



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA - DISEÑO MECÁNICO

OPTIMIZACIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS LAMINADOS  
REFORZADOS CON FIBRA APLICANDO ALGORITMOS GENÉTICOS

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
LUIS EDUARDO SÁNCHEZ BALANZAR

TUTOR PRINCIPAL:  
DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS  
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO D.F. OCTUBRE 2014

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente:	Dr. Ruiz Huerta Leopoldo
Secretario:	Dra. Rodríguez Vázquez Katya
1 <sup>er</sup> Vocal:	Dr. Velázquez Villegas Fernando
2 <sup>do</sup> Vocal:	Dr. Acosta Flores Mario
3 <sup>er</sup> Vocal:	M.I. Rendón Gómez Oscar Jesús

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: México, Distrito Federal

**TUTOR DE TESIS:**

DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS

-----  
**FIRMA**

# Agradecimientos

Agradecimiento especial a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) por el apoyo brindado para la realización de este trabajo a través de los proyectos PAPIIT TA100112 “Diseño de estructuras ligeras para vehículos urbanos de bajo consumo energético aplicando métodos de optimización”, PAPIME PE102212 “Material Didáctico Interactivo Digital para el aprendizaje del Método de los Elementos Finitos” y PAPIME 102914 “Elaboración de material digital interactivo para la enseñanza de la asignatura mecánica de sólidos”

# Índice general

Agradecimientos	I
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>3</b>
2.1. Objetivo	4
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
3.1. Materiales Compuestos	5
3.1.1. Terminología básica de los materiales compuesto laminados reforzados con fibras	6
3.2. Mecánica de materiales compuestos	9
3.2.1. Relaciones constitutivas	9
3.3. Teoría de láminas	12
3.3.1. Clasificación de las Teorías Estructurales	12
3.3.2. Teoría de Placas Laminadas con Deformación Cortante	12
3.3.3. Campo de Deformaciones	14
3.3.4. Campo de esfuerzos	16
3.3.5. Ecuaciones fundamentales de laminados, incluyendo la deformación cortante transversal	17
3.4. Criterio de Falla	19
3.4.1. Tipos de Criterios de Falla	20
3.5. Optimización.	22
3.5.1. Problemas de optimización multiobjetivo con restricciones	22
3.5.2. Algoritmos Genéticos	23
3.5.3. Manejo de problemas de optimización multiobjetivo mediante AG	31
3.5.4. NSGA-II	34
<b>4. Modelado de materiales compuestos mediante FEM</b>	<b>40</b>
4.1. Análisis de Laminados Compuestos mediante el FEM	40
4.1.1. Modelo	40
4.1.2. Validación del programa (FEM) y definición del tamaño de malla	47
<b>5. AG para materiales compuestos laminados</b>	<b>69</b>
5.1. Codificación de materiales compuestos laminados reforzados con fibras	70
5.2. Población Inicial	72

5.3. Generación de hijos . . . . .	73
5.3.1. Aptitud y Selección . . . . .	73
5.3.2. Cruza . . . . .	75
5.3.3. Mutación . . . . .	75
5.3.4. Formación de nuevas generaciones . . . . .	76
5.3.5. Término de la optimización . . . . .	77
5.3.6. Validación del AG planteado . . . . .	78
<b>6. Casos de estudio</b>	<b>89</b>
6.1. Optimización de materiales compuestos con condición de Frontera 1: Aumento de las variables de diseño . . . . .	90
6.2. Optimización de materiales compuestos: Diferentes condiciones de frontera . . . . .	93
6.3. Optimización de materiales compuestos laminados: Carga puntual . . . . .	94
6.4. Optimización de materiales compuestos: Variación del número de láminas . . . . .	96
<b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>103</b>
<b>A. Anexo I: Optimización de laminado</b>	<b>105</b>
A.1. Caso de Estudio . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los diseñadores estructurales tiene como meta primordial encontrar el mejor diseño posible, para la estructura de un vehículo, una estructura civil o una estructura espacial, entre otras, mientras emplean la menor cantidad posible de recursos. La medida del éxito de un diseño dependerá de la aplicación del mismo, muchas veces relacionada con un criterio de integridad, a la rigidez o a la resistencia, mientras que los recursos son medidos en términos del peso y del costo. Por lo tanto encontrar el mejor diseño, la mayoría de las ocasiones, significa encontrar aquel diseño que cuente con el menor peso y/o costo cumpliendo con las restricciones de rigidez (o resistencia).

Tradicionalmente, en el proceso de diseño, son identificados los requerimientos esenciales y aquellos diseños que satisfacen tales requerimientos son escogidos. Después, se realizan modificaciones estructurales que ayuden a mejorar el desempeño de esos diseños o que reduzcan el peso o costo de los mismos. Lo anterior convierte a la tarea de diseño en una empresa tediosa, la cual necesita un número de iteraciones por parte del diseñador. En muchas ocasiones es realmente complicado que el primer diseño generado llegue a convertirse en el diseño final a emplear.

Durante las dos décadas pasadas, la optimización matemática, la cual se encarga de la minimización o maximización de una función objetivo bajo funciones de restricción, emergió como una poderosa herramienta para el diseño estructural. El uso de la optimización matemática empleada en el diseño ha liberado al diseñador de la carga de las repetidas iteraciones, transformando así al proceso de diseño en una actividad sistemática y bien organizada. Dentro del contexto de optimización, el peso o el desempeño llega a ser la función objetivo y las variables que controlan las dimensiones estructurales (espesor, áreas de sección transversal, etc.) son las variables de diseño que serán redimensionadas para alcanzar la mejor configuración [22]

El uso de materiales compuestos en diseños estructurales ha ganado popularidad durante las últimas tres décadas debido a las diversas ventajas que estos materiales ofrecen frente a los materiales estructurales convencionales, tales como el acero, el aluminio y diversas aleaciones. Sin embargo, el diseño de este tipo de materiales no es una tarea que pueda tomarse a la ligera. Muchas de las propiedades de los materiales compuestos son desconocidas para los diseñadores que no tiene experiencia en el empleo de estos materiales. Además de que en la actualidad el estudio de estos materiales y el análisis de su desempeño bajo condiciones específicas sigue aún en desarrollo, lo cual deriva en la limitación de

su empleo en muchas aplicaciones ingenieriles. Por lo tanto, es necesario desarrollar métodos de diseño que tomen en cuenta a este tipo de materiales de manera específica.

El presente trabajo lleva a cabo la optimización de materiales compuestos laminados reforzados con fibra mediante la implementación de un algoritmo genético multiobjetivo. El trabajo se lleva a cabo de forma teórica mediante la realización de análisis numéricos y la comparación de estos con soluciones exactas encontradas en la literatura.

En el capítulo 2 de este trabajo contiene el planteamiento del problema y el objetivo del trabajo; en el capítulo 3 se realiza una descripción de los materiales compuestos y de la teoría empleada en este trabajo para analizarlos, el funcionamiento de los algoritmos genéticos y sus características básicas; en el capítulo 4 se describe el método empleado en este trabajo para realizar el análisis del comportamiento mecánico de este tipo de materiales; el capítulo 5 presenta el algoritmo genético utilizado para llevar a cabo la optimización de estos materiales; el capítulo 6 muestra varios casos de estudio donde se emplea el algoritmo desarrollado y finalmente el capítulo 7 presenta las conclusiones del trabajo realizado y menciona el trabajo a futuro que con base en esta tesis es posible llevar a cabo.

## Capítulo 2

# Planteamiento del problema

Más allá de su ventaja sobre el peso, el uso de materiales compuestos en los diseños estructurales ha tenido grandes implicaciones en términos de diseños óptimos. Lo anterior se debe a que los materiales compuestos poseen *per se* una flexibilidad en su diseño, pues es posible mediante la manipulación de sus elementos macroscópicos variables (número de capas, orientación de las fibras de las láminas, espesor de cada una de las láminas, material de las capas) cambiar las propiedades del material, y por lo tanto los diseños estructurales. Esta capacidad de adaptación de los materiales compuestos a los requerimientos de una situación de diseño específica, mejora sustancialmente el desempeño de los diseños desarrollados.

La aplicación de métodos de optimización matemática al diseño de estructuras hechas de materiales compuestos ha atraído la atención de diferentes investigadores, en diversas áreas de aplicación [22]. Sin embargo, no todos los métodos de optimización existentes, demuestran ser adecuados para tratar problemas relacionados con el empleo de este tipo de materiales. Lo cual ocurre porque muchos de estos métodos son empleados para estructuras convencionales cuyas variables de diseño son continuas. En el caso de los materiales compuestos, debido a restricciones de manufactura [10], los valores que pueden tomar las variables son valores discretos. Afortunadamente, los algoritmos genéticos, ideados por Holland, surgen como una alternativa para estas cuestiones. Varios estudios han demostrado la viabilidad de este método [7, 8, 11, 15, 22, 27, 29, 40]. Muchos de ellos abordan problemas de optimización mono-objetivo, [8, 11, 15, 22, 27, 29], sin embargo este tipo de análisis es muy limitado, debido a que muchos de los problemas reales que surgen en la industria o en la vida cotidiana, son problemas que requieren optimizar más de una función objetivo simultáneamente (problemas de optimización multi-objetivo). Muchos estudios se enfocan en el aspecto multi-objetivo de diversos problemas, sin embargo los métodos empleados para llevar a cabo la optimización (*métodos a priori*) presentan serias desventajas al momento de emplearse, debido a que muchos de ellos escalarizan al conjunto de objetivos en un objetivo simple [8, 11, 13, 22, 40]; ejemplo de lo anterior es el método de las sumas ponderadas [9, 6, 13, 28, 32] cuyos resultados son extremadamente dependientes de los factores de peso empleados para cada objetivo.

Aunque algunos trabajos abordan la optimización de materiales compuestos utilizando métodos que superan las desventajas que presentan los *métodos a priori* [33, 35], muchos de ellos realizan el análisis estructural del laminado con una teoría de aplicación limitada (Teoría Clásica de Laminados)

[26, 37], ya que únicamente es aplicable para laminados delgados (relación de anchura y espesor mayor que 10) [37].

## 2.1. Objetivo

El objetivo de este trabajo es implementar un algoritmo genético capaz realizar la optimización de materiales compuestos laminados reforzados con fibras que se encuentren bajo flexión y que presenten diversos niveles de complejidad, entiéndase lo anterior como diversas condiciones de contorno, distintas cargas aplicadas y variación en la relación largo/ancho del laminado. Así mismo y ya que para llevar a cabo la optimización de estos materiales, es necesario realizar un análisis estructural de ellos. Desarrollar una herramienta computacional basada en el método de los elementos finitos capaz de llevar a cabo este análisis utilizando una teoría que describa de mejor forma (comparada con la Teoría Clásica de Laminados) el comportamiento de los laminados, es otro objetivo a cumplir en esta tesis.

# Capítulo 3

## Marco Teórico

### 3.1. Materiales Compuestos

Los materiales *compuestos*, están formados por dos o más materiales combinados en una unidad macroscópica estructural; aunque muchos materiales hechos por el hombre tienen dos o más constituyentes, no son considerados como compuestos si la unidad estructural está formada más en el nivel microscópico que en el nivel macroscópico; estos materiales, para propósitos prácticos, son considerados materiales homogéneos, pues los componentes no pueden distinguirse a simple vista y esencialmente actúan juntos [26].

En el caso más general, un material compuesto consta de uno o más fases discontinuas distribuidas en una fase continua. La fase discontinua, llamada *refuerzo* o *material de refuerzo*, es usualmente más dura y con propiedades mecánicas superiores a las de la fase continua, llamada *matriz* [2]. La ventaja de los materiales compuestos es que, si están bien diseñados, exhiben las mejores cualidades de sus componentes o constituyentes y en algunas ocasiones muestran características que ninguno de ellos poseen. Algunas de las propiedades que pueden ser mejoradas al fabricar materiales compuestos son:

- Resistencia mecánica
- Rigidez
- Aislamiento térmico
- Resistencia a la corrosión
- Resistencia al desgaste
- Apariencia
- Peso
- Resistencia a la fatiga
- Comportamiento dependiente de la temperatura
- Conductividad térmica

- Aislamiento acústico

Naturalmente no todas estas propiedades pueden ser mejoradas al mismo tiempo, ni es usual que en alguna tarea se requiera esto. De hecho, algunas de las propiedades están en conflicto una con la otra, por ejemplo, el aislamiento térmico contra la conductividad térmica. El objetivo es únicamente crear un material que tenga sólo las características necesarias para desempeñar una tarea específica.

### 3.1.1. Terminología básica de los materiales compuesto laminados reforzados con fibras

En el desarrollo de esta tesis se llevó a cabo el análisis y optimización de *materiales compuestos laminados reforzados con fibras unidireccionales*, por lo que se hará énfasis en la descripción de los mismos; sin embargo, existen diferentes textos [2, 4, 25, 26] donde se describen a detalle los diferentes tipos de materiales compuestos existentes.

Los *materiales compuestos laminados reforzados con fibras unidireccionales* son una clase híbrida de los materiales compuestos donde se incluyen tanto materiales reforzados con fibras como técnicas de laminación.

#### Fibras

Las fibras usadas pueden ser continuas o discontinuas, entretejidas, unidireccionales, bidireccionales, o distribuidas aleatoriamente (Fig. 3.1). Las láminas reforzadas con fibras unidireccionales muestran mayor resistencia y módulo de elasticidad en la dirección de las fibras, sin embargo, tienen muy baja resistencia y módulo de elasticidad en la dirección transversal a ellas. Una unión pobre entre fibra y matriz resulta en propiedades transversales pobres y distintos tipos de fallas como el desprendimiento, rotura y pandeo de las fibras. Los compuestos reforzados con fibras discontinuas tienen menor resistencia y módulo de elasticidad que los materiales compuestos reforzados con fibras continuas, por lo que estos últimos son los más empleados en el diseño estructural.

#### Lámina

Una *lámina* o *capa* es un arreglo plano (algunas veces curvo como en un cascarón) de fibras unidireccionales o fibras entretejidas en una matriz (Fig. 3.1). La lámina representa el bloque fundamental de construcción. Las fibras o filamentos [26] son el principal refuerzo o agente de transporte de carga, son típicamente rígidos y resistentes. La matriz puede ser orgánica, cerámica o metálica [4] y su función es soportar y proteger las fibras, además de proporcionar un medio de distribución y transmisión de la carga entre las primeras.

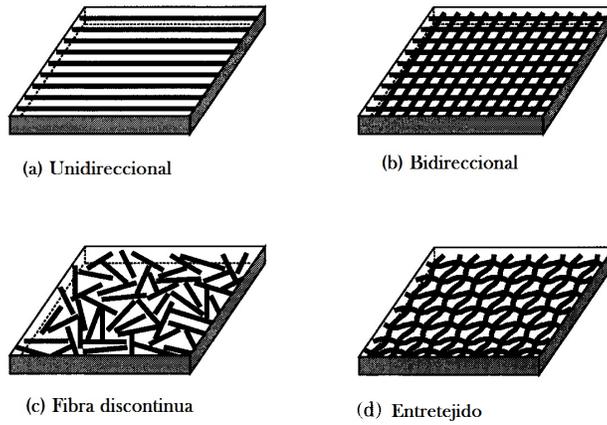


Figura 3.1: Tipo de fibras [37]

### Laminado

Un *laminado* es un apilamiento de láminas, cada una con sus respectivas orientaciones de fibra (Fig. 3.2). Las capas de un laminado están unidas por el mismo material de la matriz que es usado en la lámina. El propósito principal de la laminación es adaptar la dependencia direccional de la resistencia de un material para que coincida con el entorno de carga del elemento estructural. Los laminados son muy adecuados para este objetivo ya que las direcciones principales del material de cada capa pueden estar orientadas según las necesidades.

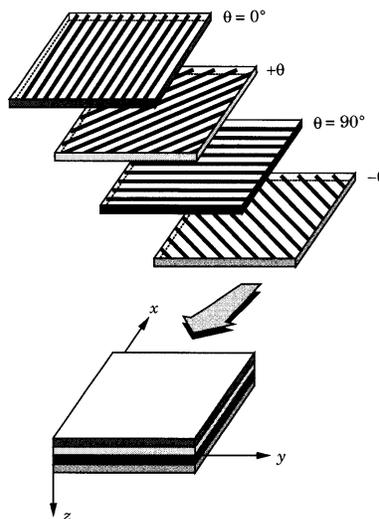


Figura 3.2: Laminado hecho de láminas con orientaciones de fibras diferentes [37]

## Secuencia de apilamiento

La naturaleza direccional de las fibras en un laminado reforzado con fibras genera dependencia direccional en la mayoría de sus propiedades mecánicas. Estos laminados se describen de acuerdo a una notación estándar llamada secuencia de apilamiento [22], la cual se describe a continuación.

La secuencia de apilamiento enlista las orientaciones de las fibras medidas a partir de un eje de referencia colocado en el laminado. El ángulo de las fibras será positivo si se mide en el sentido inverso de las manecillas del reloj, en el caso contrario el ángulo de éstas será negativo. La secuencia de apilamiento estándar enlista las orientaciones de las fibras en las diferentes capas comenzando con la que se encuentra en la parte superior del laminado y finalizando con la capa colocada en el fondo del mismo. Por lo tanto, para un laminado con  $N_L$  capas, todas hechas del mismo material compuesto y con el mismo espesor  $t$ , su representación es la siguiente:

$$[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\dots/\theta_{N_L}] \quad (3.1)$$

Cuando diversas capas con la misma orientación se encuentran adyacentes una con la otra, se acostumbra agruparlas y colocar en el ángulo correspondiente en la secuencia de apilamiento un subíndice con el número total de capas adyacentes (Ver Ec. (3.2)). Cuando un grupo de capas se repite en la secuencia de apilamiento, el número de repeticiones se usa como subíndice del grupo repetido en la secuencia de apilamiento (Ver Ec. (3.3)).

$$[90_4^{\circ}/45_2^{\circ}/30_3^{\circ}] \quad (3.2)$$

$$[(90_4^{\circ}/45_2^{\circ})_2/30_3^{\circ}] \quad (3.3)$$

Se dice que un laminado es simétrico cuando las orientaciones de las fibras de las láminas de la mitad inferior del laminado son imágenes espejo de las orientaciones de las fibras de las láminas que se encuentran arriba del plano medio del laminado [22]. Los laminados simétricos con un número par de láminas se representan usando únicamente la porción de la secuencia de apilamiento correspondiente a las láminas situadas arriba del plano medio del laminado, y mediante un subíndice  $s$  colocado al final de la representación (Ver Ec. (3.5)).

$$[90^{\circ}/45^{\circ}/30^{\circ}/30^{\circ}/45^{\circ}/90^{\circ}] \quad (3.4)$$

$$[90^{\circ}/45^{\circ}/30^{\circ}]_s \quad (3.5)$$

Cuando el número de capas con orientación  $\theta_i$  es igual al número de capas con orientación  $-\theta_i$ , se dice que el laminado está balanceado. No es necesario que estas capas se encuentren adyacentes, sin embargo si esto sucede, la representación del laminado puede condensarse colocando un signo  $\pm$  enfrente de la orientación correspondiente en la secuencia de apilamiento. Nos referiremos a este tipo de *laminado como balanceado con capas adyacentes* (Ver (Ec. 3.6)).

$$[90^{\circ}/\pm 45^{\circ}/30^{\circ}] \quad (3.6)$$

## 3.2. Mecánica de materiales compuestos

Como se mencionó anteriormente una lámina es el bloque de construcción básico en un material compuesto laminado reforzado con fibras, por lo tanto el conocimiento del comportamiento mecánico de una lámina es esencial para el entendimiento de estructuras laminadas reforzadas con fibras. Un entendimiento fundamental de la mecánica de materiales compuestos comienza con el estudio de su comportamiento constitutivo.

### 3.2.1. Relaciones constitutivas

En un sistema de coordenadas cartesiano se acostumbra describir el estado de deformación de un cuerpo mediante seis componentes de deformación y esfuerzo; tres componentes normales y tres componentes cortantes. Una relación lineal entre las seis componentes de esfuerzo y las seis componentes de deformación se conoce como la ley generalizada de Hooke [26, 34] y está representada como:

$$\sigma_k = C_{kj}\epsilon_j \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.7)$$

donde  $C_{kj}$  son conocidos como los *coeficientes de elasticidad*. Cuando  $C_{kj}$  son funciones de la posición el material es *heterogéneo* y cuando son constantes a través del material este es *homogéneo*.  $C_{kj}$  son entradas en el  $k$ -ésimo renglón y  $j$ -ésima columna de una matriz cuadrada de  $6 \times 6$ ; sin embargo,  $C_{kj}$  **no son** componentes de un tensor de segundo orden. La notación usada para las componentes de esfuerzos y deformaciones está basada en la convención,

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12} \\ \epsilon_1 = \epsilon_{11}, \epsilon_2 = \epsilon_{22}, \epsilon_3 = \epsilon_{33}, \epsilon_4 = \epsilon_{23}, \epsilon_5 = \epsilon_{13}, \epsilon_6 = \epsilon_{12} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aquí  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  indican los esfuerzos normales y  $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  indican los esfuerzos cortantes;  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  son los esfuerzos en el plano y  $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$  son los esfuerzos fuera de plano (transversales). Una terminología similar es usada para los componentes de deformación.

Los treinta y seis coeficientes de  $C_{ij}$  no son independientes de los demás. El número de constantes independientes depende de la constitución del material. Sólo hay 21 constantes elásticas independientes para materiales anisotrópicos [2]. En forma matricial la Ec. 3.7 puede ser expresada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & \text{sim.} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Se debe notar a partir de la Ec. 3.9 que, en general, los coeficientes elásticos  $C_{ij}$  relacionados a los componentes cartesianos de esfuerzos y deformación dependen del sistema coordenado  $(x_1, x_2, x_3)$

usado. Los coeficientes elásticos referidos a otro sistema coordenado cartesiano  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  son  $\bar{C}_{ij}$  y en general  $C_{ij} \neq \bar{C}_{ij}$ . Si  $C_{ij} = \bar{C}_{ij}$ , entonces son independientes del sistema de coordenadas y por lo tanto el material es isotrópico.

Algunos materiales anisotrópicos pueden poseer simetrías materiales y su comportamiento constituyente puede ser descrito con menos de 21 constantes. Cuando los coeficientes elásticos en un punto tienen los mismos valores para cada par de sistemas coordenados, los cuales son imagenes espejo de los demás en un cierto plano, el plano es llamado un *plano de simetría elástica* para el material en ese punto.

Si un sistema material tiene tres planos mutuamente perpendiculares de simetría elásticas, entonces el número de coeficientes elásticos independientes pueden ser reducidos a nueve. Esos materiales son conocidos como *ortotrópicos*. Las relaciones esfuerzo-deformación para un material ortotrópico está dado por: [34]

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & sim. & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Donde

$$C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{33})$$

La ecuación (3.10) expresa el comportamiento elástico de un material compuesto unidireccional en sus direcciones principales: un eje en la dirección de las fibras y los restantes ortogonales a ésta. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, los materiales compuestos laminados reforzados con fibras unidireccionales están constituidos por diferentes capas laminadas con distintas orientaciones de fibras; para estudiar el comportamiento mecánico de este tipo de materiales, es necesario fijar un sistema coordenado geométrico para el compuesto en su totalidad y referir el comportamiento elástico de cada una de sus capas a este sistema de referencia.

Por lo tanto, el comportamiento de una placa, referida a sus direcciones principales (1, 2, 3), donde el plano (1, 2) está definido como el plano donde descansa la placa y la dirección 1 como la dirección de las fibras, está dado por la ecuación (3.10). El sistema de referencia es nombrado generalmente como el sistema  $(x, y, z)$ , aunque también es usada la notación  $(1', 2', 3')$  (Ec. 3.3). Partiendo de lo anterior, la matriz de rigidez  $C'$  escrita en el sistema  $(1', 2', 3')$ , es la matriz de rigidez de una capa  $k$ -ésima del laminado, cuyas fibras se encuentran orientadas un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $x$  y sus elementos se obtienen de la siguiente manera [2]:

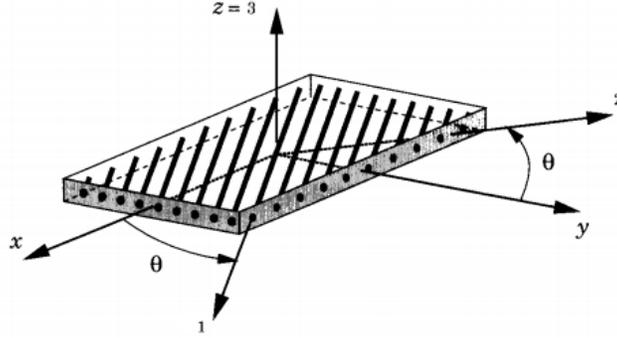


Figura 3.3: Direcciones principales y sistema de referencia global en una lámina [37]

$$\begin{aligned}
C'_{11} &= C_{11}\cos^4\theta + C_{22}\sen^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sen^2\theta\cos^2\theta \\
C'_{12} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66})\sen^2\theta\cos^2\theta + C_{12}(\sen^4\theta + \cos^4\theta) \\
C'_{13} &= C_{12}\cos^2\theta + C_{23}\sen^2\theta \\
C'_{14} &= 0 \\
C'_{15} &= 0 \\
C'_{16} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sen\theta\cos^3\theta + (C_{12} + C_{22} + 2C_{66})\sen^3\theta\cos\theta \\
C'_{22} &= C_{11}\sen^4\theta + 2(C_{12} + 2C_{66})\sen^2\theta\cos^2\theta + C_{22}\cos^4\theta \\
C'_{23} &= C_{12}\sen^2\theta + C_{23}\cos^2\theta \\
C'_{24} &= 0 \\
C'_{25} &= 0 \\
C'_{26} &= (C_{11} - C_{12} - 2C_{66})\sen^3\theta\cos\theta + (C_{12} + C_{22} + 2C_{66})\sen\theta\cos^3\theta \\
C'_{33} &= C_{22} \\
C'_{34} &= 0 \\
C'_{35} &= 0 \\
C'_{36} &= (C_{12} - C_{23})\sen\theta\cos\theta \\
C'_{44} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2}\cos^2\theta + C_{66}\sen^2\theta \\
C'_{45} &= (C_{66} - \frac{C_{22} - C_{23}}{2})\sen\theta\cos\theta \\
C'_{46} &= 0 \\
C'_{55} &= \frac{C_{22} - C_{23}}{2}\sen^2\theta + C_{66}\cos^2\theta \\
C'_{56} &= 0 \\
C'_{66} &= [C_{11} + C_{22} - 2(C_{12} + C_{66})]\sen^2\theta\cos^2\theta + C_{66}(\sen^4\theta + \cos^4\theta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de elasticidad referidas al sistema  $(1', 2', 3')$  son escritas de la siguiente

forma:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

### 3.3. Teoría de láminas

#### 3.3.1. Clasificación de las Teorías Estructurales

El análisis de placas compuestas ha estado basado en uno de las siguientes enfoques:

1. Teorías de una sola capa equivalente (TSCE)(2D)
  - Teoría Clásica de placas laminadas
  - Teorías de placas laminadas con deformación cortante
2. Teoría de elasticidad tridimensional (3D)
  - Formulaciones de elasticidad 3D tradicional
  - Teorías por capas
  - Métodos de modelos múltiples (2D y 3D)

Las teorías de una sola capa equivalente son derivadas de la teoría de elasticidad 3D realizando suposiciones adecuadas con respecto a la cinemática de la deformación o el estado de esfuerzos a través del espesor del laminado [2, 4, 26, 37]. Estas suposiciones permiten la reducción de un problema tridimensional a uno bidimensional. En la teoría de elasticidad tridimensional o en la teoría por capas, cada capa es modelada como un sólido tridimensional. El propósito de este capítulo es presentar el modelo matemático del comportamiento de placas laminadas basado en la Teoría de placas laminadas con deformación cortante, utilizado en el desarrollo de ésta tesis.

#### 3.3.2. Teoría de Placas Laminadas con Deformación Cortante

En las teorías de una sola capa equivalente, una placa laminada heterogénea es tratada como una sola capa estáticamente equivalente, con un comportamiento constitutivo complejo; este enfoque reduce un problema tridimensional a uno bidimensional. Por lo tanto, los compuestos laminados son tratados como elementos planos.

La Teoría Clásica de Laminados basada en la hipótesis de Kirchoff [2, 25, 26, 36, 37] permite describir, con una buena precisión, los campos de deformación y esfuerzo en los laminados que no son muy gruesos, excepto en la pequeña región extendida cerca de los bordes libres de los laminados[2]. En contraste, en el caso de laminados gruesos (relación de anchura y espesor menor que 10) los resultados encontrados con esta teoría muestran diferencias importantes con el comportamiento mecánico real: la

deflexión del laminado, la distribución de esfuerzos, etc. Para modelar de mejor manera el comportamiento de estos materiales es necesario introducir el efecto de la deformación de corte transversal; lo anterior se puede llevar a cabo utilizando una teoría de placas de primer orden [2, 37].

Sin embargo la teoría de primer orden conduce a esfuerzo cortante transversal constante, lo cual viola el equilibrio en las superficies libres de la placa y los requisitos de continuidad del esfuerzo cortante interlaminar [8]. Para tener en cuenta la discrepancia entre el estado constante de deformación cortante en la teoría de primer orden y la distribución cuadrática o de orden superior de deformaciones cortantes en la elasticidad, se introducen factores de corrección cortantes [2, 37], este enfoque es conocido como la teoría de Midlin-Reissner. Teorías de orden superior involucran términos adicionales en  $z$  y pueden no violar el equilibrio en la superficie libre, por lo que producen una distribución de esfuerzos interlaminar más certera; sin embargo, éstas requieren un mayor esfuerzo computacional<sup>1</sup> [8]. Es importante señalar que las teorías basadas en desplazamientos de una sola capa equivalente de orden superior no son consideradas en la literatura debido a que son difíciles de trabajar y el incremento en la precisión de los resultados está en proporción directa con el número de incógnitas. La teoría de tercer orden, es decir, la teoría con términos cúbicos en  $z$ ) produce una variación cuadrática de la deformación transversal cortante en cada una de las capas representando así la distribución real de las deformaciones a través del espesor del laminado. Por lo tanto, no requiere de factores de corrección cortante. Sin embargo, la teoría de Midlin-Reissner es, por mucho, la teoría más eficiente (no se incrementa el esfuerzo computacional al aumentar la precisión de los resultados) [34]. Por lo tanto, en este trabajo se utiliza la teoría de Midlin-Reissner para analizar los materiales compuestos laminados.

### Campos de desplazamientos

La suposición básica de la teoría general de placas se lleva a cabo expresando los desplazamientos de un punto  $P$ , con coordenadas  $(x, y, z)$ , de una placa mediante polinomios en  $z$ , generalmente limitados a grado tres y con coeficientes que dependen de  $(x, y)$ . La teoría de primer orden de placas laminadas reduce el campo de desplazamientos general a sistemas de primer orden de la forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u(x, y, 0) + z\varphi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v(x, y, 0) + z\varphi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y, 0) + z\varphi_z(x, y) \end{aligned} \tag{3.12}$$

El desplazamiento de un punto arbitrario  $P(x, y, z)$  es desarrollado, de acuerdo con la Ec.(3.12), como una serie en la variable  $z$  con coeficientes en  $(x, y)$  sobre un punto de referencia  $P_o(x, y, 0)$  del plano  $Oxy$ . El campo de desplazamientos del punto  $P_o$  se expresará mediante las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} u_o &= u_o(x, y) = u(x, y, 0) \\ v_o &= v_o(x, y) = v(x, y, 0) \\ w_o &= w_o(x, y) = w(x, y, 0) \end{aligned} \tag{3.13}$$

---

<sup>1</sup>Es necesario tomar en cuenta que el objetivo principal de este trabajo es llevar a cabo la optimización de materiales compuestos, el cual, como se verá más adelante, requiere del análisis mediante el método de los elementos finitos de los laminados en una población, por lo tanto, es deseable un ahorro en el costo computacional (número de operaciones realizadas en una corrida y tiempo de cómputo).

### 3.3.3. Campo de Deformaciones

El campo de deformaciones se deduce del campo de desplazamientos (3.13). Y se obtiene:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_o}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
\gamma_{xz} &= 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w_o}{\partial x} + \varphi_x \\
\gamma_{yz} &= 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_o}{\partial y} + \varphi_y
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Las expresiones anteriores muestran que el truncamiento usado en la Ec.(3.13) para el desplazamiento es consistente en el sentido que las deformaciones bajo cortante transversal resultante de los desplazamientos en el plano son del mismo orden que  $z$  como las deformaciones involucradas en el desplazamiento  $w$ .

El tensor de deformaciones en un punto  $P$  de un laminado es entonces:

$$\epsilon(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

El campo de deformación puede ser subdividido en dos campos:

- El campo de deformación a flexión y en el plano medio:

$$\epsilon_{mf}(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

- El campo de deformación cortante transversal:

$$\gamma_s(P) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_o}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

El campo de deformación cortante varia de una capa a otra a través del espesor del laminado. La teoría de primer orden que incluye el efecto del cortante transversal conduce a una deformación cortante transversal la cual es dependiente de la coordenada  $z$ . El primer enfoque consiste en tomar la deformación cortante transversal como:

$$\gamma_s(P) = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

El campo de deformación a la flexión y en el plano medio está dado por la superposición de:

- las deformaciones en el plano (o deformaciones del plano medio)

$$\epsilon_m = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

- las deformaciones a flexión y torsión

$$\epsilon_f(P) = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^f \\ \epsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Las deformaciones por flexión y por torsión pueden ser escritas como funciones de la matriz de curvaturas mediante la relación:

$$\epsilon_f(P) = zk(x, y) \quad (3.21)$$

con

$$k(x, y) = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Finalmente, el campo  $\epsilon_{mf}(P)$  es:

$$\epsilon_{mf} = \epsilon_m(P) + \epsilon_f(P) \quad (3.23)$$

### 3.3.4. Campo de esfuerzos

El campo de esfuerzos de un punto  $P$  del laminado se expresa como una función del campo de deformación mediante la relación (3.11). Si el punto  $P$  pertenece a la  $k$ -ésima capa del laminado el campo de esfuerzos se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

donde los  $C'_{ij}$  son las constantes de rigidez de la capa  $k$ .

