

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MEXICO**

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO
EN INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

IMBIBICION EN MEDIOS POROSOS FRACTURADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERIA

P R E S E N T A:

JOSE MELESIO SANCHEZ HUERTA

TUTOR:

DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO

AGOSTO 2005

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Jaime Cervantes de Gortari.

Secretario: Dr. Federico Méndez Lavielle

1^{er} Vocal : Dr. Abraham Medina Ovando

2^{do} Vocal : Dr. Francisco Solorio Ordaz

3^{er} Vocal: Dr. Cesar Treviño Treviño

1^{er} Suplente: Dr. Rubén Ávila Rodríguez

2^{do} Suplente: Dr. Erick Emmanuel Luna Rojero

Lugar donde se realizó la tesis

INSTITUTO MEXICANO DE PETROLEO

TUTOR:

DR. ABRAHAM MEDINA OVANDO

FIRMA

Agradecimientos:

A la universidad Nacional Autónoma de México, Máxima casa de estudios de nuestro país.

Mi más sincero agradecimiento a mi asesor Dr. Abraham Medina Ovando, por distinguirme con su amistad y apoyarme durante la elaboración de esta tesis y con quien tengo el honor de colaborar.

Al Dr. Jaime Cervantes de Gortari, por sus consejos y recomendaciones para el mejoramiento de este trabajo y por su apoyo durante mi formación como investigador.

Al Dr. Francisco Solorio Ordaz, quien me ha brindado su apoyo incondicional en mis estudios.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle, por la confianza y enseñanza que me ayudan a mejorar en mi vida profesional.

Al Dr. Cesar Treviño Treviño, por sus comentarios para elevar la calidad de este trabajo.

Al Dr. Erick Luna Rojero, Por distinguirme con su confianza, y consejos para elaborar un trabajo de calidad.

Al Dr. Rubén Ávila Rodríguez, por sus observaciones en este trabajo.

Mi gratitud al Dr. Francisco Higuera por su apoyo e invaluable consejos para alcanzar las metas de este trabajo.

Al proyecto CONACYT NC-204

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo otorgado durante mis estudios Doctorales por medio de la beca 159043

Al Instituto Mexicano del Petróleo, por su apoyo mediante el Programa de Formación de Especialistas. Al Programa de Yacimientos Naturalmente Fracturados y en especial al Físico Candelario Pérez Rosales.

Al Programa de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Computacionales, Proyecto D.0330, IMP.

*Este trabajo representa el esfuerzo de muchas personas,
Indudablemente familia, amigos y profesores están presentes.*

*Por ello dedico este trabajo a todas las personas,
que de alguna manera han colaborado para alcanzar
una de mis más anheladas metas.*

Melesio Sánchez.

Índice general

1. Introducción	11
2. Antecedentes	15
3. Penetración capilar en un tubo capilar vertical	22
3.1. Modelo matemático	23
3.2. Resultados	26
4. Penetración capilar en celdas de Hele-Shaw	28
4.1. Celda vertical	28
4.1.1. Modelo matemático	29
4.1.2. Experimentos	31
4.2. Celda radial de Hele-Shaw	41
4.2.1. Perfiles de temperatura	41
4.2.2. Flujo radial de película	42
4.2.3. Experimentos y solución numérica	46
5. Penetración capilar en capilares cónicos	49
5.1. Cono convergente	50
5.1.1. Modelo matemático	50
5.1.2. Resultados	53
5.2. Cono divergente	54

5.2.1. Modelo matemático	55
5.2.2. Otros resultados	56
5.3. Comentarios	59
6. Problema conjugado de la imbibición y transferencia de calor en un medio poroso muy permeable	60
6.1. Ordenes de magnitud y modelo matemático	61
6.2. Método numérico	67
6.3. Resultados numéricos	68
6.4. Comentarios	74
7. Imbibición bajo gradientes de temperatura en rocas homogéneas	77
7.1. Muestras cuadradas	77
7.1.1. Modelo matemático	78
7.1.2. Isotermas bajo gradientes de temperatura	80
7.1.3. Experimentos de imbibición	85
7.2. Muestras cilíndricas	87
7.3. Roca cilíndrica sellada	88
7.4. Imbibición radial en muestras porosas delgadas	91
7.4.1. Distribución de temperatura	91
7.4.2. Modelo matemático	93
7.4.3. Experimentos	95
8. Características de los parámetros A y B	101
9. Conclusiones generales	107
9.1. Comentarios finales.	109
A. Número de Péclet en capilares	112
B. Modelo numérico	116
C. Balance de energía en el medio poroso	118

Resumen

En esta tesis se presentan una serie de estudios encaminados a fundamentar los procesos de penetración capilar e imbibición cuando hay gradientes longitudinales de temperatura en capilares simples y/o en medios porosos homogéneos. Hasta donde se sabe, esta es la primera vez que se analiza este fenómeno capilar simultáneamente con un proceso de transferencia como lo es la imposición de un gradiente de temperatura. Se ha considerado, en primer lugar, la penetración capilar en capilares de forma simple sujetos a gradientes longitudinales de temperatura (Capítulos 3-5) y posteriormente se ha analizado la imbibición en medios porosos homogéneos con alta y baja permeabilidad y sujetos también a gradientes longitudinales (Capítulos 6 y 7, respectivamente). Se ha considerado en la formulación de los modelos que las variaciones en la fuerza friccional viscosa y en la presión capilar, producidas por los gradientes de temperatura, son las responsables de la aceleración, desaceleración o invariancia de la rapidez de penetración en dichas estructuras que se observa en los experimentos con gradientes de distinto signo e intensidad. Desde un punto de vista fundamental, la viscosidad dinámica y de la tensión superficial son cantidades fuertemente dependientes de la temperatura y, consecuentemente, son el origen de las variaciones de las fuerzas friccionales y capilares. Por medio del uso de desarrollos lineales de la tensión superficial y la viscosidad en función de la temperatura se formulan ecuaciones de movimiento que describen exitosamente la penetración capilar en capilares con forma cilíndrica, cónica y en celdas de Hele-Shaw verticales y radiales. Más aún, las celdas de Hele-Shaw pueden ser consideradas como idealizaciones de las fracturas en medios porosos fracturados y en ese sentido los resultados para estas geometrías son directamente aplicables a los medios porosos fracturados típicos, en donde la matriz es muy poco permeable y el flujo de fluidos ocurre en las fracturas. La hidrodinámica en las geometrías eje simétricas esta basada en la existencia de flujos de Hagen-Poiseuille y en el hecho de que el número de Péclet es pequeño por lo cual las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía para el fluido incompresible se desacoplan y pueden ser tratados independientemente la hidrodinámica y la transferencia de calor. En el caso de las celdas de Hele-Shaw se consideró la teoría de la lubricación en virtud de que ahí se desarrollan flujos de película. La adimensionalización de las ecuaciones permite obtener soluciones analíticas para el frente de penetración capilar (salvo en el caso de la celda radial en donde sólo es posible obtener soluciones numéricas) que se ajustan muy bien a los

datos experimentales. En todos los casos se recupera la ley de Lucas-Washburn para la penetración capilar e igualmente, en todos los casos, de la adimensionalización de las ecuaciones de movimiento aparecen los parámetros adimensionales A y B que pueden ser entendidos como los gradientes adimensionales (derivadas respecto a la temperatura) de la viscosidad y la tensión superficial, respectivamente. A lo largo de la tesis, y particularmente en el Capítulo 8, se demuestra que estos parámetros son fundamentales para predecir los cambios en la rapidez del frente de penetración capilar y para caracterizar si la penetración capilar es dominada por la fricción o por la capilaridad. En efecto, ya que es posible imponer en los capilares gradientes positivos (la temperatura crece en la dirección del flujo capilar) o negativos (la temperatura decrece en la dirección del flujo), los parámetros A y B pueden también cambiar de signo por lo que ambos, su magnitud relativa y su signo, definen la dinámica dominante. Similares resultados son derivados en el caso de la penetración capilar espontánea (que en esta tesis se denomina simplemente como imbibición) en medios porosos homogéneos bajo gradientes de temperatura y flujo Darciano. Ya que este trabajo es pionero en la solución simultánea del problema de la penetración capilar y la transferencia de calor, en el Capítulo 6 se consideró el problema conjugado de la imbibición de un líquido con temperatura mayor que la del medio poroso el cual es muy permeable. Las soluciones numéricas a este problema permiten mostrar la existencia de una capa límite térmica cerca de la zona de entrada del líquido. Finalmente, el trabajo aquí desarrollado puede ser la base para tratar una infinidad de otros problemas de penetración capilar con la presencia simultánea de otros fenómenos de transporte.

Abstract

In this thesis a series of studies are given in order to establish the foundations of the capillary penetration and imbibition processes under longitudinal temperature gradients in single capillaries and homogeneous porous media. To our knowledge, this is the first time that this capillary phenomenon is analyzed linked to a transfer process as the imposition of the temperature gradient. Has been assumed, in first place, the capillary penetration into single capillaries subjected to several shapes and under longitudinal temperature gradients (Chapters 3-5) and after has been analyzed the imbibition in homogeneous porous media with high and low permeability subjected to longitudinal gradients (Chapters 6 and 7, respectively). Has been considered in the model's formulation that the variations in the frictional viscous force and in the capillary pressure, produced by the temperature gradients, are the cause of the acceleration, deceleration or invariance of the penetration rate in such structures which is observed in experiments with gradients of different sign and intensity. Since a fundamental point of view, the dynamic viscosity and the surface tension are quantities strongly dependent on temperature and, consequently, are the origin of the variations of the frictional and capillary forces. Through the use of linear expansions of surface tension and viscosity in terms of temperature, motion equations are formulated which successfully describe the capillary penetration into capillaries with shapes cylindrical, conical and vertical and radial Hele-Shaw cells. Moreover, the Hele-Shaw cells can be considered as idealizations of fractures embedded in porous media and thus the results for these geometries are directly applied to typical fractured porous media, when the matrix is near impervious and the fluid flow occurs in the fractures. The hydrodynamics in the axisymmetrical geometries is based on the existence of Hagen-Poiseuille flows and the fact that the Péclet number is small which yields the decoupling between the momentum and energy equations of the incompressible flow and they can be treated independently. For the analysis of the Hele-Shaw cells was considered the lubrication theory due to the nature of the film flows developed there. The nondimensional equations allow to get analytical solutions for the front of capillary penetration (except in the radial cell where only numerical solutions could be obtained) which are in good agreement with the experimental data. In all cases the Lucas-Washburn law was recovered and similarly, in all cases, from the non dimensional motion equations can be obtained the dimensionless parameters A and B which can be identified as the dimensionless gradients

(temperature derivatives) of the viscosity and surface tension, respectively. Along this thesis, and specifically in Chapter 8, it is shown that those parameters are fundamental in order to predict the changes in the capillary penetration rate and to understand if such a phenomenon is dominated by capillarity or viscosity. In fact, because it is possible to impose positive (temperature increase in the flow direction) or negative (temperature decreases in the flow direction) gradients, the parameters A and B can be positive or negative quantities and therefore, their relative magnitude and sign, define the dominant dynamics. Similar results are obtained in the case of spontaneous capillary penetration in homogeneous porous media (which in this work it is defined as imbibition) when the Darcian dynamics is dominant. Due to this work is pioneer in the simultaneous solution of both the capillary penetration and the heat transfer processes, in Chapter 6 has been analyzed the conjugated problem of imbibition of a liquid which has higher temperature than that of the very permeable porous medium. Solutions for this problem allow to show the existence of a boundary layer close to the zone where the liquid enters. Finally, the work here developed could be the basis of future works to be developed to study a lot of problems of capillary penetration under the simultaneous presence of another transport phenomena.

Nomenclatura

A	Parámetro adimensional para la variación de la viscosidad con la temperatura.
a	Radio del capilar, [m].
B	Parámetro adimensional para la variación de la Tensión superficial con la temperatura.
Bo	Número de Bond, $Bo = H^2 \rho g / \sigma_0$.
C_p	Calor específico a presión constante, [J/kgK].
D	Separación entre placas, [m].
d	Radio hidráulico, [m].
d_g	Diámetro promedio del grano, [m].
F	Coefficiente inercial.
G	Gradiente térmico, [K/m].
\bar{G}	Gradiente térmico promedio, [K/m].
Gr	Número de Grashof, $Gr = \rho_g^2 g \beta_g \Delta T H^3 / \mu_g^2$.
g	Aceleración de la gravedad, [m ² /s].
h	Altura del medio capilar y medio poroso, [m].
$h(t)$	Posición del frente de imbibición o de penetración capilar, [m].
h_∞	Altura de equilibrio para la imbibición o la penetración capilar isotérmica, [m].
K	Permeabilidad del medio porosos, [m ²].
k	Conductividad térmica, [W/mK].
L	Longitud de las placas, [m].
L_T	Longitud en la que el fluido alcanza la temperatura del sólido, [m].
l_c	Longitud capilar, [m].
Pe	Número de Péclet, $Pe = UL/\alpha$.
P_c	Presión capilar, N/m ² .
Pr	Número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha_f$.
Q	Gasto volumétrico, [m ³ /s].
q_g	Flujo de calor hacia el ambiente, [W/m].
q_p	Flujo de calor transversal, [W/m].
Re	Número de Reynolds, $Re = UL/\nu$.

R_0	Radio interno de la celda radial, [m].
R_1	Radio externo de la celda radial, [m].
r	Eje coordenado en dirección radial.
$R(t)$	Posición del frente de imbibición o de penetración capilar radial en función del tiempo, [m].
T	Temperatura, [K].
t	Tiempo, [s].
t_c	Tiempo característico para alcanzar la altura de equilibrio, [s].
u	Velocidad del flujo convectivo, [m/s].
U_c	Energía interna del cobre, [J].
U_p	Energía interna del papel, [J].
u_c	Energía interna específica del cobre, [J/kg].
u_p	Energía interna específica del papel, [J/kg].
\bar{V}	Velocidad del volumen promedio, [m/s].
\bar{V}_c	Velocidad característica del frente de imbibición, [m/s].
\bar{v}	Velocidad vertical del fluido, [m/s].
V_c	Volumen cobre, [m ³].
V_p	Volumen de la muestra de papel, [m ³].
y	Eje coordenado en la dirección vertical, [m].

Griegas

α	Difusividad térmica, [m ² /s].
β_w	Relación de conductividades específicas.
β_g	Coefficiente de expansión térmica, [K ⁻¹].
ΔT	Diferencia de temperatura, [K].
δ	Espesor capa límite hidráulica, [m].
Φ	Presión adimensional.
ϕ	Porosidad del medio poroso. [%]
φ	Angulo para el capilar cónico $\theta + \psi$, [rad].
μ	Viscosidad dinámica, [Ns/m ²].
Θ	Temperatura adimensional

θ	Ángulo de contacto entre el fluido y el sólido, [rad].
ρ	Densidad del fluido, $[\text{kg}/\text{m}^3]$.
σ	Tensión superficial, $[\text{N}/\text{m}]$.
τ	Tiempo adimensional.
τ_w	Esfuerzo cortante, $[\text{N}/\text{m}^2]$.
ξ	Variable adimensional para la posición del frente de imbibición.
ψ	Ángulo de apertura del capilar cilíndrico, [rad].
ζ	Posición de los nodos en la malla.

Subíndices

D_S	Difusión en el sólido.
D_f	Difusión en el fluido.
D	Difusión.
d	Zona seca.
e	Propiedad equivalente.
f	Fluido.
g	Zona de gas (aire).
i	Tiempo de imbibición.
Lab	Laboratorio.
l	Líquido.
m	Matriz porosa.
p	Medio poroso.
r	Radial.
s	Sólido.
th	Tiempo de penetración térmica.
w	Zona mojada.
1	Borde superior.
0	Borde inferior.
+	Gradiente positivo.
-	Gradiente negativo.

Capítulo 1

Introducción

La imbibición es un término que describe la penetración de líquidos en capilares y en medios porosos y es un mecanismo sumamente importante en muchos procesos biológicos, tecnológicos e industriales, como la penetración de agua en semillas y el transporte de fluidos en las plantas; el secado o entintado de papel y telas y la impresión por chorro de tinta; la soldadura de metales y cerámicas a alta temperatura; la extracción fluidos de yacimientos acuíferos y petrolíferos, entre otros.

Físicamente, la imbibición o penetración capilar espontánea, ocurre cuando un capilar o un medio poroso se pone en contacto con un líquido que moja las paredes del sólido capilar. Entonces, se genera un flujo capilar del líquido debido a que la fuerza de tensión superficial vence a la resistencia viscosa y a la gravedad. Este flujo generalmente es caracterizado tanto en los capilares como en los medios porosos por la posición de su superficie libre $h(t)$ (frente de imbibición) la cual a menudo obedece la ley de Lucas-Washburn. Esta ley se satisface muy bien en sistemas sin gravedad y también es válida a pequeñas distancias de penetración en sistemas verticales. Cuando la gravedad es importante, es decir, dominante sobre las fuerzas capilares el flujo se detiene y llega a una posición llamada altura de equilibrio.

En el estudio de la imbibición se deben considerar factores como la geometría del capilar o del medio poroso que es imbibido, las propiedades físicas de los fluidos involucrados (viscosidad, densidad, tensión superficial), las propiedades físicas del medio sólido (ángulo de contacto entre el líquido y el sólido, tamaño característico del espacio capilar, porosidad y permeabilidad del

medio poroso), etc. Además, se debe tener en cuenta que varias de las propiedades dependen de la temperatura.

Cuando se analiza la imbibición en capilares y en medios porosos generalmente se considera que dentro del capilar se desarrolla un flujo de Poiseuille y, en el medio poroso, un flujo de Darcy. Bajo este esquema, tradicionalmente se ha considerado que la imbibición se lleva a cabo de forma isotérmica, es decir, con las propiedades del líquido y del medio sólido constantes y conocidas. Sin embargo tanto en la naturaleza como en la industria existen sistemas que no son isotérmicos, es decir están bajo la presencia de flujos de calor.

La imbibición bajo flujos de calor o gradientes de temperatura se debe específicamente a que hay procesos en los que se presentan variaciones naturales o inducidas de la temperatura en las paredes del capilar o en el medio poroso. Por ejemplo, en el secado y entintado de telas o papel y en la soldadura de tuberías y placas metálicas ocurren variaciones de temperatura debido a la necesaria introducción de calor para realizar dichos procesos. De igual manera, hay procesos naturales como la retención de humedad por los suelos y los flujos de fluidos en yacimientos de agua subterránea y petróleo en donde el sol y la tierra misma inducen considerables gradientes de temperatura.

Estudios que consideren la presencia de gradientes de temperatura durante la imbibición hasta ahora no habían sido considerados en la literatura especializada pese a que es posible esperar sustanciales modificaciones, por ejemplo, en la rapidez de imbibición (ley de Washburn) porque la tensión superficial y la viscosidad dinámica son funciones monótonamente decrecientes de la temperatura. Más aún, la geometría de los capilares es extremadamente importante ya sea a nivel de capilares simples o a escala de los poros y gargantas de los medios porosos ya que las fuerzas capilares y viscosas son fuerzas superficiales y estas compiten contra las fuerzas de cuerpo o volumétricas como la gravedad. Debido a estos factores el estudio de la imbibición bajo perfiles lineales de temperatura en diversas geometrías es crítico para comprender a cabalidad la importancia de las diversas fuerzas involucradas en la penetración capilar. Las geometrías consideradas en este trabajo son: capilar cilíndrico vertical, capilares formados con placas paralelas verticales (celda de Hele-Shaw), capilares formados con placas circulares horizontales (celda de Hele-Shaw radial) y capilar cónico vertical divergente y convergente, cada uno de ellos sujetos a gradientes constantes de temperatura. Al flujo inducido en capilares como

los antes mencionados se le llamara de aquí en adelante penetración capilar para diferenciarlo del flujo colectivo que ocurre en medios porosos que aquí sera llamado imbibición. Más aún, la selección de geometrías capilares descansa también en el hecho de que los capilares cilíndricos y cónicos son fundamentales para entender, en una primera aproximación, la imbibición en medios porosos homogéneos (granulares) mientras que las celdas de Hele-Shaw pueden ser consideradas como representaciones simples de la imbibición en fracturas en medios porosos impermeables o como representativas de los espacios capilares típicos de los procesos de soldadura con metales líquidos. De igual manera, es importante también estudiar la imbibición en medios porosos homogéneos con diversas geometrías, sujetos a gradientes constantes de temperatura. Estos estudios con varias geometrías y flujos de calor son muy importantes para comprender procesos más complejos de flujos de fluidos en medios porosos, como la recuperación mejorada de aceite, en los que la imbibición no isotérmica es un proceso fundamental.

Las condiciones bajo las cuales se discute la imbibición y la penetración capilar espontáneas en los sistemas aquí considerados son: existencia de una sólo fase líquida y capilares y medios porosos secos, la saturación es uno (completa) en la zona de flujo y cero en la zona seca, no hay presiones externas (forzamiento) y los tiempos de imbibición mucho mayores que los tiempos de difusión de calor. En el apéndice A de esta tesis se demuestra que esta última condición para los tiempos es equivalente a imponer que el numero de Péclet sea pequeño. Igualmente importante es que casi todos los modelos de flujos en capilares y en medios porosos homogéneos consideran flujos estacionarios, unidimensionales (salvo en los capilares cónicos) y por tanto aspectos como las perturbaciones (dedos) en el frente de imbibición no son discutidos. Con estas consideraciones se presentan, en los antecedentes, los fundamentos físicos de los modelos de flujos de fluidos y de transferencia de calor de los sistemas aquí estudiados. Posteriormente, en los Capítulos 3, 4 y 5 se discute la penetración capilar en cilindros verticales, celdas verticales y radiales horizontales en capilares tipo cono. En los Capítulos 6 y 7 se analiza la imbibición en medios porosos homogéneos con diferentes geometrías y porosidades. En el Capítulo 8 se analizan los casos en los que los parámetros adimensionales correspondientes a las variaciones de la tensión superficial o de la viscosidad absoluta dominan unos sobre otros. Allí tambien se formula una ecuacion general para estos procesos a la luz de los resultados obtenidos a lo largo de la tesis. Finalmente, en el Capítulo 9 se resumen las principales conclusiones de los estudios

aquí presentados las cuales son que ahora se cuenta con un primer aparato formal, validado con algunos experimentos, con el que es posible dar un tratamiento confiable a los problemas de penetración capilar e imbibición bajo gradientes de temperatura. Dicho formalismo permite predecir procesos de imbibición más rápidos o más lentos que los procesos isotérmicos, dependiendo de la intensidad y signo de los gradientes. Se discute también cómo los modelos simples considerados aquí, los cuales se basan principalmente en que los números de Péclet son pequeños y en desarrollos lineales de la viscosidad dinámica y la tensión superficial respecto a la temperatura, describen adecuadamente a los experimentos. Finalmente, extensiones a otras geometrías y la incorporación de los gradientes de temperatura a modelos más completos de imbibición son discutidos.

Capítulo 2

Antecedentes

Al proceso en el que un líquido viscoso incompresible penetra espontáneamente dentro de una estructura capilar y desplaza a otro fluido (líquido o gas) menos viscoso y menos mojador (fluidos inmiscibles) se le conoce como imbibición espontánea, si esto ocurre en un medio poroso [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Si el proceso se presenta en tubos capilares de diversas secciones transversales o en celdas de Hele-Shaw (espacios capilares entre placas paralelas o entre cilindros, esferas o conos de distinto radio) se le llama penetración capilar espontánea [8, 9, 10, 11, 12]. Ambos procesos ocurren sólo por la acción de fuerzas capilares pero, en algunas otras ocasiones, existe incluso la presencia de un gradiente externo de presiones (imbibición forzada). Un límite simplificador, aunque completamente general, es que la imbibición espontánea a estudiar en esta tesis sólo ocurre en medios secos, es decir, el líquido viscoso que se imbibie sólo desplaza aire a la presión atmosférica y con viscosidad despreciable y por lo tanto no hay regímenes con saturación inicial. Bajo estas condiciones se sabe bien desde los primeros estudios de la imbibición realizados a principios del siglo XX [14, 15, 16] que los resultados del análisis de la penetración capilar en capilares cilíndricos secos se extienden directamente a la imbibición en medios porosos secos. Por ejemplo, el frente de penetración capilar (posición de la superficie libre) h en un capilar cilíndrico de radio a sujeto a la gravedad obedece, a tiempos pequeños (pequeñas elevaciones del frente de penetración capilar), la ley de Lucas-Washburn [15, 16] dada por la relación

$$h^2 = \frac{\sigma a \cos \theta}{2\mu} t, \quad (2.1)$$

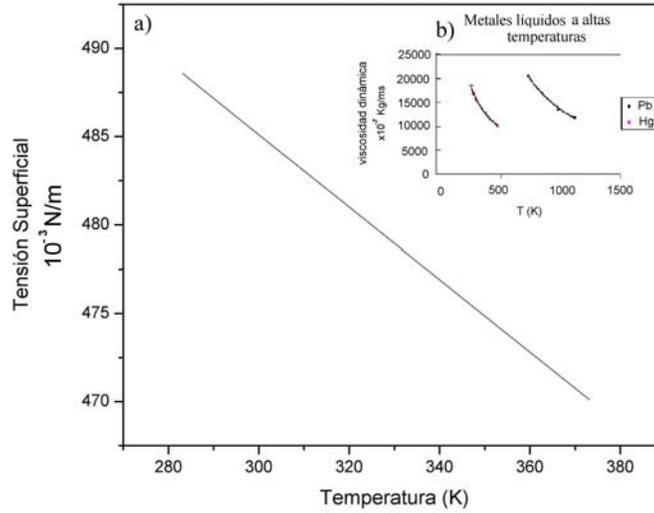


Figura 2-1: Gráfica de la dependencia con la temperatura a) Tensión superficial para el mercurio. b) viscosidad para el mercurio y el plomo [13].

donde σ es la tensión superficial, μ es la viscosidad dinámica, θ es el ángulo de contacto y t es el tiempo transcurrido para que el frente líquido alcance la altura h . La relación anterior es válida también en medios porosos secos y homogéneos cuando se sustituye a por la cantidad $\sqrt{K/\phi}$, en donde K es la permeabilidad del medio poroso y ϕ es la porosidad [3, 14, 15, 16, 17, 18].

La ecuación (2.1) permite comentar varias propiedades interesantes relacionadas con los desarrollos teóricos presentados en esta tesis: ya que σ y μ son funciones monótonamente decrecientes de la temperatura para la mayoría de los líquidos, ver Figs. 2-1 y 2-2, es lógico esperar que la rapidez de penetración capilar cambie cuando ésta se realiza con el mismo líquido y el mismo capilar o medio poroso pero a diferentes temperaturas. En este sentido Bell y Cameron en (1906) [14] y posteriormente Lucas en (1918) [15] realizaron experimentos de imbibición en papel filtro y en suelos, respectivamente, a diferentes temperaturas. En los experimentos reportados por Bell y Cameron se usó agua destilada y suelo agrícola (suelo de Pennsylvania) y se realizaron experimentos a 291 y 294 K. Sus datos experimentales son mostrados en la figura 2-3 en donde aún para experimentos con diferencias de temperatura de 3 K entre ellos se observa que la imbibición a 291 K es más rápida que aquella a 294 K. No obstante, los experimentos

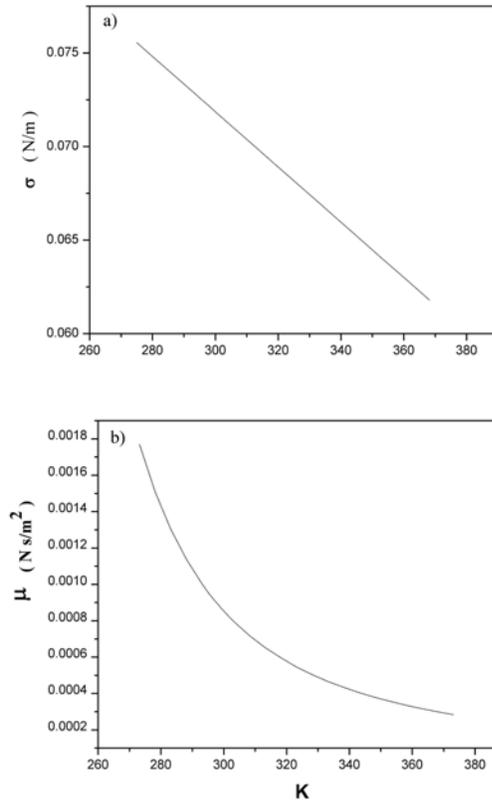


Figura 2-2: Gráfica de la dependencia con la temperatura para el agua a) Tensión superficial. b) Viscosidad dinámica [13].

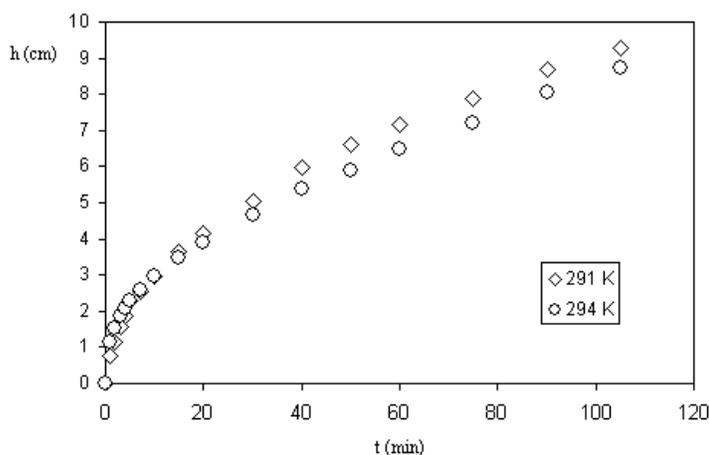


Figura 2-3: Evolución temporal del frente de imbibición para dos diferentes temperaturas (indicadas en la gráfica). Resultados experimentales con agua y suelo agrícola reportados por Bell y Cameron (1906).

de Lucas realizados con alcohol etílico en papel filtro, figura 2-4, muestran un comportamiento inverso ya que en sus experimentos la imbibición es más rápida en el sistema más caliente. Es pertinente aclarar que Bell y Cameron no indagaron sobre la causa de la diferencia en la rapidez de imbibición a diferentes temperaturas mientras que Lucas argumentó que tales diferencias eran debidas a la dependencia de la densidad y la viscosidad dinámica en la temperatura.

Más recientemente, Chimenti y Najurieta [19] realizaron estudios experimentales sistemáticos de la imbibición de agua en rocas porosas homogéneas de arenisca Berea, a diferentes temperaturas, saturadas inicialmente de petróleo crudo pesado. En dicho trabajo se determinó que a condiciones parecidas a las condiciones reales de los yacimientos de petróleo la eficiencia de extracción de aceite, debida a la penetración del agua en la roca, aumenta con la temperatura. Finalmente, Babadagli y su grupo, en una serie de trabajos experimentales realizados en la última década [20, 21, 22, 23], probaron que la imbibición en medios porosos fracturados es más eficiente a temperaturas bajas (temperaturas ambiente), llegando a ser cuatro veces más rápida cuando la temperatura decrece por un factor de dos.

Otra área en donde la mojabilidad y, por tanto, la penetración capilar a altas temperaturas es un mecanismo cotidiano se presenta en el proceso de soldadura de metales y cerámicas [24].

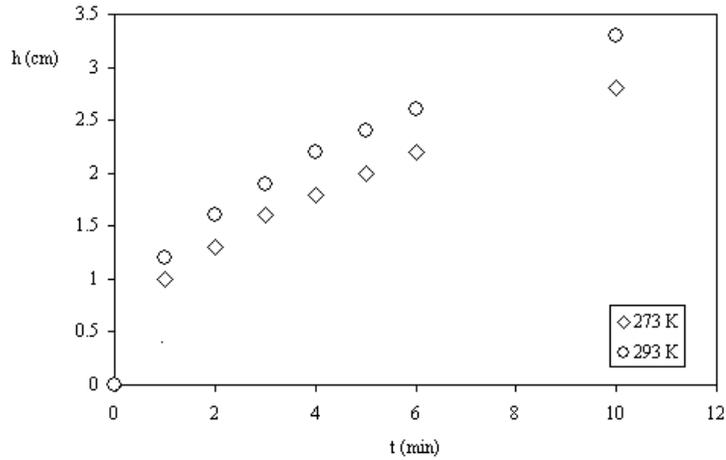


Figura 2-4: Evolución temporal del frente de imbibición para dos distintas temperaturas (indicadas en la gráfica). Resultados experimentales con papel filtro y alcohol etílico reportados por Lucas (1918).

En tales sistemas, para que la penetración capilar ocurra, los espacios capilares entre las piezas a soldar deben de ser menores que la longitud capilar l_c , definida como $l_c = \sqrt{\sigma/\rho g}$, donde g es la aceleración de la gravedad. Valores típicos de esta cantidad son para estaño a 505 K, $l_c = 2.85$ mm, y para plata a 1200 K, $l_c = 3.25$ mm [24]. Así, en espacios capilares de este orden de magnitud y menores y a temperaturas que varían entre 200 y 2000 K la ecuación (2.1), y modificaciones de ella que dependen de la geometría del capilar, son aplicadas cotidianamente.

