



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

CONTROL DESCENTRALIZADO ADAPTABLE DE UNA CLASE
DE SISTEMAS NO LINEALES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JUAN FRANCISCO FLORES RESENDIZ

TUTOR PRINCIPAL
Dr. YU TANG XU
COMITÉ TUTOR
Dr. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ
Dr. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

MÉXICO, D. F. FEBRERO 2013

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. MARCO ANTONO ARTEAGA PÉREZ
Secretario: Dr. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ
Vocal: Dr. YU TANG XU
1^{er.} Suplente: Dr. LEONID FRIDMAN
2^{d o.} Suplente: Dr HECTOR BENITEZ PEREZ

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

DR. YU TANG XU

FIRMA

Índice general

1. Introducción	6
1.1. Motivación	6
1.2. Estado del arte	8
1.3. Control centralizado y control descentralizado	9
1.4. Contribución principal de la tesis	10
1.5. Resumen de la tesis	10
2. Antecedentes	12
2.1. Conceptos básicos de estabilidad	12
2.2. Sistemas lagrangianos	12
2.2.1. Coordenadas generalizadas, energía y lagrangiano de un sistema	12
2.2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange	14
2.2.3. Estructura general y propiedades	14
2.3. Control adaptable de sistemas lagrangianos	15
2.3.1. Objetivo de control	15
2.3.2. Control de sistemas desacoplados	16
2.4. Problema de optimización Min-Max	19
3. Sistemas acoplados con términos lineales en parámetros	21
3.1. Planteamiento del problema	21
3.2. Diseño del controlador: Caso centralizado	22
3.3. Diseño del controlador: Caso descentralizado	25

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	4
3.4. Resultados de simulación	27
3.5. Conclusiones del capítulo	32
4. Sistemas acoplados con términos no lineales en parámetros	34
4.1. Planteamiento del problema	34
4.1.1. Estructura de interconexión	35
4.1.2. Objetivo de control	36
4.2. Diseño del controlador: Caso centralizado	36
4.3. Diseño del controlador: Caso descentralizado	40
4.4. Resultados de simulación	42
4.5. Conclusiones del capítulo	46
5. Conclusiones	48
5.1. Conclusiones	48
5.2. Perspectivas a futuro	50

Índice de figuras

3.1. Sistema de péndulos interconectados	28
3.2. Error de seguimiento en el primer péndulo.	28
3.3. Error de seguimiento en el segundo péndulo.	29
3.4. Señales de control para ambos péndulos.	29
3.5. Parámetros locales estimados el primer péndulo.	30
3.6. Parámetro de interconexión estimado en el primer péndulo.	30
3.7. Parámetros locales estimados el segundo péndulo.	31
3.8. Parámetro de interconexión estimado en el segundo péndulo.	31
4.1. Error de seguimiento del primer péndulo.	43
4.2. Error de seguimiento del segundo péndulo.	44
4.3. Señal de control para el primer péndulo.	44
4.4. Señal de control para el segundo péndulo.	45
4.5. Parámetros estimados en ambos péndulos.	45

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Cuando se consideran esquemas de control para sistemas de gran escala, las leyes de control necesarias para que el sistema presente un comportamiento deseado por lo general son difíciles de diseñar y de implementar. Tratándose de sistemas de alta dimensión, es conveniente dividir el sistema original en un conjunto de subsistemas de menor dimensión interconectados entre sí. Lo anterior proporciona una ventaja en cuanto a metodología del diseño ya que el objetivo es controlar cada uno de los subsistemas de dimensión reducida, sin embargo como resultado de dicha división las funciones de acoplamiento entre los subsistemas pueden ser tener una estructura demasiado compleja y, en general, dependerán de variables de estado de diversos subsistemas. Bajo este enfoque, las leyes de control diseñadas implicarían un intercambio constante de información entre los subsistemas resultantes de la división del sistema original. Para aprovechar los beneficios de considerar sistemas de dimensión reducida, es cada vez más frecuente la necesidad de diseñar esquemas de control descentralizado, en donde cada subsistema pueda ser controlado de manera local, reduciendo tanto como sea posible el intercambio de información con el resto de los subsistemas.

Entre las principales ventajas de los sistemas descentralizados se puede mencionar la escalabilidad del sistema, es decir, el sistema original puede aumentar o reducir su tamaño, lo que implica que el número de subsistemas interconectados variará. Ante esta modificación, un sistema centralizado requeriría de un rediseño total de las leyes de control. De la misma manera, si se presentara alguna falla en alguno de los subsistemas (sensores, actuadores o canales de comunicación), bajo el esquema centralizado este problema

se reflejaría en el resto de los subsistemas, provocando desde un mal desempeño hasta, en casos extremos, la pérdida de estabilidad del sistema completo, mientras que en un sistema descentralizado el efecto de alguna falla no se propagaría de manera crítica, proporcionándole robustez al sistema. Por un lado, es cierto que mientras menos información se intercambie entre subsistemas, la implementación de los controladores se simplifica, reduciendo no solo la carga computacional en cada uno de los controladores sino también la necesidad de canales de comunicación entre los subsistemas, sin embargo, si el intercambio de información se limita totalmente, es decir, se implementa un sistema de control totalmente descentralizado, cada uno de los subsistemas procurará mantener un buen desempeño en lo individual, lo que ante acoplamientos entre subsistemas puede provocar un mal desempeño si el sistema se observa como un conjunto.

En general, cuando un sistema de gran escala se divide en subsistemas, los términos de acoplamiento pueden tener una estructura muy general. Por un lado puede existir dependencia de variables provenientes de algún otro subsistema, pero también pueden depender de parámetros inciertos. Si bien, en la mayoría de los casos es posible obtener un modelo que describa la estructura física del sistema, la determinación de los parámetros involucrados en dichos modelos, tanto a nivel local como de interconexiones, puede representar una tarea muy complicada. Si además, se consideran sistemas los cuales pueden ver modificados lentamente sus parámetros debido a factores como temperatura, fricción, entre otros, en algún momento el modelo matemático dejaría de representar fielmente el comportamiento del sistema real, provocando así un funcionamiento diferente al deseado, independientemente del sistema de control utilizado. Por esta razón, se aborda el problema de control descentralizado adaptable en donde se considera que existe incertidumbre paramétrica tanto a nivel de dinámica local de los subsistemas como a nivel de interconexiones.

Comúnmente, la división de un sistema de gran escala se plantea principalmente la simplicidad o interpretación física de los subsistemas resultantes, permitiendo que las funciones de acoplamiento resultantes tengan formas complejas, difíciles de agrupar en una sola clase de funciones. Como se mencionó, dichas funciones de interconexión pueden depender de parámetros inciertos que varíen en el tiempo debido a factores externos, por esta razón, se propone diseñar una ley de control descentralizado adaptable que considere la información conocida acerca de la estructura de la interconexión pero que al mismo tiempo requiera del mínimo intercambio de información posible entre subsistemas. Se consideran dos clases de funciones de interconexión suficientemente generales, funciones linealmente parametrizables y funciones con dependencia no lineal de parámetros con características de concavidad o de convexidad.

La clase de sistemas interconectados que se considera es la clase de sistemas lagrangianos, cuya estructura agrupa gran cantidad de sistemas comunes en ingeniería (sistemas mecánicos, electromecánicos, etc) y que en diversas aplicaciones se utilizan como un conjunto de elementos con una tarea en común (robots móviles). Además, debido a la importancia de estos sistemas, su estructura y sus propiedades han sido estudiadas previamente de manera exhaustiva. Como se mencionó anteriormente, se consideran parámetros inciertos tanto a nivel local como en la interconexión.

1.2. Estado del arte

El diseño de sistemas de control para sistemas de gran escala puede ser simplificado mediante la división del sistema original en un conjunto de subsistemas de menor complejidad. Bajo este enfoque, se tiene que tratar con la dinámica local de cada subsistema y la interconexión que pudiera existir entre ellos. Cuando existen dificultades para el correcto flujo de información entre los subsistemas, surge la necesidad del diseño e implementación de sistemas de control descentralizado, problema que ha sido estudiado desde ya hace algunas décadas, [1], [2], [3], [4], [7]. La mayoría de estos trabajos ha sido enfocado principalmente a sistemas robóticos y debido a la naturaleza descentralizada de los controladores propuestos, ha sido común utilizar algoritmos adaptables para compensar incertidumbres en las funciones de interconexión entre subsistemas. El enfoque más simple consiste en considerar la interconexión entre subsistemas como una perturbación acotada [5] independientemente de la estructura de dicha interconexión, lo cual permite implementar controladores independientes y de forma totalmente descentralizada. Sin embargo, se requiere de conocimiento previo de la interconexión para poder seleccionar la cota adecuada.

Por otro lado, si se asume que se puede conocer cierta información de los términos de interconexión y se quiere aprovechar para el diseño del controlador, entonces de manera inmediata se establece la necesidad de intercambio de información entre los sistemas conectados. Existen trabajos en esta línea que proponen una reducción de la información intercambiada entre los diferentes sistemas [9], [10], en donde el intercambio de información se restringe únicamente a señales de referencia y en los cuales se asegura seguimiento asintótico de trayectorias. Cabe mencionar que estos diseños se enfocan en sistemas lineales con términos de interconexión lineal.

En [16], [15] se proponen controladores adaptables para sistemas lineales con parámetros inciertos con un término no linealmente parametrizable, lo que constituye uno de los primeros resultados bajo esta supo-

sición y en donde se alcanza seguimiento finalmente acotado de trayectorias. Debido a esto en esta tesis se aborda el problema de diseño de controladores con alto grado de descentralización, únicamente intercambio de información a nivel de referencias, pero aplicado a sistemas lagrangianos y considerando inicialmente funciones de interconexión entre sistemas con parametrización lineal y posteriormente establecer condiciones para la consideración de funciones con parametrización no lineal.

1.3. Control centralizado y control descentralizado

La elección entre el diseño de un esquema centralizado y uno descentralizado se ve influenciada por distintos aspectos, entre los cuales se encuentra por supuesto el desempeño, la carga computacional, la disponibilidad de canales de comunicación entre los sistemas, las variables de estado disponibles para su medición en cada subsistema, entre otros.

Tanto el control centralizado como el control descentralizado presentan ciertas ventajas y desventajas, y la elección del tipo de control adecuado depende en gran medida del sistema que se quiera controlar. Cuando se tiene un control centralizado, se debe tener certeza de que toda la información del sistema está disponible para cada uno de los subsistemas. Aún cuando las leyes de control diseñadas pueden resultar bastante complejas y dependientes de una gran cantidad de variables correspondientes a estados de otros subsistemas, bajo condiciones ideales, el sistema tendrá un muy buen desempeño y será robusto ante perturbaciones externas. En sistema de este tipo puede ser razonable cuando se tiene una cantidad pequeña de subsistemas interconectados, pues conforme el número de subsistemas aumenta, se requiere de la implementación de una gran cantidad de canales de comunicación, lo que puede resultar poco práctico y muy costoso. Además, si en algún instante, existe alguna falla, ya sea en sensores, actuadores o canales de comunicación, los errores generados en cierto subsistema debido a esa falla afectarán de manera directa el resto de los subsistemas. Por otro lado, no solo las fallas en la implementación pueden provocar problemas, sino también la dependencia de parámetros inciertos o con variación lenta en los términos de interconexión y en los cuales no sería práctico utilizar sensores.

1.4. Contribución principal de la tesis

En este trabajo, se presenta un estudio acerca de un conjunto de sistemas lagrangianos interconectados entre sí y con el objetivo de diseñar una ley de control descentralizado adaptable tal que se logre seguimiento asintótico o práctico de trayectorias. La principal contribución que se hace mediante este estudio es el análisis y la caracterización de las funciones de interconexión entre los distintos subsistemas. En esta tesis se consideran dos principales, y al mismo tiempo suficientemente generales, clases de funciones. Inicialmente se consideraron funciones no lineales con parametrización lineal y posteriormente se extendió dicha clase a funciones no lineales con dependencia no lineal de parámetros inciertos (parametrización no lineal). Además de la incertidumbre paramétrica en las interconexiones, el objetivo es reducir el intercambio de información entre subsistemas de tal manera se logre un balance entre el grado de descentralización y el desempeño del sistema. En este caso dicha información compartida se reduce a las señales de referencia, es decir, la referencia de un subsistema puede ser conocida por el resto, lo anterior para cada uno de los subsistemas. Para el caso de funciones de interconexión linealmente parametrizables se alcanza seguimiento asintótico, mientras que para el caso no linealmente parametrizable se logra seguimiento finalmente acotado con precisión arbitraria. De manera general, se considera que cada subsistema está conectado con el resto, es decir, un esquema de interconexión todos-todos y cada controlador estima parámetros locales y de interconexión de manera local.

1.5. Resumen de la tesis

En este trabajo se presenta la solución al problema de control de seguimiento de trayectorias de un conjunto de sistemas lagrangianos interconectados, considerando incertidumbre paramétrica tanto en el modelo matemático local como en el modelo matemático que representa el acoplamiento entre subsistemas. Las leyes de control propuestas están basadas en dos leyes de adaptación de parámetros, una para los parámetros locales y otra para los parámetros de interconexión. Además, dichas leyes de control se implementan tanto en forma centralizada como descentralizada con el objetivo de poder comparar su desempeño, alcanzando seguimiento asintótico para el caso lineal y seguimiento finalmente acotado con precisión arbitraria para el caso no lineal.

