

Directorio de Profesores del Curso: FUNDAMENTOS Y METODOS  
DE LA GEODESIA MODERNA 1982 .

1. Dr. Ing. Wolfgang Torge  
Jefe  
Instituto de Geodesia Teórica  
Universidad de Hannover  
3 Hannover 1  
Nienburger Strabe 6  
Hannover, RFA
  
2. M. en C. Qualterio Luthé García (Coordinador)  
Profesor de Fotogrametría  
División de Ingeniería Civil  
Topográfica y Geodésica  
Facultad de Ingeniería  
UNAM  
México, D. F.  
5489669
  
3. Ing. Federico Alonso Lerch (Coordinador)  
Jefe  
Departamento de Geodesia y Cartografía  
División de Ingeniería Civil, Topográfica y Geodésica  
Facultad de Ingeniería  
UNAM  
México, D. F.  
548 96 69

## Fundamentos y Métodos de la Geodesia Moderna 1982.

Fecha	Tema	Horario	Profesor
Del 29 de Marzo al 2 de Abril	<b>INTRODUCCION</b>  Definición y clasificación de la geodesia El problema de la geodesia Desarrollo histórico de la geodesia Organización de la geodesia  <b>EL CAMPO DE LA GRAVEDAD DE LA TIERRA</b>  Componentes de la gravedad Superficie de nivel y líneas de plomada Expansión armónica esférica del potencial gravitacional Variaciones temporales del campo de gravedad  <b>SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS</b>  Sistema cartesiano espacial global, movimiento polar. Sistemas coordenados en el campo de la gravedad de la tierra El Geoides como superficie de referencia para Alturas Sistema de referencia elipsoidal El campo de gravedad normal  <b>METODOS DE MEDIDA EN GEODESIA</b>  Mediciones astronómicas Medidas de la gravedad Medidas geodésicas terrestres Observaciones de satélites	9 a 18 h	Dr. Ing. Wolfgang Torge

Fecha	Tema	Hora	Profesor
	<b>GEODESIA GLOBAL</b>  Métodos astrogeodésicos Métodos gravimétricos Métodos de la geodesia de satélites Métodos combinados de evaluación Estructura y dinámica del cuerpo de la Tierra Geodesia lunar y planetaria  <b>TOPOGRAFIA GEODESICA</b>  Redes de control horizontal Redes de control vertical Redes de gravedad		

EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

1

CURSO: Fundamentos y Métodos de la Geodesia Moderna.

FECHA: Del 29 de Marzo al 2 de Abril, 1982.

		DOMINIO DEL TEMA	EFICIENCIA EN EL USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	MANTENIMIENTO DEL INTERES. (COMUNICACION CON LOS ASISTENTES, AMENIDAD, FACILIDAD DE EXPRESION).	PUNTUALIDAD	
<b>CONFERENCISTA</b>						
1.	Dr. Ing. Wolfgang Torre					
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
ESCALA DE EVALUACION: 1 a 10						



## EVALUACION DEL CURSO

③

	CONCEPTO	EVALUACION
1.	APLICACION INMEDIATA DE LOS CONCEPTOS EXPUESTOS	
2.	CLARIDAD CON QUE SE EXPUSIERON LOS TEMAS	
3.	GRADO DE ACTUALIZACION LOGRADO CON EL CURSO	
4.	CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
5.	CONTINUIDAD EN LOS TEMAS DEL CURSO	
6.	CALIDAD DE LAS NOTAS DEL CURSO	
7.	GRADO DE MOTIVACION LOGRADO CON EL CURSO	

ESCALA DE EVALUACION DE 1 A 10

1. ¿Qué le pareció el ambiente en la División de Educación Continua?

MUY AGRADABLE	AGRADABLE	DESAGRADABLE

2. Medio de comunicación por el que se enteró del curso:

PERIODICO EXCELSIOR ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	PERIODICO NOVEDADES ANUNCIO TITULADO DE VISION DE EDUCACION CONTINUA	FOLLETO DEL CURSO

CARTEL MENSUAL	RADIO UNIVERSIDAD	COMUNICACION CARTA, TELEFONO, VERBAL, ETC.

REVISTAS TECNICAS	FOLLETO ANUAL	CARTELERA UNAM "LOS UNIVERSITARIOS HOY"	GACETA UNAM

3. Medio de transporte utilizado para venir al Palacio de Minería:

AUTOMOVIL PARTICULAR	METRO	OTRO MEDIO

4. ¿Qué cambios haría usted en el programa para tratar de perfeccionar el curso?

---



---



---

5. ¿Recomendaría el curso a otras personas?

SI	NO

6. ¿Qué cursos le gustaría que ofreciera la División de Educación Continua?

---



---

7. La coordinación académica fue:

EXCELENTE	BUENA	REGULAR	MALA

8. Si está interesado en tomar algún curso intensivo ¿Cuál es el horario más conveniente para usted?

LUNES A VIERNES DE 9 A 13 H. Y DE 14 A 18 H. (CON COMIDAS)	LUNES A VIERNES DE 17 A 21 H.	LUNES, MIÉRCOLES Y VIERNES DE 18 A 21 H.	MARTES Y JUEVES DE 18 A 21 H.

VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 14 H.	VIERNES DE 17 A 21 H. SABADOS DE 9 A 13 Y DE 14 A 18 H.	O T R O

9. ¿Qué servicios adicionales desearía que tuviese la División de Educación Continua, para los asistentes?

---



---

10. Otras sugerencias:

---



---



---



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**FUNDAMENTOS Y METODOS DE LA GEODESIA MODERNA**

**NOTAS ADICIONALES**

**DR. WOLFGANG TORGE**

**MARZO, 1982**

Marzo 1982

Wolfgang Torge, Hannover:

Fundamentos y métodos de la geodesia moderna

- Notas adicionales

1. Introducción

- 1.1 Definición de la geodesia
- 1.2 Problema tridimensional de la geodesia
- 1.3 Parámetros geométricos y físicos
- 1.4 Observaciones disponibles
- 1.5 Modelos funcionales y estocásticos
- 1.6 Variaciones temporales

2. El campo de gravedad terrestre

- 2.1 Descripción física: aceleración y potencial de gravedad
- 2.2 Descripción geométrica: superficies equipotenciales y verticales
- 2.3 Desarrollo en funciones esféricas
- 2.4 Variaciones temporales

3. Sistemas de coordenadas (Sistemas naturales)

- 3.1 Sistemas globales
  - 3.1.1 Sistema astronómico (Sistema inercial)
  - 3.1.2 Sistema geocéntrico terrestre
- 3.2 Sistemas locales
- 3.3 Transformación de coordenadas
- 3.4 El geoide
  - 3.4.1 Definición y realización
  - 3.4.2 Sistemas de altura

4. Sistemas de referencia (sistemas convencionales)

- 4.1 El elipsoide equipotencial: definición y parámetros
- 4.2 Geometría

- 4.2.1 Coordenadas del elipsoide
- 4.2.2 Curvatura del elipsoide
- 4.2.3 Sistemas locales del elipsoide
- 4.2.4 Transformación de coordenadas
- 4.2.5 El datum geodésico

4.3 El campo de gravedad normal

- 4.3.1 Descripción física: aceleración y potencial de la gravedad normal
- 4.3.2 Descripción geométrica: Superficies equipotenciales y verticales
- 4.3.3 Coordenadas normales

4.4 Sistemas de referencia 1924/30, 1967, 1980

5. Parámetros residuales del campo de gravedad

- 5.1 Potencial perturbado y ondulación del geoide
- 5.2 Anomalia gravimétrica
- 5.3 Desviaciones de la vertical
- 5.4 Estructuras del campo de gravedad
  - 5.4.1 Función de covarianza de las anomalías gravimétricas
  - 5.4.2 Varianzas de grado

6. Métodos de observación

- 6.1 Observaciones espaciales
  - 6.1.1 Interferometría con bases largas
  - 6.1.2 Observaciones satelitares
  - 6.1.3 Sistemas de referencia
- 6.2 Observaciones astronómicas
  - 6.2.1 Posiciones astronómicas
  - 6.2.2 Azimutes astronómicos
- 6.3 Observaciones gravimétricas
  - 6.3.1 Observaciones absolutas
  - 6.3.2 Observaciones relativas
  - 6.3.3 Sistemas de referencia
- 6.4 Observaciones geodésicas terrestres
  - 6.4.1 Determinación de posición
  - 6.4.2 Determinación de altura
  - 6.4.3 Sistemas de referencia



7. Métodos de evaluación

7.1 Métodos satelitares

- 7.1.1 Fundamentos
- 7.1.2 Métodos absolutos
- 7.1.3 Métodos relativos
- 7.1.4 Altimetría satelitar

7.2 Métodos gravimétricos

- 7.2.1 Fundamentos
- 7.2.2 Soluciones de Stokes y Molodenski
- 7.2.3 Coordenadas tridimensionales y gravedad externa

7.3 Métodos astrogeodésicos

- 7.3.1 Cálculaciones tridimensionales
- 7.3.2 Sistemas de posición
- 7.3.3 Sistemas de altura
- 7.3.4 Nivelación astronómica

7.4 Métodos de combinación

- 7.4.1 Combinación funcional
- 7.4.2 Combinación estadística

8. Resultados y problemas actuales

- 8.1 Sistemas fundamentales
- 8.2 Sistemas de control regionales
- 8.3 Sistemas de control locales
- 8.4 Campo de gravedad.

Sistemas de coordenadas

3.1 - 1

(sistemas naturales)

Sistemas globales

Sistema inercial (sistema astronómica)

los sistemas "naturales" refieren a la natura y a las mediciones, llevado a cabo en la geodesia..

Para orientar el cuerpo terrestre en el espacio  $\rightarrow$  sistema inercial (aproximación!)

Realizado por

(A) - las direcciones a las estrellas fijas:

sistema ecuatorial

ascensión recta  $\alpha$   
declinación  $\delta$

$\alpha, \delta$  refieren a:

- eje de rotación (plano ecuatorial celeste)
- punto vernal  $\gamma$

tiempo siderico  $\Theta$ :

$\rightarrow \Theta = t + \alpha$

t = ángulo horario

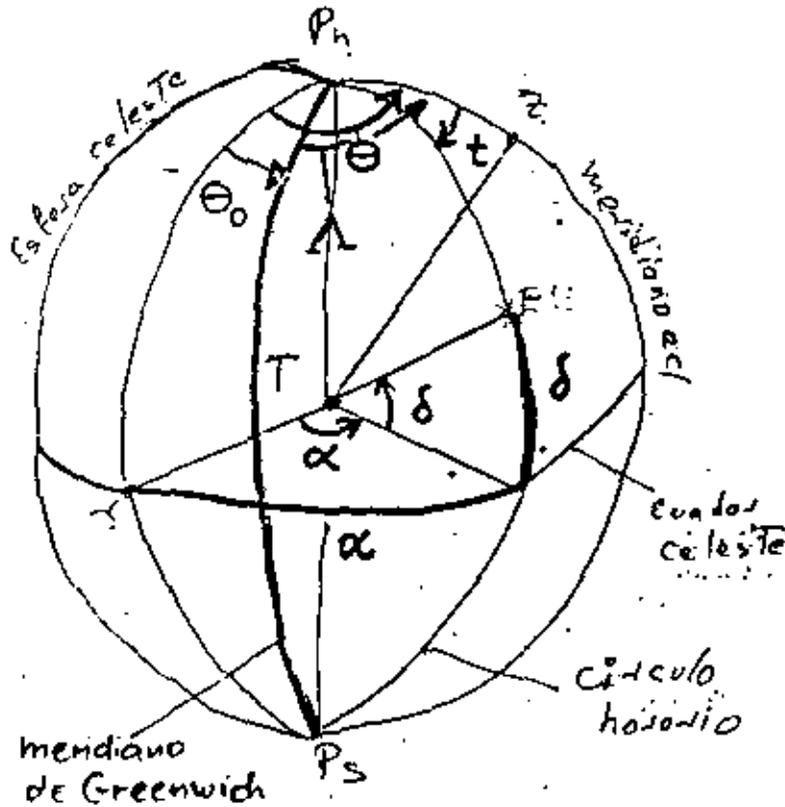
tiempo siderico de Greenwich  $\Theta_0$ :

$\Lambda = \Theta - \Theta_0$

relaciones fundamentales referente al tiempo

3.1-2

3



Sistema ecuatorial

sistema ecuatorial:

3.1-3

catálogo fundamental:

1963: FK 4 : 1535 estrellas , 1950.0 , 1975.0

1984: FK 5 : > 3000 "

$$\pm 0.1 \rightarrow \pm 0.01$$

problemas :- refracción astronómica ( $\pm 0.03 \dots 0.2''$ )

- movimiento propio ( $< 1''/a$ ) !

- variaciones temporales del sistema:

precesión  $\rightarrow \gamma$  mueve  $50.4''/a$

nutación  $\rightarrow a = 9.21''$

3

direcciones a radio fuentes (cuasares)

no movimiento propio !

metodo: interferometria por bases largas (VLBI = Very Long Base Line Interferometry)

$$\rightarrow \pm 0.05 \dots 0.001$$

mejoramiento del sistema espacial:

misiones satelitares de astronomia (~ 1985):

telescopio espacial 'Hipparcos'

$\rightarrow$  no refracción astronómica

$\rightarrow$  conexión entre el sistema de estrellas y el sistema de cuasares.

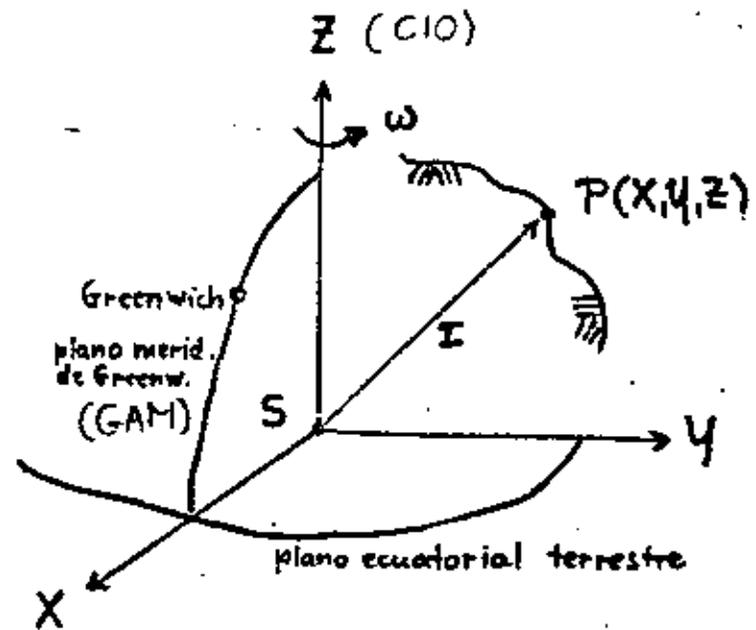
Sistema geocéntrica terrestre 3.1-4

(4)

Sistema fundamental para la geodesia, fijado a la tierra sólida!

3.1-5a

- origen: centro de la gravedad
- eje Z: eje de rotación ( $\omega$ )  
→ eje promedio (CIO)
- eje X: intersección entre el plano XY (plano ecuatorial promedio) y el plano XZ (plano meridiano promedio de GREENWICH (GAM))



Realizado por

(A) direcciones de la vertical:

latitud astronómica  $\Phi$   
longitud astronómica  $\Lambda$  }  $\pm 0.05$

- observatorios del servicio IPMS (~50) inclusive 5 observ. del ILS ( $\phi \approx 39^{\circ}08'$ )

- observatorios del servicio BIH (~50)

→ movimiento del polo referente al polo promedio CIO (1900.0...1906.0)

$\pm 0.01 / 5d$

→ tiempo universal UTO, UT1 +  $\Delta\Delta p$   
 $\hat{=}$  fase de rotación

$\pm 1ms / 5d$

$$\omega = \frac{2\pi}{86164.1} = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}^{-1}$$

Sistema Geométrico Terrestre

3.1-56

→ "GAM"

observ. astr. (i) →  $t = t(\Phi, \delta, z)$   
 $\Theta = t + \alpha$   
 $\Lambda_i = \Theta_i - \Theta_{0(i)}$

(5)

$\Theta_i - \Lambda_i = \Theta_{0(i)}$

BIH →  $M\{\Theta_{0(i)}\} = \Theta_0 \rightarrow UT_0 (\Lambda=0)$

problemas:

- errores de las coordenadas  $\alpha, \delta$
- refracción astronómica
- movimientos locales y globales de los observatorios (tectónica de placas)

⊕ definición nueva inclusive la distancia al centro de gravedad. Realizado por

Coordenadas geocéntricas  $X, Y, Z$

de estaciones fundamentales para una época; determinación por métodos satelitares (Doppler, Laser) VLBI

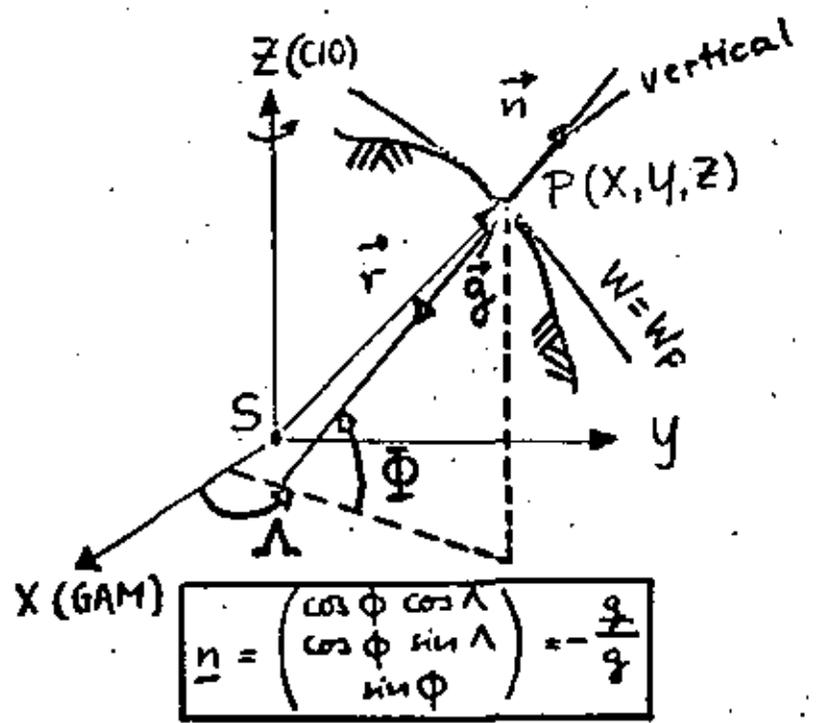
$\pm 1m \rightarrow \pm 0.1m$

- problemas: - campo de gravitación (perturbaciones de órbita)
- perturbaciones nongravitativas
  - refracción

Variaciones temporales:

3.1-6

- movimiento del polo (Doppler Polar Motion Service) →  $\pm 0.001 / \text{Id}$
- fase de rotación (sat.) →  $\pm 0.1 \text{ms} / \text{Id}$
- mareas terrestres (modelos con parámetros locales/regionales) →  $\pm 0.01 \text{m}$
- "movimientos propios" tectónicos (modelo de "plate tectonics")
- desplazamientos del centro de gravedad, observaciones absolutas de  $g \rightarrow \pm 0.03 \text{m}$



# Sistemas locales

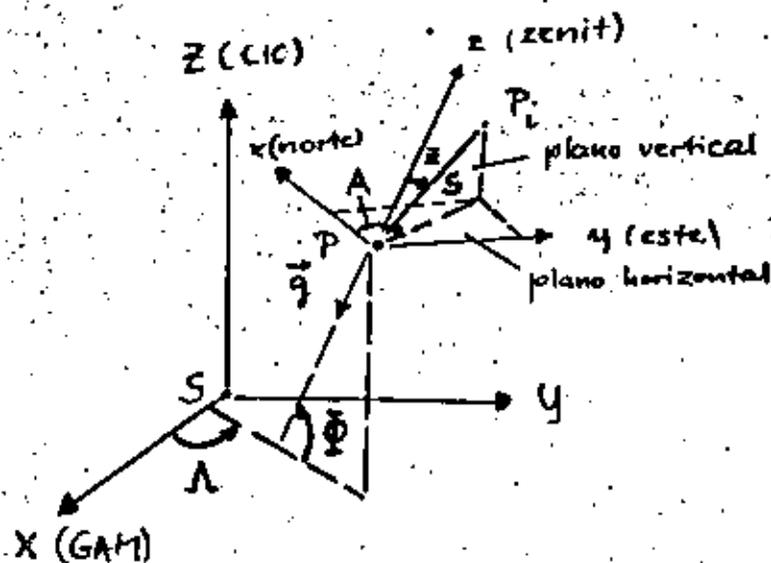
3.2-1

(6)

## Observaciones geodesicas:

- distancias  $s$
- angulos horizontales ( $\hat{= A_2 - A_1$ )
- direcciones horizontales ( $\hat{= A}$ -orientación)
- azimutes astronómicos  $A$
- angulos zenitales  $z$
- diferencias del nivel  $\delta n$

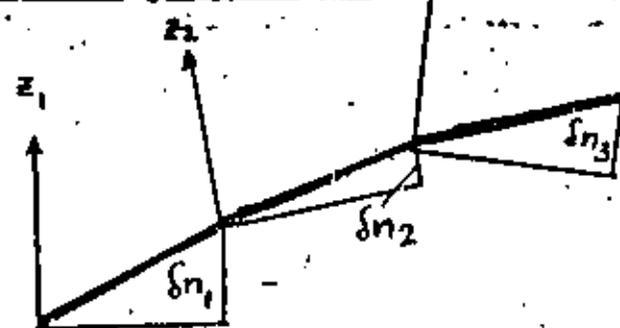
→ orientación: vertical ( $\Phi, \Lambda$ )



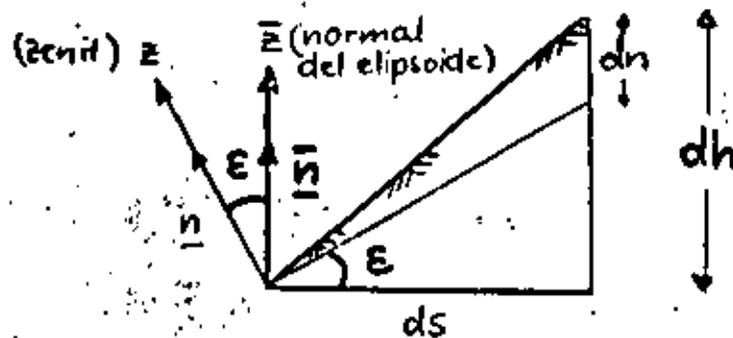
Sistema local (astronomica) = sistema horizontal

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_i = s \begin{pmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}$$

## Nivelación Geométrica: 3.2-2



$\delta n_i$ : refieren a diferentes sistemas locales



$E$  = desviación de la vertical (componente en el azimut  $A$ )

$dn$  = resultado de la nivelación  
 $dh$  = diferencial de la altura elipsoidal

$$dh = dn - \int_1^2 E ds$$

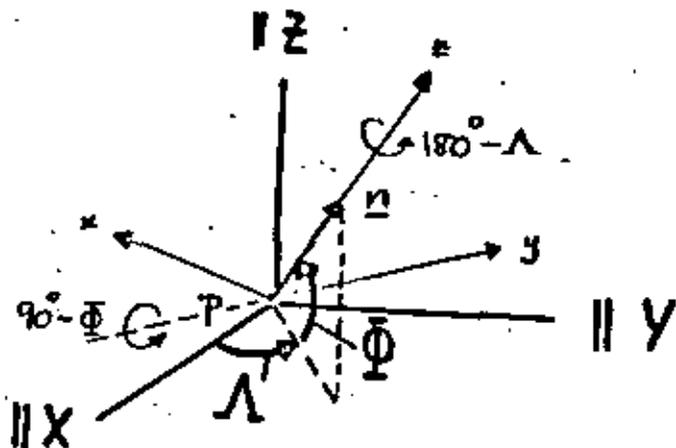
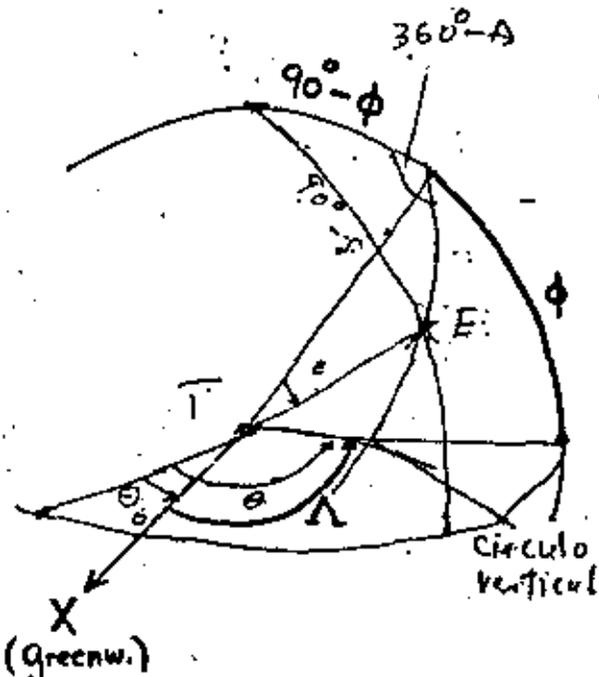
$$\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = \int_1^2 dn - \int_1^2 E ds$$

nivelación geométrica-astronomica

3.3-0

transformación de coordenadas

7



transformación  $\alpha, \delta = \phi, \Delta = \Lambda, z$

$$\begin{pmatrix} \cos \Delta \sin z \\ \sin \Delta \sin z \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ 0 & 1 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos T \cos \delta \\ \sin T \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$0 = T + \alpha \quad (24)$$

$$\Lambda = \theta - \theta_0 \quad (25)$$

$$\Delta \underline{x} = \underline{R}_z(180^\circ - \Lambda) \underline{R}_y(90^\circ - \phi) \underline{S}_y \underline{x} = \underline{C} \underline{x}$$

$$\Delta \underline{x} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{diferencias de} \\ \text{Coordenadas} \\ \text{entre } P_1 \text{ y } P_2 \end{array} \right\}$$

$$\underline{S}_y = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{transformación} \\ \text{al sistema recto} \end{array} \right\}$$

$$\underline{R}_y(90^\circ - \phi) = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rotación} \\ \text{alrededor} \\ \text{y (nuevo)} \end{array} \right\}$$

$$\underline{R}_z(180^\circ - \Lambda) = \begin{pmatrix} -\cos \Lambda & \sin \Lambda & 0 \\ -\sin \Lambda & -\cos \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rotación} \\ \text{alrededor} \\ z \text{ (nuevo)} \end{array} \right\}$$

3.3-2

inversión:  $\rightarrow$  ecuaciones de observación

$$\underline{x} = \underline{C}^{-1} \Delta \underline{x} = \underline{C}^T \Delta \underline{x}$$

8

matriz ortogonal:  $\underline{C} \underline{C}^T = \underline{E}$ 

$$\underline{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \Lambda & -\sin \phi \sin \Lambda & \cos \phi \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ \cos \phi \cos \Lambda & \cos \phi \sin \Lambda & \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$A = \arctan \frac{-\sin \Lambda \cdot \Delta X + \cos \Lambda \cdot \Delta Y}{-\sin \phi \cos \Lambda \cdot \Delta X - \sin \phi \sin \Lambda \cdot \Delta Y + \cos \phi \cdot \Delta Z}$$

$$z = \arccos \frac{\cos \phi \cos \Lambda \cdot \Delta X + \cos \phi \sin \Lambda \cdot \Delta Y + \sin \phi \cdot \Delta Z}{(\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}}$$

$$s = (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}$$

$\phi, \Lambda \rightarrow$  parámetros de orientación,  
establecen el paralelismo al sistema  
global  $X, Y, Z$

$$\Delta h = \int_1^2 dn - \int_1^2 \varepsilon ds$$

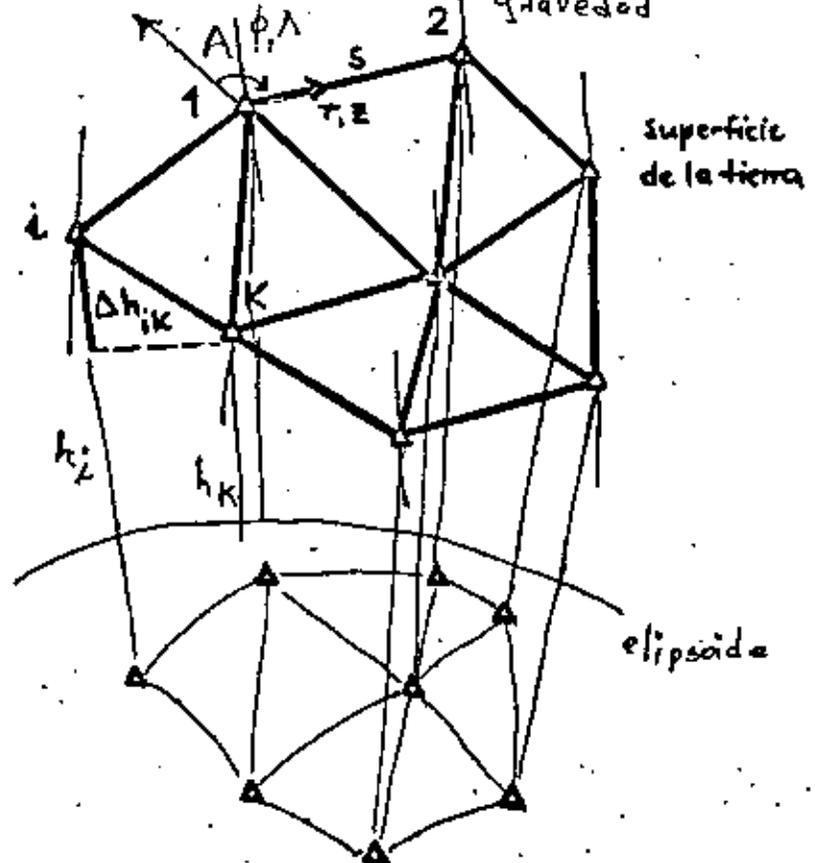
modelos tridimensionales

3.3-2a

observaciones:

- $\tau, z, s, \delta n \rightarrow$  geometría
- $\phi, \Lambda, (\varphi) \rightarrow$  reducción
- $\phi, \Lambda, A \rightarrow$  orientación

poliedro de Bruns:

campo de la  
gravedad

ajuste tridimensional:

3.3-3

→ relaciones diferenciales entre las observaciones y las incognitas:

(9)

$$dA = \frac{\partial A}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial A}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial A}{\partial Z_1} dZ_1 + \frac{\partial A}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial A}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial A}{\partial Z_2} dZ_2 + \frac{\partial A}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial A}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_1} = - \frac{\partial A}{\partial X_2} \text{ etc.}$$

$$dz = \dots$$

$$ds = \dots$$

vector normal del elipsoide  $\underline{n} = \underline{n}(\varphi, \lambda)$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}; \text{ véase } \underline{n}(\varphi, \lambda)$$

$$d\underline{x} = d\underline{X} = \underline{n} dh$$

$$\underline{n}^T d\underline{x} = \underline{n}^T \underline{n} dh = dh$$

$$dh = \cos \varphi \cos \lambda dX + \cos \varphi \sin \lambda dY + \sin \varphi dZ$$

$$d(\Delta h) = dh_2 - dh_1$$

ajuste en el sistema X,Y,Z

observaciones:

$$A, r = A - \sigma, z, s, \phi, \lambda$$

$$\Delta h = \Delta n - \int \epsilon ds = \Delta n + \Delta N^*$$

$$= \Delta H + \Delta N$$

ecuaciones de observación (5.1), (5.2), (5.7)

linearización:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial A}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial A}{\partial Z_1} dZ_1 + \frac{\partial A}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial A}{\partial Y_2} dY_2 + \frac{\partial A}{\partial Z_2} dZ_2 + \frac{\partial A}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial A}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$-\frac{\partial A}{\partial X_1} = +\frac{\partial A}{\partial X_2} = A_1, \quad -\frac{\partial A}{\partial Y_1} = \frac{\partial A}{\partial Y_2} = A_2, \quad -\frac{\partial A}{\partial Z_1} = \frac{\partial A}{\partial Z_2} = A_3$$

$$dA = A_1(dX_2 - dX_1) + A_2(dY_2 - dY_1) + A_3(dZ_2 - dZ_1) + A_4 d\phi + A_5 d\lambda \quad (5.9)$$

$$dz = B_1(dX_2 - dX_1) + B_2(dY_2 - dY_1) + B_3(dZ_2 - dZ_1) + B_4 d\phi + B_5 d\lambda \quad (5.10)$$

$$ds = C_1(dX_2 - dX_1) + C_2(dY_2 - dY_1) + C_3(dZ_2 - dZ_1) \quad (5.11)$$

3.3-5

10

coeficientes:

azimut (y direccion horizontal):

$$\tan A = \frac{s \cdot \sin z \cdot \sin A}{s \cdot \sin z \cdot \cos A}$$

$$= \frac{-\sin A \cdot (x_2 - x_1) + \cos A \cdot (y_2 - y_1)}{-\sin \phi \cos \Lambda \cdot (x_2 - x_1) - \sin \phi \sin \Lambda \cdot (y_2 - y_1) + \cos \phi \cdot (z_2 - z_1)}$$

$$A_1 = \frac{\partial A}{\partial x_2} = \frac{1}{d(\tan A)} \cdot \frac{\partial(\tan A)}{\partial x_2}$$

$$= \cos^2 A \cdot \frac{s \cdot \sin z \cdot \cos A \cdot (-\sin A) - s \cdot \sin z \cdot \sin A \cdot (-\sin \phi \cos \Lambda)}{(s \cdot \sin z \cdot \cos A)^2}$$

$$A_1 = \rho \frac{\sin \phi \cdot \cos \Lambda \cdot \sin A - \sin \Lambda \cdot \cos A}{s \cdot \sin z}$$

$$A_2 = \rho \frac{\sin \phi \cdot \sin \Lambda \cdot \sin A + \cos \Lambda \cdot \cos A}{s \cdot \sin z}$$

$$A_3 = -\rho \frac{\cos \phi \cdot \sin A}{s \cdot \sin z}$$

$$A_4 = \cos^2 A \cdot \frac{-s \cdot \sin z \cdot \sin A (-\cos \phi \cos \Lambda \cdot \Delta x - \cos \phi \sin \Lambda \cdot \Delta y - \sin \phi \cdot \Delta z)}{(s \cdot \sin z \cdot \cos A)^2}$$

$$A_4 = -\frac{\sin A}{s \cdot \sin z} \cdot (-s \cdot \cos z) = \sin A \cdot \cot z$$

$$A_5 = \cos^2 A \cdot \frac{s \cdot \sin z \cdot \cos A (-\cos \Lambda \cdot \Delta x - \sin \Lambda \cdot \Delta y) - s \cdot \sin z \cdot \sin A (\sin \phi \sin \Lambda \cdot \Delta x - \sin \phi \cos \Lambda \cdot \Delta y)}{(s \cdot \sin z \cdot \cos A)^2}$$

$$= \frac{-\cos A (\Delta x \cos \Lambda + \Delta y \sin \Lambda) + \sin A (-\Delta x \sin \phi \sin \Lambda + \Delta y \sin \phi \cos \Lambda)}{s \cdot \sin z}$$

$$= -\frac{\cos A}{s \cdot \sin z} (\cos \Lambda \cdot \Delta x + \sin \Lambda \cdot \Delta y) + \sin \phi \cdot \sin A \frac{-\sin \Lambda \cdot \Delta x + \cos \Lambda \cdot \Delta y}{s \cdot \sin z}$$

$$\sin \phi \cdot \sin^2 A$$

3.3-6

$$A_5 = -\frac{\cos A}{s \cdot \sin z} \cdot s \cdot (-\sin \phi \cos^2 \Lambda \sin z \cos A - \sin \Lambda \cos \Lambda \sin z \sin A + \cos \phi \cos^2 \Lambda \cos z - \sin \phi \sin^2 \Lambda \sin z \cos A + \sin \Lambda \cos \Lambda \sin z \sin A + \cos \phi \sin^2 \Lambda \cos z) +$$

$$+ \sin \phi \sin^2 A$$

$$= -\frac{\cos A}{\sin z} (-\sin \phi \sin z \cos A + \cos \phi \cos z) + \sin \phi \sin^2 A$$

$$= \sin \phi \cos^2 A - \cos \phi \cot z \cos A + \sin \phi \sin^2 A$$

$$\underline{A_5 = \sin \phi - \cos \phi \cos A \cot z}$$

angulos zenitales:

$$\cos z = \frac{s \cdot \cos z}{s}$$

$$= \frac{\cos \phi \cos \Lambda \cdot \Delta x + \cos \phi \sin \Lambda \cdot \Delta y + \sin \phi \cdot \Delta z}{s}$$

$$B_1 = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{1}{d(\cos z)} \cdot \frac{\partial(\cos z)}{\partial x_2}$$

$$= -\frac{1}{\sin z} \frac{s \cdot \cos \phi \cos \Lambda - s \cos z \cdot \frac{1}{s} \cdot 2 \cdot \Delta x}{s^2}$$

$$B_1 = \rho \frac{\cos z \cdot \Delta x - s \cdot \cos \phi \cdot \cos \Lambda}{s^2 \cdot \sin z}$$

$$B_2 = \rho \frac{\cos z \cdot \Delta y - s \cdot \cos \phi \cdot \sin \Lambda}{s^2 \cdot \sin z}$$

$$B_3 = \rho \frac{\cos z \cdot \Delta z - s \cdot \sin \phi}{s^2 \cdot \sin z}$$

3.3-7

$$B_4 = -\frac{1}{\sin \epsilon} \cdot \frac{s(-\sin \phi \cos \Lambda \cdot \Delta X - \sin \phi \sin \Lambda \cdot \Delta Y + \cos \phi \cdot \Delta Z)}{s^2}$$

II

$$B_4 = -\frac{s}{\sin \epsilon \cdot s^2} \cdot s \cdot \sin \epsilon \cos A = -\cos A$$

$$B_5 = -\frac{1}{\sin \epsilon} \cdot \frac{s(-\cos \phi \sin \Lambda \cdot \Delta X + \cos \phi \cos \Lambda \cdot \Delta Y)}{s^2}$$

$$B_5 = -\frac{s}{\sin \epsilon \cdot s^2} \cdot \cos \phi \cdot s \cdot \sin \epsilon \cdot \sin A = -\cos \phi \cdot \sin A$$

distancias:

$$s = (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}$$

$$C_1 = \frac{\partial s}{\partial X_2} = \frac{1}{2 \cdot s} \cdot 2 \cdot \Delta X = \frac{\Delta X}{s}$$

$$C_2 = \frac{\Delta Y}{s}$$

$$C_3 = \frac{\Delta Z}{s}$$

3.3-8

diferencias de alturas:

$$\Delta h = \Delta h + \Delta N''''$$

$$\begin{pmatrix} d\bar{X} \\ d\bar{Y} \\ d\bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} dh$$

$$dh = \cos \varphi \cos \lambda \cdot dX + \cos \varphi \sin \lambda \cdot dY + \sin \varphi \cdot dZ$$

$$d(\Delta h) = dh_2 - dh_1$$

$$= D_1 dX_2 + D_2 dX_1 + D_3 dY_1 + D_4 dY_2 + D_5 dZ_2 + D_6 dZ_1$$

(5.2)

$$D_1 = \cos \varphi_2 \cos \lambda_2$$

$$D_2 = -\cos \varphi_1 \cos \lambda_1$$

$$D_3 = \cos \varphi_2 \sin \lambda_2$$

$$D_4 = -\cos \varphi_1 \sin \lambda_1$$

$$D_5 = \sin \varphi_2$$

$$D_6 = -\sin \varphi_1$$

3.3-9 -E.E

(12)

ecuaciones de error:

dirección horizontal:

$$\tau + v_\tau + \sigma = A = A^0 + \delta A$$

$$\sigma = \sigma^0 + \delta \sigma$$

$$v_\tau = -\delta \sigma + A_1(\delta X_2 - \delta X_1) + A_2(\delta Y_2 - \delta Y_1) + A_3(\delta Z_2 - \delta Z_1)$$

$$+ A_4 \delta \phi_1 + A_5 \delta \lambda_1 + (A^0 - \sigma^0 - \tau) \quad (5.13)$$

ángulo zenital:

$$z + v_z + \delta = z^0 + \delta z$$

$$\delta = \frac{1}{2R} \cdot s = K \cdot s, \quad K = K^0 + \delta K = \frac{gR}{2R} + \delta K$$

$$v_z = -g \cdot s \cdot \delta K + B_1(\delta X_2 - \delta X_1) + B_2(\delta Y_2 - \delta Y_1) + B_3(\delta Z_2 - \delta Z_1)$$

$$+ B_4 \delta \phi_1 + B_5 \delta \lambda_1 + (z^0 - g \cdot s \cdot K^0 - z) \quad (5.14)$$

distancia:

$$s + v_s = s^0 + \delta s$$

$$v_s = C_1(\delta X_2 - \delta X_1) + C_2(\delta Y_2 - \delta Y_1) + C_3(\delta Z_2 - \delta Z_1)$$

$$+ (s^0 - s) \quad (5.15)$$

: asimétrica horizontal

$$\phi^2 + \phi^0 = \phi^V + \phi^1$$

$$(\phi^2 - \phi^0) + \phi^0 = \phi^V$$

(31.2)

: asimétrica horizontal

$$\Lambda^2 + \Lambda^0 = \Lambda^V + \Lambda^1$$

$$(\Lambda^2 - \Lambda^0) + \Lambda^0 = \Lambda^V$$

(31.2)

: asimétrica horizontal

$$\Lambda^2 + \Lambda^0 = \Lambda^V + \Lambda^1$$

$$(S_1 - S_2) \delta A + (Y_2 - Y_1) \delta A + (X_2 - X_1) \delta A = \Lambda^V$$

$$(\Lambda^2 - \Lambda^0) + \Lambda^0 = \Lambda^V$$

(31.2)

: simétrica de altura

$$(\Delta A)^2 + \Delta A^0 = \Delta A^V + \Delta A^1$$

$$\delta A_1 D + \delta A_2 D + \delta A_3 D + \delta A_4 D + \delta A_5 D + \delta A_6 D = \Delta A^V$$

$$(\Delta A^2 - \Delta A^0) + \Delta A^0 = \Delta A^V$$

(31.2)

# el geoide

3.4-1

## definición y realización

"Superficie de nivel, que corresponde al nivel medio del mar" (HELMERT 1860)

$$W = W(x, y, z) = W_0$$

→ modelo físico de la tierra, descripción matemática (superficie de equilibrio)

### ventajas:

- ~ 70% de la superficie de la tierra coinciden con el geoide (océanos); las alturas de los continentes se puede determinar con alta precisión.
- observaciones geodésicas como: cuantidades en el geoide (appr., observaciones de dirección) o reducción al geoide por medio de las alturas (distancias).
- realización por mareógrafos (observación del nivel del mar sobre un año o mas).

→ Geoide como superficie de referencia para las alturas (datum de altura)

### problemas:

- variaciones temporales del nivel del mar (mareas, efectos meteorológicos (presión atmosférica, viento), efectos oceanográficos (corrientes, diferencias de la densidad del agua - sal y temperatura), efectos de lluvia y de los glaciares) → reducción por modelos y por el promedio (> 1 año) → ± 0.1 m

3.4-2

13

- efectos cuasi-estacionarios

- topografía de la superficie del mar ("sea surface topography") ≤ 2 m.
- mareas constantes (deformación permanente + 0.13 m al ecuador y - 0.26 a los polos)

problema de definición { ± 1... 2 m solamente

→ definición nueva (evtl.): "geoide como superficie equipotencial que tiene desviaciones minimas al nivel del mar (→ condición de minimum para la topografía del mar).

efectos sistematicos (locales en los mareógrafos (p.e. situado en una boca de rio)

→ ± 1... 2 m

→ sistema de altura A:

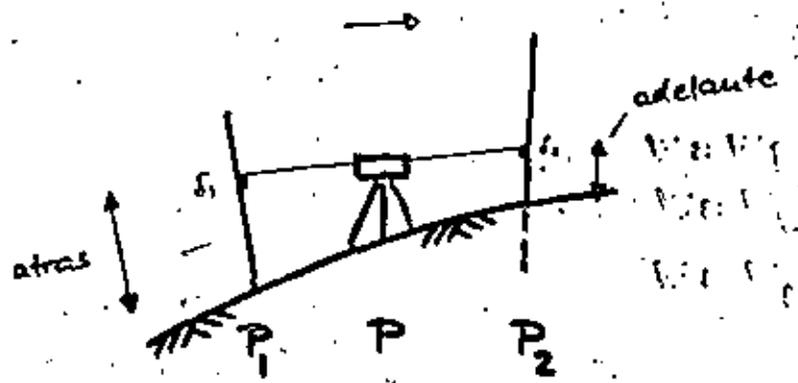
$$H = H^A + \delta H^A(r)$$

↑ ref. al geoide      ↑ ref. a superf. de referencia      ↑ non-parallelismo de las superficies de nivel

sistemas de altura

nivelación geométrica

3.4-3  
12/



diferencia de altura:

$$\Delta h = \text{atras} - \text{adelante} \approx \Delta h \text{ (entre } W_0 = W_1 \text{ y } W = W_2)$$

cambio de la curvatura:  $0(\mu\text{m}) \approx \delta_1 = \delta_2$

convergencia de las superf. equip.:  $0(\mu\text{m})$

→ n paralelismo; pero:  $\oint g dh \neq 0$

numero geopotencial

$$C = W_0 - W_P = \int_{P_0}^P g dh ; \oint g dh = 0$$

dimensión: potencia!  $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$

unidad geopotencial =  $\text{kgal m}$   
 $= 10^3 \text{ cm s}^{-2} \text{ m}$   
 $= 10^3 \cdot 10^{-2} \cdot \text{m}^2 \text{ s}^{-2}$   
 $= 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$

referencia al geode:

3.4-4

$$C = W_0 - W_P = \int_{P_0}^P g dh$$

precisión de g:

$$\Delta C = \tilde{g} \cdot \Delta h$$

$\tilde{g}$  = valor medio sobre una sección de nivelación

$$\frac{d\tilde{g}}{\tilde{g}} = \frac{d(\Delta h)}{\Delta h} \approx \frac{1 \cdot 10^{-4}}{\Delta h (\text{m})}$$

$$1 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0.1 \text{ mm} \text{ (1 km)}$$

$$d\tilde{g} = 9.8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1}{\Delta h} = 1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\Delta h (\text{m})}$$

$\Delta h$	$d\tilde{g}$
10 m	$10^{-4} \text{ m s}^{-2} = 10 \text{ } \mu\text{gal}$
100 m	$10^{-5} \text{ m s}^{-2} = 1 \text{ } \mu\text{gal}$
1000 m	$10^{-6} \text{ m s}^{-2} = 0.1 \text{ } \mu\text{gal}$

medición de g (error de medición  $\pm 0.1 \mu\text{gal}$  y menos) en puntos, donde g cambia no-linealmente (inclinación del terreno, dirección de la nivelación, anomalías de g), distancias medias

15...25 km - 5...10 km - 1...2 km  
 en los planos: g de los mapas de gravedad (anomalías de Bouguer) o gravedad normal.

altura dinámica

$$H^{dyn} = \frac{C}{\gamma_{45}}$$

15

≙ diferencia del potencial al geode ;  
 gravedad normal (latitud 45°):

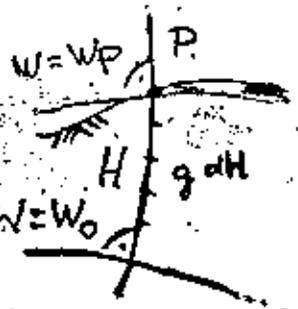
$$\gamma_0 = \gamma_0 \text{ (parametros del elipsoide, } \varphi)$$

$$\Delta H_{12}^{dyn} = H_2^{dyn} - H_1^{dyn} = \int_0^2 dh + E_{12}^{dyn}(\gamma_0, \gamma_0, h)$$

reduccion dinámica  $E^{dyn}$ : orden "cm" ... "dm" !

altura ortométrica

→ distancia geometrica al geode



$$C = \frac{1}{H} \int_0^H g dh \times H = \frac{1}{H} \int_0^H g dH \times H$$

$$H = \frac{C}{\bar{g}} ; \bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g dH$$

$\bar{g}$  → gravedad media actual : hipótesis sobre la distribución de las masas, error "cm"

puntos de la misma altura no estan en una superficie de nivel → "mm" ... "dm"

$$\Delta H_{12} = H_2 - H_1 = \int dh + E_{12}(g, \bar{g}_1, \bar{g}_2, H_1, H_2, h)$$

reduccion ortométrica  $E$ : orden "mm" ... "cm"

altura normal (M.S. MOLODENSKI)

$$H^N = \frac{C}{\bar{\gamma}} ; \bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N$$

$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}$  (parametros del elipsoide,  $\varphi, H^N$ )

→ no hipótesis

reduccion normal: orden "mm" ... "cm"

superficie de referencia: cuasigeoide (no superficie de nivel !)

geode - cuasigeoide (m)

$$\approx -0.1 \times \frac{\bar{H}}{1 \text{ km}} \times \frac{H}{1 \text{ km}} ; \bar{H} \text{ para una region grande, } \sim 100 \times 100 \text{ km}^2$$

p.e.

$$\bar{H} = 0.5 \text{ km}, H = 1 \text{ km (llanos)}$$

$$\rightarrow \text{geode - cuasigeoide} = -0.1 \times 0.5 \times 1 = -0.05 \text{ m}$$

$$\bar{H} = 3 \text{ km}, H = 5 \text{ km (montañas)}$$

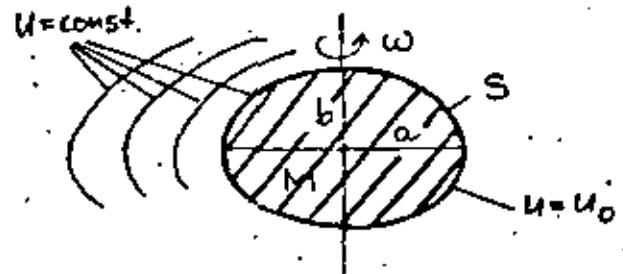
$$\rightarrow \text{geode - cuasigeoide} = -0.1 \times 3 \times 5 = -1.5 \text{ m}$$

**Sistemas de referencia  
(sistemas convencionales)**

4.1-1

4.1-2

**el elipsoide equipotencial**



16

4 parametros independientes:

p.e.  $M, \omega, a, b$

parametros dependientes:

parametros físicos:

- (i)  $\gamma_a, \gamma_b$  = gravedad normal en el ecuador y en los polos
- (ii)  $U_0, \omega$
- (iii)  $J_2$  = dinámico factor de forma  
vea sección 4.3

teorema de G.G. STOKES:

- masa total  $M$
- rotación constante  $\omega$
- Superficie  $S$  = superficie de nivel
- $U$  = potencial normal (del campo de gravedad normal) en el exterior de  $S$

parametros geometricos:

achatamiento

$$f = \frac{a-b}{a}$$

1. excentricidad numerica

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

2. excentricidad numerica

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

excentricidad lineal

$$E = \sqrt{a^2 - b^2}$$

gran semi-eje  $a$

→ "forma" del elipsoide

→ "escala" del elipsoide

elipsoide de nivel

- parametros físicos:  $M, \omega$
- parametros geometricos:  $a, b$  (semi-ejes)

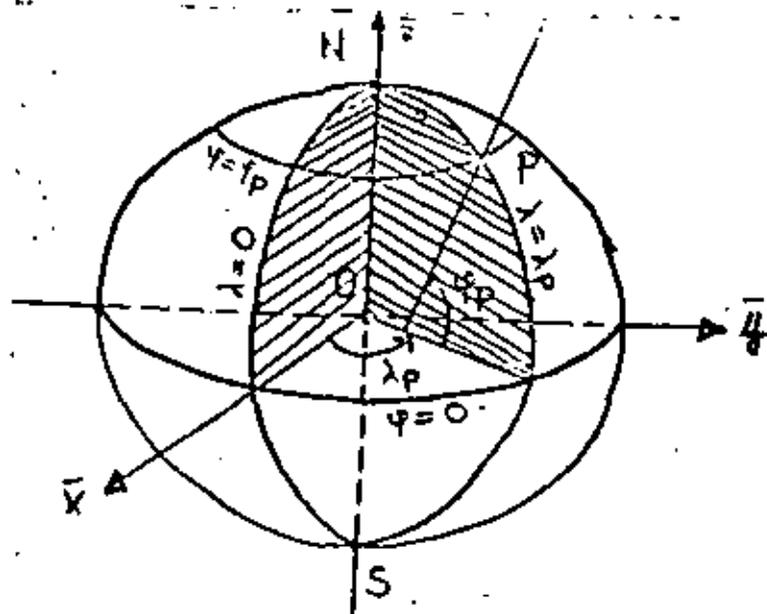
valores de  $M, \omega, a, b$  como aproximación mejor a la tierra

→ elipsoide terrestre

con orientación mejor a la tierra:  
centro al centro de gravedad  
eje pequeño al eje de rotación

4.2-1

17



$$\bar{X} = p \cdot \cos \lambda, \quad \bar{Y} = p \cdot \sin \lambda$$

ecuación del elipse:

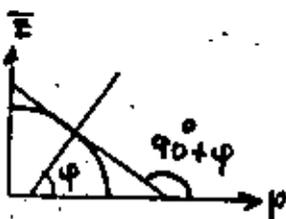
$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{\bar{z}^2}{b^2} - 1 = 0$$

diferenciación:

$$\frac{2p}{a^2} dp + \frac{2\bar{z}}{b^2} dz = 0$$

$$\frac{dz}{dp} = - \frac{b^2}{a^2} \frac{p}{z}$$

$$= \tan(90^\circ + \varphi) = -\cot \varphi$$



$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \\ \bar{z} &= \frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \right\}$$

4.2-2

Coordenadas para puntos en el elipsoide (sistema bidimensional):

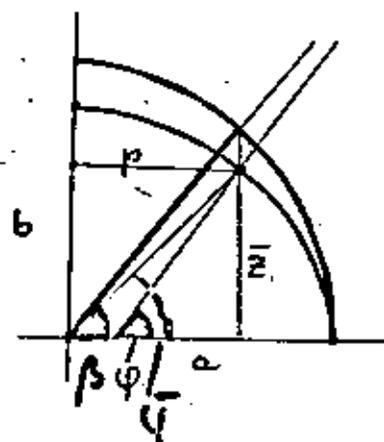
→ coordenadas geográficas del elipsoide

latitud $\varphi$	(lat. geodesica)
longitud $\lambda$	(lat. geodesica)

fijar la dirección de la vertical del elipsoide en relación al sistema  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$

otros parámetros de latitud:

latitud geocéntrica $\bar{\varphi}$
latitud reducida $\beta$



$$\tan \bar{\varphi} = (1 - e^2) \tan \varphi$$

$$\tan \beta = \sqrt{1 - e^2} \tan \varphi$$

$$\bar{\varphi} = \varphi - \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi + \dots$$

$$\beta = \varphi - \frac{e^2}{4} \sin 2\varphi + \dots$$

Curvatura del elipsoide

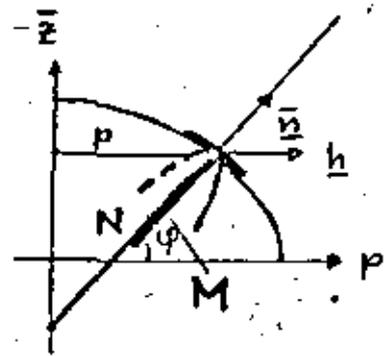
4.2-3

4.2-4

18

líneas de coordenadas  
= líneas de curvatura

→ meridianos  $\lambda = \text{const.}$   
paralelos  $\varphi = \text{const.}$



radio de curvatura del meridiano

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

radio de curvatura este-oeste

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$$

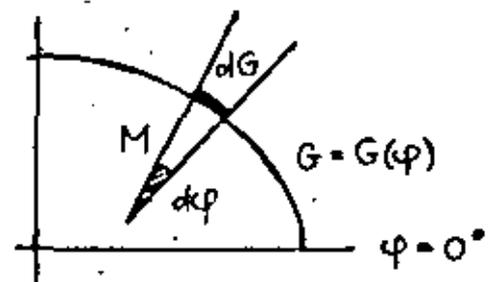
radio de sección normal (EULER)

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

radio de sección inclinado (MEUNIER)

$$r_\alpha = R_\alpha (\bar{n} \cdot \underline{h})$$

→  $p = N \cos \varphi$   
radio del paralelo

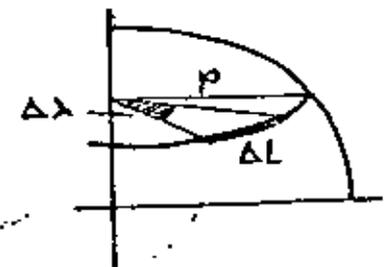


meridiano de arco:

$$G = \int_0^\varphi M d\varphi$$

TAYLOR:

$$\Delta G_{12} = M_m \Delta \varphi + \dots$$



$$\Delta L_{12} = N \cos \varphi \cdot \Delta \lambda_{12}$$

sistema de referencia 1980:

$a = 6\,378\,137 \text{ m}$        $f = 1' 298.257$   
 $b = 6\,356\,752 \text{ m}$        $e^2 = 0.006\,694\,380$   
 $e'^2 = 0.006\,729\,497$

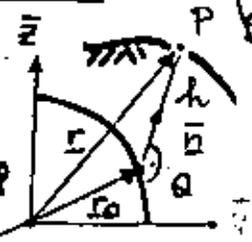
$M(\varphi = 0^\circ) = 6\,335\,439 \text{ m}$   
 $G(\varphi = 90^\circ) = 10\,001\,966 \text{ m}$

	$\varphi = 50^\circ$	$10'$	$1''$	$1'''$
$\Delta G$ :	11 229 m	1854 m	30.9 m	
$\Delta L$ :	7 696 m	1195 m	19.9 m	

transformación  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rightarrow \varphi, \lambda, h$

elipse:

$$\begin{aligned} \bar{x}_a &= p \cos \lambda \\ \bar{y}_a &= p \sin \lambda \\ \bar{z}_a &= \frac{b^2}{a^2} p \tan \varphi = (1-e^2) p \tan \varphi \\ p &= N \cos \varphi \end{aligned}$$



20

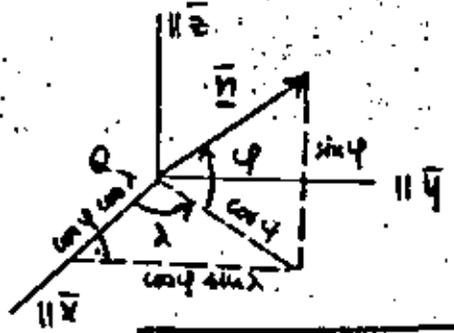
$$\underline{r}_a = \begin{pmatrix} \bar{x}_a \\ \bar{y}_a \\ \bar{z}_a \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ (1-e^2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

superficie de la tierra:

$$\underline{r} = \underline{r}_a + h \cdot \underline{n}$$

vertical del elipsoide:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$



$$\underline{r} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1-e^2)N+h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\underline{r}_a| = r_a &= (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)^{1/2} = N(\cos^2 \varphi + (1-e^2) \sin^2 \varphi)^{1/2} \\ &= a(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{e^4}{2} \sin^4 \varphi - \frac{5}{8} e^6 \sin^6 \varphi + \dots) \end{aligned}$$

inversión:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = (N+h)^2 \cos^2 \varphi$$

$$h = \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{\cos \varphi} - N(\varphi)$$

$$\bar{z} = ((1-e^2)N+h) \sin \varphi = (N+h - e^2 N) \sin \varphi$$

$$\frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} = \frac{(N+h - e^2 N) \sin \varphi}{(N+h) \cos \varphi} = (1 - \frac{e^2 N}{N+h}) \tan \varphi$$

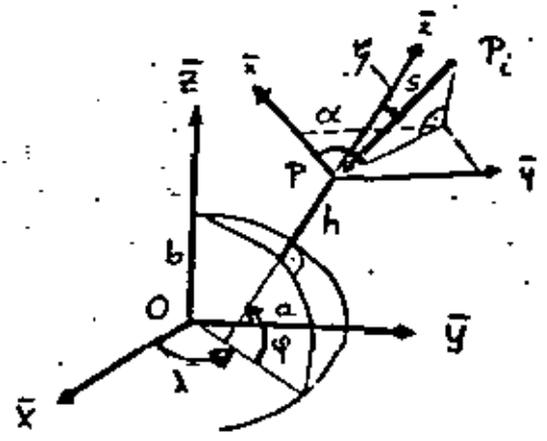
$$\tan \varphi = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \left(1 - \frac{e^2 N}{N+h}\right)^{-1}$$

$$\tan \lambda = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

Solución iterativa:

- 1)  $h = 0$  ( $h \ll N$ )  
 $\tan \varphi_0 = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} (1 - e^2)^{-1}$   
 $N_0 = N(\varphi_0)$
- 2)  $h_1 = \frac{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}{\cos \varphi_0} - N_0$   
 $\tan \varphi_1 = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} \left(1 - \frac{e^2 N_0}{N_0 + h_0}\right)^{-1}$   
 $N_1 = N(\varphi_1)$
- 3)  $h_2 = \dots$

Sistemas locales del elipsoide

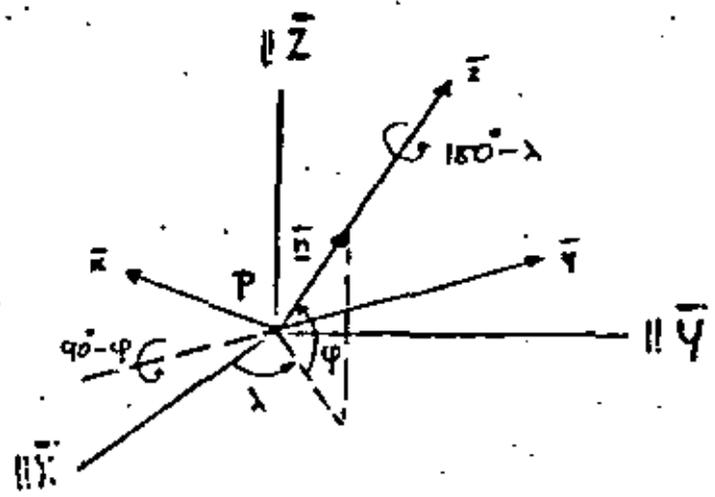


azimut elipsoidico  
angulo zenital  
distancia

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \\ s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ \lambda \\ \varphi \end{pmatrix}_L = s \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \alpha \\ \sin \varphi \sin \alpha \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

transformación de coordenadas



$$\Delta \bar{X} = R_Z(180-\lambda) R_Y(90-\varphi) S_Y \bar{X} = \bar{C} \bar{X}$$

v. 3.3-1, 3.3-2

inversión → ecuaciones de observación

$$\bar{X} = \bar{C}^{-1} \Delta \bar{X} = \bar{C}^T \Delta \bar{X}$$

$$\bar{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ajuste tridimensional  
(sistema  $\varphi, \lambda, h$ )

7.2.9  
4.2.9

4.2-10

v. 4.2-5

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1-e^2)N+h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

29

funcionamiento:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \bar{r}}{\partial h} dh$$

$$d\bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \bar{y}}{\partial h} dh$$

$$d\bar{z} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \bar{z}}{\partial h} dh$$

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= -(N+h) \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - (N+h) \cos \varphi \sin \lambda d\lambda + \cos \varphi \cos \lambda dh \\ d\bar{y} &= -(N+h) \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + (N+h) \cos \varphi \cos \lambda d\lambda + \cos \varphi \sin \lambda dh \\ d\bar{z} &= (N+h) \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dh \end{aligned}$$

optimización esférica:  $M = N = a$

$$d\bar{X} = \bar{C} \begin{pmatrix} a d\varphi \\ a \cos \varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = (a+h) \bar{E}$$

v. 3.3-3

$$dA = A_1 (dx_2 - dx_1) + A_2 (dy_2 - dy_1) + A_3 (dz_2 - dz_1) + A_4 d\phi_1 + A_5 d\lambda_1$$

$$dz = B_1 (dx_2 - dx_1) + B_2 (dy_2 - dy_1) + B_3 (dz_2 - dz_1) + B_4 d\phi_1 + B_5 d\lambda_1$$

$$ds = C_1 (dx_2 - dx_1) + C_2 (dy_2 - dy_1) + C_3 (dz_2 - dz_1)$$

$$d\bar{X} = d\bar{X}$$

$$\begin{aligned} dA &= a_1 (M_1+h_1) d\varphi_1 + a_2 (N_1+h_1) \cos \varphi_1 d\lambda_1 + a_3 dh_1 \\ &+ a_4 (M_2+h_2) d\varphi_2 + a_5 (N_2+h_2) \cos \varphi_2 d\lambda_2 + a_6 dh_2 \\ &+ a_7 d\phi_1 + a_8 d\lambda_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= b_1 (M_1+h_1) d\varphi_1 + b_2 (N_1+h_1) \cos \varphi_1 d\lambda_1 + b_3 dh_1 \\ &+ b_4 (M_2+h_2) d\varphi_2 + b_5 (N_2+h_2) \cos \varphi_2 d\lambda_2 + b_6 dh_2 \\ &+ b_7 d\phi_1 + b_8 d\lambda_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds &= c_1 (M_1+h_1) d\varphi_1 + c_2 (N_1+h_1) \cos \varphi_1 d\lambda_1 + c_3 dh_1 \\ &+ c_4 (M_2+h_2) d\varphi_2 + c_5 (N_2+h_2) \cos \varphi_2 d\lambda_2 + c_6 dh_2 \end{aligned}$$

$$d(\Delta h) = -dh_1 + dh_2$$

$$a_1 = \frac{\sin A_{12}}{S \sin Z_{12}}, \quad a_2 = -\frac{\cos A_{12}}{S \sin Z_{12}}, \quad a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{\sin A_{12}}{S \sin Z_{12}} (1 + \sin \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \cot A_{12})$$

$$a_5 = \frac{\cos A_{12}}{S \sin Z_{12}} (\cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_1 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) \tan A_{12})$$

$$a_6 = \frac{\cos \lambda_2 \cos \varphi_2}{S \sin Z_{12}} (\sin (\lambda_2 - \lambda_1) + (\sin \varphi_1 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) - \cos \varphi_1 \tan \lambda_2) \tan A_{12})$$

$$a_7 = \sin A_{12} \cot Z_{12}$$

$$a_8 = \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \cos A_{12} \cot Z_{12}$$

4.2-11

23

$$b_1 = -\frac{\cos A_{12} \cos Z_{12}}{S}$$

$$b_2 = -\frac{\sin A_{12} \cos Z_{12}}{S}$$

$$b_3 = \frac{H_{12} Z_{12}}{S}$$

$$b_4 = \frac{\cos \varphi_1 H_{12} \cos(\lambda_2 - \lambda_1) - H_{12} \cos \varphi_2 - \cos Z_{12} H_{21} \cos A_{21}}{S \sin Z_{12}}$$

$$b_5 = \frac{\cos \varphi_1 H_{12} (\lambda_2 - \lambda_1) - H_{12} A_{21} \cos Z_{12} H_{12} z_{21}}{S \sin Z_{12}}$$

$$b_6 = -\frac{\cos Z_{12} \cos Z_{21} + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + H_{12} \varphi_1 H_{12} \varphi_2}{S \sin Z_{12}}$$

$$b_7 = -\cos A_{12}$$

$$b_8 = -\cos \varphi_1 H_{12} A_{12}$$

$$c_1 = -\cos A_{12} \sin Z_{12}$$

$$c_2 = -\sin A_{12} H_{12} Z_{12}$$

$$c_3 = -\cos Z_{12}$$

$$c_4 = -\cos A_{21} H_{12} Z_{21}$$

$$c_5 = -H_{12} A_{21} H_{12} Z_{21}$$

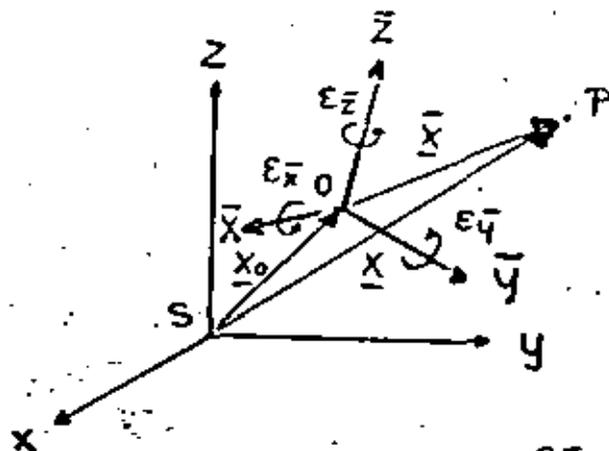
$$c_6 = -\cos Z_{21}$$

el datum geodesico

4.2-12

orientación de un sistema convencional-  
( $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  resp.  $\varphi, \lambda, h$ ) al sistema geocentrico  
( $X, Y, Z$ )

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + (1+m) \underline{R}(\underline{E}) \underline{\bar{X}}$$



$$\underline{X}_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}, \quad \underline{R}(\underline{E}) = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_{\bar{z}} & -\epsilon_{\bar{y}} \\ -\epsilon_{\bar{z}} & 1 & \epsilon_{\bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}} & -\epsilon_{\bar{x}} & 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \underline{X}_0 \\ \underline{R}(\underline{E}) \end{matrix}} \right\} \text{parámetros del datum}$$

m=0

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \underline{R}(\underline{E}) \underline{\bar{X}}$$

variaciones de las coordenadas:

$$d\underline{X} = d\underline{X}_0 + \underline{R}(\underline{E}) d\underline{\bar{X}} + d\underline{R}(\underline{E}) \underline{\bar{X}}$$

$$= d\underline{X}_0 + d\underline{\bar{X}} + d\underline{R}(\underline{E}) \underline{\bar{X}}$$

$$\underline{\bar{X}} \neq 0 \rightarrow d\underline{\bar{X}} = -d\underline{X}_0 - d\underline{R}(\underline{E}) \underline{\bar{X}}, \quad d\underline{R}(\underline{E}) = \begin{pmatrix} 0 & d\epsilon_{\bar{z}} & -d\epsilon_{\bar{y}} \\ -d\epsilon_{\bar{z}} & 0 & d\epsilon_{\bar{x}} \\ d\epsilon_{\bar{y}} & -d\epsilon_{\bar{x}} & 0 \end{pmatrix}$$

transformación  $\bar{x} \rightarrow \varphi, \lambda, h$

4.2-13

24

v. 4.2-9

$$d\bar{x} = \bar{C} \begin{pmatrix} a d\varphi \\ a \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} + \underline{B} \begin{pmatrix} da \\ a d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda & \sin^2\varphi \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda & \sin^2\varphi \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi & (\sin^2\varphi - 2) \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a d\varphi \\ a \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = -\bar{C}^{-1} d\bar{x}_0 - \bar{C}^{-1} dR(\varepsilon) \bar{x} - \bar{C}^{-1} \underline{B} \begin{pmatrix} da \\ a d\varphi \end{pmatrix}$$

$$= -\bar{C}^{-1} d\bar{x}_0 + \underline{A} \begin{pmatrix} d\varepsilon_{\bar{x}} \\ d\varepsilon_{\bar{y}} \\ d\varepsilon_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \bar{C}^{-1} \underline{B} \begin{pmatrix} da \\ a d\varphi \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a \sin\lambda & -a \cos\lambda & 0 \\ -a \sin\varphi \cos\lambda & -a \sin\varphi \sin\lambda & a \cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

punto fundamental  $P_i (\varphi_i, \lambda_i, h_i)$

$$d\bar{x}_0 \rightarrow d\varphi_i, dh_i, d\lambda_i$$

$$d\bar{x}_0 = -\bar{C}_i \begin{pmatrix} a d\varphi \\ a \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} + \bar{C}_i \underline{A}_i \begin{pmatrix} d\varepsilon_{\bar{x}} \\ d\varepsilon_{\bar{y}} \\ d\varepsilon_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \underline{B}_i \begin{pmatrix} da \\ a d\varphi \end{pmatrix}$$

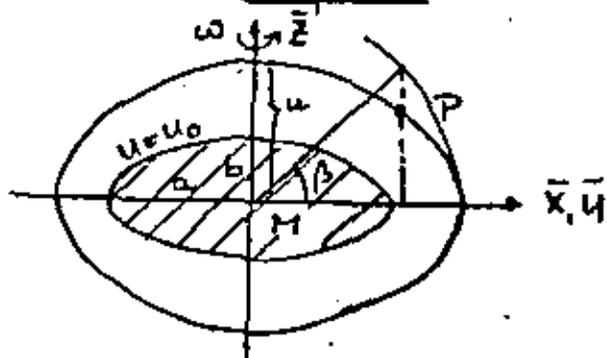
$$\begin{pmatrix} a d\varphi \\ a \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = \bar{C}_i^{-1} \bar{C}_i \begin{pmatrix} a d\varphi \\ a \cos\varphi d\lambda \\ dh \end{pmatrix} - \bar{C}_i^{-1} (\bar{C}_i \underline{A}_i - \bar{C}_i \underline{A}) \begin{pmatrix} d\varepsilon_{\bar{x}} \\ d\varepsilon_{\bar{y}} \\ d\varepsilon_{\bar{z}} \end{pmatrix} - \bar{C}_i^{-1} (\underline{B} - \underline{B}_i) \begin{pmatrix} da \\ a d\varphi \end{pmatrix}$$

el campo de gravedad normal

4.3-13

formulas rigurosas (PIZZETTI, SEMIGLIANA)

coordenadas  $u, \beta, \lambda$



$$E = \sqrt{a^2 - b^2} = \text{const.}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} u \sqrt{1 + (E/u)^2} \cos\beta \cos\lambda \\ u \sqrt{1 + (E/u)^2} \cos\beta \sin\lambda \\ u \sin\beta \end{pmatrix}$$

potencial normal

$$U = V_{el} + \Phi_{el}; \quad \Delta V_{el} = 0, \quad \Delta U = 2\omega^2$$

gravedad normal

$$\vec{g} = \text{grad } U$$

simetria al eje de rotación!

$$U = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{u} + \frac{\omega^2 a^2}{2} \frac{q}{q_0} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{\omega^2}{2} (u^2 + E^2) \cos^2 \beta$$

$$q = \frac{1}{2} \left( \left( 1 + 3 \frac{u^2}{E^2} \right) \arctan \frac{E}{u} - 3 \frac{u}{E} \right)$$

$$q_0 = q_u = b$$

Superficies equipotenciales:

$$U = U(\Gamma) = \text{const.}$$

elipsoide equipotencial:  $u = b$ ,  $q = q_0$

$$U = U_0 = \frac{GM}{E} \arctan \frac{E}{b} + \frac{\omega^2 a^2}{3}$$

gravedad normal en  $U = U_0$  (SCHIGLIANO)

$$g_0 = \frac{a \gamma_a \cos^2 \varphi + b \gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

relaciones entre  $a, b, M, \omega, \gamma_a, \gamma_b$ :

teorema de PIZETTI

$$2 \frac{\gamma_a}{a} + \frac{\gamma_b}{b} = \frac{3GM}{a^2 b} - 2\omega^2$$

teorema de CLAIRAUT

$$f + \beta = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} (1 + e^2)^{-1/2} \left\{ 1 + e \frac{3 \left( 1 + \frac{1}{e^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{e} \arctan e \right) - 1}{\left( 1 + \frac{3}{e^2} \right) \arctan e - \frac{3}{e}} \right\}$$

achatamiento geométrico

$$\beta = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$$

desarrollo en series:

potencial en funciones esféricas:

$$U = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n C_n P_n(\cos \theta) \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta$$

desarrollos al orden ( $f^2$ )

→ errores del orden ( $f^3$ ):

$$\varepsilon (3 \times 10^{-3})^3 = 27 \times 10^{-9} = 3 \times 10^{-8}$$

$$\rightarrow dr = 3 \times 10^{-8} \times 6.37 \times 10^6 = 0.2 \text{ m}$$

$$\rightarrow d\gamma = 3 \times 10^{-8} \times 9.81 = 3 \times 10^{-7} \text{ ms}^{-2} = 0.03 \text{ mgal}$$

$$\gamma_0 = \gamma_a (1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_2 \sin^2 2\varphi)$$

$$\beta = -f + \frac{5}{2} m - \frac{15}{14} f m + \frac{15}{4} m^2$$

CLAIRAUT

$$\beta_2 = \frac{1}{8} f^2 - \frac{5}{8} f m$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2} + \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{15}{28} J_2 m + \frac{3}{86} m^2$$

$$-C_2 = J_2 = \frac{2}{3} f - \frac{m}{3} - \frac{1}{3} f^2 + \frac{2}{21} f m$$

$$-C_4 = J_4 = -\frac{4}{5} f^2 + \frac{4}{7} f m$$

$$GM = a^2 \gamma_a \left( 1 - f + \frac{3}{2} m - \frac{15}{14} f m + \frac{9}{4} m^2 \right)$$

PIZETTI

4.3-4

gravedad normal en el exterior

$$\gamma = \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}\right)_0 h^2 + \dots$$

4.3-4

26

componente vertical del gradiente de gravedad:

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \frac{\partial x}{\partial z} = -U_{zz}$$

LAPLACE:  $\Delta U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 2\omega^2$

$$\rightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial h} = U_{xx} + U_{yy} - 2\omega^2$$

curvatura media en el elipsoide:

$$H^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{U_{xx}}{g} - \frac{U_{yy}}{g} \right)$$

$$H^* = -\frac{1}{2g} (U_{xx} + U_{yy})$$

$$\rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma H^* - 2\omega^2 \quad \text{BRUNS}$$

desarrollo en series:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 = -2 \frac{\gamma_0}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}\right)_0 = 6 \frac{\gamma_0}{a^2}$$

aproximación esférica:

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -2 \frac{\gamma}{r}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r^2} = 6 \frac{GM}{r^4} = 6 \frac{\gamma}{r^2}$$

$$\gamma = \gamma_0 \left( 1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) h + \frac{3}{a^2} h^2 + \dots \right)$$

4.3-5

variación de la gravedad normal:

latitud:

$$d\gamma_0 = 2\gamma_0 \beta \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \gamma_0 \beta \sin 2\varphi d\varphi = \gamma_0 \beta \sin 2\varphi \frac{d\bar{x}}{R}$$

$$d\gamma_0 = 8.14 \times 10^{-9} \sin 2\varphi d\bar{x}$$

$\gamma_0 = 9.78 \text{ ms}^{-2}$   
 $\beta = \frac{\gamma_0 - \gamma_p}{\gamma_0} = 0.00530$   
 $R = 6371 \text{ km}$

$\varphi = 45^\circ$ :

$$\frac{d\gamma_0}{d\bar{x}} = 8.14 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2} = 8.14 \text{ E} = \frac{8.1 \times 10^{-4} \text{ mgal}}{\text{m}}$$

$$= 0.81 \text{ mgal/km}$$

altura:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 = -0.30877 (1 - 0.00139 \sin^2 \varphi) \text{ mgal/m}$$

valor convencional:

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 = -0.3086 \text{ mgal/m}$$

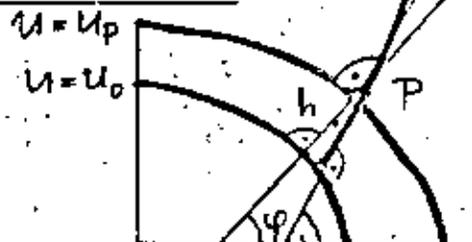
Superficies equipotenciales y verticales en el campo de gravedad normal

$U = U(\xi) = \text{const.}$ ,  $U = U_0$ : elipsoide

curvatura en  $U = U_0$ :

$$\frac{1}{M} = -\frac{U_{\xi\xi}}{\gamma_0} \quad ; \quad \frac{1}{N} = -\frac{U_{\eta\eta}}{\gamma_0}$$

vertical normal:



$$K_{\xi\xi}^N = -\frac{U_{\xi\xi}}{\gamma_0}$$

$$K_{\eta\eta}^N = 0$$

curvatura de la vertical normal.

$$(U_{\xi\xi})_0 = -\gamma_0$$

$$(U_{\xi\eta})_0 = -\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right)_0 = -\left(\frac{\partial\gamma}{M\partial\xi}\right)_0 = -\frac{\gamma_0\beta\sin 2\varphi}{M}$$

$$K_{\xi\xi}^N = \frac{\gamma_0\beta\sin 2\varphi}{M\gamma_0(1+\beta\sin^2\varphi)} = \frac{\beta}{M}\sin 2\varphi$$

27

Coordenadas geográficas normales

$$\varphi^N = \varphi - \delta\varphi^N, \quad \lambda^N = \lambda$$

curvatura de la vertical normal:

$$\delta\varphi^N = -\int_0^{H^N} K_{\xi\xi}^N dH^N = -\int_0^{H^N} \frac{\beta}{M}\sin 2\varphi dH^N$$

$$\delta\varphi^N = -\frac{\beta}{M}\sin 2\varphi H^N$$

$$\beta = 0.0053, \quad M \approx R = 6371 \text{ km}$$

$$\delta\varphi^N = -0.00017 \times \sin 2\varphi \times H^N(\text{m})$$

altura normal

$$H^N = \frac{C}{\bar{\gamma}}$$

gravedad media

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N \\ &= \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma_0 \left(1 - \frac{\beta}{2}(1+f+m-2f\sin^2\varphi)H^N\right) dH^N \end{aligned}$$

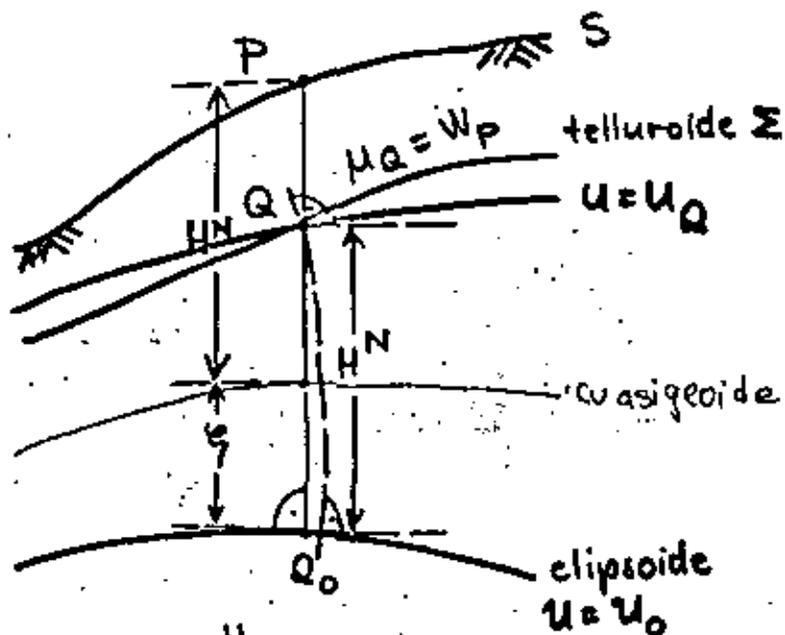
$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left(1 - \frac{\beta}{2}(1+f+m-2f\sin^2\varphi)H^N\right)$$

4.3-8

28

altura normal

$$H^N = \frac{C}{\gamma} \quad , \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int \gamma dH^N$$



$$C = \int_0^H g dh = W_0 - W_P$$

punto Q:

$$U_0 - U_Q = C = W_0 - W_P$$

$$U_0 = W_0$$

$$\rightarrow U_Q = W_P$$

**Sistemas de referencia**

- IUGG -

Sistema 1924 / 1930

1924 elipsoide internacional (HAYFORD 1909)

$$a = 6378387 \text{ m} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{observaciones} \\ \text{astrométricas} \\ \text{en U.S.A.} \end{array}$$

$$f = -1:297.0$$

1930 formula de gravedad (CASSINI)

$$\gamma_0 = 9.78049 \text{ ms}^{-2} \quad \leftarrow \text{anomalías de gravedad (HEISKANEN)}$$

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \quad \leftarrow \text{astronomía}$$

Sistema 1967

$$a = 6378160 \text{ m} \quad \leftarrow \text{mediciones de grado}$$

$$GM = 398603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \quad \leftarrow \text{sondas espaciales}$$

$$J_2 = 1082.7 \times 10^{-6} \quad \leftarrow \text{observaciones satelitares}$$

$$\omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \quad \leftarrow \text{astronomía}$$

masa de atmosfera: condensación en el elipsoide

$$GM \text{ incluye } GM_{atm} = 0.89 GM$$

gravedad normal en la atmosfera

$$\rightarrow \text{corrección } \delta\gamma = \delta\gamma(h) \quad \left\{ \begin{array}{l} h=0 \rightarrow \delta\gamma = -0.87 \text{ ugal} \\ h=30\text{km} \rightarrow \delta\gamma = -0.01 \text{ ugal} \end{array} \right.$$

valores dependientes:

$$f = 1:298.257 \quad , \quad b = 6356775 \text{ m}$$

$$\gamma_0 = 9.780318 (1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi)$$

4.4-1



ondulación del geode

5.1-2

$$N = \frac{T_0 - (W_0 - U_0)}{\gamma_0}$$

30

relación entre el campo actual y el campo normal:

$$U_R = W_P \quad U_0 = W_0$$

→ teorema de BRUNS

$$\xi = \frac{T(P)}{\gamma_R}$$

$$N = \frac{T(P_0)}{\gamma_0}$$

LAPLACE:

$$\Delta T = 0 \quad \text{si } \Phi = \Phi_{el}$$

desarrollo en funciones esféricas:

$$T = T(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\vartheta, \lambda)$$

$$T_0 = 0 \rightarrow M_{tierra} = M_{elipsoide}$$

$$T_1 = 0 \rightarrow \text{centro de la tierra} = \text{centro del elipsoide}$$

geode (r = R):

$$T = T(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(\vartheta, \lambda), \quad N = \frac{T}{\gamma_m}$$

$$N = N(\vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R\gamma_m} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta)$$

$$N = R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta)$$

$$\delta C_{nm} = C_{nm} - C_{nm}(elips), \quad \delta S_{nm} = S_{nm}$$

Anomalías gravimétricas

5.2-1

$$\Delta g = g_p - \gamma_R$$

anomalía de aire libre  
(en la superficie, según Molodtsevi)

$$\gamma_R = \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H}\right)_0 H^N + \dots$$

geode:

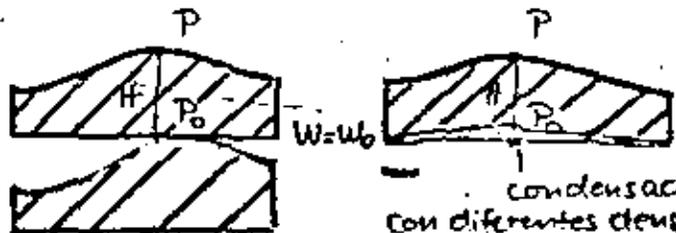
$$\Delta g_F = g + \delta g_F - \gamma_0$$

reducción de aire libre:

$$\delta g_F = -\left(\frac{\partial g}{\partial H}\right) H, \quad \frac{\partial g}{\partial H} \approx \frac{\partial \gamma}{\partial H}$$

corresponde a un desplazamiento de las masas topográficas resp. a una concentración en el geode:

→ geode como superficie de borde, contiene todas las masas terrestres



condensación con diferentes densidades superficiales

anomalía de Bouguer

$$\Delta g_B = g - \delta g_{top} + \delta g_F - \gamma_0$$

$$\delta g_{top} = \delta g_P - \delta g_T$$

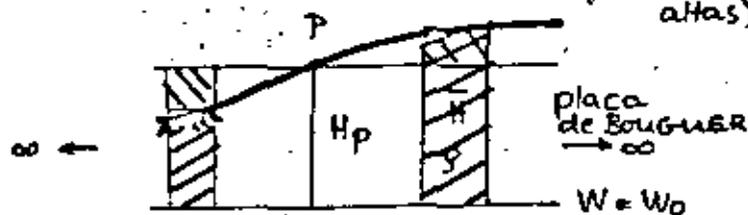
reducción de placa Bouguer:

$$\delta g_P = 2\pi G \rho H_P = 0.0419 \times \rho \times H_P \text{ (mgal)}$$

(g/cm<sup>3</sup>)(m)

reducción del terreno:

$\delta g_T$ : orden 0.1 ... 1 mgal (llanos)  
 1 ... 10 mgal (montañas)  
 10 ... 100 mgal (montañas altas)



gran efecto indirecto (orden 100 m)

interpolación fácil:

$$\Delta g_T = \Delta g_B + \delta g_{top}$$

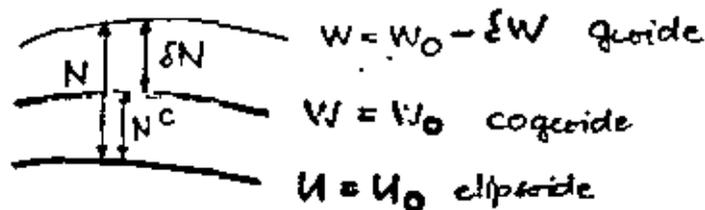
interpolación  $\rightarrow \overline{\Delta g_B}$  anomalías mediasestimación  $\rightarrow \overline{H}$  alturas medias

$$\overline{\Delta g_T} = \overline{\Delta g_B} + \delta g_{top}(\overline{H})$$

31

efecto indirecto (efecto topográfico)

desplazamiento de las masas

 $\rightarrow$  cambio del potencial

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma}$$

$$N^c = N + \delta N$$

desarrollo en funciones esféricas (r=R):

$$\Delta g = \Delta g(r, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n(r, \lambda)$$

anomalías de aire libre:valores de punto: varianza:  $\sigma^2(\Delta g)$   
 $\pm 42.4$  mgal(Himalaya + 276 mgal  
 Puerto Rico trench - 380 mgal)anomalías medias  $1^\circ \times 1^\circ$ :  $\pm 30.2$  mgal" " "  $5^\circ \times 5^\circ$ :  $\pm 17.2$  mgal

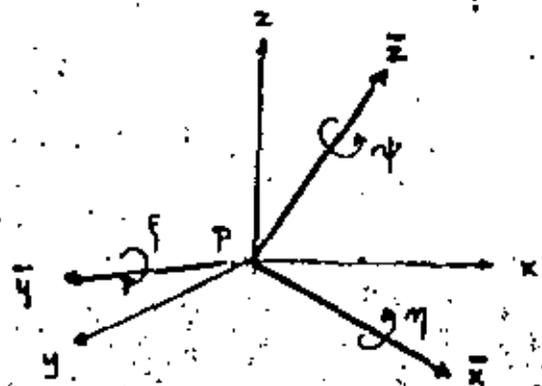
desviaciones de la vertical

superficie de la tierra (HELMERT):

$$\vec{\Theta}(\theta, \alpha) \circ \vec{\Theta}(\eta, \gamma)$$

geoide (PIZZI):

$$\vec{\Theta}_0(\theta_0, \alpha) \circ \vec{\Theta}(\eta_0, \gamma_0)$$



componentes de la desviación de la vertical:  
 meridiano  $\theta$   
 paralelo  $\eta$   
 plano horizontal  $\gamma$

v. 4.1-1, 3.3-1:

$$\underline{S}_y \underline{x} = \underline{R}_z(\eta) \underline{R}_y(\gamma) \underline{R}_x(\theta) \underline{S}_y \underline{x} = \underline{R}(\eta, \gamma, \theta) \underline{S}_y \underline{x}$$

$$\underline{R}(\eta, \gamma, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \eta & -\theta \\ -\eta & 1 & \theta \\ \theta & -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

v. 4.2-12:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x} &= \underline{R}(E) \underline{R}_z(180^\circ - \lambda) \underline{R}_y(90^\circ - \phi) \underline{S}_y \underline{x} \\ &= \underline{R}_z(180^\circ - \lambda) \underline{R}_y(90^\circ - \phi) \underline{S}_y \underline{x} \\ &= \underline{R}_z(180^\circ - \lambda) \underline{R}_y(90^\circ - \phi) \underline{R}(\eta, \gamma, \theta) \underline{S}_y \underline{x} \end{aligned}$$

39

$$\underline{R}(E) \underline{R}_z(180^\circ - \lambda) \underline{R}_y(90^\circ - \phi) = \underline{R}_z(180^\circ - \lambda) \underline{R}_y(90^\circ - \phi) \underline{R}(\eta, \gamma, \theta)$$

$$\underline{R}(E) = \begin{pmatrix} 1 & \eta & -\theta \\ -\eta & 1 & \theta \\ \theta & -\theta & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{R}(\eta, \gamma, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \eta & -\theta \\ -\eta & 1 & \theta \\ \theta & -\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \xi &= \phi - \theta + \sin \lambda \cdot \eta - \cos \lambda \cdot \theta \\ \eta &= (\lambda - \theta) \cos \phi - \sin \phi (\cos \lambda \cdot \eta + \sin \lambda \cdot \theta) + \cos \phi \cdot \xi \\ \psi &= (\lambda - \theta) \sin \phi + \cos \phi \cos \lambda \cdot \eta + \cos \phi \sin \lambda \cdot \theta + \sin \phi \cdot \xi \end{aligned}$$

$E_y = E_\eta = E_\xi = 0 \Rightarrow$  paralelismo de los sistemas  $X$  y  $\bar{X}$

Componentes en el plano horizontal y en el plano vertical:

$$\underline{S}_y \underline{x} = \underline{R}(\eta, \gamma, \theta) \underline{S}_y \underline{x}$$

v. 3.2-1, 4.2-7:

$$\underline{x} = S \begin{pmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{x}} = S \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \phi \\ \sin \alpha \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} - \alpha = (\lambda - \theta) \sin \phi + (\sin \alpha (\phi - \theta) - \cos \alpha \cos \phi (\lambda - \theta)) \cos z + \cos \phi \cos \lambda \cdot \eta + \cos \phi \sin \lambda \cdot \theta + \sin \phi \cdot \xi$$

$$\begin{aligned} \underline{z} - \phi &= -(\cos \alpha (\phi - \theta) + \sin \alpha \cos \phi (\lambda - \theta)) \\ &\quad - (\cos \alpha \sin \lambda - \sin \alpha \sin \phi \cos \lambda) \eta \\ &\quad + (\cos \alpha \cos \lambda + \sin \alpha \sin \phi \sin \lambda) \theta \\ &\quad - \cos \phi \sin \alpha \cdot \xi \end{aligned}$$

$$E_{\bar{x}} = E_{\bar{y}} = E_{\bar{z}} = 0$$

$$\begin{aligned} A - \alpha &= \eta \tan \varphi + (\zeta \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \cot \varepsilon \\ z - \zeta &= -(\zeta \cos \alpha + \eta \sin \alpha) = -E \end{aligned}$$

33

corresponde a las reducciones (v. 4.2-10, 4.2-11):

$$\begin{aligned} dA &= A - \alpha = a_{\varphi} d\varphi + a_{\lambda} d\lambda = a_{\varphi} (\varphi - \varphi) + a_{\lambda} (\lambda - \lambda) \\ dz &= z - \zeta = b_{\varphi} d\varphi + b_{\lambda} d\lambda = b_{\varphi} (\varphi - \varphi) + b_{\lambda} (\lambda - \lambda) \end{aligned}$$

el datum geodesico:

$$\boxed{\varphi, \eta, N, E_{\bar{x}}, E_{\bar{y}}, E_{\bar{z}}, a, \varphi}$$

punto fundamental  $P_1$

$$N = h - H$$

diferenciación de  $\varphi, \eta, N$   
con  $d\varphi = d\lambda = dH = 0$ ; A. 4.2-13

$$\begin{pmatrix} d\zeta \\ d\eta \\ dN \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d\varphi \\ \cos \varphi d\lambda \\ -dh \end{pmatrix} + \frac{1}{a} A \begin{pmatrix} dE_{\bar{x}} \\ dE_{\bar{y}} \\ dE_{\bar{z}} \end{pmatrix}$$

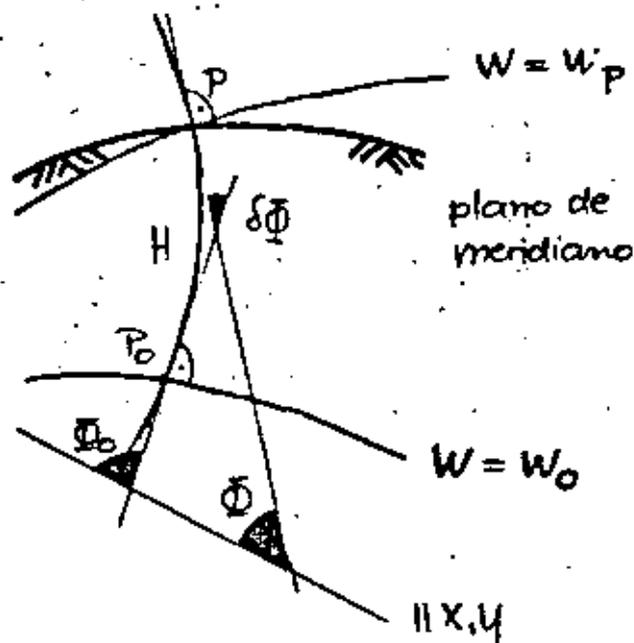
4.2-13:  $\varphi, \lambda, h \rightarrow \varphi, \eta, N$

$$\begin{pmatrix} d\zeta \\ d\eta \\ -dN/a \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{C}}_1 \begin{pmatrix} d\zeta \\ d\eta \\ -dN/a_1 \end{pmatrix} + \underline{\underline{C}}^{-1} (\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}}_1) \begin{pmatrix} da/a \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

ecuaciones de VEBUNG-MENESZ

$$\begin{aligned} d\zeta &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi + \sin \varphi_1 \sin \varphi \cos (\lambda - \lambda_1)) d\zeta_1 \\ &\quad - \sin \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_1) d\eta_1 \\ &\quad - (\sin \varphi_1 \cos \varphi - \cos \varphi_1 \sin \varphi \cos (\lambda - \lambda_1)) \left( \frac{dN_1}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_1 d\varphi \right) \\ &\quad - 2 \cos \varphi (\sin \varphi_1 - \sin \varphi) d\varphi \\ d\eta &= \sin \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_1) d\zeta_1 + \cos (\lambda - \lambda_1) d\eta_1 \\ &\quad + \cos \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_1) \left( \frac{dN_1}{a} + \frac{da}{a} + \sin^2 \varphi_1 d\varphi \right) \\ dN &= -N_1 (\cos \varphi_1 \sin \varphi - \sin \varphi_1 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_1)) d\zeta_1 \\ &\quad - N_1 \cos \varphi_1 \sin (\lambda - \lambda_1) d\eta_1 \\ &\quad + (\sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \varphi_1 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_1)) \left( dN_1 + da + a \sin^2 \varphi_1 d\varphi \right) \\ &\quad - da + (\sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi) a d\varphi \end{aligned}$$

desviación de la vertical en el geocide



$$\Phi_0 = \Phi + \delta\Phi, \Lambda_0 = \Lambda + \delta\Lambda$$

curvatura de la vertical:

$$\delta\Phi = - \int_0^H k_x dH = \int_0^H \frac{w_{zx}}{g} dH = - \int_0^H \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} dH$$

$$\cos\delta \delta\Lambda = - \int_0^H k_y dH = \int_0^H \frac{w_{zy}}{g} dH = - \int_0^H \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y} dH$$

$$\delta\Phi, \delta\Lambda: \text{orden } \begin{matrix} 0.1 \dots 1'' & (\text{llanos}) \\ 1'' \dots 10'' & (\text{montañas}) \end{matrix}$$

desviación de la vertical según PIZETTI:

$$\xi_0 = \Phi_0 - \varphi = \Phi + \delta\Phi - \varphi = \zeta + \delta\Phi$$

$$\eta_0 = (\Lambda_0 - \lambda) \cos\varphi = (\Lambda + \delta\Lambda - \lambda) \cos\varphi = \eta + \cos\varphi \delta\Lambda$$

$$\zeta, \eta: \text{orden } \begin{matrix} 0.1 \dots 10'' & (\text{llanos}) \\ 10'' \dots 1' & (\text{montañas altas}) \end{matrix}$$

## Estructuras del campo de gravedad

varianza y covarianzas de las anomalías

anomalías como proceso estocástico

- eliminación de 'trend'

$$\text{global: } M\{\Delta g\} = \frac{1}{4\pi} \int_S \Delta g d\bar{e} = 0$$

$\bar{e}$  = esfera de unidad

$M$  = promedio.

$$\hat{=} \Delta g_0 = -\frac{G}{R^2} \delta M + \frac{2}{R} \delta U = 0$$

igualdad de las masas resp. de los potenciales de la tierra y del elipsoide!