Un factor que no se ha mencionado en estos dos últimos ejemplos de imbibición isotérmica y penetración capilar a temperaturas elevadas es que comúnmente las condiciones son no isotérmicas ya que, por un lado, los yacimientos siempre están sujetos a los gradientes geotérmicos o gradientes forzados [25, 26] inducidos por la inyección de agua o vapor a temperaturas mayores que el yacimiento mismo y, por otro lado, la soldadura de piezas requiere del calentamiento de sólo una parte de las piezas que también generan intensos gradientes de temperatura [27]. Otros sistemas en donde la imbibición bajo gradientes de temperatura es un factor importante es en el secado de papel y tela, aunque allí los fenómenos de evaporación son importantes [28]. La discusión y tratamiento de fenómenos de imbibición y penetración capilar con evaporación queda fuera del alcance de esta tesis.

La imbibición y la penetración capilar bajo gradientes de temperatura pueden verse como flujos termocapilares [9, 29]. En efecto, normalmente los flujos termocapilares se desarrollan sobre superficies libres líquidas debido a que los esfuerzos cortantes superficiales τ_s son proporcionales a los gradientes de la tensión superficial, i.e., $\tau_s = (\partial\sigma/\partial x)$. Ya que σ puede variar en función de la concentración de un solvente, c , o de la temperatura, T , ambos sobre la superficie libre, los esfuerzos cortantes toman la forma $\tau_s = (\partial\sigma/\partial c)(\partial c/\partial x)$ o $\tau_s = (\partial\sigma/\partial T)(\partial T/\partial x)$, es decir, los gradientes de concentración o de temperatura sobre una superficie libre generan flujos de película o películas de Marangoni [9, 29, 30, 31, 32, 33]. En el problema que aquí se estudia, las variaciones de la tensión superficial son generadas durante el movimiento de la superficie libre debido a las variaciones espaciales de la temperatura sobre las paredes de los capilares. Más específicamente, si el líquido toma instantáneamente, o en tiempos muy cortos, la misma distribución de temperaturas que las paredes del capilar, la tensión superficial sufrirá variaciones en la misma dirección del avance del frente de penetración capilar lo cual conlleva a un nuevo tipo de flujo termocapilar. De igual manera, como los esfuerzos friccionales viscosos también serán modificados por los gradientes de temperatura presentes en las paredes, las propiedades del flujo deben también ser incluidos en los modelos de penetración capilar. En este último caso, términos de resistencia viscosa de la forma $\partial\mu/\partial x = (\partial\mu/\partial T)(\partial T/\partial x)$ deberán incluirse en las ecuaciones de movimiento.

El estudio de sistemas con estas características y el análisis de las diversas condiciones físicas, geométricas y ambientales que afectan a este tipo de flujos dentro de capilares o en medios porosos homogéneos es la principal motivación de esta investigación. La geometría básica para estudiar el problema de la penetración capilar es el tubo capilar [7, 14, 15, 16]. La forma en que la penetración capilar es afectada por la acción de la gravedad y los perfiles lineales de temperatura se estudia en el próximo capítulo. Posteriormente, en el capítulo cuatro son consideradas la celda de Hele-Shaw rectangular vertical [34] y la celda radial [35, 36, 37, 38]. Ambas geometrías son representativas y fundamentales para entender la imbibición en fracturas en medios porosos impermeables [38] los cuales son muy abundantes en la naturaleza. En el capítulo cinco se estudia la imbibición en conos bajo gravedad y gradientes constantes de temperatura. Este caso es importante por que muestra la complejidad generada al considerar flujo no unidimensional.

La base de los análisis en las geometrías axial simétricas es el flujo de Poiseuille [39, 8]

ya que la imbibición la mayor parte del tiempo ocurre a número de Reynolds bajos. Por otro lado, para los flujos en celdas se aplica la teoría de la lubricación [8, 40, 41, 42, 43] ya que se desarrollan flujos de película.

Capítulo 3

Penetración capilar en un tubo capilar vertical

El análisis de la penetración capilar bajo gradientes de temperatura en un tubo capilar cilíndrico es de enorme interés por su amplia aplicación en muchos procesos industriales. Además, un material poroso se puede representar como un arreglo de tubos capilares [7, 14, 15, 16, 44]. La penetración espontánea en capilares se debe exclusivamente a la presión capilar, p_c , la cual se origina porque sobre la superficie libre curvada hay una fuerza tangencial, por unidad de área, que mueve al líquido hacia arriba. En el caso específico de un capilar cilíndrico con penetración capilar isotérmica la presión capilar se determina por la relación $p_c = 2\sigma \cos \theta / a$, donde, como ya se mencionó, a es el radio del capilar y θ es ángulo de contacto (medido desde la zona líquida) de la interfase líquido-aire con la superficie sólida (ver figura 3-1). En este tipo de flujos las fuerzas viscosas determinan en la dinámica del flujo, por este motivo se puede considerar que dentro del capilar se desarrolla un flujo tipo Poiseuille.

En esta sección se realiza una extensión del trabajo reportado por Medina et al. para la penetración capilar no isotérmica [45], a partir de considerar los efectos de la gravedad. Los detalles de cómo se establece el gradiente de temperatura en el líquido, con idéntico valor que en las paredes del sólido capilar, son presentados en el apéndice A.

3.1. Modelo matemático

Considerese que el capilar esta sujeto a la acción de un gradiente longitudinal de temperatura $G = \Delta T/H$, donde $\Delta T = (T_1 - T_0)$ es la diferencia de temperatura entre la parte superior del capilar (T_1) y la parte inferior (T_0). El tubo capilar tiene una altura H y radio a , ver figura (3-1). Se considera que el fluido alcanza la temperatura de las paredes del capilar de manera casi inmediata. Esta última suposición es válida para números de Péclet pequeños, como se demuestra en el Apéndice A y es factible alcanzarla para muchas sustancias líquidas. Nótese que si el número de Péclet es pequeño la difusión de calor domina sobre la convección forzada debida al flujo capilar.

Se supone, además, que dentro del capilar se desarrolla un flujo de Hagen-Poiseuille. Por ello, el esfuerzo cortante τ_w que actúa sobre las paredes del capilar esta dado por $\tau_w = 4\mu\bar{v}/a$ [39], donde \bar{v} es la velocidad media del flujo. Ya que el frente del flujo, *i.e.* la superficie libre, está en la posición $y = h(t)$, al tiempo t , el balance entre las fuerzas capilares, de fricción y el peso del fluido llevan a una ecuación de la forma

$$\int_0^{h(t)} \tau_w dA + \rho g \pi a^2 h = 2\pi\sigma(h(t))a \cos \theta. \quad (3.1)$$

En la ecuación anterior el término friccional viscoso se debe integrar de 0 hasta $h(t)$ porque éste actúa en cada elemento diferencial de área $dA = 2\pi a dy$ de la pared interna del capilar, mientras que la fuerza capilar actúa sólo en la superficie libre del fluido, por ello $\sigma = \sigma(h(t))$. En el término derecho de la ecuación (3.1) se consideró la presión capilar $p_c = 2\sigma \cos \theta/a$. Este método de formulación de la ecuación del frente $h(t)$ se ha utilizado anteriormente en diversos estudios de penetración capilar isotérmica [14, 46, 47, 48].

Conviene notar que, muy aproximadamente, la temperatura sobre las paredes del capilar obedece la distribución $T(y) = Gy + T_0$ y ésta no varia debido al flujo capilar. Nótese también que para dicho perfil estacionario $dT/dy = G = \Delta T/H = (T_1 - T_0)/H$. En particular, sobre la superficie libre del líquido la temperatura es $T(y = h) = Gh + T_0$. Otra suposición en la formulación del modelo es que la dependencia en la temperatura del término friccional recae sobre la viscosidad dinámica mientras que el ángulo de contacto se mantiene invariante tanto con la temperatura como con la velocidad del fluido. A partir de la ecuación (3.1) se obtiene la

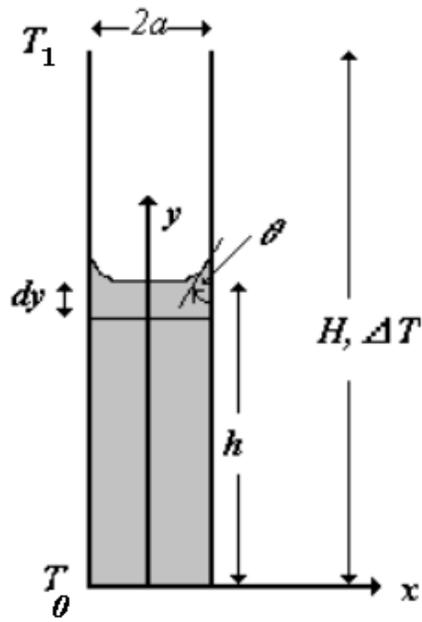


Figura 3-1: Esquema de la penetración capilar en un tubo capilar bajo un gradiente de temperatura $G = \Delta T/H$, de radio a y altura H . Al tiempo t el frente de penetración capilar esta en $y = h(t)$.

siguiente expresión, tomando en cuenta que $\bar{v} = dh/dt$,

$$\frac{4}{a} \frac{dh}{dt} \int_0^{h(t)} \mu(y) dy + \rho g \pi a h = \sigma(h(t)) \cos \theta. \quad (3.2)$$

La solución de la ecuación anterior se realiza considerando la influencia del gradiente de temperatura, para esto se desarrollan la viscosidad y la tensión superficial en series de Taylor, es decir, $\mu = \mu_0(1 + 1/\mu_0(d\mu/dT)Gy)$ [49] y $\sigma = \sigma_0[1 + 1/\sigma_0(d\sigma/dT)Gh]$ [29, 50, 51, 52, 9], donde μ_0 y σ_0 son valores de la viscosidad y de la tensión superficial evaluados a una temperatura de referencia $T = T_0$. Sustituyendo estas expresiones en (3.2), se obtiene la siguiente la ecuación diferencial para el frente de penetración capilar $h(t)$

$$\left[h + \frac{G}{2\mu_0} \frac{d\mu}{dT} h^2 \right] \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g a^2 h}{4\mu_0} = \frac{a\sigma_0 \cos \theta}{4\mu_0} \left[1 + \frac{G}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} h \right]. \quad (3.3)$$

Esta ecuación diferencial no lineal se puede expresar de forma adimensional utilizando la siguientes variables adimensionales: $\xi = h/h_\infty$ y $\tau = t/t_c$. Con este cambio se obtienen los parámetros adimensionales

$$A = \frac{G}{2\mu_0} \frac{d\mu}{dT} h_\infty, \quad B = \frac{G}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} h_\infty, \quad h_\infty = \frac{\sigma_0}{\rho g a} \cos \theta, \quad t_c = \frac{4\mu_0 h_\infty^2}{a\sigma_0 \cos \theta}. \quad (3.4)$$

La ecuación diferencial resultante es entonces

$$1 + (B - 1)\xi - (\xi + A\xi^2) \frac{d\xi}{d\tau} = 0, \quad (3.5)$$

la cual esta sujeta a las condiciones de iniciales $\xi = 0$ en $\tau = 0$. La solución bajo estas condiciones es

$$\tau = \left(\frac{B - A - 1}{(B - 1)^2} \right) \xi + \frac{A}{2(B - 1)} \xi^2 + \left(\frac{A - B + 1}{(B - 1)^3} \right) \ln [(B - 1)\xi + 1]. \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) determina la evolución temporal del frente de penetración capilar considerando de manera explícita la influencia de los parámetros A y B ; estos parámetros dependen del tipo de fluido seleccionado, de la magnitud del gradiente y del signo de éste.

Por otra parte, de la ecuación (3.6) se encuentra que la solución para el caso isotérmico, $G = 0$ ($A = B = 0$), esta dada por la relación

$$\tau = -\xi - \ln [1 - \xi]. \quad (3.7)$$

Esta expresión es la bien conocida la solución para la penetración capilar bajo la acción de la gravedad y, como se vera más adelante, esta forma adimensional también es válida para la penetración capilar isotérmica en una celda de Hele-Shaw vertical [24, 53]. Por otro lado, el caso asintótico, cuando $\xi \ll 1$ (pequeñas alturas), se expandiendo (3.7) a segundo orden en ξ , esto lleva a que $\xi^2 = \tau$ o en forma dimensional $h^2 = \sigma_0 a \cos \theta t / (4\mu_0)$ [16]. Esta última expresión, conocida como la ley de Lucas-Washburn fué analizada en los antecedentes y es la base de la penetración capilar isotérmica.

3.2. Resultados

En la figura 3-2a) se muestran gráficamente los perfiles teóricos del frente de penetración capilar dados por las ecuación (3.6) para un sistema agua-vidrio bajo gradientes negativos y positivos con valores $G_+ = 50$ K/m y $G_- = -50$ K/m. En la misma figura también se graficó el perfil dado por la ecuación (3.7) el cual corresponde a $G = 0$ con $T_0 = 298$ K. Ya que las curvas parecen muy próximas entre si, en la figura 3-2b) se muestra un acercamiento a la zona cercana a la altura de equilibrio. Ahí, es obvio que cada perfil alcanza a distintos tiempos la altura de equilibrio lo que evidencia que en realidad bajo el gradiente negativo el frente se acelera. También se observa que bajo el gradiente positivo la penetración capilar es aún más lenta respecto a los otros dos casos. Estos resultados no son generales ya que las variaciones de μ y σ con la temperatura dependen de cada sustancia. En este caso en particular la experimentación resulta difícil, ya que la visualización del frente de penetración capilar es casi imposible de observar aún con la cámara digital, por lo que sólo se presentan resultados teóricos. Detalles de la influencia relativa de los parámetros A y B se presentan en el capítulo 8.

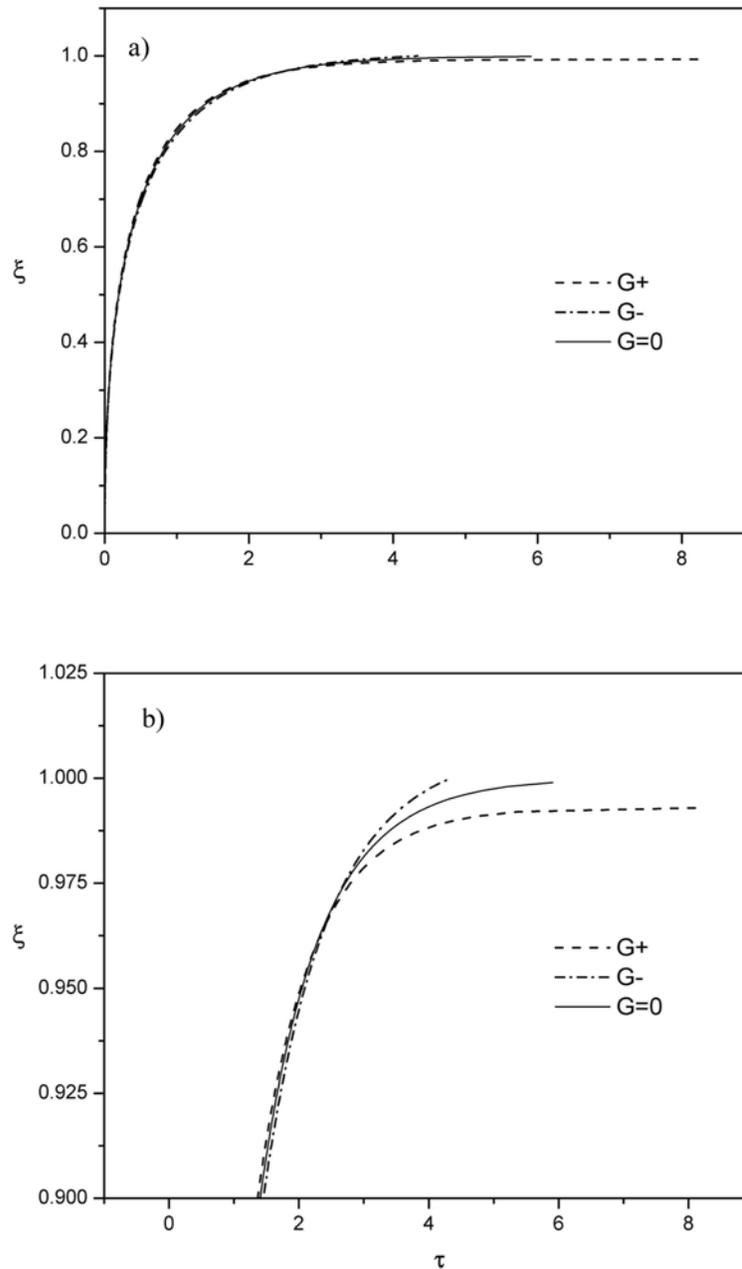


Figura 3-2: a) Gráfica adimensional de los perfiles teóricos para el frente de penetración capilar de agua en un tubo capilar de vidrio considerando los efectos de la gravedad para los tres caso estudiados. $G = 0$ ($T_0 = 298$ K), $G_+ = 50$ K/m y $G_- = -50$ K/m. b) Detalle de la evolución del frente de penetración capilar

Capítulo 4

Penetración capilar en celdas de Hele-Shaw

4.1. Celda vertical

A continuación se presenta un estudio de la penetración capilar espontánea de un líquido viscoso incompresible en una celda vertical de Hele-Shaw bajo gradientes constantes de temperatura. El análisis de esta geometría reviste especial importancia porque diversos procesos de penetración capilar ocurren en espacios capilares tipo celdas rectangulares [1, 7, 24, 43, 54, 55, 56]. Más aún, en medios porosos fracturados muy poco permeables las fracturas verticales pueden ser visualizadas como celdas verticales de Hele-Shaw ya que el flujo de fluidos y, en particular, la penetración capilar se dan principalmente en las fracturas. Las fracturas en medios porosos fracturados, como los yacimientos profundos de aceite y agua, son espacios capilares verticales, o inclinados, con una apertura media $D = 0.1$ mm. Cuando el agua se imbebe a través de la fractura la longitud capilar en este caso es l_c (*agua*) = 2.7 mm a 20 °C. Así, las fuerzas capilares vencen a la gravedad y se genera un flujo de película, muy delgado. En virtud de esto la penetración capilar con gradientes de temperatura es de mucho interés en el ámbito petrolero, hidrológico, geofísico y de tecnología de la soldadura y será aquí descrita a partir de la teoría de la lubricación [40, 41, 42]

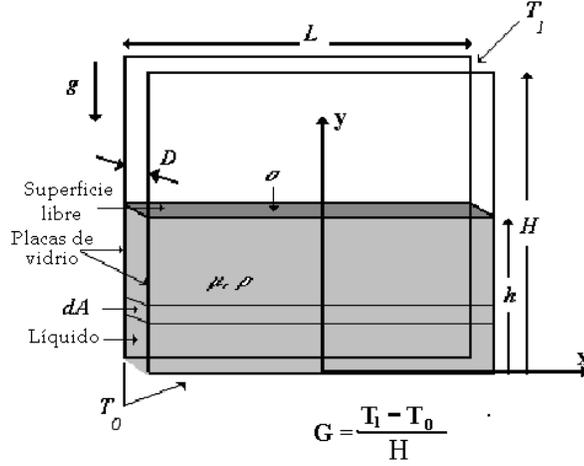


Figura 4-1: Esquema de la penetración capilar en una celda de Hele-Shaw vertical. La altura de la celda es H y la del frente al tiempo t es $h(t)$. La celda está sujeta a un gradiente constante de temperatura $G = \Delta T/H$.

4.1.1. Modelo matemático

En la figura 4-1 se muestra esquemáticamente una celda de Hele-Shaw la cual consiste de un par de placas verticales paralelas con separación constante D entre ellas y sujetas a un gradiente longitudinal de temperatura $G = (T_1 - T_0)/H$. H denota la altura total de las placas, L su ancho y $h(t)$ es la posición instantánea promedio, al tiempo t , del frente del flujo capilar (el cual se observa que es aproximadamente plano en los experimentos). Como ya se ha demostrado en el Apéndice A, el problema térmico puede ser desacoplado del problema dinámico para $Pe \ll 1$ y el efecto de la variación de T puede ser incluido en $\mu(T)$ y $\sigma(T)$.

Bajo estas consideraciones las ecuaciones de la lubricación (para un fluido incompresible) son

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.1)$$

$$\nabla P = -\frac{12\mu}{D^2} \bar{\mathbf{v}} - \rho \mathbf{g}, \quad (4.2)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ y P son cantidades promediadas en la profundidad (coordenada z). Ya que el frente es casi plano la aproximación de flujo unidimensional es buena, por lo tanto $\bar{\mathbf{v}} = (0, \bar{v}, 0)$ y $\mathbf{g} = (0, g, 0)$. En este caso se desprecian los efectos de la aceleración en la ecuación de cantidad de movimiento por lo que

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = 0, \quad (4.3)$$

con $\bar{v} = dh/dt$. El cálculo de la caída de presión desde la zona de entrada al frente del flujo $y = h$ se realiza usando la ecuación (4.2) para flujo unidimensional, ello da

$$\Delta P = -\frac{12}{D^2} \frac{dh}{dt} \int_0^h \mu(y) dy - \rho g h. \quad (4.4)$$

En este caso la presión capilar es bien aproximada por $\Delta P = -2\sigma \cos \theta / D$. Introduciendo esta última expresión en (4.4) se encuentra que una ecuación para $h(t)$ de la forma

$$2\sigma(h(t)) \cos \theta - \rho g D h - \frac{12}{D} \frac{dh}{dt} \int_0^{h(t)} \mu(y) dy = 0. \quad (4.5)$$

Usando, como antes, los desarrollos en serie de Taylor para $\mu(T)$ y $\sigma(T)$, se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{2D\sigma_0 \cos \theta}{12\mu_0} - \frac{\left[h + \frac{\mu' G h^2}{2\mu_0} \right]}{\left[1 + \frac{\sigma' G h}{\sigma_0} \right]} \frac{dh}{dt} - \frac{\rho g D^2 h}{12\mu_0 \left(1 + \frac{\sigma' G h}{\sigma_0} \right)} = 0, \quad (4.6)$$

donde $\mu' = d\mu/dT$ y $\sigma' = d\sigma/dT$. Para simplificar la forma de las ecuaciones se usaron las variables adimensionales $\xi = h/h_\infty$ y $\tau = t/t_c$ con $t_c = 6\mu_0 h_\infty^2 / (\sigma_0 \cos \theta D)$ y donde h_∞ es la altura de equilibrio que se obtiene del caso isotérmico a partir de un balance entre la fuerza capilar y el peso del fluido, i.e., $h_\infty = 2\sigma_0 \cos \theta / (\rho g D)$. Esta adimensionalización de las variables lleva a la introducción de los parámetros adimensionales A y B definidos como

$$A = \frac{\mu' G h_\infty}{2\mu_0}, \quad B = \frac{\sigma' G h_\infty}{\sigma_0}, \quad (4.7)$$

y a la ecuación diferencial adimensional

$$1 + (B - 1)\xi - (\xi + A\xi^2)\frac{d\xi}{d\tau} = 0. \quad (4.8)$$

La expresión anterior tiene como solución (bajo la condición inicial $\xi = 0$ en $\tau = 0$) a la expresión

$$\tau = \left[\frac{B - A - 1}{(B - 1)^2} \right] \xi + \frac{A}{2(B - 1)} \xi^2 + \left[\frac{A - B + 1}{(B - 1)^3} \right] \ln [(B - 1)\xi + 1]. \quad (4.9)$$

Por otra parte, de la ecuación (4.9) se puede encontrar que la solución para el caso isotérmico $G = 0$ esta dada por

$$\tau = -\xi - \ln [1 - \xi], \quad (4.10)$$

y su límite para pequeñas alturas lleva a la ley de Lucas-Washburn $\xi^2 = \tau$.

Observese que las relaciones (4.9), (4.10) y la ley de Lucas-Washburn son idénticas en el caso del tubo capilar y de la celda vertical y su forma dimensional también será muy similar, salvo factores de forma relacionados a la geometría. Este punto sera discutido con mas detalle en la ultima parte del capitulo 8.

En este caso fué posible comprobar experimentalmente las predicciones teóricas, lo cual es muy difícil en un tubo capilar. En la próxima sección se discuten los experimentos en celdas la celda vertical de H-S.

4.1.2. Experimentos

En los experimentos de penetración capilar en la celda de Hele-Shaw bajo gradientes de temperatura, se emplean dos placas de vidrio para formar las paredes de la celda con una longitud $L = 7.6 \times 10^{-2}$ m, una altura $H = 2.6 \times 10^{-2}$ m ($L \approx 3H$) y una separación promedio de las placas $D = 4.3 \times 10^{-5}$ m (figura 4-2). El espesor de cada placa es de 1×10^{-3} m. ver figura 4-2. El fluido de trabajo es glicerina pura cuyas propiedades a 299 K son: densidad $\rho = 1259.9$ kg/m³ y difusividad térmica $\alpha_f = 9.35 \times 10^{-8}$ m²/s, para el sólido la difusividad térmica es $\alpha_s = 7.46 \times 10^{-7}$ m²/s. El ángulo de contacto entre el sólido y el líquido es de $\theta = 0.57$ rad

aproximadamente, el cual se determina mediante el método de gota estática (sessile drop) [8].

El tiempo característico para alcanzar el gradiente longitudinal de temperatura en la celda se determina a partir de la relación $t_{Ds} = H^2/\alpha_s = 15$ min, mientras que el tiempo para alcanzar la homogeneización de la temperatura en la película de fluido que penetra la celda es $t_{Df} = D^2/\alpha_f$ que tiene un valor aproximado de $t_{Df} = 0.02$ s. Este último valor es pequeño en comparación con el tiempo de penetración capilar promedio para alcanzar una distancia igual a la separación entre placas D el cual es del orden de $t_I = 0.2$ s.

Los experimentos se realizan en dos etapas. En la primera se establece el gradiente de temperatura en la celda. Para alcanzar el gradiente de temperatura se emplea un dispositivo experimental que consta de dos cilindros ranurados en donde se coloca la celda (ver figura 4-3). Se hace circular agua en cada uno de los cilindros que proviene de dos baños térmicos, los cuales establecen la diferencia de temperatura ΔT entre la parte superior (T_1) e inferior (T_0) de la celda. Para alcanzar el gradiente de temperatura deseado se deja funcionar el dispositivo por un tiempo superior al tiempo de difusión (15 min) en este caso y para garantizar la presencia del gradiente se deja funcionar por un periodo de 2 hrs. Con el empleo de los baños térmicos se tiene un buen control de la temperatura en la celda además, para evitar saltos de temperatura debidos al ambiente, los experimentos se realizan en un cuarto de temperatura controlada $T_{Lab} = 297.2$ K. Los gradientes de temperatura que se establecen en la celda se miden empleando una cámara infrarroja (model FLIR Thermacam-PM595) cuya resolución es de ± 0.1 K.

Una vez que se alcanza el estado estacionario de la temperatura en la celda comienza la segunda etapa del experimento, la cual consiste en colocar la parte inferior de la celda dentro del fluido de trabajo. Dicho fluido se encuentra en un pequeño contenedor en el cilindro inferior (ver figura 4-3). Se logra así, que la temperatura del fluido sea la misma que la temperatura de la parte inferior de la celda $T = T_0$. Esto permite que el fluido penetre en la celda y no modifique la temperatura impuesta en esa zona, además de que su cumplen las suposiciones del modelo matemático. Posteriormente, el flujo de película modifica su temperatura a medida que avanza en el interior de la celda. El avance temporal del frente de penetración capilar, $h(t)$, se graba, para todos los casos estudiados, con una video cámara digital. Posteriormente del video digital se extraen fotogramas cada 1/30 s. Con este método es posible medir distancias tan pequeñas como 0.1mm.

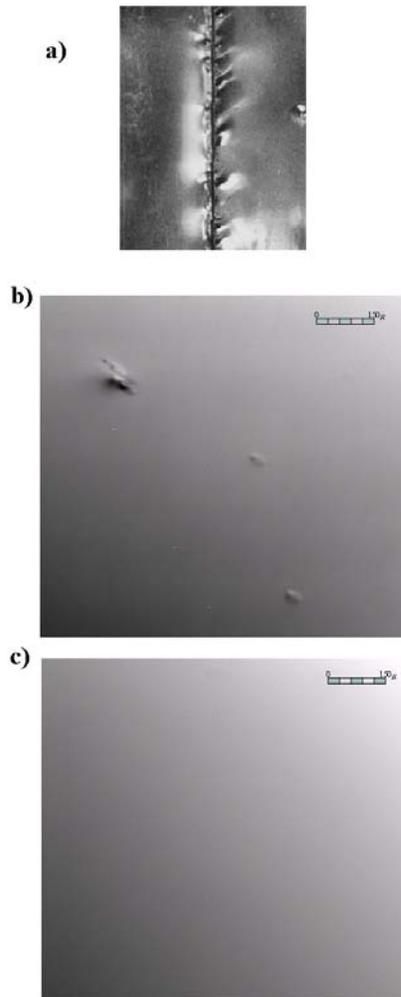


Figura 4-2: a) Fotografía tomada con un microscópio óptico de $10\times$ de la celda de Hele-Shaw, se muestra la separación de las placas $D = 4.3 \times 10^{-5}$ m y el espesor de ellas. b) Fotografía de la superficie de una de las placas sin pulir. c) Fotografía de la superficie de una de las placas pulida.

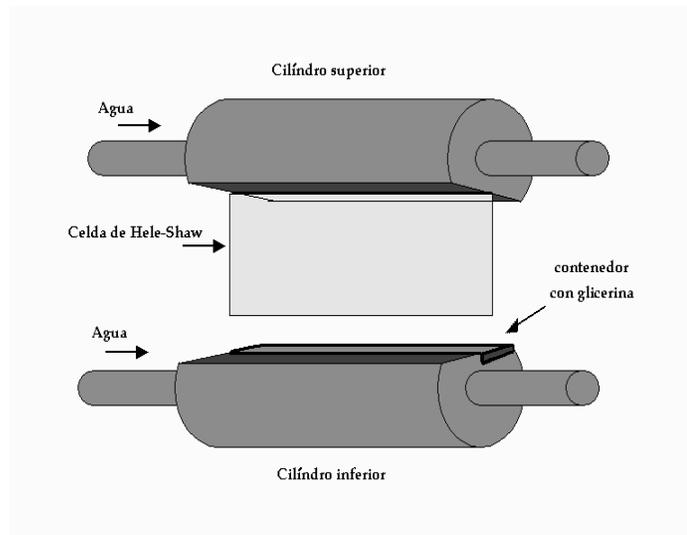


Figura 4-3: Esquema del dispositivo experimental para imponer un gradiente longitudinal en la celda de Hele-Shaw. Se observa que el depósito de glicerina está localizado en el cilindro inferior, este mismo depósito se pone en contacto con la celda.

En los estudios experimentales es importante tener en cuenta que las celdas tienen memoria, es decir, una vez que una celda se ha utilizado, sus paredes pueden guardar residuos del fluido de trabajo. Por ello, es importante lavar muy bien el material en el que se realizan las pruebas, en los estudios aquí presentados, para evitar problemas de histéresis, se usan placas nuevas en cada evento.

Para tener confiabilidad de los resultados se realizaron tres experimentos por cada caso que se estudia. Cuatro casos han sido estudiado: el primero cuando el gradiente de temperatura es positivo ($G > 0$) con valor $G_+ = 300$ K/m, el segundo caso cuando el gradiente es negativo ($G < 0$) con valor $G_- = -300$ K/m y los dos restantes son isotérmicos $G = 0$, pero distintos valores de temperaturas $T_0 = 299$ K y $T_0 = 307$ K. Con el fin de tener un comparación directa entre los gradientes negativo y positivo los valores de éstos son similares en magnitud, i.e., $|G_-| = G_+$. En las figuras 4-4, 4-5, 4-6, y 4-7 se muestran distribuciones de temperatura típicas para los casos estudiados. Para el gradiente negativo la temperatura varía desde $T_0 = 307$ K hasta $T_1 = 299$ K, para el caso positivo los valores son exactamente opuestos, en el caso isotérmico las temperaturas se mantienen constantes $T_0 = 299$ K y $T_0 = 307$ K. Los cambios de

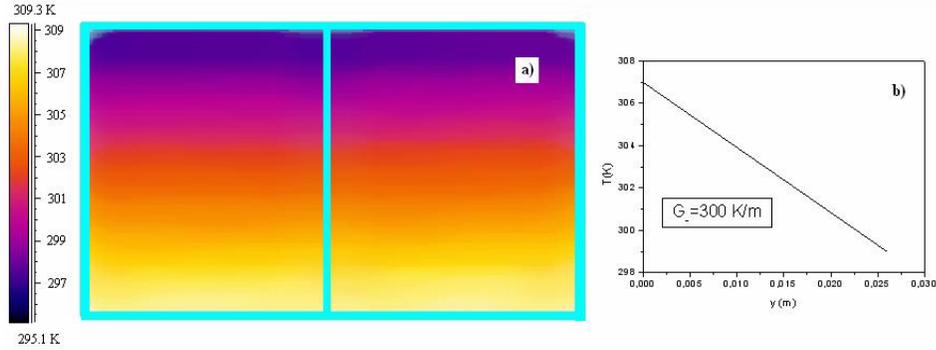


Figura 4-4: a) Termografía de la celda de Hele-Shaw, para el caso de gradiente negativo. b) Medición del perfil de temperatura impuesto en la celda. La gráfica muestra que el perfil de temperatura no se altera durante la penetración capilar.

la viscosidad dinámica μ y la tensión superficial σ con la temperatura T se evalúan a partir de las graficas que se muestran en las figuras 4-8 y 4-9, en el intervalo de temperatura $293 \leq T \leq 323$ K [51].