#### Simplificación en el contexto de la Teoría de Placas

La Teoría General de Placas [25] asume que los esfuerzos normales  $\sigma_{zz}$  son despreciables en el volumen de la placa con respecto a los otros componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ . Esta suposición de un estado de esfuerzos plano se extiende a la teoría de laminados, esto es:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (3.25)$$

Con la suposición anterior, la relación esfuerzo-deformación (3.24) se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{pmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Los esfuerzos en la  $k$ -ésima capa pueden ser expresados en términos de los coeficientes de rigidez  $Q'_{ij}$  [2] de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} & 0 & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} & 0 & 0 \\ Q'_{13} & Q'_{23} & Q'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} \end{pmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

La discontinuidad de la matriz de rigidez de una capa a otra implica discontinuidad de esfuerzos cuando se pasa de una capa a otra. Las constantes de rigidez  $Q'_{ij}$  y  $C'_{ij}$  de la  $k$ -ésima lámina están referidas a las direcciones de referencia del laminado y están escritas en función de las rigideces en las direcciones principales de las capas. Sus expresiones están dadas a continuación:

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\text{sen}\theta\text{cos}^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\text{sen}^3\theta\text{cos}\theta \\
Q'_{22} &= Q_{11}\text{sen}^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\text{sen}^2\theta\text{cos}^2\theta + Q_{22}\text{cos}^4\theta \\
Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\text{sen}^3\theta\text{cos}\theta + (Q_{12} + Q_{22} + 2Q_{66})\text{sen}\theta\text{cos}^3\theta \\
Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]\text{sen}^2\theta\text{cos}^2\theta + Q_{66}(\text{sen}^4\theta + \text{cos}^4\theta) \\
C'_{44} &= C_{44}\text{cos}^2\theta + C_{55}\text{sen}^2\theta \\
C'_{45} &= (C_{55} - C_{44})\text{sen}\theta\text{cos}\theta \\
C'_{55} &= C_{44}\text{sen}^2\theta + C_{55}\text{cos}^2\theta
\end{aligned}$$

### 3.3.5. Ecuaciones fundamentales de laminados, incluyendo la deformación cortante transversal

La ecuación constitutiva de laminados con cortante transversal se obtiene asociando las fuerzas y momentos resultantes, en la forma:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{zz}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

La ecuación constitutiva puede ser escrita también en la siguiente forma contraída:

$$\begin{bmatrix} [N] \\ [M_f] \\ [Q] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [F] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\epsilon_m] \\ [k] \\ [\gamma_s] \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Las constantes de rigidez de las matrices son:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q'_{ij})_k(1, z, z^2) dz \quad (3.30)$$

Ya que  $(Q_{ij})_k$  son constantes dentro de cada capa, la integración sobre el espesor puede llevarse a cabo fácilmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}(h_k^2 - h_{k-1}^2)(Q'_{ij})_k \\
D_{ij} &= \frac{1}{3}(h_k^3 - h_{k-1}^3)(Q'_{ij})_k \\
F_{ij} &= (h_k - h_{k-1})(C'_{ij})_k
\end{aligned}$$

Las rigideces  $Q'_{ij}$  y  $C'_{ij}$  referidas a las direcciones de referencia del laminado como funciones de las rigideces  $Q_{ij}$  y  $C_{ij}$  referidas a las direcciones principales de las placas. Estas constantes de rigidez

están expresadas como funciones de las seis constantes ingenieriles  $E_L$ ,  $E_T$ ,  $\nu_{LT}$ ,  $G_{LT}$ ,  $G_{LT'}$  y  $G_{TT'}$  como sigue [37]:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_{LT}^2} \\
Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L}Q_{11} \\
Q_{12} &= \nu_{LT}Q_{22} \\
Q_{66} &= G_{LT} \\
C_{44} &= G_{TT'} \\
C_{55} &= G_{LT'}
\end{aligned}$$

### Ecuaciones fundamentales

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los materiales compuestos laminados que toman en cuenta la deformación cortante transversal son las siguientes[2]:

$$\begin{aligned}
A_{11}\frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) + A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} \\
+ A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{16}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
+ (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y} + B_{26}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + A_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} \\
+ A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y} + B_{26}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
+ 2B_{26}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y} + B_{22}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + R \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
F_{55}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) + F_{45}\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right) \\
+ F_4\left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + q = \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = R \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_{xy} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

### 3.4. Criterio de Falla

Cuando se lleva a cabo el diseño de una estructura formada por materiales compuestos es necesario predecir la carga máxima que la estructura soportará antes de fallar. La predicción de falla usualmente se realiza comparando las funciones de esfuerzo o deformación con los límites de resistencia del material [22]. Las relaciones esfuerzo-deformación junto con las ecuaciones de equilibrio, la carga a la que está sometido y las condiciones de frontera impuestas para una configuración específica, son usadas para determinar los esfuerzos o deformaciones del material.

Sin embargo, la determinación de la resistencia del laminado no es una tarea sencilla; en principio, porque a diferencia de lo que sucede con los esfuerzos y deformaciones que se presentan en el material, no existe una función analítica general que permita determinar la resistencia de los materiales compuestos laminados; de hecho el análisis de fallas es una área de estudio de la mecánica que pese a su gran importancia no cuenta con una teoría capaz de integrar todas las posibles causas de falla de un material compuesto [10].

Además, los materiales compuestos laminados presentan otra dificultad: existe una variación de esfuerzos a través del espesor del laminado debido al apilamiento de las láminas con orientaciones de fibras y por lo tanto propiedades mecánicas, diferentes entre sí. Debido a lo anterior es posible que se presenten diferentes esfuerzos y deformaciones en cada una de las láminas, con la posibilidad de que en una o más de ellas se alcance su límite a la resistencia antes que en las demás.

Adicionalmente y debido a su naturaleza ortotrópica, los compuestos laminados reforzados con

fibras presentan más dificultades que los materiales isotrópicos al momento de tratar de predecir si fallarán.

Es importante mencionar que la falla de los materiales compuestos puede analizarse desde dos puntos de vista: microscópico o macroscópico. Desde el punto de vista microscópico, la falla del material se atribuye al daño que se presenta a nivel molecular, sin embargo el análisis de fallas a este nivel es difícil e intratable [38].

En general, las teorías desarrolladas para el análisis de fallas de los materiales compuestos laminados reforzados con fibras, abordan la falla desde el punto de vista macroscópico, analizando el comportamiento macroscópico de material determinado a partir de los datos de carga-desplazamiento obtenidos en pruebas experimentales, sin profundizar en el estudio de los fenómenos presentes a nivel microscópico. Por lo tanto, en el análisis de falla de estos materiales la atención se centra en la falla a nivel de las láminas. Una vez que el comportamiento mecánico de las placas es determinado, la falla inicial de las capas dentro de un laminado puede predecirse utilizando un criterio de falla apropiado [34]. La predicción de falla requiere de un entendimiento de los *modos de daño* y de la acumulación de estos.

Los *modos de daño* dependen de la carga aplicada, la secuencia de apilamiento y la geometría de la muestra con la que se realiza la experimentación [34]. Se han propuesto diversas teorías para predecir la aparición de fallas y su propagación [38, 39], la mayoría de éstas basadas en el estado de esfuerzo en una lámina.

Históricamente la mayoría de las evaluaciones analíticas de estructuras compuestas laminadas están basadas en el concepto de Falla de la Primera Placa (FPF por sus siglas en inglés) [30]. El análisis mediante la FPF asume que dada una lámina, ésta fallará si el índice de falla  $F$ , en un punto dentro de la lámina alcanza el valor de la unidad [34]. El índice de falla está definido como  $F = F_i\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j$  [38]. Por lo tanto, al emplear la FPF, se asume que el laminado total fallará cuando la primera lámina falle. Aunque es posible que aún cuando se presente la falla inicial en el laminado, éste pueda continuar soportando las condiciones de carga y de frontera a las que se le sometió en un principio, el comportamiento del laminado no será el óptimo para tal situación; debido a que la falla de la primera lámina puede originar fallas subsecuentes haciendo inservible al laminado. Estas fallas subsecuentes se presentarán dependiendo del tipo de material y de la secuencia de apilamiento, así como del espesor del laminado [23]

### 3.4.1. Tipos de Criterios de Falla

Los criterios de falla de los materiales compuestos pueden ser clasificados en dos grupos [38]: criterios de falla independientes y criterios de falla polinomiales. El criterio de falla polinomial más general para materiales compuestos es el criterio polinomial propuesto por Tsai. Todos los demás criterios de falla polinomial son casos degenerados de este criterio. En notación indicial este criterio se expresa de la siguiente manera:

$$F_i\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k + \dots \geq 1 \quad (3.36)$$

o de forma más explícita,

$$\begin{aligned}
& F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \\
& + F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\sigma_4^2 + F_{55}\sigma_5^2 + F_{66}\sigma_6^2 + \dots \geq 1
\end{aligned} \tag{3.37}$$

### Criterio del esfuerzo máximo

Este criterio pertenece al grupo de los criterios de falla independientes. La premisa básica presente en la predicción de falla de láminas reforzadas con fibras usando el criterio de esfuerzo máximo es el mismo que el usado para materiales isotrópicos [22]. En el criterio del esfuerzo máximo para materiales compuestos laminados reforzados con fibras, se asume que la falla de la lámina ocurrirá si cualquiera de las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &> X_T & \sigma_4 &> R \\
\sigma_2 &> Y_T & \sigma_5 &> S \\
\sigma_3 &> Z_T & \sigma_6 &> T
\end{aligned} \tag{3.38}$$

donde,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son los componentes de los esfuerzos normales,  $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  son los componentes de los esfuerzos cortantes,  $X_T, Y_T, Z_T$  son las resistencias normales de la lámina en las direcciones 1, 2, 3 y  $R, S, T$  son las resistencias cortantes en los planos 23, 13 y 12, respectivamente. Cuando  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  son de naturaleza compresiva deben ser comparadas con  $X_C, Y_C, Z_C$ , que son las resistencias normales en compresión a lo largo de las direcciones 1, 2, 3, respectivamente.

### Criterio del esfuerzo máximo en forma polinomial

El criterio del esfuerzo máximo puede ser expresado en forma polinomial [38]:

$$\begin{aligned}
& (\sigma_1 - X_T)(\sigma_1 + X_C)(\sigma_2 - Y_T)(\sigma_2 + Y_C)(\sigma_3 - Z_T)(\sigma_3 + Z_C) \\
& (\sigma_4 - R)(\sigma_4 + R)(\sigma_5 - S)(\sigma_5 + S)(\sigma_6 - T)(\sigma_6 + T) = 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Comparando la Ec.(3.39) con la Ec. (3.37) e ignorando los términos de orden superior en ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, & F_2 &= \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, & F_3 &= \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C} \\
F_{11} &= \frac{1}{X_T X_C}, & F_{22} &= \frac{1}{Y_T Y_C}, & F_{33} &= \frac{1}{Z_T Z_C} \\
F_{44} &= \frac{1}{R^2}, & F_{55} &= \frac{1}{S^2}, & F_{66} &= \frac{1}{T^2} \\
F_{12} &= -\frac{F_1 F_2}{2}, & F_{13} &= -\frac{F_1 F_3}{2}, & F_{23} &= -\frac{F_2 F_3}{3}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

los coeficientes restantes son cero.

### Criterio de Tsai-Wu

Tsai y Wu propusieron una teoría polinomial tensorial asumiendo la existencia de una superficie de falla en el espacio de esfuerzos [10]. En notación contraída esta teoría tiene la forma:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j \geq 1 \quad (3.41)$$

donde

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, & F_2 &= \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, & F_3 &= \frac{1}{Z_T} - \frac{1}{Z_C} \\ F_{11} &= \frac{1}{X_T X_C}, & F_{22} &= \frac{1}{Y_T Y_C}, & F_{33} &= \frac{1}{Z_T Z_C} \\ F_{44} &= \frac{1}{R^2}, & F_{55} &= \frac{1}{S^2}, & F_{66} &= \frac{1}{T^2} \\ F_{12} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}, & F_{13} &= -\frac{1}{2} \sqrt{X_T X_C Z_T Z_C}, & F_{23} &= -\frac{1}{2} \sqrt{Y_T Y_C Z_T Z_C} \end{aligned} \quad (3.42)$$

## 3.5. Optimización.

El objetivo de la optimización es encontrar una o más soluciones factibles para un problema en específico. La optimización juega un rol importante tanto en la vida cotidiana de una persona como en el campo de la ingeniería, en el científico, en el del diseño, en la toma de decisiones, entre otros; por lo cual es necesario desarrollar métodos de optimización eficientes y robustos. Actualmente existen diversos métodos de optimización, sin embargo, ninguno de ellos está exento de desventajas. Es necesario por lo tanto, definir correctamente el problema que se desea optimizar para así poder decidir que método de optimización puede ser aplicable.

### 3.5.1. Problemas de optimización multiobjetivo con restricciones

Cuando un problema de optimización involucra sólo una función objetivo  $f(x)$ , la tarea de encontrar una solución óptima es llamada *optimización mono-objetivo*. Cuando un problema de optimización involucra más de un objetivo la tarea de encontrar una o más soluciones óptimas se conoce como *optimización multiobjetivo* [13]. La mayoría de los problemas de optimización y búsqueda en el mundo real involucran múltiples objetivos.

En el caso de la optimización multiobjetivo pueden presentarse dos situaciones: que los objetivos a optimizar no se encuentren en conflicto entre sí o que sí lo estén, es decir, al mejorar uno de los objetivos, los demás objetivos se ven afectados de forma intrínseca en el problema. En el primer caso al llevar a cabo el proceso de optimización (al igual que en la optimización mono-objetivo) se encontrará una solución óptima única; en el caso de la optimización multiobjetivo con objetivos en conflicto no existe una solución óptima única. En este último caso, la presencia de múltiples objetivos en principio, da lugar a un conjunto de soluciones, (conocidas como *Soluciones Óptimas de Pareto* [14]) en vez de una

sola solución óptima; es preciso señalar, que todas estas soluciones consideradas óptimas, lo serán al llevar a cabo un análisis de forma ponderada de los objetivos, es decir, cada una de las soluciones óptimas de Pareto será óptima para un caso particular de correlación entre los objetivos a optimizar. Por lo tanto en una optimización multiobjetivo se pueden fijar dos metas; la primera, encontrar una solución perteneciente al Frente de Pareto [13] o encontrar todos los elementos del Frente de Pareto. En el último caso, después de encontrar el conjunto de soluciones óptimas, es necesario llevar a cabo consideraciones especiales para poder escoger una de ellas como opción al problema de optimización.

Los problemas de optimización con restricciones son interesantes porque surgen de forma natural en la ingeniería, ciencia, investigación de operaciones, entre otras. En general, un problema de optimización numérica con restricciones se define como:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Minimizar/Maximizar} & f(x) & x \in R^n \\
 \text{Sujeto} & h_i(x) = 0 & i = 1, \dots, m \\
 & g_j(x) \geq 0 & j = 1, \dots, l \\
 & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S & i = 1, \dots, n
 \end{array} \tag{3.43}$$

Donde una solución  $x$  es un vector de  $n$  variables de decisión:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . El último conjunto de restricciones son llamados *los límites de las variables*, las cuales restringen cada variable de decisión  $x_i$  a tomar un valor dentro de un límite inferior  $x_i^I$  y un límite superior  $x_i^S$ . Estos límites constituyen el *espacio de decisión*  $D$ . Así mismo, existen  $l$  número de restricciones en forma de desigualdades y  $m$  en forma de igualdades, asociadas con el problema. Los términos  $g_j$  y  $h_i$  son llamados restricciones del problema.

En el problema de optimización las restricciones en forma de desigualdades pueden presentarse como restricciones del tipo “mayor o igual a” o del tipo “menor o igual a”. Si una solución  $x$  satisface todas las restricciones y los límites de las variables, ésta se conoce como *solución factible*. Las restricciones definen la región factible  $F$  del espacio de decisión  $D$ .

### 3.5.2. Algoritmos Genéticos

En las últimas décadas se han desarrollado diversos métodos de optimización los cuales pueden ser clasificados en dos grupos: métodos de búsqueda directa y métodos basados en gradientes[13]. En los primeros, sólo la función objetivo ( $f(x)$ ) y las restricciones ( $g_j(x), h_i(x)$ ) son usados para guiar la estrategia de búsqueda, mientras que los métodos basados en gradientes usan la derivada de primer o segundo orden de la función objetivo y/o las restricciones para guiar el proceso de búsqueda. Ambos métodos tienen dificultades en común que hacen que su aplicación no sea adecuada para la optimización de algunos problemas, entre las más importantes se encuentran las siguientes [13]:

- La convergencia hacia una solución óptima depende de la solución inicial escogida.
- La mayoría de los algoritmos tienden a caer en una solución subóptima<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>También conocida como solución local o relativa, es aquella solución que es óptima (ya sea un máximo o un mínimo) en una región particular del espacio de solución. En contraste con un óptimo global, el cual es la solución óptima en todo el espacio de solución.

- Un algoritmo eficiente resolviendo un problema de optimización puede no ser eficiente resolviendo un problema de optimización diferente.
- Estos algoritmos no son eficientes resolviendo problemas con un espacio de búsqueda discreto.

El concepto de algoritmo genético fue concebido y desarrollado por John Holland en la Universidad de Michigan [24] a finales de los años 60. El objetivo de su trabajo era lograr que las computadoras aprendieran por si mismas [19]. Aunque concebido originalmente en el contexto del aprendizaje de máquina, el algoritmo genético se ha utilizado mucho en problemas de búsqueda y optimización, siendo una técnica sumamente popular en la actualidad.

Los algoritmos genéticos utilizados como técnica de optimización muestran buenas características de funcionamiento (es más factible que encuentren la solución global del problema o una solución cercana a ésta [22]), específicamente cuando se trata de problemas con espacios de solución multimodal, dado que a diferencia de los métodos tradicionales, son un método que busca en muchos puntos o posibles soluciones del espacio de solución simultáneamente (búsqueda en paralelo), lo cual reduce significativamente las probabilidades de que converjan a mínimos locales durante el proceso de búsqueda[22]. Además, no necesitan de información adicional para funcionar apropiadamente, ya que sólo requieren conocer la factibilidad o beneficio implícito de cada punto del espacio de solución explorado para guiar su búsqueda. Por otro lado, los algoritmos genéticos explotan recursos de codificación de una forma muy general y como resultado rebasan las restricciones de otros métodos (existencia de derivadas, continuidad, etc.)[22]. Estos algoritmos utilizan reglas probabilísticas para su búsqueda hacia regiones del espacio de solución que se espera tengan mejores características.

Los algoritmos genéticos siguen un procedimiento paso a paso que se asemeja a los principios de la genética natural. Cuando una población de criaturas biológicas evoluciona a través de generaciones, las características individuales que son útiles para sobrevivir tenderán a heredarse a las generaciones futuras, porque los individuos que las llevan tienen más oportunidades de reproducirse. En las poblaciones biológicas estas características se almacenan en cadenas cromosómicas. La mecánica de la genética natural está basada en operaciones que resultan en el intercambio estructural aleatorio de la información genética (rasgos biológicos) entre las cadenas cromosómicas de los padres que se reproducen y consisten en la *reproducción*, la *cruza* y la *mutación* ocasional.

Una de las grandes diferencias y ventajas de los AG con respecto de los algoritmos clásicos de búsqueda y optimización radica en que los AG usan una *población* de soluciones en cada iteración, en lugar de una sola solución. Debido a que una población de soluciones es tratada en cada iteración, el resultado de utilizar un AG será también una población. Por lo anterior, si un problema de optimización tiene sólo una solución óptima, todos los miembros de la población del AG deberán converger a esa solución. Sin embargo, si un problema de optimización tiene múltiples soluciones óptimas, un AG puede ser empleado para encontrar todas esas soluciones en su población final.

Esta capacidad de los AG para encontrar múltiples soluciones óptimas en una simulación única hace al método único en la resolución de problemas multiobjetivo [13].

## Algoritmo Genético Simple

Desde la publicación del libro de John Holland el AG ha sufrido algunas mejoras y modificaciones, el Algoritmo Genético Simple (AGS), básico o canónico tiene el siguiente procedimiento general [19]:

1. Generar la población inicial de manera aleatoria.
2. Evaluar cada uno de los individuos de la población y asignarles su valor de aptitud.
3. Seleccionar los individuos de la población basados en la aptitud de cada uno.
4. Cruzar los individuos seleccionados, para obtener nuevos individuos.
5. Mutar a los individuos creados en un porcentaje muy bajo.
6. Reemplazar y formar la nueva población con los individuos creados.
7. Evaluar cada uno de los individuos de la población y asignarles su valor de aptitud.
8. Repetir los pasos 3 al 7 hasta alcanzar el criterio de paro (usualmente es un determinado número de iteraciones o generaciones).

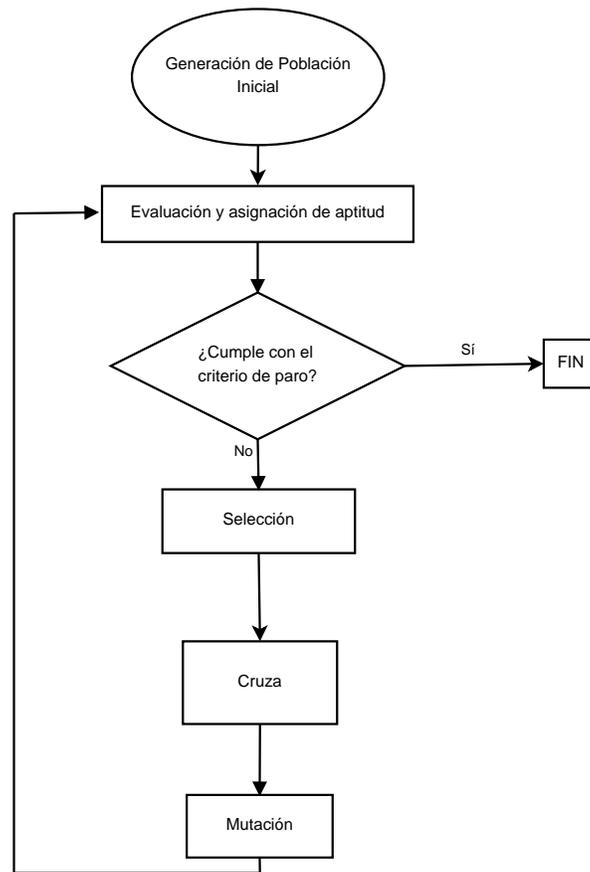


Figura 3.4: Diagrama de Flujo AG simple

A continuación se describen cada uno de los principales procesos del ciclo del Algoritmo Genético.

### Codificación

El elemento principal de los algoritmos genéticos es un *individuo* u *organismo*, el cual representa una solución posible en el espacio de búsqueda. La aplicación de los operadores de los algoritmos genéticos requiere, en principio, de la correcta representación de las posibles combinaciones de las variables en forma de cadenas de bits conocidas como  *cromosomas*, los cuales son el equivalente de los cromosomas en la biología genética. Como se mencionó, cada uno de los bits que forman un cromosoma, guarda información acerca de una característica de la posible solución representada. La longitud del cromosoma dependerá de las variables que se deseen codificar, su rango y su precisión. Gran parte de la teoría en la que se fundamentan los Algoritmos Genéticos utiliza el alfabeto binario (0,1) para representar a los individuos; el algoritmo genético simple usa esta codificación, aunque se puede utilizar una representación entera, real o en código Gray <sup>3</sup>. Cada una de las diferentes representaciones tiene

<sup>3</sup>Es un código no aritmético y no ponderado; esto es que no existen pesos específicos asignados a las posiciones de los bits. La característica importante del código Gray es que es necesario sólo un cambio de bit de la representación codificada

características propias, que ofrecen ventajas y desventajas sobre las otras, pero la decisión de utilizar una de ellas depende principalmente del tipo de problema que se este abordando.

En términos biológicos, el conjunto de parámetros que está representando un cromosoma particular se denomina *fenotipo*. El fenotipo contiene la información requerida para construir un organismo, el cual se conoce como *genotipo*. Los mismos términos se utilizan en el campo de los AG's. La adaptación de un individuo al problema, depende de la evaluación del genotipo. Esta última puede deducirse a partir del fenotipo, es decir, puede ser calculada a partir del cromosoma, usando la *función de adaptación*.

La *función de adaptación* debe ser diseñada para cada problema de manera específica. Dado un cromosoma particular, la función de adaptación le asigna un número real, el cual refleja el nivel de adaptación del individuo al problema representado por el cromosoma.

### **Población inicial**

En cada paso o *generación* del algoritmo existe un grupo de individuos que forman una *población*. Después de definir la codificación adecuada para representar a los individuos, el algoritmo genético simple comienza su proceso de búsqueda creando, como primer paso, una población inicial generada de forma aleatoria.

La mayoría de los algoritmos genéticos trabajan con un tamaño de población fijo, por lo que el tamaño de la población inicial determina el tamaño de la población en las futuras generaciones. Definir el tamaño de la población es una tarea de prueba y error [19]. En general, el número apropiado de individuos en la población aumenta proporcionalmente con la complejidad del problema, es decir los problemas de optimización que emplean cromosomas *pequeños*, con pocas variables, tienden a requerir poblaciones con menos individuos. De manera opuesta, poblaciones mayores son necesarias para tratar problemas relacionados con estructuras representadas por cromosomas más largos.

### **Selección**

La Selección es un proceso inicial donde todos los individuos de la población son evaluados por medio de la función objetivo,  $f(x)$ , para identificar aquellos con valores altos de adaptabilidad para hacer copias de estos y quedar en espera de la acción del operador de cruza, mientras que el resto de la población permanece sin cambios esperando ser sustituida por los futuros descendientes de su propia generación.

Es evidente que la función objetivo,  $f(x)$ , es quien decide quién sobrevive en cada generación, por ser el valor de adaptabilidad el medio por el cual se hace la discriminación para la selección de individuos. Esto significa que los individuos con un valor de adaptabilidad alto tienen mayor probabilidad de contribuir con al menos un descendiente para la siguiente generación.

El operador de selección es la versión artificial de la teoría propuesta por Darwin sobre la supervivencia del más apto. En la naturaleza, una especie con una valor de adaptabilidad alto sería aquella

---

de un número  $x$  para encontrar al número subsecuente a él

mejor adaptada al medio ambiente, con características que le permitan enfrentar todas las adversidades que se le presenten, es decir, con probabilidad alta de sobrevivir en un medio hostil hasta su etapa reproductiva.

Para problemas sin restricciones, la adaptabilidad de un individuo puede definirse como la función objetivo. Para problemas con restricciones, la adaptabilidad considera las violaciones a las restricciones o los márgenes de restricción.

Existen diversos procedimientos para llevar a cabo la selección en los AG los más utilizados son[13, 19, 22, 31]:

- Selección por torneo
- Selección por ruleta
- Selección por ranqueo
- Selección estocástica universal

El algoritmo genético simple utiliza la selección por ruleta para llevar a cabo el proceso de selección.

## **Cruza**

Una vez terminado el proceso de selección, inicia el proceso de cruce. A través del operador de cruce los individuos con mejor adaptabilidad, elegidos de la población, se escogen aleatoriamente en parejas, conocidas como padres, y estas intercambian información para crear nuevos individuos o hijos que formarán parte de la población de la siguiente generación, los cuales se espera tengan una mejor adaptabilidad que la de sus padres. El operador de cruce es responsable del aspecto de búsqueda de los algoritmos genéticos

Como sucede con el operador de selección, existen diversos métodos de cruce en la literatura referente a los AG [19], pero en la mayoría de ellos, dos cromosomas son escogidos de forma aleatoria de la población previamente seleccionada por el proceso de reproducción; se cortan sus cadenas de cromosomas en una posición escogida al azar, para así producir dos subcadenas iniciales y dos subcadenas finales. Después se intercambian las subcadenas finales, produciéndose así dos nuevos cromosomas completos. Habitualmente el proceso de cruce no se aplica a todos los padres de individuos que han sido seleccionados para cruzarse, sino que se aplica de manera aleatoria, normalmente con una probabilidad  $pc$  comprendida entre 0.5 y 1.0. Los métodos de cruce más empleados son[19]:

- Cruza en un punto
- Cruza en dos puntos
- Máscaras

El algoritmo genético simple utiliza la cruce en un punto como método de cruce.

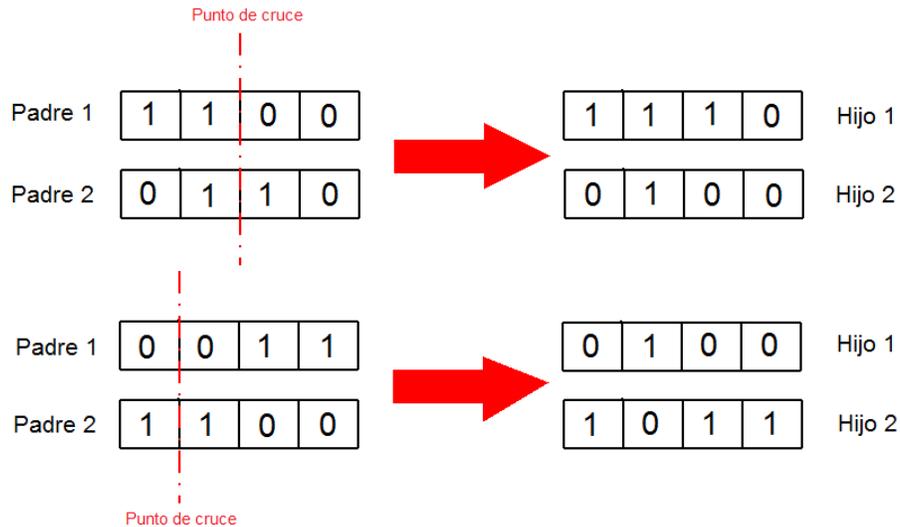


Figura 3.5: Cruza en un punto

## Mutación

El operador de mutación tiene la tarea de prevenir la pérdida prematura de información genética importante realizando una alteración aleatoria ocasional de un cromosoma[22, 13]. En ocasiones, las soluciones menos aptas pueden tener características buenas que pueden perderse al momento de realizar el proceso de reproducción cuando estas soluciones no son escogidas como padres. Además, la mutación es necesaria cuando es usada una codificación entera o real debido a que en la mayoría de los casos hay una probabilidad baja de que todos los genes posibles estén representados en la población inicial.

Este operador actúa sobre todos los individuos de la población, cambiando la información de los elementos de la cadena de bits siguiendo reglas probabilísticas.

Se dice que este operador juega un rol secundario ya que como sucede en la naturaleza, la mutación se da muy pocas veces, es decir con una probabilidad muy baja; probabilidades de mutación altas hacen la búsqueda del AG, totalmente aleatoria.

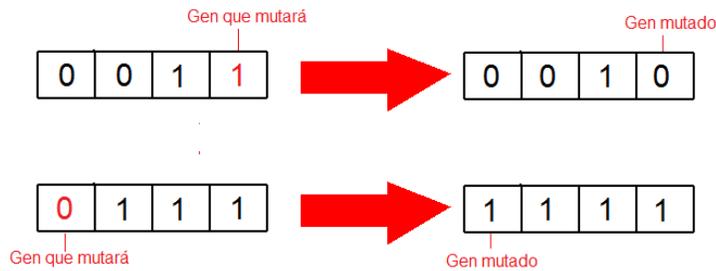


Figura 3.6: Operador de mutación

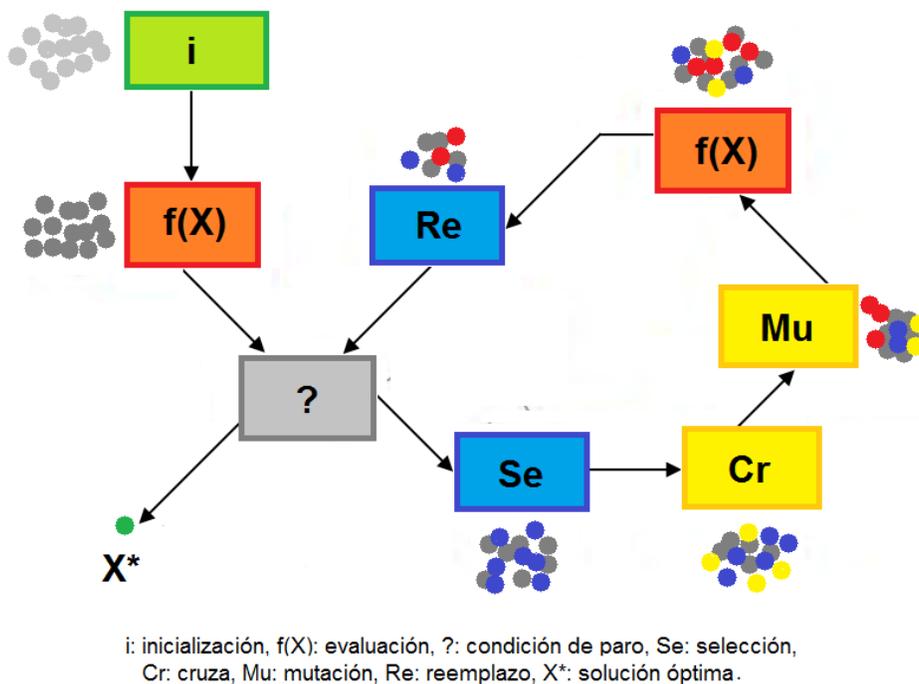


Figura 3.7: Ciclo general de un algoritmo genético [41]

Los tres operadores -selección, cruza y mutación- son simples y sencillos; por lo cual, la implementación de ellos en un AG puede llevarse a cabo de diferentes maneras, dotando de una gran versatilidad al algoritmo. Sin embargo, el ciclo general de un AG es el siguiente: una población inicial es creada

aleatoriamente, el operador de selección escoge buenas cromosomas, mientras que el operador de cruce recombina cromosomas buenos a partir de dos cromosomas buenos esperando formar mejores hijos. El operador de mutación altera un cromosoma localmente esperando crear un mejor cromosoma. Por lo tanto, se espera que si existen individuos con baja adaptabilidad sean eliminados mediante el operador de selección en las generaciones siguientes y si hay cromosomas con alta adaptabilidad, estos serán enfatizados mediante los dos operadores restantes, al final al cumplir con el criterio de paro impuesto, se espera que el AG encuentre la mejor opción al problema en cuestión Fig. 3.7 .

### 3.5.3. Manejo de problemas de optimización multiobjetivo mediante AG

En problemas multiobjetivo, cuando los objetivos se encuentran en conflicto entre sí, se buscan normalmente soluciones compromiso en lugar de una solución única. Por lo tanto, la noción de *óptimo* es diferente en estos casos. La noción de óptimo más comúnmente adoptada es la propuesta por Francis Ysidro Edgeworth y más tarde generalizada por Vilfredo Pareto. Dicha noción es comúnmente conocida bajo el nombre de *optimalidad de Pareto*[13, 16].

La mayoría de los algoritmos de optimización multiobjetivo usan el concepto de dominación. En estos algoritmos, dos soluciones son comparadas con base en si una domina a la otra o no. Asumiendo que hay  $N$  funciones objetivo; se usa el operador  $\prec$  (abarcando con él los casos de maximización o minimización de objetivos) entre dos soluciones  $i$  y  $j$  como  $i \prec j$  para denotar que la solución  $i$  es mejor que la solución  $j$  en un objetivo particular.

