4 + p_5 + p_6)$ |

$A^T L$

Algoritmo de ajuste: $V = AX - L$; $X = (A^T A)^{-1} A^T L$
 y representándolo nuevamente del esquema conocido en 15.3.:

En lugar de hacer una inversión numérica y cálculo de las incógnitas se lleva a cabo nuevamente una solución general, los puntos de partida son esta vez relaciones de paralaje de $\Delta X = L$.

$$+ b dk' - \frac{bd}{h} d\phi' - \left(h + \frac{d^2}{h} \right) d\omega'' = \rho_4 \quad (a)$$

$$+ b dk' + \frac{bd}{h} d\phi' - \left(h + \frac{d^2}{h} \right) d\omega'' = \rho_6 \quad (b)$$

$$- \frac{2bd}{h} d\phi' = \rho_4 - \rho_6 \quad (a) - (b)$$

Despejando la incógnita $d\phi'$ (dimensión : rad)

$$\boxed{d\phi' = \frac{h}{2bd} (\rho_6 - \rho_4)} \quad (15.6./1)$$

Otras dos relaciones de paralaje son:

$$+ b dk'' - \frac{bd}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{d^2}{h} \right) d\omega'' = \rho_3 \quad (c)$$

$$+ b dk'' + \frac{bd}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{d^2}{h} \right) d\omega'' = \rho_5 \quad (d)$$

$$- \frac{2bd}{h} d\phi'' = \rho_3 - \rho_5 \quad (c) - (d)$$

despejando $d\phi''$:

$$\boxed{d\phi'' = \frac{h}{2bd} (\rho_5 - \rho_3)} \quad (15.6./2)$$

Las dos primeras incógnitas se obtuvieron sin grandes cálculos. En las derivaciones siguientes se incrementan los cálculos insignificámente. Para el cálculo de $d\omega''$ se emplea el ya utilizado método en la formación de $V^T V$: se multiplican las relaciones de paralaje con diferentes factores, de tal manera que todas las incógnitas hasta la buscada se vuelvan cero en la suma.

Esto conduce al siguiente sistema de ajuste:

$$\begin{array}{rcl}
 + 2b dk'' & & - 2h d\omega'' = 2p_1 \\
 + 2b dk' & & - 2h d\omega'' = 2p_2 \\
 - b dk'' & + \frac{bd}{h} d\phi'' & + h d\omega'' + \frac{d^2}{h} d\omega'' = -p_3 \\
 - b dk' & + \frac{bd}{h} d\phi' & + h d\omega' + \frac{d^2}{h} d\omega' = -p_4 \\
 - b dk'' & & - \frac{bd}{h} d\phi'' + h d\omega'' + \frac{d^2}{h} d\omega'' = -p_5 \\
 - b dk' & - \frac{bd}{h} d\phi' & + h d\omega' + \frac{d^2}{h} d\omega' = -p_6
 \end{array}$$

$$4 \frac{d^2}{h} d\omega'' = 2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6$$

y con ello para la incógnita $d\omega''$:

$$d\omega'' = \frac{h}{4d^2} (2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) \quad (15.6./3)$$

Para las incógnitas restantes se utilizan las ecuaciones normales:

$$+ 3b dk' - \left(3h + 2 \frac{d^2}{h} \right) d\omega'' = p_2 + p_4 + p_6 \quad (c)$$

$$+ 3b dk'' - \left(3h + 2 \frac{d^2}{h} \right) d\omega'' = p_1 + p_3 + p_5 \quad (d)$$

despejando dk' o bien dk''

$$dk' = + \frac{1}{3b} (p_2 + p_4 + p_6) + \left[\frac{h}{b} + \frac{2}{3} \frac{d^2}{hb} \right] d\omega'' \quad (c')$$

$$dk'' = + \frac{1}{3b} (p_1 + p_3 + p_5) + \left[\frac{h}{b} + \frac{2}{3} \frac{d^2}{hb} \right] d\omega'' \quad (d')$$

Substituyendo (3) da las incógnitas:

$$dk' = + \frac{1}{6b} (2p_1 + 4p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6) + \frac{h^2}{4bd^2} (2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) \quad (15.6./4)$$

$$dk'' = + \frac{1}{6b} (4p_1 + 2p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6) + \frac{h^2}{4bd^2} (2p_1 + 2p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6) \quad (15.6./5)$$

15.7 Errores de los parámetros de orientación después de la orientación relativa.

- pares fotográficos independientes -

Como en el capítulo 15.5, se establece una relación 11

real: $X = B \cdot L$; $BB^T = (A^T A)^{-1}$

BB^T se calcula en el esquema conocido:

(15.7.11)

| | $d\alpha'$ | $d\beta'$ | $d\gamma'$ | $d\delta'$ | $d\epsilon'$ | $d\omega'$ | $d\alpha''$ | $d\beta''$ | $d\gamma''$ | $d\delta''$ | $d\epsilon''$ | $d\omega''$ |
|-------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| p_1 | $\frac{4d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{8d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{4d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{8d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| p_2 | $\frac{8d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{4d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{4d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{4d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| p_3 | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| p_4 | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| p_5 | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| p_6 | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| $d\alpha'$ | $\frac{4d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{8d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{4d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{8d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| $d\beta''$ | $\frac{8d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{4d^2+6b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{+2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{-2d^2-3b^2}{12bd^2}$ | $\frac{4d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{4d^4+16b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{+2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ | $\frac{-2d^4-3b^2d^2}{12b^2d^4}$ |
| $d\gamma'$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{-h}{2bd}$ | 0 | $\frac{h}{2bd}$ | 0 | 0 | $\frac{h^2}{2b^2d^2}$ | 0 | 0 | 0 |
| $d\delta''$ | 0 | 0 | $\frac{-h}{2bd}$ | 0 | $\frac{h}{2bd}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{h^2}{2b^2d^2}$ | 0 | 0 |
| $d\omega''$ | $\frac{h}{2d^2}$ | $\frac{h}{2d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $-\frac{h}{4d^2}$ | $\frac{2d^2h+3b^2h}{4bd^4}$ | $\frac{2d^2h+3b^2h}{4bd^4}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{3h^2}{4d^4}$ |

Para el cálculo de las desviaciones standard se necesitan -- los elementos de la diagonal de $BB^T = Q$. Quedando así:

$$Q_{u'u'} = \frac{2}{3b} + \frac{h^2}{bd^2} + \frac{3}{4} \frac{h^4}{bd^4}$$

$$Q_{u''u''} = \frac{2}{3b} + \frac{h^2}{bd^2} + \frac{3}{4} \frac{h^4}{bd^4}$$

$$Q_{\phi'\phi'} = \frac{h^2}{2b^2d^2}$$

$$Q_{\phi''\phi''} = \frac{h^2}{2b^2d^2}$$

$$Q_{w''w''} = \frac{3}{4} \frac{h^2}{d^4}$$

la desviación standard de los parámetros de orientación

$$\sigma_{ii} = \pm \sqrt{Q_{ii}} \cdot \sigma_0 \quad (15.7./2)$$

- para ii se debe substituir la correspondiente incógnita - y la desviación standard de la unidad de peso

$$\sigma_0 = \frac{v^T v}{n - u}$$

$v^T v$ se obtiene de la derivación conocida en el capítulo 15.5.

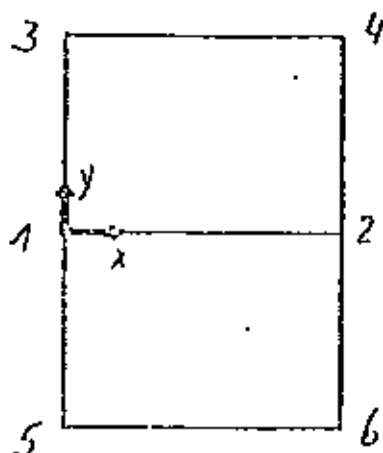
$$v^T v = (-2\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 - \rho_4 + \rho_5 - \rho_6)^2$$

(15.7./3)

Bibliografía: Buchholtz/Ruger 1974.

8.5.1. Determinación óptico-mecánica de la orientación relativa de fotos vert.

15.8 Orientación Relativa con pares fotográficos independientes. -Orientación óptico-mecánica en instrumentos analógicos -



La estructura de este capítulo es análogo a 15.4. Ahora nada más hay que aplicar la ecuación de partida (15.2./3). En pares fotográficos independientes se utilizan nada más giroscopios como parámetros de orientación.

Los 5 pasos son ahora:

1) Eliminación de p_2 con dk'

2) Eliminación de p_1 con dk''

En caso de que los puntos 1 y 2 no coincidan exactamente con los puntos nadir, se tiene que iterar.

3) Eliminación de p_4 con $d\phi'$

4) Eliminación de p_3 con $d\phi''$

En caso de que los puntos 3 y 4 no sean simétricos y perfectamente perpendiculares a la base 12 (a través de los puntos nadir) se tiene que iterar.

5) Eliminación de dw'' en los puntos 5 ó 6 con sobrecorrección.

Individualmente se obtienen las siguientes relaciones:

La ecuación de partida para pares fotográficos independientes es:

$$V_{py} = z \times dk' \pm (x-b) dk'' - \frac{xy}{h} d\phi' + \frac{(x-b)y}{h} d\phi'' \mp h \left[1 + \frac{y^2}{n^2} \right] d\omega'' - (p_{j_1 q_1} - p_{j_2 q_2})$$

Al iniciar la orientación se tiene las siguientes paralajes:

$$\begin{aligned} p_1 &= & - b dk'' & & - h d\omega'' \\ p_2 &= - b dk' & & & - h d\omega'' \\ p_3 &= & - b dk'' & - \frac{bd}{h} d\phi'' & - \left(h + \frac{d^2}{n} \right) d\omega'' \\ p_4 &= - b dk' & - \frac{bd}{h} d\phi' & & - \left(h + \frac{d^2}{n} \right) d\omega'' \\ p_5 &= & - b dk'' & + \frac{bd}{h} d\phi'' & - \left(h + \frac{d^2}{n} \right) d\omega'' \\ p_6 &= - b dk' & + \frac{bd}{h} d\phi' & & - \left(h + \frac{d^2}{n} \right) d\omega'' \end{aligned}$$

1) En el punto 2 se elimina p_2 mediante:

$$-\overline{bdk'} = -bdk' - h d\omega''$$

$$\bar{p}_1 = p_1 = - b dk'' - h d\omega''$$

$$\bar{p}_2 = p_2 - (-\overline{bdk'}) = 0$$

$$\bar{p}_3 = p_3 = - b dk'' - \frac{bd}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{d^2}{n} \right) d\omega''$$

$$\bar{p}_4 = p_4 - (-\overline{bdk'}) = - \frac{hd}{h} d\phi' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_5 = p_5 = - b dk'' + \frac{bd}{h} d\phi'' - \left(h + \frac{d^2}{n} \right) d\omega''$$

$$\bar{p}_6 = p_6 - (-\overline{bdk'}) = + \frac{bd}{h} d\phi' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

2) En el punto 1 se elimina \bar{p}_1 mediante:

$$-\overline{bdR''} = -b dR'' - h d\omega''$$

$$\bar{p}_1 = \tilde{p}_1 - (-\overline{bdR''}) = 0$$

$$\bar{p}_2 = \tilde{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = \tilde{p}_3 - (-\overline{bdR''}) = -\frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_4 = \tilde{p}_4 = -\frac{bd}{h} d\phi' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_5 = \tilde{p}_5 - (-\overline{bdR''}) = \frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_6 = \tilde{p}_6 = \frac{bd}{h} d\phi' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

3) En el punto 4 se elimina \bar{p}_4 mediante:

$$\bar{p}_1 = \tilde{p}_1 - \left(-\frac{bd}{h} d\phi'\right) = -\frac{bd}{h} d\phi' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_2 = \tilde{p}_2 = 0$$

$$\bar{p}_3 = \tilde{p}_3 = -\frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_4 = \tilde{p}_4 - \left(-\frac{bd}{h} d\phi'\right) = 0$$

$$\bar{p}_5 = \tilde{p}_5 = +\frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\bar{p}_6 = \tilde{p}_6 - \left(+\frac{bd}{h} d\phi'\right) = -\frac{2d^2}{h} d\omega''$$

4) En el punto 3 se elimina \bar{p}_3 mediante:

$$-\frac{bd}{h} d\phi'' = -\frac{bd}{h} d\phi'' - \frac{d^2}{h} d\omega''$$

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_1 = 0$$

$$\tilde{p}_2 = \tilde{p}_2 = 0$$

$$\tilde{p}_3 = \tilde{p}_3 - \left(-\frac{bd}{h} d\phi''\right) = 0$$

$$\tilde{p}_4 = \tilde{p}_4 = 0$$

$$\tilde{p}_5 = \tilde{p}_5 - \left(+\frac{bd}{h} d\phi''\right) = -\frac{2d^2}{h} d\omega''$$

$$\tilde{p}_6 = \tilde{p}_6 = -\frac{2d^2}{h} d\omega''$$

5) En este punto se puede comprobar, que las paralajes sobrantes después del paso 4) corresponden a la conexión de fotografías secuenciales (pares fotográficos dependientes). Hasta aquí la derivación de la sobrecorrección es análoga. Debe tomarse en cuenta, que al derivar el factor de sobrecorrección K se supone terreno casi plano (las diferencias de altura deben ser $< 15\%$ de altura de vuelo). De otra manera la determinación de K está ligada a mayores dificultades -- (ver cap. 15.10).

En el punto 5 ó 6 se sobrecorrige la paralaje \tilde{p}_5 ó \tilde{p}_6 . Para ello se cumple:

$$\tilde{p}_5 = p_5 \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) \right]$$

$$\tilde{u} = p_5 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right) \right]$$

$$\text{factor de sobrecorrección } K = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{a^2} - 1 \right) \right]$$

$$\text{corrección } n = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right) \right]$$

Bibliografía: Buchholtz/Ruger 1974.

8.5.1 Determinación óptico-mecánica de parámetros de orientación para fotos verticales.
Jordan-Eggert-Kneissl 1972 III, A2 pág. 93.

15.9 Orientación Relativa para terreno con diferencias de altura mayores.

- método numérico para instrumentos analógicos -

Las soluciones de los métodos hasta ahora descritos descansan en la suposición, de que no intervienen grandes diferencias de altura. Si este es el caso, las incógnitas deben calcularse tomando en cuenta las diferentes alturas del modelo. En la ecuación de paralaje la altura h debe substituirse por la correspondiente altura z_j .

Después de eso la ecuación general de paralaje (15.2/2) es:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{py} &= dby'' - dby' - \frac{y_i}{z_i} dbz'' + \frac{y_i}{z_i} dbz' + (x_i - b) dk'' \pm x_i dk' \\
 &- \frac{x_i y_i}{z_i} d\phi' + \frac{(x_i - b)y_i}{z_i} d\psi' + z_i \left(1 + \frac{y_i^2}{z_i^2} \right) d\omega'' \\
 &- z_i \left(1 + \frac{y_i^2}{z_i^2} \right) d\omega' - (py_i \cos \alpha - py_i \sin \alpha)
 \end{aligned} \quad (15.9./1)$$

Ahora se tiene que ordenar los puntos de orientación 1...6 y las alturas $z_1 \dots z_6$. Entonces la solución es posible usando el sistema matricial 6×5 .

Se obtiene una simplificación, si para los puntos de orientación se establece como condición:

$$\left| \frac{y_i}{z_i} \right| = k = \text{const.} \quad (15.9./2)$$

Los puntos deben tener más o menos la misma ordenada -y, en consecuencia $y_i = \text{const.}$ Esto se puede realizar, si en el portapla^{ca}cas están grabadas cruces (los portapla^{ca}cas - WILD lo tienen). Se establece que:

$$K = 1 + k^2 \quad (15.9./3)$$

Con ello se obtiene para el caso con pares fotográficos independientes:

| Punkt | x | y | p | dk'' | dk' | dφ | dφ' | dω'' | = X ^T |
|-------|---|----|----------------|------|-----|-----|-----|--------------------|------------------|
| 1 | 0 | 0 | p ₁ | 0 | b | 0 | 0 | z ₁ | |
| 2 | b | 0 | p ₂ | b | 0 | 0 | 0 | z ₂ | |
| 3 | 0 | K | p ₃ | 0 | b | 0 | -Kb | z ₃ · K | |
| 4 | b | K | p ₄ | b | 0 | -Kb | 0 | z ₄ · K | |
| 5 | 0 | -K | p ₅ | 0 | b | 0 | +Kb | z ₅ · K | |
| 6 | b | -K | p ₆ | b | 0 | +Kb | 0 | z ₆ · K | |

≡ L

≡ A

Entonces para $A^T x A$ se obtiene:

| dK' | dK'' | $d\phi'$ | $d\phi''$ | $d\omega''$ |
|---------------------|---------------------|------------------|------------------|---|
| $3b^2$ | 0 | 0 | 0 | $b(22 + 24 + 26)$ |
| 0 | $3b^2$ | 0 | 0 | $b(21 + 23 + 25)$ |
| 0 | 0 | $2K^2b^2$ | 0 | $-Kb(24K - 26K)$ |
| 0 | 0 | 0 | $2K^2b^2$ | $-Kb(23K - 25K)$ |
| $b(22 + 24K + 26K)$ | $b(21 + 23K + 25K)$ | $-Kb(24K - 26K)$ | $-Kb(23K - 25K)$ | $21^2 + 22^2 + 23^2K^2 + 24^2K^2 + 25^2K^2 + 26^2K^2$ |

y $A^T x L$:

| |
|--|
| $b(p_2 + p_4 + p_6)$ |
| $b(p_1 + p_3 + p_5)$ |
| $-Kb(p_4 - p_6)$ |
| $-Kb(p_3 - p_5)$ |
| $21p_1 + 22p_2 + K(23p_3 + 24p_4 + 25p_5 + 26p_6)$ |

La solución conduce a las siguientes ecuaciones para las incógnitas dK' , dK'' , $d\phi'$, $d\phi''$

$$dK' = -\frac{1}{3b} (22 + 24K + 26K) d\omega'' - \frac{1}{3b} (p_2 + p_4 + p_6) \quad (15.9.14)$$

$$dK'' = -\frac{1}{3b} (21 + 23K + 25K) d\omega'' - \frac{1}{3b} (p_1 + p_3 + p_5) \quad (15.9.15)$$

$$d\phi' = +\frac{1}{2Kb} (24K - 26K) d\omega'' - \frac{1}{2Kb} (p_4 - p_6) \quad (15.9.16)$$

$$d\phi'' = +\frac{1}{2Kb} (23K - 25K) d\omega'' - \frac{1}{2Kb} (p_3 - p_5) \quad (15.9.17)$$

Si ahora se substituye (4) hasta (7) en la última ecuación normal, se obtiene dw'' .

$$dw'' = \frac{(2z_1 - 2z_3K - 2z_5K)(2p_1 - p_3 - p_5) + (2z_2 - 2z_4K - 2z_6K)(2p_2 - p_4 - p_6)}{(2z_1 - 2z_3K - 2z_5K)^2 + (2z_2 - 2z_4K - 2z_6K)^2} \quad (15.9./3)$$

Volviendo a substituir en (4) hasta (7) da la fórmula final. - Hay diferentes métodos, que expresan a (8) de diferentes maneras (por ej. el de JERIE, KASPER, etc.)

Aquí ya no se entra en más detalle.

Bibliografía: Buchholtz/Ruger 1974.

8.5.3.2 Determinación numérica de la orientación relativa según Kasper.

15.10 Determinación del factor de sobrecorrección en terreno abrupto según KASPER.

Después de que en el último inciso se trató la derivación numérica de la fórmula para los parámetros de orientación, ahora se tiene que volver a abordar el método para instrumentos analógicos. Nada más se tiene que derivar el factor de sobrecorrección. El resto del método se aplica como descrito en el capítulo 15.4 - (pares fotográficos dependientes) o bien 15.8 (pares fotográficos independientes). El factor de sobrecorrección se deriva considerando pares fotográficos dependientes. (El mismo factor sirve para pares fotográficos independientes).

La paralaje vertical en el empalme de fotografías secuenciales se obtiene con (15.9./1) y (15.1./3) -h se substituye por Z_i :

$$py_i = -(x-b) dk'' + dby'' + z \left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right) dw'' + \frac{y}{z} (x-b) d\phi'' - \frac{y}{z} dbz'' \quad (15.10./1)$$

El factor de sobrecorrección está relacionado en forma ya conocida a dw'' . Esto nada más se nota en las ecuaciones de error para los puntos 1, 3, 5. Para ello se obtiene el siguiente esquema:

| Pkt | x | y | p_i | dby'' | dk'' | dw'' | $d\phi''$ | dbz'' |
|-----|---|-------|-------|---------|--------|--|----------------------|--------------------|
| 1 | 0 | 0 | p_1 | 1 | b | z_1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | y_3 | p_3 | 1 | b | $z_3 \left(1 + \frac{y_3^2}{z_3^2}\right)$ | $-\frac{y_3}{z_3} b$ | $-\frac{y_3}{z_3}$ |
| 5 | 0 | y_5 | p_5 | 1 | b | $z_5 \left(1 + \frac{y_5^2}{z_5^2}\right)$ | $-\frac{y_5}{z_5} b$ | $-\frac{y_5}{z_5}$ |

Se debe calcular dw''

$$p_3 - p_1 = \left[2_3 \left(1 + \frac{y_3^2}{z_3^2} \right) - z_1 \right] d\omega'' - \frac{y_3}{z_3} b d\phi'' - \frac{y_3}{z_3} dbz \quad (a)$$

$$p_5 - p_1 = \left[2_5 \left(1 + \frac{y_5^2}{z_5^2} \right) - z_1 \right] d\omega'' - \frac{y_5}{z_5} b d\phi'' - \frac{y_5}{z_5} dbz \quad (b)$$

(a) se amplía con (z_3/y_3) y (b) con (z_5/y_5) :

$$(p_5 - p_1) \frac{z_5}{y_5} = \left[2_5 \left(1 + \frac{y_5^2}{z_5^2} \right) - z_1 \right] \frac{z_5}{y_5} d\omega'' - b d\phi'' - dbz \quad (b')$$

$$(p_3 - p_1) \frac{z_3}{y_3} = \left[2_3 \left(1 + \frac{y_3^2}{z_3^2} \right) - z_1 \right] \frac{z_3}{y_3} d\omega'' - b d\phi'' - dbz \quad (a')$$

$$(p_5 - p_1) \frac{z_5}{y_5} - (p_3 - p_1) \frac{z_3}{y_3} = d\omega'' \left[\frac{2_5^2}{y_5} + y_5 - \frac{2_1 z_5}{y_5} - \frac{z_3^2}{y_3} - y_3 + \frac{2_1 z_3}{y_3} \right]$$

Despejando $d\omega''$:

(b') - (a')

$$d\omega'' = \frac{(p_5 - p_1) \frac{z_5}{y_5} - (p_3 - p_1) \frac{z_3}{y_3}}{(y_5 - y_3) - \left[\frac{z_5}{y_5} (2_1 - 2_5) - \frac{z_3}{y_3} (2_1 - 2_3) \right]} \quad (15.10./2)$$

Se puede derivar una ecuación similar para dw'' a partir de los puntos de orientación 2, 4, 6. (2) representa la paralaje vertical total a corregir debido a dw'' .

Pero en los pasos de orientación dw'' ya fue parcialmente corregida (en (2) intervienen p_1 y p_3). Por lo tanto nada más se tiene que corregir p_5 . p_5 se obtiene después de que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ (las paralajes se eliminaron).

Si se tiene que determinar la paralaje:

$$p_5^* = 2_5 \left(1 + \frac{y_5^2}{z_5^2} \right) d\omega^*$$

debido a dw'' en forma correcta, entonces se tiene que tomar en cuenta el siguiente factor de corrección.

$$n = \frac{d\omega''}{d\omega^*}$$

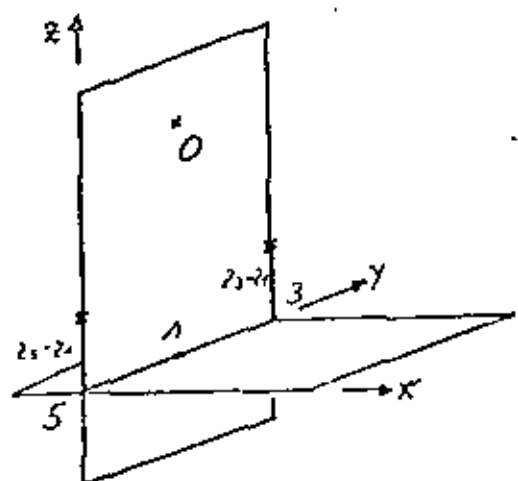
De allí se obtiene entonces como factor de sobrecorrección:

$$n = \frac{y_5 (1 + \frac{z_1'}{y_5})}{(y_5 - y_3) - \left[\frac{z_5}{y_5} (z_1 - z_5) - \frac{z_3}{y_3} (z_1 - z_3) \right]}$$

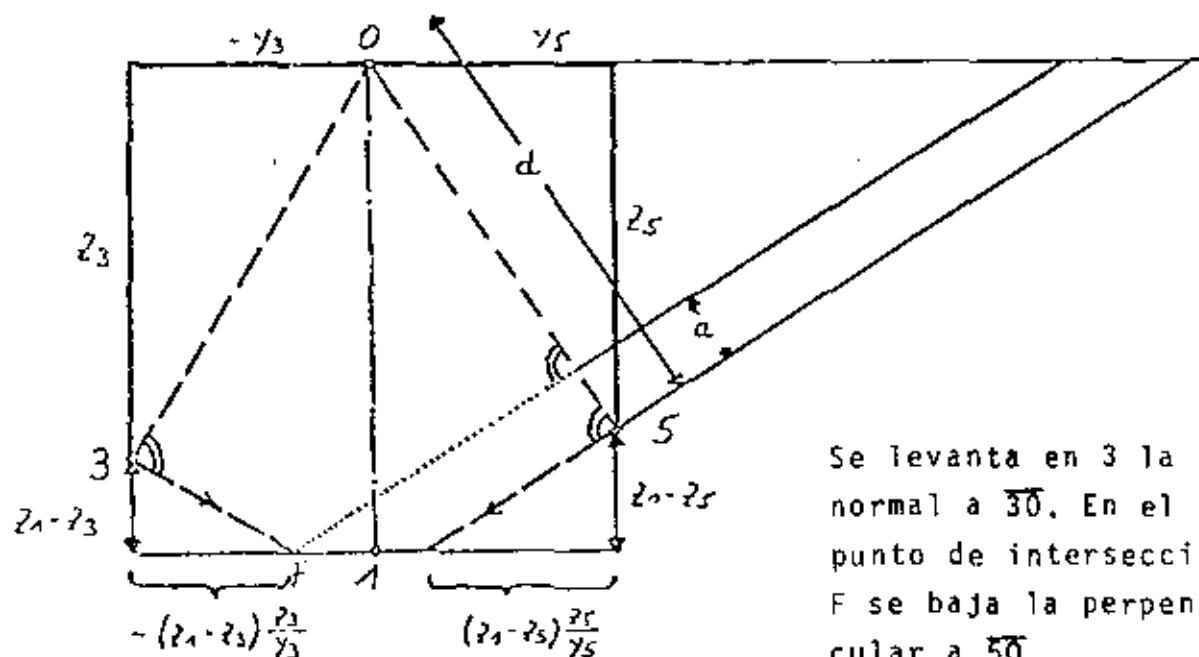
(15.10./3)

KASPER propuso una construcción geométrica muy sencilla para la determinación del factor de sobrecorrección:

Los valores de y y z ($\rightarrow \Delta Z$) se calculan en el modelo estéreo. Se dibuja un corte vertical por los puntos 1, 3, 5. 0 es el centro de toma. La figura muestra la situación tridimensional:



Para el corte vertical se obtiene el siguiente cuadro:



El factor de sobrecorrección se obtiene de la relación:

$$\boxed{r_c = \frac{d}{a}} \quad (15.10./3a)$$

Se vuelve crítico, si 3, 1 y 5 están en una circunferencia, con secuentemente $n \rightarrow a$ ya que $a \rightarrow 0$. Entonces la orientación relativa no tiene solución. Esto conduce al problema de superficies críticas.

Bibliografía : Buchholtz/Ruger 1974.

8.5.3 Orientación relativa con fuertes diferencias de elevación.

15.11 Superficies Críticas.

Como punto de partida, se escoge la ecuación de paralaje para pares fotográficos dependientes (15.1./3).

$$p_{yi} = dby'' - (x_i - b) d\mu'' - \frac{(x_i - b)y_i}{h} d\varphi'' - \frac{y_i}{h} db_2'' + h_i \left(1 + \frac{y_i^2}{h_i^2} \right) d\omega''$$

Esta expresión no se puede determinar, en el caso de que el determinante se vuelva cero. En este caso se tiene una superficie crítica. Este problema se puede comparar con la circunferencia crítica en el resección espacial:

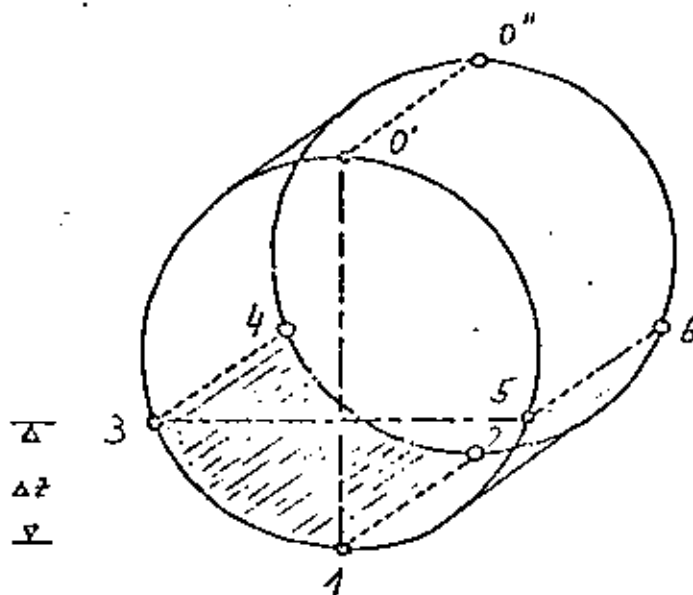
La resección espacial acomoda un haz de rayos a puntos fijos dados. → circunferencia crítica.

La orientación relativa acomoda dos haces de rayos a los mismos puntos del modelo. → superficie crítica.

¿Cómo deben estar repartidos los puntos de orientación - para integrar una superficie crítica? Para ello el siguiente razonamiento:

Los 6 puntos de orientación y el centro de toma se encuentran en un cilindro. Un centro de proyección sobre la superficie del cilindro se puede correr (por ej. se introduce un db_y adicional), sin que entren paralajes verticales en el modelo. O sea existe - equivocación.

La situación se representa gráficamente así:



Se ve de inmediato que este problema nada más puede presentarse en terreno montañoso (- los puntos de orientación tienen diferentes alturas -). Si se añaden puntos de pase adicionales, que no están en el cilindro, para determinar las incógnitas equívocas, se elimina la superficie crítica. No se profundiza en las relaciones de fórmulas. Estas se encuentran por ej. en Buchholtz Ruger, 1974, Cap. 8.9 (superficies críticas).

16. Deformaciones del modelo.

La precisión de la orientación relativa depende de la eliminación de la paralaje vertical, lo cual es nada más posible dentro de la precisión de observación. Nunca se logrará tener un modelo totalmente libre de paralaje. (Aun con un ajuste no se pueden eliminar los errores). Aún más, por correcciones a las incógnitas (empalme de fotografía secuencial) pueden introducirse errores sistemáticos a los puntos de orientación (a pesar de modelos libres de paralajes). A raíz de eso resultan las llamadas deformaciones del modelo en todas las 3 direcciones coordenadas.

Estas deformaciones del modelo deben apreciarse de las fórmulas diferenciales (por ejemplo ecuación de partida 5./4a).
 A continuación debe derivarse la ecuación para la paralaje X . Según (5/4a) se cumple para los suplementos dx_i' a las foto-coordenadas x_i condicionada por la orientación (las incógnitas de las coordenadas no se utilizan):

$$\begin{aligned}
 dx_i' = \frac{1}{A_3 B} & \left[(-x_i' a_{13} - c a_{11}) dX_0' + (-x_i' a_{32} - c a_{12}) dY_0' \right. \\
 & + (-x_i' a_{33} - c a_{13}) dZ_0' \\
 & + \left\{ x_i' (-a_{33} (Y_i - Y_0') + a_{32} (Z_i - Z_0') \right. \\
 & \quad \left. + c (-a_{13} (Y_i - Y_0') + a_{12} (Z_i - Z_0'))) \right\} d\omega \\
 & + \left\{ x_i' (\cos \phi (X_i - X_0') + \sin \omega \sin \phi (Y_i - Y_0') \right. \\
 & \quad \left. - \cos \omega \sin \phi (Z_i - Z_0')) \right. \\
 & \quad \left. + c (-\sin \phi \cos \kappa (X_i - X_0') + \sin \omega \cos \phi \cos \kappa (Y_i - Y_0') \right. \\
 & \quad \left. - \cos \omega \cos \phi \cos \kappa (Z_i - Z_0')) \right\} d\phi \\
 & + \left\{ c (a_{21} (X_i - X_0') + a_{22} (Y_i - Y_0') + a_{23} (Z_i - Z_0')) \right\} d\kappa \Big]
 \end{aligned}$$

con: $A_3 B = a_{13} (X_i - X_0') + a_{23} (Y_i - Y_0') + a_{33} (Z_i - Z_0')$

Ahora se observan fotografías aproximadamente verticales. Entonces se puede establecer:

$$\phi = \omega = \kappa = X_0' = Y_0' = 0 ; (Z_i - Z_0') = h$$

y se obtiene para $A_3 B$:

$$A_3 B = h$$

Como relación entre coordenadas fotográficas y del modelo se cumple para fotografías verticales:

$$x_i' = -\frac{c}{h} x_i$$

$$y_i' = -\frac{c}{h} y_i$$

Con estas simplificaciones se obtiene para:

$$dx_i' = -\frac{c}{h} dX_0' - \frac{x_i'}{h} dZ_0' + \frac{1}{h} [-x_i' y_i'] d\omega \\ + \frac{1}{h} [x_i' x_i - ch] d\phi + \frac{1}{h} [c y_i] dK$$

Con ello la relación para fotocoordenadas queda así:

$$\boxed{dx_i' = -\frac{c}{h} dX_0' - \frac{x_i'}{h} dZ_0' + \frac{x_i' y_i'}{c} d\omega \\ - \left[\frac{x_i'^2}{c} + c \right] d\phi - y_i' dK} \quad (16./1a)$$

y pasando a coordenadas del modelo, donde se cumple:

$$dx_i = -\frac{h}{c} dx_i'; \quad X_i = -\frac{h}{c} x_i'; \quad Y_i = -\frac{h}{c} y_i'$$

$$\boxed{dX_i = dX_0' - \frac{X_i}{h} dZ_0' - \frac{X_i Y_i}{h} d\omega \\ + \left[\frac{X_i^2}{h} + h \right] d\phi - Y_i dK} \quad (16./1b)$$

Las deformaciones del modelo se hacen notar sobre todo como errores de altura en el modelo, de tal manera que la superficie horizontal, origen de referencia para las alturas, pasa a una superficie general.

Según el dibujo de la pág. 174 se obtiene como relación entre la altura h y la diferencia de las fotocoordenadas $-x, x_1' - x_1''$

$$\frac{b}{h} = \frac{x_1' - x_1''}{c}$$

Despejando h y diferenciando esta fórmula con respecto a las fotocoordenadas x' o bien coordenadas del modelo x , se obtiene:

$$h = \frac{bc}{x_1' - x_1''}; \quad dh = \frac{-h^2}{b \cdot c} dx' = \frac{h}{b} dx$$

El uso de (16) conduce a la fórmula para deformaciones del modelo:

$$dh = + \frac{h}{b} dX_0' - \frac{x_i}{b} dZ_0' - \frac{x_i y_i}{b} d\omega$$

$$+ \left[\frac{x_i^2}{b} + \frac{h^2}{b} \right] d\phi - \frac{y_i h}{b} d\kappa$$

(16./2)

Esta fórmula se puede ampliar para un modelo con dos fotografías. Se pasa a los paralajes x (también llamadas paralajes horizontales).

$$\rho x_i' = dx_i'' - dx_i'$$

$$\rho x_i' = - \frac{c}{h} dX_0'' - \frac{x_i''}{h} dZ_0'' + \frac{x_i'' y_i''}{c} d\omega''$$

$$- \left[\frac{x_i''^2}{c} + c \right] d\phi'' - y_i'' dx''$$

$$+ \frac{c}{h} dX_0' + \frac{x_i'}{h} dZ_0' - \frac{x_i' y_i'}{c} d\omega'$$

$$+ \left[\frac{x_i'^2}{c} + c \right] d\phi' + y_i' dx'$$

Con las substituciones:

$$dbx = dX_0'' - dX_0' \quad ; \quad x_i' = -c \frac{x_i}{h}$$

$$dby'' = dY_0'' \quad ; \quad -dby' = dY_0' \quad ; \quad y_i' = -c \frac{y_i}{h}$$

$$dbz'' = dZ_0'' \quad ; \quad dbz' = dZ_0' \quad ; \quad x_i'' = -c \frac{x_i - b}{h}$$

$$\rho x_i' = - \frac{c}{h} \rho x_i \quad ; \quad y_i'' = -c \frac{y_i}{h}$$

Se obtiene:

$$\rho x_i = dbx + \frac{x_i - b}{h} dbz'' - \frac{x_i}{h} dbz'$$

$$- \frac{(x_i - b)y_i}{h} d\omega'' + \frac{(x_i y_i)}{h} d\omega'$$

$$+ \left[\frac{(x_i - b)^2}{h} + h \right] d\phi'' - \left[\frac{x_i^2}{h} + h \right] d\phi'$$

$$- y_i dx'' + y_i dx'$$

(16./3)

Con esto se obtiene, para el error de altura en el modelo, (deformaciones del modelo) en forma general:

$$\begin{aligned}
 dh &= \frac{h}{b} dbx + \frac{x_i - h}{b} dbz'' - \frac{x_i}{b} dbz' \\
 &- \frac{(x_i - b)y_i}{b} d\omega'' + \frac{x_i y_i}{b} d\omega' + \left[\frac{(x_i - b)^2}{b} + \frac{h^2}{b} \right] d\phi'' \\
 &- \left[\frac{x_i^2}{b} + \frac{h^2}{b} \right] d\phi' - \frac{y_i h}{b} d\kappa'' + \frac{y_i h}{b} d\kappa' \quad (16./4)
 \end{aligned}$$

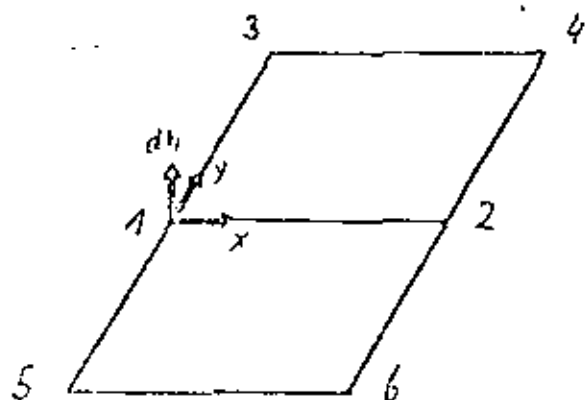
La superficie de referencia para un modelo tal, ya no es un plano, sino una superficie general. Esto se puede ver fácilmente - si (4) se ordena por potencias de las coordenadas del modelo. Entonces las deformaciones del modelo se pueden describir como sigue - A, ..., E son coeficientes nuevos:

$$dh = A + Bx + Cy + Dxy + Ex^2 \quad (16./4a)$$

Para la orientación relativa con pares fotográficos dependientes se tienen que esclarecer los cambios de altura dh:

Aquí intervienen nada más 5 incógnitas. Por consiguiente (4) se simplifica a:

$$\begin{aligned}
 dh &= \frac{h}{b} dbx - \frac{(x_i - b)}{b} dbz'' - \frac{(x_i - b)y_i}{b} d\omega'' \\
 &+ \left[\frac{(x_i - b)}{b} + \frac{h^2}{b} \right] d\phi'' - \frac{y_i h}{b} d\kappa''
 \end{aligned}$$



Se deben de tomar en cuenta nuevamente los coeficientes en los 6 puntos de orientación.

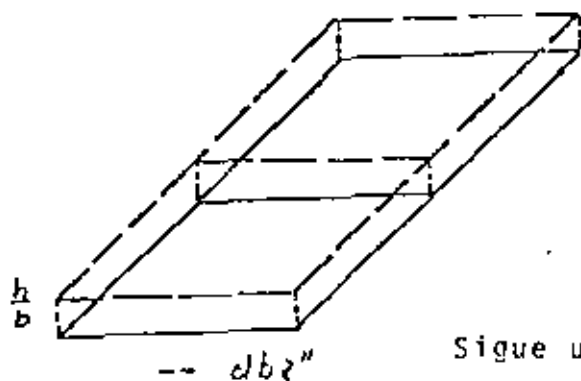
Se obtiene nuevamente un esquema ya conocido:

| | x | y | dh | dhx | dhx'' | dh'' | dh''^2 | dh''^2 |
|---|-----|------|--------|-------|---------|-----------------|----------------------|----------|
| 1 | 0 | 0 | dh_1 | h/b | 1 | 0 | $-\frac{h^2+h^2}{b}$ | 0 |
| 2 | b | 0 | dh_2 | h/b | 0 | 0 | $-\frac{b^2}{h^2}$ | 0 |
| 3 | 0 | d | dh_3 | h/b | 1 | $\frac{dh}{b}$ | $-\frac{b^2+h^2}{b}$ | $-d$ |
| 4 | b | d | dh_4 | h/b | 0 | $\frac{dh}{b}$ | $-\frac{b^2}{h^2}$ | 0 |
| 5 | 0 | $-d$ | dh_5 | h/b | 1 | $-\frac{dh}{b}$ | $-\frac{b^2+h^2}{b}$ | $+d$ |
| 6 | b | $-d$ | dh_6 | h/b | 0 | $-\frac{dh}{b}$ | $-\frac{b^2}{h^2}$ | 0 |

Ahora se representan gráficamente los efectos individuales:

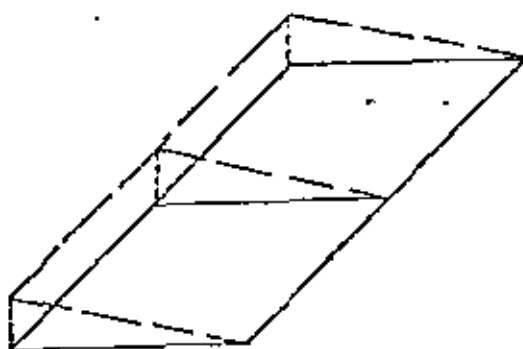
-- dhx

El plano de referencia para las alturas del modelo se eleva en h/b (para un modelo dado).



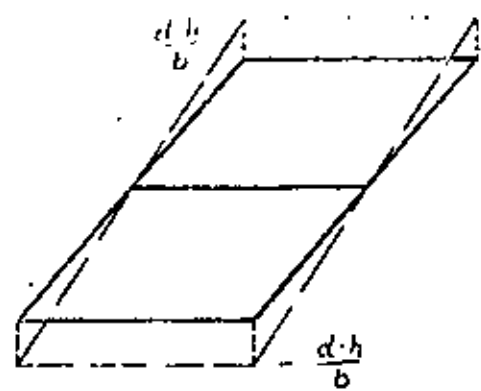
Sigue un cambio de altura lineal en dependencia de la abscisa x .

(gira alrededor de una paralela al eje y).



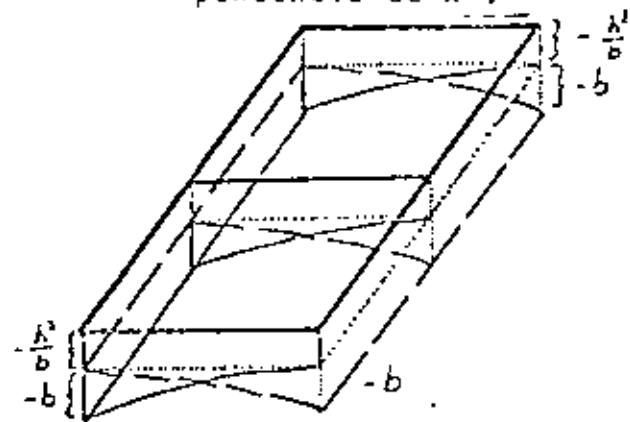
-- dK''

Giro del modelo alrededor del eje x.
El plano de referencia permanece plano.



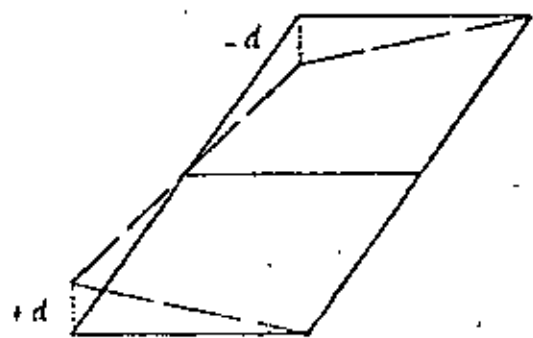
-- $d\phi''$

Aquí el plano de referencia del modelo se eleva en una cantidad constante y simultáneamente se deforma parabólicamente en dependencia de x^2 .



-- $d\omega''$

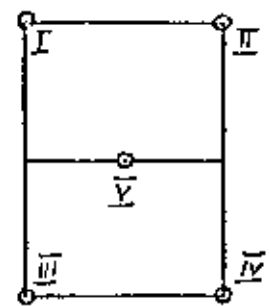
Existe una dependencia lineal de x y y.
Simultáneamente el plano de referencia sufre una deformación hiperbólica.



Los que debido a un error de base dbx o bien por los errores de altura lineales causados por dbz pueden ser corregidos en la orientación absoluta.

- dbx mediante cambio de altura; dbz'' mediante $d\phi$; dK'' mediante $d\Omega$ -

Las deformaciones del modelo condicionadas por $d\phi$ y dw pueden ser más bien comprendidas aproximadamente ($d\phi$ - cilindro o -- bien dw - hiperboloides). Se pueden determinar con ayuda de 5 puntos de pase de altura, los cuales deben estar situados de la siguiente manera:

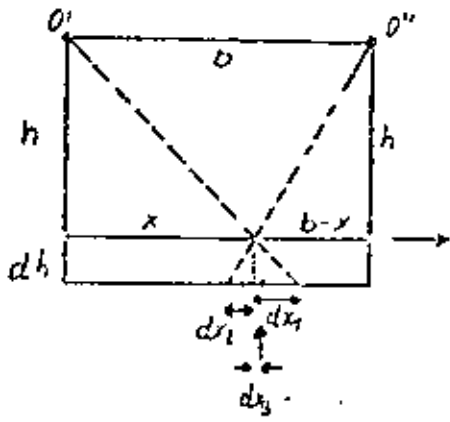


Mediante propagación de error se determina la desviación standard para las alturas σ_h según la orientación relativa (con pares fotográficos dependientes)

$$\sigma_h^2 = \sigma_h'^2 + \sigma_o^2 \left\{ \frac{(x_i - b)^2}{b^2} Q_{b^2 \cdot \sigma_2^2} + \frac{(x_i - b)^2 y_i^2}{b^2} Q_{x^2 \cdot \sigma_2^2} + \left(\frac{x_i - b}{b} + \frac{h^2}{b} \right)^2 Q_{\phi^2 \cdot \sigma_2^2} + \frac{y_i^2 h^2}{b^2} Q_{w^2 \cdot \sigma_2^2} \right\} \quad (16.15)$$

- $\sigma_h'^2$: Errores en la observación de la altura.
- $\{ \dots \} \cdot \sigma_o^2$: Error de paralaje -y

En forma similar se puede determinar la desviación standard de las coordenadas, σ_x y σ_y . Se representan en dependencia de la desviación standard de altura σ_h .



El dibujo da
 para $dx_1 = \frac{x}{h} dh$
 y para $dx_2 = \frac{b-x}{h} dh$
 con ello se obtiene

$$dx_3 = \frac{dx_1 + dx_2}{2} = \frac{b}{2h} dh$$

en general:

$$dx = \left(\frac{b}{2h} - \frac{x}{h} \right) dh$$

o como desviación standard para la coordenada -x

$$\sigma_x = \pm \left(\frac{b}{2h} - \frac{x}{h} \right) \sigma_h \quad (16.16)$$

La derivación para la oy continúa análogamente:

$$dy_1 = -\frac{y}{h} dh = dy_2$$

$$dy = \frac{dy_1 + dy_2}{2} = \frac{y}{h} dh$$

desviación standard para coordenadas $-y$

$$\boxed{\tilde{\sigma}_y = \pm \frac{y}{h} \tilde{\sigma}_h}$$

(16./7)

Bibliografía: Jordan-Eggert-Kneissl 1972 III, A2 pág. 95
bajo errores del modelo.

Buchholtz/Ruger 1974

8.8 Desarrollo de errores residuales de la
orientación relativa en el modelo.

Finsterwalder Fotogrametría 1968.

3.4.3 Deformaciones del modelo.

17. Orientación absoluta en instrumentos analógicos.

El modelo orientado relativamente -en el restituidor - debe - ahora llevarse a un plano horizontal paralelo a NN mediante - una transformación. El modelo todavía no tiene la escala co- rrecta, ni tampoco se diferencia su posición tridimensional, en el sistema coordenado del instrumento (coordenadas de má- quina x y z), de la posición del objeto en el sistema terres- tre (X , Y , Z).

Después del capítulo 11f, quedó como ecuación fundamental:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda \cdot A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

La matriz A que allí interviene está integrada así:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos K & \cos \Omega \sin K + \sin \Omega \sin \Phi \cos K & \sin \Omega \sin K - \cos \Omega \sin \Phi \cos K \\ -\cos \Phi \sin K & \cos \Omega \cos K - \sin \Omega \sin \Phi \sin K & \sin \Omega \cos K + \cos \Omega \sin \Phi \sin K \\ \sin \Phi & -\sin \Omega \cos \Phi & \cos \Omega \cos \Phi \end{pmatrix}$$

debido a lo pequeña de los ángulos de giro se cumple:

$$A \approx \begin{pmatrix} 1 & dK & -d\Phi \\ -dK & 1 & d\Omega \\ d\Phi & d\Omega & 1 \end{pmatrix}$$

También el factor de escala puede separarse $\lambda = \lambda' + d\lambda$.

Con ello se obtiene para la ecuación fundamental:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda' \begin{pmatrix} 1 & dK & -d\Phi \\ -dK & 1 & d\Omega \\ d\Phi & d\Omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + d\lambda \cdot E \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (17./1)$$

Para la orientación absoluta en instrumentos analógicos se siguen tres pasos:

1) Determinación del factor de escala.

La determinación de escala se hace mediante la comparación de las correspondientes distancias en el modelo y en el objeto (por ej. con ayuda de dos puntos o -mediante la transferencia de escala en la aerotriangulación- un punto y las coordenadas del centro de proyección). Se cumple para la relación de la distancia tridimensional en el modelo a la misma distancia en el sistema terrestre:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (\text{Modelo})}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (\text{Terrestre})} \frac{1}{\lambda'} \quad (17./2)$$

λ' : factor de escala en el modelo

λ : factor de escala deseado (por lo general números redondos - por ej. 10000-)

Para el factor de amplificación entre el sistema del modelo y del terreno se obtiene:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{bx_{\text{revisado}}}{bx_{\text{in Modelo}}} = \frac{dby_{\text{revisado}}}{dby_{\text{in Modelo}}} = \frac{dbz_{\text{revisado}}}{dbz_{\text{in Modelo}}}$$

Los valores para los componentes de la base se obtienen resolviendo estas ecuaciones:

$$b_x \text{ deseado} = \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot b_x \text{ modelo}$$

a colocar calculado legible

en forma análoga para dby y dbz

Después de colocado, λ' se acerca a 1 con una precisión suficiente (escala del terreno = escala del modelo). Para las componentes de (1) se obtiene entonces.

$$\begin{aligned} X &= y dK - z d\bar{\Phi} + x + x d\lambda + X_0 \\ Y &= -x dK + z d\Omega + y + y d\lambda + Y_0 \\ Z &= x d\bar{\Phi} - y d\Omega + z + z d\lambda + Z_0 \end{aligned} \quad (17.13)$$

Para 3 (4) puntos de pase dados, que más o menos debieran estar en un plano ($z = \text{constante}$) se obtiene para (3):

$$X_2 = y_2 dK - z d\bar{\Phi} + x_2 + x_2 d\lambda + X_0$$

$$X_1 = y_1 dK - z d\bar{\Phi} + x_1 + x_1 d\lambda + X_0$$

en forma análoga para Y, Z

Transformando a diferencias de coordenadas se elimina $d\bar{\Phi}$:

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 &\approx (y_2 - y_1) dK + x_2 - x_1 + (x_2 - x_1) d\lambda \\ Y_2 - Y_1 &\approx -(x_2 - x_1) dK + y_2 - y_1 + (y_2 - y_1) d\lambda \\ Z_2 - Z_1 &\approx (x_2 - x_1) d\bar{\Phi} - (y_2 - y_1) d\Omega \end{aligned} \quad (17.14)$$

Con la relación (4) se puede proceder al segundo paso:

2) Giro azimutal.

Con ello se gira la carta en la mesa de dibujo.

Prácticamente se usan las dos primeras relaciones de (4).

dK es entonces el ángulo diferencia entre el azimut α en el sistema terrestre y α' en el sistema del modelo.

$$\begin{aligned} \tan \alpha_{12} &= \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \\ \tan \alpha_{12}' &= \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \\ dK &= \alpha_{12} - \alpha_{12}' \end{aligned}$$

(17./5)

No es necesario el cálculo de (5).

Con ello nada más queda un paso:

3) Giro del modelo $d\phi$, $d\Omega$

Se utiliza la tercera ecuación de (4), ya que las inclinaciones del modelo existentes tienen la mayor influencia en la de terminación de alturas. Se cumple:

$$Z_2 - Z_1 \approx (x_2 - x_1) d\phi - (y_2 - y_1) d\Omega$$

En principio se podrían calcular matemáticamente $d\phi$ y $d\Omega$ mediante la formación de dos de esas ecuaciones. Sin embargo se puede hacer un cálculo más sencillo, si Δx ó Δy se pueden hacer cero.

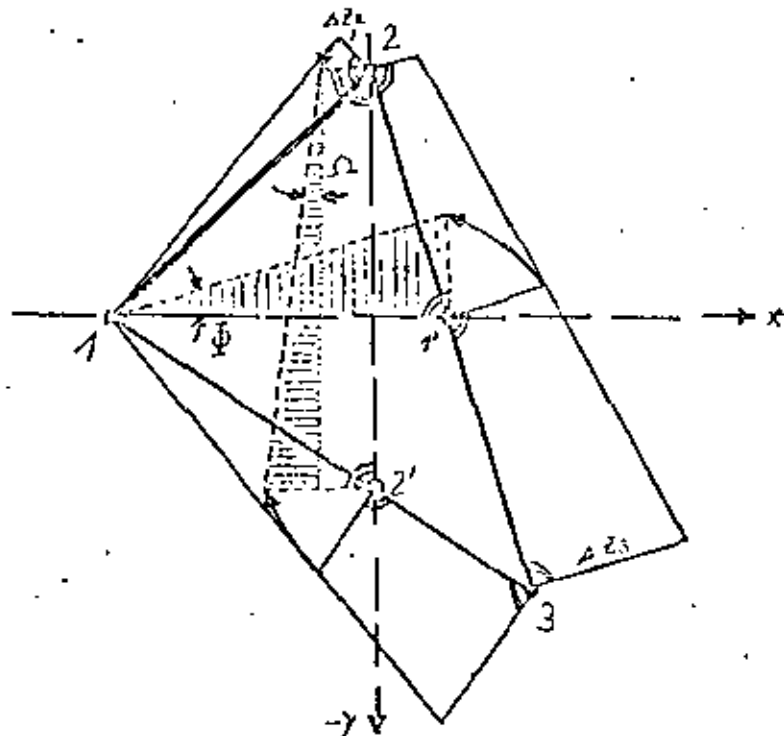
Esto conduce a una solución semigráfica:

Para cada una se traza en la hoja una paralela al eje x ó al eje y , de tal manera que, pasen por el punto 1 ó 2 (ó 3).

Las intersecciones con los lados del triángulo en el lado -- opuesto se designan con 1' ó 2'.

Midiendo los paralajes ρ se pueden determinar las alturas del modelo $z_1, z_2, z_3, z'_1, z'_2, z'_3$ del sistema terrestre son conocidas y con ello $\Delta Z_1, \Delta Z_2, \Delta Z_3$ se pueden determinar. Estas diferencias se llevan a los puntos 1 2 3.

El siguiente dibujo debe esclarecer lo anterior:



(Para simplificar el dibujo se partió de $\Delta Z_1 = 0$, de allí - que por el punto 1 deben pasar ambos planos de referencia de altura o bien paralelamente. En las fórmulas no se usa esta simplificación).

Las diferencias de altura ΔZ_1 ó ΔZ_2 se calculan por interpolación lineal. Se obtiene:

$$\Delta z_1' = z_1' - z_1' = \Delta z_2 + \frac{(\Delta z_3 - \Delta z_2)}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1')^2 + (y_2 - y_1')^2}$$

$$\Delta z_2' = z_2' - z_2' = \Delta z_1 + \frac{(\Delta z_3 - \Delta z_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1')^2 + (y_2 - y_1')^2}$$

Se debe tomar en cuenta la posición de 1' y 2'. Con ello se simplificarán las últimas dos ecuaciones a:

$$\Delta z_1' = \Delta z_2 + \frac{\Delta z_3 - \Delta z_1}{y_2 - y_3} (y_2 - y_1')$$

$$\Delta z_2' = \Delta z_1 + \frac{\Delta z_3 - \Delta z_1}{x_3 - x_1} (x_2' - x_1)$$

y los giros buscados se obtienen (ver dibujo) mediante la relación tangente:

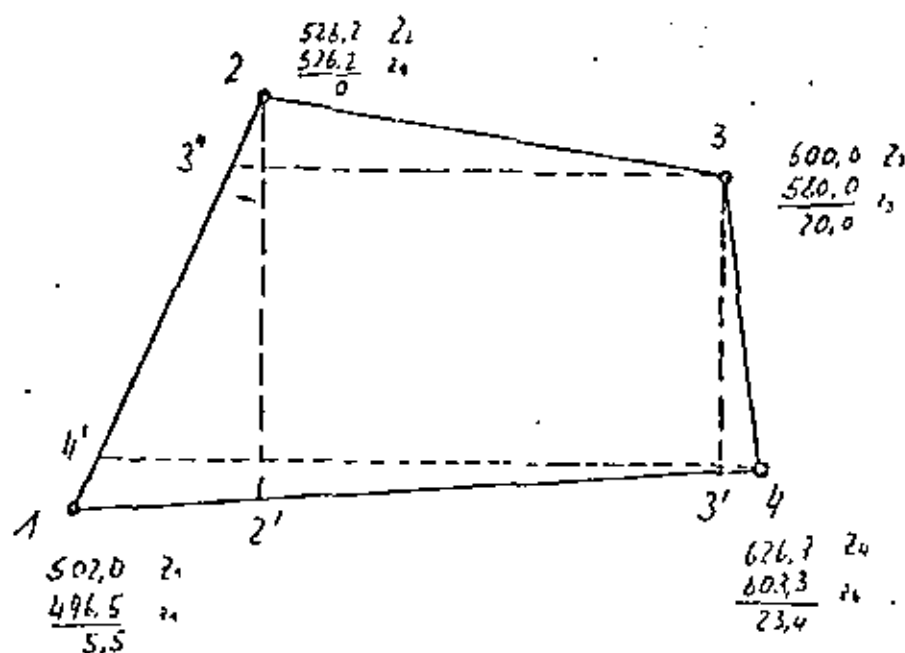
$$\tan \alpha \approx \frac{\Delta z_2' - \Delta z_2}{y_2 - y_1'}$$

$$\tan \alpha \approx \frac{\Delta z_1' - \Delta z_1}{x_1' - x_1}$$

(17./6)

Es más usada la horizontalización con 4 puntos de pase que con 3 puntos. Deben de estar situados de preferencia simétricamente en las esquinas del modelo.

Son conocidas las alturas terrestres Z_i , se miden las alturas del modelo z_i ; de allí se determinan las correcciones Δz_i . Se procede de la misma manera que con 3 puntos.



$$\Delta z_1 = z_1 - z_1'$$

$$\Delta z_2 = z_2 - z_2'$$

$$\Delta z_3 = z_3 - z_3'$$

$$\Delta z_4 = z_4 - z_4'$$

Interpolación de las diferencias de altura en 2' 3' 3" y 4'

$$\Delta z_3'' = 5,5 \frac{\bar{z}_3''}{\bar{z}_1}$$

$$\Delta z_4' = 5,5 \frac{\bar{z}_4'}{\bar{z}_1}$$

$$\Delta z_2' = 5,5 + (23,4 - 5,5) \frac{\bar{z}_2'}{\bar{z}_4}$$

$$\Delta z_3' = 5,5 + (23,4 - 5,5) \frac{\bar{z}_3'}{\bar{z}_4}$$

y se obtiene para cada uno dos ecuaciones de determinación para las incógnitas.

$$\tan d\Omega_1 = \frac{\Delta z_1' - \Delta z_2''^0}{y_2 - y_2'}$$

$$\tan d\Omega_2 = \frac{\Delta z_3' - \Delta z_3''}{y_3 - y_3'}$$

$$\tan d\bar{\Phi}_1 = \frac{\Delta z_3 - \Delta z_3''}{x_3 - x_3''}$$

$$\tan d\bar{\Phi}_2 = \frac{\Delta z_4 - \Delta z_4'}{x_4 - x_4'}$$

Los valores finales se obtienen mediante el promedio:

$$d\Omega = \frac{d\Omega_1 + d\Omega_2}{2}$$

$$d\bar{\Phi} = \frac{d\bar{\Phi}_1 + d\bar{\Phi}_2}{2}$$

Estos valores se deben aplicar directamente al aparato. Después de eso se debe iterar, condicionado por las diferencias de altura en los puntos de pase, etc. El signo de los valores depende de la posición del sistema coordenado del aparato.

Una aplicación directa de esta corrección es posible en aparatos que tienen un giro común ϕ o bien Ω . Si los giros deben aplicarse a cada proyector, Ω mediante w' y w'' , así como ϕ mediante ϕ' y ϕ'' , entonces existen dos casos.

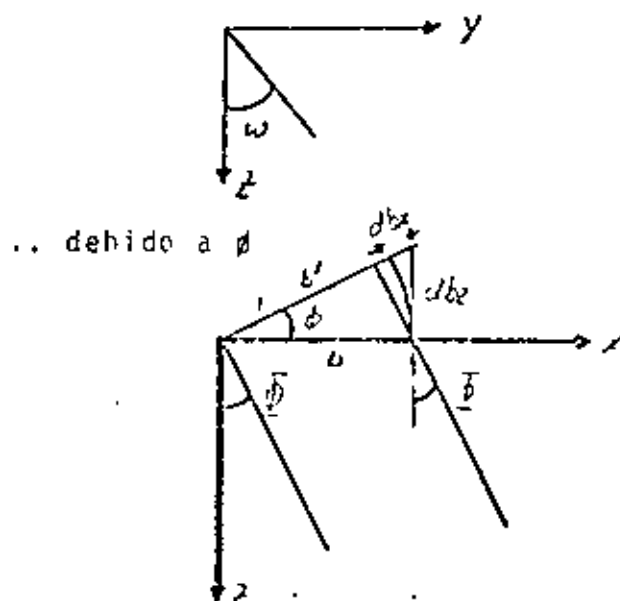
Existen las siguientes posibilidades:

$$a) \quad db_y = db_z = 0$$

La base también se gira, o sea, permanece constante. (Este caso se presenta por ej. en el Multiplex).

Pasos de trabajo:

- giro Ω mediante los giros individuales ω' , ω''
- giro Φ mediante los giros individuales ϕ' , ϕ''
- adicionalmente se tiene que hacer
.. debido a w ningún otro paso.



Relaciones en base al dibujo:

$$\tan \tilde{\phi} = \frac{\Delta z_1' - \Delta z_1}{x_1' - x_1} = \frac{db_z}{b'} \quad ; \quad b' = b \cos \tilde{\phi}$$

$$b = b' + db_x$$

Substituyendo da

$$db_x = b (1 - \cos \tilde{\phi})$$

$$db_z = b \sin \tilde{\phi} \approx b \cdot \tan \tilde{\phi}$$

(17.17)

Este paso significa: Después de usar ϕ' y ϕ'' la paralaje que interviene se corrige con db_z . La paralaje se hace notar en los puntos 3, 4, 5, 6.

La diferencia de escala se puede (en general) despreciar.

b) db_y y $db_z \neq 0$

La base no se gira.

Este es el caso por ej. en aparatos que utilizan el paralelogramo Zeiss. Las componentes de la base se mantienen fijas mediante varillas tridimensionales unidas o bien espejos.

Si los proyectores están unidos mediante una base rígida, entonces también se presenta este problema.

Después de la orientación se muestran tanto errores de paralaje como de escala. Las componentes de la base tienen que modificarse en pequeñas cantidades:

.. debido al giro ω mediante ω' ω''

$$\begin{aligned} b_{x\omega} &= b_x \\ db_{y\omega} &= db_y \cos \omega - db_z \sin \omega \\ db_{z\omega} &= db_y \sin \omega + db_z \cos \omega \end{aligned} \quad (17./7a)$$

.. debido al giro ϕ mediante ϕ' ϕ''

$$\begin{aligned} b_{x\phi} &= b_x \cos \phi + db_z \sin \phi \\ db_{y\phi} &= db_y \\ db_{z\phi} &= -b_x \sin \phi + db_z \cos \phi \end{aligned} \quad (17./7b)$$

y .. debido al giro K mediante K' K''

$$\begin{aligned} b_{xK} &= b_x \cos K - db_y \sin K \\ db_{yK} &= b_x \sin K + b_y \cos K \\ db_{zK} &= db_z \end{aligned} \quad (17./7c)$$

Bibliografía: Buchholtz/Ruger 1974.

8.6 Orientación Absoluta del modelo.

Jordan-Eggert-Kneissi III, A2 1972 pág. 96.

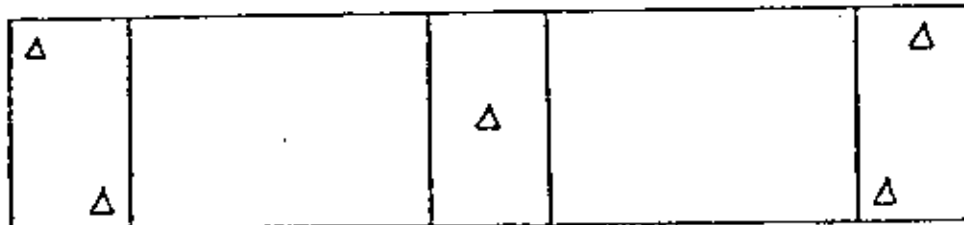
18. Ajuste de franjas y bloques por interpolación.

En muchos casos, para el ajuste en bloque fotogramétrico, nada más se dispone de calculadoras de capacidad limitada. La magnitud del área a levantar sobrepasa en los cálculos las posibilidades de la calculadora, en caso de usar una solución directa. En este caso se utilizan ecuaciones matemáticas polinómicas más sencillas para el ajuste. Prácticamente se lleva a cabo una transformación al sistema coordenado terrestre, de tal manera que los puntos coincidan exactamente con su posición verdadera. Se investigó un sinnúmero de cálculos. Se demostró que con un polinomio de 4o. grado (y mayor) los resultados se pueden empeorar. Algunos cálculos se presentan ahora en forma breve:

- a) Polinomios independientes para diferencias de coordenadas en los puntos de pase.

Se determinan los coeficientes de los polinomios para una franja. Su número está influenciado por la distribución de los puntos de pase.

Los puntos de pase están ordenados por ej. en 3 grupos:



Un posible cálculo es:

$$\begin{array}{l}
 \Delta X = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy \\
 \Delta y = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy \\
 \Delta z = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy
 \end{array}$$

(18./1)

Esta formulación considera errores constantes en el primer modelo mediante los coeficientes a_0 b_0 c_0 .

(traslación).

Los giros, inclinaciones o cambios de escala se toman en cuenta con a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2 . La propagación de errores a lo largo de las franjas o bien perpendiculares al ensanchamiento de las franjas se consideran mediante a_3 b_3 c_3 o bien a_4 b_4 c_4 . Estos coeficientes también contienen la influencia principal de la curvatura terrestre y de los errores de proyección.

Se utiliza otro cálculo, si los puntos de pase están repartidos en 4 grupos a lo largo de la franja.