Para poder comparar cada una de las leyes de control, en sus versiones centralizada y descentralizada, se

muestran los resultados de una simulación. El sistema utilizado para dicha simulación consiste en un par de péndulos interconectados mediante un resorte y en donde cada uno de los péndulos tiene su propia señal de referencia.

En el Capítulo 2, se resumen conceptos matemáticos importantes acerca de la estabilidad de los sistemas y las condiciones para poder asegurar estabilidad, así como la formulación de las ecuaciones de Euler-Lagrange enfocadas principalmente a sistemas mecánicos, su estructura y sus propiedades más útiles para el desarrollo de la ley de control. En este capítulo también se retoma un resultado muy importante sobre el control adaptable de sistemas lagrangianos, el cual es básico para los desarrollos posteriormente propuestos.

En el Capítulo 3 se presenta el diseño de un sistema de control considerando interconexiones linealmente parametrizables entre los subsistemas lagrangianos. Se considera que cada uno de los subsistemas está interconectado con el resto de los subsistemas.

La clase de interconexiones a tratar es extendida en el capítulo 4, en donde se propone una solución al problema de control de subsistemas lagrangianos interconectados mediante funciones no linealmente parametrizables, imponiendo condiciones de concavidad o convexidad en el comportamiento cualitativo de dichas funciones de interconexión. También dentro de este capítulo se presentan consideraciones para la implantación de controladores centralizados en forma descentralizada.

Finalmente, en el Capítulo 5 se detallan algunas conclusiones con respecto a las leyes de control diseñadas, sus ventajas y desempeño. Asimismo, se esbozan ciertos aspectos a abordar de manera posterior para continuar con esta línea de investigación.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Conceptos básicos de estabilidad

En esta sección se presentan los conceptos principales necesarios para evaluar la estabilidad de un sistema en un determinado punto de equilibrio. Asimismo, se examinan conceptos importantes como el acotamiento final de trayectorias, mediante el cual se pueden obtener resultados prácticos y definir las condiciones de estabilidad en cada caso (ver [8]).

2.2. Sistemas lagrangianos

A continuación se presenta un resumen básico acerca de los principios necesarios para el modelado de sistemas lagrangianos, sus principales propiedades y su estructura, con el propósito de facilitar la presentación del diseño de los esquemas de control para dicha clase de sistemas.

2.2.1. Coordenadas generalizadas, energía y lagrangiano de un sistema

Para poder modelar un sistema físico mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, es necesario considerar dicho sistema como un manipulador de energía. Es necesario escoger dos variables cuyo producto sea igual a la potencia proporcionada al sistema. Una de estas variables debe de ser de tipo extensiva y la otra de tipo intensiva, llamadas de esfuerzo (e) y de flujo (f), respectivamente. Así, la energía (E) del sistema en un

intervalo de tiempo 0 a t_1 es

$$E(t_1) = \int_0^{t_1} e f dt. \quad (2.1)$$

Además, en un sistema también puede existir almacenamiento de energía, siendo posible almacenar esfuerzo o flujo, de acuerdo con alguna de las siguientes expresiones,

$$e_a = \int_0^{t_1} e dt, \quad f_a = \int_0^{t_1} f dt, \quad (2.2)$$

las cuales, al ser combinadas con la expresión (2.1) permiten calcular la energía acumulada en el sistema como

$$E_a = \int_0^{e_a} f de_a = \int_0^{f_a} e df_a. \quad (2.3)$$

Para tratar al sistema como un manipulador de energía cada elemento de éste debe ser clasificado de acuerdo a su manejo de energía como fuente, almacenador o disipador. Una fuente proporciona energía al sistema en forma de esfuerzo o de flujo. De la misma forma, un elemento puede almacenar flujo o esfuerzo. Finalmente, se definen los elementos disipadores como elementos que absorben potencia.

Partiendo de las ecuaciones (2.3), la energía almacenada U en un almacenador de flujo se define como

$$U = \int_0^{f_a} e df_a. \quad (2.4)$$

De la misma forma, se puede definir la energía complementaria o coenergía U^*

$$U^* = \int_0^e f_a de. \quad (2.5)$$

Asímismo, para un almacenador de esfuerzo, se redefine la energía almacenada como

$$T = \int_0^{e_a} f de_a \quad (2.6)$$

y la energía complementaria o coenergía T^* como

$$T^* = \int_0^f e_a df. \quad (2.7)$$

De la misma manera en que el producto de las variables generalizadas seleccionadas representa la energía que se suministra al sistema, para un elemento disipador este mismo producto representa la energía disipada, en este caso se tiene

$$ef = \int_0^f e df + \int_0^e f de = G + J \quad (2.8)$$

en donde la expresión que define a G es conocida como función de contenido y J como función de co-contenido. Comúnmente, la energía almacenada en un almacenador de flujo es llamada energía (co-energía) cinética y la que se almacena como esfuerzo es conocida como energía (co-energía) potencial.

El lagrangiano de un sistema es una función escalar de las variables generalizadas, que se define como la diferencia entre la co-energía cinética y la energía potencial

$$L(q, \dot{q}) = U^*(\dot{q}) - T(q) \quad (2.9)$$

en donde q y \dot{q} son las variables generalizadas y su derivada con respecto al tiempo, respectivamente.

2.2.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se forman de acuerdo con lo siguiente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial J}{\partial \dot{q}} = f_0 \quad (2.10)$$

donde L es el lagrangiano del sistema y f_0 se conoce como vector de fuerzas generalizadas. Es importante mencionar que una fuerza se considera generalizada únicamente para las variables que afecta de forma inmediata.

Como es claro, se tendrán tantas ecuaciones como variables generalizadas, por lo cual se acostumbra el manejo de una representación matricial.

2.2.3. Estructura general y propiedades

Los sistemas modelados a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange reciben el nombre de lagrangianos y tienen, en general, la siguiente estructura

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se conoce como matriz de inercia, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de fuerzas gravitacionales. Mientras que \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$ son los vectores generalizados de posición y velocidad, respectivamente.

A continuación, se presentan las principales propiedades del modelo (2.11), algunas de las cuales se pueden deducir gracias a las características físicas de los sistemas, mientras que otras pueden ser deducidas al obtener el modelo, ver [11].

- La matriz $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es simétrica y positiva definida. Esta matriz está acotada por

$$M_m \mathbf{I} \leq \mathbf{M}(\mathbf{q}) \leq M_M \mathbf{I}$$

con \mathbf{I} la matriz identidad y constantes $M_m, M_M > 0$.

- La matriz $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica para todo instante t .
- La matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ satisface

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k \|\dot{\mathbf{q}}\|$$

con k constante mayor a cero.

- El vector $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ se puede acotar por $\|\mathbf{g}(\mathbf{q})\| < \alpha$, con $\alpha > 0$ constante.
- Mediante una selección correcta de parámetros, el modelo (2.11) puede expresarse como

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \tau = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\Theta \quad (2.12)$$

donde $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in R^{n \times p}$ se conoce como *regresor* y $\Theta \in R^p$ es un vector de parámetros.

2.3. Control adaptable de sistemas lagrangianos

En esta sección, se retoma un resultado bien conocido con respecto al control adaptable de sistemas lagrangianos. Se considera tanto el caso de parámetros bien conocidos como el de parámetros inciertos y para este último se diseña un control adaptable. En este diseño se considera una serie de sistemas lagrangianos desacoplados, para mayor detalle, se puede consultar [6].

2.3.1. Objetivo de control

Dada una trayectoria de referencia $\mathbf{q}_{m_i}(t)$ diferenciable al menos en dos ocasiones, diseñar una ley de control retroalimentado u_i únicamente utilizando mediciones locales $\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i$ para lograr el seguimiento asintótico de la referencia, para cada uno de los sistemas, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{m_i}\| \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

manteniendo al mismo tiempo la estabilidad interna del sistema global.

2.3.2. Control de sistemas desacoplados

Considérese un sistema lagrangiano

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{u}_i, \quad (2.14)$$

y supóngase que se quiere diseñar un controlador C_i tal que se satisfaga (2.13). Con base en las propiedades estructurales de los sistemas lagrangianos, es posible escribir el modelo (2.11) parametrizado linealmente, como el producto de un vector de parámetros y una matriz que involucra señales del subsistema. Esto es

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i), \quad (2.15)$$

Definiendo el error combinado \mathbf{s}_i , se logra con una sola misma variable contar con información del error en todas las variables del estado, es decir \mathbf{q}_i y $\dot{\mathbf{q}}_i$, ya que solo cuando todos los errores en estas variables son cero, el error combinado es nulo. Para esto se usan las siguientes expresiones

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{m_i} \quad (2.16a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{r_i} = \dot{\mathbf{q}}_{m_i} - \Lambda_i \mathbf{q}_i \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{s}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i + \Lambda_i \tilde{\mathbf{q}}_i \quad (2.16c)$$

en donde \mathbf{q}_{m_i} es la señal de referencia para \mathbf{q}_i y Λ_i es una matriz de ganancia (proporcional), positiva definida. Combinando (2.15) y (2.16) de tal manera que se obtenga una parametrización lineal dependiente de la variable \mathbf{q}_{r_i} , es decir $\mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i$, se tiene entonces

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i = \mathbf{u}_i. \quad (2.17)$$

En la expresión anterior se puede apreciar de manera separada la dinámica local del error y los efectos de los términos de interconexión.

Si se parte de la suposición de un conocimiento exacto y total del subsistema, para diseñar una primera ley de control se propone, una función candidata de Lyapunov muy sencilla, de tipo cuadrática como la siguiente

$$V_i(\mathbf{s}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i. \quad (2.18)$$

Obteniendo la derivada con respecto al tiempo de la función de Lyapunov y con base en las propiedades de la transposición de matrices, se tiene

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i \quad (2.19)$$

Evaluando la ecuación anterior en la dinámica del sistema, (2.17) se obtiene

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_i^T (\mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i) \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \right) \mathbf{s}_i, \quad (2.20)$$

que apoyándose en las propiedades estructurales de los sistemas lagrangianos, se sabe que la forma cuadrática correspondiente al segundo término será nula en todo instante. Así, la derivada de (2.18) se convierte, simplemente en

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = \mathbf{s}_i^T (\mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i) \mathbf{s}_i. \quad (2.21)$$

Para poder garantizar que la expresión anterior es negativa y con esto garantizar la estabilidad de cada subsistema, se elige una señal de control \mathbf{u}_i tal que anule el término correspondiente a la parametrización lineal. Más aún, la misma señal de control \mathbf{u}_i puede ser seleccionada de forma que la derivada de (2.18) sea negativa en todo instante t y con esto se asegure estabilidad asintótica de cada subsistema. Para ello, la señal \mathbf{u}_i se elige como

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i, \quad (2.22)$$

con $\mathbf{K}_i > 0$ una matriz de ganancia (derivativa). Aplicando esta ley de control, se obtiene como derivada de la función candidata de Lyapunov

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i < 0. \quad (2.23)$$

La expresión anterior, es negativa definida. Con esto se verifica que la selección de la señal \mathbf{u}_i asegura seguimiento asintótico de trayectorias.

La ley de control anterior se ha diseñado considerando que existe un conocimiento exacto del sistema lagrangiano a controlar, por lo que si existiera alguna incertidumbre en los parámetros involucrados, únicamente se podría aplicar dicha ley de control con base en una estimación $\hat{\Theta}_i$ de tal modo que

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\hat{\Theta}_i - \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i. \quad (2.24)$$

El error entre el vector de parámetros estimados y el valor real se denota como $\tilde{\Theta}_i = \hat{\Theta}_i - \Theta_i$. Así, la expresión (2.24) puede escribirse en términos del error de estimación como

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\tilde{\Theta}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i, \quad (2.25)$$

que al ser sustituida en (2.17), la dinámica del sistema puede escribirse como

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\tilde{\Theta}_i. \quad (2.26)$$

Para poder determinar una ley de adaptación de parámetros que garantice el seguimiento asintótico de trayectorias se propone la siguiente función de Lyapunov, dependiente tanto del error de seguimiento como del error de estimación

$$V_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i \quad (2.27)$$

donde Γ_i^T es una matriz positiva definida.