**Definición 3.5.1.** Una solución  $x^{(1)}$  domina a otra solución  $x^{(2)}$ , si las condiciones 1 y 2 son ciertas:

1. La solución  $x^{(1)}$  no es peor que  $x^{(2)}$  en todos los objetivos, o si  $f_j(x^{(1)}) \not\prec f_j(x^{(2)})$  para todas las  $j = 1, 2, \dots, N$
2. La solución  $x^{(1)}$  es estrictamente mejor que  $x^{(2)}$  en al menos un objetivo, o  $f_j(x^{(1)}) \prec f_j(x^{(2)})$  para al menos un  $\bar{j} \in \{1, 2, \dots, N\}$

Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple, la solución  $x^{(1)}$  no domina a la solución  $x^{(2)}$ . La forma matemática de representar que la solución  $x^{(1)}$  domina a la solución  $x^{(2)}$  es mediante el operador  $\prec$ , de la siguiente manera:  $x^{(1)} \prec x^{(2)}$ .

En la Fig. 3.8 se grafican los objetivos  $f1$  vs.  $f2$ , asumiendo que se trata con un problema de minimización-minimización. Se puede notar que del conjunto de soluciones, los puntos  $p1$  y  $p2$  tienen el mismo valor de  $f1$ , sin embargo,  $p1$  y  $p3$  tienen el mismo valor para  $f2$ . De acuerdo a la Def. 3.5.1, se puede observar que  $p1$  domina a todas las demás soluciones.

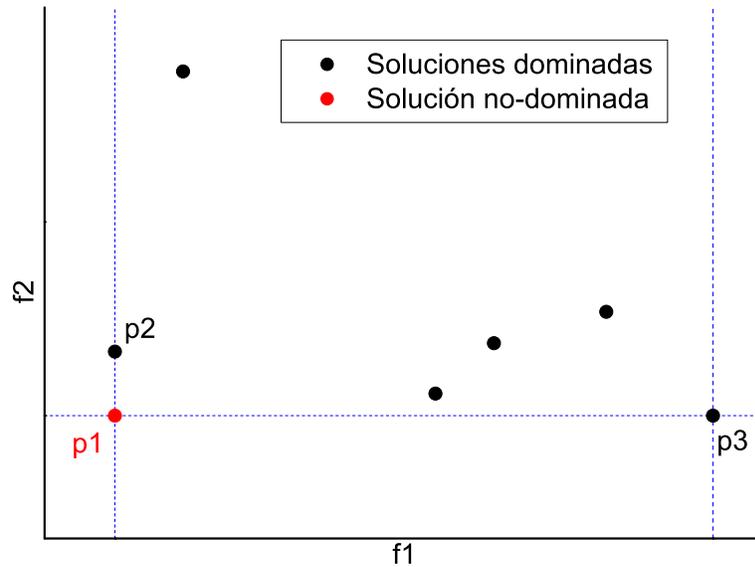


Figura 3.8: Representación de una solución no-dominada [13]

Para un conjunto finito de soluciones, es posible emplear un proceso de comparación por parejas y encontrar cuáles soluciones dominan a cuáles y cuáles soluciones son no-dominadas con respecto al resto. Como objetivo, se busca contar con un conjunto de soluciones, donde los elementos de este no se dominan. Este conjunto presenta otra característica importante, para cualquier solución fuera de él, es posible encontrar una solución dentro de él, la cual dominará a la primera. Por lo tanto, este conjunto tiene la propiedad de dominar a todas las demás soluciones ajenas a él. Este conjunto es llamado *Conjunto no-dominado* y se define de la siguiente manera:

**Definición 3.5.2.** *Entre un conjunto de soluciones  $P$ , el conjunto de las soluciones no-dominadas  $P'$  es aquel en las que sus elementos no están dominados por ningún miembro del conjunto  $P$ .*

Cuando el conjunto  $P$  es el espacio de búsqueda completo o  $P = F$ , el conjunto de soluciones no-dominadas resultante  $P'$  es llamado el *conjunto óptimo de Pareto*. La imagen del conjunto de óptimos de Pareto bajo las funciones objetivo es llamada *Frente de Pareto* [16]. La Fig. 3.9 muestra el conjunto óptimo de Pareto con una línea continua para cuatro diferentes escenarios con dos objetivos; cada objetivo puede ser minimizado o maximizado.

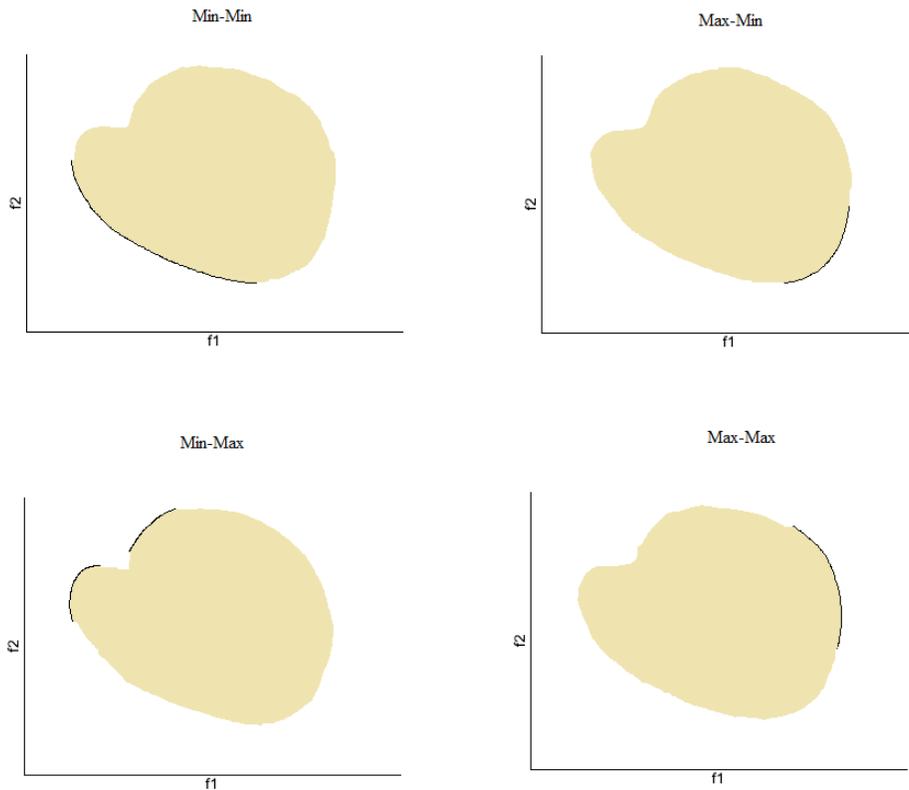


Figura 3.9: Soluciones óptimas de Pareto para las posibles combinaciones de dos funciones objetivo [13]

Al igual que en la optimización mono-objetivo donde se encuentran soluciones óptimas locales y soluciones globales, en la optimización multi-objetivo pueden haber conjuntos óptimos de Pareto local y global.

**Definición 3.5.3.** *El conjunto no-dominado de soluciones de todo el espacio de búsqueda factible  $F$  es el conjunto óptimo de Pareto global (o Frente de Pareto global).*

Una población puede ser clasificada en diferentes frentes de Pareto. Cuando el procedimiento para encontrar el frente de Pareto es aplicado por primera vez en una población, el conjunto resultante es el frente de mejor nivel (frente de Pareto Global). Para obtener otras clasificaciones, estas soluciones no-dominadas deben ser temporalmente omitidas del conjunto original para aplicar nuevamente el procedimiento. Lo que resulta es el frente de Pareto de segundo nivel (o el siguiente mejor nivel). Este proceso puede ser repetido hasta que todos los miembros de la población sean clasificados dentro de un frente de Pareto.

Como se mencionó anteriormente, uno de los objetivos de la optimización multi-objetivo es encontrar tantas soluciones óptimas de Pareto como sea posible, por lo tanto y aprovechando la peculiaridad

de los AG, de trabajar con una población de soluciones y presentar como resultado, después del empleo de los diferentes operadores genéticos, una población de soluciones, se describe a continuación un algoritmo elitista para solucionar problemas multi-objetivo.

### 3.5.4. NSGA-II

Este algoritmo fue propuesto por Deb y sus alumnos en el año 2000 [14]. A diferencia de otros métodos, donde sólo se utiliza una estrategia de preservación elitista, el NSGA-II también hace uso de un mecanismo explícito de preservación de diversidad [13].

En el NSGA-II, la población de descendientes  $Q_t$  es creada a partir de la población de padres  $P_t$ , ambas con  $N$  individuos. Al inicio del NSGA-II, las poblaciones  $P_t$  y  $Q_t$  se combinan para formar la población  $R_t$  de tamaño  $2N$ . Se utiliza un ordenamiento basado en no-dominancia (frentes de Pareto) para clasificar a la población  $R_t$ . Una vez terminado el ordenamiento no-dominado, la nueva población es llenada con soluciones de diferentes frentes no-dominados, uno a la vez. El llenado comienza con el mejor frente de Pareto, en concordancia con lo expuesto anteriormente este frente sería el del nivel 1 o  $F_1$ , donde  $i$  indica el número de frente, es evidente que el mejor frente será el frente  $F_1$  y el peor frente será el  $F_m$ , donde  $m$  indica el número total de frentes presentes en la población; el llenado continúa con las soluciones del segundo frente no-dominado ( $F_2$ ), y así sucesivamente. Debido a que la población de  $R_t$  es de tamaño  $2N$ , no todos los frentes pueden ser incorporados en la nueva población de tamaño  $N$ , por lo que los frentes que no puedan agregarse a la nueva población serán borrados. Cuando el último frente permitido sea considerado, es posible que puedan existir más soluciones en él de las necesarias para llenar la nueva población de tamaño  $N$ ; en este caso, en lugar de descartar de forma arbitraria a los miembros sobrantes del último frente, se utiliza una estrategia de nichos [13] para escoger a los miembros del último frente que formarán parte de la nueva población; estos, serán aquellos que residan en las regiones menos pobladas de dicho frente. Fig. 3.10.

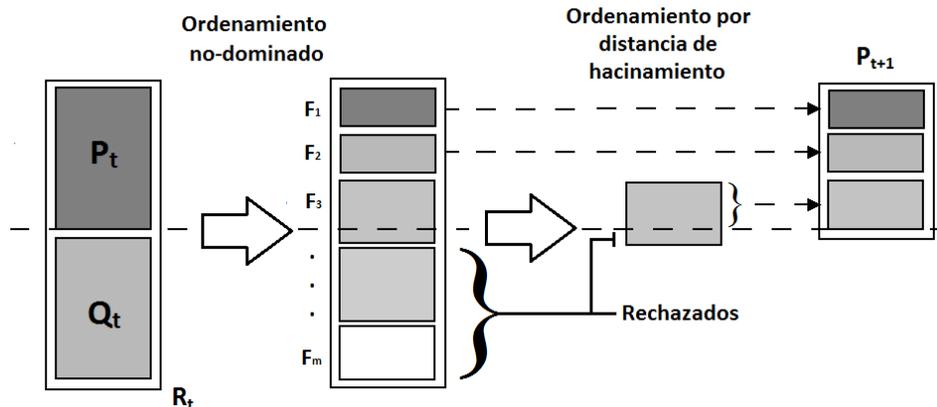


Figura 3.10: NSGA-II [13]

La estrategia anterior no afecta al desempeño del algoritmo en el principio de la evolución, ya que en esta etapa, existen varios frentes en la población combinada  $R_t$ . Es probable que soluciones de varios

buenos frentes se encuentren incluidos en la nueva población antes de sumar  $N$  soluciones. En este caso, no importa tanto qué elementos sean utilizados para llenar la población. Sin embargo, durante las últimas etapas de la simulación, es probable que la mayor parte de las soluciones en la población se encuentren en los mejores frentes no-dominados. Así mismo, es probable que en la población combinada  $R_t$  de tamaño  $2N$ , el número de soluciones en el primer frente exceda  $N$ . Es en este caso cuando el algoritmo descrito con anterioridad asegura que se elegirá un conjunto diverso de soluciones de los elementos no-dominados de este conjunto. Cuando la población entera converge al Frente óptimo de Pareto global, la continuación de este algoritmo asegurará una mejor distribución entre las soluciones. La idea general del NSGA-II es la siguiente:

## NSGA-II

**Paso 1.** Mediante la combinación de la población de padres y la de hijos se forma la población  $R_t = P_t \cup Q_t$ . La población  $R_t$  se ordena conforme a la no-dominancia de sus elementos y se identifican los diferentes frentes de Pareto:  $F_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , etc.

**Paso 2.** Se establece la nueva población  $P_{t+1} = \emptyset$ . Se establece el contador  $i=1$ . Mientras  $|P_{t+1}| + |F_i| < N$ , se realiza  $P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$  y  $i = i + 1$ .

**Paso 3.** Si  $|P_{t+1}| + |F_i| > N$ , se emplea el procedimiento de ordenamiento por hacinamiento ( $F_i, <_c$ ) (descrito más adelante) e incluir las  $N - |P_{t+1}|$  soluciones más ampliamente esparcidas usando los valores de distancia de hacinamiento asociadas al frente  $F_i$ .

**Paso 4.** Se crea la población de descendientes  $Q_{t+1}$  a partir de  $P_{t+1}$  usando el torneo de selección por hacinamiento (explicado más adelante), los operadores de cruce y de mutación.

## Distancia de hacinamiento

Para tener una estimación de la densidad de soluciones que se encuentran alrededor de una solución particular  $i$  en la población, es necesario calcular la distancia promedio de dos soluciones en ambos lados de la solución  $i$  para cada objetivo. Esta cantidad  $d_i$  es proporcional al perímetro del rectángulo <sup>4</sup> formado por las soluciones más cercanas a  $i$  como vértices; a esta cantidad se le llama *distancia de hacinamiento*. En la Fig. 3.11, la distancia de hacinamiento de la solución  $i$  en el frente correspondiente (marcado con círculos negros) es la longitud promedio de los lados del cuboide (mostrado con líneas punteadas). El cálculo de la distancia de hacinamiento requiere ordenar la población del frente de acuerdo a cada uno de los objetivos en orden ascendente de magnitud, este ordenamiento se almacenará en un conjunto  $I^m$ , donde  $m$  indica la función objetivo,  $m = 1, 2, \dots M$ . Después de eso, para cada una de las funciones objetivo ( $m = 1, 2, \dots M$ ), las soluciones de frontera (soluciones con el menor y mayor valor de la función objetivo  $m$ ) se les asigna un valor de distancia infinito ( $d = \infty$ ). A todas las demás soluciones intermedias se les asigna un valor de distancia igual a la diferencia normalizada absoluta entre los valores de la función de dos soluciones adyacentes. Este cálculo se realiza para las demás funciones objetivo. El valor total de la distancia de hacinamiento se obtiene sumando los valores individuales de las distancias correspondientes a cada uno de los objetivos. El procedimiento

---

<sup>4</sup>También llamado cuboide [14]

para calcular la distancia de hacinamiento se presenta a continuación de forma general:

### Procedimiento para asignar la distancia de hacinamiento

**Paso 1.** Se establece que el número de soluciones en el frente  $F$  es  $l = |F|$ . Para cada solución  $i$  presente en  $F$  se asigna  $d_i = 0$ .

**Paso 2.** Para cada función objetivo  $f_m$ , donde  $m = 1, 2, \dots, M$  y  $M$  es el número total de funciones objetivo, se ordena a los elementos del frente en orden ascendente de magnitud, obteniendo así, el conjunto  $I^m$ .

**Paso 3.** Para cada  $I^m$ , se le asigna a las soluciones de frontera un valor de distancia infinito;  $d_{I_1^m} = d_{I_l^m} = \infty$ , y para las demás soluciones desde  $j = 2$  hasta  $(l - 1)$ , se realiza:

$$d_{I_j^m} = d_{I_j^m} + \frac{f_m^{(I_{j+1}^m)} - f_m^{(I_{j-1}^m)}}{f_m^{max} - f_m^{min}} \quad (3.44)$$

El subíndice  $j$  presente en  $I_j$ , denota al miembro ubicado en la posición  $j$  del conjunto ordenado  $I$ ; por lo que para cualquier función objetivo  $m$ ,  $I_1$  y  $I_l$  serán los elementos del conjunto con el menor y mayor valor de la función objetivo, respectivamente. En la Ec. 3.44  $f_m^{max}$  y  $f_m^{min}$  son el valor máximo y mínimo, respectivamente, de la función objetivo  $m$ ;  $f_{j+1}^m$  y  $f_{j-1}^m$  son las soluciones adyacentes a la solución  $j$  para cada una de las funciones objetivo. De esta manera, cuando las soluciones se encuentran próximas entre sí, el valor de la distancia de hacinamiento será pequeño.

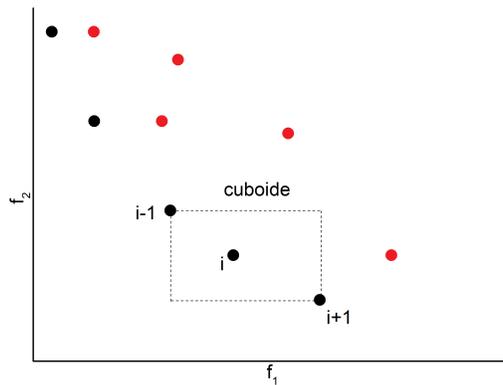


Figura 3.11: Distancia de hacinamiento [13]

### Operador de comparación de población

Es importante señalar que en el **Paso 4** del NSGA-II, mencionado anteriormente, la población  $Q_{t+1}$  es creada partiendo de la población  $P_{t+1}$  (obtenida gracias a los tres pasos predecesores) mediante el empleo del torneo de selección por hacinamiento, la cruce y la mutación. Los dos últimos operadores, cruce y mutación, mantienen las mismas características expuestas por Goldberg [19] y son empleados de la misma forma que en el algoritmo básico [19]; sin embargo, el torneo de selección por hacinamiento presenta características diferentes a las del torneo binario expuesto por Deb [13].

El torneo de selección por distancia de hacinamiento utiliza el operador ( $\prec_c$ ), el cual compara dos soluciones y presenta al ganador del torneo. Este operador asume que cada solución tiene dos propiedades:

1. Una clasificación de no-dominancia (Frente de Pareto)  $r_i$  en la población
2. Una medida de la distancia de hacinamiento  $d_i$  en el frente de Pareto que está contenido.

**Definición 3.5.4.** *Una solución  $i$  gana un torneo de selección por hacinamiento a otra solución  $j$  si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *Si la solución  $i$  se encuentra en un Frente de Pareto mejor que la solución  $j$ , es decir,  $r_i < r_j$ .*
2. *Si ambas soluciones se encuentran en el mismo Frente de Pareto ( $r_i = r_j$ ), pero la solución  $i$  tiene una mejor distancia de hacinamiento que la solución  $j$ , es decir,  $d_i > d_j$ .*

La primera condición asegura que las soluciones seleccionadas se encuentren en un mejor frente. La segunda condición resuelve el escenario en donde ambas soluciones se encuentran en el mismo frente, utilizando la distancia de hacinamiento. La solución que resida en un área menos poblada (mayor distancia de hacinamiento  $d_i$ ) ganará.

## NSGA-II con restricciones

El NSGA-II ha demostrado ser capaz de mantener una mayor diversidad de soluciones más cercanos al Frente de Pareto global, comparado con otros AG multiobjetivo [5, 14]. Sin embargo, en su forma original, el NSGA-II es incapaz de resolver problemas de optimización con restricciones, por lo que es necesario una estrategia de manejo de restricciones [6, 9, 28, 32], que permita al algoritmo resolverlos. El método empleado en este trabajo para el manejo de restricciones utiliza la selección por torneo binario, el cual es una modificación del torneo binario mencionado anteriormente [13]; en [12] se demostró como un algoritmo basado en selección por torneo binario puede ser utilizado para manejar restricciones mucho mejor que otros métodos existentes.

## Torneo restringido

Mediante este método [14], dos soluciones son tomadas de la población y se escoge a la mejor de ellas. Cuando el problema de optimización presenta restricciones, cada una de las soluciones puede ser factible o no factible, Por lo tanto, se puede presentar una de las siguientes situaciones:

1. Ambas soluciones son factibles.

2. Una solución es factible y la otra es no factible.
3. Ambas soluciones son no factibles.

Cuando se habla de un problema de optimización mono-objetivo, la elección de una de las soluciones se lleva a cabo siguiendo una de las siguientes reglas, según sea la situación que se presente:

- **Situación (1)** Se escoge la solución con el mejor valor de la función objetivo.
- **Situación (2)** Se escoge la solución factible.
- **Situación (3)** Se escoge la solución con la menor violación de la restricción.

Sin embargo, en el contexto de la optimización multi-objetivo aunque las dos últimas situaciones pueden emplearse sin ninguna modificación la dificultad se presenta en la primera situación, debido a que es necesario considerar más de una función objetivo en la comparación. El torneo restringido supera este inconveniente utilizando el concepto de dominación. Cuando ambas soluciones son factibles es necesario verificar si pertenecen a frentes de Pareto independientes, en tal caso la solución que se encuentre en el mejor de ellos será la escogida. En el caso en el que las soluciones pertenezcan al mismo Frente de Pareto, el método emplea una técnica de preservación de diversidad para resolver la situación. Debido a que mantener la diversidad es uno de los objetivos en una optimización multi-objetivo, se elegirá a la solución que se encuentre en la región menos concurrida en el Frente de Pareto.

Por lo tanto la condición de *dominación con restricciones* para dos soluciones  $x^{(i)}$  y  $x^{(j)}$  se define de la siguiente manera:

**Definición 3.5.5.** *Se dice que una solución  $x^{(i)}$  **domina con restricciones** a una solución  $x^{(j)}$ , si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *La solución  $x^{(i)}$  es factible y la solución  $x^{(j)}$  no.*
2. *Las soluciones  $x^{(i)}$  y  $x^{(j)}$  son no factibles, pero la solución  $x^{(i)}$  tiene una violación de la restricción menor.*
3. *Las soluciones  $x^{(i)}$  y  $x^{(j)}$  son factibles y la solución  $x^{(i)}$  domina a la solución  $x^{(j)}$  en el sentido usual. (Definición 3.5.1)*

Es necesario realizar una modificación a la definición de dominancia (Definición 3.5.1) debido a la presencia de restricciones. Entre una población de soluciones, el conjunto de soluciones *no-dominadas restringidas* son aquellas que no son dominadas con restricciones por cualquier otro miembro de la población, según la Definición 3.5.5.

Así mismo, es necesario establecer un método para la obtención del valor de violación de la restricción [13]. Este enfoque permite analizar la dominancia de soluciones no factibles. Antes de que el valor de la violación de la restricción sea calculada, todas las restricciones deben ser normalizadas. Por lo tanto, las funciones de restricción resultantes son  $g_j(x^{(i)}) \geq 0$  para  $j = 1, 2, \dots, J$ . Para cada solución  $x^{(i)}$ , el valor de la violación de la restricción para cada restricción se calcula de la siguiente forma:

$$w_j(x^{(i)}) = \begin{cases} |\underline{g}_j(x^{(i)})|, & \text{si } \underline{g}_j(x^{(i)}) < 0; \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.45)$$

Después de lo anterior, todos los valores de violación de la restricción son sumados juntos para obtener el valor de violación de la restricción total:

$$\Omega(x^{(i)}) = \sum_{j=1}^J w_j(x^{(i)}). \quad (3.46)$$

De esta forma y gracias a la Definición 3.5.5 es posible definir el operador de selección *torneo restringido* de la siguiente manera:

**Definición 3.5.6.** *Dadas dos soluciones  $x^{(i)}$  y  $x^{(j)}$ , la solución  $x^{(i)}$  ganará un torneo restringido si cualquiera de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *La solución  $x^{(i)}$  pertenece a un mejor conjunto no dominado con restricción.*
2. *Las soluciones  $x^{(i)}$  y  $x^{(j)}$  pertenecen al mismo conjunto no dominado con restricción, pero la solución  $x^{(i)}$  se encuentra en un región menos poblada basada en una medida de la distancia de nichos [13].*

En este trabajo se utiliza el torneo restringido como operador de selección junto con el NSGA-II y se emplea la distancia de hacinamiento como medida de la distancia de nichos.

## Capítulo 4

# Modelado de materiales compuestos mediante FEM

### 4.1. Análisis de Laminados Compuestos mediante el FEM

En este trabajo el análisis de las estructuras se lleva a cabo mediante el Método de los Elementos Finitos (FEM). Las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el comportamiento de los materiales compuestos laminados cuentan con soluciones analíticas para placas rectangulares [37] con todos sus bordes simplemente apoyados (Método de Navier) o con dos bordes opuestos simplemente apoyados y los restantes con condiciones de frontera arbitrarias (Método de Lévy), sin embargo para geometrías y condiciones de frontera arbitrarias no se cuentan con este tipo de soluciones. Por lo tanto, es necesario utilizar métodos numéricos que sean capaces de resolver tales cuestiones. Entre los métodos numéricos desarrollados para la resolución de ecuaciones diferenciales definidas en dominios arbitrarios, el *Método de los Elementos Finitos (FEM)* es el más efectivo [34].

#### 4.1.1. Modelo

El desarrollo del modelo de elementos finitos de las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el comportamiento de los materiales compuestos laminados, expuestas en el capítulo anterior, sigue dos etapas: (1) la construcción de los enunciados integrales ponderados de las ecuaciones (*forma débil de las ecuaciones*) y (2) la aproximación de los desplazamientos y rotaciones mediante funciones de interpolación adecuadas, que al ser substituidas en la *forma débil* de las ecuaciones permitan obtener relaciones algebraicas entre los valores nodales de estos desplazamientos/rotaciones y las fuerzas. A continuación, se presenta el modelo de elementos finitos de la Teoría de Placas Laminadas con Deformación Cortante (FSDT). Para el caso estático lineal, las ecuaciones de equilibrio de la FSDT son:

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
& F_{55} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + F_{45} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + F_4 \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + q = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{55} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{45} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& B_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + B_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\
& + B_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \\
& + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - F_{45} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - F_{44} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Se construye la *forma débil* para la Ec. 4.1 escogiendo como función de peso  $\delta u$ :

$$\begin{aligned}
& \delta u \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{16} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Integrando sobre un elemento con dominio  $\Omega^e$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \delta u \left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. + B_{16} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right] \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Utilizando las siguientes identidades:

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.9)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.10)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.11)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.12)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) - B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.13)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial x} \left( B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta u B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \quad (4.15)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta u A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.16)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta u A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.17)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta u A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.18)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta u A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.19)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left( B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \delta u B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.20)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} (B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) - B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.21)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} (B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y}) - B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.22)$$

$$\delta u \frac{\partial}{\partial y} (B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) - B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \quad (4.23)$$

Sustituyendo las Ec.(4.8-4.23) en Ec.(4.7) y agrupando términos se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta u A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x}) \right. \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x}) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) \Big] dx dy \\ & - \int_{\Omega^e} \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right. \\ & + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \\ & + A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \\ & + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \Big] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Aplicando el teorema de la divergencia y agrupando términos se obtiene Ec.(4.25):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \left[ A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right. \\ & + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \\ & + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \Big] dx dy \\ & - \oint_{\Gamma^e} \delta u \left[ (A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial v_0}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) n_x \right. \\ & + (A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_0}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial v_0}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \phi_y}{\partial x}) n_y \Big] ds = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Utilizando las relaciones presentadas en la Ec.(3.28) la expresión anterior se reduce a:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} N_x + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_{xy} \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta u (N_x n_x + N_{xy} n_y) ds = 0 \quad (4.26)$$

La expresión dentro del parentesis de la integral de curva (frontera  $\Gamma^e$ ) denota la fuerza interplanar normal  $N_n$ :

$$N_n = N_x n_x + N_{xy} n_y \quad (4.27)$$

Por lo tanto, la Ec.(4.26) se convierte en:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} N_x + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_{xy} \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta u N_n ds = 0 \quad (4.28)$$

La Ec.(4.28) es la *forma débil* de la Ec.(4.1). Procediendo de la misma manera ahora con las Ecs.(4.2-4.5), se obtiene la *forma débil* de cada una de ellas, utilizando  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \phi_x$  y  $\delta \phi_y$  como funciones de peso, respectivamente:

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial x} N_{xy} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} N_y \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta v N_{ns} ds = 0 \quad (4.29)$$

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial x} Q_x + \frac{\partial \delta w}{\partial y} Q_y + \delta w q \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta w Q_n ds = 0 \quad (4.30)$$

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} M_x + \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} M_{xy} + \delta \phi_x Q_x \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta \phi_x M_n ds = 0 \quad (4.31)$$

$$\int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} M_{xy} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} M_y + \delta \phi_y Q_y \right] dx dy - \oint_{\Gamma^e} \delta \phi_y M_{ns} ds = 0 \quad (4.32)$$

Se puede notar inmediatamente que las *formas débiles* de la FSDT contienen, a lo mucho, sólo la primera derivada de las variables dependientes  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$ . Por lo tanto, éstas pueden ser aproximadas usando las funciones de interpolación de Lagrange [3, 36]:

$$u_0 = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) \quad (4.33)$$

$$v_0 = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) \quad (4.34)$$

$$w_0 = \sum_{j=1}^n w_j \psi_j(x, y) \quad (4.35)$$

$$\phi_x = \sum_{j=1}^n S_j^x \psi_j(x, y) \quad (4.36)$$

$$\phi_y = \sum_{j=1}^n S_j^y \psi_j(x, y) \quad (4.37)$$

donde  $\psi_j$  son las funciones de interpolación de Lagrange. Al sustituir las Ec.(4.33 - 4.34) en Ec.(4.28-4.32) se obtiene el modelo de elemento finito de la FSDT.

$$\sum_{\beta=1}^5 \sum_{j=1}^n K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha = 0 \quad , \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 5) \quad (4.38)$$

$$(4.39)$$

o en su forma matricial

$$[K^e]\{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad (4.40)$$

donde los coeficientes de rigidez y fuerza están definidos por  $(\alpha = 1, 2, \dots, 5)$ :

$$K_{ij}^{1\alpha} = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right) dx dy$$

$$K_{ij}^{2\alpha} = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right) dx dy$$

$$K_{ij}^{3\alpha} = \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_{2j}^\alpha \right) dx dy$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{4\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{6j}^\alpha + \psi_i Q_{1j}^\alpha \right) dx dy \\
K_{ij}^{5\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{2j}^\alpha + \psi_i Q_{2j}^\alpha \right) dx dy
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Los coeficientes  $N_{1j}^\alpha$ ,  $M_{1j}^\alpha$  y  $Q_{1j}^\alpha$  para  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$  y  $I = 1, 2, 6$  están dados por:

$$\begin{aligned}
N_{1j}^1 &= A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{1j}^2 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{1j}^4 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{1j}^5 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{2j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{2j}^2 &= A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{2j}^4 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{2j}^5 &= B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{6j}^1 &= A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{6j}^2 &= A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{6j}^4 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & N_{6j}^5 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{1j}^2 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{1j}^4 &= D_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{1j}^5 &= D_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{2j}^2 &= B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{2j}^4 &= D_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{2j}^5 &= D_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{6j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{6j}^2 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{6j}^4 &= D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & M_{6j}^5 &= D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
Q_{1j}^4 &= A_{55} \psi_j, & Q_{2j}^4 &= A_{45} \psi_j, & Q_{1j}^5 &= A_{45} \psi_j, & Q_{2j}^5 &= A_{44} \psi_j \\
Q_{1j}^3 &= A_{55} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}, & Q_{2j}^3 &= A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{44} \frac{\partial \psi_j}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i N_n ds, & F_i^2 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i N_{ns} ds, & F_i^3 &= \int_{\Omega^e} q \psi_i dx dy + \int_{\Gamma^e} \psi_i Q_n ds \\
F_i^4 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i M_n ds, & F_i^5 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i M_{ns} ds
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Todos los demás coeficientes son cero.

Una vez aplicado el método de los elementos finitos bajo las condiciones de frontera y bajo las cargas de estudio deseadas, es posible obtener los valores nodales de los desplazamientos; con lo anterior es posible mediante las Ecs.(4.33 - 4.37) determinar los desplazamientos, deformaciones y esfuerzos en un punto dentro de cada uno de los elementos  $\Omega^e$ .

#### 4.1.2. Validación del programa (FEM) y definición del tamaño de malla

Después de desarrollar el algoritmo para llevar a cabo el análisis de materiales compuestos reforzados con fibras, se llevaron a cabo una serie de pruebas para definir el tamaño de malla adecuado para obtener resultados confiables a menor costo computacional. A continuación, se presentan los resultados obtenidos de dichas pruebas.

#### Análisis Estático Lineal

Para validar el programa basado en el método de los elementos finitos (FEM) se resolvieron problemas que cuentan con solución analítica, para así llevar a cabo la comparación de resultados. Las soluciones analíticas se desarrollaron utilizando el Método de Navier para laminados *cross-ply* y laminados *angle-ply* antisimétricos [2, 37].

En principio se realizó el análisis estático lineal del desplazamiento transversal central de una laminado de  $0.2286 [m] \times 0.127 [m]$  simplemente apoyado en sus cuatro bordes y sometido a una carga uniformemente distribuida en la parte superior del laminado en dirección del eje  $z$ , como se muestra en la Fig. 4.1, variando el número de las láminas que lo componen, todas del mismo espesor, y la orientación de éstas. Las condiciones de frontera impuestas a los laminados se muestran en la Fig. 4.2. Los laminados compuestos considerados en estas pruebas están hechas de material T300/5208 grafito/epoxy, cuyas propiedades [38] se presentan en el Cuadro 4.1

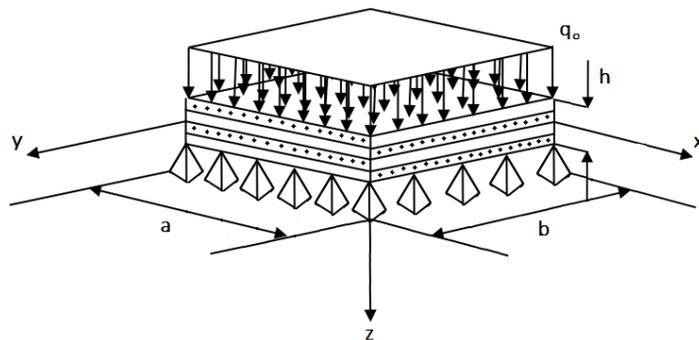


Figura 4.1: Geometría de los laminados y condición de carga

Propiedad	Valores	Propiedad	Valores
$E_1$	132.5 GPa	$X_T$	1515 MPa
$E_2$	10.8 GPa	$X_C$	1697 MPa
$E_3$	10.8 GPa	$Y_T = Z_T$	43.8 MPa
$G_{12} = G_{13}$	5.7 GPa	$Y_C = Z_C$	43.8 MPa
$G_{23}$	3.4 GPa	$R$	67.6 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.24	$S = T$	86.9 MPa
$\nu_{23}$	0.49	<i>Espesor de cada placa, <math>h_i</math></i>	0.127 mm

Cuadro 4.1: Propiedades Mecánicas de T300/5208 grafito/epoxy

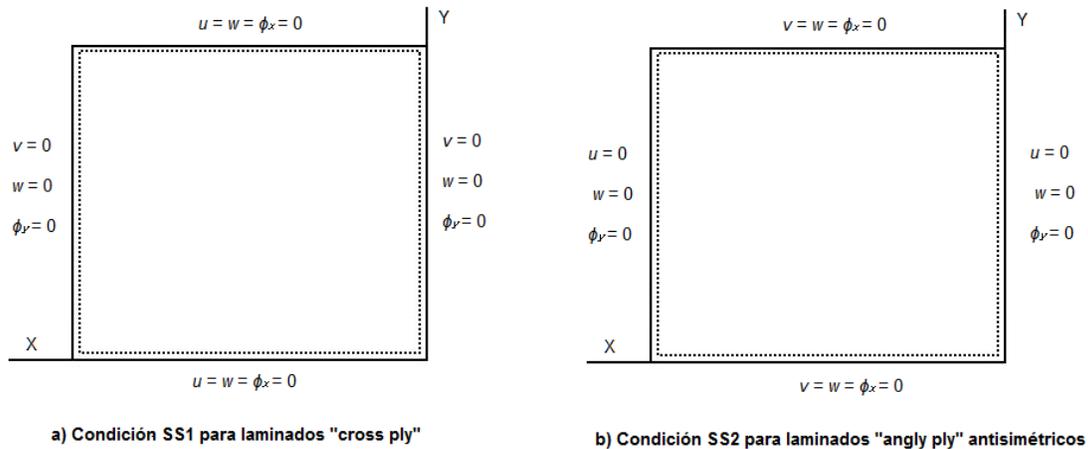


Figura 4.2: Condiciones de Frontera

Se llevaron a cabo varios refinamientos de malla tipo h [34] para estudiar la convergencia de la solución (deflexión central) Fig. 4.3; utilizando elementos rectangulares lineales.