$\Delta g \rightarrow$  homogeneidad

$\Delta g \rightarrow$  isotropía (independiente del azimut)  
covarianza  $C = C(\xi) = M\{\Delta g_L \Delta g_K\}$

varianza

$$\text{var}(\Delta g) = M\{\Delta g^2\} = \frac{1}{4\pi} \int_S \Delta g^2 d\bar{e} = C(0) = C_0$$

r.m.s. anomalía

$$\text{r.m.s.}(\Delta g) = \sqrt{M\{\Delta g^2\}}$$

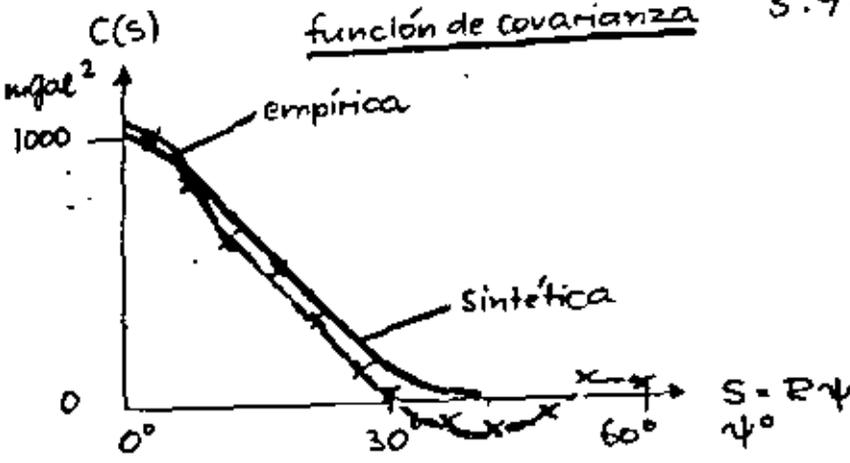
covarianza

$$\text{cov}_\xi(\Delta g) = M\{\Delta g_i \Delta g_k\} = C(\xi_k) = C_{ik}$$

5.4-2

35

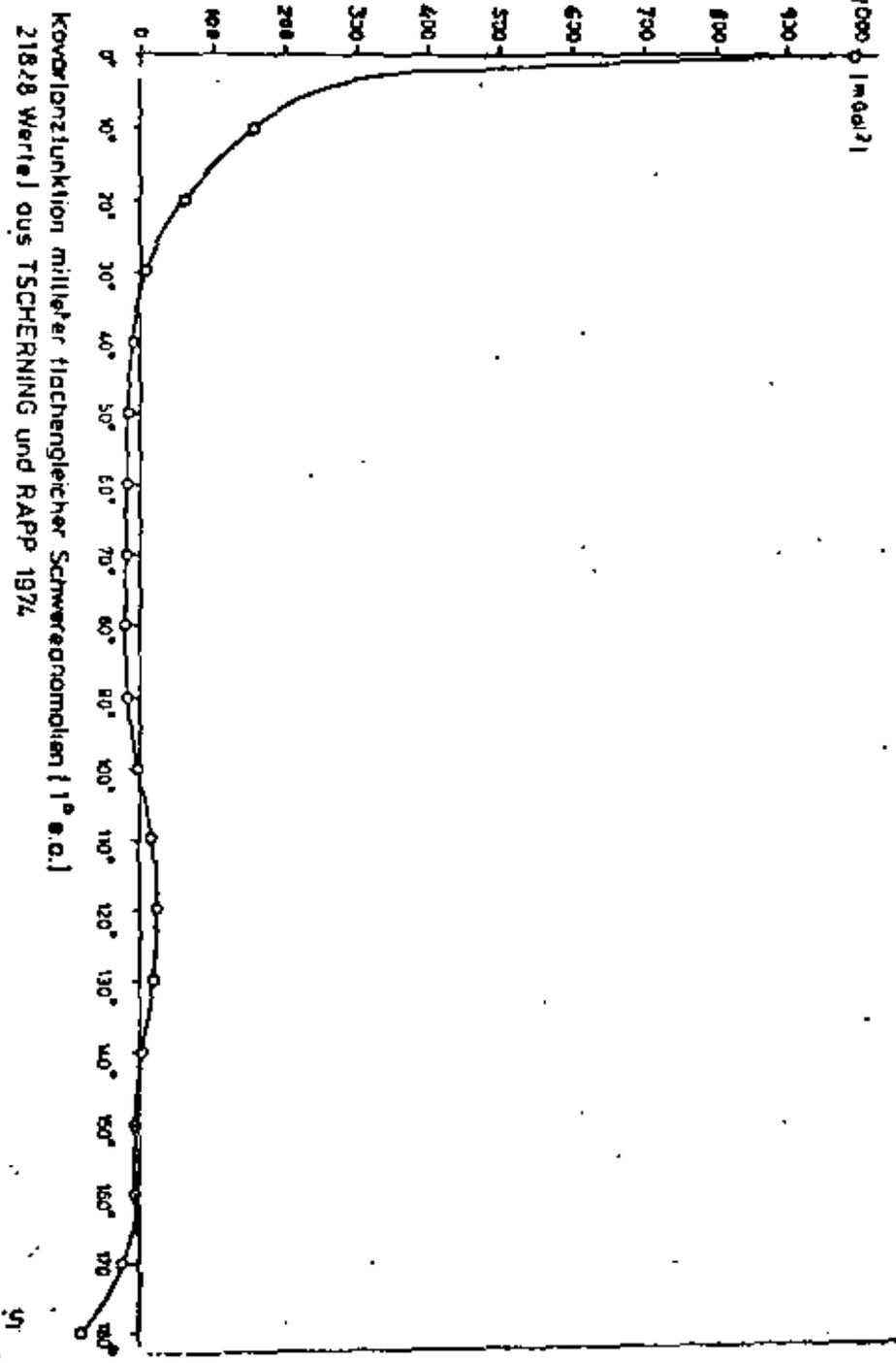
función de covarianza



función sintética:

p.e.  $C(\psi) = a \times \exp(-b\psi)$   
 $C(r) = a \times \exp(-br^2)$

$\psi$	$\Delta q_f$ (puntos)	$C(\psi)$ mgal <sup>2</sup>	$bq_f$ (1° e.a.)
0°	+ 1201	+ 920	
2°	+ 332	+ 285	
5°	+ 246	+ 156	
10°	+ 82	+ 97	
15°	+ 47	+ 49	
20°	+ 34	+ 29	
30°	+ 7	- 3	
60°	- 30	- 13	
90°	- 4	- 2	
120°	+ 12	+ 7	
150°	- 21	- 5	
180°		- 73	
ref.	(KAULA 1959)		(TICHOENING and RAPP 1974)



5

desarrollo de  $C(\psi)$  en funciones esféricas:

$$C(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n P_n(\cos\psi)$$

→ descomposición espectral (según grado  $n$ )

$$c_n = c_n(\Delta g) = \text{var}_n(\Delta g) = M\{\Delta g_n^2\}$$

varianzas de grado (de las anomalías):

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi$$

(cálculo por anomalías)

$$c_n = \frac{2}{\gamma_{nm}^2 (n-1)^2} \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm}^2 + \delta \bar{S}_{nm}^2)$$

(cálculo de los coeficientes armónicos)

modelo de TSCHERNING y RAPP (1974) para l.e.a.  $\Delta g$ :

$$\bar{c}_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n=0,1 \\ 7.5 \text{ mGal}^2 & \text{para } n=2 \\ \frac{425.22 \times (n-1)}{(n-2) \times (n+24)} \text{ mGal}^2 & \text{para } n \geq 3 \end{cases}$$

anomalías de grado ( $\Delta g$ ), modelo TSCHERNING y RAPP 1974

$n$	$\bar{c}_n(n)$ mGal <sup>2</sup>
0	0.0
1	0.0
2	7.5
3	31.5
4	22.8
5	19.5
6	17.7
7	16.4
8	15.5
9	14.7
10	14.0
15	11.7
20	10.1
30	8.0
50	5.5
70	4.1
90	3.1
110	2.4
140	1.6

estructuras	largo de onda $\lambda$	grado $n$	$\sum_{n_i} c_n$ (mGal <sup>2</sup> )	$\left\{ \sum_{n_i} c_n \right\}^{1/2}$ (mGal)
largas	180° - 36°	2-10	159.4	± 12.6
	36° - 10°	11-36	250.3	± 15.8
medias	10° - 2°	37-180	506.0	± 22.5
cortas	2° - 10' (20 km)	181-2000	740.0	± 27.2
ultra-cortas	20 - 8 Km	2001-5000	116.0	± 10.8
	< 8 Km	> 5001	23.3	± 4.8
$\Sigma$			1795.0	± 42.4

6.1-1

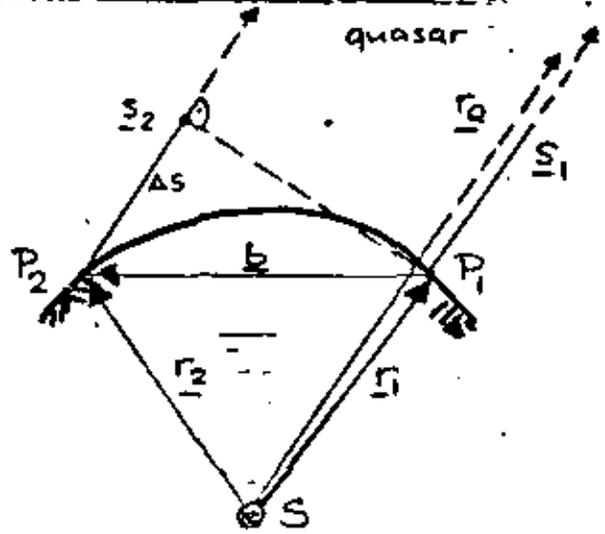
**metodos de observación**

posición fundamental de la geodesia satelitar:

competitividad con los metodos terrestres  
 1980 : desde distancias > 200... 300 km  
 1985 : " " " " > 50 km ?

**Observaciones espaciales**

interferometria con bases largas (VLBI)



diferencia de fase

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi(t) = 2\pi \frac{c}{\lambda} \tau = 2\pi \nu \tau$$

$\lambda$  } = { largo de onda } del señal (radio onda)  
 $\nu$  } = { frecuencia }

$$\tau = \frac{\Delta s}{c} = \text{desplazamiento temporal (para } \Delta s)$$

6.1-2

interferencias con frecuencia

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\Delta\varphi)}{dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{d(\Delta s)}{dt}$$

37 integración

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = \frac{1}{\lambda} (\Delta s_2 - \Delta s_1) = \frac{1}{\lambda} \delta s_{12}$$

observaciones :  $\tau_i, F$  (s.d. (F) = ± 0.1... 1ns; mase hidrogeno) → ± 10<sup>-14</sup> s/d

$$\Delta s = -(\tau_2 - \tau_1) \frac{r_0}{r_0}$$

$$\frac{r_0}{r_0} = \pm 0.01$$

$$-(\tau_2 - \tau_1) = -b$$

Equipos moviles ARIES (Astronomical radio interferometric earth surveying), JPL  
 antena diametro < 9m (4m, 9m)

$$\pm 3 \text{ cm}, \quad s = 1 \dots \text{unos } 100 \text{ km}$$

bases largas (conexiones intercontinentals)

- radio telescopios:
- Kaystack, Mass.
- Owens Valley, Calif.
- Greenbank, West Virg.
- Fort Davis, Texas
- Onsala, Suecia
- Bonn, Alemania

$$\pm 5 \dots 10 \text{ cm}$$

unos 1000 km

$$\left. \begin{array}{l} \text{movimiento del polo} \\ \text{rotación de tierra} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pm 5 \text{ cm} / 2 \text{ d} \\ \pm 0.1 \text{ ms} / 1 \text{ d} \end{array}$$

# observaciones satelitares

38

## Satélites geodesicos

### reflectores de LASER:

p.e. GEOS-3 (1975),  $h \approx 840 \text{ km}$ ,  $i = 115^\circ$

STARLETTE (1975),  $h = 800 \text{ km}$ ,  $i = 50^\circ$   
 $\varnothing 24 \text{ cm}$ , 42 kg

LAGEOS (1976),  $h = 5900 \text{ km}$ ,  $i = 110^\circ$   
 $\varnothing 30 \text{ cm}$ , 411 kg

→ medición de distancias y direcciones ( $\alpha, \delta$ )

### reflectores en la Luna:

APOLLO 11 (1969); APOLLO 14, 15, LUNA 21

### radio frecuencias:

p.e. GEOS 2 (1971),  $h = 1100 - 1600 \text{ km}$ ,  $i = 65^\circ$

GEOS-3 (1975),  $h = 840 \text{ km}$ ,  $i = 115^\circ$

162 / 324 MHz

TRANSIT (1967-1979),  $h = 1100 \text{ km}$ ,  $i = 90^\circ$

tipo "NOVA" (1975) - "discos" sistema

150 / 400 MHz

→ frecuencias de DOPPLER

### altimetría:

(GEOS-3 (1975-1978)

SEASAT-1 (1978),  $h = 800 \text{ km}$ ,  $i = 102^\circ$

→ distancias entre satélite y superficie de mar

## Direcciones espaciales

→ orientación de las mediciones DOPPLER y de las distancias en el sistema ( $\alpha, \delta$ )

→ direcciones independiente de la gravedad

→ costes grandes y precisión limitada

$(\pm 0.2 \dots 2'')$

→ no importancia

## Distancias LASER

$$D = \frac{c}{2} t$$

$$\bar{c} = \frac{c}{\bar{n}}, \quad \bar{n} = \frac{1}{D} \int_0^D n \, dd$$

velocidad media de luz

$n$  = índice de refracción

→ no orientación

→ I. generación:  $1 \dots 5 \text{ ns} \hat{=} 0.15 \dots 0.75 \text{ m}$   
 (anchura media del impulso)

III. generación:  $0.1 \dots 0.2 \text{ ns} \hat{=} 0.015 \dots 0.03 \text{ m}$

→ ~ 10...15 estaciones (NASA - STANAS →  $\pm 1 \dots 2 \text{ cm}$   
 $\pm 10 \text{ cm}$ )

→ equipos móviles (SAO, USA, USSR)  
 (MORAS - GSFC) →  $\pm 3 \dots 9 \text{ cm}$   
 (TERS - JPL) →  $\pm 1 \dots 2 \text{ cm}$

→ MC DONALD observatorio: LLR desde 1969

→ } movimiento de polo  $\pm 30 \text{ cm}$   
 rotación de tierra  $\pm 0.5 \text{ ms}$

# Mediciones DOPPLER

6.1-5

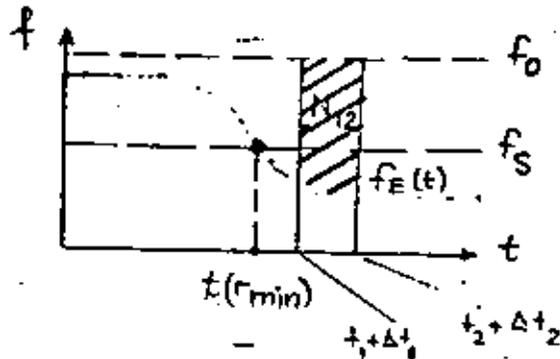
frecuencia transmitida  $f_s$   
 frecuencia recibida  $f_E$   
 frecuencia de referencia  $f_0$

DOPPLER efecto:

$$f_E = f_s - \frac{f_s}{c} \dot{s} = f_s - \Delta f$$

DOPPLER COUNT

$$N_{12} = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} (f_0 - f_E) dt$$



$$S_2 - S_1 = \frac{c}{f_0} N_{12} - \frac{c}{f_0} \frac{f_0 - f_s}{f_0} (t_2 - t_1)$$

## NAVY NAVIGATION SATELLITE SYSTEM (desde 1967)

cada 2 min.: elementos de la órbita ( $\pm 10m$ )  
 (Broadcast ephemeris), 12h extrapolación tiempo

1981: 5 satelites

$\varphi \sim 0^\circ$  - appx 40... 50 transitos/d

$\varphi \sim 45^\circ$  - appx. 20... 30 " " "

## errores del sistema TRANSIT: 6.1-6

6.1-6

39

### 1. errores de efemérides

- modelo de gravitación (WGS72)  $\pm 5...10m$
- redondear  $\left\{ \begin{array}{l} \text{NOVA} \\ \text{DISCOS} \end{array} \right. \pm 5m$
- errores de los modelos para presión atmosférica, presión de radiación  $\pm 10...25m$

### 2. errores de refracción

- refracción ionosférica 3. orden
  - efectos troposféricas
- $\pm 1...5m$

### 3. errores en el receptor

- oscilator  $\pm 0.1m$
  - time-jitter
  - variación del centro de antena  $\pm 0.1...0.4m$
- $\pm 1...6m$

error total (untransito)  $\pm 12...28m$

## Distancias y DOPPLER frecuencias

### NAVSTAR Global Positioning System (desde 1973 desarrollo)

~1985: 18 satelites,  $h \approx 20000km$ ,  $i = 63^\circ$   
 $\geq 4$  satelites sobre el horizonte, tres planos de órbita

→ elementos de órbita } 1.227/1.575 GHz  
 tiempo ( $\pm 1 \times 10^{-13}$ )

receptor: reloj de referencia

→ distancias Doppler-frecuencias, interferometría SERIES (satellite emission radio interferometric earth surveying)  
 →  $\pm 15m$ ,  $\pm 3cm/sec$  navegación  $\pm 0.1m$  (translocación)  $\pm 0.03m$  (interfer.)

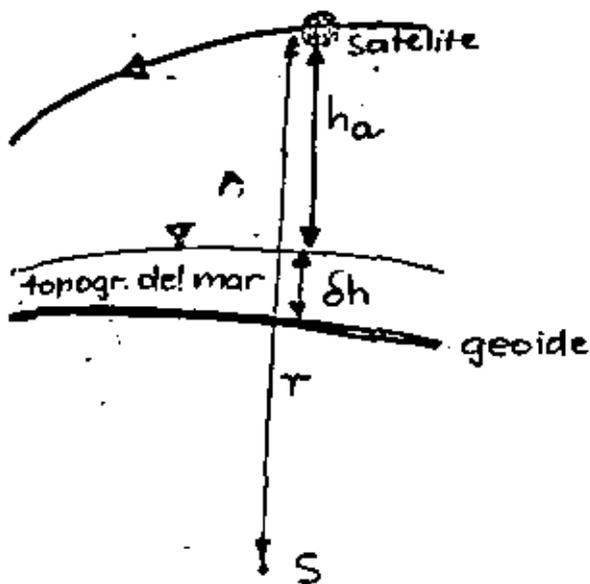
altimetría de satélites

6.1-7

diametro de "footprint" ~ 3 Km  
 distancia de "footprint" ~ 15 Km

40

→ altura del satélite sobre la superficie del mar (superficie momentánea)



errores:

efemerides: { ± 10 m (GEOS-3)  
 ± 1.2 m (SEASAT-1)

modelos de mareas: { ± 1 m  
 ± 0.1 m (SCHWIDERSEI)

altimetría: { ± 0.5...1 m (GEOS-3)  
 ± 0.7 m (SEASAT-1)

↑  
 punto de cero de altura  
 drift del altímetro  
 error de tiempo  
 refracción troposférica

6.1-8

sistemas de referencia!

Sistemas geocentricas

dependen de las coordenadas de las estaciones satelitares ("tracking") y del campo de gravitación (modelo).

"Broadcast ephemeris"

4 estaciones en U.S.A., observación sobre 36 h → calculación adelante, coordenadas en el sistema WGS 72: potencia! desarrollo hasta n,m = 20,20 → **± 5...10 m**

"precise ephemeris"

20 estaciones globales, observación sobre 48 h → efemerides ultteriores y limitados, (± 1.5m), coordenadas en el sistema NWL-9D: potencia! desarrollo hasta ~20 (n,m) → **± 1 m**

desviación de los sistemas del centro de gravedad:

± 1...2 m

escala "bias":  $1 \times 10^{-6} \dots 1 \times 10^{-7}$   
 error in  $\lambda$  (NWL9D) = 0.8

ZOUCHER  
 1979

$\Delta X$  (BCE-PE) = -2.2 ± 0.2 m  
 $\Delta Y$  (BCE-PE) = -0.5 ± 0.2 m  
 $\Delta Z$  (BCE-PE) = 3.9 ± 0.2 m

## Observaciones astronómicas

2/1

importancia reducida!

### Posiciones astronómicas

- $\Phi, \Lambda$  → parámetros de orientación para observaciones terrestres  
 → determinación del geolide debido en los continentes

observatorios:  $\pm 0.05$

teodolito universal:  $\pm 0.1 \dots 0.3$

astrolabio a prisma:  $\pm 0.5 \dots 1$

camara zenital transportable  $\pm 0.5$   
 ( $\frac{1}{2}h \dots 1h$ ) observación → 4...6 placas  
 medición de coordenadas → 6h  
 5...10 noches →  $\pm 0.2$  ?

proceso: a) observación (fotografía) del zenit en dos posiciones del círculo ( $180^\circ$  diferencia),  
 posición de dos niveles electrónicos, tiempo ( $\pm 1ms$ ) ( $\pm 0.2$ )

b) comparador →  $\times, y$  ( $\pm 2\mu m$ )

c) identificación →  $\alpha, \delta$  ( $\pm 0.2 \dots 0.4$ )

d) transformación del punto de eje y corrección por la inclinación →  $\alpha_z, \delta_z$

e)  $\Phi = \delta_z, \Lambda = -\Theta_0 + \alpha_z$

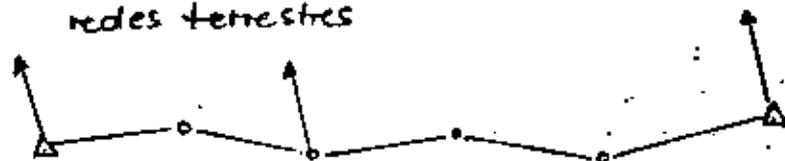
## Azimutes astronómicas

### geodesia clásica:

- A → orientación de las redes de triangulación (paralelismo del sistema geodesico al sistema geocentrico): puntos LAPLACE

### geodesia moderna:

- A → orientación de redes terrestres y polígonos, en competencia con métodos satelitares!  
 → control de refracción lateral in redes terrestres



precisión:  $\pm 0.3 \dots 0.5$

$\hat{=} \pm 0.3 \dots 0.5 m / 200 km$

$\hat{=} \text{metodo DOPPLER (translocación)}$

## Observaciones gravimetricas

6.3-1

49

- campo de gravedad externa como sistema de referencia para las observaciones
  - método gravimétrico → figura de la tierra (geometría de la superficie)
  - referencia para las alturas: geoide = superficie equipotencial
  - informaciones sobre la distribución de las masas en el interior de la tierra → geofísica
- establecimiento de redes de control, levantamiento regional y local, observación de variaciones temporales.

### Principio de Observación

Observación de una masa de prueba en el campo de gravedad:

- masa móvil: método dinámico
- masa en equilibrio por contra fuerza: método estático.

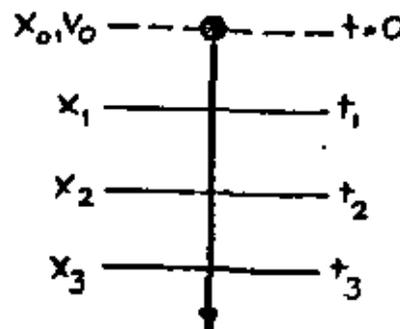
dimensión: largo (m) y tiempo (s)

- medición de largo y tiempo: observación absoluta
- medición de largo o tiempo: observación relativa

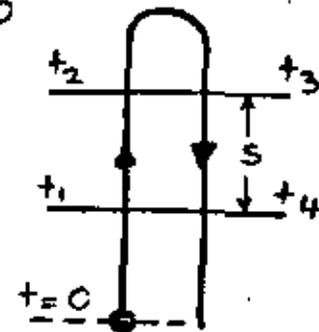
## Observaciones absolutas

6.3-2

### caída libre



### tiro y caída libre



$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

### caída libre:

$$g = 2 \frac{(x_3 - x_1)(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1)(t_3 - t_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}$$

$$dg \approx 10^{-8} g = 0.01 \text{ mgal} ; x = 1 \text{ m} ; t = 0.5 \text{ s}$$

$$\rightarrow dx = 10 \text{ nm}$$

$$\rightarrow dt = 2 \times 10^{-9} \text{ s}$$

### problemas:

microsismico: { frecuencia 0.1... 5s  
amplitud 0.1... 1 μm

→ valor medio (50...100 obs. / 1d)

→ sismómetro vertical

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \gg T_{\text{micro}}$$

6.3-3

(43)

presión atmosférica

→ vacío alto

$$1 \times 10^{-5} \text{ Pa} \rightarrow 1 \mu\text{gal}$$

(1 mbar = 100 Pa)

→ tiro y caída: efectos proporcional a la velocidad → cero;  
presión 0.1 ... 1 Pa

medición de x y t simultáneamente

→ interferometría (MICHELSON) con un reflector (triple prisma) fijo (puesto en un sismómetro) y un reflector con cuerpo de caída

- He-Ne-Laser → ± 10 nm
- reloj de precisión y contador electrónico (± 10 ns)

tiro y caída

... ± 0.1 ns

$$g = \frac{= 8 s}{(t_4 - t_1)^2 - (t_3 - t_2)^2}$$

Generalmente:

- > 3 resp. 2 planos de medición → ajuste
- > 1 experimento (50 ... 200)
- duración del experimento: 1 ... 5 días

6.3-4

gravímetros absolutosestaciones fundamentales

BIPM / Sèvres (SAKUMA): desde 1967

"tiro y caída", 0.4 m → ± 1 ... 3 μgal, (IGSN 71)

Mizusawa / IPMS: similar

gravímetros transportables:

FALLER and HAMMOND (1968/69): "caída" 1 m → ± 0.05 mGal (IGSN 71)

Istituto di Metrologia "G. Colonnetti" / Torino: (1976) "caída y tiro", ~1 m, → ± 0.01 mGal (observaciones en Europa, U.S.A., China)

FALLER (1971), "caída" 0.2 m → ± 5 ... 10 μgal (fase experimental)

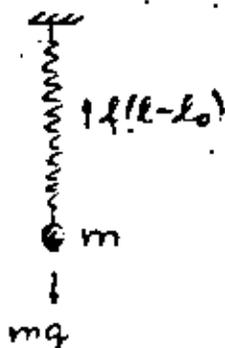
otros instrumentos en  
U.S.A. (HAMMOND)  
U.S.S.R.  
Japón

Observaciones relativas

6.3-5  
44

gravímetros de resorte:

translación

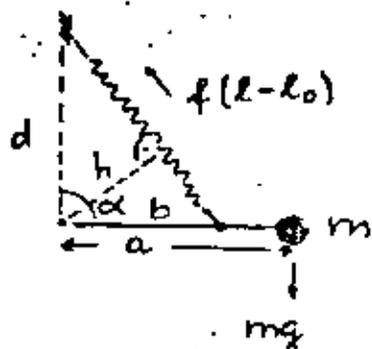


$$mg - f(l-l_0) = 0$$

$$\Delta g = \frac{f}{m} \Delta l$$

$d(\Delta g) = 0.01 \text{ mgal}$   
 $\rightarrow d(\Delta l) = 1 \text{ nm}$   
 $d(\Delta x) = 0.1$

rotación



$$mga - f(l-l_0)h = 0$$

$$\Delta g = \frac{f b d \cos \alpha}{m a} \Delta \alpha$$

(l\_0 = 0)

$\Delta g_{\text{max}} = 1000 \text{ mgal}$   
 $l = 0.1 \text{ m}$   
 $l_0 = 0$

Problemas:

medición de  $\Delta l$  ( $\Delta x$ ):

al sistema capacitivo (condensador de tres placas)  $\rightarrow$  tensión diferencial



b) cero posición por husillo

constancia de la contra fuerza

- material de resorte : aleación NiFe etc.
- aislamiento (aislamiento) del sistema:
  - temperatura  $\rightarrow$  termostato
  - presión atmosférica  $\rightarrow$  hipermeabilidad  $\rightarrow$  corrección
  - campo magnetismo  $\rightarrow$  compensación
  - disturbios mecánicos (transporte)  $\rightarrow$  estabilización

drift

= variación temporal de la lectura, resulta de las variaciones externas no compensadas

$$l = l(t)$$

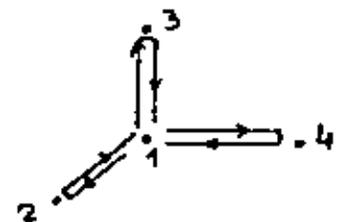
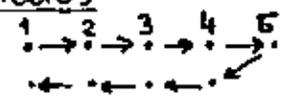
función de drift:

$$l_t = l(t)_0 + \left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\right)_0 t^2 + \dots$$

orden:

en estación : 0... 10  $\mu\text{Gal/d}$   
 transporte : 10... 100  $\mu\text{Gal/d}$  } LCR-gravímetros

métodos:



modelo funcional: linealmente (LCR)

calibración

$$dg = F(z) dz$$

$F(z)$  = función de calibración

$$\Delta g = (F(z)_0 - \left(\frac{dF}{dz}\right)_0 z_0 + \dots) \Delta z + \dots$$

$$\Delta g = Y_i \cdot \Delta z + \dots = Y_i' \Delta g' + \dots$$

$Y_i'$  = factor lineal (corrección a la tabla de calibración)

$\Delta g'$  = diferencia de gravedad provisional

calibración en líneas o sistemas de calibración

International Gravity Standardization

Net 1971  $\rightarrow \pm 10^{-4} \hat{=} \pm 0.1 \text{ mGal} / 1000 \text{ mGal}$   
( $\pm 0.1 \text{ mGal}$ )

estaciones absolutas

( $\pm 0.01 \text{ mGal}$ )  $\rightarrow \pm 1 \dots 2 \times 10^{-5} \hat{=} \pm 0.01 \dots 0.02 \text{ mGal} / 1000 \text{ mGal}$

líneas especiales ( $\pm 1 \dots 3 \mu\text{Gal}$ )

$\rightarrow$  errores periódicos  
( $< 20 \mu\text{Gal}$ , periodos  
 $35 \text{ mGal}$ ,  $71 \text{ mGal}$  etc.)

75

Gravímetros relativos

LaCoste-Romberg (LCR) : "rotación"

modelo G (region global  $\rightarrow 6000 \text{ mGal}$ )

$$\Delta g : \pm \boxed{10 \dots 20 \mu\text{Gal}}$$

$$\Delta g < 10 \text{ mGal} : \pm \boxed{5 \mu\text{Gal}}$$

modelo D (region 200 mGal)

$$\Delta g : \boxed{\pm 10 \mu\text{Gal}}$$

Askaniya GSS 3 : "translación"

- gravímetro marino -  
en giroscópica

$$\rightarrow \pm \boxed{0.2 \dots 0.5 \text{ mGal}}$$

↑  
disturbios vertic.  $\leq 0.2 g$

problema en la gravimetría marina:

Eötvös - efecto :  $\rightarrow$  navegación!

corrección:

$$\delta g_E = 2 \omega v \sin \alpha \cos \varphi + \frac{v^2}{R}$$

$$\delta g_E = 4.0 v \sin \alpha \cos \varphi + 0.0012 v^2 \text{ (mGal.)}$$

(km/h)

## Sistemas de referencia

6.3-9

4/6

establecimiento por redes gravimétricas

- mediciones absolutas
- mediciones relativas

modelo funcional:

$$A_g = \gamma + \Delta g + d_1 \Delta t + \dots$$

g

## Sistemas globales

Sistema de POTSDAM (1909-1971)

1 medición absoluta (1898-1904)

error 14 mGal (péndulos reversibles),

mediciones relativas a las regiones:

por péndulos relativos ( $\pm 0.3 \dots 3$  mGal)

y gravímetros ( $\pm 0.02 \dots 0.5$  mGal),

- error de nivel:  $14$  mGal
- error de escala:  $\pm 10^{-3} \dots 10^{-4}$
- errores estocásticos:  $\pm 0.02 \dots 0.2$  mGal

6.3-10

International Gravity Standardization  
Net 1971 (IGSN 71):

- 10 mediciones absolutas ( $\pm 10 \dots 50$   $\mu$ Gal)
- $\sim 1200$  mediciones de péndulos ( $\pm 0.2 \dots 0.5$  mGal)
- $\sim 24000$  mediciones gravimétricas ( $\pm 0.02 \dots 0.1$  mGal)

→ 1854 puntos ( $\sim 500$  estaciones primarias)

error  $\pm 0.1$  mGal  
escala  $\pm 1 \times 10^{-4}$

mejoramiento de IGSN 71:

mediciones absolutas:

→ estaciones fundamentales ( $\sim 10$ )

$\pm 1 \dots 3$   $\mu$ Gal

→ puntos absolutos (diferencia  
 $\sim 200$  mGal)

$\pm 10$   $\mu$ Gal

mediciones relativas:

→ mejoramiento en regiones  
de precisión mala

→ extensión en regiones  
no observadas

$\pm 10$   $\mu$ Gal

## red gravimetrica

6.3/11

de la Republica Federal de Alemania

(red regional!); red fundamental

21 puntos

incl. 4 puntos absolutos ( $\pm 10 \mu\text{gal}$ )656  $\Delta g$  por 4 LCR gravimetros ( $\pm 10 \dots 20 \mu\text{gal}$ )cada estacion contiene 4 puntos  
(centro y excentros)

ajuste

 $\pm 6 \dots 11 \mu\text{gal}$  (g) $A_{g_{max}} = 835 \mu\text{gal} : \pm 15 \mu\text{gal}$ redes de primer-orden:cada punto:  $\pm 10 \mu\text{gal} \dots 20 \mu\text{gal}$   
distancia  $\sim 30 \text{ km}$ 

2.orden: 10 km, 3.orden: 2...3 km

lineas de calibracion: sistema Hannoververtical: 20 mGal, division 0.2 y 1  $\mu\text{gal}$   
 $\pm 1 \mu\text{gal}$ horizontal: 200 mGal, division 10 mGal.  
 $\pm 1 \mu\text{gal}$  $\rightarrow$  errores periodicos:

periodo	amplitud	} efecto $\rightarrow < 20 \dots 30 \mu\text{gal}$
1 mGal	$< 4 \mu\text{gal}$	
8 "	$< 8 \mu\text{gal}$	
35 "	$< 9 \mu\text{gal}$	
71 "	$< 20 \mu\text{gal}$	

## Observaciones geodesicas terrestres

6.4-1

fijan la posicion relativa de los puntos,  
problemas:

- campo de gravedad
- campo de refraccion

influyen en una manera diferente  
las mediciones de posicion y de alturaDeterminacion de posicion:

distancias

$$D = \frac{c}{2} t$$

Laser:

$$m_D = \pm (1 \dots 10 \text{ mm} + 1 \dots 2 \times 10^{-6} D)$$

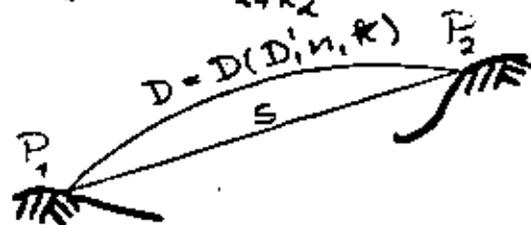
microondas:

$$m_D = \pm (3 \dots 20 \text{ mm} + 3 \dots 5 \times 10^{-6} D)$$

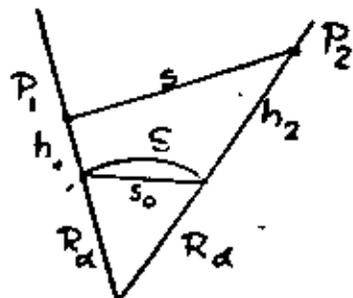
reduccion por la curvatura y el indice de  
refraccion ( $\bar{n} + n_0$ ):

$$D = D' + D'(n_0 - \bar{n}) - (R - R^2) \frac{D'^3}{12 R^2}$$

$$s = D - R^2 \frac{D^3}{24 R^2}$$



## reducción al elipsoide



$$S = 2 R_d \arcsin \frac{s_0}{2 R_d}$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{s^2 - (h_2 - h_1)^2}{(1 + h_1/R_d)(1 + h_2/R_d)}}$$

$$S = s - \frac{\Delta h^2}{2s} - \frac{h_1 + h_2}{2R_d} s + \frac{s_0^3}{24 R_d^2} + \dots$$

ej.:  $s = 40 \text{ km}$ ,  $h_1 = 1 \text{ km}$ ,  $h_2 = 2 \text{ km}$

$$S = s - 12.50 \text{ m} - 9.42 \text{ m} + 0.07 \text{ m}$$

descuido de  $N$  ( $h = H + N$ )

$$N_1 = 50 \text{ m}, N_2 = 52 \text{ m}$$

$$H_1 = 950 \text{ m}, H_2 = 1948 \text{ m} \rightarrow h_1, h_2$$

$$S = s - 12.45 \text{ m} - 9.10 \text{ m} + 0.066 \text{ m}$$

↑  
error  
irregular

↑  
error de  
escala

6.4-2

(48)

## ángulos horizontales

teodolito de precisión  $\rightarrow \boxed{\pm 0.2 \dots 0.4}$

$$\Delta \pm 0.05 \dots 0.1 \text{ m} / 50 \text{ km}$$

refracción lateral  $\rightarrow 1''$  o más

reducción por las desviaciones de la vertical:

orden  $\left\{ \begin{array}{l} 1'' \dots 1' \text{ (rotación sistemática) en un punto} \\ 0.1'' \dots 2'' \text{ en las direcciones} \end{array} \right.$   
↑  
errores irregulares

posición!

→  $\boxed{\pm 10^{-5} \dots 5 \times 10^{-6} \times s}$  redes clásicas

→  $\boxed{\pm 1 \times 10^{-6}}$

redes modernas

- efectos meteorológicos
- campo de  $\rho, \mu$
- campo de  $N$
- observaciones redundantes (ajuste)

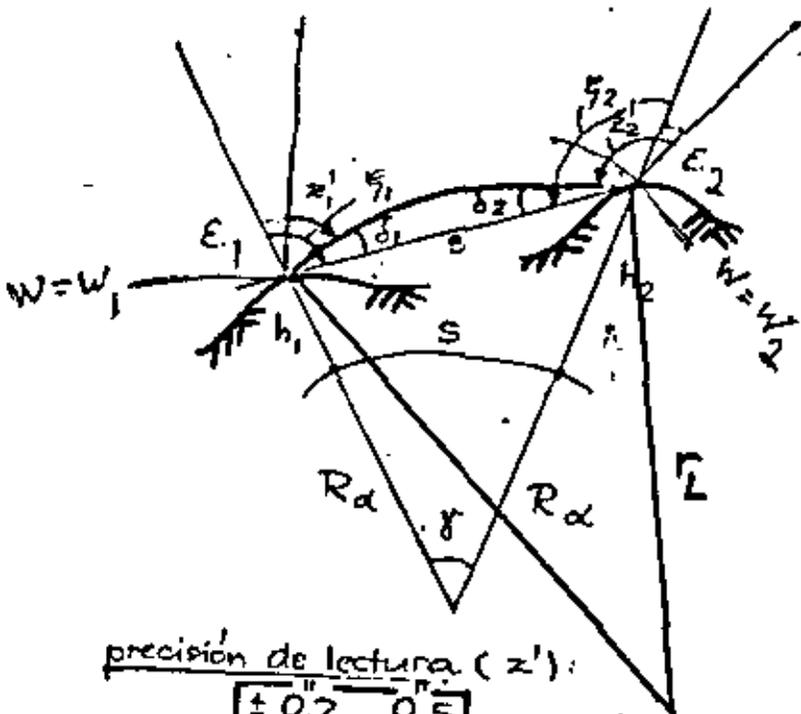
6.4-3

observaciones de altura

ángulos zenitales

6.4-4

49



precisión de lectura ( $z'$ ):

$$\pm 0.2 \dots 0.5$$

reducción por la refracción y la gravedad (desviación de la vertical):

$$\xi = z' + \delta + E = z + E$$

$z$  → introducción en modelos tridimens.

$\xi$  → introducción en un modelo del elipsoide

ángulo de refracción:

$$\delta = \frac{s}{2r_L} = \frac{2}{2R} k_L$$

curvatura de la luz

6.4-5

$$\frac{1}{r_L} = \left( \frac{78p}{T^2} \left( 0.034 + \frac{dT}{dh} \right) + \frac{1}{T} \frac{de}{dh} \right) \times 10^{-6}$$

$p$  (mbar) = presión atmosférica

$T$  (K) = temperatura

$e$  (mbar) = presión de vapor de agua

para r.m.s. ( $\delta$ ) =  $\pm 0.5''$

→ r.m.s. ( $T$ ) =  $\pm 1^\circ\text{C}$

r.m.s. ( $p$ ) =  $\pm 4$  mbar

r.m.s. ( $\partial T/\partial h$ ) =  $\pm 0.0002^\circ\text{C/m}$  !

valor convencional:

$$r_L = 8R, k_L = 0.13$$

variaciones regionales y locales

→ topografía, vegetación, altura sobre el terreno

variaciones temporales (día, año)

→  $R = -1.0 \dots +1.0$  cerca del terreno

$-0.1 \dots +0.4$  en la altura  $> 25$  m.

a) medición de  $T, p, \partial T/\partial h$

b) ángulos zenitales recíprocos y simultáneos

c) determinación de  $\delta$  en el ajuste

d) observación de  $z'$  durante diferentes condiciones meteorológicas

→ r.m.s. ( $\delta$ ) =  $\pm 1 \dots 2''$

50

desviación de la vertical

$\epsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$

medición: r.m.s. ( $\epsilon$ ) =  $\pm 0.5 \dots 1''$

problemas:

- gastos de la astronomía geodesica
- instrumentos semiautomáticos
- interpolación + disturbios locales por la topografía (< 1... 5'')

diferencias de alturas elipsoidicas

$\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = S \left( 1 + \frac{h_1 + h_2}{2R_\alpha} \right) \cos \xi_1 + \frac{S^2}{2R_\alpha \sin^2 \xi_1}$

angulos zenitales recíprocos:

$\Delta h_{12} = S \left( 1 + \frac{h_1 + h_2}{2R_\alpha} + \frac{S^2}{12R_\alpha^2} \right) \times \tan \frac{1}{2} (\xi_2' + \xi_2 - \xi_1' - \xi_1) + \dots$

nivelación geometrica

$\Delta n_{12} = \sum_1^2 \delta n \quad \dots \sum \delta n = 0$

$\Delta W_{12} = W_2 - W_1 = - \int_1^2 g \, dn \quad ; \quad \sum dW = 0$

$\Delta W_{12} = - \sum_1^2 g \, \delta n$

precisión:

- refracción vertical ( $\frac{\partial T}{\partial h}$ )
  - parte irregular  $\pm 0.01 \text{ mm}$
  - parte sistemático  $0.01 \dots 0.1 \text{ m} / 1 \text{ m} (\Delta n)$
- movimientos verticales  $0.01 \dots 0.1 \text{ mm} / \text{punto}$   
reducción por el método de observación
- error de horizonte del instrumento:  
 $0.01 \dots 0.03 \text{ mm} / \text{punto}$
- error de horizonte de la mira:
  - parte accidental:  $< \pm 0.01 \text{ mm}$
  - parte sistemático: calibración
- calibración de la mira,  $\rightarrow < \pm 0.01 \text{ mm}$
- efectos de las mareas terrestres  
 $< 0.06 \text{ mm} / \text{km}$  (luna)  
propagación en una manera accidental (en parte)
- gravedad  $\rightarrow \pm 0.1 \text{ mm} / \text{km}$  o menos (v.3.4-4)

$\pm 0.3 \dots 1 \text{ mm} / \text{km}$

## Sistemas de referencia

6.4-8

(5/)

referencia:

Sistemas locales (V. [3.2])

- orientación por la vertical

reducción en sistemas geométricos:

$\Phi, \Lambda$  resp.  $\varphi, \eta$

(sistemas locales del elipsoide o sistema global  $X, Y, Z$ )

→ transición al geocentro queda incógnita,  
paralelismo al sistema  $X, Y, Z$  ( $\pm 0.3...2''$ ),  
datum geodésico (V. [4.2.5] y [7.3.2])

reducción al geode (alturas)

$$\Delta n, \bar{q} \rightarrow \Delta W \quad [3.4.2]$$

$$\Delta W, \bar{q} \rightarrow \Delta H \quad [3.4.2], [7.3.3]$$

datum de altura,  $\Delta H \rightarrow H$

precisión de nivel (datum)  $\pm 1...2m$

precisión relativa ( $\Delta H$ )  $\sim \pm 10^{-7} \times s$   
(propagación de errores: problema!)

## Métodos de evaluación

7.1=1

→ objetivo: formación de las ecuaciones de observación ("parametrización")

→ división clásica: según los tipos de observación

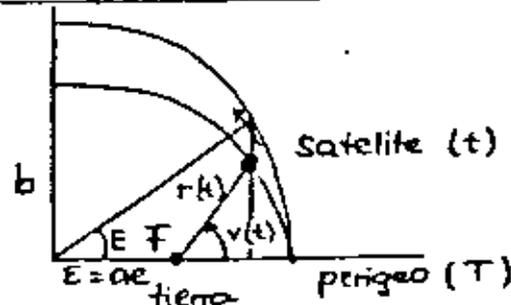
métodos espaciales (métodos satelitares)

fundamentos:

tierra como cuerpo central y con simetría central → campo de gravitación  $\hat{=}$  masa de punto

→ leyes de KEPLER (1571-1630)

1. movimiento en un elipse



$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$\tan v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e}$$

$E =$  anomalía excentrica  
 $v =$  anomalía verdadera.

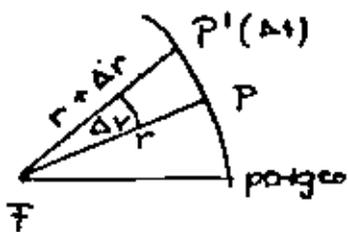
2. ley de KEPLER

7.1-2

regula la velocidad en la órbita

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \text{const.}$$

(59)



area  $\Delta F = \frac{r^2}{2} \Delta v$

$\frac{1}{2} c \times \Delta t$

$c = \text{const.}$

3. ley de KEPLER

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{k^2}{4\pi^2} (M+m) \rightarrow M$$

$m \ll M, U = \frac{2\pi a}{\bar{n}}, \bar{n} = \text{velocidad media}$

$$\frac{-2}{\bar{n}^2} = \frac{GM}{a^3}$$

parametros del sistema orbital  
 $a, e, M$

$\bar{M} = \text{anomalía media}$

$$\bar{M} = \bar{n} (t - T) = E - e \sin E$$

ecuación de KEPLER  $\rightarrow E$

leyes de KEPLER siguen del ley de gravitación (NEWTON 1642-1727).

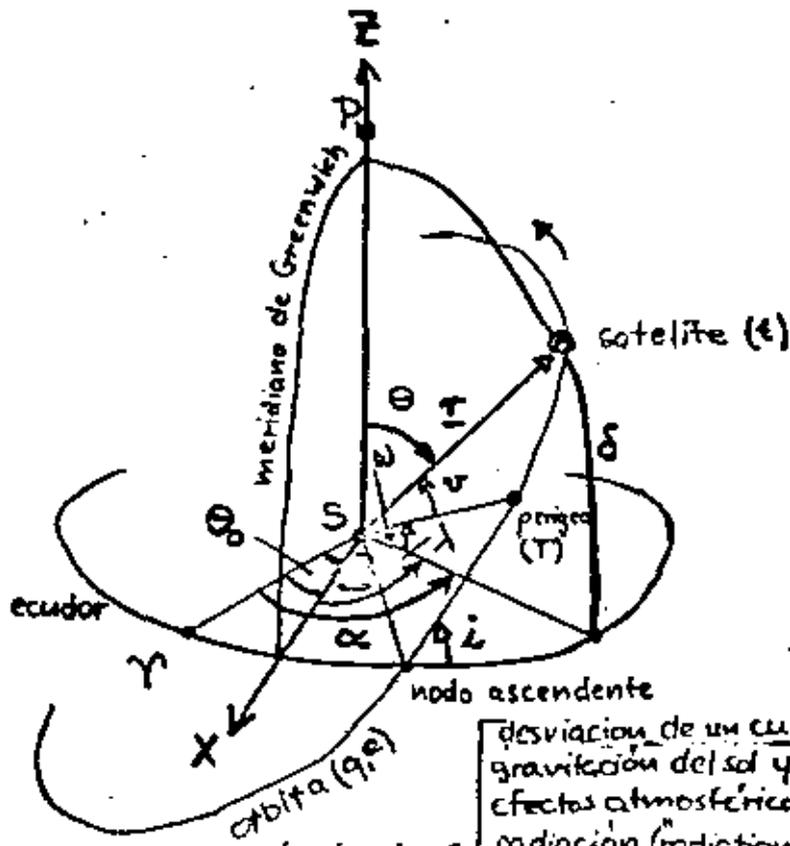
potencial

$$V = \frac{GM}{r}$$

transformación al sistema ecuatorial

parametros  $\Omega, i, \omega$

7.1-3



desviación de un cuerpo central  
gravitación del sol y de la luna  
efectos atmosféricos (drag)  
radiación ("radiation pressure")

Campo perturbado

ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \text{grad } V = \text{grad} \left( \frac{GM}{r} + R^1 \right)$$

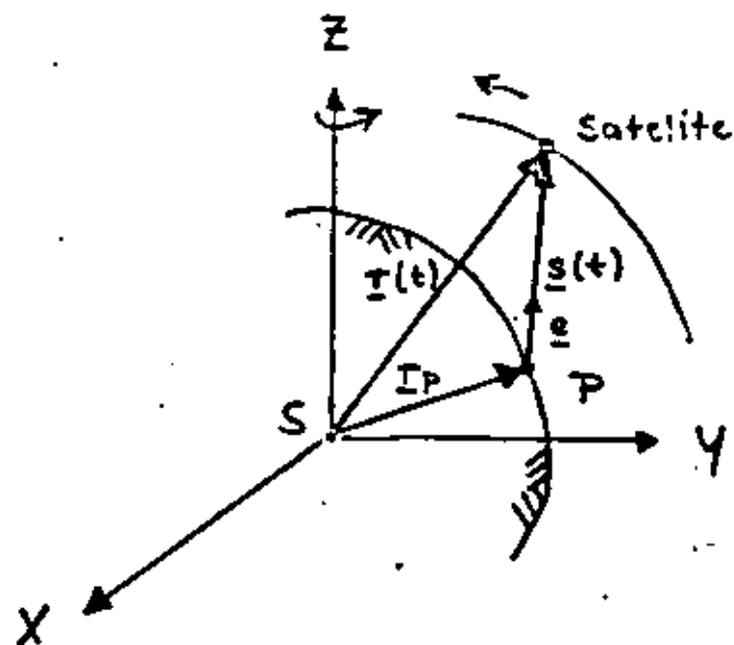
potencial de disturbio:

$$R^1 = R^1(a, e, \Omega, i, \omega, \bar{M}; J_{2000}, K_{2000})$$

$\bar{M} = \text{anomalía media}$

$$\bar{M} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} (t - T)$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3} \frac{\vec{r}}{r} + \text{grad } R^1$$



$$\underline{r}_p + \underline{s}(t) - \underline{r}(t) = \underline{0}$$

ecuación fundamental de la geodesia satelitar

$$\underline{r}_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= \underline{R}_3(\theta_0) \underline{r}_e(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} r \\ &= \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

53

vector de posición del satélite

$$\text{a) } \ddot{\underline{r}} = \text{grad } V = -\frac{GM}{r^3} \cdot \underline{r} \quad (\text{elipse de Kepler})$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_e &= r \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \\ &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega+v) \cos \Omega - \sin(\omega+v) \sin \Omega \cos i \\ \cos(\omega+v) \sin \Omega + \sin(\omega+v) \cos \Omega \cos i \\ \sin(\omega+v) \sin i \end{pmatrix} \\ &= \underline{r}_e(t) \end{aligned}$$

$$\text{b) } \ddot{\underline{r}} = \text{grad} \left( \frac{GM}{r} + R' \right)$$

$$\underline{r} = \underline{r}(a_0, e_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, \bar{M}_0; t; GM, J_{nm}, K_{nm})$$

condiciones iniciales:

elementos de órbita ( $t_0$ ),  
posición y velocidad inicial ( $t_0$ ).

parametros del campo de gravitación:

constante de gravitación geocéntrico GM  
coeficientes armónicos  $J_{nm}, K_{nm}$

$$V = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \delta) \right)$$

$$C_{nm} = -J_{nm}$$

$$S_{nm} = -K_{nm}$$

observaciones

7.1-6

$$s(t) = R_3(\theta_0) s_e(t) = R_3(\theta_0) s \underline{e}_{cc}$$

$$= s \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 & 0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta^* \cos \alpha^* \\ \cos \delta^* \sin \alpha^* \\ \sin \delta^* \end{pmatrix}$$

$$s(t) = s \underline{e}$$

$$\rightarrow \underline{r}_p + s \underline{e} - \underline{r} = \underline{0}$$

direcciones:

$$\underline{e} = \frac{1}{s} (\underline{r} - \underline{r}_p) \quad \underline{e} = \underline{e}(\theta_0, \alpha^*, \delta^*)$$

distancias:

$$s = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$

$$\Delta X = X_s - X_p, \Delta Y = Y_s - Y_p, \Delta Z = Z_s - Z_p$$

diferencias de distancias (v. 6.15):

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \sqrt{\Delta X_2^2 + \Delta Y_2^2 + \Delta Z_2^2} - \sqrt{\Delta X_1^2 + \Delta Y_1^2 + \Delta Z_1^2}$$

interferometría con bases largas (v. 6.1-7):

$$\Delta s = -(\underline{r}_2 - \underline{r}_1) \cdot \frac{\underline{r}}{r}$$

altimetría (v. 6.1-7):

$$h_a = r - r_p + \frac{r_p}{e} \left(1 - \frac{r_p}{r}\right)^2 e \sin 2\varphi - (N + \delta h_1 + \delta h_2)$$

metodos absolutos (método dinámico) satélite como "sensor" en el campo de gravitación

54

incógnitas:

7.1-7

a) posición del satélite

- $\underline{r} \rightarrow$  6 parámetros de órbita
- $\rightarrow$   $\infty^2$  coeficientes armónicos
- $\rightarrow$  otros parámetros de disturbio

b) posición del observador

- $\underline{r}_p \rightarrow$  3 coordenadas espaciales

linealización de las ecuaciones de observación

$\rightarrow$  valores aproximados

a) cálculo de órbita

coeficientes armónicos de un modelo de gravitación

b) coordenadas geodésicas ( $\varphi, \lambda, H$ )

problemas

- infinito número de incógnitas
- omisión del desarrollo de funciones esféricas
- correlación entre las incógnitas
- diferentes perturbaciones de la órbita por los coeficientes armónicos

$\rightarrow$  zonales pares  $\rightarrow \Omega, \omega$

zonales impares  $\rightarrow i, e$

tesserales  $\rightarrow i, \omega, \Omega$

perturbaciones seculares y de período largo

períodos cortos

$\rightarrow$  muchas observaciones de diferentes satélites por muchas estaciones

resultado:

55

Coordenadas geocentricas  $\pm 1...5m$  } correlación  
 Coeficientes armónicos ( $n \ll \infty$ ) }  
 (parametros de orbita para una epoca inicial)

metodos relativos (metodo geometrico)

- Satellite como señal alta
- observaciones simultaneas de  $\geq 2$  puntos:
  - no influencia del campo de gravitacion
  - reduccion de otros efectos de disturbio
- distancias: unos 100 a unos 1000 Km.

direcciones espaciales:

→ triangulacion satelitar →  $\pm 5m$

distancias espaciales:

→ trilateracion satelitar →  $\begin{cases} \pm 20m \\ \text{(microondas)} \\ \pm 0.1m \\ \text{(Laser)} \end{cases}$

observaciones Doppler:

→ translocacion →  $\pm 0.3...1m$

resultado:

Coordenadas relativas

Altimetria satelitar

(Vs. 6.1-7, 7.1-6)

$r_p(\varphi, \lambda)$   
 $r(\text{satelite})$

↔ calculacion de la orbita  
 (observaciones por  
 estaciones satelitares  
 - "tracking" -, modelo  
 de gravitacion, teoria de  
 orbita)

→ resultado:

$N + \delta h_i + \delta h_s$

orientacion y escala ← ephemeris del satelite

$\delta h_i$  = diferencia entre la topografia del mar  
 momentanea y cuasiconstante  
 → modelo de las mareas del oceano

→ resultado:

$N + \delta h_s$  →  $\pm 1m$  ( $1^\circ \times 1^\circ$ ), GEOS 3

$\delta h_s$  = topografia del mar (cuasiconstante)  
 ← mareas oceanograficas  
 $N$  = ondulation del geoid ← metodo gravimetrico

→ resultado:

$\delta h_s$  o  $N$

$$N \rightarrow \Delta g_{fp} = -\frac{\gamma_m}{R} N_p - \frac{\gamma_m}{16R} \int_0^{N-N_p} \frac{1}{\sin^3 \theta/2} d\theta$$

inversion de la formula de STOKES

→  $\pm 7mGal$  ( $1^\circ \times 1^\circ$ ), GEOS 3

# Métodos gravimétricos

1.2-1

#2-2\*

fundamentos:

problema límite gravimétrico:

determinación de la superficie de la tierra (y del geode) y del campo de gravedad exterior

por medio de

potencial  $W$  } observado en  
gravedad  $\vec{g}$  } la superficie de la tierra

observaciones:

$$\Delta W = - \int g \, dn$$

$$\vec{g} = \vec{g}(\Phi, \Lambda, \varphi)$$

M. S. MOLODENSEKI: ecuación integral no lineal en  $W$ :

$$-2\bar{w}W + \iint_S (W \frac{\partial^2}{\partial n^2} (\frac{1}{r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial n}) \, dS + 2\pi \bar{w}^2 (x^2 + y^2) + 2w^2 \iiint_V \frac{d\rho}{r'} = 0$$



$W, \frac{\partial W}{\partial n}$  en  $S$   
→  $S$  (parámetros geométricos)

56

linearización

por medio del elipsoide equipotencial y del campo de gravedad normal (vs. 4.3-1)

→ parámetros residuales (vs. 5.1-1)

potencial perturbado  
anomalía de altura

(ondulación del geode)

anomalía de gravedad

$$\begin{aligned} T_p &= W_p - U_p \\ \xi_p &= \frac{T_p - (W_p - U_p)}{\gamma_p} \\ N_p &= \frac{T_p - (W_p - U_p)}{\gamma_0} \\ \Delta g_p &= g_p - g_0 \end{aligned}$$

observaciones:

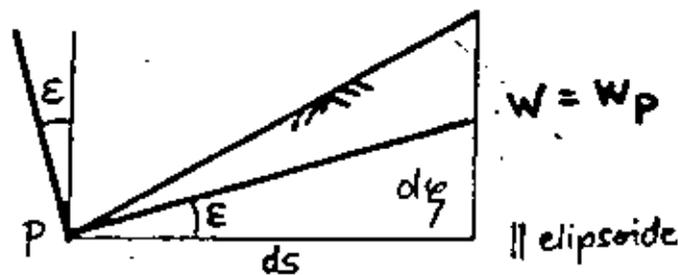
incógnitas:

$\Delta g$

$\xi(N); \eta, \zeta$

como funciones de  $T$

inclusión de  $\xi, \eta$  (vs. 5.3-1):



5.3-3):  $E(\xi, \eta; \alpha)$

$$d\xi = -E \, ds$$

componentes de la derivación de la vertical

$$\xi_p = -\frac{d\xi}{dx} = -\frac{d\xi}{M d\varphi} = -\frac{1}{M \gamma_R} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

$$\eta_p = -\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\gamma_R}{N \cos \varphi \partial \lambda} = -\frac{1}{N \cos \varphi \gamma_R} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

$M, N$  = radios principales de curvatura del elipsoide

$$q_p = -\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_p, \quad \gamma_p = -\left(\frac{\partial U}{\partial n_E}\right)_p = -\frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_p = -\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_p$$

$$\boxed{T_p = W_p - U_p} \quad ; \quad \boxed{\Delta q_p = q_p - \gamma_p}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p = -q_p + \gamma_p$$

$$= -q_p + \left(\gamma_R + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E}\right)_R \xi_p + \dots\right)$$

$$= -\Delta q_p + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E}\right)_R \xi_p$$

$$\Delta q = -\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_p + \frac{1}{\gamma_R} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E}\right)_R T$$

$$\Delta T = 0$$

problema limite gravimetrico en forma linealizada

Vs. 4.3-4 : aproximación esférica:  $\frac{\partial \gamma}{\partial n_E} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{\gamma}{r}$

$$\rightarrow \boxed{\Delta q = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T}$$

57 Solución de M.S. Molodenski (1945)

→ Superficie de la tierra

$$\boxed{T = \frac{R}{4\pi} \iint_S (\Delta q + G_1) S(\varphi) d\sigma}$$

$$G_1 = \frac{R^2}{2\pi} \iint_S \frac{h-h_R}{l_0^3} \Delta q d\sigma; \quad l_0 = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$$



función de STOKES:

$$S(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \varphi)$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} + 1 - 5 \cos^2 \varphi - 6 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 3 \cos^2 \varphi \cos \left( \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\boxed{\xi = \frac{T}{\gamma_R} \quad ; \quad W_p = U_R}$$

Solución de G.G. STOKES (1849)

7.2-5

58

ventajas y desventajas→ geóide

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g \, d\sigma$$

$$N = \frac{R}{4\pi \gamma_m} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g \, d\sigma$$

→ desviación de la vertical

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}_0 = \frac{1}{4\pi \gamma_m} \iint_{\sigma} \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \Delta g \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma$$

VENING-MEINSEZ (1928)

desarrollo en funciones esféricas (Vs. 5.1-2, 5.2-3):

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} T_n$$

$$N = \frac{1}{\gamma_m} \sum_{n=2}^{\infty} T_n = R \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)$$

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \Delta g_n = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2}{r} T$$

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) T_n$$

$$\Delta g = \gamma_m \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \sum_{m=0}^n (\delta C_{nm} \cos m\lambda + \delta S_{nm} \sin m\lambda) P'_{nm}(\cos \theta)$$

- método global → resultados refieren al sistema geocéntrico
- medición de la gravedad posible en los continentes y en los océanos

problemas:

- igualdad del potencial y de la masa entre la tierra y el elipsoide:

$$\delta U = W_0 - U_0 = W_p - U_p = 0$$

$$\delta M = M - M_{el} = 0$$

- "escala" de la solución (geóide)

$$N_0 = \frac{G}{R \gamma_m} \delta M - \frac{1}{\gamma_m} \delta U$$

determinación:

$$a) \Delta g_0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \, d\sigma = -\frac{G}{R^2} \delta M + \frac{2}{R} \delta U$$

$$b) N_0 = \frac{R}{S} (S_0 - S_{el}) - \frac{1}{S} \int N' ds$$

- c) GM por observaciones de sondas espaciales

- $\Delta g$  en todos puntos de la tierra { 1982: ~60% (1°x1°) anomalías }
- predicción de anomalías en regiones no observadas (Vs. 5.4-1)

predicción de  $\Delta q$ :

$$\Delta \tilde{q}_p = \underline{C}_p^T \underline{\bar{C}}^{-1} \underline{\Delta q}'$$

$$\underline{C}_p = \begin{pmatrix} C_{p1} \\ \vdots \\ C_{pn} \end{pmatrix}, \quad \underline{\bar{C}} = \underline{C} + \underline{D}$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{m1} & \dots & D_{mn} \end{pmatrix}$$

$\underline{C}$  ← función de covarianza del señal  $\Delta q$ :  $C(\psi)$

$\underline{D}$  ← matriz de covarianzas de los errores

$$\underline{\Delta q}' = \begin{pmatrix} \Delta q'_1 \\ \vdots \\ \Delta q'_m \end{pmatrix} \leftarrow \text{anomalías observadas}$$

— evaluación de las formulas integrales por sumas sobre anomalías medias, p.e.  
 ( $5^\circ \times 5^\circ$ ,  $5'$  e.a.,  $1^\circ \times 1^\circ$ ,  $1'$  e.a.,  $5' \times 5'$ ,  $6' \times 10'$   
 ( $\pm 5 \dots 10 \text{ cm ge}$ ) ( $\pm 5 \dots 20 \text{ cm ge}$ )  
 → calculación de los valores medios  $\bar{\Delta q}$  de las anomalías observadas: predicción

— solución de MORDENSTEIN: corrección por el terreno (topografía) → "cm... m"

— solución de STORES: reducción de  $g$  al geóide → hipotesis sobre las masas }  $\Delta T = 0!$

(vs. 5.2-1):  $\Delta q_F = g + \delta q_F - \gamma_0$ ,  $\delta q_F = -\frac{\partial g}{\partial H} H$

(vs. 5.2-3) → efecto indirecto: "cm... m"

7.2-7 — gran influencia de las zonas cercanas a  $\varphi, \lambda$  → levantamiento especial para  $\psi_R \leq 5 \dots 10 \text{ km}$  — 7.2.8

59

resultados:

$$N : \pm 3 \dots 10 \text{ m}$$

$$\varphi, \lambda : \pm 0.3 \dots 1''$$

por causa de la medición incompleta de la superficie de la tierra

→ combinación con datos satelitares

coordenadas tridimensionales

$$\varphi = \Phi + \delta\Phi - \varphi_0$$

$$\lambda = \Lambda + \delta\Lambda - \lambda_0 \sec\varphi$$

$\delta\Phi, \delta\Lambda$  = curvatura de la vertical (vs. 5.3-4); errores de hipótesis ( $\delta\Phi, \delta\Lambda$ ;  $\partial g / \partial H$  en  $\Delta q$ ) no efectúan  $\varphi, \lambda$

errores de  $\varphi, \lambda$ :  $\pm 0.3'' \hat{=} \pm 10 \text{ m}$   
 " "  $\varphi_0, \lambda_0$ :  $\pm 0.3'' \hat{=} \pm 10 \text{ m}$  } importancia

$$h = H + N = H^N + \xi$$

errores de hipótesis ( $\bar{g}$  en  $H$ ,  $\partial g / \partial H$  y efecto inclinado en  $N$ ) no efectúan  $h$

errores de  $H$  o  $H^N$ :  $\pm 0.1 \dots 1 \text{ m}$  } importancia  
 " "  $N$  o  $\xi$ :  $\pm 3 \text{ m}$  } importancia  
 o mejor (combinación)

gravedad externa

7.2-9



Metodos astrogeodesicos

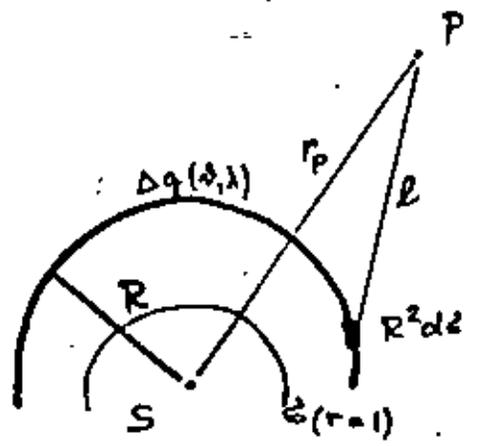
≅ primera problema limite (DIRICHLET)

PIZETTI

$$T_P = \frac{R}{4\pi} \iint_{\Sigma} S(r, \psi) \Delta g \, d\Omega$$

$$S(r, \psi) = \frac{2R}{l} + \frac{R}{r} - \frac{3Rl}{r^2} - \frac{R^2}{r^3} \cos \psi \left( 5 + 3 \frac{2l}{r} \frac{r_p - R \cos \psi + l}{2r_p} \right)$$

$$\Delta g_P = \frac{R^2 (r_p^2 - R^2)}{4\pi r_p} \iint_{\Sigma} \frac{\Delta g}{l^3} \, d\Omega$$



fundamentos:

determinación de la superficie de la tierra (y del geode)

por medio de

observaciones astronómicas  $\Phi, \Lambda, A$

observaciones geodesicas  $S, \text{ángulos horizontales}, E, \delta m;$

Gravedad  $g$  sirve para reducción solamente ( $\delta m, N, H$ ).

Solución tridimensional (Vs. 3.3-1)

→ diferencias de coordenadas en el sistema  $X, Y, Z$  o  $\varphi, \lambda, h$ ; observaciones:  $A, E, S, \Delta h (\delta m, e); \Phi, \Lambda$  (Vs. 3.3 y 4.2-9... 4.2-11)

→ el datum geodesico fija el sistema al sistema geocentrico (Vs. 4.2-12, 5.3-3):

- a)  $X_0, Y_0, Z_0; \bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z$
- b)  $\varphi_0, \lambda_0, h_0; \bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z; a, f$
- c)  $\xi_0, \eta_0, N_0; \bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z; a, f$

7.3-2

redes clásicas:

$$F_1 = \eta_1 = 0; \hat{\Delta} \varphi_1 = \Phi_1, \lambda_1 = \Lambda_1$$

$$N_1 = 0; \hat{\Delta} h_1 = H_1$$

o  $N_1$  determinado por la reducción de las bases al geóide (H) y introducción como distancias en el elipsoide.

$$(N_{base} = 0);$$

$$E_{\bar{x}} = E_{\bar{y}} = E_{\bar{z}} = 0 \rightarrow \text{paralelismo de los sistemas}$$

por medio de tres (o más) ecuaciones de orientación (vs. 5.3-3) en la forma

$$\alpha = A - \eta \tan \varphi + (-\zeta \sin \alpha + \eta \cos \alpha) \cot z$$

(en el punto fundamental con  $\zeta_1 = \eta_1 = 0 \rightarrow \alpha = A$ )

$$\zeta = z + (\zeta \cos \alpha + \eta \sin \alpha)$$

redes modernas:

$X, Y, Z$  en muchos puntos

por métodos satelitares (sistema geocéntrico)

transformación de redes clásicas (vs. 4.2-12)

$$p.e.: \bar{\varphi}, \bar{\lambda}, \bar{h} \xrightarrow{\text{a, f}} \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \xrightarrow[\text{puntos idénticos}]{X, Y, Z} X_0, Y_0, Z_0, E_{\bar{x}}, E_{\bar{y}}, E_{\bar{z}}$$

$$\rightarrow d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z} \xrightarrow{\text{a, f}} X, Y, Z \rightarrow \varphi, \lambda, h$$

red clásica

61

7.3-3

Sistemas de posición

problema en redes tridimensionales:

alturas  $h$  por medio de

- ángulos zenitales (refracción y desviaciones de la vertical, vs. 6.4-4)

$$\rightarrow \Delta h \approx \pm 10^{-5} \times S$$

- nivelación geométrica-astronómica (vs. 3.3-2)

$$\Delta h_{12} = \int_1^2 dh - \int_1^2 \epsilon ds$$

$$\epsilon = \zeta \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

problema de interpolación de  $\epsilon$ :

- muchas observaciones astronómicas ( $\varphi, \lambda$ )
- interpolación por medio de otras informaciones sobre el campo de gravedad:

desviaciones verticales topográficas

- topográficas-isostáticas
- gravimétricas

evaluación por interpolación lineal:

$$\int_1^2 \epsilon ds = - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} S$$

distancias entre los puntos astronómicos

$$3 \dots 50 \text{ Km} \rightarrow \pm 10^{-5} \times S$$

precisión de las observaciones de posición

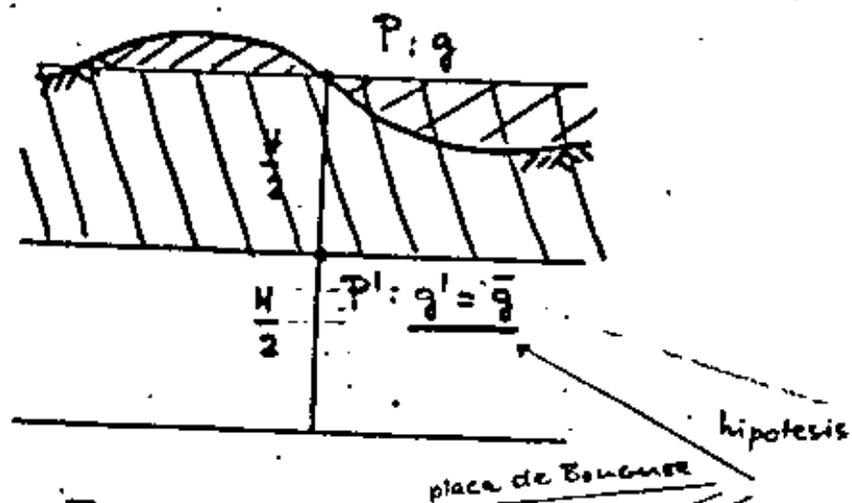
$$\sim \pm 10^{-6} \times S$$



determinación de  $\bar{g}$

$\bar{g}$  por medio de la reducción de aire libre de Bouguer (y de la topografía):

7.3-6  
63



$$\begin{aligned} \bar{g} &= g - \int g_p + \int g_F - \int g_p \\ &= g + \int g_F - 2 \int g_p \\ &= g + 0.3086 \frac{H}{2} - 2 \cdot 0.0419 \cdot g \cdot \frac{H}{2} \end{aligned}$$

$\rho = 2.67 \text{ (g/cm}^3\text{)}$

$$\boxed{\bar{g} = g + 0.0424 H}$$

Precisión de  $\bar{g}$ :

$$\frac{d\bar{g}}{dH} = -\frac{d\bar{g}}{dH} \quad dH = -H \frac{d\bar{g}}{dH} = -\frac{1}{9.8} H d\bar{g}$$

$$dH_{mF} = 10^{-6} \cdot H_{(m)} \frac{d\bar{g}(\text{mgal})}{dH}$$

p.e.:  $H = 1000 \text{ m}, d\bar{g} = 10 \text{ mgal} \rightarrow dH = 10^{-2} \text{ m} = 0.01 \text{ m}$

diferencia Geoide / Quasigeoide

7.3-7

$$N - \eta = H^N - H = \frac{c}{\gamma} - \frac{c}{\bar{g}} = \frac{c}{\gamma} \left( \frac{\gamma - \bar{g}}{\bar{g}} \right) \quad c = \bar{g} H$$

$$\bar{g} = g + 0.3086 \frac{H}{2} - 0.0419 g H$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + 0.3086 \frac{H}{2}$$

$$\begin{aligned} \bar{g} - \bar{\gamma} &= g - \gamma - 0.0419 g H \\ &= g - (\gamma_0 - 0.3086 H) - 0.0419 g H \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{g} - \bar{\gamma} = \Delta g_B} \quad (\text{Bouguer}), \text{ Ks. 5.2-2}$$

correlación de  $\Delta g_B$  con  $\bar{H}$  (altura media sobre una región grande,  $\sim 100 \times 100 \text{ km}^2$ , con compensación isostática):

$$\Delta g_B (\text{mgal}) \approx -100 \cdot \bar{H} (\text{km}) \quad (\text{relación empírica})$$

$$H^N - H = N - \eta = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H = \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H$$

$$\approx -\frac{100}{9.8 \cdot 10^3} \frac{\bar{H}}{\text{km}} \times H \cdot 10^3$$

5.4-6:

$$\boxed{N - \eta (\text{m}) \approx -0.1 \frac{H}{\text{km}} \times H} \quad \text{aproximación}$$

ej:  $\bar{H} = 3 \text{ km}, H = 4.8 \text{ km}$   
 $N - \eta = 1.4 \text{ m}$

diferencias de alturas

$$(1) \quad \Delta C_{12} = C_2 - C_1 = \int_1^2 g \, dn$$

$\oint g \, dn = 0 \rightarrow$  ajuste

$$(2) \quad \Delta H_{12}^{dyn} = H_2^{dyn} - H_1^{dyn} = \frac{1}{\gamma_0^{45}} (C_2 - C_1)$$

$$= \frac{1}{\gamma_0^{45}} \int_1^2 g \, dn$$

Vs. 3.4-5

$$\Delta H_{12}^{dyn} = \int_1^2 dn + \int_1^2 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn$$

$$E_{12}^{dyn} = \sum_1^2 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta n$$

p.e.  $g = \text{const.} = 9.81262 \text{ ms}^{-2}$   
 $\gamma_0^{45} = 9.80618 \text{ ms}^{-2}$   
 $\sum \delta n = \text{const.} = \Delta n$

$$\rightarrow E^{dyn} = 0.653 \times 10^{-3} \times \Delta n$$

$\Delta n = 10 \text{ m} \rightarrow$	6.6 mm
$\Delta n = 100 \text{ m} \rightarrow$	6.6 cm
$\Delta n = 1000 \text{ m} \rightarrow$	6.6 m

$$(3) \quad \Delta H_{12} = H_2 - H_1 = \int_1^2 dn + \int_1^2 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn + \int_0^1 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn - \int_0^1 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} dn$$

$$E_{12} = \sum_1^2 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta n + \frac{\bar{g}_1 - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_1 - \frac{\bar{g}_2 - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_2$$

p.e.

$$g_1 = 9.81262 \text{ ms}^{-2}, H_1 = 100 \text{ m}, \bar{g}_1 = 9.812662 \text{ ms}^{-2}$$

$$g_2 = 9.81220 \text{ ms}^{-2}, H_2 = 200 \text{ m}, \bar{g}_2 = 9.812285 \text{ ms}^{-2}$$

$$\Delta n = 100 \text{ m}$$

$$E_{12} = 63.4 + 66.1 - 124.5 = 5 \text{ mm.}$$

$$(4) \quad \Delta H_{12}^{dyn} = H_2^{dyn} - H_1^{dyn} = \int_1^2 dn + E_{12}^N$$

$$E_{12}^N = \sum_1^2 \frac{g - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} \delta n + \frac{\bar{g}_1 - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_1 - \frac{\bar{g}_2 - \gamma_0^{45}}{\gamma_0^{45}} H_2$$

(2), (3), (4)

$$\rightarrow \oint dn = 0$$

$$\oint dH^{dyn} = \oint dH = \oint dH^N = 0$$

 $\rightarrow$  ajusteprecisión de redes clásicas:

datum de altura:  $\pm 1 \dots 2 \text{ m}$  ref. al geoida  
 (Vs. 3.4-1, 3.4-2)

precisión relativa:  $\pm 0.3 \dots 1.0 \text{ mm/term}$

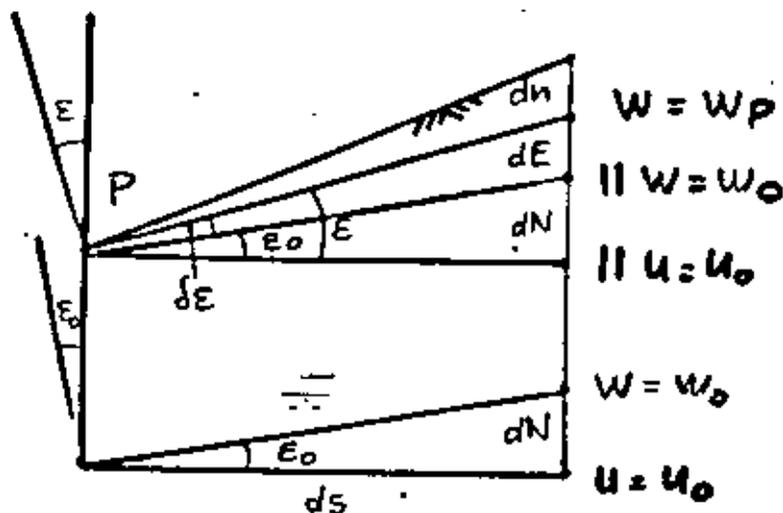
correlación de errores sistematicos (Vs. 6.4-7)

$$\sim \pm 10^{-7} \times S$$

# Determinación del geoide

7.3-10  
73-10

→ Nivelación astronómica (HELMERT 1870)



$W = W_P$   
 $W = W_0$   
 $U = U_0$   
 $W = W_0$   
 $U = U_0$

$$(i) \Delta N_{12} = N_2 - N_1 = - \int_1^2 \epsilon_0 ds$$

$\epsilon_0 = \epsilon + \delta \epsilon$   
 $\left[ \begin{array}{l} \epsilon(\xi, \eta) \leftarrow \text{observaciones} \\ \delta \epsilon(\delta \phi, \delta \lambda) \leftarrow \text{curvatura de la vertical} \end{array} \right.$   
 Vs. 5.3-4

$$(ii) \Delta N_{12} = - \int_1^2 \epsilon ds = E_{12}$$

$E_{12} = \int \delta \epsilon ds$ , reducción ortométrica (Vs. 7.3-8)

Quasigeoide

$$\Delta \epsilon_{12} = - \int_1^2 \epsilon ds - E_{12}^N$$

$$(R. 7.3-7) \Delta \epsilon_{12} = \Delta N_{12} + E_{12} - E_{12}^N = \Delta N_{12} - \left| \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H \right|$$

# interpolación de $\epsilon$

7.3-11

## 65 Interpolación aritmética

(i) lineal

$$\Delta N_{12} = - \int_1^2 \epsilon ds = - \int_1^2 \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{s} s_2 \right) ds$$

$$\Delta N_{12} = - \epsilon_1 s - \frac{s^2}{2} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{s} = - \frac{s}{2} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

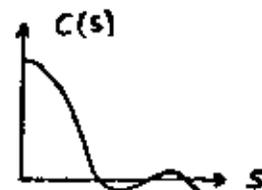
(ii) polinomial (sistema local)  
 o sistema elipsoidal

$$N = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = - \frac{\partial N}{\partial x} = -a_{10} - a_{11}y - 2a_{20}x - \dots \\ \eta = - \frac{\partial N}{\partial y} = -a_{01} - a_{11}x - 2a_{02}y - \dots \end{array} \right\} \rightarrow a_{10}, a_{01}, a_{11}, a_{20}, a_{02}, \dots$$

(iii) predicción de  $\xi, \eta$

p.e.  $C(s) = M \{ \xi, \eta \}$   
 (Vs. 5.4-)



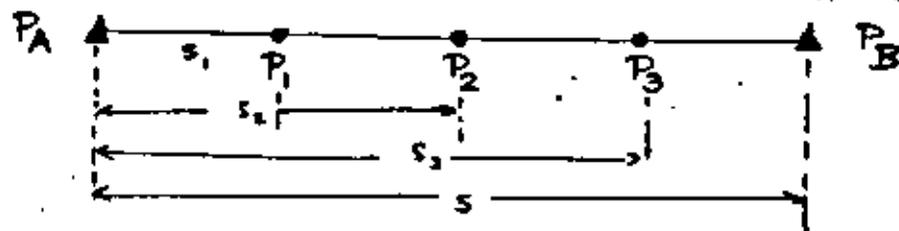
(Vs. 7.2-7):  $\tilde{\xi}_P = C_P^T \tilde{C}^{-1} \tilde{\xi}'$

problemas:

- disturbios locales (topografía) en  $\xi, \eta$
- campo de  $\xi, \eta$  es no lineal sobre distancias mas largas
- dificultades en la aproximación por polinomios
- correlación pequeña entre puntos apartados.

interpolación por informaciones adicionales

$P_A, P_B$ : observaciones astronómicas  $E_A, E_B$   
 $P_{A_1}, P_{B_1}, P_{A_2}, P_{B_2}, P_{A_3}, P_{B_3}$ : cálculo de desviaciones verticales aproximadas



diferencias en  $P_A, P_B$ :

$$\delta E_A = E_A - \tilde{E}_A \quad ; \quad \delta E_B = E_B - \tilde{E}_B$$

interpolación lineal:

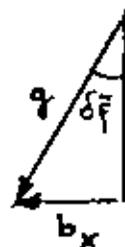
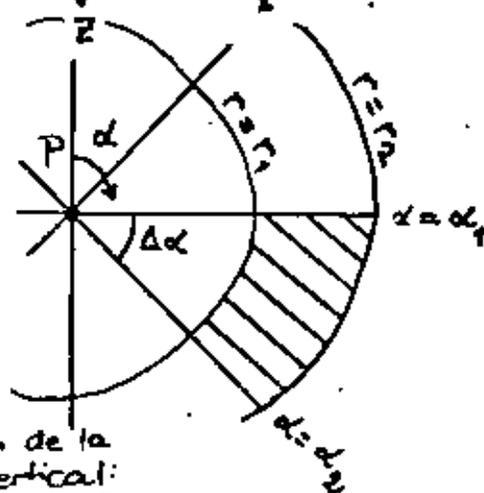
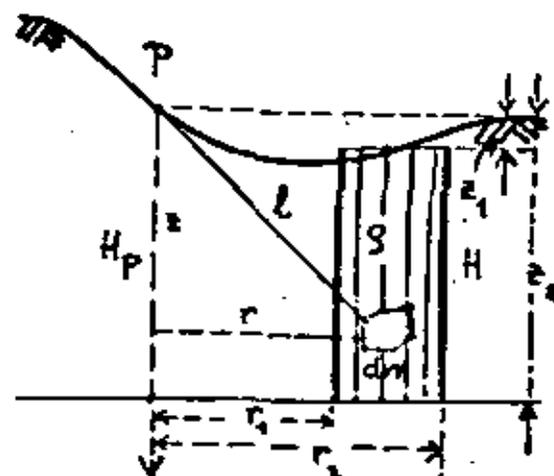
$$\delta E_1 = \delta E_A + \frac{\delta E_B - \delta E_A}{S} s_1$$

$$\delta E_2 = \dots$$

desviaciones verticales interpoladas:

$$E_1 = \tilde{E}_1 + \delta E_1$$

$$E_2 = \tilde{E}_2 + \delta E_2$$

 66 desviaciones de la vertical topográficas


gravitación de la columna vertical:

$$\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = G \rho H \begin{Bmatrix} \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \end{Bmatrix} \text{ ó } \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 + H^2}}{r_1 + \sqrt{r_1^2 + H^2}}$$

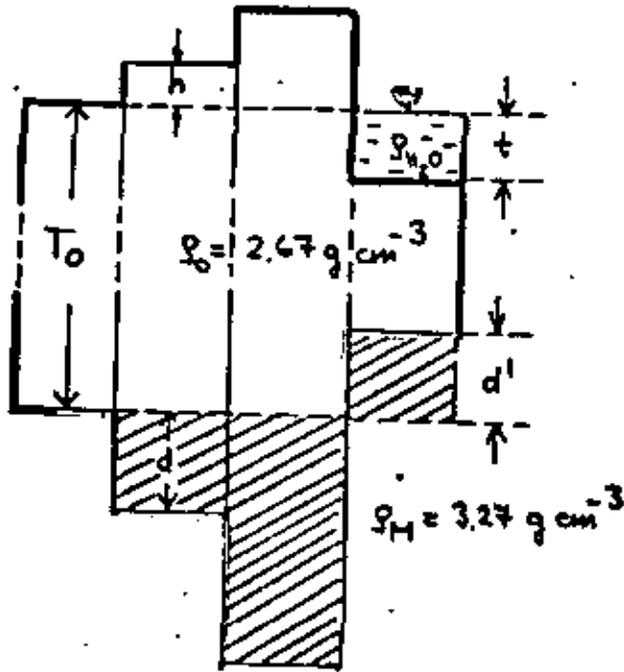
$$\delta \tilde{\eta} = \frac{b_x}{g} \quad ; \quad \tilde{\eta} = \sum \delta \tilde{\eta}$$

$$\delta \tilde{\eta} = \frac{b_y}{g} \quad ; \quad \tilde{\eta} = \sum \delta \tilde{\eta}$$

topografía y geología:  
 desviaciones de la vertical topográficas - isostáticas  
 modelo isostático de Airy - Heiskanen

7.3-14

67



condiciones de equilibrio:

$$(\rho_M - \rho_0)d = \rho_0 h \quad (\text{continente})$$

$$(\rho_M - \rho_0)d' = (\rho_0 - \rho_{H_2O})t \quad (\text{oceano})$$

$$\rho_{H_2O} = 1.03 \text{ g cm}^{-3}$$

$$d = 4.45 h, \quad d' = 2.73 t$$

$$T_0 = 30 \dots 40 \text{ km}$$

→ efecto adicional al efecto topográfico,  
 depende de  $\rho_M - \rho_0, T_0 + d$ .

