



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**TEORIA Y LABORATORIO DE MAQUINAS DE CORRIENTE
DIRECTA Y SISTEMAS DE POTENCIA**

Del 6 de febrero al
26 de junio, 1981

Ing. Víctor Pérez Amador

Programa de Superación Académica
- Facultad de Ingeniería



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ING. MEC. Y ELECT.
DEPARTAMENTO DE ING. ELECTRICA

CURSO DE FORMACION ACADEMICA
MAQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

CONTENIDO

- Antecedentes
- Magnetización de la máquina de C.D.
- Función de aproximación de Froelich
- Curva de saturación en vacío
- Consideraciones generales sobre el equilibrio de las máquinas
- Estado estable de la máquina con excitación independiente.
- Estado estable de la máquina con excitación en derivación
- Estado estable de la máquina con excitación en serie
- Ejemplos de aplicación
- Transición en la operación de la máquinas de C.D.
- Ejemplo de transición.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE MAQUINAS DE C.D. EN ESTADO ESTABLE

1. ANTECEDENTES

Supongamos un circuito magnético como el que se muestra en la figura 1 (a). Este circuito consta de:

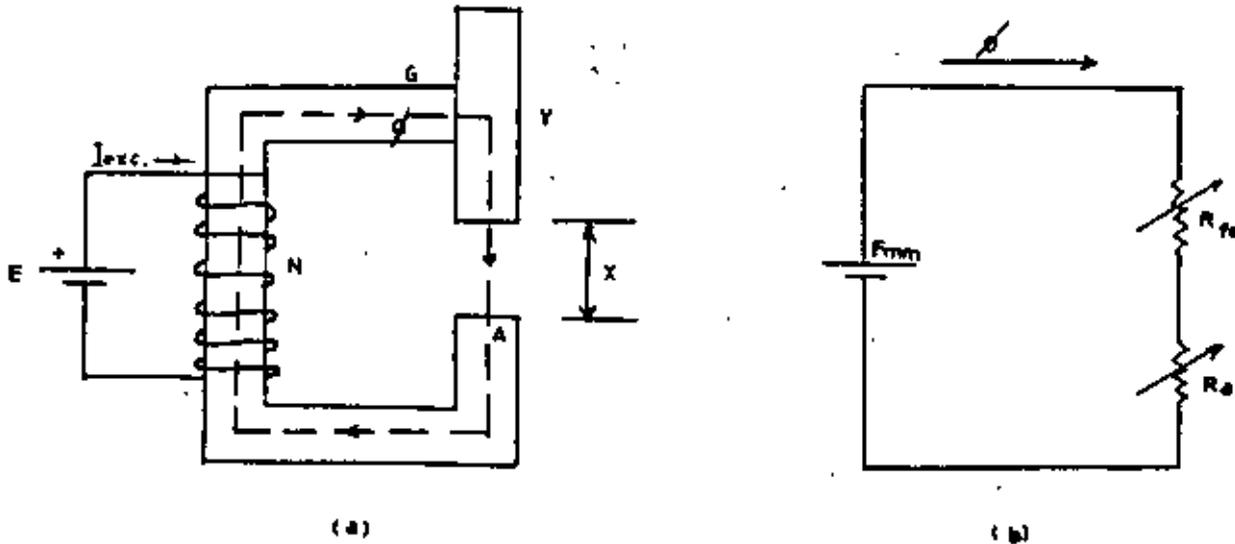


FIGURA 1

- Una bobina de excitación de N vueltas, por la cual circula la corriente de excitación I_{exc} .
- Un núcleo de material ferromagnético G cuya forma se asemeja a la letra con la que lo hemos identificado y su sección transversal A es constante.
- Un yugo móvil Y del mismo material y sección transversal que el núcleo.
- Un entrehierro cuya longitud X se puede variar a voluntad, según la posición del yugo.

Cuando se conecta la bobina de excitación a una fuente de fuerza electromotriz (E) circula la corriente de excitación (I_{exc}) cuyo valor depende de la fem. y de la resistencia del circuito eléctrico, de acuerdo con la ley de Ohm.

La corriente de excitación a su vez, produce el flujo magnético (ϕ) en el interior de la bobina, el cual sigue la trayectoria marcada con línea punteada en la figura 1(a). Su magnitud obedece a la ley

$$\phi = \frac{F_m A}{R} \quad (1.1)$$

que por su similitud con la ley de Ohm para un circuito eléctrico, se le llama Ley de Ohm magnética.

En la fórmula (1.1):

- ϕ es el flujo a través del circuito magnético, equivalente a la corriente de un circuito eléctrico.
- f_{mm} es la fuerza magnetomotriz cuyo valor es igual al producto NI_{exc} y es equivalente a la fuerza electromotriz del circuito eléctrico.
- R es la reluctancia del circuito magnético, equivalente a la resistencia del circuito eléctrico

La reluctancia se calcula de acuerdo con

$$R = \frac{1}{\mu} \frac{L}{A}$$

en donde:

- μ es la permeabilidad del medio que constituye el circuito magnético.
- L es la longitud del circuito.
- A es la sección transversal del mismo.

En el caso de la figura 1(a), observamos que el flujo atraviesa por dos medios notablemente distintos como son fierro y aire, y que dada su posición relativa constituyen un circuito de dos reluctancias en serie, cuyos valores serían:

$$\text{Reluctancia del fierro} \quad R_{fe} = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{L}{A} \quad (1.2)$$

$$\text{Reluctancia del aire} \quad R_a = \frac{1}{\mu_o} \frac{X}{A} \quad (1.3)$$

en donde:

- μ_{fe} es la permeabilidad del fierro
- μ_o es la permeabilidad del vacío (prácticamente igual a la del aire)
- L es la longitud media de las líneas de flujo dentro del elemento de fierro.
- X es la longitud del entrehierro
- A es el área de la sección transversal del circuito magnético.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, el circuito magnético de la figura 1 (a) puede representarse por el circuito eléctrico de la figura 1 (b), cuyo comportamiento estaría dado por:

$$\phi = \frac{f_{mm}}{R_{fe} + R_a} \quad (1.4)$$

En el caso de la fórmula (1.3) la sección transversal en el entrehierro es algo mayor del núcleo, debido a los efectos de borde, sin embargo en este estudio la consideraremos igual en cualquier parte del circuito para mayor

Analizando el denominador de la ecuación (1.4), de acuerdo con (1.2) y (1.3) tenemos:

$$R_{fe} + R_a = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{L}{A} + \frac{1}{\mu_o} \frac{X}{A} \quad (1.5)$$

en donde el primer término del segundo miembro de la ecuación (1.5) contiene la permeabilidad del hierro μ_{fe} que es una cantidad variable de acuerdo al nivel de excitación. Su comportamiento lo podemos apreciar en la figura 2

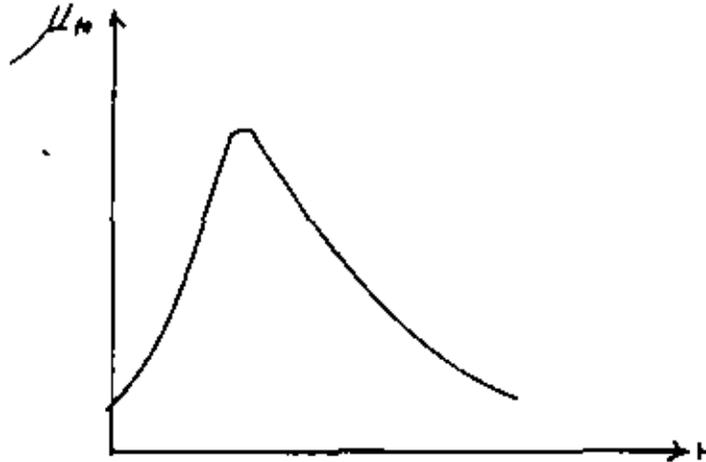


FIGURA 2

Para una excitación débil, observamos que la permeabilidad es pequeña; no obstante, comparándola con la permeabilidad del aire resulta alrededor de 400 veces más elevada. En una región de excitación moderada, la permeabilidad alcanza su valor máximo, que es aproximadamente 5,400 veces la del aire, y cuando la excitación es intensa, el núcleo no puede aumentar la cantidad de flujo confinado (condición de saturación) por lo cual su permeabilidad cae nuevamente a un valor muy bajo.

La longitud media de las líneas de flujo contenidas dentro del hierro (L) es también una cantidad que presenta ligeras variaciones de acuerdo a las variaciones en la longitud del entrehierro (X).

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (1.5) a diferencia del primer término, contiene la permeabilidad del vacío (μ_o) que es una cantidad constante y como ya hemos comentado de un valor muy inferior a la permeabilidad del núcleo. La única variable en este término es la longitud del entrehierro (X).

Teniendo en cuenta la ecuación (1.5) y la definición de f_{mm} en la (1.4), tenemos ahora la expresión:

$$\phi = \frac{\mu_{fe} \mu_o AN}{\mu_o L + \mu_{fe} X} I_{exc} \quad (1.6)$$

Para un elemento construido con dimensiones específicas, el área de la sección transversal (A) y la longitud media del circuito ($L+X$) son constantes, de modo que las variables que graficaremos para la ecuación (1.6) son el flujo y la corriente de excitación, como se muestra en la figura 3.

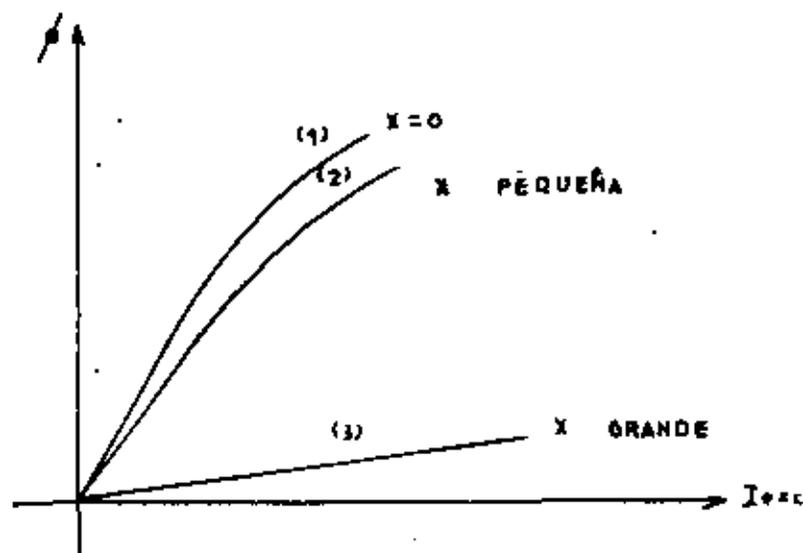


FIGURA 3

Consideremos primeramente el caso de $X=0$ (sin entrehierro; circuito magnético totalmente de hierro). La ecuación (1.6) quedaría:

$$\phi = \frac{\mu_{fe} AN}{L} I_{exc}$$

El quebrado representa la pendiente de la gráfica (1) en la figura 3, la cual se ve afectada por la permeabilidad del hierro (μ_{fe}), que de acuerdo con la figura 2, comienza con un valor pequeño, tomando a continuación su valor máximo y por último, decreciendo con tendencia hacia la horizontal.

Veamos ahora el caso de un entrehierro de longitud (X) muy pequeña comparada con su sección transversal (A). El denominador en la ecuación (1.6) tendría dos términos igualmente significativos, lo cual redundaría en una gráfica similar a la (1) de la figura 3, pero de menor pendiente en cada una de sus respectivas regiones, dando por resultado una gráfica similar a la (2) de la misma figura.

Por último tendremos un entrehierro de dimensiones considerables, lo cual motiva que el segundo término del denominador de la ecuación (1.6) resulte considerablemente más grande que el primero, pudiendo desprejiciarse este último, con lo que la ecuación (1.6) quedaría:

$$\phi = \frac{\mu_0 AN}{X} I_{exc}$$

en donde el quebrado representa la pendiente de la gráfica, de valor constante y además muy pequeño. La gráfica para estas condiciones será una recta semejante a la (3) de la figura 3.

2. MAGNETIZACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Teniendo en cuenta que el circuito magnético de la máquina de C.D. incluye piezas ferromagnéticas y entrehierro, podríamos compararlo con el circuito de la figura 1. Si además recordamos que los entrehierros se presentan entre las zapatas polares y el núcleo de la armadura, la longitud de estos entrehierros es muy pequeña comparada con el área de las zapatas polares, de manera que el comportamiento de este circuito magnético se asemeja a la gráfica (2) de la figura 3.

Sin embargo, analizando con más detalle el circuito real de una máquina, encontramos algunas diferencias importantes con respecto al circuito ideal de la figura 1 y su correspondiente respuesta en la figura 3. Estas diferencias serían:

- a) La sección transversal del circuito magnético no es constante, presentando grandes variaciones en donde las áreas más robustas son el núcleo de armadura, la coraza y el cuerpo de las piezas polares, y las más débiles son los dientes de la armadura y los filos de las zapatas polares, lo que motiva que algunas partes del circuito tengan mayor grado de saturación que otras.
- b) El entrehierro no es de longitud uniforme, presentando un valor máximo frente a las ranuras y un valor mínimo frente a los dientes de armadura, lo cual contribuye a la mayor saturación de estos.
- c) Las piezas polares se construyen de imán permanente, además del flujo que proporciona la bobina de excitación, lo que motiva que la curva de magnetización no se inicie en el origen, si no en el valor del flujo remanente.

La figura 4 nos da una idea de las condiciones físicas de este circuito. Las partes más oscuras corresponden a las regiones más débiles y que por consiguiente presentan mayor grado de saturación.

El comportamiento magnético del circuito de la máquina lo podemos apreciar en la figura 5, en la que cada elemento contribuye a una pérdida de pendiente respecto a la curva de comportamiento de un núcleo de geometría regular y totalmente de hierro. Las líneas punteadas de la figura 5 corresponden a los elementos identificados en la figura 4 según el siguiente orden:



3. FUNCION DE APROXIMACION DE FROELICH

A fin de poder efectuar el análisis de equilibrio de las máquinas de C.D. utilizando funciones que reproduzcan el comportamiento real de las mismas de la manera más fiel posible, es necesario conocer la ecuación de la curva de magnetización que hemos expuesto en la figura 5.

Una ecuación rigorista de esta curva resulta bastante complicada, además de que adoptaría una forma particular para cada máquina real, de acuerdo a las dimensiones relativas de los elementos descritos en las figuras 4 y 5.

Froelich propone una función relativamente sencilla, cuya aproximación a la curva real es aceptable y que se expresa mediante la ecuación:

$$\phi = \frac{a^1 i_{exc}}{b + i_{exc}} + P' \quad (3.1)$$

en donde a^1 y b son constantes y P' es el valor del flujo remanente. A manera de ejemplo de esta aproximación podemos observar la figura 6.

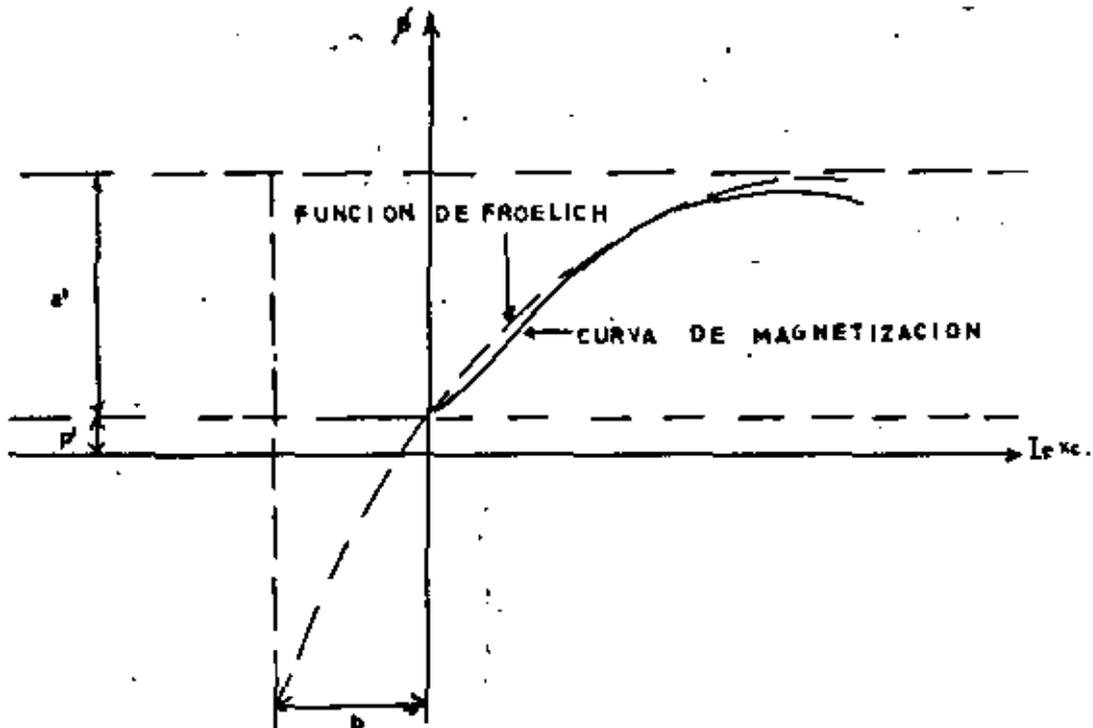


FIGURA 6

La gráfica de la función (3.1) representada en la figura 6 presenta dos asíntotas, una vertical en $I_{exc} = -b$ y otra horizontal en $\phi = P' + a^1$. Para la aplicación de esta función, solamente es -

... (1.6) ...

... (1.7) ...

... (1.8) ...

... (1.9) ...

... (1.10) ...

... (1.11) ...

figura 8, en donde se puede apreciar su aproximación con una curva real, obtenida en una prueba de laboratorio.

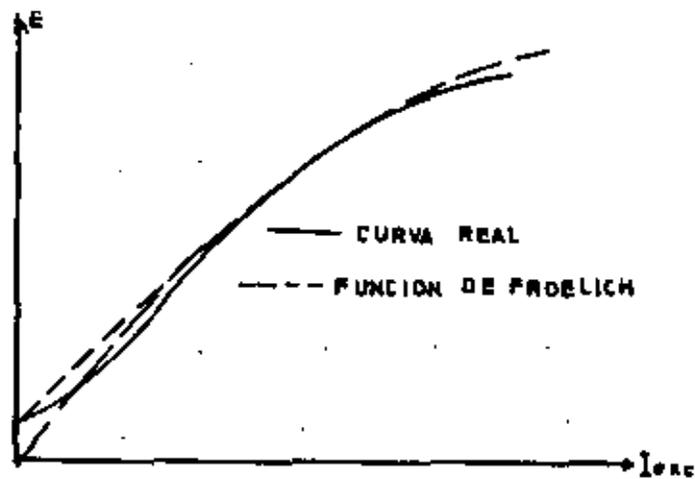


FIGURA 8

Graficando la ecuación (4.4) para diferentes velocidades de la máquina, de tal manera que $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$, obtendríamos las curvas mostradas en la figura 9.

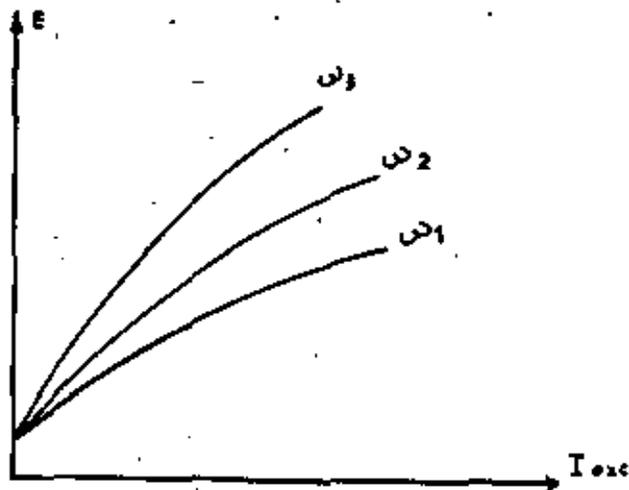


FIGURA 9

Las gráficas mostradas en las figuras 8 y 9 se conocen con el nombre de CURVAS DE SATURACION EN VACIO.

I_{exc} AMP	E VOLTS	VEL. RPM
0	E_0	N
I_1	E_1	CTE
I_i	E_i	
I_j	E_j	

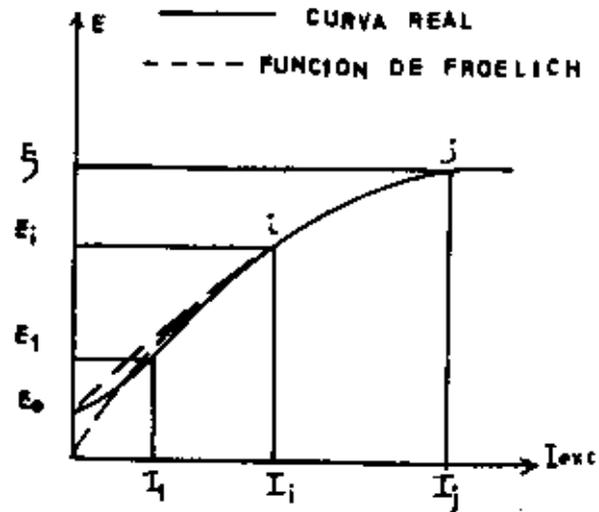


FIGURA 11

La expresión algebraica para el voltaje inducido mostrado en la gráfica de la figura 11 se puede obtener aplicando la ecuación (4.4) o la (4.5) a dos puntos de la curva obtenida en el experimento, como los i , j .

Según la (4.4):

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{(a\omega)I_i}{(b)+I_i} + (P\omega) \\
 E_j &= \frac{(a\omega)I_j}{(b)+I_j} + (P\omega) \\
 E_0 &= (P\omega)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones simultáneas en donde las incógnitas serían las cantidades encerradas en paréntesis. Si estas cantidades se dividen entre la velocidad angular de prueba (ω , en rad/seg), se obtienen los parámetros a , b y P .

Según la (4.5):

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{(a\omega)I_i}{(b)+I_i} \\
 E_j &= \frac{(a\omega)I_j}{(b)+I_j}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, que serían las cantidades encerradas en paréntesis.

Dividiéndolas entre la velocidad angular de prueba, se obtienen los parámetros a y b.

NOTA.- Frecuentemente se obtienen funciones muy alejadas de la realidad, de manera que para aproximar lo más posible, es necesario aplicar el sistema (5.1) o el (5.2) a varios pares de puntos en distintas regiones de la curva y promediar los valores de parámetros obtenidos, hasta conseguir una aproximación como la que muestra la figura 11.

5.2 VOLTAJE TERMINAL DEL GENERADOR CON CARGA.

El generador de C.D. como toda fuente real de energía eléctrica, tiene una resistencia interna en la cual se presenta una pérdida de voltaje cuya magnitud depende del régimen de carga.

Los elementos operativos del generador con carga los podemos apreciar esquemáticamente en la figura 12.

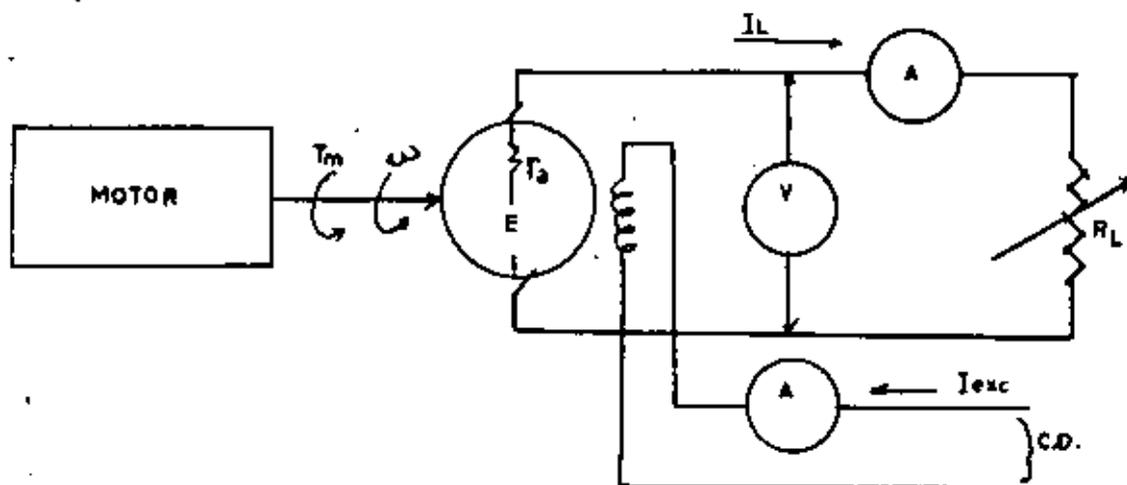


FIGURA 12

Cuando circula una corriente de línea (I_L) por el circuito de armadura del generador, el voltaje en las terminales de la máquina es menor que la fem. E , debido a que aparecen pérdidas en:

- Resistencia interna de la armadura
- Resistencia de las delgas del conmutador
- Resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas
- Resistencia de las escobillas.
- Resistencia del embobinado de interpolos y/o embobinados compensadores.

Para efectos de análisis del comportamiento externo del gene

rador, entenderemos por resistencia del circuito de armadura (r_a), la suma de todas las resistencias mencionadas, puesto que cada una contribuye a la pérdida de voltaje.

De acuerdo con lo anterior, el voltaje en las terminales de la máquina es:

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

que es la ecuación de una recta, como lo muestra la figura 13.

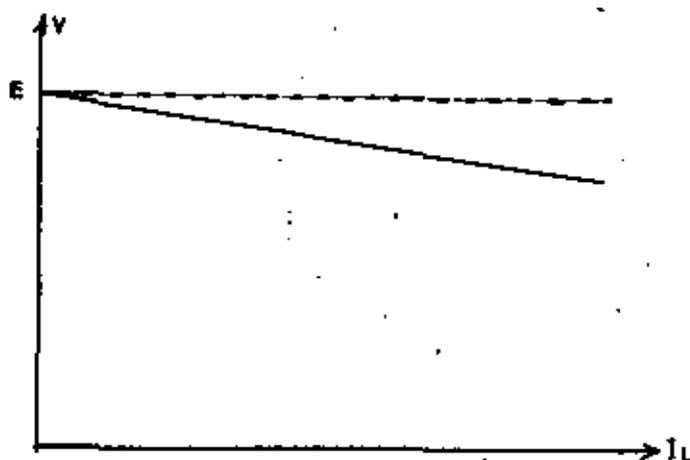


FIGURA 13

El comportamiento del voltaje terminal que muestran la ecuación (5.3) y la figura 13 corresponden a un generador excitado en forma independiente, como es el que se muestra en la figura 12, en donde la corriente de excitación permanece constante y la fem. no se distorsiona por efecto de la reacción de armadura. Esta condición se cumple en forma bastante cercana a lo deseable cuando la máquina tiene una compensación bien equilibrada de la reacción de armadura, por medio de los interpolos y/o los devanados compensadores.

Cálculo de la resistencia del circuito de armadura.- Averiguar el valor de esta resistencia es un trabajo que presenta algunos problemas, fundamentalmente porque interviene la resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas, la cual muy frecuentemente varía de las condiciones de reposo a las velocidades en que normalmente opera la máquina. Esto hace que no sea válida una medición de la resistencia con la máquina en reposo.

El valor más exacto lo podríamos calcular con el generador operando a velocidades cercanas a la nominal, y por medio de un arreglo como el que ilustra la figura 12, tomar una serie de pares de lecturas que nos permitan construir la gráfica de la figura 13. Es de importancia fundamental que esta prueba se efectúe -

con velocidad y corriente de excitación estrictamente constantes.

Si la gráfica obtenida es recta, podemos confiar en una buena compensación de la reacción de armadura. Entonces la resistencia del circuito de armadura (r_a) la podemos calcular para una determinada corriente de línea, como:

$$r_a = \frac{V_{\text{vacío}} - V_{\text{con carga}}}{I_L} \quad (5.4)$$

Para mayor precisión se recomienda calcular esta resistencia para diferentes pares de valores leídos, y promediar los resultados.

5.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOTOR CON CARGA

Cuando la máquina trabaja como motor, se induce en la armadura una fem (llamada frecuentemente fuerza contra electromotriz), de manera que los elementos operativos de la máquina los podemos apreciar en la figura 14.

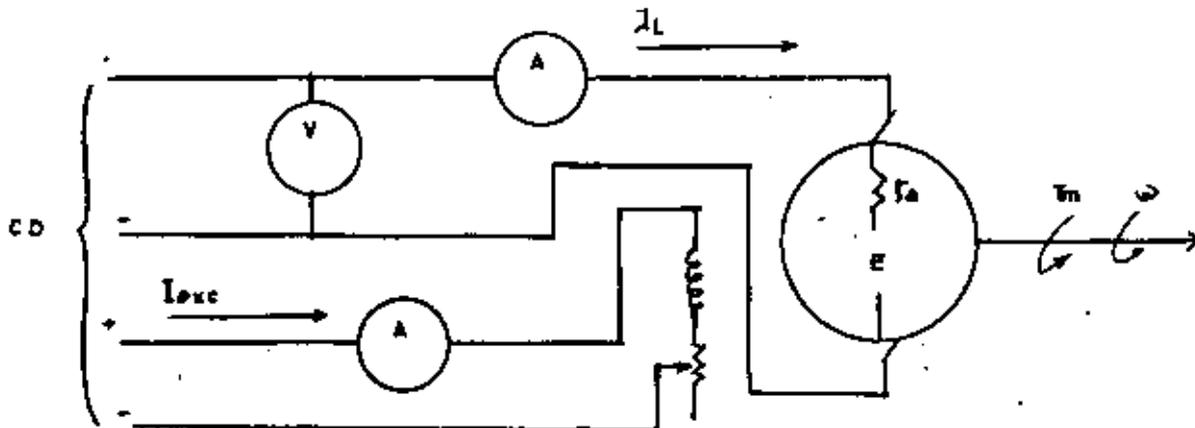


FIGURA 14

En el caso del motor, la fem. es menor que el voltaje externo (voltaje aplicado) del circuito de armadura, de manera que:

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

en donde solamente el signo en el segundo miembro es lo que diferencia el comportamiento de motor del de generador.

5.4 PAR ELECTROMAGNETICO

Cuando existen simultáneamente el flujo inductor (debido a la corriente de excitación) y una reacción de armadura (debida a la corriente de línea), la interacción entre estos dos campos produce un par mecánico de origen electromagnético.

Si la máquina trabaja como generador, este par es de sentido opuesto a la velocidad, motivando que el primotor reaccione entregando el par necesario para mantener la velocidad. De esta manera el generador absorbe la potencia mecánica necesaria para convertirla en potencia eléctrica.

Si la máquina opera como motor, el par es del mismo sentido que la velocidad, entregando así la potencia mecánica que ha convertido a partir de potencia eléctrica.

Una forma sencilla de evaluar el par electromagnético es mediante el esquema de balance de potencia que ilustra la figura 15.

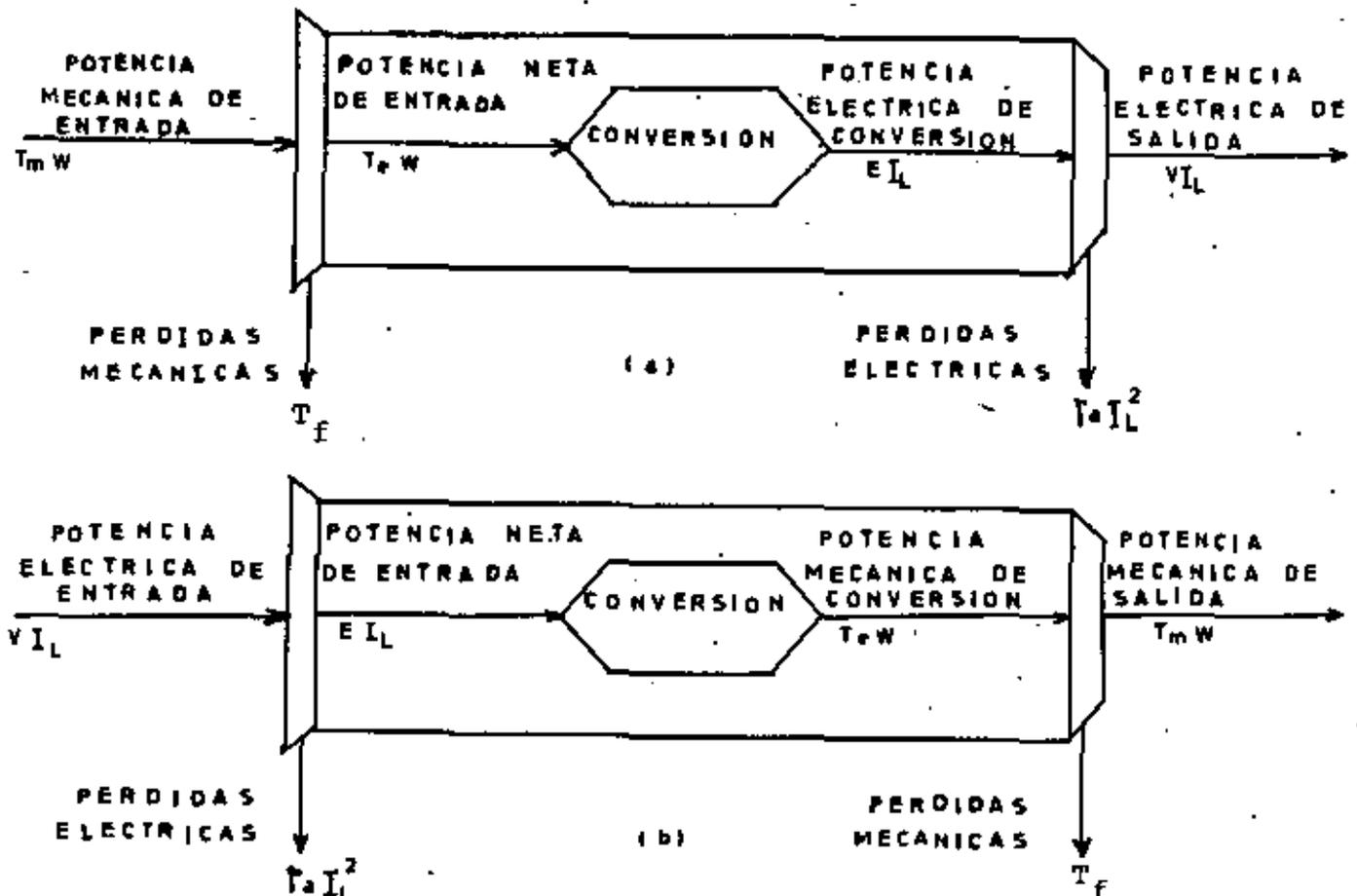


FIGURA 15

La potencia mecánica en la flecha de la máquina consta de un par mecánico (T_m) y la velocidad angular (ω).

El par de fricción (T_f) ocasiona pérdidas mecánicas, motivando que el par en la armadura sea diferente del par mecánico¹. El par en la armadura es el que hemos llamado par electromagnético (T_e).

En la parte eléctrica, la potencia que maneja la armadura ($E I_L$) también difiere de la potencia en las terminales de la máquina ($V I_L$) debido a las pérdidas eléctricas en el circuito de armadura.

En el fenómeno de conversión que se lleva a cabo en la armadura, una potencia mecánica ($T_e \omega$) se transforma en potencia eléctrica ($E I_L$) en el caso del generador (figura 15-a) y a la inversa en el caso del motor (figura 15-b), de manera que independientemente de como opere la máquina, podemos establecer que:

$$T_e \omega = E I_L$$

de donde el par electromagnético será:

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

El valor de E en la ecuación (5.6) puede obtenerse de la (4.4) o de la (4.5).

6. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

6.1 GENERADOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

El planteamiento para el análisis de equilibrio del generador con excitación independiente es prácticamente el mismo que se ha hecho en el párrafo 5, de manera que solamente nos concretaremos a reunir en una forma resumida esta información.

- a) Voltaje del generador en vacío.- Al no haber corriente circulante en el circuito de armadura, el voltaje es igual a la fem. Esta, además puede controlarse desde el valor inducido por el magnetismo remanente hasta el voltaje nominal de la máquina, siendo estable en cualquier nivel, ya que la corriente de excitación se suministra en forma independiente. La ecuación (4.4) forma parte del cuadro de ecuaciones de equilibrio que presentaremos más adelante.

¹En un balance más rigorista se incluyen en el mismo campo de acción de las pérdidas mecánicas, las pérdidas magnéticas por histéresis y corrientes parásitas en el núcleo de la armadura.

- b) Voltaje del generador con carga.- Si se mantienen constantes la velocidad y la corriente de excitación, el voltaje de la máquina está dado por la (5.3).
- c) Par absorbido por el generador.- Observando la figura 15-a, podemos darnos cuenta que el par mecánico absorbido por el generador es igual al par electromagnético más el par de pérdidas mecánicas. Esta consideración, agregada a la ecuación (5.6) nos da el equilibrio mecánico de la máquina.

Por tanto, las consideraciones de equilibrio quedan reunidas en el siguiente cuadro:

(a) Voltaje en vacío:	$E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$	(6.1)
(b) Voltaje con carga:	$V = E - r_a I_L$	
(c) Par mecánico absorbido:	$T_m = T_f + T_e$	
(d) Par electromagnético:	$T_e = \frac{E I_L}{\omega}$	

que constituyen un sistema de ecuaciones inter-relacionadas, ya que el cálculo de algunas variables puede estar especificado en otra de las ecuaciones. La figura 16 reúne la respuesta de la máquina según este cuadro de ecuaciones

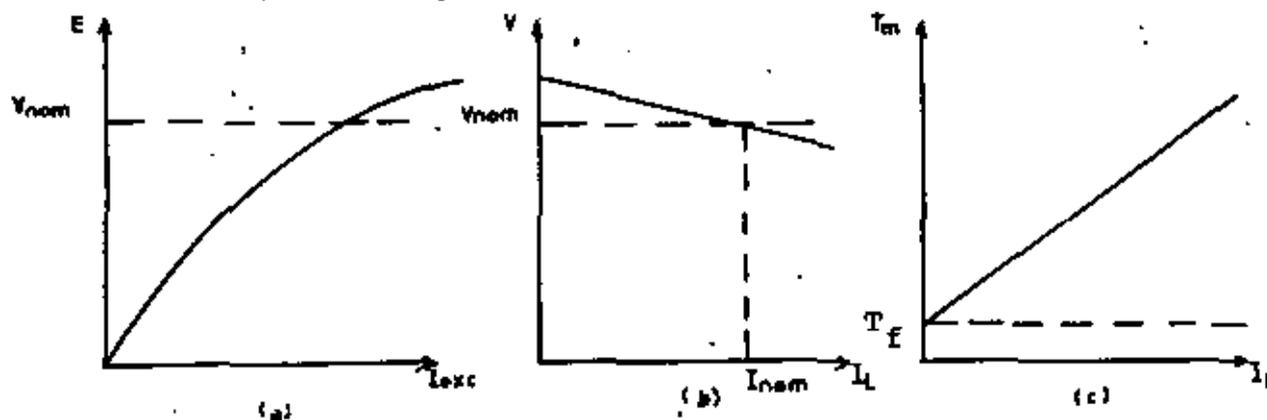


FIGURA 16

Regulación de voltaje.- En la figura 16-b observamos que la máquina se ha ajustado de tal manera que cuando esté suministrando a la línea el valor de corriente nominal, el voltaje terminal sea también al valor nominal.

El voltaje en vacío, por supuesto, debe exceder al valor nominal en una cantidad igual a la caída de tensión que aparece en el circuito de armadura a plena carga.

Definimos como "Regulación de voltaje", la caída de tensión en las terminales desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg.} = \frac{V_V - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100 \quad (6.2)$$

en donde:

V_V = voltaje terminal en vacío

V_{PC} = voltaje terminal a plena carga

V_{nom} = voltaje nominal de la máquina

Para una máquina ajustada a la respuesta que muestra la figura 16-b:

$$V_{PC} = V_{\text{nom.}}$$

6.2 MOTOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE

Aparentemente resulta poco práctico un motor de C.D. con excitación independiente, ya que esto requeriría dos fuentes de alimentación, una para la armadura y otra para el campo, como lo ilustra la figura 17, sin embargo, del análisis que haremos a continuación

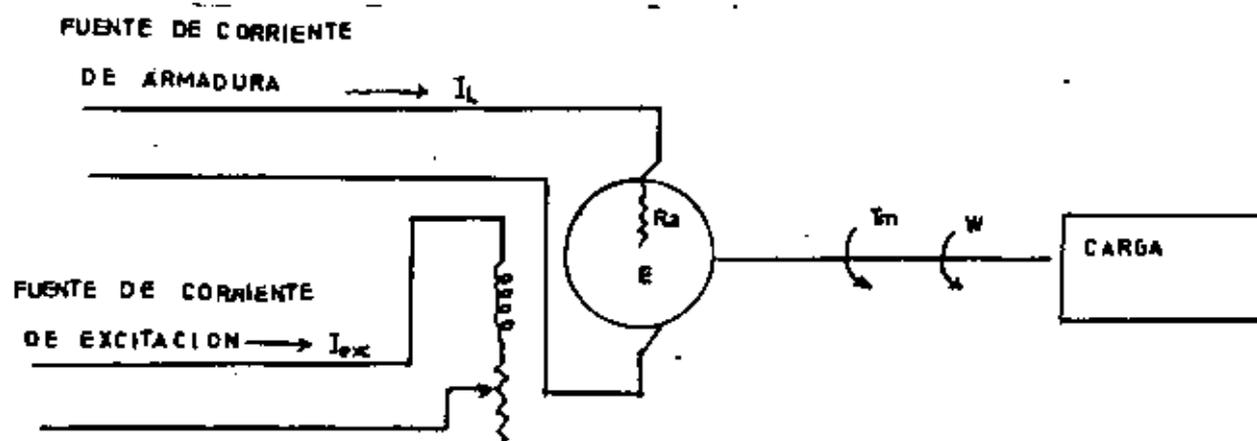


FIGURA 17

veremos que presenta grandes ventajas, particularmente en lo que se refiere al control de velocidad.

Normalmente un arreglo como el de la figura 17 se opera con una corriente de excitación constante, cuyo valor se ajusta alrededor de aquel que induce la fem. nominal a velocidad nominal, lo

que nos permite hacer uso de la función de Froelich simplificada:

$$E = \frac{a}{b+I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

en la cual si tenemos en cuenta la condición que acabamos de describir:

$$\frac{a I_{exc}}{b+I_{exc}} = K_e$$

por lo cual

$$E = K_e \omega \quad (6.3)$$

El comportamiento del circuito de arandura es como lo hemos expuesto en la ecuación (5.5):

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

Sustituyendo (6.3) en (5.5) tenemos

$$V = K_e \omega + r_a I_L$$

de donde

$$\omega = \frac{V - r_a I_L}{K_e} \quad (6.4)$$

Para el equilibrio mecánico, de la figura 15-b podemos deducir que:

$$T_m = T_e - T_f \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.6) y (6.3) en la (6.5):

$$T_m = K_e I_L - T_f$$

de donde

$$I_L = \frac{T_m + T_f}{K_e} \quad (6.6)$$

La ecuación (6.6) nos muestra que la corriente I_L nunca puede ser nula, pues aún en el caso de que el motor trabajara en vacío

$T_m=0$), las pérdidas por fricción estarían motivando un pequeño valor de I_L .

Sustituyendo la (6.6) en la (6.4) tenemos:

$$\omega = \frac{K_e V - r_a T_m - r_a T_f}{K_e^2} \quad (6.7)$$

- a) Velocidad del motor con voltaje de armadura constante y carga (par) variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$
- b) Velocidad del motor con par de carga constante y voltaje variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $1/K_e$ y cuya ordenada al origen es $r_a(T_m - T_f)/K_e^2$
- c) Voltaje necesario para mantener velocidad constante con carga variable.- Despejando el voltaje de la ecuación (6.7) tenemos:

$$V = \frac{r_a T_m + K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$$

que corresponde a una recta cuya pendiente es r_a/K_e y cuya ordenada al origen es $(K_e^2 \omega + r_a T_f)/K_e$

Las condiciones anteriores las podemos apreciar en forma más objetiva si ordenamos las ecuaciones bajo la estructura $y=mx+b$ como las presentamos en el siguiente cuadro.

a) Velocidad a voltaje constante	$\omega = -\frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2}$	
b) Velocidad con par constante	$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$	
c) Voltaje necesario a velocidad constante	$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$	(6.3)
Par mecánico	$T_m = T_e - T_f$	
Constante de excitación	$K_e = \frac{a I_{exc}}{b + I_{exc}} = \frac{E}{\omega}$	

Las gráficas correspondientes a las ecuaciones (6.8) las ilustramos a continuación en la figura 18.

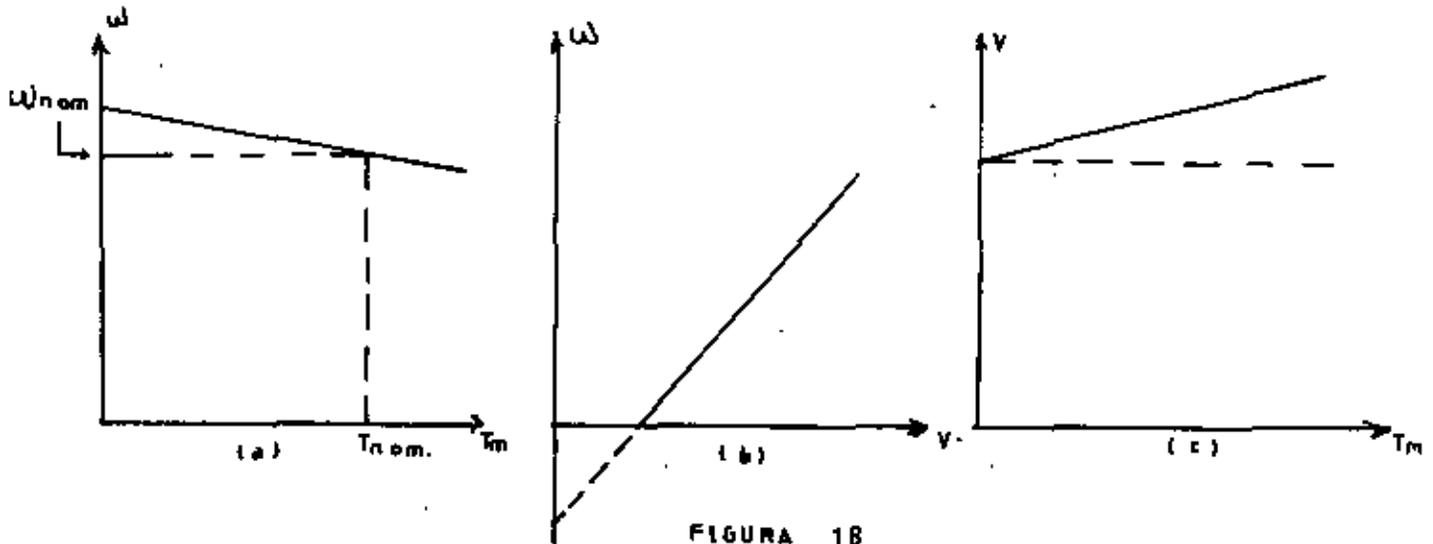


FIGURA 18

El caso (a) de las ecuaciones (6.8) y de la figura 18 es interesante para conocer el tipo de respuesta que da este motor, en cambio los casos (b) y (c) representan aspectos fundamentales para el diseño de control del motor de C.D., puesto que definen las características de la fuente de alimentación que requieren.

Regulación de velocidad.- Para condiciones de alimentación del motor constantes (voltaje de arandura y corriente de excitación), definimos como "Regulación de velocidad", la pérdida de velocidad desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{nom.}} \times 100 \quad (6.9)$$

en donde:

- ω_v = velocidad del motor en vacío
- ω_{PC} = velocidad del motor a plena carga
- ω_{nom} = velocidad nominal del motor

Si el motor se ajusta a una respuesta como la que muestra la figura 18-a, entonces

$$\omega_{PC} = \omega_{nom}$$

7. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN DERIVACION.

7.1 GENERADOR CON EXCITACION EN DERIVACION.

Conectar la excitación del generador en derivación significa ponerlo en paralelo con la armadura y con la carga, de manera que para excitar la máquina se utiliza la energía generada en la propia armadura, por lo cual se dice que se trata de un generador autoexcitado.

La autoexcitación es factible gracias a ciertas características, como son:

- El magnetismo remanente, el cual permite la generación de un pequeño voltaje, suficiente para iniciar la corriente de excitación.
- La energía necesaria para la excitación es apenas del 2 al 5% de la capacidad de la armadura, por lo cual el generador prácticamente sigue siendo capaz de suministrar a la carga su potencia nominal.
- La saturación del circuito magnético permite un punto de equilibrio con la excitación, con lo que se consigue un voltaje estable.

El diagrama del generador en derivación lo podemos apreciar en la figura 19.

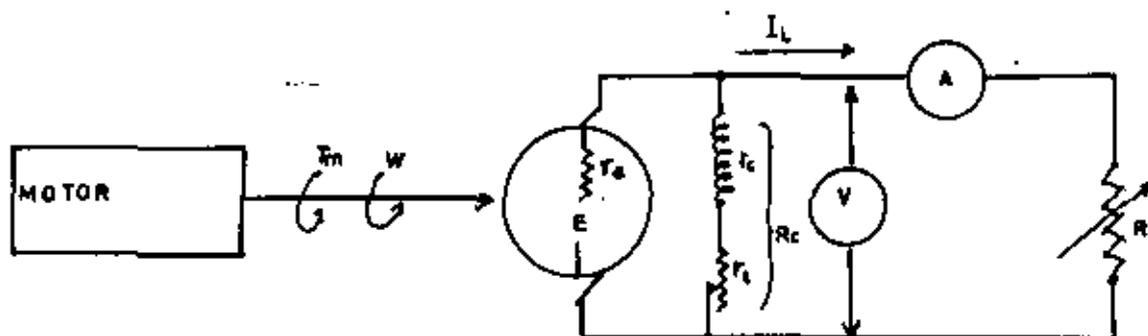


FIGURA 19

Además de los elementos estudiados en diagramas anteriores, tenemos ahora en la figura 19, la resistencia del enbobinado del campo inductor (r_c), la resistencia del reóstato de campo (r_f) y la resistencia del circuito de campo, $R_c = r_c + r_f$, cuyos valores intervendrán en las ecuaciones de equilibrio,

- a) Voltaje del generador en vacío.- Supongamos en la figura 19, una condición inicial con $R_L = \infty$, o sea $I_L = 0$ que es la condición de "generador en vacío"

El voltaje generado se localizará en algún punto de la curva de saturación, lo que nos permite usar la función de Froelich simplificada, que transcribimos a continuación:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

La única corriente circulante en estas condiciones es por la malla que forman la armadura y el circuito de campo, que ilustramos en la figura 20. Su valor sería:

$$I_{exc} = \frac{E}{r_a + R_c} \quad (7.1)$$

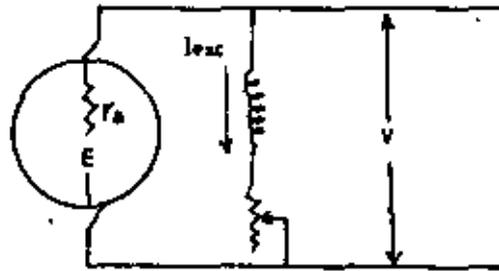


FIGURA 20

Teniendo en cuenta que la corriente de excitación es muy pequeña comparada con la corriente nominal de la máquina, y además, la resistencia del circuito de armadura (r_a) es también muy pequeña, la caída de voltaje en la armadura podemos despreciarla sin cometer error perceptible, de manera que el voltaje aplicado al circuito de campo es prácticamente igual a la fem (E). La ecuación (7.1) quedaría por tanto:

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c} = \frac{V}{R_c} \quad (7.1)b$$

Esta ecuación está especificada en las mismas coordenadas que la (4.5), de manera que se puede expresar gráficamente como una recta cuya pendiente es R_c , simultáneamente con la curva de saturación en vacío, como aparece en la figura 21.

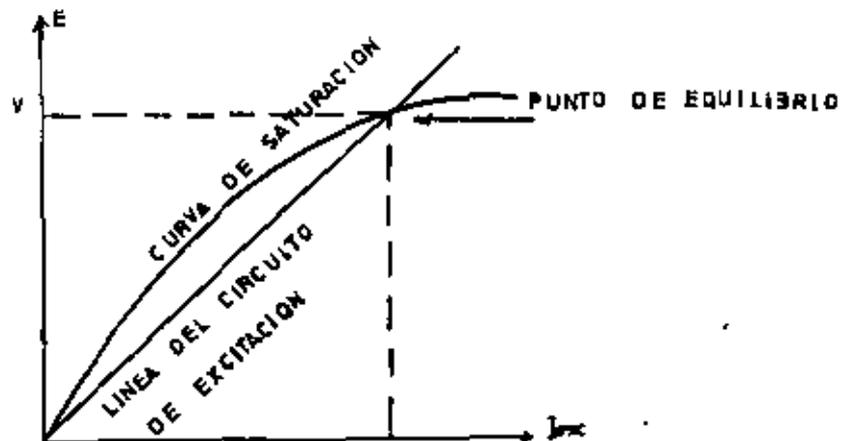


FIGURA 21

La intersección entre las dos gráficas de la figura 21 constituye el punto de equilibrio en el cual el generador induce un voltaje estable.

El sistema de ecuaciones simultáneas que nos permite analizar las condiciones de la figura 21 es:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \quad \omega I_{exc} \quad (7.2)$$

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c}$$

Si recordamos que en el circuito de excitación se ha incluido un reóstato, la resistencia de este circuito puede variar dentro de ciertos límites, lo que se manifiesta en la figura 21 con un cambio en la pendiente de la línea recta, motivando que el punto de equilibrio puede desplazarse a lo largo de gran parte de la curva de saturación.

La máxima resistencia admisible es cuando la recta de excitación se hace tangente a la curva de saturación, no existiendo entonces intersección entre las dos gráficas, y por tanto no hay estabilidad en el voltaje de la máquina.

La mínima resistencia es cuando se ha eliminado el reóstato, y queda únicamente la resistencia del embobinado de excitación. En estas condiciones es el máximo voltaje que se puede obtener del generador.

Las diversas opciones descritas anteriormente para un voltaje estable del generador se muestran en la figura 22.

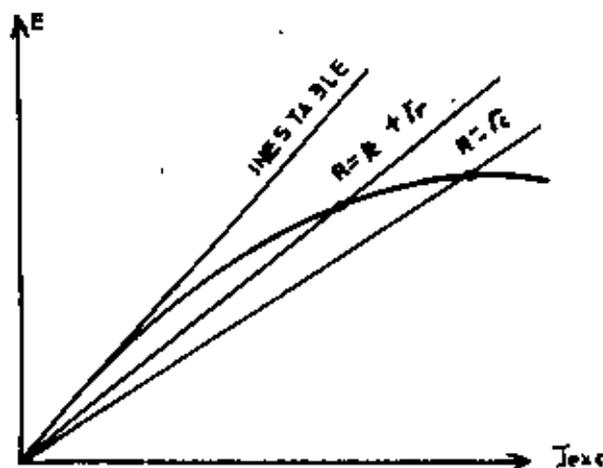


FIGURA 22

- b) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- Regresando ahora a la figura 19, supongamos un valor de (R_L) tal que haga circular una corriente en la línea de carga (I_L), de un valor apreciable, de manera que la caída en la resistencia del circuito de armadura (r_a) ocasiona una diferencia entre la fem. y el voltaje terminal.

A la vez, como el voltaje terminal es el que alimenta al campo inductor, este también se debilita, ocasionando una disminución de la fem., por lo tanto:

E con carga < E en vacío

Un generador en derivación, consecuentemente sufre una pérdida de voltaje apreciablemente mayor que uno con excitación independiente cuando pasan de la condición de vacío a la plena carga.

Para efectos de análisis, continuaremos considerando que la corriente de excitación es muy pequeña, por lo que la corriente en la armadura prácticamente está definida por el valor de la corriente de línea (I_L), lo que no nos conduce a un error apreciable.

El comportamiento del generador bajo las circunstancias descritas, estará dado por un sistema de tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} V &= E - r_a I_L \\ E &= \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \\ I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (7.3), las otras dos, obtenemos:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} - r_a I_L \quad (7.4)$$

que es una ecuación de segundo grado en coordenadas (I_L , V) cuya gráfica es la de forma presentada en la figura 23.

Regulación de voltaje.- El concepto de regulación de voltaje dado en la ecuación (6.2) se aplica también en este caso, de manera que:

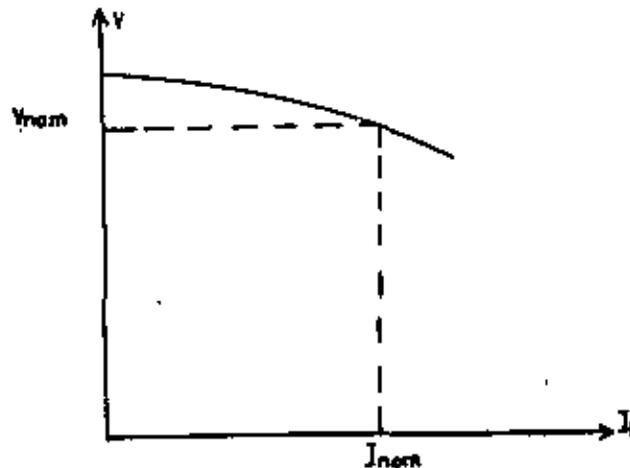


FIGURA 23

$$\text{Reg} = \frac{V - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100$$

Si la máquina se ajusta para la respuesta mostrada en la figura 23, entonces:

$$V_{PC} = V_{\text{nom}}$$

El valor de regulación para una misma máquina, es mayor cuando se excita en derivación que cuando se excita en forma independiente.

- c) Curva empleta de la respuesta de voltaje del generador con carga.- Las especificaciones nominales de una máquina se refieren a los valores a los cuales puede trabajar continuamente sin dañarse por elevación de temperatura.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la máquina es un dispositivo conversor de energía, es posible exceder estas limitaciones por tiempo corto, de manera que se puede investigar en que forma continúa decreciendo el voltaje mostrado en la figura 23, al sobrepasar considerablemente su corriente nominal. No obstante, prolongar este estado de sobrecarga, se refleja en calentamiento de los conductores de los embobinados, con la consecuente degradación de los aislamientos.

Graficando la ecuación (7.4) en toda la extensión del primer cuadrante de coordenadas, nos da una curva similar a la (7.4) de la figura 24. Esta gráfica, como podemos observar entra en el dominio de voltajes muy pequeños, y aún sin corriente de excitación

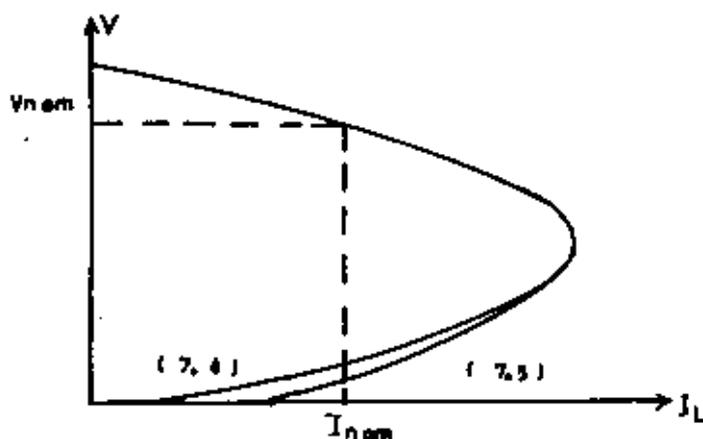


FIGURA 24

el flujo remanente induce una pequeña fem., que provoca circulación de corriente de línea, aún cuando el voltaje externo de la máquina fuera nulo.

La curva (7.4) de la figura 24 por lo tanto, no es totalmente representativa del comportamiento de la máquina, por lo que este análisis lo efectuaremos a partir de la ecuación (4.4) que es más exacta.

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b+I_{exc}} + P\omega \quad (4.4)$$

Si tenemos en cuenta esta ecuación en vez de la segunda que aparece en el cuadro (7.3), al hacer la correspondiente sustitución, quedaría:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_e + V} + P\omega - r_a I_L \quad (7.5)$$

en donde el término $P\omega$ introduce el comportamiento del generador con su magnetismo remanente.

La gráfica correspondiente a la ecuación (7.5) la observamos en la misma figura 24, la cual es mucho más aproximada a la respuesta real de la máquina.

No obstante que la corriente de línea tiene un límite, ésta puede alcanzar fácilmente valores de 4 a 8 veces la corriente nominal, por lo que obtener esta curva en una prueba de laboratorio sería destructivo para la máquina.

Sin embargo, la obtención de las características particulares del generador mediante pruebas no destructivas en el laboratorio y la aplicación de las ecuaciones de análisis, nos conduce a resultados bastante aceptables para estimar la respuesta de la máquina.

- a) Par mecánico absorbido por el generador.- De acuerdo con la figura 15-a y la ecuación (5.6), el par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = T_f + \frac{EI_L}{\omega} \quad (7.6)$$

en donde E e I_L son dos cantidades que varían simultáneamente según acabamos de analizar en el párrafo anterior, de manera que para cada condición de carga habría necesidad de calcular estas cantidades a fin de poder hacer una tabulación. Si deseamos conocer la curva de par mecánico en toda la extensión de la respuesta mostrada en la figura 24, es necesario aplicar la función de Froelich más precisa, de manera que la ecuación (7.6) formará un sistema simultáneo con la (4.4) y la (7.5).

Para el caso del generador en derivación, la curva más sencilla de graficar e interpretar el par mecánico es con respecto al voltaje terminal de la máquina, que nos da un resultado semejante al mostrado en la figura 25.

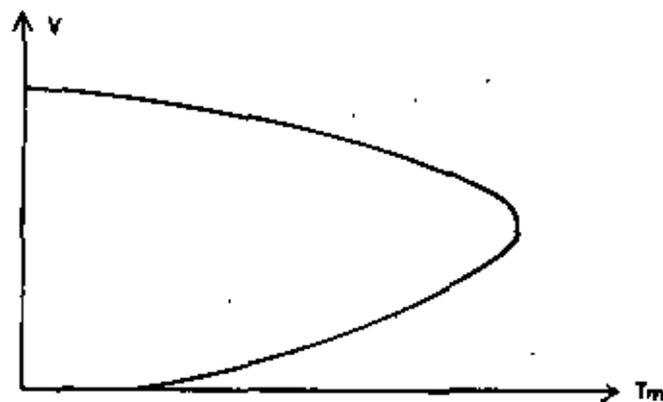


FIGURA 25

Reuniendo ahora en un cuadro las ecuaciones de equilibrio del generador en derivación, tenemos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{a}{b+I_{exc}} \omega I_{exc} & \delta E &= \frac{a \omega I_{exc}}{b+I_{exc}} + P\omega \\
 I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \\
 V &= E - r_a I_L \\
 T_m &= T_f + \frac{EI_L}{\omega}
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.2 MOTOR CON EXCITACION EN DERIVACION

Al conectar el motor con excitación en derivación, una misma fuente de energía alimenta a la armadura y al campo inductor, como muestra la figura 26. Generalmente en los diagramas de motores de C. D. se acostumbra incluir una resistencia variable en serie con la armadura, a efecto de limitar la corriente transitoria de arranque, pero en vista de que en este estudio nos avocaremos al estado estable, no la incluimos en la figura 26.

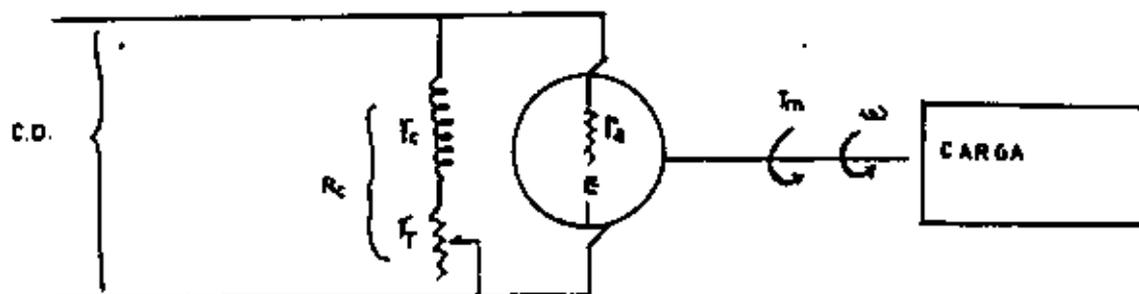


FIGURA 26

Las condiciones de operación del motor bajo este tipo de excitación pueden compararse (con ciertas limitaciones) con el motor excitado independientemente.

En vista de que la excitación normalmente trabajará muy por arriba del magnetismo remanente, la ecuación (4.5) nos puede servir de punto de partida.

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

- a) Variación de la velocidad con excitación constante y carga variable.- El comportamiento del motor en estas condiciones es idéntico al del motor independiente con corriente de excitación y voltaje de armadura constantes. Tomando la ecuación correspondiente del cuadro (6.8) tenemos:

$$\omega = -\frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2} \quad (7.8)$$

que representa una línea recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$ como se muestra en la figura 27-a.

- b) Variación de la velocidad con carga constante y corriente de excitación variable.- El reóstato en el circuito de campo permite ciertos ajustes en la velocidad de la máquina pero de ninguna manera en un rango tan amplio como el caso del control de voltaje en un motor excitado independientemente.

Las ecuaciones (4.5) y (5.6) nos sirven ahora de punto de partida para analizar la respuesta de la máquina en las condiciones planteadas:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

Sustituyendo (4.5) en (5.6) se obtiene:

$$T_e = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L$$

y de acuerdo con la figura 15-b

$$T_m = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L - T_f \quad (7.9)$$

Según hemos establecido el par mecánico (T_m) permanecerá constante, lo cual motiva que al variar la corriente de excitación (que produce a la vez variación de la velocidad), varía también la corriente de línea (I_L).

Despejando la corriente de línea de (7.9), obtenemos:

$$I_L = \frac{(T_m + T_f)(b + I_{exc})}{a I_{exc}} \quad (7.10)$$

La ecuación (5.5) nos da el comportamiento del circuito de armadura con carga.

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.5) y (7.10) en la (5.5) y despejando la velocidad se tiene:

$$\omega = \frac{(aV - r_a T_m - r_a T_f) I_{exc}^2 + (abV - 2br_a T_m - 2br_a T_f) I_{exc} - b^2 r_a (T_m + T_f)}{a^2 I_{exc}^2} \quad (7.11)$$

que es una curva de la forma que muestra la figura 27-b. En este tipo de control, el rango de velocidades que se obtiene es muy pequeño, pues está sujeto a las limitaciones que describimos a continuación:

Límite superior.- Dado que para aumentar la velocidad es necesario disminuir la corriente de excitación, la corriente de línea aumenta, según podemos observar en la ecuación de par:

$$T_m = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L - T_f \quad (7.12)$$

Como la máquina estará trabajando a par constante, la mínima corriente de excitación admisible es aquella con la que no se excede la corriente de línea nominal, por tanto despejando I_{exc} de la (7.12) tenemos:

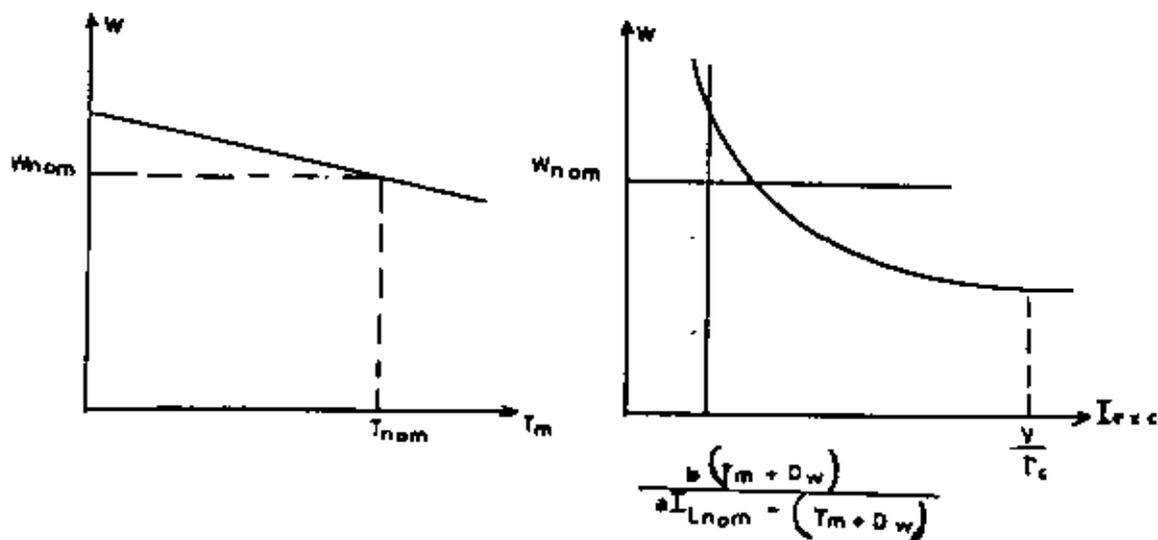
$$I_{exc} \text{ (mínima)} = \frac{b(T_m + T_f)}{aI_{L-nom} - (T_m + T_f)} \quad (7.13)$$

La corriente de excitación puede bajar hasta su valor mínimo dado en (7.13), siempre y cuando este valor no se exceda en forma peligrosa la velocidad nominal de la máquina.

Límite inferior.- Para disminuir la velocidad es necesario aumentar la corriente de excitación, reduciendo la resistencia del reóstato (r_r). Cuando se ha eliminado totalmente esta resistencia, solamente queda incluida en el circuito de excitación la resistencia del embobinado (r_c) y la corriente de excitación:

$$I_{exc} = \frac{V}{r_c}$$

es la máxima que se puede obtener.



En la figura 27-b observamos que para grandes variaciones cerca del límite superior de la corriente de excitación, las correspondientes variaciones en la velocidad resultan pequeñas, ya que la máquina está en una región de alta saturación. Por el otro extremo, la curva de velocidad es asintótica con el eje vertical, de manera que una excitación débil tiende a aumentar rápidamente la velocidad.

Razonando sobre ésta última observación, nos podemos dar cuenta del peligro que corre un motor al debilitarse (o interrumpirse, en el caso extremo) la corriente de excitación.

Regulación de velocidad.- El concepto de regulación de velocidad para la figura 27-a es exactamente bajo las mismas condiciones que se especifican para la ecuación (6.9)

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{\text{nom}}} \times 100.$$

3. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN SERIE

La máquina con excitación en serie presenta ciertas características particulares, que como veremos limitan las aplicaciones en calidad de generador, y en cambio, como motor presenta una respuesta que lo pone en ventaja con respecto a otros tipos de motores principalmente en lo que se refiere a sistemas de tracción.

El embobinado de excitación al estar en serie con la armadura lo consideraremos como parte del circuito de la misma, lo cual motiva que:

- La resistencia (r_a) que para los estudios anteriores incluye las resistencias del embobinado de armadura, conmutador, contacto conmutador-escobillas, escobillas y devanados de interpolos y/o compensadores, incluye ahora también la resistencia del devanado de campo en serie. Su valor es aproximadamente del mismo orden del que presenta el resto del circuito de armadura.
- La corriente de excitación es la misma corriente de línea, por lo cual en el análisis de este tipo de máquina utilizaremos la nomenclatura única (I_L).

La curva de saturación en vacío se puede obtener como experimento de laboratorio, pero en la práctica no es posible ajustar cualquier valor de voltaje dado por esta curva, en condiciones de vacío, ya que la excitación la da la corriente de carga.

8.1 GENERADOR CON EXCITACION EN SERIE

- a) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- En -

la figura 28 presentamos el diagrama de un generador con excitación en serie.

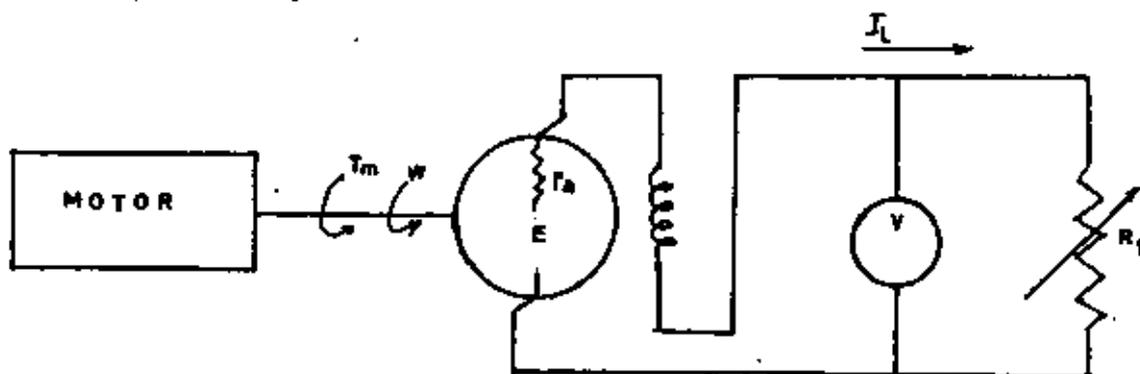


FIGURA 28

La resistencia de carga (R_L) puede variar desde un valor infinito (circuito abierto) hasta un valor pequeño, tal que haga circular la corriente nominal de la máquina. Por tanto la corriente de excitación (I_L) puede variar desde cero hasta el valor nominal, lo cual nos lleva a iniciar nuestro análisis a partir de la ecuación de Froelich (4.4).

$$E = \frac{a\omega I_L}{b + I_L} + P\omega \quad (4.4)$$

El comportamiento del circuito de armadura está dado por la (5.3)

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

Sustituyendo (4.4) en (5.3) obtenemos:

$$V = \left(\frac{a\omega}{b + I_L} - r_a \right) I_L + P\omega \quad (8.1)$$

La ecuación (8.1) representa una curva de forma análoga a la de saturación en vacío, que se inicia en el mismo punto correspondiente al voltaje inducido por el magnetismo remanente, pero que pierde su pendiente en forma más rápida que ésta. En la figura 29-a podemos comparar la forma de estas dos curvas.

b) Par absorbido por el generador.- Hemos visto del análisis de la figura 15-a que:

$$T_m = T_e + T_f$$

y por la ecuación (5.6):

$$T_e = \frac{EI_L}{\omega} \quad (5.6)$$

De manera que teniendo en cuenta (4.4) y (5.6) en la ecuación del par mecánico, obtenemos:

$$T_m = \frac{aI_L^2}{b+I_L} + P I_L + T_f \quad (8.2)$$

El primer término del segundo miembro de la (8.2) es el más significativo, por lo que podemos afirmar que el par absorbido -- por el generador (T_m), es proporcional al cuadrado de la corriente de carga (I_L). Su representación de tipo parabólico la podemos apreciar en la figura 29-b.

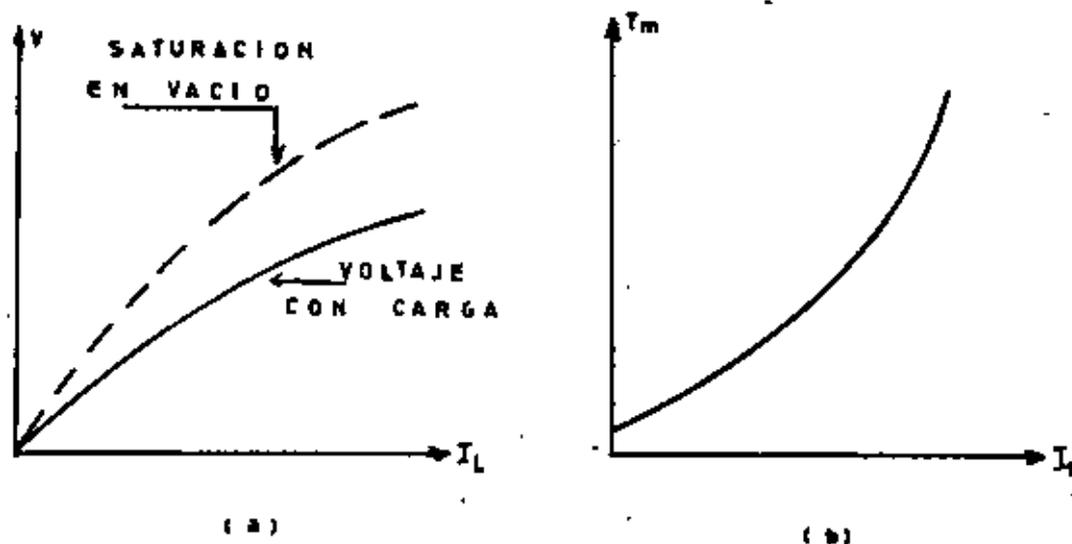


FIGURA 29

El concepto de regulación de voltaje no queda definido para este tipo de máquina, puesto que un valor "E" sobre la curva de saturación no es posible obtenerlo con la máquina en vacío.

8.2 MOTOR CON EXCITACION EN SERIE.

La figura 30 nos muestra el diagrama de la máquina con excitación en serie, trabajando como motor.

El comportamiento en el circuito de armadura para las condiciones de motor, nos lo da la ecuación (5.5)

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

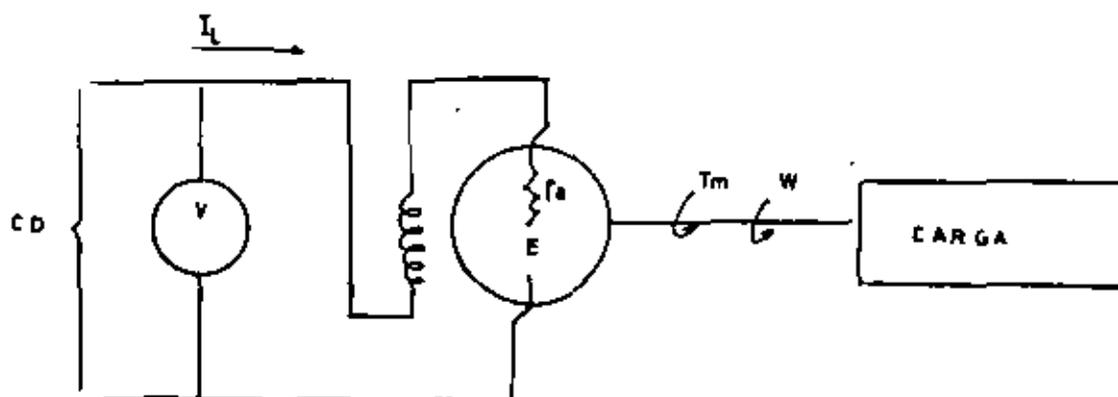


FIGURA 30

y de la figura 15-b tenemos el valor del par mecánico:

$$T_m = T_e - T_f$$

- a) Velocidad de la máquina con voltaje constante y carga variable.- La ecuación de equilibrio mecánico

$$T_m = \frac{a I_L^2}{b + I_L} + P I_L - T_f$$

nos muestra una relación entre el par de carga y la corriente de línea. Esto nos permite buscar una función que relacione la velocidad de la máquina con la corriente de línea, que resulta más sencilla que la que establece la relación con el par mecánico, como lo hemos hecho en otras ocasiones.

Sustituyendo la (4.4) en la (5.5) y despejando la velocidad obtenemos:

$$\omega = \frac{Vb + (V - r_a b) I_L - r_a I_L^2}{pb + (a + P) I_L} \quad (5.6)$$

que nos da una gráfica como la que muestra la figura 31-a. En esta gráfica podemos apreciar que a medida que baja la velocidad, la corriente se eleva rápidamente, y observando la figura 31-b (que deduciremos enseguida), podemos darnos cuenta que el aumento de corriente produce una rápida elevación del par.

Analizando la velocidad en sentido creciente, observamos que la máquina arranca con un par muy elevado y éste tiende a un valor normal a medida que se acerca a su velocidad nominal. Es el motor de mayor par de arranque que se conoce, lo que permite clasificarlo como el motor típico para sistemas de tracción.

- b) Variación de la corriente de línea con voltaje constante y par mecánico variable.- Al sustituir la (4.4) en la (5.6) y ésta en la expresión de par mecánico, obtenemos:

$$T_m = \frac{aI_L^2}{b+I_L} + PI_L - T_f \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) tiene dos variables independientes, que son la corriente de línea (I_L) y la velocidad (ω), por lo que para tabularla es conveniente seguir los mismos valores tabulados, en la ecuación (5.6), con lo que se obtiene una gráfica de la forma que ilustra la figura 31-b. En esta gráfica observamos que para valores elevados de par, las variaciones en éste producen pequeñas variaciones de corriente, y sucede a la inversa en valores de par pequeños.

De aquí deducimos también el peligro que corren estas máquinas cuando se quedan sin carga, pues la velocidad en estas condiciones se eleva considerablemente. La fricción en la máquina evita que se anule la corriente de línea, por lo que la velocidad sin carga tiene un límite, pero este suele estar muy por encima de la velocidad nominal, lo que provoca el estallamiento de la armadura por fuerzas centrífugas.

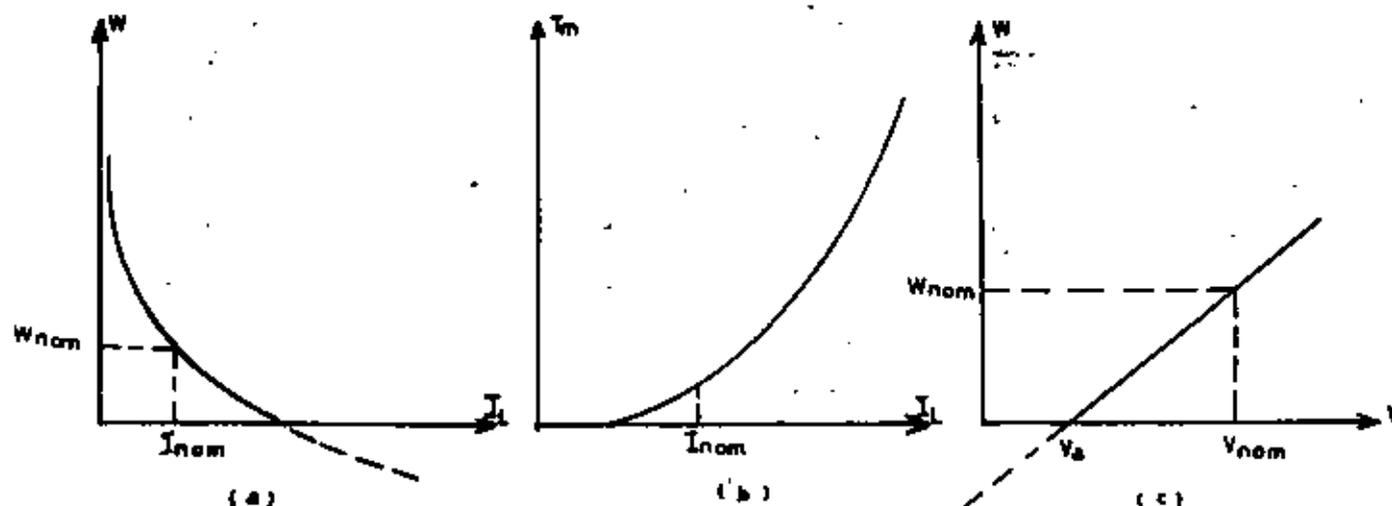


FIGURA 31

- c) Voltaje necesario para variar la velocidad con par constante.- De las figuras 31- a y b, podemos apreciar que la máquina es capaz de suministrar un par mecánico de valor muy elevado, pero a la vez haciendo circular una corriente que puede llegar a ser mayor que diez veces la nominal, por lo que en caso de buscar un control adecuado, éste sería el voltaje de alimentación.

... ..

... ..

... ..

... ..

$$P_4 = (1 + \dots)$$

... ..

... ..

Ejemplo de aplicación

La máquina de C.D. del grupo MGII tiene las siguientes características nominales:

Trabajando como motor	Trabajando como generador
7.5 H.P	5 KW
115 Volts.	125 Volts
57 Amp.	40 Amp.
1000 R.P.M.	1000 R.P.M.

se le hicieron las siguientes pruebas de laboratorio:

Saturación en vacío:		Voltaje terminal con carga:		como motor en vacío:	
I_{exc} .	E	V_L	I_L	V_L	I_L
0.0	4	125	0.0	115	5.3
0.25	21	124.5	4.8		
0.36	30	123.5	9.9		
0.48	40	123.0	14.9		
0.60	51	122.0	20.0		
0.72	61	121.5	24.4		
0.82	70	120.5	29.8		
0.98	82.5	120.0	34.6		
1.09	91	con excitación independiente			
1.21	101	$I_{exc} = 1.58$			
1.32	110				
1.508	121				
1.69	130				
1.9	140				
2.2	151				
2.5	160				
2.79	170				
3.49	180				

- Obtener el valor de los parámetros a , b , P , r_a y T_f
- Calcular cuál debe ser el voltaje en vacío para que a plena carga pueda suministrar sus valores nominales, trayendo como generador en derivación. (Incluir el cálculo de las características del reóstato).
- Trazar la curva completa de variación de voltaje con carga y obtener la máxima corriente y potencia que es capaz de suministrar, y la regulación de voltaje.
- Trazar la curva completa de variación de par con respecto al voltaje.

- e) Calcular la corriente de excitación para que suministre la velocidad nominal en condiciones de plena carga, cuando se le aplica al circuito de armadura el voltaje nominal, trabajando como motor.
- f) Trazar la curva de variación de velocidad con respecto a la carga, con voltaje de armadura y corriente de excitación constantes.
- g) Trazar la gráfica del voltaje de armadura necesario para mantener la velocidad nominal constante con carga variable (excitación independiente y constante)
- h) Trazar la gráfica de voltaje necesario para control de velocidad con carga constante (par mecánico constante)

S O L U C I O N

- a) Con el fin de tener valores comparativos que nos puedan mostrar la aproximación de la ecuación de Froelich, repetimos a continuación la tabla para la curva de saturación en vacío y otras dos columnas para tabular las funciones que obtengamos.

REFE- REN- CIA.	SATURACION EN VACIO		FUNCION DE FROELICH	
	I _{exc}	E	Func.1. E ₁	Func.2. E ₂
1	0.0	4	4	0
2	0.25	21	31	28
3	0.36	30	41	40
4	0.48	40	52	51
5	0.60	51	62	61
6	0.72	61	72	71
7	0.82	70	79	78
8	0.98	82.5	90	89
9	1.09	91	97	96
10	1.21	101	104	104
11	1.32	110	110	110
12	1.508	121	120	120
13	1.69	130	129	129
14	1.9	140	138	138
15	2.2	151	150	150
16	2.5	160	160	160
17	2.79	170	170	169
18	3.49	180	188	187

con las columnas I_{exc}. y E, trazamos la curva de saturación en vacío que muestra la figura Ej.1.1.

Para la función exacta, elegimos los puntos 18 y 14 con lo que obtenemos el sistema:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} + 4 \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9 +b} + 4$$

de donde $a\omega = 271.38$, $b = 1.89$

Tomando ahora los puntos 15 y 10 obtenemos:

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+a} + 4$$

de donde $a\omega = 397.3$, $b = 3.75$

Promediando estos valores obtenemos:

$$a\omega = 333, \quad b = 2.81$$

Como la velocidad de prueba fué 1200 RPM = 125.6 rad/seg.

$$a = \frac{333}{125.6} = 2.65 \quad P = \frac{4}{125.4} = 0.0318$$

Por lo que la función de Froelich queda:

$\text{Función 1: } \frac{2.65 \omega I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 0.0318\omega$
--

Para la función aproximada, tomando los mismos puntos tenemos:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9+b}$$

de donde $a\omega = 273.31$, $b = 1.8$

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+b}$$

de donde $a\omega = 382.34$, $b = 3.37$

Promediando los valores obtenidos:

$$a\omega = 327 \quad b = 2.589$$

Dividiendo a entre la velocidad de prueba:

$$a = \frac{327}{125.6} = 2.6$$

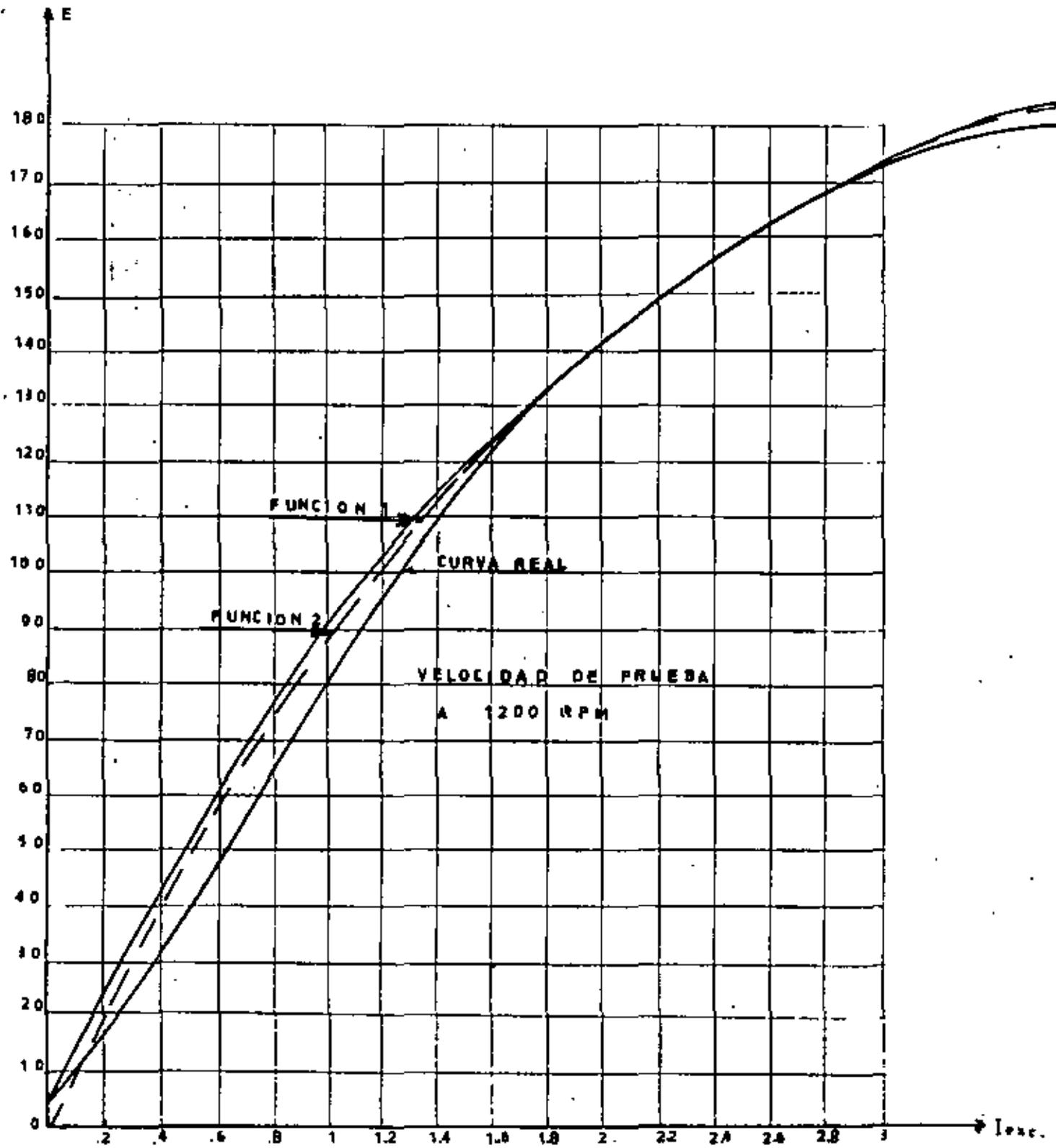


FIG. EJEM. 1.1

de donde obtenemos la función aproximada de Froelich:

$$\text{Función 2: } E_2 = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

Tabulando las funciones 1 y 2 vemos los valores junto con la tabla de la curva de saturación en vacío que aparecen anteriormente. Las curvas respectivas las observamos en la misma figura Ej.1.1.

De los datos de placa observamos que el voltaje nominal es de 125 volts a 1000 RPM. Como la prueba se efectuó a 1200 RPM, consideraremos como voltaje normal 150 volts. Como las curvas prácticamente coinciden entre 130 y 170 volts, podemos aceptar como válidas las funciones.

Nota.- En caso de desear mayor aproximación, de ser esto factible, se podría experimentar con nuevas funciones cuyos parámetros ajustaríamos desplazando las asíntotas de las curvas según fuera necesario.

Para obtener la resistencia del circuito de armadura es conveniente verificar si la prueba de voltaje (V_C) con corriente de carga (I_C) resulta en línea recta. Con los datos de prueba hacemos la gráfica de la figura Ej. 1.2.

Después de trazar la gráfica observamos que efectivamente sale una recta, lo que nos indica que la respuesta de la máquina no se ve deformada por la reacción de armadura.

De acuerdo a la ecuación:

$$V = E - r_a I_L$$

$$r_a = \frac{E-V}{I_L}$$

en donde E es el voltaje en vacío (125 V) y a cada V corresponde una I_L de acuerdo a la tabla de datos:

El valor más exacto seguramente es el promedio de los valores obtenidos aplicando la ecuación a cada punto.

$$r_a = \frac{\frac{125-124.5}{4.8} + \frac{125-123.5}{9.9} + \frac{125-123}{14.9} + \frac{125-122}{20} + \frac{125-121.5}{24.4} + \frac{125-120.5}{29.8} + \frac{125-120}{34.6}}{7}$$

de donde

$$r_a = 0.147 \text{ ohms}$$

El par de fricción lo obtenemos trabajando la máquina como motor en vacío, ya que en estas condiciones el par eléctrico es igual al par de pérdidas, o sea, haciendo $T_m = 0$ en la ecuación de equilibrio mecánico:

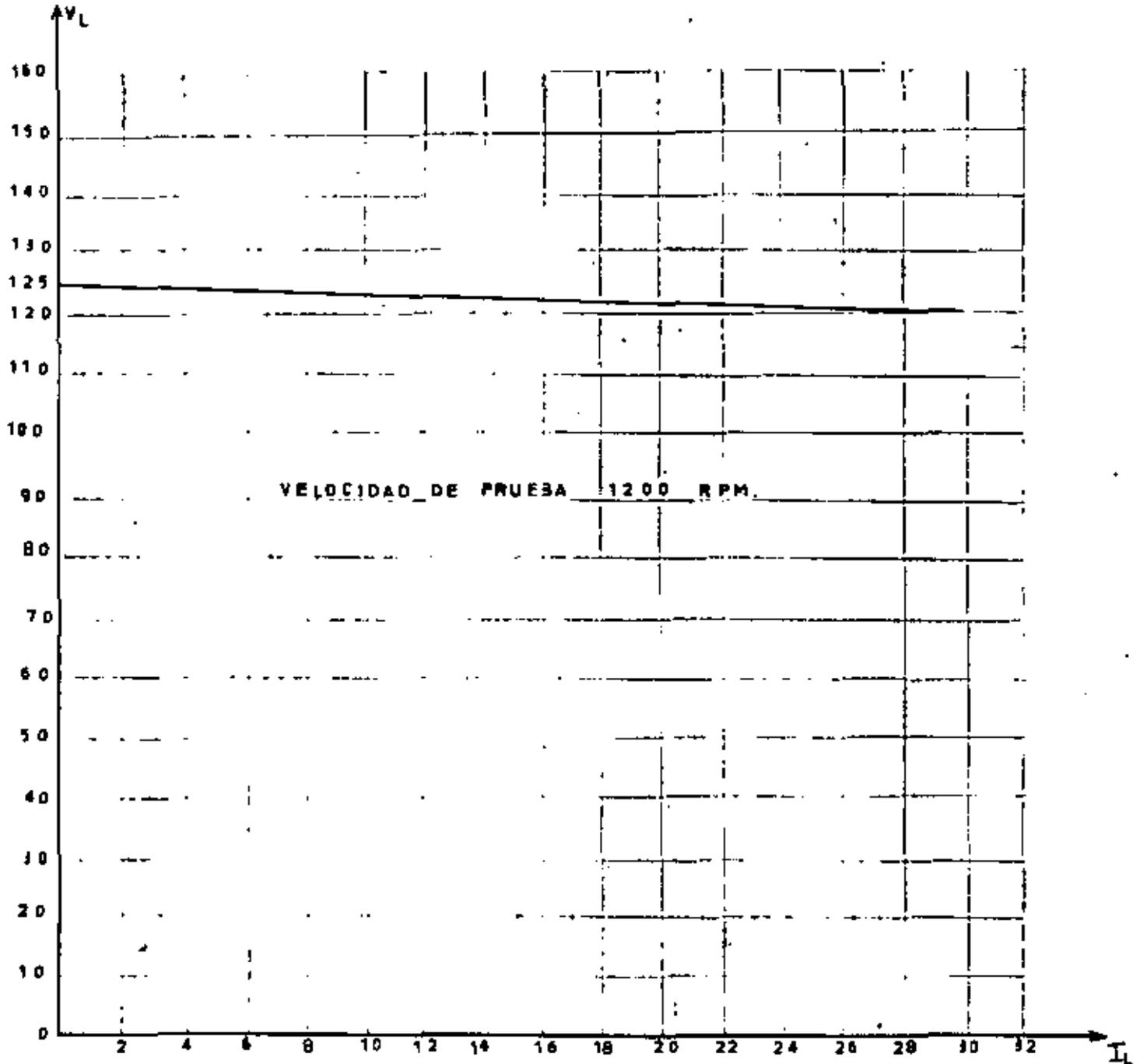


FIG. Ej. 1.2

$$0 = T_e - T_f \quad \text{en donde } T_e = \frac{EI_L}{\omega}$$

por tanto:

$$T_f = \frac{EI_L}{\omega} = \frac{(V - r_a I_L) I_L}{\omega} = \frac{VI_L - r_a I_L^2}{\omega}$$

$$T_f = \frac{(115 \times 5.3) - (0.147 \times 5.3^2)}{104.7^2}$$

$$T_f = 5.78 \text{ New-m}$$

En vista de que la máquina está permanentemente acoplada, este resultado incluye la fricción tanto de la máquina de C.D. como de la de C.A.

