



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA PETROLERA Y GAS NATURAL – YACIMIENTOS

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS
APLICANDO REFINAMIENTO LOCAL

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
URIEL CEDILLO TREJO

TUTOR PRINCIPAL
DR. VICTOR H. ARANA ORTÍZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. JUNIO 2014

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Fernando Samaniego Verduzco.
Secretario: Dr. Jorge Alberto Arévalo Villagrán.
Vocal: Dr. Víctor Hugo Arana Ortíz.
1 er. Suplente: Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez.
2 do. Suplente: Dr. José Antonio González Guevara.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, México. Distrito Federal.

Paraíso, Tabasco, México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Víctor Hugo Arana Ortíz.

FIRMA

Agradecimientos.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento al Grupo de Simulación Numérica de Yacimientos de la facultad de ingeniería de la UNAM, por las facilidades otorgadas en la realización de este trabajo.

ÍNDICE

Resumen.	viii
Capítulo I. Introducción.	1
Capítulo II. Formulación matemática del problema.	6
II.1. Ecuación de Flujo en medios porosos.	6
II.2. Condiciones iniciales y de frontera.	8
II.2.1. Condiciones Iniciales.....	8
II.2.2. Condiciones de Frontera.....	9
II.3. Relaciones adicionales.....	9
Capítulo III. Formulación numérica del problema.	11
III.1. Ecuaciones de flujo en diferencias finitas.	11
III.2. Tratamiento del término fuente.	14
Capítulo IV. Refinamiento local.	17
IV.1. Clasificación del refinamiento.	17
IV.2. Esquema de numeración.	21
IV.3. Conexiones.	22
IV.4. Conexiones especiales.....	25
IV.5. Complemento de Schur.	30
IV.6. Construcción de la Malla localmente refinada.	33
Capítulo V. Validación y casos de aplicación.	37
V.1. Validación.....	37
V.2. Casos de aplicación.	42
Capítulo VI. Conclusiones y recomendaciones.	83
VI.1. Conclusiones.	83
VI.2. Recomendaciones.	84
Apéndice A. Desarrollo matemático de las ecuaciones flujo.	86

Apéndice B. Desarrollo numérico de las ecuaciones de flujo.....	90
Apéndice C. Datos de entrada en los modelos de simulación.	96
Apéndice D. Resultados del caso II.	104
Referencias.	106

Lista de figuras.

III.1	Malla de simulación para un yacimiento.	12
IV.1	Malla de simulación base.	19
IV.2	Malla fina.	19
IV.3	Malla refinada convencionalmente.	19
IV.4	Malla refinada localmente.	19
IV.5	Malla dinámica refinada localmente.	20
IV.6	Refinamiento de la malla de acuerdo al tipo de coordenadas	21
IV.7	Esquema de ordenamiento natural.	22
IV.8	Esquema de ordenamiento natural con malla refinada.	22
IV.9	Esquema de la matriz resultante en una malla sin refinamiento.	23
IV.10	Esquema de la matriz resultante en una malla con refinamiento local.	24
IV.11	Refinamiento local de 3x3.	26
IV.12	Refinamiento local de 3x3. (modificado de la figura IV.11)	26
IV.13	Refinamiento local de 5x5. (modificado de la figura IV.11)	28
IV.14	Condiciones para la construcción de una malla localmente refinada.	35
IV.14	Condiciones para la construcción de una malla localmente refinada (continuación).	36
V.1	Validación 1 del simulador. Gasto de Aceite.	38
V.2	Validación 1 del simulador. Presión de bloque.	38
V.3	Validación 1 del simulador. Presión de fondo fluyendo.	38
V.4	Validación 2 del simulador. Malla fina.	39
V.5	Validación 2 del simulador. Malla refinada.	40
V.6	Validación 2 del simulador. Gasto de Aceite.	41
V.7	Validación 2 del simulador. Presión de bloque.	41
V.8	Validación 2 del simulador. Presión de fondo fluyendo.	41
V.9	Caso I. Vista de planta de la malla base.	44
V.10	Caso I. Sección A-A' de la malla base.	44
V.11	Caso I. Vista de planta de la malla fina.	45
V.12	Caso I. Sección B-B' de la malla fina.	45
V.13	Caso I. Vista de planta de la malla refinada R1.	46
V.14	Caso I. Sección C-C' de la malla refinada R1.	46
V.15	Caso I. Vista de planta de la malla refinada R2.	47
V.16	Caso I. Sección D-D' de la malla refinada R2.	47
V.17	Caso I. Vista de planta de la malla refinada R3.	48
V.18	Caso I. Sección E-E' de la malla refinada R3.	48
V.19	Caso I. Perfil de saturación.	49

V.19	Caso I. Perfil de saturación. (continuación)	50
V.20	Caso I. Presión media de yacimiento.	50
V.21	Caso I. Gasto de aceite.	50
V.22	Caso I. Gasto de agua.	51
V.23	Caso I. Flujo fraccional de agua.	51
V.24	Caso I. Presión de bloque.	51
V.25	Caso I. Presión de fondo fluyendo.	51
V.26	Caso I. Distribución de presión para el modelo burdo.	52
V.27	Caso I. Distribución de saturación para el modelo burdo.	53
V.28	Caso I. Distribución de presión para el modelo fino.	54
V.29	Caso I. Distribución de saturación para el modelo fino.	55
V.30	Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado R1.	56
V.31	Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado R1.	57
V.32	Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado R2.	58
V.33	Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado R2.	59
V.34	Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado R3.	60
V.35	Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado R3.	61
V.36	Caso I. Tiempo de CPU total.	62
V.37	Caso I. Número de iteraciones por paso de tiempo.	62
V.38	Caso I. Tiempo de CPU por paso de tiempo.	62
V.39	Caso I. Tiempo de CPU acumulado.	62
V.40	Caso II. Vista de planta de la malla base.	67
V.41	Caso II. Sección A-A' de la malla base.	67
V.42	Caso II. Vista de planta de la malla fina.	68
V.43	Caso II. Sección B-B' de la malla fina.	68
V.44	Caso II. Vista de planta de la malla refinada.	69
V.45	Caso II. Sección C-C' de la malla refinada.	69
V.46	Caso II. Perfil de saturación.	71
V.47	Caso II. Presión media de yacimiento.	71
V.48	Caso II. Gasto de aceite.	71
V.49	Caso II. Gasto de agua.	72
V.50	Caso II. Flujo fraccional de agua.	72
V.51	Caso II. Presión de bloque.	72
V.52	Caso II. Presión de fondo fluyendo.	73
V.53	Caso II. Flujo fraccional de agua en las conexiones del pozo 1.	73
V.54	Caso I. Distribución de presión para el modelo burdo.	74
V.55	Caso I. Distribución de saturación para el modelo burdo.	75
V.56	Caso I. Distribución de presión para el modelo fino.	76
V.57	Caso I. Distribución de saturación para el modelo fino.	77
V.58	Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado.	78
V.59	Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado.	79

V.60	Caso II. Tiempo de CPU total.	80
V.61	Caso II. Número de iteraciones por paso de tiempo.	80
V.62	Caso II. Tiempo de CPU por paso de tiempo.	80
V.63	Caso II. Tiempo de CPU acumulado.	80
A.1	Volumen de control.	86
D.1	Caso II. Gasto de aceite.	104
D.2	Caso II. Gasto de agua.	104
D.3	Caso II. Flujo fraccional de agua.	105
D.4	Caso II. Presión de bloque.	105
D.5	Caso II. Presión de fondo fluyendo.	105

Lista de tablas.

VI.1	Método de cálculo de las variables en los pseudobloques.	30
C.1	V1 Datos del yacimiento.	96
C.2	V1 Geometría de la malla.	96
C.3	V1 Datos de pozos.	96
C.4	V1 Permeabilidad relativa.	97
C.5	V1 Presión capilar.	97
C.6	V2 Datos del yacimiento.	97
C.7	V2 Geometría de la malla fina.	97
C.8	V2 Geometría de la malla base.	97
C.9	V2 Geometría del refinamiento.	97
C.10	V2 Datos de pozos en la malla fina.	97
C.11	V2 Datos de pozos en la malla refinada.	98
C.12	V2 Permeabilidad relativa.	98
C.13	V2 Presión capilar.	98
C.14	CI Datos del yacimiento.	98
C.15	CI Geometría de la malla base.	98
C.16	CI Geometría de la malla fina.	98
C.17	CI Geometría del refinamiento R1.	98
C.18	CI Geometría del refinamiento R2.	99
C.19	CI Geometría del refinamiento R3.	99
C.20	CI Datos de pozos en la malla base.	99
C.21	CI Datos de pozos en la malla fina.	99
C.22	CI Datos de pozos en la malla refinada R1.	99
C.23	CI Datos de pozos en la malla refinada R2.	100
C.24	CI Datos de pozos en la malla refinada R3.	100
C.25	CII Datos del yacimiento.	100
C.26	CII Geometría de la malla base.	101
C.27	CII Geometría de la malla fina.	101
C.28	CII Geometría del refinamiento.	101
C.29	CII Datos de pozos en la malla base.	101
C.30	CII Datos de pozos en la malla fina.	101
C.31	CII Datos de pozos en la malla refinada.	102
C.32	PVT del aceite.	103
C.33	PVT del agua.	103
C.34	Permeabilidad relativa.	103
C.35	Presión capilar.	103

Resumen.

Un simulador numérico de yacimientos es una herramienta utilizada en la ingeniería de yacimientos para generar alternativas de explotación y, por lo tanto, para optimizar la explotación de los yacimientos. Para generar modelos de simulación confiables y prácticos es necesario considerar dos premisas principales: la granularidad en la discretización del dominio y la capacidad del equipo de cómputo.

En la medida que se requiere simular problemas más grandes y más complejos, se hace necesario refinar algunas zonas del dominio para tener modelos más representativos, que proporcionen pronósticos prácticos y confiables, acorde a la realidad. Cuando el refinamiento se hace en un simulador convencional, se generan zonas refinadas innecesarias. Este problema se puede evitar empleando técnicas de refinamiento local.

Las técnicas de refinamiento local consisten en obtener una malla refinada en el área de interés, de tal forma que se logra la resolución deseada en el área de interés sin incrementar sustancialmente la demanda de recursos computacionales y el tiempo de simulación.

El objetivo de esta tesis es aplicar una técnica de refinamiento local cartesiano y estático a un simulador de aceite negro totalmente implícito, en tres dimensiones y dos fases, el cual permitirá una mejor representación del modelo en la zona cercana a los pozos.

Los resultados numéricos obtenidos fueron comparados con un simulador numérico convencional para validar la aplicación y programación, tanto de las ecuaciones de flujo, como la técnica de refinamiento.

Se muestra que la técnica de refinamiento local aplicada es capaz de reproducir el comportamiento de una malla fina sin incrementar de manera sustancial la demanda de recursos y tiempo computacionales. Sin embargo, los resultados obtenidos también dependen de la forma en que el refinamiento local sea generado.

Capítulo I. Introducción.

La simulación es una herramienta usada en todas las áreas de la ingeniería y de la ciencia para representar fenómenos o procesos a través de modelos físicos o matemáticos. Los primeros son aquellos en que a una escala apropiada se construyen para estudiar algún fenómeno en particular; sin embargo, no siempre es posible realizar modelos físicos, ya sea porque son muy costosos, o porque la complejidad del fenómeno no lo permite. En tales casos se recurre a los modelos matemáticos. Los modelos matemáticos son representaciones simplificadas del fenómeno mediante ecuaciones que reproducen su comportamiento bajo diferentes condiciones.

En la industria petrolera, y más específico en el área de ingeniería de yacimientos, el flujo de fluidos a través del medio poroso se representa mediante modelos, por ejemplo, usando un simulador numérico de yacimientos.

La simulación numérica de yacimientos de hidrocarburos combina la física, las matemáticas y la ingeniería de yacimientos, para desarrollar herramientas que sean capaces de pronosticar el comportamiento de los yacimientos bajo diferentes esquemas de explotación.

La necesidad de realizar pronósticos del comportamiento del yacimiento bajo diferentes esquemas posibles de producción, radica en el hecho de que los proyectos de desarrollo de los campos petroleros requieren grandes inversiones de capital. La simulación numérica de yacimientos permite plantear diferentes esquemas de producción, realizar la evaluación económica de cada escenario, y por lo tanto, optimizar la explotación de los yacimientos.

Mattax y Dalton (1990) mencionan que la simulación de yacimientos es la única forma de describir cuantitativamente el flujo multifásico en un yacimiento heterogéneo, donde su producción se determina no solamente por las propiedades del yacimiento, sino también por la demanda del mercado, las estrategias de inversión y las políticas gubernamentales.

Cuando se realiza la simulación de un yacimiento, existen fenómenos o zonas en donde se requiere mayor detalle en la solución, por ejemplo, fenómenos de condensación retrograda, avances del frente de inyección, la zona de contactos de fluidos, zonas de fallas o acuíferos, la vecindad del pozo, entre otros. Por esta razón es importante contar con un modelo o malla de simulación lo suficientemente fina como para proporcionar resultados aproximados a la realidad, pero sin caer en una demanda excesiva de recursos computacionales y de tiempo de simulación, ya que esto podría limitar la cantidad de casos evaluados.

Para mejorar la aproximación de la solución se puede recurrir a mallas finas, donde el tamaño de la celda es lo suficientemente pequeño como para obtener la aproximación deseada. Sin embargo, generar éste tipo de mallas puede ser impráctico, debido a las capacidades y tiempo de cómputo que se requieren.

Los avances tecnológicos han permitido el desarrollo de computadoras más poderosas, con las cuales se han podido realizar modelos con un mayor número de celdas y obtener resultados en un tiempo menor. A su vez, técnicas nuevas de solución implementadas en los simuladores, han permitido resolver los problemas de mayores dimensiones y con mejores aproximaciones. Sin embargo, generalmente se debe tomar la decisión entre tener resultados prácticos empleando el menor tiempo posible y tener resultados más realistas mediante mallas de simulación más finas.

Para incrementar la aproximación de la solución en las áreas de interés se han desarrollado técnicas de refinamiento. El refinamiento convencional se realiza en el área de interés, extendiendo las líneas de refinamiento hasta las fronteras externas de la malla de simulación. Éste método de refinamiento resulta ineficiente, ya que se obtiene una malla fina en áreas alejadas de la zona de interés, donde los cambios de presión y

saturaciones de fluidos son moderados y por lo tanto, no requieren de una malla fina **(Nacul, 1991)**.

Las técnicas de refinamiento local consisten en obtener una malla refinada sólo en el área de interés, de tal forma que se obtenga la resolución deseada en esta área, sin incrementar sustancialmente la demanda de recursos computacionales y el tiempo de simulación **(Nacul, 1991)**.

Una de las primeras aplicaciones exitosas del refinamiento local la realizó **Rosenberg (1982)**, quien desarrolló una técnica de refinamiento multinivel (regiones refinadas que pueden contener refinamiento adicional) y aplicó la técnica en un estudio de desplazamiento con una relación de movilidad unitaria, en un patrón repetido de cinco pozos. Concluyó que el uso de regiones localmente refinadas podría mejorar la aproximación de la solución con un menor número de celdas y por lo tanto un menor costo computacional.

Heinemann (1983) propuso la aplicación del refinamiento local dinámico en un simulador de yacimientos de aplicaciones múltiples. Concluyó que el uso del refinamiento local dinámico permite una descripción más aproximada de los cambios en tiempo y en espacio de la presión y saturación que una malla estática, con el mismo número de bloques.

Quandalle y Besset (1983) muestran el concepto de la malla localmente refinada e introducen un procedimiento de paso de tiempo múltiple, el cual selecciona pasos de tiempo pequeños para la malla refinada y pasos de tiempo más grandes para la malla burda, con la finalidad de evitar el uso de pasos tiempo cortos en la malla burda. Concluyen que su modelo ofrece flexibilidad en el diseño de la malla y que los resultados obtenidos con el modelo refinado son muy aproximados a los obtenidos con un modelo fino, pero sin incrementar sustancialmente el tiempo de cómputo.

Forsyth y Sammon (1985) presentaron varios ejemplos en los que mostraron el efecto del refinamiento de la malla alrededor del pozo. Mostraron que empleando técnicas de

refinamiento local se puede obtener una mejora significativa en los cálculos de las relaciones gas-aceite y agua-aceite, en comparación con los resultados obtenidos por una malla burda.

Pedroza y Azis (1986) presentaron una técnica de refinamiento híbrido, la cual utiliza mallas curvilíneas alrededor del pozo, contenidas en una malla rectangular. Compararon el comportamiento de las mallas híbridas contra modelos de malla burda usando modelos de inyección de agua y problemas de conificación, observando que agregar una malla cilíndrica alrededor del pozo mejora la aproximación de la relación agua-aceite, especialmente en problemas de conificación.

Wasserman (1987) implementó una técnica de refinamiento local en un simulador de aceite negro, en tres dimensiones y tres fases, e introdujo la idea de las técnicas de Descomposición de Dominio, aplicando técnicas de complemento de Schur. Empleó pseudobloques alrededor de la malla refinada para interpolar la presión y las funciones de presión.

Nacul (1991) aplicó las técnicas de refinamiento local cartesianas e híbridas en un simulador de aceite negro, en tres dimensiones y tres fases. Desarrolló una técnica de descomposición de dominio a nivel del yacimiento, en la cual, en lugar de desacoplar el sistema de ecuaciones, se desacopla físicamente el yacimiento dividiéndolo en pequeñas regiones y resolviendo cada problema de forma separada.

Recientemente **Sammon (2003)** introdujo la técnica de amalgamamiento, o agrupamiento, el cual consiste en el proceso inverso al refinamiento, donde se agrupan celdas en las zonas de menor actividad con finalidad de reducir los requerimientos de recursos computacionales. De esta forma, se introdujo el concepto de mallado dinámico, donde se refina/desrefina y agrupa/desagrupa la malla de simulación según el requerimiento dinámico de la simulación.

El objetivo de esta tesis es aplicar una técnica de refinamiento local cartesiano estático, a un simulador de aceite negro totalmente implícito, en tres dimensiones y dos fases, el cual

permitirá una representación mejor del modelo en la zona cercana a los pozos, sin incrementar sustancialmente la demanda de recursos computacionales.

Capítulo II. Formulación matemática del problema.

La simulación de yacimientos combina la física, matemáticas e ingeniería para desarrollar modelos que puedan representar el flujo de fluidos en el medio poroso. Los problemas de flujo a través de medios porosos se resuelven combinando varios de los principios o leyes físicas siguientes: 1) Conservación de masa. 2) Conservación de energía. 3) La Ley de Darcy. 4) Ecuación de estado. La combinación de estas leyes resulta en lo que se conoce como ecuación de difusividad, la cual, es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, y debe resolverse, en la mayoría de los casos con esquemas numéricos.