La figura 4-10 presenta los principales resultados para la evolución temporal del frente de penetración capilar, h , para los distintos valores de G . Para los casos donde $G \neq 0$ se emplea la ecuación (4.9), mientras que para los casos con $G = 0$ la ecuación (4.10) ha sido utilizada. Como se observa, la comparación entre los resultados experimentales (símbolos) y la teoría (curvas) muestran en general una buena concordancia, aunque para el caso del gradiente positivo G_+ , el avance del frente es subestimado después de la mitad de la altura del frente. Las desviaciones entre la teoría y los experimentos para este caso (G_+) pueden tener diversos orígenes, una de las principales causas es la posible dependencia del ángulo de contacto θ en la velocidad [8, 47] o en la temperatura [52]. Por ejemplo, para el intervalo de temperatura aquí considerado la variación de θ es de hasta un 10%.

A partir de este estudio, en los casos donde hay presencia de un gradiente de temperatura el proceso de penetración capilar es más rápido que para los casos isotérmicos. En el caso específico del gradiente positivo el avance del frente es al menos cuatro veces más rápido con respecto a caso isotérmico $T_0 = 299$ K.

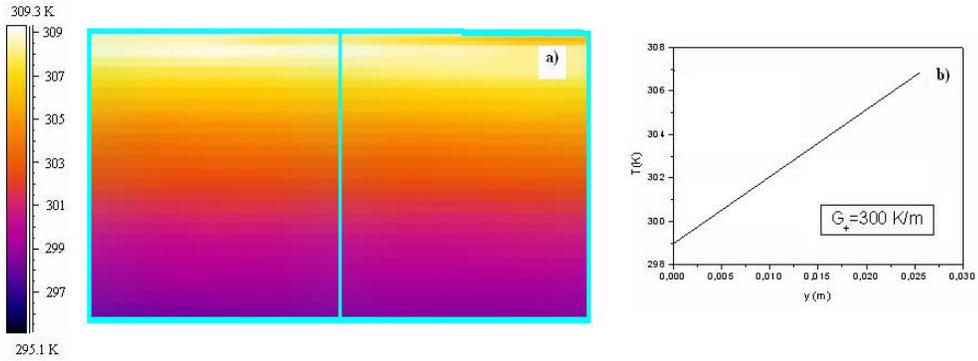


Figura 4-5: a) Termografía de la celda de Hele-Shaw para el caso de gradiente positivo. b) Gráfica del perfil de temperatura impuesto en la celda.

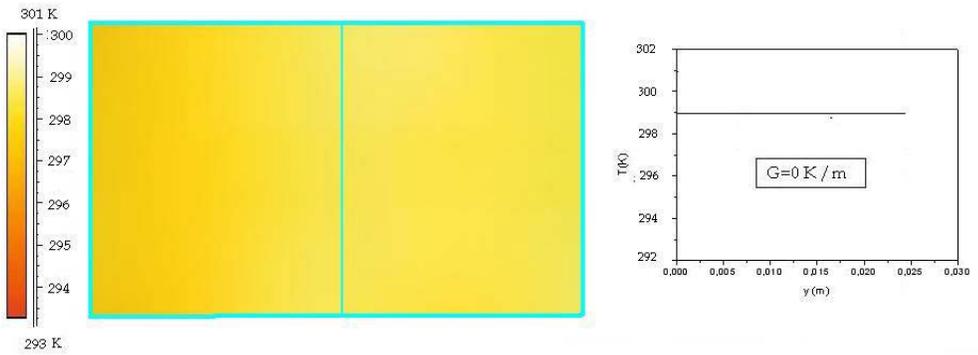


Figura 4-6: a) Termografía de la celda de Hele-Shaw, para el caso isotérmico $T_0 = 299 \text{ K}$. b) Gráfica del perfil de temperatura impuesto en la celda. En este caso la uniformidad de color indica que la temperatura es constante en toda la celda.

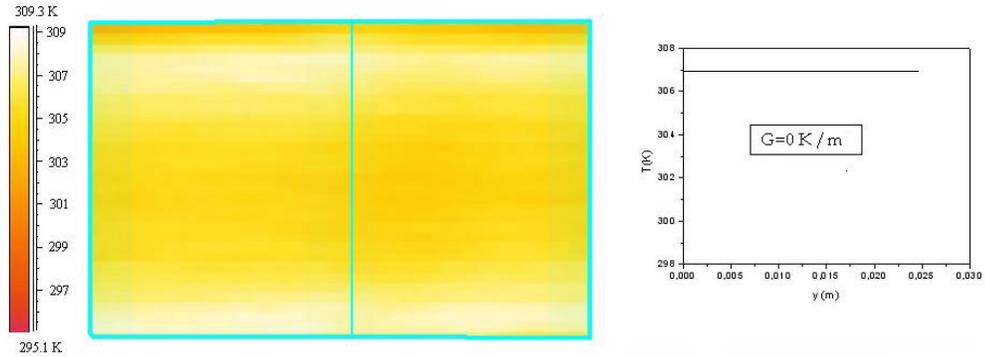


Figura 4-7: a) Termografía de la celda de Hele-Shaw, para el caso isotérmico $T_0 = 307$ K. b) Gráfica del perfil de temperatura impuesto en la celda. En este caso la uniformidad de color indica que la temperatura es constante en toda la celda

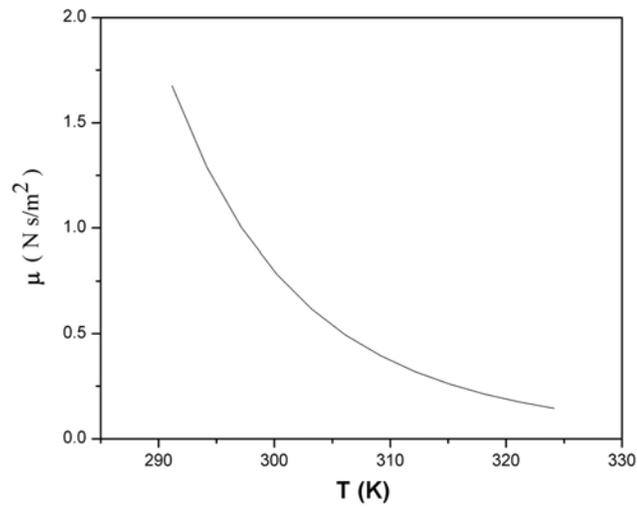


Figura 4-8: Dependencia de la viscosidad dinámica con la temperatura para la glicerina en el intervalo de estudio $293 \leq T \leq 323$ K [13].

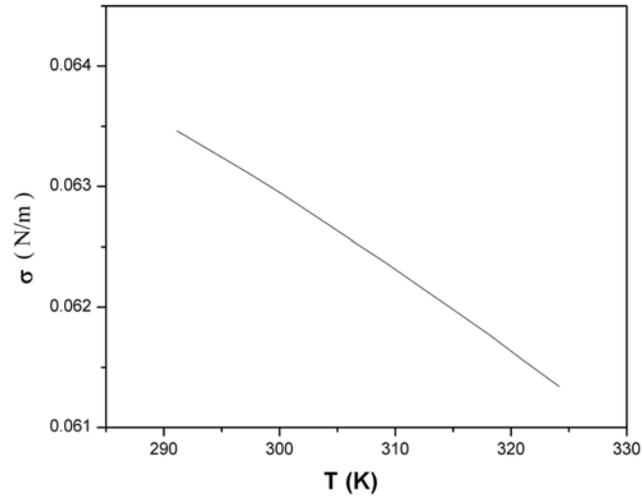


Figura 4-9: Dependencia de la Tensión superficial con la temperatura para la glicerina en el intervalo de estudio ya indicado [13].

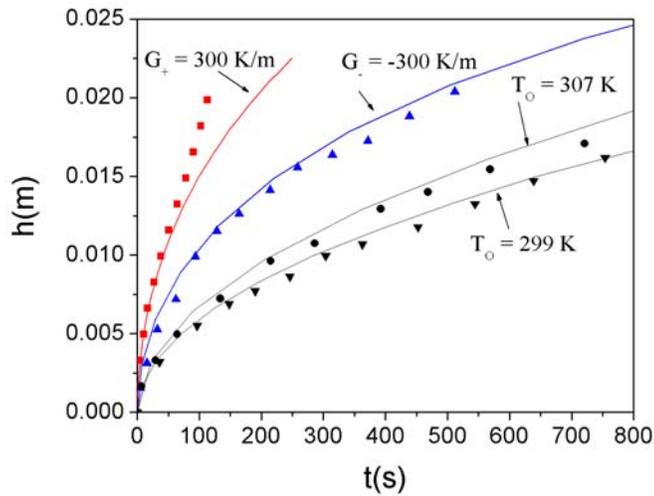


Figura 4-10: Comparación de los perfiles teóricos (líneas continuas) y los experimentales (símbolos) para la evolución temporal del frente de penetración capilar promedio, h , en función del tiempo, t , para los casos considerados: $G_+ = 300$ K/m (■), $G_- = -300$ K/m (▲), $G = 0$ con $T_o = T_1 = 299$ K (▼) y $G = 0$ con $T_o = T_1 = 307$ K (●).

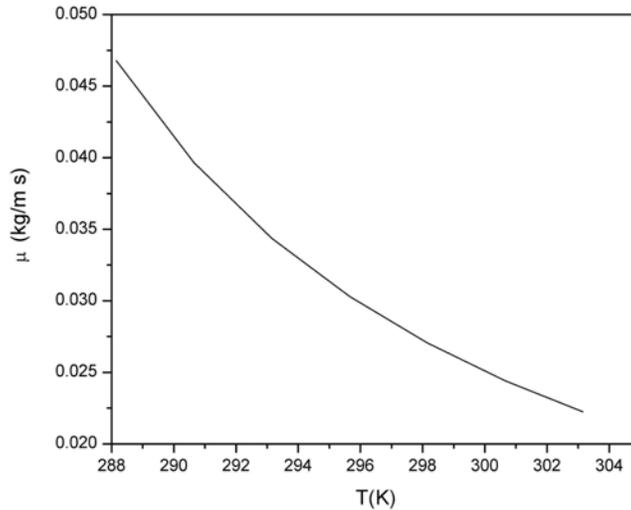


Figura 4-11: Viscosidad dinámica como función de la temperatura para el escualano en el rango de estudio [13].

El modelo teórico muestra que la competencia entre los parámetros adimensionales A y B tiene mucha influencia en la evolución temporal del frente de penetración capilar, es decir, la competencia entre los efectos viscosos que se oponen al flujo de fluido y la tensión superficial que causa la penetración capilar. Por ello es importante utilizar otro fluido de trabajo que nos permita confirmar la influencia de los parámetros A y B . El fluido de trabajo que se empleó es el escualano, las variaciones de la viscosidad, μ , y tensión superficial, σ , con la temperatura para este fluido se muestran en las figuras 4-11 y 4-12

Los resultados experimentales se muestran en la figura 4-13. En este caso los resultados muestran que la penetración capilar isotérmica es mucho más rápida que para los casos donde existe gradiente. Por otra parte, como se observa en la figura 4-13, la evolución temporal del frente de penetración capilar se realiza incluso más rápido para un gradiente negativo que para el caso de gradiente positivo. Los gradientes en este caso son los mismos que para los casos de la glicerina, $G_+ = 300$ K/m, $G_- = -300$ K/m y $G = 0$ con $T_o = T_1 = 299$ K.

Resulta interesante comparar cómo cambian las propiedades del fluido de trabajo con la temperatura, en este caso en particular las propiedades de la glicerina (ver figuras 4-8 y 4-9)

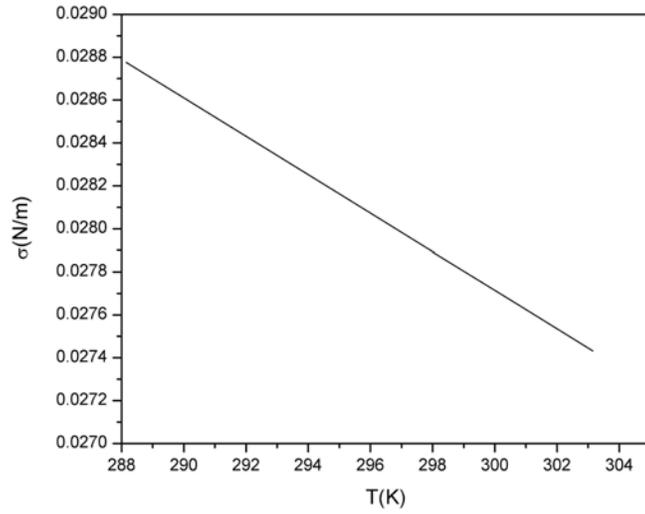


Figura 4-12: Tensión superficial como función de la temperatura para el escualane en el rango de estudio [13].

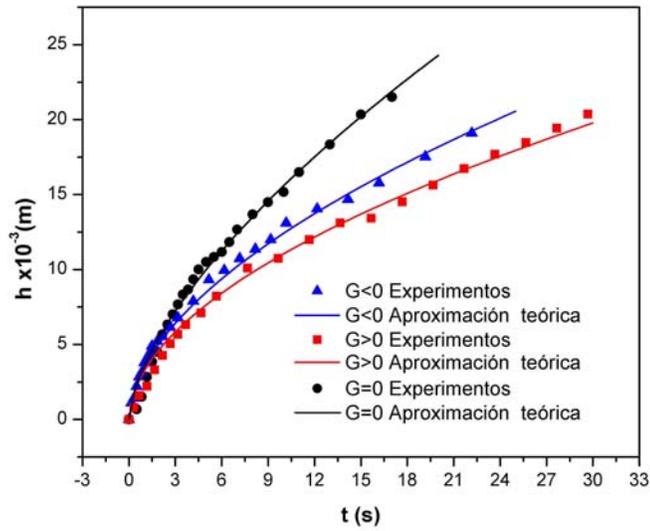


Figura 4-13: Gráfica dimensional del frente de imbibición para escualane. Los perfiles teóricos son las líneas continuas mientras que los símbolos son datos experimentales. Los valores de los gradientes son: $G_+ = 300 \text{ K/m}$ (■), $G_- = -300 \text{ K/m}$ (▲), $G = 0$ y $T_o = T_1 = 299 \text{ K}$ (●) [13].

pueden compararse contra las propiedades del escualane (figuras 4-11 y 4-12). Se observa que la tensión superficial en ambos casos son similares, sin embargo, el cambio en la viscosidad es más fuerte en el caso de la glicerina que en el de escualane y esto se manifiesta en el avance del frente de penetración capilar para cada sustancia de manera distinta.

Los experimentos que aquí se presentan sirven para validar el modelo matemático propuesto. Resulta importante estimar que parámetro influye más en la penetración capilar. Para ello, en el Capítulo 8 se da un análisis más detallado de la competencia entre los parámetros A y B .

4.2. Celda radial de Hele-Shaw

El estudio de la penetración capilar radial en celda de Hele-Shaw tiene importancia en la comprensión de los procesos de transporte en fracturas horizontales en yacimientos de petróleo, agua y gas y en campos geotérmicos [35, 38]. De igual manera estos estudios son de interés en el moldeo de polímeros [8, 49, 57, 58, 59], cromatografía [60, 61], impresión de tinta en papel [36, 57, 60] y en investigaciones acerca de aerosoles [36, 62]. En este mismo sentido, la absorción de gotas en un sustrato poroso resulta de gran interés [9, 63, 64] ya que en cierta medida este proceso corresponde a una imbibición radial desde un volumen finito de líquido [62]. Más aún, este proceso es fundamental para entender la penetración capilar radial en medios porosos homogéneos [37, 9, 60, 61, 62, 63, 64] y su comprensión juega un papel equivalente, en orden de importancia, al de los tubos capilares en el ascenso capilar en medios porosos homogéneos. El enfoque que se usa para determinar la ley de penetración capilar es nuevamente el empleo de la teoría de la lubricación con la geometría radial aunque la distribución de temperatura es un poco más complicada

4.2.1. Perfiles de temperatura

Para analizar tanto el problema de conducción de calor como el proceso de penetración capilar se considera un sistema en coordenadas cilíndricas (r, z, ϕ) . El origen del sistema se encuentra en el centro de las placas y a la mitad de la separación de las mismas, ver figura 4-14. La separación entre placas es $2H$ y se asume muy pequeña, finalmente, el radio máximo de la celda es, R_1 , donde la temperatura es T_1 . La distribución de temperatura en estado estacionario,

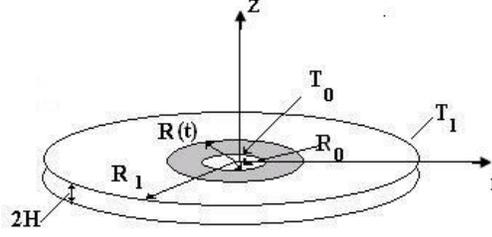


Figura 4-14: Esquema de la celda de Hele-Shaw radial. La separación entre las placas es $2H$. T_0 es la temperatura en el centro en $r = R_0$ y T_1 es la temperatura en el extremo $r = R_1$.

previa al inicio de la penetración capilar, esta determinada por la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 T = 0$, con las condiciones de frontera $T = T_0$ en $r = R_0$ y $T = T_1$ en $r = R_1$. La solución de la ecuación de Laplace para esta geometría es

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{[\ln R_1 - \ln R_0]} (\ln r - \ln R_0), \quad (4.11)$$

y el gradiente de temperatura $G = dT/dr$ es

$$G = \frac{T_1 - T_0}{[\ln R_1 - \ln R_0]} \frac{1}{r}. \quad (4.12)$$

Como se observa, el gradiente ahora no es constante y esto debe de ser considerado en el análisis del proceso de penetración capilar.

4.2.2. Flujo radial de película

El estudio del flujo de película en la celda radial asume que el número de Péclet es pequeño, $Pe \ll 1$, es decir, que el líquido durante el flujo muy rápidamente toma el perfil de temperatura de la celda. Se supone además que durante el proceso de penetración capilar el fluido penetra únicamente en forma radial desde una región inicial R_0 , que se encuentra a una temperatura T_0 . Las ecuaciones de la lubricación para el flujo incompresible en este caso son

$$\frac{\partial (rq_r)}{\partial r} = 0, \quad (4.13)$$

$$q_r = \int_{-H}^H v_r dz = -\frac{2}{3} \frac{H^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.14)$$

donde v_r es la velocidad radial promediada con la altura, p es la presión también promediada con la altura. La cantidad q_r es una función definida a través de la ecuación (4.14). Una primera integral de la ecuación (4.13) lleva inmediatamente a que

$$rq_r = \frac{Q}{2\pi}, \quad (4.15)$$

donde Q es el gasto. El gasto se puede expresar en términos de la posición del frente $R(t)$ y del espesor de la película, es decir, $Q = 4\pi HR(t)dR(t)/dt$. Usando esta expresión en la ecuación (4.15) para conocer q_r y usando dicha cantidad en (4.14) se llega a que

$$-\frac{2}{3} \frac{H^3}{\mu} r \frac{dp}{dr} = 2HR(t) \frac{dR(t)}{dt}. \quad (4.16)$$

La caída de presión es entonces

$$\Delta p = -\frac{3}{H^2} R \frac{dR}{dt} \int_{R_0}^R \frac{\mu(r)}{r} dr. \quad (4.17)$$

En la ecuación (4.17) se destaca la dependencia de la viscosidad con la posición, r , por la presencia del gradiente de temperaturas. Por último, introduciendo la caída de presión dada por la presión capilar se encuentra la ecuación para el frente $R(t)$

$$\frac{3}{H^2} R \frac{dR}{dt} \int_{R_0}^R \frac{\mu(r)}{r} dr = \sigma(R) \left(\frac{\cos \theta}{H} - \frac{1}{R} \right). \quad (4.18)$$

Las series de Taylor para μ y σ son ahora $\mu(r) = \mu_0(1 + 1/\mu_0(d\mu/dT)(dT/dr)[r - R_0])$ y $\sigma(R) = \sigma_0(1 + 1/\sigma_0(d\sigma/dT)(dT/dR)[R - R_0])$. La introducción de (4.12) en tales series lleva a que

$$\mu(r) = \mu_0 \left(\left(1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln[R_1/R_0]} \left[1 - \frac{R_0}{r} \right] \right) \right), \quad (4.19)$$

$$\sigma(R) = \sigma_0 \left(1 + \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln [R_1/R_0]} \left[1 - \frac{R_0}{R} \right] \right), \quad (4.20)$$

ambas relaciones se usarán en la ecuación (4.18) más adelante.

En el problema de penetración capilar radial isotérmica Marmur [36] demostró que para que se de la penetración capilar del líquido en la celda, debe existir un radio inicial (zona inicial mojada) que tiene la forma $r_p = H/(\cos \theta + 2H/R')$, donde R' es el radio de una gota de líquido localizada simétricamente en el centro del orificio de penetración. En nuestro caso se considera que la gota tiene un radio semejante al orificio de penetración, $R'_0 \simeq R_0$ y a su vez que la gota se encuentra a una temperatura $T = T_0$. Entonces, el líquido penetrará en forma radial dependiendo de la caída de presión, $2\sigma_0/R_0$, siempre y cuando esta caída de presión sea mayor a la presión interna presente en el menisco $-\sigma(R) [\cos \theta/H - 1/R]$. Por lo anterior, la condición para la existencia de la penetración capilar se establece a partir de la desigualdad

$$\frac{2\sigma_0}{R_0} + \sigma(R) \left[\frac{\cos \theta}{H} - \frac{1}{R} \right] > 0. \quad (4.21)$$

De la ecuaciones (4.20) y (4.21) se puede determinar el radio mínimo de la región inicial, R_p , que permite la penetración espontánea en la celda radial

$$R_p = \frac{H + HB + B \cos \theta \pm H \sqrt{1 - 6B - 2B \frac{R_0}{H} \cos \theta + B^2 \left(1 - \frac{R_0}{H} \cos \theta\right)^2}}{2 \left[\cos \theta + B \cos \theta + 2 \frac{H}{R_0} \right]}. \quad (4.22)$$

Aquí el parámetro adimensional B se define como

$$B = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln [R_1/R_0]}. \quad (4.23)$$

El caso isotérmico se establece cuando $B = 0$, en este límite el radio de la región inicial esta definido por la siguiente expresión

$$R_p = \frac{H}{\left[\cos \theta + 2 \frac{H}{R_0} \right]}, \quad (4.24)$$

esta expresión coincide con el resultado de Marmur [36] cuando el radio de la gota es R_0 . Es

decir, que la penetración capilar isotérmica, o bajo gradientes de temperatura, se beneficia con la existencia de una región inicial mojada, aunque dicha región es diferente para diferentes $\Delta T = T_0 - T_1$ debido a que B depende de esta cantidad. Cabe mencionar $R_p = 0$ es también una solución para R_p , pero esta solución implicaría que la penetración capilar comenzaría en un punto infinitesimal lo cual físicamente es imposible, por lo que esta solución no se contempla en este análisis.

Retomando el análisis de la penetración capilar y asumiendo la existencia de una zona inicial mojada se proponen ahora las variables adimensionales $\xi = R/R_0$ y $\tau = t/t_c$ con $t_c = 3\mu_0 R_0^2 / \sigma_0 H$. Sustituyendo estas variables en la ecuación (4.18), junto con las relaciones (4.19) y (4.20) se encuentra la siguiente ecuación diferencial adimensional

$$\frac{(1+A)\xi^3 \ln \xi + A(\xi^2 - \xi^3)}{\xi^2(1+B)\cos\theta - \left(\frac{1}{\Gamma} + \frac{B}{\Gamma} + B\cos\theta\right)\xi + \frac{B}{\Gamma}} \frac{d\xi}{d\tau} = 1, \quad (4.25)$$

en donde los parámetros adimensionales A y Γ son

$$A = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln[R_1/R_0]}, \quad \Gamma = \frac{R_0}{H}. \quad (4.26)$$

La ecuación (4.25) debe de resolverse bajo la condición inicial $\xi = 1$ en $\tau = 0$. El caso más simple se obtiene cuando $1/\Gamma \rightarrow 0$, es decir, cuando el frente de penetración capilar inicial es mucho más grande que la separación entre placas. Este caso límite necesariamente válido bajo la teoría de la lubricación. La ecuación (4.25) se puede reescribir entonces como

$$\frac{[(1+A)\xi^2 \ln \xi + A(\xi - \xi^2)]}{\xi(1+B) - B} \frac{d\xi}{d\tau} = \cos\theta. \quad (4.27)$$

La ecuación anterior se resuelve numéricamente para un sistema de placas de vidrio y glicerina y los resultados se muestran más adelante. Por otra parte, el caso isotérmico con $A = B = 0$ permite encontrar la solución analítica

$$\xi^2 [\ln \xi^2 - 1] + 1 = 4\tau \cos\theta. \quad (4.28)$$

Esta solución del frente de penetración capilar isotérmica es bien conocida en la literatura [8, 38, 57, 36]. Por último, el caso límite para pequeñas distancias del frente de penetración

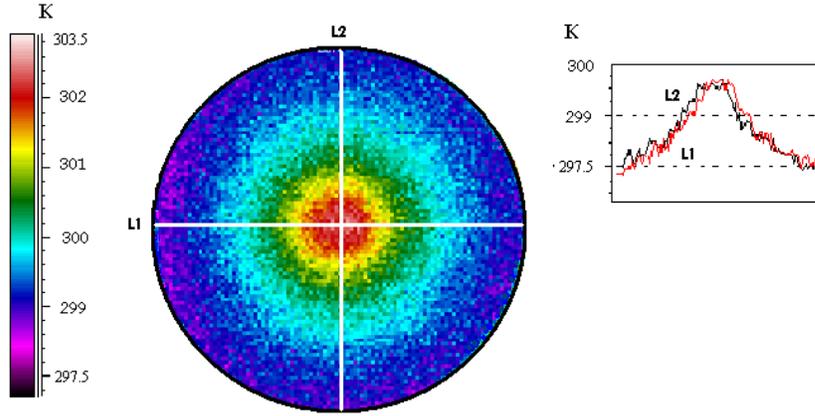


Figura 4-15: Termografía de la celda radial de Hele-Shaw. Como se observa, el gradiente de temperatura G decae como una función $1/r$ (ecuación (4.12)) y su valor medio es $\bar{G} = -18.6$ K/m.

capilar es

$$\xi = 1 + \sqrt{2 \cos \theta \tau}, \quad (4.29)$$

la cual es la ley de Lucas-Washburn para la penetración capilar radial.

4.2.3. Experimentos y solución numérica

Con el fin de evaluar para este caso la eficacia del método, se realizan experimentos con glicerina en celdas de vidrio las cuales tienen $R_0 = 5 \times 10^{-3}$ m, $R_1 = 9 \times 10^{-2}$ m y espesor 3×10^{-3} m. La separación entre placas es $2H = 1 \times 10^{-5}$ m y el gradiente se impuso en las placas de vidrio por el contacto físico y térmico con tubos de cobre a diferentes temperaturas de manera que los casos isotérmicos se realizan con $T = T_0 = T_1 = 303$ K y los gradientes medios (definidos como $\bar{G} = 1/(R_1 - R_0) \int_{R_0}^{R_1} G dr = \Delta T / (R_1 - R_0)$) son $\bar{G} > 0$ con valor de $\bar{G}_+ = 18.6$ K/m y $\bar{G} < 0$ con valor de $\bar{G}_- = -18.6$ K/m. La termografía de la figura 4-15 muestra que los perfiles estimados con la correlación (4.12) se reproducen satisfactoriamente.

El dispositivo que permite imponer la diferencia de temperaturas en las placas también ayuda a inducir la penetración capilar. Ver figura 4-16. En este caso el flujo para la penetración

capilar se suministra por la parte inferior de la celda. El tubo de cobre que esta colocado en la parte inferior juega un doble papel: *Primero*.- el tubo es termalizado con una resistencia eléctrica que lo envuelve todo por su parte exterior y le permite alcanzar una temperatura fija, constante, T_0 . Ya que este tubo toca las paredes de la celda en $r = R_0$ la celda ahí alcanza la temperatura T_0 . *Segundo*.- El otro rol que juega dicho tubo es permitir el paso a la celda y la termalización del flujo de glicerina. Por otro lado, el tubo externo esta conectado a un baño termico que da una temperatura T_1 y éste permite, por el contacto con el borde externo de las placas, obtener la temperatura T_1 en $r = R_1$. Durante los experimentos el modelo fué cubierto por un aislante térmico (poliuretano) para evitar pérdidas de calor hacia el ambiente a través de la superficie de la celda.

Durante la penetración capilar el nivel de la glicerina en el recipiente se colocó a $\Delta z = 3$ mm por encima del nivel de las placas. Una vez que el gradiente se impuso, se procedió a inducir el flujo capilar y se realizaron las video grabaciones. Al igual que en el caso de la celda vertical se obtuvieron cuadros del video cada 1/30 s y se realizaron las mediciones del frente de penetración capilar para cada uno de los casos estudiados. Otro aspecto importante en la experimentación es la generación de una región inicial mojada que permita la penetración capilar. Esta situación se resolvió aplicando pequeñas gotas de glicerina con la ayuda de un atomizador dirigido directamente a la parte central de las placas. Así se logró formar una región pequeña, no significativa para la medición del frente de penetración capilar, pero muy importante para facilitar la penetración del fluido en la celda.

La figura 4-17 muestra los perfiles de la penetración capilar isotérmica y la afectada por los gradientes. Las soluciones numéricas de la ecuación diferencial no lineal (4.27), para el caso de gradientes medios no nulos, se obtuvieron usando métodos de diferencias finitas y de iteración y los datos correspondientes de μ y σ usados en la celda vertical. Se encuentra que, similar al caso de la celda vertical, en la celda radial hay una aceleración del frente cuando $\bar{G} > 0$ (con $\Delta T = 304 - 301 = 3$ K) cuyo valor es $\bar{G}_+ = 18.6$ K/m. El caso $\bar{G} < 0$ (con $\bar{G}_- = -18.6$ K/m) da un frente más lento, mientras que el caso isotérmico, con $T_0 = 303$ K es intermedio a ambos. Nuevamente el modelo simple da buenos resultados y parece contener los mecanismos físicos dominantes.

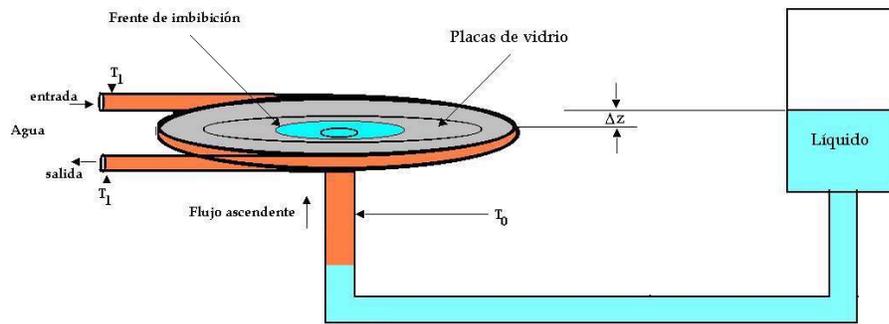


Figura 4-16: Dispositivo experimental para imponer diferencia de temperatura en la celda radial de Hele-Shaw.

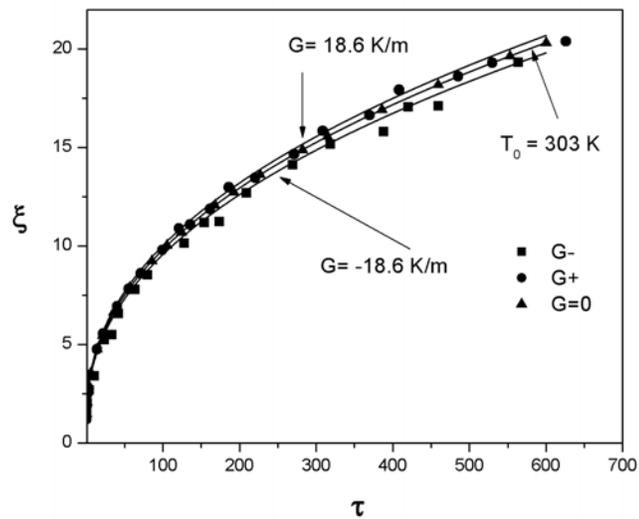


Figura 4-17: Resultados numéricos (líneas continuas) de la evolución temporal del frente de penetración capilar, para \overline{G}_+ (●), \overline{G}_- (■) y $\overline{G} = 0$ (▲). Los símbolos corresponden a los resultados experimentales.