7.3-15

campo de gravedad:

desviaciones de la vertical gravimétricas

formulas de VENING-MEINESZ (Vs. 7.2-5)

→  $\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}$  en integración sobre una  
 región limitada (~3x5).

precisión de las desviaciones interpoladas

$$\pm 0.5 \dots 2''$$

precisión del geide

$$m_{\Delta N}^2 = \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}\right)^2 m_s^2 + \frac{s^2}{2} m_E^2$$

p.e.  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 10''$ ,  $s = 40 \text{ km}$   
 $m_s = \pm 0.1 \text{ m}$ ,  $m_E = \pm 1''$

$$m_{\Delta N}^2 = 2.5 \times 10^{-11} + 2 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-2}$$

$$m_{\Delta N} = \pm 0.14 \text{ m} \quad (\text{interpolación lineal!})$$

llanos	: 10... 20 km	→	} ± 0.05... 0.2 m sobre 50 km
montañas	: 5... 10 km	→	
montañas altas	: 3... 5 km	→	

# Métodos de combinación

7.4-1

## métodos satelitares

- resultados globales (sistema geocentrico),
- precisión 0.1m (relativa) ... 5 (absol.) m
- resolución limitada: unos 100 km

## métodos gravimétricos

- resultados globales (sistema geocentrico), sin escala,
- problemas por levantamiento incompleto,
- precisión del geide ± 0.3m (rel.) ... ± 3m (abs.),
- resolución alta (20... 50 km)

## métodos astrogeodésicos

- resultados regionales (sistemas dependen del datum geodésico),
- precisión alta en las redes de posición y de altura (solamente en continentes),
- resolución alta (20... 50 km y más).

## Combinaciones

- mejor explotación de la información
- se encuentran efectos sistemáticos
- determinación de parámetros de transformación

### métodos:

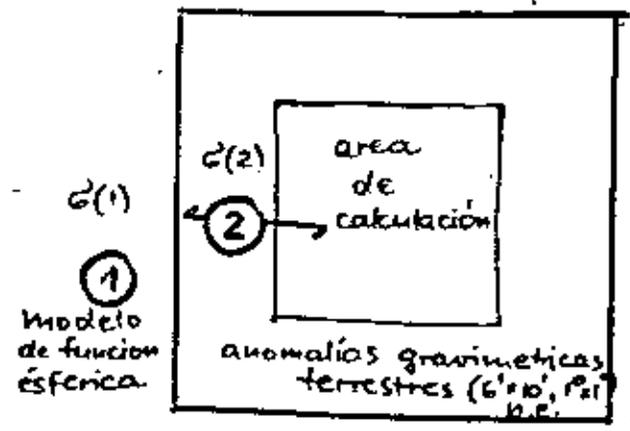
- funcionales
- estadísticos

68

ejemplo por un método funcional:

7.47

determinación del geide por datos gravimétricos y satelitares



$$N = N(1) + N(2) + N(3)$$

$$(4.5.1-2) \quad N(1) = R \sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$$

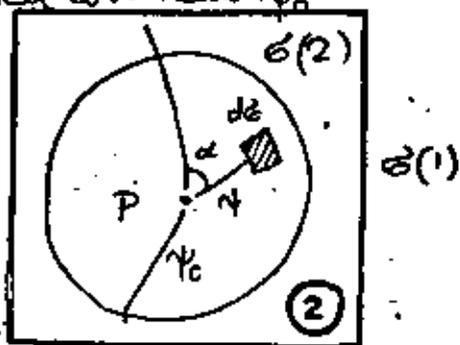
$$(4.7.2-5) \quad N(2) = \frac{R}{4\pi\gamma_m} \iint_{\sigma(2)} (\Delta g - \Delta g(1)) S(\psi) d\sigma$$

$$\Delta g(1) = \gamma_m \sum_{n=2}^{n_{max}} (n-1) \sum_{m=0}^n (\delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$$

$$N(3) = \frac{R}{4\pi\gamma_m} \iint_{\sigma(1)} (\Delta g - \Delta g(1)) S(\psi) d\sigma = 0$$

esfera de unidad  $\sigma = \sigma(1) + \sigma(2)$

integración sobre una región limitada  $\sigma(z)$ , área de integración como zona esférica con radio  $r_0$



7.4-3

(69)

$\psi_0$  depende de

- errores del modelo
- errores de  $\Delta g$  en ②
- errores de omisión del modelo en la región exterior ①  $\hat{=}$  influencia de  $\Delta g$  en ①

error total del geóide:

$$\sigma(N)_{r_0}^2 = \sigma(N(1))^2 + \sigma(N(2))^2 + \sigma(N(3))^2$$

error del modelo:

$$\sigma(N(1))^2 = \frac{R^2}{4\gamma_m^2} \sum_{n=2}^{n_{max}} Q_n^2(r_0) \sigma_n^2(\Delta g)$$

coeficientes de truncación:

$$Q_n(r_0) = \int_{\psi_0}^{\pi} S(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi \, d\psi$$

Vs. 5.4-4: varianzas de grado (anomalías) para errores

$$c_n^2(\Delta g) = \int_m^2 (n-1)^2 \sum_{m=0}^{n_{max}} (\sigma^2(\bar{c}_{nm}) + \sigma^2(\bar{s}_{nm}))$$

7.4-4

errores de  $\Delta g$

→ propagación de errores por la fórmula de STOKES (Vs. 7.2-5):

$$\sigma(N(2))^2 = \left( \frac{R}{4\gamma_m} \right)_{r_0}^2 \sum_{\psi_0} (S(\psi) \sigma(\Delta g) \Delta\sigma)^2$$

sin error correlación entre  $\Delta g$  !

error de omisión

$$\sigma(N(3))^2 = \frac{R^2}{4\gamma_m^2} \sum_{n=n_{max}+1}^{\infty} R_n^2(r_0) c_n(\Delta g)$$

varianzas de grado de las anomalías (Vs. 5.4-4)

$$c_n(\Delta g) = \frac{2n+1}{2} \int_{\psi=0}^{\pi} C(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi \, d\psi$$

ejemplo

$$\sigma^2(\bar{c}_{nm}), \sigma^2(\bar{s}_{nm}) \leftarrow \text{modelo GEM 9 (n,m = 20,20)}$$

$$\sigma(\Delta g) \leftarrow 1^\circ \times 1^\circ \Delta g, \pm 10 \text{ mGal, sin correlación}$$

$$c_n(\Delta g) \leftarrow \text{modelo TICHERRING - RAMP 1974 (Vs. 5.4-4)}$$

$$\sigma(N(3))^2 = \text{error de omisión sin usar un modelo (solamente } 1^\circ \times 1^\circ \Delta g)$$

método estocástico:

Colocación por cuadrados mínimos!

KEARUP 1969, MORITZ 1972 et al.

Vs. 1.5-2:

$$\underline{L} = \underline{A}x + \underline{B}T + \underline{m}, \quad \underline{B}T = \underline{s}$$

observaciones como funciones de T:

$$l_i = L_i^0(T) \quad n \text{ observaciones, } i = 1 \dots n$$

p.e.

$$\text{Vs. 7.2-3: } \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T$$

$$\rho = -\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \eta = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

$$\text{Vs. 5.1-2: } N = \frac{T}{g}$$

función de covarianza básica para T:

Vs. 5.4-4:

$$K(\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} k_n P_n(\cos \varphi) = M\{T_i T_k\}$$

varianzas de grado de T

$$k_n = \left(\frac{R}{n-1}\right)^2 c_n$$

 $c_n(\Delta g)$  de un modelo global (vs. 5.4-4)

(m)

$\psi_0$	$\sigma(N(1))$	$\sigma(N(2))$	$\sigma(N(3))$	$\sigma(N)$	$\sigma(\tilde{N}(3))$
$0^\circ$	$\pm 2.8$	$\pm 0$	$\pm 3.6$	$\pm 4.6$	$\pm 39$
$5^\circ$	1.6	0.9	1.6	2.4	32
$10^\circ$	1.3	1.0	0.8	1.8	28
$20^\circ$	0.9	1.0	0.6	1.5	23
$30^\circ$	0.6	1.1	0.2	1.3	23
$60^\circ$	0.6	1.1	0	1.3	21
$90^\circ$	0.6	1.1	0	1.2	14
$150^\circ$	0.5	1.1	0	1.2	8
$180^\circ$	0	1.2	0	1.2	0

$$\psi_0 = 30^\circ$$

problemas:

- regiones de  $\Delta g$  no observado  
→ predicción o modelo ( $r_{max}$ )
- inseguridad de los errores  $\sigma(\bar{C}_{nm})$ ,  $\sigma(\bar{S}_{nm})$ ,  $\sigma(\Delta g)$  y ignorancia de las correlaciones

mejoramiento por

- introducción de anomalías de mejor precisión y resolución en la vecindad ( $\psi \leq 3^\circ \dots 5^\circ$ ), p.e.  $5' \times 5'$  o  $6' \times 10'$

$$\rightarrow \sigma(N) = \pm 0.5 \dots 1 \text{ m}$$

propagación de covarianzas

$$M\{T\} = 0, \quad M\{l_i\} = M\{L_i T\} = L_i M\{T\} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(T(P), l_i) &= C_{Pi} \\ &= M\{T(P)l_i\} = M\{T(P) L_i^R T(Q)\} \\ &= L_i^R M\{T(P)T(Q)\} = \underline{L_i^R K(P,Q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(l_i, l_k) &= C_{ik} \\ &= M\{l_i l_k\} = M\{L_i^P T(P) L_k^R T(Q)\} \\ &= L_i^P L_k^R M\{T(P)T(Q)\} = \underline{L_i^P L_k^R K(P,Q)} \end{aligned}$$

estimación de señales como funciones de T:

$$s_j = S_j^P T(P) \quad m \text{ señales, } j=1 \dots m$$

$$\text{cov}(s_j, l_i) = S_j^P C_{Pi} = \underline{S_j^P L_i^R K(P,Q)}$$

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (A^T \underline{C}^{-1} A)^{-1} A^T \underline{C}^{-1} \underline{l} \\ \underline{s}_P &= \underline{C} \underline{C}^{-1} (\underline{l} - A \underline{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{C}^{-1} &= \underline{C}^{-1} + \underline{D}^{-1} \\ \underline{C} &= \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & \dots & C_{mn} \end{pmatrix} \\ \underline{C}^{-1} &= \begin{pmatrix} S_1^P C_{11} & \dots & S_1^P C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m^P C_{m1} & \dots & S_m^P C_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7/1

Resultados y problemas actualesSistemas fundamentalesOrientación de la tierra en el espacio:

astronomía  $\left\{ \begin{array}{l} \text{estrellas fijas} \\ \text{radio fuentes} \end{array} \right.$

$$\rightarrow \boxed{\pm 0.1 \rightarrow \pm 0.001}$$

sistema geocéntrico terrestre:

astronomía (~50 observatorios)

geodesia satelital

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{CIO: } \pm 0.01/5d \dots \pm 0.001/1d \\ \text{UTO: } \pm 1\text{ms}/5d \dots \pm 0.1\text{ms}/1d \end{array}}$$

geodesia satelital (10...20 est. permanentes + est. transitorias)

$$\rightarrow \boxed{X, Y, Z: \pm 1\text{m} \dots 5\text{m}}$$

escala:  $\pm 1 \times 10^{-6} \dots 3 \times 10^{-7}$

paralelismo de los ejes:  $\pm 0.1 \dots 0.3$

## Sistemas de control regional

8.2-1

redes clásicas / horizontales  
/ verticales

7.9

horizontal:  $\pm 1 \dots 10 \text{ m} / 1000 \text{ km}$   
 vertical:  $\pm 0.05 \dots 0.5 \text{ m} / 1000 \text{ km}$   
 geode:  $\pm 1.5 \text{ m} / 1000 \text{ km}$

distancias de puntos de control: 50 km (l.o.)

→ control (escala, orientación, errores) por métodos satelitares

$X$ :  $\pm 1 \text{ m} \dots 5 \text{ m}$   
 $\Delta X$ :  $\pm 0.3 \dots 1 \text{ m} / 1000 \text{ km}$  } tridimensional  
 $S \geq 100 \text{ km}$

→ transformación de redes clásicas al sistema geocéntrico

→ parámetros de datum geodésico

	$X_0$	$Y_0$	$Z_0$ (m)
Austr. Geod. 1966	-122	-43	+138
Europ. 1950	-84	-105	-126
North American 1927	-22	+157	+176
South American 1969	-75	+5	-43

prec.  $\pm 2 \dots 6 \text{ m}$ , depende de la distribución de los puntos de control y de las distorsiones de las redes

8.3-1

## Sistemas de control local

especialmente en zonas de movimientos recientes

observaciones relativas por  
 - métodos clásicos  
 - métodos satelitares

$\pm 0.01 \dots 0.05 \text{ m} / 10 \dots 100 \text{ km}$

- métodos gravimétricos

$\pm 1 \dots 10 \mu\text{gal} / 10 \dots 100 \text{ km}$

desarrollo y investigación de métodos nuevos:

- distancias terrestres por LASER instrumentos (refracción)
- gravímetros absolutos y relativos
- nivelación geométrica (refracción, escala)
- mediciones LASER a satélites y a la luna
- interferometría por medio de señales de radio fuentes y del sistema GPS

73

8.4-1

## Campo de gravedad

estaciones fundamentales

$\pm 1 \dots 3 \mu\text{Gal}$

estaciones absolutas

$\pm 10 \mu\text{Gal}$

red mundial

$\pm 100 \mu\text{Gal}$

redes regionales

$\pm 10 \dots 100 \mu\text{Gal}$

modelos de funciones estéricas

$n, m = 36, 36 \hat{=} 1100 \text{ km}$  (longo de onda)

$\pm 5 \dots 10 \text{ mGal}$

$\pm 3 \dots 5 \text{ m}$  (geoides)

anomalías terrestres

$1^\circ \times 1^\circ: \pm 5 \dots 20 \text{ mGal}$

(~60%)

$6' \times 10': \pm 5 \dots 10 \text{ mGal}$

altimetría satelital

$1^\circ \times 1^\circ: \pm 7 \text{ mGal}, \pm 1 \text{ m}$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**FUNDAMENTOS Y METODOS DE LA GEODESIA MODERNA**

**LECCION No. 2**

**ANEXO**

**DR. ING. WOLFGANG TORGE**

**MARZO 1982**

# Definición de la geodesia

F.R. HELMERT 1880: definición clásica:

"Ciencia de la medición y proyección de la superficie terrestre"

→ contiene

- Geodesia en el sentido estricto (problemas globales y regionales),
- Topografía (problemas regionales y locales),
- Cartografía.

Geodesia en el sentido estricto o Geodesia superior

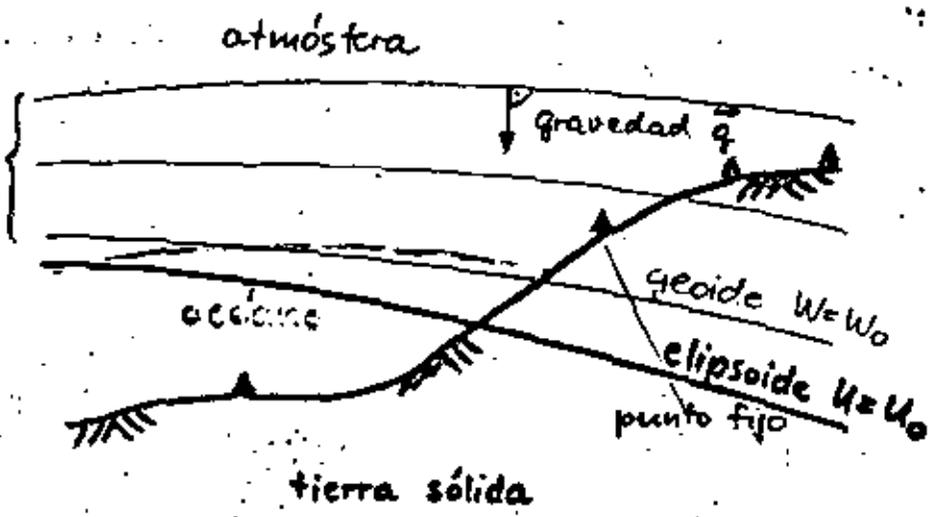
"Determinación

- de la figura de la tierra,
  - del campo de la gravedad exterior,
  - de modelos de la tierra,
- y
- de las variaciones temporales de la tierra."

11-1

1.1-2

superficies equipotenciales  $W = \text{const}$



problema geométrica → parámetros geométricos

superficie física de la tierra

- puntos de control: vector de posición  $\vec{r}$  en un sistema de referencia definida
- representación superficial por interpolación: modelo digital (topografía)

problema física → parámetros físicos

campo de la gravedad exterior

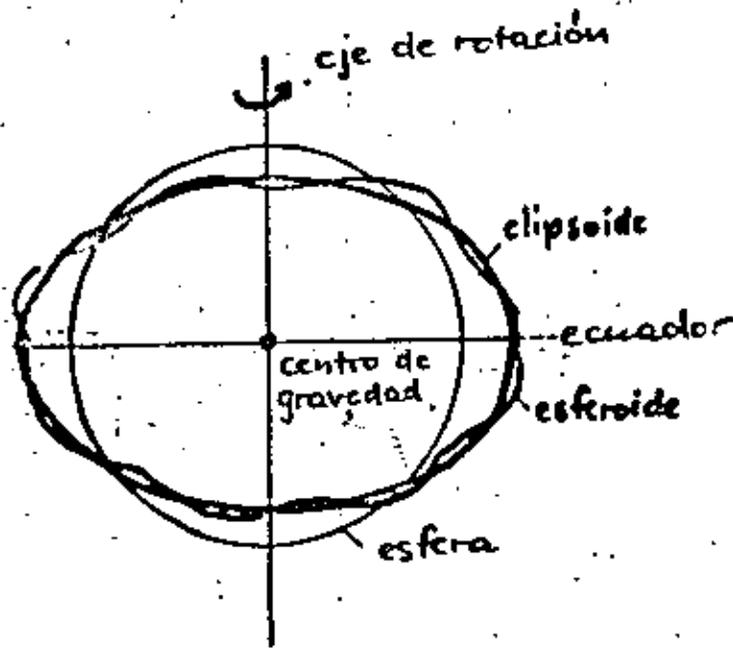
- puntos de control: vector de gravedad  $\vec{q} = \text{grad } W$  en un sistema de referencia definida
- función de posición para el potencial de gravedad  $W = W(\vec{r})$  y funcionales  $F = F(W)$ .

## modelos de la tierra

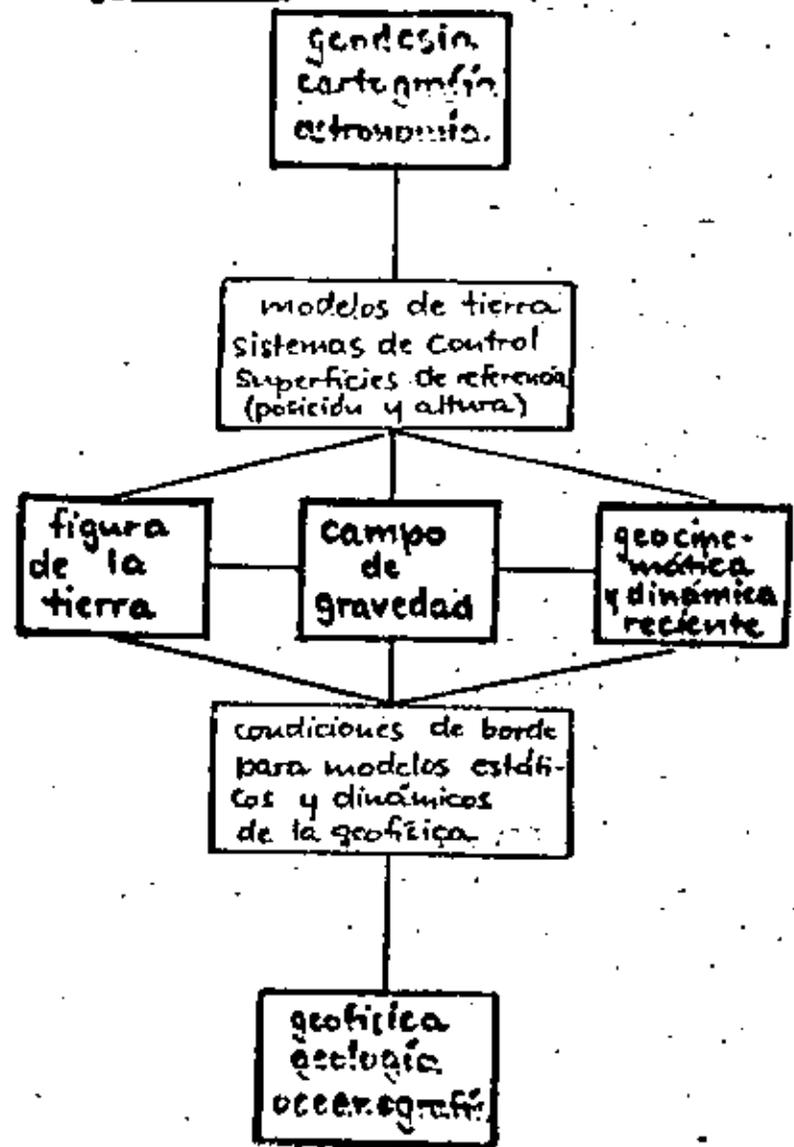
→ parámetros geométricos y físicos

modelos como aproximaciones definidas a la superficie física y al campo de gravedad exterior:

- esfera
- elipsoide terrestre (medio)  
como elipsoide de nivel  $U = U_0$
- esferoides terrestres  
como esferoides de nivel  $U = \text{const.}$



## aplicación de los resultados geodesicos



problema tridimensional de la geodesia

1. /

→ tratamiento común de la determinación de posición y elevación:

vector espacial  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$   
potencial  $w = w(x, y, z)$

③

tratamiento clásico:

separación en:

- sistemas de posición (bidimensional) con referencia a modelos geométricos (elipsoide)
- sistemas de altura (una dimensión) con referencia a modelos físicos (geoide).

Motivo para la separación:

- influencia diferente de los campos físicos
  - "campo de gravedad"
  - "campo de refracción"

a los elementos de medición clásica

→ medición de posición (ángulos horizontales, distancias): reducciones posibles con una precisión de  $\pm 1...2 \times 10^{-6} \times S$  (S = distancia)

→ medición de altura (nivelación geométrica y trigonométrica): reducciones por la gravedad (nivel. geom.) o por la refracción (nivel. trigon.) posibles con una precisión de  $\pm 1...2 \times 10^{-5} \times S$ , pero: nivelación geométrica con referencia geoide  $\pm 1...2 \times 10^{-4} \times S$

tratamiento moderno: tridimensional

idea fundamental: H. BRUNS (1878), renacimiento: A. MARUSSI (1949), VOTINE (1959), H. WOLF (1963)

realización por los métodos satelitares (desde 1960)

→ coordenadas tridimensionales con una precisión de  $\pm 1...5 \text{ m}$  (absoluta) y  $\pm 0.2...1 \text{ m}$  (relativa)  
 $\hat{\Delta} \pm 2 \times 10^{-7} ... 1 \times 10^{-6} \times S$  para  $S = 1000 \text{ km}$ ,

fotogrametría: idea tridimensional es natural; levantamientos fotogramétricos resultan en coordenadas cartesianas tridimensionales con "cm"-precisión sobre unos kilómetros  $\hat{\Delta} 10^{-5} \times S$  o mejor.

1.3-1 → campo de la gravedad exterior

Parámetros geométricos y físicos

- figura de la tierra (geometría)
  - red de puntos de control:  
coordenadas tridimensionales  
 $x^T = (x, y, z)$
  - coordenadas del elipsoide (a, f)  
 $(\varphi, \lambda, h)$   
en el sistema geocéntrico o  
en sistemas regionales (datum geodésico)
  - representación superficial  
alturas  $H$  sobre el geoide (referencia global)  
 $H = H(\varphi, \lambda)$
  - topografía de los continentes  
batimetría: fondo del mar  
topografía de la superficie del mar
  - representación (modelo digital) puntos (distribución regular)  
valores medios ( $5' \times 5'$ ,  $1'' \times 1''$  etc.)



④ - red de puntos de control

vector de gravedad  
 - dirección  $\phi, \Lambda$   
 - intensidad  $g$  }  $\vec{g} = \vec{g}(\phi, \Lambda, g)$

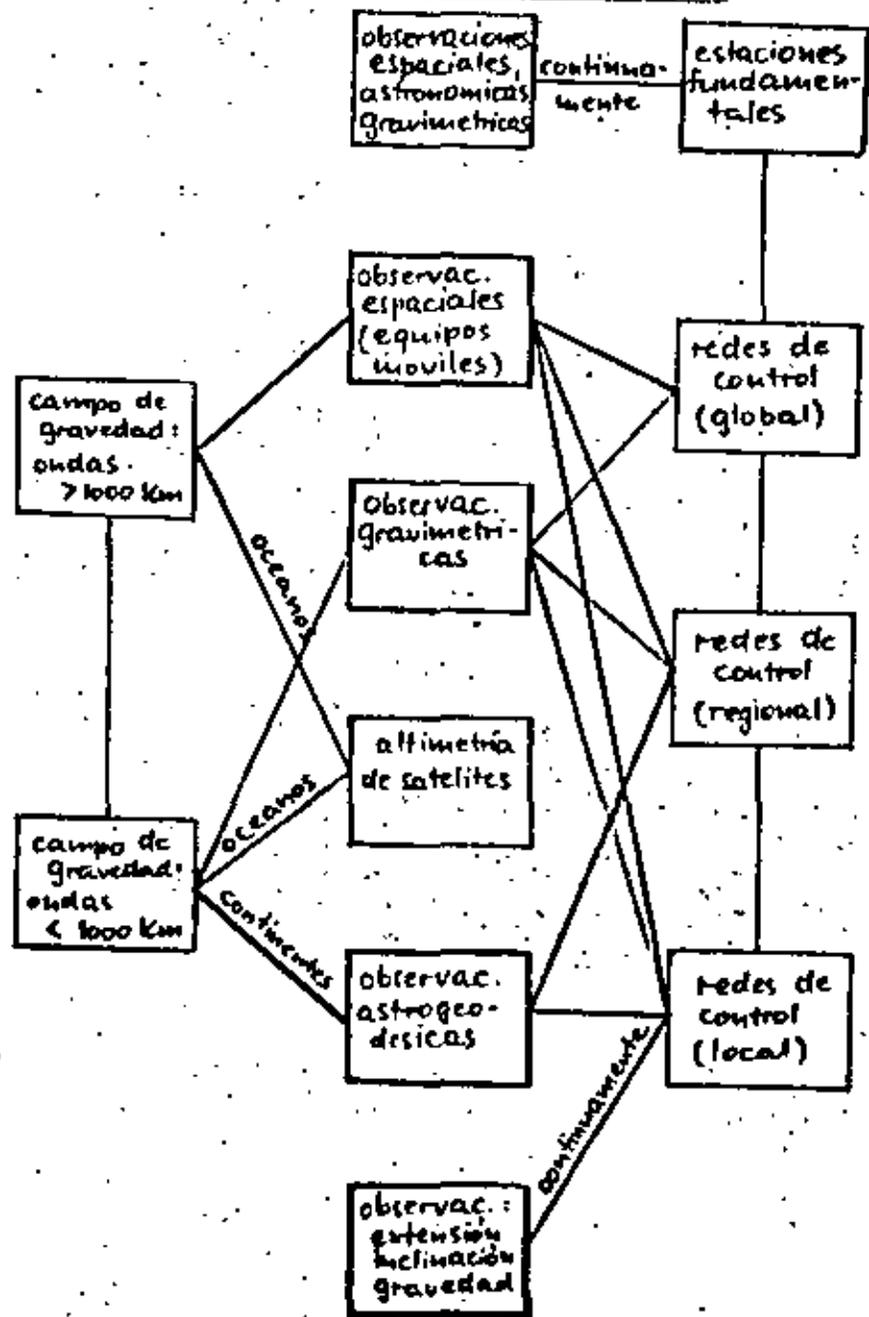
- representación como función de posición

potencial  $W = W(x, y, z)$   
 gravedad  $g = g(x, y, z) = \text{grad}W$   
 y otros funcionales de  $W$ ;

representación por medio de:

- una función: para las partes de ondas largas (estructuras grandes del campo)
- un modelo digital (puntos y valores medios, p.e.  $5' \times 5'$ ,  $1'' \times 1''$ ): para las partes de ondas cortas (estructuras pequeñas del campo).

## Observaciones disponibles



## Modelos funcionales y estocásticos

### ⑤ Observaciones geodésicas:

- cantidades heterogéneas
- función de posiciones geométricas (coordenadas) y de la gravedad
- observaciones redundantes (observaciones repetidas de la misma cantidad o condiciones geométricas o físicas)
- observaciones contienen errores accidentales y sistemáticos, y una correlación de errores.

ecuación de observación }  $L = F(\underline{X}, W)$  "parametrización"

$\underline{X}$  = vector de las coordenadas de los puntos participantes ( $\leq 3$ ) y de parámetros sistemáticos

$W$  = potencial de la gravedad o funcionales de  $W$ ,  $W = W(\underline{X})$

$F$  = función no lineal

linealización según Taylor:

modelo: elipsoide de nivel: potencial normal  $U$

coordenadas aproximadas:  $\underline{X}_0$

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \underline{x}, \quad W = U + T$$

$$L = l + F(\underline{X}_0, U)$$

ecuación de observación lineal, 1.5-1  
 con inclusión de los errores accidentales  $n$ :

$$l = Ax + B T + n$$



- $l$  observaciones
- $A$  matriz de coeficientes
- $x$  parámetros
- $B$  operator de funcionales lineales de  $T$ ,  $T = T(x) = \text{potencial perturbado}$

p.e. : anomalía de gravedad

$$\Delta g = -\frac{2}{r} T - \frac{\partial T}{\partial r}$$

errores accidentales

$$B T = S$$

{ señal del campo residual de gravedad

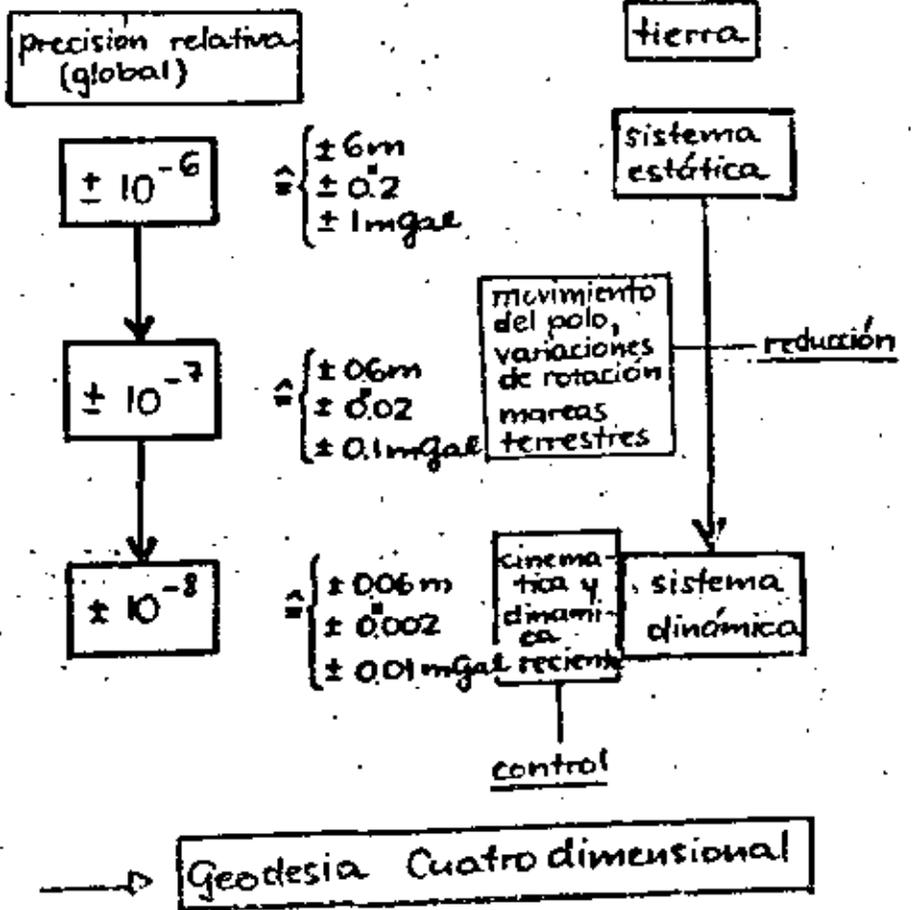
modelos estocásticos (matrices de varianzas y covarianzas)

$$C_{SS} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots \\ C_{21} & C_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; D_{nn} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12} & \dots \\ m_{21} & m_{22}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$C = C(S)$  = función de covarianza  
 $r_{12} = m_{12} / (m_{11} \cdot m_{22}) = \text{correlación}$

Variaciones temporales de los parámetros geodesicos

- ⑥ Variaciones temporales de tipo
  - secular, periódico, y instantáneo y con efectos
  - globales, regionales, y locales

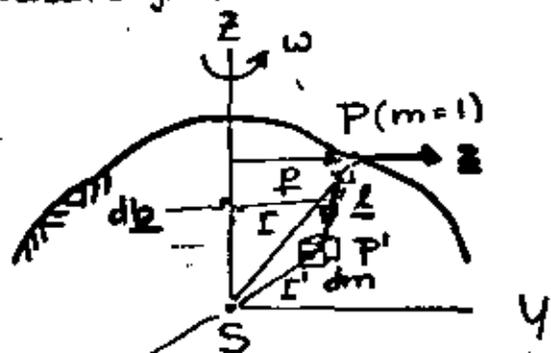


# Campo de gravedad terrestre

2.1.-

Descripción física: aceleración y potencial de gravedad

Gravedad = gravitación + fuerza centrífuga



aceleración:

$$\underline{g} = \underline{b} + \underline{z}$$

gravitación:

$$d\underline{b} = -G \frac{dm}{l^2} \frac{\underline{l}}{l}, \quad \underline{l} = \underline{r} - \underline{r}'$$

$$G = (6.672 \pm 0.004) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$dm = \rho dv$$

$\rho = \rho(\underline{r}') = \text{densidad (kg m}^{-3}\text{)}$

$$\underline{b} = -G \iiint_V \frac{\rho(\underline{r}')}{l^2} \frac{\underline{l}}{l} dv$$

aceleración centrífuga

$$\underline{z} = \omega^2 \underline{p}$$

⑦

$$\omega = 2\pi / 86400 \text{ s} = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

potencial

gravitación

$$\underline{b} = \text{grad } V$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V = 0$$

$$\rightarrow V = V(\underline{r}) = G \iiint_V \frac{\rho(\underline{r}')}{l} dv$$

aceleración centrífuga

$$\underline{z} = \text{grad } \Phi$$

$$\Phi = \Phi(p) = \frac{\omega^2}{2} p^2$$

gravedad

$$\underline{g} = \text{grad } W$$

$$W = W(\underline{r}) = V + \Phi$$

## Unidades del potencial y de la gravedad

Sistema Internacional de Unidades (SI):

potencial:	$m^2 s^{-2}$
gravedad:	$m s^{-2}$
derivadas segundas:	$s^{-2}$

Geodesia y geofísica:

gravedad:

$$10^{-5} \text{ ms}^{-2} = \text{mgal} \approx 10^{-6} g$$

$$10^{-8} \text{ ms}^{-2} = \mu\text{gal} \approx 10^{-9} g$$

porque

- las anomalías de gravedad varían entre  $10^{-6}$  y  $10^{-3} \text{ ms}^{-2}$
- la precisión de las mediciones gravimétricas es  $10^{-7} \dots 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$

derivadas segundas:

$$10^{-9} \text{ s}^{-2} = 1 E \text{ (Eötvös)}$$

porque

- las anomalías de las derivadas y la precisión son del orden  $10^{-8} \dots 10^{-9} \text{ s}^{-2}$

## ecuaciones diferenciales del campo de gravedad

campo exterior:

$$\Delta V = 0 \quad \text{LAPLACE}$$

$$\Delta \Phi = 2\omega^2$$

$$\Delta W = 2\omega^2$$

campo interior:

$$\Delta V = -4\pi G \rho \quad \text{POISSON}$$

$$\Delta \Phi = 2\omega^2$$

$$\Delta W = -4\pi G \rho + 2\omega^2$$

modelos

esfera homogénea o de estratos homogéneos:

$$r = R = 6371 \text{ Km}$$

$$V = 6.26 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\Phi_{\text{max}} = 1.1 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$b = 9.82 \text{ ms}^{-2}$$

$$z_{\text{max}} = 0.03 \text{ ms}^{-2}$$

elipsoide:

$$g = 9.78 \dots 9.83 \text{ ms}^{-2}$$

Descripción geométrica:  
Superficies equipotenciales y verticales

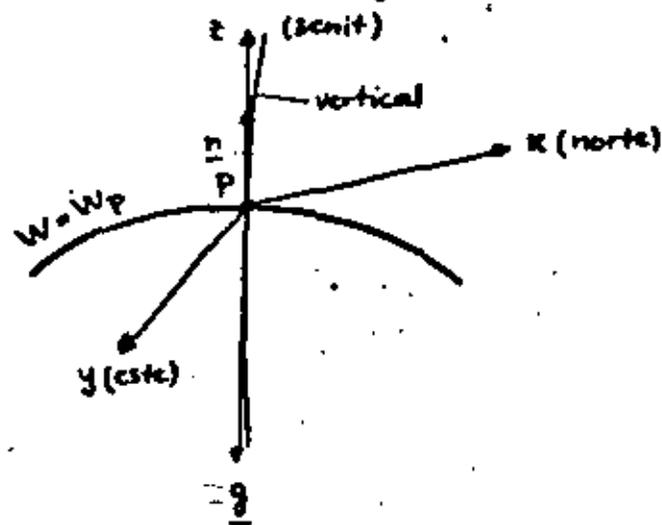
Superficies equipotenciales

2.2-1

$$W = W(\underline{r}) = \text{const.}$$

exterior: Superficies analíticas

interior: discontinuidades junto con  $\rho$  (densidad)



desarrollo alrededor P:

$$z = \frac{1}{g} \left( \frac{1}{2} (W_{xx} x^2 + W_{yy} y^2) + W_{xy} xy + \dots \right)$$

curvatura

$$K_x = -\frac{W_{xx}}{g}, \quad K_y = -\frac{W_{yy}}{g}$$

torsión (meridiano astronómico)

$$T_x = -\frac{W_{xy}}{g}$$

vertical:

(9)

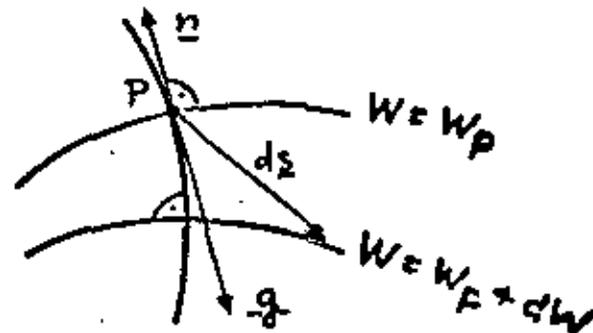
$$\underline{g} = g \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ -W_z \end{pmatrix}$$

curvatura:

$$\underline{r}'' = K \begin{pmatrix} \cos A \\ \sin A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K = -\frac{W_{xz}}{g \cos A} = -\frac{W_{yz}}{g \sin A}$$

non-parallelismo de las superficies de nivel



$$dW = g \cdot ds = g ds \cos(\underline{g}, ds)$$

$$(\underline{g}, ds) = 180^\circ, \quad \cos(\underline{g}, ds) = -1$$

$$\rightarrow dW = -g dn$$

estimación numérica

$$\delta n \approx - \frac{\delta W}{g} ; \delta W = \text{const.}$$

$$\frac{d(\delta n)}{\delta n} = - \frac{dg}{g}$$

a)  $\delta n \leq 3 \text{ m}$ ,  $dg \leq 2 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$   
 (nivelación : una vista)  
 $\rightarrow d(\delta n) = -3 \frac{2 \times 10^{-5}}{9.8} = -6 \times 10^{-6} \text{ m} = -6 \mu\text{m}$

b)  $\delta n \approx 1000 \text{ m}$ ,  $dg = 200 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$   
 (nivelación : distancia larga)  
 $\rightarrow d(\delta n) = -1000 \frac{200 \times 10^{-5}}{9.8} = -0.2 \text{ m}$

c)  $dg = 5000 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2} = 5000 \text{ mGal}$   
 (distancia ecuador - polo)  
 $\rightarrow d(\delta n) = - \frac{5 \times 10^{-2}}{9.8} \delta n = -5 \times 10^{-3} \delta n$

p.e.

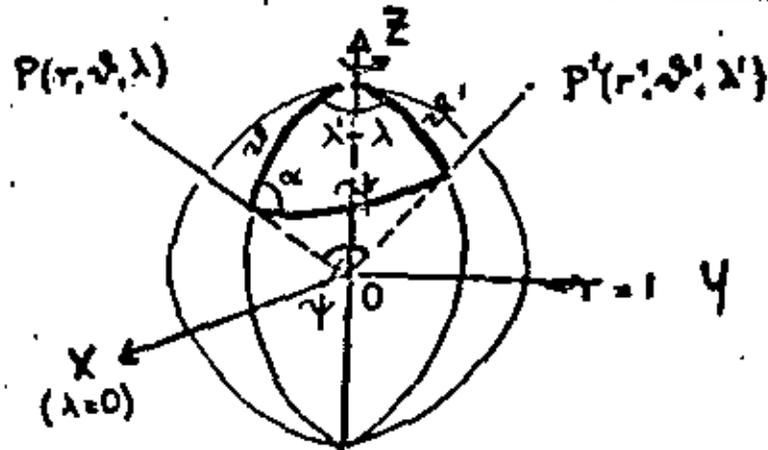
ecuador :  $\delta n = 100 \text{ m}$   
 polo :  $\delta n = 100 - 5 \times 10^{-3} \times 100$   
 $= 100 - 0.5 = 99.5 \text{ m}$

$$\oint \delta n \neq 0$$

$$\oint \delta W = \oint g \delta n = 0$$

Desarrollo en funciones esféricas

(10)



$$V = V(r, \vartheta, \lambda)$$

$$\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \lambda \\ \sin \vartheta \sin \lambda \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Delta V = 0$$

Solución ( $r' < r$ ):

$$V = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{a}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right)$$

coeficientes armónicos

$$C_{n0} = C_n = \frac{1}{M} \iiint_V \left( \frac{r'}{a} \right)^n P_n(\cos \vartheta') \rho \, d\tau$$

$$\begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} = \frac{2}{M} \times \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \left( \frac{r'}{a} \right)^n P_{nm}(\cos \vartheta') \begin{cases} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{cases} \rho \, d\tau$$

polinomios de Legendre:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \times n!} \times \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

funciones asociadas de Legendre (de primer clase):

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t)$$

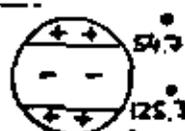
funciones armónicas de Laplace:

$$P_{nm}(\cos \lambda) \begin{cases} \cos m \lambda \\ \sin m \lambda \end{cases} = \begin{cases} R_{nm} \\ S_{nm} \end{cases}$$

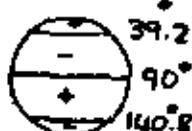
zonales:  $m = 0$



$$P_1 = \cos \vartheta$$

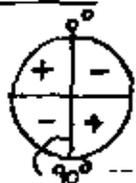


$$P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta$$



$$P_3 = \frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta$$

tesserales:  $m \neq 0$



$$P_{2,1} \cos \lambda = 3 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \lambda$$

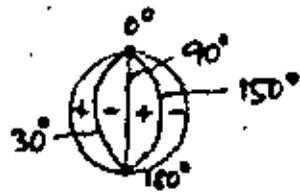


$$P_{2,2} \cos 2\lambda = 15 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos 2\lambda$$

sectoriales:  $m = n$



$$P_{1,1} \cos \lambda = \sin \vartheta \cos \lambda$$



$$P_{2,3} \cos 3\lambda = 15 \sin^3 \vartheta \cos 3\lambda$$

resolución:

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1}{2} l$$

$l = \text{largo de onda}$

2.3-3

(//)

coeficientes:

$$C_0 = 1$$

$$C_{1,0} = \frac{1}{4\pi} \iiint z^1 dm = 0$$

$$C_{1,1} = \frac{1}{4\pi} \iiint x^1 dm = 0$$

$$S_{1,1} = \frac{1}{4\pi} \iiint y^1 dm = 0$$

$$C_{2,1} = \frac{1}{8\pi} \iiint x^2 z^1 dm = 0$$

$$S_{2,1} = \frac{1}{8\pi} \iiint y^2 z^1 dm = 0$$

$$C_{2,2} = \frac{1}{4a^2 M} \iiint \{ (x'^2 + z'^2) - (y'^2 + z'^2) \} dm$$

$$S_{2,2} = \frac{1}{2a^2 M} \iiint x' y' dm$$

$$C_{2,0} = \frac{1}{a^2 M} \iiint \frac{1}{2} \{ (y'^2 + z'^2) + (x'^2 + z'^2) \} - (x'^2 + y'^2) dm$$

$$C_2 = -1082.63 \times 10^{-6}$$

$$C_{2,2} = +1.57 \times 10^{-6}$$

$$C_3 = +2.54 \times 10^{-6}$$

$$S_{2,2} = -0.89 \times 10^{-6}$$

$$C_4 = +1.62 \times 10^{-6}$$

$$C_5 = +0.23 \times 10^{-6}$$

$$C_6 = -0.55 \times 10^{-6}$$

2.3-4

armónicos normalizados:

$$\bar{P}_{nm}(\cos\theta) = \sqrt{k(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos\theta)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}$$

$$k = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

relaciones de ortogonalidad:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{R}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{S}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{S}_{sr}(\vartheta, \lambda) d\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} s \neq n \\ r \neq m \end{array}$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}^2 d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}^2 d\sigma = 1$$

$\sigma$  = esfera de unidad

(12)

Variaciones temporales de la gravedad

2.4-1

Mareas terrestres

(1) tierra rígida

→ mareas teóricas

periodos: ~ 8 h, 12 h, 24 h, 14 d, 1 m, 1/2 a, 1 a, ... 18.6 a

$$b_G = b - b_0$$

componente radial

$$b_{Gr} = \frac{2}{r} G(r) \left( \cos 2\psi + \frac{1}{3} \right)$$

Doodson:

$$G(r) = \frac{3}{4} GM \frac{r^2}{R^3}$$

$R = 6371 \text{ km}$

luna:  $G(r=R)_M = 2.62 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$

sol:  $G(r=R)_S = 1.21 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} = 0.46 G(r)_M$

$\psi = 0^\circ, 180^\circ$

→  $b_{Gr}(M) = 0.11 \text{ mGal}$

$b_{Gr}(S) = 0.05 \text{ mGal}$

$\psi = 90^\circ, 270^\circ$

→  $b_{Gr}(M) = -0.05 \text{ mGal}$

$b_{Gr}(S) = -0.03 \text{ mGal}$

efecto máximo

$0.24 \text{ mGal}$

calculación: desarrollo armónico

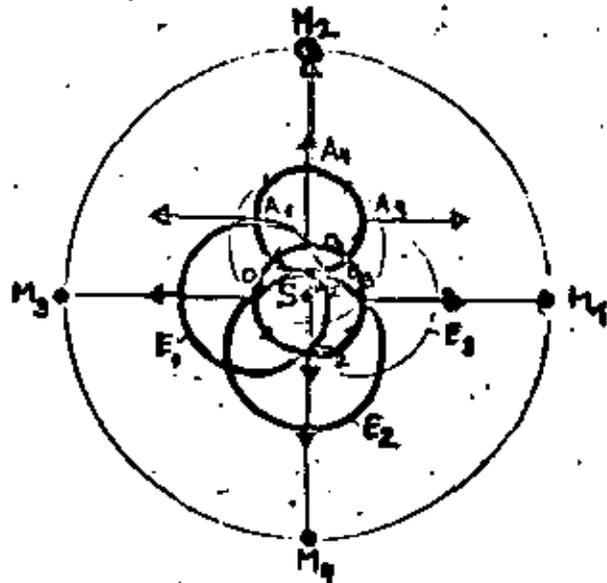
$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$t = \theta - \alpha, \quad \lambda = \theta - \theta_0$$

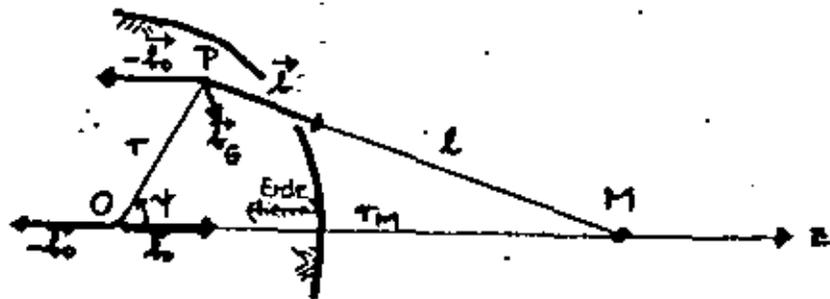
Cantwright-Taylor-Edden: SOS mareas parciales

precisión:  $\pm 0.01 \mu\text{Gal}$

Gezeitenbeschleunigung  
(acceleración de mareas)



Revolution im Erde/Mond-System  
(revolución en el sistema Tierra/Luna)



Gezeitenbeschleunigung:  $b_G = \underline{b} - \underline{b_0}$   
(acceleración de mareas)

componente tangential

$$b_{\psi} = \frac{2}{r} G(r) \sin 2\psi$$

(13)

$$\psi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$$

$$\rightarrow b_{\psi} = 0$$

$$\psi = 45^\circ, 135^\circ$$

$$\rightarrow b_{\psi}(M) = \pm 0.017$$

$$b_{\psi}(S) = \pm 0.008$$

efecto máximo

$$0.05$$

(variación de la vertical)

movimientos verticales de las superficies de nivel

$$\Delta r_G = \frac{V_G}{g}; \quad b_G = \text{grad } V_G$$

$$\Delta r_G = \frac{1}{g} G(r) \left( \cos 2\psi + \frac{1}{3} \right)$$

$$\psi = 0^\circ, 180^\circ$$

$$\rightarrow \Delta r_{G,M} = 0.36 \text{ m}$$

$$\Delta r_{G,S} = 0.16 \text{ m}$$

$$\psi = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\rightarrow \Delta r_{G,M} = -0.18 \text{ m}$$

$$\Delta r_{G,S} = -0.08 \text{ m}$$

efecto máximo

$$0.78 \text{ m}$$

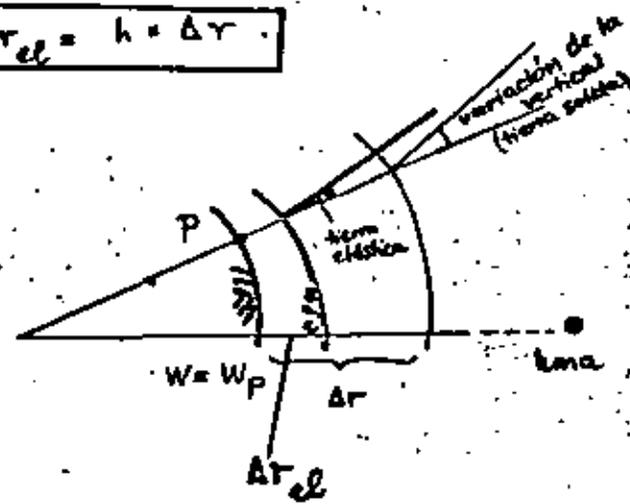
tierra elástica →

(B) mareas terrestres

$$b_r(el) = (1 - \frac{3}{2}k + h)b_r = \delta = b_r$$

$$b_\psi(el) = (1 + k - h)b_\psi = \gamma = b_\psi$$

$$\Delta r_{el} = h = \Delta r$$



parámetros de LOVE

$h = 0.64$   
 $k = 0.32$

} valores globales

factor gravimétrico  
 $\delta = 1.16$  ( $\delta_{regional} = 1.1 \dots 1.25$ )

factor de inclinación  
 $\gamma = 0.67$  ( $\gamma_{regional/local} = 0.3 \dots 1$ )

efectos máximos

→ 0.28  $\mu\text{Gal}$

0.03

0.47 m

2.4-4

Otras variaciones temporales de la Gravedad

movimientos de masas en o cerca de la superficie de la tierra:

- atmósfera
- océanos
- regiones polares (hielo)
- movimientos verticales y horizontales (nivel de las aguas subterráneas, terremotos y volcanismo etc.)

→ discontinuamente cuasiperiódico secular

$0.01 \dots 1 \mu\text{Gal}$   
 $< 0.001 \dots 0.02 \mu\text{Gal/a}$

movimientos de masas en el interior de la tierra

- procesos tectónicos
- terremotos
- volcanismo
- movimientos de las placas tectónicas (litosfera)
- corrientes de convección (astenosfera)
- movimientos del núcleo terrestre

→ discontinuamente cuasiperiódico secular

$< 0.01 \dots 0.1 \mu\text{Gal}$   
 $< 0.001 \dots 0.01 \mu\text{Gal/a}$

expansión (?) de la tierra o cambio de G (?)

→ secular

$< 0.1 \dots 1 \mu\text{Gal/a}$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**FUNDAMENTOS Y METODOS DE LA GEODESIA MODERNA**

**SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS**

**M. en C. Gualterio Luthe García**

**MARZO, 1982**

## 1.1 DEFINICION Y CLASIFICACION DE GEODESIA

De acuerdo a la definición clásica dada por F. R. Helmert A(1880), geodesia (en la tierra, si no divide o división) es la "ciencia de medir y cartografiar la superficie terrestre". Esta definición ha conservado su validez hasta ahora; incluye la determinación del campo de gravedad externo de la Tierra, así como la superficie del fondo del mar. Con esta definición, la geodesia se puede incluir en las ciencias, y también en las ciencias de Ingeniería (Gerke 1972).

Impulsado por el desarrollo de la exploración espacial, la geodesia se ocupó en colaboración con otras ciencias de la determinación de las superficies de otros cuerpos celestes (luna, otros planetas). Las disciplinas correspondientes se denominan selenodesia y geodesia planetaria (Kaula 1975 o, Anderson 1975a).

La geodesia se puede dividir en las áreas de geodesia global, levantamientos geodésicos y topografía. La geodesia global es la responsable de determinar la figura de la Tierra, incluyendo el campo de gravedad externo completo. Un levantamiento geodésico define la superficie de un país mediante las coordenadas de un número suficientemente grande de puntos de control. En este trabajo fundamental, se debe considerar la curvatura integral de la Tierra. En la topografía (levantamientos topográficos, catastrales, y de Ingeniería), se obtienen los detalles de la superficie del terreno; en general el plano horizontal es suficiente como plano de referencia.

Existe una estrecha interacción entre la geodesia global, los levantamientos geodésicos y la topografía. Los levantamientos geodésicos adoptan los parámetros determinados por mediciones de la Tierra, y sus propios resultados están disponibles para aquellos que miden la Tierra. Los levantamientos topográficos, en cambio, generalmente están ligados a los puntos de control de los levantamientos geodésicos y sirven entonces particularmente en el desarrollo de series de mapas nacionales y en la formación de catastros de bienes raíces. Estando de acuerdo con la clasificación usual en el dominio del idioma inglés y francés, el concepto de "geodesia" (geodesy, la géodésie, "alta geodesia" según Helmert), solamente se daba aplicar a la geodesia global y a los levantamientos geodésicos. El concepto de "topografía" (surveying, la topométrie o "geodesia menor" según Helmert), comprendió a la topografía.

En este volumen, la geodesia se trata únicamente en el sentido más restringido como se explicó anteriormente. Una introducción a la topografía simple está dada por W. Grossmann (B 1973/1976).

## 1.2 EL PROBLEMA DE LA GEODESIA

El problema de la geodesia, generado de y suplementando parcialmente la definición de Helmert, puede describirse comprensivamente como sigue (Draheim 1917, Fischer 1975 a):

"El problema de la geodesia es determinar la figura y el campo de gravedad externo de la Tierra y de otros cuerpos celestes, en función del tiempo; es igual que, determinar el altoposito terrestre medio a partir de parámetros observados sobre y exteriormente a la superficie de la Tierra".

El problema del valor en la frontera de la geodesia implica una formulación geométrica (forma de la Tierra) y una física (campo de gravedad); ambas están íntimamente ligadas.

Por forma de la Tierra queremos decir la superficie física y matemática de la Tierra.

La superficie física de la Tierra es la frontera entre las masas sólidas o líquidas con la atmósfera.

Adicionalmente el fondo del océano también se ha considerado en el planteamiento del problema geodésico, siendo la superficie límite entre el cuerpo terrestre sólido y las masas de agua oceánicas. La prolongación del problema a los océanos se llama geodesia marina (Nourad 1977, Seeber 1975). La superficie irregular de la tierra sólida (continentes y fondo del océano) no se puede presentar por medio de una relación matemática simple; y por eso se describe a base de puntos mediante el uso de las coordenadas de los puntos de control. Por el otro lado, las superficies de los océanos (70% de la superficie de la Tierra), poseen un principio de formación más simple. Bajo ciertas presuposiciones, forman parte de una superficie (equipotencial) de nivel (superficie de potencial de gravedad constante) del campo de gravedad terrestre. Podemos pensar que esta superficie se extienda bajo los continentes y entonces identificarla como la forma matemática de la Tierra (Helmert A 1830/1884). J. B. Listing (1872) designa la superficie de nivel como geóida.

C. F. Gauss ya se había referido a esta superficie: "Lo que llamamos la superficie de la Tierra en el sentido geométrico no es más que esa superficie que intersecta en todos lados la dirección de gravedad en ángulos rectos, y parte de la cual coincide con la superficie de los océanos". (C. F. Gauss: "Determinación de la diferencia de latitud entre los observatorios del Göttingen y Altona", Göttingen 1825), ver también Moritz (1977).

La mayoría de los parámetros observados usados en geodesia, se refieren al campo de gravedad externo de la Tierra, por lo cual su estudio corresponde a la geodesia. El límite superior del espacio que es de interés, está controlado por el uso geodésico de satélites artificiales y reconocimientos espaciales, al igual que la luna de la Tierra. El aspecto físico del problema de la geodesia es consecuencia de considerar a la superficie de la Tierra y al geoid como superficies límites en el campo de gravedad de la Tierra. El campo de gravedad externo se puede describir por las innumerables superficies de nivel que se extienden completa o parcialmente en forma externa a la superficie terrestre.

Se requieren sistemas de referencia con una métrica y curvatura definida para los cálculos en geodesia global y levantamientos geodésicos. Debido a su acción sencilla, un elipsoide de revolución aplastado en los polos se apega mejor como una superficie de referencia geodésica que el geoid, el cual se determina por la distribución desigual de las masas terrestres. Se da un significado particular al elipsoide terrestre medio, que es el elipsoide óptimo que se aproxima al geoid. La figura 1.1 muestra la distribución mutua de las superficies a determinar en geodesia.



Fig. 1.1  
Superficie terrestre y superficies de referencia.

El cuerpo terrestre y su campo de gravedad están sujetos a variaciones temporales de naturaleza secular, periódica y singular, que pueden ocurrir global, regional, y localmente. Las mediciones geodésicas y técnicas de evaluación actualmente han avanzado al grado que pueden detectar una parte de este cambio. Condiciones promedio deben ser averiguadas entonces las observaciones deben corregirse por estos cambios. Con la detección de una parte de las variaciones la geodesia también contribuye a la investigación de la dinámica del cuerpo te

rrastro. La figura de la Tierra y el campo de gravedad externo se conciben por lo tanto con variables dependientes del tiempo. Esto conduce a las ideas de "geodesia de cuatro dimensiones" [Angus - Leppin 1973, Nather, 1973].

## 1.3 DESARROLLO HISTORICO DE LA GEODESIA

La formulación del problema de la geodesia expresado en (1.2) se desarrolló primero en el curso del siglo diecinueve. Sin embargo, la pregunta de la figura de la Tierra ya se había hecho en la antigüedad. Después de que la esfera sirvió como primer modelo para la Tierra, el elipsoide de revolución achatado se impuso como forma de la Tierra en la primera mitad del siglo dieciocho; con sultar la presentación de Perrier (A 1939), y también Fischer (1975 a).

### 1.3.1 El modelo esférico de la Tierra.

En el pasado prevalecieron varias opiniones sobre la forma de la Tierra, por ejemplo el disco terrestre rodeado de agua imaginado por Océanos (citada de Homero ~800 A.C., Tales de Mileto 600 A.C.), Pitágoras (580 - 500 A.C.) y su escuela, así como aristóteles (384 - 322 A.C.), entre otros, apoyaron la forma esférica.

El fundador de la geodesia científica es Eratóstenes (276-195 A.C.) de Alejandría, quien bajo la suposición de una Tierra esférica, dedujo de mediciones, un radio para la Tierra (Schwarz 1975). El principio del método de medidas de arco que él desarrolló se utilizó hasta épocas actuales; mediante mediciones geodésicas, se determina la longitud  $\Delta G$  de un arco de meridiano; observaciones astronómicas proporcionan el ángulo central  $\gamma$  inherente (Fig. 1.2) El radio de la Tierra está dado por:

$$R = \frac{\Delta G}{\gamma}$$

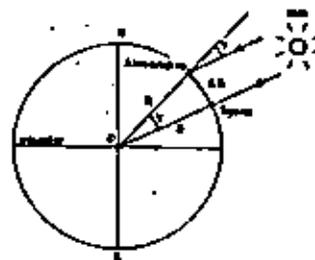


Fig. 1.2:  
Medición de Arco de Eratóstenes

Eratóstenes encontró que en la época del solsticio de verano, los rayos del sol caían verticalmente dentro de un pozo en Siena (hoy día Asuán); mientras que en Alejandría, aproximadamente en el mismo meridiano, formaban un ángulo con respecto a la dirección de la línea de la plomada. De la longitud de la sombra proyectada por una vara ("gnomon"), en una concha hemisférica ("skapha"), determinó este ángulo como  $1/50$  de un círculo completo, o sea  $\gamma = 7'12''$ . Estimó que la distancia entre Siena y Alejandría era de 5000 ita-dios, tomando este dato de los mapas catastrales egipcios, que están basados en la información obtenida por "bemallis" (cuenta pasos). Siendo la longitud de un estadio egipcio de 157.5m., obtenemos un radio terrestre de 6 267 Km. Este valor discrepa del radio de una Tierra esférica media (6371 Km) por  $-2\%$ . Una determinación posterior en la antigüedad se le atribuye a Posidonio (135-51 A.C.); usando el arco de meridiano de Alejandría a Rodas, obtuvo un radio terrestre con una discrepancia de  $+11\%$ .

Durante la Edad Media en Europa, la pregunta sobre la figura de la Tierra no se confinó. Los árabes transmitieron una medición de arco hecha por el Califa al Mánun (827 A.D.) al noroeste de Bagdad (+10% de desviación). En los inicios de la era moderna, el físico francés Fernel observó en 1525 en el meridiano de París las latitudes geográficas de París y Amiens, usando un cuadrante; la distancia la calculó del número de rotaciones de una rueda de carreta (+0.1% de desviación).

Las mediciones de arco restantes basadas en la noción de una tierra esférica se caracterizan por avances fundamentales en tecnología instrumental (1611, telescopio Kepler) y metodología (después de la aplicación inicial de triángulación por Simon Stevin (1508-1555) en los Países Bajos, y por Tycho Brahe (1546-1601) en Dinamarca, el holandés Willebrord Snellius (1580-1626), dirigió la primera triangulación para determinar la figura de la tierra), Hans-Broet (1965).

En 1615, con la triangulación hecha por Snellius en la medición de arco entre Bergen op Zoom y Alkmaar (Holanda); la hasta aquí inexacta estimación o bien la medición directa de la longitud de arco, fue substituida por un procedimiento de alta precisión. Este método sirvió hasta el siglo veinte para mediciones de arco y para la formación de redes de control principales. Para Snellius, la desviación con respecto al radio terrestre promedio es de  $-3.4\%$ .

A través de la iniciativa de la Academia de Ciencias fundada en París en 1666, Francia asumió en los siglos diecisiete y dieciocho el liderazgo en Geodesia (Boullée 1722). El abate francés J. Picard llevó a cabo en 1669/70, una medición de arco en el meridiano de París entre Malvoisine y Amiens con la ayuda

de una triangulación; él fué el primero en usar un telescopio con alios en la retícula. El valor que obtuvo para el radio de la Tierra (desviación de 0.01%) sirvió a Newton para la verificación de la ley de la gravedad que había formulado en 1665/66. Otra solución para la determinación del ángulo central, diferente en principio, o sea usando los ángulos zenitales recíprocos, encontró aplicación en 1645, por los Italianos Grimaldi y Piccolini (Fig. 1.3). El ángulo puede calcularse a partir de los ángulos zenitales  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  observados en  $P_1$  y  $P_2$  según:

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 - \pi \quad (1.2)$$

Este procedimiento no da resultados satisfactorios debido a la determinación insuficientemente exacta de la curvatura de los rayos luminosos (anomalías de refracción).



Fig. 1.3: Determinación del ángulo central  $\gamma$  a partir de ángulos zenitales.

### 1.3.2 El Modelo Terrestre Elipsoidal.

En los siglos dieciséis y diecisiete proviene de la Astronomía y la física nuevas observaciones e ideas que tienen una influencia decisiva en el concepto de la figura de la Tierra y su posición en el espacio. N. Copérnico (1473-1543) logró la transición del universo geocéntrico de Tolomeo y un sistema heliocéntrico (1543: "De revolutionibus orbium coelestium"), al cual Aristarco de Samos (320-250 B.C.) ya había postulado. J. Kepler (1571-1630) descubrió las leyes del movimiento planetario (1609: "Astronomía nova..." 1619: "Harmonices mundi"), y Galileo Galilei (1564-1642) desarrolló mecanismos modernos (ley de la caída de los cuerpos, ley del movimiento del péndulo).

En 1666 el astrónomo J. D. Cassini observó el achatamiento de los polos de Júpiter. El Astrónomo J. Richer descubrió en 1672 con motivo de una expedición a Cayena para determinar paralelos lunares, que él debía acortar la longitud de un péndulo de segundos que había ajustado en París, para volver a obtener oscilaciones de un segundo. De esta observación y con base en la ley del movimiento pendular se puede concluir que existe un incremento en gravedad del ecuador a los

culos. Basándose en estos trabajos y en los suyos propios Isaac Newton (1643-1727) y Christian Huygens (1629-1695) desarrollaron modelos terrestres, basados en principios de física, que tenían los polos achatados.

Newton (1687: "Philosophiæ naturalis principia mathematica") obtuvo un elipsoide de revolución como la figura de equilibrio para una Tierra homogénea, líquida y rotacional basada en la validez de la ley de la gravitación universal. El achatamiento

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (1.3)$$

( $f$  = achatamiento,  $a$  = semieje mayor,  $b$  = semieje menor) en este caso es de 1/230. Simultáneamente, Newton postuló un incremento en la aceleración de la gravedad del ecuador a los polos proporcional a  $\sin^2 \phi$  ( $\phi$  = latitud geográfica). Huygens (1659: "Discours de la Cause de la Pesanteur") desplaza el origen de las fuerzas de atracción terrestres al centro de la Tierra y desarrolla una superficie equilibrada, simétrica, rotacional, que tiene una curva meridiana de 4o. orden con  $f = 1/578$ .

Para una verificación geométrica de un modelo terrestre elipsoidal, se tienen que expresar mediciones de arco en diferentes latitudes, o sea que la longitud de un arco de un grado (arco de meridiano para una diferencia de 1° en latitud), en el caso de polos achatados se incrementa hacia los polos a partir del ecuador. Los parámetros elipsoidales  $a$ ,  $b$ ,  $\delta$  y  $f$  se pueden calcular de dos mediciones de arco (1.3.3).

Una evaluación de las antiguamente existentes mediciones de arco (Snellius, Picard, entre otros), condujo a un modelo de la Tierra ensanchada en los polos. El mismo resultado lo obtuvieron La Hire, J.B. y Cassini (1683-1718), quienes prolongaron el arco de Picard al Norte hacia Dunkerque y al Sur hacia Collioure (diferencia de latitud de 8°20').

Los cálculos de dos segmentos de arco dieron un achatamiento "negativo" de  $f = -1/95$ , que pueda atribuirse particularmente a errores de medición de las latitudes astronómicas. Las intensas disputas entre los partidarios de Newton y los de Cassini sobre la figura de la Tierra fue resuelta por dos mediciones de arco posteriores auspiciadas por la Academia Francesa de Ciencias.

Maupertuis y Laplace, entre otros, participaron en la expedición de Laponia (1736/37); los resultados de esta medición de arco (latitud promedio de 66°20' intervalo de latitud de 57.5') confirmaron el achatamiento polar. En combinación con la medición de arco en el meridiano a través de París, revisada por

donde  $M$  también es una función de los parámetros elipsoidales  $a$ ,  $f$  (3.4.2.). De  $\Delta G = M \Delta \phi$  y  $\Delta G' = M' \Delta \phi'$ , se pueden determinar  $a$  y  $f$ . Entre mayor sea el intervalo de latitud  $\phi' - \phi$ , más preciso es el achatamiento calculado; mientras que, la precisión de  $a$  depende en particular en las longitudes de los arcos meridianos.

Obtuvo un significado particular la medición combinada por la Asamblea Nacional Francesa y llevada a cabo por Delambre y Méchain en el meridiano a través de París entre Barcelona y Dunkerque (1792-1798); que debía servir para definir el metro como una unidad natural de longitud. La combinación con la medición del arco peruano dió por resultado un achatamiento de  $f = 1/334$ .

De las numerosas mediciones de arcos hechas en los siglos diecinueve y veinte, que en su mayor parte fueron basadas en levantamientos geodésicos, cada más se mencionan aquí los arcos más antiguos, históricamente importantes como son el de Gauss (medición de arcos entre Göttingen y Altona, 1811-1815, ajustada por el método de mínimos cuadrados) y el de Bessel y Bayer (medición de arcos inclinados al meridiano en Prusia del Este, 1817-1818). En el tratamiento de los métodos astrogeodésicos (5.1.4) se hace referencia a los trabajos más recientes y que actualmente son hasta cierto punto significativos.

### 1.3.4 El Geoide y el Elipsoide

Como P.-S. Laplace (1802), C. F. Gauss (1828), F. W. Bessel (1837), y otros ya habían reconocido, la suposición de un modelo terrestre elipsoidal no se puede sostener teniendo una precisión de observación suficientemente alta. O sea que no se puede seguir ignorando la desviación (deflexión de la vertical) de la dirección de la plomada física, a la cual se refieren las mediciones de la normal elipsoidal. Mediante un ajuste de varias mediciones de arco para la determinación de los parámetros elipsoidales  $a$  y  $f$ , surgen contradicciones que exceden por mucho la precisión de observación.

En 1806 se efectuó un ajuste inicial de una medición de arco por A. M. Legendre en su tratado "Sur la méthode des moindres carrés". C. F. Gauss fue el primero en ajustar una red de triangulación (en y alrededor de Brunswick, 1803-1807) por el método de mínimos cuadrados (Corandry 1977).

A pesar de estas discrepancias, se adoptaron numerosos ajustes hasta mediados del siglo diecinueve para determinar las dimensiones del elipsoide, en donde las deflexiones de la vertical, siendo causadas físicamente, y por tanto teniendo características sistemáticas, se trataban como errores de observación casuales. Con

la definición de geodesia (1.1) y la presentación del geode (1.2), F. R. Helmert hace una transición al concepto actual de la figura de la Tierra. Aquí, las deflexiones de la vertical, se toman en cuenta en el cálculo de los parámetros del elipsoidal.

Friedrich Robert Helmert (1843-1917), uno de los más distinguidos geodestas de los tiempos modernos, fue profesor de geodesia en la Universidad Técnica en Aachen y director del Instituto Geodésico Prusiano en Potsdam y de la oficina central de la "Medición Terrestre Internacional". A través de su obra, la geodesia ha experimentado impulsos decisivos, cuyo efecto prevalece hasta nuestros días (Wolf 1970).

La determinación del geode fue por cerca de 70 años (1850-1950) la meta principal de la geodesia. Su importancia disminuyó después de 1945 con el desarrollo de métodos para la derivación directa de la superficie física de la Tierra; sin embargo su determinación aún permanece como un problema esencial de la geodesia, lo que es más, el significado del geode se ha incrementado nuevamente con el establecimiento de sistemas globales y continentales tridimensionales (5.1.2), al igual que con los requerimientos de la geodesia marina (3.3.3.)

#### 1.4 ORGANIZACIÓN DE LA GEODESIA, BIBLIOGRAFÍA.

##### 1.4.1 Organizaciones Nacionales

Los problemas de la geodesia global se pueden resolver únicamente con la cooperación internacional de institutos que trabajen a nivel nacional (1.4.2). En algunos países, los institutos de investigación gubernamentales (República Federal de Alemania: Instituto de Investigación Geodésica Alemán en Munich y Frankfurt, R.D.A. (Rep. Democrática Alemana): Instituto Central Físico de la Tierra - anteriormente Instituto Geodésico - en Potsdam; U.S.A.: Instituto de Investigación Científica Central de Geodesia, Fotogrametría y Cartografía en Misión), al igual que los institutos de geodesia de las universidades están haciendo investigación activamente. Los levantamientos geodésicos se llevan a cabo de acuerdo a la estructura de los sistemas topográficos oficiales de institutos descentralizados (Rep. Fed. de Alemania: oficinas de levantamientos geodésicos de los estados individuales) o por agencias centrales (Australia: División de Cartografía Nacional; Canadá: División de Topografía y Cartografía; RDA: Conjunto VEO de Geodesia y Cartografía; Francia: Instituto Geográfico Nacional; Gran Bretaña: Topografía Militar; U.S.A.: Levantamiento Geodésico Nacional, Levantamiento Oceanográfico Nacional - anteriormente, Levantamiento Geodésico y Costero).

Adicionalmente a estos, existe un número de instituciones no geodésicas que a lo largo de sus proyectos especiales se interesan en problemas geodésicos; por supuesto, tratan con la teoría, y en particular con la recopilación y evaluación de información. Mencionamos aquí los institutos de exploración espacial y de astronomía (Centro de vuelos espaciales Goddard de NASA, Greenbelt, Md.; Centro Nacional de Estudios Espaciales, Brétigny - Sur - Orge; Observatorio Astrofísico Smithsonian (SAO), Cambridge Mass.), servicios geológicos e hidrográficos (Levantamiento Geológico de Canadá, Instituto Federal para Geociencias y Materias Primas, Hannover; Instituto Hidrográfico Alemán, Hamburgo; Oficina de Investigaciones Geológicas y Mineras, Orleans; Instituto de Ciencias Geológicas e Instituto de Ciencias Oceanográficas, R. U.; Levantamiento Geológico E.U.), y agencias militares (E.U.A.: Agencia de Cartografía de Defensa, Centro Topográfico DMTC y Centro Aeroespacial DMTC; Oficina Oceanográfica Naval de E.U. NAVOCEANO).

##### 1.4.2 Colaboración Internacional.

Al inicio de las mediciones de arco en el reino de Hannover (1821), C.F. Gauss ya había expresado sus intenciones. Según él esta red se conectaría con redes de triangulación vecinas, buscando un surgimiento eventual de los observatorios europeos. La colaboración internacional organizada se origina con la investigación del general prusiano J. J. Berber (1794-1885): "Sobre el tamaño y figura de la Tierra, una memoria para la fundación de una medición de arco de Europa Central" (1861). En 1862, se fundó en Berlín la "Medición de arco de Europa Central", siendo esta la primera asociación científica internacional de importancia; Beyer fue su primer presidente. Después de expandirse a "Medición de Arco Europeo" (1867) y a "Medición Terrestre Internacional" ("Asociación Geodésica Internacional"), 1886, la asociación desarrolló una actividad fructífera, la cual fue principalmente inspirada por los trabajos de Helmert como director de la oficina central (Sardi 1961).

Después de la disolución de la "Medición Terrestre Internacional" durante la primera Guerra Mundial, se fundó en 1919 la "Unión de Geodesia y Geofísica Internacional" (U.G.G.I.) que hoy día (1979) tiene 78 países miembros. Consiste de una asociación de geodesia y seis de geofísica. La Asociación Internacional de Geodesia (A.I.G.) está dirigida por un presidente quien es elegido cada 4 años y quien tiene a su lado vicepresidentes y un secretario general. La U.G.G.I., se reúne en asambleas generales cada 4 años; además la U.G.G.I.

sus asociaciones y comisiones, organizan numerosas simposios y conferencias científicas que tratan temas especiales.

La A.I.G. consiste en cinco secciones: Levantamientos de Control, Técnicas de Satélite, Gravimetría, Teoría y Evaluación e Interpretación Física. Se establecen comisiones para los problemas continuados, mientras que los problemas transitorios son tratados por grupos de estudios especiales. Además, la A.I.G. parcialmente y en colaboración con otras organizaciones científicas mantiene Instituciones permanentes (Oficina Central para Geodesia de Satélites, Atenas; Oficina Internacional de la Marea (C.I.M.), París; Servicio Internacional de Movimiento Polar (S.I.M.P.), Mizusawa, Japón; Oficina Gravimétrica Internacional, París/Toulouse; Centro Internacional de Movimientos de Corteza Recientes, Praga; Centro Internacional de Mareas Terrestres, Bruselas, Servicio Permanente, para el Nivel Medio del Mar, Bidston en Herzyside, A.U.).

Para programas de cooperación de investigación de cohetes y satélites, el Consejo Internacional de Uniones Científicas (C.I.U.C.), estableció un Comité Internacional de Investigación Espacial (COSPAR).

#### 1.4.3 Bibliografía

En la bibliografía de la página 000 se da un panorama de los libros de texto y revistas recientes de geodesia. Allí también, se enlistan las referencias para trabajos matemáticos introductorios (teoría de potencial, geometría diferencial, trigonometría plana y esférica, cálculos de ajuste) y de literatura referente a disciplinas de topografía, al igual que de astronomía y geofísica.

Entre las revistas técnicas, el "Boletín de Geodesia", publicado por la A.I.G. se ocupa exclusivamente de problemas geodésicos. Después de cada asamblea general de la A.I.G. los resultados se presentan en un reporte general; mientras que los reportes regionales contienen información de las actividades geodésicas de los países miembros de la A.I.G. (Trabajos de la A.I.G. - Travaux de l'A.I.G.). La Universidad Técnica de Dresden publica la Bibliografía Internacional. Una publicación rápida de los resultados de investigación es posible en la "Manuscrita Geodésica", Berlin (Deste). Las dudas de geodesia son tratadas en las revistas técnicas de topografía. Se mencionan en particular las siguientes: "Allgemeine Vermessungsnachrichten", Karlsruhe; "The Australian Surveyor", Sydney; "Bollettino di Geodesia e Scienze Affini", Florencia; "The Canadian Surveyor", Ottawa; "Geodesy, Mapping and Photogrammetry", Washington (traducción de las revistas rusas "Geoderiya i Aerofotogrammetriya" y "Geoderiya i Kartografiya");

"Marine Geodesy", New York; "Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie", Viena; "Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik", -- Zurich; "Surveying and Mapping", Washington; "Survey Review", Tolworth, Surrey; "Vermessungstechnik", Berlin; "Zeitschrift für Vermessungswesen", Stuttgart. Artículos de Geodesia también aparecen en la bibliografía técnica de gráficos: "Bollettino di Geofisica teorica ed applicata", Trieste; "EOS Transactions American Geophysical Union", Washington; "Geophysical Journal of Royal Astron. Soc.", Londres; "Geophysical Surveys", Dordrecht; "Gerlands Beiträge zur Geophysik", Leipzig; "Journal of Geophysical Research", Washington; "Journal of Geophysics Zeitschrift für Geophysik", Berlin-Heidelberg - New York; "Review of Geophysics and Space Physics", Washington; "Studia Geophysica et Geodaetica", Praga. Se publican reportes por Universidades de Geodesia e Institutos de Investigación y por varias academias científicas, al igual que por algunas agencias gubernamentales. Mencionamos aquí: "Acta Geodetica, Geophysica et Montanistica", Budapest; "Arbeiten aus dem Vermessungs- und Kartenwesen der DDR", Leipzig; "Bull. d'Inform. Bureau Gravimétrique Internat.", París; "Bull. d'Inform. Mareas Terrestres", Bruselas; "Mitt. d.Geodät. Inst. T.U. Graz.", "Mitt. Inst. f. Theor. Geod. Univ. Bonn"; "Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen", Frankfurt/Main; "NASA Goddard Space Flight Center Rep.", Greenbelt, Md.; "NORAMOS National Geodetic Survey Technical Rep.", Rockville, Md.; "Publications of the Finnish Geodetic Institute", Helsinki; "Reports of the Department of Geodetic Science", Universidad Estatal de Ohio, Columbus, Ohio; "Smithsonian Astrophysical Observatory: Special Reports"; "Unisurv G-Univ. of New South Wales Rep.", Kensington, NSW; "Veroff. der Bayer. Komm. für die Internationale Erdmessung der Bayer. Akad. der Wissenschaften", Munich; "Veroff. der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akad. der Wissenschaften", Munich y Frankfurt a.M. "Veroff. des Zentralinstituts Physik der Erde", Potsdam (anteriormente "Veroff. des Geod. Inst. in Potsdam"); "Wiss. Arb. d. Fachr. Vermessungswesen d. Univ. Hannover" (anteriormente "Wiss. Arb. d. Lehrst. f. Geod., Phot., u. Kart. T.U. Hannover").

### 2. EL CAMPO DE GRAVEDAD DE LA TIERRA

El significado del campo de gravedad externo de la Tierra en geodesia puede describirse comprensivamente como sigue:

1. El campo de gravedad externo es el sistema de referencia para la parte preponderante de las cantidades medidas en geodesia. Este campo debe conocerse para reducir las cantidades a sistemas definidos geoméricamente. (5.1).
2. Conocida la distribución de los valores de gravedad en la superficie de la Tierra, y en combinación con otras mediciones geodésicas, se puede determinar la forma de esta superficie. (5.2).
3. La superficie de referencia más importante para las mediciones de altura, el geoid (3.3), superficie oceánica idealizada, es una superficie de nivel del campo de gravedad.
4. El análisis del campo de gravedad externo proporciona información sobre la estructura y características del interior de la Tierra. Al proporcionar los correspondientes parámetros del campo de gravedad, la geodesia se convierte en una ciencia auxiliar de la geofísica (5.5).

### 2.1 COMPONENTES DEL CAMPO DE GRAVEDAD.

Un cuerpo que gira con la Tierra experimenta las fuerzas gravitacionales de la Tierra y de otros cuerpos celestes, así como la fuerza centrífuga debido a la rotación terrestre. La fuerza resultante es la fuerza de gravedad. Es una función de la posición, pero también experimenta variaciones temporales.

Para el uso geodésico de satélites terrestres, uno debe notar que un satélite no toma parte en la rotación de la Tierra, por lo tanto, nada más la gravitación actúa en este caso.

La unidad de aceleración en el sistema SI (Sistema Métrico Internacional de Unidades). Markowitz (1973), es  $ms^{-2}$ .

La aceleración de la gravedad se puede medir con una precisión de  $10^{-7}$  hasta  $10^{-8} ms^{-2}$ ; la desviación del campo de gravedad terrestre de una "Tierra normal" en general, es menor que  $2 \times 10^{-3} ms^{-2}$ . Por lo tanto, las ciencias de geodesia y geofísica han adoptado recientemente las unidades más adecuadas.

$$mgal = 10^{-5} ms^{-2}, \text{ ugal} = 10^{-8} ms^{-2} = 10 \text{ mas}^{-2}$$

Ellos se derivan de la unidad "gal" (por Galileo)  $\hat{=} cm s^{-2}$  usados en el sistema - cgs.

### 2.1.1 Gravitación, Potencial Gravitacional.

De acuerdo a la ley de la gravitación de Newton (1667), dos puntos masa  $m_1$  y  $m_2$  se atraen uno a otro con la fuerza gravitacional (fuerza de atracción).

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

(G = constante gravitacional, r = distancia entre puntos masa), donde  $K$  y  $l$  apuntan en direcciones opuestas. La unidad de masa situada en el punto atraído P (Fig. 2.1) en el campo gravitacional experimenta una aceleración gravitacional (de aquí en adelante, también denominada "gravitación").

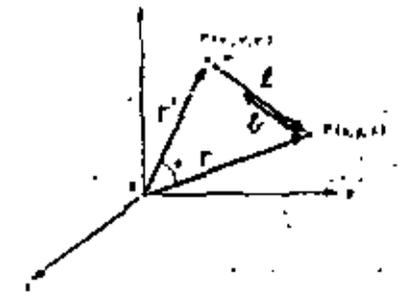


Fig. 2.1: Gravitación b

$$a = -G \frac{m}{r^2}$$

debido a los elementos de masa en el punto atraído P'. b está situada en la recta que une P y P' y está dirigida hacia P';  $\hat{}$  puede ser representada por los vectores de posición  $r$  y  $r'$ , por ejemplo en el sistema cartesiano  $x, y, z$ .

$$(2.3) \quad \begin{cases} (x, y, z), r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, r' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |r| \end{cases}$$

El valor de la constante de gravitación es (Comité de Información para Ciencia y Tecnología - CODATA sistema de constantes de física (1973).

$$G = (6.672 \pm 0.004) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

La primera determinación experimental de G se llevó a cabo en 1799 por Cavendish, quien usó la balanza de torsión. La meta del trabajo actual es incrementar la precisión relativa de G a cuando menos  $1 \times 10^{-4}$  (Beams 1917).

Un cuerpo como la Tierra, compuesto de incontables elementos masa, induce una gravitación en la unidad masa en P que se calcula sumando vectorialmente las

aceleraciones individuales (2.2). Los cálculos se simplifican, si uno cambia del campo vectorial al campo escalar.

Debido a que el campo de gravitación no es toraccional.

(2.4)  $\text{rot } b = 0$

b se puede representar como gradiente de un potencial (ver por ej. Kellogg 1929, sigl. B 1973).

(2.5)  $b = \text{grad } V$

Con  $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$ , establecemos el potencial de gravitación

(2.6)  $V(r) = \frac{Gm}{r}$

como una cantidad positiva (como ya es costumbre en geodesia). El valor del potencial en el punto P en el campo de gravitación indica el trabajo que debe hacer la gravitación para mover la unidad masa del infinito ( $V = 0$ ) a P.

El potencial de aceleración tiene la dimensión de trabajo por unidad masa y tiene la unidad  $m^2 s^{-2}$ . Del elemento masa  $m$ , regresamos a la Tierra con elementos distribuidos continuamente.

(2.7)  $dm = \rho dv$

donde  $\rho = \rho(r')$  es la densidad y  $dv$  es el elemento volumen. De acuerdo al principio de superposición, el potencial de gravitación de la Tierra está dado de acuerdo a (2.6) por:

(2.8)  $V = V(r) = G \iiint \frac{dm}{r} = G \iiint \frac{\rho dv}{r}$

En el cálculo de V, uno supone por eso que la función de densidad  $\rho = \rho(r')$  es totalmente conocida; de hecho sin embargo, es mejor conocida únicamente para las partes de la corteza de la Tierra.

2.1.2 Potencial Gravitacional de una Tierra Esféricamente Simétrica.

En una primera aproximación, la Tierra puede considerarse como una esfera con una estructura de densidad centralmente simétrica. Para el cálculo del potencial de gravitación, introducimos las coordenadas esféricas  $r, \theta, \lambda$  (Fig. 2.2) que también se requieren posteriormente. Con la orientación acostumbrada de este sistema con respecto al sistema global  $x, y, z$  (el eje  $\theta = 0$  coincide con el eje z que está situado a lo largo del eje de giro, el eje  $\lambda = 0$  coincide con el eje x que está situado en el plano meridiano de Greenwich), tenemos la siguiente relación.

(2.9)

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Des entonces la distancia polar esférica,  $\lambda$  es la longitud geográfica. En la derivación subsiguiente, el sistema de coordenadas esféricas se orienta de tal manera que el eje  $\theta = 0$  coincide con la recta que une O y P (Fig. 2.3).

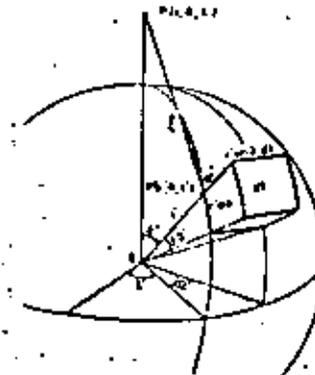


Fig. 2.3: Potencial gravitacional de una esfera centralmente simétrica.

el potencial de un cascarón esférico homogéneo de grosor infinitesimal  $dr'$  y densidad  $\rho$  y teniendo un radio  $r'$  se da análogamente a (2.8) mediante:

$$V = G \rho r' \iint \frac{dA}{r}$$

donde la integración es con respecto a la superficie del cascarón  $\rho$  y donde:

$$dA = r'^2 \sin \theta d\theta d\lambda$$

es el elemento de la superficie. Se hace una distinción en la integración en cuanto a que si el punto atraído es exterior o interior al cascarón esférico. Para un punto atraído que está en el exterior, el potencial está dado por:

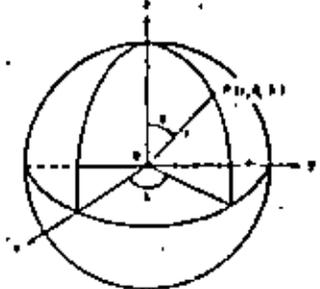


Fig. 2.2: Coordenadas Esféricas (r, theta, lambda)

(2.10) 
$$V_1 = 4\pi G \rho \int_0^r r^2 dr = 2\pi G \rho r^3$$

donde  $M = 4\pi \rho r^3$

representa la masa del cascarón esférico. El potencial de la Tierra esférica compuesta de cascarones homogéneos concéntricos es:

(2.11) 
$$V_1 = G \int \frac{dm}{r} = \frac{GM}{r}$$

Por lo tanto, equivale al potencial de toda la masa M de la Tierra concentrada en el centro de masa.

Siendo  $G = 398.6 \times 10^{12} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$  y el radio terrestre  $R = 6371 \text{ km}$ , el valor del potencial en la superficie terrestre ( $r = R$ ) equivale a  $V = 6.26 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , y la gravitación es  $b = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ .

Para un punto en el interior, obtenemos para el potencial del cascarón esférico:

(2.12) 
$$V_2 = 4\pi G \rho r^2 \int_r^R \frac{dr}{r^2} = \frac{GM}{R}$$

$V_2$  aquí es constante; por lo tanto, la gravitación es cero. El potencial dentro de una Tierra formada por cascarones está compuesto por la contribución (2.10) debido a las masas interiores a la esfera  $r = \text{const.}$ , y también a la contribución (2.12) del cascarón esférico de grosor  $R - r$ .

(2.13) 
$$V_3 = \frac{4\pi G}{r} \int_0^r \rho r^2 dr + 4\pi G \int_r^R \rho r^2 dr$$

Para una Tierra esférica homogénea ( $\rho = \text{const.}$ ) tenemos:

(2.14) 
$$V_3 = \frac{4}{3}\pi G \rho r^3 + 2\pi G \rho (R^2 - r^2) = 2\pi G \rho \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

### 2.1.5 Propiedades del Potencial Gravitacional.

Investiguemos las propiedades de la función potencial  $V$  y su primera y segunda derivadas.

Si el punto atraído P es exterior a la región de atracción, esto es, "el cuerpo físico de la Tierra" entonces  $l \geq 0$  siempre. Aquí despreciamos la masa de la atmósfera  $M_{\text{Atm}} = 10^{-6} M$ . El potencial  $V$  (2.8) y las primeras derivadas (debido a (2.3)):

(2.15) 
$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_1 = -G \iiint_{\text{masa}} \frac{x-x'}{r^3} dm \text{ etc.}$$

el igual que las segundas derivadas:

(2.16) 
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{22} = -G \iiint_{\text{masa}} \frac{1}{r^3} dm + 3G \iiint_{\text{masa}} \frac{(x-x')^2}{r^5} dm \text{ etc.}$$

son valores individuales, finitos y funciones continuas en todo el espacio exterior. Todos ellos desaparecen en el infinito.

La unidad de la segunda derivada del potencial es  $\text{s}^{-2}$ . Debido a la magnitud de la segunda derivada y la precisión de medida ( $10^{-8}$  hasta  $10^{-9} \text{ s}^{-2}$ ), las unidades comúnmente usadas son  $10^{-9} \text{ s}^{-2} = 1 \text{ Eötvös} = 0.1 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}/\text{km}$ .

Aplicando el operador Laplaciano  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  (aquí en coordenadas cartesianas) a  $V$  de la ecuación diferencial parcial de segundo orden que describe el campo gravitacional. Con (2.16) obtenemos la ecuación diferencial de Laplace.

(2.17) 
$$\Delta V = 0$$

Funciones continuas que tienen primeras y segundas derivadas continuas y que cumplen con (2.17) se llaman funciones armónicas o funciones potenciales.

Si el punto atraído está dentro del cuerpo terrestre, entonces el caso  $l = 0$  es posible. Esto requiere de atención especial debido a la discontinuidad de  $1/r$ .

En este punto, consideramos a P envuelta por una esfera  $R$  (centro en  $P_0$ , radio  $\rho$ );  $\rho$  se escoge suficientemente pequeño, de tal manera que  $\rho = \text{const.}$  dentro de esta esfera (Fig. 2.4). El potencial está compuesto de las contribuciones debido a las masas que están en el interior y exterior de la esfera.

De (2.8) y (2.14) y usando:  $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ ,

encontramos:

$$V = G \iiint \frac{\rho}{R} + 2\omega^2 \left( x^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

En el límite  $\rho \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow 0$ , se obtiene concordancia con la expresión para el potencial exterior (2.8).

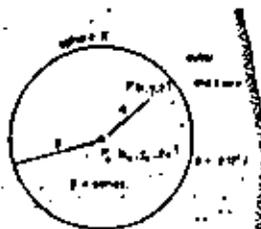


Fig. 2.4:  
Potencial Gravitacional dentro de la Tierra.

Diferenciando  $V$  obtenemos:

$$V_x = -G \iiint \frac{x-x_0}{R^3} \rho + \frac{4}{3} \omega^2 G \rho (x-x_0) \text{ etc.}$$

Como  $q \rightarrow 0$ , por lo tanto también  $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 \rightarrow 0$ , de tal manera que nuevamente obtenemos concordancia con el caso exterior (2.15). Las segundas derivadas están dadas por:

$$(2.16) \quad V_{xx} = -G \iiint \frac{3x-x_0}{R^5} \rho + \frac{4}{3} \omega^2 G \rho \text{ etc.}$$

El potencial gravitacional y sus primeras derivadas son entonces de valor único, finitas y también continuas en el interior. Las segundas derivadas, de acuerdo a (2.16) muestran discontinuidades para cambios súbitos en densidad. Para el interior de la Tierra, la ecuación diferencial de Poisson es:

$$(2.19) \quad \Delta V = -4\pi G \rho,$$

que es continuación de (2.18).