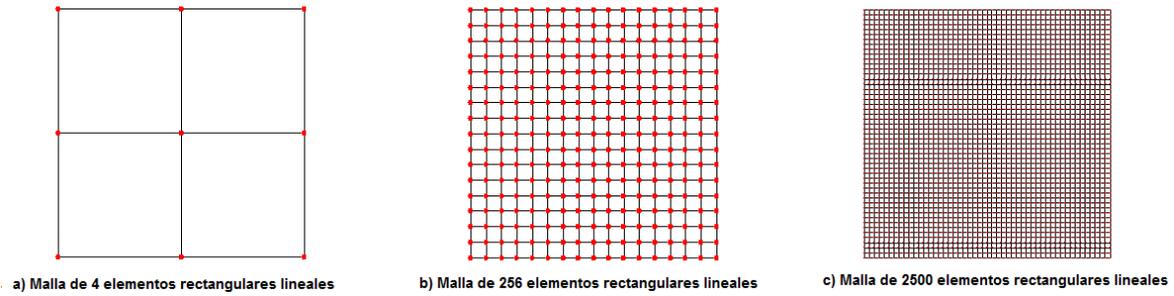


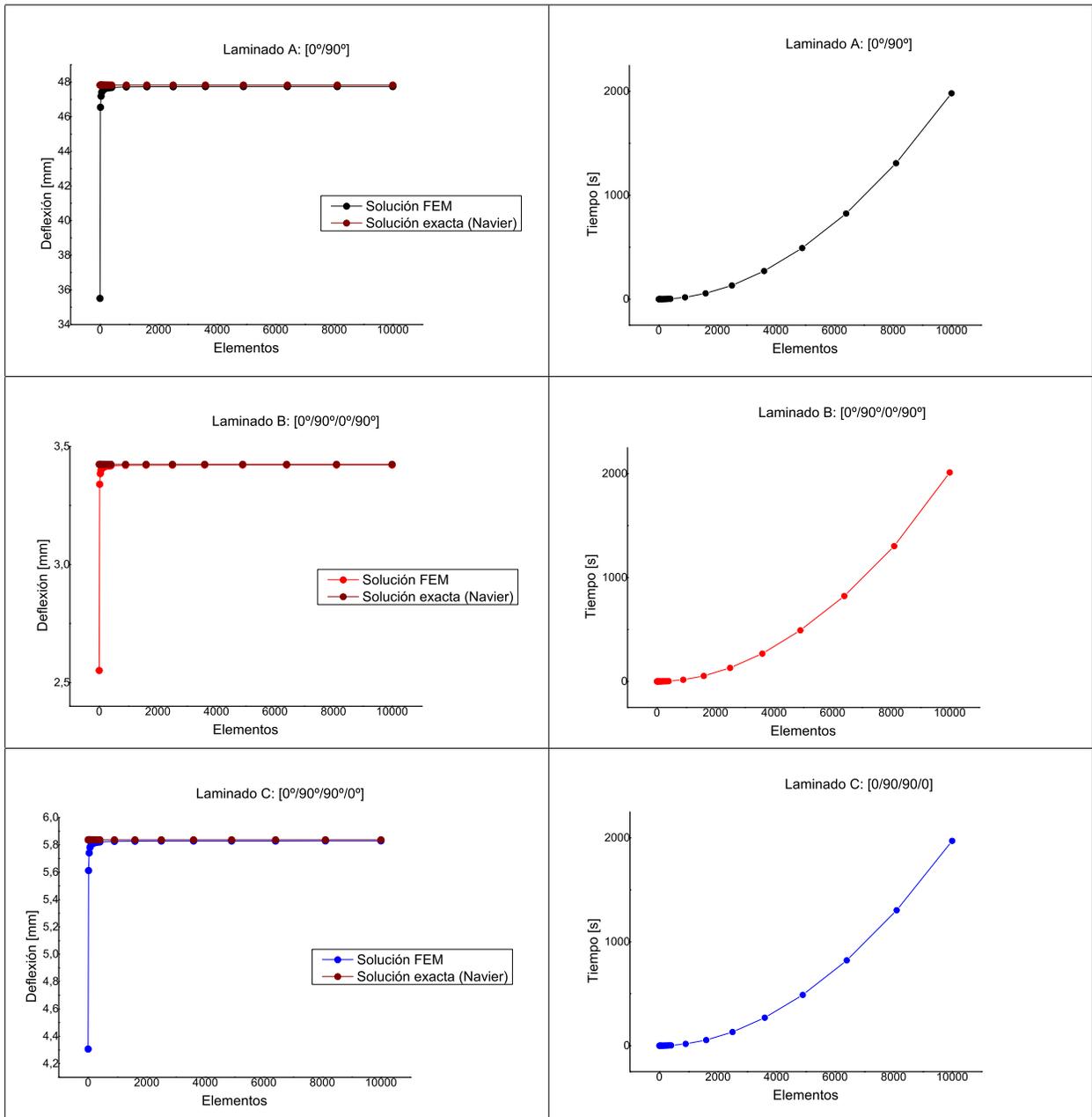
Figura 4.3: Algunas mallas utilizadas

Los laminados estudiados y sus condiciones de carga y frontera se muestran en el Cuadro 4.2.

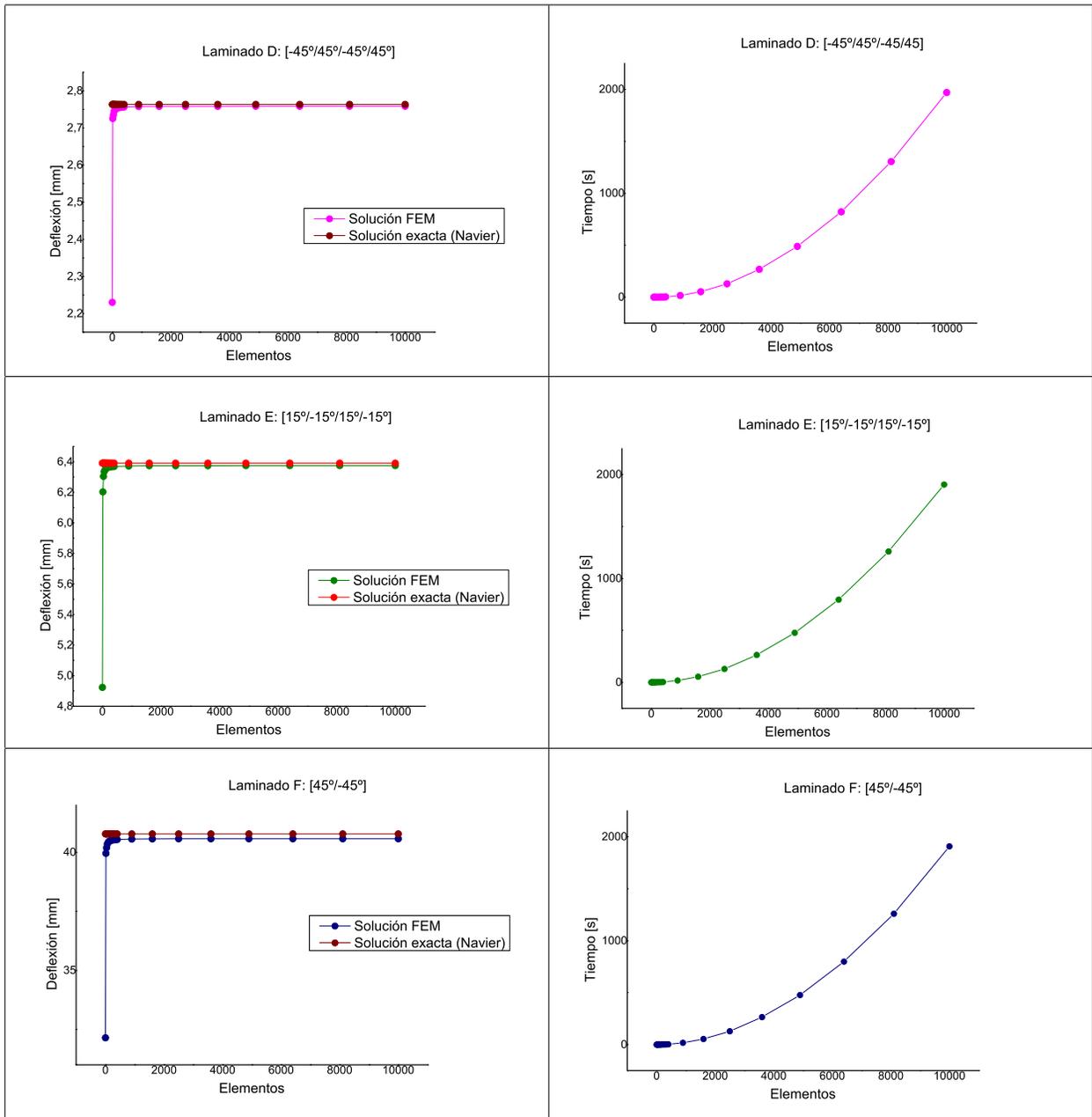
Laminado	Secuencia de Apilamiento	Condición de Frontera	Carga [ $Pa/m^2$ ]
A	$[0^\circ/90^\circ]$	SS1	690
B	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	SS1	690
C	$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	SS1	690
D	$[-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$	SS2	690
E	$[15^\circ/-15^\circ/15^\circ/-15^\circ]$	SS2	690
F	$[45^\circ/-45^\circ]$	SS2	690
G	$[15^\circ/-15^\circ]$	SS2	690

Cuadro 4.2: Laminados Estudiados

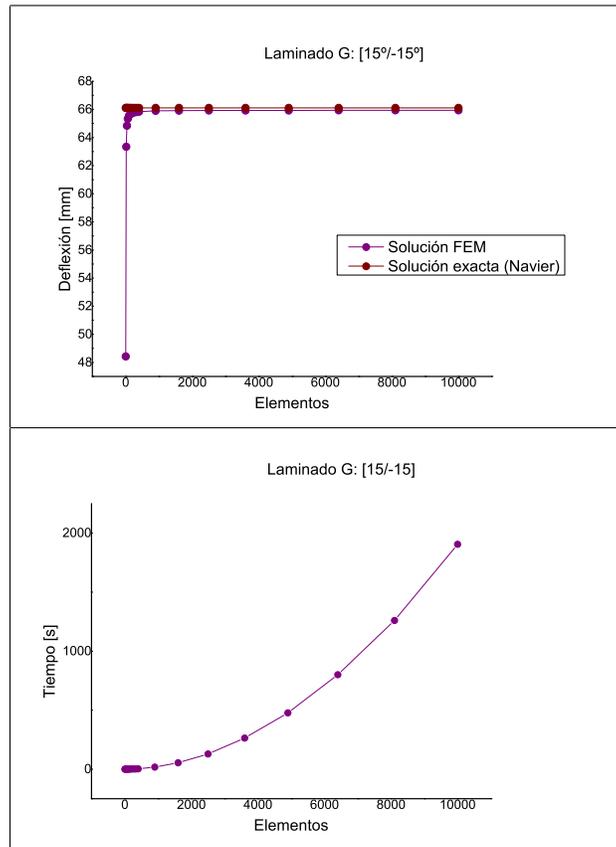
Para cada uno de los laminados presentados en el Cuadro 4.2 se muestran las gráficas de convergencia de la solución numérica, obtenidas variando el tamaño de malla (cantidad de elementos finitos) para el cálculo de la solución. Además, en cada una de estas gráficas se presenta simultáneamente la solución exacta, para así llevar a cabo la comparación de ambas soluciones. Así mismo, se registró el tiempo total empleado para el cómputo de los resultados mediante el FEM para cada una de las diferentes mallas empleadas anteriormente en cada uno de los laminados. Cuadros (4.3-4.5)



Cuadro 4.3: Convergencia y tiempo de cómputo de los laminados



Cuadro 4.4: Convergencia y tiempo de cómputo de los laminados



Cuadro 4.5: Convergencia y tiempo de cómputo del laminado G

En la Fig.4.4 se presenta una comparación del tiempo utilizado para cada uno de los laminados al variar el tamaño de malla; donde, se puede notar que todos los análisis realizados presentan un comportamiento exponencial similar. Con base en esta gráfica y en las gráficas de convergencia de cada uno de los laminados, se definió como malla óptima la formada por 256 elementos ya que presenta las características siguientes:

- El error promedio con respecto a la solución exacta es de 0.36 % .
- El tiempo promedio de convergencia es de 1.6 [s].

Es importante señalar, que aún cuando las mallas más finas (mayor número de elementos finitos) presentan valores de solución más cercanos a la solución exacta, el objetivo primordial en este trabajo es optimizar materiales compuestos por medio de algoritmos genéticos, los cuales, como se verá más adelante, analizan, ayudados del FEM, poblaciones de solución mayores a 40 elementos; para lo cual es aconsejable que además de realizar un análisis lo más preciso y exacto posible de los casos planteados, el tiempo de cómputo empleado para esta acción sea pequeño, evitando con esto que el costo computacional al emplear el algoritmo genético se incremente.

Por lo tanto, es primordial escoger un tamaño de malla, como el seleccionado, que permita realizar el análisis de los laminados de la forma más exacta y precisa posible, utilizando una menor cantidad de recursos computacionales, beneficiando de esta manera al proceso de optimización.

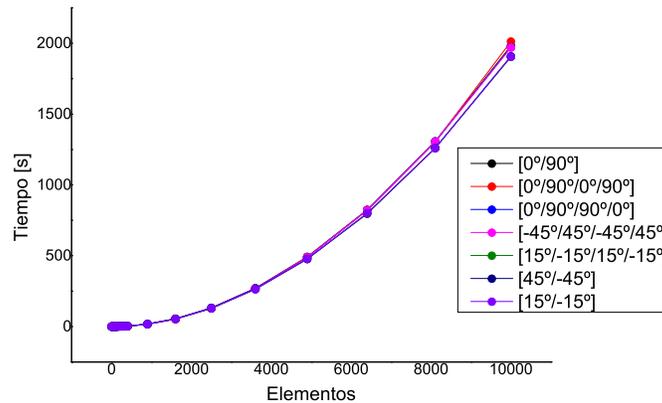


Figura 4.4: Comparación de los tiempos de cómputo por elementos para los diferentes laminados

Con base en los resultados anteriores, se utilizó la malla de 16 x 16 (256 elementos) (Fig. 4.5), definida como óptima, para analizar una placa rectangular con las mismas características geométricas y mecánicas expuestas en la Sección 4.1.2, para validar los resultados del algoritmo empleado, a lo largo de este trabajo, basado en el método de los elementos finitos. Debe aclararse que la placa se encuentra apoyada simplemente en sus cuatro bordes (Condición SS1) bajo una carga transversal de  $690 \text{ [Pa/m}^2\text{]}$ .

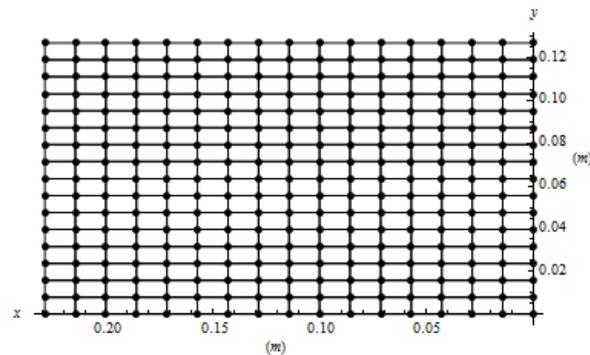
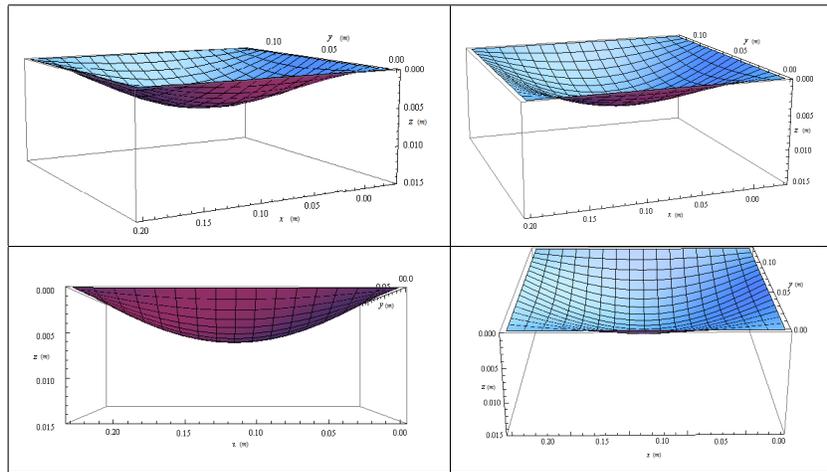


Figura 4.5: Discretización del dominio

El plano medio de la placa deformada se ilustra en el Cuadro 4.6, así mismo en la Fig. 4.6 se muestra el desplazamiento transversal ( $w_0$ ) por elementos del plano medio de la placa; esta gráfica

permite observar que existe una concordancia con respecto a la gráfica que la precede, pues en ambas se observa de forma evidente lo que ya se esperaba con anterioridad: la mayor deflexión del laminado se encuentra en el centro de él [2, 26, 37], también se puede observar que en cada uno de los 4 bordes se cumple satisfactoriamente con la condición de frontera impuestas a ellos (en todos los casos  $w_0 = 0$ ).

Las gráficas por elementos de los desplazamientos  $u_0$  y  $v_0$ , así como las correspondientes a las rotaciones  $\phi_x$  y  $\phi_y$  no son presentadas y en su lugar se muestran los resultados nodales (Cuadros (?? - 4.18)). Además los Cuadros (4.7 - 4.10) muestran los resultados nodales correspondientes al desplazamiento  $w_0$ . En cada uno de los Cuadros (?? - 4.18), se muestran de forma simultánea los resultados nodales obtenidos mediante el método de Navier (solución exacta), así mismo se presenta el error relativo que hay entre la solución obtenida mediante el FEM y la solución exacta.



Cuadro 4.6: Diferentes vistas de la deflexión de la placa

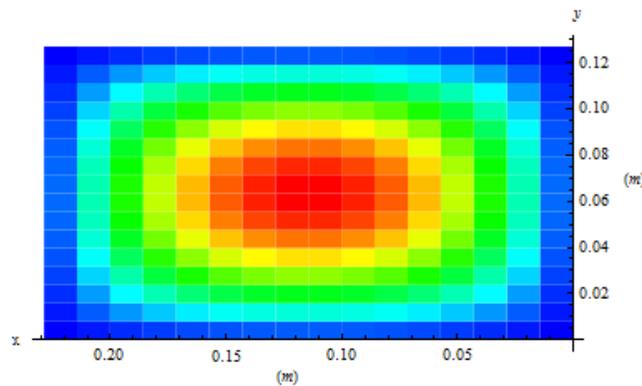


Figura 4.6: Deflexión transversal por elemento (16 x 16 elementos rectangulares lineales)

Los resultados encontrados para los desplazamientos  $u_0$  y  $v_0$  no se presentan en las siguientes tablas debido a que en cada uno de los nodos el valor de ellos es 0 tanto para el método numérico como para la solución exacta.

Nodo	$w_0$ [m]			Nodo	$w_0$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
1	0	0	0	43	0.00226987	0.00227736	0.328848666
2	0	0	0	44	0.00223104	0.00223855	0.335358513
3	0	0	0	45	0.00211493	0.00212247	0.35521066
4	0	0	0	46	0.00192278	0.0019303	0.389579171
5	0	0	0	47	0.00165704	0.00166438	0.441095967
6	0	0	0	48	0.00132199	0.00132884	0.515326727
7	0	0	0	49	0.00092478	0.00093061	0.626374497
8	0	0	0	50	0.00047729	0.00048119	0.809652938
9	0	0	0	51	0	0	0
10	0	0	0	52	0	0	0
11	0	0	0	53	0.00068593	0.00069091	0.720862977
12	0	0	0	54	0.00133099	0.00133858	0.566583339
13	0	0	0	55	0.00190546	0.00191434	0.463875367
14	0	0	0	56	0.00239102	0.00240049	0.39439312
15	0	0	0	57	0.0027766	0.00278624	0.346220037
16	0	0	0	58	0.00305559	0.00306521	0.314013703
17	0	0	0	59	0.00322423	0.00323379	0.295372917
18	0	0	0	60	0.00328064	0.00329016	0.289259675
19	0.00024534	0.0002477	0.95291482	61	0.00322423	0.00323379	0.295372917
20	0.00047465	0.00047808	0.71703376	62	0.00305559	0.00306521	0.314013703
21	0.00067765	0.00068166	0.5886328	63	0.0027766	0.00278624	0.346220037
22	0.00084865	0.00085295	0.50354442	64	0.00239102	0.00240049	0.39439312
23	0.00098417	0.00098858	0.44554756	65	0.00190546	0.00191434	0.463875368
24	0.00108213	0.00108655	0.40727741	66	0.00133099	0.00133858	0.56658334
25	0.0011413	0.00114572	0.38532616	67	0.00068593	0.00069091	0.720862977
26	0.00116109	0.0011655	0.37815969	68	0	0	0
27	0.0011413	0.00114572	0.38532616	69	0	0	0
28	0.00108213	0.00108655	0.40727741	70	0.00086445	0.00087019	0.659974468
29	0.00098417	0.00098858	0.44554756	71	0.00167934	0.0016882	0.525194189
30	0.00084865	0.00085295	0.50354442	72	0.00240723	0.00241759	0.428535443
31	0.00067765	0.00068166	0.5886328	73	0.0030239	0.00303484	0.360643303
32	0.00047465	0.00047808	0.71703376	74	0.00351429	0.00352534	0.313510467
33	0.00024534	0.0002477	0.95291482	75	0.00386941	0.00388035	0.282091035
34	0	0	0	76	0.00408417	0.00409498	0.263954216
35	0	0	0	77	0.00415601	0.00416676	0.258007909
36	0.00047729	0.00048119	0.80965294	78	0.00408417	0.00409498	0.263954216
37	0.00092478	0.00093061	0.6263745	79	0.00386941	0.00388035	0.282091035
38	0.00132199	0.00132884	0.51532673	80	0.00351429	0.00352534	0.313510467
39	0.00165704	0.00166438	0.44109597	81	0.0030239	0.00303484	0.360643303
40	0.00192278	0.0019303	0.38957917	82	0.00240723	0.00241759	0.428535444
41	0.00211493	0.00212247	0.35521066	83	0.00167934	0.0016882	0.52519419
42	0.00223104	0.00223855	0.33535851	84	0.00086445	0.00087019	0.659974469

Cuadro 4.7: a) Resultados FEM-Navier  $w_0$

Nodo	$w_0$ [m]			Nodo	$w_0$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
85	0	0	0	127	0.00560943	0.00562144	0.21371624
86	0	0	0	128	0.00570926	0.00572113	0.20759588
87	0.001007922	0.00101419	0.6179497	129	0.00560943	0.00562144	0.21371624
88	0.001959692	0.00196946	0.4960305	130	0.00531116	0.00532354	0.23250359
89	0.002811897	0.00282331	0.40433929	131	0.00481854	0.00483135	0.26514465
90	0.003535387	0.00354735	0.33727696	132	0.00413976	0.00415277	0.31337646
91	0.004111561	0.00412352	0.28991659	133	0.00328913	0.00330165	0.37923483
92	0.004529168	0.0045409	0.25836484	134	0.00228977	0.00230047	0.46513051
93	0.004781834	0.00479335	0.24020281	135	0.00117664	0.00118344	0.57448974
94	0.004866374	0.0048778	0.23426724	136	0	0	0
95	0.004781834	0.00479335	0.24020281	137	0	0	0
96	0.004529168	0.0045409	0.25836484	138	0.00119808	0.00120494	0.56935704
97	0.004111561	0.00412352	0.28991659	139	0.00233173	0.00234254	0.46142344
98	0.003535387	0.00354735	0.33727696	140	0.00334986	0.00336252	0.37624977
99	0.002811897	0.00282331	0.40433929	141	0.00421675	0.00422989	0.31057252
100	0.001959692	0.00196946	0.4960305	142	0.0049087	0.00492161	0.26221779
101	0.001007922	0.00101419	0.6179497	143	0.00541097	0.00542341	0.22937472
102	0	0	0	144	0.00571511	0.00572717	0.21045292
103	0	0	0	<b>145</b>	<b>0.00581691</b>	<b>0.00582882</b>	<b>0.20428812</b>
104	0.001112788	0.0011194	0.59027361	146	0.00571511	0.00572717	0.21045292
105	0.002164804	0.00217517	0.47644792	147	0.00541097	0.00542341	0.22937472
106	0.003108362	0.00312048	0.38838211	148	0.0049087	0.00492161	0.26221779
107	0.003910691	0.00392332	0.32201911	149	0.00421675	0.00422989	0.31057252
108	0.004550427	0.00456294	0.27415335	150	0.00334986	0.00336252	0.37624977
109	0.005014463	0.00502663	0.24203134	151	0.00233173	0.00234254	0.46142344
110	0.005295337	0.0053072	0.22357235	152	0.00119808	0.00120494	0.56935704
111	0.005389333	0.00540108	0.21754714	153	0	0	0
112	0.005295337	0.0053072	0.22357235	154	0	0	0
113	0.005014463	0.00502663	0.24203134	155	0.00117664	0.00118344	0.57448974
114	0.004550427	0.00456294	0.27415335	156	0.00228977	0.00230047	0.46513051
115	0.003910691	0.00392332	0.32201911	157	0.00328913	0.00330165	0.37923483
116	0.003108362	0.00312048	0.38838211	158	0.00413976	0.00415277	0.31337646
117	0.002164804	0.00217517	0.47644792	159	0.00481854	0.00483135	0.26514464
118	0.001112788	0.0011194	0.59027361	160	0.00531116	0.00532354	0.23250359
119	0	0	0	161	0.00560943	0.00562144	0.21371624
120	0	0	0	162	0.00570926	0.00572113	0.20759588
121	0.00117664	0.00118344	0.57448974	163	0.00560943	0.00562144	0.21371624
122	0.002289766	0.00230047	0.46513051	164	0.00531116	0.00532354	0.23250359
123	0.003289133	0.00330165	0.37923483	165	0.00481854	0.00483135	0.26514465
124	0.004139757	0.00415277	0.31337646	166	0.00413976	0.00415277	0.31337646
125	0.004818541	0.00483135	0.26514464	167	0.00328913	0.00330165	0.37923483
126	0.005311162	0.00532354	0.23250359	168	0.00228977	0.00230047	0.46513051

Cuadro 4.8: b) Resultados FEM-Navier  $w_0$

Nodo	$w_0$ [m]			Nodo	$w_0$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
169	0.00117664	0.00118344	0.57448974	211	0.00386941	0.00388035	0.282091035
170	0	0	0	212	0.00408417	0.00409498	0.263954216
171	0	0	0	213	0.00415601	0.00416676	0.258007909
172	0.00111279	0.0011194	0.59027361	214	0.00408417	0.00409498	0.263954216
173	0.0021648	0.00217517	0.47644792	215	0.00386941	0.00388035	0.282091035
174	0.00310836	0.00312048	0.38838211	216	0.00351429	0.00352534	0.313510467
175	0.00391069	0.00392332	0.32201911	217	0.0030239	0.00303484	0.360643303
176	0.00455043	0.00456294	0.27415335	218	0.00240723	0.00241759	0.428535444
177	0.00501446	0.00502663	0.24203134	219	0.00167934	0.0016882	0.52519419
178	0.00529534	0.0053072	0.22357235	220	0.00086445	0.00087019	0.659974469
179	0.00538933	0.00540108	0.21754714	221	0	0	0
180	0.00529534	0.0053072	0.22357235	222	0	0	0
181	0.00501446	0.00502663	0.24203134	223	0.00068593	0.00069091	0.720862977
182	0.00455043	0.00456294	0.27415335	224	0.00133099	0.00133858	0.566583339
183	0.00391069	0.00392332	0.32201911	225	0.00190546	0.00191434	0.463875367
184	0.00310836	0.00312048	0.38838211	226	0.00239102	0.00240049	0.39439312
185	0.0021648	0.00217517	0.47644792	227	0.0027766	0.00278624	0.346220037
186	0.00111279	0.0011194	0.59027361	228	0.00305559	0.00306521	0.314013703
187	0	0	0	229	0.00322423	0.00323379	0.295372917
188	0	0	0	230	0.00328064	0.00329016	0.289259675
189	0.00100792	0.00101419	0.6179497	231	0.00322423	0.00323379	0.295372917
190	0.00195969	0.00196946	0.4960305	232	0.00305559	0.00306521	0.314013703
191	0.0028119	0.00282331	0.40433929	233	0.0027766	0.00278624	0.346220037
192	0.00353539	0.00354735	0.33727696	234	0.00239102	0.00240049	0.39439312
193	0.00411156	0.00412352	0.28991659	235	0.00190546	0.00191434	0.463875368
194	0.00452917	0.0045409	0.25836484	236	0.00133099	0.00133858	0.566583334
195	0.00478183	0.00479335	0.24020281	237	0.00068593	0.00069091	0.720862977
196	0.00486637	0.0048778	0.23426724	238	0	0	0
197	0.00478183	0.00479335	0.24020281	239	0	0	0
198	0.00452917	0.0045409	0.25836484	240	0.00047729	0.00048119	0.809652937
199	0.00411156	0.00412352	0.28991659	241	0.00092478	0.00093061	0.626374496
200	0.00353539	0.00354735	0.33727696	242	0.00132199	0.00132884	0.515326727
201	0.0028119	0.00282331	0.40433929	243	0.00165704	0.00166438	0.441095967
202	0.00195969	0.00196946	0.4960305	244	0.00192278	0.0019303	0.389579171
203	0.00100792	0.00101419	0.6179497	245	0.00211493	0.00212247	0.35521066
204	0	0	0	246	0.00223104	0.00223855	0.335358513
205	0	0	0	247	0.00226987	0.00227736	0.328848666
206	0.00086445	0.00087019	0.65997447	248	0.00223104	0.00223855	0.335358513
207	0.00167934	0.0016882	0.52519419	249	0.00211493	0.00212247	0.35521066
208	0.00240723	0.00241759	0.42853544	250	0.00192278	0.0019303	0.389579171
209	0.0030239	0.00303484	0.3606433	251	0.00165704	0.00166438	0.441095967
210	0.00351429	0.00352534	0.31351047	252	0.00132199	0.00132884	0.515326728

Cuadro 4.9: c) Resultados FEM-Navier  $w_0$

Nodo	$w_0$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error
253	0.000924782	0.00093061	0.6263745
254	0.000477292	0.00048119	0.80965294
255	0	0	0
256	0	0	0
257	0.000245341	0.0002477	0.95291482
258	0.000474652	0.00047808	0.71703376
259	0.000677652	0.00068166	0.5886328
260	0.000848652	0.00085295	0.50354442
261	0.000984175	0.00098858	0.44554756
262	0.001082126	0.00108655	0.40727741
263	0.001141301	0.00114572	0.38532616
264	0.001161089	0.0011655	0.37815969
265	0.001141301	0.00114572	0.38532616
266	0.001082126	0.00108655	0.40727741
267	0.000984175	0.00098858	0.44554756
268	0.000848652	0.00085295	0.50354442
269	0.000677652	0.00068166	0.5886328
270	0.000474652	0.00047808	0.71703376
271	0.000245341	0.0002477	0.95291482
272	0	0	0
273	0	0	0
274	0	0	0
275	0	0	0
276	0	0	0
277	0	0	0
278	0	0	0
279	0	0	0
280	0	0	0
281	0	0	0
282	0	0	0
283	0	0	0
284	0	0	0
285	0	0	0
286	0	0	0
287	0	0	0
288	0	0	0
289	0	0	0