Capítulo 5

Penetración capilar en capilares cónicos

Los capilares cónicos son las primeras y más simples aproximaciones al sistema poro-garganta en un medio poroso granular [2]. El concepto de diámetro de poro discutido en los antecedentes esta relacionado con el valor medio del espacio que los granos dejan entre unos y otros pero no considera que los espacios capilares se estrechan y se amplifican debido al propio arreglo o empaquetamiento granular. Los líquidos al fluir en un medio poroso se enteran de estas variaciones espaciales y surge entonces la necesidad de modelos simples que consideren estas variaciones. Las geometrías cónicas, sobre todo con pequeños ángulos de la generatriz respecto al eje, son una excelente aproximación a geometrías más realistas de poro ya que se pueden entender como geometrías que presentan leves variaciones respecto a la cilíndrica. Otro aspecto sorprendente de los capilares cónicos es que pueden presentar varias alturas de equilibrio para la penetración capilar y consecuentemente, histéresis [65, 66, 67]. En este capítulo se discute esta geometría bajo la influencia de un gradiente de temperatura en virtud de que bajo estas condición no se han reportado trabajos y además de que esta condición de temperatura se acerca más a las condiciones geotérmicas de un yacimiento.

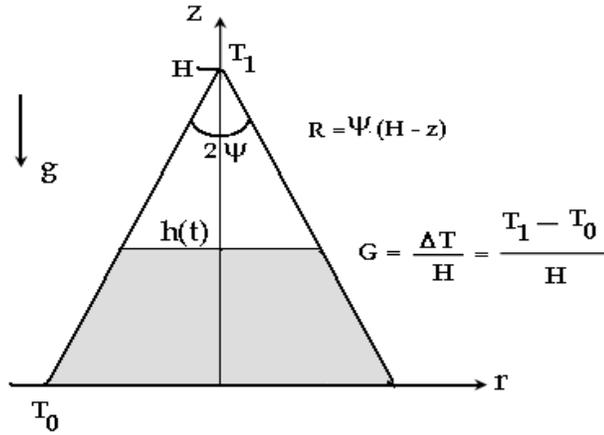


Figura 5-1: Esquema de la imbibición en un capilar cónico convergente sujeto a un gradiente lineal de temperatura, el ángulo del vértice es 2ψ el cual se considera muy pequeño, aunque en esta figura esta exagerado para propositos ilustrativos.

5.1. Cono convergente

5.1.1. Modelo matemático

Considerese en primer lugar un capilar cónico convergente como el que se muestra en figura 5-1 y en el cual ocurre penetración capilar espontánea. El capilar esta sujeto a la influencia de un gradiente vertical de temperatura que en este caso se considera constante, por lo que la temperatura del capilar en cualquier altura esta definida por una variación lineal de la forma $T = T_0 + Gz$. La variación del radio a lo largo del capilar se define por $R = \psi(H - z)$, y el ángulo de vértice es 2ψ y para propósitos de los cálculos se considera muy pequeño i.e. $2\psi \ll 1$.

Se asume un flujo incompresible de Hagen-Poiseuille y la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección z se puede entonces escribir como

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (5.1)$$

donde v es la velocidad en la dirección z y $P = p + \rho gz$. Las condiciones de frontera (de adherencia y simetría) son

$$v = 0 \text{ en } r = R(z), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \text{ en } r = 0. \quad (5.3)$$

Bajo las condiciones de frontera anteriores la solución de la ecuación (5.1) tiene la forma

$$v = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - R^2). \quad (5.4)$$

Por otra parte, la ecuación de conservación de la masa esta definida en función del gasto Q como

$$Q = \int_0^R 2\pi r v dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Considerando la presencia del gradiente de temperatura, la ecuación (5.5) permite estimar la caída de presión para el frente de penetración capilar, localizado en $z = h$, en la forma

$$\int_0^{h(t)} \frac{8\mu(T(z))Q}{\pi R^4} dz = - \int_0^{-\frac{2\sigma(T(h))\cos\varphi}{R} + \rho gh} dp = \frac{2\sigma(T(h))\cos\varphi}{R} - \rho gh, \quad (5.6)$$

donde el ángulo de contacto efectivo es $\varphi = \theta - \psi$ (θ es el ángulo de contacto *normal* del líquido con el sólido). Usando las bien conocidas expansiones de Taylor para μ y σ y sustituyendolas en (5.6), se encuentra que

$$\frac{8\mu_0 Q}{\pi\psi^4} \int_0^{h(t)} \frac{1}{(H-z)^4} \left[1 + \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dT} Gz \right] dz = \frac{2\sigma_0 \cos\varphi}{R} \left[1 + \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} Gh \right] - \rho gh, \quad (5.7)$$

la ecuación anterior se puede expresar en forma adimensional, usando las variables adimensionales $\xi' = z/H$, $\xi = h/H$ y $\tau = t/t_c$ donde $t_c = 4H\mu_0/\psi\sigma_0$.

Reordenando términos se obtiene la ecuación diferencial adimensional no lineal

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{6 \cos\varphi + (6 \cos\varphi B - 3\psi B\sigma)\xi + 3\psi B\sigma\xi^2}{6\xi + (3A - 6)\xi^2 + (2 - A)\xi^3}, \quad (5.8)$$

donde, como es normal, los parámetros adimensionales A , B y Bo (número de Bond) se definen como

$$A = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dT} GH, \quad B = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} GH \quad \text{y} \quad Bo = \frac{H^2 \rho g}{\sigma_0}. \quad (5.9)$$

La ecuación (5.8) debe resolverse sujeta a la condición inicial $\xi(\tau = 0) = 0$.

Haciendo $d\xi/d\tau = 0$ en la ecuación (5.8) se encuentran dos soluciones (alturas) de equilibrio de la forma

$$\xi_{1,2} = \frac{-(6B \cos \varphi - 3\psi Bo) \pm \sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi Bo)^2 - 72\psi Bo \cos \varphi}}{6\psi Bo}, \quad (5.10)$$

estas alturas de equilibrio cambian dependiendo del fluido y del signo del gradiente y pueden ser estables o inestables.

En el caso particular de un capilar cónico de vidrio de altura $H = 0.1$ m y semiángulo $\psi = 0.57^\circ$, si el fluido que penetra es agua y el gradiente que se impone es $G_+ = 29$ K/m, se encuentra que el número de Bond en estas condiciones se estima del orden de 10^3 . Con ésto las alturas de equilibrio son

$$\xi_1 = 0.834, \quad (5.11)$$

$$\xi_2 = 0.166. \quad (5.12)$$

La estabilidad de estas soluciones se puede analizar considerando la solución en la forma

$$\xi = \xi_i + \beta e^{i\omega\tau}, \quad (i = 1, 2), \quad (5.13)$$

en la ecuación (5.8). Para el caso particular de $\xi_1 = 0.166$ se encuentra que dicha solución es estable mientras que la solución $\xi_2 = 0.834$ es inestable. Similares resultados se encuentran si el gradiente impuesto es negativo.

Regresando al problema de la penetración capilar, la ecuación (5.8) permite encontrar la siguiente solución para el frente

$$\begin{aligned}
& \frac{(3A-6)}{3\psi B_0} \xi + c \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \frac{(3A-6)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 36(3A-6)\psi B_0 \cos \varphi - 6(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0) \cos \varphi}{18(\psi B_0)^2} \\ & - \frac{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)}{\psi B_0} - \frac{(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)}{36(\psi B_0)^2} \xi^2 - \\ & - \frac{(3A-6)(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)[(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 36\psi B_0 \cos \varphi]}{54(\psi B_0)^3} \end{aligned} \right\} * \\
& * \frac{1}{\sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 72\psi B_0 \cos \varphi}} \ln \left(\frac{6\psi B_0 \xi - (6B \cos \varphi - 3\psi B_0) - \sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 72\psi B_0 \cos \varphi}}{6\psi B_0 \xi - (6B \cos \varphi - 3\psi B_0) + \sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 72\psi B_0 \cos \varphi}} \right) + \\
& \left\{ \begin{aligned} & \frac{(2-A)}{36(\psi B_0)^2} \xi^2 - \frac{(3A-6)(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)}{9(\psi B_0)^2} \xi \\ & + \frac{(12A-24) \cos \varphi + (12-6A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)}{36(\psi B_0)^2} + \\ & \frac{1}{\psi B_0} + \frac{(3A-6)(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2}{54(\psi B_0)^3} \end{aligned} \right\} * \\
& * \ln (6 \cos \varphi + (6 \cos \varphi B - 3\psi B_0)\xi + 3\psi B_0 \xi^2) = \tau, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

donde c se calcula con la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
c = & - \left\{ \begin{aligned} & \frac{(3A-6)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 36(3A-6)\psi B_0 \cos \varphi - 6(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0) \cos \varphi}{18(\psi B_0)^2} \\ & - \frac{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)}{\psi B_0} \\ & - \frac{(3A-6)(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)[(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 36\psi B_0 \cos \varphi]}{54(\psi B_0)^3} \end{aligned} \right\} * \\
& * \frac{1}{\sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 72\psi B_0 \cos \varphi}} \ln \left(\frac{-(6B \cos \varphi - 3\psi B_0) - \sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 72\psi B_0 \cos \varphi}}{-(6B \cos \varphi - 3\psi B_0) + \sqrt{(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2 - 72\psi B_0 \cos \varphi}} \right) + \\
& \left\{ \begin{aligned} & + \frac{(12A-24) \cos \varphi + (12-6A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)}{36(\psi B_0)^2} + \\ & \frac{1}{\psi B_0} + \frac{(3A-6)(2-A)(6B \cos \varphi - 3\psi B_0)^2}{54(\psi B_0)^3} \end{aligned} \right\} * \\
& * \ln (6 \cos \varphi + (6 \cos \varphi B - 3\psi B_0)\xi + 3\psi B_0 \xi^2). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

5.1.2. Resultados

Los perfiles determinados por medio de las ecuaciones (5.14) y (5.15), para los casos con $G > 0$ y $G < 0$ ($G = \pm 29$ K/m), se grafican en la figura 5-2. Como se observa, el caso de penetración capilar de agua bajo el gradiente negativo presenta un avance más rápido que el

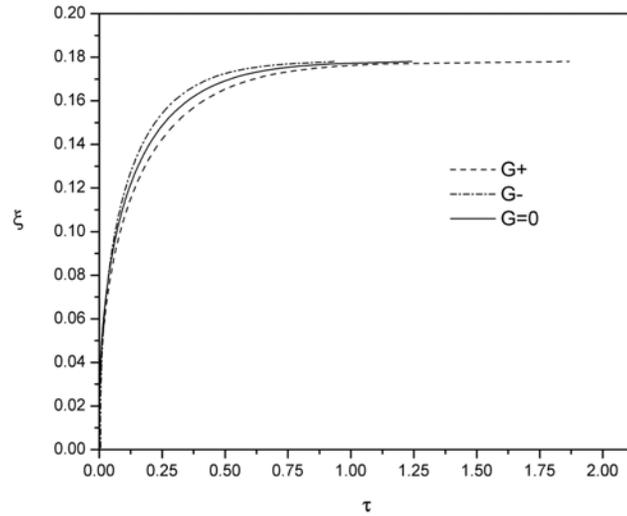


Figura 5-2: Comparación de la evolución temporal del frente de penetración capilar bajo gradiente positivo y gradiente negativo.

caso bajo el gradiente positivo. La constante para ambos casos son del mismo orden de magnitud pero distinto valor.

5.2. Cono divergente

Mediante el análisis de esta geometría se completará el análisis de la penetración capilar en conos. A partir de los resultados para el cono convergente y los que aquí se deriven para el cono divergente sera evidente que la orientación del cono es muy importante. Más aún, en el caso del cono convergente la presión capilar aumenta a medida que el frente de penetración se eleva (ya que R se reduce con z) mientras que en el cono divergente ocurre justamente lo contrario. Esta asimetría se refleja, como se demostrará más adelante, sobre todo en la existencia de una sola altura de equilibrio para el cono divergente.

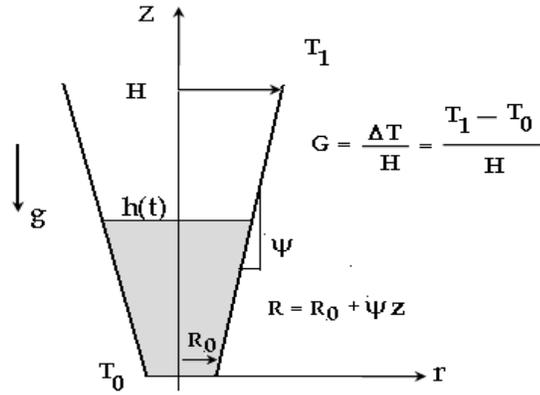


Figura 5-3: Esquema de la penetración capilar en un cono divergente sujeto a un gradiente lineal de temperatura con ángulo del vertice $2\psi \ll 1$.

5.2.1. Modelo matemático

Considerese ahora un capilar cónico divergente, bajo la presencia de penetración capilar, como el que se muestra en figura 5-3. Dicho capilar esta sujeto a un gradiente longitudinal constante, por lo que la temperatura del capilar en cualquier altura esta definida por $T = T_0 + Gz$. La variación del radio a lo largo del eje del capilar se define por $R = R_0 + \psi z$. El frente del flujo esta en $z = h(t)$ y el ángulo de apertura (pendiente de la generatriz) del cono es pequeña $2\psi \ll 1$. El análisis sigue el mismo procedimiento del caso del cono convergente.

El frente de penetración adimensional en función de τ es ahora

$$\begin{aligned}
 \tau = & \frac{A}{2\psi Bo} \ln \left(\cos \varphi + \left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right) \xi - \frac{\psi}{2} Bo \xi^2 \right) + \\
 & - \left(\frac{A}{6} + 1 + \frac{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right) A}{2\psi Bo} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)^2 + 2\psi Bo \cos \varphi}} \right) \\
 \ln & \left[\frac{\sqrt{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)^2 + 2\psi Bo \cos \varphi} + \psi Bo \xi - \left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)}{\sqrt{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)^2 + 2\psi Bo \cos \varphi} - \psi Bo \xi + \left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)} \right] + c, \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

donde ahora $\varphi = \theta + \psi$ (θ es el ángulo de contacto). La constante c se estima haciendo $\xi(\tau = 0) = 0$, ello da

$$c = \frac{A}{2\psi Bo} \ln(\cos \varphi) +$$

$$- \left(\frac{A}{6} + 1 + \frac{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right) A}{2\psi Bo} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)^2 + 2\psi Bo \cos \varphi}} \right)^*$$

$$* \ln \left[\frac{\sqrt{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)^2 + 2\psi Bo \cos \varphi} - \left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)}{\sqrt{\left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)^2 + 2\psi Bo \cos \varphi} + \left(B \cos \varphi - \frac{\psi}{2} Bo \right)} \right]. \quad (5.17)$$

La altura de equilibrio estable en este caso esta dada por

$$\xi = \frac{-(2B \cos \varphi - \psi Bo) + \sqrt{(4B \cos \varphi - 2\psi Bo)^2 - 8\psi Bo \cos \varphi}}{2\psi Bo} \quad (5.18)$$

En este caso para agua y las mismas condiciones de temperatura que en el caso anterior se encuentra sólo una altura de equilibrio

$$\xi_1 = 1.5337 \times 10^{-2},$$

la cual es diferente a las alturas de equilibrio que se encuentran en el cono convergente.

5.2.2. Otros resultados

Los resultados para el frente de penetración capilar en el cono divergente se muestran en las figuras 5-4 y 5-5 para dos ángulos muy pequeños $\psi = 9.9 \times 10^{-3}$ y $\psi = 9.9 \times 10^{-4}$, respectivamente. En este caso se consideran los mismos gradientes de temperatura que en el caso del cono convergente $G = \pm 29$ K/m.

Se observa en ambos casos que el gradiente negativo permite un avance más rápido del frente de penetración capilar respecto a los casos con gradiente positivo o nulo. Por otra parte, el proceso de penetración capilar es más rápido para una inclinación mayor del cono, es decir,

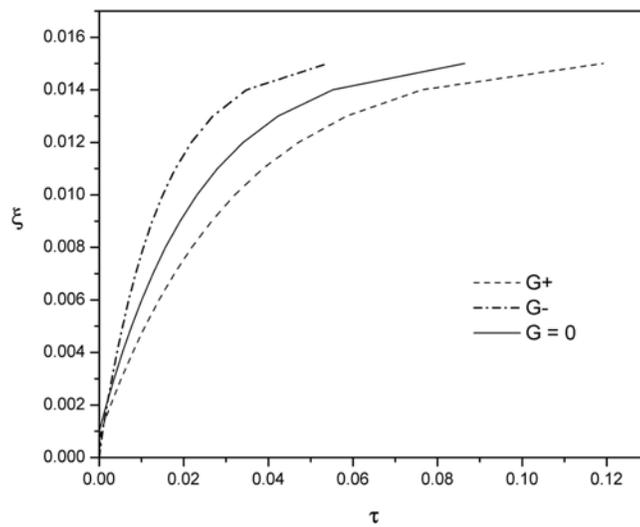


Figura 5-4: Resultados teóricos de la evolución temporal del frente de penetración capilar (5.16) para un capilar cónico divergente. Comparación entre los gradientes positivo y negativo ($G = \pm 29$ K/m) y el caso isotérmico $G = 0$. Aquí $\psi = 9.9 \times 10^{-3}$.

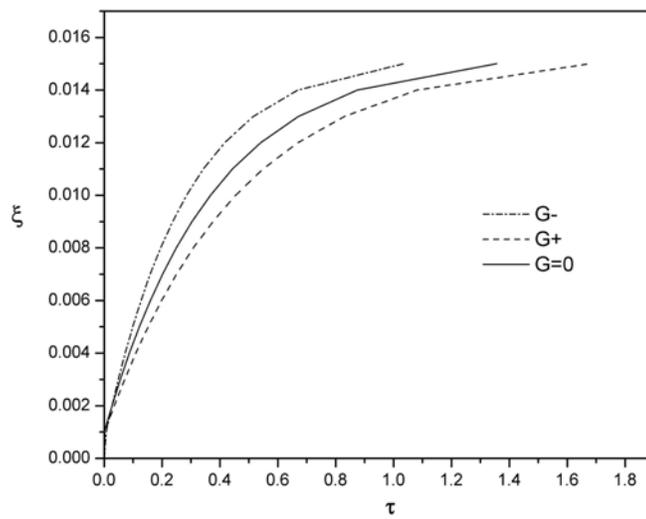


Figura 5-5: Resultados teóricos de la evolución temporal del frente de penetración capilar (5.16). Comparación entre los gradientes positivo y negativo ($G = \pm 29$ K/m) y el nulo i.e. $G = 0$. Aquí, $\psi = 9.9 \times 10^{-4}$.

cuando la sección transversal del cono aumenta más rápido con la altura. Es importante hacer notar que las alturas de equilibrio estable son del mismo orden de magnitud en todos los casos.

5.3. Comentarios

Como resultado del análisis en esta sección, se observa que el proceso de penetración capilar en estructuras de sección transversal variante, presenta algunos aspectos que merecen una especial atención, en primer lugar se debe contemplar el efecto de la geometría ya que para el caso del cono convergente se presentan dos alturas de equilibrio [11,12, 65, 67, 68], la primera de ellas resulta estable, mientras que la segunda es inestable y decae a la primera si el sistema se perturba, en este sentido la histéresis puede presentarse bajo esta orientación. Sin embargo, para el caso de un cono divergente sólo existe una altura de equilibrio por lo que el sistema es más estable y no presenta problemas de histéresis. La altura de equilibrio en el caso divergente es menor que las del caso convergente, este comportamiento se puede atribuir a que en el caso del cono divergente la presión capilar disminuye al crecer el radio del capilar, mientras que los esfuerzos cortantes en las paredes crecen al incrementarse el área lateral del cono, lo contrario sucede en el cono convergente. Por otra parte, el efecto de la temperatura también ofrece un cambio en cuanto a la velocidad de la evolución del frente de penetración capilar, debido a la competencia entre la viscosidad y la tensión superficial con la temperatura que se reflejan en los esfuerzos cortantes y la presión capilar, respectivamente. En este sentido en ambas situaciones geométricas el gradiente negativo produce frentes más rápidos que en el caso con gradiente positivo. Es importante mencionar que el modelo presentado en esta sección sólo es válido para semi ángulo $\psi \ll 1$.

Capítulo 6

Problema conjugado de la imbibición y transferencia de calor en un medio poroso muy permeable

La imbibición en medios porosos homogéneos [3, 7, 14, 15, 16, 69, 70] y fracturados [71, 72, 73], como ya se ha comentado, es un fenómeno muy importante y ampliamente estudiado en el régimen isotérmico. En este Capítulo se analiza la imbibición no isotérmica en un medio poroso con alta permeabilidad. En un estudio reciente Alava et al. [7] sugirieron que para comprender la imbibición y los fenómenos de transporte de manera simultánea, lo cual en su opinión es muy necesario e importante, se necesita continuar avanzando los estudios discutidos en los Capítulos anteriores así como considerar diferentes medios porosos y condiciones térmicas; además de la imbibición en medios porosos con líquidos miscibles y reacciones químicas.

Con la finalidad de avanzar en ese sentido, a continuación se presenta un estudio teórico del problema conjugado de la imbibición y la transferencia de calor en un medio poroso homogéneo de alta permeabilidad. Hasta donde se sabe este tipo de estudios no existen en la literatura. Por ello, el caso que se analiza a continuación considera un flujo rápido en donde el líquido entra a mayor temperatura que la del medio poroso homogéneo. Esto lleva a un problema de imbibición conjugado en el que las ecuaciones de movimiento y energía están acopladas. Tal problema puede ser de utilidad en suelos muy permeables y en la imbibición en materiales

industriales como las fibras metálicas [74].

6.1. Ordenes de magnitud y modelo matemático

Para comprender de manera más clara el problema se realiza un análisis de órdenes de magnitud para determinar los principales parámetros que rigen el fenómeno. El análisis parte de considerar una hoja de medio poroso homogéneo de altura H y seco (saturado de aire) con porosidad ϕ . Inicialmente, todo el medio poroso se encuentra a una temperatura uniforme T_0 y una presión p_0 (ver figura 6-1). Se considera que el sistema medio poroso-aire se encuentra en equilibrio térmico. La parte inferior de la muestra porosa se pone en contacto con un líquido a temperatura T_1 y presión p_0 , lo que provoca la imbibición espontánea del líquido en la matriz porosa isotérmica.

En este caso el frente de imbibición se caracteriza por $L(t)$ y la presión allí es p_c . Durante el proceso de imbibición se presenta una competencia entre los efectos térmicos y los efectos dinámicos de la imbibición, esta competencia provoca un flujo capilar no isotérmico dentro del medio poroso. Se debe hacer notar que en este caso se desprecian los efectos de la gravedad. La presencia tanto de la imbibición como de los efectos térmicos generan la existencia de dos escalas de tiempo: la primera escala se debe al tiempo relacionado con la penetración térmica, t_{th} , mientras que la segunda se relaciona con el tiempo característico de imbibición, t_i . Mediante un análisis de ordenes de magnitud se pueden conocer para este caso ambos tiempos, es decir, aplicando un balance global de energía para, $y \geq 0$, se puede decir que la energía térmica que se transporta por el movimiento del fluido es del mismo orden de magnitud que la acumulación de energía en el sistema, lo que se expresa en la forma

$$\frac{\phi \rho_w c_w \bar{V}_c (T_1 - T_f)}{H} \sim \frac{(\rho c)_e (T_1 - T_f)}{t_{th}}. \quad (6.1)$$

En la expresión anterior, $(\rho c)_e$, representa la capacidad térmica específica del sistema (medio poroso- líquido), que se define como $(\rho c)_e = \phi \rho_w c_w + (1 - \phi) \rho_m c_m$, donde ρ_w y c_w son la densidad y el calor específico del líquido (o del medio poroso), respectivamente, y ϕ es la porosidad de la muestra. Los subíndices w , d y m representan las condiciones de mojado (w), seco (d) y matriz- porosa (m). Por otra parte la velocidad de filtración del volumen promedio se

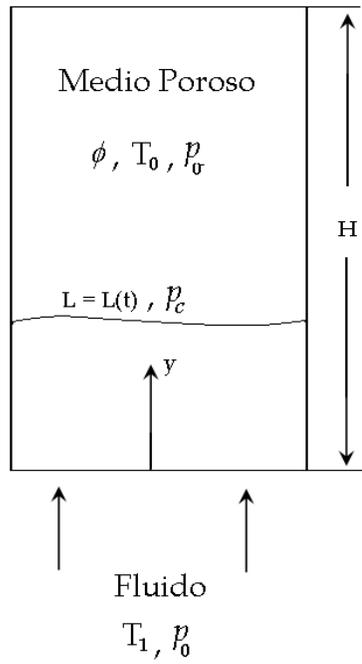


Figura 6-1: Esquema del modelo físico para la imbibición no isotérmica en un medio poroso de alta permeabilidad.

representa por \bar{V}_c , la cual se relaciona directamente con la velocidad del frente de imbibición. Esta velocidad se puede obtener a partir del gradiente de presión capilar, $\bar{V}_c \sim K(p_0 - p_c)/\phi\mu H$, donde K es la permeabilidad del medio poroso. Sustituyendo las expresiones anteriores en (6.1), y ordenando términos, se obtiene la escala de tiempo para la penetración térmica

$$t_{th} \sim \frac{(\rho c)_e}{\rho_w c_w} \frac{\mu H^2}{K(p_0 - p_c)}. \quad (6.2)$$

Por otra parte el tiempo de imbibición es

$$t_i \sim \frac{H}{\bar{V}_c} \sim \frac{\phi\mu H^2}{K(p_0 - p_c)}. \quad (6.3)$$

Combinando las ecuaciones (6.1) y (6.2), se define un parámetro adimensional β_w que nos relaciona las densidades y calores específicos del medio poroso y del líquido

$$\beta_w = \frac{t_{th}}{t_i} \sim \frac{(\rho c)_e}{\phi\rho_w c_w} = 1 + \frac{(1 - \phi)\rho_m c_m}{\phi\rho_w c_w}. \quad (6.4)$$

En los materiales porosos es común que $(\rho_m c_m/\rho_w c_w) \gg 1$ y $\phi \leq 1$, entonces se puede considerar que $\beta_w \sim \rho_m c_m/\phi\rho_w c_w \gg 1$. Para comprender mejor la influencia de la imbibición en la distribución de temperatura en ambas zonas, se toma t_{th} como la escala de tiempo característico, bajo el supuesto de que t_{th} es mucho mayor que la escala de tiempo para la imbibición, t_i . Estas consideraciones permiten adimensionalizar las ecuaciones de gobierno de una manera adecuada, ya que sí se toma a t_i como tiempo característico, esto sólo nos permitirá observar el inicio del proceso de transferencia de calor.

Con el esquema propuesto por Forchheimer que es una extensión para la ecuación de Darcy para medios con alta permeabilidad y velocidades de filtración altas [74, 75], la ecuación de continuidad, la ecuación de conservación de movimiento y con las ecuaciones de energía adecuadas para cada una de las zonas, se pueden escribir respectivamente como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.5a)$$

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K\rho} \mathbf{v} + FK^{-\frac{1}{2}}v\mathbf{v}, \quad (6.5b)$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)T = \alpha_e \nabla^2 T, \quad (6.5c)$$

donde F es un coeficiente inercial que depende de la permeabilidad y de la microestructura de la matriz porosa [74], que puede tomar valores entre cero y uno. En general F toma un valor promedio constante, $F = 0.55$, y α_e es la difusividad térmica específica $\alpha_e = k_e/\rho c_p$. Es importante mencionar que estas ecuaciones consideran que el fluido es Newtoniano y que el medio poroso es isotrópico y homogéneo. Además en el análisis que se presenta en este Capítulo se supone que el flujo es incompresible y unidimensional, i.e., $\mathbf{v} = (0, v, 0)$ y $|\mathbf{v}| = v$. Considerando el análisis previo para estimar los tiempos característicos, es posible introducir las siguientes variables adimensionales para poder tener un planteamiento y solución adimensionales

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{t_{th}}, \quad \eta = \frac{y}{L(t)}, \quad \xi = \frac{L(t)}{H}, \quad \zeta = \frac{y - L(t)}{H - L(t)}, \\ v &= \frac{\bar{V}}{\bar{V}_c}, \quad \Phi = \frac{p - p_c}{p_0 - p_c}, \quad \text{y} \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

Sustituyendo estas cantidades en las ecuaciones (6.5a-c) resulta para la conservación de masa y cantidad de movimiento, respectivamente,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -v\xi [1 + vRe_p F]. \quad (6.7)$$

La ecuación de la energía en la zona mojada, es decir, completamente saturada del líquido tiene la forma adimensional

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{u}{\xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{\beta_w}{Pe\xi^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}, \quad (6.8)$$

además, la ecuación de la energía en la región seca resulta ser

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{1 - \zeta}{1 - \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + \varepsilon \frac{v}{1 - \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\alpha_{de} \beta_w}{Pe (1 - \xi)^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2}. \quad (6.9)$$

Nótese que en esta última ecuación el término proporcional a la velocidad adimensional aparece debido a la forma en la que se adimensionaliza. Por otra parte, ya que la posición del frente de imbibición, ξ , se desconoce, Liggett [76] derivó la siguiente expresión, para la evolución del frente de imbibición en función de Φ

$$\xi \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\beta_w \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right|_{\eta=1}, \quad (6.10)$$

esta condición establece físicamente que los elementos de fluido en la parte mojada cerca de la interfase, no la cruzan. Para el problema las condiciones iniciales y de frontera son

$$\xi(\tau = 0) = 0, \quad \Phi(\eta = 0) = 1, \quad \Phi(\eta = 1) = 0, \quad (6.11)$$

$$\Theta(\tau = 0) = 0, \quad \Theta(\eta = 0) = 1, \quad \text{y} \quad \Theta(\zeta = 1) = 0. \quad (6.12)$$

El sistema de ecuaciones (6.7 - 6.10) con condiciones (6.11) y (6.12), se debe resolver simultáneamente. Para ello se necesita una condición que relacione la influencia entre la zona mojada y la seca. La condición adecuada para este caso resulta ser la continuidad de flujo de calor en el frente de imbibición, es decir

$$\Theta(\eta = 1) = \Theta(\zeta = 0), \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = \frac{k_{de} \xi}{(1 - \xi)} \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}. \quad (6.13)$$

En las ecuaciones anteriores Re_p y Pe representan el número de Reynolds poroso y el número de Péclet respectivamente, que se definen como

$$Re_p = \frac{K^{\frac{1}{2}} V_c}{\nu} = \frac{K^{3/2} (p_0 - p_c)}{\phi \rho \nu^2 H} \quad \text{y} \quad Pe = \frac{\phi K (p_0 - p_c)}{\mu \alpha_e}. \quad (6.14)$$

Por último, los restantes parámetros adimensionales que aparecen son ε , k_{de} y α_{de} que se definen

de la siguiente manera

$$\varepsilon = \frac{\rho_{air}c_{air}}{\rho_d c_d} \frac{(\rho c)_e}{\rho_w c_w} \ll 1, \quad k_{de} = \frac{k_d}{k_e} \quad \text{y} \quad \alpha_{de} = \frac{\alpha_d}{\alpha_e}, \quad (6.15)$$

además $(\rho c)_e / \rho_w c_w \gg 1$, mientras que $\rho_{air}c_{air} / \rho_d c_d$ en la mayoría de los casos es del orden de 10^{-5} , por lo que suponer $\varepsilon \ll 1$ resulta buena aproximación. Entonces el término convectivo de la ecuación (6.9), puede ser despreciado en primera aproximación lo que implica que el calor transferido por convección en la zona seca se puede despreciar. Se puede entonces decir que en esta zona la transferencia se debe a la conducción transitoria, por lo que la ecuación de energía para esta región se simplifica, la ecuación resultante es

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{1 - \zeta}{1 - \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\beta_w \alpha_{de}}{Pe (1 - \xi)^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta^2}. \quad (6.16)$$

Por otro lado, integrando la ecuación de conservación de masa $\partial v / \partial \eta = 0$, se encuentra que $v = v(\tau)$, y además se sabe que $\xi = \xi(\tau)$, mientras que la ecuación de cantidad de movimiento (6.7) puede también ser integrada con la condición de frontera $\Phi(\eta = 0) = 1$ quedando

$$\Phi = -v\xi [1 + vRe_p F] \eta + 1. \quad (6.17)$$

Con la ecuación anterior para la presión adimensional de la imbibición no isotérmica, se obtiene una expresión única para determinar la evolución temporal del frente de imbibición, ξ , sujeta a la condición inicial $\xi(\tau = 0) = 0$, y con la velocidad del frente de imbibición definida como $v = (1/\beta_w) (d\xi/d\tau)$

$$\frac{\xi}{\beta_w} \frac{d\xi}{d\tau} \left(1 + \frac{Re_p F}{\beta_w} \frac{d\xi}{d\tau} \right) = 1. \quad (6.18)$$

Ahora, el producto $Re_p F \sim O(1)$ y $\beta_w \gg 1$ (como se mostró anteriormente), resulta entonces que $(Re_p F / \beta_w) \rightarrow 0$. A partir de este límite se puede obtener la ley de Lucas-Washburn mediante una integración de la ecuación (6.18). Esta integración da como resultado $\xi = (2\beta_w \tau)^{1/2}$. Por lo que se puede decir que los valores $(Re_p F / \beta_w) \neq 0$, representan aquellos valores del frente de imbibición que varían respecto a los determinados por la ley de Lucas-Washburn. En este sentido este tipo de flujos obedecen a la ecuación extendida de Darcy (Modelo de Forchheimer).