Teniendo en cuenta que la máquina de C.D. tiene mayor fricción que la de C.A, estimaremos su coeficiente como los 2/3 del total.

$$T_f = 3.85 \text{ New - m}$$

Respuestas del inciso a):

Función exacta	a= 2.65	b= 2.81	P= 0.0318
Función aproximada	a=2.6	b= 2.589	
Resistencia del circ.de arm.	$r_a = 0.147 \text{ ohm.}$		
Par de fricción	$T_f = 3.85 \text{ New-m.}$		

Teniendo en cuenta que la velocidad nominal de la máquina es de 1000 RPM (104.72 rad./seg.) las funciones de Froelich para estas condiciones serán:

$$E_1 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 I_{exc}} + 3.33 \quad \text{con magnetismo remanente}$$

$$E_1 = \frac{2.72.27 I_{exc}}{2.589 + I_{exc}} \quad \text{despreciando el magnetismo remanente.}$$

Tabulando estas ecuaciones obtenemos las gráficas que mostramos en la figura Ej.1.3.

b) La ecuación característica del generador con carga es:

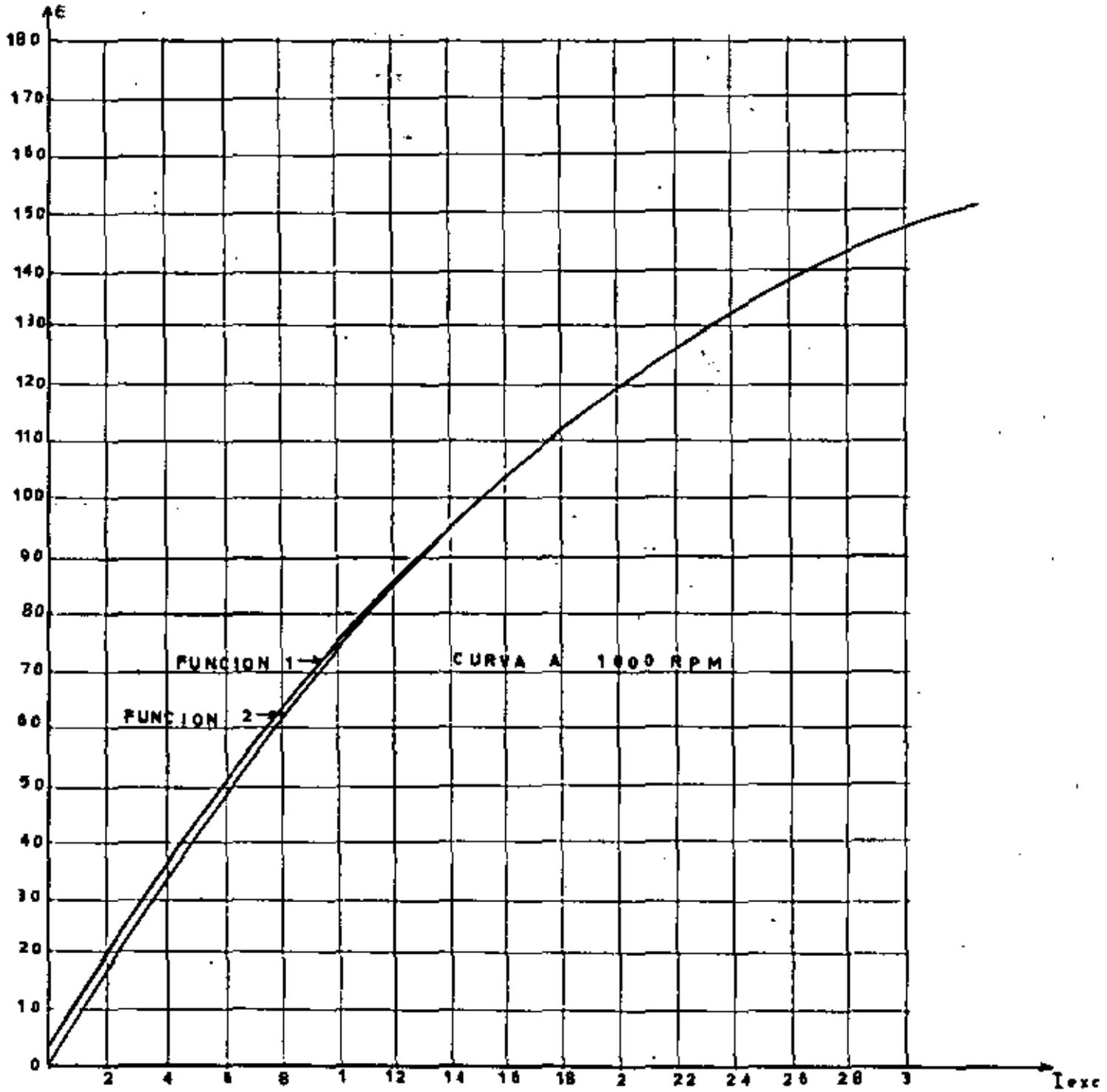


FIG. Ej. 1.3

$$V = E - r_a I_L$$

en donde $E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$

de modo que:

$$V = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega - r_a I_L$$

Las características nominales de la máquina son:

$$V = 125 \text{ Volts}$$

$$I_L = 40 \text{ Amp.}$$

$$N = 1000 \text{ RPM}$$

Sustituyendo estos valores y los de los parámetros obtenemos:

$$125 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 3.33 - 5.88$$

Teniendo en cuenta además que la corriente de excitación se obtiene del voltaje externo de la máquina:

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c} = \frac{125}{R_c}$$

por tanto

$$125 = \frac{34687.5}{2.81 R_c + 125} + 3.33 - 5.88$$

de donde $R_c = 52.296$

y la corriente de excitación

$$I_{exc} = \frac{125}{52.296} = 2.39 \text{ Amp.}$$

Si se quita carga a la máquina, el voltaje externo aumenta hasta igualarse con la fem., pero esto a la vez motiva un aumento de la corriente de excitación. Lo que permanece constante es la resistencia del circuito de campo (R_c). Por lo tanto:

$$E = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 3.33$$

en donde

$$I_{exc} = \frac{E}{52.296}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$E = \frac{277.5 E}{146.95 + E} + 3.333$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$E = 137.44 \quad E = -3.56$$

La solución válida es la primera, por tanto:

$$E_{vacío} = 137.44 \text{ Volts}$$

En estas condiciones se obtiene la máxima corriente de excitación siendo su valor:

$$I_{exc} = \frac{137.44}{52.296} = 2.6 \text{ Amp.}$$

Teniendo en cuenta además que la resistencia del circuito de campo (total) está entre 50 y 60 ohms, y la resistencia del embobinado es de 40 ohms, el restante corresponde al reóstato.

Características recomendables del reóstato

Resistencia 0-30 ohms.

Capacidad de corriente 3 Amp. mínimo

- c) Para el trazo de la curva de variación de voltaje con carga, usamos las ecuaciones:

$$V = E - r_a I_L$$

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$$

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c}$$

Sustituyendo la tercera en la segunda y esta en la primera obtenemos:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} + P_{\omega} - r_a I_L$$

sustituyendo valores:

$$V = \frac{277.5 V}{146.95 + V} + 3.33 - 0.147 I_L$$

En donde lo más sencillo es considerar V como variable independiente, o sea:

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Para encontrar el valor máximo de I_L , igualamos a cero la primera derivada de esta función:

$$\frac{(146.95+V)(910.75-13.6V) - (3328.8+910.75V-6.8V^2)}{(146.95 + V)^2} = 0$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$V = 55, \quad V = 348.9$$

La solución válida es la primera, para la cual corresponde una corriente de línea $I_L = 162.66$.

Tabulando la función de corriente de línea obtenemos:

Referencia	V	I_L	Referencia	V	I_C
1	0	22.65	9	70	155.43
2	10	74.86	10	80	143.75
3	20	119.93	11	90	127.31
4	30	138.53	12	100	106.69
5	40	154.35	13	110	82.39
6	50	161.65	14	120	54.81
7	55	162.66	15	130	24.31
8	60	161.68	16	137.44	0.083

La gráfica aparece en la figura Ej. 1.4.

Para la potencia máxima que puede entregar el generador multiplicamos la ecuación

$$I_C = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Por V , con lo que el primer miembro equivale a P .

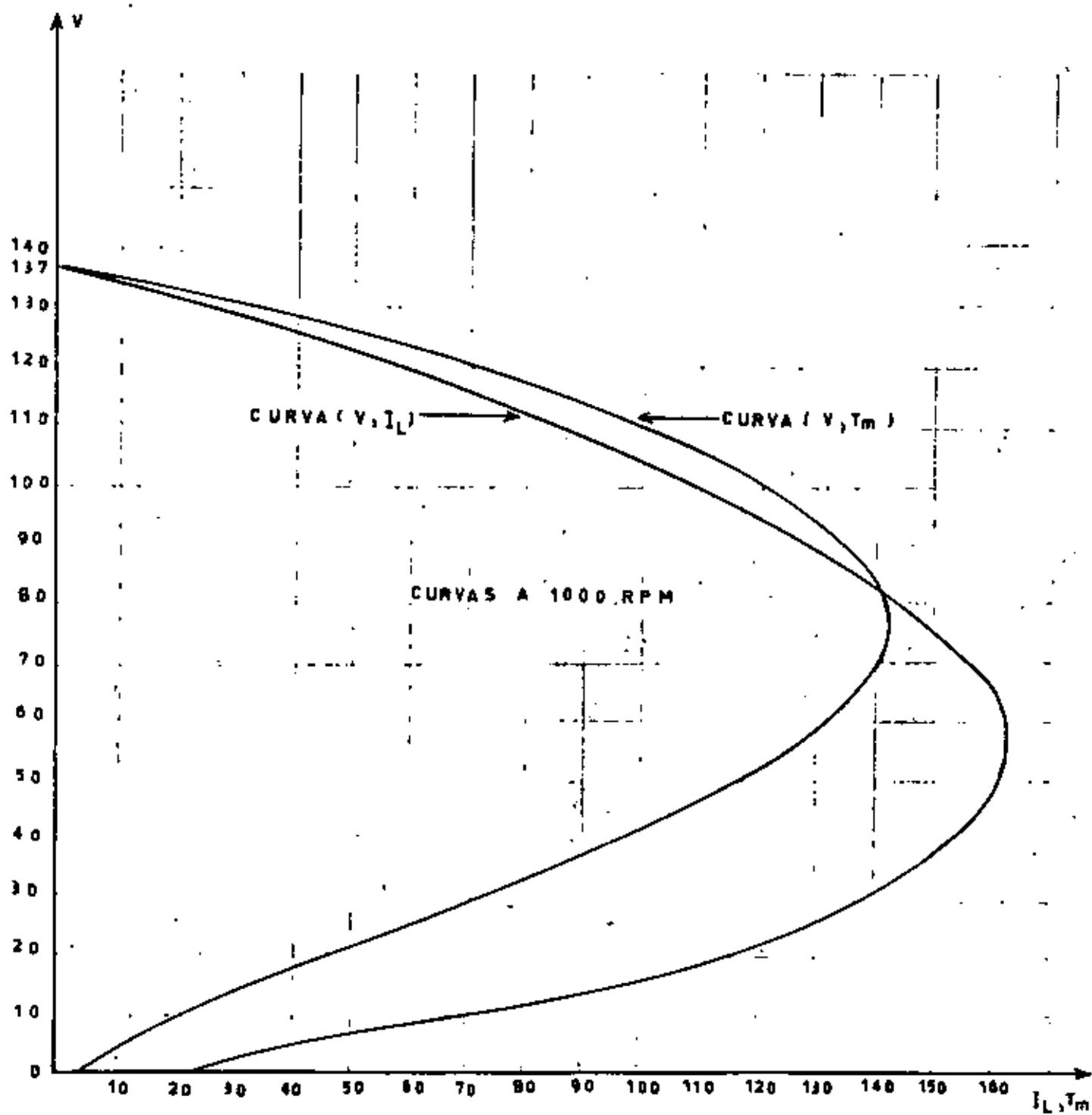


FIG. Ej. 1.4

$$P = \frac{3328.8 V + 910.75 V^2 - 6.8 V^3}{146.95 + V}$$

Igualando la primera derivada a cero:

$$\frac{(146.95+V)(3328.8+1821.5V-20.4V^2) - (3328.8V+910.75V^2-6.8V^3)}{(146.95+V)^2} = 0$$

que es una ecuación de tercer grado. La raíz comprendida entre en rango de voltajes de la máquina es:

$$V = 84.5$$

para el cual corresponde una corriente:

$$I_L = 137.1$$

Por lo que la potencia máxima será:

$$P = V I_L = 84.5 \times 137.1$$

$$P_{\max} = 11585.5 \text{ watts.}$$

La regulación de voltaje corresponde a los valores de vacío y plena carga, o sea $I_L = 0$ a $I_L = 40$

$$\text{Reg.} = \frac{137.44 - 125}{125} \times 100$$

$$\text{Reg} = 9.9 \%$$

d) El par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} + T_f$$

en donde $E = V + r_a I_L = V + 0.147 I_L$

Para tabular esta ecuación lo más sencillo es hacer uso de la tabla de resultados del inciso (c).

Ref.	V	I_L	E	$\frac{E I_L}{\omega}$	T_m
1	0	22.65	3.329	0.720	4.593
2	10	74.86	21.004	15.017	19.043
3	20	119.93	37.629	43.102	46.97
4	30	138.53	50.363	66.636	70.50
5	40	154.35	62.689	92.41	96.28
6	50	161.65	73.762	113.88	117.75
7	55	162.66	78.911	122.59	126.46
8	60	161.68	83.767	129.35	133.22
9	70	155.43	92.84	137.82	141.69
10	80	143.75	101.131	138.84	142.71
11	90	127.31	108.71	132.18	136.05
12	100	106.69	115.68	117.87	121.74
13	110	82.39	122.111	96.09	99.96
14	120	54.81	128.05	67.037	70.90
15	130	24.31	133.573	31.01	34.88
16	137.44	0.083	137.452	0.1091	3.98

La gráfica correspondiente la observamos en la figura Ej, 1.4

El par máximo debe presentarse al valor en que el generador entrega su máxima potencia. Para 84.5 volts:

$$I_L = 137.1 \quad E = 104.6 \quad T_e = 139 \quad T_m = 142.8$$

y la potencia mecánica necesaria para mover el generador en estas condiciones es:

$$P = T_m \omega = 14958.8 \text{ Watts} = 20 \text{ H.P.}$$

e) La ecuación de equilibrio mecánico para las condiciones de motor es:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} - T_f$$

Al multiplicar esta ecuación por la velocidad (ω), en el primer miembro nos queda la potencia mecánica

$$P = E I_L - T_f \omega$$

$$7.5 \times 746 = E I_L - 3.85 \times 104.7$$

$$E I_L = 6000 \text{ Watts}$$

La ecuación de equilibrio eléctrico para las condiciones de motor es:

$$V = E + r_a I_L$$

Multiplicando esta ecuación por I_L tenemos:

$$V I_L = E I_L + r_a I_L^2$$

$$115 I_L = 6000 + 0.147 I_L^2$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son

$$I_L = 56.2 \text{ Amp.} \quad I_L = 726 \text{ Amp.}$$

El primer valor es el que tiene una interpretación real. Llevando este valor a la ecuación de equilibrio eléctrico:

$$V = E + r_a I_L$$

$$115 = E + 0.147 \times 56.2$$

$$E = 106.74 \text{ Volts}$$

Trabajando como motor, la operación de la máquina está lejos del magnetismo remanente, por lo que podemos aplicar la ecuación aproximada de Froelich:

$$E = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

de donde:

$$I_{exc} = \frac{2.589 E}{2.6\omega - E}$$

$$I_{exc} = \frac{2.589 \times 106.74}{(2.6 \times 104.7) - 106.74}$$

$I_{exc} = 1.67 \text{ Amp.}$

Para todo análisis en el que se mantenga constante este valor de la corriente de excitación, la constante de excitación será:

$$K_e = \frac{2.6 \times 1.67}{2.589 + 1.67}$$

$$K_e = 1.019$$

De manera que

$$E = 1.019\omega$$

Manteniendo el voltaje aplicado y la corriente de excitación sin variación, la corriente de línea en vacío será:

$$0 = \frac{E I_L}{\omega} - T_f$$

$$0 = 1.019 I_L - 3.85$$

$$I_L = 3.8 \text{ Amp.}$$

y la velocidad en vacío la obtenemos de la ecuación de equilibrio eléctrico:

$$V = E + r_a I_L$$

$$115 = 1.019 \omega + (0.147 \times 2.8)$$

$$= 113.45 \text{ rad/seg.}$$

y por lo tanto, la regulación de velocidad será:

$$\text{Reg} = \frac{113.45 - 104.7}{104.7} \times 100$$

$$\text{Reg} = 8.3 \%$$

f) La gráfica de variación de velocidad con respecto a la carga (par), nos interesa solamente dentro del rango comprendido entre vacío y carga nominal.

El par nominal es:

$$T_m = \frac{P_{\text{nom}}}{\omega_{\text{nom}}} = \frac{7.5 \times 746}{104.7}$$

$$T_m = 53.44 \text{ New- m}$$

Para el trazo de la gráfica, la ecuación correspondiente es la (7.8) de los apuntes

$$\omega = \frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e}$$

$$\omega = - \frac{0.147}{1.019^2} T_m + \frac{(1.019 \times 115) - (0.147 \times 3.85)}{1.019^2}$$

$$\omega = - 0.1415 T_m + 112.3$$

la cual graficaremos entre los valores $T_m = 0$ y $T_m = 60$ (considerando una pequeña sobrecarga) La gráfica^m la podemos observar en la figura Ej. 1.5.

- g) Si se establece un control de velocidad podemos comenzar con la velocidad nominal en vacío, ya que ésta se mantendrá hasta las condiciones de plena carga por la acción del control.

Para obtener el voltaje y corriente nominales en las condiciones de plena carga, es factible abatir el voltaje aplicado en vacío a fin de mantener la velocidad constante, por lo que podemos utilizar los valores de parámetros encontrados anteriormente para aplicar la ecuación (6.8)-c.

$$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega - r_a T_f}{K_e}$$

$$V = 0.145 T + 104.2$$

que graficaremos entre $T = 0$ y $T = 60$ New-m para la figura Ej. 1.6.

- h) La gráfica de control de velocidad a par constante también aprovecha los valores de parámetros que ya tenemos, para aplicar la ecuación (6.8)-b

Ahora vamos a suponer distintas condiciones de carga, como por ejemplo, $0.25 T_{nom}$, $0.50 T_{nom}$, $0.75 T_{nom}$ y T_{nom} , lo que nos dará una familia de curvas

$$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$$

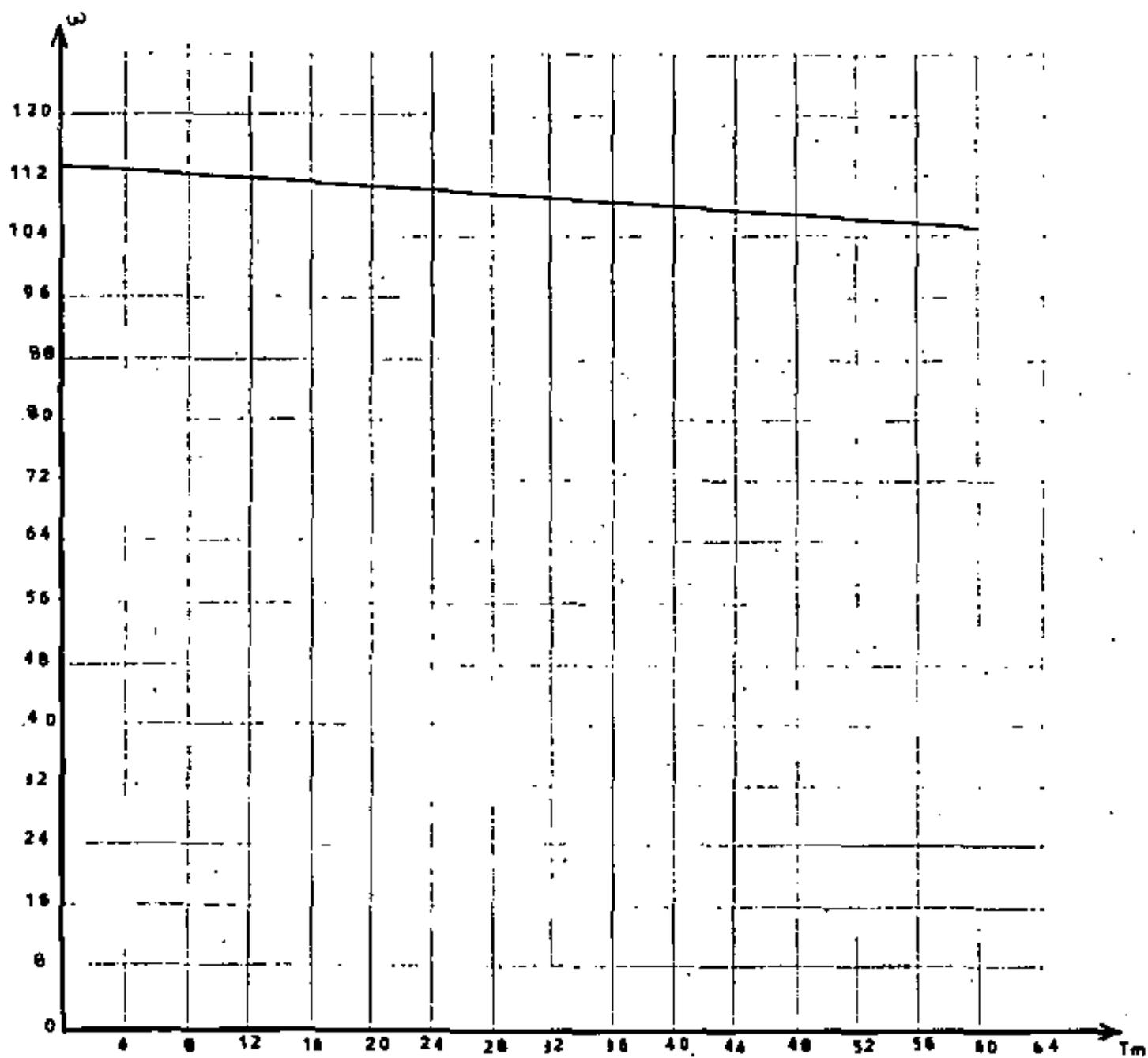


FIG. Ej.1.5

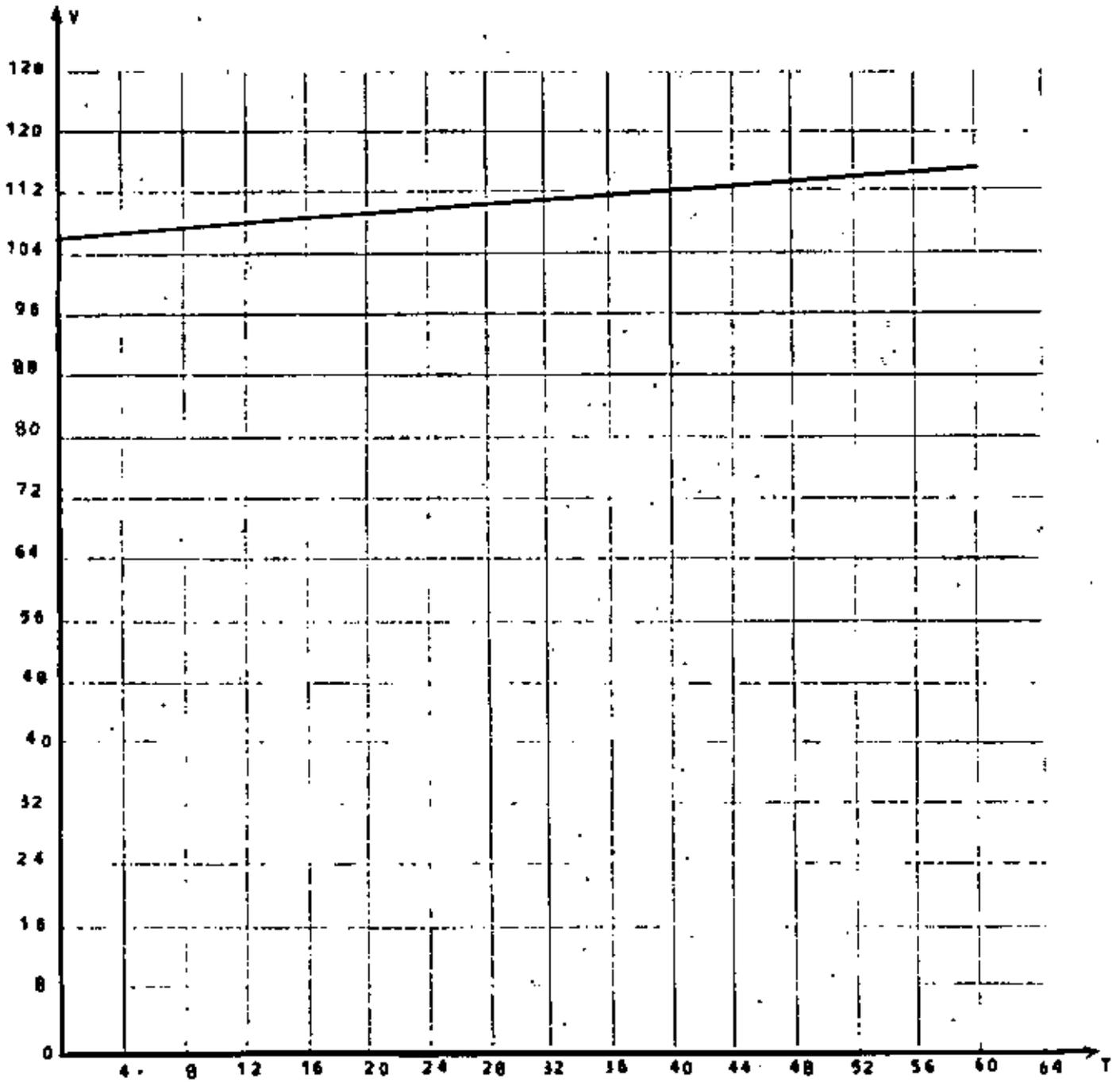


FIG. Ej. 1.6

$$\omega = 0.98 V - \frac{1.47 T_m + 0.566}{1.038}$$

que graficaremos entre $V = 0$ y $V = 115$ para $T_m = 14$, $T_m = 28$, $T_m = 42$ y $T_m = 56$ en la figura Ej. 1.7.

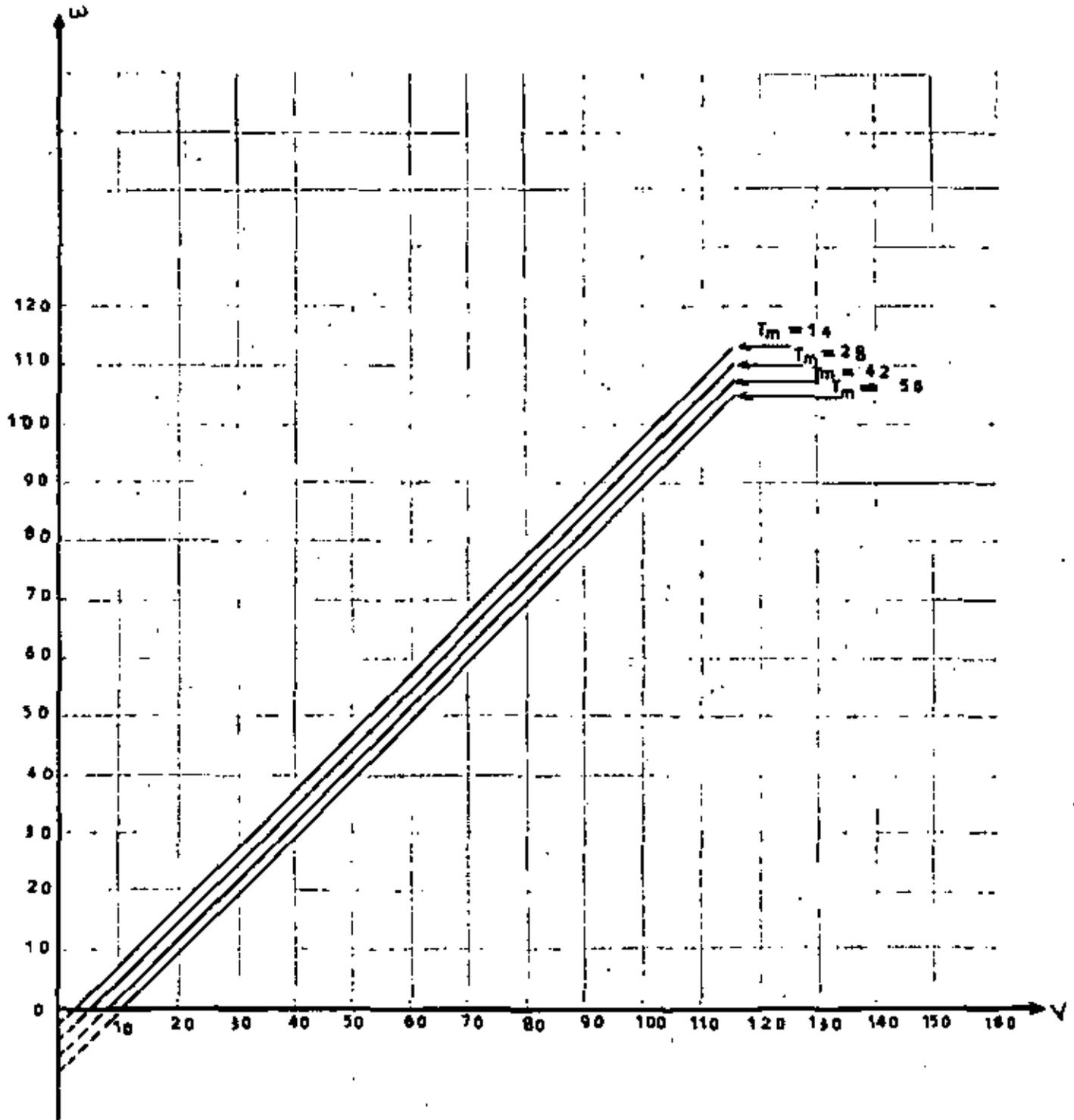


FIG. Ej. 1.7



TRANSICION EN LA OPERACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Las máquinas eléctricas, como podemos recordar, tienen la propiedad de poder efectuar la conversión de energía en los dos sentidos. Un transformador puede usarse como elevador o como reductor de voltaje. Una máquina rotatoria puede operar como generador o como motor. En ninguno de estos casos se requiere cambio alguno en la estructura de la máquina correspondiente.

En el caso particular de la máquina de C.D., las condiciones para operar como generador serían las siguientes:

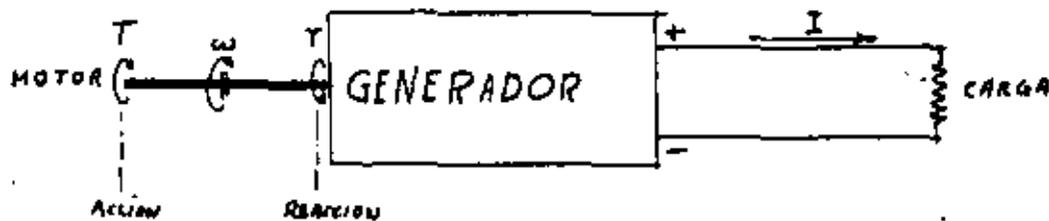


Fig. 1 La máquina de C.D. operando como generador

- El generador se comporta como la fuente del sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es SALIENDO POR EL POLO POSITIVO.
- La circulación de corriente por su armadura genera un PAR DE REACCION, es decir, que se opone al sentido de la velocidad angular.

La misma máquina opera como motor bajo las siguientes condiciones:

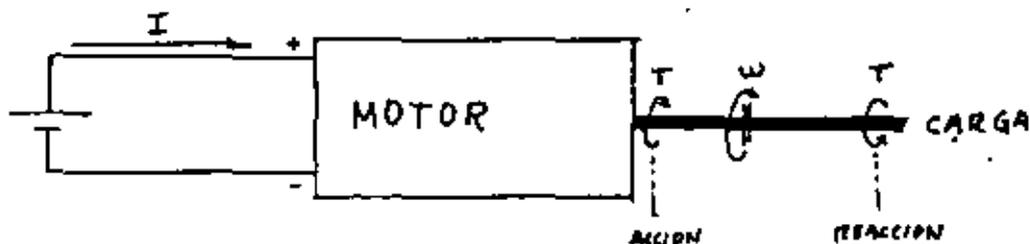


Fig. 2 La máquina de C.D. operando como motor



- a) El motor se comporta como una carga en el sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es ENTRANDO A LA MAQUINA POR EL POLO POSITIVO.
- b) El par electromagnético que se genera en su armadura es un PAR DE ACCION, es decir, en el mismo sentido de la velocidad.

De la exposición anterior podemos deducir que ciertas características son comunes a la operación como generador y como motor (polaridad y sentido de rotación), mientras que otras tienen sentidos contrarios (corriente y par electromagnético)

A fin de considerar ahora la posibilidad de que una misma máquina pueda operar alternativamente como generador y como motor, es conveniente recordar que una de las ventajas del motor de C.D., es que se puede controlar su velocidad. Por el momento no viene al caso discutir los métodos de control; simplemente convengamos en que se ha fijado un cierto valor de velocidad para un motor trabajando en vacío (ω_v).

En la figura 3(a), el motor alimenta una carga mecánica, la cual de acuerdo con lo visto en la figura 2, produce un par que se opone al movimiento, es decir, trata de frenar el motor, provocando que su velocidad sea menor que la velocidad en vacío. La corriente entra a la máquina por el polo positivo (absorbe

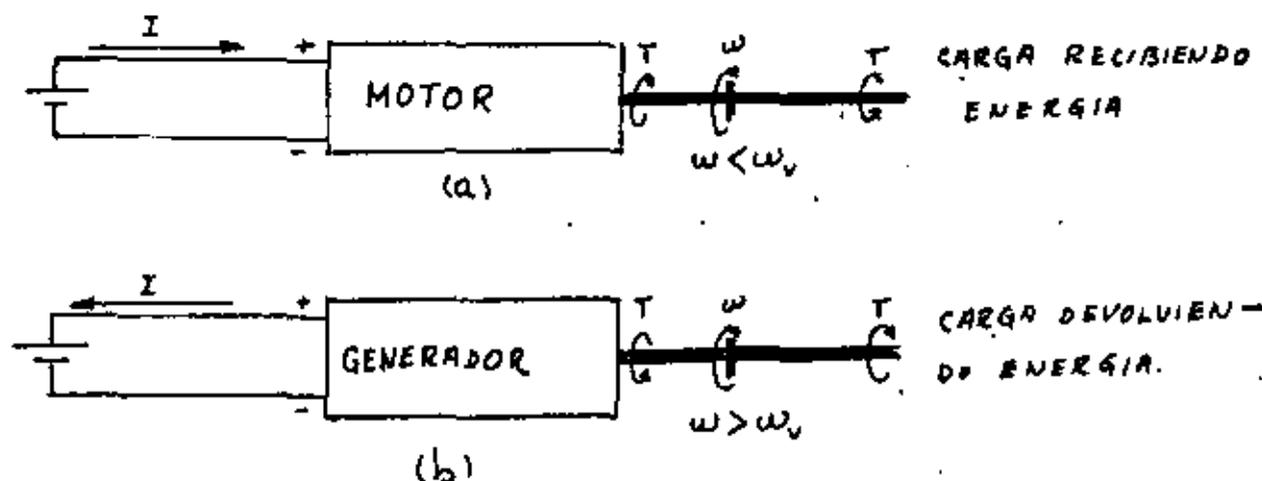
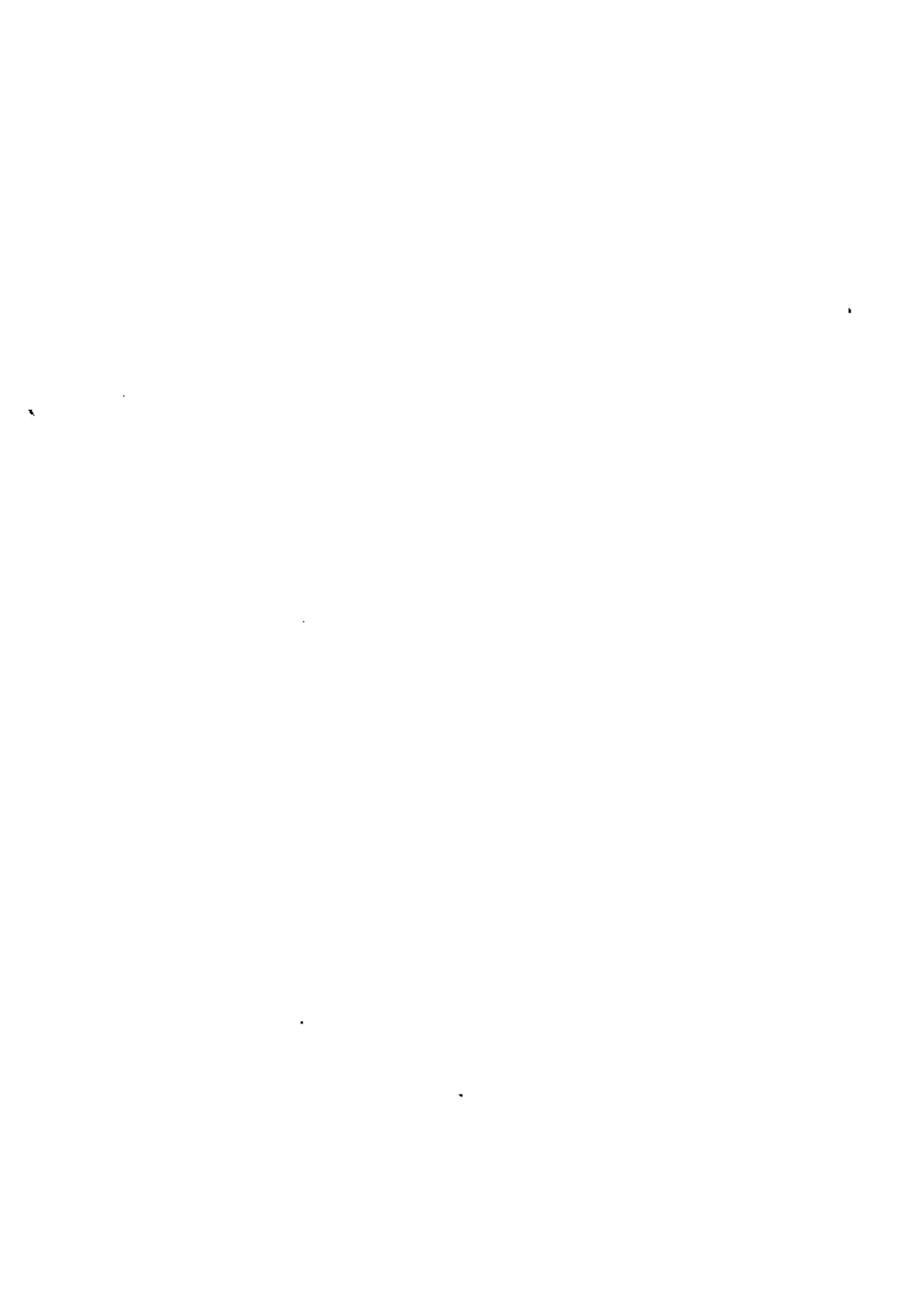


Fig.3 Posibilidad de operación alternativa.



energía) y el par electromagnético generado es en el sentido de mantener el giro del motor.

Ahora bien, supongamos que por cualquier causa, la velocidad de la carga tiende a incrementarse, superando el valor ω_v . La máquina reacciona invirtiendo el sentido del par electromagnético, en un esfuerzo por evitar que el sistema se desboque. Esto motiva la inversión de la corriente, devolviendo energía a la fuente, es decir, la máquina ha cambiado su operación de motor por generador. (Figura 3b).

Para imaginarnos el cambio que acabamos de describir, supongamos que se trata del motor de tracción de un vehículo de transporte eléctrico. En el caso de la figura 3a, el vehículo se encuentra subiendo un puente, para lo cual es indispensable la tracción del motor. En la figura 3b, el vehículo ha pasado la parte más alta del puente, y se encuentra ahora de bajada, "frenando con el motor".

Este puede ser uno de muchos ejemplos en que la máquina sufre una TRANSICION de motor a generador, y si continuamos analizando el movimiento, habrá una nueva TRANSICION de generador a motor.

Por regla general, las máquinas eléctricas rotatorias no requieren ningún cambio ni en su estructura, ni en sus conexiones, cuando se presenta este fenómeno de transición; basta solamente la inversión de par en la flecha. Esto es válido para máquinas síncronas, de inducción y de C.D.

Sin embargo, como toda regla, tenemos una excepción en el caso del motor de C.D., tipo serie, en el que al pasar de la acción motriz a la generatriz es necesario un cambio de conexiones.

Para justificar lo anterior, analizaremos con más detalle la transición de operación en los distintos motores de C.D.

Un esquema sencillo de una máquina rudimentaria nos ayudará a comprender en que forma se producen estos cambios. Esta máquina rudimentaria consta de una sola bobina de excitación y una espira en el embobinado de armadura.

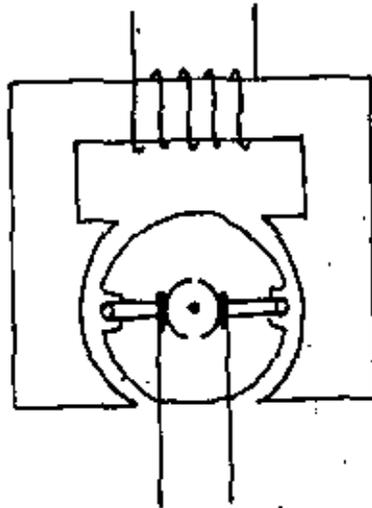


Fig. 4 Una máquina rudimentaria de C.D.

Utilicemos primeramente el esquema de la figura 4 para analizar el comportamiento de una máquina con excitación independiente.

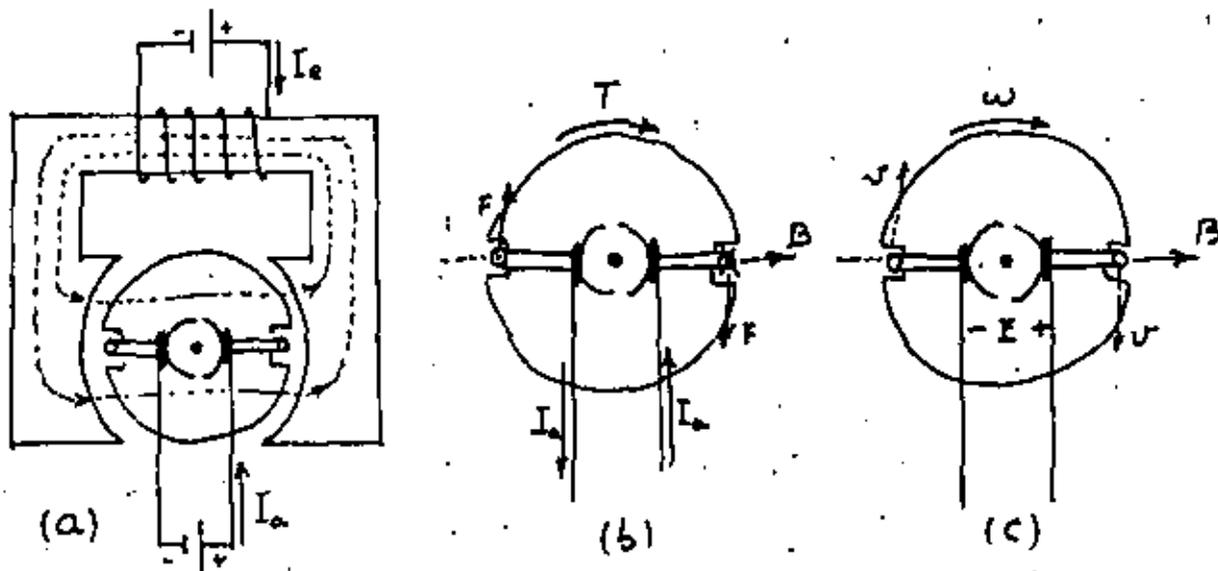


Fig. 5 Motor de C.D. con excitación independiente.

En la figura 5(a) tenemos una fuente para la excitación que nos da un determinado valor de corriente " I_e ", y una fuente para



la armadura que nos da la corriente motriz " I_a ".

La corriente I_a en presencia del campo inductor "B" genera un par de fuerzas cuyo sentido lo podemos determinar aplicando las reglas de Fleming en la figura 5(b). Este par produce el giro de armadura con una velocidad angular " ω " y por tanto, una velocidad tangencial " v " de los costados de la espéra, dando lugar a la inducción de la fuerza contraelectromotriz "E", cuya polaridad podemos determinar también por las reglas de Fleming en la figura 5(c).

El diagrama del circuito de armadura con el motor en movimiento lo tenemos ahora en la figura 6, en donde:

$$E = k\omega I_e \quad (1)$$

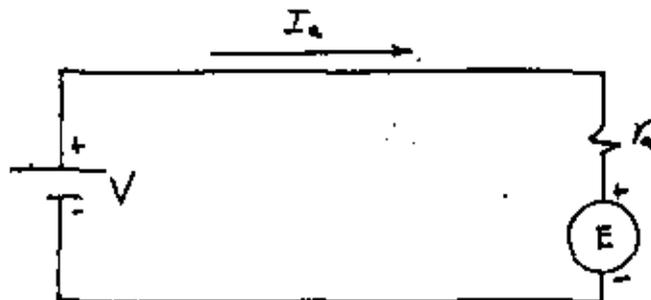


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura.

o sea que la fuerza electromotriz es función de la velocidad " ω " y la corriente de excitación " I_e ".

El coeficiente "k" frecuentemente se toma como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente de excitación, debido a la saturación de la máquina

$$k = \frac{a}{b + I_e} \quad (2)$$

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:



$$I_a = \frac{V-E}{r_a} \quad (3)$$

y el par producido por esta corriente es:

$$T_e = \frac{E I_a}{\omega} \quad (4)$$

o también, sustituyendo (1) en (4)

$$T_e = k I_e I_a \quad (5)$$

Este par acelera la máquina hasta una velocidad ω_v tal, que de acuerdo con la (1)

$$E = V - k \omega_v I_e \quad (6)$$

en este momento desaparece la I_a (ecuación (3) y el par motor (ecuaciones (4) y (5)) y por lo tanto, la máquina deja de acelerarse. La velocidad " ω_v " la llamaremos velocidad en vacío.

REFERENCIA. Para estudiar a continuación la transición de la máquina, es necesario establecer los sentidos de referencia. Convengamos que los sentidos de corriente mostrados en las figuras 5(a), 5(b) y 6, así como los sentidos de par y de velocidad de 5(b) y 5(c) se les considerará positivos.

TRABAJO MOTOR. Supongamos que aplicamos ahora una carga a nuestro motor. Esta carga al ser movida reacciona con un par negativo, haciendo que el motor pierda velocidad.

Si la velocidad del motor adquiere un valor

$$\omega_m < \omega_v$$

entonces, razonando en base a la ecuación (1)

$$E < V$$



y aparecen una corriente y un par positivos

$$I_a = \frac{V-E}{r_a} > 0$$

$$T_e = K I_e I_a > 0$$

TRANSICION. Para que la acción motriz se convierta en acción generatriz, es necesario que se inviertan el par electromagnético y la corriente de armadura.

La ecuación (5) quedaría:

$$-T_e = K I_e (-I_a)$$

(nótese que la I_e permanece positiva), y de acuerdo con la ecuación (3)

$$I_a = \frac{V-E}{r_a}$$

I_a solamente puede ser negativa si $V < E$.

Esto puede ocurrir en tres casos:

- a) Si aumenta E por un aumento de velocidad, permaneciendo V e I_e constantes. (Recuérdese $E = k\omega I_e$). Esto equivale a que la carga por alguna razón tienda a desbocarse.
- b) Si se hace aumentar E reforzando la corriente de excitación
- c) Si se disminuye el voltaje de la fuente de alimentación de armadura.

Los casos b) y c) equivalen a "dar la orden" al motor de disminuir su velocidad. En el caso de los equipos estacionarios, esta transición se puede presentar en un proceso con la necesidad de velocidad variable controlada, y en el caso de tracción de vehículos eléctricos, se presenta cuando es factible "frenar con el motor".

Durante el período de generación, la energía cinética acumula

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

1
2

1

1

lada en el equipo impulsado, se transforma en eléctrica y se devuelve a la fuente, lo que se conoce como FRENADO REGENERATIVO.

La transición en el frenado regenerativo, que hemos analizado matemáticamente, también podemos analizarla desde el punto de vista del fenómeno físico, apoyándonos nuevamente en las figuras 5 y 6. En la figura 5 observamos que para invertir el par se requiere inversión de la corriente de armadura, sin cambio en la dirección del flujo magnético. Como se conservan las direcciones de flujo y velocidad, la polaridad de la fuerza electromotriz continua igual.

En la figura 6 se observa que para invertir la corriente es necesaria la condición $V < E$, lo que se consigue aumentando "E" o disminuyendo "V", sin alterar sus polaridades.

Para el caso de la excitación en derivación, el análisis es muy semejante al caso anterior. Sin embargo, observando la figura 7, nos damos cuenta que la "orden" de reducir velocidad solamente se puede dar por aumento de la corriente de excitación (aumento de

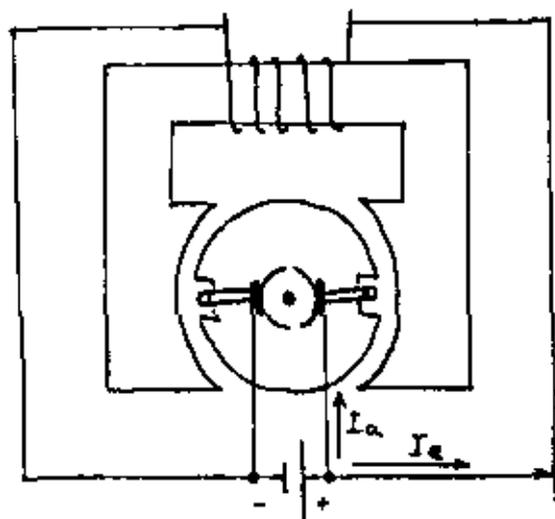


Fig. 7 Motor de C.D. con excitación en derivación

"E"), pues una disminución en el voltaje aplicado afecta la exci

tación y muy posiblemente no se obtiene el frenado regenerativo.

Para la máquina con excitación en serie, las condiciones son diferentes. En la figura 8(a) observamos las conexiones de la má-

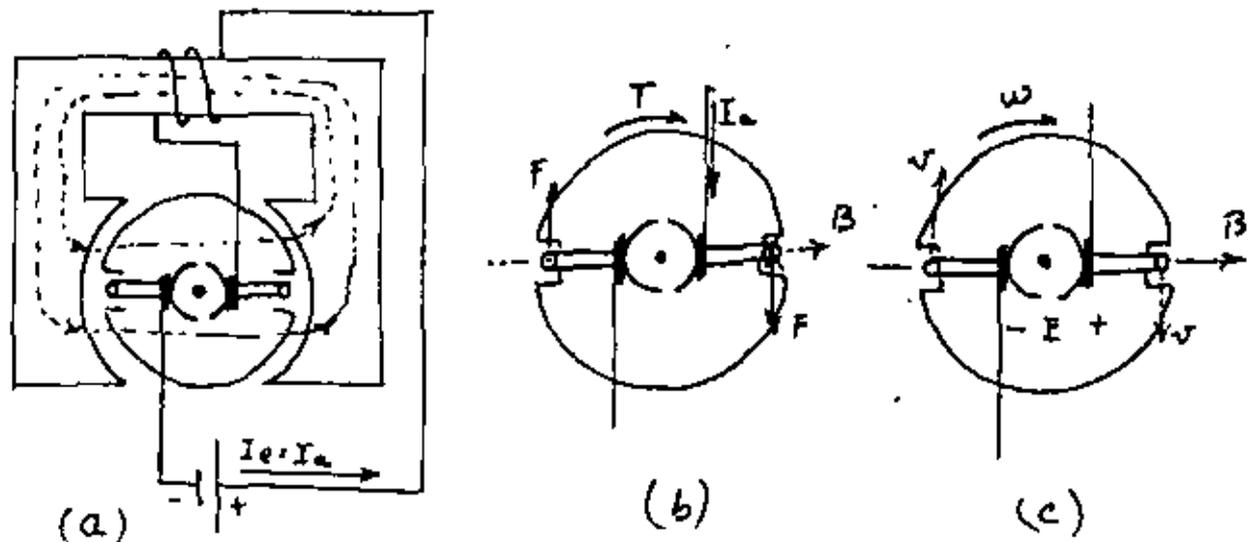


Fig. 8 Motor de C.D. con excitación en serie.

quina y los sentidos de corriente y flujo magnético; en la figura 8(b) vemos la generación del par, y en la 8(c) la aparición de velocidad y fuerza electromotriz, igual que en los casos anteriores.

El punto de partida de nuestro análisis es que la corriente de excitación y la corriente de armadura son la misma, o sea

$$I_e = I_a$$

por lo que la ecuación (1) se transforma en:

$$E = k\omega I_a \quad (7)$$

El coeficiente "k", igual que en el caso anterior, frecuentemente se considera como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente

$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

El diagrama eléctrico es el mismo de la figura 6, solamente

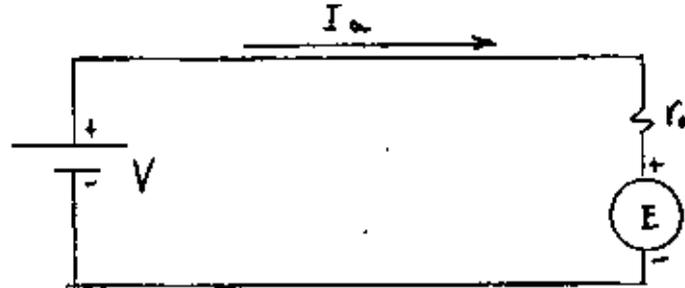


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura

que "r_a" involucra también la resistencia del campo serie.

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:

$$I_a = \frac{V - E}{r_a} \quad (9)$$

Sustituyendo la (7) en la (9) y despejando la velocidad, tenemos:

$$\omega = \frac{V}{k I_a} - \frac{r_a}{k} \quad (10)$$

que representa una familia de curvas con tendencia hiperbólica. (Si "k" fuese constante, serían hipérbolas con una asintota vertical sobre el eje de las ordenadas y una horizontal en r_a/k por debajo del eje de las abscisas).

En la figura 9(a) observamos la familia de pseudohipérbolas para diferentes voltajes.

El par electromagnético dado por la ecuación (5) se transforma en

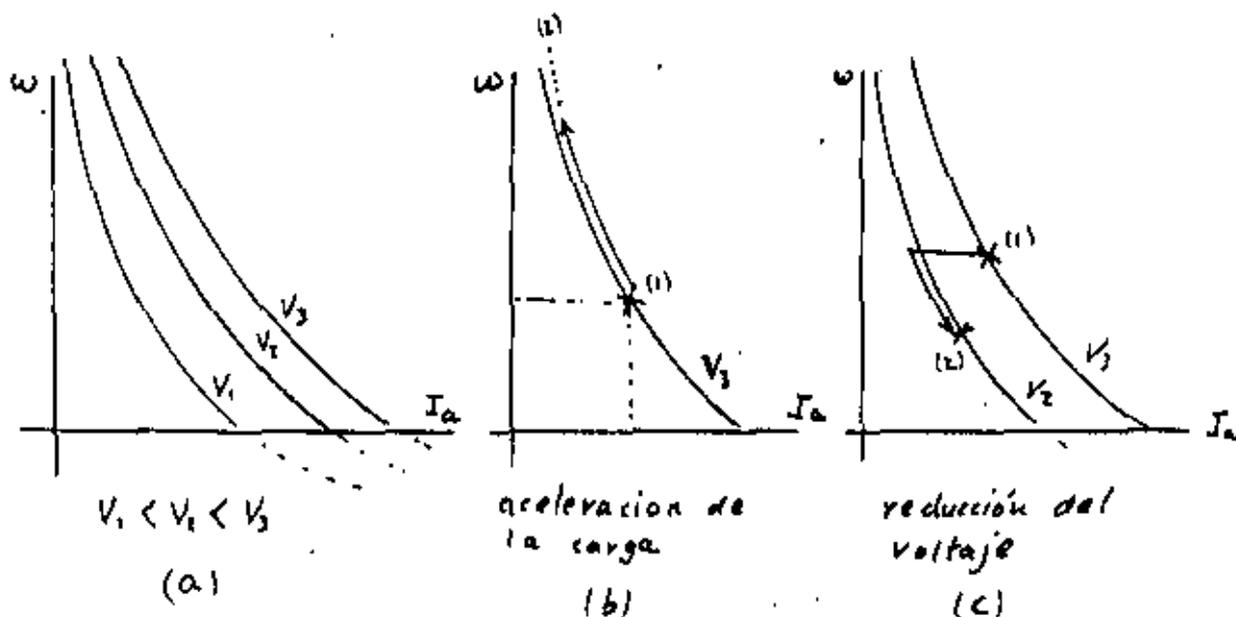


Fig. 9 Curvas de respuesta del motor serie.

$$T_e = k I_a^2 \quad (11)$$

Interpretando la ecuación (11) en la figura 9(a), deducimos que es una máquina de muy alto par de arranque, y que tiene un aumento de velocidad rápido, características que lo hacen ideal para tracción vehicular.

Su velocidad, sin embargo, no tiene un punto de estabilidad, y varía dentro de un amplio rango, dependiendo del par de tracción necesario bajo las diferentes circunstancias. Por otra parte, frenar el vehículo con este tipo de motor involucra una serie de dificultades que vencer.

Supongamos primeramente que el vehículo comienza a bajar una pendiente. En la figura 9(b) vemos que el motor en ningún momento sufre transición, y su velocidad aumenta hasta desbocarse sin perder su tracción (aunque el par se debilita). Si se prolonga este aumento de velocidad, el motor puede llegar a destruirse.

Si analizamos ahora la "orden" de que el motor baje su velocidad, ~~mediante una disminución del voltaje~~, mediante una disminución del voltaje aplicado, observamos en la figura 9(c) que la co



rriente se debilita hasta encontrar un nuevo punto de equilibrio, pero en ningún momento se invierte, por lo que el motor no pierde tracción en ningún momento, y la disminución de velocidad es aún más lenta que si se dejara por un momento sin tracción el vehículo.

Veamos ahora si tratamos de efectuar un frenado dinámico, simplemente cambiando la alimentación del motor por una resistencia de carga,

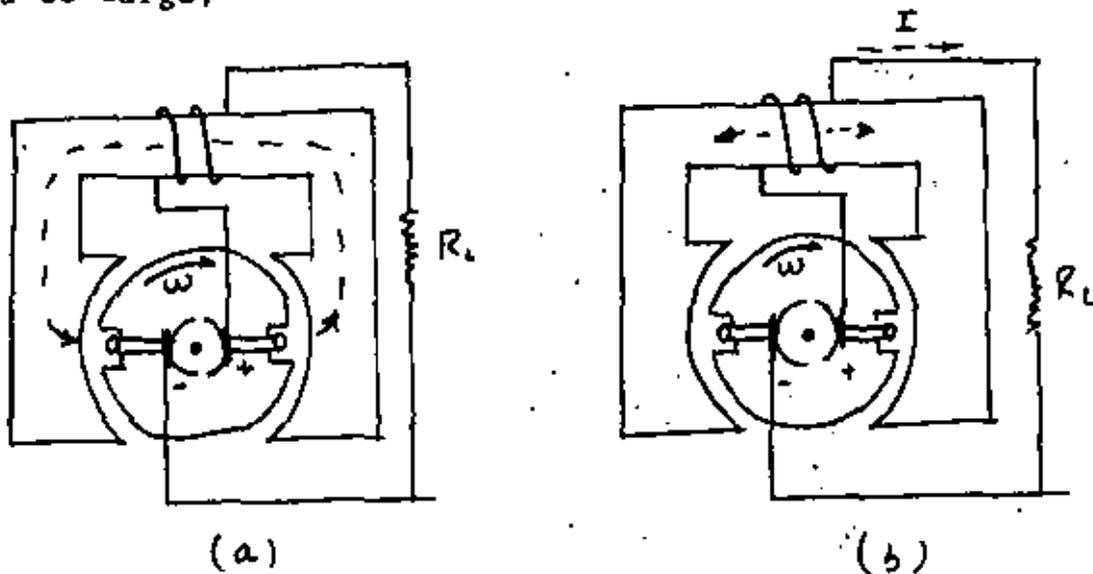


Fig. 10 Sustrucción de la fuente por resistencia

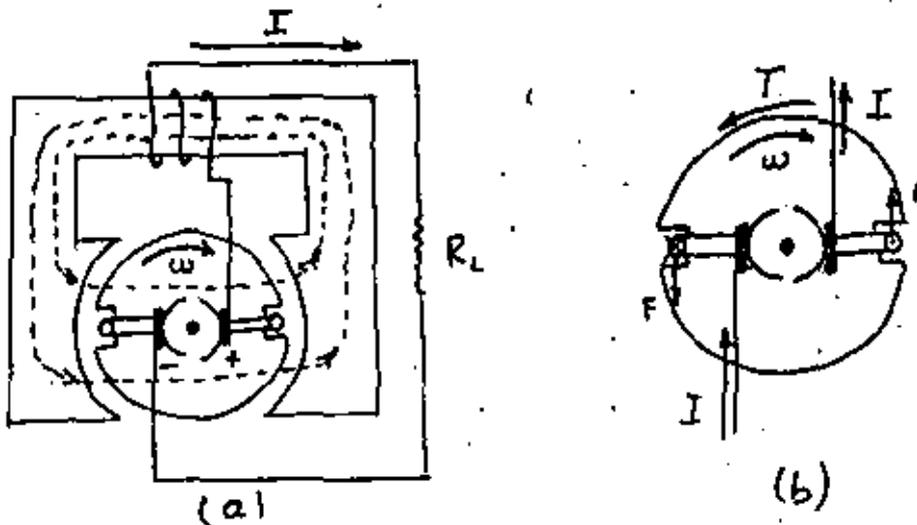


Fig. 11 La máquina operando como generador



En la figura 10(a) observamos la máquina que conserva su velocidad y el flujo remanente, por lo tanto se induce un pequeño voltaje con la polaridad que ahí mismo observamos. En la figura 10(b) aparece una corriente impulsada por el voltaje de flujo remanente, pero al analizar el flujo magnético que genera esta corriente, vemos que es opuesto al magnetismo remanente, de manera que en vez de reforzarlo lo anula y la máquina no levanta voltaje.

Es necesario entonces un cambio en las conexiones del campo para que la máquina levante voltaje, como vemos en la figura 11(a), de manera que

$$E = k\omega I_a \quad (7)$$

en donde

$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

$$I_a = \frac{E}{r_a + R_L} \quad (10)$$

Sustituyendo (8) y (10) en (7), tenemos:

$$E = a\omega - b(r_a + R_L) \quad (11)$$

en donde observamos que la fuerza electromotriz es tanto mayor cuanto menor es la resistencia de carga.

Bajo estas condiciones, circula una corriente, la cual en la figura 11(b) vemos que genera el par negativo o par de frenado, cuyo valor es

$$T_e = k I_a (-I_a) \quad (11')$$

que es una modificación de la ecuación 11, ya que la corriente en el campo sigue siendo positiva, mientras que en su armadura



es negativa.

El frenado en estas circunstancias se llama "frenado dinámico". Si se desea conmutar el frenado dinámico por frenado regenerativo, es decir devolviendo energía a la fuente, es necesario elevar previamente la fuerza electromotriz a un valor superior al del voltaje de la fuente, e inmediatamente hacer una conmutación translapada, para cambiar la resistencia de carga por la fuente de energía.

El frenado regenerativo, en estas circunstancias, es de duración muy corta, pues a medida que se pierde velocidad la fuerza electromotriz disminuye de valor, y en cuanto se iguale con el voltaje de la fuente (no hay que esperar a que sea menor), es necesario desconectar la máquina.

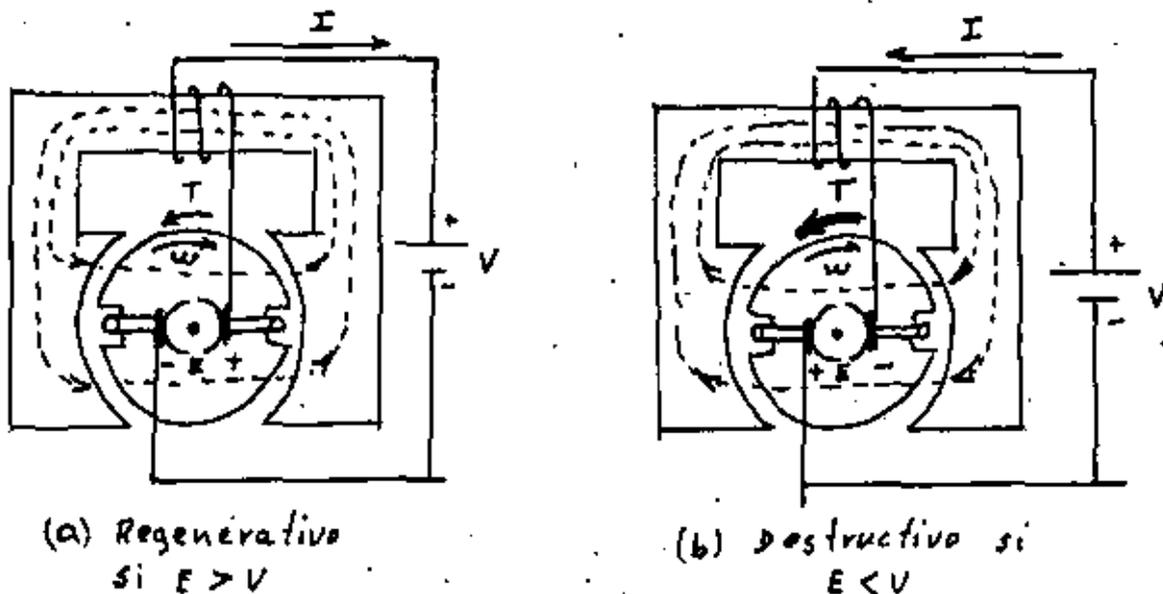


Fig. 12 Frenado regenerativo.

En la figura 12(a) vemos el frenado regenerativo, que se cumple siempre que $E > V$. En la figura 12(b), la velocidad ha bajado a tal valor que $E < V$ y no se ha abierto el circuito. En este caso, la corriente se invierte, obligando al flujo magnético a invertirse, con lo cual la fuerza electromotriz también se invierte, de tal modo que la corriente



$$I = \frac{V + E}{r_a}$$

adquiere un valor muy elevado, consumiendo energía de la fuente.

Como flujo y corriente de armadura se invierten, el par se conserva en el sentido de frenado, pero en vez de constituir un frenado regenerativo, es una tendencia a invertir la velocidad de la máquina, lo que podríamos describir como un "arranque a contra-velocidad",

Por lo anterior nos damos cuenta que la máquina serie que tiene grandes ventajas en tracción, tiene también grandes desventajas en frenado regenerativo. Estas desventajas pueden superarse recurriendo a diferentes opciones:

- 1a. Trabajando como motor serie en tracción, y como generador independiente en frenado regenerativo, alimentando la excitación con una fuente de intensidad de corriente.
- 2a. Absorbiendo la energía del frenado regenerativo en una fuente de tensión variable, controlando que en todo momento el voltaje de la fuente sea menor que la fuerza electromotriz. En este caso es indispensable elevar previamente la fuerza electromotriz por frenado dinámico.
- 3a. Por medio de una máquina mixta, con excitación serie en tracción y excitación independiente de baja corriente en frenado (no confundir la máquina mixta con la máquina de excitación compuesta, pues en esta última el campo serie es solamente un campo auxiliar).

En cualquier opción que se elija, la necesidad de conmutar conexiones motiva que la máquina serie no tenga una transición continua entre sus operaciones de tracción y de frenado.

E J E M P L O

Un motor de C.D. de 6.5 H.P tiene las siguientes características:

$$E = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e \quad r_a = 0.22 \text{ ohms}$$

Tensión nominal: 120 V
 Corriente nominal: 50 A
 Velocidad: 1 500 RPM

Se utilizará para mover una carga con velocidad controlada entre 1000 y 1500 RPM. Para el conjunto motor-carga se estima un par de fricción constante dentro del rango de operación, de 5 New-m y un momento de inercia de 15 kg-m².

- Calcular la corriente de excitación necesaria, cuando su armadura se alimenta a 120 volts 50 Amp. y gira a 1500 RPM.
- Si el motor se excita independientemente, a corriente constante, calcular el voltaje de armadura para una velocidad de 1225 RPM suponiendo que el par de carga se mantiene constante.
- Si se desea pasar de las condiciones de la pregunta (a) a las de la pregunta (b) mediante un cambio brusco de tensión, con un tiempo de frenado regenerativo, trazar las gráficas de velocidad, corriente y par con respecto al tiempo.

SOLUCION

- De la ecuación de voltaje del motor

$$V = E + r_a I_a; \quad E = V - r_a I_a$$

sustituimos valores

$$E = 120 - (0.22 \times 50) = 109 \text{ Volts}$$

llevando este valor a la ecuación de la fem:

$$109 = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1500 \times \pi}{30} = 157$$

por tanto $I_e = 1.294 \text{ Amp.}$

- b) Como la máquina trabajará a excitación constante, podemos definir una constante de excitación

$$K_e = \frac{I_e}{0.157 + I_e} = \frac{1.294}{0.157 + 1.294} = 0.694$$

de tal manera que

$$E = 0.694\omega$$

Por otra parte, si la máquina también trabaja a par constante, de la ecuación de par:

$$T_e = \frac{E I_a}{\omega} = 0.694 I_a$$

deducimos que trabaja a corriente de armadura constante de 50 Amp. (en estado estable). Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= E + r_a I_a \\ &= 0.694\omega + (0.22 I_a) \end{aligned}$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1225 \times \pi}{30} = 128.24$$

entonces:

$$V = (0.694 \times 128.24) + (0.22 \times 50) = 100 \text{ volts}$$



c) La ecuación general de equilibrio eléctrico en armadura es:

$$v = e + r_a i_a + L p i_a \quad (A)$$

Como la inductancia de armadura es generalmente insignificante, el tercer término del segundo miembro se suele despreciar.

La ecuación general de equilibrio mecánico en armadura es:

$$T_e = T_m + T_f + J p \omega \quad (B)$$

$$\text{en donde } T_e = K_e i_a \quad (C)$$

El par electromagnético en estado estable tiene un valor constante

$$T_e = 0.694 \times 50 = 34.7 \text{ New-m} \quad (D)$$

lo que significa que

$$T_m + T_f = 34.7 \text{ New-m} \quad (E)$$

Sustituyendo (C) y (E) en (B), con $K_e = 0.694$ y $J = 15$:

$$0.694 i_a = 34.7 + 15 p\omega$$

$$i_a = 50 + 21.6 p\omega \quad (F)$$

Sustituyendo (F) en (A), despreciando el tercer término:

$$v = e + 0.22 (50 + 21.6 p\omega)$$

$$e = 0.694\omega + 11 + 4.752 p\omega \quad (G)$$

que es la ecuación general, en donde el voltaje y la velocidad son funciones del tiempo.



La ecuación (G) para el estado estable inicial, adopta los siguientes valores:

$$120 = (0.694 \times 157) + 11$$

Si se baja repentinamente el voltaje a 100 volts equivale a agregarle un escalón negativo a la ecuación anterior, con lo que queda:

$$120 - 20u(t) = 0.694\omega + 11 + 4.752 p\omega$$

que representa el funcionamiento incremental. Si a la última ecuación le restamos la correspondiente al estado estable inicial obtenemos:

$$-20u(t) = 0.694 (\omega - 157) + 4.752 p\omega$$

cuya solución es:

$$\omega = 28.72 (e^{-0.146 t} + 4.466) u(t)$$

La corriente, según la (F)

$$i_a = 50 + 21.6 p\omega$$

cuya solución es

$$i_a = 50 - 90.57 e^{-0.146 t} u(t)$$

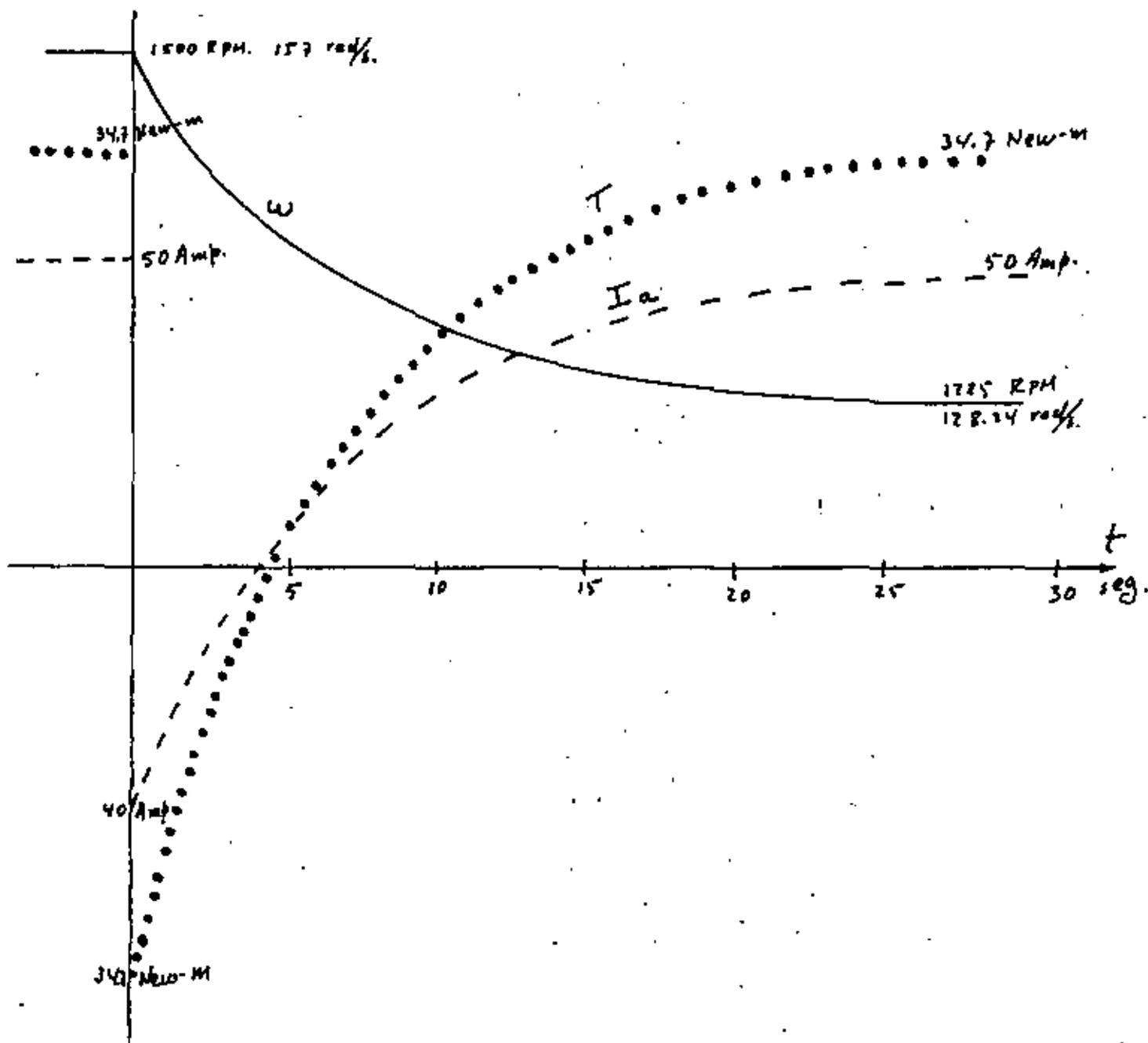
y según la (C), el par es

$$T_e = k_e i_a$$

cuya solución es

$$T_e = 34.7 - 68.85 e^{-0.146 t} u(t)$$

Estas tres soluciones las encontramos graficadas en la siguiente figura.





BIBLIOGRAFIA

Meisel J.- Principios de Conversión de Energía Electromecánica
Mc Graw Hill México 1975.

Langsdorf A.S.- Principios de Máquinas de Corriente Continua.
Mc Graw Hill México 1977.

Matsch L.W. Máquinas Electromagnéticas y Electromecánicas
Representaciones y Servicios de Ingeniería México 1974.

Thaler G.J. y Wilcox M.L.- Máquinas Eléctricas
Limusa México 1974.



significativa la región correspondiente al primer cuadrante.

El caso más frecuente es que las máquinas operen alrededor de sus especificaciones nominales, las cuales se presentan en la región de saturación, o sea en donde la curva ya ha perdido su pendiente inicial. Cuando el caso en estudio corresponde a estas condiciones, no tiene objeto un análisis con corrientes de excitación pequeñas y aún menos con el magnetismo remanente, lo que nos permite simplificar la función de Froelich de la manera siguiente:

$$\phi = \frac{a' I_{exc}}{b + I_{exc}} \quad (3.2)$$

La gráfica correspondiente a la ecuación (3.2) la podemos observar en la figura 7. Esta curva pasa por el origen, suponiendo un magnetismo remanente nulo y sus asíntotas están en $I_{exc} = -b$ y $\phi = a'$. La asíntota horizontal supone el valor al cual el núcleo presenta su saturación total, para una corriente de excitación muy grande (teóricamente infinita) en una región en que nunca opera la máquina en la realidad. La región de operación alrededor de los valores nominales presenta un grado de aproximación lo suficientemente aceptable para utilizar la función (3.2) en el análisis de equilibrio.

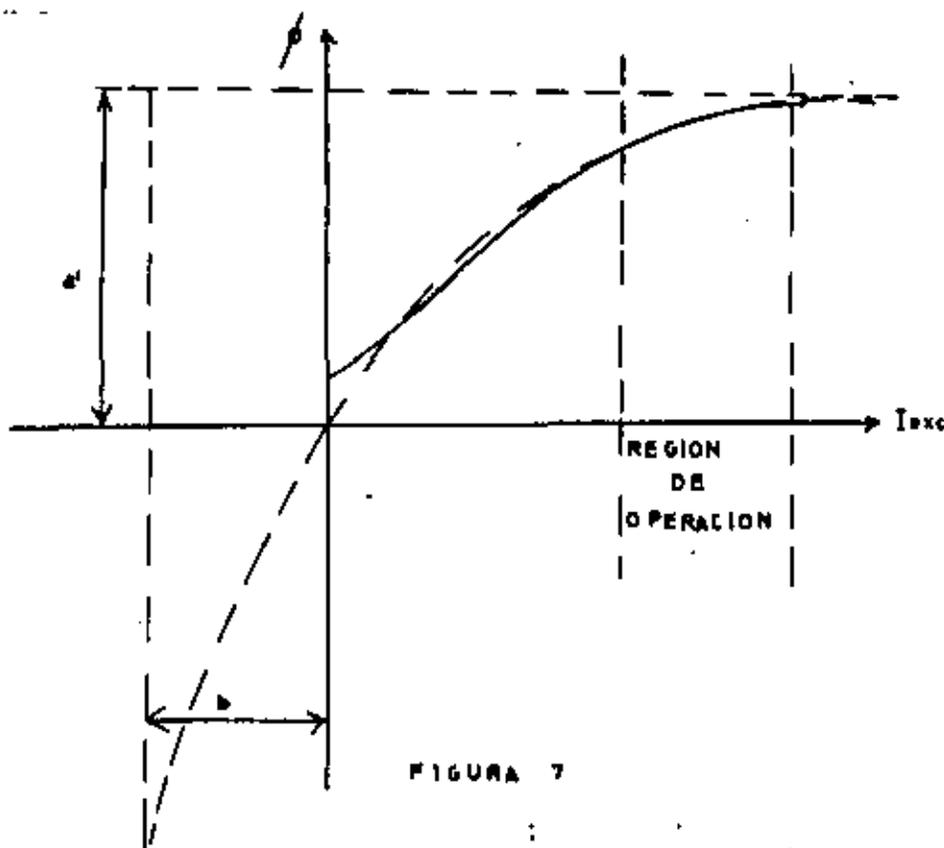


FIGURA 7



4. CURVA DE SATURACION EN VACIO

La fem. inducida en una máquina está dado por las ecuaciones:

$$E = \frac{P\phi ZN}{60 A} \quad \text{sistema convencional} \quad (4.1)$$

$$E = \frac{P\phi Z \omega}{2\pi A} \quad \text{sistema MKS} \quad (4.2)$$

en donde

P es el número de polos de la máquina

ϕ es el flujo por polo

Z es el número total de conductores en las ranuras del núcleo de armadura

N es la velocidad en RPM

ω es la velocidad en radianes por segundo.

A es el número de circuitos en paralelo en el embobinado de armadura.

En estas ecuaciones el flujo y la velocidad constituyen las variables independientes, siendo la fem. la variable dependiente y el resto de las cantidades constituyen las constantes de la máquina. La ecuación (4.1) utiliza el flujo en unidades MKS y la velocidad en unidades convencionales o prácticas (RPM), resultando poco conveniente en algunas aplicaciones para el estudio del equilibrio, particularmente cuando intervienen las expresiones del par desarrollado en donde nos resulta mucho más congruente utilizar todas las unidades del sistema MKS, por lo cual utilizaremos de preferencia la ecuación (4.2).

Si agrupamos todas las constantes en una sola denominación

$$K' = \frac{PZ}{2\pi A}$$

la ecuación (4.2) queda:

$$E = K' \omega \phi \quad (4.3)$$

que es la forma más simple en que podemos expresar el voltaje inducido en la máquina. Sin embargo, en la práctica no es igualmente simple, puesto que la medición del flujo resulta algo laboriosa, por lo cual preferimos expresar la ecuación (4.3) en función de la corriente de excitación, en vez del flujo. Esto se logra sustituyendo el flujo de la (4.3) por su expresión según Froelich,

que puede ser la forma más precisa dada por la ecuación (3.1), o la forma aproximada dada por (3.2).

Cuando se requiere un análisis de comportamiento incluyendo todos los valores posibles de voltaje inducido (también el debido al magnetismo remanente), sustituimos la (3.1) en la (4.3), - con lo que queda:

$$E = \frac{K'a'\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + K'P'\omega$$

Si agrupamos constantes bajo una misma denominación:

$$K'a' = a$$

$$K'P' = P$$

con lo que la ecuación de la curva de saturación quedaría:

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega \quad (4.4)$$

En cambio, si el análisis de equilibrio se efectuara únicamente alrededor del voltaje nominal, convendría utilizar la forma simplificada, lo que facilita muchas operaciones. Sustituyendo la (3.2) en la (4.3) queda:

$$E = \frac{K'a'\omega I_{exc}}{b + I_{exc}}$$

Si $K'a' = a$, entonces

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

que es de la forma

$$E = K \omega I_{exc}$$

la cual, a primera vista resulta tan simple como la (4.3), pero en este caso debemos tener en cuenta que K no es una constante, si no una función de la corriente de excitación

$$K = \frac{a}{b + I_{exc}}$$

La gráfica de las ecuaciones (4.4) y (4.5) se muestra en la



figura 8, en donde se puede apreciar su aproximación con una curva real, obtenida en una prueba de laboratorio.

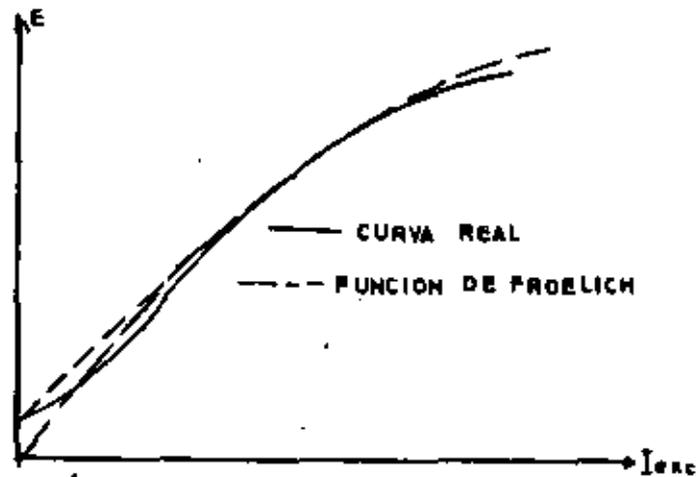


FIGURA 8

Graficando la ecuación (4.4) para diferentes velocidades de la máquina, de tal manera que $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$, obtendríamos las curvas mostradas en la figura 9.



FIGURA 9

Las gráficas mostradas en las figuras 8 y 9 se conocen con el nombre de CURVAS DE SATURACION EN VACIO.

.....

5. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS MAQUINAS

5.1 DETERMINACION DE LA CURVA DE SATURACION

En los diversos análisis para el equilibrio de la máquina de C.D. juega un papel importante la ecuación de la curva de saturación en vacío, de manera que el primer paso sería determinar esta función de manera que represente lo más fielmente posible el comportamiento de una máquina real.

Para efectuar esta prueba, se acopla la máquina a un motor - adecuado, de manera que pueda operar como generador con excitación independiente, a un velocidad uniforme, de preferencia la nominal. La fuente para excitar independientemente el campo debe suministrar el voltaje adecuado para producir una corriente de excitación desde un valor mínimo hasta un 150% aproximadamente del valor normal, si la máquina en prueba es normalmente de excitación en derivación, o bien debe ser una fuente de corriente capaz de exceder un 20% la corriente nominal de la máquina en prueba, si su excitación normalmente es en serie.

La figura 10 nos muestra el diagrama de conexiones y la figura 11 es un ejemplo de la tabla de lecturas y la curva de saturación en vacío obtenida. Las lecturas deben ser siempre en orden ascendente para evitar errores debidos a la histéresis.

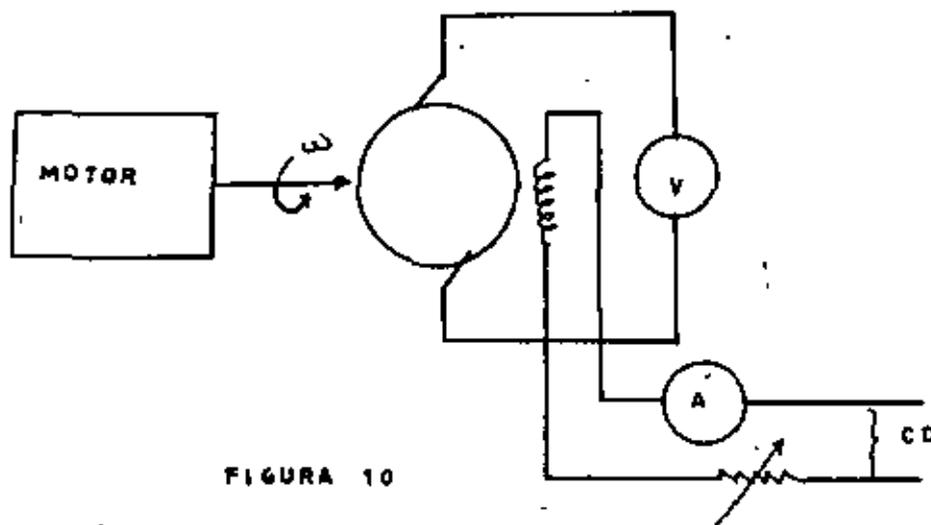


FIGURA 10



I_{exc} AMP	E VOLTS	VEL. RPM
0	E_0	N
I_1	E_1	CTE
I_i	E_i	
I_j	E_j	

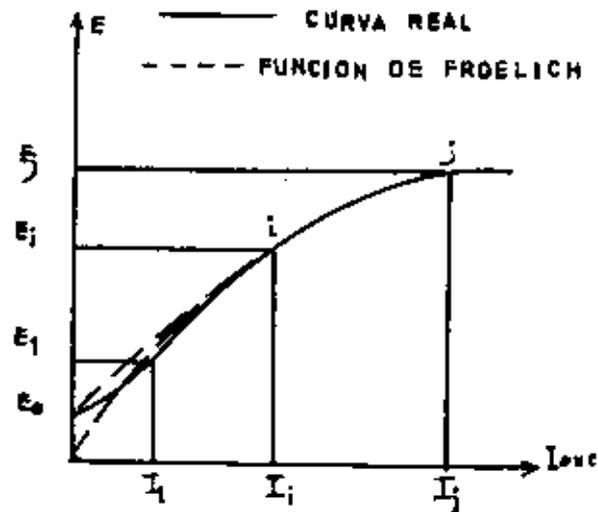


FIGURA 11

La expresión algebraica para el voltaje inducido mostrado en la gráfica de la figura 11 se puede obtener aplicando la ecuación (4.4) o la (4.5) a dos puntos de la curva obtenida en el experimento, como los i, j .

Según la (4.4):

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{(a\omega)I_i}{(b)+I_i} + (P\omega) \\
 E_j &= \frac{(a\omega)I_j}{(b)+I_j} + (P\omega) \\
 E_0 &= (P\omega)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones simultáneas en donde las incógnitas serían las cantidades encerradas en paréntesis. Si estas cantidades se dividen entre la velocidad angular de prueba (ω , en rad/seg), se obtienen los parámetros a, b y P .

Según la (4.5):

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{(a\omega)I_i}{(b)+I_i} \\
 E_j &= \frac{(a\omega)I_j}{(b)+I_j}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, que serían las cantidades encerradas en paréntesis.

Dividiéndolas entre la velocidad angular de prueba, se obtienen los parámetros a y b.

NOTA.- Frecuentemente se obtienen funciones muy alejadas de la realidad, de manera que para aproximar lo más posible, es necesario aplicar el sistema (5.1) o el (5.2) a varios pares de puntos en distintas regiones de la curva y promediar los valores de parámetros obtenidos, hasta conseguir una aproximación como la que muestra la figura 11.

5.2 VOLTAJE TERMINAL DEL GENERADOR CON CARGA.

El generador de C.D. como toda fuente real de energía eléctrica, tiene una resistencia interna en la cual se presenta una pérdida de voltaje cuya magnitud depende del régimen de carga.

Los elementos operativos del generador con carga los podemos apreciar esquemáticamente en la figura 12.

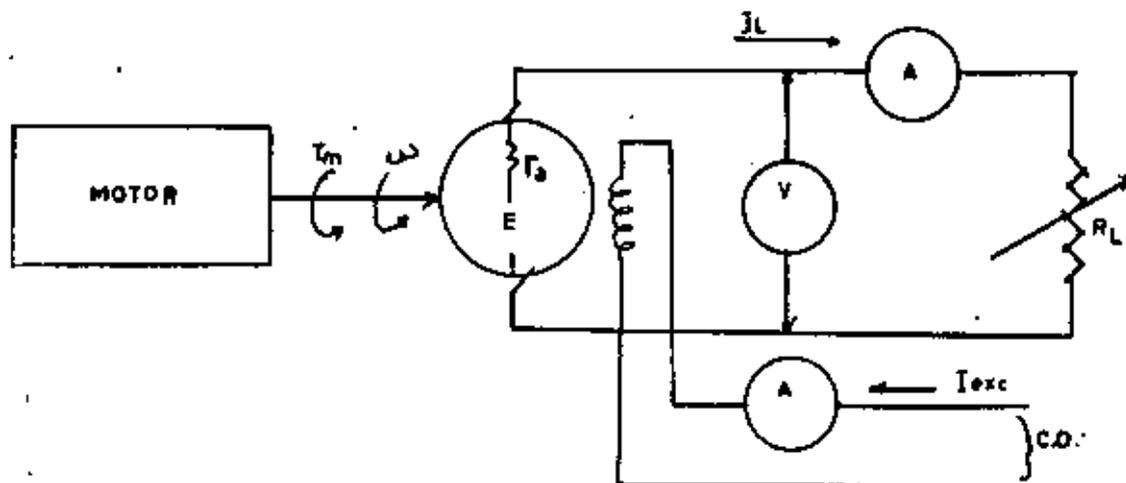


FIGURA 12

Cuando circula una corriente de línea (I_L) por el circuito de armadura del generador, el voltaje en las terminales de la máquina es menor que la fem. E, debido a que aparecen pérdidas en:

- Resistencia interna de la armadura
- Resistencia de las delgas del conmutador
- Resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas
- Resistencia de las escobillas.
- Resistencia del embobinado de interpolos y/o embobinados compensadores.

Para efectos de análisis del comportamiento externo del gene



rador, entenderemos por resistencia del circuito de armadura (r_a), la suma de todas las resistencias mencionadas, puesto que cada una contribuye a la pérdida de voltaje.

De acuerdo con lo anterior, el voltaje en las terminales de la máquina es:

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

que es la ecuación de una recta, como lo muestra la figura 13.

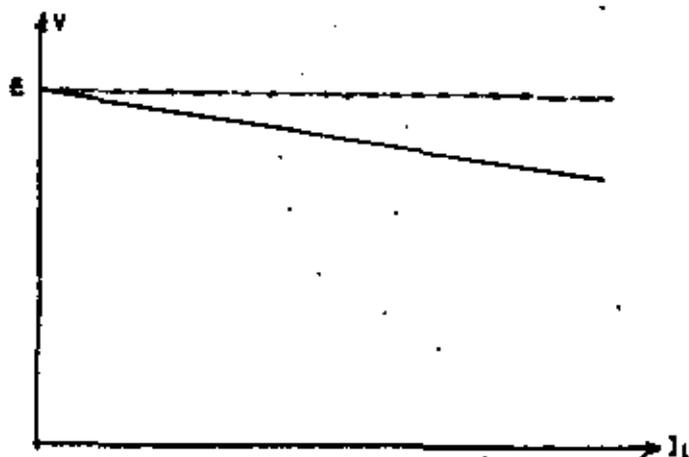
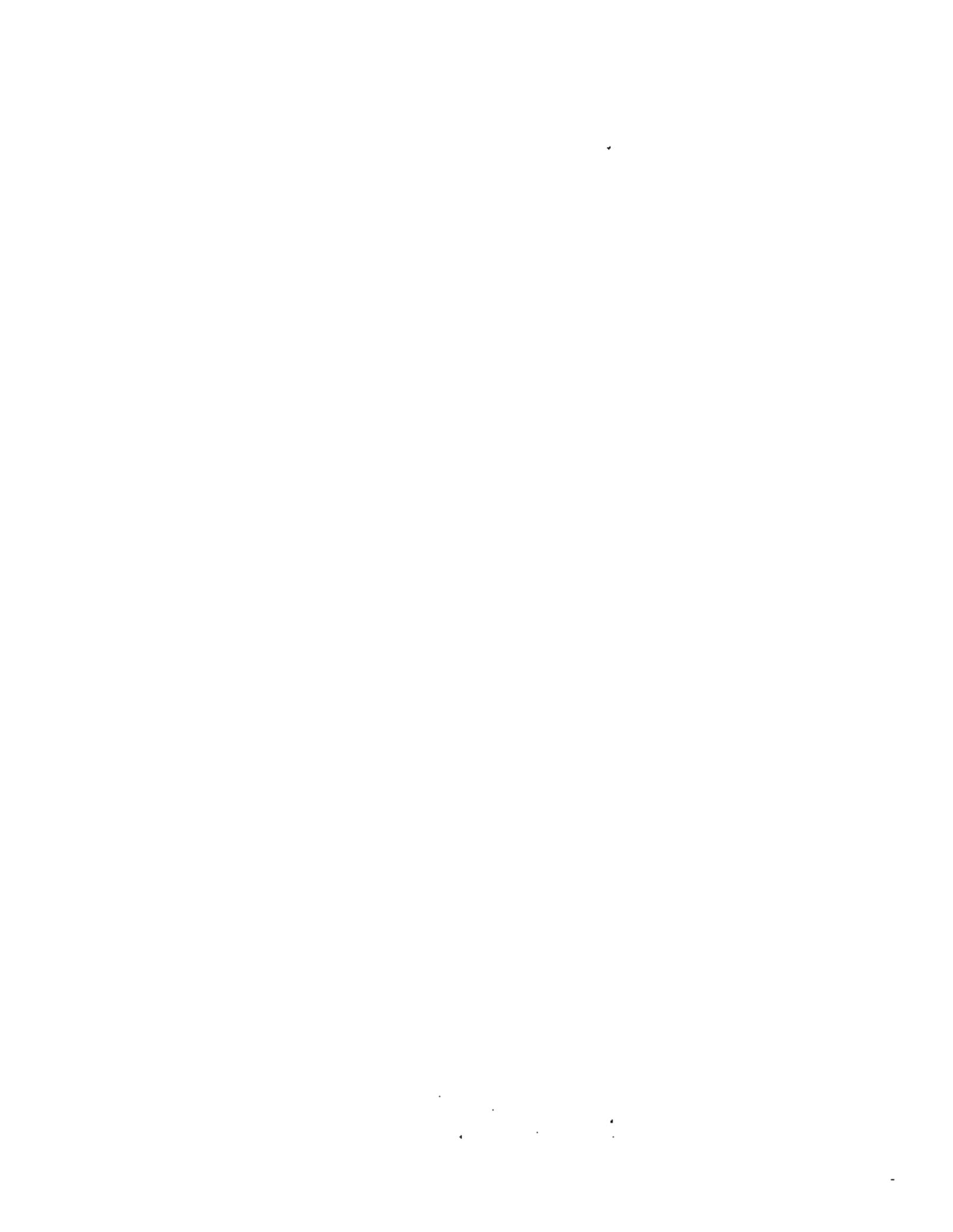


FIGURA 13

El comportamiento del voltaje terminal que muestran la ecuación (5.3) y la figura 13 corresponden a un generador excitado en forma independiente, como es el que se muestra en la figura 12, en donde la corriente de excitación permanece constante y la fem. no se distorsiona por efecto de la reacción de armadura. Esta condición se cumple en forma bastante cercana a lo deseable cuando la máquina tiene una compensación bien equilibrada de la reacción de armadura, por medio de los interpolos y/o los devanados compensadores.

Cálculo de la resistencia del circuito de armadura.- Averiguar el valor de esta resistencia es un trabajo que presenta algunos problemas, fundamentalmente porque interviene la resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas, la cual muy frecuentemente varía de las condiciones de reposo a las velocidades en que normalmente opera la máquina. Esto hace que no sea válida una medición de la resistencia con la máquina en reposo.

El valor más exacto lo podríamos calcular con el generador operando a velocidades cercanas a la nominal, y por medio de un arreglo como el que ilustra la figura 12, tomar una serie de pares de lecturas que nos permitan construir la gráfica de la figura 13. Es de importancia fundamental que esta prueba se efectúe -



con velocidad y corriente de excitación estrictamente constantes.

Si la gráfica obtenida es recta, podemos confiar en una buena compensación de la reacción de armadura. Entonces la resistencia del circuito de armadura (r_a) la podemos calcular para una determinada corriente de línea, como:

$$r_a = \frac{V_{\text{vacío}} - V_{\text{con carga}}}{I_L} \quad (5.4)$$

Para mayor precisión se recomienda calcular esta resistencia para diferentes pares de valores leídos, y promediar los resultados.

5.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOTOR CON CARGA

Cuando la máquina trabaja como motor, se induce en la armadura una fem (llamada frecuentemente fuerza contra electromotriz), de manera que los elementos operativos de la máquina los podemos apreciar en la figura 14.

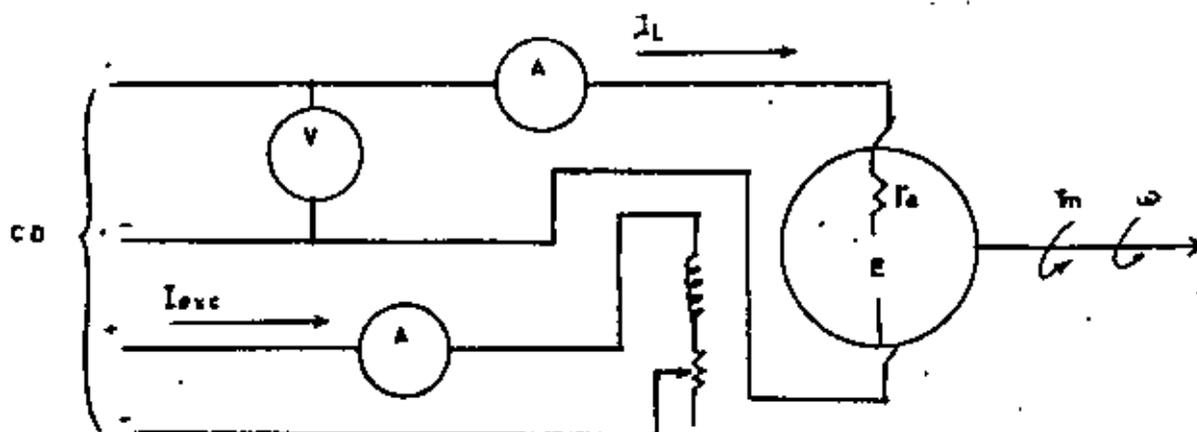


FIGURA 14

En el caso del motor, la fem. es menor que el voltaje externo (voltaje aplicado) del circuito de armadura, de manera que:

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

en donde solamente el signo en el segundo miembro es lo que diferencia el comportamiento de motor del de generador.



5.4 PAR ELECTROMAGNETICO

Cuando existen simultáneamente el flujo inductor (debido a la corriente de excitación) y una reacción de armadura (debida a la corriente de línea), la interacción entre estos dos campos produce un par mecánico de origen electromagnético.

Si la máquina trabaja como generador, este par es de sentido opuesto a la velocidad, motivando que el primotor reaccione entregando el par necesario para mantener la velocidad. De esta manera el generador absorbe la potencia mecánica necesaria para convertirla en potencia eléctrica.

Si la máquina opera como motor, el par es del mismo sentido que la velocidad, entregando así la potencia mecánica que ha convertido a partir de potencia eléctrica.

Una forma sencilla de evaluar el par electromagnético es mediante el esquema de balance de potencia que ilustra la figura 15.

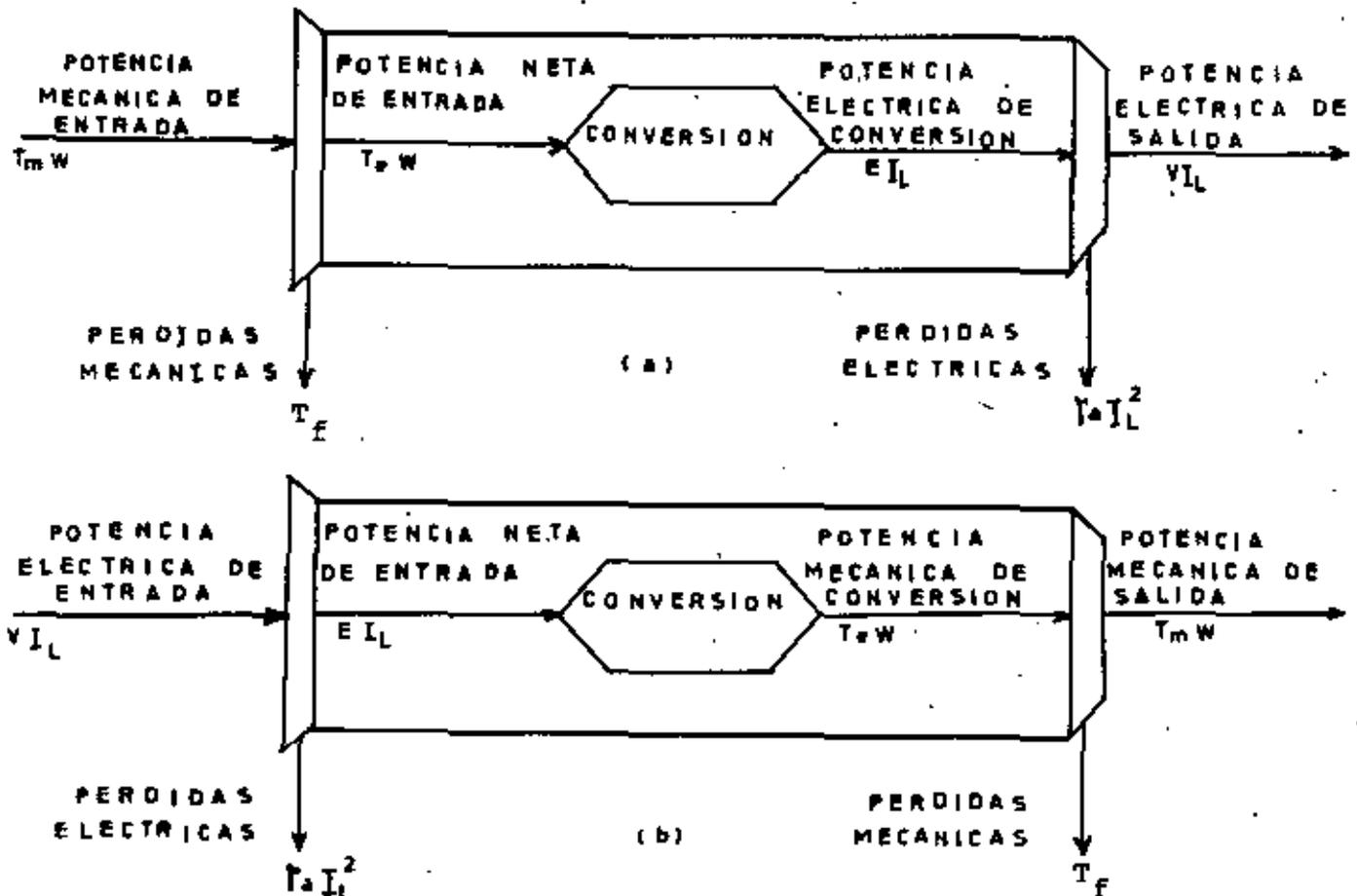


FIGURA 15

•

•

•

La potencia mecánica en la flecha de la máquina consta de un par mecánico (T_M) y la velocidad angular (ω).

