



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Control de Convertidores Estáticos de Potencia desde una
Perspectiva de Sistemas Conmutados**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERIA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A :

NORIEGA PINEDA DANIEL

TUTOR:

**Dr. GERARDO R. ESPINOSA
PÉREZ**

Ciudad Universitaria, agosto de 2006



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. ALVAREZ RAMÍREZ JOSE DE JESUS
Secretario: Dr. MORENO PÉREZ JAIME
1^{er.} Vocal: Dr. ESPINOSA PERÉZ GERARDO
2^{do.} Vocal: Dr. ÁLVAREZ ICAZA LONGORÍA LUIS A.
3^{er.} Vocal: Dr. ARAU ROFFIEL JAIME
1^{er.} Suplente: Dr. CARDENAS GALINDO VÍCTOR MANUEL
2^{do.} Suplente: Dr. FRIDMAN LEONID

Lugar donde se realizó la tesis:

POSGRADO DE INGENIERÍA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. GERARDO R. ESPINOSA PÉREZ

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

A mi familia. Por todo el apoyo que me otorgaron.

A mi tutor. Por haberme aguantado tantos años

A mis amigos. Por sus consejos.

A CONACYT (registro 130711) y DGAPA-UNAM (registro IN119003) por los apoyos económicos prestados.

RESUMEN

Recientemente los convertidores electrónicos de potencia, CEP, han ganado interés tanto en el ámbito de investigación como en el de la industria electrónica debido a su capacidad de transformar las formas de señal tanto de voltaje como de corriente, logrando además una eficiencia significativa y pérdidas por conmutación relativamente bajas. Sin embargo, desde la perspectiva de calidad de potencia, los CEP deben satisfacer rigurosos requerimientos actualmente impuestos para condicionar el suministro eléctrico, los cuales se centran, principalmente, en la minimización de la distorsión armónica total, DAT, tanto en señales de voltaje como de corriente y en un alto desempeño dinámico en el comportamiento del convertidor, es decir, de una rápida respuesta transitoria de salida y un comportamiento de estado estacionario preciso.

En la actualidad, el problema de reducir la DAT se estudia desde tres diferentes perspectivas: mediante la consideración de nuevos algoritmos de conmutación, mediante el diseño de nuevas estructuras topológicas para los circuitos y mediante la proposición de nuevas leyes de control. El trabajo que aquí se presenta pertenece al tercer contexto. Debido a que el problema de desempeño en el comportamiento de la señal de voltaje de salida puede reducirse a un problema de regulación de voltaje, se presenta una nueva ley de control por conmutación que resuelve dicho problema para el caso de convertidores en cascada de topología reductora y de fuentes independientes. El controlador propuesto se diseño explotando las propiedades de disipación (pasividad) del modelo del circuito así como la naturaleza discreta de las señales de entrada al circuito. Como resultado, las variables del sistema son convergentes sólo a una vecindad del comportamiento deseado, la cual es función de la cantidad de valores discretos que la entrada pueda tomar y de los intervalos de tiempo en los cuales la entrada mantiene dichos valores.

Índice general

Introducción	VIII
1.1. Motivación	VIII
1.2. Revisión Bibliográfica	IX
1.3. Problemática e hipótesis de trabajo	XI
1.4. Contribuciones	XIII
1.5. Contenido de la tesis	XV
2. Sistemas de dinámica híbrida	1
2.1. Sistemas dinámicos	1
2.2. Comportamientos híbridos	3
2.3. Sistemas de dinámica conmutada	6
3. Modelado de Convertidores Estáticos de Potencia (CEP)	10
3.1. Consideraciones Generales	11
3.2. Modelado de sistemas Euler-Lagrange de dinámica conmutada	15
3.3. Modelo conmutado de CEP reductores	17
3.3.1. Modelado de convertidores de CD-CA	18
3.3.2. Modelado de convertidores de CD a CD	27
3.3.3. Convertidores Multinivel	28
3.4. Modelo promediado de CEP	35
3.4.1. Modulación por Ancho de Pulso	35
3.4.2. Modelo promediado del inversor de medio puente	39
3.4.3. Modelo promediado del inversor de puente completo	40
3.4.4. Modelo promediado de convertidores de CD a CD	41
3.4.5. Modelo promediado de convertidores Multinivel	42
3.5. Propiedades del modelo continuo promediado	42
4. Control de CEP	46
4.1. Problema de control	47
4.2. Control Maestro Basado en Pasividad	51
4.2.1. Formulación del problema	52
4.2.2. CBP mediante retroalimentación de la corriente en el capacitor	55
4.3. Diseño de la ley de conmutación	57

4.4. Aplicaciones	65
4.4.1. Control del regulador reductor de CD a CD	65
4.4.2. Control del inversor de puente completo	71
4.4.3. Control de convertidores en cascada	74
Conclusiones	81
Bibliografía	88

Índice de figuras

2.1. Evolución en el tiempo de distintas clases de sistemas: a) De estado y tiempo continuo, b) De estado continuo y tiempo discreto, c) De estado discreto y tiempo discreto, d) De estado discreto y tiempo discreto asíncrono	2
2.2. Ilustración de la evolución de un estado continuo sometido a saltos de manera autónoma.	4
2.3. Ejemplo de la evolución del estado continuo x bajo la acción de un SDC de tres modos de operación.	9
3.1. Esquema básico de un convertidor estático de potencia de topología reductora. . .	11
3.2. Representación esquemática que muestra las distintas clases de elementos que componen un convertidor reductor, así como su interconexión.	13
3.3. Circuito equivalente de la figura 3.1	15
3.4. Posibles configuraciones que los dispositivos conmutados pueden adoptar	18
3.5. Convertidor VSI de medio puente	19
3.6. Convertidor reductor con un interruptor de dos estados y modos de operación resultantes	20
3.7. Diagrama esquemático de un circuito inversor de medio puente.	21
3.8. Estados de operación del inversor de medio puente: (a) $\varphi = 1$ (S_1 encendido y S_2 apagado). (b) $\varphi = 0$ (S_1 apagado y S_2 encendido)	22
3.9. Diagrama esquemático de un inversor de puente completo	25
3.10. Convertidor regulador de corriente directa a corriente directa de topología reductora.	27
3.11. Inversor multinivel, de topología reductora, de puentes completos conectados en cascada y de estructura monofásica.	30
3.12. a) Voltaje de salida v_a sintetizado por medio de una señal de control y mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -V_{dc}, V_{dc}, 3V_{dc}\}$, b) Voltaje de salida v_a sintetizado mediante el uso de dos señales de control independientes por cada etapa de puente completo, y mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -2V_{dc}, -V_{dc}, 0, V_{dc}, 2V_{dc}, 3V_{dc}\}$	32
3.13. a) Voltaje de salida v_a sintetizado mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -2V_{dc}, -V_{dc}, 0, V_{dc}, 2V_{dc}, 3V_{dc}\}$, b) Voltaje de salida v_a sintetizado mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -\frac{9}{4}V_{dc}, -\frac{6}{4}V_{dc}, -\frac{3}{4}V_{dc}, 0, \frac{3}{4}V_{dc}, \frac{6}{4}V_{dc}, \frac{9}{4}V_{dc}, 3V_{dc}\}$	33
3.14. Convertidor multinivel de cuatro etapas de puente completo conectadas en cascada.	34
3.15. Proceso de conversión PWM	36

3.16. Control mediante retroalimentación de la señal de salida utilizando un bloque generador de señales PWM.	37
4.1. Partición del espacio de estado de \tilde{x} bajo el modo de operación Σ_m	62
4.2. Evolución idealizada de la trayectoria de \tilde{x} bajo la política de conmutación propuesta.	63
4.3. Definición de las superficies de nivel Φ_1 y Φ_2	64
4.4. (a) Transitorio de la señal de voltaje de salida. (b) Transitorio de la variable del error de voltaje.	67
4.5. Retrato de fase de la dinámica del error.	68
4.6. (a) Señal de voltaje de salida ante una variación en la carga. (b) Señal del error de voltaje ante una variación en la carga.	68
4.7. Gráficos de la señal de control φ bajo las siguientes condiciones de operación: (a) estado transitorio, (b) evolución ante una perturbación del 50% en la carga.	69
4.8. Retrato de fase que muestra el comportamiento de la trayectoria del error antes y durante la aplicación de la variación en la carga.	69
4.9. Evolución en el tiempo de la función de energía V	70
4.10. Desempeño de la señal de voltaje al aplicar los hiperplanos $[1, 2]\tilde{x} = \pm 3.87$	70
4.11. UPS: Comparativo de los desempeños obtenidos con el CBP-conmutado y el CBP-PWM. (a) Transitorio de la señal de voltaje de salida. (b) Transitorio de la variable del error de voltaje.	73
4.12. UPS: (a) Transitorio de la señal de control por conmutación φ . (b) Transitorio de la señal de control PWM μ	73
4.13. Retrato de fase de la dinámica del error para el convertidor de puente completo.	74
4.14. UPS: (a) Comparativo de la señal de voltaje ante una carga no lineal para el control por conmutación y el control PWM. (b) Comparativo del error de voltaje. (c) Evolución en el tiempo de la corriente de carga.	75
4.15. UPS: (a) Comportamiento temporal de la señal de control por conmutación φ ante una carga no-lineal. (b) Comportamiento temporal de la señal de control PWM μ ante una carga no-lineal.	75
4.16. Esquema generalizado del convertidor multinivel considerado.	76
4.17. Convertidor multinivel: Comparativo de los desempeños obtenidos con el CBP-conmutado y el CBP-PWM. (a) Transitorio de la señal de voltaje de salida. (b) Transitorio de la variable del error de voltaje.	77
4.18. Convertidor multinivel: (a) Transitorio de la señal de control por conmutación φ . (b) Transitorio de la señal de control PWM μ	78
4.19. Retrato de fase de la dinámica del error del convertidor multinivel	79
4.20. Convertidor multinivel: (a) Comparativo de la señal de voltaje ante una carga no lineal para el control por conmutación y el control PWM. (b) Comparativo del error de voltaje. (c) Evolución en el tiempo de la corriente de carga.	79
4.21. Convertidor multinivel: (a) Comportamiento temporal de la señal de control por conmutación φ ante una carga no-lineal. (b) Comportamiento temporal de la señal de control PWM μ . ante una carga no-lineal.	80

Introducción

La teoría de control es un área de estudio enfocada a procesos que tienen lugar en ámbitos de la vida cotidiana que van de lo físico a lo biológico e incluso a lo económico. Comúnmente el estudio de tales procesos parte de modelar el comportamiento de los mismos mediante modelos matemáticos de naturaleza ya sea continua o discreta. Sin embargo, los avances que hoy día se tienen en materia de cómputo, comunicaciones, diseño de actuadores, etc. han dado origen a sistemas cuyo comportamiento dinámico es demasiado complejo para poder ser completamente caracterizado mediante modelos de una única naturaleza. Más aún, la mayoría de los procesos de control que pueden ser encontrados en la práctica constituyen sistemas cuyos modelos matemáticos pueden estar formados por una combinación de relaciones matemáticas tales como ecuaciones diferenciales, desigualdades en diferencias, inclusiones diferenciales e incluso máquinas de eventos discretos, por mencionar algunos. Este tipo de sistemas son denominados de manera general como *sistemas complejos* o sistemas compuestos, [35], entre los cuales podemos mencionar: procesos químicos o hidráulicos controlados a través de válvulas; tráfico aéreo entrando, cruzando y alejándose de determinadas zonas aéreas; sistemas mecánicos sometidos a impactos o que evolucionan en espacios restringidos; diseño de control supervisor para una red de satélites o para el control de flujo vehicular en carreteras inteligentes, etc. El estudio de este tipo de sistemas se encuentra aún en una etapa preliminar. Sin embargo, existen algunos resultados relativos al análisis de una clase de sistemas complejos conocidos como *sistemas de dinámica híbrida* y *sistemas de dinámica conmutada* (véase por ejemplo [24], [29], [12] y [33]), los cuales son fundamentales para conformar el contexto de trabajo de esta tesis, ya que los sistemas que fueron considerados son un tipo particular de sistemas de dinámica conmutada denominados *convertidores estáticos de potencia* (CEP).

1.1. Motivación

Los CEP consisten en una familia de circuitos electrónicos formados por dispositivos conmutados de potencia, los cuales se interconectan de forma tal que la energía que les es aplicada a las terminales del puerto de entrada puede ser transformada (moldeada mediante conmutación) y transferida al puerto de salida con un mínimo de pérdidas, generalmente el puerto de salida de este tipo de circuitos se conecta a los dispositivos de carga mediante un conjunto de elementos pasivos (inductores, capacitores y resistencias) con el objeto de filtrar las señales de voltaje y/o corriente de acuerdo a las necesidades de la carga. En consecuencia,

son sistemas compuestos por un bloque de alimentación de energía, un arreglo de elementos pasivos que pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales y un bloque de dispositivos de conmutación compuesto por los elementos interruptores, el cual puede ser modelado mediante lógica discreta. Sistemas de esta naturaleza, en los cuales la dinámica de los dispositivos de naturaleza continua es afectada por variables discretas, se denominan sistemas de dinámica conmutada o *sistemas de estructura variable*. La problemática que se presenta en este tipo de sistemas desde el punto de vista de análisis y control es muy variada y compleja. Sin embargo, en la práctica, se ha podido resolver toda clase de problemas de control para este tipo de circuitos gracias a que los modelos matemáticos que suelen considerarse son construidos bajo condiciones que relajan la naturaleza discreta de los interruptores de potencia, obteniéndose así modelos matemáticos continuos a partir de los cuales es posible diseñar diversas leyes de control de naturaleza continua. El costo que debe pagarse por ello es la necesidad de conmutar a todos los dispositivos interruptores a alta velocidad, lo cual trae como consecuencia pérdidas de energía debidas a dicho proceso y una eventual reducción de la vida útil de los interruptores.

Este hecho es la motivación principal del presente trabajo: Contribuir al desarrollo de estrategias de control para sistemas de dinámica conmutada, específicamente para el caso de los convertidores estáticos de potencia de topología reductora, a partir de estrategias de control ya existentes creadas con base en modelos matemáticos continuos. Para ello se propone una ley de control tipo maestro-esclavo en la cual el papel de control maestro recae sobre un controlador basado en pasividad reportado originalmente en [8], diseñado a partir de modelos continuos (promediados). Dicho controlador tiene como objetivo indicarle a un mecanismo de decisión lógica (el controlador esclavo) los niveles discretos entre los cuales generar la señal de comando que será aplicada a los dispositivos conmutadores, con el fin de resolver un determinado problema de control de manera satisfactoria, manteniendo al mismo tiempo a los dispositivos interruptores conmutando a frecuencias relativamente bajas. Es decir, se propone incluir una última etapa al proceso de diseño de control basada en la naturaleza discreta del mecanismo de conmutación. Se debe mencionar que, debido a que el controlador esclavo propuesto se basa en un mecanismo de conmutación con memoria, el controlador maestro-esclavo constituye un dispositivo discreto dinámico (sistema de eventos discretos), por lo que el sistema de control en lazo cerrado constituye un sistema de dinámica híbrida.

1.2. Revisión Bibliográfica

En la literatura es posible encontrar trabajos que proponen controladores de naturaleza conmutada para convertidores conmutados y otros sistemas de potencia, todos ellos parten del análisis de modelos continuos promediados. La mayoría de estos controladores son diseñados con base en modos deslizantes [48]. En [31], se presenta un controlador conmutado (perteneciente a un conjunto finito) basado en la minimización de una función de Lyapunov para sistemas no-lineales en su forma normal. En dicho artículo, los autores introducen el concepto de subespacios de salida regulada, a partir de lo cual proponen un controlador por

modos deslizantes para el problema concreto de máquinas de inducción. En [13] se modifica el controlador anterior mediante la adición de un algoritmo basado en pasividad, aplicando el método para el caso de convertidores rectificadores trifásicos. En lo referente a trabajos previos que aborden el problema de modelar y analizar circuitos convertidores de potencia desde el punto de vista de sistemas de dinámica conmutada, pueden mencionarse los trabajos de Rubensson [43], [44] en los cuales los convertidores de potencia son sometidos a una ley de conmutación regida por restricciones temporales. Como resultado el autor determina modelos discretos del sistema en lazo cerrado y establece condiciones de estabilidad que pueden o no satisfacerse en función de si existe o no solución a un conjunto de desigualdades matriciales lineales. Este método, al igual que la mayoría de los métodos de control de sistemas conmutados encontrados, parte de la suposición de que se conoce una secuencia de valores para el subsistema de eventos discretos, por lo que se concentra en regular el tiempo útil de cada uno de esos modos de operación (véanse también [56] y [57]).

Respecto al estudio de los sistemas de dinámica conmutada, es posible encontrar diversos trabajos sobre las características de estabilidad, estabilización y control. Desafortunadamente los resultados obtenidos son en su mayoría imprácticos, ya sea porque las condiciones que requieren son demasiado restrictivas o porque los algoritmos empleados resultan ser inviables en términos computacionales. Los enfoques que buscan solucionar tanto los problemas de estabilización como de control de sistemas conmutados lineales puede ser clasificados en dos familias que, a falta de una denominación formal, serán referidas como familia de *métodos computacionales* y familia de *métodos algebraico-diferenciales*, [12], [7]. La primer familia está encabezada por contribuciones por parte de investigadores del área informática principalmente, las cuales se caracterizan por el uso de herramientas matemáticas tales como autómatas híbridos o redes de Petri. Éstos trabajos se enfocan generalmente a problemas de verificación de la existencia de soluciones, problemas de alcanzabilidad y problemas de invariancia respecto a comportamientos cíclicos. La segunda familia se compone básicamente de contribuciones por parte de las comunidades de control y de análisis de sistemas dinámicos, contribuciones que se caracterizan por el uso de herramientas matemáticas tales como ecuaciones diferenciales con discontinuidad, álgebras de Lie, inclusiones diferenciales o ecuaciones algebraico-diferenciales, por mencionar algunas. Básicamente, esta segunda familia busca extender las herramientas de análisis y síntesis existentes para sistemas dinámicos descritos sólo por ecuaciones diferenciales al caso de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales con discontinuidades en su parte derecha (véanse [33], [24] y [54]). El trabajo que se presenta pertenece a la segunda familia de estudio.

En el contexto algebraico-diferencial, el problema de estabilidad y de estabilización de sistemas de control de dinámica conmutada está siendo abordado por filosofías basadas tanto en la teoría de estabilidad de Lyapunov, como en teorías de estabilidad entrada/salida y de estabilidad práctica, sin que hasta la fecha exista un resultado generalizado para cualquiera de ellas. El problema radica en que la naturaleza del sistema conmutado sobre el cual se trabaja hace que la dinámica que puede presentar un sistema (lineal) conmutado sea tan rica en sus características como la de un sistema dinámico altamente no-lineal: múltiples puntos de equilibrio, bifurcaciones, ciclos límite de orden superior o incluso caos (véanse [2], [15], [10], [12], [20]). Dentro del enfoque de Lyapunov lo que se busca es diseñar una

ley de conmutación para un sistema de dinámica conmutada tal que, para el sistema en lazo cerrado, sea posible encontrar una única función de Lyapunov válida para todas las posibles combinaciones de valores que puedan adoptar las variables discretas involucradas (véanse [5] y [7]). Estas combinaciones son conocidas como *modos de operación*, un concepto que será introducido formalmente en el capítulo uno. Sin embargo no todos los sistemas de dinámica conmutada poseen una función común de Lyapunov para todos sus modos de operación, aún cuando todos los modos de operación correspondan a un sistema lineal exponencialmente asintóticamente estable, por lo que muchas veces la búsqueda se reduce a determinar la existencia de una sola función de energía acotada (positiva definida), al menos a lo largo de un intervalo de tiempo finito, para cada modo de operación. Esta filosofía ha dado origen a diversos criterios de estabilidad, los cuales se diferencian por la forma en la cual dichas funciones son definidas, por ejemplo como funciones múltiples de Lyapunov [5], como funciones "generalizadas" (o discontinuas) de Lyapunov [10], o mediante transformaciones que preservan la estabilidad como las practicadas en [35], donde el sistema conmutado en lazo cerrado es transformado en un sistema diferencial impulsivo equivalente, es decir, con condiciones de restablecimiento. Todas estas "funciones de Lyapunov" se caracterizan por tener una estructura conmutada, la cual cambia en función de la conmutación del sistema bajo estudio, por lo que las condiciones de estabilidad se encuentran entre las condiciones de estabilidad para sistemas continuos y las condiciones de estabilidad para sistemas discretos.

Otros métodos para la estabilización y control de sistemas conmutados han sido propuestos con base en técnicas de optimización que buscan disminuir funciones de costo construidas a partir del cálculo de funciones múltiples de Lyapunov, empleando generalmente software para la solución de desigualdades matriciales lineales ([6] y [42]). Sin embargo, la generalidad de éstas técnicas resultan ser, computacionalmente hablando, difíciles de implementar en aplicaciones de tiempo real y/o en sistemas conmutados de dimensión mayor a dos (tanto en la variable continua como en la discreta).

En la literatura abundan modelos y técnicas de análisis de sistemas conmutados que, mediante analogía, permiten visualizar una línea de investigación viable de aplicar en el campo de los convertidores eléctricos de potencia. En particular en [53] se introduce un controlador conmutado construido en función de la evolución de la dinámica continua del sistema, dentro de un espacio de estado particionado a modo de que la dinámica del sistema en lazo cerrado permanezca dentro de una determinada región. Esta metodología permite aplicar análisis de estabilidad para sistemas conmutados como los presentados en [25], [22] y [23]. Es importante señalar que la obra de Sun Z, et. al., [54], es la más completa de la literatura al incluir las más importantes contribuciones de la familia de resultados algebraico-diferenciales bajo un único contexto.

1.3. Problemática e hipótesis de trabajo

Considere el sistema lineal descrito por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\mathcal{D}\dot{x}(t) = -\mathcal{J}x(t) - \mathcal{R}x(t) + \mathcal{M}\varphi(t) \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de estado, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T > 0$ es una matriz simétrica positiva definida de dimensión $n \times n$, $\mathcal{J} = -\mathcal{J}^T$ es una matriz antisimétrica de dimensión $n \times n$, $\mathcal{R} \geq 0$ es una matriz diagonal que pertenece a $\mathbb{R}^{n \times n}$, y $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector constante. La variable de control $\varphi(t)$ es una señal escalar constante continua a tramos que satisface

$$\varphi(t) = u_i, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (1.2)$$

donde

$$t_{i+1} - t_i \geq \delta, \quad (1.3)$$

con δ una constante positiva y u_i un término continuo constante que pertenece a un conjunto discreto finito $\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \triangleq \mathcal{U}$, cuyos elementos son ordenados. De acuerdo a la teoría de control por retroalimentación de estados, si el sistema lineal $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ es completamente controlable, entonces existe una señal continua de control por retroalimentación de estados $u = u(x, x_d)$ tal que el sistema en lazo cerrado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(x, x_d)$$

garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_d(t)\| = 0, \quad (1.4)$$

donde $x_d(t)$ es conocido y representa el comportamiento deseado para los estados del sistema (véase por ejemplo [11]). El objetivo de este trabajo de tesis consiste en extender el resultado anterior a sistemas de dinámica conmutada cuyo modelo matemático pueda ser representado bajo la forma dada por las ecuaciones (1.1)-(1.2), en donde la variable de control $\varphi(x, x_d)$ es una señal continua constante por tramos caracterizada tanto por tomar valores dentro del conjunto discreto \mathcal{U} , mediante un mecanismo de conmutación construido con base en una retroalimentación de estados, como por tener la capacidad de conmutar a velocidades finitas no mayores a una cota fija dada por el parámetro constante δ definido en (1.3). Evidentemente, las características discretas de la señal de retroalimentación $\varphi(x, x_d)$ no permiten que el objetivo de control dado por (1.4) sea alcanzable, por lo cual dicho objetivo debe ser relajado a la condición de que x sea finalmente asintóticamente estable con respecto a una vecindad \mathcal{B}_{x_d} de x_d definida como

$$\mathcal{B}_{x_d} \triangleq \{x : \|x - x_d\| \leq \gamma\}$$

donde γ es un parámetro caracterizado de alguna forma por las propiedades del conjunto \mathcal{U} y por la máxima velocidad de conmutación de $\varphi(t)$.

Hipótesis de trabajo. En la literatura de los sistemas electrónicos de potencia, los problemas de control planteados para CEP pueden ser resueltos a partir de la construcción de modelos continuos capaces de describir el comportamiento de este tipo de sistemas bajo condiciones de alta velocidad de conmutación. Estos modelos, denominados *modelos promediados*, se caracterizan por poseer la misma estructura matemática que sus contrapartes

conmutadas, excepto que las variables de naturaleza discreta que componen a estos últimos son reemplazadas por variables equivalentes (valores promedio) de naturaleza continua (véanse por ejemplo [40], [50] y [56]). Este hecho permite suponer que un diseño de control desarrollado a partir de un modelo continuo para un determinado CEP, puede ser utilizado como base para la construcción de un controlador continuo a tramos para el modelo conmutado de dicho CEP. Este trabajo demuestra la validez de esta hipótesis para el caso de convertidores de potencia de topología reductora, en donde el controlador conmutado propuesto es construido con base en el diseño de controladores basados en pasividad como los reportados en [40], construcción que se complementa por medio de un mecanismo de conmutación generado a partir de definir superficies de conmutación en el espacio de estado de la dinámica de lazo cerrado del sistema de control.

La metodología propuesta para la construcción del controlador conmutado se describe a continuación.

Propuesta de solución: Dado un convertidor estático de potencia de topología reductora

1. Se construye un modelo de dinámica continua equivalente al modelo (1.1), en el cual la señal continua a tramos $\varphi(t)$ es reemplazada por una señal promedio equivalente pero de naturaleza continua $\mu(t)$.
2. Se replantea el problema de control original para el modelo continuo del inciso anterior.
3. Se determina la existencia de una señal continua $\mu(t)$ que resuelva el problema de control planteado en el inciso anterior.
4. Una vez que se ha obtenido una señal de control $\mu(t)$, si es que existe, se construye una política de conmutación tal que la señal $\mu(t)$ pueda ser suficientemente aproximada por la señal de control $\varphi(t)$.

La política de conmutación aplicada en el cuarto paso se basa en un proceso de cuantificación de la señal continua $\mu(t)$, en el cual los niveles de cuantificación obtenidos definen los elementos del conjunto finito discreto \mathcal{U} . Como se verá más adelante, este proceso permite resolver el problema de generar la adecuada secuencia de valores que la señal conmutada $\varphi(x, x_d)$ debe adoptar. Por otro lado, el mecanismo de conmutación basado en superficies de conmutación tiene como objetivo garantizar que la velocidad de conmutación de la variable $\varphi(x, x_d)$ no exceda el valor de δ , ésto al menos en estado estacionario.

1.4. Contribuciones

A continuación se enlistan los principales resultados de este trabajo:

Modelado de convertidores estáticos de topología reductora. Se presenta un modelo dinámico con discontinuidad en su variable de control para describir el comportamiento de la familia de convertidores monofásicos de topología reductora compuestos ya sea por dispositivos conmutadores en arreglos de medio puente, puente completo o de múltiples puentes conectados en cascada. La construcción de dicho modelo parte de la estructura Euler-Lagrange de este tipo de convertidores. Además se presenta un modelo dinámico continuo equivalente al anterior bajo condiciones de alta velocidad de conmutación. Este segundo modelo permite demostrar las propiedades de pasividad para la señal actuada del sistema y de fase mínima débil de la corriente en el capacitor del filtro con respecto a la señal de entrada.

Diseño de control basado en pasividad por retroalimentación de estado. Se presenta un controlador conmutado que resuelve el problema de control mencionado anteriormente. Este control se diseñó tomando como base la técnica conocida como Control Basado en Pasividad, la cual permite explotar las propiedades de interconexión de la clase de convertidores considerados. El controlador propuesto se compone de dos mecanismos: una ley de control continua encargada de definir para todo instante de tiempo sólo dos valores del conjunto \mathcal{U} entre los cuales la señal de control $\varphi(t)$ debe conmutar, y un mecanismo de conmutación encargado de definir la forma en la cual $\varphi(t)$ conmutará entre los dos valores mencionados. Debe señalarse que ambos mecanismos requieren de una medición total del estado. Adicionalmente, se presenta la prueba de estabilidad asintótica de los errores de estado con respecto a una vecindad del punto cero.

Finalmente, este trabajo dió origen a las siguientes publicaciones:

- Noriega-Pineda, D.; Espinosa-Perez, G.; Varela-Vega, A.; Horta-Mejia, S.; *Experimental evaluation of an adaptive nonlinear controller for single-phase UPS*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Control Applications, 2001. Pags(s): 254 -258. Se presenta la primera versión del controlador basado en pasividad que se utilizó como señal de control supervisor del controlador conmutado propuesto.
- Alvarez-Ramírez J., Espinosa-Pérez G., and Noriega-Pineda D. *Current-mode Control of DC-DC Power Converters: A Backstepping approach*, International Journal on Robust and Nonlinear Control, Volume 13, Issue 5, 2003, pags: 421-442. En este trabajo se desarrolla una estrategia de control para convertidores de topología elevadora con base en dos lazos de retroalimentación. El primero de ellos, lazo de retroalimentación de corriente, se utilizó para estabilizar el sistema de control, el segundo de ellos, retroalimentación de la señal de voltaje de salida, se empleó para mejorar el desempeño transitorio del voltaje.
- Cervantes I., García-Chaparro D., Noriega-Pineda D.: *Linear multi-loop control of quasi-resonant converters*. Power Electronics, IEEE Transactions on , Volume: 18 Issue: 5 , Sept. 2003 Page(s): 1194 -1201. En este artículo se aplica el doble lazo de retroalimentación para la estabilización mediante control PID de convertidores cuasiresonantes.

- Noriega-Pineda D., Gerardo Espinosa-Pérez. *Control de Convertidores de tipo Buck con Entrada Cuantificada*, Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, México D.F., México, 2004. Las condiciones que debe satisfacer el controlador supervisor para garantizar la estabilidad del sistema de control, bajo la acción de una señal de conmutación por cuantificación, son presentadas por primera vez. Así mismo, se presentan las relaciones entre la vecindad obtenida y el error de cuantificación obtenido.
- Vila-García J. A., Noriega-Pineda D., Gerardo Espinosa-Pérez. *Modelado y Control Pasivo de Inversores Multinivel de Fuentes Independientes*, Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, Cuernavaca, Morelos, 2005. En este trabajo se presenta el proceso de modelado de convertidores multinivel de puentes en cascada, modelo de naturaleza continua el cual es utilizado para el diseño del controlador continuo basado en pasividad.

1.5. Contenido de la tesis

El trabajo de tesis está organizado en tres capítulos: El capítulo uno es una breve introducción a los sistemas de dinámica híbrida y de dinámica conmutada, así como a las definiciones y conceptos empleados a lo largo del trabajo. El capítulo dos describe la forma como los modelos de naturaleza conmutada y de naturaleza continua (o promediados) son construidos para diversos tipos de convertidores estáticos de potencia de topología reductora a partir del método de modelado variacional basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) presentado en [40]. En el capítulo tres se introduce el control conmutado propuesto, así como también resultados de simulación para diversos ejemplos de aplicación como fuentes ininterrumpibles de voltaje, reguladores de voltaje de corriente directa y fuentes de energía multinivel. Este trabajo finaliza con algunos comentarios a manera de conclusiones y una breve descripción del trabajo de investigación que aún queda por realizarse.

Capítulo 2

Sistemas de dinámica híbrida

En este capítulo se hace una breve introducción a los sistemas de dinámica híbrida y de dinámica conmutada, con el fin de establecer los conceptos y definiciones que sirven de base al contexto sobre el cual se realizó el diseño de control para la clase de convertidores estáticos de potencia considerados.

2.1. Sistemas dinámicos

En la teoría de control un mismo sistema dinámico puede ser asociado a diversos modelos matemáticos, cada uno de los cuales responde a diferentes compromisos entre precisión y simplicidad, así como al contexto en el cual se desee analizar al sistema. Este hecho permite clasificar los sistemas dinámicos en función del tipo de modelo matemático que se emplea para su análisis. Para elaborar una clasificación de los modelos matemáticos se debe seleccionar un criterio que permita distinguir de una manera precisa las propiedades y/o las características que debe poseer un modelo, a fin de poderlo ubicar dentro de la clasificación. Las siguientes definiciones ayudarán a puntualizar los tipos de modelos matemáticos estudiados en este trabajo.

Un modelo matemático puede clasificarse en función del tipo de variables de estado empleadas en su construcción: Un sistema dinámico cuyo comportamiento puede ser descrito mediante un conjunto de variables de estado que evolucionan tomando valores de un conjunto no numerable \mathcal{R} , podrá ser modelado mediante *modelos de variable continua*, por lo que el sistema es llamado *sistema dinámico de estado continuo*. Si la variable toma valores de un conjunto contable \mathcal{M} el modelo se conoce como *modelo de variable discreta* y el sistema se denomina *sistema dinámico de estado discreto*.

Por otro lado, debido a que los sistemas dinámicos pueden verse como una familia de trayectorias determinadas por procesos que evolucionan en el tiempo, denotado por \mathcal{T} , entonces es posible establecer otro tipo de clasificación en términos del tiempo: Cuando $\mathcal{T} = \mathcal{R}^+ = [0, \infty)$, se dice que el proceso es un *sistema dinámico en tiempo continuo*, mientras que si $\mathcal{T} = \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ se dice que es un *sistema dinámico en tiempo discreto*. Debido a que $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ es común considerar el espacio de tiempo únicamente como \mathcal{R} aún si los cambios ocurren en un conjunto contable $\{t_k \in \mathcal{R} \mid k \in \mathcal{N}\}$. Debe señalarse que los

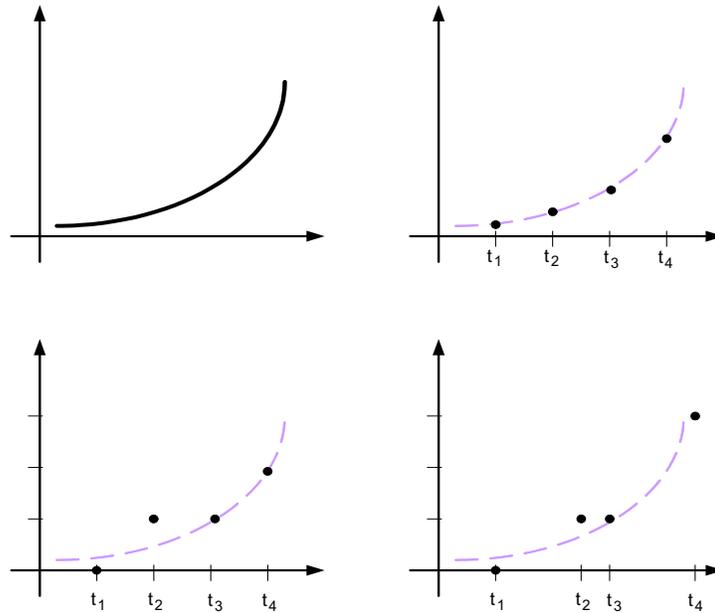


Figura 2.1: Evolución en el tiempo de distintas clases de sistemas: a) De estado y tiempo continuo, b) De estado continuo y tiempo discreto, c) De estado discreto y tiempo discreto, d) De estado discreto y tiempo discreto asíncrono

sistemas de tiempo discreto pueden ser *sincronizados* si los tiempos discretos $t_k \in \mathcal{R}$ son conocidos *a priori* o *asincronizados* si esto no es así (véase la figura 2.1).