Por lo que la ecuación de la energía (6.8) se reduce y se puede expresar en términos del frente de imbibición ξ , es decir,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \left(\eta - \frac{1}{\beta_w} \right) = \frac{\beta_w}{Pe \xi^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2}. \quad (6.19)$$

y la ecuación (6.16) no sufre ninguna modificación. Los parametros adimensionales, β_w entre otros, determinan la influencia del proceso de imbibición sobre la transferencia de calor (en concreto, en el campo de temperaturas), lo que se puede observar claramente a partir de las ecuaciones (6.16) y (6.19), aunque la situación contraria no ocurre, es decir, a partir de la transferencia de calor por convección no se puede determinar el avance del frente de imbibición. Se puede decir entonces que el caso que se presenta es un caso típico de convección forzada, en donde el flujo de fluido se debe a la existencia de fuerzas capilares.

La solución de las ecuaciones (6.16), (6.18) y (6.19), para ξ y Θ , se encuentra mediante un método numérico con las condiciones iniciales y de frontera correspondientes (6.12) y (6.13). A continuación se dan detalles del modelo numérico que se emplean para la solución del sistema de ecuaciones.

6.2. Método numérico

El método numérico para resolver las ecuaciones (6.16), (6.18) y (6.19) se basa en el método de diferencias finitas. El primer paso consiste en resolver mediante integración la ecuación (6.18) para encontrar la posición del frente de imbibición; i. e., $\xi = \xi(\tau, Re_p, F, \beta_w)$ para cada paso de tiempo ya que (6.18), no está acoplada a las ecuaciones de la energía (6.16) y (6.19). En el caso específico de la integración de la ecuación (6.18), se emplea el método iterativo de Newton-Rapson. La solución, para ξ , resultante de la ecuación (6.18), se sustituye en las ecuaciones de la energía tanto para la zona seca (6.16) como para la zona mojada (6.19). Ambas ecuaciones se resuelven simultáneamente mediante un esquema iterativo. El método parte de considerar un valor de temperatura en la interfase entre los límites $\Theta_0 < \Theta_i < \Theta_1$ para un tiempo τ , con dicho valor se calcula la distribución de temperaturas en la zona mojada, por lo que se tienen ahora dos condiciones de frontera para la temperatura y la condición inicial. A partir de esta primera iteración se puede calcular el flujo de calor en la interfase con la ecuación (6.13).

Ahora, con el flujo de calor en la zona seca y con las condiciones de frontera de la parte superior de la muestra porosa se puede evaluar la distribución de temperatura en esta región. Con el cálculo de la distribución de temperatura y en particular con el valor obtenido en el frente de imbibición, se compara entonces dicho valor con el valor propuesto Θ_i . Este procedimiento se repite hasta que se alcanza una buena convergencia, es decir, hasta que se garantiza que el balance de energía entre la zona seca y mojada se satisface a través de la condición de continuidad de temperatura y flujo de calor en la interfase (6.13). Este proceso iterativo se repite en el siguiente paso de tiempo, con lo que se evalúa tanto la evolución temporal del frente de imbibición como los perfiles de temperatura en las dos zonas.

Para la simulación numérica, se deben establecer intervalos de variación de los parámetros adimensionales entre los cuales el problema que se resuelve tiene significado físico. Los intervalos propuestos son: para el número de Péclet $1 \leq Pe \leq 10^3$, para el parámetro β_w , $1 \leq \beta_w \leq 150$, que en este caso resultan los más significativos. La malla que se propone por la capacidad de cálculo disponible y la física del problema, es una malla móvil con 1000 nodos para ambas regiones. Para más detalles del método numérico (discretización) ver Apéndice C.

6.3. Resultados numéricos

Se presenta a continuación los resultados más representativos, que resultan de un valor del coeficiente de inercia $F = 0.55$ (típico para el modelo de Forchheimer), un Reynolds poroso $Re_p = 100$ y un valor de $\alpha_{de} = 4.79 \times 10^{-3}$ [74]. Los resultados numéricos para el frente de imbibición y los perfiles de temperatura a distintas alturas en la muestra se muestran en las figuras 6-2-6-10. En estas figuras se observa la influencia de los parámetros Pe y β_w . Se debe tener en cuenta que la solución de la ecuación (6.17) no depende del campo de temperatura, por lo que el campo de velocidades no se afecta. En la figura 6-2 se muestra la evolución del frente de imbibición ξ , como función del tiempo adimensional τ , para tres valores característicos del parámetro β_w ($= 50, 100$ y 150). Como se observa la influencia de este parámetro es notable.

En particular, el incremento en valor del parámetro β_w provoca una aceleración en el proceso de imbibición, es decir, se mejora la eficiencia de la penetración capilar. Para una mejor comprensión de este comportamiento se pueden ver, para distintos tiempos de imbibición, los

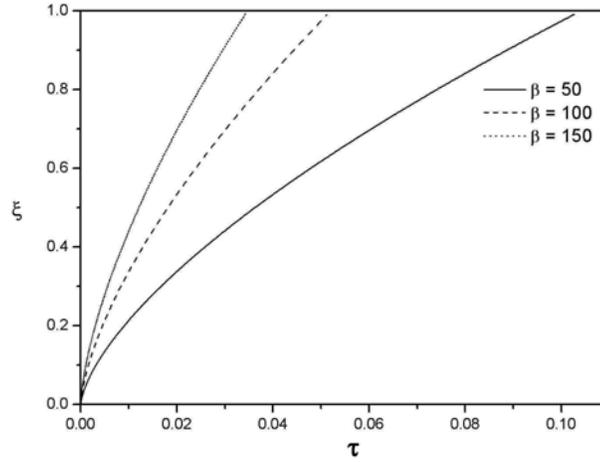


Figura 6-2: Evolución del frente de imbibición ξ en función de tiempo adimensional τ , para tres valores representativos del parámetro β_w ($= 50, 100$ y 150), β_w es el cociente de los tiempos de penetración térmica a los tiempos de imbibición.

perfiles de temperatura (figuras 6-3 - 6-10). Las gráficas que se muestran a continuación son para diferentes valores de Pe and β_w , y se observa la evolución temporal del perfil de temperatura, Θ , en función de la coordenada adimensional $\gamma = y/H$. La elección de γ se debe a que con esta cantidad se puede observar todo el dominio de interés (región seca y mojada). En estas gráficas las líneas verticales representan la posición del frente de imbibición en distintos tiempos τ . El perfil de temperatura para $Pe = 1$ y $\beta_w = 10$, que se muestra en la Fig 6-3 presenta un comportamiento casi lineal para la región mojada y la temperatura del frente de imbibición alcanza un valor cercano a cero, $\Theta \approx 0$, en cualquier tiempo. Este comportamiento se debe a una penetración capilar lenta que permite que el frente de imbibición alcance la temperatura de la región seca.

En la figura 6-4 se muestra un comportamiento similar para $Pe = 1$ y $\beta_w = 100$. Como se observa con el incremento en valor de β_w , se acelera el transporte convectivo de energía y también provoca un desplazamiento más rápido del frente de imbibición, lo que se observa claramente comparando las figuras 6-3 y 6-4 para tiempos iguales.

Por otra parte, resulta interesante observar la influencia del número de Péclet, para ello se

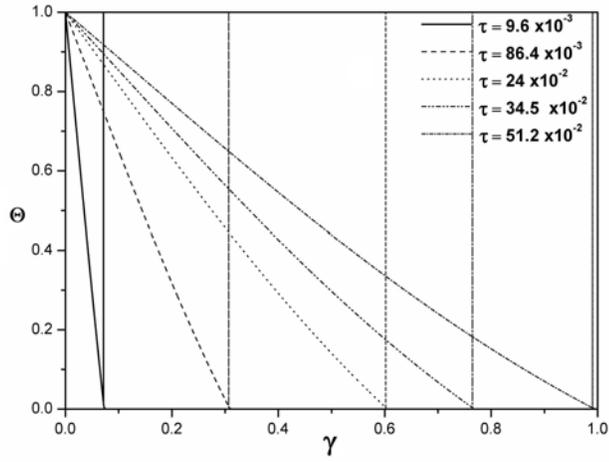


Figura 6-3: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales para $Pe = 1$ y $\beta_w = 10$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

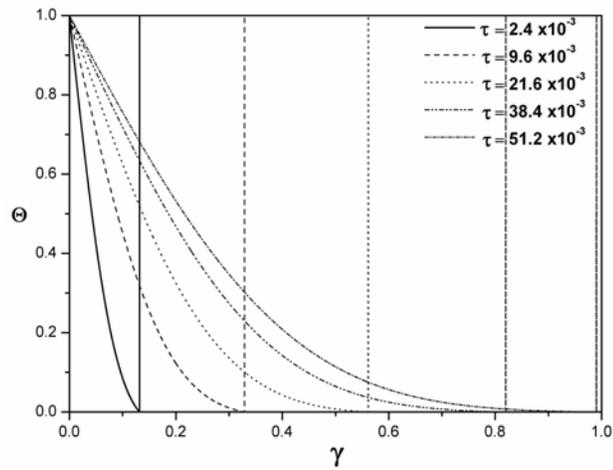


Figura 6-4: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales y para $Pe = 1$ y $\beta_w = 100$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

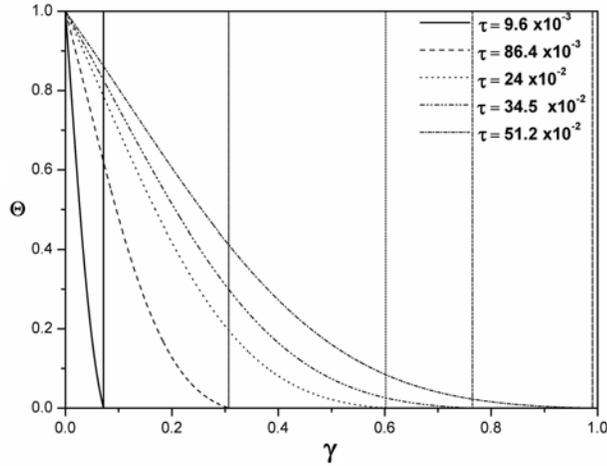


Figura 6-5: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales y para $Pe = 10$ y $\beta_w = 10$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

muestra la figura 6-5, para valores de $Pe = 10$ y $\beta_w = 10$, que en comparación con la figura 6-3, se observa que el perfil de temperatura se atenúa para tiempos iguales de imbibición. Este comportamiento se presenta con mayor claridad para valores de $Pe = 10$ y $\beta_w = 100$ como se ilustra en la figura 6-6. En esta caso el avance del frente de imbibición se acelera notablemente y el equilibrio térmico se alcanza dentro de la zona mojada, porque para valores crecientes del tiempo, la imbibición ocurre con $\Theta = 0$. Este comportamiento se intensifica para valores de $Pe = 100$ y $\beta_w = 10$ como se observa en la figura 6-7, que se puede comparar con la figura 6-5 ya que tienen el mismo valor de $\beta_w = 10$. En el caso de la figura 6-7 se puede observar también la existencia de una capa límite térmica, que se observa mejor en las figuras 6-6 y 6-8 para $\beta_w = 100$ y $Pe = 10$ y 100 respectivamente, por lo que se puede decir que a mayores valores de β_w , la existencia de una capa límite térmica se evidencia más claramente, figuras 6-9 y 6-10.

Por último, se muestra en la figura 6-11, el radio de curvatura promedio de campo de temperatura en función del número de Péclet, para cinco valores distintos del parámetro β_w ($= 1, 1.5, 2.5, 5$ y 50), $F = 0.55$, $Re = 100$ y $\alpha_{de} = 4.79 \times 10^{-3}$. El radio de curvatura se define

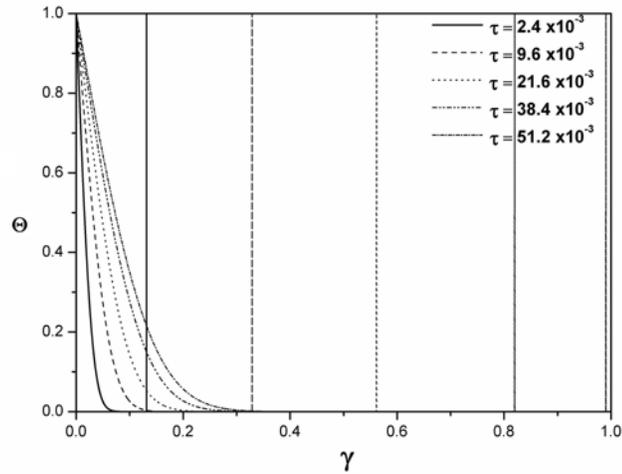


Figura 6-6: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales para $Pe = 10$ y $\beta_w = 100$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

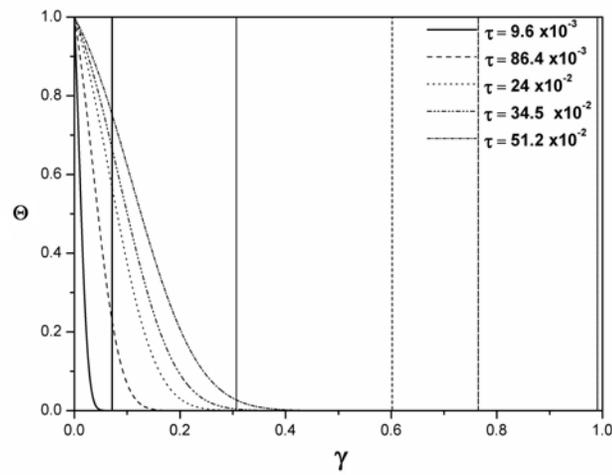


Figura 6-7: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales y para $Pe = 100$ y $\beta_w = 10$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

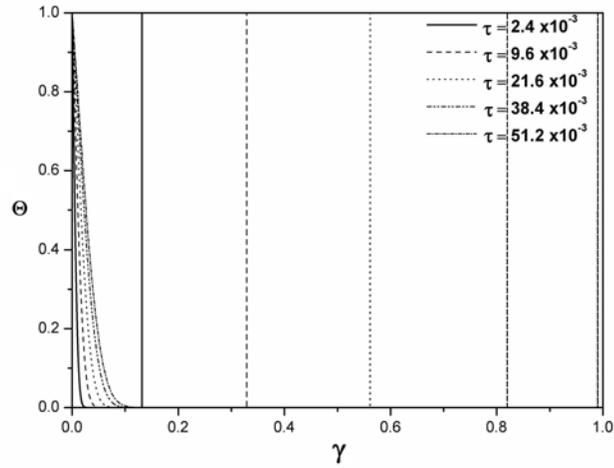


Figura 6-8: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales para valores de $Pe = 100$ y $\beta_w = 100$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

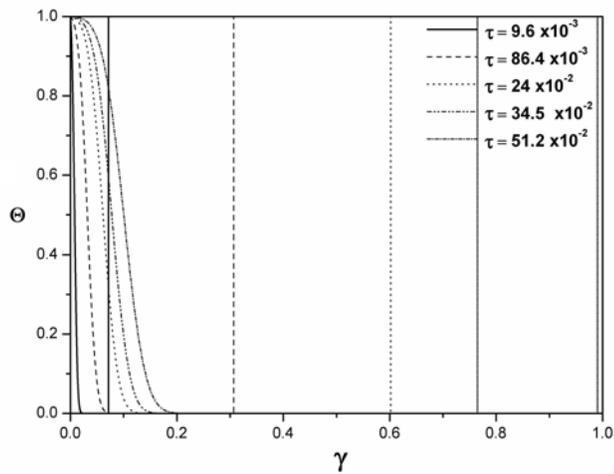


Figura 6-9: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales para valores de $Pe = 1000$ y $\beta_w = 10$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

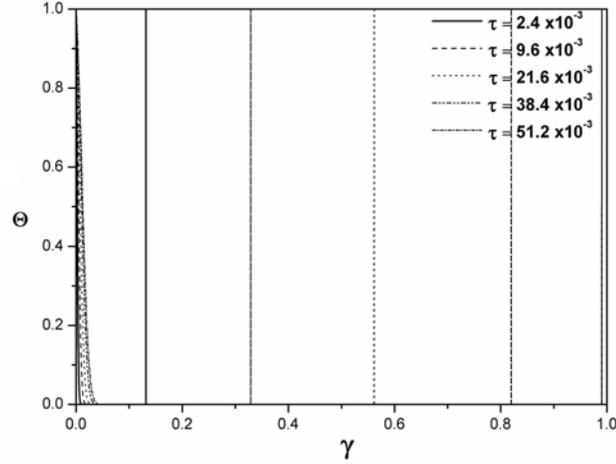


Figura 6-10: Evolución temporal del perfil de temperatura adimensional Θ del medio poroso como función de la coordenada adimensional γ . Los resultados que se presentan son para cinco diferentes tiempos adimensionales para valores de $Pe = 1000$ y $\beta_w = 100$. El frente de imbibición para los cinco tiempos se representa por las líneas verticales.

como

$$r_c = \frac{\overline{\partial^2 \Theta}}{\partial \xi^2} = \frac{\int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1/2} d\xi}{\int_0^1 d\xi}. \quad (6.20)$$

El subíndice en la segunda derivada de Θ en la formula anterior representa el valor de esta derivada para un valor del frente de imbibición igual a $\xi = 1/2$, es decir, que para cada valor de β_w , se alcanza un valor del frente de imbibición igual a $\xi = 1/2$ para un tiempo específico. Este valor del frente es arbitrario, sin embargo para valores distintos del frente, ξ , no se encuentran comportamientos similares por lo que se puede decir que con $\xi = 1/2$ se obtiene un valor crítico de $\beta_w = \beta_{wcr} \sim 2$, en el que radio de curvatura cambia de signo de negativo a positivo.

6.4. Comentarios

Con el fin de tener una mejor comprensión del proceso de transferencia de calor durante la penetración capilar en un medio poroso muy permeable, se ha realizado un estudio teórico-

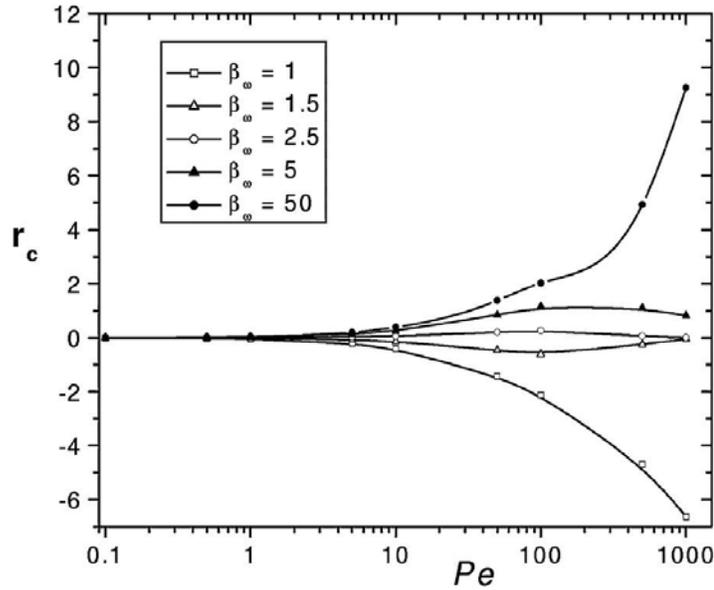


Figura 6-11: Radio de curvatura promedio de la temperatura, r_c , en función del número de Peclet para cinco valores del parámetro adimensional β_w ($= 1, 1.5, 2.5, 5, \text{ y } 50$) .

numérico basado en el modelo de Forchheimer. La solución del problema incluyó un análisis de órdenes magnitud que determina los principales parámetros a considerar. El análisis teórico se basa en las ecuaciones de cantidad de movimiento, conservación de masa y conservación de energía en las partes mojada y seca. Con este modelo se describe el avance temporal del frente de imbibición unidimensional. Este análisis, a diferencia de los modelos hasta ahora considerados presenta un acoplamiento de la ecuación de movimiento con las ecuaciones de energía. Dentro de esta formulación también se contempló el caso isotérmico bien conocido de Lucas-Washburn [16]. El modelo numérico se basó en un esquema de diferencias finitas, la solución de las ecuaciones mostró que el proceso de imbibición se afecta de manera importante por el valor del parámetro adimensional β_w . Además, el parámetro β_w junto con otros parámetros modifican sustancialmente el proceso de transferencia de calor.

En la literatura especializada los modelos más comunes para describir la penetración la penetración capilar se basan en la ecuación de Darcy. Sin embargo como ya se mencionó al inicio de este Capítulo, si la permeabilidad es alta los flujos ocurren a altos Re y el modelo de Forchheimer es entonces muy adecuado. Este estudio, junto con el que se realiza en el próximo

Capítulo, cubren un amplio espectro de posibilidades en cuanto a la imbibición en medios porosos.

Capítulo 7

Imbibición bajo gradientes de temperatura en rocas homogéneas

Se analiza ahora la imbibición espontánea en rocas homogéneas (p. ej., arenisca Berea) en donde la velocidad de filtración (y la permeabilidad) es baja. En el modelo se asume la existencia de imbibición en flujo de Darcy en la roca sujeta al gradiente longitudinal de temperatura. Mediante experimentos en roca de arenisca Berea se muestra lo adecuado de esta descripción. En este Capítulo se analiza la imbibición bajo el campo gravitatorio en rocas con sección transversal cuadrada y en una circular. También se discute la imbibición radial, la cual es muy importante en la comprensión de los problemas de recuperación de aceite y agua en medios homogéneos y fracturados [38], de inyección por chorro de tinta [61, 77] y del problema general de la penetración de gotas en medio porosos [9, 62, 78].

7.1. Muestras cuadradas

El objetivo en esta sección es extender el método de solución de la penetración capilar en capilares bajo gradientes de temperatura al caso de medios porosos homogéneos. Más propiamente se estudiará la imbibición en el límite de alta difusividad térmica del medio poroso, por ejemplo, una roca. Este caso corresponde al límite de $Pe \ll 1$ discutido en el Apéndice A y una condición adicional para que esto ocurra es que los números de Reynolds sean bajos.

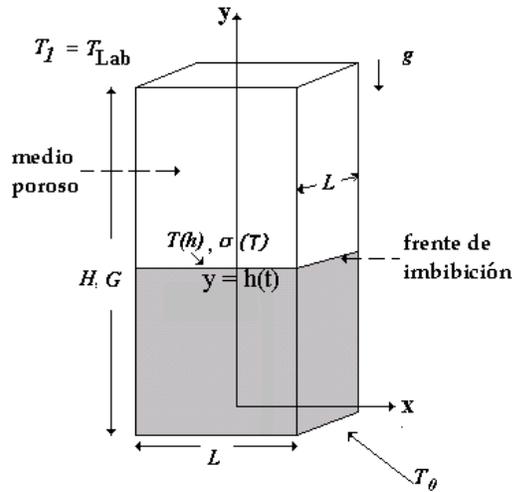


Figura 7-1: Esquema de la imbibición en una roca vertical con sección transversal cuadrada L^2 y altura H . La zona gris representa la región imbibida cuyo frente está en $y = h(t)$. La roca está sujeta tanto a los efectos de la gravedad, g , como de un gradiente longitudinal de temperatura $G = (T_1 - T_0)/H$.

7.1.1. Modelo matemático

Como primer caso considérese una muestra porosa vertical de altura H y de sección transversal L^2 bajo la influencia de un gradiente constante de temperatura, G . En dicha muestra y de acuerdo a los experimentos aquí realizados se asume que el movimiento del líquido es unidimensional (modelo tipo pistón), de tal manera que la presión capilar que se define como $p_c = -c_1\sigma(h)/d$ donde d ahora es el radio hidráulico $d = \sqrt{K/\phi}$.

Entonces la caída de presión debida a la imbibición es

$$-\frac{c_1\sigma(h)}{d} = \Delta p, \quad (7.1)$$

donde la cantidad c_1 es una constante adimensional que involucra al ángulo de contacto y otras propiedades del medio poroso como la tortuosidad. Por otro lado, se considera que el fluido se mueve dentro del medio poroso con una velocidad pequeña por lo que la ecuación de Darcy resulta una buena aproximación para describir el movimiento unidimensional del fluido.

Con esta consideración se puede establecer una relación entre la velocidad de filtración \bar{v} y el gradiente de presiones, como se muestra a continuación (Ver figura 7-1).

$$\bar{v} = -\frac{c_2 d^2}{\mu(y(T))} \left[\frac{dp}{dy} + \phi \rho g \right], \quad (7.2)$$

donde p es la presión, $\mu(y(T))$ es la viscosidad dinámica y ρ es la densidad del líquido que normalmente sufre cambios muy pequeños, en intervalos pequeños de temperatura, en comparación con los asociados con la tensión superficial y la viscosidad [79]. En la formulación de la ecuación (7.2) se considera que la permeabilidad K es del orden del cuadrado del tamaño de poro $K \sim d^2$ [18], además de que c_2 es otra constante adimensional que se relaciona con la porosidad ϕ . La ecuación que resulta para la presión después de ordenar términos en la ecuación (7.2) y considerando que $\bar{v} = dh/dt$ es

$$\Delta p = \int_0^{h(t)} dp = -\frac{c_2}{d^2} \frac{dh}{dt} \int_0^{h(t)} [\mu(y(T))] dy - \phi \rho g h. \quad (7.3)$$

Usando en la ecuación anterior los cambios de variables $\xi = h/h_\infty$, $\tau = C_1 d \sigma_0 t / C_2 \mu_0 h_\infty^2$ con $h_\infty = C_1 \sigma_0 / (\phi \rho g d)$, donde h_∞ es la altura de equilibrio en la roca y los desarrollos en serie para $\mu(y(T))$ y $\sigma(h)$ se encuentran, como en los estudios previos de la penetración capilar, los parámetros A y B de la forma

$$A = \frac{\mu' G h_\infty}{2 \mu_0}, \quad B = \frac{\sigma' G h_\infty}{\sigma_0}, \quad (7.4)$$

donde $\mu' = d\mu/dT$ y $\sigma' = d\sigma/dT$ y la ecuación diferencial adimensional

$$1 + (B - 1)\xi - (\xi + A\xi^2) \frac{d\xi}{d\tau} = 0. \quad (7.5)$$

La solución a la ecuación previa que satisface $\xi(\tau = 0) = 0$ es

$$\tau = \left[\frac{B - A - 1}{(B - 1)^2} \right] \xi + \left[\frac{A}{2(B - 1)} \right] \xi^2 + \left[\frac{A - B + 1}{(B - 1)^3} \right] \ln [1 + (B - 1)\xi]. \quad (7.6)$$

Se observa que esta solución es idéntica, en forma, a la obtenida para $\xi(\tau)$ para el tubo

capilar y las placas verticales de Hele-Shaw. El caso isotérmico da

$$\tau = -\xi - \ln(1 - \xi), \quad (7.7)$$

y la ley de Lucas-Washburn es $\tau = \xi^2$ o en forma dimensional $h^2 = [c_1 d \sigma_0 / (\mu_0 c_2)] t$.

7.1.2. Isotermas bajo gradientes de temperatura

Hay diferentes formas de imponer un gradiente longitudinal en la muestra porosa. El método que aquí se usó para imponer el gradiente es el siguiente: La base de una roca de arenisca Berea (seca) se pone en contacto con un intercambiador de calor que mantiene una temperatura constante $T = T_0$ en la base de la roca y en el agua que se usa para la imbibición, mientras que la parte superior se mantiene a una temperatura $T = T_1$. Después de transcurrir el tiempo de difusión $t_D = H^2/\alpha_p$, donde α_p es la difusividad térmica de la roca, la muestra alcanza el gradiente de temperatura $G = (T_1 - T_0)/H$ que es casi constante como se verá más adelante.

Las rocas tienen una sección transversal cuadrada con $L = 0.05$ m y altura $H = 0.085$ m. Las propiedades físicas de la roca de arenisca son: densidad $\rho_p = 2300$ kg/m³, difusividad térmica $\alpha_p = 0.011 \times 10^{-4}$ m²/s, permeabilidad $K = 500$ mD, porosidad $\phi = 20\%$ y conductividad térmica $k_p = 0.9$ Cal/(msK). Con estos valores se encuentra que el tiempo de difusión es $t_D = 1.8$ h. Los experimentos de imbibición se realizan después de alcanzar el estado térmico estacionario. No obstante, para garantizar que se alcanza el estado estacionario el dispositivo se deja funcionar por cuatro horas, después de este tiempo se indujo la imbibición poniendo en contacto el agua termalizada a temperatura T_0 con la base de la roca. Las mediciones de temperatura (termografías) se toman sobre una cara de la roca empleando la cámara infrarroja FliR PM595 cuyas características ya han sido dadas anteriormente. Los perfiles de temperatura sobre la roca se muestran en la figura 7-2 para el caso $G > 0$ (gradiente positivo de temperatura) y en la figura 7-3 para el caso $G < 0$ (gradiente negativo). El gradiente positivo $G > 0$ se obtiene imponiendo $T_0 = 295.2$ K y $T_1 = 299.2$ K, así $G_+ = 47.059$ K/m. En el caso $G < 0$, $T_0 = 307$ K y $T_1 = 303$ K y entonces $G_- = -47.059$ K/m. El intervalo de temperatura fue seleccionado para tener un buen contraste con la temperatura ambiente $T_{Lab} = 295.2$ K. Es importante observar que los gradientes son iguales en magnitud, es decir, $G_+ = |G_-| = 47.059$ K/m. El

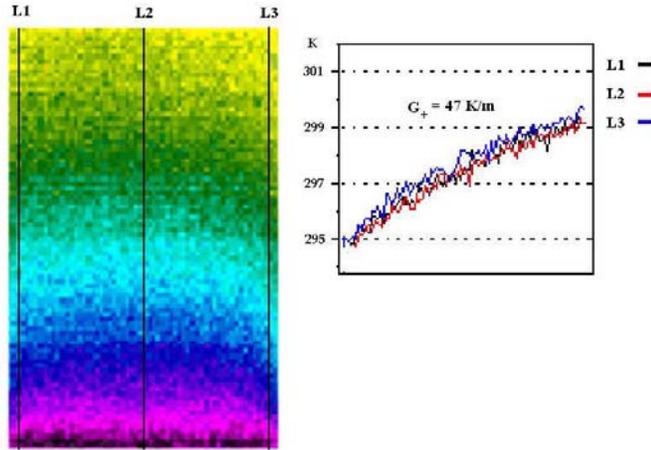


Figura 7-2: Termografía de una de las caras de la roca seca y el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G > 0$.

caso isotérmico se obtuvo con $T_0 = T_1 = T_{Lab} = 295.2$ K. A partir de las imágenes térmicas se puede hacer una discusión, en términos de ordenes de magnitud, sobre la forma de las isotermas. Se observa en la figura 7-2 ($G > 0$) que las isotermas (regiones del mismo color) presentan una curvatura en las orillas derecha e izquierda, mientras que en la figura 7-3 ($G < 0$) la curvatura es mucho menor.

Este comportamiento singular se debe a la existencia de una capa límite externa que se origina por la forma en que se establece experimentalmente el gradiente en las rocas. Cuando la roca es calentada por la parte inferior ($G < 0$) se genera un flujo convectivo de aire que asciende dentro de una capa límite viscosa de espesor δ (ver figura 7-4). Este problema se analiza a continuación en términos de órdenes de magnitud.

Se considera que el aire tiene una densidad ρ_g , viscosidad dinámica μ_g , coeficiente de expansión térmica β_g y conductividad térmica k_g . Así, la velocidad del flujo convectivo de aire u se obtiene a través de la ecuación de la energía donde los términos de flotación dominan

$$\rho_g u^2 \sim \rho_g g H \beta_g \Delta T, \quad (7.8)$$

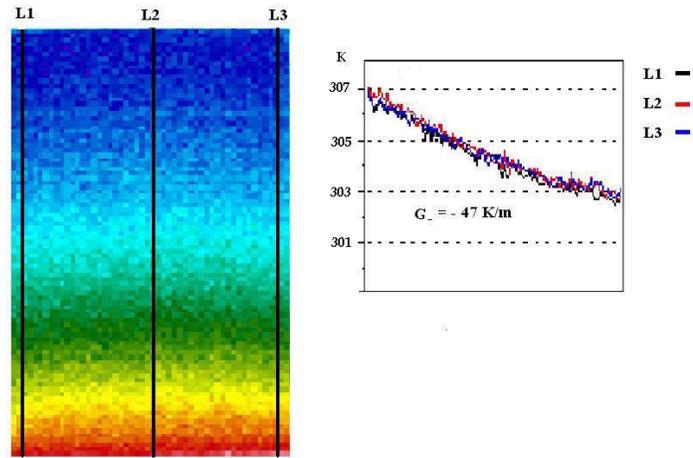


Figura 7-3: Termografía de una de las caras de la roca seca y el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G < 0$.