El par de fricción (T_f) ocasiona pérdidas mecánicas, motivando que el par en la armadura sea diferente del par mecánico¹. El par en la armadura es el que hemos llamado par electromagnético (T_e).

En la parte eléctrica, la potencia que maneja la armadura ($E I_L$) también difiere de la potencia en las terminales de la máquina ($V I_L$) debido a las pérdidas eléctricas en el circuito de armadura.

En el fenómeno de conversión que se lleva a cabo en la armadura, una potencia mecánica ($T_e \omega$) se transforma en potencia eléctrica ($E I_L$) en el caso del generador (figura 15-a) y a la inversa en el caso del motor (figura 15-b), de manera que independientemente de como opere la máquina, podemos establecer que:

$$T_e \omega = E I_L$$

de donde el par electromagnético será:

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

El valor de E en la ecuación (5.6) puede obtenerse de la (4.4) o de la (4.5).

6. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

6.1 GENERADOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

El planteamiento para el análisis de equilibrio del generador con excitación independiente es prácticamente el mismo que se ha hecho en el párrafo 5, de manera que solamente nos concretaremos a reunir en una forma resumida esta información.

- a) Voltaje del generador en vacío.- Al no haber corriente circulante en el circuito de armadura, el voltaje es igual a la fem. Esta, además puede controlarse desde el valor inducido por el magnetismo remanente hasta el voltaje nominal de la máquina, siendo estable en cualquier nivel, ya que la corriente de excitación se suministra en forma independiente. La ecuación (4.4) forma parte del cuadro de ecuaciones de equilibrio que presentaremos más adelante.

¹En un balance más rigorista se incluyen en el mismo campo de acción de las pérdidas mecánicas, las pérdidas magnéticas por histéresis y corrientes parásitas en el núcleo de la armadura.

- b) Voltaje del generador con carga.- Si se mantienen constantes la velocidad y la corriente de excitación, el voltaje de la máquina está dado por la (5.3).
- c) Par absorbido por el generador.- Observando la figura 15-a, podemos darnos cuenta que el par mecánico absorbido por el generador es igual al par electromagnético más el par de pérdidas mecánicas. Esta consideración, agregada a la ecuación (5.6) nos da el equilibrio mecánico de la máquina.

Por tanto, las consideraciones de equilibrio quedan reunidas en el siguiente cuadro:

(a) Voltaje en vacío:	$E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$	(6.1)
(b) Voltaje con carga:	$V = E - r_a I_L$	
(c) Par mecánico absorbido:	$T_m = T_f + T_e$	
(d) Par electromagnético:	$T_e = \frac{E I_L}{\omega}$	

que constituyen un sistema de ecuaciones inter-relacionadas, ya que el cálculo de algunas variables puede estar especificado en otra de las ecuaciones. La figura 16 reúne la respuesta de la máquina según este cuadro de ecuaciones

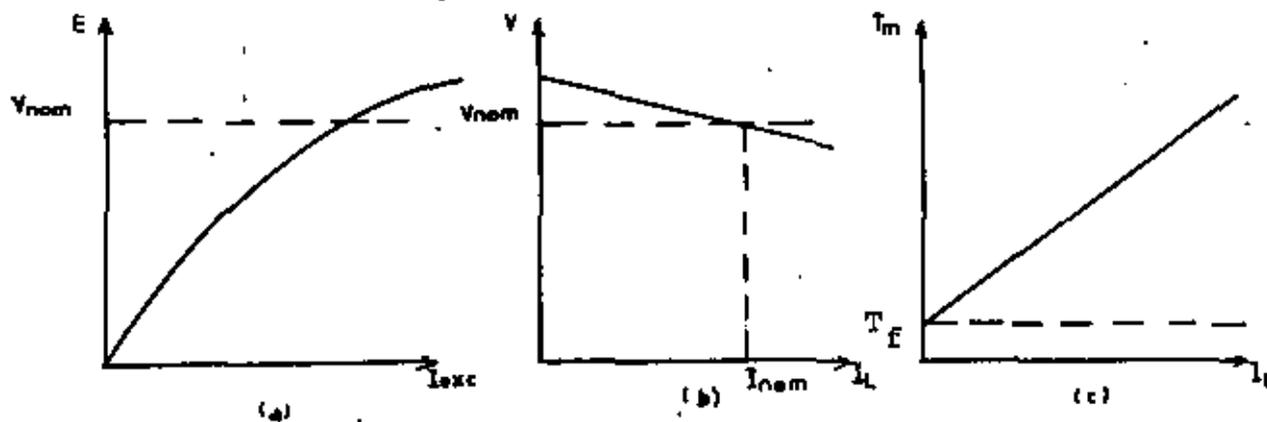
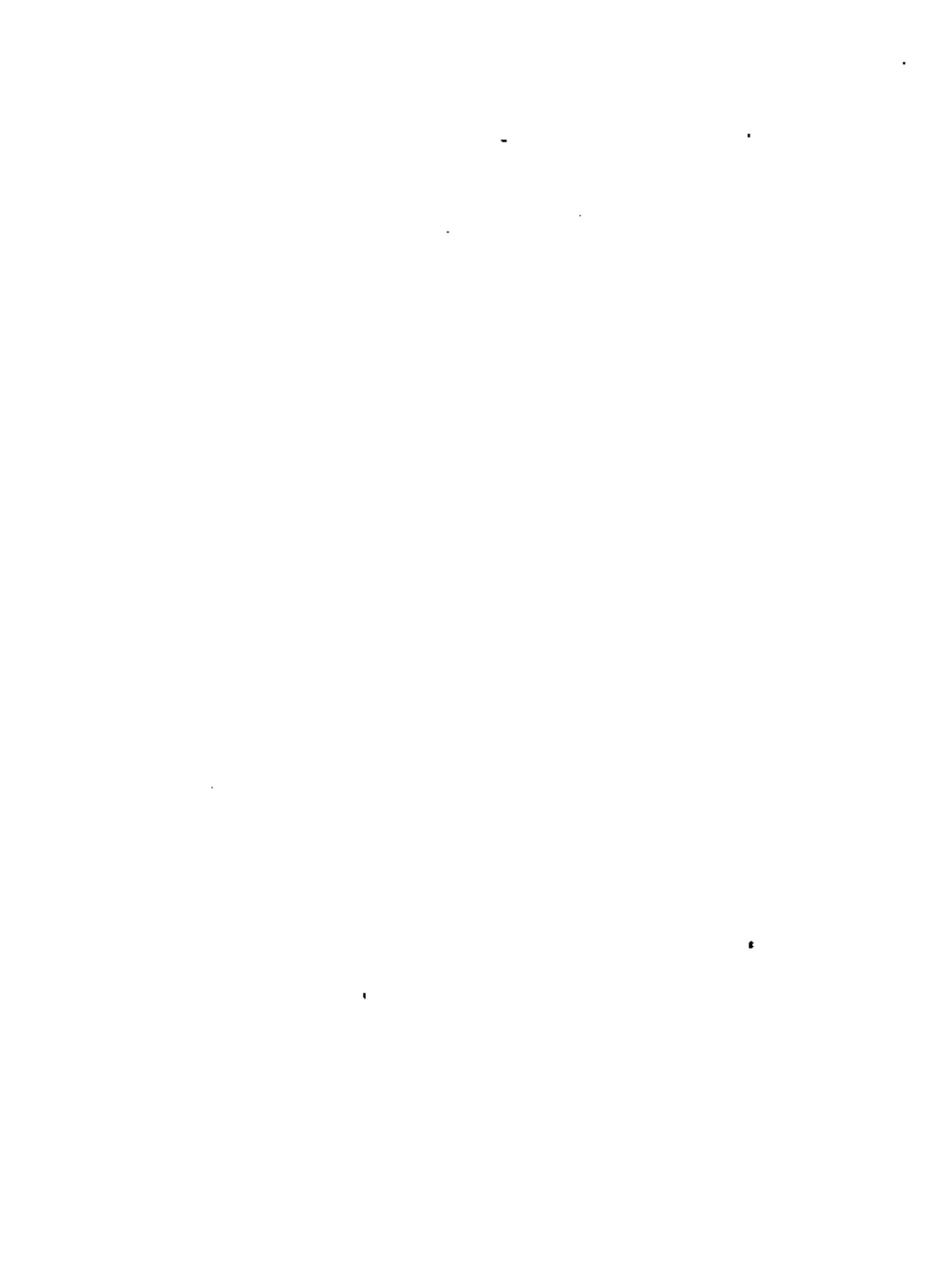


FIGURA 16

Regulación de voltaje.- En la figura 16-b observamos que la máquina se ha ajustado de tal manera que cuando esté suministrando a la línea el valor de corriente nominal, el voltaje terminal sea también al valor nominal.

El voltaje en vacío, por supuesto, debe exceder al valor nominal en una cantidad igual a la caída de tensión que aparece en el circuito de armadura a plena carga.



Definimos como "Regulación de voltaje", la caída de tensión en las terminales desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg.} = \frac{V_V - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100 \quad (6.2)$$

en donde:

V_V = voltaje terminal en vacío

V_{PC} = voltaje terminal a plena carga

V_{nom} = voltaje nominal de la máquina

Para una máquina ajustada a la respuesta que muestra la figura 16-b:

$$V_{PC} = V_{\text{nom.}}$$

6.2 MOTOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE

Aparentemente resulta poco práctico un motor de C.D. con excitación independiente, ya que esto requeriría dos fuentes de alimentación, una para la armadura y otra para el campo, como lo ilustra la figura 17, sin embargo, del análisis que haremos a continua

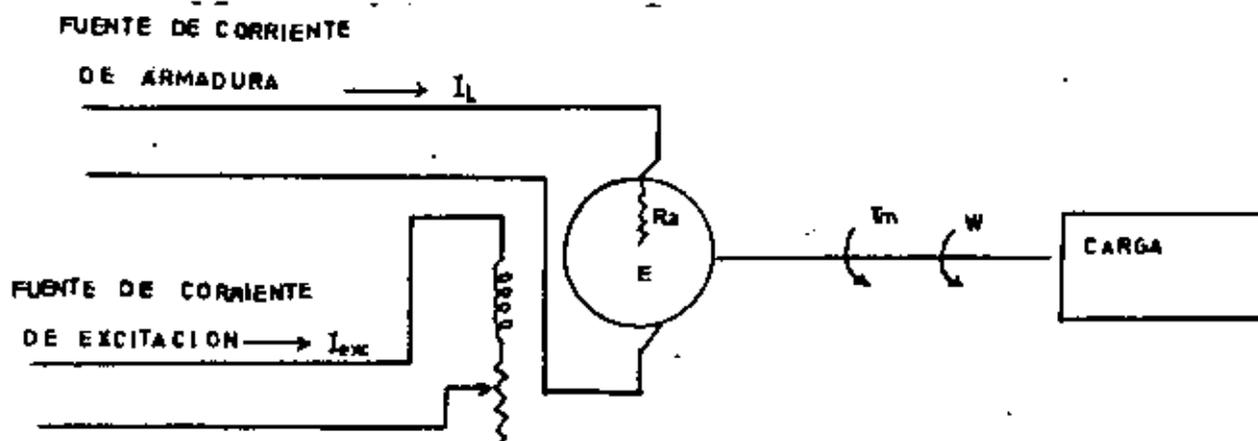


FIGURA 17

ción veremos que presenta grandes ventajas, particularmente en lo que se refiere al control de velocidad.

Normalmente un arreglo como el de la figura 17 se opera con una corriente de excitación constante, cuyo valor se ajusta alrededor de aquel que induce la fem. nominal a velocidad nominal, lo



$T_m=0$), las pérdidas por fricción estarían motivando un pequeño valor de I_L .

Sustituyendo la (6.6) en la (6.4) tenemos:

$$\omega = \frac{K_e V - r_a T_m - r_a T_f}{K_e^2} \quad (6.7)$$

- a) Velocidad del motor con voltaje de armadura constante y carga (par) variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$
- b) Velocidad del motor con par de carga constante y voltaje variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $1/K_e$ y cuya ordenada al origen es $r_a (T_m - T_f)/K_e^2$
- c) Voltaje necesario para mantener velocidad constante con carga variable.- Despejando el voltaje de la ecuación (6.7) tenemos:

$$V = \frac{r_a T_m + K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$$

que corresponde a una recta cuya pendiente es r_a/K_e y cuya ordenada al origen es $(K_e^2 \omega + r_a T_f)/K_e$

Las condiciones anteriores las podemos apreciar en forma más objetiva si ordenamos las ecuaciones bajo la estructura $y=mx+b$ como las presentamos en el siguiente cuadro.

a) Velocidad a voltaje constante	$\omega = -\frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2}$	
b) Velocidad con par constante	$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$	
c) Voltaje necesario a velocidad constante	$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$	(6.8)
Par mecánico	$T_m = T_e - T_f$	
Constante de excitación	$K_e = \frac{a I_{exc}}{b + I_{exc}} = \frac{E}{\omega}$	



Las gráficas correspondientes a las ecuaciones (6.8) las ilustramos a continuación en la figura 18.

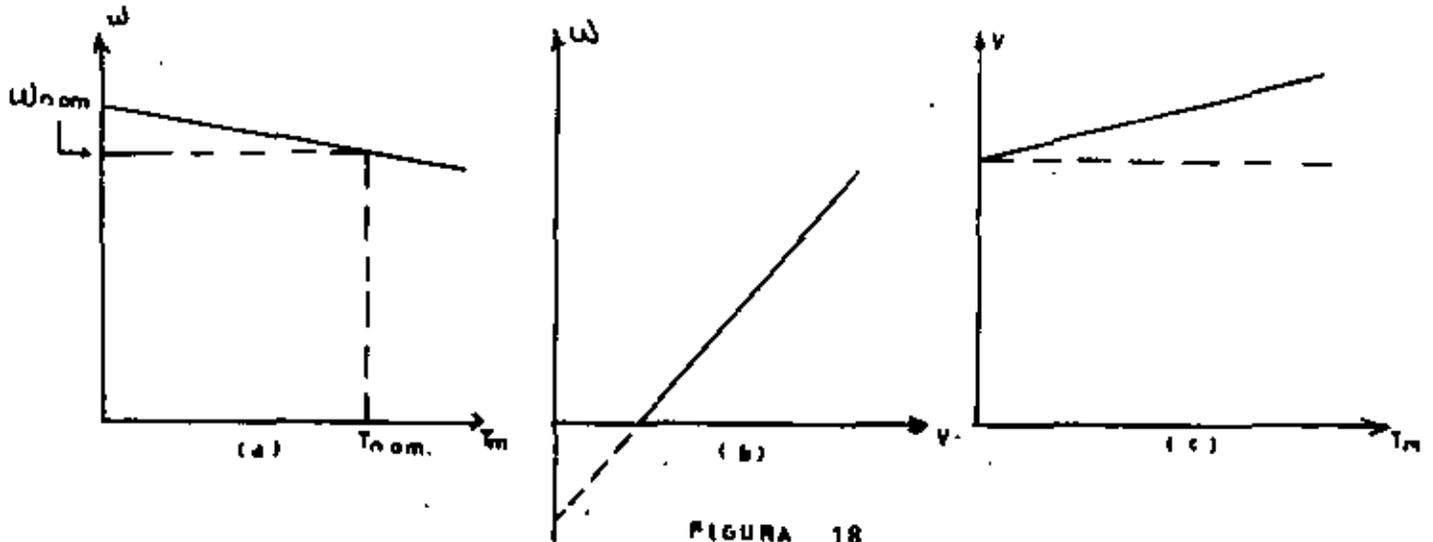


FIGURA 18

El caso (a) de las ecuaciones (6.8) y de la figura 18 es interesante para conocer el tipo de respuesta que da este motor, - en cambio los casos (b) y (c) representan aspectos fundamentales para el diseño de control del motor de C.D., puesto que definen las características de la fuente de alimentación que requieren.

Regulación de velocidad.- Para condiciones de alimentación del motor constantes (voltaje de arandura y corriente de excitación), definimos como "Regulación de velocidad", la pérdida de velocidad desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{nom.}} \times 100 \quad (6.9)$$

en donde:

- ω_v = velocidad del motor en vacío
- ω_{PC} = velocidad del motor a plena carga
- ω_{nom} = velocidad nominal del motor

Si el motor se ajusta a una respuesta como la que muestra la figura 18-a, entonces

$$\omega_{PC} = \omega_{nom}$$

7. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN DERIVACION.

7.1 GENERADOR CON EXCITACION EN DERIVACION.

Conectar la excitación del generador en derivación significa ponerlo en paralelo con la armadura y con la carga, de manera que para excitar la máquina se utiliza la energía generada en la propia armadura, por lo cual se dice que se trata de un generador autoexcitado.

La autoexcitación es factible gracias a ciertas características, como son:

- El magnetismo remanente, el cual permite la generación de un pequeño voltaje, suficiente para iniciar la corriente de excitación.
- La energía necesaria para la excitación es apenas del 2 al 5% de la capacidad de la armadura, por lo cual el generador prácticamente sigue siendo capaz de suministrar a la carga su potencia nominal.
- La saturación del circuito magnético permite un punto de equilibrio con la excitación, con lo que se consigue un voltaje estable.

El diagrama del generador en derivación lo podemos apreciar en la figura 19.

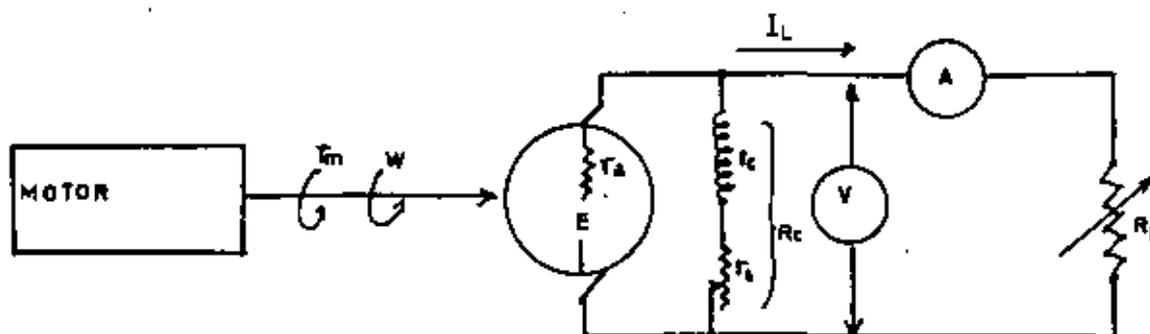
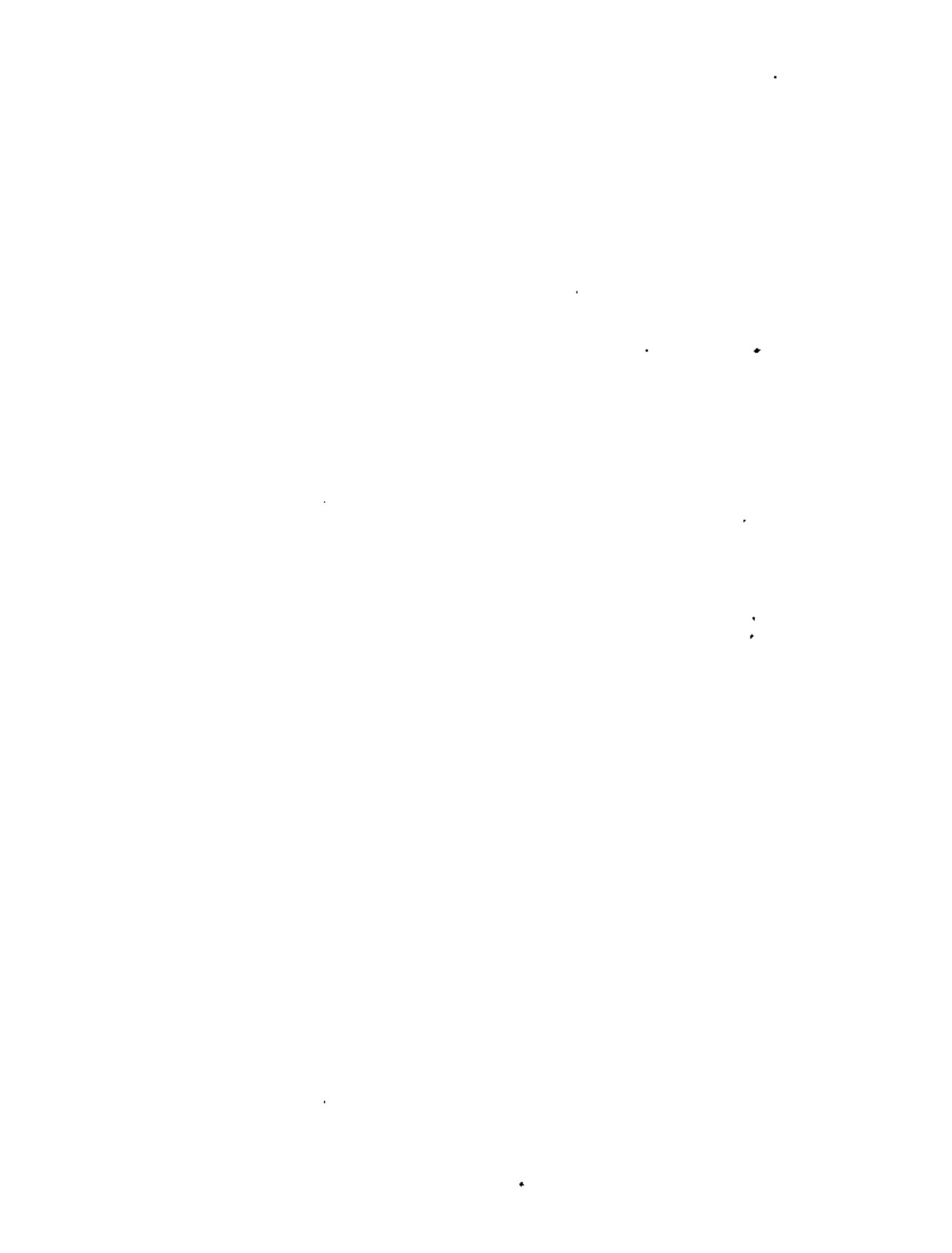


FIGURA 19

Además de los elementos estudiados en diagramas anteriores, tenemos ahora en la figura 19, la resistencia del enbobinado del campo inductor (r_c), la resistencia del reóstato de campo (r_R) y la resistencia del circuito de campo, $R_c = r_c + r_R$, cuyos valores intervendrán en las ecuaciones de equilibrio.

- a) Voltaje del generador en vacío.- Supongamos en la figura 19, una condición inicial con $R_L = \infty$, o sea $I_L = 0$ que es la condición de "generador en vacío"

El voltaje generado se localizará en algún punto de la curva de saturación, lo que nos permite usar la función de Froelich simplificada, que transcribimos a continuación:



$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

La única corriente circulante en estas condiciones es por la malla que forman la armadura y el circuito de campo, que ilustramos en la figura 20. Su valor sería:

$$I_{exc} = \frac{E}{r_a + R_c} \quad (7.1)$$

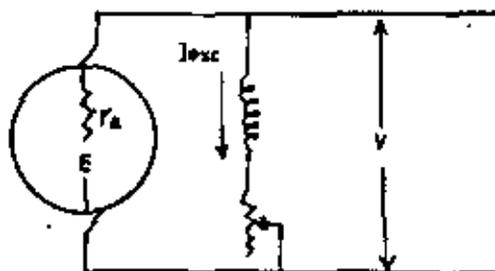


FIGURA 20

Teniendo en cuenta que la corriente de excitación es muy pequeña comparada con la corriente nominal de la máquina, y además, la resistencia del circuito de armadura (r_a) es también muy pequeña, la caída de voltaje en la armadura podemos despreciarla sin cometer error perceptible, de manera que el voltaje aplicado al circuito de campo es prácticamente igual a la fem (E). La ecuación (7.1) quedaría por tanto:

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c} = \frac{V}{R_c} \quad (7.1)b$$

Esta ecuación está especificada en las mismas coordenadas que la (4.5), de manera que se puede expresar gráficamente como una recta cuya pendiente es R_c , simultáneamente con la curva de saturación en vacío, como aparece en la figura 21.

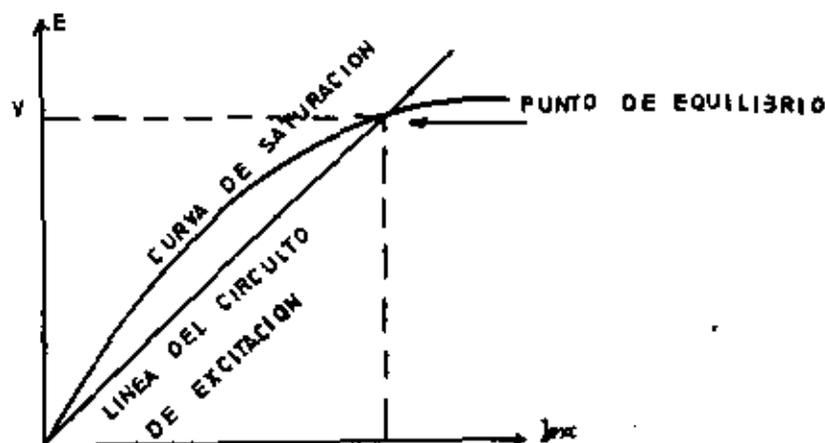


FIGURA 21

La intersección entre las dos gráficas de la figura 21 constituye el punto de equilibrio en el cual el generador induce un voltaje estable.

El sistema de ecuaciones simultáneas que nos permite analizar las condiciones de la figura 21 es:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} + \omega I_{exc} \quad (7.2)$$

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c}$$

Si recordamos que en el circuito de excitación se ha incluido un reóstato, la resistencia de este circuito puede variar dentro de ciertos límites, lo que se manifiesta en la figura 21 con un cambio en la pendiente de la línea recta, motivando que el punto de equilibrio puede desplazarse a lo largo de gran parte de la curva de saturación.

La máxima resistencia admisible es cuando la recta de excitación se hace tangente a la curva de saturación, no existiendo entonces intersección entre las dos gráficas, y por tanto no hay estabilidad en el voltaje de la máquina.

La mínima resistencia es cuando se ha eliminado el reóstato, y queda únicamente la resistencia del embobinado de excitación. En estas condiciones es el máximo voltaje que se puede obtener del generador.

Las diversas opciones descritas anteriormente para un voltaje estable del generador se muestran en la figura 22.

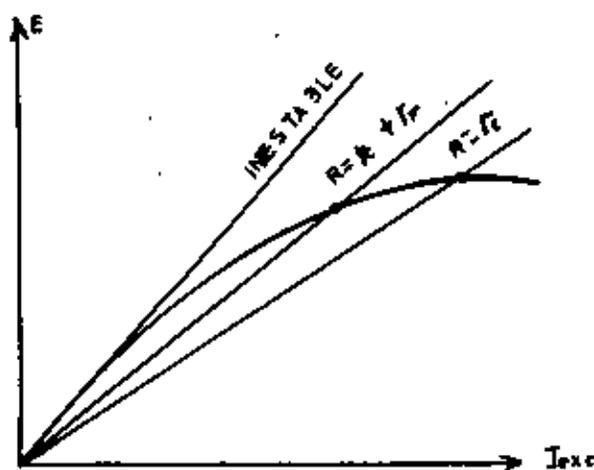


FIGURA 22



- b) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- Regresando ahora a la figura 19, supongamos un valor de (R_L) tal que haga circular una corriente en la línea de carga (I_L), de un valor apreciable, de manera que la caída en la resistencia del circuito de armadura (r_a) ocasiona una diferencia entre la fem. y el voltaje terminal.

A la vez, como el voltaje terminal es el que alimenta al campo inductor, este también se debilita, ocasionando una disminución de la fem., por lo tanto:

$$E \text{ con carga} < E \text{ en vacío}$$

Un generador en derivación, consecuentemente sufre una pérdida de voltaje apreciablemente mayor que uno con excitación independiente cuando pasan de la condición de vacío a la plena carga.

Para efectos de análisis, continuaremos considerando que la corriente de excitación es muy pequeña, por lo que la corriente en la armadura prácticamente está definida por el valor de la corriente de línea (I_L), lo que no nos conduce a un error apreciable.

El comportamiento del generador bajo las circunstancias descritas, estará dado por un sistema de tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} V &= E - r_a I_L \\ E &= \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \\ I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (7.3), las otras dos, obtenemos:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} - r_a I_L \quad (7.4)$$

que es una ecuación de segundo grado en coordenadas (I_L , V) cuya gráfica es la de forma presentada en la figura 23.

Regulación de voltaje.- El concepto de regulación de voltaje dado en la ecuación (6.2) se aplica también en este caso, de manera que:

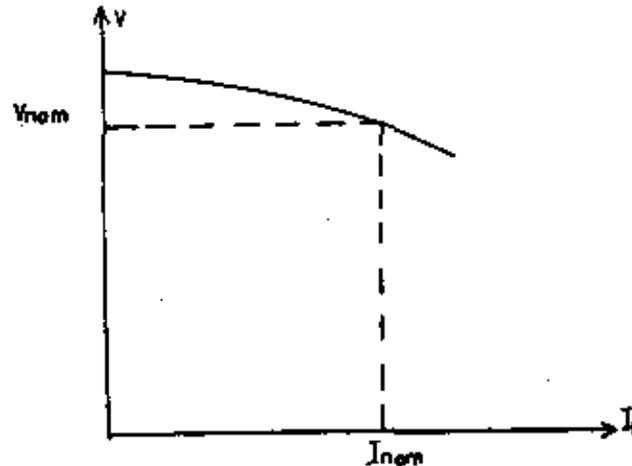


FIGURA 23

$$\text{Reg} = \frac{V_v - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100$$

Si la máquina se ajusta para la respuesta mostrada en la figura 23, entonces:

$$V_{PC} = V_{\text{nom}}$$

El valor de regulación para una misma máquina, es mayor cuando se excita en derivación que cuando se excita en forma independiente.

- c) Curva empleta de la respuesta de voltaje del generador con carga.- Las especificaciones nominales de una máquina se refieren a los valores a los cuales puede trabajar continuamente sin dañarse por elevación de temperatura.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la máquina es un dispositivo conversor de energía, es posible exceder estas limitaciones por tiempo corto, de manera que se puede investigar en que forma continúa decreciendo el voltaje mostrado en la figura 23, al sobrepasar considerablemente su corriente nominal. No obstante, prolongar este estado de sobrecarga, se refleja en calentamiento de los conductores de los bobinados, con la consecuente degradación de los aislamientos.

Graficando la ecuación (7.4) en toda la extensión del primer cuadrante de coordenadas, nos da una curva similar a la (7.4) de la figura 24. Esta gráfica, como podemos observar entra en el dominio de voltajes muy pequeños, y aún sin corriente de excitación

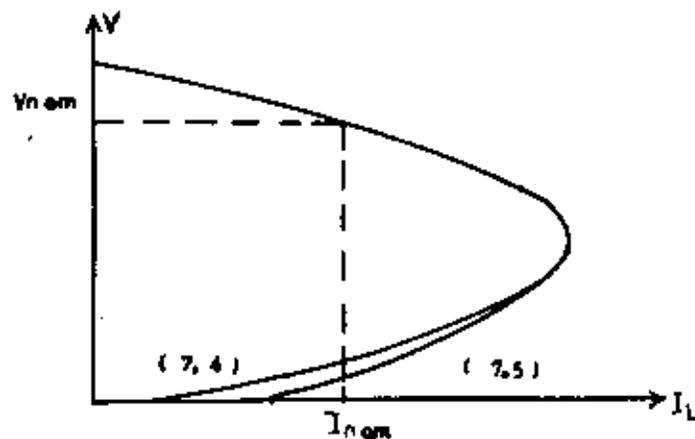


FIGURA 24

el flujo remanente induce una pequeña fem., que provoca circulación de corriente de línea, aún cuando el voltaje externo de la máquina fuera nulo.

La curva (7.4) de la figura 24 por lo tanto, no es totalmente representativa del comportamiento de la máquina, por lo que este análisis lo efectuaremos a partir de la ecuación (4.4) que es más exacta.

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b+I_{exc}} + P\omega \quad (4.4)$$

Si tenemos en cuenta esta ecuación en vez de la segunda que aparece en el cuadro (7.3), al hacer la correspondiente sustitución, quedaría:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_e + V} + P\omega - r_a I_L \quad (7.5)$$

en donde el término $P\omega$ introduce el comportamiento del generador con su magnetismo remanente.

La gráfica correspondiente a la ecuación (7.5) la observamos en la misma figura 24, la cual es mucho más aproximada a la respuesta real de la máquina.

No obstante que la corriente de línea tiene un límite, ésta puede alcanzar fácilmente valores de 4 a 8 veces la corriente nominal, por lo que obtener esta curva en una prueba de laboratorio sería destructivo para la máquina.

Sin embargo, la obtención de las características particulares del generador mediante pruebas no destructivas en el laboratorio y la aplicación de las ecuaciones de análisis, nos conduce a resultados bastante aceptables para estimar la respuesta de la máquina.

- a) Par mecánico absorbido por el generador.- De acuerdo con la figura 15-a y la ecuación (5.6), el par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = T_f + \frac{EI_L}{\omega} \quad (7.6)$$

en donde E e I_L son dos cantidades que varían simultáneamente según acabamos de analizar en el párrafo anterior, de manera que para cada condición de carga habría necesidad de calcular estas cantidades a fin de poder hacer una tabulación. Si deseamos conocer la curva de par mecánico en toda la extensión de la respuesta mostrada en la figura 24, es necesario aplicar la función de Froelich más precisa, de manera que la ecuación (7.6) formará un sistema simultáneo con la (4.4) y la (7.5).

Para el caso del generador en derivación, la curva más sencilla de graficar e interpretar el par mecánico es con respecto al voltaje terminal de la máquina, que nos da un resultado semejante al mostrado en la figura 25.

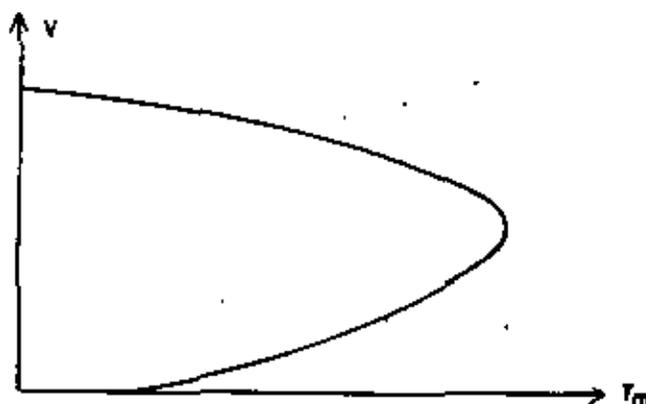


FIGURA 25

Reuniendo ahora en un cuadro las ecuaciones de equilibrio del generador en derivación, tenemos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{a}{b+I_{exc}} \omega I_{exc} \quad \delta E = \frac{a \omega I_{exc}}{b+I_{exc}} + P_{\omega} \\
 I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \\
 V &= E - r_a I_L \\
 T_m &= T_f + \frac{EI_L}{\omega}
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.2 MOTOR CON EXCITACION EN DERIVACION

Al conectar el motor con excitación en derivación, una misma fuente de energía alimenta a la armadura y al campo inductor, como muestra la figura 26. Generalmente en los diagramas de motores de C. D. se acostumbra incluir una resistencia variable en serie con la armadura, a efecto de limitar la corriente transitoria de arranque, pero en vista de que en este estudio nos avocaremos al estado estable, no la incluimos en la figura 26.

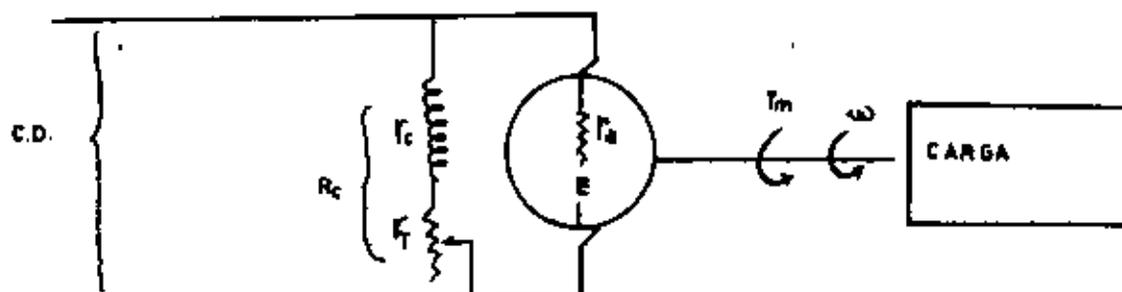


FIGURA 26

Las condiciones de operación del motor bajo este tipo de excitación pueden compararse (con ciertas limitaciones) con el motor excitado independientemente.

En vista de que la excitación normalmente trabajará muy por arriba del magnetismo remanente, la ecuación (4.5) nos puede servir de punto de partida.

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

- a) Variación de la velocidad con excitación constante y carga variable.- El comportamiento del motor en estas condiciones es idéntico al del motor independiente con corriente de excitación y voltaje de armadura constantes. Tomando la ecuación correspondiente del cuadro (6.8) tenemos:

$$\omega = - \frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2} \quad (7.8)$$

que representa una línea recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$ como se muestra en la figura 27-a.

- b) Variación de la velocidad con carga constante y corriente de excitación variable.- El reóstato en el circuito de campo permite ciertos ajustes en la velocidad de la máquina pero de ninguna manera en un rango tan amplio como el caso del control de voltaje en un motor excitado independientemente.

Las ecuaciones (4.5) y (5.6) nos sirven ahora de punto de partida para analizar la respuesta de la máquina en las condiciones planteadas:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

Sustituyendo (4.5) en (5.6) se obtiene:

$$T_e = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L$$

y de acuerdo con la figura 15-b

$$T_m = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L - T_f \quad (7.9)$$

Según hemos establecido el par mecánico (T_m) permanecerá constante, lo cual motiva que al variar la corriente de excitación (que produce a la vez variación de la velocidad), varía también la corriente de línea (I_L).

Despejando la corriente de línea de (7.9), obtenemos:

$$I_L = \frac{(T_m + T_f)(b + I_{exc})}{a I_{exc}} \quad (7.10)$$

La ecuación (5.5) nos da el comportamiento del circuito de armadura con carga.

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.5) y (7.10) en la (5.5) y despejando la velocidad se tiene:

$$\omega = \frac{(aV - r_a T_m - r_a T_f) I_{exc}^2 + (abV - 2br_a T_m - 2br_a T_f) I_{exc} - b^2 r_a (T_m + T_f)}{a^2 I_{exc}^2} \quad (7.11)$$

que es una curva de la forma que muestra la figura 27-b. En este tipo de control, el rango de velocidades que se obtiene es muy pequeño, pues está sujeto a las limitaciones que describimos a continuación:

Límite superior.- Dado que para aumentar la velocidad es necesario disminuir la corriente de excitación, la corriente de línea aumenta, según podemos observar en la ecuación de par:

$$T_m = \frac{a}{b+I_{exc}} I_{exc} I_L - T_f \quad (7.12)$$

Como la máquina estará trabajando a par constante, la mínima corriente de excitación admisible es aquella con la que no se excede la corriente de línea nominal, por tanto despejando I_{exc} de la (7.12) tenemos:

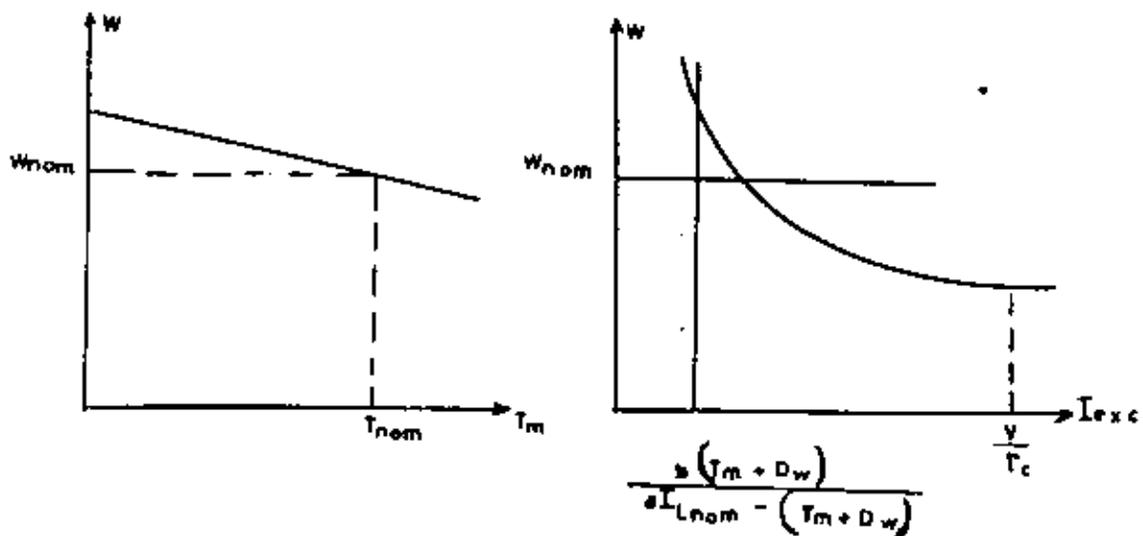
$$I_{exc} \text{ (mínima)} = \frac{b(T_m + T_f)}{aI_{L-nom} - (T_m + T_f)} \quad (7.13)$$

La corriente de excitación puede bajar hasta su valor mínimo dado en (7.13), siempre y cuando este valor no se exceda en forma peligrosa la velocidad nominal de la máquina.

Límite inferior.- Para disminuir la velocidad es necesario aumentar la corriente de excitación, reduciendo la resistencia del reóstato (r_r). Cuando se ha eliminado totalmente esta resistencia, solamente queda incluida en el circuito de excitación la resistencia del embobinado (r_c) y la corriente de excitación:

$$I_{exc} = \frac{V}{r_c}$$

es la máxima que se puede obtener.





En la figura 27-b observamos que para grandes variaciones cerca del límite superior de la corriente de excitación, las correspondientes variaciones en la velocidad resultan pequeñas, ya que la máquina está en una región de alta saturación. Por el otro extremo, la curva de velocidad es asintótica con el eje vertical, de manera que una excitación débil tiende a aumentar rápidamente la velocidad.

Razonando sobre ésta última observación, nos podemos dar cuenta del peligro que corre un motor al debilitarse (o interrumpirse, en el caso extremo) la corriente de excitación.

Regulación de velocidad.- El concepto de regulación de velocidad para la figura 27-a es exactamente bajo las mismas condiciones que se especifican para la ecuación (6.9)

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{nom}} \times 100.$$

8. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN SERIE

La máquina con excitación en serie presenta ciertas características particulares, que como veremos limitan las aplicaciones en calidad de generador, y en cambio, como motor presenta una respuesta que lo pone en ventaja con respecto a otros tipos de motores principalmente en lo que se refiere a sistemas de tracción.

El embobinado de excitación al estar en serie con la armadura lo consideraremos como parte del circuito de la misma, lo cual motiva que:

- La resistencia (r_a) que para los estudios anteriores incluye las resistencias del embobinado de armadura, conmutador, contacto conmutador-escobillas, escobillas y devanados de interpolos y/o compensadores, incluye ahora también la resistencia del devanado de campo en serie. Su valor es aproximadamente del mismo orden del que presenta el resto del circuito de armadura.
- La corriente de excitación es la misma corriente de línea, por lo cual en el análisis de este tipo de máquina utilizaremos la nomenclatura única (I_L).

La curva de saturación en vacío se puede obtener como experimento de laboratorio, pero en la práctica no es posible ajustar cualquier valor de voltaje dado por esta curva, en condiciones de vacío, ya que la excitación la da la corriente de carga.

8.1 GENERADOR CON EXCITACION EN SERIE

- a) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- En -



This diagram illustrates the mechanical components and their assembly. The central vertical shaft is supported by bearings (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z) and is connected to a pulley (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50). The horizontal shaft is supported by bearings (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z) and is connected to a gear (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50). The belt (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50) is used to transmit power between the pulley and the gear.

Si analizamos, la ecuación (5.7), deducimos que en un par mecánico (T_m) constante a diferentes velocidades, corresponde muy aproximadamente a una corriente de línea (I_L) constante, ya que el término de pérdidas por fricción es pequeño.

Reagrupando los términos de la ecuación (5.6) para mostrar la corriente de línea (I_L) entre las constantes, y el voltaje (V) como variable independiente, tenemos:

$$\omega = \frac{(b+I_L) V - (r_a I_L^2 + r_a b I_L)}{a I_L + (b+I_L) P} \quad (5.8)$$

que es la ecuación de una recta cuya pendiente es $b+I_L/aI_L+(b+I_L)P$ y cuya ordenada al origen es $-(r_a I_L^2+r_a b I_L)/aI_L+(b+I_L)P$ como muestra la figura 31-c.

A fin de no sobrepasar los valores de corriente permisible en la máquina, es necesario un voltaje de arranque (V_a), y éste tendrá que incrementarse en forma lineal a medida que la máquina adquiere velocidad.

Puesto que este motor tiene su principal aplicación en la tracción de vehículos, puede considerarse que arranca a plena carga (par mecánico nominal) por lo que para obtener la máxima aceleración sin exceder las corrientes permisibles es necesario aplicar el voltaje de arranque (V_a) que muestra la figura 31-c.

Un voltaje menor que (V_a) hace circular corriente de menor valor, lo que se traduce en un par débil y por tanto, aceleración deficiente.

Un voltaje mayor que (V_a), por el contrario redundará en un par elevado y en una mejor aceleración, pero las sobrecorrientes tenderán al calentamiento de la máquina, sobre todo teniendo en cuenta que en la tracción de vehículos se presentan arranques frecuentes.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent data collection procedures and the use of advanced analytical techniques to derive meaningful insights from the data.

3. The third part of the document focuses on the implementation of data-driven decision-making processes. It discusses how the organization can leverage the insights gained from data analysis to inform strategic planning and operational improvements.

4. The fourth part of the document addresses the challenges and risks associated with data management. It identifies key areas such as data security, privacy, and quality, and provides recommendations for mitigating these risks.

5. The fifth part of the document discusses the role of technology in data management. It explores the use of cloud computing, big data, and artificial intelligence to enhance data processing capabilities and improve the overall efficiency of the organization's data management practices.

6. The sixth part of the document concludes by summarizing the key findings and recommendations. It emphasizes the importance of a continuous and iterative approach to data management, where the organization regularly reviews and updates its data management practices to stay current with the latest technologies and industry best practices.

Para la función exacta, elegimos los puntos 18 y 14 con lo que obtenemos el sistema:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} + 4 \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9 +b} + 4$$

de donde $a\omega = 271.38$, $b = 1.89$

Tomando ahora los puntos 15 y 10 obtenemos:

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+a} + 4$$

de donde $a\omega = 397.3$, $b = 3.75$

Promediando estos valores obtenemos:

$$a\omega = 333, \quad b = 2.81$$

Como la velocidad de prueba fué 1200 RPM = 125.6 rad/seg.

$$a = \frac{333}{125.6} = 2.65 \quad P = \frac{4}{125.4} = 0.0318$$

Por lo que la función de Froelich queda:

$\text{Función 1: } \frac{2.65 \omega I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 0.0318\omega$
--

Para la función aproximada, tomando los mismos puntos tenemos:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9+b}$$

de donde $a\omega = 273.31$, $b = 1.8$

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+b}$$

de donde $a\omega = 382.34$, $b = 3.37$

Promediando los valores obtenidos:

$$a\omega = 327 \quad b = 2.589$$

Dividiendo a entre la velocidad de prueba:

$$a = \frac{327}{125.6} = 2.6$$



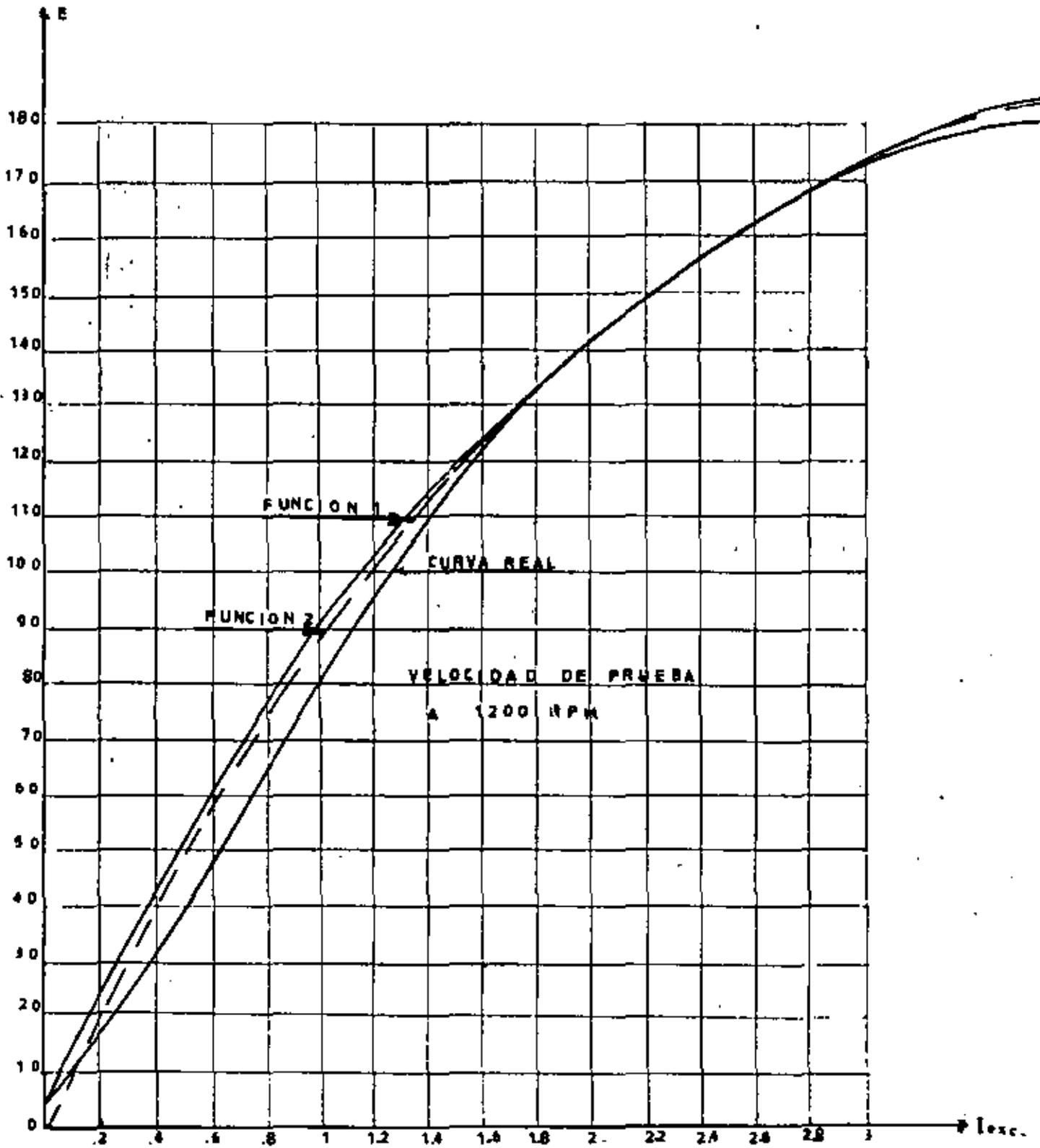


FIG. EJEM. 1.1

de donde obtenemos la función aproximada de Froelich:

$$\text{Función 2: } E_2 = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

Tabulando las funciones 1 y 2 vemos los valores junto con la tabla de la curva de saturación en vacío que aparecen anteriormente. Las curvas respectivas las observamos en la misma figura Ej.1.1.

De los datos de placa observamos que el voltaje nominal es de 125 volts a 1000 RPM. Como la prueba se efectuó a 1200 RPM, consideraremos como voltaje normal 150 volts. Como las curvas prácticamente coinciden entre 130 y 170 volts, podemos aceptar como válidas las funciones.

Nota.- En caso de desear mayor aproximación, de ser esto factible, se podría experimentar con nuevas funciones cuyos parámetros ajustaríamos desplazando las asíntotas de las curvas según fuera necesario.

Para obtener la resistencia del circuito de armadura es conveniente verificar si la prueba de voltaje (V_c) con corriente de carga (I_c) resulta en línea recta. Con los datos de prueba hacemos la gráfica de la figura Ej. 1.2.

Después de trazar la gráfica observamos que efectivamente sale una recta, lo que nos indica que la respuesta de la máquina no se ve deformada por la reacción de armadura.

De acuerdo a la ecuación:

$$V = E - r_a I_L$$

$$r_a = \frac{E-V}{I_L}$$

en donde E es el voltaje en vacío (125 V) y a cada V corresponde una I_L de acuerdo a la tabla de datos:

El valor más exacto seguramente es el promedio de los valores obtenidos aplicando la ecuación a cada punto.

$$r_a = \frac{\frac{125-124.5}{4.8} + \frac{125-123.5}{9.9} + \frac{125-123}{14.9} + \frac{125-122}{20} + \frac{125-121.5}{24.4} + \frac{125-120.5}{29.8} + \frac{125-120}{34.6}}{7}$$

de donde

$$r_a = 0.147 \text{ ohms}$$



El par de fricción lo obtenemos trabajando la máquina como motor en vacío, ya que en estas condiciones el par eléctrico es igual al par de pérdidas, o sea, haciendo $T_m = 0$ en la ecuación de equilibrio mecánico:

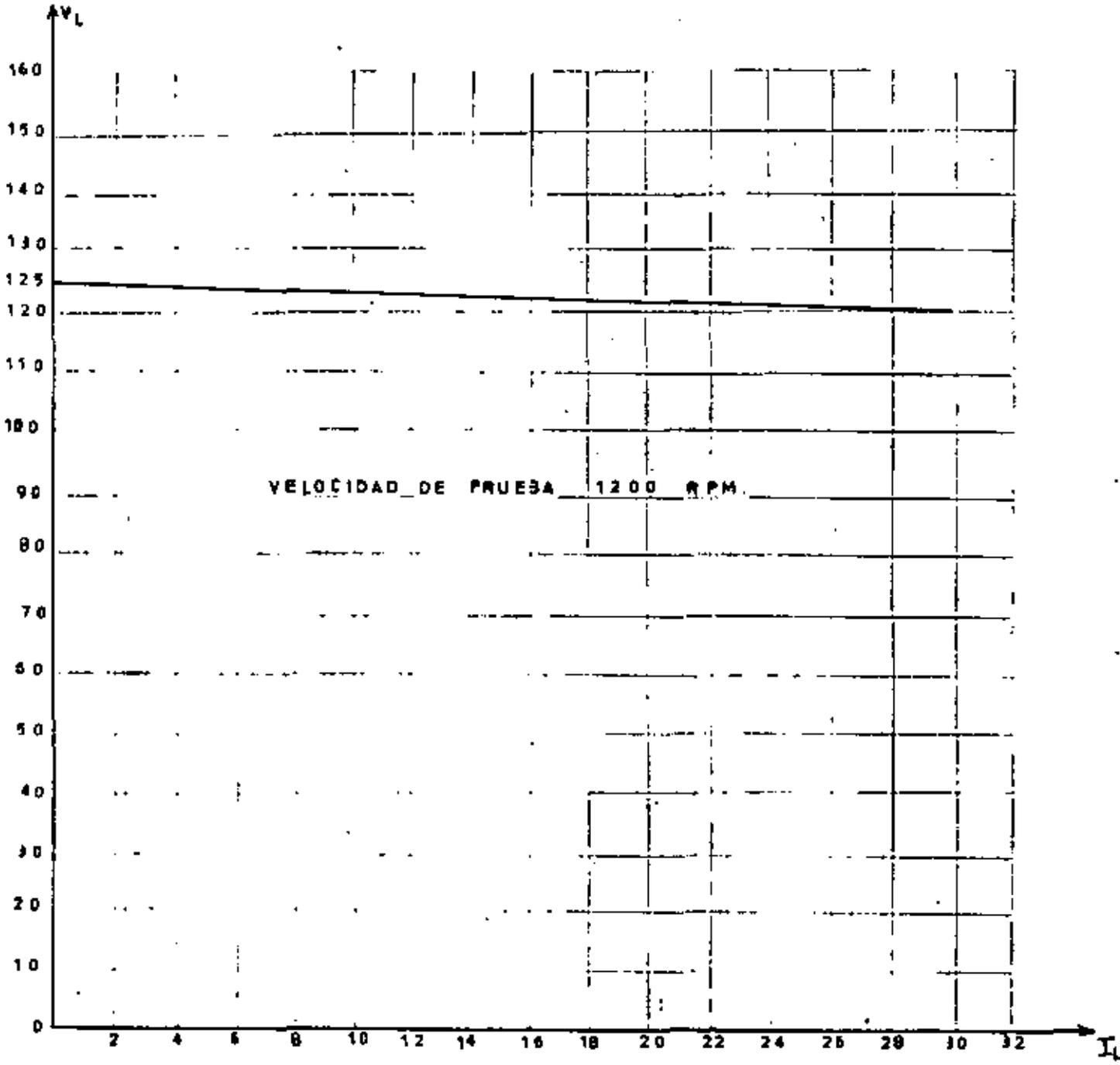


FIG. Ej. 1.2



$$0 = T_e - T_f \quad \text{en donde } T_e = \frac{EI_L}{\omega}$$

por tanto:

$$T_f = \frac{EI_L}{\omega} = \frac{(V - r_a I_L) I_L}{\omega} = \frac{VI_L - r_a I_L^2}{\omega}$$

$$T_f = \frac{(115 \times 5.3) - (0.147 \times 5.3^2)}{104.7^2}$$

$$T_f = 5.78 \text{ New-m}$$

En vista de que la máquina está permanentemente acoplada, este resultado incluye la fricción tanto de la máquina de C.D. como de la de C.A.

Teniendo en cuenta que la máquina de C.D. tiene mayor fricción que la de C.A, estimaremos su coeficiente como los 2/3 del total.

$$T_f = 3.85 \text{ New - m}$$

Respuestas del inciso a):

Función exacta	a= 2.65	b= 2.81	P= 0.0318
Función aproximada	a=2.6	b= 2.589	
Resistencia del circ.de arm.	$r_a = 0.147$	ohm.	
Par de fricción	$T_f = 3.85$	New-m.	

Teniendo en cuenta que la velocidad nominal de la máquina es de 1000 RPM (104.72 rad./seg.) las funciones de Froelich para estas condiciones serán:

$$E_1 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 I_{exc}} + 3.33 \quad \text{con magnetismo remanente}$$

$$E_2 = \frac{2.72.27 I_{exc}}{2.589 + I_{exc}} \quad \text{despreciando el magnetismo remanente.}$$

Tabulando estas ecuaciones obtenemos las gráficas que mostramos en la figura Ej.1.3.

b) La ecuación característica del generador con carga es:

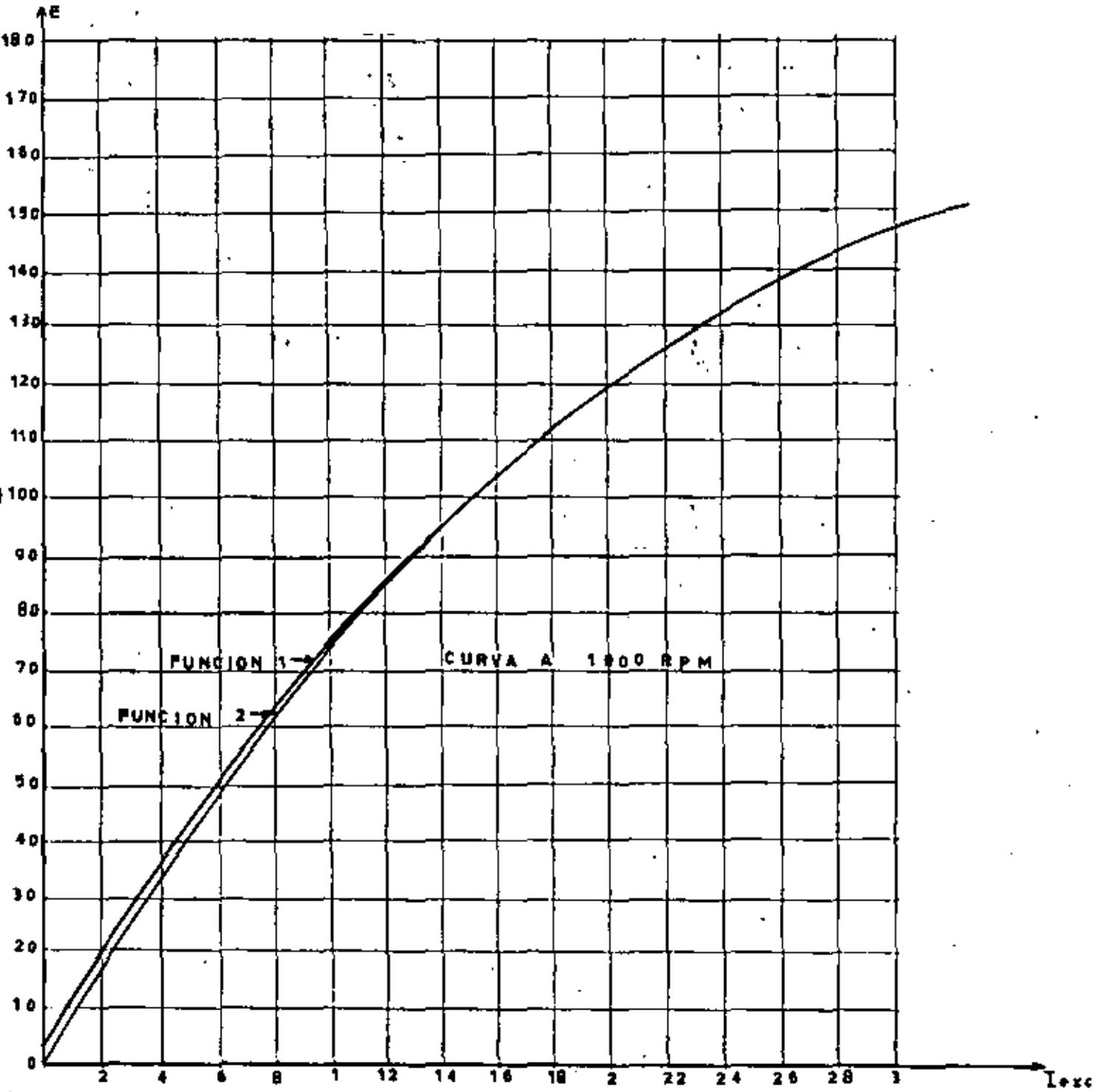


FIG. Ej. 1.3



$$I_{exc} = \frac{E}{52.296}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$E = \frac{277.5 E}{146.95 + E} + 3.333$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$E = 137.44 \quad E = -3.56$$

La solución válida es la primera, por tanto:

$$E_{vacío} = 137.44 \text{ Volts}$$

En estas condiciones se obtiene la máxima corriente de excitación siendo su valor:

$$I_{exc} = \frac{137.44}{52.296} = 2.6 \text{ Amp.}$$

Teniendo en cuenta además que la resistencia del circuito de campo (total) está entre 50 y 60 ohms, y la resistencia del embobinado es de 40 ohms, el restante corresponde al reóstato.

Características recomendables del reóstato

Resistencia 0-30 ohms.

Capacidad de corriente 3 Amp. mínimo

- c) Para el trazo de la curva de variación de voltaje con carga, usamos las ecuaciones:

$$V = E - r_a I_L$$

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$$

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c}$$

Sustituyendo la tercera en la segunda y esta en la primera obtenemos:



$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} + P_0 - r_a I_L$$

sustituyendo valores:

$$V = \frac{277.5 V}{146.95 + V} + 3.33 - 0.147 I_L$$

En donde lo más sencillo es considerar V como variable independiente, o sea:

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Para encontrar el valor máximo de I_L , igualamos a cero la primera derivada de esta función:

$$\frac{(146.95+V)(910.75-13.6V) - (3328.8+910.75V-6.8V^2)}{(146.95 + V)^2} = 0$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$V = 55, \quad V = 348.9$$

La solución válida es la primera, para la cual corresponde una corriente de línea $I_L = 162.66$.

Tabulando la función de corriente de línea obtenemos:

Referencia	V	I_L	Referencia	V	I_C
1	0	22.65	9	70	155.43
2	10	74.86	10	80	143.75
3	20	119.93	11	90	127.31
4	30	138.53	12	100	106.69
5	40	154.35	13	110	82.39
6	50	161.65	14	120	54.81
7	55	162.66	15	130	24.31
8	60	161.69	16	137.44	0.083

La gráfica aparece en la figura Ej. 1.4.

Para la potencia máxima que puede entregar el generador multiplicamos la ecuación

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Por V , con lo que el primer miembro equivale a P .



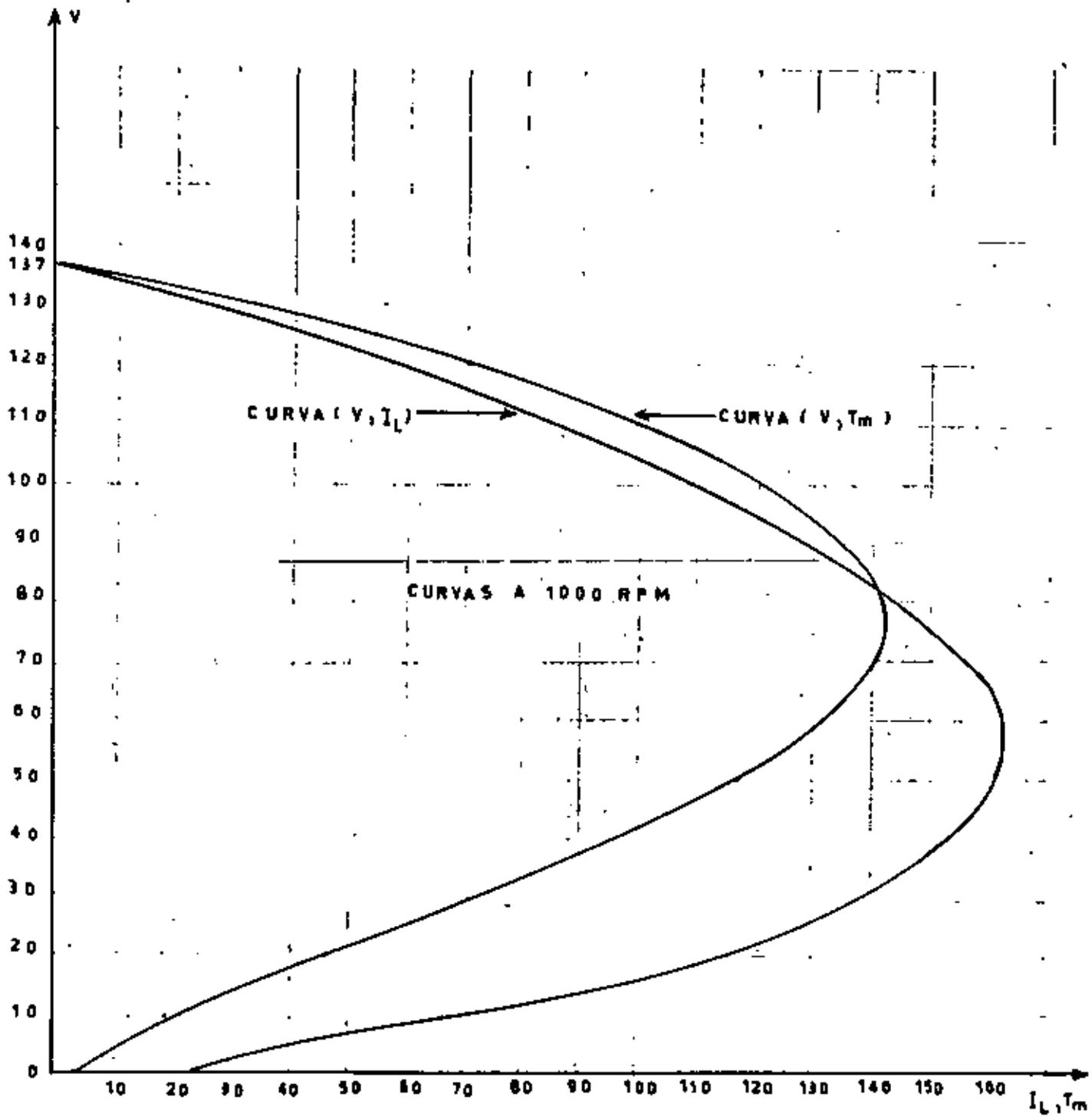


FIG. Ej. 1.4



$$P = \frac{3328.8 V + 910.75 V^2 - 6.8 V^3}{146.95 + V}$$

Igualando la primera derivada a cero:

$$\frac{(146.95+V)(3328.8+1821.5V-20.4V^2) - (3328.8V+910.75V^2-6.8V^3)}{(146.95+V)^2} = 0$$

que es una ecuación de tercer grado. La raíz comprendida entre en rango de voltajes de la máquina es:

$$V = 84.5$$

para el cual corresponde una corriente:

$$I_L = 137.1$$

Por lo que la potencia máxima será:

$$P = V I_L = 84.5 \times 137.1$$

$$P_{\max} = 11585.5 \text{ watts.}$$

La regulación de voltaje corresponde a los valores de vacío y plena carga, o sea $I_L = 0$ e $I_L = 40$

$$\text{Reg.} = \frac{137.44 - 125}{125} \times 100$$

$$\text{Reg} = 9.9 \%$$

d) El par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} + T_f$$

en donde $E = V + r_a I_L = V + 0.147 I_L$

Para tabular esta ecuación lo más sencillo es hacer uso de la tabla de resultados del inciso (c).

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions.

2. It then goes on to describe the various methods used to collect and analyze data.

3. The next section details the results of the study, including the identification of key trends and patterns.

4. Finally, the document concludes with a series of recommendations for future research and practice.

5. The overall goal of this document is to provide a comprehensive overview of the current state of the field.

6. It is hoped that this information will be useful to researchers and practitioners alike.

7. The document is organized into several sections, each focusing on a different aspect of the study.

8. The first section provides a general overview of the research objectives and methodology.

9. The second section describes the data collection process and the various sources used.

10. The third section presents the results of the data analysis, highlighting the most significant findings.

11. The fourth section discusses the implications of these findings for theory and practice.

12. Finally, the document concludes with a list of references and a bibliography.

13. The document is intended to serve as a resource for anyone interested in this area of research.

14. It is hoped that this information will be helpful and informative to all who read it.

TRANSICION EN LA OPERACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Las máquinas eléctricas, como podemos recordar, tienen la propiedad de poder efectuar la conversión de energía en los dos sentidos. Un transformador puede usarse como elevador o como reductor de voltaje. Una máquina rotatoria puede operar como generador o como motor. En ninguno de estos casos se requiere cambio alguno en la estructura de la máquina correspondiente.

En el caso particular de la máquina de C.D., las condiciones para operar como generador serían las siguientes:



Fig. 1 La máquina de C.D. operando como generador

- El generador se comporta como la fuente del sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es SALIENDO POR EL POLO POSITIVO.
- La circulación de corriente por su armadura genera un PAR DE REACCIÓN, es decir, que se opone al sentido de la velocidad angular.

La misma máquina opera como motor bajo las siguientes condiciones:

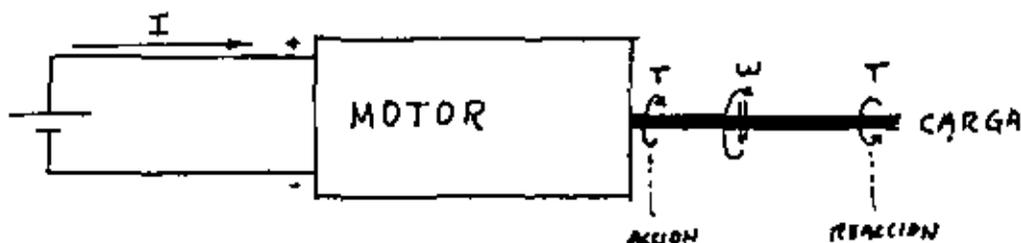


Fig. 2 La máquina de C.D. operando como motor



- a) El motor se comporta como una carga en el sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es ENTRANDO A LA MAQUINA POR EL POLO POSITIVO.
- b) El par electromagnético que se genera en su armadura es un PAR DE ACCION, es decir, en el mismo sentido de la velocidad.

De la exposición anterior podemos deducir que ciertas características son comunes a la operación como generador y como motor (polaridad y sentido de rotación), mientras que otras tienen sentidos contrarios (corriente y par electromagnético)

A fin de considerar ahora la posibilidad de que una misma máquina pueda operar alternativamente como generador y como motor, es conveniente recordar que una de las ventajas del motor de C.D., es que se puede controlar su velocidad. Por el momento no viene al caso discutir los métodos de control; simplemente convengamos en que se ha fijado un cierto valor de velocidad para un motor trabajando en vacío (ω_v).

En la figura 3(a), el motor alimenta una carga mecánica, la cual de acuerdo con lo visto en la figura 2, produce un par que se opone al movimiento, es decir, trata de frenar el motor, provocando que su velocidad sea menor que la velocidad en vacío. La corriente entra a la máquina por el polo positivo (absorbe

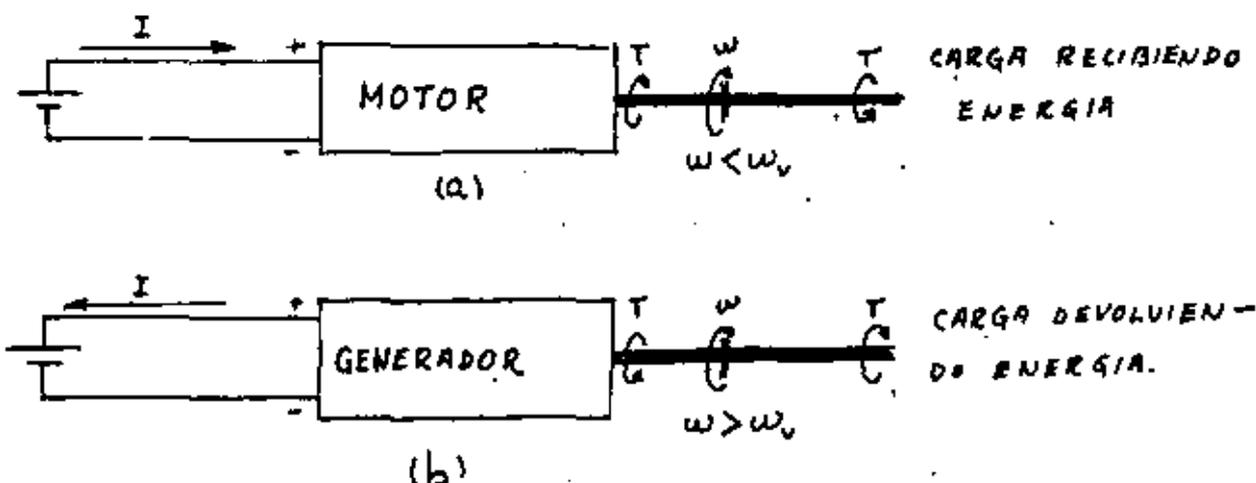
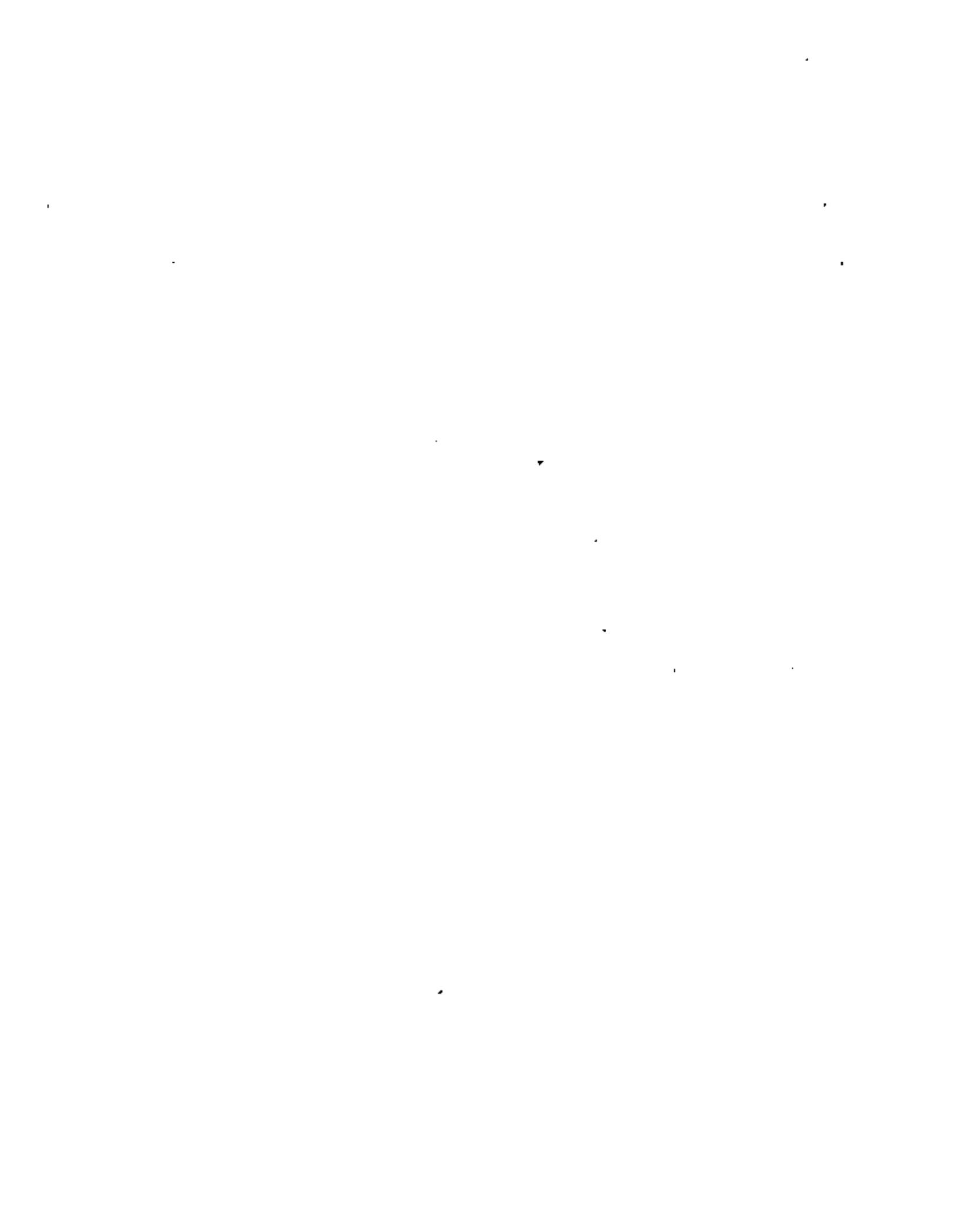


Fig.3 Posibilidad de operación alternativa.



energía) y el par electromagnético generado es en el sentido de mantener el giro del motor.

Ahora bien, supongamos que por cualquier causa, la velocidad de la carga tiende a incrementarse, superando el valor ω_v . La máquina reacciona invirtiendo el sentido del par electromagnético, en un esfuerzo por evitar que el sistema se desboque. Esto motiva la inversión de la corriente, devolviendo energía a la fuente, es decir, la máquina ha cambiado su operación de motor por generador. (Figura 3b).

Para imaginarnos el cambio que acabamos de describir, supongamos que se trata del motor de tracción de un vehículo de transporte eléctrico. En el caso de la figura 3a, el vehículo se encuentra subiendo un puente, para lo cual es indispensable la tracción del motor. En la figura 3b, el vehículo ha pasado la parte más alta del puente, y se encuentra ahora de bajada, "frenando con el motor".

Este puede ser uno de muchos ejemplos en que la máquina sufre una TRANSICION de motor a generador, y si continuamos analizando el movimiento, habrá una nueva TRANSICION de generador a motor.

Por regla general, las máquinas eléctricas rotatorias no requieren ningún cambio ni en su estructura, ni en sus conexiones, cuando se presenta este fenómeno de transición; basta solamente la inversión de par en la flecha. Esto es válido para máquinas síncronas, de inducción y de C.D.

Sin embargo, como toda regla, tenemos una excepción en el caso del motor de C.D., tipo serie, en el que al pasar de la acción motriz a la generatriz es necesario un cambio de conexiones.

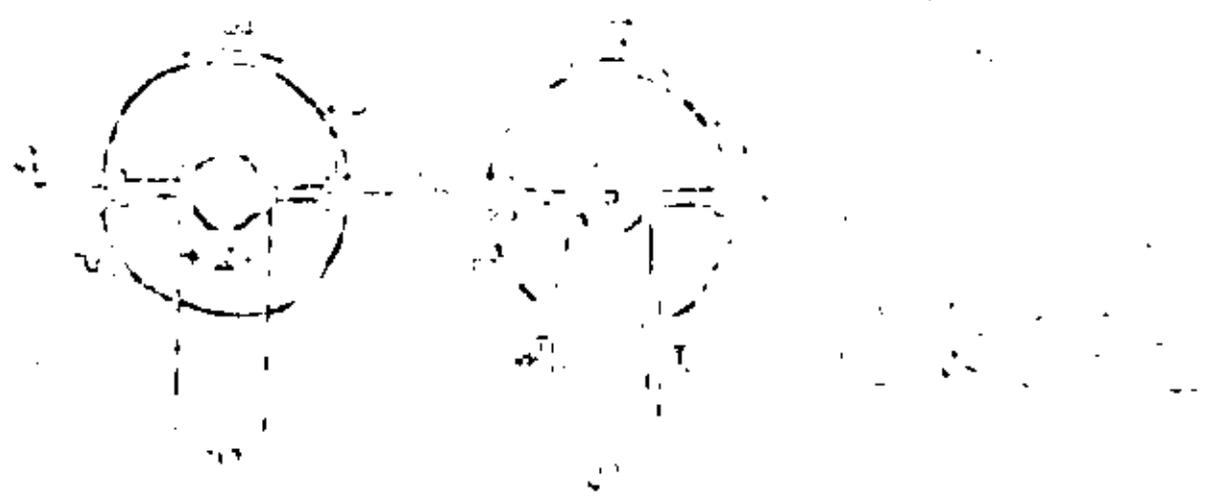
Para justificar lo anterior, analizaremos con más detalle la transición de operación en los distintos motores de C.D.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
5800 S. DICKINSON DRIVE
CHICAGO, ILLINOIS 60637



CHICAGO, ILLINOIS 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
5800 S. DICKINSON DRIVE
CHICAGO, ILLINOIS 60637



THE UNIVERSITY OF CHICAGO
DEPARTMENT OF CHEMISTRY
5800 S. DICKINSON DRIVE
CHICAGO, ILLINOIS 60637

la armadura que nos da la corriente motriz " I_a ".

La corriente I_a en presencia del campo inductor "B" genera un par de fuerzas cuyo sentido lo podemos determinar aplicando las reglas de Fleming en la figura 5(b). Este par produce el giro de armadura con una velocidad angular " ω " y por tanto, una velocidad tangencial " v " de los costados de la espéra, dando lugar a la inducción de la fuerza contraelectromotriz "E", cuya polaridad podemos determinar también por las reglas de Fleming en la figura 5(c).

El diagrama del circuito de armadura con el motor en movimiento lo tenemos ahora en la figura 6, en donde:

$$E = k\omega I_e \quad (1)$$

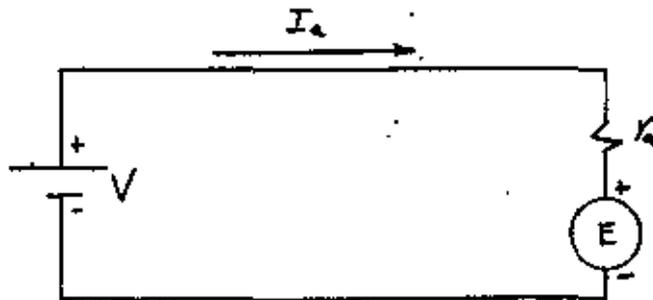


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura.

o sea que la fuerza electromotriz es función de la velocidad " ω " y la corriente de excitación " I_e ".

El coeficiente "k" frecuentemente se toma como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente de excitación, debido a la saturación de la máquina

$$k = \frac{a}{b + I_e} \quad (2)$$

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:



$$I_a = \frac{V-E}{r_a} \quad (3)$$

y el par producido por esta corriente es:

$$T_e = \frac{EI_a}{\omega} \quad (4)$$

o también, sustituyendo (1) en (4)

$$T_e = k I_e I_a \quad (5)$$

Este par acelera la máquina hasta una velocidad ω_v tal, que de acuerdo con la (1)

$$E = V = k \omega_v I_e \quad (6)$$

en este momento desaparece la I_a (ecuación (3) y el par motor (ecuaciones (4) y (5)) y por lo tanto, la máquina deja de acelerarse. La velocidad " ω_v " la llamaremos velocidad en vacío.

REFERENCIA. Para estudiar a continuación la transición de la máquina, es necesario establecer los sentidos de referencia. Convengamos que los sentidos de corriente mostrados en las figuras 5(a), 5(b) y 6, así como los sentidos de par y de velocidad de 5(b) y 5(c) se les considerará positivos.

TRABAJO MOTOR. Supongamos que aplicamos ahora una carga a nuestro motor. Esta carga al ser movida reacciona con un par negativo, haciendo que el motor pierda velocidad.

Si la velocidad del motor adquiere un valor

$$\omega_m < \omega_v$$

entonces, razonando en base a la ecuación (3)

$$E < V$$



y aparecen una corriente y un par positivos

$$I_a = \frac{V-E}{r_a} > 0$$

$$T_e = K I_e I_a > 0$$

TRANSICION. Para que la acción motriz se convierta en acción generatriz, es necesario que se inviertan el par electromagnético y la corriente de armadura.

La ecuación (5) quedaría:

$$-T_e = K I_e (-I_a)$$

(nótese que la I_e permanece positiva), y de acuerdo con la ecuación (3)

$$I_a = \frac{V-E}{r_a}$$

I_a solamente puede ser negativa si $V < E$.

Esto puede ocurrir en tres casos:

- a) Si aumenta E por un aumento de velocidad, permaneciendo V e I_e constantes. (Recuérdese $E = k\omega I_e$). Esto equivale a que la carga por alguna razón tienda a desbocarse.
- b) Si se hace aumentar E reforzando la corriente de excitación
- c) Si se disminuye el voltaje de la fuente de alimentación de armadura.

Los casos b) y c) equivalen a "dar la orden" al motor de disminuir su velocidad. En el caso de los equipos estacionarios, esta transición se puede presentar en un proceso con la necesidad de velocidad variable controlada, y en el caso de tracción de vehículos eléctricos, se presenta cuando es factible "frenar con el motor".

Durante el período de generación, la energía cinética acumula



lada en el equipo impulsado, se transforma en eléctrica y se devuelve a la fuente, lo que se conoce como FRENADO REGENERATIVO.

La transición en el frenado regenerativo, que hemos analizado matemáticamente, también podemos analizarla desde el punto de vista del fenómeno físico, apoyándonos nuevamente en las figuras 5 y 6. En la figura 5 observamos que para invertir el par se requiere inversión de la corriente de armadura, sin cambio en la dirección del flujo magnético. Como se conservan las direcciones de flujo y velocidad, la polaridad de la fuerza electromotriz continua igual.

En la figura 6 se observa que para invertir la corriente es necesaria la condición $V < E$, lo que se consigue aumentando "E" o disminuyendo "V", sin alterar sus polaridades.

Para el caso de la excitación en derivación, el análisis es muy semejante al caso anterior. Sin embargo, observando la figura 7, nos damos cuenta que la "orden" de reducir velocidad solamente se puede dar por aumento de la corriente de excitación (aumento de

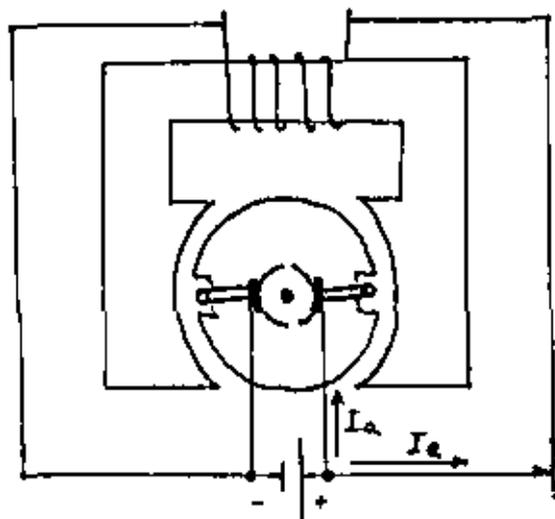
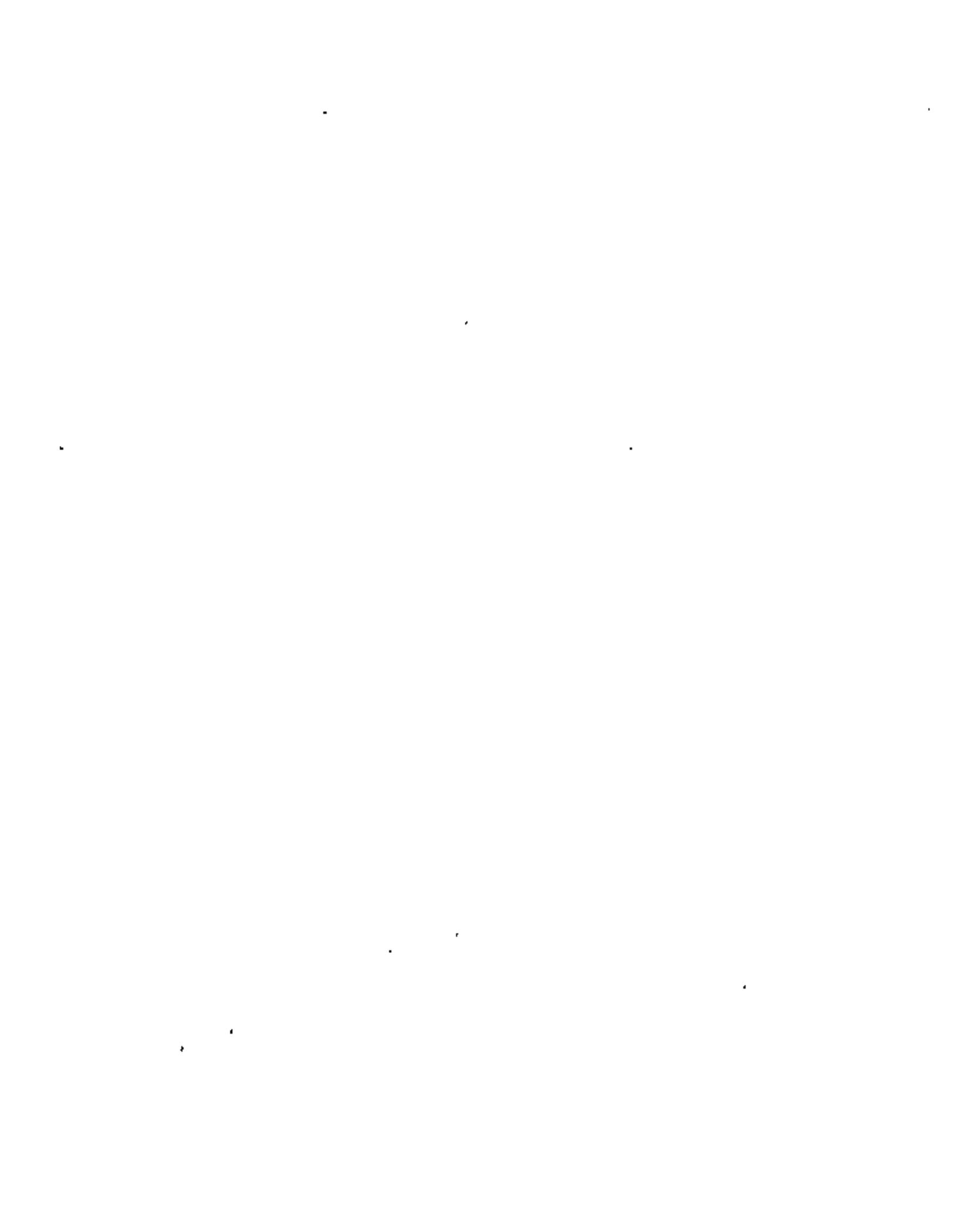


Fig. 7 Motor de C.D. con excitación en derivación

"E"), pues una disminución en el voltaje aplicado afecta la exci



tación y muy posiblemente no se obtiene el frenado regenerativo.

Para la máquina con excitación en serie, las condiciones son diferentes. En la figura 8(a) observamos las conexiones de la má-

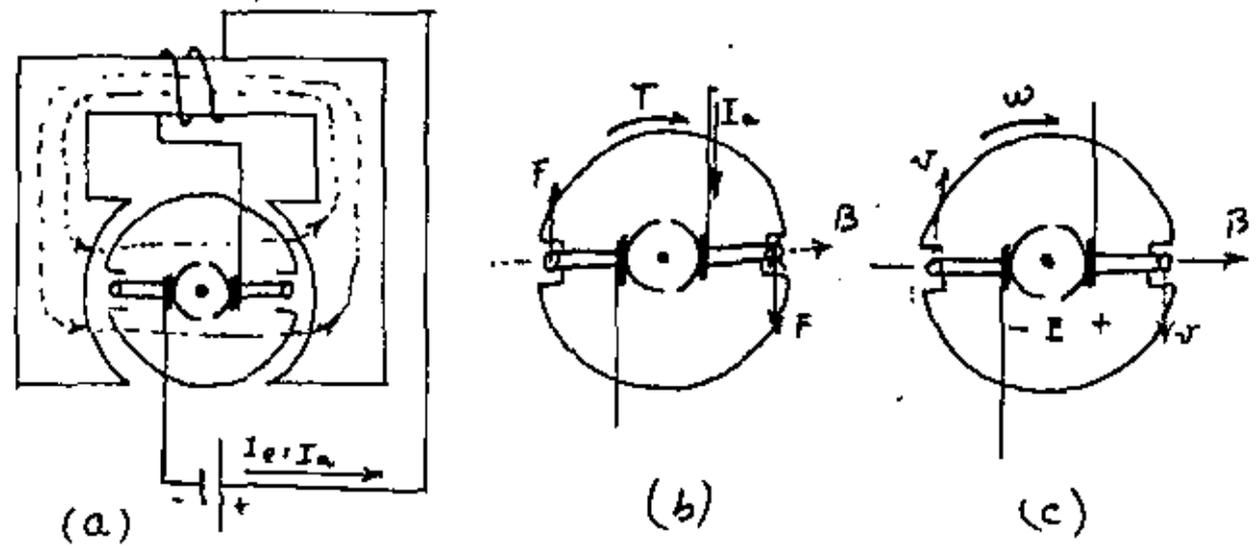


Fig. 8 Motor de C.D. con excitación en serie.

quina y los sentidos de corriente y flujo magnético; en la figura 8(b) vemos la generación del par, y en la 8(c) la aparición de velocidad y fuerza electromotriz, igual que en los casos anteriores.

El punto de partida de nuestro análisis es que la corriente de excitación y la corriente de armadura son la misma, o sea

$$I_e = I_a$$

por lo que la ecuación (1) se transforma en:

$$E = k\omega I_a \tag{7}$$

El coeficiente "k", igual que en el caso anterior, frecuentemente se considera como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente

$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

El diagrama eléctrico es el mismo de la figura 6, solamente

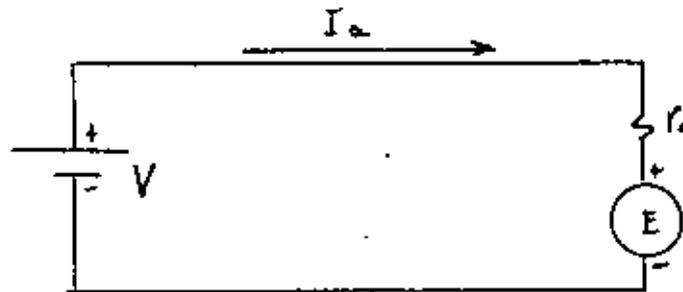


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura

que " r_a " involucra también la resistencia del campo serie.

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:

$$I_a = \frac{V - E}{r_a} \quad (9)$$

Sustituyendo la (7) en la (9) y despejando la velocidad, tenemos:

$$\omega = \frac{V}{k I_a} - \frac{r_a}{k} \quad (10)$$

que representa una familia de curvas con tendencia hiperbólica. (Si " k " fuese constante, serían hipérbolas con una asintota vertical sobre el eje de las ordenadas y una horizontal en r_a/k por debajo del eje de las abscisas).

En la figura 9(a) observamos la familia de pseudohipérbolas para diferentes voltajes.

El par electromagnético dado por la ecuación (5) se transforma en

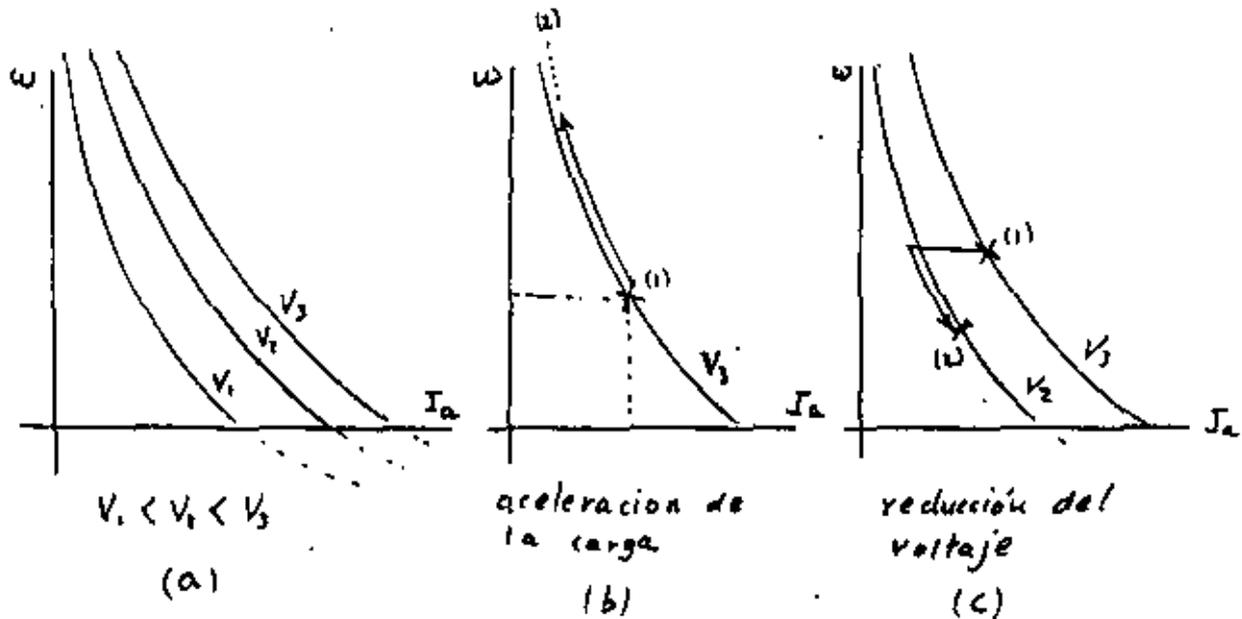


Fig. 9 Curvas de respuesta del motor serie.

$$T_e = k I_a^2 \quad (11)$$

Interpretando la ecuación (11) en la figura 9(a), deducimos que es una máquina de muy alto par de arranque, y que tiene un aumento de velocidad rápido, características que lo hacen ideal para tracción vehicular.