Cuadro 4.10: d) Resultados FEM-Navier  $w_0$

Nodo	$\phi_x$ [m]			Nodo	$\phi_x$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
1	0	0	0	43	0	0	0
2	0	0	0	44	0.00543507	0.00542845	0.122008031
3	0	0	0	45	0.01081731	0.01080583	0.106284297
4	0	0	0	46	0.01607831	0.01606538	0.080494931
5	0	0	0	47	0.02111727	0.02110734	0.047018048
6	0	0	0	48	0.02577788	0.02577676	0.004350586
7	0	0	0	49	0.02981634	0.02982771	0.038140842
8	0	0	0	50	0.03281198	0.03284921	0.113334386
9	0	0	0	51	0.03398092	0.03410398	0.360830052
10	0	0	0	52	-0.04878228	-0.04891848	0.278404305
11	0	0	0	53	-0.04720962	-0.04724745	0.08007804
12	0	0	0	54	-0.04306998	-0.04306513	0.011258074
13	0	0	0	55	-0.03733323	-0.03731492	0.049066534
14	0	0	0	56	-0.03062845	-0.0306043	0.078904794
15	0	0	0	57	-0.02334008	-0.02331531	0.106241555
16	0	0	0	58	-0.01571019	-0.01569022	0.127296367
17	0	0	0	59	-0.00789527	-0.00788415	0.14102716
18	-0.01748842	-0.01758295	0.53764979	60	0	0	0
19	-0.01684378	-0.01687123	0.16270421	61	0.00789527	0.00788415	0.141027162
20	-0.01524985	-0.01526492	0.09874819	62	0.01571019	0.01569022	0.127296368
21	-0.01316251	-0.01316588	0.0256238	63	0.02334008	0.02331531	0.106241556
22	-0.01077184	-0.0107692	0.02457945	64	0.03062845	0.0306043	0.078904794
23	-0.00819705	-0.00819176	0.06459517	65	0.03733323	0.03731492	0.049066534
24	-0.0055132	-0.0055081	0.09271962	66	0.04306998	0.04306513	0.011258074
25	-0.00276967	-0.00276662	0.11035468	67	0.04720962	0.04724745	0.08007804
26	0	0	0	68	0.04878228	0.04891848	0.278404305
27	0.00276967	0.00276662	0.11035468	69	-0.06143188	-0.06157106	0.226043712
28	0.0055132	0.0055081	0.09271962	70	-0.05954516	-0.05957997	0.05842914
29	0.00819705	0.00819176	0.06459517	71	-0.05450181	-0.05448028	0.03952064
30	0.01077184	0.0107692	0.02457945	72	-0.04737518	-0.04733291	0.089301126
31	0.01316251	0.01316588	0.0256238	73	-0.03893636	-0.03889119	0.116145101
32	0.01524985	0.01526492	0.09874819	74	-0.02970209	-0.02966131	0.137469806
33	0.01684378	0.01687123	0.16270421	75	-0.02000408	-0.01997325	0.154365083
34	0.01748842	0.01758295	0.53764979	76	-0.010056	-0.01003942	0.165193589
35	-0.03398092	-0.03410398	0.36083005	77	0	0	0
36	-0.03281198	-0.03284921	0.11333439	78	0.010056	0.01003942	0.165193591
37	-0.02981634	-0.02982771	0.03814084	79	0.02000408	0.01997325	0.154365084
38	-0.02577788	-0.02577676	0.00435059	80	0.02970209	0.02966131	0.137469807
39	-0.02111727	-0.02110734	0.04701805	81	0.03893636	0.03889119	0.116145101
40	-0.01607831	-0.01606538	0.08049493	82	0.04737518	0.04733291	0.089301126
41	-0.01081731	-0.01080583	0.1062843	83	0.05450181	0.05448028	0.03952064
42	-0.00543507	-0.00542845	0.12200803	84	0.05954516	0.05957997	0.05842914

Cuadro 4.11: a) Resultados FEM-Navier  $\phi_x$

Nodo	$\phi_x$ [m]			Nodo	$\phi_x$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
85	0.061431884	0.06157106	0.22604371	127	-0.01397303	-0.01394038	0.23420491
86	-0.071589559	-0.07172724	0.1919506	128	0	0	0
87	-0.069467157	-0.0694968	0.04265361	129	0.01397303	0.01394038	0.23420491
88	-0.063737931	-0.06370237	0.05582294	130	0.02777514	0.02771175	0.22871953
89	-0.05553697	-0.05547255	0.11613617	131	0.0411763	0.04108792	0.21511435
90	-0.045725788	-0.04565735	0.14988823	132	0.05383058	0.05372978	0.1876068
91	-0.034919602	-0.03486042	0.16976628	133	0.06522596	0.06513421	0.14086903
92	-0.023532479	-0.02348937	0.18350511	134	0.07464561	0.07459261	0.07105799
93	-0.011833252	-0.01181059	0.19184159	135	0.08114274	0.08116354	0.02562321
94	0	0	0	136	0.08352737	0.08365942	0.15783862
95	0.011833252	0.01181059	0.19184159	137	-0.08504369	-0.08517475	0.15387334
96	0.023532479	0.02348937	0.18350511	138	-0.08262674	-0.08264621	0.02355479
97	0.034919602	0.03486042	0.16976628	139	-0.07603469	-0.07597939	0.07278863
98	0.045725788	0.04565735	0.14988823	140	-0.06646342	-0.06636814	0.14355852
99	0.05553697	0.05547255	0.11613617	141	-0.05486916	-0.05476398	0.19206873
100	0.063737931	0.06370237	0.05582294	142	-0.04198051	-0.04188787	0.22116584
101	0.069467157	0.0694968	0.04265361	143	-0.02832165	-0.02825512	0.23547094
102	0.071589559	0.07172724	0.1919506	144	-0.01424894	-0.01421473	0.24070851
103	-0.079010322	-0.07914494	0.17009183	145	0	0	0
104	-0.076723206	-0.0767477	0.03191875	146	0.01424894	0.01421473	0.24070851
105	-0.070512232	-0.07046595	0.06567853	147	0.02832165	0.02825512	0.23547094
106	-0.061548377	-0.06146707	0.13226982	148	0.04198051	0.04188787	0.22116584
107	-0.050748616	-0.05066054	0.17385023	149	0.05486916	0.05476398	0.19206873
108	-0.038793166	-0.03871676	0.19733502	150	0.06646342	0.06636814	0.14355852
109	-0.026157331	-0.02610252	0.20996756	151	0.07603469	0.07597939	0.07278863
110	-0.013156693	-0.01312826	0.21653875	152	0.08262674	0.08264621	0.02355479
111	0	0	0	153	0.08504369	0.08517475	0.15387334
112	0.013156693	0.01312826	0.21653875	154	-0.08352737	-0.08365942	0.15783862
113	0.026157331	0.02610252	0.20996756	155	-0.08114274	-0.08116354	0.02562321
114	0.038793166	0.03871676	0.19733502	156	-0.07464561	-0.07459261	0.07105799
115	0.050748616	0.05066054	0.17385023	157	-0.06522596	-0.06513421	0.14086903
116	0.061548377	0.06146707	0.13226982	158	-0.05383058	-0.05372978	0.1876068
117	0.070512232	0.07046595	0.06567853	159	-0.0411763	-0.04108792	0.21511435
118	0.076723206	0.0767477	0.03191875	160	-0.02777514	-0.02771175	0.22871953
119	0.079010322	0.07914494	0.17009184	161	-0.01397303	-0.01394038	0.23420491
120	-0.083527371	-0.08365942	0.15783862	162	0	0	0
121	-0.081142741	-0.08116354	0.02562321	163	0.01397303	0.01394038	0.23420491
122	-0.074645613	-0.07459261	0.07105799	164	0.02777514	0.02771175	0.22871953
123	-0.065225962	-0.06513421	0.14086903	165	0.0411763	0.04108792	0.21511435
124	-0.053830576	-0.05372978	0.1876068	166	0.05383058	0.05372978	0.1876068
125	-0.041176302	-0.04108792	0.21511435	167	0.06522596	0.06513421	0.14086903
126	-0.027775136	-0.02771175	0.22871953	168	0.07464561	0.07459261	0.07105799

Cuadro 4.12: b) Resultados FEM-Navier  $\phi_x$

Nodo	$\phi_x$ [m]			Nodo	$\phi_x$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
169	0.08114274	0.08116354	0.02562321	211	-0.02000408	-0.01997325	0.154365083
170	0.08352737	0.08365942	0.15783862	212	-0.010056	-0.01003942	0.165193589
171	-0.07901032	-0.07914494	0.17009183	213	0	0	0
172	-0.07672321	-0.0767477	0.03191875	214	0.010056	0.01003942	0.165193591
173	-0.07051223	-0.07046595	0.06567853	215	0.02000408	0.01997325	0.154365084
174	-0.06154838	-0.06146707	0.13226982	216	0.02970209	0.02966131	0.137469806
175	-0.05074862	-0.05066054	0.17385023	217	0.03893636	0.03889119	0.116145101
176	-0.03879317	-0.03871676	0.19733502	218	0.04737518	0.04733291	0.089301126
177	-0.02615733	-0.02610252	0.20996756	219	0.05450181	0.05448028	0.03952064
178	-0.01315669	-0.01312826	0.21653875	220	0.05954516	0.05957997	0.05842914
179	0	0	0	221	0.06143188	0.06157106	0.226043712
180	0.01315669	0.01312826	0.21653875	222	-0.04878228	-0.04891848	0.278404305
181	0.02615733	0.02610252	0.20996756	223	-0.04720962	-0.04724745	0.08007804
182	0.03879317	0.03871676	0.19733502	224	-0.04306998	-0.04306513	0.011258074
183	0.05074862	0.05066054	0.17385023	225	-0.03733323	-0.03731492	0.049066534
184	0.06154838	0.06146707	0.13226982	226	-0.03062845	-0.0306043	0.078904794
185	0.07051223	0.07046595	0.06567853	227	-0.02334008	-0.02331531	0.106241555
186	0.07672321	0.0767477	0.03191875	228	-0.01571019	-0.01569022	0.127296367
187	0.07901032	0.07914494	0.17009184	229	-0.00789527	-0.00788415	0.14102716
188	-0.07158956	-0.07172724	0.1919506	230	0	0	0
189	-0.06946716	-0.0694968	0.04265361	231	0.00789527	0.00788415	0.141027162
190	-0.06373793	-0.06370237	0.05582294	232	0.01571019	0.01569022	0.127296368
191	-0.05553697	-0.05547255	0.11613617	233	0.02334008	0.02331531	0.106241556
192	-0.04572579	-0.04565735	0.14988823	234	0.03062845	0.0306043	0.078904794
193	-0.0349196	-0.03486042	0.16976628	235	0.03733323	0.03731492	0.049066534
194	-0.02353248	-0.02348937	0.18350511	236	0.04306998	0.04306513	0.011258074
195	-0.01183325	-0.01181059	0.19184159	237	0.04720962	0.04724745	0.08007804
196	0	0	0	238	0.04878228	0.04891848	0.278404305
197	0.01183325	0.01181059	0.19184159	239	-0.03398092	-0.03410398	0.360830052
198	0.02353248	0.02348937	0.18350511	240	-0.03281198	-0.03284921	0.113334386
199	0.0349196	0.03486042	0.16976628	241	-0.02981634	-0.02982771	0.038140842
200	0.04572579	0.04565735	0.14988823	242	-0.02577788	-0.02577676	0.004350586
201	0.05553697	0.05547255	0.11613617	243	-0.02111727	-0.02110734	0.047018048
202	0.06373793	0.06370237	0.05582294	244	-0.01607831	-0.01606538	0.080494931
203	0.06946716	0.0694968	0.04265361	245	-0.01081731	-0.01080583	0.106284296
204	0.07158956	0.07172724	0.1919506	246	-0.00543507	-0.00542845	0.122008029
205	-0.06143188	-0.06157106	0.22604371	247	0	0	0
206	-0.05954516	-0.05957997	0.05842914	248	0.00543507	0.00542845	0.122008031
207	-0.05450181	-0.05448028	0.03952064	249	0.01081731	0.01080583	0.106284297
208	-0.04737518	-0.04733291	0.08930113	250	0.01607831	0.01606538	0.080494931
209	-0.03893636	-0.03889119	0.1161451	251	0.02111727	0.02110734	0.047018048
210	-0.02970209	-0.02966131	0.13746981	252	0.02577788	0.02577676	0.004350585

Cuadro 4.13: c) Resultados FEM-Navier  $\phi_x$

Nodo	$\phi_x$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error
253	0.029816337	0.02982771	0.03814084
254	0.032811984	0.03284921	0.11333439
255	0.033980922	0.03410398	0.36083005
256	-0.017488417	-0.01758295	0.53764979
257	-0.016843783	-0.01687123	0.16270421
258	-0.015249846	-0.01526492	0.09874819
259	-0.01316251	-0.01316588	0.0256238
260	-0.010771845	-0.0107692	0.02457945
261	-0.008197054	-0.00819176	0.06459517
262	-0.005513205	-0.0055081	0.09271962
263	-0.002769674	-0.00276662	0.11035468
264	0	0	0
265	0.002769674	0.00276662	0.11035468
266	0.005513205	0.0055081	0.09271962
267	0.008197054	0.00819176	0.06459517
268	0.010771845	0.0107692	0.02457945
269	0.01316251	0.01316588	0.0256238
270	0.015249846	0.01526492	0.09874819
271	0.016843783	0.01687123	0.16270421
272	0.017488417	0.01758295	0.53764979
273	0	0	0
274	0	0	0
275	0	0	0
276	0	0	0
277	0	0	0
278	0	0	0
279	0	0	0
280	0	0	0
281	0	0	0
282	0	0	0
283	0	0	0
284	0	0	0
285	0	0	0
286	0	0	0
287	0	0	0
288	0	0	0
289	0	0	0

Cuadro 4.14: d) Resultados FEM-Navier  $\phi_x$

Nodo	$\phi_y$ [m]			Nodo	$\phi_y$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
1	0	0	0	43	-0.13480468	-0.13468428	0.089396179
2	-0.03136888	-0.03154632	0.5624598	44	-0.13247604	-0.13236478	0.084059357
3	-0.06062069	-0.0608131	0.31639275	45	-0.12551454	-0.12542944	0.067841223
4	-0.08647371	-0.08664907	0.20237794	46	-0.11400095	-0.11395549	0.039893003
5	-0.10823718	-0.1083745	0.12670667	47	-0.09809623	-0.09809813	0.001939232
6	-0.12547774	-0.12557313	0.0759663	48	-0.07808493	-0.0781342	0.063053011
7	-0.13793611	-0.13799439	0.04223433	49	-0.0544465	-0.05453405	0.160552289
8	-0.14546162	-0.14549498	0.0229289	50	-0.02799903	-0.02807872	0.283793677
9	-0.14797799	-0.14800248	0.01655051	51	0	0	0
10	-0.14546162	-0.14549498	0.0229289	52	0	0	0
11	-0.13793611	-0.13799439	0.04223433	53	-0.02456572	-0.0246201	0.220855722
12	-0.12547774	-0.12557313	0.0759663	54	-0.04789564	-0.04796199	0.138353226
13	-0.10823718	-0.1083745	0.12670667	55	-0.06891605	-0.06894675	0.04452061
14	-0.08647371	-0.08664907	0.20237794	56	-0.08682553	-0.08680288	0.026087855
15	-0.06062069	-0.0608131	0.31639275	57	-0.10111244	-0.10103886	0.072822822
16	-0.03136888	-0.03154632	0.5624598	58	-0.11147719	-0.11136196	0.103472736
17	0	0	0	59	-0.1177511	-0.11760888	0.120924971
18	0	0	0	60	-0.11985076	-0.11969917	0.126642418
19	-0.03043854	-0.03054863	0.36036507	61	-0.1177511	-0.11760888	0.120924971
20	-0.05895832	-0.05907833	0.20312731	62	-0.11147719	-0.11136196	0.103472736
21	-0.08424899	-0.08434277	0.11119684	63	-0.10111244	-0.10103886	0.072822822
22	-0.10556781	-0.10562151	0.05083526	64	-0.08682553	-0.08680288	0.026087855
23	-0.12247122	-0.12248115	0.00810549	65	-0.06891605	-0.06894675	0.04452061
24	-0.13469112	-0.13466338	0.02059811	66	-0.04789564	-0.04796199	0.138353226
25	-0.14207456	-0.14202145	0.03739827	67	-0.02456572	-0.0246201	0.220855722
26	-0.14454355	-0.14448157	0.04289511	68	0	0	0
27	-0.14207456	-0.14202145	0.03739827	69	0	0	0
28	-0.13469112	-0.13466338	0.02059811	70	-0.02041271	-0.02044859	0.175483413
29	-0.12247122	-0.12248115	0.00810549	71	-0.03986839	-0.03991479	0.116266625
30	-0.10556781	-0.10562151	0.05083526	72	-0.05750373	-0.05752483	0.03668175
31	-0.08424899	-0.08434277	0.11119684	73	-0.07262544	-0.07259753	0.038442672
32	-0.05895832	-0.05907833	0.20312731	74	-0.08474488	-0.08466555	0.093696643
33	-0.03043854	-0.03054863	0.36036507	75	-0.09356084	-0.09343979	0.129545635
34	0	0	0	76	-0.09890518	-0.09875717	0.149872118
35	0	0	0	77	-0.1006948	-0.10053755	0.156402743
36	-0.02799903	-0.02807872	0.28379368	78	-0.09890518	-0.09875717	0.149872118
37	-0.0544465	-0.05453405	0.16055229	79	-0.09356084	-0.09343979	0.129545635
38	-0.07808493	-0.0781342	0.06305301	80	-0.08474488	-0.08466555	0.093696643
39	-0.09809623	-0.09809813	0.00193923	81	-0.07262544	-0.07259753	0.038442672
40	-0.11400095	-0.11395549	0.039893	82	-0.05750373	-0.05752483	0.036681751
41	-0.12551454	-0.12542944	0.06784122	83	-0.03986839	-0.03991479	0.116266626
42	-0.13247604	-0.13236478	0.08405936	84	-0.02041271	-0.02044859	0.175483414

Cuadro 4.15: a) Resultados FEM-Navier  $\phi_y$

Nodo	$\phi_y$ [m]			Nodo	$\phi_y$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
85	0	0	0	127	-0.02662749	-0.02657541	0.19595031
86	0	0	0	128	-0.02712412	-0.02706832	0.20615362
87	-0.015734637	-0.01575727	0.14365604	129	-0.02662749	-0.02657541	0.19595031
88	-0.030767039	-0.0307971	0.09762058	130	-0.0251471	-0.02510581	0.16447325
89	-0.04445051	-0.04446382	0.0299376	131	-0.02271572	-0.02269021	0.11243033
90	-0.056242577	-0.05621836	0.04307352	132	-0.0193985	-0.01938946	0.04662189
91	-0.065736323	-0.06566742	0.104932	133	-0.01530133	-0.01530444	0.02032994
92	-0.072663198	-0.07255611	0.14759583	134	-0.01057315	-0.01058114	0.07552446
93	-0.076869037	-0.07673728	0.1716952	135	-0.00540111	-0.0054071	0.110668
94	-0.078278456	-0.07813819	0.17950939	136	0	0	0
95	-0.076869037	-0.07673728	0.1716952	137	0	0	0
96	-0.072663198	-0.07255611	0.14759583	138	0	0	0
97	-0.065736323	-0.06566742	0.104932	139	0	0	0
98	-0.056242577	-0.05621836	0.04307352	140	0	0	0
99	-0.04445051	-0.04446382	0.0299376	141	0	0	0
100	-0.030767039	-0.0307971	0.09762058	142	0	0	0
101	-0.015734637	-0.01575727	0.14365604	143	0	0	0
102	0	0	0	144	0	0	0
103	0	0	0	145	0	0	0
104	-0.010686387	-0.01069951	0.12266728	146	0	0	0
105	-0.020911099	-0.02092864	0.08383773	147	0	0	0
106	-0.030243882	-0.03025121	0.02421706	148	0	0	0
107	-0.038314759	-0.03829739	0.04536263	149	0	0	0
108	-0.044835221	-0.04478589	0.11015969	150	0	0	0
109	-0.049605745	-0.04952714	0.15871843	151	0	0	0
110	-0.052506873	-0.05240887	0.18699221	152	0	0	0
111	-0.053479648	-0.053375	0.19606382	153	0	0	0
112	-0.052506873	-0.05240887	0.18699221	154	0	0	0
113	-0.049605745	-0.04952714	0.15871843	155	0.00540111	0.0054071	0.110668
114	-0.044835221	-0.04478589	0.11015969	156	0.01057315	0.01058114	0.07552446
115	-0.038314759	-0.03829739	0.04536263	157	0.01530133	0.01530444	0.02032994
116	-0.030243882	-0.03025121	0.02421706	158	0.0193985	0.01938946	0.04662189
117	-0.020911099	-0.02092864	0.08383773	159	0.02271572	0.02269021	0.11243033
118	-0.010686387	-0.01069951	0.12266728	160	0.0251471	0.02510581	0.16447325
119	0	0	0	161	0.02662749	0.02657541	0.19595031
120	0	0	0	162	0.02712412	0.02706832	0.20615363
121	-0.005401111	-0.0054071	0.110668	163	0.02662749	0.02657541	0.19595031
122	-0.010573151	-0.01058114	0.07552446	164	0.0251471	0.02510581	0.16447325
123	-0.015301329	-0.01530444	0.02032994	165	0.02271572	0.02269021	0.11243033
124	-0.019398504	-0.01938946	0.04662189	166	0.0193985	0.01938946	0.04662189
125	-0.022715718	-0.02269021	0.11243033	167	0.01530133	0.01530444	0.02032994
126	-0.025147101	-0.02510581	0.16447325	168	0.01057315	0.01058114	0.07552446

Cuadro 4.16: b) Resultados FEM-Navier  $\phi_y$

Nodo	$\phi_y$ [m]			Nodo	$\phi_y$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error		FEM	Sol. Exacta	% error
169	0.00540111	0.0054071	0.110668	211	0.09356084	0.09343979	0.129545635
170	0	0	0	212	0.09890518	0.09875717	0.149872118
171	0	0	0	213	0.1006948	0.10053755	0.156402743
172	0.01068639	0.01069951	0.12266728	214	0.09890518	0.09875717	0.149872118
173	0.0209111	0.02092864	0.08383773	215	0.09356084	0.09343979	0.129545635
174	0.03024388	0.03025121	0.02421706	216	0.08474488	0.08466555	0.093696643
175	0.03831476	0.03829739	0.04536263	217	0.07262544	0.07259753	0.038442672
176	0.04483522	0.04478589	0.11015969	218	0.05750373	0.05752483	0.036681751
177	0.04960575	0.04952714	0.15871843	219	0.03986839	0.03991479	0.116266626
178	0.05250687	0.05240887	0.18699221	220	0.02041271	0.02044859	0.175483414
179	0.05347965	0.053375	0.19606382	221	0	0	0
180	0.05250687	0.05240887	0.18699221	222	0	0	0
181	0.04960575	0.04952714	0.15871843	223	0.02456572	0.0246201	0.220855722
182	0.04483522	0.04478589	0.11015969	224	0.04789564	0.04796199	0.138353226
183	0.03831476	0.03829739	0.04536263	225	0.06891605	0.06894675	0.04452061
184	0.03024388	0.03025121	0.02421706	226	0.08682553	0.08680288	0.026087855
185	0.0209111	0.02092864	0.08383773	227	0.10111244	0.10103886	0.072822822
186	0.01068639	0.01069951	0.12266728	228	0.11147719	0.11136196	0.103472736
187	0	0	0	229	0.1177511	0.11760888	0.120924971
188	0	0	0	230	0.11985076	0.11969917	0.126642418
189	0.01573464	0.01575727	0.14365604	231	0.1177511	0.11760888	0.120924971
190	0.03076704	0.0307971	0.09762058	232	0.11147719	0.11136196	0.103472736
191	0.04445051	0.04446382	0.0299376	233	0.10111244	0.10103886	0.072822821
192	0.05624258	0.05621836	0.04307352	234	0.08682553	0.08680288	0.026087855
193	0.06573632	0.06566742	0.104932	235	0.06891605	0.06894675	0.04452061
194	0.0726632	0.07255611	0.14759583	236	0.04789564	0.04796199	0.138353226
195	0.07686904	0.07673728	0.1716952	237	0.02456572	0.0246201	0.220855722
196	0.07827846	0.07813819	0.17950939	238	0	0	0
197	0.07686904	0.07673728	0.1716952	239	0	0	0
198	0.0726632	0.07255611	0.14759583	240	0.02799903	0.02807872	0.283793676
199	0.06573632	0.06566742	0.104932	241	0.0544465	0.05453405	0.160552288
200	0.05624258	0.05621836	0.04307352	242	0.07808493	0.0781342	0.06305301
201	0.04445051	0.04446382	0.0299376	243	0.09809623	0.09809813	0.001939232
202	0.03076704	0.0307971	0.09762058	244	0.11400095	0.11395549	0.039893003
203	0.01573464	0.01575727	0.14365604	245	0.12551454	0.12542944	0.067841223
204	0	0	0	246	0.13247604	0.13236478	0.084059357
205	0	0	0	247	0.13480468	0.13468428	0.089396179
206	0.02041271	0.02044859	0.17548341	248	0.13247604	0.13236478	0.084059357
207	0.03986839	0.03991479	0.11626663	249	0.12551454	0.12542944	0.067841223
208	0.05750373	0.05752483	0.03668175	250	0.11400095	0.11395549	0.039893003
209	0.07262544	0.07259753	0.03844267	251	0.09809623	0.09809813	0.001939232
210	0.08474488	0.08466555	0.09369664	252	0.07808493	0.0781342	0.063053011

Cuadro 4.17: c) Resultados FEM-Navier  $\phi_y$

Nodo	$\phi_y$ [m]		
	FEM	Sol. Exacta	% error
253	0.054446498	0.05453405	0.16055229
254	0.027999034	0.02807872	0.28379368
255	0	0	0
256	0	0	0
257	0.03043854	0.03054863	0.36036507
258	0.058958322	0.05907833	0.20312731
259	0.084248987	0.08434277	0.11119684
260	0.105567813	0.10562151	0.05083526
261	0.12247122	0.12248115	0.00810549
262	0.134691115	0.13466338	0.02059811
263	0.142074565	0.14202145	0.03739827
264	0.144543548	0.14448157	0.04289511
265	0.142074565	0.14202145	0.03739827
266	0.134691115	0.13466338	0.02059811
267	0.12247122	0.12248115	0.00810549
268	0.105567813	0.10562151	0.05083526
269	0.084248987	0.08434277	0.11119684
270	0.058958322	0.05907833	0.20312731
271	0.03043854	0.03054863	0.36036507
272	0	0	0
273	0	0	0
274	0.031368881	0.03154632	0.5624598
275	0.06062069	0.0608131	0.31639275
276	0.086473713	0.08664907	0.20237794
277	0.108237179	0.1083745	0.12670667
278	0.125477737	0.12557313	0.0759663
279	0.137936109	0.13799439	0.04223433
280	0.145461616	0.14549498	0.0229289
281	0.147977987	0.14800248	0.01655051
282	0.145461616	0.14549498	0.0229289
283	0.137936109	0.13799439	0.04223433
284	0.125477737	0.12557313	0.0759663
285	0.108237179	0.1083745	0.12670667
286	0.086473713	0.08664907	0.20237794
287	0.06062069	0.0608131	0.31639275
288	0.031368881	0.03154632	0.5624598
289	0	0	0

Cuadro 4.18: d) Resultados FEM-Navier  $\phi_y$

En términos generales se demuestra, con los resultados anteriores, que la solución numérica obtenida mediante el método de los elementos finitos presenta, en todos los casos, una diferencia menor al 1 %

con respecto a la solución exacta [37]. Por lo tanto, puede utilizarse esta herramienta para el análisis de los materiales compuestos.

## Capítulo 5

# AG para materiales compuestos laminados

Este capítulo está dedicado a la presentación de las características del algoritmo genético empleado para la optimización de placas formadas por materiales compuestos laminados reforzados con fibras. A lo largo del texto se indican las capacidades y restricciones del proceso, además se explican los diversos operadores que componen el algoritmo.

Es necesario dejar claro que en este trabajo no se abordan problemas donde se realice una optimización estructural a partir de la manipulación de las dimensiones de las placas (largo y ancho ); sólo las características del material son tomadas como variables en el proceso. Dentro de estas características se encuentran las propiedades de las láminas: Ángulo de orientación de las fibras, el material constituyente de las láminas, el espesor de cada una de ellas y el número de láminas que conforman el laminado.

Este trabajo utiliza un algoritmo genético con diversas modificaciones con respecto al algoritmo genético simple propuesto por Goldberg [19]. Aunque los conceptos principales y la secuencia de operaciones permanecen similares a la formulación original, un nuevo esquema para la codificación de las variables y operadores genéticos especiales son usados Fig.( 5.1). Una descripción de la codificación de las variables, el método de selección y los operadores genéticos usados se da en las siguientes subsecciones.

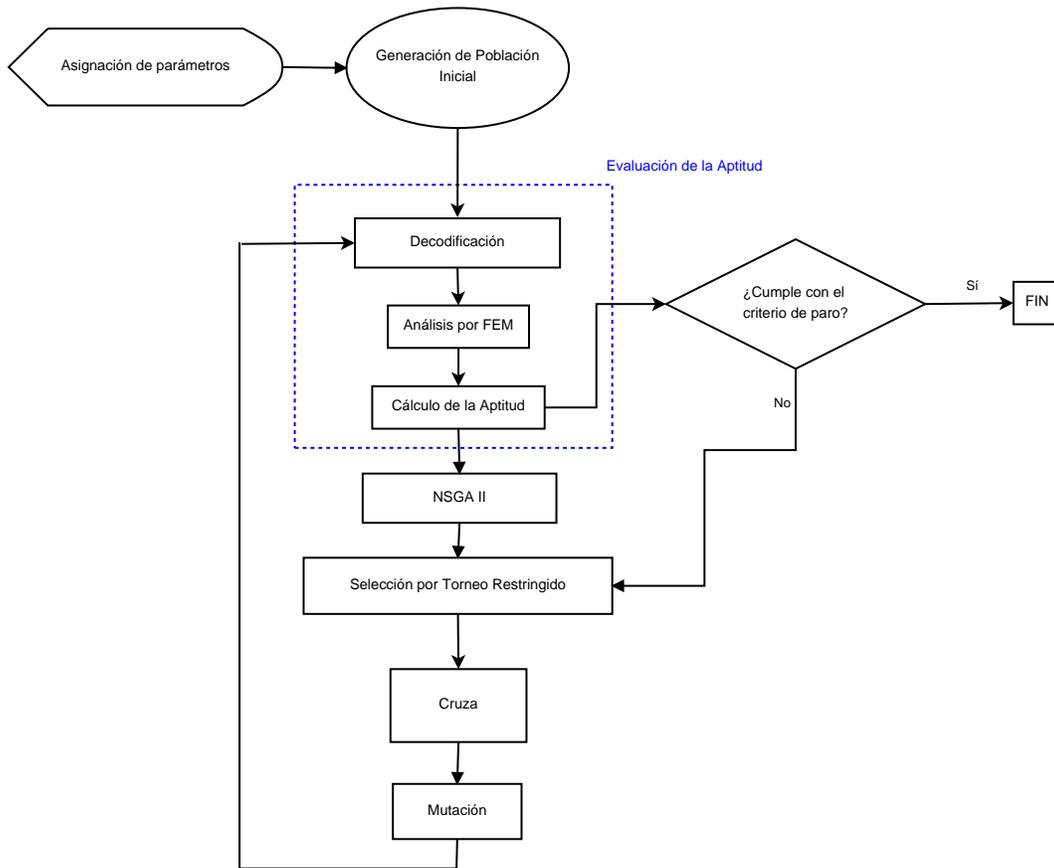


Figura 5.1: Diagrama de Flujo AG implementado

## 5.1. Codificación de materiales compuestos laminados reforzados con fibras

Para representar cada uno de los laminados del espacio de búsqueda, se creó un cromosoma formado por dos partes, ambas con la misma longitud. En la primera parte, llamada “orientaciones”, se guarda la información sobre la orientación de las fibras y el número de láminas que forman el laminado. Ya que en esta tesis se estudian únicamente laminados simétricos balanceados con capas adyacentes (Capítulo 3.1), en lugar de codificar la secuencia de apilamiento total, se codifica su representación simétrica condensada; por lo tanto, el número de genes en esta parte del cromosoma es un cuarto del número máximo de capas definido para el problema de diseño. En la segunda parte, llamada “espesores”, se codifica el espesor de cada una de las láminas que forman el laminado. Cada uno de los genes de esta parte está relacionado con el gen ubicado en la misma posición en la primera parte del cromosoma, es decir, que el gen ubicado en la posición  $k$  en la segunda parte del cromosoma codificará el valor de los espesores de las láminas correspondientes al gen ubicado en la posición  $k$  en la primera parte del cromosoma. Por lo tanto, y recordando las características de los laminados simétricos balanceados, cada

uno de los genes de la segunda parte del cromosoma, codifica los espesores de dos láminas adyacentes.

Cada una de las variables de diseño debe asumir uno de los valores discretos definidos en el proceso de optimización. Estos valores están representados mediante números enteros positivos y son usados para codificar el valor de la variable de diseño en su gen correspondiente. Ya que hay dos tipos de variables, orientación y espesor, son usados dos alfabetos de codificación. Como se mencionó en el párrafo anterior, el número máximo de láminas es limitado mediante el número de genes en el cromosoma. Los Cuadros(5.1, 5.2, 5.3) presentan la codificación utilizada en este proyecto para cada una de las partes del cromosoma (orientaciones y espesores).

Espesor [mm]	Código
0.75	0
1	1
1.5	2
2	3

Cuadro 5.1: Tabla de Espesores

CO1	
Ángulo	Código
0°	0
±45°	1
90°	2

Cuadro 5.2: Tabla de Orientaciones CO1

CO2			
Ángulo	Código	Ángulo	Código
0°	0	±50°	10
±5°	1	±55°	11
±10°	2	±60°	12
±15°	3	±65°	13
±20°	4	±70°	14
±25°	5	±75°	15
±30°	6	±80°	16
±35°	7	±85°	17
±40°	8	90°	18
±45°	9		

Cuadro 5.3: Tabla de Orientaciones

A continuación se presentan dos ejemplos que ilustran cómo se codifican las propiedades de dos

laminados, descrita anteriormente. En el primer ejemplo (5.1) se utilizan los valores presentados en el Cuadro 5.2 para llevar a cabo la codificación de las orientaciones y los del Cuadro 5.1 para codificar los espesores. En el segundo ejemplo (5.2), se utilizan los valores del Cuadro 5.3 para codificar las orientaciones de cada una de las láminas y los valores del Cuadro 5.1 para codificar sus espesores correspondientes. En ambos ejemplos se codifican laminados con 8 láminas del mismo material.

$$[0 / 1 / 1 / 0]_s = [0_2^{\circ} / 90_2^{\circ}]_2 : [1_2 / 0.75_2]_s \quad (5.1)$$

$$[10 / 14 / 1 / 3]_s = [\pm 50_2^{\circ} / \pm 70_2^{\circ}]_2 : [1_2 / 2_2]_s \quad (5.2)$$

Cromosoma	Orientaciones	Espesores [mm]
$[0 / 1 / 1 / 0]_s$	$[0_2^{\circ} / 90_2^{\circ}]_s$	$[1_2 / 0.75_2]_s$
$[10 / 14 / 1 / 3]_s$	$[\pm 50^{\circ} / \pm 70^{\circ}]_2$	$[1_2 / 2_2]_s$

Cuadro 5.4: Codificación Ejemplo 1

## 5.2. Población Inicial

La mayoría de los Algoritmos Genéticos trabajan con un número fijo de individuos en la población a lo largo del proceso de optimización, característica presente en este trabajo, ya que facilita la implementación computacional del algoritmo. Aunque diversos autores han tratado de establecer una regla para definir el tamaño óptimo de la población en un AG [18], los resultados de estas investigaciones no pueden generalizarse; sin embargo, han permitido establecer dos puntos importantes acerca de la influencia del tamaño de la población inicial en el comportamiento del algoritmo genético:

- En problemas de estudio donde se conoce todo el espacio de solución y por lo tanto la solución óptima, se encontró que para poblaciones grandes la exactitud del algoritmo genético se acerca al 100% [20, 21, 42]. Cuanto mayor sea el tamaño de la población mayor será la posibilidad de que en el estado inicial de la población esté contenido un cromosoma que represente a la solución óptima.
- Incrementar el tamaño de la población causa que el número de generaciones necesarias para que el AG converja se incremente. Lo anterior se cree que ocurre debido al aumento general de la probabilidad de que la mutación se produzca. Si la mutación ocurre en poblaciones con poblaciones grandes, se necesitan más generaciones para eliminar los cromosomas mutados [41].