#### 2.1.4 Aceleración Centrífuga, Potencial Centrífugo.

La fuerza centrífuga surge como resultado de la rotación de la Tierra alrededor de su eje. Consideramos aquí una rotación de velocidad angular  $\omega$  constante --

alrededor de su eje de rotación, que además se supone fija con respecto a la Tierra. La aceleración centrífuga:

$$(2.20) \quad a = \omega^2 r$$

que actúa en una unidad de masa se dirige hacia afuera perpendicularmente al eje de rotación (Fig. 2.5).

La velocidad angular:

$$\omega = 2\pi \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

se conoce con gran precisión de la astronomía (4.7.3)

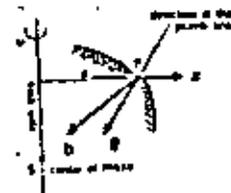


Fig. 2.5:  
Gravitación  $g$ ,  
Aceleración  
Centrífuga  $a$ ,  
Aceleración de  
Gravedad  $g'$ .

Si el eje  $z$  de un sistema  $x, y, z$  terrestre fijo coincide con el eje de rotación, entonces tenemos:

$$\text{con } \rho = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(2.21) \quad \text{introducimos el potencial centrífugo}$$

$$(2.22) \quad \Phi = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

Diferenciando dos veces y aplicando el operador Laplaciano se obtiene:

$$(2.23) \quad \Delta \Phi = 2\omega^2$$

La función analítica  $\Phi$  es, en contraposición a  $V$  (2.17), no armónica.

Para puntos en el ecuador de la Tierra, el potencial centrífugo tiene un valor de  $\phi = 1.1 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  y la aceleración centrífuga es  $z = |z| = 0.03 \text{ ms}^{-2}$  (= 0.3% de gravitación). En los polos  $\phi = 0, z = 0$

2.1.5 Aceleración de gravedad, Potencial de Gravedad.

La aceleración de gravedad, o gravedad (Latín: gravitas) es la resultante de gravitación  $g$  y aceleración centrífuga  $z$  (Fig. 2.5):

(2.2)  $g = b + z$

La dirección de  $g$  se conoce como la dirección de la plomada; la magnitud  $g = |g|$  se denomina la intensidad de gravedad (frecuentemente nada más gravedad). Usando (2.2) y (2.22), el potencial de gravedad  $W$  terrestre se convierte en

(2.25)  $W = \gamma M / r - G \int \int \int \frac{\rho}{r} d\tau - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta$

La aceleración de la gravedad está dada por:

(2.26)  $g = -\text{grad } W$

$W$  y sus primeras derivadas son de valor único, finitas y continuas, como consecuencia de las características de  $V$  y  $\phi$ , con excepción del caso no interesante  $r = 0$  (entonces  $\theta = \pi$ ) y  $g = 0$  (la dirección de la plomada no es única). Las segundas derivadas poseen discontinuidades a variaciones de densidad irregulares.

En geodesia, la superficie más importante de discontinuidad es la superficie física de la Tierra con un salto en densidad de  $\rho = 0.0013 \text{ g cm}^{-3}$  (densidad del aire) hasta  $\rho = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$  (densidad promedio de la corteza terrestre).

De (2.19) y (2.23) obtenemos la ecuación diferencial de Poisson generalizada:

(2.27)  $\Delta W = -4\pi G \rho + 2\omega^2 r \sin^2 \theta$

En el espacio exterior ( $\rho = 0$ , despreciando la densidad del aire), se convierte en la ecuación diferencial de Laplace generalizada.

(2.28)  $\Delta W = 2\omega^2 r \sin^2 \theta$

Debido al achatamiento en los polos y a la aceleración centrífuga,  $g$  varía en la superficie del elipsoide terrestre entre  $9.78 \text{ ms}^{-2}$  (ecuador) y  $9.83 \text{ ms}^{-2}$  (polo).

2.2 SUPERFICIES DE NIVEL Y LINEAS DE LA PLOMADA

2.2.1 Definición y Propiedades de las Superficies de Nivel.

Las superficies de potencial de gravedad constante:

(2.29)  $W = W(r) = \text{const.}$

se designan como superficies equipotenciales, de nivel o geopotenciales (pocos). Como resultado de un desplazamiento elemental  $ds$ , la diferencia de potencial de las superficies de nivel diferencialmente separadas (Fig. 2.6) está dada (debido a (2.26)) por:

(2.30)  $dW = -g dr = -g ds \cos \alpha$

Por ello, la derivada del potencial de gravedad en una dirección determinada es (igual a la proyección de la gravedad a lo largo de esa dirección). Si  $ds$  se toma a lo largo de la superficie de nivel  $W = W_p$ , entonces se concluye de  $dW = 0$  que la gravedad  $g$  es perpendicular a  $W = W_p$ .



Fig. 2.6: Superficies de nivel y líneas de la plomada

Las superficies de nivel intersectadas perpendicularmente por las líneas de la plomada; la tangente a la línea de la plomada va a ser definida en (2.1.5) como la dirección de la línea de la plomada. Si  $ds$  sea en la dirección de la normal a la superficie exterior  $n$ , entonces debido a que  $\cos(g, n) = 1$  se cumple la importante relación diferencial siguiente:

(2.31)  $g dr = -g ds$

Ello suministra la unión entre la diferencia de potencial (una cantidad física) y la diferencia de altura (una cantidad geométrica) de superficies de nivel vecinas.

Como en (2.30) nada más interviene la proyección de  $ds$  a lo largo de la línea de la plomada,  $dW$  es independiente de la trayectoria. Por lo tanto no se hace ningún trabajo para un desplazamiento a lo largo de una superficie de nivel  $W = \text{const.}$  las superficies de nivel son superficies de equilibrio.

Si  $g$  varía en una superficie de nivel, entonces según (2.31) la distancia  $dn$  a una superficie de nivel vecina también debe cambiar. Por lo tanto, las superficies de nivel no son paralelas y las líneas de la plomada son curvas espaciales.

Como una consecuencia de un incremento de  $0.05ms^{-2}$  en gravedad del ecuador a los polos, las superficies de la Tierra convergen y hacia los polos (Fig. 2.7).

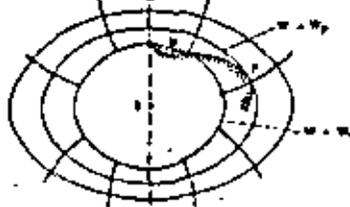


Fig. 2.7:  
Superficies de nivel y líneas de la plomada cerca de la Tierra.

El decremento relativo de la distancia entre dos superficies de nivel cercanas a la Tierra, desde el ecuador a los polos, es del orden de  $5 \times 10^{-3}$ . Dos superficies de nivel que tienen una separación de 100m en el ecuador, tienen una distancia de 99.5m entre ellas en los polos.

Las superficies de nivel dentro de la Tierra y en el más inmediato espacio exterior son superficies cerradas, superficies esferoidales (semejando una esfera). Como un límite exterior en el dominio de la definición de gravedad, se puede considerar la superficie de nivel en la cual se cancelan mutuamente la gravitación y la aceleración centrífuga en el plano ecuatorial. El radio ecuatorial de esta superficie tiene un valor de 42,200km.

El concepto de una superficie de nivel fue presentado por Mac Laurin (1742), mientras que Lalaut (1743) trató a fondo "Superficies de Nivel y Líneas de la Plomada", con un conjunto. Brunt (1878) propuso la determinación de las superficies de nivel exterior en su totalidad como el problema más importante de la geodesia.

1.2.2 Representación Analítica de las Superficies de Nivel.

A partir de las propiedades de la función de potencial  $W = W(r)$  (2.1.5) se concluye que las superficies de nivel que se extienden completamente en el espacio exterior son superficies analíticas; o sea que no tienen puntos salientes o singularidades. Superficies de nivel que se extienden parcial o totalmente dentro de la Tierra muestran discontinuidades en las segundas derivadas si hay irregularidades de densidad. Por lo tanto, estas superficies solamente se pueden construir a partir de pedazos de superficies analíticas diferentes. Cambiando constantemente de un segmento de superficie a otro la curvatura cambia discontinuamente con la segunda derivada. Las partes analíticas de las superficies de nivel se pueden desarrollar usando la serie de Taylor.

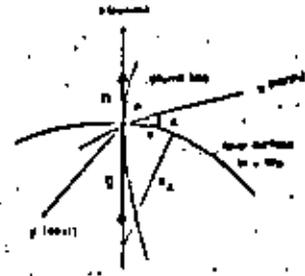


Fig. 2.8:  
Sistema Coordinado Cartesiano Local

Usamos un sistema cartesiano local en el punto arrojado P (Fig. 2.8). El eje z coincide con la dirección de la línea de la plomada y apunta hacia el norte; los ejes x (norte) y y (este) determinan la superficie tangencial a la superficie de nivel (plano horizontal) en P. Este sistema de referencia orientado astronómicamente (sistema de mano izquierda) también se conoce como el sistema astronómico local.

En la vecindad de P,  $W(x, y, z)$  se desarrolla en una serie:

$$W = W_0 + W_1x + W_2y + W_3z + \frac{1}{2}(W_{11}x^2 + W_{22}y^2 + W_{33}z^2 + W_{12}xy + W_{13}xz + W_{23}yz) + \dots$$

Aquí  $W_x, W_y, \dots$  etc, representan las derivadas parciales en P. Si P está en una superficie de nivel, entonces despreciando los términos de tercer orden y superiores, y debido a que:

$$W_x = W_y = W_z = 0$$

Se concluye que la ecuación de esta superficie es:

$$(2.32) \quad -gz + \frac{1}{2}(W_{11}x^2 + W_{22}y^2) + W_{33}z^2 + \dots = 0$$

2.2.3 Curvatura de las Superficies de Nivel

Para poder derivar la curvatura de la superficie de nivel en el punto P, usamos el plano vertical definido por la superficie normal (dirección de la línea de la plomada) a P y a un segundo punto. Su intersección con la superficie de nivel forma una curva plana, la sección normal o vertical. La dirección de la sección normal está dada por el ángulo medido en el plano horizontal entre el eje g y la sección normal. Este ángulo se llama el azimut astronómico A (Fig. 2.8). La curvatura de la sección normal (curvatura normal), puede determinarse para pequeñas distancias s de las relaciones geométricas de la Fig. 2.8:

$$(2.33) \quad \frac{1}{R_A} = -\frac{2g}{s^2}$$

Aquí  $R_A$  es el radio de curvatura. Usando las coordenadas polares planas  $s = 2R_A \sin A$

y substituyendo (2.32) conduce a:

$$(2.34) \quad \frac{1}{R_A} = -\frac{1}{R^2}(W_{11} \cos^2 A + 2W_{12} \cos A \sin A + W_{22} \sin^2 A)$$

La curvatura normal adopta sus valores extremos en las direcciones de curvatura principal mutuamente perpendiculares. De una consideración de valores extremos, encontramos para sus extremos  $A_1$  y  $A_2 = A_1 \pm \frac{1}{R}$

(2.35) 
$$R = \frac{1}{A_1 \pm \frac{1}{R}} = \frac{W_{xx} - W_{yy}}{W_{xx} + W_{yy}}$$

Las curvaturas en las direcciones  $-A_1$  y  $-A_2$  ( $A = 0^\circ$  y  $A = 180^\circ$ ), están dadas por:

(2.36) 
$$\frac{1}{R_x} = \frac{W_{xx}}{R} \quad \frac{1}{R_y} = \frac{W_{yy}}{R}$$

donde  $R_x$ ,  $R_y$  son los radios de curvatura correspondientes. (2.34) ó (2.36) revelan la corrección entre la curvatura de las superficies de nivel y las segundas derivadas del potencial de gravedad.

2.2.4 Curvatura de las líneas de plomada.

Comenzamos con el vector de curvatura de la línea de la plomada:

(2.37) 
$$r = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos A \\ R \sin A \\ 0 \end{pmatrix}$$

al cual se encuentra a lo largo de la normal principal a la línea de la plomada. Aquí  $r''$  significa la segunda derivada con respecto a la longitud del arco de la línea de la plomada.  $R$  es la curvatura total y  $A$  es el Azimuth de la normal principal en el plano horizontal. Obtenemos los componentes de  $r''$  diferenciando la ecuación de la línea de la plomada:

$$r = z \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ -W_z \end{pmatrix}$$

y considerando que  $x'^2 + y'^2 - z'^2 = -1$ :

$$r = -\frac{1}{z} \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

substituyendo esto en (2.37) da la curvatura de la línea de la plomada:

(2.38) 
$$r = -\frac{W_x}{z \cos A} \quad -\frac{W_y}{z \sin A}$$

y el azimuth de su normal principal:

(2.39) 
$$A = \arctan \frac{W_x}{W_y}$$

Las curvaturas de las proyecciones de la línea de la plomada en los planos  $xz$  y  $yz$  están dadas por:

(2.40) 
$$k_x = -\frac{W_x}{z} \quad k_y = -\frac{W_y}{z}$$

respectivamente, donde  $K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . (2.38) ó (2.40) muestran que la curvatura de las líneas de la plomada también depende de las segundas derivadas del potencial de gravedad.

2.2.5 Gradiente de Gravedad

El gradiente de gravedad:

(2.41) 
$$\text{grad}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$$

está íntimamente relacionado a la curvatura de las superficies de nivel y  $\nabla^2$  de la plomada. De acuerdo a (2.40), el gradiente horizontal (Fig. 2.9) formado por los componentes  $\partial g/\partial x$  y  $\partial g/\partial y$  determina la curvatura de la línea de la plomada. El gradiente apunta a la dirección del máximo incremento en gravedad en el plano horizontal.

La componente vertical  $\partial g/\partial z = -W_z$  describe la variación de gravedad con respecto a la altura. Si combinamos la ecuación diferencial de Poisson generalizada (2.27) con la curvatura media:

(2.42) 
$$\nabla^2 = \frac{1}{z} \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) = -\frac{1}{z} (W_x + W_y)$$

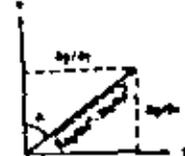


Fig. 2.9: Gradiente Horizontal de Gravedad

calculada de (2.36), entonces obtenemos la relación encontrada por H. Bruns (1876) entre la componente vertical del gradiente de gravedad y la curvatura superficies de nivel:

(2.43) 
$$\frac{W_z}{z} = -2gH + 4\pi G\rho - 2\omega^2$$

### 2.3 EXPANSIÓN ARMÓNICA ESFÉRICA DEL POTENCIAL GRAVITACIONAL

Debido a que la función de densidad  $\rho = \rho(r')$  es desconocida, el potencial gravitacional de la Tierra  $v = V(r)$  no se puede calcular usando (2.8). Sin embargo, es posible desarrollar una serie convergente en el espacio exterior a la Tierra (p.e. Hobson B 1931, §11. B 1973). Como una aproximación, se puede aplicar tal representación sobre la superficie terrestre.

#### 2.3.1 Expansión de la distancia recíproca.

Aplicando la ley de los cosenos en la fig. 2.1 obtenemos:

$$(2.43) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \psi} = \frac{1}{r'} \left( 1 - \left( \frac{r}{r'} \right)^2 + 2 \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \cos \psi \right)^{-1/2}$$

para la distancia recíproca, que aparece en (2.8), entre el punto atraído P y el punto atrayente P'. Aquí,  $\psi$  es el ángulo central entre P y P'.

Si  $1/r$  se expande en una serie convergente para  $r' > r$ , y si los términos se combinan de acuerdo a las potencias crecientes de  $r'/r$ , entonces:

$$(2.45) \quad \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos \psi)$$

$P_n(\cos \psi)$  represente polinomios de entera grado en  $\cos \psi$ . Se conocen como polinomios de Legendre (funciones armónicas azimutales) y se calculan para el argumento  $t = \cos \psi$  por medio de:

$$(2.46) \quad P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

Si consideramos que  $\psi$  es la distancia esférica sobre una esfera unitaria

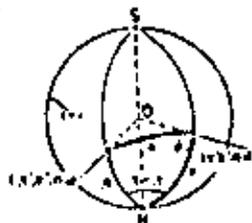


Fig. 2.10  
Distancia esférica y Coordenadas Esféricas

entre el punto atraído y el punto atrayente, entonces de acuerdo a la fig. 2.10 y usando las coordenadas esféricas mostradas en (2.1.2), existe la siguiente relación:

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi \quad (2.47)$$

La descomposición correspondiente de  $P_n(\cos \psi)$  conduce a:

$$(2.47) \quad P_n(\cos \psi) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') + P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta'))$$

→ Aquí, los  $P_n(t)$  son nuevamente los polinomios de Legendre con argumento  $t = \cos \theta$  &  $t = \cos \theta'$ . Las funciones de Legendre asociadas del primer tipo  $P_n^m(t)$  ( $n =$  grado,  $m =$  orden) se obtienen diferenciando  $P_n(t)$   $m$  veces con respecto a  $t$ :

$$(2.48) \quad P_n^m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} P_n(t)$$

Completamos la expansión de  $1/r$  substituyendo (2.47) en (2.45).

Las funciones:

$$(2.49) \quad P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta')$$

dependiendo de  $\theta$  y  $\theta'$  se conocen como armónicas superficiales (de Laplace). Caracterizan el comportamiento de una función sobre una esfera unitaria.

#### 2.3.2 Expansión del Potencial Gravitacional.

Después de substituir la expansión armónica esférica (2.45), (2.47) de  $1/r$ , obtenemos para el potencial gravitacional (2.8):

$$(2.50) \quad V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left( P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \right) \left( \int \rho(r') r'^2 dr' d\Omega' \right) + \dots$$

Para  $n=0$ , la integración de el potencial de la masa terrestre  $M$  concentrada en el centro de masa (2.11). Esta expresión la resumimos, introducimos el semieje mayor del elipsoide terrestre como una constante, y designamos a las integrales de la masa con  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  (coeficientes armónicos). El potencial gravitacional desarrollado en armónicas esféricas se escribe como:

$$(2.51) \quad V = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r}{a} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \right)$$

donde

$$(2.52) \quad \left. \begin{aligned} C_{nm} &= \frac{1}{M} \int \int \int \left( \frac{r'}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta') \rho(r') dr' d\Omega' \\ S_{nm} &= \frac{1}{M} \int \int \int \left( \frac{r'}{a} \right)^n P_n^m(\cos \theta') \rho(r') \sin \theta' d\theta' d\phi' dr' \end{aligned} \right\}$$

En especial en la Geodesia de Satélites, generalmente se usan los coeficientes:

$$(2.53) \quad J_n = -C_{n0}, \quad K_n = -C_{n2}, \quad S_n = -S_{n2}$$

Las armónicas totalmente normalizadas  $P_{nm}(\cos \vartheta)$ , también se usan con frecuencia. Pueden ser calculadas a partir de las armónicas convencionales (2.46) (2.48), de acuerdo a:

$$(2.48a) \quad P_{nm}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n(\cos \vartheta) Y_n^m = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{si } m=0 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Adicionalmente a las relaciones de ortogonalidad para las armónicas de superficie, también tenemos ahora:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( P_n(\cos \vartheta) Y_n^m \right) \left( P_n(\cos \vartheta) Y_n^m \right) d\sigma = 1$$

sobre la esfera unitaria  $\sigma$ . En forma correspondiente, los coeficientes armónicos  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  de la expansión esférica (2.51) del potencial gravitacional están dados por:

$$(2.52a) \quad \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} = \sqrt{\frac{4\pi}{4\pi(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \begin{cases} C_n \\ S_n \end{cases} Y_n^m = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{si } m=0 \\ 1/\sqrt{2} & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

La expansión (2.50) converge fuera de una esfera de radio  $r = a$ , que nada más cubre el cuerpo terrestre. Debe hacerse notar que la expansión armónica en ningún caso es válida para el interior de las masas, ya que el interior está regido por la ecuación diferencial de Poisson (2.13).

En general, la expansión del potencial gravitacional en armónicas esféricas también se puede derivar de la solución de la ecuación diferencial de Laplace (2.12), provisto que la función  $V$  está representada en el sistema de coordenadas esféricas  $r, \vartheta, \lambda$ .

### 2.3.3 El significado Geométrico de las Armónicas de Superficie

Considerando aquí el comportamiento de las armónicas superficiales (2.49), las cuales aparecen en la expansión armónica del potencial gravitacional.

La condición  $m = 0$  conduce al caso especial de los polinomios de Legendre  $P_n(\cos \vartheta)$ . Debido a su independencia de la longitud geográfica  $\lambda$ , dividen a la superficie de la esfera en zonas en las cuales tienen signos positivos y negativos alternadamente: armónicas de zona. Estas armónicas poseen  $n$  ceros reales en el intervalo  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , de tal manera que para  $n$  par, la esfera se divide simétricamente con respecto al ecuador  $\vartheta = 90^\circ$ , y al caso para  $n$  impar resulta en una

división asimétrica (fig. 2.11). Los  $P_n(\cos \vartheta)$ , hasta para  $n = 3$  y calculados de acuerdo a (2.46), se dan como sigue:

$$(2.54) \quad P_0 = 1, P_1 = \cos \vartheta, P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}, P_3 = \frac{5}{2} \cos^3 \vartheta - \frac{3}{2} \cos \vartheta$$

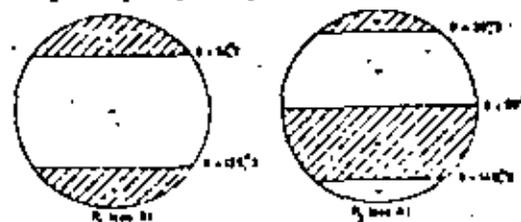


Fig. 2.11:  
Armónicas de zona

Los  $P_{nm}(\cos \vartheta)$  ( $m \neq 0$ ) tienen  $(n - |m|)$  ceros en el intervalo  $0 < \vartheta < \pi$ . Debido a la multiplicación por  $\cos m\lambda$  ó  $\sin m\lambda$ , las armónicas de superficie son dependientes de la longitud, proporcionando  $2m$  ceros en el intervalo  $0 \leq \lambda < 2\pi$ : armónicas teselas (fig. 2.12). Para  $P_{nm}(\cos \vartheta)$  hasta  $n = m = 3$ , (2.48) da:

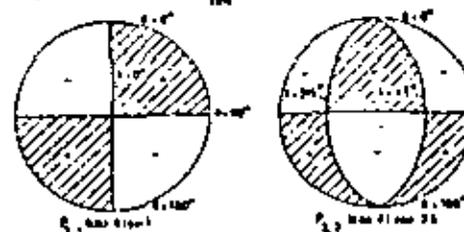


Fig. 2.12:  
Armónicas Teselas

$$(2.55) \quad \begin{aligned} P_{30} &= \frac{5}{8} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta), & P_{31} &= 15 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta, & P_{32} &= 15 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta, \\ P_{33} &= 15 \sin^3 \vartheta. \end{aligned}$$

Finalmente, para  $m = n$ , la dependencia de  $\vartheta$  desaparece, y la esfera se divide en sectores de signos alternantes: armónicas sectoriales (fig. 2.13)

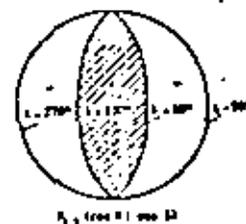


Fig. 2.13:  
Armónicas Sectoriales

Las amplitudes de los términos dados por las armónicas de superficie en la expansión del potencial gravitacional, están determinados por los coeficientes armónicos (2.42). Por ejemplo, las series nada más tienen armónicas de zona para una Tierra rotacionalmente simétrica con respecto al eje  $\vartheta = 0$ . Todos los  $C_{nm}$ ,  $S_{nm}$  ( $m \neq 0$ ) deben desaparecer. Para una distribución de masa que es simétrica con respecto al ecuador, los coeficientes de las armónicas de zona con  $n$  impar están ausentes.

### 2.3.4 Significado físico de los coeficientes de las armónicas de orden inferior

Algunas de las integrales de masa de orden inferior tienen una interpretación física simple. Para ver esto, sustituimos las funciones armónicas  $P_n$ ,  $P_m$  para  $n = 1, 2$  y  $m = 0, 1, 2$  de (2.54) y (2.55) en (2.52) y posteriormente transformamos las coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas usando (2.9). Esto da:

$$(2.56) \quad C_1 = \frac{1}{2M} \iiint r^2 dm, \quad C_{2,0} = \frac{1}{2M} \iiint z^2 dm, \quad C_{2,1} = \frac{1}{2M} \iiint y^2 dm$$

Las integrales divididas entre  $M$  son las coordenadas del centro de masa de la Tierra. Si colocamos al origen del sistema coordenado en el centro de masa, como comunmente se hace, entonces esto da:

$$(2.57) \quad C_1 = C_{2,0} = C_{2,1} = 0$$

Para  $n = 2$  obtenemos:

$$(2.58) \quad C_2 = \frac{1}{2M} \iiint \left( r^2 - \frac{z^2 + x^2}{2} \right) dm, \quad C_{2,2} = \frac{1}{2M} \iiint r^2 dm, \quad C_{2,1} = \frac{1}{2M} \iiint r^2 dm, \quad C_{2,0} = \frac{1}{2M} \iiint (z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}) dm$$

Estas expresiones contienen los momentos de inercia:

$$A = \iiint (y^2 + z^2) dm, \quad B = \iiint (x^2 + z^2) dm, \quad C = \iiint (x^2 + y^2) dm$$

y los productos de inercia

$$D = \iiint yz dm, \quad E = \iiint xz dm, \quad F = \iiint xy dm$$

con respecto a los ejes coordenados. El eje  $z$  contiene al eje medio de rotación el cual, si se desprecia el movimiento polar (3.1), coincide con uno de los ejes principales de inercia (momento máximo de inercia). De donde,  $D = E = 0$  y  $C$  se vuelve un momento de inercia principal. Si dejamos que el eje  $x$  coincida con uno de los dos ejes principales de inercia en el plano del ecuador, entonces  $A$  y  $B$  se vuelven momentos de inercia principales con respecto a estos ejes acuatoriales; aún más  $F = 0$ . Como las posiciones de los ejes de inercia principales en el ecuador se desconocen, se mantiene el conteo usual de la longitud geográfica  $\lambda$  a partir del meridiano de Greenwich.

Usando los momentos de inercia  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y el producto de inercia  $F$ , los coeficientes armónicos pueden expresarse como sigue:

$$(2.59) \quad C_2 = \frac{1}{2M} \left( \frac{A+B}{2} - C \right), \quad C_{2,2} = \frac{A-B}{2M}, \quad C_{2,1} = \frac{F}{2M}$$

$J_2 = -C_2$  también se conoce como el factor de forma dinámico.

El achatamiento de la Tierra en los polos representa la desviación más grande de la simetría esférica. Esto lo hace evidente el valor numérico para  $C_2$  que es tres órdenes de magnitud mayor que los valores de los coeficientes sucesivos.  $C_{2,2}$  y  $S_{2,2}$  caracterizan la desviación de la distribución de la masa terrestre de rotación simétrica (elipticidad del ecuador) (3.3.4)

### 2.4 VARIACIONES TEMPORALES DEL CAMPO DE GRAVEDAD

Las aceleraciones de mareas dependientes del tiempo son ocasionadas por las diversas fuerzas gravitacionales lunares y solares que actúan en diferentes partes de la Tierra que tiene movimiento giratorio. Estas están suplementadas por los efectos de las revoluciones de la luna alrededor de la Tierra y de la Tierra alrededor del Sol. Las aceleraciones producen variaciones en el campo de gravedad terrestre del orden de  $10^{-7}$  g. Una descripción comprensiva está dada por Melchior (1978). Otras variaciones del campo de gravedad en tiempo generalmente son cuando menos un orden de magnitud más pequeñas que los efectos de las mareas.

#### 2.4.1 Aceleración de Mareas, Potencial de Mareas.

Para una Tierra rígida, el potencial de mareas puede determinarse de la ley de gravitación y los elementos orbitales de la Luna y el Sol ("mareas lábricas"), ver por ej. Bartels (1957). Los cálculos se realizan separadamente para los sistemas Tierra-Luna y Tierra-Sol; los resultados se suman posteriormente. En este caso la Luna y el Sol se pueden considerar como puntos masa.

Introducimos un sistema coordenado cuyo origen se encuentra en el centro de masa terrestre, desplazándose con la Tierra en el espacio, pero sin girar (revolución sin giro). Todos los puntos de la Tierra describen el mismo movimiento rotacional en este sistema, con períodos mensuales (Luna) o anuales (Sol). Por lo tanto, la aceleración centrífuga actúa de igual manera en todos los puntos. En el centro de masa terrestre, se compensa por la gravitación  $b_0$  de la Luna y el Sol respectivamente (equilibrio en los respectivos sistemas). En los demás puntos de la Tierra, la aceleración de marea  $b_1$  surge como la diferencia entre la gravitación  $b$  y la aceleración centrífuga  $b_0$  (Fig. 2.14):

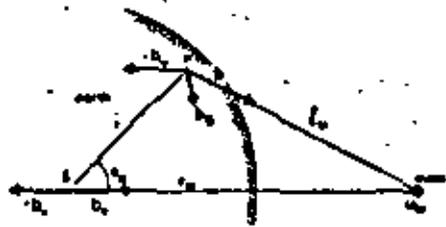


Fig. 2.14:  
Aceleración de mareas lunares

(2.60)  $a = a - a_0$

Hacemos la transición de la aceleración al potencial de mareas  $V_0$ :

(2.61)  $a = \text{grad } V_0 = \text{grad}(V - V_0)$

$V$  se obtiene de (2.6) como el potencial gravitacional de un punto masa, en el cual, para el caso de la Luna, se debe reemplazar por la masa de la Luna  $M_M$ . Para determinar  $V_0$ , usamos un sistema coordenado rectangular con su origen en  $S$ , y cuyo eje  $Z$  coincide con la línea que une  $S$  y  $M$ . El potencial del campo homogéneo  $a_0$  es entonces  $[a_0] \times Z$ . Con:

$$M_M = \frac{GM_M}{r^2} \text{ con } r = r_0 \cos \theta_0$$

o incorporando la constante  $GM_M/r_0$  (entonces el potencial de mareas en  $S$  llega a ser  $V_0 = 0$ ), se obtiene:

(2.62) 
$$V = GM_M \left( \frac{1}{r_0} - \frac{r}{r_0^2} \cos \theta_0 \right)$$

Ya que para puntos en la superficie de la Tierra ( $r = R$ ) tenemos la relación  $r/R = 1/50$  (para el Sol la correspondiente relación es  $1/23600$ ), y la distancia recíproca:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{r}{r_0^2} \cos \theta_0 + \dots$$

puede desarrollarse, correspondiendo a (2.45) en una serie de funciones armónicas (Doodson 1921). Terminamos la expansión de la serie en  $n = 2$  y sustituimos (2.62). Con la constante de mareas de Doodson,

(2.63)  $G_M M = \frac{3}{2} G_M M \frac{R^2}{r_0^3}$

( $r_M$  = distancia promedio a la Luna) y  $\cos^2 \theta_M = 1/2 (\cos 2\theta_M + 1)$ , esto se convierte en:

$$V = G_M M \left( \frac{R^2}{r_0^3} \right) \left( \cos 2\theta_M + \frac{1}{2} \right)$$

Una fórmula correspondiente se cumple para el potencial de mareas debido al Sol. Para  $r = R$  las constantes de mareas para la Luna y el Sol son:

$$G_M M = 2.25 \times 10^{-12}, G_S M = 1.207 \times 10^{-11}$$

De allí que, las mareas solares sean sólo el 46% de las mareas lunares.

Para sistemas estacionarios Tierra-Luna y Tierra-Sol, las superficies de nivel de la Tierra experimentarían una deformación que es constante con respecto al tiempo. Masas de agua con movimiento libre que cubrirían toda la Tierra, asumirían la forma de una de estas superficies de nivel: marea de equilibrio. Las variaciones en altura de las superficies de nivel debido al potencial de mareas pueden calcularse mediante (2.31). Para la Luna (Sol) esto da un incremento de 0.30 (0.16)m en  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$  en la superficie terrestre; en  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$  hay un decremento de 0.15 (0.08)m.

Diferenciando (2.64) se obtiene la aceleración de mareas. La componente radial (positiva hacia afuera) para una distancia promedio a la Luna ( $r_M = r_0$ ) es dada:

(2.65) 
$$a_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{3}{2} G_M M \left( \cos 2\theta_M - 1 \right)$$

La componente tangencial (positiva en la dirección hacia la Luna) es:

(2.66) 
$$a_t = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{3}{2} G_M M \sin 2\theta_M$$

El cambio de gravedad  $-a_t$  dependiente del tiempo (r se desvía ligeramente de la dirección de la plomada) varía en el caso de la Luna (Sol) entre  $-0.31$  ( $-0.05$ ) a  $10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  y  $+0.05$  ( $+0.03$ ) a  $10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ . La dirección de la plomada fluctúa en el orden de  $b_p / g$ , o sea alrededor de  $\pm 0.017$  ( $\pm 0.008$ ).

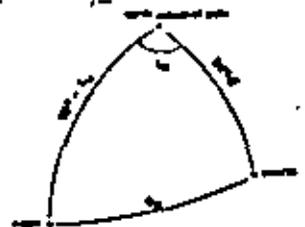


Fig. 2.15:  
Triángulo Astronómico

La fórmula (2.62) establece la dependencia del potencial de mareas con base en la posición de la Luna ( $r_M, \theta_M$ ).

Las variaciones de este campo en el tiempo se pueden reconocer con mayor facilidad al cambiarse a un sistema coordenado fijo a la Tierra, o sea, uno que gire con la Tierra. De acuerdo a la Fig. 2.15 tenemos:

$$\cos \theta_M = \cos \delta \sin \delta_M + \sin \delta \cos \delta_M \cos \omega t$$

( $\varphi$  = latitud geocéntrica del punto observado P,  $\delta_M$  = declinación y  $t_M = \theta - \alpha_M$  = ángulo horario de la Luna,  $\alpha_M$  (ascensión recta) y  $\delta_M$  se obtienen para el tiempo sideral  $\theta$  en los almanaques astronómicos (A.1.2) Substituyendo esto en (2.64) da:

$$(2.67) \quad P = C_M A \left( \frac{r_M}{r_E} \right)^3 \left( \frac{1}{3} - m^2 \delta^2 \right) \left( \frac{1}{3} - m^2 \delta_M^2 \right) + m^2 \left[ \phi \cos \delta_M \cos \delta + \cos^2 \phi \cos^2 \delta_M \cos 2i_M \right]$$

para el potencial de mareas de la Luna (se puede obtener una ecuación correspondiente para el Sol).

En (2.67), las cantidades  $r_M$ ,  $\delta_M$ ,  $t_M$  varían con diferentes períodos. El primer término, que es independiente de la rotación terrestre, muestra períodos de oscilación largos (14 días, y 0.5 años para el Sol).

Su parte no-periódica ocasiona una deformación permanente de las superficies de nivel (son disminuidas en los polos por aproximadamente 0.26m y elevadas en el ecuador por aproximadamente 0.13m). El segundo término oscila con períodos diurnos; el tercero con períodos semidiurnos. En el presente (1977) estado de esta de observaciones de mareas, la expansión armónica esférica (2.67) debe incluir términos hasta  $n = 3$  para la Luna (dando un término adicional con un período de 8d); la expansión hasta el grado  $n = 2$  es suficiente para el Sol.

Para comparar las mareas observadas con las teóricas, Doodson descompuso el potencial de mareas de la Luna y el Sol en una suma de oscilaciones armónicas (mareas parciales u ondas) las cuales están determinadas por sus frecuencias, amplitudes y fases.

La expansión más reciente de Cartwright y Taylor/Idden (1971/1973) contiene 505 ondas. Las más importantes son las ondas semidiurnas M2 (Luna), S2 (Sol), M2 (excentricidad de la órbita Lunar) y las ondas diurnas O1 (Luna), P1 (Sol), K1 (declinación lunisolar).

3.4.2 Mareas Terrestres

El cuerpo terrestre parcialmente elástico es deformado por las mareas mareas de la Tierra sólida (mareas terrestres); ver por ej. Tomaschek (1957), -- Melchior (1974). La deformación puede representarse aproximadamente por los parámetros  $h$  y  $k$  (adimensionales) de Love, y más adelante por el número  $l$  de Shida.



Fig. 2.16: Mareas de la tierra sólida

Bajo la influencia del potencial de mareas  $V$  (2.64), la Tierra se deforma en una dirección radial (Fig. 2.16) por una fracción de la variación  $\Delta r_1$  en las superficies de nivel:

$$(2.68) \quad \Delta r_1 = h \Delta V, \quad h = \frac{V}{g}$$

Como una consecuencia de la nueva distribución de masa, las superficies de nivel de la marea de equilibrio  $V + V_1 = \text{const.}$  se deforman; el potencial adicional es proporcional a  $V_1$ :

$$(2.69) \quad V_1 = k V_1$$

Las deformaciones de la Tierra en la dirección horizontal son proporcionales a las aceleraciones de mareas horizontales ( $x = \text{norte}$ ,  $y = \text{este}$ ).

$$(2.70) \quad \Delta x = -\frac{12V_1}{g \cdot 10^8}, \quad \Delta y = \frac{f}{g \cdot 10^8} \frac{\partial V_1}{\partial x}$$

Para una Tierra esférica homogénea,  $k = 0.6$   $h = 3$  Para un punto en la superficie terrestre, el potencial de gravedad es alterado por las cantidades  $V_1$ ,  $V_2$  debido a las mareas, y como resultado del cambio en potencial debido a  $\Delta r_1$ .

$$(2.71) \quad V_2 = V_1 + V_2 - g \Delta r_1 = V_2(1 + k - h)$$

Diferenciando con respecto a  $r$ , obtenemos la componente radial de la aceleración de mareas. Suponiendo que  $V_2$  se puede representar por la armónica esférica de segundo grado, se encuentra, usando (2.65), que:

$$(2.72) \quad r_{2r} = \frac{2V_2}{R^2} - \left(1 - \frac{3}{2}k + h\right) \frac{V_2}{R^2}$$

La componente tangencial está dada por:

$$(2.73) \quad r_{2\theta} = -\frac{2V_2}{R^2} \sin \theta (1 + k - h)$$

Por alto, debido a la flexibilidad de la superficie terrestre, la desviación de la vertical observada  $\eta_y(\theta)/g$  es menor que la teórica.

Los factores de amplitud de las ondas principales se pueden obtener por (2.72):

$$(2.74) \quad \Delta = 1 - \frac{3}{2}k + h$$

usando un gravímetro y por (2.73)

(2.75)

$$z = l + k - h$$

usando un clinómetro. Junto con estos, uno puede determinar los desplazamientos de fase acompañantes entre las mareas observadas y las teóricas (4.2.6)

### 2.4.3 Otras Variaciones Temporales del Campo de Gravedad

Además de las mareas, el campo de gravedad terrestre es afectado por un número de procesos adicionales, dependientes del tiempo. Los cambios de gravitación son causados por el desplazamiento de masa en la atmósfera, en los océanos, en la superficie sólida de la Tierra, y en su interior. Sin embargo, estos cambios permanecen en los límites de las capacidades de medición actuales. Lo mismo se cumple para una declinación secular en gravitación presumiblemente conectada con una expansión de la Tierra. Los motivos de estos procesos, su variación en el tiempo y la forma en que son registrados serán abordados al tratar la geodinámica (5.5.5). La variación de la aceleración centrífuga causada por el desplazamiento polar (3.1) y los cambios en la velocidad de rotación terrestre (4.1.3), permanecen dentro de la precisión de medición.

### 3. SISTEMAS DE REFERENCIA GEODESICOS

De cantidades observadas y a través de cálculos geodésicos subsecuentes, uno intenta determinar los parámetros de la superficie terrestre física y del campo de gravedad externo, al igual que el elipsoide terrestre medio. En este punto, se deben introducir sistemas de referencia de una medida y curvatura conocidas.

Debido a la formulación espacial del problema, se utilizan sistemas de referencia tri-dimensionales en la geodesia global. La base fundamental es un sistema coordenado cartesiano espacial global (3.1); las observaciones hechas en el campo de gravedad terrestre son transformadas a este sistema (3.2). Los sistemas de referencia bi-dimensional (superficies de referencia) son de utilidad en levantamientos geodésicos. Aquí, el geoide sirve como la superficie de referencia para alturas (3.3). Los elipsoides de revolución se usan para establecer posiciones; si uno incluye la altura sobre el elipsoide, entonces esto da origen a sistemas elipsoidales tridimensionales (3.4). El campo de gravedad externo está referenciando al campo de gravedad normal de un elipsoide (3.5).

#### 3.1 SISTEMA CARTESIANO ESPACIAL GLOBAL, MOVIMIENTO DEL POLO.

Como un sistema coordenado terrestre fundamental, introducimos un sistema cartesiano espacial  $(x, y, z)$  fijo a la Tierra, cuyo origen es el centro de masa terrestre  $S$  (geocentro, centro de masa incluyendo la masa de la atmósfera), Fig. 3.1. El eje  $Z$  coincide con el eje de rotación medio de la Tierra.

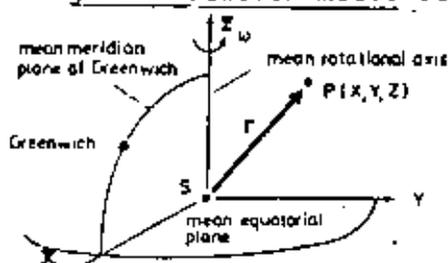


Fig. 3.1  
Sistema XYZ  
geocéntrico  
fijo a la  
Tierra

El plano ecuatorial medio perpendicular a este eje forma el plano  $XY$ . El plano  $XZ$  se genera por el plano meridiano medio de Greenwich. Este último está definido por el eje rotacional medio y el observatorio de Greenwich promedio. El eje  $Y$  está colocado de tal manera que se obtiene un sistema de mano derecha. La introducción de un eje rotacional medio es necesario, porque en el transcurso del tiempo, el eje de la Tierra cambia su posición dentro del cuerpo terrestre: movimiento del polo. De esta manera, las observaciones astronómicas referidas al eje rotacional se vuelven dependientes del tiempo.

El movimiento del polo consiste de varios componentes (Rochester 1975). Un movimiento algo circular del polo instantáneo en un sentido contrario a las manecillas del reloj (como visto desde el norte), con un período de aproximadamente 430 días y una amplitud de 0'1 a 0'2 (período Chandler) se debe al hecho de que el eje principal de inercia de la Tierra no coincide con el eje de giro. Para una Tierra rígida, esto conduce a un giro del eje de rotación alrededor del eje principal de inercia con un período de  $A/(C-A) = 305$  días (período Euler) y calculado a partir de los momentos de inercia principales  $A = B$  y  $C$ . La diferencia entre los períodos Chandler y Euler es la consecuencia del comportamiento elástico de la Tierra. Se conjetura que un desplazamiento temporal de masas debido a procesos meteorológicos es la causa de un movimiento adicional en la misma dirección con un período anual y una amplitud de 0'05 a 0'1. Finalmente, surgen movimientos seculares que, sobre épocas geológicas, alcanzan grandes cantidades: ronda polar. El período de 1900 a 1970 testificó un movimiento de alrededor de 0'003 por año procediendo aproximadamente en la dirección del meridiano de 70°W.

Con la superposición de estos movimientos, el polo instantáneo describe una curva espiral con un punto medio que avanza lentamente. Las desviaciones de la posición instantánea del polo desde el punto medio permanece  $< 0'3$  en un año (Fig 3.2).

El movimiento del polo ha sido determinado desde 1899 por las cinco observaciones de latitud en Mizusawa, Japón; Kitab, U.S.S.R.; Carloforte, Italia; Gaitersburg, U.S.A.; Ukiah, U.S.A., del Servicio Internacional de Movimiento del Polo (SIMP) anteriormente el Servicio Internacional de Latitud (SIL). Los observatorios ILS, todos situados en el paralelo 39°08'N, continuamente llevan a cabo observaciones para determinar la latitud astronómica (incertidumbre de  $\pm 0'02$  a  $\pm 0'05$ ). Además de esto, alrededor de otros 50 observatorios adicionales, conducen determinaciones astronómicas de latitud y tiempo. La oficina central del SIMP en Mizusawa calcula y publica las coordenadas rectangulares  $X_p$ ,  $Y_p$ , del polo instantáneo (promedio de 0.05 años), como se obtuvieron de las estaciones SIL, así como de todos los demás observatorios. Estas coordenadas están dadas con respecto a un polo fijo a la Tierra, que está definido por las coordenadas promedio de las cinco estaciones SIL durante el intervalo de 1900 a 1906.0. Aquí el eje  $X_p$  está en la dirección del meridiano de Greenwich y el eje  $Y_p$  está dirigido a lo largo del meridiano 90°W (Fig. 3.2):

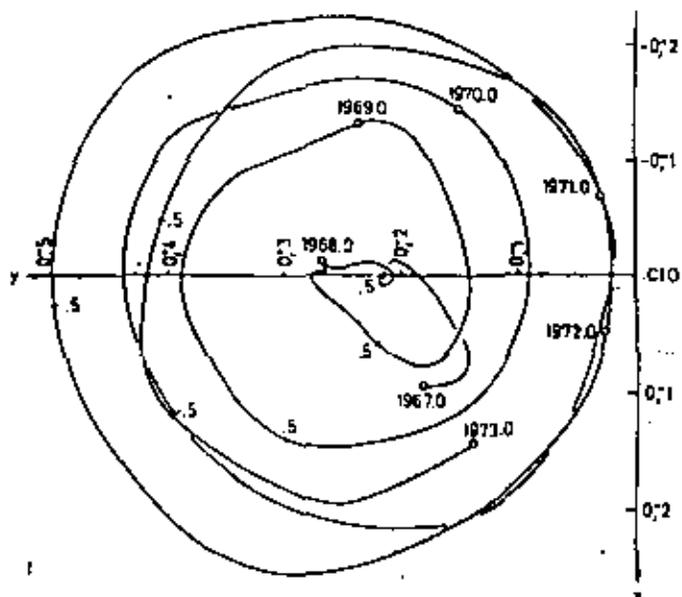


Fig. 3.2:  
Movimiento del Polo  
1967-1973, del  
"Bureau International  
de l'Heure. Reporte  
anual para 1972,  
París 1973",

Este polo medio (de 1903.0) se introdujo como el "Origen Internacional Convencional" (OIC), estableciendo con ello un eje de rotación fijo a la Tierra. Las observaciones astronómicas se transforman al sistema OIC usando estas coordenadas polares (4.1.5).

Además el Bureau International de l'Heure (BIH), dentro del campo del servicio del tiempo, calcula el movimiento polar (promedio de 5 días; incertidumbre de  $\pm 0.02$ ) de las observaciones astronómicas. Los resultados son rápidamente publicados; tienen una divergencia máxima con los del SIMP de 0.05. Ya que actualmente las mediciones Doppler a satélites terrestres artificiales (4.4.6) proporcionan cuando menos la misma precisión que las observaciones astronómicas, también se utilizan para la determinación del movimiento del polo (Anderle 1976). Debido a que estas mediciones son independientes de las condiciones climatológicas, los movimientos sobre períodos de tiempo más cortos también pueden ser detectados. El Servicio de Movimiento Polar Doppler (SMPD) del U.S. DMATC, con ayuda del Sistema de Satélites de la Navegación Marina (4.4.6), lleva a cabo las determinaciones correspondientes. Otros métodos para obtener el movimiento del polo que están aún en la etapa experimental incluyen mediciones de distancia con laser a satélites artificiales y a la Luna, al igual que interferometría radio astronómica (4.4.7), consultar Henriksen (1977).

La posición del observatorio medio y por lo tanto la dirección del eje X del sistema global está fijado por el meridiano inicial, usado por el BIH, en la determinación del tiempo. Este meridiano está definido por las longitudes geográficas ("convencionales") y las latitudes de las estaciones que participan en el servicio del tiempo. Estas cantidades intervienen en la determinación del tiempo, como se ve en la definición del tiempo (4.7). El meridiano astronómico de Greenwich medio, así establecido, pasa cerca del antiguo Observatorio de Greenwich, que era el origen anterior para el cálculo de la longitud.

El sistema terrestre arriba descrito está basado en las observaciones astronómicas de las estaciones que participan en los servicios de movimiento del polo y la hora. Como un sistema de referencia geodésico, él es adecuado para períodos de tiempo más cortos y para precisiones relativas de  $\pm 1 \times 10^{-6}$ . En particular a través de la geodesia de satélites, es ahora posible lograr un incremento en precisión hasta  $\pm 1 \times 10^{-7} \dots 10^{-8}$  m de tal manera que los procesos geodinámicos se vuelven más pronunciados. Por eso, la definición del sistema de referencia también debe de refinarse (Kolaczek y Weiffenbach 1975, Groten 1976). Un sistema tal se podría determinar con las coordenadas espaciales de un número de puntos fijos en la superficie de la Tierra que se refieren al centro de masa de la misma y al eje rotacional y fase de una época de referencia. La referencia a un sistema instantáneo para cualquier época se podría hacer usando modelos dependientes del tiempo, al grado como actualmente es factible (Mather 1974 a; Heitz 1978). Estos describirían un desplazamiento del centro de masa terrestre y cambios en la rotación terrestre (movimiento polar y fluctuaciones en la rotación (4.1.3), movimientos relativos de los puntos de control (modelo de placas tectónicas (5.5.5)), y mareas terrestres (2.4.2) (5.5.1).

## 2 SISTEMAS COORDENADOS EN EL CAMPO DE GRAVEDAD TERRESTRE

### 3.2.1 SISTEMA ASTRONÓMICO GLOBAL

En el campo de la gravedad terrestre (Fig. 3.3) se puede definir un sistema de coordenadas "natural" accesible a las observaciones.

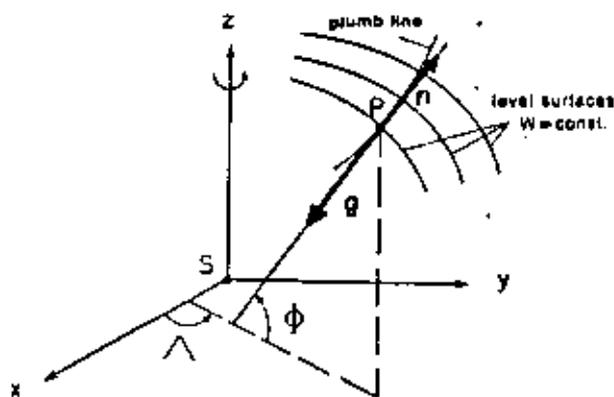


Fig. 3.3:  
Coordenadas Naturales del Campo de gravedad terrestre  $\phi, \lambda, W$

La latitud astronómica  $\phi$  (no confundirla con el potencial de la aceleración centrífuga, introducida en (2.1.4), es el ángulo medido en el plano del meridiano entre el plano ecuatorial y la dirección de la línea de la plomada en el punto P; es positiva al norte del ecuador, y negativa al sur. El ángulo medido en el plano ecuatorial entre el meridiano de Greenwich y el plano del meridiano a través de P se denomina longitud astronómica  $\lambda$ ; es positiva hacia el este. El potencial de gravedad  $W$  (2.1.5) fija a P en el sistema de superficies de nivel.

El plano del meridiano astronómico aquí está fijo por la dirección de la línea de la plomada en P y una línea paralela al eje de rotación. En la bibliografía alemana frecuentemente  $\phi$  y  $\Lambda$  se designan por  $\phi$ ,  $\lambda$ .

Las determinaciones de posiciones astronómicas proporcionan la latitud  $\phi$  y la longitud  $\Lambda$  (4.1), estableciendo con ello la dirección de la vertical en P con respecto al eje de rotación.  $W$  no puede medirse directamente; por el otro lado, las diferencias de potencial pueden determinarse sin una mayor hipótesis, usando niveles en combinación con mediciones de gravedad (4.5.3). Por lo tanto, P normalmente se especifica por el potencial o diferencia de altura con respecto a una superficie de nivel escogida (el geoide). (3.3)

El punto P en el espacio curvo del campo de gravedad está determinado por la intersección de las superficies coordenadas no-ortogonales ( $\Phi = \text{const.}$ ,  $\Lambda = \text{const.}$ ,  $W = \text{const.}$ ). Las líneas coordenadas (línea  $\Phi = \text{meridiano astronómico}$ , línea  $\Lambda = \text{paralelo astronómico}$ , línea  $W = \text{línea isozenital}$ ) son curvas espaciales que tienen doble curvatura

La relación entre el sistema  $X, Y, Z$  global y el sistema  $\phi, \Lambda, W$  se obtiene de (2.26) y la Fig. 3.3:

$$(3.1) \quad \mathbf{g} = \text{grad } W = -R\mathbf{n} = -R \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix} \quad \Bigg|$$

donde  $\mathbf{n}$  es la superficie exterior normal a la superficie de nivel. De

$$(3.2) \quad W = W(X, Y, Z) \quad \Bigg|$$

obtenemos:

$$(3.3) \quad \Phi = \arctan \frac{-W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}, \quad \Lambda = \arctan \frac{W_y}{W_x} \quad \Bigg|$$

Por lo tanto, la dirección de la línea de la plomada depende de las primeras derivadas del potencial de gravedad.

### 3.2.2 Sistemas Astronómicos Locales, Cálculos en el Campo de Gravedad Terrestre.

Las mediciones geodésicas terrestres, con la excepción de distancias espaciales, están atadas a la dirección de la línea de la plomada en el punto de observación, y con ello, al campo de gravedad terrestre. Están particularmente bien representadas en el sistema cartesiano local  $x, y, z$ , introduciendo en (2.2.2), Fig. 3.4

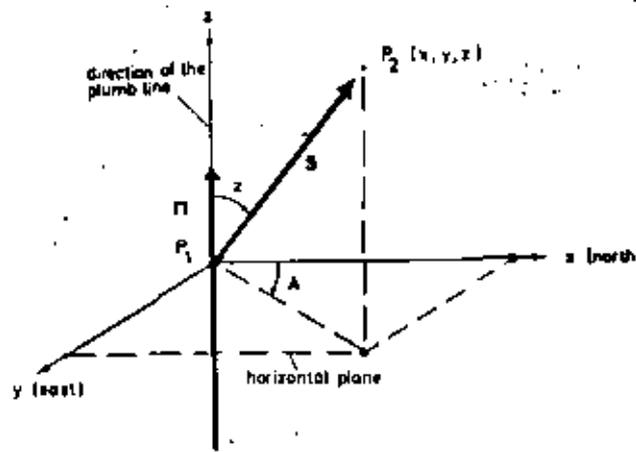


Fig. 3.4:  
Sistema  $x, y, z$   
Astronómico Local  
y observaciones  
 $A, z, s$  terrestres

Las cantidades observadas son: el azimuth astronómico, el ángulo zenital, y la distancia espacial. El ángulo que es medido en el plano horizontal entre el meridiano astronómico de  $P_1$  y el plano vertical extendido por la vertical en  $P_1$  y por el punto  $P_2$  es el azimut astronómico  $A$ . Es positivo si se mide a partir de el eje  $x$  (norte) en dirección de las manecillas del reloj. El ángulo zenital (distancia zenital),  $z$  es el ángulo medido en el plano vertical entre la vertical local (dirección de la línea de la plomada) y la línea que une  $P_1$  y  $P_2$ ; el ángulo es positivo si se mide desde la normal a la superficie exterior. La distancia espacial  $s$  es la longitud de la línea recta que une  $P_1$  y  $P_2$ . Para el elemento de arco vectorial  $ds$ , de la Fig. 3.4 sigue que:

$$(3.4) \quad ds = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = ds \begin{pmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}.$$

Con un desplazamiento  $ds$ , se altera la orientación del sistema local porque las líneas de plomada no son paralelas. Por eso los cálculos en un sistema local son únicamente admisibles en áreas muy limitadas.

La transferencia de coordenadas en el sistema global curvo  $\phi, \lambda, W$  presupone el conocimiento de las segundas derivadas del potencial de gravedad. Tenemos:

$$(3.5) \quad \begin{pmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ dW \end{pmatrix} = -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\phi\lambda} & W_{\phi z} \\ W_{\phi\lambda}/\cos\phi & W_{\lambda\lambda}/\cos\phi & W_{\lambda z} \\ 0 & 0 & W_{zz}/g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Considerando la ecuación diferencial de Laplace generalizada (2.28) y ya que  $W_{xy} = W_{yx}$ , la matriz tiene cinco incógnitas. Estas representan la curvatura de la superficie de nivel y la línea de la plomada, lo mismo que la torsión del meridiano astronómico  $-W_{xy}/g$ .

Aplicando (3.5) deberían de existir varias determinaciones (intervalos de 10 a 20 km) de las segundas derivadas, debido al comportamiento irregular de la curvatura cerca de la tierra. Sin embargo, en este momento estas se pueden determinar solamente con un considerable esfuerzo de mediciones de la balanza de torsión y mediciones de las componentes verticales del gradiente de gravedad (4.2.5). Aun si la curvatura del campo de gravedad se conociera mejor, la transferencia de coordenadas difícilmente debería hacerse en el sistema  $\phi, \lambda, W$ , ya que la estructura de las fórmulas de transferencia es compleja.

Una representación en geometría diferencial del campo de gravedad terrestre y de las observaciones llevadas a cabo sobre esto han sido desarrolladas por Marussi (1949, 1976). En esta "Geodesia intrínseca", únicamente se usan cantidades que están sujetas a observaciones; no se necesitan reducciones a otras superficies de referencia. Posteriores desarrollos se originan con Hotine -- (A1969) y Grafarend (1972, 1975).

### 3.2.3 Sistemas Cartesiano Global y Astronómico Local.

La transferencia de coordenada en el espacio se simplifica por la transición al sistema geocéntrico local  $X, Y, Z$  (3.1). Para el vector de posición de  $P_2$  en el sistema local  $x, y, z$  del punto  $P_1$ , de (3.4) tenemos:

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{pmatrix}$$

El sistema local se puede transformar al sistema global  $X, Y, Z$  cambiando a un sistema de mano derecha y con rotaciones de  $90^\circ - \theta$  y  $180^\circ - \lambda$  (Fig. 3.5). Una inversión da:

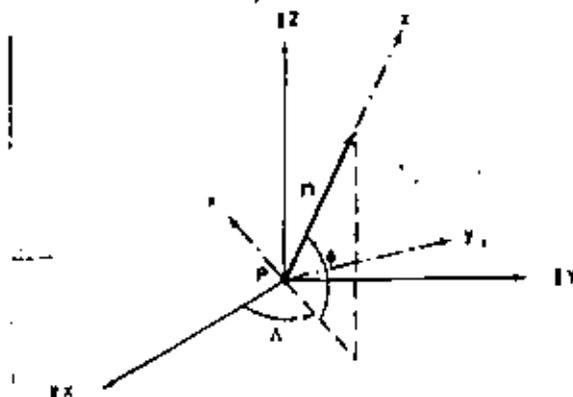


Fig. 3.5:  
Sistema Local  
 $x, y, z$  y Glo-  
bal  $X, Y, Z$ .

$$(3.7) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix},$$

donde la matriz de rotación inversa es:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda & -\sin \Phi \sin \Lambda & \cos \Phi \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ \cos \Phi \cos \Lambda & \cos \Phi \sin \Lambda & \sin \Phi \end{pmatrix}$$

y donde:

$$\Delta X = X_2 - X_1, \quad \Delta Y = Y_2 - Y_1, \quad \Delta Z = Z_2 - Z_1.$$

(3.6) y (3.7) relacionan las cantidades observadas, esto es, distancia, azimut, y ángulo zenital, al sistema global. Estas fórmulas sirven en la construcción de ecuaciones de observación en geodesia tridimensional (5.1.2).

### 3.3 EL GEOIDE COMO SUPERFICIE DE REFERENCIA PARA ALTURAS.

#### 3.3.1 Definición del Geoide

Consideramos las aguas del océano como materia homogénea que se mueve libremente, la cual está sujeta únicamente a la fuerza de gravedad de la Tierra. Después de alcanzar un estado de equilibrio, la superficie de tales océanos idealizados asume una superficie de nivel del campo de gravedad; podemos considerarlo como ser extendido debajo de los continentes (por ej. por un sistema de tubos comunicantes). Esta superficie de nivel se denomina el geoide, cf (1.2). Su ecuación está dada por:

$$(3.8) \quad W = W(r) = W_0$$

De (2.2), vemos que el geoide es una superficie de nivel cerrada y continua que se extiende parcialmente dentro del cuerpo sólido de la Tierra. La curvatura del geoide muestra discontinuidades a variaciones abruptas de densidad. Consecuentemente, el geoide no es una superficie analítica, y con ello se elimina como una superficie de referencia para las determinaciones de posiciones. Sin embargo es adecuada como superficie de referencia para diferencias de potencial o altura, que son dadas por nivelación directa (geométrica) en combinación con mediciones de gravedad (4.3.5).

Para establecer el geode, uno utiliza el nivel medio del mar, el cual puede divergir por  $\pm 1$  á  $\pm 2$ m de una superficie de nivel (3.3.3). En el caso de que uno quiera precisiones de  $\pm 0.1$ m, la definición clásica del geode dada arriba ya no es suficiente (Rapp 1975c). Este tipo de precisión se puede obtener a través de las posibilidades de la geodesia de satélites en la determinación de alturas de puntos de superficie (mediciones laser de distancia (4.4.5), (4.4.7)) y de la superficie del océano (altimetría de satélites (4.4.8)). El geode como una superficie de referencia global para alturas, la cual se usa para la representación de la topografía superficial de tierra y océano, se puede entonces definir como esa superficie de nivel que mejor se ajusta al nivel medio del mar. A este respecto, el potencial y la elevación (3.3.2) del geode se obtienen aplicando una condición mínima para las desviaciones entre el geode y el nivel medio del mar (Mather 1978).

### 3.3.2 Número Geopotencial y Altura Ortométrica.

Un punto de superficie P puede determinarse en el sistema de superficies de nivel por sus diferencias de potencial (negativas) al geode. Si  $P_0$  es un punto arbitrario en el geode, entonces de (2.31) obtenemos la integral:

$$(3.9) \quad C = W_0 - W_P = - \int_{P_0}^P dW = \int_{P_0}^P g \, dn,$$

que es dependiente de la trayectoria. C se conoce como el número geopotencial. Para lograr un buen acuerdo con el valor numérico de la altura en metros, la unidad del número geopotencial se escoge de  $10 \text{m}^2 \text{s}^{-2}$  (= kgal m), unidad geopotencial = Unité géopotentielle, u.g.p. Debido a que  $g = 9.8 \text{m}^{-2}$ , los valores de los números geopotenciales son aproximadamente 2% más pequeños que los valores de las correspondientes alturas.

Para la topografía simple y la geodésica el número geopotencial C es menos adecuado que la altura ortométrica H, la cual es la distancia lineal calculada a lo largo de la línea de la plomada (curva) del geode al punto de superficie. Si desarrollamos el lado derecho de (3.9) en H e integramos a lo largo de la línea de la plomada de  $H = 0$  á H, entonces para la altura ortométrica obtenemos:

$$(3.10) \quad H = \frac{C}{\bar{g}}, \quad \text{con } \bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH.$$

Para el cálculo de la gravedad promedio  $\bar{g}$  a lo largo de la línea de la plomada, los valores reales de gravedad se requieren entre el geoide y la superficie terrestre. Ya que una medición directa de la gravedad dentro de la tierra no es posible, se debe formar una hipótesis con respecto a la distribución de masa (ley de densidad), calculando entonces  $\bar{g}$  sobre esta base. Por lo tanto,  $H$  no se puede determinar sin una hipótesis. Debido a que las superficies de nivel no son paralelas, los puntos de igual altura ortométrica no están situadas en la misma superficie de nivel.

Si el número geopotencial está dividido por un valor de gravedad constante (usualmente la gravedad normal  $\gamma_0^{45}$  al nivel del mar y para la latitud geográfica  $\psi = 45^\circ$  (3.5.2), entonces sin una hipótesis se obtiene la altura dinámica.

$$(3.11) \quad H^{45} = \frac{C}{\gamma_0^{45}}$$

Los puntos en una superficie de nivel tienen la misma altura dinámica. Son necesarias grandes correcciones cuando las alturas niveladas se convierten a alturas dinámicas (5.1.5). Debido a esto las alturas dinámicas no se han hecho valer en geodesia.

Finalmente, las alturas normales (3.5.6) definidas en el campo de gravedad normal originan otro sistema de altura sin ninguna hipótesis, el cual ha obtenido considerable significancia en los levantamientos geodésicos. La superficie de referencia para alturas normales es el cuasigeoide que está cerca al geoide.

### 3.3.3 Nivel Medio del Mar.

Para establecer el geoide de acuerdo a (3.3.1) como una superficie de referencia para alturas, el nivel del agua del océano se registra y promedia para períodos largos ( $\geq 1$  año) usando medidores de marea (mareógrafos). El nivel medio del mar (NMM) así obtenido representa una aproximación al geoide.

Ya que las estaciones de medida de marea normalmente no tienen una luga imper- turbable con las aguas de los océanos, los registros frecuentemente son alterados por influencias sistemáticas. Las variaciones del nivel del mar con el tiempo, siempre y cuando sean periódicas, son considerablemente eliminadas promediando los registros de los niveles de agua.

Altimetría de satélites (4.4.8) proporciona información sobre los mares abiertos la cual se refiere a la superficie de agua instantánea. La altura de las superficies del océano sobre el geoide representa la topografía de la superficie del océano. Aquí, se distingue entre la topografía de la superficie instantánea del mar y la topografía de la superficie del mar cuasiestacionaria, la cual resulta después de tomar en cuenta las variaciones dependientes del tiempo (Mather 1975). Estas variaciones incluyen mareas de océano que pueden desviarse considerablemente de los valores teóricos debido a profundidades de agua desiguales y porque los continentes impiden el movimiento del agua. La elevación de la marea en mar abierto es menor a 1m; sin embargo, pueden ser de varios metros en áreas costeras (Bahía de Fundy, Nueva Escocia:21m). Fluctuaciones que normalmente tienen períodos anuales y alcanzan valores hasta de 1m, incluyen esas de una naturaleza meteorológica (presión atmosférica, vientos), aquellas de una naturaleza oceanográfica (corrientes oceánicas, diferencias en densidades del agua como una función de temperatura, salinidad y presión), y aquellas debido a la cantidad de agua (afluencia variable de agua debido al derretimiento de la nieve, lluvias monzónicas, etc.). En la actualidad, el incremento postglacial en el nivel del mar, causa una variación secular de alrededor de 1mm por año (Kicx 1971).

A pesar de que la precisión interna de los valores anuales promedio de las observaciones del nivel del agua es de  $\pm 1\text{cm}$ , ocasionalmente pueden ocurrir desviaciones de  $\pm 10\text{cm}$ , y mayores entre los promedios anuales (efectos meteorológicos).

Aún después de incluir comprensivamente todas las variaciones periódicas, no periódicas y seculares, lo cual es nada más posible en casos excepcionales, el nivel medio del mar aún no forma una superficie del nivel del campo de gravedad terrestre. Para áreas mayores, las desviaciones pueden ser de 1m y más.

Estas desviaciones son causadas por el término no periódico del desarrollo de las series de mareas (2.4.1) y con los efectos meteorológicos y oceanográficos generales aproximadamente constantes.

La posición del nivel medio del mar con respecto a una superficie de referencia puede ser obtenido mediante el uso de métodos oceanográficos y geodésicos. Una superficie isobárica vista como una superficie de nivel a grandes profundidades (1000 á 4000m), sirve como referencia para una nivelación oceánica (steric). Las alturas dinámicas (3.3.2) del NMM con respecto a la superficie de un océano estándar son entonces calculadas usando la ecuación hidrostática fundamental y las densidades de agua medidas (Lisitzin B 1974, Sturges 1974). Estos cálculos

revelan, entre otras, una caída global (1.0 a 1.5m) del NMM desde el ecuador a las zonas polares - la máxima variación es 2.7m (incremento en NMM desde el Anártico hasta el Japón). Ligando una red de nivelación directa (4.3.5) a los medidores de mareas proporciona la inclinación del NMM con respecto a la superficie de nivel de referencia del sistema de altura respectivo (geóide). Los resultados (Mather 1974 b) concuerdan parcialmente con aquellos de oceanografía (por ej. un incremento en el NMM del Atlántico a las costas del Pacífico en los E.U. de 0.6 a 0.7m; un incremento del Mar Mediterráneo en Génova al norte hacia el Golfo de Botnia en 0.6m); sin embargo, los resultados desacuerdan particularmente y a veces considerablemente en las direcciones norte-sur (Fischer 1975 b). Estas discrepancias pueden tal vez ser debidas a las superficies de referencia diferentemente definidas, a las características particulares del NMM en áreas costeras, y a los efectos sistemáticos hasta ahora desconocidos en los diferentes métodos (Fischer 1977). Para la naturaleza problemática de la determinación del nivel medio del mar, véase también Rossiter (1967), Lisitzin (1974).

### 3.4 SISTEMAS DE REFERENCIA ELIPSOIDALES

La superficie de la Tierra puede representarse con mucha aproximación mediante un elipsoide de revolución con polos achatados (desviaciones en altura del geóide < 100 m). Como resultado, se usan frecuentemente sistemas elipsoidales definidos geoméricamente, en vez del sistema coordenado cartesiano espacial, (3.1).

#### 3.4.1 Parámetros Geométricos y Sistemas Coordenados del Elipsoide de Revolución

El elipsoide de revolución se crea mediante la rotación de la elipse meridiana alrededor de su eje menor. Con ello la forma del elipsoide está descrita por dos parámetros geoméricos; el semieje mayor  $a$  y el semieje menor  $b$  (Fig. 3.6). Generalmente,  $b$

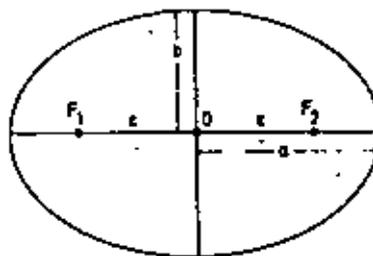


Fig. 3.6:  
Elipse  
Meridiana

se reemplaza por uno de una serie de cantidades más pequeñas que es más adecuada para expansiones en serie; el achatamiento (geométrico)  $f$ , la excentricidad lineal  $e$ , la primera y segunda excentricidades  $e$  y  $e'$ , respectivamente:

$$(3.12) \quad f = \frac{a-b}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad e' = \frac{c}{b}$$

Las siguientes relaciones prevalecen entre estas cantidades:

$$(3.13) \quad \frac{b}{a} = 1 - f = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}$$

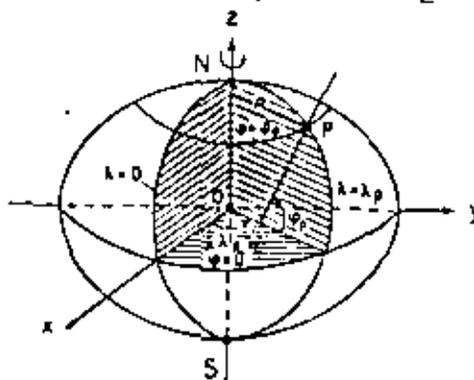


Fig. 3.7:  
Coordenadas  
Geográficas  
Elipsoidales  
 $\psi, \lambda$

Introducimos un sistema coordenado cartesiano espacial  $x, y, z$  (Fig. 3.7). El origen del sistema está situado en el centro  $O$  de la figura, el eje  $-z$  coincide con el eje menor del elipsoide. La ecuación de la superficie del elipsoide está entonces dada por:

$$(3.14) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0.$$

El sistema de coordenadas geográficas elipsoidales está definido por la latitud geográfica  $\psi$  y la longitud geográfica  $\lambda$ .  $\psi$  es el ángulo medido en el plano meridiano entre el plano ecuatorial (plano- $x, y$ ) del elipsoide y la superficie normal en  $P$ .  $\lambda$  es el ángulo medido en el plano ecuatorial entre el meridiano cero (eje  $x$ ) y el plano meridiano de  $P$ . Aquí  $\psi$  es positiva hacia el norte y negativa hacia el sur; y  $\lambda$  es positiva cuando medida hacia el este. El plano meridiano elipsoidal está formado por la superficie normal y el eje  $z$ .

En la literatura alemana, la notación  $B$  (= latitud) y  $L$  (= longitud) es usada frecuentemente por  $\psi$  y  $\lambda$ .

$\psi$  y  $\lambda$  están definidos para tener valores angulares, pero también pueden ser considerados como coordenadas superficiales curvilíneas. Las líneas coordenadas del sistema ortogonal son los meridianos ( $\lambda = \text{const.}$ ) y los paralelos ó círculos de latitud ( $\psi = \text{const.}$ ). Con:

$$(3.15) \quad \left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \lambda, & y &= \rho \sin \lambda \end{aligned} \right\}$$

introducimos el radio del círculo de latitud:

$$(3.16) \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

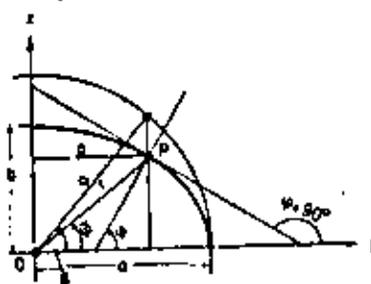


Fig. 3.8:  
 Latitud geográfica  $\psi$ ,  
 Latitud reducida  $\beta$ ,  
 Latitud geocéntrica  $\bar{\varphi}$ .

como una nueva variable (Fig. 3.7). Substituyendo esto en (3.14) y diferenciando se obtiene la pendiente de la tangente elipsoidal en P (Fig. 3.8)

$$(3.17) \quad \frac{dz}{d\rho} = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{\rho}{z} = -\cot \psi.$$

De (3.14) y (3.17) la representación paramétrica de la elipse meridiana sigue:

$$(3.18) \quad \rho = \frac{a^2 \cos \psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}}, \quad z = \frac{b^2 \sin \psi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi}}.$$

Usando la latitud geocéntrica  $\bar{\varphi}$  y el radio geocéntrico  $r$  (Fig. 3.8), la ecuación de la elipse está dada por:

$$(3.19) \quad \rho = r \cos \bar{\varphi}, \quad z = r \sin \bar{\varphi}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

Finalmente, la latitud reducida es frecuentemente usada. Se obtiene proyectando la elipse en el círculo concéntrico de radio  $a$  (Fig. 3.8). Como la relación de las ordenadas elípticas a ordenadas circulares es  $b/a$  (elipse como imagen afín al círculo), tenemos:

$$(3.20) \quad p = a \cos \beta, \quad z = b \sin \beta.$$

La comparación de (3.19) y (3.20) con (3.17) proporciona las transformaciones entre las cantidades  $\psi, \bar{\psi}, \beta$ :

$$(3.21) \quad \tan \phi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan \psi, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} \tan \psi.$$

Usando (3.13), obtenemos expansiones en serie para las diferencias entre los varios parámetros de latitud:

$$(3.22) \quad \psi - \phi = \frac{e^2}{2} \sin 2\psi + \dots = 2(\psi - \beta).$$

### 3.4.2 Curvatura del Elipsoide de Revolución.

Los meridianos y paralelos son las líneas de curvatura del elipsoide de revolución. El radio de curvatura principal está por eso en el plano del meridiano (radio de curvatura del meridiano M) y en el plano del primer vertical, perpendicular al plano del meridiano (radio de curvatura en el primer vertical N), Fig. 3.9:

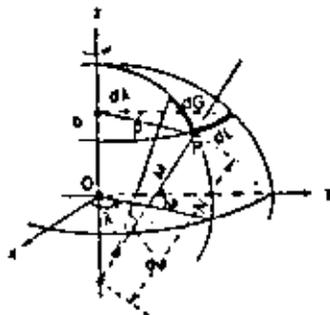


Fig. 3.9:  
Curvatura del  
Elipsoide de  
Revolución

La curvatura del meridiano  $z = z(p)$  es:

$$(3.23) \quad \frac{1}{M} = - \frac{d^2z/dp^2}{(1+(dz/dp)^2)^{3/2}}$$

Usando (3.13) y substituyendo (3.17) y la segunda derivada obtenida al considerar (3.18) en (3.23) da el radio de curvatura del meridiano:

$$(3.24) \quad M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

El plano de un círculo de paralelo (sección oblicua de elipsoide de revolución) y el plano vertical en la misma dirección tangencial se intersectan en P con el ángulo  $\varphi$ . El teorema de Meusnier (en lo referente a curvatura de superficie, consultar por ej. Stoker B 1969) provee entonces el radio de curvatura en el primer vertical:

$$(3.25) \quad N = \frac{p}{\cos \varphi}$$

Debido a la simetría de rotación, el centro de curvatura está en el eje de giro. Usando (3.18) y después de algunas transformaciones se obtiene:

$$(3.26) \quad N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Una comparación de (3.24) y (3.26) muestra que  $N \geq M$ . En los polos ( $\varphi = \pm 90^\circ$ ), el radio de curvatura polar se vuelve:

$$(3.27) \quad c = M_{90} = N_{90} = \frac{a^2}{b}$$

En el ecuador ( $\varphi = 0^\circ$ ), se cumple:

$$(3.28) \quad M_0 = \frac{b^2}{a}, \quad N_0 = a$$

La curvatura de una sección normal arbitraria con un azimut  $\alpha$  se calcula según la fórmula de Euler . . .

$$(3.29) \quad \frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

Donde  $R_{\alpha}$  es el radio de curvatura. El azimut geodésico  $\alpha$  está definido como el ángulo medido en el plano horizontal, entre el plano meridiano elipsoidal de  $P_1$  y el plano vertical determinado por la normal a  $P_1$  y por el punto  $P_2$ ;  $\alpha$  se cuenta a partir del norte, en el sentido de las manecillas del reloj. La curvatura media  $H^*$  está dada por:

$$(3.30) \quad H^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right)$$

Las longitudes de arco de las líneas coordenadas del sistema  $\varphi, \lambda$  se calculan usando  $M$  y  $N$ . Para los elementos de arco del meridiano y paralelo obtenemos respectivamente (Fig. 3.9):

$$(3.31) \quad dG = M d\varphi, \quad dL = N \cos \varphi d\lambda$$

De (3.24), la longitud del arco meridiano (empezando en el ecuador) se vuelve:

$$(3.32) \quad G = \int_0^{\varphi} M d\varphi = a(1-e^2) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

(3.32) se puede reducir a una integral elíptica del segundo tipo; y por eso no se puede representar en términos de funciones elementales. Los cálculos se pueden lograr a través de integración numérica. Se puede encontrar otra solución, implementando una expansión binomial del denominador de (3.32) e integrando posteriormente término por término.

La longitud del arco de un círculo de latitud entre las longitudes geográficas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  está dado según (3.31) por:

$$(3.33) \quad \Delta L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} N \cos \varphi d\lambda = N \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1)$$

### 3.4.3 Sistema Coordenado Elipsoidal Espacial.

Para la determinación espacial de puntos en la superficie física de la Tierra con respecto al elipsoide de revolución, se introduce la altura  $h$  sobre el elipsoide además de las coordenadas geográficas  $\varphi, \lambda$ ;  $h$  se mide a lo largo de la normal a la superficie (Fig. 3.10).

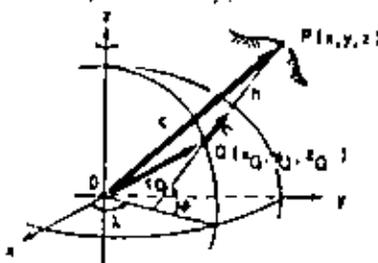


Fig. 3.10:  
Coordenadas  
elipsoidales  
espaciales  
 $\varphi, \lambda, h$

Debido a su amplio uso, las coordenadas elipsoidales espaciales  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$  se denominan coordenadas geodésicas. El punto  $Q$  en el elipsoide se obtiene proyectando el punto de superficie  $P$  a lo largo de la normal al elipsoide: proyección de Helmert.

Las superficies coordenadas ( $\varphi = \text{const.}$ ,  $\lambda = \text{const.}$ ,  $h = \text{const.}$ ) de este sistema, son ortogonales. Las líneas coordenadas (línea- $\varphi$  = meridiano geodésico, línea- $\lambda$  = paralelo geodésico, línea- $h$  = normal del elipsoide) representan curvas planas.

Substituyendo (3.25) en (3.15) y (3.17), y tomando en cuenta (3.13) se obtiene para el punto  $Q$  en el elipsoide:

$$r_Q = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ (1 - e^2) \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Para el punto de superficie  $P$ , usando (Fig. 3.10)

$$r = r_Q + h n, \quad n = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

obtenemos la relación:

$$(3.34) \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1-e^2)(N+h) \sin \varphi) \end{pmatrix}.$$

El problema inverso para  $\varphi$ ,  $h$  solamente se resuelve por iteración; sin embargo el sistema de ecuaciones converge rápidamente ya que  $h \ll N$ . De (3.34), tenemos que:

$$(3.35) \quad \left. \begin{aligned} h &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos \varphi} - N, & \varphi &= \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right)^{-1} \\ & & \lambda &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\}$$

### 3.5 EL CAMPO DE GRAVEDAD NORMAL

#### 3.5.1 La figura Normal de la Tierra, Elipsoide de Nivel

Para la determinación del campo de gravedad externo (1.2, se introduce el campo de gravedad normal como un sistema de referencia. La fuente de este campo es un modelo terrestre que representa la figura normal de la Tierra; consultar las investigaciones exhaustivas de Ledersteger (1956).

La figura normal de la Tierra, como cuerpo de referencia geodésico, debe garantizar una buena adaptación a la superficie terrestre y al campo de gravedad externo; pero además debe poseer un principio simple de formación. En este respecto se adapta bien el elipsoide de revolución (3.4), el cual ya se introdujo como una superficie de referencia geométrica. Además del semieje mayor  $a$  y el achatamiento  $f$  como parámetros geométricos, introducimos la masa total  $M$  y la velocidad angular rotacional  $\omega$  como parámetros físicos. Entonces el campo de gravedad se forma como resultado de la gravitación y la rotación. Si ahora queremos que la superficie de este elipsoide sea una superficie de nivel de su mismo campo de gravedad, entonces de acuerdo al teorema de Stokes, el campo de gravedad está bien definido en el espacio exterior a esta superficie. Este cuerpo se conoce como un elipsoide de nivel (o equipotencial). Si a los parámetros elipsoidales se les asignan aquellos valores que correspondan a la Tierra verdadera, entonces se obtiene la aproximación óptima a la geometría del geoide y al campo de gravedad externo: elipsoide terrestre medio (5.4.4).

Teorema de G.G. Stokes (1819-1903): Si un cuerpo de masa total  $M$  gira con una velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje fijo, y si  $S$  es una superficie de nivel de su propio campo de gravedad que encierra toda la masa, entonces el potencial de gravedad en el espacio exterior de  $S$  queda determinado en forma única. ( $M, \omega, S$  son elementos de Stokes).

Sin embargo, la figura normal también tiene que cumplir con objetivos geofísicos. En particular, una comparación entre los observados y los campos de gravedad normal debe admitir inferencias concernientes a la estructura interior de la Tierra (Moritz 1962). Esto requiere que la figura normal de la Tierra debe ser una figura de equilibrio esferoidal. Las superficies de nivel coinciden entonces con las superficies de igual densidad e igual presión (5.5.2). El equilibrio hidrostático de la figura normal se crea mediante una redistribución de las masas actuales de la Tierra (regularización). El problema conduce a la teoría compleja de las figuras en equilibrio de fluidos en rotación (Khan 1969).

En la definición anterior del elipsoide de nivel, no se estipula nada referente a la distribución de la masa interior. Pero de la teoría de las figuras en equilibrio se concluye que solamente los elipsoides homogéneos de McLaurin pueden estar en equilibrio. Por el otro lado, la superficie de una figura en equilibrio



De acuerdo a (2.25)  $U$  está compuesta del potencial gravitacional  $V$  y del potencial de la aceleración centrífuga  $\Phi$

$$(3.38) \quad U = V + \Phi.$$

La notación  $V, \Phi$  introducida en (2.1) para los potenciales gravitacional y centrífugo de la Tierra se mantiene aquí, ya que no hay riesgo de confusión. El potencial gravitacional satisface la ecuación diferencial de Laplace (2.17) en el espacio exterior al elipsoide (semieje mayor  $a$ , semieje menor  $b$ ) conteniendo la masa  $M$ . Según (2.3) puede expanderse en ~~armónicas~~ armónicas esféricas. Si se impone una simetría rotacional en el campo de gravedad normal, entonces los términos no zonales desaparecen de esta expansión. Además, si se considera a la superficie del elipsoide como una superficie de nivel, y si añadimos la expresión para el potencial centrífugo  $\Phi$  usando (2.2) y (3.36), entonces obtenemos para el potencial de gravedad normal en el espacio exterior, la representación bastante buena.

(3.39)

$$U = \frac{GM}{c} \arctan \frac{c}{u} + \frac{\omega^2 a^2 q}{2} \left( \sin^2 \beta - \frac{1}{j} \right) + \frac{\omega^2}{2} (u^2 + c^2) \cos^2 \beta.$$

Donde  $q$  es una cantidad auxiliar, dependiente exclusivamente de los parámetros geométricos  $c$  y  $u$ ; en el elipsoide ( $u = b$ ) se vuelve  $q_0$ :

(3.40)

$$q = \frac{1}{2} \left( \left( 1 + 3 \frac{u^2}{c^2} \right) \arctan \frac{c}{u} - 3 \frac{u}{c} \right), \quad q_0 = q_{u=b}.$$

Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Stokes (3.5.1), el potencial de gravedad normal queda determinado con cuatro parámetros ( $a, b, M, \omega$ ). Es independiente de la longitud geográfica  $\lambda$ .

Las superficies de potencial constante:

(3.41)

$$U = U(r) = \text{const.}$$

se donominan superficies esteropotenciales (spherops). Con excepción de la superficie límite  $E$ , no son elipsoides. Si se substituye  $u = b$  y  $q = q_0$  en (3.39), la ecuación del elipsoide de nivel queda así:

(3.42)

$$U = U_0 = \frac{GM}{c} \arctan \frac{\omega^2}{3} a^2.$$

La gravedad normal  $\vec{\gamma}$  es perpendicular al elipsoide de nivel, de tal manera que de acuerdo a (3.37) sólo los componentes ortogonales aparecen en la derivada de  $U$  (3.39). Si en vez de la latitud reducida  $\beta$  (3.2) se usa la latitud geográfica  $\varphi$ , entonces para la gravedad normal en el elipsoide obtenemos la fórmula de Somigliana (1929):

$$(3.43) \quad \gamma_0 = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

Aquí, la gravedad normal que depende de la latitud está representada por los cuatro parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma_a$  (gravedad normal en el ecuador), y  $\gamma_b$  (gravedad normal en el polo). Los parámetros elipsoidales  $a$ ,  $b$ ,  $M$ ,  $\omega$ ,  $\gamma_a$ ,  $\gamma_b$ , que aparecen en (3.39) y (3.43) están interrelacionados de acuerdo al teorema de Pizzetti.

$$(3.44) \quad 2\frac{\gamma_a}{a} + \frac{\gamma_b}{b} = \frac{3GM}{a^2 b} - 2\omega^2$$

y el teorema de Clairaut:

$$(3.45) \quad f + \beta = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} (1 + e^2)^{-1} \left( 1 + e' \frac{3 \left( 1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1}{\left( 1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{e'}} \right)$$

Notamos que nada más hay cuatro cantidades independientes. En (3.45) además de la segunda excentricidad  $e'$  y el achatamiento geométrico  $f$  (3.12), está el achatamiento de la gravedad.

$$(3.46) \quad \beta = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a}$$

La abreviación  $\beta$  se usa tanto para la latitud reducida como para el achatamiento de la gravedad; no se debe temer a confusiones.

La gravedad normal en el espacio exterior se obtiene con la diferenciación parcial de (3.39). Cerca del elipsoide es suficiente con una expansión de la serie de Taylor con respecto a la altura elipsoidal  $h$  (3.5.3)

### 3.5.3. Expansiones en Serie en el Campo de Gravedad Normal.

La aplicación de las fórmulas para el campo de gravedad normal (3.39) a (3.45) se facilita mediante el uso de las expansiones en serie con respecto a  $f$  o alguna otra cantidad que caracteriza el achatamiento polar.

Empezamos con la expansión armónica esférica (2.52), (2.53) del potencial gravitacional  $V$ . Debido a la simetría con respecto al eje de rotación (términos  $t_{22} = 0$ ) y el plano ecuatorial (términos zonales  $n \neq 0$ ), obtenemos, después de añadir el potencial centrífugo (2.22) expresado en coordenadas esféricas, el potencial de la gravedad normal:

$$(3.47) \quad U = \frac{GM}{r} \left( 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \vartheta) \right) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \vartheta,$$

donde  $n$  es par.

Si se substituye  $P_2$  de (2.54), la expansión hasta  $n = 2$  da el potencial de gravedad normal.

$$(3.48) \quad U = \frac{GM}{r} \left( 1 - \left( \frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2GM} r^2 \sin^2 \vartheta \right).$$

Despejando  $r$  y substituyendo  $U = U_0$  se obtiene el vector de posición del elipsoide de nivel, donde en el miembro derecho se substituyó  $r = a$ .

$$(3.49) \quad r = \frac{GM}{U_0} \left( 1 - J_2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2 a^2}{2GM} \sin^2 \vartheta \right).$$

De la derivada de (3.47) con respecto a  $r$  se obtiene la gravedad normal  $\gamma$

$$(3.50) \quad \gamma = \frac{GM}{r^2} \left( 1 - 3 \left( \frac{a}{r} \right)^2 J_2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right) - \frac{\omega^2}{GM} r^2 \sin^2 \vartheta \right).$$

Si substituímos ya sea  $\vartheta = 90^\circ$  (ecuador) ó  $0^\circ$  (polo) en (3.49) y (3.50), obtenemos el semieje mayor  $a$  y la gravedad ecuatorial  $\gamma_a$  o bien el semieje menor  $b$  y la gravedad polar  $\gamma_b$  del elipsoide. Usándolas se puede calcular el achatación geométrica  $f$  (3.12) y el achatación de la gravedad  $\beta$  (3.46), con:

$$(3.51) \quad f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2}, \quad \beta = -\frac{3}{2} J_2 + 2m.$$

donde:

$$(3.52) \quad m = \frac{\omega^2 a^3}{GM} = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0}$$

es el radio de la aceleración centrífuga a la gravedad normal en el ecuador. De (3.50) y (3.51), llegamos a las aproximaciones para el teorema de Pizzetti (3.44).

$$(3.53) \quad GM = a^2 \gamma_0 \left(1 - f + \frac{3}{2} m\right)^{-1}$$

y para el teorema de Clairaut (3.45):

$$(3.54) \quad f + \beta = \frac{5}{2} m.$$

Substituyendo (3.51) y (3.52) en (3.50), obtenemos la fórmula de la gravedad de Newton (1.3.2):

$$(3.55) \quad \gamma_0 = \gamma_0 (1 + \beta \sin^2 \varphi).$$

Si se conocen dos valores de la gravedad  $\gamma_0$  en el elipsoide a diferentes latitudes geográficas  $\varphi$ , entonces  $\gamma_0$  y  $\beta$  se pueden calcular de (3.55): Substituyendo valores conocidos para el semieje mayor  $a$  y la velocidad angular  $\omega$ , en (3.52) se obtiene el valor de  $m$ . Finalmente el teorema de Clairaut da el achatamiento geométrico  $f$ , el cual con ello puede determinarse a partir de valores de la gravedad. La aplicación de este principio a la Tierra verdadera - o sea, derivando parámetros de forma geométrica de cantidades físicas - conduce al método gravimétrico (5.2).

Las relaciones anteriores, lineales en  $f$ ,  $\beta$  y  $m$  también pueden derivarse mediante expansiones en serie de las fórmulas aproximadas (3.5.2). Estas ya habían

sido descubiertas por A.C. Clairaut en su trabajo "Théorie de la Figure de la Terre" (1743). Para los requerimientos de precisión actuales, estas expansiones no son suficientes. Debido a la convergencia rápida de (3.47), la expansión hasta  $n = 4$  es por lo general adecuada; esto es, la expansión incluye términos de orden  $f^2$  ( $0 (f^2)$ ), etc. Las relaciones más importantes se convierten entonces en (Heiskanen y Moritz 1967, Burša 1970):

$$(3.56) \quad f = \frac{3}{2}J_2 + \frac{m}{2} + \frac{9}{8}J_2^2 + \frac{15}{28}J_2m + \frac{3}{56}m^2$$

$$(3.57) \quad \beta = -f + \frac{5}{2}m - \frac{17}{14}J_2m + \frac{15}{4}m^2$$

$$(3.58) \quad m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

$$(3.59) \quad \gamma_0 = \gamma_0 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi, \quad \beta_1 = \frac{1}{8}f^2 - \frac{5}{8}fm$$

Una de las primeras aplicaciones del teorema de Clairaut la hizo Helmert (1901). Un ajuste a la fórmula de la gravedad (3.59) de alrededor de 1400 valores de gravedad, modificada por reducciones de aire libre (5.2.4) dió los parámetros  $\gamma_0 = 9.7803 \text{ ms}^{-2}$  y  $\beta = 0.005302$ ; con un achatamiento resultante de  $f = 1/298.3$ .

Los coeficientes armónicos de segundo y cuarto grado se pueden calcular a partir de  $f$  y  $m$  como sigue:

$$(3.60) \quad J_2 = \frac{2}{3}f - \frac{m}{3} - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm, \quad J_4 = \frac{1}{5}f^2 - \frac{4}{7}fm$$

Cerca de la superficie terrestre, es suficiente una expansión de la serie de Taylor con respecto a la altura elipsoidal  $h$ , para la derivación de la gravedad normal en el espacio exterior:

$$(3.61) \quad \gamma = \gamma_0 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial h^2}\right)_0 h^2 + \dots$$

$\partial \gamma / \partial h$  se obtiene aplicando la ecuación de Brum (2.43) al espacio exterior:

$$(3.62) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\gamma H^* - 2\omega^2,$$

donde  $H^*$  es la curvatura media del elipsoide (3.30). Una expansión en serie donde se desprecien los términos de  $O(f^2)$  conduce a la componente vertical del gradiente de la gravedad normal.

$$(3.63) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial h} = -2\frac{\gamma}{a}(1+f+m-2f \sin^2 \varphi)$$

y de la gravedad normal:

$$(3.64) \quad \gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a}(1+f+m-2f \sin^2 \varphi)h\right).$$

Cook (1959) llevó a cabo expansiones en serie hasta  $O(f^3)$ .

Los cuerpos de referencia derivados de la expansión armónica esférica del potencial gravitacional (3.47) truncado en  $n = 2$  y  $n = 4$ , respectivamente se denominan esferoides de nivel. Se pueden considerar como aproximaciones a la figura normal de la Tierra (3.5.1) físicamente definidas. Sus superficies limítrofes para  $n = 2$  (esferoide de Brum) y para  $n = 4$  (esferoide de Helmert) son superficies de décimocuarto y vigésimo segundo orden respectivamente. En consecuencia, son menos apropiadas como superficies geométricas de referencia. Se desvían del elipsoide de revolución teniendo los mismos ejes por  $O(f^2)$  para  $n = 2$  y  $O(f^3)$  para  $n = 4$ .