Comúnmente los cambios en un sistema de n variables continuas en el tiempo continuo pueden expresarse mediante ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector continuo de variables de estado, $u \in \mathbb{R}^p$ es un vector de entradas externas y $f(\cdot, \cdot)$ es una función continua. De manera similar, un sistema de variable continua en tiempo discreto sincronizado puede representarse mediante la siguiente ecuación en diferencias

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k)) \quad (2.2)$$

Se conoce como *sistema de eventos discretos* a todo aquel sistema dinámico que posee un comportamiento que sólo puede ser modelado mediante variables de estado discretas, es decir que toman valores de un conjunto numerable \mathcal{M} de posiblemente un número infinito de elementos, algunos de los cuales pueden describirse mediante ecuaciones de la forma

$$\varphi^+(t) = \Phi(\varphi(t), \sigma(t)) \quad (2.3)$$

donde φ es la variable de estado discreto, σ es una entrada discreta externa y Φ es una función que describe los cambios en φ . En este tipo de modelos, la entrada σ toma valores en

un conjunto generalmente finito \mathcal{E} cuyos elementos son denominados *eventos* (o símbolos). La notación φ^+ significa el siguiente estado de φ . Si \mathcal{T} es un conjunto contable que representa los tiempos en los cuales ocurre un cambio en la variable discreta, entonces $\varphi(t) = \varphi(t_k + 1)$ será el sucesor de $\varphi(t) = \varphi(t_k)$, donde $t_{k+1} \in \mathcal{T}$ es el sucesor de $t_k \in \mathcal{T}$. Básicamente en un sistema de eventos discretos los cambios en sus variables dependen de la ocurrencia de uno o varios eventos (que no dependen directamente del tiempo como en (2.2)) y del específico orden en que se presenten estos eventos.

2.2. Comportamientos híbridos

En la práctica, existen sistemas dinámicos que presentan comportamientos tan complejos que simplemente no pueden ser clasificados como continuos o discretos en lo que se refiere a la naturaleza de sus estados o a la manera en la cual evolucionan en el tiempo. Tales sistemas consisten, generalmente, en la interconexión de subsistemas que exhiben en su dinámica una variedad de comportamientos tanto discretos como continuos o que evolucionan simultáneamente a lo largo de diferentes “tipos de tiempo” como el tiempo real, el discreto síncrono o el discreto asíncrono. Colectivamente este tipo de sistemas son denominados *sistemas de dinámica híbrida (SDH)*. Desde finales de la década de los ochenta este tipo de sistemas ha atraído la atención de matemáticos y de ingenieros en computación y de control. Como consecuencia de esto, los métodos aplicados, los resultados obtenidos y las definiciones o conceptos propuestos son tan diversos que hoy día resulta difícil pensar en una teoría unificada. Más aún, el carácter interdisciplinario de estos sistemas ha contribuido a que aún existan debates sobre lo que es un SDH. En este trabajo, un SDH es todo aquel sistema que satisface la siguiente definición:

Definición 2.1 ([32]) *Un sistema de dinámica híbrida es un sistema dinámico que no puede ser representado ni analizado con suficiente precisión ya sea por métodos aplicados en la teoría de sistemas de dinámica continua o de la teoría de sistemas de dinámica discreta.*

La característica esencial de un SDH es que su comportamiento dinámico es una mezcla entre comportamientos continuos en el tiempo con comportamientos que incluyen saltos bruscos. Es decir, posee variables de estado tanto continuas como discretas, las cuales interactúan entre sí a través de sus dinámicas.

Considere un SDH cuya dinámica continua se encuentra modelada por una ecuación diferencial de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x, u, \varphi, t), \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

donde x es la componente continua del estado que toma valores de un subconjunto \mathcal{X} del espacio Euclidiano, $f(\cdot)$ es un campo vectorial controlado que generalmente depende de x , de una señal continua de control $u(\cdot)$ y de un proceso de naturaleza discreta φ . En la literatura de los SDH se puede reconocer cuatro comportamientos híbridos [5]: saltos de estado provocados de manera autónoma, saltos de estado provocados de manera controlada, cambios dinámicos

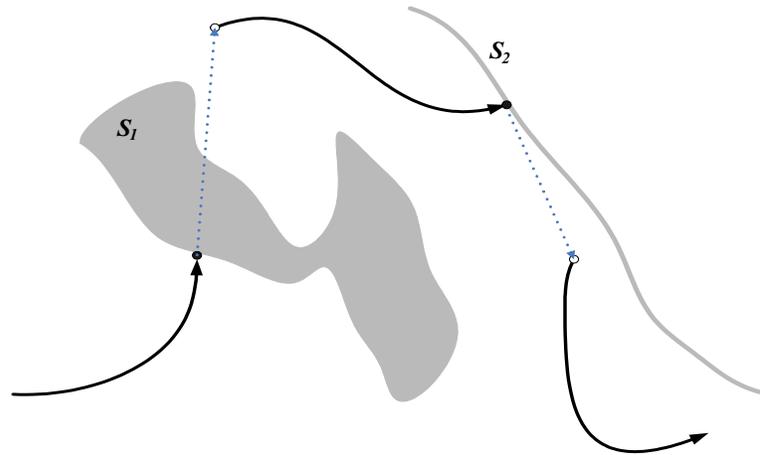


Figura 2.2: Ilustración de la evolución de un estado continuo sometido a saltos de manera autónoma.

provocados en forma autónoma y cambios dinámicos provocados en forma controlada [32]. A continuación se presenta una breve descripción de cada uno de estos comportamientos.

i. **Saltos de estado provocados de manera autónoma.** Este caso se refiere a todas aquellas situaciones en las cuales la variable de estado x salta de un estado a otro de manera brusca sólo después de haber alcanzado el borde de un subconjunto predefinido $S \subset \mathcal{X}$ denominado *superficie de conmutación*. Considere por ejemplo la figura 2.2, en donde la línea continua negra representa la evolución de la variable x en el plano. Cuando esta variable alcanza a cualquiera de las regiones de conmutación (en gris) se produce un salto de estado, ilustrado mediante la línea discontinua azul, después del cual, el estado x continúa con su evolución. El salto instantáneo del estado continuo suele denominarse *efecto impulsivo* [24]. Nótese que este estado es continuo en todas partes, excepto cuando alcanza a una superficie de conmutación que es cuando pierde continuidad.

Observación 2.1 *Es importante señalar que las superficies de conmutación S pueden ser definidas ya sea mediante subconjuntos del espacio de estado (S_1 en figura 2.2) o mediante hiperplanos (S_2 en la figura 2.2) ello dependerá de la naturaleza del fenómeno discreto involucrado o, si es de libre diseño, de la conveniencia de la estrategia a emplear.*

Observación 2.2 *El k -ésimo salto de estado tiene lugar únicamente cuando la trayectoria continua x alcanza a S en un instante de tiempo τ_k , denominado de manera general como instante de conmutación. Bajo la suposición de que el salto no tiene duración los instantes de tiempo justo antes y justo después de τ_k , denotados como τ_k^- y τ_k^+ respectivamente, son tomados en cuenta en la mayoría de los análisis y definiciones de los SDH.*

ii. **Saltos de estado provocados de manera controlada.** En este caso el estado continuo presenta discontinuidades cuando la señal de control u alcanza una determinada cota

o restricción u_s , es decir, cuando $u(\tau) = u_s$ el campo vectorial $f(x, u, \tau)$ viola la condición de continuidad de Lipschitz únicamente en el instante de conmutación τ . Por ejemplo, considere el siguiente sistema de primer orden

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \delta(u(t) - u_s), \quad x(t_0) = x(0), \quad (2.5)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la función impulso de magnitud finita. Cuando $u(t) = u_s$ en (2.5), el estado x salta de acuerdo a la magnitud de $\delta(\cdot)$. De manera general, el salto controlado puede depender también del tiempo y del estado continuo, por ejemplo en

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \delta(x(t) + u(t) - u_s), \quad x(t_0) = x(0), \quad (2.6)$$

la conmutación depende de la señal de entrada y de la variable continua, por lo que el salto puede ser forzado o incluso prevenido mediante una adecuada selección de $u(t)$, por ejemplo, si se definen $u_s \neq 0$ y $u(t) = -x(t)$, entonces el estado continuo de (2.6) nunca saltará.

iii. **Cambios dinámicos provocados en forma autónoma.** Se denomina *conmutación autónoma* cuando el campo vectorial f sufre un cambio abrupto en su estructura en el momento en el cual el estado continuo x alcanza una región de conmutación S predefinida. Formalmente, esta clase de sistemas pueden ser representados mediante una familia de campos vectoriales \mathcal{F} y una regla de conmutación encargada de establecer qué elemento de \mathcal{F} gobierna el comportamiento del sistema en un determinado instante de tiempo. La noción de conmutación se emplea con el objeto de enfatizar que el sistema puede ser gobernado por cualesquiera elemento de \mathcal{F} , cada uno de los cuales puede ser analizado de manera separada por métodos y estrategias de la teoría de los sistemas continuos, pero cuyo análisis colectivo muchas veces escapa no solo a esta clase de herramientas sino también a herramientas de análisis más complejas como las utilizadas en el análisis funcional, por dar un ejemplo.

iv. **Cambios dinámicos provocados en forma controlada.** En este tipo de sistema se aplica el mismo argumento anterior, donde el campo vectorial f cambia en respuesta a la entrada continua u , la cual puede ser una función del estado y/o del tiempo. Generalmente, la señal u es constante a tramos, donde para un determinado intervalo de tiempo finito la entrada es fijada a un valor constante \bar{u} . Considere por ejemplo un sistema lineal invariante en el tiempo de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x(0),$$

si la señal de entrada es constante a tramos y puede asumir sólo los valores discretos u_i , $i = 1, \dots, k$, entonces el comportamiento del sistema también puede ser representado mediante la siguiente familia de ecuaciones diferenciales afines

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_i = Ax(t) + b_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

donde $b_i \triangleq Bu_i$.

Definición 2.2 ([5]) *Se denomina evento interno a toda aquella conmutación generada en función únicamente del estado continuo x . En el caso en el cual la conmutación tiene lugar por causas debidas a señales externas al sistema, se tiene un evento externo.*

Un evento externo ocurre sin ninguna influencia de la dinámica continua modelada, mientras que un evento interno ocurre debido a condiciones en el proceso continuo. De manera general, los sistemas que poseen comportamientos híbridos de los tipos (iii) y (iv) se denominan sistemas de dinámica conmutada, los cuales serán tratados con mayor detalle en la siguiente sección.

2.3. Sistemas de dinámica conmutada

Los sistemas de dinámica conmutada (SDC) son aquellos sistemas cuyo comportamiento dinámico puede ser caracterizado mediante una familia de campos vectoriales y una regla de naturaleza lógica que determina en todo momento qué elemento de dicha familia es responsable de la evolución en el tiempo del comportamiento. De manera general, el mecanismo de decisión lógica mencionado no constituye un mecanismo discreto con memoria, por lo cual, existen diversos SDC que no califican como verdaderos SDH, por lo que aún existen discusiones sobre si realmente los SDC son una subfamilia de los SDH. En este trabajo, se considerará que los SDC son una subfamilia de los SDH.

Debido a que los sistemas considerados en este trabajo son por naturaleza SDC, se procederá a definir de manera más formal este tipo de sistemas. Considere una familia de funciones $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$ cuyos elementos f_φ , $\varphi = 1, \dots, k$, son funciones que mapean al espacio \mathbb{R}^n sobre sí mismo y son suficientemente regulares (es decir, son al menos localmente Lipschitz). Para definir un SDC a partir de esta familia es necesario introducir el concepto de *señal de conmutación*. Esta señal se define como una función constante continua a tramos $i : [0, \infty) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ que posee un número finito de discontinuidades, para la cual la siguiente suposición se cumple:

Suposición 2.1 *La señal de conmutación $i(\cdot)$ entre instantes de conmutación consecutivos sólo puede asumir un único valor constante dentro del conjunto $\{1, \dots, k\}$. Además, es continua por la derecha, es decir, para todo instante de tiempo t el límite $i(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} (i(\tau))$ existe y satisface*

$$i(t) = \varphi \quad \forall t \in [\tau_\varphi, \tau_{\varphi+1}) \quad \text{y} \quad \forall \varphi \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.7)$$

Considere una familia de campos vectoriales

$$\mathcal{F} = \{f_\varphi\}, \quad \varphi \in \{1, \dots, k\}. \quad (2.8)$$

El papel de $i(\cdot)$ es especificar, para cada instante de tiempo t , el índice $\varphi \in \{1, \dots, k\}$ que permite definir al único sistema de la familia (2.8) que deberá estar activo en ese instante de tiempo. Entonces, un SDC con señal de conmutación variante en el tiempo puede ser descrito mediante la expresión

$$\dot{x}(t) = f_{i(t)}(x), \quad i(t) \in \{1, \dots, k\}.$$

Para simplificar la notación será necesario abusar de la misma de la siguiente forma: la función $i(\cdot)$ será denotada como $\varphi(\cdot)$ o simplemente como φ .

Observación 2.3 *En este trabajo de tesis la señal de conmutación $\varphi(\cdot)$ es una función determinística de la forma $\varphi = \varphi(x, \omega)$ donde x es el estado y ω es una señal externa, específicamente una señal de referencia predefinida y conocida.*

De manera general, un SDC lineal e invariante en el tiempo se define como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\varphi(t)}x(t) + b_{\varphi(t)}(t) + B_{\varphi(t)}u_{\varphi(t)}(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ \varphi(t) &\in \{1, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $A_{\varphi(t)}$ es una matriz que pertenece al conjunto de *matrices dinámicas* $\{A_1, \dots, A_k\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{\varphi(t)}$ es una matriz perteneciente al conjunto de *matrices de entrada* $\{B_1, \dots, B_k\} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $b_{\varphi(t)}(t) \in \{b_1(t), \dots, b_k(t)\} \in \mathbb{R}^n$ es un vector que en general es variante en el tiempo y $u_{\varphi(t)}(t) \in \{u_1(t), \dots, u_k(t)\} \in \mathbb{R}^p$ es un término que modela señales externas no necesariamente manipulables.

Definición 2.3 *Se dice que el SDC (2.9) se encuentra evolucionando bajo el modo de operación j , $j \in \{1, \dots, k\}$, si a lo largo del intervalo de tiempo finito $[\tau_j, \tau_{j+1})$ la trayectoria continua x satisface*

$$\dot{x}(t) = A_j x(t) + b_j(t) + B_j u_j(t), \quad x(\tau_j) = x_0. \quad (2.10)$$

En lo sucesivo el conjunto discreto finito $\{1, \dots, k\} \triangleq \mathcal{U}$ se denominará conjunto de modos de operación.

En el caso en el cual el SDC (2.9) carece de señal de entrada externa $u_{\varphi(t)}$, el modelo se reduce a

$$\dot{x}(t) = A_{\varphi(t)}x(t) + b_{\varphi(t)}(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.11)$$

el cual es conocido como *SDC afín autónomo*. Cuando (2.11) adquiere la forma

$$\dot{x}(t) = A_{\varphi(t)}x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.12)$$

se dice entonces que es un *SDC lineal autónomo*.

Observación 2.4 *Cuando en un SDC de la forma (2.10) todos los elementos del conjunto de pares $\{A_{\varphi(t)}, B_{\varphi(t)}\}$ son completamente controlables, entonces es posible definir un conjunto de entradas de control por retroalimentación de estados $u_{\varphi(t)}(t) = K_{\varphi(t)}x(t)$ tal que el sistema retroalimentado puede expresarse en términos de la ecuación (2.11) de la manera siguiente*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}_{\varphi(t)}x(t) + b_{\varphi(t)}(t) \\ \bar{A}_{\varphi(t)} &= (A_{\varphi(t)} + K_{\varphi(t)}B_{\varphi(t)}). \end{aligned}$$

Observación 2.5 *Por lo común, el control en sistemas forzados continuos de la forma $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ consiste en manipular la energía suministrada a dicho sistema por medio de la variable de control $u(t)$. Sin embargo, en el caso de sistemas de la forma (2.11) la fuente de energía que alimenta al sistema, representada por el vector $b_{\varphi(t)}(t)$, tiene un comportamiento predefinido. Esto implica que la secuencia de valores que tome la señal de conmutación $\varphi(t)$ será el medio a través del cual podrá manipularse la energía del sistema. En otras palabras, en sistemas de la forma (2.11) la señal discreta $\varphi(t)$, denominada ley de conmutación, es la única señal de entrada manipulable del sistema, esto debido a que es la encargada de indicarle al sistema como manipular su energía interna mediante la elección de las matrices A_{φ} y que dosifica la energía que entra al sistema mediante los términos $b_{\varphi}(t)$.*

Solución de SDC

Antes de describir las características de la solución de los SDC lineales e invariantes en el tiempo considerados, es necesario introducir el concepto de secuencia de conmutación:

Definición 2.4 *Una secuencia de conmutación es un conjunto ordenado de pares*

$$\{(\tau_0, \varphi_0), (\tau_1, \varphi_1), \dots, (\tau_j, \varphi_j), \dots, (\tau_N, \varphi_N)\}, \quad 0 < N \leq \infty \quad (2.13)$$

donde $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N$, N es el número de conmutaciones que componen a la secuencia y $\varphi_0 \in \mathcal{U}$ es el modo de operación que da inicio a la secuencia.

Suposición 2.2 *Considere que la secuencia (2.13) satisface lo siguiente*

- i. $\tau_0 = 0$,
- ii. $\tau_1 \geq 0$,
- iii. $\tau_1 = 0$ si y solo si $\varphi(0^-) \neq \varphi(0)$,
- iv. $\tau_j > \tau_{j-1}$, $\forall j = 1, \dots, N$,
- v. $\lim(\tau_j) = \infty$ conforme $j \rightarrow \infty$ y
- vi. $\varphi(\tau_j) \neq \varphi(\tau_j^-)$.

El propósito de la anterior suposición junto con la suposición 1.1 es excluir los casos en los cuales los tiempos de conmutación de $\varphi(t)$ tienden a acumularse en un tiempo finito $\bar{\tau}$ (fenómeno de conmutación infinita en tiempo finito), es decir $\tau_j \rightarrow \bar{\tau} < \infty$ conforme $j \rightarrow \infty$.

La solución de un sistema conmutado de la forma (2.9) para una condición inicial $[x(\tau_0), \varphi_0]$ puede expresarse en términos de la secuencia de conmutación (2.13) ya que ésta es un indicativo de la manera en que se concatenan las respectivas soluciones de los modos de operación del SDC. Suponga que cada modo de operación (2.10) es gobernado por funciones continuas a tramos, en consecuencia y por virtud de (2.7), la solución para cada uno de estos modos existirá y será única. Más aún, deberá satisfacer la ecuación

$$x(t) = e^{A_j(t-\tau_j)}x(\tau_j) + \int_{\tau_j}^t e^{A_j(t-\sigma)}(b_j + B_j u_j(\sigma))d\sigma \quad \forall t \in [\tau_j, \tau_{j+1}). \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) implica que la solución x de (2.9) se mantiene continua a lo largo del tiempo, es decir, el fenómeno de la conmutación sólo afecta al campo vectorial. Por esta

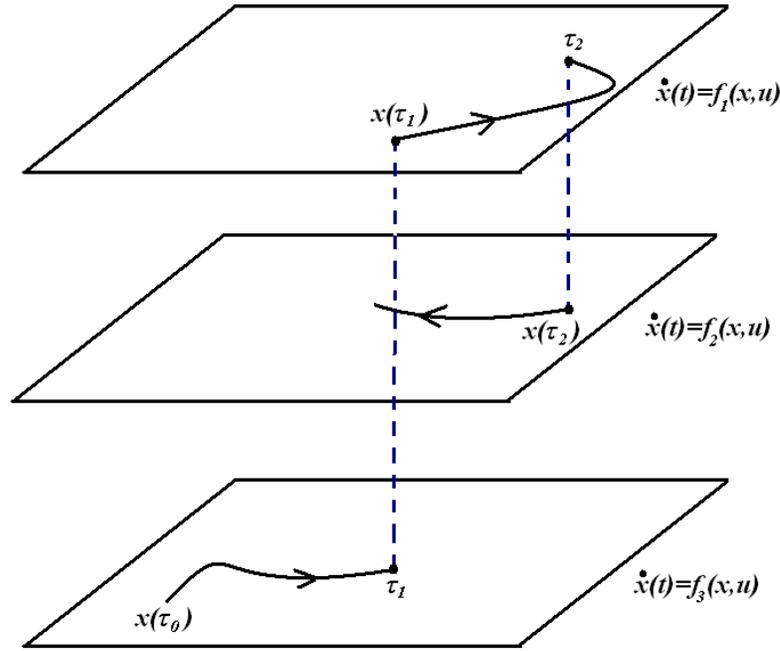


Figura 2.3: Ejemplo de la evolución del estado continuo x bajo la acción de un SDC de tres modos de operación.

razón, los SDC considerados pueden ser expresados mediante ecuaciones diferenciales con discontinuidad en su parte derecha, donde la discontinuidad es provocada por la variable discreta φ , la cual actúa como un parámetro más del sistema.

La evolución de la variable continua x de un SDC descrito por (2.9) puede resumirse como sigue: Suponga que la condición inicial, en el tiempo $t_0 = \tau_0$, de las variables continua y discreta del SDC es x_0 y φ_0 respectivamente. Entonces $x(t)$ evolucionará de acuerdo a la ecuación diferencial $\dot{x}(t) = A_{\varphi_0}x(t) + b_{\varphi_0} + B_{\varphi_0}u_{\varphi_0}(t)$ hasta que, en el instante de conmutación τ_1 , tenga lugar la conmutación del modo de operación φ_0 al modo de operación φ_1 , entonces el SDC será gobernado por el modo de operación $\dot{x}(t) = A_{\varphi_1}x(t) + b_{\varphi_1} + B_{\varphi_1}u_{\varphi_1}(t)$, cuya condición inicial es $x(\tau_1)$. Este proceso dinámico es mostrado en la figura 2.3 para un SDC de tres modos de operación y los primeros tres estados de la secuencia (2.13), donde el estado discreto inicial es $\varphi_0 = 3$, el siguiente estado discreto es $\varphi_1 = 1$ y el tercero es $\varphi_2 = 2$. Este comportamiento del campo vectorial f se conoce como *conmutación del campo vectorial*, por lo cual los SDC también son conocidos como *sistemas de campos vectoriales conmutados* o *sistemas de estructura variable*.

Observación 2.6 *Es importante señalar que para el caso en el cual la señal de conmutación depende del estado, la secuencia (2.13) será dependiente de la condición inicial de x . Entonces, si $\varphi(x)$ es determinística sólo existirá una secuencia (2.13) para cada $x(t_0)$, véase [54].*

Capítulo 3

Modelado de Convertidores Estáticos de Potencia (CEP)

El análisis y diseño de dispositivos electrónicos de potencia ha ido adquiriendo importancia en las últimas décadas debido a que los avances tecnológicos en la fabricación de semiconductores ha hecho posible el uso de esta clase de dispositivos en muy diversas aplicaciones, tanto industriales como domésticas. Ejemplos de ello son las fuentes ininterumpibles de potencia, los convertidores inversores de voltaje, los convertidores resonantes, los filtros activos y los convertidores multietapas o multinivel, por mencionar algunos. De manera general, los sistemas electrónicos de potencia son dispositivos encargados de transferir la energía eléctrica de un sistema eléctrico a otro, es decir, trabajan como intermediarios entre un dispositivo generador de energía y uno o varios dispositivos consumidores. La transferencia de energía se realiza mediante la conversión de una señal de entrada de voltaje o de corriente en una señal de salida, también de voltaje o corriente, con características diferentes ya sea en la forma de su señal, en la amplitud y/o en la frecuencia, en comparación con la señal de entrada original. Para que la transferencia de energía sea lo más eficiente posible, la transformación de señales se realiza mediante dispositivos conmutadores tales como tiristores, dispositivos conmutadores de silicio, MOSFET (Transistor Efecto de Campo Metal Oxido Semiconductor) o IGBT (Transistor Bipolar de Compuerta Aislada), en combinación con elementos pasivos (inductores, capacitores, transformadores y elementos resistivos).

Sin embargo, los convertidores de potencia pueden exhibir una gran variedad de comportamientos no lineales. Tales comportamientos tienen su origen principalmente en los elementos conmutadores que los componen. Por ejemplo, los diodos de potencia o los tiristores son dispositivos que imponen restricciones algebraicas en el comportamiento en las señales de corriente. De igual manera, las estrategias de control también pueden ser fuentes de comportamientos tan complejos como bifurcaciones e incluso caos, como es el caso de los esquemas de conmutación basados en lazos de retroalimentación de señales de corriente (véase [15]). No obstante ello, el estudio de la naturaleza discontinua de tales circuitos y el diseño de estrategias de control que exploten dicha característica con el fin de mejorar la eficiencia de la transferencia de la energía es hoy día campo fértil para la investigación.

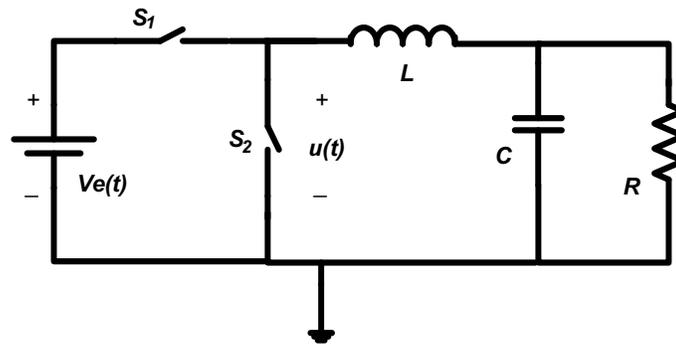


Figura 3.1: Esquema básico de un convertidor estático de potencia de topología reductora.

3.1. Consideraciones Generales

Debido a que la energía eléctrica puede ser suministrada mediante señales de CA y CD, entendiéndose por CA a aquellas señales de voltaje nominalmente de forma sinusoidal y por CD a aquellas señales de voltaje que son constantes en el tiempo. Existen cuatro familias básicas de CEP: los convertidores de CA/CD o reguladores, los convertidores CD/CA o convertidores inversores, los convertidores CD/CD o troceadores y los convertidores CA/CA o variadores de frecuencia. En esta clase de convertidores los elementos conmutadores conforman un circuito eléctrico cuya estructura se ve modificada con cada cambio en el estado de los interruptores. Por ello, estos sistemas eléctricos poseen una dinámica conmutada gobernada únicamente a través de señales de comando que habilitan los estados de conducción o no conducción de cada uno de los dispositivos conmutadores que los componen. En ese sentido, y como primer paso para su control, es necesario construir un modelo matemático que permita capturar la discontinuidad a fin de poder dar inicio a cualquier estudio.

Los dispositivos conmutadores que serán considerados son interruptores electrónicos ideales que pueden adoptar dos estados en función de una señal de voltaje de comando $V_g(t)$: el *estado de conducción* (o de encendido) cuando el voltaje se defina como $V_g(t) = V_g^{on}$ y el *estado de no conducción* (o de apagado) si $V_g(t) = V_g^{off}$, donde V_g^{on} y V_g^{off} son señales cuyos niveles de voltaje dependen del tipo de dispositivo conmutador considerado, por ejemplo los dispositivos MOSFET pueden ser activados mediante una señal de voltaje de compuerta que puede ir de los 5 a los 20 volts, entanto que el estado de no conducción puede activarse con un nivel de voltaje de cero volts. Entonces, el estado de cada uno de estos interruptores puede ser relacionado con una variable de naturaleza discreta $\bar{\varphi}$. Por ejemplo, considere el CEP de topología reductora mostrado en la figura 3.1, el cual consta de dos elementos interruptores ideales S_1 y S_2 . Si los estados de los interruptores S_1 y S_2 son definidos mediante la aplicación de los voltajes de comando V_{g1} y V_{g2} , respectivamente, entonces es posible agrupar dichos voltajes en un vector de la forma

$$V_g(t) = \begin{bmatrix} V_{g1} \\ V_{g2} \end{bmatrix}$$

el cual toma valores del conjunto discreto finito

$$\mathcal{U}_g = \left\{ \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{on} \\ V_{g2}^{on} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{on} \\ V_{g2}^{off} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{off} \\ V_{g2}^{on} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{off} \\ V_{g2}^{off} \end{array} \right] \right\}.$$

Los elementos de este conjunto pueden ser relacionados de manera unívoca con los elementos del siguiente conjunto discreto $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}} = \{\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_4\}$ el cual puede ser definido como el dominio de la variable discreta $\bar{\varphi}$.

Los CEP considerados en este trabajo (reguladores de voltaje de CD, convertidores inversores de voltaje y convertidores multinivel) son de topología reductora, es decir, son circuitos capaces de generar un nivel de voltaje de salida igual o menor al nivel de voltaje de entrada [15]. Estos convertidores de voltaje pueden ser caracterizados mediante el esquema generalizado mostrado en la figura 3.2, en donde los cuatro bloques básicos que componen a esta clase de convertidores son: un bloque de fuentes de energía, cuyos elementos se asume son fuentes de voltaje de CD; un bloque de dispositivos conmutadores, en cual abarca todos los dispositivos interruptores que componen al circuito; un bloque de elementos pasivos, el cual se conforma principalmente de los dispositivos LC que componen al filtro de salida y/o los dispositivos de acoplamiento con la carga; finalmente está el bloque de disparo en el cual se encuentra toda la electrónica necesaria para el control de encendido o apagado de los dispositivos interruptores. Bajo la suposición de que el bloque de fuentes de energía mostrado está conformado por ω fuentes de voltaje independientes, entonces sus respectivas señales pueden ser concentradas en un vector de voltaje $V(t) \in \mathbb{R}^\omega$. Si a su vez el bloque de elementos conmutadores está formado por m interruptores, entonces los respectivos voltajes de comando también pueden agruparse en un vector $V_g(t)$ que toma valores de un conjunto discreto finito de cardinalidad 2^m y dimensión m . Como consecuencia de esto, las 2^m posibles combinaciones que pueden adoptar dicho interruptores pueden ser asociadas a un conjunto discreto $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}$ de 2^m elementos escalares. Este procedimiento permite construir modelos matemáticos en los cuales cada una de las configuraciones que se obtengan puede ser asociada a una sola variable de naturaleza discreta. Más aún, la variable escalar discreta $\bar{\varphi}$ puede ser empleada como una señal de comando que, por medio de un dispositivo lógico, genera una señal vectorial de comando $V_g(t)$ por cada elemento del conjunto $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}$, prescindiendo así de $V_g(t)$ en el modelo resultante. La capacidad de modelar el efecto del bloque de conmutación en función de una sola variable escalar tiene la importante ventaja de reducir la búsqueda de una señal de control de conmutación para cada interruptor a una única señal escalar de comando.

Observación 3.1 *Bajo este contexto, el conjunto $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}$ puede interpretarse como el conjunto de modos de operación que los CEP esquematizados en figura 3.2 pueden adoptar.*

De manera general, es posible que existan modos de operación que den como resultado interconexiones entre los elementos pasivos y fuentes de energía que provoquen el daño o incluso la destrucción de algunos de estos elementos, estos modos de operación se denominan *modos de operación prohibidos*. Por ejemplo, en el circuito de la figura 3.1 el modo de operación generado por el vector $[V_{g1}^{on}, V_{g2}^{on}]^T$ da como resultado un corto circuito de la fuente. Por otro lado, existen ejemplos, como los convertidores multinivel, en los cuales una

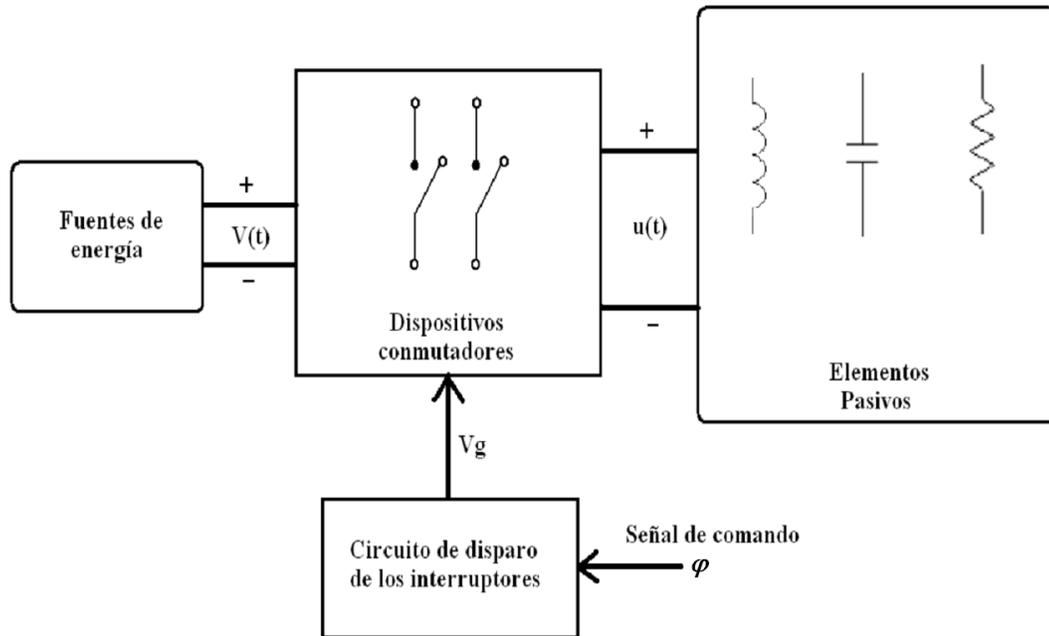


Figura 3.2: Representación esquemática que muestra las distintas clases de elementos que componen un convertidor reductor, así como su interconexión.

misma señal de voltaje $u(t)$ puede ser generada por más de un modo de operación, por tanto el conjunto más simple de modos de operación que un CEP puede adoptar de manera práctica es en general un subconjunto de $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}$.

Observación 3.2 *El problema de generar la adecuada secuencia de valores para $\bar{\varphi}$, en caso de tener modos de operación prohibidos y redundantes, está fuera del alcance del presente trabajo de tesis, esto debido a que el mapeo que va de $\bar{\varphi}$ al vector V_g posee una inversa con solución no única. Ésta inversa está sujeta a una serie de restricciones que dificultan su análisis. Debe señalarse que una posibilidad de abordar este problema consiste en considerar que los elementos del conjunto $\mathcal{U}_{\bar{\varphi}}$ no sean equidistantes entre sí, con lo cual la combinación de señales de disparo necesarios para generar un nivel en particular se reduce significativamente.*

Definición 3.1 *Un conjunto $\mathcal{U} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ formado por k modos de operación no prohibidos ni redundantes se denomina conjunto de modos de operación viables.*

En lo que resta, los modos de operación que los CEP pueden generar se considerarán viables. Nótese que la señal de voltaje $u(t)$ es una señal constante continua a tramos que toma valores de un conjunto discreto \mathcal{U}_u de k elementos. Esto permite aplicar una función biunívoca entre los valores que $u(t)$ puede tomar y los valores de φ .

Definición 3.2 *Un conjunto de modos de operación viables definido como*

$$\mathcal{U} \triangleq \{\varphi_N, \varphi_{N-1}, \dots, \varphi_1, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \varphi_N\}$$

donde sus componentes satisfacen:

(a) $\varphi_i = -\varphi_i, i = 1, 2, \dots, N$

(b) $\varphi_0 = 0,$

(c) $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \Delta \quad \forall u_i \in \mathcal{U}$ con Δ una constante positiva,

(d) $\varphi_{\overline{N}} \leq \varphi_i, \forall i = \overline{N-1}, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$

(e) $\varphi_N \geq \varphi_i, \forall i = \overline{N}, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1$

se denomina conjunto ordenado de modos de operación. Los elementos φ_N y $\varphi_{\overline{N}}$ se conocen como el elemento máximo y el elemento mínimo de \mathcal{U} , respectivamente.

La definición anterior permite abordar sólo una clase de CEP en cascada en el cual las fuentes de alimentación de cada puente son independientes entre sí, pero comparten las mismas características eléctricas, como por ejemplo un conjunto de baterías de un misma capacidad de voltaje.