Derivando la función candidata de Lyapunov con respecto al tiempo y simplificando se tiene

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i. \quad (2.28)$$

Evaluando la derivada anterior para la dinámica del sistema (2.26) y considerando de nueva cuenta la propiedad de antisimetría de la matriz $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}_i - \mathbf{C}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^T \dot{\tilde{\Theta}}_i. \quad (2.29)$$

De lo anterior, se distingue claramente que el primer término corresponde a la forma cuadrática negativa definida, útil para asegurar la estabilidad del subsistema y a partir de los dos últimos términos se determina la ley de adaptación para $\dot{\tilde{\Theta}}_i$, necesaria para que dichos términos se anulen mutuamente, transponiendo el segundo término y factorizando

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i \left[\mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \mathbf{s}_i + \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right]. \quad (2.30)$$

Para anular en término entre paréntesis, una posible ley de adaptación para $\dot{\tilde{\Theta}}_i$ tiene la siguiente forma

$$\dot{\tilde{\Theta}}_i = -\Gamma_i \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \mathbf{s}_i. \quad (2.31)$$

Con la selección anterior, la derivada de la función de Lyapunov es

$$\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i) = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0 \quad (2.32)$$

Como se puede observar, la derivada $\dot{V}_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i)$ es seminegativa definida, esto es debido a que $\dot{V}_i(0, \tilde{\Theta}_i = 0)$ independientemente del valor de $\tilde{\Theta}_i$. Debido a esto, solamente se puede asegurar estabilidad para el subsistema. Para demostrar la estabilidad asintótica de cada subsistema es útil recurrir al lema de Barbalat. El resultado anterior es bien conocido [16], y es muy útil ya que se considera un caso particular de sistemas interconectados.

2.4. Problema de optimización Min-Max

Considere la función

$$J(\omega, \theta) = \beta [f(\theta) - f(\hat{\theta}) + \omega(\hat{\theta} - \theta)], \quad (2.33)$$

en donde $\hat{\theta} \in \Theta$ y β es una constante diferente de cero. Considere además

$$a_0 = \min_{\omega \in R} \max_{\theta \in \Theta} J(\omega, \theta) \quad (2.34)$$

$$\omega_0 = \arg \min_{\omega \in R} \max_{\theta \in \Theta} J(\omega, \theta) \quad (2.35)$$

Entonces, a_0 y ω_0 están dadas, de acuerdo a [16], [15]

$$a_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta f \text{ es cóncava en } \Theta; \\ f_{\min} - \hat{f} + \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} (\hat{\theta} - \theta_{\min}), & \text{si } \beta f \text{ es convexa en } \Theta. \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\omega_{ijk}^* = \begin{cases} \nabla f_{\hat{\theta}}, & \text{si } \beta f \text{ es cóncava en } \Theta; \\ \frac{f_{\max} - f_{\min}}{\theta_{\max} - \theta_{\min}}, & \text{si } \beta f \text{ es convexa en } \Theta. \end{cases} \quad (2.37)$$

Las expresiones anteriores se pueden deducir considerando por separado los casos cuando el producto βf es una función convexa o cuando βf es cóncava. Considerando inicialmente el caso de que βf es una función convexa, la función (2.33) es convexa en Θ . Por lo anterior, la función (2.33) tiene su máximo en alguno de sus extremos, es decir θ_{\max} o θ_{\min} . Puede darse el caso en que ambos extremos tengan el mismo valor. Entonces, el problema de optimización toma la forma

$$\min_{\omega \in R} \max \{ \beta [f_{\min} - f + \omega(\hat{\theta} - \theta_{\min})], \beta [f_{\max} - f + \omega(\hat{\theta} - \theta_{\max})] \}. \quad (2.38)$$

De manera equivalente, el problema puede ser expresado como

$$\min_{(\omega, z) \in R^2} z$$

en donde

$$\beta [f_{\min} - f + \omega(\hat{\theta} - \theta_{\min})] \leq z \quad (2.39)$$

$$\beta [f_{\max} - f + \omega(\hat{\theta} - \theta_{\max})] \leq z. \quad (2.40)$$

Si se agregan variables auxiliares $\varepsilon_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0$, las desigualdades anteriores se reescriben como

$$\beta [f_{\min} - f + \omega(\hat{\theta} - \theta_{\min})] + \varepsilon_1 = z \quad (2.41)$$

$$\beta [f_{\max} - f + \omega(\hat{\theta} - \theta_{\max})] + \varepsilon_2 = z. \quad (2.42)$$

Resolviendo el sistema anterior para z , se obtiene

$$z = \frac{\beta f_{min}(\theta_{max} - \hat{\theta})}{\theta_{max} - \theta_{min}} - \frac{\beta f_{max}(\theta_{min} - \hat{\theta})}{\theta_{max} - \theta_{min}} - \beta \hat{f} + \frac{\varepsilon_1(\theta_{max} - \hat{\theta})}{\theta_{max} - \theta_{min}} + \frac{\varepsilon_2(\hat{\theta} - \theta_{min})}{\theta_{max} - \theta_{min}}. \quad (2.43)$$

La solución óptima del sistema puede ser obtenida considerando tres diferentes casos de acuerdo con a la estructura convexa supuesta. Si $\theta_{min} < \hat{\theta} < \theta_{max}$, entonces el mínimo de la variable z se obtiene cuando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, con lo que la solución óptima toma la forma

$$z_{opt} = \beta \left[f_{min} - f + \frac{f_{max} - f_{min}}{\theta_{max} - \theta_{min}} (\hat{\theta} - \theta_{min}) \right], \quad (2.44)$$

que implica que la función ω óptima estará dada por

$$\omega_{opt} = \frac{f_{max} - f_{min}}{\theta_{max} - \theta_{min}}. \quad (2.45)$$

Para el caso en el que $\hat{\theta} = \theta_{max}$ la expresión (2.43) se reduce a

$$z = \varepsilon_2,$$

lo que implica que el mínimo se encuentra en $\varepsilon_2 = 0$ o $z_{opt} = 0$ y la función ω_{opt} es

$$\omega_{opt} = \frac{\beta(f_{max} - f_{min}) - \varepsilon_1}{\beta(\theta_{max} - \theta_{min})}, \quad (2.46)$$

que es una función que depende del valor de ε_1 . Si se escoge $\varepsilon_1 = 0$, la función ω_{opt} es idéntica a la ecuación (2.45). Para el caso en que $\hat{\theta} = \theta_{min}$ se tiene un caso similar al anterior, obteniéndose nuevamente que $z_{opt} = 0$ y que la función óptima ω_{opt} tiene la forma de (2.45).

Capítulo 3

Sistemas acoplados con términos lineales en parámetros

En este capítulo se presenta el diseño de controladores centralizado y descentralizado para el caso general de un conjunto de subsistemas lagrangianos interconectados. Con el objetivo de tratar el caso más general se consideró un esquema de interconexión en el que cada subsistema está interconectado con el resto. La clase de funciones de interconexión tratada en este diseño incluye a todas las funciones linealmente parametrizables, cuyo regresor cumpla con la desigualdad de Lipschitz. Igualmente se presentan resultados de simulación para mostrar la efectividad de ambos controladores y poder comparar sus desempeños.

3.1. Planteamiento del problema

Inicialmente, por facilidad en el diseño, se considera el caso centralizado, es decir, cada subsistema es capaz de compartir la información acerca de su estado con el resto de los subsistemas. Considérese un conjunto de subsistemas lagrangianos completamente actuados e interconectados, teniendo cada subsistema la siguiente forma

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}_i, \quad (3.1)$$

donde el término $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ representa la interconexión existente entre subsistemas. Se considera que la función de interconexión tiene la forma $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_j) \mathbf{c}_{ij}$, con $\mathbf{c}_{ij} \in R^p$ un vector de parámetros

y $\mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ es una matriz de señales, donde n es la dimensión de cada subsistema y p depende de la parametrización elegida. Considerando la interconexión en la dinámica del sistema

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}_i. \quad (3.2)$$

Al igual que en el caso de un sistema lagrangianos desacoplado, el objetivo de control para este caso más general es asegurar seguimiento asintótico de trayectorias, es decir, que la expresión (2.13) se cumpla.

3.2. Diseño del controlador: Caso centralizado

Considerando el caso en el que todos los parámetros del sistema son conocidos, el seguimiento de trayectorias es logrado cuando el error combinado definido en (2.16) es cero. Así, se propone una función candidata de Lyapunov como función de \mathbf{s}_i , pero al existir interconexión entre subsistemas, es conveniente proponer una función candidata de Lyapunov que involucre al sistema completo

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{s}_i) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i. \quad (3.3)$$

Para conocer la ley de control que estabiliza el sistema, se obtiene la derivada con respecto al tiempo de la función candidata. Simplificando, mediante aplicación de las propiedades de los sistemas lagrangianos y evaluando la función candidata en la dinámica del sistema, se obtiene

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i, \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T (\mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i - \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i. \quad (3.5)$$

Seleccionando la ley de control como

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.6)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \mathbf{c}_{ij}, \quad (3.7)$$

la derivada de la función candidata de Lyapunov se reduce de manera considerable, tomando finalmente la siguiente forma

$$\dot{\mathbf{V}} = -\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0, \quad (3.8)$$

la cual es negativa definida e implica seguimiento asintótico de trayectorias de cada uno de los subsistemas involucrados. Como bien se mencionó anteriormente, esta ley de control es solo implementable si se conocen a la perfección los vectores de parámetros \mathbf{c}_{ij} . De lo contrario, se puede proponer una ley de adaptación para estimar dichos parámetros.

Para diseñar una ley de control adaptable, los parámetros de la ley de control diseñada anteriormente se sustituyen por sus estimados, de tal modo que

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \hat{\mathbf{c}}_{ij}, \quad (3.9)$$

donde nuevamente $\hat{\Theta}_i$ es el estimado para Θ_i y $\hat{\mathbf{c}}_{ij}$ el estimado para \mathbf{c}_{ij} . El error de estimación para los parámetros de interconexión se define como $\tilde{\mathbf{c}}_{ij} = \hat{\mathbf{c}}_{ij} - \mathbf{c}_{ij}$. Si se aplica esta entrada de control, la dinámica del sistema se ve afectada en la siguiente forma

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \tilde{\mathbf{c}}_{ij}. \quad (3.10)$$

Dado que ahora la dinámica del sistema está siendo afectada por otros dos errores de estimación y se pretende que todos estos errores desaparezcan, la función candidata de Lyapunov propuesta, es una función de todos los errores involucrados

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i, \tilde{\mathbf{c}}_{ij}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \right). \quad (3.11)$$

Derivando la función anterior con respecto al tiempo se obtiene

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right). \quad (3.12)$$

Si se evalúa la expresión anterior a lo largo de la dinámica del error del sistema y se simplifica, se obtiene

$$\dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{s}}_i^T \left(-\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \right) + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right). \quad (3.13)$$

A continuación, el primer factor se desarrolla, y se agrupan los términos convenientemente, como se muestra en la siguiente expresión

$$\dot{\mathbf{V}} = - \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i}) \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) + \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j) \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \quad (3.14)$$

A partir de este punto, por simplicidad en la notación, se asume que $\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)$ y $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j)$.

Reescribiendo la ecuación anterior

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) + \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right). \quad (3.15)$$

Es claro que el primer término en la expresión anterior es un término negativo definido, favorable a la estabilidad del sistema; sin embargo, los dos sumandos restantes, al no poder garantizar que son menores a cero, necesitan ser anulados. Rescribiendo el segundo sumando y forzándolo a que sea nulo se tiene

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\Theta}_i^T \left(\mathbf{Y}_i^T \mathbf{s}_i + \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i \right) = 0. \quad (3.16)$$

Por lo tanto, para propiciar la anulación de este término, la ley de adaptación propuesta para $\dot{\tilde{\Theta}}_i$ está dada por

$$\dot{\tilde{\Theta}}_i = -\Gamma_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{s}_i. \quad (3.17)$$

Tomando ahora el tercer sumando en (3.15), igualando a cero para buscar su anulación

$$\sum_{i=1}^N \left(\mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Para poder anular este término es importante notar que la variable si puede ser escrita dentro de la suma a la que multiplica, ya que no se ve afectada por el subíndice. Además, dado que la función de Lyapunov es una función escalar, el producto $\mathbf{s}_i^T \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{c}}_{ij}$ es un escalar, por lo que al transponerlo, el resultado del producto no se ve alterado, así

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \mathbf{Q}_j^T \mathbf{s}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) = 0. \quad (3.19)$$

El siguiente paso consiste en agrupar ambos sumandos en una sola suma y factorizar teniendo como factor común $\tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T$, por lo que se puede escribir

$$\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \left(\mathbf{Q}_j^T \mathbf{s}_i + \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \right) = 0. \quad (3.20)$$

Una vez que se ha llegado a la forma anterior, es sencillo elegir la ley de adaptación necesaria para anular este término. Por tanto, la ley de adaptación para $\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij}$ es

$$\dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} = -\Omega_j \mathbf{Q}_j^T \mathbf{s}_i. \quad (3.21)$$

Aplicando las leyes de adaptación (3.17) y (3.21), la derivada de cada una de las funciones V_i es, finalmente

$$\dot{V}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0, \quad (3.22)$$

que es una expresión negativo semidefinida. Por tanto, es necesario apoyarse nuevamente en el lema de Barbalat para demostrar la estabilidad asintótica de cada subsistema, garantizando la estabilidad asintótica del sistema completo.

3.3. Diseño del controlador: Caso descentralizado

En esta sección, finalmente se diseña una ley de control descentralizado, tomando como base la ley de control diseñada en la sección anterior. Sin embargo, es necesario evitar el intercambio de información entre subsistemas, ya que como se mencionó con anterioridad se pretende obtener una ley de control descentralizado. Para esto, tomando como base la definición del error dada en (2.16), es posible escribir $\mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{q}}_i + \mathbf{q}_{m_i}$ y $\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_i + \dot{\mathbf{q}}_{m_i}$, lo que significa que la información de cualquier sistema puede ser escrita en términos de su señal de referencia y de un error de seguimiento.