Para definir completamente el problema, es necesario especificar algunas condiciones en la frontera del yacimiento, así como sus condiciones iniciales.

II.1. Ecuación de Flujo en medios porosos.

La ecuación de flujo de fluidos en medios porosos, se obtiene de la combinación de la ecuación de conservación de masa, la ley de Darcy, una ecuación de estado y la conservación de energía (**Aziz y Settari, 1979**). Sin embargo, el flujo de fluidos en un yacimiento generalmente se considera a temperatura constante, por lo que la ecuación de conservación de energía, frecuentemente no es considerada.

La ley de conservación de masa establece que el flujo neto de masa del fluido en un volumen de control más el flujo neto de masa por inyección al volumen de control es igual al flujo neto de masa por acumulación del fluido en el volumen de control (**Nacul, 1991**), es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{flujo neto de masa} \\ \text{del fluido} \\ \text{en el volumen} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo neto de masa} \\ \text{por inyección} \\ \text{al volumen de control} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{flujo neto de masa} \\ \text{por acumulación del fluido} \\ \text{en el volumen de control} \end{array} \right\}. \quad (\text{II.1})$$

En forma general para cualquier sistema de coordenadas, la ecuación **II.1** se puede expresar como

$$-\nabla \cdot (\rho_p u_p) + \rho_p \hat{q}_p = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_p S_p). \quad (\text{II.2})$$

donde el subíndice p es la fase del fluido, aceite (o), gas (g) o agua (w), \hat{q}_p es el gasto volumétrico de fluido @c.y. por unidad de volumen de roca y el operador ∇ depende de las coordenadas del sistema que se emplee. Para el desarrollo de éste trabajo, solo se considerará el flujo bifásico de las fases aceite y agua.

Incorporando la ley de Darcy en la ecuación **II.2**, y aplicándola a cada una de las fases se obtienen las ecuaciones siguientes:

Para la fase de aceite,

$$\nabla \cdot \left[b_o \frac{k k_{ro}}{\mu} (\nabla p_o + \gamma_o \nabla D) \right] + b_o \hat{q}_o = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_o S_o); \quad (\text{II.3.a})$$

y, para la fase de agua,

$$\nabla \cdot \left[b_w \frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w + \gamma_w \nabla D) \right] + b_w \hat{q}_w = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_w S_w). \quad (\text{II.3.b})$$

El primer término del lado izquierdo de las ecuaciones **II.3** se conoce como término de flujo, mientras que el segundo término se le conoce como término fuente o sumidero; el término del lado derecho se conoce como término de acumulación.

Las ecuaciones **II.3** describen el flujo de fluidos en medios porosos; generan un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que debe resolverse.

Un desarrollo más completo de estas ecuaciones se presenta en el **Apéndice A**.

II.2. Condiciones iniciales y de frontera.

Para que el problema de flujo de fluidos en medios porosos esté descrito totalmente, además de las ecuaciones **II.3**, es necesario establecer las condiciones iniciales y de frontera para el dominio del yacimiento. Las primeras describen el estado inicial del yacimiento, mientras las segundas describen la forma en que el medio interactúa con sus alrededores.

II.2.1. Condiciones Iniciales.

Las condiciones iniciales describen el estado inicial de las variables primarias (incógnitas), generalmente presión y saturación en problemas de flujo multifásico, del sistema de ecuaciones (**Ertekin et al., 2001**). En simulación de yacimientos, al proceso de definir las condiciones iniciales del yacimiento se le conoce como inicialización del simulador, y debe realizarse con la mayor exactitud posible debido a que una mala inicialización puede provocar que se observen flujos de fluidos, aun cuando no se tengan pozos activos en el yacimiento.

En el desarrollo de éste trabajo, la inicialización se lleva a cabo bajo la consideración de que el yacimiento se encuentra en equilibrio al inicio de la simulación, es decir que la velocidad de cada una de las fases dentro del yacimiento es cero. De esta forma, los valores de presión, saturación y las propiedades de cada una de las fases, al tiempo inicial, es determinado mediante un equilibrio vertical.

II.2.2. Condiciones de Frontera.

Las condiciones de frontera describen el comportamiento del medio con sus alrededores. En la simulación de yacimientos comúnmente se emplean dos tipos de condición de frontera, las de tipo Dirichlet y las de tipo Neumann. Además, es posible tener dos tipos de frontera: los pozos, también llamadas fronteras internas y los límites del yacimiento o fronteras externas.

Las condiciones de tipo Dirichlet especifican el valor de las incógnitas en las fronteras. En la simulación de yacimientos éste tipo de condición de frontera especifica la presión en las fronteras del yacimiento o en el pozo.

$$p_p(x, y, z, t) = f(p_p). \quad (\text{II.4})$$

Las condiciones de tipo Neumann especifican el flujo en las fronteras. En las aplicaciones usadas en la simulación de yacimientos, es común definir cero flujo en las fronteras externas del yacimiento.

$$(\nabla p_p + \gamma_p \nabla D) = 0. \quad (\text{II.5})$$

En el caso donde existe una frontera interna, como es el caso del flujo hacia un pozo, se representa por el término conocido fuente o sumidero, el cual relaciona la presión de fondo fluyendo del pozo con la presión del bloque, **Peaceman (1977)**. El tratamiento del pozo se discute en el **capítulo III**.

II.3. Relaciones adicionales.

En las ecuaciones **II.3** se tiene como incógnitas a p_{or} , p_{wr} , S_{or} y S_{wr} y se tiene solo dos ecuaciones, por lo que es necesario definir dos relaciones más para poder resolver el sistema de ecuaciones planteado.

Dado que se tienen dos fases, aceite y agua, la saturación de fluidos presenta la restricción siguiente.

$$S_o + S_w = 1. \quad (\text{II.6})$$

La relación entre la presión de las fases se establece por medio de la presión capilar.

$$p_{cwo} = p_o - p_w; \quad (\text{II.7})$$

donde se supone que la presión capilar se conoce mediante una función de la saturación.

$$p_{cwo} = p_{cwo}(S_w). \quad (\text{II.8})$$

Con estas dos ecuaciones adicionales se tienen cuatro ecuaciones: dos de flujo **(II.3.a – II.3.b)**, una correspondiente a la restricción de saturaciones **(II.6)** y una para la presión capilar **(II.7)**; y cuatro incógnitas: p_o , p_w , S_o y S_w , con las cuales el problema en cuestión queda bien definido.

Capítulo III. Formulación numérica del problema.

La ecuación de difusividad es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden. En su forma más general es altamente no lineal y por lo tanto, para su solución se debe recurrir a métodos numéricos. La solución numérica de la ecuación de difusividad comprende la discretización, en espacio, del dominio físico, es decir, el yacimiento debe dividirse en un conjunto discreto de celdas contiguas, en las cuales se realizará un balance de materia implícito. El tiempo también se discretiza en una serie de pasos de tiempo, en donde se determina la solución, lo que da lugar a un proceso iterativo. Generalmente, se emplea el método de Newton-Rapshon para resolver el proceso iterativo.

III.1. Ecuaciones de flujo en diferencias finitas.

El problema presentado por las ecuaciones **II.3**, es un problema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, con condiciones inicial y de frontera, las cuales no pueden resolverse analíticamente; por esta razón se recurre a métodos numéricos para obtener una aproximación para su solución. Un método numérico muy popular es el de diferencias finitas (**Ertekin et al., 2001**).

El método de diferencias finitas, consiste en obtener una aproximación para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales mediante una expansión truncada en serie Taylor para las incógnitas, considerando un conjunto de celdas llamado malla de simulación, la cual cubre toda la extensión del yacimiento, **figura III.1**. La implementación del método resulta en un sistema de ecuaciones algebraicas llamadas ecuaciones en diferencias finitas, las cuales cambian el carácter continuo de las ecuaciones diferenciales por un

carácter discreto; así, las soluciones obtenidas por las ecuaciones discretas corresponden a puntos discretos dentro del dominio del yacimiento (**Ertekin et al., 2001**).

La discretización de las ecuaciones **II.3** se realiza usando diferencias centrales en espacio, mientras que en tiempo se aplican diferencias regresivas, dividiendo el tiempo de simulación en intervalos consecutivos.

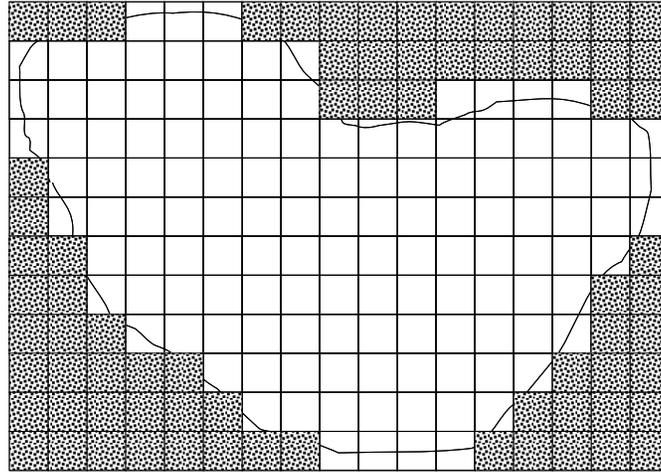


Figura III.1. Malla de simulación para un yacimiento.

La aplicación del método de diferencias finitas a las ecuaciones de flujo multifásico, deriva en las expresiones siguientes, para la fase de aceite,

$$\Delta[T_o(\Delta p_o + \gamma_o \Delta D)]_{ijk}^{n+1} + [b_o q_o]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_o S_o]_{ijk}, \quad (\text{III.1.a})$$

y para la fase de agua,

$$\Delta[T_w(\Delta p_w + \gamma_w \Delta D)]_{ijk}^{n+1} + [b_w q_w]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w], \quad (\text{III.1.b})$$

donde se ha introducido el concepto de transmisibilidad, definido por la ecuación **III.2**

$$T_p = \alpha \left(\frac{b_p k_{rp}}{\mu_p} \right), \quad (\text{III.2})$$

donde las ecuaciones **III.1** se han escrito en términos del operador en diferencias finitas, con $p = o, w$ y α depende del sistema de coordenadas elegido.

Nótese que en las ecuaciones **III.1**, q_p , es el gasto volumétrico del fluido @ c.y.

Un desarrollo más detallado de la discretización de las ecuaciones de flujo se presenta al final de éste trabajo en el **Apéndice B**.

La evaluación de las transmisibilidades de cada fase depende de las propiedades de las fases. Para su evaluación se aplica el concepto corriente arriba (**Coats, 1980**), el cual indica que las propiedades involucradas en éste término se evalúan con las propiedades del bloque que tiene mayor potencial.

Las ecuaciones **II.6 y II.7** pueden acoplarse en las ecuaciones **III.1** para reducir el número de incógnitas en el sistema de ecuaciones.

De la ecuación **II.6**, la saturación de aceite se expresa:

$$S_o = 1 - S_w. \quad (\text{III.3})$$

De la relación de presión capilar, la presión del agua se expresa:

$$P_w = P_o - P_{cwo}. \quad (\text{III.4})$$

La porosidad en el nivel de tiempo $n+1$ se puede escribir, en función de la compresibilidad de la roca, como:

$$\phi^{n+1} = \phi^n [1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n)]. \quad (\text{III.5})$$

Incorporando las ecuaciones **III.3 a III.5** en las ecuaciones **III.1**, se tiene, para la fase aceite:

$$\Delta [T_o (\Delta p_o + \gamma_o \Delta D)]_{ijk}^{n+1} + [b_o q_o]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_o (1 - S_w)]_{ijk}; \quad (\text{III.6.a})$$

y para la fase de agua,

$$\Delta [T_w (\Delta p_w - \Delta p_{cwo} + \gamma_w \Delta D)]_{ijk}^{n+1} + [b_w q_w]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]. \quad (\text{III.6.b})$$

El sistema de ecuaciones reducido, ahora presenta un conjunto de dos ecuaciones (**III.6a** – **III.6b**), con el mismo número de incógnitas (p_o y S_w) para cada celda del dominio.

III.2. Tratamiento del término fuente.

En la simulación numérica de yacimientos, los pozos se representan por lo que se conoce como término fuente o sumidero. Éste término relaciona la presión de fondo fluyendo del pozo con la presión en el bloque determinada por el simulador.

Cuando se modela el comportamiento de un yacimiento por métodos numéricos, generalmente las dimensiones de cualquier bloque que contiene un pozo son mucho mayores que las dimensiones del radio del pozo, por lo que la presión calculada para el bloque del pozo es muy diferente a la presión de fondo fluyendo.

Peaceman (1978), basado en el trabajo previo de Schwabe y Brand, observó que la presión de fondo fluyendo puede relacionarse con la presión del bloque que contiene al

pozo, tomando en cuenta las características geométricas de dicho bloque. La ecuación **III.7** es el modelo de pozo propuesto.

$$q_{p,ijk} = WI \frac{k_{r,p}}{\mu_p} (p_{b,p,ijk} - p_{wf,ijk}), \quad (\text{III.7})$$

donde:

El subíndice p , representa cada una de las fases, aceite y agua (o, w).

$k_{r,p}$, representa la permeabilidad relativa de la fase.

μ_p , representa la viscosidad de la fase.

$p_{b,p,ijk}$, representa la presión del bloque ijk que contiene al pozo.

$p_{wf,ijk}$, representa la presión de fondo fluyendo del pozo en la celda ijk .

$q_{p,ijk}$, representa el gasto de la fase p @ c.y. en el pozo.

WI , es el índice de productividad del pozo.

El índice de productividad, WI , está definido por la ecuación **III.8**.

$$WI = \frac{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z}{\ln\left(\frac{r_o}{r_w}\right)}. \quad (\text{III.8})$$

En la ecuación **III.8**, r_o , es el radio equivalente en el que la presión para flujo estacionario hacia el pozo es igual a la presión calculada numéricamente para el bloque del pozo. El radio equivalente se determina de acuerdo a la ecuación **III.9.a**, para el caso de yacimientos isotrópicos, y de acuerdo a la ecuación **III.9.b**, para el caso de yacimientos anisotrópicos.

r_o , para yacimientos isotrópicos:

$$r_o = 0.14(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}}; \quad (\text{III.9.a})$$

r_o , para yacimientos anisotrópicos:

$$r_o = 0.28 \frac{\left[\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta x^2 + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{\frac{1}{2}} \Delta y^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{\frac{1}{4}}}. \quad (\text{III.9.b})$$

Quando se especifica el gasto del pozo, la presión de fondo fluyendo se calcula a partir de la ecuación **III.7**:

$$P_{wf,ijk} = P_{b,p,ijk} - \frac{q_{p,ijk} \mu_p}{k_{r,p} WI}. \quad (\text{III.10})$$

Capítulo IV. Refinamiento local.

Cuando se realiza la simulación del comportamiento de un yacimiento, existen áreas donde se desea tener la mejor aproximación posible para las incógnitas a resolver, como por ejemplo, las áreas cercanas incluyendo los pozos, la zona de contactos de fluidos o zonas a dispararse. Se conoce que la aproximación de la solución depende, dentro de otros factores, del tamaño de la celda de la malla de simulación; sin embargo, el empleo de mallas finas conlleva un incremento en los requerimientos computacionales como de tiempo de simulación. Una forma práctica de evitar estos incrementos de forma importante es el empleo de técnicas de refinamiento local.

En éste capítulo se presenta una explicación breve de las técnicas de refinamiento y, la forma en que se acoplan a un simulador desarrollado para éste propósito.

IV.1. Clasificación del refinamiento.

Cuando se efectúa la simulación de un yacimiento es necesario discretizarlo, esto es, dividirlo en varios bloques para generar la malla de simulación sobre la cual se va a llevar a cabo ésta simulación, **figura IV.1**. A esta malla se le conoce como malla base o malla burda. Una vez que se ha definido la malla base, es posible hacer subdivisiones en los bloques del área de interés; es decir, se puede refinar la malla de simulación.

Las técnicas de refinamiento se pueden clasificar de acuerdo a:

- La extensión del refinamiento.
- Variación del refinamiento en el tiempo
- Sistema de coordenadas.
- Dirección de refinamiento.

Por extensión del refinamiento se debe entender cuántos bloques, de la totalidad en la malla de simulación, se han subdividido o refinado. Así, una malla fina se obtiene cuando la subdivisión de los bloques se aplica a la malla completa, **figura IV.2**. Se llama refinamiento convencional cuando se aplica a los bloques del área de interés, extendiendo las líneas de refinamiento hasta las fronteras externas de la malla de simulación, **figura IV.3**. En el caso del refinamiento local, el refinamiento se aplica exclusivamente a los bloques del área de interés, de forma similar al refinamiento convencional, pero a diferencia de éste último, las líneas de refinamiento quedan contenidas en el área de interés, **figura IV.4**.

En el caso de los dos primeros tipos de refinamiento, los requerimientos computacionales se incrementan de forma importante, ya que, se obtienen bloques refinados en áreas donde no se requiere la misma aproximación como en el área de interés. Sin embargo, al aplicar la técnica de refinamiento local, el incremento de los requerimientos no se ve afectado de forma importante, debido a que se refina solo el área de interés.

Cuando la cantidad y la posición de los bloques refinados en la malla de simulación no presentan cambios con respecto al cambio del tiempo, el refinamiento se conoce como estático; si por el contrario, se presentan cambios, entonces el refinamiento se llama dinámico.

Un refinamiento estático es útil en problemas de conificación, en zonas cercanas a los pozos, fallas, etc., mientras que el refinamiento dinámico puede ser útil para el monitoreo del frente de los fluidos de inyección, o zonas donde las fronteras del yacimiento están en movimiento, por ejemplo, alrededor de los contactos. La **figura IV.5**, muestra un ejemplo de una malla dinámica localmente refinada.

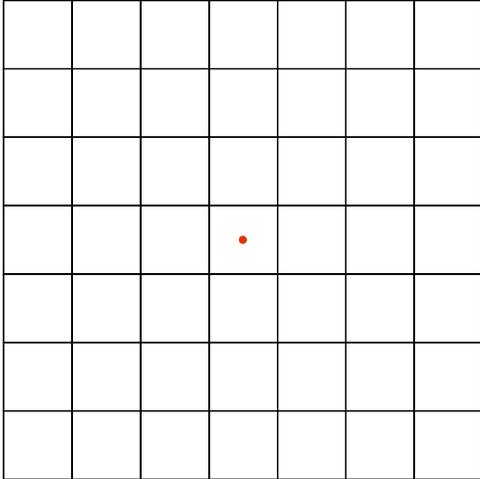


Figura IV.1. Malla de simulación base.