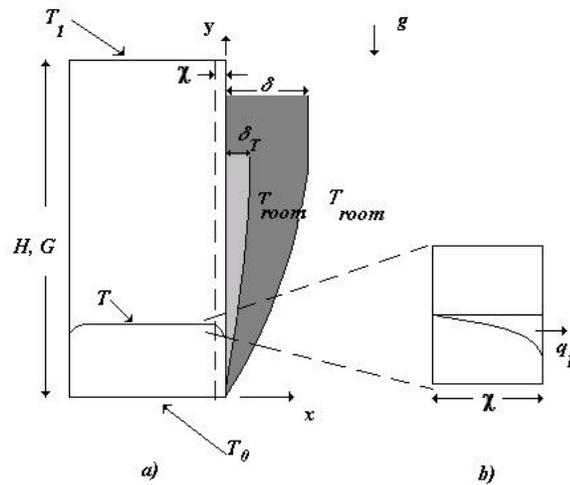


Figura 7-4: a) Capas límite térmica (δ_T) y viscosa (δ) que se forman fuera de la roca, así como la deformación de las isotermas cerca de los bordes. b) Vista detallada de la curvatura de las isotermas. Se considera que en esta zona de longitud χ , las isotermas se deforman y se genera un flujo de calor, q_p , hacia el ambiente.

$$u \sim (gH\beta_g\Delta T)^{1/2}. \quad (7.9)$$

El espesor de la capa límite viscosa, δ , se evalúa considerando los efectos viscosos en el fluido, lo que lleva a la relación

$$\rho_g \frac{u^2}{H} \sim \mu_g \frac{u}{\delta^2}. \quad (7.10)$$

Utilizando la ecuación (7.9) en la ecuación (7.10) se encuentra que

$$\delta \sim \left(\frac{\mu_g H}{\rho_g u} \right)^{1/2} \sim H \left(\frac{\mu_g^2}{\rho_g^2 g \beta_g \Delta T H^3} \right)^{1/4} \sim \frac{H}{Gr^{1/4}} \quad (7.11)$$

donde $Gr = \rho_g^2 g \beta_g \Delta T H^3 / \mu_g^2$ es el número de Grashof.

Por otra parte el flujo de calor q_g que se transfiere desde cualquier pared lateral hacia el aire esta determinado por la siguiente expresión

$$q_g \sim k_g \frac{\Delta T}{\delta} \sim k_g \frac{\Delta T}{H} Gr^{1/4}. \quad (7.12)$$

Se observa en la figura 7-3 que, cerca de las esquinas, las isothermas tienen una ligera curvatura. La desviación en las isothermas se debe a un flujo transversal de calor, q_p . Este flujo transversal de calor se puede estimar con la siguiente expresión (ver Figura 7-4)

$$q_p \sim k_p \frac{\Delta_\chi T}{L} \quad (7.13)$$

donde $\Delta_\chi T$ es la variación de la temperatura en la región de longitud χ . Los flujos de calor q_g y q_p son del mismo orden de magnitud, por lo que se tiene que

$$k_p \frac{\Delta_\chi T}{L} \sim k_g \frac{\Delta T}{H} Gr^{1/4}, \quad (7.14)$$

y finalmente el cambio relativo entre las isothermas esta determinado por la siguiente expresión

$$\frac{\Delta_\chi T}{\Delta T} \sim \frac{k_g L}{k_p H} Gr^{1/4}. \quad (7.15)$$

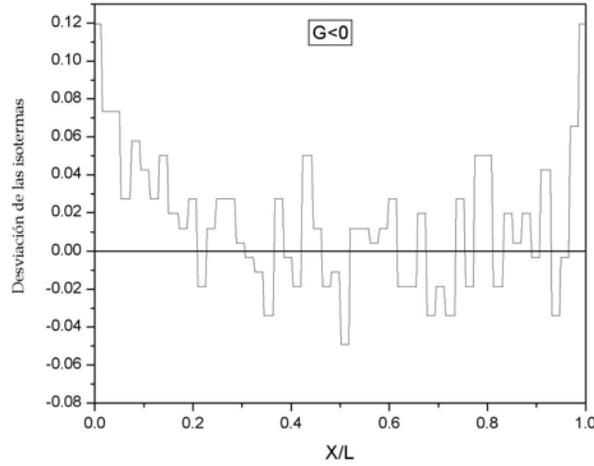


Figura 7-5: Curva de la desviación del perfil de temperatura que se obtiene a partir de la figura 7-3, i.e., cuando en la roca existe una gradiente negativo ($G < 0$). En este caso se mide una desviación máxima en las esquinas de la roca ($x/L = 0.1$). Esta desviación del 12% aproximadamente, se compara adecuadamente con la desviación determinada teóricamente a través de la cantidad $\Delta_x T / \Delta T$ dada en la ecuación (7.16).

Para estimar el número de Grashof y la curvatura de las isotermas ($G < 0$), se emplean las propiedades del aire a una temperatura $T = T_0 = 307$ K. Los valores de las propiedades son $\rho_g = 1.14$ kg/m³, $\mu_g = 18.87 \times 10^{-6}$ Pa·s, $k_g = 0.006$ Cal/(msK), $\beta_g = 3.26 \times 10^{-3}$ K⁻¹ y el número de Grashof estimado es $Gr^{1/4} = 23.12$. Por último, de la Ec. (7.15) se encuentra que la deformación de las isotermas tiene un valor de,

$$\frac{\Delta_x T}{\Delta T} \sim 0.11, \quad (7.16)$$

Este resultado indica que la desviación de las isotermas cerca de las esquinas es alrededor del 11%, lo que muestra una buena correspondencia con los resultados medidos experimentalmente (desviación del 12%), como se observa en la figura 7-5. Para el caso de $G > 0$ se observa en la figura 7-2 una mayor desviación, aunque este caso está relacionado con otro tipo de capa límite térmica, ya que ésta se origina en la parte inferior por la convección del aire frío de esta región que jala hacia abajo al aire más caliente y más ligero de la parte superior. Una

explicación más detallada de la curvatura de las isothermas en este caso sigue un razonamiento un poco más complejo que el empleado para $G < 0$ [51, 80]. Con estas estimaciones se encuentra que las variaciones de la temperatura en las esquinas no afectan sustancialmente el promedio de temperatura a una altura $y = \text{constante}$. A partir de la termografía (figuras 7-2 y 7-3) se observa que las zonas donde las isothermas muestran una curvatura miden aproximadamente $0.06L$ para $G < 0$ y $0.12L$ para el caso $G > 0$. El porcentaje de área donde las isothermas presentan diferentes valores que el promedio es del 1% para $G < 0$ y 5% cuando $G > 0$. Con estos resultados se concluye que la temperatura en la muestra obedece al perfil $T(y) = T_0 + Gy$, excepto en regiones muy pequeñas cerca de las esquinas por lo que el problema de transferencia de calor es esencialmente unidimensional.

7.1.3. Experimentos de imbibición

Después de imponer el gradiente en la roca ésta es puesta en contacto con agua destilada contenida en un recipiente el cual también esta en contacto con el intercambiador de calor, esto con el fin de que la temperatura del agua sea la misma que la temperatura de la parte inferior de la roca, i.e., $T_{\text{fluido}} = T_0$. El avance del frente de imbibición se graba con una cámara digital que permite seguir el frente $h(t)$ detalladamente cada 1/30 s. Durante la imbibición, la cámara infrarroja no detectó cambios en la distribución de temperatura en la roca debido al paso del fluido. Esto significa que el agua que asciende en la roca alcanza casi de manera instantánea la distribución de temperatura de la roca. La dependencia μ y σ con la temperatura ha sido reportada por Lide [79]. Dichos valores se usan para graficar (figura 7-6) los perfiles teóricos dados por las ecuaciones 7.6 y 7.7 los cuales se comparan contra los puntos experimentales. Las mediciones de $h(t)$ se realizan en el centro de la cara de la roca ($L/2$) para evitar la pequeña influencia de la curvatura de las isothermas en las esquinas de la roca. Se analizan tres casos: En el primero se impone un gradiente negativo $G < 0$ con valor de $G_- = -47$ K/m, en el segundo un gradiente positivo $G > 0$ con valor $G_+ = 47$ K/m, y en el último se mantienen condiciones isotérmicas, i.e., $G = 0$. En este último caso la temperatura del agua es la del ambiente del laboratorio $T_{\text{Lab}} = 295.2$ K. Con el fin de comparar los resultados, los valores de los gradientes son similares, es decir, $|G_-| = G_+$.

Debe comentarse que el tamaño de poro promedio se calculó por medio de la expresión

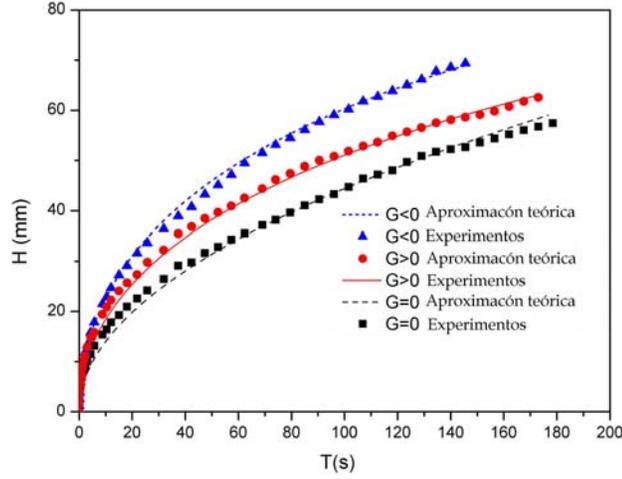


Figura 7-6: Comparación de resultados teóricos (curvas) y resultados experimentales (símbolos) para la evolución temporal del frente de imbibición $h(t)$, para los distintos valores de G considerados: en este caso para $G = 0$ donde $T_o = T_1 = T_{Lab} = 295.2$ K (■), $G < 0$ donde $G_- = -47$ K/m (▲) y $G > 0$ donde $G_+ = 47$ K/m (●).

$d^*(K/\phi)^{1/2} = 0.5 \mu\text{m}$ [81]. Las constantes c_1 y c_2 que aparecen en las ecuaciones (7.6) y (7.7) se agrupan en una sola constante $c = c_1/c_2$. El valor de c es diferente en cada caso y éste fue determinado por la mejor comparación con los resultados experimentales. Dicha comparación permite encontrar que $c = 4.2 \times 10^{-2}$ cuando $G = 0$, $c = 4.4 \times 10^{-2}$ para $G > 0$ y $c = 5.3 \times 10^{-2}$ para $G < 0$, los valores de las constantes son del mismo orden de magnitud pero diferentes entre ellas, esto se debe a que las constantes están relacionadas con el cambio del ángulo de contacto con la temperatura. Este cambio es evidente en experimentos de burbujas en capilares bajo gradientes de temperatura [32]. Observando la gráfica de la figura 7-6, se encuentra que con $G < 0$ la imbibición es más rápida respecto a los casos con $G > 0$ y $G = 0$. Esto ya había sido observado en los experimentos de penetración capilar en donde también se usó agua como fluido de trabajo. En suma, la teoría y los experimentos permiten mostrar que la imbibición bajo gradientes de temperatura se puede acelerar o desacelerar dependiendo del material de la muestra porosa y del fluido de trabajo.

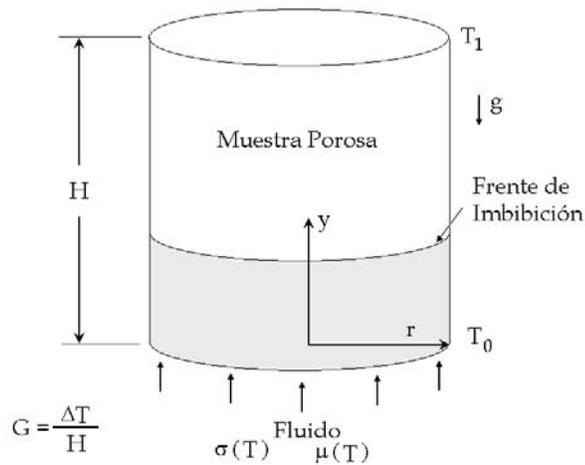


Figura 7-7: Esquema del frente de imbibición $y = h(t)$ en una roca de arenisca Berea. La zona gris representa la región imbibida. La roca tiene una sección transversa circular de radio R y una altura H además, esta sujeta tanto a los efectos de la gravedad, g , como de un gradiente longitudinal de temperatura $G = (T_1 - T_0)/H$ donde T_0 es la temperatura de la parte inferior de la roca y T_1 es la temperatura de parte superior.

7.2. Muestras cilíndricas

Resulta importante conocer si la deformación en las isotermas tiene una influencia en la evolución del frente de imbibición, por tal razón se cambió la geometría de la muestra, la roca que se emplea en esta etapa es un cilindro circular de arenisca Berea (figura 7-7) y se observa mediante la termografía que no hay deformación de las isotermas (ver figura 7-8).

Las figuras 7-8 a 7-10, son evidencia de la imposición del gradiente en la muestra porosa, la distribución de temperatura no se afecta durante la penetración capilar, por lo que se puede decir que el fluido que penetra alcanza de manera casi instantánea la temperatura del sólido. El gradiente de temperatura al igual que en la roca de sección cuadrada se define como $G = (T_1 - T_0)/H$, las rocas tienen una sección transversal circular de radio $R = 0.05$ m y altura $H = 0.1$ m. Los perfiles de temperatura se muestran en la figura 7-8 para el caso $G > 0$ (gradiente positivo de temperatura) y en la figura 7-9 para el caso $G < 0$ (gradiente negativo). El gradiente positivo $G > 0$ se obtiene imponiendo $T_0 = 292.2$ K y $T_1 = 296.2$ K, así $G_+ = 40$ K/m, en el caso $G < 0$, $T_0 = 304$ K y $T_1 = 300$ K y $G_- = -40$ K/m. El intervalo de temperatura

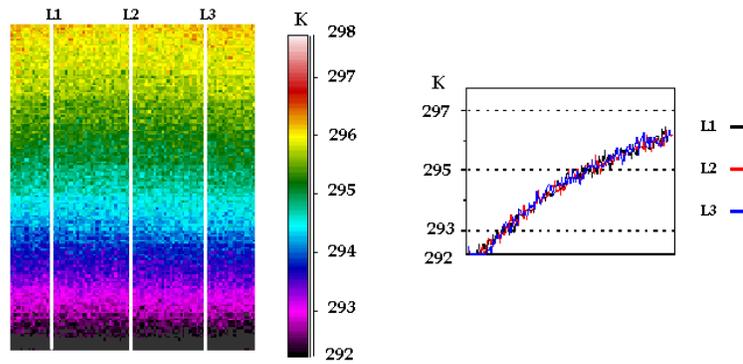


Figura 7-8: Termografía para la roca cilíndrica de Berea y el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G > 0$.

se selecciona para tener un buen contraste con la temperatura ambiente $T_{Lab} = 295.2 \text{ K}$. En este caso también los gradientes son iguales en magnitud, es decir, $G_+ = |G_-| = 40 \text{ K/m}$. El caso isotérmico ($G = 0$) se obtiene con $T_0 = T_1 = T_{Lab} = 295.2 \text{ K}$, (ver figura 7-10). Al igual que en la roca cuadrada se emplea agua destilada para la imbibición y en cada evento se emplea una roca nueva para evitar problemas de histéresis, por cada caso estudiado se realizaron tres repeticiones para tener una buena confiabilidad en los resultados.

La evolución temporal de frente de imbibición que se obtiene a partir de los resultados experimentales y del modelo teórico se muestra en la figura 7-11. Como es de esperar, se observa que la imbibición es más rápida en presencia de un gradiente negativo de temperatura.

7.3. Roca cilíndrica sellada

Otro aspecto fundamental es conocer si la evaporación que se pueda presentar durante la imbibición en la roca representa un aspecto importante en el avance temporal del frente de imbibición, en este sentido resulta importante conocer si esta evaporación puede modificar sustancialmente la influencia del gradiente de temperatura. Para determinar esta influencia, se diseña una serie de experimentos con rocas cilíndricas de Berea selladas por su cara lateral. El sellado de la roca se hace con una resina que permite observar el frente de imbibición y poder realizar la grabación del avance temporal del frente de imbibición. Las termografías que

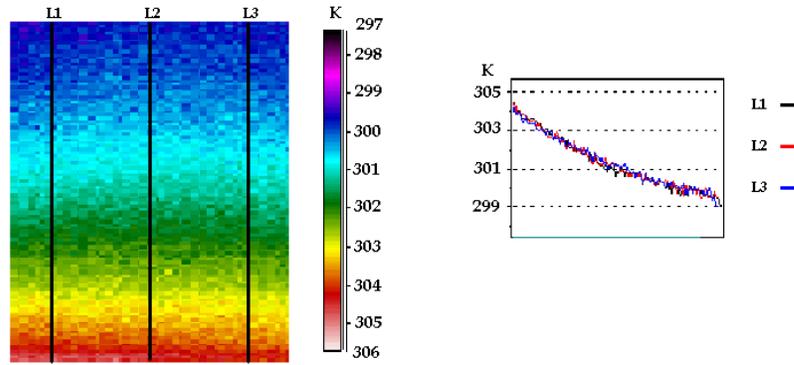


Figura 7-9: Termografía para la roca cilíndrica de Berea y el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G < 0$.

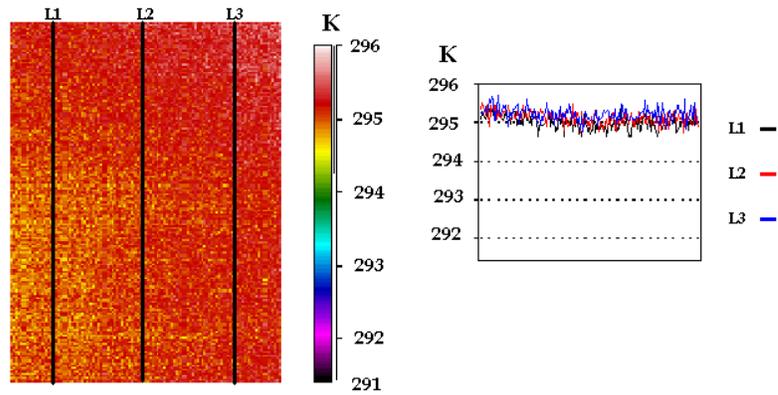


Figura 7-10: Termografía para la roca cilíndrica de Berea y el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G = 0$.

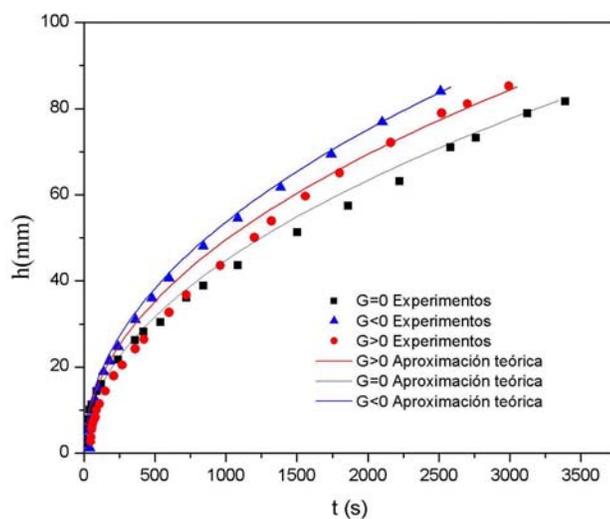


Figura 7-11: Comparación de resultados teóricos (curvas) y resultados experimentales (símbolos) para la evolución temporal del frente de imbibición $h(t)$, para los distintos valores de G considerados: en este caso para $G = 0$ donde $T_o = T_1 = T_{Lab} = 295.2$ K (■), $G_- = -40$ K/m (▲) y $G_+ = 40$ K/m (●).

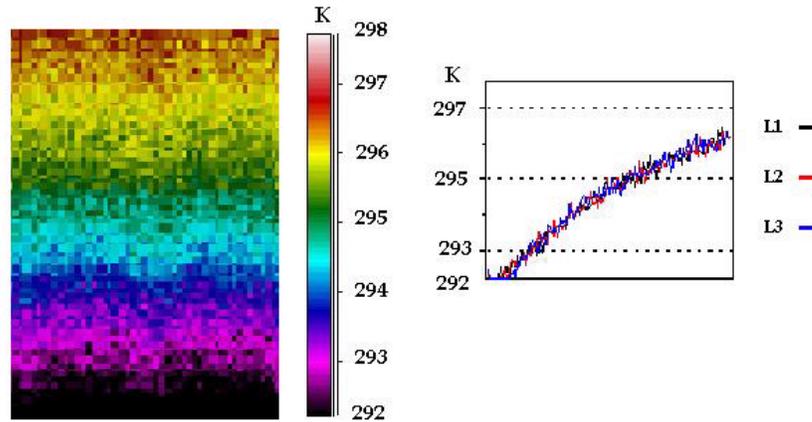


Figura 7-12: Termografía para la roca cilíndrica de Berea sellada con una resina. Se muestra también el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G > 0$.

resultan para este caso en especial se presentan en las figuras 7-13 y 7-12. Se observa que las termografías son idénticas antes y durante el proceso de imbibición.

Se analizan dos casos para saber si la posible evaporación del fluido [82][28, 82, 83, 84] afecta de manera importante la evolución temporal del frente de imbibición. Los resultados se muestran en la figura 7-14, como se observa el gradiente negativo presenta un avance del frente de imbibición más rápido en comparación con el gradiente positivo, no obstante en este caso la imbibición es más lenta que en los casos anteriores (roca cuadrada y circular ambas sin sellar). Esto sucede debido a que el fluido que moja a la muestra tarda más en desalojar al aire que satura a la roca porque el flujo de aire tiene una área menor por donde salir de la roca. En suma se puede considerar que la evaporación que se puede presentar durante el proceso de imbibición no es significativo en cuanto a que la dinámica inducida por el gradiente no se ve afectada.

7.4. Imbibición radial en muestras porosas delgadas

7.4.1. Distribución de temperatura

En esta sección se estudia la imbibición radial en una muestra porosa delgada bajo un gradiente de temperatura 7-15. De manera similar al problema de celda radial de Hele-Shaw se

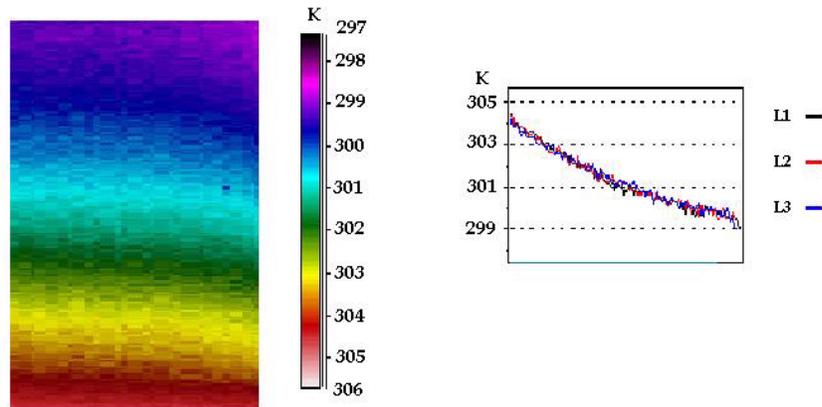


Figura 7-13: Termografía para la roca cilíndrica de Berea sellada con una resina. Se muestra también el perfil de la temperatura como función de la posición vertical y para $G < 0$.

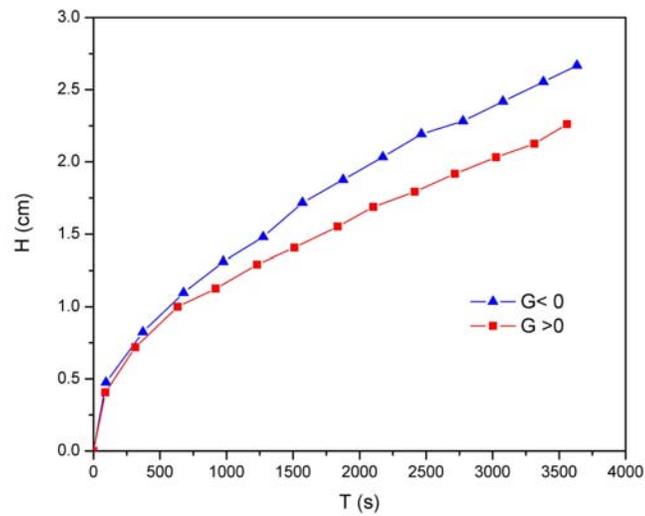


Figura 7-14: Comparación resultados experimentales para la roca sellada. Los resultados corresponden a gradientes $G_+ = 40 \text{ K/m}$ (■) y $G_- = -40 \text{ K/m}$ (▲).

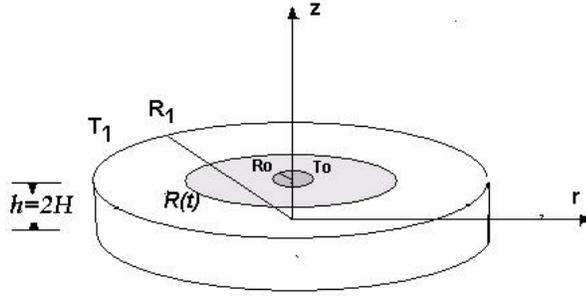


Figura 7-15: Esquema de la imbibición radial en una muestra porosa. El espesor de la muestra es $h = 2H$, T_0 es la temperatura en la parte interna $r = R_0$ y T_1 es la temperatura en el extremo $r = R_1$.

procede a resolver el problema de conducción de calor que obedece a la ecuación de Laplace. Por lo que, la distribución de temperatura en estado estacionario previa al inicio de la imbibición, $T = T(r)$, esta determinada por la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 T = 0$, con las condiciones de frontera $T = T_0$ en $r = R_0$ y $T = T_1$ en $r = R_1$. La solución que resulta es

$$T = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{[\ln R_1 - \ln R_0]} (\ln r - \ln R_0), \quad (7.17)$$

donde $G = dT/dr$ es el gradiente de temperatura y se define como se muestra en la siguiente expresión

$$G = \frac{T_1 - T_0}{[\ln R_1 - \ln R_0]} \frac{1}{r}. \quad (7.18)$$

Asumiendo que el numero de Péclet es pequeño, el problema térmico y el de flujo se desacoplan y entonces es posible tratar como antes el problema de la imbibición.

7.4.2. Modelo matemático

Si la muestra porosa es delgada la imbibición ocurre como un flujo radial por lo que la ecuación de Darcy unidimensional resulta una buena aproximación

$$v_r = -\frac{c_1 d^2}{\mu} \frac{dp}{dr}, \quad (7.19)$$

donde v_r es la velocidad radial de penetración, d es el diámetro del poro y c_1 es la constante que se relaciona con la permeabilidad del medio poroso. Como se considera que el flujo es unidimensional y sólo tiene componente en sentido radial, la caída de presión Δp desde la entrada hasta el frente localizado en $r = R(t)$, se relaciona con la caída de presión capilar $p_c = -c_2 \sigma(R)/d$, en la forma

$$\Delta p = -\frac{c_2 \sigma(R)}{d}. \quad (7.20)$$

En la ecuación anterior c_2 es la constante adimensional que se relaciona con el ángulo de contacto, θ , entre el grano del medio poroso y el fluido, aunque en realidad esta constante puede estar relacionada con otras propiedades del medio y del fluido. De la integración de la ecuación anterior junto con la ecuación (7.19), se encuentra la siguiente expresión

$$\Delta p = -\int_{R_0}^R \frac{\mu(r)v_r}{c_1 d^2} dr, \quad (7.21)$$

la ecuación de conservación de masa permite establecer que $v_r = (R/r)dR/dt$, con esta expresión en la ecuación (7.20), se obtiene

$$\Delta p = -\frac{R}{d^2} \frac{dR}{dt} \int_{R_0}^R \frac{\mu(r)}{r} dr = -\frac{c\sigma(R)}{d}, \quad (7.22)$$

donde $c = c_1 c_2$. Al igual que en casos anteriores se usan las series de Taylor de la tensión superficial y la viscosidad en función con la temperatura. Por último se emplean las variables $\xi = R/R_0$ y $\tau = t/t_c$ donde $t_c = c\mu_0 R_0^2/(\sigma_0 d)$ y con estos cambios se obtiene la ecuación adimensional diferencial no lineal para el frente en la forma

$$\frac{[(1+A)\xi^2 \ln \xi + A(\xi - \xi^2)]}{\xi(1+B) - B} \frac{d\xi}{d\tau} = 1, \quad (7.23)$$

donde A y B son ahora

$$A = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln [R_1/R_0]}, \quad B = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln [R_1/R_0]}. \quad (7.24)$$

La solución de la ecuación anterior se obtiene numéricamente con la siguiente condición inicial $\xi = 1$ en $\tau = 0$. Para el caso límite de imbibición isotérmica se obtiene la siguiente solución

$$\xi^2 [\ln \xi^2 - 1] + 1 = 4\tau, \quad (7.25)$$

para el caso de pequeñas distancias de imbibición, se obtiene la siguiente expresión que es típica para este tipo de flujos

$$\xi = 1 + \sqrt{2\tau}. \quad (7.26)$$

7.4.3. Experimentos

Los experimentos se realizan con muestras circulares de papel filtro. La selección de papel filtro se debe a que se pueden obtener muestras circulares y de espesor pequeño. Las muestras que se emplean tienen las siguientes características, espesor promedio $2H = 3.1 \times 10^{-4}$ m, radio interno $R_0 = 2 \times 10^{-3}$ m y radio externo $R_1 = 3.15 \times 10^{-2}$ m. El dispositivo experimental (ver figura 7-16) que se emplea durante los experimentos permite establecer el gradiente de temperatura en las muestras y además de mantenerlos durante todo el proceso de imbibición. Como se observa en la figura 7-16 la muestra porosa se coloca en la base circular de cobre, la muestra porosa se cubre de un material plástico transparente (poliuretano con espesor de $\delta = 0.7 \times 10^{-4}$ m) para evitar el desplazamiento del fluido entre la muestra porosa y la placa de cobre. Además con esta configuración se evita la evaporación del fluido por la cara superior, es importante mencionar que los extremos (sección transversal) de la muestra no son cubiertos por la cinta plástica, esto con el fin de que el aire que satura a la muestra inicialmente se desplace de forma radial, además de que la cinta ayuda a establecer el gradiente de temperatura en el medio poroso por lo que la presencia del poliuretano no presenta influencia en la evolución del frente de imbibición.

La distribución de temperatura que se establece en el material se mide con la ayuda de una cámara infrarroja. Para establecer el gradiente en el papel, primero se establece en la placa

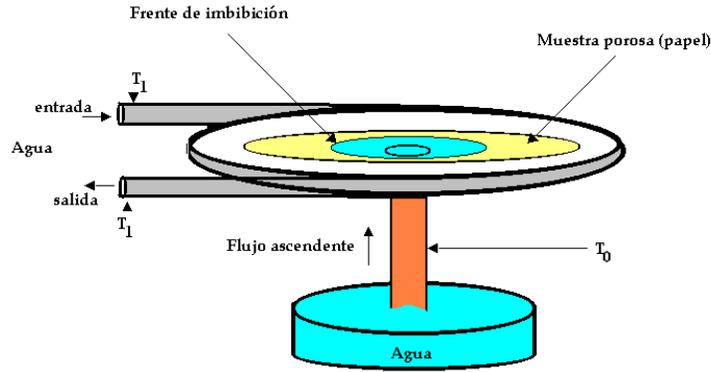


Figura 7-16: Dispositivo experimental de la muestra de papel filtro. El flujo que penetra a la muestra porosa asciende por el tubo vertical que se encuentra sumergido en el fluido. El fluido del recipiente tiene la misma temperatura que el centro de la muestra, T_0 .

de cobre (conductividad térmica $\alpha_{cobre} = 1.07 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$), esta placa alcanza la diferencia de temperaturas ΔT entre el centro y el extremo de la placa, que prácticamente es la misma que se establece en la muestra, una vez que se alcanza el gradiente en el placa entonces se procede a fijar sobre ella la muestra porosa, de tal manera que la muestra alcanza el mismo gradiente que la placa. Tres casos se estudian, el primero es el gradiente positivo en el que $T_0(R_0) = 301.3 \text{ K}$, $T(R_1) = 304.3 \text{ K}$ por lo que $\Delta T = 3 \text{ K}$, el segundo caso es el gradiente negativo $T_0(R_0) = 301.3 \text{ K}$, $T(R_1) = 298.3 \text{ K}$ y $\Delta T = -3 \text{ K}$, el tercer y último es el caso isotérmico $T_{Lab} = T_0 = T_1 = 301.3 \text{ K}$. Con el fin de tener una comparación entre los resultados experimentales y teóricos de los casos positivos y negativos, se tiene que $|\overline{G}_-| = \overline{G}_+$. En las figuras 7-17, 7-19 y 7-21 se muestran resultados de las termografías obtenidas de las muestras porosas para los tres casos estudiados. Además en las figuras 7-18 y 7-20 se muestran los perfiles de temperatura para los gradientes positivo y negativo.