El grado de polinomio se sube a 3.

| | | | | | | |
|-------------------|--|----------|--|----------|--|-------------------|
| Δ | | Δ | | Δ | | Δ Δ |
| Δ Δ | | Δ | | Δ | | Δ |

$$\Delta X = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 x^3 + a_6 x^2 y$$

$$\Delta Y = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 x^3 + b_6 x^2 y$$

$$\Delta Z = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 x^3 + c_6 x^2 y$$

(18./2)

Ahora se parte de observaciones independientes y de igual peso ($P_{LL} = E$). El cálculo para un ajuste según el método de mínimos cuadrados queda así:

- Δx , Δy y Δz pueden considerarse y ajustarse independientemente la una de la otra -

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & x_1^3 & x_1^2 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & x_2^3 & x_2^2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3 y_3 & x_3^3 & x_3^2 y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes A para Δy y Δz es idéntica. Para los vectores \underline{x} se cumple:

$$X^T = (a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_6) \quad \text{für } \Delta x ; \quad X^T = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_6) \quad \text{für } \Delta y$$

$$X^T = (c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_6) \quad \text{für } \Delta z$$

De acuerdo a las reglas del cálculo de ajuste se obtiene para el vector de incógnitas X :

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

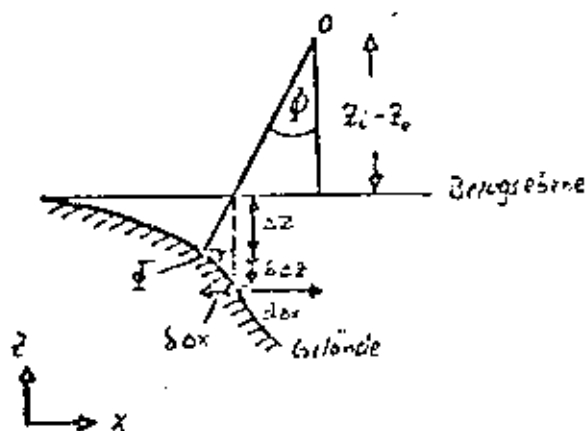
L contiene la Δx o bien Δy o bien Δz :

Las distancias entre los valores verdaderos (en las coordenadas de los puntos de pase transformados a la escala del modelo) y las coordenadas del modelo medidas (coordenadas de franjas) de estos puntos.

Para diferencias de altura mayores en el terreno debe hacerse un ajuste previo. Este proporciona correcciones para los valores medidos, condicionadas por medio de las variaciones de altura - así como por los cambios de escala del modelo.

La obtención de estas correcciones se logra observando los resultados de los ángulos ϕ y Ω (ver cap. 17

Orientación Absoluta: allí se presupuso $z \approx \text{const.}$; ahora se tiene que investigar los efectos de diferencias de altura mayores).



El giro ϕ origina en el plano xy un desplazamiento $d\Delta x$ en terreno horizontal. Se añade $\epsilon\Delta x$, si intervienen diferencias de altura entre el plano de referencia y la superficie terrestre.

Se cumple:

$$\tan \phi = \frac{d\Delta x}{(z_i - z_o)} = \frac{\partial \Delta z}{\partial x}$$

y mediante observaciones análogas en el plano xy

$$\tan \Omega = \frac{d\Delta y}{(z_i - z_o)} = \frac{\partial \Delta z}{\partial y}$$

Para el factor de transformación de escala se obtiene:

$$d\lambda = \frac{d\Delta z}{(z_i - z_o)} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x}$$

Con las relaciones de (2) se obtienen como derivadas:

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial x} = c_1 + 2c_3x + c_4y + 3c_5x^2 + 2c_6xy$$

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial y} = c_2 + c_4x + c_6x^2$$

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x} = a_1 + 2a_3x + a_4y + 3a_5x^2 + 2a_6xy$$

Ahora se pueden calcular las correcciones. Todos los puntos - (que están incluidos, son puntos de liga) obtienen como incrementos:

$$d \Delta z = (a_1 + 2a_3x + a_4y + 3a_5x^2 + 2a_6xy)(z - z_0)$$

$$d \Delta x = (c_1 + 2c_3x + c_4y + 3c_5x^2 + 2c_6xy)(z - z_0)$$

$$d \Delta y = (c_2 + c_4x + c_6x^2)(z - z_0)$$

(18./2a)

Con esta solución se tiene que iterar.

b) Como 2a. posibilidad de cálculo se tienen que describir polinomios conformes en x y y .

También aquí se parte de franjas (SCHUT).

Relaciones conformes se pueden describir mediante una función analítica:

$$\begin{aligned} (\Delta x + i \Delta y) &= (a_0 + ia_1) + (a_2 + ia_3)(x + iy) \\ &\quad + (a_4 + ia_5)(x + iy)^2 \\ &\quad + (a_6 + ia_7)(x + iy)^3 + \dots \end{aligned}$$

(18./3)

se cumple: $i^2 = -1$

Dividiendo (3) en parte real e imaginaria da el polinomio para x y y :

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_0 + a_2 x + a_3 y + a_4 (x^2 - y^2) \\ &\quad - a_5 2xy + a_6 (x^3 - 3xy^2) - a_7 (3x^2y - y^3) + \dots \\ \Delta y &= a_1 + a_3 x + a_2 y + a_5 (x^2 - y^2) \\ &\quad + a_4 2xy + a_7 (x^3 - 3xy^2) + a_6 (3x^2y - y^3) + \dots \end{aligned}$$

(18./3a)

Como control se pueden usar las ecuaciones Cauchy-Riemann (Condiciones para la existencia de conformalidad):

$$d\Delta x = \frac{\partial \Delta x}{\partial x} dx + \frac{\partial \Delta x}{\partial y} dy$$

$$d\Delta y = \frac{\partial \Delta y}{\partial x} dx + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} dy$$

$$\boxed{\frac{\partial \Delta x}{\partial x} = \frac{\partial \Delta y}{\partial y} \quad \frac{\partial \Delta x}{\partial y} = -\frac{\partial \Delta y}{\partial x}}$$

(18./3b)

términos pequeños diferenciales se forman similarmente.

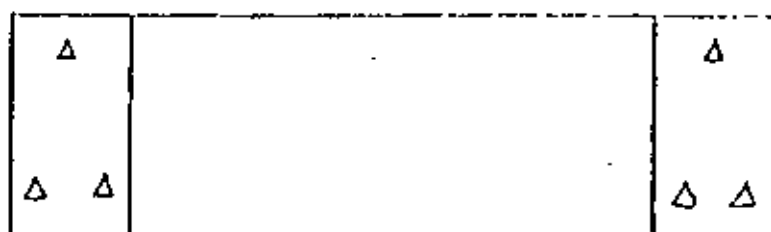
Antes del ajuste deben transformarse las coordenadas terrestres de los puntos de pase al sistema coordenado de la franja. La ecuación de interpolación conduce entonces a correcciones para estas coordenadas de franja. El cierre forma entonces -- una transformación regresiva al sistema coordenado terrestre.

Bibliografía: Jordan-Eggert-Kneissl III, A3 1972.

c) Ajustes de franjas mediante condiciones de cierre.

Especialmente en los Países Bajos y Bélgica se usaron mucho hace algunos años, ajustes que estaban basados en la interpolación entre errores de cierre.

Un método posible es:



Al principio y al final de cada franja hay dos modelos totalmente definidos. Se conduce una triangulación de franja, empezando con el primer modelo y empalmando los restantes. En el último modelo se obtienen entonces errores opuestos a -- los valores antes conocidos:

ΔK , $\Delta \Omega$, $\Delta \phi$, ΔX , ΔY , ΔZ y
probablemente también $\Delta \lambda$ (diferencia de escala)

Usando 7 parámetros se puede mejorar cada modelo individualmente. Para los parámetros existen 7 condiciones (condiciones de cierre):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d\lambda_i - \Delta\lambda &= 0 \\ \sum_{i=1}^s d\kappa_i - \Delta\kappa &= 0 \\ \sum_{i=1}^p d\phi_i - \Delta\phi &= 0 \\ \sum_{i=1}^q d\Omega_i - \Delta\Omega &= 0 \\ \sum_{i=1}^r b_i d\lambda_i - \Delta X &= 0 \\ \sum_{i=1}^r b_i d\kappa_i + \Delta Y &= 0 \\ \sum_{i=1}^r b_i d\phi_i - \Delta Z &= 0 \end{aligned}$$

Partiendo de allí se obtienen los parámetros para los modelos individuales por interpolación:

$$d\lambda_i = \frac{\Delta\lambda}{n} \quad ; \quad \lambda_i = \sum_{i=1}^i d\lambda_i = i \cdot d\lambda_i$$

$$d\kappa_i = \frac{\Delta\kappa}{n} \quad ; \quad \kappa_i = i \cdot d\kappa_i$$

$$d\bar{\varphi}_i = \frac{\Delta\bar{\varphi}}{n} \quad ; \quad \bar{\varphi}_i = i \cdot d\bar{\varphi}_i$$

$$d\Omega_i = \frac{\Delta\Omega}{n} \quad ; \quad \Omega_i = i \cdot d\Omega_i$$

$$dx_0 = \sum_{i=1}^i b_i d\lambda_i = i \cdot b_i \cdot d\lambda_i$$

$$dy_0 = i \cdot b_i \cdot d\kappa_i$$

$$dz_0 = i \cdot b_i \cdot d\bar{\varphi}_i$$

Para el ajuste planimétrico se obtiene:

$$\begin{aligned} X &= dx_0 + \lambda_i x + \kappa_i y \\ Y &= dy_0 + \lambda_i y - \kappa_i x \end{aligned}$$

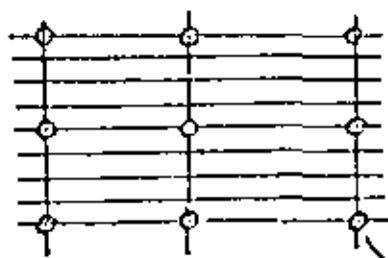
y para el ajuste altimétrico

$$Z = dz_0 + \lambda_i z + \bar{\varphi}_i x + \Omega_i y$$

(18./4)

d) Ajuste de bloque con franjas.

Como unidades de ajuste intervienen franjas. Si ahora se usan además franjas transversales (adicionalmente a las franjas longitudinales a ajustar), las cuales también se ajustan, entonces se puede evitar un ajuste de bloque. El ajuste de



las franjas transversales se basa en los ajustes de las franjas longitudinales. La distribución de los puntos de pase necesarios se puede ver en el dibujo al lado.

En las condiciones actuales la única solución practicable para un ajuste de bloque con franjas es el método Anblock con cálculos polinomiales según SCHUT.

No nada más intervienen polinomios para las observaciones de puntos de pase, sino también para los puntos de liga en las franjas contiguas. Se vió ventajoso el uso de polinomios conformes. De acuerdo a (3) el cálculo queda así:

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_0 + a_2 x + a_3 y + a_4 (x^2 - y^2) - a_5 (2xy) \\ &\quad + a_6 (x^3 - 3xy^2) - a_7 (3x^2y - y^3) \\ \Delta y &= a_1 + a_3 x + a_2 y + a_5 (x^2 - y^2) + a_4 (2xy) \\ &\quad + a_7 (x^3 - 3xy^2) + a_6 (3x^2y - y^3) \\ \Delta z &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy \\ &\quad + c_5 x^3 + c_6 x^2 y \end{aligned}$$

(13./5)

ahora se introduce Δx ó Δy ó Δz

ya sea como diferencia entre el valor real (coordenadas terrestres, transformadas al sistema coordenado de franja) y el valor medido (modelo - consecuentemente coordenadas de franja) \equiv puntos de pase.

o como diferencia de corrección + aproximación escogida (después de un ajuste de una franja para sí) y coordenadas del modelo medidas del punto \equiv puntos de liga.

Una descripción del procedimiento se encuentra en la bibliografía citada.

Bibliografía: Jordan-Eggert-Kenissl III, A3 1972 pág. 132.
Buchholtz/Ruger 1974.

10.4.1 Aerotriangulación según SCHUT.

19. Problemas en la elaboración del ajuste de bloque fotogramétrico.

Un bloque fotogramétrico de dimensiones mayores podría por -- ejemplo consistir de:

12 000 observaciones

2 000 puntos

200 fotografías

Esta cantidad de datos deben ordenarse con efectividad (economía de un método) y revisarse para encontrar errores. Se pueden hacer las siguientes diferenciaciones:

I) Preprocesamiento.

I) Inspección para detectar errores grandes.

a) Cada observación fundamentalmente se tiene que repetir.

Después de la medición se revisa, si faltan observaciones individuales.

b) Revisión para detectar grandes errores en base al plan de observaciones (fotocoordenadas > formato no deben por ej. - intervenir).

c) Control de las diferencias de coordenadas observadas por -- comparación con una tolerancia dada.

d) Control de las diferencias de coordenadas observadas medi-- das en diferentes modelos con una tolerancia de error even tualmente preestablecida.

II) Refinamiento de las coordenadas.

a) Las observaciones se promedian.

b) La orientación interior se reestablece.

c) El sistema coordinado se gira paralelo a las marcas margi-- nales.

d) Los puntos b) y c) se pueden substituir mediante un ajuste con las marcas marginales (corrección por deformación de - película).

e) La distorsión del objetivo y las correcciones por refracción podrían considerarse.

III) Corrección de errores.

Se puede introducir nuevas observaciones (las marcas fiduciales y las coordenadas de los puntos tienen que volverse a medir), ó se eliminan las observaciones defectuosas (esto atañe a las coordenadas mismas, así como a las funciones de estos puntos), ó se lleva a cabo una reenumeración de los puntos defectuosos.

IV) Clasificar.

Para un trabajo efectivo, es de gran importancia una clasificación de los datos. La secuencia de la solicitud de modelos u observaciones debería ser de preferencia a voluntad. Por eso es necesario un método de clasificación, que separe en forma diferente los puntos identificados.

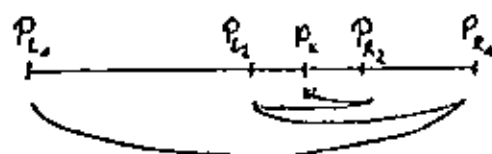
a) Clasificación por numeración.

Lo más sencillo es la numeración con ayuda del número de punto dado. Por el otro lado, es deseable mantener un esquema de numeración libre. Aquí obtiene cada punto un número de punto libre y una dirección para el almacenamiento de las coordenadas. (Esta información se almacena extra).

Es ventajoso si las cifras de números de puntos libres y la dirección de las coordenadas son acordes.

b) Clasificación por incrementación del número de punto.

Un método posible para describirse así:



Cada punto se inspecciona para saber si es menor, mayor o igual al intervalo límite. Después se le saca mitad al intervalo y se vuelve a inspeccionar. Esto conduce a

una localización inequívoca de P_x . En 1000 valores nada más se necesitan 10 pasos de inspección.

c) Clasificación según la clase de punto.

Se debe decidir, si se trata de un punto de ajuste o un punto nuevo. Las últimas deberían venir al final.

d) Clasificación por incrementación del número de punto.

Se puede también escoger números de fotografías libres y asignarles direcciones a los puntos, los que por ej. están determinados por las coordenadas $-x$ y $-y$ de los centros de toma (coordenadas de aproximación). Sin embargo es más práctico una fijación *a priori* de las fotografías. Entonces se puede clasificar según la incrementación (listas) de los números de los puntos.

2) Búsqueda de errores

El método prehecho descrito en 1) prueba el número de punto y fotografía. Controla la medición y su calidad dentro de una fotografía y una franja (en los estereocomparadores na da más valores medidos). Los siguientes errores no se descubren:

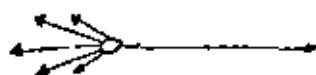
- falta de medidas de control.
- fijación del bloque.
- falta de coordenadas en puntos de pase.
- falta de pesos o constantes
- errores de numeración en puntos de pase.
- aproximaciones equivocadas de parámetros de orientación.

Estos puntos se pueden vigilar mediante una lista de prueba. Más adelante se necesita todavía resultados especiales del ajuste, para poderlos resolver. El programa de ajuste debería proporcionar la siguiente información.

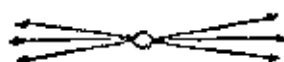
- variancia de la unidad de peso después de cada iteración.
- magnitud de los parámetros de orientación.
- residuos de las coordenadas en los puntos de liga, posteriormente a llevar a cabo una comparación con una tolerancia de error *a priori*.
- residuos en los puntos de pase.
- ordenación interna de posición $-y$ puntos de pase de alturas.

De los residuos se pueden sacar las siguientes conclusiones:

- Un error grande influencia observaciones vecinas en toda su magnitud. Se notan desarrollos todavía en observaciones a una distancia del ancho de una fotografía.
- Errores en las coordenadas terrestres pueden conducir a grandes desviaciones en puntos de liga vecinos. Este es el caso especialmente en ajustes de haces (-no tanto en ajustes de interpolación, ya que aquí el error se reparte mejor).
- Los vectores de residuo dan lugar a dos alternativas, ya sea que se trate de una observación individual con error o de un error de identificación:



error de una observación individual.



error de identificación

- el que haya que descubrir un error, depende del número de puntos en la periferia. Las extrapolaciones deben evitarse de ser posible. Es importante una cantidad suficiente de puntos de pase de alturas. Son muy útiles para la obtención de iteraciones convergentes.

3) Aproximaciones.

Un ajuste de haz o de modelo según el método de mínimos cuadrados requiere de valores de aproximación para X_0 , Y_0 , K así como para la escala (para el ajuste planimétrico). Algunos programas (Ackermann/Stuttgart, etc.) calculan aproximaciones, en las cuales subdividen el terreno en cuadrículas introduciendo allí fotocoordenadas en un método Anblock. Otra posibilidad consiste en que, con ayuda de un programa de interpolación (para x_i , Y_i , Z_i) se calcule un ajuste aproximado de franja o de bloque. Las aproximaciones para los centros de toma se determinan por resección espacial.

En Hannover se hace como sigue: Primero se determinan los centros de toma de la primera y última fotografía en una franja. Los restantes se calculan por interpolación.

4) Tiempos de cálculo.

Se puede cumplir con las siguientes estipulaciones generales:

- Usando grandes calculadoras se abaten los costos rápidamente. (Esto se nivela otra vez ya que se trabajan bloques más grandes con programas más amplios).
- EBNER/Stuttgart establece las siguientes relaciones: Los tiempos de cálculo y con ello los costos varían con el cálculo escogido. Más o menos se cumple:

| | | | | |
|--|---|---|---|---------------|
| Método Anblock (nada más planimetría) | : | Ajuste de modelo (separación de planimetría y altura) | : | Ajuste de haz |
| 1 | : | 3 | : | 5 |

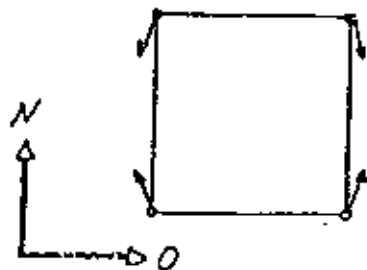
20. Métodos de interpolación para puntos nuevos

Después de un ajuste subsisten en los puntos de pase desviaciones pequeñas o grandes (residuos). Si ahora se determinan puntos nuevos en el bloque, éstos están llenos de residuos. Ahora se trata de reducir los residuos mediante -métodos de interpolación-.

Un ejemplo:

En el ajuste se asignan pesos diferentes a los puntos de pase. Se podrían considerar, por ej., como libres de error, por lo tanto peso ∞ , ó como observaciones del mismo peso, por lo tanto:

Peso 1. Un ajuste en el bloque de prueba OBERSCHWABEN dió los siguientes resultados:



Residuos en los bloques

Numericamente se obtuvo:

| Peso para punto de pase | Desarrollos en | | | |
|-------------------------|-------------------|--------------|---------------|----------------|
| | σ_0 (m) | Este (cm) | Norte (cm) | Altura (cm) |
| 1 | 5.0 | ± 51 | ± 52 | ± 55 |
| 100 | 6.7 | ± 47 | ± 39 | ± 66 |

Se ve que tanto σ_0 como también σ_h se empeoran, en caso de - que se introduzcan puntos de pase con pesos infinitos (o sea muy grandes). Después de que el modelo matemático se mejoró - mediante un método de interpolación, se obtiene:

| | | | |
|-----|----------|----------|----------|
| 3.5 | ± 16 | ± 16 | ± 38 |
|-----|----------|----------|----------|

La interpolación es especialmente necesaria entre modelos. En el siguiente desarrollo de este capítulo se mencionan brevemente algunos de estos métodos de interpolación:

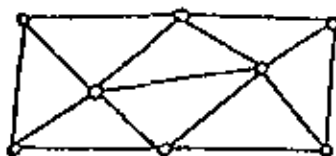
1) Transformación Afin.

Aquí no se puede utilizar una transformación Helmert ya que sus parámetros ya intervienen en el modelo matemático de un ajuste de Modelo, Haz o Anblock.

Sin embargo se puede efectuar una transformación Afin entre - los residuos de las coordenadas del bloque.

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + by + c \\ \bar{y} = dx + ey + f \end{cases} \quad \dots \quad (20./1)$$

Las 6 incógnitas (2 factores de escala, 2 rotaciones, 2 traslaciones) se pueden determinar en forma relativamente sencilla con 3 puntos. Es sin embargo desventajoso, que este método nada más se puede automatizar con dificultades.



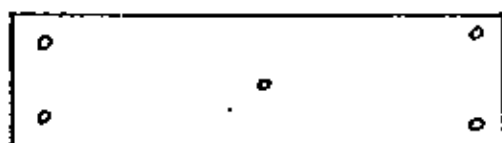
Se aplica con ventaja en el caso de triángulos. Pero entonces no se puede pulir el paso de triángulo a triángulo

2) Polinomios.

También se pueden usar polinomios para cada franja, por ej.

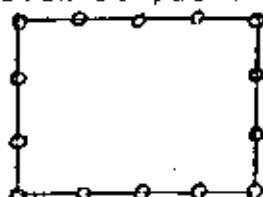
$$\Delta X = a_0 + a_{10} + a_{10}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + \dots$$

(20./2)



Si se tiene cuando menos: 5 puntos de pase por franja, entonces los coeficientes del polinomio se pueden determinar.

También se pueden utilizar fórmulas de polinomios con-
formes:



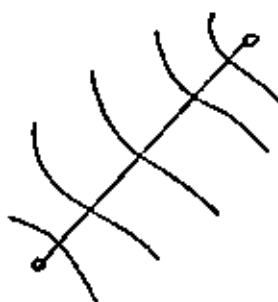
Si nada más se tiene puntos de pase en las orillas del bloque, entonces se tiene que usar fórmulas de grado menor.

Una aplicación de este cálculo es el Ajuste en bloque según SCHUT. Los cálculos descritos en el capítulo 18 también se pueden aplicar a residuos, o sea un ajuste de los puntos nuevos a los puntos de pase.

3) Métodos de interpolación gráficos.

Existe una gran cantidad de diferentes soluciones.

STRINZ por ej. interpola -independientes para x, y, z -- rectas de igual error entre los residuos mediante promedio gráfico.



4) Interpolación con los pesos como función de la lejanía.

La interpolación también se puede llevar a cabo, si se usa la lejanía como peso para la corrección de interpolación. Se cumple:

$$u = \frac{1}{\sum p} \sum_{i=1}^n p_i l_i$$

$$p_i = \frac{1}{s_i} \text{ oder } \frac{1}{s_i^2}$$

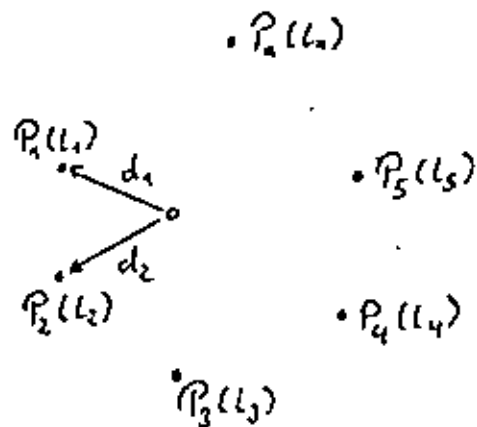
s_i : Lejanía
 l_i : corrección a los puntos de pase (residuos).

(20./3)

La corrección determinada por (3) es independiente de la dirección. Se puede considerar como primer paso para tratar el método señalado.

5) Interpolación por el método de mínimos cuadrados.

- Predicción lineal según KARUP, MORITZ, KRAUSS -



datos: un número de puntos P_i con sus residuos l_i (correcciones). Los residuos deben estar integrados por una parte sistemática s_i y por una parte casual r_i ;

$$l_i = s_i + r_i \quad (20./4)$$

Se condiciona que la suma de todos los l_i sea cero, o sea:

$$\sum l_i = 0$$

En ajustes, así es normalmente. Si la condición no se cumple, se tiene que hacer la siguiente transformación:

$$\bar{l}_i = l_i - \Delta l; \quad \Delta l = \frac{\sum l_i}{n}; \quad \sum \bar{l}_i = 0$$

Prácticamente se trata de una centración.

Si ya se hizo (o bien si la condición se cumplió desde el principio), se cumple para la variancia σ_l^2 de los residuos:

$$\sigma_l^2 = \frac{\sum l_i l_i}{n} = \frac{\sum s_i s_i}{n} + 2 \frac{\sum s_i r_i}{n} + \frac{\sum r_i r_i}{n}$$

y si se tiene un gran número de puntos de pase:

$$n \longrightarrow \infty \quad \frac{\sum s_i r_i}{n} \longrightarrow 0$$

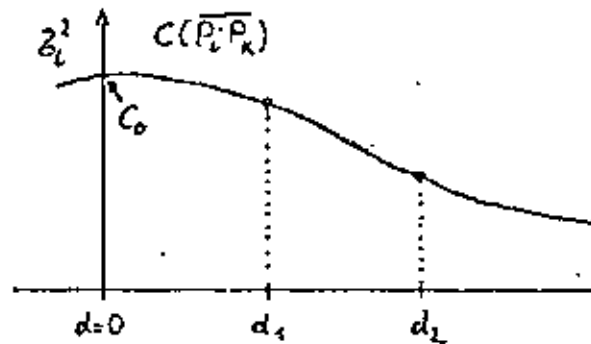
con lo que para la variancia σ_l^2 se obtiene:

$$\sigma_l^2 = \frac{\sum s_i s_i}{n} + \frac{\sum r_i r_i}{n} \quad (20.5)$$

Como paso siguiente se tiene que estimar la corrección entre los puntos P_i (l_i). Normalmente las distancias $P_i P_k$ serán mayores que $d - \Delta d$ y menores que $d + \Delta d$; se cumple:

$$d - \Delta d < \overline{P_i P_k} \leq d + \Delta d$$

Una función de covariancia se puede entonces estimar como sigue:



$$C(\overline{P_i P_k}) = \frac{1}{n_{ik}} \left(\sum (s_i s_k) + \sum (s_i r_k) + \sum (s_k r_i) + \sum (r_i r_k) \right)$$

y ya que los términos mixtos van a cero, y -en base al ajuste anterior según el método de mínimos cuadrados- la parte casual $\sum (r_i r_k)$ también va a cero, se obtiene:

$$\boxed{C(\overline{P_i P_k}) = \frac{\sum s_i s_k}{n_{ik}}} \quad (20./6)$$

Ya que la forma exacta de la curva de covariancia es de poca importancia, es suficiente con una descripción mediante una curva de probabilidades de GAUSS. El punto más importante es la determinación de C_0 .

Este método también se designa como predicción lineal:

Se tiene que determinar una función u - función lineal de los residuos l_i - de tal manera que la desviación entre s , la señal de (4), y u se vuelva mínima. Matemáticamente esto se puede describir así:

$$\begin{aligned} u &= a_1 l_1 + a_2 l_2 + \dots + a_n l_n = a'l \quad \text{función lineal} \\ \varepsilon &= s - u \quad \text{desviación} \\ \sum \varepsilon \varepsilon &= \min. \quad \text{Condición de mínimos} \end{aligned} \quad (20./7)$$

Substituyendo las dos primeras ecuaciones de (7) en la condición de mínimos da:

$$\sum (s - a'l)(s - a'l) = \sum (ss - 2a'l + a'l(a'l))$$

y después de dividir entre n mediante la segmentación de la cuantiosa suma:

$$\frac{\sum EE}{n} = \frac{\sum ss}{n} - 2a' \begin{pmatrix} \frac{\sum s l_1}{n} \\ \vdots \\ \frac{\sum s l_n}{n} \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} \frac{\sum l_1 l_1}{n} & \cdots & \frac{\sum l_1 l_n}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sum l_n l_1}{n} & \cdots & \frac{\sum l_n l_n}{n} \end{pmatrix} a$$

usando (5) y (6) transforma la última ecuación a:

$$\frac{\sum EE}{n} = \sigma_s^2 - 2a' \begin{pmatrix} C(\bar{p} \bar{p}_1) \\ \vdots \\ C(\bar{p} \bar{p}_n) \end{pmatrix} + a' \begin{pmatrix} \sigma_{l_1}^2 & C(\bar{p}_1 \bar{p}_2) \\ \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \sigma_{l_n}^2 \end{pmatrix} a$$

ó usando la notación matricial c y C

$$\frac{\sum EE}{n} = \sigma_s^2 - 2a' \cdot c + a' \cdot C \cdot a \quad \frac{1}{2} \cdot \min$$

La condición de mínimos: implica igualar a cero la 1ª. derivada parcial con respecto a la variable a):

$$\frac{\partial \left(\frac{\sum EE}{n} \right)}{\partial a} = 0 = -2c + C \cdot a'$$

y para a'

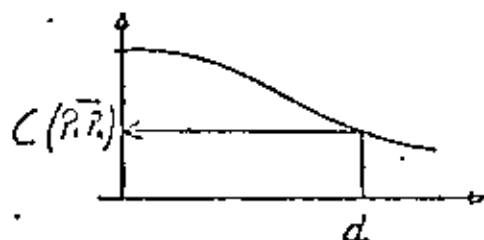
$$a' = c \cdot C^{-1}$$

Substituyendo en la 1ª. ecuación de (7) da como resultado final:

$$\boxed{u = c \cdot C^{-1} \cdot L} \quad (20./8)$$

Se busca una función $y = C^{-1} \cdot l$. La inversión de C sería posible, sin embargo no es necesario. Se utiliza la curva de covariancias gráficas.

(Se cumple $c \cdot y = 1$)



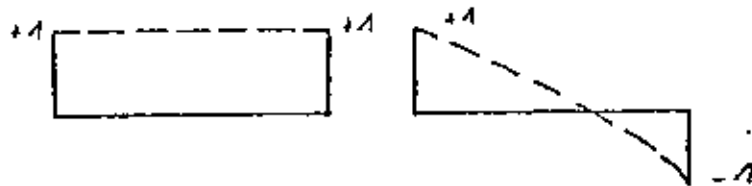
Entonces se puede calcular $c \cdot y$ para cada punto:

$$u = c \cdot y$$

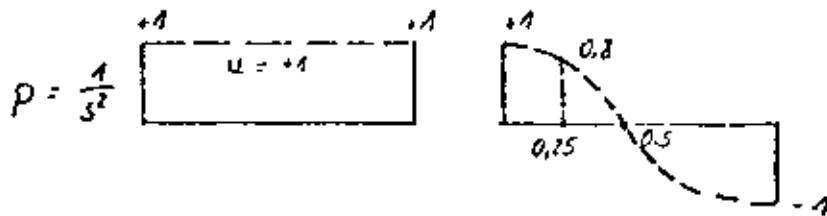
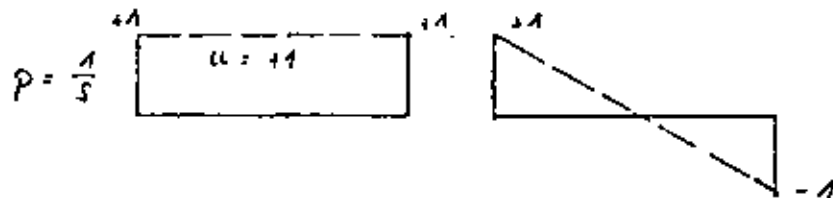
La cantidad de cálculos para determinar y es muy grande --
 - por ej. OBERSCHWABEN 80 puntos en 200 fotografías-

Ejemplos para las interpolaciones:

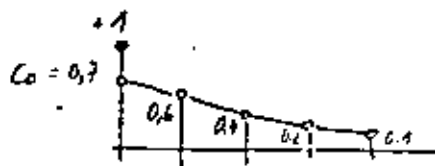
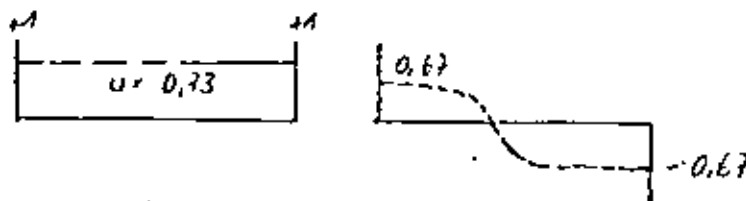
- lineal:



- con pesos dependientes de la tejania:



- método de los mínimos cuadrados:

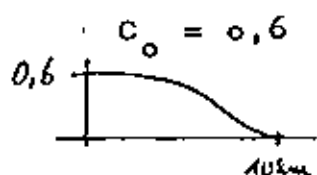


$$u = c' C^{-1} L ; \quad C(\bar{P}_i, \bar{P}_i) = \sigma_0^2 \cdot Q(\bar{P}_i, \bar{P}_i)$$

$$u = q \cdot Q^{-1} \cdot L$$

Resultados numéricos para OBERSCHWABEN (dimensión del bloque 25 x 60 km)

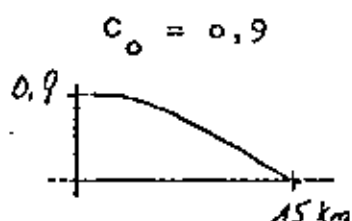
| | Desviación Standard | | |
|--------------------------|---------------------|---------------|----------------------|
| | al Este (cm) | Norte (cm) | en la altura (cm) |
| - sin interpolación | ± 51 | ± 52 | ± 55 |
| - con interpolación | | | |
| función de covariancia 1 | | | |



$\approx 1/6$ d. Blockes

| | | |
|----------|----------|----------|
| ± 42 | ± 45 | ± 54 |
|----------|----------|----------|

- con interpolación
función de covariancia 2



| | | |
|----------|----------|----------|
| ± 34 | ± 37 | ± 55 |
|----------|----------|----------|

En las coordenadas planimétricas intervino un residuo.

| | | | |
|---|----------|----------|----------|
| - peso creciente para puntos de pase (+ 0) | ± 47 | ± 39 | ± 66 |
| - Introduciendo parámetros adicionales en el ajuste en bloque | ± 16 | ± 16 | ± 39 |

Resumen:

Mejor que una interpolación por el método de mínimos cuadrados después del ajuste, es la elección de un modelo matemático mejorado (mediante el uso de parámetros adicionales). Entonces los residuos son tan pequeños, que pueden ser despreciados (y con ello no tienen influencias en los puntos nuevos!).

21. Comparación de precisión entre el ajuste de haces y de modelo.

Una investigación teórica de este problema es posible de la siguiente manera: Se introducen las correcciones despreciadas en un modelo (de 2 o más fotografías). Esto da un sistema de cálculo sumamente complicado. GÖTTHARDT lo tiene representado (en apéndices) en la 'Deutsche Geodätische Kommission, Serie A Nr, 41, 1962: "Preguntas de precisión en la orientación analítica de fotografías aéreas". Obtuvo un incremento de precisión teórico del 20% cuando todas las correlaciones influyeron en la formación del modelo. La demostración práctica es muy complicada, ya que pueden intervenir errores simétricos de igual dimensión. El método de haces toma en cuenta estos errores, pero de una manera mejor, por lo tanto una gran cantidad de errores sistemáticos se reducen o bien se eliminan. Por eso en la práctica el método de haces da mejores resultados.

Para el bloque de prueba OBERSCHWABEN se obtuvieron los siguientes resultados:

| Ajuste de bloque de haces (Hannover) | | b_o (μm) | b_{Este} (μm) | b_{Norte} (μm) | b_h (μm) |
|---|------------------------|--|---|---|----------------------------|
| | parámetros adicionales | | | | |
| puntos de pase cada | | | | | |
| 2 longitudes de base | no | 5.8 | 10.7 | 9.9 | 15.7 |
| | si | 3.7 | 5.5 | 5.0 | 12.5 |
| 5 longitudes de base | no | 5.6 | 18.4 | 18.5 | 19.5 |
| | si | 3.5 | 5.9 | 5.4 | 13.6 |
| Ajuste de modelo (Stuttgart) | | (Modelo formado mediante mediciones con estereocomparador) | | | |
| puntos de cada | parámetros adicionales | b_o (μm) | $b_p = \sqrt{bx^2 + by^2}$ (μm) | | |
| 2 longitudes de base | no | 7.1 | 12.5 | | |
| 4 longitudes de base | no | 6.8 | 17.5 | | |
| 8 longitudes de base | no | 6.5 | 25.4 | | |

Los resultados también muestran, que el ajuste de haces, nada más usando parámetros adicionales, da mejores resultados. Un ajuste de modelo con coordenadas de modelo medidas (graficador analógico) no se había usado para este terreno de prueba. La precisión se previó de más o menos $\sigma_p \approx 25 \mu m$. Este valor sería peor que con las mediciones del comparador. También un ajuste usando calculos polinomiales daría seguramente peores resultados, aunque se trabajara con el mismo stereocomparador (Stuttgart).

Finalmente se tiene que hacer notar, que en el bloque de prueba OBERSCHWABEN se usaron puntos con señalamientos. Si se utilizan puntos naturales o artificiales (esquinas de edificios, etc.) serían de esperarse peores resultados.

22. Ejemplos de aplicación para la fotogrametría analítica.

El principal campo de aplicación es la aerotriangulación. En diferentes estados de investigación se establecieron un gran número de programas de aerotriangulación. Aquí se tiene uno que remitir a las publicaciones de estas instituciones - (Schut, NRC Ottawa, Cálculo polinomial para franjas en el bloque; USC & GS, Washington, Ajuste de haces; ETH Zürich, Ajuste de haces; Bauer/Müller, Hannover, Ajuste de haces (con parámetros adicionales); Ackermann/Ebner, Stuttgart, ajuste de modelo; Halonen, Helsinki, Ajuste de haces; Duane Brown Associates, Ajuste de haces con parámetros adicionales; Meixner, Stuttgart, Ajuste de haces, etc.).

Tabularmente se van a describir brevemente 3 de las principales posibilidades de uso de la fotogrametría analítica (Aerotriangulación). Se deberían mencionar aquí: TABLA 5.2491250

1) Organización de un catastro rural o urbano.

La implantación de esta tarea significa: identificación de puntos de lindero en el terreno antes del vuelo (en caso de que estén fijados por mojoneras o apoyos topográficos) mediante señalamiento simultáneo de estos puntos

Si los linderos se pueden referir a objetos naturales (cercas, zallas, construcciones, ...), -por ejemplo mediante amplificación fotográfica o simple medición en objetos, que son reconocibles en la fotografía-, entonces se puede desistir de la fijación de linderos antes del vuelo.

2) Establecimiento de puntos de pase para obtener cartas topográficas.

Se trata del caso standard de la Aerotriangulación. A continuación se establecen aquí cartas de pequeña escala de regiones, en donde apenas o no existen puntos de pase en el terreno.

3) Establecimiento de redes de 3er. y 4o. orden para subsecuentes mediciones en el terreno.

Aquí la Aerotriangulación probó ser muy útil.

Como condiciones se deben sentar:

- Los puntos fijos deben colocarse en los puntos terrestres convenientes de ser posible con más visibilidad.
- Debe existir un buen señalamiento.

Entonces se puede volar el terreno. Son ventajosos sobre todo los costos bajos. Un punto fijo, que se estableció de esta manera, ocasiona nada más alrededor de 1/3 de los costos que -- surgirían en una medición terrestres.

¿Cuáles cámaras deben usarse?

Si nada más se quiere obtener información en planta, -catastro de una ciudad- es ventajosa una cámara de ángulo normal, de ser posible con formato y escala de fotografía grande RMK(30/23). Si también se requiere información altimétrica, entonces debe usarse una cámara granangular, por ejemplo RMK 15/23. Un incremento de la precisión en la altura se obtiene mediante un mayor traslape lateral (en vez de 20-30%, 60%).

Tabla para las posibilidades de aplicación más importantes de la fotogrametría analítica (Aerotriangulación)

| Campo de Aplicaciones | Catastro (requerimientos alemanes) | Topografía (escala mayor 1: 5 000) | Red de puntos fijos |
|--|--|--|---|
| a puntos medidos | Puntos de referencia: marcados por estacas Puntos de lindero: marcados con piedras, etc. Construcción: objetos naturales | Puntos de pase en planta y altura: puntos artificiales naturalmente señalados. | Puntos fijos trigonométricos: marcados con piedras o bien postes. |
| densidad promedio de los puntos | más o menos cada 100 m | cada 1...2 km en planta cada 300 m en la altura | 1...2 km |
| precisión requerida | 3...5 cm. | 50 cm para la planta 15 cm para la altura | 3... 5 cm |
| una precisión fotogramétrica de $5..10\mu\text{m}$ (altura $15\mu\text{m}$) se obtiene con escalas fotográficas de: | 1: 3 000 hasta 1:10 000 | 1: 6 000 en la altura de 1: 50 000 hasta 1: 100 000 en planta (La escala fotográfica mayor se limita por interpretabilidad) | aprox. 1: 6000 |
| magnitudes del modelo | para 1: 3000 500 x 250 metros | para 1: 6000 1000 x 500 metros | para 1: 6 000 1000 x 500 metros |
| se requieren 6 puntos de liga por modelo | número suficiente de puntos a determinar | Se tiene suficientes puntos, los cuales parcialmente no están señalados | Por cada punto fijo se necesitan 2 puntos de liga adicionales. |

| Campo de aplicaciones | Catastro | topografía | red de puntos fijos |
|-----------------------|--|--|--|
| Requisitos de control | la red de puntos de pase, libre de errores debe, cada 5km, ser estabilizada por un punto | después la red de puntos de pase utilizable, la precisión mediante puntos de prueba determinable | red de control libre de error cada 10-15 km por un punto |
| tamaño del bloque | 8 franjas con 14 fotografías si es el caso ≅ 112 fotografías | 5 franjas con 10 fotografías si es el caso ≅ 50 fotografías | 10 franjas con 20 fotografías si es el caso ≅ 200 fotografías |
| señalamiento | necesario | innecesario | necesario |

NOTAS: - La precisión fotogramétrica de 15 m en la altura y la de allí resultante escala fotográfica están basados en las siguientes fórmulas:

$$z_h = \frac{h^2}{b \cdot c} \cdot z_{px}$$

$$h = \sqrt{\frac{z_h}{z_{px}} \cdot b \cdot c}$$

$$z_{px} = 15 \mu m \quad z_h = 15 cm \quad c = 15 cm \quad b = 500 m$$

- Esta tabla es nada más un indicio. En casos particulares pueden intervenir más desviaciones.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAMETRIA ANALITICA

PRIMERA PARTE

DR. HANS PETER BAHR

MARZO, 1981

División de Educación Continua

Ciudad de México
30.3. - 3.4.1981

Fotogrametría Analítica

Primera Parte Práctica (A)

de H.-P. Bähr, Universidad de Hannover, R.F.A.

| <u>Contenido:</u> | Página |
|--|--------|
| I Operaciones con matrices (§1) | A-1 |
| II Aplicaciones de la ley de la propagación de los errores (§1.7) | A-3 |
| III Sistemas de rotación diferentes (§2) | A-3 |
| IV Función de distorsión, distancia focal y errores en altura (§3) | A-4 |
| V Determinación de los elementos de orientación | A-5 |
| VI Aerotriangulación (§6) | A-6 |
| VII Orientación relativa de un par de fotos independientes (§9) | A-8 |
| 1. Solución teórica | A-8 |
| 2. Solución práctica (programa) | A-11 |
| VIII Orientación absoluta (§ 11/12) | A-22 |
| IX Corrección numérica de una orientación relativa instrumental (§ 15) | A-22 |

Los capítulos indicados entre paréntesis se refieren a la parte teórica de G. Konecny.

Fotogrametría Analítica
Parte Práctica

1. Operaciones con Matrices (1)

1. En un sistema de coordenadas (x, y, z) existen dos puntos

$$P_1 (1, 1, 1) \equiv \vec{P}_1$$

$$P_2 (2, 3, 4) \equiv \vec{P}_2$$

- a) ¿Cuál es la distancia entre los dos puntos?
- b) Determinen Ud. los ángulos α, β, γ entre los ejes de coordenadas y la línea recta, definida por los dos puntos!
- c) ¿Cuál es el ángulo entre los dos líneas rectas, formados de los dos puntos y el origen del sistema de coordenadas?

2. Multiplicación de Matrices (1)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- a) $C = A B$
- b) $D = A B e$

3. Multiplicación de Matrices (2)

$$\begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \\ -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1,55 & 0,65 \\ -0,13 & 1,13 \\ 2,34 & 1,32 \\ 5,16 & -4,41 \\ -7,24 & 1,15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,00 & 9,42 & -2,14 \\ 2,95 & -8,47 & 1,89 \\ 1,34 & 4,65 & 0,00 \\ 1,41 & 0,00 & 3,11 \\ 2,96 & 0,78 & -4,74 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$$

a b c d e f

a) ¿Qué productos son posibles?

$$a^T b, \quad ab^T, \quad Db, \quad D^T a, \quad a^T c + b^T d, \quad Df, \quad Pc, \quad ac, \quad c^T d, \quad a^T f b$$

b) Determine Ud. el último producto de la serie que existe!

4. Inversión de Matrices (1)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 4 & -2 & & \\ -4 & 2 & 3 & \end{vmatrix}$$

Forme Ud. las ecuaciones determinadas por los elementos desconocidos usando $AA^{-1} = E$. Calcule Ud. A^{-1} .

5. Inversión de Matrices (2)

Algoritmo "gauss" moderno :

$$A = \begin{matrix} S^T & T & S \\ \begin{matrix} \square \\ \diagdown \\ \square \end{matrix} & \begin{matrix} \diagdown \\ \square \end{matrix} & \begin{matrix} \diagdown \\ \square \end{matrix} \end{matrix} \quad ; \text{ dividir la matriz A en partes más simples (triángulos)$$

$$\text{Fórmula para la reducción : } H = A + (E - S)^T H \quad (1)$$

$$\text{Fórmula para inversión : } A^{-1} = H^{-1} + A^{-1} (E - S)^T \quad (2)$$

a) Determine Ud. los elementos de H y $(E-S)^T$ directamente (por "orden natural")

Defina Ud. una fórmula general para la determinación de los elementos h_{ik} .

b) Forme Ud. H^{-1} .

c) Calcule Ud. los elementos de A^{-1} y haga la prueba integral de su cálculo !

d) Consideramos posibilidades para calcular, ocupando un mínimo de capacidad en la memoria de la computadora!

II. Aplicación de la ley de la propagación de los errores (4.17)

1. Teorema de Cosenos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$

$$\alpha = 133,333^{\circ} \pm 1,73 \text{ mgon}$$

$$b = 2000 \text{ m} \pm 1,41 \text{ dm}$$

$$c = 1000 \text{ m} \pm 1,00 \text{ dm}$$

$$a = 2645,75 \text{ m (solución)}$$

$$\text{Correlación : } r_{bc} = 0,71$$

- a) cuál es el error standard sin consideración de la correlación?
- b) Cuál es el error standard considerando la influencia de la correlación entre b y c ?

III Sistemas de rotación diferentes

Los ángulos de orientación relativa, determinados de un estereorestituidor (ZEISS) eran:

$$\varphi_z = 5,0694^{\circ}$$

$$\omega_z = 4,7721^{\circ}$$

$$\kappa_z = 8,2317^{\circ}$$

? Cuales SON los elementos correspondientes para un estereorrestituidor de la casa WILD ?

12 Ejemplos de distorsión, distancia focal y errores en altura

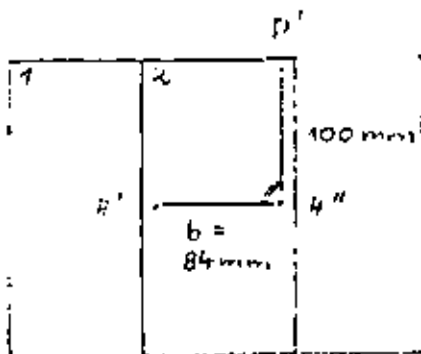
La calibración de una cámara resulta en valores de distorsión, partiendo de una distancia focal de $c = 152,510$ mm:

Distancias radiales r [mm] :

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 |
| 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | -2 | 0 | +1 | +2 | +3 | +3 | +1 | -1 | -2 | +6 |

Valores de distorsión Δr [μ]

- Determine Ud. la distancia focal que da $\Delta r = 0$ por $r = 90$ mm.
- Calcule Ud. de nuevo la tabla con valores de distorsión, usando la distancia focal corregida.
- Cuál es el error de altura en el punto P, partiendo de los valores de distorsión (b)



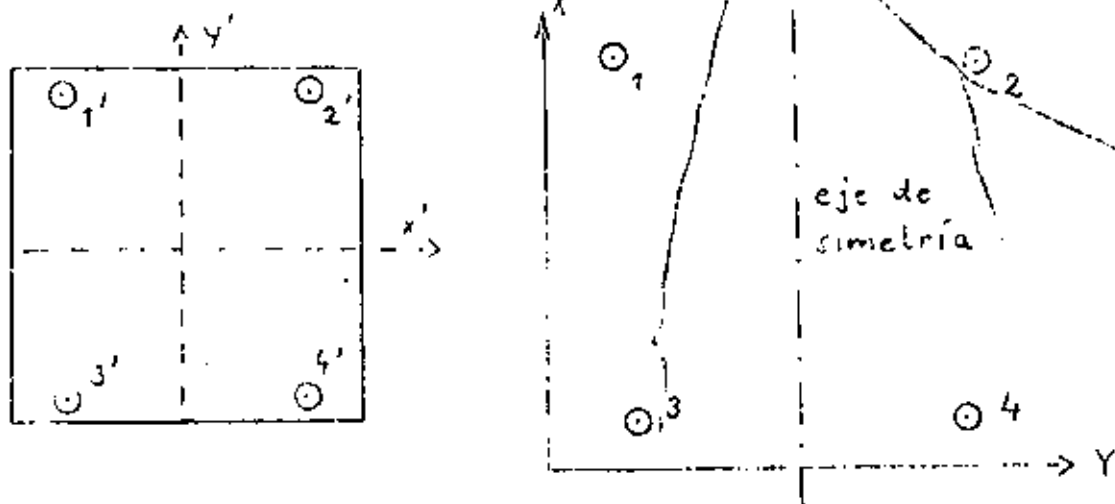
Altura del vuelo $h_0 = 2500$ m

Paralaje p_{x0}' en P $p_{x0}' = 5,124$ mm

Vistas verticales

$$dh \sim \frac{h_0}{p_{x0}'} dp_x$$

v Determinación de los elementos de orientación (i)



Distancia focal: $c = 150 \text{ mm}$

Coordenadas de la foto:

| | x' | y' |
|----|------------|------------|
| 1' | -80,000 mm | 100,000 mm |
| 2' | 80,000 | 100,000 |
| 3' | -80,000 | -100,000 |
| 4' | 80,000 | -100,000 |

Coordenadas terrestres:

| | X | Y | Z |
|---|-----------|-----------|----------|
| 1 | 9 933,93 | 11 182,62 | 100,00 m |
| 2 | 11 132,74 | 11 182,62 | 100,00 |
| 3 | 10 000,00 | 10 000,00 | 100,00 |
| 4 | 11 066,67 | 10 000,00 | 100,00 |

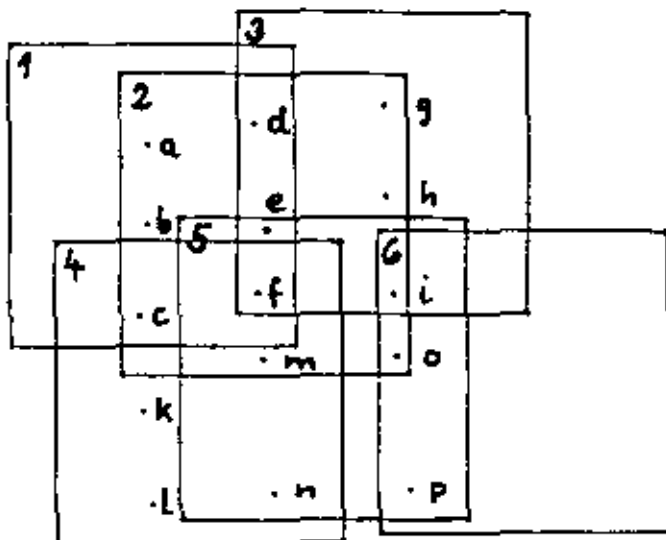
a) ¿Cuál es la variación de la escala en la foto?

b) Determine Ud. los elementos de orientación.

VI Aertriangulación (§6)

Ecuaciones de corrección

- a) Establecimiento de las ecuaciones de corrección del sistema siguiente:



! Use Ud. el esquema adjunto !

- b) La matriz de ecuaciones normales no mostrará una forma ideal. ¿Porque? Proponga Ud. métodos para mejorar la forma.
- c) ¿Son 3 puntos de apoyo suficiente para calcular la orientación absoluta?

A-7-

1... G : fotos

a... p : puntos

Incógnitas de orientación

Coordenadas incógnitas

$A_1 X$

$A_2 X$

1

2

3

4

5

6

a

b

c

d

e

f

g

h

i

k

l

m

n

o

p

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | a | b | c | d | e | f | g | h | i | k | l | m | n | o | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

$[(XYZ)_0 \varphi \omega k]_2$

$[XYZ]_d$

VII Orientación relativa de un par de fotos independientes (§9)

con solución numérica por un programa POCIDAN

Dado:

Coordenadas de fotos

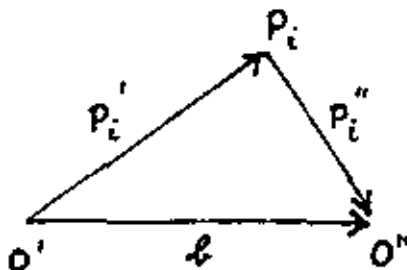
| NR | X1 | Y1 | X2 | Y2 |
|------|---------|----------|----------|----------|
| 635 | -2.145 | 107.104 | -85.196 | 101.002 |
| 633 | 44.557 | 100.309 | -38.955 | 98.479 |
| 1107 | 88.908 | 60.371 | 0.436 | 57.349 |
| 724 | 92.118 | -6.859 | 12.235 | -9.372 |
| 713 | 30.128 | 1.492 | -49.795 | -2.505 |
| 2001 | -28.180 | 14.725 | -108.189 | 9.264 |
| 714 | -16.630 | -26.753 | -95.515 | -31.905 |
| 752 | -20.168 | -70.913 | -97.808 | -76.522 |
| 546 | 6.665 | -103.525 | -69.941 | -108.993 |
| 1118 | 20.216 | -100.356 | -56.405 | -105.437 |
| 560 | 68.500 | -89.570 | -8.190 | -93.253 |

Distancia focal : $c = 152,31$ mmSecuencia de rotación según instrumentos WILD (ω, φ, κ)

Los ejes de toma son aproximadamente verticales

Problema:Determinación de los ángulos de orientación $\varphi', \varphi'', \kappa', \kappa''$ y ω''
(inclinación transversal común)1. Solución teórica

a) Condición de coplanaridad:



Los vectores ("coordenadas del modelo")
 $p' (u', v', w')_i$, $p'' (u'', v'', w'')_i$,
 y $b (b_x, b_y, b_z)$ (=base)
 tienen que encontrarse exactamente en
 un plano común. Forma analítica:

$$\text{Determinante} = \begin{vmatrix} b_x & u' & u'' \\ b_y & v' & v'' \\ b_z & w' & w'' \end{vmatrix} = \Delta \stackrel{!}{=} 0 \quad b_x \equiv 1 \text{ (escala)} \quad (1)$$

Se prohíbe una determinación directa de los elementos de orientación; consecuentemente se hace necesario una solución con iteración

b) Determinación de elementos de orientación aproximados

$b_y = b_z = 0$; quedan solamente los ángulos para la orientación

$\bar{\varphi}' = \bar{\varphi}'' = \bar{\kappa}' = \bar{\kappa}'' = \bar{\omega}'' = 0$ por causa de ejes de toma aproximadamente verticales ; se supone una línea de vuelo recta.

c) Determinación de las coordenadas del modelo

$$\begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ -c \end{vmatrix} = D x' \quad (2)$$

(aplicación similar para las dos fotos)

$$a_{11} = \cos \varphi \cos \kappa$$

$$a_{12} = -\cos \varphi \sin \kappa$$

$$a_{13} = \sin \varphi$$

$$a_{21} = \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa \quad (3)$$

$$a_{22} = \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa \quad (\text{véase tabla } \S 2.3)$$

$$a_{23} = -\sin \omega \cos \varphi$$

$$a_{31} = \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa$$

$$a_{32} = \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa$$

$$a_{33} = \cos \omega \cos \varphi$$

Con los elementos aproximados : $A^T \approx E$

d) Compensación de mínimos cuadrados.

Formación de las ecuaciones de corrección (más de 5 puntos):

$$v_1 = (k_1 d\varphi'' + k_2 d\kappa' + k_3 d\omega'' + k_4 d\varphi' + k_5 d\kappa'' + \Delta_0)_1$$

$$v = A x - l$$

(4)

$$k_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi''} = \begin{vmatrix} 1 & u' & \frac{\partial u'}{\partial \varphi''} \\ 0 & v' & \frac{\partial v'}{\partial \varphi''} \\ 0 & w' & \frac{\partial w'}{\partial \varphi''} \end{vmatrix} \quad (5)$$

etc.

$$\frac{\partial u'}{\partial \varphi''} = -\sin \varphi'' \cos \kappa'' x' + \sin \varphi'' \sin \kappa'' y' - \cos \varphi'' c \quad (6)$$

etc.

Preguntas de control

1. $k_2 = ?$
2. ¡Calcule Ud. $\frac{\partial u'}{\partial \kappa'}$!

Formación de las ecuaciones normales y solución:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T l \quad (7) \quad \text{véase § 1.6}$$

$$x_1 = \begin{vmatrix} d\varphi'' \\ d\kappa' \\ d\omega' \\ d\varphi' \\ d\kappa'' \end{vmatrix}$$

Iteración 1:

$$\begin{aligned} \varphi''_{i+1} &= \varphi''_1 + d\varphi'' \\ \kappa'_{i+1} &= \kappa'_1 + d\kappa' \\ &\vdots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

(repetir las partes 1., 7 hasta que los elementos x sean pequeños)

2. solución pñtica
=====

Programa FORTRAN , verificado por una calculadora CYBER 73/76 (CDC)

Subprogramas:

DREHM : cñlcula los elementos $a_{11} \dots a_{33}$ de la matriz de rotación D (ecuación 3)

MODKO: cñlcula los coordenadas del modelo (ecu. 2)

MMULT: multiplicación de matrices

DETBER: Valor del determinante (3x3 elementos, ec. 1)

DWINK: establecimiento de los cocientes diferenciales según (6)

MINVER: inversión de matrices (método Gauss-Jordan)

TRANS : transposición de matrices

Iteración no necesaria por causa de pequeños valores de v después de la primera compensación

PROGRAMM BEI INPUT/OUTPUT

PROGRAMM DURCHFÜHRT IN SS 77

VON 1

RELATIVE ORIENTIERUNG
KONSTRUKTION
PUNKTE
KORDINATEN

WECK 1

Orientación relativa

RELATIVE ORIENTIERUNG
WILD 1 = CHITZ = ZWISCHENPUNKT
PNT = SEKUNDAEPUNKT
KAPIT = TERTIAEPUNKT
VEKTOREN DER BEZUGSACHSE

Rotación 1^a
2^a
3^a

INTERPROGRAMME **Subprogramas:**

DRAMA, MODULANTIS, MULT, OCTBER, DWINK, MINVER

INPUT: números de puntos y coordenadas de las fotos

NRZ1, NRZ2, ... PUNKTNUMMER UND BILDKOORDINATEN
LIZIT KARTE = 0 **Última ficha**
MINIMAL 12 MODELLPUNKTE
MINIMAL 5 MODELLPUNKTE
(FORMAT 16)

C KONTAKTKONSTANTE **Distancia focal**

BX, BY, BZ BASISKOMONENTEN **Componentes de la base**

MINWINKEL NEIGUNGSWINKEL **Angulos inlcios**

MINWINKEL = WINKEL LINKS (RECHT FEST) = permanece firme

MINWINKEL = WINKEL RECHTS
MINWINKEL = WINKEL LINKS
MINWINKEL = WINKEL RECHTS
MINWINKEL = WINKEL RECHTS

rechts = derecha

links = izquierda

DIMENSION W1(2), W2(2), ... MINWINKEL

W1(2) = W1(1), W1(2), W2(2) = W2(1), W2(2), ...
W3(2) = W3(1), W3(2), W4(2) = W4(1), W4(2), ...
W5(2) = W5(1), W5(2), W6(2) = W6(1), W6(2), ...
W7(2) = W7(1), W7(2), W8(2) = W8(1), W8(2), ...

REAL W1

IN FORMAT (1) (1) (1) (1)

11 FORMAT (2//2X, 12X (1M))

12 FORMAT (5X, 15HDREHMATRIX LENK5//) **Matrices de rotación**

13 FORMAT (5X, 17HDREHMATRIX RECH5//)

14 FORMAT (1/1X, 3MDN1, 7X, 3MDN7, 7X, 4MPHIL, 6X, 4MPHIZ, 6X, 4MPHIX, 15X,
1 4MPHIZ//)

15 FORMAT (F10, 2)

25 FORMAT (6F10, 6)

26 FORMAT (1M//)

Coordenadas de las fotos

27 FORMAT (5X, 20HD/LDKOORDINATEN (M12//)

28 FORMAT (1//5X, 7HLTD.NR., 7X, 7MPNT.NR., 11X, 2NY1, 15X, 2NY1, 15X, 2NY2, 15X,
1 2NY2//)

34 FORMAT (5X, 15, 118, 4F17, 3//)

31 FORMAT (1//5X, 23HDKONSTANTE F C B, 77, 2, 4MCH1//) **Distancia focal**

32 FORMAT (F10, 2)

Componentes de la base

34 FORMAT (1//5X, 21MDASIKOMPONENTEN (M11//)

ángulos

35 FORMAT (15X, 12MAINKEL (CON1//)

36 FORMAT (76X, 6F10, 6)

37 FORMAT (5X, 4F10, 3//)

38 FORMAT (1//11X, 2MXY, 6X, 2MXY, 6X, 2MXY//)

39 FORMAT (5X, 4F10, 3//)

40 FORMAT (1//)

Coordenadas del modelo

41 FORMAT (5X, 20HDDELKCOORDINATEN (M11//)

44 FORMAT (5X, 4M1-VEKTOR//)

50 FORMAT (5X, 5M1-VEKTOR//)

51 FORMAT (5X, 4F15, **Matrix de coeficientes de las ecuacion**

55 FORMAT (5X, 52MA-MATRIX (KOEFFIZIENTENMATRIX DER FUNKTIONSGLEICHUNGEN
1 //)

de corrección

68 FORMAT (1X, 5F12, 5//)

61 FORMAT (5X, 3MD-MATRIX (NORMALGLEICHUNGSMATRIX//) **Ecuaciones normales**

62 FORMAT (5X, 2MD-MATRIX (FAKTORENMATRIX//)

63 FORMAT (5X, 4F10, 4//)

Incógnitas

64 FORMAT (5X, 2M1-VEKTOR (UNBEKANNTEN//)

65 FORMAT (5X, 7HLFD.NR., 2X, 7MXT.NR., 7X, 8MV-VEKTOR//)

67 FORMAT (5X, 2MDESUCHTE MINNELEIFF. (CON1//)

68 FORMAT (5X, 4M1-VEKTOR//)

78 FORMAT (5X, 4MPHIL = 4F10, 5/5X, 3MKAPP1 = 4F10, 5/5X, 3MKAPP2 = 4F10,
1 5/5X, 4MPHIZ = 4F10, 5/5X, 3MKAPP2 = 4F10//)

98 FORMAT (1/14X, 2MU1, 15X, 2MV1, 15X, 2MV1//)

91 FORMAT (1/14X, 2MU2, 15X, 2MV2, 15X, 2MV2//)

98 FORMAT (5X, 15, 118, 2X, 4F10, 5//)

C
C
C
C

EINGANGSDATEN EINLESEN UND AUSGEBEN

Leer y escribir los datos de entrada

MAP=12

I=0

100 I=1+1

READ 58, (NR1), (XY1), (D, D-1-N1)

Test (última ficha = 0)

IF (NR1) EN. BY GOTO 110

GOTO 100

110 N1=1

READ 57, C

READ 32, BX, BY, BZ

READ 25, (MINW1), I=1, 6)

PRINT 26

PRINT 58

PRINT 77


```

PRINT 20
PRINT 30, II, NAK(2), ZXY(1, J), J=1, 4), I=1, N)
PRINT 31, C
PRINT 35
PRINT 40
PRINT 50, (MINK(I), I=2, 6)
PRINT 51
PRINT 50
PRINT 57, BK, BY, BZ
PRINT 11

```

NUMERIEREN DER EINGANGSORTEN **Modificación de los datos de entrada**

```

PI=3.141592653589793
RHO=200./PI
DO 120 I=1, 6
120 MINK(I)=INKE(I)/RHO
DO 130 I=1, 6
    BK=77/100.
    BY=77/100.
    BZ=77/100.
    DO 141 J=1, N
    DO 142 J=1, N
141 ZXY(I, J)=XY(I, J)/140.