Es de importancia práctica la introducción de modelos de referencia superior en los cálculos del geoide gravimétrico (5.2.3) y de la topografía de la superficie del mar (3.3.3). El uso de una expansión armónica esférica completa ( $n, m = 15$  a 20) obtenida de soluciones globales recientes (5.4.2) reduce significativamente los valores de las cantidades a resolver.

#### 3.5.4 El Elipsoide Triaxial

Es de pensarse que un elipsoide triaxial podría semejarse más al geoide que al elipsoide de revolución biaxial. Debido a esto, se hicieron cálculos repetidos

para determinar los parámetros geométricos y físicos de tal cuerpo.

Si la expansión armónica esférica (3.47) se escribe con momentos de inercia ecuatoriales principales diferentes  $A, B$  ( $A < B$ ), entonces surgen términos que dependen de la longitud. Aún más, si los radios correspondientes a los ejes de inercia principales se designan con  $a_1, a_2$ , ( $a_1 > a_2$ ), entonces la ecuación de gravedad normal (3.59) se generaliza a:

$$(3.65) \quad \gamma_0 = \gamma_0 \left( 1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi + \frac{f_a}{2} \cos^2 \varphi \cos 2(\lambda - \lambda_1) \right)$$

Donde  $\lambda_1$  es la longitud geográfica del semieje ecuatorial mayor  $a_1$  y  $f_a = (a_1 - a_2)/a_1$  es el achatamiento polar de un elipsoide triaxial cuyos ejes son  $a_1, a_2$  y  $b$ .

Los parámetros de un elipsoide así, se determinaron repetidamente por métodos astrogeodésicos (5.1.7) y gravimétricos (5.2.8). Los resultados variaron debido a las distribuciones variables de las observaciones en la superficie terrestre y porque se aplicaron métodos diferentes en la reducción al elipsoide (5.2.4). Los parámetros elipsoidales también se pueden derivar de los coeficientes armónicos como se determinan en geodesia de satélites (5.3) ya que de acuerdo a (2.59) estos están relacionados a los momentos de inercia principales. Se encontró que  $a_1 - a_2 = 69\text{m}$ ,  $\lambda_1 = 345^\circ 15'$  (Lundquist y Veis 1966).

Debido a que las desviaciones del elipsoide de revolución biaxial con respecto al geóide generalmente adquieren este orden de magnitud, el elipsoide triaxial no representa un considerablemente mejor ajuste al geóide y al campo de gravedad. En cambio, los cálculos geodésicos se vuelven más difíciles debido a la compleja geometría. Finalmente, el elipsoide triaxial tampoco es apropiado como una figura física normal. Sin embargo, existen elipsoides de revolución triaxiales como figuras de equilibrio (elipsoide homogéneo de Jacobi), sin embargo un elipsoide de esos daría una forma completamente innatural cuando se usaran los valores para la masa y la velocidad angular de la Tierra.

De allí que el elipsoide triaxial no es apropiado como cuerpo de referencia, con excepción de los propósitos especiales.

### 3.5.5 Sistemas de Referencia Geodésicos.

Con el fin de hacer a los resultados mutuamente comparables y para proporcionar resultados coherentes a otras ciencias (astronomía), se establecen sistemas de referencia geodésicos por recomendación de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (U.G.G.I.) (1.4.2).

En 1924 en Madrid, la asamblea general de la U.G.G.I introdujo el elipsoide determinado por J. F. Hayford en 1909 como el Elipsoide Internacional con los parámetros-

$$(3.66a) \quad a = 6378388\text{m}, \quad f = 1/297.0$$

La asamblea general en Estocolmo (1930) adoptó para este elipsoide la fórmula de gravedad internacional establecida por G. Cassinis.

- (3.66b)  $\gamma_0 = 9.78049 (1 + 0.0052884 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi) \text{ms}^{-2}$  correspondientes a la fórmula de gravedad normal (3.59); creando un elipsoide de nivel. Los parámetros geométricos  $a$ ,  $f$  fueron calculados por Hayford de material de observación astrogeodésico en E.U. (5.1.7). W.A. Heiskanen (1928) había determinado la gravedad ecuatorial  $\gamma_0$  en (3.66b) de un ajuste de valores de gravedad isostáticamente reducidos (5.2.4). Aquí, se mantuvo fijo el achatamiento de gravedad  $\beta$  dado según (3.52) y (3.54) por  $a$ ,  $f$ ,  $\gamma_0$  y  $\omega$ ;  $\omega$  existía con gran precisión de observaciones astronómicas. El sistema de referencia internacional de 1924/1930 está por lo tanto definido por los cuatro parámetros  $a$ ,  $f$ ,  $\gamma_0$ ,  $\omega$ . El elipsoide correspondiente se ha aplicado en numerosos levantamientos geodésicos; también la fórmula de gravedad normal ha sido ampliamente aceptada. Sin embargo, de acuerdo al conocimiento actual, los valores para los parámetros del sistema de 1924/1930 representan una aproximación insuficiente para el elipsoide terrestre medio (5.4.4) con propósitos científicos. En la asamblea general de la U.G.G.I. en Lucerna (1957), el sistema de referencia de 1924/1930 fue substituído por el Sistema de Referencia Geodésico 1967 (Asociación Internacional de Geodesía 1971, Moritz 1968b). Está definida por las siguientes constantes:

$$(3.67a) \quad a = 6378160 \text{ m}, \quad GM = 398603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad J_2 = 1082.7 \times 10^{-6}$$

La velocidad angular de la rotación terrestre:

$$(3.67b) \quad \omega = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

no mencionada en la resolución, sirve como el cuarto parámetro. El elipsoide de referencia correspondiente a esta definición fue declarado ser un elipsoide de nivel.

En la orientación del Sistema de Referencia Geodésico 1967, se estipula lo siguiente:

- a) El eje menor del elipsoide de referencia será paralelo a la dirección definida por el origen internacional convencional (O.I.C.) para movimiento polar.
- b) El meridiano de referencia será paralelo al meridiano cero adoptado por el BIH para las longitudes (= meridiano medio de Greenwich).

Los valores del Sistema de Referencia Geodésico de 1967 concuerdan con las constantes que fueron adoptadas por la Unión Astronómica Internacional (U.A.I.), en su asamblea general de Hamburgo (1964).

El cálculo del semieje mayor  $a$  estuvo basado en la información astrogeodésica de toda la Tierra, la cual fue transformada a un sistema uniforme mediante datos gravimétricos. Con observaciones de sondas espaciales se obtuvo la constante gravitacional geocéntrica  $GM$ . Incluye la masa de la atmósfera  $M_{Atm} = 0.89 \times 10^{-6} M$ . El factor dinámico de forma  $J_2$  se derivó de las perturbaciones orbitales de satélites artificiales. La velocidad angular  $\omega$  se conoce de la astronomía con mucha mayor precisión que las otras cantidades. El valor aceptado se refiere al segundo, en tiempo solar medio. El Sistema de Referencia Geodésico de 1967 representa una buena aproximación (posición de 1964) al elipsoide terrestre medio. Las desviaciones relativas con respecto a los valores óptimos de 1979 para el elipsoide terrestre medio (5.4.4) son de  $3 \times 10^{-6}$  ( $a$ ),  $6 \times 10^{-6}$  ( $GM$ ), y  $6 \times 10^{-5}$  ( $J_2$ ).

Usando las fórmulas dadas con respecto a un elipsoide de nivel, se pueden determinar entre otras, a partir de los parámetros del Sistema de Referencia Geodésico de 1967 (3.67) las siguientes cantidades - valores redondeados -:

parámetros elipsoidales geométricos (3.4.1):

$$f = 1/298.247, b = 6356775 \text{ m}, e^2 = 0.006694605;$$

radios de curvatura en el polo y en el ecuador (3.4.2.):

$$c = 6399617 \text{ m}, M_p = 6335461 \text{ m}, N_p = a;$$

longitudes de los arcos de meridiano y paralelo (3.4.2) para  $\phi = 50^\circ$ :

$$\begin{array}{ll} \Delta G(\Delta\phi = 1'') = 111.229 \text{ m}, & \Delta G(\Delta\phi = 1') = 1853.8 \text{ m}, \\ \Delta G(\Delta\phi = 1') = 30.90 \text{ m}, & \Delta L(\Delta\lambda = 1'') = 71.696 \text{ m}, \\ \Delta L(\Delta\lambda = 1') = 1394.9 \text{ m}, & \Delta L(\Delta\lambda = 1') = 19.92 \text{ m}; \end{array}$$

parámetros físicos (3.5.2.), (3.5.3.):

$$U_0 = 6.263703 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}, J_2 = -2.37 \times 10^{-6}, m = 0.00344980,$$

$$\gamma_0 = 9.780318(1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000059 \sin^2 2\varphi) \text{ ms}^{-2},$$

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right)_0 = -0.30877(1 - 0.00139 \sin^2 \varphi) \times 10^{-2} \text{ s}^{-2}.$$

La gravedad normal  $\gamma_0$  depende de la influencia de la masa total de la tierra incluyendo la atmósfera. En cuanto a los valores para la gravedad normal que se requieren sobre el elipsoide o dentro del alcance de la atmósfera, de acuerdo a (2.12), se debe restar la influencia de las masas de aire no efectivas que están sobre el punto atraído. La corrección para  $\gamma_0$  es de

$\partial \gamma = -0.87 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  para  $h = 0$  y  $\partial \gamma = -0.01 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  para  $h = 30/\text{km}$  (Ecker and Mittermayer 1969)

El Sistema de Referencia Geodésico de 1967 ha encontrado aplicaciones especialmente en la formulación de problemas científicos y en la planeación de levantamientos geodésicos nuevos. En estos tiempos no se espera un reajuste de todos los sistemas de referencia de levantamientos geodésicos debido al gran esfuerzo que implica la aplicación de la transformación de coordenadas y el cambio de mapas actuales. Para el cálculo de  $M$ (3.24),  $N$ (3.26),  $G$ (3.32),  $\gamma_0$ (3.43), y la reducción atmosférica  $\partial \gamma$  existen tablas en la Asociación Internacional de Geodesia (1971).

En su asamblea general de Canberra (1979) la U.G.G.I., reconoció que el Sistema de Referencia Geodésico de 1967 ya no representa la medida, forma y campo de gravedad de la Tierra con la precisión adecuada. Fue reemplazado por el Sistema de Referencia Geodésico de 1980, también basado en la teoría del elipsoide equipotencial geocéntrico (3.5.2), (3.5.3), con las constantes convencionales:

$$a = 6378137 \text{ m}, GM = 398600.5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, J_2 = 1082.43 \times 10^{-6},$$

$$\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1},$$

donde  $GM$  incluye la atmósfera, y  $J_2$  excluye la deformación de marea permanente (2.4.1). No hay cambio en la orientación del sistema de referencia (ver arriba).

La precisión relativa de estos valores es de  $\pm 3 \times 10^{-7}$  ( $a$ ),  $\pm 1 \times 10^{-7}$  ( $GM$ ), y  $\pm 5 \times 10^{-6}$  ( $J_2$ ), (5.4.4). El nuevo sistema es consistente con el Sistema de Constantes Astronómicas I.A.U. de 1976.

### 3.5.6 Coordenadas Normales Geográficas, Alturas Normales.

Análogamente a la definición de la latitud y longitud astronómicas (3.2.1) se pueden introducir las coordenadas geográficas normales en el campo

de gravedad normal. La latitud geográfica normal  $\phi^N$  es el ángulo medido en el plano meridiano entre el plano ecuatorial del elipsoide de nivel y la dirección de la gravedad normal en P. La longitud geográfica normal  $\lambda^N$  es equivalente a la cantidad elipsoidal  $\lambda$  (3.4.1). Estas coordenadas son significativas en la

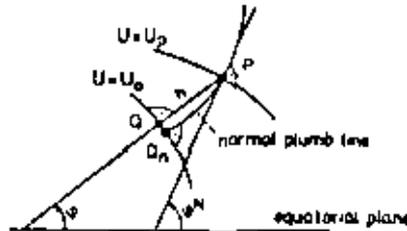


Fig. 3.12:  
Latitud geográfica  $\phi$   
y latitud geográfica  
normal  $\phi^N$

determinación directa de la superficie física de la Tierra (5.2.5).

Como las superficies esferopotenciales  $U = \text{const.}$  no son paralelas, las líneas de plomada del campo de gravedad normal son curvas. Aquí, debido a la simetría rotacional, nada más tenemos una componente meridional  $K^N$  para la curvatura normal de la línea de la plomada. En un sistema  $x, y, z$  local ( $x =$  norte,  $y =$  este,  $z =$  zenit de la línea de la plomada normal) definida similarmente como en (2.2.2), consecuentemente correspondiendo a (2.40):

$$(3.69) \quad \kappa_x^N = -\frac{U_{xx}}{\gamma_0}, \quad \kappa_y^N = 0,$$

donde  $-U_{xz} = (\partial \gamma / \partial x)_0 = (\partial \gamma / \partial \phi)_0$ ,  $M =$  radio de curvatura meridiano (3.24). Substituyendo  $\gamma_0$  (3.55) y su derivada, y usando el achatamiento de gravedad  $\beta$ , obtenemos la aproximación suficiente.

$$(3.70) \quad \kappa_x^N = \frac{\beta}{M} \sin 2\phi.$$

De allí se obtiene el gradiente de la gravedad horizontal normal en el elipsoide del Sistema de Referencia Geodésico de 1967 (3.5.5.) mediante:

La altura normal  $H^N$  introducida por M.S. Molodenski es de gran importancia para los métodos gravimétricos y en levantamientos geodésicos. Está definida en el campo de gravedad normal, análogamente a la altura ortométrica (3.10), por el número geopotencial  $C$  y la gravedad normal media,  $\bar{\gamma}$

$$(3.71) \quad H^N = \frac{C}{\bar{\gamma}}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma dH^N.$$

Un punto  $Q$  se determina por  $H^N$  como colocado en la línea de la plomada normal, o con una buena aproximación sobre la normal del elipsoide que pasa por el punto de superficie,  $P$ . En el campo de gravedad normal,  $Q$  debería tener la misma diferencia de potencial  $C$  (3.9) con respecto al elipsoide de nivel  $U = U_0$  que la que el punto  $P$  tiene con respecto al geoide en el campo de gravedad de la Tierra:

$$(3.72) \quad C = U_0 - U_Q = W_0 - W_P.$$

Si se requiere, como es lo usual, que los potenciales del elipsoide y del geoid sean iguales ( $U_0 = W_0$ ), entonces tenemos que  $U_Q = W_P$ . La superficie en la cual para cada punto  $U_Q = W_P$  se cumple, R.A. Hirvonen (1960), la denomina teluroid. La altura normal  $H^N$  de un punto  $P$  es equivalente a la altura del correspondiente punto del teluroid,  $Q$ , sobre el elipsoide. El teluroid intersecta las superficies esferopotenciales  $U = U_Q$ ; de aquí que él mismo no sea una superficie de nivel del campo de gravedad normal. Su forma se asemeja a la de la superficie física de la Tierra 5.

Si sustituimos  $\gamma$  de (3.64) en (3.71) e integramos, entonces vemos que:

$$(3.73) \quad \bar{\gamma} = \gamma_0 \left( 1 - \frac{1}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) H^N \right).$$

Por eso,  $\bar{\gamma}$  se puede calcular rigurosamente (con iteraciones). Ya que  $C$  se puede medir (5.1.5), la altura normal se determina sin ninguna hipótesis. Extendiendo las alturas normales hacia abajo de la superficie terrestre se obtiene el cuasigeoide como superficie de referencia para las alturas. No representa una superficie de nivel.

## 1. METODOS DE MEDICION EN GEODESIA.

Para la solución al problema de la geodesia formulado en (1.2), se observan varias cantidades geométricas y físicas en la superficie terrestre y en el espacio exterior a ella. Pueden dividirse en cuatro grupos:

1. determinaciones astronómicas de latitud; longitud y azimuth orientadas con respecto a la dirección de la línea de la plomada y obtenidas de mediciones de dirección a las estrellas (4.1);
2. mediciones de gravedad y las segundas derivadas del potencial de gravedad; también mediciones de marcha terrestres (4.2);
3. mediciones geodésicas de ángulos horizontales, distancias, ángulos zenitales, y diferencias de altura (4.3);
4. mediciones independientes de la dirección de la línea de la plomada a globos, satélites terrestres artificiales, la luna, y fuentes de radio extragalácticas, al igual que mediciones de altura a la superficie terrestre desde satélites. Debido a la importancia de los satélites terrestres, estas mediciones estarán asociadas con el concepto de "observaciones de satélite" (4.4).

Los métodos de medición (recopilación de información) dependen fuertemente de las posibilidades tecnológicas. Se ha logrado un progreso substancial a través del desarrollo de la electrónica (Kahmen B 1978 da un resumen de los métodos electrónicos de medición), de satélites terrestres artificiales, y tecnología laser. La estimación e incremento de la precisión en estos métodos merece atención particular. Dependiendo del instrumento, la precisión obtenida en el laboratorio normalmente no se puede obtener completamente cuando se hacen

mediciones geodésicas; ésto se debe a influencias de perturbación externas (microsísmicidad, variaciones en temperatura y presión, refracción, etc.)

#### 4.1 MEDICIONES ASTRONÓMICAS.

Una parte de la astronomía geodésica está dedicada a la determinación de la latitud  $\phi$  y longitud  $\Lambda$  astronómicas (3.2.1), al igual que del azimuth  $A$  astronómico (3.2.2) mediante observaciones a estrellas fijas; la base para este trabajo es la astronomía esférica (Jordan - Eggert - Kneissl II a A 1970; Smart A 1960; Mueller A 1969; Sigl A 1975; Heitz - 1976, Robbins 1977).

##### 4.1.1 SISTEMAS COORDENADOS DE LA ASTRONOMÍA ESFÉRICA.

Cuando se observan estrellas fijas, la distancia del punto de observación (topocentro) al centro de masa de la Tierra (geocentro) puede despreciarse en comparación con la distancia a la estrella. Si circunscribimos la esfera celeste (esfera unitaria) alrededor de la Tierra  $E$ , considerada como un punto (Fig. 4.1), entonces las posiciones de las estrellas fijas están determinadas en la esfera por dos direcciones. De los varios sistemas de coordenadas en astronomía esférica, los sistemas ecuatorial y horizontal son de interés particular en astronomía geodésica.

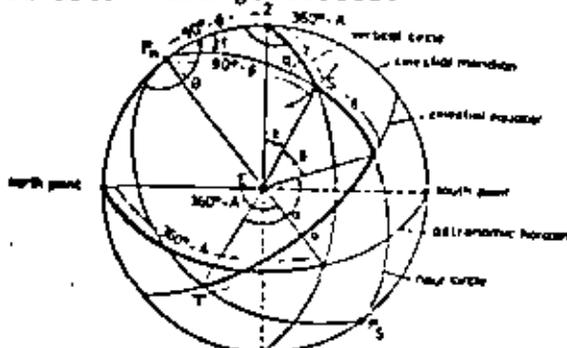


Fig. 4.1.  
Sistemas de  
Coordenadas  
Astronómicas.

El "sistema ecuatorial" fijo a las estrellas está formado -- por la proyección del sistema terrestre global (3.1) en la -- esfera celeste. La prolongación del eje de rotación de la --

Tierra intersecta la esfera celeste en los polos celestes  $P_n$  y  $P_s$  (Fig. 4.1); la línea de intersección del plano ecuatorial terrestre con la esfera celeste es el ecuador celeste. Los círculos mayores perpendiculares al ecuador celeste y que contienen los polos celestes se llaman círculos horarios; los círculos menores paralelos al ecuador celeste se denominan paralelos celestes.

Las coordenadas de una estrella  $S$  en este sistema son la declinación  $\delta$  y la ascensión recta  $\alpha$ .  $\delta$  es el ángulo medido en el plano del círculo horario entre el plano ecuatorial y la línea que une  $E$  y  $S$  (positivo del ecuador hacia  $P_n$ , negativo hacia  $P_s$ ).  $\alpha$  es el ángulo medido en el plano del ecuador entre el plano del círculo horario del equinoccio vernal  $\Upsilon$  (intersección de la eclíptica y el ecuador donde el Sol pasa del hemisferio del sur al hemisferio del norte) y el plano del círculo horario de  $S$  ( $\alpha$  se mide a partir de  $\Upsilon$  y es positiva en la dirección opuesta al movimiento diario aparente de la esfera celeste).

Trasladando el sistema astronómico local que fue presentado en (3.2.2) al centro de masa terrestre y luego proyectándolo sobre la esfera celeste, obtenemos el sistema horizontal. Los puntos de intersección de la prolongación de la dirección de la línea de la plomada con la esfera celeste se conocen como el zenit  $Z$  y el nadir  $Z'$ , respectivamente (Fig. 4.1). La intersección del plano del horizonte con la esfera celeste es el horizonte celeste. Los círculos máximos perpendiculares al horizonte que incluyen el zenit y nadir se llaman círculos verticales; mientras que, los círculos menores paralelos al horizonte se denominan almicantaradas. El círculo vertical a través de los polos celestes es el meridiano celeste; él intersecta al horizonte en los puntos Norte y Sur. El círculo vertical perpendicular al meridiano celeste es el primer vertical y contiene a los puntos Este y Oeste.

En el sistema horizontal, la estrella está determinada por

las coordenadas definidas en (3.3.2); el ángulo zenital  $z$  (raramente por el ángulo de altura  $90^\circ - z$ ) y el azimuth astronómico  $A$  (en astronomía este ángulo normalmente se mide a partir del Sur y es positivo en dirección Oeste hacia el Norte; sin embargo aquí en geodesia es, como siempre, positivo a partir del Norte y en el sentido de las manecillas del reloj). Las coordenadas del sistema horizontal dependen de la estación de observación, y también del tiempo debido a la rotación de la Tierra.

Si giramos el sistema ecuatorial  $\alpha, \delta$ , alrededor del eje polar, un ángulo igual al tiempo sidereo  $\Theta$  (4.1.3), obtenemos el sistema ecuatorial dependiente del tiempo (porque la Tierra gira) ó el sistema del ángulo horario, con el ángulo horario  $t$  y la declinación por coordenadas. Aquí, el ángulo horario  $t$  es el ángulo medido en el plano ecuatorial entre el meridiano celeste y el círculo horario de  $S$ , medido del meridiano superior  $P_n Z S_s$  hacia  $W$ . Para la determinación del tiempo, existe la relación fundamental;

$$(4.1) \quad \Theta = t + \alpha$$

El triángulo astronómico  $P_n Z S_s$  relaciona el sistema del ángulo horario al sistema horizontal; además, contiene la latitud astronómica  $\phi$  (Fig. 4.1). Para los cálculos de la latitud, el tiempo, y el azimuth, tenemos la importante transformación.

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} \cos A \sin z \\ \sin A \sin z \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & -1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \cos \delta \\ \sin t \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

Del triángulo astronómico se pueden derivar fórmulas diferenciales ( $q$  = ángulo paraláctico,  $A$  se mide a partir del norte) para la estimación de errores.

$$(4.3) \quad \left. \begin{aligned} d\theta &= -\frac{\cos \varphi}{\cos A} d\delta - \frac{dz}{\cos A} - \cos \Phi \tan A dt \\ d\tau &= \frac{\cos \varphi}{\sin A \cos \Phi} d\delta - \frac{dz}{\sin A \cos \Phi} - \frac{\cos A}{\cos \Phi} dt \\ dA &= \frac{\sin \tau}{\sin z} d\delta + \frac{\cos \varphi \cos \delta}{\sin z} dt + \cos \tau \sin A d\theta \end{aligned} \right\}$$

#### 4.1.2 Variación de Coordenadas Estelares, Catálogos de estrellas.

Las coordenadas estelares  $\alpha$ ,  $\delta$ , que hasta ahora se han considerado como independientes del tiempo y del lugar de observación, realmente cambian debido a los movimientos del eje terrestre (precesión, nutación), pequeños movimientos de las estrellas en la esfera celeste (movimiento propio), al igual que desplazamientos aparentes de la dirección de las estrellas (paralajes, aberración, refracción).

En catálogos estelares, la posición  $\alpha$ ,  $\delta$  de una estrella está dada en un sistema "medio" para la época  $T_0$ , a partir de la cual estas variaciones han sido sacadas en su mayor parte; posición media ( $T_0$ ). La transición de la posición observada en la época  $T$  a la posición media ( $T_0$ ) se lleva a cabo en varios pasos:

1. Primero, la posición (T) de la estrella, observada en el topocentro, se transforma a la posición aparente (T); ésta corresponde a un cambio del observador al geocentro. Se requieren reducciones debido a la refracción atmosférica y a la rotación terrestre.

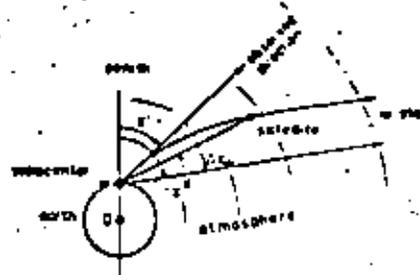


Fig. 4.2:  
Refracción  
Atmosférica

La refracción astronómica  $\Delta z_a$  ocasiona un incremento aparente en la altura de la estrella (Fig. 4.2). El ángulo zenital verdadero  $z$  se obtiene de la cantidad observada  $z'$  como:

$$(4.4) \quad z = z' + \Delta z_a$$

Bajo la suposición de que la atmósfera consiste de capas esféricamente simétricas,  $\Delta z_a$  se puede calcular para  $z' < 70^\circ$  a partir de la presión atmosférica  $p$  (mbar) y la temperatura  $T$  (K) en el lugar de observación:

$$(4.5) \quad \Delta z_a = \Delta z_0 \frac{p}{1013.25} \frac{273.15}{T}$$

Aquí,  $\Delta z_0$  que depende de  $z'$  es la refracción standard para  $p = 1013.25$  mbar y  $T = 273.15$  K;

$$(4.6) \quad \Delta z_0 = 60'' \tan^2 z' - 0.06 \tan^3 z'$$

En el intervalo  $0^\circ < z' < 70^\circ$  la incertidumbre  $\Delta z_a$  es aproximadamente de  $\pm 0'' 03$  a  $\pm 0'' 2$ .

Un desplazamiento aparente en dirección (aberración diurna) resulta de la velocidad finita de la velocidad de la luz y la relativa velocidad del observador con respecto a las estrellas, debido a la rotación terrestre. Este desplazamiento también se toma en cuenta aplicando una corrección.

La diferencia entre las direcciones topocéntrica y geocéntrica (paralaje geocéntrico) se puede despreciar en las observaciones a las estrellas.

2. La posición aparente (T) dependiente del movimiento y posición de la Tierra en la eclíptica se transforma a la posi-

ción verdadera (T) correspondiente a un observador en el origen de un sistema heliocéntrico. Aquí se requieren reducciones como resultado de cambios direccionales aparentes (aberración anual) que surgen del movimiento orbital de la tierra alrededor del Sol, y debido a la diferencia entre las direcciones geocéntrica y heliocéntrica (paralaje anual).

3. La orientación del sistema  $\alpha$ ,  $\delta$ , y por lo tanto, la posición verdadera (T) de una estrella cambia debido a la gravitación de la luna, del Sol y de los planetas.

Las fuerzas de atracción de la luna y del Sol en el abombamiento ecuatorial de la Tierra crean momentos de fuerza tendientes a girar el plano ecuatorial hacia el plano de la eclíptica (Fig. 4.3):

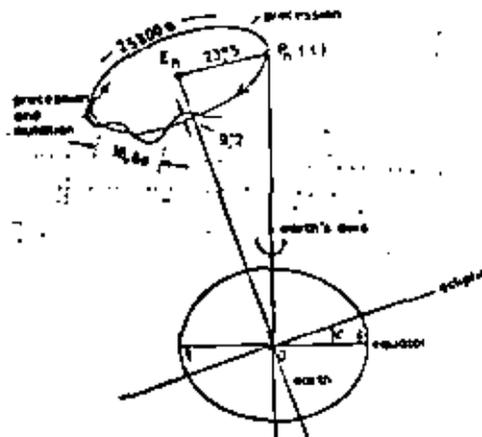


Fig. 4.3:  
Precesión y  
Nutación.

El efecto combinado de esto y el momento de la rotación terrestre produce un giro del eje terrestre que describe un cono con un ángulo generador de  $\epsilon = 23^{\circ}5'$  ( $\epsilon =$  oblicuidad de la eclíptica) alrededor del polo de la eclíptica  $E_n$ . El equinoccio vernal  $\gamma$  viaja en la eclíptica a una velocidad de  $50''4$  por año, haciendo una revolución completa en aproximadamente 25,800 años: precesión lunisolar. La gravitación de los planetas origina una dislocación de la órbita terrestre, y con ello, una migración adicional de  $\gamma$  a lo largo del ecuador, al igual que un cambio en  $\epsilon$ : precesión planetaria. La suma de las precesiones lunisolar y

planetaria se denomina precesión general. Está sobrepuesta por un movimiento periódico llamado nutación (amplitud = 9'2, período = 18.6 años el cual se debe principalmente a la inclinación de la órbita de la Luna con respecto a la eclíptica (-5°). Tomando en cuenta la nutación, la verdadera posición se transforma a posición media (T) (referida al ecuador celeste medio y el equinoccio vernal medio en la época T).

- 4. En la transición de la posición media (T) a la posición media (To) de los catálogos de estrellas, se deben de tomar en cuenta la precesión y el movimiento propio entre T y To. Aquí, el movimiento propio denota la componente del movimiento espacial de la estrella que es tangente a la esfera celeste (generalmente 1" por año).

Adicionalmente a  $\alpha, \delta$ , los catálogos de estrellas generalmente contienen información sobre el movimiento propio y las magnitudes aparentes de las estrellas. El sistema astronómico está definido por las coordenadas de un número de estrellas fundamentales observadas con mucha precisión (sistema fundamental) (Eichhorn B 1974).

El catálogo fundamental FK4 (Instituto de Cálculo Astronómico Heidelberg 1963) contiene las posiciones medias de 1535 estrellas (incertidumbre promedio  $\pm 0''.01$  a  $\pm 0''.1$ ) para las épocas 1950.0 y 1975.0. Los datos correspondientes a 1987 estrellas adicionales (época de 1950.0) se encuentran en un suplemento a este catálogo, FK4 sup. Un nuevo catálogo fundamental FK5 - que se encuentra en preparación, va a contener más de 3000 estrellas y para la mayoría de ellas deberá estar libre de efectos sistemáticos regionales.

Los catálogos posicionales listan los lugares medios de una gran cantidad de estrellas en el sistema fundamental. A estos catálogos se les da un significado considerable en astronomía geodésica cuando se determinan posiciones, pero principalmente en las mediciones de dirección de geodesia de satélites donde

se requiere un campo denso y uniformemente distribuido de estrellas fijas conocidas.

El catálogo de estrellas (1966) SAO (Smithsonian Astrophysical Observatory) representa una colección de alrededor de 260,000 posiciones de estrellas en la época 1950.0 (incertidumbre promedio de  $\pm 0''.5$ ). El catálogo AGK3 de la "Sociedad Astronómica" (1971), que está basada en mucho material de observación viejo y nuevo, contiene más de 200,000 posiciones de estrellas (época de 1950.0, incertidumbre promedio de  $\pm 0''.1$  a  $\pm 0''.2$ ).

Para poder hacer comparaciones con las observaciones, se requiere de las posiciones aparentes de las estrellas. Pueden calcularse ya sea a partir de la posición media de los catálogos de estrellas o tomadas de un almanaque astronómico (solamente estrellas fundamentales).

El almanaque titulado "Lugares Aparentes de Estrellas Fundamentales" (Instituto de Cálculo Astronómico de Heidelberg) contiene los lugares aparentes de las estrellas FK4 para un año en particular. Las posiciones aparentes del Sol se encuentran en el almanaque conocido como las Efemérides Astronómicas.

El sistema fundamental, definido por las direcciones a las estrellas fijas representa una aproximación a un sistema inercial; sin embargo, su precisión difícilmente se puede mejorar de  $\pm 0''.01$ . En el futuro, se podrá obtener una mejor aproximación a través de un sistema que está definido por direcciones a fuentes de radio extragalácticas (cf. (4.4.7)). Kolaczek y Weiffenbach (1975).

#### 4.1.3 SISTEMAS DE TIEMPO.

Se requieren determinaciones de tiempo en astronomía geodésica y en geodesia de satélites debido al movimiento relativo del blanco con respecto al lugar de observación.

La unidad de tiempo, el segundo (s) fue definida en la decimotercera conferencia general del Comité Internacional de Pesas y Medidas en 1967, por medio de las oscilaciones del átomo de cesio:

"Un segundo es 9192631770 veces el período de radiación emitida correspondiente a la transición entre dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio - 133".

Esta definición corresponde a la escala internacional de tiempo atómico. Su punto de origen fue establecido de tal manera que el tiempo atómico TAI (Temps Atomique International) concuerda con el tiempo universal (ver abajo) a la medianoche del 1o. de enero de 1958. TAI es creado por los relojes atómicos (normalmente se usan el átomo de cesio y la molécula de amonio) de varias organizaciones y por el promedio de sus tiempos correspondientes en la Oficina Internacional de la Hora (Bureau International de L'Heure, BIH) en París. Debido a la alta estabilidad de frecuencia a largo plazo ( $10^{-12}$  a  $10^{-13}$ ) de los relojes atómicos, éstos proporcionan una excelente aproximación para una medida del tiempo uniforme (tiempo inercial), lo que es requerido en física y metrología.

Con ello el tiempo atómico prácticamente reemplaza al tiempo efemérico (TE), el cual está definido por el giro de la Tierra alrededor del Sol, y el cual solamente se puede determinar mediante observaciones astronómicas de largo plazo.

Para las observaciones en astronomía geodésica, nos gustaría un sistema de tiempo derivado de la rotación terrestre. Las observaciones de las estrellas proporcionan el tiempo sideral  $\ominus$  verdadero (ó aparente) referido al meridiano del observador; este tiempo es igual al ángulo horario del equinoccio vernal  $\gamma$  (Fig. 4.1). El tiempo sidéreo medio de variación uniforme se obtiene después de tomar en cuenta la nutación (4.1.2) de  $\gamma$ .

Por razones prácticas, el tiempo solar se usa en la vida cotidiana. Debido a que la revolución (aparente) del Sol alrededor de la Tierra no es uniforme, se introduce un Sol "medio" que se desplaza a una velocidad constante a lo largo del ecuador, con lo que tanto el Sol medio como el verdadero pasan a través del equinoccio vernal al mismo tiempo. El tiempo solar medio es entonces igual al ángulo horario del Sol medio más 12 horas. El tiempo solar medio referido al meridiano medio de Greenwich se designa como tiempo universal (UT, universal time). La conversión del tiempo universal al tiempo sidéreo es rigurosamente posible; normalmente se lleva a cabo mediante el uso de tablas.

El tiempo universal se obtiene rutinariamente de mediciones astronómicas de aproximadamente 50 institutos que participan en el Servicio de Tiempo Internacional. Estos tiempos UTO están referidos al eje de rotación instantáneo y para poder compararlos entre sí el BIH determina una corrección a la longitud astronómica  $\Delta\Lambda_p$  (4.12) debido al movimiento polar (3.1), y tomando en cuenta las longitudes geográficas de los observatorios, compila los resultados para obtener el tiempo universal UT1:

$$(4.7) \quad UT1 = UTO + \Delta\Lambda_p, \quad \Delta\Lambda_p = -\frac{1}{15}(x_p \sin \Lambda + y_p \cos \Lambda) \tan \Phi$$

Por lo tanto el tiempo universal UT1 se refiere a la rotación real de la Tierra y al polo medio (CIO), haciéndolo con ello apropiado como sistema de referencia para observaciones en astronomía geodésica.

La incertidumbre de la definición de UT es de  $\pm 1$  a  $\pm 2$  ms. Las longitudes de las estaciones que participan en el servicio del tiempo fueron establecidas por última vez en 1968: sistema BIH 1968.

Después de la introducción del tiempo atómico, se le da gran importancia al tiempo universal UT2, también definido por el BIH. Se obtiene del UT1, después de haberlo corregido por las variaciones rotacionales anuales y semianuales de la Tierra.

Estas variaciones son seculares, periódicas o irregulares por naturaleza (Jung 1966, Rochester 1975). La fricción de marea ocasiona un decremento secular de alrededor de  $-2 \times 10^{-12}$  rad  $s^{-1}$  cada 100 años en la velocidad angular de la rotación terrestre, prolongando el día por aproximadamente 2 ms. cada 100 años. Generalmente surgen cambios, que tienen períodos anuales y amplitudes menores que 0.03s, como resultado de procesos meteorológicos; también se efectúa una variación periódica semianual ( $< 0.01s$ ) a través de marcas terrestres solares. Marcas terrestres lunares ocasionan fluctuaciones con períodos de 14 á 28 días y amplitudes menores que 1 ms. Se supone que los desplazamientos de masa terrestre producen variaciones irregulares que han sido observadas por siglos o por solamente algunos años (cambios en la longitud del día por varios ms), al igual que sobre semanas y meses (cambios por fracciones de un ms).

Las estaciones de señales de tiempo transmiten el tiempo universal UTC (tiempo universal coordinado) el cual es regulado por relojes atómicos. El intervalo de tiempo corresponde a tiempo atómico TAI; sin embargo, la diferencia  $DUT1 = UT1 - UTC$ , varía con el tiempo debido a cambios en UT1, de tal manera que se vuelve necesario introducir "segundos bisiestos" a la escala UTC (Hemmler 1972).

Las estaciones más conocidas en Europa que continuamente transmiten las señales de tiempo en Europa Central son D CF 77/Mainflingen (77.5 kHz), DIZ Nauen (4525 kHz), HBG/Frangins (75 kHz), OMA/Praga (50 kHz). En América del Nor

de las estaciones más importantes son KVV/It. Collins, Colorado (2500 - 25 000 kHz) y KVVH/Haui, Hawaii (2500 - 15 000 kHz).

#### 4.1.4 INSTRUMENTOS DE OBSERVACION.

Para la determinación de la latitud, longitud y azimuth se requieren mediciones de dirección y tiempo. Los instrumentos pueden estar permanentemente instalados (observatorios) ó colocados en el campo.

El servicio de Tiempo Internacional (4.1.3) y el Servicio de Movimiento Polar Internacional (3.1) utilizan observaciones de la más alta precisión hechas con instrumentos estacionarios (observatorios). El telescopio zénital fotográfico ha tenido aplicación, entre otros instrumentos (Enslin 1964). En este caso, las estrellas cerca del zenit son fotografiadas simétricamente al meridiano. Los ángulos zenitales y los horarios pueden determinarse de las trayectorias de las estrellas. La dirección de la vertical se establece mediante un recipiente de mercurio. Se pueden obtener precisiones similares ( $\pm 0''.05$ ) con el impersonal astrolabio de prismas de Danjon. Difiere de los astrolabios diseñados para usarse en el campo (ver abajo) por un micrómetro de autorregistro.

Para mediciones de campo de primer orden ( $\pm 0''.1$  á  $\pm 0''.3$ ) se utiliza, en particular, el teodolito universal. Consiste de un teodolito preciso (4.3.2) de un diseño muy estable, el cual, mediante algunos aditamentos se puede usar para hacer observaciones astronómicas (Fig. 4.4).

Un telescopio acodado con un ocular horizontal permite hacer observaciones cerca del zenit. Para eliminar errores personales, el hilo móvil del micrómetro de registro se acciona para seguir la estrella, de tal mane

ra que se generen impulsos a intervalos regulares, los cuales se graban. El nivel de suspensión o caballero sirve para medir la inclinación del eje horizontal; mientras que, el nivel Horrebow montado a ángulos rectos al eje horizontal registra cualquier cambio en la inclinación del telescopio. Entre los instrumentos de este tipo se encuentran el teololito astronómico universal DKM3-A (Kern, Aarau, -- Suiza) y el teololito universal Wild T4 (Wild, Heerbrugg, Suiza). Debido a una estabilización automática interconstruida, los niveles arriba mencionados, no son necesarios en el teodolito universal astronómico-geodésico Theo 002 (Jenoptik, Jena, DDR) (Sigl y Bauch 1976).

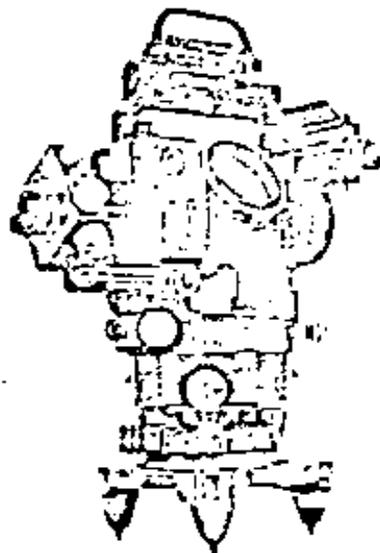


Fig. 4.4:  
Teololito  
Universal  
DKM 3-A  
(Kern & Co.  
AG, Aarau)

Usando el astrolabio de prismas (Fig. 4.5) o también el teololito de precisión (4.3.2), con el equipo auxiliar se puede alcanzar una precisión en la medida de  $\pm 0.5''$  a  $\pm 1''$ . Con el astrolabio se miden los tiempos de tránsito de aquellas estrellas que cruzan la misma almicantrada (4.1.1). La distancia zenital constante (normalmente  $\sim 30^\circ$ ) se establece mediante un prisma colocado frente al telescopio, y la dirección de la vertical se define por la superficie de un recipiente con mercurio o por un péndulo compensador.

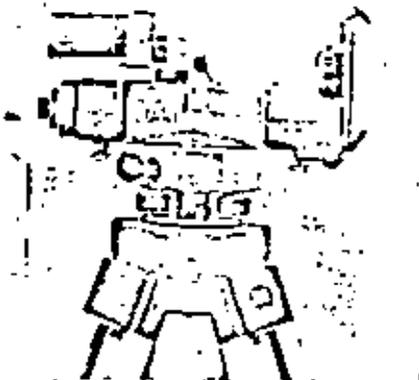


Fig. 4.5;  
Nivel Zeiss  
Ni2 con as-  
trolabio de  
prismas (Carl  
Zeiss Oberkochen)

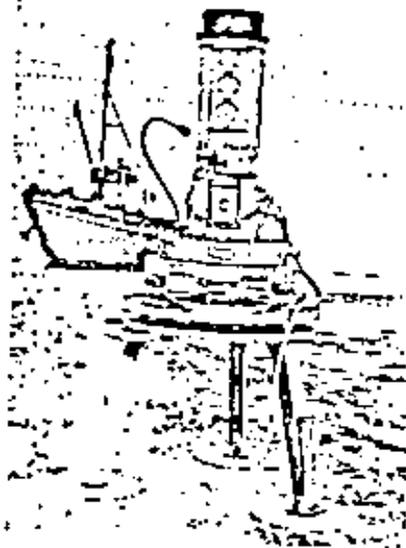


Fig. 4.6;  
Cámara Zenital  
portátil (Inst.  
para Geod. Teó-  
rica, Univ.  
Hannover).

Los aditamentos para el astrolabio son muy comunes, y se pueden montar en un teololito (por ej. el astrolabio Wild T3 con recipiente de mercurio) o en un nivel automático (astrolabio Zeiss Ni2) (Deichi 1975).

Recientemente también se han usado cámaras zenitales portátiles (Fig. 4.6), para determinar con rapidez la dirección de la vertical. Tal instrumento consiste de una cámara orientada en la dirección de la línea de la plomada (distancia focal = 300 á 800 mm, apertura relativa de ~ 1:5) y la cual puede ser girada alrededor de este eje en cualquier Azimuth. Además de un aditamento de tiempo, el instrumento también cuenta con dos niveles colocados en ángulos rectos entre sí (Rirardi 1976, Gessler y Seiber 1975).

Para medir el tiempo en las estaciones en el campo, es necesario estar equipado con un receptor de la señal de tiempo, un reloj (cronómetro, reloj pequeño de cristal de cuarzo), y un equipo de grabación (cronógrafo).

Las señales de tiempo (4.1.3) puede ser proporcionadas por un receptor de señales de tiempo que se sintoniza a una frecuencia especial, o a veces también por un radio receptor. La precisión de la señales recibidas depende de las fluctuaciones en el tiempo de propagación y en la calidad de la recepción ( $\pm 1$  á  $\pm 2$  ms). Los relojes son necesarios para interpolar el tiempo entre las señales de tiempo recibidas; estos relojes deben ser portátiles. Los relojes mecánicos (cronómetros de caja) experimentan mayores variaciones diarias en el transcurso de su operación.

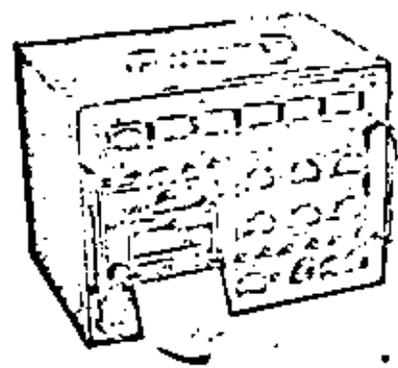


Fig. 4.7:  
 Cronómetro  
 Chronocord  
 portátil de  
 cristal de  
 cuarzo (the  
 Littlemore  
 Scientific  
 Engineering  
 Co. Littlemore  
 Oxford.)

En su mayoría han sido reemplazados por relojes de cristal de cuarzo pequeños con gran estabilidad de frecuencia - - ( $10^{-7}$  a  $10^{-8}$ ). La finalidad de los cronógrafos es la de grabar el tiempo. Estos instrumentos marcan gráficamente los impulsos del cronómetro (cronógrafo de pluma, incertidumbre de  $\pm 0.01s$ ) ó bien imprimen los minutos, segundos y centésimas de segundo (cronógrafos impresores, incertidumbre de  $\pm 0.001 s$ ). Algunos equipos son una combinación de un cronómetro de cristal de cuarzo y un cronógrafo impresor (Fig. 4.7). Los tiempos de tránsito de una estrella - que cruza los hilos horizontal o vertical del telescopio se registran con la ayuda de una tecla manual o mediante el uso de un micrómetro "impersonal" ( $\pm 0.02s$ ).

4.1.5 Métodos para Determinar Posiciones Astronómicas, Azimuth y Tiempo.

De los numerosos métodos, mencionamos aquí algunos de los de uso más frecuente en geodesia. Para determinar la latitud astronómica  $\phi$  se requiere calcular el ángulo zenital  $z$  y el ángulo horario  $t$  de acuerdo a (4.2). De (4.3) se puede ver que cualquier error en  $z$  tiene un efecto, mínimo para tránsito sobre el meridiano; aquí un error en  $t$  no tiene efecto en la latitud. Para la culminación superior (ángulo zenital más pequeño) de una estrella al norte ( $A=0$ ) o una estrella al sur ( $A=180$ ), las latitudes están dadas de acuerdo a la Fig. 4.1 por:

(4.8)

$$\phi = \delta_1 - \delta_2 \text{ and } \phi = \delta_2 - \delta_1$$

respectivamente. Por lo tanto, lo más adecuado para determinar la latitud es medir el ángulo zenital en el meridiano (por ej. de la Polar).

Si uno observa un par de estrellas estando una al norte y otra al sur que tienen aproximadamente el mismo ángulo zenital, entonces promediando (4.8) se elimina sustancialmente la incertidumbre en  $z$  debida a la refracción (método Sterneck). En el método Horrebow Talcott la (pequeña) diferencia entre el ángulo zenital meridiano de la estrella del norte y del sur de un par de estrellas, se mide con un micrómetro registrador. En cada caso, el eje óptico se ajusta al mismo ángulo zenital usando el nivel Horrebow que está colocado en el eje horizontal. Como no se requieren lecturas precisas del círculo y del tiempo, este método proporciona resultados muy precisos ( $m_4 = \pm 0.1$  cuando se observan alrededor de 20 pares de estrellas).

La longitud geográfica está dada por la diferencia entre el tiempo sideral local  $\Theta$  (4.1.3) y el sideral de Greenwich  $\Theta_0$  referido al meridiano de Greenwich.

$$(4.9) \quad \lambda = \Theta - \Theta_0$$

De acuerdo a (4.1),  $\Theta$  está relacionado al ángulo horario  $t$  el cual se puede calcular a partir del ángulo zenital usando (4.2) si se conoce la latitud.

$$(4.10) \quad \cos t = \frac{\cos z - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$$

Con la comparación de un reloj con las señales de tiempo (4.1.3) se obtiene el tiempo universal UT, el cual se convierte entonces al tiempo sideral de Greenwich  $\Theta_0$ .

Como se puede ver de (4.3), el efecto debido a los errores en  $z$  es mínimo cuando las observaciones se hacen en el primer vertical, mientras que aquí el efecto es nulo para errores en  $\phi$ . La influencia de la refracción se elimina al observar estrellas del Este y del Oeste de la misma altura y simétricas con respecto al meridiano. De la observación de la hora de tránsito a través del meridiano ( $t = 0$ ) se obtiene  $\Theta = \infty$ .

Se obtiene una incertidumbre de  $m_{\lambda} = \pm 0^{\circ} 01 \dots \pm 0^{\circ} 02$  de aproximadamente 30 tránsitos.

La precisión en la determinación de la longitud depende primordialmente de los errores sistemáticos del observador, -- del instrumento y de la comparación del tiempo. Si las determinaciones de longitud las hace el mismo observador, -- usando el mismo instrumento y la misma estación transmisora de las señales de tiempo, al igual que las mismas estrellas entonces las diferencias de longitud están esencialmente libres de estos errores. Por eso, las determinaciones de longitud de alta precisión se llevan a cabo como mediciones de diferencias de longitud con respecto a una estación de referencia del sistema de longitud BIH (4.1.3), Sigl. (1975).

Un método económico para determinar simultáneamente la latitud y longitud se conoce como el método de líneas de posición.

Los ángulos zenitales  $Z_1, Z_2$  de dos estrellas  $S_1 (\alpha_1, \delta_1), S_2 (\alpha_2, \delta_2)$  se observan en los tiempos sidéreos  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  y con los azimutes  $A_1$  y  $A_2$ . Si se proyectan a  $S_1$  y  $S_2$  sobre la superficie terrestre, entonces las intersecciones de los círculos centrados en las proyecciones  $S_1'$  y  $S_2'$  que tienen -- por radios  $Z_1$  y  $Z_2$ , respectivamente, los que representan dos posiciones geométricas  $P$  y  $(P')$  para el punto de observación (Fig. 4.8). Los círculos pueden ser reemplazados en la vecindad de  $P$  por sus líneas tangentes -- (líneas de posición);

la intersección de estas líneas da  $P_1$  como una aproximación de  $P$ . Matemáticamente, se obtienen las correcciones  $\Delta\phi = \phi - \phi_0$   
 $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ .

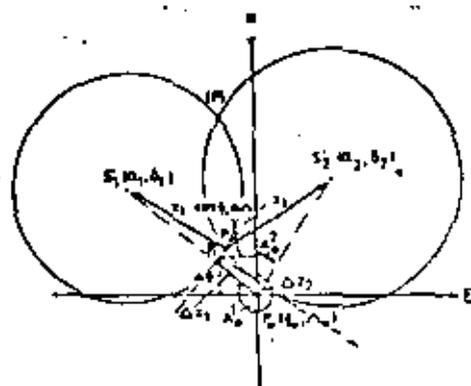


Fig. 4.8:  
 Método de  
 las líneas  
 de posición.

después de introducir una posición aproximada  $P_0$  ( $\phi_0, \lambda_0$ ). Cuando las observaciones se hacen con el astrolabio de prismas (4.1.4), el ángulo zenital, predeterminado por el prisma, se trata como una incógnita adicional. De aproximadamente 20 estrellas, distribuidas uniformemente sobre el horizonte, se obtiene un error promedio de  $\pm 0''5$  a  $\pm 1''0$ .

También es posible hacer determinaciones simultáneas de latitud y longitud usando una cámara zenital portátil (4.1.4). En el mismo instante que se mide el tiempo, se fotografía el campo de las estrellas cerca del zenit para dos posiciones de la cámara que difieran  $180^\circ$  en azimut (tiempo de exposición: 1 a 2s). Después de revelar las placas fotográficas, se miden en un comparador, las trayectorias de las estrellas y la intersección de las rectas que unen marcas fiduciales. La transformación de las coordenadas de placa de la intersección al sistema  $\alpha, \delta$  (4.1.1) proporciona las coordenadas  $\alpha_z, \delta_z$  del zenit después de haber sacado promedios y aplicado correcciones a las lecturas del nivel. De la fig. 4.1, se ve que  $\phi = \delta_z, \Theta = \alpha_z$  y (4.9) da  $\lambda = \alpha_z - \Theta$ .

Para las observaciones (de varias placas) se requiere de media a una hora aproximadamente (incluyendo la colo-

cación y desmontaje del instrumento); la precisión que se logra es de  $\pm 0''5$  á  $\pm 1''0$ .

Si se conoce la latitud, entonces el azimuth  $A$  se puede obtener según (4.2), a partir del ángulo horario  $t$ ; o sea de (4.1) y una determinación del tiempo sidéreo:

$$(4.11) \quad \tan A = \frac{\sin t}{\sin \Phi \cos t - \cos \Phi \tan \delta}$$

(4.3) muestra que un error en  $t$  tiene efectos mínimos para  $\delta \approx 90^\circ$  (estrellas cerca del polo). Para unas 10 observaciones, la desviación standard es  $m_A = \pm 0''3 \dots \pm 0''5$ . El azimuth de un blanco terrestre se obtiene midiendo el ángulo entre las direcciones a la estrella y al blanco.

Las observaciones de la latitud, longitud y azimuth referidas a la posición instantánea del eje rotacional, tienen que transformarse al sistema -C10 (3.1) usando las coordenadas  $x_p$ ,  $y_p$  del movimiento polar.

$$(4.12) \quad \left. \begin{aligned} \Phi_{C10} &= \Phi - (x_p \cos A - y_p \sin A) \\ \Lambda_{C10} &= A - (x_p \sin A + y_p \cos A) \tan \Phi \\ \Lambda'_{C10} &= A - (x_p \sin A + y_p \cos A) \sec \Phi \end{aligned} \right\}$$

## 4.2 MEDICIONES DE LA GRAVEDAD

En estas secciones, tratamos las mediciones de la intensidad de la gravedad (gravedad)  $g$  (2.1.5), las segundas derivadas del potencial de la gravedad  $W$  (2.2) y mareas del cuerpo terrestre -- (2.4), (Jordan - Eggert - Kneissl Va A 1967, Jung B 1961 Morelli B 1968).

### 4.2.1 Mediciones de Gravedad Absoluta.

Con una medición de gravedad "absoluta", queremos decir la deter

minación de  $g$  partir de mediciones de longitud y tiempo. Los métodos de caída libre y de ascenso y caída, al igual que los métodos del péndulo son significativos en este aspecto.

Mediante la integración de  $\ddot{x} = g$  para un experimento de caída libre, se obtiene la relación

$$(4.13) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2$$

entre la trayectoria  $x$  y el tiempo de caída  $t$ .

Las constantes de integración  $x_0$ ,  $v_0$  representan la posición y velocidad del cuerpo cuando  $t = 0$ . Si el cuerpo cae un mínimo de tres planos (Fig. 4.9a),  $x_0$  y  $v_0$  pueden eliminarse. Tenemos

$$(4.14) \quad g = 2 \frac{(x_2 - x_1)(t_1 - t_3) - (x_3 - x_1)(t_2 - t_1)}{(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)}$$

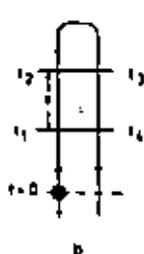
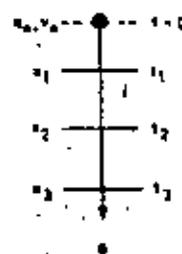


Fig. 4.9:

a) Método de caída libre.  
b) Método de ascenso y caída.

Para un ascenso y caída simétrica (Fig. 4.9b) es suficiente con medir los tiempos de cruce  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  en solamente 2 planos (separados por la distancia  $s$ ). Entonces (4.13) da:

$$(4.15) \quad g = \frac{4s}{(t_3 - t_1)^2 - (t_2 - t_2)^2}$$

Para obtener una precisión relativa de  $\pm 10^{-8}$  (correspondiente a  $\pm 0.01 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ), se debe determinar una longitud de 1 m con una precisión de  $\pm 0.01 \mu\text{m}$ ; el tiempo de caída (0.5s) debe tener una precisión de  $\pm 2 \times 10^{-9} \text{ s}$ . Este tipo de precisión se logra con mediciones de distancia interferométricas y mediante el conteo electrónico del tiempo con un cronómetro de cristal de cuarzo. Las principales fuentes de error se deben a los disturbios del aparato causados por microsismicidad y por sacudidas al lanzar el proyectil; también contribuyen los efec-

tos de la resistencia del aire. En el ascenso y caída simétrica se cancelan los efectos de disturbio proporcionales a la velocidad (resistencia del aire).

Desde el primer desarrollo del método de caída libre por Volet (1951) en el Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) en Sèvres, se han hecho varias determinaciones absolutas en diversos institutos. Cook (1965) logó el primer experimento de ascenso y caída exitoso en el Laboratorio Nacional de Física en Teddington. Se obtiene una precisión alta midiendo simultáneamente la longitud y el tiempo. En este caso, el cuerpo que cae (prisma triple) representa un reflector de un interferómetro - Michelson. Desde 1967 se han conducido observaciones rutinarias de este tipo por Sakuma en el BIPM (planos de referencia separados por 0.4m, vacío  $10^{-5}$  Pa, incertidumbre  $\pm 3 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  Sakuma 1976). Una aparato de caída libre portátil (gravímetro absoluto) fue desarrollado por Faller (Univ. de Wesleyan, U.S. A.) y Hammond en 1968 (altura de caída 1m, error promedio de la media de numerosas mediciones individuales;  $\pm 0.05 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ) (Hammond y Faller 1971).

Desde 1976 se puso en operación un instrumento portátil (0.5 x 0.5 x 1.4m, 0.1 Pa) desarrollado en el Instituto di Metrologia "G. Colonnetti", Turín.

Está basado en el método de ascenso y caída del BIPM (Fig. 4.10). En este instrumento se emplea un interferómetro laser, para el cual los efectos de vibración se compensan conectando el reflec-



Fig. 4.10:  
Aparato para mediciones de la gravedad absoluta (Instituto de Metrología "G. Colonnetti", Turín).

tor "fijo" a la masa de un péndulo de período - largo. La deter

minación de la gravedad absoluta (incluyendo la colocación y desmontaje del instrumento) requiere de algunos días: la precisión (promedio de 100 mediciones individuales) es de  $\pm 10 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  (Cannizzo et al. 1978). La USSR opera otro aparato de caída libre.

El método del péndulo está basado en la medición del período y de la longitud  $l$  de un péndulo que oscila libremente. Para un péndulo matemático (punto masa suspendido de una cuerda sin peso), tenemos la ecuación diferencial:

$$(4.16) \quad l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0,$$

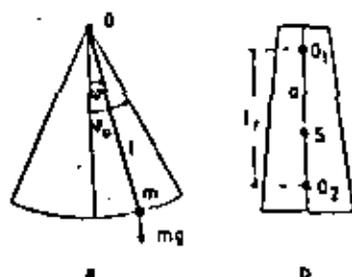


Fig. 4.11:

- a) Péndulo matemático.  
b) Péndulo reversible.

donde  $\varphi$  es la fase (Fig. 4.11a). La integración conduce al período de oscilación:

$$(4.17) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\varphi_0^2}{16} + \dots \right).$$

La amplitud  $\varphi_0$  generalmente permanece menor que  $30^\circ$ . El péndulo matemático no se puede realizar en forma estricta. Sin embargo (4.16) y (4.17), también son válidas para el péndulo físico, si  $l$  es reemplazada por la longitud reducida del péndulo:

$$(4.18) \quad l = \frac{J}{m a^2}$$

Aquí,  $J$  es el momento de inercia con respecto al eje de rotación  $O$ , y  $a$  es la distancia entre este eje y el centro de masa  $S$ . Para un péndulo reversible (Fig. 4.11b),  $l_r$  puede determinarse como la distancia entre los puntos de suspensión  $O_1$  y  $O_2$  que dan el mismo período de oscilación  $T$ .

Desde la época de las mediciones hechas por el físico inglés - - Kater (1817) quién usó el péndulo reversible, se han obtenido un gran número de más determinaciones de  $g$  mediante éste método.

Las longitudes de los péndulos de metal o de cuarzo determinadas interferométricamente son entre 0.25 m y 1 m. Al medir el tiempo la integración se hace sobre un gran número de oscilaciones para incrementar así la precisión y para remover disturbios microsísmicos.

Son fuentes de error considerables, el movimiento giratorio de la cuchilla del péndulo sobre el soporte pivotal y las deformaciones elásticas del péndulo. La co-vibración del soporte del péndulo puede ser esencialmente eliminada mediante dos péndulos que oscilen con fases opuestas y frecuencias iguales. Actualmente, la precisión del método del péndulo reversible es de  $\pm 0.3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  (Schuler, Harnisch et al. 1971); parece improbable que pueda ser sustancialmente incrementada.

#### 4.2.2 Mediciones de Gravedad Relativa.

La medición de una diferencia en gravedad  $\Delta g$  se conoce como una medición de gravedad "relativa", puede llevarse a cabo con una considerable mayor facilidad que la medición "absoluta" de  $g$ . Se hace una distinción entre mediciones de péndulo y de gravímetro.

En una medición de péndulo, los períodos de oscilación  $T_1, T_2$  del mismo péndulo se miden en dos puntos  $P_1 (g_1)$  y  $P_2 (g_2)$ . Suponiendo una longitud  $l$  invariable del péndulo, de (4.17) se obtiene, después de pequeñas simplificaciones:

$$(4.19) \quad \Delta g_{12} = g_1 - g_2 = 2g_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} + \dots$$

En contraposición al caso de la determinación absoluta, aquí no se requiere la medición de la longitud, de tal manera que se puede usar un péndulo físico arbitrario (generalmente  $l = 0.25\text{m}$ ). Los efectos que son independientes del tiempo y posición (errores de cuchilla) se cancelan. Para eliminar los efectos mayores de resonancia en mediciones de campo, se usan siempre dos péndulos que siempre oscilan con fases opuestas. Los cambios en la

longitud del péndulo se pueden tomar en cuenta parcialmente empleando varios pares de péndulos y a través de las mediciones repetidas. La incertidumbre de una diferencia en gravedad observada usando péndulos es de  $\pm 0.2 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ .

El desarrollo de un péndulo portátil se origina con R.v. - - Sterneck (1887), con la invención del gravímetro, que es más exacto y económico, las mediciones con péndulo han perdido popularidad (para una medición con el péndulo incluyendo el tiempo de montaje y desmontaje se requiere aproximadamente un día, mientras que con el gravímetro se requieren 5 minutos). El gravímetro (relativo) está basado en el principio de la báscula de resorte. Se observa la posición de equilibrio de una  $m$ , sobre la cual actúan la aceleración de la gravedad y la fuerza del resorte elástico.

Hacemos una distinción entre sistemas de traslación (rara vez usados) y sistemas de rotación.

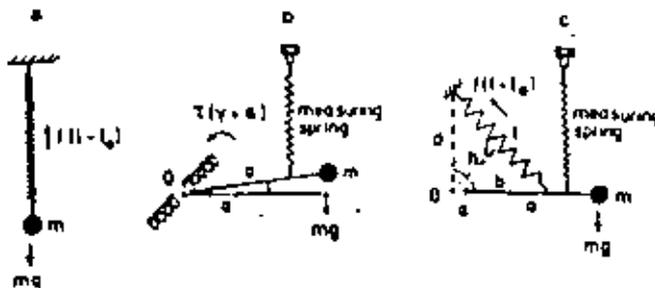


Fig. 4.12:

Gravímetro de resorte

- Báscula de resorte vertical.
- Báscula de resorte de torsión.
- Palanca horizontal -- con resorte antagonista oblicuo.

En un sistema de traslación (báscula de resorte vertical), la condición de equilibrio (Fig. 4.12a) está dada por:

$$(4.20) \quad -mg + f(l - l_0) = 0,$$

donde  $f$  es la constante del resorte y  $l$  ( $l_0$ ) es la longitud del resorte con una carga (sin carga). Diferenciando (4.20) se obtiene una relación lineal entre el cambio en gravedad  $\Delta g$  y la diferencia en longitud  $\Delta l$  observada:

$$(4.21) \quad \Delta g = \frac{f}{m} \Delta l = \frac{k}{l-l_0} \Delta l.$$

Los sistemas rotacionales consisten de una palanca que sostiene una masa  $m$  y gira alrededor de un eje  $O$ . El equilibrio se logra mediante un resorte de torsión horizontal o por medio de un resorte antagonista de acción vertical u oblicua. En la báscula de resorte de torsión. (Fig. 4.12b), para el equilibrio de los momentos de giro se cumple:

$$(4.22) \quad mg a \cos \alpha - \tau(\gamma + \alpha) = 0$$

donde  $a$  = longitud de la palanca,  $\alpha$  = ángulo entre la horizontal y la palanca,  $\tau$  = constante de torsión,  $\gamma$  = ángulo de torsión inicial del resorte. Para  $\alpha = 0$  existe una relación lineal entre  $\Delta g$  y el ángulo de deflexión  $\Delta \alpha$ :

$$(4.23) \quad \Delta g = \frac{\tau}{m a} \Delta \alpha = \frac{k}{\gamma} \Delta \alpha.$$

Para la palanca horizontal con un resorte antagonista oblicuo se da una relación no-lineal entre  $\Delta g$  y  $\Delta \alpha$ . Aquí la sensibilidad  $d/dg$  se puede mejorar en dos o tres grados de magnitud con respecto al sistema lineal, escogiendo los valores adecuados de las constantes instrumentales  $m, f, a, b, d, l_0$  (Fig. 4.12c), y el ángulo  $\alpha$ : astatización.

La precisión de  $0.01 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  requerida en los gravímetros establece muchas exigencias en su mecanismo de lectura y en la constancia de elasticidad del resorte. En el caso del sistema rotacional usual, la palanca se regresa en cada estación de medida a la posición del índice (horizontal) mediante el resorte de medición (Fig. 4.12) (método cero). La magnitud del ajuste se mide por medio de un micrómetro o con algún otro calibrador. Para observar la posición del rayo se emplean diferentes métodos ópticos, fotoeléctricos y capacitivos. La elasticidad del resorte debería mostrar una constancia de  $10^{-8}$  (correspondientes a  $0.01 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ), por varias horas (el intervalo de tiempo requerido para el transporte entre dos estaciones de medida). Los materiales usados para el resorte incluyen aleaciones NiFe

(coeficiente termoelástico pequeño) y cuarzo (coeficiente - termoelástico lineal, pequeño coeficiente de expansión térmico). Además, el sistema de medida está protegido contra cambios en el medio ambiente externo (temperatura, -- presión atmosférica).

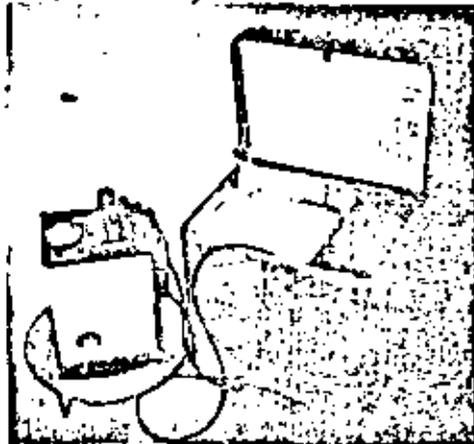


Fig. 4.13:

La Coste Romberg  
Gravimetre Modelo G  
(La Coste and  
Romberg Inc., Austin  
Texas).

De los muchos tipos de gravímetros desarrollados desde 1930, los más populares son los instrumentos estatuizados de La Coste Romberg, Austin, Texas, USA. (Fig. 4.13; resorte de metal actuando a 45° de inclinación en el brazo horizontal, termostato, modelo G(D): rango de medición directa de 7000 (200) mgal, - - 1.0 (0.1) x 10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup> por rotación del micrómetro) y de Worden (Texas Instruments), Houston, U.S.A., (sistema de cuarzo con brazo horizontal y resorte vertical, con o sin accesorio estabilizador de temperatura). Es también de reputación el gravímetro lineal Askania (Bodenseewerk Gerätetechnik, Überlingen) (Fig. 4.14: brazo horizontal y resorte de torsión metálico horizontal, rango de medición directa de 600 x 10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup> (Gs 15) para el tipo Gs 16, se incrementa en escalones de 90 á 3000 x 10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup> sumando incrementos de masa; termostato doble; posibilidad de calibración usando incrementos de masa).

A pesar de todas las mediciones de precaución, surgen variaciones temporales en las lecturas cero del gravímetro: deriva del cero y fluctuaciones repentinas. Son causadas por el envejecimiento del resorte (derivas de largo plazo de 0.01 á 0.1 x - - 10<sup>-5</sup> ms<sup>-2</sup> por día), al igual que las influencias no compensadas de temperatura y por postefectos elásticos producidos al fijar y soltar la palanca. Entre otras causas para estas desviaciones están el ajuste del resorte medidor y las vibraciones del

transporte.



Fig. 4.14:  
Gravímetro  
Gs 15,  
Sistema Askania  
(Bodensewerk  
Gerätetechnik,  
Überlingen).

La "deriva de transporte" que depende del instrumento y de las condiciones de medida puede ser de hasta  $0.1 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  por hora. Disturbios de aceleración mayores pueden producir cambios repentinos de magnitudes diversas. Estas derivas y brin cos se pueden determinar por medio de mediciones repetidas, existiendo los métodos de perfil, de estrella, y de paso, Fig. 4.15, (Watermann 1957). La función de deriva se obtiene entonces gráfica (Fig. 4.16) ó numericamente (aproximación po linomial con respecto al tiempo). Las observaciones deben re ducirse antes debido a los efectos de la componente radial de la aceleración de la marca (2.4.2).

Para convertir los cambios observados de longitud y angulares a diferencias de gravedad, se requieren de acuerdo á (4.20) hasta (4.23) varios parámetros del resorte. Como no pueden ser determinados directamente con la precisión deseada, la

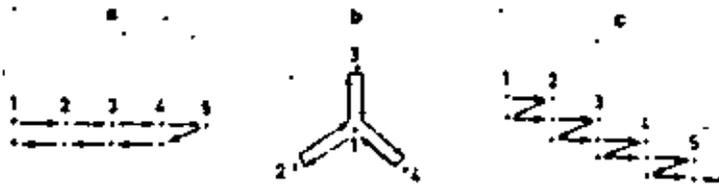


Fig. 4.15:  
Determinación  
de la deriva  
de cero  
a) Método de  
Perfil  
b) Método de  
estrella  
c) Método de  
paso

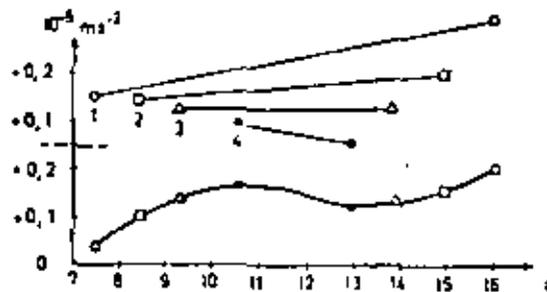


Fig. 4.16:  
Determinación  
gráfica de la  
deriva de cero  
(Método de perfil)

relación entre la lectura  $z$  (unidades de lectura) del gravímetro y el valor  $g$  ( $\text{ms}^{-2}$ ) de la gravedad debe obtenerse a través de una calibración. Expandiendo

$$(4.24) \quad dg = F(z) dz, \text{ con } F(z) = \text{función de la calibración}$$

en una serie de Taylor e integrando el resultado de:

$$(4.25) \quad \Delta g_{1,2} = \left( F(z)_0 - \left( \frac{dF}{dz} \right)_0 z_0 + \dots \right) (z_2 - z_1) + \dots$$

Se pueden determinar valores discretos de  $F(z)$ , inclinando el gravímetro en un ángulo conocido (tabla de inclinación) o sumando un incremento de masa el cual se conoce con precisión, midiendo después la deflexión. Esta calibración, conducida generalmente por el fabricante proporciona los términos de orden superior en la función de calibración en (4.25) y un valor aproximado para  $F(z)_0$ . Los valores así calculados se convierten a diferencias de gravedad, al multiplicarlos por un "factor de escala"; este factor se obtiene midiendo una dife-

rencia de gravedad línea conocida de calibración).

La incertidumbre en una diferencia de gravedad observada con gravímetros es de aproximadamente  $\pm 0.01$  a  $\pm 0.05 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ . La incertidumbre puede reducirse a  $\pm 5 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  usando los gravímetros LaCoste-Romberg, midiendo diferencias de gravedad más pequeñas (Mc Connell et al. 1975) y leyendo un voltímetro digital con un filtro de pase - bajo (Wenzel, 1978); es posible una mayor reducción a  $\pm 3 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  haciendo varias medidas con diferentes instrumentos. Honkasalo (1976), y Torge (1978a) dan un análisis de los efectos a considerar gravimetría de precisión.

#### 4.2.3. MEDICIONES DE LA GRAVEDAD EN EL OCEANO Y EN EL AIRE.

La aplicación del método gravimétrico (5.2) y el desarrollo de los modelos terrestres (5.5) presupone la existencia de un conocimiento completo del campo de gravedad. Por eso, las mediciones de gravedad también deben hacerse en los océanos - (Fleischer 1974). Se obtienen resultados más rápidos con mediciones de gravímetros aéreosuspendidos (Groten 1966).

Los gravímetros ordinarios usados en Tierra (4.2.2), pero que están contruidos dentro de un compartimiento a presión y están equipados con control remoto y aditamentos de grabación se conocen como gravímetros submarinos. Se transportan y arman en un barco y se bajan al fondo del océano para hacer mediciones.

Desde 1940 se han desarrollado gravímetros submarinos para hacer investigación en geofísica aplicada. Generalmente se pueden usar para profundidades hasta de 200 m y como máximo 1000m. De esta manera se podrían medir grandes repisas continentales, al igual que las depresiones subacuáticas se miden en esta forma.

Si las mediciones de la gravedad se hacen en un barco o avión,

entonces tiene uno que resolver el problema de nivelar el instrumento y de separar las aceleraciones de perturbación, de la gravedad real.

Estas aceleraciones de perturbación varían con períodos de 5 a 10s en un barco y de 1 a 300s en un avión.. Las amplitudes correspondientes pueden tener un excedente de  $0.5 \text{ ms}^{-2}$  en los océanos y de  $0.05 \text{ m}^{-2}$  para mediciones desde el aire. La componente vertical entra totalmente en la medición.

La nivelación del instrumento se logra colocando el gravímetro en una suspensión Cardan o poniendo el instrumento en una plataforma estabilizada por giroscopios.

En el primer caso, la resultante de  $g$  y la aceleración de perturbación horizontal se mide (efecto Browne), requiriendo con ello una corrección que con frecuencia es difícil de obtener. Hoy en día se prefiere tener al instrumento montado sobre una plataforma estabilizadora (la incertidumbre en la nivelación del instrumento es de  $\pm 1'$ ). El efecto de desnivelación causado por las inclinaciones restantes generalmente se pueden ignorar. Los efectos de acople-transversal pueden surgir en sistemas de medición caracterizados por una palanca horizontal, cuando las aceleración de perturbación horizontal y vertical tienen el mismo período. Si estas aceleraciones se miden, pueden tomarse en cuenta numéricamente (calculadora de acople transversal).

Los sistemas de medición deben estabilizarse fuertemente debido a las grandes aceleraciones verticales. Las perturbaciones de períodos cortos se filtran al sacar promedios en intervalos de tiempo suficientemente largos, (3 a 10 min.)

En 1923, F.A. Vening Meinesz logró construir un instrumento de tres péndulos, el cual podía usarse para medir gravedad en un submarino sumergido. Los gravímetros marinos (Askania Gss 2 de A. Graf, Askania Gss 3 con resorte antagonista vertical, La Coste-Romberg) se han usado desde más o menos 1960; operan de

acuerdo a los principios descritos en la sección (4.2.2). Además en Japón, Rusia y E.E.U.U. se usan los gravímetros de mar dinámicos los cuales operan bajo el principio de la cuerda vibrante.

Aquí, las mediciones de la gravedad están basadas en el hecho de que la frecuencia de vibración de una cuerda bajo tensión es proporcional a  $\sqrt{g}$  (Bowin et al. 1972). En el caso de gravímetros aéreo -suspendidos, surgen dificultades particulares como resultado de perturbaciones de períodos largos; actualmente, se pueden determinar valores promedio de la gravedad para bloques de  $1^\circ \times 1^\circ$  y  $5^\circ \times 5^\circ$ . Obteniendo la aceleración de perturbación directamente, es posible reducir el tamaño del bloque a  $5' \times 5'$  con mediciones hechas en helicópteros de vuelo lento ó usando gradiómetros (4.2.5), Anthony y Perry (1971).

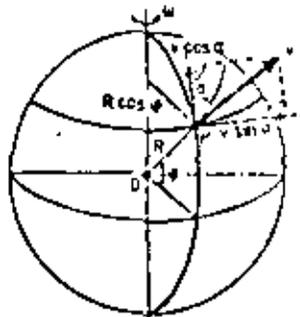


Fig. 4.17:  
Efecto Eötvös

Debido al movimiento del barco o avión (velocidad  $v$ , azimut de curso  $\alpha$ ) sobre la Tierra en rotación (velocidad angular  $\omega$ ) se induce una aceleración de coriolis: efecto Eötvös. En un desplazamiento de un punto P (Fig. 4.17) se añade a  $\omega$  (para una dirección de Oeste a Este), la componente de  $v$  en la dirección de la paralela de la latitud; la componente meridional de  $v$  ocasiona una aceleración centrífuga adicional. Por lo tanto, la gravedad medida es en realidad demasiado pequeña. En la superficie de una tierra esférica ( $r = R$ ), la corrección Eötvös, dada por:

$$(4.26) \quad \delta g_2 = 2\omega v \sin \alpha \cos \varphi + \frac{v^2}{R} = 40 v \sin \alpha \cos \varphi + 0.00121 v^2 \text{ (HU}^{-2} \text{ ms}^{-2}\text{)}$$

debería aplicarse al valor medido de la gravedad; las uni

dades de  $v$  son km/h. Esta corrección puede adoptar valores muy grandes; su precisión está determinada principalmente por los errores cometidos al medir la velocidad.

En las anomalías de la gravedad (5.2.4) derivadas de los valores de la gravedad, además de los errores de las mediciones de gravedad, también actúa la incertidumbre en la determinación de la posición y de la profundidad. En los océanos predomina en la actualidad la influencia de errores de orientación y navegación. La incertidumbre de las anomalías de la gravedad para mediciones hechas en submarinos es de  $\pm 5 \text{ a } \pm 10 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ; y para los gravímetros marinos más recientes es de  $\pm 1 \text{ a } \pm 3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ . Las mediciones con gravímetros aéreo-suspendidos proporcionan anomalías medias ( $10^\circ \times 10'$  hasta  $5^\circ \times 5'$ ), con incertidumbre de  $\pm 5 \text{ a } \pm 10 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  (Williams 1975a), y de  $\pm 1 \text{ a } \pm 3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  sobre algunos kilómetros para mediciones en helicópteros.

#### 4.2.4. SISTEMAS DE REFERENCIA DE LA GRAVEDAD.

Los valores de la gravedad requeridos en geodesia y geofísica deben estar referidos a un sistema de referencia global; sin embargo, los sistemas locales son suficientes para áreas de investigación restringidas en geofísica aplicada. Un sistema de referencia de la gravedad está definido por los valores de la gravedad en un número de puntos de control de la gravedad medidos con mucha precisión.

El sistema de gravedad se establece a través de una red gravimétrica que se obtiene de observaciones. La red debe contener cuando menos una medición de gravedad absoluta (4.2.1) para asegurar un valor de referencia de gravedad. La "escala- $\text{ms}^{-2}$ " se introduce cuando menos a través de una línea de calibración y con la mayor diferencia de gravedad posible; puede determinarse ya sea por dos mediciones de gravedad absoluta o por mediciones de péndulo relativas (4.2.2). Las ediciones obteni-

das por un gravímetro proporcionan diferencias de gravedad - entre los puntos de la red con gran precisión y poco esfuerzo. Los puntos de control de gravedad deberían colocarse; - de preferencia, en lugares (Instituciones Científicas) imper turbables y permanentes (estabilidad geológica e hidrológica pequeña microsismicidad).

Mediciones redundantes absolutas y relativas se llevan a cabo, de ser posible, con diferentes instrumentos, y después - se ajustan para eliminar los errores sistemáticos y para incrementar la precisión. Las diferencias de gravedad observadas forman una red de circuitos cerrados; la deriva del instrumento se determina de mediciones repetidas. El ajuste -- también proporciona los parámetros de la deriva del gravímetro y las funciones de calibración, además de los valores de la gravedad (Torge et al. 1976).

Las variaciones dependientes del tiempo en el sistema de la gravedad se obtendrán en el futuro por medio de mediciones - absolutas continuas ( $+ 1 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ ), en algunas estaciones (Levallois 1971).

El sistema de gravedad Potsdam sirvió como el sistema de referencia internacional de 1909 a 1971. Estaba basado en - una medición de péndulo reversible hecha en el Instituto - Geodésico de Potsdam por Kühnen y Furtwängler (1898-1904). Determinaciones de gravedad absoluta más recientes mostraron que el valor de la gravedad de Potsdam es por  $14.0 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  demasiado grande. Por lo tanto, entre 1950 y 1970, se construyó un nuevo sistema de gravedad global mediante una colaboración internacional. Esta Red Internacional de Estandarización de la Gravedad de 1971 (I.G.S.N. 71), fue presentada en 1971 como el nuevo sistema de referencia en la asamblea general de la U.G.G.I., en Moscú. La red contiene 1854 puntos ( ~500 estaciones primarias) cuyos valores de gravedad fueron determinados de 10 mediciones de gravedad absoluta nuevas y de aproximadamente 25000 mediciones de gravedad.

relativa (incluyendo  $\sim 1200$  mediciones de péndulo relativas) con una incertidumbre menor que  $\pm 0.1 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ .

La precisión relativa global de la escala de la red es de  $\pm 2 \times 10^{-4}$  (Morelli et al. 1974), pero se presentan no linealidades regionalmente hasta de  $2 \times 10^{-4}$ . Se tiene una precisión especialmente alta en los puntos de las líneas de calibración de los gravímetros densamente observadas (Euro-Africana, Americana, Pacifico Oeste) que se extienden en dirección norte-sur (gran diferencia en gravedad). La escala del IGSN 71 aún está siendo checada por mediciones de gravedad absolutas (4.2.1) en intervalos de varios  $100 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ .

#### 4.2.5 DETERMINACION DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS DEL POTENCIAL DE LA GRAVEDAD.

Las segundas derivadas del potencial de gravedad  $W$  determinan la curvatura del campo de gravedad; ellas se requieren para los cálculos referentes a este campo (3.2.2).

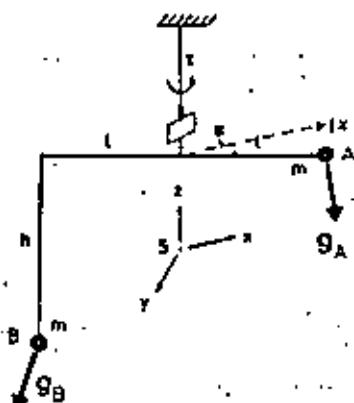


Fig. 4.18:  
Balanza de  
Torsión.

La balanza de torsión consta de dos masas iguales colocadas a diferentes alturas y conectadas por un sistema rígido de pequeña masa despreciable el cual está suspendido por un hilo de torsión (Fig. 4.18). Debido a aceleraciones de gravedad desiguales en A y B, la barra suspendida experimenta un momento de torsión y una inclinación; la última puede despreciarse. Introducimos el sistema astronómico local (2.2.2) (origen en el centro de masa S) y suponemos una variación lineal en gravedad alrededor del área del aparato.

Para el equilibrio de los torques, tenemos que:

$$(4.27) \quad \Delta m(W_x x - W_y y) - \tau(\theta - \theta_0) = 0$$

Donde  $m$  es la masa en A y B,  $\tau$  es la constante de torsión del hilo, y  $\theta - \theta_0$  es el ángulo de rotación de la barra suspendida con respecto a la posición inicial  $\theta_0$  (posición no-torcida). Expandiendo  $W_x$  y  $W_y$  con respecto a  $S$  en la serie de Taylor e introduciendo también el azimut  $\alpha$  de la barra, la longitud  $2l$  de la misma y la diferencia de altura ( $h$ ) de las masas, se obtiene:

$$(4.28) \quad \theta - \theta_0 = \frac{m l^2}{\tau} ((W_{xx} - W_{yy}) \sin 2\alpha + 2 W_{xy} \cos 2\alpha) + \frac{m l h}{\tau} (W_{xx} \sin \alpha - W_{yy} \cos \alpha)$$

La deflexión  $\theta$  se registra fotográficamente, y el productor proporciona las constantes  $m$ ,  $l$ ,  $h$ ,  $\tau$  del instrumento. Mediante la medición de  $\theta$  en cinco azimutes distintos, se pueden obtener las cuatro magnitudes de campo  $W_{yy} - W_{xx}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{xz}$ ,  $W_{yz}$ , además de  $\theta$ .

El desarrollo de la balanza de torsión (variómetro) propia para el trabajo de campo se logró alrededor de 1900 por el físico húngaro R.v. Eötvös; fue ampliamente usada en geofísica aplicada entre 1920 y 1930. Generalmente, en el instrumento hay dos mecanismos paralelos y suspendidos a  $180^\circ$  uno con respecto al otro de tal manera que, las mediciones de tres azimutes ( $0^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ) son suficientes para determinar las magnitudes de campo y las posiciones iniciales de las dos suspensiones. Una precisión de  $\pm 1$  a  $\pm 5 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$  puede obtenerse para las magnitudes de campo. Debido al considerable esfuerzo que se requiere para hacer las mediciones y a la gran influencia de las masas vecinas, la balanza de torsión ha sido superada por el gravímetro; sin embargo sigue siendo de interés para propósitos geodésicos especiales (Mueller et al. 1963).

El gradiente horizontal ( $W_{xz}, W_{yz}$ ) también puede determinarse de las diferencias de gravedad  $\Delta g$ . Para mediciones de puntos con separaciones de 10 a 100 m los cocientes de diferencias  $\Delta g/\Delta x$  y  $\Delta g/\Delta y$  representan una buena aproximación para los cocientes diferenciales deseados; se puede obtener una precisión de  $\pm 10^{-8} \text{ s}^{-2}$  (Wolf 1972).

En la actualidad la componente vertical del gradiente de gravedad  $W_{zz}$ , sólo se puede determinar indirectamente midiendo las diferencias de gravedad entre puntos que están sobre la misma línea de plomada. Las mediciones correspondientes se hacen en torres y con ayuda de tripiés portátiles. La incertidumbre en las mediciones en superficies de nivel separadas por 0.5 a 5 m es de  $\pm 0.5$  hasta  $\pm 2 \times 10^{-8} \text{ s}^{-2}$  (Bodemüller 1960, Groten 1975).

Cualquier masa topográfica vecina puede influenciar fuertemente estas segundas derivadas. Por lo tanto se deben aplicar reducciones topográficas.

Actualmente se están desarrollando gradiómetros para usarse particularmente en aviones y satélites terrestres artificiales. Estos instrumentos deben proporcionar todas las segundas derivadas del potencial gravitacional con incertidumbres mucho menores a  $1 \times 10^{-9} \text{ s}^{-2}$  (Williams 1975b). Los resultados son inmunes a los efectos de la topografía, ya que las mediciones se hacen a una gran distancia sobre la superficie terrestre. La integración da la estructura detallada del campo gravitacional, ya que los efectos de perturbación del sistema en movimiento (4.2.3) se pueden separar (Moritz 1975a).

En el espacio exterior a la Tierra,  $W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}$  están relacionados por la ecuación diferencial de Laplace (2.28), de tal manera que una medición de  $W_{zz}$ , proporciona la cantidad  $W_{xx} + W_{yy}$ . Con  $W_{yy} - W_{xx}$ , la cual se mide con la balanza de torsión, se pueden separar estos dos gradientes horizontales.

#### 4.2.6 LA MEDICION DE MAREAS TERRESTRES.

Las variaciones en la intensidad de la gravedad causadas por mareas se pueden medir con gravímetros; otros efectos tales como fluctuaciones en la dirección de la línea de la plomada se determinan con clinómetros, y las deformaciones de la corteza se miden con extensómetros (Bonazzoli, 1975)

Un gravímetro registrador es un gravímetro de campo. (4.2.2) con una unidad de grabación unida a es un gravímetro de mareas especial (gravímetro de mareas terrestres LaCoste - Romberg, Askania Gs25, Geodinámica - gravímetro de North American modificado) el cual tiene una gran estabilidad y un rango de medida más pequeño.

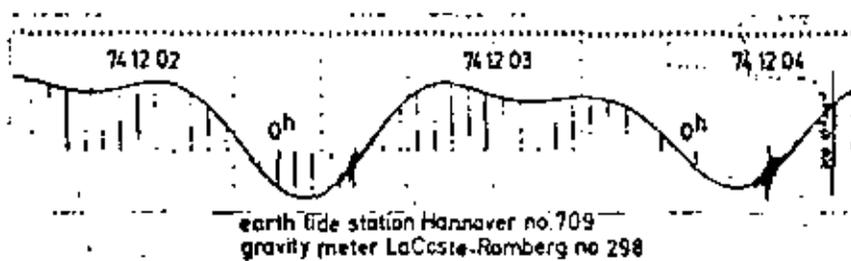


Fig. 4.19:  
Registro de Marea  
(componente vertical de la gravedad)

Los cambios en la posición de la palanca se convierten a señales eléctricas, generalmente por medio de un detector capacitivo; éstas se amplifican y se graban junto con el tiempo (Fig. 4.19). Una calibración proporciona la relación entre la lectura del gravímetro y la deflexión grabada se puede obtener una precisión relativa de  $2 \text{ a } 5 \times 10^{-3}$ .

El gravímetro "superconductor" utiliza los efectos de la superconductividad para mantener una bolita en equilibrio mediante un campo magnético. Los desplazamientos verticales, causados por variaciones en gravedad son controlados por un detector capacitivo y compensados a través de un sistema de retroalimentación, aceptando con ello una medición. Las perturbaciones microsísmicas y los efectos de deriva

permanecen muy pequeños; la precisión es superior a  $0.1 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  (Prothero y Goodkind 1972).

Los clinómetros (que miden inclinaciones) se designan como péndulos horizontales y verticales. Las fluctuaciones en la dirección de la línea de la plomada con respecto a la superficie terrestre se determinan de sus dos componentes mutuamente perpendiculares (NS, EW).

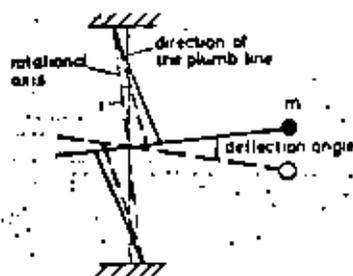


Fig. 4.20:  
Péndulo Horizontal.

El péndulo horizontal (Zollner 1869) consiste de dos hilos casi verticales que sostienen una barra casi horizontal con una masa adherida  $m$  (Fig. 4.20). Debido a la pequeña inclinación  $i$  del eje de rotación con respecto a la dirección de la vertical, una fuerza horizontal (fluctuación de la vertical, inclinación del soporte) que actúa perpendicularmente a la barra, ocasiona una deflexión angular fuertemente amplificada. Es posible una amplificación posterior a través de un indicador iluminado y un espejo unido a la barra. Las deflexiones se registran fotográficamente en una película. Uno puede calibrar el instrumento ( $\pm 1\%$ ) produciendo una inclinación conocida y midiendo el ángulo de deflexión.

El péndulo vertical Askania (Fig. 4.21) de A. Graf (longitud 600 mm) está suspendido de tal manera que puede oscilar libremente. Las deflexiones son percibidas por dos detectores capacitivos colocados a ángulos rectos entre ellos, y después de amplificarlas, las señales se graban por medios digitales y analógicos. El instrumento está diseñado para trabajar en agujeros perforados (30m de profundidad (Flach et al. 1975). Numerosos efectos perturbadores están superpuestos

en la señal de marea:

Con respecto a los errores instrumentales sistemáticos, las incertidumbres asociadas con la determinación de la calibración y las funciones de la transferencia de frecuencia (amortiguación dependiente de la frecuencia y cambios de fase instrumentales) representan un límite para la precisión más alta obtenible. Los efectos directos de la presión atmosférica y temperatura se pueden, ya sea, mantener a un mínimo mediante una protección adecuada ó determinándolos y tomándolos en cuenta mediante análisis de regresión. La deriva del instrumento se obtiene a través de la computación en la evaluación; sin embargo su influencia complica el análisis de mareas de períodos largos. Los efectos causados por mareas oceánicas son difíciles de evaluar. Están compuestas de la atracción de las masas de agua y de los movimientos terrestres adicionales, debido a la carga de marea (efecto indirecto). Afecta en particular a la marea parcial semidiurna (Groten y Brennecke 1973). Hasta ahora, los modelos de marea oceánica usados para estimar los efectos gravitacionales existen principalmente para las olas semidiurnas M<sub>2</sub> (2.4.1); Hendershott (1975). Es difícil hacer modelos de los efectos indirectos debido al conocimiento insuficiente de los parámetros elásticos de la corteza terrestre (Parke y Hendershott 1980). Los efectos secundarios surgen de la fluctuación en la presión atmosférica y temperatura, al igual que de las radiaciones solares variantes y la inclinación resultante de la superficie terrestre. Estos efectos actúan en particular en las mareas parciales semidiurnas y diurnas. Finalmente, las influencias locales de las posiciones de la estación pueden afectar fuertemente los resultados de las mediciones de inclinación y tensión. Los gravímetros que son menos sensibles a las inclinaciones, ya proporcionan buenos resultados cuando se colocan en compartimientos de temperatura controlada. Por el otro lado, los clinómetros deben protegerse de las influencias de la superficie mediante una capa de roca suficientemente gruesa (varios 10m). Por ello se instalan en túneles (pón

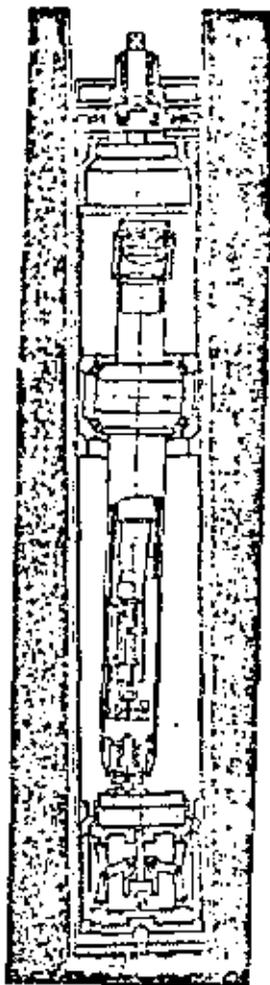


Fig. 4.21:

Péndulo de agujero perforado, sistema Gbp 10 Askania.