Dado lo anterior, se define el error $\tilde{\mathbf{Q}}_j = \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_{m_j}$, con $\mathbf{Q}_{m_j} = \mathbf{Q}_j(\mathbf{q}_{m_j}, \dot{\mathbf{q}}_{m_j})$. Con base en esta definición, es posible escribir la ley de control (3.9) como

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \hat{\mathbf{c}}_{ij} + \mathbf{D}_i, \quad (3.23)$$

donde el término correspondiente al error $\tilde{\mathbf{Q}}_j$ entre los regresores, se sustituye por un vector, denotado por \mathbf{D}_i , que se diseña para compensar perturbaciones no modeladas en el sistema. Considerando esta nueva ley de control, la dinámica del error del sistema es

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i) \dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} + \mathbf{D}_i. \quad (3.24)$$

Para diseñar el vector de compensación \mathbf{D}_i , se propone la misma función candidata de Lyapunov

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N V_i(\mathbf{s}_i, \tilde{\Theta}_i, \tilde{\mathbf{c}}_{ij}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \right). \quad (3.25)$$

Derivando con respecto al tiempo y evaluando a lo largo de la dinámica del error se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left(\mathbf{s}_i^T \left(-\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} + \mathbf{D}_i \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{M}}_i \mathbf{s}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij}^T \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \quad (3.26) \end{aligned}$$

Simplificando y factorizando de manera conveniente

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left(-\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + (\mathbf{s}_i^T \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\Theta}_i) \right. \\ \left. + \left(\mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{m_j} \tilde{\mathbf{c}}_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \Omega_j^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_{ij} \right) \right. \\ \left. + \left(\mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{s}_i^T \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

En la expresión anterior, se identifica inmediatamente que el segundo y tercer término son exactamente iguales a los tratados previamente, por lo que las leyes de adaptación (3.17) y (3.21) siguen siendo válidas y entonces, dichos términos se anulan, resultando

$$\dot{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^N \left(-\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \left(\mathbf{s}_i^T \mathbf{D}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{s}_i^T \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) \right). \quad (3.28)$$

En esta etapa del desarrollo, es posible proponer diferentes tipos de estructuras para el vector \mathbf{D}_i , tal que se asegure seguimiento asintótico, sin embargo, por simplicidad se elige

$$\mathbf{D}_i = -\gamma_i \mathbf{s}_i. \quad (3.29)$$

Sustituyendo en la ecuación simplificada (3.28), desarrollando el producto y tomando únicamente el segundo sumando, se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \left(-\gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right). \quad (3.30)$$

Manipulando el término anterior con el objetivo de obtener información acerca de su magnitud y de su signo, se tiene

$$\sum_{i=1}^N \left(-\gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_i^T \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\mathbf{Q}}_j \mathbf{c}_{ij} \right) \leq -\sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \|\mathbf{s}_i\| \sum_{j=1, j \neq i}^N \|\mathbf{c}_{ij}\| \ell_j \|\mathbf{s}_j\|, \quad (3.31)$$

$$\leq -\sum_{i=1}^N \gamma_i \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N (N-1) \ell_j \|\mathbf{c}_{ij}\| \|\mathbf{s}_i\|^2, \quad (3.32)$$

$$\leq -\sum_{i=1}^N (\gamma_i - (N-1) \ell_j \|\mathbf{c}_{ij}\|) \|\mathbf{s}_i\|^2. \quad (3.33)$$

En el procedimiento anterior, la primera y segunda desigualdad se derivan del hecho de que \mathbf{Q}_j cumple con la desigualdad de Lipschitz. Si se selecciona la ganancia γ_i de tal forma que cumpla

$$\gamma_i \geq (N-1) \ell_j \|\mathbf{c}_{ij}\| \quad (3.34)$$

se puede asegurar que el término (3.30) es negativo, por lo que se concluye que

$$\dot{\mathbf{V}} = -\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i. \quad (3.35)$$

Finalmente, tomando de nueva cuenta el Lema de Barbalat, se asegura seguimiento asintótico para cada uno de los N subsistemas interconectados.

3.4. Resultados de simulación

Con el objetivo de verificar la efectividad de la ley de control descentralizado adaptable diseñada en las secciones anteriores, se propone un sistema de péndulos mecánicos los cuales se interconectan entre sí mediante un resorte, siendo el objetivo de cada uno de ellos el seguir una trayectoria de manera asintótica, independientemente del acoplamiento existente. El sistema propuesto se muestra en la figura 3.1 y el modelo matemático es el siguiente

$$m_1 \ell_1^2 \ddot{q}_1 - m_1 g \ell_1 \sin(q_1) = u_1 - b_1 \dot{q}_1 + F a_1 \cos(q_1 - \beta) \quad (3.36)$$

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{q}_2 - m_2 g \ell_2 \sin(q_2) = u_2 - b_2 \dot{q}_2 - F a_2 \cos(q_2 - \beta) \quad (3.37)$$

donde m_i y ℓ_i son la masa y la longitud del péndulo i , respectivamente. g es la aceleración de la gravedad, u_i es el torque aplicado a cada uno de los péndulos, las distancias a_i indican el punto de conexión del resorte con cada uno de los péndulos y b_i es el coeficiente de fricción viscosa. Las funciones de interconexión entre los péndulos son representadas mediante la siguientes estructuras linealmente parametrizables

$$F = k(\ell_k - \ell_0), \quad (3.38)$$

$$\beta = \arctan \left[\frac{a_1 \cos(q_1) - a_2 \cos(q_2)}{\ell_0 - a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_2)} \right], \quad (3.39)$$

$$\ell_k = \left[(\ell_0 - a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_2))^2 + (a_1 \cos(q_1) - a_2 \cos(q_2))^2 \right]^{1/2}, \quad (3.40)$$

en donde el único parámetro a estimar es la constante de rigidez k del resorte. Las señales de referencia utilizadas para la simulación consisten en dos señales senoidales con distinta frecuencia. Algunos de los valores utilizados para el desarrollo de la simulación fueron $\bar{K}_i = 5I$, $\Lambda_i = 5I$, $\Gamma_i = 5I$, $\Omega_i = 10I$, $\gamma_i = 5$.

Como se puede apreciar en las figuras 3.2 y 3.3, ambos péndulos muestran un seguimiento asintótico de las trayectorias de referencia. Además, por las señales de control que se ilustran en la figura 3.4 se comprueba que el transitorio de la respuesta del sistema es muy corto, por lo que el seguimiento es muy suave. En las figuras 3.5 y 3.7 se muestran los parámetros estimados que afectan la dinámica local de cada uno de los subsistemas, junto con los valores reales utilizados en las simulaciones. Finalmente, en las figuras 3.6 y 3.8

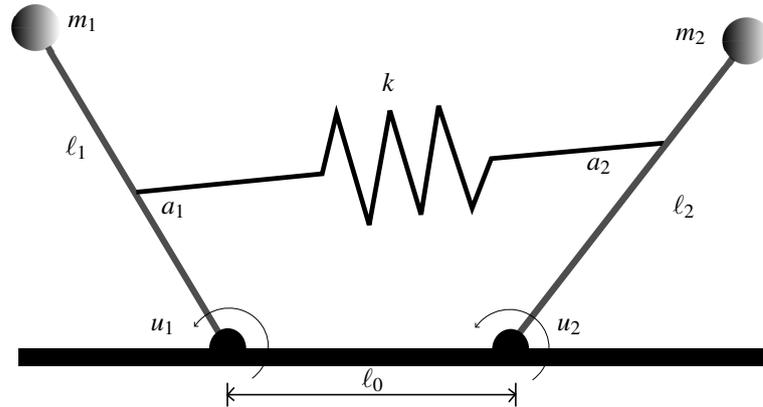


Figura 3.1: Sistema de péndulos interconectados

se muestra la evolución en el tiempo del parámetro de interconexión estimado de manera descentralizada en cada uno de los controladores, correspondiente a la constante de rigidez del resorte. Aún cuando no existe convergencia hacia un él valor real de los parámetros, dichos parámetros estimados se mantienen acotados.

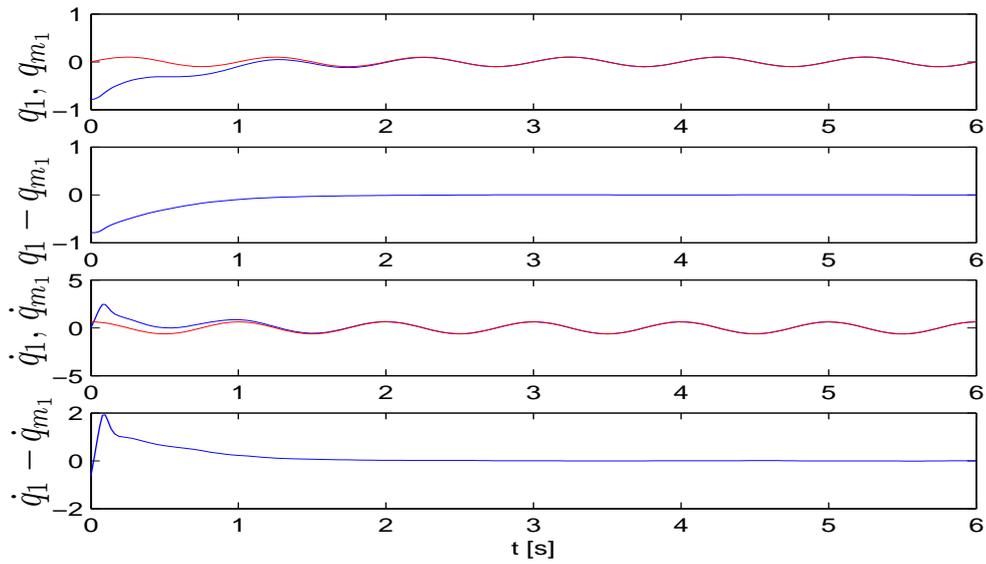


Figura 3.2: Error de seguimiento en el primer péndulo.

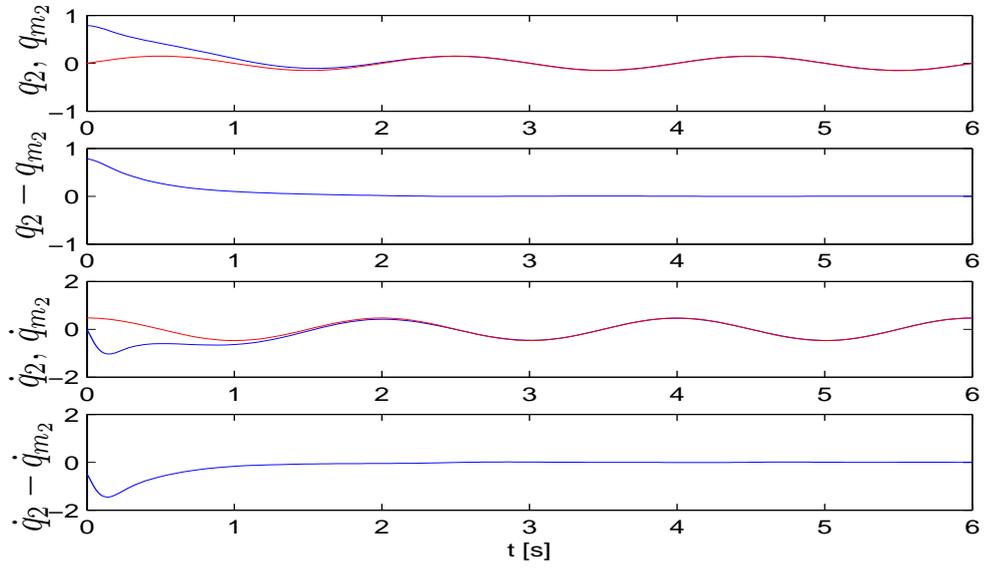


Figura 3.3: Error de seguimiento en el segundo péndulo.

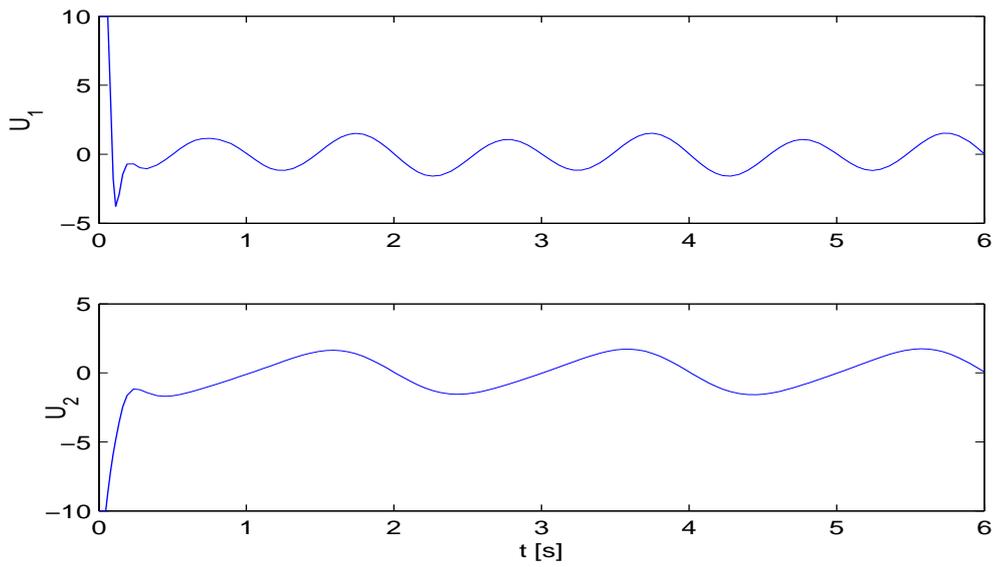


Figura 3.4: Señales de control para ambos péndulos.