```

para obtener misma unidad de medida como los ángulos

BERECHNEN DER DREHMATRIZEN **Cálculo de las matrices de rotación**

```

CALL DREHM (MINK(1), MINK(2), MINK(3), DREH1)
CALL DREHM (MINK(4), MINK(4), MINK(5), DREH2)
PRINT 20
PRINT 12
PRINT 21, (DREH1(I, J), J=1, 3), I=1, 3)
PRINT 40
PRINT 18
PRINT 31, (DREH2(I, J), J=1, 3), I=1, 3)

```

BERECHNEN DER MODELLKOORDINATEN **Cálculo de coordenadas del modelo**

```

CALL TRANS (DREH1, DREH2, XY, C, N, UVW1, UVW2, B1, B2, MAX1)
PRINT 20
CALL TRANS (UVW1, U1, 3, MAX1)
CALL TRANS (UVW2, U2, 3, MAX1)
DO 170 I=1, N
    DO 171 J=1, 3
170 U1(I, J)=U1(I, J)+100.
171 U2(I, J)=U2(I, J)+100.
PRINT 11
PRINT 50
PRINT 50, (U1(I, J), J=1, 3), I=1, 10)
PRINT 40
PRINT 11
PRINT 50, (U2(I, J), J=1, 3), I=1, N)

```

BERECHNEN DES L-Vektors **INCLUSIONE ZWISCHEN HOMOLOGEN STRAHLEN U. AUFNAHMEBASIS**
IN NURKORDINATEN

Determinación del vector l

```

DL(1, 1)=OK
DL(2, 1)=OK
DO 180 J=1, N
    DL(3, 1)=BZ
    DO 185 I=1, 3
        DL(I, 2)=UVW2(I, J)
180 DL(1, 3)=UVW1(I, J)
190 CALL DETBER (DD, VEK(I, 1))
    DO 200 I=1, N
        VEK(I, 1)=VEK(I, 1)
    PRINT 24
    PRINT 44
    PRINT 61, (VEK(I, 1), I=1, N)

```

BERECHNEN DER A-MATRIZ **Cálculo de A**

```

DD(1, 1)=BK
DD(2, 1)=BY
DD(3, 1)=BZ
DO 210 I=1, N
    DO 215 L=1, 6
        IF (L.EQ. 2) GOTO 205
        M=1
        ZXY(1)=XY(1, L)
        ZXY(2)=XY(1, L)
        GOTO 206
205 M=2
        ZXY(1)=XY(1, L)
        ZXY(2)=XY(1, L)
206 CONTINUE
CALL DRINK (MINK, ZXY, C, N, DD, OV, DM)
DO 205 I=1, N
    IF (L.EQ. 2) GOTO 207
    IF (L.EQ. 3) GOTO 220
    DD(I, 2)=OV(I)
    GOTO 221
220 DD(I, 2)=OV(I)
221 DD(I, 3)=UVW2(I, 1)
    GOTO 206
207 DD(I, 2)=OV(1, 1)
    IF (L.EQ. 4) GOTO 216
    IF (L.EQ. 5) GOTO 240
    DD(I, 3)=OU(I)
    GOTO 206
218 DD(I, 3)=OV(I)
    GOTO 206
240 DD(I, 3)=OV(1)
200 CONTINUE
CALL DETBER (DD, K(I, 1, L))
210 CONTINUE
PRINT 40
PRINT 55
PRINT 60, (K(I, 1, L), I=1, 5), I=1, N)

```

AUSGLEICHUNG (WIEH, ACOB,) **Cálculo de compensación**

```

CALL HMULT (K, MAR, 5, N, 5, K, MAR, 5, N, 5, 2, 0, 5, 5)

```

```

273      PRINT 71
        PRINT 61
        PRINT 60, (IGN(I,J),J=1,5),I=1,5)
        CALL MINVER (GN,5,5,0,0,DETE)
        PRINT 40
        PRINT 62
275      PRINT 60, (IGN(I,J),J=1,5),I=1,5)
        CALL MMULT (K,MAX,5,N,5,VEKL,MAX,1,N,1,2,XN,5,1)
        PRINT 40
        PRINT 63
        PRINT 63, (KN(I),I=1,5)
277      CALL MMULT (GN,5,5,5,KN,5,1,5,1,1,X,5,1)
        PRINT 75
        PRINT 64
        PRINT 63, (X(I),I=1,5)
279      DO 299 J=1,5
        CCSM(I)=X(I)*RMO
        PRINT 48
        PRINT 67
        PRINT 72, (CCSM(I),I=1,5)
        CALL MMULT (K,MAX,5,N,5,X,5,1,5,2,1,V,MAX,1)
250      DO 300 I=1,N
        V(I)=V(I)-VEKL(I)
        PRINT 48
        PRINT 65
        PRINT 90, (I,NR(I),V(I),I=1,N)
283      END

```

Fin del programa principal

SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ELITE POINTS
 14 30-33

| VARIABLES | SN | TYPE | RELOCATION | | | |
|-----------|----|------|------------|------|-------|---------|
| 1671 | 37 | REAL | | 1672 | DT | REAL |
| 1673 | 37 | REAL | | 2247 | D1 | REAL |
| 1673 | 37 | REAL | ARRAY | 1678 | F | REAL |
| 1674 | 37 | REAL | ARRAY | 1702 | DETE | REAL |
| 1677 | 36 | REAL | ARRAY | 2005 | DRK41 | REAL |
| 1676 | 37 | REAL | ARRAY | 2415 | DU | REAL |
| 1679 | 37 | REAL | ARRAY | 2423 | DM | REAL |
| 1677 | 36 | REAL | ARRAY | 2525 | GH | REAL |
| 1674 | 37 | REAL | ARRAY | 1476 | TI | INTEGER |
| 1676 | 37 | REAL | ARRAY | 2430 | K | INTEGER |
| 1675 | 37 | REAL | ARRAY | 1677 | L | INTEGER |
| 1674 | 37 | REAL | ARRAY | 1664 | MAX | INTEGER |
| 1677 | 37 | REAL | ARRAY | 1783 | NR | INTEGER |
| 1674 | 37 | REAL | ARRAY | 1701 | O | REAL |
| 1677 | 37 | REAL | ARRAY | 2877 | UNWS | REAL |
| 1677 | 37 | REAL | ARRAY | 2137 | U1 | REAL |
| 1677 | 37 | REAL | ARRAY | 2567 | V | REAL |
| 1677 | 37 | REAL | ARRAY | 1777 | WINK | REAL |
| 1677 | 37 | REAL | ARRAY | 1717 | XT | REAL |

SUBROUTINE TRANS (A,R,K,M)

```

DIMENSION A(10), R(1)
DO I=1,3
  DO J=1,4
    DO K=1,5
      I=I+1
      J=J+1
      K=K+1
    END DO
  END DO
END DO
RETURN
END

```

SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ENTRY POINTS
1 TRANS

| ADDRESS | SYN-TO | RELATION | ARRAY | F.P. | PROPERTIES |
|---------|--------|----------|-------|------|------------|
| 1 | 1 | REAL | | | |
| 2 | 1 | REAL | | | |
| 3 | 1 | REAL | | | |
| 4 | 1 | REAL | | | |
| 5 | 1 | REAL | | | |
| 6 | 1 | REAL | | | |
| 7 | 1 | REAL | | | |
| 8 | 1 | REAL | | | |
| 9 | 1 | REAL | | | |
| 10 | 1 | REAL | | | |
| 11 | 1 | REAL | | | |
| 12 | 1 | REAL | | | |
| 13 | 1 | REAL | | | |
| 14 | 1 | REAL | | | |
| 15 | 1 | REAL | | | |
| 16 | 1 | REAL | | | |
| 17 | 1 | REAL | | | |
| 18 | 1 | REAL | | | |
| 19 | 1 | REAL | | | |
| 20 | 1 | REAL | | | |
| 21 | 1 | REAL | | | |
| 22 | 1 | REAL | | | |
| 23 | 1 | REAL | | | |
| 24 | 1 | REAL | | | |
| 25 | 1 | REAL | | | |
| 26 | 1 | REAL | | | |
| 27 | 1 | REAL | | | |
| 28 | 1 | REAL | | | |
| 29 | 1 | REAL | | | |
| 30 | 1 | REAL | | | |
| 31 | 1 | REAL | | | |
| 32 | 1 | REAL | | | |
| 33 | 1 | REAL | | | |
| 34 | 1 | REAL | | | |
| 35 | 1 | REAL | | | |
| 36 | 1 | REAL | | | |
| 37 | 1 | REAL | | | |
| 38 | 1 | REAL | | | |
| 39 | 1 | REAL | | | |
| 40 | 1 | REAL | | | |
| 41 | 1 | REAL | | | |
| 42 | 1 | REAL | | | |
| 43 | 1 | REAL | | | |
| 44 | 1 | REAL | | | |
| 45 | 1 | REAL | | | |
| 46 | 1 | REAL | | | |
| 47 | 1 | REAL | | | |
| 48 | 1 | REAL | | | |
| 49 | 1 | REAL | | | |
| 50 | 1 | REAL | | | |
| 51 | 1 | REAL | | | |
| 52 | 1 | REAL | | | |
| 53 | 1 | REAL | | | |
| 54 | 1 | REAL | | | |
| 55 | 1 | REAL | | | |
| 56 | 1 | REAL | | | |
| 57 | 1 | REAL | | | |
| 58 | 1 | REAL | | | |
| 59 | 1 | REAL | | | |
| 60 | 1 | REAL | | | |
| 61 | 1 | REAL | | | |
| 62 | 1 | REAL | | | |
| 63 | 1 | REAL | | | |
| 64 | 1 | REAL | | | |
| 65 | 1 | REAL | | | |
| 66 | 1 | REAL | | | |
| 67 | 1 | REAL | | | |
| 68 | 1 | REAL | | | |
| 69 | 1 | REAL | | | |
| 70 | 1 | REAL | | | |
| 71 | 1 | REAL | | | |
| 72 | 1 | REAL | | | |
| 73 | 1 | REAL | | | |
| 74 | 1 | REAL | | | |
| 75 | 1 | REAL | | | |
| 76 | 1 | REAL | | | |
| 77 | 1 | REAL | | | |
| 78 | 1 | REAL | | | |
| 79 | 1 | REAL | | | |
| 80 | 1 | REAL | | | |
| 81 | 1 | REAL | | | |
| 82 | 1 | REAL | | | |
| 83 | 1 | REAL | | | |
| 84 | 1 | REAL | | | |
| 85 | 1 | REAL | | | |
| 86 | 1 | REAL | | | |
| 87 | 1 | REAL | | | |
| 88 | 1 | REAL | | | |
| 89 | 1 | REAL | | | |
| 90 | 1 | REAL | | | |
| 91 | 1 | REAL | | | |
| 92 | 1 | REAL | | | |
| 93 | 1 | REAL | | | |
| 94 | 1 | REAL | | | |
| 95 | 1 | REAL | | | |
| 96 | 1 | REAL | | | |
| 97 | 1 | REAL | | | |
| 98 | 1 | REAL | | | |
| 99 | 1 | REAL | | | |
| 100 | 1 | REAL | | | |

SYMBOLIC LABELS
1 TRANS

| SYN-TO | INDEX | SYN-TO | LENGTH | PROPERTIES |
|--------|-------|--------|--------|------------|
| 1 | 1 | 5 | 284 | |
| 2 | 1 | 7 | 38 | INSTACK |
| 3 | 1 | 569 | 46 | |

SUBROUTINE MMULT 76/76 OPT=1

```

1   SUBROUTINE MMULT (A,MA,MAX,NANAY,MA,MB,MBMAX,NBMAX,NBMAX,MBMAX,MA,MA,MB,MBMAX,NBMAX,NBMAX,MA,MA,MB,MBMAX,NBMAX,NBMAX,MA,MA,MB,MBMAX,NBMAX,NBMAX,MA,MA,MB,MBMAX,NBMAX,NBMAX,MA,MA,MB,MBMAX,NBMAX,NBMAX)
   C
   C   KENN=1 (A * B)
5   C   KENN=2 (A * B)
   C   KENN=3 (A * B)
   C
   DIMENSION A(MA,MAX), B(MB,MAX), C(MB,MAX)
10  GO TO (100,200,300), KENN
   L80 IF (MA.EQ.10) GO TO 110
   L10 DO 170 I=1,MA
     DO 170 J=1,NB
       C(I,J)=0.0
       DO 170 K=1,MA
15  C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
     GO TO 6
   C
200 IF (MA.EQ.10) GO TO 210
   DO 220 I=1,MA
     DO 220 J=1,NB
       C(I,J)=0.0
       DO 220 K=1,MA
25  C(I,J)=C(I,J)+A(K,I)*B(K,J)
     GO TO 6
   C
300 IF (MA.EQ.10) GO TO 310
   DO 320 I=1,MA
     DO 320 J=1,NB
       C(I,J)=0.0
       DO 320 K=1,NA
35  C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(J,K)
     GO TO 6
   C
500 PRINT $10
510 FORMAT (//)MMULTIPLICATION ILLEGAL)
   GO TO 6
   RETURN
   END

```

DO-NR. SEV. ER-NR. DETAILS DIAGNOSIS OF PROBLEM
 9 I FK0312 AM IF STATEMENT MAY BE MORE EFFICIENT THAN A 2 OR 3 BRANCH CO-PIED TO TC 5

SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ENTRY POINTS
1 MMULT

```

1      SUBROUTINE OX10R (D,DET)
      C
      DIMENSION D(1,3)
      DET=D(1,1)*D(2,2)*D(3,3)+D(1,2)*D(2,3)*D(3,1)+D(1,3)*D(2,1)*D(3,2)
      -D(1,1)*D(2,3)*D(3,2)-D(1,2)*D(2,1)*D(3,3)-D(1,3)*D(2,2)*D(3,1)
      RETURN
      END

```

```

1      SUBROUTINE OXINK (M,BILOK,AK,MM,DOM,DPHI,DKAP)
      C
      DIMENSION M(6), BILOK(2), DOM(3), DPHI(3), DKAP(3), ANGLE(3)
      DD 20 14MM,6,2
      C=(1+I)/2
      ANGLE(K)=MM
      20 CONTINUE
      DOM(1)=R
      DPHI(1)=-SIN(ANG(1))*SIN(ANG(3))*BILOK(1)+COS(ANG(1))*SIN(ANG(2))*
1      COS(ANG(3))*BILOK(1)-SIN(ANG(1))*COS(ANG(3))*BILOK(2)-COS(ANG(1))*
2      *SIN(ANG(2))*SIN(ANG(3))*BILOK(2)-COS(ANG(1))*COS(ANG(2))*(-AK)
      DPHI(2)=COS(ANG(1))*SIN(ANG(3))*BILOK(1)+SIN(ANG(1))*SIN(ANG(2))*
1      *COS(ANG(3))*BILOK(1)+COS(ANG(1))*COS(ANG(3))*BILOK(2)
2      -SIN(ANG(1))*SIN(ANG(2))*SIN(ANG(3))*BILOK(2)-SIN(ANG(1))*
1      *COS(ANG(2))*(-AK)
      DPHI(3)=-SIN(ANG(2))*COS(ANG(3))*BILOK(1)+SIN(ANG(2))*SIN(ANG(3))*
1      *BILOK(2)+COS(ANG(2))*(-AK)
      DPHI(1)=-COS(ANG(2))*COS(ANG(3))*SIN(ANG(1))*BILOK(1)
1      *COS(ANG(2))*SIN(ANG(3))*SIN(ANG(1))*BILOK(2)+SIN(ANG(2))*
3      *SIN(ANG(1))*(-AK)
      DPHI(2)=-COS(ANG(2))*COS(ANG(1))*COS(ANG(3))*BILOK(1)
1      *COS(ANG(2))*COS(ANG(1))*SIN(ANG(3))*BILOK(2)-SIN(ANG(2))*
2      *COS(ANG(1))*(-AK)
      DKAP(1)=-SIN(ANG(1))*COS(ANG(2))*BILOK(1)-COS(ANG(2))*
1      *COS(ANG(1))*BILOK(2)
      DKAP(2)=COS(ANG(1))*COS(ANG(3))*BILOK(1)-SIN(ANG(1))*
1      *SIN(ANG(2))*SIN(ANG(3))*BILOK(1)-SIN(ANG(1))*COS(ANG(3))*
2      *BILOK(2)-COS(ANG(1))*SIN(ANG(2))*SIN(ANG(3))*BILOK(2)
      DKAP(3)=COS(ANG(1))*SIN(ANG(2))*BILOK(1)+SIN(ANG(1))*SIN(ANG(2))*
1      *COS(ANG(1))*BILOK(1)-SIN(ANG(1))*SIN(ANG(1))*BILOK(2)
2      *COS(ANG(1))*SIN(ANG(2))*COS(ANG(1))*BILOK(2)
      RETURN
      END

```

SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

| ENTRY POINTS | SM | TYPE | RELOCATION | | | | | |
|--------------|------|-----------|------------|-----|------|-----------|-------|------|
| 3 OXINK | | | | | | | | |
| VARIABLES | SM | TYPE | RELOCATION | | | | | |
| 0 44 | | REAL | F.P. | 366 | ANG | REAL | ARRAY | |
| 0 BILOK | | REAL | ARRAY F.P. | 0 | DKAP | REAL | ARRAY | F.P. |
| 0 DOM | | REAL | ARRAY F.P. | 0 | DPHI | REAL | ARRAY | F.P. |
| 564 7 | | INTEGER | | 565 | K | INTEGER | | |
| 0 44 | | INTEGER | F.P. | 8 | M | REAL | ARRAY | F.P. |
| EXTENSIBLES | TYPE | ARGS | | | | | | |
| 005 | REAL | 1 LIBRARY | | SIN | REAL | 1 LIBRARY | | |

SUBROUTINE MINVER (A,N,M,L,G,N,DET)

INVERSION DER 2XN-MATRIX A, LÖSUNG DES
LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS AX=B UND
BERECHNUNG DER DETERMINANTE VON A MIT DER
SARRUSCHEN-METHODE
A MUß 2 ZEILEN HABEN MIT N SPALTEN UND M ZEILEN
MIT Wobei WURD NUR DIE INVERSE MATRIX BERECHNET
WENN ERSETZT A DURCH DIE INVERSE MATRIX UND
ERSETZT B
DIMENSION (M,N1,N2,B1,M1,2)
DIMENSION (X(2), Y(2), I(2), P(2))

WRITE
DO 1 J=1,M

DO 100 I=1,N

SUCHE NACH DEM GRÖSSTEN ELEMENT

WRITE
DO 2 J=1,N
IF (ABS(A(J,1)) .GT. Z) GOTO 2
DO 1 K=1,N
IF (ABS(A(J,K)) .GT. Z) GOTO 1
IF (ABS(A(J,K)) .GT. ABS(A(J,1))) GOTO 1
IF (ABS(A(J,K)) .GT. ABS(A(J,1))) GOTO 1

WRITE
1 CONTINUE
2 CONTINUE
CONTINUE

VERTAUSCHE - FALLS NOTWENDIG - DIE ZEILEN SO,
DASS AM IN DER DIAGONALE STEHT

IF (Z .EQ. 0) GOTO 5

GOTO 6
DO 7 J=1,N
WRITE
IF (A(J,J) .EQ. 0) GOTO 5

DO 6 J=1,N

DO 6 J=1,N
DO 6 J=1,N
DO 6 J=1,N
DO 6 J=1,N
DO 6 J=1,N
DO 6 J=1,N
DO 6 J=1,N

TAUSCHE DER ZEILE IZ DURCH P(I)

A(I,IS)=L
DO 6 J=1,N
A(I,IS)=A(I,IS)+A(J,P(I))
IF (M .EQ. 0) GOTO 8
DO 7 J=1,M
A(I,IS)=A(I,IS)+A(J,P(I))
4 CONTINUE

REDUKTION ALLER ANDEREN ZEILEN

DO 100 L=1,M
IF (L .EQ. IS) GOTO 100
T=A(L,IS)
A(L,IS)=0
DO 9 J=1,N
A(L,J)=A(L,J)-A(I,IS)*A(J,P(I))
IF (M .EQ. 0) GOTO 100
DO 10 J=1,M
A(L,J)=A(L,J)-A(I,IS)*A(J,P(I))
100 CONTINUE

AUFRÜCKTAUSCH DER SPALTEN

DO 12 I=1,N
J=N+1-I
IF (I .EQ. 1) GOTO 12
I*=I+1
IS=I+1
DO 13 L=1,N
T=A(L,I)
A(L,I)=A(L,IS)
A(L,IS)=T
13 CONTINUE
12 CONTINUE
RETURN
END

SYMBOLIC REFERENCE MAP (R=1)

ENTRY POINTS
3 MINVER

| VARIABLES | SN | TYPE | RELOCATION | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 |
|-----------|----|---------|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| B | L | REAL | ARRAY F.P. | | | | | | |
| B | B | REAL | ARRAY F.P. | | | | | | |
| 250 | I | INTEGER | | | | | | | |
| 254 | IS | INTEGER | | | | | | | |
| 304 | IY | INTEGER | ARRAY | | | | | | |
| 252 | J | INTEGER | | | | | | | |
| 257 | L | INTEGER | | | | | | | |
| 0 | M | INTEGER | F.P. | | | | | | |
| 354 | P | REAL | ARRAY | | | | | | |

INPUT

BILDKOORDINATEN (MM) Coordenadas de las imágenes

| LFD.NR. | PKI.NR. | X1 | Y1 | X2 | Y2 |
|---------|---------|----------|---------|--------|---------|
| 1 | 5 | -84.946 | 14.971 | 37.977 | 19.126 |
| 2 | 6 | -72.970 | 12.454 | 34.174 | 17.015 |
| 3 | 7 | -77.455 | -0.527 | 37.116 | -0.171 |
| 4 | 8 | -61.119 | -8.974 | 46.530 | -14.619 |
| 5 | 9 | -61.502 | -34.124 | 45.419 | -28.727 |
| 6 | 11 | -104.988 | -19.124 | 4.172 | -44.017 |
| 7 | 14 | -98.160 | 45.984 | 6.106 | 193.116 |
| 8 | 15 | -57.348 | 97.772 | 46.339 | 97.111 |
| 9 | 16 | -75.496 | 84.595 | 28.934 | 57.735 |
| 10 | 19 | -97.497 | 49.144 | 0.915 | 52.704 |

KAMMERKONSTANTE (C = 153.34MM) Distancia focal

WINKEL (GRAD) Angulo

| PH1 | PH2 | PHI1 | PHI2 | KAP1 | KAP2 |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

BASISKOMPONENTEN (MM) Componentes de la base

| BX | BY | BZ |
|---------|-------|--------|
| 178.500 | 1.850 | -4.940 |

MODELLKOORDINATEN (1-4) **Coordenadas del modelo**

| U1 | V1 | W1 |
|----------|---------|----------|
| -23.346 | 14.971 | -153.340 |
| -72.370 | 12.494 | -153.340 |
| -77.453 | -0.527 | -153.340 |
| -42.119 | -6.974 | -153.340 |
| -11.502 | -14.124 | -153.340 |
| -104.738 | -49.764 | -153.340 |
| -93.240 | 99.984 | -153.340 |
| -37.349 | 92.772 | -153.340 |
| -75.496 | 64.599 | -153.340 |
| -97.447 | 49.144 | -153.340 |

L-VEKTOR

| |
|----------|
| -0.09956 |
| -0.09672 |
| -0.04366 |
| -0.18215 |
| -0.10417 |
| -0.08435 |
| -0.11518 |
| -0.13278 |
| -0.11339 |
| -0.09845 |

Compuesto de valores de Δ

Coeffizienten da las ecuaciones de corrección

A-MATRIX INEFFIZIENTENMATRIX DER FEHLERGLEICHUNGEN

| U2 | V2 | W2 |
|--------|---------|----------|
| 17.977 | 19.524 | -153.340 |
| 14.124 | 17.040 | -153.340 |
| 30.615 | 4.178 | -153.340 |
| 60.730 | -14.819 | -153.340 |
| 65.413 | -23.367 | -153.340 |
| 4.171 | -44.818 | -153.340 |
| 6.196 | 103.486 | -153.340 |
| 40.339 | 97.111 | -153.340 |
| 28.984 | 47.534 | -153.340 |
| 8.512 | 52.784 | -153.340 |

| | | | | |
|----------|---------|---------|----------|---------|
| -0.25143 | 1.78685 | 4.11339 | -0.06913 | 1.00000 |
| -0.25799 | 1.89297 | 4.10287 | -0.04326 | 0.90424 |
| -0.09182 | 2.01344 | 4.06789 | 0.04276 | 0.81135 |
| -0.02068 | 1.58598 | 4.05725 | 0.09363 | 1.22769 |
| 0.23754 | 1.60660 | 4.21734 | 0.32343 | 1.18740 |
| 0.71191 | 2.76741 | 4.45945 | 0.11578 | 0.98804 |
| -1.09597 | 7.50613 | 5.06610 | -0.13744 | 1.40844 |
| -0.81456 | 1.50439 | 5.59888 | -0.76466 | 1.20763 |
| -1.31203 | 1.97602 | 5.35559 | -0.44134 | 0.75457 |
| -0.57815 | 2.54376 | 4.53196 | -0.06461 | 0.22499 |

N-MATRIX (NORMALEICHUNGSMATRIX)

N

| | | | | |
|-----------|----------|-----------|----------|----------|
| 6.11759 | -3.95819 | -23.38949 | 1.65387 | -7.60959 |
| -3.55119 | 42.91816 | 96.55397 | -1.66968 | 13.51107 |
| -31.93349 | 94.55197 | 219.15409 | -9.74610 | 34.22301 |
| 1.66187 | -1.66466 | -5.74610 | .94230 | -0.84464 |
| -2.60155 | 13.52107 | 34.22301 | -0.84464 | 7.52370 |

Q-MATRIX (QUADRIKONNEXIONSMATRIX)

N^{-1}

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| .37546 | -0.67242 | .46313 | -0.13757 | -0.68705 |
| 0.67242 | 2.47226 | -1.45807 | -1.75744 | 1.76211 |
| .46313 | -1.45807 | .89613 | .94769 | -1.14060 |
| -0.13757 | -1.75744 | .94769 | 3.31541 | -4.01221 |
| -0.68705 | 1.76211 | -1.14060 | -4.01221 | 1.68575 |

N-VEKTOR

| |
|----------|
| .51131 |
| -2.97591 |
| -4.41247 |
| .12469 |
| -0.33244 |

X-VEKTOR (UNDEKAR)

Inobgnitas (medida de arco)

| |
|---------|
| .00065 |
| .00061 |
| -.01917 |
| .00000 |
| -.02090 |

GESUCHTE WINKELDIFF. (GONI)

Inobgnitas (gon)

| | | |
|--------|---|----------|
| PHI1 | = | .04149 |
| KAPPA1 | = | .01056 |
| OMEGA2 | = | -1.22016 |
| PHI2 | = | .05556 |
| KAPPA2 | = | -1.33660 |

LFD.NR. PKT.NR. Y-VEKTOR

| | | |
|----|----|---------|
| 1 | 5 | .00051 |
| 2 | 6 | .00005 |
| 3 | 7 | -.00011 |
| 4 | 8 | -.00016 |
| 5 | 9 | -.00004 |
| 6 | 11 | .00006 |
| 7 | 14 | .00014 |
| 8 | 15 | -.00013 |
| 9 | 16 | .00005 |
| 10 | 19 | -.00032 |

VIII Orientación absoluta (§ 11/12)

Para un modelo de un par de fotos, los siguientes parámetros son conocidos:

Coordenadas de los centros de proyección:

| | X (m) | Y (m) | h (m) |
|-----|-----------|-----------|----------|
| O' | 36 985,54 | 82 560,21 | 2 325,38 |
| O'' | 38 277,94 | 82 523,10 | 2 318,08 |

Puntos de apoyo:

| | |
|---|--------|
| A | 198,50 |
| B | 201,21 |

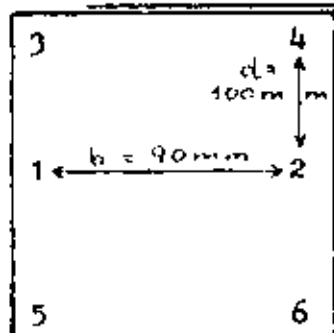
Coordenadas del modelo:

| | x (mm) | y (mm) | z (m) |
|---|--------|--------|---------|
| A | 105,10 | 35,75 | 198,5 m |
| B | 104,89 | 300,98 | 238,8 m |

Escala del modelo: 1: 8000

- ¿ Cuales son los elementos de base ?
- ! Determine Ud. los elementos de la orientación absoluta (use fórmula aproximada) !
- ! Controle el resultado con una relación rigurosa !

IX Corrección numérica de una orientación relativa instrumental



Después de una orientación relativa y absoluta en un estereorrestuidor unos elementos de la orientación estuvieron modificados por casualidad. Eso resultó en las paralajes p_y siguientes:

| | | |
|-----|---|----------|
| 1 - | 4 | 0,975 mm |
| 2 - | 5 | - |
| 3 - | 6 | 0,195 |

- ¿ Cuales elementos fueron modificados y por cuánto?
(ca 152 mm)

División de Educación Continua

Ciudad de México

30.3.-3.4.1981

F o t o g r a m e t r i a A n a l i t i c a

Segunda Parte Práctica (B)

Aerotriangulación: Asuntos Actuales Suplemen-
tarios

de H.P. Bähr, Universidad de Hannover, R.F.A.

| <u>Contenido</u> | Página |
|---|--------|
| 1. <u>Ultimos resultados prácticos de Aerotriangulación</u> | B- 2 |
| 1.1 Introducción de parámetros adicionales para compensación de errores sistemáticos | B- 2 |
| 1.2 Resultados del grupo de trabajo de Comisión III de la ISP ("Compensation of systematic errors") | B- 5 |
| 1.3 Resultados del Instituto de Fotogrametría de la Universidad de Hannover | B-11 |
| 1.4 Resultados de una institución gubernamental en un proceso de producción | B-27 |
| 2. <u>Computación de bloques de haces usando Minicomputadoras.</u> | B- 29 |
| 2.1 Tendencias por cálculo "on-line" | B- 29 |

| | | |
|------|--|------|
| 2.2 | Cálculo de bloques de haces con una Mini-8-30 computadora Hewlett-Packert HP 1000 en combinación con un instrumento analítico ZEISS- Planicomp | |
| 2.3 | Teoría para cálculos "on-line" interactiva | B-31 |
| 3. | <u>Teoría estadística de la propagación de errores graves</u> | B-33 |
| 3.1 | Reflexiones generales | B-33 |
| 3.2 | Relación analítica entre los valores v y l | B-33 |
| 3.3 | "Data snooping" | B-35 |
| 3.4 | Ejemplos prácticos | B-36 |
| 3.41 | Método "Bloque de haces" | B-36 |
| 3.42 | Bloque con modelos independientes | B-37 |
| | Bibliografía. | B-46 |
| | Datos personales. | B-50 |

1. Últimos resultados prácticos de Aerotriangulación

(Publicaciones 1980)

1.1 Introducción de parámetros adicionales para compensación de errores sistemáticos (véase Ud. §§ 5,7)

$$v + l = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3$$

orientación externa puntos terrestres parámetros adicionales

Compensación simultánea ("autocalibración"), extensión del modelo funcional geométrico de bloques fotogramétricos (proposición según J. Müller, Hannover 1971).

a) distorsión radial de forma

$$dx = a x' (r^2 - r_0^2)$$

b) distorsión asimétrica de forma

$$dx = b x' \cos 2\alpha + c x' \sin 2\alpha$$

c) deformación afín de filme de forma

$$dx = a_1 x' + a_2 y'$$

$$dy = -a_1 y' + a_2 x'$$

.
.
etc.

Estas fórmulas de origen "físico" son expandidas de una manera más general por muchos autores. La clasificación siguiente hecha por: Kilpelä (1980).

Parameter sets in the studies of the VG 111/3.

Parameter set a proposed by Brown

$$dx = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5x^2y + a_6xy^2 + a_7x^2y^2 + \frac{1}{6}(a_{13}(x^2 - y^2) + a_{16}x^2y^2 + a_{15}(x^4 - y^4)) \\ + x(a_{16}(x^2 + y^2) + a_{17}(x^2 + y^2)^2 + a_{18}(x^2 + y^2)^3)$$

$$dy = a_8x + a_9x^2 + a_{10}x^2y + a_{11}xy^2 + a_{12}x^2y^2 + \frac{1}{6}(a_{13}(x^2 - y^2) + a_{16}x^2y^2 + a_{15}(x^4 - y^4)) \\ + y(a_{16}(x^2 + y^2) + a_{17}(x^2 + y^2)^2 + a_{18}(x^2 + y^2)^3)$$

Parameter set b proposed by Ebner

$$dx = b_1x + b_2y + b_3(2x^2 - 4y^2/3) + b_4xy + b_5(y^2 - 2x^2/3) + b_7x(x^2 - 2y^2/3) + b_9(x^2 - 2y^2/3)y + b_{11}(x^2 - 2y^2/3)$$

$$dy = -b_1y + b_2x + b_3xy + b_4(2y^2 - 4x^2/3) + b_6(x^2 - 2y^2/3) + b_8(x^2 + 2y^2/3)y + b_{10}x(y^2 - 2x^2/3) \\ + b_{12}(x^2 + 2y^2/3)(y^2 - 2x^2/3)$$

Parameter set c proposed by El-Hakim and Raig

$$dx = a_1x + a_2y + q \frac{x}{r}$$

$$dy = -a_1y + a_2x + q \frac{y}{r}, \text{ where}$$

$$q = a_3r \cos \lambda + a_4r \sin \lambda + a_5r^2 + a_6r^2 \cos 2\lambda + a_7r^2 \sin 2\lambda + a_8r^3 \cos \lambda + a_9r^3 \sin \lambda + a_{10}r^3 \cos 3\lambda + a_{11}r^3 \sin 3\lambda$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ and } \lambda = \arctan(\frac{y}{x})$$

Parameter set d proposed by Grün

$$dx = a_1y + a_2xy^2 + a_3x^2y$$

$$dy = b_1y + b_2xy + b_3xy^2 + b_4x^2y$$

Parameter set e proposed by Grün

$$dx = a_1y + a_2y^2 + a_3xy + a_4xy^2 + a_5x^2y$$

$$dy = b_1y + b_2xy + b_3xy^2 + b_4x^2 + b_5x^2y$$

Parameter set f proposed by Grün

$$dx = a_1x + a_2xy + a_3xy^2 + a_4x^2y + a_5y^2 + a_6x^2y^2$$

$$dy = b_1y + b_2xy + b_3xy^2 + b_4x^2y + b_5x^2 + b_6x^2y^2$$

Parameter set g proposed by Grün

$$dx = a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4xy + a_5xy^2 + a_6x^2y + a_7x^3$$

$$dy = b_1y + b_2y^2 + b_3xy + b_4xy^2 + b_5x^2 + b_6x^2y + b_7x^3$$

Parameter set h proposed by Grün

$$dx = a_{12}x + a_{21}y + a_{22}xy + a_{31}x^2 + a_{22} \frac{10}{7}k + a_{14}xp + a_{23}yk + a_{32}x^2 + a_{41}yq + a_{15}r + a_{24}xyo + a_{33}kl \\ + a_{42}xyq + a_{51}s + a_{25}yr + a_{34}xlo + a_{43}yko + a_{52}rs + a_{35}l + a_{44}xyoq + a_{53}ks + a_{45}yqr + a_{54}xos + a_{55}rs$$

$$dy = -a_{12}y + a_{21}x + a_{22} \frac{10}{7}l + b_{13}k + b_{22}xy + b_{16}xp + b_{23}yk + b_{32}x^2 + b_{41}yq + b_{15}r + b_{24}xyo + b_{33}kl \\ + b_{42}xyq + b_{51}s + b_{25}yr + b_{34}xlo + b_{43}yko + b_{52}rs + b_{45}yqr + b_{54}xos + b_{55}rs, \text{ where}$$

$$k = x^2 - \frac{b^2}{2}; l = y^2 - \frac{b^2}{2}; p = x^2 - \frac{17}{25}b^2; q = y^2 - \frac{17}{20}b^2; r = x^2(x^2 - \frac{31}{28}b^2) + \frac{9}{70}b^4; s = y^2(y^2 - \frac{31}{28}b^2) + \frac{9}{70}b^4$$

Parameter sets i and j (i includes the first 16 and j all 20 parameters) proposed by Jacobsen

$$dx = p_1 \cos(2\arctan(\frac{y}{x})) + p_2 \sin(2\arctan(\frac{y}{x})) + p_3 \cos(\arctan(\frac{y}{x})) + p_4 x \sin(\arctan(\frac{y}{x})) + p_5 y \cos(\arctan(\frac{y}{x})) \\ + p_6 y r \sin(\arctan(\frac{y}{x})) + p_7 x(r^2 - A) + p_8 x(r^2 - Br - c) + p_9 x(r^4 - Dr^3 - Er^2 - Fr - G) + p_{10} x(r^4 - Hr^2 - \dots - Nr - P) \\ + p_{11} x \cos(\arctan(\frac{y}{x})) + p_{12} x \sin(\arctan(\frac{y}{x})) + p_{13} x(r^2 - 12100) \cos(2\arctan(\frac{y}{x})) + p_{14} x(r^2 - 12100) \sin(2\arctan(\frac{y}{x})) \\ + p_{15} x(r^2 - 12100) \cos(4\arctan(\frac{y}{x})) + p_{16} x(r^2 - 12100) \sin(4\arctan(\frac{y}{x})) + p_{17}r + p_{18}y + p_{19}xy$$

$$\begin{aligned}
 dy &= p_1 y \cos(2 \arctan(\frac{x}{r_0})) + p_2 y \sin(2 \arctan(\frac{x}{r_0})) + p_3 y \cos(\arctan(\frac{x}{r_0})) + p_4 y \sin(\arctan(\frac{x}{r_0})) + p_5 y \cos(\arctan(\frac{x}{r_0})) \\
 &+ p_6 r \sin(\arctan(\frac{x}{r_0})) + p_7 y(r^2 - A) + p_8 y(r^2 - B) + p_9 y(r^2 - C) + p_{10} y(r^2 - D) + p_{11} y(r^2 - E) + p_{12} y(r^2 - F) + p_{13} y(r^2 - G) + p_{14} y(r^2 - H) + p_{15} y(r^2 - I) \\
 &+ p_{16} y(r^2 - J) + p_{17} y(r^2 - K) + p_{18} y(r^2 - L) + p_{19} y(r^2 - M) + p_{20} y(r^2 - N) + p_{21} y(r^2 - O) + p_{22} y(r^2 - P) + p_{23} y(r^2 - Q) + p_{24} y(r^2 - R) + p_{25} y(r^2 - S) \\
 &+ p_{26} y(r^2 - T) + p_{27} y(r^2 - U) + p_{28} y(r^2 - V) + p_{29} y(r^2 - W) + p_{30} y(r^2 - X) + p_{31} y(r^2 - Y) + p_{32} y(r^2 - Z) + p_{33} y(r^2 - \infty) + p_{34} y(r^2 - \text{undefined}) + p_{35} y(r^2 - \text{error})
 \end{aligned}$$

Parameter set k proposed by Kdibl and modified by Junj

$$dx = a_1 \frac{x}{r} (r^3 - r/r^2) + a_2 x (\sin \frac{2\pi x}{r_0})^2 + a_3 \frac{x}{r} \sin(\frac{2\pi x}{r_0}) + r_1 \cdot 0.5 \cdot \frac{x}{r} (a_4 \cos a + a_5 \sin a + a_6 \cos 2a + a_7 \sin 2a)$$

$$dy = a_1 x + a_2 y + a_3 \frac{x}{r} (r^3 - r/r^2) + a_4 y (\sin \frac{2\pi x}{r_0})^2 + a_5 \frac{x}{r} \sin(\frac{2\pi x}{r_0}) + r_1 \cdot 0.5 \cdot \frac{x}{r} (a_6 \cos a + a_7 \sin a + a_8 \cos 2a + a_9 \sin 2a)$$

where $a = \arctan(\frac{x}{r_0})$

$r_0 = a$ given constant (radial distance, where radial distortion is wanted to be zero for the second time)

Parameter set l proposed by Mauelshagen

$$dx = a_1 xy + a_2 y^2 + a_3 x^2 + a_4 x^2 y + a_5 xy^2 + a_6 y^3$$

$$dy = b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 x^3 + b_6 x^2 y + b_7 xy^2 + b_8 y^3$$

Parameter set m proposed by Schut

$$dx = c_1 xy + c_2 y^2 + c_3 x^2 y + c_4 xy^2 + c_5 x^2 y^2 + c_6 xy^3$$

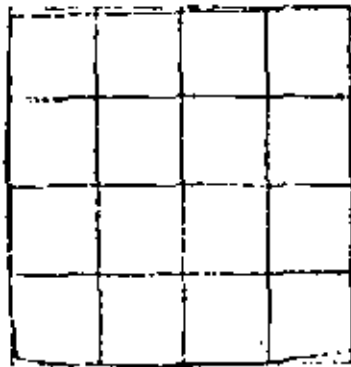
$$dy = c_7 x + c_8 y + c_9 x^2 + c_{10} xy + c_{11} x^2 y + c_{12} xy^2 + c_{13} y^3$$

Parameter set n

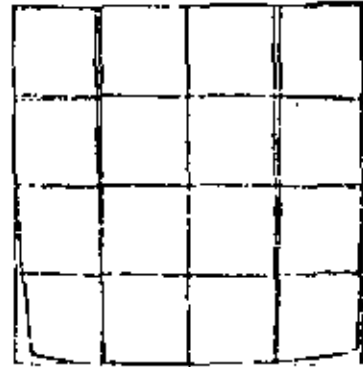
$$dx = b_1 x + b_2 y + b_3 x^2(1-r_0/r) + b_4 x^3(1-r_0/r) + b_5 x^4(1-r_0/r) + b_6 -2xy + b_7(r^2 + 2x^2)$$

$$dy = -b_1 y - b_2 x + b_3 y^2(1-r_0/r) + b_4 y^3(1-r_0/r) + b_5 x^2 y(1-r_0/r) + b_6(r^2 + 2y^2) + b_7 -2xy$$

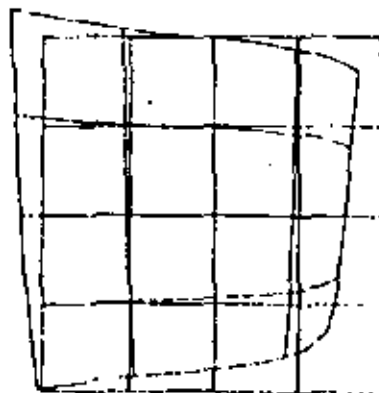
where r_0 is a given constant (first radial distance, where radial distortion is wanted to be zero).



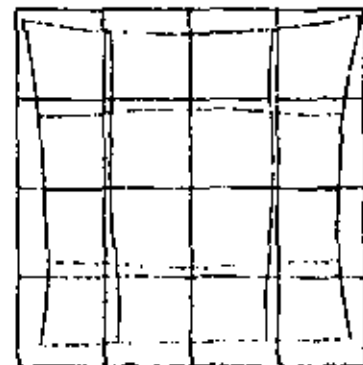
Parameter set A



Parameter set B



Parameter set C



Parameter set D

Example of the image deformations obtained by four different parameter sets.

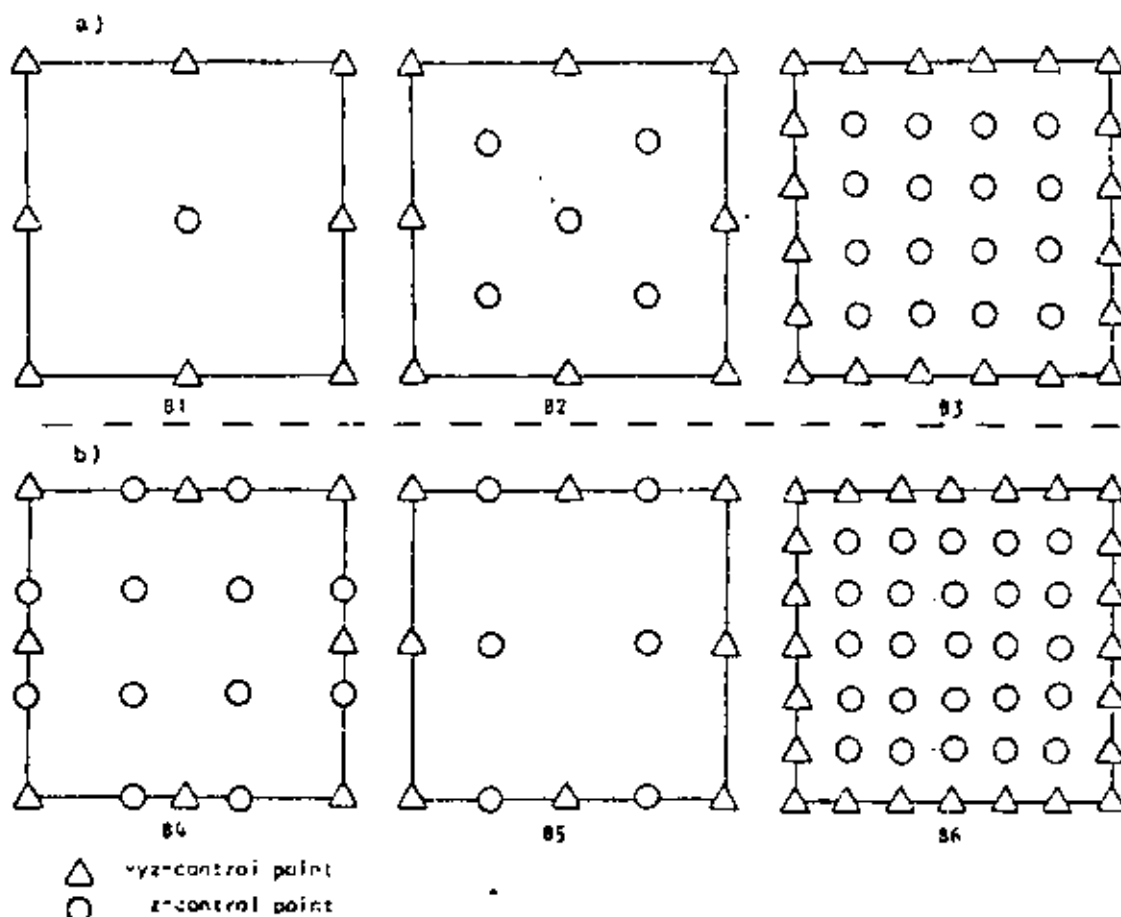
1.2 Resultados del Grupo de Trabajo (WG 3) de Comisión III
de la Sociedad Internacional de Fotogrametría ("Compensation of Systematic Errors"), véa Kilpelä 1980

Test internacional usando el material de 4 bloques, aplicando distintos modelos matemáticos para compensación de errores sistemáticos

| Test field | Country | Size ¹⁾ (sq.km) | Max. height diff. (m) | No. of points ²⁾ | Accuracy (mm) | |
|--------------------|-----------|-------------------------------|--------------------------|--------------------------------|------------------|------------------|
| | | | | | planimetry | height |
| Willunga | Australia | 5,9x5,8 | 130 | 96 | 25 ³⁾ | 30 ³⁾ |
| Kapunda | Australia | 24x24 | 300 | 43 | 40 ³⁾ | 40 ³⁾ |
| Jämsijärvi (small) | Finland | 0,8x0,8 | 25 | 180 | 5 ⁴⁾ | 0,6 mm/km |
| Jämsijärvi (large) | Finland | 2x2 | 60 | 121 | 3 ⁴⁾ | " |

- 1) Area of the coordinated points.
2) No. of the coordinated points.
3) Average standard error of one coordinate.
4) Maximum standard error of one coordinate.

Specifications of the test fields.



- a) Control patterns recommended for blocks.
b) Control patterns for blocks used in addition to the recommended ones.

| DATA SET SYMBOL 1) | MEASUREMENT | | SPECIFICATIONS OF THE MEASURED MATERIAL | | | | | | | |
|--------------------|-------------|--------|---|--------|----------|----------------|------------------|----------------------|----|----------------------|
| | Institute | Instr. | Test field | Camera | Scale | Flight direct. | Side lap | No. of strips, photo | | Dispositive material |
| A1 | Lands Dept. | PSK 2 | Willunga | RMK A2 | 1:12 000 | EW | 20 ²⁾ | 3 | 24 | Measurements |
| A2 | Adelaide, | | | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | From film |
| A3 | Australia | | | | | | 60 | 6 | 48 | negatives |
| B1 | | | Kapunda | | 1:50 000 | EW | 20 ²⁾ | 4 | 36 | |
| B2 | | | | | | WE | 20 ³⁾ | 5 | 45 | |
| B3 | | | | | | EW/WE | 60 | 9 | 81 | |
| C1 | TU München, | Plani- | Jämijärvi, | RMK A2 | 1:4 000 | SN | 20 ²⁾ | 3 | 22 | Film |
| C2 | FRG | comp | large | | | | 20 ³⁾ | 3 | 23 | |
| C3 | | C-100 | | | | | 60 | 6 | 45 | |
| D1 | | PSK 1 | | | | EW | 20 ²⁾ | 3 | 25 | |
| D2 | | | | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | |
| D3 | | | | | | | 60 | 6 | 49 | |
| E1 | Helsinki | PSK 1 | Jämijärvi, | RMK A2 | 1:4 000 | SN | 20 ²⁾ | 3 | 24 | Film |
| E2 | Univ. of | | large | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | |
| E3 | Techn., | | | | | | 60 | 6 | 48 | |
| F1 | Finland | | | | | EW | 20 ²⁾ | 3 | 24 | |
| F2 | | | | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | |
| F3 | | | | | | | 60 | 6 | 48 | |
| G1 | Univ. | PSK 1 | Jämijärvi, | RMK A2 | 1:4 000 | SN | 20 ²⁾ | 3 | 24 | Glass |
| G2 | Stuttgart, | | large | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | |
| G3 | FRG | | | | | | 60 | 6 | 48 | |
| H1 | | | | | | EW | 20 ²⁾ | 3 | 24 | |
| H2 | | | | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | |
| H3 | | | | | | | 60 | 6 | 48 | |
| I1 | Geod. and | PG 2 | Jämijärvi, | MRB | 1:4 000 | EW | 20 ²⁾ | 3 | 24 | Film |
| I2 | Geophysical | | large | | | | 20 ³⁾ | 3 | 24 | |
| I3 | Inst., | | | | | | 60 | 6 | 48 | |
| J1 | Sopron, | | | | | | | | | |
| J1 | Hungary | | | | | | | | | |
| J1 | Nat. Board | PSK 1 | Jämijärvi, | MRB | 1:4 000 | EW | 20 ²⁾ | 3 | 20 | Glass |
| J2 | of Survey, | | large | | | | 20 ³⁾ | 3 | 23 | |
| J3 | Helsinki, | | | | | | 60 | 6 | 43 | |
| J3 | Finland | | | | | | | | | |

1) Symbol is used to identify the data sets when presenting the results of block adjustments.

2) Odd numbered strips.

3) Even numbered strips.

Specifications of measurements of block photographs.

| Camera | Test field | Type of photogr. | Nominal scale | Flight direction | Forward/side lap | No. of strips | No. of photos | Date of photogr. |
|------------------------|-------------------|------------------|---------------|-----------------------|------------------|---------------|---------------|------------------|
| RMK A2 (WA) | Jämsijärvi, large | block | 1:4 000 | SN & EW ¹⁾ | 60/60 | 6 + 6 | 48 + 48 | 16.08.77 |
| | " , large | strip | 1:8 000 | " | 80/ | 1 + 1 | 3 + 3 | " |
| | " , small | strip | 1:4 000 | " | 80/ | 1 + 1 | 3 + 3 | " |
| MRB (WA) | Jämsijärvi, large | block | 1:4 000 | SN & EW ¹⁾ | 60/60 | 6 + 6 | 48 + 48 | 16.08.77 |
| | " , large | strip | 1:8 000 | " | 80/ | 1 + 1 | 3 + 3 | " |
| | " , small | strip | 1:4 000 | " | 80/ | 1 + 1 | 3 + 3 | " |
| RMK AR (WA, rescue) | Kapunda | block | 1:50 000 | EW/NE ²⁾ | 60/60 | 9 | 81 | 31.03.76 |
| | Willunga | block | 1:12 000 | EW | 60/60 | 6 | 48 | 15.01.75 |

1) Two cross-flight blocks.

2) Alternating flight directions.

Photographies available for the WG.

| DATA SET SYMBOL | MEASUREMENT | | SPECIFICATIONS OF MEASURED MATERIAL | | | | | | |
|-----------------|--|--------|-------------------------------------|-------------------|---------|------------------|---------------|----------------------|---|
| | Institute | Instr. | Camera | Test field | Scale | Flight direction | No. of photos | Diapositive material | |
| K1 | TU München FRG | PSK 1 | RMK A2 | Jämsijärvi, small | 1:4 000 | SN | 3 | film | |
| K2 | | | | | | | EW | | 3 |
| L1 | | | | Jämsijärvi, large | 1:8 000 | SN | 3 | | |
| L2 | | | | | | | EW | | 3 |
| M1 | Helsinki Univ. of Techn. Finland | PSK 1 | RMK A2 | Jämsijärvi, small | 1:4 000 | SN | 3 | film | |
| M2 | | | | | | | EW | | 3 |
| N1 | | | | Jämsijärvi, large | 1:8 000 | SN | 3 | | |
| N2 | | | | | | | EW | | 3 |
| P1 | | PK 1 | MRB | Jämsijärvi, small | 1:4 000 | SN | 3 | Glass | |
| P2 | | | | | | | EW | | 3 |
| Q1 | | | | Jämsijärvi, large | 1:8 000 | SN | 3 | | |
| Q2 | | | | | | | EW | | 3 |
| R1 | Geod. and Geophysical Inst., Sopron, Hungary | PG 2 | MRB | Jämsijärvi, small | 1:4 000 | SN | 3 | Film | |
| R2 | | | | | | | EW | | 3 |
| S1 | | | | Jämsijärvi, large | 1:8 000 | SN | 3 | | |
| S2 | | | | | | | EW | | 3 |

Specifications of measurements of strip photographs.

| Institute | Triangulation method | Calibration method | Data used |
|--|----------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Geod. and Geophysical Inst., Sopron, Hungary | anblock | self | E3, F3, J3 |
| Helsinki Univ. of Technology, Finland | bundle | component, test field, self | A2, A3, J1, J3 |
| TU München, FRG | bundle | test field, self | A3, B3, C3, D3, J3 |
| Aalborg Univ., Denmark | bundle | self | A1-A3, E1-E3, F1-F3 |
| Univ. Bonn, FRG | bundle | self, test field, component | A3, J3, E1-E3, F1-F3 |
| TU Hannover, FRG | bundle | self, component | A1-A3, E1-E3, F1-F3 |
| Univ. Stuttgart, FRG | bundle | self | A1-A3, B1-B3, G1-G3, H1-H3 |

Participants in computation, and methods and data used by them.

| Data set | Parameter set | Control 85 (medium) | | | | | Control 86 (dense) | | | | |
|----------|---------------|---------------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|---------------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
| | | s ₀ [um] | RMSE [um] | | Impr. [%] | | s ₀ [um] | RMSE [um] | | Impr. [%] | |
| | | | u _{xy} | v _z | u _{xy} | v _z | | u _{xy} | v _z | u _{xy} | v _z |
| E1 | Ref. case | 3,4 | 6,4 | 11,6 | | | 3,8 | 3,7 | 6,0 | | |
| | 1 | 2,9 | 4,9 | 8,9 | 23 | 23 | 3,1 | 3,3 | 7,4 | 11 | 8 |
| | a | 2,8 | 4,4 | 8,3 | 31 | 28 | 3,0 | 3,2 | 7,2 | 14 | 10 |
| | f | 2,9 | 4,3 | 8,8 | 33 | 24 | 3,1 | 3,2 | 7,3 | 14 | 9 |
| | d | 2,9 | 4,4 | 8,9 | 31 | 23 | 3,2 | 3,4 | 7,2 | 6 | 10 |
| E2 | Ref. case | 3,6 | 6,9 | 13,4 | | | 4,1 | 4,6 | 8,4 | | |
| | 1 | 2,9 | 6,2 | 8,8 | 10 | 34 | 3,0 | 3,4 | 6,5 | 26 | 23 |
| | a | 2,8 | 4,5 | 8,2 | 35 | 39 | 2,9 | 3,3 | 6,3 | 28 | 25 |
| | f | 2,9 | 4,6 | 8,1 | 33 | 40 | 3,0 | 3,2 | 6,2 | 30 | 26 |
| | d | 3,0 | 3,9 | 7,6 | 43 | 43 | 3,1 | 3,1 | 6,2 | 33 | 26 |
| F1 | Ref. case | 3,9 | 6,2 | 8,9 | | | 4,2 | 3,5 | 6,6 | | |
| | 1 | 3,0 | 3,2 | 7,2 | 48 | 19 | 3,1 | 2,4 | 5,5 | 31 | 17 |
| | a | 2,9 | 3,1 | 7,8 | 50 | 12 | 3,0 | 2,4 | 5,1 | 31 | 23 |
| | f | 3,0 | 3,1 | 7,2 | 50 | 19 | 3,1 | 2,5 | 5,3 | 29 | 20 |
| | d | 3,3 | 3,3 | 7,2 | 47 | 19 | 3,3 | 2,8 | 5,4 | 20 | 18 |
| F2 | Ref. case | 3,5 | 6,1 | 9,9 | | | 3,9 | 4,1 | 7,7 | | |
| | 1 | 2,8 | 4,5 | 8,0 | 26 | 19 | 3,0 | 3,1 | 5,9 | 24 | 23 |
| | a | 2,8 | 4,0 | 8,3 | 34 | 16 | 2,9 | 3,1 | 5,9 | 24 | 23 |
| | f | 2,8 | 4,1 | 7,9 | 33 | 20 | 3,0 | 3,1 | 5,7 | 24 | 26 |
| | d | 2,9 | 4,2 | 7,8 | 31 | 21 | 3,1 | 3,1 | 5,6 | 24 | 27 |

Comparison of the performance of the different parameter sets in blocks with 20° size overlap and control patterns 85 or 86. Significance testing or weighting not applied. Computed in Bonn.

| Control \ Side lap | 20 % | | 60 % | |
|--------------------|----------|-------|----------|-------|
| | u_{xy} | u_z | u_{xy} | u_z |
| Sparse | 4-7 | 10-25 | 2,5-3,5 | 6-9 |
| Medium | 4-7 | 7-20 | 2,5-3,5 | 5-7 |
| Dense | 3-4 | 5-10 | 2,5-3,0 | 4-6 |

Accuracy estimates for self calibration in different types of blocks. Figures (RMSEs in μm) are based on all results obtained by the WG.

| Data set | Control | Parameter set | s_0 [μm] | RMSE [μm] | | Impr. [%] | |
|----------|-------------|---------------|-------------------------|------------------------|-------|-----------|-------|
| | | | | u_{xy} | u_z | u_{xy} | u_z |
| C3 | B1 (sparse) | Ref. case | 4,6 | 5,2 | 11,5 | | |
| | | b | 4,1 | 3,8 | 7,2 | 27 | 37 |
| | | h | 4,0 | 3,6 | 6,5 | 31 | 43 |
| | B3 (dense) | Ref. case | 4,8 | 3,9 | 6,7 | | |
| | | b | 4,2 | 2,8 | 5,5 | 28 | 18 |
| | | h | 4,1 | 2,6 | 4,5 | 33 | 33 |
| J3 | B1 (sparse) | Ref. case | 4,5 | 4,3 | 12,0 | | |
| | | b | 4,0 | 2,7 | 10,5 | 37 | 13 |
| | | h | 3,8 | 2,6 | 7,5 | 40 | 38 |
| | B3 (dense) | Ref. case | 4,3 | 3,5 | 6,5 | | |
| | | b | 4,1 | 2,6 | 5,7 | 26 | 12 |
| | | h | 3,8 | 2,3 | 5,0 | 20 | 23 |

Comparison of two orthogonal parameter sets b (12 parameters) and h (44 parameters). Parameters significant on a 95 % level have been included in the compensation model. Computed in Munich.

| Parameter set | Willunga A2, control B2 | | | | | Jämijärvi J2, control B2 | | | | |
|---------------|-------------------------|------------------------|-------|-----------|-------|--------------------------|------------------------|-------|-----------|-------|
| | s_0 [μm] | RMSE [μm] | | Impr. [%] | | s_0 [μm] | RMSE [μm] | | Impr. [%] | |
| | | u_{xy} | u_z | u_{xy} | u_z | | u_{xy} | u_z | u_{xy} | u_z |
| Ref. case | 4,4 | 6,2 | 16,5 | | | 4,0 | 5,5 | 10,9 | | |
| a | 3,1 | 6,2 | 17,3 | 0 | + 5 | 3,6 | 4,0 | 9,1 | 27 | 17 |
| b | 3,1 | 6,5 | 9,1 | + 5 | 45 | 3,9 | 4,0 | 9,8 | 27 | 10 |
| c | 3,8 | 5,0 | 12,8 | 19 | 22 | 3,9 | 3,9 | 9,4 | 29 | 14 |
| h | 3,7 | 7,7 | 28,0 | -24 | -70 | 3,7 | 4,5 | 8,8 | 18 | 19 |
| m | 3,5 | 5,6 | 9,2 | 10 | 44 | 3,9 | 4,0 | 9,9 | 29 | 9 |

Comparison of the performance of the different parameter sets in two blocks with 20 % side overlap and medium control (B2). Significance testing or weighting not applied. Computed in Helsinki.

| Parameter set | Willunga A3, control B2 | | | | | Jimi Jirvi J3, control B2 | | | | |
|---------------|-------------------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|---------------------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
| | s ₀ [µm] | RMSE [µm] | | Impr. [%] | | s ₀ [µm] | RMSE [µm] | | Impr. [%] | |
| | | u _{xy} | u _z | v _{xy} | v _z | | u _{xy} | u _z | v _{xy} | v _z |
| Ref. case | 4,8 | 4,5 | 8,5 | | | 4,4 | 4,3 | 8,7 | | |
| a | 3,1 | 2,7 | 5,3 | 40 | 38 | 3,8 | 2,6 | 4,9 | 40 | 44 |
| b | 3,4 | 2,7 | 5,4 | 40 | 36 | 4,2 | 2,8 | 6,8 | 35 | 27 |
| c | 3,8 | 3,0 | 4,8 | 33 | 44 | 4,1 | 2,8 | 5,4 | 35 | 38 |
| h | 3,3 | 2,8 | 5,0 | 38 | 41 | 3,8 | 2,7 | 5,1 | 37 | 41 |
| m | 3,2 | 2,7 | 5,1 | 40 | 40 | 4,1 | 2,6 | 5,5 | 40 | 37 |

Comparison of the performance of the different parameter sets in two blocks with 60 % side overlap and medium (B2) control. Significance testing or weighting not applied. Computed in Helsinki.

| Parameter set | Side lap 20 % | | Side lap 60 % | |
|---------------|----------------------|---------------------|----------------------|---------------------|
| | Control B3 | | Control B1 | |
| | u _{xy} (Δ%) | u _z (Δ%) | v _{xy} (Δ%) | v _z (Δ%) |
| k1) | 18 | 29 | 42 | 56 |
| c2) | 12 | 8 | 35 | 56 |
| b2) | 17 | 13 | 40 | 57 |
| m2) | 17 | 18 | 42 | 57 |
| a2) | 12 | 23 | 40 | 54 |

Accuracy improvements in percentages (compared with resp. reference adjustment) obtained with different parameter sets in two Willunga blocks with varying project parameters.

- 1) Significance testing not applied, weighting applied (cf. text).
 2) Significance testing applied, weighting not applied.

Conclusiones (tendências)

1. Mejoramiento de aerotriangulación de 20% aprox.
(valores medios)
2. No existen modelos matemáticos superiores a otros
3. Autocalibración da mejores resultados que una calibración con ayuda de un campo de prueba.

Problemas todavía existentes:

Determinación de significancia estadística
 Introducción de parámetros de correlación

1.3 Resultados del Institut für Photogrammetrie de la
Universidad de Hannover (K. Jacobsen)

Material de WG 3,III (Jämijärvi y Willunga)

Hannover Program System for Bundle Block Adjustment (vea
página siguiente.

Las siguientes posibilidades son ofrecidas por el programa:

Transformación de los coordenadas de comparador, método afin
tomando en consideración valores del reseau (Willunga) o
valores de calibración del laboratorio

Computación del ajuste de bloque con parámetros adicionales

Identificación de los errores sistemáticos por los errores
residuales de una manera iterativa

Tratamiento a posteriori "predicción de mínimos cuadrados"

Test aplicado para determinar el nivel de errores residuales
sistemáticos:

$$TS = \frac{\sum_{j=1}^K \frac{|K_j| \cdot \sqrt{n_j}}{S_0}}{K} \quad \text{if } TS > 1$$

where

- K = number of part-areas
- n_j = number of points in the corresponding part-area
- A_j = mean value for the corresponding part-area
- S_0 = mean square of all photo coordinate residuals.