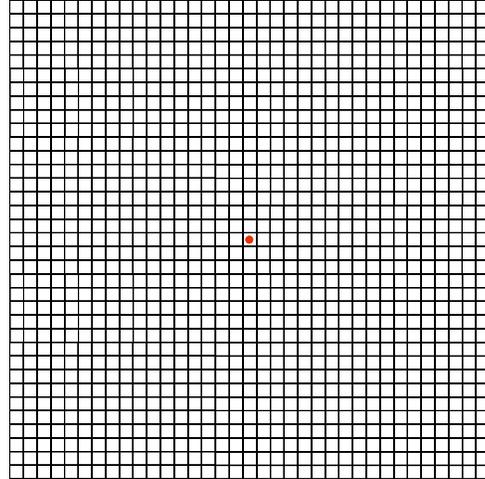


Figura IV.2. Malla fina.

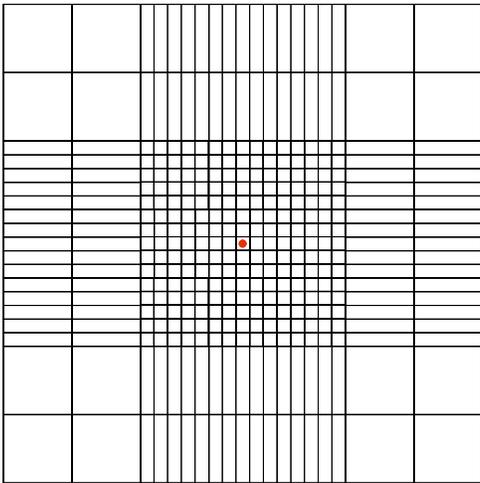


Figura IV.3. Malla refinada convencionalmente.

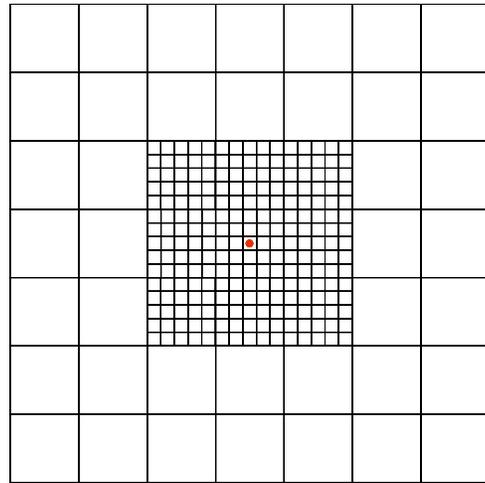
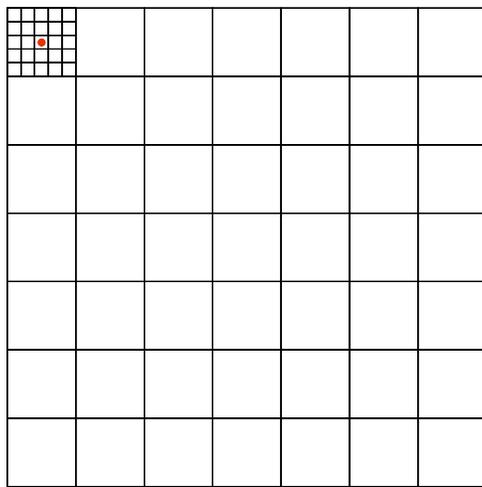


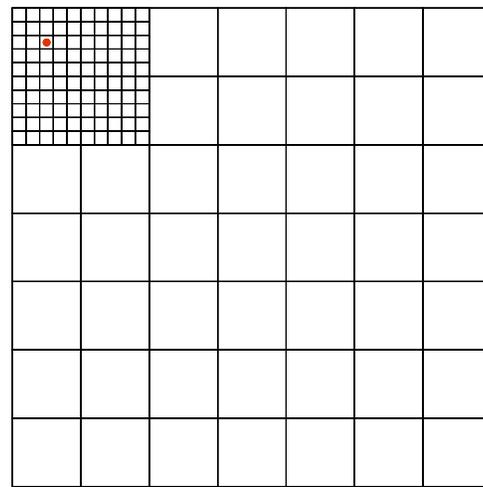
Figura IV.4. Malla refinada localmente.

La técnica de refinamiento local se aplica a una malla de simulación base que está en coordenadas cartesianas, mientras que el refinamiento de los bloques se puede efectuar en coordenadas cartesianas o en coordenadas cilíndricas. Cuando el sistema de coordenadas de los bloques refinados es de tipo cartesiano, se dice que el refinamiento es cartesiano. Si el sistema de coordenadas del área refinada es de tipo radial o elíptico, el refinamiento será conocido como híbrido. La **figura IV.6** muestra estos tipos de refinamiento.

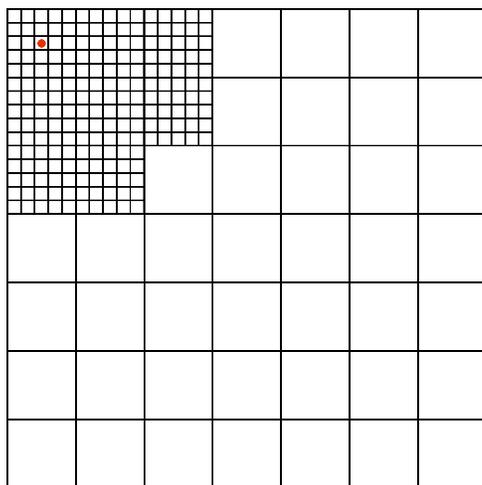
El refinamiento de la malla puede aplicarse en una o más de las direcciones de la malla de simulación (x , y o z). El refinamiento de la malla en un plano horizontal es relativamente fácil; sin embargo, en la dirección vertical se podrían requerir tratamientos especiales debido a los efectos gravitacionales



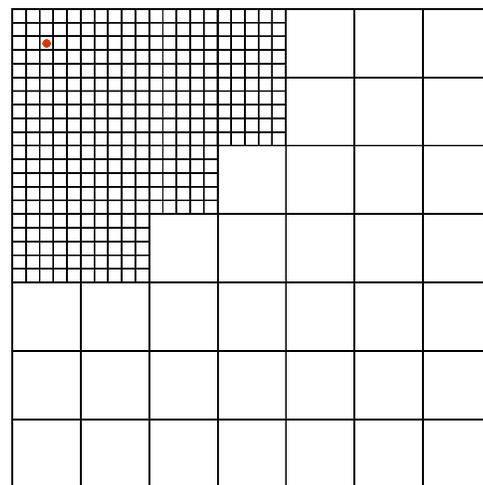
(a) Tiempo = t_1



(b) Tiempo = $t_2 > t_1$



(c) Tiempo = $t_3 > t_2$



(d) Tiempo = $t_4 > t_3$

Figura IV.5. Malla dinámica refinada localmente.

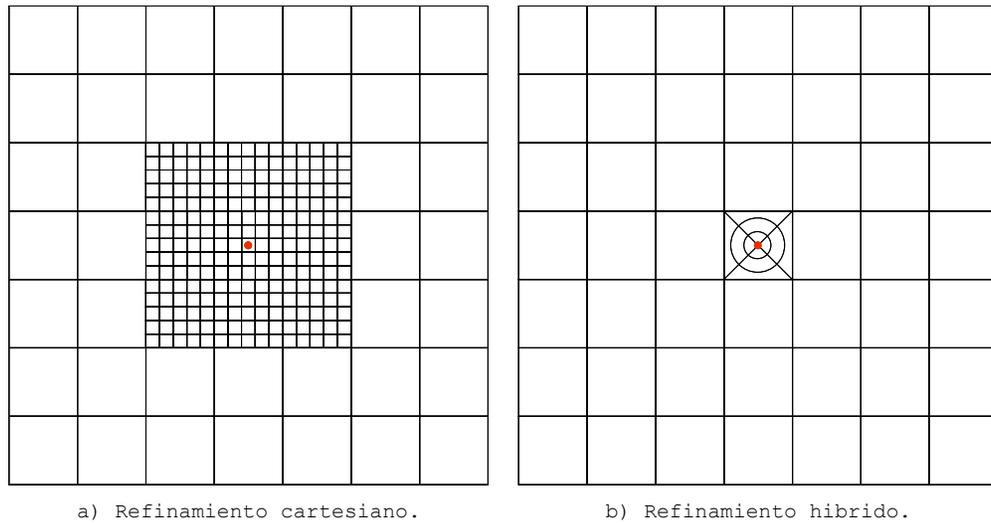


Figura IV.6. Refinamiento de la malla de acuerdo al tipo de coordenadas

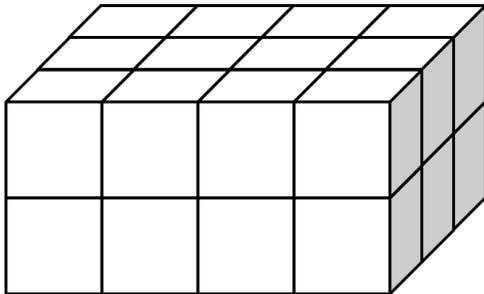
Para el desarrollo de éste trabajo se considerará refinamiento local de tipo cartesiano en tres direcciones y estático.

IV.2. Esquema de numeración.

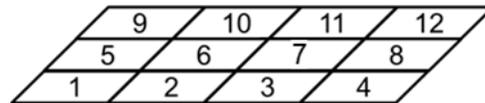
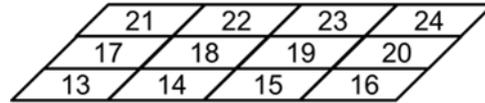
Se considera la malla de simulación mostrada en la **figura IV.7.a**. Los bloques de la malla se numeran empleando un esquema de ordenamiento natural, **figura IV.7.b**; en éste esquema, el ciclo más interno es en la dirección x (índice i), seguido por la dirección y (índice j) y finalmente por la dirección z (índice k). Los índices (i, j, k) se recorren en los sentidos siguientes: la numeración en la dirección x se realiza de izquierda a derecha, mientras que en la dirección y se realiza del frente hacia atrás, finalmente en la dirección z se efectúa de la base hacia arriba. La dirección positiva del eje z es en sentido hacia arriba; véase el **Apéndice A**.

Ahora, por simplicidad se considera la malla refinada mostrada en la **figura IV.8.a**. La numeración de los bloques se lleva a cabo de forma similar a lo ya expuesto en el párrafo anterior, **figura IV.8.b**. Sin embargo, para éste caso, la numeración se inicia sobre la

malla base. Note que los bloques refinados se excluyeron de la numeración en la malla base. En segundo término, se numera la malla refinada, siguiendo el mismo esquema de numeración. El número final de bloques es 17, mayor al esperado para una malla similar sin refinamiento.

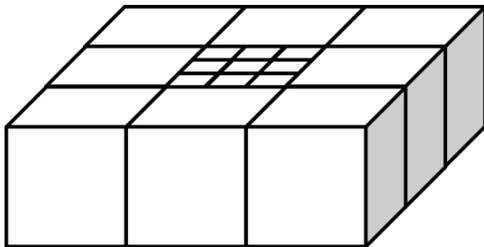


(a). Malla base de 4x3x2.

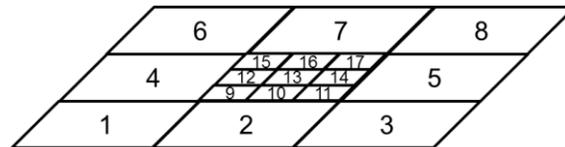


(b) Numeración de bloques.

Figura IV.7. Esquema de ordenamiento natural.



(a). Malla base con refinamiento.



(b) Numeración de bloques con refinamiento.

Figura IV.8. Esquema de ordenamiento natural con malla refinada.

IV.3. Conexiones.

Al aplicar la ecuación de flujo discretizada a cada uno de los bloques que constituye la malla numérica, se desarrolla un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$. En cada renglón de éste sistema de ecuaciones se definen las conexiones del bloque; es decir, la forma en que el bloque interactúa con sus bloques vecinos.

En los simuladores convencionales, el número máximo de conexiones para cada bloque de la malla es 2, 4 o 6, para modelos en 1, 2 o 3 dimensiones, respectivamente. Si los pozos se tratan de forma implícita en la solución, pueden añadir conexiones extras, dependiendo de los bloques que éste atraviese.

Considerando la malla y el ordenamiento mostrados en la **figura IV.7**, el esquema de la matriz resultante se muestra en la **figura IV.9**. Se observa la forma bandada tradicional, donde ninguno de los renglones excede el número máximo de conexiones establecidas, que para éste caso, modelo 3D, son 6.

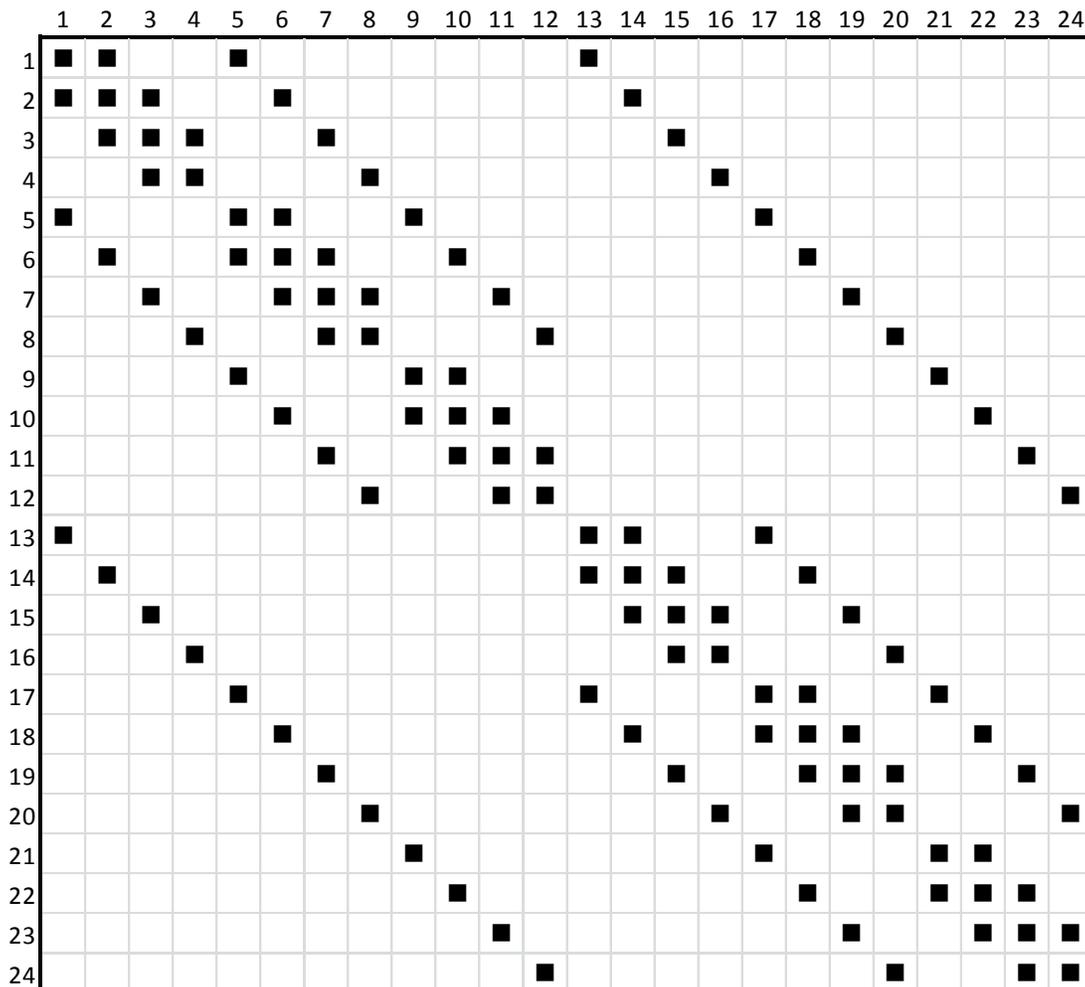


Figura IV.9. Esquema de la matriz resultante en una malla sin refinamiento.

Cuando se aplican las técnicas de refinamiento local no existe un número máximo de conexiones por bloque preestablecido. La frontera de la malla refinada, al estar en contacto con los bloques de la malla base, genera conexiones adicionales. Esta característica provoca una matriz ligeramente más compleja, por lo que la programación para generar la matriz también incrementa su complejidad. Considerando la malla y el ordenamiento mostrados en la **figura IV.8**, el esquema de la matriz resultante es mostrado en la **figura IV.10**. Se observa que la forma tradicional bandada se ha perdido parcialmente. Además, el número máximo de conexiones supera al que se esperaría para un modelo 2D sin refinamiento, 4 para ser exactos.

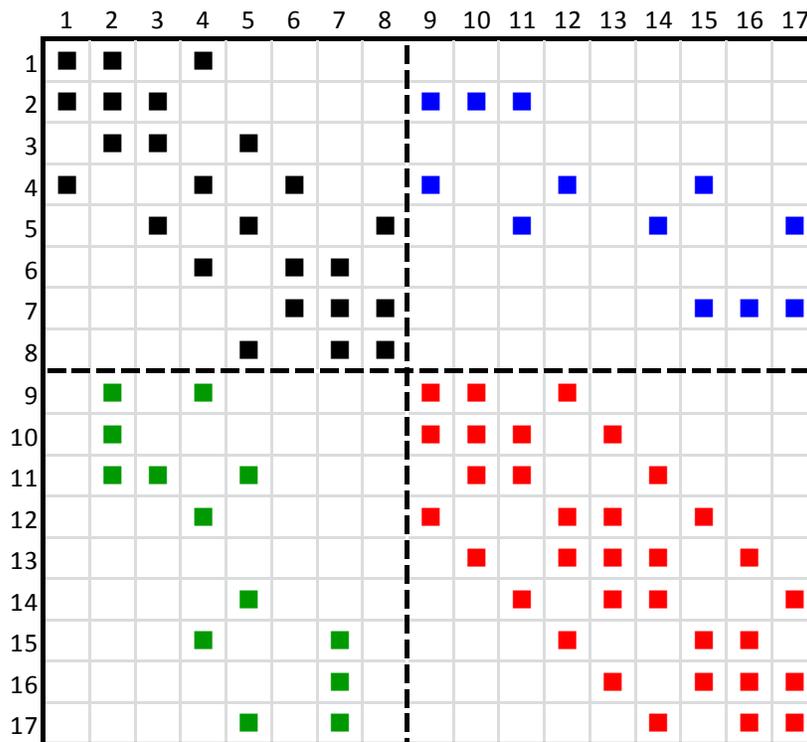


Figura IV.10. Esquema de la matriz resultante en una malla con refinamiento local.

Nótese que la matriz A de la **figura IV.10** puede dividirse en cuatro submatrices, de manera tal que el sistema de ecuaciones puede representarse de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} A_{cc} & A_{cr} \\ A_{rc} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_c \\ b_r \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.1})$$

donde:

A_{cc} Contiene únicamente elementos de la malla base.

A_{rr} Contiene únicamente elementos de la malla refinada.