Su velocidad, sin embargo, no tiene un punto de estabilidad, y varía dentro de un amplio rango, dependiendo del par de tracción necesario bajo las diferentes circunstancias. Por otra parte, frenar el vehículo con este tipo de motor involucra una serie de dificultades que vencer.

Supongamos primeramente que el vehículo comienza a bajar una pendiente. En la figura 9(b) vemos que el motor en ningún momento sufre transición, y su velocidad aumenta hasta desbocarse sin perder su tracción (aunque el par se debilita). Si se prolonga este aumento de velocidad, el motor puede llegar a destruirse.

Si analizamos ahora la "orden" de que el motor baje su velocidad, ~~mediante una disminución del voltaje~~, mediante una disminución del voltaje aplicado, observamos en la figura 9(c) que la co

riente se debilita hasta encontrar un nuevo punto de equilibrio, pero en ningún momento se invierte, por lo que el motor no pierde tracción en ningún momento, y la disminución de velocidad es aún más lenta que si se dejara por un momento sin tracción el vehículo.

Veamos ahora si tratamos de efectuar un frenado dinámico, simplemente cambiando la alimentación del motor por una resistencia de carga,

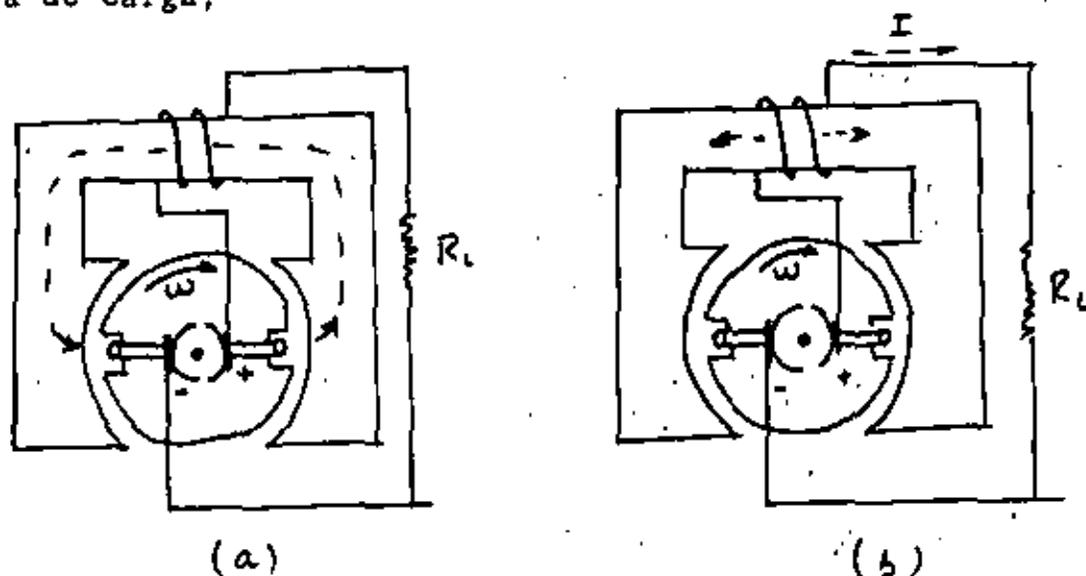


Fig. 10 Sustrucción de la fuente por resistencia

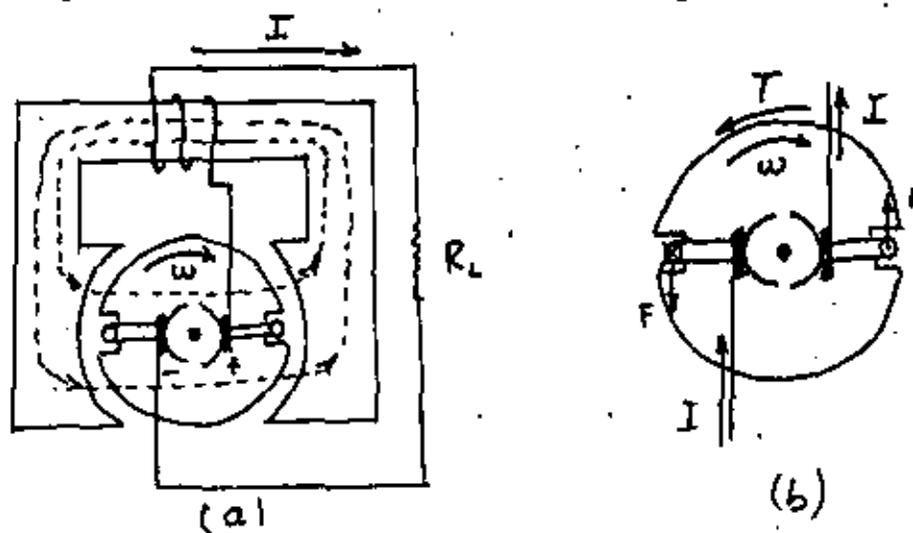


Fig. 11 La máquina operando como generador



En la figura 10(a) observamos la máquina que conserva su velocidad y el flujo remanente, por lo tanto se induce un pequeño voltaje con la polaridad que ahí mismo observamos. En la figura 10(b) aparece una corriente impulsada por el voltaje de flujo remanente, pero al analizar el flujo magnético que genera esta corriente, vemos que es opuesto al magnetismo remanente, de manera que en vez de reforzarlo lo anula y la máquina no levanta voltaje.

Es necesario entonces un cambio en las conexiones del campo para que la máquina levante voltaje, como vemos en la figura 11 (a), de manera que

$$E = k\omega I_a \quad (7)$$

en donde

$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

$$I_a = \frac{E}{r_a + R_L} \quad (10)$$

Sustituyendo (8) y (10) en (7), tenemos:

$$E = a\omega - b (r_a + R_L) \quad (11)$$

en donde observamos que la fuerza electromotriz es tanto mayor cuanto menor es la resistencia de carga.

Bajo estas condiciones, circula una corriente, la cual en la figura 11(b) vemos que genera el par negativo o par de frenado, cuyo valor es

$$T_e = k I_a (-I_a) \quad (11')$$

que es una modificación de la ecuación 11, ya que la corriente en el campo sigue siendo positiva, mientras que en su armadura



es negativa.

El frenado en estas circunstancias se llama "frenado dinámico". Si se desea conmutar el frenado dinámico por frenado regenerativo, es decir devolviendo energía a la fuente, es necesario elevar previamente la fuerza electromotriz a un valor superior al del voltaje de la fuente, e inmediatamente hacer una conmutación translapada, para cambiar la resistencia de carga por la fuente de energía.

El frenado regenerativo, en estas circunstancias, es de duración muy corta, pues a medida que se pierde velocidad la fuerza electromotriz disminuye de valor, y en cuanto se iguale con el voltaje de la fuente (no hay que esperar a que sea menor), es necesario desconectar la máquina.

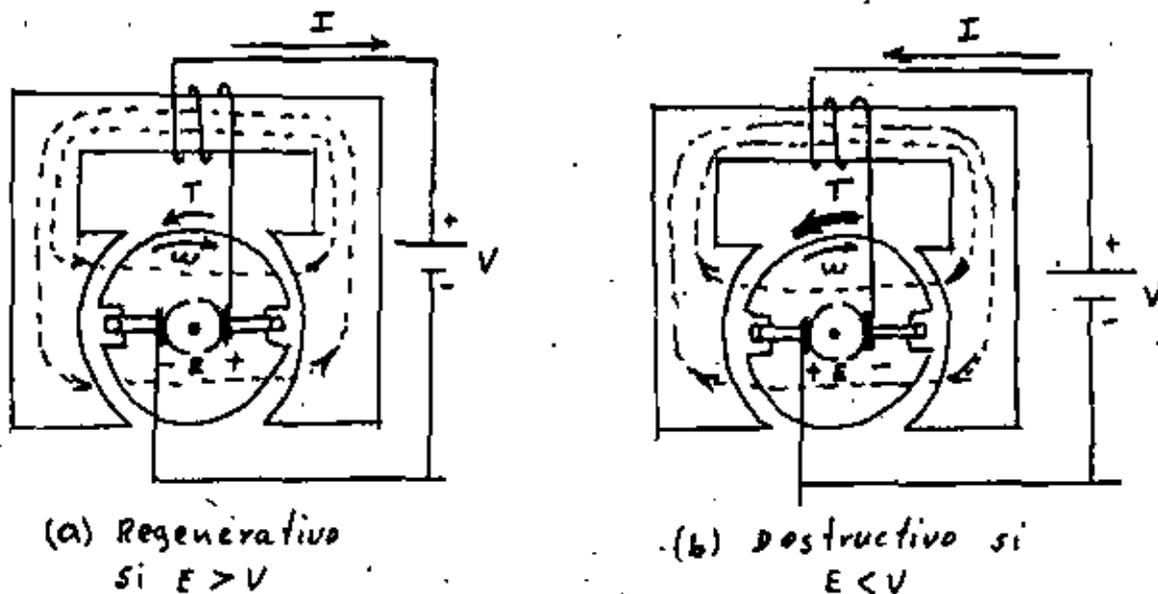


Fig. 12 Frenado regenerativo.

En la figura 12(a) vemos el frenado regenerativo, que se cumple siempre que $E > V$. En la figura 12(b), la velocidad ha bajado a tal valor que $E < V$ y no se ha abierto el circuito. En este caso, la corriente se invierte, obligando al flujo magnético a invertirse, con lo cual la fuerza electromotriz también se invierte, de tal modo que la corriente



$$I = \frac{V + \varepsilon}{r_a}$$

adquiere un valor muy elevado, consumiendo energía de la fuente.

Como flujo y corriente de armadura se invierten, el par se conserva en el sentido de frenado, pero en vez de constituir un frenado regenerativo, es una tendencia a invertir la velocidad de la máquina, lo que podríamos describir como un "arranque a contra-velocidad",

Por lo anterior nos damos cuenta que la máquina serie que tiene grandes ventajas en tracción, tiene también grandes desventajas en frenado regenerativo. Estas desventajas pueden superarse recurriendo a diferentes opciones:

- 1a. Trabajando como motor serie en tracción, y como generador independiente en frenado regenerativo, alimentando la excitación con una fuente de intensidad de corriente.
- 2a. Absorbiendo la energía del frenado regenerativo en una fuente de tensión variable, controlando que en todo momento el voltaje de la fuente sea menor que la fuerza electromotriz. En este caso es indispensable elevar previamente la fuerza electromotriz por frenado dinámico.
- 3a. Por medio de una máquina mixta, con excitación serie en tracción y excitación independiente de baja corriente en frenado (no confundir la máquina mixta con la máquina de excitación compuesta, pues en esta última el campo serie es solamente un campo auxiliar).

En cualquier opción que se elija, la necesidad de conmutar conexiones motiva que la máquina serie no tenga una transición continua entre sus operaciones de tracción y de frenado.

E J E M P L O

Un motor de C.D. de 6.5 H.P tiene las siguientes características:

$$E = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e \quad r_a = 0.22 \text{ ohms}$$

Tensión nominal: 120 V
 Corriente nominal: 50 A
 Velocidad: 1 500 RPM

Se utilizará para mover una carga con velocidad controlada entre 1000 y 1500 RPM. Para el conjunto motor-carga se estima un par de fricción constante dentro del rango de operación, de 5 New-m y un momento de inercia de 15 kg-m².

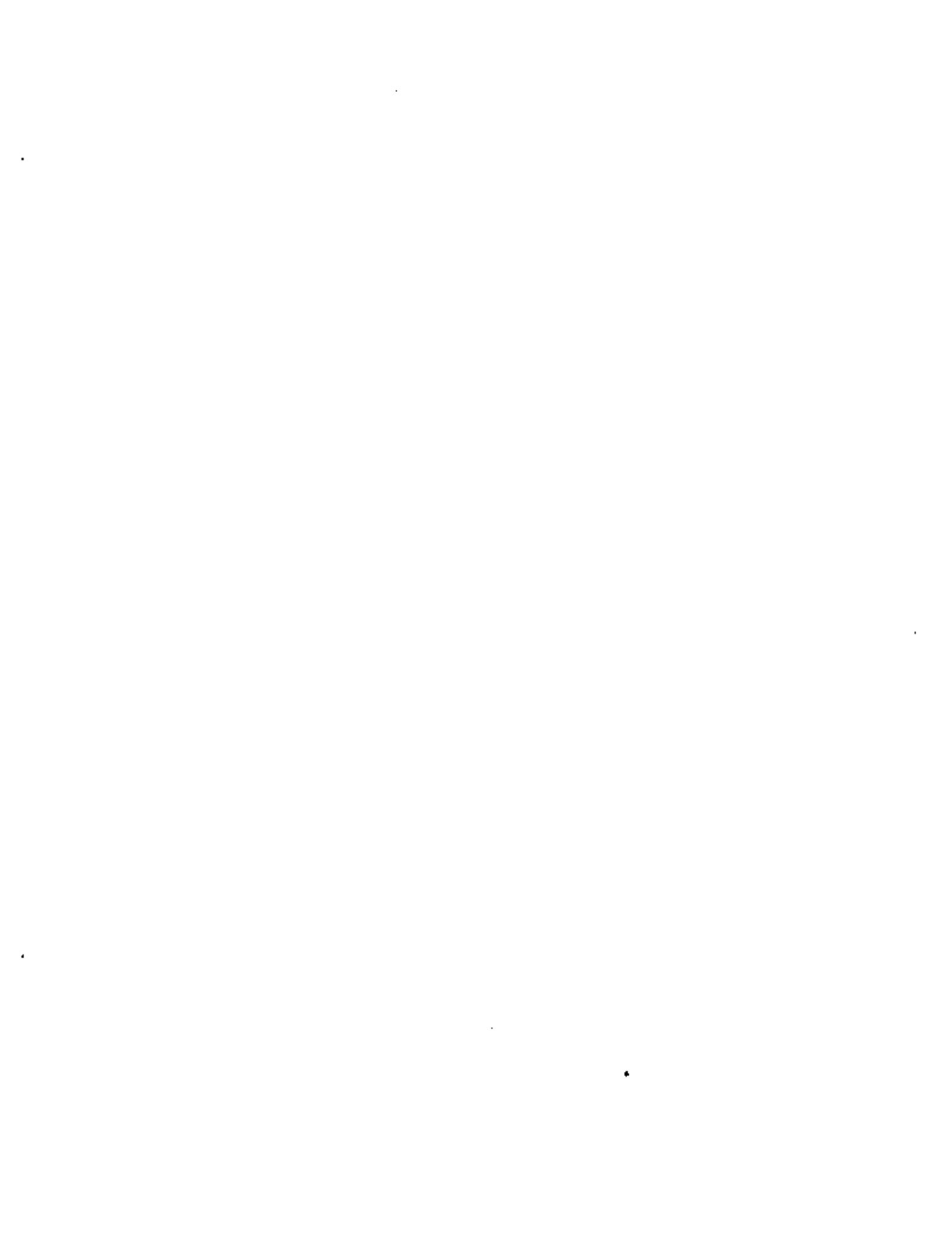
- Calcular la corriente de excitación necesaria, cuando su armadura se alimenta a 120 volts 50 Amp. y gira a 1500 RPM.
- Si el motor se excita independientemente, a corriente constante, calcular el voltaje de armadura para una velocidad de 1225 RPM suponiendo que el par de carga se mantiene constante.
- Si se desea pasar de las condiciones de la pregunta (a) a las de la pregunta (b) mediante un cambio brusco de tensión, con un tiempo de frenado regenerativo, trazar las gráficas de velocidad, corriente y par con respecto al tiempo.

SOLUCION

- De la ecuación de voltaje del motor

$$V = E + r_a I_a; \quad E = V - r_a I_a$$

sustituimos valores



$$E = 120 - (0.22 \times 50) = 109 \text{ Volts}$$

llevando este valor a la ecuación de la fem:

$$109 = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1500 \times \pi}{30} = 157$$

por tanto $I_e = 1.294 \text{ Amp.}$

- b) Como la máquina trabajará a excitación constante, podemos definir una constante de excitación

$$K_e = \frac{I_e}{0.157 + I_e} = \frac{1.294}{0.157 + 1.294} = 0.694$$

de tal manera que

$$E = 0.694\omega$$

Por otra parte, si la máquina también trabaja a par constante, de la ecuación de par:

$$T_e = \frac{E I_a}{\omega} = 0.694 I_a$$

deducimos que trabaja a corriente de armadura constante de 50 Amp. (en estado estable). Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= E + r_a I_a \\ &= 0.694\omega + (0.22 I_a) \end{aligned}$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1225 \times \pi}{30} = 128.24$$

entonces:

$$V = (0.694 \times 128.24) + (0.22 \times 50) = 100 \text{ volts}$$

• • • • •

•

c) La ecuación general de equilibrio eléctrico en armadura es:

$$v = e + r_a i_a + L p i_a \quad (A)$$

Como la inductancia de armadura es generalmente insignificante, el tercer término del segundo miembro se suele despreciar.

La ecuación general de equilibrio mecánico en armadura es:

$$T_e = T_m + T_f + J p \omega \quad (B)$$

$$\text{en donde } T_e = K_e i_a \quad (C)$$

El par electromagnético en estado estable tiene un valor constante

$$T_e = 0.694 \times 50 = 34.7 \text{ New-m} \quad (D)$$

lo que significa que

$$T_m + T_f = 34.7 \text{ New-m} \quad (E)$$

Sustituyendo (C) y (E) en (B), con $K_e = 0.694$ y $J = 15$:

$$0.694 i_a = 34.7 + 15 p \omega$$

$$i_a = 50 + 21.6 p \omega \quad (F)$$

Sustituyendo (F) en (A), despreciando el tercer término:

$$v = e + 0.22 (50 + 21.6 p \omega)$$

$$o = 0.694 \omega + 11 + 4.752 p \omega \quad (G)$$

que es la ecuación general, en donde el voltaje y la velocidad son funciones del tiempo.

La ecuación (G) para el estado estable inicial, adopta los siguientes valores:

$$120 = (0.694 \times 157) + 11$$

Si se baja repentinamente el voltaje a 100 volts equivale a agregarle un escalón negativo a la ecuación anterior, con lo que queda:

$$120 - 20u(t) = 0.694\omega + 11 + 4.752 p\omega$$

que representa el funcionamiento incremental. Si a la última ecuación le restamos la correspondiente al estado estable inicial obtenemos:

$$-20u(t) = 0.694 (\omega - 157) + 4.752 p\omega$$

cuya solución es:

$$\omega = 28.72 (e^{-0.146 t} + 4.466) u(t)$$

La corriente, según la (F)

$$i_a = 50 + 21.6 p\omega$$

cuya solución es

$$i_a = 50 - 90.57 e^{-0.146 t} u(t)$$

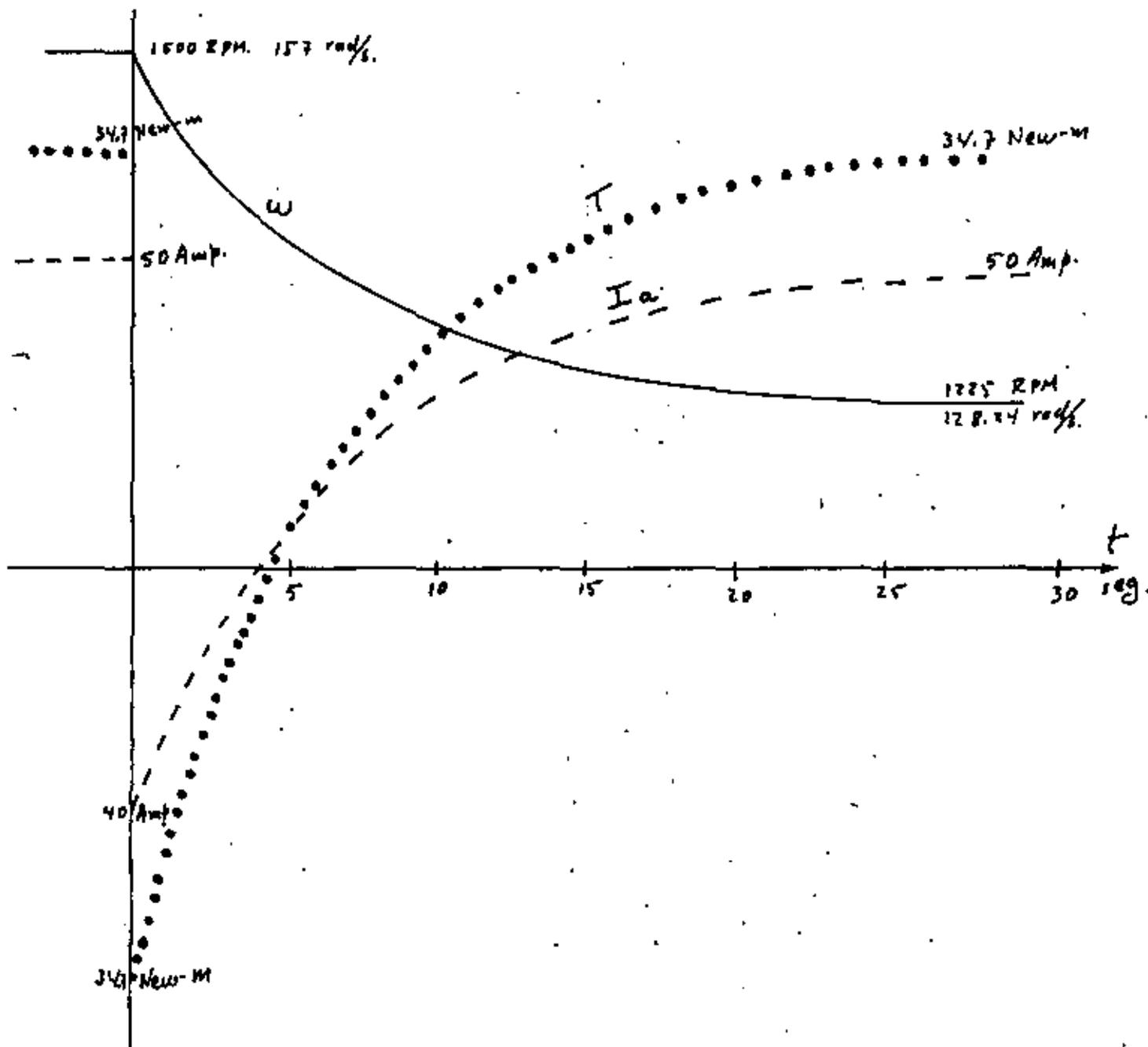
y según la (C), el par es

$$T_e = k_e i_a$$

cuya solución es

$$T_e = 34.7 - 68.85 e^{-0.146 t} u(t)$$

Estas tres soluciones las encontramos graficadas en la siguiente figura.





BIBLIOGRAFIA

- Meisel J.- Principios de Conversión de Energía Electromecánica
Mc Graw Hill México 1975.
- Langsdorf A.S.- Principios de Máquinas de Corriente Continua.
Mc Graw Hill México 1977.
- Matsch L.W. Máquinas Electromagnéticas y Electromecánicas
Representaciones y Servicios de Ingeniería . México 1974.
- Thaler G.J. y Wilcox M.L.- Máquinas Eléctricas
Limusa México 1974.







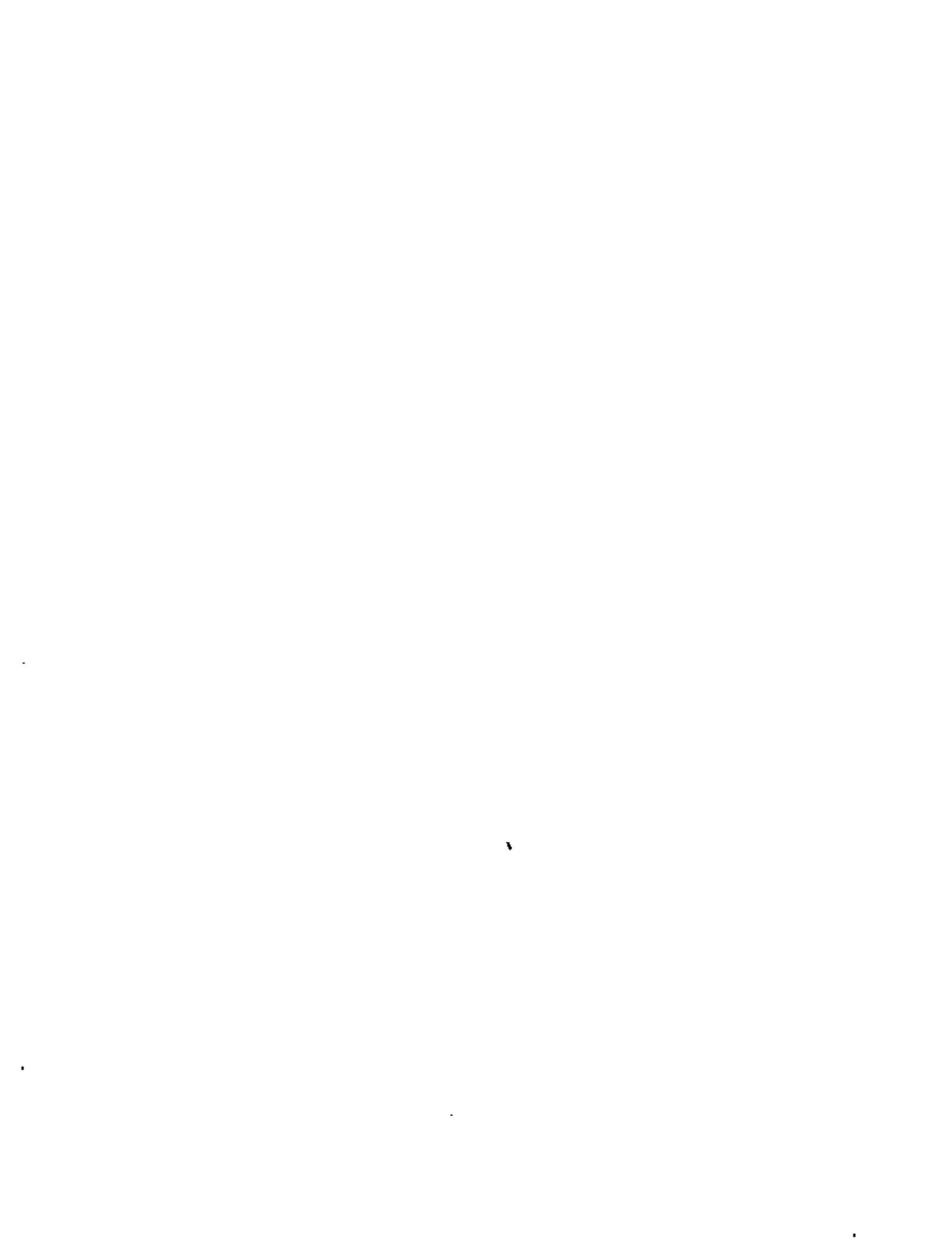
**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**TEORIA Y LABORATORIO DE MAQUINAS DE CORRIENTE
DIRECTA Y SISTEMAS DE POTENCIA**

Del 6 de febrero al
26 de junio, 1981

Ing. Víctor Pérez Amador

Programa de Superación Académica
- Facultad de Ingeniería





UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ING. MEC. Y ELECT.
DEPARTAMENTO DE ING. ELECTRICA

CURSO DE FORMACION ACADEMICA
MAQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

CONTENIDO

- Antecedentes
- Magnetización de la máquina de C.D.
- Función de aproximación de Froelich
- Curva de saturación en vacío
- Consideraciones generales sobre el equilibrio de las máquinas
- Estado estable de la máquina con excitación independiente.
- Estado estable de la máquina con excitación en derivación
- Estado estable de la máquina con excitación en serie
- Ejemplos de aplicación
- Transición en la operación de la máquinas de C.D.
- Ejemplo de transición.

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE MAQUINAS DE C.D. EN ESTADO ESTABLE

1. ANTECEDENTES

Supongamos un circuito magnético como el que se muestra en la figura 1 (a). Este circuito consta de:

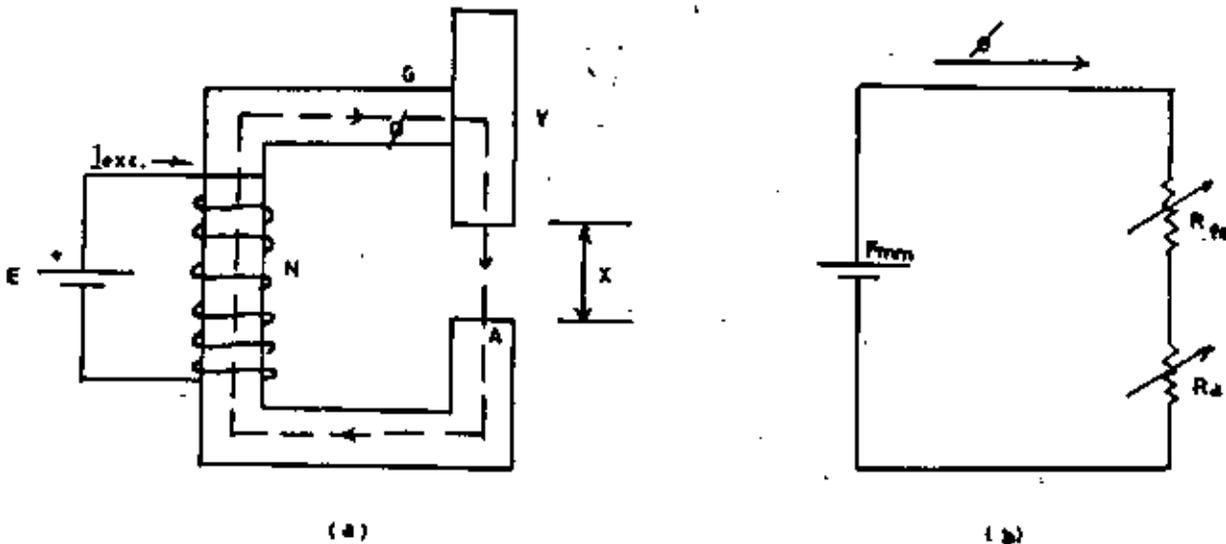


FIGURA 1

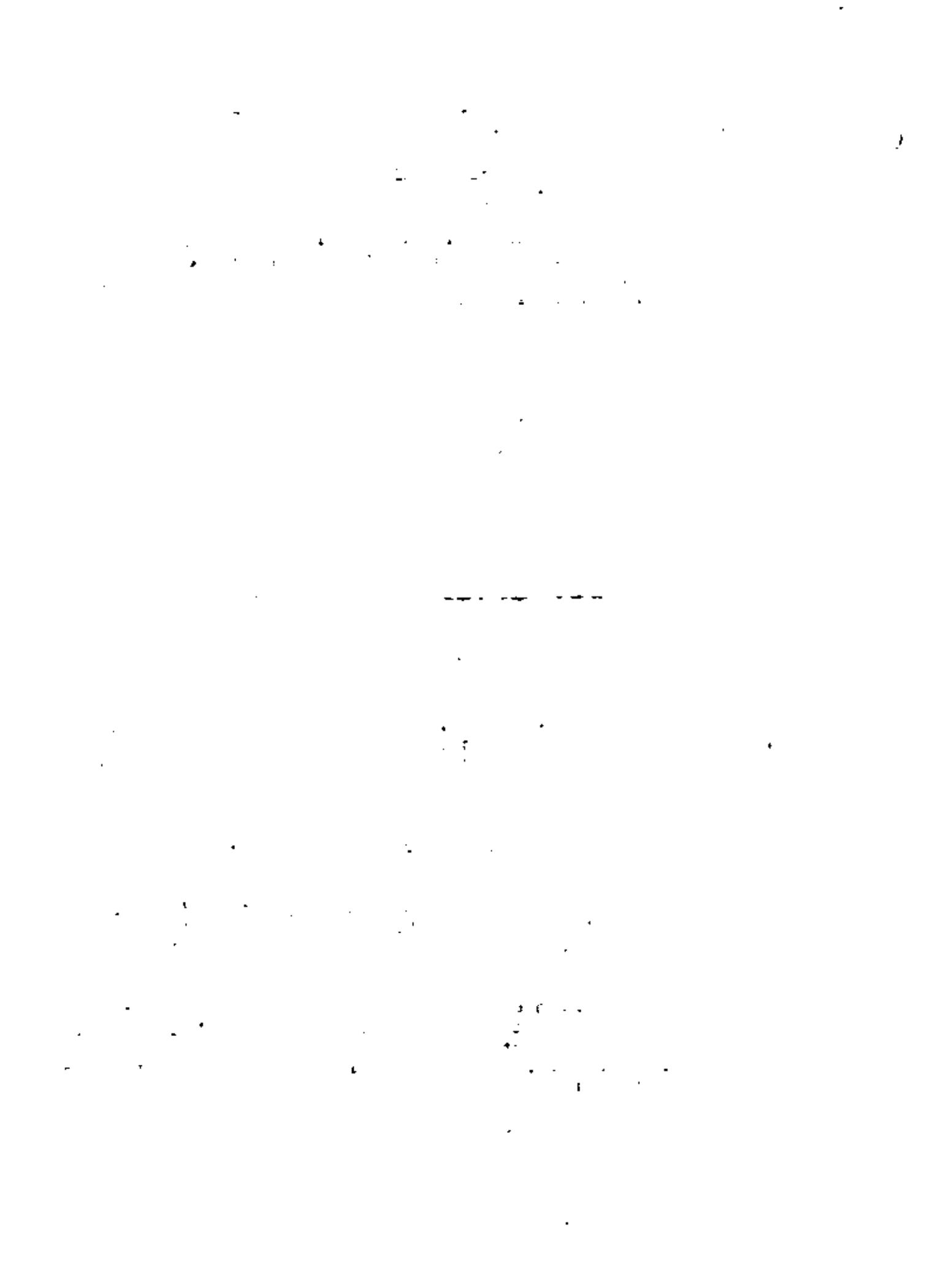
- Una bobina de excitación de N vueltas, por la cual circula la corriente de excitación I_{exc} .
- Un núcleo de material ferromagnético G cuya forma se asemeja a la letra con la que lo hemos identificado y su sección transversal A es constante.
- Un yugo móvil Y del mismo material y sección transversal que el núcleo.
- Un entrehierro cuya longitud X se puede variar a voluntad, según la posición del yugo.

Quando se conecta la bobina de excitación a una fuente de fuerza electromotriz (E) circula la corriente de excitación (I_{exc}) cuyo valor depende de la fem. y de la resistencia del circuito eléctrico, de acuerdo con la ley de Ohm.

La corriente de excitación a su vez, produce el flujo magnético (ϕ) en el interior de la bobina, el cual sigue la trayectoria marcada con línea punteada en la figura 1(a). Su magnitud obedece a la ley

$$\phi = \frac{F_{m.a}}{R} \quad (1.1)$$

que por su similitud con la ley de Ohm para un circuito eléctrico, se le llama Ley de Ohm magnética.



Para un elemento construido con dimensiones específicas, el área de la sección transversal (A) y la longitud media del circuito (L+X) son constantes, de modo que las variables que graficaremos para la ecuación (1.6) son el flujo y la corriente de excitación, como se muestra en la figura 3.

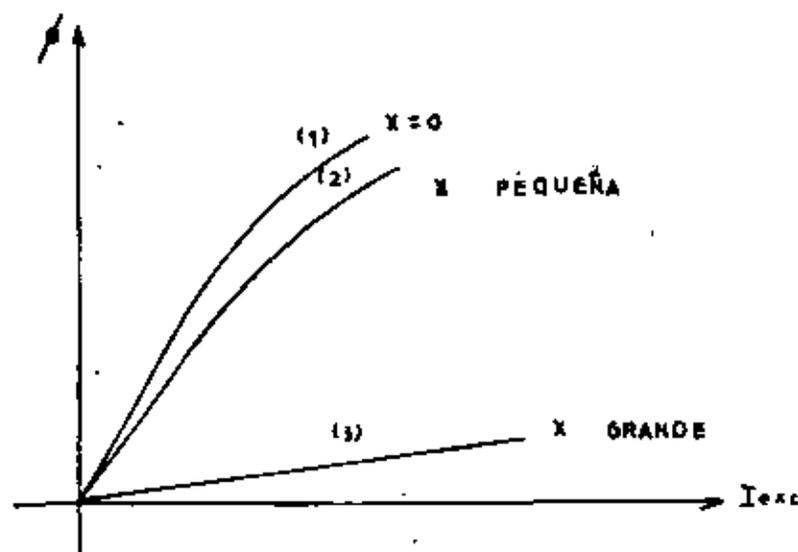


FIGURA 3.

Consideremos primeramente el caso de $X=0$ (sin entrehierro; circuito magnético totalmente de fierro). La ecuación (1.6) quedaría:

$$\phi = \frac{\nu_{fe} AN}{L} I_{exc}$$

El quebrado representa la pendiente de la gráfica (1) en la figura 3, la cual se ve afectada por la permeabilidad del fierro (ν_{fe}), que de acuerdo con la figura 2, comienza con un valor pequeño, tomando a continuación su valor máximo y por último, decreciendo con tendencia hacia la horizontal.

Veamos ahora el caso de un entrehierro de longitud (X) muy pequeña comparada con su sección transversal (A). El denominador en la ecuación (1.6) tendría dos términos igualmente significativos, lo cual redundaría en una gráfica similar a la (1) de la figura 3, pero de menor pendiente en cada una de sus respectivas regiones, dando por resultado una gráfica similar a la (2) de la misma figura.

Por último tendremos un entrehierro de dimensiones considerables, lo cual motiva que el segundo término del denominador de la ecuación (1.6) resulte considerablemente más grande que el primero, pudiendo desprejiciarse este último, con lo que la ecuación (1.6) quedaría:

$$\phi = \frac{\mu_0 AN}{X} I_{exc}$$

en donde el quebrado representa la pendiente de la gráfica, de valor constante y además muy pequeño. La gráfica para estas condiciones será una recta semejante a la (3) de la figura 3.

2. MAGNETIZACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Teniendo en cuenta que el circuito magnético de la máquina de C.D. incluye piezas ferromagnéticas y entrehierro, podríamos compararlo con el circuito de la figura 1. Si además recordamos que los entrehierros se presentan entre las zapatas polares y el núcleo de la armadura, la longitud de estos entrehierros es muy pequeña comparada con el área de las zapatas polares, de manera que el comportamiento de este circuito magnético se asemeja a la gráfica (2) de la figura 3.

Sin embargo, analizando con más detalle el circuito real de una máquina, encontramos algunas diferencias importantes con respecto al circuito ideal de la figura 1 y su correspondiente respuesta en la figura 3. Estas diferencias serían:

- a) La sección transversal del circuito magnético no es constante, presentando grandes variaciones en donde las áreas más robustas son el núcleo de armadura, la coraza y el cuerpo de las piezas polares, y las más débiles son los dientes de la armadura y los filos de las zapatas polares, lo que motiva que algunas partes del circuito tengan mayor grado de saturación que otras.
- b) El entrehierro no es de longitud uniforme, presentando un valor máximo frente a las ranuras y un valor mínimo frente a los dientes de armadura, lo cual contribuye a la mayor saturación de estos.
- c) Las piezas polares se construyen de imán permanente, además del flujo que proporciona la bobina de excitación, lo que motiva que la curva de magnetización no se inicie en el origen, si no en el valor del flujo remanente.

La figura 4 nos da una idea de las condiciones físicas de este circuito. Las partes más oscuras corresponden a las regiones más débiles y que por consiguiente presentan mayor grado de saturación.

El comportamiento magnético del circuito de la máquina lo podemos apreciar en la figura 5, en la que cada elemento contribuye a una pérdida de pendiente respecto a la curva de comportamiento de un núcleo de geometría regular y totalmente de fierro. Las líneas punteadas de la figura 5 corresponden a los elementos identificados en la figura 4 según el siguiente orden:

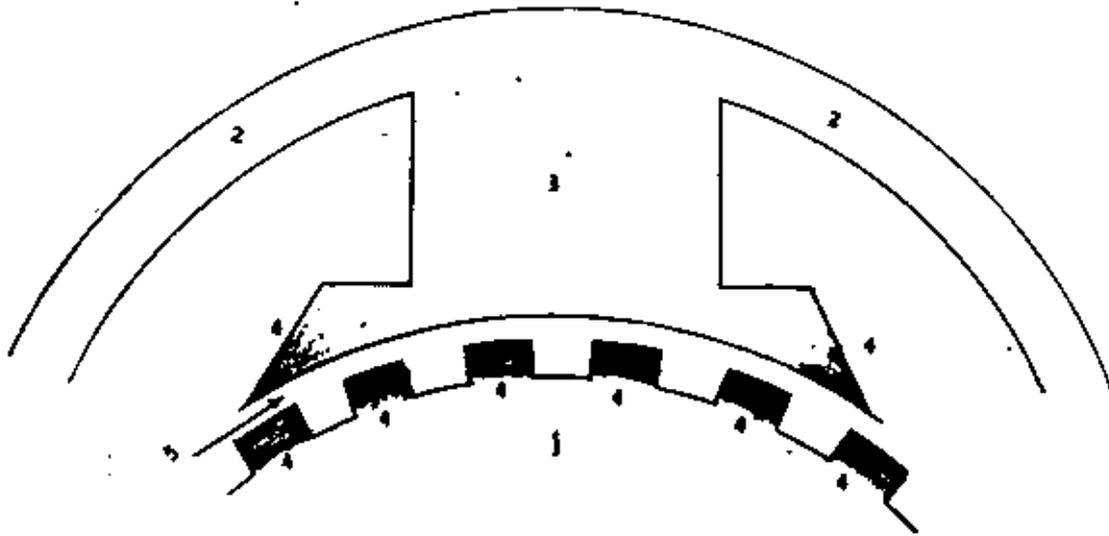


FIGURA 4

1. Núcleo de la armadura
2. Coraza
3. Núcleo de las piezas polares
4. Dientes y aristas de las zapatas polares.
5. Entrehierro.

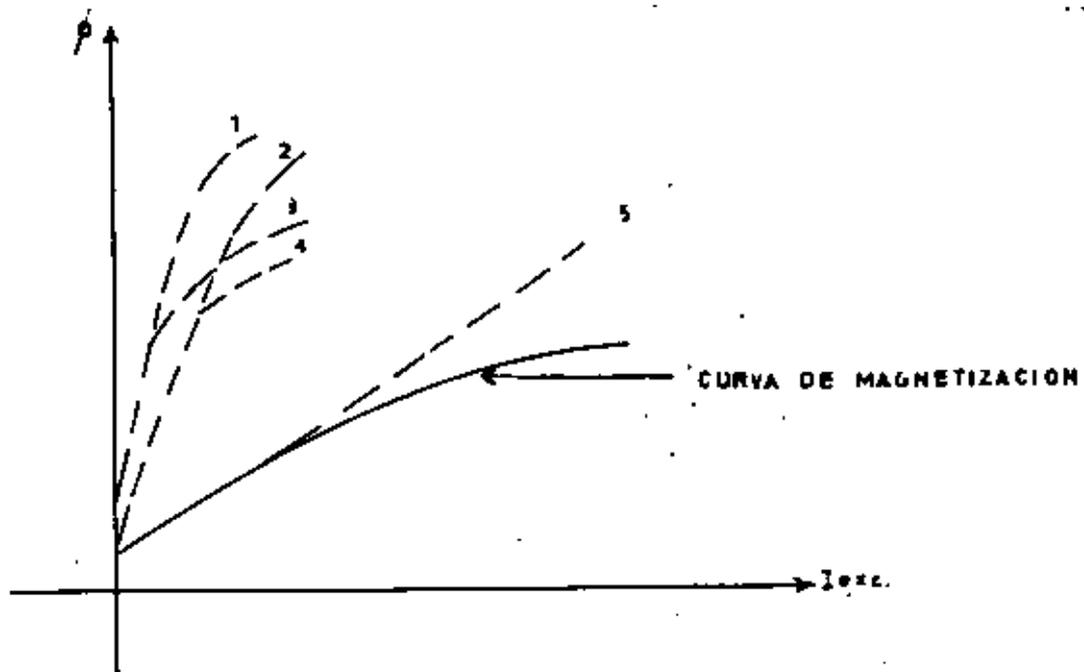


FIGURA 5

El resultado de la influencia de las partes del circuito lo vemos en la figura 5 con el nombre de CURVA DE MAGNETIZACION, que presenta el comportamiento de una máquina real, en donde se puede apreciar el grado de saturación a medida que aumenta la corriente de excitación.

3. FUNCION DE APROXIMACION DE FROELICH

A fin de poder efectuar el análisis de equilibrio de las máquinas de C.D. utilizando funciones que reproduzcan el comportamiento real de las mismas de la manera más fiel posible, es necesario conocer la ecuación de la curva de magnetización que hemos expuesto en la figura 5.

Una ecuación rigorista de esta curva resulta bastante complicada, además de que adoptaría una forma particular para cada máquina real, de acuerdo a las dimensiones relativas de los elementos descritos en las figuras 4 y 5.

Froelich propone una función relativamente sencilla, cuya aproximación a la curva real es aceptable y que se expresa mediante la ecuación:

$$\phi = \frac{a^1 I_{exc}}{b + I_{exc}} + P^1 \quad (3.1)$$

en donde a^1 y b son constantes y P^1 es el valor del flujo remanente. A manera de ejemplo de esta aproximación podemos observar la figura 6.

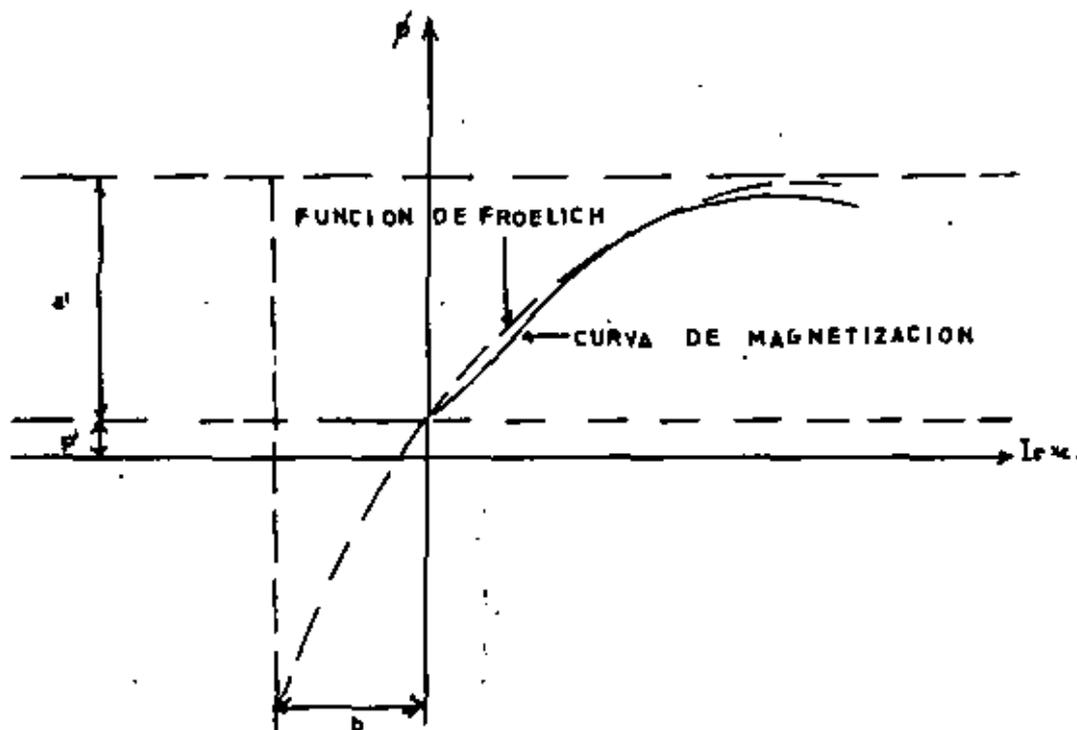


FIGURA 6

La gráfica de la función (3.1) representada en la figura 6 presenta dos asíntotas, una vertical en $I_{exc} = -b$ y otra horizontal en $\phi = P^1 + a^1$. Para la aplicación de esta función, solamente es -

significativa la región correspondiente al primer cuadrante.

El caso más frecuente es que las máquinas operen alrededor de sus especificaciones nominales, las cuales se presentan en la región de saturación, o sea en donde la curva ya ha perdido su pendiente inicial. Cuando el caso en estudio corresponde a estas condiciones, no tiene objeto un análisis con corrientes de excitación pequeñas y aún menos con el magnetismo remanente, lo que nos permite simplificar la función de Froelich de la manera siguiente:

$$\phi = \frac{a^1 I_{exc}}{b + I_{exc}} \quad (3.2)$$

La gráfica correspondiente a la ecuación (3.2) la podemos observar en la figura 7. Esta curva pasa por el origen, suponiendo un magnetismo remanente nulo y sus asíntotas están en $I_{exc} = -b$ y $\phi = a^1$. La asíntota horizontal supone el valor al cual el núcleo presenta su saturación total, para una corriente de excitación muy grande (teóricamente infinita) en una región en que nunca opera la máquina en la realidad. La región de operación alrededor de los valores nominales presenta un grado de aproximación lo suficientemente aceptable para utilizar la función (3.2) en el análisis de equilibrio.

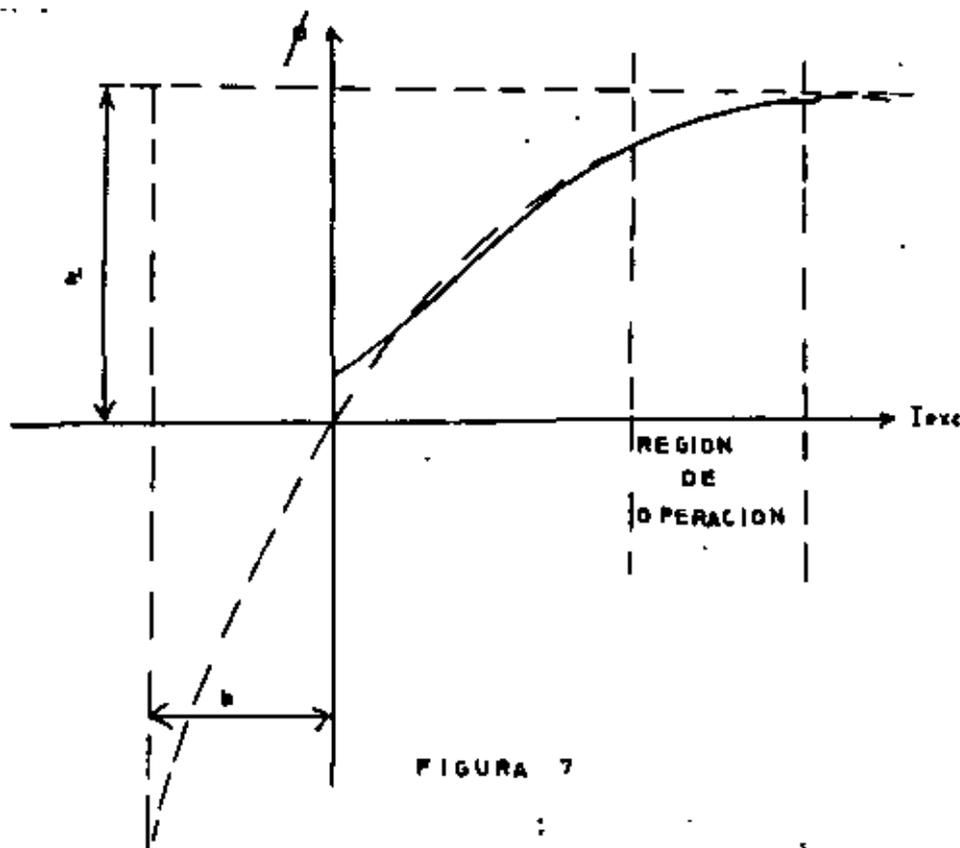
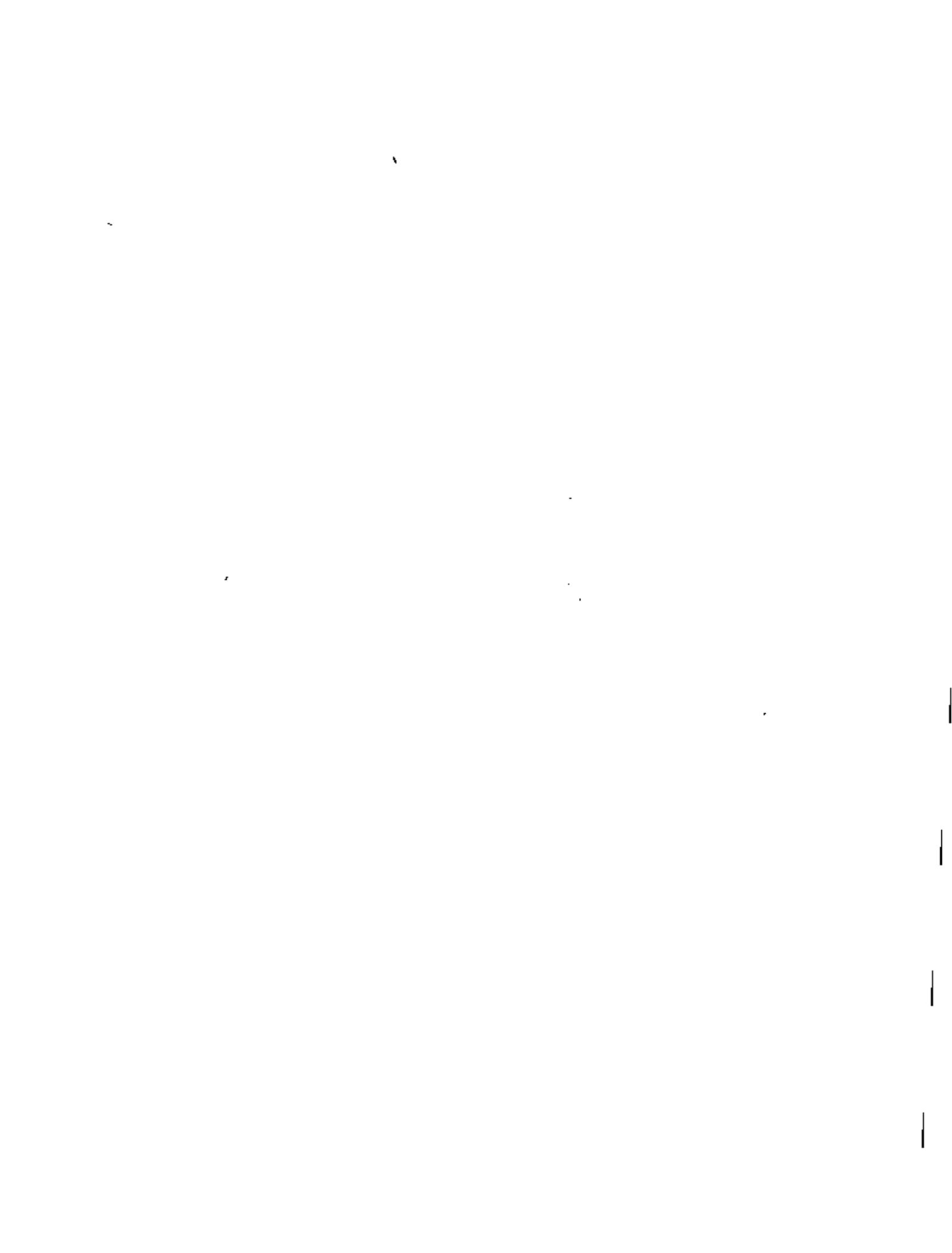


FIGURA 7



4. CURVA DE SATURACION EN VACIO

La fem. inducida en una máquina está dado por las ecuaciones:

$$E = \frac{P\phi ZN}{60 A} \quad \text{sistema convencional} \quad (4.1)$$

$$E = \frac{P\phi Z \omega}{2\pi A} \quad \text{sistema MKS} \quad (4.2)$$

en donde

P es el número de polos de la máquina

ϕ es el flujo por polo

Z es el número total de conductores en las ranuras del núcleo de armadura

N es la velocidad en RPM

ω es la velocidad en radianes por segundo.

A es el número de circuitos en paralelo en el embobinado de armadura.

En estas ecuaciones el flujo y la velocidad constituyen las variables independientes, siendo la fem. la variable dependiente y el resto de las cantidades constituyen las constantes de la máquina. La ecuación (4.1) utiliza el flujo en unidades MKS y la velocidad en unidades convencionales o prácticas (RPM), resultando poco conveniente en algunas aplicaciones para el estudio del equilibrio, particularmente cuando intervienen las expresiones del par desarrollado en donde nos resulta mucho más congruente utilizar todas las unidades del sistema MKS, por lo cual utilizaremos de preferencia la ecuación (4.2).

Si agrupamos todas las constantes en una sola denominación

$$K' = \frac{PZ}{2\pi A}$$

la ecuación (4.2) queda:

$$E = K' \omega \phi \quad (4.3)$$

que es la forma más simple en que podemos expresar el voltaje inducido en la máquina. Sin embargo, en la práctica no es igualmente simple, puesto que la medición del flujo resulta algo laboriosa, por lo cual preferimos expresar la ecuación (4.3) en función de la corriente de excitación, en vez del flujo. Esto se logra sustituyendo el flujo de la (4.3) por su expresión según Froelich,

que puede ser la forma más precisa dada por la ecuación (3.1), o la forma aproximada dada por (3.2).

Cuando se requiere un análisis de comportamiento incluyendo todos los valores posibles de voltaje inducido (también el debido al magnetismo remanente), sustituimos la (3.1) en la (4.3), con lo que queda:

$$E = \frac{K'a'\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + K'P'\omega$$

Si agrupamos constantes bajo una misma denominación:

$$K'a' = a$$

$$K'P' = P$$

con lo que la ecuación de la curva de saturación quedaría:

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega \quad (4.4)$$

En cambio, si el análisis de equilibrio se efectuara únicamente alrededor del voltaje nominal, convendría utilizar la forma simplificada, lo que facilita muchas operaciones. Sustituyendo la (3.2) en la (4.3) queda:

$$E = \frac{K'a'\omega I_{exc}}{b + I_{exc}}$$

Si $K'a' = a$, entonces

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

que es de la forma

$$E = K \omega I_{exc}$$

la cual, a primera vista resulta tan simple como la (4.3), pero en este caso debemos tener en cuenta que K no es una constante, si no una función de la corriente de excitación

$$K = \frac{a}{b + I_{exc}}$$

La gráfica de las ecuaciones (4.4) y (4.5) se muestra en la

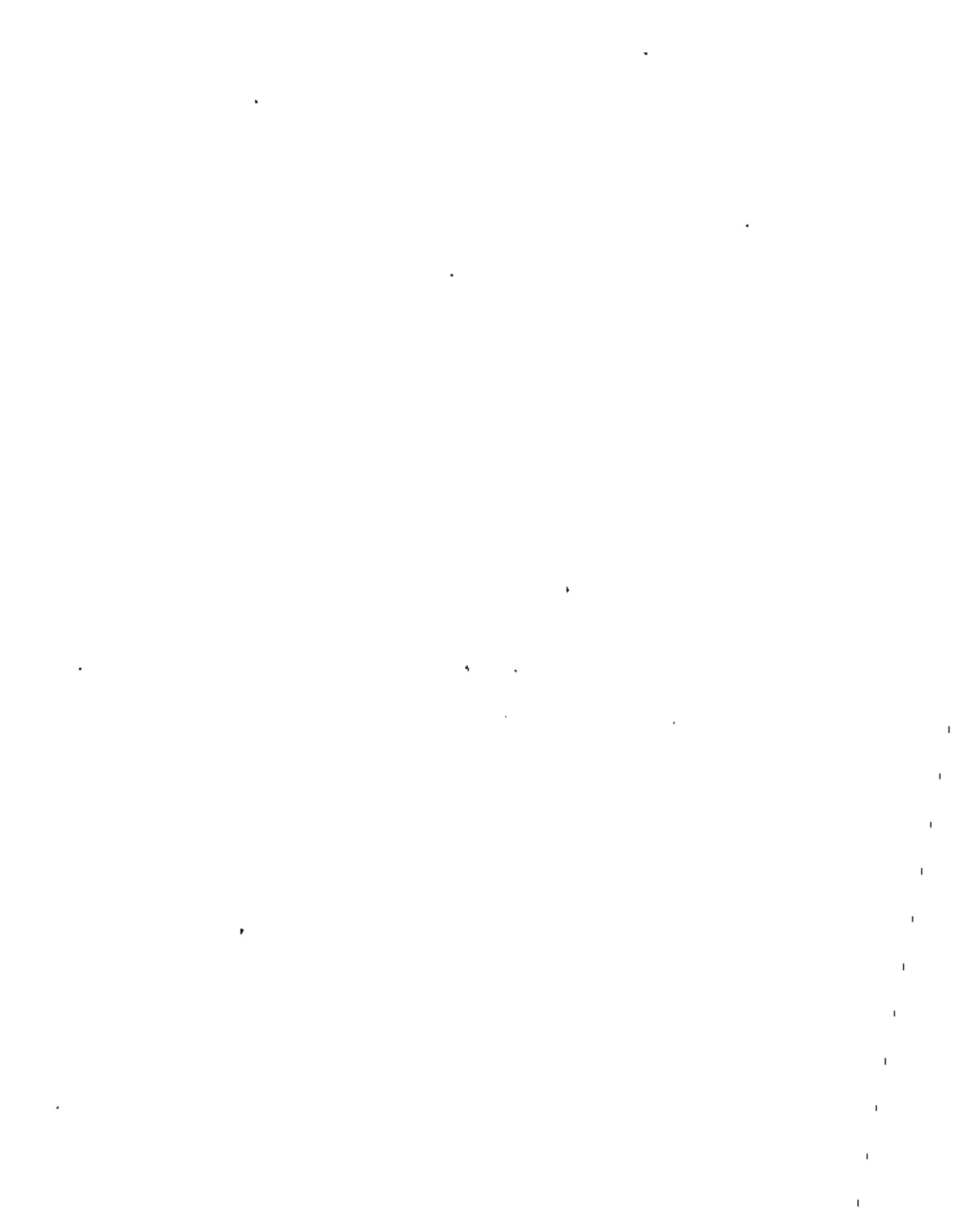


figura 8, en donde se puede apreciar su aproximación con una curva real, obtenida en una prueba de laboratorio.

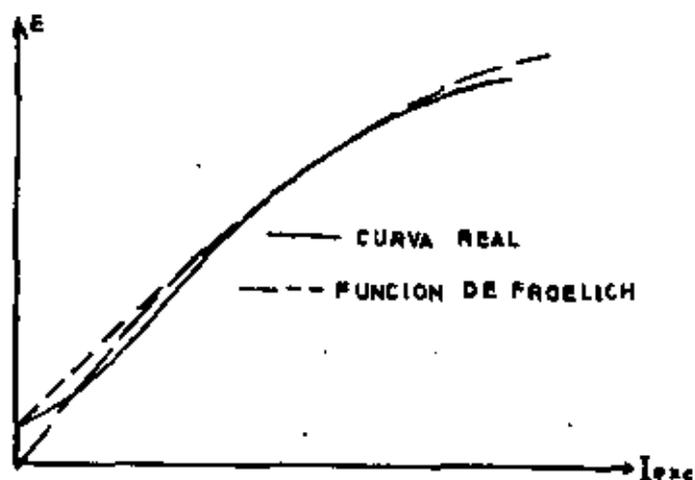


FIGURA 8

Graficando la ecuación (4.4) para diferentes velocidades de la máquina, de tal manera que $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$, obtendríamos las curvas mostradas en la figura 9.

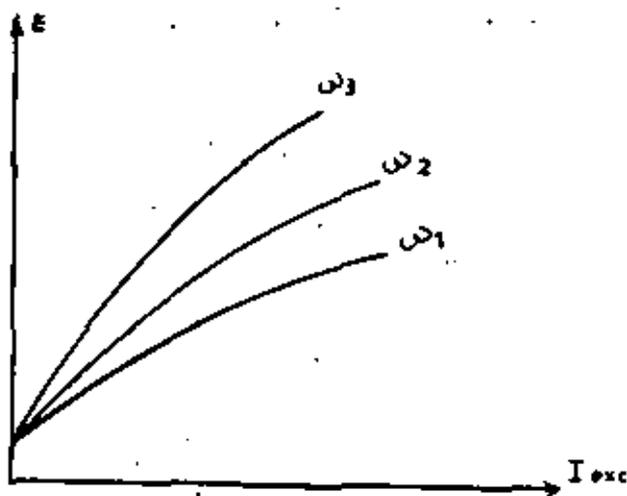


FIGURA 9

Las gráficas mostradas en las figuras 8 y 9 se conocen con el nombre de CURVAS DE SATURACION EN VACIO.



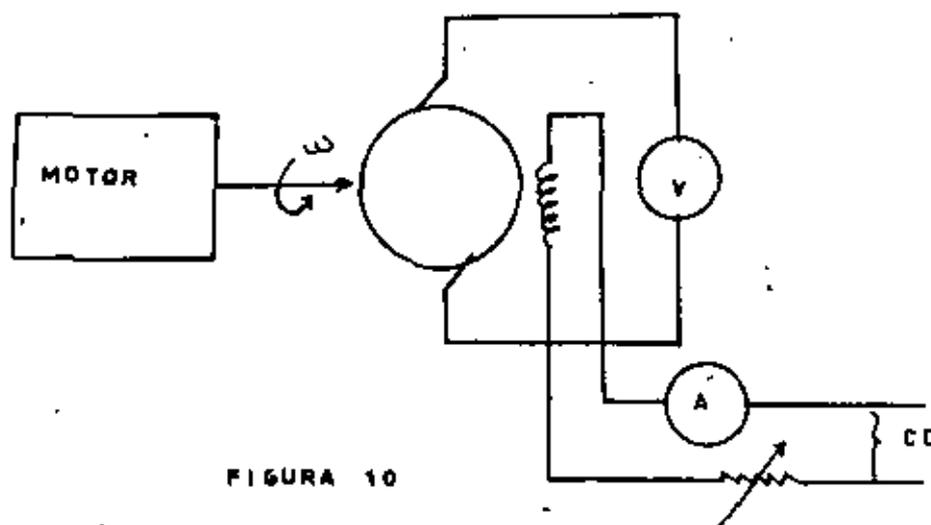
5. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS MAQUINAS

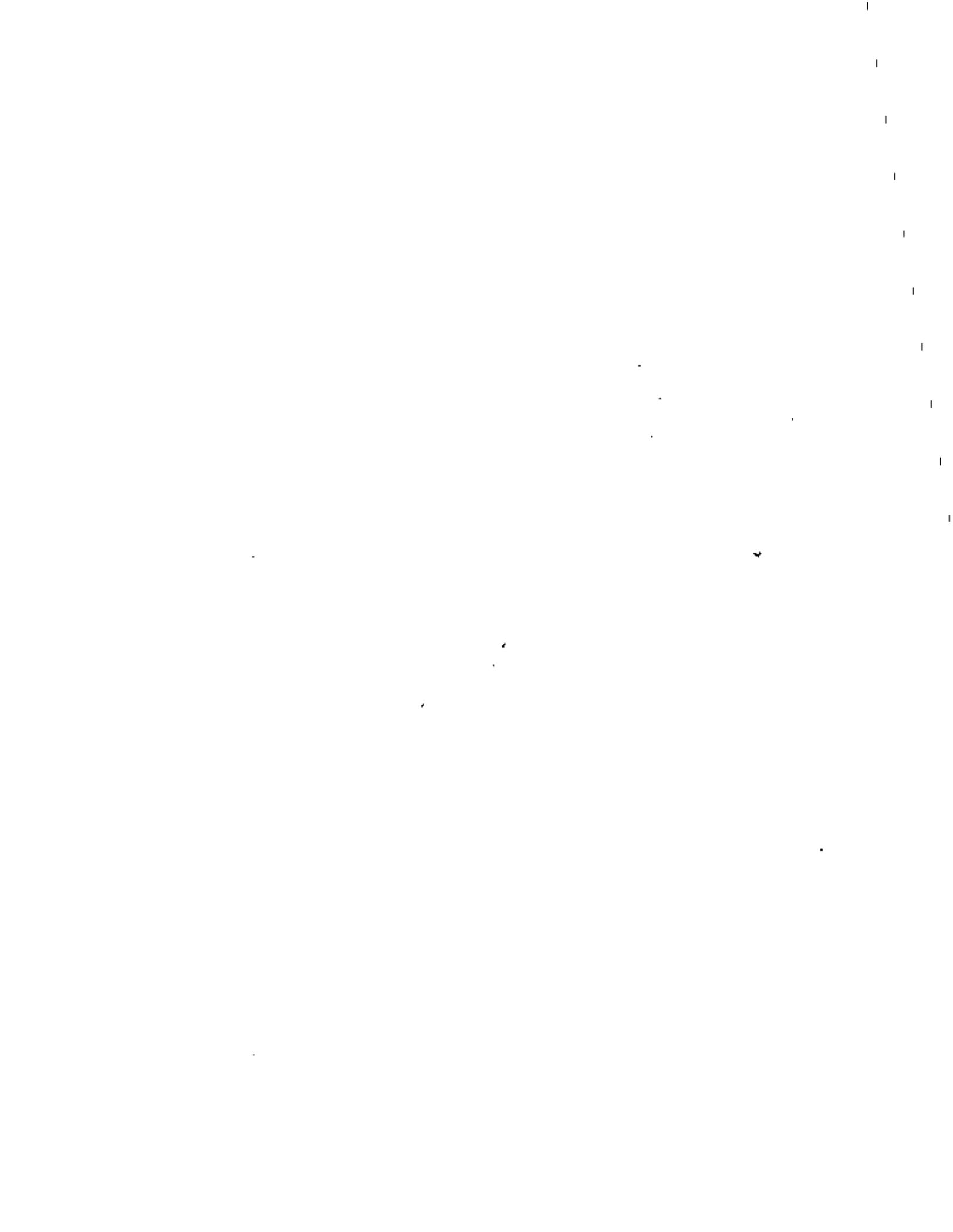
5.1 DETERMINACION DE LA CURVA DE SATURACION

En los diversos análisis para el equilibrio de la máquina de C.D. juega un papel importante la ecuación de la curva de saturación en vacío, de manera que el primer paso sería determinar esta función de manera que represente lo más fielmente posible el comportamiento de una máquina real.

Para efectuar esta prueba, se acopla la máquina a un motor - adecuado, de manera que pueda operar como generador con excitación independiente, a un velocidad uniforme, de preferencia la nominal. La fuente para excitar independientemente el campo debe suministrar el voltaje adecuado para producir una corriente de excitación desde un valor mínimo hasta un 150% aproximadamente del valor normal, si la máquina en prueba es normalmente de excitación en derivación, o bien debe ser una fuente de corriente capaz de exceder un 20% la corriente nominal de la máquina en prueba, si su excitación normalmente es en serie.

La figura 10 nos muestra el diagrama de conexiones y la figura 11 es un ejemplo de la tabla de lecturas y la curva de saturación en vacío obtenida. Las lecturas deben ser siempre en orden ascendente para evitar errores debidos a la histéresis.





I_{exc} AMP	E VOLTS	VEL. RPM
0	E_0	N
I_1	E_1	CTE
I_i	E_i	
I_j	E_j	

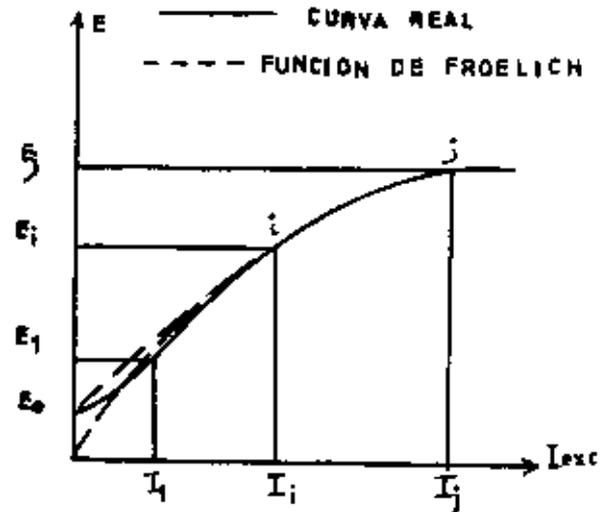


FIGURA 11

La expresión algebraica para el voltaje inducido mostrado - en la gráfica de la figura 11 se puede obtener aplicando la ecuación (4.4) o la (4.5) a dos puntos de la curva obtenida en el experimento, como los i, j .

Según la (4.4):

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{(a\omega) I_i}{(b) + I_i} + (P\omega) \\
 E_j &= \frac{(a\omega) I_j}{(b) + I_j} + (P\omega) \\
 E_0 &= (P\omega)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones simultáneas en donde las incógnitas serían las cantidades encerradas en paréntesis. Si estas cantidades se dividen entre la velocidad angular de prueba (ω , en rad/seg), se obtienen los parámetros a, b y P .

Según la (4.5):

$$\begin{aligned}
 E_i &= \frac{(a\omega) I_i}{(b) + I_i} \\
 E_j &= \frac{(a\omega) I_j}{(b) + I_j}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, que serían las cantidades encerradas en paréntesis.



Dividiéndolas entre la velocidad angular de prueba, se obtienen los parámetros a y b.

NOTA.- Frecuentemente se obtienen funciones muy alejadas de la realidad, de manera que para aproximar lo más posible, es necesario aplicar el sistema (5.1) o el (5.2) a varios pares de puntos en distintas regiones de la curva y promediar los valores de parámetros obtenidos, hasta conseguir una aproximación como la que muestra la figura 11.

5.2 VOLTAJE TERMINAL DEL GENERADOR CON CARGA.

El generador de C.D. como toda fuente real de energía eléctrica, tiene una resistencia interna en la cual se presenta una pérdida de voltaje cuya magnitud depende del régimen de carga.

Los elementos operativos del generador con carga los podemos apreciar esquemáticamente en la figura 12.

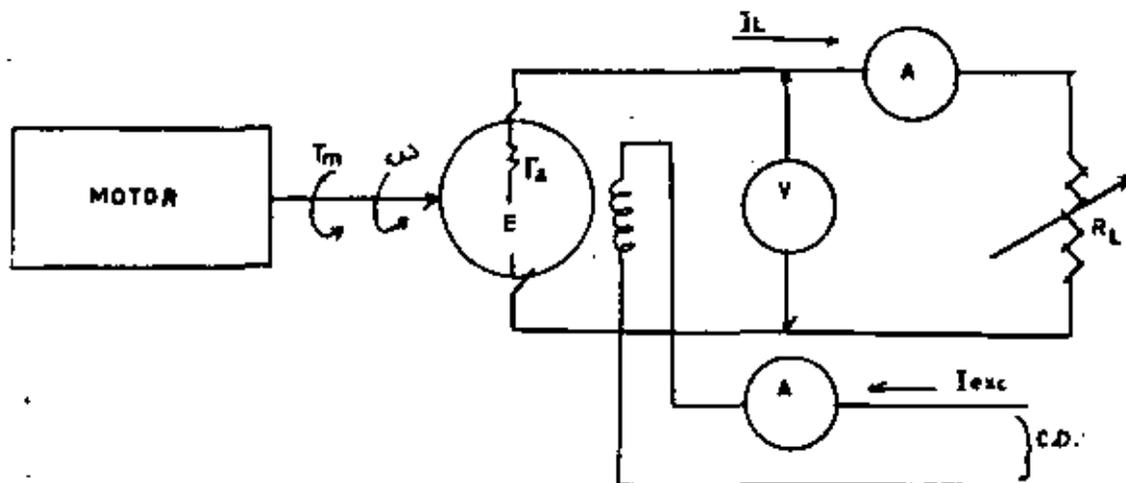


FIGURA 12

Cuando circula una corriente de línea (I_L) por el circuito de armadura del generador, el voltaje en las terminales de la máquina es menor que la fem. E , debido a que aparecen pérdidas en:

- Resistencia interna de la armadura
- Resistencia de las delgas del conmutador
- Resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas
- Resistencia de las escobillas.
- Resistencia del embobinado de interpolos y/o embobinados compensadores.

Para efectos de análisis del comportamiento externo del gene



rador, entenderemos por resistencia del circuito de armadura (r_a), la suma de todas las resistencias mencionadas, puesto que cada una contribuye a la pérdida de voltaje.

De acuerdo con lo anterior, el voltaje en las terminales de la máquina es:

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

que es la ecuación de una recta, como lo muestra la figura 13.

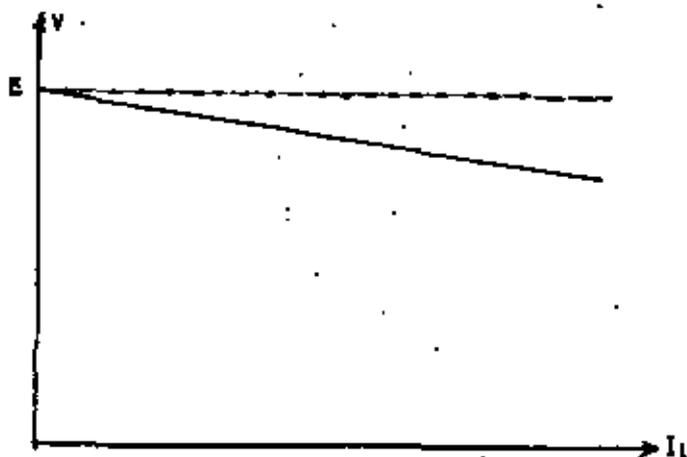
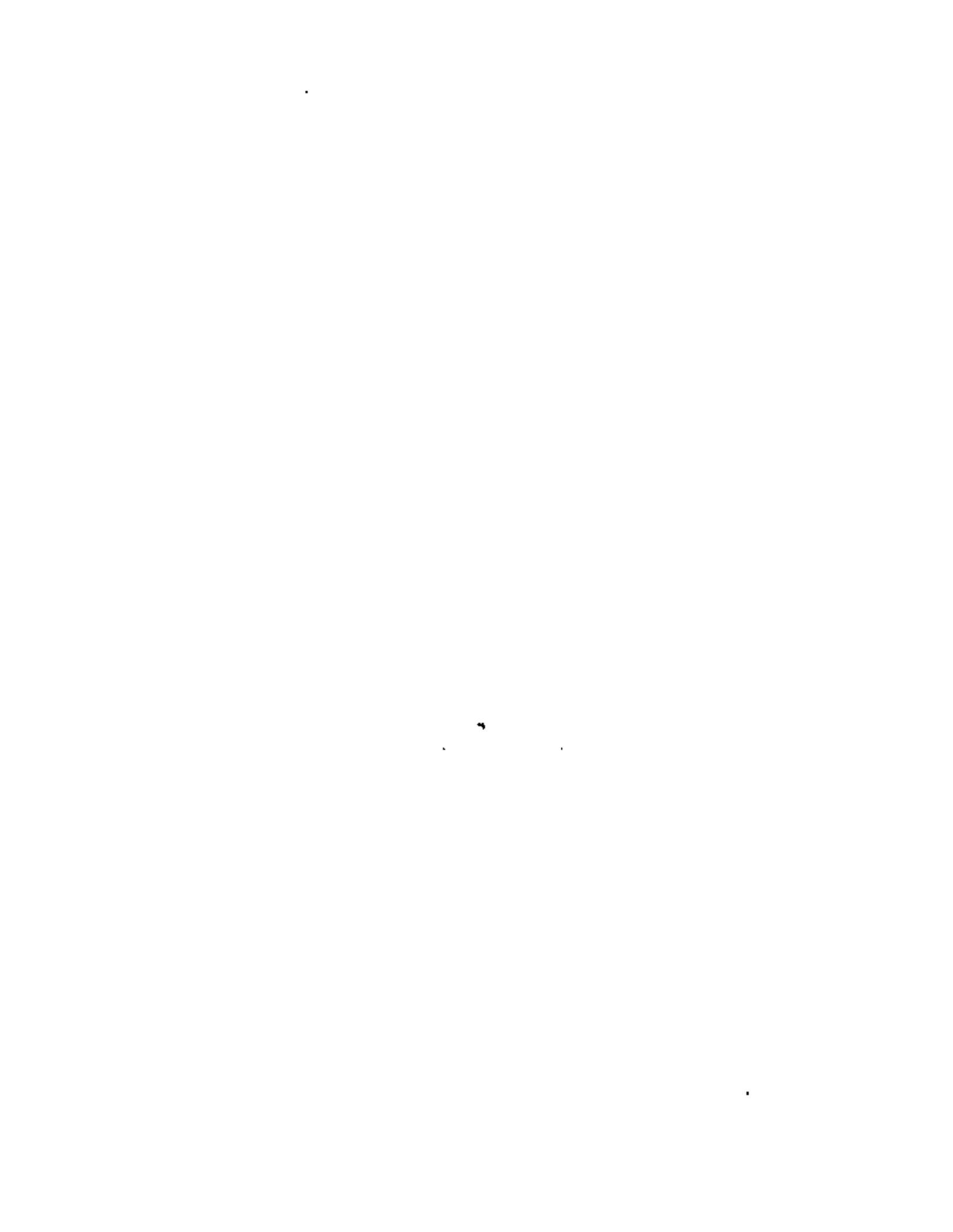


FIGURA 13

El comportamiento del voltaje terminal que muestran la ecuación (5.3) y la figura 13 corresponden a un generador excitado en forma independiente, como es el que se muestra en la figura 12, en donde la corriente de excitación permanece constante y la fem. no se distorsiona por efecto de la reacción de armadura. Esta condición se cumple en forma bastante cercana a lo deseable cuando la máquina tiene una compensación bien equilibrada de la reacción de armadura, por medio de los interpolos y/o los devanados compensadores.

Cálculo de la resistencia del circuito de armadura.- Averiguar el valor de esta resistencia es un trabajo que presenta algunos problemas, fundamentalmente porque interviene la resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas, la cual muy frecuentemente varía de las condiciones de reposo a las velocidades en que normalmente opera la máquina. Esto hace que no sea válida una medición de la resistencia con la máquina en reposo.

El valor más exacto lo podríamos calcular con el generador operando a velocidades cercanas a la nominal, y por medio de un arreglo como el que ilustra la figura 12, tomar una serie de pares de lecturas que nos permitan construir la gráfica de la figura 13. Es de importancia fundamental que esta prueba se efectúe -



con velocidad y corriente de excitación estrictamente constantes.

Si la gráfica obtenida es recta, podemos confiar en una buena compensación de la reacción de armadura. Entonces la resistencia del circuito de armadura (r_a) la podemos calcular para una determinada corriente de línea, como:

$$r_a = \frac{V_{\text{vacío}} - V_{\text{con carga}}}{I_L} \quad (5.4)$$

Para mayor precisión se recomienda calcular esta resistencia para diferentes pares de valores leídos, y promediar los resultados.

5.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOTOR CON CARGA

Cuando la máquina trabaja como motor, se induce en la armadura una fem (llamada frecuentemente fuerza contra electromotriz), de manera que los elementos operativos de la máquina los podemos apreciar en la figura 14.

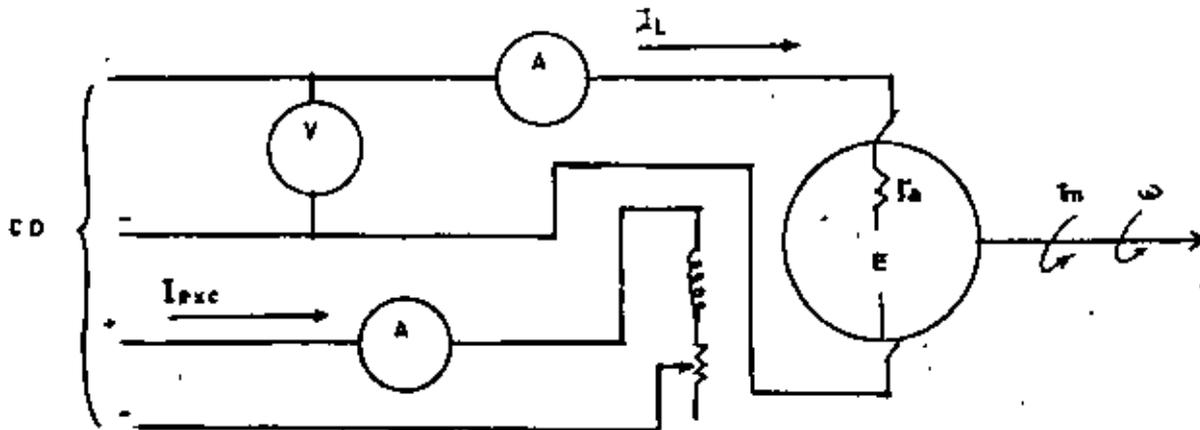


FIGURA 14

En el caso del motor, la fem. es menor que el voltaje externo (voltaje aplicado) del circuito de armadura, de manera que:

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

en donde solamente el signo en el segundo miembro es lo que diferencia el comportamiento de motor del de generador.



5.4 PAR ELECTROMAGNETICO

Cuando existen simultáneamente el flujo inductor (debido a la corriente de excitación) y una reacción de armadura (debida a la corriente de línea), la interacción entre estos dos campos produce un par mecánico de origen electromagnético.

Si la máquina trabaja como generador, este par es de sentido opuesto a la velocidad, motivando que el primotor reaccione entregando el par necesario para mantener la velocidad. De esta manera el generador absorbe la potencia mecánica necesaria para convertirla en potencia eléctrica.

Si la máquina opera como motor, el par es del mismo sentido que la velocidad, entregando así la potencia mecánica que ha convertido a partir de potencia eléctrica.

Una forma sencilla de evaluar el par electromagnético es mediante el esquema de balance de potencia que ilustra la figura 15.

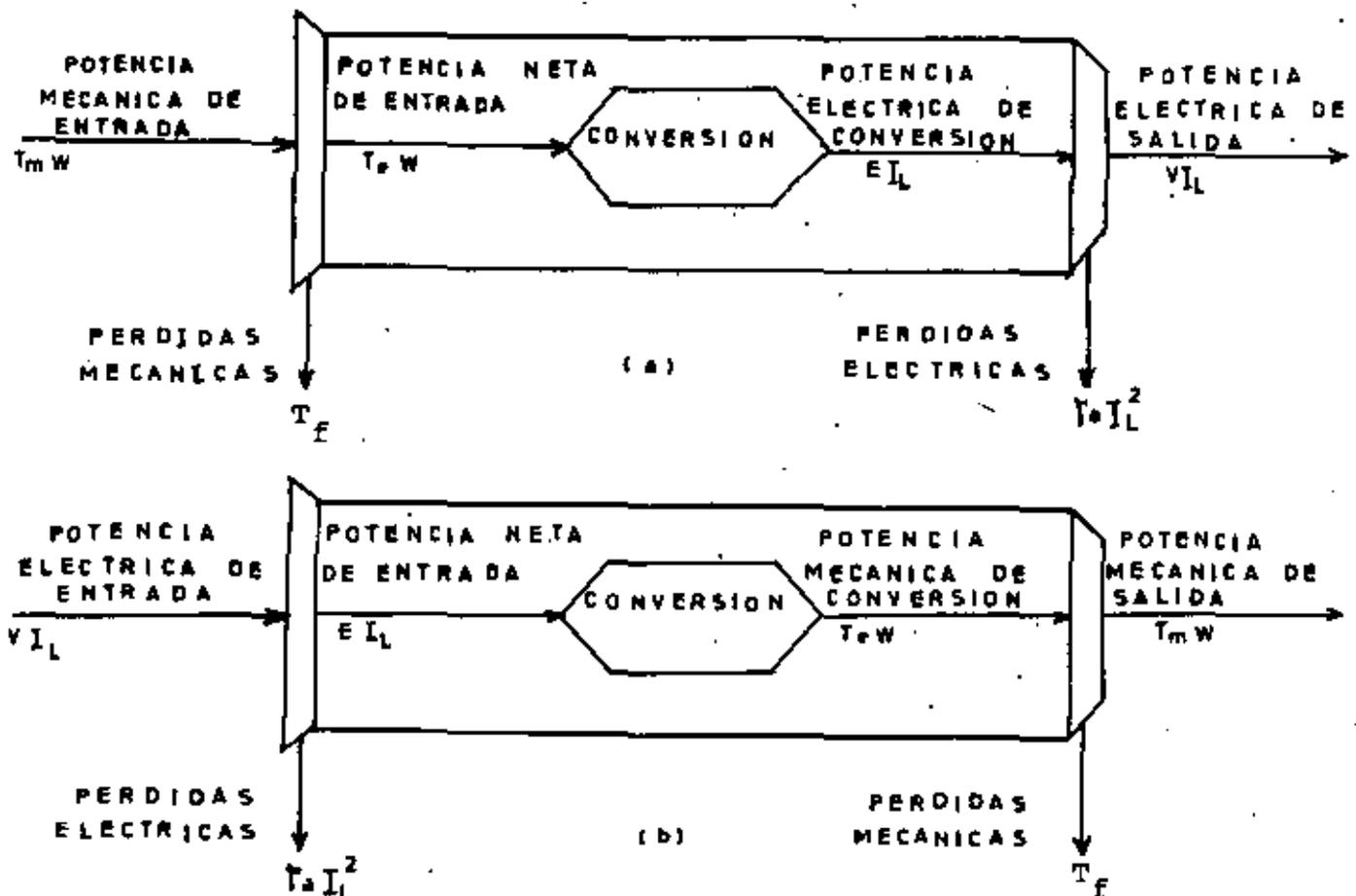


FIGURA 15

La potencia mecánica en la flecha de la máquina consta de un par mecánico (T_m) y la velocidad angular (ω).

El par de fricción (T_f) ocasiona pérdidas mecánicas, motivando que el par en la armadura sea diferente del par mecánico¹. El par en la armadura es el que hemos llamado par electromagnético (T_e).

En la parte eléctrica, la potencia que maneja la armadura ($E I_L$) también difiere de la potencia en las terminales de la máquina ($V I_L$) debido a las pérdidas eléctricas en el circuito de armadura.

En el fenómeno de conversión que se lleva a cabo en la armadura, una potencia mecánica ($T_e \omega$) se transforma en potencia eléctrica ($E I_L$) en el caso del generador (figura 15-a) y a la inversa en el caso del motor (figura 15-b), de manera que independientemente de como opere la máquina, podemos establecer que:

$$T_e \omega = E I_L$$

de donde el par electromagnético será:

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

El valor de E en la ecuación (5.6) puede obtenerse de la (4.4) o de la (4.5).

6. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

6.1 GENERADOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

El planteamiento para el análisis de equilibrio del generador con excitación independiente es prácticamente el mismo que se ha hecho en el párrafo 5, de manera que solamente nos concretaremos a reunir en una forma resumida esta información.

- a) Voltaje del generador en vacío.- Al no haber corriente circulante en el circuito de armadura, el voltaje es igual a la fem. Esta, además puede controlarse desde el valor inducido por el magnetismo remanente hasta el voltaje nominal de la máquina, siendo estable en cualquier nivel, ya que la corriente de excitación se suministra en forma independiente. La ecuación (4.4) forma parte del cuadro de ecuaciones de equilibrio que presentaremos más adelante.

¹En un balance más riguroso se incluyen en el mismo campo de acción de las pérdidas mecánicas, las pérdidas magnéticas por histéresis y corrientes parásitas en el núcleo de la armadura.



- b) Voltaje del generador con carga.- Si se mantienen constantes la velocidad y la corriente de excitación, el voltaje de la máquina está dado por la (5.3).
- c) Par absorbido por el generador.- Observando la figura 15-a, podemos darnos cuenta que el par mecánico absorbido por el generador es igual al par electromagnético más el par de pérdidas mecánicas. Esta consideración, agregada a la ecuación (5.6) nos da el equilibrio mecánico de la máquina.

Por tanto, las consideraciones de equilibrio quedan reunidas en el siguiente cuadro:

(a) Voltaje en vacío:	$E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$	(6.1)
(b) Voltaje con carga:	$V = E - r_a I_L$	
(c) Par mecánico absorbido:	$T_m = T_f + T_e$	
(d) Par electromagnético:	$T_e = \frac{E I_L}{\omega}$	

que constituyen un sistema de ecuaciones inter-relacionadas, ya que el cálculo de algunas variables puede estar especificado en otra de las ecuaciones. La figura 16 reúne la respuesta de la máquina según este cuadro de ecuaciones

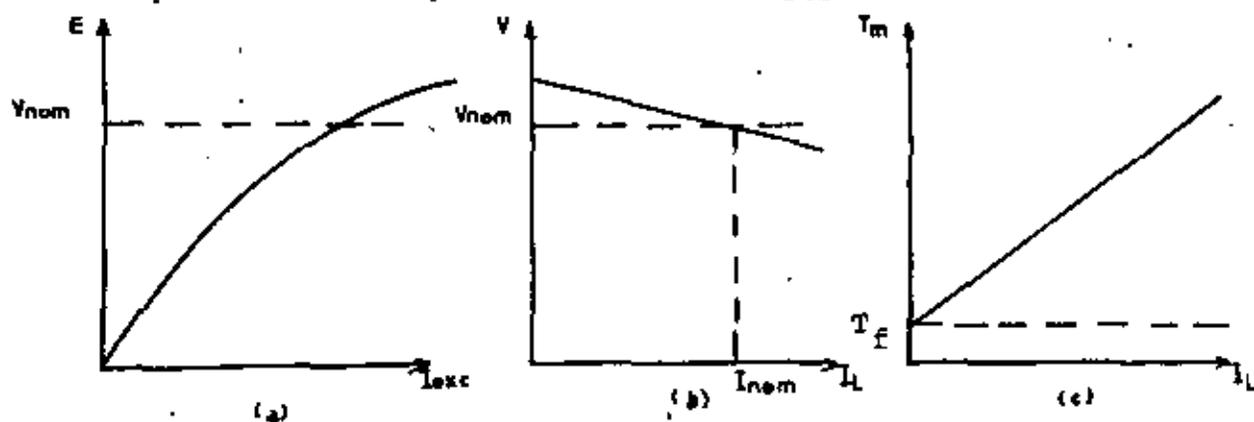


FIGURA 16

Regulación de voltaje.- En la figura 16-b observamos que la máquina se ha ajustado de tal manera que cuando esté suministrando a la línea el valor de corriente nominal, el voltaje terminal sea también al valor nominal.

El voltaje en vacío, por supuesto, debe exceder al valor nominal en una cantidad igual a la caída de tensión que aparece en el circuito de armadura a plena carga.

Definimos como "Regulación de voltaje", la caída de tensión en las terminales desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg.} = \frac{V_V - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100 \quad (6.2)$$

en donde:

V_V = voltaje terminal en vacío

V_{PC} = voltaje terminal a plena carga

V_{nom} = voltaje nominal de la máquina

Para una máquina ajustada a la respuesta que muestra la figura 16-b:

$$V_{PC} = V_{\text{nom.}}$$

6.2 MOTOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE

Aparentemente resulta poco práctico un motor de C.D. con excitación independiente, ya que esto requeriría dos fuentes de alimentación, una para la armadura y otra para el campo, como lo ilustra la figura 17, sin embargo, del análisis que haremos a continua

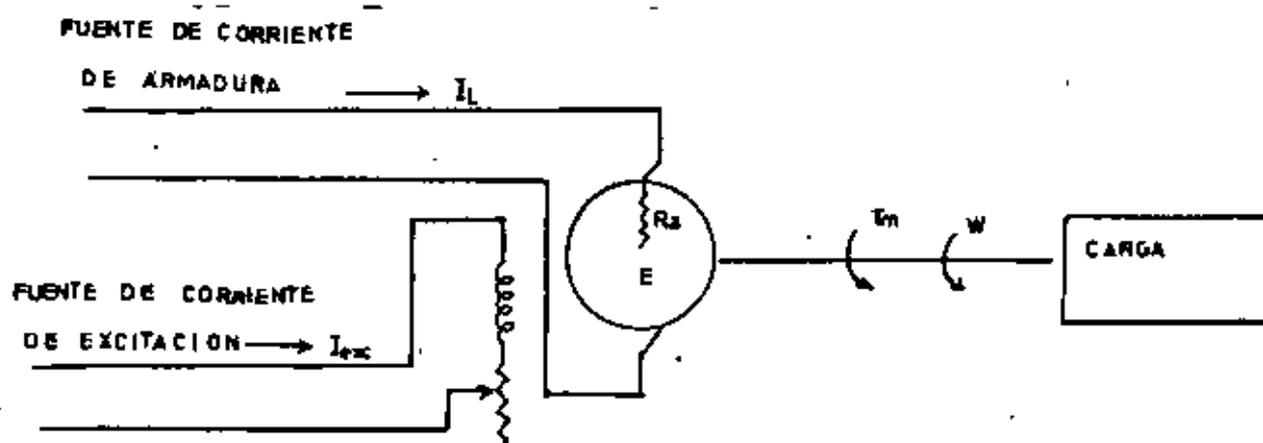
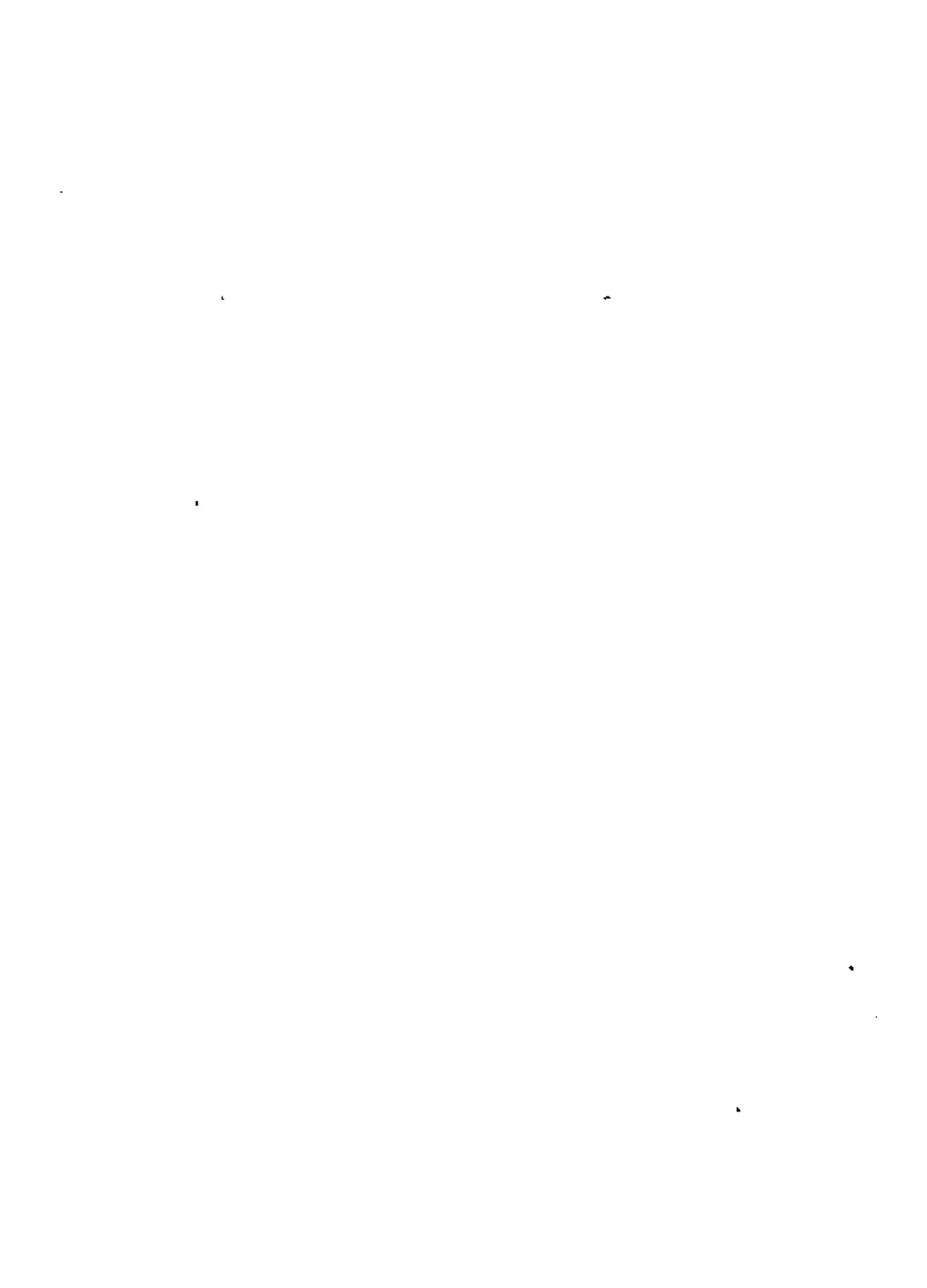


FIGURA 17

ción veremos que presenta grandes ventajas, particularmente en lo que se refiere al control de velocidad.