Por lo tanto, definir el tamaño de población indicado para un AG sigue siendo una cuestión de prueba y error, dependiente en gran medida del tipo de problema a optimizar, la codificación utilizada y las variables utilizadas.

En este trabajo, como en el AG simple, la población inicial se genera aleatoriamente; para cada uno de los genes del cromosoma se genera un número entero aleatorio con base en la codificación empleada tanto para la parte de orientaciones como para la de espesores. El tamaño de la población (número de individuos en cada generación) como la longitud del cromosoma, permanecen constantes a lo largo del proceso de optimización y ambas son definidas al momento de generar la población inicial

### 5.3. Generación de hijos

Una vez creada la población inicial el AG comienza su proceso de búsqueda; empleando los operadores genéticos se crea una nueva generación de individuos a partir de la generación anterior. A continuación se describen los operadores utilizados en el AG desarrollado en este trabajo.

#### 5.3.1. Aptitud y Selección

Recordando que mediante el proceso de selección (Capítulo 3.5) los individuos más adaptados al problema se reproducen, entendiéndose esto último como copiar el cromosoma integró a la siguiente etapa del AG, es necesario definir un nivel de aptitud.

La aptitud de un individuo se define a través de la función objetivo diseñada para contener las características importantes de las estructuras en la optimización. Ya que la formulación de la función objetivo es específica del problema a optimizar, no existe un método estándar para su elaboración.

Como se mencionó en el Capítulo 3.5, un problema de optimización numérica con restricciones se define de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Minimizar/Maximizar} & f(x) & x \in R^n \\
 \text{Sujeto} & h_i(x) = 0 & i = 1, \dots, m \\
 & g_j(x) \geq 0 & j = 1, \dots, l \\
 & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S & i = 1, \dots, n
 \end{array} \quad (5.3)$$

En este trabajo se lleva a cabo la optimización de placas laminadas, considerando la minimización de su peso y minimización de la deflexión transversal; se considera que el material del cual están compuestas las placas es Grafito/Epoxy (T300/5208), y se encuentran bajo cargas transversales (puntual o distribuida). Las variables de diseño consideradas son, el ángulo de las fibras en cada una de las láminas y el espesor de las mismas y por lo tanto, el espesor del laminado. El problema abordado en este trabajo queda entonces definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Minimizar} & f_W(t_1, t_2, \dots, t_N); & (t_1, t_2, \dots, t_N) \in R \\
 \text{Minimizar} & f_\delta(\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}); & (t_1, t_2, \dots, t_N), (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in R \\
 \text{Sujeto a} & IF_{EM}(\{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}); & (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) < 1 \\
 & IF_{TW}(\{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}); & (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) < 1
 \end{array} \quad (5.4)$$

donde  $f_W$ ,  $f_\delta$  son las funciones objetivo para minimizar el peso y la deflexión transversal, respectivamente;  $IF_{EM}$  e  $IF_{TW}$  son los índices de falla obtenidos mediante el criterio del esfuerzo máximo y mediante el criterio de Tsai-Wu, respectivamente, y N es el número total de láminas que conforman el laminado.

La función objetivo para minimizar peso se define de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } f_W(t_1, t_2, \dots, t_N) = (\rho \cdot g \cdot a \cdot b) \sum_{i=1}^N t_i \quad (5.5)$$

La función objetivo para minimizar la deflexión se obtiene utilizando el algoritmo de FEM descrito anteriormente.

$$\text{Minimizar } f_\delta(\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}) = FEM(\{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}) \quad (5.6)$$

donde  $t_i$ ,  $\theta_i$  representan el espesor y el ángulo de la  $i$ -ésima placa que componen al laminado, respectivamente;  $a$ ,  $b$ , y  $\rho$  representan la longitud, el ancho y la densidad del material del laminado, respectivamente;  $g$  representa la magnitud de la aceleración de la gravedad ( $9.81[m/s^2]$ ) y  $N$  es el número total de láminas que conforman el laminado.

Como se mencionó al final del Capítulo 3.5 el operador de selección utilizado en este trabajo es el de torneo restringido, el cual toma en cuenta las restricciones impuestas en la definición del problema (Ec.(5.4)). En este caso y como se describió anteriormente, las restricciones impuestas al problema de optimización son los índices de falla con respecto a dos criterios, el del esfuerzo máximo y el de Tsai-Wu; esto significa que el Frente de Pareto Global contendrá únicamente a aquellos laminados cuyos índices de falla para ambos criterios sean menores que uno, es decir, aquellos laminados que no fallen bajo las condiciones de carga y de contorno impuestas.

A pesar de ser el criterio de falla más empleado en la industria para el diseño de materiales y estructuras compuestas [22], el criterio de Tsai-Wu presenta una dificultad importante, para algunos casos de carga el criterio conduce a falsos óptimos [1]. Por esta razón se emplea el enfoque propuesto por Akbulut y Sonmezen [1] para superar esta dificultad; el método utiliza el criterio de Tsai-Wu junto con el criterio del máximo esfuerzo, para analizar las estructuras compuestas, concluyendo que cada uno de los criterios compensa las deficiencias del otro, evitando así los falsos óptimos.

Debido a que los criterios de falla utilizados en este trabajo requieren el empleo de los esfuerzos que se presentan en la estructura bajo las condiciones de estudio, es necesario partir de los resultados obtenidos del empleo del FEM y mediante las Ecs. (4.33 - 4.37) determinar los desplazamientos, deformaciones y finalmente los esfuerzos en el punto requerido dentro de cada uno de los elementos de la malla. Estos esfuerzos están referenciados en las coordenadas globales del laminado, sin embargo para poder emplear cualquiera de los criterios señalados es necesario transformar estos esfuerzos a las coordenadas de cada una de las láminas. Esta transformación se puede llevar a cabo de dos formas: 1) Calcular las deformaciones con respecto a las coordenadas globales del laminado, transformarlas a las coordenadas de cada una de las láminas y finalmente utilizar las ecuaciones constitutivas para calcular los esfuerzos; ó 2) Calcular las deformaciones con respecto a las coordenadas de cada una de las láminas, calcular los esfuerzos usando las ecuaciones constitutivas con la matriz de rigidez referenciada a las coordenadas globales de las láminas y después transformar los esfuerzos globales del laminado a esfuerzos locales de las láminas. Ambos métodos son equivalentes. El segundo método es el usado en este trabajo. Tomando a  $\theta_m$  como el ángulo de las fibras embebidas en la  $m$ -ésima lámina, entonces el esfuerzo  $\sigma_i^{(m)}$  en sus coordenadas locales pueden ser obtenido a partir de los esfuerzos globales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$ , etc. usando las transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
\sigma_1^{(m)} &= \sigma_x \cos^2 \theta_m + \sigma_y \sin^2 \theta_m + 2\sigma_{xy} \sin \theta_m \cos \theta_m \\
\sigma_2^{(m)} &= \sigma_x \sin^2 \theta_m + \sigma_y \cos^2 \theta_m - 2\sigma_{xy} \sin \theta_m \cos \theta_m \\
\sigma_4^{(m)} &= -\sigma_{xz} \sin \theta_m + \sigma_{yz} \cos \theta_m \\
\sigma_5^{(m)} &= -\sigma_{xz} \cos \theta_m + \sigma_{yz} \sin \theta_m \\
\sigma_6^{(m)} &= -\sigma_x \sin \theta_m \cos \theta_m + \sigma_y \sin \theta_m \cos \theta_m + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta_m - \sin^2 \theta_m)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Así pues, para obtener el índice de falla tanto para el criterio del esfuerzo máximo ( $IF_{EM}$ ) como para el criterio de Tsai-Wu ( $IF_{TW}$ ) es necesario determinar el índice de falla máximo mediante una búsqueda secuencial en ciertos puntos dentro del laminado [38]. Una vez determinado el índice de falla máximo es posible emplear el torneo restringido de la forma descrita anteriormente.

### 5.3.2. Cruza

El operador de cruza empleado en el algoritmo genético propuesto, es el de cruza en un punto, con una probabilidad de cruza  $0 \leq p_{cr} \leq 1$  [19, 13]. La probabilidad de cruza controla el grado en el cual los hijos son similares a sus padres. A continuación se presenta un ejemplo del funcionamiento de este operador para dos laminados codificados:

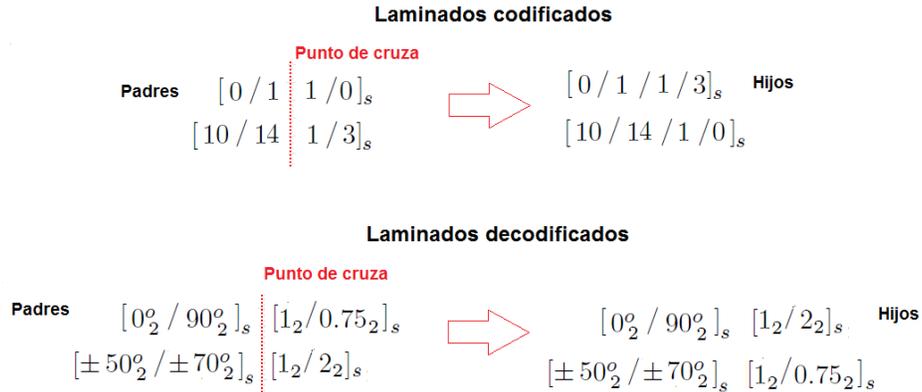


Figura 5.2: Cruza en un punto

A partir de la Fig. 5.2 es posible observar que la cruza a partir de dos padres genera dos descendientes con características diferentes a las de sus ancestros, las cuales se espera que sean mejores que sean superadas por los descendientes.

### 5.3.3. Mutación

Después de la cruza, el operador de mutación empleado en este trabajo se comporta de la misma forma que el empleado en el AG simple, cambia cada uno de las variables codificadas (gen) con una

probabilidad de mutación  $0 \leq p_{mut} \leq 0.02$ . La aplicación de este operador se lleva a cabo gen por gen bajo la probabilidad de mutación asignada. Cuando se realiza la mutación un nuevo valor es atribuido de forma aleatoria al gen, siendo este nuevo valor cualquier código admitido, diferente al que tenía antes de la mutación.

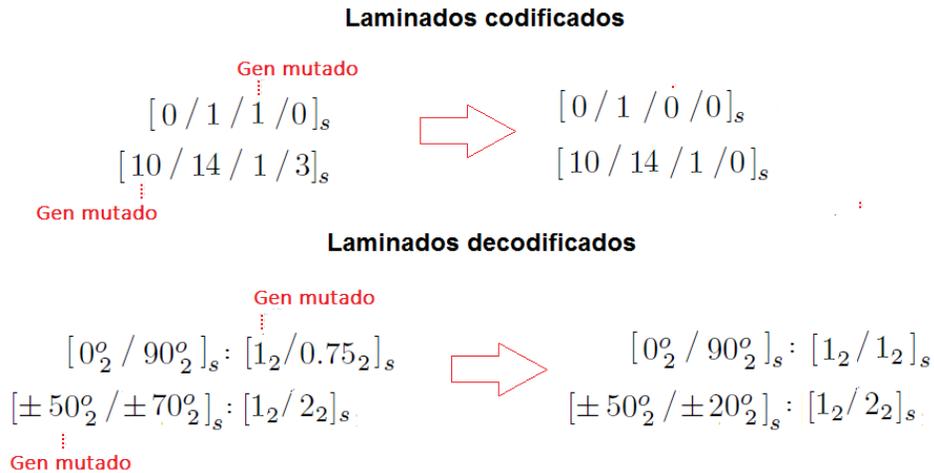


Figura 5.3: Operador de mutación

### 5.3.4. Formación de nuevas generaciones

Una de las mayores diferencias presentes en el algoritmo empleado en este trabajo respecto al AG simple presentado en el capítulo anterior, es la inserción del NSGA-II inmediatamente después del operador de mutación. Debe recordarse que la inserción del NSGA-II presenta las siguientes ventajas en el proceso de optimización:

- Encuentra más de una solución perteneciente al Frente de Pareto, a diferencia de los métodos ponderados, donde la población de soluciones converge a una sola solución presente en este Frente. Esto es muestra del buen uso de las características poblacionales de los AG, lo cual puede traducirse en un ahorro en el costo computacional necesario para el proceso de optimización.
- Además de presentar un conjunto de soluciones pertenecientes al Frente de Pareto, las soluciones que se obtienen de su uso son diversas entre sí, por lo que al final del proceso es posible encontrar muchas de las soluciones que forman a este conjunto no dominado, el número de soluciones obtenidas pertenecientes a este Frente dependerá en gran medida del tamaño de la población empleada en el proceso y del problema a optimizar; es decir, si el número de soluciones presentes en el Frente de Pareto es  $M$  y el tamaño de población escogido para llevar a cabo el proceso es igual a  $N$ , donde  $N < M$ , el algoritmo será incapaz de encontrar a todos los miembros del Frente de Pareto. A diferencia de lo que ocurre en los problemas mono-objetivo y problemas multiobjetivo tratados mediante métodos ponderados, donde el resultado de la optimización será un sólo individuo dentro del espacio de solución, en el NSGA-II no es posible conocer de antemano cuantos elementos forman el Frente de Pareto y por lo tanto el tamaño de la población con la que se trabajará.

### 5.3.5. Término de la optimización

Todos los operadores que componen al algoritmo genético, son parte de un proceso iterativo que lleva a la evolución de las soluciones en cada generación. Sin embargo, ninguno de esos operadores define un fin para el proceso de optimización. Lo ideal sería que, en el caso de optimización mono-objetivo, el proceso finalizará cuando la solución óptima dentro de todas las soluciones sea encontrada. Sin embargo, esto no es posible de identificar ya que no es una respuesta conocida pues llegar a conocer esta solución es el objetivo del proceso de optimización. Surge entonces la necesidad de introducir un criterio de paro para el AG. Determinar este criterio es de vital importancia para el algoritmo, pues un término prematuro del proceso puede llevar a que el algoritmo no converja a la solución óptima; en el caso contrario cuando el algoritmo utiliza un criterio de paro lento, el esfuerzo computacional se incrementará de tal forma que realizar la optimización no sería viable ni ventajosa.

No existe una regla establecida para definir un criterio de paro para el proceso de optimización del AG. Dentro de los métodos comúnmente adoptados se encuentra el establecimiento de un número de generaciones límite ( $N_{gen}$ ) para una optimización. Cuando ese límite es alcanzado el proceso se detiene y el mejor individuo de la última generación es considerado la solución óptima encontrada por el AG. Una de las desventajas de este método es que no existe una regla establecida para la determinación del  $N_{gen}$ , dejando esta tarea al usuario, el cual se guía por su sensibilidad con relación al problema y su experiencia en la utilización del algoritmo; en muchas ocasiones, aunado a lo anterior, se realizan un número indefinido de pruebas o corridas del AG para encontrar en ellas una convergencia a la solución, lo cual trae consigo la misma dificultad de definir el número de pruebas necesarias para considerar a la solución adecuada.

Otro método para definir el final de la optimización es el establecimiento de un número máximo de generaciones sin la alteración de la mejor solución en la población ( $N_{ms}$ ). Si durante el proceso se alcanza un número  $N_{ms}$  de generaciones con la misma solución óptima el algoritmo finaliza y esta solución es tomada como la solución óptima del problema. Al igual que en el método anterior, el parámetro  $N_{ms}$  es establecido por el usuario sin una regla determinada y de manera similar, valores demasiado pequeños de  $N_{ms}$  pueden llevar a un término prematuro del proceso y en contraste valores exageradamente grandes pueden elevar el costo computacional del proceso.

Para el caso de optimización multiobjetivo la definición de un criterio de paro es aún más complicada, debido a que el resultado en cada generación es un conjunto de soluciones y no una solución como en el caso mono-objetivo. Considerando los métodos anteriores, en este trabajo se emplean simultáneamente ambos criterios de paro. Sin embargo, el último de ellos sufre una modificación para adaptarlo al caso multiobjetivo; a diferencia del caso mono-objetivo el criterio de paro multiobjetivo actuará cuando el AG alcance un número  $N_{ms}$  de generaciones con el mismo conjunto de soluciones, es decir, ya que en cada una de las generaciones se busca encontrar el Frente de Pareto global, el cual está compuesto por un conjunto de soluciones, el criterio detendrá el proceso de optimización cuando el frente encontrado se repita un número  $N_{ms}$  de generaciones consecutivamente.

Al llevar a cabo la combinación de ambos criterios de paro (Número máximo de generaciones y Repetición del conjunto de soluciones) se espera obtener el Frente de Pareto global para cada problema con un menor costo computacional.

### 5.3.6. Validación del AG planteado

A continuación se presenta un ejemplo de aplicación del AG. Se trata de un laminado cuadrado apoyado simplemente en sus cuatro bordes, donde cada una de sus láminas están hechas del mismo material compuesto (T300/5208 grafito/epoxy) (Cuadro 5.5) y está bajo la acción de una carga distribuida uniformemente sobre su superficie superior Fig.5.4. Dos objetivos, minimización de peso total del laminado y minimización de la deflexión máxima, son abordados simultáneamente. Donde las variables de diseño son los ángulos de las láminas y los espesores de las mismas. Teniendo en cuenta que ambos objetivos están en conflicto, no existe una solución óptima única, sino un conjunto de soluciones (Frente de Pareto Global). Una restricción de integridad del material cuando está bajo una carga es introducida en el problema a través del uso de los criterios de falla de Tsai-Wu y del esfuerzo máximo.

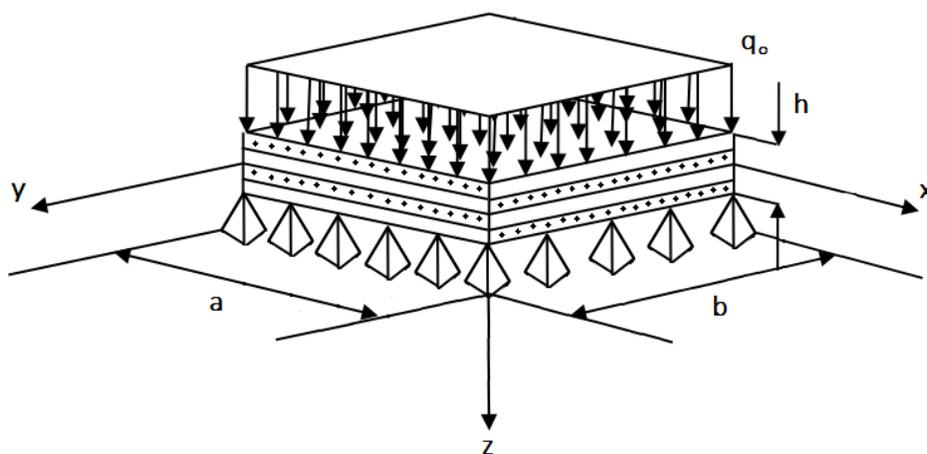


Figura 5.4: Caso de estudio

Propiedades	Valores	Propiedades	Valores
$E_1$	132.5 GPa	$X_T$	1515 MPa
$E_2$	10.8 GPa	$X_C$	1697 MPa
$E_3$	10.8 GPa	$Y_T = Z_T$	43.8 MPa
$G_{12} = G_{13}$	5.7 GPa	$Y_C = Z_C$	43.8 MPa
$G_{23}$	3.4 GPa	$R$	67.6 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.24	$S = T$	86.9 MPa
$\nu_{23}$	0.49	Espesor de cada placa, $h_i$	0.127 mm

Cuadro 5.5: Propiedades Mecánicas de T300/5208 grafito/epoxy

El laminado a estudiar es simétrico balanceado conformado por 8 capas Fig. 5.5, por lo que únicamente (como se explicó en el capítulo anterior) es necesario un cromosoma con 4 genes para cada secuencia de laminado, dos de ellos codifican los ángulos de las láminas y los restantes los espesores.

Los alfabetos utilizados para realizar la codificación se presentan en el Cuadro 5.6 y Cuadro 5.7.

Debido a la extensión de los cromosomas y de los alfabetos de codificación adoptados existen  $3*3*4*4 = 144$  configuraciones de laminado posibles en el espacio de solución.

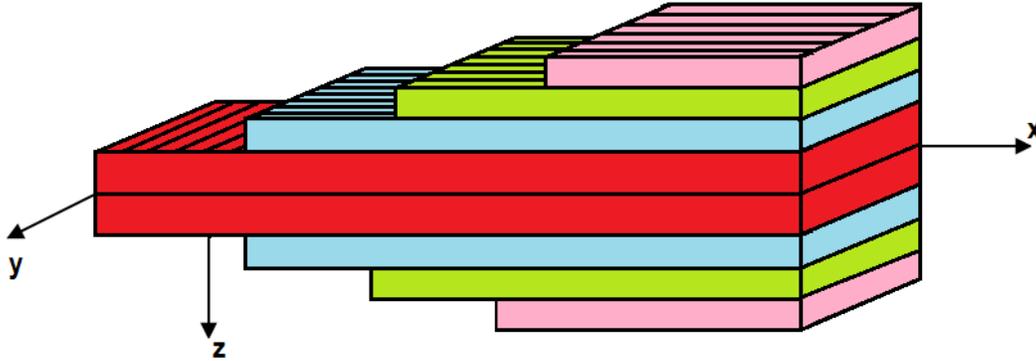


Figura 5.5: Laminado simétrico balanceado

Espesor [mm]	Código
0.75	0
1	1
1.5	2
2	3

Cuadro 5.6: Tabla de Espesores

CO1	
Ángulo	Código
$0^\circ$	0
$\pm 45^\circ$	1
$90^\circ$	2

Cuadro 5.7: Tabla de Orientaciones CO1

Las dimensiones de la placa y las condiciones de frontera a las que se encuentran sometida se muestran en la Fig. 5.6. En la misma figura se muestra el mallado empleado para realizar el análisis mediante FEM de cada una de las configuraciones de laminado generadas a lo largo del proceso de optimización, el cual consta de  $16 \times 16$  elementos cuadrangulares lineales. La placa está sometida a una carga distribuida uniformemente de  $100 [kPa]$ . Las funciones objetivo planteadas en la sección anterior son empleadas para llevar a cabo el análisis del AG (Ec. 5.5 y Ec. 5.5).

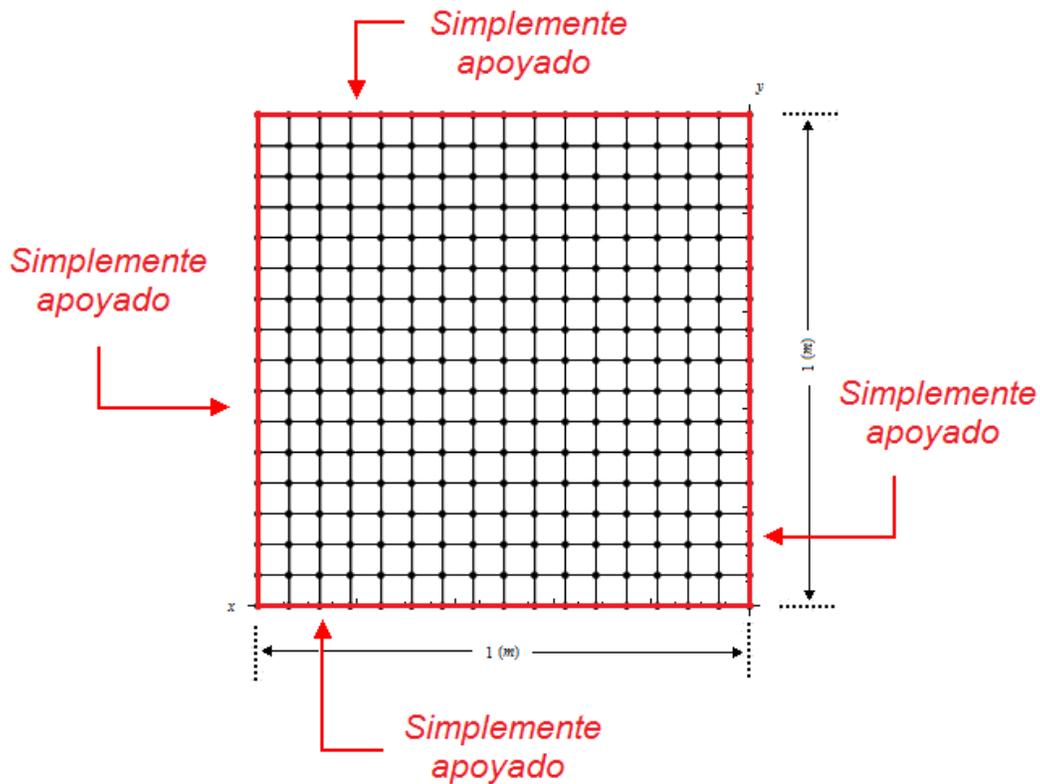


Figura 5.6: Malla utilizada

Para poder dar validez a los resultados obtenidos por el AG fue necesario conocer todos los individuos presentes en el espacio de solución, lo cual se llevó a cabo mediante el análisis con base en el FEM de todas las secuencias de apilamiento generadas por los cromosomas bajo los alfabetos de espesores y ángulos de las fibras. En la Fig. 5.7 se encuentra graficado el espacio de solución total, la gráfica no sólo incluye los resultados factibles, es decir, aquellos laminados que cumplen con las restricciones impuestas; también las soluciones no factibles (aquellas que no cumplen con alguna de esas restricciones) son presentadas; ambos tipos de soluciones se muestran sin distinción.

En la Fig. 5.8 se muestra el espacio de solución total, sin embargo en esta ocasión, se pueden observar cuáles son las soluciones factibles, es decir, aquellos laminados que no fallan y las soluciones no factibles, los laminados que fallan bajo las condiciones impuestas.

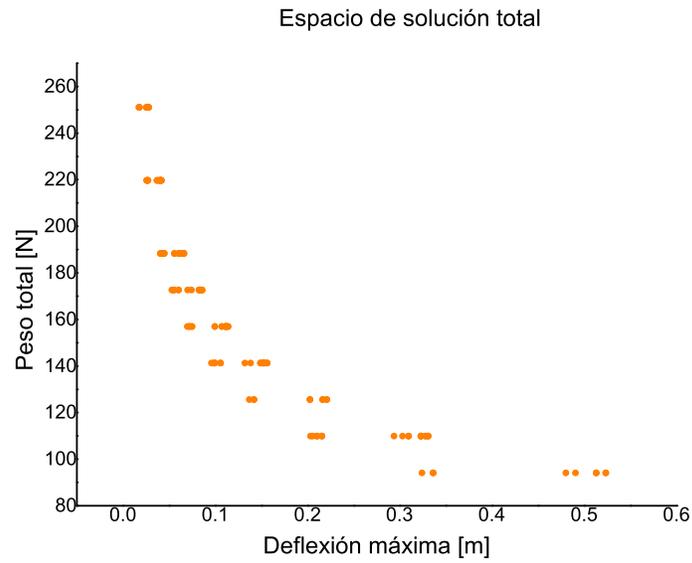


Figura 5.7: Espacio de solución total del problema (soluciones factibles y no factibles)

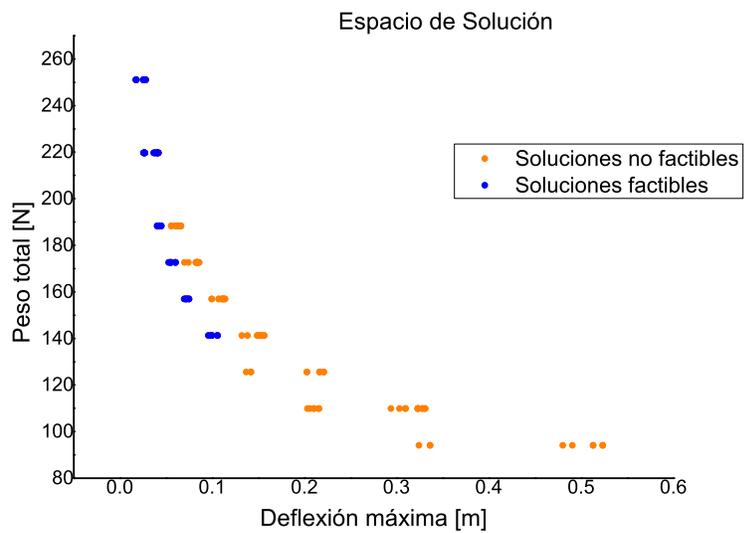


Figura 5.8: Soluciones factibles y no factibles

Finalmente en la Fig 5.9, muestra a los elementos óptimos del espacio de solución, es decir aquellas soluciones que no están dominadas por ningún elemento del espacio de solución; en otras palabras, son las soluciones que forman parte del Frente de Pareto Global.

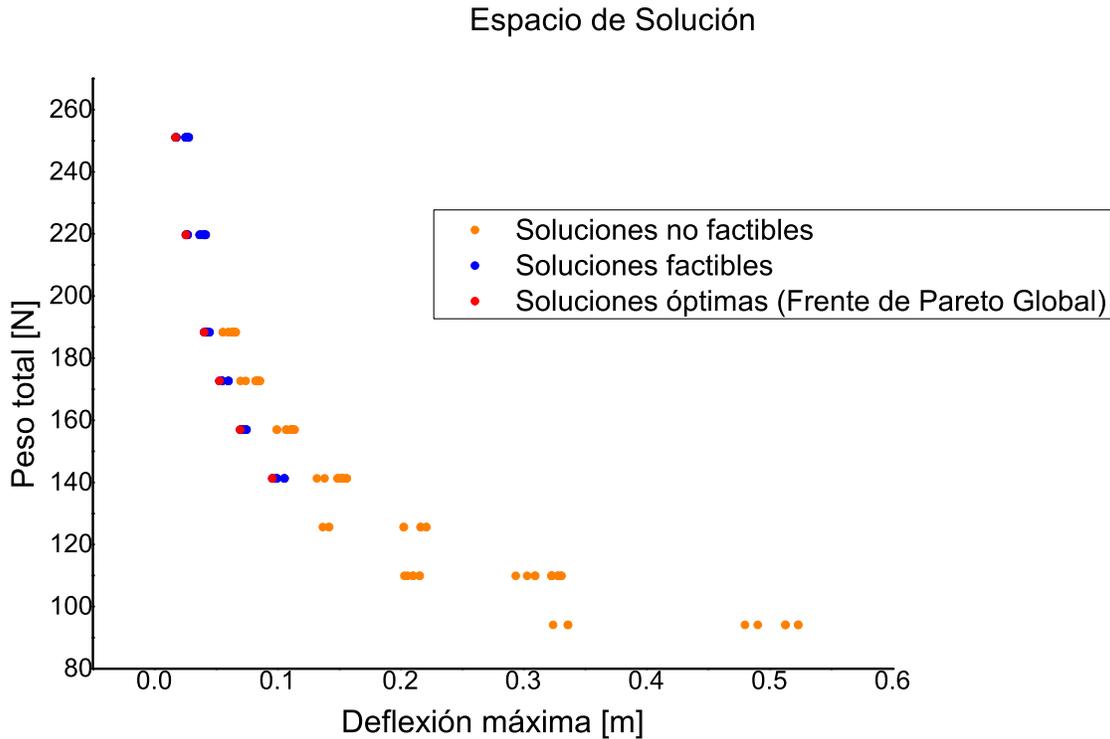


Figura 5.9: Soluciones factibles, no factibles y óptimas

Es evidente que es posible mediante el proceso anterior realizar una búsqueda exitosa de los laminados cuya deflexión y peso sean los mínimos en comparación con las demás soluciones y además que estos cumplan con las restricciones impuestas. Sin embargo, lo anterior conlleva una tarea ardua y engorrosa, que puede además consumir mucho tiempo de cómputo cuando el espacio de solución es muy grande. En este ejemplo, la búsqueda se comenzó generando todos los cromosomas posibles del espacio de solución, después se decodificaron esos cromosomas para así obtener la secuencia de apilamiento de cada uno de los laminados; una vez realizado lo anterior, se analizaron cada uno de los laminados y todos los resultados correspondientes a ese análisis (secuencia de apilamiento, peso, deflexión máxima,  $IF_{EM}$  y  $IF_{TW}$ ) fueron guardados en un mismo archivo. Finalmente fue necesario examinar uno a uno los laminados que cumplieran con las funciones objetivo y las restricciones impuestas, lo cual pese a que esta acción no tiene mayor dificultad que comparar cantidades y a que no es un espacio de solución muy grande (sólo 144 elementos) se prestó a confusiones y errores de copiado, lo cual hace evidente que al analizar un problema cuyo espacio de solución sea muy grande pueden presentarse más este tipo

de errores. Una alternativa a lo anterior podría encontrarse en diseñar un algoritmo de búsqueda que encontrara la o las soluciones óptimas al problema una vez conocido todo el espacio de solución, sin embargo diseñarlo de esta manera haría de la tarea de optimización una tarea muy tardada, poco factible y sin sentido. La descripción anterior demuestra las desventajas de llevar a cabo la optimización de un problema como el abordado en esta tesis de forma manual. Debido a las características presentes en los algoritmos genéticos (paralelismo implícito, capacidad de trabajar con problemas con espacio de solución grande, manejo de problemas multimodales), estos emergen como una herramienta de solución adecuada para el problema aquí presentado. En el Cuadro 5.8 se presentan las soluciones óptimas de este problema encontradas mediante el proceso anterior, el cromosoma que le sería asignado bajo los alfabetos de codificación, secuencia de apilamiento, peso, deflexión máxima,  $IF_{EM}$  y  $IF_{TW}$ .