A_{cr} Contiene los elementos de la malla refinada que interactúan con la malla base.

A_{rc} Contiene los elementos de la malla base que interactúan con la malla refinada.

x_c, b_c Son las incógnitas y el lado derecho, respectivamente, de la malla base.

x_r, b_r Son las incógnitas y el lado derecho, respectivamente, de la malla refinada.

Como se verá más adelante en la **sección IV.5**, es posible obtener beneficio de ésta característica aplicando un poco de álgebra matricial.

Adicionalmente, para el caso de flujo monofásico, cada elemento de la matriz de las **figuras IV.9** y **IV.10** representa un número. Sin embargo, cuando se consideran dos fases, cada elemento de la matriz representa una submatriz de orden (2×2) , pues son requeridas dos ecuaciones por bloque: una para cada fase.

IV.4. Conexiones especiales.

De forma general, las ecuaciones presentadas en los **capítulos II** y **III** son aplicables tanto a la malla base como a la malla refinada. Sin embargo, cuando las técnicas de refinamiento local son aplicadas surgen conexiones adicionales en el sistema de ecuaciones. Estas conexiones adicionales son el resultado de la interfaz que existe entre los bloques de la malla base y los bloques de la malla refinada. La correcta aplicación de las **ecuaciones III.6** requiere de un tratamiento especial sobre estas conexiones.

Considere el esquema de la malla de simulación mostrada en la **figura IV.11**. Aplicar la **ecuación III.6** al bloque 4 requiere, en particular, la evaluación del término de flujo entre los bloques 4 y 9, el cual podría escribirse como:

$$\left[T_{f,x} \right]_{4+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,9} - p_{f,4} + \gamma_{f,4+\frac{1}{2}} (D_9 - D_4) \right]^{n+1}. \quad (IV.2)$$

La **ecuación IV.2** considera que la línea que une a los puntos 4 y 9 es ortogonal a la frontera de los bloques. Dicho de otra manera, los bloques 4 y 9 se ubican en el mismo renglón. Esta afirmación es falsa, por lo que un error significativo puede introducirse cuando el método de aproximación en diferencias finitas de dos puntos es utilizado para calcular el término de flujo entre bloques de las dos mallas. Por lo tanto, para evitar, o al menos reducir los efectos de la malla, debe emplearse algún método alternativo.

6	7	8
4	15 16 17	5
	12 13 14	
	9 10 11	
1	2	3

Figura IV.11. Refinamiento local de 3x3.

6	7	8
4c	15 16 17	5
4b	12 13 14	
4a	9 10 11	
1	2	3

Figura IV.12. Refinamiento local de 3x3.
(modificado de la figura IV.11)

Ahora considere la modificación mostrada en la **figura IV.12**, donde las líneas de la malla fina han sido extendidas al bloque 4 de la malla base. Esta construcción genera

pseudobloques en la malla base (4a, 4b, 4c). Note que esta vez las líneas que unen los pseudobloques de la malla base con su par en la malla fina sí son ortogonales.

Si tuviéramos los valores de las propiedades de los fluidos en los pseudobloques, sería fácil construir los términos de flujo entre los pseudobloques y la malla refinada. Particularmente para el término de flujo entre los bloques 4a y 9 se tiene:

$$\left[T_{f,x} \right]_{4a+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,9} - p_{f,4a} + \gamma_{f,4a+\frac{1}{2}} (D_9 - D_{4a}) \right]^{n+1}. \quad (\text{IV.3})$$

Una estimación de la presión en el pseudobloque 4a se realiza por medio de una interpolación lineal entre los bloques 1 y 4.

$$p_{4a} = p_4 + (p_1 - p_4) \frac{\Delta y_{4,4a}}{\Delta y_{4,1}}, \quad (\text{IV.4})$$

donde:

$\Delta y_{4,4a}$ es la distancia del centro del bloque 4 al centro del pseudobloque 4a.

$\Delta y_{4,1}$ es la distancia del centro de bloque 4 al centro del bloque 1.

Si consideramos que los bloques 1 y 4 tienen las mismas dimensiones, la **ecuación IV.4** se puede escribir en términos del factor de refinamiento como sigue:

$$p_{4a} = p_4 + (p_1 - p_4) \frac{1}{3}, \quad (\text{IV.5})$$

donde el factor de refinamiento es igual a 3.

Expresiones similares para el bloque 4c son:

$$\left[T_{f,x} \right]_{4c+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,15} - p_{f,4c} + \gamma_{f,4c+\frac{1}{2}} (D_{15} - D_{4c}) \right]^{n+1}, \quad (\text{IV.6})$$

y

$$p_{4c} = p_4 + (p_6 - p_4) \frac{1}{3}. \quad (\text{IV.7})$$

Para el bloque 4b no se requiere interpolación, y la presión del pseudobloque 4c es igual a la presión del bloque 4.

Si el factor de refinamiento fuera 5, **figura IV.13**, los factores de interpolación serían:

$\frac{1}{5}$ para los puntos 4b y 4d.

$\frac{2}{5}$ para los puntos 4a y 4e.

6		7					8	
(2)	4e	29	30	31	32	33	5	
(1)	4d	24	25	26	27	28		
(0)	4c	19	20	21	22	23		
(1)	4b	14	15	16	17	18		
(2)	4a	9	10	11	12	13		
1		2					3	

Figura IV.13. Refinamiento local de 5x5.
(modificado de la figura IV.11)

En la **figura IV.13** los valores mostrados entre paréntesis son los índices de localización, los cuales indican la posición relativa del centro del pseudobloque a partir del centro del bloque burdo.

Nótese que no solo la presión en el pseudobloque es requerida, sino también son necesarias la saturación de agua y las propiedades de los fluidos. La presión de la fase aceite y la saturación de agua (variables primarias) son estimadas por interpolación. Las propiedades de los fluidos son estimadas a partir de los valores interpolados, las tablas PVT y las funciones de saturación. La **tabla VI.1** muestra el método de cálculo para cada variable.

Finalmente, para el cálculo de la transmisibilidad se tiene:

$$T_x = \alpha_x \lambda, \quad (\text{IV.8})$$

donde el factor geométrico, α_x , es:

$$\alpha_x = \frac{A_x}{\Delta x}, \quad (\text{IV.9})$$

y la movilidad es:

$$\lambda = \frac{kb}{\mu}. \quad (\text{IV.10})$$

Para el cálculo del factor geométrico en la transmisibilidad se tiene:

$$\Delta x = \frac{\Delta x_c + \Delta x_r}{2}, \quad (\text{IV.11})$$

donde:

Δx_c es el tamaño del bloque burdo en la dirección x .

Δx_r es el tamaño del bloque refinado en la dirección x .

A_x es el área transversal al flujo en la dirección x del bloque refinado.

El cálculo de las propiedades de los fluidos se hace con base en lo mostrado en la **tabla VI.1.**

Tabla VI.1. Método de cálculo de las variables en los pseudobloques.

Variable	Método de obtención	Relación adicional
p_o	Interpolación	
s_w	Interpolación	
b_o	p_o y Tabla PVT	
μ_o	p_o y Tabla PVT	
γ_o	p_o y Tabla PVT	
k_{ro}	s_w y Tabla de permeabilidades	
b_w	p_w y Tabla PVT	$p_w = p_o - p_{cwo}$
μ_w	p_w y Tabla PVT	$p_w = p_o - p_{cwo}$
γ_w	p_w y Tabla PVT	$p_w = p_o - p_{cwo}$
k_{rw}	s_w y Tabla de permeabilidades	
p_{cwo}	s_w y Tabla de permeabilidades	

IV.5. Complemento de Schur.

La matriz A de la **figura IV.10** puede dividirse en cuatro submatrices, entonces el sistema de ecuaciones puede representarse de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_{cc} & A_{cr} \\ A_{rc} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_c \\ b_r \end{bmatrix}, \quad (\text{IV.12})$$

donde:

- A_{cc} Contiene únicamente elementos de la malla base.
- A_{rr} Contiene únicamente elementos de la malla refinada.
- A_{cr} Contiene los elementos de la malla refinada que interactúan con la malla base.
- A_{rc} Contiene los elementos de la malla base que interactúan con la malla refinada.
- x_c, b_c Son las incógnitas y el lado derecho, respectivamente, de la malla base.
- x_r, b_r Son las incógnitas y el lado derecho, respectivamente, de la malla refinada.

Aplicando un poco de álgebra matricial es posible reducir el tamaño del sistema de ecuaciones.

El sistema de **ecuaciones IV.12** puede escribirse como:

$$A_{cc}x_c + A_{cr}x_r = b_c, \quad (\text{IV.13})$$

$$A_{rc}x_c + A_{rr}x_r = b_r. \quad (\text{IV.14})$$

Resolviendo para x_r de **IV.14**, se tiene:

$$x_r = A_{rr}^{-1}b_r - A_{rr}^{-1}A_{rc}x_c. \quad (\text{IV.15})$$

Sustituyendo **IV.15** en **IV.13**, se tiene:

$$A_{cc}x_c + A_{cr}(A_{rr}^{-1}b_r - A_{rr}^{-1}A_{rc}x_c) = b_c, \quad (\text{IV.16})$$

$$A_{cc}x_c + A_{cr}A_{rr}^{-1}b_r - A_{cr}A_{rr}^{-1}A_{rc}x_c = b_c. \quad (\text{IV.17})$$

Agrupando términos:

$$(A_{cc} - A_{cr}A_{rr}^{-1}A_{rc})x_c = b_c - A_{cr}A_{rr}^{-1}b_r. \quad (\text{IV.18})$$

Finalmente,

$$A_{cc}^* x_c = b_c^* , \quad (IV.19)$$

donde:

$$A_{cc}^* = A_{cc} - A_{cr} A_{rr}^{-1} A_{rc} .$$

$$b_c^* = b_c - A_{cr} A_{rr}^{-1} b_r .$$

Para un caso general donde el número de mallas refinadas sea n_r :

$$\begin{bmatrix} A_{cc} & A_{c1} & A_{c2} & A_{c3} & \cdot & A_{cn} \\ A_{1c} & A_{11} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ A_{2c} & 0 & A_{22} & 0 & \cdot & 0 \\ A_{3c} & 0 & 0 & A_{33} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{nc} & 0 & 0 & 0 & \cdot & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_c \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} , \quad (IV.20)$$

la matriz A_{cc}^* es:

$$A_{cc}^* = A_{cc} - \sum_1^{n_r} A_{ci} A_{ii}^{-1} A_{ic} ; \quad (IV.21)$$

el vector del lado derecho es:

$$b_c^* = b_c - \sum_1^{n_r} A_{ci} A_{ii}^{-1} b_i , \quad (IV.22)$$

y la solución para cada malla refinada es:

$$x_i = A_{ii}^{-1} b_i - A_{ii}^{-1} A_{ic} x_c . \quad (\text{IV.23})$$

El algoritmo de solución aplicando éste procedimiento es el siguiente:

1. Calcular la matriz A_{cc}^* y el vector del lado derecho b_c^* con las ecuaciones **IV.21** y **IV.22** respectivamente.
2. Resolver el sistema de ecuaciones para las incógnitas de la malla base.
3. Resolver para las incógnitas de la malla refinada con la **ecuación IV.23**.

Éste procedimiento es aplicado en cada iteración de Newton. Cuando se alcanza la convergencia deseada se avanza al siguiente nivel de tiempo.

Aun cuando se realiza el planteamiento de solución realizando la reducción del sistema de ecuaciones, en éste trabajo la solución del sistema de **ecuaciones IV.12** se realiza de forma completa, es decir, se resuelve el sistema original.

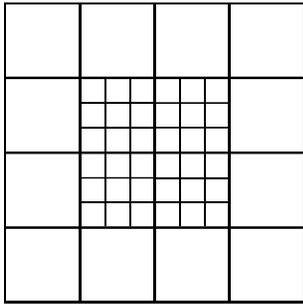
IV.6. Construcción de la Malla localmente refinada.

Para construir una malla con refinamiento local en el simulador desarrollado para éste trabajo se requiere: 1) Definir una malla base (malla burda), como en un simulador convencional, y 2) Introducir una o más mallas localmente refinadas sobre uno o varios bloques de la malla base.

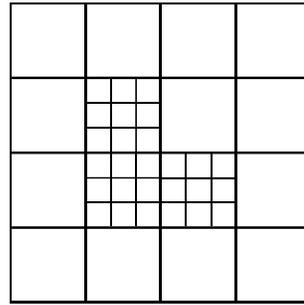
Generar una malla con refinamiento local es relativamente fácil, sin embargo, debido a los requerimientos en la programación, existen algunas condiciones que se deben cumplir al elaborar una malla con refinamiento local, las cuales son explicadas a continuación y mostradas en las **figuras IV.14.a – IV.14.m**.

- El tipo de refinamiento es estático, es decir, una vez establecida la región que se desea refinar, esta permanecerá sin cambios durante todo el tiempo de simulación.

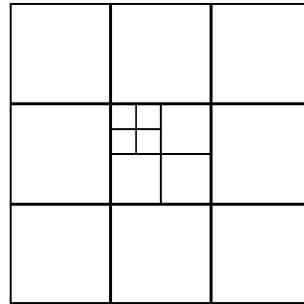
- Las regiones refinadas son paralelepípedos, **figuras IV.14.a y IV.14.b.**
- Solo se permiten dos niveles de mallado, es decir, una región refinada no puede volverse a refinar, **figura IV.14.c**
- Las regiones refinadas pueden contener cualquier número de bloques, sin embargo, las líneas de la malla base deben coincidir con las líneas de la malla refinada, **figuras IV.14.d y IV.14.e.**
- Una región refinada debe tener el mismo factor de refinamiento en todos los bloques de la malla base, no obstante, el factor de refinamiento en cada dirección puede ser diferente, **figura1 IV.14.f y figura IV.14.g.**
- Dos regiones refinadas no pueden tener una interface en común. Esto significa que debe existir al menos un bloque de la malla base entre cualquier región refinada, **figuras IV.14.h y IV.14.i.**
- Una región refinada no puede ser frontera externa, es decir, debe estar rodeada por bloques de la malla base, **figuras IV.14.j y IV.14.k.**
- Aun cuando los pozos pueden ser localizados en cualquier zona, solo se permite un pozo por bloque, **figuras IV.14.l y figuras IV.14.m.**



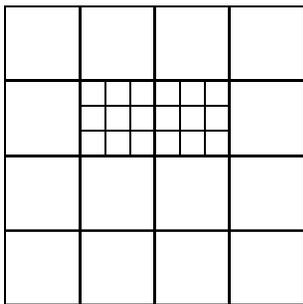
(a) Permitido.



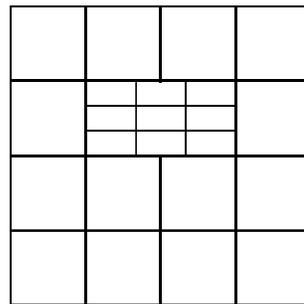
(b) No permitido.



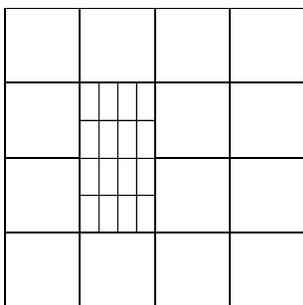
(c) No permitido.



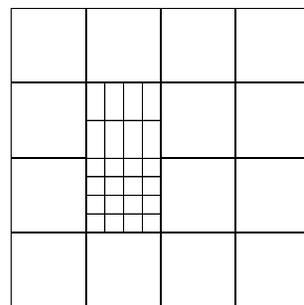
(d) Permitido.



(e) No permitido.

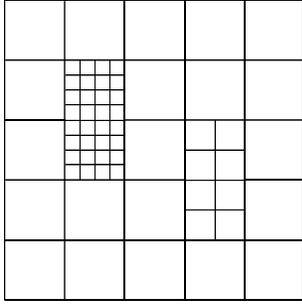


(f) Permitido.

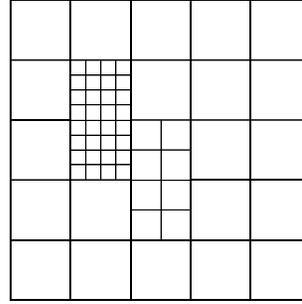


(g) No permitido.

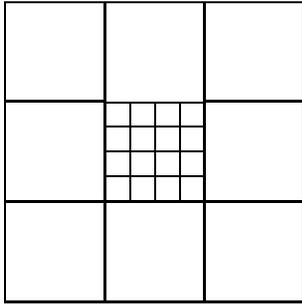
Figura IV.14. Condiciones para la construcción de una malla localmente refinada.



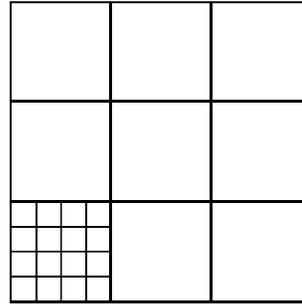
(h) Permitido.



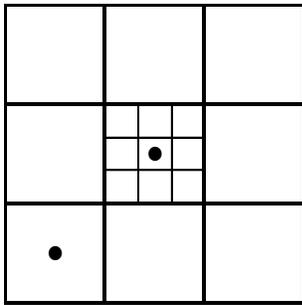
(i) No permitido.



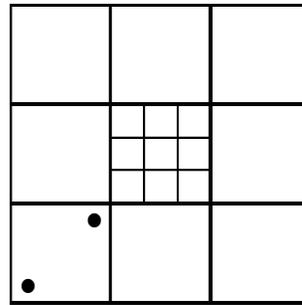
(j) Permitido.



(k) No permitido.



(l) Permitido.



(m) No permitido.

Figura IV.14. Condiciones para la construcción de una malla localmente refinada (continuación).

Capítulo V. Validación y casos de aplicación.

En el presente trabajo se desarrolló un simulador numérico de yacimientos totalmente implícito, en dos fases (aceite y agua), en tres dimensiones y con la capacidad de manejar mallas localmente refinadas.

Éste simulador fue validado con un simulador numérico (BOS; Black Oil Simulator) desarrollado por el Grupo de Simulación Numérica de Yacimientos de la UNAM (GSNY-UNAM), para comprobar su veracidad. Por otro lado, casos sintéticos fueron elaborados para corroborar el desempeño y efectividad del refinamiento local propuesto en éste trabajo.

V.1. Validación.

La validación de éste simulador se realizó en dos pasos: 1) Validación de la aplicación y programación de las ecuaciones de flujo, y 2) Validación de la aplicación y programación de las técnicas de refinamiento local.

La primera parte de validación se realizó con un modelo homogéneo, en dos fases con saturación de agua irreductible y tridimensional. Las dimensiones del modelo son $(9 \times 9 \times 3)$. Se cuenta con un pozo productor en el centro de la capa superior $(5,5,3)$. El conjunto de datos empleados para éste, y todos los casos evaluados, se muestra en el **Apéndice C**.