Normalmente un arreglo como el de la figura 17 se opera con una corriente de excitación constante, cuyo valor se ajusta alrededor de aquel que induce la fem. nominal a velocidad nominal, lo



que nos permite hacer uso de la función de Froelich simplificada:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

en la cual si tenemos en cuenta la condición que acabamos de describir:

$$\frac{a I_{exc}}{b + I_{exc}} = K_e$$

por lo cual

$$E = K_e \omega \quad (6.3)$$

El comportamiento del circuito de arandura es como lo hemos expuesto en la ecuación (5.5):

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

Sustituyendo (6.3) en (5.5) tenemos

$$V = K_e \omega + r_a I_L$$

de donde

$$\omega = \frac{V - r_a I_L}{K_e} \quad (6.4)$$

Para el equilibrio mecánico, de la figura 15-b podemos deducir que:

$$T_m = T_e - T_f \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.6) y (6.3) en la (6.5):

$$T_m = K_e I_L - T_f$$

de donde

$$I_L = \frac{T_m + T_f}{K_e} \quad (6.6)$$

La ecuación (6.6) nos muestra que la corriente I_L nunca puede ser nula, pues aún en el caso de que el motor trabajara en vacío



$T_m=0$), las pérdidas por fricción estarían motivando un pequeño valor de I_L .

Sustituyendo la (6.6) en la (6.4) tenemos:

$$\omega = \frac{K_e V - r_a T_m - r_a T_f}{K_e^2} \quad (6.7)$$

- a) Velocidad del motor con voltaje de armadura constante y carga (par) variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$
- b) Velocidad del motor con par de carga constante y voltaje variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $1/K_e$ y cuya ordenada al origen es $r_a (T_m - T_f)/K_e^2$
- c) Voltaje necesario para mantener velocidad constante con carga variable.- Despejando el voltaje de la ecuación (6.7) tenemos:

$$V = \frac{r_a T_m + K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$$

que corresponde a una recta cuya pendiente es r_a/K_e y cuya ordenada al origen es $(K_e^2 \omega + r_a T_f)/K_e$

Las condiciones anteriores las podemos apreciar en forma más objetiva si ordenamos las ecuaciones bajo la estructura $y=mx+b$ como las presentamos en el siguiente cuadro.

a) Velocidad a voltaje constante	$\omega = -\frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2}$	
b) Velocidad con par constante	$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$	
c) Voltaje necesario a velocidad constante	$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$	(6.8)
Par mecánico	$T_m = T_e - T_f$	
Constante de excitación	$K_e = \frac{a I_{exc}}{b + I_{exc}} = \frac{E}{\omega}$	



Las gráficas correspondientes a las ecuaciones (6.8) las ilustramos a continuación en la figura 18.

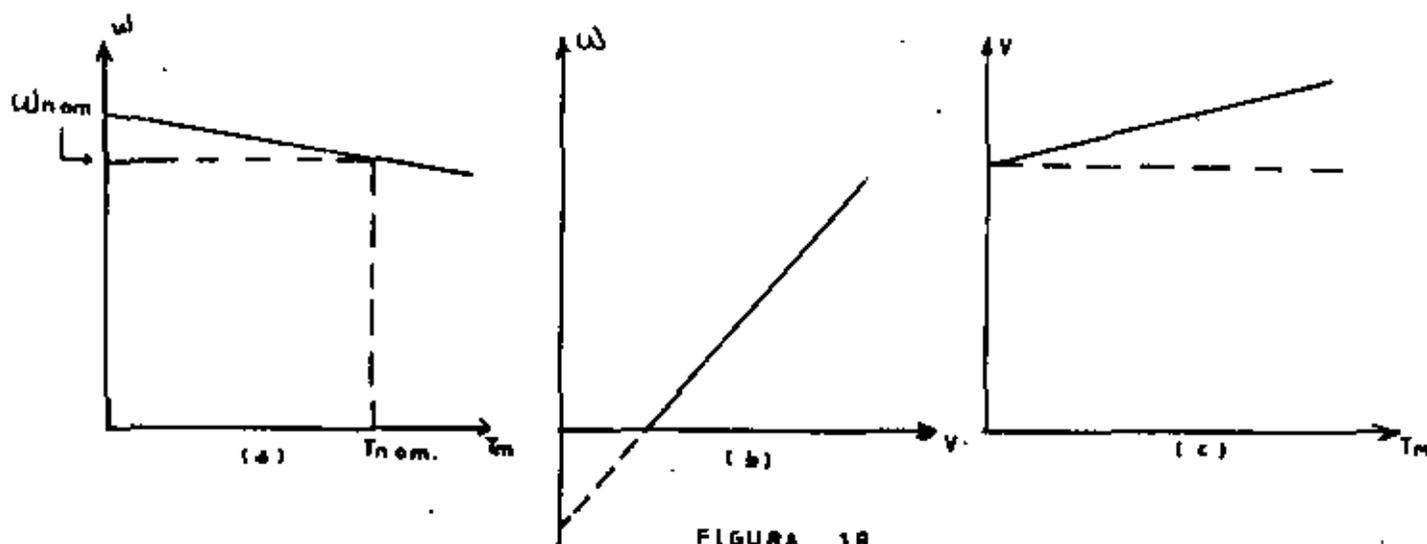


FIGURA 18

El caso (a) de las ecuaciones (6.8) y de la figura 18 es interesante para conocer el tipo de respuesta que da este motor, en cambio los casos (b) y (c) representan aspectos fundamentales para el diseño de control del motor de C.D., puesto que definen las características de la fuente de alimentación que requieren.

Regulación de velocidad.- Para condiciones de alimentación del motor constantes (voltaje de arandura y corriente de excitación), definimos como "Regulación de velocidad", la pérdida de velocidad desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{nom.}} \times 100 \quad (6.9)$$

donde:

- ω_v = velocidad del motor en vacío
- ω_{PC} = velocidad del motor a plena carga
- ω_{nom} = velocidad nominal del motor

Si el motor se ajusta a una respuesta como la que muestra la figura 18-a, entonces

$$\omega_{PC} = \omega_{nom}$$



7. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN DERIVACION.

7.1 GENERADOR CON EXCITACION EN DERIVACION.

Conectar la excitación del generador en derivación significa ponerlo en paralelo con la armadura y con la carga, de manera que para excitar la máquina se utiliza la energía generada en la propia armadura, por lo cual se dice que se trata de un generador autoexcitado.

La autoexcitación es factible gracias a ciertas características, como son:

- El magnetismo remanente, el cual permite la generación de un pequeño voltaje, suficiente para iniciar la corriente de excitación.
- La energía necesaria para la excitación es apenas del 2 al 5% de la capacidad de la armadura, por lo cual el generador prácticamente sigue siendo capaz de suministrar a la carga su potencia nominal.
- La saturación del circuito magnético permite un punto de equilibrio con la excitación, con lo que se consigue un voltaje estable.

El diagrama del generador en derivación lo podemos apreciar en la figura 19.

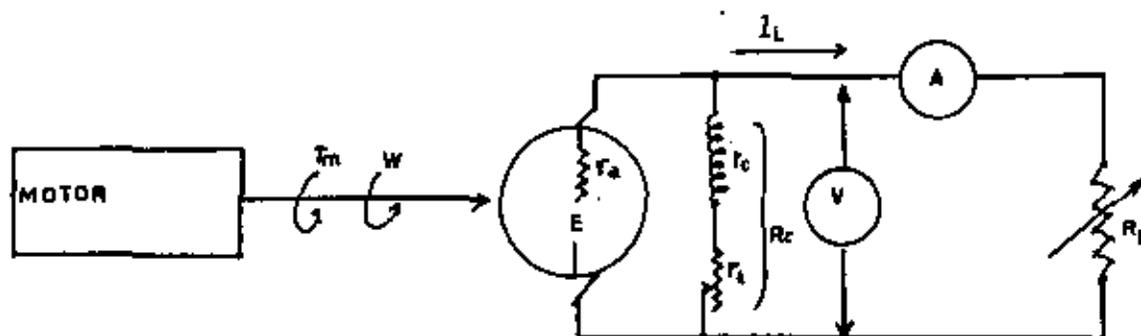


FIGURA 19

Además de los elementos estudiados en diagramas anteriores, tenemos ahora en la figura 19, la resistencia del enbobinado del campo inductor (r_c), la resistencia del reóstato de campo (r_f) y la resistencia del circuito de campo, $R_c = r_c + r_f$, cuyos valores intervendrán en las ecuaciones de equilibrio.

- a) Voltaje del generador en vacío.- Supongamos en la figura 19, una condición inicial con $R_L = \infty$, o sea $I_L = 0$ que es la condición de "generador en vacío"

El voltaje generado se localizará en algún punto de la curva de saturación, lo que nos permite usar la función de Froelich simplificada, que transcribimos a continuación:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

La única corriente circulante en estas condiciones es por la malla que forman la armadura y el circuito de campo, que ilustramos en la figura 20. Su valor sería:

$$I_{exc.} = \frac{E}{r_a + R_c} \quad (7.1)$$

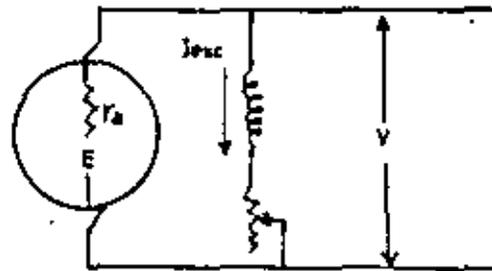


FIGURA 20

Teniendo en cuenta que la corriente de excitación es muy pequeña comparada con la corriente nominal de la máquina, y además, la resistencia del circuito de armadura (r_a) es también muy pequeña, la caída de voltaje en la armadura podemos despreciarla sin cometer error perceptible, de manera que el voltaje aplicado al circuito de campo es prácticamente igual a la fem (E). La ecuación (7.1) quedaría por tanto:

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c} = \frac{V}{R_c} \quad (7.1)b$$

Esta ecuación está especificada en las mismas coordenadas que la (4.5), de manera que se puede expresar gráficamente como una recta cuya pendiente es R_c , simultáneamente con la curva de saturación en vacío, como aparece en la figura 21.

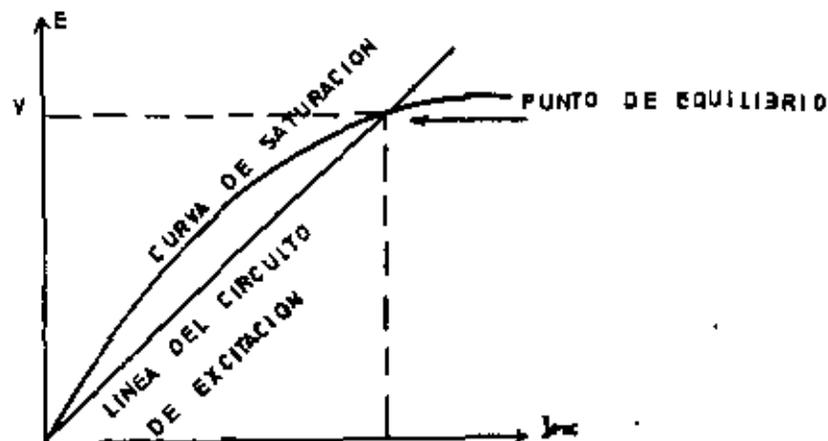


FIGURA 21

La intersección entre las dos gráficas de la figura 21 constituye el punto de equilibrio en el cual el generador induce un voltaje estable.

El sistema de ecuaciones simultáneas que nos permite analizar las condiciones de la figura 21 es:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \quad \omega I_{exc} \quad (7.2)$$

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c}$$

Si recordamos que en el circuito de excitación se ha incluido un reóstato, la resistencia de este circuito puede variar dentro de ciertos límites, lo que se manifiesta en la figura 21 con un cambio en la pendiente de la línea recta, motivando que el punto de equilibrio puede desplazarse a lo largo de gran parte de la curva de saturación.

La máxima resistencia admisible es cuando la recta de excitación se hace tangente a la curva de saturación, no existiendo entonces intersección entre las dos gráficas, y por tanto no hay estabilidad en el voltaje de la máquina.

La mínima resistencia es cuando se ha eliminado el reóstato, y queda únicamente la resistencia del embobinado de excitación. En estas condiciones es el máximo voltaje que se puede obtener del generador.

Las diversas opciones descritas anteriormente para un voltaje estable del generador se muestran en la figura 22.

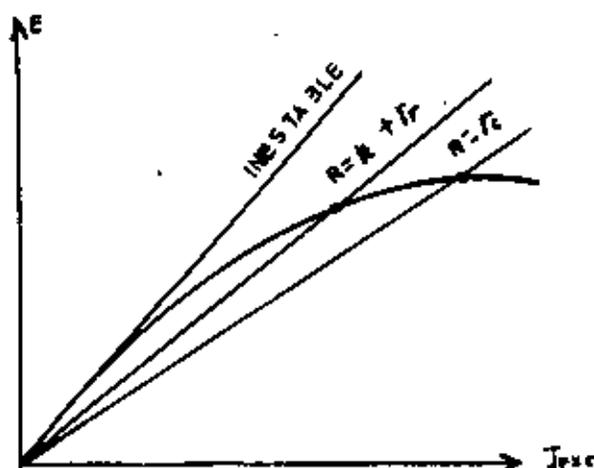


FIGURA 22

- b) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- Regresando ahora a la figura 19, supongamos un valor de (R_L) tal que haga circular una corriente en la línea de carga (I_L), de un valor apreciable, de manera que la caída en la resistencia del circuito de armadura (r_a) ocasiona una diferencia entre la fem. y el voltaje terminal.

A la vez, como el voltaje terminal es el que alimenta al campo inductor, este también se debilita, ocasionando una disminución de la fem., por lo tanto:

$$E \text{ con carga} < E \text{ en vacío}$$

Un generador en derivación, consecuentemente sufre una pérdida de voltaje apreciablemente mayor que uno con excitación independiente cuando pasan de la condición de vacío a la plena carga.

Para efectos de análisis, continuaremos considerando que la corriente de excitación es muy pequeña, por lo que la corriente en la armadura prácticamente está definida por el valor de la corriente de línea (I_L), lo que no nos conduce a un error apreciable.

El comportamiento del generador bajo las circunstancias descritas, estará dado por un sistema de tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} V &= E - r_a I_L \\ E &= \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \\ I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (7.3), las otras dos, obtenemos:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} - r_a I_L \quad (7.4)$$

que es una ecuación de segundo grado en coordenadas (I_L , V) cuya gráfica es la de forma presentada en la figura 23.

Regulación de voltaje.- El concepto de regulación de voltaje dado en la ecuación (6.2) se aplica también en este caso, de manera que:

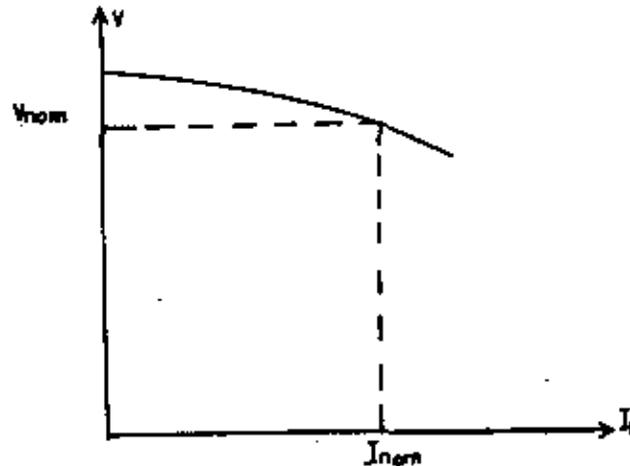


FIGURA 23

$$\text{Reg} = \frac{V_v - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100$$

Si la máquina se ajusta para la respuesta mostrada en la figura 23, entonces:

$$V_{PC} = V_{\text{nom}}$$

El valor de regulación para una misma máquina, es mayor cuando se excita en derivación que cuando se excita en forma independiente.

- c) Curva empleta de la respuesta de voltaje del generador con carga.- Las especificaciones nominales de una máquina se refieren a los valores a los cuales puede trabajar continuamente sin dañarse por elevación de temperatura.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la máquina es un dispositivo conversor de energía, es posible exceder estas limitaciones por tiempo corto, de manera que se puede investigar en que forma continúa decreciendo el voltaje mostrado en la figura 23, al sobrepasar considerablemente su corriente nominal. No obstante, prolongar este estado de sobrecarga, se refleja en calentamiento de los conductores de los embobinados, con la consecuente degradación de los aislamientos.

Graficando la ecuación (7.4) en toda la extensión del primer cuadrante de coordenadas, nos da una curva similar a la (7.4) de la figura 24. Esta gráfica, como podemos observar entra en el dominio de voltajes muy pequeños, y aún sin corriente de excitación

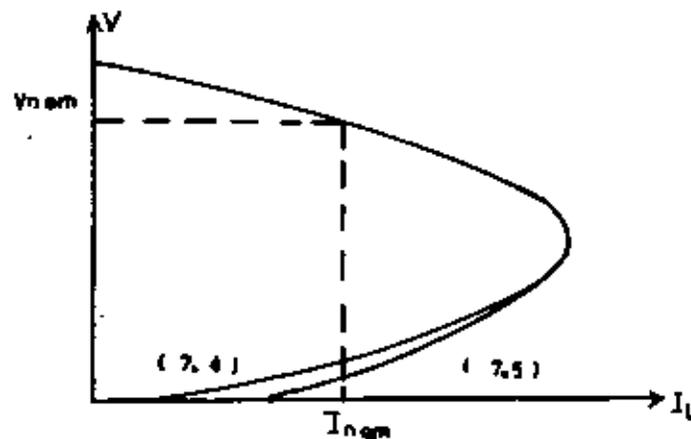


FIGURA 24

el flujo remanente induce una pequeña fem., que provoca circulación de corriente de línea, aún cuando el voltaje externo de la máquina fuera nulo.

La curva (7.4) de la figura 24 por lo tanto, no es totalmente representativa del comportamiento de la máquina, por lo que este análisis lo efectuaremos a partir de la ecuación (4.4) que es más exacta.

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b+I_{exc}} + P\omega \quad (4.4)$$

Si tenemos en cuenta esta ecuación en vez de la segunda que aparece en el cuadro (7.3), al hacer la correspondiente sustitución, quedaría:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_e+V} + P\omega - r_a I_L \quad (7.5)$$

en donde el término $P\omega$ introduce el comportamiento del generador con su magnetismo remanente.

La gráfica correspondiente a la ecuación (7.5) la observamos en la misma figura 24, la cual es mucho más aproximada a la respuesta real de la máquina.

No obstante que la corriente de línea tiene un límite, ésta puede alcanzar fácilmente valores de 4 a 8 veces la corriente nominal, por lo que obtener esta curva en una prueba de laboratorio sería destructivo para la máquina.

Sin embargo, la obtención de las características particulares del generador mediante pruebas no destructivas en el laboratorio y la aplicación de las ecuaciones de análisis, nos conduce a resultados bastante aceptables para estimar la respuesta de la máquina.



- d) Par mecánico absorbido por el generador.- De acuerdo con la figura 15-a y la ecuación (5.6), el par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = T_f + \frac{EI_L}{\omega} \quad (7.6)$$

en donde E e I_L son dos cantidades que varían simultáneamente según acabamos de analizar en el párrafo anterior, de manera que para cada condición de carga habría necesidad de calcular estas cantidades a fin de poder hacer una tabulación. Si deseamos conocer la curva de par mecánico en toda la extensión de la respuesta mostrada en la figura 24, es necesario aplicar la función de Froelich más precisa, de manera que la ecuación (7.6) formará un sistema simultáneo con la (4.4) y la (7.5).

Para el caso del generador en derivación, la curva más sencilla de graficar e interpretar el par mecánico es con respecto al voltaje terminal de la máquina, que nos da un resultado semejante al mostrado en la figura 25.

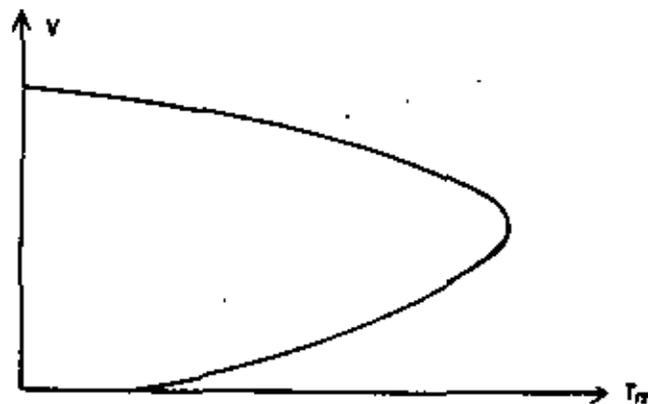


FIGURA 25

Reuniendo ahora en un cuadro las ecuaciones de equilibrio del generador en derivación, tenemos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{a}{b+I_{exc}} \omega I_{exc} & \delta E &= \frac{a \omega I_{exc}}{b+I_{exc}} + P_{\omega} \\
 I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \\
 V &= E - r_a I_L \\
 T_m &= T_f + \frac{EI_L}{\omega}
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.2 MOTOR CON EXCITACION EN DERIVACION

Al conectar el motor con excitación en derivación, una misma fuente de energía alimenta a la armadura y al campo inductor, como muestra la figura 26. Generalmente en los diagramas de motores de C. D. se acostumbra incluir una resistencia variable en serie con la armadura, a efecto de limitar la corriente transitoria de arranque, pero en vista de que en este estudio nos avocaremos al estado estable, no la incluimos en la figura 26.

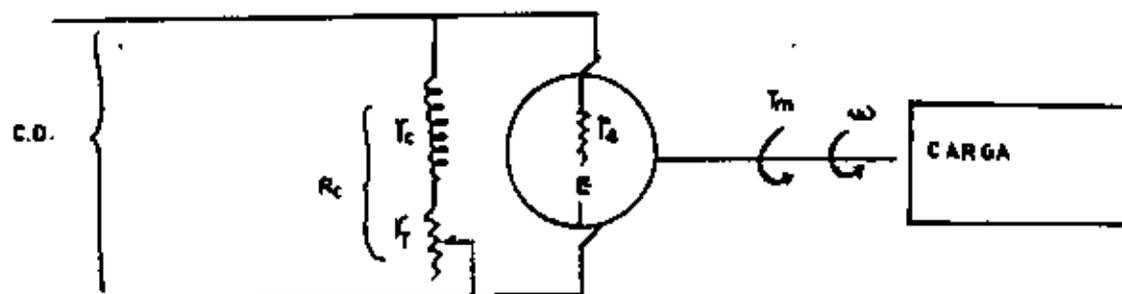


FIGURA 26

Las condiciones de operación del motor bajo este tipo de excitación pueden compararse (con ciertas limitaciones) con el motor excitado independientemente.

En vista de que la excitación normalmente trabajará muy por arriba del magnetismo remanente, la ecuación (4.5) nos puede servir de punto de partida.

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

- a) Variación de la velocidad con excitación constante y carga variable.- El comportamiento del motor en estas condiciones es idéntico al del motor independiente con corriente de excitación y voltaje de armadura constantes. Tomando la ecuación correspondiente del cuadro (6.8) tenemos:

$$\omega = - \frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2} \quad (7.8)$$

que representa una línea recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$ como se muestra en la figura 27-a.



- b) Variación de la velocidad con carga constante y corriente de excitación variable.- El reóstato en el circuito de campo permite ciertos ajustes en la velocidad de la máquina pero de ninguna manera en un rango tan amplio como el caso del control de voltaje en un motor excitado independientemente.

Las ecuaciones (4.5) y (5.6) nos sirven ahora de punto de partida para analizar la respuesta de la máquina en las condiciones planteadas:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

$$T_e = \frac{E I'_L}{\omega} \quad (5.6)$$

Sustituyendo (4.5) en (5.6) se obtiene:

$$T_e = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L$$

y de acuerdo con la figura 15-b

$$T_m = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L - T_f \quad (7.9)$$

Según hemos establecido el par mecánico (T_m) permanecerá constante, lo cual motiva que al variar la corriente de excitación (que produce a la vez variación de la velocidad), varía también la corriente de línea (I_L).

Despejando la corriente de línea de (7.9), obtenemos:

$$I_L = \frac{(T_m + T_f)(b + I_{exc})}{a I_{exc}} \quad (7.10)$$

La ecuación (5.5) nos da el comportamiento del circuito de armadura con carga.

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.5) y (7.10) en la (5.5) y despejando la velocidad se tiene:

$$\omega = \frac{(aV - r_a T_m - r_a T_f) I_{exc}^2 + (abV - 2br_a T_m - 2br_a T_f) I_{exc} - b^2 r_a (T_m + T_f)}{a^2 I_{exc}^2} \quad (7.11)$$

que es una curva de la forma que muestra la figura 27-b. En este tipo de control, el rango de velocidades que se obtiene es muy pequeño, pues está sujeto a las limitaciones que describimos a continuación:

Límite superior.- Dado que para aumentar la velocidad es necesario disminuir la corriente de excitación, la corriente de línea aumenta, según podemos observar en la ecuación de par:

$$T_m = \frac{a}{b+I_{exc}} \quad I_{exc} \quad I_L = T_f \quad (7.12)$$

Como la máquina estará trabajando a par constante, la mínima corriente de excitación admisible es aquella con la que no se excede la corriente de línea nominal, por tanto despejando I_{exc} de la (7.12) tenemos:

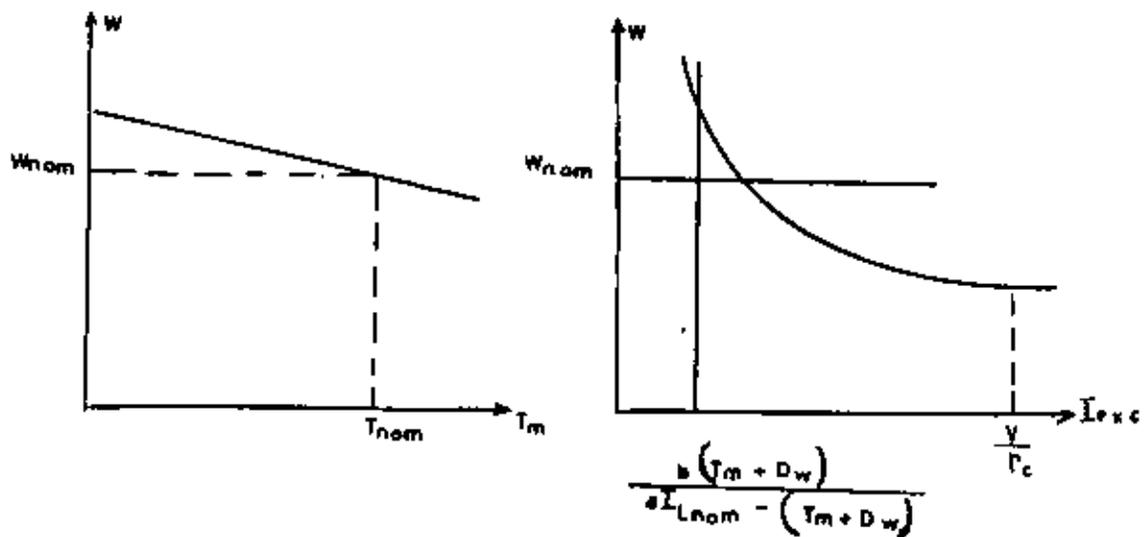
$$I_{exc} \text{ (mínima)} = \frac{b(T_m + T_f)}{aI_{L-nom} - (T_m + T_f)} \quad (7.13)$$

La corriente de excitación puede bajar hasta su valor mínimo dado en (7.13), siempre y cuando este valor no se exceda en forma peligrosa la velocidad nominal de la máquina.

Límite inferior.- Para disminuir la velocidad es necesario aumentar la corriente de excitación, reduciendo la resistencia del reóstato (r_r). Cuando se ha eliminado totalmente esta resistencia, solamente queda incluida en el circuito de excitación la resistencia del embobinado (r_c) y la corriente de excitación:

$$I_{exc} = \frac{V}{r_c}$$

es la máxima que se puede obtener.



En la figura 27-b observamos que para grandes variaciones cerca del límite superior de la corriente de excitación, las correspondientes variaciones en la velocidad resultan pequeñas, ya que la máquina está en una región de alta saturación. Por el otro extremo, la curva de velocidad es asintótica con el eje vertical, de manera que una excitación débil tiende a aumentar rápidamente la velocidad.

Razonando sobre ésta última observación, nos podemos dar cuenta del peligro que corre un motor al debilitarse (o interrumpirse, en el caso extremo) la corriente de excitación.

Regulación de velocidad.- El concepto de regulación de velocidad para la figura 27-a es exactamente bajo las mismas condiciones que se especifican para la ecuación (6.9)

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{\text{nom}}} \times 100.$$

3. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN SERIE

La máquina con excitación en serie presenta ciertas características particulares, que como veremos limitan las aplicaciones en calidad de generador, y en cambio, como motor presenta una respuesta que lo pone en ventaja con respecto a otros tipos de motores principalmente en lo que se refiere a sistemas de tracción.

El embobinado de excitación al estar en serie con la armadura lo consideraremos como parte del circuito de la misma, lo cual motiva que:

- La resistencia (r_a) que para los estudios anteriores incluye las resistencias del embobinado de armadura, conmutador, contacto conmutador-escobillas, escobillas y devanados de interpolos y/o compensadores, incluye ahora también la resistencia del devanado de campo en serie. Su valor es aproximadamente del mismo orden del que presenta el resto del circuito de armadura.
- La corriente de excitación es la misma corriente de línea, por lo cual en el análisis de este tipo de máquina utilizaremos la nomenclatura única (I_L).

La curva de saturación en vacío se puede obtener como experimento de laboratorio, pero en la práctica no es posible ajustar cualquier valor de voltaje dado por esta curva, en condiciones de vacío, ya que la excitación la da la corriente de carga.

8.1 GENERADOR CON EXCITACION EN SERIE

- a) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- En -

la figura 28 presentamos el diagrama de un generador con excitación en serie.

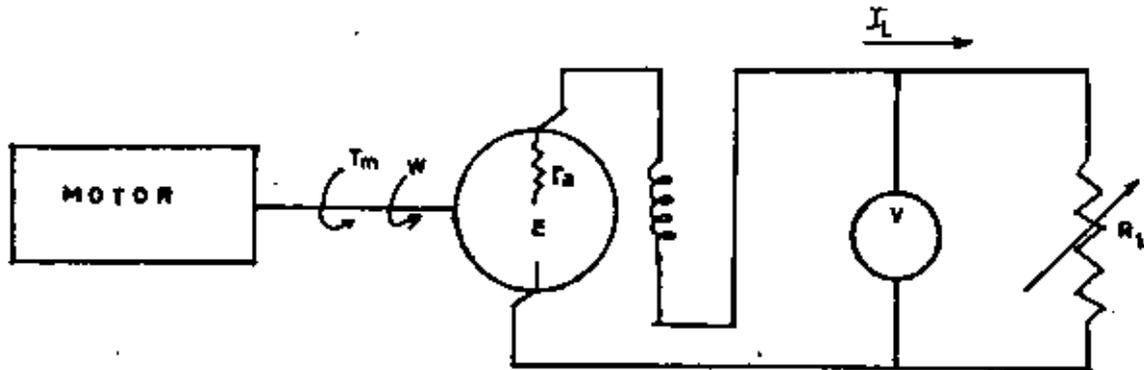


FIGURA 28

La resistencia de carga (R_L) puede variar desde un valor infinito (circuito abierto) hasta un valor pequeño, tal que haga circular la corriente nominal de la máquina. Por tanto la corriente de excitación (I_L) puede variar desde cero hasta el valor nominal, lo cual nos lleva a iniciar nuestro análisis a partir de la ecuación de Froelich (4.4).

$$E = \frac{a\omega I_L}{b + I_L} + P\omega \quad (4.4)$$

El comportamiento del circuito de armadura está dado por la (5.3)

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

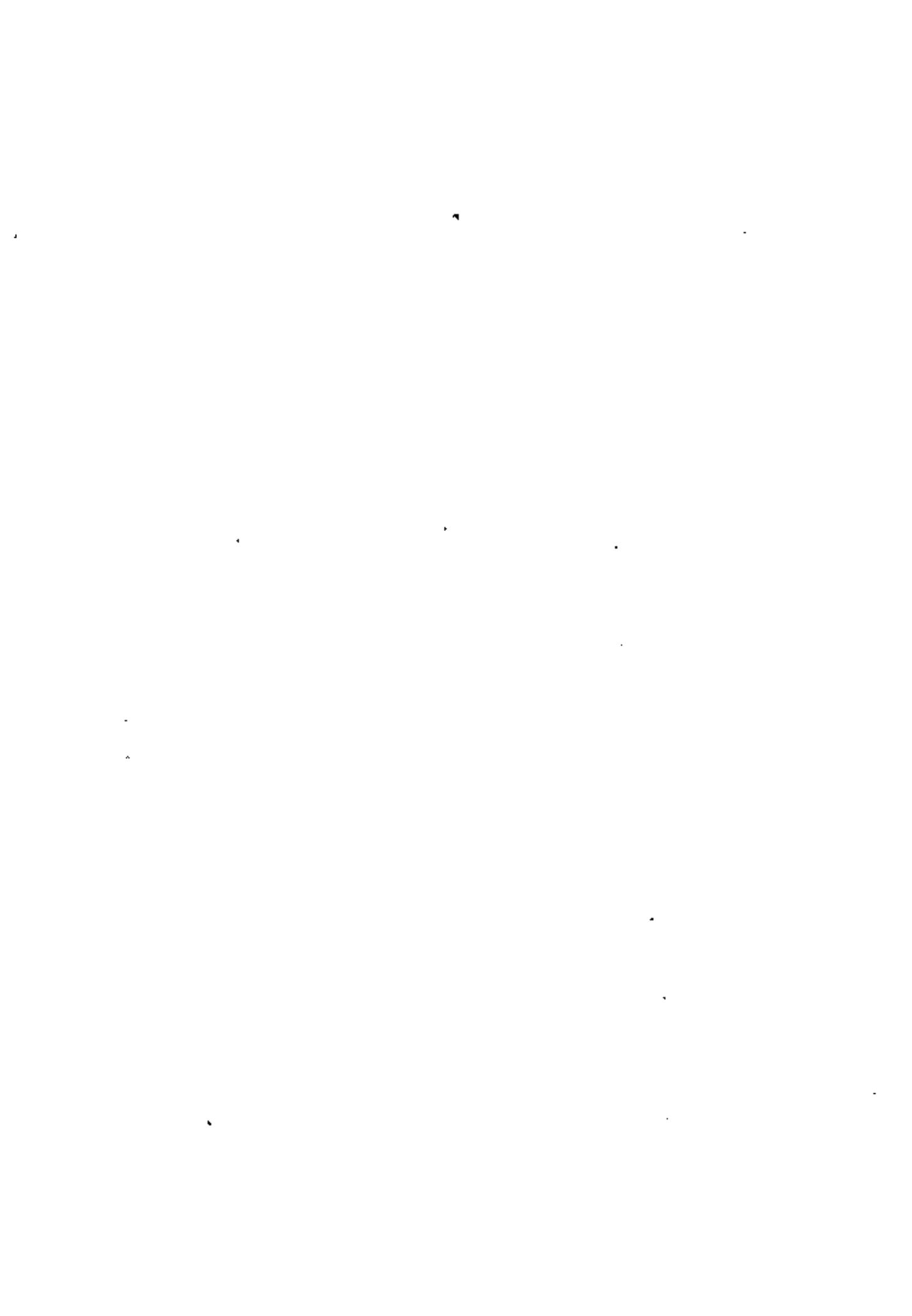
Sustituyendo (4.4) en (5.3) obtenemos:

$$V = \left(\frac{a\omega}{b + I_L} - r_a \right) I_L + P\omega \quad (8.1)$$

La ecuación (8.1) representa una curva de forma análoga a la de saturación en vacío, que se inicia en el mismo punto correspondiente al voltaje inducido por el magnetismo remanente, pero que pierde su pendiente en forma más rápida que ésta. En la figura 29-a podemos comparar la forma de estas dos curvas.

b) Par absorbido por el generador.- Hemos visto del análisis de la figura 15-a que:

$$T_m = T_e + T_f$$



y por la ecuación (5.6):

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

De manera que teniendo en cuenta (4.4) y (5.6) en la ecuación del par mecánico, obtenemos:

$$T_m = \frac{a I_L^2}{b + I_L} + P I_L + T_f \quad (8.2)$$

El primer término del segundo miembro de la (8.2) es el más significativo, por lo que podemos afirmar que el par absorbido -- por el generador (T_m), es proporcional al cuadrado de la corriente de carga (I_L). Su representación de tipo parabólico la podemos apreciar en la figura 29-b.

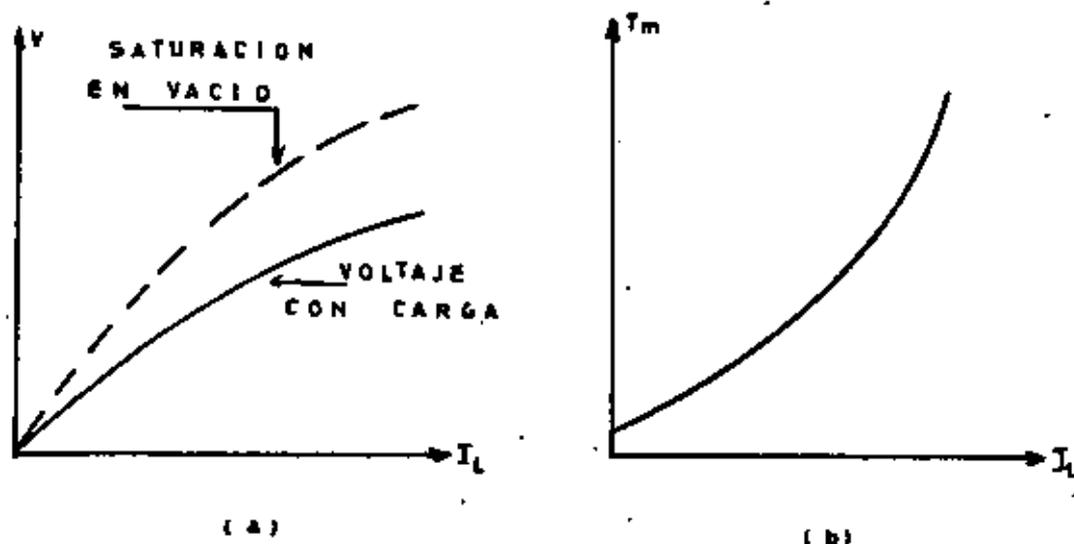


FIGURA 29

El concepto de regulación de voltaje no queda definido para este tipo de máquina, puesto que un valor "E" sobre la curva de saturación no es posible obtenerlo con la máquina en vacío.

8.2 MOTOR CON EXCITACION EN SERIE.

La figura 30 nos muestra el diagrama de la máquina con excitación en serie, trabajando como motor.

El comportamiento en el circuito de armadura para las condiciones de motor, nos lo da la ecuación (5.5)

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$



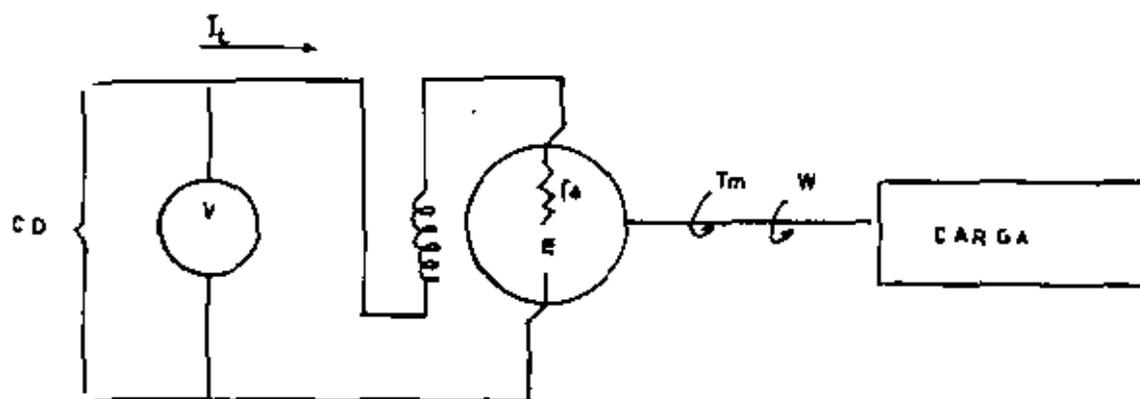


FIGURA 30

y de la figura 15-b tenemos el valor del par mecánico:

$$T_m = T_e - T_f$$

- a) Velocidad de la máquina con voltaje constante y carga variable.- La ecuación de equilibrio mecánico

$$T_m = \frac{a I_L^2}{b + I_L} + P I_L - T_f$$

nos muestra una relación entre el par de carga y la corriente de línea. Esto nos permite buscar una función que relacione la velocidad de la máquina con la corriente de línea, que resulta más sencilla que la que establece la relación con el par mecánico, como lo hemos hecho en otras ocasiones.

Sustituyendo la (4.4) en la (5.5) y despejando la velocidad obtenemos:

$$\omega = \frac{V_b + (V - r_a b) I_L - r_a I_L^2}{pb + (a + P) I_L} \quad (5.6)$$

que nos da una gráfica como la que muestra la figura 31-a. En esta gráfica podemos apreciar que a medida que baja la velocidad, la corriente se eleva rápidamente, y observando la figura 31-b (que deduciremos enseguida), podemos darnos cuenta que el aumento de corriente produce una rápida elevación del par.

Analizando la velocidad en sentido creciente, observamos que la máquina arranca con un par muy elevado y éste tiende a un valor normal a medida que se acerca a su velocidad nominal. Es el motor de mayor par de arranque que se conoce, lo que permite clasificarlo como el motor típico para sistemas de tracción.



- b) Variación de la corriente de línea con voltaje constante y par mecánico variable.- Al sustituir la (4.4) en la (5.6) y ésta en la expresión de par mecánico, obtenemos:

$$T_m = \frac{aI_L^2}{b+I_L} + PI_L - T_f \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) tiene dos variables independientes, que son la corriente de línea (I_L) y la velocidad (ω), por lo que para tabularla es conveniente seguir los mismos valores tabulados, en la ecuación (5.6), con lo que se obtiene una gráfica de la forma que ilustra la figura 31-b. En esta gráfica observamos que para valores elevados de par, las variaciones en éste producen pequeñas variaciones de corriente, y sucede a la inversa en valores de par pequeños.

De aquí deducimos también el peligro que corren estas máquinas cuando se quedan sin carga, pues la velocidad en estas condiciones se eleva considerablemente. La fricción en la máquina evita que se anule la corriente de línea, por lo que la velocidad sin carga tiene un límite, pero este suele estar muy por encima de la velocidad nominal, lo que provoca el estallamiento de la armadura por fuerzas centrífugas.

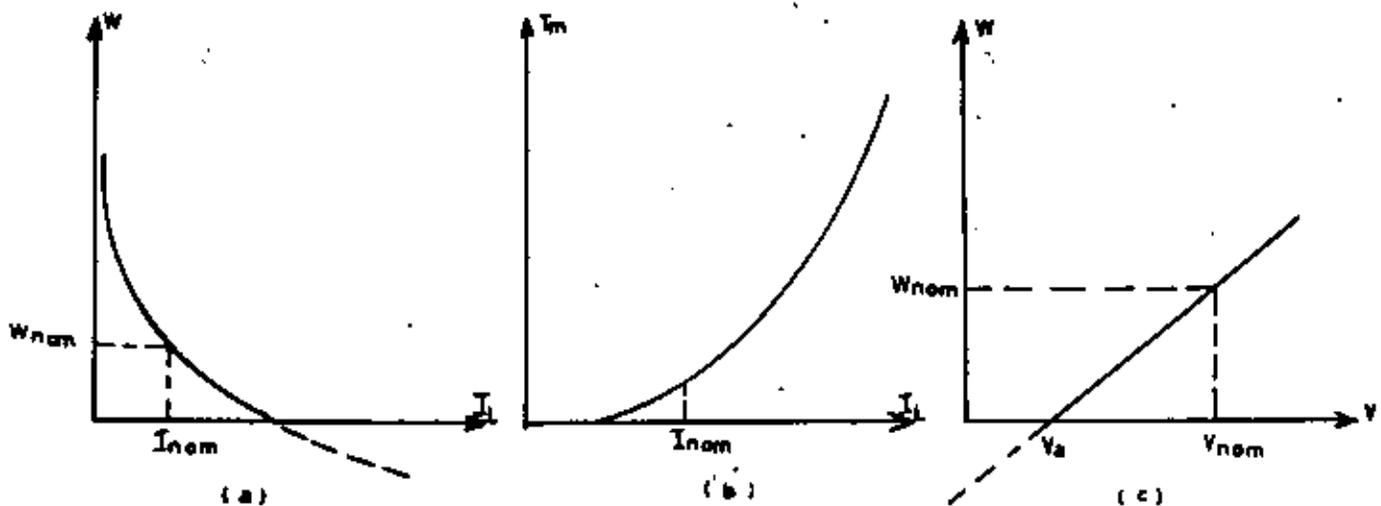


FIGURA 31

- c) Voltaje necesario para variar la velocidad con par constante.- De las figuras 31- a y b, podemos apreciar que la máquina es capaz de suministrar un par mecánico de valor muy elevado, pero a la vez haciendo circular una corriente que puede llegar a ser mayor que diez veces la nominal, por lo que en caso de buscar un control adecuado, éste sería el voltaje de alimentación.



Si analizamos, la ecuación (5.7), deducimos que en un par mecánico (T_m) constante a diferentes velocidades, corresponde muy aproximadamente a una corriente de línea (I_L) constante, ya que el término de pérdidas por fricción es pequeño.

Reagrupando los términos de la ecuación (5.6) para mostrar la corriente de línea (I_L) entre las constantes, y el voltaje (V) como variable independiente, tenemos:

$$\omega = \frac{(b+I_L) V - (r_a I_L^2 + r_a b I_L)}{a I_L + (b+I_L) P} \quad (5.8)$$

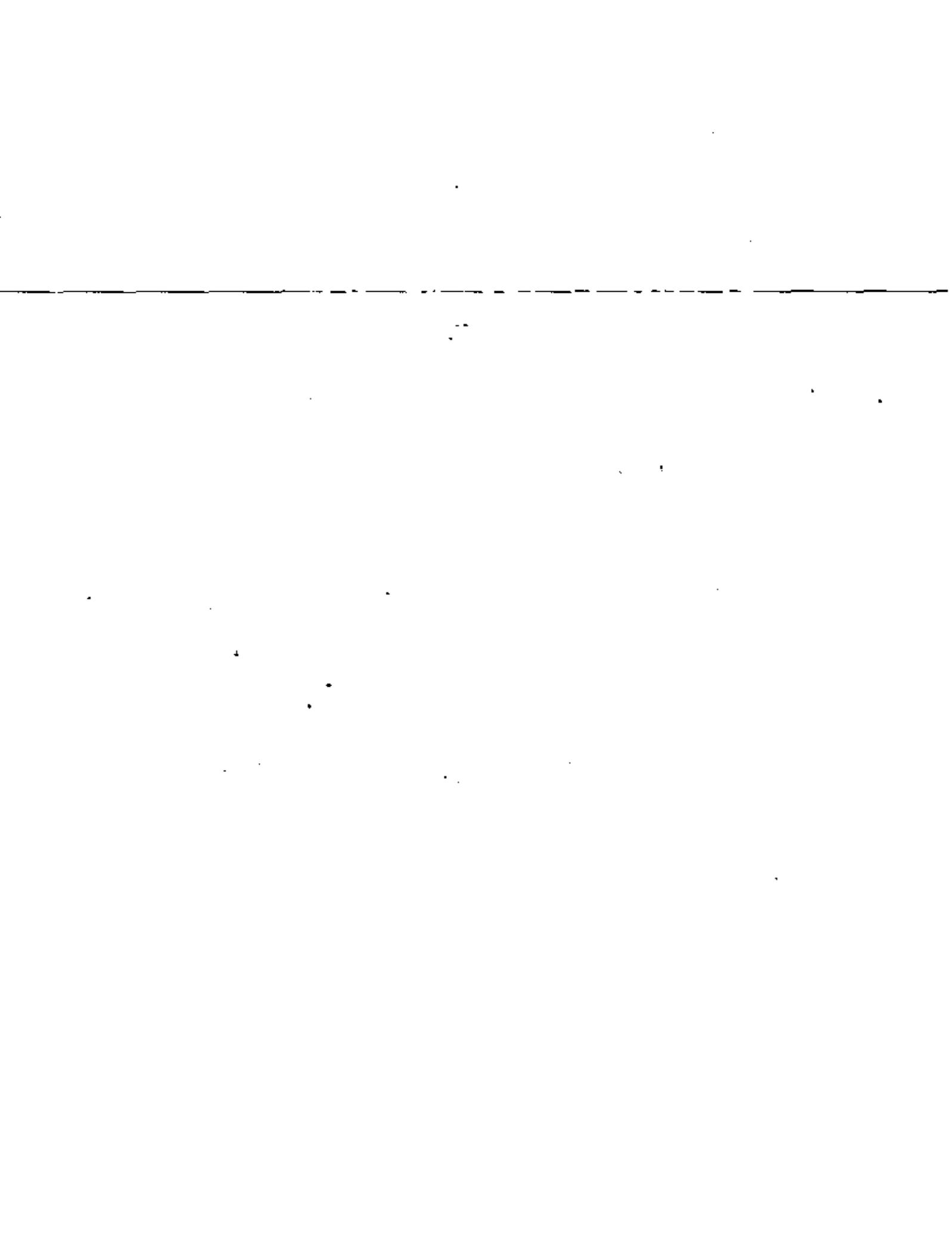
que es la ecuación de una recta cuya pendiente es $b+I_L/aI_L+(b+I_L)P$ y cuya ordenada al origen es $-(r_a I_L^2+r_a b I_L)/aI_L+(b+I_L)P$ como muestra la figura 31-c.

A fin de no sobrepasar los valores de corriente permisible en la máquina, es necesario un voltaje de arranque (V_a), y éste tendrá que incrementarse en forma lineal a medida que la máquina adquiere velocidad.

Puesto que este motor tiene su principal aplicación en la tracción de vehículos, puede considerarse que arranca a plena carga (par mecánico nominal) por lo que para obtener la máxima aceleración sin exceder las corrientes permisibles es necesario aplicar el voltaje de arranque (V_a) que muestra la figura 31-c.

Un voltaje menor que (V_a) hace circular corriente de menor valor, lo que se traduce en un par débil y por tanto, aceleración deficiente.

Un voltaje mayor que (V_a), por el contrario redundará en un par elevado y en una mejor aceleración, pero las sobrecorrientes tenderán al calentamiento de la máquina, sobre todo teniendo en cuenta que en la tracción de vehículos se presentan arranques frecuentes.



Ejemplo de aplicación

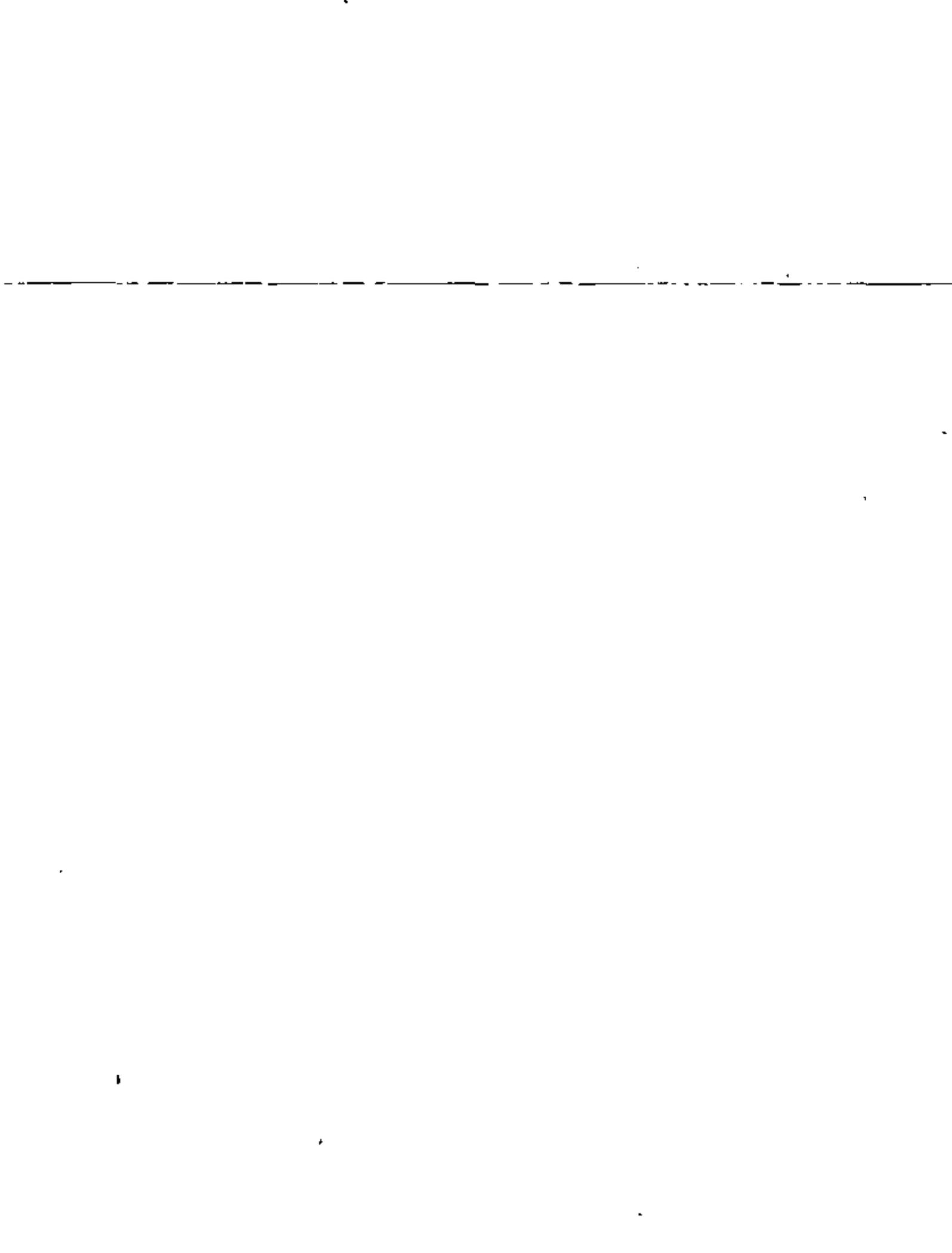
La máquina de C.D. del grupo MGII tiene las siguientes características nominales:

Trabajando como motor		Trabajando como generador	
7.5	H.P.	5	KW
115	Volts.	125	Volts
57	Amp.	40	Amp.
1000	R.P.M.	1000	R.P.M.

se le hicieron las siguientes pruebas de laboratorio:

Saturación en vacío:		Voltaje terminal con carga:		como motor en vacío:	
I _{exc.}	E	V _L	I _L	V _L	I _L
0.0	4	125	0.0	115	5.3
0.25	21	124.5	4.8		
0.36	30	123.5	9.9		
0.48	40	123.0	14.9		
0.60	51	122.0	20.0		
0.72	61	121.5	24.4		
0.82	70	120.5	29.8		
0.98	82.5	120.0	34.6		
1.09	91	con excitación independiente			
1.21	101	I _{exc} = 1.58			
1.32	110				
1.508	121				
1.69	130				
1.9	140				
2.2	151				
2.5	160				
2.79	170				
3.49	180				

- Obtener el valor de los parámetros a , b , P , r_a y T_f
- Calcular cuál debe ser el voltaje en vacío para que a plena carga pueda suministrar sus valores nominales, trayendo como generador en derivación. (Incluir el cálculo de las características del reóstato).
- Trazar la curva completa de variación de voltaje con carga y obtener la máxima corriente y potencia que es capaz de suministrar, y la regulación de voltaje.
- Trazar la curva completa de variación de par con respecto al voltaje.



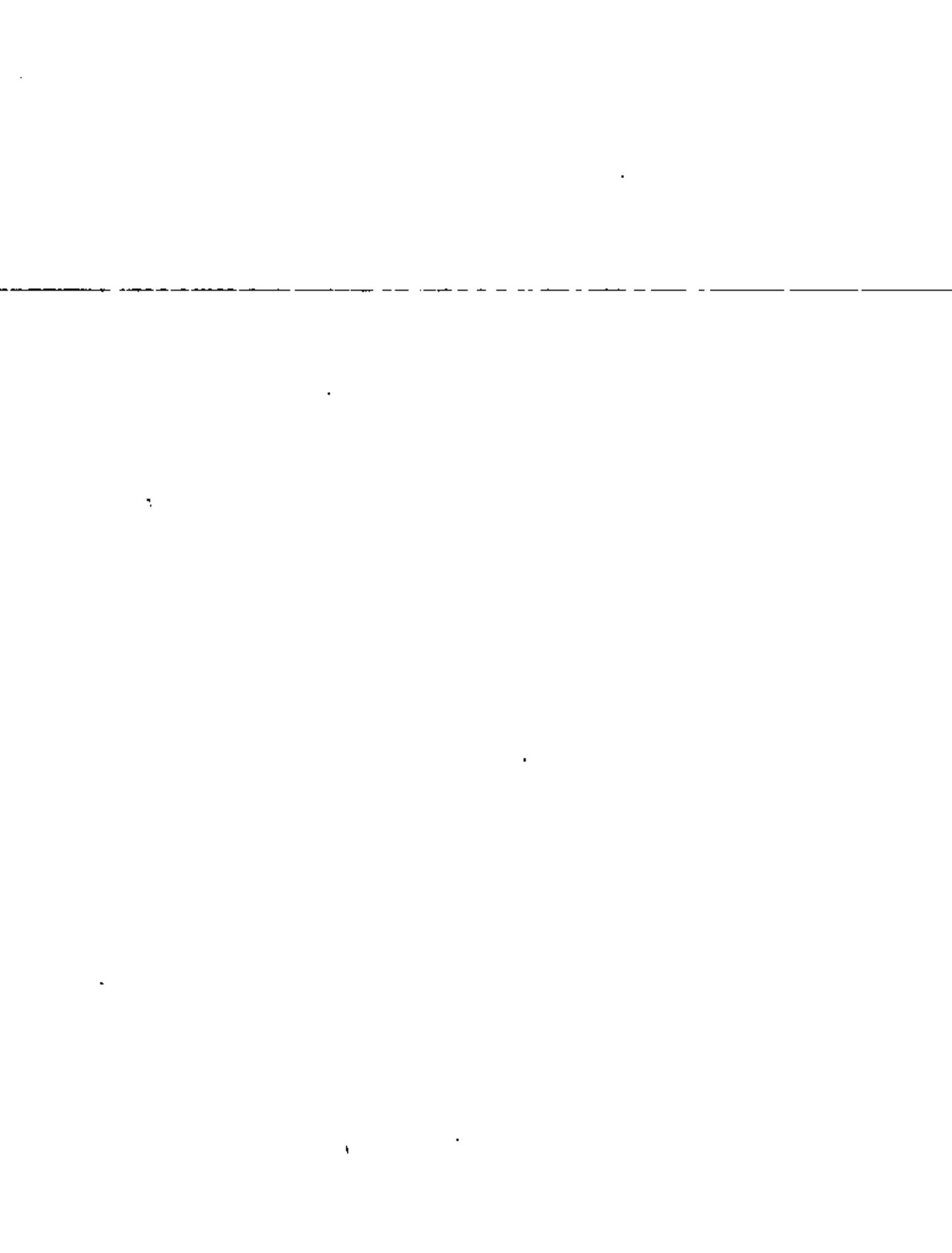
- e) Calcular la corriente de excitación para que suministre la velocidad nominal en condiciones de plena carga, cuando se le aplica al circuito de armadura el voltaje nominal, trabajando como motor.
- f) Trazar la curva de variación de velocidad con respecto a la carga, con voltaje de armadura y corriente de excitación constantes.
- g) Trazar la gráfica del voltaje de armadura necesario para mantener la velocidad nominal constante con carga variable (excitación independiente y constante)
- h) Trazar la gráfica de voltaje necesario para control de velocidad con carga constante (par mecánico constante)

S O L U C I O N

- a) Con el fin de tener valores comparativos que nos puedan mostrar la aproximación de la ecuación de Froelich, repetimos a continuación la tabla para la curva de saturación en vacío y otras dos columnas para tabular las funciones que obtengamos.

REFE- REN- CIA.	SATURACION EN VACIO		FUNCION DE FROELICH	
	I_{exc}	E	E_1	E_2
1	0.0	4	4	0
2	0.25	21	31	28
3	0.36	30	41	40
4	0.48	40	52	51
5	0.60	51	62	61
6	0.72	61	72	71
7	0.82	70	79	78
8	0.98	82.5	90	89
9	1.09	91	97	96
10	1.21	101	104	104
11	1.32	110	110	110
12	1.508	121	120	120
13	1.69	130	129	129
14	1.9	140	138	138
15	2.2	151	150	150
16	2.5	160	160	160
17	2.79	170	170	169
18	3.49	180	188	187

con las columnas I_{exc} . y E, trazamos la curva de saturación en vacío que muestra la figura Ej.1.1.



Para la función exacta, elegimos los puntos 18 y 14 con lo que obtenemos el sistema:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} + 4 \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9 +b} + 4$$

de donde $a\omega = 271.38$, $b = 1.89$

Tomando ahora los puntos 15 y 10 obtenemos:

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+a} + 4$$

de donde $a\omega = 397.3$, $b = 3.75$

Promediando estos valores obtenemos:

$$a\omega = 333, \quad b = 2.81$$

Como la velocidad de prueba fué 1200 RPM = 125.6 rad/seg.

$$a = \frac{333}{125.6} = 2.65 \quad P = \frac{4}{125.4} = 0.0318$$

Por lo que la función de Froelich queda:

$\text{Función 1: } \frac{2.65 \omega I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 0.0318\omega$
--

Para la función aproximada, tomando los mismos puntos tenemos:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9+b}$$

de donde $a\omega = 273.31$, $b = 1.8$

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+b}$$

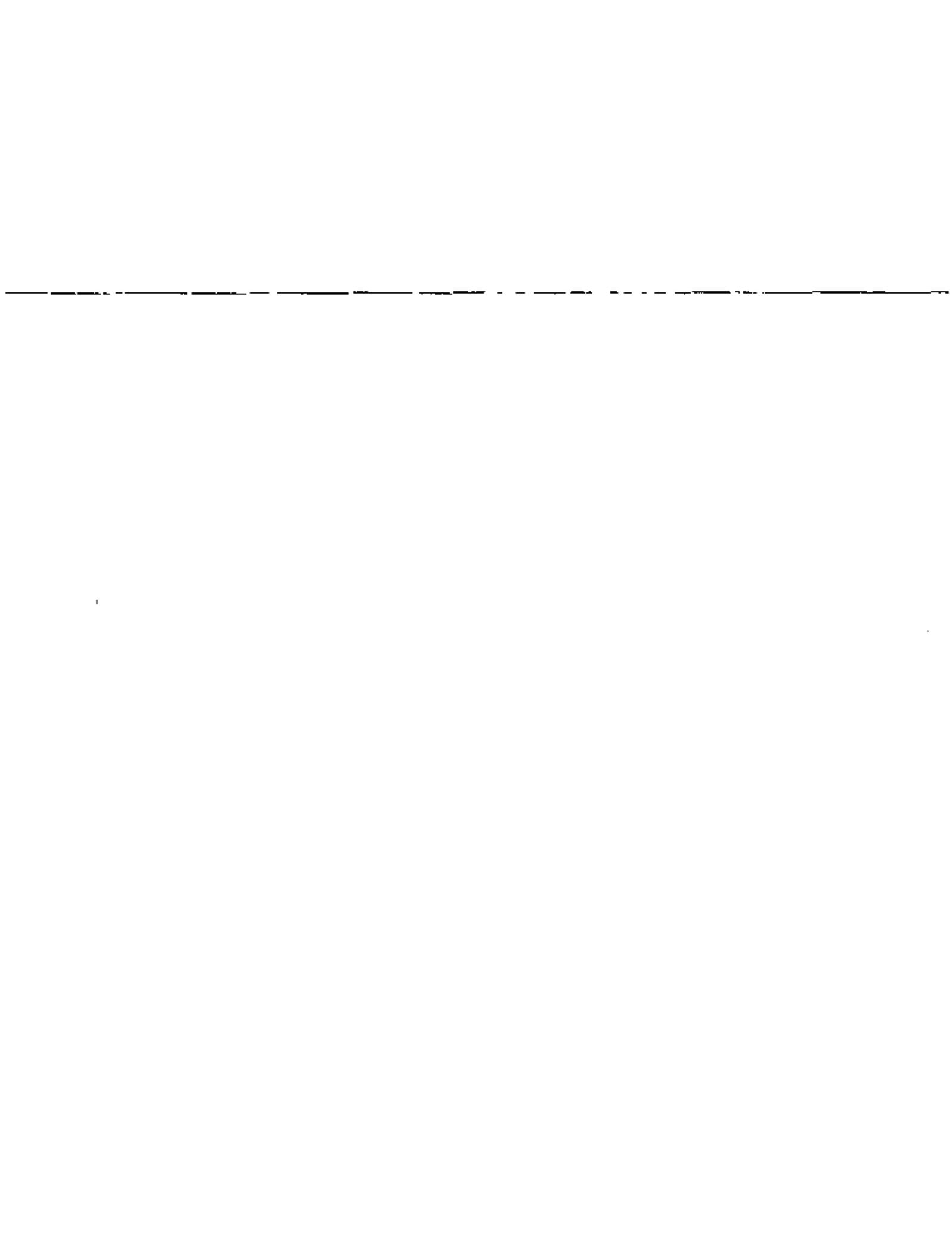
de donde $a\omega = 382.34$, $b = 3.37$

Promediando los valores obtenidos:

$$a\omega = 327 \quad b = 2.589$$

Dividiendo a entre la velocidad de prueba:

$$a = \frac{327}{125.6} = 2.6$$



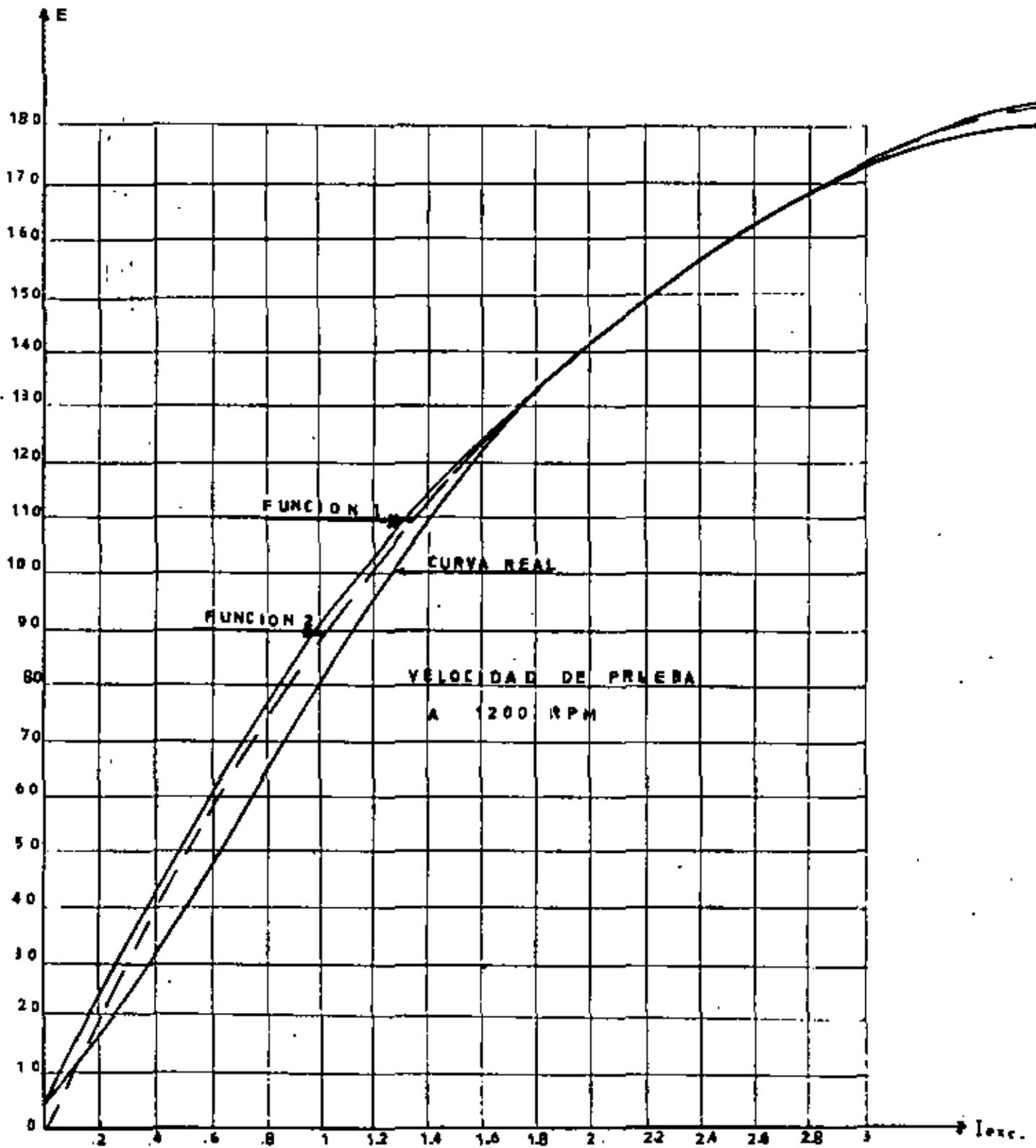


FIG. EJEM. 1.1

+

-

.

'

.

.

.

de donde obtenemos la función aproximada de Froelich:

$$\text{Función 2: } E_2 = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

Tabulando las funciones 1 y 2 vemos los valores junto con la tabla de la curva de saturación en vacío que aparecen anteriormente. Las curvas respectivas las observamos en la misma figura Ej.1.1.

De los datos de placa observamos que el voltaje nominal es de 125 volts a 1000 RPM. Como la prueba se efectuó a 1200 RPM, consideraremos como voltaje normal 150 volts. Como las curvas prácticamente coinciden entre 130 y 170 volts, podemos aceptar como válidas las funciones.

Nota.- En caso de desear mayor aproximación, de ser esto factible, se podría experimentar con nuevas funciones cuyos parámetros ajustaríamos desplazando las asíntotas de las curvas según fuera necesario.

Para obtener la resistencia del circuito de armadura es conveniente verificar si la prueba de voltaje (V_c) con corriente de carga (I_c) resulta en línea recta. Con los datos de prueba hacemos la gráfica de la figura Ej. 1.2.

Después de trazar la gráfica observamos que efectivamente sale una recta, lo que nos indica que la respuesta de la máquina no se ve deformada por la reacción de armadura.

De acuerdo a la ecuación:

$$V = E - r_a I_L$$

$$r_a = \frac{E-V}{I_L}$$

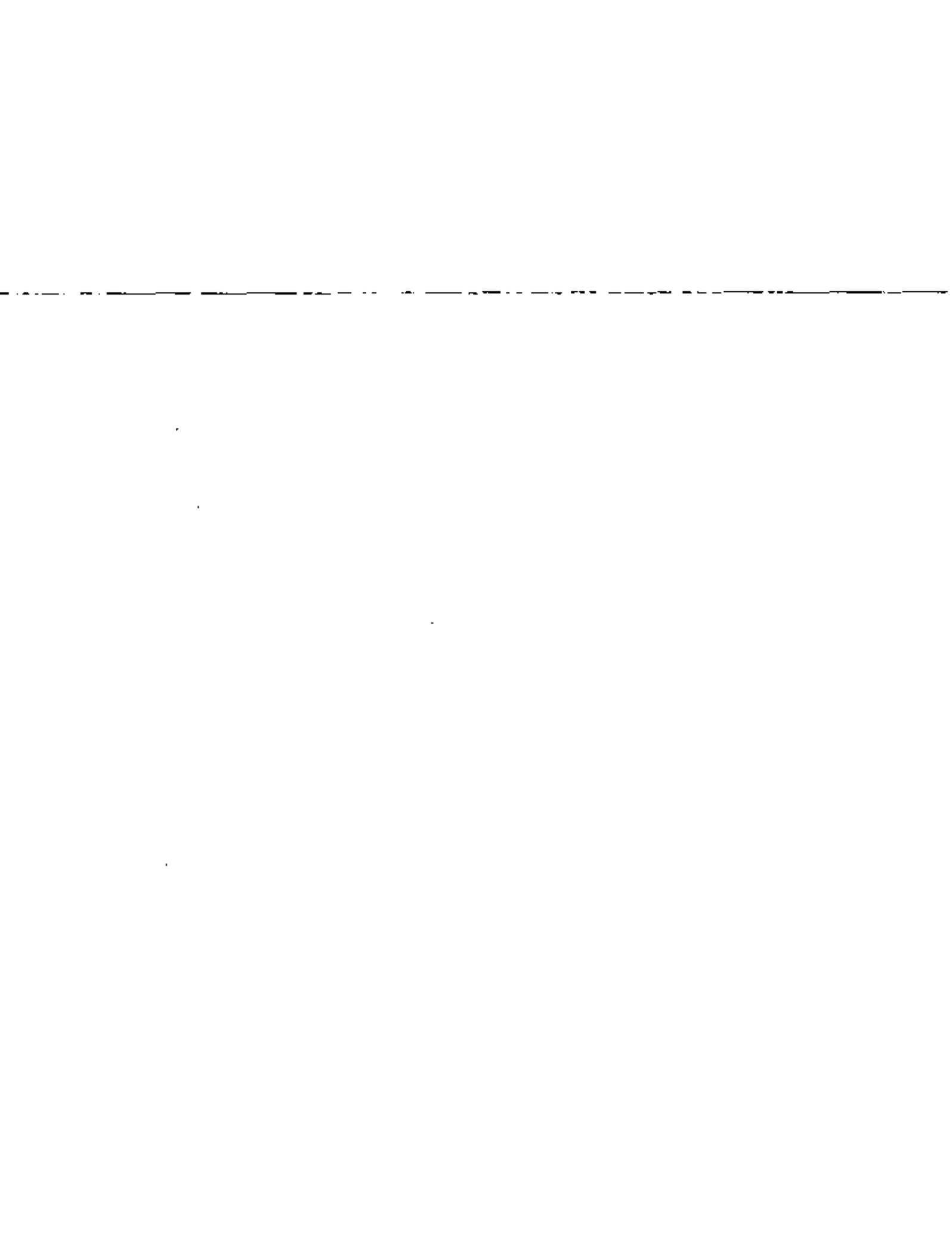
en donde E es el voltaje en vacío (125 V) y a cada V corresponde una I_L de acuerdo a la tabla de datos:

El valor más exacto seguramente es el promedio de los valores obtenidos aplicando la ecuación a cada punto.

$$r_a = \frac{\frac{125-124.5}{4.8} + \frac{125-123.5}{9.9} + \frac{125-123}{14.9} + \frac{125-122}{20} + \frac{125-121.5}{24.4} + \frac{125-120.5}{29.8} + \frac{125-120}{34.6}}{7}$$

de donde

$$r_a = 0.147 \text{ ohms}$$



El par de fricción lo obtenemos trabajando la máquina como motor en vacío, ya que en estas condiciones el par eléctrico es igual al par de pérdidas, o sea, haciendo $T_m = 0$ en la ecuación de equilibrio mecánico:

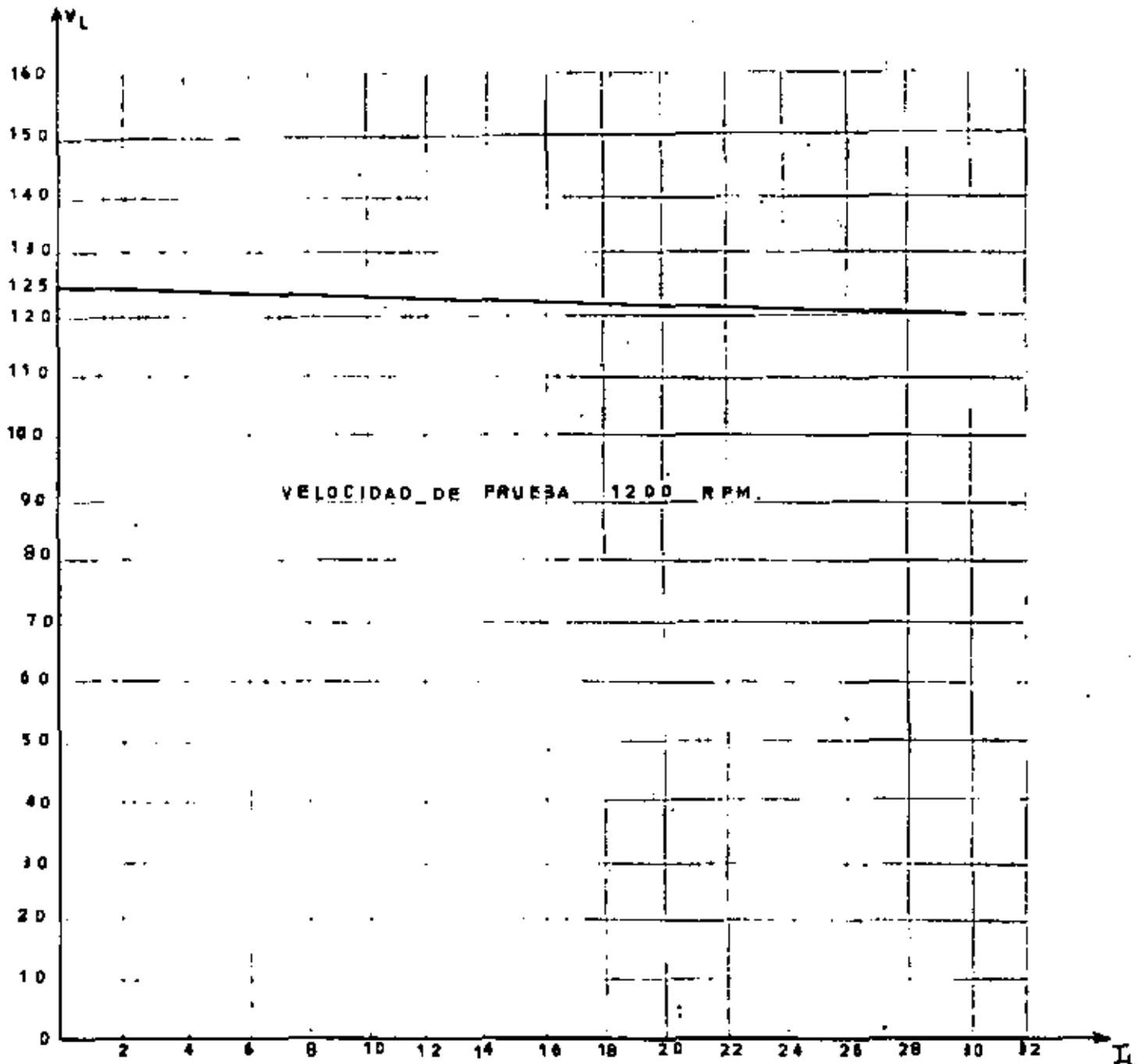
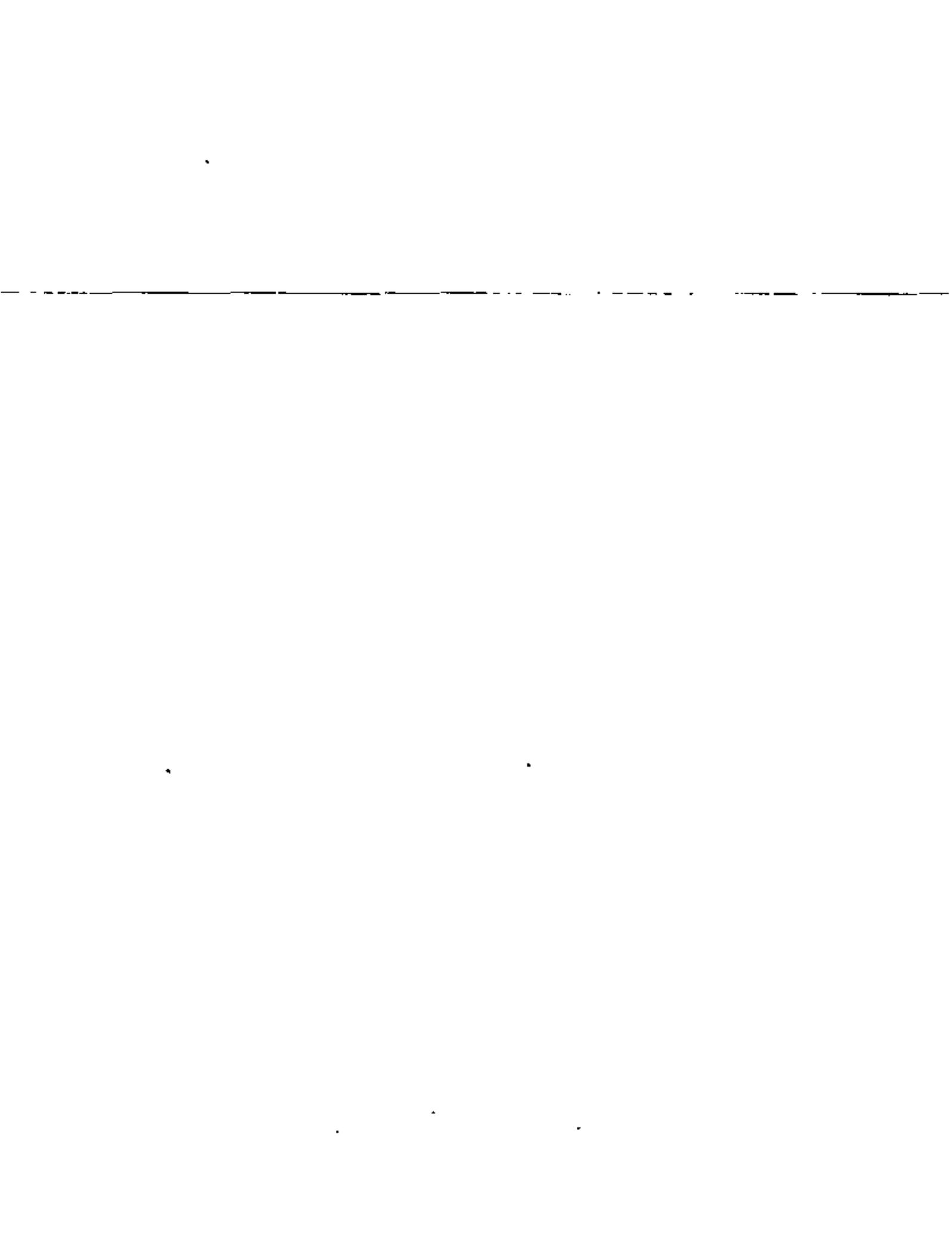


FIG. Ej. 1.2



$$0 = T_e - T_f \quad \text{en donde } T_e = \frac{EI_L}{\omega}$$

por tanto:

$$T_f = \frac{EI_L}{\omega} = \frac{(V - r_a I_L) I_L}{\omega} = \frac{VI_L - r_a I_L^2}{\omega}$$

$$T_f = \frac{(115 \times 5.3) - (0.147 \times 5.3^2)}{104.72}$$

$$T_f = 5.78 \text{ New-m}$$

En vista de que la máquina está permanentemente acoplada, este resultado incluye la fricción tanto de la máquina de C.D. como de la de C.A.

Teniendo en cuenta que la máquina de C.D. tiene mayor fricción que la de C.A, estimaremos su coeficiente como los 2/3 del total.

$$T_f = 3.85 \text{ New - m}$$

Respuestas del inciso a):

Función exacta	a= 2.65	b= 2.81	P= 0.0318
Función aproximada	a=2.6	b= 2.589	
Resistencia del circ.de arm.	$r_a = 0.147 \text{ ohm.}$		
Par de fricción	$T_f = 3.85 \text{ New-m.}$		

Teniendo en cuenta que la velocidad nominal de la máquina es de 1000 RPM (104.72 rad./seg.) las funciones de Proelich para estas condiciones serán:

$$E_1 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 I_{exc}} + 3.33 \quad \text{con magnetismo remanente}$$

$$E_2 = \frac{2.72.27 I_{exc}}{2.589 + I_{exc}} \quad \text{despreciando el magnetismo remanente.}$$

Tabulando estas ecuaciones obtenemos las gráficas que mostramos en la figura Ej.1.3.

b) La ecuación característica del generador con carga es:

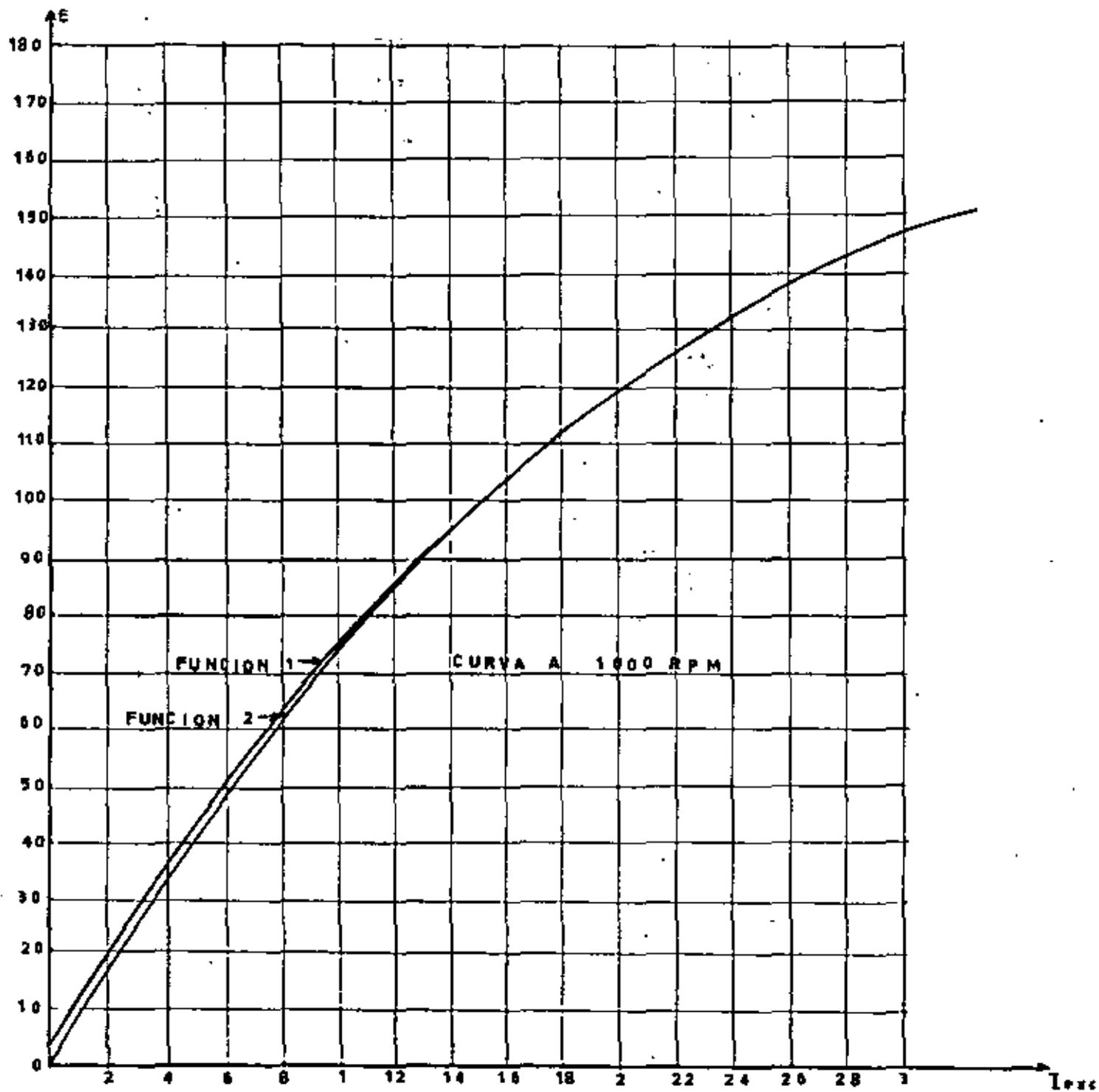


FIG. Ej. 1.3

$$V = E - r_a I_L$$

en donde $E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P \omega$

de modo que:

$$V = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P \omega - r_a I_L$$

Las características nominales de la máquina son:

$$V = 125 \text{ Volts}$$

$$I_L = 40 \text{ Amp.}$$

$$N = 1000 \text{ RPM}$$

Sustituyendo estos valores y los de los parámetros obtenemos:

$$125 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 3.33 - 5.88$$

Teniendo en cuenta además que la corriente de excitación se obtiene del voltaje externo de la máquina:

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c} = \frac{125}{R_c}$$

por tanto

$$125 = \frac{34687.5}{2.81 R_c + 125} + 3.33 - 5.88$$

de donde $R_c = 52.296$

y la corriente de excitación

$$I_{exc} = \frac{125}{52.296} = 2.39 \text{ Amp.}$$

Si se quita carga a la máquina, el voltaje externo aumenta hasta igualarse con la fem., pero esto a la vez motiva un aumento de la corriente de excitación. Lo que permanece constante es la resistencia del circuito de campo (R_c). Por lo tanto:

$$E = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 3.33$$

en donde



$$I_{exc} = \frac{E}{52.296}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$E = \frac{277.5 E}{146.95 + E} + 3.333$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$E = 137.44 \quad E = -3.56$$

La solución válida es la primera, por tanto:

$$E_{vacío} = 137.44 \text{ Volts}$$

En estas condiciones se obtiene la máxima corriente de excitación siendo su valor:

$$I_{exc} = \frac{137.44}{52.296} = 2.6 \text{ Amp.}$$

Teniendo en cuenta además que la resistencia del circuito de campo (total) está entre 50 y 60 ohms, y la resistencia del embobinado es de 40 ohms, el restante corresponde al reóstato.

Características recomendables del reóstato

Resistencia 0-30 ohms.

Capacidad de corriente 3 Amp. mínimo

- c) Para el trazo de la curva de variación de voltaje con carga, usamos las ecuaciones:

$$V = E - r_a I_L$$

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$$

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c}$$

Sustituyendo la tercera en la segunda y esta en la primera obtenemos:



$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} + P\omega - r_a I_L$$

sustituyendo valores:

$$V = \frac{277.5 V}{146.95 + V} + 3.33 - 0.147 I_L$$

En donde lo más sencillo es considerar V como variable independiente, o sea:

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Para encontrar el valor máximo de I_L , igualamos a cero la primera derivada de esta función:

$$\frac{(146.95+V)(910.75-13.6V) - (3328.8+910.75V-6.8V^2)}{(146.95 + V)^2} = 0$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$V = 55, \quad V = 348.9$$

La solución válida es la primera, para la cual corresponde una corriente de línea $I_L = 162.66$.

Tabulando la función de corriente de línea obtenemos:

Referencia	V	I_L	Referencia	V	I_C
1	0	22.65	9	70	155.43
2	10	74.86	10	80	143.75
3	20	119.93	11	90	127.31
4	30	138.53	12	100	106.69
5	40	154.35	13	110	82.39
6	50	161.65	14	120	54.81
7	55	162.66	15	130	24.31
8	60	161.68	16	137.44	0.083

La gráfica aparece en la figura Ej. 1.4.

Para la potencia máxima que puede entregar el generador multiplicamos la ecuación

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Por V , con lo que el primer miembro equivale a P .

• •

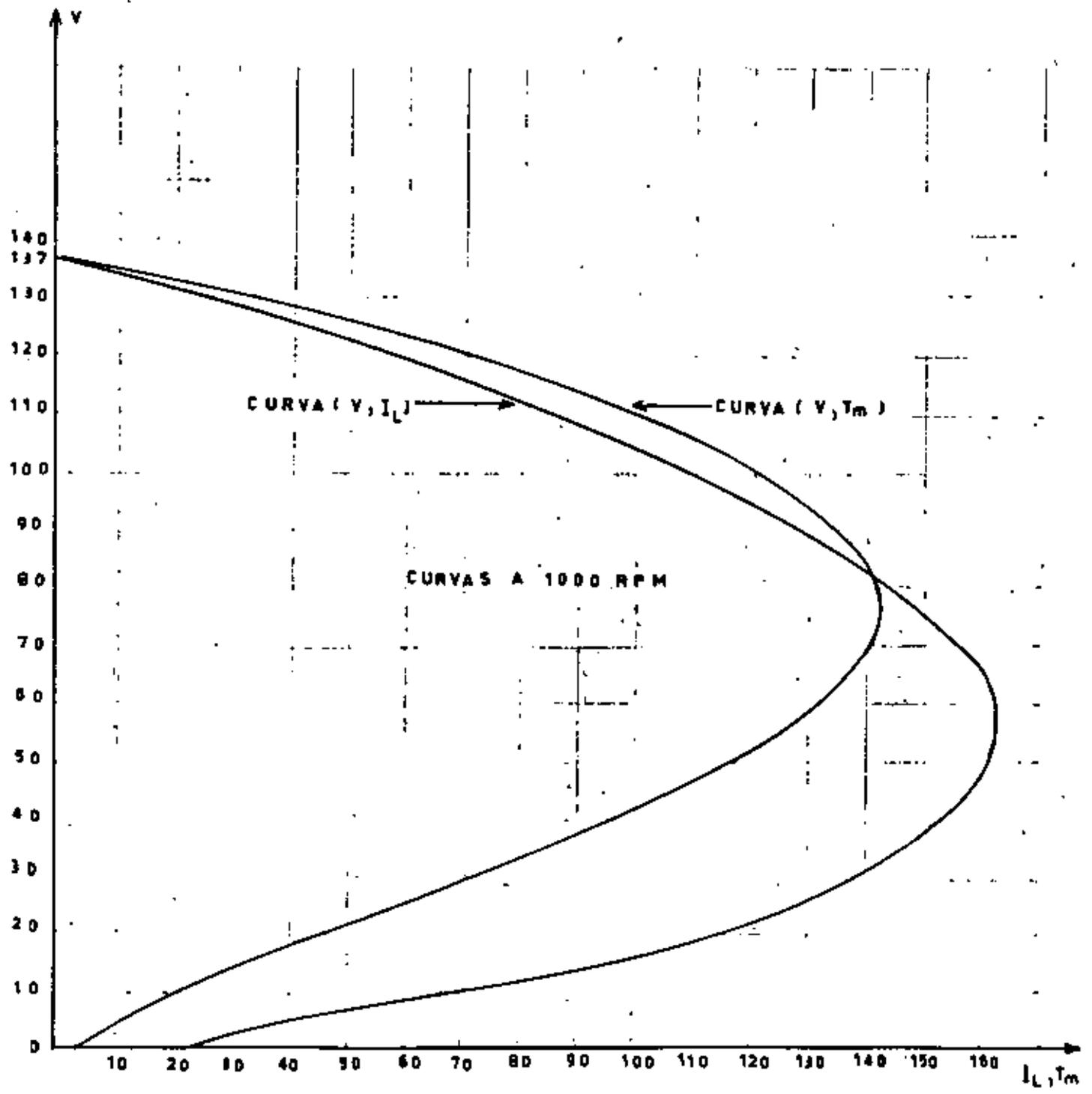
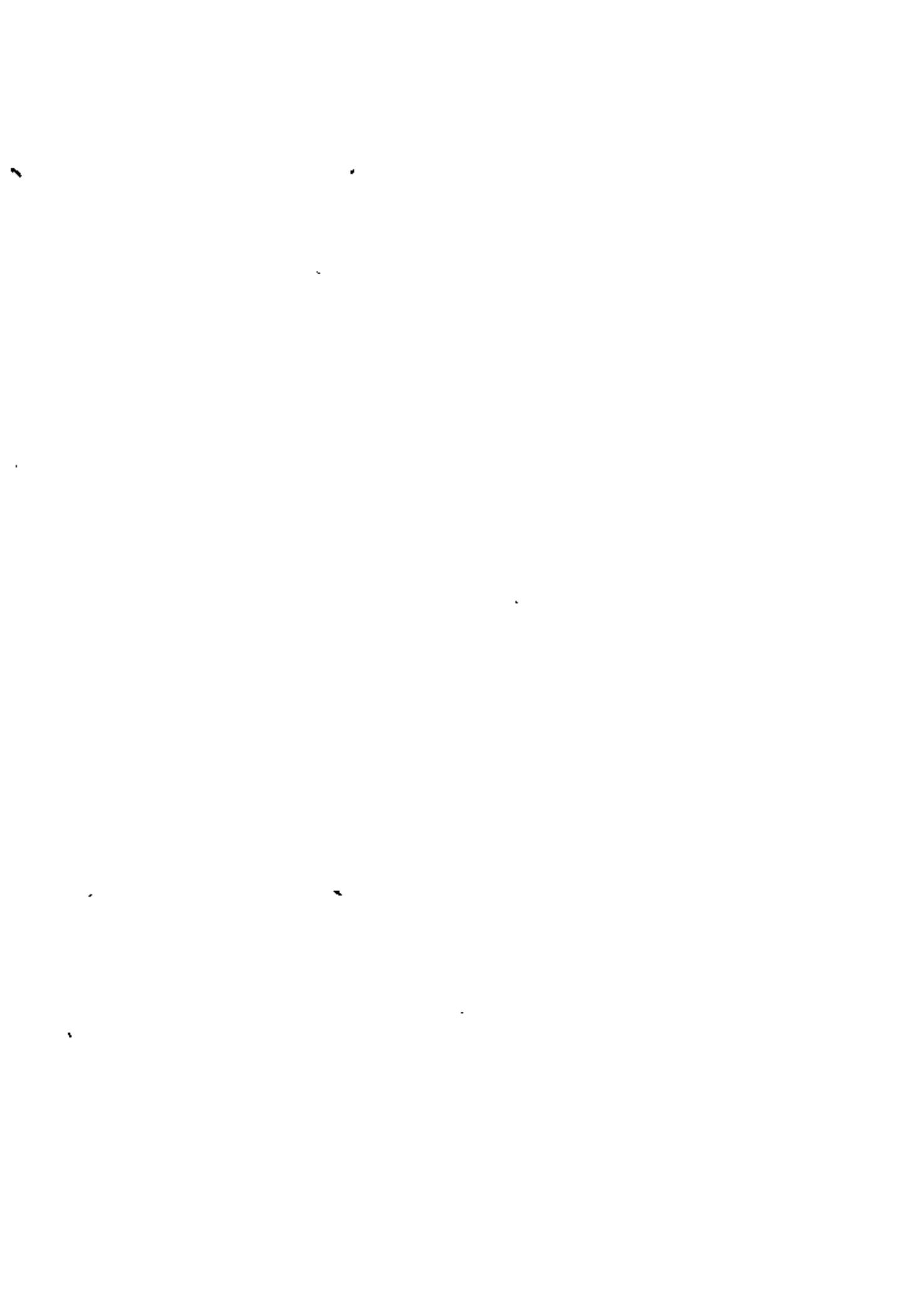


FIG. Ej. 1.4



$$P = \frac{3328.8 V + 910.75 V^2 - 6.8 V^3}{146.95 + V}$$

Igualando la primera derivada a cero:

$$\frac{(146.95+V)(3328.8+1821.5V-20.4V^2) - (3328.8V+910.75V^2-6.8V^3)}{(146.95+V)^2} = 0$$

que es una ecuación de tercer grado. La raíz comprendida entre en rango de voltajes de la máquina es:

$$V = 84.5$$

para el cual corresponde una corriente:

$$I_L = 137.1$$

Por lo que la potencia máxima será:

$$P = V I_L = 84.5 \times 137.1$$

$$P_{\max} = 11585.5 \text{ watts.}$$

La regulación de voltaje corresponde a los valores de vacío y plena carga, o sea $I_L=0$ e $I_L=40$

$$\text{Reg.} = \frac{137.44-125}{125} \times 100$$

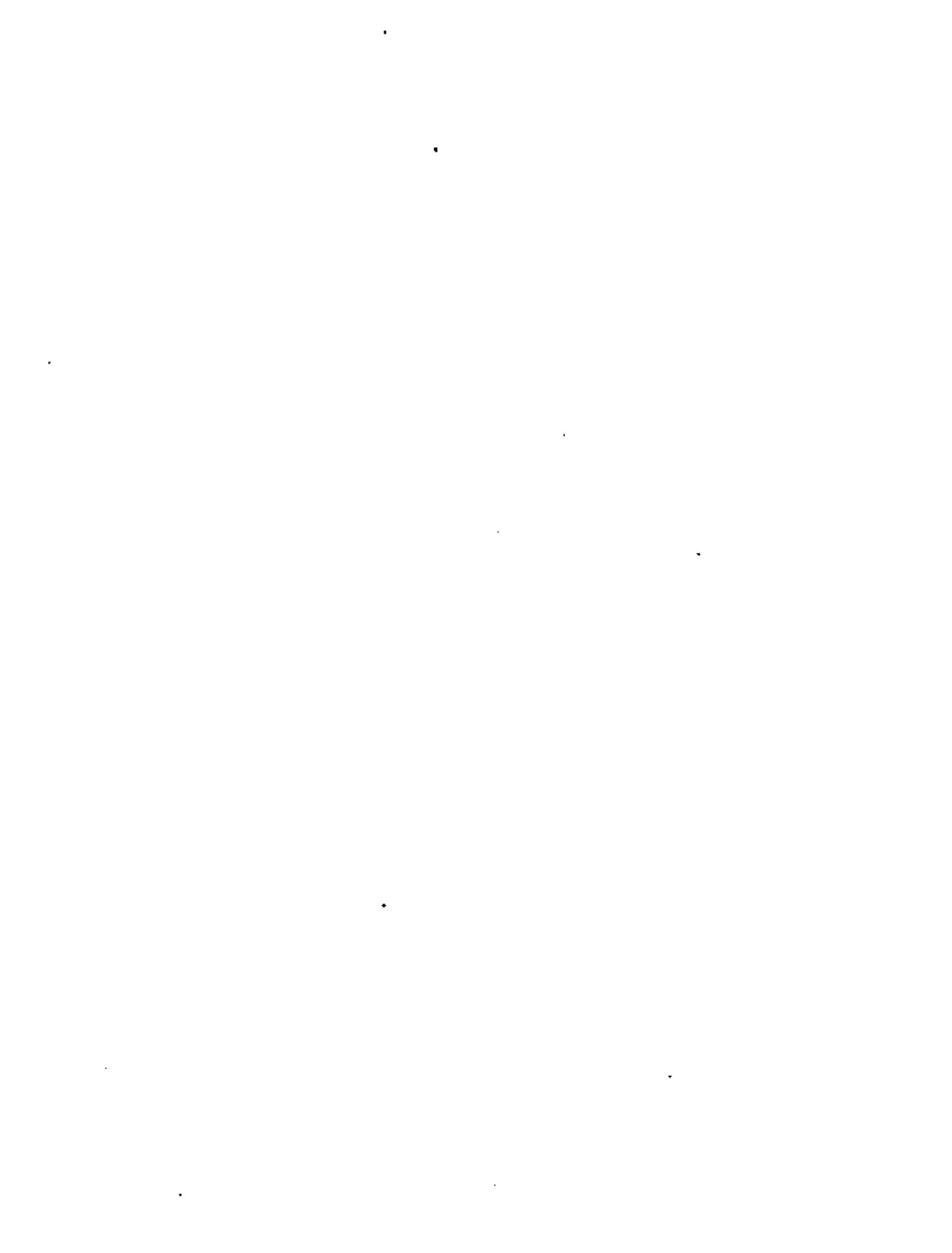
$$\text{Reg} = 9.9 \%$$

d) El par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} + T_f$$

en donde $E = V + r_a I_L = V + 0.147 I_L$

Para tabular esta ecuación lo más sencillo es hacer uso de la tabla de resultados del inciso (c).