Computadora usada: Control Data CDC Cyber 73/76 (Hannover)

Tiempo de cálculo:

$$t \text{ (sec)} = F \cdot BL \cdot BQ^2 \cdot \frac{2/PB}{18}$$

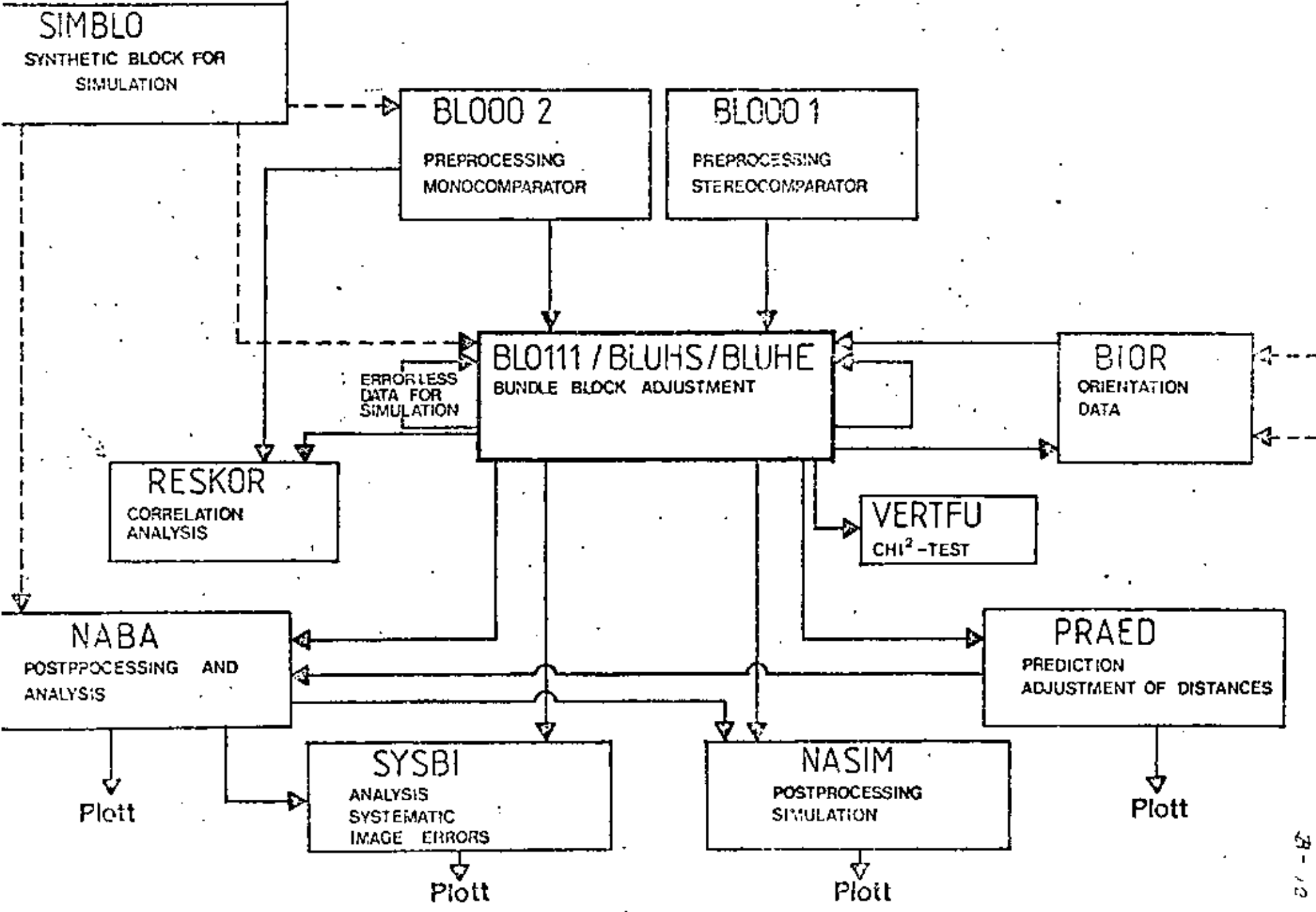
where

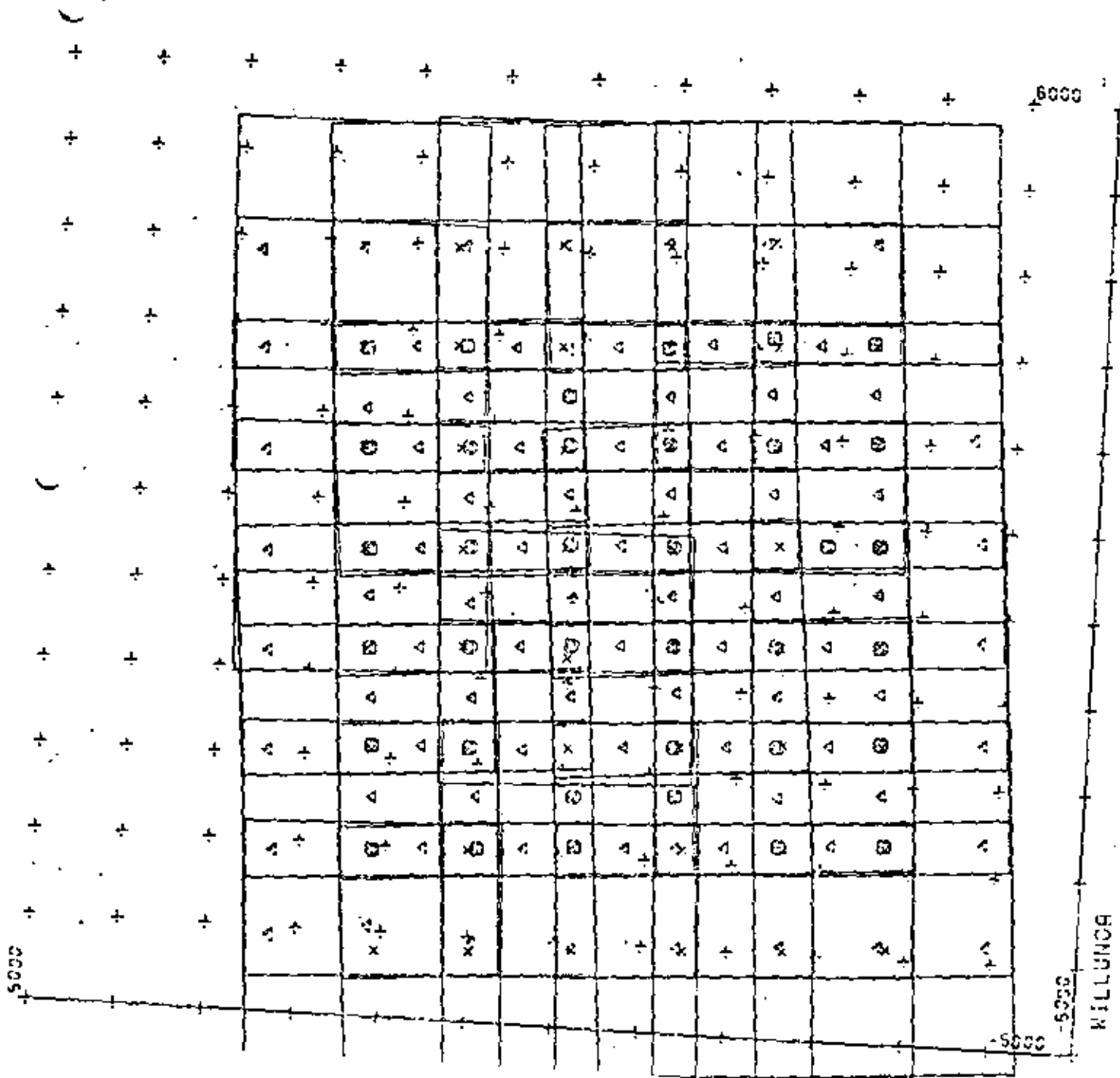
- BL = photos in block-length direction
- BQ = photos in block-width direction
- PB = average number of photopoints per photo
- F = 0.056 sec for computations without additional parameters
- F = 0.065 sec for computations with 20 additional parameters

→ 4 seg (block size 3 x 6, simple)

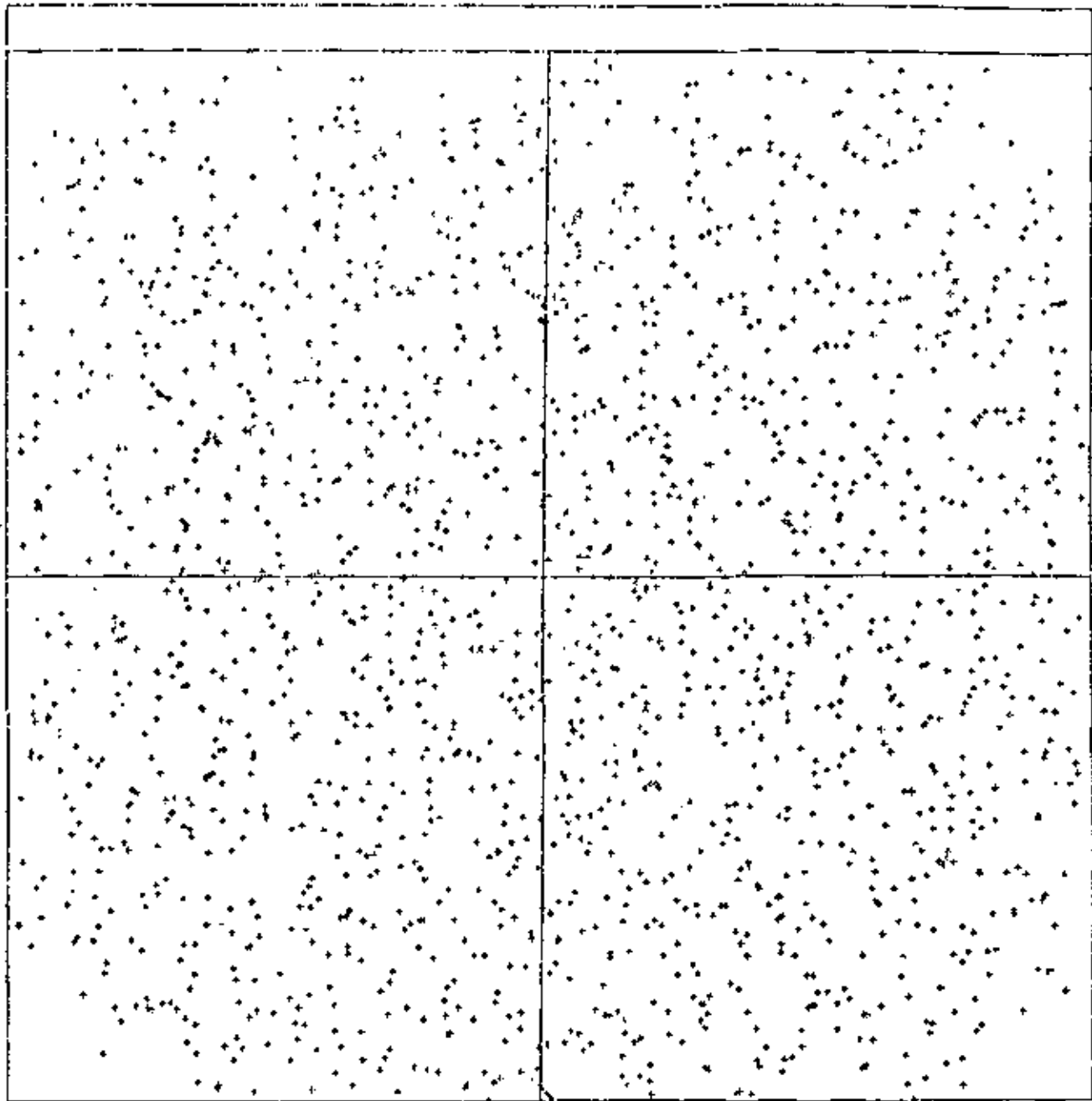
→ 142 seg (bloque 12 x 8, 4 veces)

HANNOVER PROGRAMM SYSTEM FOR BUNDLE BLOCK ADJUSTMENT









JARMIJAERVI

96 BILDER

fotos

228

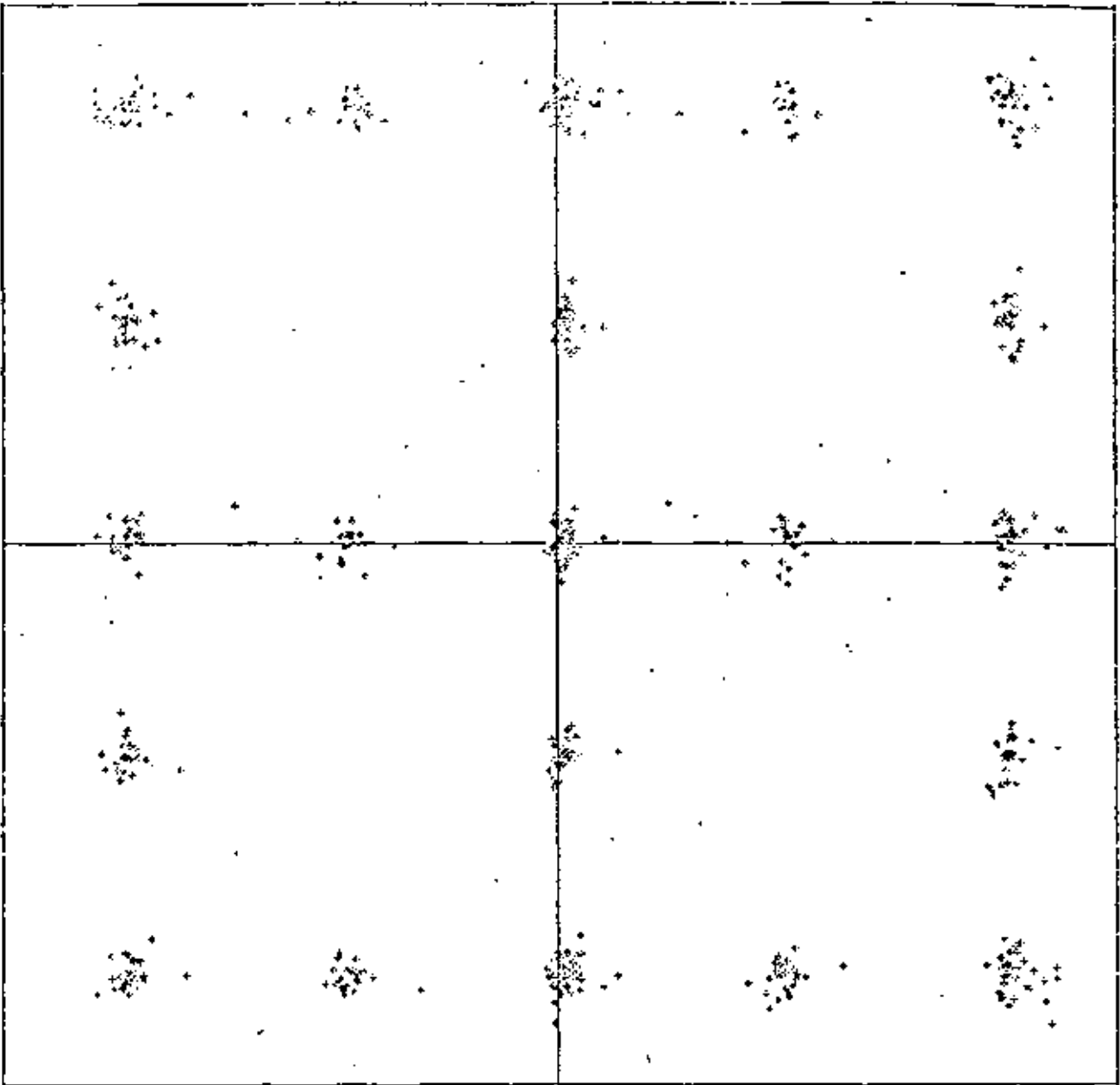
PUNKTE

puntos

1778 BILDPUNKTE

puntos
en las
fotos

18.5 PUNKTE/BILD



WILLUNGA

45 BILDER 119 PUNKTE 974 BILDPUNKTE 14.0 PUNKTE/BILD

Explanation

- | | |
|---|--|
| AA: Results of bundle block adjustment without additional parameters, without refinement of radial distortion | CB: Results of bundle block adjustment with all significant additional parameters, with refinement of radial distortion computed by AA |
| BA: Results of bundle block adjustment with 16 additional parameters, without refinement of radial distortion | OB: Results of bundle block adjustment with an extended number of additional parameters, with refinement of radial distortion computed by AA |
| AB: Results of bundle block adjustment without additional parameters, with refinement of radial distortion computed by AA | OS: Optimum found by strategy |
| BB: Results of bundle block adjustment with 16 additional parameters, with refinement of radial distortion computed by AA | OA: Actual optimum of μ_{xy} |
| | RXY: Ratio μ_{xy} to μ_{xy} of optimum of block with refinement of radial distortion |
| | RZ: Ratio μ_z to μ_z of optimum of block with refinement of radial distortion |

Explanation of control point versions

- sparse = 8 horizontal, 9 vertical control points
- dense = 20 horizontal, 36 vertical control points
- medium = 8 horizontal, 13 vertical control points

all results in [μ m] (reduced by nominal scale 1 : 4000)

| | σ_0 | μ_x | μ_y | μ_{xy} | μ_z | Rxy | Rz | |
|-------|------------|---------|---------|------------|---------|------|------|-------------------------------|
| AA | 4,42 | 6,69 | 7,04 | 6,86 | 24,83 | 1,80 | 2,53 | quadratic mesh |
| BA | 2,87 | 4,26 | 3,61 | 4,01 | 10,58 | 1,05 | 1,08 | single blocks |
| AB | 3,75 | 6,41 | 6,73 | 6,58 | 18,03 | 1,73 | 1,84 | |
| BB | 2,87 | 4,37 | 3,61 | 4,01 | 10,40 | 1,05 | 1,06 | control point version: sparse |
| CB | 2,90 | 4,21 | 3,47 | 3,36 | 10,49 | 1,01 | 1,07 | |
| OB | 2,89 | 4,45 | 3,75 | 4,12 | 10,34 | 1,08 | 1,06 | |
| OS | 2,88 | 4,22 | 3,35 | 3,81 | 9,80 | 1,00 | 1,00 | |
| <hr/> | | | | | | | | |
| AA | 4,84 | 4,22 | 4,36 | 4,29 | 10,95 | 1,43 | 1,62 | |
| BA | 2,94 | 3,08 | 2,96 | 3,02 | 6,90 | 1,01 | 1,02 | |
| AB | 4,09 | 4,03 | 4,04 | 4,03 | 7,98 | 1,34 | 1,18 | |
| BB | 2,94 | 3,07 | 2,94 | 3,00 | 6,76 | 1,00 | 1,00 | control point version: dense |
| CB | 2,59 | 3,05 | 3,09 | 3,08 | 6,90 | 1,03 | 1,07 | |
| OB | 2,92 | 3,06 | 2,97 | 3,02 | 6,75 | 1,01 | 1,00 | |
| OS | 2,95 | 3,05 | 3,09 | 3,04 | 6,90 | 1,03 | 1,02 | |
| <hr/> | | | | | | | | |
| AA | 4,51 | 6,52 | 6,44 | 6,58 | 17,20 | 1,67 | 2,15 | |
| BA | 2,68 | 4,35 | 3,61 | 3,99 | 8,08 | 1,02 | 1,01 | |
| AB | 3,79 | 6,19 | 6,21 | 6,20 | 13,10 | 1,58 | 1,64 | |
| BB | 2,57 | 4,38 | 3,60 | 4,01 | 8,10 | 1,02 | 1,01 | control point version: medium |
| CB | 2,56 | 4,33 | 3,53 | 3,95 | 8,64 | 1,01 | 1,08 | |
| OB | 2,87 | 4,63 | 3,76 | 4,23 | 8,01 | 1,08 | 1,00 | |
| OS | 2,90 | 4,35 | 3,45 | 3,93 | 8,42 | 1,00 | 1,05 | |

| | σ_0 | μ_x | μ_y | μ_{xy} | μ_z | R_{xy} | R_z | |
|----|------------|---------|---------|------------|---------|----------|-------|-------------------------------|
| AA | 4,61 | 4,14 | 3,44 | 3,60 | 17,59 | 1,65 | 3,65 | quadratic mean |
| BA | 1,07 | 2,30 | 2,13 | 2,32 | 4,63 | 1,01 | 0,96 | double blocks |
| AB | 1,54 | 4,01 | 3,54 | 1,81 | 11,66 | 1,66 | 2,30 | Jämijärvi |
| BB | 3,07 | 2,38 | 2,25 | 2,31 | 4,24 | 1,01 | 1,01 | |
| CB | 3,08 | 2,39 | 2,10 | 2,29 | 5,25 | 1,00 | 1,07 | control point version: sparse |
| DB | 3,07 | 2,40 | 2,19 | 2,30 | 5,25 | 1,01 | 1,07 | |
| OS | 3,08 | 2,39 | 2,18 | 2,29 | 5,25 | 1,00 | 1,07 | |

| | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------------------------------|
| AA | 4,66 | 2,88 | 2,51 | 2,70 | 5,73 | 1,43 | 1,50 | control point version: dense |
| BA | 3,11 | 1,87 | 2,02 | 1,95 | 3,88 | 1,03 | 1,01 | |
| AB | 4,12 | 2,78 | 2,57 | 2,68 | 4,57 | 1,42 | 1,19 | |
| BB | 3,10 | 1,86 | 2,01 | 1,93 | 3,82 | 1,02 | 1,00 | |
| CB | 3,12 | 1,85 | 1,93 | 1,92 | 3,65 | 1,02 | 1,01 | |
| DB | 3,11 | 1,86 | 1,93 | 1,89 | 3,84 | 1,00 | 1,01 | |
| OS | 3,10 | 1,86 | 2,01 | 1,93 | 3,82 | 1,02 | 1,00 | |

| | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|------|------|-------------------------------|
| AA | 4,67 | 4,15 | 3,47 | 3,83 | 10,23 | 1,67 | 2,22 | control point version: medium |
| BA | 3,07 | 2,36 | 2,22 | 2,29 | 4,62 | 1,01 | 0,99 | |
| AB | 3,97 | 4,06 | 3,49 | 2,54 | 7,98 | 1,39 | 1,72 | |
| BB | 3,07 | 2,38 | 2,23 | 2,31 | 4,65 | 1,01 | 1,00 | |
| CB | 3,08 | 2,35 | 2,20 | 2,29 | 5,56 | 1,00 | 1,06 | |
| DB | 3,07 | 2,39 | 2,22 | 2,32 | 4,68 | 1,02 | 1,04 | |
| OS | 3,07 | 2,38 | 2,29 | 2,30 | 4,65 | 1,00 | 1,00 | |

| | σ_0 | μ_x | μ_y | μ_{xy} | μ_z | R_{xy} | R_z | |
|----|------------|---------|---------|------------|---------|----------|-------|-------------------------------|
| AA | 4,78 | 2,28 | 2,15 | 2,23 | 13,53 | 1,27 | 4,70 | four fold blocks |
| BA | 3,21 | 1,93 | 1,60 | 1,73 | 2,90 | 1,02 | 1,01 | Jämijärvi |
| AB | 4,20 | 2,18 | 2,08 | 2,13 | 7,03 | 1,22 | 2,44 | |
| BB | 3,21 | 1,95 | 1,65 | 1,80 | 2,90 | 1,01 | 1,01 | control point version: sparse |
| CB | 3,23 | 1,88 | 1,63 | 1,75 | 2,88 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |
| DB | 3,21 | 1,95 | 1,65 | 1,80 | 2,90 | 1,03 | 1,01 | |

| | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------------------------------|
| AA | 4,87 | 1,60 | 1,75 | 1,78 | 4,05 | 1,19 | 1,51 | control point version: dense |
| BA | 3,22 | 1,48 | 1,55 | 1,53 | 2,68 | 1,02 | 1,00 | |
| AB | 4,23 | 1,70 | 1,63 | 1,70 | 2,98 | 1,13 | 1,11 | |
| BB | 3,22 | 1,48 | 1,58 | 1,53 | 2,68 | 1,00 | 1,00 | |
| CB | 3,22 | 1,45 | 1,55 | 1,50 | 2,73 | 1,02 | 1,02 | OS, OA |
| DB | 3,22 | 1,48 | 1,55 | 1,50 | 2,68 | 1,00 | 1,00 | |

| | | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|-------------------------------|
| AA | 4,82 | 2,35 | 2,15 | 2,25 | 6,90 | 1,26 | 2,32 | control point version: medium |
| BA | 3,21 | 1,95 | 1,60 | 1,73 | 2,98 | 1,00 | 1,00 | |
| AB | 4,21 | 2,23 | 2,05 | 2,15 | 4,33 | 1,21 | 1,45 | |
| BB | 3,21 | 1,95 | 1,65 | 1,80 | 2,98 | 1,01 | 1,00 | |
| CB | 3,20 | 1,95 | 1,63 | 1,80 | 2,98 | 1,01 | 1,00 | |
| DB | 3,21 | 1,93 | 1,63 | 1,78 | 2,98 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |

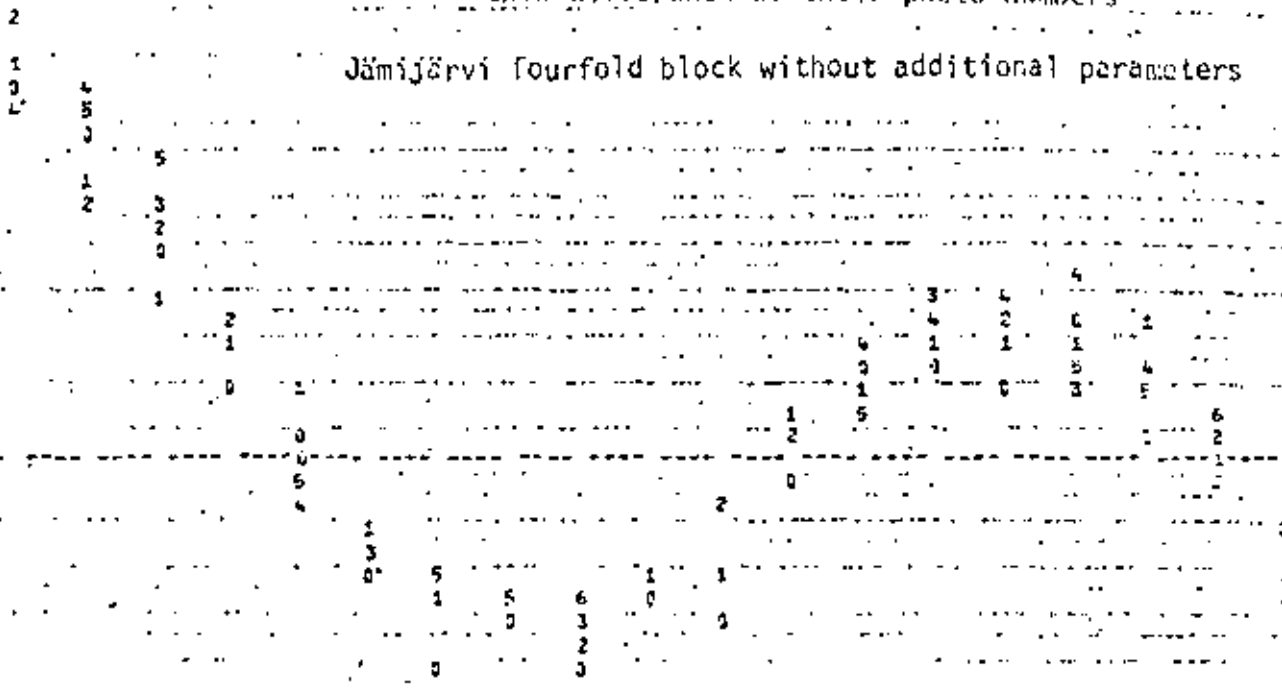
results in μm (reduced by nominal scale 1:4000)

0 = autocorrelation
1 - 6 = crosscorrelation

number = crosscorrelation for photos with
this difference of their photo numbers

Jämijärvi fourfold block without additional parameters

EXCEEDS 1
.50
.48
.46
.44
.42
.40
.38
.36
.34
.32
.30
.28
.26
.24
.22
.20
.18
.16
.14
.12
.10
.08
.06
.04
.02
0.00
-.02
-.04
-.06
-.08
-.10
-.12
-.14
-.16
-.18
-.20
EXCEEDS

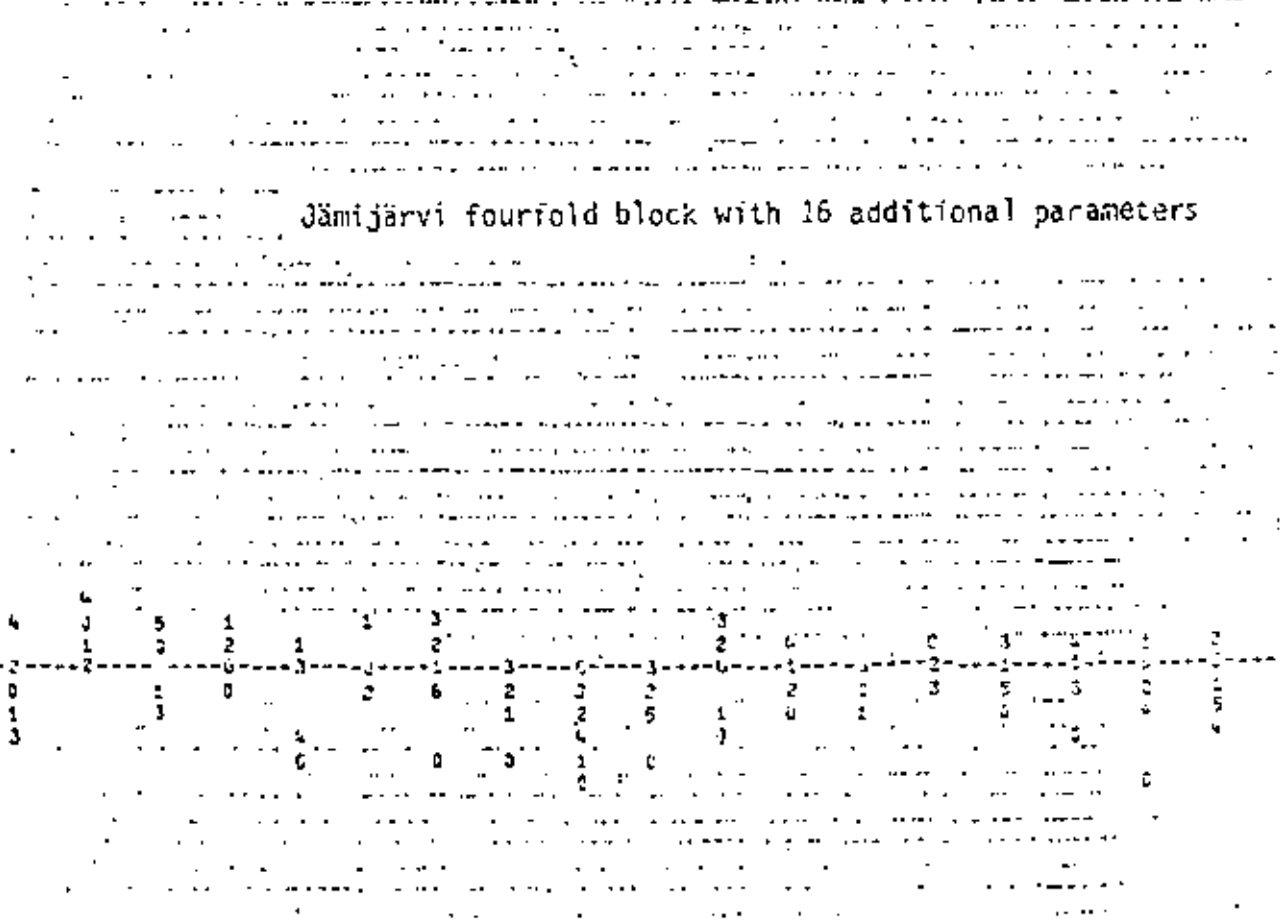


STANDARDISED COVARIANCE OF Y-COORDINATES

point distance in the photo [cm]

Jämijärvi fourfold block with 16 additional parameters

EXCEEDS 1
.50
.48
.46
.44
.42
.40
.38
.36
.34
.32
.30
.28
.26
.24
.22
.20
.18
.16
.14
.12
.10
.08
.06
.04
.02
0.00
-.02
-.04
-.06
-.08
-.10
-.12
-.14
-.16
-.18
-.20
-.22
EXCEEDS



correlation of additional parameters

example: Jumbjari fourfoldblock

diagonal: ratio: value of additional parameter/mse of a.p.

outside diagonal: correlation

| CAMERA 1 | | 96 PHOTOS | | CAMERA CONSTANT = 157.8518 | | FLIGHT HEIGHT ABOVE TERRAIN = 618.0 | | MEAN PHOTO SCALE = 1:4043 | | | | | | | | | | | |
|---------------------|-------------|-------------|------------|----------------------------|---------------|-------------------------------------|--------------|---------------------------|-------------|-------------|-------------|---------------|-------------|-------------|-------------|---------------|-------------|-------------|-------------|
| FLIGHT HEIGHT PHOTO | | MIL | | = 250.4 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1-.635E-04 | 2-.439E-05 | 3-.111E-04 | 4-.107E-04 | 5-.168E-04 | 6-.304E-04 | 7-.344E-03 | 8-.946E-03 | 9-.521E-02 | 10-.694E-03 | 11-.100E-04 | 12-.187E-04 | 13-.319E-04 | 14-.310E-04 | 15-.162E-09 | 16-.520E-09 | 17-.396E-04 | 18-.264E-05 | 19-.227E-04 | 20-.151E-07 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| -21.55 ***D | .03 | -.01 | .03 | .03 | -.04 * | -.06 ** | -.06 ** | .01 | .01 | -.09 *** | -.10 *** | .05 *** | .03 | -.06 ** | -.09 *** | -.05 *** | -.00 | .03 | -.03 *** |
| -.03 | 1.93 D | -.04 | .03 | .01 | .06 ** | -.04 * | -.03 | .02 | .01 | -.02 | -.03 | .03 | .25 *** | -.01 | -.02 | .00 | -.73 *** | .03 | -.03 *** |
| -.01 | -.04 | 1.28 D | -.01 | .00 | -.55 *** | -.00 | -.03 | .01 | -.00 | .00 | -.00 | -.02 | -.01 | -.00 | .00 | .03 | .06 ** | .02 | -.03 *** |
| .03 | .03 | -.01 | -1.19 D | .55 *** | -.01 | -.03 | .00 | -.01 | .04 * | -.00 | -.02 | .02 | .03 | -.01 | -.00 | -.04 * | .02 | .26 *** | -.03 *** |
| .03 | .01 | .00 | .55 *** | -5.27 ***D | -.00 | -.01 | .00 | -.00 | .01 | -.01 | -.00 | .02 | .00 | -.01 | .02 | -.03 | .00 | .56 *** | -.03 *** |
| -.04 * | .06 ** | -.55 *** | -.01 | -.00 | 12.07 ***D | .00 | .01 | -.02 | .01 | -.01 | .03 | -.02 | -.01 | -.01 | .01 | .02 | -.11 *** | .01 | -.03 *** |
| -.06 ** | -.04 * | -.00 | -.03 | -.01 | .00 | -7.92 ***D | .06 ** | .24 ** | -.41 *** | .59 *** | -.01 | -.09 *** | -.04 | .53 *** | .01 | -.02 | -.01 | -.04 ** | -.03 *** |
| -.06 ** | -.03 | -.03 | .00 | .00 | .01 | .06 ** | 5.15 ***D | .11 ** | -.27 *** | .45 *** | -.01 | -.06 ** | -.01 | .04 ** | -.02 | -.00 | -.00 | -.00 ** | -.00 ** |
| .01 | .02 | .01 | -.01 | -.00 | -.02 | .34 *** | .11 ** | 2.45 ***D | -.76 *** | .21 ** | -.03 | -.00 | .01 | .24 *** | -.02 | .00 | -.00 | -.01 ** | -.01 ** |
| .01 | .01 | -.00 | .04 * | .01 | .01 | -.41 *** | -.27 *** | -.76 *** | .52 D | -.12 *** | .05 * | .00 | .05 * | -.10 *** | .05 * | -.00 | .01 | .35 ** | -.03 *** |
| -.07 *** | -.02 | .00 | -.00 | -.01 | -.01 | .57 *** | .05 ** | .21 ** | -.12 *** | .04 ** | -.00 | -.12 *** | .01 | .67 *** | .01 | -.03 | -.01 | -.03 *** | -.03 *** |
| -.10 *** | -.03 | -.00 | -.02 | -.00 | .03 | -.01 | -.01 | -.03 | .05 * | -.00 | -.33 D | -.09 *** | -.02 | -.01 | .54 *** | .01 | -.01 | .00 ** | -.03 *** |
| .65 *** | .03 | -.02 | .02 | .02 | -.02 | -.09 *** | -.06 ** | -.00 | .00 | -.12 *** | -.09 *** | -5.21 ***D | .04 ** | -.00 *** | -.09 *** | -.02 | -.03 | .03 ** | -.03 *** |
| .03 | .25 *** | -.01 | .03 | .00 | -.01 | -.04 ** | -.01 | .01 | .07 * | .01 | -.02 | .04 ** | -.99 D | -.00 | .01 | .01 | -.03 | .02 ** | -.03 *** |
| -.06 ** | -.01 | -.00 | -.01 | -.01 | -.01 | .53 *** | .44 *** | .24 *** | -.10 *** | .69 *** | -.01 | -.00 *** | -.00 | -.36 D | .00 | .00 | .00 | -.03 *** | -.03 *** |
| -.09 *** | -.02 | .00 | -.00 | .02 | .01 | .01 | -.02 | -.02 | .05 * | .01 | .54 *** | -.09 *** | .01 | .00 | 1.24 D | .01 | .01 | .01 ** | -.03 *** |
| -.45 *** | .00 | .03 | -.44 ** | -.03 | .02 | -.02 | -.00 | .00 | -.00 | -.01 | .01 | -.02 | .01 | .00 | .01 | 24.94 ***D | -.09 | .02 ** | -.02 ** |
| -.00 | -.73 *** | .06 ** | .02 | .00 | -.11 *** | -.01 | -.00 | -.00 | .01 | .01 | -.01 | -.00 | -.01 | .00 | .01 | -.00 | 1.60 D | -.02 ** | -.02 ** |
| .03 | .03 | .00 | .26 *** | .54 *** | .01 | -.04 ** | -.00 | -.01 | .01 | -.03 | .00 | .03 | .02 | -.03 | .01 | .02 | -.02 | -.02 *** | -.02 *** |
| .05 * | -.02 | .23 *** | .01 | -.01 | -.00 *** | -.01 | -.02 | .01 | .00 | .01 | -.05 ** | -.04 ** | .03 | .01 | -.01 | .01 | .24 *** | .00 | -.03 *** |

Block Willunga 1 : 12 610

Explanation

AA: Results of bundle block adjustment
without additional parameters,
without refinement of radial distortion

BA: Results of bundle block adjustment
with 16 additional parameters,
without refinement of radial distortion

AB: Results of bundle block adjustment
without additional parameters,
with refinement of radial distortion computed by AA

BB: Results of bundle block adjustment
with 16 additional parameters,
with refinement of radial distortion computed by AA

CB: Results of bundle block adjustment
with all significant additional parameters,
with refinement of radial distortion computed by AA

DB: Results of bundle block adjustment
with an extended number of additional parameters,
with refinement of radial distortion computed by AA

OS: Optimum found by strategy

OA: Actual optimum of uxy

RXY: Ratio μ_{xy} to μ_{xy} of optimum of block
with refinement of radial distortion

RZ: Ratio μ_z to μ_z of optimum of block
with refinement of radial distortion

Explanation of block number

first digit = 1 odd strip numbers
2 even strip numbers
3 odd + even strip numbers

second digit = control point version
1 = 8 horizontal, 9 vertical control points
2 = 20 horizontal, 36 vertical control points
3 = 8 horizontal, 13 vertical control points

third digit = 1 without reseau refinement
2 with reseau refinement

all results in [μ] (reduced by nominal scale 1 : 12 000)

quadratic mean 110, 210

| | G_2 | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 | M_5 | M_6 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| AA | 8,54 | 5,25 | 6,94 | 6,15 | 27,69 | 1,29 | 1,24 |
| BA | 3,90 | 9,74 | 7,36 | 8,63 | 50,26 | 1,80 | 2,24 |
| AB | 4,32 | 4,85 | 5,59 | 5,23 | 22,40 | 1,09 | 1,00 |
| BB | 3,81 | 9,15 | 7,56 | 8,59 | 32,43 | 1,80 | 1,45 |
| CB | 3,91 | 4,68 | 5,53 | 5,15 | 38,52 | 1,07 | 1,72 |
| DB | 3,84 | 4,68 | 4,88 | 4,70 | 36,88 | 1,00 | 1,65 |
| DS | 3,88 | 4,66 | 4,86 | 4,86 | 36,38 | 1,02 | 1,62 |

bloque simple
sin control de resau
pocos puntos de apoyo

quadratic mean 111, 211

| | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|------|------|
| AA | 6,28 | 5,08 | 6,76 | 5,98 | 27,04 | 1,20 | 1,61 |
| BA | 3,94 | 8,65 | 6,98 | 7,68 | 24,24 | 1,57 | 1,45 |
| AB | 4,24 | 4,87 | 5,78 | 5,34 | 16,80 | 1,07 | 1,00 |
| BB | 3,87 | 8,61 | 7,22 | 7,94 | 39,46 | 1,59 | 2,35 |
| CB | 4,08 | 4,59 | 6,37 | 5,55 | 27,52 | 1,13 | 1,64 |
| DB | 4,04 | 5,13 | 4,35 | 4,59 | 50,22 | 1,00 | 2,99 |
| CS | 3,86 | 4,63 | 5,72 | 5,23 | 39,13 | 1,04 | 2,33 |

bloque simple
con control de resau
pocos puntos de apoyo

quadratic mean 120, 220

| | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|------|------|
| AA | 6,87 | 3,82 | 6,04 | 5,00 | 27,04 | 1,41 | 3,11 |
| BA | 4,33 | 3,55 | 3,76 | 3,66 | 11,90 | 1,02 | 1,36 |
| AB | 4,73 | 3,48 | 3,87 | 3,68 | 9,56 | 1,02 | 1,10 |
| BB | 4,23 | 3,46 | 3,73 | 3,60 | 8,98 | 1,00 | 1,03 |
| CB | 4,47 | 3,53 | 3,60 | 3,69 | 9,47 | 1,05 | 1,09 |
| DB | 4,31 | 3,40 | 3,78 | 3,59 | 8,58 | 1,00 | 1,00 |
| CS | 4,24 | 3,48 | 3,75 | 3,62 | 6,58 | 1,01 | 1,00 |

bloque simple
sin control de resau
pocos puntos de apoyo

quadratic mean 121, 221

| | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|------|------|
| AA | 6,60 | 3,78 | 5,84 | 4,92 | 29,01 | 1,40 | 3,39 |
| BA | 4,39 | 3,42 | 3,66 | 3,54 | 11,69 | 1,01 | 1,37 |
| AB | 4,74 | 3,46 | 3,60 | 3,67 | 11,09 | 1,05 | 1,30 |
| BB | 4,30 | 3,36 | 3,67 | 3,52 | 8,85 | 1,00 | 1,03 |
| CB | 4,44 | 3,41 | 3,74 | 3,58 | 9,22 | 1,02 | 1,08 |
| DB | 4,36 | 3,37 | 3,73 | 3,55 | 8,76 | 1,01 | 1,02 |
| CS | 4,31 | 3,34 | 3,66 | 3,51 | 8,56 | 1,00 | 1,00 |

bloque simple
con control de resau
pocos puntos de apoyo

quadratic mean 130, 230

| | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|------|------|
| AA | 6,58 | 4,48 | 4,91 | 6,02 | 27,16 | 1,35 | 4,60 |
| BA | 4,03 | 8,15 | 6,29 | 7,45 | 17,31 | 1,67 | 4,22 |
| AB | 4,40 | 4,57 | 5,45 | 5,03 | 11,43 | 1,11 | 1,06 |
| BB | 3,94 | 7,93 | 6,33 | 7,28 | 10,43 | 1,61 | 4,02 |
| CB | 4,10 | 4,28 | 5,25 | 4,72 | 12,04 | 1,07 | 1,50 |
| DB | 3,94 | 4,40 | 4,53 | 4,66 | 11,32 | 1,00 | 1,09 |
| CS | 3,98 | 4,43 | 4,48 | 4,45 | 11,78 | 1,00 | 1,12 |

bloque simple
sin control de resau
cantidad regular de
puntos de apoyo

quadratic mean 131, 231

| | | | | | | | |
|----|------|------|------|------|-------|------|------|
| AA | 6,32 | 4,85 | 6,80 | 5,91 | 27,42 | 1,29 | 2,57 |
| BA | 4,06 | 7,32 | 6,19 | 6,78 | 15,55 | 1,48 | 1,20 |
| AB | 4,30 | 4,63 | 5,79 | 5,25 | 11,00 | 1,15 | 1,31 |
| BB | 3,95 | 7,00 | 6,18 | 6,61 | 10,68 | 1,44 | 1,00 |
| CB | 4,21 | 4,58 | 5,60 | 5,11 | 11,58 | 1,12 | 1,09 |
| DB | 3,99 | 4,47 | 4,73 | 4,60 | 11,49 | 1,01 | 1,08 |
| CS | 4,03 | 4,49 | 4,56 | 4,58 | 11,66 | 1,00 | 1,07 |

bloque simple
con control de resau
cantidad regular de
puntos de apoyo

double block, without reseau refinement, control point version: sparse

| | φ_0 | μ_x | μ_y | μ_z | R_{xy} | R_z | | | |
|-----|-------------|---------|---------|---------|----------|-------|------|------|--------|
| 310 | AA | 7,53 | 3,60 | 4,14 | 3,68 | 9,28 | 1,35 | 1,21 | |
| | BA | 4,06 | 3,21 | 2,51 | 2,68 | 11,20 | 1,01 | 1,46 | |
| | AB | 4,43 | 3,50 | 3,35 | 3,43 | 7,66 | 1,20 | 1,09 | |
| | BB | 3,97 | 3,18 | 2,51 | 2,87 | 8,92 | 1,00 | 1,15 | OS, OA |
| | CB | 4,07 | 3,65 | 3,28 | 3,46 | 9,30 | 1,21 | 1,21 | |
| | DB | 3,99 | 3,66 | 2,81 | 3,26 | 8,93 | 1, | 1,1 | |

with reseau refinement

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|-------|------|------|--------|
| 311 | AA | 7,53 | 3,28 | 4,35 | 3,85 | 14,59 | 1,34 | 1,82 | |
| | BA | 4,31 | 3,18 | 2,78 | 2,99 | 9,30 | 1,04 | 1,16 | |
| | AB | 4,37 | 3,34 | 3,45 | 3,49 | 9,53 | 1,19 | 1,19 | |
| | BB | 3,97 | 3,12 | 2,60 | 2,87 | 8,00 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |
| | CB | 4,03 | 3,57 | 3,23 | 3,40 | 8,13 | 1,19 | 1,02 | |
| | DB | 4,03 | 3,57 | 3,23 | 3,40 | 8,13 | 1,19 | 1,02 | |

double block, without reseau refinement, control point version: dense

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|-------|------|------|--------|
| 320 | AA | 7,62 | 2,66 | 3,03 | 2,88 | 9,12 | 1,11 | 1,18 | |
| | BA | 4,33 | 2,67 | 2,67 | 2,65 | 11,77 | 1,02 | 1,53 | |
| | AB | 4,65 | 2,63 | 2,59 | 2,66 | 7,71 | 1,03 | 1,00 | |
| | BB | 4,20 | 2,57 | 2,51 | 2,53 | 8,08 | 1,00 | 1,05 | OS, OA |
| | CB | 4,38 | 2,58 | 2,73 | 2,66 | 7,84 | 1,05 | 1,02 | |
| | DB | 4,35 | 2,55 | 2,73 | 2,67 | 7,91 | 1,03 | 1,03 | |

with reseau refinement

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|--------|
| 321 | AA | | | | | | | | |
| | BA | | | | | | | | |
| | AB | 4,65 | 2,48 | 2,71 | 2,60 | 8,66 | 1,02 | 1,29 | |
| | BB | 4,20 | 2,47 | 2,64 | 2,56 | 7,50 | 1,00 | 1,05 | OS, OA |
| | CB | 4,32 | 2,47 | 2,78 | 2,59 | 6,69 | 1,01 | 1,00 | |
| | DB | 4,37 | 2,47 | 2,78 | 2,59 | 6,69 | 1,01 | 1,00 | |

double block, without reseau refinement, control point version: medium

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|-------|------|------|--------|
| 330 | AA | 7,63 | | | | | | | |
| | BA | 4,03 | 3,08 | 2,67 | 2,88 | 10,47 | 1,01 | 1,40 | |
| | AB | 4,45 | 3,47 | 3,52 | 3,49 | 7,47 | 1,22 | 1,00 | |
| | BB | 4,00 | 3,05 | 2,65 | 3,53 | 8,55 | 1,00 | 1,03 | OS, OA |
| | CB | 4,21 | 3,58 | 3,43 | 3,51 | 8,13 | 1,23 | 1,09 | |
| | DB | 4,08 | 3,60 | 3,49 | 3,55 | 7,89 | 1,03 | 1,06 | |

without reseau refinement

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|--------|
| 331 | AA | | | | | | | | |
| | BA | | | | | | | | |
| | AB | 4,39 | 3,34 | 3,64 | 3,50 | 8,40 | 1,21 | 1,21 | |
| | BB | 4,00 | 3,00 | 2,70 | 2,98 | 6,94 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |
| | CB | 4,05 | 3,53 | 3,43 | 3,48 | 7,16 | 1,21 | 1,03 | |
| | DB | 4,05 | 3,53 | 3,43 | 3,40 | 7,16 | 1,21 | 1,03 | |

Block Millions 1 : 17610 complete with additional parameters - version 2

same explanation like appendix 3, in addition:

IBC: same like CB - but set of additional parameters is reduced by parameters with correlations $r > 0,85$

DCB: same like CB - but set of additional parameters is reduced by parameters with correlations $r > 0,85$

single blocks, control point version: sparse

| | | σ_0 | μ_x | μ_y | μ_{xy} | μ_z | R_{xy} | R_z | |
|-----|-----|------------|---------|---------|------------|---------|----------|-------|--------|
| 110 | BB | 4,41 | 8,60 | 4,41 | 6,88 | 142,48 | 1,53 | 7,28 | |
| | CB | 4,49 | 5,00 | 4,10 | 4,58 | 120,28 | 1,02 | 6,15 | |
| | CBC | 4,68 | 5,43 | 3,31 | 4,49 | 19,57 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |
| | DB | 4,36 | 9,35 | 4,67 | 7,39 | 142,46 | 1,65 | 7,28 | |
| 210 | BB | 2,77 | 5,63 | 5,95 | 5,79 | 31,99 | 1,11 | 1,00 | |
| | CB | 3,13 | 5,02 | 7,25 | 6,23 | 50,21 | 1,19 | 1,57 | |
| | DB | 2,84 | 4,53 | 5,84 | 5,23 | 33,58 | 1,00 | 1,05 | |
| | DBC | 2,89 | 4,55 | 5,83 | 5,23 | 47,48 | 1,00 | 1,48 | OS, OA |

single blocks, control point version: dense

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|--------|
| 120 | BB | 5,18 | 3,77 | 3,45 | 3,61 | 8,67 | 1,06 | 1,17 | |
| | CB | 5,33 | 3,52 | 3,32 | 3,42 | 9,69 | 1,00 | 1,31 | OA |
| | DB | 5,21 | 3,73 | 3,49 | 3,62 | 7,41 | 1,06 | 1,00 | |
| | DBC | 5,21 | 3,49 | 3,48 | 3,49 | 7,43 | 1,02 | 1,00 | OS |
| 220 | BB | 2,95 | 3,28 | 4,11 | 3,72 | 6,81 | 1,04 | 1,00 | |
| | CB | 3,06 | 3,33 | 4,03 | 3,57 | 8,35 | 1,00 | 1,31 | OS, OA |
| | DB | 3,06 | 3,31 | 3,98 | 3,66 | 8,58 | 1,03 | 1,26 | |

single blocks, control point version: medium

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|------|------|------|------|-------|------|------|--------|
| 130 | BB | 4,76 | 8,04 | 8,13 | 8,07 | 14,95 | 2,02 | 1,09 | |
| | DB | 4,70 | 4,74 | 3,30 | 4,08 | 14,58 | 1,02 | 1,06 | |
| | DBC | 4,71 | 4,57 | 3,22 | 4,01 | 13,72 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |
| 230 | BB | 2,78 | 4,98 | 5,64 | 5,43 | 37,67 | 1,23 | 3,78 | |
| | CB | 3,26 | 4,15 | 6,72 | 5,53 | 37,69 | 1,26 | 3,76 | |
| | CBC | 3,40 | 4,09 | 6,66 | 5,53 | 10,97 | 1,25 | 1,99 | |
| | DB | 2,80 | 3,42 | 5,31 | 4,17 | 34,18 | 1,01 | 3,41 | |
| | DBC | 2,93 | 3,51 | 5,17 | 4,12 | 10,02 | 1,00 | 1,00 | OS, OA |

double block, control point version: sparse

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 310 | BB | 3,93 | 3,39 | 2,59 | 2,91 | 7,66 | 1,00 | 1,09 | OA |
| | CB | 3,94 | 3,20 | 2,60 | 2,92 | 7,04 | 1,00 | 1,00 | |
| | DB | 3,92 | 3,21 | 2,63 | 2,93 | 7,58 | 1,01 | 1,08 | OS |

double block, control point version: dense

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 320 | BB | 4,16 | 2,54 | 2,67 | 2,61 | 4,51 | 1,00 | 1,00 | |
| | CB | 4,17 | 2,56 | 2,64 | 2,60 | 5,40 | 1,00 | 1,20 | OA |
| | DB | 4,15 | 2,57 | 2,65 | 2,61 | 5,31 | 1,00 | 1,18 | OS |

double block, control point version: medium

| | | | | | | | | | |
|-----|----|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 330 | BB | 3,96 | 3,08 | 2,75 | 2,92 | 6,57 | 1,00 | 1,08 | |
| | CB | 3,97 | 3,08 | 2,76 | 2,92 | 6,11 | 1,00 | 1,00 | OA |
| | DB | 3,94 | 3,08 | 2,78 | 2,93 | 6,59 | 1,00 | 1,08 | OS |

theoretical accuracy

Explanation: ux : msc x - coords. of checkpoints [μm]

uy : msc y - coords. of checkpoints [μm]

$$uxy: \sqrt{(ux^2 + uy^2) \cdot 12}$$

Rxy : ratio obtained accuracy / theoretical accuracy for xy

Rz : ratio obtained accuracy / theoretical accuracy for z

Block Jämijärvi $\sigma_0 = 3,2 \mu\text{m}$

| | σ_0 (input) | ux | uy | uxy | uz | Rxy | Rz | control point version |
|-----------------|--------------------|------|------|-------|-------|-------|------|-----------------------|
| single blocks | | | | | | | | |
| 111 | 3,2 | 4,67 | 3,50 | 4,17 | 10,83 | 1,0 | 0,9 | sparse |
| 112 | 3,2 | 3,67 | 2,83 | 3,33 | 7,00 | 1,0 | 1,1 | dense |
| 113 | 3,2 | 3,83 | 3,33 | 3,67 | 9,33 | 1,2 | 1,1 | medium |
| double blocks | | | | | | | | |
| 311 | 3,2 | 2,33 | 2,00 | 2,17 | 4,93 | 1,1 | 1,2 | sparse |
| 312 | 3,2 | 2,17 | 1,83 | 2,00 | 3,67 | 1,0 | 1,0 | dense |
| 313 | 3,2 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 4,17 | 1,2 | 1,2 | medium |
| fourfold blocks | | | | | | | | |
| 331 | 3,2 | 1,50 | 1,33 | 1,40 | 3,33 | 1,2 | 0,9 | sparse |
| 332 | 3,2 | 1,17 | 1,17 | 1,17 | 2,50 | 1,3 | 1,1 | dense |
| 333 | 3,2 | 1,50 | 1,33 | 1,40 | 2,67 | 1,3 | 1,1 | medium |

Block Willunga $\sigma_0 = 4,0 \mu\text{m}$

| | σ_0 | ux | uy | uxy | uz | Rxy | Rz | control point version |
|---------------|------------|------|------|-------|------|-------|------|-----------------------|
| single blocks | | | | | | | | |
| 11 | 4,0 | 3,7 | 3,8 | 3,8 | 15,6 | 1,4 | 2,0 | sparse |
| 12 | 4,0 | 3,4 | 3,7 | 3,6 | 8,6 | 1,2 | 1,3 | dense |
| 13 | 4,0 | 3,8 | 3,8 | 3,8 | 8,7 | 1,4 | 1,8 | medium |
| 21 | 4,0 | 3,9 | 4,0 | 4,0 | 8,6 | 1,6 | 6,2 | sparse |
| 22 | 4,0 | 3,1 | 3,3 | 3,2 | 7,5 | 1,4 | 1,3 | dense |
| 23 | 4,0 | 3,1 | 3,8 | 3,5 | 7,7 | 1,6 | 1,5 | medium |
| double blocks | | | | | | | | |
| 31 | 4,0 | 2,7 | 2,5 | 2,6 | 4,3 | 1,3 | 2,5 | sparse |
| 32 | 4,0 | 2,6 | 2,3 | 2,5 | 3,8 | 1,2 | 2,5 | dense |
| 33 | 4,0 | 2,4 | 2,5 | 2,5 | 4,2 | 1,4 | 2,2 | medium |

Conclusiones sinópticas

Accuracy increase due to the set of 16 parameters as opposed to the set of 13 parameters (compared is the Optimum according to Strategy 05) Test-block Jämijärvi:

| | Position xy | Height z |
|------------------|-------------|----------|
| Single blocks | | |
| Sparse control | 1.47 : 1 | 1.22 : 1 |
| Dense control | 1.16 : 1 | 1.10 : 1 |
| Double blocks | 1.05 : 1 | 0.95 : 1 |
| Four-fold blocks | 1.11 : 1 | 1.02 : 1 |

Accuracy increase due to the set of 20 parameters as opposed to the set of 16 parameters (compared are Optima according to Strategy 05) Testblock Willunga:

| | Position xy | Height z |
|---------------------------|-------------|----------|
| Single blocks | 1.23 : 1 | 1.25 : 1 |
| Double blocks: | | |
| sparse and medium control | 1.18 : 1 | 1.41 : 1 |
| dense control | 1.15 : 1 | 1.82 : 1 |

Raising the accuracy by increasing the number of photographs

Jämijärvi

| control situation | μ_{xy} single block | μ_z single block | | |
|-------------------|-------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| | μ_{xy} double block | μ_z double block | | |
| sparse | 1.66 | 1.87 | | |
| dense | 1.58 | 1.81 | | |
| medium | 1.71 | 1.81 | | |
| | μ_{xy} single block | μ_z single block | μ_{xy} double block | μ_z double block |
| | μ_{xy} 4-fold block | μ_z 4-fold block | μ_{xy} 4-fold block | μ_z 4-fold block |
| sparse | 2.12 | 3.38 | 1.27 | 2.00 |
| dense | 2.03 | 2.57 | 1.29 | 1.43 |
| medium | 2.21 | 2.83 | 1.25 | 1.56 |

Willunga

| | μ_{xy} single block | μ_z single block |
|--------|-------------------------|----------------------|
| | μ_{xy} double block | μ_z double block |
| sparse | 1.66 | 3.02 |
| dense | 1.37 | 1.55 |
| medium | 1.44 | 1.82 |

1.4 Resultados de una institución gubernamental en un proceso de producción

Departamento de Fotogrametría de "Landesvermessungsamt Niedersachsen", Hannover (Director: Dr. Brindöpke)

Cooperación tradicional con el Instituto de Fotogrametría de la Universidad de Hannover

Determinación de puntos de altura con alta precisión, usando bloques de franjas fotogramétricas. Objetivo: puntos de apoyo para levantamiento fotogramétrico de la topografía de mapas básicos (escala 1:5000) en el país completo.

| <i>Nombre del</i> | | <i>Cantidad</i> | <i>Cantidad</i> | <i>Puntos eliminados</i> | |
|-------------------|--------------|---------------------|-----------------|--------------------------|-------------------|
| <i>Nombre del</i> | | <i>de puntos</i> | <i>de me-</i> | <i>complet.</i> | <i>parcial</i> |
| <i>punto</i> | <i>Inst.</i> | <i>en el bloque</i> | <i>das</i> | <i>Puntos</i> | <i>eliminados</i> |
| | | <i>de puntos</i> | <i>de me-</i> | <i>complet.</i> | <i>parcial</i> |
| | | <i>en el bloque</i> | <i>das</i> | | |
| Großenkneten W | PSK 2 | 922 | 5206 | 3 | 26 |
| Großenkneten O | PSK 2 | 1006 | 5675 | 3 | 57 |
| Edeweicht O | PSK 2 | 580 | 3589 | 1 | 37 |
| Heemsen | PSK 2 | 684 | 3539 | - | 40 |
| Oldenburg W | PSK 2 | 747 | 5040 | 6 | 75 |
| Bockhop N | PK 1 | 995 | 6450 | 6 | 43 |
| Bockhop S | PK 1 | 991 | 6230 | 15 | 48 |
| Edeweicht W | PK 1 | 851 | 5587 | 9 | 45 |
| Hüttenbusch | PK 1 | 688 | 4446 | 1 | 11 |

Erreichte Genauigkeit bei Höhenblöcken

*Precisión obtenida con bloques en altura
(medidas originales)*

Precisión obtenida con bloques en altura (medidas originales).

| vuelo Bildflug | | Blöcke | | | | puntos de apoyo Punkte | | | | puntos de control Vergleichspunkte | | | | Rechen- zeit Zeit CPB (Min) | |
|-------------------|----------------------------|--------|-----|------|------|---------------------------|--------------------------------------|--|----------------------------|---------------------------------------|---|----------------------------|---|---|----|
| name Name | fecha Aufnahme Datum | h h | km | Str. | Mod. | D ₀ (mm) | altura None Lage position (cm) | mittlere höhe mittl. Höhe mittl. Höhe (cm) | Em. Korrekturen (cm) | Anz. Vergl. Punkte | mittlere höhe mittl. Höhe (cm) | Em. Korrekturen (cm) | Rechen- zeit Zeit CPB (Min) | | |
| 1977: | | | | | | | | | | | | | | | |
| Sickelsen | 19.04.76 | 6000 | 60 | 13 | 294 | 7,0 | 34 | 1 | 17 | 2,5 | + 7 | 23 | 4,3 | - 9 | 49 |
| Etzel 1 | 13.04.76 | 6000 | | 12 | 262 | 6,3 | 23 | - | 18 | 1,7 | + 5 | 16 | 3,8 | + 8 | 41 |
| Etzel 2 | 13.04.76 | 6000 | 84 | 11 | 208 | 6,3 | 20 | - | 14 | 1,7 | + 6 | 15 | 4,6 | +10 | 31 |
| Veckta 1 | 10.04.76 | 6000 | | 10 | 269 | 5,7 | 27 | - | 12 | 1,4 | - 3 | 30 | 3,9 | + 9 | 32 |
| Veckta 2 | 10.04.76 | 6000 | 96 | 9 | 243 | 6,5 | 19 | 1 | 13 | 2,8 | + 7 | 15 | 4,6 | + 8 | 23 |
| Luttum 2 | 11.04.77 | 6000 | 24 | 9 | 126 | 5,4 | 12 | 7 | - | 2,3 | + 6 | 53 | 4,8 | +10 | 11 |
| Tarnstedt 1 | 09.03.77 | 6000 | | 9 | 175 | 8,5 | 16 | - | 10 | 1,8 | + 5 | 18 | 5,7 | +13 | 14 |
| Tarnstedt 2 | 09.03.77 | 6000 | 76 | 17 | 208 | 7,7 | 25 | - | 8 | 2,1 | + 4 | 15 | 3,9 | - 8 | 19 |
| Tetters | 06.03.77 | 6000 | 52 | 13 | 230 | 7,8 | 18 | - | 13 | 2,1 | + 5 | 29 | 5,2 | +11 | 25 |
| Uchte | 07.03.77 | 6000 | 36 | 13 | 188 | 6,0 | 10 | - | 10 | 1,2 | + 3 | 30 | 3,8 | - 8 | 32 |
| Dersum-N | 31.03.77 | 6000 | 60 | 13 | 281 | 6,7 | 13 | - | 23 | 2,3 | + 6 | 31 | 5,5 | +11 | 49 |
| Westerloh-W | 10.06.77 | 6000 | 48 | 12 | 216 | 5,7 | 8 | - | 24 | 1,9 | + 5 | 28 | 5,7 | +10 | 34 |
| Magenah | 31.03.77 | 6000 | 40 | 9 | 191 | 5,6 | 19 | - | 11 | 1,8 | + 5 | 11 | 6,0 | - 9 | 19 |
| Dersum-S | 31.03.77 | 6000 | 68 | 13 | 319 | 6,2 | 17 | 2 | 28 | 2,2 | + 6 | 31 | 4,8 | +10 | 51 |
| 1978: | | | | | | | | | | | | | | | |
| ANderstedt-N | 31.03.77 | 8000 | | 11 | 195 | 7,2 | 25 | 2 | 14 | 3,0 | +10 | 18 | 3,7 | -12 | 21 |
| Anlerstedt-S | 31.03.77 | 8000 | 116 | 8 | 183 | 6,8 | 29 | - | 16 | 3,4 | + 8 | 16 | 6,9 | +12 | 18 |
| Westerloh-S | 10.05.77 | 6000 | 40 | 11 | 156 | 6,2 | 13 | - | 17 | 1,3 | + 4 | 12 | 4,5 | +11 | 20 |
| Wardenburg-W | 28.04.77 | 6000 | | 12 | 254 | 5,7 | 22 | - | 13 | 3,2 | + 8 | 21 | 5,6 | + 9 | 37 |
| Wardenburg-M | 28.04.77 | 6000 | 156 | 10 | 276 | 5,2 | 21 | - | 18 | 2,0 | + 6 | 21 | 4,4 | + 9 | 40 |
| Wardenburg-O | 28.04.77 | 6000 | | 10 | 285 | 5,7 | 27 | 1 | 13 | 2,3 | + 6 | 25 | 6,9 | +12 | 31 |
| Lindau | 20.04.77 | 12500 | 184 | 13 | 172 | 9,4 | 13 | 2 | 42 | 5,6 | +18 | 19 | 10,1 | +17 | 25 |
| Bakum-N | 26.05.77 | 6000 | | 8 | 257 | 5,8 | 20 | - | 17 | 1,2 | + 7 | 9 | 4,8 | +10 | 21 |
| Bakum-S | 30.03.77 | 6000 | 128 | 11 | 348 | 5,6 | 24 | 1 | 21 | 1,7 | + 5 | 14 | 4,4 | - 8 | 47 |
| Dangst-N | 28.04.77 | 6000 | | 10 | 226 | 6,2 | 21 | - | 9 | 1,1 | + 2 | 11 | 5,5 | +12 | 23 |
| Dangst-S | 28.04.77 | 6000 | 96 | 9 | 230 | 6,2 | 17 | - | 9 | 2,0 | + 5 | 8 | 3,3 | +12 | 25 |
| Wetschen | 09.04.78 | 6000 | 40 | 13 | 197 | 6,9 | 17 | 6 | 16 | 2,9 | + 9 | 17 | 5,4 | +11 | 23 |
| Schwarmstedt | 06.04.78 | 6000 | 40 | 9 | 197 | 6,6 | 11 | 3 | 25 | 2,3 | + 6 | 11 | 3,7 | - 6 | 17 |
| Levestah | 06.04.78 | 6000 | 56 | 9 | 290 | 6,8 | 26 | 2 | 22 | 2,7 | + 9 | 24 | 7,4 | +15 | 32 |
| Lernbruch-S | 18.04.78 | 6000 | 32 | 9 | 147 | 7,3 | 10 | 1 | 15 | 2,4 | + 6 | 13 | 7,1 | +13 | 14 |
| Lernbruch-N | 18.04.78 | 6000 | 12 | 5 | 70 | 6,5 | 7 | 2 | 5 | 1,0 | + 2 | 10 | 6,5 | +10 | 4 |
| Lüneburg | 07.04.78 | 8000 | 80 | 13 | 210 | 6,8 | 28 | 3 | 18 | 2,2 | + 7 | 17 | 5,0 | +10 | 31 |
| Mittelnbusch | 30.03.77 | 6000 | 84 | 13 | 372 | 6,8 | 33 | - | 18 | 2,1 | + 6 | 21 | 7,2 | +14 | 55 |
| 1979: | | | | | | | | | | | | | | | |
| Eschde | 6.u.7.4.78 | 8000 | 80 | 13 | 213 | 8,0 | 33 | - | 12 | 3,3 | + 8 | 15 | 7,2 | +13 | 28 |
| Sulze | 04.07.78 | 8000 | 28 | 9 | 92 | 7,2 | 10 | - | 14 | 3,7 | + 9 | 8 | 6,9 | +13 | 4 |
| Oberndorf-W | 19.04.79 | 6000 | 76 | 10 | 194 | 6,0 | 19 | - | 9 | 1,7 | + 6 | 13 | 4,0 | + 8 | 27 |
| Oberndorf-S | | 6000 | | 9 | 244 | 6,1 | 22 | 1 | 13 | 1,6 | + 4 | 12 | 4,4 | + 9 | 28 |
| Uenzen-W | 05.04.78 | 6000 | | 13 | 200 | 7,7 | 15 | - | 15 | 1,5 | + 5 | 16 | 5,8 | +14 | 35 |
| Uenzen-S | 29.03.78 | 6000 | 104 | 13 | 323 | 7,3 | 12 | - | 21 | 1,9 | + 3 | 25 | 6,0 | +12 | 53 |
| Mittelnbusch | 06.04.78 | 6000 | 44 | 9 | 272 | 6,3 | 22 | - | 14 | 2,0 | + 6 | 12 | 5,7 | +11 | 27 |
| Rosebruch | 06.04.78 | 8000 | 84 | 16 | 249 | 7,4 | 28 | 1 | 23 | 3,4 | + 8 | 21 | 5,0 | +10 | 41 |
| Grabenvarde 1 | 07.04.78 | 6000 | 48 | 14 | 260 | 8,1 | 25 | - | 10 | 2,0 | + 4 | 19 | 6,0 | +11 | 52 |
| Grabenvarde 2 | 28.06.78 | 6000 | 32 | 13 | 184 | 5,4 | 12 | 2 | 17 | 2,0 | + 6 | 16 | 5,0 | +10 | 27 |
| Edewecht-O | 26.04.78 | 6000 | | 8 | 201 | 5,9 | 18 | - | 14 | 2,0 | + 8 | 14 | 6,0 | +10 | 16 |
| Edewecht-W | 26.04.78 | 6000 | 104 | 11 | 318 | 6,9 | 21 | - | 18 | 2,0 | + 5 | 21 | 6,0 | +12 | 37 |
| Größenhnet.-N | 13.04.78 | 8000 | | 10 | 175 | 6,2 | 20 | - | 19 | 3,0 | + 8 | 22 | 6,0 | +12 | 22 |
| Größenhnet.-O | 19.04.78 | 8000 | 116 | 11 | 142 | 7,5 | 28 | - | 16 | 4,8 | + 9 | 19 | 6,8 | +13 | 25 |
| Niederndorf | 14.05.79 | 6000 | 40 | 13 | 201 | 8,2 | 18 | - | 14 | 3,3 | +10 | 15 | 6,2 | +15 | 33 |
| Bockhop-N | 13.04.79 | 6000 | | 10 | 371 | 6,6 | 27 | - | 23 | 3,0 | +11 | 22 | 5,0 | +10 | 32 |
| Bockhop-S | 15.04.79 | 6000 | 152 | 13 | 364 | 6,6 | 29 | - | 19 | 2,2 | + 8 | 25 | 5,3 | +10 | 30 |
| Oldenburg-W | 30.05.79 | 6000 | 64 | 9 | 289 | 6,4 | 31 | - | 23 | 2,0 | + 5 | 31 | 4,0 | + 8 | 28 |

Alle Bildflüge sind mit Weltwinkel Objektiven (F = 35 cm), sowie 60% Langs- u. Querüberdeckung befliegen.

* Diese Bildflüge sind am PKI gemessen. Alle Jangsen am PS42.

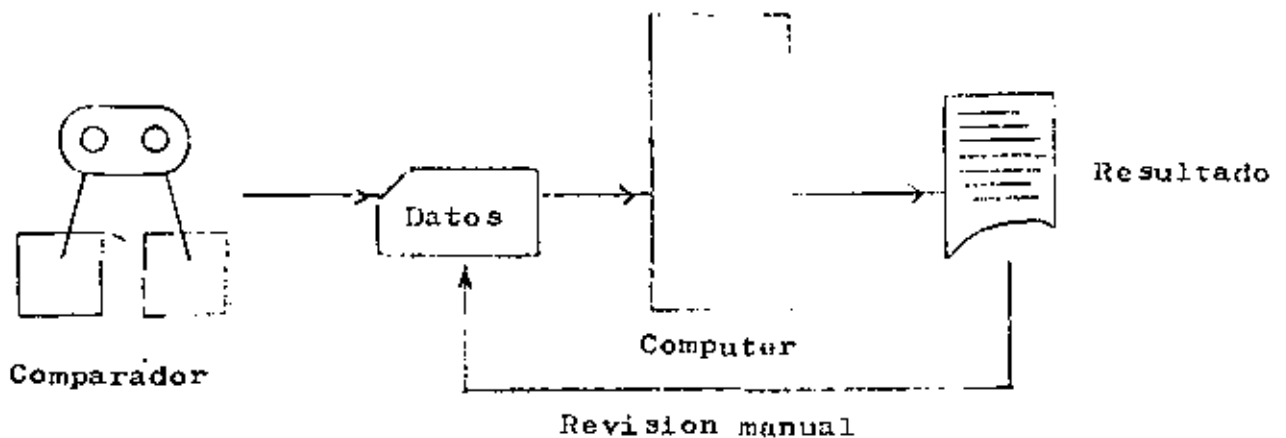
publicación 4. Seiter, 7980

ISP, Comma II

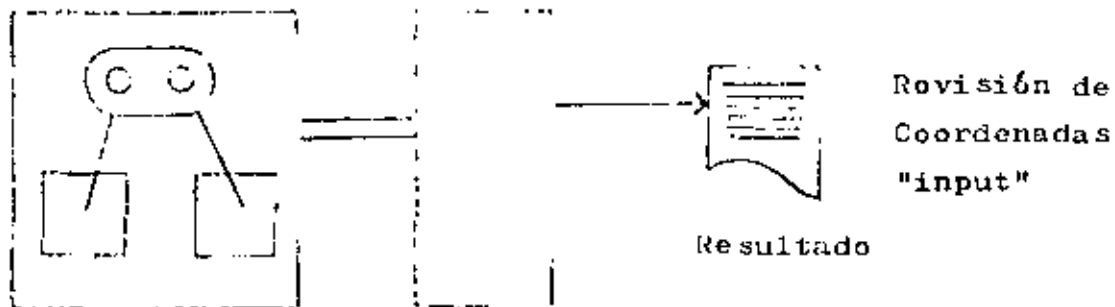
2. Computación de bloques de haces usando Minicomputadoras.