Ejemplo 3.1 Considere nuevamente el circuito de la figura 3.1. El modo de operación $[V_{g1}^{on}, V_{g2}^{on}]^T$ es prohibido ya que produce un corto circuito entre las terminales de la fuente y $[V_{g1}^{off}, V_{g2}^{off}]^T$ se considerará también prohibido ya que desacopla a la fuente de energía del filtro LC. Entonces, el conjunto de modos de operación viables es generado por el siguiente conjunto de voltajes de disparo

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{on} \\ V_{g2}^{off} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{off} \\ V_{g2}^{on} \end{array} \right] \right\}.$$

Es decir, los interruptores S_1 y S_2 sólo pueden ser accionados de manera complementaria. El conjunto de modos de operación viables puede denotarse como $\{0, 1\}$ donde

$$1 \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{on} \\ V_{g2}^{off} \end{array} \right] \quad y \quad 0 \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} V_{g1}^{off} \\ V_{g2}^{on} \end{array} \right].$$

Sea φ una variable discreta que toma valores del conjunto $\{0, 1\}$, entonces $N = 1, \Delta = 1, \varphi_{\min} = 0$ y $\varphi_{\max} = 1$. Así, cuando $\varphi = 1$ el voltaje u visto por el filtro y la carga es $u(t) = Ve$. Si $\varphi = 0$ el voltaje u visto por el filtro activo y la carga cambia a $u(t) = 0$. De esta manera, el circuito de la figura 3.1 puede ser sustituido por el circuito equivalente mostrado en la figura 3.3, en donde los interruptores S_1 y S_2 han sido sustituidos por la variable discreta φ .

Debido a que en el CEP de la figura 3.2 el bloque de interruptores actúa como una interface que modula la energía que las fuentes de voltaje suministra a los elementos pasivos, es de esperarse que este efecto se refleje directamente en la fuente de voltaje del circuito equivalente mostrado en la figura 3.3.

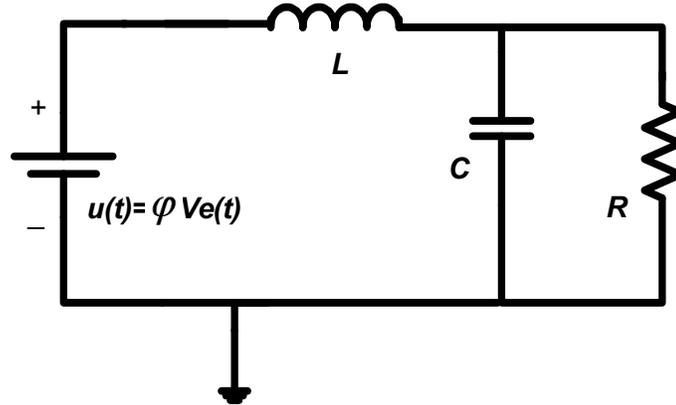


Figura 3.3: Circuito equivalente de la figura 3.1

3.2. Modelado de sistemas Euler-Lagrange de dinámica conmutada

En esta tesis se emplea el método de modelado de circuitos conmutados utilizado en trabajos como [40], [50] y [13], el cual permite no sólo construir modelos matemáticos que reflejan la forma en que los dispositivos conmutadores modifican la estructura de interconexión de los circuitos, sino que también, permite obtener los modelos promediados tradicionales. La aproximación presentada consiste en establecer los parámetros Euler-Lagrange (EL) asociados a cada una de las topologías generadas por los interruptores involucrados dando como resultado, a través del uso de ecuaciones dinámicas Lagrangianas, sistemas de ecuaciones diferenciales con discontinuidades en sus partes derechas.

Los modelos Euler-Lagrange son consecuencia del llamado método variacional; una técnica de modelado cuya base consiste en la definición de funciones de energía en términos de conjuntos de variables generalizadas. En general, un modelo EL se caracteriza básicamente por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, conocidas como ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right) = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) + \mathcal{Q}.$$

donde $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ es un vector de coordenadas generalizadas de dimensión n (n grados de libertad) y \dot{q} es un vector de velocidades generalizadas. En este trabajo, los vectores q y \dot{q} representan las cargas eléctricas y los flujos de corriente, respectivamente, de las redes eléctricas estudiadas, aunque también q puede ser flujo y \dot{q} voltaje. La función escalar $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ se define como el Lagrangiano del modelo y está definido como la diferencia entre la co-energía magnética y la energía eléctrica del sistema, denotadas por $\mathcal{T}(q, \dot{q})$ y $\mathcal{V}(q)$ respectivamente, es decir

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \mathcal{T}(q, \dot{q}) - \mathcal{V}(q). \quad (3.1)$$

Es importante señalar que, originalmente, este método de diseño se desarrolló para el modelado de sistemas mecánicos, en cuyo caso $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ es la diferencia entre la co-energía cinética y la energía potencial, extendiéndose a sistemas electromecánicos, eléctricos, etc., siendo hoy en día muy empleado en el modelado de sistemas dinámicos en general.

En adelante se considerará que la co-energía magnética $\mathcal{T}(q, \dot{q})$ está dada por la forma cuadrática

$$\mathcal{T}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{D}(q) \dot{q} \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{D}(q)$ es una matriz que satisface $\mathcal{D}(q) = \mathcal{D}^T(q) > 0$. De igual manera, y por simplicidad, se supondrá que la energía eléctrica está acotada por debajo, esto es, que existe una constante $c \in \mathbf{R}$ tal que $\mathcal{V}(q) \geq c$ para toda $q \in \mathbf{R}^n$.

La función $\mathcal{F}(\dot{q})$ se conoce como la co-función de disipación de Rayleigh del sistema, la cual representa las fuerzas disipativas que actúan en el mismo y que satisface

$$\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq 0. \quad (3.3)$$

La variable \mathcal{Q} representa las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. En la presente tesis solo se considera como fuerza externa a las fuentes de energía que alimentan a los CEP, las cuales actúan de manera lineal, de acuerdo a la siguiente expresión

$$\mathcal{Q} = \mathcal{M}v$$

donde $v \in \mathbf{R}^{n_\varphi}$ es el vector de control y $\mathcal{M} \in \mathbf{R}^{n \times n_\varphi}$ es una matriz constante cuya estructura se analizará más adelante; así

Los sistemas EL son, por lo anterior, representados completamente mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} \right) = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) + \mathcal{M}v. \quad (3.4)$$

Definición 3.3 Las ecuaciones Euler-Lagrange dadas por (3.4) con (3.1), (3.2) y (3.3) definen un sistema EL, el cual está caracterizado mediante el cuarteto de parámetros EL:

$$\left\{ \mathcal{T}(q, \dot{q}), \mathcal{V}(q), \mathcal{F}(\dot{q}), \mathcal{Q} \right\}.$$

La matriz \mathcal{M} es una matriz columna regular que relaciona las entradas externas con las coordenadas generalizadas del sistema, por lo cual, se derivan dos clases diferentes de sistemas EL de acuerdo con la estructura de esta matriz

Definición 3.4 Un sistema EL es **completamente actuado** si el número de entradas disponibles de control, n_φ , es igual al número de grados de libertad del sistema. De otra forma, si $n_\varphi < n$ se dice que el sistema es **subactuado**. En este último caso, \mathcal{M} puede ser particionada en una componente actuada \mathcal{M}^{n_φ} y una subactuada \mathcal{M}^\perp , donde \mathcal{M}^\perp denota el complemento ortogonal de \mathcal{M} .

En el caso de los convertidores estudiados en este trabajo, la señal de control es escalar por lo que \mathcal{M} en un vector columna. Es importante resaltar una segunda clasificación que depende directamente de la estructura de la función de disipación de Rayleigh:

Definición 3.5 *El sistema EL (3.4) se dice que es **completamente amortiguado** si la función de disipación de Rayleigh satisface*

$$\dot{q}^T \frac{\partial \mathcal{F}(\dot{q})}{\partial \dot{q}} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i^2.$$

donde $\alpha_i > 0$ es constante para toda $i \in \underline{n} \triangleq \{1, \dots, n\}$. Por otro lado, si $\exists i \in \underline{n}$ tal que $\alpha_i = 0$, entonces el sistema es **subamortiguado**.

En este trabajo, la función de Rayleigh es cuadrática debido a la linealidad de las resistencias eléctricas presentes en los sistemas considerados. Por lo tanto, la función de disipación toma la forma

$$\mathcal{F}(\dot{q}) \triangleq \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{R} \dot{q}$$

con $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T \geq 0$ y diagonal.

3.3. Modelo conmutado de CEP reductores

Los convertidores de topología reductora considerados pueden ser esquematizados de acuerdo a la figura 3.2. Se caracterizan por poseer dispositivos interruptores ideales interconectados entre sí formando arreglos tipo puente H o, como en el caso de los convertidores reguladores, de una rama de interruptores, figura 3.4. Como ya se mencionó, es posible construir un modelo matemático generalizado para esta clase de circuitos, en el cual el efecto de los interruptores en la dinámica de los convertidores puede ser caracterizado a través de una única señal escalar de entrada.

El modelo que se propone es el siguiente

$$\mathcal{D}\dot{x}(t) = -\mathcal{J}x(t) - \mathcal{R}x(t) + \mathcal{M}\varphi(t) \quad (3.5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de estado, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T > 0$ es una matriz diagonal positiva definida de dimensión $n \times n$, $\mathcal{J} = -\mathcal{J}^T$ es una matriz antisimétrica de dimensión $n \times n$, $\mathcal{R} \geq 0$ es una matriz antisimétrica diagonal que pertenece a $\mathbb{R}^{n \times n}$, y $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector constante. La variable de control $\varphi(t)$ es una señal constante continua a tramos que satisface

$$\varphi(t) = \varphi_i, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (3.6)$$

donde $t_{i+1} - t_i > 0$, y φ_i es un término continuo constante que pertenece a un conjunto ordenado discreto \mathcal{U} .

Observación 3.3 *La condición de que el vector \mathcal{M} sea constante implica que las fuentes de alimentación de esta clase de circuitos deben ser constantes.*

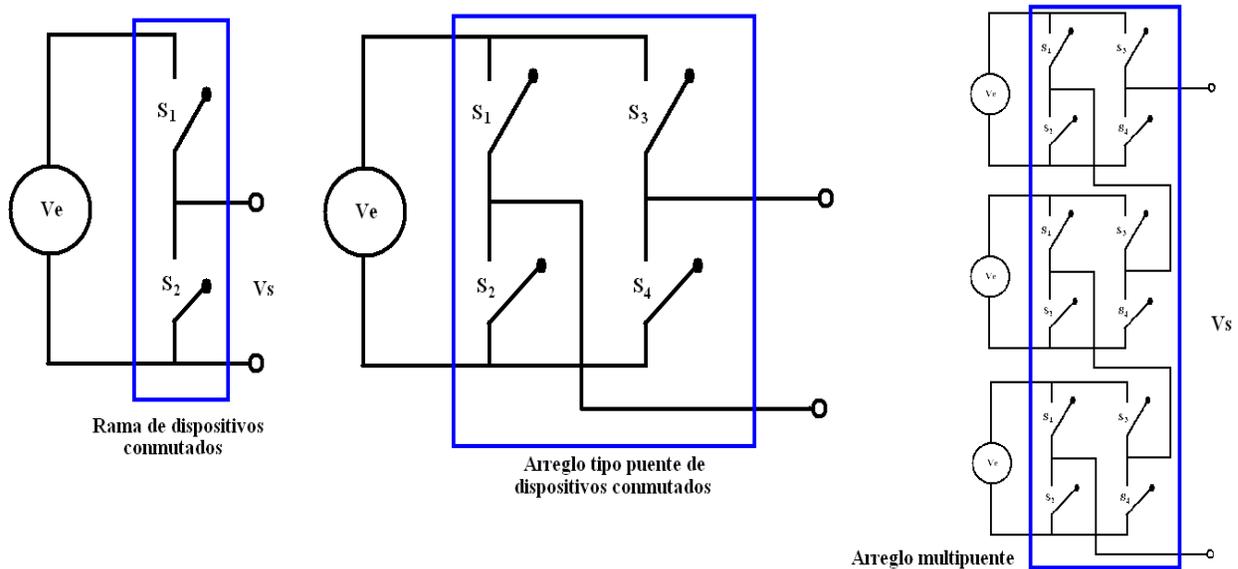


Figura 3.4: Posibles configuraciones que los dispositivos conmutados pueden adoptar

3.3.1. Modelado de convertidores de CD-CA

Básicamente, los convertidores de Corriente Directa a Corriente Alterna (CD-CA) son fuentes aisladas que transforman señales continuas de voltaje en señales alternas. Para transformar la energía, estos convertidores son construidos con dispositivos semiconductores que sólo pueden adoptar los estados de conducción y no conducción. Ejemplos de estos dispositivos son los transistores MOSFET, GTO (Tiristor de apagado por compuerta) e IGBT.

Dependiendo del tipo de fuente de alimentación aplicada al circuito inversor, estos se clasifican como:

- Inversor Fuente de Voltaje (VSI, por sus siglas en inglés).
- Inversor Fuente de Corriente (CSI, por sus siglas en inglés).

El inversor VSI se caracteriza por entregar una salida de voltaje de frecuencia y amplitud ajustables. Estos pueden recibir su energía de baterías (como es el caso de sistemas ininterrumpibles, UPS), o bien, de un circuito rectificador. En cualquier caso, la frecuencia de salida de estos convertidores está determinada por los estados de corte y conducción de los dispositivos semiconductores. Esta acción da como resultado una señal conmutada de voltaje de salida que no es muy útil en diversas aplicaciones, lo cual obliga a la utilización de filtros pasivos como interface entre el circuito convertidor y la carga (véase la figura 3.5)

En lo referente a los convertidores CSI, estos consisten en un rectificador controlado por fase, un inductor de valor elevado y el circuito inversor CD-CA propiamente dicho, donde el inductor es utilizado como la liga de corriente directa que permite que la entrada al circuito inversor se vea como una fuente de corriente. A continuación se presenta el proceso de modelado para los convertidores VSI.

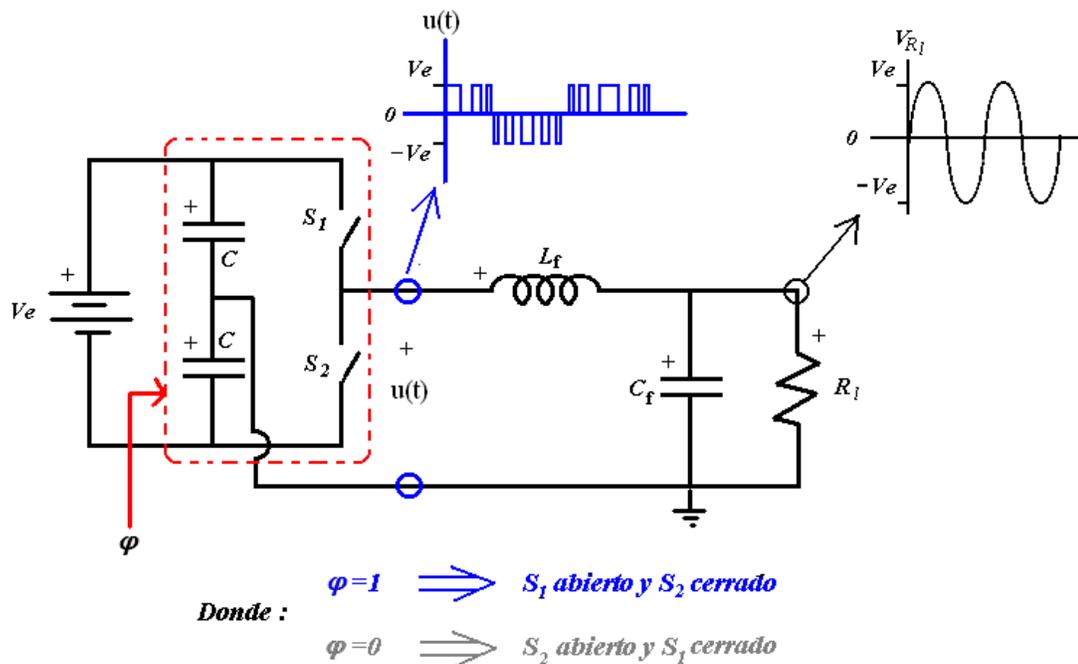


Figura 3.5: Convertidor VSI de medio puente

2.3.1.1 Convertidor VSI de medio puente

El diagrama esquemático de un convertidor básico de CD a CA de medio puente monofásico, con filtro pasivo de salida y carga resistiva, se muestra en la figura. 3.5. La operación de este circuito puede expresarse de la siguiente forma: Los interruptores S_1 y S_2 , realizados mediante interruptores ideales, son encendidos y apagados de manera complementaria para suministrar al filtro L_f - C_f una señal de voltaje continua constante a tramos $u(t)$. La resistencia de carga R_i presenta, en sus terminales, una señal de tipo sinusoidal debido a que el filtro L_f - C_f se emplea para atenuar los armónicos generados por la operación de conmutación. Los capacitores C_1 y C_2 son incluidos para poder usar una sola fuente de CD en vez de dos.

La conmutación de los interruptores se lleva a cabo mediante la señal de comando $\varphi(t)$ que toma valores del conjunto *discreto* $\{0, 1\}$. Esto es, cuando $\varphi(t) = 1$ el interruptor S_1 se cierra mientras que el interruptor S_2 es abierto. La situación complementaria ocurre cuando $\varphi(t) = 0$.

Modelo conmutado del inversor de voltaje de medio puente. A continuación se presenta el modelado de convertidores inversores monofásicos de medio puente, en donde la conmutación genera dos modos de operación viables. Debe señalarse que este procedimiento puede ser extendido para el caso en el cual la conmutación de lugar a diversos modos de operación.

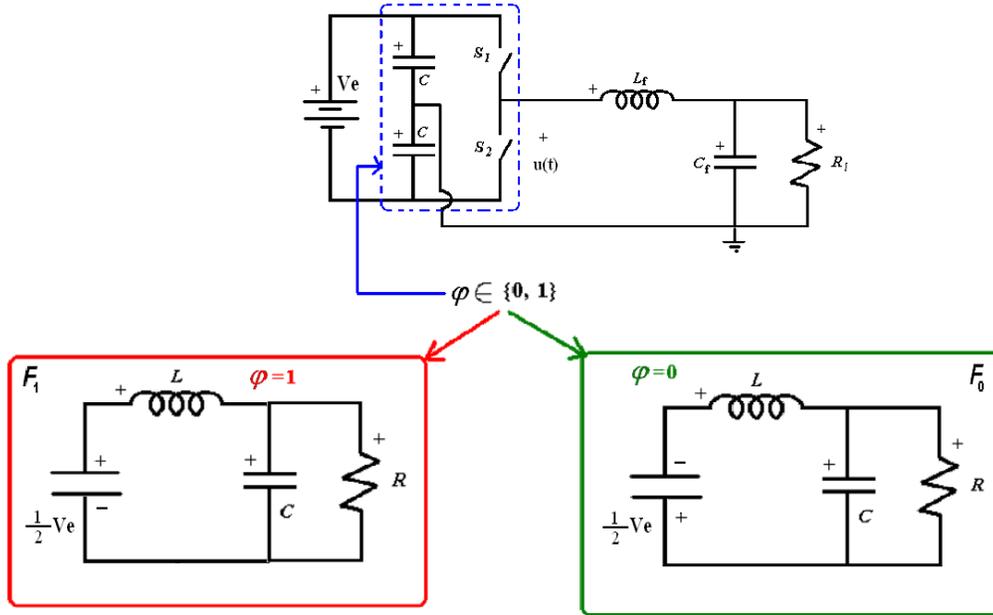


Figura 3.6: Convertidor reductor con un interruptor de dos estados y modos de operación resultantes

Considere el convertidor reductor de la figura 3.6 compuesto por un elemento interruptor ideal cuyos dos posibles estados son determinados por la variable de comando discreta $\varphi \in \{0, 1\}$. En el momento en que la variable de comando tome el valor de posición $\varphi = 1$, el sistema resultante estará caracterizado por el conjunto de parámetros EL $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{Q}_1\}$ y será denominado modo de operación F_1 . Similarmente, cuando $\varphi = 0$ el modo de operación resultante F_0 estará determinado por los parámetros $\{\mathcal{T}_0, \mathcal{V}_0, \mathcal{F}_0, \mathcal{Q}_0\}$.

Definición 3.6 ([50]) Una función $\phi_\varphi(\dot{q}, q) = \phi(\dot{q}, q, \varphi)$, parametrizada por φ y el vector de coordenadas generalizadas $q \in \mathcal{R}^n$, se dice que es **consistente** con las funciones $\phi_0(\dot{q}, q)$ y $\phi_1(\dot{q}, q)$ siempre que

$$\phi_\varphi|_{\varphi=0} = \phi_0; \quad \phi_\varphi|_{\varphi=1} = \phi_1. \quad (3.7)$$

Denótese como $\{\mathcal{T}_\varphi, \mathcal{V}_\varphi, \mathcal{F}_\varphi, \mathcal{Q}_\varphi\}$ a un conjunto de funciones parametrizadas por φ . Dicho conjunto constituye un *sistema Euler-Lagrange de dinámica conmutada* si los parámetros $\{\mathcal{T}_\varphi, \mathcal{V}_\varphi, \mathcal{F}_\varphi, \mathcal{Q}_\varphi\}$ son consistentes, en el sentido descrito previamente, con respecto a los parámetros EL de los modos de operación F_1 y F_0 . Debe señalarse que la *función Lagrangiana conmutada* \mathcal{L}^φ es también consistente con las funciones \mathcal{L}^1 y \mathcal{L}^0 asociadas a dichos modos de operación.

Considérese el circuito convertidor mostrado en la figura 3.7, en el cual el estado de sus interruptores S_1 y S_2 es controlado en forma complementaria por la variable discreta $\varphi \in \{0, 1\}$. El análisis de este sistema se lleva a cabo considerando, de manera separada,

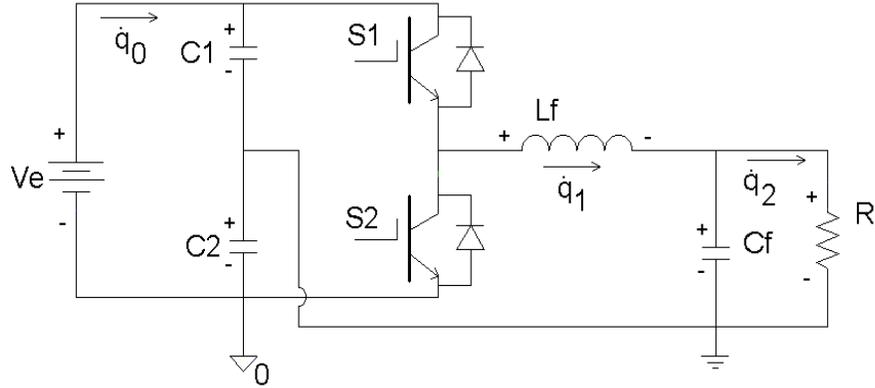


Figura 3.7: Diagrama esquemático de un circuito inversor de medio puente.

la formulación de la dinámica de cada circuito asociado con cada una de las dos posibles posiciones del interruptor regulador. El objetivo de ello consiste en comprender los efectos físicos de la acción de conmutación en términos de los parámetros EL de los dos modos de operación obtenidos.

Defínase como coordenadas independientes a las corrientes de lazo \dot{q}_0 , \dot{q}_1 y \dot{q}_2 también mostradas en la figura 3.7. Entonces, un adecuado conjunto de coordenadas generalizadas estará compuesto por las cargas q_0 , q_1 y q_2 . En este punto, se debe advertir que durante el proceso de modelado se consideraron las mismas coordenadas generalizadas y se asumieron las mismas direcciones para las corrientes de lazo \dot{q}_1 y \dot{q}_2 para ambos modos de operación. Cuando $\varphi = 1$, se obtiene el circuito mostrado en la figura 3.8(a), para el cual la formulación de la dinámica de Lagrange correspondiente se puede realizar como sigue: Sean $\mathcal{T}_1(\dot{q}_1)$ y $\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2)$ la co-energía magnética y energía eléctrica del circuito respectivamente, $\mathcal{F}_1(\dot{q}_2)$ la función de disipación de Rayleigh, y $\mathcal{Q}_{q_0}^1$, $\mathcal{Q}_{q_1}^1$ y $\mathcal{Q}_{q_2}^1$ las fuerzas externas generalizadas asociadas con las coordenadas q_0 , q_1 y q_2 , respectivamente. Matemáticamente, estas cantidades se expresan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\dot{q}_1) &= \frac{1}{2}L_f (\dot{q}_1)^2 & \mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2) &= \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_1} (q_0 - q_1)^2 + \frac{1}{2C_2} q_0^2 \\ \mathcal{F}_1(\dot{q}_2) &= \frac{1}{2}R_l \dot{q}_2^2 & \mathcal{Q}_{q_0}^1 &= V_e ; \quad \mathcal{Q}_{q_1}^1 = 0 ; \quad \mathcal{Q}_{q_2}^1 = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde se consideró que todos los elementos del circuito están representados por relaciones constitutivas lineales. El correspondiente Lagrangiano para este estado de conmutación es

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}L_f (\dot{q}_1)^2 - \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_1} (q_0 - q_1)^2 - \frac{1}{2C_2} q_0^2 \quad (3.9)$$

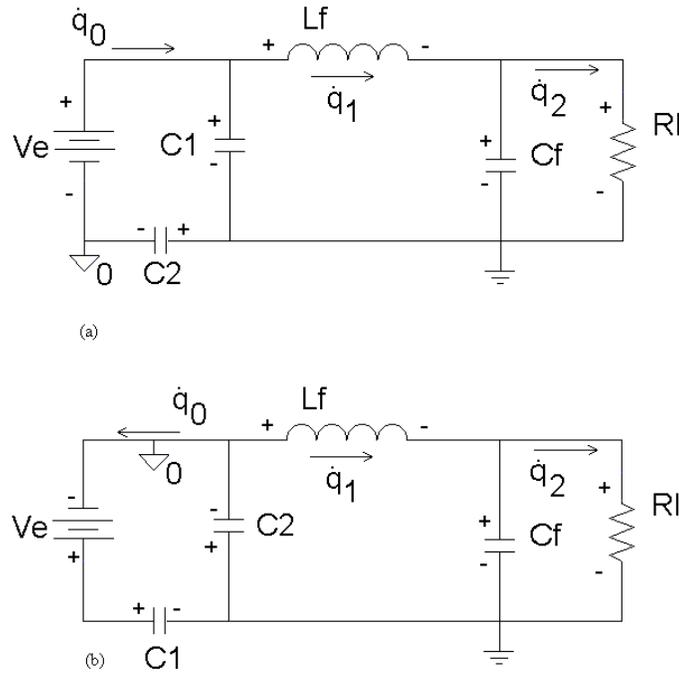


Figura 3.8: Estados de operación del inversor de medio puente: (a) $\varphi = 1$ (S_1 encendido y S_2 apagado). (b) $\varphi = 0$ (S_1 apagado y S_2 encendido)

De igual forma los parámetros EL del modo de operación determinado por la posición $\varphi = 0$, figura 3.8(b), son; $\mathcal{T}_0(\dot{q}_1)$, $\mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2)$, $\mathcal{F}_0(\dot{q}_L, \dot{q}_C)$, $\mathcal{Q}_{q_0}^0$, $\mathcal{Q}_{q_1}^1$ y $\mathcal{Q}_{q_2}^0$; donde

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\dot{q}_1) &= \frac{1}{2}L_f \left(\dot{q}_1\right)^2 & \mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2) &= \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_1} q_0^2 + \frac{1}{2C_2} (q_0 - q_1)^2 \\ \mathcal{F}_0(\dot{q}_2) &= \frac{1}{2}R_l \dot{q}_2^2 & \mathcal{Q}_{q_0}^0 &= V_e ; \mathcal{Q}_{q_1}^0 = 0 ; \mathcal{Q}_{q_2}^0 = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

y cuya función Lagrangiana es

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}L_f \left(\dot{q}_1\right)^2 - \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_1} q_0^2 - \frac{1}{2C_2} (q_0 + q_1)^2 \quad (3.11)$$

Comparando los parámetros EL mostrados en (3.8) y (3.10) se observa que, la co-energía magnética, la función de disipación de Rayleigh y las fuerzas externas generalizadas permanecen invariantes ante la acción de conmutación. Sólo es afectada la energía eléctrica asociada a los capacitores C_1 y C_2 por la posición del interruptor, lo cual se comprueba fácilmente a partir de las figuras 3.8(a) y 3.8(b).

El siguiente conjunto de parámetros EL conmutados se propone con base en lo anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varphi(\dot{q}_1) &= \frac{1}{2}L_f \left(\dot{q}_1\right)^2 & \mathcal{V}_\varphi(q_0, q_1, q_2) &= \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_1} (q_0 - \varphi q_1)^2 + \frac{1}{2C_2} [q_0 + (1 - \varphi) q_1]^2 \\ \mathcal{F}_\varphi(\dot{q}_2) &= \frac{1}{2}R_l \dot{q}_2^2 & \mathcal{Q}_{q_0}^\varphi &= V_e ; \mathcal{Q}_{q_1}^\varphi = 0 ; \mathcal{Q}_{q_2}^\varphi = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nótese que en los casos en que la variable de conmutación toma los valores $\varphi = 1$ y $\varphi = 0$, uno recupera, respectivamente, la energía externa generalizada $\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2)$ en (3.8) y $\mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2)$ en (3.10) a partir de la fuerza externa generalizada propuesta, $\mathcal{V}_\varphi(q_0, q_1, q_2)$. Los parámetros EL propuestos en (3.12) son por tanto consistentes con los parámetros (3.8) y (3.10).

La función de Lagrange conmutada asociada con los parámetros EL en (3.12) está dada por

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}L_f (\dot{q}_1)^2 - \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_1} (q_0 - \varphi q_1)^2 - \frac{1}{2C_2} [q_0 + (1 - \varphi) q_1]^2. \quad (3.13)$$

Al aplicar las ecuaciones de EL (3.4) al resultado anterior, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales conmutadas

$$(q_0) : \frac{1}{C_1} (q_0 - \varphi q_1) + \frac{1}{C_2} [q_0 - (1 - \varphi) q_1] = V_e \quad (3.14)$$

$$(q_1) : L_f \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_f} (q_1 - q_2) = \frac{1}{C_1} \varphi (q_0 - \varphi q_1) - \frac{1}{C_2} (1 - \varphi) [q_0 - (1 - \varphi) q_1] \quad (3.15)$$

$$(q_2) : R_l \dot{q}_2 - \frac{1}{C_f} (q_1 - q_2) = 0 \quad (3.16)$$

A partir de la ecuación (3.14) se tiene que

$$\frac{1}{C_1} \varphi (q_0 - \varphi q_1) = -\frac{1}{C_2} \varphi [q_0 - (1 - \varphi) q_1] + V_e,$$

sustituyendo este resultado en (3.15) se llega a

$$L_f \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_f} (q_1 - q_2) = V_e \varphi - \bar{V}_{C_2}$$

donde $\bar{V}_{C_2} = \frac{1}{C_2} [q_0 - (1 - \varphi) q_1]$ es el voltaje a través del capacitor C_2 . Con el fin de manejar una notación mas amigable se considerarán como nuevas variables de estado la corriente en el inductor L_f y el voltaje a través del capacitor C_f mediante la siguiente transformación:

$$x_1 = \dot{q}_1; \quad x_2 = \frac{1}{C_f} (q_1 - q_2)$$

entonces las ecuaciones (3.15) y (3.16), aplicando la relación $\dot{x}_2 = \frac{1}{C_f} (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$, pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} L_f \dot{x}_1 &= -x_2 + V_e \varphi - \bar{V}_{C_2} \\ C_f \dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R_l} x_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Observación 3.4 *De manera práctica, los capacitores C_1 y C_2 se eligen de manera tal que su dinámica sea despreciable a altas velocidades de conmutación, por lo cual el voltaje \overline{V}_{C_2} es considerado como constante.*

Las ecuaciones (3.17) se conocen como el modelo conmutado de espacio de estado del inversor de medio puente, el cual puede reescribirse en la forma matricial siguiente

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}x + \mathcal{R}x = \psi_\varphi \quad (3.18)$$

donde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_t} \end{bmatrix}; \quad \psi_\varphi = \begin{bmatrix} Ve\varphi - \overline{V}_{C_2} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Esta forma se obtiene fácilmente a partir de la ecuación (3.17). Este formato se presenta debido a que permite visualizar mejor las propiedades físicas del modelo del inversor de medio puente, esto es, la matriz \mathcal{D} se interpreta como la matriz de almacenamiento de energía del sistema, con la cual es posible representar la función de energía \mathcal{H} del sistema de manera matricial:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (L_f x_1^2 + C_f x_2^2) = \frac{1}{2} x^T \mathcal{D} x. \quad (3.20)$$

Por otra parte, \mathcal{R} es la matriz de disipación de energía, la cual no es de rango completo por lo que el sistema es subamortiguado.

Observación 3.5 *El modelo (3.19) revela que el convertidor inversor es un sistema de dinámica conmutada de la forma (2.11) donde $A_\varphi = -\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{J} + \mathcal{R})$ y $b_\varphi(t) = \mathcal{D}^{-1}\psi_\varphi$.*

Observación 3.6 *Debido a que la fuente de energía es constante y predefinida, la única variable manipulable es la señal de conmutación φ . Por otro lado, en la práctica es muy común considerar que los capacitores que conforman un circuito de medio puente son iguales, por lo cual sus respectivos voltajes también pueden ser considerados iguales, así $\overline{V}_{C_2} \cong \frac{1}{2}V_e$, por lo que el término $Ve\varphi - \overline{V}_{C_2}$ puede reducirse a $\frac{1}{2}V_e(2\varphi - 1)$, en consecuencia, la ecuación (3.19) puede ser reescrita como*

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}x + \mathcal{R}x = \mathcal{M}\overline{\varphi}, \quad (3.21)$$

donde $\mathcal{M} = [V_e, 0]^T$ es un vector constante, $\overline{\varphi} = \frac{1}{2}(2\varphi - 1)$ y $\varphi \in \{0, 1\}$. Nótese que el sistema es subactuado, siendo la primera ecuación diferencial la componente actuada del modelo.

2.3.1.2 Convertidor VSI de Puente Completo

Un circuito inversor de puente completo como el mostrado en la figura 3.9 puede estructurarse mediante dos ramas paralelas compuestas cada una por dos dispositivos de conmutación, formando así un circuito conocido como de puente completo o puente H. Este

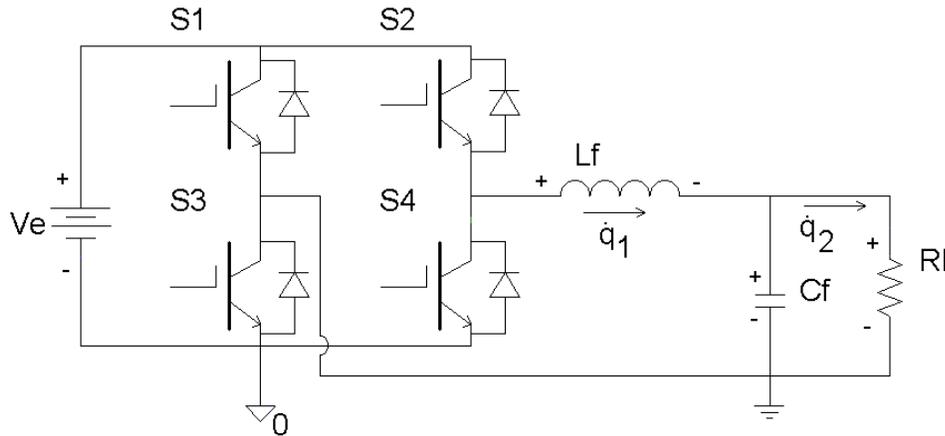


Figura 3.9: Diagrama esquemático de un inversor de puente completo

arreglo permite evitar la necesidad de emplear dos fuentes de CD de entrada o una fuente de CD con toma central, como en el caso de los convertidores de medio puente.

Considere que los interruptores S_1 y S_4 sólo pueden ser fijados en los estados de conducción o no conducción de manera simultánea, al igual que S_2 y S_3 . Además, si S_1 y S_4 son puestos en estado de conducción, entonces los interruptores S_2 y S_3 deberán permanecer abiertos, es decir los interruptores de una rama del puente conmutan de manera complementaria con los correspondientes de la segunda rama. Este esquema de conmutación permite definir dos modos de operación viables y, de manera práctica, un único voltaje de disparo. Nótese que el voltaje visto por el filtro pasivo y por la carga sólo puede ser V_e , para S_1 y S_4 abiertos, o $-V_e$ en el caso en que S_2 y S_3 conduzcan.