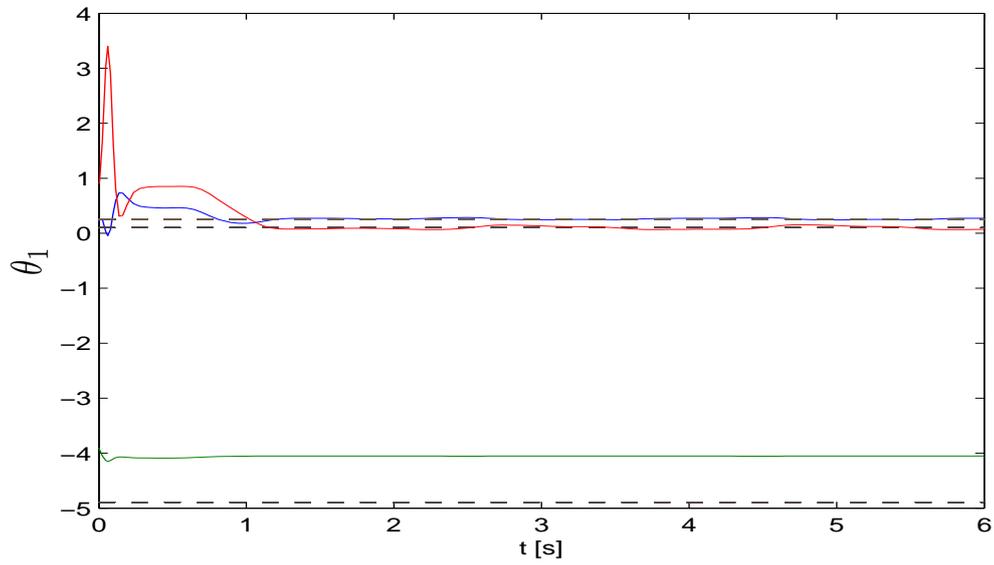


Figura 3.5: Parámetros locales estimados el primer péndulo.

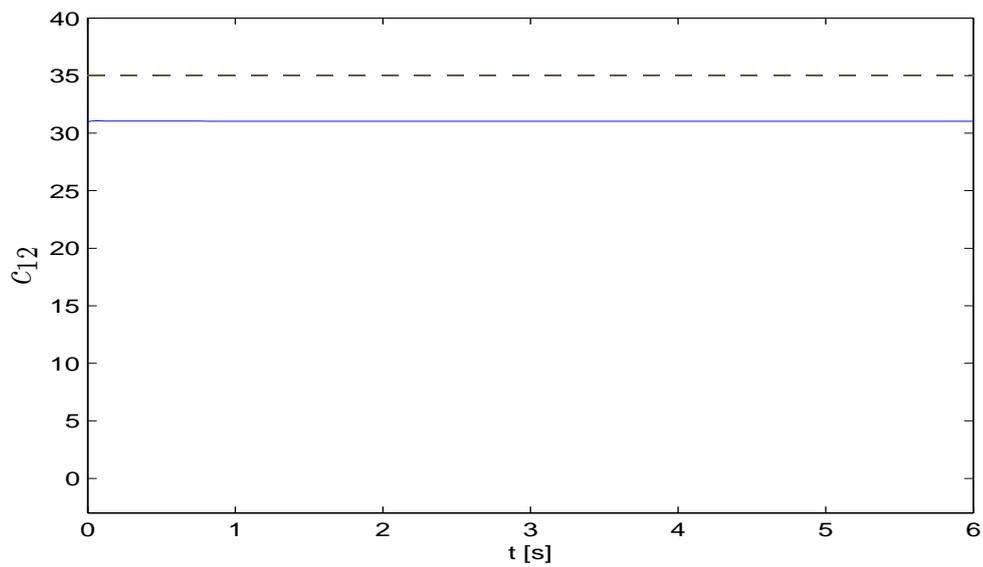


Figura 3.6: Parámetro de interconexión estimado en el primer péndulo.

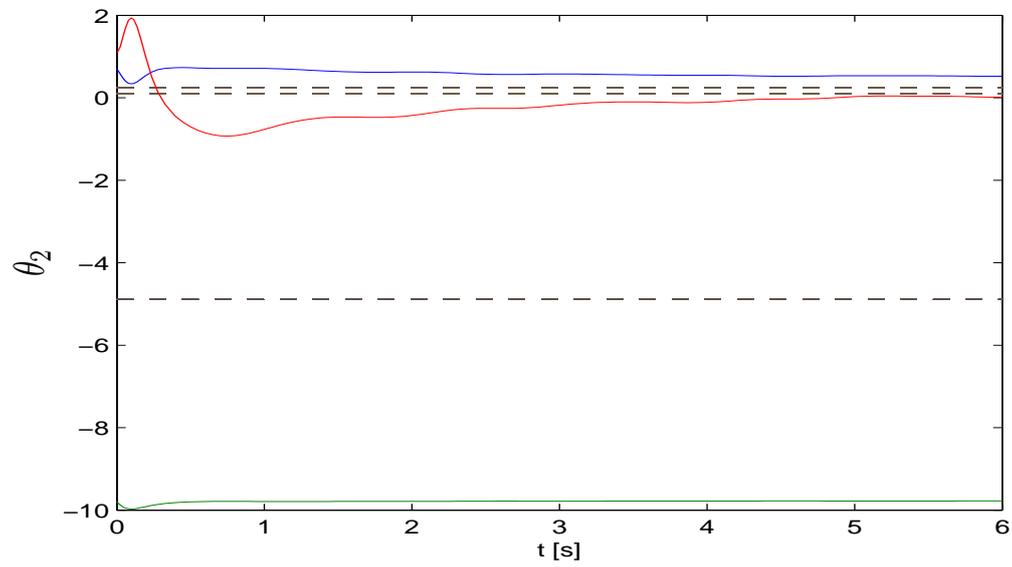


Figura 3.7: Parámetros locales estimados el segundo péndulo.

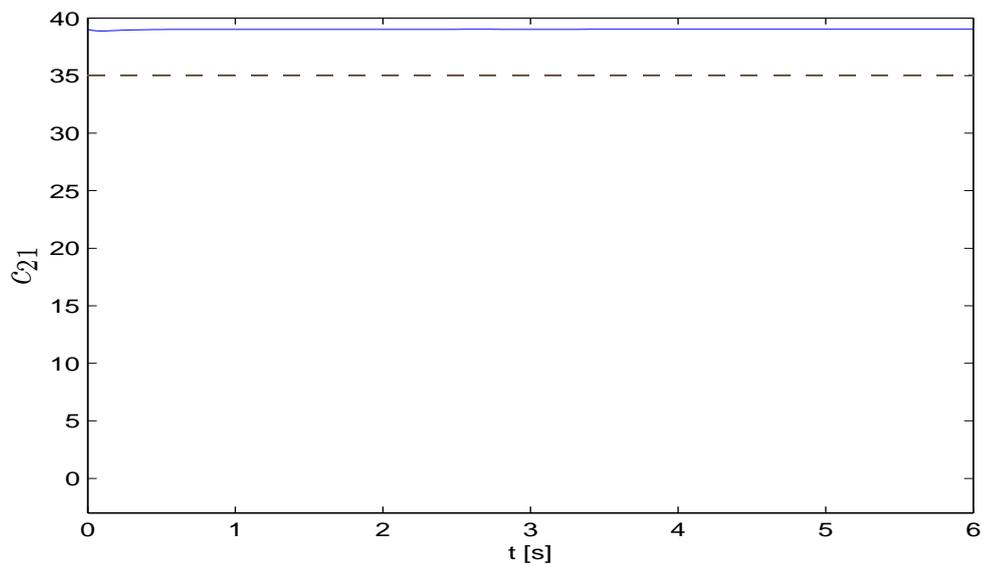


Figura 3.8: Parámetro de interconexión estimado en el segundo péndulo.

3.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se propone un esquema de control descentralizado adaptable para sistemas lagrangianos utilizando información estructural acerca de la interconexión. El esquema incluye dos leyes de adaptación de parámetros, una para los parámetros propios del subsistema y una ley de adaptación para estimar parámetros pertenecientes a las funciones de interconexión. Los términos de interconexión, para este capítulo, se restringen a aquellos que cuentan con parametrización lineal. El caso tratado corresponde al de N subsistemas lagrangianos, interconectados todos con todos y del mismo orden. El objetivo perseguido es alcanzar seguimiento asintótico de trayectorias.

El sistema de control propuesto incluye una señal adicional que es útil para rechazar perturbaciones externas no modeladas y es el elemento esencial para lograr un sistema descentralizado, ya que gracias a dicha señal se pueden utilizar, en cada uno de los subsistemas, las funciones de referencia en lugar de las señales de estado del resto del sistema.

El desempeño del sistema de control propuesto se implementó en simulación en un sistema de dos péndulos interconectados entre sí mediante un resorte, en donde la constante de rigidez del resorte es el único parámetro incierto en la interconexión. Además, también se supone incertidumbre en los parámetros del modelo matemático de los péndulos.

Las características principales de los resultados de las simulaciones realizadas se resumen a continuación:

- El sistema, efectivamente, presenta seguimiento asintótico para las trayectorias de referencia y las condiciones iniciales especificadas.
- Dada la naturaleza del control adaptable, el sistema es robusto ante errores iniciales de estimación de parámetros así como ante variaciones lentas de los valores de los parámetros.
- Para los parámetros estimados, se obtienen en general valores acotados de los mismos y, en el mejor de los casos existe convergencia ante valores constantes, pudiendo ser o no los correspondientes a los valores reales considerados. Sin embargo, aun cuando no se logra una identificación exacta de los parámetros, se presenta una igualación de modelo necesaria para la eliminación de la señal de error de seguimiento.

- Las señales de control necesarias para alcanzar el comportamiento deseado son en general de magnitudes no muy grandes, lo que implica que podrían ser implementadas físicamente sin mayores inconvenientes.

Es importante mencionar que para lograr un desempeño satisfactorio, la sintonización de los parámetros de diseño no requiere de gran precisión, aunque por supuesto, mientras mejores aproximaciones iniciales se proporcionen, el sistema tarda menos tiempo en estabilizarse y lograr la igualación de modelo necesario. Debido a esto, dependiendo de las condiciones iniciales para las leyes de adaptación, se tendrán valores estimados más o menos alejados del valor real de los parámetros.

Capítulo 4

Sistemas acoplados con términos no lineales en parámetros

4.1. Planteamiento del problema

Considere un sistema compuesto por N subsistemas lagrangianos completamente actuados, donde el i -ésimo subsistema tiene la forma

$$\Sigma_i: \mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{u}_i, \quad (4.1)$$

y en donde $\mathbf{q}_i(t)$, $\dot{\mathbf{q}}_i(t)$, $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)$, $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i$, $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$ y \mathbf{u}_i se definen como en (2.11), n_i es el grado de libertad de cada subsistema y $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\varphi}) \in R^{n_i}$ el término de interconexión entre el subistema i y el resto de los subsistemas y en donde $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \dots, \mathbf{q}_N^T]^T$, $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_1^T, \dot{\mathbf{q}}_2^T, \dots, \dot{\mathbf{q}}_N^T]^T$, y $\boldsymbol{\varphi}$ es un vector de parámetros constantes desconocidos.

4.1.1. Estructura de interconexión

En este caso, el efecto de la interconexión es representado como la suma de funciones vectoriales no lineales que dependen no linealmente de un vector de parámetros

$$\mathbf{z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \varphi) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \varphi_{ij}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \begin{bmatrix} Q_{ij_1}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \varphi_{ij_1}) \\ Q_{ij_2}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \varphi_{ij_2}) \\ \vdots \\ Q_{ij_n}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \varphi_{ij_n}) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

en donde cada $Q_{ijk}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \varphi_{ijk})$ es un función desconocida del estado del subsistema j y dependiente de un vector de parámetros desconocido φ_{ijk} . Se asume que cada una de estas funciones cumple con la desigualdad de Lipschitz, esto es

$$\begin{aligned} & \| Q_{ijk}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \hat{\varphi}_{ijk}) - Q_{ijk}(\mathbf{q}_{m_j}, \dot{\mathbf{q}}_{m_j}, \varphi_{ijk}) \| \\ & \leq l_{1j} \| \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{m_j} \| + l_{2j} \| \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_{m_j} \| + l_{3j} \| \hat{\varphi}_{ijk} - \varphi_{ijk} \|, \end{aligned} \quad (4.3)$$

se cumple para ciertas constantes $l_{1j}, l_{2j}, l_{3j} > 0$. Por simplicidad, se considera el caso en el que cada función Q_{ijk} depende únicamente de un parámetro φ_{ijk} . También se asume, que al menos la trayectoria de referencia de cada subsistema q_{m_j} puede ser conocida por el resto de los subsistemas.