(Bodenseewerk Gerätetechnik, Überlingen).

dulo horizontal), ó en agujeros perforados (péndulo vertical). Sin embargo, las influencias locales de la posición del instrumento (efecto de cavidad), de la topografía, la geología y el nivel de agua terrestre pueden afectar los resultados de las mediciones de la inclinación y la tensión, ocasionando con ello desviaciones de los valores regionalmente válidos de 10 á 50% (Harrison 1976). Por lo tanto las estaciones de clinómetros deben escogerse con mucho cuidado; y de ser posible también aplicando las correcciones apropiadas. Los factores de amplitud deseados  $\delta$  (2.74) y  $\gamma$  (2.75), y los correspondientes cambios de fase dependen de la frecuencia. Por lo tanto, la curva de marea registrada se descompone en mareas parciales y se compara con las mareas teó-

ricas (2.4.1). Este proceso, conocido como análisis armónico se presta en particular a métodos basados en el principio de mínimos cuadrados (Venedikov 1966, Choinicki - 1973, Wenzel 1976). Actualmente, se pueden analizar de diez a veinte grupos de ondas, dependiendo de la longitud del tiempo de grabación. Después de varios meses de mediciones, los factores  $\delta$  (mareas terrestres gravimétricas) para las ondas principales O1, K1, M2, S2, (2.4.1) (K1, S2 como grupos de onda con frecuencias vecinas) se obtienen con una precisión de  $\pm 2$  a  $\pm 5 \times 10^{-3}$ , y de  $\pm 0.1$  a  $0.2$ , para el cambio de fase acompañante (Torge y Wenzel 1977); los errores casuales son de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2 \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$ . El error casual en las medidas de inclinación es de alrededor de  $\pm 0.002$ , mientras que las precisiones instrumentales obtenibles para los factores  $\gamma$  y los cambios de fase son de aproximadamente  $\pm 1\%$  y  $\pm 1.0$  respectivamente.

Los perfiles de marea gravimétrica (duración de grabación de cuatro meses y más por estación) de los varios años anteriores han sido establecidos sistemáticamente sobre toda la tierra (v.g. Kuo et al. 1970, Melchior et al. 1976). La estación de referencia principal en Bruselas está disponible para una comparación de los diversos gravímetros que se empleen (Ducarme 1975).

Las medidas de deformación se hacen con extensómetros (medidores de deformación) (King y Bilham 1973). La deformación, la cual depende de las mareas, es del orden de  $10^{-8}$  correspondiente a  $0.1 \mu\text{m}/10 \text{ m}$ ; por lo tanto, se requiere una resolución instrumental de  $1 \times 10^{-10}$ .

Para una completa determinación de las seis componentes independientes del tensor de deformación, los medidores de deformación deben orientarse en diferentes direcciones espaciales. Los resultados representan, funciones del número de Love  $h$  y el número de Shida  $l$  (2.4.2).

Extensómetros de tubo de cuarzo y metal, al igual que alam

bre invar con longitudes de 10 a 30 m se usan para estos propósitos:

interferómetros laser permiten longitudes hasta de 1 km. - (Berger y Lovberg 1970). En cada caso, un extremo del instrumento se fija firmemente a la corteza terrestre; los desplazamientos de la corteza se miden en el otro extremo. Debido a los efectos secundarios (ver arriba), las mediciones del extensómetro se hacen en estaciones subterráneas; es difícil de obtener una precisión de  $\pm 11$  y  $\pm 1^\circ$  respectivamente.

#### 4.3 MEDICIONES GEODESICAS TERRESTRES.

Los ángulos horizontales, distancias, ángulos zenitales y diferencias de altura obtenidas de la nivelación, se miden sobre la superficie terrestre. Estas medidas determinan las posiciones espaciales relativas de los puntos de la superficie. Las medidas de distancia, empleando ondas acústicas, sirven para fijar puntos en el fondo del océano. Una limitación de la exactitud está dada por las imprecisiones al considerar la refracción atmosférica, o en la propagación de las ondas acústicas a través del agua del mar (Bomford A 1971, Deumlich B1974; Grossman B 1975/1979 Jordan-Eggert-Kneissl IV A 1958/1959, III B 1956, VI B1966; Laurila B1976).

##### 4.3.1 REFRACCION ATMOSFERICA.

Prácticamente en todas las mediciones geodésicas terrestres como en las mediciones astronómicas y de satélites, las ondas electromagnéticas sirven como portadoras de una señal. Conforme se propagan a través de la atmósfera, experimentan cambios en velocidad y en la curvatura de la trayectoria (refracción). Los cambios dependen del índice local de refracción  $n$ . Por otro lado,  $n$  es una función de la longitud de onda  $\lambda$ . La obtención de estos cambios representa dificultades considerables, ya que la variación del índice de refracción, dependiente de la posición y tiempo, no es sufi-

cientemente estable en los kilómetros inferiores de la atmósfera.

Para las mediciones de distancia electromagnéticas (4.3.3) se requiere la velocidad de la onda:

$$(4.29) \quad c = \frac{c_0}{n}$$

La velocidad en el vacío  $c_0$  tiene el valor de (XVI Asamblea General de la U.G.C.I. Grenoble 1975);

$$(4.30) \quad c_0 = 299\,792\,458 \pm 1.2 \text{ ms}^{-1}$$

La velocidad media  $\bar{c}$  a lo largo de la trayectoria  $s$  del rayo con la frecuencia se introduce en los cálculos. Se obtiene del índice de refracción medio  $\bar{n}$  con:

$$(4.31) \quad \bar{c} = \frac{c_0}{\bar{n}} \quad \text{with } \bar{n} = \int_0^s n ds$$

La reducción de las mediciones de distancia y dirección a la cuerda entre los puntos presupone un conocimiento de la curvatura del rayo luminoso. De acuerdo a la Fig. 4.22, está dado por:

$$(4.32) \quad \frac{1}{r} = \frac{dn}{ds}$$

Donde,  $r$  es el radio de curvatura local y  $\beta$  es el ángulo entre la normal a la superficie,  $n = \text{const.}$  y la tangente al

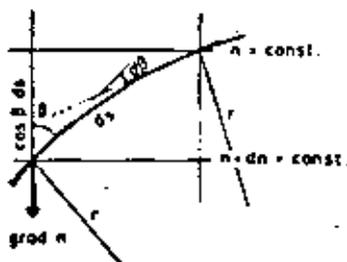


Fig. 4.22:  
Refracción Terrestre.

rayo luminoso. Usando

$$dn = \text{grad } n \cdot ds = (\text{grad } n) ds \cos \theta$$

y la ley de Snell

$$n \sin \beta = \text{const.}$$

de la siguiente relación diferencial

$$\sin \beta \, dn + n \cos \beta \, d\beta = 0$$

se obtiene:

$$(4.33) \quad \frac{1}{r} = - \frac{1}{n} \frac{dn}{dh} \sin \beta$$

Las componentes horizontales de grad  $n$  ocasionan refracción horizontal la cual surge en mediciones de ángulos horizontales (4.3.2). Para los rayos que se propagan más arriba - sobre el suelo (>25m) y que por lo tanto eluden los gradientes de temperatura horizontal extremos - el efecto en la dirección observada es generalmente menor a 1".

Si despreciamos la refracción horizontal, entonces para  $n \approx 1$ , el coeficiente de refracción (proporción de la curvatura del rayo luminoso a la curvatura terrestre) es:

$$(4.34) \quad \lambda = \frac{R}{r} = -R \frac{dn}{dh} \sin \beta$$

( $R$  = radio de curvatura de la sección normal elipsoidal). Para reducir los ángulos zenitales (4.3.4) se requiere el ángulo de refracción  $\delta$  (= ángulo entre la tangente a la trayectoria de la luz y la recta que une el punto de observación y la marca). Se obtiene integrando  $1/r$  ó  $K$  a lo largo de la trayectoria. Considerando la trayectoria luminosa como un arco circular tenemos:

$$(4.35) \quad \delta = \frac{\lambda}{2r} = \frac{\lambda}{2R} K$$

$K$  se designa como coeficiente de refracción efectivo.

El índice de refracción se calcula de relaciones empíricamente obtenidas (XIII Asamblea General de la U.G.G.I., Berkeley, 1965).

La fórmula de H. Barrell y J. E. Sears proporciona el índice de refracción (dependiente de la frecuencia) para la luz no-cromática inmodulada para la longitud de onda  $\lambda$  (en  $\mu\text{m}$ ), aire seco,  $T = 273 \text{ K}$ ,  $p = 1013.25 \text{ mbar}$ , y 0.03% de contenido de  $\text{CO}_2$ , tenemos

$$(4.36) \quad (n-1)10^8 = 287.614 + \frac{1.6288}{\lambda^2} + \frac{0.0136}{\lambda^4}$$

Se usa luz modulada en las mediciones electro-ópticas de distancia. El índice de refracción de grupo que proporciona la propagación de la energía máxima está dado por:

$$(4.37) \quad n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda}$$

Con la temperatura del aire  $T(\text{K})$ , la presión barométrica  $p(\text{mbar})$  y la presión parcial del vapor de agua  $e(\text{mbar})$  se cumple la ecuación:

$$(4.38) \quad n_g - 1 = \frac{n_s - 1}{2T} \frac{p}{1013.25} - \frac{4.1 \times 10^{-8} e}{2T}$$

para las condiciones meteorológicas reales ( $\alpha =$  coeficiente de expansión térmica del aire = 0.00366).

El índice de refracción de las microondas  $n_m$  se obtiene de la fórmula de L. Essen y K.D. Froome:

$$(4.39) \quad (n_m - 1)10^8 = \frac{77.62}{T} (p - e) + \frac{64.70}{T} \left( 1 + \frac{5748}{T} \right) e$$

Si el error en el índice de refracción causado por los parámetros meteorológicos no excede de  $10^{-6}$ , entonces en condiciones promedio, se deben obtener precisiones en la temperatura de  $\pm 1^\circ\text{C}$ , en la presión de  $\pm 3.5 \text{ mbar}$ , y en la humedad de  $\pm 30 \text{ mbar (luz)}$  ó  $\pm 0.2 \text{ mbar (microondas)}$ .

Si formamos las derivadas de  $n_i$  y  $n_m$  con respecto a la altura  $h$  y las sustituimos en (4.34), llegamos a la curvatura del rayo como una función de los parámetros metereológicos. Con  $n = 1.00029$ ,  $\beta = 90^\circ$ , y suponiendo una condición de equilibrio en la atmósfera, obtenemos para la luz:

$$(4.40) \quad \frac{1}{r_i} 10^6 = \frac{78p}{T^2} \left( 0.034 + \frac{dT}{dh} \right) + \frac{11}{T} \frac{dp}{dh}$$

Bajo condiciones promedio (durante el día con cielo despejado) se cumple:

$$(4.41) \quad r_i = 8R, k_i = 0.13.$$

Si la incertidumbre en el ángulo de refracción debe permanecer menor que  $0''5$ , entonces de acuerdo a (4.35), para  $s = 25$  km,  $k_i$  debe obtenerse con una precisión de  $\pm 0.001$ . Restringiendo los errores individuales de los parámetros metereológicos en (4.40) hasta este límite, se deben obtener precisiones para los valores promedio de  $T$  de  $\pm 1^\circ\text{C}$ , para  $p$ :  $\pm 4$  mbar, y para  $\frac{\partial T}{\partial h}$ :  $\pm 2 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{Cm}^{-1}$ .

Por lo anterior, la curvatura de los rayos luminosos está predominantemente determinada por los gradientes de temperatura verticales.

La curvatura de los rayos para microondas está dada aproximadamente por:

$$(4.42) \quad \frac{1}{r_m} 10^6 = \frac{1}{T^2} \left( 77.6p + 74 \times 10^6 \frac{e}{T} \right) \frac{dT}{dh} + \frac{2.7}{T^2} \frac{dp}{dh} - \frac{3.7 \times 10^3}{T^2} \frac{de}{dh}$$

Para condiciones promedio, obtenemos:

$$(4.43) \quad r_m = 4R, k_m = 0.25.$$

La temperatura, la humedad (microondas) y el gradiente de temperatura vertical (curvatura de los rayos luminosos) son las cantidades metereológicas que en particular influyen fuertemente en el índice de refracción y la curvatura. Es-

tas cantidades presentan, especialmente en las capas atmosféricas cercanas al suelo, grandes variaciones con respecto a la posición (topografía, vegetación, distancia del suelo) y tiempo (fluctuaciones diarias y anuales) con efectos que son ambos regulares e irregulares. Diseñando las mediciones apropiadamente (para evitar grandes anomalías) y obteniendo información meteorológica local (mediciones en los extremos de distancias: usando también sondeos a lo largo de la trayectoria del rayo en casos excepcionales)

Los efectos regulares se pueden obtener hasta cierto grado de modelos matemáticos simples. Sin embargo, debido a la naturaleza compleja de los parámetros meteorológicos, a veces nada más pueden determinarse estadísticamente y considerarse después como una correlación entre las cantidades observadas (Hopcke 1967). La correlación se puede reducir repitiendo la medición bajo condiciones atmosféricas diferentes. Los efectos irregulares de la refracción se disminuyen con una acumulación de mediciones.

Es posible determinar directamente el coeficiente de refracción midiendo ángulos zenitales recíprocos (4.3.4). Finalmente, se puede aprovechar la dependencia del índice de refracción de la luz de la longitud de onda (dispersión). Usando luz de varias longitudes de onda cuando se mide una distancia, se obtienen mediante la ecuación (4.36) diferentes distancias y tiempos de propagación; para mediciones de ángulos zenitales, este procedimiento da diversas desviaciones verticales del punto considerando. De estos resultados se puede deducir la longitud geométrica de la línea (4.3.3) y el ángulo de refracción (4.3.4) respectivamente.

#### 4.3.2. MEDICIONES DE ANGULOS HORIZONTALES.

El ángulo horizontal está definido como el ángulo medido en el plano horizontal del sistema astronómico local (3.2.2), entre dos planos verticales. Está formado por la diferencia

en dirección a los puntos considerados que determinan los planos verticales. Se puede utilizar un teodolito para medir las direcciones. Las componentes principales de este instrumento son un círculo horizontal (y uno vertical), un telescopio que puede ser girado alrededor del eje vertical y horizontal, y mecanismos para leer los círculos y los niveles; estos últimos se usan para hacer que el eje vertical coincida con la dirección de la línea de la plomada (nivelación).

Los teodolitos precisos como el DKM3 (Kern, Aarau) y el Wild T3 (Wild Heerbrugg), son apropiados para mediciones de alta precisión (Fig. 4.23). Se caracterizan por una construcción especialmente estable, círculos de vidrio (80 a 250mm de diámetro, capacidad de lectura de  $0'2... 0'5$ , error de graduación del círculo  $< 0'5$ ), un micrómetro de coincidencias para leer los círculos, y un telescopio con una apertura de lente de 50 a 70mm y una ampliación de 30 a 80. En algunos casos, también existe la posibilidad para registros fotográficos. Un instrumento que también se puede usar como teodolito Universal (4.1.4) es el Theo 002 (Jenoptik. Jena).

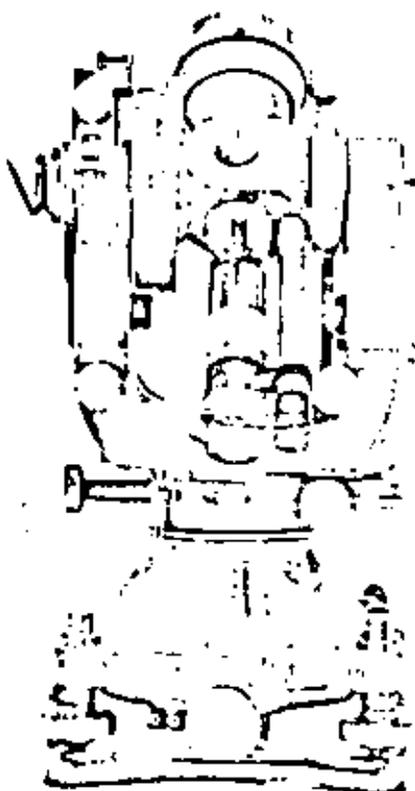


Fig. 4.23:  
Teodolito de precisión Wild T3  
(Wild Ag. Heerbrugg).

Para mediciones angulares precisas en redes de control (espaciamiento de 50 a 60 km. entre estaciones), se coloca el teodolito en una pilastra de observación. Los puntos de referencia se hacen notar usando señales luminosas. Como unidad de iluminación se usa una luz concentrada o (rara vez) luz solar reflejada por un helio-tropo (C.F. Gauss 1920).

Mientras que en terreno montañoso es suficiente con pilares de concreto o tabique, en terreno plano se deben erigir estructuras especiales (torres de acero o madera con alturas de 30 m o más). Debido a que las mediciones de direcciones son sensibles a cualquier vibración, estas torres consisten de dos estructuras independientes: una estructura interior para el instrumento, y una estructura exterior como soporte del observador y de la señal. Es una fuente de error el torcimiento de la estructura interior por radiación solar dispereja (hasta de 1" por 5min.)

Para determinar ángulos horizontales, se hacen mediciones de direcciones (observaciones sucesivas a todas las direcciones en ambas posiciones del telescopio (1 serie) para varias, por ejemplo 12 series) o medidas de ángulos (mediciones separadas de dos direcciones, cada una en ambas posiciones del telescopio y para varias series). El programa completo de observaciones en todas las direcciones desde una estación puede continuar por varias semanas bajo condiciones de visibilidad favorables..

Si no todas las señales son visibles simultáneamente desde una estación, entonces se observan series incompletas de direcciones y se combinan con una dirección común. Los resultados de las medidas de ángulos en todas las combinaciones (O. Schreiber 1875) permiten una buena adaptación a las condiciones atmosféricas. Todos los ángulos formados por las direcciones en una estación, se observan con la suficiente frecuencia de acuerdo a una procedimiento fijo, de tal manera que las direcciones ajustadas tie-

nen el mismo peso y no tienen correlación. El método del sector (H. Wild 1904), también toma en cuenta la diferencia de calidad de los blancos luminosos. Pocas direcciones bien visibles, y distribuidas más o menos uniformemente sobre el horizonte, forman los ángulos principales, dentro de las cuales se incluyen direcciones adicionales con mediciones angulares posteriores.

Para aumentar la precisión, y especialmente, para disminuir los efectos de la refracción horizontal (4.3.1), los ángulos horizontales se observan bajo condiciones meteorológicas diferentes. Se puede lograr un error medio de  $\pm 0''2$  a  $\pm 0''4$  para una dirección después de un ajuste de estación.

#### 4.3.3 MEDICIONES DE DISTANCIAS.

Las mediciones de distancias establecen en particular la escala de los sistemas geodésicos, siendo la unidad de longitud el metro. De acuerdo a la definición de la Onceava Asamblea General de Pesas y Medidas de 1960, el metro es 16 50763.73 veces la longitud de onda de la radiación emitida en vacío del átomo de  $^{86}\text{Kr}$  al pasar del estado  $5d_5$  al estado  $2p_{10}$ .

La definición anteriormente aceptada estaba basada en la definición del metro como la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano que pasa por París; su longitud se derivó de una medición de arco hecha por Delambre y Méchain (1.5.3). Esta definición condujo primero (1799) al metro legal (realizado en el poco estable mètre des archives) y posteriormente (Convención Internacional del Metro en París 1875) al metro internacional. Este último estaba definido por la longitud del metro prototipo (barra de platino iridium) preservada por la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sévres.

Hasta más o menos 1960, la escala de las redes de triangulación, construidas a partir de mediciones angulares - - (4.3.2) se derivó de bases con longitudes de 5 a 10 km. Para medir las distancias se usaban reglas de medida (y a partir de 1900) alambres o cintas. En el método especificado por Jaderin (1880) se usaron alambres metálicos colgando libremente de 24m de longitud; estaban hechos de aleación NiFe, invar (coeficiente de expansión térmico muy pequeño). La incertidumbre de las bases más recientes es de  $\pm 10^{-6}$ . Este método bastante elaborado para medir las distancias mecánicamente se ha vuelto obsoleto en nuestros días como consecuencia del uso casi exclusivo de los distanciómetros electromagnéticos.

Para la calibración de campo, de los alambres y cintas se establecieron varias líneas de calibración internacional (máxima longitud de 864m), entre 1947 y 1962 mediante métodos interferométricos usando la longitud de un metro standard (Vaisala - comparador de interferencia de luz, - - precisión relativa de  $\pm 10^{-7}$ ).

En las mediciones de distancias electromagnéticas (Rinner 1974, Kahmen B 1978: p. 175ff), las ondas de luz ( $\lambda = 0.56$  a  $0.78 \mu\text{m}$ ) y las microondas ( $\lambda = 1\text{mm}$  a  $1\text{m}$ ) sirven de portadores de la señal de medida. Se mide el tiempo de propagación  $t$  que requiere la señal para ir y regresar a lo largo de una distancia  $D$ . Tenemos:

$$(4.44) \quad D = \frac{c}{2} t$$

$\bar{c}$  es la velocidad de propagación promedio a lo largo de la trayectoria del rayo (4.31). Para que la incertidumbre en la distancia sea menor a 1.5cm, el tiempo de propagación debe obtenerse con una precisión de  $\pm 10^{-10}$  s. La medición del tiempo para la luz y las microondas presenta dificultades; por lo tanto, se modulan (modulación de amplitud o frecuencia), y la frecuencia de modulación  $f$  (7.5 a -

150 MHz) se usa en la medida como norma.

Hoy en día se prefieren las técnicas de medición de fase debido a su alta precisión. A partir de la diferencia de fase medida  $\Delta\psi$ , el tiempo de propagación está dado por:

$$(4.45) \quad t = \frac{r + \Delta\psi/2\pi}{f}$$

El número de los períodos completos  $r$  en el tiempo  $t$  se determina, aplicando varias frecuencias de modulación ligeramente diferentes. Substituyendo (4.45) en (4.44) da:

$$(4.46) \quad D = \frac{c}{2f} \left( r + \frac{\Delta\psi}{2\pi} \right)$$

La calibración de los distanciómetros electrónicos consiste en checar la frecuencia de modulación con un medidor de frecuencia y la determinación de las constantes del instrumento (corrección cero y posibles errores cíclicos de las unidades electro-ópticas), en distancias de pruebas cortas ( $\leq 1$  km).

Las longitudes de estas líneas de calibración, las cuales generalmente se subdividen en varias secciones, se determina con un interferómetro laser o un distanciómetro electro-óptico de corto alcance de alta precisión. Un ejemplo de este instrumento es el Mekómetro ME 3000 producido por Kern, Aarau y Com-Rad Ltd. Slough (lámpara Xenon de pulsación, frecuencia de modulación de 500 MHz; automáticamente toma en cuenta el índice de refracción real al comparar continuamente la longitud de la onda portadora con la longitud de onda standard; alcance máximo de 3km, resolución de  $\pm 0.2$ mm, precisión de  $\pm 1 \times 10^{-6}$ D), Froome (1971).

El alcance del método depende de la curvatura de la luz y de las microondas, y de la absorción en la atmósfera. El rango puede incrementarse erigiendo torres para el instrumento y el reflector, al igual que amplificando la energía transmitida; en este respecto, los requisitos de estabilidad son menos estrictos si se usan microondas en vez de las ondas de luz que forman haces más fuertes.

Para los distanciómetros electro-ópticos de largo alcance (desarrollados primero por E. Bergstrand en 1948)

las ondas de luz fuertemente unidas de la fuente de luz (generalmente láser a base de gas He-Ne;  $\lambda = 632,8\text{mm}$ ) se modulan en amplitud usando las celdas Kerr o los cristales KDP (fosfato dihidrógeno de potasio). La luz se transmite a través de la óptica emisora, reflejada en el otro extremo por un prisma reflector (pasivo) y dirigido a través de la óptica receptora a la fotocelda de un multiplicador de electrones secundario. La fase de las oscilaciones moduladas así obtenida se compara con un medidor de fase a la fase de frecuencia de modulación emitida. Para determinar las condiciones meteorológicas es necesario hacer mediciones de la temperatura y la presión (4.5.1) El alcance está limitado por las irresoluciones en la visibilidad (bruma, niebla) sin embargo al usar luz láser se pueden salvar distancias de 30 a 40 km en días claros y de 60 a 80 km en las noches.

Como ejemplo de los distanciómetros láser están el Geodimeter 8 y 600 (frecuencia de modulación de 30 MHz) de AGA en Suecia (Fig. 4.24), el Geodolite 3G (49 MHz) de Spectra - Physics. U.S.A., y el Rangemaster II (15 MHz) de Laser Systems and Electronics Inc., U.S.A.

En los aparatos de microondas de largo alcance (desarrollados primero por T.L. Wadley 1956), un oscilador Gunn o un Klystron crea las ondas portadoras ( $\lambda = 8\text{mm}$  a 10-cm) la cual se modula con un oscilador de cuarzo y se

emite a través de un transmisor en la estación maestra.

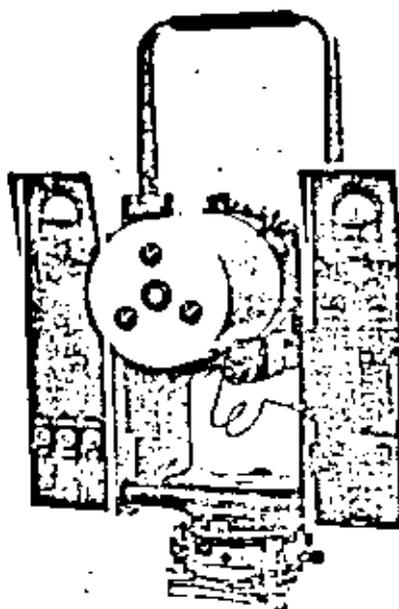


Fig. 4.24:

Distanciómetro  
laser Geodímetro  
600 (AGA -  
Geotronics AB  
Lidingö).

En la estación remota, el reflector activo (transpondeador), el cual está diseñado como receptor y como transmisor, retransmite una nueva onda portadora. La señal recibida, debilitada en la atmósfera, se modula sobre esta onda. Después de ser recibida en la estación maestra, se mide la diferencia de fase. Las frecuencias portadoras más altas son más fácilmente enfocadas, con lo cual se reduce la pérdida de energía y el efecto de la reflexión del suelo (cambiando de ondas de 10 cm a ondas de 3 cm y de 8mm). A través de los desarrollos más recientes, el procedimiento de medición se ha automatizado esencialmente con contadores de lectura digital. Actualmente, los errores al determinar la humedad (4.3.1) restringen la precisión de las líneas más largas. Como las microondas difícilmente se desvanecen en la atmósfera, se pueden medir distancias hasta de 50 ó 75km y más, independientemente del clima, durante el día y por la noche. Para condiciones de clima particulares, se puede desarrollar un coeficiente sobrenormal de refracción ( $k > 1$ ) sobre el océano. Con este tipo de onda guía (ducto) se pueden medir distancias de más de 100km (Spellauge 1972).

Dentro de este tipo de distanciómetros de microondas está el Telluómetro MRA4 (onda portadora de 8mm, frecuencia de

modulación de 75 MHz), el MRAS (onda portadora de 3cm), fig. 4.25 y el CA1000 (3cm, 25 MHz, peso; 1.6 kg), todos ellos manufacturados por Tellurometer (U.K.) Ltd.; el Electrotape DM20 (3cm, 7.5 MHz) de la Cubic Corporation, U.S.A.; el Distomat DI50 (3cm, 115 MHz) de wild Heerbrugg, y la SIAL M260 (3cm la alta frecuencia de modulación de 150 MHz casi no se ve afectada por la reflexión del suelo), de Siemens, Albis AG, Zurich (Fig. 4.26)



Fig. 4.25:

Distanciómetro  
de microondas  
Telluometro  
MRAS (Tellurometer  
U.K. Ltd.,  
Chessington/Surrey)

La precisión de los métodos de medición de fase está determinada parcialmente por los errores que no dependen de la distancia (errores en la medición de fase y en la lectura cero) y en parte por los errores que se incrementan con la distancia (errores en la frecuencia de modulación, en la velocidad en vacío, y en el índice de refracción promedio  $\bar{n}$ ). En distancias largas, el error predominante es --

causado por la incertidumbre en  $\bar{n}$ . Bajo condiciones normales, el error medio en distancia para mediciones con luz - laser está dado por:

$$(4.47) \quad m_D = \pm(1 \dots 10 \text{ mm} + 1 \dots 2 \times 10^{-6} D)$$

y para mediciones con microondas, es

$$(4.48) \quad m_D = \pm(3 \dots 20 \text{ mm} + 3 \dots 5 \times 10^{-6} D)$$

La correlación entre mediciones hechas bajo las mismas condiciones atmosféricas pueden alcanzar valores hasta de  $r = + 0.9$ . Para observaciones bajo condiciones diferentes se reduce a  $+ 0.0 \dots 0.4$  (Hopcke-1965).

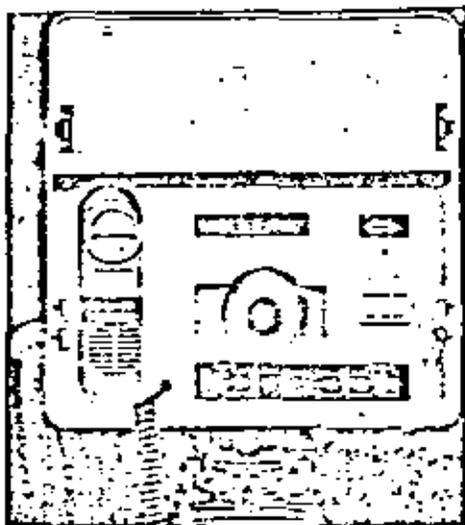


Fig. 4.26;  
Distanciómetro  
de microondas  
SIAL MD60C  
(Siemens - Albis  
AG, Zurich)

Frecuentemente se descubren diferencias de escala sistemáticas ( $2 \times 10^{-6}$  y mayores) entre mediciones de distancia simultáneas a base de luz y de microondas, donde las distancias determinadas mediante microondas resultan ser menores. Se supone que esto es ocasionado por parámetros meteorológicos localmente alterados, los cuales por lo tanto no son representativos de la distancia total (Kuntz y Möller 1971)

El equipo de medición Aerodist fue desarrollado para usarse en aviones (Tellurométer Ltd., Chessington). La estación maestra se encuentra en el aeroplano; cuando menos dos estaciones terrestres  $P_1$ ,  $P_2$  están equipadas con reflectores ac

tivos (Fig. 4.27). Volando transversalmente a la línea entre  $P_1$  y  $P_2$ , la diferencia de fase es continuamente vigilada y la mínima de las distancias oblicuas es sucesivamente reducida usando las alturas  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h$  a la cuerda  $s$  (línea transversal). Para una onda portadora de  $\lambda = 0.25$  m se puede obtener un rango hasta de 300 km. La frecuencia de modulación tiene un valor de 1.5 MHz el error medio de la distancia está dado por  $\pm (1m + 10^{-5}D)$ .

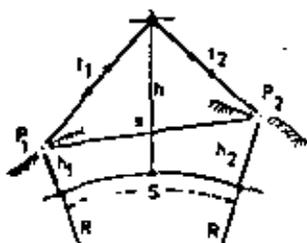


Fig. 4.27:  
Cruce de la  
Línea

En el caso de los métodos de medición de pulsaciones, se modulan pulsaciones cortas ( $10^{-7}$  a  $10^{-6}$  s) en una onda portadora de alta frecuencia, y se mide el tiempo de propagación de la pulsación entre la emisión y la recepción. La incertidumbre de esta medición es de  $\pm 10^{-8}$  a  $\pm 10^{-7}$  s, lo que corresponde a  $\pm 1.5$  m a  $\pm 15$  m. Por lo tanto, el método solamente es apropiado para líneas largas (300 a 900 km), requiriendo el uso de reflectores activos, así como ondas electromagnéticas con longitud de onda dentro del rango de un metro. El método Shoran (Short Range Navigation - Navegación de corto alcance) y el método mejorado Hiran (High Precision Shoran - Shoran de alta precisión), que están fundamentados en el principio de "cruce de líneas", han adquirido importancia geodésica.

Estos métodos son apropiados para la rápida construcción de grandes redes de control y para puentear vastos cuerpos de agua (6.1.1). Los procedimientos de medición de pulsación - Laser han encontrado aplicación en la geodesia de satélites (4.4.5):

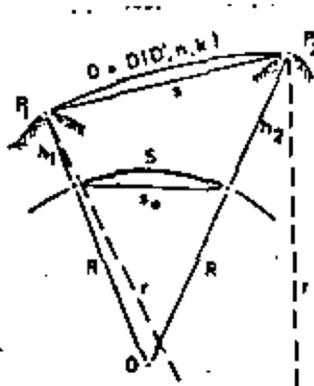


Fig. 4.28  
Reducción de  
la longitud  
Medida D.

Antes de que las distancias observadas se puedan procesar es necesario aplicar reducciones físicas y geométricas (Höpcke 1966), (Fig.4.28). La distancia  $D'$  la cual ya sea que se calcule de una medición del tiempo de propagación o bien se lea en el instrumento está basada en un índice de refracción estandar  $n_0$ . Con la primera y segunda correcciones de velocidad, se corrige de tal forma que concuerda con el índice de refracción promedio  $\bar{n}$  y la trayectoria curva del rayo (coeficiente de refracción  $k$ ):

$$(4.49) \quad D = D' + D'(n_0 - \bar{n}) - (k - k^2) \frac{D'^2}{12R_e}$$

( $R_e$  es el radio de curvatura del arco  $S$  con un azimut  $\alpha$  (3.29)). La longitud de la cuerda  $s$ , requerida para los cálculos tri-dimensionales se corrige por la curvatura de la trayectoria del rayo (que se supone es un arco esférico):

$$(4.50) \quad s = D - k^2 \frac{D^2}{24R_e}$$

La longitud de la sección normal  $S$  (6.1.4), que es esencial en los cálculos elipsoidales bi-dimensionales, está dada por:

$$(4.51) \quad S = 2 R_e \arcsin \frac{s_0}{2 R_e} \text{ with } s_0 = \sqrt{\frac{s^2 - (h_2 - h_1)^2}{(1 + h_1/R_e)(1 + h_2/R_e)}}$$

La longitud de la distancia curva se puede determinar, sin medir realmente los parámetros meteorológicos, usando simultáneamente dos o tres longitudes de onda diferentes.

Con las ondas de luz, dos distancias medidas difieren debido a la dispersión (4.3.1); y por lo tanto, la diferencia observada en las distancias, de acuerdo a (4.38), depende particularmente de las influencias que la temperatura y la presión atmosférica tienen en el índice de refracción promedio. Por el otro lado, la diferencia con respecto a una medición adicional usando microondas, según (4.39), revela principalmente los efectos de la presión parcial del vapor de agua. De estas diferencias entre las distancias medidas  $D'_{11}$ ,  $D'_{12}$ ,  $D'_m$ , las cuales se obtienen con luz y microondas,

la longitud geométrica de la trayectoria (sin la corrección

por curvatura) es:

$$(4.52) \quad D = D_0 - A(D_0 - D'_0) - B(D''_0 - D'_0)$$

Los coeficientes A, B se pueden calcular usando los parámetros meteorológicos de una atmósfera estandar. Si solamente se usan dos ondas de luz, entonces se debe estimar el efecto de la presión del vapor de agua. En el Laboratorio Nacional de Física de Teddington se desarrolló un instrumento de dos - ondas (Georan I: pulsación laser de ión Argón, azul 458 nm, verde 514 nm, incertidumbre relativa esperada  $< 5 \times 10^{-7}$ ) para distancias hasta de 50km (Shipley y Bradsell 1976). Huggett y Slater (1975) lograron una incertidumbre  $< 10^{-7}$  en 10km, trabajando con un instrumento de tres ondas (laser He - Cd - 441.6nm, laser He-Ne 632.8nm, microondas de 3cm).

Los puntos de control en el fondo del océano son importantes para la determinación de las posiciones precisas en los océanos. Para establecer su posición con respecto a puntos en la superficie del océano, se usan exclusivamente las ondas de sonido debido a sus propiedades especiales al propagarse en el agua. Los reflectores activos acústicos activados por pilas o por fuentes de energía nuclear sirven como marcas (duran unos cuantos años, alcance hasta de 30 km). Del tiempo de la propagación t, el cual requiere una señal acústica (ondas de sonido de 5 a 20kHz, longitud de pulsación de 10 a 20ms), para ir y venir, entre el transmisor instalado en el barco y el reflector activo, obtenemos la distancia inclinada

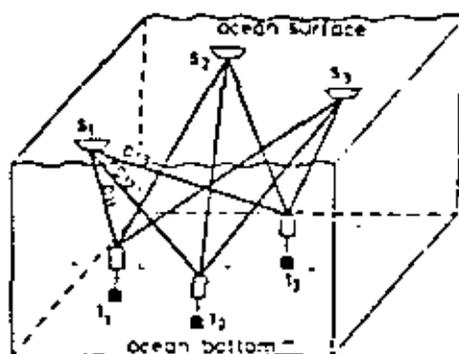
$$(4.53) \quad D = \frac{1}{2} c t$$

La velocidad promedio del sonido  $\bar{v}$  a lo largo de la trayectoria depende de la temperatura, salinidad y presión del agua. Debería determinarse con la ayuda de información medida. Además se debe aplicar una corrección de curvatura debido a la deflexión de la trayectoria. Los reflectores activos generalmente se acomodan en arreglos (3 a 4 instrumentos, separados por 5 a 10km). Los métodos de "cruce de

líneas" y trilateración espacial (posición geométrica dada por la intersección de las esferas de centros  $S$  y radios  $D$ , Fig. 4.29), sirven en particular para establecer la posición con respecto al barco. Configuraciones geométricas posteriores están dadas por Rinner (1977). Se obtiene una precisión relativa de  $\pm 3$  a  $\pm 5m$ , aún para grandes profundidades (Mourad et al. 1972).

Fig. 4.29:

Posicionamiento en el fondo del océano ( $T$  = reflector activo,  $S$  = posición del barco y transmisor).



Son posibles las determinaciones mundiales de la posición del barco a través del posicionamiento Doppler (4.4.6) o mediciones de radar (4.4.5) a satélites terrestres artificiales. Se pueden usar sistemas de posicionamiento de radio, tales como el Loran C y el Decca Hi-Fix, dentro de rangos limitados; las mediciones geodésicas de distancias y ángulos desde tierra también han servido para determinar posiciones en las cercanías de la costa. (Ingham B 1975).

#### 4.3.4 Medición de Angulos Zenitales, Alturas Determinadas Trigonométricamente.

El ángulo zenital (3.2.2) se mide con el círculo vertical de un teodolito.

Para las mediciones de redes de control, se usan teodolitos de precisión (4.3.2.). Los niveles o compensadores sirven para colocar horizontalmente la unidad de lectura. El error medio de lectura es de

$$\pm 0''2 \dots \pm 0''5.$$

El ángulo zenital observado  $z'$  está referido a la dirección local de la línea de la plomada y el rayo de luz curvo (Fig. 4.30).

Considerando el ángulo de refracción  $\sigma$  (4.3.1) y la componente de la deflexión de la vertical  $\epsilon$  (5.1.1), en la dirección del lado  $s$  con un azimut  $A$ , el ángulo zenital elipsoidal referido a la cuerda  $s$  está dado por:

$$(4.54) \quad z = z' + \delta + \epsilon$$

La diferencia en las alturas elipsoidales entre los dos puntos  $P_1, P_2$ , se calcula con la fórmula para alturas de Jordan.

$$(4.55) \quad \Delta h_{12} = h_2 - h_1 = S \left( 1 + \frac{h_1 + h_2}{2R} \right) \cos \zeta_1 + \frac{S^2}{2R \sin^2 \zeta_1}$$

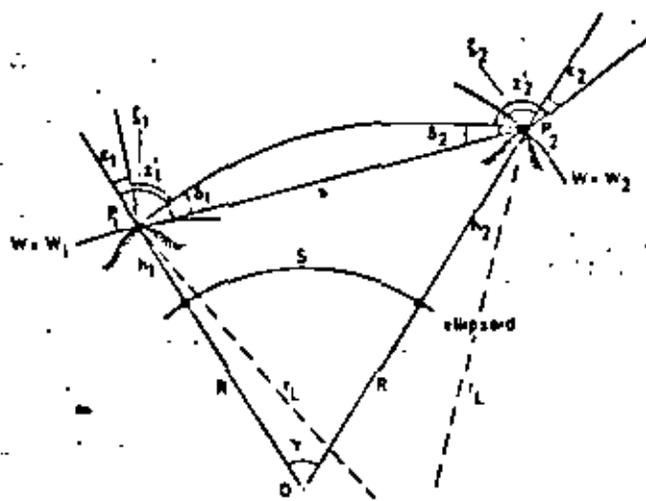


Fig. 4.30:  
Alturas  
Trigonométricas.

De acuerdo a (4.35),  $\delta$  depende del coeficiente de refracción  $k$ , y consecuentemente, de las condiciones meteorológicas, particularmente del gradiente vertical de temperatura; actualmente  $\delta$  se puede determinar a no más de  $\pm 1''$  a  $\pm 2''$ . De esta manera, la aplicabilidad de las alturas trigonométricas en líneas largas está considerablemente restringida.

El efecto de las incertidumbres en la refracción se reduce usando los ángulos zenitales recíprocos.

Del ángulo central:

$$\gamma = S/R = \zeta_1 + \zeta_2 - \pi \quad (4.56)$$

y la ecuación (4.54), y aplicando la ley de las tangentes al triángulo  $OP_1P_2$  (Fig. 4.30) se obtiene la diferencia en altura

$$\Delta h_{12} = S \left( 1 + \frac{h_1 + h_2}{2R} + \frac{S^2}{12R^2} \right) \times (\tan \frac{1}{2} (\zeta_2 - \delta_2 - \epsilon_2) - (\zeta_1 + \delta_1 - \epsilon_1)) + \dots \quad (4.57)$$

En esta ecuación aparecen solamente las diferencias en los ángulos  $\delta$  y  $\epsilon$ . En el caso de una trayectoria de luz simétrica  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_2$ , entonces la diferencia de altura solamente está afectada por los errores accidentales.

Es de esperarse un efecto de refracción simétrico aproximado en observaciones simultáneas, si en el caso de haber nubes, éstas se hacen antes de las condiciones isotérmicas vespertinas, y si el rayo de luz pasa a más de 15 a 20 m del suelo.

En ese caso las incertidumbres en la refracción son menores a  $1''$  ( $s < 25$  km). Bajo las mismas condiciones, las diferencias de altura "observadas" pueden presentar correlaciones de  $r = + 0.9$ . Si las mediciones se dividen en períodos de tiempo con condiciones meteorológicas diferentes, entonces  $- 0.1 < r < 0.1$  (Tegeler 1971).

El coeficiente de refracción se puede determinar de mediciones angulares zenitales recíprocas suponiendo una línea visual simétrica, de (4.54), (4.56) y (4.35) tenemos:

$$(4.58) \quad k = 1 - \frac{R}{s} (z_1 + z_2 - z)$$

De esta manera C.F. Gauss obtuvo para la medición del arco de Hannover en 1823 un valor promedio de  $k = 0.13 \pm 0.04$ , el cual se usó con mucha frecuencia. Sin embargo, solamente es válido aproximadamente para visuales bastante alejadas del suelo; cerca del suelo  $k$  puede adoptar valores entre  $-1.0$  y  $+ 1.0$ . Para una visual a una altura de 25m (triangulación de primer orden), la variación en  $k$  se reduce a entre  $-0.1$  y  $+ 0.4$ . En regiones montañosas, la variación normalmente es menor que 0.01.

La dispersión de la luz (4.3.1) se puede utilizar para la determinación directa del ángulo de refracción; por lo cual la luz que tiene una corta longitud de onda tiene una mayor curvatura que la luz de longitud de onda larga. El uso de dos longitudes de onda diferentes, ocasiona un ángulo de dispersión (la diferencia entre los dos ángulos de refracción) en la señal. Este ángulo depende del coeficiente de refracción individual efectivo a lo largo de la trayectoria de la luz. Considerando la (pequeña) influencia de la presión del vapor de agua, el ángulo de dispersión es proporcional al ángulo de refracción que es una o dos órdenes de magnitud mayor. Hasta ahora, los experimentos con distancias no mayores de 20km han dado incertidumbres de  $\pm 1''$  a  $\pm 2''$  en el ángulo de refracción;

aún se presume la existencia de errores sistemáticos mayores (Tengstrom 1976).

#### 4.3.5 Nivelación

En la nivelación geométrica, las diferencias de altura se determinan usando visuales horizontales entre puntos cercanos. (para una nivelación precisa, el espaciamiento entre estaciones es de  $\leq 30 \dots 40\text{m}$ ). Debido al espaciamiento corto, la influencia sistemática de refracción es menor que en el caso de las alturas trigonométricas (4.3.4). Por lo tanto, cuando se suman un número de diferencias de altura niveladas, la precisión de la nivelación es aproximadamente dos órdenes de magnitud más altas que las alturas determinadas trigonométricamente.

La nivelación se hace con un instrumento de nivelación (nivel) y con la ayuda de estadales. El instrumento consiste esencialmente de un telescopio de puntería con posibilidad de rotación alrededor del eje vertical. La línea de colimación se pone horizontal usando una burbuja en combinación con un tornillo para inclinar o automáticamente con un compensador.

Para nivelaciones de la más alta precisión, se usan niveles de precisión con una abertura del objetivo del telescopio de 45 a 60mm y un poder de amplificación de 35 a 50. Algunos instrumentos tienen una burbuja de coincidencia - por ejemplo Nabon (Breithaupt, Kassel), Plani (Fennel, Kassel), N3 (Wild, Heerbrugg) el cual tiene una sensibilidad de  $\sim 10''/2\text{mm}$  y una preci-

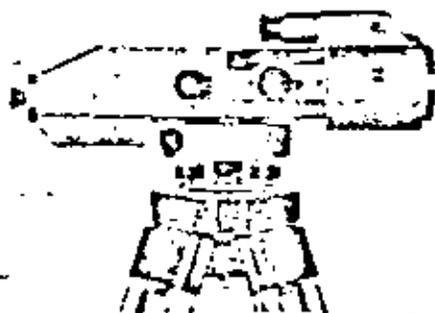


Fig. 4.31:  
Nivel de precisión  
Zeiss Nil  
(Carl Zeiss  
Oberkochen)

sión de centrado de  $\pm 0.2$ . La precisión de centrado del compensador en el nivel automático, por ejemplo Ni-A3 (MOX, Buda-

pest), Nil (Zeiss, Oberkochen, Fig. 4.31), Ni 002 (Jenoptik, Jena) es de  $\pm 0^{\circ}1$  . . .  $\pm 0^{\circ}2$ . Al ajustarse la marca de graduación del estadal, la línea de colimación se sube o baja en forma paralela mediante una placa paralela que se monta en frente del lente objetivo; la magnitud del desplazamiento se mide con un micrómetro. Los estadales que se usan son estadales invar de 3m con dos graduaciones opuestas y escalonadas

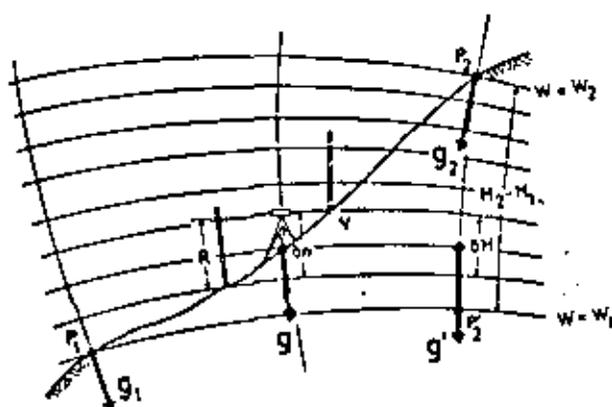


Fig. 4.32:  
Nivelación  
Geométrica

La diferencia de altura nivelada  $\delta_n$  entre las estaciones de estadal está dada por la diferencia entre la lectura hacia atrás R y la lectura hacia adelante V (Fig. 4.32):

$$\delta_n = R - V. \quad (4.59)$$

Debido a la distancia cuasi-diferencial entre las estaciones de estadal se debe ignorar la convergencia de las superficies equipotenciales (2.2.1), al igual que el cambio de curvatura de la superficie nivelada que pasa a través del telescopio. Entonces  $\delta_n$  corresponde a la separación de las superficies de nivel que pasan a través de las estaciones de estadal.

Sumando las  $\delta_n$  observadas entre los puntos de control  $P_1$  y  $P_2$  se obtiene la diferencia de altura nivelada.

$$\Delta n_{12} = \sum \delta_n. \quad (4.60)$$

$\Delta n$  depende de la trayectoria tomada, ya que las superficies de nivel no son paralelas; el resultado de nivelación no corresponde a una diferencia en alturas ortométricas (3.10)  $H_2 - H_1$ . Solamente considerando la gravedad  $g$  es posible una determinación definitiva de la altura; esto es, cambiando a diferencias de potencial  $\Delta W$ . Entonces, de acuerdo a (3.9) tenemos que:

$$\Delta W_{12} = W_2 - W_1 = - \int_1^2 g' dn = - \int_1^2 g' dH_n = - \sum_1^2 g' dn. \quad (4.61)$$

donde  $g'$  es la gravedad a lo largo de la línea de la plomada  $P_1'P_2'$ . Por lo tanto,  $\Delta W$  se puede determinar sin más hipótesis a partir de diferencias de altura  $\delta_n$  y valores de la gravedad de superficie  $g$ . Se deben aplicar reducciones que involucren a la gravedad para obtener diferencias de las  $\delta_n$  referidas a un sistema de alturas específico (5.1.5).

La suma de las diferencias de altura niveladas de un circuito cerrado (error de cierre) contiene además de los errores de medición, el exceso ortométrico dependiente de la trayectoria.

$$\sum \delta_n = 0 \quad (4.62)$$

Por el otro lado, la integral circular  $\oint dW = 0$ .

La exactitud de la nivelación de precisión depende de las influencias personales, instrumentales, topográficas y atmosféricas. Debido a que la diferencia en altura  $\Delta n$  entre dos puntos de control está compuesta de numerosas observaciones individuales  $\delta_n$ , se le debe prestar especial atención a la propagación de los errores. Las fuentes de error más importantes son:

1. Refracción vertical. Esta depende principalmente del gradiente vertical de temperatura (4.3.1). La parte irregular (ti-

tilar) tiene el efecto de un error de ajuste accidental (+ 0.01mm con cielo nublado). Las influencias que actúan sistemáticamente ocurren principalmente en las mediciones en terrenos con fuertes pendientes, o en las hechas cerca del suelo (0.01 a 0.1mm por 1m de diferencia en altura). De acuerdo a Kukkamäki (1938), éstas se pueden representar parcialmente por una corrección de refracción.

2. Movimientos verticales del instrumento y de los estadales. Estos dependen de la firmeza del suelo y de la forma que está montado el instrumento; son posibles los movimientos de 0.01 a 0.1mm por estación. Los movimientos proporcionales al tiempo que tardan las mediciones en una estación se cancelan por la sucesión de observaciones:

$R_I V_I V_{II} R_{II}$  (I, II = escalas del estadal). Además, del promedio de las nivelaciones de ida y de vuelta, se eliminan aquellos movimientos del estadal que son proporcionales al tiempo y que ocurren mientras el instrumento es llevado a la siguiente estación.

3. Error de nivelación del instrumento. Los errores accidentales que dependen del instrumento (incertidumbre en el centrado de la burbuja o el compensador) son menores que 0.01 a 0.03mm por estación. Los errores resultantes de una burbuja centrada o un compensador de oscilación libre que están fuera de ajuste causan una desviación de la línea de colimación con respecto a la horizontal; estos errores no tienen efecto si el instrumento se coloca a la mitad de la distancia entre los estadales.

4. Error al nivelar el estadal (inclinación del estadal). Los errores accidentales y sistemáticos se pueden mantener suficientemente pequeños, centrando la burbuja esférica y deteniendo con cuidado al estadal en posición vertical.

5. Error de graduación del estadal: Los errores en la escala se determinan por medio de calibraciones rutinarias y se toman en cuenta en las correcciones subsecuentes. La parte fortuita generalmente es menor de 0.01mm.

6. Desviaciones en la dirección de la plomada debido a las mareas (2.4.2). Estas ocasionan inclinaciones de la línea de colimación dependientes del tiempo, las cuales se calculan reduciendo la componente tangencial de la marea a la dirección de la línea de nivel. En la diferencia en altura entre dos puntos que se encuentran separados por la distancia  $s$  están incluidos los desplazamientos de la lectura hacia atrás y la lectura hacia adelante. Usando (2.66) y (2.73) se obtiene la corrección astronómica o por marea para la Luna (para el Sol, la corrección es del 46% de ésta).

$$v_M = 0.06 \sin 2\psi_M \cos(A_M - A) \times s \quad (\text{mm km}) \quad (4.63)$$

Donde  $A_M$  es el azimut de la Luna y  $A$  es el azimut de la línea de nivel. En nivelaciones más largas, estas influencias se cancelan parcialmente (Kukkamäki, 1949).

Para eliminar o reducir los orígenes sistemáticos diversos de error, las nivelaciones de precisión siempre se hacen 2 veces en direcciones opuestas y bajo condiciones meteorológicas diferentes. Las longitudes de las visuales de las casi iguales lecturas hacia y atrás y hacia adelante ("nivelación de la mitad") no deben ser muy largas y de acuerdo a las condiciones atmosféricas, para evitar las capas atmosféricas inferiores que se encuentran cerca del piso (< 0.5m sobre el suelo). En una nivelación doble de 1km se puede obtener un error de + 0.3 a 1.0mm. Los efectos sistemáticos de los movimientos verticales y de la refracción que no se pueden tomar en cuenta en el procedimiento de medida ocasionan correlaciones de  $r = + 0.1$  entre las diferencias de altura de nivelación de ida

y de vuelta (Lucht 1972).

Para la detección de las variaciones regionales temporales en altura (5.5.5) es deseable acelerar el lento procedimiento de la nivelación de precisión teniendo una precisión comparable. Para lograrlo, en la Universidad Técnica de Dresden se desarrolló un proceso de nivelación motorizada preciso donde el nivel (Ni 002 VEB Jenoptik, Jena) y los estadales se transportan en vehículos de motor especialmente equipados (Peschel 1974).

Al nivelar a través de ríos anchos o de afluentes del mar, existen varios métodos adecuados además del de alturas trigonométricas (4.3.4); éstos incluyen nivelación recíproca e hidrostática, al igual que nivelación hidrodinámica.

En la nivelación recíproca se hacen visuales aproximadamente horizontales a blancos especialmente marcados, con un nivel de precisión desde ambos lados del río simultáneamente. Para series de observación más largas incluyendo un cambio de instrumentos, se puede determinar una diferencia de altura en 1 a 2km con una precisión de  $\pm 1.5 \pm 2\text{mm}$  (Jelstrup 1955, Kakkuri 1956). La nivelación hidrostática está basada en el principio de los vasos comunicantes. Se coloca una manguera llena de agua (libre de burbujas de aire, temperatura uniforme) entre las orillas del río que se va a puestear. Los niveles de agua medidos en los extremos verticales de la manguera están situados en la misma superficie de nivel. El alcance de este método de aproximadamente 20km; la incertidumbre para distancias hasta de aproximadamente 7km es de  $\pm 0.5$  a  $\pm 1.0\text{mm}$  (Waalewijn 1964).

En la nivelación hidrodinámica, la altura se transfiere al otro lado del río utilizando el nivel de agua que se obtiene observando las reglas de mareas, donde debe considerarse la distancia entre la superficie de agua y una superficie de

nivel (Kempin 1970). Hasta ahora se le ha hecho poca investigación a este método; se logró una transferencia de alturas a través del canal entre Ramsgate y Dunkerque (70 km) con una incertidumbre de  $\pm 1.5$  cm (Cartwright y Crease 1963).

#### 4. OBSERVACIONES DE SATELITE.

En este grupo de mediciones, se utilizan blancos y sensores que no están atados al cuerpo terrestre. En este respecto son los satélites terrestres artificiales los que poseen el mayor significado. Aquí también se incluyen las observaciones a globos, al igual que a objetos cósmicos distantes (la Luna terrestre, fuentes de radio extragalácticas) (Arnold A. 1970, Mueller A 1964, Henriksen et al. 1972, Veis 1974, Sici 1977).

4.4.1 El Movimiento Imperturbable de un Satélite después de que el satélite se ha separado del cohete portador, comienza su revolución libre alrededor de la Tierra. La órbita del satélite queda determinada por las condiciones iniciales y los campos de fuerza. En primer lugar consideramos el movimiento en el campo de gravedad de una Tierra cuya estructura es simétricamente esférica (2.1.2).

La masa del satélite se puede despreciar en comparación con la masa terrestre  $M$ . De la derivada del potencial gravitacional  $V$  (2.11) obtenemos la ecuación de movimiento.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \text{grad } V = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.64)$$

$\mathbf{r}$  es el vector de posición geocéntrico; los puntos denotan la diferenciación con respecto al tiempo.

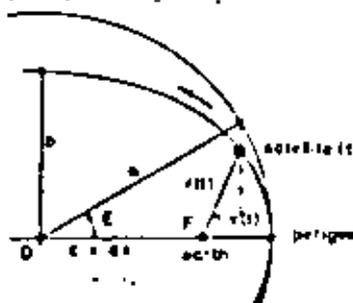


Fig. 4.33:  
Sistema orbital  
del Satélite

De acuerdo a las leyes de Kepler, el satélite se mueve en una órbita elíptica. Uno de los focos de la elipse (con semieje mayor  $a$ , y primera excentricidad  $e$ ), coincide con el centro de gravitación (= centro de masa de la Tierra). En el sistema orbital de la Fig. 4.33, la posición del satélite está descrita por la distancia  $r$  del centro de masa y la anomalía verdadera  $v$  (= ángulo geocéntrico entre las direcciones al satélite y al perigeo). Usando la anomalía excéntrica  $E$  como una cantidad auxiliar, obtenemos:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad \tan v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \quad (4.65)$$

Introducimos la tercera ley de Kepler vía la velocidad (angular) media (movimiento medio).

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (4.66)$$

y la anomalía media

$$\bar{M} = \bar{n}(t - T) \quad (4.67)$$

la cual se incrementa linealmente con el tiempo  $t$ .  $T$  es la época del paso por el perigeo, el mayor acercamiento a la Tierra. Entonces se puede calcular  $E$  iterativamente usando la ecuación de Kepler:

$$\bar{M} = E - e \sin E \quad (4.68)$$

El sistema orbital se transforma al sistema ecuatorial fijo al espacio (4.1.1) mediante las rotaciones de  $\Omega$  (= ascensión recta del nodo ascendente),  $i$  (= inclinación del plano orbi-



Para abarcar la gravitación terrestre completa, se le debe añadir la "función perturbadora "R" al potencial gravitacional de una Tierra esféricamente simétrica:

$$V = \frac{GM}{r} + R' \quad (4.70)$$

De acuerdo a las ecuaciones (2.51) - (2.53), R' contiene los coeficientes armónicos  $J_{nm}, K_{nm}$  ( $n \geq 2$ ) de la expansión armónica esférica de V. Las coordenadas esféricas  $r, \theta, \lambda$  son reemplazadas por los elementos orbitales usando (4.65) y las relaciones esféricas entre  $\theta, \lambda$ , y  $\Omega, i, \omega, v$  como se infiere de la Fig. 4.34; con ello llegamos a

$$R' = R(a, e, \Omega, i, \omega, \bar{M}, J_{nm}, K_{nm}) \quad (4.71)$$

A continuación, sustituimos (4.70), (4.71) en (4.64) y obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \frac{r}{r} + \text{grad } R' \quad (4.72)$$

Esta ecuación vectorial diferencial o el sistema escalar correspondiente de ecuaciones diferenciales de 2o. orden se pueden convertir a un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden (ecuaciones planetarias de Lagrange). Las ecuaciones diferenciales se pueden resolver numérica o analíticamente (para el cálculo de las perturbaciones en la mecánica celeste, consultar Kaula A 1966, Schneider B 1979).

La integración sobre un arco orbital proporciona los cambios en los elementos orbitales entre la época inicial  $t_0$  y el tiempo t. Al sumar estas perturbaciones orbitales a los elementos orbitales  $a_0, e_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, \bar{M}_0$  de la época inicial, el vector de posición geocéntrico (4.69) se vuelve una función de estos elementos, del tiempo t, y de los parámetros del campo gravitacional:

$$r = r(a_0, e_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, \bar{M}_0; t; GM, J_{nm}, K_{nm}) \quad (4.73)$$

Por lo tanto, del vector observado  $\underline{r}_0$  y de un conocimiento (aproximado) del campo gravitacional se puede predecir la posición del satélite en el tiempo  $t$ . Institutos tales como el Observatorio Astrofísico Smithsonian, publican datos orbitales aproximados de satélites escogidos. Esta información sirve para determinar la orientación de los instrumentos con los que se observa el satélite. Para establecer la posición de puntos terrestres a partir de la posición del satélite se necesitan determinaciones orbitales precisas (5.3.4).

La órbita del satélite experimenta perturbaciones seculares y periódicas (amplitud de  $\sim 100\text{m}$ ) debido a la gravitación lunisolar, que afecta a la Tierra y al satélite en forma desigual. Estas perturbaciones se pueden calcular expandiendo la función de perturbación (4.71) para incluir el potencial de marea.

Las perturbaciones orbitales no-gravimétricas son causadas primordialmente por la resistencia del aire y la presión de la radiación solar. La resistencia del aire frena al satélite, cambiando finalmente su órbita a una trayectoria circular y después a un movimiento en espiral que lo conduce a una caída hacia la Tierra. Las perturbaciones dependen de la velocidad del satélite, de la densidad atmosférica y de la relación entre el área efectiva de la sección transversal y la masa. Para alturas mayores que 1000km, la resistencia del aire se puede ignorar, con la excepción de los satélites de globo (4.4.3). La influencia de la resistencia del aire se toma en cuenta aplicando correcciones, aunque están afectadas por errores del modelo de densidad atmosférico. El CIRA (Atmósfera de Referencia Internacional COSPAR) 1972 es un modelo atmosférico empírico de gran altitud, mientras que el Atmósfera Estándar de E.U. 1962, con suplementos de 1966, proporciona más detalle en la vecindad de la superfi-

cie terrestre. Además, ocurren interacciones electromagnéticas en la ionósfera, que conducen a pequeñas perturbaciones que son difíciles de determinar. Los satélites de gran altura son acelerados por la presión de radiación debido a los fotones incidentes. Estas perturbaciones dependen de la posición del satélite con respecto al Sol y a la relación entre el área y la masa; éstos se toman en cuenta mediante correcciones. En el caso de los satélites globo surgen perturbaciones particularmente grandes.

Con un buen rastreo de satélites, y con los modelos gravitacionales de la Tierra actuales (5.4.2) y considerando también las perturbaciones no-gravitacionales, se puede determinar la efemérides del satélite con una precisión-m para arcos cortos (fracciones de un día) y una precisión aproximada de 10m para arcos largos (algunos días).

#### 4.4.3 Satélites Terrestres Artificiales, Sistemas de Medición del Tiempo.

Desde el lanzamiento del Sputnik I (1957), los satélites artificiales terrestres han estado disponibles para la geodesia como blancos a gran altitud. Debido a que las irregularidades del campo gravitacional terrestre afectan la órbita del satélite (4.4.2), este campo, a su vez, se puede derivar de las observaciones de satélites. Las observaciones del satélite Vanguard I (1958), proporcionaron la primera información de este tipo (asimetría ecuatorial del campo gravitacional).

Quando se calcula y establece la órbita de los satélites geodésicos se deben tomar en cuenta los siguientes aspectos:

1. Los efectos de perturbación no gravitacionales se minimizan para áreas transversales pequeñas y masas grandes (4.42). Una forma simétrica rotacional reduce la influencia de la resistencia desigual del aire.

2. Cuando la altitud del satélite es 0.5 a 2 veces la distancia entre las estaciones terrestres, se obtienen configuraciones favorables de redes globales. Para poder detectar las características de longitudes de onda corta del campo gravitacional, se requieren satélites a altitudes mínimas; el límite inferior está regido por la perturbadora resistencia del aire.

3. Las órbitas con inclinaciones diferentes deben estar disponibles para poder determinar el campo gravitacional; entonces los efectos de los coeficientes armónicos se pueden separar con mayor facilidad.

Con respecto a la instrumentación, distinguimos entre satélites activos y pasivos. Los satélites activos llevan transmisores de varios tipos; por lo tanto, también está el problema de proporcionar energía. Los satélites pasivos reflejan la luz incidente. Los satélites geodésicos pueden estar equipados con lo siguiente:

Unidades de luz intermitente para transmitir destellos luminosos cortos (lms) de alta intensidad; un reflector activo para recibir y transmitir la onda portadora para mediciones de distancia electromagnéticas; un transmisor que continuamente envía una onda en la gama MHz para mediciones de frecuencias Doppler; un reloj de cristal de cuarzo para la transmisión de señales de tiempo; reflectores laser para reflejar pulsaciones de luz laser; un aparato estabilizador para mantener la orientación del satélite con respecto a la superficie terrestre.

Los satélites de importancia en Geodesia incluyen al GEOS (Geodetic Earth Orbiting Satellite- Satélite Geodésico que Orbita la Tierra) 1 (lanzado en 1965,  $h \approx 1\ 100$  a  $2\ 300$  km,  $i \approx 59^\circ$ ) y al GEOS 2 (1968,  $h \approx 1\ 100$  a  $1\ 600$  km,  $i = 106^\circ$ ). Estos satélites geodésicos llevan unidades de luz intermitente, reflectores activos Secor (4.4.5), transmisores Doppler, y

reflectores laser (los arreglos retroreflectores son esquinas de cubos de sílice fundido). También hay un número de satélites adicionales aprovechables equipados con reflectores ( $h \approx 600$  a  $1900$  km,  $i = 15^\circ$  a  $80^\circ$ ); los satélites Starlette (1975,  $h = 800$  a  $1100$  km,  $i = 50^\circ$ ) y Lageos (1976,  $h \approx 5900$  km,  $i = 110^\circ$ ) son de forma esférica (diámetro:  $0,2$  y  $0,6$  m respectivamente) y poseen una relación área-masa muy favorable, Fig. 4.35. Los satélites de sistema Tansist, transmiten frecuencias que son apropiadas para mediciones Doppler (4.4.6); los satélites Secor llevan reflectores activos Secor.

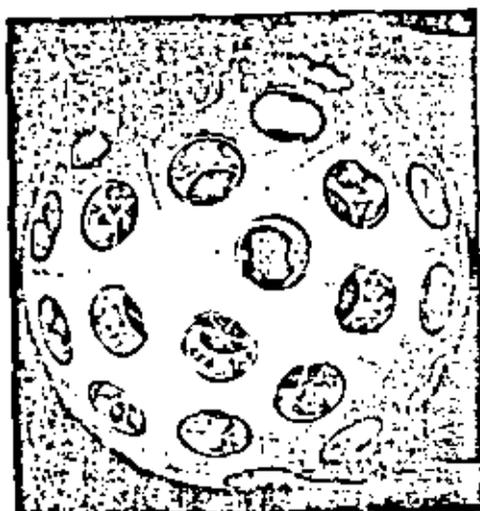


Fig. 4.35:  
Satélite Terrestre  
artificial  
Starlette  
(Centre National  
d'Etudes  
Spatiales  
CNES)

El Sistema de Posicionamiento Global NAVSTAR (4.4.6) está planeado para depender de 24 satélites ( $h \approx 20\,000$  km,  $i = 63^\circ$ ). En el caso de los satélites "libres de resistencia" (Triad I, 1972), la masa que sirve de sensor está situada dentro de una concha manejable que protege completamente de los efectos de la resistencia del aire y la radiación Solar.

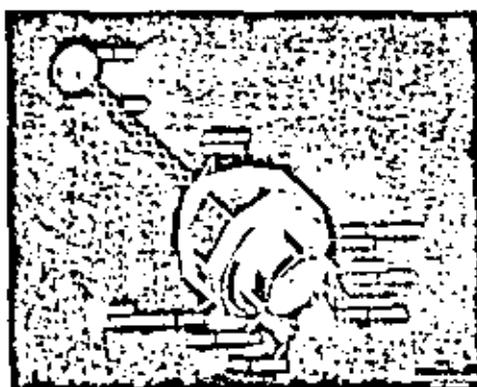


Fig. 4.36  
Satélite terrestre  
artificial GEOS<sup>3</sup>  
(Aeronáutica y  
Administración  
del Espacio Na-  
cional NASA)

El satélite GEOS 3 (1975,  $h \approx 840\text{km}$ ,  $i = 115^\circ$ ), Fig. 4.36 lleva entre otros instrumentos un altímetro radar ( $\pm 1\text{m}$ ) para mediciones de altura sobre los océanos, reflectores laser, un transmisor Doppler, un reflector activo Banda - C, al igual que un sistema de rastreo de satélite a satélite (Banda - S) para mediciones a los satélites geostacionarios ATS 6 ( $h \approx 36000\text{ km}$ ) (4.4.5). El satélite oceanográfico SEASAT 1 ( $h \approx 800\text{ Km}$ ,  $i = 108^\circ$ ), fue lanzado en 1978; lleva un sistema altimétrico mejorado ( $\pm 0.1\text{m}$ ) el cual estuvo funcionando alrededor de 3 meses (4.4.8).

Los satélites globo de forma esférica, cubiertos con una piel externa, reflejan la luz Solar incidente. Si el observador está posicionado en la sombra terrestre, entonces el satélite forma un blanco iluminado que es adecuado para observaciones ópticas. Se han logrado intensidades de  $0^m$  a  $5^m$  ( $m =$  una unidad en la escala astronómica de intensidad de luz). Estos satélites pasivos, que son fácilmente manufacturados, tienen varias desventajas en particular son fuertemente perturbados por fuerzas no-gravitacionales. Por ello, no se pueden aplicar en la determinación del campo gravitacional. Su tiempo de vida es también relativamente corto. De allí que la importancia de los satélites globo ha declinado considerablemente.

Los satélites globo Echo 1 y Echo 2 fueron usados con fines geodésicos (1960-1966 y 1964-1969, respectivamente  $h \approx 1600\text{km}$  y  $1100\text{km}$ ,  $i = 47^\circ$  y  $81^\circ$ , diámetro del globo de  $30\text{m}$  y  $41\text{m}$ ). El satélite Pageos fue de considerable importancia (1966,  $h \approx 4200\text{km}$ ,  $i = 87^\circ$ , diámetro de  $30\text{m}$ ) (5.3.2).

Únicamente la parte esféricamente simétrica del campo gravitacional terrestre es suficientemente fuerte para efectuar pruebas espaciales distantes. Por lo tanto las observaciones de estas pruebas (Ranger, Surveyor, Lunar-Orbiter, Mariner) proporcionan la constante gravitacional geocéntrica  $GM$  con relativamente alta precisión.

Si se usan globos como señales de gran altitud para la medición de direcciones, entonces deben estar equipados con aparatos de luces intermitentes (intervalos de 1m). Las alturas que se obtienen son de 30 a 40km.

Debido a la gran velocidad de un satélite terrestre artificial, hay mucha exigencia en la medición del tiempo. La velocidad orbital media  $\bar{v}$  de un satélite que se desplaza en una órbita circular ( $r = a$ ) está dada a partir de (4.66) por  $\bar{v} = a\dot{\theta} = (GM/a)^{1/2}$ . Para un satélite cercano a la Tierra ( $h = 1\ 000\text{km}$ ) obtenemos, con  $a = R + h = 7\ 370\text{km}$ , un valor de  $\bar{v} = 7.4\text{km s}^{-1}$ . La tercera ley de Kepler proporciona el período de revolución  $U = 104\text{min}$ .

El equipo de medición del tiempo usual (4.1.4) permite una determinación del tiempo (una época) hasta aproximadamente  $\pm 1$  ms. Para  $h = 1\ 000$  km, esta incertidumbre corresponde a un error en la dirección al satélite de  $\pm 1'' 5$  y un error en posición de 7.4m. Como hoy en día las direcciones y distancias se pueden obtener con precisiones de  $\pm 0'' 2$  y  $\pm 1$ m, respectivamente, la determinación del tiempo debe lograrse de  $\pm 0.1$  ms, lo cual es posible, por ejemplo, mediante la regulación por medio de relojes atómicos portátiles. En el caso de mediciones de distancias laser, se esperan incertidumbres menores que  $\pm 0.1$ m; por lo tanto el requerimiento en la medición del tiempo se incrementa a  $\pm 1$ ns. Los standards de frecuencia del rubidio o cesio que están ligados al UTC (4.1.3) son capaces de este tipo de precisión, con la ayuda de señales de tiempo.

#### 4.4.4. Mediciones de Dirección.

En las mediciones de dirección óptico-fotográficas se retrata, en el plano del negativo o placa, al satélite simultáneamente con las estrellas fijas, mediante una toma fotográfica. Se observan las luces intermitentes de los satélites activos, la luz laser reflejada, y la luz solar reflejada por los satélites globo (4.4.3).

Las Cámaras con que se toman las fotografías deben tener -- una gran distancia focal, ya que para una incertidumbre de posición dada de las imágenes del satélite, la precisión direccional depende de esta distancia focal. También se requiere una apertura relativa grande para que aún los satélites y estrellas poco luminosas sean discernibles. Aún más, con un campo visual de un tamaño razonable se asegura que -- un tramo suficientemente largo de la trayectoria del satélite y un gran número de estrellas queden representados. Las cámaras que no siguen al satélite vienen equipadas con un e

obturador especial que corta en puntos o pequeños segmentos (tiempo de exposición de 1/5 a 1/100s) a la trayectoria luminosa del satélite. Finalmente el soporte de la cámara debe estar garantizado de ser estable y libre de vibraciones.

La distinción entre cámaras balísticas, astronómicas y orbitales depende de la montura. Las cámaras balísticas están montadas azimutalmente, permitiendo con ello la rotación en el sistema horizontal (4.1.1).

Tienen distancias focales más cortas (300 á 1000 mm), y campos visuales más grandes (30° a 10°). Estos instrumentos son de fácil uso y portátiles, de tal forma que son apropiados para estaciones móviles. Las cámaras astronómicas están montadas ecuatorialmente, y por lo tanto son capaces de girar en el sistema ecuatorial (4.1.1). Poseen distancias focales largas ( $\geq 1000\text{mm}$ ) y campos visuales pequeños ( $< 10^\circ$  á  $5^\circ$ ). Como la cámara es capaz de seguir el movimiento de las estrellas, aún las estrellas casi imperceptibles (hasta  $13^m$ ) pueden ser detectadas. Para las cámaras orbitales también es posible seguir el movimiento de un satélite. En este caso la órbita del satélite se calcula a partir de los elementos orbitales, y la cámara lo sigue en el plano orbital (cámara triaxial). Los movimientos que se desvían del plano orbital también se pueden seguir si se cuenta con un cuarto eje. Los satélites casi imperceptibles (hasta  $12^m$ ) son discernibles cuando se rastrean de esta manera. Las cámaras pesadas nada más se instalan en forma estacionaria.

Entre las cámaras balísticas está la cámara Wild BC4, la cual consiste de la cámara aérea Wild RC5 montada en la base de un teodolito universal Wild T4. Tiene una distancia focal de 300 (450)mm y una apertura relativa de 1:2.6 (1:3.4). Fig. 4.37. Las cámaras Zeiss BMK 46 y BMK 75 con una  $f = 460$  (750) mm y una apertura relativa de 1:2 (1:2.5) Fig. 4.38, montadas ecuatorialmente, fueron especialmente

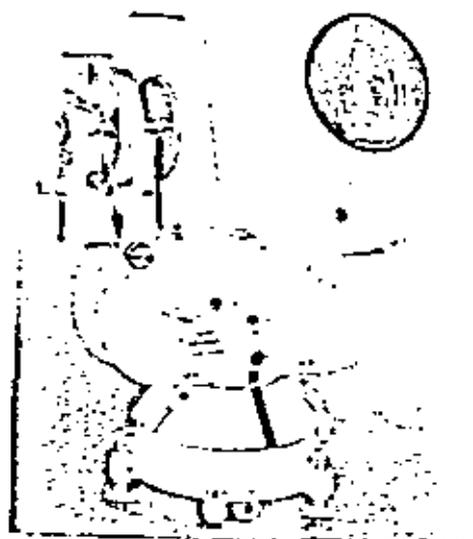


Fig. 4.37:  
Cámara Balística Wild BC4  
(Wild AG, - -  
Heerbrugg)

desarrolladas para observaciones a satélites. Las exposiciones con estas cámaras. se hacen en placas de vidrio con una dimensión de 18x18 cm. Las cámaras Baker=Nunn empleadas por la SAO (reflector triaxial Schmidt,  $f = 500$  mm. 1:1) utiliza película de 56mm. La cámara SBG 760 (reflector Schmidt, - -  $f = 760$  mm, 1:1.8, 9x12 cm placas de vidrio) de Jenoptik, Jena, tiene una montura con cuatro ejes.



Fig. 4.38:  
Sistema de medida de las cámaras balísticas BMK 46/18/1:2 con estación de medida del tiempo ZMS (Carl Zeiss -- Oberkoche).

Se requiere un laser de iluminación cuando se llevan a cabo mediciones de dirección con luz laser a los correspondientes satélites equipados (4.4.3). La probabilidad de un buen eco laser se incrementa emitiendo la energía con más fuerza, enfocan

do más estrechamente, generando trenes de pulsos más cortos, y usando monturas de rastreo guiadas por computadoras (Williams etc. al. 1966). Actualmente se encuentran en operación los laser de pulsaciones rubí (energía laser de 10 á 100 J, amplitud de pulsación de 0.5 a lms, divergencias del rayo de  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$  rad, velocidad de repetición de la pulsación de 0.25 a 1 Hz) (4.4.5).

Después de haber revelado las fotografías e identificado las estrellas, los puntos imagen de los satélites y las estrellas se miden en un comparador de precisión (incertidumbre de  $\pm 1$  a  $\pm 2 \mu\text{m}$ ). Las fotocoordenadas  $x, y$  medidas del satélite son posteriormente transformadas a las direcciones espaciales, ascensión recta  $\alpha$  y declinación  $\delta$ . Los parámetros de transformación se determinan por las fotocoordenadas de las estrellas. Cuando se usan técnicas fotogramétricas, los haces de rayos incidentes se recrean al determinar la orientación de la cámara (Kuntz 1965). En los métodos astronómicos, primero se transforma las coordenadas  $\alpha, \delta$  a coordenadas planas y después se relacionan con las fotocoordenadas medidas mediante una transformación afin (Hornbarger 1968). Mientras que la orientación espacial en el proceso fotogramétrico requiere de un gran número (algunos cientos) de imágenes estelares distribuidas en toda la placa, 10 estrellas en la vecindad de la imagen del satélite son ya suficientes en el procedimiento de interpolación de los métodos astronómicos. Los resultados de las transformaciones son las direcciones topocéntricas  $\alpha^*$ ,  $\delta^*$  al satélite.

Los efectos sistemáticos conocidos (distorción, errores del comparador, refracción astronómica) se consideran antes de las transformaciones. Ya que el satélite no está colocado en el infinito, el ángulo de refracción astronómica se reduce por la refracción paraláctica  $\sigma$  (Fig. 4.2). La dirección al satélite se corrige correspondientemente. Para  $z < 45^\circ$  y  $h > 1000 \text{ km}$ , tenemos aproximadamente:

$$\sigma = \frac{2.3}{h_{\text{km}}} \tan z = 0.48 \frac{\tan z}{h_{1000 \text{ km}}} \quad (4.74)$$

La precisión de la dirección del satélite está determinada por la incertidumbre de las posiciones estelares (4.1.2) y la coordinación del tiempo, así como por los errores de medición del comparador, por el centelleo debido a las turbulencias atmosféricas ( $1''$  á  $5''$ , período  $< 1\text{s}$ ), y por las distorsiones de la emulsión fotográfica ( $\pm 1 \mu\text{m}$ ). La precisión es de  $\pm 0.2''$  a  $\pm 2''$ , la cual no parece posible incrementar.

En contraposición a la medición de ángulos usando el teodolito (4.3.2), (4.3.4), las direcciones fijas al espacio del satélite, son independientes de la dirección de la línea de la plomada. Las incertidumbres de refracción permanecen pequeñas debido a que únicamente surgen diferencias en la refracción al interpolar la dirección del satélite con respecto a las direcciones vecinas de las estrellas.

#### 4.4.5 Mediciones de Distancias

Hacemos una distinción entre las mediciones de distancia hechas con luz laser y aquellas hechas con microondas.

Las mediciones de distancia laser (Plotkin 1973), son posibles cuando el satélite está equipado con reflectores laser (4.4.3). Después de medir el tiempo de propagación del pulso laser mientras viaja del emisor al reflector y viceversa, se calcula la distancia según (4.44). Para las pulsaciones de lasers de rubí ( $\lambda = 694.3 \text{ nm}$ ) de uso predominante, se emite una pulsación soltada por un reloj atómico a través de óptica transmisora; en ese mismo instante, un contador de tiempo de propagación comienza a registrar el tiempo. La pulsación reflejada recogida por un telescopio receptor se canaliza, después de haber sido amplificada en un multiplicador de electrones secundario, a un contador de tiempo. El laser y el telescopio receptor están montados de tal forma que pueden seguir al satélite con mucha exactitud.

Mientras tanto, la primera generación de instrumentos laser que se había usado inicialmente para medir distancias (energía laser de 1 á 5 J, semi amplitud de pulsación de 10 á 30ns, potencia de pulsación de 100 á 500MW, divergencia del haz, de  $10^{-3}$  a  $10^{-4}$  rad, velocidad de repetición de pulsación de 0.1 a 1 Hz, resolución del contador de propagación del tiempo de 1 á 10ns correspondientes a 0.15 á 1.5m, principalmente rastreo visual), ha sido reemplazada en su mayor parte por sistemas de la segunda generación (semiamplitud de pulsación de 1 á 5ns, análisis de pulso para determinar el punto de concentración de energía de la pulsación reflejada, rastreo semi o totalmente automático). Se logra una mayor precisión usando lasers YAG de neodimium (cristal de itrio aluminio-granate compuesto con iones de neodimium). Este instrumento puede general pulsaciones gigantescas, muy cortas, con cantos empinados y alta velocidad de repetición (potencia de 1 á 2 GW, semiamplitud de pulsación de 0.1 á 0.2ns,

velocidad de repetición del pulso de 1 a 4 Hz, de largo alcance, unidad de rastreo por computadora), Wilson et. al. (1977). Los instrumentos de la tercera generación están siendo operados por el Centro de Vuelos Espaciales Goddard, Greenbelt, Md., y por el SFB 78 de la Universidad Técnica de Múchen (Fig. 4.39). Se han desarrollado sistemas móviles de E. U. (NASA), (Silverberg 1978) y la U.R.S.S.

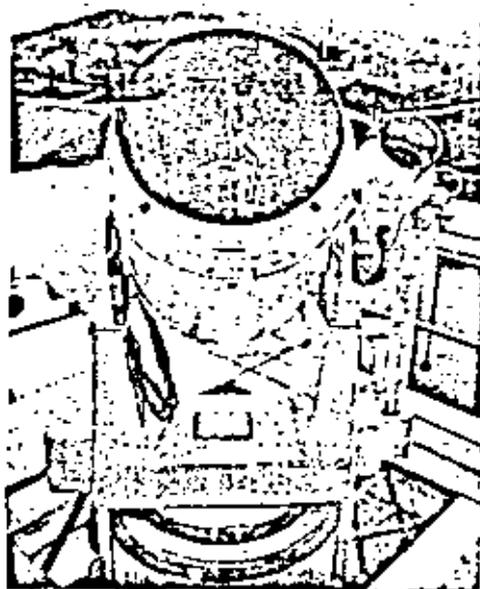


Fig. 4.39:

Sistema de medición de distancias laser neodimium-YAG, con montura Contraves Guertz (Estación de observación de satélites Wettzell, Sonderforschungsbereich 78, Universidad Técnica de Múchen)

La precisión de la medición de distancias laser depende primordialmente de la amplitud de la pulsación. Las incertidumbres de medición son de  $\pm 1.. \pm 2m$  (primera generación),  $\pm 1.0 \dots \pm 0.3m$  (segunda generación) y menor que  $\pm 0.1m$  (tercera generación). Los efectos de refracción (4.3.1) se pueden tomar en cuenta mediante las reducciones apropiadas. Para incertidumbres de  $\pm 0.01$  á  $\pm 0.1m$ , los reflectores deben estar acomodados en el satélite de tal manera que en la reflexión, el error en el tiempo de propagación permanece menor que 0.1ns (satélites Starlette, Lageos, (4.4.3).

Las ventajas de las mediciones laser reside en la alta exactitud, la posibilidad de mediciones de direcciones simultáneas (4.4.4.) y en no tener que depender en las fuentes de energía a bordo del satélite. Como en cualquier método que utiliza luz, es necesario que el satélite sea ópticamente visible.

El sistema Secor (Cotejamiento Secuencial de Distancias), desarrollado en E.U., trabaja bajo el principio de las mediciones de fase con microondas (4.3.3) (Culley 1965). La estación terrestre transmite una onda portadora de frecuencia modulada (421 MHz) y el reflector activo del satélite retransmite las ondas portadoras con frecuencias de 449 MHz y 224.5 MHz.

La frecuencia de modulación de 585.533 kHz se usa para las mediciones. En el caso de los procesos de medición totalmente automatizados, se obtienen varios miles de valores medidos durante un paso del satélite. Se almacenan junto con el tiempo en una cinta magnética, y después de un análisis de error, quedan listos para procesamientos posteriores. Se requiere de las reducciones principalmente debido a la refracción en la tropósfera ( $h > 30\text{km}$ ,  $n < 1$ ). La refracción troposférica se puede calcular suponiendo un modelo atmosférico e incorporando información meteorológica que se mide en el campo. La influencia de la refracción ionosférica en una primera aproximación, es inversamente proporcional a la frecuencia de la onda portadora; por lo tanto, puede ser determinada usando dos frecuencias.

La precisión de una sola distancia medida depende esencialmente del conocimiento de la refracción; la distancia promedio se puede obtener con una aproximación de  $\pm 3\text{m}$ . Este método laborioso, para el cual no se ve posible un incremento en la precisión, ha sido superada por la medición de distancias laser.

Para la determinación de la órbita de un satélite terrestre artificial se requiere una secuencia de observaciones en rápida sucesión que no dependa de la hora del día o de las condiciones climatológicas. A este respecto, las mediciones radar en el alcance de la Banda -S (2 á 4 GHz) y de la Banda C (4 á 6 GHz) son particularmente apropiadas. Se hacen usando ya sea un aparato estacionario ó móvil y proporcionan distancias con una incertidumbre de  $\pm 1$  á  $\pm 3\text{m}$ , además de (con menos precisión) direcciones y velocidad de alcances. El método de rastreo satélite-a-satélite aún está en la etapa experimental; aquí, las mediciones con radar determinan los alcances y la velocidad de alcance entre satélites (4.4.3).

#### 4.4.6 Mediciones del Cambio de Frecuencia Doppler

Para las mediciones Doppler (Anderle 1973), en un tiempo  $t$ , un transmisor a bordo del satélite S emite una señal en el rango de la longitud de onda ultracorta con una frecuencia constante  $f_s$  (Fig. 4.40). El observador recibe la frecuencia  $f_E$  en el tiempo  $t + \Delta t$ . Debido a la velocidad relativa  $\underline{v}$  del satélite,  $f_E$  se desplaza con respecto a  $f_s$  (cambio de frecuencia Doppler). Tenemos:

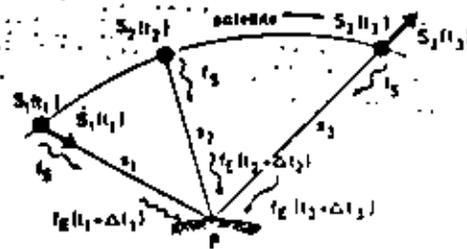


Fig. 4.40:  
Mediciones  
Doppler

$$(4.75) \quad f_s = f_s - \frac{f_s}{c} \dot{s}$$

donde  $\bar{c}$  es la velocidad media de las ondas electromagnéticas (4.31). El cambio de frecuencia

$$(4.76) \quad \Delta f = f_s - f_s = -\frac{f_s}{c} \dot{s}$$

es proporcional a  $\dot{s}$ ; en el instante de mayor acercamiento del satélite a la estación de observación ( $\dot{s} = \Delta f = 0$ ) ocurre un cambio en el signo de  $\Delta f$ .

La frecuencia  $f_s$  transmitida continuamente es amplificada por el equipo de recepción y comparada con una frecuencia de referencia constante  $f_0$ , la cual es generada por el receptor y se encuentra en la vecindad de  $f_s$ . Mediante un contador electrónico se integra la diferencia  $f_0 - f_s$  (frecuencia heterodina) sobre los intervalos de tiempo  $(t_2 + \Delta t_2) - (t_1 + \Delta t_1)$ , etc. Esto da:

$$(4.77) \quad s_2 - s_1 = \frac{c}{f_0} N_{12} - \frac{f_0 - f_s}{f_0} (t_2 - t_1)$$

De los resultados del contador (conteo Doppler)  $N_{12}$  y de la diferencia de tiempo  $t_2 - t_1$  se puede entonces calcular la diferencia de longitud.

Entre los satélites que transmiten frecuencias Doppler se encuentran los GEOS 1 y GEOS 2 ( $f_s = 162, 324, 972$  MHz), GEOS 3 (162, 324 MHz), y los satélites Transit (150,400 MHz). El Sistema de Satélites para Navegación Marina (SSM), que opera desde 1964 generalmente en base a 6 satélites Transit, fue instituido primordialmente para la navegación de barcos. Se hacen mediciones Doppler al satélite desde cuatro estaciones terrestres, obteniendo con ello la información para calcular los elementos de la órbita (4.4.1). Estas efemérides de satélite están referidas al datum geodésico (5.1.2) de las estaciones de rastreo (5.3.4). La información de la órbita, calculada para 12 horas de anticipación, se --

transfiere al satélite y allí se almacena. El satélite, a su vez, transmite una señal de tiempo y está "efemérides radiada" ( $\pm 10$  á  $\pm 20$ m) a intervalos de dos minutos. Después de recibida esta información, se puede determinar la posición del observador (5.3.4) con la ayuda del cálculo de las mediciones Doppler. 1 á 2 satélites Transit están continuamente observados por aproximadamente 20 estaciones que constituyen la red mundial de rastreo del Centro Naval de Armas de Superficie de E.U. -- (NSWC). Las resultantes "efemerides precisas" ( $\pm 2$  á  $\pm 3$ m) obtenidas por interpolación son posteriormente puestas a disposición de un limitado grupo de usuarios.

Los sistemas de recepción Doppler con fines geodésicos operan en forma estacionaria ó cada vez con más frecuencia, como unidades móviles (Brown 1976). Los sistemas portátiles (peso: 10 a 20 kg) consisten de un receptor con oscilador de referencia y (recientemente) microprocesadores; también están incluidos una grabadora de información (usualmente una cinta de casset magnética), una antena y un suministro de energía (pilas o una conexión a la red eléctrica).

Las mediciones Doppler están hechas cada 4.6s, 30s ó 2 min, con ayuda del oscilador interno. Después de eliminar las observaciones casi horizontales (debido a las incertidumbres en la refracción para ángulos cenitales  $> 70^\circ$  á  $80^\circ$ ) y las señales perturbadas, un sólo paso del satélite proporciona unas 10 á 15 mediciones Doppler utilizables (intervalo de integración: -- 30s). Con el NNSS y en las latitudes medias, se pueden observar en promedio tantos como 15 pasos aceptables por día.

Entre los instrumentos portátiles se encuentran el Geoceiver (Magnavox, Torrance, U.S.A.), Fig. 4.41, el CMA (Compañía Canadiense Macorní, Montreal) y la JMR (Inc. Inst. JMR, Chatsworth, Cal). Están diseñados para recibir las frecuencias del Transit y también parcialmente las de los satélites GEOS.

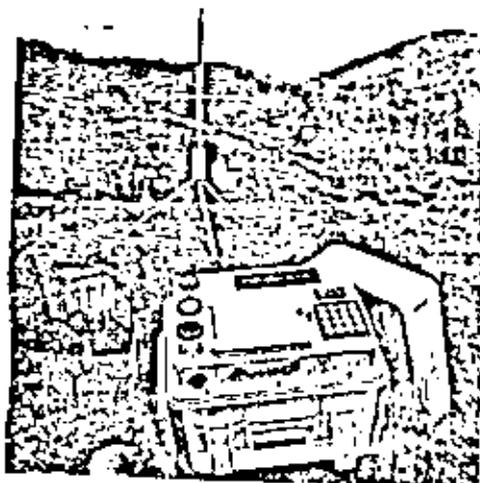


Fig. 4.41:  
Sistema de  
recepción  
Doppler portátil  
Magnavox 1502  
Geoceiver  
(Magnavox Co.,  
Torrance,  
California)

Las observaciones se deben de corregir por los errores sistemáticos del sistema de medición y de tiempo, al igual que por los efectos de la refracción. La refracción troposférica se calcula usando un modelo atmosférico, y de ser posible, también información meteorológica observada. Por el otro lado, la refracción ionosférica se determina recurriendo a dos frecuencias transmitidas (mediciones de distancias con microondas (4.4.5)). Las variaciones temporales en frecuencia generalmente se toman en cuenta en el ajuste, al introducir una frecuencia compensadora para cada paso.

La precisión de una sola diferencia de distancias está regulada por las incertidumbres en las mediciones de frecuencia y tiempo, así como por las influencias residuales de la refracción. El error casual de tal diferencia es de  $\pm 0.1m$ ; para las precisiones de las coordenadas de estación derivada; consultar (5.3.4).

Dicho en forma general, este método ha abierto las puertas a nuevas posibilidades en geodesia.