Observación 3.7 Otro posible esquema de disparo consiste en aplicar dos voltajes de disparo distintos, uno para cada rama de conmutación. De esta manera es posible definir tres modos de operación distinto mediante los cuales el filtro pasivo y la cargas serán alimentados por un voltaje V_e , $-V_e$ ó 0.

Modelo conmutado del inversor de puente completo Aplicando la misma filosofía de modelado usada en el caso del inversor de medio puente, es posible llegar a las ecuaciones mostradas en la tabla 1, mediante las cuales, y considerando la corriente en el inductor L_f como el estado x_1 y al voltaje en el capacitor C_f como la variable de estado x_2 , el modelo resultante está dado por

$$\begin{aligned} L_f \dot{x}_1 &= -x_2 + V_e \varphi \\ C_f \dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R_l} x_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde $\varphi \in \{-1, 1\}$.

Tabla 1. Resultados de la aplicación del método de modelado variacional en el inversor de puente completo.

Inversor de Puente Completo		
Parámetros EL para cada posible posición del interruptor		
φ	$\varphi = 1$	$\varphi = -1$
Energía co-magnética	$\mathcal{T}_{-1}(\dot{q}_1) = \frac{1}{2}L_f\dot{q}_1^2$	$\mathcal{T}_1(\dot{q}_1) = \frac{1}{2}L_f\dot{q}_1^2$
Energía eléctrica	$\mathcal{V}_{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{2C_f}(q_1 - q_2)^2$	$\mathcal{V}_1(q_1, q_2) = \frac{1}{2C_f}(q_1 - q_2)^2$
Disipación de Rayleigh	$\mathcal{F}_{-1}(q_2) = \frac{1}{2}R_l\dot{q}_2$	$\mathcal{F}_1(q_2) = \frac{1}{2}R_l\dot{q}_2$
Fuerzas externas	$\mathcal{Q}_1^{-1} = V_e; \quad \mathcal{Q}_2^{-1} = 0$	$\mathcal{Q}_1^1 = -V_e; \quad \mathcal{Q}_2^1 = 0$
Parámetros EL conmutados		
Energía co-magnética	$\mathcal{T}_\varphi(\dot{q}_1) = \frac{1}{2}L_f\dot{q}_1^2$	
Energía eléctrica	$\mathcal{V}_\varphi(q_1, q_2) = \frac{1}{2C_f}(q_1 - q_2)^2$	
Disipación de Rayleigh	$\mathcal{F}_\varphi(q_2) = \frac{1}{2}R_l\dot{q}_2$	
Fuerzas externas	$\mathcal{Q}_1^\varphi = \varphi V_e; \quad \mathcal{Q}_2^\varphi = 0$	
Lagrangiano conmutado		
$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}L_f\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2C_f}(q_1 - q_2)^2$		
Modelo conmutado		
$L_f\ddot{q}_1 + \frac{1}{C_f}(q_1 - q_2) = \varphi V_e$		
$-\frac{1}{C_f}(q_1 - q_2) + R_l\dot{q}_2 = 0$		

La ventaja principal de este tipo de topología sobre la estructura de medio puente puede verse comparando el modelo (3.22) con la dinámica dada en (3.17) y radica en el hecho de que, con la adecuada selección de los componentes pasivos del filtro, el valor pico máximo de voltaje en las terminales del capacitor de salida puede alcanzar una magnitud igual a la del voltaje de entrada V_e , es decir

$$V_e \geq |V_{cf}|_p > 0.$$

donde $|V_{cf}|_p$ es el valor pico alcanzado por la señal de voltaje en el capacitor C_f .

Considérese el modelo conmutado del inversor de puente completo (3.22) repetido a continuación con la estructura dada en (3.21)

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}x + \mathcal{R}x = \mathcal{M}\varphi \quad (3.23)$$

donde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L_f & 0 \\ 0 & C_f \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_l} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} V_e \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Al igual que en el caso de medio puente, la estructura mostrada por el modelo (3.23)-(3.24) demuestra que el convertidor de puente completo es un sistema subactuado y subamortiguado, donde la señal de control por conmutación actúa directamente sobre la dinámica de la corriente del inductor x_1 .

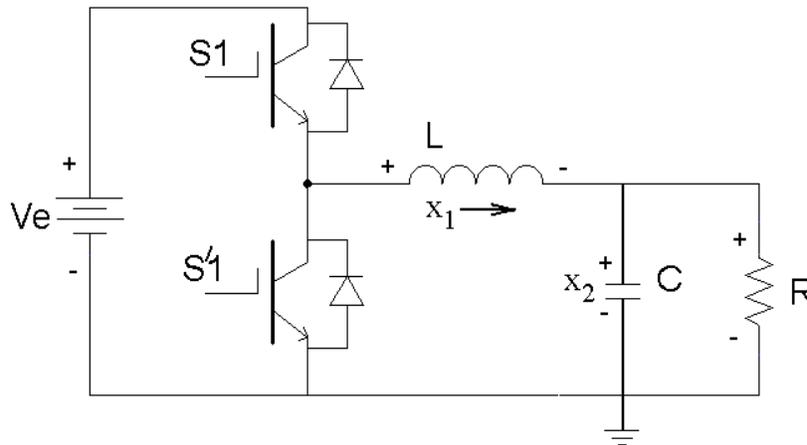


Figura 3.10: Convertidor regulador de corriente directa a corriente directa de topología reductora.

3.3.2. Modelado de convertidores de CD a CD

Los convertidores reguladores de voltaje de corriente directa a corriente directa (CD a CD), como el mostrado en la figura 3.10, poseen una amplia variedad de aplicaciones tanto domésticas como de laboratorio y telefonía. En esta sección se presenta el modelo de dinámica conmutada para el convertidor regulador de topología reductora de la figura 3.10, el cual se compone de una rama de dos dispositivos de conmutación.

Considere que los interruptores S_1 y S_1' sólo pueden ser conmutados de manera complementaria, entonces es posible definir dos modos de operación viables y, de manera práctica, un único voltaje de disparo. Nótese que el voltaje visto por el filtro pasivo y por la carga sólo puede ser V_e , para S_1 cerrado, ó 0 en el caso en que S_1' conduzca.

Modelo conmutado del regulador de CD a CD Aplicando la misma filosofía de modelado usada en el caso del inversor de medio puente, es posible llegar a las ecuaciones mostradas en la tabla 2, mediante las cuales, y considerando la corriente en el inductor L como el estado x_1 y al voltaje en el capacitor C como la variable de estado x_2 , el modelo resultante está dado por

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2 + V_e\varphi \\ C\dot{x}_2 &= x_1 - \frac{1}{R}x_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\varphi \in \{0, 1\}$.

Considérese el modelo conmutado del regulador de CD a CD (3.25) repetido a continuación con la estructura dada en (3.21)

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}x + \mathcal{R}x = \mathcal{M}\varphi \quad (3.26)$$

donde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_l} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} V_e \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Al igual que en el caso de medio puente, la estructura mostrada por el modelo (3.23)-(3.24) demuestra que el convertidor de puente completo es un sistema subactuado y subamortiguado, donde la señal de control por conmutación actúa directamente sobre la corriente del inductor x_1 .

Tabla 2. Resultados de la aplicación del método de modelado variacional en el convertidor de CD a CD.

Regulador de CD a CD		
Parámetros EL para cada posible posición del interruptor		
φ	$\varphi = 1$	$\varphi = 0$
Energía co-magnética	$\mathcal{T}_{-1}(\dot{q}_1) = \frac{1}{2}L\dot{q}_1^2$	$\mathcal{T}_1(\dot{q}_1) = \frac{1}{2}L\dot{q}_1^2$
Energía eléctrica	$\mathcal{V}_{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{2C}(q_1 - q_2)^2$	$\mathcal{V}_1(q_1, q_2) = \frac{1}{2C}(q_1 - q_2)^2$
Disipación de Rayleigh	$\mathcal{F}_{-1}(q_2) = \frac{1}{2}R\dot{q}_2$	$\mathcal{F}_1(q_2) = \frac{1}{2}R\dot{q}_2$
Fuerzas externas	$\mathcal{Q}_1^{-1} = V_e; \quad \mathcal{Q}_2^{-1} = 0$	$\mathcal{Q}_1^1 = 0; \quad \mathcal{Q}_2^1 = 0$
Parámetros EL conmutados		
Energía co-magnética	$\mathcal{T}_\varphi(\dot{q}_1) = \frac{1}{2}L\dot{q}_1^2$	
Energía eléctrica	$\mathcal{V}_\varphi(q_1, q_2) = \frac{1}{2C}(q_1 - q_2)^2$	
Disipación de Rayleigh	$\mathcal{F}_\varphi(q_2) = \frac{1}{2}R\dot{q}_2$	
Fuerzas externas	$\mathcal{Q}_1^\varphi = \varphi V_e; \quad \mathcal{Q}_2^\varphi = 0$	
Lagrangiano conmutado		
$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}L\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2C}(q_1 - q_2)^2$		
Modelo conmutado		
$L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = \varphi V_e$ $-\frac{1}{C}(q_1 - q_2) + R\dot{q}_2 = 0$		

Observación 3.8 Nótese que la única diferencia entre la tabla 1 y la tabla 2 radica en los valores que la señal de comando discreta puede adoptar: $\varphi \in \{1, -1\}$ para el puente completo y $\varphi \in \{0, 1\}$ para el regulador de CD a CD. Este resultado es de esperarse debido a que la diferencia entre las topologías de ambos convertidores no radica en los componentes dinámicos que los conforman, sino en la cantidad de interruptores involucrados y la forma en la cual estos son conmutados.

3.3.3. Convertidores Multinivel

Recientemente, sobre todo a nivel industrial, ha ido creciendo el interés por el diseño y control de dispositivos conmutadores de baja y/o mediana potencia que, al conectarse

en forma imbricada, son capaces de sintetizar señales de alto voltaje de CA a partir de niveles relativamente bajos de voltaje de corriente directa y sin la necesidad de emplear transformadores. Desde la perspectiva de calidad de potencia, ésta clase de convertidores, comúnmente denominados *convertidores multinivel*, también son atractivos ya que presentan una relación $\frac{dV}{dt}$ baja en comparación con convertidores de tan solo dos o tres niveles. Esto se debe a que las conmutaciones se llevan a cabo entre niveles de voltaje consecutivos muy cercanos entre sí.

El auge de tales circuitos se debe principalmente a las siguientes ventajas:

- Estos convertidores están diseñados con base en dispositivos conmutadores de baja y/o mediana potencia, los cuales son capaces de conmutar a frecuencias de hasta varios Kilo Hertz, son de costo bajo y son más fáciles de controlar que los dispositivos de alta potencia comunes.
- Sus velocidades de conmutación permiten el diseño de dispositivos pasivos (filtros) de menor tamaño y costo,
- Permiten el empleo de fuentes de voltaje de CD de niveles relativamente bajos, o en su defecto de capacitores con carga mantenida constante.

Debe mencionarse que entre sus desventajas están:

- Al reducir la velocidad de conmutación se reduce el estrés al cual son sometidos, por lo cual se recomienda conmutar a esta clase de dispositivos a velocidades menores a la máxima posible para así garantizar la vida útil de los mismos.
- Son fuentes de ruido de alta frecuencia,
- En condiciones de altos niveles de potencia, 100 o más Watts, entre mayor sea el número de elementos interruptores empleados, mayores serán las pérdidas de energía en los mismos (disminución de eficiencia) y mayor será el costo del equipo.

A partir del siguiente ejemplo se ilustrarán las características de la clase de convertidor multinivel que será considerado en este trabajo.

Ejemplo 3.2 *Considérese el convertidor multinivel monofásico mostrado en la figura 3.11, el cual está formado por la conexión en cascada de tres puentes completos denotados como A, B y C. Cada puente está alimentado por una fuente independiente de CD de magnitud V_{dc} . Supóngase que los interruptores S_1 y S_4 del circuito de puente completo A son manipulados mediante una sola señal discreta de control $m_A \in \{-1, 1\}$, y que los interruptores S_2 y S_3 serán manipulados por la señal de control complementaria m_A^* , es decir, que m_A^* es el negado de m_A . Entonces podemos definir las siguientes relaciones de conmutación:*

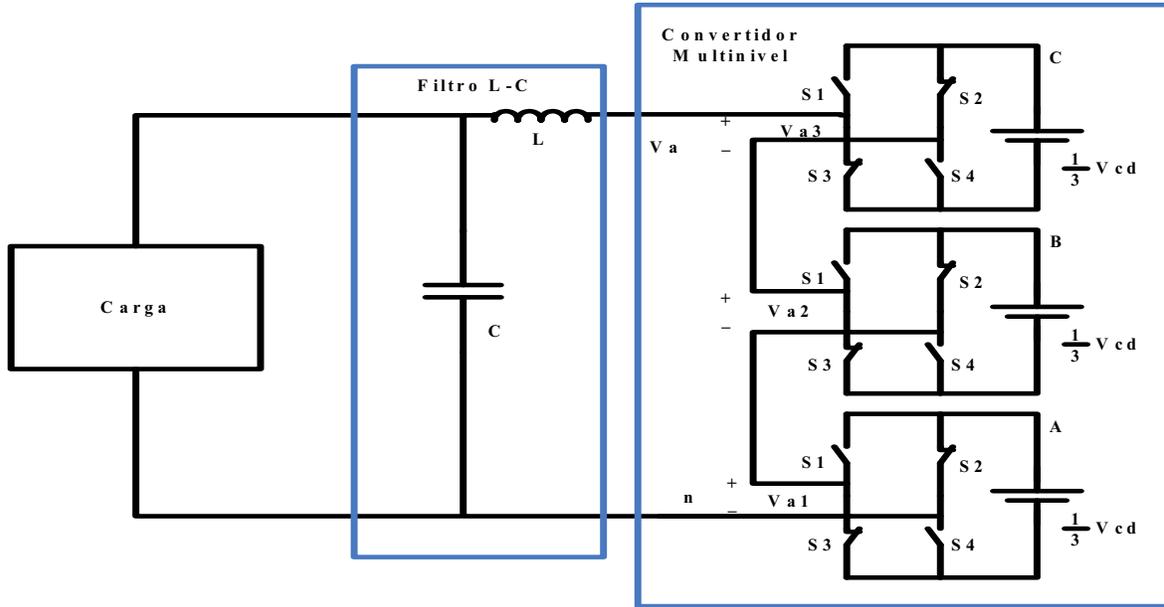


Figura 3.11: Inversor multinivel, de topología reductora, de puentes completos conectados en cascada y de estructura monofásica.

- (a) S_1 y S_4 conducirán sólo si $m_A = 1$, mientras que S_2 y S_3 permanecerán abiertos,
 (b) S_2 y S_3 conducirán sólo si $m_A = -1$, mientras que S_1 y S_4 permanecerán abiertos.

Aplicando estas relaciones a los circuitos B y C obtendremos un vector discreto de control para los interruptores de la forma

$$M = \begin{bmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \end{bmatrix}, \quad m_i \in \{-1, 1\}, \quad i \in \{A, B, C\}. \quad (3.28)$$

A partir de todas las posibles combinaciones derivables de las relaciones de conmutación (3.28) en los interruptores de la figura (3.11), se puede comprobar que V_a es un señal continua constante a tramos que toma valores del conjunto discreto $\{-3V_{cd}, -V_{cd}, V_{cd}, 3V_{cd}\}$, es decir, sólo hay cuatro modos de operación viables. En consecuencia es posible relacionar a V_a con la variable discreta $\varphi \in \{-3, -1, 1, 3\}$ tal que el circuito inversor mostrado en dicha figura puede representarse a partir del siguiente modelo conmutado lineal

$$\mathcal{D}\dot{x} + \mathcal{J}x + \mathcal{R}x = \mathcal{M}\varphi \quad (3.29)$$

donde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_l} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} V_{cd} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

donde $x = [x_1, x_2]^T$ es un vector de estados continuos formado por la corriente x_1 en el inductor L y el voltaje x_2 en el capacitor C , φ es la señal de entrada continua constante por tramos del sistema y R_l representa la carga conectada al sistema.

Los convertidores multinivel cuyos dispositivos conmutadores conforman puentes H interconectados en cascada entre sí se denominan *Convertidores en Cascada de Fuentes Independientes*.

Con el circuito del ejemplo anterior es posible aproximar una señal senoidal de entrada al filtro $L - C$ de periodo T y valor pico de $3V_{dc}$ mediante una conveniente secuencia de 6 conmutaciones realizadas en un tiempo T . Sin embargo, en la figura 3.12a puede observarse la mala calidad de la señal de voltaje obtenida en comparación con la deseada. Para disminuir este error de voltaje puede emplearse no una sino dos señales de control independientes por cada puente completo. Esto es, considere nuevamente el puente completo A donde el interruptor S_1 está controlado por una señal discreta manipulable $m_{a1} \in \{-1, 1\}$ mientras que el interruptor S_3 está controlado por la señal complementaria m_{a1}^* , del mismo modo, considere que los interruptores S_2 y S_4 se encuentran controlados mediante las señales complementarias m_{a2} y $m_{a2}^* \in \{-1, 1\}$ respectivamente. El uso de dos señales de control independientes nos permite obtener la siguientes relaciones

(a) S_1 y S_4 conducirán sólo si $m_{a1}=1$ y $m_{a2}^*=1$, mientras que S_2 y S_3 permanecerán abiertos.

(b) S_2 y S_3 conducirán sólo si $m_{a2}=1$ y $m_{a1}^*=1$, mientras que S_1 y S_4 permanecerán abiertos.

(c) S_1 y S_2 conducirán sólo si $m_{a1}=1$ y $m_{a2}=1$, mientras que S_3 y S_4 permanecerán abiertos.

En términos de operadores $m_A : \{1, -1\} \times \{1, -1\} \rightarrow \{1, 0, -1\}$. Como resultado de esto la señal de control toma la forma

$$M = \begin{bmatrix} m_A \\ m_B \\ m_C \end{bmatrix}, m_i : \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, i \in \{A, B, C\}$$

Es decir, las tres condiciones de conmutación (a), (b) y (c) pueden ser definidas por medio de una única variable discreta de disparo para el puente A, cuyos valores pertenezcan al conjunto $\{-1, 0, 1\}$. Nótese como que en el caso en que

S_1 y S_2 no conducen mientras que S_3 y S_4 permanecen abiertos.

se obtiene el mismo resultado que en la relación (c) por lo que dicha relación es redundante. Como resultado de aplicar estas nuevas relaciones al resto de los puentes H, el voltaje V_a tomará valores del conjunto discreto $\{-3V_{cd}, -2V_{cd}, -V_{cd}, 0, V_{cd}, 2V_{cd}, 3V_{cd}\}$. En la figura 3.12b se muestra la señal V_a obtenida después de aplicar la siguiente secuencia de vectores M :

$$\left(\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (3.31)$$

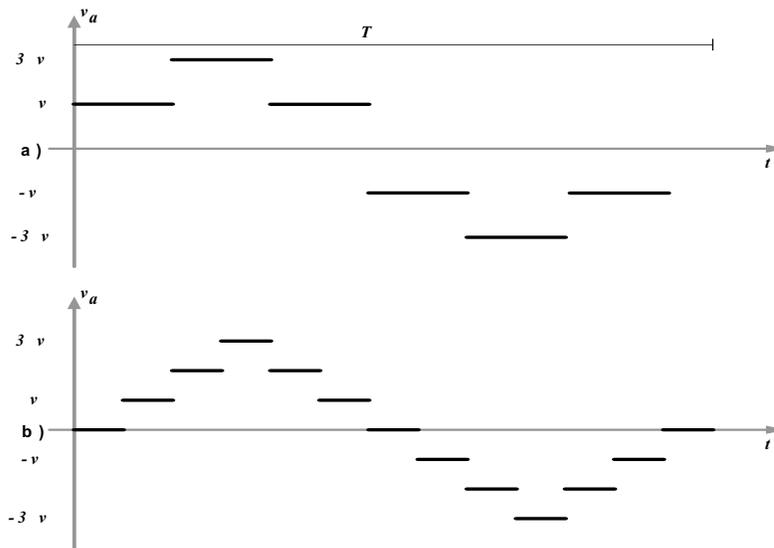


Figura 3.12: a) Voltaje de salida v_a sintetizado por medio de una señal de control y mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -V_{dc}, V_{dc}, 3V_{dc}\}$, b) Voltaje de salida v_a sintetizado mediante el uso de dos señales de control independientes por cada etapa de puente completo, y mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -2V_{dc}, -V_{dc}, 0, V_{dc}, 2V_{dc}, 3V_{dc}\}$.

durante el periodo T .

Al comparar las figuras 3.12a y 3.12b se observa que al incrementar el número de posibles relaciones de conmutación se obtienen las siguientes ventajas:

1. Incremento en el número de niveles de cuantificación,
2. Lo anterior más el hecho de disminuir a la mitad los tiempos en que la señal V_a permanece en un nivel de cuantificación, permite disminuir a su vez el error de aproximación, o error de cuantificación, para un período de conmutación T .
3. El empleo de dos señales de disparo independientes por cada arreglo de interruptores en puente completo nos permite un grado de libertad extra con el que, por ejemplo, es posible proponer secuencias de conmutación que permitan eliminar aquellas componentes armónicas que degradan en mayor medida la calidad de la forma de onda de la señal de salida V_a .
4. El incremento en las velocidades de conmutación permite el uso de elementos pasivos de menor tamaño.

También se presenta la siguiente desventaja: En cada uno de los interruptores del circuito multinivel, al incrementarse el número de conmutaciones, para un período de tiempo T , se

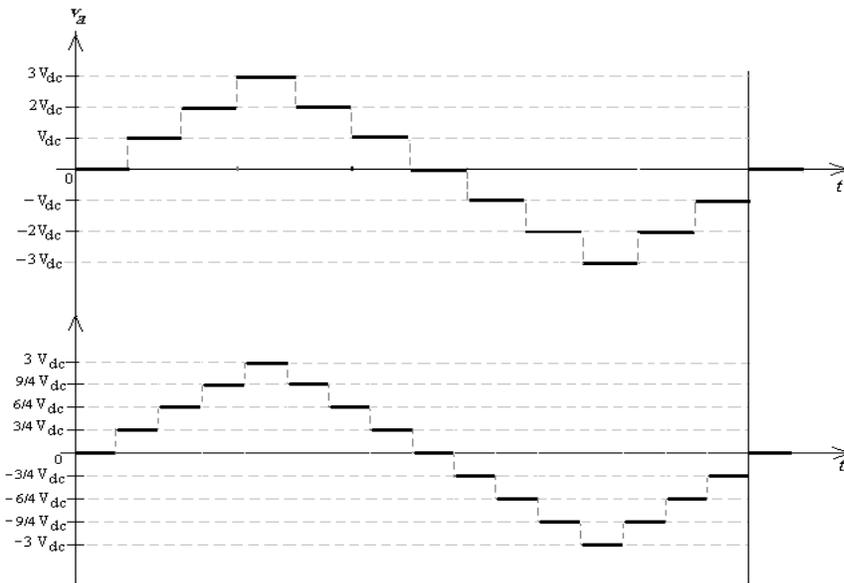


Figura 3.13: a) Voltaje de salida v_a sintetizado mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -2V_{dc}, -V_{dc}, 0, V_{dc}, 2V_{dc}, 3V_{dc}\}$, b) Voltaje de salida v_a sintetizado mediante el uso del conjunto $\{-3V_{dc}, -\frac{9}{4}V_{dc}, -\frac{6}{4}V_{dc}, -\frac{3}{4}V_{dc}, 0, \frac{3}{4}V_{dc}, \frac{6}{4}V_{dc}, \frac{9}{4}V_{dc}, 3V_{dc}\}$.

incrementa también la pérdida de energía por conmutación, a la vez que disminuye la vida útil.

La importancia de la anterior desventaja puede visualizarse mejor si consideramos que el circuito multinivel de la figura 3.11 es tan sólo una de tres ramas que componen a un convertidor multinivel trifásico. En este caso, la suma de las pérdidas en todos los interruptores de dicho convertidor trifásico puede llegar a ser una cantidad considerable. Para evitar este problema a nivel industrial se utilizan estrategias de conmutación que permitan operar a cada interruptor a frecuencias por debajo del máximo con el fin de garantizar condiciones de operación confiables, que es el caso de la mayoría de las políticas PWM convencionales, que permitan mejorar tanto el desempeño como la eficiencia de este tipo de convertidores. Así mismo, las conmutaciones hacia un mismo nivel de voltaje suelen distribuirse lo más equitativamente posible entre los modos de operación redundantes que lo originan, para lo cual es necesario desarrollar un algoritmo de supervisión que determine cuando activar uno u otro modo redundante. Lógicamente, este tipo de método se basa en procesos de optimización de difícil solución, véase la observación 3.2.

Si se considera que el error de voltaje obtenido con la señal voltaje V_a mostrada en la figura 3.12a no cumple con determinadas especificaciones de desempeño, como por ejemplo que $\|3\text{sen}(\omega t) - V_a\| \leq \beta \forall t \geq t_0$ con $\beta = \text{cte}$, entonces sería necesario incrementar tanto los niveles de cuantificación empleados como disminuir los tiempos durante los cuales la magnitud de la señal V_a permanece en cada uno de dichos valores. Sin embargo, conseguir lo anterior no es un trabajo trivial ya que como se mencionó, entre más conmute un dispo-

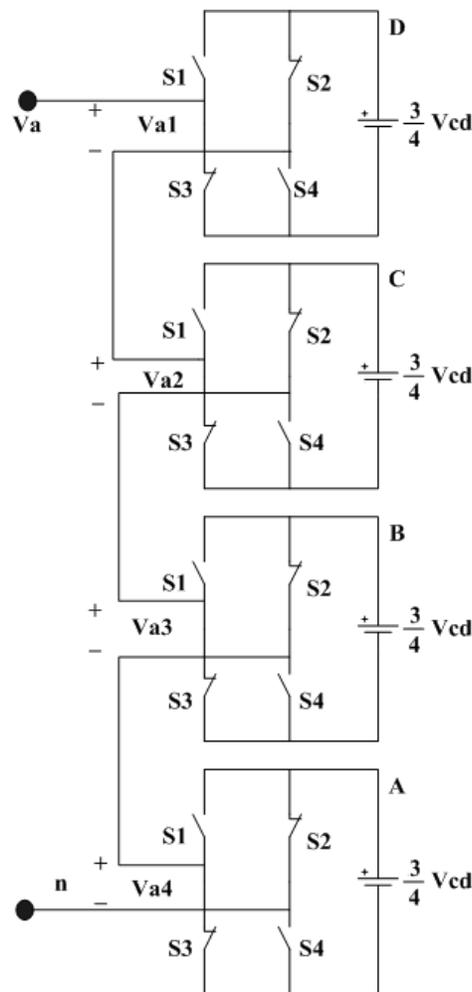


Figura 3.14: Convertidor multinivel de cuatro etapas de puente completo conectadas en cascada.

sitivo interruptor durante un periodo de conmutación T mayor será su pérdida de energía o será menor su vida útil.

Una alternativa para incrementar los niveles de cuantificación en un sistema multinivel es incrementando el número de arreglos de puente H, lo que también conlleva a un incremento en el número de interruptores. Pero, a pesar de esto último, el incremento del número de etapas en un circuito multinivel es más ventajoso de lo que parece. Por ejemplo, si en el convertidor de la figura 3.11 conectamos un circuito extra de puente completo en cascada con el resto, figura 3.14, y además las magnitudes de voltaje de las fuentes de CD son fijadas a $\frac{3}{4}V_{cd}$, entonces obtendremos el siguiente conjunto de niveles de cuantificación $\{-3V_{cd}, -\frac{9}{4}V_{cd}, -\frac{6}{4}V_{cd}, -\frac{3}{4}V_{cd}, 0, \frac{3}{4}V_{cd}, \frac{6}{4}V_{cd}, \frac{9}{4}V_{cd}, 3V_{cd}\}$. Aplicando la secuencia de vectores M :

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (3.32)$$

obtendremos la señal de salida V_a mostrada en la figura 3.13b. Además, si comparamos la secuencia (3.31) con (3.32) observaremos lo siguiente: a pesar de que en la secuencia (3.32) existen cuatro estados de operación extra con respecto a (3.31), el número de conmutaciones (transiciones entre los valores $\{-1, 0, 1\}$) por cada puente completo tan sólo se incrementa en 1. Por otro lado, el número de posibles valores que puede tomar el vector de control $M = [m_A, m_B, m_C, m_D]^T$ es de 81, lo que exigiría el uso de criterios de optimización para generar secuencias de conmutación en función del desempeño deseado.

Observación 3.9 *Un circuito de puente completo controlado por medio de dos señales de control, tal como se ha supuesto, puede verse como un interruptor compuesto capaz de tomar tres posiciones diferentes. Por ejemplo, cuando $m_A = 1$ la salida en las terminales del puente completo A es V_{dc} , pero si $m_A = -1$ o 0 entonces obtenemos como salida los voltajes $-V_{dc}$ y 0 respectivamente. Por consiguiente, el convertidor (3.14) puede verse como un arreglo de cuatro interruptores compuestos capaces de tomar tres posiciones diferentes cada uno, lo que nos lleva a un total de $3^4 = 81$ combinaciones diferentes.*

Debido a que el objetivo de la tesis es obtener la adecuada secuencia de valores de voltaje para la señal de salida del bloque de dispositivos conmutadores, el modelo matemático dado por (3.29) y (3.30) es adecuado para tal propósito. Sin embargo, debe señalarse que el problema de determinar la manera de habilitar cada modo de operación de forma tal que los dispositivos interruptores sean sometidos al mismo nivel de estrés, es aún un tema abierto.

3.4. Modelo promediado de CEP

En esta sección se introducen modelos continuos para los CEP equivalentes a los modelos con discontinuidades introducidos en las secciones anteriores bajo condiciones de alta velocidad de conmutación. Como se indicó en la introducción, éstos modelos son importantes para el diseño de control debido a que constituyen la base para la definición del controlador maestro de la ley de control que será introducida en el siguiente capítulo.

3.4.1. Modulación por Ancho de Pulso

En el área de la electrónica de potencia, la modulación por ancho de pulso (PWM por sus siglas en inglés), es una técnica de conmutación muy empleada en sistemas comandados

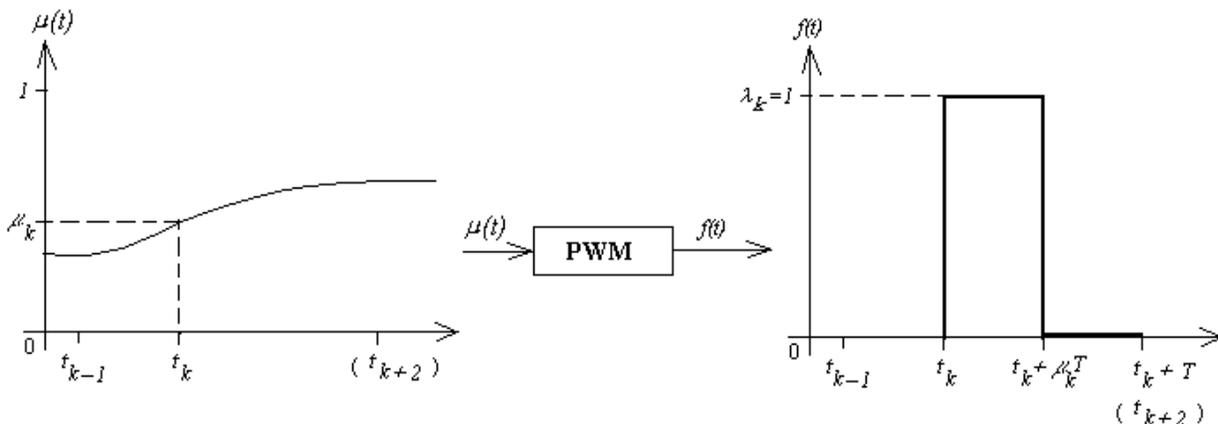


Figura 3.15: Proceso de conversión PWM

a través de interruptores. Dicha técnica consiste en mantener a cada interruptor del circuito en su estado de no conducción excepto en un intervalo finito de tiempo donde es habilitado para conducir. Este intervalo finito de tiempo es referido como *pulso*. Defínase como *ciclo de conmutación* al proceso de encender y apagar un interruptor y como *instante de conmutación* al instante de tiempo en el cual da inicio un ciclo de conmutación. El intervalo de tiempo durante el cual se presenta el ciclo de conmutación se conoce como *ciclo de trabajo*, denotado como T , y la fracción de este tiempo que es ocupado por el valor unitario del pulso se conoce generalmente como *tiempo útil* o *tiempo de trabajo*, el cual se denotará mediante la variable (continua) de porcentaje $\mu(\cdot)$. A pesar de que existen muchas formas particulares de esquemas PWM, para construir los modelos promediados continuos utilizados en este trabajo se considera que el k -ésimo pulso comienza precisamente en el instante de conmutación t_k y termina antes de que el intervalo de conmutación finalice, es decir, antes del tiempo $t_k + T$ donde T es constante. Si el pulso ocupa todo el intervalo de conmutación, o ninguna parte de este, se dice que el tiempo de trabajo opera bajo *condiciones de saturación*, figura 3.15.

El bloque modulador PWM mostrado en la figura 3.15 puede describirse, matemáticamente hablando, como un operador no-lineal que mapea una función continua de entrada $\mu(t)$ en una función de salida $f(t)$ (ambas funciones están definidas para $t \geq 0$ y son escalares). La característica de dicho modulador consiste en que produce una secuencia de eventos temporales $t_0 < t_1 < \dots$ llamados *momentos de muestreo*, los cuales se consideran equidistantes, es decir si t_j es el superior inmediato del evento t_i entonces $|t_j - t_i| = T$. El intervalo de tiempo $[t_k, t_{k+1})$ es llamado el k -ésimo intervalo de muestreo. En general la función que describe el mapeo producido por el bloque PWM se escribe

$$f(t) = \begin{cases} \lambda_1(\mu(kT)), & kT \leq t < kT + \tau_k \\ \lambda_2(\mu(kT)), & kT + \tau_k \leq t < (k+1)T \end{cases}$$

$$\tau_k = \begin{cases} |\mu(kT)|T, & \text{si } |\mu(kT)| < 1 \\ T, & |\mu(kT)| \geq 1 \end{cases}$$

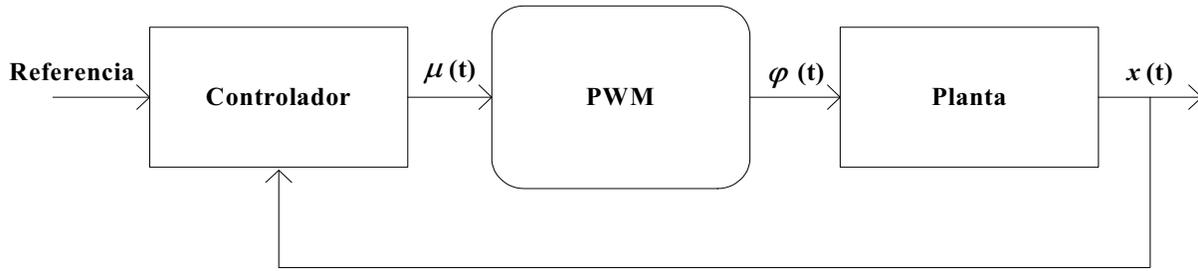


Figura 3.16: Control mediante retroalimentación de la señal de salida utilizando un bloque generador de señales PWM.

en donde las $\lambda_i(\mu(kT))$, $i = 1, 2$, son funciones de magnitud las cuales, en este trabajo, son fijadas a los valores de saturación de la señal continua $\mu(t)$. Es importante señalar que los valores que toma la función de salida $f(t)$ durante el k -ésimo intervalo de muestreo dependen únicamente del valor de la señal de entrada en el instante de inicio de dicho intervalo, es decir, el modulador PWM está sujeto a una restricción más severa que la propiedad de causalidad ya que los valores de $f(t)$ no dependen de los valores de $\mu(t)$ anteriores al valor $\mu(kT)$, ver [14].