Ref.	V	I_L	E	$\frac{E I_L}{\omega}$	T_m
1	0	22.65	3.329	0.720	4.593
2	10	74.86	21.004	15.017	19.043
3	20	119.93	37.629	43.102	46.97
4	30	138.53	50.363	66.636	70.50
5	40	154.35	62.689	92.41	96.28
6	50	161.65	73.762	113.88	117.75
7	55	162.66	78.911	122.59	126.46
8	60	161.68	83.767	129.35	133.22
9	70	155.43	92.84	137.82	141.69
10	80	143.75	101.131	138.84	142.71
11	90	127.31	108.71	132.18	136.05
12	100	106.69	115.68	117.87	121.74
13	110	82.39	122.111	96.09	99.96
14	120	54.81	128.05	67.037	70.90
15	130	24.31	133.573	31.01	34.88
16	137.44	0.083	137.452	0.1091	3.98

La gráfica correspondiente la observamos en la figura Ej, 1.4

El par máximo debe presentarse al valor en que el generador entrega su máxima potencia. Para 84.5 volts:

$$I_L = 137.1 \quad E = 104.6 \quad T_e = 139 \quad T_m = 142.8$$

y la potencia mecánica necesaria para mover el generador en estas condiciones es:

$$P = T_m \omega = 14958.8 \text{ Watts} = 20 \text{ H.P.}$$

e) La ecuación de equilibrio mecánico para las condiciones de motor es:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} - T_f$$

Al multiplicar esta ecuación por la velocidad (ω), en el primer miembro nos queda la potencia mecánica

$$P = E I_L - T_f \omega$$

$$7.5 \times 746 = E I_L - 3.85 \times 104.7$$

$$E I_L = 6000 \text{ Watts}$$



La ecuación de equilibrio eléctrico para las condiciones de motor es:

$$V = E + r_a I_L$$

Multiplicando esta ecuación por I_L tenemos:

$$V I_L = E I_L + r_a I_L^2$$

$$115 I_L = 6000 + 0.147 I_L^2$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son

$$I_L = 56.2 \text{ Amp.} \quad I_L = 726 \text{ Amp.}$$

El primer valor es el que tiene una interpretación real. Llevando este valor a la ecuación de equilibrio eléctrico:

$$V = E + r_a I_L$$

$$115 = E + 0.147 \times 56.2$$

$$E = 106.74 \text{ Volts}$$

Trabajando como motor, la operación de la máquina está lejos del magnetismo remanente, por lo que podemos aplicar la ecuación aproximada de Froelich:

$$E = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

de donde:

$$I_{exc} = \frac{2.589 E}{2.6\omega - E}$$

$$I_{exc} = \frac{2.589 \times 106.74}{(2.6 \times 104.7) - 106.74}$$

$I_{exc} = 1.67 \text{ Amp.}$

Para todo análisis en el que se mantenga constante este valor de la corriente de excitación, la constante de excitación será:

$$K_e = \frac{2.6 \times 1.67}{2.589 + 1.67}$$

$$K_e = 1.019$$

De manera que

$$E = 1.019\omega$$

Manteniendo el voltaje aplicado y la corriente de excitación sin variación, la corriente de línea en vacío será:

$$0 = \frac{E I_L}{\omega} - T_f$$

$$0 = 1.019 I_L - 3.85$$

$$I_L = 3.8 \text{ Amp.}$$

y la velocidad en vacío la obtenemos de la ecuación de equilibrio eléctrico:

$$V = E + r_a I_L$$

$$115 = 1.019 \omega + (0.147 \times 2.8)$$

$$\omega = 113.45 \text{ rad/seg.}$$

y por lo tanto, la regulación de velocidad será:

$$\text{Reg} = \frac{113.45 - 104.7}{104.7} \times 100$$

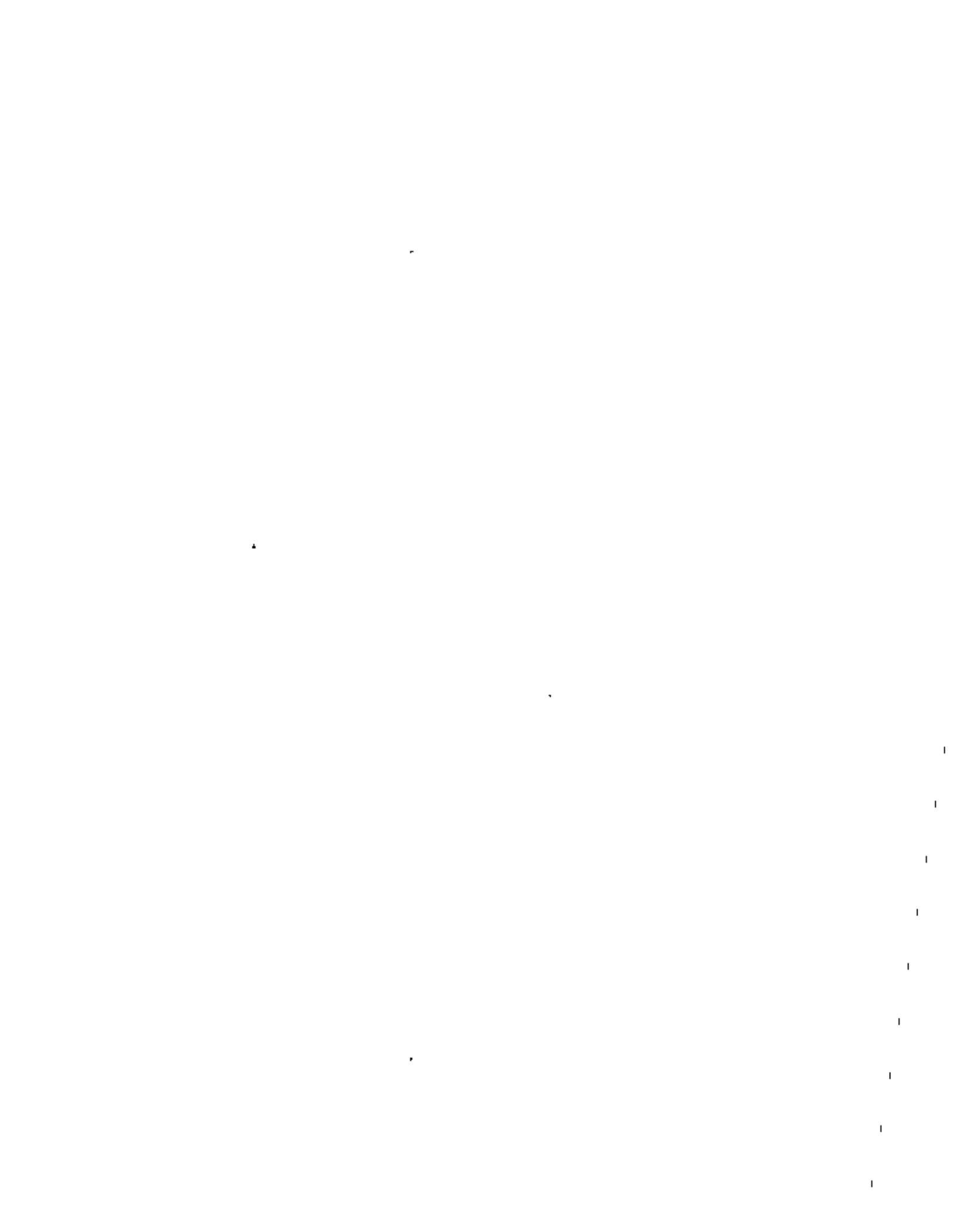
$$\text{Reg} = 8.3 \%$$

f) La gráfica de variación de velocidad con respecto a la carga (par), nos interesa solamente dentro del rango comprendido entre vacío y carga nominal.

El par nominal es:

$$T_m = \frac{P_{\text{nom}}}{\omega_{\text{nom}}} = \frac{7.5 \times 746}{104.7}$$

$$T_m = 53.44 \text{ New- m}$$



Para el trazo de la gráfica, la ecuación correspondiente es la (7.8) de los apuntes

$$\omega = \frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2}$$

$$\omega = - \frac{0.147}{1.019^2} T_m + \frac{(1.019 \times 115) - (0.147 \times 3.85)}{1.019^2}$$

$$\omega = - 0.1415 T_m + 112.3$$

la cual graficaremos entre los valores $T_m = 0$ y $T_m = 60$ (considerando una pequeña sobrecarga) La gráfica la podemos observar en la figura Ej. 1.5.

- g) Si se establece un control de velocidad podemos comenzar con la velocidad nominal en vacío, ya que ésta se mantendrá hasta las condiciones de plena carga por la acción del control.

Para obtener el voltaje y corriente nominales en las condiciones de plena carga, es factible abatir el voltaje aplicado en vacío a fin de mantener la velocidad constante, por lo que podemos utilizar los valores de parámetros encontrados anteriormente para aplicar la ecuación (6.8)-c.

$$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega - r_a T_f}{K_e}$$

$$V = 0.145 T + 104.2$$

que graficaremos entre $T = 0$ y $T = 60$ New-m para la figura Ej. 1.6.

- h) La gráfica de control de velocidad a par constante también aprovecha los valores de parámetros que ya tenemos, para aplicar la ecuación (6.8)-b

Ahora vamos a suponer distintas condiciones de carga, como por ejemplo, $0.25 T_{nom}$, $0.50 T_{nom}$, $0.75 T_{nom}$ y T_{nom} , lo que nos dará una familia de curvas

$$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$$



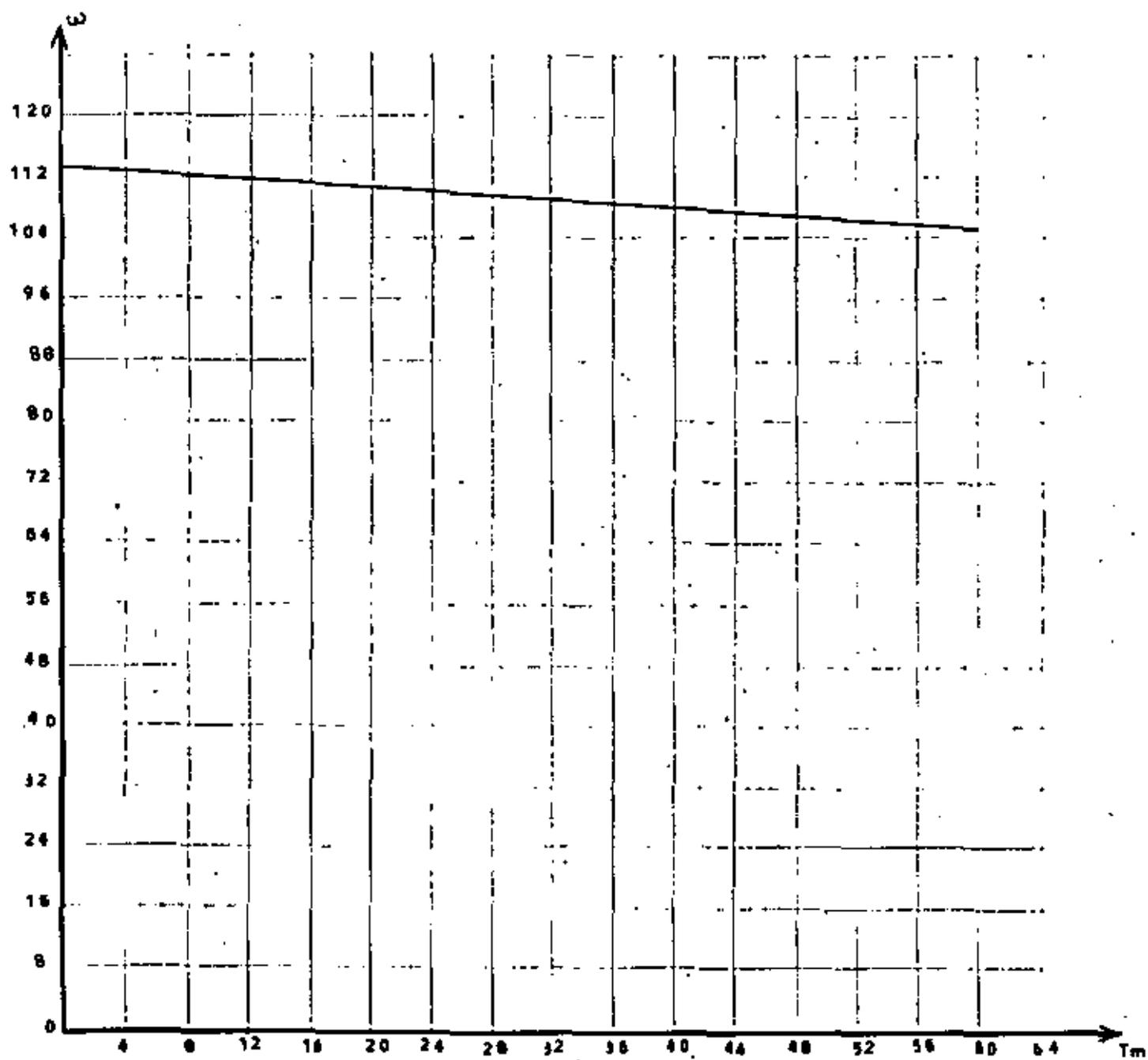


FIG. Ej.1.5



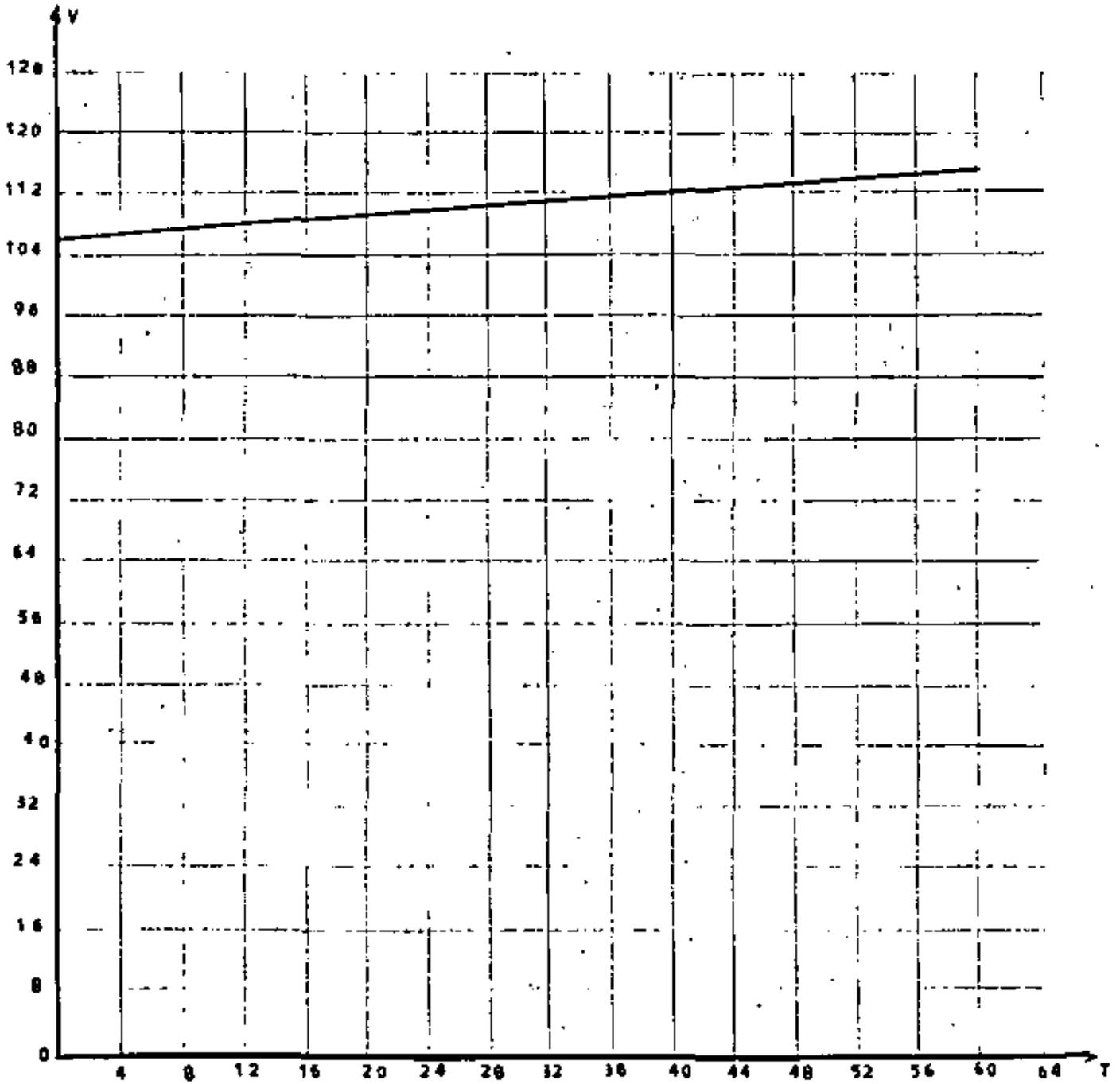
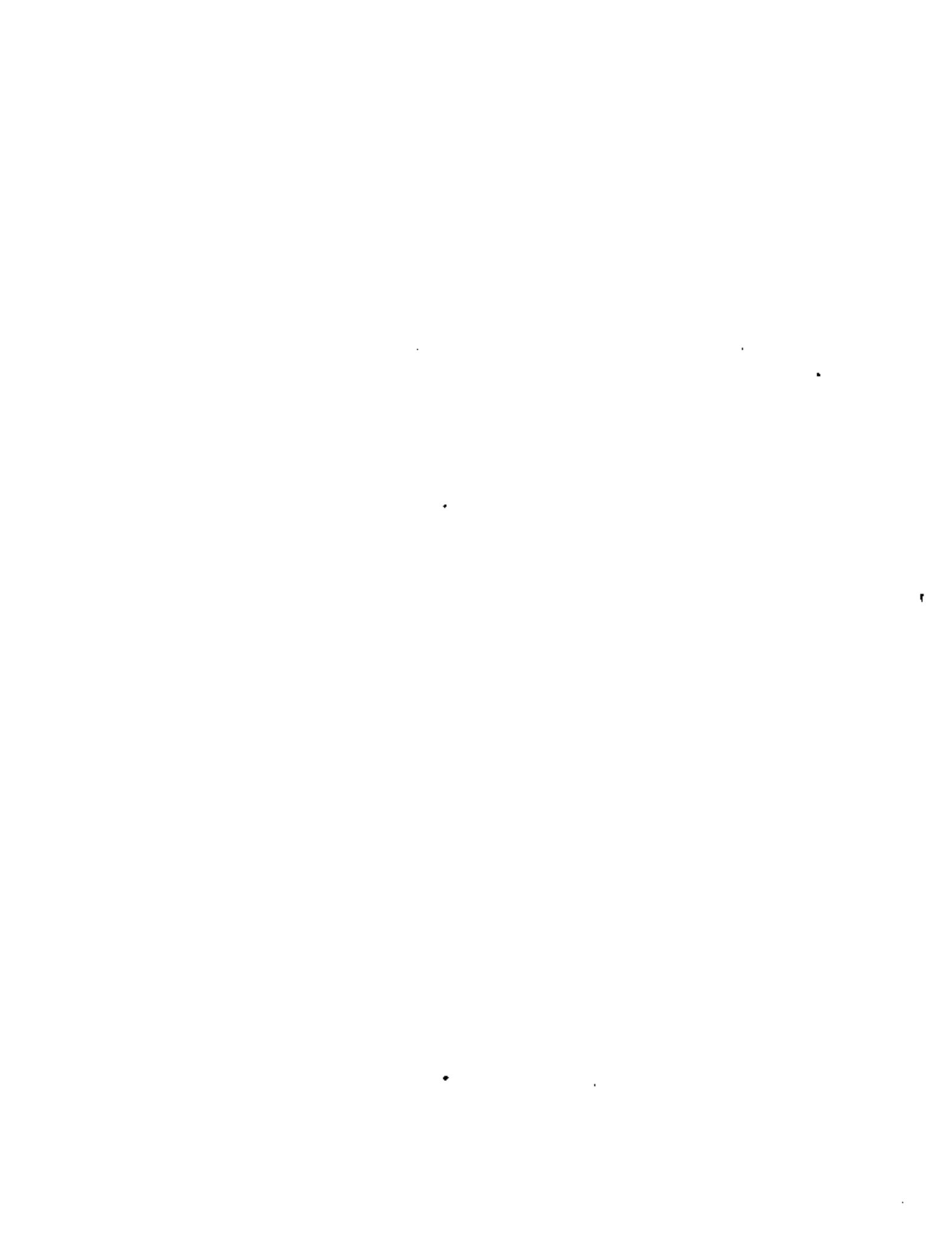


FIG. Ej. 1.6



$$\omega = 0.98 V - \frac{1.47 T_m + 0.566}{1.038}$$

que graficaremos entre $V = 0$ y $V = 115$ para $T_m = 14$, $T_m = 28$, $T_m = 42$ y $T_m = 56$ en la figura Ej. 1.7.

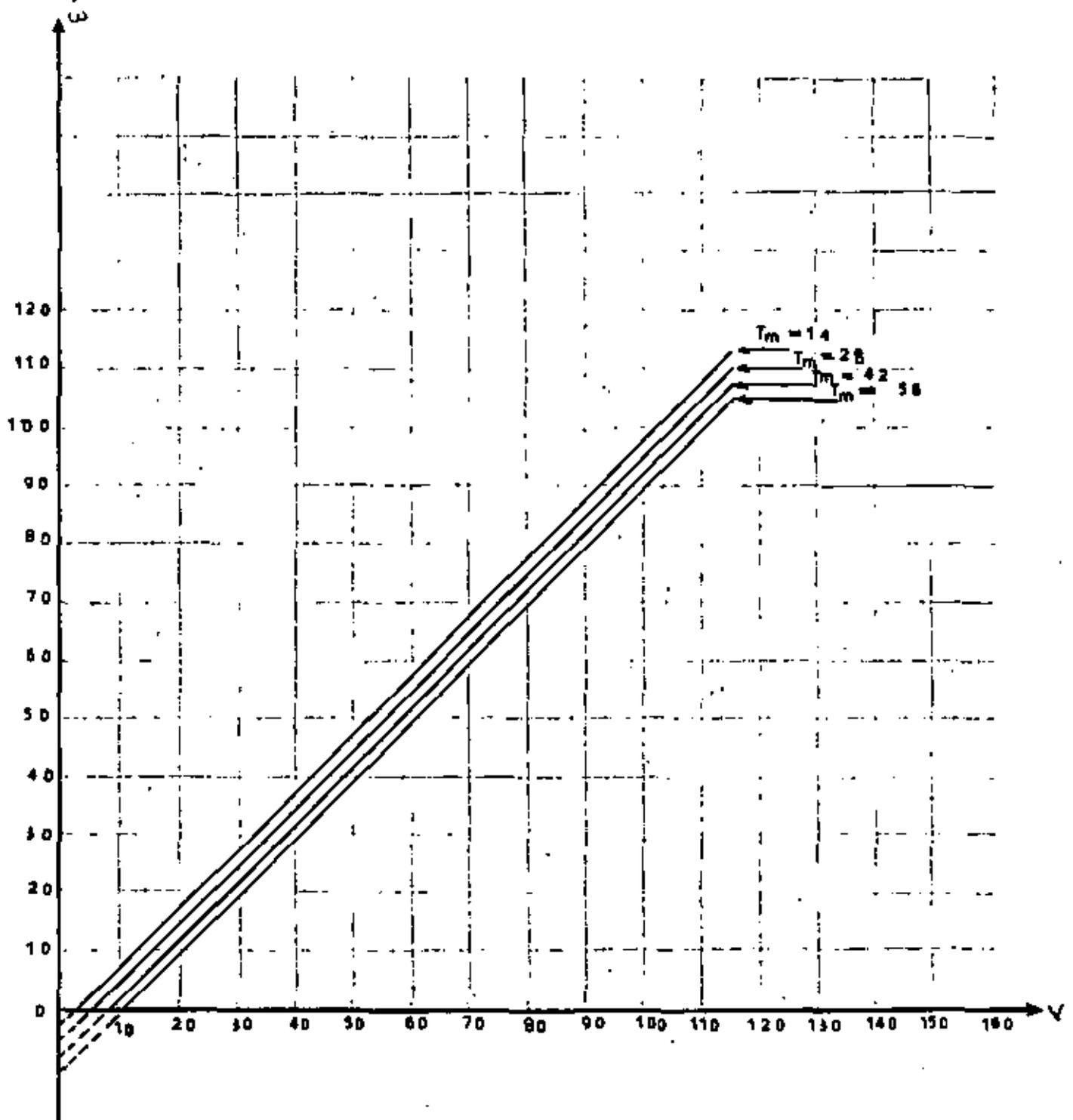


FIG. Ej. 1.7

TRANSICION EN LA OPERACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Las máquinas eléctricas, como podemos recordar, tienen la propiedad de poder efectuar la conversión de energía en los dos sentidos. Un transformador puede usarse como elevador o como reductor de voltaje. Una máquina rotatoria puede operar como generador o como motor. En ninguno de estos casos se requiere cambio alguno en la estructura de la máquina correspondiente.

En el caso particular de la máquina de C.D., las condiciones para operar como generador serían las siguientes:

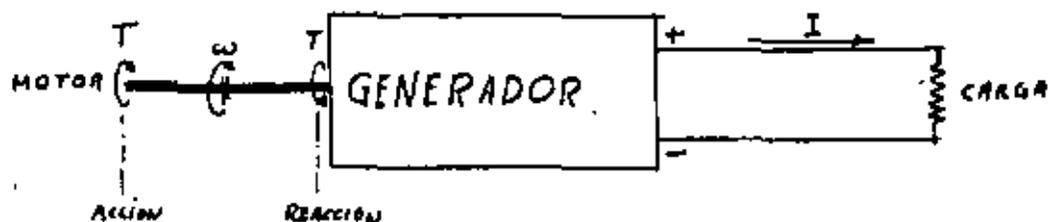


Fig. 1 La máquina de C.D. operando como generador

- El generador se comporta como la fuente del sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es SALIENDO POR EL POLO POSITIVO.
- La circulación de corriente por su armadura genera un PAR DE REACCION, es decir, que se opone al sentido de la velocidad angular.

La misma máquina opera como motor bajo las siguientes condiciones:

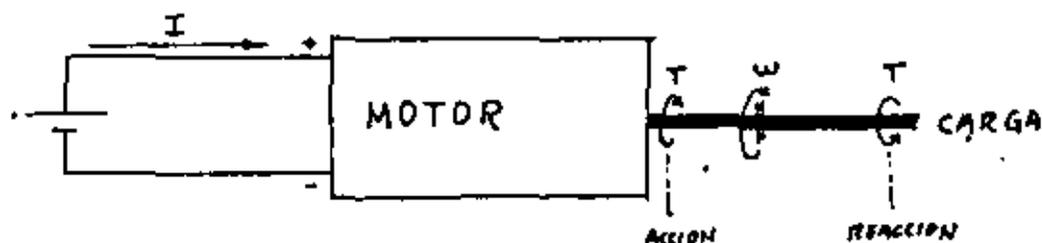


Fig. 2 La máquina de C.D. operando como motor



- a) El motor se comporta como una carga en el sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es ENTRANDO A LA MÁQUINA POR EL POLO POSITIVO.
- b) El par electromagnético que se genera en su armadura es un PAR DE ACCION, es decir, en el mismo sentido de la velocidad.

De la exposición anterior podemos deducir que ciertas características son comunes a la operación como generador y como motor (polaridad y sentido de rotación), mientras que otras tienen sentidos contrarios (corriente y par electromagnético)

A fin de considerar ahora la posibilidad de que una misma máquina pueda operar alternativamente como generador y como motor, es conveniente recordar que una de las ventajas del motor de C.D., es que se puede controlar su velocidad. Por el momento no viene al caso discutir los métodos de control; simplemente convengamos en que se ha fijado un cierto valor de velocidad para un motor trabajando en vacío (ω_v).

En la figura 3(a), el motor alimenta una carga mecánica, la cual de acuerdo con lo visto en la figura 2, produce un par que se opone al movimiento, es decir, trata de frenar el motor, provocando que su velocidad sea menor que la velocidad en vacío. La corriente entra a la máquina por el polo positivo (absorbe

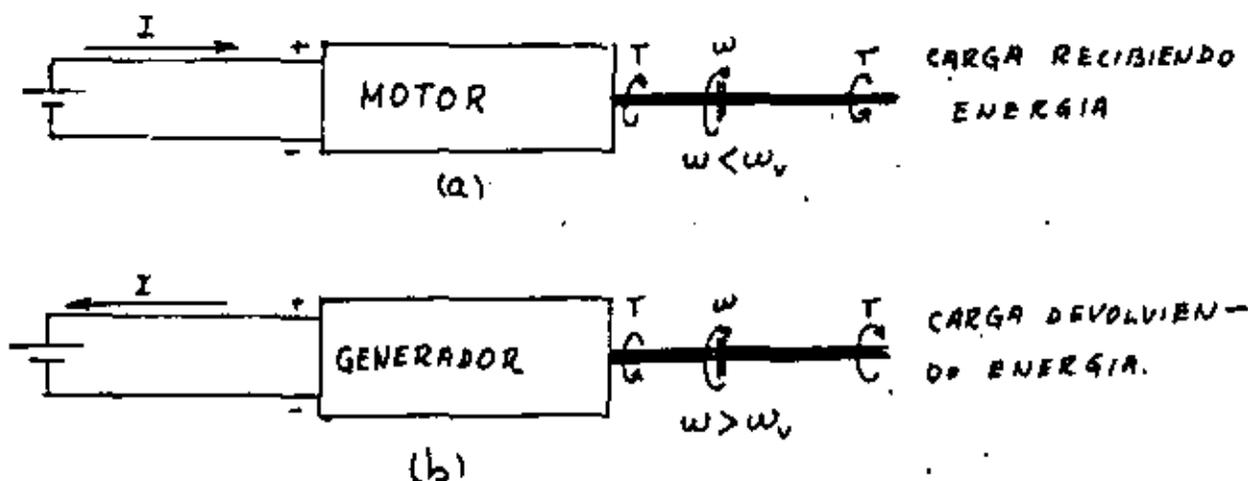


Fig.3 Posibilidad de operación alternativa.



energía) y el par electromagnético generado es en el sentido de mantener el giro del motor.

Ahora bien, supongamos que por cualquier causa, la velocidad de la carga tiende a incrementarse, superando el valor ω_v . La máquina reacciona invirtiendo el sentido del par electromagnético, en un esfuerzo por evitar que el sistema se desboque. Esto motiva la inversión de la corriente, devolviendo energía a la fuente, es decir, la máquina ha cambiado su operación de motor por generador. (Figura 3b).

Para imaginarnos el cambio que acabamos de describir, supongamos que se trata del motor de tracción de un vehículo de transporte eléctrico. En el caso de la figura 3a, el vehículo se encuentra subiendo un puente, para lo cual es indispensable la tracción del motor. En la figura 3b, el vehículo ha pasado la parte más alta del puente, y se encuentra ahora de bajada, "frenando con el motor".

Esto puede ser uno de muchos ejemplos en que la máquina sufre una TRANSICION de motor a generador, y si continuamos analizando el movimiento, habrá una nueva TRANSICION de generador a motor.

Por regla general, las máquinas eléctricas rotatorias no requieren ningún cambio ni en su estructura, ni en sus conexiones, cuando se presenta este fenómeno de transición; basta solamente la inversión de par en la flecha. Esto es válido para máquinas síncronas, de inducción y de C.D.

Sin embargo, como toda regla, tenemos una excepción en el caso del motor de C.D., tipo serie, en el que al pasar de la acción matriz a la generatriz es necesario un cambio de conexiones.

Para justificar lo anterior, analizaremos con más detalle la transición de operación en los distintos motores de C.D.



Un esquema sencillo de una máquina rudimentaria nos ayudará a comprender en que forma se producen estos cambios. Esta máquina rudimentaria consta de una sola bobina de excitación y una espira en el embobinado de armadura.

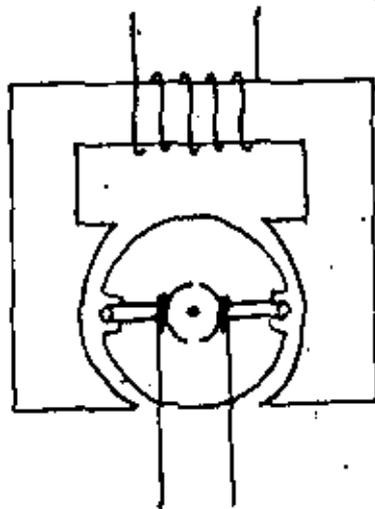


Fig. 4 Una máquina rudimentaria de C.D.

Utilicemos primeramente el esquema de la figura 4 para analizar el comportamiento de una máquina con excitación independiente.

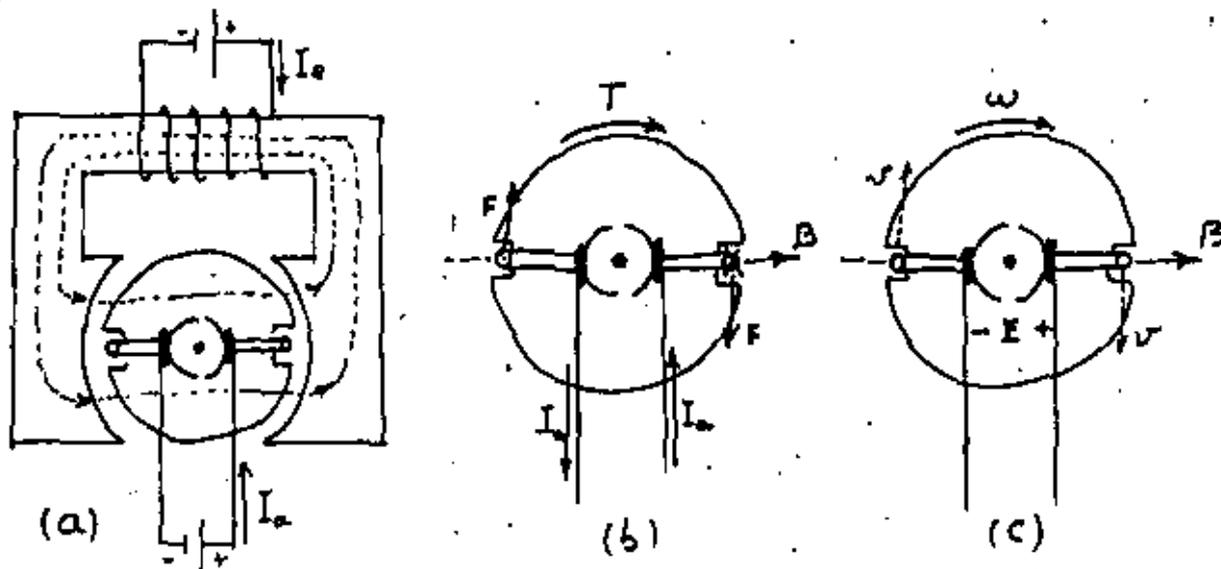


Fig. 5 Motor de C.D. con excitación independiente.

En la figura 5(a) tenemos una fuente para la excitación que nos da un determinado valor de corriente " I_e ", y una fuente para



la armadura que nos da la corriente motriz " I_a ".

La corriente I_a en presencia del campo inductor "B" genera un par de fuerzas cuyo sentido lo podemos determinar aplicando las reglas de Fleming en la figura 5(b). Este par produce el giro de armadura con una velocidad angular " ω " y por tanto, una velocidad tangencial " v " de los costados de la espéra, dando lugar a la inducción de la fuerza contraelectromotriz "E", cuya polaridad podemos determinar también por las reglas de Fleming en la figura 5(c).

El diagrama del circuito de armadura con el motor en movimiento lo tenemos ahora en la figura 6, en donde:

$$E = k\omega I_e \quad (1)$$

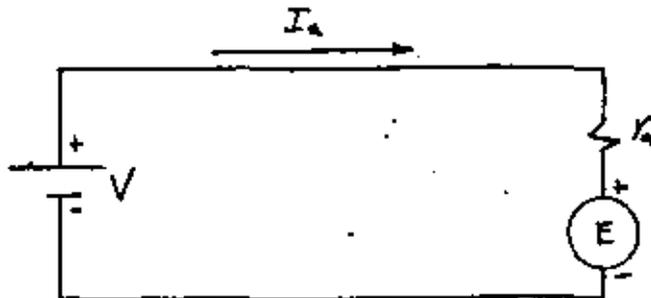


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura.

o sea que la fuerza electromotriz es función de la velocidad " ω " y la corriente de excitación " I_e ".

El coeficiente "k" frecuentemente se toma como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente de excitación, debido a la saturación de la máquina

$$k = \frac{a}{b + I_e} \quad (2)$$

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:

$$I_a = \frac{V-E}{r_a} \quad (3)$$

y el par producido por esta corriente es:

$$T_e = \frac{EI_a}{\omega} \quad (4)$$

o también, sustituyendo (1) en (4)

$$T_e = k I_e I_a \quad (5)$$

Este par acelera la máquina hasta una velocidad ω_v tal, que de acuerdo con la (1)

$$E = V = k \omega_v I_e \quad (6)$$

en este momento desaparece la I_a (ecuación (3) y el par motor (ecuaciones (4) y (5)) y por lo tanto, la máquina deja de acelerarse. La velocidad " ω_v " la llamaremos velocidad en vacío.

REFERENCIA. Para estudiar a continuación la transición de la máquina, es necesario establecer los sentidos de referencia. Convengamos que los sentidos de corriente mostrados en las figuras 5(a), 5(b) y 6, así como los sentidos de par y de velocidad de 5(b) y 5(c) se les considerará positivos.

TRABAJO MOTOR. Supongamos que aplicamos ahora una carga a nuestro motor. Esta carga al ser movida reacciona con un par negativo, haciendo que el motor pierda velocidad.

Si la velocidad del motor adquiere un valor

$$\omega_m < \omega_v$$

entonces, razonando en base a la ecuación (3)

$$E < V$$

y aparecen una corriente y un par positivos

$$I_a = \frac{V-E}{r_a} > 0$$

$$T_e = K I_e I_a > 0$$

TRANSICION. Para que la acción motriz se convierta en acción generatriz, es necesario que se inviertan el par electromagnético y la corriente de armadura.

La ecuación (5) quedaría:

$$-T_e = K I_e (-I_a)$$

(nótese que la I_e permanece positiva), y de acuerdo con la ecuación (3)

$$I_a = \frac{V-E}{r_a}$$

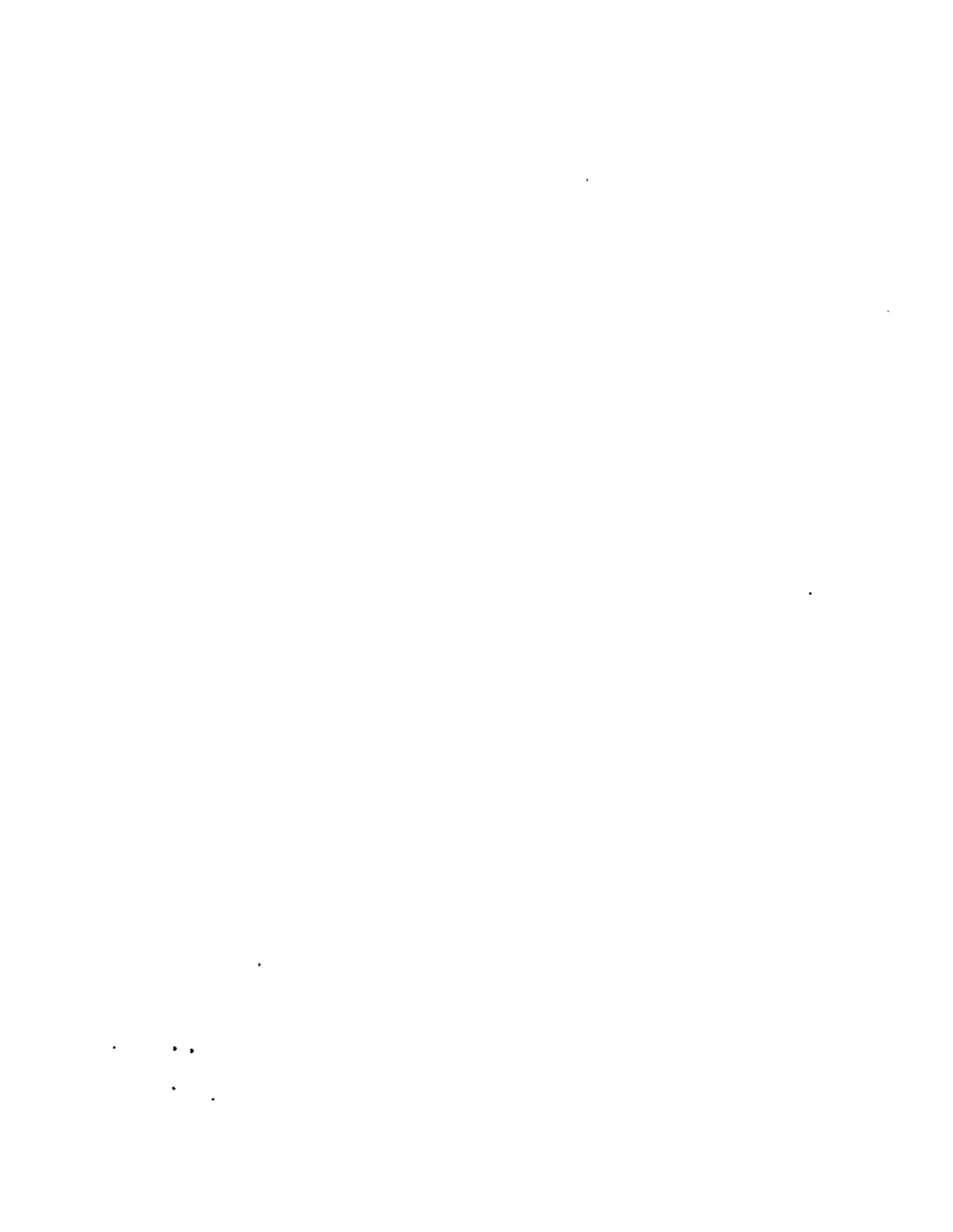
I_a solamente puede ser negativa si $V < E$.

Esto puede ocurrir en tres casos:

- a) Si aumenta E por un aumento de velocidad, permaneciendo V e I_e constantes. (Recuérdese $E = k\omega I_e$). Esto equivale a que la carga por alguna razón tienda a desbocarse.
- b) Si se hace aumentar E reforzando la corriente de excitación
- c) Si se disminuye el voltaje de la fuente de alimentación de armadura.

Los casos b) y c) equivalen a "dar la orden" al motor de disminuir su velocidad. En el caso de los equipos estacionarios, esta transición se puede presentar en un proceso con la necesidad de velocidad variable controlada, y en el caso de tracción de vehículos eléctricos, se presenta cuando es factible "frenar con el motor".

Durante el período de generación, la energía cinética acumula



lada en el equipo impulsado, se transforma en eléctrica y se devuelve a la fuente, lo que se conoce como FRENADO REGENERATIVO.

La transición en el frenado regenerativo, que hemos analizado matemáticamente, también podemos analizarla desde el punto de vista del fenómeno físico, apoyándonos nuevamente en las figuras 5 y 6. En la figura 5 observamos que para invertir el par se requiere inversión de la corriente de armadura, sin cambio en la dirección del flujo magnético. Como se conservan las direcciones de flujo y velocidad, la polaridad de la fuerza electromotriz continua igual.

En la figura 6 se observa que para invertir la corriente es necesaria la condición $V < E$, lo que se consigue aumentando "E" o disminuyendo "V", sin alterar sus polaridades.

Para el caso de la excitación en derivación, el análisis es muy semejante al caso anterior. Sin embargo, observando la figura 7, nos damos cuenta que la "orden" de reducir velocidad solamente se puede dar por aumento de la corriente de excitación (aumento de

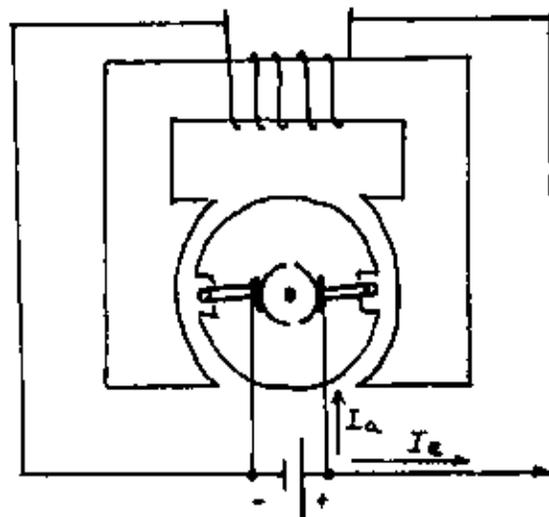


Fig. 7 Motor de C.D. con excitación en derivación

"E"), pues una disminución en el voltaje aplicado afecta la exci

1. The first part of the document is a list of names and titles.

2. The second part of the document is a list of names and titles.

3. The third part of the document is a list of names and titles.

(10)

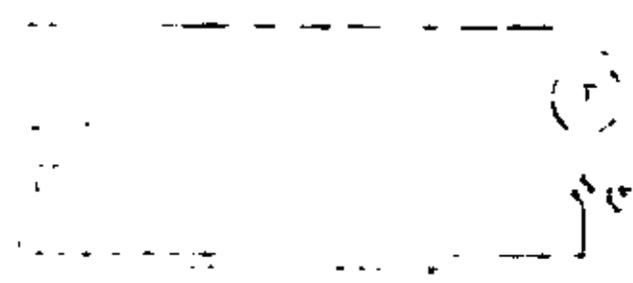
4. The fourth part of the document is a list of names and titles.

(11)

5. The fifth part of the document is a list of names and titles.

6. The sixth part of the document is a list of names and titles.

7. The seventh part of the document is a list of names and titles.



8. The eighth part of the document is a list of names and titles.

(12)

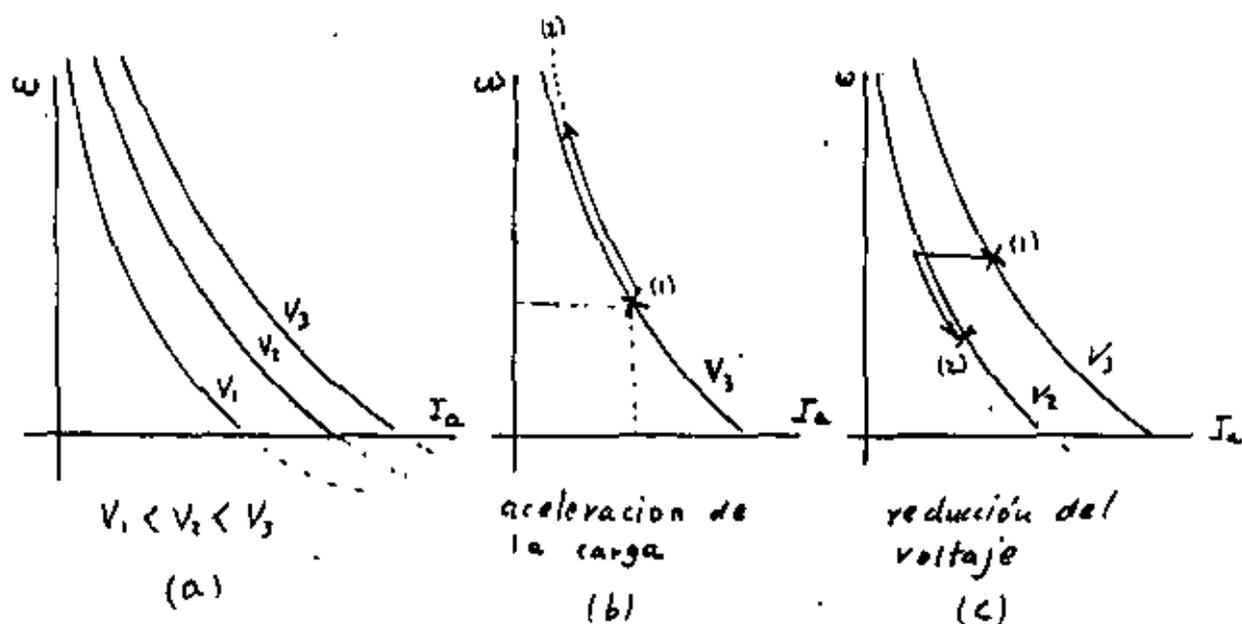


Fig. 9 Curvas de respuesta del motor serie.

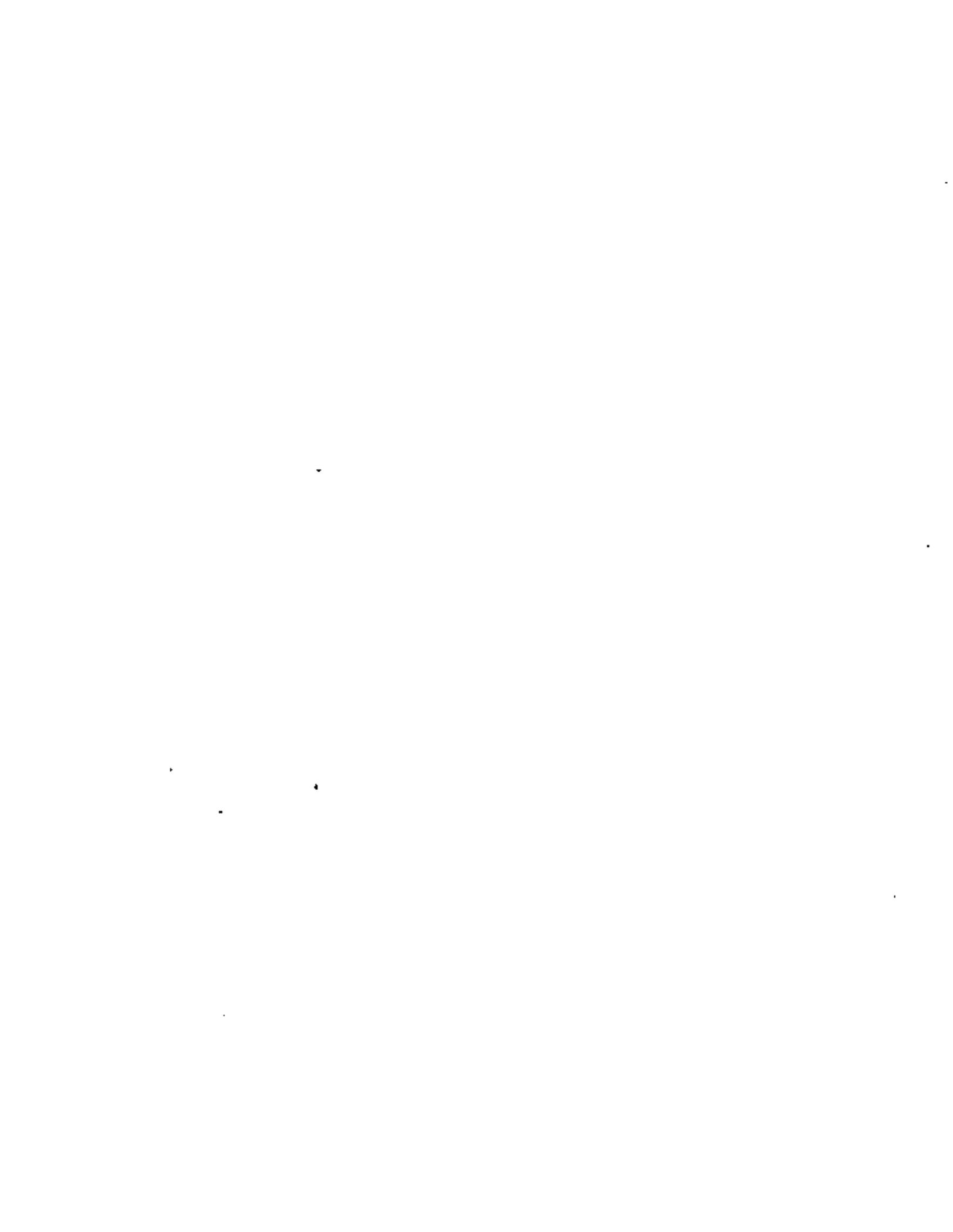
$$T_e = k I_a^2 \quad (11)$$

Interpretando la ecuación (11) en la figura 9(a), deducimos que es una máquina de muy alto par de arranque, y que tiene un aumento de velocidad rápido, características que lo hacen ideal para tracción vehicular.

Su velocidad, sin embargo, no tiene un punto de estabilidad, y varía dentro de un amplio rango, dependiendo del par de tracción necesario bajo las diferentes circunstancias. Por otra parte, frenar el vehículo con este tipo de motor involucra una serie de dificultades que vencer.

Supongamos primeramente que el vehículo comienza a bajar una pendiente. En la figura 9(b) vemos que el motor en ningún momento sufre transición, y su velocidad aumenta hasta desbocarse sin perder su tracción (aunque el par se debilita). Si se prolonga este aumento de velocidad, el motor puede llegar a destruirse.

Si analizamos ahora la "orden" de que el motor baje su velocidad, ~~mediante una disminución del voltaje~~, mediante una disminución del voltaje aplicado, observamos en la figura 9(c) que la co



rriente se debilita hasta encontrar un nuevo punto de equilibrio, pero en ningún momento se invierte, por lo que el motor no pierde tracción en ningún momento, y la disminución de velocidad es aún más lenta que si se dejara por un momento sin tracción el vehículo.

Veamos ahora si tratamos de efectuar un frenado dinámico, simplemente cambiando la alimentación del motor por una resistencia de carga,

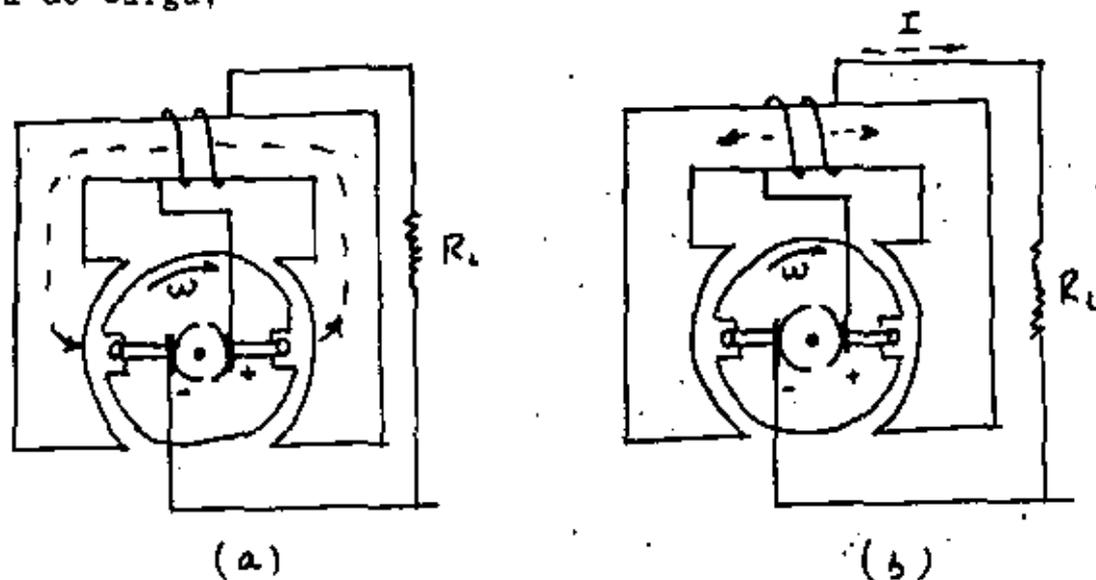


Fig. 10 Sustrucción de la fuente por resistencia

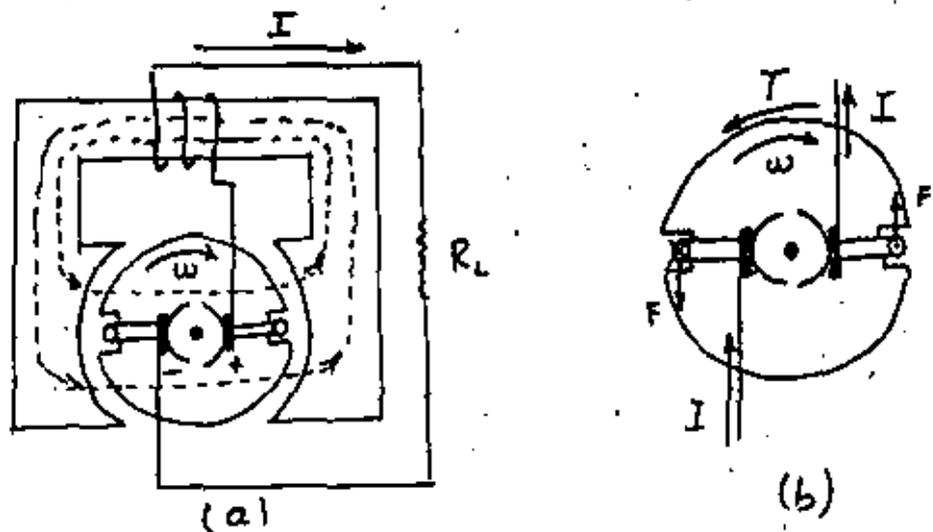


Fig. 11 La máquina operando como generador

En la figura 10(a) observamos la máquina que conserva su velocidad y el flujo remanente, por lo tanto se induce un pequeño voltaje con la polaridad que ahí mismo observamos. En la figura 10(b) aparece una corriente impulsada por el voltaje de flujo remanente, pero al analizar el flujo magnético que genera esta corriente, vemos que es opuesto al magnetismo remanente, de manera que en vez de reforzarlo lo anula y la máquina no levanta voltaje.

Es necesario entonces un cambio en las conexiones del campo para que la máquina levante voltaje, como vemos en la figura 11 (a), de manera que

$$E = k\omega I_a \quad (7)$$

en donde

$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

$$I_a = \frac{E}{r_a + R_L} \quad (10)$$

Sustituyendo (8) y (10) en (7), tenemos:

$$E = a\omega - b (r_a + R_L) \quad (11)$$

en donde observamos que la fuerza electromotriz es tanto mayor cuanto menor es la resistencia de carga.

Bajo estas condiciones, circula una corriente, la cual en la figura 11.(b) vemos que genera el par negativo o par de frenado, cuyo valor es

$$T_e = k I_a (-I_a) \quad (11')$$

que es una modificación de la ecuación 11, ya que la corriente en el campo sigue siendo positiva, mientras que en su armadura



es negativa.

El frenado en estas circunstancias se llama "frenado dinámico". Si se desea conmutar el frenado dinámico por frenado regenerativo, es decir devolviendo energía a la fuente, es necesario elevar previamente la fuerza electromotriz a un valor superior al del voltaje de la fuente, e inmediatamente hacer una conmutación translapada, para cambiar la resistencia de carga por la fuente de energía.

El frenado regenerativo, en estas circunstancias, es de duración muy corta, pues a medida que se pierde velocidad la fuerza electromotriz disminuye de valor, y en cuanto se iguale con el voltaje de la fuente (no hay que esperar a que sea menor), es necesario desconectar la máquina.

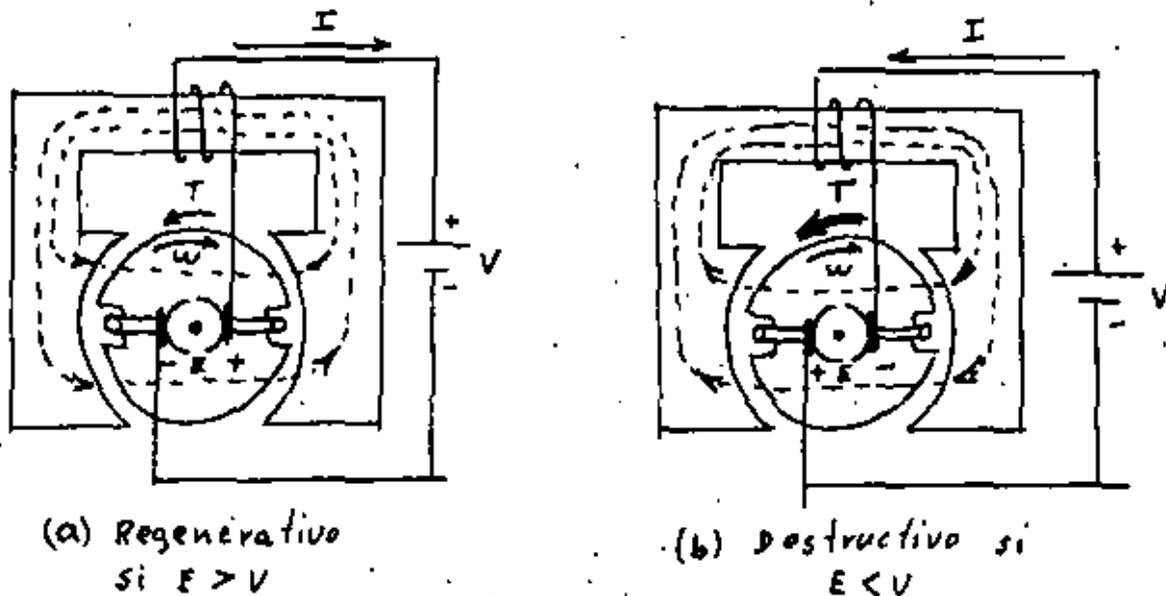


Fig. 12 Frenado regenerativo.

En la figura 12(a) vemos el frenado regenerativo, que se cumple siempre que $E > V$. En la figura 12(b), la velocidad ha bajado a tal valor que $E < V$ y no se ha abierto el circuito. En este caso, la corriente se invierte, obligando al flujo magnético a invertirse, con lo cual la fuerza electromotriz también se invierte, de tal modo que la corriente

12

13

14

15

16

17

18

19

$$I = \frac{V+E}{r_a}$$

adquiere un valor muy elevado, consumiendo energía de la fuente.

Como flujo y corriente de armadura se invierten, el par se conserva en el sentido de frenado, pero en vez de constituir un frenado regenerativo, es una tendencia a invertir la velocidad de la máquina, lo que podríamos describir como un "arranque a contra-velocidad",

Por lo anterior nos damos cuenta que la máquina serie que tiene grandes ventajas en tracción, tiene también grandes desventajas en frenado regenerativo. Estas desventajas pueden superarse recurriendo a diferentes opciones:

- 1a. Trabajando como motor serie en tracción, y como generador independiente en frenado regenerativo, alimentando la excitación con una fuente de intensidad de corriente.
- 2a. Absorbiendo la energía del frenado regenerativo en una fuente de tensión variable, controlando que en todo momento el voltaje de la fuente sea menor que la fuerza electromotriz. En este caso es indispensable elevar previamente la fuerza electromotriz por frenado dinámico.
- 3a. Por medio de una máquina mixta, con excitación serie en tracción y excitación independiente de baja corriente en frenado (no confundir la máquina mixta con la máquina de excitación compuesta, pues en esta última el campo serie es solamente un campo auxiliar).

En cualquier opción que se elija, la necesidad de conmutar conexiones motiva que la máquina serie no tenga una transición continua entre sus operaciones de tracción y de frenado.



E J E M P L O

Un motor de C.D. de 6.5 H.P tiene las siguientes características:

$$E = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e \quad r_a = 0.22 \text{ ohms}$$

Tensión nominal: 120 V
 Corriente nominal: 50 A
 Velocidad: 1 500 RPM

Se utilizará para mover una carga con velocidad controlada entre 1000 y 1500 RPM. Para el conjunto motor-carga se estima un par de fricción constante dentro del rango de operación, de 5 New-m y un momento de inercia de 15 kg-m².

- Calcular la corriente de excitación necesaria, cuando su armadura se alimenta a 120 volts 50 Amp. y gira a 1500 RPM.
- Si el motor se excita independientemente, a corriente constante, calcular el voltaje de armadura para una velocidad de 1225 RPM suponiendo que el par de carga se mantiene constante.
- Si se desea pasar de las condiciones de la pregunta (a) a las de la pregunta (b) mediante un cambio brusco de tensión, con un tiempo de frenado regenerativo, trazar las gráficas de velocidad, corriente y par con respecto al tiempo.

SOLUCION

- De la ecuación de voltaje del motor

$$V = E + r_a I_a; \quad E = V - r_a I_a$$

sustituimos valores



$$E = 120 - (0.22 \times 50) = 109 \text{ Volts}$$

llevando este valor a la ecuación de la fem:

$$109 = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1500 \times \pi}{30} = 157$$

$$\text{por tanto } I_e = 1.294 \text{ Amp.}$$

- b) Como la máquina trabajará a excitación constante, podemos definir una constante de excitación

$$K_e = \frac{I_e}{0.157 + I_e} = \frac{1.294}{0.157 + 1.294} = 0.694$$

de tal manera que

$$E = 0.694\omega$$

Por otra parte, si la máquina también trabaja a par constante, de la ecuación de par:

$$T_e = \frac{E I_a}{\omega} = 0.694 I_a$$

deducimos que trabaja a corriente de armadura constante de 50 Amp. (en estado estable). Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= E + r_a I_a \\ &= 0.694\omega + (0.22 I_a) \end{aligned}$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1225 \times \pi}{30} = 128.24$$

entonces:

$$V = (0.694 \times 128.24) + (0.22 \times 50) = 100 \text{ volts}$$

c) La ecuación general de equilibrio eléctrico en armadura es:

$$v = e + r_a i_a + L p i_a \quad (A)$$

Como la inductancia de armadura es generalmente insignificante, el tercer término del segundo miembro se suele despreciar.

La ecuación general de equilibrio mecánico en armadura es:

$$T_e = T_m + T_f + J p \omega \quad (B)$$

$$\text{en donde } T_e = K_e i_a \quad (C)$$

El par electromagnético en estado estable tiene un valor constante

$$T_e = 0.694 \times 50 = 34.7 \text{ New-m} \quad (D)$$

lo que significa que

$$T_m + T_f = 34.7 \text{ New-m} \quad (E)$$

Sustituyendo (C) y (E) en (B), con $K_e = 0.694$ y $J = 15$:

$$0.694 i_a = 34.7 + 15 p\omega$$

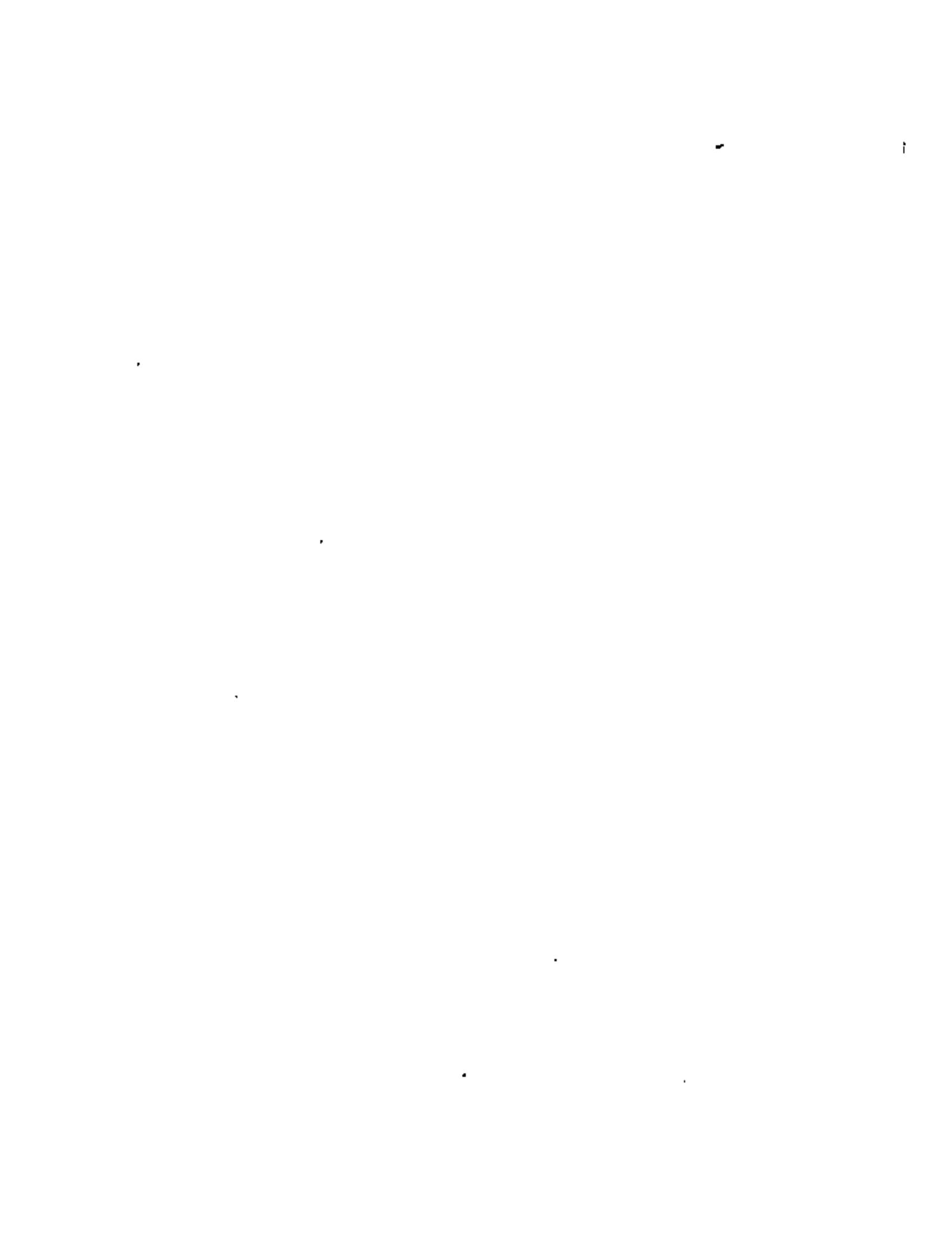
$$i_a = 50 + 21.6 p\omega \quad (F)$$

Sustituyendo (F) en (A), despreciando el tercer término:

$$v = e + 0.22 (50 + 21.6 p\omega)$$

$$e = 0.694\omega + 11 + 4.752 p\omega \quad (G)$$

que es la ecuación general, en donde el voltaje y la velocidad son funciones del tiempo.



La ecuación (G) para el estado estable inicial, adopta los siguientes valores:

$$120 = (0.694 \times 157) + 11$$

Si se baja repentinamente el voltaje a 100 volts equivale a agregarle un escalón negativo a la ecuación anterior, con lo que queda:

$$120 - 20u(t) = 0.694w + 11 + 4.752 p\omega$$

que representa el funcionamiento incremental. Si a la última ecuación le restamos la correspondiente al estado estable inicial obtenemos:

$$-20u(t) = 0.694 (\omega - 157) + 4.752 p\omega$$

cuya solución es:

$$\omega = 28.72 (e^{-0.146 t} + 4.466) u(t)$$

La corriente, según la (F)

$$i_a = 50 + 21.6 p\omega$$

cuya solución es

$$i_a = 50 - 90.57 e^{-0.146 t} u(t)$$

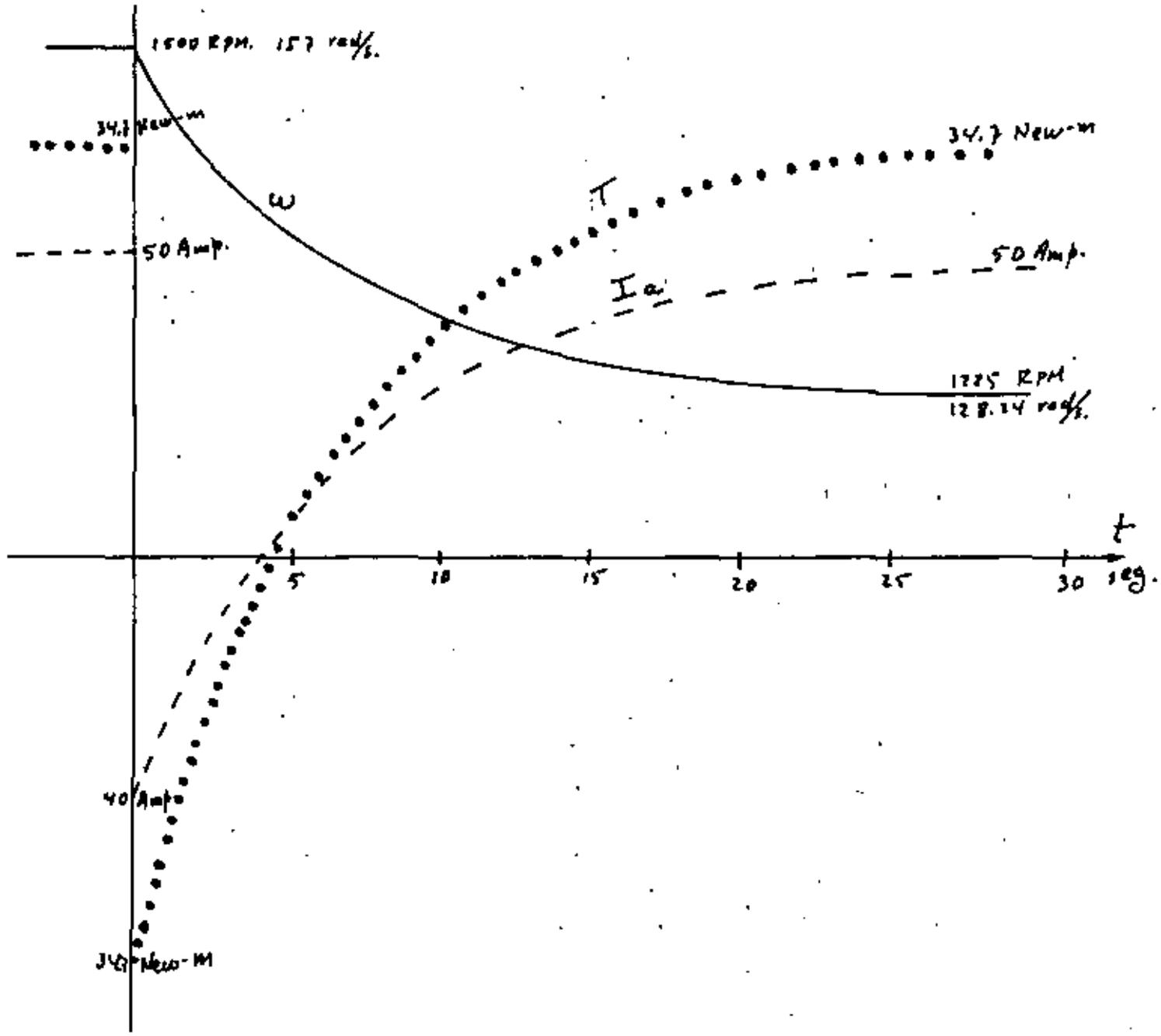
y según la (C), el par es

$$T_e = k_e i_a$$

cuya solución es

$$T_e = 34.7 - 68.85 e^{-0.146 t} u(t)$$

Estas tres soluciones las encontramos graficadas en la siguiente figura.





BIBLIOGRAFIA

Meisel J.- Principios de Conversión de Energía Electromecánica
Mc Graw Hill México 1975.

Langsdorf A.S.- Principios de Máquinas de Corriente Continua.
Mc Graw Hill México 1977.

Matsch L.W. Máquinas Electromagnéticas y Electromecánicas
Representaciones y Servicios de Ingeniería México 1974.

Thaler G.J. y Wilcox M.L.- Máquinas Eléctricas
Limusa México 1974.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**TEORIA Y LABORATORIO DE MAQUINAS DE CORRIENTE
DIRECTA Y SISTEMAS DE POTENCIA**

**Del 6 de febrero al
26 de junio, 1981**

Ing. Víctor Pérez Amador

**Programa de Superación Académica
- Facultad de Ingeniería**



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ING. MEC. Y ELECT.
DEPARTAMENTO DE ING. ELECTRICA

CURSO DE FORMACION ACADEMICA
MAQUINAS DE CORRIENTE DIRECTA

CONTENIDO

- Antecedentes
- Magnetización de la máquina de C.D.
- Función de aproximación de Froelich
- Curva de saturación en vacío
- Consideraciones generales sobre el equilibrio de las máquinas
- Estado estable de la máquina con excitación independiente.
- Estado estable de la máquina con excitación en derivación
- Estado estable de la máquina con excitación en serie
- Ejemplos de aplicación
- Transición en la operación de la máquinas de C.D.
- Ejemplo de transición.



ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE MAQUINAS DE C.D. EN ESTADO ESTABLE

1. ANTECEDENTES

Supongamos un circuito magnético como el que se muestra en la figura 1 (a). Este circuito consta de:

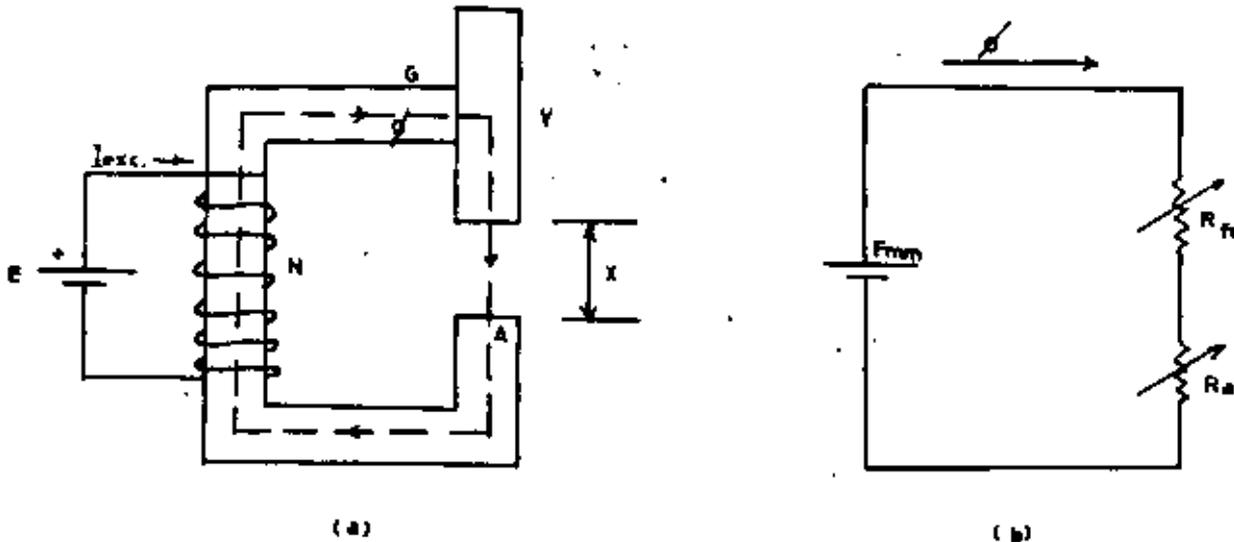


FIGURA 1

- Una bobina de excitación de N vueltas, por la cual circula la corriente de excitación I_{exc} .
- Un núcleo de material ferromagnético G cuya forma se asemeja a la letra con la que lo hemos identificado y su sección transversal A es constante.
- Un yugo móvil Y del mismo material y sección transversal que el núcleo.
- Un entrehierro cuya longitud X se puede variar a voluntad, según la posición del yugo.

Cuando se conecta la bobina de excitación a una fuente de fuerza electromotriz (E) circula la corriente de excitación (I_{exc}) cuyo valor depende de la fem. y de la resistencia del circuito eléctrico, de acuerdo con la ley de Ohm.

La corriente de excitación a su vez, produce el flujo magnético (ϕ) en el interior de la bobina, el cual sigue la trayectoria marcada con líneas punteada en la figura 1(a). Su magnitud obedece a la ley

$$\phi = \frac{F_{mm}}{R} \quad (1.1)$$

que por su similitud con la ley de Ohm para un circuito eléctrico, se le llama Ley de Ohm magnética.



En la fórmula (1.1):

- ϕ es el flujo a través del circuito magnético, equivalente a la corriente de un circuito eléctrico.
- f_{mm} es la fuerza magnetomotriz cuyo valor es igual al producto NI_{exc} y es equivalente a la fuerza electromotriz del circuito eléctrico.
- R es la reluctancia del circuito magnético, equivalente a la resistencia del circuito eléctrico

La reluctancia se calcula de acuerdo con

$$R = \frac{1}{\mu} \frac{L}{A}$$

en donde:

- μ es la permeabilidad del medio que constituye el circuito magnético.
- L es la longitud del circuito.
- A es la sección transversal del mismo.

En el caso de la figura 1(a), observamos que el flujo atraviesa por dos medios notablemente distintos como son fierro y aire, y que dada su posición relativa constituyen un circuito de dos reluctancias en serie, cuyos valores serían:

$$\text{Reluctancia del fierro} \quad R_{fe} = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{L}{A} \quad (1.2)$$

$$\text{Reluctancia del aire} \quad R_a = \frac{1}{\mu_0} \frac{X}{A} \quad (1.3)$$

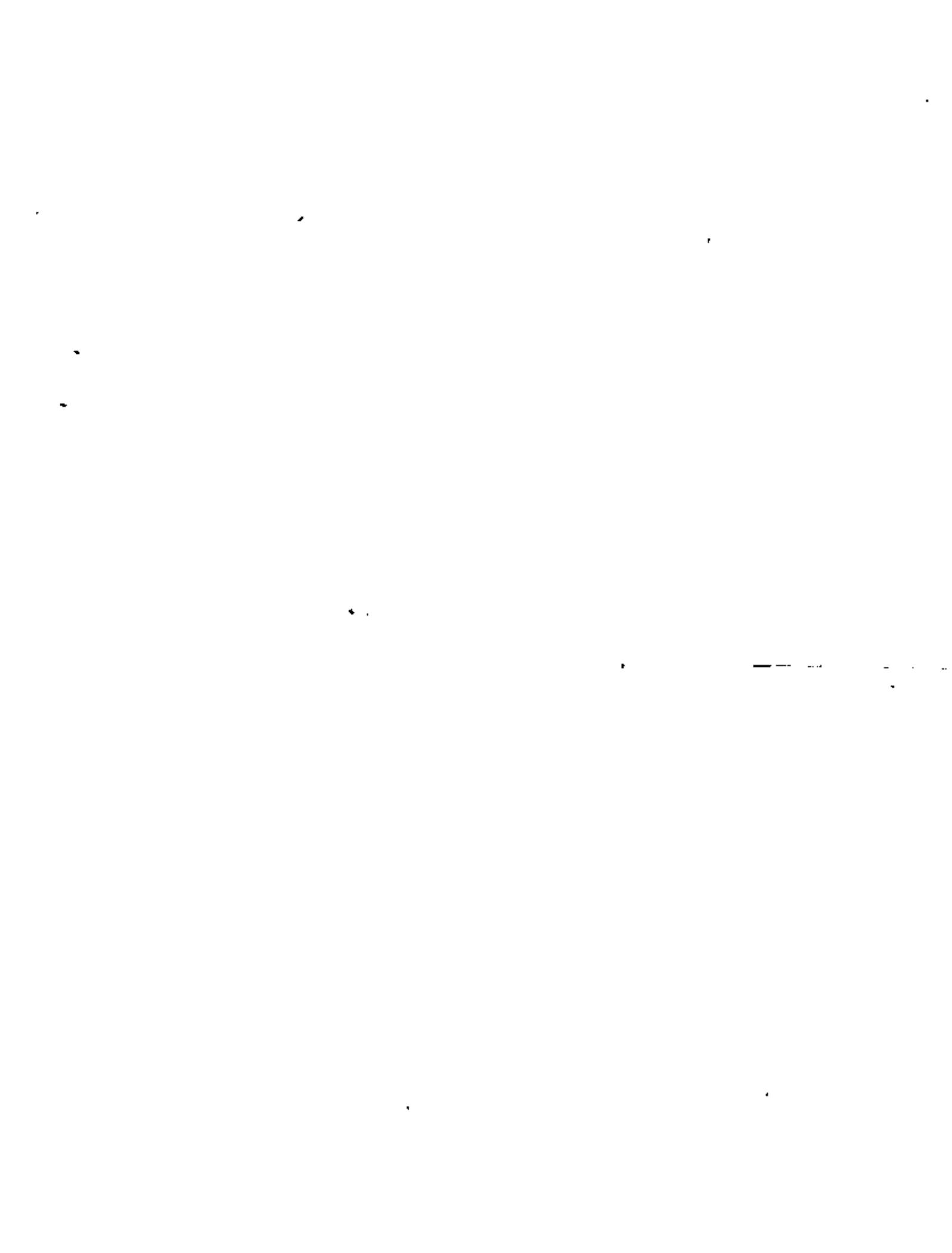
en donde:

- μ_{fe} es la permeabilidad del fierro
- μ_0 es la permeabilidad del vacío (prácticamente igual a la del aire)
- L es la longitud media de las líneas de flujo dentro del elemento de fierro.
- X es la longitud del entrehierro
- A es el área de la sección transversal del circuito magnético.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, el circuito magnético de la figura 1 (a) puede representarse por el circuito eléctrico de la figura 1 (b), cuyo comportamiento estaría dado por:

$$\phi = \frac{f_{mm}}{R_{fe} + R_a} \quad (1.4)$$

En el caso de la fórmula (1.3) la sección transversal en el entrehierro es algo mayor del núcleo, debido a los efectos de borde, sin embargo en este estudio la consideraremos igual en cualquier parte del circuito para mayor



Analizando el denominador de la ecuación (1.4), de acuerdo con (1.2) y (1.3) tenemos:

$$R_{fe} + R_a = \frac{1}{\mu_{fe}} \frac{L}{A} + \frac{1}{\mu_o} \frac{X}{A} \quad (1.5)$$

en donde el primer término del segundo miembro de la ecuación (1.5) contiene la permeabilidad del hierro μ_{fe} que es una cantidad variable de acuerdo al nivel de excitación. Su comportamiento lo podemos apreciar en la figura 2

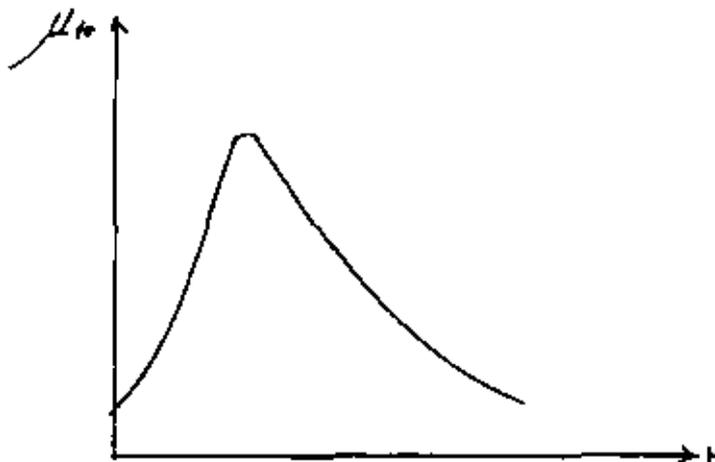


FIGURA 2

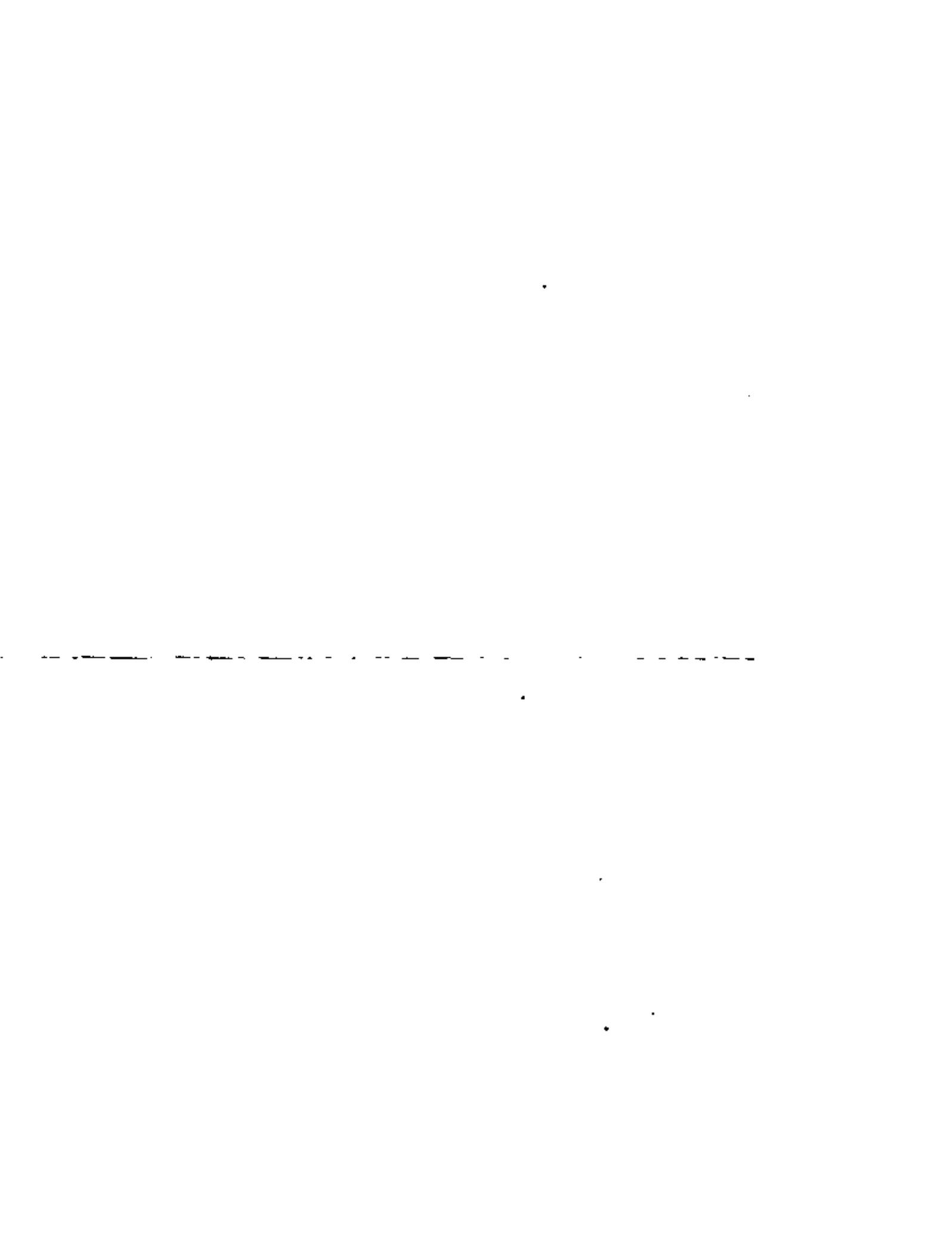
Para una excitación débil, observamos que la permeabilidad es pequeña; no obstante, comparándola con la permeabilidad del aire resulta alrededor de 400 veces más elevada. En una región de excitación moderada, la permeabilidad alcanza su valor máximo, que es aproximadamente 5,400 veces la del aire, y cuando la excitación es intensa, el núcleo no puede aumentar la cantidad de flujo confinado (condición de saturación) por lo cual su permeabilidad cae nuevamente a un valor muy bajo.

La longitud media de las líneas de flujo contenidas dentro del hierro (L) es también una cantidad que presenta ligeras variaciones de acuerdo a las variaciones en la longitud del entrehierro (X).

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (1.5) a diferencia del primer término, contiene la permeabilidad del vacío (μ_o) que es una cantidad constante y como ya hemos comentado de un valor muy inferior a la permeabilidad del núcleo. La única variable en este término es la longitud del entrehierro (X).

Teniendo en cuenta la ecuación (1.5) y la definición de fmm en la (1.4), tenemos ahora la expresión:

$$\phi = \frac{\mu_{fe} \mu_o AN}{\mu_o L + \mu_{fe} X} I_{exc} \quad (1.6)$$



Para un elemento construido con dimensiones específicas, el área de la sección transversal (A) y la longitud media del circuito (L+X) son constantes, de modo que las variables que graficaremos para la ecuación (1.6) son el flujo y la corriente de excitación, como se muestra en la figura 3.

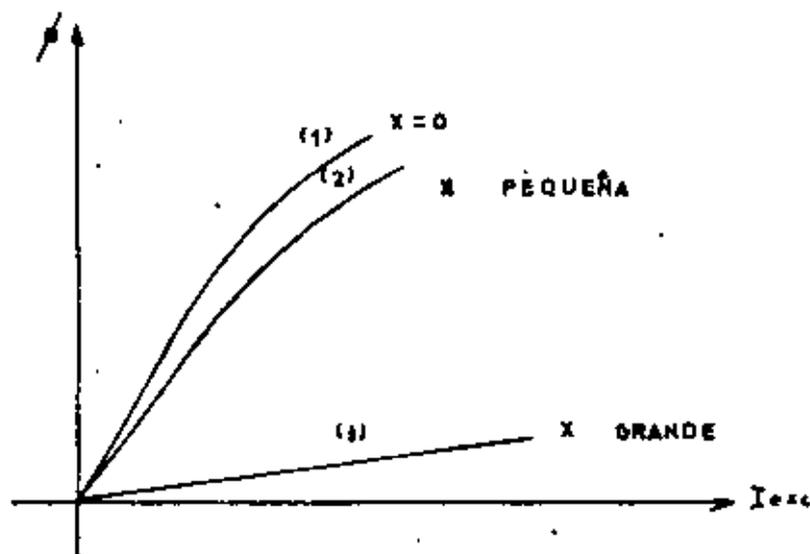


FIGURA 3

Consideremos primeramente el caso de $X=0$ (sin entrehierro; circuito magnético totalmente de fierro). La ecuación (1.6) quedaría:

$$\phi = \frac{\mu_{fe} AN}{L} I_{exc}$$

El quebrado representa la pendiente de la gráfica (1) en la figura 3, la cual se ve afectada por la permeabilidad del fierro (μ_{fe}), que de acuerdo con la figura 2, comienza con un valor pequeño, tomando a continuación su valor máximo y por último, decreciendo con tendencia hacia la horizontal.

Veamos ahora el caso de un entrehierro de longitud (X) muy pequeña comparada con su sección transversal (A). El denominador en la ecuación (1.6) tendría dos términos igualmente significativos, lo cual redundaría en una gráfica similar a la (1) de la figura 3, pero de menor pendiente en cada una de sus respectivas regiones, dando por resultado una gráfica similar a la (2) de la misma figura.

Por último tendremos un entrehierro de dimensiones considerables, lo cual motiva que el segundo término del denominador de la ecuación (1.6) resulte considerablemente más grande que el primero, pudiendo desprejiciarse este último, con lo que la ecuación (1.6) quedaría:



$$\phi = \frac{\mu_0 AN}{\chi} I_{exc}$$

en donde el quebrado representa la pendiente de la gráfica, de valor constante y además muy pequeño. La gráfica para estas condiciones será una recta semejante a la (3) de la figura 3.

2. MAGNETIZACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Teniendo en cuenta que el circuito magnético de la máquina de C.D. incluye piezas ferromagnéticas y entrehierro, podríamos compararlo con el circuito de la figura 1. Si además recordamos que los entrehierros se presentan entre las zapatas polares y el núcleo de la armadura, la longitud de estos entrehierros es muy pequeña comparada con el área de las zapatas polares, de manera que el comportamiento de este circuito magnético se asemeja a la gráfica (2) de la figura 3.

Sin embargo, analizando con más detalle el circuito real de una máquina, encontramos algunas diferencias importantes con respecto al circuito ideal de la figura 1 y su correspondiente respuesta en la figura 3. Estas diferencias serían:

- a) La sección transversal del circuito magnético no es constante, presentando grandes variaciones en donde las áreas más robustas son el núcleo de armadura, la coraza y el cuerpo de las piezas polares, y las más débiles son los dientes de la armadura y los filos de las zapatas polares, lo que motiva que algunas partes del circuito tengan mayor grado de saturación que otras.
- b) El entrehierro no es de longitud uniforme, presentando un valor máximo frente a las ranuras y un valor mínimo frente a los dientes de armadura, lo cual contribuye a la mayor saturación de estos.
- c) Las piezas polares se construyen de imán permanente, además del flujo que proporciona la bobina de excitación, lo que motiva que la curva de magnetización no se inicie en el origen, si no en el valor del flujo remanente.

La figura 4 nos da una idea de las condiciones físicas de este circuito. Las partes más oscuras corresponden a las regiones más débiles y que por consiguiente presentan mayor grado de saturación.

El comportamiento magnético del circuito de la máquina lo podemos apreciar en la figura 5, en la que cada elemento contribuye a una pérdida de pendiente respecto a la curva de comportamiento de un núcleo de geometría regular y totalmente de fierro. Las líneas punteadas de la figura 5 corresponden a los elementos identificados en la figura 4 según el siguiente orden:



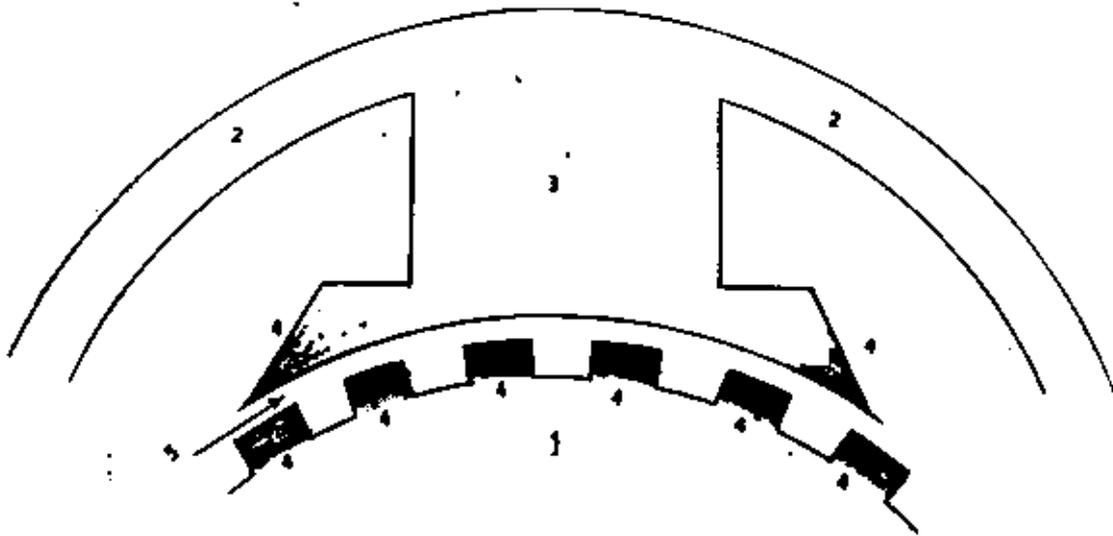


FIGURA 4

1. Núcleo de la armadura
2. Coraza
3. Núcleo de las piezas polares
4. Dientes y aristas de las zapatas polares.
5. Entrehierro.