En las **figuras V.1 a V.3** se muestran gráficas del gasto de aceite, presión de bloque y presión de fondo fluyendo, donde se observa que los resultados son idénticos para ambos

simuladores. Con estos resultados se cumple satisfactoriamente la primera parte de la validación.

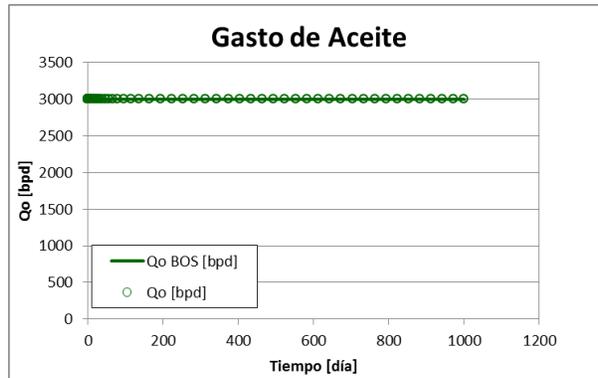
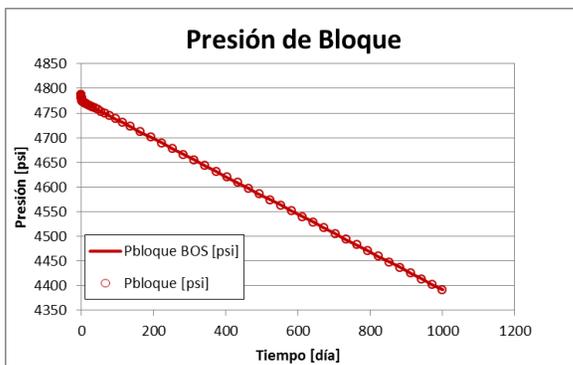
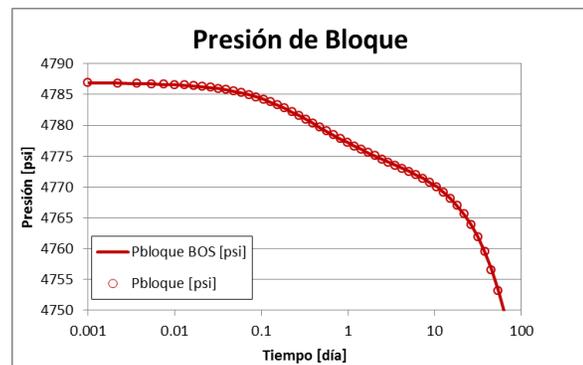


Figura V.1. Validación 1 del simulador. Gasto de Aceite.

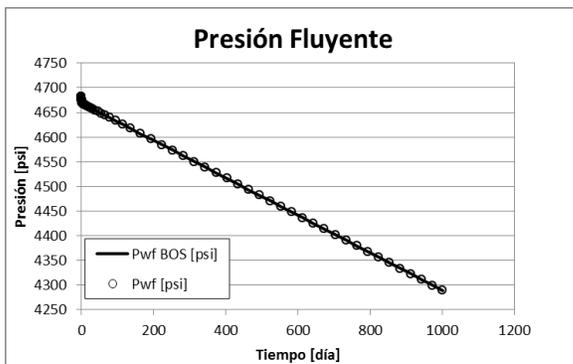


(a). Pbloque a tiempos largos.

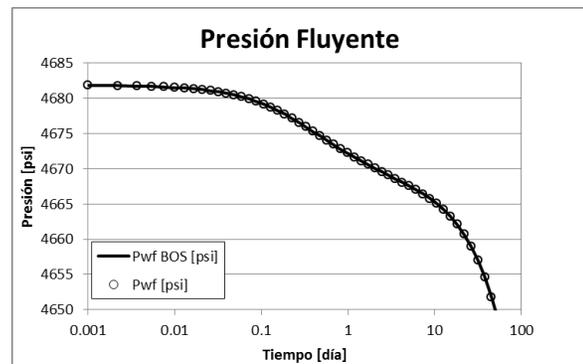


(b) Pbloque a tiempos cortos.

Figura V.2. Validación 1 del simulador. Presión de bloque.



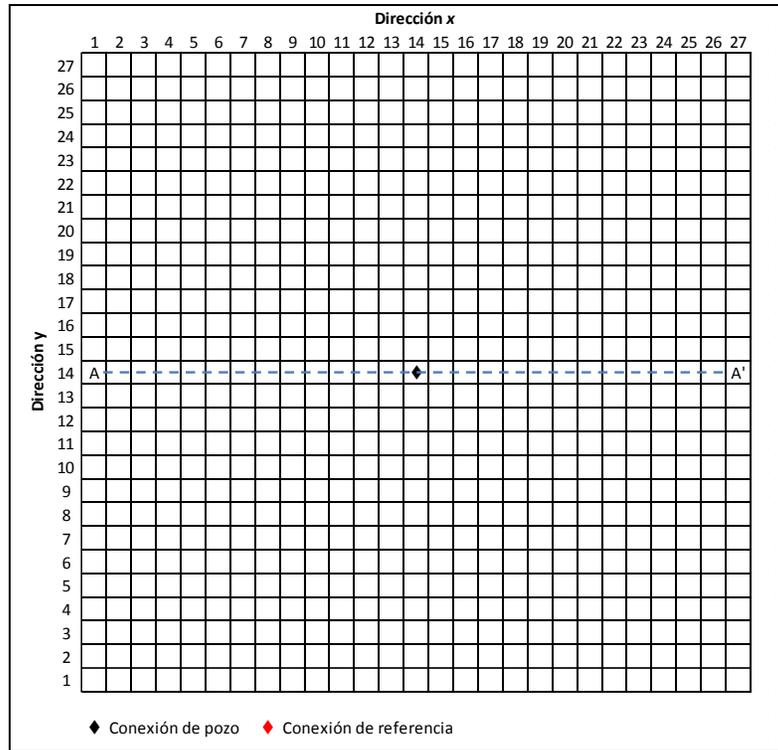
(a). Pwf a tiempos largos.



(b) Pwf a tiempos cortos.

Figura V.3. Validación 1 del simulador. Presión de fondo fluyendo.

La segunda parte de la validación de éste simulador, consiste en elaborar un modelo con una malla fina y reproducir los resultados con una malla localmente refinada. El modelo fino tiene dimensiones $(27 \times 27 \times 15)$. Un pozo productor fue colocado en el centro de la malla, bloque $(14,14)$, y disparado en las capas 9 a 7. La **figura V.4** muestra la geometría de la malla fina.



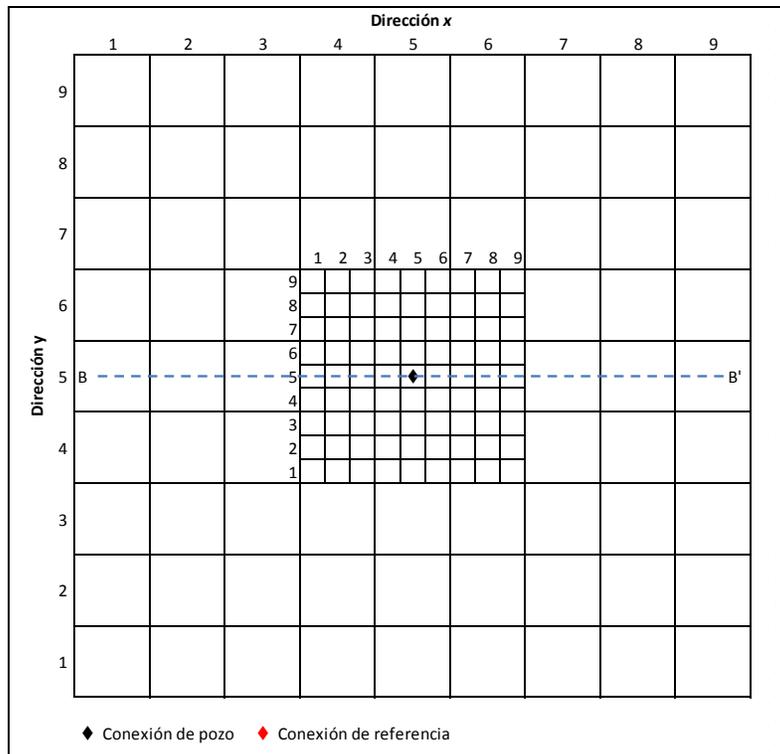
a) Vista de Planta.



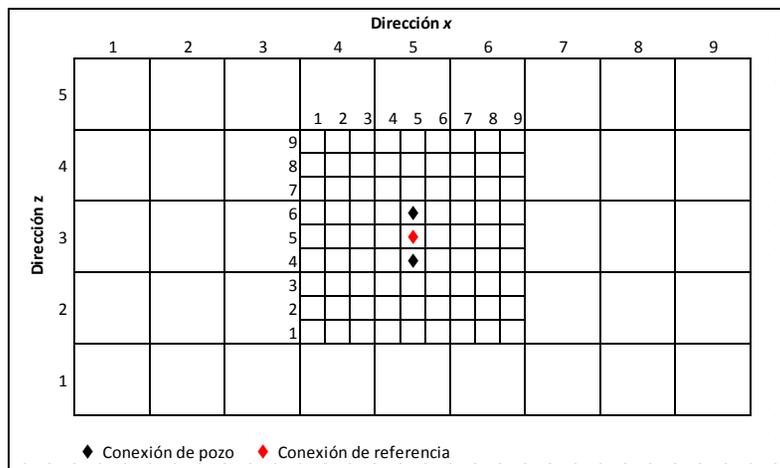
b) Sección transversal A-A'.

Figura V.4. Validación 2 del simulador. Malla fina.

El modelo con refinamiento local tiene una malla base de dimensiones $(9 \times 9 \times 5)$. Se aplicó un factor de refinamiento de $(3 \times 3 \times 3)$ sobre los bloques $(4,4,2)$ a $(6,6,4)$ de la malla base. Un pozo productor fue colocado en el centro de la malla refinada, bloque $(5,5)$, y disparado en las capas 6 a 4. Esta configuración respeta la posición del pozo en la malla fina. La **figura V.5** muestra la geometría de la malla refinada.



a) Vista de Planta.



b) Sección transversal B-B'.

Figura V.5. Validación 2 del simulador. Malla refinada.

En las **figuras V.6 a V.8** se muestran gráficas del gasto de aceite, presión de bloque y presión de fondo fluyendo, donde se observa que la malla con refinamiento local (R) logra reproducir el comportamiento de la malla fina (F). Con estos resultados se cumple satisfactoriamente la segunda parte de la validación.

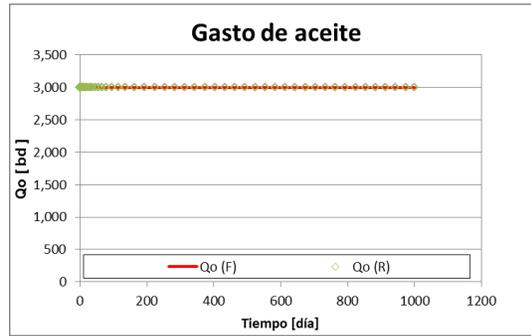
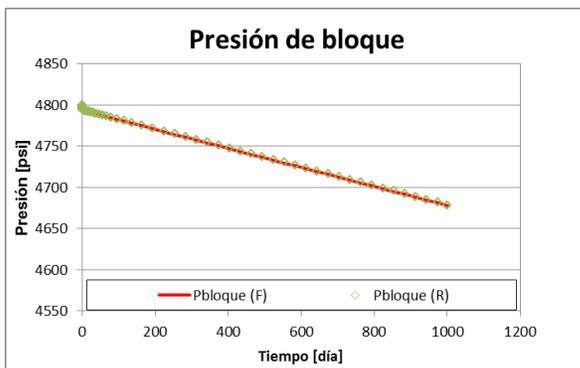
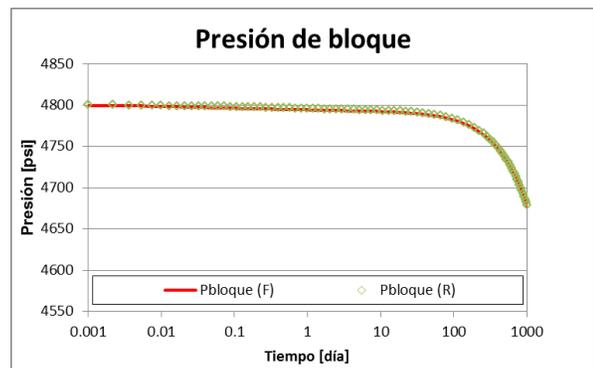


Figura V.6. Validación 2 del simulador. Gasto de Aceite.

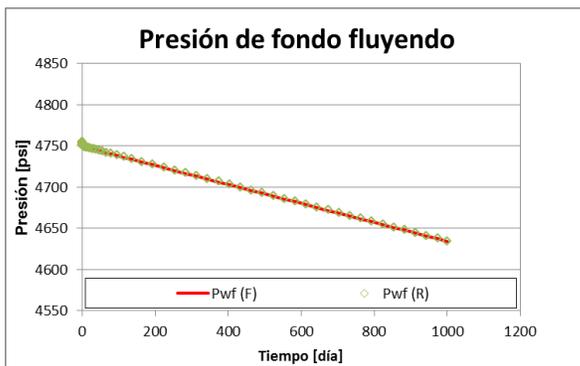


(a). Pbloque a tiempos largos.

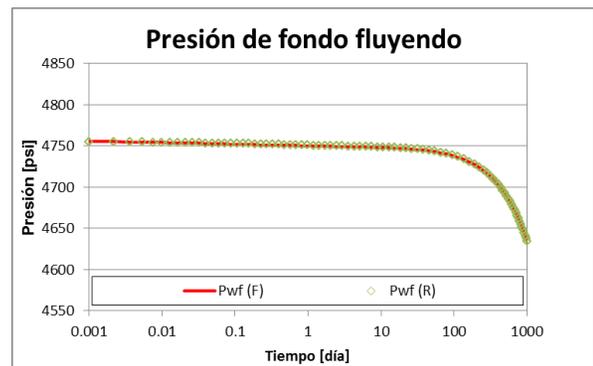


(b) Pbloque a tiempos cortos.

Figura V.7. Validación 2 del simulador. Presión de bloque.



(a). Pwf a tiempos largos.



(b) Pwf a tiempos cortos.

Figura V.8. Validación 2 del simulador. Presión de fondo fluyendo.

V.2. Casos de aplicación.

Se presentan dos casos sintéticos de aplicación para mostrar el desempeño y la efectividad de las técnicas de refinamiento local en la simulación numérica de yacimientos.

En el primer caso, se presenta la explotación de un yacimiento con un pozo horizontal de 600 m. El segundo caso, muestra la explotación de un yacimiento con 2 pozos verticales, limitando el flujo fraccional de agua al 50% en cada una de las conexiones.

Caso I. Pozo horizontal.

Descripción del yacimiento.

Se considera un yacimiento homogéneo con dimensiones de 3,000 x 1,400 x 437 m en las direcciones x, y, z respectivamente. La cima del yacimiento se ubica a 2,437 m y presenta un contacto agua-aceite a la profundidad de 2,683 m. La presión inicial del yacimiento es de 4,800 psi a la profundidad de 2,600 m.

Esquema de explotación.

Se considera la explotación del yacimiento a través de pozo horizontal produciendo a gasto de aceite constante de 3,000 bd. La sección horizontal del pozo es de 600 m. El pozo es paralelo al eje x y se encuentra en el centro del yacimiento.

Descripción de la malla de simulación.

Se realizó la simulación empleando una malla burda, una malla fina, y tres diferentes formas de refinamiento local. El tiempo de simulación es de 1,000 días para todos los casos.

La malla base de simulación es de $(15 \times 7 \times 9)$, con un total de 945 bloques. El pozo horizontal, paralelo al eje x , está en la capa 8, fila 4 de la dirección y , y bloques 7 al 9 en la dirección x . La **figura V.9**, muestra una vista de planta de la malla base, mientras la **figura V.10** muestra la sección A-A'.

La malla fina se construyó aplicando un factor de refinamiento de tres en las tres direcciones, por lo que la malla fina tiene dimensiones (45 x 21 x 27), con un total de 25,515 bloques. El pozo queda ubicado en la capa 23, fila 11 de la dirección y , y bloques 19 al 27 en la dirección x . La **figura V.11**, presenta una vista de planta de la malla, mientras la **figura V.12** muestra la sección B-B'.

El primer refinamiento (R1) se realizó sobre la capa 8, del bloque (4,6) al (4,10). El total de bloques (burdos más refinados) es 1,075. El pozo queda ubicado en la capa 2, fila 2 en la dirección y , y bloques 4 al 12 en la dirección x de la malla refinada. La **figura V.13**, muestra una vista de planta de la malla, mientras la **figura V.14** muestra la sección C-C'.

En el segundo refinamiento (R2) se incrementó el número de capas refinadas, realizándose sobre las capas 7 y 8. En las direcciones (x, y) se conservó el mismo esquema. El total de bloques es 1,205. El pozo queda ubicado en la capa 5 de la malla refinada. En las direcciones (x, y) no hubo cambios. La **figura V.15**, muestra una vista de planta de la malla, mientras la **figura V.16** muestra la sección D-D'.

En el tercer refinamiento (R3) se incrementó el área y el número de capas refinadas. Se refinaron las capas 7 y 8. En las direcciones (x, y) se refinó del bloque (3,6) al (5,10). El total de bloques es 1,725. El pozo queda ubicado en la capa 5, fila 5 en la dirección y , y bloques 4 al 12 en la dirección x de la malla refinada. La **figura V.17**, presenta una vista de planta de la malla, mientras la **figura V.18** muestra la sección E-E'.