De manera general, el proceso de promediación es como sigue: considere un sistema no-lineal de una entrada-una salida de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + b\varphi(t) \quad (3.33)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (3.34)$$

dónde φ es una función de conmutación que modela el efecto de los interruptores y que toma valores del conjunto discreto binario $\{0, 1\}$. Entonces, y de acuerdo a lo anteriormente expuesto, el principio de regulación PWM es

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(x(t_k))T \\ 0 & \text{para } t_k + \mu(x(t_k))T \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (3.35)$$

$$t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \dots$$

donde $\mu(x(t_k)) \in [0, 1]$ es una función continua de retroalimentación por muestreo del vector de estado $x(t)$ cuyos valores muestreados se denotan por $x(t_k)$. Dicha función de retroalimentación se considerará como la función de salida de un bloque de control externo a la planta, figura 3.16. De manera similar, para el caso en el cual la función φ toma valores del conjunto discreto $\{-1, 1\}$, el principio de regulación PWM es

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t_k \leq t < t_k + \mu(t_k)T \\ -1 & \text{para } t_k + \mu(t_k)T \leq t < t_k + T \end{cases} \quad (3.36)$$

$$t_{k+1} = t_k + T \quad ; \quad k = 0, 1, \dots$$

La determinación exacta del estado $x(t)$ del sistema controlado (3.33)-(3.35), en los instantes de conmutación t_k ; $k = 0, 1, \dots$, para una función del tiempo de trabajo dada, es un

problema de difícil solución, excepto en algunos casos para los cuales el campo vectorial $f(x)$ es sencillo. En el caso de sistemas lineales el problema admite sólo soluciones aproximadas siempre que los sistemas sean de segunda o tercera dimensión.

Considere un intervalo de muestreo arbitrario definido como $[t_k, t_{k+1}) = [t_k, t_k + \mu(x(t_k))T) \cup [t_k + \mu(x(t_k))T, t_{k+1})$ de longitud T . Para determinar el valor del estado al final del intervalo de muestreo de (3.33)-(3.35) es necesario reescribir la ecuación bajo la siguiente forma integral

$$x(t_k + \mu(x(t_k))T) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + \mu(x(t_k))T} [f(x(\sigma)) + b] d\sigma.$$

Por otro lado, en el instante $t_k + T = t_{k+1}$ el estado estará dado por

$$x(t_k + T) = x(t_k + \mu(x(t_k))T) + \int_{t_k + \mu(x(t_k))T}^{t_k + T} [f(x(\sigma))] d\sigma$$

al sustituir se obtiene

$$\begin{aligned} x(t_k + T) &= x(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + \mu(x(t_k))T} [f(x(\sigma)) + b] d\sigma + \int_{t_k + \mu(x(t_k))T}^{t_k + T} [f(x(\sigma))] d\sigma \\ &= x(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + T} f(x(\sigma)) d\sigma + \int_{t_k}^{t_k + \mu(x(t_k))T} b d\sigma \end{aligned}$$

Entonces, el promedio entre el valor del estado al inicio del intervalo y el valor del estado al final del intervalo T es

$$\frac{1}{T} [x(t_k + T) - x(t_k)] = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k + T} f(x(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k + \mu(x(t_k))T} b d\sigma$$

tomando el límite conforme $T \rightarrow 0$ y definiendo a t_k con el valor genérico de t se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} [x(t + T) - x(t)] &= \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{T} \int_t^{t + \mu(x(t))T} b d\sigma \right] \\ &= f(x(t)) + \mu(x(t))b \end{aligned}$$

El modelo continuo promediado anterior para un sistema conmutado mediante la política PWM mostrada está dada entonces por el mismo modelo no lineal con la diferencia de que la entrada de control discreta φ es sustituida por el tiempo de trabajo μ , el cual es una función continua pero acotada. Lógicamente, la expresión $f(x(t)) + \mu(x(t))b \neq f(x(t)) + b\varphi(t)$ ya que $f(x(t)) + \mu(x(t))b$ es un equivalente promediado del segundo término. Este equivalente permite definir una nueva variable z equivalente a x cuya derivada satisface

$$\dot{z} = f(x(t)) + \mu(x(t))b$$

de hecho, z es la versión promediada de x a lo largo de T .

Observación 3.10 *Debe mencionarse que la naturaleza de la aproximación z depende en que tan cerca está el intervalo de conmutación del valor ideal cero. Esto es, conforme la magnitud de la frecuencia de conmutación se incrementa, la aproximación promediada z será más precisa.*

3.4.2. Modelo promediado del inversor de medio puente

En esta sección se muestra la forma de obtener el modelo EL que describe el comportamiento promediado, a lo largo de un periodo de conmutación T , del inversor de medio puente mostrado en la figura 3.7. Se observará cómo el modelo promediado coincide con el modelo conmutado obtenido para dicho inversor, en el apartado 2.3, excepto que la función de conmutación φ de los interruptores es reemplazada por el tiempo de trabajo μ .

Considere las ecuaciones diferenciales que describen al inversor de medio puente dadas por (3.21), así como la política PWM establecida en (3.35), donde t_k representa el instante de conmutación, el parámetro T es el periodo fijo de conmutación, los valores muestreados del vector de estado $x(t)$ del inversor están denotados por $x(t_k)$ y $\mu(\cdot)$ es la función del tiempo de trabajo, la cual, actúa realmente como la entrada de control externa al modelo PWM promediado del inversor. El valor de la función $\mu(\cdot)$ determina, en todo instante de conmutación t_k , el ancho del próximo pulso. En términos generales, la función $\mu(\cdot)$ será una función acotada que toma valores en el intervalo cerrado $[\varphi_{\overline{N}}, \varphi_N]$, donde $\varphi_{\overline{N}} \leq \varphi \leq \varphi_N$.

Los parámetros EL asociados con cada uno de los dos circuitos, figura 3.8, obtenidos para las posiciones $\varphi \in \{0, 1\}$ del interruptor están dadas, respectivamente, por las ecuaciones (3.8) y (3.10). Nótese que, de acuerdo con la política de conmutación (3.35), en cada intervalo de conmutación del periodo T , la energía eléctrica $\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2)$ es válida sólo en una fracción del periodo de conmutación dada por $\mu(t_k)$, mientras que la energía eléctrica $\mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2)$ es válida durante la fracción del periodo de conmutación determinada por $(1 - \mu(t_k))$. Considérense las funciones $\mathcal{V}_M(q_0, q_1, q_2) = \max(\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2), \mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2))$ y $\mathcal{V}_m(q_0, q_1, q_2) = \min(\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2), \mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2))$ así como la siguiente definición:

Definición 3.7 [50]: Una función $\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2)$ es una función PWM promediada de las funciones de energía eléctrica $\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2)$ y $\mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2)$ si $\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2)$ es continua, parametrizada por μ y cumple las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2)$ está acotada por la expresión

$$\mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2) \leq \mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2) \leq \mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2) \quad \forall \mu \in [0, 1]$$

ii) $\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2)$, como una función de las coordenadas generalizadas (q_0, q_1, q_2) , satisface las siguientes condiciones de consistencia:

$$\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2) \big|_{\mu=1} = \mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2)$$

y

$$\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2) \big|_{\mu=0} = \mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2) .$$

Definición 3.8 [50]: Un parámetro EL $\Psi(q, \dot{q})$ de un sistema $\{\mathcal{T}_\varphi, \mathcal{V}_\varphi, \mathcal{F}_\varphi, \mathcal{Q}_\varphi\}$ es invariante con respecto a la función de la posición de los interruptores, φ , siempre que $\Psi(q, \dot{q}) = \Psi_1(q, \dot{q}) = \Psi_0(q, \dot{q}) \forall (q, \dot{q})$.

Definición 3.9 [50]: El sistema $\{\mathcal{T}_\mu, \mathcal{V}_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mathcal{Q}_\mu\}$ califica como un modelo EL promediado del sistema conmutado $\{\mathcal{T}_\varphi, \mathcal{V}_\varphi, \mathcal{F}_\varphi, \mathcal{Q}_\varphi\}$, con $\varphi \in \{0, 1\}$, siempre que el sistema EL caracterizado por los parámetros $(\mathcal{T}_\mu, \mathcal{V}_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mathcal{Q}_\mu)$ es tal que dichos parámetros estén constituidos por funciones PWM promediadas, en el sentido de la definición (3.7), de los correspondientes parámetros $(\mathcal{T}_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{F}_1, \mathcal{Q}_1)$ y $(\mathcal{T}_0, \mathcal{V}_0, \mathcal{F}_0, \mathcal{Q}_0)$.

Una posible, y quizá la más natural propuesta de parámetros EL promediados para el convertidor considerado, es la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mu(\dot{q}_1) &= \frac{1}{2}L_f\dot{q}_1^2; & \mathcal{F}_\mu(q_2) &= \frac{1}{2}R_l\dot{q}_2^2 \\ \mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2) &= \frac{1}{2C_f}(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_1}(q_0 - \mu q_1)^2 + \frac{1}{2C_2}[q_0 + (1 - \mu)q_1]^2 \\ \mathcal{Q}_{q_0}^\mu &= V_e; & \mathcal{Q}_{q_1}^\mu &= 0; & \mathcal{Q}_{q_2}^\mu &= 0,\end{aligned}$$

en donde el parámetro \mathcal{V}_μ se obtiene a partir de promediar la función \mathcal{V}_φ a lo largo de un intervalo T . Finalmente, la función Lagrangiana asociada con los anteriormente citados parámetros EL promediados se denotará por la expresión

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{1}{2}L_f(\dot{q}_1)^2 - \frac{1}{2C_f}(q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_1}(q_0 - \mu q_1)^2 - \frac{1}{2C_2}[q_0 + (1 - \mu)q_1]^2, \quad (3.37)$$

donde en los casos en los cuales μ toma los valores de saturación $\mu = 1$ o $\mu = 0$ se recuperan, respectivamente, las expresiones de la energía eléctrica $\mathcal{V}_1(q_0, q_1, q_2)$ en el Lagrangiano (3.9) y $\mathcal{V}_0(q_0, q_1, q_2)$ en el Lagrangiano (3.11) a partir de la energía eléctrica promediada propuesta, $\mathcal{V}_\mu(q_0, q_1, q_2)$. Aunque el resto de los parámetros EL son invariantes con respecto al valor que pueda tomar la función φ , estos también se han etiquetado con el subíndice $(\cdot)_\mu$ para tener consistencia en la notación.

Prosiguiendo con la aplicación de las ecuaciones de EL, y realizando el mismo procedimiento empleado para el modelo conmutado se llega al siguiente modelo de espacio de estados promediado

$$\begin{aligned}L_f\dot{z}_1 &= -z_2 + V_e\mu - \bar{V}_{C_2} \\ C_f\dot{z}_2 &= z_1 - \frac{1}{R_l}z_2.\end{aligned} \quad (3.38)$$

Donde las variables de estado $z_1 = \dot{q}_1$ y $z_2 = (q_1 - q_2)/C_f$ denotan, respectivamente, la corriente promedio de entrada y el voltaje promedio del capacitor de salida para un intervalo de conmutación $[t_k, t_{k+1}]$ del inversor y $\mu \in [0, 1]$.

3.4.3. Modelo promediado del inversor de puente completo

Aplicando la misma filosofía de modelado usada en el caso del inversor de medio puente, considerando la política PWM propuesta en (3.38), es posible llegar a las ecuaciones mostradas

en la tabla 3, mediante las cuales, y considerando la corriente promedio en el inductor L_f como el estado z_1 y al voltaje promedio en el capacitor C_f como la variable de estado z_2 , el modelo promediado resultante está dado por

$$\begin{aligned} L_f \dot{z}_1 &= -z_2 + V_e \mu \\ C_f \dot{z}_2 &= z_1 - \frac{1}{R_l} z_2 \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde $\mu \in [-1, 1]$.

Tabla 3. Resultados de la aplicación del método de modelado variacional para la construcción del modelo promediado de un inversor de puente completo.

Inversor de Puente Completo		
Parámetros EL para cada posible posición del interruptor		
φ	$\varphi = 1$	$\varphi = -1$
Energía co-magnética	$\mathcal{T}_{-1}(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} L_f \dot{q}_1^2$	$\mathcal{T}_1(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} L_f \dot{q}_1^2$
Energía eléctrica	$\mathcal{V}_{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{2C_f^2} (q_1 - q_2)^2$	$\mathcal{V}_1(q_1, q_2) = \frac{1}{2C_f^2} (q_1 - q_2)^2$
Disipación de Rayleigh	$\mathcal{F}_{-1}(q_2) = \frac{1}{2} R_l \dot{q}_2^2$	$\mathcal{F}_1(q_2) = \frac{1}{2} R_l \dot{q}_2^2$
Fuerzas externas	$\mathcal{Q}_1^{-1} = V_e; \quad \mathcal{Q}_2^{-1} = 0$	$\mathcal{Q}_1^1 = -V_e; \quad \mathcal{Q}_2^1 = 0$
Parámetros EL promediados		
Energía co-magnética	$\mathcal{T}_\mu(\dot{q}_1) = \frac{1}{2} L_f \dot{q}_1^2$	
Energía eléctrica	$\mathcal{V}_\mu(q_1, q_2) = \frac{1}{2C_f^2} (q_1 - q_2)^2$	
Disipación de Rayleigh	$\mathcal{F}_\mu(q_2) = \frac{1}{2} R_l \dot{q}_2^2$	
Fuerzas externas	$\mathcal{Q}_1^\mu = \mu V_e; \quad \mathcal{Q}_2^\mu = 0$	
Lagrangiano promediado		
$\mathcal{L}_\mu = \frac{1}{2} L_f \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2C_f} (q_1 - q_2)^2$		
Modelo promediado		
$L_f \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_f} (q_1 - q_2) = \mu V_e$		
$\frac{1}{C_f} (q_1 - q_2) - R_l \dot{q}_2 = 0$		

3.4.4. Modelo promediado de convertidores de CD a CD

De manera similar a los casos anteriores, el modelo promediado para el convertidor regulador de CD a CD puede expresarse como

$$\begin{aligned} L_f \dot{z}_1 &= -z_2 + V_e \mu \\ C_f \dot{z}_2 &= z_1 - \frac{1}{R_l} z_2 \end{aligned}$$

donde, para este caso, $\mu \in [0, 1]$.

3.4.5. Modelo promediado de convertidores Multinivel

Los convertidores multietapa de fuentes independientes y de topología reductora considerados en este trabajo, constituyen una generalización de los convertidores de puente completo en el sentido de que están constituidos por más de un puente H conectados en cascada, lo cual implica que el voltaje de salida del bloque de dispositivos conmutadores es igual a la suma de los voltajes de salida de cada uno de los puentes H que lo conforma. Considere un CEP en cascada de topología reductora de m niveles viables, su modelo matemático promediado puede ser expresado como

$$\begin{aligned} L_f \dot{z}_1 &= -z_2 + V_e \mu \\ C_f \dot{z}_2 &= z_1 - \frac{1}{R_l} z_2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde $\mu \in [-1, 1]$. La diferencia con respecto al caso de los CEP de puente completo radica en que el número de niveles de cuantificación es mayor. Dichos niveles definen m regiones de cuantificación que particionan al conjunto $[-1, 1]$ en m bloques de conmutación, donde cada bloque define o “activa” una política de conmutación PWM propia (Metodología también conocida como modelado PWM con disposición de portadora, véase [55]).

3.5. Propiedades del modelo continuo promediado

La descripción de circuitos inversores conmutados monofásicos mediante modelos dinámicos promediados expuesta en este capítulo se puede resumir en la siguiente manera: Considere un CEP de topología reductora con modelo conmutado de la forma

$$\mathcal{D}\dot{x}(t) + \mathcal{J}x(t) + \mathcal{R}x(t) = \mathcal{M}\varphi(t) \quad (3.41)$$

donde φ es una variable constante continua a tramos que conmuta entre dos valores discretos consecutivos cualesquiera $\varphi_M, \varphi_m \in \mathcal{U}$ que satisfacen

$$|\varphi_M - \varphi_m| < \Delta$$

El modelo (3.41) puede ser representado equivalentemente por el modelo continuo

$$\mathcal{D}\dot{z}(t) + \mathcal{J}z(t) + \mathcal{R}z(t) = \mathcal{M}\mu(z(t_k)) \quad (3.42)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}^q & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^\perp \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J}^\perp \\ \mathcal{J}^q & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^\perp \end{bmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}^q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

donde $z = [z^q, z^\perp]^T$, con z^q el estado actuado del modelo y z^\perp el estado no actuado, siempre que $\varphi \in \mathcal{U} \subset [\varphi_N^-, \varphi_N^+]$ satisfaga la política de conmutación PWM

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_M & \text{para } t_k < t \leq t_k + \mu(z(t_k))T \\ \varphi_m & \text{para } t_k + \mu(z(t_k))T \leq t < t_k + T \end{cases}$$

con $\mu(z(t_k)) \in [\varphi_N, \varphi_M]$ el ciclo de trabajo a lo largo de T que satisface $\varphi_m \leq \mu(x(t_k)) \leq \varphi_M \forall t_k$.

A continuación se enlistan algunas propiedades del modelo (3.42) útiles para el diseño del controlador propuesto en el siguiente capítulo.

Propiedad 3.1 *La matriz $\mathcal{D}(q)$ es simétrica positiva y existen constantes positivas d_m y d_M tales que*

$$d_m I \leq \mathcal{D}(q) \leq d_M I$$

con I como una matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Propiedad 3.2 *La matriz $\mathcal{J}(\dot{q}, q)$ es antisimétrica, esto es*

$$q^T \mathcal{J}(\dot{q}, q) q = 0$$

o equivalentemente $\mathcal{J} + \mathcal{J}^T = 0$.

Una de las propiedades más importantes de las utilizadas en este trabajo respecto al modelo considerado es la propiedad de pasividad. Básicamente, si un sistema es visto como una caja negra capaz de procesar una señal de entrada v en una señal de salida y , entonces dicho sistema será pasivo si la energía en su interior es igual a la energía que le es suministrada desde el exterior, por medio de v , más la energía inicialmente contenida, donde la diferencia entre ellas es la disipación de la energía que tiene lugar al interior de dicho sistema. En consecuencia, la pasividad es una propiedad de tipo entrada-salida.

Propiedad 3.3 (Pasividad) *El modelo del circuito inversor (3.42) define un operador pasivo $v \rightarrow z_1$.*

La energía total de circuito inversor está dada por

$$\mathcal{H}_\mu = \mathcal{T}_\mu + \mathcal{V}_\mu = \frac{1}{2} z^T \mathcal{D} z.$$

Diferenciando \mathcal{H}_μ a lo largo de las trayectorias de (3.42), sacando provecho de la propiedad de antisimetría de la matriz \mathcal{J} e integrando el resultado se obtiene la siguiente ecuación de balance de energía

$$\underbrace{\mathcal{H}_\mu(t) - \mathcal{H}_\mu(0)}_{\text{energía almacenada}} + \underbrace{\frac{1}{R_l} \int_0^t z_2^2(\tau) d\tau}_{\text{energía disipada}} = \underbrace{V_e \int_0^t z_1(\tau) v(\tau) d\tau}_{\text{energía suministrada}}$$

es decir, el sistema es pasivo con respecto a la señal de corriente z_1 .

Los convertidores considerados poseen otra propiedad importante, la propiedad de estabilidad:

Propiedad 3.4 (Estabilidad) Tomando la derivada temporal de la función de energía $\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2}z^T \mathcal{D}z$ y evaluando en las trayectorias del sistema no forzado, $v \equiv 0$, (3.42), se tiene que

$$\dot{\mathcal{H}}(z) = -z^T \mathcal{R}z = -\frac{1}{R_l} z_2^2 \leq 0$$

la cual es una función negativa semidefinida. Aplicando el teorema de LaSalle (ver [18]), se tiene que

$$\dot{\mathcal{H}} = 0 \implies z_2 = 0.$$

Si $z_2 \equiv 0 \implies \dot{z}_2 = 0 \implies z_1 = 0$, implicando que el origen de los convertidores inversores caracterizados por la ecuación (3.42) es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov.

Por ser estables, los convertidores considerados al ser sometidos a una señal de entrada φ (μ) acotada poseerán una trayectoria de estado $x(t)$ ($z(t)$) que converge de manera asintótica a un conjunto acotado del espacio de estado, permaneciendo en él sin importar como varíe φ (μ). La importancia de este hecho radica en que los resultados obtenidos en el siguiente capítulo son válidos de manera global.

Observación 3.11 En el caso general en el cual un convertidor no sea estable, los resultados del siguiente capítulo sólo serían válidos dentro del conjunto arriba mencionado, es decir, serán resultados locales. Más aún, dichos resultados dependerán en gran medida de las condiciones iniciales del sistema, véase [4].

Propiedad 3.5 (Fase mínima débil) Al reescribir la ecuación (3.42) a la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} V_e(t) \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} z(t), \end{aligned} \quad (3.44)$$

es posible determinar que el sistema es observable gracias a que su matriz de observabilidad $M_o = [C^T \ A^T C^T]^T$ es de rango completo para la señal de salida $y(t)$ considerada, la cual representa la señal de corriente promedio en el capacitor de salida. Ahora bien, al realizar el cambio de variables $\hat{z}_1(t) = y(t)$ y $\hat{z}_2(t) = -z_2(t)$ se llega a la siguiente forma normal

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{z}}_1 &= -\frac{L}{RC}\hat{z}_1 + \hat{z}_2 + V_e v \\ C\dot{\hat{z}}_2 &= -\hat{z}_1, \end{aligned} \quad (3.45)$$

a partir de la cual es fácil comprobar que la dinámica cero del convertidor está dada por la expresión $\dot{\hat{z}}_2(t) = 0$, mientras que el grado relativo del sistema con respecto a la salida propuesta es uno, por lo que el sistema es de fase mínima débil. En consecuencia, el sistema (3.45) es pasivizable mediante retroalimentación de la corriente en el capacitor, véase [47].

Una manera sencilla de demostrar la propiedad de fase mínima débil en sistemas lineales es mediante el análisis de la función de transferencia de la señal de salida $y(t)$ con respecto a la ley de control $\mu(t)$ la cual, para el caso de la ecuación (3.45), puede escribirse como

$$\frac{y(s)}{\mu(s)} = \frac{s}{s^2L + s\frac{L}{RC} + \frac{1}{C}}$$

expresión que revela, de manera directa, la propiedad de grado relativo uno y la existencia de un cero en el origen del plano complejo s .

Capítulo 4

Control de CEP

En el caso de los CEP considerados en este trabajo, el objetivo de control se reduce, de manera general, al caso particular en el cual el voltaje de salida debe ser generado satisfaciendo formas de onda ya sea de CD o de CA aún para el caso en el cual la carga conectada al sistema presente variaciones bruscas. Para resolver esto, se presenta un controlador conmutado compuesto de una etapa continua conocida como control maestro, y una etapa discreta conocida como control esclavo, las cuales serán introducidas en ese orden en el presente capítulo.

Considere un SDC descrito por ecuaciones diferenciales de la forma

$$\mathcal{D}\dot{x}(t) = -\mathcal{J}x(t) - \mathcal{R}x(t) + \mathcal{M}\varphi(t) \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de estado, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T > 0$ es una matriz diagonal de dimensión $n \times n$, $\mathcal{J} = -\mathcal{J}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz antisimétrica, $\mathcal{R} \geq 0$ es una matriz diagonal que pertenece a $\mathbb{R}^{n \times n}$, y $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector constante que modela las fuentes de energía externas al sistema. La variable de control $\varphi(t)$ es una señal constante continua a tramos que satisface

$$\varphi(t) = \varphi_i, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (4.2)$$

donde el intervalo de tiempo $t_{i+1} - t_i \geq \delta$, $\delta > 0$ es el tiempo mínimo necesario para que los elementos conmutadores se consideren encendidos (y cuya inversa es la máxima frecuencia de conmutación de dichos dispositivos), y φ_i es un término continuo constante que pertenece al conjunto finito de elementos \mathcal{U} introducido en la Definición 3.2.

Definición 4.1 *Sea ν un elemento del conjunto cerrado $[\varphi_{\overline{N}}, \varphi_N]$ donde $\varphi_{\overline{N}}$ y φ_N son el elemento mínimo y el elemento máximo del conjunto \mathcal{U} , respectivamente. Si $[\varphi_{\overline{N}}, \varphi_N]$ puede ser particionado en j conjuntos disjuntos de la forma:*

$$\begin{aligned}
 B_{\overline{N},\overline{N-1}} &\triangleq \{\nu : \varphi_{\overline{N}} \leq \nu < \varphi_{\overline{N-1}}\}, \\
 B_{\overline{N-1},\overline{N-2}} &\triangleq \{\nu : \varphi_{\overline{N-1}} \leq \nu < \varphi_{\overline{N-2}}\}, \\
 &\vdots \\
 B_{\overline{1},0} &\triangleq \{\nu : \varphi_{\overline{1}} \leq \nu < \varphi_0\}, \\
 B_{0,1} &\triangleq \{\nu : \varphi_0 \leq \nu < \varphi_1\}, \\
 &\vdots \\
 B_{N-2,N-1} &\triangleq \{\nu : \varphi_{N-2} \leq \nu < \varphi_{N-1}\}, \\
 B_{N-1,N} &\triangleq \{\nu : \varphi_{N-1} \leq \nu < \varphi_N\},
 \end{aligned}$$

entonces, cada subconjunto $B_{i,i+1}$ se denominará Bloque de Cuantificación, en cuyo caso los elementos del conjunto \mathcal{U} pueden ser denominados niveles de cuantificación.

A continuación se presenta, de manera formal, el problema de control que se busca resolver.

4.1. Problema de control

Suponga que el vector de estado $x(t)$ está conformado de la siguiente manera

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^q(t) \\ x^\perp(t) \end{bmatrix}$$

donde x^\perp es la componente no actuada del vector de estado del CEP y x^q es la correspondiente componente actuada. Denótese como $x_d(t)$ a la señal de referencia para $x(t)$ y como error de seguimiento de estado, o simplemente *error de estado*, a la variable

$$\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - x_d(t). \quad (4.3)$$

El problema de control para CEP de topología reductora puede ser expresado en términos generales de la siguiente manera:

Diseñe una señal de control constante continua a tramos $\varphi(t)$ para el sistema (4.1) tal que el

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_d(t)\| \leq \gamma(\delta, \Delta), \quad (4.4)$$

donde $x_d(t)$ es conocido y representa el comportamiento deseado para los estados del sistema (4.1) y con γ una constante positiva que depende no sólo de la máxima velocidad de conmutación, relacionada con δ , sino también del número de posibles valores de cuantificación (modos de operación) que $\varphi(t)$ puede adoptar, el cual puede reflejarse a través del parámetro Δ .

Dado que la señal $\varphi(t)$ es continua constante a tramos, el problema de control implica la necesidad de encontrar no sólo una adecuada secuencia de valores que $\varphi(t)$ debe adoptar a lo

largo del tiempo, sino también, se debe determinar la duración de cada uno de los intervalos de tiempo durante los cuales $\varphi(t)$ adoptará cada valor de dicha secuencia. Es decir, se debe establecer una secuencia, generalmente infinita, de la forma

$$\{(\varphi_{i_0}, \delta_{i_0}), (\varphi_{i_1}, \delta_{i_1}), (\varphi_{i_2}, \delta_{i_2}), \dots\} \quad (4.5)$$

donde $\delta_{i_k} = t_{i_{k+1}} - t_{i_k} \geq \delta$.

Para resolver este problema, se propone el siguiente método de trabajo:

1. Se construye un modelo de dinámica continua equivalente al modelo (4.1), en el cual la señal de control presenta una naturaleza continua.
2. Se replantea el problema de control para el modelo continuo del inciso anterior.
3. Se determina la existencia de una señal de control por retroalimentación de estados $\mu(x, x_d)$ que resuelva el problema de control planteado en el inciso anterior.
4. Una vez que se ha obtenido una señal de control $\mu(x, x_d)$, si es que existe, se construye una política de conmutación tal que esta señal pueda ser implementada de manera aproximada por medio de la señal conmutada $\varphi(t)$, en donde la degradación del desempeño obtenido con esta última permita garantizar el objetivo dado por (4.4).

Considere un sistema lineal controlable de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B\mu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ \mu(t) &= kx(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$ es el estado y $\mu(t) \in \mathbb{R}$ es una señal de control por retroalimentación de estado con k un vector constante. La señal de control μ se dice es *admisible* si $\mu \in \mathcal{U} \subset [\varphi_N, \varphi_N]$. Definase como \mathcal{X} al conjunto de estados x_0 para los cuales existe un control admisible μ tal que la trayectoria $x(t)$ del sistema satisface $x(0) = x_0$ y $x(T) = 0$ para $T \in [0, \infty)$.

Proposición 4.1 *Considere el sistema lineal (4.6). Si existen un vector k y una condición inicial x_0 tal que el sistema de control en lazo cerrado sea asintóticamente estable en \mathcal{X} con respecto al origen, entonces el sistema lineal conmutado*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.7)$$

con $\varphi(t) \in \mathcal{U}$ una señal constante continua a tramos, será finalmente asintóticamente estable con respecto a la vecindad del origen $\mathcal{B}_\gamma \subset \mathcal{X}$ definida como

$$\mathcal{B}_\gamma = \{x : \|x\| \leq \gamma(\Delta)\}$$

siempre que la señal de control $\varphi(t)$ pueda descomponerse en la siguiente suma

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(t) + \mu(t), \quad (4.8)$$

donde

$$\|\tilde{\varphi}(t)\| \leq \Delta, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.9)$$

con Δ una constante positiva.

Demostración: Al sustituir la ecuación (4.8) en (4.7) se obtiene

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(\tilde{\varphi}(t) + \mu(t)).$$

Como el sistema es lineal, la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = (A + Bk)x(t) + B\tilde{\varphi}(t), \quad (4.10)$$

Por suposición, existe un vector k para el cual la matriz $(A + Bk)$ es Hurwitz. Esto último permite definir una función cuadrática positiva definida para (4.10) de la forma

$$V = x^T P x \quad (4.11)$$

donde P es una matriz definida positiva que satisface

$$(A + Bk)^T P + P(A + Bk) = -Q$$

con Q una matriz también definida positiva. La derivada de (4.11) a lo largo de las trayectorias de (4.10) es

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P B k \tilde{\varphi}$$

la cual puede ser acotada gracias a (4.9) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\lambda_{\min}\{Q\} \|x\|^2 + 2 \|x\| \|PBk\| \Delta \\ &= -\|x\| \lambda_{\min}\{Q\} \left(\|x\| - \frac{2 \|PBk\|}{\lambda_{\min}\{Q\}} \Delta \right) \end{aligned}$$

Nótese que la derivada de V será negativa definida solo si

$$\|x\| > \frac{2 \|PBk\|}{\lambda_{\min}\{Q\}} \Delta.$$

Como consecuencia de esto, las soluciones del sistema retroalimentado (4.10) serán finalmente asintóticamente estables respecto a la bola

$$\mathcal{B}_\gamma = \left\{ x : \|x\|^2 \leq \frac{4 \|PBk\|^2}{\lambda_{\min}^2\{Q\}} \Delta^2 \triangleq \gamma(\Delta) \right\}, \quad (4.12)$$

cuyo radio coincide con el semieje máximo del elipsoide

$$\left\{ x : x^T P x = \frac{4 \|PBk\|^2}{\lambda_{\min}^2 \{Q\}} \Delta^2 \right\},$$

siempre que la condición inicial $x_0 \in \mathcal{X}$. ■

Nótese que la parte derecha de la ecuación (4.10), es la suma del sistema “continuo” estable más una perturbación debida al error de entrada. En consecuencia, la proposición 4.1 es un replanteamiento del caso en el cual un sistema de control asintóticamente estable es sometido a la acción de una perturbación no desvaneciente en la entrada.

Observación 4.1 *Si el conjunto \mathcal{U} se compone de β niveles de cuantificación y los niveles máximo y mínimo satisfacen la relación $\varphi_{\bar{N}} = -\varphi_N$, entonces el parámetro Δ puede expresarse como*

$$\Delta = \frac{2\varphi_N}{\beta - 1}$$

con lo cual, la bola (4.12) puede ser reescrita en términos de la cantidad de niveles de cuantificación y del máximo nivel de cuantificación de la siguiente forma

$$\mathcal{B}_\psi = \left\{ x : \|x\|^2 \leq \left(\frac{4 \|PBk\| \varphi_N}{\lambda_{\min} \{Q\} (\beta - 1)} \right)^2 \triangleq \psi(\beta) \right\},$$

donde la cantidad de niveles de cuantificación (o modos de operación) debe ser mayor a uno.

Si el problema de control posee una solución bajo la suposición de que la señal de control es continua ($\mu(t)$), entonces lo lógico es reconstruir a dicha señal lo más fielmente posible mediante $\varphi(t)$. El problema es que ésto sólo se puede conseguir asegurando que el número de elementos del conjunto \mathcal{U} sea prácticamente infinito y que el intervalo de tiempo durante el cual $\varphi(t)$ puede estacionarse en cualquier elemento de dicho conjunto puede ser tan pequeño como cero. Lograr todo esto mediante dispositivos conmutadores no es posible. El proceso de reconstrucción de la señal continua que a continuación se expondrá se basa en la cuantificación del mismo.

Definición 4.2 *Considere un conjunto discreto finito de elementos ordenados $\mathcal{U} \subset [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N]$, así como una función continua $f \in [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N]$. Se denomina función piso a la función $\lfloor f \rfloor : [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N] \rightarrow \mathcal{U}$ cuya imagen es el valor inmediato inferior de f en \mathcal{U} , denotado como φ_m . Se denomina función techo al la función $\lceil f \rceil : [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N] \rightarrow \mathcal{U}$ cuya imagen es el valor inmediato superior de f en \mathcal{U} , denotado como φ_M .*

Bajo la consideración de que $\mu(t) \in [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N]$, $\forall t \geq t_0$ y el conjunto continuo cerrado $[\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N]$ puede partitionarse en j bloques de cuantificación definidos mediante los elementos del conjunto discreto ordenado \mathcal{U} , entonces para todo tiempo existirá un bloque de cuantificación dentro del cual la señal continua $\mu(t)$ evolucionará, dicho bloque se define como

$$B_{\varphi_m, \varphi_M} \triangleq \{ \nu \in [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N] : \varphi_m \leq \nu < \varphi_M, \}$$

donde $\varphi_m = \lfloor \mu(t) \rfloor$, $\varphi_M = \lceil \mu(t) \rceil$. Así, si $\varphi(t)$ se define con base en $\mu(t)$ de manera tal que (4.9) se satisface, por ejemplo definiendo $\varphi(t) = q(\mu)$ con $q(\cdot)$ una función de cuantificación ya sea por redondeo o por truncamiento, entonces **el problema de definir la secuencia de los valores φ_{i_k} en (4.5) se reduce a conmutar únicamente entre dos de ellos, φ_m y φ_M** . Por ello $\mu(t)$ se denominará *Control Maestro*. Nótese lo siguiente: Si $\varphi(t)$ es definida como una función de cuantificación o como una estrategia de conmutación basada en técnicas de control como modos deslizantes, entonces no es posible asegurar que el intervalo de tiempo durante el cual $\varphi(t)$ debe conmutar entre φ_m y φ_M será en efecto menor a δ . En consecuencia $\varphi(t)$ debe ser construida con la ayuda de un segundo mecanismo que permita satisfacer la restricción del intervalo de conmutación, mecanismo que se denominará *Ley de conmutación*.

Observación 4.2 *En la literatura de los SDC y SDH la señal de control maestro también se denomina control supervisor o ley de control continua. Respecto a la ley de conmutación, ésta suele ser denominada como control por conmutación o control esclavo.*

4.2. Control Maestro Basado en Pasividad

En la literatura existen diversas estrategias de control no sólo para convertidores estáticos de potencia, sino para diversas clases de sistemas compuestos por alguna clase de conmutación o discontinuidad (véase por ejemplo [12], [24] y [54]). Sin embargo, en este trabajo se utiliza el método conocido como Control Basado en Pasividad, el cual permite la explotación de las propiedades del modelo presentadas al final del capítulo dos para garantizar que la energía del sistema de control resultante se comporte de manera preestablecida [40].