Una medición Doppler, como cualquier técnica que opera con ondas de radio, es independiente del clima y de la hora del día, de tal manera que se acumula una abundancia de información dentro de un corto intervalo de tiempo. El grabado digital de la información simplifica su procesamiento automático. Pero aún surgen dificultades al investigar los efectos de la refracción:

El Sistema de Posicionamiento Mundial NAVSTAR ha estado en desarrollo en E.U. desde 1975 (Lassiter y Parkinson 1977). En la etapa operacional final (planeada para 1987), 24 satélites de este sistema (4.4.3) van a proporcionar un cubrimiento mundial, de tal forma que para cualquier posición y a cualquier hora, habrá cuando menos cuatro satélites situados arriba del horizonte. Estos satélites transmiten los datos de su órbita y una señal de tiempo precisa ( $\pm 1 \times 10^{-13}$ ) en dos frecuencias (1.227, 1.575 GHz). Una comparación con el reloj de referencia del receptor conduce a la derivación de distancias y cambios Doppler, permitiendo con ello la determinación continua de las posiciones del observador.

#### 4.4.7 Observando la Luna Terrestre, Interferometría Radio Astronómica

Por mucho tiempo se ha intentado derivar los parámetros de la figura terrestre y su campo de gravedad de las mediciones de dirección a la Luna. Como resultado de la alta precisión de las mediciones a los satélites terrestres artificiales (4.4.4.), estas observaciones de la Luna, hoy día, han perdido su significancia.

Los reflectores laser depositados en la Luna (primero por la misión -- Apollo 11, en 1969, y después por Apollo 14, 15, y Luna 21/Lunakhod 2) sirven de blancos definidos con precisión para mediciones de distancias laser (4.4.5), Bender et. al (1973). Las observaciones se hacen con lasers pulsados que tienen un rayo muy compacto y un poderoso telescopio para recapturar la débil señal de regreso.

Se han llevado a cabo observaciones regularmente desde 1969 por el Observatorio Mc Donald, Univ. de Texas (telescopio de 2.7m, segunda generación de lasers con pulsaciones de rubí, una pulsación cada 3s.). También operan sistemas de medición laser lunar en Crimea, Francia y Hawaii; se encuentran en construcción sistemas adicionales.

Actualmente se obtiene una precisión en el tiempo de  $\pm$  1ns para el promedio de un número de mediciones sucesivas; esto corresponde a una precisión de  $\pm$  0.15m para una sola distancia. Al cambiar a longitudes de pulsación más cortas, se anticipan precisiones en el rango de los cm.

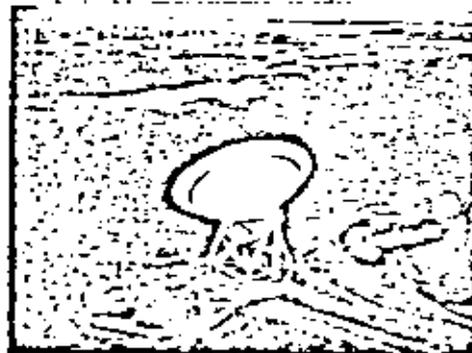


Fig. 4.42:  
Radio Telescópico  
Effelsberg  
(Instituto para  
Radioastronomía  
Max - Planck,  
Bonn.  
Fotografía aérea  
de Reg - Pras.  
Dusseldorf  
73/5602).

Fuentes de radio extragalácticas (quasars. = fuentes de radio cuasi estelares, radio galaxias) emiten ondas en el rango de los cm ó dm las cuales se detectan con las grandes antenas (radio telescopio, Fig. 4.42) que se usan en radio astronomía. Un sistema receptor (Fig. 4.43) consiste de dos radio telescopios  $P_1$  y  $P_2$  ampliamente separados (algunos 1000 km), y de esa forma tiene una alta resolución ( $= 0''.001$ ) debido a la base larga  $b$ .

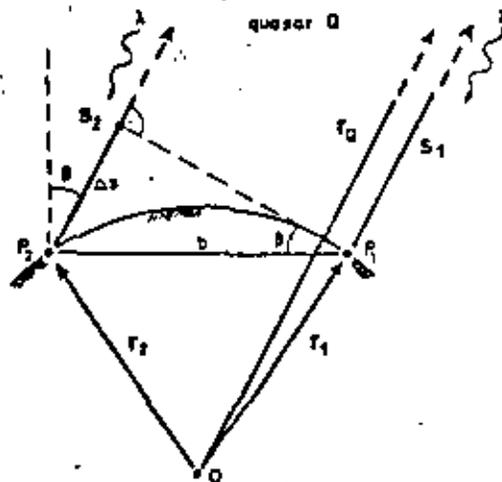


Fig. 4.43:  
Interferometría  
Radio astronómica

Las ondas de radio llegan a  $P_2$  con una diferencia de fase  $\Delta\varphi(t)$  con respecto a  $P_1$  (Moran 1975):

$$(4.78) \quad \Delta\varphi = 2\pi \frac{c}{\lambda} \tau = 2\pi\nu\tau.$$

Donde  $c$  es la velocidad de onda promedio  $\lambda$  ( $\nu$ ) es la longitud de onda (frecuencia de la señal recibida; y  $\tau$  es el retraso de tiempo que requiere la onda para viajar la distancia  $\Delta s$ :

$$(4.79) \quad \tau = \frac{\Delta s}{c}.$$

Comparando los dos trenes de ondas se obtienen las interferencias. Ya que  $\Delta\varphi$  cambia con el tiempo  $t$  como resultado de la rotación terrestre, las interferencias se registran como teniendo la frecuencia de borde

$$(4.80) \quad F = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\Delta\varphi)}{dt} = \frac{1}{\lambda} \frac{d(\Delta s)}{dt} = \nu \frac{d\tau}{dt}.$$

La integración entre  $t_1$  y  $t_2$  da:

$$(4.81) \quad \int_{t_1}^{t_2} F dt = \frac{1}{\lambda} (\Delta s_2 - \Delta s_1) = \frac{1}{\lambda} \Delta s_{12}.$$

Del tiempo de retraso  $\tau$  y la frecuencia de borde  $F$ , se puede derivar la cantidad  $\Delta s$  y su variación con el tiempo  $\frac{d\Delta s}{dt}$  de acuerdo a (4.79) y (4.81).  $\Delta s$  es una función de los vectores de posición de  $P_1$  y  $P_2$  (y con ello, de la base  $b$ ), al igual que la dirección al quasar (Fig. 4.43):

$$(4.82) \quad \Delta s = -(r_2 - r_1) \cdot \frac{r_0}{r_Q}.$$

Este método se conoce como Interferometría para Bases muy Largas (IBML). Debido a la gran distancia entre las antenas, no es posible una comparación directa de los trenes de ondas que llegan a  $P_1$  y  $P_2$ . Por lo tanto, las señales se graban en cinta magnética, junto con una señal de tiempo que es generada por los patrones de frecuencia en las estaciones respectivas. Las interferencias se recobran posteriormente con un correlador digital; un análisis de correlación proporciona el tiempo de retraso  $\tau$  y su variación en tiempo  $d\tau/dt$ , al igual que la frecuencia de borde  $F$  de las ecuaciones (4.79), (4.80). Se deben aplicar correcciones debido a las diferencias sistemáticas en los patrones de frecuencia y debido a las influencias de la atmósfera (cf. (4.4.5) ) y la aberración diurna (4.1.2). La precisión de este método depende de la medición del tiempo ( $\pm 1$  a  $\pm 0.1$  ns), la estabilidad del patrón de frecuencia ( $\pm 10^{-14}$  con el maser de hidrógeno en lugar del patrón de frecuencia de rubí), la habilidad para tomar en cuenta los efectos de la refracción, y la calidad de la correlación (Campbell y Witte 1978).

Hasta aquí, las distancias de varios 1000 km han sido determinadas con una precisión de  $\pm 0.2$ m. Se están desarrollando telescopios portátiles para medir eventualmente bases más cortas (de unos cuantos km a 100 km). En conjunción con un radio telescopio se logran precisiones del orden de los cm (Ong, et. al. 1976).

Como resultado de su alta precisión, las mediciones de distancia laser a la Luna y la radio interferometría pueden contribuir a la determinación de los procesos geodinámicos (po ej. movimiento polar (3.1), fluctuaciones rotacionales (4.1.5), mareas terrestres (2.4.2), movimientos de la corteza terrestre (5.5.5) ).

#### 4.4.8 Altimetría de Satélites

El método de altimetría de satélite (Argentiero et. al 1974), está basado en un altímetro colocado en un satélite que transmite pulsaciones radar en la dirección vertical a la superficie terrestre. Estos son reflejados perpendicularmente por la superficie del océano (Fig. 4.44). Entonces de acuerdo a (4.44), una medición del tiempo de propagación proporciona la altura  $h_2$  del satélite sobre la superficie marina instantánea.



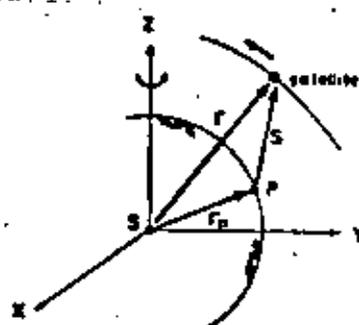


Fig. 5.18:  
Posición  
Geocéntrica y  
Topocéntrica  
del satélite

topocéntrico  $s$  del satélite, su <sup>radio</sup> vector geocéntrico  $r$ , y el vector geocéntrico  $r_p$  de la estación es (Fig. 5.18):

$$r_p + R s - R r = 0. \quad (5.96)$$

Aquí, a diferencia de las observaciones de las estrellas en la astronomía geodésica, el topocentro y el geocentro no deben igualarse. Los vectores  $s$  y  $r$  presentados en el sistema ecuatorial  $\alpha, \delta$  fijo al espacio (4.1.1) han sido transformados en (5.96) al sistema  $X, Y, Z$ , fijo a la Tierra (3.1) mediante una rotación a través del ángulo de tiempo sidéreo de Greenwich  $\Theta_0$  (ver Fig. 4.34). La rotación  $R$  está dada por:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \Theta_0 & \sin \Theta_0 & 0 \\ -\sin \Theta_0 & \cos \Theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.97)$$

El vector observado  $s$  está formado por la distancia espacial  $s$  (4.4.5) y las direcciones topocéntricas  $\alpha^*, \delta^*$  (4.4.4):

$$s = s e = s \begin{pmatrix} \cos \alpha^* \cos \delta^* \\ \cos \alpha^* \sin \delta^* \\ \sin \alpha^* \end{pmatrix}. \quad (5.98)$$

El vector geocéntrico  $r$  está determinado de acuerdo a (4.73) por los elementos orbitales en la época  $t_0$ , el tiempo  $t$  y los parámetros del campo gravitacional terrestre:

5.3 Métodos de Geodesia de Satélites. 232

(5.99)  $r = r(a_p, e_p, \Omega_p, i_p, \omega_p, \dot{\Omega}_p, GM, J_2, K_{1-4})$

El punto de observación P y el satélite S tienen componentes:

(5.100)  $r_p = \begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{pmatrix}, Rr = \begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{pmatrix}, Rr - r_p = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$

en el sistema fijo a la Tierra.

Si sustituimos (5.98) en (5.96), entonces para el vector direccional (vector unitario) tenemos:

(5.101)  $e = \frac{1}{s} (r - R^{-1} r_p)$

Eliminando la distancia s y usando (5.100) se obtienen las direcciones:

(5.102)  $\alpha^* = \arctan \frac{\sin \Theta_u \Delta X + \cos \Theta_u \Delta Y}{\cos \Theta_u \Delta X - \sin \Theta_u \Delta Y}, \alpha^* = \arctan \frac{\Delta Z}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}}$

Para la distancia s, encontramos que:

(5.103)  $s = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$

Finalmente, la diferencia en distancias a los puntos de satélite S<sub>1</sub> y S<sub>2</sub> (4.77) es de:

(5.104)  $s_2 - s_1 = \sqrt{(X_2 - X_p)^2 + (Y_2 - Y_p)^2 + (Z_2 - Z_p)^2} - \sqrt{(X_1 - X_p)^2 + (Y_1 - Y_p)^2 + (Z_1 - Z_p)^2}$

Las ecuaciones de observación (5.102) hasta (5.104), proporcionan la relación entre las cantidades observadas y las coordenadas de la estación y el satélite.

Para el ajuste, las ecuaciones de observación se linealizan mediante una expansión en serie. Los valores aproximados necesarios se obtienen de las coordenadas geodésicas de las estaciones, de la órbita calculada del satélite, y de valores previamente determinados para los parámetros del campo gravitacional. Si la posición del satélite se representa por (5.99) entonces hay seis parámetros orbitales desconocidos y un número infinito ( $\infty$ ) de coeficientes armónicos

### 5. Geodesia Global.

desconocidos. Posiblemente podrían intervenir parámetros adicionales que describen otros campos de perturbación gravitacional y no-gravitacional. -- (4.4.2). Aún limitando ~~necesariamente~~ la expansión armónica esférica del campo gravitacional a un grado bajo, permanece como problema la determinación completa de muchas cantidades heterogéneas desconocidas. Las soluciones se formulan más fácilmente, si antes del ajuste, se pueden eliminar algunas de las incógnitas. ~~Los métodos en ajuste, pueden eliminar algunas de las incógnitas.~~ Los métodos en (5.3.2) hasta (5.3.4) están basados en este procedimiento.

La ecuación de observación (5.103) también es válida para mediciones de distancia laser a la Luna (4.4.7). Las coordenadas de la Luna se toman de la efemérides correspondiente (Efemérid <sup>es</sup> Astronómica); donde es necesario tomar en cuenta la -- distancia entre el reflector y el centro de la Luna. Se deben introducir correcciones en el proceso de ajuste a los parámetros de la órbita de la Luna y a las lib<sup>3</sup> raciones físicas (oscilaciones de la Luna alrededor de su centro de masa) (Stolz 1975). La ecuación de observación (4.82) es útil en interferometría radio-astronómica. El ajuste -- proporciona las diferencias de las coordenadas -- geocéntricas de la base y posiblemente las correcciones a las direcciones de las fuentes de radio

(Arnold 1974 b).

### 5.3.2

#### Métodos Geométricos.

En los métodos geométricos de la geodesia de satélites, el satélite se considera como una señal visible, de vuelo alto y por consiguiente trascendente ; el conocimiento de su órbita se requiere únicamente para situar el satélite. Se efectúan observaciones simultáneas al satélite desde dos o más estaciones. Las posiciones desconocidas del satélite se pueden eliminar en las ecuaciones de observación (5.102)-(5.104); los únicos parámetros restantes son las coordenadas de las estaciones.

Como generalmente existe un gran número de mediciones para cada paso del satélite, es apropiado reducirlas a una época común. De esta manera, se puede lograr una sincronización de las observaciones que se hicieron en las diversas estaciones. Se hace un alisamiento espacial basado en el hecho que todas las mediciones están referidas a la misma trayectoria orbital. Aquí, las coordenadas del satélite para un paso se representan por expansiones en serie como funciones del tiempo. Para arcos cortos, la órbita se puede considerar como invariable; entonces los seis elementos orbitales (4.4.1) del satélite intervienen como incógnitas adicionales (método de arco corto) (Wolf 1967 a) (Schwarz 1969).

Se obtienen soluciones óptimas si en la construcción

de las redes de satélite espaciales se toman en cuenta mediciones simultáneas de dirección, distancia y diferencia de distancias (Campbell et. al. 1973). Entonces, las diversas cantidades observadas se complementan entre ellas.

Las mediciones de direcciones proporcionan la forma de la red, y en combinación con las mediciones del tiempo, la orientan en un sistema global geocéntrico (Moritz 1970 a). Las direcciones espaciales  $e_{11}$ ,  $e_{21}$ ,  $e_{12}$ ,  $e_{22}$  se determinan de mediciones simultáneas en  $P_1$  y  $P_2$  a las posiciones del satélite  $S_1$  y  $S_2$  (Fig. 5.19). Entonces se establece el punto  $P$  en una red mediante las direcciones a  $S_1$  y  $S_2$ . Los ángulos de intersección de las direcciones no debe ser muy agudo para una determinación eficaz del punto.

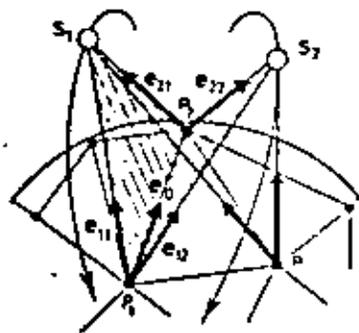


Fig. 5.19  
Mediciones de direcciones simultáneas, triangulación de satélites.

Las direcciones entre las estaciones terrestres se pueden entonces derivar de las direcciones al satélite. Los vectores unitarios  $e_{11}$ ,  $e_{21}$ ,  $e_{12}$ ,  $e_{22}$  forman los planos  $P_1S_1P_2$  y  $P_1S_2P_2$ , los cuales están definidos por sus vectores unitarios --

normales:

(5.105)

$$n_1 = \frac{e_{11} \times e_{21}}{|e_{11} \times e_{21}|}, \quad n_2 = \frac{e_{21} \times e_{11}}{|e_{11} \times e_{21}|}$$

Los planos se intersectan en la línea  $P_1P_2$  cuyo vector unitario es:

(5.106)

$$e_0 = \frac{e_1 \times e_2}{|e_1 \times e_2|}$$

Combinando tales direcciones espaciales para obtener una red de triangulación de satélites, se pueden construir redes de control global o continental, en las cuales los puntos están separados por 500 a 4000 km.

Mediciones de distancias al satélite proporcionan la escala de la red espacial. Las mediciones de distancias simultáneas  $s_{11}$ ,  $s_{21}$  y  $s_{31}$  desde las tres estaciones terrestres  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  determinan la posición del satélite  $S_1$  el cual está situado en la intersección de las tres esferas correspondientes (Fig. 5.20). El punto P en tal red de distancias (trilateración de satélite, Blaha 1971) se determina mediante mediciones simultáneas a tres posiciones de satélite  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Para obtener intersecciones favorables, las posiciones del satélite no deben estar en el mismo plano orbital. La incorporación de distancias en una triangulación de satélite mejora, en particular, la de terminación de alturas de las estaciones terrestres.

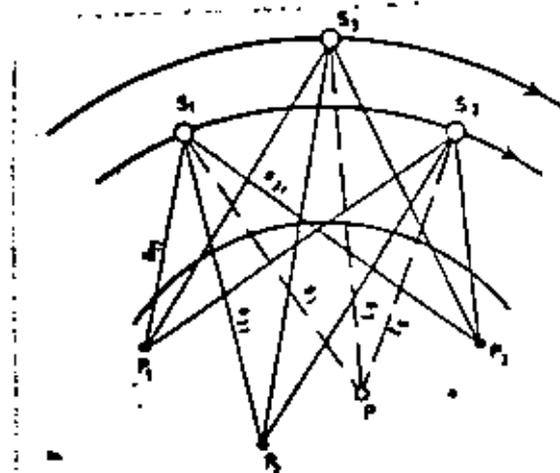


Fig. 5.20:  
Mediciones  
simultáneas  
de distan--  
cias

De las mediciones simultáneas de diferencias de distancias se obtiene la posición de una estación como intersección de tres hipérbolas, teniendo cada una sus puntos focales en dos posiciones del satélite. Se requiere un mínimo de cuatro puntos de control y cuatro posiciones de satélite para determinar un punto nuevo mediante observaciones simultáneas. Las observaciones deben extenderse sobre varios pasos del satélite. Este método muy económico incrementa considerablemente la precisión de una red puramente direccional. Generalmente se aplica independientemente en la determinación de posiciones (5.3.4).

La fixación espacial de la red de satélite con respecto al centro de masa terrestre permanece desconocido en el método de análisis geométrico.

La triangulación espacial se originó con Y. Väisälä (1946) quien introdujo la triangulación estelar con la ayuda de globos como ~~estrellas~~ elevadas. La

### 5.3 Métodos de Geodesia de Satélites.

Red Mundial del Levantamiento Geodésico Nacional en los E.U. (anteriormente Levantamiento Geodésico y Costero de E.U.) se formó mediante triangulaciones estelares geométricas bajo la dirección de H. H. Schmid (Fig. 5.21). Contiene 45 estaciones con una separación entre estaciones de 4000 á 4500 km, y distribuidas sobre la superficie terrestre lo más uniformemente posible. Las observaciones se hicieron de 1966 á 1970 con las cámaras Wild BC 4 al satélite de globo Pageos. La escala se obtuvo de siete bases de 1200 á 3500 km de largo que se midieron en poligonales con geodímetros y telurómetros. Están situadas en Norteamérica, Australia, Africa y Europa. La incertidumbre de escala media de la red es de  $\pm 5 \times 10^{-7}$ , el error medio de las coordenadas es de  $\pm 4.5$  m (Schmid 1974). En América del Norte y Europa se construyeron redes de densificación continental (estaciones con aproximadamente 100 km de separación, más densas en partes de Europa). Están interconectadas mediante estaciones en Groenlandia e Islandia.

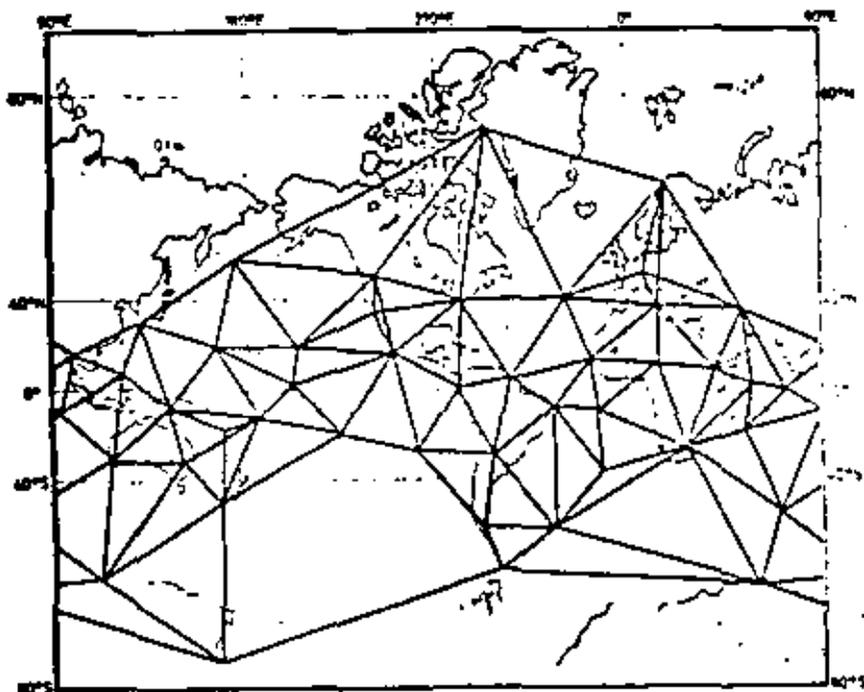


Fig. 5.21:  
Red geométrica  
global de saté-  
lites del Le-  
vantamiento  
Geodésico Na-  
cional de E.U.  
según H. H. -  
Schmid (1974).

De acuerdo al método Secor (4.4.5), el Servicio de Mapas del Ejército de E.U. levantó una red que se extendió sobre las regiones ecuatoriales; debido a control direccional insuficiente, la incertidumbre de posición de las aproximadamente 40 estaciones de  $\pm 25$  a  $\pm 30$ m.

El Departamento de Ciencias Geodésicas de la Universidad Estatal de Ohio instituyó un ajuste comprendido (método geométrico) de las mediciones de direcciones y distancias (Secor) de diversas organizaciones (OSU WN14). El error medio en las coordenadas de las 158 estaciones fue de  $\pm 3.9$  m -- (Mueller 1974).

## 5.3.3

## Método Dinámico - Armónicas de Zona.

En el método dinámico de la geodesia de satélites, el satélite está considerado como un sensor que se desplaza en el campo gravitacional de la Tierra (Sigel y Groten 1966/69). Entonces las ecuaciones de observación contienen todas las incógnitas mencionadas en (5.3.1). Para reducir su cantidad, se puede tratar por separado la determinación de los coeficientes armónicos de zona  $J_n$  (2.3.3). O sea que, las partes zonales del potencial gravitacional causan primordialmente perturbaciones seculares y de períodos largos; mientras que, los términos teselas dependientes de la longitud, en general, solamente originan perturbaciones de períodos cortos. Si se integra sobre una revolución  $U$ , entonces las perturbaciones que varían con los períodos  $U, 2U, \dots$  se eliminan. Aún más; para tiempos de integración de intervalos más largos, la influencia de las coordenadas de la estación es tan pequeña, que pueden introducir como cantidades conocidas.

Para poder derivar la relación entre las perturbaciones de los elementos orbitales y los coeficientes armónicos de zona, nos olvidamos de los términos zonales en la expansión armónica esférica del potencial de perturbación  $R'$  (4.71). La integración de las ecuaciones de movimiento (4.72) sobre una revolución del satélite proporciona los cambios en los elementos orbitales como funciones de las armónicas de zona. Los términos principales de esta expansión están dados -

para los elementos de interés  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $e$ ,  $i$  mediante:

$$\Delta\Omega = -3\pi \left(\frac{a^2}{p}\right)^2 \cos i J_2 + \dots$$

$$\Delta\omega = 6\pi \left(\frac{a^2}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right) J_2 + \dots$$

$$\Delta e = -3\pi(1-e^2) \left(\frac{a^2}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right) \sin i \cos \omega J_2 + \dots$$

$$\Delta i = 3\pi \left(\frac{a^2}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{5}{4}\sin^2 i\right) \cos i \cos \omega J_2 + \dots$$

with

$$p = a(1-e^2)$$

(5.107)

Donde, el semieje mayor del elipsoide se designa por  $a_E$  para distinguirlo del semieje mayor de la órbita del satélite.

$J_2$  y los coeficientes de zona pares mayores causan perturbaciones seculares  $\Omega$  y  $\omega$ . Para  $i < 90^\circ$ ,  $\Omega$  decrece en tiempo (regresión de la línea nodal). El cambio en  $\omega$  corresponde a una rotación de la elipse orbital en el plano orbital (ver Fig. 4.34). Esta rotación produce perturbaciones de períodos largos en las cantidades  $e$ ,  $i$ ,  $\bar{p}$  porque estas contienen  $\omega$ . De esta manera,  $\omega$  está relacionada a los coeficientes de zona nones. Las zonales pares se pueden determinar de las perturbaciones en  $\Omega$  y  $\omega$ ; mientras que las zonales nones se obtienen de las perturbaciones en  $i$  y  $e$ . Las perturbaciones orbitales para intervalos de tiempo más largos se calculan integrando (5.107), donde la unidad de tiempo es una revolución del satélite. Si estas perturbaciones se suman a los elementos orbitales en la época inicial, entonces se obtienen elementos orbitales en el tiempo deseado, como funciones de las armónicas de zona. Substituyendo en (5.96) se obtiene entonces un sistema de ecuaciones para la determi

nación de las armónicas de zona. Los coeficientes de las armónicas, de acuerdo a (5.107), dependen particularmente de la inclinación orbital  $i$ , y también en la excentricidad  $e$  y del semieje mayor  $a$ . Por eso, para poder obtener ecuaciones independientes, deben usarse para satélites cuyos <sup>correspondientes</sup> elementos orbitales  $i$ ,  $e$  y  $a$  no son los mismos.

Las fuentes de error en la determinación de las  $J_n$  surge de la elección del grado máximo de la expansión armónica esférica y debido a la insuficiente variación de los elementos orbitales. Como resultado de la correlación mutua entre los  $J_n$ , los coeficientes de grado superior están sujetos a cambios más significativos en el caso de expansiones de orden superior. Gaposchkin (1974), entre otros, hizo los cálculos para las armónicas de zona hasta  $n = 23$ . Los mejores valores estimados (1979) para las armónicas más bajas son (Moritz 1979):

$$J_1 = 1082.63 \times 10^{-8}, J_2 = -2.54 \times 10^{-8}, J_3 = -1.62 \times 10^{-8}, \\ J_4 = -0.23 \times 10^{-8}, J_5 = 0.55 \times 10^{-8}.$$

La incertidumbre de estos valores es de aproximadamente  $\pm 1 \times 10^{-8}$ .  $J_3$  representa el hecho que la masa está asimétricamente distribuida con respecto al ecuador. Esto corresponde a una elevación de 16m en el polo norte del geoide y a una depresión similar en el polo sur.

punto y  
oparte

## Método Dinámico - Armónicas Teselas y

5.3.4

## Coordenadas de Estación.

Las funciones armónicas teselas son las responsables de perturbaciones de amplitudes corta (algunos 100m), y períodos cortos (período  $\leq 1$  día,  $\delta \leq 1$  revolución) en los elementos orbitales  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$ . Por eso, nada más se pueden determinar de observaciones suficientemente rápidas, consecutivas y precisas de varios satélites y en estaciones bien distribuidas. Aquí, las mediciones Doppler son particularmente apropiadas, siendo casi independientes del clima. En el análisis, las desviaciones de las coordenadas de estación que se usan de sus coordenadas geocéntricas reales no deben menospreciarse; también, los otros campos de perturbación deben eliminarse con cuidado. Con las ecuaciones (5.102) á (5.104), los resultados del ajuste proporcionan las coordenadas geocéntricas de las estaciones de rastreo, los elementos orbitales en la época inicial, y los coeficientes armónicos.

La constante gravitacional geocéntrica GM (5.4.4) y los coeficientes armónicos de zona generalmente se toman como cantidades libres de error. De esta manera, GM y la velocidad angular media del satélite determinan, mediante (4.66), el semieje mayor de la elipse orbital, y con ello, la escala del sistema. De GM y los coeficientes armónicos,

se puede derivar una representación global de las anomalías de gravedad (5.54) y el geoide (5.55).

Con la ayuda del fenómeno de resonancia se puede determinar algunos términos no-zonales de orden superior. O sea, si la relación de la velocidad angular media del satélite (4.66) a la velocidad rotacional de la Tierra es un número entero, entonces fácilmente se puede observar la amplificación resultante debido a la resonancia en las perturbaciones orbitales. Han sido desarrolladas redes de satélite globales por el Observatorio Astrofísico Smithsonian (O A S) (alrededor de 20 estaciones; particularmente mediciones de dirección óptica y de distancia laser) por el Centro de Vuelos Espaciales Goddard-NASA (CVESG) (más que 100 estaciones; direcciones, así como mediciones de distancias laser y radar, Smith et al. 1976), y por la Marina de E.U. - el Tranet o Red de Satélites de Navegación de la Marina (aproximadamente 20 estaciones permanentes y más o menos 200 estaciones móviles; mediciones Doppler). Los parámetros de los modelos terrestres que han sido derivados de estos sistemas usualmente se calculan incorporando también datos de anomalías de gravedad terrestre (5.4.2). Son soluciones puramente de satélite el Modelo Terrestre Goddard GEM 7 (cámara, laser, radar e información Doppler; expansión armónica completa hasta  $n, m = 16, 16$ ; Wagner et. al. 1977) y Gem 9 (-20% de mediciones laser,  $n, m = 20, 20$ , Lerch et. al 1979), y el sistema del Laboratorio Naval de Armas de E.U., NWL (ver abajo). Finalmente mencionaremos la Red del Espacio Profundo del Laboratorio de Propulsión Jet.

### 5. Geodesia Global.

Consiste de 8 estaciones distribuidas globalmente que hacen mediciones Doppler a cohetes espaciales. De estas observaciones se puede determinar GM -- (5.4.4), la distancia de la estación al eje de rotación terrestre, y la diferencia de longitud entre estaciones.

Si de las determinaciones orbitales continuas se conoce la órbita del satélite, entonces se pueden derivar las coordenadas geocéntricas de un observador a partir de observaciones hechas únicamente desde su estación. La precisión de posición obtenible está con ello limitada por la precisión de la órbita calculada.

Ya durante el Año Geofísico Internacional 1957/58, se intentó determinar las coordenadas geocéntricas de las estaciones a partir de mediciones de direcciones óptico-fotográficas (4.4.4) a la Luna, ver Fig. 5.19. Debido a la incertidumbre en las coordenadas a la Luna y la reducción de los puntos de superficie observados al centro de la Luna, la precisión que se podía obtener en las coordenadas fue de + 50m (Markowitz 1958).

En gran parte las determinaciones de posición en el Sistema de Satélites para la Navegación de la Marina (NNSS), hoy día, se hacen con mediciones Doppler (4.4.6) usando receptores portátiles. En este caso, la órbita del satélite está dada ya sea

### 5.3 Métodos de la Geodesia De satélite.

por la "efemérides precisa" (disponibilidad limitada) o por la "efemérides radiada", la cual es diseminada por el satélite. La primera actualmente se refiere al sistema NWL - 9D (la incertidumbre de coordenadas de la estación de rastreo es  $\pm 1.5\text{m}$ ; el desplazamiento del origen de las coordenadas del centro de masas terrestre es de  $1\text{m}$ ; y el "sesgo" de la escala es de  $1 \times 10^{-6}$ ; Anderle 1974); mientras que la segunda efemérides se refiere al sistema WGS 72 del Departamento de Defensa de E.U. (solución combinada (5.4.2), Seppelin 1974).

La precisión del posicionamiento Doppler depende especialmente del número de pases útiles del satélite (la precisión se incrementa hasta aproximadamente 30 a 50 pases) y del modelo que se use en la evaluación. La observación de un solo pase ya permite (conocida la altura de la estación) una estimación bi-dimensional  $(\phi, \lambda)$  de la posición de la estación con una precisión de  $\pm 20$  a  $\pm 50\text{m}$ . La determinación tri-dimensional de puntos individuales da precisiones de  $\pm 3$  a  $\pm 5\text{m}$  (efemérides radiadas 30 a 50 pases, correspondiente a 2 a 4 días de observaciones en las latitudes medias) y de  $\pm 1\text{m}$  (efemérides precisa); estas determinaciones están referidas al sistema de satélite respectivo. Las mediciones simultáneas de cuando menos dos estaciones (trans-localización) proporcionan diferencias de coordenadas que en gran parte están libres de error en la órbita y de fuentes de error atmosféricas. Se obtiene

## 5. Geodesia Global.

una precisión de  $\pm 1$  m (efemérides radiada) para distancias que no son muy grandes (algunos 100km á 1000km); parece ser posible un incremento al alcance-dm (Kouba 1976, Seeger et. al. 1979). La evaluación se puede refinar incluyendo correcciones orbitales en cada paso (método de arco corto (5.3.2)). Mientras que, los cálculos para una sola estación se pueden hacer en el campo con una calculadora pequeña, los ajustes de la red requieren de un gran sistema de computación; -- Brown (1976), Wells et. al. (1976).

### Combinación de los Métodos Geométrico y Dinámico.

5.3.5

El método geométrico proporciona las coordenadas de la estación de rastreo con gran precisión en un sistema cuyos ejes son paralelos al sistema geocéntrico. Por el otro lado, el método dinámico da coordenadas geocéntricas. Sin embargo, éstas son menos precisas debido a las numerosas incógnitas en el problema, particularmente aquellas de los campos de perturbación no-gravitacionales que son difíciles de representar. Aún más, existe la correlación desventajosa entre las incógnitas. Por eso, las coordenadas de la estación dependen del grado máximo en la expansión armónica esférica del potencial gravitacional.

Mediante una combinación de los métodos geométrico y dinámico, el sistema geométrico se centra -

5.3 Métodos de la Geodesia de Satélites.

en el centro de masa terrestre y se disminuye la dependencia entre las coordenadas de la estación y los parámetros del campo gravitacional. Este procedimiento, además, permite una comparación entre la escala del sistema geométrico (mediciones de distancia) y la del sistema dinámico (constante gravitacional geocéntrica). Los resultados de ambos métodos se combinan al sumar los dos sistemas de ecuaciones normales. Otra alternativa consiste en introducir las diferencias de coordenadas de la solución geométrica como una observación adicional en el ajuste de la solución dinámica (Koch y Pope 1972 b).

Las ecuaciones normales obtenidas de los métodos dinámico y geométrico se combinaron para la Tierra III -- Standard - SAO (5.4.2). La red mundial geométrica del Levantamiento Geodésico Nacional de E.U. (5.3.2) fue centrado usando las coordenadas de 37 estaciones -- Tranet (5.3.4) según se determinaron mediante mediciones Doppler (error medio de las coordenadas  $\pm 3.7m$ ); - Schmid (1974).

5.3.6

Análisis de Altimetría de Satélite

La altimetría de satélite (4.4.8) proporciona la distancia perpendicular  $h_a$  entre el satélite y la superficie instantánea del océano (Fig. 4.44). Esta información se puede analizar para una determinación geométrica de la topografía de la superficie del océano y del geoide (3.3.3), al igual que para obtener los

## 5. Geodesia Global.

detalles del campo de gravedad (Arnold 1974 a).

De la Fig. 4.44 se pueden derivar las siguientes ecuaciones de observación (Gopalapillai 1974):

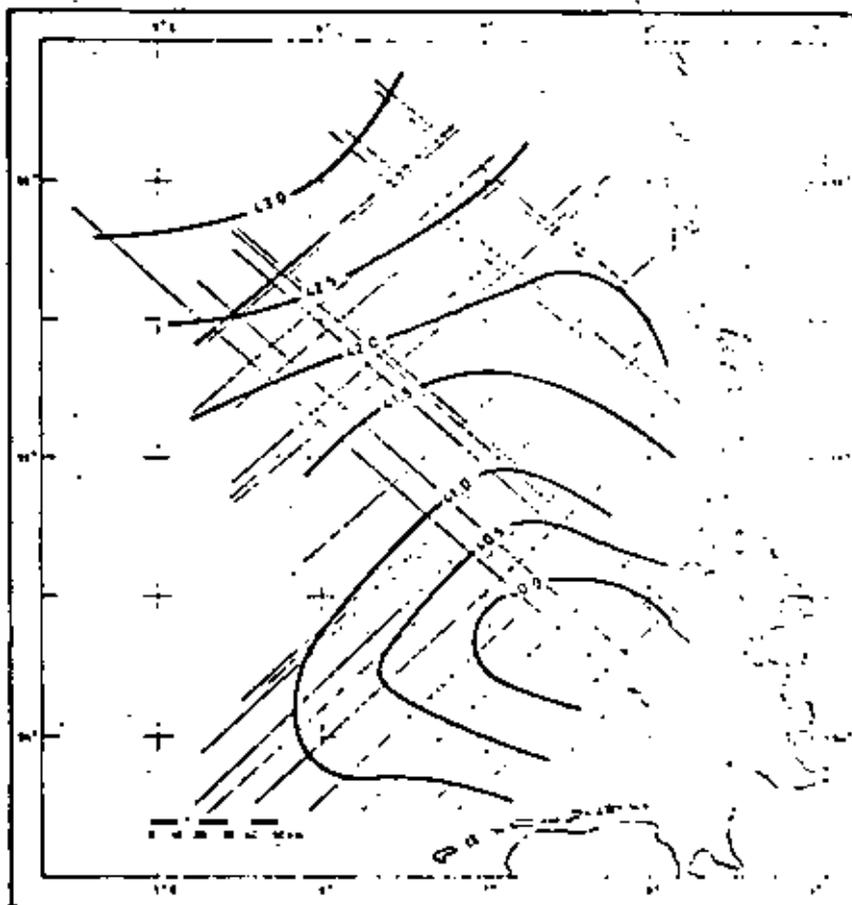
$$h_s = r - r_p + \frac{r}{8} \left(1 - \frac{r_p}{r}\right)^2 \sin^2 2\varphi - (N + \delta h_s) \quad (5.108)$$

En esta ecuación la distancia geocéntrica  $r$  al satélite se determina rastreando al satélite (calculando su órbita). La distancia  $r_p$  al punto subsatélite está dada por (3.18) y (3.19),  $e$  es la primera excentricidad (3.12) y  $\delta h_s$  representa la diferencia en la superficie del mar instantánea y la cuasi-estacionaria (3.3.3). La ecuación (5.108) proporciona entonces la separación  $(N + \delta h_s)$  entre el nivel medio del mar y el elipsoide. Para aislar la ondulación del geoide  $N$  ( $\leq 100\text{m}$ ) de la topografía de la superficie del mar cuasi-estacionaria  $\delta h_s$  ( $\leq 1 \dots 2\text{m}$ ) se requiere información oceánica adicional. Para obtener una precisión en altimetría de  $\pm 1\text{m}$  (misión GEOS 3 (4.4.3)), generalmente se puede despreciar esta diferencia.

La orientación y escala del "geoide de altimetría" se determinan mediante la efemérides del satélite. Por ello, dependen particularmente del modelo gravitacional que se usa para calcular la órbita. La escala también está afectada por los errores de calibración sistemáticos del altímetro. Cubriendo ~~varias veces~~ la misma área del océano varias veces con perfiles altimétricos, los pases individuales se pueden mejorar mediante correcciones orbitales

(ver (5.3.2)) y combinar aplicando imposiciones a los puntos que atraviesan el perfil (Fig. 5.22), Monka (1978). Este geode relativo se orienta en forma absoluta usando las ondulaciones que se determinan gravimétricamente (5.2.3) ó a través de observaciones de satélite (5.3.4) (Fubara y Mourad 1974).

Fig. 5.22:  
Trayectoria  
del GEOS 3 y  
Geoide Alti-  
métrico de la  
bahía alemana,  
elipsoide:  
 $a = 6378140$  m.  
 $f = 1/298.257$   
según Monka  
(1978)



Mediante la inversa de la fórmula de Stoke (5.39), se usa la ondulación del geode  $N$  para calcular las anomalías de gravedad  $\Delta g$  (Leigemann 1976). En una aproximación esférica ( $R =$  radio de la Tierra,  $\gamma_m =$  valor promedio de la gravedad), tenemos:

(5.109)

$$\Delta g_p = -\frac{\gamma_m}{R} N_p - \frac{\gamma_m}{16\pi R} \iint \frac{N - N_p}{\sin^2 \psi} d\sigma$$

donde  $N$  es la ondulación del geode en un elemento de superficie particular  $d\sigma$  de la esfera unitaria  $\sigma, \psi$  e

## 5. Geodesia Global.

es la distancia esférica entre el punto de observación y el punto de cálculo.

El procedimiento de cálculo en la práctica reemplaza a la integración por una suma sobre compartimientos finitos, ver (5.2.3). Debido a la rápidamente decreciente influencia de las ondulaciones al incrementar  $\psi$ , a las zonas remotas se les pueden asignar valores aproximados para  $N$ , por ejemplo, aquéllos que se obtuvieron de una expansión global armónica (5.4.2). La disponibilidad de información de altimetría de "integrada" sobre bloques de  $1^\circ \times 1^\circ$  y con una precisión de  $\pm 1\text{m}$  conduce a la recuperación de anomalías de aire-libre medias con precisiones de  $\pm 4 \times 10^{-5} \text{ms}^{-2}$  ( $5^\circ \times 5^\circ$ ) y  $\pm 11 \times 10^{-5} \text{ms}^{-2}$  ( $1^\circ \times 1^\circ$ ) (Rapp 1975 b). Estos resultados, a su vez, se pueden aplicar en las fórmulas integrales del método gravimétrico (5.2.3). De la misión GEOS 3 (1975-1978), se calculó un altímetro para la mayor parte de los océanos, entre los paralelos  $65^\circ$  de latitud (Rapp 1979). Mientras que la discrepancia, r.m.c., del perfil transversal es de  $\pm 0.5\text{m}$ , el geóide oceánico predicho (retícula de  $1^\circ$ ) tiene una precisión promedio de  $\pm 1\text{m}$ . De la información altimétrica se han derivado anomalías de aire-libre de  $1^\circ \times 1^\circ$  con una precisión promedio de  $\pm 8 \times 10^{-5} \text{ms}^{-2}$ .

5.4

## MÉTODOS DE EVALUACIÓN COMBINADOS

La clasificación de los métodos de análisis geodésicos en los métodos astrogeodésicos, gravimétricos y de satélite está motivada por las técnicas de observación y los desarrollos históricos. Los métodos se distinguen de acuerdo a sus capacidades.

Los métodos astrogeodésicos (5.1) proporcionan coordenadas espaciales de puntos de superficie y la estructura detallada del geode continental. La precisión local es alta; en distancias más largas, la precisión se reduce por las influencias sistemáticas que afectan la orientación y la escala. Los sistemas están referidos a sus datums geodésicos respectivos; sin embargo, sus ejes generalmente son paralelos o aquellos del sistema geocéntrico ( $+ 0''2 \dots + 1''$ ). El origen puede desviarse por varios 100 m del centro de masa terrestre. Los métodos gravimétricos (5.2) proporcionan el geode y las coordenadas referidas al centro de masa, por lo que la escala se puede determinar sólo aproximadamente. Debido al conocimiento insuficiente de los detalles del campo de gravedad, las coordenadas y la estructura total del geode, en la actualidad, están sujetas a incertidumbres mayores. Los métodos de la geodesia de satélite (5.3) proporcionan el campo gravitacional y las coordenadas espaciales en un sistema geocéntrico o en un sistema paralelo a él. La resolución está limitada por la altura del satélite a varios 100 km.

## 5. Geodesia Global.

Al combinar estos métodos, se explota en forma más completa el contenido de la información de los datos, mientras que se pueden detectar y eliminar los errores sistemáticos. Se obtienen soluciones combinadas al analizar colectivamente los datos heterogéneos (una gran cantidad) o combinando los resultados obtenidos por los varios métodos. Las soluciones se pueden limitar a problemas específicos o puede intentar incorporar óptimamente toda la información en un modelo común.

### Nivelación Astrogravimétrica.

5.4.1

La nivelación astrogravimétrica, desarrollada por Molodenski, combina los métodos astrogeodésicos y gravimétrico para una determinación detallada del geoide y del cuasigeoide. Resuelve el problema de interpolar las deflexiones de la vertical (5.1.6) mediante la incorporación de datos gravimétricos (Molodenskii et. al. A 1962, --- Campbell 1971).

Empezamos con las anomalías de altura  $\zeta$  / <sup>(5.27)</sup> niveladas astronómicamente, usando esta vez, las deflexiones de superficie de la vertical  $\epsilon^N$ , definidas por Molodenski. Si se combina (5.27) con las deflexiones de la vertical gravimétricas (5.79) y se restringe el área de integración B a aproximadamente tres veces la distancia entre los puntos de las deflexiones determinadas astrogeodésica-

## 5.4 Métodos de Evaluación Combinados.

mente, entonces se obtiene:

$$(5.110 \text{ a}) \quad \Delta\zeta_{12} = \zeta_2 - \zeta_1 = -\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2} + GK$$

donde la corrección gravimétrica es:

$$(5.110 \text{ b}) \quad GK = \frac{R}{4\pi\gamma_m} \iint_B \Delta\kappa' S(\psi_1, \psi_2) dB$$

y la función Stokes está dada por:

$$(5.110 \text{ c}) \quad S(\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{\psi_1} - \frac{2}{\psi_1} - \frac{2}{R} \left( \frac{\cos \psi_1}{\psi_1^2} + \frac{\cos \psi_2}{\psi_2^2} \right)$$

Donde  $\Delta\kappa'$  es la anomalía de aire-libre (5.74) modificada por una reducción de terreno (5.71); esta cantidad corresponde a la expresión  $\Delta\kappa + G_1$  en (5.78) (Moritz 1968 c).  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son las distancias angulares del elemento de superficie  $dB$  a los puntos  $P_1$  y  $P_2$  en los cuales se obtuvieron las deflexiones. Las direcciones de  $P_1$  y  $P_2$  a  $dB$  contadas a partir de la línea que une  $P_1$  y  $P_2$  están indicadas por  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , respectivamente.

De (5.27) y (5.24), la diferencia en las ondulaciones del geode está dada por:

$$(5.111) \quad \Delta N_{12} = N_2 - N_1 = \Delta\zeta_{12} + E_{12}^N - E_{12}$$

donde  $E^N$  y  $E$  son las correcciones normal y ortométrica, respectivamente. (5.110) y (5.111) permiten el cálculo de  $\Delta\zeta$  y  $\Delta N$  de deflexiones de la vertical astrogodésicas en  $P_1$  y  $P_2$  y de anomalías de gravedad en el área limitada  $B$ . La corrección gravimétrica  $GK$  toma en cuenta el hecho de que la variación de las deflexiones de la vertical se desvía de la linealidad.

Para deflexiones de variación irregular, la corrección gravimétrica puede asumir valores que son mayores que el "término principal" en (5.110) y (5.111) (1m para puntos con separación de 40km). La precisión

## 5. Geodesia Global.

de GK se determina mediante las anomalías de aire libre promedio en el área B. Para poder obtener una precisión de decímetro, generalmente se requieren mediciones de densificación gravimétrica. La diferencia  $E^N - E$  en (5.11) es solamente de centímetros.

En la nivelación topográfica-astrogravimétrica (Boedecker 1975 b), las deflexiones de la vertical astrogeodésicas se suavizan al considerar la influencia de la topografía (invocando la ley de la gravitación) y de las masas de perturbación más profundas. Estas últimas están representadas por las anomalías Bouguer (5.72) (las cuales existen en abundancia para propósitos geofísicos); su efecto está dado por (5.60). Después de representar analíticamente (5.1.6) las deflexiones de la vertical, reducidas de esta manera, y después de integrar, se toman en cuenta los efectos de la topografía y de las anomalías Bouguer (5.59), en el geoide (o cuasigeoide) mediante una restauración subsecuente; con ello el geoide queda descrito con un polinomio de superficie.

Determinación del Campo de Gravedad y Coordenadas Geocéntricas a partir de Observaciones Gravimétricas y de Satélite.

5.4.2

Los resultados de la gravimetría terrestre y de la geodesia de satélite, generalmente se combi-

nan para determinar el campo de gravedad terrestre. El material de los satélites da las características predominantes, mientras que los datos terrestres proporcionan los detalles más finos del campo. Los coeficientes armónicos de la expansión armónica esférica o las anomalías<sup>medias</sup>/de la gravedad son adecuados para esa combinación (Kaula 1966, Moritz 1970 b). El método dinámico de la geodesia de satélite inmediatamente proporciona los coeficientes armónicos (5.3.3), (5.3.4); y el método gravimétrico de las anomalías<sup>medias</sup>/de aire libre (5.2.4). Para un ajuste combinado, ya sea que se usen los coeficientes armónicos para calcular las anomalías de gravedad a partir de (5.54 a), ó las anomalías se convierten a armónicas a través de una integración sobre la superficie de la Tierra -- (5.54 b).

En la práctica, la expansión armónica esférica se finaliza en el grado  $n$ , que corresponde a una resolución obtenible de la mitad de la longitud de onda --  $180^\circ/n$ . Por eso, la frecuentemente usada representación de las anomalías de gravedad en bloques de  $5^\circ \times 5^\circ$  permite una expansión hasta un máximo de  $n = 36$ .

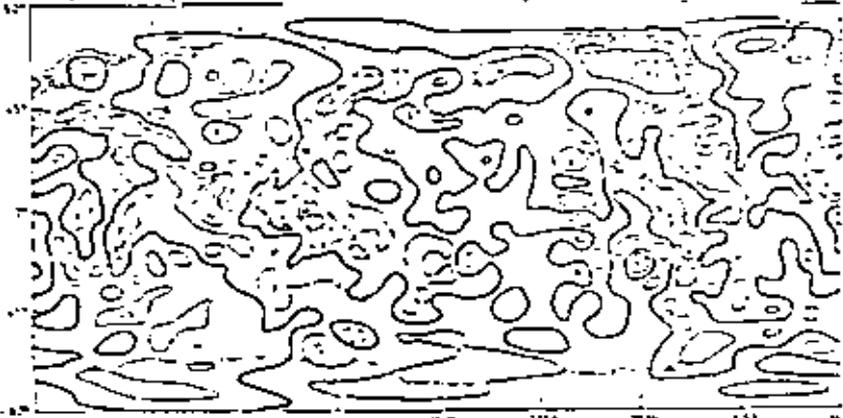
El efecto de los términos despreciados en la ondulación del geode para  $n = 10$  y  $n = 100$  es de  $\pm 6m$  y  $\pm 0.7m$ , respectivamente (Rapp 1972). La información geométrica de mayor resolución (por ej.  $1^\circ \times 1^\circ$ ) generalmente se analizan de acuerdo al método gravimétrico donde se juntan con los coeficientes armónicos de una solución combinada (5.2.3).

Los modelos terrestres globales recientes obtenidos por soluciones combinadas, consisten de las coordenadas geocéntricas de las estaciones de rastreo (a veces 100 á 150 estaciones, o más), un conjunto de coeficientes armónicos (actualmente completos hasta aproximadamente  $n, m = 20, 20$  y más altas, armónicas zónicas y zonales más altas), y los parámetros del elipsoide que mejor se ajusta al geóide (5.4.4). La incertidumbre en las coordenadas de la estación fluctúa entre  $\pm 5$  y  $\pm 10$ m (estaciones de cámara),  $\pm 2$  á  $\pm 4$ m (primera generación de estaciones laser), y  $\pm 1$  á  $\pm 2$ m (estaciones Doppler). Las diferencias de escala son tanto como  $\pm 1$  á  $\pm 2 \times 10^{-6}$ ; la desviación del paralelismo de los ejes es de hasta 0"5 (Mueller 1975 b). Los coeficientes armónicos hasta  $n = 5 \dots 12$  se determinan mediante datos de satélite; y más allá, mediante datos gravimétricos. La incertidumbre de las armónicas zónicas más bajas, es de  $\pm 2$  á  $\pm 5 \times 10^{-6}$ . La resolución del campo de gravedad para las expansiones arriba mencionadas es de aproximadamente 1000 km; estas características de longitud de onda larga del geóide se conocen hasta alrededor de  $\pm 3 \dots \pm 5$ m; hasta  $\pm 3 \dots \pm 10 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  para las anomalías de gravedad. También existen discrepancias entre las varias soluciones, a veces hasta 2 ó 3 veces las incertidumbres arriba citadas. Se pueden lograr resoluciones del campo de gravedad mayores (hasta

1°) usando métodos de satélite con altimetría de satélites (5.3.6) y los métodos de rastreo de satélite a satélite (4.4.5) y gradiometría de satélite (4.2.5) ambos aún en etapa de desarrollo; Rapp (1975 b).

Material de observación comprensivo (algunas 100 000 observaciones de satélite de varios tipos obtenidas de 20 a 30 satélites, anomalías<sup>medias</sup> de aire-libre de 5" a 6") se procesó en las soluciones del Centro de Vuelos Espaciales Goddard (Modelo Terrestre Goddard, TEM 8 = solución combinada con GEM 7 (5.3.3), n, m = 25, 25, Wagner et. al. (1977); Gem 10 = solución combinada con GEM 9, n, m = 22, 22, Lerch et. al (1979) ) y el Observatorio Astrofísico Smithsonian (Tierra Standard (SE) III, n, m = 16, 16, Gaposchkin 1973). Las soluciones globales adicionales existentes son los Modelos Terrestres - GEM del Groupe de Recherches de Geodesie Spatiale, Francia, y el SFB 78 de la Universidad Técnica de Munich (n, m = 23, 23, Beilme et. al 1976). Al incluir los resultados de la altimetría de satélite GEOS 3, ver (5.3.6), en las soluciones combinadas, se ha desarrollado un modelo GEM (10B) completo hasta n, m = 36, 36 (Lerch et. al 1978). La representación

Fig. 5.21:  
Anomalías de  
aire-libre -  
(GEM 8), re-  
feridas a un  
elipsoide con



n = 1/298.255 curvas isocanólicas  $20 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ , según Wagner (1977)

global del campo de gravedad (anomalías de aire-libre) y del geoide, derivadas de la solución GEM8, están referidas a un elipsoide de referencia con  $f = 1/298.255$   $a = 6378145m$ ; mostrados en la Fig. 5.23 y 5.24. Los rasgos principales del geoide son la máxima cerca de Nueva Guinea (+ 77m), en el Atlántico del Norte, en el Océano Índico del sudoeste, y en los Andes; al igual que la mínima al sur de la India (-105m), en la Antártica, al oeste de California, y cerca de Puerto Rico. El achatamiento ecuatorial de un elipsoide tridimensional (3.5.4) se puede calcular usando los coeficientes armónicos  $J_{2,2} = -1,57 \times 10^{-6}$  y  $K_{2,2} = + 0.89 \times 10^{-6}$ .

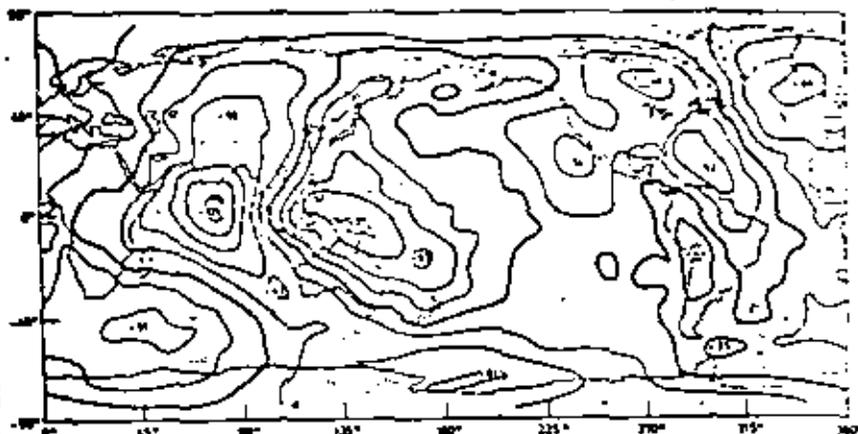
Si de la expansión armónica esférica se ha de obtener una alta resolución, entonces los términos de esta expansión deben llevarse a un grado alto. El gran número de coeficientes por determinar conduce rápidamente a problemas de cálculo insolubles. Además, todos los coeficientes potenciales están influenciados por una distribución dispersa de datos.

global del campo de gravedad (anomalías de aire-libre) y del geoide, derivadas de la solución -- GEM8, están referidas a un elipsoide de referencia con  $f = 1/298.255$   $a = 6378145m$ ; mostrados en la Fig. 5.23 y 5.24. Los rasgos principales del geoide son la máxima cerca de Nueva Guinea (+ 77m), en el Atlántico del Norte, en el Océano Indico del sudeste, y en los Andes; al igual que la mínima al sur de la India (-105m), en la Antártica, al oeste de California, y cerca de Puerto Rico. El achatamiento ecuatorial de un elipsoide tridimensional (3.5.4) se puede calcular usando los coeficientes armónicos  $J_2 = -1,57 \times 10^{-6}$  y  $K_{2,2} = + 0.89 \times 10^{-6}$ .

Si de la expansión armónica esférica se ha de obtener una alta resolución, entonces los términos de esta expansión deben llevarse a un grado alto. El gran número de coeficientes por determinar conduce rápidamente a problemas de cálculo insolubles. Además, todos los coeficientes potenciales están influenciados por una distribución disparraja de datos.

Fig. 5.24:

Ondulaciones del Geoide (GEM8) referidas a un elipsoide con  $f = 1/298.255m$  curvas de nivel a cada 20m, -- Wagner et. al (1977).



Por eso, frecuentemente se buscan otras expansiones del potencial gravitacional. Las representaciones apropiadas incluyen, entre otras cosas, aquellas que usan valores de densidad de una capa de superficie simple (capa de densidad simple) Koch (1968), ver (5.2.5), o aquellos que están basados en anomalías de gravedad (Arnold 1965). La ventaja de estos métodos reside en el hecho de que el potencial de gravedad en un punto se determina principalmente por los parámetros del potencial (densidad de superficie o anomalía<sup>media</sup> de gravedad), en ese punto; el efecto de áreas más distantes permanece pequeño. En aplicaciones, estas representaciones se combinan apropiadamente con las expansiones armónicas de grado bajo (Morrison 1971).

## 5.4.3

## Centrando y Reforzando los Sistemas Astrogeodésicos.

Los sistemas astrogeodésicos (u otros no orientados geocéntricamente) se transforman, en el caso más general, al sistema X, Y, Z global mediante tres tras-

aciones, tres rotaciones, y un cambio de escala (Fig. 5.25); Wolf (1963 c):

$$r = r_0 + (1+m)Rr_0$$

(5.112 a)

En esta ecuación,  $\underline{r}^T = (X, Y, Z)$  es el vector de posición geocéntrica de P,  $\underline{r}_0^T = (X_0, Y_0, Z_0)$  contiene las coordenadas geocéntricas del origen del sistema  $x, y, z$ ,  $\underline{r}'^T = (x, y, z)$  es el vector de posición de P en el sistema  $x, y, z$  y  $m$  es la corrección de escala. Los elementos de la matriz de rotación  $R$  son ángulos Eulerianos independientes  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  que representan rotaciones alrededor de los ejes  $x, y, z$ . Para rotaciones pequeñas, esta matriz está dada por:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_x & -\epsilon_y \\ -\epsilon_x & 1 & \epsilon_z \\ \epsilon_y & -\epsilon_z & 1 \end{pmatrix}$$

(5.112 b)

Para aplicar (5.112), las coordenadas geodésicas  $\phi, \lambda, h$  deben convertirse primero al sistema Cartesiano usando (3.34). Los parámetros de trans

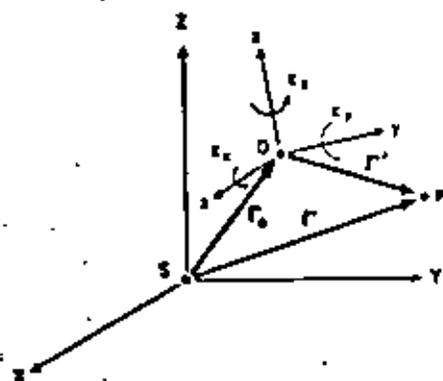


Fig. 5.25:

Transformación entre sistemas de coordenadas cartesianas.

formación se calculan entonces con la ayuda de - cuando menos tres puntos cuyas coordenadas son - conocidas en ambos sistemas. Normalmente se supo

ne que los ejes son paralelos y que los sistemas tienen la misma escala, de tal forma que nada más es necesario determinar el vector de desplazamiento  $r_0$  (para sólo algunos puntos comunes, generalmente no se pueden calcular valores significativos para  $m$  y  $R$ ).

Actualmente, la geodesia de satélites proporciona coordenadas geocéntricas con gran precisión. El requisito de tener un conocimiento completo del campo de gravedad dificulta el desarrollo de un sistema geodésico mundial obtenido por el método gravimétrico (Heiskanen 1951). En el caso de los modelos terrestres globales más recientes (5.4.2), las translaciones (y hasta cierto punto, también las rotaciones y los cambios de escala) de los sistemas astrogeodésicos más importantes fueron determinados con la ayuda de un número limitado (5 á 15) de puntos comunes. La siguiente tabla contiene las coordenadas geocéntricas (como en 1975) de los orígenes de estos sistemas (5.1.4) (Mueller 1975 b):

Datum Geodésico	$X_0$ (m)	$Y_0$ (m)	$Z_0$ (m)
Geodésico Australiano 1966	-122	- 43	+138
Europeo 1950	- 84	-105	-126
Norteamericano 1927	- 22	+158	+176
Sudamericano 1969	- 75	+ 5	- 43

Coordenadas geocéntricas de los orígenes de varios sistemas astrogeodésicos

La incertidumbre en estos valores es de  $\pm 2$  á  $\pm 6$ m. Los ángulos de rotación generalmente son menores que

1 a  $2 \times 10^{-6}$ . Se obtienen valores más precisos dentro del campo de proyectos de observación y medición especiales, cuando se determina un número <sup>más grande</sup> de puntos que se encuentran uniformemente distribuidos sobre el sistema astrogeodésico, ver (6.1.8).

Como los parámetros de transformación son pequeños, se justifica la aplicación de relaciones diferenciales. Son de primordial interés los cambios en las coordenadas geodésicas  $\varphi, \lambda, h$  que resultan de una traslación, una rotación, y un cambio de escala, al igual que de cambios en los parámetros elipsoidales (transformación de datums geodésicos (5.1.2)). Introducimos (3.34) en (5.112) y diferenciamos; entonces las relaciones requeridas se obtienen haciendo  $d\underline{r} = 0$ , aproximando con pequeñas variaciones  $\delta$ , y despejando los cambios de coordenadas (Merry y Vanicek 1974). Para una aproximación esférica y habiendo despreciado las rotaciones y los cambios de escala, están dados

por

$$\left. \begin{aligned} \delta \varphi &= \sin \varphi \cos \lambda \delta \lambda_0 + \sin \varphi \sin \lambda \delta Y_0 - \cos \varphi \delta Z_0 + 2a \sin \varphi \cos \varphi \delta \omega \\ \delta \cos \varphi \delta \lambda &= \sin \lambda \delta X_0 - \cos \lambda \delta Y_0 \\ \delta h &= -\cos \varphi \cos \lambda \delta X_0 - \cos \varphi \sin \lambda \delta Y_0 - \sin \varphi \delta Z_0 - \delta a + a \sin^2 \varphi \delta \omega \end{aligned} \right\} \quad (5.113 \text{ a})$$

Los cambios en la deflexión de la vertical  $\delta \xi, \delta \eta$  y en la ondulación del geoide  $\delta N$  se calculan de (5.113 a) y de las relaciones:

$$\delta \xi = -\delta \varphi, \delta \eta = -\cos \varphi \delta \lambda, \delta N = \delta h, \quad (5.113 \text{ b})$$

que son continuación de (5.1) y (5.5). Las ecuaciones (5.113) son las apropiadas para las trans

formaciones de datum cuando  $r_0$  es conocida. Se pueden usar en particular, para determinar los cambios en el punto origen  $P_1$  del sistema geodésico. Finalmente, aplicando (5.113) también al punto  $P_1$  y eliminando  $\delta r_0$ , se obtiene la ecuación<sup>3</sup> proyectivas de la deflexión de la vertical de Vening Meinesz (5.30).

Las ondulaciones del geode transformadas pueden representar colectivamente un geode astrogeodésico global.

Además de los fines de centrado, las coordenadas geocéntricas también se usan generalmente para reforzar los sistemas astrogeodésicos. Los datos terrestres fijan por su lado las redes de satélites.

En un ajuste combinado, los efectos sistemáticos, tales como los errores de escala y orientación, al igual que las deformaciones (refracción horizontal), en las redes terrestres se pueden detectar y tomar en cuenta junto con los errores sistemáticos de las redes de satélite. La distancia entre los puntos de la red de satélite incorporados deben darse de tal forma que los errores de los métodos terrestres y de satélite sean aproximadamente del mismo tamaño.

Al unificar las redes terrestres y de satélite, se puede ya sea ajustar cada una individualmente y determinar una transformación imponiendo una condición de mínimos cuadrados en los puntos comunes; ver (6.1.7); o bien llevar a cabo un ajuste general, riguroso. En el primer caso, las estructuras internas de los dos sistemas se antienen; mientras que en el

segundo caso, los errores sistemáticos no detectados pueden ocasionar distorsiones de la red - (Wolf 1967 b, Krakiwsky y Thomson 1974).

Fischer et. al (1968) llevó a cabo una unificación de sistemas astrogeodésicos para los datums de América del Norte, Europeo y Australiano. Los resultados de los métodos gravimétricos y de satélite sirvieron para centrar los sistemas. Después de aplicar los desplazamientos necesarios, se calculó un geoide astrogeodésico referido a un elipsoide que mejor se apega con  $a = 6378150 \pm 10\text{m}$  y un achatamiento fijo de  $f = 1/298.3$ . Los parámetros del datum Europeo 1950 (5.1.4) resultaron de  $\xi_1 = + 6''0$ ,  $\eta_1 = + 4''5$ ,  $N_1 = + 21\text{m}$ .

#### Elipsoide Terrestre Medio

5.4.4

El elipsoide terrestre medio debe representar una aproximación óptima al geoide; los cuatro parámetros del elipsoide de nivel (3.5.2) deben establecerse de acuerdo a lo anterior. Distinguiamos entre las determinaciones físicas y las geométricas.

En la definición física, a la masa  $M_{El.}$ , al potencial de gravedad  $U_0$ , al factor de forma dinámico  $J_2(El.)$ , y a la velocidad rotacional  $\omega_{El.}$  se les dan valores que corresponden a la Tierra ( $W_0 =$  valor del potencial del geoide):

$$M_{El.} = M, \quad U_0 = W_0, \quad J_2(El.) = J_2, \quad \omega_{El.} = \omega.$$

(S.114)

Entonces todas las demás cantidades elipsoidales se conocen. De (3.49), (3.50),  $M$  y  $U_0$  determinan el semieje mayor  $a$  y la gravedad ecuatorial  $\gamma_a$ .

La definición geométrica igualmente válida está basada en condiciones que dan el mínimo de la ondulación del geode  $N$ , las deflexiones de la vertical  $\xi$ ,  $\eta$ , o las anomalías de gravedad  $\Delta g$ :

(5.115)

$$\iint N^2 da = \text{Min.} \quad \iint (\xi^2 + \eta^2) da = \text{Min.} \quad \iint \Delta g^2 da = \text{Min.}$$

$N$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\Delta g$  se pueden formular como funciones de los parámetros elipsoidales (Heiskanen y Moritz A 1967, -- pp. 216-217). Para los modelos terrestres globales -- más recientes (5.4.2), los parámetros de un elipsoide de nivel que mejor se aproxima al geode, generalmente también se determinan. Aquí, se pueden aplicar varios métodos:

La constante gravitacional geocéntrica  $GM$  se deriva de acuerdo a la tercera ley de Kepler y de observaciones a satélites distantes y cohetes espaciales (Ranger, Surveyor, Lunar-Orbiter, Mariner (5.3.5)), al igual que de mediciones de distancia laser a la Luna (4.4.7). El semieje mayor  $a$  se puede determinar, después de que se centran los sistemas astrogeodésicos (5.4.3), de una condición de ondulaciones de geode mínimas. Más recientemente se ha obtenido de un acomodo óptimo entre las alturas elipsoidal y ortométrica en estaciones en una solución global (5.4.2), al igual que por ajustar un elipsoide a los resultados de la altimetría por satélites (5.3.6).  $J_2$  se calcula de las observaciones de satélite (5.3.3). Los métodos

astronómicos proporcionan a  $\omega$  con gran precisión.

El Sistema de Referencia Geodésico 1967 (3.5.5) se aproxima el elipsoide terrestre medio con los resultados de observación que se habían obtenido

hasta alrededor de 1964. Las mejores estimaciones hasta 1979 (Asamblea General de la U.G.G.I.

en Canberra, 1979) son:  $GM = (398600.5 \pm 0.05) \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$  incluyendo la masa de la atmósfera,

$GM_{\text{atm}} = (0.35 \pm 0.003) \times 10^{-9} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ;  $a = \text{----}$

$(6378137 \pm 2) \text{ m}$ ;  $J_2 = (1082.63 \pm 0.005) \times 10^{-6}$ .

La velocidad rotacional de la Tierra referida a tiempo solar medio ó atómico, está dada por el valor redondeado  $\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ .

Algunas cantidades derivadas son el achatamiento geométrico  $f = 1/(298.257 \pm 0.001)$ , la gravedad

ecuatorial  $\gamma_2 = (9.78033 \pm 0.00001) \text{ ms}^{-2}$ , y el

potencial geoidal  $W_0 = (6.263686 \pm 0.000003) \times 10^7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ; Moritz (1979).

#### Collocation en Geodesia Global.

5.4.5

Como Krarup (1969) lo ha mostrado, los métodos de predicción (5.2.7) se pueden usar para calcular cualquier cantidad del campo de gravedad terrestre de cantidades medidas, arbitrarias de este campo. Al combinar la predicción con una determinación de parámetros a través de un ajuste, surge un método de mínimos cuadrados muy general que se denomina (mínimos cuadrados) Collocation (Lat.:

collocare - juntar, combinar), Moritz (1975 b). La forma general de las ecuaciones de observación en el método de collocation es:

(5.116)

$$x = AX + s + n$$

Donde,  $x$  es el vector de observaciones. Se compone de una parte sistemática  $AX$  ( $X$  = vector de los parámetros sistemáticos,  $A$  = una matriz rectangular de coeficientes dada) y dos partes casuales mutuamente independientes,  $s$  (vector señal) y  $n$  (vector de errores de medición, ruido). Cada una de las cantidades casuales  $s$  y  $n$  tiene un valor promedio de cero; su comportamiento estadístico está descrito por la matriz de covariancia  $C$  de la señal, y la matriz de covariancia  $D$  del ruido. Debido a la independencia de  $s$  y  $n$ , tenemos:

(5.117)

$$C = C + D.$$

Collocation nos da los parámetros  $X$  (ajuste) al quitar óptimamente los errores de medición (filtrado), pero además, permite también calcular la señal  $s$  en los puntos no levantados (predicción). Al aplicar la condición de mínimos cuadrados del procedimiento de ajuste a las cantidades de la señal y del ruido, el problema puede interpretarse como un ajuste de ecuaciones de condición con parámetros desconocidos. La solución está dada por:

(5.118)

$$x_p = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} x, \quad s_p = C^{-1} C^{-1} (x - AX)$$

$s_p$  es la componente del vector señal  $s$  en el punto  $P$ .

En aplicaciones a la geodesia global, el vector de

observaciones  $x$  contiene todas las cantidades medidas. No tomando en cuenta el ruido, el cual se puede añadir fácilmente, estas cantidades se pueden descomponer en partes sistemática e irregular. La parte sistemática  $AX$  corresponde al sistema de referencia elipsoidal que está representado por los parámetros  $X$  del elipsoide de nivel. Otros efectos sistemáticos, tales como las constantes de instrumento y los parámetros de deriva también se pueden incluir en el modelo. La parte casual  $s$  contiene las desviaciones del campo de gravedad terrestre del sistema de referencia elipsoidal; o sea, las deflexiones de la vertical, las ondulaciones del geoide, las anomalías de gravedad, y las diferencias entre los coeficientes armónicos de los campos de gravedad real y normal (Moritz 1973 a).

Se requiere de la matriz de covariancia  $C$  (5.117) para derivar los parámetros de la figura de la Tierra  $X$  de (5.116), al igual que las cantidades  $s$  que caracterizan el campo de gravedad anómalo. La matriz de covariancia de error  $D$  se obtiene de estimaciones a priori de las precisiones y correlaciones de las observaciones. Como todas las cantidades de señal están referidas al mismo campo de gravedad, la matriz de covariancia de señal  $C$  se debe derivar de una función fundamental a tra-

vés de la propagación de covariancias. Por ejemplo, esta función puede ser la función de covariancia  $C(\mathbf{r})$  de las anomalías de gravedad (5.85). La propagación de covariancias entonces corresponde

al error de propagación en transformaciones integrales, por ej. como está representada por la fórmula - Stokes (Tscherning y Rapp 1974).

Para un conjunto de observaciones dadas, los resultados del <sup>método</sup> collocation poseen la precisión más alta obtenible. El problema principal en aplicaciones prácticas, es la inversión de la abultada matriz  $\bar{C}$ . Por ello, este proceso en la actualidad nada más se puede usar para una cantidad limitada de datos. La ventaja consiste en la combinación de todas las (heterogéneas) observaciones, donde estas se pueden procesar como valores discretos y no necesitan <sup>existir en forma continua</sup> como para las fórmulas integrales del método gravimétrico. Para observaciones homogéneas y distribuidas continuamente, collocation se transforma en las fórmulas integrales (5.2.3) (Moritz 1975 c).

Si uno renuncia a la determinación de la figura geométrica de la Tierra, entonces los parámetros  $\underline{x}$  desaparecen. La ecuación (5.116) proporciona así estimaciones óptimas de las cantidades del campo de gravedad - (Moritz 1970 c). A su vez la predicción de las anomalías de gravedad (5.87), representa aquí un caso especial; el vector de observación  $\underline{x}$  contiene las anomalías de gravedad "m-didas"  $\Delta g'$ , y la señal  $s_p$  es la anomalía de gravedad  $\Delta g_p$  en un punto no levantado.

## ESTRUCTURA Y DINÁMICA DEL CUERPO TERRESTRE

Las geociencias que incluyen geología, geofísica, --

petrología, mineralogía, geoquímica, y geodesia tratan con las investigaciones del cuerpo terrestre. Los resultados de la geodesia (la figura de la Tierra y el campo de gravedad externo incluyendo sus variaciones en tiempo (1.2) ) representan las condiciones de frontera que deben tomarse en cuenta al formar modelos terrestres. También los conceptos adquiridos por las geociencias con respecto a la estructura y dinámica del cuerpo terrestre son significativos en la formulación e implementación de estudios geodésicos (Bott B1971, Garland B 1971, Kertz B 1969/1971 Melchior B 1971/73, Runcorn B 1967).

#### La Estructura Radial de la Tierra

5.5.1

Los resultados de varias observaciones muestran que la Tierra no posee una estructura homogénea. Al considerar la densidad media de la Tierra y el momento de inercia principal con respecto al eje rotacional, se puede concluir que la densidad se incrementa hacia el centro de la Tierra. La masa de la Tierra, obtenida de GM (5.4.4) y de la constante gravitacional G (2.1.1), es  $M = 5.974 \times 10^{24}$  kg. Con el volumen del elipsoide terrestre,  $V = 1083 \times 10^{18}$  ms<sup>3</sup>, la densidad media está dada por:

$$\rho_m = (5.516 \pm 0.002) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

La densidad media de la corteza terrestre es de solamente  $2.7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  (5.5.3); de tal forma que

### 5.5 Estructura y Dinámica del Cuerpo Terrestre. 272

la densidad debe incrementarse hacia el interior de la Tierra. Las observaciones de satélite proporcionan el "factor de forma dinámico"  $J_2 = (C - \bar{A})/a^2M$  (2.3.4), donde  $\bar{A}$  es el momento de inercia principal ecuatorial promedio. Las observaciones astronómicas han dado un valor de  $3.273 \times 10^{-3} \times 10^{-3}$  a la elipticidad dinámica (mecánica).

(5.119)

$$H = \frac{C - \bar{A}}{C}$$

De esto, se calcula el momento principal de inercia con respecto al eje rotacional.

$$C = 0.3308 a^2 M$$

Para una Tierra esférica homogénea de radio  $R$ ,  $C = 0.4R^2M$ ; esto indica nuevamente un incremento de densidad con profundidad.

Como se muestra en sismología, el cuerpo terrestre tiene una construcción de tipo-costra. Los límites de la costra están formados por las superficies de discontinuidad de ondas elásticas. La densidad del interior de las costras se puede calcular bajo la suposición de equilibrio hidrostático (5.5.2), y con valores iniciales dados. En la construcción radial tratada por K. E. Bullen, el cuerpo terrestre está compuesto de la corteza, el manto superior (límite inferior a 1000 km) (5.5.3), el manto inferior (2900 km), el núcleo exterior fluido (4980 km), y el núcleo interior (5120 km). Existen desviaciones de una estructura simétrica central, particularmente en la corteza y el manto superior, ver Bullen (B 1975).

## 5. Geodesia Global.

También es posible verificar este modelo terrestre usando los números de Love  $h$  y  $k$  (2.4.2).

Para la marea parcial 01, Molodenski (1961) encontró los valores medios:

$$h = 0.62, \quad k = 0.30$$

para un modelo terrestre (modelo II) construido aproximadamente de acuerdo al modelo Bullen. Las observaciones de mareas terrestres (4.2.6) dan valores medios para los factores de amplitud (Melchior 1974):

$$\delta = 1.164 \pm 0.001, \quad \gamma = 0.674 \pm 0.005$$

de esto y (2.74), (2.75) se concluye que:

$$h = 0.64 \pm 0.02, \quad k = 0.32 \pm 0.01$$

### La Tierra como un Cuerpo en Equilibrio

5.5.2

Originalmente, la Tierra existió en un estado líquido. Por ello uno puede suponer la presencia de presión hidrostática  $p$  en su interior. Solamente depende del peso de las masas que se encuentran arriba y se incrementa hacia el centro de la Tierra. La ecuación hidrostática fundamental es:

$$dp = -\rho(r)g(r)dr. \quad (5.120)$$

Para las superficies equipotenciales del campo de gravedad, tenemos (2.31):

$$dW = -g(r)dr. \quad (5.121)$$

Consecuentemente, la relación:

$$dp = \rho(r)dW \quad (5.122)$$

muestra que las superficies de igual presión también son superficies equipotenciales, al igual --

que superficies de igual densidad.

Para un cuerpo esferoidal de rotación en equilibrio, las superficies equipotenciales adoptan la forma de elipsoides, si se desprecian los términos de  $O(f^2)$ .

La relación entre el achatamiento  $f = f(r)$  y la densidad  $\rho = \rho(r)$  está dada por una ecuación diferencial que fue formulada por Clairaut. Bajo la suposición que la densidad solamente depende del radio, se obtiene la solución para la superficie equipotencial externa:

(5.123)

$$\frac{C}{a^3 M} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5m}{2}} - 1 \right)$$

Substituyendo los valores, derivados de las observaciones astronómicas y de satélite, del momento de inercia principal  $C$  (5.5.1) y de  $m$  (3.58), el achatamiento del elipsoide de equilibrio está dado por  $f = 1/299.8$ . Es significativa la desviación con respecto al valor  $f = 1/298.25$  que se deriva de  $J_2$  para el elipsoide terrestre; ver Khan (1969).

Por eso, la suposición de que el interior de la Tierra consiste predominantemente de capas hidrostáticas, no es válida. El achatamiento mayor se puede atribuir a una alta viscosidad del manto inferior de la Tierra. Debido a la fricción de marea, la Tierra tiene hoy día una velocidad rotacional menor que en épocas anteriores (4.1.3); un estado de equilibrio hidrostático debe resultar en un correspondiente achatamiento menor. Sin embargo, la viscosidad del manto inferior previene la rápida formación de un estado de equilibrio, preservan

do con ello un achatamiento "fósil". Además, los valores observados de los coeficientes armónicos superiores, (5.3.3), (5.4.2) no son consistentes con los requisitos de equilibrio. Las causas de estas desviaciones se encontrarán en la corteza de la Tierra y en el manto superior.

Un modelo terrestre geofísico debe ser consistente con el elipsoide de nivel como una figura geodésica normal. Se puede encontrar un correspondiente modelo de densidad, el cual, a una buena aproximación, está en equilibrio hidrostático -- (Marussi et. al. 1974); ver (3.5.1). El modelo también debe contener un conjunto de parámetros de elasticidad, que lo posibilitan a uno para modelar las mareas terrestres, ver (3.1).

#### Interpretación del Campo de Gravedad, la Corteza de la Tierra, y el Manto Superior.

5.5.3

Las variaciones de densidad vertical y lateral se encuentran en la corteza terrestre y en el manto superior. La estructura heterogénea de las capas superiores se reconoce directamente por la distribución de las masas topográficas y de los resultados en geología. Existen variaciones de densidad en los límites entre diferentes tipos de roca, pero también dentro del mismo tipo. Las mediciones geofísicas proporcionan información sobre la estructura de la corteza y del manto superior.

3.5 Estructura y Dinámica del Cuerpo Terrestre. 276

De los análisis del campo de gravedad se pueden sacar conclusiones con respecto a la estructura horizontal de la corteza y del manto. Las cantidades observadas o derivadas de este campo contienen varios tipos de información. Sin embargo, como lo muestra el teorema de Stokes (3.5.2), no es posible hacer una declaración definitiva de sus interpretaciones (problema inverso de la teoría de potencial). Las flexiones de la vertical proporcionan indicaciones no nada más concernientes a la estructura cerca de la superficie (Grafarend 1971), sino también con respecto a la isostasia (5.5.4). Las anomalías de gravedad señalan las anomalías de masa más altas, al igual que las que están colocadas a más profundidad. Las anomalías de gravedad Bouguer (5.2.4) son particularmente apropiadas para consideraciones locales y regionales. Revelan cambios de densidad cerca de la superficie (a una profundidad de algunos km). Globalmente, reflejan un comportamiento sistemático (5.5.4). Las características de longitud de onda larga del campo de gravedad en la forma de anomalías de aire libre e isostáticas son las adecuadas para análisis globales (estructuras más profundas), Kaula (1970), Khan (1976). En lugar de anomalías de gravedad, también se pueden usar anomalías de densidad de una capa de superficie (5.2.5), Koch (1972). Estas cantidades se pueden interpretar particularmente bien, ya que las anomalías del campo de gravedad son causadas por diferencias en densidad. En el análisis de ondu-

5. Geodesia Global.

En los mapas de geoides, se descubrió repetidamente una relación entre la variación del geoides y el Moho (ver más abajo); de allí que las elevaciones del geoides estén acopladas con los hundimientos del Moho (Wolf 1971).

*punto y seguido*

Se pueden tomar en cuenta los resultados de las mediciones de mareas terrestres (4.2.6) para delimitar las unidades tectónicas que tienen características elásticas variables; donde se puede analizar, por ejemplo, los efectos de carga causados por las mareas oceánicas (Farrell 1973).

La distribución dispereja de las estaciones de observación y los numerosos efectos perturbadores impiden las correspondientes investigaciones.

El concepto actual de la estructura de la corteza y del manto superior se pueden resumir como sigue (S. Mueller B 1974), Fig. 5.26. En la capa más alta se encuentra una zona de sedimentos con

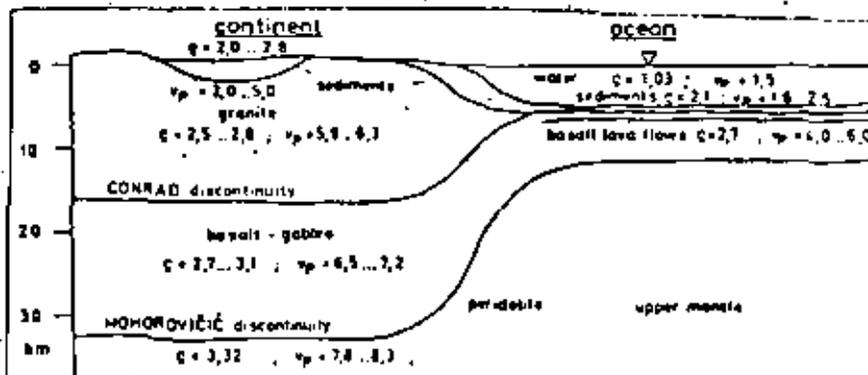


Fig. 5.26:

Estructura de la corteza de la Tierra,

$\rho$  = densidad ( $\text{g cm}^3$ )  
 $v_p$  = velocidad de las ondas longitudinales ó primarias ( $\text{km s}^{-1}$ )

grandes variaciones en grosor. Tanto la velocidad de las ondas sísmicas como la densidad fluctúan fuertemente. A los sedimentos se une, en las áreas continentales, la corteza superior con una densidad

## 5.5 Estructura y Dinámica del Cuerpo Terrestre. 278

media de  $2.7 \text{ g cm}^{-3}$ , la cual consiste de rocas ácidas (granito). En su límite inferior, la discontinuidad <sup>de</sup> Conrad, la velocidad  $v_p$  de las ondas longitudinales (primarias) se incrementa hasta más o menos  $6.5 \text{ km s}^{-1}$ . Esta capa divisoria que no ha sido detectada por todos lados se encuentra a profundidades variables (Alemania del Norte: 12km, Alemania del Sur: 20 km). La zona granítica no existe debajo de los océanos. La velocidad  $v_p$  se incrementa gradualmente en la corteza inferior contigua, la cual tiene una densidad media de  $2.9 \text{ g cm}^{-3}$ . Se supone la existencia de roca básica como gabbro (basalto) en esta área. Debajo de los océanos se encuentra en las regiones altas de la corteza inferior una capa de lava basáltica o sedimentos consolidados. El límite del manto superior de la Tierra (5.5.1) forma la discontinuidad <sup>de</sup> Mohorovicic; debajo de esta zona,  $v_p > 7.8 \text{ km s}^{-1}$ . La profundidad del Moho está íntimamente relacionada a la topografía; en áreas continentales es de 25... 70 km (30 á 40 km en el <sup>sureste</sup> / de Estados Unidos, 50 á 60km en los Alpes del oeste, y 60 á 80km en las montañas Himalaya) y debajo de los océanos es de alrededor de 10km. Con un conocimiento suficiente de las profundidades de las discontinuidades de Conrad y Moho, estas se pueden representar por isolíneas. Inmediatamente debajo del Moho en el manto superior, la densidad media es de 3,3 a  $3.4 \text{ g cm}^{-3}$ . Aquí, el material se supone que consiste de rocas ultrabásicas (peridotita). A una profundidad

## 5. Geodesia Global.

de 80km (océanos) a 120km (continentes) comienza una zona de velocidad de onda menor (estrato de baja velocidad). La parte del manto arriba de esta zona junto con la corteza de la Tierra forma la litósfera rígida, teniendo un grosor de aproximadamente 100km. Está rota en placas que se desplazan una con respecto a la otra. La región caliente (a una profundidad de aproximadamente 100 á 250km) del manto que está debajo de estas placas y con poca viscosidad se comporta en períodos largos, como líquido. Se denomina la asténosfera y corresponde a una zona de bajas velocidades sísmicas; aquí la compensación isostática (5.5.4) se logra a través de una corriente lateral. Los procesos globales tectónicos se determinan mediante las acciones de la asténosfera y <sup>las placas litosféricas</sup> / (5.5.5).

### Isostasia.

5.5.4

Las masas topográficas sobre el nivel del mar re presentan una perturbación con respecto al equilibrio hidrostático; lo mismo se puede decir para las masas de agua de los océanos. Si uno supone que debajo del nivel del mar la Tierra está en equilibrio hidrostático, entonces removiendo la topografía y llenando los océanos, se debería poder crear una figura esferoidal en equilibrio con un campo de gravedad normal adjunto (3.5.1).

## 5.5 Estructura y Dinámica del Cuerpo Terrestre. 289

Sin embargo, del comportamiento sistemático de las deflexiones de la vertical, las anomalías de gravedad, y las ondulaciones del geoide, se concluye que las deficiencias y excesos de las masas visibles están cuando menos parcialmente compensadas mediante una correspondiente distribución de masa en el interior de la Tierra. La teoría de la isostasia postula que existe una distribución de presión hidrostática (5.5.2) debajo de una superficie de compensación.

Durante la medición de Arco Peruano (1.3.2), P. Bouguer, descubrió que las deflexiones de la vertical calculadas de las masas de las montañas eran mayores que los valores observados. En 1855, Pratt investigó las diferencias en las deflexiones de la vertical entre dos puntos situados al Sur de las montañas Himalaya. Los levantamientos geodésicos de la India proporcionaron un valor observado de  $5''2$ ; por el otro lado, se calculó un valor de  $15''9$  usando las masas topográficas. Globalmente, las anomalías de gravedad Bouguer muestran un comportamiento sistemático. En los continentes, generalmente son negativos (tan bajos como  $-200 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ) en contraposición a las regiones oceánicas, donde son positivos (hasta  $400 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ). Se puede demostrar una correlación con altura ó profundidad promedio (Heiskanen y Vening Meinesz A 1958). Finalmente y de acuerdo a Helmert (A 1880/1884), las masas continentales tendrían que producir ondulaciones del geoide de hasta 1000m; mientras que los valo

## 5. Geodesia Global.

res observados permanecen debajo de 100m.

El modelo isostático desarrollado por G.B. Airy - en 1855 está basado en una costra de densidad -- constante  $\rho_0$  y grosor variable (Fig. 5.27). La compensación se hace localmente dentro de columnas verticales. La columna normal de altura  $h = 0$  tiene un grosor de  $T_0$ . Las columnas continentales ( $h > 0$ ) forman "raíces" de montaña de grosor  $d$ ; - las "antiraíces" de grosor  $d'$  se encuentran debajo de las columnas oceánicas que están a una profundidad  $t$ , o sea, la costra penetra con profundidad variable en las masas debajo de la costra -- (equilibrio flotante). Para establecer la superficie de compensación, tenemos las siguientes -- condiciones de equilibrio:

$$(\rho_M - \rho_0)d = \rho_0 h$$

para continentes

$$(\rho_M - \rho_0)d' = (\rho_0 - \rho_w)t$$

para océanos

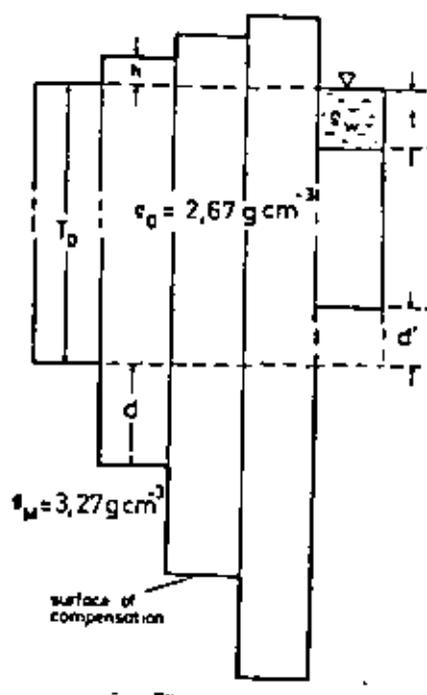
(5.124)

Con la densidad de costra usual  $\rho_0 = 2.67 \text{ g cm}^{-3}$ , al igual que la densidad del manto  $\rho_M = 3.27 \text{ g cm}^{-3}$  debajo de la superficie de compensación, y la densidad de agua de mar  $\rho_w = 1.03 \text{ g cm}^{-3}$ , el grosor de la raíz y antiraíz está dada por:

$$d = 4.45t, \quad d' = 2.73t$$

(5.125)

Fig. 5.27:  
Modelo -  
isostático  
de Airy



El grosor  $T_0$  de la columna normal se puede estimar de anomalías de gravedad isostáticas (5.2.4) que se obtienen bajo la base de una cierta profundidad de compensación. Para una profundidad de compensación de  $T_0 = 30$  ó  $40 \text{ km}$ , las anomalías isostáticas generalmente son independientes de la altura. Este resultado concuerda muy bien con los resultados de sismología; la superficie isostática de compensación corresponde aproximadamente a la discontinuidad Mohorovicic (5.5.3).

El modelo isostático de J. H. Pratt (1855) está basado en una capa de grosor constante  $T_0$  con cambios laterales en densidad  $\rho$  (Fig. 5.28). La columna normal ( $h = 0$ ) tiene una densidad  $\rho_0$ ; las columnas continentales tienen densidades menores, mientras que aquellas debajo de los océanos son más densas. Las condiciones de equilibrio están dadas por:

$$\begin{aligned} \rho(T_0+h) &= \rho_0 T_0 && \text{para continentes} \\ \rho_w + \rho(T_0-l) &= \rho_0 T_0 && \text{para océanos} \end{aligned} \quad (5.126)$$

Si  $\rho_0 = 2.67 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $\rho_w = 1.03 \text{ g cm}^{-3}$ , entonces las densidades  $\rho$  de las columnas para los continentes y los océanos resultan ser:

$$\rho_{\text{cont}} = 2.67 \frac{T_0}{T_0+h}, \quad \rho_{\text{oc}} = \frac{2.67 T_0 - 1.03 l}{T_0-l} \quad (5.127)$$

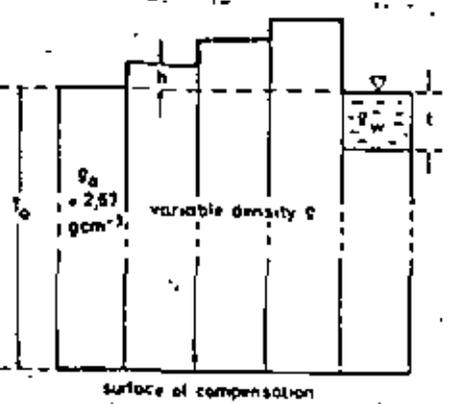


Fig. 5.28:  
Modelo  
isostático  
de Pratt

La profundidad de compensación  $T_0$  se puede determinar razonando en forma similar como en el modelo Airy. De las variaciones de las deflexiones de la vertical isostáticas topográficas en los Estados Unidos, Hayford obtuvo  $T_0 = 113.7 \text{ km}$  para la profundidad en la cual las deflexiones son mínimas.