Una función $f(\theta)$ es convexa en un dominio Θ si satisface la desigualdad

$$f(\lambda \theta_1 + (1 - \lambda) \theta_2) \leq \lambda f(\theta_1) + (1 - \lambda) f(\theta_2). \quad (4.4)$$

De la misma forma, una función $f(\theta)$ es cóncava en un dominio Θ si se satisface la desigualdad

$$f(\lambda \theta_1 + (1 - \lambda) \theta_2) \geq \lambda f(\theta_1) + (1 - \lambda) f(\theta_2), \quad (4.5)$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$ y $\forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

Si $f(\theta)$ es convexa en Θ_f , entonces se puede escribir

$$f(\theta) - f(\theta_0) \geq \nabla f_{\theta_0}(\theta - \theta_0), \forall \theta, \theta_0 \in \Theta_f \quad (4.6)$$

y cuando $f(\theta)$ es cóncava en Θ_f , se puede escribir

$$f(\theta) - f(\theta_0) \leq \nabla f_{\theta_0}(\theta - \theta_0), \forall \theta, \theta_0 \in \Theta_f. \quad (4.7)$$

4.1.2. Objetivo de control

Dada una trayectoria de referencia $\mathbf{q}_{m_i}(t)$ diferenciable en al menos dos ocasiones, el problema es diseñar leyes de control \mathbf{u}_i , las cuales utilicen únicamente información local para asegurar, al menos, seguimiento finalmente acotado de trayectorias con alguna precisión arbitraria, esto es, para alguna constante $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_{m_i}(t)\| \leq \varepsilon, \quad (4.8)$$

mientras se mantiene la estabilidad interna del sistema. En este caso, se considera un esquema con restricciones en la comunicación, más específicamente, la comunicación entre subsistemas es reducida al intercambio únicamente de señales de referencia, mientras que a nivel local, se asume que el estado completo se conoce.

4.2. Diseño del controlador: Caso centralizado

En esta sección se diseña un esquema de control adaptable para el sistema (4.1), asumiendo que se tiene acceso completo al estado de cada subsistema, es decir, se diseña un sistema de control centralizado. Posteriormente se imponen restricciones a la comunicación entre subsistemas, lo que implica la necesidad de un sistema descentralizado.

Utilizando las definiciones (2.16) la dinámica del sistema en términos del error combinado puede escribirse en la siguiente forma

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\Theta_i - \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \varphi). \quad (4.9)$$

Para el diseño del control centralizado se asume que los vectores de parámetros Θ_i son desconocidos y que el estado completo se puede medir. Además, se asume inicialmente que existe libre intercambio de información entre subsistemas. Si se conoce la estructura de los términos de interconexión, así como los parámetros involucrados en dicha estructura, es posible aplicar una ley de control de la forma

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i\mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\hat{\Theta}_i + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \varphi) \quad (4.10)$$

para compensar exactamente el efecto del término de interconexión, y en donde $\mathbf{K}_i > 0$. Con esta selección, la dinámica del error se reduce a

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\dot{\mathbf{s}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{s}_i = -\mathbf{K}_i\mathbf{s}_i - \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \dot{\mathbf{q}}_{r_i}, \ddot{\mathbf{q}}_{r_i})\tilde{\Theta}_i, \quad (4.11)$$

donde $\hat{\Theta}_i$ es un estimado de Θ_i y $\tilde{\Theta}_i = \hat{\Theta}_i - \Theta_i$ es el error de estimación local. Como se puede apreciar de manera clara, la dinámica del error resultante corresponde a la dinámica del error del caso de subsistemas desacoplados, por lo que se puede mostrar el seguimiento asintótico mediante la función de Lyapunov

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i, \quad (4.12)$$

junto con la ley de adaptación de parámetros

$$\dot{\tilde{\Theta}}_i = \dot{\hat{\Theta}}_i = -\Gamma_i \mathbf{Y}_i^T \mathbf{s}_i, \quad (4.13)$$

con $\Gamma_i^{-1} > 0$. Aplicando directamente el Lema de Barbalat, se muestra tanto el seguimiento asintótico como el acotamiento de los parámetros estimados [6].

Si a diferencia del caso anterior, los parámetros de la interconexión se desconocen y si se considera el caso general de estructura de interconexión no linealmente parametrizable, es decir, (4.2) se satisface, se puede proponer una ley de control como la siguiente

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \hat{\varphi}_{ij}) + \tau_i, \quad (4.14)$$

en donde $\hat{\Theta}_i$, $\hat{\varphi}_{ij}$ son los estimados de Θ_i y φ_{ij} , respectivamente, y τ_i es una señal adicional para compensar el error cometido al utilizar $\hat{\varphi}_{ij}$ en lugar de φ_{ij} . Para evaluar el desempeño del esquema de control, así como diseñar la señal complementaria τ_i se propone la siguiente función candidata de Lyapunov global

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i, \quad (4.15)$$

donde \mathbf{V}_i es la función candidata de Lyapunov correspondiente al subsistema i -th, dada por

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_{ij}^T \tilde{\varphi}_{ij}, \quad (4.16)$$

con $\Gamma_i^{-1} > 0$, $\varphi_{ij} = [\varphi_{ij_1}, \varphi_{ij_2}, \dots, \varphi_{ij_n}]^T$ y $\tilde{\varphi}_{ij} = \hat{\varphi}_{ij} - \varphi_{ij}$ es el error de estimación de los parámetros de la interconexión.

Derivando (4.12) y evaluando a lo largo de la dinámica del error (4.9) junto con la entrada de control (4.14) se obtiene

$$\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{s}}_i + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\varphi}_{ij}^T \dot{\tilde{\varphi}}_{ij}, \quad (4.17)$$

$$= \mathbf{s}_i^T \left[-\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i - \mathbf{Y}_i \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \hat{\mathbf{Q}}_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{ij} + \tau_i \right] + \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\varphi}_{ij}^T \dot{\tilde{\varphi}}_{ij}, \quad (4.18)$$

$$= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N \hat{\mathbf{Q}}_{ij} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{ij} + \tau_i \right] + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{\varphi}_{ij}^T \dot{\tilde{\varphi}}_{ij}, \quad (4.19)$$

en donde el primer término del lado derecho es negativo definido y aplicando nuevamente la ley de adaptación de parámetros (4.13). Como se mencionó con anterioridad, cada elemento de las funciones vectoriales no lineales dependen solo de un parámetro φ_{ijk} . Para este caso, se propone una ley de adaptación escalar, proporcional al error combinado en dicho componente

$$\dot{\hat{\varphi}}_{ijk} = s_{ik} \omega_{ijk}, \quad (4.20)$$

donde ω_{ijk} es una función escalar que determina la dirección de ajuste de $\hat{\varphi}_{ijk}$. Entonces se puede escribir

$$\dot{\mathbf{V}}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{\mathbf{Q}}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij}) + \boldsymbol{\tau}_i \right] + \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_{ijk} \dot{\hat{\varphi}}_{ijk} \quad (4.21)$$

$$= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{\mathbf{Q}}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij}) + \boldsymbol{\tau}_i \right] + \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_{ijk} s_{ik} \omega_{ijk} \quad (4.22)$$

$$= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{\mathbf{Q}}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij}) + \boldsymbol{\tau}_i \right] + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{P}_{ij} \quad (4.23)$$

$$= -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{s}_i^T \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{\mathbf{Q}}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{P}_{ij}) + \boldsymbol{\tau}_i \right] \quad (4.24)$$

donde se define el vector

$$\mathbf{P}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{ij1} \omega_{ij1} \\ \tilde{\varphi}_{ij2} \omega_{ij2} \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_{ijn} \omega_{ijn} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Ahora, se debe de asegurar que el segundo término del lado derecho de la expresión anterior es negativo definido o al menos, suficientemente pequeño para afirmar que la derivada $\dot{\mathbf{V}}_i < 0$ es negativa definida fuera de una bola centrada en el origen. De esta manera, si se toma la expresión (4.24) y se toma una señal complementaria τ_{ik} para cada uno de los $N - 1$ subsistemas restantes se tiene

$$\dot{\mathbf{V}}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk}) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tau_{ijk} \right]. \quad (4.26)$$

Así, se puede reescribir

$$\dot{\mathbf{V}}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{k=1}^n s_{ik} \sum_{j=1, j \neq i}^N [(\hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk}) + \tau_{ijk}]. \quad (4.27)$$

Si se define la siguiente señal

$$J_{ijk}(\omega_{ik}, \varphi_{ijk}, \hat{\varphi}_{ijk}) = \hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk}, \quad (4.28)$$

el problema se reduce entonces a diseñar las señales complementarias τ_{ijk} y las leyes de adaptación para estimar los parámetros $\hat{\phi}_{ijk}$ de tal modo que se minimice el efecto debido a la función $J_{ijk}(\omega_{ik}, c_{ijk}, \hat{c}_{ijk})$, pero al mismo tiempo tratando de evitar sobrecompensaciones. De esta manera, cada uno de los subsistemas necesita estimar $n(N-1)$ parámetros de interconexión. El problema de diseño de los términos complementarios τ_{ijk} establece un problema de optimización que puede ser resuelto mediante la metodología propuesta en [16]. De forma general las funciones que resuelven el problema está dada por

$$\tau_{ijk} = -a_{ijk}^* \text{sat}\left(\frac{S_{ik}}{\varepsilon}\right), \quad (4.29)$$

$$\dot{\hat{\phi}}_{ijk} = s_{\varepsilon_{ik}} \omega_{ijk}^*, \quad (4.30)$$

donde cada a_{ijk}^* y ω_{ijk}^* son ganancias escalares suficientemente grandes para dominar la magnitud de la función $J_{ijk}(\omega_{ik}, \phi_{ijk}, \hat{\phi}_{ijk})$ y una función para determinar el ajuste de los parámetros ϕ_{ijk} de manera óptima, respectivamente. Así, se debe de seleccionar

$$a_{ijk}^* = \max_{\phi_{ijk}} (J_{ijk}(\omega_{ik}, \phi_{ijk}, \hat{\phi}_{ijk})), \quad (4.31)$$

y al mismo tiempo, seleccionar ω_{ijk}^* tal que la magnitud de la ganancia se minimice, es decir

$$a_{ijk}^* = \min_{\omega_{ijk}^*} \left(\max_{\phi_{ijk}} (J_{ijk}(\omega_{ik}, \phi_{ijk}, \hat{\phi}_{ijk})) \right), \quad (4.32)$$

Considerando el objetivo de control (4.8) se define una nueva variable de error dada por

$$s_{\varepsilon_i} = s_i - \varepsilon \text{sat}\left(\frac{S_i}{\varepsilon}\right), \quad (4.33)$$

donde ε es una constante positiva arbitrariamente pequeña que determina la vecindad (bola) en donde se asegure el seguimiento asintótico de trayectorias finalmente acotado. Inspirados por [16], [15], la clase de interconexiones a tratar se restringe a aquellas funciones Q_{ij} que satisfacen (4.4) o (4.5). Así, las soluciones al problema de optimización están dadas por

Si $s_{ik} \geq 0$,

$$a_{ijk}^* = \begin{cases} 0 & \text{si } Q_{ijk} \text{ es cóncava;} \\ Q_{ijk} - \hat{Q}_{ijk} + \frac{\bar{Q}_{ijk} - Q_{ijk}}{\bar{\phi}_{ijk} - \phi_{ijk}} (\hat{\phi}_{ijk} - \phi_{ijk}), & \text{si } Q_{ijk} \text{ es convexa.} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\omega_{ijk}^* = \begin{cases} \widehat{\nabla Q_{ijk}}, & \text{si } Q_{ijk} \text{ es cóncava;} \\ \frac{\bar{Q}_{ijk} - Q_{ijk}}{\bar{\phi}_{ijk} - \phi_{ijk}}, & \text{si } Q_{ijk} \text{ es convexa.} \end{cases} \quad (4.35)$$

Si $s_{i_k} < 0$,

$$a_{ij_k}^* = \begin{cases} \underline{Q}_{ij_k} - \hat{Q}_{ij_k} + \frac{\bar{Q}_{ij_k} - \underline{Q}_{ij_k}}{\bar{\varphi}_{ij_k} - \underline{\varphi}_{ij_k}} (\hat{\varphi}_{ij_k} - \underline{\varphi}_{ij_k}), & \text{si } Q_{ij_k} \text{ es cóncava;} \\ 0, & \text{si } Q_{ij_k} \text{ es convexa.} \end{cases} \quad (4.36)$$

$$\omega_{ij_k}^* = \begin{cases} \frac{\bar{Q}_{ij_k} - \underline{Q}_{ij_k}}{\bar{\varphi}_{ij_k} - \underline{\varphi}_{ij_k}}, & \text{si } Q_{ij_k} \text{ es cóncava;} \\ \widehat{\nabla Q}_{ij_k}, & \text{si } Q_{ij_k} \text{ es convexa.} \end{cases} \quad (4.37)$$

donde $\bar{Q}_{ij_k} = Q_{ij_k}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \bar{\varphi}_{ij_k})$, $\underline{Q}_{ij_k} = Q_{ij_k}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \underline{\varphi}_{ij_k})$, para parámetros φ_{ij_k} que están en el intervalo $[\underline{\varphi}_{ij_k}, \bar{\varphi}_{ij_k}]$ y $\widehat{\nabla Q}_{ij_k}$ es el gradiente de la función Q_{ij_k} evaluado para los parámetros estimados $\hat{\varphi}_{ij_k}$.