El diseño del control maestro consiste en la búsqueda de un controlador capaz de generar una señal $\mu(t)$ que permita garantizar que el sistema de control en lazo cerrado (4.6) sea pasivo con una función de energía preestablecida. Sin embargo, dicha función de energía no puede ser propuesta en forma arbitraria debido a que los CEP considerados son subactuados.

Considere el modelo promediado

$$\mathcal{D}\dot{z}(t) + \mathcal{J}z(t) + \mathcal{R}z(t) = \mathcal{M}\mu(t) \quad (4.13)$$

equivalente al modelo (4.1) con $z \in \mathbb{R}^n$ la versión promediada del vector de estados x .

A partir de la función de energía del sistema, dada por $\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2}z^T \mathcal{D}z$, se propone la siguiente función de energía deseada

$$\mathcal{H}(\tilde{z}) = \frac{1}{2}\tilde{z}^T \mathcal{D}\tilde{z}. \quad (4.14)$$

donde $\tilde{z} \triangleq z - x_d$ es el vector de error de estado y x_d es el comportamiento deseado para el estado del sistema.

4.2.1. Formulación del problema

Considere un convertidor de topología reductora de la forma (4.13) con $\mu(t)$ una señal continua. Construya una ley de control continua μ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{z} = 0.$$

Suposición 4.1 *Suponga que el vector \mathcal{M} puede ser particionado en una componente actuada $\mathcal{M}^q \neq 0$ con $q < n$ y una subactuada $\mathcal{M}^\perp = 0$, donde \mathcal{M}^\perp denota el complemento ortogonal de \mathcal{M} , entonces*

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}^q & 0 \\ 0 & \mathcal{D}^\perp \end{bmatrix}, \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J}^\perp \\ \mathcal{J}^q & 0 \end{bmatrix}.$$

Suposición 4.2 *Suponga que la matriz \mathcal{R} es diagonal con la siguiente estructura*

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}^q & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^\perp \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{R}^\perp > 0$ y $\mathcal{R}^q \geq 0$.

Suposición 4.3 *Todos los parámetros del sistema son conocidos.*

Suposición 4.4 *Las fuentes de energía que alimentan al sistema, así como el estado $z(t)$ están disponibles mediante medición directa.*

Suposición 4.5 *Las fuentes de alimentación son diferentes de cero.*

Suposición 4.6 *Existe una matriz*

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K^q & K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $K^q > 0$ que satisface

$$\mathcal{R} + \mathcal{K} \triangleq \mathcal{R}_T > 0. \quad (4.15)$$

De manera general el valor de la carga es incierto, sin embargo y por simplicidad se considerará que es nominal para efecto de los cálculos. La suposición 4.5 es una condición natural para el convertidor, ya que la energía entregada por él es tomada de dicha fuente. La suposición 4.4 establece la necesidad del controlador de ser alimentado con información de la variable de salida y del voltaje de entrada, lo que en principio no representa ninguna dificultad técnica. La matriz \mathcal{K} de la suposición 4.6 es una matriz de ganancia utilizada para la retroalimentación del estado. Su papel es básicamente el de introducir amortiguamiento al sistema de control mediante la modificación dada en (4.15), por lo cual y de acuerdo a la conjetura 4.2, la componente K^q , que permite la retroalimentación del estado actuado, debe ser positiva definida, en tanto que la componente K_2 es de libre diseño.

Proposición 4.2 *Considere el modelo continuo (4.13) en lazo cerrado con una señal de retroalimentación μ que satisfice*

$$\mathcal{M}\mu(t) = \mathcal{D}\dot{x}_d(t) + \mathcal{J}x_d(t) + \mathcal{R}x_d(t) - \mathcal{K}\tilde{z}(t), \quad (4.16)$$

con \mathcal{K} definida en (4.15) y x_d el comportamiento deseado para z . Si las suposiciones 4.1 a 4.6 se satisfacen, entonces el sistema en lazo cerrado logra estabilizarse asintóticamente con respecto al estado deseado, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t) - x_d(t)\| = 0.$$

Demostración: Por definición $z = \tilde{z} + x_d$, por lo que al sustituir el estado promediado z en la ecuación (4.13) se obtiene

$$\mathcal{D}\dot{\tilde{z}} + \mathcal{J}\tilde{z} + \mathcal{R}\tilde{z} = \mathcal{M}\mu - \left(\mathcal{D}\dot{x}_d + \mathcal{J}x_d + \mathcal{R}x_d \right). \quad (4.17)$$

Si la señal μ satisfice (4.16), entonces (4.17) se reduce a

$$\mathcal{D}\dot{\tilde{z}} + \mathcal{J}\tilde{z} + \mathcal{R}_T\tilde{z} = 0. \quad (4.18)$$

con \mathcal{R}_T definida en (4.15). Considere como función de Lyapunov la función de energía propuesta (4.14) cuya derivada en el tiempo a lo largo de las trayectorias de (4.18) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}(\tilde{z}(t)) &= \tilde{z}^T(t) [-\mathcal{J}\tilde{z}(t) - \mathcal{R}_T\tilde{z}(t)] \\ \dot{\mathcal{H}}(\tilde{z}(t)) &= -\tilde{z}^T(t)\mathcal{R}_T\tilde{z}(t). \end{aligned}$$

Como \mathcal{K} es tal que $\mathcal{R}_T > 0$, entonces $\dot{\mathcal{H}} < 0$ y

$$-\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\} \|\tilde{z}(t)\|^2 \geq -\tilde{z}^T(t)\mathcal{R}_T\tilde{z}(t) \geq -\lambda_{\max}\{\mathcal{R}_T\} \|\tilde{z}(t)\|^2 \quad (4.19)$$

donde $\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\}$ y $\lambda_{\max}\{\mathcal{R}_T\}$ representan el mínimo y máximo valores propios de \mathcal{R}_T , respectivamente, y $\|\cdot\|$, sin subíndice, representa la norma Euclidiana. Dado que $\mathcal{D} = \mathcal{D}^T > 0$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tilde{z}^T(t)\mathcal{D}\tilde{z}(t) &\leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\} \|\tilde{z}(t)\|^2 \\ -\frac{1}{2}\|\tilde{z}(t)\|^2 &\leq -\frac{1}{2}\frac{\tilde{z}^T(t)\mathcal{D}\tilde{z}(t)}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

y como

$$-\tilde{z}^T(t)\mathcal{R}_T\tilde{z}(t) \leq -\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\} \|\tilde{z}(t)\|^2$$

se tiene que, al sustituir el valor $\|\tilde{z}(t)\|^2$ de (4.20) resulta

$$-\tilde{z}^T(t)\mathcal{R}_T\tilde{z}(t) \leq 2\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\} \left(-\frac{\frac{1}{2}\tilde{z}^T(t)\mathcal{D}\tilde{z}(t)}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}} \right).$$

Sustituyendo en lo anterior los términos $\dot{\mathcal{H}}(\tilde{z}(t))$ y $\mathcal{H}(\tilde{z}(t))$, de acuerdo a sus definiciones, se llega a

$$\dot{\mathcal{H}}(\tilde{z}(t)) \leq 2\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\} \left(-\frac{\mathcal{H}(\tilde{z}(t))}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}} \right),$$

resultado que puede reducirse a la forma dada por

$$\dot{\mathcal{H}}(\tilde{z}(t)) \leq -\alpha\mathcal{H}(\tilde{z}(t))$$

donde $\alpha = 2\frac{\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\}}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}}$. Por lo que la solución de la dinámica (4.18) convergerá a cero. Aún más, esta convergencia será exponencial ya que si la expresión

$$\frac{d\mathcal{H}(\tilde{z}(t))}{dt} \leq -\alpha\mathcal{H}(\tilde{z}(t))$$

es integrada en ambos lados de la desigualdad, es decir,

$$\int_{\mathcal{H}(0)}^{\mathcal{H}(t)} d\mathcal{H} \leq -\int_0^t \alpha\mathcal{H}(\tilde{z}(\tau))d\tau$$

entonces es posible demostrar que

$$\mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}(0) - \int_0^t \alpha\mathcal{H}(\tilde{z}(\tau))d\tau.$$

Ahora, suponiendo que $\mathcal{H}(0) \geq 0$ y aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman bajo la consideración de que $\mathcal{H}(0)$ y α son constantes, entonces

$$\mathcal{H}(t) \leq \mathcal{H}(0)e^{-\alpha t}$$

por tanto, la función de energía (4.14) está acotada por abajo gracias a las propiedades de la matriz \mathcal{D} , y está acotada por arriba mediante una función exponencial decreciente en el tiempo, por lo que el vector \tilde{z} también decrecerá exponencialmente ya que a partir de

$$\lambda_{\min}\{\mathcal{D}\} \|\tilde{z}(t)\|^2 \leq \mathcal{H}(\tilde{z}(t)) \leq \mathcal{H}(0)e^{-\alpha t}$$

el término $\|\tilde{z}(t)\|^2$ puede escribirse como

$$\|\tilde{z}(t)\|^2 \leq \frac{\mathcal{H}(0)}{\lambda_{\min}\{\mathcal{D}\}} e^{-\alpha t},$$

simplificando

$$\|\tilde{z}(t)\|^2 \leq \beta e^{-\alpha t} \tag{4.21}$$

con $\beta = \frac{\mathcal{H}(0)}{\lambda_{\min}\{\mathcal{D}\}}$ una constante positiva. ■

El término exponencial $\alpha = 2\frac{\lambda_{\min}\{\mathcal{R}_T\}}{\lambda_{\max}\{\mathcal{D}\}}$ refleja la dependencia de la tasa de disminución de la señal de error con respecto tanto de los parámetros físicos del sistema como de los parámetros de la matriz de retroalimentación \mathcal{K} .

Observación 4.3 Debido a que el sistema (4.13) posee una dinámica actuada, z^q , y una dinámica no actuada, z^\perp , el controlador (4.16) puede descomponerse en dos ecuaciones: la primera de ellas define al controlador maestro en términos de las dinámicas deseadas y la retroalimentación de estado:

$$\mathcal{M}^q \mu(t) = \mathcal{D}^q \dot{x}_d^q(t) + \mathcal{J}^\perp x_d^\perp(t) + \mathcal{R}^q x_d^q(t) - [K^q \quad K_2] \tilde{z}(t),$$

en tanto que la segunda relación

$$\mathcal{D}^\perp \dot{x}_d^\perp(t) = -\mathcal{J}^q x_d^q(t) - \mathcal{R}^\perp x_d^\perp(t); \quad (4.22)$$

establece un compromiso entre la dinámica deseada del estado actuado y del estado no actuado. De manera general, la ecuación (4.22) representa una restricción que permite identificar dos tipos de casos: el seguimiento de una señal de referencia para la dinámica no actuada, $x_d^\perp(t)$, en cuyo caso la restricción es de naturaleza algebraica; o el seguimiento de una referencia únicamente para el estado actuado, $x_d^q(t)$, situación en la cual la restricción será diferencial.

Observación 4.4 La ecuación (4.18) se conoce como la dinámica del error del sistema y constituye la dinámica en lazo cerrado del sistema de control formado por (4.13) y (4.16). Por otro lado, la ecuación (4.16) puede escribirse como

$$\mathcal{D} \dot{x}_d + \mathcal{J} x_d + \mathcal{R} x_d = \mathcal{M} \mu - \mathcal{K} \tilde{z}$$

ecuación que se conoce como la dinámica deseada para (4.13). El término $-\mathcal{K} \tilde{z}$ en la dinámica deseada constituye una inyección de amortiguamiento mediante la retroalimentación estática del error de estado.

Observación 4.5 En el caso en el cual el estado sea bidimensional la propiedad de pasividad está definida considerando a $z^q(t)$ como la variable de salida, por lo que la retroalimentación de $z^\perp(t)$ puede verse como un segundo lazo de retroalimentación [1].

4.2.2. CBP mediante retroalimentación de la corriente en el capacitor

Si en un convertidor monofásico de topología reductora se considera como señal de salida a la corriente que circula en el capacitor del filtro, la relación entrada salida resultante posee las propiedades de fase mínima débil y de observabilidad, lo cual permite la construcción de un controlador para el cual el sistema de control resultante sea pasivo [47].

Considere el sistema (4.13) donde el estado es bidimensional y

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}; \quad \mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_l} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{M} = \begin{bmatrix} V_e \\ 0 \end{bmatrix},$$

Si la señal de salida se define como

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} z(t),$$

donde $y \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}^2$. Entonces, al realizar el cambio de variables $\hat{z}_1(t) = y(t)$ y $\hat{z}_2(t) = -z_2(t)$ se llega a la siguiente forma normal

$$\begin{aligned} L\dot{\hat{z}}_1 &= -\frac{L}{RC}\hat{z}_1 + \hat{z}_2 + V_e\mu \\ C\dot{\hat{z}}_2 &= -\hat{z}_1, \end{aligned} \quad (4.23)$$

En el capítulo anterior se comprobó que la dinámica cero de este modelo está dada por la expresión $\dot{z}_2(t) = 0$, mientras que el grado relativo del sistema con respecto a la salida propuesta es uno, por lo que el sistema es de fase mínima débil. En consecuencia, el sistema (4.23) es pasivizable mediante retroalimentación de la salida (véase [47]).

Proposición 4.3 *Considere un convertidor reductor de dimensión dos cuyo modelo de estado tiene la forma dada en (4.23) así como las suposiciones 4.1 a 4.5. Permita que la ley de control sea definida como*

$$\mu = \frac{1}{V_e} \left[L\dot{\hat{z}}_{1d} + \frac{L}{RC}\hat{z}_{1d} - \hat{z}_{2d} - k(\hat{z}_1 - \hat{z}_{1d}) \right] \quad (4.24)$$

con k una constante positiva, \hat{z}_{2d} es el comportamiento deseado para el negativo del voltaje en el capacitor de salida y \hat{z}_{1d} es una función acotada que define el desempeño deseado para la corriente en el capacitor la cual está relacionada directamente con el voltaje \hat{z}_{2d} por medio de la siguiente relación algebraica

$$\hat{z}_{1d} = -C\dot{\hat{z}}_{2d}.$$

Bajo tales condiciones el sistema en lazo cerrado logra un control de seguimiento tanto en el voltaje del capacitor de salida $-\hat{z}_2$, como en la corriente \hat{z}_1 , es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{z}_2 - \hat{z}_{2d}\| = 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{z}_1 - \hat{z}_{1d}\| = 0$, respectivamente.

Demostración: Al definirse el error de estado como $\tilde{e} = \hat{z} - \hat{z}_d$, la dinámica del error estará gobernada por la ecuación

$$\mathcal{D}'\dot{\tilde{e}} - \mathcal{J}'\tilde{e} + \mathcal{R}'_T\tilde{e} = 0$$

donde

$$\mathcal{D}' = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \mathcal{J}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_T = \begin{bmatrix} \frac{L}{RC} + k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siempre que la dinámica deseada se defina como

$$\mathcal{D}\dot{\hat{z}}_d - \mathcal{J}\hat{z}_d + \mathcal{R}\hat{z}_d = \mathcal{M}\mu + \mathcal{K}'\tilde{e}$$

con

$$\mathcal{K}' = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La derivada de la función

$$\mathcal{H}(\tilde{e}) = \frac{1}{2} \tilde{e}^T \mathcal{D} \tilde{e}$$

a lo largo de la dinámica del sistema en lazo cerrado resulta ser entonces

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}(\tilde{e}) &= \tilde{e}^T (\mathcal{J} \tilde{e} - \mathcal{R}_T \tilde{e}) \tilde{e} \\ &= -\tilde{e}^T \mathcal{R}_T \tilde{e} \leq 0, \end{aligned}$$

es decir es semidefinida negativa, sin embargo, con base en el teorema de LaSalle es sencillo concluir que el origen es el único elemento del conjunto invariante del sistema en lazo cerrado, por lo tanto el error tiende de manera asintótica hacia este equilibrio. ■

Observación 4.6 *En el contexto de las variables de estado originales z^q y z^\perp , es fácil comprobar que la dinámica del sistema en lazo cerrado tiene la forma dada en (4.18) en donde*

$$\mathcal{R}_T = \begin{bmatrix} k & -\frac{k}{R} \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}.$$

4.3. Diseño de la ley de conmutación

Una vez establecida la ley de control continua, el siguiente paso consiste en definir la política de conmutación mediante la cual dicha señal será emulada por medio de la señal constante continua a tramos φ . Para ello, primero debe establecerse la propiedad de estabilidad del sistema conmutado (4.1) bajo la acción de una versión cuantificada del control maestro (4.16).

Considere un conjunto finito discreto ordenado \mathcal{U} formado por m modos de operación distintos, donde $m > 2$. Entonces la trayectoria $x(t)$ del sistema (4.1) evolucionará de acuerdo a una secuencia dada por (4.5). El problema entonces consiste en definir la secuencia de modos de operación φ_j de manera tal que la trayectoria $x(\cdot)$ sea convergente con respecto a una vecindad de $x_d(\cdot)$.

Proposición 4.4 *La trayectoria $\tilde{x}(\cdot)$ del sistema de control formado por el CEP (4.1) en lazo cerrado con un controlado $\varphi(\cdot) \in \mathcal{U}$ que satisfice*

$$\varphi_m \leq \varphi(t) \leq \varphi_M \quad \forall t \geq t_0 \tag{4.25}$$

con

$$\begin{aligned} \varphi_M &\triangleq \lceil \mu(t) \rceil \\ \varphi_m &\triangleq \lfloor \mu(t) \rfloor \end{aligned}$$

y $\mu(t) \in [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N]$, $\forall t \geq t_0$, una señal de retroalimentación que satisface

$$\mathcal{M}^q \mu(t) = \mathcal{D}^q \dot{x}_d(t) + \mathcal{J}^q x_d(t) + \begin{bmatrix} \mathcal{R}^q & 0 \end{bmatrix} x_d(t) - \begin{bmatrix} K_1^q & K_2 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \quad (4.26)$$

$$\mathcal{D}^\perp \dot{x}_d(t) = \mathcal{J}^\perp x_d(t) + \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{R}^\perp \end{bmatrix} x_d(t), \quad (4.27)$$

será finalmente asintóticamente estable dentro del conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ con respecto al conjunto

$$\Theta_1 \triangleq \left\{ \tilde{x} : \frac{1}{2} \tilde{x}^T \mathcal{D} \tilde{x} \leq \frac{\lambda_{\max} \{ \mathcal{D}^\perp \} \Delta^2}{2 \|K_2\|^2} \|\mathcal{M}^q\|^2 \right\}$$

siempre que (4.9) y las suposiciones 4.1 a 4.6 se satisfagan.

Demostración: Considere el sistema conmutado (4.1), el cual puede reescribirse como

$$\mathcal{D} \dot{\tilde{x}} + \mathcal{J} \tilde{x} + \mathcal{R} \tilde{x} = \mathcal{M} \mu - \left(\mathcal{D} \dot{x}_d + \mathcal{J} x_d + \mathcal{R} x_d \right),$$

si (4.9) se satisface, entonces la ecuación anterior en lazo cerrado con (4.25) puede reescribirse como

$$\mathcal{D} \dot{\tilde{x}} + \mathcal{J} \tilde{x} + (\mathcal{R} + \mathcal{K}) \tilde{x} = \mathcal{M} \tilde{\varphi}. \quad (4.28)$$

Considere la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \mathcal{D} \tilde{x}. \quad (4.29)$$

Su derivada a lo largo de (4.28) es

$$\dot{V} = -\tilde{x}^T \mathcal{R}_T \tilde{x} + \tilde{x}^T \mathcal{M} \tilde{\varphi} \quad (4.30)$$

donde $\mathcal{R}_T = \mathcal{R} + \mathcal{K}$, la cual puede reescribirse, gracias a las suposiciones 4.1 y 4.2, como

$$\dot{V} = -\tilde{x}^{\perp T} \mathcal{R}^\perp \tilde{x}^\perp - \tilde{x}^{q T} \mathcal{R}_a^q \tilde{x}^q - \tilde{x}^{q T} K_2 \tilde{x}^\perp + \tilde{x}^{q T} \mathcal{M}^q \tilde{\varphi}. \quad (4.31)$$

Si $\mu(t) \in [\varphi_{\bar{N}}, \varphi_N]$, $\forall t \geq t_0$, entonces siempre existirán dos niveles de cuantificación tales que

$$\varphi_m \leq \mu(t) \leq \varphi_M \quad \forall t \geq t_0$$

por lo que el error de entrada entre la señal (4.25) y el controlador (4.26)-(4.27) estará siempre acotado de acuerdo a (4.9). Esto permite afirmar que (4.31) está a su vez acotada por arriba mediante la expresión

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min} \{ \mathcal{R}^\perp \} \|\tilde{x}^\perp\|^2 - \lambda_{\min} \{ \mathcal{R}_a^q \} \|\tilde{x}^q\|^2 - \|K_2\| \|\tilde{x}^q\| \|\tilde{x}^\perp\| + \frac{\Delta}{2} \|\tilde{x}^q\| \|\mathcal{M}^q\|$$

la cual será negativa definida siempre que la dinámica no actuada esté acotada por debajo por la relación

$$\|\tilde{x}^\perp\| \geq \frac{\Delta}{\|K_2\|} \|\mathcal{M}^q\|$$

Este hecho permite afirmar que la trayectoria \tilde{x} del sistema de control será finalmente asintóticamente estable con respecto a la región definida por el elipsoide (superficie de Lyapunov):

$$\Theta_1 \triangleq \left\{ \tilde{x} : \frac{1}{2} \tilde{x}^T \mathcal{D} \tilde{x} \leq \frac{\lambda_{\max} \{ \mathcal{D}^\perp \} \Delta^2}{2 \|K_2\|^2} \|\mathcal{M}^q\|^2 \right\} \quad (4.32)$$

cuyo mínimo semieje es $\frac{\Delta}{\|K_2\|} \|\mathcal{M}^q\|$. ■

Observación 4.7 *Nótese que la restricción que define al conjunto Θ_1 es directamente proporcional a la cota máxima del error de entrada Δ e inversamente proporcional a los términos de compensación que conforman a K_2 . Más importante aún, Θ_1 se define únicamente en función de la dinámica del error del estado no actuado.*

La proposición 4.4 no requiere de una estructura específica para el mecanismo de conmutación. En consecuencia cualquier función de conmutación que satisfaga (4.9) puede estabilizar al sistema de control con respecto al conjunto definido en (4.32). Sin embargo, la proposición 4.4 no define ninguna restricción sobre los tiempos de conmutación de la función $\varphi(\cdot)$. Como consecuencia de esto, el mecanismo de conmutación que se presenta a continuación tiene como objetivo establecer una cota máxima sobre este parámetro. El mecanismo está construido con base en dos superficies de conmutación definidas en el espacio de estado de la variable de error \tilde{x} , su estructura es la siguiente

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_M, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) + \varepsilon \leq 0 \\ \varphi_m, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) - \varepsilon \geq 0 \\ \varphi(t^-), & \text{si } -\varepsilon < \phi^T \tilde{x}(t) < \varepsilon \end{cases} \quad (4.33)$$

donde $\varphi(t^-)$ es el valor de $\varphi(t)$ en el momento justo antes del instante de tiempo t , $\phi \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante que junto con $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, una constante positiva, definen los hiperplanos $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ y $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ en el espacio de \tilde{x} , los cuales se caracterizan por ser transversales a las dinámicas de lazo cerrado

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\mathcal{J}\tilde{x}(t) - \mathcal{R}_T \tilde{x}(t) + \mathcal{M}(\varphi_M - \mu(t)) \quad (4.34)$$

y

$$\dot{\tilde{x}}(t) = -\mathcal{J}\tilde{x}(t) - \mathcal{R}_T \tilde{x}(t) + \mathcal{M}(\varphi_m - \mu(t)) \quad (4.35)$$

respectivamente. Estas dinámicas se denominarán a lo largo del trabajo como modo de operación Σ_M y modo de operación Σ_m , respectivamente.

Observación 4.8 *La memoria introducida por la función de conmutación que compone a la señal de control (4.25) permite identificar al sistema en lazo cerrado formado por (4.13) y (4.25) como un sistema de control de dinámica híbrida.*

Definición de las superficies de conmutación

Para definir las superficies de conmutación $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ y $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ será necesario considerar las propiedades de estabilidad de los equilibrios del sistema retroalimentado de control para cada modo de operación.

El equilibrio, \tilde{x}_e , de la dinámica del sistema de control

$$\mathcal{D}\dot{\tilde{x}}(t) = -\mathcal{J}\tilde{x}(t) - \mathcal{R}_T\tilde{x}(t) + \mathcal{M}(\varphi(t) - \mu(t)) \quad (4.36)$$

satisface la ecuación

$$0 = -\mathcal{J}\tilde{x}_e(t) - \mathcal{R}_T\tilde{x}_e(t) + \mathcal{M}(\varphi(t) - \mu(t)).$$

Si los parámetros K_1^q y K_2 se eligen de manera tal que $(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1}$ exista, entonces el equilibrio estará relacionado de manera lineal con el error de entrada $\tilde{\varphi}$ mediante la ecuación lineal

$$\tilde{x}_e(t) = (\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}(\varphi(t) - \mu(t)).$$

Por lo cual, el equilibrio de (4.36) será igual a cero solamente cuando el error de control $\tilde{\varphi}$ sea cero. Esta situación no es sorprendente ya que sólo se presenta en el caso ideal en el cual la señal de control continua es totalmente reconstruida a través de φ . Ahora bien, al realizar el cambio de variable

$$\omega(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}_e(t)$$

obtenemos la dinámica

$$\mathcal{D}\dot{\omega}(t) = -\mathcal{J}\omega(t) - \mathcal{R}_T\omega(t).$$

Al definirse como función de Lyapunov

$$V_\omega(t) = \frac{1}{2}\omega^T(t)\mathcal{D}\omega(t)$$

y tras obtener su derivada con respecto a las trayectorias de (4.36) tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{V}_\omega(t) &= -\omega^T(t)\mathcal{R}_T\omega(t) \leq -\frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)\|\omega(t)\|^2 \\ \dot{V}_\omega(t) &\leq -\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{\lambda_{\max}(\mathcal{D})}V_\omega(t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

por lo que la dinámica del error es asintóticamente estable con respecto al equilibrio $\tilde{x}_e(t)$. Debe señalarse que para el modo de operación Σ_M el valor que el equilibrio puede tomar en el peor caso es

$$\tilde{x}_{Me} = (\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta$$

debido a que en éste modo de operación el máximo error de control que puede presentarse es $(\varphi_M - \mu(t))_{\max} = \Delta$. De igual manera, el valor que el equilibrio puede tomar en el peor caso bajo el modo de operación Σ_m es

$$\tilde{x}_{me} = -(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta.$$

Es decir, sin importar como se conmute entre los modos de operación Σ_m y Σ_M , la trayectoria del error tenderá a una vecindad del origen en cuyo interior se encuentra la bola

$$\|\tilde{x}_e(t)\|^2 = \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\|^2, \quad (4.38)$$

entonces, para definir los hiperplanos $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ y $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ se propone el siguiente razonamiento: Suponga que la condición inicial de la señal de control es el modo de operación Σ_m , entonces la trayectoria de la dinámica del error tenderá asintóticamente y en el peor caso hacia el punto \tilde{x}_{me} sin importar cual sea la condición inicial de dicha trayectoria. Sin embargo, nos interesa que $\tilde{x}(t)$ se encuentre lo más cercana posible a una vecindad $\mathcal{B}_\eta \subset \Theta_1$ definida como

$$\mathcal{B}_\eta = \{\tilde{x} : \|\tilde{x}(t)\|^2 \leq \eta^2\} \quad (4.39)$$

donde $0 < \eta < \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| \triangleq \sigma(\Delta)$. Para ello se propone partir el espacio de estado bajo dicho modo de operación en la forma mostrada en la figura 4.1, en donde el hiperplano $\phi^T \tilde{x} = -\varepsilon$ es colocado a una distancia η del origen de manera tal que el espacio de estado quede dividido en dos regiones disjuntas, una de ellas

$$\Theta_m = \{\tilde{x} : \phi^T \tilde{x} \leq -\varepsilon\},$$

es una región que debe contener en su interior al punto \tilde{x}_{me} y que se denominará *Región de Conmutación*, es decir, Θ_m es una zona del espacio de estado en la cual estará prohibido que la trayectoria $\tilde{x}(t)$ evolucione, esto es, de acuerdo a (4.25) de tocar \tilde{x} el interior de Θ_m , o su borde $\phi^T \tilde{x} = -\varepsilon$, inmediatamente se presentaría el cambio en el modo de operación. Así, $\tilde{x}(t)$ sólo podrá incursionar en la región complementaria de Θ_m la cual deberá contener no sólo a la vecindad (4.39) sino también al punto \tilde{x}_{Me} . Evidentemente, para que la conmutación del modo de operación Σ_m al modo de operación Σ_M tenga lugar siempre, el hiperplano $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ debe ser transversal al campo vectorial que gobierna al modo de operación Σ_m , es decir

$$\phi^T (-\mathcal{D}^{-1} \mathcal{J} \tilde{x}(t) - \mathcal{D}^{-1} \mathcal{R}_T \tilde{x}(t) + \mathcal{D}^{-1} \mathcal{M} \tilde{\varphi}(t)) \neq 0$$

condición que se satisface, por ejemplo, si $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ se elige perpendicular al hiperplano que une a \tilde{x}_{me} con el origen, véase la figura 4.1.

Al aplicar éste mismo criterio de selección al hiperplano $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ para el modo de operación Σ_M , podemos afirmar que la evolución de la trayectoria $\tilde{x}(t)$ en su espacio de estado será como sigue: Supóngase, sin pérdida de generalidad, que la condición inicial del control es $\varphi(t_0) = \varphi_m$ y que la condición inicial del error de estado, $\tilde{x}(t_0)$, satisface la desigualdad $\phi^T \tilde{x}(t_0) \leq -\varepsilon$, entonces, de acuerdo con (4.25) se activará inmediatamente el modo de operación Σ_M , en un instante de tiempo al que se denominará τ_{M0} , a partir del cual la trayectoria comenzará a aproximarse, en el peor de los casos, de manera asintótica a \tilde{x}_{Me} de acuerdo a la dinámica descrita por (4.34). Sin embargo en un instante de tiempo τ_{m0} la trayectoria $\tilde{x}(t)$ alcanzará a la hipersuperficie $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ obligando la conmutación de la dinámica al modo de operación Σ_m , bajo el cual la trayectoria ahora tenderá, en el peor de los casos, asintóticamente hacia el punto \tilde{x}_{me} , al menos hasta que alcance a la hipersuperficie $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ a partir de la cual dará inicio nuevamente el modo de operación Σ_M . Este

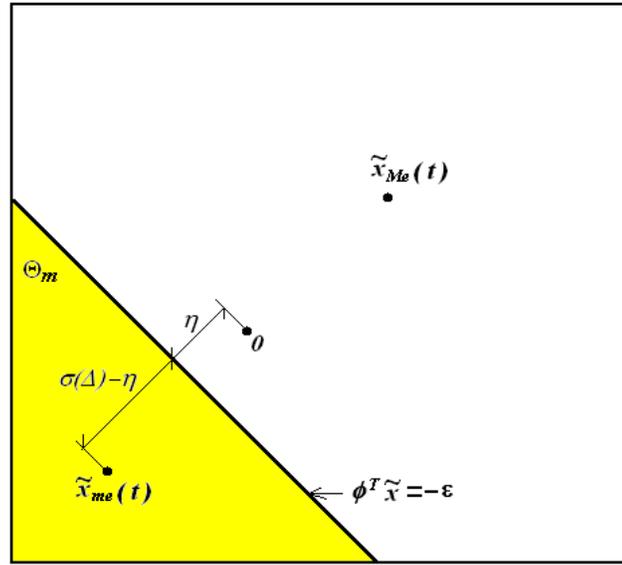


Figura 4.1: Partición del espacio de estado de \tilde{x} bajo el modo de operación Σ_m .

proceso es mostrado en la figura 4.2, en donde la evolución de $\tilde{x}(t)$ tiene lugar únicamente bajo el campo vectorial definido por el modo de operación Σ_M en la figura 4.2a, su evolución únicamente bajo el campo vectorial definido por Σ_m en figura 4.2b y la evolución de la trayectoria en el espacio de estado figura 4.2c.

Observación 4.9 Aunque el espacio de estado es siempre el mismo, cada modo de operación define un campo vectorial propio sobre dicho espacio, por lo cual no se debe caer en el error de visualizar al espacio de estado como si estuviera dividido por tres regiones distintas: Θ_m , Θ_M y $\Theta_m \cap \Theta_M$.

Observación 4.10 Para cada modo de operación existe una región de conmutación separada del resto del espacio mediante un borde definido a través de un hiperplano. Entonces, sólo existe un borde para cada modo de operación por lo que la trayectoria sólo podrá evolucionar en uno de los lados de dicho borde. Por su parte, la conmutación sólo podrá tener lugar cuando $\tilde{x}(t)$ alcance al borde correspondiente al campo vectorial en turno.