2.1 Tendencias por cálculo "on-line"

a) Organización convencional ("off-line")

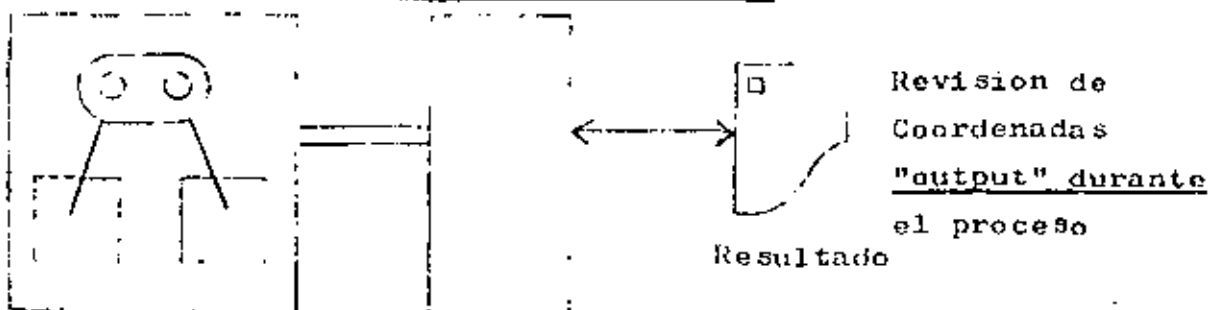


b) Organización "on-line"



Instrumento Analítico con Minicomputadora

c) Organización "on-line" interactiva

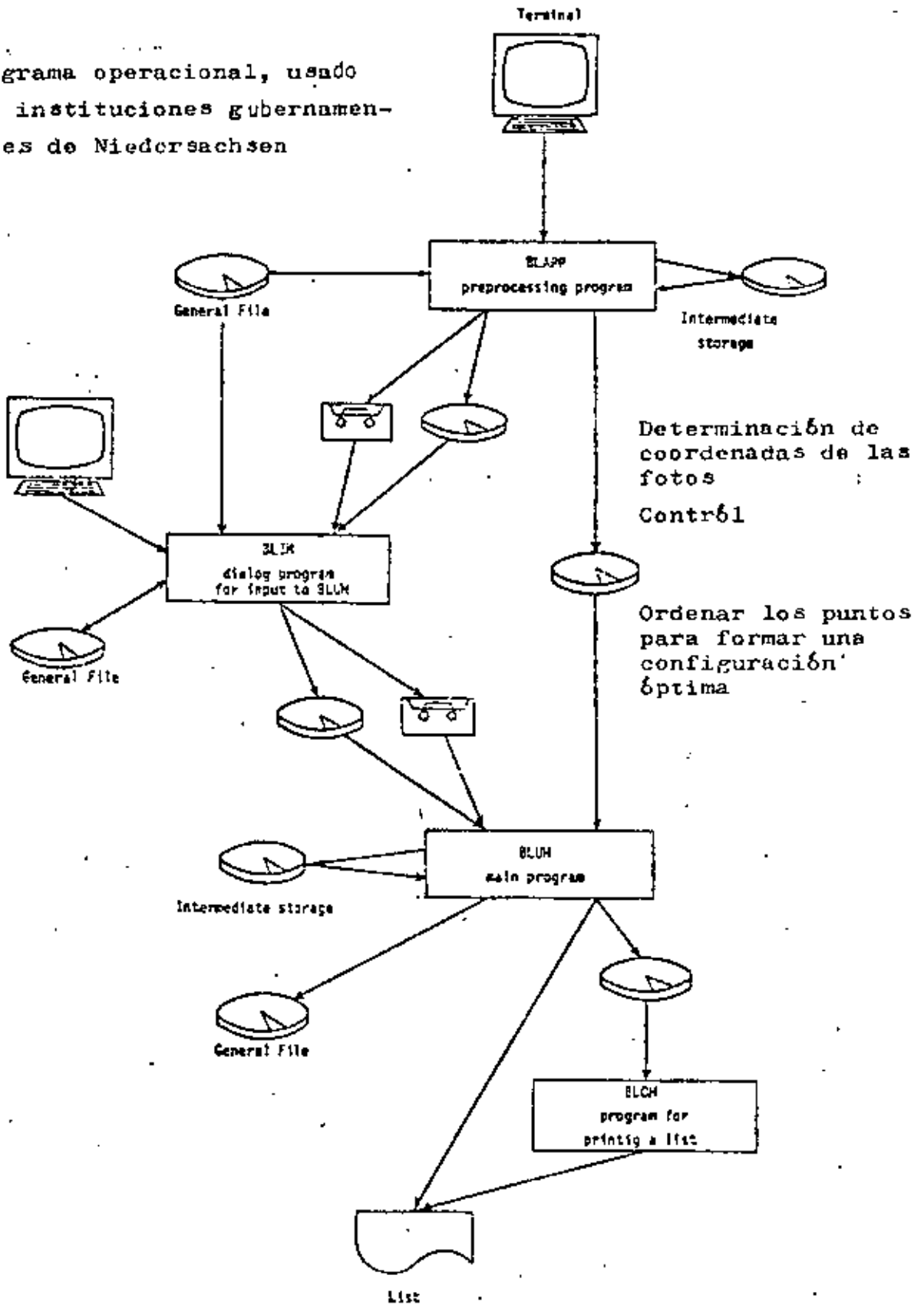


Instrumento Analítico con Minicomputer

! Discutan las ventajas y las desventajas de a), b) y c)!

2.2 Cálculo de bloques de haces con una Minicomputadora Hewlett-Packert HP 1000 (HP 21 MX) en combinación con un instrumento analítico ZEISS- Planicomp (b, Jacobsen)

Programa operacional, usado por instituciones gubernamentales de Niedersachsen



2.3 Teoría para cálculo "on-line" interactivo
(c, Dowlleit)

La aplicación del método de mínimos cuadrados según GAUSS exige valores aproximados de las incógnitas por determinar. El tratamiento de los valores aproximados como conocidos resulta en una extensión del método. Cuando introducido un modelo estocástico aproximado, será posible de determinar las incógnitas (mejorar los valores aproximados) una después de la otra, durante el proceso de medición. De este modo existe la posibilidad de controlar los puntos rigurosamente de una manera interactiva.

$$L_{X_0} = X_0 + \sigma_{X_0}^2 \quad (1)$$

Modelo Estocástico siempre conocido

$$L_{X_0} + v_{X_0} = X_0 + dX_0 ; \sigma_{X_0}^2 = Q_{XX}$$

$$v_{X_0} = dX_0 - (L_{X_0} - X_0) ; Q_{XX}$$

$$A_X = E \quad v_X = EdX - 0 ; Q_{XX} \text{ vca (1)}$$

$$v = Adx - z$$

$$A^T = \begin{bmatrix} E \\ A_L^T \end{bmatrix} ; v^T = \begin{bmatrix} v_X^T \\ v_L^T \end{bmatrix} ; z = \begin{bmatrix} 0 \\ z_L^T \end{bmatrix}$$

$$z_L = \begin{bmatrix} (L - A_L X_0) \end{bmatrix} \text{ parte "absoluta"}$$

adición de observaciones reales (L)

$$dX = (P_{XX} + A_L^T P_{LL} A_L)^{-1} \cdot A_L^T P_{LL} z$$

Ecuaciones normales y solución dX

$$v = AdX - z$$

$$AdX - v - z = 0$$

$$dX - v_X = 0$$

$$A_L dX - v_L - z_L = 0$$

$$\begin{bmatrix} A_L^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX^T \\ -v_L^T \end{bmatrix} - z_L = 0$$

Modificación de la formulación

$\bar{A}\bar{V} - W = 0$ La formulación corresponde a observaciones con condición

$$\bar{A} = \parallel A_L, I \parallel ; \quad \bar{V}^T = \parallel V_X^T, -V_L^T \parallel$$

$$W = \parallel \ell_L, - \parallel (L, A_L X_0) \parallel$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{XX} & 0 \\ 0 & Q_{LL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{XX}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{LL}^{-1} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{parte de incógnitas} \\ \leftarrow \text{parte de observaciones} \end{array} \right.$$

$$(\bar{A}Q\bar{A}^T)k = \ell_L ; \quad Q^{-1}\bar{V} = \bar{A}^T k \quad \left. \vphantom{(\bar{A}Q\bar{A}^T)k} \right\} \text{ ecuaciones normales}$$

$$k = (\bar{A}Q\bar{A}^T)^{-1} \ell_L$$

$$Q^{-1}\bar{V} = \bar{A}^T (\bar{A}Q\bar{A}^T)^{-1} \ell_L$$

$$\bar{V} = Q\bar{A}^T (\bar{A}Q\bar{A}^T)^{-1} \ell_L$$

véase § 1.6

$$dx = Q_{XX} A_L^T (A_L Q_{XX} A_L^T + Q_{LL})^{-1} \ell_L$$

$$V_L = -Q_{LL} (A_L Q_{XX} A_L^T + Q_{LL})^{-1} \ell_L$$

reformado y separado
→ resultado

$$Q_{\bar{X}\bar{X}} = Q_{XX} - Q_{XX} A_L^T (A_L Q_{XX} A_L^T + Q_{LL})^{-1} A_L Q_{XX}$$

$$Q_{\bar{X}\bar{X}}^{-1} = (A_L^T Q_{LL}^{-1} A_L + Q_{XX}^{-1})^{-1}$$

} Nuevos valores después de añadir las observaciones (usar por el paso próximo)

En introducción sucesivo de 1 punto particular, A_L tiene una fila única; Q_{LL} consiste de G_L^2 , Q_{XX} es derivado del resultado anterior. Consecuentemente se trata solamente de inversión de un "escalar". Así es posible de calcular de una manera interactiva en modo de diálogo sin gastar mucho tiempo para el cálculo.

3. Teoría estadística de la propagación de errores graves

3.1 Reflexiones generales

Cálculos de compensación

Prerequisito importante: datos sin errores graves

Consecuentemente : controlar los datos, también durante la medición pero imposible de obtener datos completamente correctos

Aerotriangulación "classica"

: eliminación de una manera interactiva, pero resulta en métodos elaborados con respecto al cálculo; exige operadores con experiencia elevada

En sistemas grandes los puntos incorrectos frecuentemente no producen errores "in situ"; los errores son mas o menos compensados o aparecen en otro lugar de posición distinta

3.2 Comunicación analítica entre los valores v y l

$$v = A x - l \quad \text{ecuaciones de errores} \quad (1)$$

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad ; \quad P = Q_{11}^{-1} \quad \text{peso} \quad (2)$$

conocido a priori

(2) en (1) :

$$v = A (A^T P A)^{-1} A^T P l - l$$

$$v = (A (A^T P A)^{-1} A^T - Q_{11}) P l$$

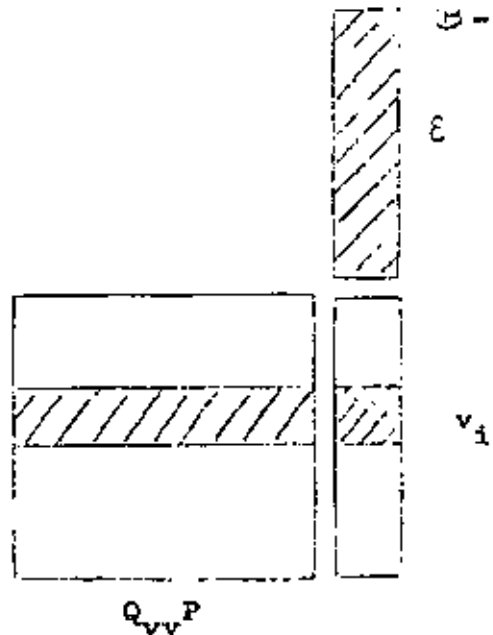
Aplicación de la ley de propagación de los errores da :

$$Q_{vv} = Q_{11} - A (A^T P A)^{-1} A^T$$

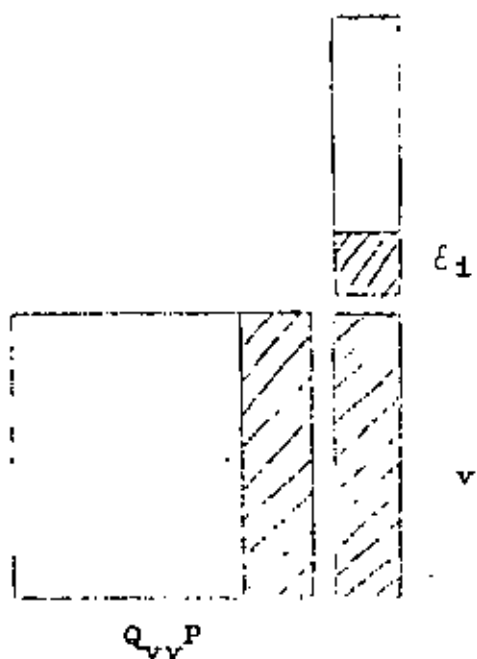
$$v = - (Q_{vv} P)^{-1} l$$
$$v = - (Q_{vv} P)^{-1} \epsilon$$

La estructura "geométrica" de $Q_{vv} P$ determina la repartición de errores de observación ϵ en el resultado

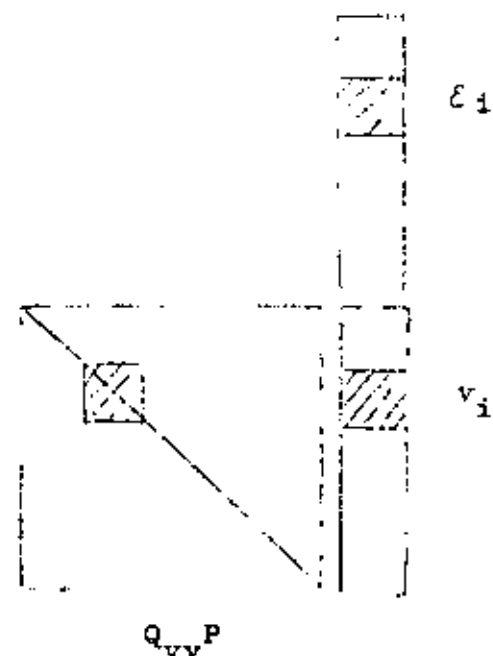
Ejemplos:



v_i es una función de todos los errores ϵ



Un error ϵ_i manipula todos los valores de v



El efecto de un error (grave) ϵ_i observado al elemento correspondiente v_i es determinado por el elemento diagonal $(Q_{vv}^P)_{ii}$

La suma de estos elementos da la redundancia r

$$r = n - u = \sum_{i=1}^k (Q_{vv}^P)_{ii}$$

n = cantidad de observaciones

u = cantidad de incógnitas

Pregunta de control: (1)

a) Demuestre Ud. la ecuación

$$r = n - u = \sum_{i=1}^k (Q_{VV} P)_{ii}$$

La determinación por exceso $n - u$ (\equiv la redundancia r) es igual la suma de los elementos diagonales de la matriz $Q_{VV}P$

b) ¿cuál es el efecto de pequeños (grandes) valores diagonales?

$$\nabla v_i = - r_i \nabla \xi_i \quad (\nabla : \text{"nabla"} [\text{Baarda}])$$

Efecto ∇v_i de un error grave $\nabla \xi_i$

3.3 "Data snooping"

Determinación de errores graves, usando los valores v_i , la variancia σ_{vi} , un factor de tolerancia k y la probabilidad α

$$P (-k \sigma_{vi} < v_i < k \sigma_{vi}) = 1 - \alpha$$

Valores $|v_i| > k \sigma_{vi}$ son eliminados

Para eliminación de errores graves con respecto del efecto de los elementos de redundancia :

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{vi}} = \frac{v_i}{\sqrt{r_i} \sigma_i} \quad \text{Normación}$$

$$|w_i| > k \quad \text{Test estadístico} \\ \text{Valores eliminados}$$

Errores graves pueden ser determinados después de la compensación solamente. Consecuentemente las coordenadas de los puntos de apoyo deben ser introducidos como incógnitas para descubrir elementos incorrectos.

Confianza interna de las observaciones

Límite teórico para detección de un error grave ∇l_i con test estadístico

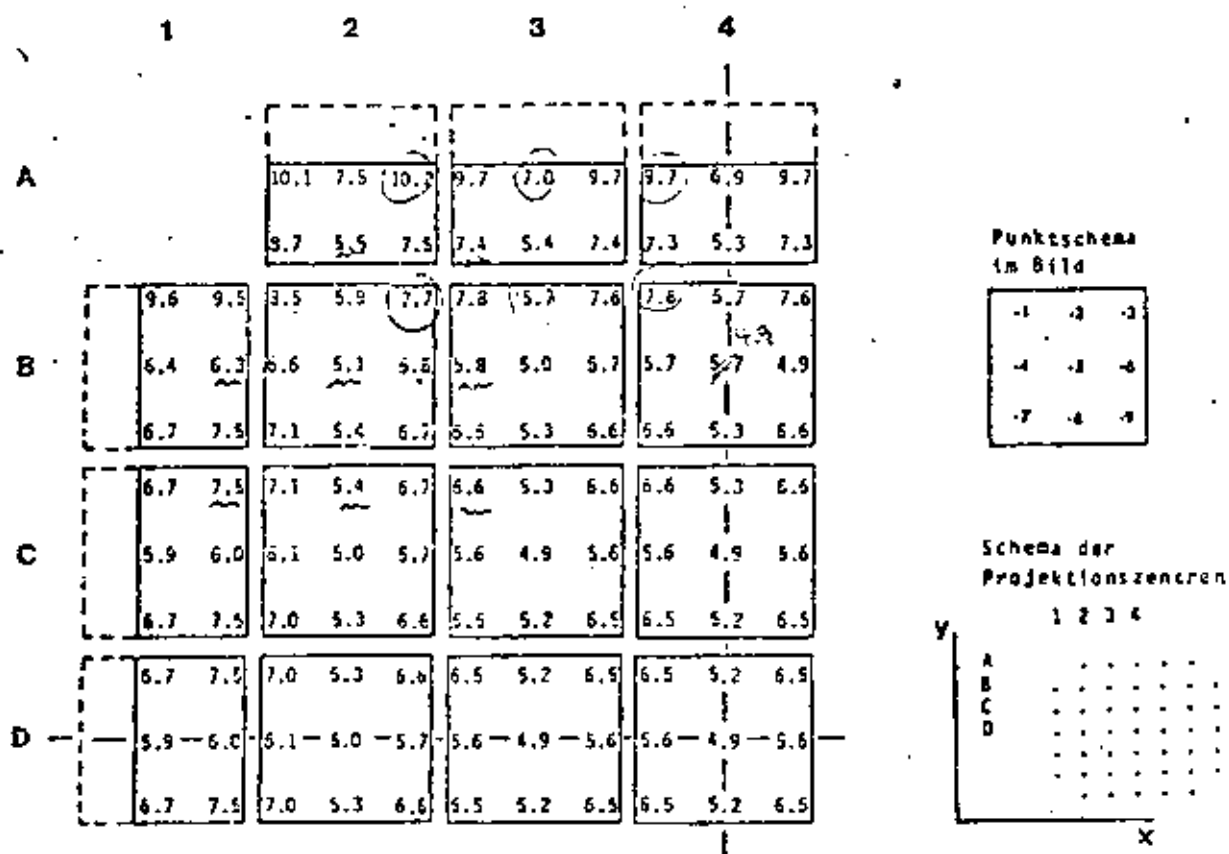
$$\nabla l_i = \sigma_i \frac{f_0}{\sqrt{r_i}} = \sigma_i f'_{oi} \quad f_0 \approx 4$$

3.4 Ejemplos prácticos

(vea Ud. "Seminar über grobe Datenfehler und die Zuverlässigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung", Universität Stuttgart, Nov. 1980)

3.41 Método "Bloque de haces "

Cálculo de los valores $\sigma'_{oi} = \sigma'_o / \sqrt{r_i}$, los que determinan confianza interna de los puntos



Posibilidad para controlar las coordenadas de las imágenes, 1/4 del bloque completo (Fürstner 1976)

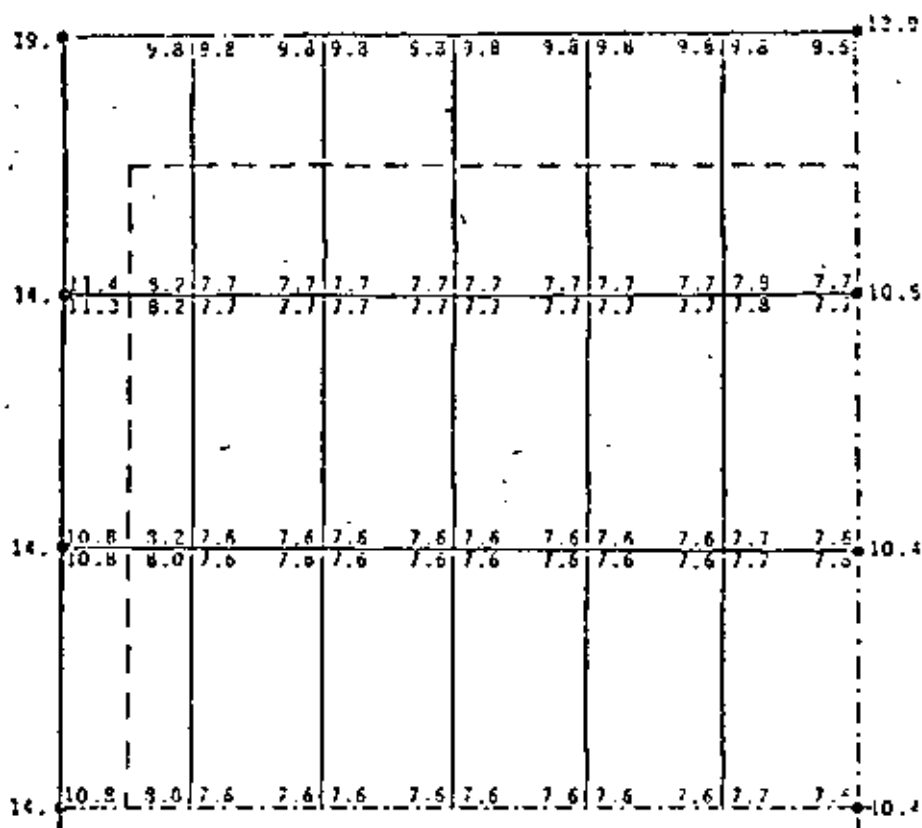
$p = q = 60\%$, 9 puntos per foto, $\sigma'_o = 4$

Supongamos que $\sigma'_1 = 5 \mu m$:

$$\nabla 1_1 = 10,2 \times 5 = 51 \mu m \quad (\text{max})$$

$$\nabla 1_1 = 4,9 \times 5 = 24,5 \mu m \quad (\text{min})$$

3.42 Bloque con modelos independientes



• Höhenmaßpunkt *Punto de apoyo (altura)*

Posibilidad para controlar las coordenadas de los modelos y de las alturas de los puntos de apoyo

$$p = q = 60 \%, \sigma_0 = 4$$

Pregunta de control (2)

a) ? Cuál es la limitante teórica para determinar un error grave de un punto de apoyo (escala de las fotos 1: 10 000

$$\sigma_1 = 10 \mu\text{m}) ?$$

b) ? Cuál es la redundancia mínima ?

3.43 Generalización

En el interior de un bloque, las condiciones para la determinación de errores graves son homogéneas.

Aproximación general:

$$\bar{r}_i = \frac{r}{n}$$

r: redundancia global

n: cantidad de observaciones

| Modellblock | | | Bündelblock | | | | | |
|-------------|-------------------------------|---------------------------|-------------|-------------------------------|----------|------|----------|------|
| q = 20 % | | | q = 60 % | | q = 20 % | | q = 60 % | |
| Block | Lage <small>km, Ym</small> | Höhe <small>Zm</small> | Block | Lage <small>km, Ym</small> | Block | Lage | Block | Lage |
| E 4 | 8.0 | 7.5 | - | - | E 9 | 6.9 | D 9 | 5.7 |
| E 6 | 6.9 | 6.9 | D 6 | 5.7 | E 18 | 5.7 | D 18 | 4.9 |
| E 8 | 5.7 | 6.2 | - | - | E 25 | 6.3 | D 25 | 5.0 |
| E 12 | 5.7 | 6.0 | D 12 | 4.9 | - | - | - | - |

Valores medios teóricos \int_{oi}^1

Los valores teóricos corresponden bien a los valores empíricos.

\int_{oi}^1 depende de la cantidad de rayos de determinación y de la geometría de intersección.

| q = 20 % | | | | q = 60 % | | | |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|--------------|----------|-------|------|------|
| Block | Lage | | Höhe u. Lage | | Block | Lage | |
| | Ecke <small>km, Ym</small> | Rand <small>km, Ym</small> | Ecke | Rand | | Ecke | Rand |
| E 4 | 21.0 | 18.0 | 12.0 | 12.0 | - | - | - |
| E 6 | 12.0 | 11.0 | - | - | D 6 | 7.6 | 6.9 |
| E 8 | 7.8 | 7.8 | 7.3 | 7.3 | - | - | - |
| E 12 | 7.3 | 7.2 | - | - | D 12 | 6.4 | 5.7 |

a) Modelos independ.

| q = 20 % | | | q = 60 % | | |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|----------|------|------|
| Block | Ecke <small>km, Ym</small> | Rand <small>km, Ym</small> | Block | Ecke | Rand |
| E 9 | 15.0 | 15.0 | D 9 | 10.0 | 9.7 |
| E 18 | 12.0 | 12.0 | D 18 | 7.0 | 6.3 |
| E 25 | 12.0 | 12.0 | D 25 | 5.1 | 5.1 |

b) Bloques de franja

Valores máximos \int_{oi}^1 a la margen de los bloques. Bloques de franja son más sensibles que modelos independientes por causa de la geometría de intersección de los rayos.

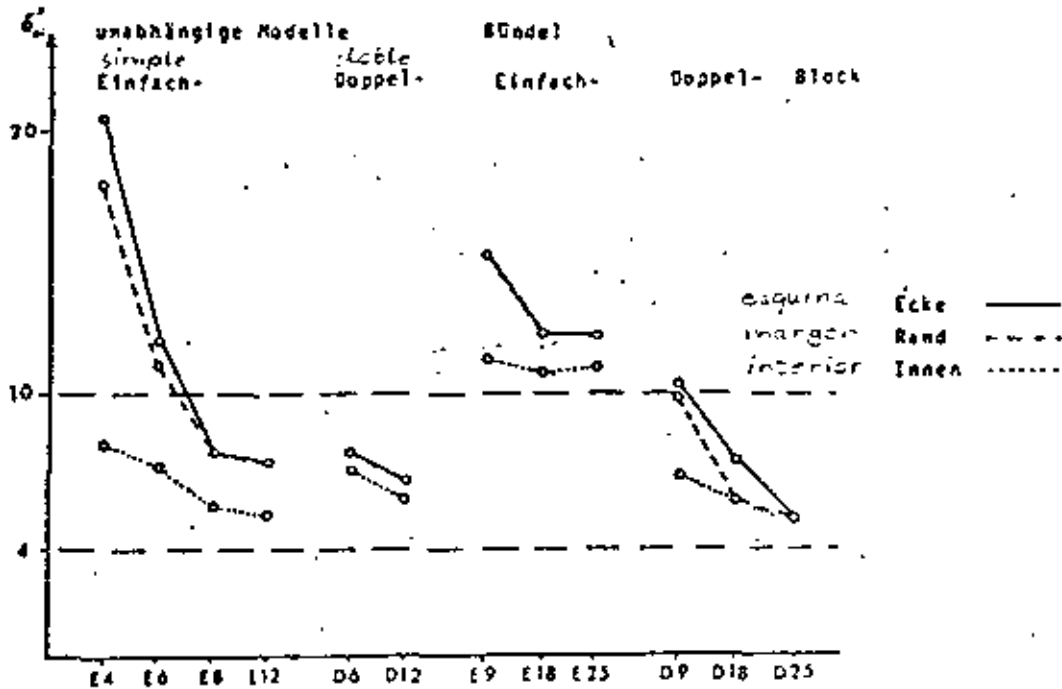
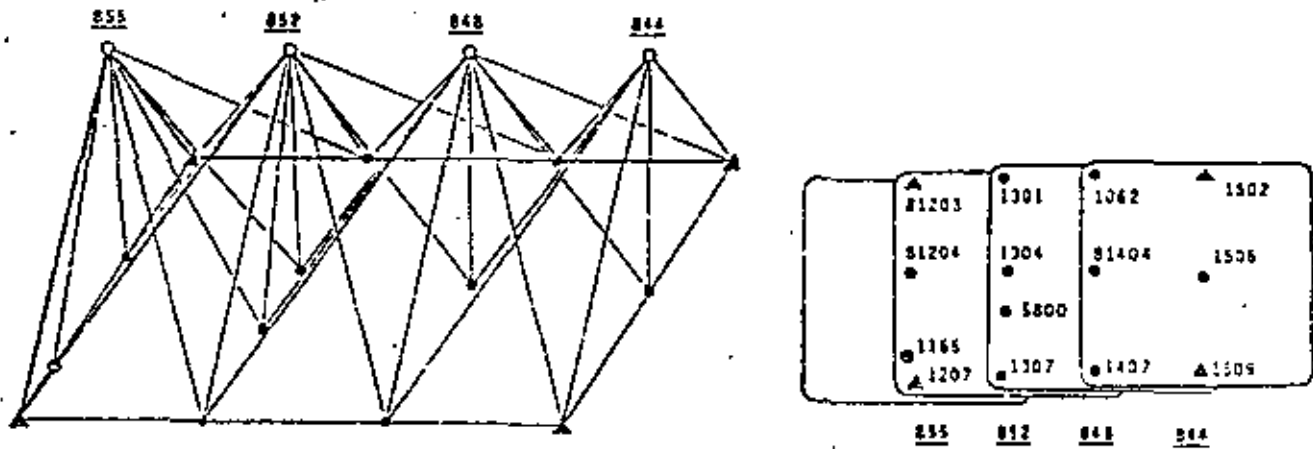


Tabla sinóptica (Schroth 1980)

3.44 Determinación de errores graves en un bloque de franjas (según Förstner)



$p = 60 \%$

$M = 1: 7500$

$\sigma_x = \sigma_y = 3.0 \mu m$ (coordenadas fotogramétricas)

$\sigma_x = \sigma_y = 1,2 \text{ cm}$ (coordenadas de puntos de apoyo)

81203

| | | |
|--------|-------|-------|
| 0.0466 | 0.195 | 0.291 |
| 0.0597 | 0.231 | 0.278 |
| 0.0184 | | |

1301

| | | |
|-------|-------|--------|
| 0.132 | 0.392 | 0.0673 |
| 0.198 | 0.262 | 0.156 |

1062

| | | |
|--------|-------|--------|
| 0.0814 | 0.335 | 0.0858 |
| 0.207 | 0.219 | 0.157 |

1502

| | | |
|-------|-------|--------|
| 0.175 | 0.152 | 0.042 |
| 0.229 | 0.140 | 0.0471 |
| | | 0.0173 |

855

81204

| | |
|-------|-------|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.303 | 0.303 |

852

1304

| | | |
|-------|-------|--------|
| 0.181 | 0.543 | 0.0945 |
| 0.469 | 0.472 | 0.429 |

848

81404

| | | |
|-------|-------|-------|
| 0.121 | 0.504 | 0.129 |
| 0.420 | 0.412 | 0.335 |

844

1506

| | |
|-------|-------|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.235 | 0.235 |

5800

| | | |
|-------|-------|--------|
| 0.455 | 0.465 | 0.0816 |
| 0.447 | 0.472 | 0.469 |

1165

| | |
|-------|-------|
| 0.309 | 0.311 |
| 0.303 | 0.304 |

0.0140

1207

| | | |
|--------|-------|-------|
| 0.0272 | 0.310 | 0.336 |
| 0.0543 | 0.226 | 0.279 |
| 0.0216 | | |

1307

| | | |
|-------|-------|--------|
| 0.136 | 0.411 | 0.0731 |
| 0.212 | 0.243 | 0.162 |

1407

| | | |
|--------|-------|--------|
| 0.0790 | 0.332 | 0.0854 |
| 0.176 | 0.195 | 0.159 |

1509

| | | |
|-------|-------|--------|
| 0.149 | 0.154 | 0.0436 |
| 0.224 | 0.120 | 0.0477 |
| | | 0.0136 |

Redundanzanteile



81203

| | | |
|------|------|------|
| 18.5 | 9.05 | 7.41 |
| 46.4 | 8.29 | 7.58 |
| 29.5 | | |

1301

| | | |
|------|------|------|
| 11.0 | 6.39 | 15.4 |
| 8.99 | 7.82 | 10.1 |

1062

| | | |
|------|------|------|
| 14.0 | 6.91 | 13.7 |
| 8.73 | 8.55 | 10.1 |

1502

| | | |
|------|------|------|
| 9.55 | 10.3 | 18.0 |
| 8.36 | 10.7 | 18.4 |
| | | 30.4 |

855

81204

| | |
|------|------|
| ∞ | ∞ |
| 7.26 | 7.23 |

852

1304

| | | |
|------|------|------|
| 9.40 | 5.43 | 13.0 |
| 5.54 | 5.82 | 6.11 |

848

81404

| | | |
|------|------|------|
| 11.5 | 5.64 | 11.1 |
| 6.17 | 6.24 | 6.91 |

844

1506

| | |
|------|------|
| ∞ | ∞ |
| 8.26 | 8.26 |

5800

| | | |
|------|------|------|
| 10.2 | 5.86 | 14.0 |
| 5.89 | 5.82 | 5.84 |

1165

| | |
|------|------|
| 7.21 | 7.17 |
| 7.27 | 7.29 |

33.8

1207

| | | |
|------|------|------|
| 24.3 | 7.19 | 6.90 |
| 17.2 | 8.41 | 7.57 |
| 27.2 | | |

1307

| | | |
|------|------|------|
| 10.5 | 6.24 | 14.8 |
| 8.69 | 8.12 | 9.94 |

1407

| | | |
|------|------|------|
| 14.2 | 6.95 | 13.7 |
| 9.54 | 9.04 | 10.0 |

1509

| | | |
|------|------|------|
| 10.4 | 10.2 | 19.2 |
| 9.46 | 11.5 | 19.1 |
| | | 34.3 |



81203

| | | |
|-------|------|------|
| 0.000 | 0.1 | -0.0 |
| 0.000 | -2.3 | 2.1 |
| 0.000 | | |

1301

| | | |
|-----|------|-----|
| 1.3 | -2.3 | 1.0 |
| 0.1 | -1.0 | 0.9 |

1052

| | | |
|------|------|-----|
| 2.9 | -5.9 | 2.9 |
| -2.7 | -0.9 | 3.5 |

1502

| | | |
|------|------|-------|
| 1.9 | -1.5 | -0.00 |
| -0.3 | -1.7 | -0.20 |
| | | 0.000 |

855

81204

| | |
|------|------|
| -0.0 | 0.0 |
| -0.2 | -0.2 |

852

1304

| | | |
|-----|------|------|
| 0.9 | -1.6 | 0.7 |
| 0.4 | 0.3 | -0.7 |

848

81404

| | | |
|------|-----|------|
| -2.2 | 4.4 | -2.2 |
| 2.1 | 3.3 | -5.5 |

844

1506

| | |
|------|------|
| 0.0 | -0.0 |
| -4.1 | 4.1 |

5800

| | | |
|-----|------|------|
| 0.8 | -1.5 | 0.7 |
| 2.7 | -2.2 | -0.5 |

1165

| | |
|------|------|
| 0.0 | -0.0 |
| -1.3 | 1.3 |

0.000

1207

| | | |
|--------|------|-----|
| -0.001 | -1.8 | 0.4 |
| 0.003 | -0.9 | 0.5 |
| 0.000 | | |

1307

| | | |
|------|------|------|
| -1.4 | 2.4 | -1.0 |
| 0.9 | -1.3 | 0.3 |

1407

| | | |
|-----|------|-----|
| 1.9 | -3.3 | 1.9 |
| 0.9 | -2.2 | 1.4 |

1509

| | | |
|-----|------|--------|
| 2.1 | -1.2 | 0.005 |
| 4.2 | -1.9 | -0.002 |
| | | 0.000 |

\underline{v}_i , ohne Fehler

sin errores graves

81203

| | | |
|-----|-------|------|
| 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | -1.56 | 1.44 |
| 0.0 | | |

1301

| | | |
|------|-------|------|
| 1.23 | -1.24 | 1.23 |
| 0.06 | -0.65 | 0.78 |

1052

| | | |
|-------|-------|------|
| 3.43 | -3.41 | 3.36 |
| -1.99 | -0.61 | 2.98 |

1502

| | | |
|-------|-------|-------|
| 1.51 | -1.26 | -1.5 |
| -0.23 | -1.50 | -0.36 |
| | | 0.0 |

855

81204

| | |
|------|-------|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.13 | -0.13 |

852

1304

| | | |
|------|-------|-------|
| 0.71 | -0.72 | 0.73 |
| 0.21 | 0.15 | -0.38 |

848

81404

| | | |
|-------|------|-------|
| -2.08 | 2.05 | -2.03 |
| 1.07 | 1.74 | -3.14 |

844

1506

| | |
|-------|------|
| 0.0 | 0.0 |
| -2.92 | 2.82 |

5800

| | | |
|------|-------|-------|
| 0.69 | -0.74 | 0.75 |
| 1.35 | -1.05 | -0.26 |

1165

| | |
|-------|------|
| 0.0 | 0.0 |
| -0.79 | 0.80 |

0.0

1207

| | | |
|-------|-------|------|
| -0.98 | -1.05 | 0.25 |
| 0.97 | -0.56 | 0.32 |
| 0.0 | | |

1307

| | | |
|-------|-------|-------|
| -1.28 | 1.25 | -1.25 |
| 0.68 | -0.86 | 0.26 |

1407

| | | |
|------|-------|------|
| 2.19 | -2.17 | 2.17 |
| 0.69 | -1.63 | 1.15 |

1509

| | | |
|------|-------|-------|
| 1.78 | -1.04 | 1.26 |
| 2.96 | -1.81 | -0.73 |
| | | 0.0 |

\underline{w}_i , ohne Fehler

sin errores graves

81203

| | | |
|--------|------|------|
| -0.005 | 0.7 | 0.08 |
| 0.010 | -5.0 | 2.1 |
| 0.002 | | |

1301

| | | |
|-----|------|------|
| 0.4 | -1.6 | 0.7 |
| 0.5 | 0.5 | -1.0 |

1062

| | | |
|------|------|-----|
| 3.0 | -6.0 | 3.0 |
| -3.8 | 0.1 | 3.6 |

1502

| | | |
|-----|------|--------|
| 3.2 | -1.6 | -0.004 |
| 3.5 | -1.9 | -0.003 |
| | | -0.002 |

855

81204

| | |
|------|------|
| 0.0 | 0.0 |
| -4.2 | -1.2 |

852

1304

| | | |
|-----|------|------|
| 3.1 | -5.5 | 2.4 |
| 4.3 | -0.6 | -3.7 |

848

81404

| | | |
|------|-----|------|
| -2.5 | 5.1 | -2.6 |
| 1.2 | 4.4 | -5.7 |

844

1506

| | |
|------|-----|
| 0.0 | 0.0 |
| -3.3 | 3.3 |

5800

| | | |
|-----|------|------|
| 2.8 | -6.9 | 2.9 |
| 6.1 | -3.6 | -2.4 |

1165

| | |
|------|------|
| 1.6 | -1.6 |
| -2.4 | 2.4 |

-0.001

1207

| | | |
|--------|------|------|
| 0.003 | -0.1 | -2.5 |
| 0.005 | -3.2 | 4.7 |
| -0.004 | | |

1307

| | | |
|--------|------|------|
| -1.007 | 1.73 | -7.3 |
| -1.6 | -0.5 | 1.9 |

1407

| | | |
|------|------|-----|
| 1.0 | -2.2 | 1.1 |
| -1.5 | -1.0 | 2.6 |

1509

| | | |
|-----|------|--------|
| 1.1 | 0.3 | 0.006 |
| 4.9 | -2.0 | -0.003 |
| | | 0.007 |

VP 1307, x

error 63 μ m

81203

| | | |
|-------|-------|-------|
| -1.96 | 0.54 | -0.49 |
| 0.13 | -3.48 | 1.61 |
| 1.30 | | |

1301

| | | |
|------|-------|-------|
| 0.81 | -0.83 | 0.85 |
| 0.40 | 0.31 | -0.84 |

1062

| | | |
|-------|-------|------|
| 3.49 | -3.47 | 3.41 |
| -2.76 | 0.07 | 3.04 |

1502

| | | |
|------|-------|-------|
| 2.56 | -1.57 | -1.32 |
| 0.11 | -1.63 | -1.11 |
| | | -1.13 |

855

81204

| | |
|------|-------|
| 0.0 | 0.0 |
| 0.74 | -0.74 |

852

1304

| | | |
|------|-------|-------|
| 2.43 | -2.51 | 2.53 |
| 2.11 | -0.30 | -1.86 |

848

81404

| | | |
|-------|------|-------|
| -2.44 | 2.40 | -2.39 |
| 0.62 | 2.31 | -3.26 |

844

1506

| | |
|-------|------|
| 0.0 | 0.0 |
| -2.28 | 2.28 |

5800

| | | |
|------|-------|-------|
| 3.25 | -3.36 | 3.43 |
| 3.03 | -1.54 | -1.18 |

1165

| | |
|-------|-------|
| 0.99 | -0.95 |
| -1.44 | 1.46 |

-0.034

1207

| | | |
|-------|-------|-------|
| 1.51 | -0.09 | -1.42 |
| 1.97 | -2.25 | 2.95 |
| -0.38 | | |

1307

| | | |
|--------|-------|-------|
| -1.423 | 9.00 | -8.44 |
| -1.423 | -0.34 | 1.57 |

1407

| | | |
|-------|-------|------|
| 1.23 | -1.24 | 1.22 |
| -1.22 | -0.75 | 2.15 |

1509

| | | |
|------|-------|-------|
| 0.91 | 0.23 | 2.27 |
| 3.35 | -1.84 | -1.13 |
| | | 1.44 |

VP 1307, x

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|------|------|-------------|-----|------|-------------|------|------|-------------|------|--------|
| <u>81203</u> | | | <u>1301</u> | | | <u>1062</u> | | | <u>1502</u> | | |
| -0.011 | 5.2 | 0.6 | -1.1 | 17 | -0.6 | 0.9 | -1.4 | 1.2 | -3.5 | 10.8 | 0.017 |
| -0.011 | -4.6 | -0.9 | 4.4 | -17 | -2.7 | 4.4 | 7.5 | -0.2 | -1.4 | 9.6 | -0.015 |
| 0.005 | | | | | | | | | | | -0.005 |

| | | | | | | | | | |
|--------------|-----|-------------|-----|------|--------------|-----|------|-------------|-----|
| <u>855</u> | | <u>852</u> | | | <u>848</u> | | | <u>844</u> | |
| <u>81204</u> | | <u>1304</u> | | | <u>81404</u> | | | <u>1506</u> | |
| 0.0 | 0.0 | -0.2 | 0.4 | -0.1 | -4.8 | 9.7 | -4.9 | 0.0 | 0.0 |
| -1.2 | 1.2 | 1.0 | 2.0 | -3.0 | -3.1 | 2.7 | 0.4 | -1.1 | 1.1 |

| | | |
|-------------|------|------|
| <u>5800</u> | | |
| 0.5 | -0.9 | 0.4 |
| 3.1 | -1.1 | -1.0 |

| | |
|-------------|------|
| <u>1165</u> | |
| 0.0 | -0.0 |
| -1.4 | 1.4 |

| | | |
|--------|-------------|------|
| 0.0 | <u>1207</u> | |
| -0.007 | -3.1 | -0.3 |
| 0.007 | -1.5 | -2.2 |
| -0.004 | | |

| | | |
|-------------|-----|------|
| <u>1307</u> | | |
| -1.3 | 2.2 | -0.9 |
| 1.2 | 0.0 | -1.2 |

| | | |
|-------------|------|------|
| <u>1407</u> | | |
| 0.4 | -0.9 | 0.5 |
| 0.0 | 8.0 | -7.9 |

| | | |
|-------------|------|-------|
| <u>1509</u> | | |
| -2.2 | -7.4 | 0.000 |
| -7.8 | 9.7 | 0.000 |
| | | 0.005 |

Σ_j VP 1062, y
error 100 μ m

| | | | | | | | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------------|-------|-------|-------------|------|-------|
| <u>81203</u> | | | <u>1301</u> | | | <u>1062</u> | | | <u>1502</u> | | |
| -4.33 | 3.92 | 0.36 | -0.98 | 0.91 | -0.83 | 1.05 | -1.11 | 1.33 | -2.82 | 4.28 | 6.21 |
| -3.75 | -7.20 | -0.55 | 3.26 | -1.10 | 2.26 | 3.25 | 5.37 | -1.02 | -0.98 | 9.54 | -5.64 |
| 3.17 | | | | | | | | | | | -3.25 |

| | | | | | | | | | |
|--------------|------|-------------|------|-------|--------------|------|-------|-------------|------|
| <u>855</u> | | <u>852</u> | | | <u>848</u> | | | <u>844</u> | |
| <u>81204</u> | | <u>1304</u> | | | <u>81404</u> | | | <u>1506</u> | |
| 0.0 | 0.0 | -0.19 | 0.17 | -0.12 | -4.55 | 4.56 | -4.54 | 0.0 | 0.0 |
| -0.70 | 0.70 | 0.50 | 0.98 | -1.55 | -1.57 | 1.39 | 0.25 | -0.76 | 0.76 |

| | | |
|-------------|-------|------|
| <u>5800</u> | | |
| 0.42 | -0.46 | 0.49 |
| 1.08 | -0.53 | 0.50 |

| | |
|-------------|------|
| <u>1165</u> | |
| 0.06 | 0.02 |
| -0.85 | 0.87 |

| | | |
|-------|-------------|-------|
| -0.01 | <u>1207</u> | |
| -3.78 | -1.86 | -0.17 |
| 2.52 | -1.06 | -1.77 |
| -2.62 | | |

| | | |
|-------------|------|-------|
| <u>1307</u> | | |
| -1.17 | 1.14 | -1.11 |
| 0.89 | 0.04 | -0.98 |

| | | |
|-------------|-------|-------|
| <u>1407</u> | | |
| 0.46 | -0.51 | 0.55 |
| 0.05 | 5.96 | -6.59 |

| | | |
|-------------|-------|------|
| <u>1509</u> | | |
| -1.87 | -6.24 | 0.83 |
| -5.67 | 3.40 | 7.58 |
| | | 7.28 |

Σ_j VP 1062, y

81203

| | | |
|--------|-----|-------|
| 0.017 | 0.6 | -1.02 |
| 0.019 | 1.2 | 1.2 |
| -0.015 | | |

1301

| | | |
|------|------|------|
| -0.3 | 0.7 | -0.3 |
| -1.8 | -3.7 | 5.0 |

1062

| | | |
|------|------|-----|
| 1.2 | -2.4 | 1.2 |
| -9.4 | 3.0 | 8.4 |

1502

| | | |
|------|------|--------|
| -2.6 | -3.2 | -0.015 |
| -1.0 | -6.0 | 0.016 |
| | | 0.015 |

855

81204

| | |
|------|-----|
| 0.0 | 0.0 |
| -2.2 | 2.2 |

852

1304

| | | |
|-----|------|------|
| 0.7 | -1.2 | 0.6 |
| 0.3 | 4.2 | -4.5 |

848

81404

| | | |
|------|-----|------|
| -2.3 | 4.7 | -2.3 |
| 4.1 | 0.2 | -4.4 |

844

1506

| | |
|------|------|
| 0.0 | -0.1 |
| -5.1 | 5.1 |

1165

| | |
|------|-----|
| -4.0 | 4.0 |
| -1.9 | 1.9 |

5800

| | | |
|-----|------|------|
| 0.8 | -1.5 | 0.7 |
| 2.5 | 1.0 | -3.5 |

1407

| | | |
|------|------|-----|
| 3.1 | -6.4 | 3.2 |
| -4.4 | -0.3 | 4.8 |

1509

| | | |
|------|------|--------|
| 7.7 | 1.2 | -0.007 |
| -2.5 | -5.3 | -0.013 |
| | | 0.015 |

0.001

1207

| | | |
|--------|------|-----|
| 0.008 | -1.0 | 3.4 |
| -0.017 | 2.6 | 1.4 |
| 0.013 | | |

1307

| | | |
|------|------|-----|
| 0.2 | -0.3 | 0.0 |
| -0.6 | -5.0 | 5.6 |

: \underline{y}_j , PP 1509, z

error 1,0 m

81203

| | | |
|-------|------|-------|
| 6.57 | 0.45 | -6.31 |
| 4.73 | 0.84 | 4.54 |
| -9.49 | | |

1301

| | | |
|-------|-------|-------|
| -0.31 | 0.62 | -0.39 |
| -1.39 | -2.06 | 4.18 |

1062

| | | |
|-------|-------|------|
| 1.47 | -1.41 | 1.31 |
| -6.95 | 2.16 | 5.39 |

1502

| | | |
|-------|-------|-------|
| -7.63 | -2.71 | -6.73 |
| -2.06 | -5.38 | 6.02 |
| | | 9.69 |

855

81204

| | |
|-------|------|
| 0.0 | 0.0 |
| -1.36 | 1.36 |

852

1304

| | | |
|------|-------|-------|
| 0.52 | -0.54 | 0.62 |
| 0.14 | 2.02 | -2.27 |

848

81404

| | | |
|-------|------|-------|
| -2.24 | 2.22 | -2.17 |
| 2.11 | 0.11 | -2.52 |

844

1506

| | |
|-------|------|
| 0.0 | 0.0 |
| -3.52 | 3.50 |

1165

| | |
|-------|------|
| -0.80 | 0.62 |
| -1.15 | 1.18 |

5800

| | | |
|------|-------|-------|
| 0.66 | -0.72 | 0.80 |
| 1.24 | 0.50 | -1.72 |

1407

| | | |
|-------|--------|------|
| 3.69 | -3.71 | 3.69 |
| -3.52 | -0.241 | 4.00 |

1509

| | | |
|------|-------|-------|
| 6.66 | 1.03 | -2.33 |
| 1.75 | -5.67 | -6.59 |
| | | 0.015 |

0.63

1207

| | | |
|-------|-------|------|
| 4.09 | -0.59 | 5.42 |
| -6.11 | 1.84 | 0.83 |
| 7.32 | | |

1307

| | | |
|-------|-------|------|
| 0.16 | -0.16 | 0.06 |
| -0.44 | -3.75 | 4.60 |

: \underline{w}_j , PP 1509, z

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|------|-------|-----|----|--------|--|--|--|-----|----|------|----|-----|------|--|------|----|------|-----|-----|------|---|------|-----|-------|-----|----|-------|--|--|-------|
| 81203 | 1301 | 1062 | 1502 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.005</td><td style="padding: 2px;">64</td><td style="padding: 2px;">-104</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.005</td><td style="padding: 2px;">-19</td><td style="padding: 2px;">47</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-0.004</td><td></td><td></td></tr> </table> | 0.005 | 64 | -104 | 0.005 | -19 | 47 | -0.004 | | | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-32</td><td style="padding: 2px;">55</td><td style="padding: 2px;">-2.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">29</td><td style="padding: 2px;">-24</td><td style="padding: 2px;">-0.6</td></tr> </table> | -32 | 55 | -2.0 | 29 | -24 | -0.6 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-0.8</td><td style="padding: 2px;">14</td><td style="padding: 2px;">-0.6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-33</td><td style="padding: 2px;">124</td><td style="padding: 2px;">-9.2</td></tr> </table> | -0.8 | 14 | -0.6 | -33 | 124 | -9.2 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-3.7</td><td style="padding: 2px;">9.7</td><td style="padding: 2px;">0.007</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-36</td><td style="padding: 2px;">50</td><td style="padding: 2px;">0.000</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td></td><td style="padding: 2px;">0.008</td></tr> </table> | -3.7 | 9.7 | 0.007 | -36 | 50 | 0.000 | | | 0.008 |
| 0.005 | 64 | -104 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.005 | -19 | 47 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -0.004 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -32 | 55 | -2.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 29 | -24 | -0.6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -0.8 | 14 | -0.6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -33 | 124 | -9.2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -3.7 | 9.7 | 0.007 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -36 | 50 | 0.000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 0.008 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|------|-------|------|-----|--|-----|------|-----|-----|-----|------|--|------|------|------|------|-----|-----|---|-----|-----|------|-----|
| 855 | 852 | 848 | 844 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 81204 | 1304 | 81404 | 1506 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.1</td><td style="padding: 2px;">0.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-2.6</td><td style="padding: 2px;">2.6</td></tr> </table> | 0.1 | 0.0 | -2.6 | 2.6 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1.7</td><td style="padding: 2px;">-3.2</td><td style="padding: 2px;">1.5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">4.8</td><td style="padding: 2px;">4.9</td><td style="padding: 2px;">-9.7</td></tr> </table> | 1.7 | -3.2 | 1.5 | 4.8 | 4.9 | -9.7 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-5.3</td><td style="padding: 2px;">10.8</td><td style="padding: 2px;">-5.4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-1.9</td><td style="padding: 2px;">0.7</td><td style="padding: 2px;">1.7</td></tr> </table> | -5.3 | 10.8 | -5.4 | -1.9 | 0.7 | 1.7 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.0</td><td style="padding: 2px;">0.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-1.4</td><td style="padding: 2px;">1.3</td></tr> </table> | 0.0 | 0.0 | -1.4 | 1.3 |
| 0.1 | 0.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2.6 | 2.6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.7 | -3.2 | 1.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4.8 | 4.9 | -9.7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -5.3 | 10.8 | -5.4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1.9 | 0.7 | 1.7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.0 | 0.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1.4 | 1.3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------|--------|------|--------|--|-----|-------|-----|-----|---|------|--|------|------|------|------|--|------|---|-----|------|--------|------|---|-------|------|--------|--------|-----|-------|--|--|--------|
| 1165 | 5800 | 1407 | 1509 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.6</td><td style="padding: 2px;">-0.6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-3.1</td><td style="padding: 2px;">3.2</td></tr> </table> | 0.6 | -0.6 | -3.1 | 3.2 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">3.5</td><td style="padding: 2px;">-6.3</td><td style="padding: 2px;">2.8</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">5.3</td><td style="padding: 2px;">0.7</td><td style="padding: 2px;">-5.9</td></tr> </table> | 3.5 | -6.3 | 2.8 | 5.3 | 0.7 | -5.9 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.8</td><td style="padding: 2px;">-1.9</td><td style="padding: 2px;">1.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-7.8</td><td style="padding: 2px;">11.2</td><td style="padding: 2px;">-3.2</td></tr> </table> | 0.8 | -1.9 | 1.0 | -7.8 | 11.2 | -3.2 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.5</td><td style="padding: 2px;">-3.5</td><td style="padding: 2px;">-0.003</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-8.9</td><td style="padding: 2px;">4.8</td><td style="padding: 2px;">0.002</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td></td><td style="padding: 2px;">-0.007</td></tr> </table> | 2.5 | -3.5 | -0.003 | -8.9 | 4.8 | 0.002 | | | -0.007 | | | | | |
| 0.6 | -0.6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -3.1 | 3.2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.5 | -6.3 | 2.8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5.3 | 0.7 | -5.9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.8 | -1.9 | 1.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -7.8 | 11.2 | -3.2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.5 | -3.5 | -0.003 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -8.9 | 4.8 | 0.002 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | -0.007 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.000 | 1207 | 1307 | 1509 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.005</td><td style="padding: 2px;">-0.8</td><td style="padding: 2px;">5.8</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-0.010</td><td style="padding: 2px;">-0.5</td><td style="padding: 2px;">2.9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.008</td><td></td><td></td></tr> </table> | 0.005 | -0.8 | 5.8 | -0.010 | -0.5 | 2.9 | 0.008 | | | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-8.3</td><td style="padding: 2px;">14.4</td><td style="padding: 2px;">-6.1</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-2.9</td><td style="padding: 2px;">-3.0</td><td style="padding: 2px;">5.6</td></tr> </table> | -8.3 | 14.4 | -6.1 | -2.9 | -3.0 | 5.6 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.8</td><td style="padding: 2px;">-1.9</td><td style="padding: 2px;">1.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-7.8</td><td style="padding: 2px;">11.2</td><td style="padding: 2px;">-3.2</td></tr> </table> | 0.8 | -1.9 | 1.0 | -7.8 | 11.2 | -3.2 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.5</td><td style="padding: 2px;">-3.5</td><td style="padding: 2px;">-0.003</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-8.9</td><td style="padding: 2px;">4.8</td><td style="padding: 2px;">0.002</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td></td><td style="padding: 2px;">-0.007</td></tr> </table> | 2.5 | -3.5 | -0.003 | -8.9 | 4.8 | 0.002 | | | -0.007 |
| 0.005 | -0.8 | 5.8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -0.010 | -0.5 | 2.9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.008 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -8.3 | 14.4 | -6.1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2.9 | -3.0 | 5.6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.8 | -1.9 | 1.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -7.8 | 11.2 | -3.2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.5 | -3.5 | -0.003 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -8.9 | 4.8 | 0.002 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | -0.007 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

v_i , 3 Fehler

Efecto común de los 3 errores

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------|-------|------|------|------|------|-------|--|--|--|-------|------|-------|------|-------|-------|---|-------|------|-------|-------|------|------|--|-------|------|------|-------|------|------|--|--|------|
| 81203 | 1301 | 1062 | 1502 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.270</td><td style="padding: 2px;">4.80</td><td style="padding: 2px;">6.40</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.79</td><td style="padding: 2px;">2.71</td><td style="padding: 2px;">2.74</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-5.01</td><td></td><td></td></tr> </table> | 0.270 | 4.80 | 6.40 | 2.79 | 2.71 | 2.74 | -5.01 | | | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-2.94</td><td style="padding: 2px;">2.94</td><td style="padding: 2px;">-0.84</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.17</td><td style="padding: 2px;">-1.54</td><td style="padding: 2px;">-0.47</td></tr> </table> | -2.94 | 2.94 | -0.84 | 2.17 | -1.54 | -0.47 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-0.88</td><td style="padding: 2px;">0.32</td><td style="padding: 2px;">-0.63</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-2.45</td><td style="padding: 2px;">8.84</td><td style="padding: 2px;">-7.2</td></tr> </table> | -0.88 | 0.32 | -0.63 | -2.45 | 8.84 | -7.2 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-5.92</td><td style="padding: 2px;">7.42</td><td style="padding: 2px;">1.25</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-2.78</td><td style="padding: 2px;">4.42</td><td style="padding: 2px;">0.03</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td></td><td style="padding: 2px;">5.25</td></tr> </table> | -5.92 | 7.42 | 1.25 | -2.78 | 4.42 | 0.03 | | | 5.25 |
| 0.270 | 4.80 | 6.40 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.79 | 2.71 | 2.74 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -5.01 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2.94 | 2.94 | -0.84 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.17 | -1.54 | -0.47 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -0.88 | 0.32 | -0.63 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2.45 | 8.84 | -7.2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -5.92 | 7.42 | 1.25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2.78 | 4.42 | 0.03 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 5.25 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|--|------|-------|------|------|--|-------|---|-------|-------|-------|-------|---|-------|--|------|-------|-------|-------|--|------|-------|-------|-------|------|------|--|--|-------|
| 855 | 852 | 848 | 844 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 81204 | 1304 | 81404 | 1506 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.0</td><td style="padding: 2px;">0.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-1.57</td><td style="padding: 2px;">1.57</td></tr> </table> | 0.0 | 0.0 | -1.57 | 1.57 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">1.34</td><td style="padding: 2px;">-1.44</td><td style="padding: 2px;">1.64</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.33</td><td style="padding: 2px;">2.78</td><td style="padding: 2px;">-4.92</td></tr> </table> | 1.34 | -1.44 | 1.64 | 2.33 | 2.78 | -4.92 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-5.10</td><td style="padding: 2px;">5.09</td><td style="padding: 2px;">-4.99</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-0.98</td><td style="padding: 2px;">0.35</td><td style="padding: 2px;">0.74</td></tr> </table> | -5.10 | 5.09 | -4.99 | -0.98 | 0.35 | 0.74 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.0</td><td style="padding: 2px;">0.0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-0.57</td><td style="padding: 2px;">0.87</td></tr> </table> | 0.0 | 0.0 | -0.57 | 0.87 | | | | | | | | | | |
| 0.0 | 0.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1.57 | 1.57 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.34 | -1.44 | 1.64 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.33 | 2.78 | -4.92 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -5.10 | 5.09 | -4.99 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -0.98 | 0.35 | 0.74 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.0 | 0.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -0.57 | 0.87 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.32 | 1165 | 5800 | 1407 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.34</td><td style="padding: 2px;">-0.33</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-1.87</td><td style="padding: 2px;">1.92</td></tr> </table> | 0.34 | -0.33 | -1.87 | 1.92 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.95</td><td style="padding: 2px;">-3.06</td><td style="padding: 2px;">3.22</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.64</td><td style="padding: 2px;">0.33</td><td style="padding: 2px;">-2.89</td></tr> </table> | 2.95 | -3.06 | 3.22 | 2.64 | 0.33 | -2.89 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.98</td><td style="padding: 2px;">-1.11</td><td style="padding: 2px;">1.17</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-6.15</td><td style="padding: 2px;">8.41</td><td style="padding: 2px;">-2.69</td></tr> </table> | 0.98 | -1.11 | 1.17 | -6.15 | 8.41 | -2.69 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.15</td><td style="padding: 2px;">-2.95</td><td style="padding: 2px;">-3.43</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-6.27</td><td style="padding: 2px;">4.56</td><td style="padding: 2px;">0.50</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td></td><td style="padding: 2px;">-5.37</td></tr> </table> | 2.15 | -2.95 | -3.43 | -6.27 | 4.56 | 0.50 | | | -5.37 | | | | | |
| 0.34 | -0.33 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -1.87 | 1.92 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.95 | -3.06 | 3.22 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.64 | 0.33 | -2.89 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.98 | -1.11 | 1.17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6.15 | 8.41 | -2.69 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.15 | -2.95 | -3.43 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6.27 | 4.56 | 0.50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | -5.37 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.37 | 1207 | 1307 | 1509 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.37</td><td style="padding: 2px;">-0.45</td><td style="padding: 2px;">3.32</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-3.60</td><td style="padding: 2px;">-0.95</td><td style="padding: 2px;">1.82</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">4.41</td><td></td><td></td></tr> </table> | 2.37 | -0.45 | 3.32 | -3.60 | -0.95 | 1.82 | 4.41 | | | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-7.50</td><td style="padding: 2px;">7.47</td><td style="padding: 2px;">-7.53</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-2.07</td><td style="padding: 2px;">-2.01</td><td style="padding: 2px;">4.67</td></tr> </table> | -7.50 | 7.47 | -7.53 | -2.07 | -2.01 | 4.67 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">0.98</td><td style="padding: 2px;">-1.11</td><td style="padding: 2px;">1.17</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-6.15</td><td style="padding: 2px;">8.41</td><td style="padding: 2px;">-2.69</td></tr> </table> | 0.98 | -1.11 | 1.17 | -6.15 | 8.41 | -2.69 | <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">2.15</td><td style="padding: 2px;">-2.95</td><td style="padding: 2px;">-3.43</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;">-6.27</td><td style="padding: 2px;">4.56</td><td style="padding: 2px;">0.50</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px;"></td><td></td><td style="padding: 2px;">-5.37</td></tr> </table> | 2.15 | -2.95 | -3.43 | -6.27 | 4.56 | 0.50 | | | -5.37 |
| 2.37 | -0.45 | 3.32 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -3.60 | -0.95 | 1.82 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4.41 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -7.50 | 7.47 | -7.53 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -2.07 | -2.01 | 4.67 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.98 | -1.11 | 1.17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6.15 | 8.41 | -2.69 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.15 | -2.95 | -3.43 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| -6.27 | 4.56 | 0.50 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | -5.37 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

v_i , 3 Fehler

Bibliografia:

- ACKERMANN, F.: On the Theoretical Accuracy of Planimetric Block Triangulation, *Photogrammetria*, 21, 1966, S. 145-170
- Ackermann, F.: The concept of Reliability in Aerial Triangulation; The Professor Sotaini Jubilee Volume, 1979.
- F. Ackermann, M. Schilcher, Auto- and cross-correlation of image coordinates; ISP Commission III Symposium Moscow 1978.
- F. Ackermann, R. Bettin, An empirical test on point transfer in aerial triangulation; Presented paper, Comm. III ISP Congress Hamburg 1980.
- Ackermann, F. et al.: Seminar "Grobe Datenfehler und die Zuverlässigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung", Stuttgart 1980
- Amer, F.A.A.F.: Theoretical Reliability Studies for some Elementary Photogrammetric Procedures, paper presented at Aerial Triangulation Symposium, University of Queensland, Australia, October 1979.
- Baarda, W.: Precision, Accuracy, and Reliability of Observations, Computing center of the Delft Geodetic Institute, 1965.
- BAARDA, W.: Statistical Concepts in Geodesy, Netherlands Geodetic Commission, New Series, Vol. 2, No. 4, Delft 1967
- BAARDA, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks, Neth. Geod. Comm., Vol. 2, No. 5, 1968
- BAARDA, W.: S-Transformations and Criterion Matrices, Neth. Geod. Comm., Vol. 5, No. 1, 1973
- BAARDA, W.: Reliability and Precision of Networks, Pres. Paper to VIIIth Int. Course for Eng. Surveys of High Precision, Darmstadt 1976
- D.C. Brown, The bundle adjustment - progress and prospects; invited paper Commission III, ISP Congress Helsinki 1976.
- Dowdleit, G.: An Online Bundle Block Adjustment for Analytical Plotter, ISP Comm. III, Hamburg 1980
- H. Ebner, Self calibrating block adjustment; invited paper, Comm. III, ISP Congress Helsinki 1976.
- H. Ellenbeck, G. Kupfer, Bundle adjustment with field- and self calibration - recent results; ISP Comm. III Symposium Moscow 1978.
- S.F. El Hakim, W. Faig, Compensation of systematic image errors using spherical harmonics; Proceedings ASP Fall Techn. Meeting Little Rock, 1977.
- S.F. El Hakim, W. Faig, Combined geodetic and photogrammetric adjustment for densification of control networks; Proceedings ASP Convention Washington D.C. 1979.
- Hörnner, W.: Die Suche nach groben Fehlern in photogrammetrischen Lageblöcken, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 240, 1978.

- FÜRSTNER, W.: Das Rechenprogramm TRINA für geodätische Lagernetze in der Landesvermessung. Nachr. a. d. öff. Vermessungsdienst, Nordrhein-Westfalen, Heft 2, 1979
- FÜRSTNER, W.: On Internal and External Reliability of Photogrammetric Coordinates, Pres. Paper to ASP-ACSM-Convention, Washington 1979(b)
- FÜRSTNER, W.: Evaluation of Block Adjustment Results, Paper pres. to XIV Congr. of the Intern. Soc. for Photogrammetry, Hamburg 1980
- L.W. Fritz, H.H. Schmid, Stellar calibration of the Orbigon lens; Photogrammetric Engineering, 2, 1974
- Grün, A.: Die simultane Kompensation systematischer Fehler mit dem Münchener Bündelprogramm MBOP. Presented Paper to the XIIIth Congress of the ISP, Commission III, Helsinki 1976.
- Grün, A.: Experiences with Self-Calibrating Bundle Adjustment. Presented Paper to the ACSM-ASP Convention, Washington, D.C., 1978.
- A. Grün, Accuracy reliability and statistics in close range photogrammetry; ISP Comm. V Symposium Stockholm 1978.
- A. Grün, Progress in photogrammetric point determination by compensation of systematic errors and detection of gross errors; ISP Comm. III Symposium Moscow 1978.
- A. Grün, Self-calibration versus test field calibration; Proceedings ISP Working Group III/3 Seminar Aalborg 1979.
- Grün, A.: Gross Error Detection in Bundle Adjustment, paper presented at Aerial Triangulation Symp., Univ. of Queensland, Australia, Oct.1979.
- G. Haug, Bestimmung und Korrektur systematischer Bild- und Modelldeformationen in der Aerotriangulation am Beispiel des Testfeldes "Oberschwaben"; Dissertation Universität Stuttgart 1979.
- J. Heikkilä, K. Inkilä, Self calibration bundle adjustment; The Photogrammetric Journal of Finland, Vol. 7 No. 2, 1978.
- K. Jacobsen, Test Königshügel - Control by bundle adjustment; presented paper, Commission III, ISP Congress Helsinki 1976
- K. Jacobsen, Detection and consideration of systematic image errors using the Hannover bundle block adjustment; Proceedings ISP Working Group III/3 Seminar Aalborg 1979.
- Jacobsen, K.: Attempt at Obtaining the Best Possible Accuracy in Bundle Block Adjustment. Presented Paper to the XIVth Congress of the ISP, Commission III, Hamburg 1980.
- Jacobsen, K., Worzyk, M.: Experiences with Bundle Block Adjustments on Mini-Computers. ISP Comm. III, Hamburg 1980
- J. Juhl, Results from Jämijärvi, Proceedings ISP Working Group III/3 Seminar Aalborg 1979.
- Kilpelä, E.: Compensation of Systematic Errors of Image and Model Coordinates (Report of Working Group III/3). ISP Hamburg, Comm. III, 1980

H. Klein, New results of bundle block adjustments with additional parameters; Proceedings 37th Photogrammetric Week Stuttgart 1979.

H. Klein, Bundle adjustments with additional parameters of the testblock Appenweier; Presented paper, Comm.III ISP Congress Hamburg 1980.

K.-R.Koch: Ein allgemeiner Hypothesentest für Ausgleichungsergebnisse.
Allg.Vermessungsnachrichten 1975, S.339

Kraus, K. : Verschiedene Transformationen und Indikatoren, zur Lokalisierung grober Datenfehler, Allgemeine Vermessungsnachrichten, 1975, Nr.1, p.p. 23-24.

KREYSZIG, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen, Göttingen, 1968

KROGER, J.: Statistisches Verfahren zur Lokalisierung grober Beobachtungsfehler in geodätischen Netzen, dargestellt an Streckennetzen, Dissertation Hannover, 1976

G. Kupfer, On accuracy achieved by different triangulation procedures; presented paper, Comm.III, ISP Congress Helsinki 1976.

G.Passon d'Autume: Le Traitement des Erreurs Systematiques dans l'Aerotriangulation.
ISP Com. III, Ottawa 1972

Wauelshagen, L.: Teilkalibrierung eines photogrammetrischen Systems mit variabler Passpunktanordnung und unterschiedlichen deterministischen Ansätzen (Diss.).
DGK. Reihe C, Heft Nr. 236. München, 1977.

v. NIERLO, J.: A Testing Procedure for Analysing Geodetic Deformation Measurements, Proc. Paper to IInd Int. Symposium for Deformation Measurements, FIG, Bonn 1975

Mikhail, E.M. : Observations and Least Squares, JEP - Harper and Row, New York, 1976.

Mikhail, E.M. : Review and some thoughts on the Assessment of Aerial Triangulation Results, paper presented at Aerial Triangulation Symp., University of Queensland, Australia, October 1979.

Molnar, M., and Bealoucos, T. : Preadjustment Error Detection in Independent Model Blocks, ITC Journal, 1978-3.

Molnar, M. : Self Checking and Strip Formation, Techn. University of Victoria, Heft 11, December 1978.

J.Müller: Blockausgleichung mit Modellen in der großmaßstäbigen Photogrammetrie.
Wissenschaftliche Arbeiten der Lehrstühle für Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie an der Technischen Universität Hannover, 1968

J.Müller: Blocktriangulation mit Verbesserung der inneren Orientierung.
Bul 1971, S.107

POPE, A.: The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers, Presented Paper to the XVth General Assembly of the IAG, Grenoble, 1975

Romanowski, M. : The Theory of Random Errors Based on the Concept of Modulated Normal Distribution, Ottawa, Nat. Res. Council of Canada, 11432 APR-4718 June 1970.