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[1/ 1/ 3/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [2_4]_s$	17.19	251.136	0.07586	0.07586
B	[1/ 1/ 2/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [1.5_2 / 2_2]_s$	25.51	219.744	0.12555	0.12555
C	[1/ 1/ 1/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [1_2 / 2_2]_s$	40.49	188.352	0.23588	0.23588
D	[1/ 1/ 0/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [0.75_2 / 2_2]_s$	52.82	172.656	0.35068	0.35068
E	[1/ 1/ 1/ 2]	$[\pm 45_2^o]_s : [1_2 / 1.5_2]_s$	69.78	156.96	0.48472	0.48472
F	[1/ 1/ 0/ 2]	$[\pm 45_2^o]_s : [0.75_2 / 1.5_2]_s$	95.81	141.264	0.75065	0.75065

Cuadro 5.8: Soluciones Óptimas

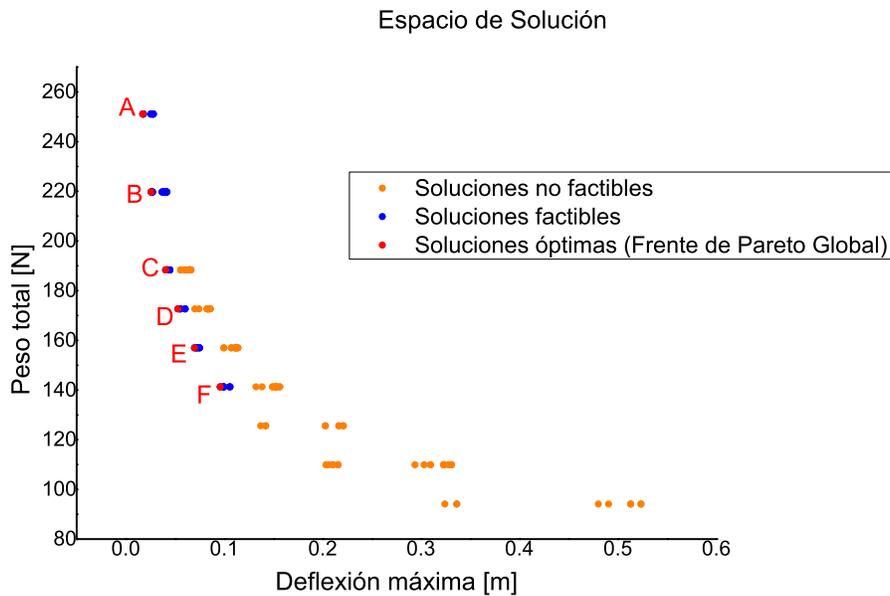


Figura 5.10: Soluciones Óptimas

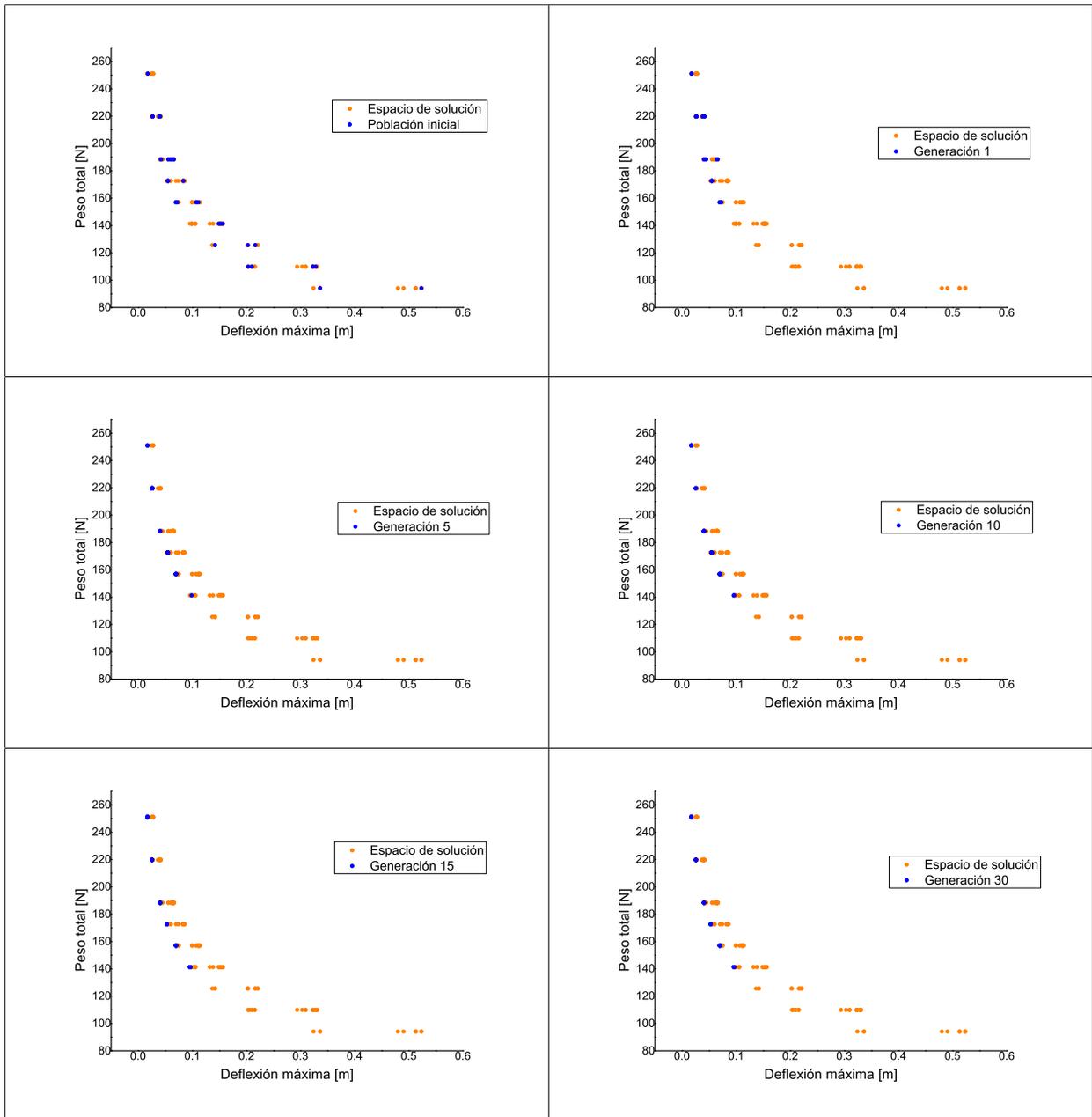
Se puede observar a partir de las gráficas anteriores que existen soluciones que pueden ser agrupadas en diversos conjuntos, donde sus elementos tienen en común el espesor total del laminado (en consecuencia, el peso del mismo). Por lo tanto, es evidente que dependiendo de la secuencia de laminado de cada punto dentro de uno de los conjuntos anteriores se obtienen diferentes deflexiones.

Tamaño de la Población	40 individuos
$N_{gen}$	1000
$N_{ms}$	20 generaciones
$p_{cr}$	0.8
$p_{mut}$	0.02

Cuadro 5.9: Parámetros del AG

A continuación, se presentan los resultados encontrados por el AG. Es preciso aclarar que aún cuando el espacio de solución total y por lo tanto la solución óptima para el problema, es conocido, el objetivo de utilizar el AG y presentar los resultados obtenidos gracias a él radica en validar el algoritmo. Los parámetros empleados para llevar a cabo la optimización se encuentran en el Cuadro 5.9.

El Cuadro 5.10 muestra la evolución de la población de individuos desde su aparición como población inicial hasta el término de la optimización. Es posible observar a partir de estas gráficas que al principio de la optimización la población inicial contiene tanto soluciones factibles como no factibles y a lo largo del proceso estas últimas ya no forman parte de ninguna de las poblaciones, lo cual muestra que el AG dirige su búsqueda a las zonas dentro del espacio de solución donde se encuentran los laminados que no fallan bajo las condiciones de carga y de contorno impuestas, ya que, por lo expuesto en el capítulo anterior, estas soluciones cuentan con un mejor valor de aptitud. Debido a que los resultados obtenidos a partir del proceso de optimización mediante el AG se muestran de color azul, es posible observar que en ninguna de las generaciones mostradas (y en general en ninguna de las presentes en la optimización) se puede contar de forma totalmente diferenciada a los 40 individuos pertenecientes a la población. Lo anterior se acentúa al término de la optimización, donde es posible observar, únicamente, 6 resultados. En un principio, al generarse la población inicial de forma aleatoria, existe la posibilidad de crear 40 individuos totalmente distintos, puede ocurrir totalmente lo contrario o como tercera opción puede existir un porcentaje de individuos duplicados; los cromosomas dependerán en gran medida del algoritmo empleado para generar números de forma aleatoria. Sin embargo y a diferencia de los métodos de optimización donde es necesaria una semilla de arranque para comenzar el proceso y obtener resultados cercanos al óptimo global [13], el éxito de la búsqueda del AG no dependerá de esta población inicial, debido a que el peso del proceso recae en gran medida, en la interacción de los operadores genéticos (también debe considerarse el tipo de problema y el tipo de codificación utilizada), es decir, aún cuando se presentara la situación en la que la población inicial estuviera formada por 40 individuos con el mismo cromosoma, el operador de mutación ampliaría la zona de búsqueda del AG, dirigiéndolo a zonas donde los individuos tendrán cromosomas distintos a los de la población inicial; así mismo, en el caso donde la población inicial únicamente estuviera formada por soluciones no factibles, el operador de cruce actuaría de tal forma que alguna de las soluciones descendientes contendría a un laminado factible para el problema.



Cuadro 5.10: Evolución de las soluciones

En ambos casos, la interacción de los operadores de cruce y mutación, así como el torneo restringido y el NSGA-II dirigirán al AG al Frente de Pareto Global. Además, la razón de observar menos de 40 individuos en las poblaciones posteriores a la población inicial, se debe al operador de selección (torneo restringido) ya que, como se mencionó anteriormente, su objetivo es reproducir (en su acepción

de duplicación íntegra) aquellas soluciones que cuentan con los mejores valores de aptitud, por lo cual es posible que en los enfrentamientos desarrollados por este operador, diversas soluciones fueran duplicadas más de una vez debido a la superioridad de su aptitud sobre las soluciones a las que se enfrentaron en el torneo restringido. Por lo tanto, al final de las generaciones únicamente las soluciones no dominadas dentro del espacio de solución serán encontradas y se verán duplicadas en la población final, razón por la cual sólo 6 individuos se presentan en los resultados. Aunado a todo lo anterior, el AG presenta diversidad genética en todas las generaciones llevadas a cabo en este proceso, característica primordial en todo AG, no sólo cuando el problema a tratar es multiobjetivo, ya que aunque en el caso mono-objetivo el resultado de la optimización será un sólo individuo, la diversidad en la población evitará que el AG caiga en soluciones subóptimas [13]. En el caso de problemas multi-objetivo con objetivos en conflicto, el resultado de la optimización será el Frente de Pareto Global del espacio de solución; por lo tanto, es en este tipo de problemas donde tener óptimos diversos es una meta más del proceso.

Es necesario aclarar que los resultados presentados en el Cuadro 5.10 son parte de un conjunto de pruebas realizadas para este problema de optimización (en total 20) y aunque la evolución de la población mostrada en el cuadro no puede tomarse como una generalización de la evolución de la población en esas 20 pruebas, los resultados sí lo son, en cada una de esas pruebas los resultados son los mismos. Así mismo y debido al parámetro  $N_{ms} = 20$  a partir de la generación 10 hasta la 30 el Frente de Pareto es el mismo.

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[1/ 1/ 3/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [2_4]_s$	17.19	251.136	0.07586	0.07586
B	[1/ 1/ 2/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [1.5_2 / 2_2]_s$	25.51	219.744	0.12555	0.12555
C	[1/ 1/ 1/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [1_2 / 2_2]_s$	40.49	188.352	0.23588	0.23588
D	[1/ 1/ 0/ 3]	$[\pm 45_2^o]_s : [0.75_2 / 2_2]_s$	52.82	172.656	0.35068	0.35068
E	[1/ 1/ 1/ 2]	$[\pm 45_2^o]_s : [1_2 / 1.5_2]_s$	69.78	156.96	0.48472	0.48472
F	[1/ 1/ 0/ 2]	$[\pm 45_2^o]_s : [0.75_2 / 1.5_2]_s$	95.81	141.264	0.75065	0.75065

Cuadro 5.11: Soluciones Óptimas encontradas por el AG

El Cuadro 5.11 muestra las características de las soluciones encontradas por el AG y mostradas en la Fig. 5.11.

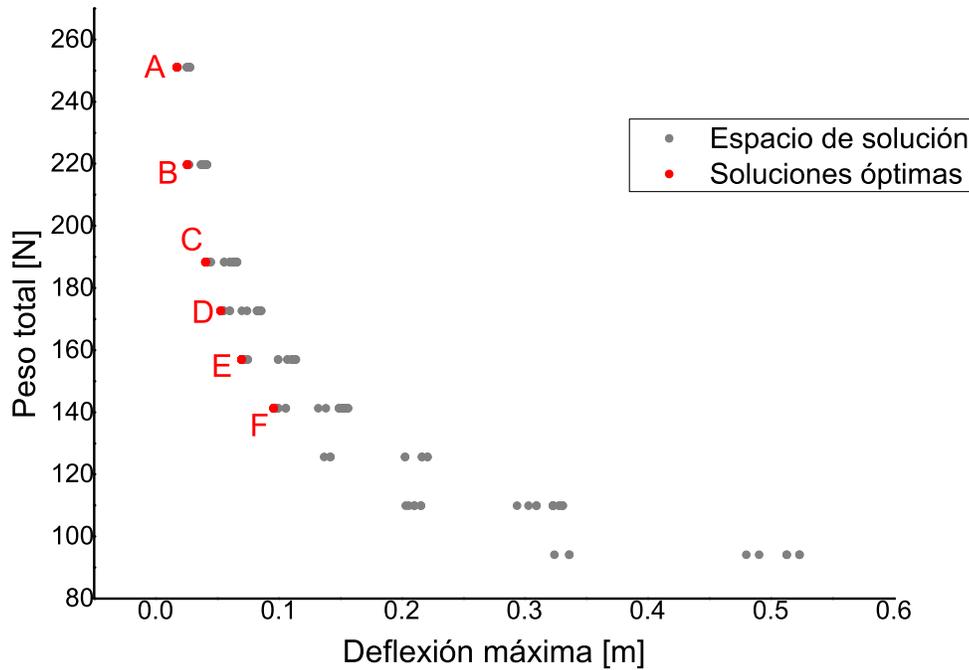


Figura 5.11: Soluciones Óptimas encontradas por el AG

Al compararse los resultados presentados en el Cuadro 5.8 y Cuadro 5.11 se puede observar que los resultados encontrados en ambos casos son los mismos, por lo cual el Frente obtenido por el AG es en realidad el Frente de Pareto Global, por lo tanto es posible concluir que el AG implementado en este trabajo funciona de manera adecuada, ya que entrega resultados óptimos y confiables, contando así con una poderosa herramienta de optimización. Es necesario insistir, que los resultados encontrados por el AG son óptimos para situaciones específicas de relación entre el peso y la deflexión, por lo tanto es indispensable realizar un postproceso donde se lleve a cabo una ponderación de las funciones objetivo.

En la Fig. 5.12 se muestran las vistas laterales de los laminados encontrados obtenidos en la optimización, donde se puede observar la deflexión de cada uno de ellos. Aunque el Cuadro 5.11 proporciona información sobre la deflexión de cada uno de los laminados, la Fig. 5.12 permite representarlo visualmente.

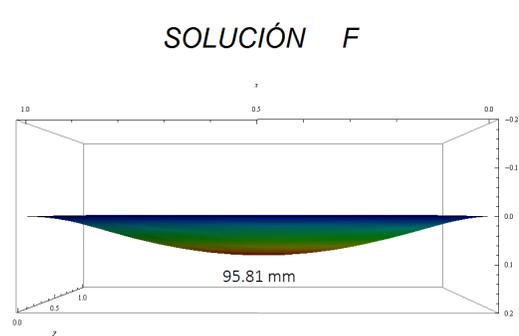
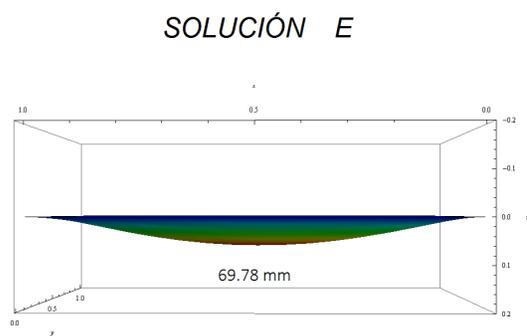
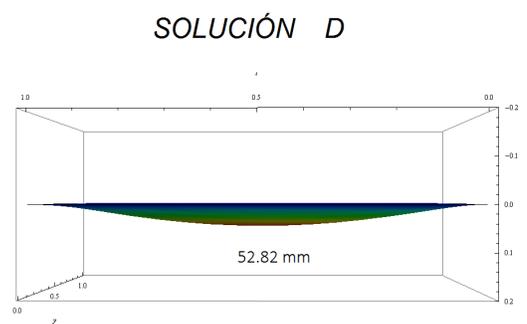
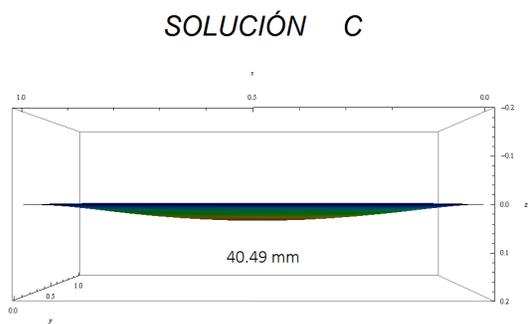
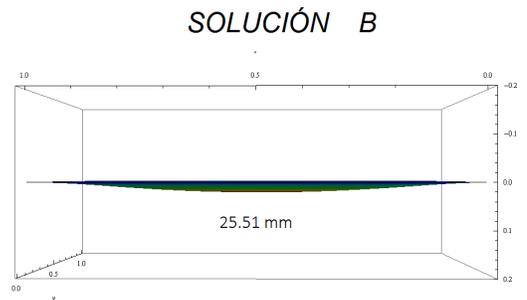
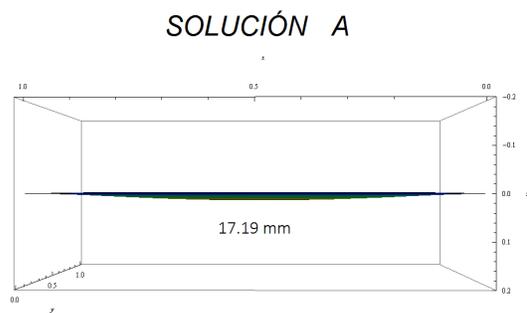


Figura 5.12: Deflexiones de los miembros del Frente de Pareto

# Capítulo 6

## Casos de estudio

En esta sección se presentan los diseños óptimos de laminados simétricos balanceados encontrados para distintas condiciones de trabajo (relación longitud-ancho del laminado, condiciones de frontera y tipo de carga) y para distintos parámetros del AG, todas ellas se describirán antes de presentar los resultados. En todos los casos expuestos se busca minimizar el peso y minimizar la deflexión máxima, cuyas funciones objetivo (descritas en el capítulo anterior) son las Ecs. 6.1 y 6.2, respectivamente. Las condiciones de frontera que se utilizarán en los distintos análisis se presentan en la Fig. 6.1.

$$\text{Minimizar } f_W(t_1, t_2, \dots, t_N) = (\rho \cdot g \cdot a \cdot b) \sum_{i=1}^N t_i \quad (6.1)$$

$$\text{Minimizar } f_\delta(\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}) = FEM(\{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}) \quad (6.2)$$

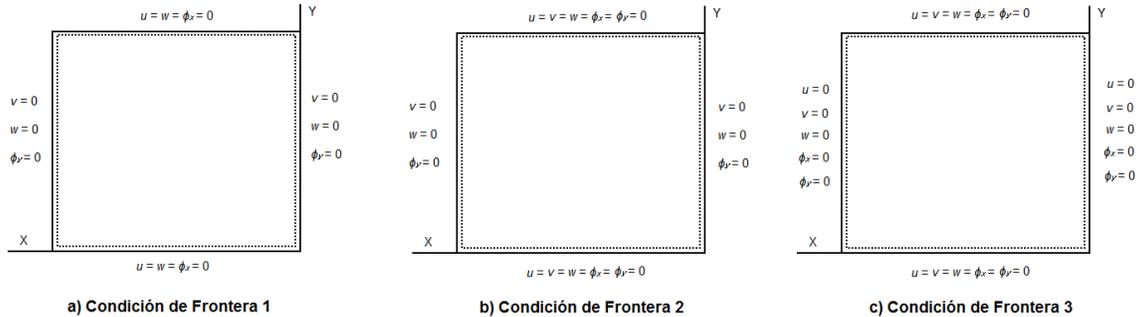


Figura 6.1: Condiciones de Frontera

- **Condición de Frontera 1.** Cuatro lado simplemente apoyados.
- **Condición de Frontera 2.** Dos lados opuestos apoyados simplemente y los restantes empotrados.

- **Condición de Frontera 3.** Todos los lados empotrados.

El material del cual están formadas cada una de las placas de los laminados es carbon/epoxy T300/5208, cuyas propiedades mecánicas se muestran en el Cuadro 6.1.

Propiedad	Valores	Propiedad	Valores
$E_1$	132.5 GPa	$X_T$	1515 MPa
$E_2$	10.8 GPa	$X_C$	1697 MPa
$E_3$	10.8 GPa	$Y_T = Z_T$	43.8 MPa
$G_{12} = G_{13}$	5.7 GPa	$Y_C = Z_C$	43.8 MPa
$G_{23}$	3.4 GPa	$R$	67.6 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.24	$S = T$	86.9 MPa
$\nu_{23}$	0.49	<i>Espesor de cada placa, <math>h_i</math></i>	0.127 mm

Cuadro 6.1: Propiedades Mecánicas de T300/5208 grafito/epoxy

## 6.1. Optimización de materiales compuestos con condición de Frontera 1: Aumento de las variables de diseño

El problema presentado a continuación es básicamente el mismo que se presentó en la Sección 5.3.6, sin embargo la codificación utilizada en la parte del cromosoma correspondiente a los ángulos de orientación de las fibras varía. La nueva codificación se muestra en el Cuadro 6.3 (a partir de este ejemplo, a menos que se especifique lo contrario, ésta será la codificación empleada para las orientaciones de las fibras en los ejemplos posteriores). La ampliación del número de ángulos de orientación, tiene como objetivo demostrar que es posible encontrar laminados cuyas fibras estén orientadas a ángulos diferentes a los utilizados comúnmente en la industria ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ), esperando obtener mejores resultados a los presentados en la Sección 5.3.6. Para comprobar lo anterior se analizaron y optimizaron laminados simétricos balanceados de 8 capas. En este ejemplo los laminados de  $1\ m \times 1\ m$  se encuentran bajo la Condición de Frontera 1 y bajo una carga distribuida  $q = 0.1 * 10^6\ Pa$  aplicada en la parte superior del laminado.

Tamaño de la Población	40 individuos
$N_{gen}$	1000
$N_{ms}$	20 generaciones
$p_{cr}$	0.8
$p_{mut}$	0.02

Cuadro 6.2: Parámetros del AG

Así mismo, los parámetros utilizados para llevar a cabo el proceso de optimización se muestran en el Cuadro 6.2. El Cuadro 6.4 y la Fig. 6.2 muestran los resultados obtenidos al emplear el AG. Es importante señalar que la Fig. 6.2 únicamente presenta los resultados obtenidos por medio de la optimización, a diferencia de lo ocurrido en el ejemplo de validación donde se presenta todo el espacio de

solución. Lo anterior se debe a que el espacio de solución de este ejemplo cuenta con  $19 \times 19 \times 4 \times 4 = 5776$  y realizar el procedimiento utilizado para conocer el espacio total habría sido una tarea muy tarda y finalmente innecesaria, debido a que finalmente el empleo de los métodos de optimización son los encargados de esta búsqueda.

CO2			
Ángulo	Código	Ángulo	Código
$0^\circ$	0	$\pm 50^\circ$	10
$\pm 5^\circ$	1	$\pm 55^\circ$	11
$\pm 10^\circ$	2	$\pm 60^\circ$	12
$\pm 15^\circ$	3	$\pm 65^\circ$	13
$\pm 20^\circ$	4	$\pm 70^\circ$	14
$\pm 25^\circ$	5	$\pm 75^\circ$	15
$\pm 30^\circ$	6	$\pm 80^\circ$	16
$\pm 35^\circ$	7	$\pm 85^\circ$	17
$\pm 40^\circ$	8	$90^\circ$	18
$\pm 45^\circ$	9		

Cuadro 6.3: Tabla de Orientaciones

Es interesante observar que el Frente de Pareto presentado en la Fig. 6.2 contiene el mismo número de soluciones del ejemplo de validación. Al realizar una comparación de los resultados presentados en la validación y los alcanzados en este ejemplo Fig. 6.3 es posible observar que son los mismos. Este puede observarse de forma más clara al comparar los cuadros de resultados Cuadro 5.11 y Cuadro 6.4, ya que la única diferencia entre los resultados es su genotipo.

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[9/ 9/ 3/ 3]	$[\pm 45_2]_s : [2_4]_s$	17.19	251.136	0.07586	0.07586
B	[9/ 9/ 2/ 3]	$[\pm 45_2]_s : [1.5_2/ 2_2]_s$	25.51	219.744	0.12555	0.12555
C	[9/ 9/ 1/ 3]	$[\pm 45_2]_s : [1_2/ 2_2]_s$	40.49	188.352	0.23588	0.23588
D	[9/ 9/ 0/ 3]	$[\pm 45_2]_s : [0.75_2/ 2_2]_s$	52.82	172.656	0.35068	0.35068
E	[9/ 9/ 1/ 2]	$[\pm 45_2]_s : [1_2/ 1.5_2]_s$	69.78	156.96	0.48472	0.48472
F	[9/ 9/ 0/ 2]	$[\pm 45_2]_s : [0.75_2/ 1.5_2]_s$	95.81	141.264	0.75065	0.75065

Cuadro 6.4: Soluciones Óptimas encontradas por el AG al variar las variables de diseño

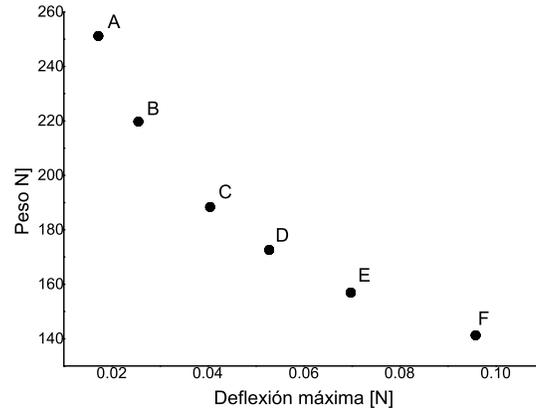


Figura 6.2: Soluciones Óptimas utilizando 19 ángulos en la codificación de orientaciones

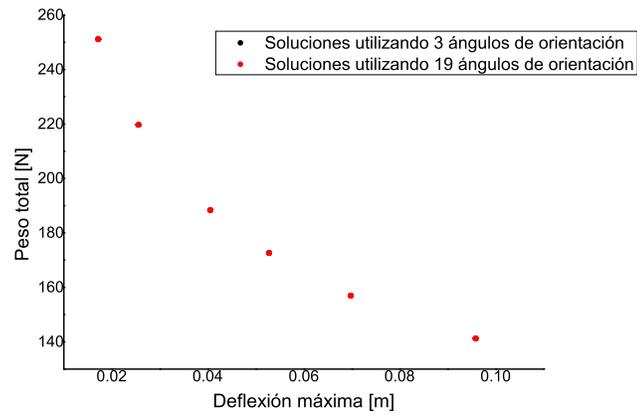


Figura 6.3: Comparación de los resultados

Lo anterior demuestra que pese a aumentar la cantidad de ángulos como variables de diseño, los laminados óptimos para este problema en particular son aquellos que cuentan únicamente con los ángulos utilizados tradicionalmente en la industria, en específico aquellos laminados cuyas láminas tienen embebidas fibras a 45° grados. Sin embargo, no se deben de generalizar estos resultados.

## 6.2. Optimización de materiales compuestos: Diferentes condiciones de frontera

A continuación se presenta una comparación de los resultados obtenidos al optimizar materiales laminados compuestos reforzados con fibras variando las condiciones de frontera a las que están impuestos. En los casos presentados los laminados (de 8 capas) de dimensiones  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  deben ser optimizados bajo las condiciones de frontera correspondientes mientras se encuentran bajo la carga distribuida  $q = 0.1 * 10^6 Pa$  sobre su superficie superior (al igual que en el ejemplo de validación del AG). Al igual que en los ejemplos anteriores los parámetros de optimización son los mismos.

El Cuadro 6.5 muestra los resultados obtenidos después de la optimización de materiales compuestos laminados con Condición de Frontera 2.

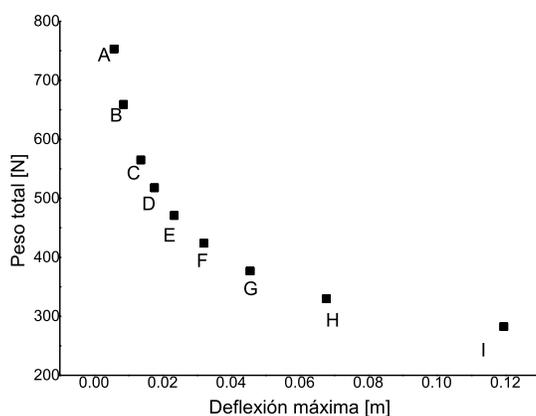


Figura 6.4: Soluciones encontradas por el AG. Laminado empotrado.

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[15/ 18/ 0/ 0]	$[80_2^0]_s : [0.75_4]_s$	119.51	282.528	0.679	0.8996
B	[18/ 18/ 0/ 1]	$[90_2^0]_s : [0.75_2/ 1_2]_s$	67.76	329.616	0.4249	0.5660
C	[18/ 18/ 0/ 2]	$[90_2^0]_s : [0.75_2/ 2_2]_s$	32	423.792	0.1619	0.2136
D	[18/ 18/ 0/ 3]	$[90_2^0]_s : [0.75_2/ 3_2]_s$	17.6	517.968	0.0762	0.993
E	[18/ 18/ 1/ 1]	$[90_2^0]_s : [1_4]_s$	45.48	376.704	0.2539	0.3366
F	[18/ 18/ 2/ 1]	$[90_2^0]_s : [2_2/ 1_2]_s$	23.37	470.88	0.1088	0.1426
G	[18/ 18/ 2/ 3]	$[90_2^0]_s : [2_2/ 3_2]_s$	8.61	659.232	0.0316	0.0404
H	[18/ 18/ 3/ 1]	$[90_2^0]_s : [3_2/ 1_2]_s$	13.59	565.056	0.0552	0.0716
I	[18/ 18/ 3/ 3]	$[90_2^0]_s : [3_4]_s$	5.8	753.408	0.0198	0.0249

Cuadro 6.5: Soluciones Óptimas encontradas por el AG: laminado con Condiciones de Frontera 2

El Cuadro 6.6 muestra los resultados obtenidos después de la optimización de materiales compuestos laminados con Condiciones de Frontera 3.

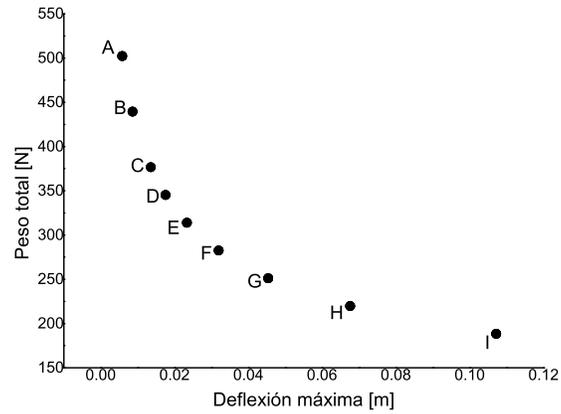


Figura 6.5: Soluciones encontradas por el AG. Laminado con Condiciones de Frontera 3

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[18/ 18/ 0/ 0]	$[90_2^0]_s : [0.75_4]_s$	107.12	188.352	0.621	0.7981
B	[18/ 18/ 0/ 2]	$[90_2^0]_s : [0.75_2/ 2_2]_s$	31.9	282.528	0.1249	0.1641
C	[18/ 18/ 1/ 0]	$[90_2^0]_s : [1_2/ 0.75_2]_s$	67.56	219.744	0.3362	0.4358
D	[18/ 18/ 1/ 1]	$[90_2^0]_s : [1_4]_s$	45.33	251.13	0.1977	0.2589
E	[18/ 18/ 1/ 2]	$[\pm 45_2^0]_s : [1_2/ 2_2]_s$	23.3	313.92	0.838	0.1094
F	[18/ 18/ 1/ 3]	$[\pm 45_2^0]_s : [1_2/ 3_2]_s$	13.55	376.704	0.0426	0.0548
G	[18/ 18/ 3/ 0]	$[\pm 45_2^0]_s : [3_2/ 0.75_2]_s$	17.55	345.312	0.0587	0.0761
H	[18/ 18/ 3/ 2]	$[\pm 45_2^0]_s : [3_2/ 2_2]_s$	8.58	439.488	0.0243	0.031
I	[18/ 18/ 3/ 3]	$[\pm 45_2^0]_s : [3_4]_s$	5.79	502.272	0.0152	0.019

Cuadro 6.6: Soluciones Óptimas encontradas por el AG: laminado con Condiciones de Frontera 3

### 6.3. Optimización de materiales compuestos laminados: Carga puntual

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al llevar a cabo la optimización de laminados de 8 capas, con dimensiones  $1\text{ m} \times 1\text{ m}$  bajo la Condición de Frontera 1 y bajo una carga puntual  $P = 1\text{ kN}$ . El Cuadro 6.7 muestra las características de los laminados encontrados (Fig. 6.6).

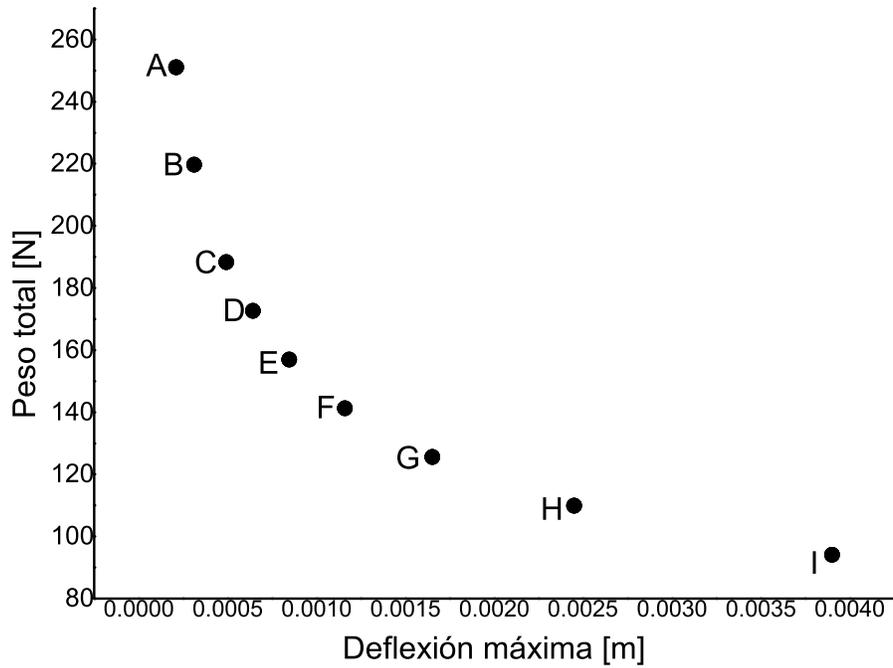


Figura 6.6: Soluciones Óptimas

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[9/ 8/ 0/ 0]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [0.75_4]_s$	3.9	94.176	0.0006	0.0006
B	[9/ 8/ 3/ 3]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [2_4]_s$	0.21	251.136	0.00007	0.00007
C	[9/ 8/ 0/ 1]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [0.75_2 / 1_2]_s$	2.45	109.872	0.0004	0.0004
D	[9/ 8/ 1/ 1]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [1_4]_s$	1.65	125.568	0.0003	0.0003
E	[9/ 8/ 0/ 2]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [0.75_2 / 1.5_2]_s$	1.16	141.264	0.0002	0.0002
F	[9/ 8/ 1/ 2]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [1_2 / 1.5_2]_s$	0.85	156.96	0.0002	0.0002
G	[9/ 8/ 0/ 3]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [0.75_2 / 2_2]_s$	0.64	172.656	0.0002	0.0002
H	[9/ 8/ 1/ 3]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [1_{42} / 2_2]_s$	0.49	188.352	0.0001	0.0001
I	[9/ 8/ 2/ 3]	$[\pm 40_2^{\circ} / \pm 35_3^{\circ}]_s : [0.75_2 / 1_4 / 1.5_2]_s$	0.31	219.744	0.0001	0.0001

Cuadro 6.7: Soluciones Óptimas encontradas por el AG para laminados bajo carga puntual

## 6.4. Optimización de materiales compuestos: Variación del número de láminas

En este ejemplo final se lleva a cabo la optimización de laminados simétricos balanceados con un máximo de 16 capas y un mínimo de 4 capas, con Condición de Frontera 1 y sometidos a una carga distribuida  $q = 0.1 * 10^6 Pa$ . Existe una variación importante en la codificación de los ángulos de orientación de las fibras embebidas en cada placa y la de sus espesores. En los ejemplos anteriores a éste, el número de capas permanecía constante en todo el proceso de optimización, es decir, al fijarse un número de capas  $N_{cp}$  al principio del proceso, el AG trabajaba con la codificación simétrica y balanceada de ellas y encontraba los laminados con  $N_{cp}$  número de capas que cumplieran de manera óptima con los objetivos y restricciones definidas.