Con la selección anterior, el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.27) es compensado cuando se cumple que $|s_{\varepsilon_i}| > \varepsilon$ y se asegura que

$$\dot{V}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0, \quad (4.38)$$

que implica estabilidad considerando la función candidata de Lyapunov global, es decir

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \dot{V}_i = -\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i \leq 0. \quad (4.39)$$

entonces, la ley de control (4.14) toma la forma

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{q}}_i) \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{q}_j, \dot{\mathbf{q}}_j, \hat{\varphi}_{ij}) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tau_{ij}, \quad (4.40)$$

en donde el componente k del vector τ_{ij} se diseña de acuerdo con (4.29), (4.30). De manera alternativa, este procedimiento de diseño puede ser extendido a funciones de interconexión que no son cóncavas ni convexas si pueden ser acotadas por una función que sí pertenezca a esta clase de funciones. En [15] se propone un método para encontrar dicha función.

4.3. Diseño del controlador: Caso descentralizado

Si se restringe la información que se intercambia entre subsistemas a únicamente señales de referencia, se puede alcanzar un esquema con un alto nivel de descentralización. En este caso la ley de control (4.40) toma la forma

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \mathbf{Y}_i \hat{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathbf{Q}_{ij}(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \hat{\varphi}_{ij}) + \tau_{id}, \quad (4.41)$$

donde \mathbf{q}_{m_j} , $\dot{\mathbf{q}}_{m_j}$ son las señales de referencia del subsistema j y τ_{i_d} es una nueva señal complementaria para compensar tanto el error paramétrico como el error cometido al utilizar las señales de referencia en lugar de las señales correspondientes al estado. Utilizando la misma función candidata de Lyapunov que en el caso anterior

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{2} \mathbf{s}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{s}_i + \frac{1}{2} \tilde{\Theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\Theta}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{2} \tilde{\varphi}_{ij}^T \tilde{\varphi}_{ij}, \quad (4.43)$$

y evaluando su derivada sobre la nueva dinámica del error se tiene

$$\dot{\mathbf{V}}_i = -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (Q_{ijk}(q_{m_j}, \dot{q}_{m_j}, \hat{\varphi}_{ijk}) - Q_{ijk}(q_j, \dot{q}_j, \varphi_{ijk})) + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk} \right] + \tau_{ik}. \quad (4.44)$$

Dado que se asumió que las funciones Q_{ijk} satisfacen (4.3) se puede escribir

$$Q_{ijk}(q_{m_j}, \dot{q}_{m_j}, \hat{\varphi}_{ijk}) - Q_{ijk}(q_j, \dot{q}_j, \varphi_{ijk}) \leq \hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + L_j |s_{jk}|, \quad (4.45)$$

así, la derivada de la función candidata de Lyapunov es

$$\dot{\mathbf{V}}_i \leq -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + L_j |s_{jk}| + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk}) + \tau_{ik} \right]. \quad (4.46)$$

Si la señal complementaria se selecciona de la siguiente manera

$$\tau_{ik} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \bar{\tau}_{ijk} + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tau_{ijk}^*, \quad (4.47)$$

el segundo término del lado derecho de la ecuación (4.46) puede ser escrito de tal forma que se pueda formular n problema de optimización similar al de la sección anterior, en el caso centralizado

$$\dot{\mathbf{V}}_i \leq -\mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk} + \bar{\tau}_{ijk}) \right] + \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N L_j |s_{jk}| + \tau_{ijk}^* \right]. \quad (4.48)$$

De esta forma, la señal $\bar{\tau}_{ijk}$ se selecciona como en (4.29), (4.30). Para diseñar la señal τ_{ijk}^* que descentraliza el sistema se toma la función candidata de Lyapunov global

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i. \quad (4.49)$$

Su derivada con respecto al tiempo es

$$\dot{\mathbf{V}} \leq -\sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{s}_i + \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N (\hat{Q}_{ijk} - Q_{ijk} + \tilde{\varphi}_{ijk} \omega_{ijk} + \bar{\tau}_{ijk}) \right] \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N L_j |s_{jk}| + \tau_{ijk}^* \right] \right\}. \quad (4.50)$$

Como la información intercambiada entre subsistemas es reducida a nivel de señales de referencia, el único criterio que cada subsistema puede tomar en cuenta para evaluar su desempeño es el error combinado local.

Entonces se selecciona

$$\tau_{ijk}^* = -\gamma_{jk} s_{ijk} \quad (4.51)$$

con $\gamma_{jk} > 0$. Con esta selección, el último término en la expresión (4.46) puede ser acotado mediante la aplicación de la desigualdad de Chebyshev, de la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^n s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N L_j |s_{jk}| + \tau_{ijk}^* \right] \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^N s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N L_j |s_{jk}| + \tau_{ijk}^* \right] \right\}, \quad (4.52)$$

$$= \sum_{i=1}^N s_{ik} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N L_j |s_{jk}| + \tau_{ijk}^* \right] \quad (4.53)$$

$$= \sum_{i=1}^N s_{ik} \sum_{j=1, j \neq i}^N L_j |s_{jk}| - \sum_{i=1}^N \gamma_{jk} s_{ik}^2, \quad (4.54)$$

$$= \sum_{i=1}^N (N-1) L_j |s_{ik}|^2 - \sum_{i=1}^N \gamma_{jk} s_{ik}^2, \quad (4.55)$$

$$= - \sum_{i=1}^N (\gamma_{jk} - (N-1)L_j) |s_{ik}|^2 \leq 0. \quad (4.56)$$

En el desarrollo anterior, es claro que las ganancias γ_{jk} deben de ser seleccionadas tal que $\gamma_{jk} > (N-1)L_j$ para asegurar que

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \dot{V}_i = - \sum_{i=1}^N s_i^T \mathbf{K}_i s_i \leq 0, \quad (4.57)$$

lo cual implica que las trayectorias del sistema permanecen acotadas para todo tiempo.

4.4. Resultados de simulación

En este capítulo se considera nuevamente el sistema de péndulos interconectados mediante un resorte con el objetivo de poder comparar los desempeños de distintos controladores en condiciones similares. El modelo matemático está dado una vez más por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1^2 \ddot{q}_1 - m_1 g \ell_1 \sin(q_1) &= u_1 - b_1 \dot{q}_1 + F a_1 \cos(q_1 - \beta) \\ m_2 \ell_2^2 \ddot{q}_2 - m_2 g \ell_2 \sin(q_2) &= u_2 - b_2 \dot{q}_2 - F a_2 \cos(q_2 - \beta) \end{aligned}$$

donde m_i , ℓ_i , g , u_i y b_i se definen como en el capítulo anterior. Como es de esperarse, la función de interconexión considerada en este caso es no linealmente parametrizable. De manera específica, se describe mediante

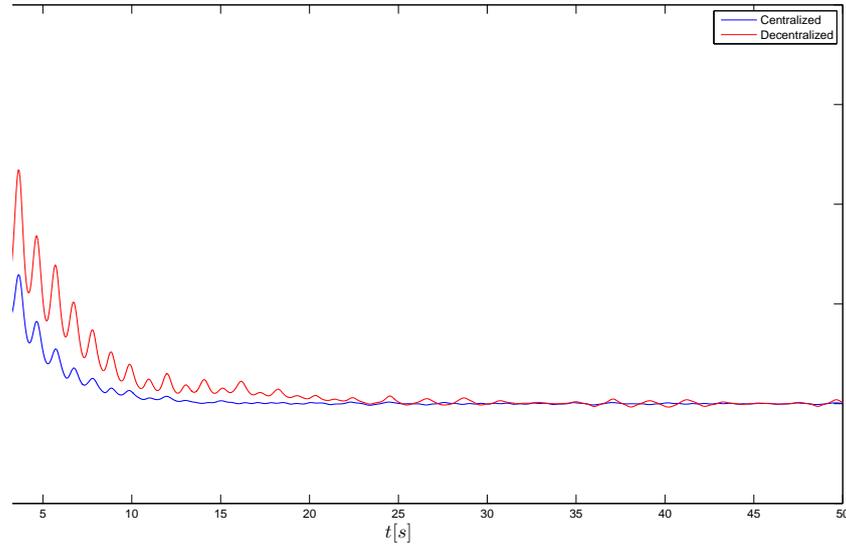


Figura 4.1: Error de seguimiento del primer péndulo.

las funciones

$$F = \frac{1 - e^{-k(\ell_k - \ell_0)}}{1 + e^{-k(\ell_k - \ell_0)}},$$

$$\beta = \arctan \left[\frac{a_1 \cos(q_1) - a_2 \cos(q_2)}{\ell_0 - a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_2)} \right],$$

$$\ell_k = \left[(\ell_0 - a_1 \sin(q_1) + a_2 \sin(q_2))^2 + (a_1 \cos(q_1) - a_2 \cos(q_2))^2 \right]^{1/2},$$

en donde la principal diferencia con el modelo del capítulo anterior es la forma en que se representa la magnitud de la fuerza F . Estas estructuras, cumplen con las condiciones de convexidad y concavidad impuestas a la clase de funciones de interconexión en los desarrollos previos, por lo que el controlador diseñado puede ser utilizado. En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran los errores de seguimiento en ambos péndulos, siendo claro que si bien no se logra el seguimiento asintótico, como se esperaba el error de seguimiento es finalmente acotado. En este caso se presenta una comparación entre los casos centralizado y descentralizado del controlador, verificando que en el caso centralizado se tiene un mejor desempeño en cuanto a transitorio se refiere, sin embargo cuando

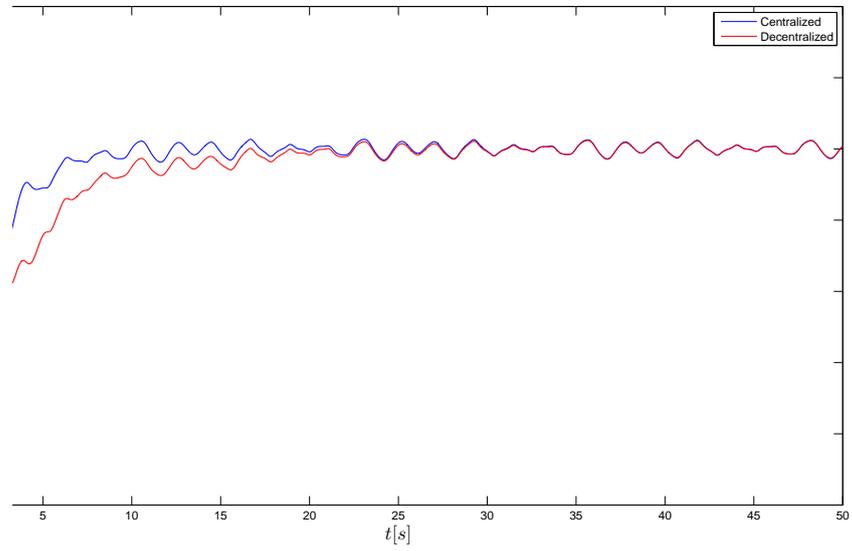


Figura 4.2: Error de seguimiento del segundo péndulo.

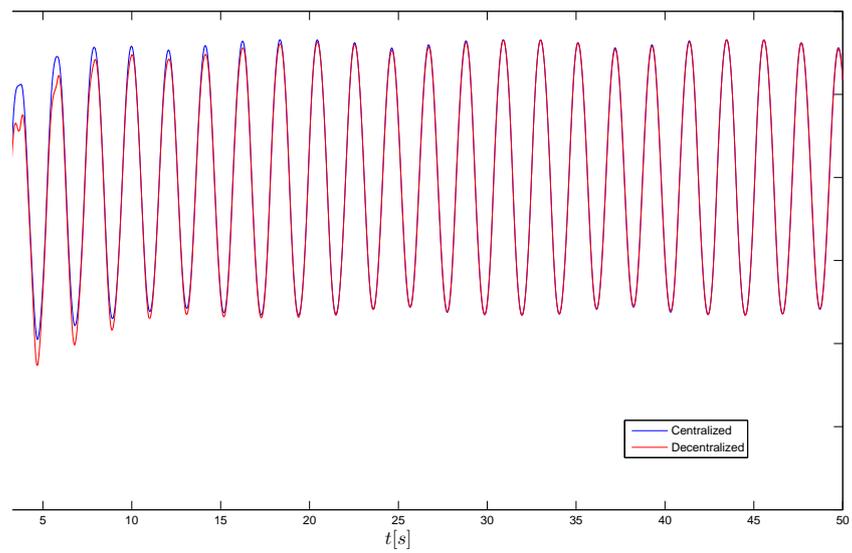


Figura 4.3: Señal de control para el primer péndulo.