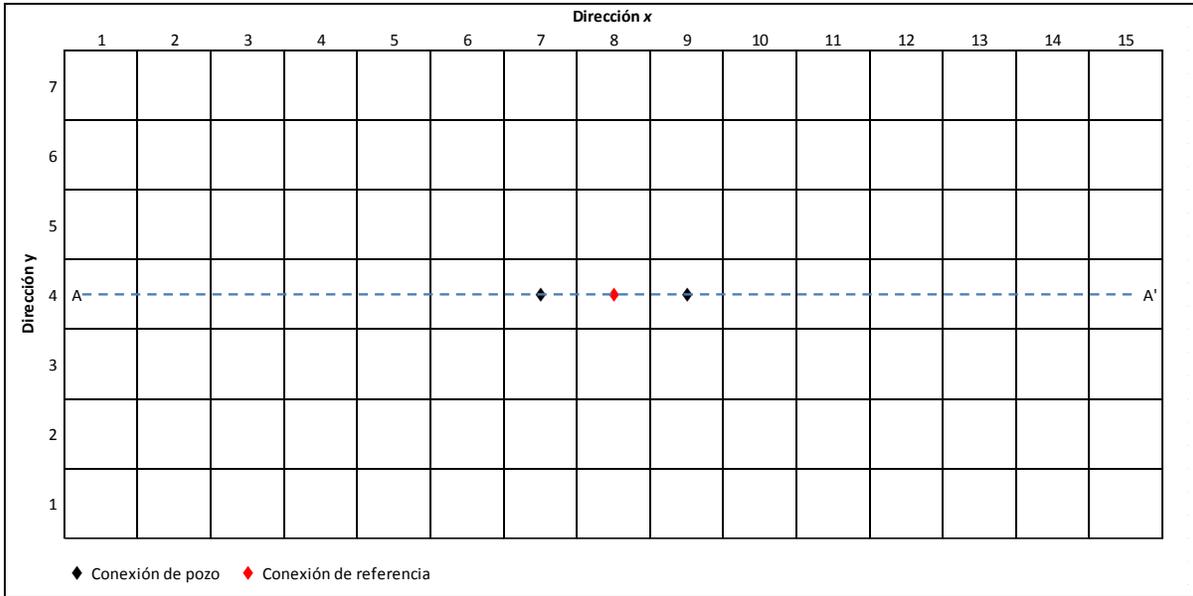


Figura V.9. Caso I. Vista de planta de la malla base.

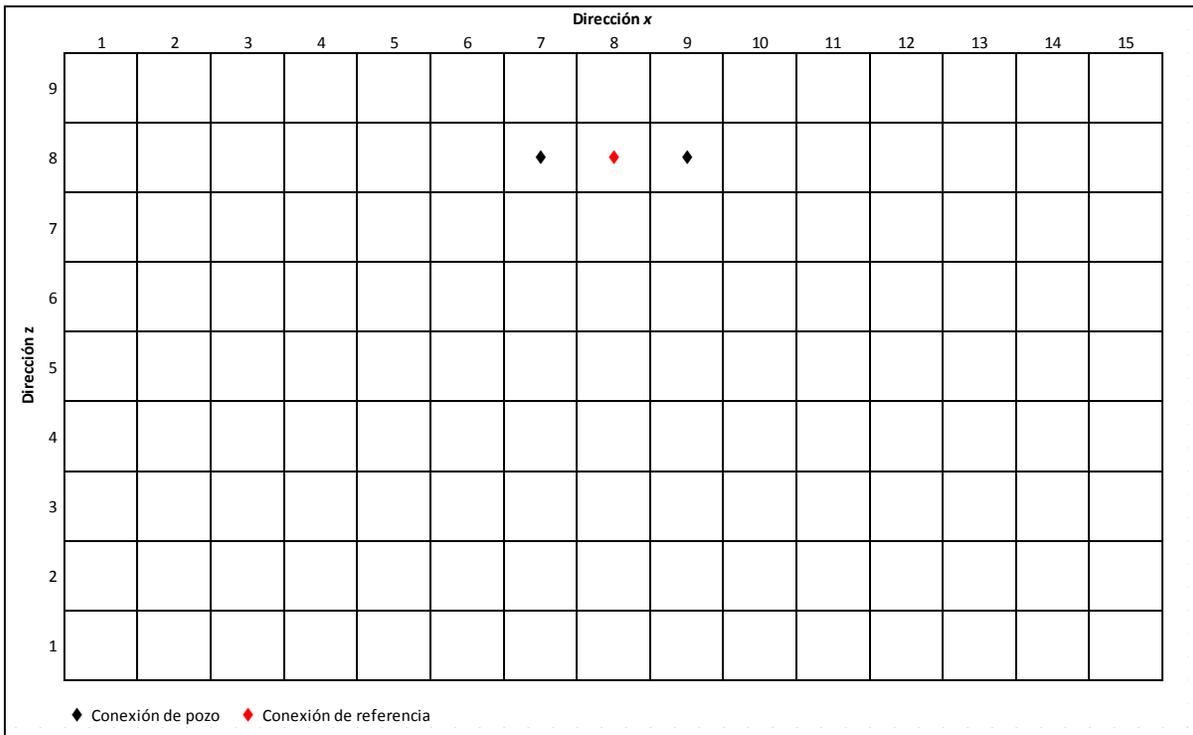


Figura V.10. Caso I. Sección A-A' de la malla base.

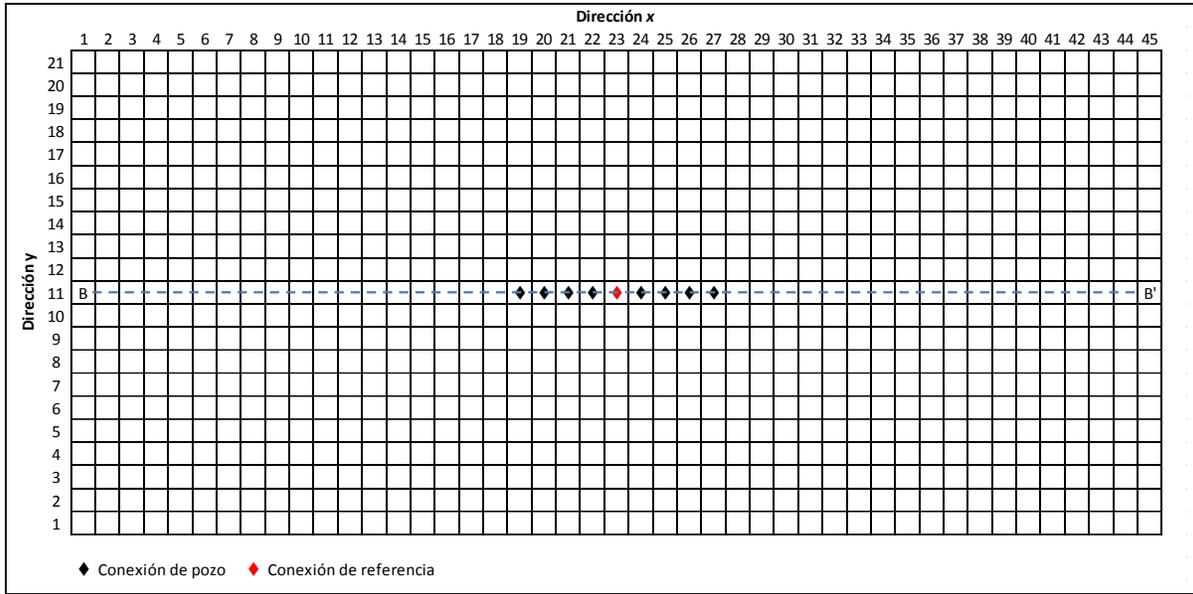


Figura V.11. Caso I. Vista de planta de la malla fina.

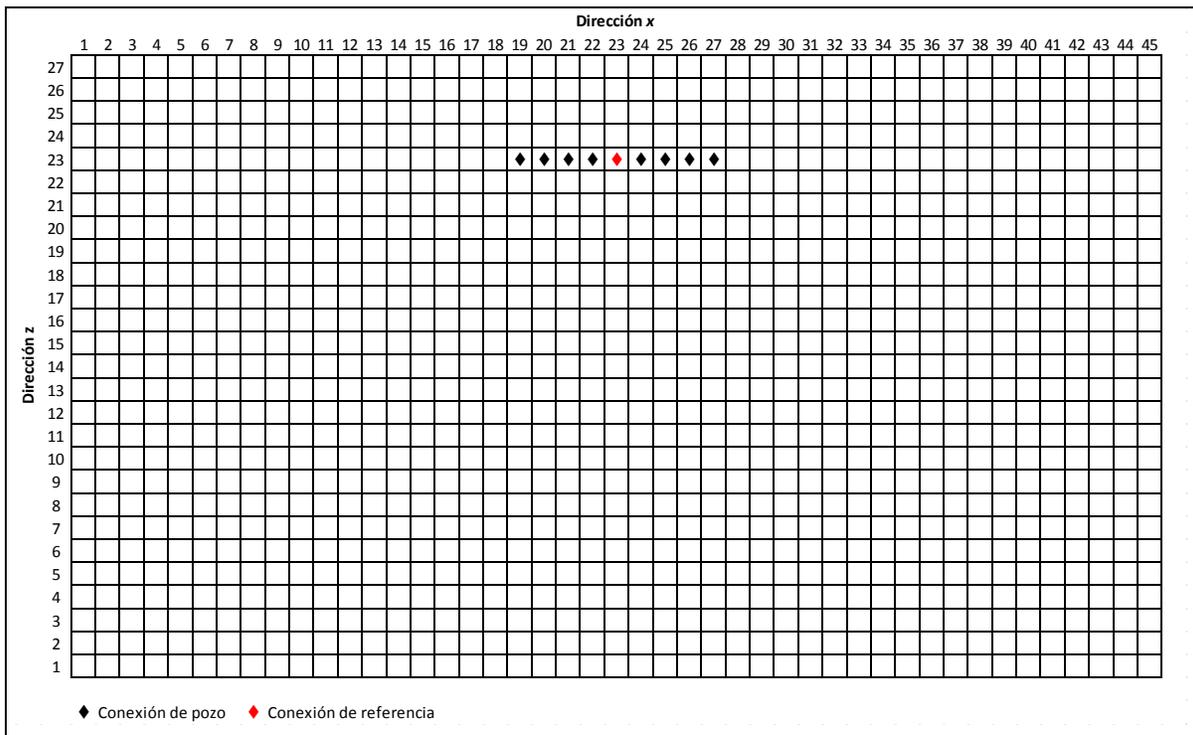


Figura V.12. Caso I. Sección B-B' de la malla fina.

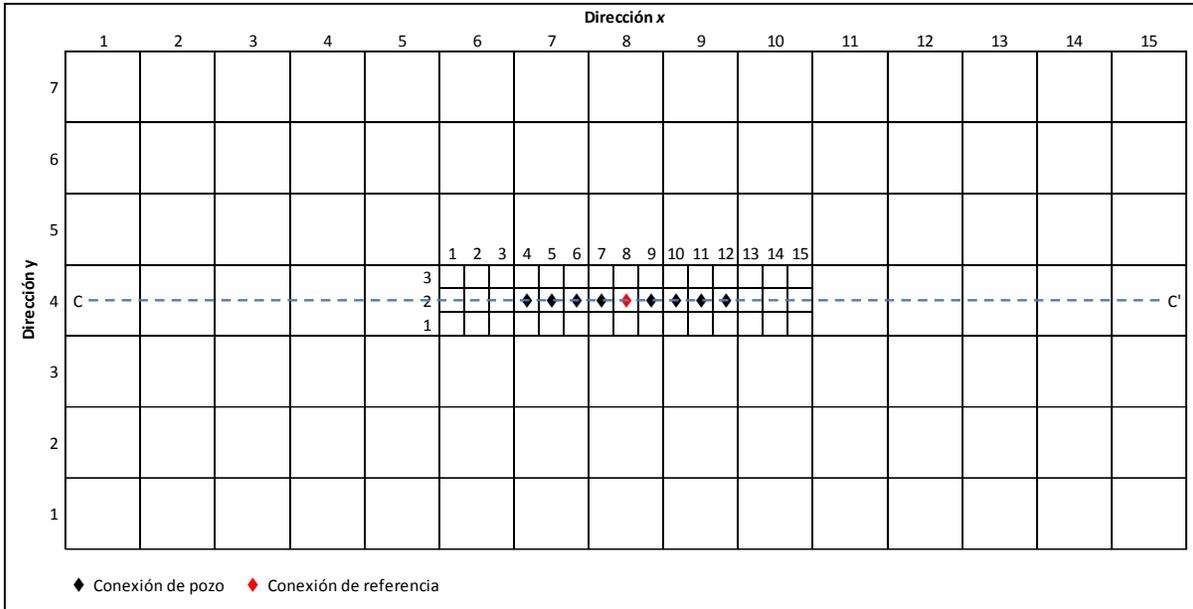


Figura V.13. Caso I. Vista de planta de la malla refinada R1.

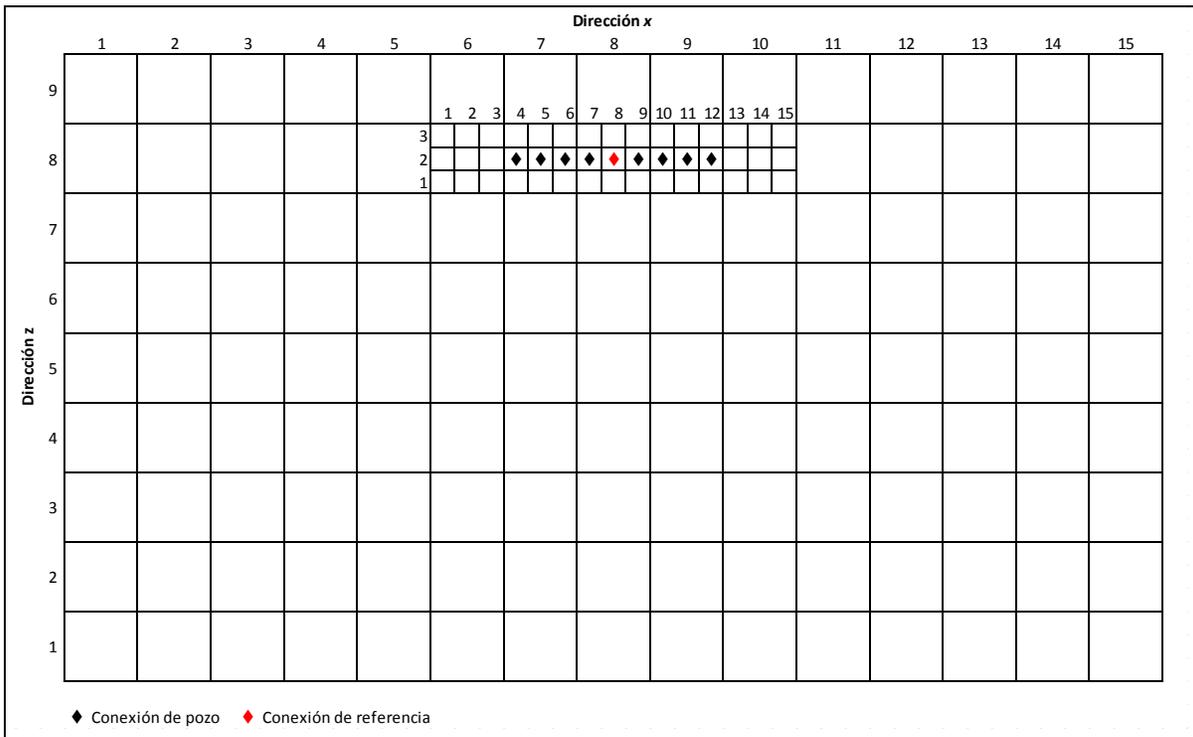


Figura V.14. Caso I. Sección C-C' de la malla refinada R1.

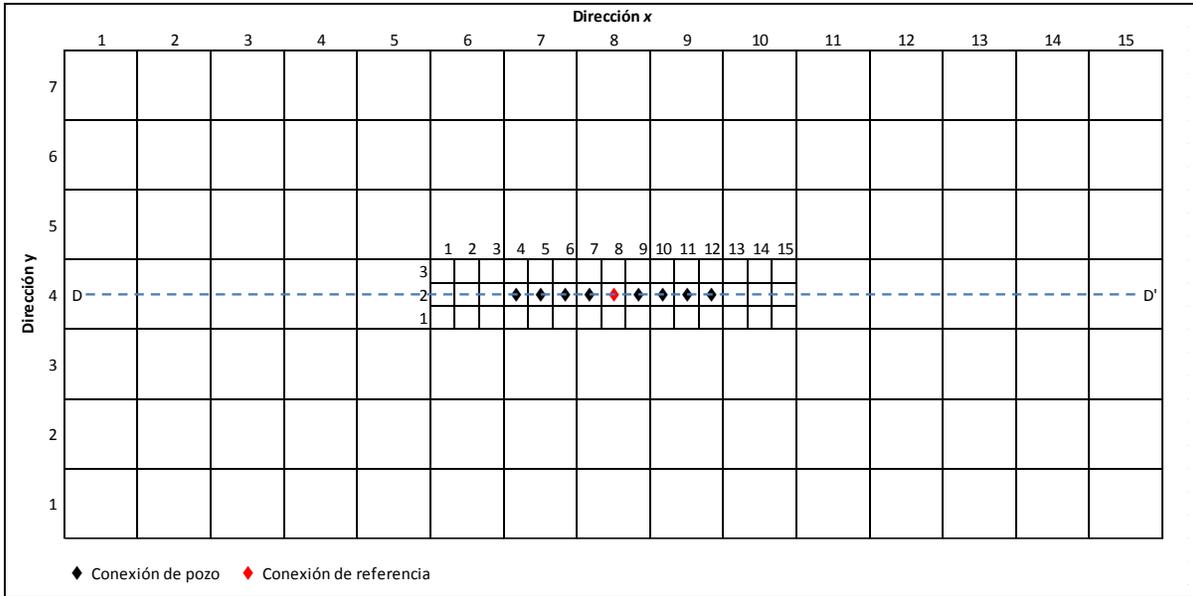


Figura V.15. Caso I. Vista de planta de la malla refinada R2.

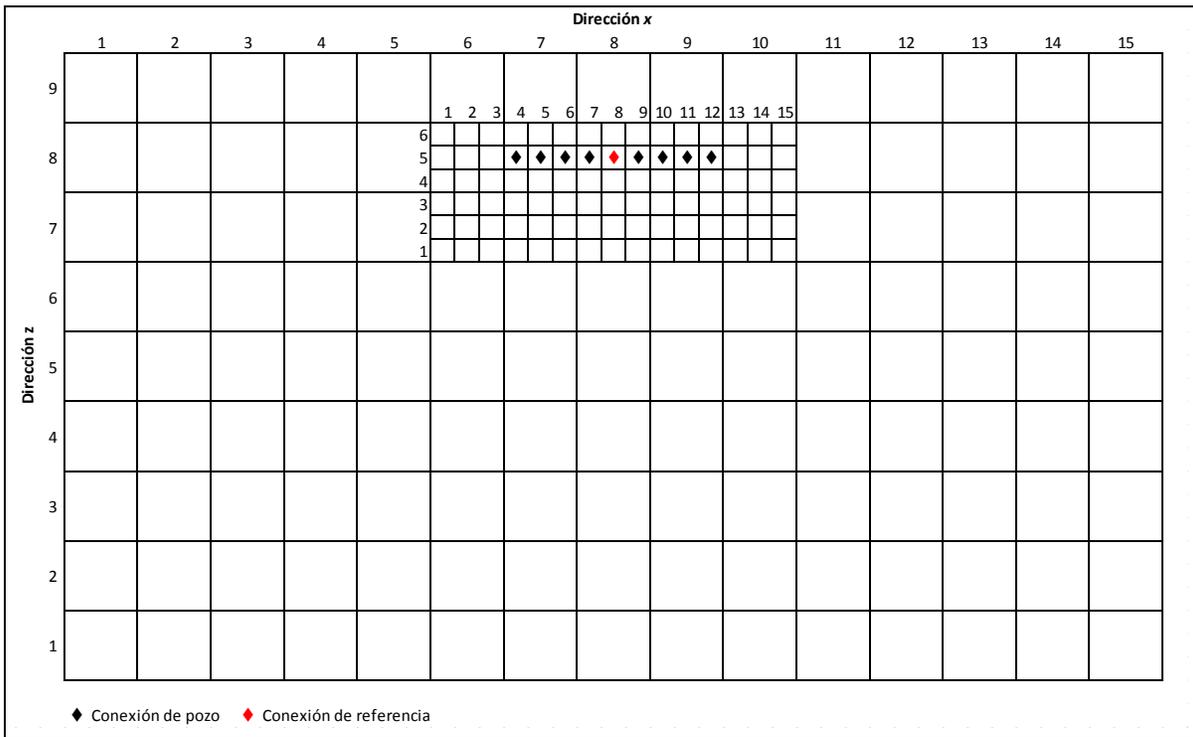


Figura V.16. Caso I. Sección D-D' de la malla refinada R2.