Uno de los puntos fundamentales es saber si la penetración del fluido altera el perfil de temperatura, para ello primero se debe conocer el tiempo de difusión de la placa de cobre en el que alcanza la distribución de temperatura, esto es $t_{Dc} = (R_1 - R_0)^2 / \alpha_{cobre} = 8.13 \text{ s}$, mientras que para el papel el tiempo de difusión se determina mediante la siguiente expresión $t_{Dp} = (2H)^2 / \alpha_{papel} = 0.68 \text{ s}$, la difusividad para el papel $\alpha_{papel} = 1.4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Además,

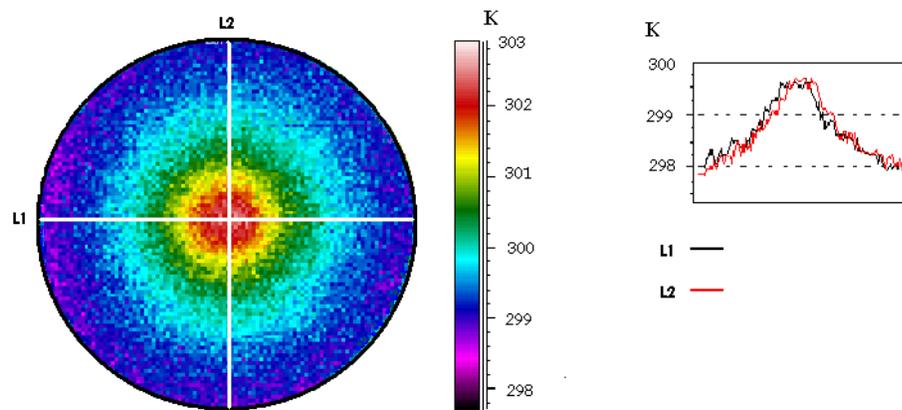


Figura 7-17: Termografía de la muestra porosa con gradiente negativo de temperatura ($\overline{G} < 0$).

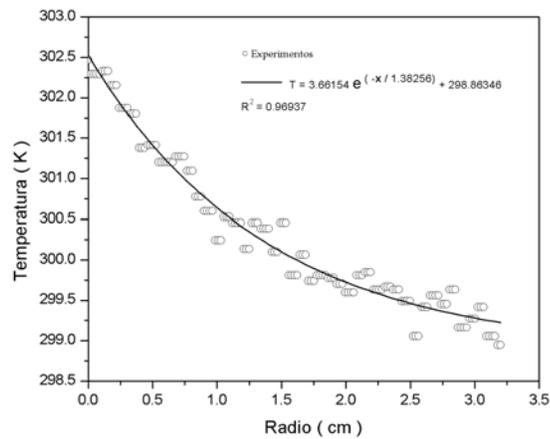


Figura 7-18: Perfil de temperaturas en el papel filtro, bajo un gradiente promedio negativo que se obtiene a partir de la figura 7-17.

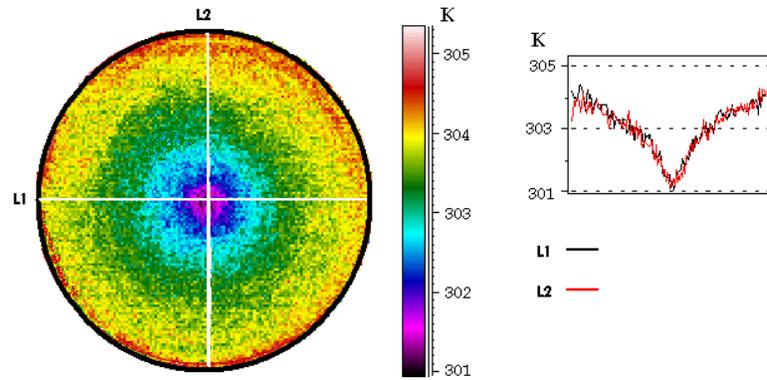


Figura 7-19: Termografía del papel con un gradiente promedio positivo ($\overline{G} > 0$).

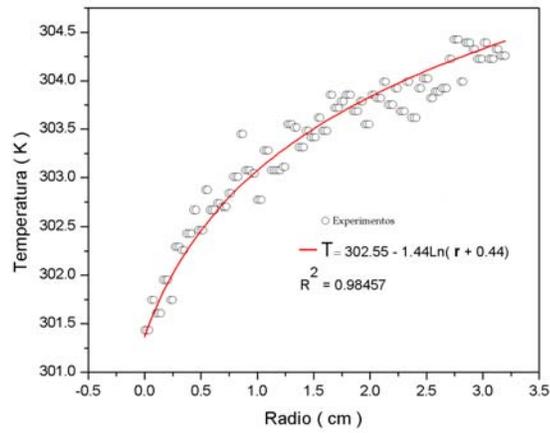


Figura 7-20: Perfil de temperatura en el papel filtro con un gradiente medio negativo que se obtiene a partir de la figura 7-19.

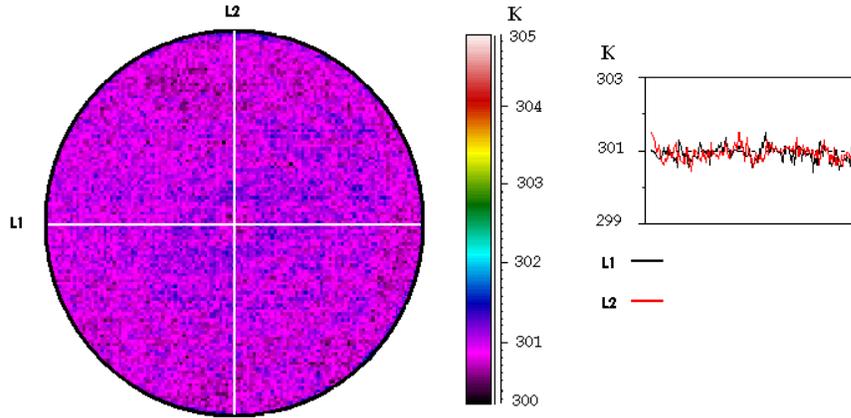


Figura 7-21: Termografía de la muestra porosa (papel) para el caso isotérmico ($\bar{G} = 0$).

el tiempo característico para establecer el gradiente de temperatura en las tiras de poliuretano se estima del orden de $t_{Dp} = \delta^2/\alpha_{po} = 3.7 \times 10^{-2}$ s donde $\alpha_{po} = 1.3 \times 10^{-7}$ m²/s es la difusividad térmica de poliuretano. Por último, el tiempo característico de imbibición se estima usando $t_i = H/|dR/dt| = 4.4286$ s. De acuerdo a estos resultados se observa que el tiempo de imbibición es mucho mayor que el tiempo de difusión en la muestra porosa y en la tiras de poliuretano, mientras que para la placa de cobre los tiempos son del mismo orden de magnitud, por lo que se puede concluir que el frente de imbibición alcanza la temperatura del sólido (más detalles ver Apéndice C).

Para garantizar que se alcanza el gradiente de temperatura en la muestra porosa, el dispositivo se deja trabajar por una hora y media antes de comenzar el proceso de imbibición. Durante la imbibición se tomaron lecturas para verificar que el frente de imbibición no modifica la distribución de temperaturas. Por lo que el frente de imbibición toma la temperatura del sólido.

Una vez que se alcanzan las condiciones térmicas de la muestra porosa, comienza el proceso de imbibición. El fluido de trabajo (agua destilada) se lleva hasta la muestra porosa mediante un tubo, $R_{Tub} = 5 \times 10^{-3}$ m, lleno de arena, el cual que sumerge en un recipiente de agua a temperatura $T = T_0$, la presencia del tubo ayuda a mantener tanto un flujo de agua constante hacia la muestra porosa como la temperatura en centro de la muestra, del fluido que penetra

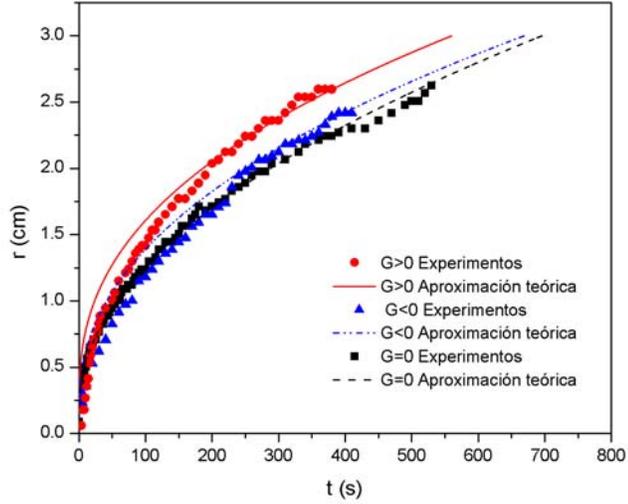


Figura 7-22: Comparación de resultados teóricos (líneas continuas) y experimentales (símbolos). Gradiente positivo (\bullet) $T_0(R_0) = 301.3$ K, $T(R_1) = 304.3$ K por lo que $\Delta T = 3$ K. Gradiente negativo (\blacktriangle) $T_0(R_0) = 301.3$ K, $T(R_1) = 298.3$ K y $\Delta T = -3$ K. Por último el caso isotérmico (\blacksquare) $T_{Lab} = T_0 = T_1 = 301.3$ K. Además $|\overline{G}_-| = \overline{G}_+$.

en la medio poroso y de la reserva de fluido.

La evolución temporal del frente de imbibición se mide mediante el empleo de una cámara digital que tiene una velocidad de 30 cuadros por segundo, con lo que nos permite medir escalas de 1×10^{-4} m. Se realizan cinco repeticiones de cada evento, es decir de cada condición de temperatura, los resultados se promedian. En la figura 7-22 se muestra una comparación entre los resultados teóricos (curvas) y los resultados experimentales (símbolos), como se observa la imbibición bajo la influencia del gradiente positivo se acelera con respecto a los otros dos. La comparación entre los resultados teóricos y experimentales muestran una buena concordancia, lo que valida el modelo teórico y la solución numérica numérico del mismo, ecuación (7.25). El análisis acerca de la importancia de los parámetros A y B durante la evolución temporal del frente de imbibición se presenta en el siguiente capítulo.

Capítulo 8

Características de los parámetros A y B

Con los resultados que se han presentado en esta tesis, tanto para estructuras capilares como para los medios porosos, se puede tratar de establecer de manera más clara la influencia de los parámetros dimensionales A y B que consideran la variación de la viscosidad y la tensión superficial con la temperatura, respectivamente. El análisis que se presenta a continuación tiene como finalidad estudiar de manera genérica la influencia de A y B en la evolución temporal del frente de imbibición $\xi = \xi(\tau)$.

En general los modelos que se consideran en este trabajo se pueden agrupar en dos casos, el primero considera la influencia de la gravedad (tubo capilar, celda vertical de Hele-Shaw, capilar cónico y rocas de Berea) y el segundo en el que los efectos de la gravedad son despreciables (celda radial de Hele-Shaw y medio poroso radial).

En el primer caso, las soluciones que describen la penetración capilar en capilares cilíndricos, celdas verticales de Hele-Shaw y la imbibición vertical en un medio poroso son las mismas en cuanto a su estructura. La única diferencia que existe entre las soluciones es la geometría que aparece en la estimación de los parámetros A y B . La expresión que representa la evolución temporal del frente en los casos antes mencionados está dada por

$$\tau = \left[\frac{B - A - 1}{(B - 1)^2} \right] \xi + \frac{A}{2(B - 1)} \xi^2 + \left[\frac{A - B + 1}{(B - 1)^3} \right] \ln [(B - 1)\xi + 1], \quad (8.1)$$

donde los parametros A y B se definen como

$$A = \frac{G}{2\mu_0} \frac{d\mu}{dT} h_\infty, \quad B = \frac{G}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} h_\infty. \quad (8.2)$$

Aquí, es importante hacer notar que la estimación de la altura de equilibrio h_∞ depende fuertemente de la geometría y varía en cada caso y ésta se ha definido para cada caso en sus respectivos Capítulos. Por otra parte, los experimentos que se presentan en esta tesis validan los modelos matemáticos para cada uno de los casos, pero los resultados no permiten establecer un criterio definitivo para estimar la influencia de cada uno de los parámetros. En este sentido, se analizará la influencia de los parámetros adimensionales A y B con la finalidad de establecer una relación que permita a priori conocer el comportamiento del fluido en estas condiciones.

Considerando que los efectos de B son despreciables, entonces se puede analizar el límite cuando $B = 0$. En este caso se consideran sólo los efectos del parámetro A , la ecuación (8.1) entonces da, desarrollando el logaritmo en series y tomando hasta el término de tercer orden,

$$\tau = A \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3}. \quad (8.3)$$

A partir de esta última ecuación se puede observar la influencia de A durante la penetración capilar, se puede entonces concluir que para $A > 0$ el proceso es más lento respecto al caso isotérmico, mientras que para $A < 0$ el proceso es más rápido respecto al caso isotérmico, ver figura 8-1.

Ahora se analiza el límite para $A = 0$, en este caso se observará la influencia de B durante el ascenso del liquido en el capilar o en el medio poroso. Sí $A = 0$ se tiene entonces que

$$\tau = \left[\frac{1}{B-1} \right] \xi - \left[\frac{1}{(B-1)} \right] \ln [(B-1)\xi + 1]. \quad (8.4)$$

Como resultado de este análisis se presentan los resultados en la siguiente figura 8-2. Como se observa, cuando B tiene un valor negativo ($G > 0$) la velocidad de penetración es más lenta mientras que para un valor positivo ($G < 0$) la velocidad es mayor, ambas velocidades respecto al caso isotérmico

A partir de la comparación de los resultados se puede afirmar con certeza que el parámetro que rige principalmente la dinámica del fluido es el parámetro B y que la rapidez con la que

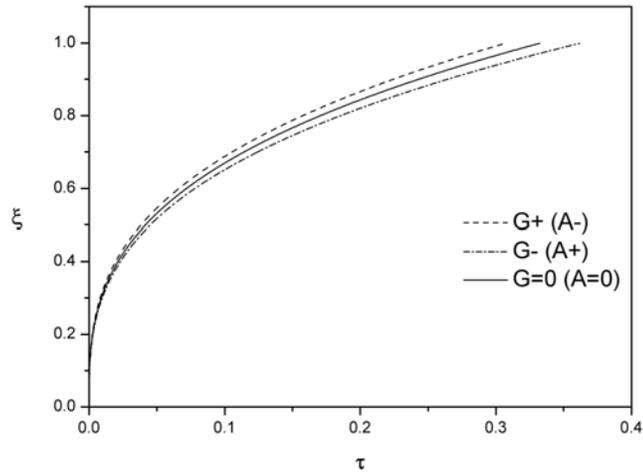


Figura 8-1: Influencia del parámetro A en la imbibición, en este caso se considera que la influencia del parámetro B es despreciable, i.e., $B = 0$.

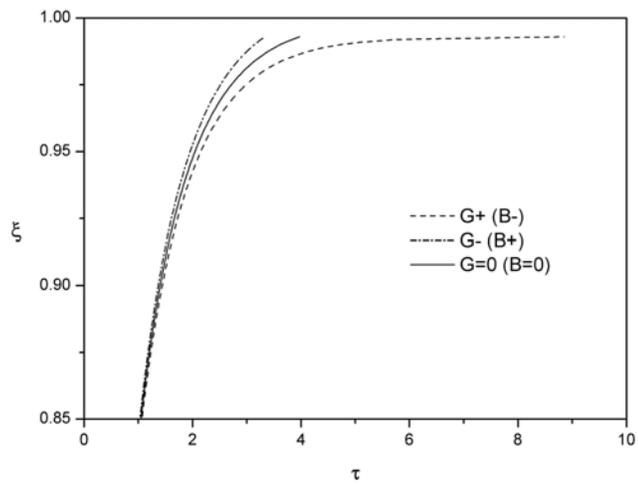


Figura 8-2: Influencia del parámetro B . Se considera que los efectos del parámetro A son despreciables, i.e., $A = 0$.

el fluido ascienda dependerá del signo que tome éste ($B\pm$). Para el capilar cónico, se presenta un comportamiento similar al de las estructuras capilares antes mencionadas, con lo que se confirma que el parámetro B tiene una importancia relevante en estos casos.

En el segundo caso que se analiza se desprecian los efectos de la gravedad, éstos son los casos de la penetración capilar en la celda radial de Hele-Shaw y en la imbibición radial en la muestra porosa. La ecuación que en general rige estos caso se muestra en la siguiente expresión

$$\frac{[(1 + A)\xi^2 \ln \xi + A(\xi - \xi^2)]}{\xi(1 + B) - B} \frac{d\xi}{d\tau} = \cos \theta, \quad (8.5)$$

donde A y B son los parámetros adimensionales definidos como

$$A = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln [R_1/R_0]}, \quad B = \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dT} \frac{T_1 - T_0}{\ln [R_1/R_0]}. \quad (8.6)$$

El análisis de esta ecuación se realiza de manera numérica por lo que sólo se presentan los resultados. El análisis demuestra que para $B = 0$ y $A < 0$ la penetración capilar es más rápida respecto al caso isotérmico, mientras que para $A > 0$, el avance del frente de imbibición es más lento respecto al caso isotérmico, ver figura 8-3.

Ahora, si se desprecian los efectos de la variación de la viscosidad ($A = 0$), se encuentra que para $B < 0$ el avance es más lento respecto al isotérmico, mientras que para $B > 0$ el avance es más rápido respecto al caso isotérmico, ver figura 8-4. Con estos resultados se puede determinar que el parámetro A determina al aceleración o la desaceleración del frente de imbibición.

Del análisis anterior se puede entonces establecer que cuando la gravedad no se desprecia, los cambios de la tensión superficial con la temperatura rigen la dinámica del fluido, por lo que es suficiente evaluar el parámetro B para conocer, *a priori*, la rapidez cuando se presenta una penetración capilar más rápida, que en este caso se presenta cuando B toma valores positivos. Por otra parte, si en el análisis no se consideran importantes los efectos de la gravedad, entonces el parámetro que gobierna es A y se establece que cuando A toma valores negativos el fluido se acelera respecto al caso isotérmico y para A positiva el fluido se desacelera respecto al caso isotérmico. Este criterio no se puede generalizar ya que la geometría es importante como por ejemplo para un tubo capilar cilíndrico [45] el parámetro que gobierna es A pero el comportamiento es contrario al que se manifiestan en las estructuras radiales.

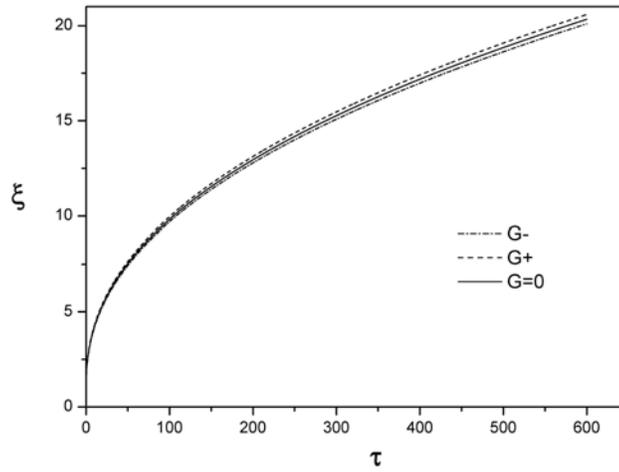


Figura 8-3: Evolución temporal del frente de imbibición considerando despreciables los efectos del cambio de la tensión superficial con la temperatura, i.e., $B = 0$.

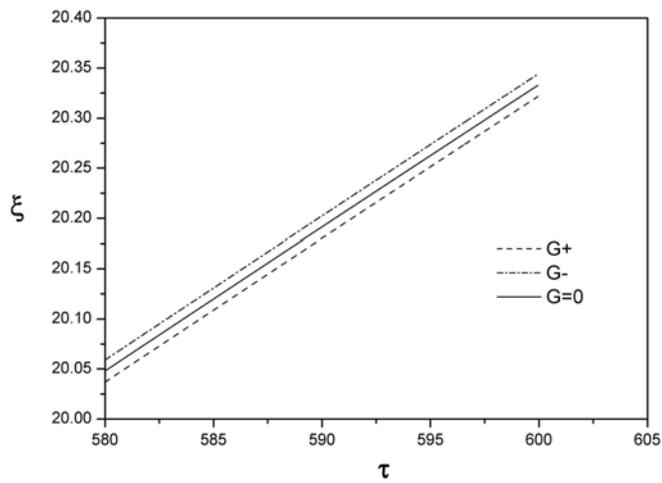


Figura 8-4: Evolución temporal del frente de imbibición considerando despreciables los efectos del cambio de la tensión superficial con la temperatura, i.e., $A = 0$.

Por lo anterior, es claro que sí se consideran efectos de la gravedad el parámetro que se debe analizar es B y si los efectos de la gravedad son despreciables entonces A resulta ser el parámetro que gobierna la dinámica del fluido. Esto se resume en las siguientes tablas

Efectos de la gravedad	Parámetro que rige la dinámica del fluido
Si	B
No	A

Lo anterior se expresa con más detalle en la siguiente tabla

Geometría	Gravedad	Parámetro	Valor	Efecto
Tubo capilar, celda vertical capilar cónico, roca	Si	B	> 0	Se acelera respecto al caso isotérmico
Tubo capilar, celda vertical capilar cónico, roca	Si	B	< 0	Se desacelera respecto al caso isotérmico
Celda radial, muestra radial porosa	No	A	> 0	Se desacelera respecto al caso isotérmico
Celda radial, muestra radial porosa	No	A	< 0	Se acelera respecto al caso isotérmico
Tubo capilar	No	A	> 0	Se acelera respecto al caso isotérmico
Tubo capilar	No	A	< 0	Se desacelera respecto al caso isotérmico

Capítulo 9

Conclusiones generales

Físicamente, la penetración capilar y la imbibición espontáneas ocurren, respectivamente, cuando capilares y medios porosos se ponen en contacto con líquidos que mojan. El desbalance mecánico generado por la fuerza de tensión superficial, cuando ésta vence a la resistencia viscosa y a la gravedad, genera un flujo capilar lento que aquí ha sido analizado bajo la presencia de gradientes de temperatura.

Los resultados que se desprenden de esta investigación muestran que la penetración capilar y la imbibición se afectan de manera importante bajo la presencia tales gradientes. La realización de algunos experimentos muestra específicamente que estos flujos capilares se aceleran, desaceleran o son invariantes dependiendo de la geometría, de los materiales involucrados y del signo e intensidad de los gradientes de temperatura. Los modelos aquí desarrollados para dichas geometrías consideran flujos unidimensionales, incompresibles y leyes (relaciones constitutivas) lineales para la viscosidad absoluta, μ , y la tensión superficial, σ , en función de la temperatura. Ello ha sido suficiente para describir con éxito la penetración capilar y la imbibición en geometrías fundamentales para la ciencia y la ingeniería de los fenómenos capilares. En particular, las celdas verticales y radiales de Hele-Shaw son estructuras idóneas para entender la imbibición en medios porosos fracturados reales. Esto es así porque los medios porosos fracturados, por lo general, tienen matrices muy poco permeables y los flujos de fluidos ocurren principalmente en cavidades (fracturas) muy esbeltas en forma de flujos de película. Dichos medios también están, en muchos casos de interés práctico, bajo la acción del gradiente geotérmico. Aquí se analizaron celdas, con espacios capilares tipo fracturas, bajo la presencia de gradientes de temperatura

controlados y se entendió cómo la imbibición es afectada por la presencia de dichos gradientes.

Dentro de los resultados más elaborados que se presentan en este trabajo, se demuestra a través de varios experimentos realizados con sumo cuidado que la evaporación que puede presentarse en este tipo de experimentos no representa un factor importante y que los efectos más relevantes se deben a la presencia misma de los gradientes de temperatura. Conviene comentar que la evaporación es muy importante en el proceso de secado de medios porosos, aunque en ese proceso la formación de dedos y puentes líquidos con estructura tridimensional, muy azarosa, es su principal característica [83].

Finalmente, con los modelos matemáticos desarrollados en este trabajo es posible determinar que parámetro rige la evolución temporal del frente de imbibición. En este sentido, como ya se ha mencionado los problemas se pueden agrupar en dos casos, el primero se debe al hecho de considerar los efectos de la gravedad y el segundo considera que los efectos de la gravedad son despreciables. A partir del análisis que se presentó en el capítulo 8 se establece que

Efectos de la gravedad	Parámetro que rige la dinámica del fluido
Si	B
No	A

Con estos resultados, se puede determinar a priori cuando el frente de imbibición se acelera o desacelera respecto al caso isotérmico (ver tablas del capítulo 8).

Por otra parte, a partir del modelo de Forchheimer, se establece que el frente de imbibición es función de distintos parámetros, es decir $\xi = \xi(\tau, Re_p, F, \beta_w)$, además se establece que dos parámetros importantes, β_w y Pe , regulan tanto la transferencia de calor como la penetración capilar.

$$\beta_w = \frac{t_{th}}{t_i} \sim \frac{(\rho c)_e}{\phi \rho_w c_w} = 1 + \frac{(1 - \phi) \rho_m c_m}{\phi \rho_w c_w} \text{ y } Pe = \frac{\phi K (p_0 - p_c) / \mu}{\alpha_e},$$

A partir de los resultados y como se observa en las gráficas presentadas (6-3 - 6-10), con el incremento en valor de β_w , se acelera el transporte convectivo de energía y también provoca un desplazamiento más rápido del frente de imbibición. Por otra parte, resulta interesante observar la influencia del número de Péclet, para ello se muestra la figura 6-5, para valores de $Pe = 10$

y $\beta_w = 10$, que en comparación con la figura 6-3, se observa que el perfil de temperatura se atenúa para tiempos iguales de imbibición. Este comportamiento se presenta con mayor claridad para valores de $Pe = 10$ y $\beta_w = 100$ como se ilustra en la figura 6-6. En este caso el avance del frente de imbibición se acelera notablemente y el equilibrio térmico se alcanza dentro de la zona mojada ya que para diferentes incrementos en el tiempo de imbibición la temperatura del frente tiene un valor de $\theta = 0$. Este comportamiento se intensifica para valores de $Pe = 100$ y $\beta_w = 10$ como se observa en la figura 6-7. En el caso de la figura 6-7 se puede observar también la existencia de una capa límite térmica, que se observa mejor en las figuras 6-6 y 6-8 para $\beta_w = 100$ y $Pe = 10$ y 100 respectivamente, por lo que se puede decir que a mayores valores de β_w ; la existencia de una capa límite térmica se evidencia más claramente, figura 6-9 y 6-10. En general los parámetros β_w y Pe , tienen una gran importancia tanto en la transferencia de calor como en la dinámica del fluido.

En suma, como principal resultado de esta investigación se dan las bases del estudio de la imbibición y penetración capilar, considerando a las fracturas como geometrías capilares simples, bajo la influencia de la temperatura. Los modelos desarrollados dejan de forma explícita la dependencia de la temperatura tanto de la viscosidad como de la tensión superficial y su influencia en la evolución temporal del frente de imbibición. Además, se establece un criterio para conocer a priori los efectos de los parámetros adimensionales A y B y como afectan la evolución temporal del frente de imbibición o de penetración capilar.

9.1. Comentarios finales

A partir del trabajo presentado en esta tesis, se puede ver que existen una gran diversidad de situaciones físicas que se pueden analizar, en particular la influencia del gradiente de temperatura en el proceso de imbibición, en este sentido resulta interesante considerar también dispersión térmica, [85] y [86], durante el proceso de imbibición tanto en capilares como en medios porosos, ya que esta representa un mecanismo importante en la transferencia de calor. Otro aspecto importante se debe a las inestabilidades que se presentan en el frente de imbibición "dedos" (fingering, ver figura 9-1) [31], [73], [87] y [88] ya que en los estudios realizados en este sentido se considera un proceso a temperatura constante, por lo que analizar la influencia de

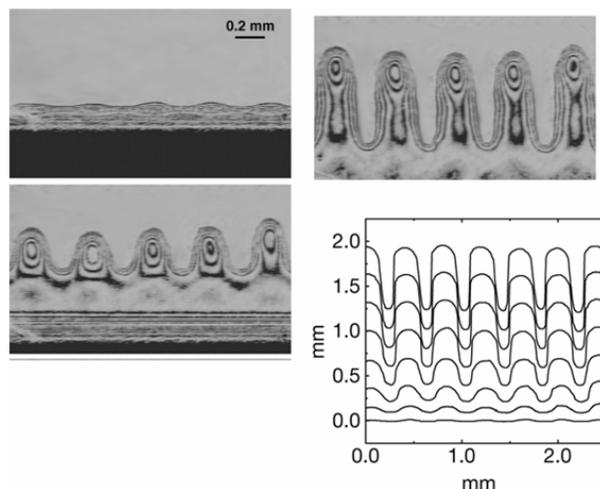


Figura 9-1: Inestabilidades "dedos" que se presentan en el frente de imbibición. Imbibición en una placa vertical isotérmica.

la temperatura representa una nueva línea de investigación. En este mismo sentido se puede estudiar el efecto de otros factores como la evaporación, [89], en la evolución temporal de las inestabilidades en el frente de imbibición.

Por otro lado, el estudio del desplazamiento de un fluido "1", que satura un capilar o un medio poroso, por otro fluido "2" que penetra por fuerzas capilares es de gran importancia en la industria. En general éste es un fenómeno que se presenta de manera frecuente, en los estudios reportados se consideran fluidos inmiscibles [10],[90] y el proceso se realiza de manera isotérmica. Por lo anterior, se puede decir que resulta relevante estudiar la influencia de la presencia de gradientes de temperatura, además se puede considerar que los fluidos son miscibles lo que aporta nuevas ideas para la investigación, en este sentido si se considera que el fluido que penetra en medio poroso es una mezcla de dos o más fluidos [91],[92], el análisis resulta más complejo. Por otro lado, cuando existen gradientes de temperatura se puede presentar movimiento convectivo dentro del capilar o de la muestra porosa,[93], [94],[95]. Se puede decir como conclusión que la imbibición es un fenómeno que se ha estudiado desde el siglo pasado, sin embargo a pesar de las investigaciones realizadas, existen una gran diversidad de nuevas líneas de investigación. En el caso particular de esta tesis, la influencia de un gradiente de

temperatura no se ha estudiado por lo que los resultados reportados como consecuencia de esta investigación son la base de estudios más completos de la imbibición.

Por último, los trabajos futuros que se desprende de esta tesis se refieren básicamente al estudio de la dispersión térmica, estudio de la formación de dedos en el frente de imbibición, considerar el caso en el que durante la penetración capilar se presentan flujos de calor periódicos, la interacción de la matriz porosa con la fractura, por último considerar la imbibición en microcanales con gradientes de temperatura.

Como resultado de esta tesis se desprenden dos trabajos publicados en revistas internacionales y uno en revista nacional.

1) Sánchez, M., Sánchez, F., Pérez-Rosales, C., Medina, A., Treviño, C., Imbibition in Hele-Shaw cell under temperature gradient., *Phys. Lett. A*, **324**, 14, 2004.

2)M. Sanchez, E. Luna, A.Medina and F. Méndez; Simultaneous imbibition-heat convection process in a non-Darcian porous medium, *Journal of Colloid and Interface Science*. **288** (2005) 562-569.

3)M. Sánchez, A. Medina, A. Rojano-Aguilar Spontaneous imbibition in a porous medium under longitudinal temperature gradients. en imprenta., *Revista mexicana de física*. 2005.

Apéndice A

Número de Péclet en capilares

En este trabajo se ha considerado que la transferencia de calor de las paredes del capilar al seno del líquido es más rápida que la penetración capilar, esta consideración es básica para establecer que el fluido alcanza de manera casi instantánea la temperatura o la distribución de temperaturas del sólido. A continuación se presenta un análisis para demostrar que esta suposición es válida, además se estima la longitud en la que el fluido que penetra alcanza la temperatura del sólido.

Como se observa en la figura A-1, se considera un corte transversal de un capilar cilíndrico de radio a , con paredes de espesor δ , el cual está sujeto a un gradiente longitudinal de temperatura, G .

Dado que el tiempo de penetración capilar t_i debe de ser mayor que el tiempo de difusión t_D , se puede escribir lo siguiente

$$t_i \gg t_D. \quad (\text{A.1})$$

Los tiempos de penetración capilar y de difusión de calor invertidos en recorrer la distancia equivalente al radio del capilar a , son

$$t_i = \frac{a}{\left| \frac{dh}{dt} \right|}, \quad (\text{A.2})$$

$$t_D = \frac{a^2}{\alpha_l}, \quad (\text{A.3})$$

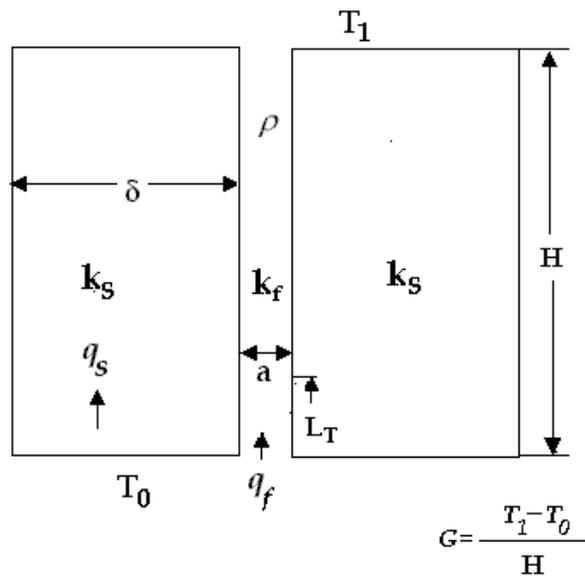


Figura A-1: Esquema de la penetración capilar en un capilar cilíndrico con paredes de espesor δ , sujeto a un gradiente de temperatura, G . Aquí, k_s y k_f son las conductividades térmicas del sólido y del fluido, respectivamente.

respectivamente. Notese que α_l es la difusividad térmica del líquido. La Ec. (A.1) lleva a que

$$\frac{a}{\left| \frac{dh}{dt} \right|} \gg \frac{a^2}{\alpha_l}. \quad (\text{A.4})$$

Reordenando términos se encuentra que

$$1 \gg \frac{\left| \frac{dh}{dt} \right| a}{\alpha_l}, \quad (\text{A.5})$$

lo cual, por definición, es el número de Péclet $Pe = u_c l / \alpha_l$, donde u_c es una velocidad característica y l es una distancia característica. El número de Péclet compara la rapidez de transporte de calor por convección respecto al calor que se transfiere por conducción [80]. Finalmente, la Ec. (A.5) en términos del número de Péclet establece que

$$1 \gg Pe. \quad (\text{A.6})$$

El análisis anterior es válido también en estructuras eje simétricas como un tubo capilar cónico y para las celdas de Hele-Shaw. En el caso específico del capilar cónico la inclinación de las paredes puede afectar de manera importante el flujo que penetra, por lo que la estimación del espesor de las paredes resulta importante.