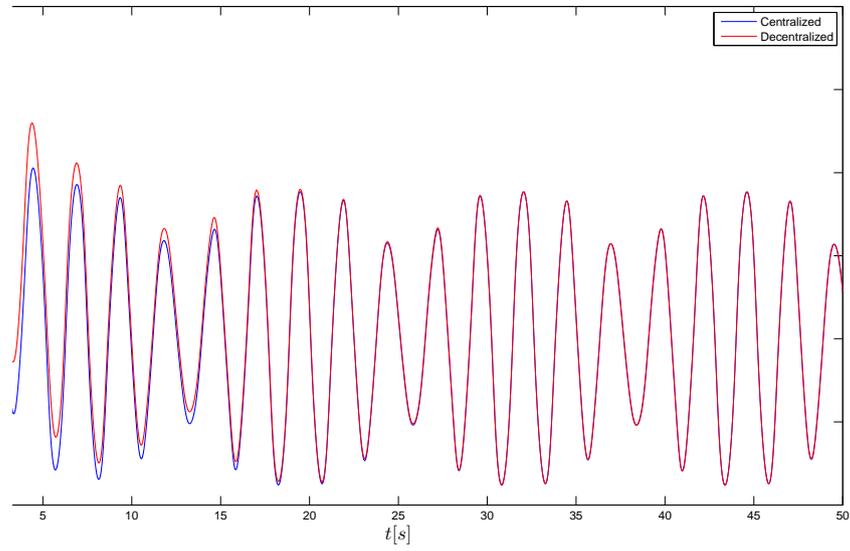


Figura 4.4: Señal de control para el segundo péndulo.

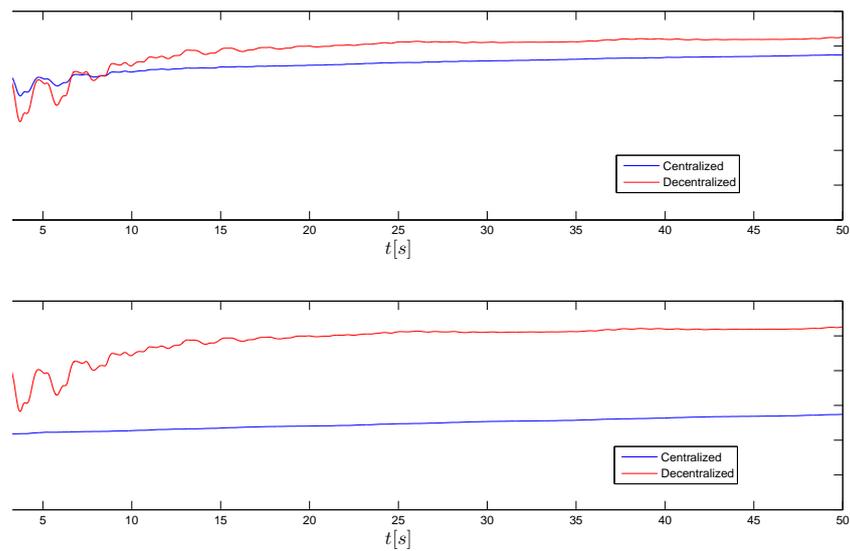


Figura 4.5: Parámetros estimados en ambos péndulos.

4.5. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se diseña una ley control descentralizado adaptable para sistemas lagrangianos utilizando información estructural acerca de la interconexión. En este caso, el esquema también incluye leyes de adaptación de parámetros local y de interconexión para cada uno de los controladores. Los términos de interconexión considerados este capítulo, se restringen a aquellos que cuentan con parametrización no lineal, es decir, la clase que se trata es una extendida de la considerada en el capítulo anterior. El caso tratado corresponde también al de N subsistemas lagrangianos, interconectados todos con todos y del mismo orden. El objetivo perseguido es alcanzar, al menos, seguimiento asintótico de trayectorias.

El sistema considerado, se distingue de lo desarrollado en el capítulo anterior principalmente por la clase de funciones de interconexión considerada. La clase inicial se extiende a funciones no linealmente parametrizables. Específicamente, los términos de interconexión tratados deben de cumplir con características cualitativas de convexidad o concavidad. Nuevamente, los parámetros estimados se mantienen acotados y dependiendo de las condiciones iniciales en los estimadores, se alcanzan mejores o peores resultados.

Al igual que en el capítulo anterior, existe una señal complementaria que garantiza el funcionamiento descentralizado del sistema. Esta señal complementaria, para este caso, tiene una forma proporcional al error combinado en cada una de las ecuaciones de los sistemas lagrangianos.

Algunas conclusiones con respecto a los resultados obtenidos en el presente capítulo:

- El sistema presenta seguimiento finalmente acotado para las trayectorias de referencia y las condiciones iniciales especificadas, la precisión del seguimiento está bien especificada.
- El controlador en cada uno de los subsistemas, estima parámetros del sistema en cuestión, así como parámetros de interconexión correspondientes a cada uno de los subsistemas con los cuales existe acoplamiento. En este caso se considera que todos los subsistemas están influenciados en su funcionamiento por el resto de los subsistemas.
- Las funciones de interconexión tratables mediante el sistema propuesto deben de cumplir con ciertos comportamientos cualitativos, específicamente, de tipo cóncavo o convexo. En caso de no cumplir con dicha condición, es necesario conocer alguna función que las acote y que cumpla con dicha propiedad.
- Existe un compromiso entre las magnitudes de las señales de control y la precisión del seguimiento acotado. Si se requiere mayor precisión en el seguimiento, serán necesarias señales de control de

mayor magnitud, que puedan mantener el error de seguimiento menores que algún valor específico.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan las principales conclusiones como consecuencia de los esquemas de control propuesto en los capítulos precedentes. Además, también se hace un análisis de las principales direcciones en las cuales se puede extender esta línea de investigación.

5.1. Conclusiones

En esta tesis se aborda el problema de diseño de un esquema de control descentralizado adaptable para sistemas de gran escala. La primer consideración hecha, es la división del sistema original en un conjunto de N subsistemas interconectados entre sí. Esta división se hace considerando fundamentalmente la forma que tendrá cada uno de los subsistemas resultantes, y permitiendo que las funciones mediante las cuales se interconectan tengan una forma un tanto más general. Debido a la frecuencia con que se presentan en problemas de ingeniería, se asume que los subsistemas resultantes de la división del sistema original tienen una estructura lagrangiana bien definida. Por otro lado, se consideran dos clases principales para caracterizar las funciones de interconexión resultantes. En el primer caso se consideran funciones lineales en parámetros y como segunda clase se contempla aquellas funciones que dependen no linealmente de parámetros, pero cuyo comportamiento cumple con alguna característica con respecto a los parámetros, específicamente comportamiento cóncavo o convexo con respecto a los parámetros. La elección de las clases de funciones anteriormente mencionadas corresponden al interés inicial de diseñar una ley de control adaptable, considerando incertidumbres tanto en los parámetros correspondientes a cada uno de los subsistemas así como a los

parámetros inciertos que pudieran existir en los términos de interconexión.

Una vez realizado el diseño y la evaluación de los sistemas de control propuesto mediante simulación, las conclusiones finales se pueden enunciar en la siguiente forma

- Se diseñó una ley de control descentralizado adaptable para el caso de N subsistemas lagrangianos interconectados entre sí por funciones de dos clases diferentes, lineales en parámetros y no lineales en parámetros con características de concavidad o convexidad. Para el primer caso el resultado alcanzado fue seguimiento asintótico de trayectorias mientras que para el caso no lineal se logró seguimiento finalmente acotado con precisión arbitraria.
- En ambos casos el esquema propuesto propone una ley de estimación de parámetros para parámetros locales así como estimación de los parámetros de las funciones mediante las cuales se interconectan los subsistemas. Es importante mencionar que se asume que el efecto de las interconexiones en un subsistema puede ser representado como la suma de los efectos debidos a cada uno de los subsistemas restantes, es decir, cada función de acoplamiento depende de variables de dos subsistemas como máximo.
- Los parámetros estimados en los casos lineal y no lineal dependen en gran medida de las señales de referencia utilizadas así como de las condiciones iniciales en los estimadores. Por supuesto, si se inicializan dichos estimadores con condiciones que se acercan a los valores reales, la estimación realizada es mejor. Más aún, en algunos casos no se alcanza la convergencia de la estimación a valores constantes, únicamente se puede asegurar que dichos parámetros permanecerán acotados.
- Como método de descentralización, cada subsistema utiliza las señales de referencia de los demás subsistemas en vez de utilizar las variables de estados. Esta suposición implica un error el cual es compensado mediante señales complementarias dependientes del error combinado local, ya que ante este nivel de descentralización no existe otro criterio que indique el desempeño del subsistema.
- Utilizando un alto nivel de descentralización y estimando parámetros de interconexión, se ha alcanzado seguimiento asintótico de trayectorias para el caso de interconexiones linealmente parametrizables, mientras que en el caso no linealmente parametrizable se asegura seguimiento finalmente acotado con precisión arbitraria.

5.2. Perspectivas a futuro

Como trabajo a futuro en la actual línea de investigación, existen diversos aspectos que pueden ser abordados con el objetivo de generalizar el diseño de controladores adaptables para grupos de sistemas bajo cierto nivel de descentralización. Los principales se mencionan a continuación

- Validar los resultados obtenidos de manera experimental, esto con el objetivo de incluir dentro del esquema efectos propios de los sistemas físicos y que en simulación no se pueden considerar de manera correcta.
- Caracterizar las funciones de interconexión mediante características diferentes a concavidad o convexidad, para incluir funciones no linealmente parametrizables que no son cóncavas o convexas dentro del esquema propuesto en este trabajo.
- Estudiar de manera detallada el comportamiento de los parámetros estimados, con el objetivo de poder establecer de manera clara los factores que mejoran o empeoran la estimación de parámetros. Incluso, para el caso no lineal, existe algún grado de libertad para proponer nuevas leyes de adaptación.
- Dado que en esta tesis se trabajó bajo un esquema descentralizado con alto grado de descentralización, el resultado para el caso no lineal se restringe a seguimiento finalmente acotado, sin embargo, podría ser estudiada la posibilidad de lograr seguimiento asintótico bajo un menor nivel de descentralización, ya que es justamente debida a la condición de descentralización que no existen elementos para evaluar el desempeño global del sistema y por lo cual fue necesario recurrir a las señales complementarias de alta ganancia.

En general, los resultados obtenidos, tanto en el diseño como en la simulación, verifican la efectividad de los controladores propuestos bajo las condiciones y suposiciones establecidas en cada caso. El objetivo de diseñar leyes de control descentralizado adaptable se ha cumplido de manera satisfactoria. Durante la realización de esta tesis se han encontrado aspectos en los cuales se podría profundizar, sin embargo estos puntos no contribuyen al objetivo originalmente planteado, pero sin duda constituyen oportunidades para el desarrollo y complemento de esta teoría.

Bibliografía

- [1] Feng, G. and Y. A. Jiang, *Variable structure based decentralized adaptive control*. IEEE Proc. D Contr. Theory Appl., Vol. 142, pp. 439-443, 1995.
- [2] Fu, L. *Robust adaptive decentralized control of robot manipulators*. IEEE Transactions on Automatic Control., Vol. 37, pp. 106-110, 1992.
- [3] Gavel, D. and T. C. Hsia, *Decentralized adaptive control of robot manipulators*. Proc. IEEE Int. Confr. Robotics Automation, pp. 1230- 1235, 1986.
- [4] Gavel, D and D. D. Siljak, *Decentralized adaptive control: structural conditions for stability*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, pp. 413-426, 1989.
- [5] Ioannou, P. *Decentralized adaptive control on interconnected systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, pp. 291-298, 1986.
- [6] Slotine J.J. and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [7] Jiang, Z.P. *Decentralized and adaptive nonlinear tracking of large-scale systems via output feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 11, 2000.
- [8] Khalil, H. *Nonlinear Systems* (3rd Ed.), Prentice-Hall, 2002.
- [9] Mirkin, B.M. *A new decentralized model reference adaptive control scheme for large scale systems*, Proc. 4th IFAC Int. Symp. Adaptive Systems Control Signal Processing, Grenoble, France, pp. 645-650, 1992.
- [10] Narendra, K. and N. O. Olgeng, *Exact output tracking in decentralized adaptive control systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol 47, No. 2, 2002.

- [11] Spong, M. and M. Vidyasagar, *Robot dynamics and control*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [12] Tang, Yu et al. *Decentralized robust control of mechanical systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 4, 2000.
- [13] Chung, S.J., and Slotine, J.J.E., *Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems*. IEEE Transactions on Robotics, 25(3), 2009
- [14] Flores-Resendiz, J.F. and Y. Tang, *A Decentralized Adaptive Control of Interconnected Lagrangian Systems*, 48th IEEE Conference on Decision and Control. Shangai, China, December, 2009.
- [15] Loh, Ai-Poh et al. *Adaptation in the Presence of a General Nonlinear Parameterization: An Error Model Approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 9, September 1999.
- [16] Annaswamy, Anuradha et al. *Adaptive Control of Continuous Time Systems with Convex/Concave Parameterization*. Automatica, Vol. 34 No. 1. pp. 33-49. 1998.