T. Sarjakoski, Analytical photogrammetric block adjustment by independent models with additional parameters; The photogrammetric Journal of Finland, Vol. 7 No. 2, 1978.

M. Schilcher, Empirisch-statistische Untersuchungen zur Genauigkeitsstruktur des photogrammetrischen Luftbildes; Dissertation Universität Stuttgart, 1980.

H.R.Schmid: Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie.
BdL 1958, S.103 und BdL 1959, S.1

SCHITT, E.: Zuverlässigkeit photogrammetrisch bestimmter Höhen, Diplomarbeit am Institut für Photogrammetrie, Universität Stuttgart, 1979

G.H. Schut, Selection of additional parameters for bundle adjustment; ISP Commission III Symposium Moscow, 1978.

Seiler, H.: Praktische Erfahrungen mit dem Programmsystem Bündelausgleichung. ISP Hamburg, Comm.III, 1980

C.C. Slama, Results of an evaluation of high precision analytical photogrammetry for geodetic control densification; Proceedings ACSM-ASP Convention, Washington D.C. 1978.

Stefanovic, P. : Blunders and Least Squares, ITC Journal, 1978-1.

Stefanovic, P. : Analytical Photogrammetry: Computational Efficiency and Blunder Location, ISP Commission III Symposium, Moscow, 1978.

W. Tegeler, Densification of trigonometric networks by bundle adjustment; presented paper, Comm.III, ISP Congress Helsinki 1976.

Datos personales:

Prof. Dr.-Ing., Dr.-Ing.h.c. Gottfried Konecny
Institut für Photogrammetrie und Ingenieurvermessungen
Universität Hannover

Nienburger Str. 1

D 3 H a n n o v e r / R.F.A.

Dr.-Ing. habil. Hans-Peter Bühr

(como arriba, a partir de mes de mayo:)

Curso de Pós- Graduação em Ciências Geodésicas

Caixa Postal, 5078

80.000 C u r i t i b a - Paraná

Brasil



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAMETRIA ANALITICA

IMAGE CORRELATION

DR. GOTTFRIED KONECNY

MARZO, 1981

Topic III Image CorrelationLecture 7: Principles of Image Correlation1. Introduction

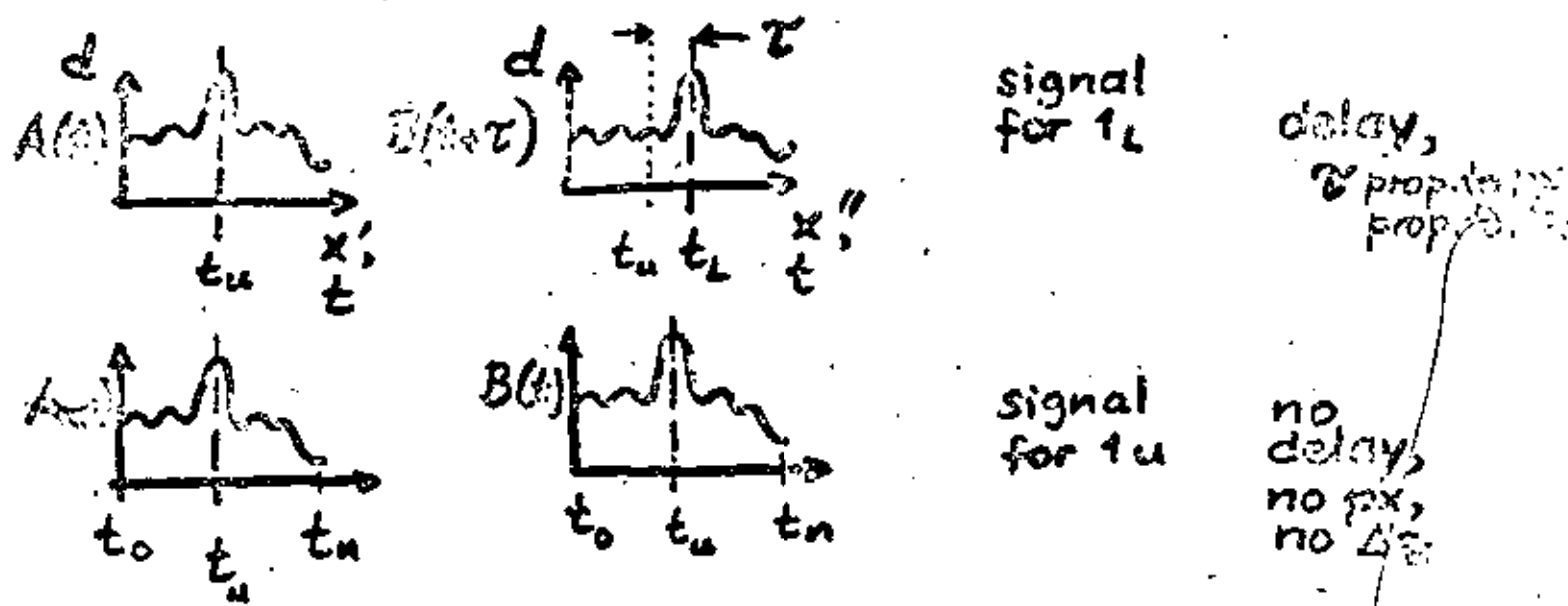
Electronic image correlation has been developed by G. Fobrough in 1957 in order to obtain heights from photographs without the use of an operator. In an oriented stereomodel x -parallaxes between left and right image projection are sensed. A feedback system changes Z until px disappears. (Fig. 34).

Image correlation implies first that the two overlapping images are scanned, so that corresponding image parts may be compared.

First a mechanical scanning is possible (by mechanical or analytical plotter) to be in view of two corresponding image positions. This is possible by viewing 2 image parts controlled by collinearity equations either in a plotter or in an AP.

Second a differential scanning is required to resolve the corresponding images in corresponding elements. This usually is done by breaking the area up into signal lines. The line produced on a CRT, for example is a timed sequence of intensity signals $A(t)$, after the lens constant intensity line image has passed through the photographic emulsion and has been collected by two photomultiplier tubes. (11.35)

Fig. 35.



$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_n} A(t) \cdot B(t+\tau) dt \quad \equiv \text{correlation integral}$$

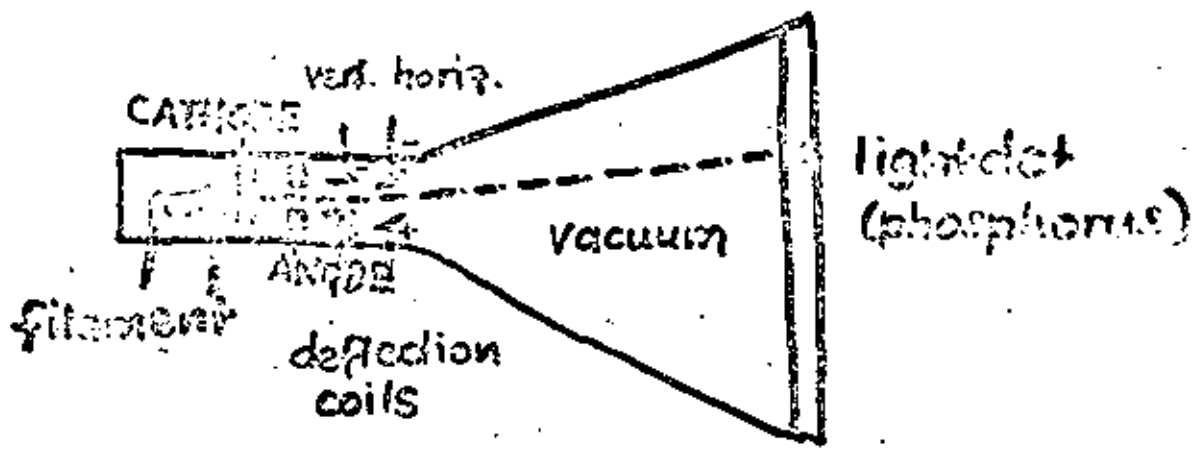
by delaying one of the signals further by $\Delta\tau_i$ another $R(\tau + \Delta\tau_i)$ is obtained:

$$R(\tau + \Delta\tau_i) = \int_{t_0}^{t_n} A(t) \cdot B(t + \tau + \Delta\tau_i) dt$$

Several $\Delta\tau_i$ (positive & negative - that is delaying A-) are possible

$R(\tau + \Delta\tau_m)_{max}$ will be the $\Delta\tau_m$ corresponding to τ . Thus $px \rightarrow \tau$ is determined. It can be used for feedback.

DIFFERENTIAL SCAN

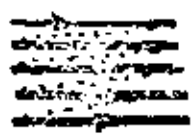


C.R.T.



random scan

weights
cutler



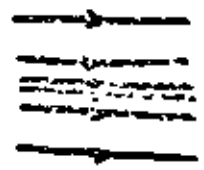
TV-scan

averages



diagonal
scan

averages



weighted
horizontal
scan

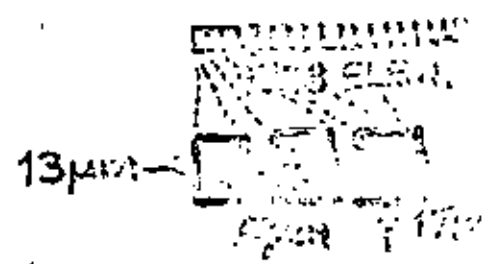
weights
cutler line

C.R.T. SCAN PATTERNS

MECHANICAL SCAN



C.C.D. LINEAR ARRAY



On a CRT the following patterns may be generated:

random scan

TV scan

diagonal scan

weighted horizontal scan

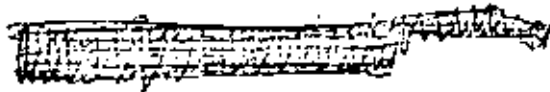
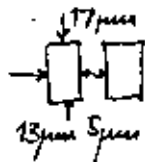
All working correlators produced up to 1978 used the CRT. A more modern type of

scanning is possible by a laser beam, which can be deflected by an ~~electro-optic~~ ~~acousto-optic~~ optical modulator in real time by applying a voltage to an appropriate crystal or ultrasonic waves to a liquid crystal (AS-11-BX).

New differential scanning possibilities are given by ~~the~~ linear array type charged coupled devices (CCD's). ~~The~~ CCD's are

available for 1728 elements per 2.54 cm, or in area form for ~~500x700 elements~~ 500x700 elements. ~~The~~

~~images~~ ~~are~~ ~~projected~~ ~~onto~~ ~~these~~ ~~sensors~~ ~~images~~ may be optically projected. The discrete image point signals covering $13 \times 17 \mu\text{m}$ on the linear array have a spacing of $5 \mu\text{m}$ in between.



They may be read out to ~~about~~ about 100 grey levels. However they change and differ in sensitivity by about 10%. Therefore they need to be calibrated frequently for light and dark current.

4. Correlation of Signals

Fig. 38 explains the correlation calculation which is carried out

1) at point 1' determining $R(\tau + \Delta\tau)$ by calculating $A(t) \cdot B(t + \tau + \Delta\tau)$ first with $\Delta\tau = 0$; that is with the $B(t + \tau)$ -signal centered at 1". Then repeating the calculation with the signal shifted by $-a$ (signal $B(t + \tau + \Delta\tau)$ centered at 2") and then shifted by $-a$ (centered at 3").

2) then point 2' is calculated in the same manner comparing signals centered at 2", then 3", then 4" etc.

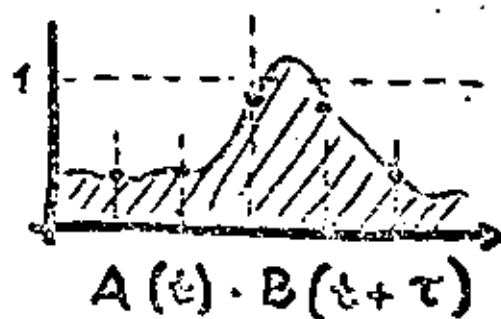
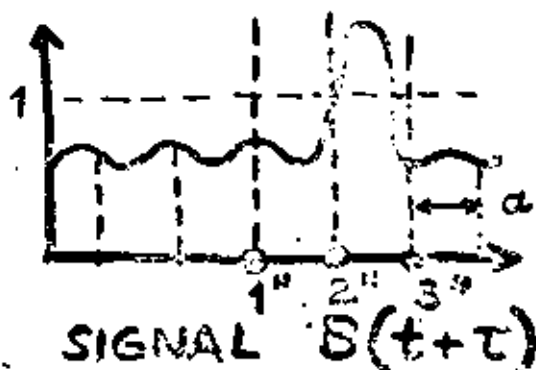
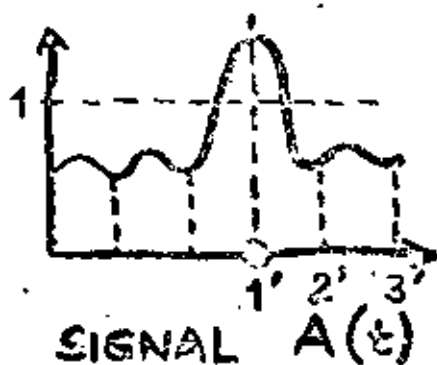
3) Then point 3' follows in the same manner. Etc.

1. The correlation integral is not necessarily the only function which can be used for the registration of the two signals, with the aim to detect $\Delta\tau$:

Other functions are:

CORRELATION

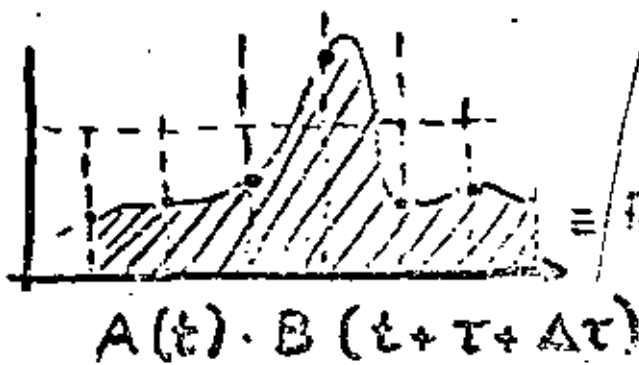
FIG. 3



$\Delta\tau = 0$

$1' \cdot 1''$

$R(\tau) = \text{area under curve}$



$\Delta\tau = -a$

$1' \cdot 2''$

$R(\tau + \Delta\tau)$



$A(t) \cdot B(t+\tau+\Delta\tau)$

$\Delta\tau = -2a$

$1' \cdot 3''$

$R(\tau + \Delta\tau)$

- 119A -

1. correlation integral

$$R(\tau + \Delta\tau_i) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t) \cdot B(t + \tau + \Delta\tau_i) dt \rightarrow \max$$

2. finite correlation coefficient

$$r(\Delta\tau_i) = \frac{\sum (A(t) \cdot B(t + \Delta\tau_i))}{\sqrt{\sum (A(t))^2 \cdot \sum (B(t + \Delta\tau_i))^2}} \rightarrow \max$$

3. covariance

$$\text{cov}(A(t), B(t + \Delta\tau_i)) = \frac{1}{n} \sum A(t) \cdot B(t + \Delta\tau_i) \rightarrow \max$$

4. square sum of residuals

$$\sum v_i^2 = \sum (a_j(t) - b_j(t + \Delta\tau_i))^2 \rightarrow \min$$

5. absolute difference of residuals

$$\sum d_i^2 = \sum |a_j(t) - b_j(t + \Delta\tau_i)|^2 \rightarrow \min$$

6. cross correlation of Fourier Spectra $\rightarrow \max$

$$S_1(x) = A(t) \quad \left. \vphantom{S_1(x)} \right\} \text{signals}$$

$$S_2(x) = B(t + \Delta\tau_i)$$

$$S_1'(f) = \int S_1(x) \cdot e^{-ifx} dx \quad \left. \vphantom{S_1'(f)} \right\} \text{Fourier}$$

$$S_2'(f) = \int S_2(x) \cdot e^{-ifx} dx \quad \left. \vphantom{S_2'(f)} \right\} \text{transforms}$$

$$R_{12}' = S_1'(f) \cdot S_2'(f) \quad \left. \vphantom{R_{12}'} \right\} \text{cross correlation}$$

7. correlation intensity $\rightarrow \max$

$$I(\Delta\tau_i) = \sqrt{\sum |A(t)|^2 + \sum |B(t + \Delta\tau_i)|^2}$$

$$\Delta R(\Delta\tau) = R_1(\Delta\tau) - R_2(\Delta\tau) \rightarrow \text{min}$$

$$R_1(\Delta\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t+\Delta\tau) \cdot B(t+\tau) dt$$

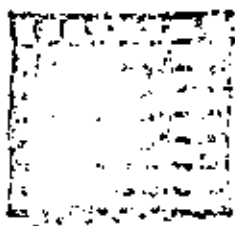
$$R_2(\Delta\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t) \cdot B(t+\tau+\Delta\tau) dt$$

$$\frac{dR(\Delta\tau)}{d\Delta\tau} \rightarrow \text{min} \quad \text{E same}$$

~~time correlation~~
A(t)

~~time correlation~~
B(t + Δτ)

linear correlation



area correlation

A(tx, ty)

B(tx + Δτx, ty + Δτy)

$$r(\Delta\tau_x, \Delta\tau_y) = \frac{\sum \sum (A(tx, ty) \cdot B(tx + \Delta\tau_x, ty + \Delta\tau_y))}{\sum \sum (A(tx, ty))^2 \cdot \sum \sum (B(tx + \Delta\tau_x, ty + \Delta\tau_y))}$$

In aerial photography we can use the collinearity equations (with shifts for int. orient. included)

$$x' = x'_c - c \frac{a_{11}(x-x_0) + a_{12}(y-y_0) + a_{13}(z-z_0)}{a_{31}(x-x_0) + a_{32}(y-y_0) + a_{33}(z-z_0)} + \Delta x'$$

$$y' = y'_c - c \frac{a_{21}(x-x_0) + a_{22}(y-y_0) + a_{23}(z-z_0)}{a_{31}(x-x_0) + a_{32}(y-y_0) + a_{33}(z-z_0)} + \Delta y'$$

known are the int. orient. parameters x'_c, y'_c, c the ext. orient. parameters $x_0, y_0, z_0, \omega, \phi, \kappa$ and thus $a_{11} \dots a_{33}$. Even if absolute orient is not known; relative orientation is given and some of these parameters are assumed:

What remains are the $\Delta x', \Delta y'$ which are the result of film deformations, lens distortion, refraction, coord. system deformation ~~etc.~~? This may also be corrected:

~~x, y may be varied point for point along a line, ~~side of this line~~ parallel to the base x_0, x'_c ~~then~~ all points x, y will also be along one line, regardless of the z ; this line is called an epipolar line.~~

The collinearity relations are solved in plotters point by point. For correlation involving two-dimensional images this is not sufficient. A two-dimensional sequence of points must be projected:

Implicit calculation means that two points x_1, y_1 and x_2, y_2 ~~are~~ ^{parallel to the base line} calculated in terms of their image coordinates by collinearity equations:

$$x_1', y_1', x_2', y_2'$$

then $\Delta y'_{12} = y_2' - y_1'$ and

$$\Delta x'_{12} = x_2' - x_1'$$

thus $\frac{\Delta y'_{12}}{\Delta x'_{12}} = \text{direction of the epipolar line of the left image } \tan \theta'$

Explicit calculation means developing a differential formula for

$$\frac{dy'}{dx'} = \tan \theta' = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dx'}$$

In lecture 2, we derived:

$$\frac{dy'}{dx'} = - \frac{(y_i' a_{31} + c \cdot a_{21})}{a_{31}(x_i - x_0') + a_{32}(y_i - y_0') + a_{33}(z_i - z_0')}$$

and λ in lecture 3. (also orient.)

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{1}{\lambda} \cdot a_{11} ;$$



$$\text{with } \lambda = \frac{c}{(z_i - z_0')}$$

thus:

$$\frac{dy'}{dx'} = - \frac{(z_i - z_0') (y_i' a_{31} + c a_{21})}{c [a_{31}(x_i - x_0') + a_{32}(y_i - y_0') + a_{33}(z_i - z_0')]}$$

likewise for $\frac{dy''}{dx''}$ with changed coefficients a_{31}'' and...

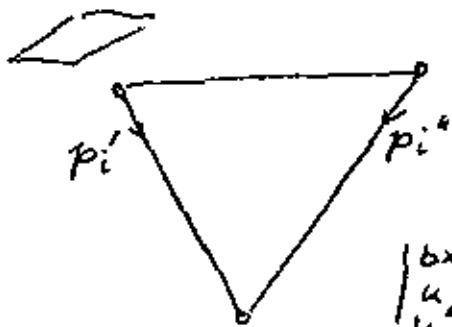
Epipolar

To derive the equation of the epipolar line it is also possible:

1. to set up the eq. of the epipolar plane

$$x_i' = -c \frac{a_{11}(x_i - x_0') + a_{12}(y_i - y_0') + a_{13}(z_i - z_0')}{a_{31}(x_i - x_0') + a_{32}(y_i - y_0') + a_{33}(z_i - z_0')}$$

$$y_i' = -c \frac{a_{21}(x_i - x_0') + a_{22}(y_i - y_0') + a_{23}(z_i - z_0')}{a_{31}(x_i - x_0') + a_{32}(y_i - y_0') + a_{33}(z_i - z_0')}$$



$$\begin{matrix} x_i'' \\ y_i'' \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0 \quad \equiv \text{plane}$$

2. intersect this plane with plane of photo

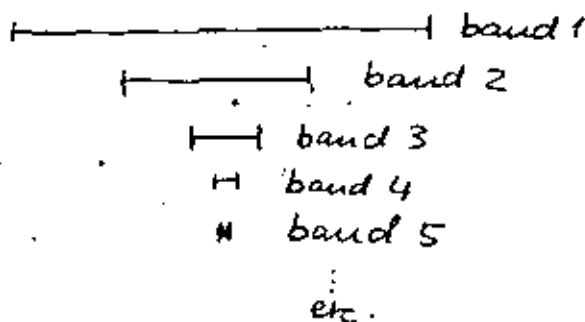
$$\begin{vmatrix} x_i' & y_i' & -c \\ 0 & y_i' & -c \\ x_i' & 0 & -c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{photoplane}$$



Such objects are not necessarily ^{2:1} equally spaced in the image. Many miscorrelations may occur, if the wrong signals are brought together. Filtering eliminates this to a certain extent. However ~~too~~ these further measures are required in order to assure proper correlation of two ^{photographic} images:

a) Operation in several bands

This means that various integration times are used for forming the correlation integral. This is equivalent to choosing a different length on the epipolar line or a differently sized window in brute force correlation.



a wide band 1 may be used to execute rough correlation pulling the parallax difference into the next band 2.

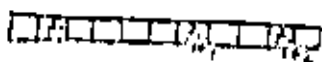
Up to 7 or 8 bands are used in practice. There is more likelihood that a significant contrast is available in a wide band than in a narrow band. Yet a narrow band increases the accuracy of correlation for the point observed, since we want to determine its elevation or parallax.

b) Threshold setting

While the maximum correlation integral is determined care is not only taken to select its maximum for determining the corresponding ΔZ . Also important is the ^{relative} magnitude of $R(\Delta Z)$, since it is indicative of the quality of correlation. If $R(\Delta Z)$ therefore is smaller than a set threshold then the correlation is ignored.

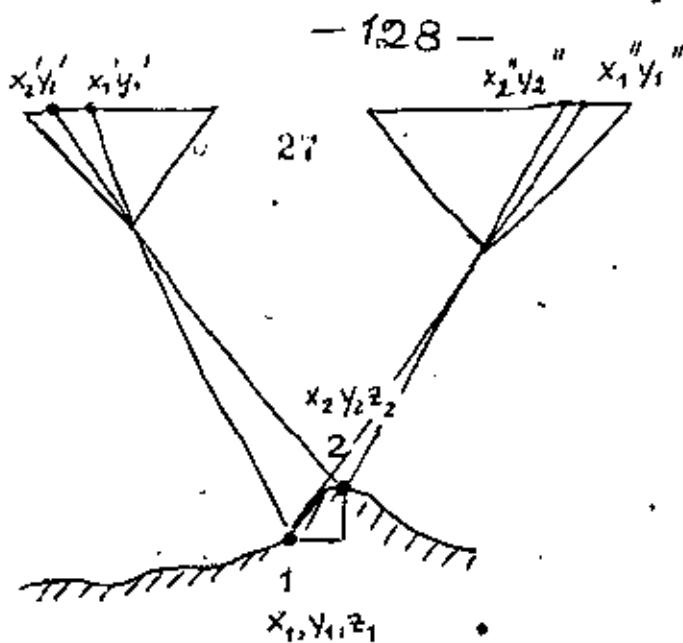
It is only used, when it is larger than the threshold and when thus ΔZ (or the parallax or ΔZ) may reliably be obtained.

Thus a digital model may be collected for the determined reliable elevations, like a DTM.



or





Given x_1, y_1, z_1
 and x_2, y_2, z_2 ; for left photo,

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= -c \frac{a_{11}(x_1 - x_0') + a_{12}(y_1 - y_0') + a_{13}(z_1 - z_0')}{a_{31}(x_1 - x_0') + a_{32}(y_1 - y_0') + a_{33}(z_1 - z_0')} ; \\ y_1' &= -c \frac{a_{21}(x_1 - x_0') + a_{22}(y_1 - y_0') + a_{23}(z_1 - z_0')}{a_{31}(x_1 - x_0') + a_{32}(y_1 - y_0') + a_{33}(z_1 - z_0')} ; \\ x_2' &= -c \frac{a_{11}(x_2 - x_0') + a_{12}(y_2 - y_0') + a_{13}(z_2 - z_0')}{a_{31}(x_2 - x_0') + a_{32}(y_2 - y_0') + a_{33}(z_2 - z_0')} ; \\ y_2' &= -c \frac{a_{21}(x_2 - x_0') + a_{22}(y_2 - y_0') + a_{23}(z_2 - z_0')}{a_{31}(x_2 - x_0') + a_{32}(y_2 - y_0') + a_{33}(z_2 - z_0')} ; \end{aligned} \right\}$$

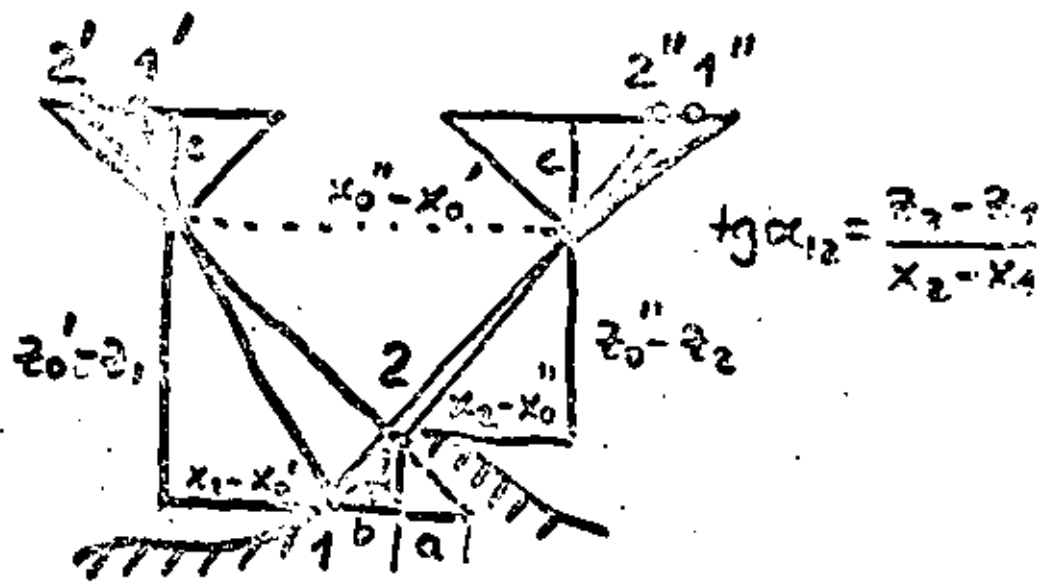
this reshifts the values

$\Delta x'_{12}$, $\Delta y'_{12}$ which so far have been regular intervals by

$$d\Delta x'_{12} = \Delta x'_{12} - (x_2' - x_1')$$

$$d\Delta y'_{12} = \Delta y'_{12} - (y_2' - y_1')$$

ASTROX. RELATIONS:



$$(x_2' - x_1') = \frac{c}{z_0' - z_1'} (x_2 - x_1 + a)$$

$$a = (x_1 - x_0') \frac{z_2 - z_1}{z_0' - z_1'}$$

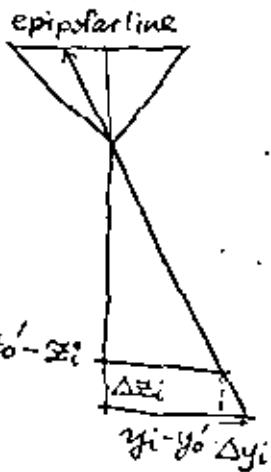
$$\left. \begin{aligned} d\Delta x'_{12} &= \Delta x'_{12} - (x_2 - x_1') \\ \text{likewise } d\Delta x''_{12} &= \dots \end{aligned} \right\} \text{prop. to } d\Delta \tau_{12}$$

$$\Delta \tau_{\text{new}_{12}} = \Delta \tau_{\text{old}_{12}} + d\Delta \tau_{12}$$

The $d\Delta x_{12}$ and $d\Delta z_{12}$ will be corrections to the image coordinates x_1'' and x_2'' and x_1' , x_2' . These will yield corrections to ΔT_{12} in the form of $d\Delta T_{12}$, such that $\Delta T_{new} = \Delta T_{old} + d\Delta T_{12}$. This will give new $\Delta p_{x,12}$ or $d\Delta z_{12}$ values again. A further iteration may be started until the images have been completely differentially rectified to the existing recognizable contrasts.

6. Postprocessing of DTM

If the correlation has been carried out according to epipolar lines, then post-processing is required for the y-coordinates as a function of z :



$$\Delta y_i = \Delta z_i \frac{y_i - y_0'}{z_0' - z_i}$$

Also the x-coordinates become corrected by:

$$\Delta x_i = \Delta z_i \frac{x_i - x_0'}{z_0' - z_i}$$

This is the approximation for the expressions ~~...~~

given for space intersection; it was:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \lambda_i' A^T \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \\ -c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{pmatrix}$$

from this

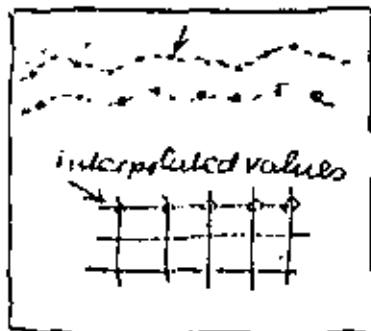
$$z_i = \lambda_i' (a_{13} x_i' + a_{23} y_i' - a_{33} c) + z_0'$$

therefore

$$\lambda_i' = \frac{z_i - z_0'}{a_{13} x_i' + a_{23} y_i' - a_{33} c}$$

$$\begin{aligned} x_i &= \left(\frac{z_i - z_0'}{a_{13} x_i' + a_{23} y_i' - a_{33} c} \right) (a_{11} x_i' + a_{21} y_i' - a_{31} c) + x_0' \\ y_i &= \left(\frac{z_i - z_0'}{a_{13} x_i' + a_{23} y_i' - a_{33} c} \right) (a_{12} x_i' + a_{22} y_i' - a_{32} c) + y_0' \end{aligned}$$

the x_i and y_i will now form the image of the epipolar lines in a correlated values. $z = \text{const. plane}$.



For the generation of contours this irregular distribution of points is best interpolated into a regular grid.

This is the disadvantage of epipolar correlator with a fixed sensor element spacing.

- 132 C -

ON-LINE CORRELATORS (FIG. 23)

continued:

| <u>YEAR</u> | <u>NAME</u> | <u>MANUF.</u> | <u>Sensing</u> | <u>Rectif. in corr. window</u> | <u>Filtering</u> | <u>corr. win- dow</u> | <u>para- lax detec- tion</u> |
|-------------|-------------|---------------|----------------|--------------------------------|------------------|-----------------------|------------------------------|
|-------------|-------------|---------------|----------------|--------------------------------|------------------|-----------------------|------------------------------|

Recent Correlators:

| | | | | | | | |
|-------------|-----------------------------|-----------------------|--|---|-----------------------------|---|---|
| <u>1970</u> | <u>Gestalt photo-mapper</u> | Hobrough | CRT TV-raster 8x9mm | high degree | 6octav bands | inver- sion prop. to de- gree of rectific. | ortho- gonal cross corr. |
| <u>1976</u> | <u>Oromat</u> | Jenoptik | CRT deformed TV-raster | longit. & latitudinal tilt | 3bands analog | 3 sizes 4x4mm 3x2mm 2x1mm | ortho- gonal cross corr. digi- tal |
| <u>1973</u> | <u>AS-11-BX</u> | Bendix | Laser with rota- ting prisms; epipolar lines | polygon with max. 58 corners digital | digital 3bits | | |
| <u>1980</u> | <u>Raster</u> | Hobrough/ Hannover | lines arrays epipolar lines | polygon with 256 corners, digital | 7octav bands, digital | 0,08mm to 5,4mm | max of cross corr. func- tion |

Optical Correlators:

| | | | | | | | |
|-------------|---------------------------------|--|--|--|-------------------------------|--|---------------------|
| <u>1966</u> | <u>Bendix</u> | Krutiloski | | | demonstration of profiling | | rectified images |
| <u>1975</u> | <u>ETL Fort Belvoir</u> | Heterodyne Optical Correlator (HOC) | | | D.T.M. generation | | rectified images |

Lecture 8 Image Correlation Devices

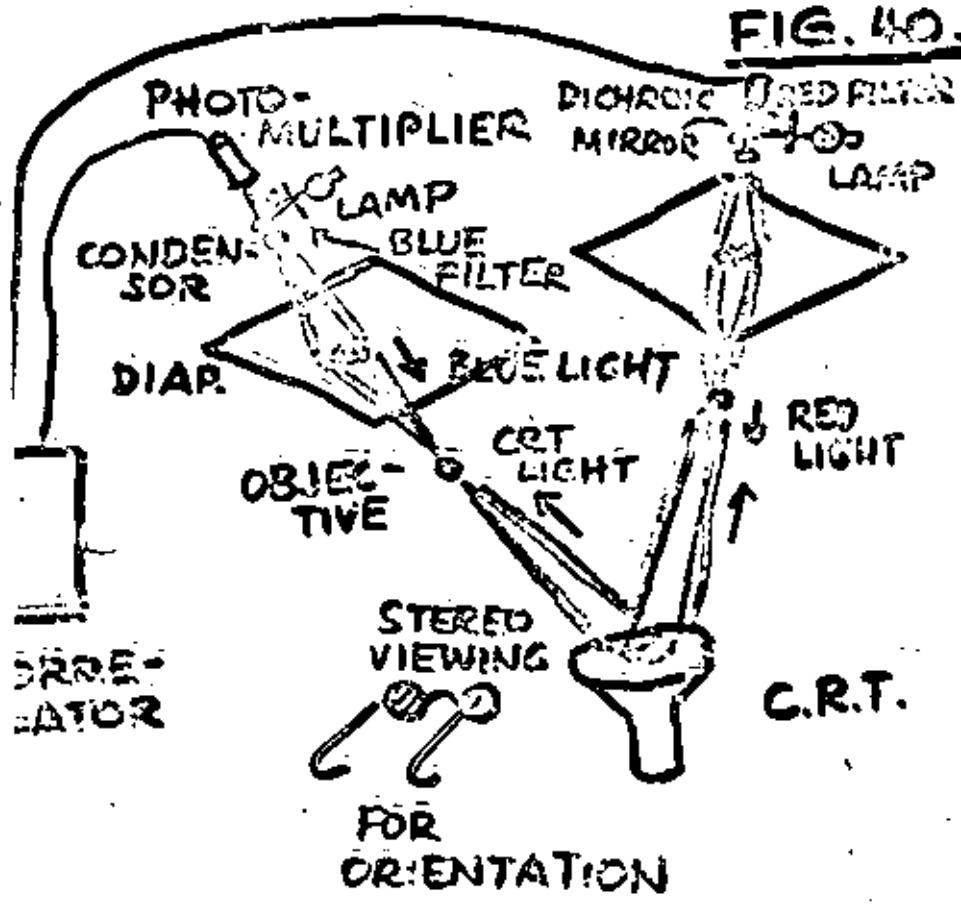
A summary of on-line systems produced for image correlation is given as follows:

| <u>year</u> | <u>name</u> | <u>manufacturer</u> | <u>scanning</u> | <u>rectification in correlation window</u> | <u>filtering</u> | <u>correlation window</u> | <u>picture disto- rion</u> |
|--------------------------|--|--|-----------------------------------|--|------------------|---|---|
| <u>Invention</u> | | | | | | | |
| 1958 | Stereomat I | Hobrough (Photogr. Survey Corp.) Toronto | CRT random scan | none | analog | | |
| <u>Prototypes</u> | | | | | | | |
| 1962 | Automatic Map Compilation System | Rauco- Worldridge | CRT | none | | $1.27 \times 1.27 \text{ mm}^2$ $5.08 \times 5.08 \text{ mm}^2$ | |
| 1962 | Automatic Screenmapping System | Rauco Worldridge | Nipkow disk | mechanically linear | | | other form auto correl. |
| 1963 | Stereomat III | Hunting- Hobrough | CRT | analog direct | analog | | |
| 1963 | Projection Stereoplotter | API4 Libroscope | CRT | linear | | | auto- controlled by terrain slope |
| <u>Production Models</u> | | | | | | | |
| 1964 | Stereomat IV | Beuman-Lohrer/ Raytheon | CRT | linear analog | analog | variable with automatic control by correlation quality | max of cross corre- lation |
| 1966 | Unit, Automatic Map Compilation Equipment UNAMACE | Rauco- Worldridge | TV- Raster CRT 128 lines | | | | 7 bands |
| 1966 | AS-11-B AS-11-C AS-11-B1 | Eastix | CRT random scan | | | auto- control by correl. function | ortho- form cross correl- tion digital |
| 1968 | Stereomat A 2000 | Raytheon Autometric | CRT random scan | | | | |
| 1968 | Hek ECS | Hek | CRT diagonal scan | | analog | | 5 or 6 bands |

| <u>year</u> | <u>name</u> | <u>by</u> | <u>input</u> | <u>correlation algorithm</u> | <u>remarks</u> |
|-------------|-----------------|----------------------|--|--|---|
| 1975 | U. of Wisconsin | Keating | close to flightline scanned raster digitized photo | euclidian differ, normalized euclidian difference, normal cross correlation, Hadamard transfo. | 2d for 3realization, 1d for final scan |
| 1975 | U. of Karlsruhe | Kreiling | raster scanned digital photo | | |
| 1977 | | Göpfert | raster scanned digital photo | peak of autocorr. coeff. cross corr. coeff. autocorr. intensity cross corr. intensity | comparison of algorithms |
| 1978 | | Konecny & Kamierczak | scanned epipolar lines | peak of cross corr. coeff. | suggests experim. system |
| 1978 | | Girard | resampled, rectification, digitized photos | peak of cross correlation coeff. | experimental |
| 1978 | CDC | Panton | raster scan oriented to flight direction digitized photo | peak of cross corr. | demonstration of contours, 3D grid & rectif. grid |
| 1979 | Makarov | | | | in preparation |

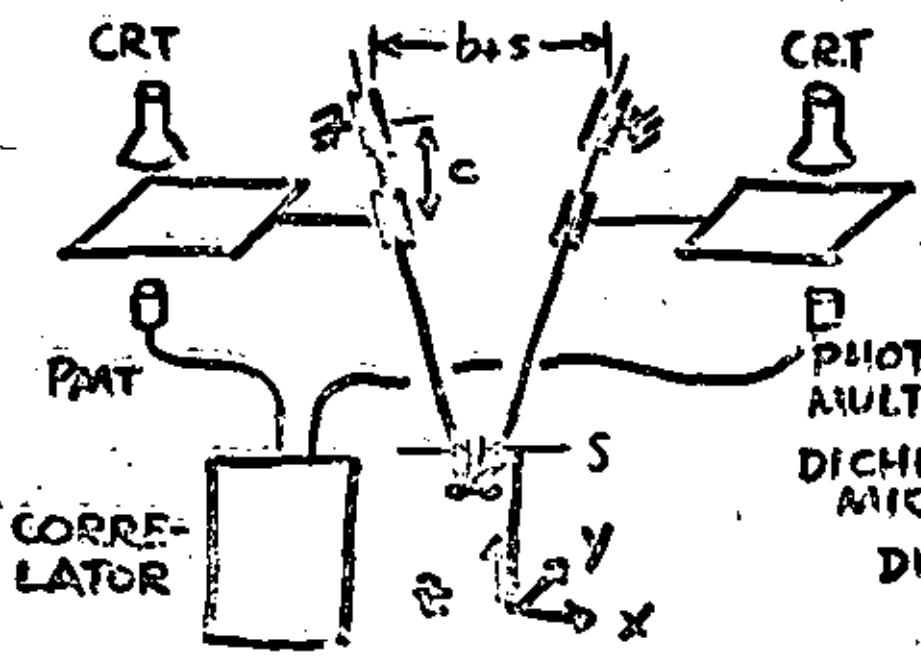
Of the systems summarized the following are of special interest:

- 134 A -
FIG. 40.



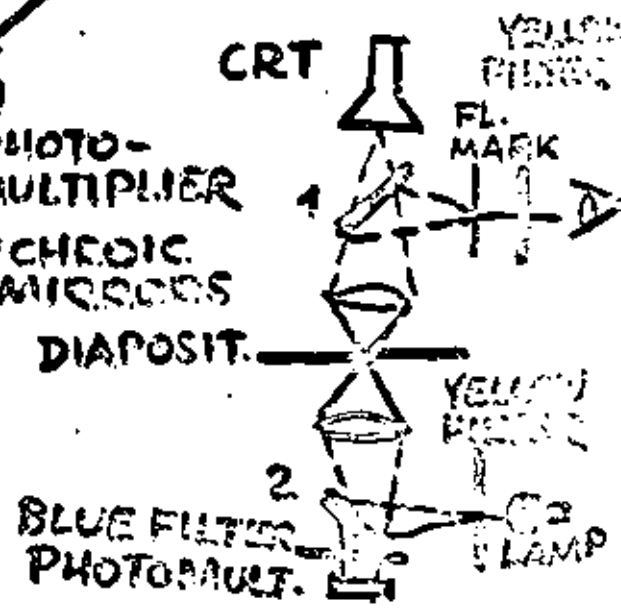
STEREOMAT I
KELSH PLOTTER

FIG. 41.



STEREOMAT II

WILD B-8



c) Orientation (see Fig 44 c)

A third mode of operation was that of relative orientation: The instrument was driven to the positions of the 6 Von Guerber points ~~subsequently~~ in succession. Switches release by contacts connected to the guiding rods of the Kelsch three projection lamps controlled the point sequence. At each point both x and y-parallaxes were removed; the x-parallax by the height z_i and the y-parallax by the appropriate element for each point (e.g. K_R for pt. 1, K_L for pt. 2, ϕ_R for pt. 3, ϕ_L for pt. 4, ω_R for pt. 5 & 6).

2) Stereomat IV

It was the first civilian production model of a correlator attached to a Wild B-8 plotter. (see Fig. 41).

The use of a mechanical plotting instrument demanded that instead of the one C.R.T. installed in the Stereomat I two CRT's were utilized, one for each image. While the CRT's and the ^(appropriate photo-multiplicators) were stably mounted, the image carriers could be moved by the mechanical space-rods.

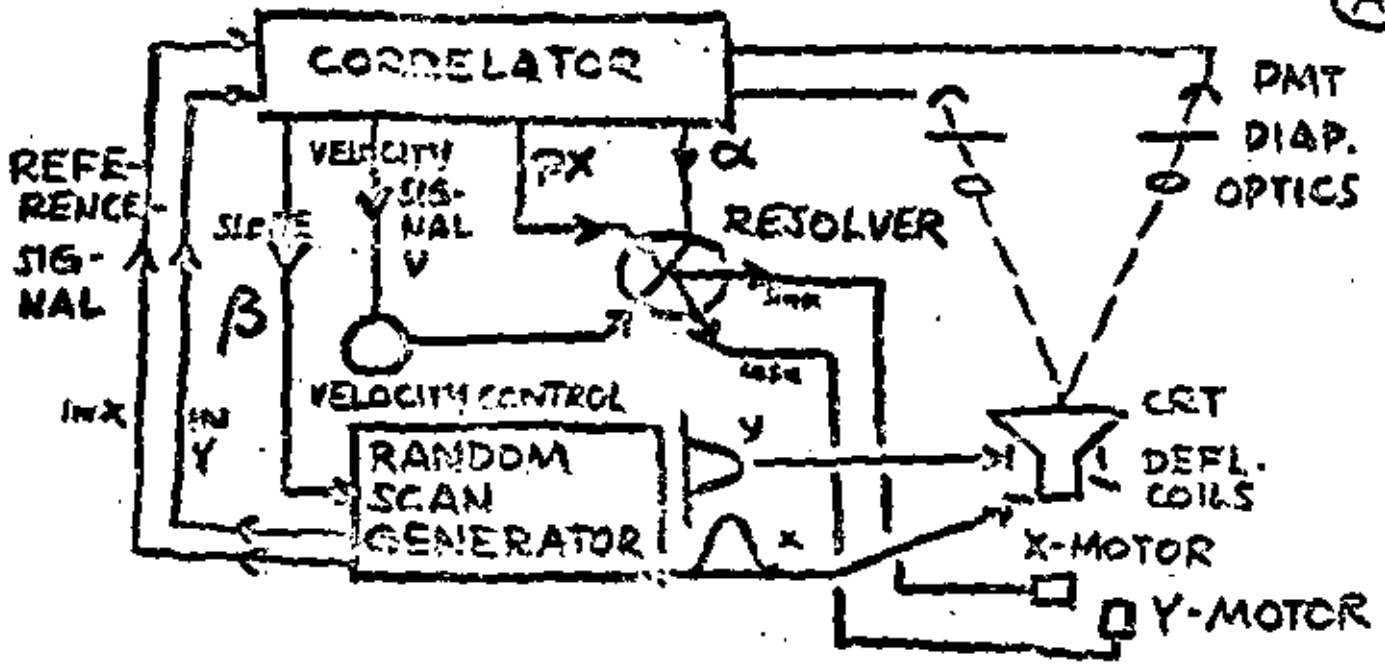
The scan pattern of both CRT's had to move in synchronism. Again a dichroic separation of the optical path was made ~~for~~ for each of the two optical paths:

- 134 C -

STEREOMAT OPERATION

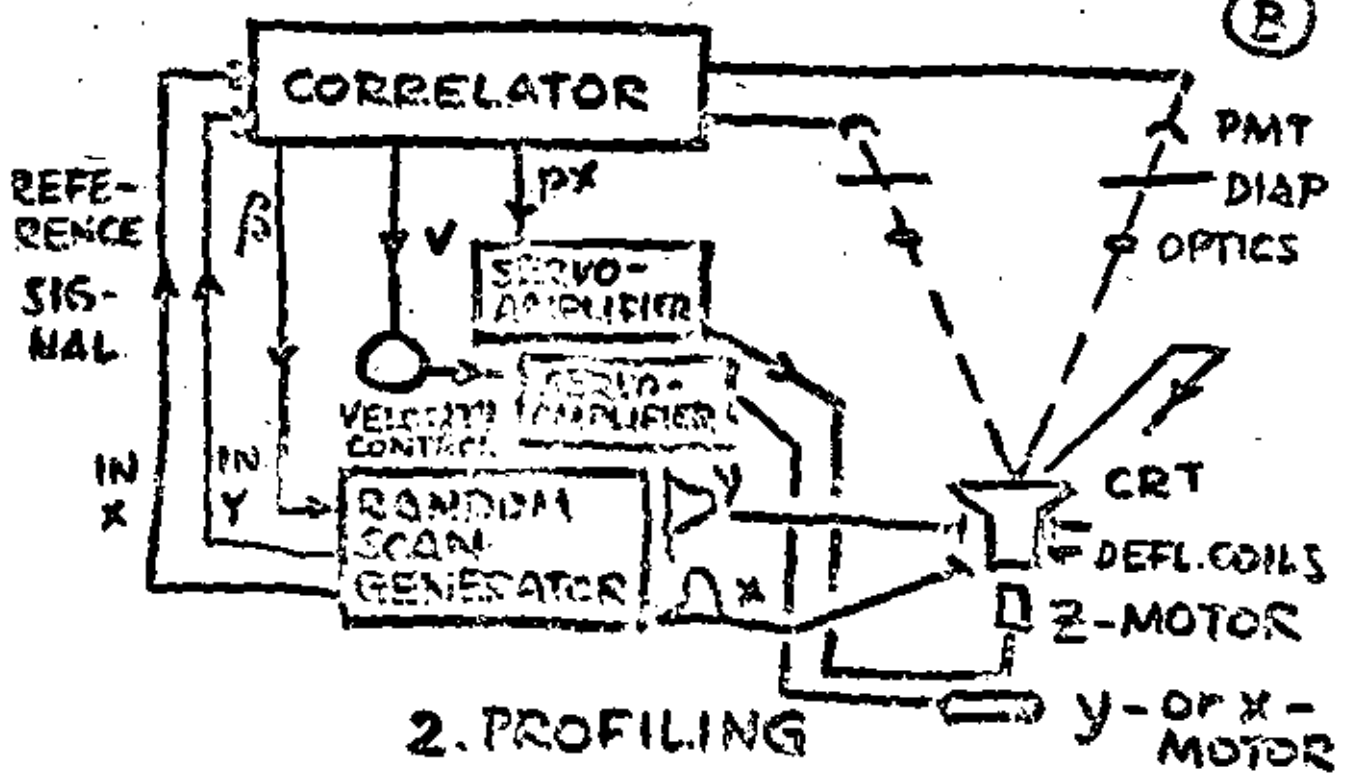
FIG. 4

(A)



1. CONTOURING

(B)



2. PROFILING

The light of a light bulb was passed through a yellow filter, deflected through a beam splitter, directed through the diapositive, again deflected through a beam splitter, joined with a fiducial mark ~~and~~ and again passed through a yellow filter and then led to the eye pieces for visual operation. The CRT light (blue) passed the beam splitters and the diapositive in the opposite direction, it was passed through a blue filter and collected on a photomultiplier.

The modes of operation on the Steromat IV were identical to that on the Steromat I.

3) the Unamacc (Universal Automatic Map Compilation Equipment) was the first analytical plotter type Correlation System which served as the first military production model for the U.S. Armed Forces (see Fig 45.)

Input and Output of the signals was arranged through 4 separate servo-driven coordinatograph tables. Table 1 carried the first photo and a moveable CRT-photomultiplier scanning system ~~for the~~. Table 2 was identical to table 1 but carried photo 2. Table 3 was equipped with a moveable CRT for orthophoto output. It had to be equipped with a curtain protecting the photosensitive emulsion placed on the table from light. Table 4 was identical to table 3, except that the CRT was programmed to output disciplines or contours.

A drop line output characterized sequences of contour intervals subsequently in terms of ^{4:3} ...
dark - half light - light - etc.

The movement of the CRT's was controlled by an on-line computer functioning as analytical plotter control. Tables 1 and 2 set ~~coordinates~~ the photocordinates of photos 1 and 2 for a programmed sequence of x, y coordinates (e.g. in profiles). The z-values for this calculation were derived from the correlator signals fed by the ~~photocords~~ ^{PMT'S} of table 1 & 2.

The derived z-values also controlled the intensity output of the CRT on table 4 for the drop lines. Table 3 reproduced the grey level values observed at PMT of either table 1 or table 2. ^{(The CRT's of} Tables 3 and 4 were driven in x and y in the ~~the~~ x, y sequences programmed in the computer.

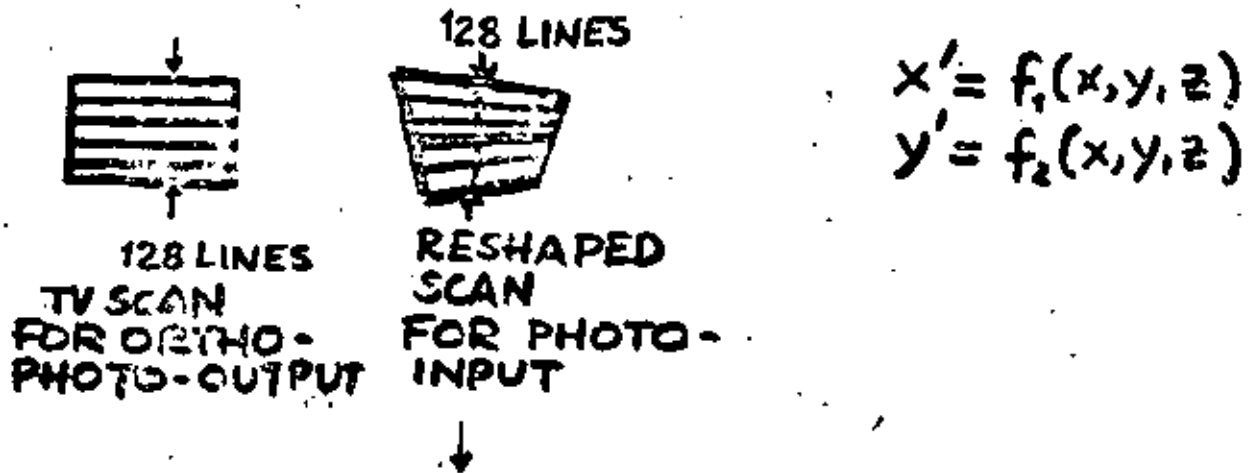
This a fully automatic operation was achieved. ^{without the need to view the images} However, for the purposes of (absolute) orientation viewing of the stereo-model was necessary. This was arranged in a universal way ~~not~~ using optical projection of the images 1 and 2, but by using two further viewer CRT's. ~~The~~ ~~displayed~~ The left CRT displayed an orthophoto showing x, y and grey level information and the right CRT a stereorthophoto showing $x + px$, y and grey level information. The two CRT images were projected by mirrors through ~~orthographic~~ filters of ^{perpendicular} ~~different~~ polarisation (horizontal and vertical) onto a ground glass. ~~These~~ By aid of ^{appropriate} polarization filter spectacles they could be observed as stereomodal and fixed with a fiducial mark on the screen and so on.

-134F-

FIG. 46

ORTHO PHOTO-OUTPUT OF AN IMAGE ①

RESHAPING OF TV-SCAN



COMPUTED IN 4 CORRELATION CHANNELS FOR



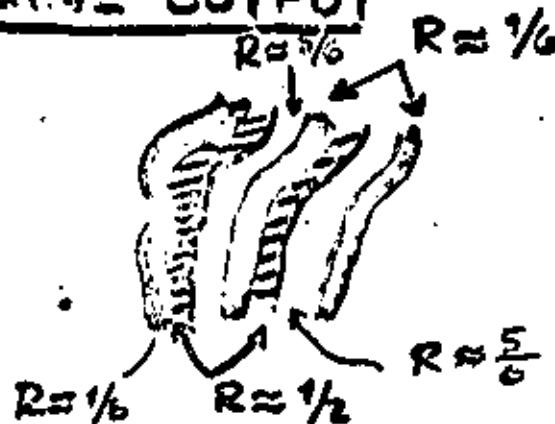
IMAGE PARTS

$$dx' = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)$$

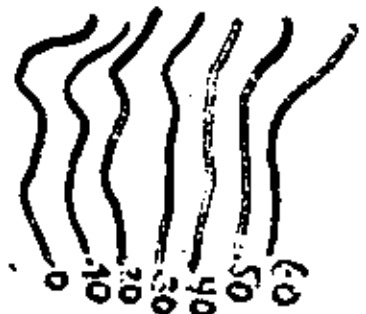
$$dy' = \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)$$

②

DROPLINE OUTPUT



CORRESPONDS TO:
CONTOURS



④ CORRELATOR OF UNAMACE

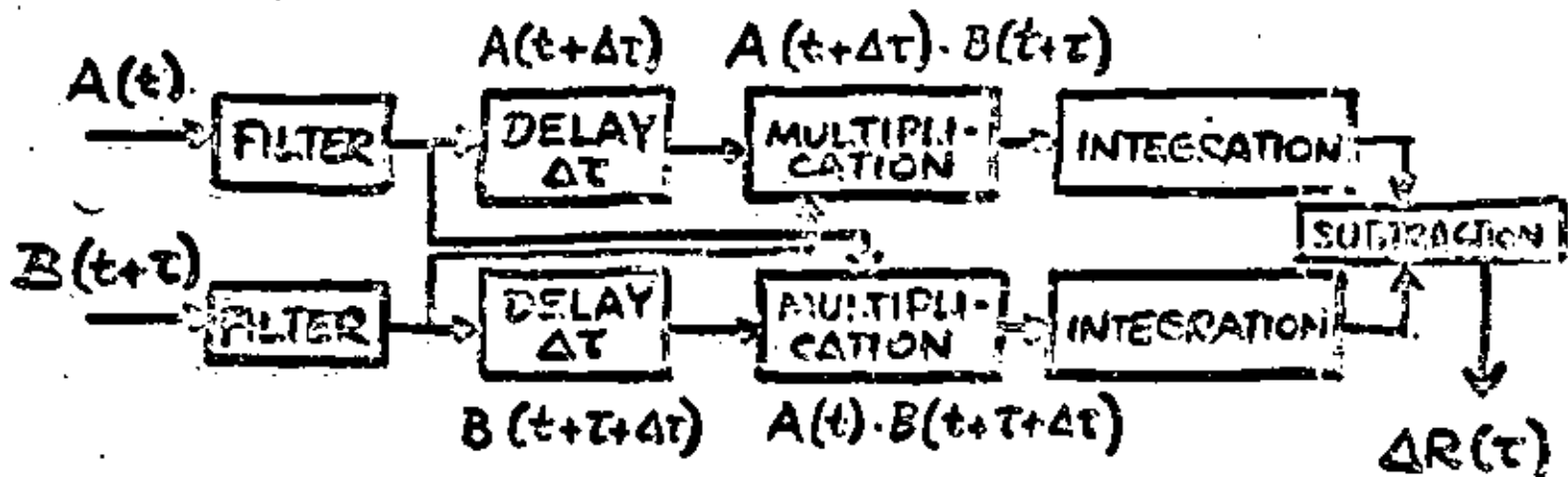
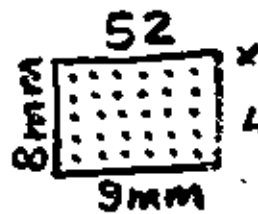


FIG 47.
GESTALT PHOTOMAPPER

① DIFFERENTIAL SCAN - CORRELATION WINDOW

| | | |
|--------|------|--------------|
| BAND 1 | SIZE | 1600 μ m |
| 2 | | 800 |
| 3 | | 400 |
| 4 | | 200 |
| 5 | | 100 |
| 6 | | 50 μ m |

② CORRELATION
FOR POINTS IN PATCHES



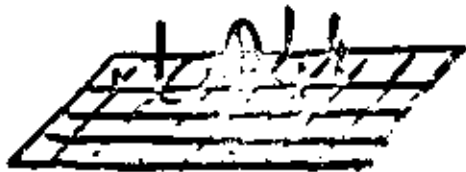
(ALTOGETHER - 1000 PATCHES)
PER MODEL

{ = 2444
points
in 1 SEC.
50 times
per patch

③ DTM - FORMATION IN PATCH

per scan - 80 000 binary correlations
parallax stored as 2440 12bit no's

(with overlap
~ 700 000
heights/model)



serves for
SMOOTHING (Filtering)
of surface

④ RESHAPING OF SCANS

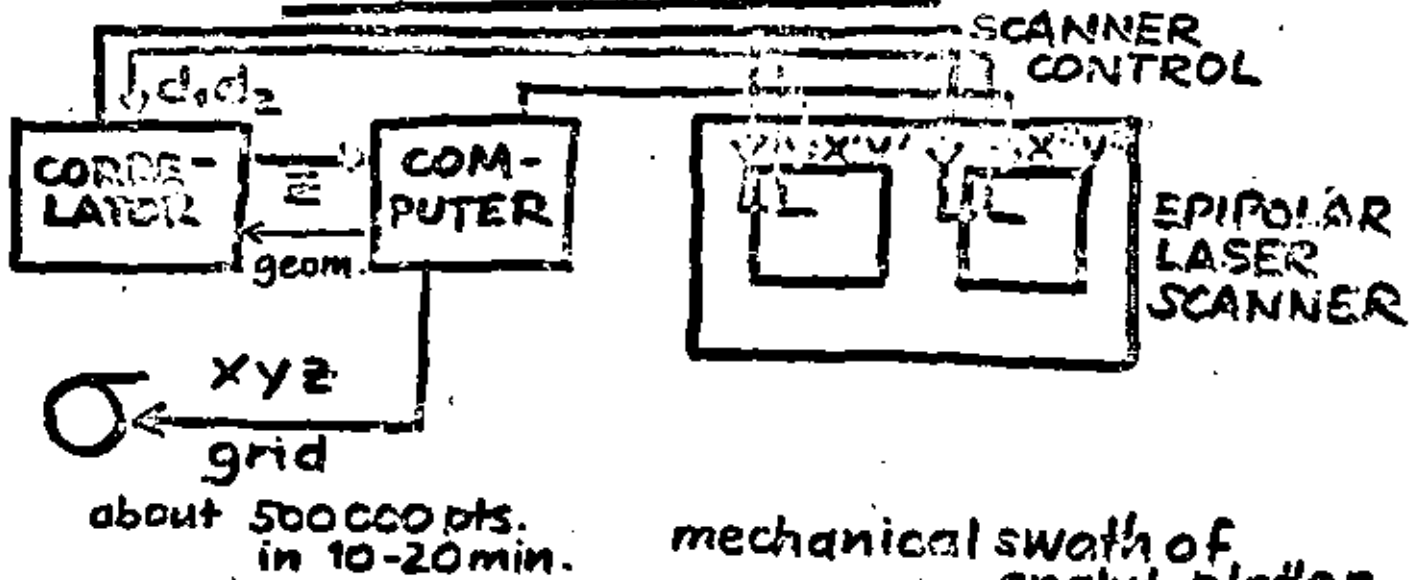
resampling of storage as function of
px and py \rightarrow analog conversion \rightarrow
new scan shape to CRT
repetition of cycle 50 times

- 134 L -

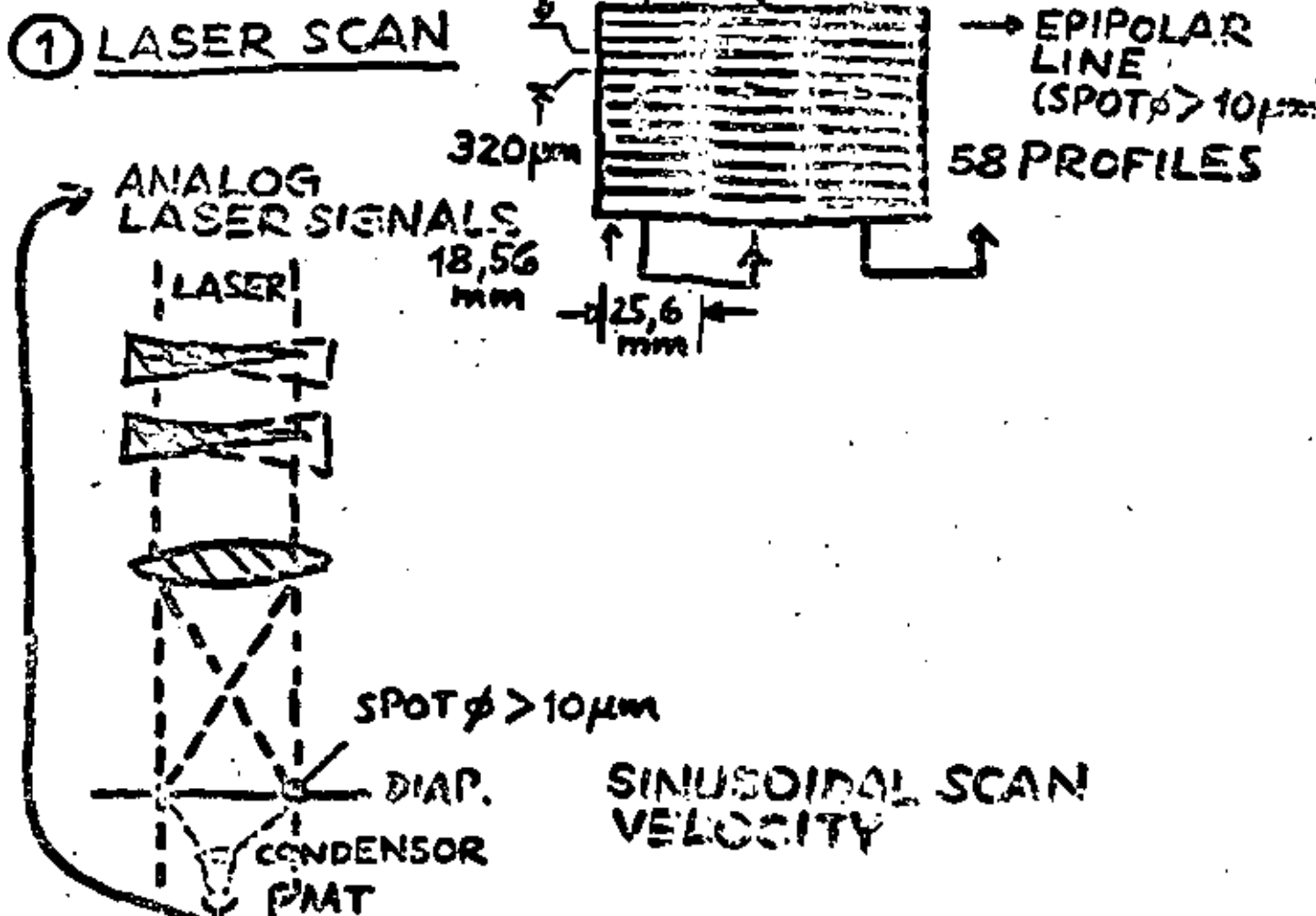
57

FIG. 48.