Espesor [mm]	Código
0	0
0.75	1
1	2
1.5	3
2	4

Cuadro 6.8: Tabla de Espesores

Sin embargo, en este ejemplo el número de placas en los laminados no es fijo. En principio, se fija un número de capas  $N_{mc}$  (en este caso, 16), el cual define el número máximo de láminas que podrán tener los laminados; ya que los laminados estudiados en este trabajo son simétricos balanceados el número mínimo de capas es 4. Este caso de estudio surge de la observación hecha acerca de los resultados de los ejemplos anteriores. En todos ellos es evidente que la minimización del peso del laminado es completamente dependiente de la variación de los espesores de las láminas, sin embargo, no es el único método de minimización del peso, laminados con un menor número de capas que cumplan con las condiciones de frontera, de carga y las restricciones son una alternativa al problema. En el Cuadro 6.8 y Cuadro 6.9 se muestra la codificación de las orientaciones de la fibras y los espesores, respectivamente, empleadas para este análisis, en ambos casos el gen 0 representa la ausencia de lámina. Todos los laminados que cuenten con un número de capas menor al máximo contendrán en su cromosoma un número  $K$  de genes 0, dependiendo del número de capas ausentes en su apilamiento, los cuales estarán a la izquierda del cromosoma, es decir al exterior del laminado, ya no es posible tener una ausencia de láminas al interior del laminado.

CO2	
Ángulo	Código
$V^\circ$	0
$0^\circ$	1
$\pm 45^\circ$	2
$\pm 90^\circ$	3

Cuadro 6.9: Tabla de Orientaciones

En este caso, únicamente se consideran los ángulos utilizados comúnmente en la industria. Lo anterior se lleva a cabo para reducir el tamaño del espacio de solución. El Cuadro 6.10 y la Fig. 6.7 muestran los resultados de la optimización.

En la Fig. 6.7 es posible observar que en el proceso de optimización se encontraron 21 soluciones óptimas, de las cuales 18 de ellas están conformados por 16 láminas y las restantes se forman al apilar 12 láminas. Es importante señalar que estas 3 soluciones son las que presentan una mayor deflexión y tienen el menor peso. La Fig. 6.8 y el Cuadro 6.11 presentan los resultados encontrados al llevar a cabo la optimización de este mismo problema con el número de placas fijas.

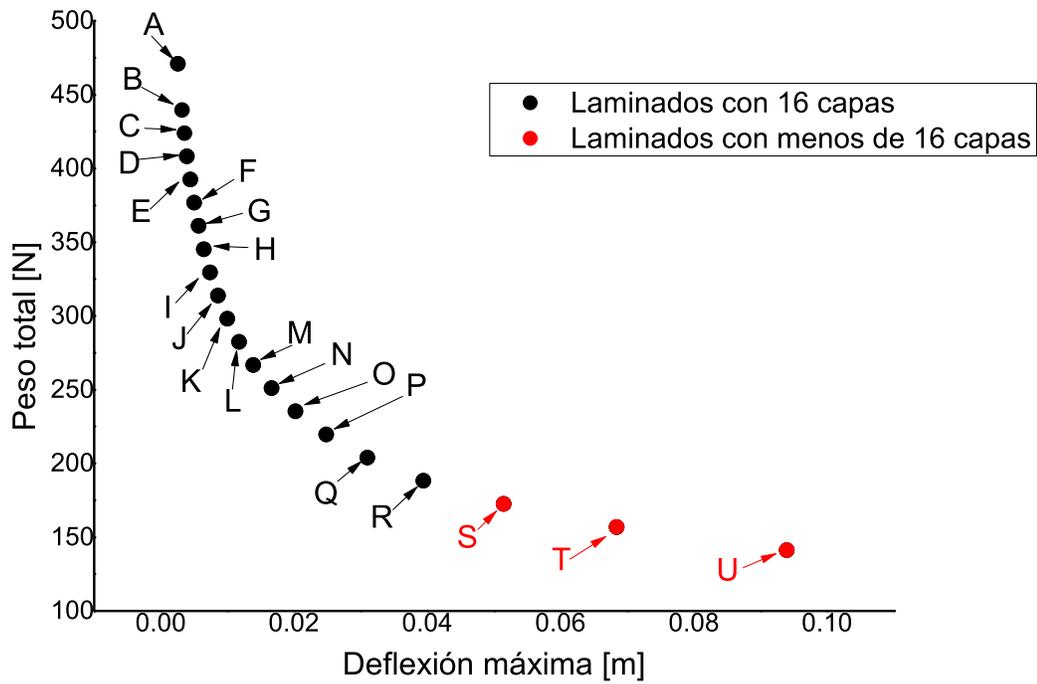


Figura 6.7: Soluciones Óptimas

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[0/2/2/2/0/1/1/1]	$[\pm 45^{\circ}_3]_s : [0.75_6]_s$	93.90	141.2639	0.6079	0.6079
B	[0/2/2/2/0/1/1/2]	$[\pm 45^{\circ}_3]_s : [0.75_4/1_2]_s$	68.37	156.96	0.3887	0.3887
C	[0/2/2/2/0/1/2/2]	$[\pm 45^{\circ}_3]_s : [0.75_2/1_4]_s$	51.42	172.656	0.2667	0.2667
D	[2/2/2/2/1/1/1/1]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_8]_s$	39.37	188.352	0.1706	0.1706
E	[2/2/2/2/1/1/1/2]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_6/1_2]_s$	30.96	204.048	0.1216	0.1216
F	[2/2/2/2/1/1/1/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_6/1.5_2]_s$	20.18	235.44	0.0678	0.0678
G	[2/2/2/2/1/1/2/2]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_4/1_4]_s$	24.81	219.744	0.0903	0.0903
H	[2/2/2/2/1/1/2/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_4/1_2/1.5_2]_s$	16.64	251.136	0.0521	0.0521
I	[2/2/2/2/1/2/2/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_4/1.5_2]_s$	13.89	266.832	0.0409	0.0409
J	[2/2/2/2/1/2/2/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_4/2_2]_s$	9.97	298.224	0.0262	0.0262
K	[2/2/2/2/1/2/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_2/1.5_2/2_2]_s$	7.40	329.616	0.0175	0.0175
L	[2/2/2/2/1/2/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_2/2_4]_s$	5.65	361.008	0.0123	0.0123
M	[2/2/2/2/1/4/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/2_6]_s$	3.52	423.792	0.0065	0.0065
N	[2/2/2/2/2/2/2/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_6/1.5_2]_s$	11.71	282.528	0.0327	0.0327
O	[2/2/2/2/2/2/2/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_6/2_2]_s$	8.56	313.92	0.0213	0.0213
P	[2/2/2/2/2/2/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_4/1.5_2/2_2]_s$	6.44	345.312	0.0145	0.0145
Q	[2/2/2/2/2/3/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_2/1.5_4/2_2]_s$	4.98	376.704	0.0102	0.0102
R	[2/2/2/2/3/1/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1.5_2/0.75_2/2_4]_s$	4.41	392.4	0.0089	0.0089
S	[2/2/2/2/3/2/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1.5_2/1_2/2_2]_s$	3.93	408.096	0.0075	0.0075
T	[2/2/2/2/3/4/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1.5_2/2_2/1.5_2/2_2]_s$	3.16	439.488	0.0056	0.0056
U	[2/2/2/2/3/4/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1.5_2/2_6]_s$	2.57	470.88	0.0042	0.0042

Cuadro 6.10: Soluciones Óptimas encontradas por el AG con el número de placas variables

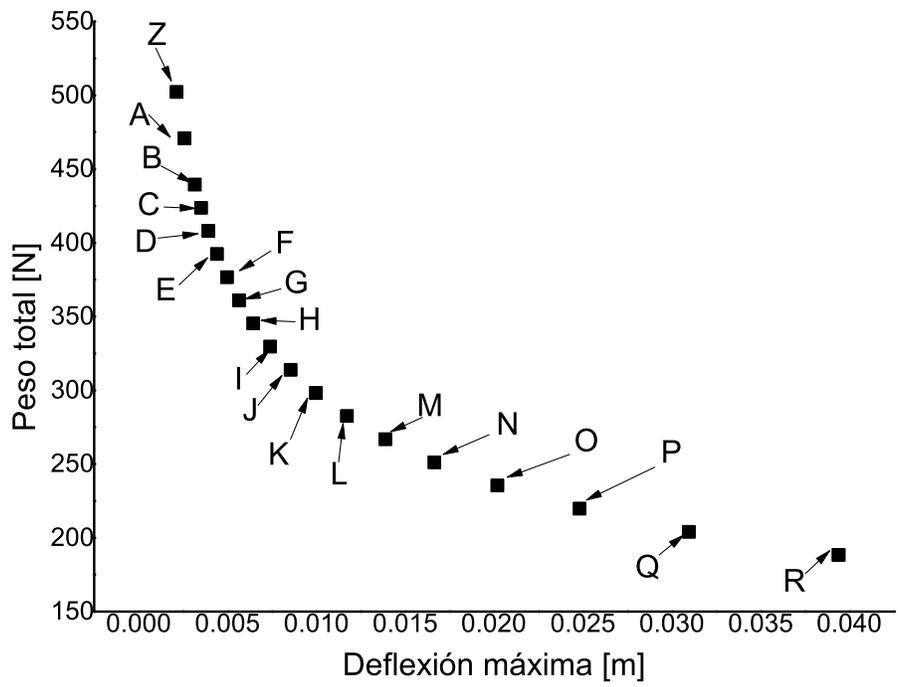


Figura 6.8: Soluciones Óptimas con número de placas fijas

Solución	Cromosoma	Secuencia de Apilamiento	Deflexión [mm]	Peso [N]	$IF_{EM}$	$IF_{TW}$
A	[0/2/2/2/0/1/1/1]	$[\pm 45^{\circ}_3]_s : [0.75_6]_s$	93.90	141.2639	0.6079	0.6079
B	[0/2/2/2/0/1/1/2]	$[\pm 45^{\circ}_3]_s : [0.75_4/1_2]_s$	68.37	156.96	0.3887	0.3887
C	[0/2/2/2/0/1/2/2]	$[\pm 45^{\circ}_3]_s : [0.75_2/1_4]_s$	51.42	172.656	0.2667	0.2667
D	[2/2/2/2/1/1/1/1]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_8]_s$	39.37	188.352	0.1706	0.1706
E	[2/2/2/2/1/1/1/2]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_6/1_2]_s$	30.96	204.048	0.1216	0.1216
F	[2/2/2/2/1/1/1/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_6/1.5_2]_s$	20.18	235.44	0.0678	0.0678
G	[2/2/2/2/1/1/2/2]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_4/1_4]_s$	24.81	219.744	0.0903	0.0903
H	[2/2/2/2/1/1/2/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_4/1_2/1.5_2]_s$	16.64	251.136	0.0521	0.0521
I	[2/2/2/2/1/2/2/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_4/1.5_2]_s$	13.89	266.832	0.0409	0.0409
J	[2/2/2/2/1/2/2/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_4/2_2]_s$	9.97	298.224	0.0262	0.0262
K	[2/2/2/2/1/2/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_2/1.5_2/2_2]_s$	7.40	329.616	0.0175	0.0175
L	[2/2/2/2/1/2/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/1_2/2_4]_s$	5.65	361.008	0.0123	0.0123
M	[2/2/2/2/1/4/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [0.75_2/2_6]_s$	3.52	423.792	0.0065	0.0065
N	[2/2/2/2/2/2/2/3]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_6/1.5_2]_s$	11.71	282.528	0.0327	0.0327
O	[2/2/2/2/2/2/2/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_6/2_2]_s$	8.56	313.92	0.0213	0.0213
P	[2/2/2/2/2/2/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_4/1.5_2/2_2]_s$	6.44	345.312	0.0145	0.0145
Q	[2/2/2/2/2/3/3/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1_2/1.5_4/2_2]_s$	4.98	376.704	0.0102	0.0102
R	[2/2/2/2/3/1/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1.5_2/0.75_2/2_4]_s$	4.41	392.4	0.0089	0.0089
Z	[2/2/2/2/3/2/4/4]	$[\pm 45^{\circ}_4]_s : [1.5_2/1_2/2_2]_s$	3.93	408.096	0.0075	0.0075

Cuadro 6.11: Soluciones Óptimas encontradas por el AG con el número de placas fijas

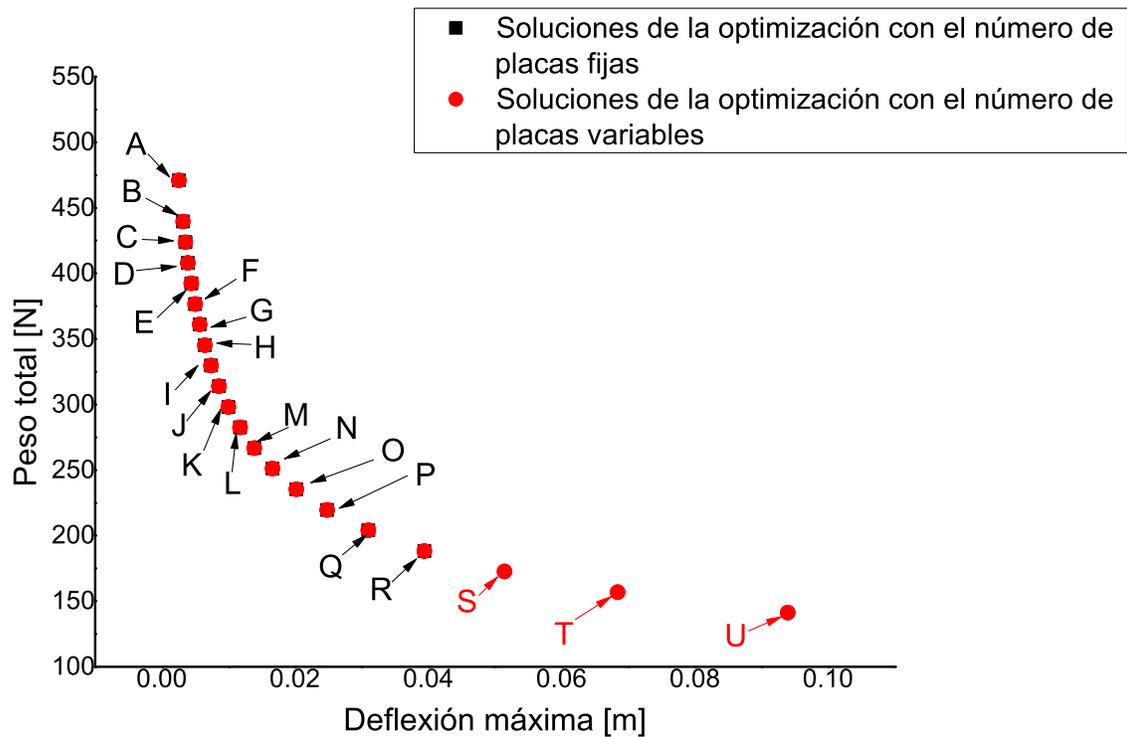


Figura 6.9: Comparación de los resultados de las optimizaciones

Al comparar los resultados de las optimizaciones llevadas a cabo (Fig.6.9) se puede observar dos situaciones:

1. Ambas optimizaciones encuentran las mismas soluciones óptimas exceptuando a los laminados S, T y U.
2. Las soluciones S, T y U no se presentan en la optimización con el número de capas fijas, lo cual es evidente ya que estas soluciones constan de 12 láminas cada una.

Se puede concluir a partir de los resultados encontrados, que llevar a cabo una optimización de laminados con el número de capas variables es de gran ayuda al proceso, pues simultáneamente amplía el número de soluciones y de casos de aplicación de éstas, es decir, los resultados S, T y U son una buena propuesta de diseño, si el problema de aplicación requiriera diseñar un laminado con un peso inferior al presentado por la solución S. Además de lo anterior, si se considera que las láminas empleadas para crear un laminado tienen el mismo costo, todos los laminados encontrados por el AG en el caso del número de placas fijas, costarán lo mismo; en contraste el AG con variación de placas será capaz de encontrar soluciones con un peso y deflexiones mínimas y con un costo menor de fabricación (tomando en cuenta únicamente el costo de las láminas que forman los laminados). Sin embargo, es necesario

aclarar que este último objetivo no fue considerado dentro del proceso de optimización y la observación hecha surge justo después del análisis de resultados. Un planteamiento donde estos tres objetivos se tomen en cuenta es posible de llevar a cabo también por el AG empleado en este trabajo, sin embargo no es parte de este estudio.

## Capítulo 7

# Conclusiones y trabajo futuro

Con base en los resultados encontrados en el desarrollo de este trabajo se pueden generar las siguientes conclusiones:

- Los resultados demuestran que el algoritmo genético empleado puede resolver eficientemente problemas relacionados con el diseño de materiales compuestos laminados.
- El método de los elementos finitos basado en la teoría de Mindlin-Reissner tiene un desempeño adecuado y comparable con la solución exacta utilizada en la literatura, además de los resultados obtenidos en otros trabajos de investigación [38, 39] (en ambos casos el error relativo es menor al 1 %).
- A diferencia de las investigaciones realizadas donde es usado un método de optimización multi-objetivo ponderado [11, 40], el método empleado en esta tesis es capaz de encontrar soluciones óptimas de manera más rápida. Lo anterior se debe a que, en los trabajos mencionados los resultados obtenidos están en función del valor de ponderación dado a las funciones objetivo, lo cual hacía necesario realizar diversas corridas para poder encontrar las soluciones óptimas. Los resultados de la aplicación del algoritmo empleado en esta tesis demuestran que únicamente es necesario realizar una corrida de optimización para encontrar más de una solución óptima, además de que al realizar más de una corrida se encuentran los mismos resultados.
- Es importante señalar que de forma similar a lo que ocurre con el proceso de optimización clásico donde existe una incertidumbre acerca de cuantas iteraciones realizar para dar con el modelo óptimo y si éste es el óptimo global del problema, en los métodos de optimización matemática aplicados a problemas reales no es posible saber si los resultados obtenidos son realmente las soluciones óptimas globales. Como se demostró en este trabajo, la única forma de conocer cuales soluciones, y si las encontradas por este tipo de métodos, son óptimas globales del problema es necesario conocer todo el espacio de solución y analizar cada una de ellas, sin embargo realizar lo anterior para problemas con un espacio de solución muy grande es muchas veces arduo, engorroso y muchas veces intratable.
- Dentro de los procesos de manufactura empleados para fabricar materiales compuestos laminados reforzados con fibras sólo es posible orientar las fibras de cuatro maneras: a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $-45^\circ$  ó  $90^\circ$  ya que orientarlas a ángulos diferentes a estos es complicado. Los resultados encontrados al

desarrollar este trabajo ampliando el número de orientaciones posibles para las fibras en cada lámina buscando con ello encontrar secuencias de apilamiento con orientaciones diferentes a las empleadas comúnmente en la industria con menor deflexión central y menor peso, demostraron que las soluciones óptimas encontradas son aquellas que cuentan únicamente con alguno de los ángulos estandar o con laminados cuyas orientaciones difieren en  $5^\circ$  ó  $10^\circ$  de los ángulos utilizados en la industria, ya que hay una predominante ventaja de los ángulos comúnmente usados sobre los demás, es posible decir que no debe realizarse ninguna ampliación de orientaciones en los casos analizados y sólo se debe trabajar con los ángulos ya antes mencionados. Sin embargo, no es conveniente hacer una generalización de estos resultados a todos los casos de carga que se presentan al utilizar este tipo de materiales, ya que lo aquí expuesto sólo muestra casos particulares de laminados bajo flexión.

Considerando los resultados presentados a lo largo de este texto, se puede afirmar que el trabajo realizado cumplió con su objetivo, sin embargo y gracias al mismo desarrollo de la tesis es posible plantear los siguientes puntos para continuar con un trabajo a futuro:

- Es necesario ampliar el tipo de cargas que se pueden aplicar a los laminados, cargas planares y cortantes.
- Estudiar geometrías diferentes a la estudiada en este trabajo.
- Ampliar el análisis de estructuras más complejas, cascarones.
- Analizar laminados bajo condiciones ambientales (humedad y temperatura) mediante el programa de elementos finitos.
- Estudio a profundidad de la influencia de los parámetros utilizados para llevar acabo la optimiación mediante AG.

# Apéndice A

## Anexo I: Optimización de laminado

Aunque los capítulos anteriores demuestran como el algoritmo genético planteado en esta tesis es capaz de encontrar los elementos que integran el Frente de Pareto Global de los diferentes problemas mencionados, es evidente que por los parámetros utilizados dentro del AG el número de evaluaciones que se llevarían a cabo mediante él superan por mucho las evaluaciones que se realizan al utilizar un método exhaustivo <sup>1</sup>. Si bien, el objetivo de este trabajo es demostrar la utilidad de este tipo de algoritmos de búsqueda en el área del diseño mecánico y en específico en la optimización de materiales compuestos laminados, esta sección demuestra mediante un caso de estudio específico las ventajas del uso de este algoritmo genético con respecto a la búsqueda exhaustiva.

### A.1. Caso de Estudio

Los ejemplos considerados y presentados anteriormente utilizan espacios de solución con un número de elementos no muy grandes (alrededor de 6000 elementos), debido principalmente a que el número de capas utilizadas en el diseño de los laminados y al número de ángulos y espesores considerados. Con base en los parámetros utilizados en el algoritmo genético en cada ejemplo, el número de generaciones en el que tal algoritmo encuentra el Frente de Pareto, varía entre 200 y 400 generaciones, lo cual aunque no puede tomarse como una regla general de convergencia, demuestra que el algoritmo genético es capaz de encontrar las soluciones globales óptimas antes del número límite de generaciones fijado. Sin embargo, considerando el número de individuos escogidos en cada población las evaluaciones realizadas por el algoritmo genético superan por mucho (entre 2000 y 10000 evaluaciones más) las evaluaciones que se realizarían por el método exhaustivo.

Considerando que existen aplicaciones reales donde el número de capas supera el número planteado en este trabajo, tal como en el empleo de estos materiales en el diseño y manufactura de las estructuras de fuselaje del avión Boeing 787 [17], donde se utilizan en algunas zonas 20 capas y en otras de 75 a 100, a continuación se muestra un caso donde se utilizan laminados simétricos balanceados con un número de capas fijas, el número de capas totales empleadas es de 20, considerando las características de este tipo de laminados y los Cuadros A.1 y A.2 donde se muestran la codificación considerada para

---

<sup>1</sup>El más simple de ellos se basa en la evaluación de cada uno de los elementos presentes en el espacio de solución, para obtener el valor de su deflexión y su peso

los ángulos de las capas y el espesor de las mismas respectivamente, el espacio de solución está formado por 248832 elementos.

CO2	
Ángulo	Código
$V^\circ$	0
$0^\circ$	1
$\pm 45^\circ$	2
$\pm 90^\circ$	3

Cuadro A.1: Tabla de Orientaciones

Espesor [mm]	Código
0	0
0.75	1
1	2
1.5	3
2	4

Cuadro A.2: Tabla de Espesores

El material empleado carbon/epoxy T300/5208 y sus propiedades mecánicas se encuentran en el Cuadro A.3. El laminado total se encuentra apoyado en sus cuatro bordes (Fig. A.1) y una carga trnas-versal distribuida sobre su parte superior de  $0.1MPa$ . Los resultados de la optimización se muestran en la siguiente Fig. A.2.

Propiedades	Valores	Propiedades	Valores
$E_1$	132.5 GPa	$X_T$	1515 MPa
$E_2$	10.8 GPa	$X_C$	1697 MPa
$E_3$	10.8 GPa	$Y_T = Z_T$	43.8 MPa
$G_{12} = G_{13}$	5.7 GPa	$Y_C = Z_C$	43.8 MPa
$G_{23}$	3.4 GPa	$R$	67.6 MPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.24	$S = T$	86.9 MPa
$\nu_{23}$	0.49	Espesor de cada placa, $h_i$	0.127 mm

Cuadro A.3: Propiedades Mecánicas de T300/5208 grafito/epoxy

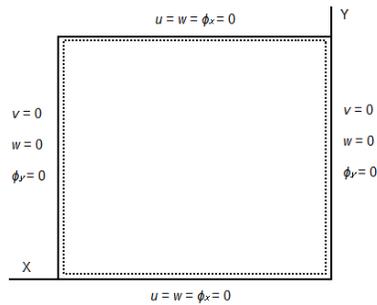


Figura A.1: Condiciones de Frontera

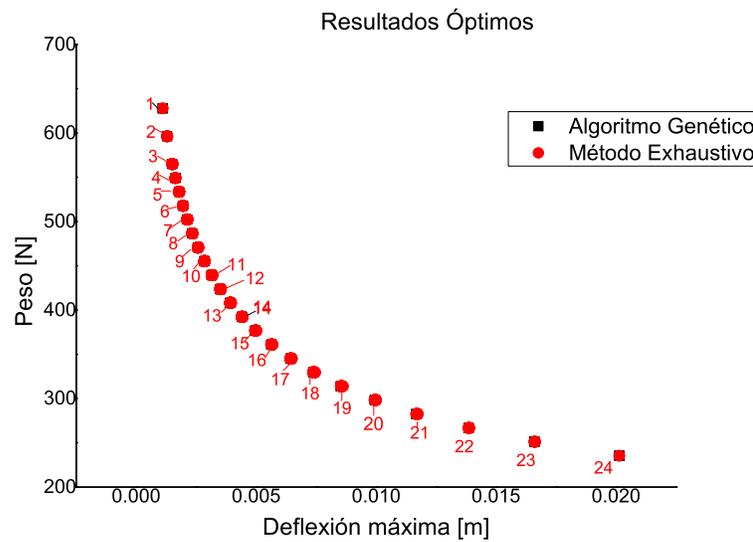


Figura A.2: Comparación de los resultados finales

El número de generaciones necesarias para encontrar el Frente de Pareto fue de 1000 generaciones, por lo tanto el algoritmo realizó 40000 evaluaciones para tal tarea, si comparamos estas evaluaciones con el número de evaluaciones necesarias por el método exhaustivo (248832) podemos notar que el AG realiza sólo el 16% de las evaluaciones totales del método exhaustivo. De esta manera se puede concluir que el AG empleado en este trabajo encuentra el Frente de Pareto global de los problemas en los que fue empleado y reduce el número de evaluaciones necesarias para encontrarlo; además, es posible emplearla como una herramienta útil y poderosa para el diseño de este tipo de materiales con espacios de solución mayores.

# Bibliografía

- [1] AKBULUT, M., AND SONMEZ, F. O. Optimum design of composite laminates for minimum thickness. *Computers and Structures*, 86 (2007), 1974–1982.
- [2] BERTHELOT, J.-M. *Composite Materials. Mechanics Behavior and Structural Analysis*. Hemisphere Publishing Corporation, 1999.
- [3] BHATTI, M. A. *Fundamental Finite Element Analysis and applications. With Mathematica and MATLAB Computations*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [4] CHAWLA, K. *Composite Materials Science and Engineering*. Springer, 1987.
- [5] COELLO, C., PULIDO, G., AND LECHUGA, M. S. Handling multiobjectives with particle swarm optimization. In *IEEE Trans. Evol. Comput.* (Junio 2004), vol. 8.
- [6] COELLO, C. A. C. A survey of constraint handling techniques used with evolutionary algorithms. Tech. rep., Laboratorio de Inform atica Avanzada, Veracruz, Mexico, 1999.
- [7] COSTA, L., FERNANDEZ, L., FIGUEIREDO, I., JÃ<sup>o</sup>DICE, J., REAL, R., AND OLIVEIRA, P. Multiple- and single-objective approaches to laminate optimization with genetic algorithms. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 27 (2004), 55–65.
- [8] COSTA, L. A., OLIVEIRA, P., FIGUEIREDO, I. N., ROSEIRO, L. F., AND LEAL, R. P. Structural optimization of laminated plates with genetic algorithms. pp. 621–627.
- [9] CRAENEN, B. G. W., EIBEN, A. E., AND MARCHIORI, E. *The practical Handbook of Genetic Algorithms: applicattions*, 2 ed., vol. 1. Chapman Hall/CRC, 2001, ch. How to Handle Constraints with Evolutionary Algorithms, pp. 341–361.
- [10] DANIEL, I. M., AND ISHAI, O. *Engineering mechanics of composites materials*. Oxford University Press, 2006.
- [11] DE ALMEIDA, F. S. Otimizacao de estruturas de materiais compostos laminados utilizando algoritmos geneticos. Master’s thesis, 2006.
- [12] DEB, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 186 (2000), 311–338.
- [13] DEB, K. *Multi-Objective Optimization using Evolutionara Algorithms*. Wiley, 2003.

- [14] DEB, K., PRATAP, A., AGARWAL, S., AND MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsgaii. *IEEE Transactions on evolutionary computation* 6, 2 (2002), 182–197.
- [15] FAIDH-ALLAH, M. H., AND KADEM, M. A. M. Optimal design of moderate thick laminated composite plates under static constraints using real coding genetic algorithm. *Journal of Enginnering*, 6 (2011).
- [16] F.S. Fundamental finite element analysis and applications. with mathematica anda matlab computations. Master’s thesis, Addison-Wesley Publishing Company,Inc., 1989.
- [17] GARDINER, G. High performance composites, primary structure repair, November 2011.
- [18] GOLDBERG, D. E. Optimal initial population size for binary-coded genetic algorithms. Tech. rep., University of Alabama, 1985.
- [19] GOLDBERG, D. E. *Genetic Algorithms in Search: Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company,Inc., 1989.
- [20] GOLDBERG, D. E., DEB, K., AND CLARK, J. H. Genetic algorithms, noise, and the sizing of populations. *Complex Systems*, 6 (1992), 333,362.
- [21] GOTSHALL, S., AND RYLANDER, B. Optimal population size and the genetic algorithm. In *On Genetic And Evolutionary Computation Conference* (2000).
- [22] GURDAL, Z., HAFTKA, R. T., AND HAJELA, P. *Design and Optimization of Laminated Composite Materials*. Wiley Interscience, 1999.
- [23] HINTON, M. *Genetic Algorithms in Search: Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company,Inc., 1989.
- [24] HOLLAND, J. H. *Evolutionary GeneticAdaptation in Natural and Artificial Systems*. The MIT Press, 1992.
- [25] HYER, M. W. *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*. Addison-Wesley Publishing Company,Inc., 1989.
- [26] JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Springer, 1975.
- [27] KHANDAN, R., NOROOZI, S., SEWELL, P., VINNEY, J., AND KOOHGILANI, M. Optimum design of fibre orientation in composite laminate plates for out-plane stresses. *Advances in Materials Science and Engineering* (2012).
- [28] KURI-MORALES, A. F., AND GUTIERREZ-GARCÍA, J. Penalty function methods for constrained optimization with genetic algorithms: a statistical analysis. In *C. A. C. Coello, A. de Albornoz, L. E. Sucar and O. C. Battistutti, editors, Proceddings of the 2nd Mexican International Conference on Artificial Intellegence* (Merida, Yucatan, Mexico, 2002), pp. 108–117.
- [29] MAKSIMOVIC, S. Minimum weight design of thin-walled composite structures. *FACTA UNIVERSITATIS Series: Mechanical Engineering* 3, 1 (2005), 17–29.
- [30] MCPHEETERS, B. W. Progressive ply failure analysis for composite structures. In *2009 SAMPE Spring Technical Confernce* (Balimore, Maryland, Mayo 2004).

- [31] MICHALEWICZ, D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [32] MICHALEWICZ, Z. Genetic algorithms, numerical optimization and constraints. In *L. Eshelman, ed., Proceedings of the Sixth International Conference on Genetic Algorithms (Morgan Kaufman, San Mateo, 1995)*, pp. 151–158.
- [33] MUELAS, S., PENA, J. M., ROBLES, V., MUZHETSKAYA, K., DE LATORRE, A., AND DE MIGUEL, P. Optimizing the design of composite panels using an improved genetic algorithm. *EngOpt2008 International Conference on Engineering Optimization* (2008).
- [34] OCHOA, O. O., AND REDDY, J. N. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [35] PELLETIER, J. L., AND VEL, S. S. Multi-objective optimization of fiber reinforced composites laminates for strength, stiffness and minimal mass. *Computers and Structures*, 84 (2006), 2065–2080.
- [36] REDDY, J. N. *Energy Principles and Variational Methods*. CRC PRESS, 1997.
- [37] REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates and shells*. CRC PRESS, 1997.
- [38] REDDY, J. N., AND PANDEYL, A. K. A first-ply failure analysis of composite laminates. *Computers and Structures* 25, 3 (1987), 371–393.
- [39] REDDY, Y. S. N., AND REDDY, J. N. Linear and non-linear failure analysis of composite laminates with transverse shear. *Composite Science and Technology*, 44 (1992), 227–255.
- [40] SOREMENKU, G. A. E. Genetic algorithms for composite laminate design and optimization. Master’s thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 1997.
- [41] SPEARS, W. M., AND ANAND, V. A study of crossover operators in genetic programming. In *Proc. 6th Int. Symp. Methodologies for Intelligent Systems (ISMIS)* (1991), pp. 409–418.
- [42] TSOY, Y. R. The influence of population size and search time limit on genetic algorithm. In *Proceedings of the Seventh Korea-Russia International Symposium on Science and Technology* (2003), pp. 181–187.