Para medios porosos la relación dada por la Ec. (A.1) se convierte en

$$\frac{\left(\frac{dh}{dt} \right) d}{\alpha_l} \ll d_g / d \quad (\text{A.7})$$

donde d_g es el diámetro promedio de grano, d es el diámetro de poro y la relación $\left[\left(\frac{dh}{dt} \right) d \right] / \alpha_l$ es por definición el número de Péclet $[(dh/dt) d] / \alpha_l \equiv Pe$. Por lo anterior, la condición que se debe cumplir para que el fluido alcance de manera casi instantánea la temperatura del medio poroso esta determinada por

$$Pe \ll d_g / d. \quad (\text{A.8})$$

Es importante mencionar que en los experimentos tanto en capilares como en medios porosos esta condición se cumplió de manera satisfactoria.

Otro punto importante es conocer la longitud en la que se establece el gradiente de temper-

atura en el fluido a medida que avanza dentro del capilar, Esto nos lleva a realizar un análisis de órdenes de magnitud. Partiendo de la ecuación de la energía se tiene que

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \mathbf{v} \cdot \nabla T = k_f \nabla^2 T, \quad (\text{A.9})$$

en ordenes de magnitud

$$\rho c \frac{\Delta T}{\Delta t} \sim \rho c v \frac{\Delta T}{L_T} \sim k_f \frac{\Delta T}{a^2}, \quad (\text{A.10})$$

donde L_T es la longitud en la que el fluido alcanza la temperatura de las paredes de capilar.

Ordenando término se encuentra que

$$L_T \sim \text{Re Pr } a, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Re} = \frac{\rho v a}{\mu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu \rho c}{k_f}, \quad (\text{A.12})$$

otra forma es

$$L_T \sim a \text{Pe}. \quad (\text{A.13})$$

Como se observa la longitud L_T depende tanto del número de Péclet como del radio del capilar a . Esta longitud L_T se refiere a la distancia en la que el fluido alcanza la temperatura de las paredes del capilar, en los casos estudiados en esta tesis el número de Péclet es pequeño con lo que se garantiza que el fluido alcanza la temperatura del capilar rápidamente lo que implica que existe un buen contacto térmico entre el fluido y el sólido (poca resistencia térmica).

De la expresión anterior se puede decir que L_T en general es menor que uno, ya que en el número de Reynolds es pequeño en este tipo de flujos además, de que el radio del capilar es siempre mucho menor que la unidad.

Apéndice B

Modelo numérico

Las ecuaciones discretizadas se muestran a continuación. En primer lugar la ec. (6.18) se discretiza

$$\frac{Re_p F}{\beta_w} \xi \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \xi \frac{d\xi}{d\tau} = \beta_w, \quad (\text{B.1})$$

que en diferencias finitas se expresa de la siguiente manera.

$$\frac{FRe_p}{\beta_w} \left(\frac{\xi_k + \xi_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\Delta\tau} \right)^2 + \left(\frac{\xi_k + \xi_{k-1}}{2} \right) \left(\frac{\xi_k - \xi_{k-1}}{\Delta\tau} \right) - \beta_w = 0, \quad (\text{B.2})$$

A partir de la expresión anterior se puede encontrar mediante procedimientos algebraicos una expresión implícita para la posición de la interfaz ξ_k . La que se puede resolver de manera iterativa

$$\xi_k = \sqrt{\xi_{k-1}^2 + \frac{2\beta_w \Delta\tau}{\frac{FRe_p}{\beta_w \Delta\tau} (\xi_k - \xi_{k-1}) + 1}}, \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado, la Ec. (6.16) se escribe como:

$$\Theta_{i-1}^k \left\{ + \frac{\left(1 - \bar{\xi}^k\right) \frac{d\xi^k}{d\tau} \Delta\tau}{4\Delta\zeta} (1 - \zeta_i) - \frac{\beta_w \alpha_{de} \Delta\tau}{2Pe\Delta\zeta^2} \right\} + \Theta_i^k \left\{ \left(1 - \bar{\xi}^k\right)^2 + \frac{\beta_w \alpha_{de} \Delta\tau}{Pe\Delta\zeta^2} \right\}$$

$$+\Theta_{i+1}^k \left\{ -\frac{(1-\bar{\xi}^k) \frac{d\xi^k}{d\tau} \Delta\tau}{4\Delta\zeta} (1-\zeta_i) - \frac{\beta_w \alpha_{de} \Delta\tau}{2Pe\Delta\zeta^2} \right\} = R_i^{k-1}, \quad (\text{B.4})$$

con su respectiva condición inicial ($\tau = 0$) y su condición de frontera (en $\zeta = 0$):

$$\Theta_i^1 = 0, \Theta_n^k = 0. \quad (\text{B.5})$$

Por otra parte, la Ec (6.13) se expresa de la siguiente manera

$$\Theta_n^k(wet) = \Theta_n^k(dry) \quad \text{y} \quad \Theta_{w,n}^k - \Theta_{w,n-1}^k = \frac{k_{de}\xi^k \Delta\eta}{(1-\xi^k) \Delta\zeta} (\Theta_{d,2}^k - \Theta_{d,1}^k), \quad (\text{B.6})$$

y la Ec. (6.19) se simplifica a la forma

$$\begin{aligned} \Theta_{i-1}^k \left\{ -\frac{\bar{\xi}^k (\xi^k - \xi^{k-1})}{4\Delta\eta} \left(\frac{1}{\beta_w} - \eta_i \right) - \frac{\beta_w \Delta\tau}{2Pe\Delta\eta^2} \right\} + \Theta_i^k \left\{ (\bar{\xi}^k)^2 + \frac{\beta_w \Delta\tau}{Pe\Delta\eta^2} \right\} \\ + \Theta_{i+1}^k \left\{ +\frac{\bar{\xi}^k (\xi^k - \xi^{k-1})}{4\Delta\eta} \left(\frac{1}{\beta_w} - \eta_i \right) - \frac{\beta_w \Delta\tau}{2Pe\Delta\eta^2} \right\} = \bar{R}_i^{k-1}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\Theta_i^1 = 0 \quad \text{y} \quad \Theta_1^k = 1. \quad (\text{B.8})$$

Para complementar el modelo numérico. En las relaciones (B.4) y (B.7), R_i^{k-1} y \bar{R}_i^{k-1} , representan términos en diferencias finitas que son funciones de la temperatura y se calculan en un tiempo inmediato anterior τ , $\bar{\xi} = (\xi_k + \xi_{k-1})/2$, se usa el índice, k , como subíndice o superíndice indistintamente.

Apéndice C

Balance de energía en el medio poroso

Durante el proceso de imbibición es importante saber si el fluido que penetra alcanza la temperatura del medio poroso o de las paredes del capilar. En el apéndice A, se determina una relación en la que se considera los efectos de las paredes o de la matriz en el fluido. Como se menciona en ese apéndice, los procesos en los que el fluido avanza lentamente se caracterizan por un número de Péclet muy pequeños además de que el proceso de transferencia de calor es por conducción.

Ahora en esta sección se estudia mediante un balance de energía la relación entre el calor acumulado en la matriz poroso antes de la penetración capilar y el calor que se le transfiere cuando el fluido penetra el medio poroso, esto con el fin de determinar si la energía acumulada en la muestra porosa es capaz de suministrar la energía al fluido necesaria para elevar su temperatura sin que esto modifique la distribución de temperatura en el sólido. Se estudia como caso particular, el dispositivo experimental para la muestra radial porosa, sin embargo este análisis se puede extender a los casos de la celda Hele-Shaw, tubo capilar y cono.

Se considera el dispositivo experimental de la imbibición radial en una muestra porosa que se presentó en secciones anteriores.

La energía interna que acumula la placa de cobre y la del papel con fluido esta determinado por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
U_c &= \rho C_{pc} V_c \Delta T, \\
U_p &= (\rho C_p)_e V_p \Delta T.
\end{aligned}
\tag{C.1}$$

Donde U_c es la energía interna del cobre y U_p es la energía interna de la muestra porosa (papel). Las propiedades de la muestra porosa se determinan mediante las siguientes expresiones, se consideran propiedades efectivas ya que la muestra es porosa y saturada de aire inicialmente. Los subíndices c y p, se refieren a propiedades o cantidades de la placa de cobre y de la muestra porosa respectivamente

$$\begin{aligned}
(\rho c)_e &= \phi \rho_w c_w + (1 - \phi) \rho_m c_m, \\
\alpha_e &= \phi \alpha_w + (1 - \phi) \alpha_m, \\
V_c &= \pi R^2 \delta_c, \\
V_p &= \pi R^2 \delta_p.
\end{aligned}
\tag{C.2}$$

La energía interna por unidad de área del cobre esta determinada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
U_c &= \rho V_c C_{pc} \pi R^2 \delta_c \Delta T, \\
\frac{U_c}{\pi R^2} &= \rho V_c C_{pc} \delta_c \Delta T, \\
u_c &= \rho V_c C_{pc} \delta_c \Delta T.
\end{aligned}
\tag{C.3}$$

Las propiedades para el cobre son densidad $\rho = 8800 \text{ Kg/m}^3$, calor específico $C_p = 422.02 \text{ KJ/KgK}$, Difusividad térmica $\alpha = 14 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, conductividad térmica $k = 52 \text{ W/mK}$, espesor de la placa $\delta_c = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$

$$\begin{aligned}
u_c &= \rho V_c C_{pe} \delta_c \Delta T \\
u_c &= (8800)(0.003)(422.02)(10) \\
u_c &= 1.1141 \times 10^5 \text{ [J]}.
\end{aligned}$$

En este mismo sentido, la energía por unidad de área para la región mixta de papel y del fluido se determina de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
U_p &= (\rho C_p)_e \pi R^2 \delta_p \Delta T, \\
\frac{U_p}{\pi R^2} &= (\rho C_p)_e \delta_p \Delta T, \\
u_p &= (\rho C_p)_e \delta_p \Delta T,
\end{aligned} \tag{C.4}$$

para el papel $\delta_p = 3.1 \times 10^{-4}$, densidad $\rho_p = 930 \text{ Kg/m}^3$, Calor específico $C_{p_p} = 1340 \text{ KJ/KgK}$, Difusividad térmica $\alpha_p = 1.3 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, Conductividad térmica $k_p = 0.18 \text{ W/mK}$. Las propiedades del agua son densidad $\rho_w = 998 \text{ Kg/m}^3$, Calor específico $C_{p_w} = 4.18 \text{ KJ/KgK}$, Difusividad térmica $\alpha_w = 0.68326 \text{ m}^2/\text{s}$, Conductividad térmica $k_w = 6.13 \times 10^{-3} \text{ W/mK}$.

$$\begin{aligned}
(\rho c)_e &= \phi \rho_w c_w + (1 - \phi) \rho_m c_m, \\
(\rho c)_e &= (0.2)(998 \times 4.18) + (0.8 \times 930 \times 1340), \\
(\rho c)_e &= 9.9779 \times 10^5.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_e &= \phi \alpha_w + (1 - \phi) \alpha_m, \\
\alpha_e &= (0.2 \times 0.68326) + (0.8 \times 1.3 \times 10^{-7}), \\
\alpha_e &= 0.13665 \text{ m}^2/\text{s}.
\end{aligned} \tag{C.6}$$

:

$$\begin{aligned}
 u_p &= (\rho C_p)_e \delta_p \Delta T, \\
 u_p &= (9.9779 \times 10^5) \times (3.1 \times 10^{-4}) \times (10), \\
 u_p &= 3 \times 10^3 \quad [\text{J}].
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

La energía que acumula la placa de cobre es del orden de 10^5 J, mientras que la energía que absorbe el papel y el fluido es del orden de 10^3 , por lo que la energía que se acumula en la placa de cobre es capaz de suministrar la energía necesaria para que el medio poroso y el fluido cambien su temperatura sin afectar la temperatura de la placa, es decir que la distribución de temperatura se mantiene durante la imbibición

$$\begin{aligned}
 t_{D_{pe}} &= \frac{\delta_p^2}{\alpha_e}, \\
 t_{D_{pe}} &= \frac{(0,7 \times 10^{-4})^2}{0,13665}, \\
 t_{D_{pe}} &= 3.5857 \times 10^{-8} \text{ s}
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Por otra parte ya que el tiempo de difusión en la muestra porosa con el fluido, es mucho menor que el tiempo de imbibición $t_i = H/|dR/dt| = 4.4286$ s, entonces se confirma que el fluido alcanza la temperatura de la muestra porosa de manera casi inmediata además, la energía que acumula la placa es suficiente para suministrar la energía que se transporta hacia el fluido y el material sólido $u_c \gg u_p$.

Apéndice D

Datos Técnicos

Los experimentos de esta tesis se realizaron en el laboratorio de difusión y convección del grupo de yacimientos del Instituto Mexicano de Petróleo (IMP).

Los equipos utilizados en este trabajo son calibrados por el fabricante, por lo que la calibración no es parte de la experimentación. En el caso de la cámara térmica se compararon las lecturas de ésta contra lecturas de termopares tipo K, utilizando un termómetro digital marca FLUKE con resolución de ± 0.1 °C, Para comparar estos resultados se utilizó una placa de cobre pintada de color negro mate, en esta placa se estableció un gradiente vertical de temperatura. Los resultados arrojan una diferencia no mayor a ± 0.2 °C, con estos resultados se confirma que la información proporcionada por la cámara térmica es confiable.

Una comparación similar se realizó con los baños térmicos, en este caso se midió la temperatura del agua de salida de los baños, de igual manera se compara la información que proporcionan los baños contra los datos obtenidos con el termómetro digital. Se observó que la variación entre las temperaturas no supera a ± 0.5 C , con lo cual se puede confiar en los valores que proporciona los baños térmicos. Cabe mencionar que los datos relevantes son los que se obtienen con la cámara térmica.

Cámara infrarroja marca Thermacam Flir

Modelos PM595

Intervalo de temperatura -50°C a 1300°C

Resolución ± 0.1 K

Video cámara digital marca Sony
Modelo Handycam Digital 8
velocidad de captura 30 cuadros por segundo

Baños térmicos
Baño térmico marca Haake
dispositivos C10
Intervalo de temperatura -20 °C a 100 °C
Resolución 1°C

Baño térmico marca HETO
dispositivo DBT Hetotherm CB7
Intervalo de temperatura -50 °C a 150 °C
Resolución 0.1 °C

A continuación se muestran fotografías de los dispositivos experimentales que se utilizaron en esta tesis.

Celda Hele-Shaw
Radial Hele-Shaw y Radial poroso
Imbibición en un medio poroso (ROCA)



Figura D-1: Fotografía del modelo experimental que se empleó en la penetración capilar en una celda de Hele-Shaw. A la derecha se muestra el baño térmico HETE CB7, a la izquierda el baño térmico HAKE C10, en el centro se observa el modelo experimental.

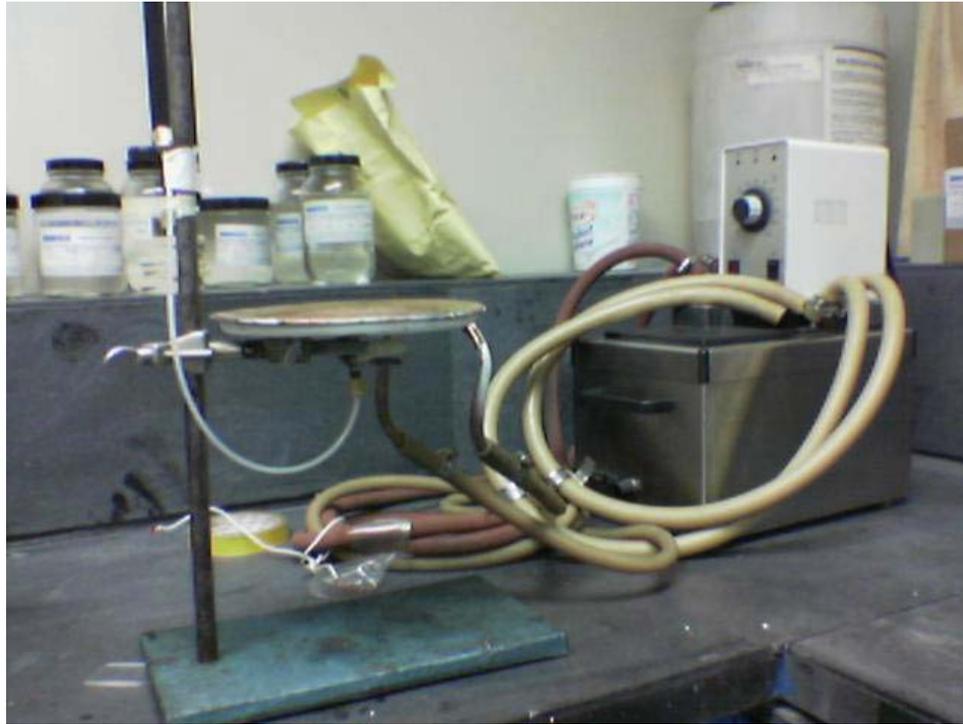


Figura D-2: Dispositivo experimental utilizado en la penetración capilar en una celda radial de Hele-Shaw.



Figura D-3: Dispositivo experimental, que se emplea en la imbibición en un medio poroso, Roca cuadra y cilíndrica.

Bibliografía

- [1] Bear, J., Dynamics of fluids in porous media, Dover, New York (1988).
- [2] Dullien, F. A. L., Porous Media, Fluid Transport and Pore Structure, Academic Press, San Diego (1991).
- [3] Morrow, N.R., Mason, G., Recovery of oil by spontaneous imbibition, Current Opinion Colloid Interface Sci. **6**, 321 (2001).
- [4] Li, K., Horne, R.N., Characterization of spontaneous water imbibition into gas-saturated rocks, paper SPE 62552 presented at the 2000 SPE/AAPG Regional Meeting, Long Beach, California, 19-23 junio 2000.
- [5] Meleán, Y., Broseta, D., Blossey, R., Imbibition fronts in porous media: effects of the initial wetting fluid saturation and flow rate, J. Pet. Sci. Eng. **39**, 327 (2003).
- [6] Chen, Q., Gingras, M.K., Balcom, B.J., A magnetic resonance study of pore filling processes during spontaneous imbibition in Berea sandstone, J. Chem. Phys. **119**, 9609 (2003).
- [7] Alava, M., Dubé, M., Rost, M., Imbibition in disordered media, Adv. Phys. **53**, 83 (2004).
- [8] Middleman, S., Modeling axisymmetric flows, Academic Press, New York (1995).
- [9] de Gennes, P.G., Brochard-Wyart, F., Quéré, D., Capillarity and Wetting Phenomena, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [10] Park, C. W., Homsy, G.M., Two-phase displacement in Hele-Shaw cells Theory, J. Fluid Mech., **139**, 291 (1984).

- [11] Jensen, W.C., Li, D., Determination of line tensions from the capillary rise in a conical tube, *Colloids Surfaces A*, **156**, 519 (1999).
- [12] Asekomhe, S. O. Elliot, J.A.W., The effect of the interface deformation due to gravity on line tension measurement by the capillary rise in a conical tube, *Colloids Surfaces A*, **220**, 271 (2003).
- [13] CRC Handbook of Chemistry and Physics., David R. Lide., 1999-2000, 80TH Edition.
- [14] Bell, J. M., Cameron, F. K., The flow of liquids through capillary spaces, *J. Phys. Chem.* **10**, 658 (1906).
- [15] Lucas, R., *Kolloid.-Zeitschr. Ueber das Zeigesetz des kapillaren Aufstiegs von flüssigkeiten*, **23**, 15 (1918).
- [16] Washburn, E.W., The dynamics of capillary flow, *Phys. Rev.* **17**, 273 (1921).
- [17] Anderson, W.G., Wettability Literature Survey Part 4: Effects of Wettability on Capillary Pressure, *J. Pet. Tech.* (1987).
- [18] Popovich, L. L., Feke, D. L., Manas-Zloczower, I., Influence of physical and interfacial characteristics on the wetting and spreading of fluids on powders., *Powder Tech.* **104**, 68 (1999).
- [19] Chimenti, M. E., and Najurieta, H. L., Influence of temperature and interfacial tension on spontaneous imbibition process, paper SPE 53668 presented at the 1999 SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference, Caracas Venezuela, 21-23 Abril 1999.
- [20] Donmez, A., Investigation of the effect of temperature on heavy oil recovery by imbibition mechanism, paper SPE 37555 presented at the 1997 SPE International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium, California, 10-12 Febrero 1997.
- [21] Babadagli, T., Temperature effect on the heavy-oil recovery by imbibition in fractured reservoirs, *J. Pet. Sci. Eng.* **14**, 197 (1996).
- [22] Babadagli, T., Erratum to: Temperature effect on the heavy-oil recovery by imbibition in fractured reservoirs, *J. Pet. Sci. Eng.* **18**, 163 (1997).

- [23] Babadagli, T., Scaling capillary imbibition during static thermal and dynamic fracture flow conditions, *J. Pet. Sci. Eng.* **33**, 223 (2002).
- [24] N. Eustathopoulos, M.G. Nicholas and B. Devret, *Wettability at high temperatures*, Pergamon Press, Oxford, 1999.
- [25] Phillips, O. M., *Flow and reactions in permeable rocks*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [26] Oren, P-E., Bakke, S., Reconstruction of Berea sandstone and pore-scale modeling of wettability effects, *J. Pet. Sci. Eng.* **39** 177 (2003).
- [27] Bhadeshia, H.K.D.H., Joining of commercial aluminium alloys, *Proc. Intl. Conference on Aluminium (INCAL 2003)*. Editores: S. Subramanian y D. H. Sastry, pp. 195-204 (2003).
- [28] Plourde, F., Prat, M., Pore network simulations of drying of capillary porous media. Influence of thermal gradients, *Intl. J. Heat Mass Transfer* **46**, 1293 (2003).
- [29] Levich, V., *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood (1962)
- [30] Ludviksson, V., Lightfoot, E. N., Fingering instability of thin spreading films driven by temperature gradients, *AIChE J.* **17**, 1166 (1971).
- [31] Cazabat, A.M., Heslot, F., Troian, S.M., Carles, P., Fingering instability of thin spreading films driven by temperature gradients, *Nature*, **346**, (1990).
- [32] Sammarco, T. S. , Burns, M. A., Thermocapillarity pinning of discrete drops in microfabricated analysis devices., *AIChE J.* **45**, 350, (1999).
- [33] Kataoka, D. E., Troian, S. M., Fingering instabilities on dynamically patterned substrates: Implications for microfluids., *Nature* **402**, 794 (1999).
- [34] Dreyer, M., Delgado, A., Hans-Joseph, R., Capillary rise of liquid between parallel plates under microgravity, *J. Colloid Interface Sci.* **163**,158 (1994).
- [35] Paterson, L., Radial fingering in a Hele-Shaw cell, *J. Fluids Mech.* **113**, 513 (1981).
- [36] Marmur, A., The radial capillary, *J. Colloid Interface Sci.* **124**, No 1, (1988).

- [37] Dganit, D., Marmur, A., Radial capillary penetration into paper: Limited and unlimited liquid reservoirs, *J. Colloid Interface Sci.* **166**, 245 (1994).
- [38] Schutt, H., Spetzler, H., Capillary crack imbibition: A theoretical and experimental study using a Hele-Shaw cell, *Pure Applied Geophysics*, **158**, 537-541 (2001).
- [39] White, F. M., *Fluid mechanics*, McGraw-Hill, New York (1994).
- [40] Cameron, A., *The principles of lubrication*, John Wiley and Sons, 1966.
- [41] Hersery, M. D., *Theory and reserch in lubrication*, John Wiley and Sons, 1966.
- [42] Tipei, N., *Theory of lubrication*, Stanford University Press, 1962.
- [43] Sánchez, M., Medina, A., Higuera, F. J., Spontaneous imbibition into Hele-Shaw cells under temperature differences, *Proceedings ASME Heat Transfer 2004*, HT-FED2004-56663.
- [44] Peek, R.L, Jr., McLean, D.A, Capillary penetration of fibrous materials, *Ind. Eng. Chem.* **6**, No. 2 (1934).
- [45] Medina, A. , Pineda, A., Treviño, C., Imbibition driven by a temperature gradient, *J. Phys. Soc. Japan* **72**, 979 (2003).
- [46] Batten, G. L., *J. Colloid Interface Sci.*, Liquid imbibition in capillaries and packed beds, Vol **102**, 513, 1984.
- [47] Hamraoui, A., Thuresson, K., Nylander, T., Yaminsky, V., *J. Colloid Interface Sci.* **226**, 199 (2000).
- [48] Méndez, F. , Medina, A. , Luna, E., Treviño, C., An asymptotic analysis of wicking penetration in a capillary circular tube for initial steps of the process, *Enviado a Rev. Mex. Fis.* (2002).
- [49] Pearson, J.R., Shah, Y.T., Vieira, E.S.A., Stability of non-isothermal flow in channels-I. Temperature dependent newtonian fluid without heat generation, *Chem. Eng. Sci.* **28**, 2079 (1973).

- [50] Nienhuser, Ch. , Kuhlman, H. C., Stability of thermocapillary flows in non-cylindrical liquid bridges, *J. Fluid Mech.* **458**, 35 (2002).
- [51] Incropera, F. P., Dewitt, D. P., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Wiley, New York, (2001).
- [52] She, H. Y., Sleep, B. E., The effect of temperature on capillary pressure-saturation relationships for air-water and perchloroethylene-water system., *Water Resour. Res.* **34**, 2587 (1998).
- [53] Dubé, M., Majaniemi, S., Rost, M., Alava, M. J., Elder, K. R., Ala-Nissila, T., Interface pinning in spontaneous imbibition, *Phys. Rev. E*, **64**, 051605.
- [54] Sánchez, M., Sánchez, F., Pérez-Rosales, C., Medina, A., Treviño, C., Imbibition in Hele-Shaw cell under temperature gradient, *Phys. Lett. A* **324**, 14 (2004).
- [55] Langbein, D., *Capillary surfaces*, Springer-Berlin 2002.
- [56] Shelly, M.J., Tian, F-R., Wlodarsky, K., Hele-Shaw flow and pattern formation in a time dependent gap, *Nonlinearity*, **10**,1471 (1997).
- [57] Medina, A., Pérez-Rosales, C., Pineda, A., Higuera, F. J, Imbibition in pieces of paper with different shapes, *Rev. Mex. de Fís.* **47**, 537 (2001).
- [58] Shah, Y.T., Pearson, J.R., Stability of non-isothermal flow in channels-I. Temperature dependent power-law fluids without heat generation, *Chem. Eng. Sci.* **29**, 737 (1974).
- [59] Shah, Y.T., Pearson, J.R., Stability of non-isothermal flow in channels-III. Temperature dependent power-law fluids with heat generation, *Chem. Eng. Sci.* **29**, 1485 (1974).
- [60] Pollard, D.D., Muller, O.H., Dockstad, D.R., *Geol. Soc. Am. Bull.* **86**, 351 (1975).
- [61] Guillespie, T., The spreading of low vapor pressure liquids in paper, *Journal of colloid science*, **13**, 32 (1958).
- [62] Starov, V.M., Zhdanov, S.A., Velarde, M.G., Capillary imbibition of surfactant solutions in porous media and capillaries: partial wetting case, *J. Colloid Interface Sci.* **273**, 589 (2004).

- [63] Brzoska, J.B., Brochard, F., Rondelez, F., Langmuir, **9**, 2220 (1993).
- [64] Brzoska, J.B., Brochard, F., Rondelez, F., Europhys. Lett. **19**, 97 (1992).
- [65] Kuzakov, M.M., Nekrasov, D.N., Ascenso de líquido en capilares de sección variable e histéresis capilar, Dokladi Akademi Nauk., URSS 119 (1958).
- [66] Nekrasov, D.N., Kuzakov, M.M., Ascenso capilar de líquido en medios porosos e histéresis capilar, Dokladi Akademi Nauk., URSS 133 (1960).
- [67] Levine, S., Lowndes, J., Reed, P., Two-phase fluid flow and hysteresis in a periodic capillary tube, J. Colloid Interface Sci., **77**, No1 (1980).
- [68] Finn, R., Equilibrium capillary surfaces, Springer-Verlag, New York (1986).
- [69] Kissa, E., Capillary sorption in fibrous assemblies, J. Colloid Interface Sci. **83**, 265 (1981).
- [70] Pezron, I., Bourgain, G., Quere, D., Imbibition of a fabric, J. Colloid Interface Sci. **173**, 319 (1995).
- [71] Aranofsky, J.S., Masse, L., Natanson, S.G., A model for the mechanism of oil recovery from the porous matrix due to water invasion in fractured reservoirs, Trans. AIME. **213**, 17 (1958).
- [72] Mattax, C.C., Kyte, J.R., Imbibition oil recovery from water-drive fractured reservoir, SPE 177 (junio 1962).
- [73] Zik, O., Kustanovich, T., Moses, E., Olami, Z., Defects in wetting fronts: Experimental and theoretical results, Phys. Rev. E , **58** 689 (1998).
- [74] Vafai, K., Handbook of Porous Media, Marcel Dekker, New York (2000).
- [75] Forchheimer, F., Wasservevegung durch biöden., A. Ver Deutch Ing. **45**, 1782 (1901).
- [76] Liggett, J. A., Liu, P. L-F., The boundary integral equation method for porous media flow, George Allen, London (1983).
- [77] Muller, R.H., Clegg, D.L., Physical and geometric factors in chromatography, Annal. Chem., **23**, 403 (1951).

- [78] Davies, S.H., Hocking, L.M., Spreading and imbibition of viscous liquid on a porous base, *Phys. Fluids*, **11**, 48 (1999).
- [79] Lide, D. R., *Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, San Francisco California (1996).
- [80] Bejan, A., *Heat transfer*, John Wiley, New York (1993).
- [81] Barenblatt, G. I., Entov, V. M., Ryzhik, V. M., *Theory of fluid flows through natural rocks*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
- [82] Amaral, L.A.N, Barabási, A. L., Buldyrev, S.V., Havlin, S., Stanley, H.E., New exponent characterizing the effect of evaporation on imbibition experiments, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, (1994).
- [83] Whitaker, S., *Simultaneous Heat, mass, and Momentum Transfer in Porous Media: A Theory of Drying*, *Transport in Porous Media*
- [84] Andrew, W., Woods, Shaun, D., Fitzgerald, The Vaporization of a liquid front through a hot porous rock, *J. Fluid Mech.* **251**, 563-579 (1993).
- [85] Kuznetsov, A.V., Influence of thermal dispersion on forced convection in a composite parallel-plate channel, *Math. Phys.*, **52**, 135-150, (2001).
- [86] Wilkinson, G.E., Klute, A., The temperature Effect on the equilibrium Energy Status of Water Held by Porous Media., *Soil Science Soc. Proceedings*, 1962.
- [87] Linder, A., Bonn, D., Meunier, J., Viscous fingering in complex fluids.
- [88] Hernández-Machado, A., Soriano, J., Lacasta, A. M., Rodríguez, M. A., Ramírez-Piscina, L., Ortín, J., Interface roughening in Hele-Shaw flows with quenched disorder: Experimental and theoretical results., *Europhys Lett.* **55**, 194 (2001).
- [89] Fitzgerald, S.D., Woods, W.A., The instability of vaporation front in hot porous rock, *Nature*, **367**, (1994).

- [90] Méheust, Y., Lovoll, G., Maloy, J. K., Schmittbuhl, J., Interface scaling in a two-dimensional porous medium under combined viscous, gravity, and capilar effects., *Physical Review E*, **6**, 051603 (2002).
- [91] Philip, J.R., Vries, D.A., Moisture movement in porous material under temperature gradients, *Trans. American Geophys. Union.*, **38**, (1987).
- [92] De Vries, D.A., The theory of heat and moisture transfer in porous media revisted, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **30**, 1343 (1987).
- [93] Laurens, H., Behringer, R.P., Georgiadis, J., Visualization of convective fluid flow in a porous medium, *Nature*, **362**, 230 (1993).
- [94] Jackson, R.D., Rose, D.A., Penman, H.L., Circulation of water in soil under a temperature gradient, *Nature*, **205**, 314 (1965).
- [95] Gurr, C.G., Marshall, T. J., Hutton, J.T., Movement of water in soil due temperature gradient., *Soil Sci.* **74**, 335 (1952).