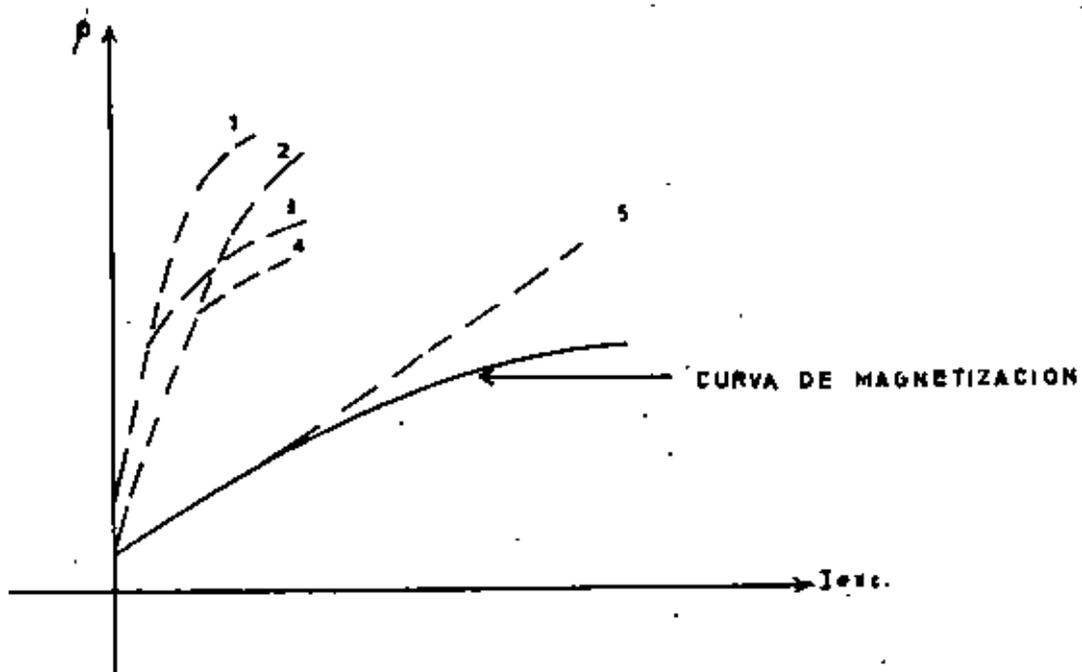


FIGURA 5

El resultado de la influencia de las partes del circuito lo vemos en la figura 5 con el nombre de CURVA DE MAGNETIZACION, que presenta el comportamiento de una máquina real, en donde se puede apreciar el grado de saturación a medida que aumenta la corriente de excitación.

3. FUNCION DE APROXIMACION DE FROELICH

A fin de poder efectuar el análisis de equilibrio de las máquinas de C.D. utilizando funciones que reproduzcan el comportamiento real de las mismas de la manera más fiel posible, es necesario conocer la ecuación de la curva de magnetización que hemos expuesto en la figura 5.

Una ecuación rigorista de esta curva resulta bastante complicada, además de que adoptaría una forma particular para cada máquina real, de acuerdo a las dimensiones relativas de los elementos descritos en las figuras 4 y 5.

Froelich propone una función relativamente sencilla, cuya aproximación a la curva real es aceptable y que se expresa mediante la ecuación:

$$\phi = \frac{a' I_{exc}}{b + I_{exc}} + P' \quad (3.1)$$

en donde a' y b son constantes y P' es el valor del flujo remanente. A manera de ejemplo de esta aproximación podemos observar la figura 6.

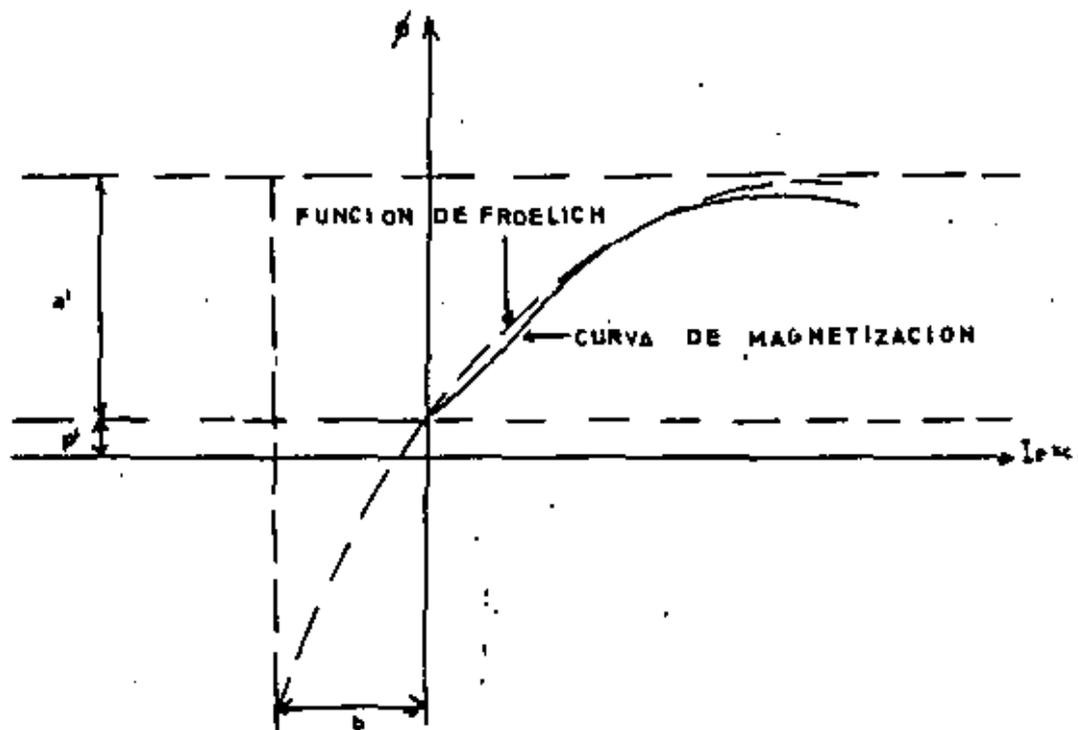


FIGURA 6

La gráfica de la función (3.1) representada en la figura 6 presenta dos asíntotas, una vertical en $I_{exc} = -b$ y otra horizontal en $\phi = P' + a'$. Para la aplicación de esta función, solamente es -

significativa la región correspondiente al primer cuadrante.

El caso más frecuente es que las máquinas operen alrededor de sus especificaciones nominales, las cuales se presentan en la región de saturación, o sea en donde la curva ya ha perdido su pendiente inicial. Cuando el caso en estudio corresponde a estas condiciones, no tiene objeto un análisis con corrientes de excitación pequeñas y aún menos con el magnetismo remanente, lo que nos permite simplificar la función de Froelich de la manera siguiente:

$$\phi = \frac{a^1 I_{exc}}{b^1 + I_{exc}} \quad (3.2)$$

La gráfica correspondiente a la ecuación (3.2) la podemos observar en la figura 7. Esta curva pasa por el origen, suponiendo un magnetismo remanente nulo y sus asíntotas están en $I_{exc} = -b$ y $\phi = a^1$. La asíntota horizontal supone el valor al cual el núcleo presenta su saturación total, para una corriente de excitación muy grande (teóricamente infinita) en una región en que nunca opera la máquina en la realidad. La región de operación alrededor de los valores nominales presenta un grado de aproximación lo suficientemente aceptable para utilizar la función (3.2) en el análisis de equilibrio.

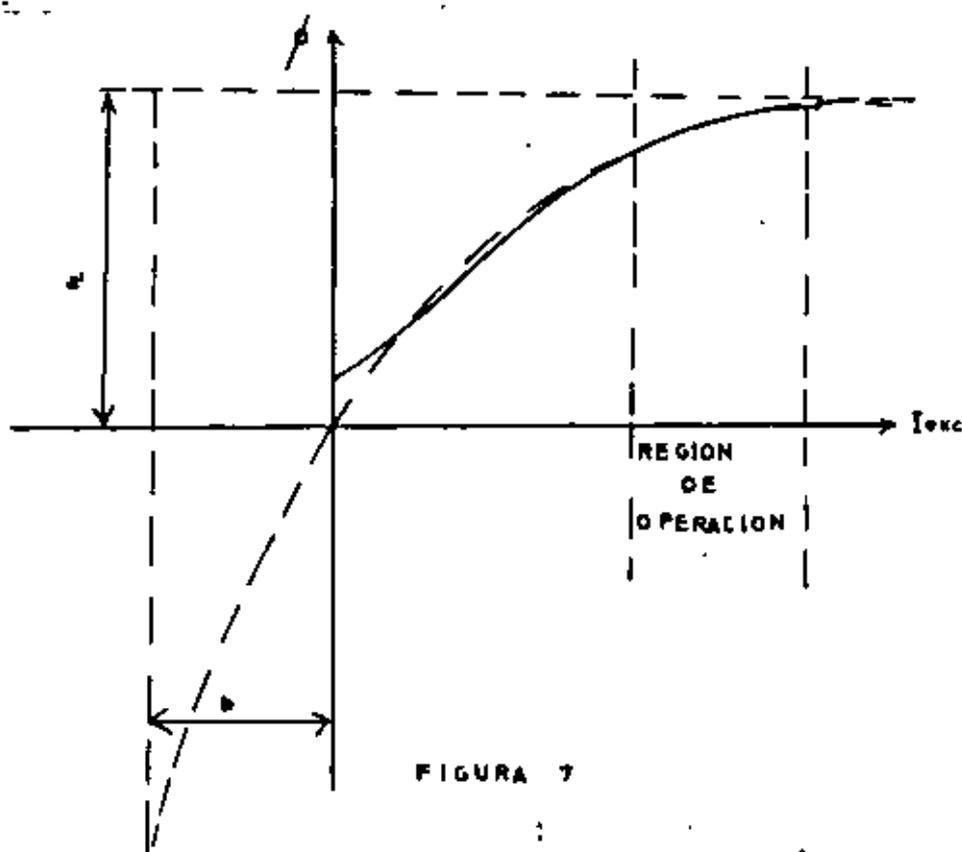


FIGURA 7

4. CURVA DE SATURACION EN VACIO

La fem. inducida en una máquina está dado por las ecuaciones:

$$E = \frac{P\phi ZN}{60 A} \quad \text{sistema convencional} \quad (4.1)$$

$$E = \frac{P\phi Z \omega}{2\pi A} \quad \text{sistema MKS} \quad (4.2)$$

en donde

P es el número de polos de la máquina

ϕ es el flujo por polo

Z es el número total de conductores en las ranuras del núcleo de armadura

N es la velocidad en RPM

ω es la velocidad en radianes por segundo.

A es el número de circuitos en paralelo en el embobinado de armadura.

En estas ecuaciones el flujo y la velocidad constituyen las variables independientes, siendo la fem. la variable dependiente y el resto de las cantidades constituyen las constantes de la máquina. La ecuación (4.1) utiliza el flujo en unidades MKS y la velocidad en unidades convencionales o prácticas (RPM), resultando poco conveniente en algunas aplicaciones para el estudio del equilibrio, particularmente cuando intervienen las expresiones del par desarrollado en donde nos resulta mucho más congruente utilizar todas las unidades del sistema MKS, por lo cual utilizaremos de preferencia la ecuación (4.2).

Si agrupamos todas las constantes en una sola denominación

$$K' = \frac{PZ}{2\pi A}$$

la ecuación (4.2) queda:

$$E = K' \omega \phi \quad (4.3)$$

que es la forma más simple en que podemos expresar el voltaje inducido en la máquina. Sin embargo, en la práctica no es igualmente simple, puesto que la medición del flujo resulta algo laboriosa, por lo cual preferimos expresar la ecuación (4.3) en función de la corriente de excitación, en vez del flujo. Esto se logra sustituyendo el flujo de la (4.3) por su expresión según Froelich,



que puede ser la forma más precisa dada por la ecuación (3.1), o la forma aproximada dada por (3.2).

Cuando se requiere un análisis de comportamiento incluyendo todos los valores posibles de voltaje inducido (también el debido al magnetismo remanente), sustituimos la (3.1) en la (4.3), con lo que queda:

$$E = \frac{K'a'\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + K'P'\omega$$

Si agrupamos constantes bajo una misma denominación:

$$K'a' = a$$

$$K'P' = P$$

con lo que la ecuación de la curva de saturación quedaría:

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega \quad (4.4)$$

En cambio, si el análisis de equilibrio se efectuara únicamente alrededor del voltaje nominal, convendría utilizar la forma simplificada, lo que facilita muchas operaciones. Sustituyendo la (3.2) en la (4.3) queda:

$$E = \frac{K'a'\omega I_{exc}}{b + I_{exc}}$$

Si $K'a' = a$, entonces

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

que es de la forma

$$E = K \omega I_{exc}$$

la cual, a primera vista resulta tan simple como la (4.3), pero en este caso debemos tener en cuenta que K no es una constante, si no una función de la corriente de excitación

$$K = \frac{a}{b + I_{exc}}$$

La gráfica de las ecuaciones (4.4) y (4.5) se muestra en la



figura 8, en donde se puede apreciar su aproximación con una curva real, obtenida en una prueba de laboratorio.

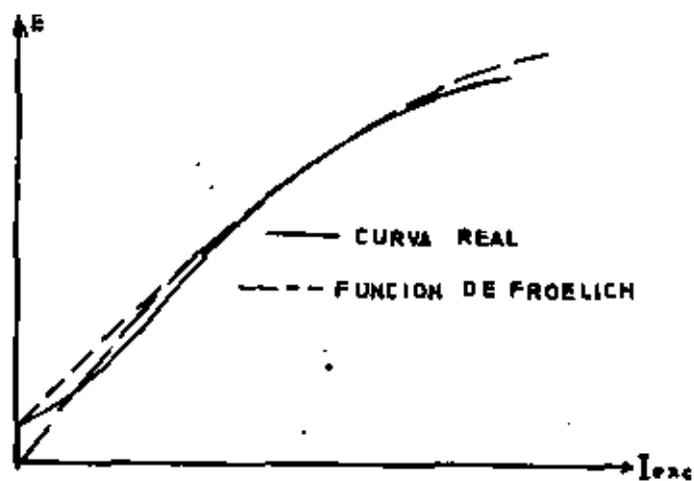


FIGURA 8

Graficando la ecuación (4.4) para diferentes velocidades de la máquina, de tal manera que $\omega_3 > \omega_2 > \omega_1$, obtendríamos las curvas mostradas en la figura 9.



FIGURA 9

Las gráficas mostradas en las figuras 8 y 9 se conocen con el nombre de CURVAS DE SATURACION EN VACIO.



5. CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS MAQUINAS

5.1 DETERMINACION DE LA CURVA DE SATURACION

En los diversos análisis para el equilibrio de la máquina de C.D. juega un papel importante la ecuación de la curva de saturación en vacío, de manera que el primer paso sería determinar esta función de manera que represente lo más fielmente posible el comportamiento de una máquina real.

Para efectuar esta prueba, se acopla la máquina a un motor - adecuado, de manera que pueda operar como generador con excitación independiente, a un velocidad uniforme, de preferencia la nominal. La fuente para excitar independientemente el campo debe suministrar el voltaje adecuado para producir una corriente de excitación desde un valor mínimo hasta un 150% aproximadamente del valor normal, si la máquina en prueba es normalmente de excitación en derivación, o bien debe ser una fuente de corriente capaz de exceder un 20% la corriente nominal de la máquina en prueba, si su excitación normalmente es en serie.

La figura 10 nos muestra el diagrama de conexiones y la figura 11 es un ejemplo de la tabla de lecturas y la curva de saturación en vacío obtenida. Las lecturas deben ser siempre en orden ascendente para evitar errores debidos a la histéresis.

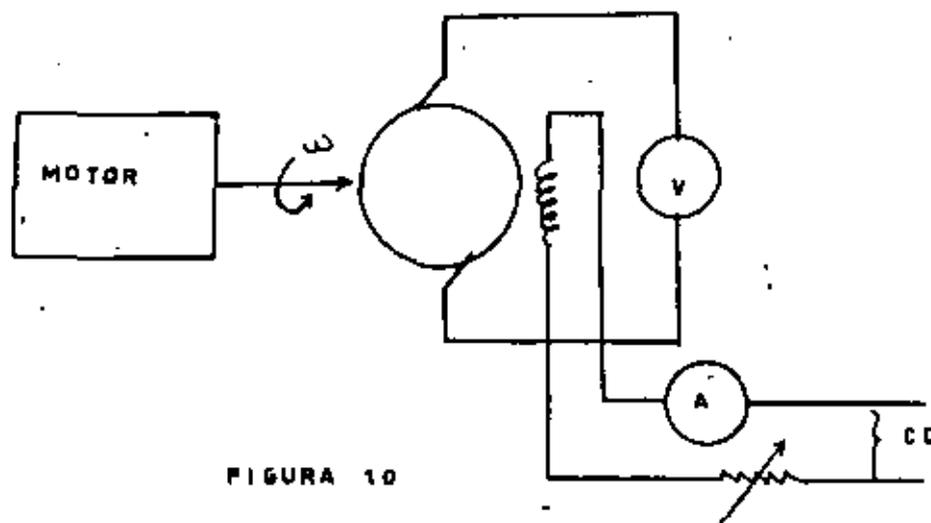


FIGURA 10

I_{exc} AMP	E VOLTS	VEL. RPM
0	E_0	N
I_1	E_1	CTE
I_i	E_i	
I_j	E_j	

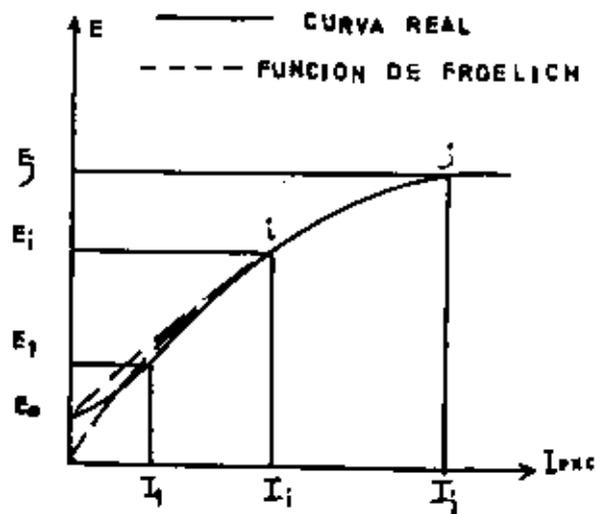


FIGURA 11

La expresión algebraica para el voltaje inducido mostrado - en la gráfica de la figura 11 se puede obtener aplicando la ecuación (4.4) o la (4.5) a dos puntos de la curva obtenida en el experimento, como los i, j.

Según la (4.4):

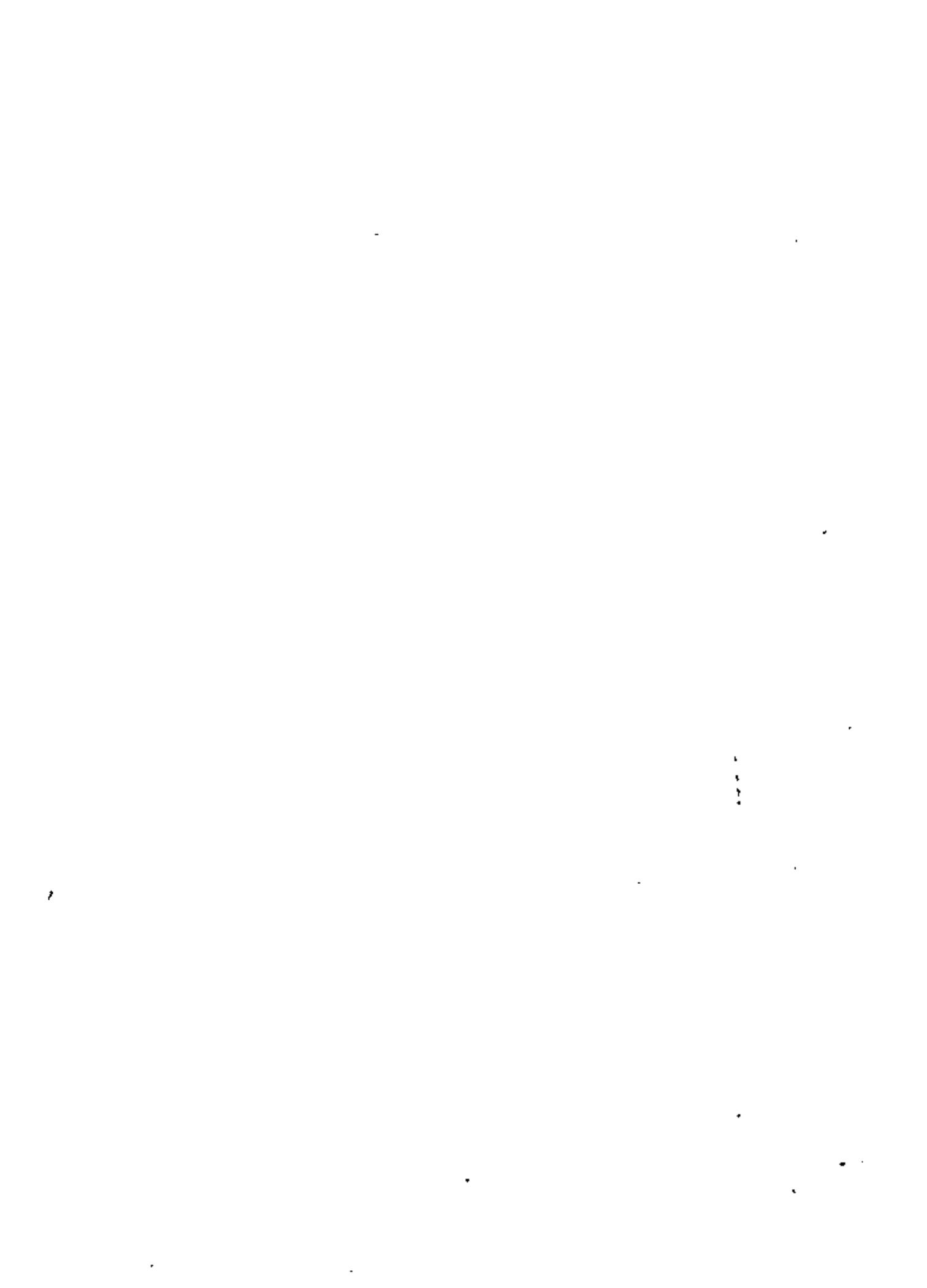
$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{(a\omega)I_1}{(b)+I_1} + (P\omega) \\
 E_j &= \frac{(a\omega)I_j}{(b)+I_j} + (P\omega) \\
 E_0 &= (P\omega)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones simultáneas en donde las incógnitas serían las cantidades encerradas en paréntesis. Si estas cantidades se dividen entre la velocidad angular de prueba (ω , en rad/seg), se obtienen los parámetros a, b y P.

Según la (4.5):

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{(a\omega)I_1}{(b)+I_1} \\
 E_j &= \frac{(a\omega)I_j}{(b)+I_j}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, que serían las cantidades encerradas en paréntesis.



Dividiéndolas entre la velocidad angular de prueba, se obtienen los parámetros a y b.

NOTA.- Frecuentemente se obtienen funciones muy alejadas de la realidad, de manera que para aproximar lo más posible, es necesario aplicar el sistema (5.1) o el (5.2) a varios pares de puntos en distintas regiones de la curva y promediar los valores de parámetros obtenidos, hasta conseguir una aproximación como la que muestra la figura 11.

5.2 VOLTAJE TERMINAL DEL GENERADOR CON CARGA.

El generador de C.D. como toda fuente real de energía eléctrica, tiene una resistencia interna en la cual se presenta una pérdida de voltaje cuya magnitud depende del régimen de carga.

Los elementos operativos del generador con carga los podemos apreciar esquemáticamente en la figura 12.

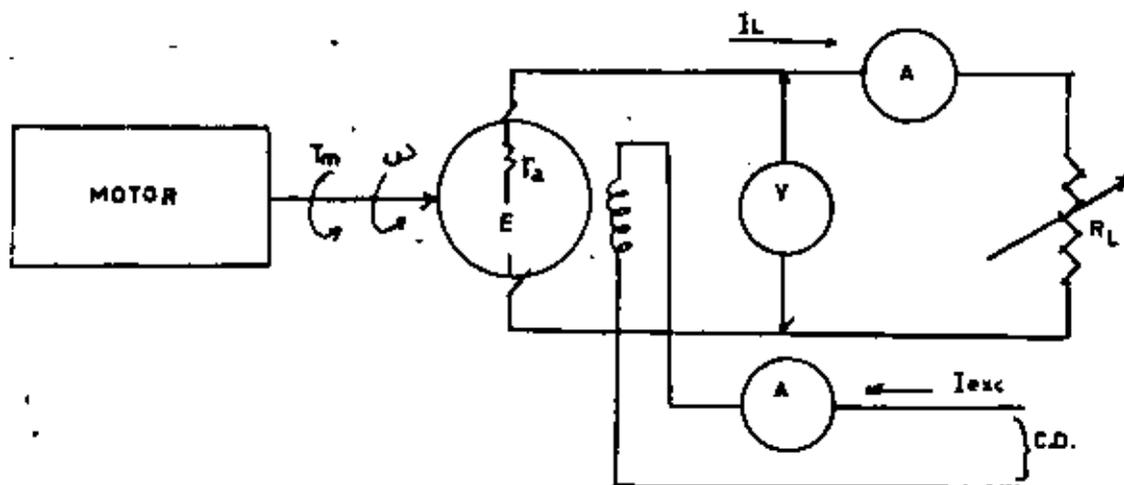


FIGURA 12

Cuando circula una corriente de línea (I_L) por el circuito de armadura del generador, el voltaje en las terminales de la máquina es menor que la fem. E, debido a que aparecen pérdidas en:

- Resistencia interna de la armadura
- Resistencia de las delgas del conmutador
- Resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas
- Resistencia de las escobillas.
- Resistencia del embobinado de interpolos y/o embobinados compensadores.

Para efectos de análisis del comportamiento externo del gene



rador, entenderemos por resistencia del circuito de armadura (r_a), la suma de todas las resistencias mencionadas, puesto que cada una contribuye a la pérdida de voltaje.

De acuerdo con lo anterior, el voltaje en las terminales de la máquina es:

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

que es la ecuación de una recta, como lo muestra la figura 13.

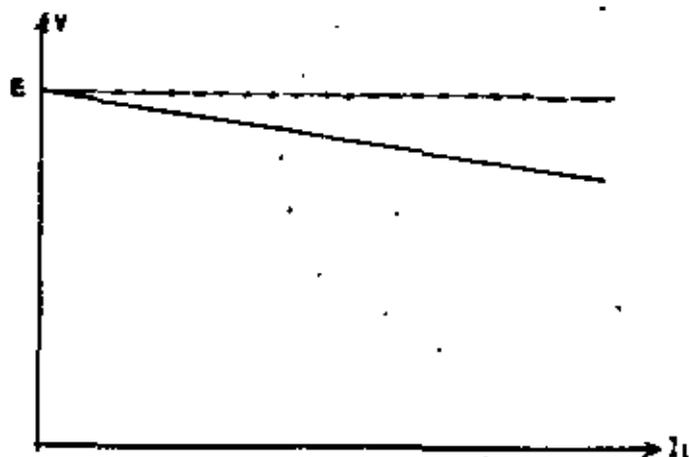
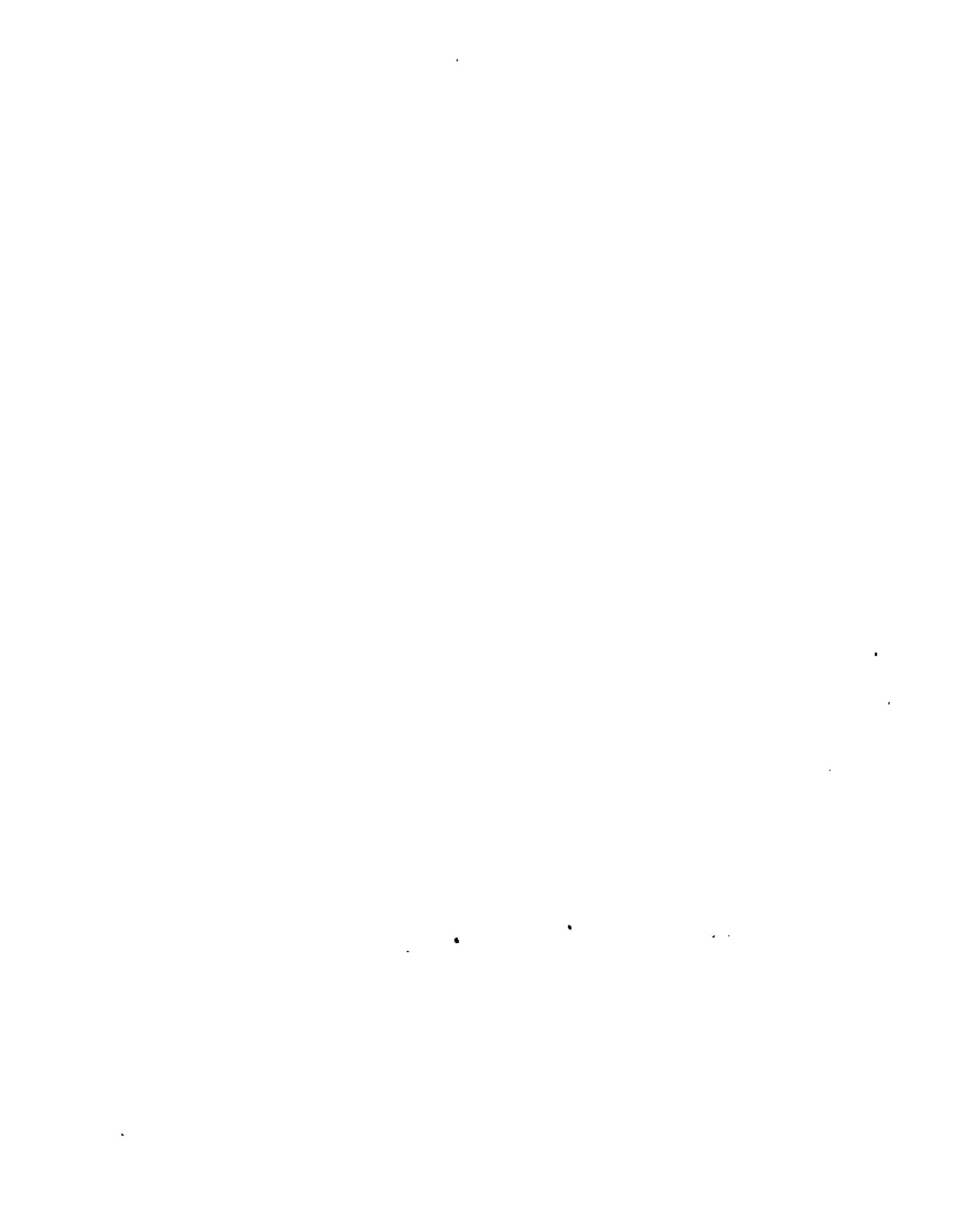


FIGURA 13

El comportamiento del voltaje terminal que muestran la ecuación (5.3) y la figura 13 corresponden a un generador excitado en forma independiente, como es el que se muestra en la figura 12, en donde la corriente de excitación permanece constante y la fem. no se distorsiona por efecto de la reacción de armadura. Esta condición se cumple en forma bastante cercana a lo deseable cuando la máquina tiene una compensación bien equilibrada de la reacción de armadura, por medio de los interpolos y/o los devanados compensadores.

Cálculo de la resistencia del circuito de armadura.- Averiguar el valor de esta resistencia es un trabajo que presenta algunos problemas, fundamentalmente porque interviene la resistencia de la superficie de contacto conmutador-escobillas, la cual muy frecuentemente varía de las condiciones de reposo a las velocidades en que normalmente opera la máquina. Esto hace que no sea válida una medición de la resistencia con la máquina en reposo.

El valor más exacto lo podríamos calcular con el generador operando a velocidades cercanas a la nominal, y por medio de un arreglo como el que ilustra la figura 12, tomar una serie de pares de lecturas que nos permitan construir la gráfica de la figura 13. Es de importancia fundamental que esta prueba se efectúe -



con velocidad y corriente de excitación estrictamente constantes.

Si la gráfica obtenida es recta, podemos confiar en una buena compensación de la reacción de armadura. Entonces la resistencia del circuito de armadura (r_a) la podemos calcular para una determinada corriente de línea, como:

$$r_a = \frac{V_{\text{vacío}} - V_{\text{con carga}}}{I_L} \quad (5.4)$$

Para mayor precisión se recomienda calcular esta resistencia para diferentes pares de valores leídos, y promediar los resultados.

5.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ DEL MOTOR CON CARGA

Cuando la máquina trabaja como motor, se induce en la armadura una fem (llamada frecuentemente fuerza contra electromotriz), de manera que los elementos operativos de la máquina los podemos apreciar en la figura 14.

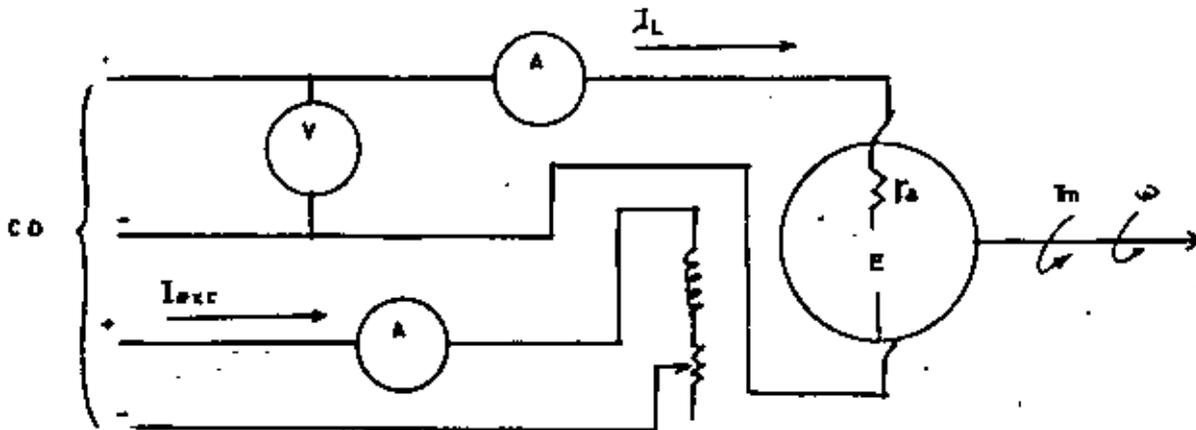


FIGURA 14

En el caso del motor, la fem. es menor que el voltaje externo (voltaje aplicado) del circuito de armadura, de manera que:

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

en donde solamente el signo en el segundo miembro es lo que diferencia el comportamiento de motor del de generador.



5.4 PAR ELECTROMAGNETICO

Cuando existen simultáneamente el flujo inductor (debido a la corriente de excitación) y una reacción de armadura (debida a la corriente de línea), la interacción entre estos dos campos produce un par mecánico de origen electromagnético.

Si la máquina trabaja como generador, este par es de sentido opuesto a la velocidad, motivando que el primotor reaccione entregando el par necesario para mantener la velocidad. De esta manera el generador absorbe la potencia mecánica necesaria para convertirla en potencia eléctrica.

Si la máquina opera como motor, el par es del mismo sentido que la velocidad, entregando así la potencia mecánica que ha convertido a partir de potencia eléctrica.

Una forma sencilla de evaluar el par electromagnético es mediante el esquema de balance de potencia que ilustra la figura 15.

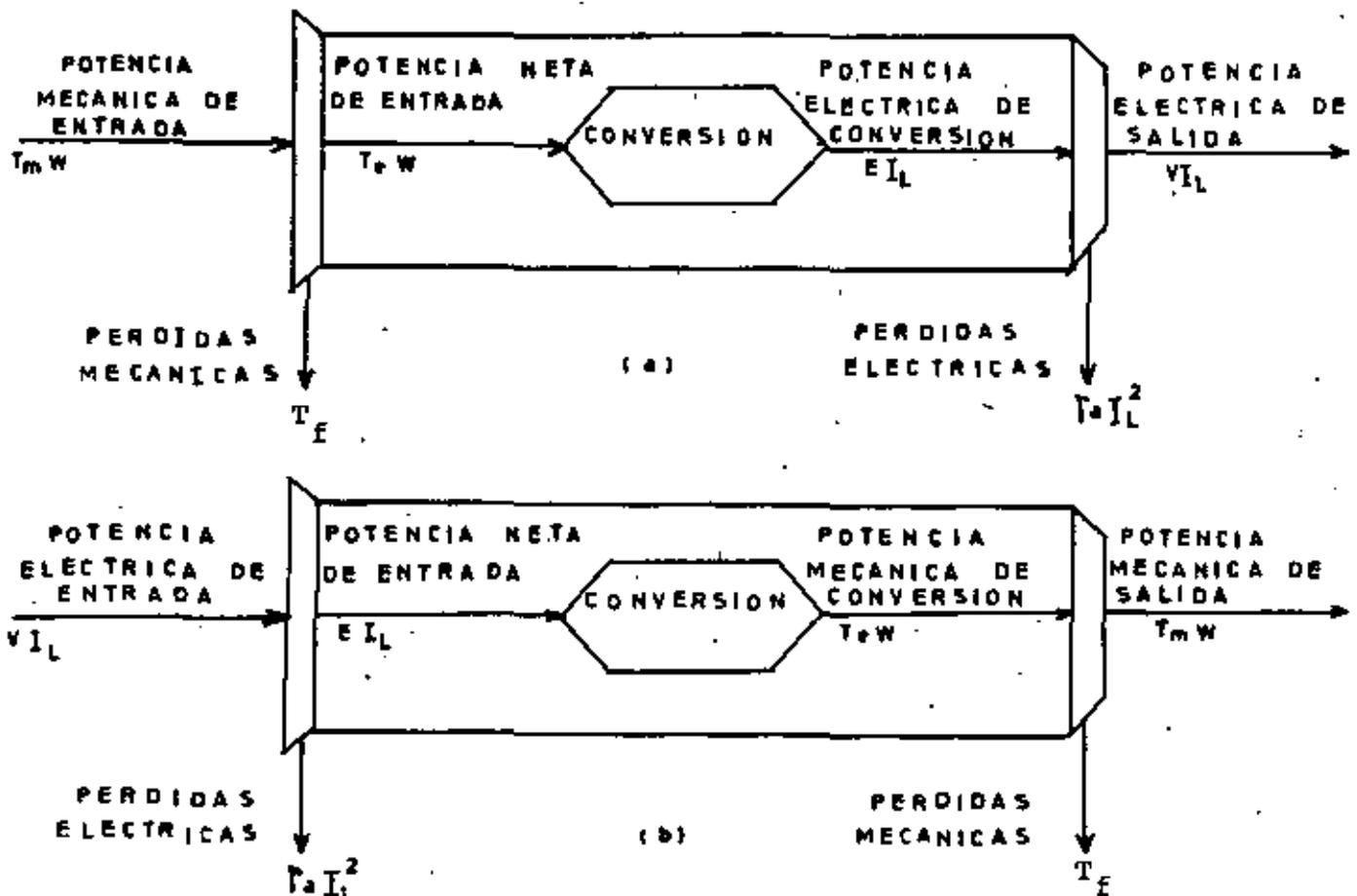


FIGURA 15

La potencia mecánica en la flecha de la máquina consta de un par mecánico (T_m) y la velocidad angular (ω).

El par de fricción (T_f) ocasiona pérdidas mecánicas, motivando que el par en la armadura sea diferente del par mecánico¹. El par en la armadura es el que hemos llamado par electromagnético (T_e).

En la parte eléctrica, la potencia que maneja la armadura ($E I_L$) también difiere de la potencia en las terminales de la máquina ($V I_L$) debido a las pérdidas eléctricas en el circuito de armadura.

En el fenómeno de conversión que se lleva a cabo en la armadura, una potencia mecánica ($T_e \omega$) se transforma en potencia eléctrica ($E I_L$) en el caso del generador (figura 15-a) y a la inversa en el caso del motor (figura 15-b), de manera que independientemente de como opere la máquina, podemos establecer que:

$$T_e \omega = E I_L$$

de donde el par electromagnético será:

$$T_e = \frac{E I_L}{\omega} \quad (5.6)$$

El valor de E en la ecuación (5.6) puede obtenerse de la (4.4) o de la (4.5).

6. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

6.1 GENERADOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE.

El planteamiento para el análisis de equilibrio del generador con excitación independiente es prácticamente el mismo que se ha hecho en el párrafo 5, de manera que solamente nos concretaremos a reunir en una forma resumida esta información.

- a) Voltaje del generador en vacío.- Al no haber corriente circulante en el circuito de armadura, el voltaje es igual a la fem. Esta, además puede controlarse desde el valor inducido por el magnetismo remanente hasta el voltaje nominal de la máquina, siendo estable en cualquier nivel, ya que la corriente de excitación se suministra en forma independiente. La ecuación (4.4) forma parte del cuadro de ecuaciones de equilibrio que presentaremos más adelante.

¹En un balance más riguroso se incluyen en el mismo campo de acción de las pérdidas mecánicas, las pérdidas magnéticas por histéresis y corrientes parásitas en el núcleo de la armadura.



- b) Voltaje del generador con carga.- Si se mantienen constantes la velocidad y la corriente de excitación, el voltaje de la máquina está dado por la (5.3).
- c) Par absorbido por el generador.- Observando la figura 15-a, podemos darnos cuenta que el par mecánico absorbido por el generador es igual al par electromagnético más el par de pérdidas mecánicas. Esta consideración, agregada a la ecuación (5.6) nos da el equilibrio mecánico de la máquina.

Por tanto, las consideraciones de equilibrio quedan reunidas en el siguiente cuadro:

(a) Voltaje en vacío:	$E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$	(6.1)
(b) Voltaje con carga:	$V = E - r_a I_L$	
(c) Par mecánico absorbido:	$T_m = T_f + T_e$	
(d) Par electromagnético:	$T_e = \frac{E I_L}{\omega}$	

que constituyen un sistema de ecuaciones inter-relacionadas, ya que el cálculo de algunas variables puede estar especificado en otra de las ecuaciones. La figura 16 reúne la respuesta de la máquina según este cuadro de ecuaciones

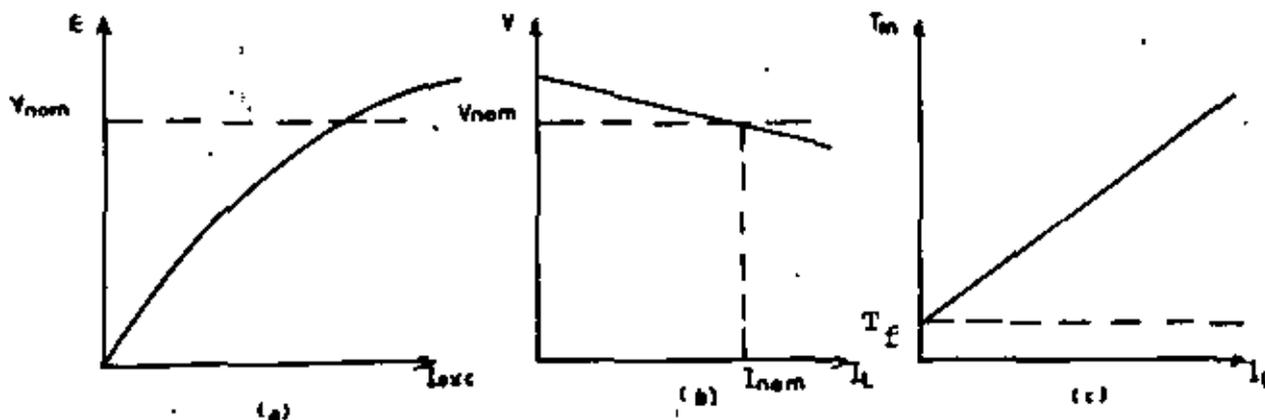


FIGURA 16

Regulación de voltaje.- En la figura 16-b observamos que la máquina se ha ajustado de tal manera que cuando esté suministrando a la línea el valor de corriente nominal, el voltaje terminal sea también al valor nominal.

El voltaje en vacío, por supuesto, debe exceder al valor nominal en una cantidad igual a la caída de tensión que aparece en el circuito de armadura a plena carga.

Definimos como "Regulación de voltaje", la caída de tensión en las terminales desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg.} = \frac{V_V - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100 \quad (6.2)$$

en donde:

V_V = voltaje terminal en vacío

V_{PC} = voltaje terminal a plena carga

V_{nom} = voltaje nominal de la máquina

Para una máquina ajustada a la respuesta que muestra la figura 16-b:

$$V_{PC} = V_{\text{nom.}}$$

6.2 . MOTOR CON EXCITACION INDEPENDIENTE

Aparentemente resulta poco práctico un motor de C.D. con excitación independiente, ya que esto requeriría dos fuentes de alimentación, una para la armadura y otra para el campo, como lo ilustra la figura 17, sin embargo, del análisis que haremos a continua

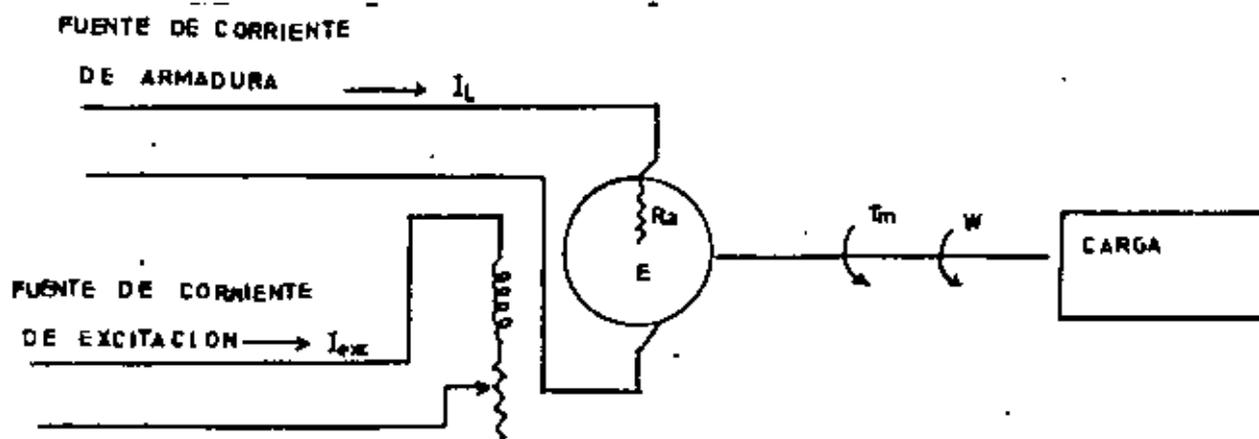


FIGURA 17

ción veremos que presenta grandes ventajas, particularmente en lo que se refiere al control de velocidad.

Normalmente un arreglo como el de la figura 17 se opera con una corriente de excitación constante, cuyo valor se ajusta alrededor de aquel que induce la fem. nominal a velocidad nominal, lo



que nos permite hacer uso de la función de Froelich simplificada:

$$E = \frac{a}{b+I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

en la cual si tenemos en cuenta la condición que acabamos de describir:

$$\frac{a I_{exc}}{b+I_{exc}} = K_e$$

por lo cual

$$E = K_e \omega \quad (6.3)$$

El comportamiento del circuito de arandura es como lo hemos expuesto en la ecuación (5.5):

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$

Sustituyendo (6.3) en (5.5) tenemos

$$V = K_e \omega + r_a I_L$$

de donde

$$\omega = \frac{V - r_a I_L}{K_e} \quad (6.4)$$

Para el equilibrio mecánico, de la figura 15-b podemos deducir que:

$$T_m = T_e - T_f \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5.6) y (6.3) en la (6.5):

$$T_m = K_e I_L - T_f$$

de donde

$$I_L = \frac{T_m + T_f}{K_e} \quad (6.6)$$

La ecuación (6.6) nos muestra que la corriente I_L nunca puede ser nula, pues aún en el caso de que el motor trabajara en vacío

$T_m=0$), las pérdidas por fricción estarían motivando un pequeño valor de I_L .

Sustituyendo la (6.6) en la (6.4) tenemos:

$$\omega = \frac{K_e V - r_a T_m - r_a T_f}{K_e^2} \quad (6.7)$$

- Velocidad del motor con voltaje de armadura constante y carga (par) variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $-r_a/K_e^2$ y cuya ordenada al origen es $(K_e V - r_a T_f)/K_e^2$
- Velocidad del motor con par de carga constante y voltaje variable.- La ecuación (6.7) representa una recta cuya pendiente es $1/K_e$ y cuya ordenada al origen es $r_a (T_m - T_f)/K_e^2$
- Voltaje necesario para mantener velocidad constante con carga variable.- Despejando el voltaje de la ecuación (6.7) tenemos:

$$V = \frac{r_a T_m + K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$$

que corresponde a una recta cuya pendiente es r_a/K_e y cuya ordenada al origen es $(K_e^2 \omega + r_a T_f)/K_e$

Las condiciones anteriores las podemos apreciar en forma más objetiva si ordenamos las ecuaciones bajo la estructura $y=mx+b$ como las presentamos en el siguiente cuadro.

a) Velocidad a voltaje constante	$\omega = -\frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2}$	
b) Velocidad con par constante	$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$	
c) Voltaje necesario a velocidad constante	$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega + r_a T_f}{K_e}$	(6.8)
Par mecánico	$T_m = T_e - T_f$	
Constante de excitación	$K_e = \frac{a I_{exc}}{b + I_{exc}} = \frac{E}{\omega}$	

Las gráficas correspondientes a las ecuaciones (6.8) las ilustramos a continuación en la figura 18.

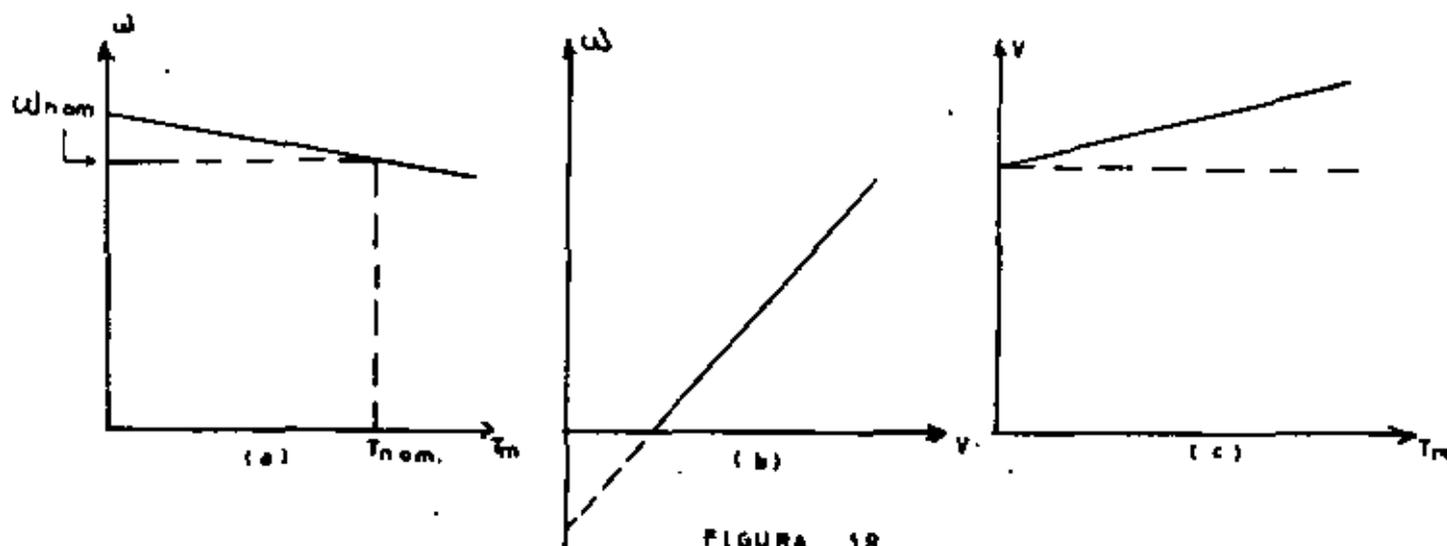


FIGURA 18

El caso (a) de las ecuaciones (6.8) y de la figura 18 es interesante para conocer el tipo de respuesta que da este motor, en cambio los casos (b) y (c) representan aspectos fundamentales para el diseño de control del motor de C.D., puesto que definen las características de la fuente de alimentación que requieren.

Regulación de velocidad.- Para condiciones de alimentación del motor constantes (voltaje de arandura y corriente de excitación), definimos como "Regulación de velocidad", la pérdida de velocidad desde la condición de vacío hasta la de plena carga, expresada en por ciento.

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{nom.}} \times 100 \quad (6.9)$$

en donde:

- ω_v = velocidad del motor en vacío
- ω_{PC} = velocidad del motor a plena carga
- ω_{nom} = velocidad nominal del motor

Si el motor se ajusta a una respuesta como la que muestra la figura 18-a, entonces

$$\omega_{PC} = \omega_{nom}$$

7. ESTADO ESTABLE DE LA MAQUINA CON EXCITACION EN DERIVACION.

7.1 GENERADOR CON EXCITACION EN DERIVACION.

Conectar la excitación del generador en derivación significa ponerlo en paralelo con la armadura y con la carga, de manera que para excitar la máquina se utiliza la energía generada en la propia armadura, por lo cual se dice que se trata de un generador autoexcitado.

La autoexcitación es factible gracias a ciertas características, como son:

- El magnetismo remanente, el cual permite la generación de un pequeño voltaje, suficiente para iniciar la corriente de excitación.
- La energía necesaria para la excitación es apenas del 2 al 5% de la capacidad de la armadura, por lo cual el generador prácticamente sigue siendo capaz de suministrar a la carga su potencia nominal.
- La saturación del circuito magnético permite un punto de equilibrio con la excitación, con lo que se consigue un voltaje estable.

El diagrama del generador en derivación lo podemos apreciar en la figura 19.

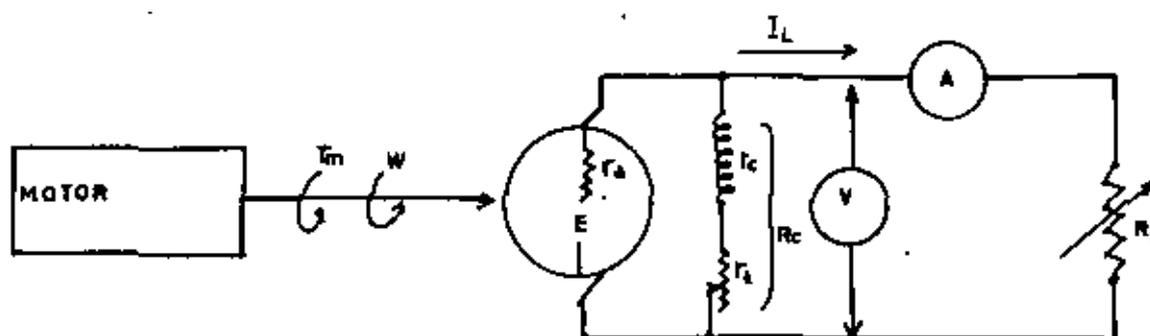


FIGURA 19

Además de los elementos estudiados en diagramas anteriores, tenemos ahora en la figura 19, la resistencia del embobinado del campo inductor (r_f), la resistencia del reóstato de campo (r_f') y la resistencia del circuito de campo, $R_f = r_f + r_f'$, cuyos valores intervendrán en las ecuaciones de equilibrio,

- a) Voltaje del generador en vacío.- Supongamos en la figura 19, una condición inicial con $R_L = \infty$, o sea $I_L = 0$ que es la condición de "generador en vacío"

El voltaje generado se localizará en algún punto de la curva de saturación, lo que nos permite usar la función de Froelich simplificada, que transcribimos a continuación:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (4.5)$$

La única corriente circulante en estas condiciones es por la malla que forman la armadura y el circuito de campo, que ilustramos en la figura 20. Su valor sería:

$$I_{exc.} = \frac{E}{r_a + R_c} \quad (7.1)$$

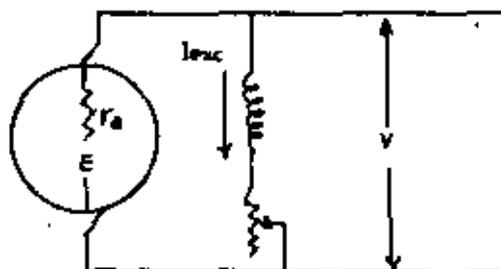


FIGURA 20

Teniendo en cuenta que la corriente de excitación es muy pequeña comparada con la corriente nominal de la máquina, y además, la resistencia del circuito de armadura (r_a) es también muy pequeña, la caída de voltaje en la armadura podemos despreciarla sin cometer error perceptible, de manera que el voltaje aplicado al circuito de campo es prácticamente igual a la fem (E). La ecuación (7.1) quedaría por tanto:

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c} = \frac{V}{R_c} \quad (7.1)b$$

Esta ecuación está especificada en las mismas coordenadas que la (4.5), de manera que se puede expresar gráficamente como una recta cuya pendiente es R_c , simultáneamente con la curva de saturación en vacío, como aparece en la figura 21.

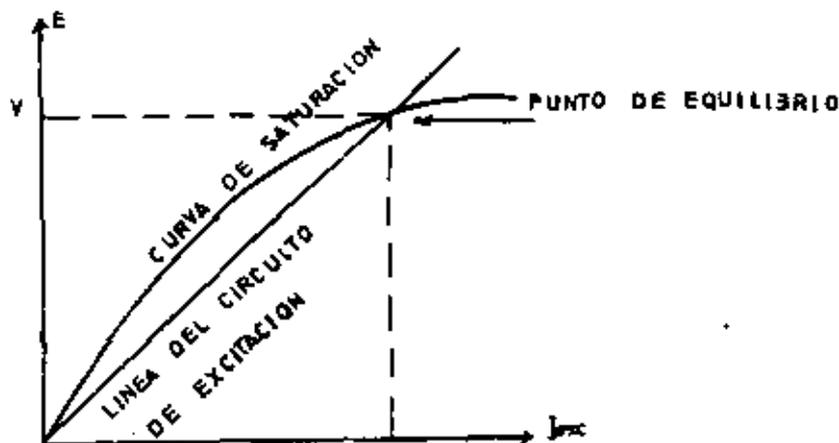


FIGURA 21



La intersección entre las dos gráficas de la figura 21 constituye el punto de equilibrio en el cual el generador induce un voltaje estable.

El sistema de ecuaciones simultáneas que nos permite analizar las condiciones de la figura 21 es:

$$E = \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \quad (7.2)$$

$$I_{exc} = \frac{E}{R_c}$$

Si recordamos que en el circuito de excitación se ha incluido un reóstato, la resistencia de este circuito puede variar dentro de ciertos límites, lo que se manifiesta en la figura 21 con un cambio en la pendiente de la línea recta, motivando que el punto de equilibrio puede desplazarse a lo largo de gran parte de la curva de saturación.

La máxima resistencia admisible es cuando la recta de excitación se hace tangente a la curva de saturación, no existiendo entonces intersección entre las dos gráficas, y por tanto no hay estabilidad en el voltaje de la máquina.

La mínima resistencia es cuando se ha eliminado el reóstato, y queda únicamente la resistencia del embobinado de excitación. En estas condiciones es el máximo voltaje que se puede obtener del generador.

Las diversas opciones descritas anteriormente para un voltaje estable del generador se muestran en la figura 22.

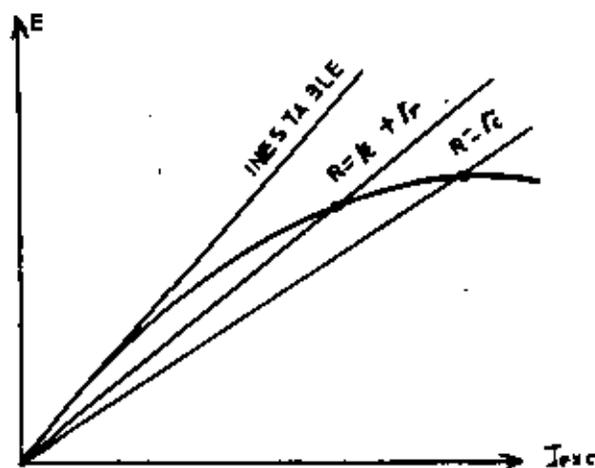


FIGURA 22

- b) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- Regresando ahora a la figura 19, supongamos un valor de (R_L) tal que haga circular una corriente en la línea de carga (I_L), de un valor apreciable, de manera que la caída en la resistencia del circuito de armadura (r_a) ocasiona una diferencia entre la fem. y el voltaje terminal.

A la vez, como el voltaje terminal es el que alimenta al campo inductor, este también se debilita, ocasionando una disminución de la fem., por lo tanto:

$$E \text{ con carga} < E \text{ en vacío}$$

Un generador en derivación, consecuentemente sufre una pérdida de voltaje apreciablemente mayor que uno con excitación independiente cuando pasan de la condición de vacío a la plena carga.

Para efectos de análisis, continuaremos considerando que la corriente de excitación es muy pequeña, por lo que la corriente en la armadura prácticamente está definida por el valor de la corriente de línea (I_L), lo que no nos conduce a un error apreciable.

El comportamiento del generador bajo las circunstancias descritas, estará dado por un sistema de tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} V &= E - r_a I_L \\ E &= \frac{a}{b + I_{exc}} \omega I_{exc} \\ I_{exc} &= \frac{V}{R_c} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sustituyendo en la primera de las ecuaciones (7.3), las otras dos, obtenemos:

$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} - r_a I_L \quad (7.4)$$

que es una ecuación de segundo grado en coordenadas (I_L , V) cuya gráfica es la de forma presentada en la figura 23.

Regulación de voltaje.- El concepto de regulación de voltaje dado en la ecuación (6.2) se aplica también en este caso, de manera que:

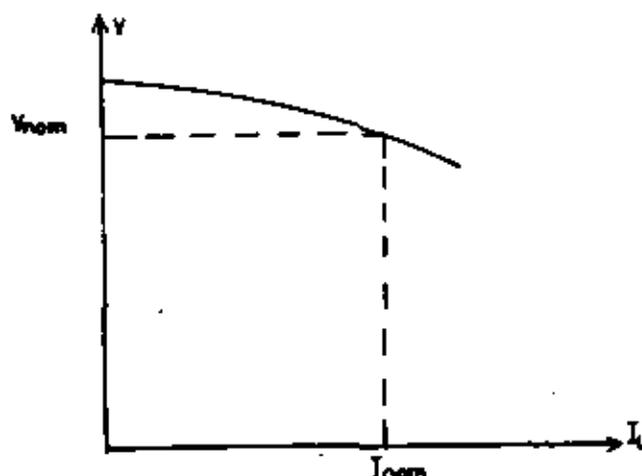


FIGURA 23

$$\text{Reg} = \frac{V_v - V_{PC}}{V_{\text{nom}}} \times 100$$

Si la máquina se ajusta para la respuesta mostrada en la figura 23, entonces:

$$V_{PC} = V_{\text{nom}}$$

El valor de regulación para una misma máquina, es mayor cuando se excita en derivación que cuando se excita en forma independiente.

- c) Curva empleta de la respuesta de voltaje del generador con carga.- Las especificaciones nominales de una máquina se refieren a los valores a los cuales puede trabajar continuamente sin dañarse por elevación de temperatura.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la máquina es un dispositivo conversor de energía, es posible exceder estas limitaciones por tiempo corto, de manera que se puede investigar en que forma continúa decreciendo el voltaje mostrado en la figura 23, al sobrepasar considerablemente su corriente nominal. No obstante, prolongar este estado de sobrecarga, se refleja en calentamiento de los conductores de los embobinados, con la consecuente degradación de los aislamientos.

Graficando la ecuación (7.4) en toda la extensión del primer cuadrante de coordenadas, nos da una curva similar a la (7.4) de la figura 24. Esta gráfica, como podemos observar entra en el dominio de voltajes muy pequeños, y aún sin corriente de excitación

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Από την ανισότητα (11) προκύπτει:

Από την ανισότητα (11) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

$$A = 1 + i^n \Gamma \tag{12}$$

Από την ανισότητα (12) προκύπτει:

Από την ανισότητα (12) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

$$\Gamma = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \tag{13}$$

Από την ανισότητα (13) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

Από την ανισότητα (13) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

Από την ανισότητα (13) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Από την ανισότητα (14) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Από την ανισότητα (15) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^n} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Από την ανισότητα (16) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

Από την ανισότητα (16) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

Από την ανισότητα (17) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

Από την ανισότητα (17) προκύπτει: $(1+i)^n > 1 + ni$ (για $n > 1$)

que es una curva de la forma que muestra la figura 27-b. En este tipo de control, el rango de velocidades que se obtiene es muy pequeño, pues está sujeto a las limitaciones que describimos a continuación:

Límite superior.- Dado que para aumentar la velocidad es necesario disminuir la corriente de excitación, la corriente de línea aumenta, según podemos observar en la ecuación de par:

$$T_m = \frac{a}{b + I_{exc}} I_{exc} I_L - T_f \quad (7.12)$$

Como la máquina estará trabajando a par constante, la mínima corriente de excitación admisible es aquella con la que no se excede la corriente de línea nominal, por tanto despejando I_{exc} de la (7.12) tenemos:

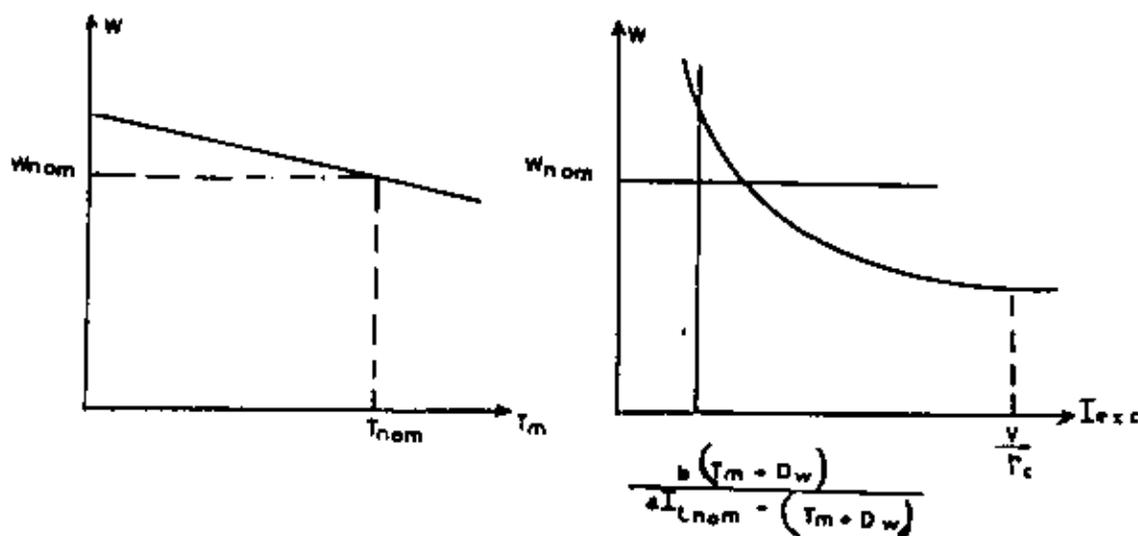
$$I_{exc} \text{ (mínima)} = \frac{b(T_m + T_f)}{aI_{L-nom} - (T_m + T_f)} \quad (7.13)$$

La corriente de excitación puede bajar hasta su valor mínimo dado en (7.13), siempre y cuando este valor no se exceda en forma peligrosa la velocidad nominal de la máquina.

Límite inferior.- Para disminuir la velocidad es necesario aumentar la corriente de excitación, reduciendo la resistencia del reóstato (r_r). Cuando se ha eliminado totalmente esta resistencia, solamente queda incluida en el circuito de excitación la resistencia del embobinado (r_c) y la corriente de excitación:

$$I_{exc} = \frac{V}{r_c}$$

es la máxima que se puede obtener.



(a)

FIGURA 27

(b)

En la figura 27-b observamos que para grandes variaciones cerca del límite superior de la corriente de excitación, las correspondientes variaciones en la velocidad resultan pequeñas, ya que la máquina está en una región de alta saturación. Por el otro extremo, la curva de velocidad es asintótica con el eje vertical, de manera que una excitación débil tiende a aumentar rápidamente la velocidad.

Razonando sobre ésta última observación, nos podemos dar cuenta del peligro que corre un motor al debilitarse (o interrumpirse, en el caso extremo) la corriente de excitación.

Regulación de velocidad.- El concepto de regulación de velocidad para la figura 27-a es exactamente bajo las mismas condiciones que se especifican para la ecuación (6.9)

$$\text{Reg} = \frac{\omega_v - \omega_{PC}}{\omega_{\text{nom}}} \times 100.$$

8. ESTADO ESTABLE DE LA MÁQUINA CON EXCITACION EN SERIE

La máquina con excitación en serie presenta ciertas características particulares, que como veremos limitan las aplicaciones en calidad de generador, y en cambio, como motor presenta una respuesta que lo pone en ventaja con respecto a otros tipos de motores principalmente en lo que se refiere a sistemas de tracción.

El embobinado de excitación al estar en serie con la armadura lo consideraremos como parte del circuito de la misma, lo cual motiva que:

- La resistencia (r_a) que para los estudios anteriores incluye las resistencias del embobinado de armadura, conmutador, contacto conmutador-escobillas, escobillas y devanados de interpolos y/o compensadores, incluye ahora también la resistencia del devanado de campo en serie. Su valor es aproximadamente del mismo orden del que presenta el resto del circuito de armadura.
- La corriente de excitación es la misma corriente de línea, por lo cual en el análisis de este tipo de máquina utilizaremos la nomenclatura única (I_L).

La curva de saturación en vacío se puede obtener como experimento de laboratorio, pero en la práctica no es posible ajustar cualquier valor de voltaje dado por esta curva, en condiciones de vacío, ya que la excitación la da la corriente de carga.

8.1 GENERADOR CON EXCITACION EN SERIE

- a) Variación del voltaje terminal del generador con carga.- En -

la figura 28 presentamos el diagrama de un generador con excitación en serie.

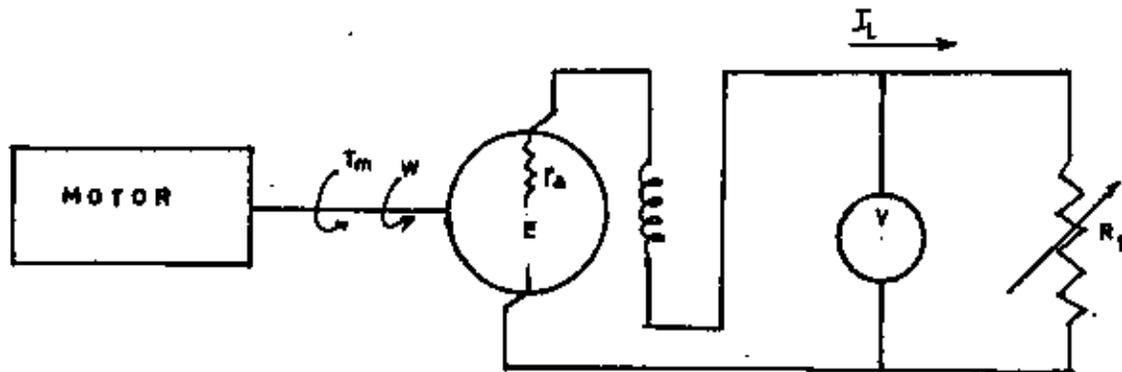


FIGURA 28

La resistencia de carga (R_L) puede variar desde un valor infinito (circuito abierto) hasta un valor pequeño, tal que haga circular la corriente nominal de la máquina. Por tanto la corriente de excitación (I_L) puede variar desde cero hasta el valor nominal, lo cual nos lleva a iniciar nuestro análisis a partir de la ecuación de Froelich (4.4).

$$E = \frac{a\omega I_L}{b + I_L} + P\omega \quad (4.4)$$

El comportamiento del circuito de armadura está dado por la (5.3)

$$V = E - r_a I_L \quad (5.3)$$

Sustituyendo (4.4) en (5.3) obtenemos:

$$V = \left(\frac{a\omega}{b + I_L} - r_a \right) I_L + P\omega \quad (8.1)$$

La ecuación (8.1) representa una curva de forma análoga a la de saturación en vacío, que se inicia en el mismo punto correspondiente al voltaje inducido por el magnetismo remanente, pero que pierde su pendiente en forma más rápida que ésta. En la figura 29-a podemos comparar la forma de estas dos curvas.

b) Par absorbido por el generador.- Hemos visto del análisis de la figura 15-a que:

$$T_m = T_e + T_f$$



y por la ecuación (5.6):

$$T_e = \frac{EI_L}{\omega} \quad (5.6)$$

De manera que teniendo en cuenta (4.4) y (5.6) en la ecuación del par mecánico, obtenemos:

$$T_m = \frac{aI_L^2}{b+I_L} + P I_L + T_f \quad (8.2)$$

El primer término del segundo miembro de la (8.2) es el más significativo, por lo que podemos afirmar que el par absorbido -- por el generador (T_m), es proporcional al cuadrado de la corriente de carga (I_L). Su representación de tipo parabólico la podemos apreciar en la figura 29-b.

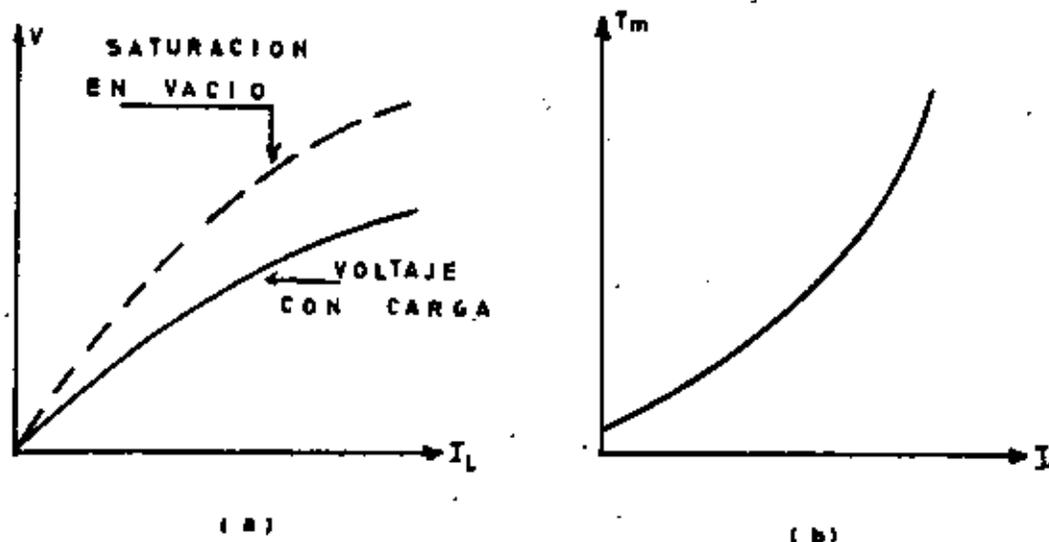


FIGURA 29

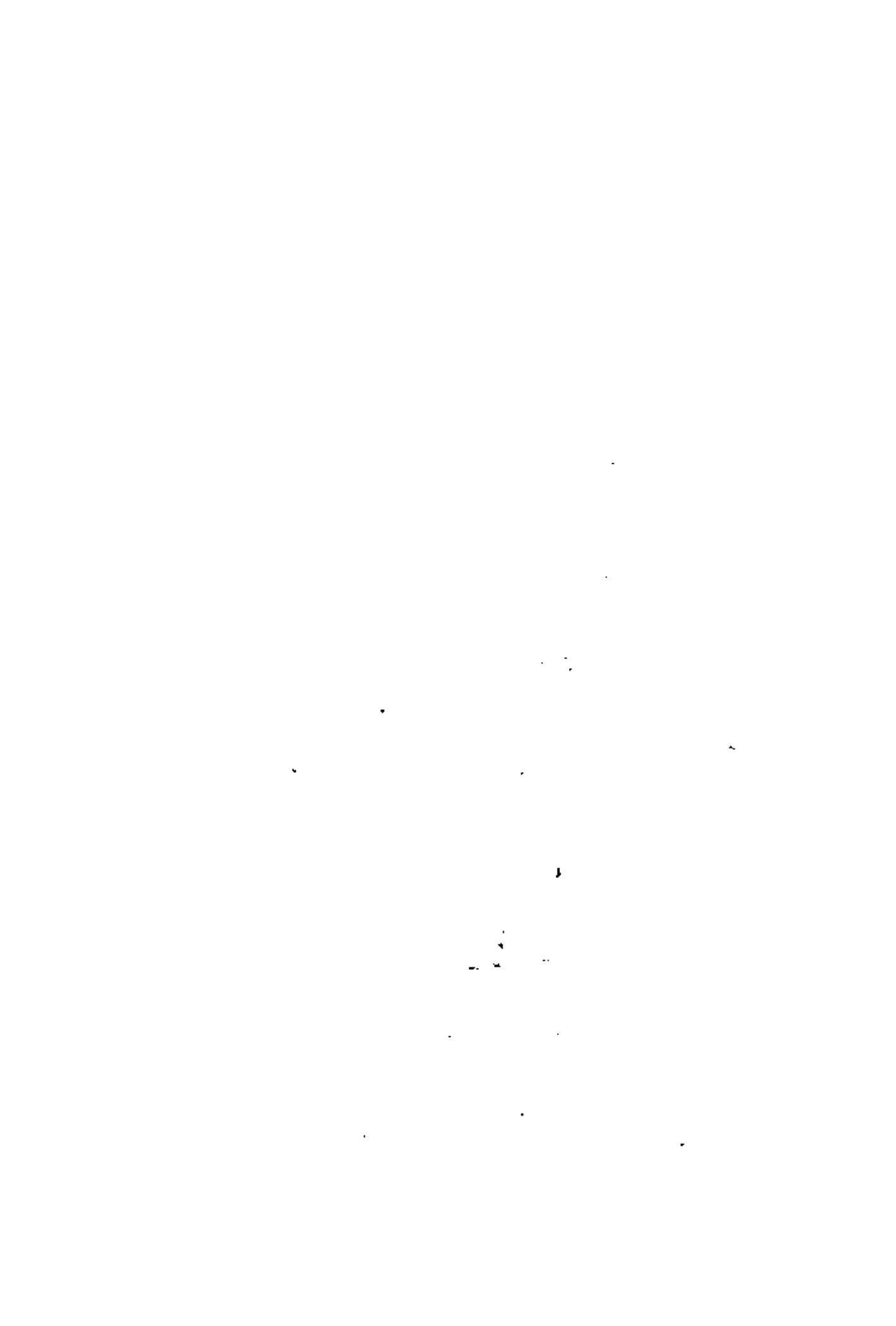
El concepto de regulación de voltaje no queda definido para este tipo de máquina, puesto que un valor "E" sobre la curva de saturación no es posible obtenerlo con la máquina en vacío.

8.2 MOTOR CON EXCITACION EN SERIE.

La figura 30 nos muestra el diagrama de la máquina con excitación en serie, trabajando como motor.

El comportamiento en el circuito de armadura para las condiciones de motor, nos lo da la ecuación (5.5)

$$V = E + r_a I_L \quad (5.5)$$



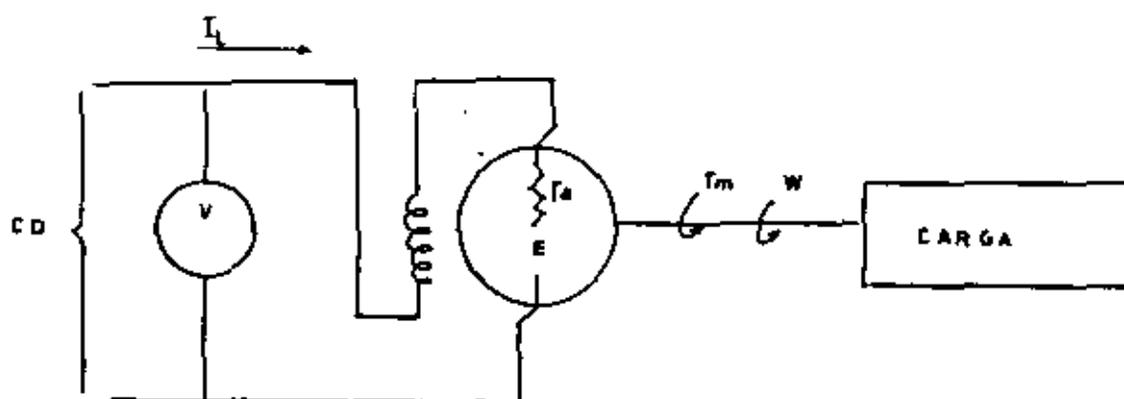


FIGURA 30

y de la figura 15-b tenemos el valor del par mecánico:

$$T_m = T_e - T_f$$

- a) Velocidad de la máquina con voltaje constante y carga variable.- La ecuación de equilibrio mecánico

$$T_m = \frac{a I_L^2}{b + I_L} + P I_L - T_f$$

nos muestra una relación entre el par de carga y la corriente de línea. Esto nos permite buscar una función que relacione la velocidad de la máquina con la corriente de línea, que resulta más sencilla que la que establece la relación con el par mecánico, como lo hemos hecho en otras ocasiones.

Sustituyendo la (4.4) en la (5.5) y despejando la velocidad obtenemos:

$$\omega = \frac{Vb + (V - r_a b) I_L - r_a I_L^2}{pb + (a + P) I_L} \quad (5.6)$$

que nos da una gráfica como la que muestra la figura 31-a. En esta gráfica podemos apreciar que a medida que baja la velocidad, la corriente se eleva rápidamente, y observando la figura 31-b (que deduciremos enseguida), podemos darnos cuenta que el aumento de corriente produce una rápida elevación del par.

Analizando la velocidad en sentido creciente, observamos que la máquina arranca con un par muy elevado y éste tiende a un valor normal a medida que se acerca a su velocidad nominal. Es el motor de mayor par de arranque que se conoce, lo que permite clasificarlo como el motor típico para sistemas de tracción.

- b) Variación de la corriente de línea con voltaje constante y par mecánico variable.- Al sustituir la (4.4) en la (5.6) y ésta en la expresión de par mecánico, obtenemos:

$$T_m = \frac{aI_L^2}{b+I_L} + PI_L - T_f \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) tiene dos variables independientes, que son la corriente de línea (I_L) y la velocidad (ω), por lo que para tabularla es conveniente seguir los mismos valores tabulados, en la ecuación (5.6), con lo que se obtiene una gráfica de la forma que ilustra la figura 31-b. En esta gráfica observamos que para valores elevados de par, las variaciones en éste producen pequeñas variaciones de corriente, y sucede a la inversa en valores de par pequeños.

De aquí deducimos también el peligro que corren estas máquinas cuando se quedan sin carga, pues la velocidad en estas condiciones se eleva considerablemente. La fricción en la máquina evita que se anule la corriente de línea, por lo que la velocidad sin carga tiene un límite, pero este suele estar muy por encima de la velocidad nominal, lo que provoca el estallamiento de la armadura por fuerzas centrífugas.

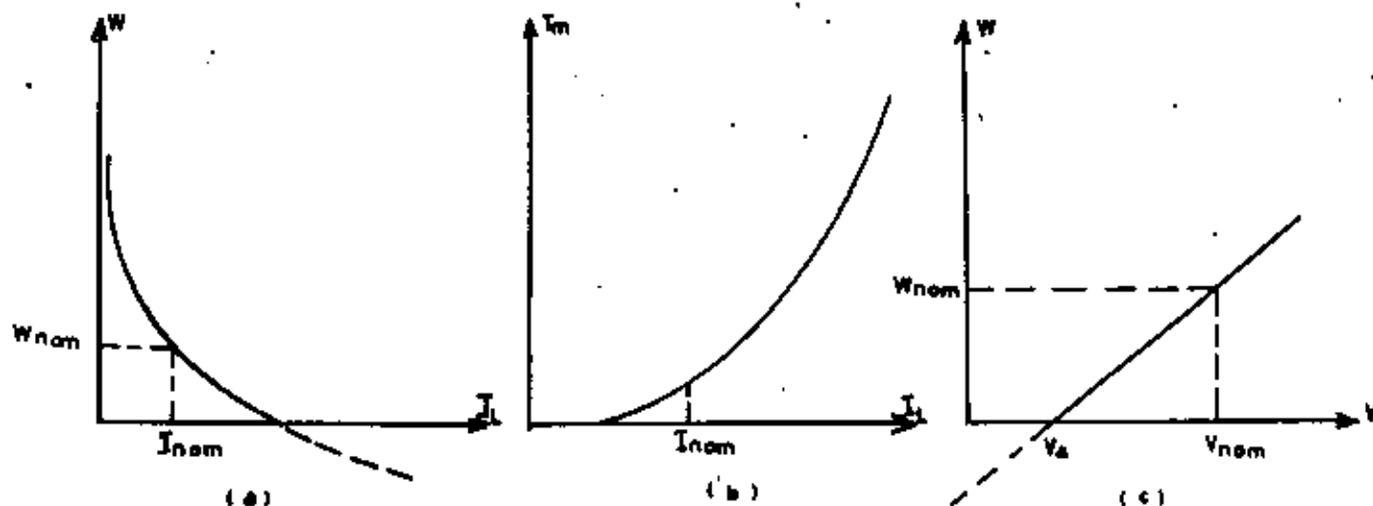


FIGURA 31

- c) Voltaje necesario para variar la velocidad con par constante.- De las figuras 31- a y b, podemos apreciar que la máquina es capaz de suministrar un par mecánico de valor muy elevado, pero a la vez haciendo circular una corriente que puede llegar a ser mayor que diez veces la nominal, por lo que en caso de buscar un control adecuado, éste sería el voltaje de alimentación.



Si analizamos, la ecuación (5.7), deducimos que en un par mecánico (T_m) constante a diferentes velocidades, corresponde muy aproximadamente a una corriente de línea (I_L) constante, ya que el término de pérdidas por fricción es pequeño.

Reagrupando los términos de la ecuación (5.6) para mostrar la corriente de línea (I_L) entre las constantes, y el voltaje (V) como variable independiente, tenemos:

$$\omega = \frac{(b+I_L) V - (r_a I_L^2 + r_a b I_L)}{a I_L + (b+I_L) P} \quad (5.8)$$

que es la ecuación de una recta cuya pendiente es $b+I_L/aI_L+(b+I_L)P$ y cuya ordenada al origen es $-(r_a I_L^2+r_a b I_L)/aI_L+(b+I_L)P$ como muestra la figura 31-c.

A fin de no sobrepasar los valores de corriente permisible en la máquina, es necesario un voltaje de arranque (V_a), y éste tendrá que incrementarse en forma lineal a medida que la máquina adquiere velocidad.

Puesto que este motor tiene su principal aplicación en la tracción de vehículos, puede considerarse que arranca a plena carga (par mecánico nominal) por lo que para obtener la máxima aceleración sin exceder las corrientes permisibles es necesario aplicar el voltaje de arranque (V_a) que muestra la figura 31-c.

Un voltaje menor que (V_a) hace circular corriente de menor valor, lo que se traduce en un par débil y por tanto, aceleración deficiente.

Un voltaje mayor que (V_a), por el contrario redundará en un par elevado y en una mejor aceleración, pero las sobrecorrientes tenderán al calentamiento de la máquina, sobre todo teniendo en cuenta que en la tracción de vehículos se presentan arranques frecuentes.



Ejemplo de aplicación

La máquina de C.D. del grupo MGII tiene las siguientes características nominales:

Trabajando como motor		Trabajando como generador	
7.5	H.P	5	KW
115	Volts.	125	Volts
57	Amp.	40	Amp.
1000	R.P.M.	1000	R.P.M.

se le hicieron las siguientes pruebas de laboratorio:

Saturación en vacío:		Voltaje terminal con carga:		como motor en vacío:
$I_{exc.}$	E	V_L	I_L	V_L I_L
0.0	4	125	0.0	115 5.3
0.25	21	124.5	4.8	
0.36	30	123.5	9.9	Velocidad de prueba:
0.48	40	123.0	14.9	1000 R.P.M.
0.60	51	122.0	20.0	Excitación independiente.
0.72	61	121.5	24.4	
0.82	70	120.5	29.8	
0.98	82.5	120.0	34.6	
1.09	91	con excitación independiente		
1.21	101	$I_{exc} = 1.58$		Medición de la resistencia de campo en derivación:
1.32	110	Velocidad de prueba para saturación y voltaje terminal.		$r_c = 40 \text{ ohm.}$
1.508	121	1200 R.P.M.		
1.69	130			
1.9	140			
2.2	151			
2.5	160			
2.79	170			
3.49	180			

- Obtener el valor de los parámetros a , b , P , r_a y T_f
- Calcular cuál debe ser el voltaje en vacío para que a plena carga pueda suministrar sus valores nominales, trabajando como generador en derivación. (Incluir el cálculo de las características del reóstato).
- Trazar la curva completa de variación de voltaje con carga y obtener la máxima corriente y potencia que es capaz de suministrar, y la regulación de voltaje.
- Trazar la curva completa de variación de par con respecto al voltaje.

- e) Calcular la corriente de excitación para que suministre la velocidad nominal en condiciones de plena carga, cuando se le aplica al circuito de armadura el voltaje nominal, trabajando como motor.
- f) Trazar la curva de variación de velocidad con respecto a la carga, con voltaje de armadura y corriente de excitación constantes.
- g) Trazar la gráfica del voltaje de armadura necesario para mantener la velocidad nominal constante con carga variable (excitación independiente y constante)
- h) Trazar la gráfica de voltaje necesario para control de velocidad con carga constante (par mecánico constante)

S O L U C I O N

- a) Con el fin de tener valores comparativos que nos puedan mostrar la aproximación de la ecuación de Froelich, repetimos a continuación la tabla para la curva de saturación en vacío y otras dos columnas para tabular las funciones que obtengamos.

REFE- REN- CIA.	SATURACION EN VACIO		FUNCION DE FROELICH	
	I _{exc}	E	E ₁	E ₂
1	0.0	4	4	0
2	0.25	21	31	28
3	0.36	30	41	40
4	0.48	40	52	51
5	0.60	51	62	61
6	0.72	61	72	71
7	0.82	70	79	78
8	0.98	82.5	90	89
9	1.09	91	97	96
10	1.21	101	104	104
11	1.32	110	110	110
12	1.508	121	120	120
13	1.69	130	129	129
14	1,9	140	138	138
15	2.2	151	150	150
16	2.5	160	160	160
17	2.79	170	170	169
18	3.49	180	188	187

con las columnas I_{exc}. y E, trazamos la curva de saturación en vacío que muestra la figura Ej.1.1.



Para la función exacta, elegimos los puntos 18 y 14 con lo que obtenemos el sistema:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} + 4 \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9 +b} + 4$$

de donde $a\omega = 271.38$, $b = 1.89$

Tomando ahora los puntos 15 y 10 obtenemos:

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+a} + 4$$

de donde $a\omega = 397.3$, $b = 3.75$

Promediando estos valores obtenemos:

$$a\omega = 333, \quad b = 2.81$$

Como la velocidad de prueba fué 1200 RPM = 125.6 rad/seg.

$$a = \frac{333}{125.6} = 2.65 \quad P = \frac{4}{125.4} = 0.0318$$

Por lo que la función de Froelich queda:

Función 1: $\frac{2.65 \omega I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 0.0318\omega$
--

Para la función aproximada, tomando los mismos puntos tenemos:

$$180 = \frac{3.49 a\omega}{3.49+b} \quad 140 = \frac{1.9 a\omega}{1.9+b}$$

de donde $a\omega = 2.73.31$, $b = 1.8$

$$151 = \frac{2.2 a\omega}{2.2+b} \quad 101 = \frac{1.21 a\omega}{1.21+b}$$

de donde $a\omega = 382.34$, $b = 3.37$

Promediando los valores obtenidos:

$$a\omega = 327 \quad b = 2.589$$

Dividiendo a entre la velocidad de prueba:

$$a = \frac{327}{125.6} = 2.6$$

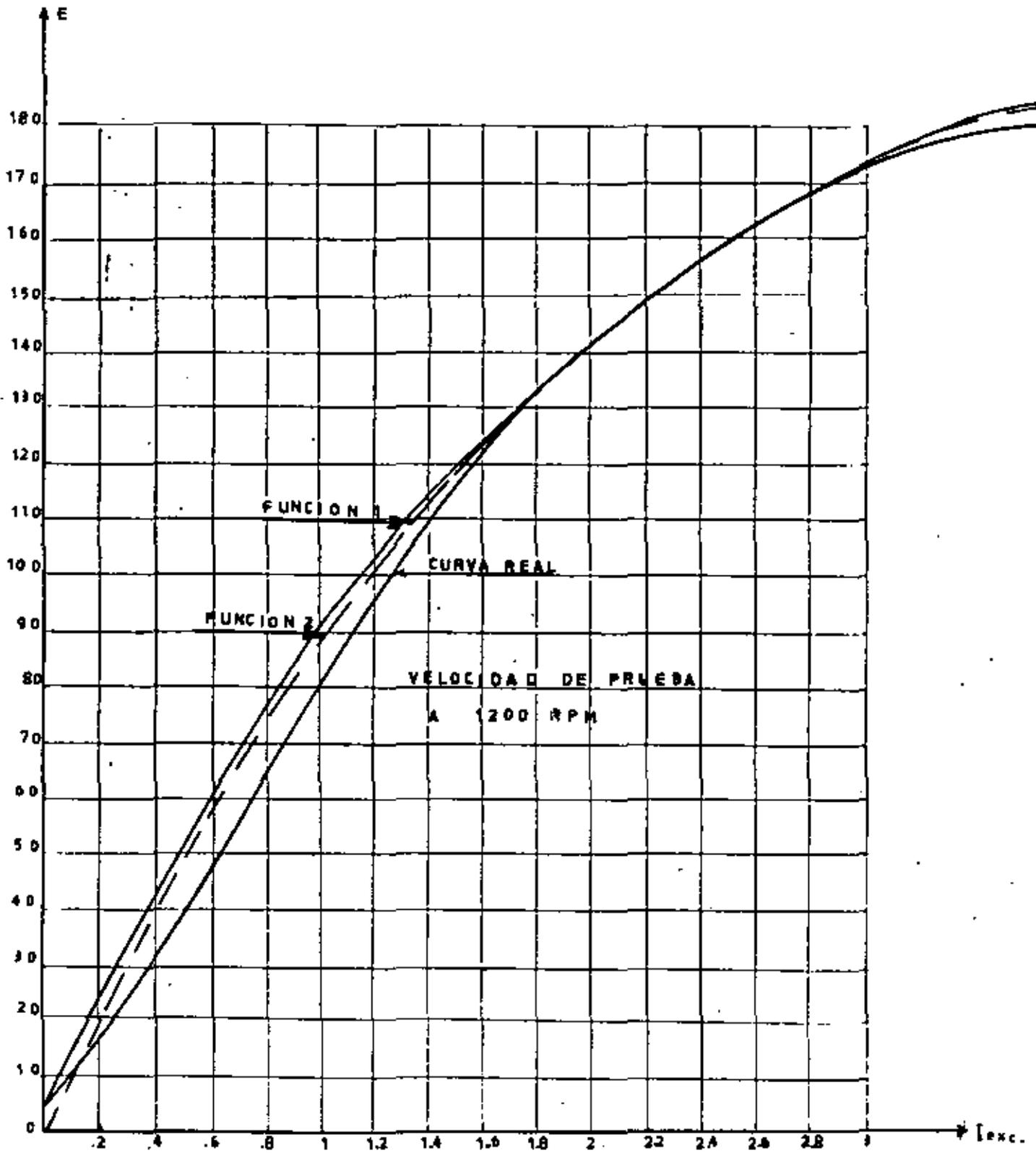


FIG. EJEM. 1.1



de donde obtenemos la función aproximada de Froelich:

$$\text{Función 2: } E_2 = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

Tabulando las funciones 1 y 2 vemos los valores junto con la tabla de la curva de saturación en vacío que aparecen anteriormente. Las curvas respectivas las observamos en la misma figura Ej.1.1.

De los datos de placa observamos que el voltaje nominal es de 125 volts a 1000 RPM. Como la prueba se efectuó a 1200 RPM, consideraremos como voltaje normal 150 volts. Como las curvas prácticamente coinciden entre 130 y 170 volts, podemos aceptar como válidas las funciones.

Nota.- En caso de desear mayor aproximación, de ser esto factible, se podría experimentar con nuevas funciones cuyos parámetros ajustaríamos desplazando las asíntotas de las curvas según fuera necesario.

Para obtener la resistencia del circuito de armadura es conveniente verificar si la prueba de voltaje (V_C) con corriente de carga (I_C) resulta en línea recta. Con los datos de prueba hacemos la gráfica de la figura Ej. 1.2.

Después de trazar la gráfica observamos que efectivamente sale una recta, lo que nos indica que la respuesta de la máquina no se ve deformada por la reacción de armadura.

De acuerdo a la ecuación:

$$V = E - r_a I_L$$

$$r_a = \frac{E-V}{I_L}$$

en donde E es el voltaje en vacío (125 V) y a cada V corresponde una I_L de acuerdo a la tabla de datos:

El valor más exacto seguramente es el promedio de los valores obtenidos aplicando la ecuación a cada punto.

$$r_a = \frac{\frac{125-124.5}{4.8} + \frac{125-123.5}{9.9} + \frac{125-123}{14.9} + \frac{125-122}{20} + \frac{125-121.5}{24.4} + \frac{125-120.5}{29.8} + \frac{125-120}{34.6}}{7}$$

de donde

$$r_a = 0.147 \text{ ohms}$$

El par de fricción lo obtenemos trabajando la máquina como motor en vacío, ya que en estas condiciones el par eléctrico es igual al par de pérdidas, o sea, haciendo $T_m = 0$ en la ecuación de equilibrio mecánico:

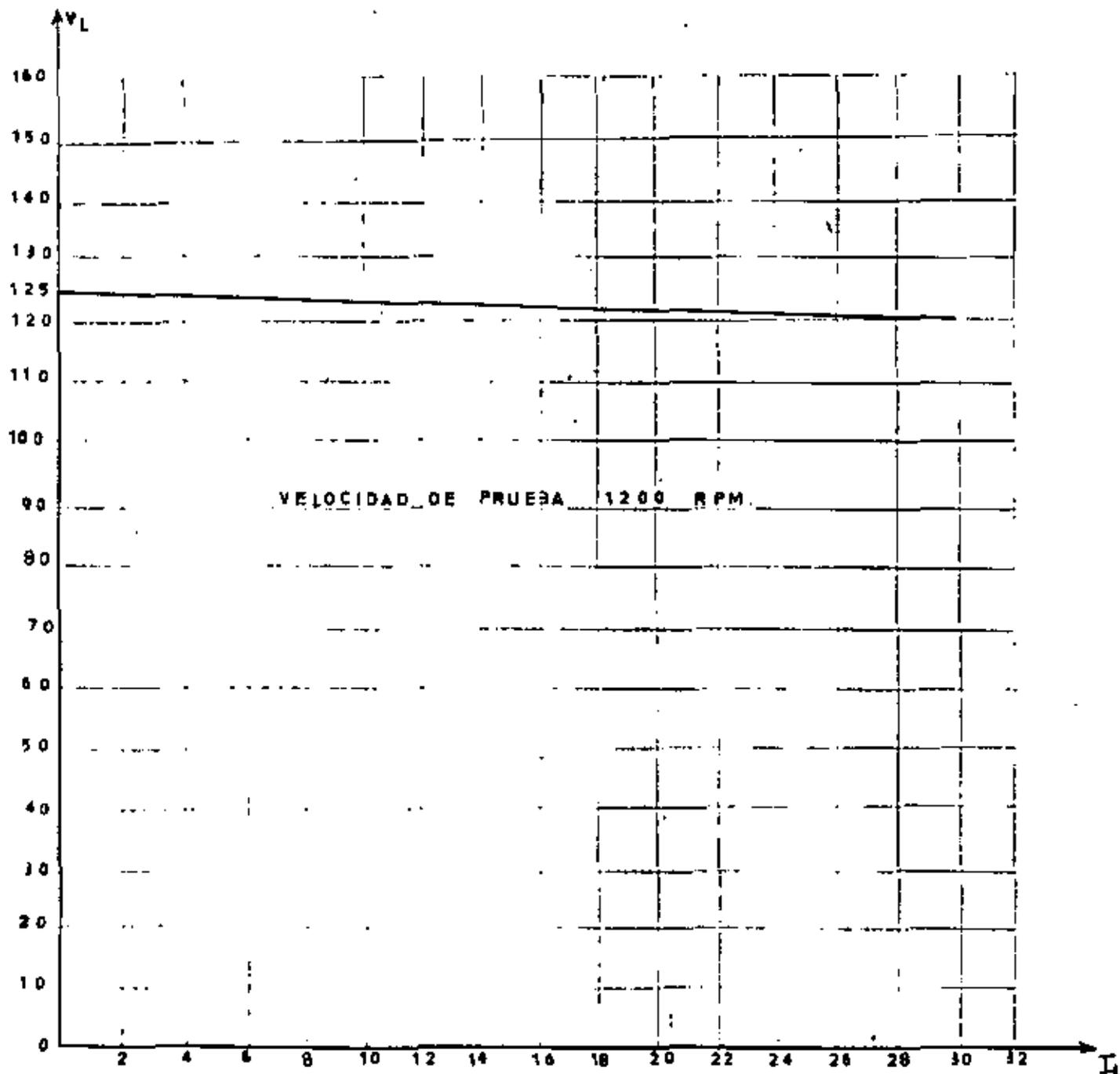


FIG. Ej. 1.2



$$0 = T_e - T_f \quad \text{en donde } T_e = \frac{EI_L}{\omega}$$

por tanto:

$$T_f = \frac{EI_L}{\omega} = \frac{(V - r_a I_L) I_L}{\omega} = \frac{VI_L - r_a I_L^2}{\omega}$$

$$T_f = \frac{(115 \times 5.3) - (0.147 \times 5.3^2)}{104.7^2}$$

$$T_f = 5.78 \text{ New-m}$$

En vista de que la máquina está permanentemente acoplada, este resultado incluye la fricción tanto de la máquina de C.D. como de la de C.A.