BENDIX-AS-11-BX



① LASER SCAN

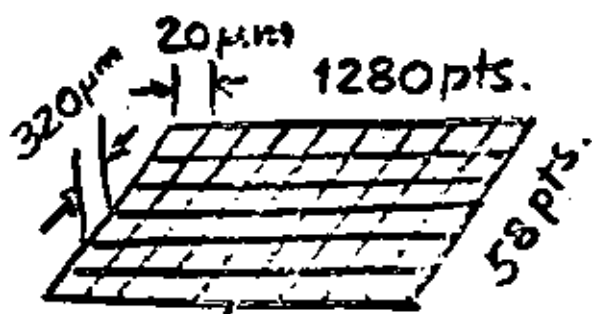


-134 N⁵⁹ - AS-14-BX

PARALLEL PROCESSOR
CAN WORK ON COMBINATION
OF 4 LINES: E.G.:



④ DTM - SMOOTHING



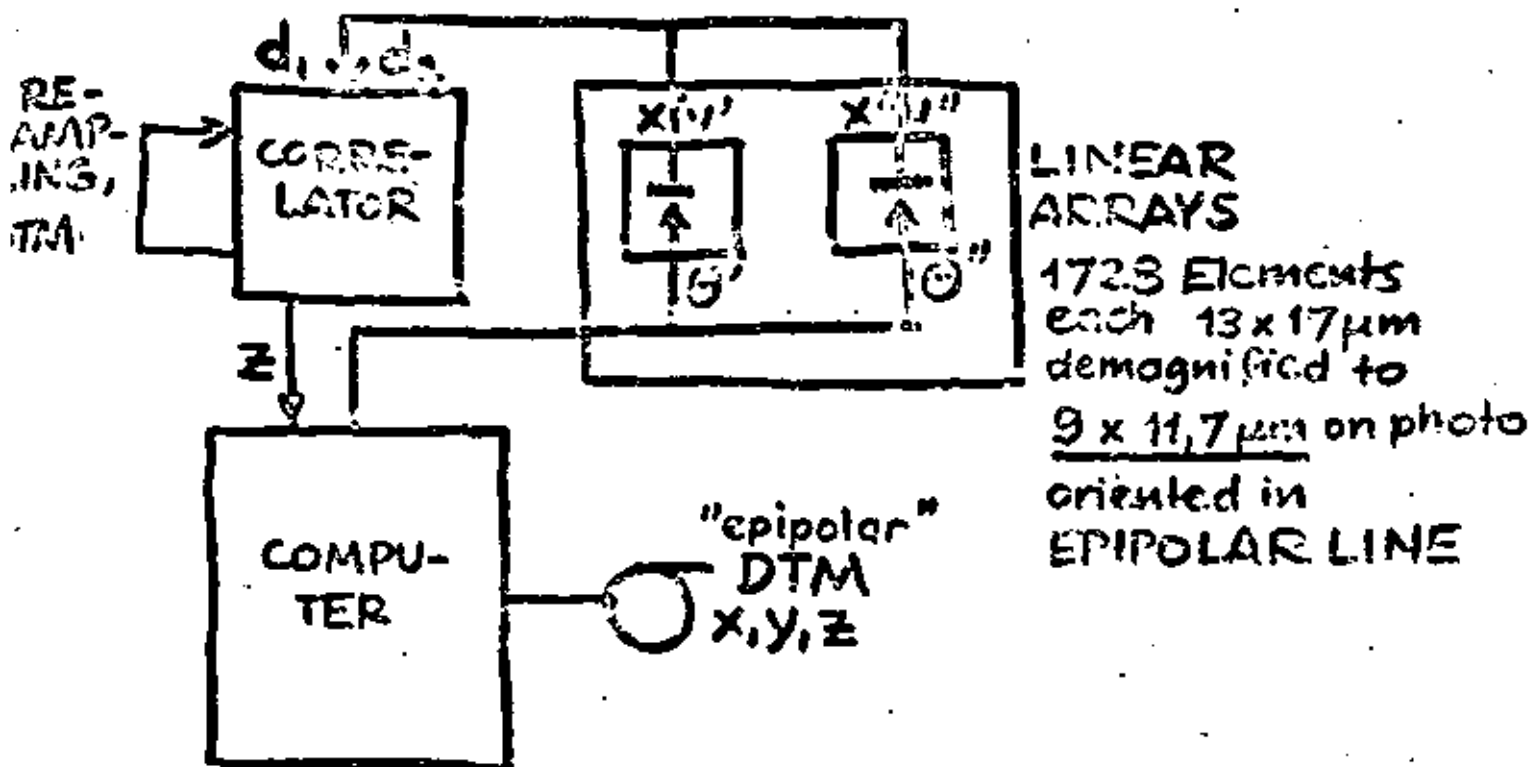
Parallax-
address-
modification
feedback



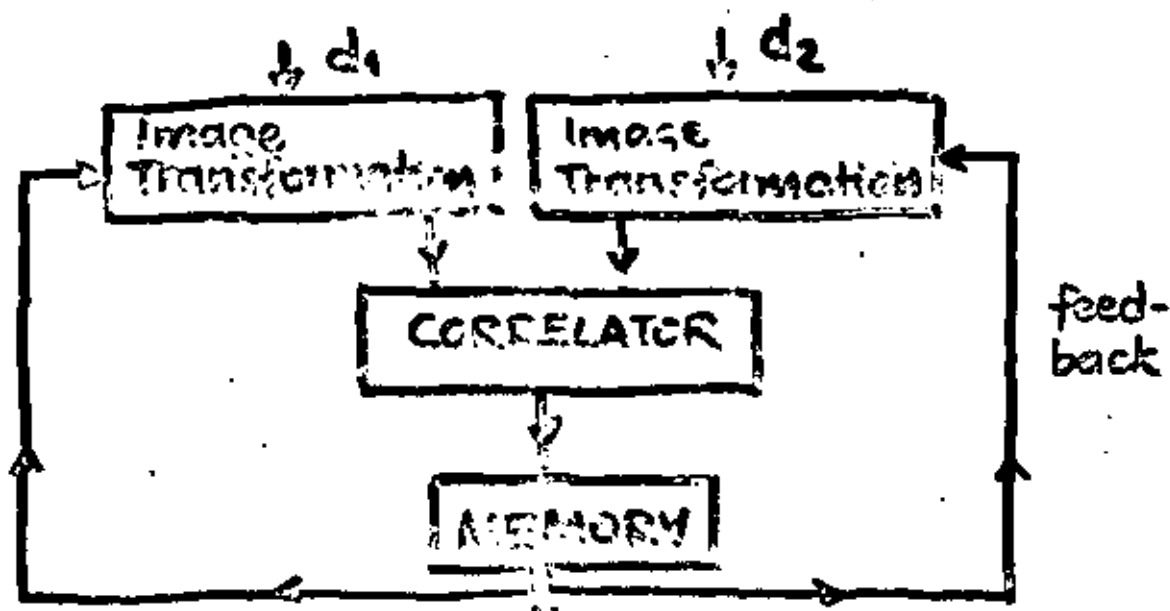
58 break-point
polygons

OUTPUT 25 000 pts/min.

RASTAR - CORRELATOR

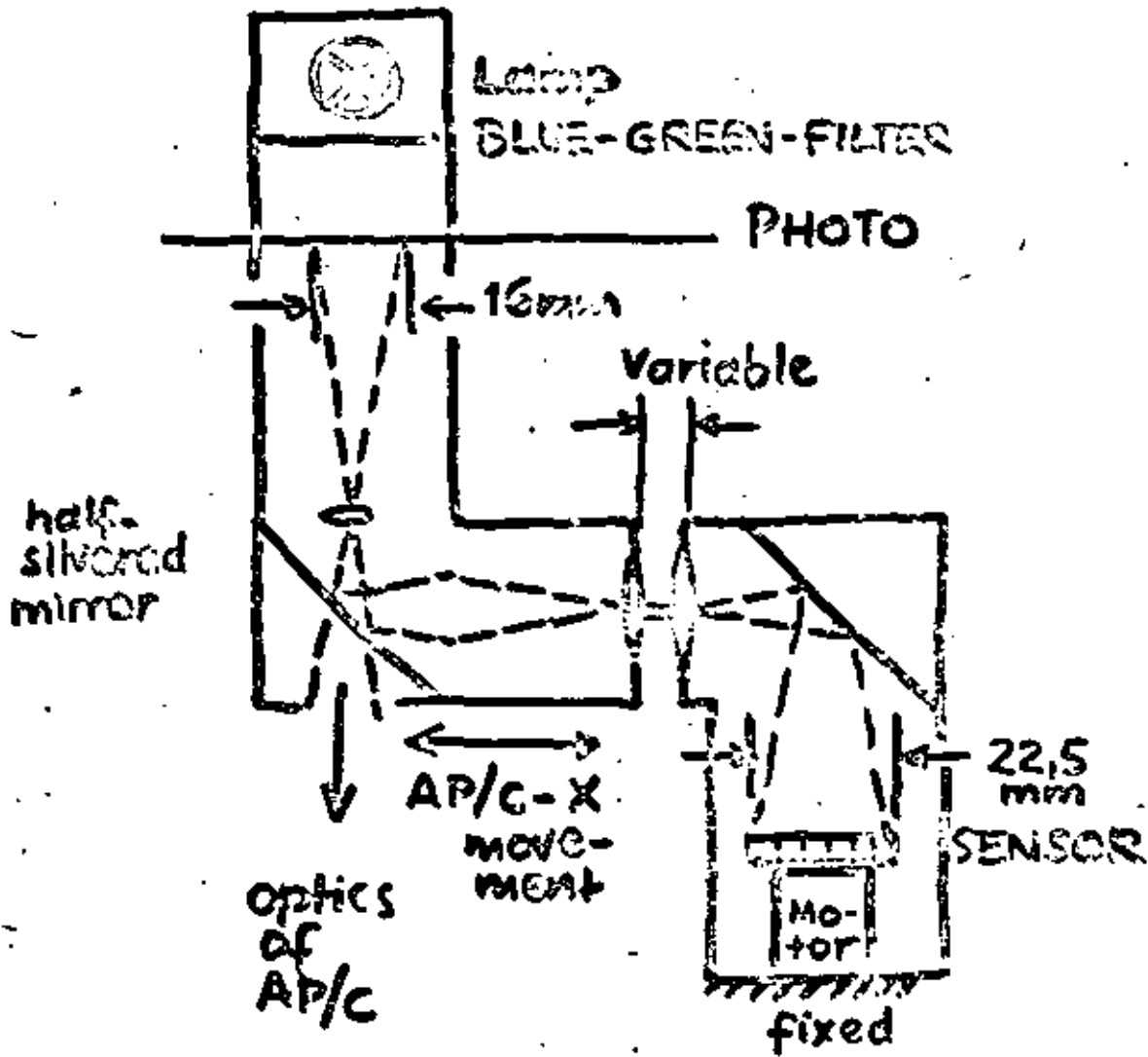


(A) CORRELATOR



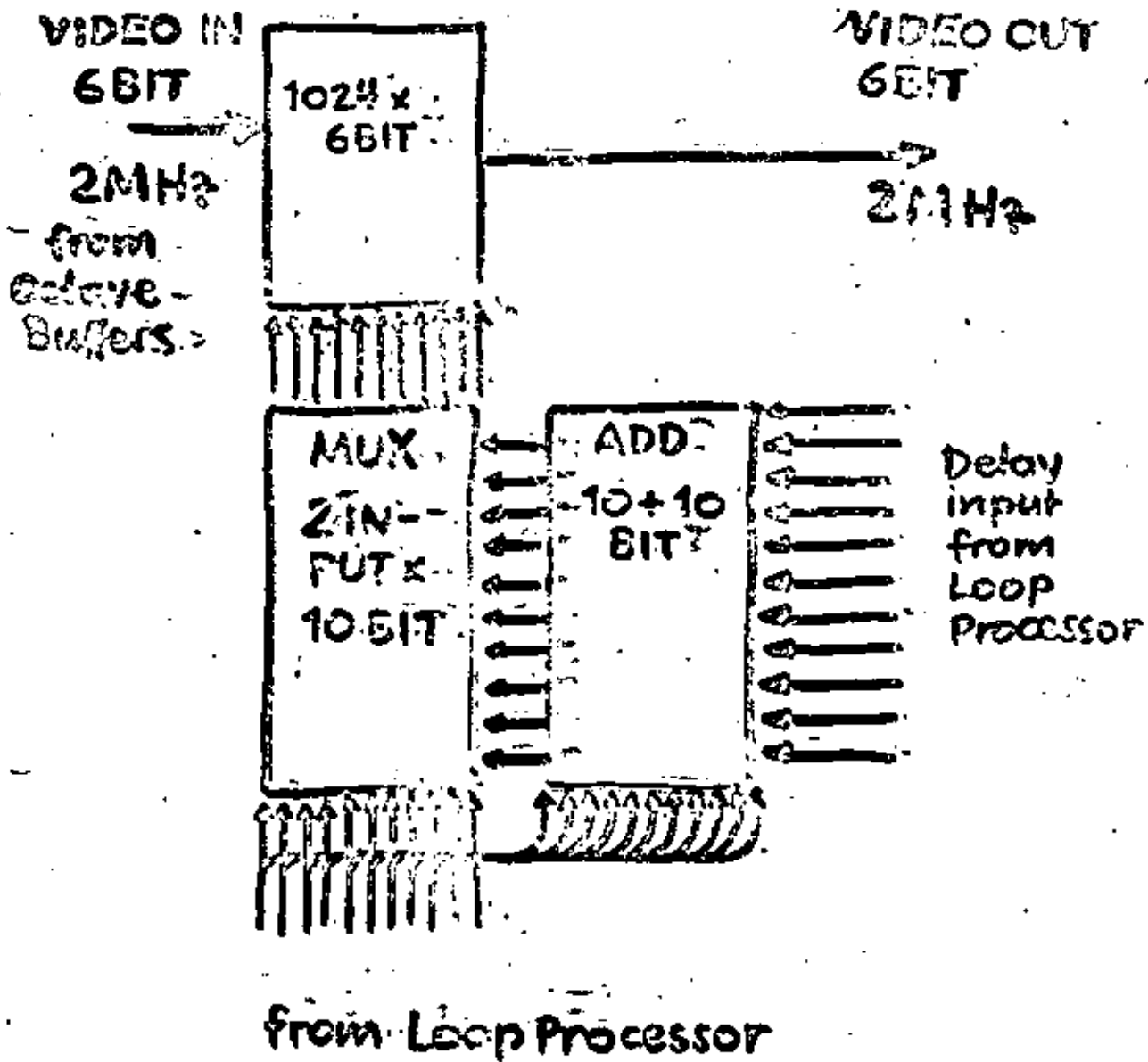
-135 C-

② SENSORS

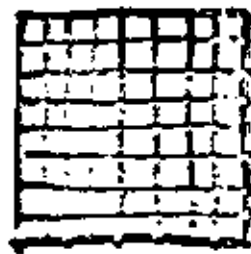
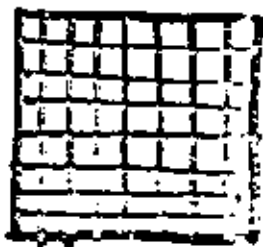
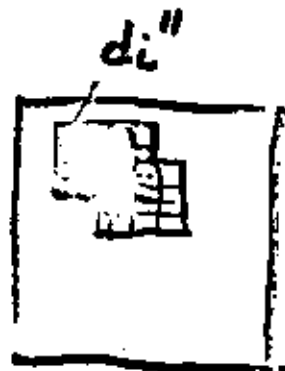
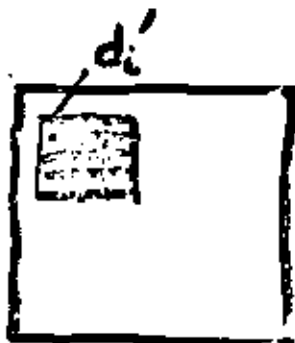


-135E-

④ TRANSFORMATION DELAY UNIT



-135 G-

DIGITAL OFF LINE
IMAGE CORRELATIONBY IBMFIG 52SCANNED
IMAGESRECTIFIED
IMAGESRESAMPLED
(NEAREST NEIGHBOUR)IN RECTIFIED
IMAGES CORRELATION
CALCULATION

$$d_i' = \frac{1}{n} \sum_j d_{ij}' ; d_j'' = \frac{1}{n} \sum_i d_{ij}''$$

$$\text{covar}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_k d_{ik}' \cdot d_{kj}'' ; \sigma_i' = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_j d_{ij}'\right)^2 + d_{ij}'^2}$$

$$\sigma_j'' = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_i d_{ij}''\right)^2 + d_{ij}''^2}$$

$$r_{ij} = \frac{\text{covar}_{ij}}{\sigma_i' \sigma_j''}$$

; selection of r_{ij} MAX

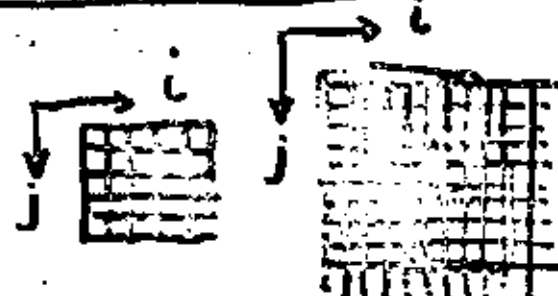
- 135 I -

FIG. 54 PARALLEL-PIPELINE-PROCESSING
FOR CORRELATION

$$(\text{correlation coefficient})^2 = r^2 = \frac{\left[\sum_1^n A_i B_i - \frac{1}{n} \sum_1^n A_i \cdot \sum_1^n B_i \right]^2}{\left[\sum_1^n A_i^2 - \frac{(\sum_1^n A_i)^2}{n} \right] \left[\sum_1^n B_i^2 - \frac{(\sum_1^n B_i)^2}{n} \right]}$$

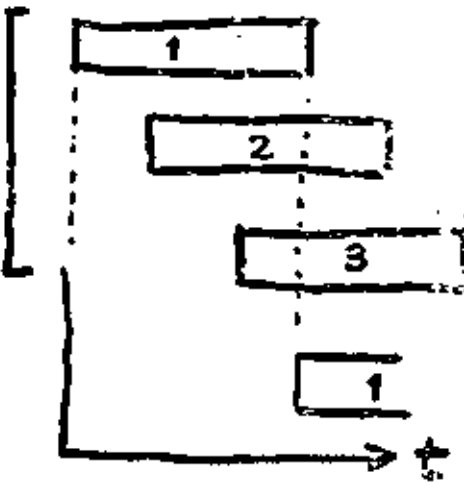
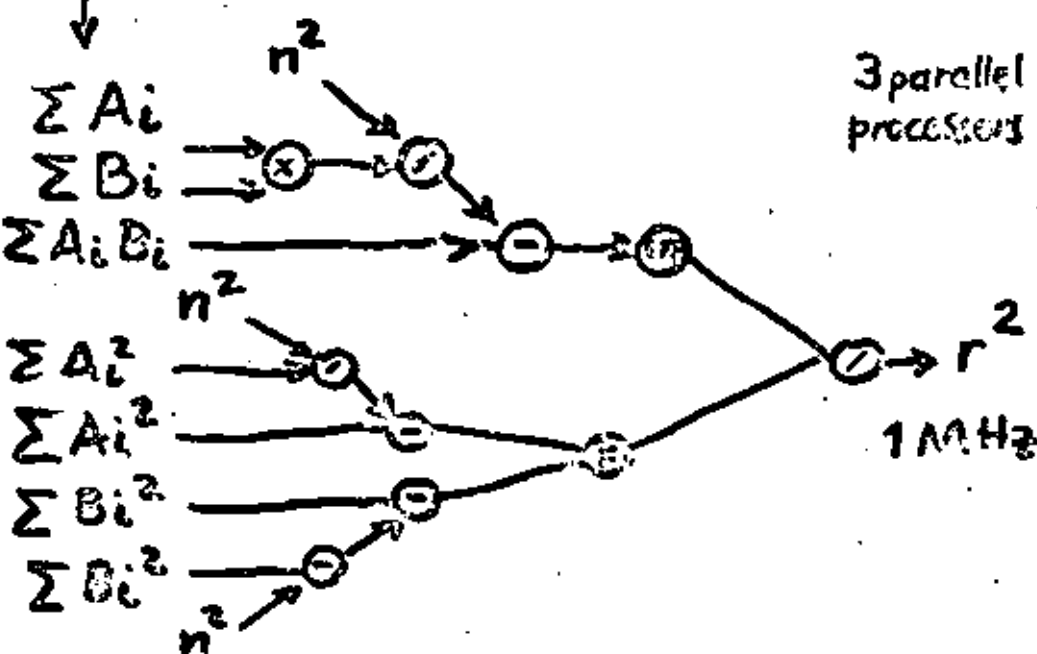
PARALLEL PROCESSOR

parallel
input



Pipeline mode

3MHz



$$j=1 \quad B_{1j} \leftarrow B_{1j} \leftarrow B_{1j} \leftarrow B_{1j} \dots B_{1j} \leftarrow B_{1j} \leftarrow B_{1j}$$

$$j=2 \quad B_{2j} \leftarrow B_{2j} \leftarrow B_{2j} \leftarrow B_{2j} \dots B_{2j} \leftarrow B_{2j} \leftarrow B_{2j}$$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAMETRIA ANALITICA

ANALYSICAL PLOHERS
ANALYSICAL PLOHER HARDWARE

DR. GOTTFRIED KONECNY

MARZO, 1981

Lecture 4

Topic II : Analytical Plotters

Analytical Plotter Hardware

The development of photogrammetric stereoplotters for aerial photographs went from optical to mechanical to analytical.

see Fig 1
Fig 2
Fig 3

In optical and mechanical projection the model is physically reconstructed by optical rays or by mechanical rods.

If the floating mark of a Multiplex platen or the ~~center~~ mechanical joint of a Wild A8 representing the model point (x, y, z) is moved then two image rays will optically or mechanically ~~then~~ be defined to determine $x'y'$ and $x''y''$. If the projectors have properly been oriented, then a stereoscopic model will be observable.

~~In an analytical system~~

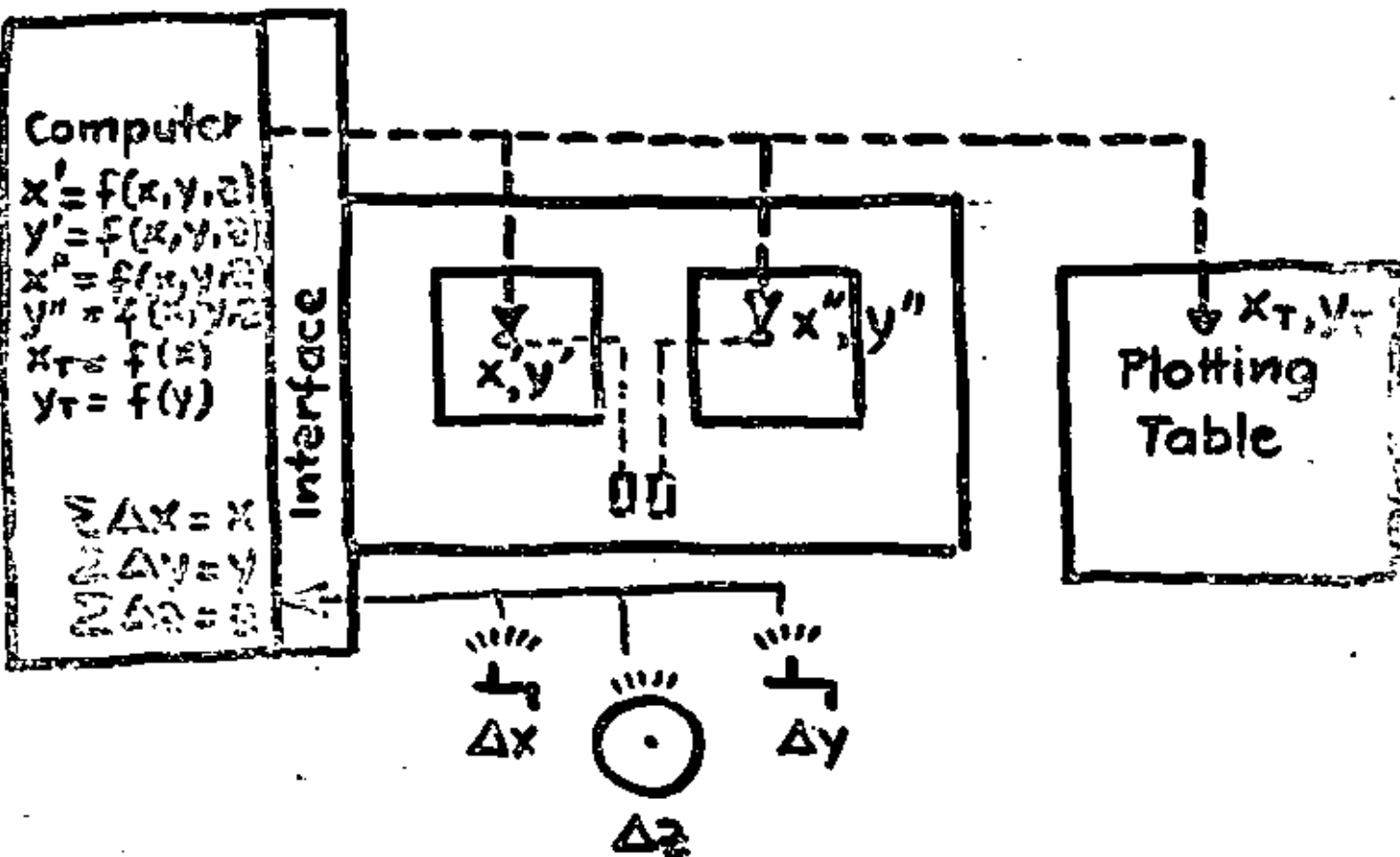
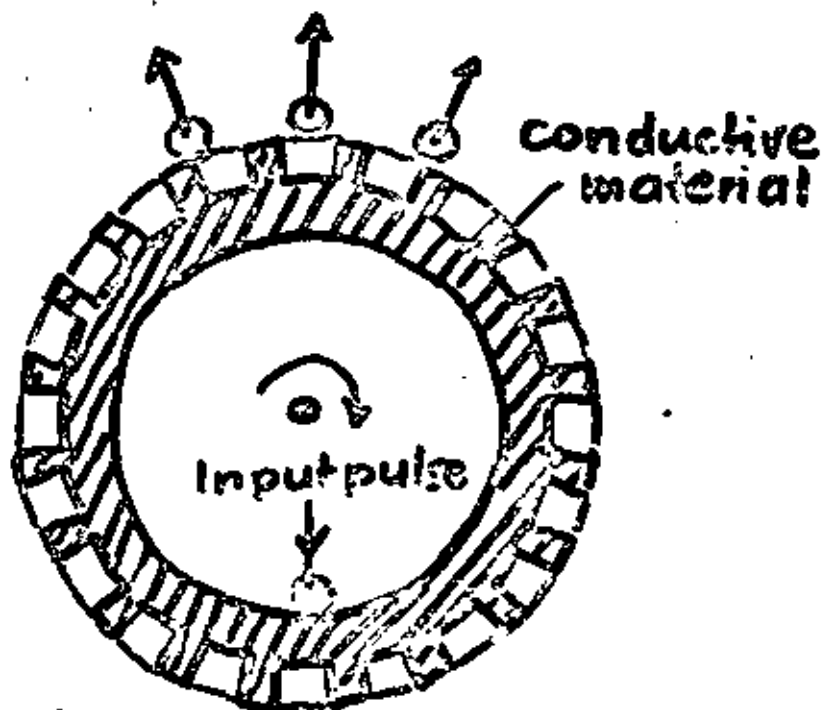


Fig. 3
ANALYTICAL
PROJECTION

output pulses



a) Mechanical encoder

3 required
to determine
sense of
rotation



Photomultipliers

Frontview

Lamp 1



Photomultiplier 1

Lamp 2

Photomultiplier 2

Crosssection

b) Photosensitive encoder

Fig. 4
Rotary Encoders

$$x' = -c \frac{a_{11}(x-x_0) + a_{12}(y-y_0) + a_{13}(z-z_0)}{a_{31}(x-x_0) + a_{32}(y-y_0) + a_{33}(z-z_0)} + x_c$$

$$y' = -c \frac{a_{21}(x-x_0) + a_{22}(y-y_0) + a_{23}(z-z_0)}{a_{31}(x-x_0) + a_{32}(y-y_0) + a_{33}(z-z_0)} + y_c$$

Fig. 5.
Collinearity Equations

$$x_T = \lambda (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + x_{T0}$$

$$y_T = \lambda (-x \sin \alpha + y \cos \alpha) + y_{T0}$$

Fig. 6.
Table Output

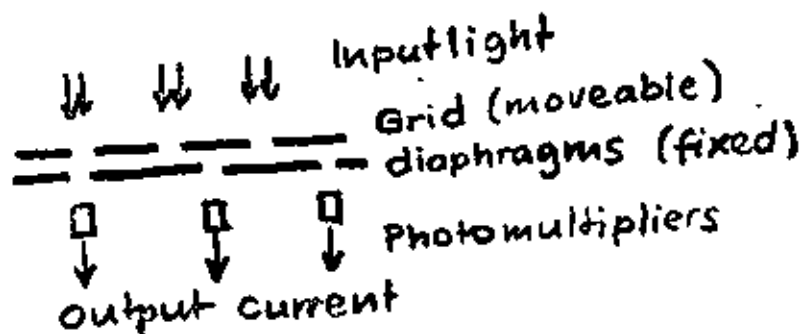


Fig. 7.
Linear Encoders

The servo-motor acts on a spindle which converts the servo-rotation into a linear movement of the optical prism.

The location of the prism (or its movement) is then encoded again. In the earlier analytical plotters this also happened by rotary encoders as shown in Fig 4. More recently linear encoders have been introduced (see Fig 7). A moveable encoded grid of black and white lines slides with the optical prism over a set of photomultipliers (or vice versa). Three of these are required in order to permit the determination of a positive or negative movement direction (this counts for linear as well as rotary encoders).

Then ~~the measured position~~, during the movement, a corresponding number of bits is added or subtracted from the reference buffer of the hardware, fixing the measured position of $x'y'$ $x''y''$ x_T or y_T .

If the servos have not yet

-67A-

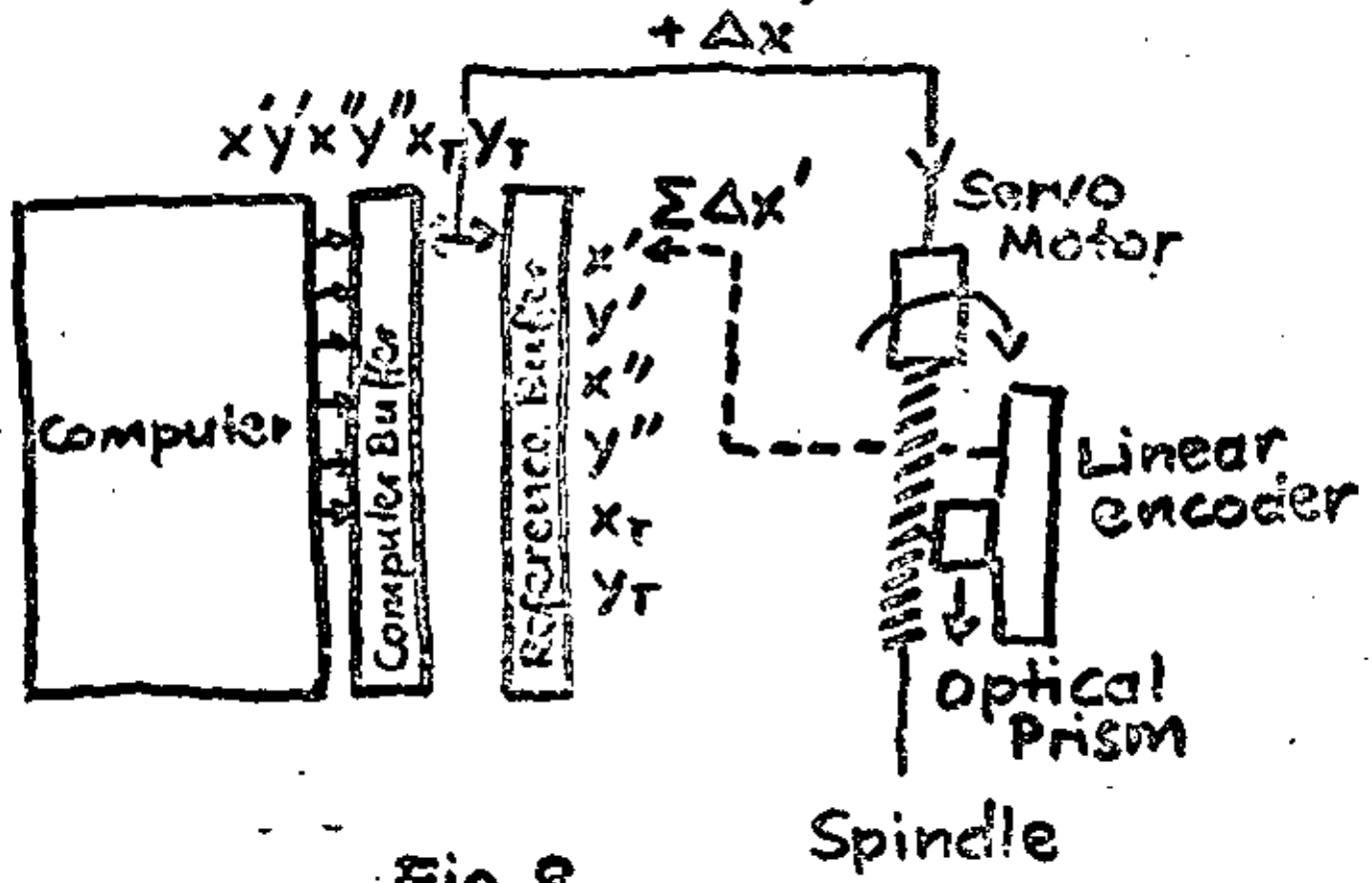


Fig. 8.
Closed Loop Servo System

-68A-

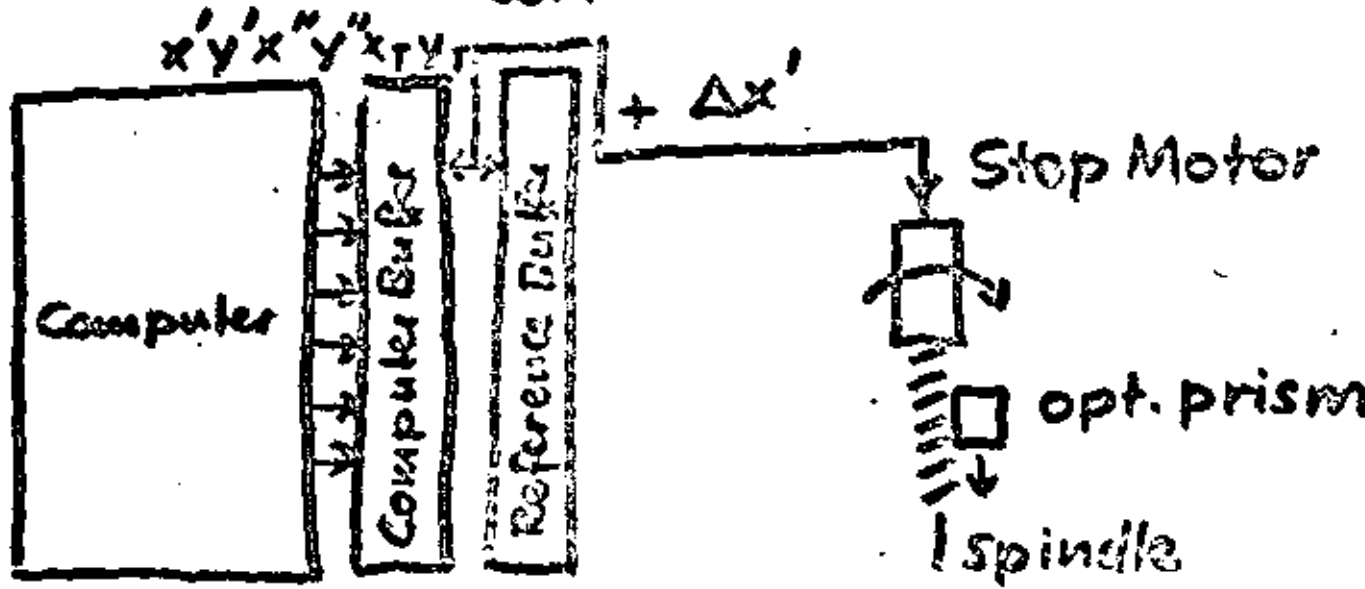


Fig. 9. Open Loop with Step Motors

For measuring movements on the photo the encoders are best placed into the plane of the photo, hereby realizing the Abbe-principle (Fig. 10).

If a spindle is used for measurement (like on analog mechanical plotters) then the rotary encoders will measure displacements determined by the accuracy of the spindle. In particular the spindle is subject to thermal expansion. This thermal expansion is caused by changes in room temperature, ~~but~~ like for analog plotters. Air Conditioning can control room temperature.

But in addition to that the servo motors generate heat. Because they operate on different specific parts of the photo they will heat the spindle differentially. Therefore airconditioning does not help.

This is the reason, why rotary encoding does not give a higher accuracy than $\pm 3\mu\text{m}$, even though encoding is done with a precision of $1\mu\text{m}$.

Constant scale changes of the spindle are relatively harmless if before measurement the plotter is calibrated in scale.

This is done measuring the fiducial marks, determining jointly the affine $x'y'x''y''$ scales, which are affected by film deformations as well as spindle expansion.

Review of Existing Analytical Plotters

Analytical Plotter Types

From the analytical plotter described two other analytical instruments must be differentiated: the

Digital Stereocautograph

and the

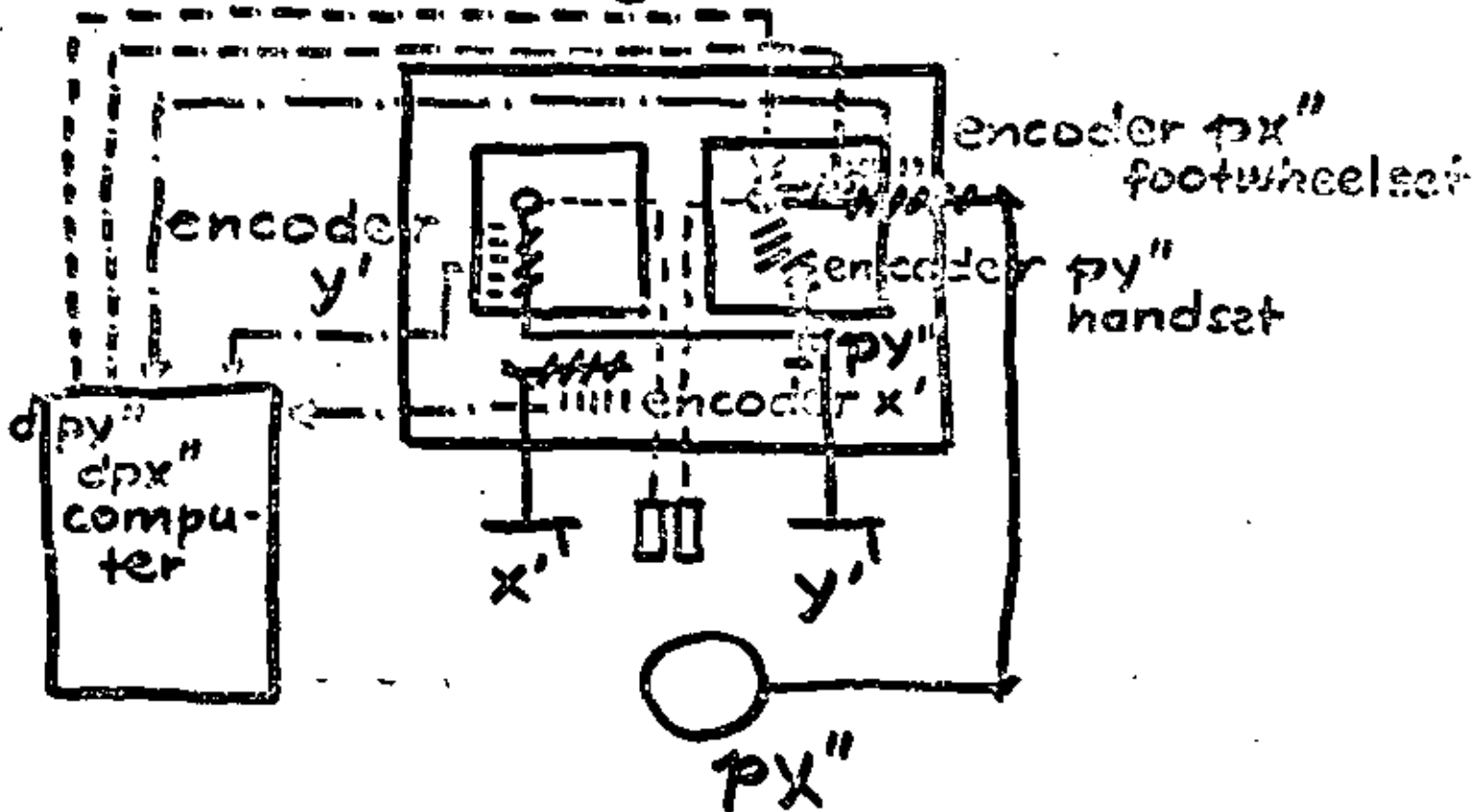
Image Space Plotter

~~While the Helawa type~~

analytical plotter, which has been described, generates x, y, z pulses and computes and introduces $x', y', x'', y'', x_r, y_r$ on at least 4 (with the plotting table 6) servo-systems,

-71A-

Fig. 11.



DIGITAL
STEREOCARTOGRAPH

-71C-

λ_i'

$$x_i = x_0' \frac{bx(a_{12}'x_i' + a_{22}'y_i' - a_{32}'c) - by(a_{11}'x_i' + a_{21}'y_i' - a_{31}'c)}{(a_{11}'x_i' + a_{21}'y_i' - a_{31}'c)(a_{11}''x_i'' + a_{22}''y_i'' - a_{32}''c) - (a_{11}''x_i'' + a_{21}''y_i'' - a_{31}''c)(a_{12}'x_i' + a_{21}'y_i' - a_{31}'c)}$$

$$\cdot (a_{11}'x_i' + a_{21}'y_i' - a_{31}'c)$$

$$y_i = y_0' \left(\lambda_i' \right) \cdot (a_{12}'x_i' + a_{22}'y_i' - a_{32}'c)$$

$$z_i = z_0' \left(-\lambda_i' \right) \cdot (a_{13}'x_i' + a_{23}'y_i' - a_{33}'c)$$

$$\left. \begin{aligned} x_i'' &= x_i' + px'' \\ y_i'' &= y_i' + py'' \end{aligned} \right\} \text{in } \lambda_i'$$

for the step motors

dp_y'' must be calculated:

The digital stereocartograph has the disadvantage that the x, y, z coordinates (and thus also the x', y' coordinates) cannot be moved under computer control.

Another instrument type operating according to analytical principles is the image space plotter.

Fig. 13

The image space plotter encodes hand and foot-driven " $x' y' p x' p y$ ". These are fed into a computer.

It calculates (eventually by approximations) the first part of the relations in Fig 12 giving x, y, z . These are transformed into x_T, y_T and fed to the stepmotors of the plotting table.

The image space plotter has no feedback.

The historical development of analytical plotters is shown in Fig. 14.

The availability of analytical plotters up to 1979 is given in Fig 15. along with their characteristics.

Fig. 16. lists analytical plotter developments, which have become available during 1980.

The following remarks should be made

PRESENT ANALYTICAL PLOTTERS

| <u>Manuf (yr)</u> | <u>Model</u> | <u>Comp</u> | <u>core</u> | <u>disk</u> | <u>operation</u> | <u>digit. incre.</u> | <u>remarks</u> | <u>cycle time</u> |
|-------------------|-----------------------|----------------|----------------------|------------------|------------------|----------------------|--|-------------------|
| OMI 1972 | AP/C-3 | IBM 1130 | 8K 16bit →32K | 512K 16bit | panel | 2µm | timed interrupt | 3,6µsec |
| Bendix 1976 | US1 | PDP 11/35 | 24K 16bit | 1,2M 16bit | CRT panel | 1µm | multilevel interrupt | 900nsec |
| Instronics 1976 | Anaplot1 | PDP 11/45 | 32K 32bit | 2x 1,2M 32bit | CRT panel | 1µm | fl. pt, double word length multilevel interrupt | |
| Matra 1976 | Traster 77 | Telemach Solar | 32K 16bit | 2x 2,5M 8bit | CRT | 0,5µm | coded linear encoders | 750ns |
| OMI 1975 | AP/C-3T | PDP 11/35 | 24K 16bit | 1,2M 16bit | panel | 2µm | multilevel interrupt | 900ns |
| OMI 1976 | AP/C-4 | PDP 11/03 | 24K 16bit | Cassette | CRT | 2µm | | 1,2µs |
| Jenoptik 1976 | Stereo- dicomat | Kernsberg SA14 | 16K 16bit | - | Teletype | 0,625µm | | |
| Galileo | Digit. Stereocont. | PDP 11/05 | 12K 16bit | | Teletype | 1µm stop motion | | 900ns |
| Zeiss 1976 | Planicom | C100 HP21 | 24K 16bit →32K | 4,9M 8bit | CRT panel | 1µm | fl. pt multilevel interrupt | 650ns |
| Zeiss 1975 | HP 9810 | ROM | ROM | | HP 1810/30 | | | |
| | Stereocont | or HP 9220 | 512 words | 1750 | | | | |

New Analytical Plotters

As of 1975 the Analytical Plotter Development has reached a state of improved capability of the hardware:

1) Computer Core

Analytical Plotters now have a computer core size 2 to 3 times as large as before.

This makes them adaptable for additional programming and the use of various more convenient input/output devices, such as the CRT.

2) Digitization Increment

From an increment of $2\mu\text{m}$ now generally $1\mu\text{m}$ is available, even though only $\pm 3\mu\text{m}$ are tolerable due to thermal expansion of the spindles, even when affine scale changes are taken care off by reading the fiducial marks. Lin encoder instruments may have better accuracy than $\pm 3\mu\text{m}$, but the pointing of targets is most likely not better than $\pm 2\mu\text{m}$. Therefore the increment sizes of $1\mu\text{m}$, $0,625$ or $0,5\mu\text{m}$ offered are only an internal characteristic rather than a measure of accuracy.

5) Off-Line Storage

Of interest are also the less expensive and generally widened possibilities of off-line storage in form of magnetic disks, magnetic tape or cassettes.

6) Special Photogrammetric Hardware

1980 three new plotters have been introduced which solve the real-time cycle ~~problem~~ solving the collinearity equations by a special perspective processor, the so-called "Digital Projector".

Like the Digital Differential Analyser of the old Bendix-OMI AS-11-A it is a "computer" beside the general purpose computer, which now can be reduced in size, because it only has to solve service problems.

The Digital Projector is a microprocessor programmed in hardware for the task of solving the collinearity equations.

The place of microprocessors in between digital circuitry and microcomputers is shown in Fig 17.

They operate in bit groups. Their memory is a read only memory. The programming of the memory is simulated on an emulator. Then the program is cast in a fixed manner onto a ROM. It cannot be changed unless another ROM is cast.

The advantage of a microprocessor is its very small size and its extremely low material cost. The overall cost is therefore low, if it can be mass-produced.

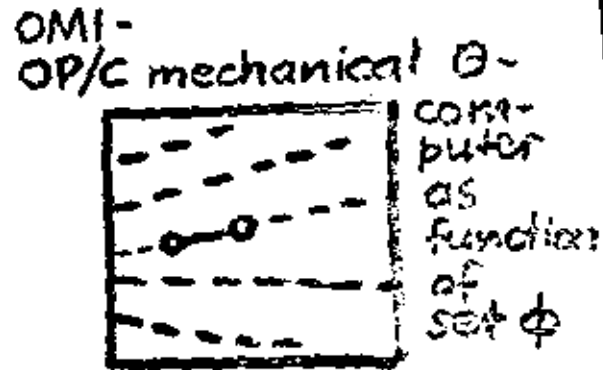
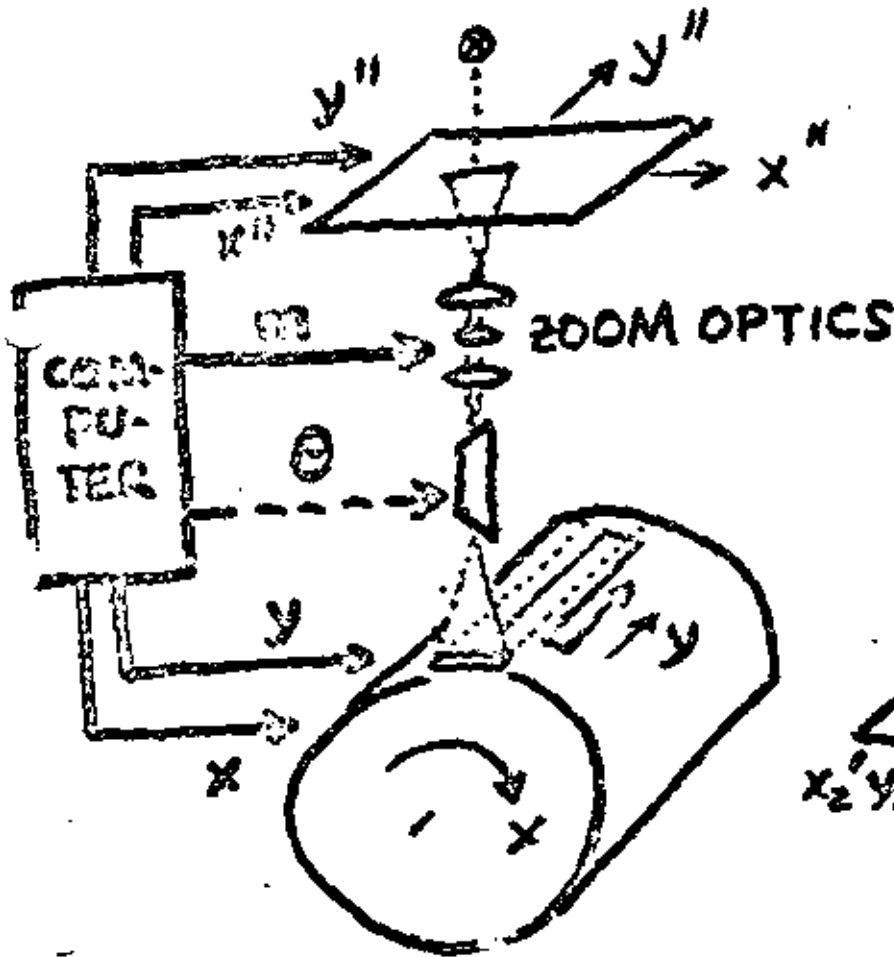
The "digital projector" is therefore principally a device which can help to lower the cost of simple analytical plotters. These retain the high accuracy of analytical plotters with general purpose computers, but do not offer the flexibility which depends on the high-cost peripherals.

Another useful processor used in the Helava-Associates US-2 is ~~the~~ a special processor to service the swo-loop systems. Rather than building a special interface to do the bit-comparison of the 6 servos of an analytical plotter (a military type analytical plotter has 4 outputs more) a microprocessor can be used for that purpose.

-78A-

33

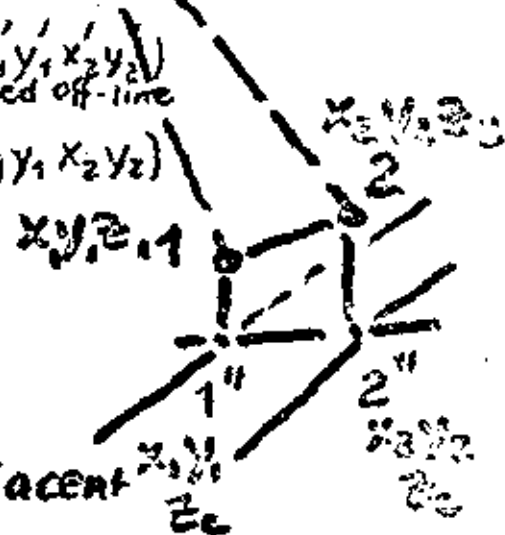
ORTHOPRINTERS UNDER ANALYTICAL CONTROL FIG. 18.



WILD-OR-1 (via x_1', y_1', x_2', y_2')
& calculated off-line
ZEISS-GZ-2 (via x_1, y_1, x_2, y_2)

computer
control also
of θ ;

θ and m are
derived from
heights of 2 adjacent
profiles



DIGITAL ORTHOPRINTER CONTROL

GZ-1

$$x_1' = -c \frac{a_{11}(x_1 - x_0') + a_{12}(y_1 - y_0') + a_{13}(z_1 - z_0')}{a_{31}(x_1 - x_0') + a_{32}(y_1 - y_0') + a_{33}(z_1 - z_0')}$$

$$y_1' = -c \frac{a_{21}(x_1 - x_0') + a_{22}(y_1 - y_0') + a_{23}(z_1 - z_0')}{a_{31}(x_1 - x_0') + a_{32}(y_1 - y_0') + a_{33}(z_1 - z_0')}$$

$$x_2' = -c \frac{a_{11}(x_2 - x_0') + a_{12}(y_2 - y_0') + a_{13}(z_2 - z_0')}{a_{31}(x_2 - x_0') + a_{32}(y_2 - y_0') + a_{33}(z_2 - z_0')}$$

$$y_2' = -c \frac{a_{21}(x_2 - x_0') + a_{22}(y_2 - y_0') + a_{23}(z_2 - z_0')}{a_{31}(x_2 - x_0') + a_{32}(y_2 - y_0') + a_{33}(z_2 - z_0')}$$

8 SERVICES:

(1), (2) $m_{M12} = S \cdot \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}} \equiv$ zoom magnific. 2 lenses are controlled

chosen scale factor

(3) $x'_{M12} = \frac{x_1' + x_2'}{2}$; $y'_{M12} = \frac{y_1' + y_2'}{2} \equiv$ posit. of photo to be aligned parallel to drum

(5) $\text{tg } \theta'_{M12} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} \equiv$ rotation of prism by $\frac{\theta'_{M12}}{2}$ to rotate photo by θ'_{M12}

(6) $x_{M12} = S \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_{M12} = S \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}$

(8) illumination control = $f(m_{M12})$
 $= f(r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}, z_i)$

Simplification for OR-1

Given: $x_1' y_1' z_1, x_2' y_2' z_2$ on tape
for regular intervals of $x_i y_i$

x_{M12}, y_{M12} is driven to mechanically

calculated:

$$\operatorname{tg} \Theta'_{M12} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

$$y'_{M12} = \frac{y_1' + y_2'}{2}$$

$$x'_{M12} = \frac{x_1' + x_2'}{2}$$

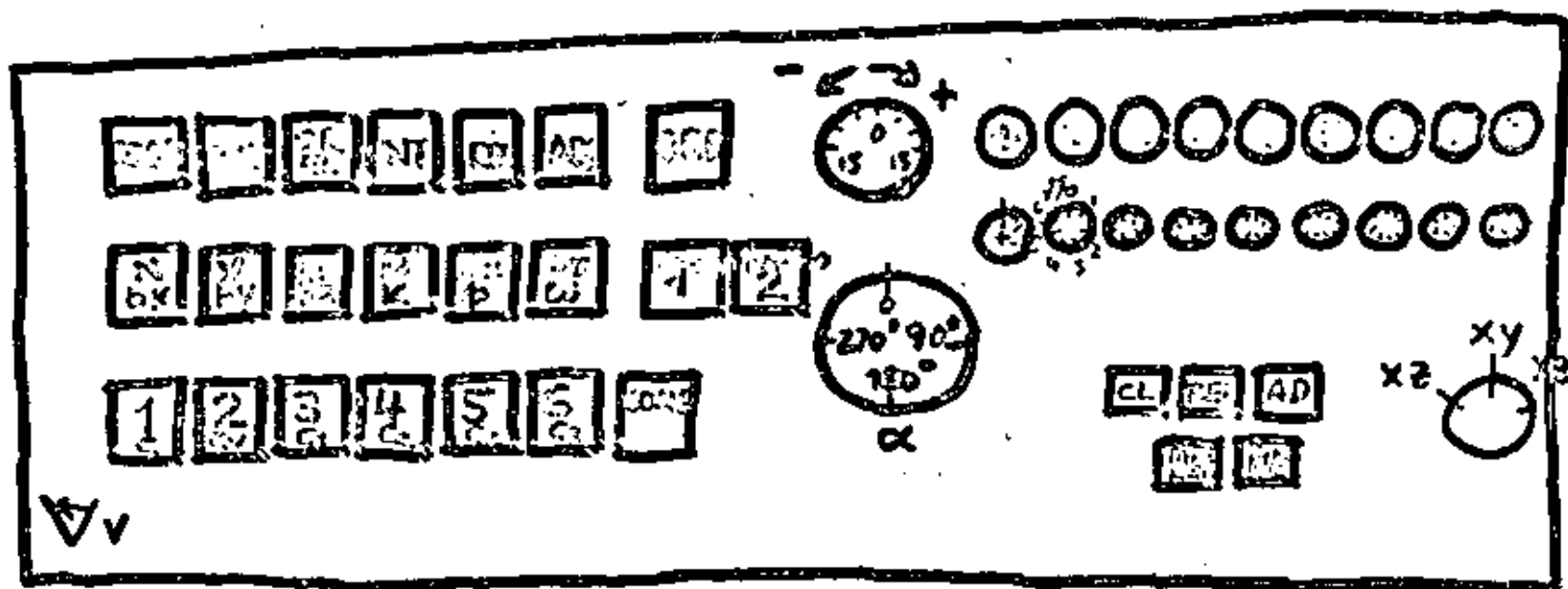
$$m_{M12} = \frac{k}{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}}$$

$$k = \text{constant} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \text{slit (or profile) width chosen}$$

-81A-

Fig. 19.

AP/C - PANEL



interior orientation
 relative orientation
 absolute orientation

If an orientation is chosen it must be performed in a number of steps.

These can be called for by buttons 1, 2, 3, 4, 5, 6 and compute

Interior orientation

requires 5 steps:

Step 1 drive to first fiducial

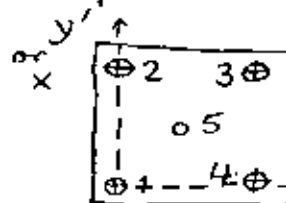
(one will begin operation of the plotter with the optics approximately in the center; ~~then~~ or better, one will go to the first fiducial by the handwheels. The program in this step operates like

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \end{aligned}$$

Step 2 upon pushing this

button x and y in the computer are cleared to zero.

Then the location of the second fiducial is entered from memory into the buffer:



| | x | y |
|--------------|----------------------|----------------------|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 230,00 mm |
| 3 | 230,00 mm | 230,00 mm |
| 4 | 230,00 mm | 0 |
| 5 | 115,00 mm | 115,00 mm |
| 5 | x_c | y_c |

calculated as well as an affinity of scale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \alpha & \lambda_1 \sin \alpha \\ -\lambda_2 \sin \alpha & \lambda_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

the 3 additional unknowns can be determined by a least squares adjustment.

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 & \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 & \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 & \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 & \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \alpha & \lambda_1 \sin \alpha \\ \lambda_2 \sin \alpha & \lambda_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{obs} \\ y_{obs} \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x' \cos \alpha + y' \sin \alpha) d\lambda_1 & 0 & (-\lambda_2 \sin \alpha x' + \lambda_1 \cos \alpha y') d\alpha \\ \cancel{(x' \sin \alpha - y' \cos \alpha) d\lambda_1} & (-x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) d\lambda_2 & (-\lambda_2 \cos \alpha x' - \lambda_2 \sin \alpha y') d\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \alpha & \lambda_1 \sin \alpha \\ \lambda_2 \sin \alpha & \lambda_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{obs} \\ y_{obs} \end{pmatrix}$$

$$X = (A^T A)^{-1} A^T L$$

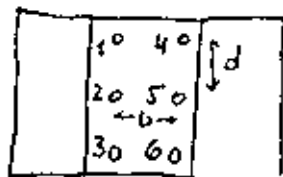
Following that x', y' are calculable in the real time program as stage coords. Based on x_c, y_c as origin:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \alpha & -\lambda_2 \sin \alpha \\ \lambda_1 \sin \alpha & \lambda_2 \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

these transformation constants are entered into ~~the~~ storage for use in the real time program. At the same time $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ is set w/ the left projection center.

Relative Orientation

requires 7 steps:

step 1 drive to the first orientation point in the model.

The constants b and d have been stored after input with these the approx. coords. of 1 to 6 are ~~calculated~~ set into memory as:

| | x | y |
|---|---|----|
| 1 | 0 | +d |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | -d |
| 4 | b | +d |
| 5 | b | 0 |
| 6 | b | -d |

Then the coords. of the first pt. are entered into the buffer and the plotter will drive to pt. 1. Then the real time program will be operating. The operator can move handwheels and footdisk to change x , y and z to a more convenient location for observation. In order to see stereoscopic he will have to change b_x and b_y (that is x_0 and y_0) from the initially inserted zero value for interior orientation to a value until the parallax disappears in x and y . He can do so by dialing desired values b_x and b_y in and

The real time loop is used for this: A constant $\Delta x_0''$, $\Delta y_0''$, $\Delta z_0''$ is chosen, say 1 mm. Likewise a constant $\Delta \omega''$, $\Delta \phi''$, $\Delta k''$ is chosen, say 0,1°. Alternately for each $\Delta x_0'' \dots \Delta k''$ the tone $x_0'' \dots k''$ is temporarily changed ~~to~~ $x_0''_{\text{new}} = x_0'' + \Delta x_0''$ and the corresponding change in ~~the~~ x_i'' is calculated as $(\Delta x_i'')_{x_0''} \dots (\Delta y_i'')_{\omega''}$. Thus the coefficients of the error equations are already formed by numerical differentiation.

If "initiate" is pushed again control is entered to the real time program and another point may be selected in the vicinity of the pt 1 to repeat the cycle by another measurement.

If this is not desired the button 2 may be depressed and the operation step 2 begins in an identical manner as for step 1 for point 2 driving to it. This is repeated for

step 3, step 4, step 5, step 6

for points 3, 4, 5, 6

Any time additional points may be measured.

After all points have been entered in this manner the "compute" button is depressed and the absolute orientation calculation is carried out.

~~Then after~~ The constants

$a_{11} \dots a_{33}$ are are ~~changed~~ summed up after each iteration:

$$A_{\text{new}} = A_{\text{old}} \cdot dA_{\text{computed}}$$

Also ~~A_{new}~~

$$bx_{\text{new}} = bx_{\text{old}} \cdot d\lambda_{\text{computed}}$$

and the coordinate origin for the ground coordinates is shifted by dx_0, dy_0, dz_0 .

The sums are transferred into the appropriate storage location.

~~Then after~~ While the plotter ~~is~~ still measures and operates in model coordinates the additional transformation will provide ground coordinates according to

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda' A_{\text{new}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

While programs are now modular most manufacturers keep their programs secret in order not to help other manufacturers.

An analytical plotter program consists of at least 5 man years of programming effort.

The real-time program

consists of solving the collinearity equations

$$x_i' = -c \frac{a_{11}(x_i - x_0') + a_{12}(y_i - y_0') + a_{13}(z_i - z_0')}{a_{31}(x_i - x_0') + a_{32}(y_i - y_0') + a_{33}(z_i - z_0')} + \Delta x'$$

$$y_i' = -c \frac{a_{21}(x_i - x_0') + a_{22}(y_i - y_0') + a_{23}(z_i - z_0')}{a_{31}(x_i - x_0') + a_{32}(y_i - y_0') + a_{33}(z_i - z_0')} + \Delta y'$$

Obviously this formulation can also be applied with altered constants to x_i'' and y_i'' .

$\Delta x'$ and $\Delta y'$ are interior orientation and distortion corrections expressed by other formulations.

While x_i'' , y_i'' , x_i' , y_i' must be computed (and executed) in real time, that is in $1/100$ sec for correlators in about $1/50$ or $1/30$ sec for the human operator the corrections will change more slowly. Therefore there is no need to calculate them at the rate of $1/100$ or $1/30$ sec but perhaps

after execution (which could be in real time or near real time or somewhat later).

The ~~simulation~~ real time program also included rate limiting and acceleration limiting due to servo limitations. These are on the AP/C (2µm increments)

maximal velocity 10mm/sec

maximal acceleration 60 mm/sec²

for the plotting table ^(8µm increments) they are:

maximal velocity 32mm/sec

maximal acceleration 120 mm/sec²

If these rates are exceeded the coordinate changes are introduced in steps to conform with the above limits.

The IBM 1130 of the AP/C has a clocked interrupt of 32µsec. at ~~which~~ which time the buffers are exchanged with the memory. Within this period all real time calculations must be completed. If this is done e.g. in 28µsec. the computer is in a wait-state for 4µsec. During the buffer transfer altogether 34 words are

This counts especially for the correction of systematic errors: these are mostly only approximately corrected.

1. lens distortion.

$$dc_i = a_1 r_i' + a_2 r_i'^2 + a_3 r_i'^3 + a_4 r_i'^4$$

with $r_i' = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}$

2. film deformation:

$$dx_i' = \frac{x_i'}{r_i'} \cdot dc$$

$$dy_i' = \frac{y_i'}{r_i'} \cdot dc + y_i' \cdot c_F$$

\downarrow change of principal distance \downarrow affinity factor

dc and c_F are determined from the fiducial mark readings

3. earth curvature

$$dz_i = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2R}$$

4. airm. refraction

$$dz_j = (A + B \cdot z_j + C \cdot z_j^2) (1 + \gamma^2 \theta_j)$$

$$\gamma \theta_j = \frac{\sqrt{(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2}}{(z_j - z_0)^2}$$

A , B and C are constants depending on h

The use of the analytical plotter for extended tasks will require more storage, which can best be provided externally.

Therefore disks are most useful as peripherals. For off-line processing of digitally acquired data (DTM, aerial triangulation measurements) magnetic tape has to be added. That can be expensive and not so convenient.

For that reason

minicomputers have now become available with large core storage.

On these minicomputers program packages of aerial triangulation adjustment and of DTM contour interpolation or profile data preparation for orthophotoprinters have been installed. They may be used at night, while plotters are normally not operated.

With such possibilities a huge software effort has been initiated for analytical plotters.

examples are:

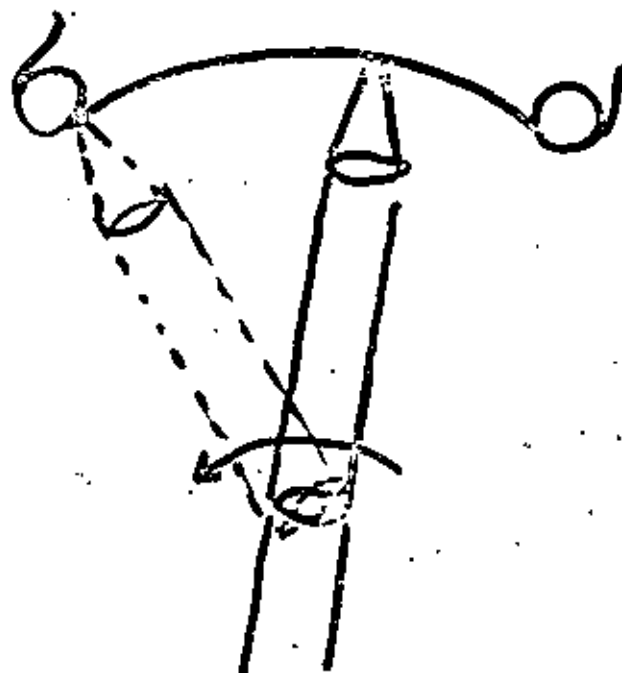
- a) Plotting ^{from} ~~of~~ $c = 60\text{ cm} / 23 \times 23\text{ cm}$ format aerial photography, which is ordinarily taken for rectification purposes in city areas to avoid dead spaces
- b) Plotting of oblique photography to get high precision restitutions of mountain walls, or up to the national boundary over which aerial flights are not possible
- c) Plotting ^{from} ~~of~~ normal, inclined or convergent terrestrial photatheodolite-photography, with various formats and principal distances to survey industrial objects

3. Plotting from Non-Metric Photography

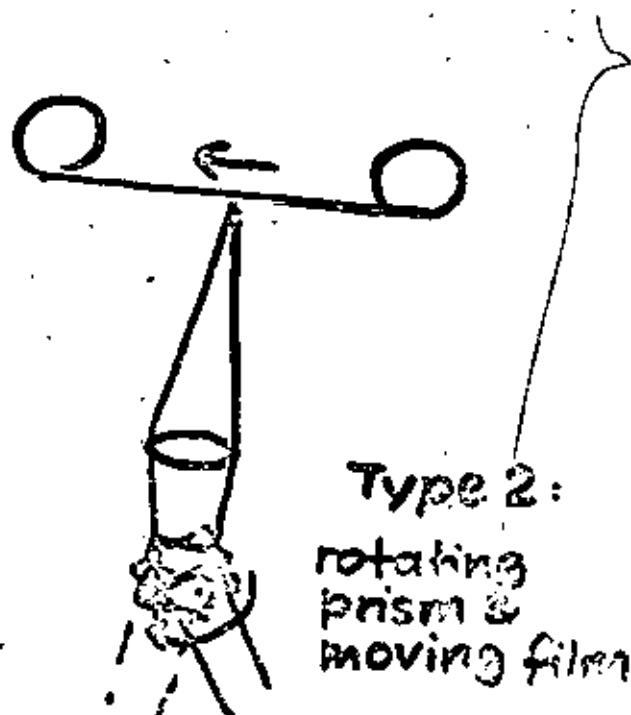
Analytical plotters are particularly suitable to plot from arbitrarily taken overlapping non-metric photographs such as those taken with amateur-cameras, or with Hasselblad-type 70 mm-film cameras.

Fig. 20.

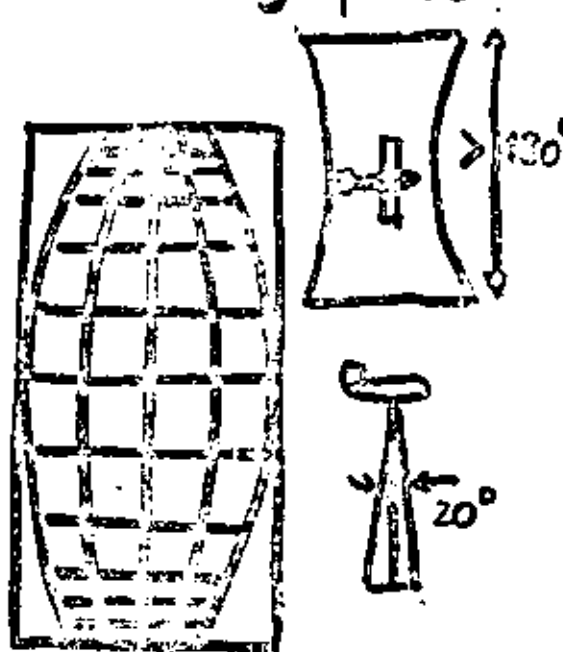
Panoramic Photography



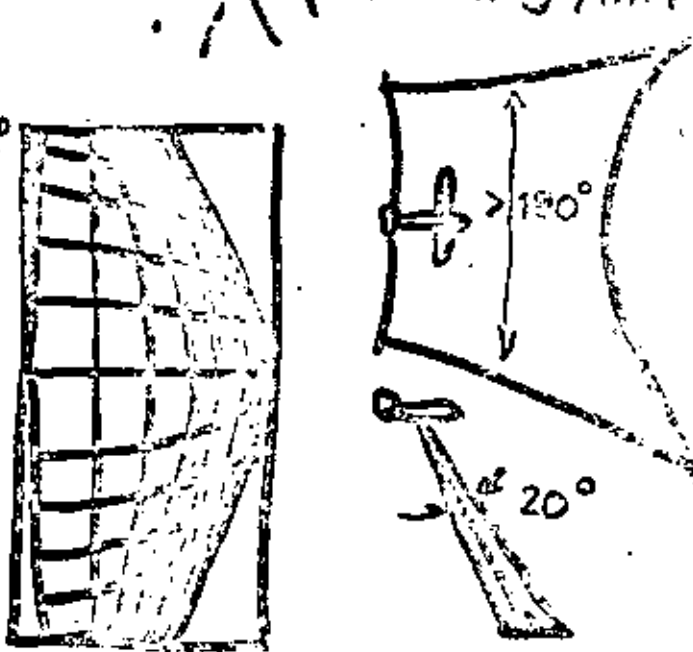
Type 1: rotating optics



Type 2: rotating prism & moving film



vertical panoramic photography of square grid pattern



oblique panoramic photography of square grid pattern

with various map points by procedures to be discussed in the topic on geometry of remote sensing. Then plotting with correct planimetric geometry becomes possible.