Observación 4.11 Debe notarse, por ejemplo, que una vez que la trayectoria \tilde{x} alcance al borde del modo de operación Σ_M entonces podrá atravesarlo sólo si el modo de operación Σ_m se lo permite o viceversa, véase la figura (4.2)

Considere que el sistema retroalimentado evoluciona en el modo de operación Σ_m bajo el peor caso, es decir $\varphi(t) - \mu(t) = -\Delta$, entonces por virtud de (4.37)

$$\dot{V}_\omega(t) \leq -\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{\lambda_{\max}(\mathcal{D})} V_\omega(t)$$

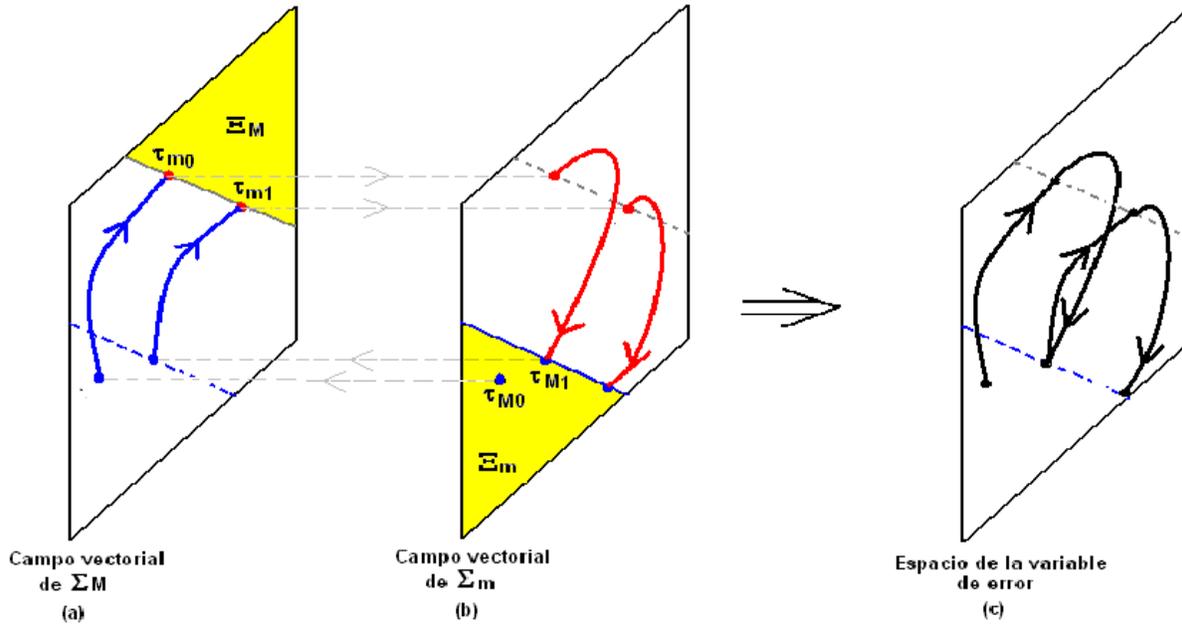


Figura 4.2: Evolución idealizada de la trayectoria de \tilde{x} bajo la política de conmutación propuesta.

con

$$V_\omega(t) = \frac{1}{2} (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{me})^T \mathcal{D} (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{me}). \quad (4.40)$$

Es decir, la trayectoria del error de estado es asintóticamente estable con respecto al punto \tilde{x}_{me} . Defínase a los hiperplanos $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ y $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ de manera tal que sean perpendiculares al hiperplano que une al origen coordenado del espacio de \tilde{x} con \tilde{x}_{me} , y donde la distancia entre dichos hiperplanos sea igual a 2η , entonces la distancia más corta de \tilde{x}_{me} al hiperplano $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ será

$$d(\tilde{x}_{me}, \phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0) = \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M} \Delta\| - \eta,$$

mientras que la distancia

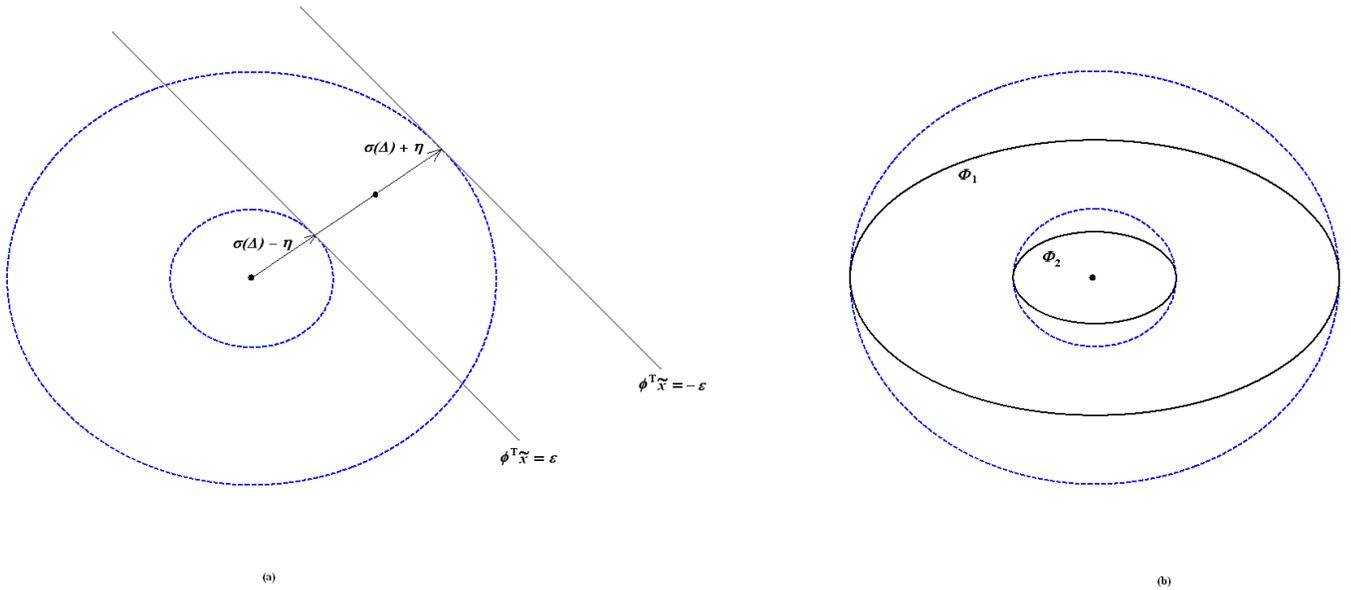
$$d(\tilde{x}_{me}, \phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0) = \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M} \Delta\| + \eta$$

Estos resultados nos permiten definir dos bolas cuyos radios son dichas distancias:

$$\begin{aligned} B_{m1} &= \left\{ \tilde{x} : \|\tilde{x} - \tilde{x}_{me}\|^2 = (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M} \Delta\| - \eta)^2 \right\} \\ B_{m2} &= \left\{ \tilde{x} : \|\tilde{x} - \tilde{x}_{me}\|^2 = (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M} \Delta\| + \eta)^2 \right\} \end{aligned}$$

Dichas bolas permiten definir cada una las siguientes superficies de Lyapunov

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left\{ \tilde{x} : \frac{1}{2} (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{me})^T \mathcal{D} (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{me}) = \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{D})}{2} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M} \Delta\| - \eta)^2 \right\} \\ \Phi_2 &= \left\{ \tilde{x} : \frac{1}{2} (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{me})^T \mathcal{D} (\tilde{x}(t) - \tilde{x}_{me}) = \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{D})}{2} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M} \Delta\| + \eta)^2 \right\} \end{aligned}$$


 Figura 4.3: Definición de las superficies de nivel Φ_1 y Φ_2 .

Nótese lo siguiente: A partir de la Figura ??(a), se observa que los puntos en los cuales los hiperplanos son tangentes a las bolas B_{m1} y B_{m2} definen un segmento de recta entre los hiperplanos. Dicha recta constituye la trayectoria mínima que \tilde{x} puede describir al pasar de un hiperplano a otro bajo el modo de operación Σ_m . Defínase en intervalo mínimo de tiempo que debe tardar la trayectoria en pasar de el hiperplano $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$ a $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ como δ (tiempo mínimo necesario para que los elementos conmutadores que dan lugar al modo de operación Σ_m se consideren encendidos), es decir, al aplicar el principio de comparación a (1.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{D})}{2} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| - \eta)^2 &= V_m(t_M) \leq \\ e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{\lambda_{\max}(\mathcal{D})}\delta} V_m(t_m) &= e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{\lambda_{\max}(\mathcal{D})}\delta} \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{D})}{2} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| + \eta)^2 \end{aligned}$$

que es un estimado de la evolución de la función de Lyapunov V_m de la elipse Φ_2 a la elipse Φ_1 . Entonces

$$\begin{aligned} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| - \eta)^2 &\leq e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{\lambda_{\max}(\mathcal{D})}\delta} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| + \eta)^2 \\ \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| - \eta &\leq e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{2\lambda_{\max}(\mathcal{D})}\delta} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| + \eta) \\ \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| &\leq e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{2\lambda_{\max}(\mathcal{D})}\delta} (\|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| + 2\eta) \end{aligned}$$

El parámetro η , que determina la distancia mínima entre los hiperplanos de conmutación,

está acotado por debajo por

$$\eta \geq \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\lambda_{\min}(\mathcal{R}_T)}{2\lambda_{\max}(\mathcal{D})}\delta} \right) \|(\mathcal{J} + \mathcal{R}_T)^{-1} \mathcal{M}\Delta\| \triangleq \gamma(\delta, \Delta),$$

resultado que se deriva del mapa discreto definido por los puntos de intersección entre la trayectoria \tilde{x} y los hiperplanos de conmutación. Defínase como \mathcal{B}_η a una bola de radio η , esta bola constituye una vecindad del origen de \tilde{x} dentro de la cual no es posible determinar las propiedades de la trayectoria $\tilde{x}(t)$ con base a lo obtenido. En consecuencia, el sistema será asintóticamente últimamente estable con respecto a $\mathcal{B}_\eta \subset \Theta_1$.

4.4. Aplicaciones

En la actualidad, los rigurosos requerimientos actualmente impuestos para condicionar el suministro eléctrico se centran en la minimización de la distorsión armónica total, DAT, tanto en señales de voltaje como de corriente, siendo este un tema de investigación muy activo. Más aún, este problema de minimización se complica más si se toma en cuenta que los niveles bajos de distorsión deben alcanzarse garantizando, de manera simultánea, un alto desempeño dinámico en el comportamiento del convertidor, es decir, una rápida respuesta transitoria de salida y un comportamiento de estado estacionario preciso. A continuación se presenta la validación del método arriba propuesto para tres casos particulares de convertidores conmutados, en los cuales el objetivo de control es resolver un problema de regulación por medio del cual se busca mejorar el desempeño dinámico, los problemas a resolver son: el problema de rectificación en convertidores de CD a CD monofásicos, el problema de regulación en un inversor regulador de voltaje y el problema de regulación en un convertidor en cascada de fuentes independientes. En todos los casos se presentan resultados de simulación digital.

4.4.1. Control del regulador reductor de CD a CD

En esta sección se muestra la utilidad del controlador propuesto para el caso particular de un convertidor regulador de CD a CD mediante simulación digital. Con este fin, dos trabajos de simulación fueron llevados a cabo. El propósito del primero fue evaluar las propiedades teóricas del esquema de control ante condiciones nominales de carga. En el segundo caso, se presenta el desempeño del sistema controlado ante la presencia de una reducción del 50% en la magnitud de la carga. Las simulaciones fueron realizadas bajo las suposiciones 4.1 a 4.6.

El controlador promediado es el siguiente:

$$\begin{aligned} V_e \mu(t) &= z_2(t) - k_1 \tilde{z}_1(t) - k_2 \tilde{z}_2(t) \\ z_{1d}(t) &= \frac{1}{R} z_{2d}(t) \end{aligned}$$

El controlador maestro-esclavo es

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_M, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) + \varepsilon \leq 0 \\ \varphi_m, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) - \varepsilon \geq 0 \\ \varphi(t^-), & \text{si } -\varepsilon < \phi^T \tilde{x}(t) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\varphi_M = \lceil \mu(t) \rceil$$

$$\varphi_m = \lfloor \mu(t) \rfloor$$

con $\mu(t) \in [0, 1]$ y $\varphi(t) \in \{0, 1\}$.

Las siguientes observaciones se aplican a ambos experimentos:

- Se empleó el paquete de simulación POWERLIB, de MATLAB con el fin de incluir en las simulaciones el efecto de elementos parásitos en los dispositivos interruptores.
- Los parámetros de simulación fueron los siguientes: $V_e = 300$ [V], $x_d^\perp = 150$ [V], $C = 47$ [μF], $L = 15$ [mH], $R = 20$ [Ω].
- Los parámetros de retroalimentación de los controladores son: $k_1 = 70$; $k_2 = 3$.
- Los hiperplanos de conmutación son

$$[1, 0.1] \tilde{x} = 1,74, \text{ y}$$

$$[1, 0.1] \tilde{x} = -1,74$$

es decir, los puntos \tilde{x}_{me} y \tilde{x}_{Me} están separados entre sí una distancia dada por 2η , con $\eta = 1.73$.

Resultados de simulación

Los resultados de simulación obtenidos considerando condiciones de operación nominales en la carga son los siguientes: En la figura 4.4a se muestran los comportamientos transitorios de la variable de voltaje en el capacitor C , para el controlador conmutado propuesto, la línea punteada es el voltaje de referencia. El comportamiento transitorio bajo el control conmutado presenta un sobrepaso debido a que la colocación de los hiperplanos de conmutación permiten incursiones prolongadas de la trayectoria del estado retroalimentado. El tiempo de asentamiento bajo el control conmutado es de 1.8 [mseg] aproximadamente con un sobrepaso del 6.6%. El error estacionario, figura 4.4b, presenta un error estacionario máximo de 2 [Volts]. La figura 4.4b muestra también el comportamiento estacionario de la variable de error, la cual presenta una señal de rizo. Respecto a la señal de control, ésta se muestra en la figura 4.7 donde el transitorio de la señal de control conmutada se muestra en la parte (a), y la señal de control ante la variación en la carga en la parte (b). La figura 4.5 muestra el comportamiento de la variable de error en su plano de fase. Dicha figura revela un comportamiento tipo ciclo límite durante el estado estacionario.

La segunda simulación consistió en una reducción del 50% en la carga del sistema (es decir una carga de 10 [Ω]) aplicada desde el instante de tiempo $t = 0.02$ [seg] hasta $t = 0.03$ [seg]. La

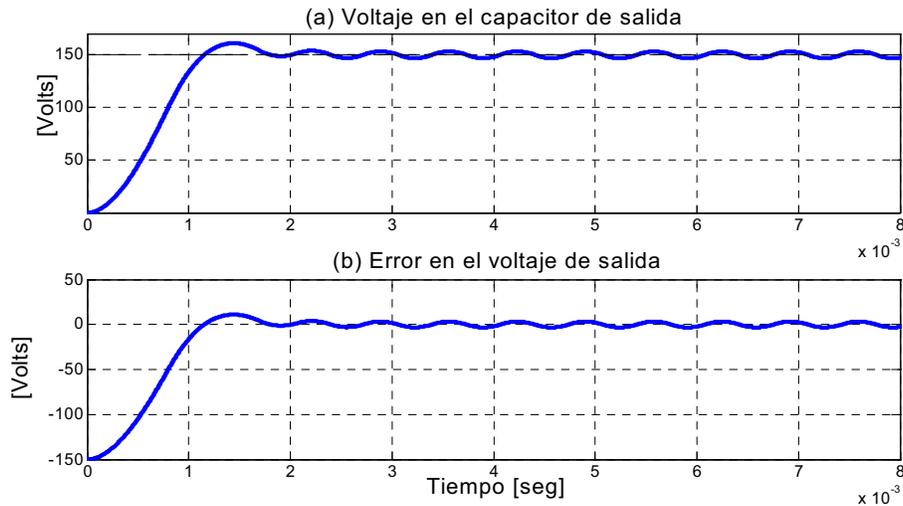


Figura 4.4: (a) Transitorio de la señal de voltaje de salida. (b) Transitorio de la variable del error de voltaje.

figura 4.6 muestra el comportamiento del voltaje en el capacitor bajo el control conmutado. La poca robustez del control conmutado ante la perturbación es revelada por la desviación de hasta 40[volts] en el error de voltaje mostrado en la figura 4.6b. La figura 4.8 muestra la forma en la cual la trayectoria del estado de error mantiene, después de un periodo transitorio, un comportamiento periódico durante el intervalo en el cual la carga es perturbada. Finalmente la figura 4.9 muestra la evolución en el tiempo de la función de energía (4.29).

Discusión. El desempeño del sistema de control depende no sólo del campo vectorial que gobierna a cada modo de operación, sino también de la manera como se definan los hiperplanos $\phi^T \tilde{x} + \varepsilon = 0$ y $\phi^T \tilde{x} - \varepsilon = 0$. En el caso de las simulaciones anteriores, los hiperplanos escogidos generaron un comportamiento transitorio en el voltaje de salida relativamente pequeño gracias a que su pendiente permitió “cortar” relativamente rápido las incursiones de la trayectoria para cada modo de operación, sin embargo, la robustez ante variaciones en la carga resultó ser muy pobre. Sin embargo, si los hiperplanos se definen como

$$\begin{aligned} [1, 2] \tilde{x} &= 3.87, \text{ y} \\ [1, 2] \tilde{x} &= -3.87 \end{aligned} \quad (4.41)$$

la situación cambia totalmente: En la figura 4.10 se observa como el transitorio de la señal de voltaje crece hasta alcanzar un 33% de máximo sobrepaso con un tiempo de asentamiento de aproximadamente 4 [mseg]. Sin embargo, la robustez ante variaciones en la carga se ve incrementada al disminuirse el error de voltaje a menos de 7.5 [volts] de magnitud. Es decir, para hiperplanos de la forma $\phi^T \tilde{x} = \pm \varepsilon$ se presenta un compromiso entre desempeño transitorio y robustez ante variaciones en la carga para la señal de voltaje de salida.

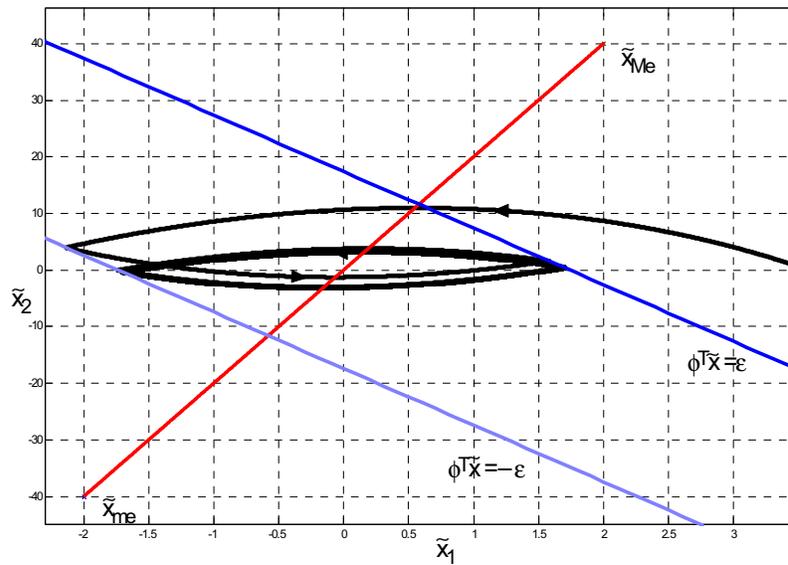


Figura 4.5: Retrato de fase de la dinámica del error.

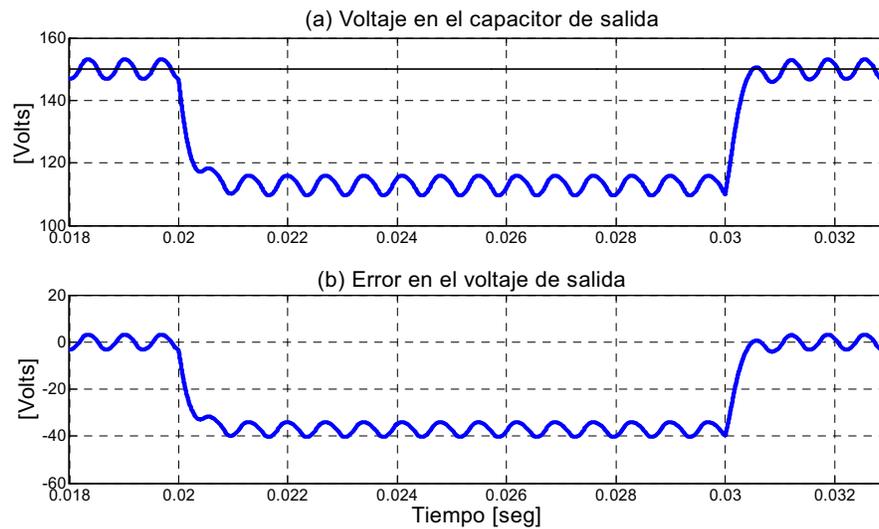


Figura 4.6: (a) Señal de voltaje de salida ante una variación en la carga. (b) Señal del error de voltaje ante una variación en la carga.

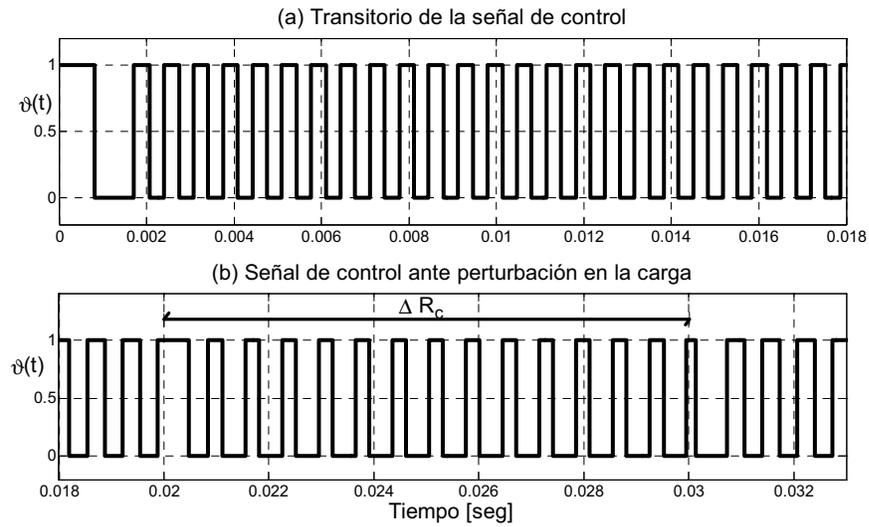


Figura 4.7: Gráficos de la señal de control φ bajo las siguientes condiciones de operación: (a) estado transitorio, (b) evolución ante una perturbación del 50 % en la carga.

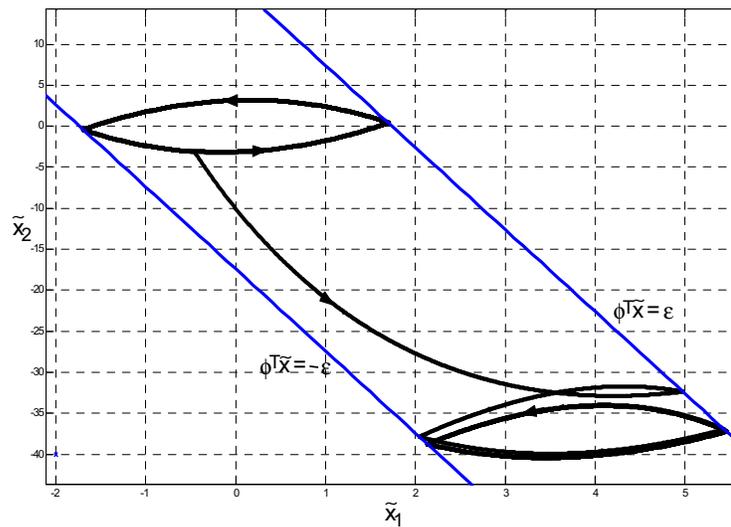


Figura 4.8: Retrato de fase que muestra el comportamiento de la trayectoria del error antes y durante la aplicación de la variación en la carga.

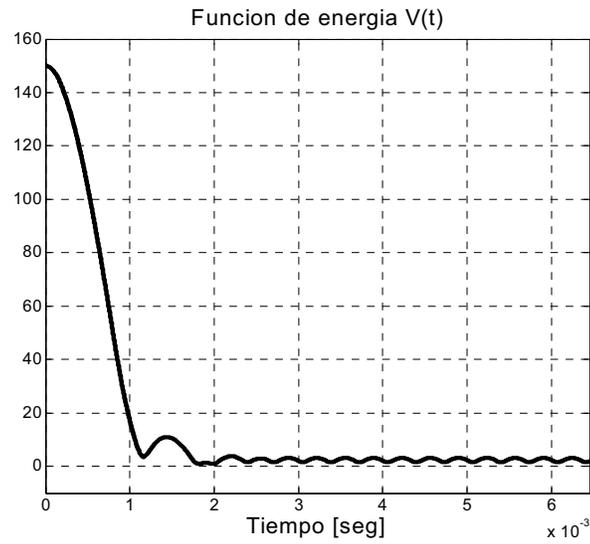


Figura 4.9: Evolución en el tiempo de la función de energía V .

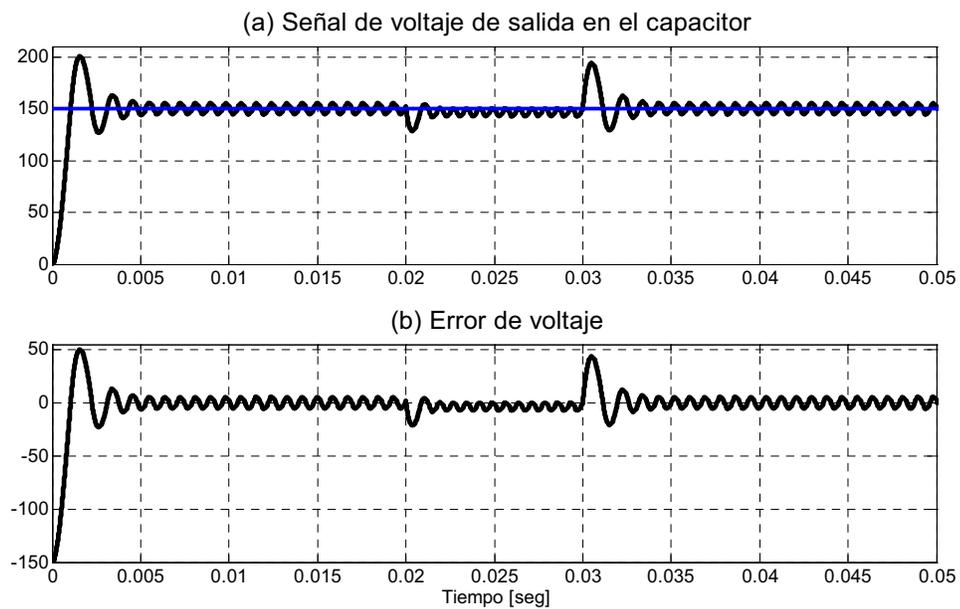


Figura 4.10: Desempeño de la señal de voltaje al aplicar los hiperplanos $[1, 2]\tilde{x} = \pm 3.87$.

4.4.2. Control del inversor de puente completo

Las fuentes ininterrumpibles de voltaje (UPS) se emplean principalmente como un mecanismo de protección o respaldo cuando la principal fuente de energía eléctrica no esta a disposición, o como un sistema condicionado para garantizar un apropiado suministro de energía, principalmente en el caso de cargas críticas como sistemas de comunicación o de cómputo. En ambos casos, el objetivo principal consiste en la entrega de un voltaje de salida senoidal con un mínimo de distorsión armónica, aunque algunos otros requerimientos son también importantes, por ejemplo el tamaño y el costo.

La estructura básica para fuentes UPS consiste en un circuito inversor manejado mediante señales PWM y un filtro de segundo orden a la salida. Es claro que bajo estas condiciones el tamaño y el costo del dispositivo está definido por la elección de los elementos pasivos que constituyen el filtro y por la frecuencia de las señales involucradas en el mecanismo PWM, donde el desempeño del circuito proviene del controlador implementado para alcanzar el objetivo mencionado.

Objetivo de control

El problema de controlar el voltaje de salida de una fuente UPS consiste en diseñar una señal de control $\varphi(t)$ que garantice el seguimiento de un voltaje de referencia $x_d^\perp(t)$ para el voltaje no actuado en el sistema descrito por la ecuación (4.1). Este objetivo debe lograrse con una corriente de inductancia finita. Además debe notarse que, en el caso de UPS, el voltaje de referencia es una señal sinusoidal con amplitud y frecuencia fija.

Control de una fuente UPS de puente completo

A continuación se presenta el CBP conmutado para una fuente UPS con topología de puente completo.

Si las suposiciones 4.1 a 4.6 se satisfacen, entonces el controlador promediado propuesto para resolver el problema de control es el siguiente

$$V_e \mu(t) = L \dot{x}_d^q(t) + x_d^q(t) - [K_1^q \quad K_2] \tilde{x}(t)$$

$$C \dot{x}_d^\perp(t) = -x_d^q(t) + \frac{1}{R} x_d^\perp(t),$$

mientras que el controlador esclavo es

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_M, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) + \varepsilon \leq 0 \\ \varphi_m, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) - \varepsilon \geq 0 \\ \varphi(t^-), & \text{si } -\varepsilon < \phi^T \tilde{x}(t) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\varphi_M = \lceil \mu(t) \rceil$$

$$\varphi_m = \lfloor \mu(t) \rfloor$$

con $\mu(t) \in [0, 1]$ y $\varphi(t) \in \{-1, 0, 1\}$.

Con el fin de evaluar el controlador propuesto dos trabajos de simulación fueron llevados a cabo. El propósito del primero fue evaluar las propiedades transitorias y de régimen estacionario del esquema de control ante condiciones nominales de carga. En el segundo proceso de simulación se presenta el desempeño del sistema controlado ante la presencia de una carga no-lineal. Más aún, los desempeños obtenidos fueron comparados con los resultados derivados, bajo las mismas condiciones de simulación, del controlador maestro basado en pasividad utilizando un dispositivo PWM para su implementación. Las siguientes observaciones se aplican a ambas simulaciones:

- Se empleó el paquete de simulación POWERLIB, de MATLAB con el fin de incluir en las simulaciones el efecto de elementos parásitos en los dispositivos interruptores.
- Los parámetros de simulación fueron los siguientes: $V_e = 1000 [V]$, $x_d^\perp = 4500 \text{sen}(120\pi t) [V]$, $C = 47 [\mu F]$, $L = 15 [mH]$, $R = 50[\Omega]$, donde V_e es el voltaje de CD de cada una de las cinco fuentes de voltaje independientes empleadas.
- Los parámetros de retroalimentación de los controladores son: $k_1 = 20$; $k_2 = 1$.
- El controlador PWM se implementó mediante una señal PWM de $4KHz$.
- Los hiperplanos de conmutación son

$$\begin{aligned} [1, 10]\tilde{x} &= 2.2 \times 10^{-3}, \text{ y} \\ [1, 10]\tilde{x} &= -2.2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

es decir, los puntos \tilde{x}_{me} y \tilde{x}_{Me} están separados entre sí una distancia dada por 2η con $\eta = 220$.

Resultados de simulación

Los resultados de simulación obtenidos para el primer experimento, considerando condiciones de operación nominales en la carga, son los siguientes: En la figura 4.11a se muestran los comportamientos transitorios de la variable de voltaje en el capacitor C para el controlador conmutado propuesto, línea negra, la señal de voltaje de referencia en línea punteada, y el voltaje de salida obtenido al aplicar, mediante PWM, el controlador maestro, línea azul. Dichas gráficas muestran como ambos controladores alcanzan un transitorio con duración menor a $\frac{1}{4}$ de ciclo. En la figura 4.11b puede observarse el error de votaje obtenido por ambos controladores: En el caso del control por conmutación, el error es menor al 2%, mientras que para el caso del control PWM el error estacionario no es mayor al 3%. Las correspondientes señales de control pueden observarse en la figura 4.12. El retrato de fase de la figura 4.13 muestra el comportamiento de las variables de error para el sistema de control formado por el control conmutado, en la cual puede observarse cómo la trayectoria tiende al comportamiento cíclico esperado, mas no a un comportamiento tipo ciclo límite simple.

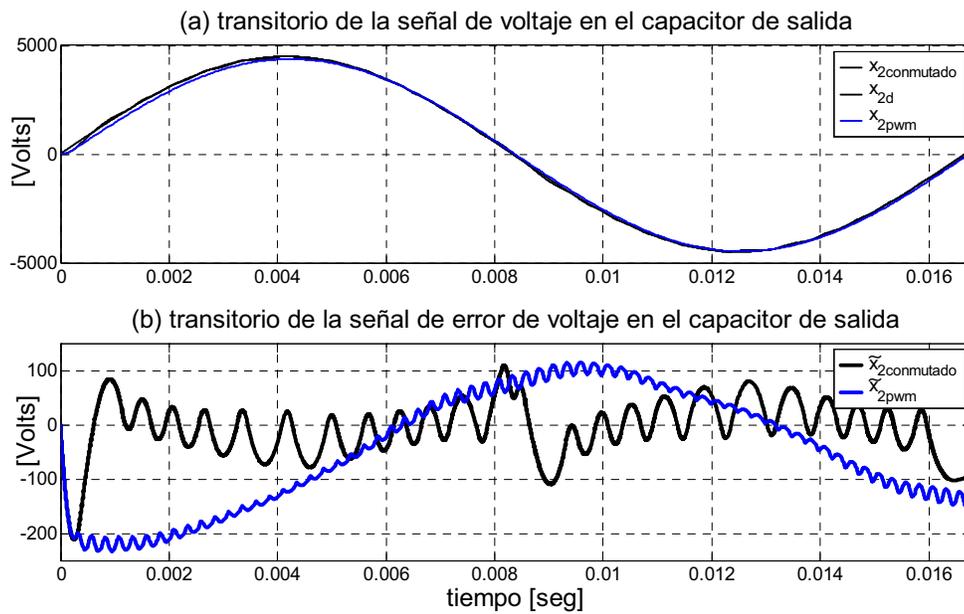


Figura 4.11: UPS: Comparativo de los desempeños obtenidos con el CBP-conmutado y el CBP-PWM. (a) Transitorio de la señal de voltaje de salida. (b) Transitorio de la variable del error de voltaje.

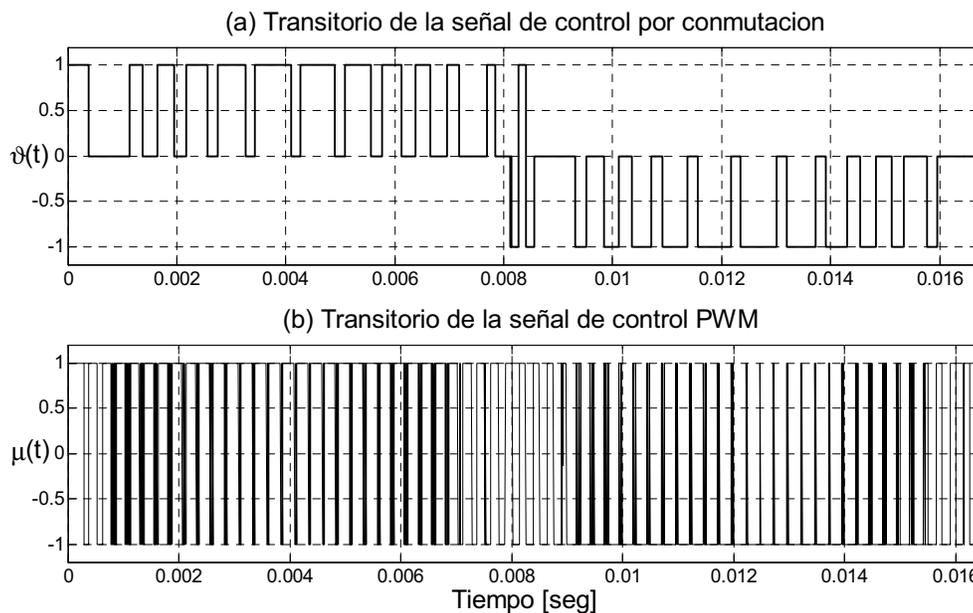


Figura 4.12: UPS: (a) Transitorio de la señal de control por conmutación φ . (b) Transitorio de la señal de control PWM μ .

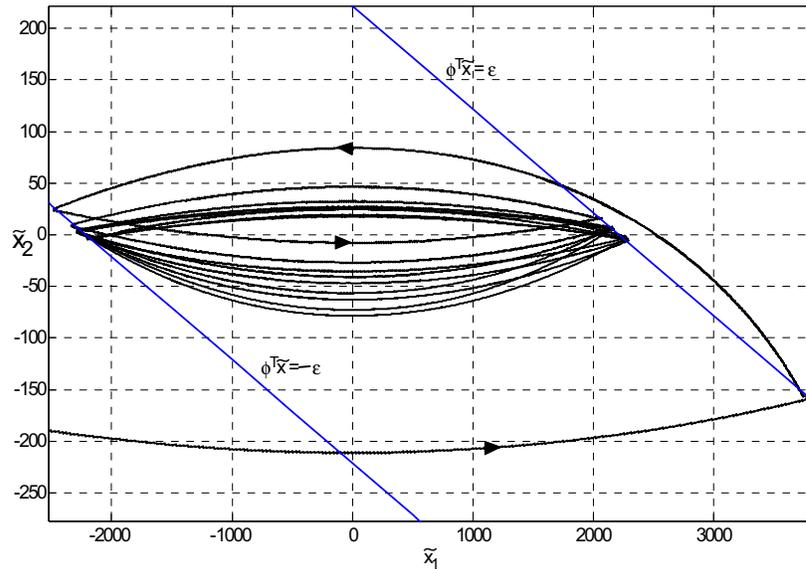


Figura 4.13: Retrato de fase de la dinámica del error para el convertidor de puente completo.

La segunda simulación consistió en la conexión de una carga no lineal en paralelo con la carga nominal durante el intervalo de tiempo $[46, 66]$ *mseg*. La figura 4.14a muestra el desempeño alcanzado por la variable de voltaje bajo la acción de los controladores propuestos, línea negra para el control conmutado y línea azul para el control PWM. Ambos controladores demostraron muy poca variación en el desempeño temporal de sus respectivas variables de error, figura 4.14b, lo cual demuestra que el controlador maestro es robusto respecto a la carga a pesar del cambio en la política de implementación. Las figuras 4.15a y 4.15b muestran el desempeño de los controladores conmutado y PWM, respectivamente, bajo la condición de carga no lineal.

4.4.3. Control de convertidores en cascada

En este apartado se mostrará el desempeño de un convertidor multinivel de voltaje en lazo cerrado con el controlador conmutado propuesto. El convertidor multinivel considerado está estructurado mediante fuentes independientes de voltaje conectadas entre sí mediante cinco puentes completos, donde las ramas de cada puente son controladas de manera independiente, es decir, el convertidor multinivel considerado es un convertidor en cascada de once etapas. El voltaje de salida del convertidor se encuentra conectada a una carga resistiva nominal a través de un filtro *LC* tal y como se muestra en la figura 4.16.