Teniendo en cuenta que la máquina de C.D. tiene mayor fricción que la de C.A, estimaremos su coeficiente como los 2/3 del total.

$$T_f = 3.85 \text{ New - m}$$

Respuestas del inciso a):

Función exacta	a= 2.65	b= 2.81	P= 0.0318
Función aproximada	a=2.6	b= 2.589	
Resistencia del circ.de arm.	$r_a = 0.147$	ohm.	
Par de fricción	$T_f = 3.85$	New-m.	

Teniendo en cuenta que la velocidad nominal de la máquina es de 1000 RPM (104.72 rad./seg.) las funciones de Froelich para estas condiciones serán:

$$E_1 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 I_{exc}} + 3.33 \quad \text{con magnetismo remanente}$$

$$E_2 = \frac{2.72.27 I_{exc}}{2.589 + I_{exc}} \quad \text{despreciando el magnetismo remanente.}$$

Tabulando estas ecuaciones obtenemos las gráficas que mostramos en la figura Ej.1.3.

b) La ecuación característica del generador con carga es:

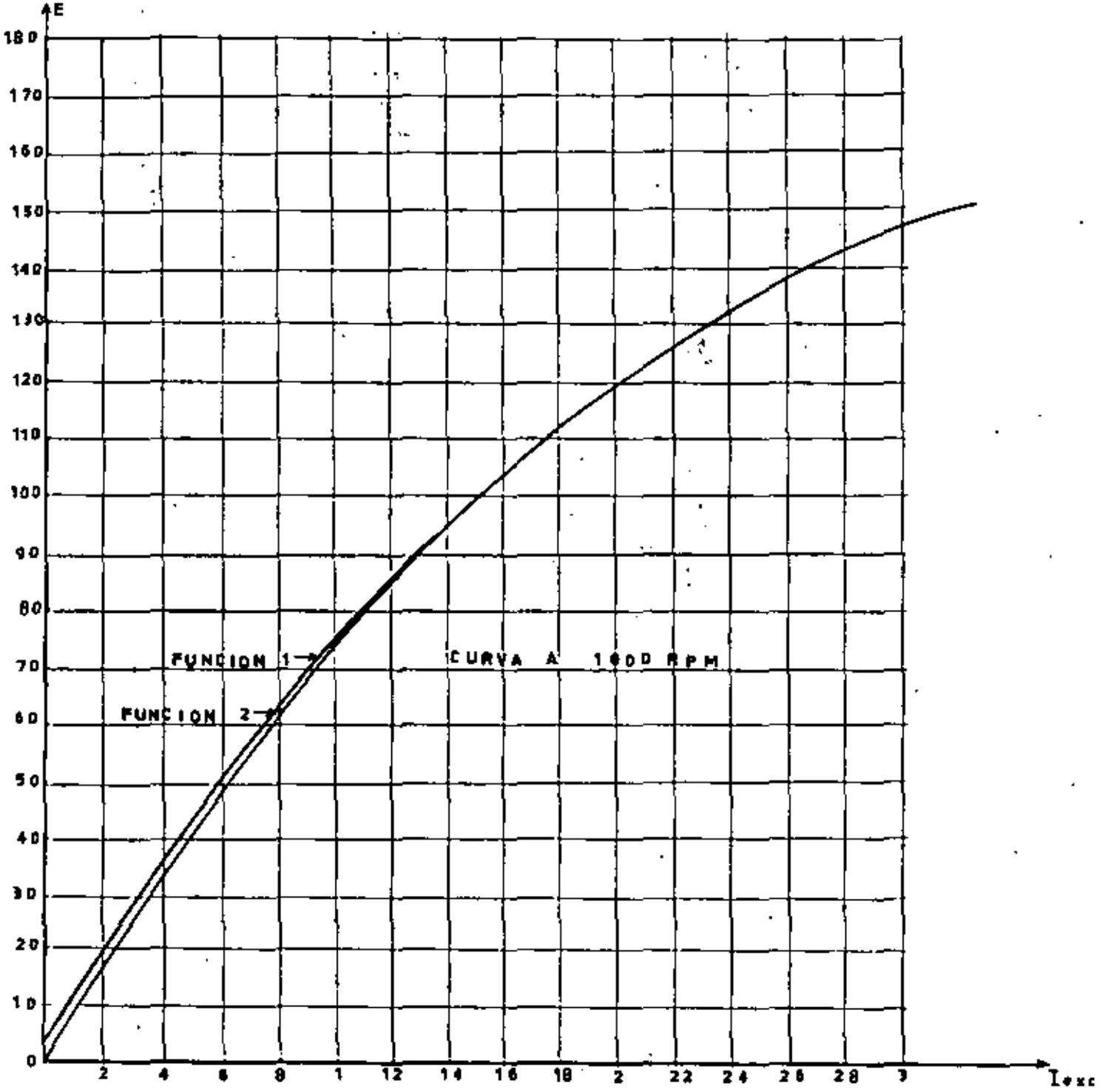


FIG. Ej. 1.3

$$V = E - r_a I_L$$

en donde $E = \frac{a \omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$

de modo que:

$$V = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega - r_a I_L$$

Las características nominales de la máquina son:

$$V = 125 \text{ Volts}$$

$$I_L = 40 \text{ Amp.}$$

$$N = 1000 \text{ RPM}$$

Sustituyendo estos valores y los de los parámetros obtenemos:

$$125 = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 3.33 - 5.88$$

Teniendo en cuenta además que la corriente de excitación se obtiene del voltaje externo de la máquina:

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c} = \frac{125}{R_c}$$

por tanto

$$125 = \frac{34687.5}{2.81 R_c + 125} + 3.33 - 5.88$$

de donde $R_c = 52.296$

y la corriente de excitación

$$I_{exc} = \frac{125}{52.296} = 2.39 \text{ Amp.}$$

Si se quita carga a la máquina, el voltaje externo aumenta hasta igualarse con la fem., pero esto a la vez motiva un aumento de la corriente de excitación. Lo que permanece constante es la resistencia del circuito de campo (R_c). Por lo tanto:

$$E = \frac{277.5 I_{exc}}{2.81 + I_{exc}} + 3.33$$

en donde

$$I_{exc} = \frac{E}{52.296}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$E = \frac{277.5 E}{146.95 + E} + 3.333$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son:

$$E = 137.44 \quad E = -3.56$$

La solución válida es la primera, por tanto:

$$E_{vacío} = 137.44 \text{ Volts}$$

En estas condiciones se obtiene la máxima corriente de excitación siendo su valor:

$$I_{exc} = \frac{137.44}{52.296} = 2.6 \text{ Amp.}$$

Teniendo en cuenta además que la resistencia del circuito de campo (total) está entre 50 y 60 ohms, y la resistencia del enbobinado es de 40 ohms, el restante corresponde al reóstato.

Características recomendables del reóstato

Resistencia 0-30 ohms.

Capacidad de corriente 3 Amp. mínimo

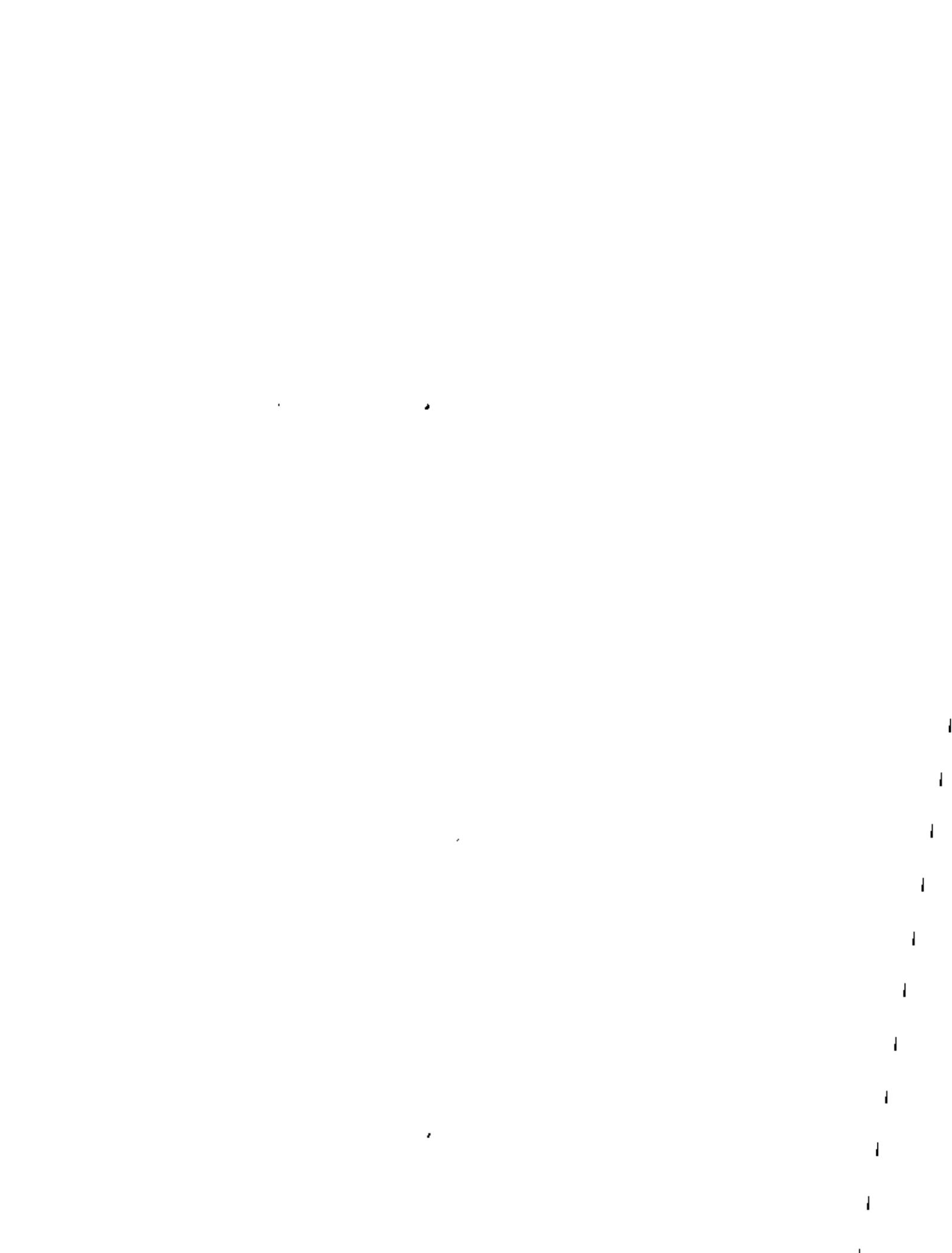
- c) Para el trazo de la curva de variación de voltaje con carga, usamos las ecuaciones:

$$V = E - r_a I_L$$

$$E = \frac{a\omega I_{exc}}{b + I_{exc}} + P\omega$$

$$I_{exc} = \frac{V}{R_c}$$

Sustituyendo la tercera en la segunda y esta en la primera obtenemos:



$$V = \frac{a\omega V}{bR_c + V} + P\omega - r_a I_L$$

sustituyendo valores:

$$V = \frac{277.5 V}{146.95 + V} + 3.33 - 0.147 I_L$$

En donde lo más sencillo es considerar V como variable independiente, o sea:

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Para encontrar el valor máximo de I_L , igualamos a cero la primera derivada de esta función:

$$\frac{(146.95+V)(910.75-13.6V) - (3328.8+910.75V-6.8V^2)}{(146.95 + V)^2} = 0$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$V = 55, \quad V = 348.9$$

La solución válida es la primera, para la cual corresponde una corriente de línea $I_L = 162.66$.

Tabulando la función de corriente de línea obtenemos:

Referencia	V	I_L	Referencia	V	I_C
1	0	22.65	9	70	155.43
2	10	74.86	10	80	143.75
3	20	119.93	11	90	127.31
4	30	138.53	12	100	106.69
5	40	154.35	13	110	82.39
6	50	161.65	14	120	54.81
7	55	162.66	15	130	24.31
8	60	161.63	16	137.44	0.083

La gráfica aparece en la figura Ej. 1.4.

Para la potencia máxima que puede entregar el generador multiplicamos la ecuación

$$I_L = \frac{3328.8 + 910.75 V - 6.8 V^2}{146.95 + V}$$

Por V , con lo que el primer miembro equivale a P .



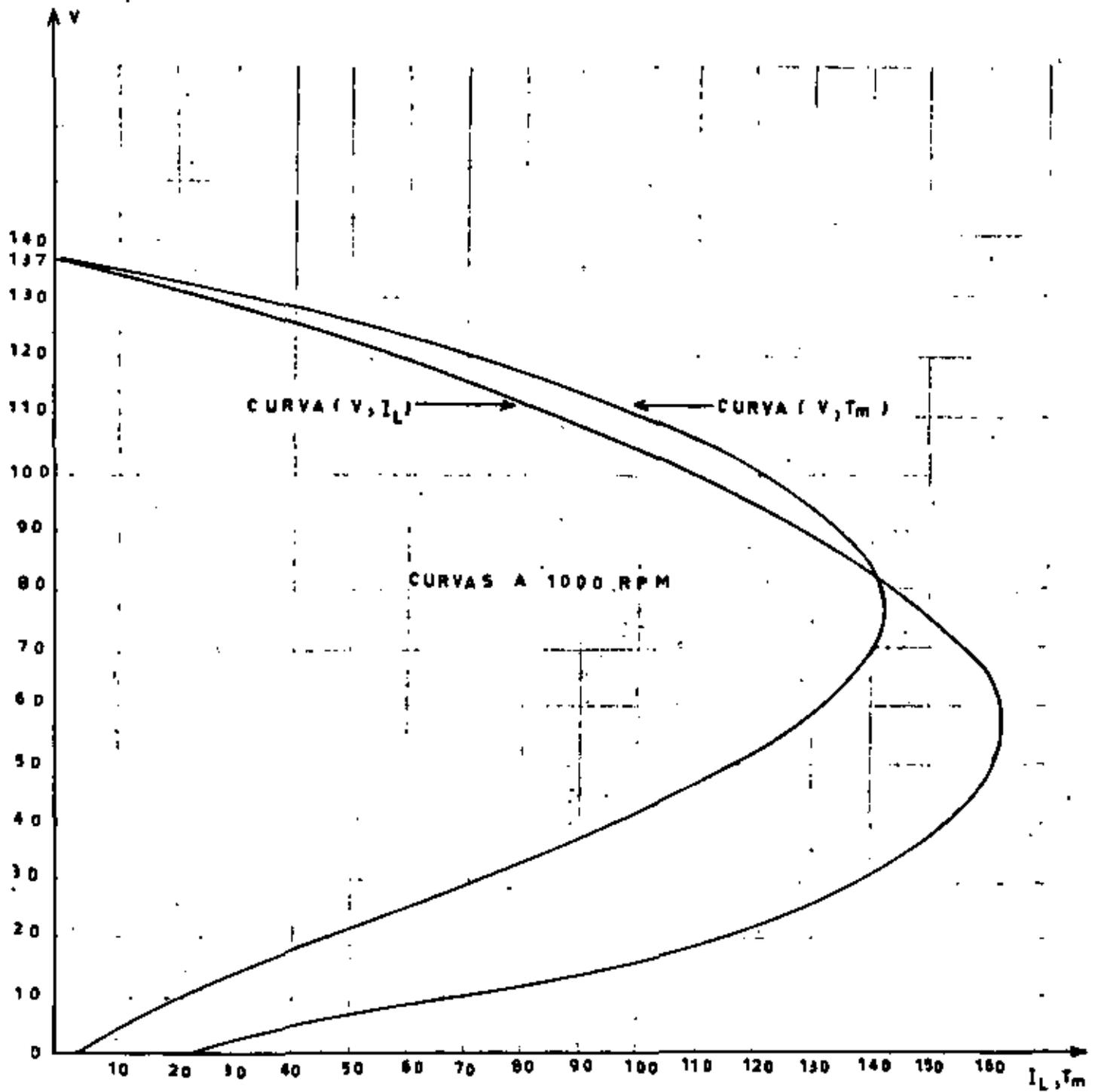


FIG. Ej. 1.4



$$P = \frac{3328.8 V + 910.75 V^2 - 6.8 V^3}{146.95 + V}$$

Igualando la primera derivada a cero:

$$\frac{(146.95+V)(3328.8+1821.5V-20.4V^2) - (3328.8V+910.75V^2-6.8V^3)}{(146.95+V)^2} = 0$$

que es una ecuación de tercer grado. La raíz comprendida entre en rango de voltajes de la máquina es:

$$V = 84.5$$

para el cual corresponde una corriente:

$$I_L = 137.1$$

Por lo que la potencia máxima será:

$$P = V I_L = 84.5 \times 137.1$$

$$P_{\max} = 11585.5 \text{ watts.}$$

La regulación de voltaje corresponde a los valores de vacío y plena carga, o sea $I_L = 0$ e $I_L = 40$

$$\text{Reg.} = \frac{137.44 - 125}{125} \times 100$$

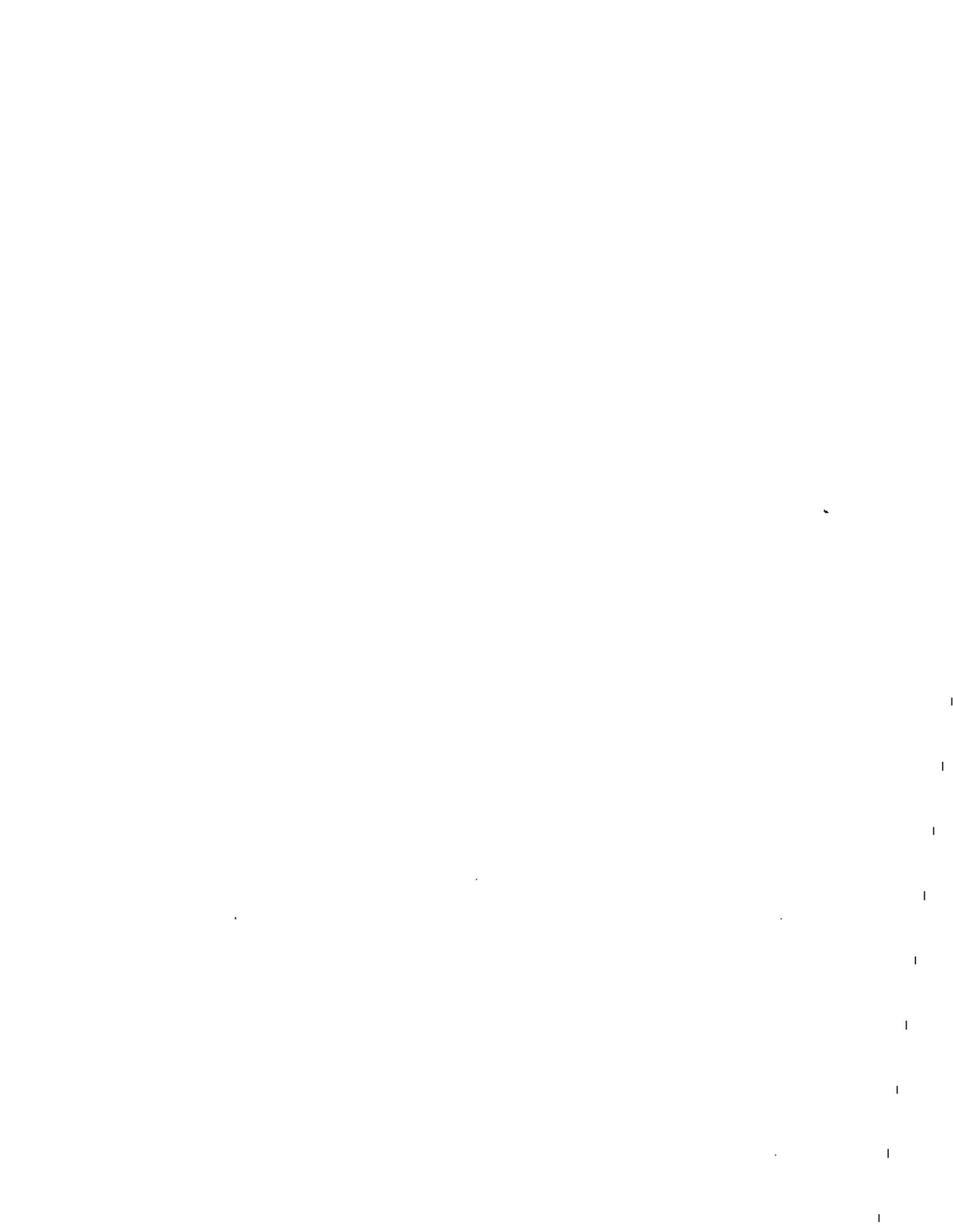
$$\text{Reg} = 9.9 \%$$

d) El par mecánico que absorbe el generador está dado por:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} + T_f$$

en donde $E = V + r_A I_L = V + 0.147 I_L$

Para tabular esta ecuación lo más sencillo es hacer uso de la tabla de resultados del inciso (c).



Ref.	V	I_L	E	$\frac{E I_L}{\omega}$	T_m
1	0	22.65	3.329	0.720	4.593
2	10	74.86	21.004	15.017	19.043
3	20	119.93	37.629	43.102	46.97
4	30	138.53	50.363	66.636	70.50
5	40	154.35	62.689	92.41	96.28
6	50	161.65	73.762	113.88	117.75
7	55	162.66	78.911	122.59	126.46
8	60	161.68	83.767	129.35	133.22
9	70	155.43	92.84	137.82	141.69
10	80	143.75	101.131	138.84	142.71
11	90	127.31	108.71	132.18	136.05
12	100	106.69	115.68	117.87	121.74
13	110	82.39	122.111	96.09	99.96
14	120	54.81	128.05	67.037	70.90
15	130	24.31	133.573	31.01	34.88
16	137.44	0.083	137.452	0.1091	3.98

La gráfica correspondiente la observamos en la figura Ej, 1.4

El par máximo debe presentarse al valor en que el generador entrega su máxima potencia. Para 84.5 volts:

$$I_L = 137.1 \quad E = 104.6 \quad T_e = 139 \quad T_m = 142.8$$

y la potencia mecánica necesaria para mover el generador en estas condiciones es:

$$P = T_m \omega = 14958.8 \text{ Watts} = 20 \text{ H.P.}$$

e) La ecuación de equilibrio mecánico para las condiciones de motor es:

$$T_m = \frac{E I_L}{\omega} - T_f$$

Al multiplicar esta ecuación por la velocidad (ω), en el primer miembro nos queda la potencia mecánica

$$P = E I_L - T_f \omega$$

$$7.5 \times 746 = E I_L - 3.85 \times 104.7$$

$$E I_L = 6000 \text{ Watts}$$



La ecuación de equilibrio eléctrico para las condiciones de motor es:

$$V = E + r_a I_L$$

Multiplicando esta ecuación por I_L tenemos:

$$V I_L = E I_L + r_a I_L^2$$

$$115 I_L = 6000 + 0.147 I_L^2$$

que es una ecuación de segundo grado cuyas raíces son

$$I_L = 56.2 \text{ Amp.} \quad I_L = 726 \text{ Amp.}$$

El primer valor es el que tiene una interpretación real. Llevando este valor a la ecuación de equilibrio eléctrico:

$$V = E + r_a I_L$$

$$115 = E + 0.147 \times 56.2$$

$$E = 106.74 \text{ Volts}$$

Trabajando como motor, la operación de la máquina está lejos del magnetismo remanente, por lo que podemos aplicar la ecuación aproximada de Froelich:

$$E = \frac{2.6}{2.589 + I_{exc}} \omega I_{exc}$$

de donde:

$$I_{exc} = \frac{2.589 E}{2.6\omega - E}$$

$$I_{exc} = \frac{2.589 \times 106.74}{(2.6 \times 104.7) - 106.74}$$

$I_{exc} = 1.67 \text{ Amp.}$

Para todo análisis en el que se mantenga constante este valor de la corriente de excitación, la constante de excitación será:



$$K_e = \frac{2.6 \times 1.67}{2.589 + 1.67}$$

$$K_e = 1.019$$

De manera que

$$E = 1.019\omega$$

Manteniendo el voltaje aplicado y la corriente de excitación sin variación, la corriente de línea en vacío será:

$$0 = \frac{E I_L}{\omega} - T_f$$

$$0 = 1.019 I_L - 3.85$$

$$I_L = 3.8 \text{ Amp.}$$

y la velocidad en vacío la obtenemos de la ecuación de equilibrio eléctrico:

$$V = E + r_a I_L$$

$$115 = 1.019 \omega + (0.147 \times 2.8)$$

$$= 113.45 \text{ rad/seg.}$$

y por lo tanto, la regulación de velocidad será:

$$\text{Reg} = \frac{113.45 - 104.7}{104.7} \times 100$$

$$\text{Reg} = 8.3 \%$$

f) La gráfica de variación de velocidad con respecto a la carga (par), nos interesa solamente dentro del rango comprendido entre vacío y carga nominal.

El par nominal es:

$$T_m = \frac{P_{\text{nom}}}{\omega_{\text{nom}}} = \frac{7.5 \times 746}{104.7}$$

$$T_m = 53.44 \text{ New-m}$$



Para el trazo de la gráfica, la ecuación correspondiente es la (7.8) de los apuntes

$$\omega = \frac{r_a}{K_e^2} T_m + \frac{K_e V - r_a T_f}{K_e^2}$$

$$\omega = - \frac{0.147}{1.019^2} T_m + \frac{(1.019 \times 115) - (0.147 \times 3.85)}{1.019^2}$$

$$\omega = - 0.1415 T_m + 112.3$$

la cual graficaremos entre los valores $T_m = 0$ y $T_m = 60$ (considerando una pequeña sobrecarga) La gráfica la podemos observar en la figura Ej. 1.5.

- g) Si se establece un control de velocidad podemos comenzar con la velocidad nominal en vacío, ya que ésta se mantendrá hasta las condiciones de plena carga por la acción del control.

Para obtener el voltaje y corriente nominales en las condiciones de plena carga, es factible abatir el voltaje aplicado en vacío a fin de mantener la velocidad constante, por lo que podemos utilizar los valores de parámetros encontrados anteriormente para aplicar la ecuación (6.8)-c.

$$V = \frac{r_a}{K_e} T_m + \frac{K_e^2 \omega - r_a T_f}{K_e}$$

$$V = 0.145 T + 104.2$$

que graficaremos entre $T = 0$ y $T = 60$ New-m para la figura Ej. 1.6.

- h) La gráfica de control de velocidad a par constante también aprovecha los valores de parámetros que ya tenemos, para aplicar la ecuación (6.8)-b

Ahora vamos a suponer distintas condiciones de carga, como por ejemplo, $0.25 T_{nom}$, $0.50 T_{nom}$, $0.75 T_{nom}$ y T_{nom} , lo que nos dará una familia de curvas

$$\omega = \frac{1}{K_e} V - \frac{r_a (T_m + T_f)}{K_e^2}$$



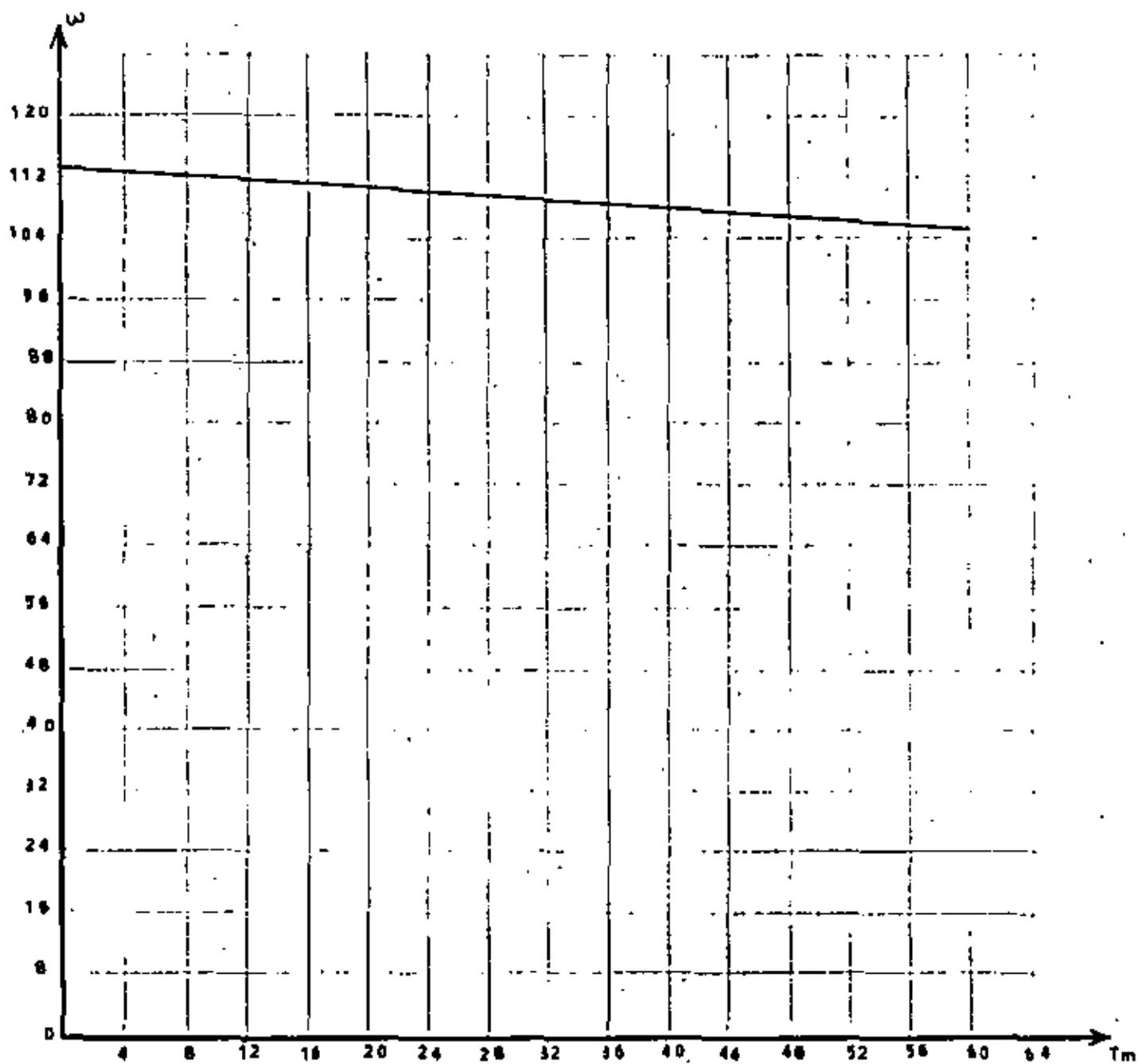
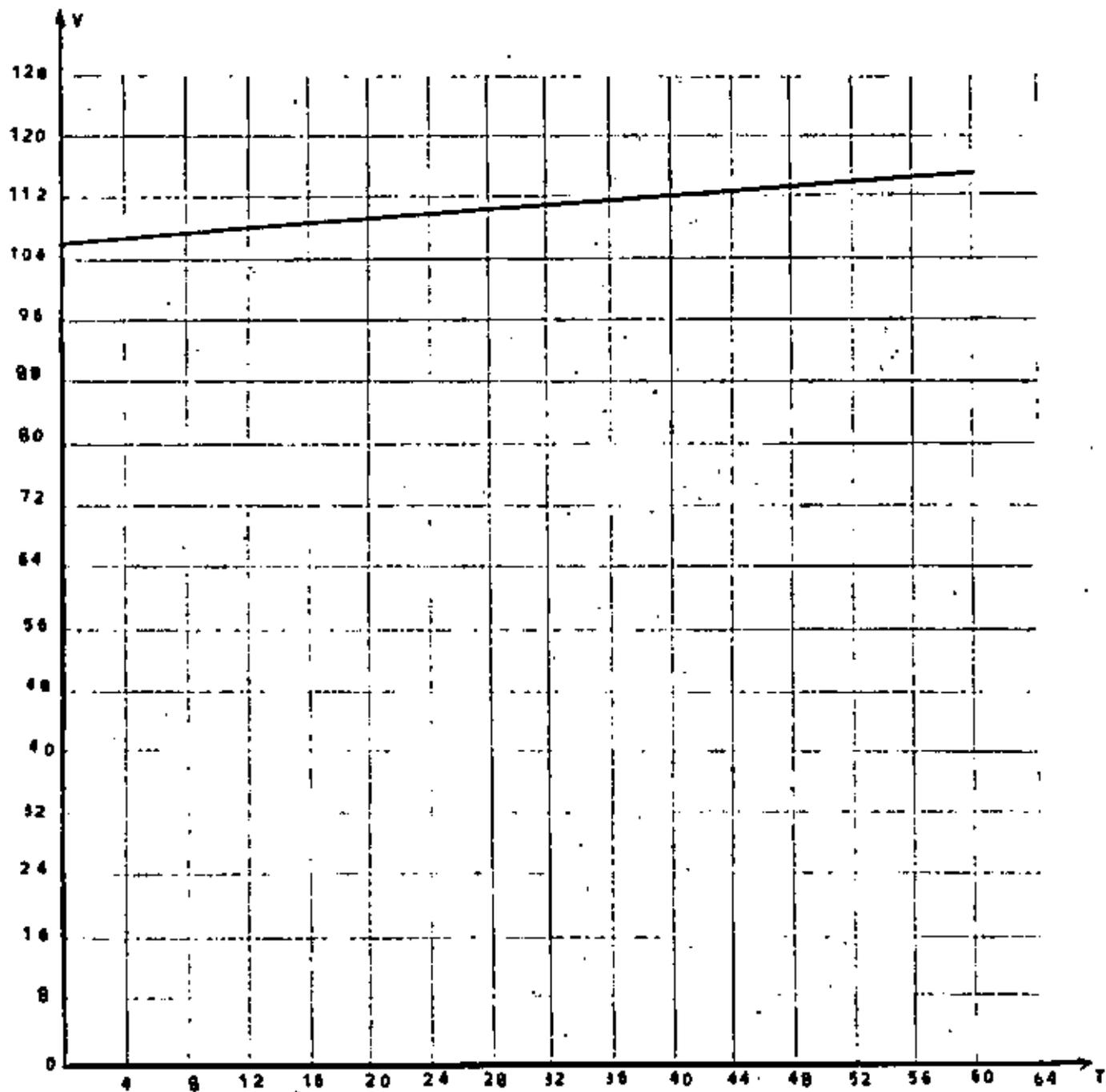


FIG. Ej.1.5



FIG. E_j. 1.6



$$\omega = 0.98 V - \frac{1.47 T_m + 0.566}{1.038}$$

que graficaremos entre $V = 0$ y $V = 115$ para $T_m = 14$, $T_m = 28$, $T_m = 42$ y $T_m = 56$ en la figura Ej. 1.7.

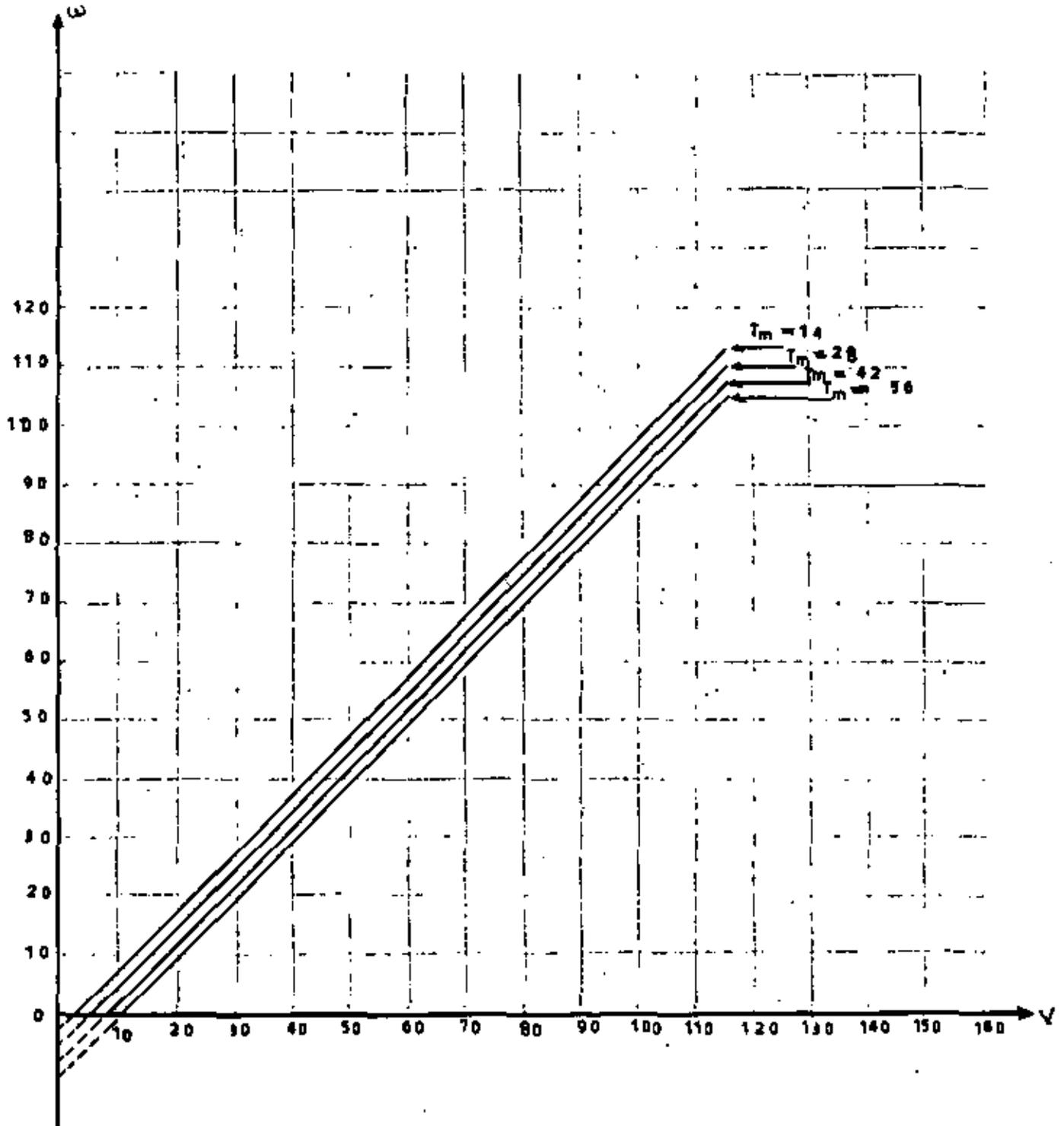


FIG. Ej. 1.7

TRANSICION EN LA OPERACION DE LA MAQUINA DE C.D.

Las máquinas eléctricas, como podemos recordar, tienen la propiedad de poder efectuar la conversión de energía en los dos sentidos. Un transformador puede usarse como elevador o como reductor de voltaje. Una máquina rotatoria puede operar como generador o como motor. En ninguno de estos casos se requiere cambio alguno en la estructura de la máquina correspondiente.

En el caso particular de la máquina de C.D., las condiciones para operar como generador serían las siguientes:

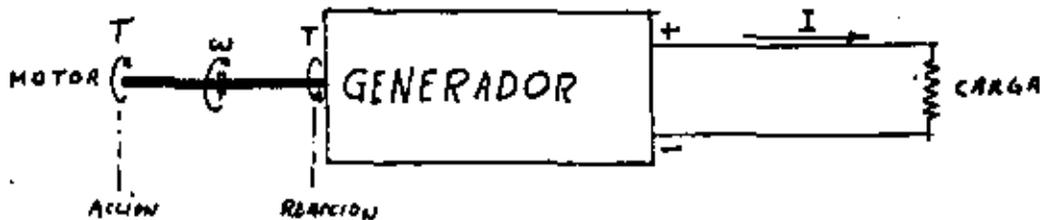


Fig. 1 La máquina de C.D. operando como generador

- El generador se comporta como la fuente del sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es SALIENDO POR EL POLO POSITIVO.
- La circulación de corriente por su armadura genera un PAR DE REACCION, es decir, que se opone al sentido de la velocidad angular.

La misma máquina opera como motor bajo las siguientes condiciones:

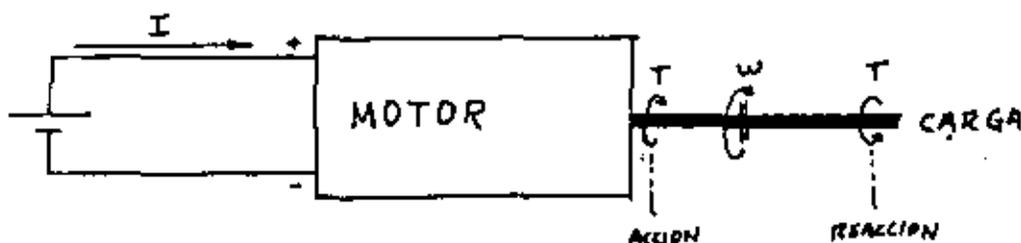


Fig. 2 La máquina de C.D. operando como motor



- a) El motor se comporta como una carga en el sistema eléctrico, por tanto el sentido convencional de la corriente es ENTRANDO A LA MAQUINA POR EL POLO POSITIVO.
- b) El par electromagnético que se genera en su armadura es un PAR DE ACCION, es decir, en el mismo sentido de la velocidad.

De la exposición anterior podemos deducir que ciertas características son comunes a la operación como generador y como motor (polaridad y sentido de rotación), mientras que otras tienen sentidos contrarios (corriente y par electromagnético)

A fin de considerar ahora la posibilidad de que una misma máquina pueda operar alternativamente como generador y como motor, es conveniente recordar que una de las ventajas del motor de C.D., es que se puede controlar su velocidad. Por el momento no viene al caso discutir los métodos de control; simplemente convengamos en que se ha fijado un cierto valor de velocidad para un motor trabajando en vacío (ω_v).

En la figura 3(a), el motor alimenta una carga mecánica, la cual de acuerdo con lo visto en la figura 2, produce un par que se opone al movimiento, es decir, trata de frenar el motor, provocando que su velocidad sea menor que la velocidad en vacío. La corriente entra a la máquina por el polo positivo (absorbe

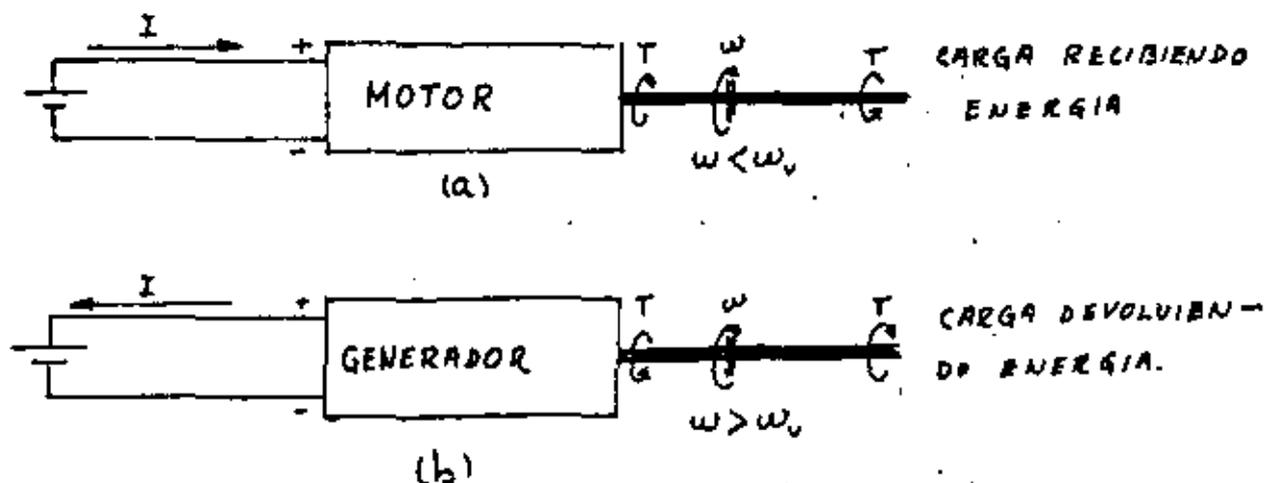
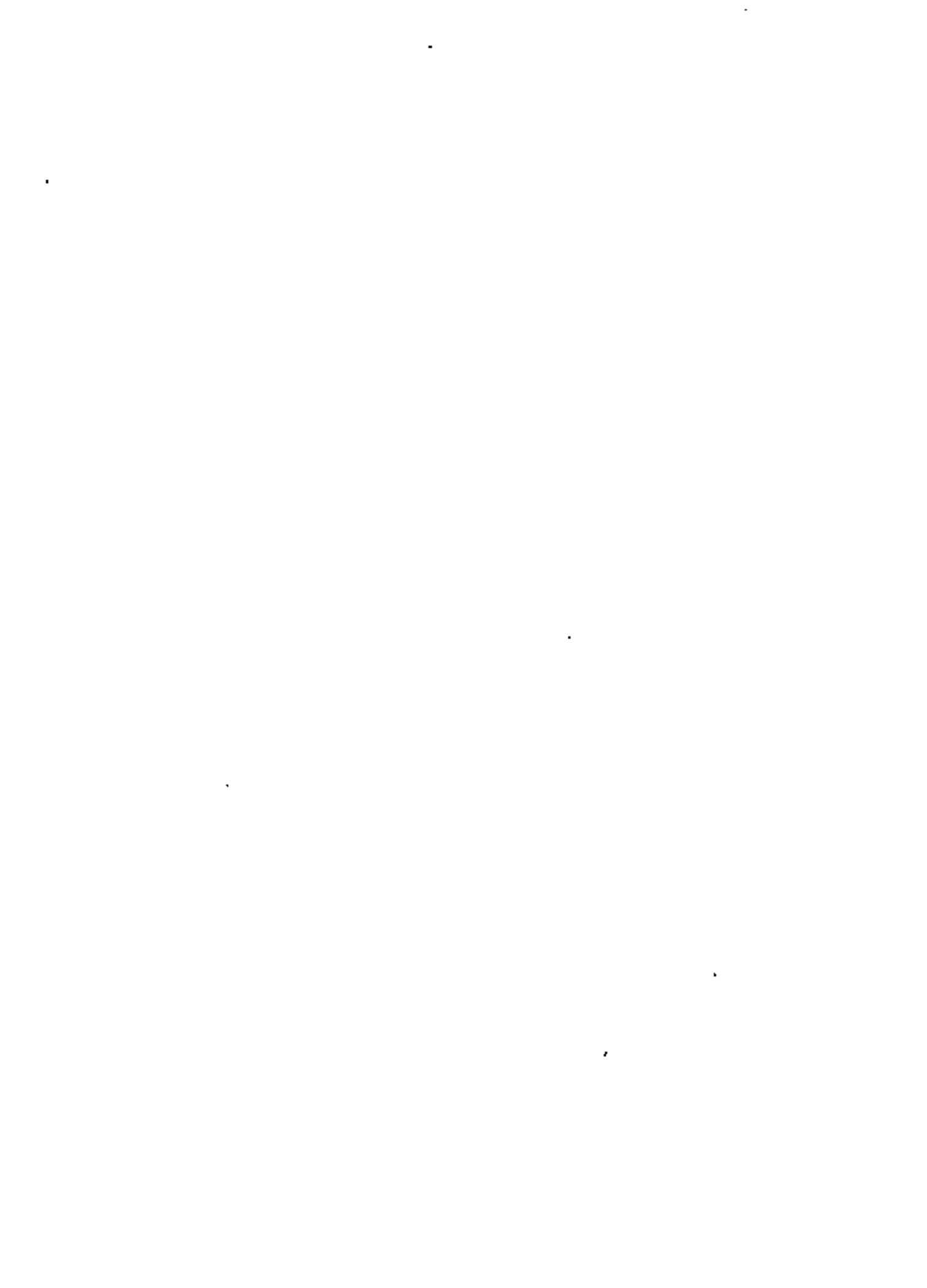


Fig.3 Posibilidad de operación alternativa.



energía) y el par electromagnético generado es en el sentido de mantener el giro del motor.

Ahora bien, supongamos que por cualquier causa, la velocidad de la carga tiende a incrementarse, superando el valor ω_v . La máquina reacciona invirtiendo el sentido del par electromagnético, en un esfuerzo por evitar que el sistema se desboque. Esto motiva la inversión de la corriente, devolviendo energía a la fuente, es decir, la máquina ha cambiado su operación de motor por generador. (Figura 3b).

Para imaginarnos el cambio que acabamos de describir, supongamos que se trata del motor de tracción de un vehículo de transporte eléctrico. En el caso de la figura 3a, el vehículo se encuentra subiendo un puente, para lo cual es indispensable la tracción del motor. En la figura 3b, el vehículo ha pasado la parte más alta del puente, y se encuentra ahora de bajada, "frenando con el motor".

Este puede ser uno de muchos ejemplos en que la máquina sufre una TRANSICION de motor a generador, y si continuamos analizando el movimiento, habrá una nueva TRANSICION de generador a motor.

Por regla general, las máquinas eléctricas rotatorias no requieren ningún cambio ni en su estructura, ni en sus conexiones, cuando se presenta este fenómeno de transición; basta solamente la inversión de par en la flecha. Esto es válido para máquinas síncronas, de inducción y de C.D.

Sin embargo, como toda regla, tenemos una excepción en el caso del motor de C.D., tipo serie, en el que al pasar de la acción matriz a la generatriz es necesario un cambio de conexiones.

Para justificar lo anterior, analizaremos con más detalle la transición de operación en los distintos motores de C.D.

Un esquema sencillo de una máquina rudimentaria nos ayudará a comprender en que forma se producen estos cambios. Esta máquina rudimentaria consta de una sola bobina de excitación y una espira en el embobinado de armadura.

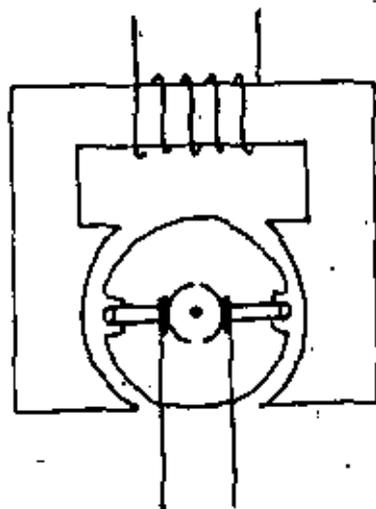


Fig. 4 Una máquina rudimentaria de C.D.

Utilicemos primeramente el esquema de la figura 4 para analizar el comportamiento de una máquina con excitación independiente.

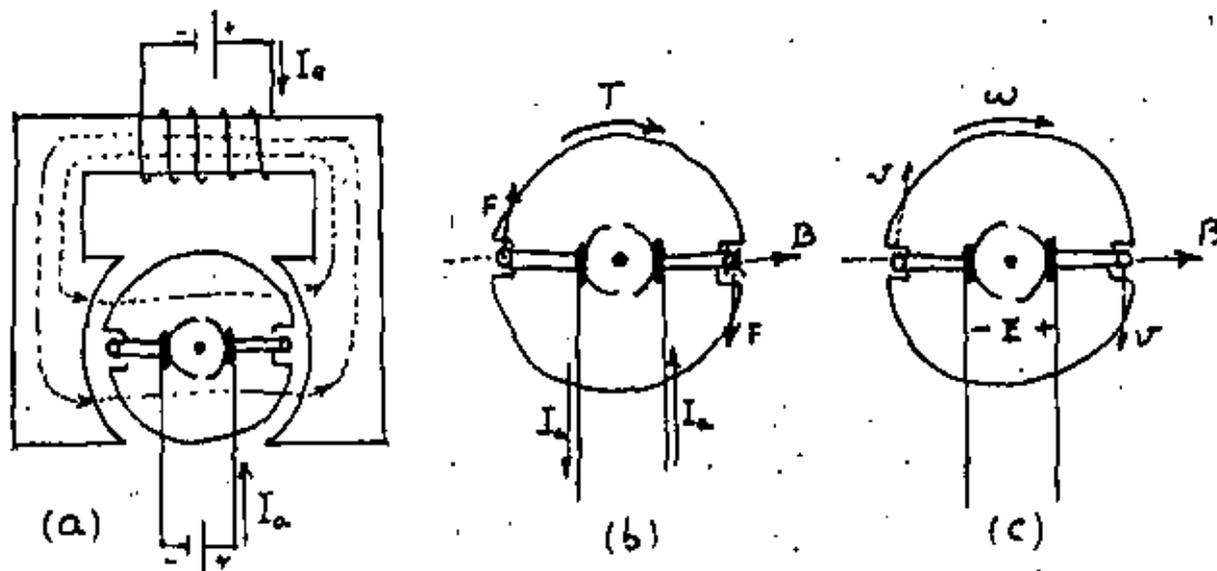
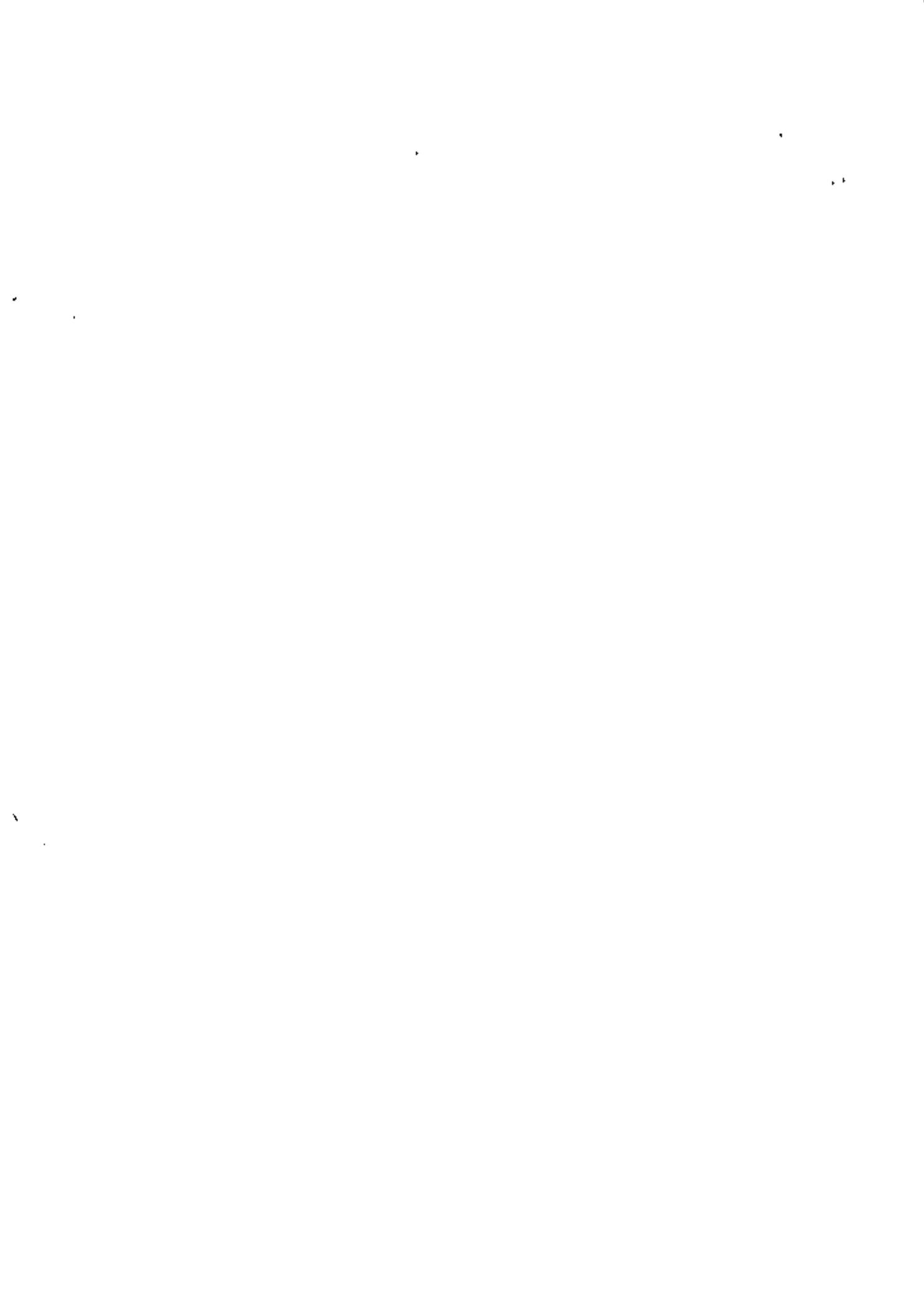


Fig. 5 Motor de C.D. con excitación independiente.

En la figura 5(a) tenemos una fuente para la excitación que nos da un determinado valor de corriente " I_e ", y una fuente para



la armadura que nos da la corriente motriz " I_a ".

La corriente I_a en presencia del campo inductor "B" genera un par de fuerzas cuyo sentido lo podemos determinar aplicando las reglas de Fleming en la figura 5(b). Este par produce el giro de armadura con una velocidad angular " ω " y por tanto, una velocidad tangencial " v " de los costados de la espéra, dando lugar a la inducción de la fuerza contraelectromotriz "E", cuya polaridad podemos determinar también por las reglas de Fleming en la figura 5(c).

El diagrama del circuito de armadura con el motor en movimiento lo tenemos ahora en la figura 6, en donde:

$$E = k\omega I_e \quad (1)$$

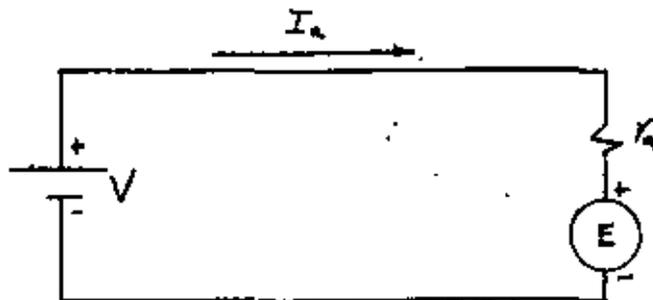


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura.

o sea que la fuerza electromotriz es función de la velocidad " ω " y la corriente de excitación " I_e ".

El coeficiente "k" frecuentemente se toma como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente de excitación, debido a la saturación de la máquina

$$k = \frac{a}{b + I_e} \quad (2)$$

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:

$$I_a = \frac{V-E}{r_a} \quad (3)$$

y el par producido por esta corriente es:

$$T_e = \frac{EI_a}{\omega} \quad (4)$$

o también, sustituyendo (1) en (4)

$$T_e = k I_e I_a \quad (5)$$

Este par acelera la máquina hasta una velocidad ω_v tal, que de acuerdo con la (1)

$$E = V - k \omega_v I_e \quad (6)$$

en este momento desaparece la I_a (ecuación (3) y el par motor (ecuaciones (4) y (5)) y por lo tanto, la máquina deja de acelerarse. La velocidad " ω_v " la llamaremos velocidad en vacío.

REFERENCIA. Para estudiar a continuación la transición de la máquina, es necesario establecer los sentidos de referencia. Convengamos que los sentidos de corriente mostrados en las figuras 5(a), 5(b) y 6, así como los sentidos de par y de velocidad de 5(b) y 5(c) se les considerará positivos.

TRABAJO MOTOR. Supongamos que aplicamos ahora una carga a nuestro motor. Esta carga al ser movida reacciona con un par negativo, haciendo que el motor pierda velocidad.

Si la velocidad del motor adquiere un valor

$$\omega_m < \omega_v$$

entonces, razonando en base a la ecuación (1)

$$E < V$$

y aparecen una corriente y un par positivos

$$I_a = \frac{V-E}{r_a} > 0$$

$$T_e = K I_e I_a > 0$$

TRANSICION. Para que la acción motriz se convierta en acción generatriz, es necesario que se inviertan el par electromagnético y la corriente de armadura.

La ecuación (5) quedaría:

$$-T_e = K I_e (-I_a)$$

(nótese que la I_e permanece positiva), y de acuerdo con la ecuación (3)

$$I_a = \frac{V-E}{r_a}$$

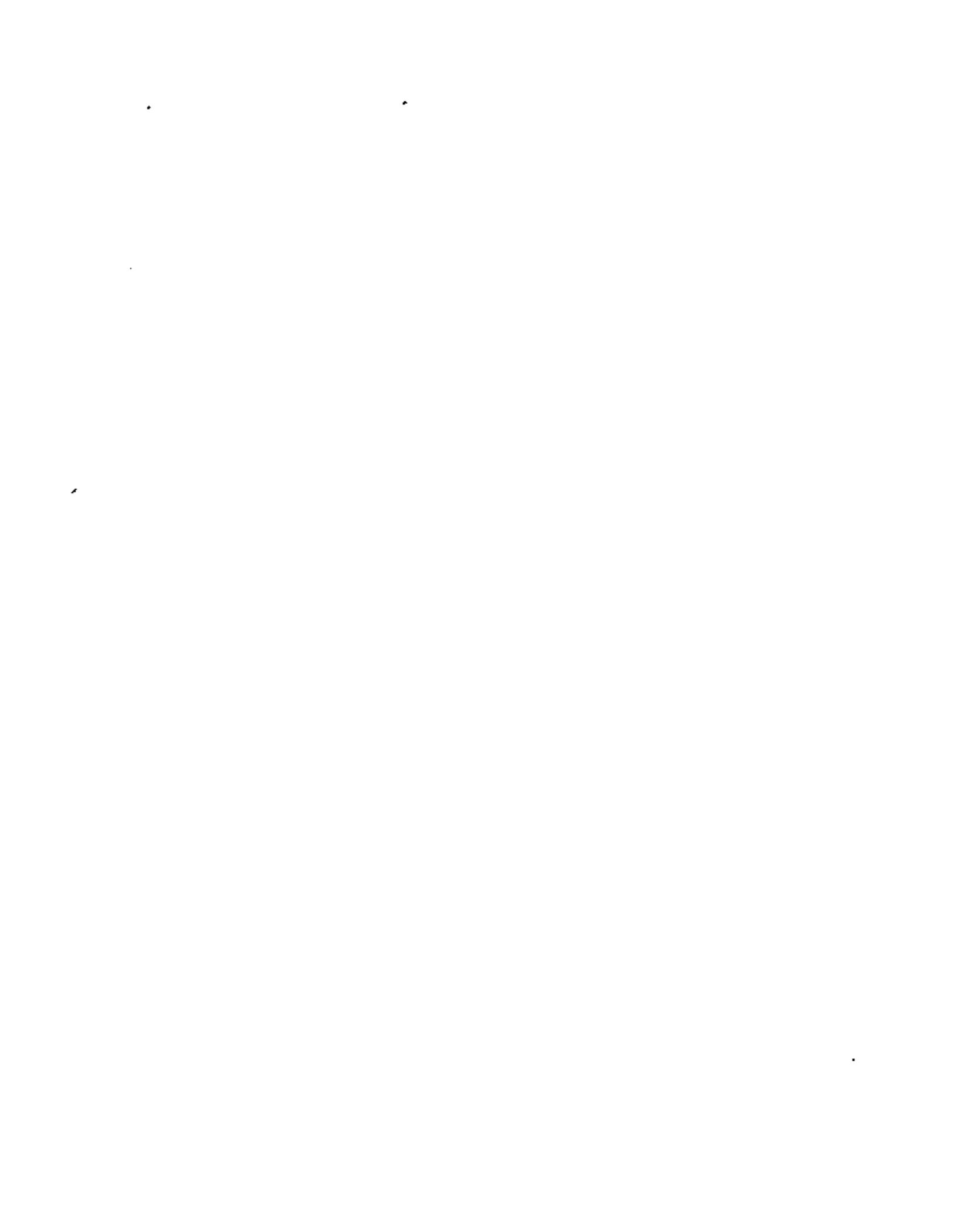
I_a solamente puede ser negativa si $V < E$.

Esto puede ocurrir en tres casos:

- a) Si aumenta E por un aumento de velocidad, permaneciendo V e I_e constantes. (Recuérdese $E = k\omega I_e$). Esto equivale a que la carga por alguna razón tienda a desbocarse.
- b) Si se hace aumentar E reforzando la corriente de excitación
- c) Si se disminuye el voltaje de la fuente de alimentación de armadura.

Los casos b) y c) equivalen a "dar la orden" al motor de disminuir su velocidad. En el caso de los equipos estacionarios, esta transición se puede presentar en un proceso con la necesidad de velocidad variable controlada, y en el caso de tracción de vehículos eléctricos, se presenta cuando es factible "frenar con el motor".

Durante el período de generación, la energía cinética acumula



lada en el equipo impulsado, se transforma en eléctrica y se devuelve a la fuente, lo que se conoce como FRENADO REGENERATIVO.

La transición en el frenado regenerativo, que hemos analizado matemáticamente, también podemos analizarla desde el punto de vista del fenómeno físico, apoyándonos nuevamente en las figuras 5 y 6. En la figura 5 observamos que para invertir el par se requiere inversión de la corriente de armadura, sin cambio en la dirección del flujo magnético. Como se conservan las direcciones de flujo y velocidad, la polaridad de la fuerza electromotriz continua igual.

En la figura 6 se observa que para invertir la corriente es necesaria la condición $V < E$, lo que se consigue aumentando "E" o disminuyendo "V", sin alterar sus polaridades.

Para el caso de la excitación en derivación, el análisis es muy semejante al caso anterior. Sin embargo, observando la figura 7, nos damos cuenta que la "orden" de reducir velocidad solamente se puede dar por aumento de la corriente de excitación (aumento de

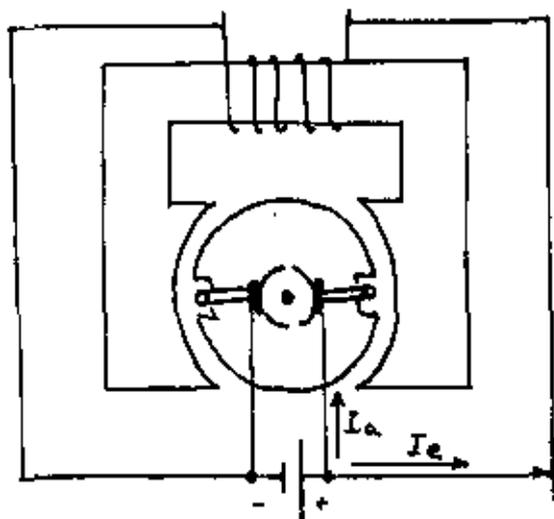


Fig. 7 Motor de C.D. con excitación en derivación

"E"), pues una disminución en el voltaje aplicado afecta la exci



tación y muy posiblemente no se obtiene el frenado regenerativo.

Para la máquina con excitación en serie, las condiciones son diferentes. En la figura 8(a) observamos las conexiones de la má-

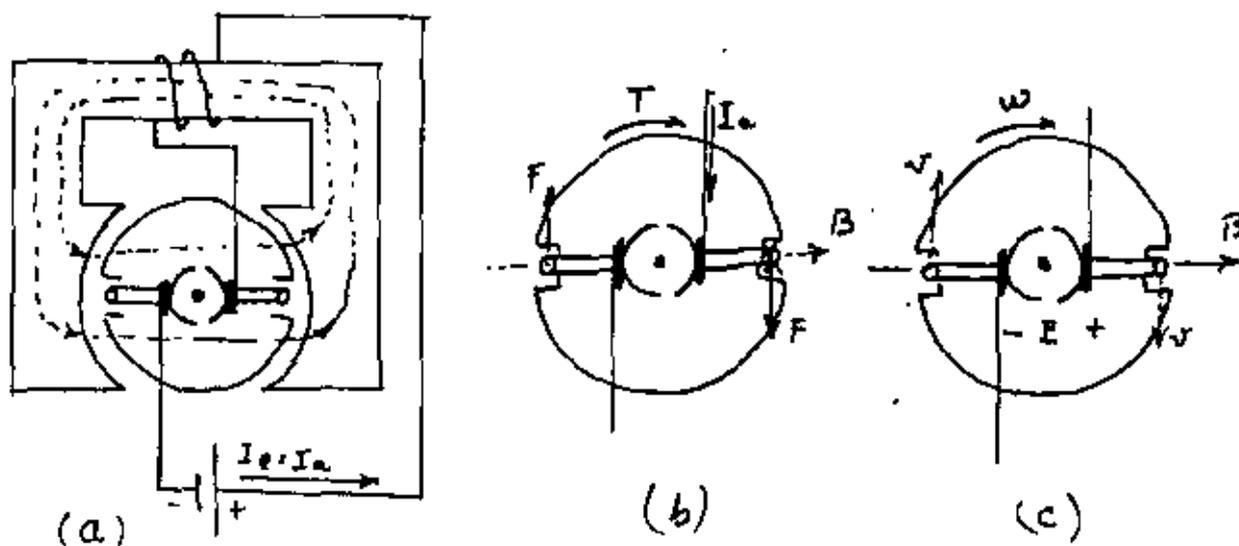


Fig. 8 Motor de C.D. con excitación en serie.

quina y los sentidos de corriente y flujo magnético; en la figura 8(b) vemos la generación del par, y en la 8(c) la aparición de velocidad y fuerza electromotriz, igual que en los casos anteriores.

El punto de partida de nuestro análisis es que la corriente de excitación y la corriente de armadura son la misma, o sea

$$I_e = I_a$$

por lo que la ecuación (1) se transforma en:

$$E = k\omega I_a \quad (7)$$

El coeficiente "k", igual que en el caso anterior, frecuentemente se considera como una constante, pero estrictamente es una función de la corriente



$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

El diagrama eléctrico es el mismo de la figura 6, solamente

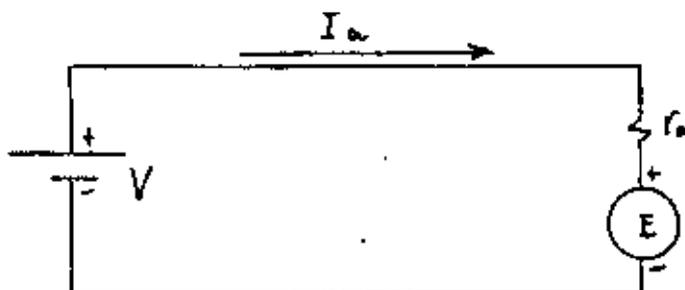


Fig. 6 Diagrama del circuito de armadura

que " r_a " involucra también la resistencia del campo serie.

La corriente de armadura para la malla de la figura 6 es:

$$I_a = \frac{V - E}{r_a} \quad (9)$$

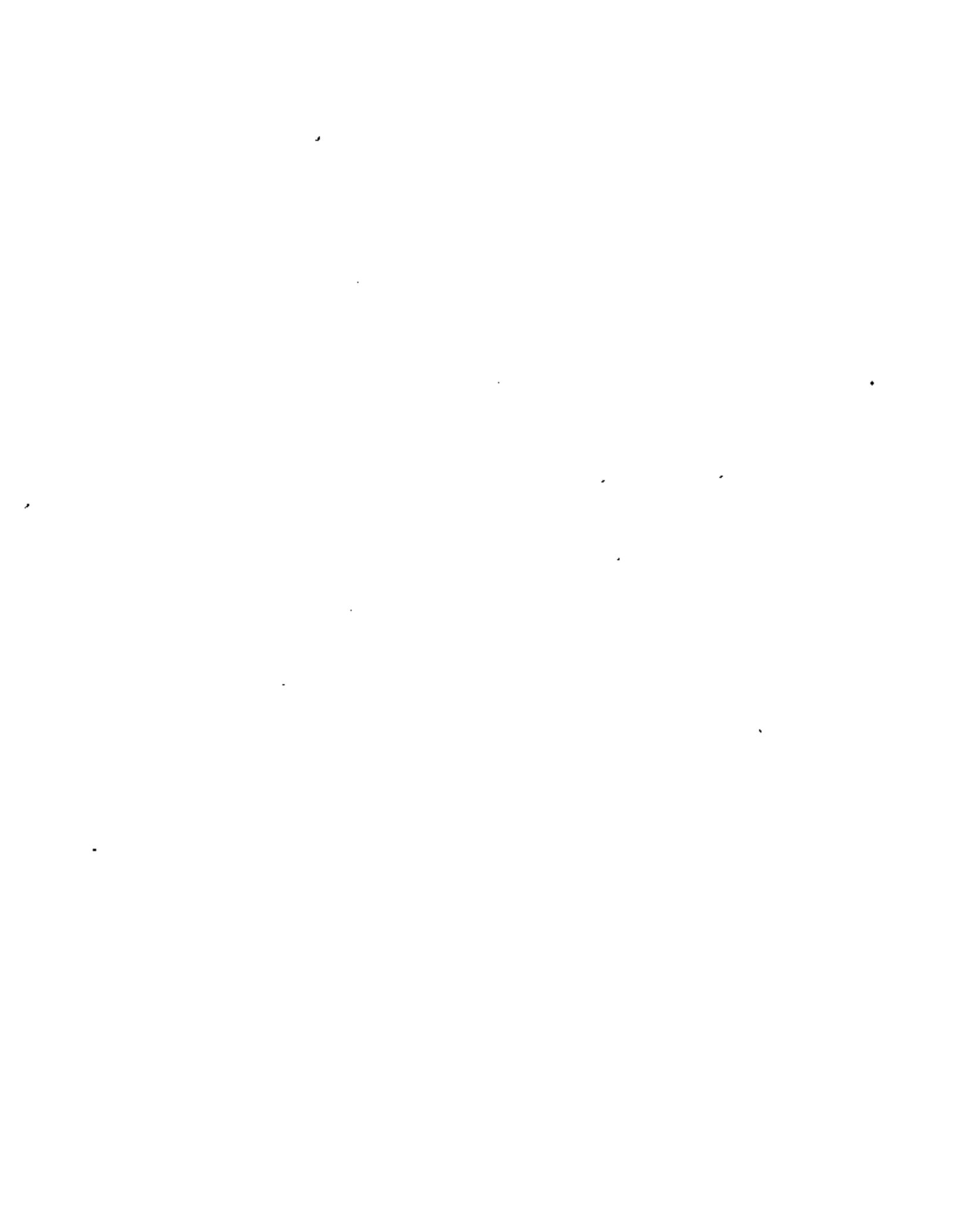
Sustituyendo la (7) en la (9) y despejando la velocidad, tenemos:

$$\omega = \frac{V}{k I_a} - \frac{r_a}{k} \quad (10)$$

que representa una familia de curvas con tendencia hiperbólica. (Si " k " fuese constante, serían hipérbolas con una asíntota vertical sobre el eje de las ordenadas y una horizontal en r_a/k por debajo del eje de las abscisas).

En la figura 9(a) observamos la familia de pseudohipérbolas para diferentes voltajes.

El par electromagnético dado por la ecuación (5) se transforma en



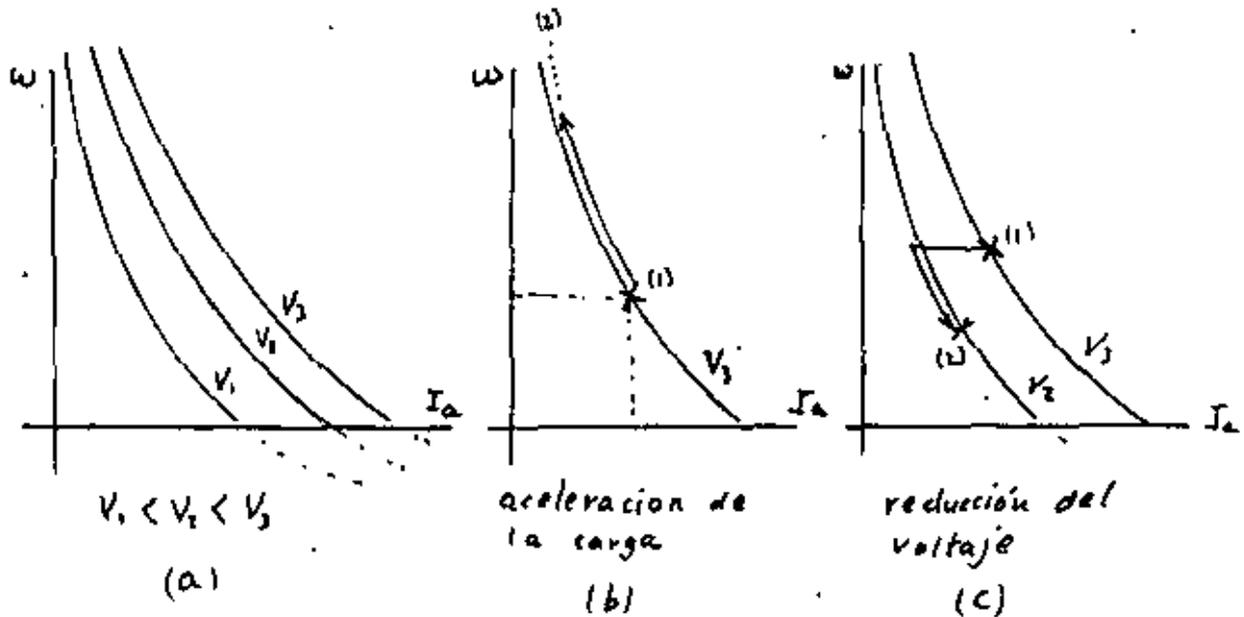


Fig. 9 Curvas de respuesta del motor serie.

$$T_e = k I_a^2 \quad (11)$$

Interpretando la ecuación (11) en la figura 9(a), deducimos que es una máquina de muy alto par de arranque, y que tiene un aumento de velocidad rápido, características que lo hacen ideal para tracción vehicular.

Su velocidad, sin embargo, no tiene un punto de estabilidad, y varía dentro de un amplio rango, dependiendo del par de tracción necesario bajo las diferentes circunstancias. Por otra parte, frenar el vehículo con este tipo de motor involucra una serie de dificultades que vencer.

Supongamos primeramente que el vehículo comienza a bajar una pendiente. En la figura 9(b) vemos que el motor en ningún momento sufre transición, y su velocidad aumenta hasta desbocarse sin perder su tracción (aunque el par se debilita). Si se prolonga este aumento de velocidad, el motor puede llegar a destruirse.

Si analizamos ahora la "orden" de que el motor baje su velocidad, ~~mediante una disminución del voltaje~~, mediante una disminución del voltaje aplicado, observamos en la figura 9(c) que la co



riente se debilita hasta encontrar un nuevo punto de equilibrio, pero en ningún momento se invierte, por lo que el motor no pierde tracción en ningún momento, y la disminución de velocidad es aún más lenta que si se dejara por un momento sin tracción el vehículo.

Veamos ahora si tratamos de efectuar un frenado dinámico, simplemente cambiando la alimentación del motor por una resistencia de carga.

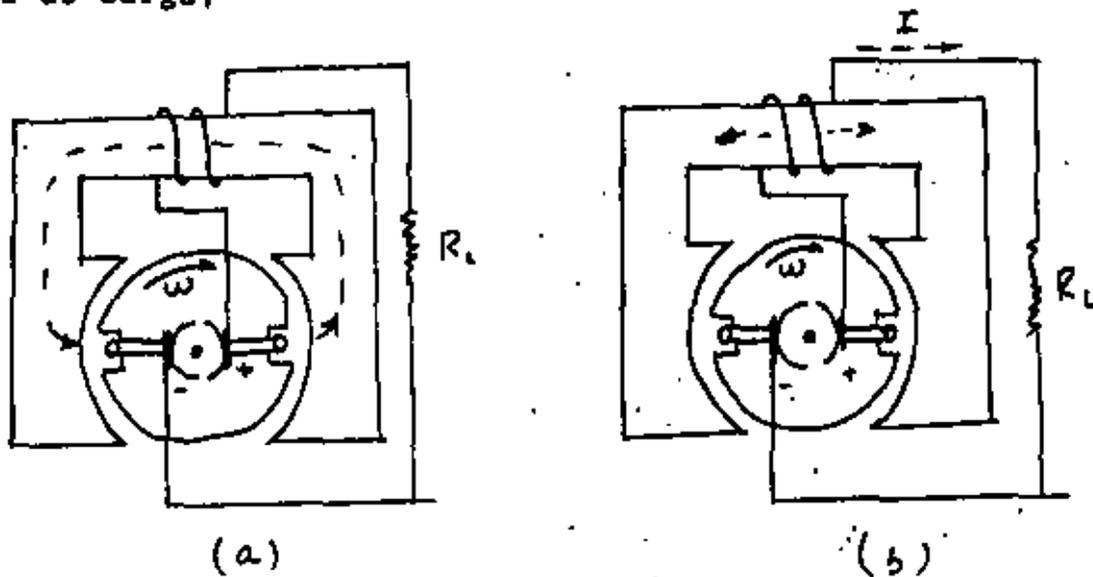


Fig. 10 Sustrucción de la fuente por resistencia

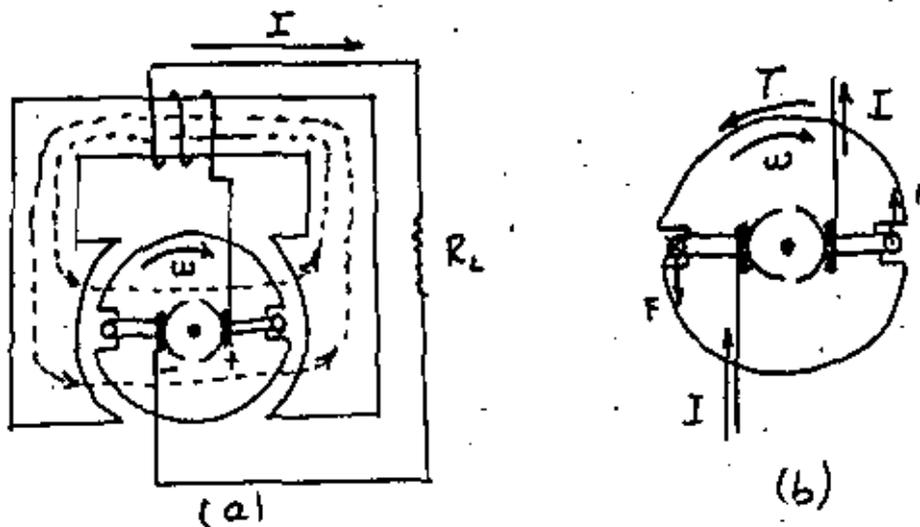


Fig. 11 La máquina operando como generador



En la figura 10(a) observamos la máquina que conserva su velocidad y el flujo remanente, por lo tanto se induce un pequeño voltaje con la polaridad que ahí mismo observamos. En la figura 10(b) aparece una corriente impulsada por el voltaje de flujo remanente, pero al analizar el flujo magnético que genera esta corriente, vemos que es opuesto al magnetismo remanente, de manera que en vez de reforzarlo lo anula y la máquina no levanta voltaje.

Es necesario entonces un cambio en las conexiones del campo para que la máquina levante voltaje, como vemos en la figura 11(a), de manera que

$$E = k\omega I_a \quad (7)$$

en donde

$$k = \frac{a}{b + I_a} \quad (8)$$

$$I_a = \frac{E}{r_a + R_L} \quad (10)$$

Sustituyendo (8) y (10) en (7), tenemos:

$$E = a\omega - b (r_a + R_L) \quad (11)$$

en donde observamos que la fuerza electromotriz es tanto mayor cuanto menor es la resistencia de carga.

Bajo estas condiciones, circula una corriente, la cual en la figura 11(b) vemos que genera el par negativo o par de frenado, cuyo valor es

$$T_e = k I_a (-I_a) \quad (11')$$

que es una modificación de la ecuación 11, ya que la corriente en el campo sigue siendo positiva, mientras que en su armadura



es negativa.

El frenado en estas circunstancias se llama "frenado dinámico". Si se desea conmutar el frenado dinámico por frenado regenerativo, es decir devolviendo energía a la fuente, es necesario elevar previamente la fuerza electromotriz a un valor superior al del voltaje de la fuente, e inmediatamente hacer una conmutación translapada, para cambiar la resistencia de carga por la fuente de energía.

El frenado regenerativo, en estas circunstancias, es de duración muy corta, pues a medida que se pierde velocidad la fuerza electromotriz disminuye de valor, y en cuanto se iguale con el voltaje de la fuente (no hay que esperar a que sea menor), es necesario desconectar la máquina.

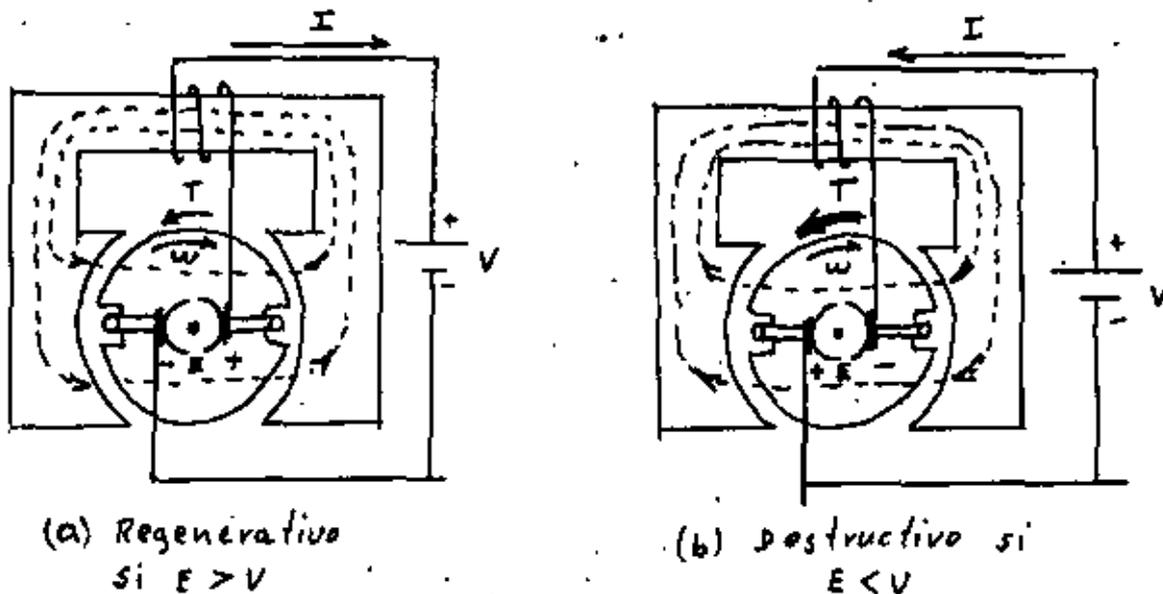


Fig. 12 Frenado regenerativo.

En la figura 12(a) vemos el frenado regenerativo, que se cumple siempre que $E > V$. En la figura 12(b), la velocidad ha bajado a tal valor que $E < V$ y no se ha abierto el circuito. En este caso, la corriente se invierte, obligando al flujo magnético a invertirse, con lo cual la fuerza electromotriz también se invierte, de tal modo que la corriente



$$I = \frac{V + \epsilon}{r_a}$$

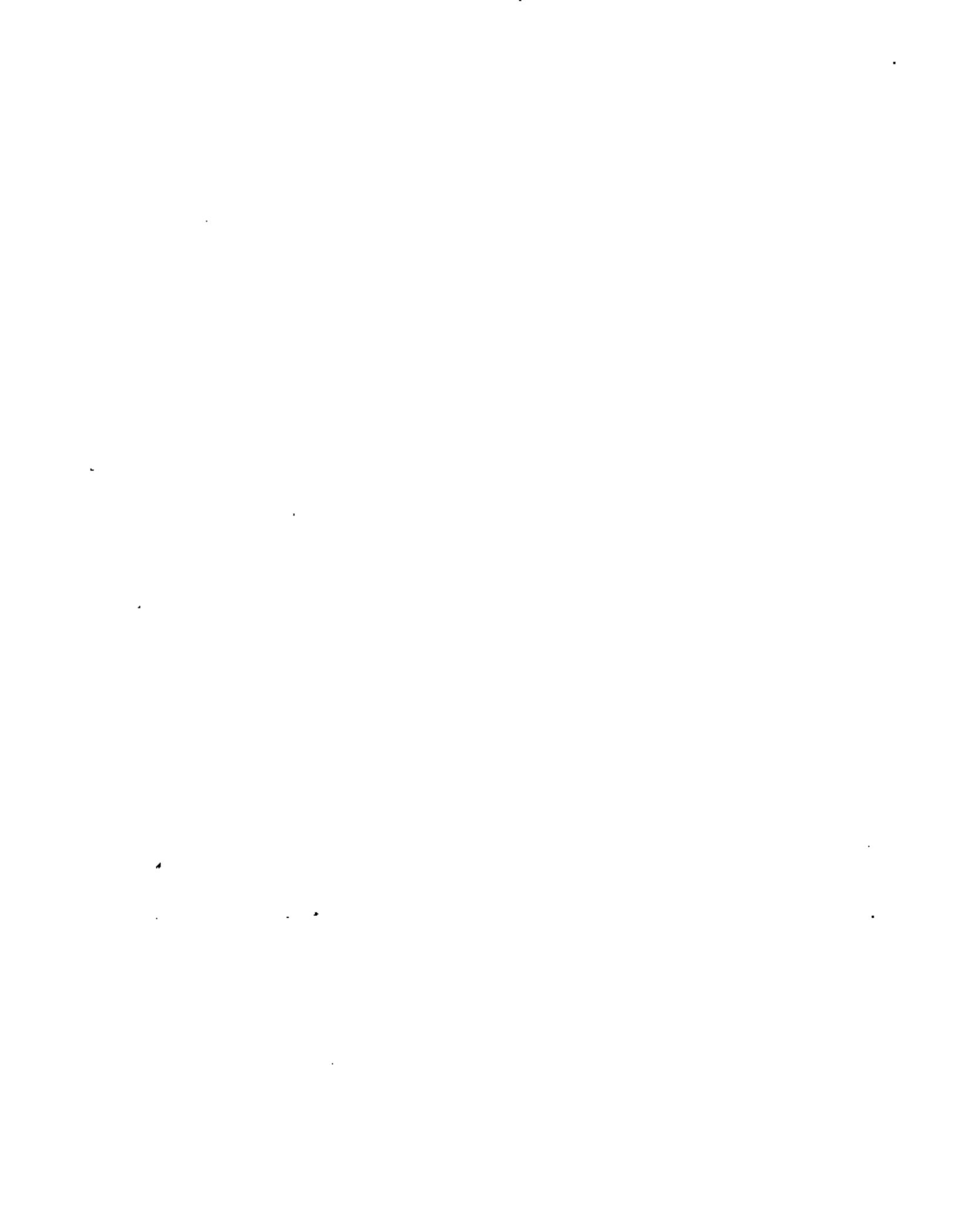
adquiere un valor muy elevado, consumiendo energía de la fuente.

Como flujo y corriente de armadura se invierten, el par se conserva en el sentido de frenado, pero en vez de constituir un frenado regenerativo, es una tendencia a invertir la velocidad de la máquina, lo que podríamos describir como un "arranque a contra-velocidad",

Por lo anterior nos damos cuenta que la máquina serie que tiene grandes ventajas en tracción, tiene también grandes desventajas en frenado regenerativo. Estas desventajas pueden superarse recurriendo a diferentes opciones:

- 1a. Trabajando como motor serie en tracción, y como generador independiente en frenado regenerativo, alimentando la excitación con una fuente de intensidad de corriente.
- 2a. Absorbiendo la energía del frenado regenerativo en una fuente de tensión variable, controlando que en todo momento el voltaje de la fuente sea menor que la fuerza electromotriz. En este caso es indispensable elevar previamente la fuerza electromotriz por frenado dinámico.
- 3a. Por medio de una máquina mixta, con excitación serie en tracción y excitación independiente de baja corriente en frenado (no confundir la máquina mixta con la máquina de excitación compuesta, pues en esta última el campo serie es solamente un campo auxiliar).

En cualquier opción que se elija, la necesidad de conmutar conexiones motiva que la máquina serie no tenga una transición continua entre sus operaciones de tracción y de frenado.



E J E M P L O

Un motor de C.D. de 6.5 H.P tiene las siguientes características:

$$E = \frac{1}{0.157 + Y_e} \omega I_e \quad r_a = 0.22 \text{ ohms}$$

Tensión nominal: 120 V
 Corriente nominal: 50 A
 Velocidad: 1 500 RPM

Se utilizará para mover una carga con velocidad controlada entre 1000 y 1500 RPM. Para el conjunto motor-carga se estima un par de fricción constante dentro del rango de operación, de 5 New-m y un momento de inercia de 15 kg-m².

- a) Calcular la corriente de excitación necesaria, cuando su armadura se alimenta a 120 volts 50 Amp. y gira a 1500 RPM.
- b) Si el motor se excita independientemente, a corriente constante, calcular el voltaje de armadura para una velocidad de 1225 RPM suponiendo que el par de carga se mantiene constante.
- c) Si se desea pasar de las condiciones de la pregunta (a) a las de la pregunta (b) mediante un cambio brusco de tensión, con un tiempo de frenado regenerativo, trazar las gráficas de velocidad, corriente y par con respecto al tiempo.

SOLUCION

- a) De la ecuación de voltaje del motor

$$V = E + r_a I_a; \quad E = V - r_a I_a$$

sustituimos valores

$$E = 120 - (0.22 \times 50) = 109 \text{ Volts}$$

llevando este valor a la ecuación de la fem:

$$109 = \frac{1}{0.157 + I_e} \omega I_e$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1500 \times \pi}{30} = 157$$

por tanto $I_e = 1.294 \text{ Amp.}$

b) Como la máquina trabajará a excitación constante, podemos definir una constante de excitación

$$K_e = \frac{I_e}{0.157 + I_e} = \frac{1.294}{0.157 + 1.294} = 0.694$$

de tal manera que

$$E = 0.694\omega$$

Por otra parte, si la máquina también trabaja a par constante, de la ecuación de par:

$$T_e = \frac{E I_a}{\omega} = 0.694 I_a$$

deducimos que trabaja a corriente de armadura constante de 50 Amp. (en estado estable). Por tanto:

$$\begin{aligned} V &= E + r_a I_a \\ &= 0.694\omega + (0.22 I_a) \end{aligned}$$

$$\text{en donde } \omega = \frac{1225 \times \pi}{30} = 128.24$$

entonces:

$$V = (0.694 \times 128.24) + (0.22 \times 50) = 100 \text{ volts}$$



c) La ecuación general de equilibrio eléctrico en armadura es:

$$v = e + r_a i_a + L p i_a \quad (A)$$

Como la inductancia de armadura es generalmente insignificante, el tercer término del segundo miembro se suele despreciar.

La ecuación general de equilibrio mecánico en armadura es:

$$T_e = T_m + T_f + J p \omega \quad (B)$$

$$\text{en donde } T_e = K_e i_a \quad (C)$$

El par electromagnético en estado estable tiene un valor constante

$$T_e = 0.694 \times 50 = 34.7 \text{ New-m} \quad (D)$$

lo que significa que

$$T_m + T_f = 34.7 \text{ New-m} \quad (E)$$

Sustituyendo (C) y (E) en (B), con $K_e = 0.694$ y $J = 15$:

$$0.694 i_a = 34.7 + 15 p \omega$$

$$i_a = 50 + 21.6 p \omega \quad (F)$$

Sustituyendo (F) en (A), despreciando el tercer término:

$$v = e + 0.22 (50 + 21.6 p \omega)$$

$$e = 0.694 \omega + 11 + 4.752 p \omega \quad (G)$$

que es la ecuación general, en donde el voltaje y la velocidad son funciones del tiempo.



La ecuación (G) para el estado estable inicial, adopta los siguientes valores:

$$120 = (0.694 \times 157) + 11$$

Si se baja repentinamente el voltaje a 100 volts equivale a agregarle un escalón negativo a la ecuación anterior, con lo que queda:

$$120 - 20u(t) = 0.694\omega + 11 + 4.752 p\omega$$

que representa el funcionamiento incremental. Si a la última ecuación le restamos la correspondiente al estado estable inicial obtenemos:

$$-20u(t) = 0.694 (\omega - 157) + 4.752 p\omega$$

cuya solución es:

$$\omega = 28.72 (e^{-0.146 t} + 4.466) u(t)$$

La corriente, según la (F)

$$i_a = 50 + 21.6 p\omega$$

cuya solución es

$$i_a = 50 - 90.57 e^{-0.146 t} u(t)$$

y según la (C), el par es

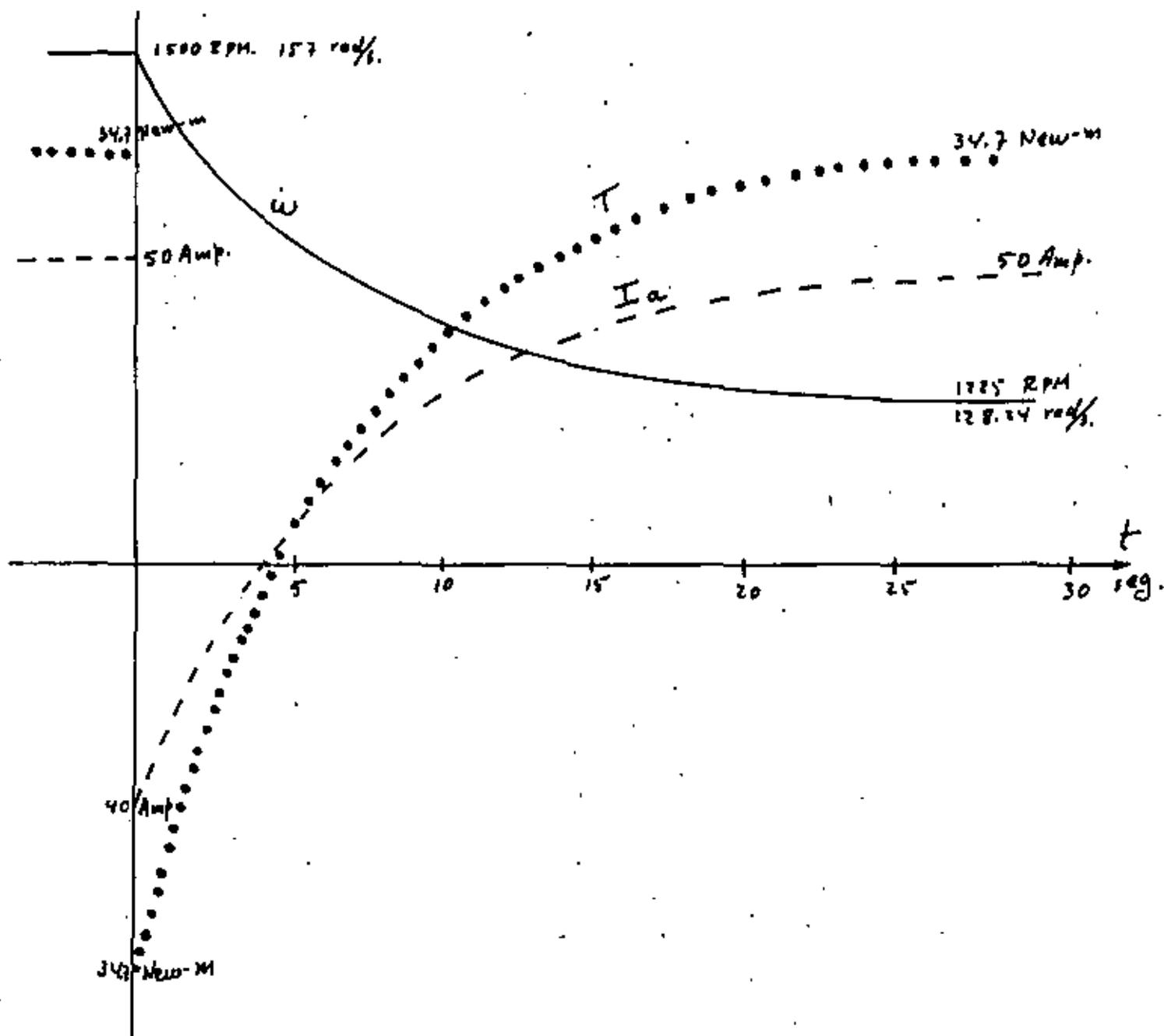
$$T_e = k_e i_a$$

cuya solución es

$$T_e = 34.7 - 68.85 e^{-0.146 t} u(t)$$



Estas tres soluciones las encontramos graficadas en la siguiente figura.



BIBLIOGRAFIA

Meisel J.- Principios de Conversión de Energía Electromecánica
Mc Graw Hill México 1975.

Langsdorf A.S.- Principios de Máquinas de Corriente Continua.
Mc Graw Hill México 1977.

Matsch L.W. Máquinas Electromagnéticas y Electromecánicas
Representaciones y Servicios de Ingeniería . México 1974.

Thaler G.J. y Wilcox M.L.- Máquinas Eléctricas
Limusa México 1974.