The main advantage of analytical plotter uses, however lies in the adaptation to its automation possibilities by optimising the software in such a way, that ~~the~~ standard photogrammetric tasks may be performed faster and with greater operator ease.

II. Adaptation of Analytical Plotter Software to Optimize Standard Photogrammetric Tasks

1. Orientation of Models

One of the obvious advantages of analytical plotters is the fact that orientation procedures such as interior, relative and absolute orientation are quickly executed after a few measurements.

Once an aerial triangulation block has been triangulated ^{and stored} the orientation parameters of the whole block can be stored on disk. When a stereopair has been inserted into the photo-carriers only two photo numbers need to be addressed

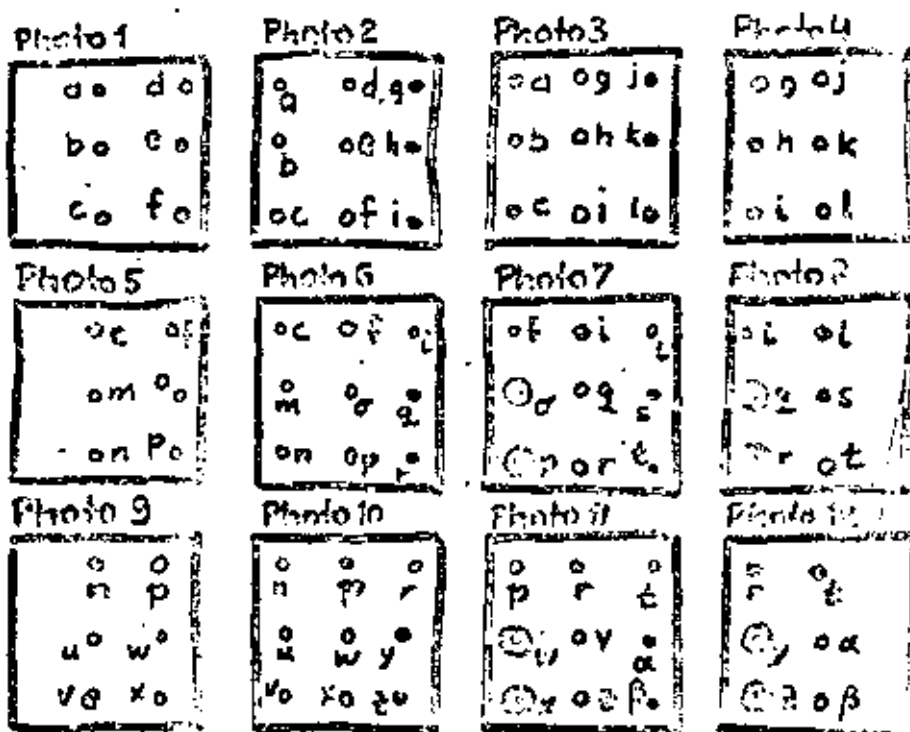
Fig. 22.

Aerostriangulation Effort per Model

| Instrument Procedure | Stereo-comparator | Conventional plotter | analytical methods | |
|---------------------------------|-----------------------------------|----------------------|--|---|
| | | | without semi-automatic point transfer software | with semi-automatic point transfer software |
| observation | $x'y'x''y''$ | $xy\delta$ | $x'y'x''y''$ or $xy\delta$ | $x'y'x''y''$ or $xy\delta$ |
| insert of diapositives | 2 min | 4 min | 2 min | 2 min |
| measurement of fiducials | 8 min | - | 4 min | 4 min |
| relative orientation | - | 25 min | 10 min | 10 min |
| coding search setting recording | 5 min/pt. | 4 min/pt | 3 min/pt | 1 min/pt. |
| for 6 pts. | 40 min | 53 min | 34 min | 20 min |
| for 12 pts. | 70 min | 77 min | 52 min | 28 min |
| for 24 pts. | 110 min | 100 min | 76 min | 36 min |
| for 40 pts. | 210 min | 130 min | 136 min | 56 min |
| remarks | parallax correction on each point | | | |

-104A-

Fig. 23.

Semiautomatic Aerial Triangulation
Transfer of Points

- Procedure:
- 1) Selection of a to f in model 1/2
 - 2) Selection of g, h, i in model 2/3; semiautomatic setting, coding and measurement of a, b, c (by x_a, y_a)
 - 3) same for j, k, l in model 3/4, semiaut. setting etc. of g, h, i
 - 4) insertion of model 1/5 rotated 90° ; semiautomatic setting of c (by x_c, y_c) and measurement in photo 5
 - 5) same for pts f, i, l in models 4/5, 5/6
 - 6) in model 5/6 semiaut. sets of a, f, solution of net.

- b) Contours may be digitally recorded in terms of $Z = \text{const.}$ for Δs , Δt or Δx and Δy .
- c) rather than measuring the profiles in a dynamic mode the computer may program a regular Δx , Δy grid locations to which it may drive. The operator, after setting Z then can order the computer to go to the next selected point.
- d) The grid selection may even be refined to take care of the requirements to represent the existing topography adequately. In "progressive sampling" some characteristic areas are determined in which sample profiles are measured. The computer then decides on the right interval.

The advantage of the grid method and of progressive sampling has been demonstrated on the AP/C at Hannover.

~~Fig. 34 shows a comparison~~ A test area, flown at the test scale 1:4000 and also flown at a check scale 1:1800 was used. The 1:4000 photos were subjected to measurements by various methods. These were checked with the 1:1800 photography of superior accuracy.

-107 A-

71

Fig 24

Profiling at various speeds
at 1:4000
photo scale

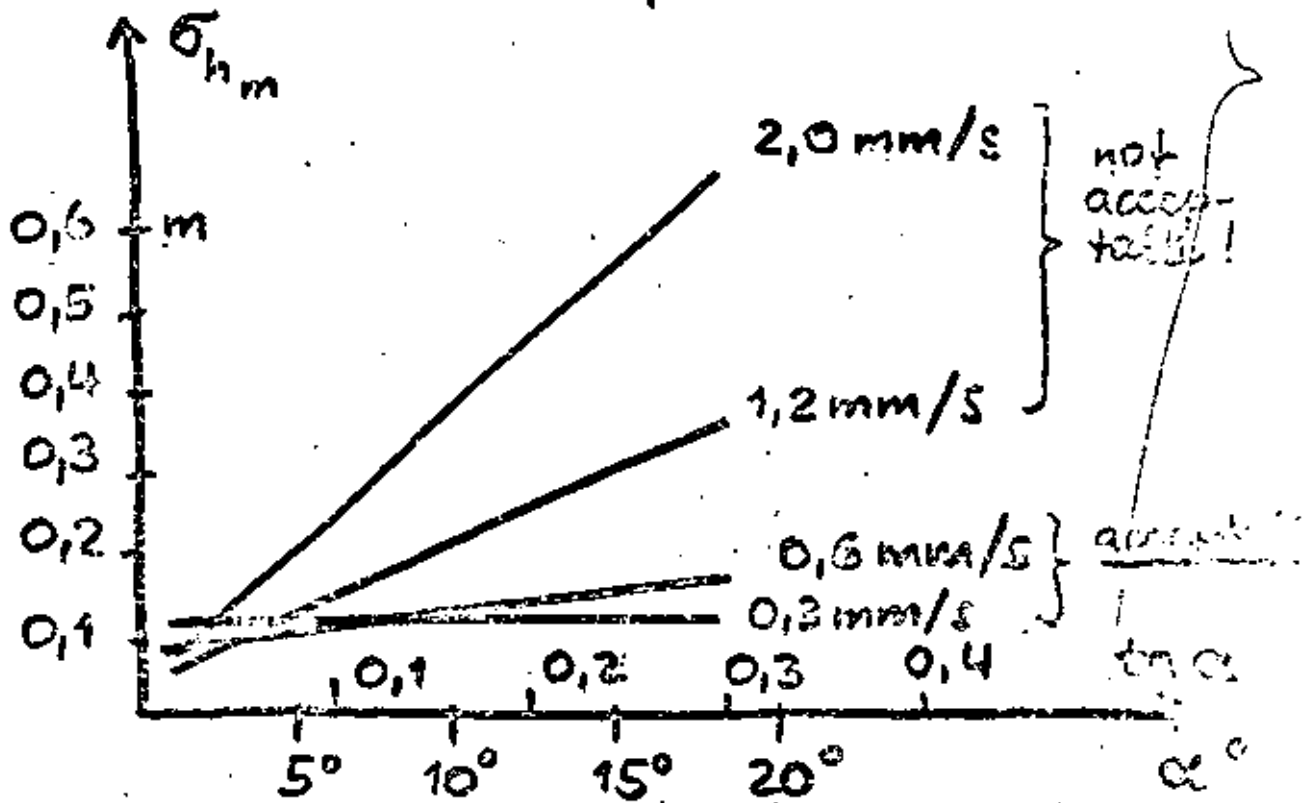
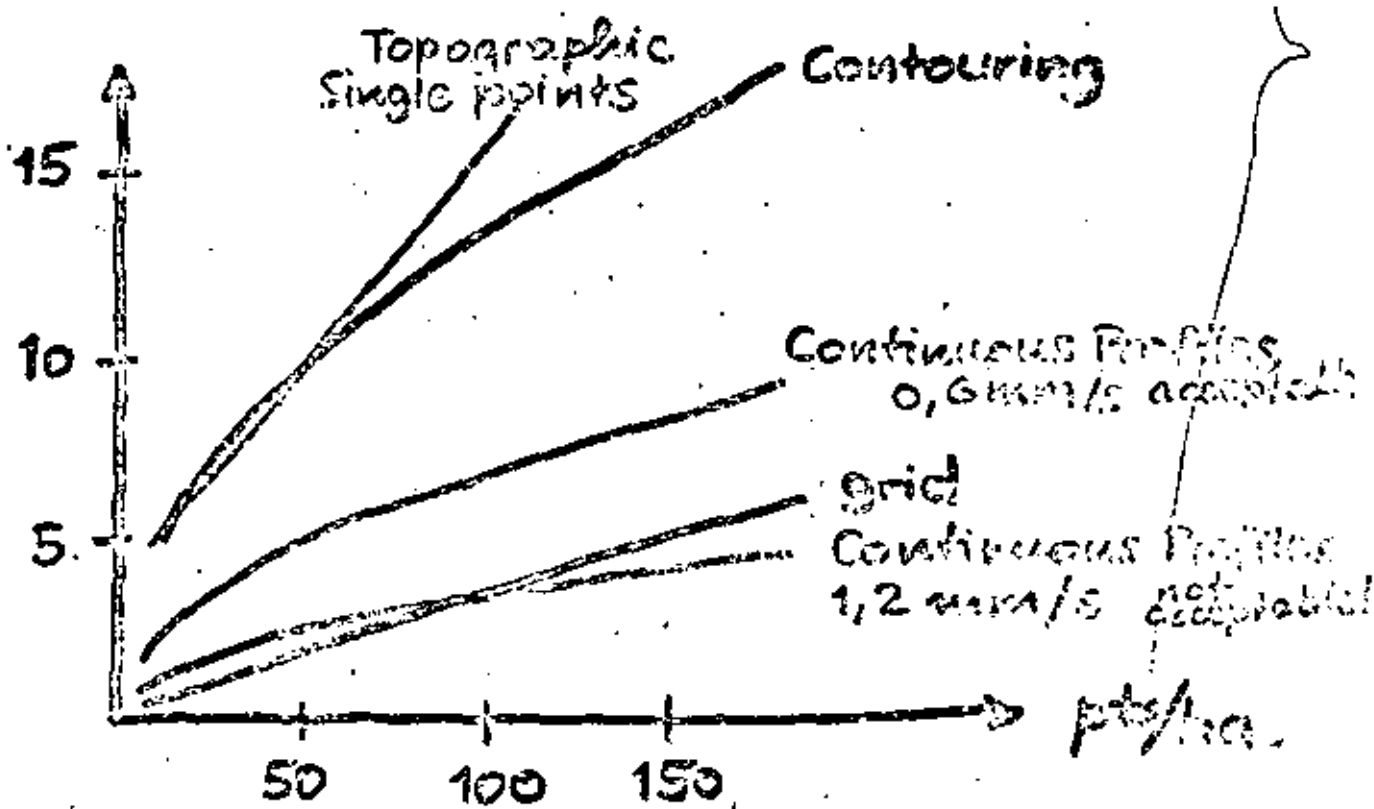


Fig. 26

Time effort for various recording methods

t/ha in min



This points to the desirability
to apply grid measurements at
grid densities varying with the
terrain type

7.1-

with

$$\sigma_h^2 = \sigma_0^2 + (c \cdot K_m \cdot a)^2$$

in which \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 measurement constant mean curvature grid width
 error $\approx 0,20$ terrain

$$K = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2}$$

In characteristic areas of the
model therefore test grid-profiles
(e.g. every 1m) can be measured
and computationally thinned out
(Fig. 28).

Another possibility is to
use a Fourier transformation for
the profile

Fig. 29 ~~and Fig. 30~~ and Fig. 30

Fig. 31 shows an example
for "progressive sampling". Thus
the required 8m grid for certain
areas could be thinned out,
requiring only 500 instead of
1700 measured points.

If $S(x)$ is the signal then its Fourier transform becomes:

$$S'(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \cdot e^{-ix} dx$$

a part of the frequencies may be filtered ($a = 12m$ instead of $a = 1m$) $\rightarrow S''(f)$

The retransformed filtered signal

becomes:

$$S(x_f) = \int_0^{f = \frac{1}{2a}} S'(f) \cdot e^{+ix \cdot f} df$$

while the original signal was:

$$S(x) = \int_0^{f = \frac{1}{2a}} S(f) \cdot e^{+ix \cdot f} df$$

In this manner profiles may not only be recorded (in point or profile mode) for DTM's but also for the production of orthophotos in an off-line mode.

5. Digital Position Data Acquisition

Considerable efforts are currently being made to automate the drawing function of stereoplotting. Analog plotters are currently being equipped with ~~best~~ automatic drawing tables of various qualities for on-line use in a semi-automatic manner (buildings may be ^{made} square; points may be linked by lines; parallel lines may be drawn, symbols may be composed in a uniform fashion, grid lines and letters may be drafted).

~~Analog~~ Analytical plotters already possess drawing table control.

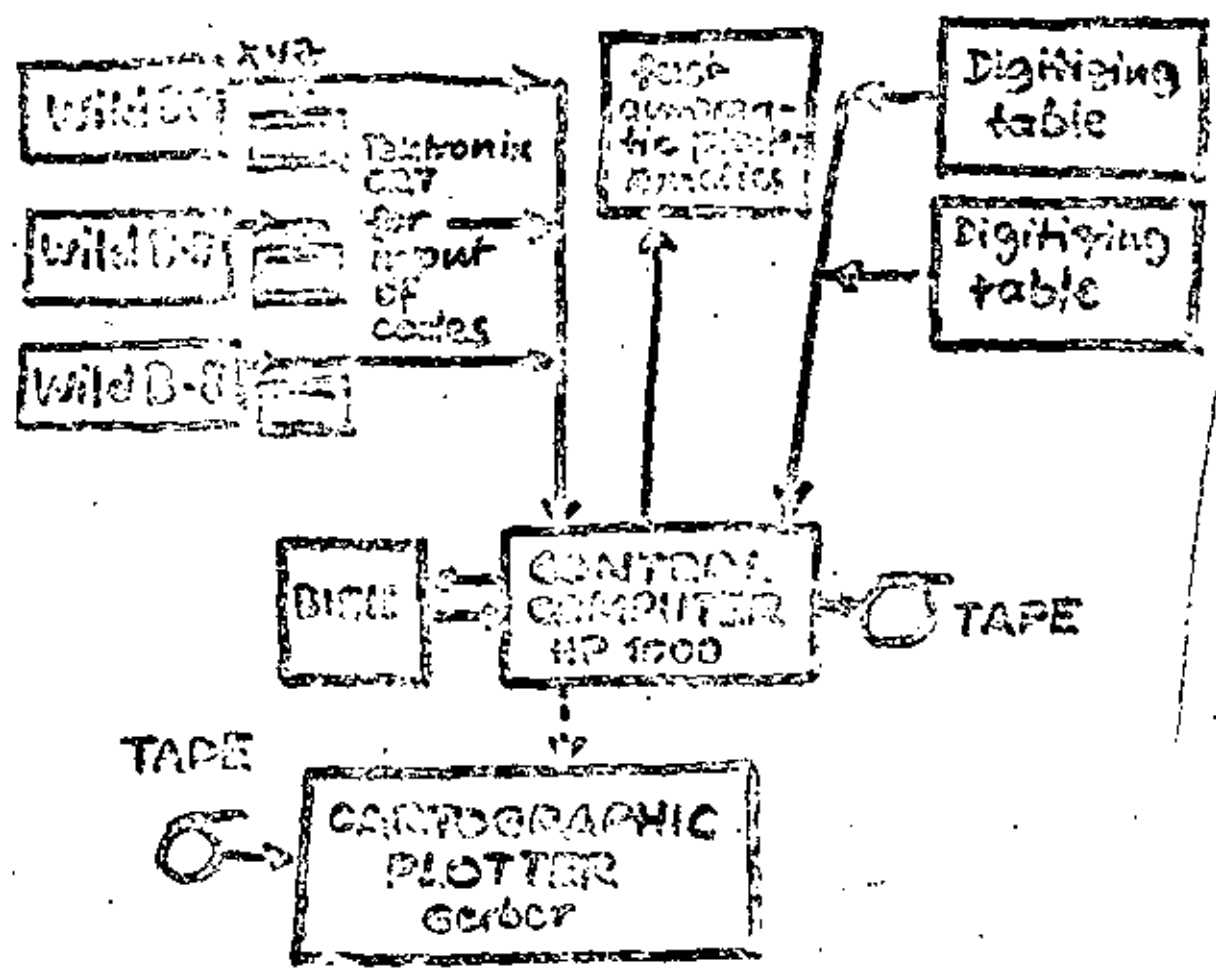
For them it is not a matter of adding hardware, but to expand the software only. Production has been significantly speeded up by use of on-line automatic drawing tables.

In stereoplotting other efforts are being undertaken to offer possibilities for off-line drawing leading to cartographic automation.

Here the provision of digital photogrammetric position data still leads to significant difficulties, because the

- 110 A -
Fig. 21.

Acquisition of Digital Position Data



Option 1

Example:
Automatic - System of
Australian Army

6. Use of the Analytical Plotter as a Terrestrial Plotter

The multitude of possibilities to photograph objects in terrestrial photogrammetry (photostereoscopes, stereometric cameras for parallel, inclined, averted and convergent photos on plates and on film — for various purposes, such as open pit mining, civil engineering construction, archaeological restoration, documentation, for police use has led to the fact that except for the analytical plotter there is no general terrestrial plotting device for terrestrial tasks.

For that reason photogrammetric techniques have been simplified in methodology. However this complicated the survey requirements to such an extent that they were only usable by survey experts. This in turn has limited the use of terrestrial photogrammetric methods.

Another way for new applications is to make the survey requirements to a minimum and to make the evaluation somewhat more complicated; however this is feasible with analytical tools.

In this way amateur-camera photos or high quality photos taken by a hand-held camera may be evaluated when most part of the required orientations and image corrections may be deduced from the photos.

Lecture 9 Digital Elevation Models

Acquisition of Digital Terrain data has already been discussed on the section of Analytical Plotter Uses. What was not discussed is the mathematical modelling of the terrain data and the use of Digital Terrain Models.

Mathematical Description of the Topographic Surface

1. General Remarks

In § 21 of the script of Analytical Photogrammetry [Chinese version p. 199, English version p. 229] Interpolation Methods for Adjusted Results are discussed. These apply here as well, since the problem of describing the terrain surface is an Interpolation Problem.

Data are usually acquired in various forms:

- irregular points describing topographical features characteristically
- contours (as a sequence of point data)
- profiles (as a sequence of point data)
- points on a regular grid.

From these limited data (called the primary data) final data must be derived, which are the desired information (e.g. computed contours; terrain profile data with a geodetic reference or with reference to a highway design). This is mostly done via a ^{dense} regular grid of secondary data. This dense grid

and the new Zeiss ELTA 2. Program systems are available to take the automatically recorded field measurements ~~to~~ and the ~~survey~~ surveys coded ~~point~~ station and point information from the cassette into an adjustment program which calculates primary data in form of x, y, z - (UTM-) ground coordinates ready for use in DTM programs.

b) photogrammetric surveys

offer of course very good possibilities to acquire terrain data more efficiently for medium and large size areas.

These can make use of standard analog plotters. However these must be equipped with magnetic tape units, or they must be connected to a time shared computer (see Automap System) in order to record the point-, profile-, or contour data ~~to~~.

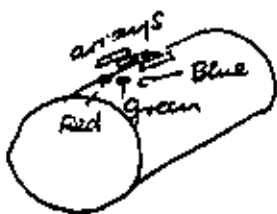
Profiles and contours are expressed in point sequences. The Analytical Plotter is especially suitable, since it not only possesses a storage medium (disk) and a computer, but it can do the DTM measurements already in a form required for secondary data storage. Densification of such a point sequence is therefore much simpler, if at all necessary.

c) map contours

Much of the topographic information needed has already been recorded in form of contour map manuscripts and contour maps. It is of course convenient

A special off-line software thins the recorded contour lines and provides primary data in this way.

3. Another possibility is to use a drum raster-scanner such as one produced for the US military by IBM. This



drum scanner can separate into the basic colors blue, green and red and is therefore capable of scanning color separations (contours, rivers, roads)

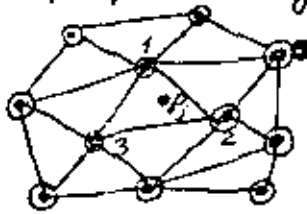
4. Line following equipment developed experimentally has not been too successful.

2. Interpolation of Primary Data

If primary data are to be interpolated then normally a continuous surface is assumed. In nature this is sometimes not the case. Discontinuities are caused by man-made features (roads, ditches, excavations, dams). Sometimes they also originate naturally (erosion of soil by water, rock erosion in mountains).

If such discontinuities occur, then care must be taken to measure them during the acquisition phase as break-lines. The point sequence of a breakline is stored as point data in coded form.

calculation of the area of each possible combination of points. The one with the smallest area is the proper triangle.



The area of the triangle (e.g. betw. pts 1, 2, 3) is expressible

as a plane interpolation surface

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 = z_1$$

$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 = z_2 \quad ; \quad \text{or:}$$

$$a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 = z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = L \quad ; \quad X = A^{-1} L$$

with the coefficients a_0, a_1, a_2 known (for each triangle)

the height of a point $P_j (x_j, y_j)$ may be calculated:

$$z_j = a_0 + a_1 x_j + a_2 y_j$$

This formulation has the disadvantage, that adjoining triangles have discontinuities along the triangle -



"pyramids"
(creeps)

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + a_7y + 2a_8xy + a_9 \quad 2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = a_4 + 2a_5y + 3a_6y^2 + a_7x + a_8x^2 + 2a_9xy$$

giving 3 additional observations in the ^{respective} 16 triangles _{considered}

3) to form at points 1, 2, 3 the curvatures:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 2a_2 + 6a_3x + 2a_8y$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2a_5 + 6a_6y + 2a_9x$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = (a_7 + 2a_8x + 2a_9y) + (4a_2a_5 + 2a_8)xy +$$

giving 3 additional observations. The last equation is non-linear, it must be linearized. $16 \times 3 = 48$ is the respective to triangles.

These 25 observations may be used to derive the $a_0 \dots a_9$ in a ^{and the 3 slopes as well as the 9 curvatures} least squares adjustment. This will yield smooth transitions between triangles. MBB is using this approach in their DTM program.

Breaklines

~~When a breakline is present, the solution is not a plane triangle. The breakline is a line that separates the surface into two parts.~~

This approach has the advantage that breaklines may simply be taken care of. A breakline will always be located as a side of a triangle. If it is marked as such (e.g. line 1-3) then the slope of the triangle behind (e.g. 1-3-10) and its curvature are omitted as observations for pts 1 and 3.

Should the number of observations be insufficient, then the solution reverts back to the plane triangle.

The a_0, a_1, a_2 are determined from the (10) closest points again whereby:

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} ; \quad p_i \text{ may also be taken from an estimated or determined covariance function;}$$

p_i is the weight of the observation equation $v_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i - z_i$
for all 10 pts.

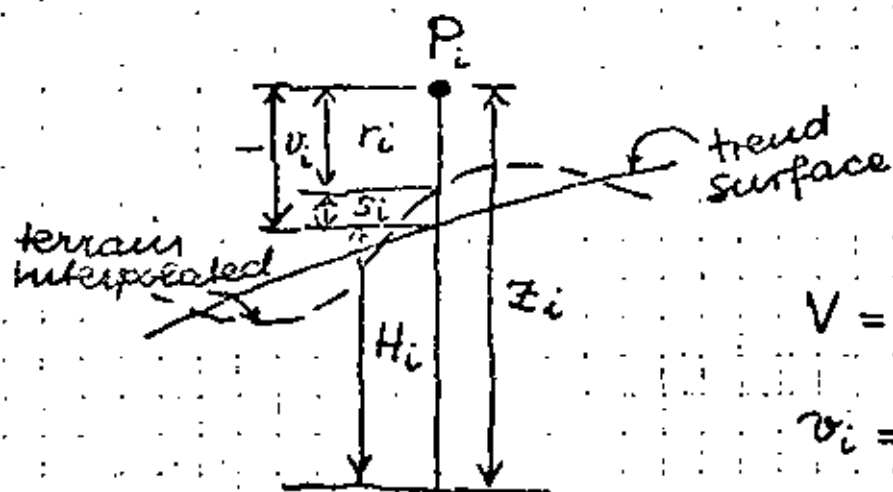
$V = AX - L$ is solved:

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

This method has been used by Koch (University of Bonn)

2.4. Least Squares Interpolation

This method, also called Collocation or Linear Prediction has been used in Geodesy and Gravity prediction by Kraus^(Bonn, 1962) and Moritz^(Graz). To D.T.M.'s it was introduced by Kraus (Vienna). It is the basis of the Kraus-Ackermann DTM-program.



$$V = AX - L$$

$$v_i = H_i - Z_i$$

H_i is the calculated value for $Z_i \Rightarrow AX$ after the adjustment of $a_0 \dots a_5$

$$Z_i = H_i - v_i$$

The interpolated terrain now should be such, that the systematic effects of the errors are eliminated for the interpolated points in a linear way (therefore \in linear prediction)

$$v_j = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_i v_i + \dots + a_n v_n$$

In the example n was chosen = 7

If v_i is split into a systematic part

(correction)


- s_i and a random part - r_i (error)

then $v_i = -s_i - r_i$ and

$$Z_i = H_i - v_i = H_i + s_i + r_i$$

$$H_j = v_j - z_j = C_j^T \cdot C_{ii}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix}$$

or:

$$H_j = \left(\sum \frac{s_j v_1}{n} \dots \sum \frac{s_j v_n}{n} \right)_{1 \times i} \begin{pmatrix} \sum \frac{v_1 v_1}{n} & \dots & \sum \frac{v_1 v_n}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{v_n v_1}{n} & \dots & \sum \frac{v_n v_n}{n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix}$$



This is for data, that has not been filtered for the points P_i .

If filtering is to be included then:

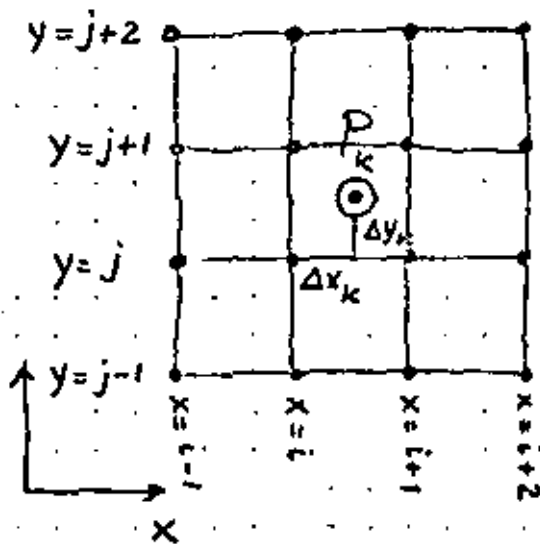
$$H_j = H_{\text{random } j} - \Delta H_{\text{system } j}$$

$$\Delta H_{\text{system } j} = C_j^T \cdot C_{ii}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix}$$

therefore:

$$H_j = \left(\sum \frac{s_j v_1}{n} \dots \sum \frac{s_j v_n}{n} \right)_{1 \times i} \begin{pmatrix} \sum \frac{v_1 v_1}{n} & \dots & \sum \frac{v_1 v_n}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{v_n v_1}{n} & \dots & \sum \frac{v_n v_n}{n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix} - \left(\sum \frac{s_j v_1}{n} \dots \sum \frac{s_j v_n}{n} \right)_{1 \times i} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$


2.5. Height Interpolation with Finite Elements



The primary points are P_k with x_k, y_k

A grid of secondary points is interpolated between the primary points, such that each point P_{ij} is represented by a local bilinear spline acting to the 4 surrounding grid points, having the max. value of 1 at P_{ij}

Each spline ~~from a point~~ influences the interpolation surface S_{ij} by a factor of α_{ij} . For bilinear splines (straight lines with breaks at the points) $\alpha_{ij} = \xi_{ij}$

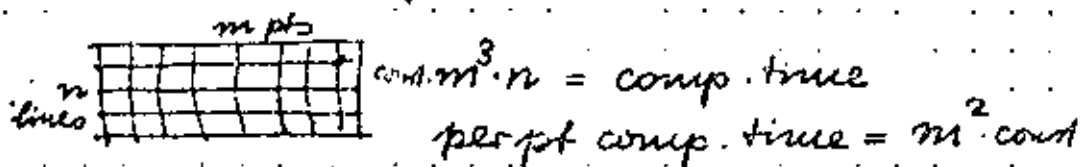
For P_k we have

$$x_k = x_{ij} + \Delta x_k; \quad \Delta x_k = \frac{(x_k - x_i)}{d}; \quad 0 \leq \Delta x_k \leq 1$$

$$y_k = y_{ij} + \Delta y_k; \quad \Delta y_k = \frac{(y_k - y_j)}{d}$$

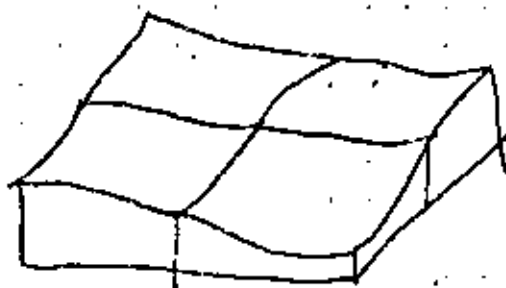
$$d = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j$$

eqn. (1) & (2) gives normal eqn. system with band structure, prop. to m



Method expandable from bilinear to bicubic finite elements.

Each grid square is defined as bicubic polynome, with 1st & 2nd derivative (slope) & (curvature) equal in adjacent ~~grid~~ squares.



- 1) Each P_{ij} has a bicubic spline limited to 16 adjacent squares with max. at P_{ij}

Interpolation surface as $\alpha_{ij} \cdot S_{ij}$
 \downarrow
 but not heights!

- 2) $x_k, y_k = f(\alpha)_{\substack{\text{of pts} \\ 1 \dots 16}}$

coeff. are cubic functions of $\Delta x_k, \Delta y_k$

unknowns are: α (9 unknown parameters in 1)

~~grid~~

(16 unknown parameters in 2)



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

FOTOGRAFIA ANALITICA

**Resultados de
Ejercicios**

Dr Hans Peter Bahr

Marzo, 1981

$$a) \quad \frac{1}{P_1 P_2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{14} = 3,74$$

$$b) \quad \cos \alpha = \frac{z-1}{P_1 P_2} = \frac{1}{3,74} ; \alpha = 74,50 \text{ (82,78)}$$

$$\beta = 57,67$$

$$\gamma = 36,66$$

$$c) \quad \cos \theta = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{|\vec{P}_1| |\vec{P}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{d_1 d_2} = \frac{2+3+4}{\sqrt{3} \sqrt{29}} = 0,965$$

$$\theta = 15,22$$

$$2a) \quad C = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & -7 & 7 \end{vmatrix} ; \quad b) \quad D = \begin{vmatrix} 9 \\ 8 \end{vmatrix}$$

$$3) a) \quad \begin{matrix} a^T b \\ 1,5 \quad 5,1 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} a b^T \\ 5,1 \quad 1,5 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} D b \\ 5,3 \quad 5,1 \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} D^T a \\ 3,5 \quad 5,1 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} a^T C + b^T D \\ 1,5 \quad 5,2 \quad 1,5 \quad 5,3 \\ \checkmark \quad \checkmark \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} D P \\ 5,3 \quad 5,5 \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} P C \\ 5,5 \quad 5,2 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} a C \\ 5,1 \quad 5,2 \\ - \end{matrix} \quad \begin{matrix} C^T D \\ 2,5 \quad 5,3 \\ \checkmark \end{matrix} \quad \begin{matrix} a^T P b \\ 1,5 \quad 5,5 \quad 5,1 \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$b) \quad P = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} b$$

$$\begin{matrix} [3 & -2 & 0 & 6 & -4] & | & 6 & -6 & 0 & 6 & -8 & | & 38 & / & 22 \\ a^T & & & & & & a^T P & & & & & & & a^T P b \end{matrix}$$

4.

$$A = \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{array} \right| \begin{array}{l} A^{-1} \\ E \end{array}$$

a) $1 \cdot a_{11}^{-1} + 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{31} = 1$
 $a_{11} = 1$

b) $4 \cdot a_{12}^{-1} + (-2) \cdot a_{22}^{-1} + 0 \cdot a_{32}^{-1} = 1$
 $a_{22} = -0,5$

(Elementos diagonal: $a_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}}$)

$$A = S^T H ; H = T S$$

5. a)

$A \equiv$ matrice
simétrica

 $(E - S)^T$

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -s_{13} & -s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -s_{14} & -s_{24} & -s_{34} & 0 & 0 \\ -s_{15} & -s_{25} & -s_{35} & -s_{45} & 0 \end{array}$$

H =

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline f & g & h & i & k \\ l & m & n & o & p \\ q & r & s & t & u \\ v & w & x & y & z \end{array}$$

ordem natural

 $(E - S^T) H$

1. fila: $h_{ik} = a_{ik} + 0$

$$\begin{aligned} f: h_{2,1} = 0 &= a_{2,1} + [-s_{12} \cdot 2] \\ &= -4 + (-s_{12} \cdot 2) \\ 4 &= -2s_{12} \\ s_{12} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i: h_{2,4} &= a_{2,4} + [-2s_{12}] \\ &= -4 + 4 = 0 \end{aligned}$$

Generalmente:

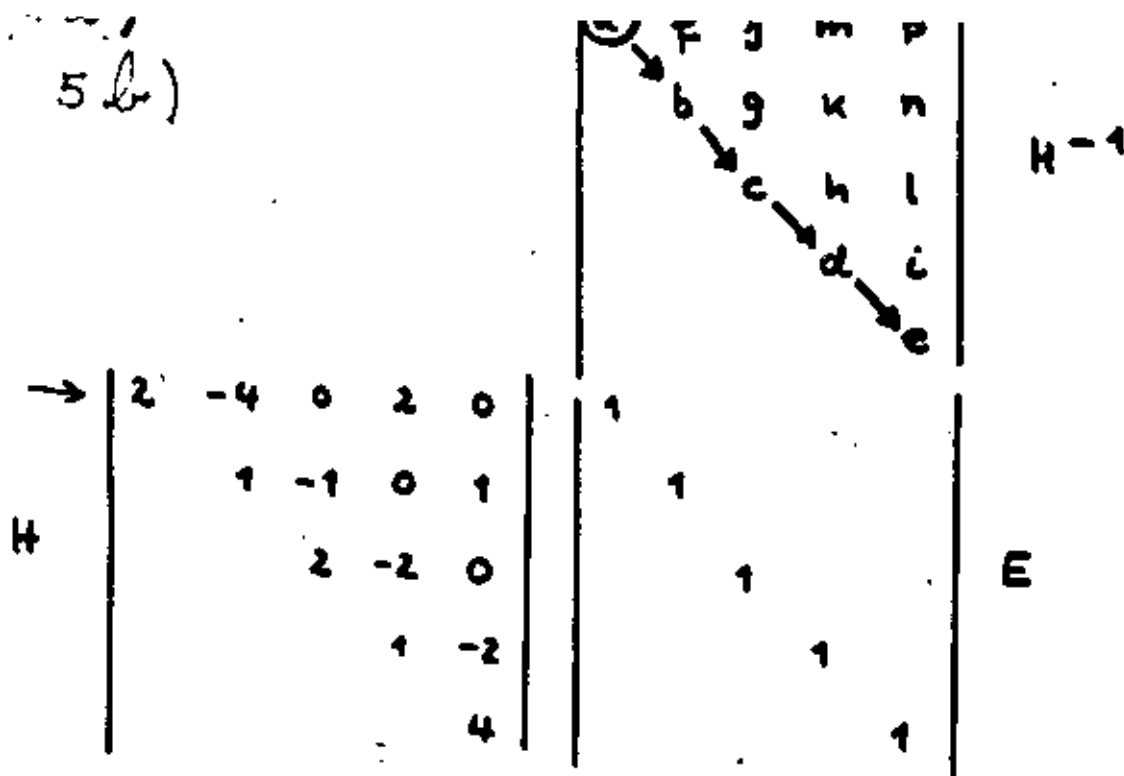
$$r: h_{4,2} = a_{4,2} + [-s_{14} h_{12} - s_{24} h_{22}]$$

$$p: h_{3,5} = a_{3,5} + [-s_{13} h_{15} - s_{23} h_{25}]$$

$$h_{ik} = a_{ik} - \sum_{n=1}^{m-1} (s_{ni} \cdot h_{nk})$$

$m \equiv$ Dimension
de la Matriz

5b)



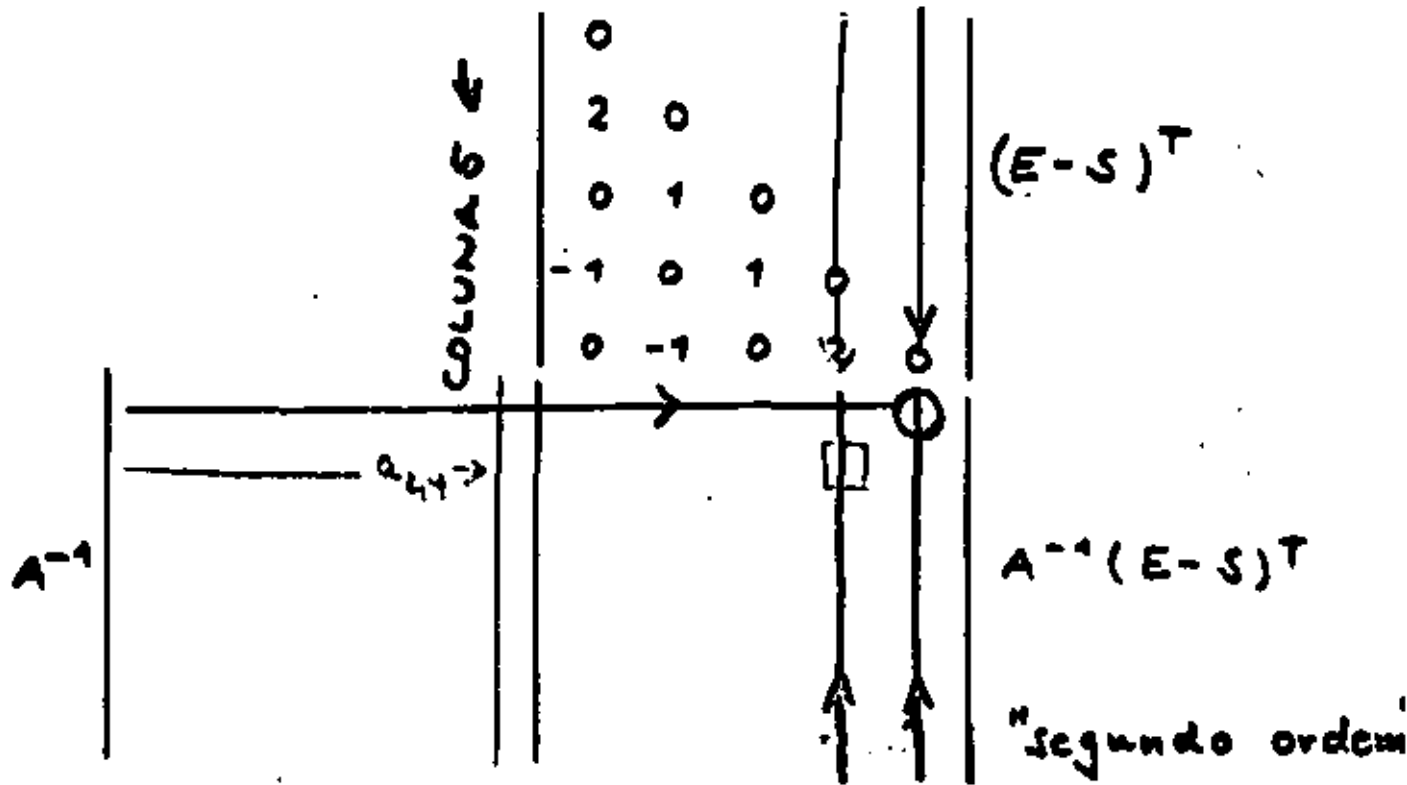
4

$2a = -1 ; a = -1/2$

$0 \cdot f + 1b = 1 ; b = 1$

... etc.

5c)



$A^{-1} = H^{-1} + A^{-1}(E-S)^T$

$a_{2,4}^{-1} = h_{2,4}^{-1} + a_{2,4}^{-1} \cdot 0 + a_{2,5}^{-1} \cdot 2 = 1 + 0 + 2 \cdot 0,25 = 1,5$

Coluna 5:

$a_{i,5}^{-1} = h_{i,5}^{-1} + 0$

5. Resultados

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 2 & -2 & 0 \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 4 \end{vmatrix}$$

$$H^{-1} = \begin{vmatrix} 0,5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0,5 & 1 & 0,25 \\ & & 0,5 & 1 & 0,5 \\ & & & 1 & 0,5 \\ & & & & 0,25 \end{vmatrix}$$

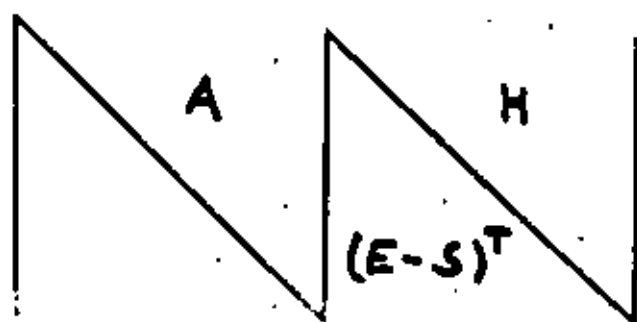
$$E - S = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 2 \\ & & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$(E - S)^T = \begin{vmatrix} 0 & & & & \\ 2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3,5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2,25 & 2 & 1,5 & 0,25 \\ 2 & 2 & 2,5 & 2 & 0,5 \\ 1 & 1,5 & 2 & 2 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 & 0,5 & 0,25 \end{vmatrix}$$

↑
veca H^{-1}

5d)



$$1. \quad H = A + (E-S)^T H$$



2.



$$\text{diag. } H^{-1} = \frac{1}{h_{ii}}$$

$$A^{-1} = H^{-1} + A^{-1} (E-S)^T$$

Capacidad requisito : $m \times m$

($m \in$ orden de la matriz)

II 1.

$$S_0^2 = x'^T \Sigma_x x'$$

x' : función derivada parcialmente, con los parámetros particulares

Σ_x : Matriz de variance/covariance

1. Determinación de x' :

$$da = \frac{b - c \cos \alpha}{a} db + \frac{c - b \cos \alpha}{a} dc + \frac{bc \sin \alpha}{a} \frac{d\alpha}{s}$$

coeffic.:

0,9448

0,7559

0,1028

$$x' = \begin{pmatrix} 0,9448 \\ 0,7559 \\ 0,1028 \end{pmatrix}$$

2. Determinación de Σ_x :

$$\begin{vmatrix} m_b^2 & m_b m_c & m_b m_\alpha \\ & m_c^2 & m_c m_\alpha \\ & & m_\alpha^2 \end{vmatrix}$$

sin correlación
con correlación

$$\Sigma_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ & & 3 \end{vmatrix}$$

3. Determinación de S_0^2 y m_a

$$N_x \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0,94 \\ 0,76 \\ 0,10 \end{vmatrix} x'$$

$$\begin{bmatrix} 0,94 & 0,76 & 0,10 \end{bmatrix} x'^T$$

a) $S_0^2 = 2,4518$; $m_a = \pm 1,566$ des

b) $S_0^2 = 3,8167$; $m_a = \pm 1,95$ des

III

$$\sin \varphi_w = \sin \varphi_2 \cos \omega_2$$

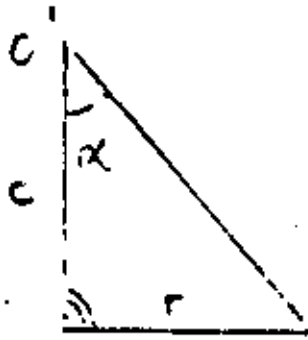
$$\underline{\varphi_w = 5,0551^\circ} \text{ [Grados centecimales!]}$$

$$\sin \omega_w = \frac{\sin \omega_2}{\cos \varphi_w} ; \underline{\omega_w = 4,7872^\circ}$$

$$\tan \kappa_w = \frac{\cos \varphi_2 \sin \kappa_2 - \sin \varphi_2 \sin \omega_2 \cos \kappa_2}{\cos \varphi_2 \cos \kappa_2 + \sin \varphi_2 \sin \omega_2 \sin \kappa_2}$$

$$\underline{\kappa_w = 7,8542^\circ}$$

IV a)



$$r = c \tan \alpha$$

$$\frac{dr}{dc} = \tan \alpha = \frac{r}{c}$$

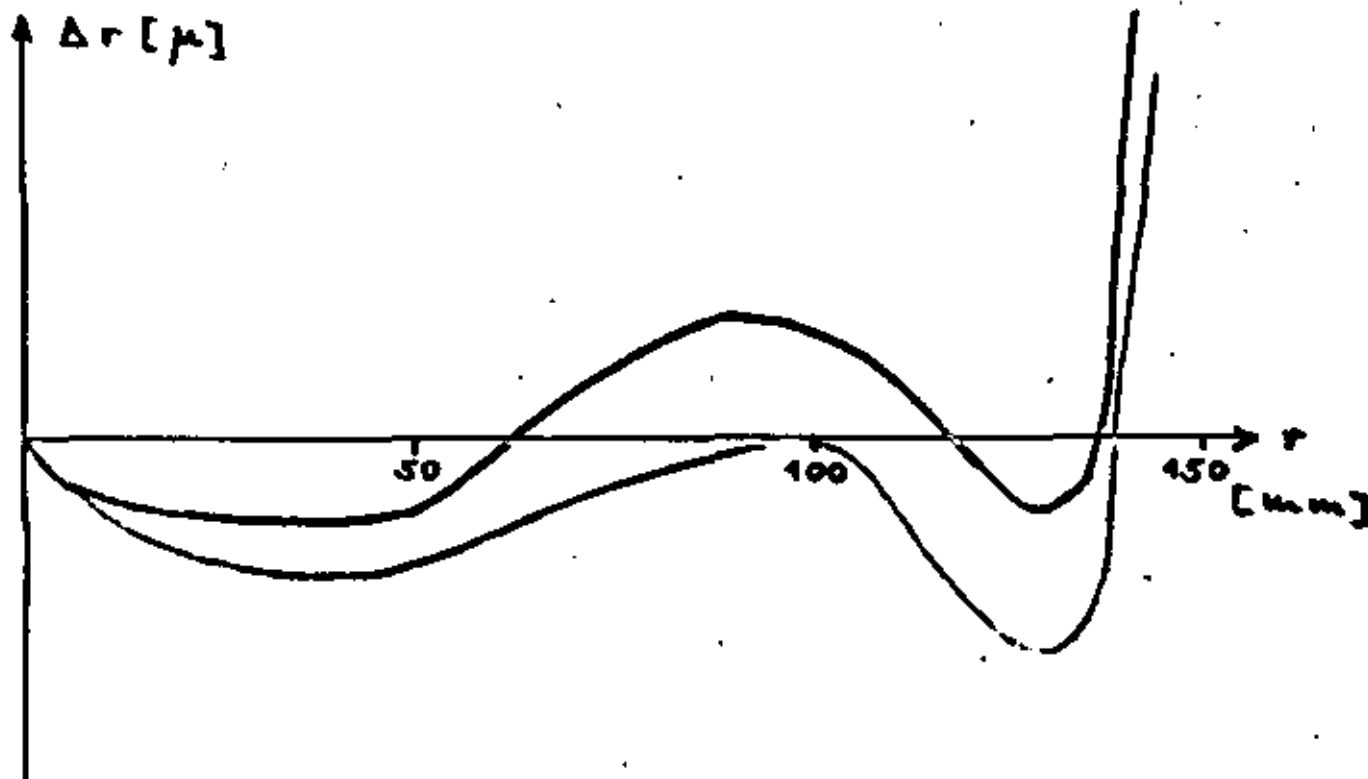
$$\boxed{dc = dr \cdot \frac{c}{r}}$$

$$dc = \frac{+3 \mu \cdot 152,510 \text{ mm}}{90 \text{ mm}} = +5 \mu\text{m}$$

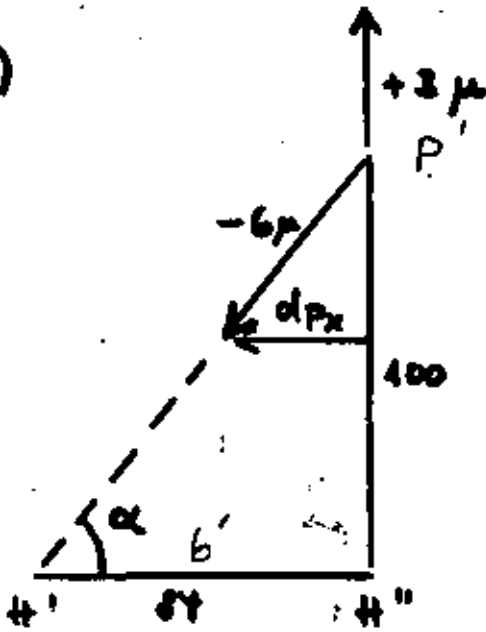
$$c_{\text{corr.}} = c - dc = 152,510 - 0,005 \text{ [mm]}$$

b) $dr = dc \cdot \frac{r}{c} \rightarrow$

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 |
| 0 | -2 | -3 | -3 | -3 | -4 | -2 | -1 | -1 | 0 | 0 | -3 | -5 | -6 | +1 |



c)



$$\tan \alpha = \frac{100}{84}$$

$$\begin{aligned} dp_x &= -6 \mu \cos \alpha \\ &= 3,86 \mu \end{aligned}$$

$$\Delta h \sim \frac{h_0}{P_{x0}} \cdot dp_x$$

$$\sim \frac{2500 \text{ m}}{84 \text{ mm}} \cdot 0,00386 \text{ mm}$$

$$\Delta h \sim 11,5 \text{ cm}$$

V a) escalas:

1. distancias 1-2

$$M_{1,2} = \frac{14\,132,74 - 9933,93}{0,080 + 0,080} = 7492,5$$

$$M_{3,4} = \frac{14\,066,67 - 10\,000,00}{0,080 + 0,080} = 6666,69$$

b)

$$\lambda \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ -c \end{vmatrix}_i = A^T \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix}_i$$

Según dibujo: $\kappa = 0^\circ$, $\varphi = 0^\circ$

$$\Rightarrow A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{vmatrix}$$

$$\lambda_i x'_i = X_i - X_0 \quad (1^\circ \text{ fila})$$

$$X_0 = X - \lambda_i x'_i \quad \rightarrow \quad 9933,93 + 80 \cdot 7492,5 = 10533,33 \quad (1-2) \quad X_0$$

$$\downarrow \quad 14066,67 - 80 \cdot 6666,69 = 10533,33 \quad (3-4) \quad \checkmark$$

Determinación de Y_0, Z_0 :

$$\lambda_i \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + c^2} = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}$$

Determinación de ω :

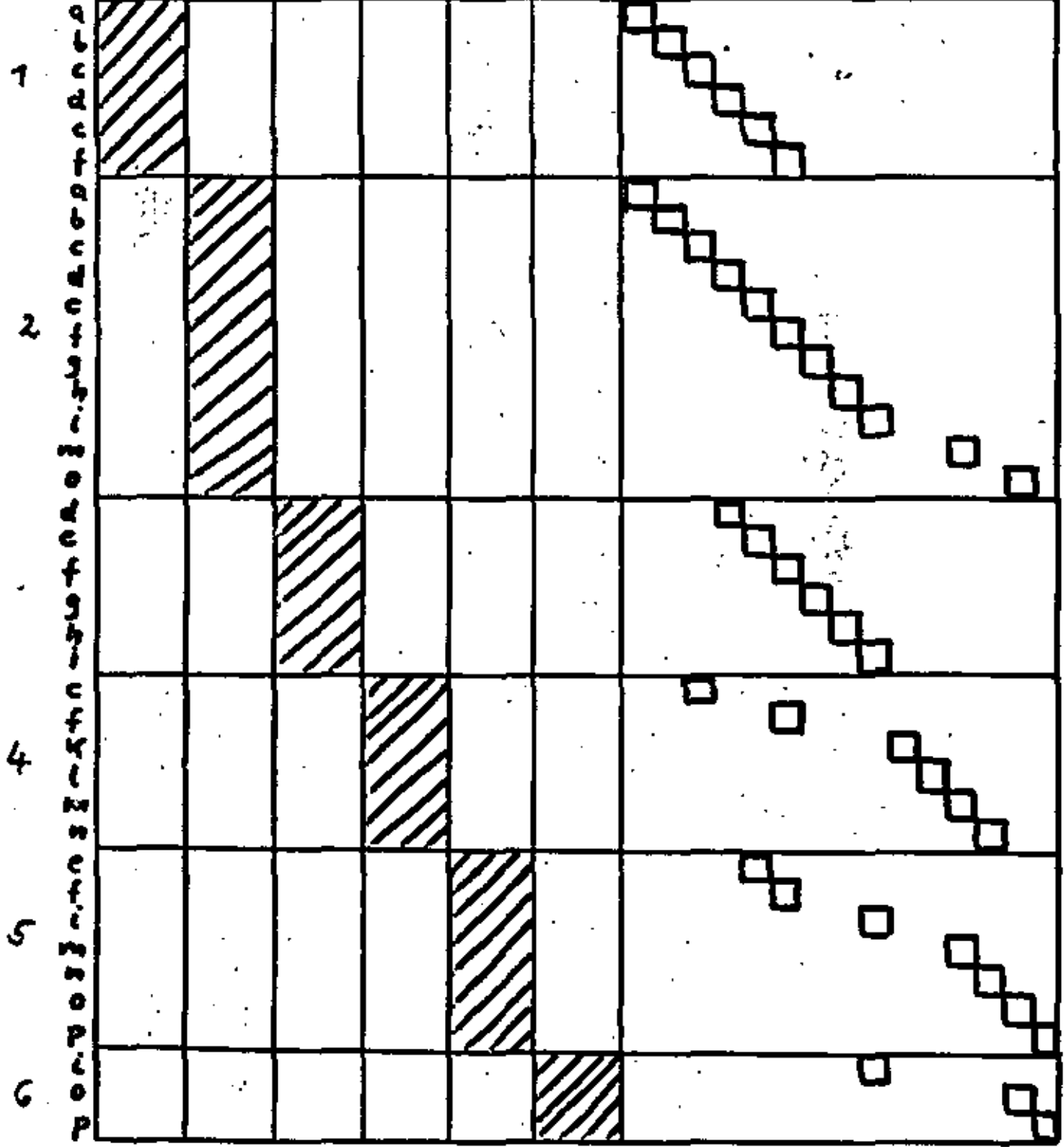
$$\left. \begin{aligned} \lambda y' &= \cos \omega (Y - Y_0) + \sin \omega (z - z_0) & | : (z - z_0) \\ -\lambda c &= -\sin \omega (Y - Y_0) + \cos \omega (z - z_0) & | : (Y - Y_0) \end{aligned} \right\} +$$

$$\rightarrow \cos \omega = \frac{\frac{\lambda y'}{z - z_0} - \frac{\lambda c}{Y - Y_0}}{\frac{Y - Y_0}{z - z_0} + \frac{z - z_0}{Y - Y_0}}$$

A₁X

A₂X

1 2 3 4 5 6 a b c d e f g h i k l m n o p



1

2

4

5

6

a b c d e f g h i k l m n o p

Orden ideal (más fotos en una faja que números de fajas):

a b c d e f g h i k l m n o p 1 2 3 4 5 6
 a b c k l d e f m n g h i o p 1 4 2 5 3 6

1. puntos

2. fotos

ambos perpendicularmente a la dirección del vuelo

VII Preguntas de control:

16

1.

$$\kappa_2 = \frac{\partial \Delta}{\partial \kappa'} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial a'}{\partial \kappa'} & \frac{\partial b'}{\partial \kappa'} \\ b_y & \frac{\partial c'}{\partial \kappa'} & \frac{\partial d'}{\partial \kappa'} \\ b_z & \frac{\partial e'}{\partial \kappa'} & \frac{\partial f'}{\partial \kappa'} \end{vmatrix}$$

2. según (2):

$$u' = a_{11} x' + a_{12} y' - a_{13} c$$

según (3):

$$\frac{\partial u'}{\partial \kappa'} = -\cos \varphi' \sin \kappa' x' - \cos \varphi' \cos \kappa' y'$$

a) Según los centros de proyección

$$X'_0 = Y'_0 = Z'_0 \equiv 0$$

$$X_0'' = X'_0 + \underline{b_x} \quad b_x = + 1292,40 \text{ m} / M = 161,55$$

$$Y_0'' = Y'_0 + \underline{b_y} \quad b_y = - 37,11 / M = -4,64 \text{ mm}$$

$$Z_0'' = Z'_0 + \underline{b_z} \quad b_z = - 7,30 / M = -0,91 \text{ mm}$$

$1/M \equiv$ escala del modelo $\equiv 1/8000$

b)

$$\begin{array}{c} X \\ Y \\ \textcircled{Z} \end{array} = \textcircled{\lambda} \begin{array}{c} 1 \quad d\kappa \quad -d\phi \\ -d\kappa \quad 1 \quad d\Omega \\ d\phi \quad -d\Omega \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{X} \\ \textcircled{Y} \\ \textcircled{Z} \end{array} + \begin{array}{c} X'_0 \\ Y'_0 \\ Z'_0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Conocido} \\ \equiv 0 \end{array}$$

Terr. Mod.

$$Z = \lambda (x d\phi - y d\Omega + z) + Z_0$$

$$A: 198,50 = 8 (105,10 d\phi - 35,75 d\Omega + \frac{198,5}{8}) + 0 \text{ [m]}$$

$$B: 201,21 = 8 (104,89 d\phi - 300,98 d\Omega + \frac{238,8}{8}) + 0$$

$$d\phi = 0,006026 \rightarrow 0,3836''$$

$$d\Omega = 0,007712 \rightarrow 1,427''$$

c)

Control con fórmula rigurosa:

$$105,10 \cdot \sin \phi - 35,75 \sin \Omega \cos \phi + \frac{198,5}{8} \cos \Omega \cos \phi \stackrel{!}{=} \frac{198,5}{8}$$

✓

Paralaje en 4:

$$P_4 \cong 0,975 = -\frac{d}{c} db_2 - \left(c + \frac{d^2}{c}\right) d\omega''$$

Paralaje en 6:

$$P_6 \cong 0,195 = +\frac{d}{c} db_2 - \left(c + \frac{d^2}{c}\right) d\omega''$$

$$+ 1,170 = -2\left(c + \frac{d^2}{c}\right) d\omega''$$

$$\rightarrow d\omega'' = -0,0027 \rightarrow -0,1710^\circ$$

$$db_2 = -\frac{c}{d} \left[0,975 + \left(c + \frac{d^2}{c}\right) d\omega''\right]$$

$$\rightarrow db_2 = -0,593 \text{ mm}$$

1a

$$\begin{aligned} \sum (Q_{vv} P)_{ii} &= \sum [(Q_{ii} - A(A^T P A)^{-1} A^T) P]_{ii} \\ &= \sum (E_n - A(A^T P A)^{-1} A^T P)_{ii} \\ &= n - \sum (A^T P A)^{-1} A^T P A)_{ii} \\ &= n - \sum (E_u)_{ii} \\ &= n - u \end{aligned}$$

$E_{n,u}$: Matrices de unidad con n o u elementos en los diagonales

2a

$$\delta'_{0i} = 19 \text{ (max)}$$

$$\begin{aligned} \nabla l_i &= 19 \cdot 10 = 190 \mu\text{m} \cdot 10000 \\ &\rightarrow 1.90 \text{ m} \end{aligned}$$

2b

$$\delta'_{0i} = \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad ; \quad r_i = \left(\frac{\delta_0}{\delta'_{0i}} \right)^2 = \frac{4^2}{7.6^2} = 0.277$$

1. **Ranulfo Ismael Moreno González**
 Comisión Federal de Electricidad
 Oklahoma 85 -401
 Colonia Nápoles
 México 18, D F
 536 92 34
 Turin 136
 Valle Dorado
 Tlanepantla Edo. de México
 379 11 49

2. **Francisco Del Río García**
 Comisión Federal de Electricidad
 Edición de los Recursos Hidroeléctricos
 Oklahoma 85-4 Piso
 Col Nápoles
 México 18, D F
 536 92 34
 Oriente 57 # 293
 Villa de Cortés
 México 13, D F
 579 48 84

3. **Benjamín Landeros Olguin**
 Facultad de Ingeniería
 U·A·E·M
 Catedrático y Jefe del Area de Construcción
 Unidad Coatepec C U
 Toluca, Edo de México
 4 08 55
 Marcelino Juárez 207
 Toluca, Edo de México

4. **Jorge Rojas González**
 U A E M
 Facultad de Ingeniería
 Catedrático
 Ciudad Universitaria
 Toluca, Edo de México
 4 08 55
 Aurelio Venegas 101 Sur
 Toluca, Edo de México
 4 40 69

5. **Héctor Acevedo Ortega**
 Unidad Profesional Zacatenco
 I P N
 E S I A
 Profesor
 México 14, D.F.
 Oriente 154 # 1664
 Sector Popular
 México 13, D F
 581 41 38

6. **Román Alberto Aguilera Reyes**
 Dirección General de Geografía
 del Territorio Nacional
 Jefe de la Sección de Ajuste de Bloques
 San Antonio Abad 124
 México 8, D F
 578 62 00 Ext. 185
 Norte 48 "A" # 5207
 México 14, D.F.
 537 65 30

7. **Dante A. Alcántara García**
 Universidad Autónoma Metropolitana
 Profesor
 Ave San Pablo 180
 México 16, D F
 382 50 00 -274
 Alfanjes 45
 Tlanepantla, Estado de México

8. **Juan de la Cruz Almendarez Pérez**
 Comisión Federal de Electricidad
 Ingeniero Topógrafo
 Camino antiguo san Rafael Sta Cecilia
 Tenayuca Edo de México
 565 36 18

18. José Migno Castro Beltrán
S A R H
Jefe del subprograma de Economía
Agrícola
26 Norte 1202
Puebla, Pue.
4 Norte 1206-102
Puebla, Pue.
46 61 73
19. Juan de Dios Castro Granados
Dirección General de Geografía del
Territorio Nacional
Jefe de Oficina
S A Abad 124
México 8, D F
578 62 00
Norte 72 # 7910
Col Diaz Mirón
México 14, D F
577 00 69
20. Víctor Ignacio Castro Rojas
S A R H
Analista Programa Planeación
26 Norte 1202
Puebla, Pue.
46 88 97
7 Sur # 4720-11
Prados Agua Azul
Puebla, Pue.
21. Martiniano Del Angel Reyes
Secretaría de Finanzas y Presupuesto
Jefe del Depto de Catastro
Constitución 3
Tlaxcala, Tlaxcala
2 03 01
16 de Sep 1106-5
Puebla, Pue.
46 37 21
22. Francisco Del Río García
C F E
23. Rafael Dorantes Ramírez
Dirección General de Construcción y
Operación Hidráulica
Coordinador de Obras Hidráulicas de
la Delegación Cuauhtémoc
S A Abad 231-2º
México 8, D F
588 60 79
Tejocote 22
Sta. Ma Maninalco
México 16, D.F
561 49 68
24. José Manuel Estrada Espinoza
Facultad de Filosofía
U N A M
México 20, D F
Martín Serrano 44
Satélite Edo de México
572 20 30
25. Paulina Fernández Reyes
Cia Mexicana Aerofoto
Operador Fotogrametrista
Calle 11 de Abril 338
México 18, D F
516 07 40
Mariano Gelas 140
Col M. Carrera
México 14, D.F.
753 42 62
26. José Luis Franco Rodríguez
U A CH
Catedrático
Apdo Postal 1528 Suc "C"
Chihuahua, Chih.
3 37 11
Barra de Navidad 7515
Fracc Américas
Chihuahua, Chih.
3 17 71

36. Eduardo Habacúe López Acevedo
Sistema de Transporte Colectivo
Operador de vehículos
Delicias 66
México 1, D F
521 86 20 Ext. 2332
- David Pastrana 66
Col Constitución de 1917
México 13, D F
691 35 47
37. Juan Antonio López Beltrán
Inst Téc Regional de la Paz
Investigador del Depto de
Tecnología Educativa
Km 3 Carr Antiguo Aeropuerto
La Paz, B C S
2 24 24
- Calafia 2790
Fracc Su Casa
La Paz, B C S
38. Manuel Madrigal Morales
Dirección General de Geografía del
Territorio Nacional
S A Abad 124-5°
México 8, D F
578 62 00 Ext 185
- Calle 14 # 182
Progreso Nacional
México 14, D F
392 49 36
39. Salvador Mandujano Moya
Ingeniería Aerofotogramétrica, S A
Jefe de Laboratorio
Francisco Pimentel 57
México 4, D F
546 69 50
- Canoras 39
Col Arboledas
Atizapán, Edo de México
40. Sergio Martínez Carrera
41. Fernando Guillermo Martínez Vargas
Centro de Capacitación para el Trabajo
Coordinador
Km 6 Carr Pie de la Cuesta
Acapulco, Gro.
- Rép del Salvador 2-3
México 1, D F
510 94 57
42. Guillermo Antonio Méndez Sainz
S A R H
Analista
Reforma 35-11°
México 1, D F
592 18 06
- Angel Urraza 2035- 6
México 13, D F
672 62 84
43. H. Juan de Dios Montecristo Ortiz
Mapoteca del Inst de Ciencias
U A P
4 Sur
Puebla, Pue.
- 5 Pte No 503
Acatzingo, Pue.
44. Eugenio Mora Alvarado
Consejo de Recursos Minerales
Operador de Aparatos Fotogrametricos
Dr Navarro
México 7, D F
578 62 26
- 2da. Cerrada Lago Ness 45
Col Pensil
México 17, D F
45. Sergio Morales Rodríguez
Estudios y Proyectos S A

55. Juan Ramírez Torres
S A H O P
Jefe de la Oficina de Restitución
Edif SCOP
Xola y Ave Universidad
México 12 , D F
519 79 39
Av Morelos 827 Edif 2 Depto 103
Magdalena Mixhuca
México 8, D F
552 76 76
56. Gilberto Reyes Vázquez
S A R H
Ingeniero Analista
Ignacio Ramírez 20-2º
México 4, D F
566 26 59
57. Jorge Robles Almeraya
Cía de Luz y Fza del Centro
Ingeniero Topógrafo
Tlaloc 90
México 17, D F
592 39 95
Bienes Nacionales 51
Las Arboles
México 9, D F
571 62 50
58. Marcos Rojas Huesca
I P N
E S I A
Unidad Profesional Zacatenco
México 14, D F
2da. Cerrada de Agricultura 25
Sto Tomás
México 17, D F
59. Julio César Rovira Vázquez
Cía Mexicana Aerofoto S A
Subjefe Depto de Restitución
11 de Abril 338
México 18, D F
516 07 40 Ext 136
Av El Cántaro Edif 33-006
Villa Coapa
México 22, D F
671 08 32
60. Mario A. Salazar Sosa
Facultad de Ingeniería
Universidad de Yucatán
Profesor
Calle 14 x 41 "El Fénix"
Col Industrial
Mérida, Yuc.
7 47 99
Calle 15 # 83
Mérida, Yuc.
5 11 47
61. Ma. Dolores Sánchez Torres
U N A M
Profesor
México 20, D F
Oculistas 18
Col. Sifón
México 8 D F
582 30 60
62. Efigenio Sastre García
I P N
E S I A
Profesor
Unidad Profesional Zacatenco
México 14, D F
Planta Excame 23
Col Electra
Tlanepantla, Edo de México
397 31 57