El problema de controlar el voltaje de salida de una fuente multinivel consiste en diseñar una señal de control $\varphi(t)$ que garantice el seguimiento de una señal de voltaje de referencia

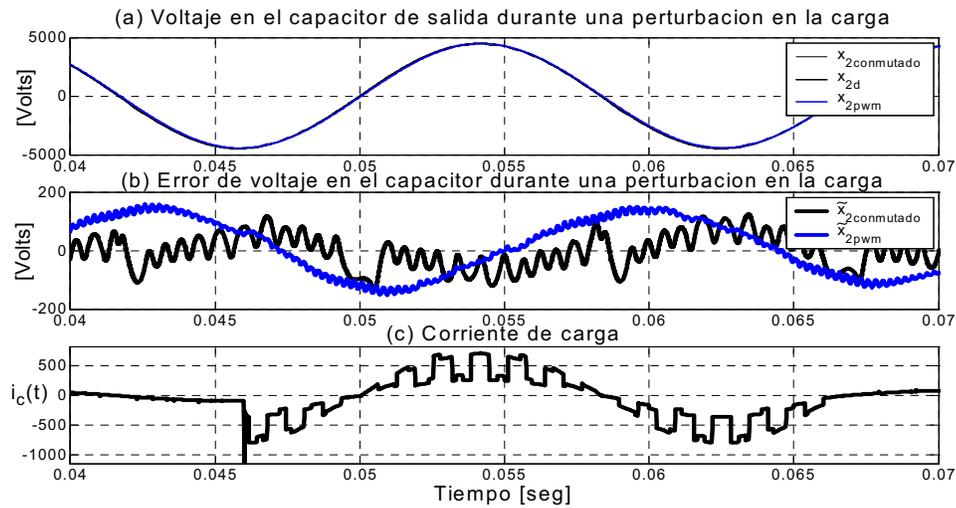


Figura 4.14: UPS: (a) Comparativo de la señal de voltaje ante una carga no lineal para el control por conmutación y el control PWM. (b) Comparativo del error de voltaje. (c) Evolución en el tiempo de la corriente de carga.

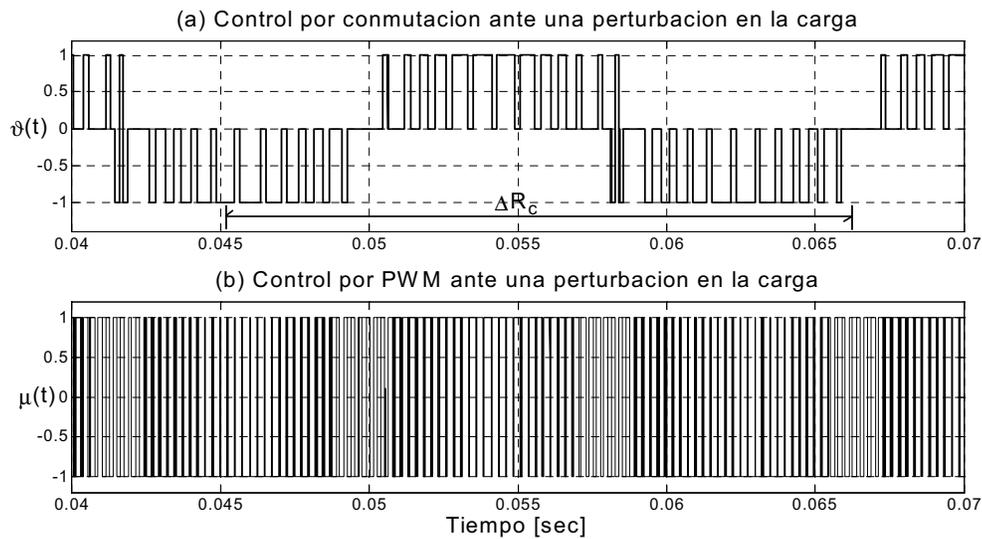


Figura 4.15: UPS: (a) Comportamiento temporal de la señal de control por conmutación φ ante una carga no-lineal. (b) Comportamiento temporal de la señal de control PWM μ ante una carga no-lineal.

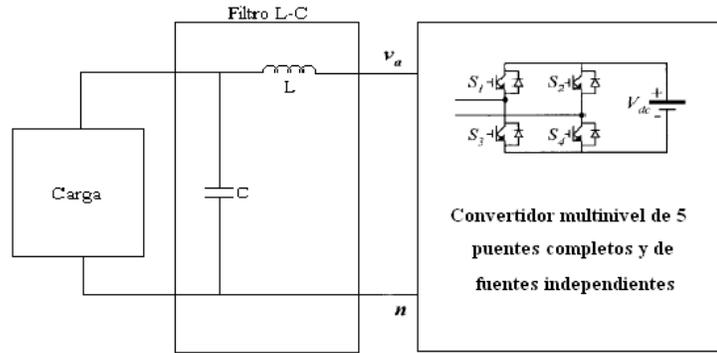


Figura 4.16: Esquema generalizado del convertidor multinivel considerado.

$x_d^\perp(t)$ para el voltaje en el sistema descrito por la ecuación (4.1). Asuma que las suposiciones 4.3, 4.4 y 4.5 se satisfacen, entonces el objetivo de control dado por (4.4) es satisfecho mediante el controlador promediado

$$V_e \mu(t) = L \dot{x}_d^q(t) + x_d^q(t) - [K_1^q \quad K_2] \tilde{x}(t)$$

$$C \dot{x}_d^\perp(t) = -x_d^q(t) + \frac{1}{R_c} x_d^\perp(t)$$

junto con el controlador maestro-esclavo dado por

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_M, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) + \varepsilon \leq 0 \\ \varphi_m, & \text{si } \phi^T \tilde{x}(t) - \varepsilon \geq 0 \\ \varphi(t^-), & \text{si } -\varepsilon < \phi^T \tilde{x}(t) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\varphi_M = \lceil \mu(t) \rceil$$

$$\varphi_m = \lfloor \mu(t) \rfloor$$

con $\mu(t) \in [-1, 1]$ y $\varphi(t) \in \{-1, -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

Para evaluar el controlador propuesto dos experimentos de simulación fueron llevados a cabo. El propósito del primero fue evaluar las propiedades transitorias y de régimen estacionario del esquema de control ante condiciones nominales de carga. En el segundo proceso de simulación se presenta el desempeño del sistema controlado ante la presencia de una carga no-lineal. Por otro lado, los desempeños obtenidos en ambas simulaciones fueron comparados con los resultados derivados, bajo las mismas condiciones de simulación, al utilizar el controlador maestro basado en pasividad utilizando un dispositivo PWM para su implementación. Las siguientes observaciones se aplican a ambas simulaciones:

- Se empleó el paquete de simulación POWERLIB, de MATLAB con el fin de incluir en las simulaciones el efecto de elementos parásitos en los dispositivos interruptores.

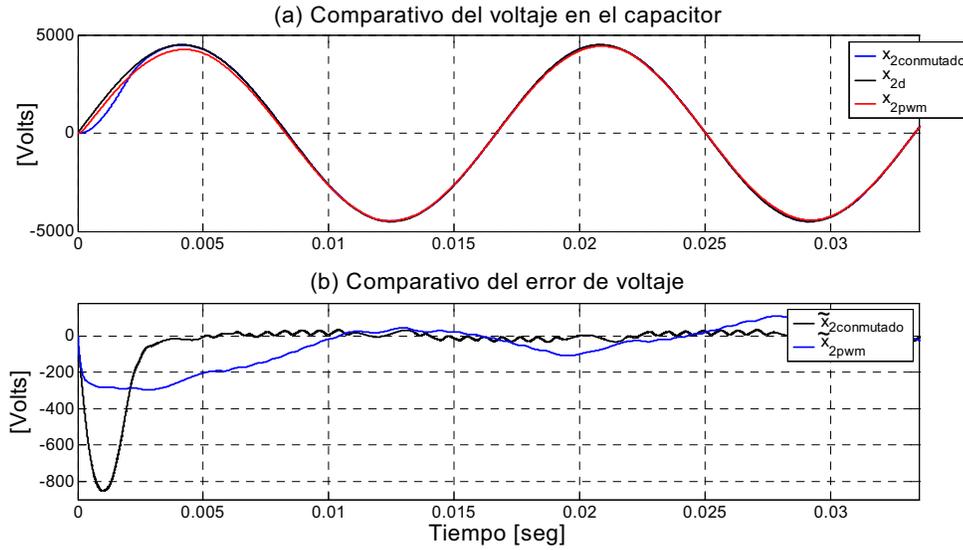


Figura 4.17: Convertidor multinivel: Comparativo de los desempeños obtenidos con el CBP-conmutado y el CBP-PWM. (a) Transitorio de la señal de voltaje de salida. (b) Transitorio de la variable del error de voltaje.

- Los parámetros de simulación fueron los siguientes: $V_e = 5000 [V]$, $x_d^{\perp} = 4500 \text{sen}(120\pi t) [V]$, $C = 4700[\mu F]$, $L = 15 [mH]$, $R = 50[\Omega]$.
- Los parámetros de retroalimentación de los controladores son: $k_1 = 20$; $k_2 = 1$.
- El controlador PWM se implemento mediante una señal PWM de $4KHz$.
- Los hiperplanos de conmutación utilizados fueron elegidos como sigue

$$\begin{aligned} [1, 10]\tilde{x} &= 441.6, \text{ y} \\ [1, 10]\tilde{x} &= -441.6 \end{aligned}$$

lo que da como resultado que los puntos \tilde{x}_{me} y \tilde{x}_{Me} estén separados entre sí una distancia dada por 2η , con $\eta = 43.95$.

Resultados de simulación

Los resultados del primer trabajo de simulación, considerando condiciones de operación nominales en la carga, son los siguientes: En la figura 4.17a se muestran los comportamientos transitorios de la variable de voltaje en el capacitor C para el controlador conmutado propuesto, línea azul, la señal de voltaje de referencia en línea punteada, y el voltaje de salida obtenido al aplicar, mediante PWM, el controlador maestro, línea roja. Dichas gráficas muestran como el sistema en lazo cerrado con el control conmutado presenta un transitorio

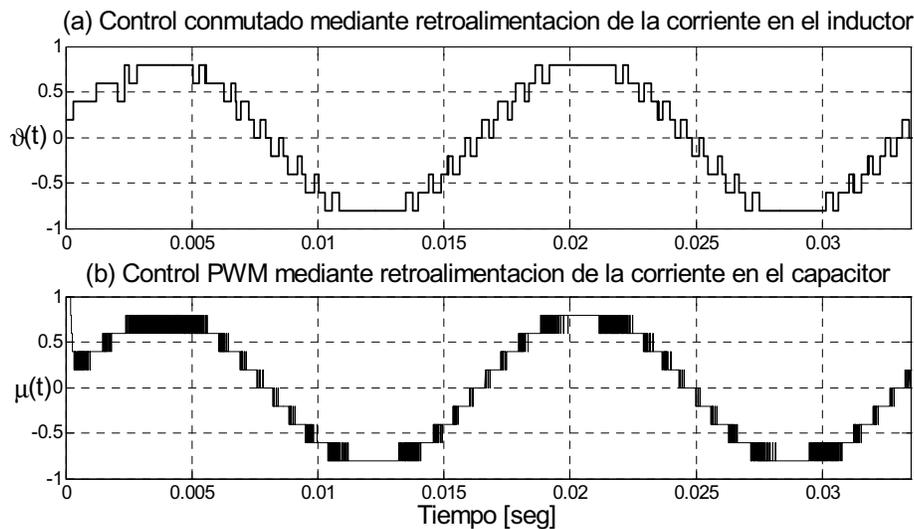


Figura 4.18: Convertidor multinivel: (a) Transitorio de la señal de control por conmutación φ . (b) Transitorio de la señal de control PWM μ .

de un cuarto de ciclo, en tanto que el sistema en lazo cerrado con el control PWM alcanza el estado estacionario después de medio ciclo de operación. En la figura 4.17b puede observarse el error de voltaje obtenido por ambos controladores: En el caso del control por conmutación, el error es menor al 0.7%, mientras que para el caso del control PWM el error estacionario no es mayor al 2.2%. Las correspondientes señales de control pueden observarse en la figura 4.18. La figura 4.19 muestra el retrato de fase del comportamiento de las variables de error para el sistema de control formado por el control conmutado. En dicha figura puede observarse cómo la trayectoria tiende al comportamiento cíclico esperado, pero al igual que en el caso del convertidor de puente completo, el comportamiento no se estaciona en un ciclo límite simple.

La segunda simulación consistió en la conexión de una carga no lineal en paralelo con la carga nominal durante el intervalo de tiempo $[46,66]$ *mseg*. La figura 4.20a muestra el desempeño alcanzado por la variable de voltaje bajo la acción de los controladores propuestos, línea azul para el control conmutado y línea roja para el control PWM. Ambos controladores demostraron muy poca variación en el desempeño temporal de sus respectivas variables de error, véase la figura 4.20b la cual muestra las variables de error de voltaje obtenidas para cada controlador. En consecuencia puede decirse que el controlador maestro es robusto respecto a la carga a pesar del cambio en la política de implementación. Las figuras 4.21a y 4.21b muestran el desempeño de los controladores conmutado y PWM, respectivamente, bajo la condición de carga no lineal.

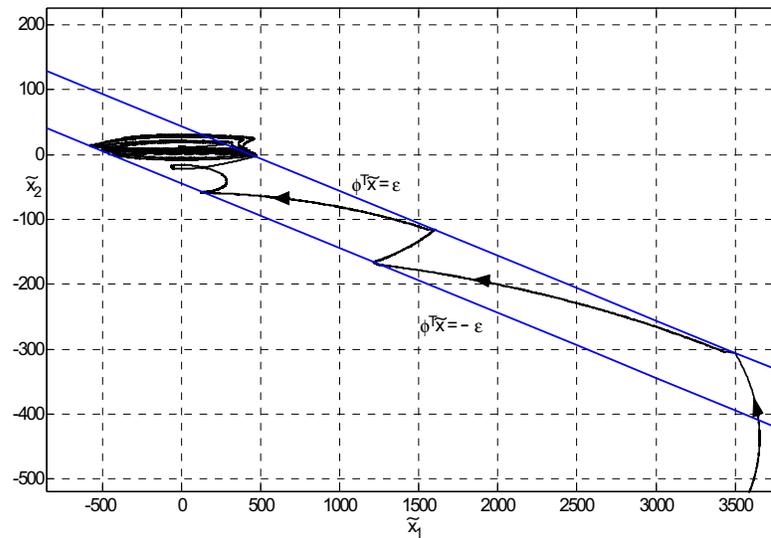


Figura 4.19: Retrato de fase de la dinámica del error del convertidor multinivel

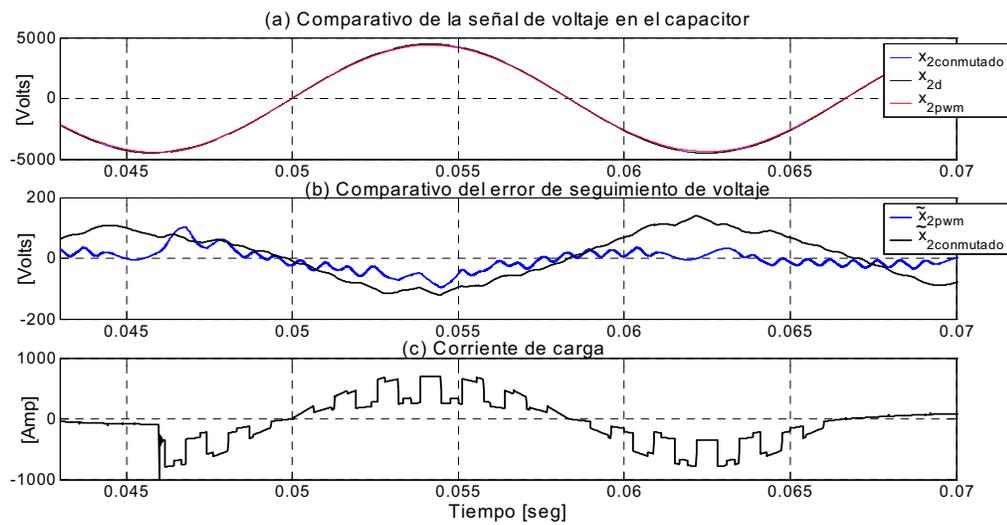


Figura 4.20: Convertidor multinivel: (a) Comparativo de la señal de voltaje ante una carga no lineal para el control por conmutación y el control PWM. (b) Comparativo del error de voltaje. (c) Evolución en el tiempo de la corriente de carga.

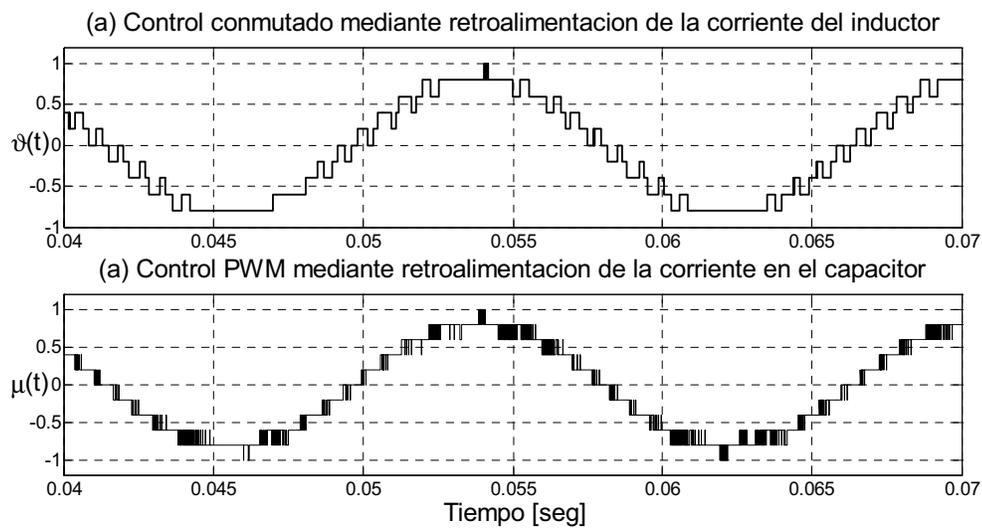


Figura 4.21: Convertidor multinivel: (a) Comportamiento temporal de la señal de control por conmutación φ ante una carga no-lineal. (b) Comportamiento temporal de la señal de control PWM μ . ante una carga no-lineal.

Conclusiones

De manera general, el problema de control para convertidores estáticos de potencia de topología reductora es resuelto con base en modelos de naturaleza continua utilizados para aproximar la dinámica del comportamiento de dichos sistemas bajo condiciones de alta velocidad de conmutación. Como resultado de ello, las leyes de control resultantes son de naturaleza continua. Sin embargo, el costo que debe pagarse al aplicar esta metodología es la necesidad de implementar los controladores obtenidos mediante actuadores capaces de conmutar a altas frecuencias. En este trabajo de tesis se presenta una metodología de control que extiende el procedimiento arriba mencionado al emplear una última etapa de diseño que busca explotar las características discretas de los dispositivos conmutadores empleados en la implementación. El resultado es un controlador Maestro-esclavo compuesto por una ley de control continua y un mecanismo de conmutación por hiperplanos. El controlador maestro tiene como objetivo seleccionar los niveles lógicos (de entre un conjunto finito bien caracterizado) que el mecanismo de conmutación debe utilizar para generar una secuencia de conmutación de acuerdo a la definición dada en (2.13).

El diseño del controlador maestro-esclavo parte de la construcción de dos modelos matemáticos válidos para convertidores monofásicos tanto reductores como inversores y en cascada. El primero de ellos es un modelo dinámico con discontinuidades en su parte derecha, el cual es capaz de representar el efecto que sobre el comportamiento dinámico de los convertidores, tienen de los dispositivos conmutadores que los componen. El segundo modelo es una versión promediada del primero, construida con el fin de diseñar la componente maestra del controlador propuesto. Estos modelos fueron construidos mediante la técnica variacional conocida como Modelado de Sistemas Euler-Lagrange, la cual da como resultado modelos matemáticos en los cuales aparecen de manera explícita diversas propiedades estructurales de los convertidores reductores.

El control maestro se construyó siguiendo la técnica de diseño conocida como Control Basado en Pasividad, [40], la cual explota las características estructurales del modelo. El controlador obtenido requiere de la medición completa del estado, sin embargo bajo la adecuada transformación de coordenadas, se demostró que el controlador es equivalente a un control por retroalimentación de la corriente en el capacitor de salida, esto gracias a que el modelo transformado posee la propiedad conocida como pasividad débil con respecto a dicha corriente.

El controlador esclavo, la principal contribución de este trabajo, es un mecanismo de conmutación que explota el efecto que los dispositivos conmutadores poseen sobre la dinámica de los convertidores. Fue diseñado con base en la definición de un mecanismo de conmutación

tipo histéresis en donde la conmutación está determinada por medio de la partición del espacio de error de estado en dos conjuntos disjuntos por cada modo de operación. La partición se consigue mediante la definición de rectas (hipersuperficies) de la forma $\phi^T \tilde{x} \pm \varepsilon = 0$.

La estabilización asintótica de convertidores estáticos de potencia en lazo cerrado con el controlador conmutado propuesto sólo puede garantizarse con respecto a una vecindad del origen del espacio de la variable de error, la cual fue caracterizada en función de dos factores: en forma directamente proporcional al error de cuantificación obtenido, y por tanto del número de niveles de cuantificación disponibles, y en forma inversamente proporcional a la ganancia K_2 utilizada en la parte continua del controlador para la retroalimentación de los estados no actuados.

El controlador fue validado mediante la simulación digital de convertidores de topología reductora, tanto reguladores como inversores y en cascada, en lazo cerrado con el control. En todas las simulaciones el objetivo de control consistió en la regulación del voltaje de salida. Entre los resultados obtenidos se encontró lo siguiente: El comportamiento transitorio de las variables continuas del sistema en lazo cerrado presentan comportamientos cuyas características transitorias dependen de la colocación de las superficies de conmutación propuestas y, sobre todo, de las características del retrato de fase de cada uno de los campos vectoriales que componen a la familia de campos vectoriales de los sistemas conmutados considerados. En consecuencia, dichas características pueden ser determinadas de manera arbitraria a partir de la adecuada selección de las regiones de conmutación. Esta misma observación es aplicable para el caso de variaciones bruscas en el parámetro de la carga, ya que el comportamiento de las variables continuas también dependerá de los factores arriba señalados. Más aún, para hipersuperficies de la forma $\phi^T \tilde{x} \pm \varepsilon = 0$ existe un compromiso entre desempeño transitorio y robustez ante variaciones en la carga.

En resumen, la metodología empleada ha demostrado ser una alternativa viable para el control de aquellos SDC y de SDH cuyo problema de control tenga solución bajo la consideración de que existan modelos matemáticos de naturaleza continua.

Trabajo futuro

Son varias las líneas de investigación que pueden derivarse de este trabajo. En primer lugar está la posibilidad de utilizar otro tipo de estrategia de conmutación que no sea la histéresis, por ejemplo, si la velocidad de conmutación no es importante, entonces es posible sustituir al mecanismo de decisión lógica por funciones de cuantificación, por mecanismos de control por modos deslizantes o por cualquier mecanismo lógico como los comúnmente empleados en la literatura relacionada con los SDC o los SDH. Respecto a las regiones de conmutación, es posible que estas puedan ser definidas con el objeto de disminuir al menos un parámetro de desempeño relacionado ya sea con el comportamiento dinámico de las variables continuas o con respecto a parámetros relacionados al problema de la calidad de la energía eléctrica que los CEP deben cumplir (como por ejemplo baja distorsión armónica, factor de potencia de no menos del 95 %, etc.), para lo cual es muy probable que la región

de conmutación deba ser definida variante en el tiempo o incluso definida en términos más complejos que desigualdades lineales y ecuaciones de recta.

El control basado en pasividad de la señal de corriente en el capacitor, tiene el inconveniente de que el valor de dicho capacitor debe ser perfectamente conocido, problema que puede ser atacado mediante el uso controladores adaptables o mediante la formulación de regiones de conmutación que permitan obtener una robustez ante variaciones o cambios no sólo en el capacitor, sino también en la inductancia del filtro.

Queda pendiente diseñar y validar el control maestro-esclavo para los casos en los cuales el control maestro sea constringido mediante técnicas distintas al control basado en pasividad.

Respecto al caso de convertidores estáticos quedan pendientes diversas líneas de investigación: Para el caso de los convertidores multinivel, el problema de considerar capacitores en vez de fuentes independientes se vé complicado por el hecho de que el convertidor resultante es un convertidor de topología tipo elevadora, cuyo modelo matemático es de la forma $\dot{x}(t) = A_{\varphi(t)}x(t) + b(t)$. De manera general, el problema de extender la metodología propuesta a sistemas conmutados lineales más generales, como por ejemplo los sistemas descritos por (2.9), o por sistemas conmutados no lineales, está limitado por la falta de resultados en materia tanto de estabilidad como de control. Más aún, debido a que esta clase de sistemas son estudiados por investigadores de distintas áreas de conocimiento, es poco probable que este problema pueda ser resuelto a corto plazo ya que no hay indicios en la literatura que revelen el desarrollo de una unificación de criterios.

Bibliografía

- [1] Alvarez-Ramírez J., Espinosa-Pérez G., and Noriega-Pineda D. *Current-mode Control of DC-DC Power Converters: A Backstepping approach*, International Journal on Robust and Nonlinear Control, vol. 13, Issue 5, 2003, pags: 421-442.
- [2] Antsaklis P., *A Brief Introduction to the Theory and Applications of Hybrid Systems*. IEEE Special Issue on Hybrid Systems: Theory and Applications, pp1-17, 2000.
- [3] Banerjee S., Verghese G. C. (Eds.), **Nonlinear phenomena in power electronics**. IEEE Press 2001.
- [4] Bardu C., Reginatto R., Tell A. R. y Zaccarian L., *Anti-windup for exponentially unstable linear systems with rate and magnitud inputs limits*, pags. 1-32, en [17].
- [5] Branicky M. S., *Stability of Hybrid Systems: State of the Art*. IEEE Conference on Decision and Control, pp. 120-125, December 1997.
- [6] Branicky M., Borkar V., Mitter S. *A unified framework for hybrid control: Model and optimal control theory*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 43, No.1, pags. 31-45, 1998.
- [7] Brockett, R. W.; Liberzon, D.; *Quantized feedback stabilization of linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, No. 7, july 2000, pags:1279-1289.
- [8] Campos-Canton, I.; Espinosa-Pérez, G.; *Nonlinear control of a half-bridge DC-CA converter: application to UPS*. *Proc. IEEE, Conf. On Decision and Control*. vol. 3, 1999, pags.: 2617-2622.
- [9] Cervantes Ilse , García-Chaparro David, Noriega-Pineda Daniel . *Linear multi-loop control of quasi-resonant converters*. Power Electronics, IEEE Transactions on , vol. 18 Issue: 5 , Sept. 2003 Page(s): 1194 -1201.
- [10] Chellaboina V., Bhat S. P., Haddad W. M.; *An Invariance Principle for Nonlinear Hybrid and Impulsive Dynamical Systems*. American Control Conference, pp. 3116-3122, June 2000.
- [11] D’Azzo J. J., Houpis C, H., **Linear control sytem analysis and design: conventional and modern**. 4th ed., New York, McGraw-Hill, 1995.

- [12] Engell S., Frehse G., Schnieder E., (Eds.), **Modelling, analysis, and design of hybrid systems**. Springer, 2002.
- [13] Escobar, G.; Ortega, R.; Sira-Ramírez, H.; Ludvigsen, H.; *A hybrid passivity based controller design for three phase voltage reversible Boost type rectifier*. IEEE Decision and Control, December 1998, pags.: 2035-2040.
- [14] Gelig, A. K.; Churilov A. N.; **Stability and oscillations of nonlinear pulse-modulated systems**. Birkhäuser Boston, 1998.
- [15] Hamill D.C., Banerjee S., Verghese G. C.; Introduction to power electronics, pags: 1-24, en [3].
- [16] Hu, B.; Feng, Z.; Michel, A. N.; *Quantized sampled-data feedback stabilization for linear and nonlinear control systems*. IEEE Conference on Decision and Control, december, 1999, pags: 4392-4397.
- [17] Kapila V., Grigoriadis K. M. (Eds.), **Actuator saturation control**. New York, Marcel Dekker, 2002.
- [18] Khalil, H. K.; **Nonlinear Systems**. Prentice-Hall, 1996.
- [19] Krein, P. T.; Bentsman, J.; Bass, R. M.; Lesieutre, B. L.; *On the use of averaging for the analysis of power electronic Systems*. IEEE Transactions on Power Electronics. vol. 5, no. 2. Pags.:182-190. 1990.
- [20] Labinaz G., Bayoumi M. M., Rudie K.; *A Model of Hybrid Systems and their Transition Dynamics*. IEEE Conference on Electrical Computer Engineering, pp. 925-930, May. 9-12, 1999.
- [21] Lennartson B., Tittus M., Egardt Bo, Pettersson S.; *Hybrid Systems in Process Control*. IEEE Control Systems, pp. 45-56, October 1996.
- [22] Li, Z. G.; Soh, Y. C.; Wen, C. Y.; *Stability of uncertain quasi-periodic hybrid dynamic systems*. Int. J. Control, 2000, vol. 73, no. 1, pags: 63-73.
- [23] Li, Z. G.; Soh, Y. C.; Wen, C. Y.; *Robust stability of quasi-periodic hybrid dynamic uncertain systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, no. 1, january 2001, pags: 107-111.
- [24] Li, Z. G.; Soh, Y. C.; Wen, C. Y.; **Switched and impulsive systems**. Springer, 2005.
- [25] Li, Z.; Soh, C. B.; Xu, X.; *Lyapunov stability of hybrid dynamic systems*. Automatica, vol. 36, 2000, pags: 297-302.
- [26] Li, Z. G.; Wen, C. Y.; Soh, Y. C.; *Stability of perturbed switched nonlinear systems*. American Control Conference, California, june 1999, pags: 2969- 2973.

- [27] Li, Z. G.; Xie, W. X.; Wen, C. Y.; Soh, Y. C.; *Globally exponential stabilization of switched nonlinear systems with arbitrary switchings*. Proc. IEEE Conference on Decision and Control, Australia, dec. 2000, pags: 3610-3615.
- [28] Liberzon, D.; Morse, A.S.; *Basic problems in stability and design of switched systems*. IEEE Control Systems Magazine, vol. 19, Issue. 5, oct. 1999, pags: 59 -70.
- [29] Liberzon D. **Switching in systems and control**. Birkhäuser, 2003.
- [30] Lygeros, J.; Pappas G.; Sastry, S.; *An introduction to hybrid system modeling, analysis and control*. (En línea), <http://www.seas.upenn.edu/~pappasg/publications.html>.
- [31] Ludvingsen, H.; Ortega, R.; Albertos, P.; Egeland, O.; *On hybrid control of nonlinear systems under slow sampling: applications to induction machines*. Versión sometida a NOLCOS'98.
- [32] Lunze J., *What is a hybrid system?*, Pags. 3-14. En [12]
- [33] Matveev A. S., Savkin A., **Qualitative theory of hybrid dynamical systems**. Birkhäuser, 2000.
- [34] Michel A. N., *Recent Trends in the Stability Analysis of Hybrid Dynamical Systems*. IEEE Trans. Circuits and Systems I, vol. 46, No. 1, pp. 120-134, Jan. 1999.
- [35] Michel A. M., Wang K., Hu B., **Qualitative theory of dynamical systems**. Marcel Dekker, 2da edición, 2001.
- [36] Mohrenschildt M. V., *Hybrid Systems: Solutions, Stability, Control*. American Control Conference, pp. 692-698, June 2000.
- [37] Noriega-Pineda D., Gerardo Espinosa-Pérez. *Control de Convertidores de tipo Buck con Entrada Cuantificada*, Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, México D.F., México, 2004.
- [38] Noriega P.D., **Control No-lineal de Convertidores Estáticos de Potencia: Un Enfoque Basado en Pasividad**. Tesis de Maestría, DEPMI-UNAM, 2003.
- [39] Noriega-Pineda, D.; Espinosa-Perez, G.; Varela-Vega, A.; Horta-Mejia, S.; *Experimental evaluation of an adaptive nonlinear controller for single-phase UPS*. Control Applications, 2001. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on, 2001. Pags: 254 -258.
- [40] Ortega, R.; Loría, A.; Nicklasson, P. J.; Sira-Ramírez, H.; **Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, electrical and electromechanical applications**. Springer-Verlag, 1998.

- [41] Passino K. M., Michel A. N., Antsaklis P. J.; *Lyapunov Stability of a Class of Discrete Event Systems*. IEEE Trans. Automatic Control, vol. 39, No. 2, pp 269-279, February 1994.
- [42] Petterson S., **Analysis and Design of Hybrid Systems**. Tesis de Doctorado. Chalmers University of Technology. Suecia. 1999.
- [43] Rubensson, M.; Lennartson, B.; *Stability of limit cycles in hybrid systems using discrete-time Lyapunov techniques*. Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on , vol. 2 , 12-15 Dec. 2000. Page(s): 1397 -1402 vol.2
- [44] Rubensson, M.; **Discret-time stability analysis of hybrid systems**. Thesis, Licentiate of Enginnering. Chalmers University of Thechnology, Sweden, 2000.
- [45] Sabanovic-Bebililovic, N.; Sabanovic, A.; Ninomiya, T.; *PWM in three-phase switching converters-sliding mode solution*. Proceeding of the IEEE PESC'94, pag.: 560-565, 1994.
- [46] Senesky M., Eirea G., Koo J.T.; *Hybrid modelling and control of power electronics*. HSCC 2003, LNCS 2623 Springer, pp. 450-465.
- [47] Sepulchre, R.; Janković, M.; Kokotović, P. V.; **Constructive Nonlinear Control**. Springer, 1997.
- [48] Sira-Ramírez H, *Sliding-mode control on slow manifolds of DC-to-DC power converters*. Int. J. Control, 1988, vol. 47, Issue 5, pags.:1323-1340.
- [50] Sira-Ramírez H.; Delgado de Nieto M.; *A Lagrangian Approach to Average Modeling of Pulsewidth-Modulation Controlled DC-DC Power Converters*. Transactions on IEEE Circuits and Systems, vol. 43, Issue 5, may 1996, pags.: 427-430.
- [51] Sira-Ramírez, H.; Perez-Moreno R. A.; Ortega, R.; García-Esteban M.; *Passivity-Based controllers for the stabilization of DC-to-DC power converters*. Automática, vol. 33, Issue 4, april 1997, pags: 499-513.
- [52] Sontag E. D., *Interconnected Automata and Linear Systems: A Theoretical Framework in Discrete-Time*. In Hibrid systems III: Springer, NY, pp. 436-448, 1996.
- [53] Stiver J.A.; Koutsoukos X.D.; Antsaklis P.J; *An Invariant Based Approach to the Design of Hybrid Control Systems*. IFAC 13th, Triennial World Congress, vol. J, pags: 467-472, San Francisco, CA, 1996.
- [54] Sun Z., Ge S. S., **Switched linear systems**. Communications and Control Engineering, Springer, 2005.
- [55] Vila-García J. A., Noriega-Pineda D., Gerardo Espinosa-Pérez. *Modelado y Control Pasivo de Inversores Multinivel y Fuentes Independientes*, Congreso Nacional de la Asociación de México de Control Automático, Cuernavaca, Morelos, 2005.

- [56] Visser H. R., Van den Bosch P. P. J.; *Dynamic Modelling of Switching Systems*. European Power Electronic Association. vol. 13, 1993, pp. 342-346.
- [57] Visser H. R., Van den Bosch P. P. J.; *Modelling of periodically switching networks*. Power Electronics Specialists Conference, 1991. PESC '91 Record., 22nd Annual IEEE , 24-27 June 1991, pp. 67 -73