Las anomalías isostáticas correspondientes difieren sólo ligeramente cuando se calculan de acuerdo a varios modelos y profundidades de compensación; por ello, es difícil confirmar la validez de cualquier modelo. Sin embargo, las anomalías

### 5.5 Estructura y Dinámica del Cuerpo Terrestre. 234

medias generalmente están dispersas irregularmente alrededor del cero y obtienen valores máximos de  $50 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ , sin considerar las pocas áreas no compensadas.

Las anomalías de aire-libre se pueden considerar como anomalías isostáticas con una profundidad de compensación igual a cero. Dan una buena perspectiva del exceso de masa y deficiencias cuando se quita su correlación con la altura (5.2.4).

#### 5.5.5

#### Geodesia y Geodinámica.

Con la creciente precisión de las mediciones geodésicas y de las técnicas de evaluación, las cantidades que se determinan en geodesia deben verse como variantes en tiempo: "geodesia de cuatro dimensiones" (1.2). Para comparar cantidades observadas en épocas diferentes se requieren reducciones con respecto a los cambios temporales significativos. Por el otro lado, las mediciones geodésicas repetidas contribuyen al entendimiento del carácter dinámico de la Tierra, esto es, de geodinámica. Además de geodesia, las principales disciplinas que participan en este tipo de investigación son astronomía, geología, geomorfología, geofísica y oceanografía.

Los procesos geodinámicos afectan el sistema geodésico en muchas formas: El sistema de referencia astronómico es influenciado por la precesión/nutación del eje de la Tierra (4.1.2) y por los cambios en la velocidad angular de la rotación terrestre (4.1.3).

El movimiento polar (3.1) altera la orientación del sistema de referencia geodésico. Las fuerzas de marea causan variaciones periódicas en el campo de gravedad de la Tierra (2.4.1) y movimientos de la superficie terrestre (2.4.2). Los desplazamientos de masa terrestre dan lugar a cambios -- dependientes del tiempo en el campo de gravedad (2.4.3) y generalmente también en la superficie física de la Tierra (puntos de control geodésico). Una expansión de la Tierra (hipotética) resultaría en un cambio en la gravedad de superficie y en el radio de la Tierra.

Aquí, nos ocupamos únicamente de geodésica de los recientes movimientos horizontales y verticales de la superficie terrestre <sup>investigados geodésicamente,</sup> al igual que de aquellos cambios de gravedad que no son causados por las mareas (Vyskocil 1977). El intervalo de tiempo que se pueden permitir entre mediciones geodésicas repetidas está regido por los cambios esperados y la precisión de medida - obtenible. Las estaciones de observación deben ser perfectamente recuperables (monumentación); las perturbaciones locales (estructura geológica, fluctuaciones del agua del suelo) deben permanecer despreciablemente pequeñas.

En la superficie terrestre, los desplazamientos de masa son causados por erosión y sedimentación, variaciones en el hielo continental, cambios en

5.5 Estructura y Dinámica del Cuerpo Terrestre.

el nivel de los aguas <sup>frías</sup> /, terremotos, vulcanismo, y otros efectos.

El movimiento de las placas litosféricas (5.5.3) se explica (por ej. ver Le Pichon et. al. B 1973) por la teoría de las placas tectónicas (Mc Kenzie y Parker 1967, Morgan 1968). De acuerdo a esta teoría, las placas se crean en las regiones de las cordilleras oceánicas (parte central) de material caliente y expandido de la astenósfera que posteriormente se separan -- por presión. Cuando dos de estas placas chocan, la placa oceánica más pesada es forzada a hundirse en el manto superior donde se disuelve (zonas de desplazamiento ó Benioff con gran actividad sísmica). Este proceso crea zanjas en el mar profundo; y se forman arcos de isla (por ej. el Pacífico del Oeste) ó cadenas montañosas <sup>(v.g. los Andes)</sup> en las orillas de esas placas que quedan en la superficie terrestre. Las montañas surgen al juntarse dos continentes. Las placas se deslizan una con respecto a la otra a lo largo de fallas transversales -- (por ej. la falla de San Andrés en California). Los límites de las placas se pueden reconocer a través de una acumulación de actividad sísmica. Hay seis placas distintivas de dimensiones mayores (Pacífico, Americana, Euroasiática, Africana, India, Antártica) y algunas de menor tamaño. El concepto de deriva continental (Wegener B 1915) y ensanchamiento del fondo marino <sup>a partir</sup> regresión del fondo oceánico/de las grietas oceánicas), Dietz (1961), Hess (1962) quedan compren-

## 5. Geodesia Global.

Se ha <sup>ha torturado</sup> / que los mecanismos de impulsión del movimiento de las placas consisten de corrientes de convección térmicas a gran escala en el manto superior. Los levantamientos magnéticos en combinación con las determinaciones de edad de las rocas han proporcionado velocidades de expansión del suelo oceánico de 1 cm/año (cordillera Reykjanes) y hasta de 10 cm/año (Pacífico). Actualmente se está investigando la correlación de los límites de las placas y su movimiento con el campo de gravedad (anomalías de gravedad, ondulaciones del geóide); Anderson, R. N. et. al. (1973), Slater et. al. (1975).

Los movimientos verticales a gran escala suceden principalmente en zonas de formación reciente de montañas (límites de placa) y procesos de compensación posglacial. Dentro de las placas tectónicas, pueden aparecer hundimientos en áreas con cuencas sedimentarias. Los resultados en geología muestran que son comunes las variaciones en altura del orden de 1mm/año (Menard 1975).

El campo de gravedad también proporciona indicaciones de los procesos asociados con el movimiento vertical. Cerca del 90% de la Tierra está compensada isostáticamente, donde en general, nada más las grandes unidades geológicas (por ej. mayores que  $100 \times 100 \text{ km}^2$ ), tales como los Alpes están compensadas. Se encuentran grandes desvia-

ciones del equilibrio isostático en áreas de zonas del mar profundo (anomalías positivas de anomalías relativas, hasta de  $200 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  y más: Zanja de Puerto Rico:  $300 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ) y los arcos de islas vecinas. En este caso, se sospechan procesos orogénicos recientes en conexión con aquellos de placas tectónicas (destrucción / de límites de placa); donde los levantamientos y hundimientos están relacionados con las anomalías positivas y negativas respectivamente.

La existencia de movimientos de compensación isostática está indicada si, por el otro lado, los levantamientos están relacionados a las anomalías negativas y los hundimientos a las anomalías positivas. Ocurren procesos de levantamiento de este tipo, por ejemplo, en Fennoscandia (anomalías de gravedad negativas de alrededor de  $50 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  en el Golfo de Botnia) y en América del Norte. Aquí sucedió, en el pleistoceno, un flexionamiento elástico de la litósfera, causado por la cubierta de hielo, la cual aún no se ha compensado por un levantamiento de tierra postglacial.

Entre las causas de la expansión de la Tierra propuestas por P. Jordan B (1966) y otros, se mencionan las siguientes: transición de fase del material del núcleo de la Tierra con un decremento simultáneo de la densidad; y el decremento de la constante gravitacional con el tiempo (decremento relativo de alrededor de  $10^{-10}$  a  $10^{-11}$  por año) como lo requieren las

## 5. Geodesia Global.

consideraciones/ de P.A.M. Dirac (1937). Las estimaciones conducen a un sospechado incremento secular en el radio terrestre de aproximadamente 0.5 mm por año.

Los movimientos horizontales a nivel global se deberían poder determinar mediante mediciones de distancia laser a satélites terrestres artificiales (4.4.5) y a la Luna, al igual que mediante mediciones radio interferométrica (4.4.7), tan pronto como estos métodos han alcanzado la precisión de cm a dm (Bender y Silverberg 1975). El análisis del movimiento polar secular (3.1) también puede proporcionar información con respecto a tales movimientos (Proverbio y Quesada 1973). Los movimientos relativos en los límites de las placas tectónicas se pueden conocer mediante mediciones terrestres precisas (4.3). En áreas continentales se pueden detectar movimientos verticales con nivelaciones precisas (4.3.5). Para poder sacar conclusiones sobre los movimientos verticales absolutos de la corteza a partir de nivelaciones repetidas, es necesario obtener también las fluctuaciones recientes del nivel del mar mediante observaciones de mareas (3.3.3). Los cambios en la gravedad con el tiempo adquieren valores del orden de  $10^{-11} \times 10^{-8} \text{ ms}^{-2}$  por año. Posiblemente se podrían determinar los cambios locales y regionales mediante mediciones de la gravedad (4.2.2); las -

determinaciones absolutas nos dan los cambios globales (4.2.1) (Boulanger 1975). Con la ayuda de las hipótesis geofísicas, se puede derivar una relación entre la altura observada y los cambios de gravedad (Strang van Hees 1977).

Nivelaciones de precisión repetidas revelaron movimientos de + 9mm por año en el centro del levantamiento de tierra de Fennoscandia (Märrinen 1933). En los Alpes se descubrió un levantamiento de aproximadamente 1mm por año (Jeanrichard 1975), al igual que un hundimiento de 3mm por año a lo largo de la costa del Golfo de E.U. En el área costera alemana del Mar del Norte, se sospecha un hundimiento de 0.5mm de 1mm por año. Nivelaciones repetidas extensas se llevaron a cabo en Europa del Este; los resultados se representaron en un mapa a escala 1:2,500,000 de los movimientos verticales recientes de la corteza. Además, se reconocieron <sup>con eso</sup> tendencias <sup>totales</sup> y correlaciones con los resultados geológicos: el movimiento promedio es de + 1 ... + 4mm por año (Boulanger et. al. 1971). Se encuentran bajo investigación las variaciones de gravedad no ocasionadas por mareas en las áreas de procesos epirogénicos (Fennoscandia, Kiviniemi 1974) al igual que en las áreas de actividad sísmica (límites de placas tectónicas: Islandia, Torge y Drewes 1977; Japón, Nakagawa y Satomura 1977) y en otros lugares.

En las regiones de terremotos (Japón, California, --

### 5. Geodesia Global.

URSS), se han aplicado varios métodos <sup>recientes</sup> para determinar los efectos de los cambios en el campo de las <sup>deformaciones</sup>, antes, durante y después de un terremoto. De este modo se observó un movimiento de <sup>sedimentación</sup> horizontal de algunos cm por año, a lo largo de la falla de San Andrés (Mead 1975a). Este tipo de trabajo es parte de un intento interdisciplinario para poder predecir los terremotos (Byrne 1976), ver también Whitten et. al. (1973).

### GEODESIA LUNAR Y PLANETARIA

5.5

Como resultado del uso de los cohetes y satélites espaciales en la exploración del espacio, los métodos geodésicos se pueden requerir para investigar la Luna (selenodesia) y los planetas (geodesia planetaria). De acuerdo a (1.2) la formulación de la finalidad de la geodesia comprende la determinación de las redes de control en un sistema coordinado firmemente unido al cuerpo celeste en cuestión, la determinación del campo de gravedad externo, y el establecimiento de los parámetros geométricos y físicos de un cuerpo de referencia simple.

La distinción fundamental entre los métodos de medida a aplicar aquí y en los métodos clásicos de la geodesia global, radica en el hecho de que la superficie del cuerpo celeste generalmente no está ocupada. La información por observación se ob

## 5.6 Geodesia Lunar y Planetaria

tiene predominantemente de órbitas de satélites y de satélites lunares o planetarios. Estos se usan como sensores en el campo de gravedad del cuerpo celeste; además se les puede equipar con sistemas de medición para obtener mayor conocimiento de la superficie. En casos excepcionales, los datos se obtienen sobre la superficie (aterrizaje de vehículos espaciales tripulados y no tripulados).

Anterior a 1959 toda la información astronómica ligada a la Tierra para la determinación de los parámetros antes mencionados (la primera observación de la superficie de la Luna la hizo Galileo Galilei 1609/1610 mediante un telescopio). Desde 1946 (contacto por radar con la Luna), los métodos de medición ópticos fueron suplementados mediante mediciones de pulsaciones radar entre la Tierra y la Luna y los planetas. Con estos métodos, los astrónomos pudieron obtener, entre otros datos, la distancia a la Luna (precisión relativa de  $\pm 3 \times 10^{-4}$ ), al igual que el semidiámetro ecuatorial ( $\pm 0.5$  a  $\pm 5 \times 10^{-2}$ ), y hasta cierto punto también el achatamiento de los planetas. Aún más, se podían derivar las masas y velocidades rotacionales de la Luna y los planetas. Se construyó una red de control en la Luna (cráteres lunares, lado frontal) con respecto al centro geométrico de la Luna (incertidumbre de  $\pm 0.5$  a  $\pm 2$  km).

...sia Lunar (Selenografía).

3.1.1.

La aplicación y el uso de la selenografía se aplican a los sistemas de navegación y a la cartografía lunar (ver (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7)).

El sistema de coordenadas selenográficas (3.1.1) se define como el sistema de coordenadas geográficas de la Luna, cuyo eje z apunta hacia el centro de masa de la Luna, y cuyo eje x apunta hacia el centro de masa de la Tierra. El eje y apunta perpendicularmente al plano ecuatorial. El eje x apunta hacia el centro de masa de la Tierra. Después de introducir una esfera de referencia colocada selenocéntricamente (ver abajo), las coordenadas correspondientes se definen análogamente como en (3.4.3). La latitud selenográfica es positiva del ecuador hacia el norte y negativa hacia el sur; la dirección norte corresponde al norte en la Tierra. La longitud selenográfica se reconoce como positiva hacia el este del meridiano cero formado por los ejes x y z. La altura se obtiene con respecto a la esfera de referencia. Se debe usar un polo medio y un meridiano cero medio debido al (supuesto) movimiento polar y a las libraciones (5.3.1), ver (3.1).

En la parte frontal de la Luna está formada una red de control fundamental (espaciamiento

Entre puntos de especificación (0.0.0) mediante reflectores laser los cuales fueron desplegados durante las misiones espaciales Apolo 11, 14, 15 y Luna 17. Las mediciones de distancias laser (4.4.7) llevadas a cabo en la Tierra se pueden entonces usar para determinar, entre otros valores, las coordenadas celestes tricas. El sistema está complementado por los transmisores ALSEP (Paqueta de Experimentos de Superficie - Apolo), los cuales fueron colocados por las misiones Apolo 12, 14, 15, 16, 17. Es posible obtener las posiciones relativas de estos transmisores mediante interferometria diferencial. Este método está basado, análogamente a VLBI (4.4.7), en el análisis del cambio de fase que resulta de observaciones simultáneas en dos estaciones receptoras terrestres diferentes - (Cowaselman et. al. 1973). Actualmente (1975) se puede determinar la posición de los reflectores y las posiciones relativas de los transmisores ALSEP con una precisión de  $\pm 10$  m.

Las fotografías tomadas por cohetes, satélites o vehículos especiales sirven para establecer más puntos de control (cráteres fácilmente identificables, u otros detalles). Estas fotografías se revelan automáticamente y se examinan; entonces se envía la información se transmite a la Tierra. El punto de toma en el espacio se obtiene de observaciones (mediciones Doppler (4.4.6) y mediciones de radar (4.4.5) en estaciones de rastreo terrestres. Si las ecuaciones del movimiento de

satélite se desarrollan en el sistema coordenado  
geocéntrico, y si el ángulo de inclinación es  
menor que el ángulo de la órbita de satélite --  
(5.1.1); entonces además de las coordenadas cele-  
stiales de la posición de la cámara, también  
se conocen los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la geometría  
de la cámara (Koch, 1970). Los desplazamientos de las  
estrellas que se observan en estas fotografías con-  
traídas en satélites se pueden explicar por el  
movimiento de la cámara. Finalmente,  
las mediciones altimétricas del satélite a la su-  
perficie lunar, proporcionan el control en la es-  
cala. Con el suficiente resplandor en las fotogra-  
fías, se determinan entonces los puntos de control  
de la superficie mediante una aerotriangulación -  
(ver por ej. Konecny 1974).

Los cohetes y satélites lunares Luna tomaron nume-  
rosas fotografías de la superficie de la Luna --  
(U.S.S.R., 1959-1970), Luna 3: 1959, la primera  
fotografía de la parte posterior de la Luna), y  
por el Ranger (U.S.A., 1961-1965) y los cohetes -  
Surveyor (U.S.A. 1965-1968). Se logró un cubri-  
miento completo con la ayuda de los satélites -  
Lunar-Orbiter (U.S.A. 1966/67). La red de control  
resultante presenta incertidumbres en las coordi-  
nadas de  $\pm$  algunos 100m a  $\pm$  15km (parte posterior  
de la Luna). Una cámara terrestre (distancia focal  
= 76cm, formato de foto = 11.5 x 11.5 cm), una -

cámara estelar, y un alidamiento/ ( $\pm 2m$ ) fueron colocados por los vuelos Apolo 15, 16, 17 (1971/72); un reloj proporcionaba determinaciones de tiempo a  $\pm 1ms$ . Los levantamientos fotogramétricos (altura de cámara a veces  $< 50km$ ) proporcionaron una red de control con un punto por cada  $900km^2$  en la parte frontal de la Luna y dentro de  $30^\circ$  a cualquier lado del Ecuador ( $\sim 20\%$  de la superficie de la Luna); la incertidumbre relativa es de  $\pm 30m$  (Doyle et al. 1977).

Para la determinación del campo de gravedad lunar, el potencial gravitacional se expande en una serie de armónicas esféricas, ver (2.3). Los coeficientes armónicos de esta expansión y la constante gravitacional selenocéntrica se obtienen al evaluar los datos de rastreo usando el método dinámico (5.3.4). Como los cohetes no pueden ser rastreados mientras pasan por la parte no visible desde la Tierra, allí el campo de gravedad (y las coordenadas de los puntos de control) solamente se puede determinar con una precisión limitada. El campo de gravedad en la parte frontal de la Luna es perturbado por grandes anomalías de gravedad positiva (hasta  $200 \times 10^{-5} ms^{-2}$ ) en el área de la maria anular (mascons = concentraciones de masa). Se pueden describir sobreponiendo los efectos gravitacionales de masas de punto o disco en la expansión armónica. Durante las misiones Apolo se hicieron mediciones de la gravedad en la superficie de la Luna ( $\pm 10 \times 10^{-5} ms^{-2}$ ). El análisis existente muestra que los detalles de

longitud de onda largos del campo de gravedad varían muy suavemente (anomalía r.m.c. para 1000 x 1000 km<sup>2</sup>  $\pm 30 \times 10^{-5}$  ms<sup>-2</sup>). Para la expansión armónica (hasta n = 15) nada más los coeficientes hasta n = 3 se conocen con mayor precisión -- ( $\pm 1 \times 10^{-6}$ ).

$$J_2 = 205 \times 10^{-6}, \quad J_{2,2} = -22 \times 10^{-6}, \quad J_3 = 11 \times 10^{-6}$$

La constante gravitacional selenocéntrica  $GM_M$  y la velocidad rotacional  $\omega_M$  tienen los siguientes valores:

$$GM_M = 4902.8 \times 10^7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad \omega_M = 2.661699 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$$

La gravedad en la superficie de la Luna ( $g = 1.628$  ms<sup>-2</sup>) es aproximadamente 1/6 de la gravedad en la Tierra.

Análogamente al geode (3.3), se puede seleccionar la superficie de nivel conocida como selenoide para que sea la superficie de referencia físicamente definida. Aquí no es posible establecer esta superficie a través de un nivel medio del mar, pero en cambio, se impone la condición que ella y la superficie de la Luna contengan el mismo volumen. En el caso de conocimiento insuficiente de la geometría de la superficie lunar, una superficie de referencia así, también se puede fijar por algún punto datum vertical escogido. La esfera y el elipsoide triaxial son apropiados como superficies de re-

ferencia geoméricamente definidas que se aproximan mucho al selenoide.

El radio de la esfera lunar media es  $R_M = 1737.7 \text{ km}$ . La densidad media  $\rho_M = 3.34 \text{ g cm}^{-3}$  es consecuencia de la masa total de  $M_M = 735 \times 10^{20} \text{ kg}$ . Usando el factor de forma dinámico  $J_2$  y las diferencias de los momentos de inercia principales A, B, C, ver (2.3.4):

$$\mu = \frac{C-A}{B} = 631 \times 10^{-6} \quad ; \quad \frac{B-A}{C} = 227 \times 10^{-6}$$

según se obtiene de las observaciones de las libraciones, encontramos  $C = 0.395 R_M^2 M_M$ ; A y B se desvían ligeramente de este valor. De estos resultados se puede inferir que la densidad del cuerpo lunar es aproximadamente homogénea ( $C = 0.4 R_M^2 M_M$  para una esfera homogénea). Esto concuerda bien con la determinación directa de muestras de roca en las misiones Apolo y Luna. Los modelos de densidad lunares de construcción tipo concha que satisfacen las condiciones de límite observado (topografía, campo de gravedad, libraciones, sismicidad) exponen un grosor de la superficie de fuertes variaciones con un valor medio de 60 km (parte frontal) y de 100 km (parte trasera), Bills y Ferrari (1977).

Definiendo la superficie de referencia física para que sea la superficie de nivel que pase a través del lugar de alunizaje del Apolo 12 ( $W_{A12} = 2824.5 \times 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ), los ejes de un elipsoide triaxial mejor acoplado difieren solamente por algunos 100m (el

5. Geodesia Global.

semieje menor se encuentra en la dirección del eje rotacional). Las anomalías de altura y las deflexiones de la vertical adquieren valores de  $\pm 500\text{m}$  y  $\pm 10'$  respectivamente (Bursa 1975).

Geodesia Planetaria.

5.6.2

Para las correspondientes mediciones concernientes a los planetas (Anderson 1975 b), las técnicas usadas, además de los métodos terrestres de astronomía óptica y de radar, emplean datos de rastreo (particularmente mediciones Doppler (4.4.6)) de cohetes espaciales, al igual que información fotográfica obtenida por estos cohetes. Al observar las perturbaciones orbitales de cuerpos celestes naturales y artificiales en el campo gravitacional de un planeta, se puede deducir su masa (como se obtiene del producto con la constante gravitacional  $G$ ) y los coeficientes armónicos más bajos  $J_{n,m}$ ,  $K_{n,m}$  de la expansión armónica esférica del potencial gravitacional (2.3), ver (5.3.4). Las mediciones astronómicas (especialmente observaciones radar) proporcionan los radios ecuatoriales y las velocidades rotacionales. La información topográfica se saca de fotografías (planimetría) y de mediciones radar (alturas).

Entre los planetas interiores, Venus y Marte, que son los más cercanos a la Tierra, fueron explorados ampliamente por los cohetes Mariner (E.U., Ma

Mariner 2, 1962) al igual que por los cohetes Venus y Marte de la U.R.S.S. Se le da particular significancia al Mars-Orbiter Mariner 9 (1971, cubrimiento fotográfico, con una resolución en parte hasta 100m, expansión armónica del campo gravitacional hasta  $n, m = 4, 4$ ) y el cohete Venus-Mercurio Mariner 10 (1974, primera información precisa sobre Mercurio). Desde 1976 existe un cubrimiento estereofotogramétrico de Marte logrado por los Viking-Orbiters 1 y 2 (E.U.). Los resultados importantes (1975) son: Mercurio:  $GM = 220 \times 10^{11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $a = 2.44 \times 10^3 \text{ km}$ ; Venus:  $GM = 324859 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $a = 6.05 \times 10^3 \text{ km}$ ; Marte:  $GM = 428283 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $J_2 = 196 \times 10^{-5}$ ,  $J_{2,2} = 5.5 \times 10^{-5}$ ,  $K_{2,2} = -3.1 \times 10^{-5}$ ,  $a = 3.397 \times 10^3 \text{ km}$ .

De los planetas exteriores, solamente Jupiter ha sido investigado por cohetes espaciales (E.U., Pioneer 10 y 11 en 1973/1974, Voyager 1 y 2 en 1977). Los resultados para los planetas restantes (Saturno, Urano, Neptuno) están basados exclusivamente en observaciones ópticas y de radar en astronomía. Mencionamos las siguientes determinaciones: Jupiter  $GM = 12672 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $J_2 = 14.7 \times 10^{-3}$ ,  $J_4 = 7 \times 10^{-4}$ ,  $a = 70.8 \times 10^3 \text{ km}$ ; Saturno:  $GM = 3792 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $J_2 = 16.7 \times 10^{-3}$ ,  $a = 60 \times 10^3 \text{ km}$ ; Urano:  $GM = 582 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $a = 25 \times 10^3 \text{ km}$ ; Neptuno:  $GM = 687 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $a = 24 \times 10^3 \text{ km}$ .

## LEVANTAMIENTOS GEODESICOS

6.

La finalidad de los levantamientos geodésicos -- abarca la determinación de redes de control para posición, altura y gravedad. La construcción de series de mapas nacionales usualmente también se considera como parte de la función del levantamiento geodésico. Este capítulo solamente describe el diseño de las redes fundamentales (redes de primer orden) las cuales son significativas en geodesia global. Los fundamentos principales de los levantamientos geodésicos, incluyen métodos que son útiles en el diseño de densificación de redes, son tratados por Großmann (B 1976, B - 1975), haciendo así posible aquí una presentación abreviada; ver también Bomford (A 1971), Ewing y Mitchell (A 1970), Levallois (A 1969/71). No vamos a considerar la representación conforme del elipsoide terrestre en el plano; la cual da las coordenadas cartesianas planas que se necesitan en geodesia aplicada (Großmann A 1976, -- Richardus y Adler B 1974), Lee 1974).

## REDES DE CONTROL HORIZONTAL

6.1

## Diseño, Monumentación, Observaciones.

6.1.1

Los puntos de control de redes de control horizontal se denominan puntos trigonométricos (PT) -- (triangulación). Los PT de primer orden ó puntos

de triangulación primaria están separados por 30 a 60km. Los puntos más altos sirven para establecer estaciones entre las cuales existe intervisibilidad ó se puede crear mediante la construcción de torres. Los puntos se monumentan permanentemente con marcas subterráneas y de superficie (placas de piedra, y pilastras de piedra o concreto, pernos en rocas). Las marcas de seguridad ayudan en la verificación y recuperación de las estaciones en el caso de detrimento en las marcas originales.

Los PT se pueden determinar por métodos de triangulación, trilateración, o por poligonación (Ashkenazi 1973).

En la triangulación, se observan todos los ángulos de los triángulos formados por los PT (4.3.2). La escala de la red se obtiene de las longitudes de los lados de los triángulos individuales. Para evitar un incremento de los errores de escala sistemáticos, tales mediciones de distancia (4.3.3) se deben hacer a intervalos de alrededor de 200km. Las estaciones La place (5.1.4) controlan la orientación de la red.

Las triangulaciones primarias se pueden hacer en forma de cadenas ó de redes de área. Para cubrir grandes regiones, frecuentemente se observan cadenas de triángulos o cuadriláteros con diagonales los cuales se unen para formar un marco de referencia. Los espacios de este marco de referencia se llenan entonces con redes de triangulación de primer orden ó con re-

des de densificación con lados más cortos.

El método de trilateración ha adquirido considerable importancia mediante el desarrollo de mediciones de distancia electromagnéticas (4.3.3). Aquí se miden las longitudes de todos los lados de los triángulos y de todas las diagonales posibles para obtener un número suficiente de determinaciones redundantes en la red. A pesar de que se lleva un control continuo de la red, los errores en orientación se pueden acumular rápidamente, de tal forma que se necesita un control rígido a través de estaciones Laplace.

El diseño de redes de control mediante poligonales de alta precisión es muy económico. En este método los lados se miden con distanciómetros electrónicos y los ángulos de la poligonal se miden con un teodolito de centrado forzado. Conectando estas poligonales en los puntos nodales, se pueden construir redes poligonales con gran precisión. Las torceduras de la red se pueden prevenir si las estaciones Laplace se encuentran suficientemente cerca entre ellas.

Finalmente, se pueden formar redes de triangulación fundamentales combinando la triangulación, la trilateración, y las poligonales de alta precisión.

El método particular va a depender esencialmente del terreno en consideración. La precisión relativa

de las redes de control horizontal varía de  $\pm 10^{-5}$  a  $\pm 2 \times 10^{-6}$ .

Las redes de control existentes en general fueron determinadas entre 1850 y 1950 por triangulación; los métodos de trilateración, y en particular, poligonación se usan en los levantamientos geodésicos más recientes (6.1.3). Para una cierta, generalmente configuración especificada de estaciones y una precisión deseada de los puntos de control, los métodos en optimización pueden proporcionar información referente al diseño y frecuencia de las observaciones (Bossler et al. 1973).

Entre 1950 y 1965 los métodos Shoran y Hiran (4.3.3) se aplicaron en los levantamientos de regiones inaccesibles y extensas, al igual que al puentear partes de los océanos. En el caso de requerirse una precisión menor, se pueden emplear los métodos Aerodist (4.3.3) para densificar con rapidez las redes de marco. De 1949-1958 se llevo a cabo una trilateración Shoran e Hiran en Canadá (longitud promedio de un lado: 400km,  $\pm 2 \times 10^{-5}$ ); las cadenas Hiran unen a Norteamérica sobre Groenlandia e Islandia con Europa (1953-1956). También existen uniones como esa entre Creta y África (1953) y entre Florida y Trinidad.

## 6.1.2

## Cálculos.

El sistema de coordenadas geográficas elipsoidales  $\varphi, \lambda$  (3.4.1) se usa como referencia, por lo tanto,

## 6. Levantamientos Geodésicos.

el datum geodésico (5.1.4) orienta ese sistema.

En levantamientos geodésicos anteriores, la superficie de referencia era un elipsoide calculado del ajuste de varias mediciones de arco (1.3.3).

Levantamientos geodésicos más recientes están referidos a un elipsoide de mejor acomodo derivado de las ecuaciones de la deflexión de la vertical (5.1.7), o están basados en el elipsoide del Sistema de Referencia Geodésico 1967 (3.5.5) (por ej. Australia). ver la lista en (5.1.4). La deflexión

de la vertical en el punto origen se puso en cero ó se determinó mediante un ajuste de las deflexiones de la vertical. La ondulación del geoide en el punto origen frecuentemente se ha establecido

indirectamente reduciendo las bases observadas al geoide y tratándolas como cantidades elipsoidales; el elipsoide y el geoide se intersectan en estas líneas.

Los azimutes y ángulos observados usualmente sólo han sido corregidos por la altura de la señal;

y solamente se consideraron alturas ortométricas en la reducción de distancias observadas (5.1.4.)

El despreciar las deflexiones de la vertical y las ondulaciones del geoide ocasiona errores sistemáticos de orientación y escala; este

procedimiento aproximado se conoce como el "método de desarrollo". En todos los PT de los levantamientos geodésicos más recientes, se observan las latitudes y longitudes astronómicas, o se interpolan las deflexiones de la vertical, para que se

## 6.1 Redes de Control Horizontal.

puedan hacer las reducciones que consideran las deflexiones (5.1.4) y ondulaciones del geode (nivelación astronómica (5.1.6) ).

Para calcular las coordenadas geográficas se introduce la línea geodésica en el elipsoide (6.1.4) como línea de unión con el PT. El ajuste se puede hacer por el método de variación de coordenadas o por el método de observaciones condicionadas. El ajuste de acuerdo a la variación de coordenadas es lo apropiado si se cuenta con computadores electrónicos. Las ecuaciones de observación relacionan los azimutes observados, las direcciones y distancias horizontales a las coordenadas  $\varphi$ ,  $\lambda$ . Estas ecuaciones se formulan como la solución al problema inverso (6.1.6).

En épocas anteriores, se prefería el ajuste de acuerdo a las observaciones condicionadas debido al menor número de parámetros desconocidos. El ajuste elimina los errores de cierre que aparecen en la geometría de la red. Usando la solución del problema directo (6.1.6), las coordenadas del punto origen se pueden transferir a esta red que no tiene errores de cierre (extensión de la red). Un ajuste combinado de los diferentes sistemas de red adquiere importancia debido a la alta precisión de las redes de densificación trigonométrica y poligonométrica, y también por la posibilidad de procesar los datos electrónicamente (Gerke y Pelzer 1970).

Ejemplos.

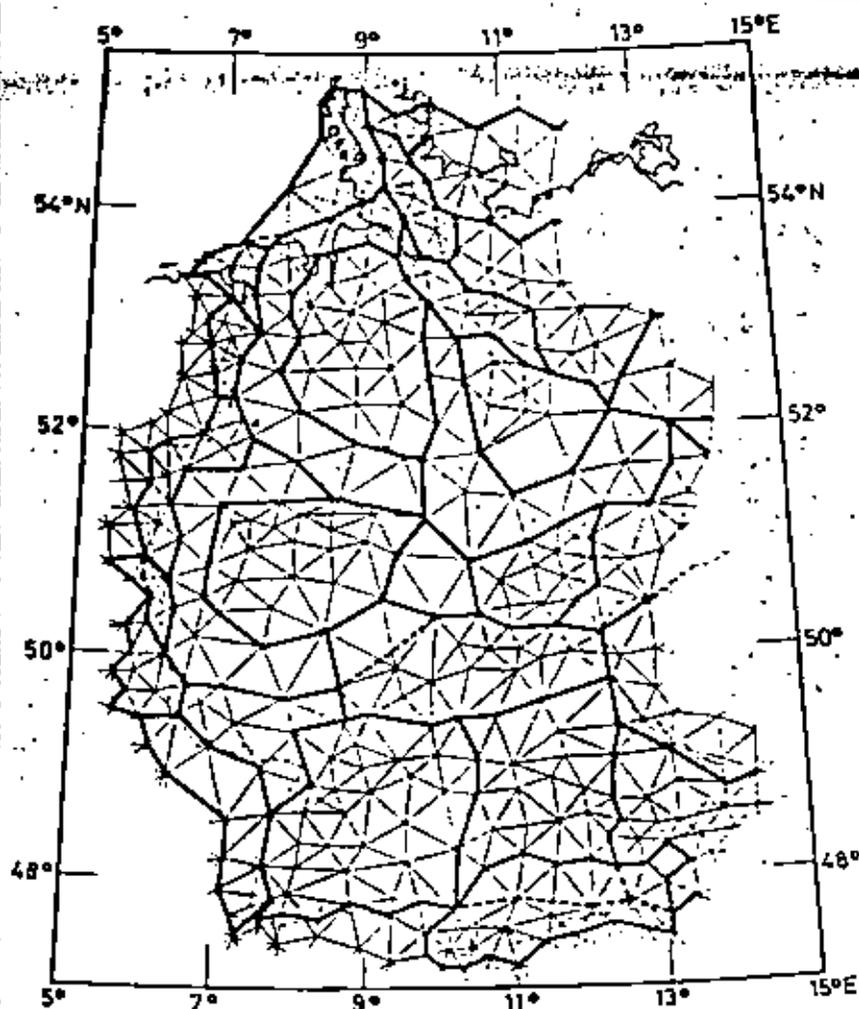
6.1.3

La Red de Triangulación Primaria de la República Federal de Alemania, como un ejemplo clásico de sistema de área, surgió entre 1870 y 1950 de la combinación de varias redes individuales (6.1.7) (Fig. 6.1). La parte de la red entre los ríos Elba y Main, y la frontera Oeste de Alemania se mantuvo fija. Consiste de cadenas y redes de densificación y fue triangulado bajo la dirección de -- Schreiber de 1870 á 1895 ("bloque de Schreiber"). El elipsoide con:

$$a = 6\,377\,397 \text{ m} \quad , \quad f = 1:299.15$$

calculado en 1841 por Bessel de diez mediciones de arco sirvieron como una superficie de referencia. El punto origen está en Rauenberg, donde la deflexión de la vertical adoptada es cero. La red está orientada por el azimut astronómico del lado del triángulo que une Rauenberg y la Iglesia de María en Berlin. La escala se obtiene de cinco bases de la cual la longitud del lado del triángulo más cercano se derivó mediante redes de extensión de base especiales. Como las bases nada más se redujeron al geoide, el elipsoide de referencia coincide con el geoide en estas líneas (6.1.2). Surgieron inconsistencias en las orillas de la red cuando se unieron redes recientes a las ya existentes. Estos errores y los efectos que surgen del "método de desarrollo" (6.1.2) causan distorsiones geométricas en la red,

Fig. 6.1:  
Red de  
Triangulación  
Primaria de la  
República Fede-  
ral de Alemania,  
de Nieders. Min.  
d. Inn. 1969



las cuales se manifiestan como variaciones de escala hasta  $1 \times 10^{-5}$ , deformaciones generales de 1m y más, y deformaciones regionales de varios 0.1m.

Las redes horizontales en E.U., URSS y otros países de grandes extensiones de área están basadas en marcos contruidos de cadenas de triangulación a lo largo de meridianos y paralelos. La extensión de área de control mediante redes de densificación se hace de acuerdo al progreso del desarrollo de las áreas de terreno individuales. En las uniones de las cadenas de triangulación surgen redes nodales, donde generalmente están incluidos una base y un azimut La-

## 6. Levantamientos Geodésicos.

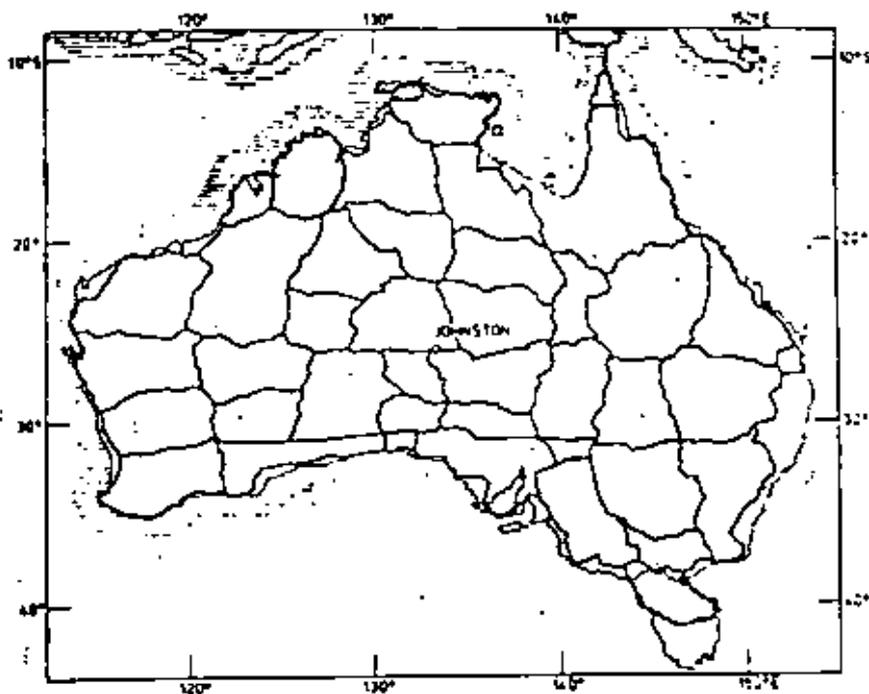
place. Estas redes nodales internamente ajustadas se tratan como restricciones en el ajuste general de la red marco. La red marco de E.U. tiene un tamaño de malla de aproximadamente 500km; fue ajustada por el U.S. Coast and Geodetic Survey (W. -- Bowie) en el Datum de Norteamérica de 1927 (5.1.4). (Baker 1974). La red de la URSS (tamaño de malla: 200 a 400km) fue ajustada en el Datum Pulkovo de 1942 (T.N. Krassovski). Numerosas deflexiones de la vertical astrogeodésicas fueron determinadas para las reducciones al elipsoide; además se juntaron datos gravimétricos extensivamente para la interpolación de las deflexiones de la vertical (5.1.6), Izotov (1959). Los elipsoides de referencia de ambos sistemas se adaptaron para lograr un buen acomodo al geoide (5.1.7). La precisión relativa de la red es de  $\pm$  varios  $10^{-6}$ , lo que puede conducir a distorsiones de 10m en las orillas del sistema.

El control en el Sur de Canadá se hace mediante cadenas de triangulación y poligonales; recientemente, todo el país fue cubierto por puntos de control Doppler ( $\pm$  1m), con separaciones de 200 a 500km. Para una mayor densificación se usan predominantemente poligonales (Mc Lellan 1974). La red de control Australiana de primer orden se determinó primordialmente mediante poligonales (Fig. 6.2) los puntos nodales están separados por varios 100km. Se observan azimutes Laplace en cada punto, cuan-

do es posible, En las regiones costeras desarrolladas esta red poligonal está densificada por triángulos y poligonales; las áreas menos accesibles están rellenas con el método Aerodist (4.3.3). Los parámetros del datum para el punto origen en Johnston se obtuvieron acomodando óptimamente el elipsoide al geoido usando 275 deflexiones de la vertical astrogeodésica que están distribuidas sobre Australia; la ondulación del geoido se colocó en cero (Lambert 1977).

Fig. 6.2:

Red de Poligonación australiana, representación simplificada, de "Geodesia en Australia". Reporte Nacional para 1971-1974, XVI Asamblea General de la U.G.G.I. Grenoble 1975; punto origen en Johnston



## 6.1.4

## Geodésicas en el Elipsoide Rotacional.

Para poder hacer los cálculos en el elipsoide rotacional, los puntos en el elipsoide deben estar conectados entre ellos mediante curvas de superficie. Primeramente consideramos la sección normal (arco) y la geodésica.

La sección normal o vertical está definida por la curva de intersección del plano vertical (3.4.2)

y el elipsoide. Por ello, las direcciones (S.13), las cuales se observan con teodolitos y se reducen al elipsoide, forman ángulos entre las secciones normales; las distancias espaciales también se pueden reducir a longitudes de secciones normales (4.51). Como las normales de superficie de dos puntos en el elipsoide están en general oblicuas entre ellas, las secciones normales recíprocas de  $P_1$  a  $P_2$  y de  $P_2$  a  $P_1$  no coinciden (Fig. 6.3). Para poder obtener cálculos bien definidos, debe tomarse en cuenta la diferencia en  $\alpha_1$  imut  $\alpha_1 - \alpha_1''$ ; para  $S = 50\text{km}$ , esta diferencia es de cuando mucho sólo  $0'' 02$ .

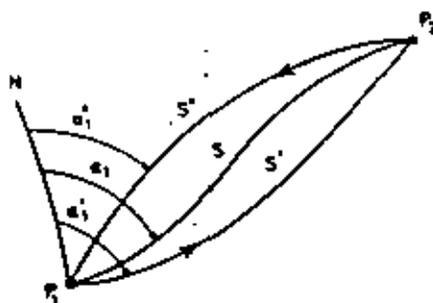


Fig. 6.3  
Sección normal  
y la geodésica

Usualmente, debido a sus propiedades favorables en geometría diferencial, se introduce una singular curva de superficie denominada geodésica. Esta línea es la conexión más corta sobre el elipsoide entre dos puntos y se extiende generalmente entre los dos secciones normales recíprocas (Fig. 6.3).

Para derivar la ecuación de la geodésica, empezamos por la curvatura geodésica  $K_g$ . Corresponde a la curvatura de la proyección normal de una curva  $\vec{r}(S)$  en el plano que es tangente a la superficie.  $K_g$  se puede representar por el triple producto

escalar:

(6.1)

$\underline{r}'$  es el vector tangente y  $\underline{r}''$  es el vector de curvatura ( $'$  significa la primera derivada y  $''$  indica la segunda derivada con respecto a la longitud de arco).  $\underline{n}$  es el vector normal a la superficie. Para la <sup>curvatura</sup> geodésica de la geodésica, tenemos:

(6.2)

$$(\underline{r}' \times \underline{r}'') \cdot \underline{n} = 0.$$

o sea que la proyección en el plano tangencial es una recta. Esta ecuación diferencial de segundo orden en el elipsoide de revolución y en el sistema  $\varphi, \lambda$  con  $\lambda = \lambda(\varphi)$  se vuelve:

(6.3)

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \left( \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} - \frac{1}{M} \frac{dM}{d\varphi} \right) \frac{d\lambda}{d\varphi} + \frac{\rho}{M^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \left( \frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 = 0.$$

$\rho$  es el radio del círculo paralelo (3.18),  $N$  es el radio de curvatura en el primer vertical (3.26), y  $M$  es el radio de curvatura del meridiano (3.24). De las relaciones:

(6.4)

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\cos z}{M}, \quad \frac{d\lambda}{dS} = \frac{\sin z}{N \cos \varphi}$$

que se toman directamente de la Fig. 6.4, y que en general se cumplen, la primera integración de (6.3) conduce a la ecuación de Clairaut:

(6.5)

$$N \cos \varphi \sin z = \text{const.} = N_m \cos \varphi_m$$

La constante de integración corresponde al radio del círculo paralelo en la latitud geográfica  $\varphi_m$ , en la cual la geodésica tiene un azimut de  $90^\circ$ . Introduciendo la latitud reducida  $\beta$  (3.20), (6.5) se vuelve:

(6.6)

$$\cos \beta \sin z = \cos \beta_m$$

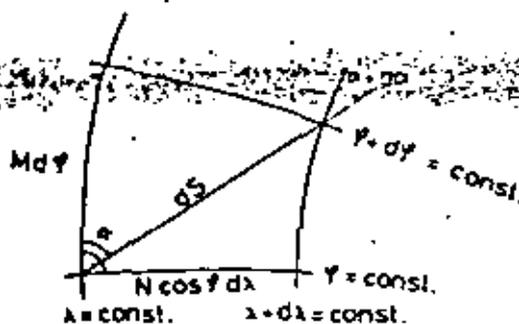


Fig. 6.4:

Elemento de arco en el sistema de las coordenadas geográficas

Integrando (6.5) nos da integrales elípticas. Si diferenciamos (6.5) con respecto a S, entonces con (6.4), tenemos:

$$\frac{d\alpha}{dS} = \frac{\sin \alpha \tan \varphi}{N}$$

(6.7)

Para expansiones en serie, (6.4) y (6.7) forman un importante sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para la geodésica.

El acimut  $\alpha_1'$  y la longitud de arco  $S_1'$  los cuales están referidos a la sección normal se reducen al acimut  $\alpha_1$  y a la longitud de arco S de la geodésica como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1' - \alpha_1 &= \frac{e^2}{12a^2} \cos^3 \varphi_1 S^2 \sin 2\alpha_1 + \dots \\ S' - S &= \frac{e^2}{360a^2} \cos^4 \varphi_1 S^3 \sin^2 2\alpha_1 + \dots \end{aligned} \right\}$$

(6.8)

Para S = 50 (200) km, la reducción en acimut es de cuando mucho 0''007 (0''112), y la reducción en la longitud de arco no es mayor a  $2 \times 10^{-11}$  ( $2 \times 10^{-8}$ ) m. Por eso la última siempre se puede despreciar. La reducción de acimut obtiene la precisión de las mediciones angulares de primer orden solamente para líneas muy largas.

C.F. Gauss estudió las geodésicas exhaustivamente su significancia geodésica está tratada en libros.

de texto y manuales de levantamientos geodésicos.

## 6.1.5

## Solución de Triángulos Elipsoidales.

Para la determinación de las coordenadas geográficas a partir de la distancia y el azimut (6.1.6), se deben calcular los lados y ángulos no observados usando triángulos elipsoidales. Para las longitudes de lados en una triangulación de primer orden, los cálculos elipsoidales se pueden reemplazar por cálculos en una esfera. A este respecto, el elipsoide se aproxima por la esfera osculante de Gauss tangente en  $P_0$  ( $\phi_0$ ) y de radio:

(6.9)

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0}$$

La latitud de tangencia  $\phi_0$  se puede escoger como la media aritmética de las latitudes geográficas de los vértices del triángulo particular. Dentro de un radio de 150km alrededor del punto de tangencia de la esfera osculante de Gauss, los errores de dirección causados por la aproximación esférica son menores que 0"005.

Para la solución de un triángulo esférico de lados,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , la ley esférica de los senos da:

(6.10)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \frac{a}{R}}{\sin \frac{b}{R}}$$

Expandiendo  $\sin (a/R)$  y  $\sin (b/R)$  en serie hasta  $O(1/R^3)$ , se obtienen las relaciones correspondientes a la ley de los senos para el plano. Si los ángulos esféricos se reducen en un tercio del exceso

esférico, entonces se obtiene la ecuación de Legendre:

$$\frac{\sin(\alpha - \epsilon/3)}{\sin(\beta - \epsilon/3)} = \frac{a}{b} \quad (6.11)$$

Si se les dan incrementos (aditamentos) a los lados esféricos, entonces se obtiene el método de aditamentos <sup>de</sup> Soldner:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a - a^2/6R^2}{b - b^2/6R^2} \quad (6.12)$$

El exceso esférico  $\epsilon$  que aparece en (6.11) es lo que rebasa de  $180^\circ$  la suma angular de un triángulo esférico. Se calcula de acuerdo a:

$$\epsilon = \frac{F}{R^2} \quad (6.13)$$

donde  $F$  es el área del triángulo plano calculado a partir de las longitudes de los lados esféricos.

$\epsilon = 5''48$  para un triángulo equilátero con  $S = 50\text{km}$ .

#### Problema Geodésico Directo e Inverso

6.1.6

En los cálculos esféricos (6.1.2) surgen en forma repetida los siguientes problemas:

1. Cálculo de las coordenadas geográficas  $\varphi_2, \lambda_2$  del punto  $P_2$  al igual que el azimut  $\alpha_2$ , dadas las coordenadas  $\varphi_1, \lambda_1$  del punto  $P_1$ , el azimut  $\alpha_1$  y la distancia  $S$ .
2. Cálculo de los azimutes  $\alpha_1, \alpha_2$  y la distancia  $S$ , dadas las coordenadas  $\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2$  de los puntos  $P_1, P_2$ .

Estos problemas se conocen como los problemas geo-

6.1 Redes de Control Horizontal.

désicos, directo e inverso, respectivamente. Debido a su importancia en el diseño de las redes de triangulación, en la bibliografía alemana se les ha llamado el primero y segundo problemas geodésicos principales. En cualquier caso, se trata de la solución del triángulo polar elipsoidal  $P_1 N P_2$  (Fig. 6.5). Si se intro-

Fig. 6.5:  
Problemas geodésicos directo e inverso



duce a la geodésica como la curva de superficie entre  $P_1$  y  $P_2$ , entonces los problemas antes mencionados demandan la integración de las ecuaciones diferenciales de la geodésica y la solución para las cantidades deseadas. Las numerosas soluciones se pueden dividir en tres grupos (Schnädelbach 1974).

Las soluciones en el primer grupo están basadas en la integración del sistema de ecuaciones diferenciales (6.4), (6.7) de la geodésica. Aquí, Legendre (1806) hizo expansiones de Serie de Taylor de las diferencias de latitud, longitud y azimut como funciones de la longitud de arco:

(6.14)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \left(\frac{d\varphi}{dS}\right)_1 S + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{dS^2}\right)_1 S^2 + \dots \\ \lambda_2 - \lambda_1 &= \left(\frac{d\lambda}{dS}\right)_1 S + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\lambda}{dS^2}\right)_1 S^2 + \dots \\ \alpha_2 - \alpha_1 &= \left(\frac{d\alpha}{dS}\right)_1 S + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha}{dS^2}\right)_1 S^2 + \dots \end{aligned} \right\}$$

## 6. Levantamientos Geodésicos.

Usando las primeras derivadas (6.4); (6.7), también se pueden calcular las derivadas mayores. Como las series están expandidas con respecto a  $S$ , convergen lentamente, de tal manera que en general son aplicables solamente hasta un alcance de 150km. Dorrer (1966) integró las ecuaciones numéricamente de acuerdo al método Runge - Kutta.

En los métodos desarrollados por Bessel (1826) y Helmert (1880), el triángulo polar elipsoidal (Fig. 6.5) se transfiere a una esfera concéntrica (radio  $a$ ). Los cálculos se hacen entonces en esta esfera y subsecuentemente se hace una transformación de regreso al elipsoide. La latitud reducida  $\beta$  se usa para la latitud esférica,  $\beta$  está relacionada a  $\phi$  mediante (3.2.1). Si el azimut  $\alpha_1$  se transfieren a la esfera, entonces mediante la ecuación de Clairaut (6.6), se preservan los azimutes elipsoidales en esta transferencia. Las relaciones entre la distancia elipsoidal  $S$  y la distancia esférica  $\sigma$  al igual que aquellos entre las diferencias de longitud elipsoidal y esférica  $\Delta\lambda$  y  $\Delta\lambda'$  se derivan combinando las ecuaciones.

$$\frac{d\beta}{d\sigma} = \cos z \quad \frac{d\lambda'}{d\lambda} = \frac{\sin z}{\cos \beta} \quad (6.15)$$

las cuales son válidas en la esfera, con las fórmulas elipsoidales correspondientes (6.4).

Después de algunas manipulaciones, se obtienen

las siguientes ecuaciones diferenciales:

(6.16)

$$dS = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} da, \quad d\lambda = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \beta} d\alpha.$$

Las integrales elípticas resultantes se pueden resolver ya sea expandiendo las raíces cuadradas en serie y subsecuentemente integrando término por término -- (Bodemüller 1954), o por métodos numéricos (Mitternayer 1968). Este proceso muestra una convergencia favorable ya que uno resuelve nada más para pequeñas diferencias entre las cantidades elipsoidal y esférica. Por esto también es adecuado para cálculos que implican geodésicas muy largas.

Finalmente, los problemas geodésicos principales se pueden resolver usando una proyección conforme a la esfera con cálculos esféricos subsecuentes y una -- transformación de regreso al elipsoide (Schnädelbach 1971). Empleando la esfera osculadora de Gauss (6.9) se obtienen ecuaciones de transformación simples. Ya que la proyección ocasiona distorsiones, los azimutes y distancias están sujetas a reducciones. Este método también es adecuado para líneas largas.

Dentro de áreas limitadas, también se puede sacar ventaja de fórmulas aproximadas para el cálculo de las coordenadas (Hirvonen 1957).

6.1.7

Unificación de Redes de Triangulaciones.

La unificación de las redes de triangulación puede ser necesaria para construir sistemas de triangulación

6. Levantamientos Geodésicos.

nacionales de varias redes parciales, o para crear a partir de sistemas continentales / las redes nacionales. Si aún existen los datos de las observaciones originales y si el esfuerzo del cálculo se justifica, entonces un nuevo ajuste de las redes proporciona -- resultados óptimos.

Si se conocen las diferencias entre los datums geodésicos de dos sistemas, entonces las deflexiones de la vertical y con ello las coordenadas geográficas de todos los puntos pueden ser transformadas usando las ecuaciones de traslación de la deflexión de la vertical (5.1.7) (desplazamiento de datums).

Si nada más existen las coordenadas de pocos puntos en ambos sistemas, entonces la unificación de las redes debe hacerse usando estos puntos comunes (Jordan, Eggert - Kneissl AIV, 1958/59, p. 1247).

Como las coordenadas de los diferentes sistemas se originan de diferentes mediciones y cálculos (ajustes), no pueden hacerse coincidir estrictamente ("coordenadas heterogéneas"). Los cambios en el datum se calculan entonces se determinan por la condición:

$$\Sigma(\delta\varphi^2 + \cos^2 \varphi \delta\lambda^2) = \text{Min.} \tag{6.17}$$

la cual está formada para las diferencias de coordenadas  $\delta\varphi, \delta\lambda$  en los puntos comunes. Las cantidades  $\delta\varphi = -\delta\xi$  y  $\cos \varphi \delta\lambda = -\delta\eta$  (5.1) están relacionadas a los cambios en el datum de acuerdo

## 6.1 Redes de Control Horizontal.

a las ecuaciones de traslación para la deflexión de la vertical. Este método desarrollado por Helmert, corresponde a una transformación de similitud, en la cual los parámetros de la transformación (desplazamientos, rotación, cambio de escala) se determinan por un ajuste (transformación Helmert).

### 6.1.8 Redes de Control Horizontal Superpuestas

Las redes de control horizontal existentes de levantamientos geodésicos se podrán controlar y reforzar por el método de geodesia gravimétrica y geodesia de satélite, tan pronto como estos métodos alcancen cuando menos la precisión de las redes horizontales (5.4.3). Los puntos de control Doppler (4.4.6) son particularmente adecuados para mejorar y verificar las redes; por el otro lado, la importancia de la triangulación de satélites ha disminuido. En el futuro, las mediciones de distancia laser a los satélites y la Interferometría de Bases muy Largas (4.4.7) debe poder contribuir a la firmeza de los sistemas de control horizontal.

En el posicionamiento Doppler, hoy día el error medio de las coordenadas es de  $\pm 1$  a  $\pm 2$  m (5.3.4). Para garantizar una precisión relativa de  $\pm 2 \times 10^{-6}$ , la distancia entre los puntos de control Doppler no debe ser menor que 500 a 1000 km. La precisión de la triangulación de satélite depende, por ejemplo de la configuración de la red; para alturas de satélite de

## 6. Levantamientos Geodésicos.

satélites de 4000km, es posible lograr un error medio en las coordenadas de  $\pm 4m$  en varios 1000 km (5.3.2), ver Saxena (1973).

Las poligonales de alta precisión pueden reforzar más las redes de control horizontal que tengan una gran extensión. Es posible obtener una precisión de  $\pm 1 \cdot 10^{-6}$  si se usan aparatos de medida de distancias electrónicas (por ej. medidor de distancias laser) para determinar las distancias (4.3.3).

Actualmente se está llevando a cabo una revisión de las redes horizontales dentro de la extensión del subcontinente Norte Americano (E.U., Canadá, México y América Central, Groenlandia). El marco de referencia de este sistema en E.U. está formado por poligonales que se observan usando geodímetros. Están reforzadas por puntos Doppler (separados 300km) los cuales están distribuidos uniformemente en todo el país (Fig. 6.6). Los ángulos horizontales tomados de triangulaciones existentes y los cuales han sido reducidos al elipsoide, al igual que un número suficiente de azimutes/ <sup>astronómicos</sup> se incluyen además en el ajuste total. La orientación del elipsoide de referencia (elipsoide terrestre medio) se establece mediante las coordenadas de los puntos Doppler. (Bossler 1976).

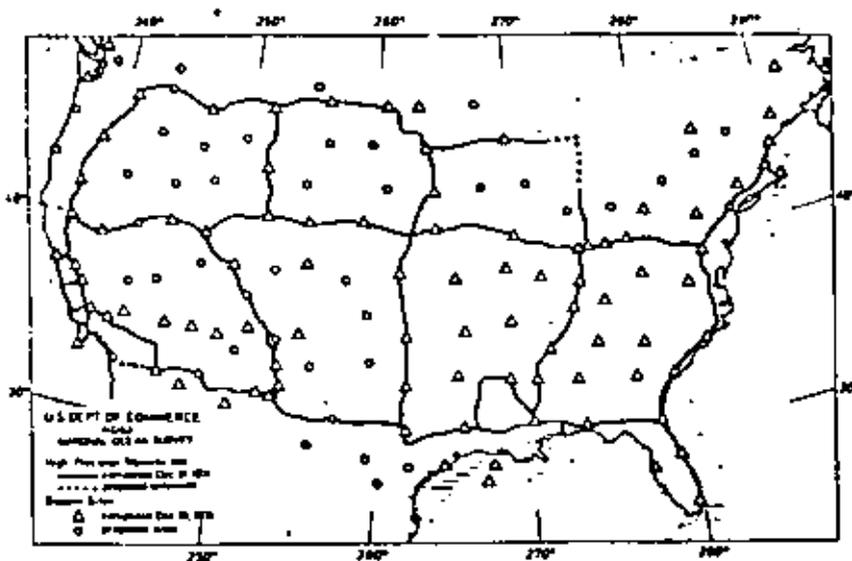
Los sistemas Doppler con estaciones separadas -

## 6.1 Redes de Control Horizontal.

por varios 100 km también se están construyendo actualmente en Europa del Oeste, Canadá, Australia y América del Sur para que los puntos de control horizontal clásicos se puedan verificar.

Fig. 6.6

Red de poligonales de alta-precisión y posicionamientos Doppler E.U., completados o propuestos (31/12/1974) de Meade (1975 b)



Es posible una menor distancia entre los puntos de control en el caso de triangulaciones estelares con señales / por medio de globos (5.3.2).

Actualmente, en Finlandia se está observando una red de 14 estaciones por el método de triangulación estelar (longitud promedio de un lado: 200 km), en la cual luces intermitentes sirven de señales. El equipo apropiado es elevado a alturas de 30 a 40 km por globos / meteorológicos y es activado desde el suelo por un reloj de cristal de cuarzo (4.4.3). Se imprime un fotografía de los destellos contra el fondo de la estrellas fijas con un telescopio Schmidt que tiene una montura ecuatorial ( $f = 1031\text{mm}$ ; apertura rela-

## b. Levantamientos Geodésicos.

tiva de 1:2.5, placa de vidrio de 9 x 9 cm). El azimut y el ángulo de altitud de los lados del triángulo se pueden determinar con incertidumbres de  $\pm 0''3$  y  $\pm 0''5$  respectivamente. La escala de la triangulación se adquiere de una red de triangulación de primer orden y de una poligonal de lados largos especialmente diseñada observada con geodímetros laser (Kakkuri 1973).

## REDES DE CONTROL VERTICAL

6.2

### Diseño, Monumentación, Observaciones

6.2.1

Las redes de control vertical se determinan por el método de nivelación geométrica; los puntos de control se conocen como bancos de nivel (BN). La red de B.N. está basada en una red de nivelación de primer orden la cual está diseñada en circuitos cuyo diámetro es de 100km o menos. Los circuitos están compuestos de líneas de nivel que unen puntos nodales. Estas líneas a su vez están formadas por nivelaciones que conectan bancos de nivel vecinos (espaciamiento promedio de 1km).

Los BN generalmente se marcan sobre el suelo con pernos en edificios, rocas, o postes de concreto; y en áreas de menor estabilidad (aluvión) por tubos largos (marcas de tubo). Los monumentos establecidos bajo tierra a grandes intervalos, aseguran la red y sirven como base para investiga-

ciones científicas con respecto a cambios de elevación. Las líneas de nivel siguen en general los caminos de circulación principales; las líneas de primer orden deben pasar sobre las regiones más estables.

La nivelación se hace de acuerdo a los procedimientos de nivelación precisa (4.3.5).

Como los cambios en elevación regionales y locales pueden alcanzar magnitudes de mm/año, las redes de control vertical deben renivelarse a intervalos de tiempo no muy largos (20 a 30 años); esto es especialmente cierto para áreas que han sufrido grandes cambios recientes en elevación, ver (5.5).

### Cálculos

La superficie de referencia para alturas (geoide, cuasigeoide) (3.3.2) se establece amarrándola al nivel medio del mar. Debido a las dificultades en la determinación del nivel medio del mar y por la desviación de esta superficie de una superficie de nivel (3.3.3), la superficies de referencia para altura en los diferentes países puede diferir por más de un metro.

Antes del ajuste de las redes de nivelación de primer orden, las diferencias de alturas observadas deben ser corregidas por el hecho de que las superficies de nivel no son paralelas. Estas diferencias de altura generalmente se convierten ya sea a dife-

## 6. Levantamientos Geodésicos.

erencias de alturas ortométricas ó diferencias de alturas normales usando la corrección ortométrica ó la normal, respectivamente (5.1.5). Las mediciones de gravedad proporcionan los valores de gravedad de superficie necesarios a lo largo de la trayectoria de la línea de nivel.

Las alturas normales se pueden determinar sin una hipótesis. Se han introducido en Europa del Este, en la R.D.A. (Schneider 1960) y en Francia. Para el cálculo de las alturas ortométricas, se forman hipótesis con respecto a la distribución de masa entre las superficies físicas de la Tierra y del geode. Aquí, el valor promedio de la gravedad a lo largo de la línea de la plomada puede ser aproximado por el valor en la altura  $H/2$ . Se obtiene bajo la suposición de densidad constante y topografía del tipo de placa, removiendo la placa -- Bouguer (5.70), aplicando una reducción de aire libre (5.66) hasta  $H/2$ , y restaurando subsecuentemente la placa, donde el signo es de nuevo negativo. Usando la densidad  $2.67 \text{ g cm}^{-3}$ , obtenemos la solución (5.20). Las alturas calculadas sobre la base de esta hipótesis se llaman alturas Helmert. En regiones montañosas, el error que resulta de esta hipótesis puede alcanzar valores del orden de cm. Es posible un mejoramiento al momento, de acuerdo a Nieithammer (1932), al considerar las variaciones de densidad y la topografía.

## 6.1 Redes de Control Vertical.

fía real (reducción de terreno (5.71)).

### Ejemplos

La Red de Nivelación Primaria de la República Federal de Alemania es un ejemplo de una red de nivelación de primer orden. Está compuesta de partes que se observaron desde 1912 á 1960 (Heller y Wernthaler 1955). Se le añaden partes nuevas a la red existente mediante el condicionamiento de la última. Los circuitos de esta red tienen diámetros de 30 á 80 km (Fig. 6.7). Las líneas de primer orden pasan por áreas particularmente estables; están aseguradas por marcas enterradas en forma de pilares de granito. En lugares geológicamente apropiados se combinan tres marcas subterráneas en cada caso para formar un grupo: en lugares prominentes, cuyas elevaciones no cambian, se combinan cinco marcas para un banco de nivel nacional de primer orden.

De las diferencias entre las nivelaciones de ida y de regreso el error medio-km para la red está dado por  $\pm 0.3$  a  $\pm 0.4 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$ . El error de cierre del circuito tiene aquí valores de  $\pm 0.4$  á  $\pm 0.7 \text{ mm}/\sqrt{\text{km}}$ . Estas discrepancias se pueden explicar despreciando las correlaciones entre las observaciones en el análisis de error (Lucht 1972).

Desde 1879, las alturas han sido referidas a la superficie de nivel a través del punto de referencia del nivel medio del mar; esta superficie se denomina Normal Cero (NC), (datum del nivel del mar). El punto de referencia del nivel medio del mar está situado a ---

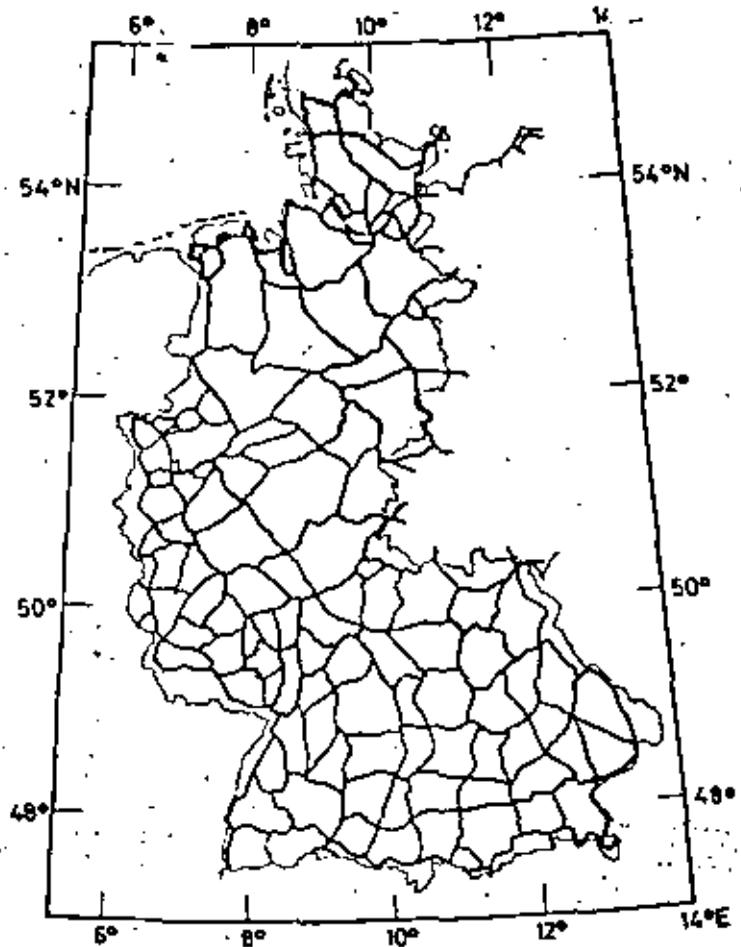
## 6. Levantamientos Geodésicos.

37.000m debajo del banco de nivel standard el --  
 cur fue establecido en el anterior observatorio  
 de Berlín en 1879. El banco de nivel standard de  
 1879 fue reemplazado en 1912, debido a la demoli-  
 ción del observatorio, por una marca enterrada -  
 alrededor de 40km al este de Berlín (banco de ni-  
 vel standard de 1912). La altura del banco de ni-  
 vel standard de 1879 fue obtenida mediante nivelaciones a  
 partir del mareógrafo en Amsterdam (incertidumbre  
 aproximada de  $\pm 0.1m$  en la transferencia). Las -  
 alturas representan la distancia vertical de la  
 superficie de referencia (datum del nivel del --  
 mar ): alturas sobre el nivel medio del mar; la  
 unidad de medida es el metro internacional. Hoy  
 día la superficie de referencia está definida por  
 los puntos de primer orden agregados, particular-  
 mente las marcas enterradas.

No se hicieron mediciones de gravedad a lo largo  
 de las líneas de nivel de la Red de Nivelación  
 Primaria en la República Federal de Alemania. -  
 Por ello, en la corrección ortométrica (5.17), se  
 reemplaza la verdadera gravedad por la grave--  
 dad normal en la aproximación esférica (3.64).

Esta corrección esferoidal u ortométrica normal  
 para anomalías de gravedad <sup>mas</sup> grandes puede diferir  
 de la corrección ortométrica por algunos mm (te-  
 rreno plano), y hasta algunos dm (áreas montaño-  
 sa). Por eso las alturas ortométricas esferoida-  
 les representan una aproximación pobre a las al-

Fig. 6.7:  
Red de Nivelación  
primaria  
de la República  
Federal de Ale-  
mania, de  
Nieders. Min. d.  
Inn. 1971



turas ortométricas. Por el otro lado, la corrección ortométrica-esférica difiere de la corrección normal (5.22) solamente por la anomalía de superficie de aire libre, la cual se puede determinar fácilmente de los valores de la gravedad observados. Consecuentemente, las alturas ortométricas esferoidales se pueden considerar como el primer paso hacia las alturas normales (Wolf 1974).

E.U. también está cubierto por una distribución pareja de redes de nivelación precisas, las cuales están unidas a 26 estaciones de mareas. Las alturas ajustadas establecen el Datum Vertical Geodésico Nacional de 1929 (anteriormente el Datum del Nivel del Mar de 1929). La precisión estimada/de los errores <sup>a partir</sup> de cierre de los circuitos de errores medios, los --

## 6. Levantamientos Geodésicos.

cuales generalmente son menores ó igual<sup>es</sup> a  $\pm 1\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$  (Baker 1974). Las líneas de nivelación de primer orden en Australia corren por las áreas más desarrolladas de las regiones costeras. Se está cubriendo ampliamente todo el continente con líneas de nivelación de tercer orden. Numerosas ligas a estaciones de marcas permiten hacer comparaciones con la topografía de la superficie del mar (3.3.3).

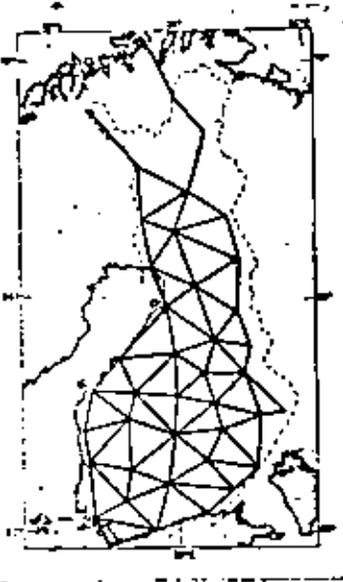
### REDES DE GRAVEDAD

6.3

Las redes de gravedad en los levantamientos geodésicos forman un marco para las mediciones de gravedad geodésica y geofísica. La red de gravedad de primer orden cubre uniformemente un determinado país con un número de puntos que están interconectados por mediciones gravimétricas de alta precisión (Fig. 6.8). La relación de la red a un nivel de referencia de gravedad se determina conectándola a un sistema de gravedad global o a mediciones de gravedad absoluta. Algunas de las redes existentes aún están referidas al sistema de gravedad de Patsdam, otras ya están referidas al I.G.S.N. 71 (4.2.4). La escala de la red se obtiene calibrando los gravímetros en líneas de calibración mediante mediciones de péndulo, o por comparaciones a valores de gravedad absoluta dentro del alcance del levantamiento.

## 6.3 Redes de Gravedad.

Fig. 6.8:  
Red gravimétrica de primer orden de Finlandia, de Kiviniemi (1964)



Al escoger las estaciones, se debe tener cuidado para estar seguros de que son lo más estable posible. Deben existir caminos de fácil tránsito entre las estaciones ya que es ventajoso una rápida conexión entre dos puntos al determinar la deriva. Por eso, las estaciones gravimétricas frecuentemente se establecen en los aeropuertos; estos puntos, que generalmente no son permanentes, se unen a los verdaderos puntos de primer orden mediante mediciones de centrado especial. Para poder controlar la posición espacial de un punto de gravedad a una correspondiente precisión de  $\pm 0.01 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ , la altura y posición deben determinarse dentro de precisiones de  $\pm 0.03\text{m}$  y  $\pm 1\text{m}$ , respectivamente. Además, se debe uno de asegurar de que no han ocurrido desplazamientos de masa en la vecindad del punto.

Dentro del marco del levantamiento geofísico nacional

("Geophysikalische Reichsaufnahme", 1934-1944) en

Alemania, se determinaron aproximadamente 100 puntos

### 6.3 Redes de Gravedad.

en el sistema Potsdam usando mediciones de péndulo relativas ( $\pm 0.5$  a  $\pm 1 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ). Un levantamiento detallado hecho con gravímetros ( $\pm 0.1$  a  $\pm 0.3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ , 6 a 10 puntos por mapa topográfico 1:25 000) fue conectado a esta red de péndulo. La red de gravedad, hecha en la República Federal de Alemania desde 1952, está unida al valor de gravedad en la estación Bad Harzburg en el sistema Potsdam. La escala está basada en mediciones de péndulo y gravímetro del sistema de calibración gravimétrico europeo (incertidumbre de  $\pm 3 \times 10^{-4}$ ) (Marzahn 1963). La red de gravedad fundamental construida de mediciones de péndulo relativas ( $\pm 0.3 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ) y de mediciones gravimétricas ( $\pm 0.05 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ ) consiste de grandes circuitos que contienen los puntos nodales y todos los puntos intermedios de primer orden (espaciamiento entre estaciones: 10 a 20km). Esta red está densificada por mediciones gravimétricas a lo largo de líneas de nivel y por levantamientos de áreas (redes para geofísica aplicada, levantamiento geofísico nacional). De 1976 a 1977 se observó una nueva red gravimétrica fundamental (21 estaciones) usando gravímetros Le Coste-Romberg. Incluye varias estaciones IGSN71 y cuatro mediciones de gravedad absoluta (4.21), teniendo una precisión promedio de  $\pm 0.01 \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$  (Torge --

19.3 b). El sistema está actualmente siendo densi

### 6.3 . Redes de Gravedad.

ficado por redes de gravedad primaria (espaciamiento entre puntos de 30km).

Las redes gravimétricas fundamentales existentes en América del Norte y del Sur al igual que en Australia fueron convertidas al sistema IGSN71, después de haber hecho nuevas observaciones extensas ocasionales. En las densificaciones de área más recientes se está tratando de obtener un espaciamiento promedio entre estaciones de 5 a 10 km.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**FUNDAMENTOS Y METODOS DE LA GEODESIA MODERNA**

**BULLETIN GEODESIQUE**

**Marzo 1982**

# GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980

by H. MORITZ

## 1 Definition

The *Geodetic Reference System 1980* has been adopted at the XVII General Assembly of the IUGG in Canberra, December 1979, by means of the following

### "RESOLUTION N° 7"

*The International Union of Geodesy and Geophysics,*

*recognizing* that the *Geodetic Reference System 1967* adopted at the XIV General Assembly of IUGG, Lucerne, 1967, no longer represents the size, shape, and gravity field of the Earth to an accuracy adequate for many geodetic, geophysical, astronomical and hydrographic applications and

*considering* that more appropriate values are now available,

*recommends*

a) that the *Geodetic Reference System 1967* be replaced by a new *Geodetic Reference System 1980*, also based on the theory of the geocentric equipotential ellipsoid, defined by the following conventional constants :

. equatorial radius of the Earth :

$$a = 6378\,137 \text{ m.}$$

. geocentric gravitational constant of the Earth (including the atmosphere) :

$$GM = 3986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}.$$

. dynamical form factor of the Earth, excluding the permanent tidal deformation :

$$J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}.$$

. angular velocity of the Earth :

$$\omega = 7292\,115 \times 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}.$$

b) that the same computational formulas, adopted at the XV General Assembly of IUGG in Moscow 1971 and published by IAG, be used as for the *Geodetic Reference System 1967*, and

c) that the minor axis of the reference ellipsoid, defined above, be parallel to the direction defined by the Conventional International Origin, and that the primary meridian be parallel to the zero meridian of the BHS adopted longitudes".

For the background of this resolution see the report of IAG Special Study Group 5.39 (Moritz, 1979, sec. 2).

Also relevant is the following IAG resolution :

" RESOLUTION N° 1

*The International Association of Geodesy,*

*recognizing* that the IUGG, at its XVII General Assembly, has introduced a new Geodetic Reference System 1980,

*recommends* that this system be used as an official reference for geodetic work, and

*encourages* computations of the gravity field both on the Earth's surface and in outer space based on this system".

## 2. The Equipotential Ellipsoid

According to the first resolution, the Geodetic Reference System 1980 is based on the theory of the equipotential ellipsoid. This theory has already been the basis of the Geodetic Reference System 1967; we shall summarize (partly quoting literally) some principal facts from the relevant publication (IAG, 1971, Publ. Spéc. n° 3).

An equipotential ellipsoid or level ellipsoid is an ellipsoid that is defined to be an equipotential surface. If an ellipsoid of revolution (semimajor axis  $a$ , semiminor axis  $b$ ) is given, then it can be made an equipotential surface

$$U = U_0 = \text{const.}$$

of a certain potential function  $U$ , called normal gravity potential. This function  $U$  is uniquely determined by means of the ellipsoidal surface (semiaxes  $a, b$ ), the enclosed mass  $M$  and the angular velocity  $\omega$ , according to a theorem of Stokes—Poincaré, quite independently of the internal density distribution. Instead of the four constants  $a, b, M$  and  $\omega$ , any other system of four independent parameters may be used as defining constants.

The theory of the equipotential ellipsoid was first given by Pizzetti in 1894, it was further elaborated by Somigliana in 1929. This theory had already served as a base for the International Gravity Formula adopted at the General Assembly in Stockholm in 1930.

Normal gravity  $\gamma = |\text{grad } U|$  at the surface of the ellipsoid is given by the closed formula of Somigliana,

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \phi + b\gamma_p \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$$

where the constants  $\gamma_e$  and  $\gamma_p$  denote normal gravity at the equator and at the poles, and  $\phi$  denotes geographical latitude.

The equipotential ellipsoid furnishes a simple, consistent and uniform reference system for all purposes of geodesy: the ellipsoid as a reference surface for geometric use, and a normal gravity field at the earth's surface and in space, defined in terms of closed formulas, as a reference for gravimetry and satellite geodesy.

The standard theory of the equipotential ellipsoid regards the normal

## GEODETTIC REFERENCE SYSTEM 1980

gravitational potential as a harmonic function outside the ellipsoid, which implies the absence of an atmosphere. (The consideration of the atmosphere in the reference system would require an ad-hoc modification of the theory, whereby it would lose its clarity and simplicity.)

Thus, in the same way as in the Geodetic Reference System 1967, the computations are based on the theory of the equipotential ellipsoid without an atmosphere. The reference ellipsoid is defined to enclose the whole mass of the earth, including the atmosphere; as a visualization, one might, for instance, imagine the atmosphere to be condensed as a surface layer on the ellipsoid. The normal gravity field at the earth's surface and in space can thus be computed without any need for considering the variation of atmospheric density.

If atmospheric effects must be considered, this can be done by applying corrections to the measured values of gravity; for this purpose, a table of corrections will be given later (sec. 5).

### 3. Computational Formulas

An equipotential ellipsoid of revolution is determined by four constants. The IUGG has chosen the following ones:

- a ... equatorial radius,
- GM ... geocentric gravitational constant,
- $J_2$  ... dynamical form factor,
- $\omega$  ... angular velocity.

The equatorial radius  $a$  is the semimajor axis of the meridian ellipse; the semiminor axis will be denoted by  $b$ . The geocentric gravitational constant GM is the product of the Newtonian gravitational constant,  $G$ , and the total mass of the earth,  $M$ . The constant  $J_2$  is given by

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2},$$

where  $C$  and  $A$  are the principal moments of inertia of the level ellipsoid ( $C$  ... polar,  $A$  ... equatorial moment of inertia).

We shall also use the first eccentricity  $e$ , defined by

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

and the second eccentricity  $e'$ , defined by

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$

Closed computational formulas are given in sec. 3 of (IAG, 1971, Publ. Spéc. n° 3); we shall here reproduce this section practically unchanged.

The derivation of these formulas is found in the book (Heiskanen and Moritz, 1967) sections 2 - 7 to 2 - 10. Reference to this book is by page number and number of equation.

*Computation of  $e^2$ .*

The fundamental derived constant is the square of the first eccentricity,  $e^2$ , as defined above.

From p. 73, equations (2-90) and (2-92'), we find

$$J_2 = \frac{e^2}{3} \left( 1 - \frac{2}{15} \frac{mc^2}{q_0} \right)$$

This equation can be written as

$$e^2 = 3J_2 + \frac{2mc^2 e^2}{15 q_0}$$

with

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

[p. 69, eq. (2-70)] and with  $bc^2 = ac$  it becomes

$$e^2 = 3J_2 + \frac{4}{15} \frac{\omega^2 a^3}{GM} \frac{e^2}{2q_0}$$

This is the basic equation which relates  $e^2$  to the data  $a$ ,  $GM$ ,  $J_2$  and  $\omega$ . It is to be solved iteratively for  $e^2$ , taking into account

$$\begin{aligned} 2q_0 &= \left( 1 + \frac{J_2}{e^2} \right) \arctan e' \approx \frac{3}{e^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1} n}{(2n+1)(2n+3)} e'^{2n+1} \end{aligned}$$

with

$$e' = e(1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{second eccentricity})$$

[p. 66, eq. (2-58); p. 72, second equation from top].

*Geometric Constants*

Now the other geometric constants of the reference ellipsoid can be computed by the well-known formulas .

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \quad (\text{semiminor axis}) ,$$

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (\text{flattening}) ,$$

$$E = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{linear eccentricity}) ,$$

$$c = \frac{a^2}{b} \quad (\text{polar radius of curvature}) .$$

GEODETIC REFERENCE SYSTEM 1980

The arc of meridian from equator to pole (meridian quadrant) is given by

$$Q = c \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{3/2}}$$

where  $\phi$  is the geographical latitude. This integral can be evaluated by a series expansion :

$$Q = c \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} e'^2 + \frac{45}{64} e'^4 - \frac{175}{256} e'^6 + \frac{11025}{16384} e'^8 \right).$$

Various mean radii of the ellipsoid are defined by the following formulas :

arithmetic mean :

$$R_1 = \frac{a + a + b}{3} = a \left( 1 - \frac{f}{3} \right);$$

radius of sphere of the same surface

$$R_2 = c \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \phi}{(1 + e'^2 \cos^2 \phi)^2} d\phi \right]^{1/2}$$

$$= c \left( 1 - \frac{2}{3} e'^2 + \frac{26}{45} e'^4 - \frac{100}{189} e'^6 + \frac{7034}{14175} e'^8 \right);$$

radius of sphere of the same volume :

$$R_3 = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

*Physical Constants.*

The reference ellipsoid is a surface of constant normal potential,  $U = U_0$ . This constant  $U_0$ , the normal potential of the reference ellipsoid, is given by

$$U_0 = \frac{GM}{E} \arctan e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2$$

$$= \frac{GM}{h} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e'^{2n}}{2n+1} + \frac{1}{3} m \right]$$

(p. 67, eq. (2-61)).

The normal gravitational potential  $V$  (gravity potential  $U$  minus potential of centrifugal force) can be developed into a series of zonal spherical harmonics :

$$V = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right],$$

where  $r$  (radius vector) and  $\theta$  (polar distance) are spherical coordinates. The coefficient

$J_2$  is a defining constant; the other coefficients are expressed in terms of  $J_2$  by

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left( 1 - n + 5n \frac{J_2}{e^2} \right)$$

(p. 73, eqs. (2-92) and (2-92') ).

Normal gravity at the equator,  $\gamma_e$ , and normal gravity at the poles,  $\gamma_p$ , are given by the expressions

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left( 1 - m - \frac{m}{6} \frac{e' q_0'}{q_0} \right)$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left( 1 + \frac{m}{3} \frac{e' q_0'}{q_0} \right)$$

with

$$q_0' = 3 \left( 1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1$$

and

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

(p. 69, eqs. (2-73) and (2-74); p. 68, eq. (2-67) ).

The constant

$$f^* = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e} \quad (\text{gravity flattening})$$

is also needed.

A check is provided by the closed form of Clairaut's theorem for the equipotential ellipsoid :

$$f + f^* = \frac{\omega^2 b}{\gamma_e} \left( 1 + \frac{e' q_0'}{2q_0} \right)$$

(p. 69; eq. (2-75) ).

The Gravity Formula

Somigliana's closed formula for normal gravity is

$$\gamma = \frac{a \gamma_e \cos^2 \phi + b \gamma_p \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$$

For numerical computations, the form

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 \phi}}$$

with

$$k = \frac{b \gamma_P}{a \gamma_e} - 1$$

is more convenient.

The conventional abbreviated series expansion is

$$\gamma = \gamma_e \left( 1 + f^2 \sin^2 \phi - \frac{1}{4} f_4 \sin^2 2\phi \right)$$

with

$$f_4 = -\frac{1}{2} f^2 + \frac{5}{2} f m$$

(p. 77, eqs. (2-115) and (2-116)).

More generally, the above closed formula for normal gravity may be expanded into the series

$$\gamma = \gamma_e \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \sin^{2n} \phi \right)$$

where

$$a_2 = \frac{1}{2} e^2 + k, \quad a_4 = \frac{5}{16} e^4 + \frac{3}{8} e^2 k,$$

$$a_6 = \frac{3}{8} e^6 + \frac{1}{2} e^4 k, \quad a_8 = \frac{35}{128} e^8 + \frac{5}{16} e^6 k.$$

The average value of gravity over the ellipsoid is

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\gamma \cos \phi \, d\phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^2} : \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \phi \, d\phi}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{6} e^2 + \frac{1}{3} k + \frac{59}{360} e^4 + \frac{5}{18} e^2 k + \\ &+ \frac{2371}{15120} e^6 + \frac{259}{1080} e^4 k + \frac{270229}{1814400} e^8 + \frac{9623}{45360} e^6 k. \end{aligned}$$

#### 4. Numerical Values

The following derived constants are accurate to the number of decimal places given. In case of doubt or in those cases where a higher accuracy is required, these quantities are to be computed from the defining constants by means of the closed formulas given in the preceding section.

*Defining Constants (exact)*

$a = 6\,378\,137$ m	semimajor axis
$GM = 3\,956\,005 \times 10^8$ m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>	geocentric gravitational constant
$J_2 = 108\,263 \times 10^{-8}$	dynamical form factor
$\omega = 7\,292\,115 \times 10^{-11}$ rad s <sup>-1</sup>	angular velocity

*Derived Geometrical Constants*

$b = 6\,356\,752.3141$ m	semiminor axis
$E = 521\,854.0097$ m	linear excentricity
$c = 6\,399\,593.6259$ m	polar radius of curvature
$e^2 = 0.006\,694\,380\,022\,90$	$e$ = first excentricity
$e'^2 = 0.006\,739\,496\,775\,48$	$e'$ = second excentricity
$f = 0.003\,352\,810\,681\,18$	flattening
$f^{-1} = 298.257\,222\,101$	reciprocal flattening
$Q = 10\,001\,965.7293$ m	meridian quadrant
$R_1 = 6\,371\,008.7714$ m	mean radius $R_1 = (2a + b)/3$
$R_2 = 6\,371\,007.1810$ m	radius of sphere of same surface
$R_3 = 6\,371\,000.7900$ m	radius of sphere of same volume

*Derived Physical Constants*

$U_0 = 6\,263\,686.0850 \times 10^2$ m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	normal potential at ellipsoid
$J_4 = -0.000\,002\,370\,912\,22$	} spherical-harmonic coefficients
$J_6 = 0.000\,000\,006\,083\,47$	
$J_8 = -0.000\,000\,000\,014\,27$	
$m = 0.003\,449\,786\,003\,08$	$m = \omega^2 a^3 b / GM$
$\gamma_e = 9.780\,326\,7715$ ms <sup>-2</sup>	normal gravity at equator
$\gamma_p = 9.832\,186\,3685$ ms <sup>-2</sup>	normal gravity at pole
$f^* = 0.005\,302\,440\,112$	$f^* = (\gamma_p - \gamma_e) / \gamma_e$
$k = 0.001\,931\,851\,353$	$k = (b\gamma_p - a\gamma_e) / a\gamma_e$

*Gravity Formula 1980*

Normal gravity may be computed by means of the closed formula

$$\gamma = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \phi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

with the values of  $\gamma_e$ ,  $k$ , and  $e^2$  shown above.

The series expansion, given at the end of sec. 3, becomes

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_e ( & 1 + 0.005\,279\,0414 \sin^2 \phi \\ & + 0.000\,023\,2718 \sin^4 \phi \\ & + 0.000\,000\,1262 \sin^6 \phi \\ & + 0.000\,000\,0007 \sin^8 \phi ); \end{aligned}$$

it has a relative error of  $10^{-10}$ , corresponding to  $10^{-3} \mu\text{m s}^{-2} = 10^{-4} \text{mgal}$ .

The conventional series

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_e \left( 1 + f^2 \sin^2 \phi - \frac{1}{4} f^4 \sin^2 2\phi \right) \\ &= 9.780\,327 (1 + 0.005\,3024 \sin^2 \phi - 0.000\,0058 \sin^2 2\phi) \text{ m s}^{-2} \end{aligned}$$

has only an accuracy of  $1 \mu\text{m s}^{-2} = 0.1 \text{mgal}$ . It can, however, be used for converting gravity anomalies from the International Gravity Formula (1930) to the Gravity Formula 1980:

$$\gamma_{1980} - \gamma_{1930} = (-16.3 + 13.7 \sin^2 \phi) \text{ mgal},$$

where the main part comes from a change of the Potsdam reference value by  $-14 \text{mgal}$ ; see also (IAG, 1971, Publ. Spéc. n° 3, p. 74).

For the conversion from the Gravity Formula 1967 to the Gravity Formula 1980, a more accurate formula, corresponding to the precise series expansion given above, is

$$\gamma_{1980} - \gamma_{1967} = (0.8316 + 0.0782 \sin^2 \phi - 0.0007 \sin^4 \phi) \text{ mgal},$$

Since former gravity values are expressed in the units "gal" and "mgal", we have, in the conversion formulas, used the unit  $1 \text{mgal} = 10^{-5} \text{m s}^{-2}$ .

Mean values of normal gravity are

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= 9.797\,644\,656 \text{ m s}^{-2} && \text{average over ellipsoid,} \\ \gamma_{45} &= 9.806\,199\,203 \text{ m s}^{-2} && \gamma \text{ at latitude } \phi = 45^\circ. \end{aligned}$$

The numerical values given in this section have been computed independently by Mr. Chun-Yung Chen, using series developments up to  $f^3$ , and by Dr. Hans Sünkel, using the formulas presented in sec. 3.

### 5. Atmospheric Effects

The table given here is reproduced from (IAG, 1971, Publ. Spéc. n° 3, p. 72). It shows atmospheric gravity corrections  $\delta g$  as a function of elevation  $h$  above sea level. The values  $\delta g$  are to be added to measured gravity. The effect of this reduction is to remove, by computation, the atmosphere outside the Earth by shifting it vertically into the interior of the geoid.

#### Atmospheric Gravity Corrections $\delta g$

(to be added to measured gravity)

$h$ [km]	$\delta g$ [mgal]	$h$ [km]	$\delta g$ [mgal]
0	0.87	10	0.23
0.5	0.82	11	0.20
1.0	0.77	12	0.17
1.5	0.73	13	0.14
2.0	0.68	14	0.12
2.5	0.64	15	0.10
3.0	0.60	16	0.09
3.5	0.57	17	0.08
4.0	0.53	18	0.06
4.5	0.50	19	0.05
5.0	0.47	20	0.05
5.5	0.44	22	0.03
6.0	0.41	24	0.02
6.5	0.38	26	0.02
7.0	0.36	28	0.01
7.5	0.33	30	0.01
8.0	0.31	32	0.01
8.5	0.29	34	0.00
9.0	0.27	37	0.00
9.5	0.25	40	0.00

## GEODETTIC REFERENCE SYSTEM 1980

### 6. Origin and Orientation of the Reference System

IUGG Resolution No. 7, quoted at the beginning of this paper, specifies that the Geodetic Reference System 1980 be geocentric, that is, that its origin be the center of mass of the earth. Thus, the center of the ellipsoid coincides with the geocenter.

The orientation of the system is specified in the following way. The rotation axis of the reference ellipsoid is to have the direction of the Conventional International Origin for Polar Motion (CIO), and the zero meridian as defined by the Bureau International de l'Heure (BIH) is used.

To this definition there corresponds a rectangular coordinate system XYZ whose origin is the geocenter, whose Z-axis is the rotation axis of the reference ellipsoid, defined by the direction of CIO, and whose X-axis passes through the zero meridian according to the BIH.

### REFERENCES

- W.A. HEISKANEN, and H. MORITZ (1967) : Physical Geodesy, W.H. Freeman, San Francisco.  
International Association of Geodesy (1971) : Geodetic Reference System 1967. Publ. Spéc. n° 3 du Bulletin Géodésique, Paris.  
H. MORITZ (1979) : Report of Special Study Group No. 5.39 of I.A.G., Fundamental Geodetic Constants, presented at XVII General Assembly of I.U.G.G., Canberra.