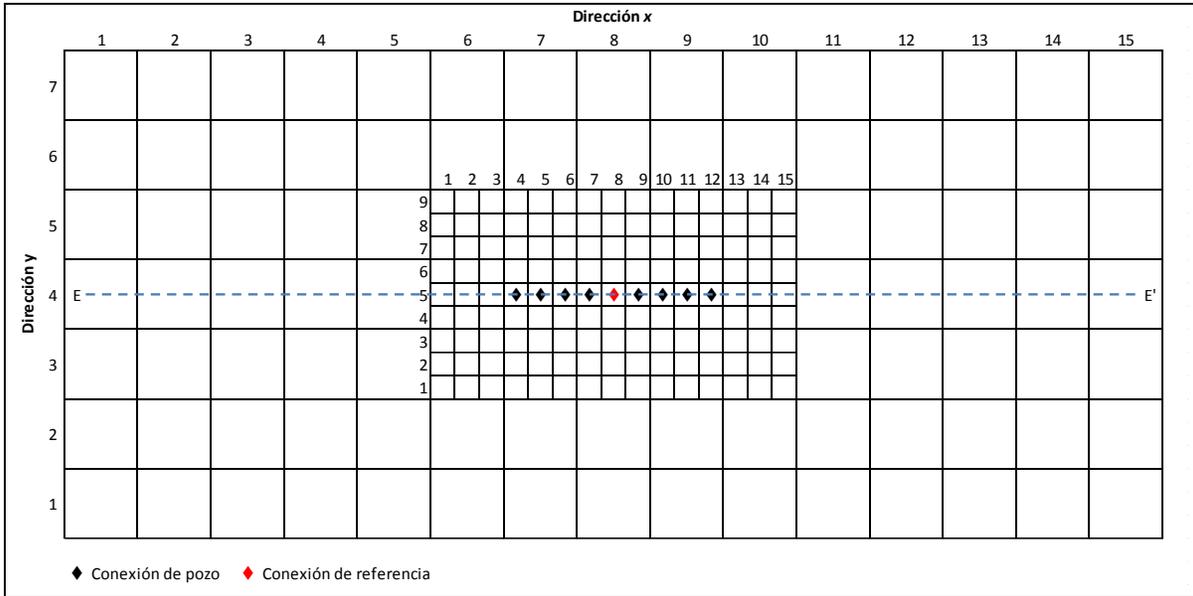


Figura V.17. Caso I. Vista de planta de la malla refinada R3.

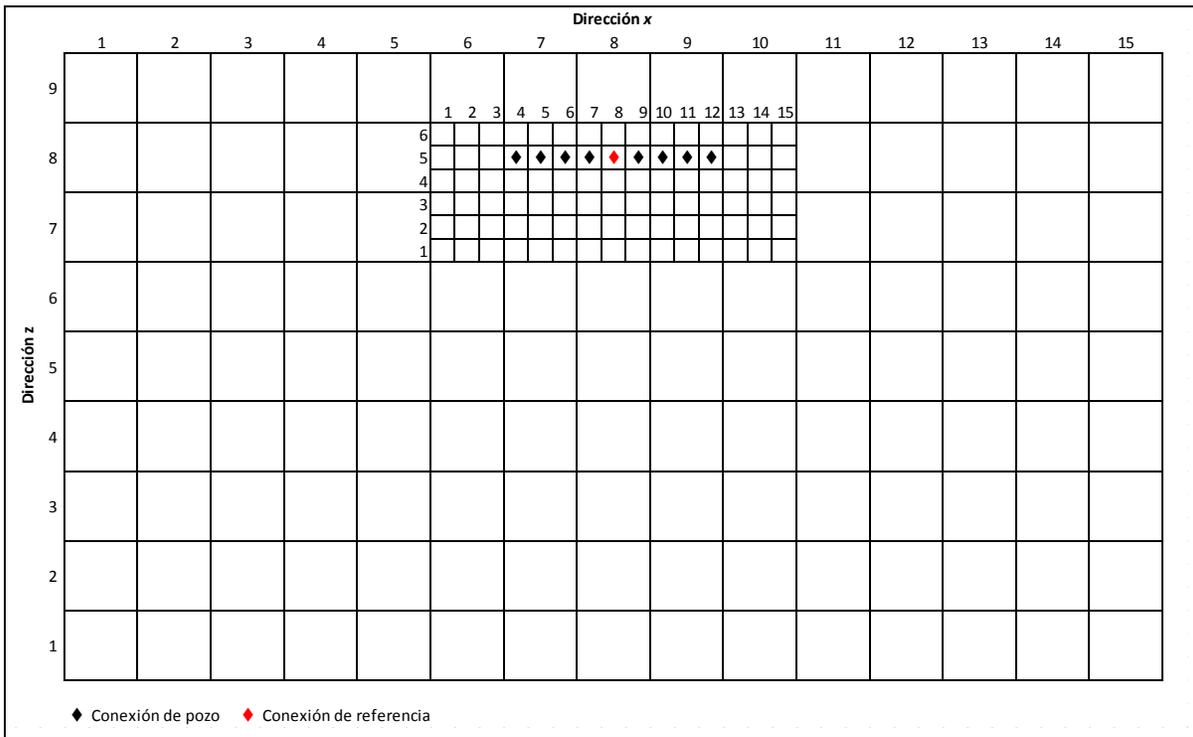


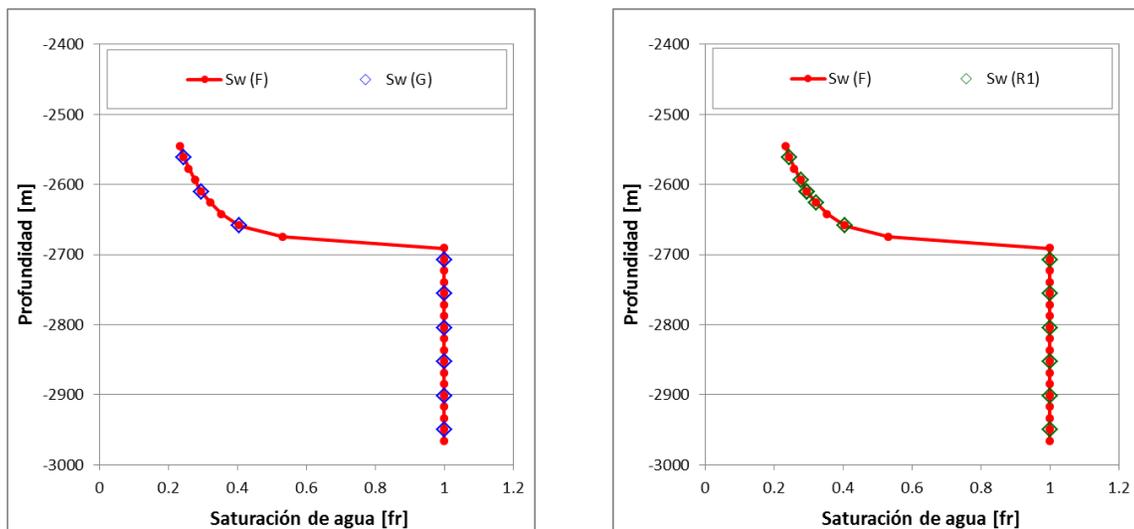
Figura V.18. Caso I. Sección E-E' de la malla refinada R3.

Resultados.

La **figura V.19** muestra el perfil vertical de saturación de agua inicial. Las **figuras V.20 a V.25** muestran la presión media del yacimiento, el gasto de aceite del pozo, gasto de agua, el flujo fraccional de agua del pozo, la presión del bloque y la presión de fondo fluyente, así como el error calculado de cada caso con respecto a lo obtenido por la malla fina, respectivamente. La presión media del yacimiento fue calculada como un promedio ponderado en volumen de la presión de todos los bloques del modelo (motivo por el cual, la presión inicial es superior a la presión de 4,800 psi dada al plano de referencia). Las presiones de fondo y fluyente del pozo están referidas a la conexión de referencia (**figuras V.9 a V.18**).

Las **figuras V.26 a V.35** presentan las distribuciones de presión y de saturación en el modelo al tiempo final de 1,000 días de simulación.

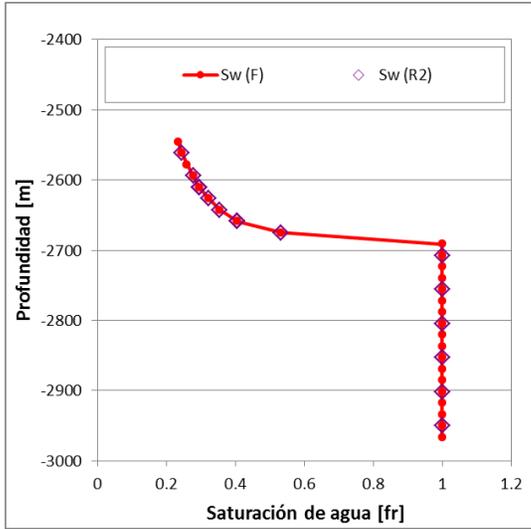
Las **figuras V.36 a V.39** muestran el tiempo de CPU total de simulación, el número de iteraciones por paso de tiempo, el tiempo de CPU por paso de tiempo y el tiempo de CPU acumulado. Todos los tiempos reportados, corresponden al tiempo empleado por el simulador sólo durante la construcción y solución del sistema de ecuaciones en cada iteración del método de Newton-Raphson.



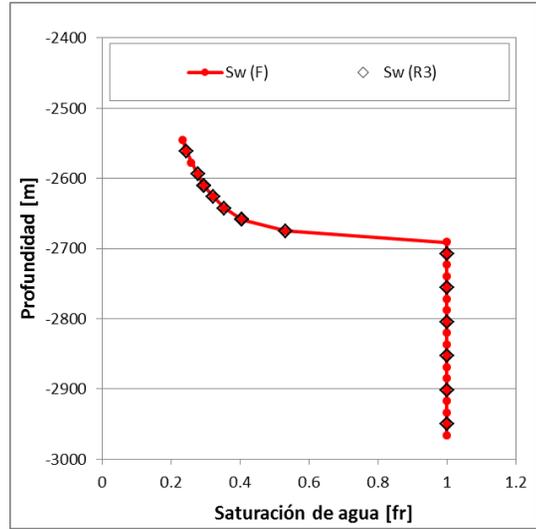
a) Malla fina Vs Malla burda.

b) Malla fina Vs Refinamiento R1.

Figura V.19. Caso I. Perfil de saturación.



c) Malla fina Vs Refinamiento R2.



d) Malla fina Vs Refinamiento R3.

Figura V.19. Caso I. Perfil de saturación. (continuación)

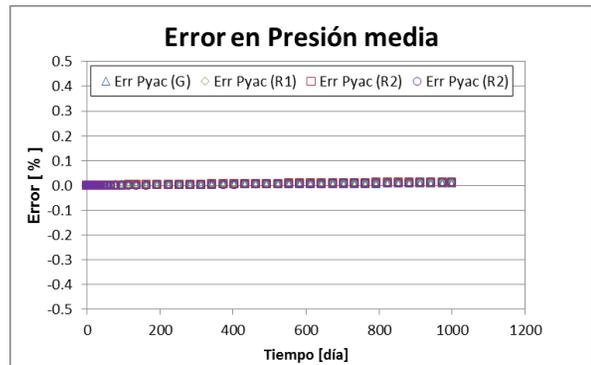
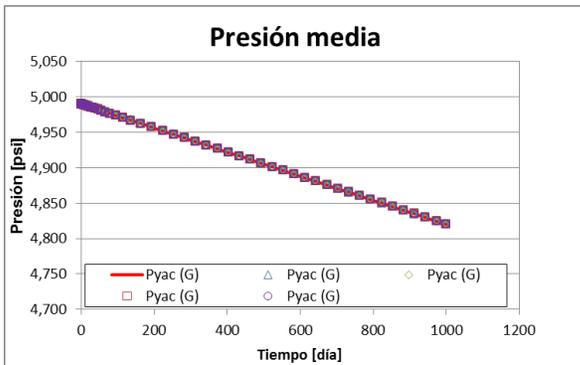


Figura V.20. Caso I. Presión media de yacimiento.

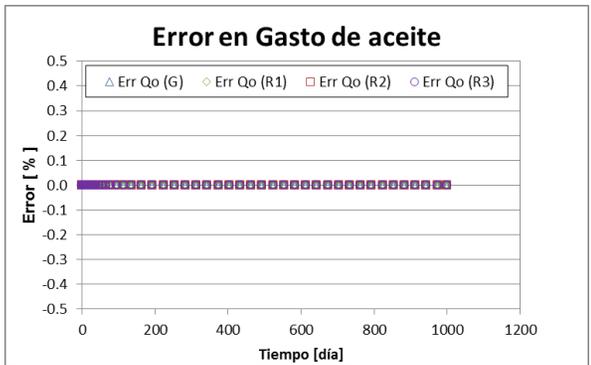
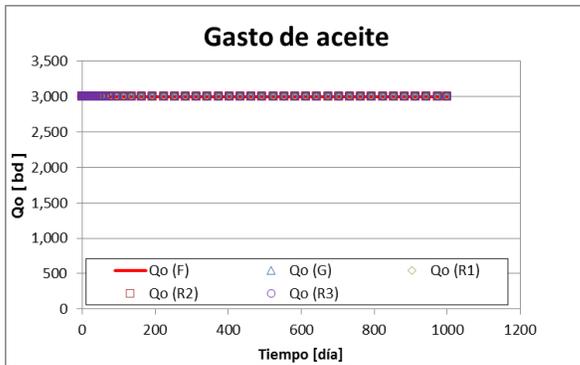


Figura V.21. Caso I. Gasto de aceite.

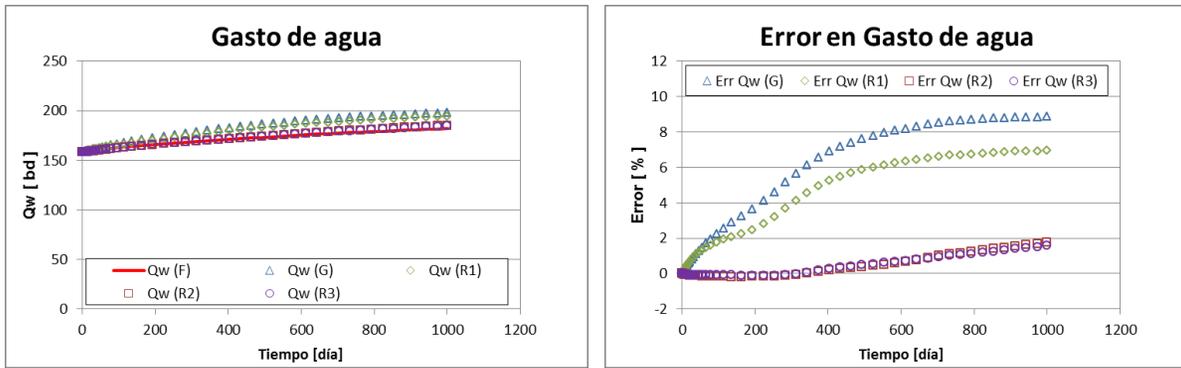


Figura V.22. Caso I. Gasto de agua.

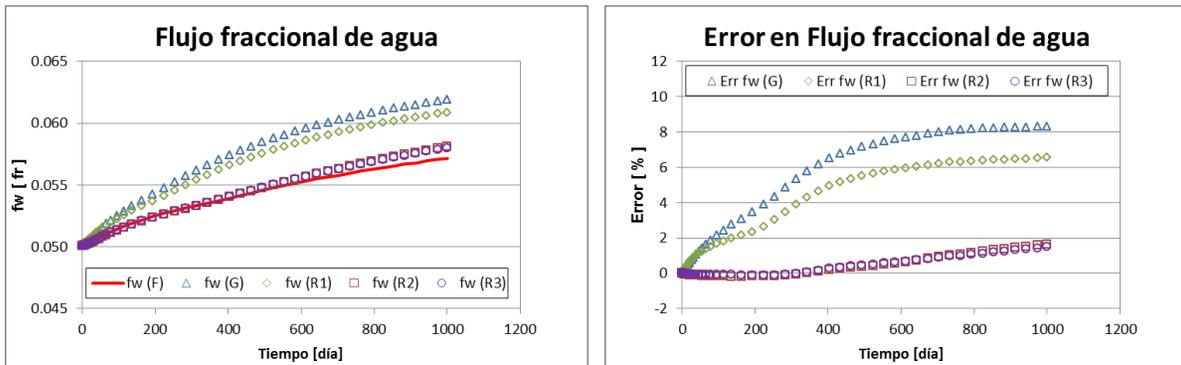


Figura V.23. Caso I. Flujo fraccional de agua.

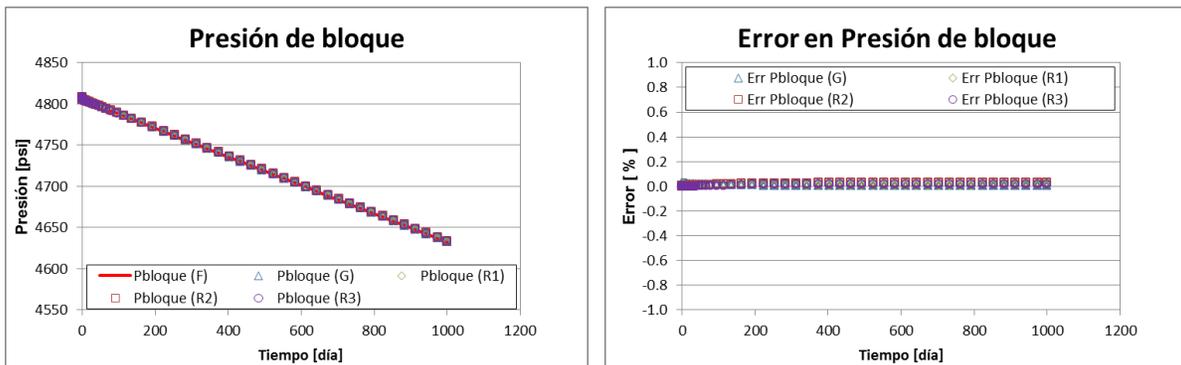


Figura V.24. Caso I. Presión de bloque.

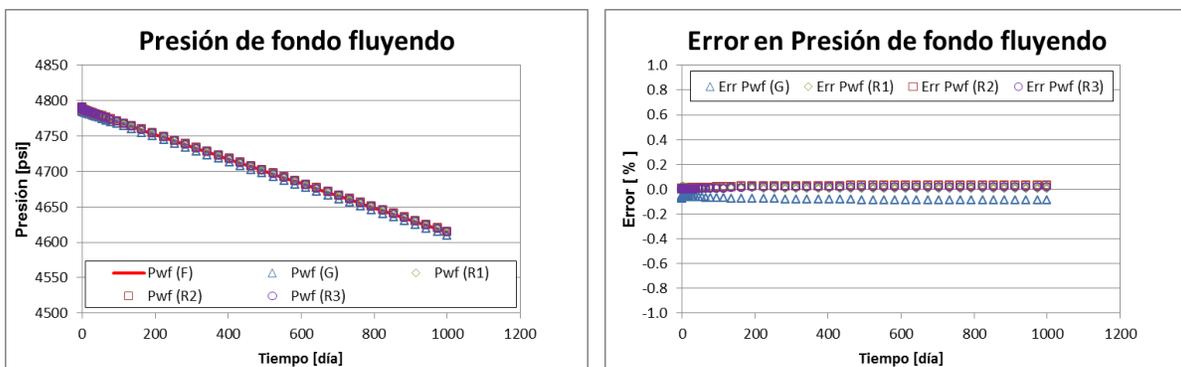
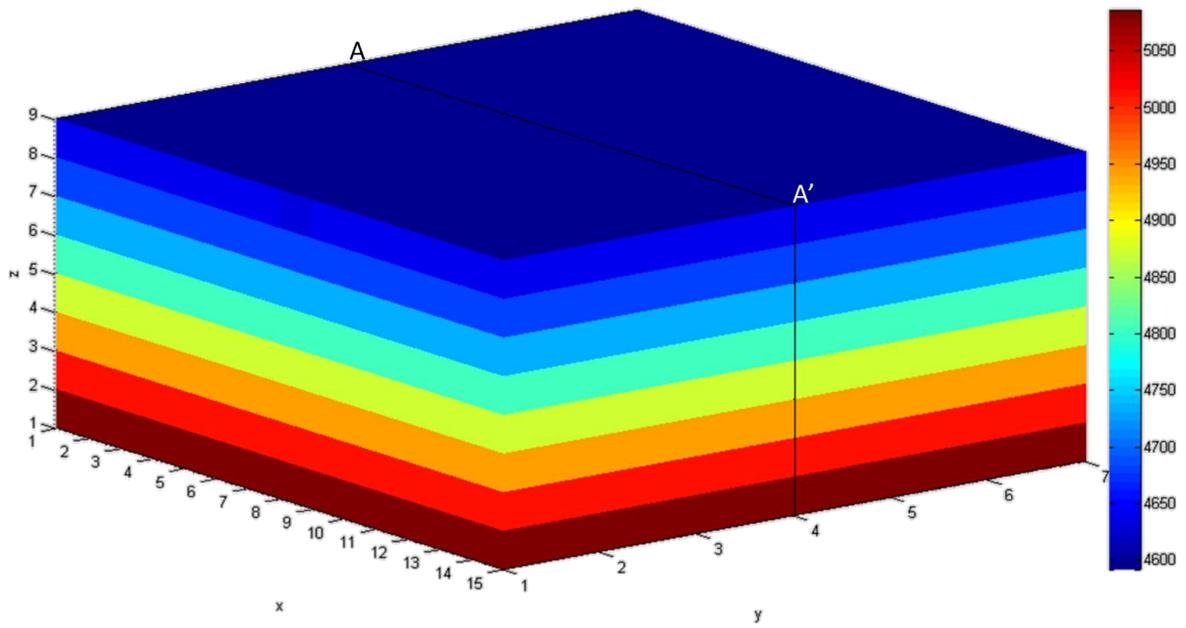
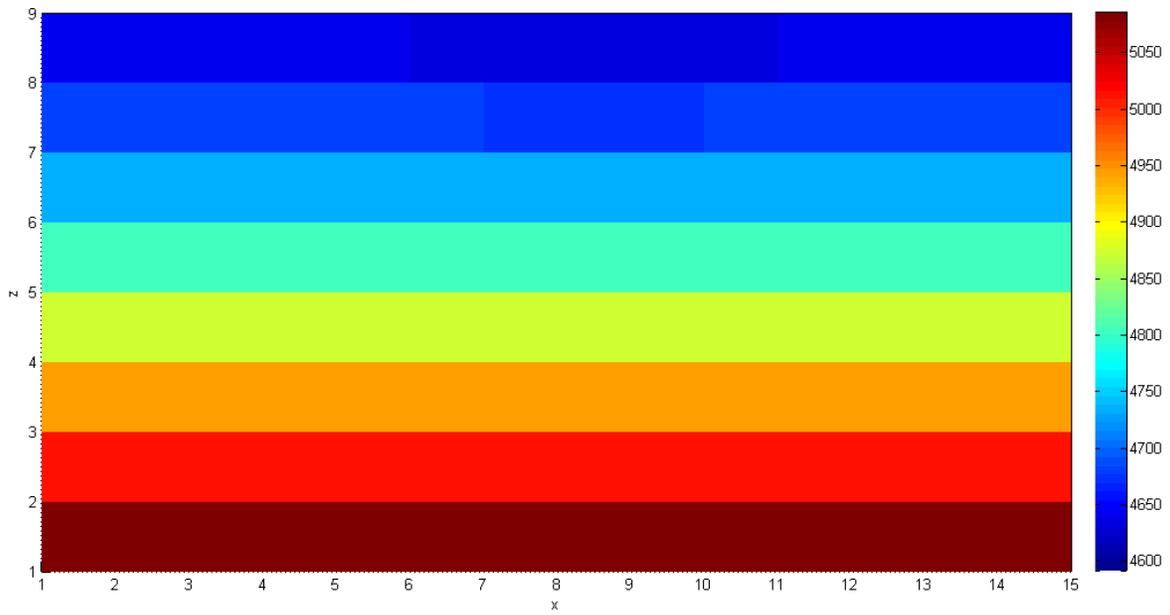


Figura V.25. Caso I. Presión de fondo fluyendo.

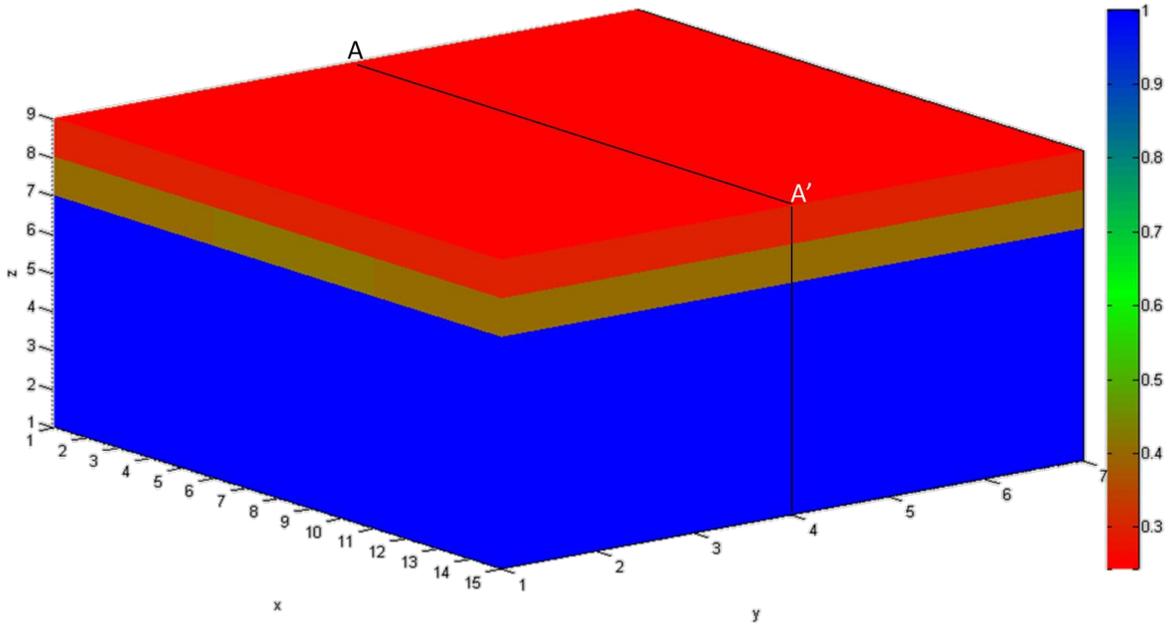


a) Vista 3D.

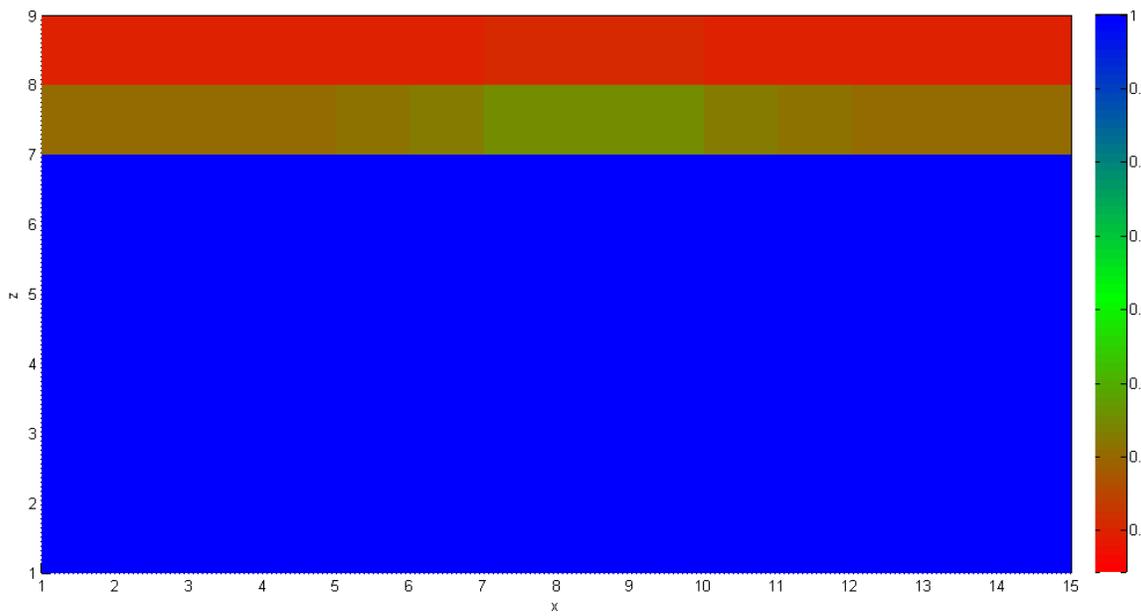


b) Sección A-A'.

Figura V.26. Caso I. Distribución de presión para el modelo burdo.

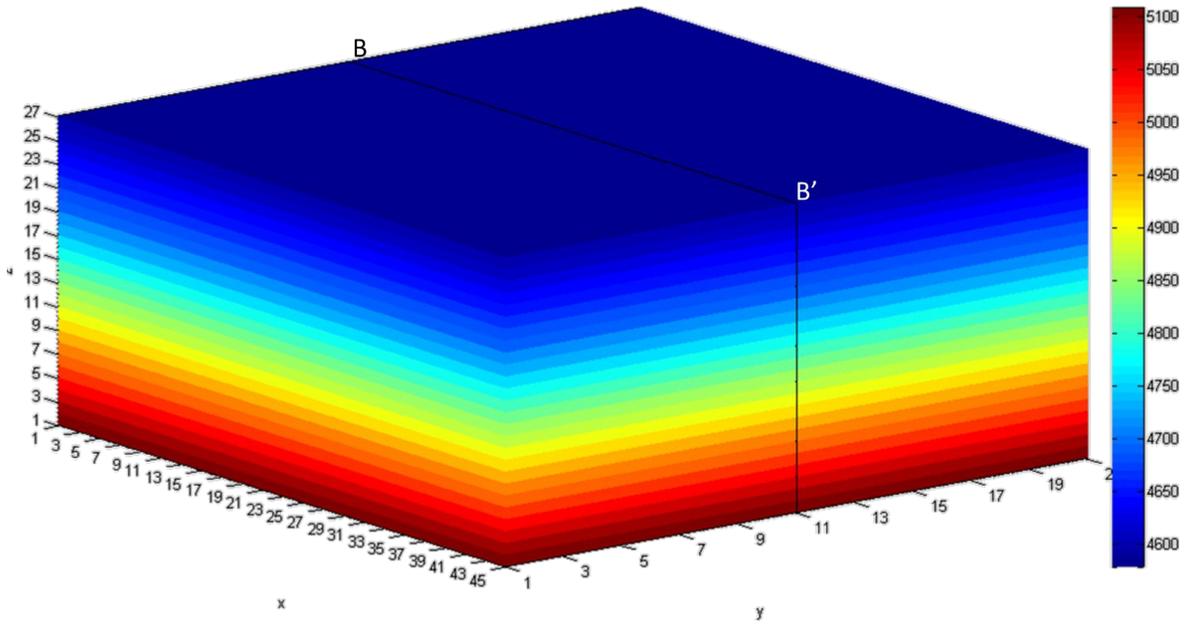


a) Vista 3D.

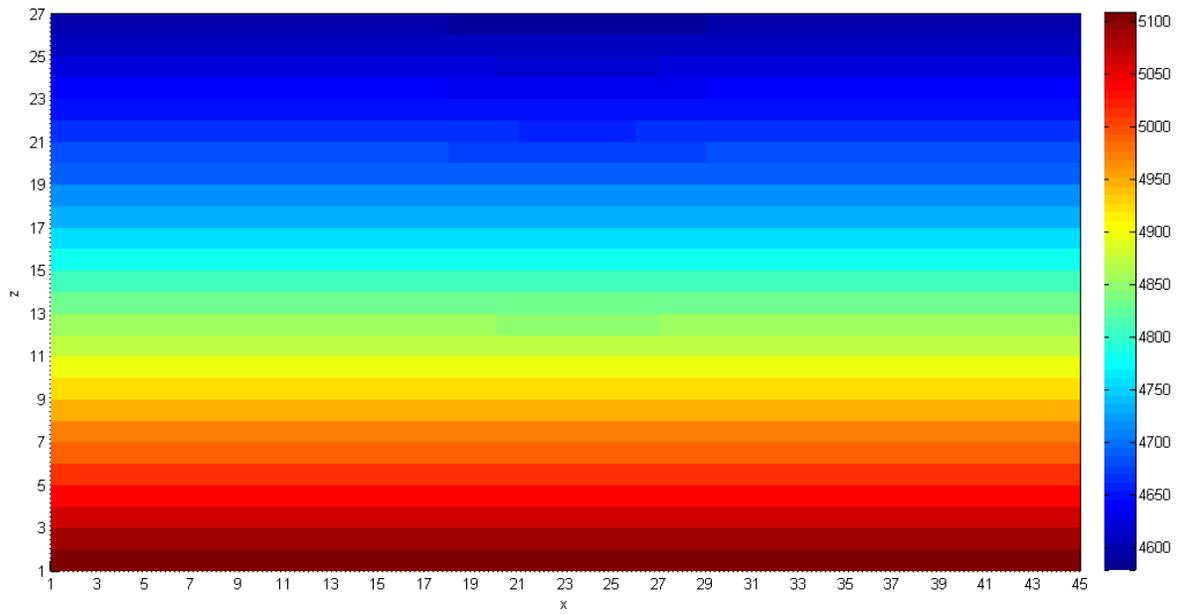


b) Sección A-A'.

Figura V.27. Caso I. Distribución de saturación para el modelo burdo.

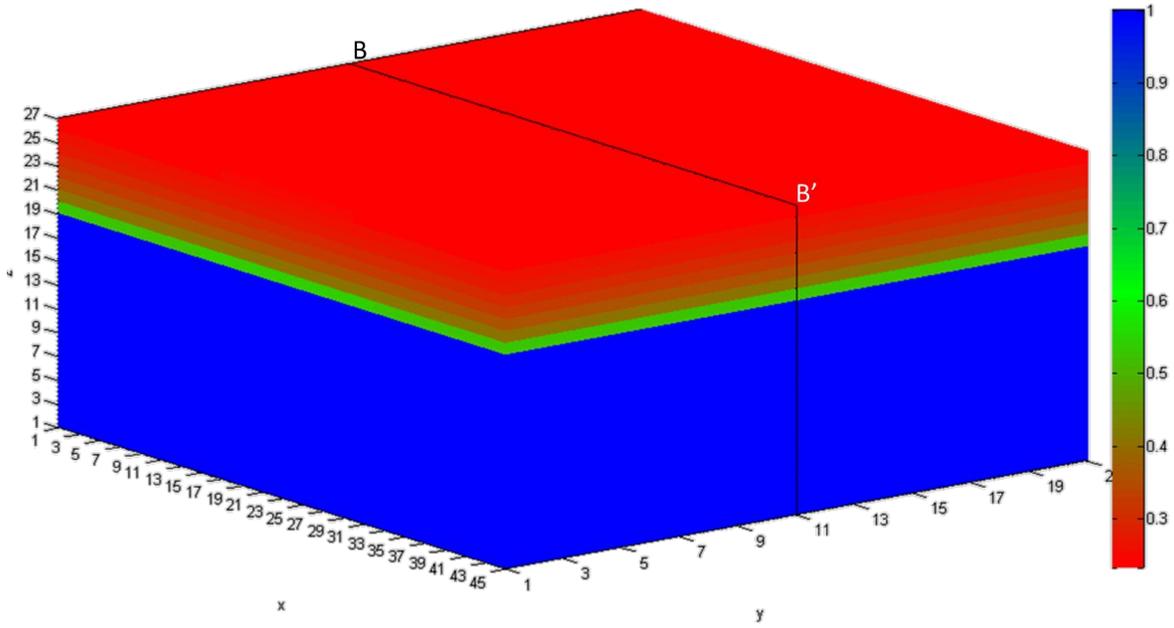


a) Vista 3D.

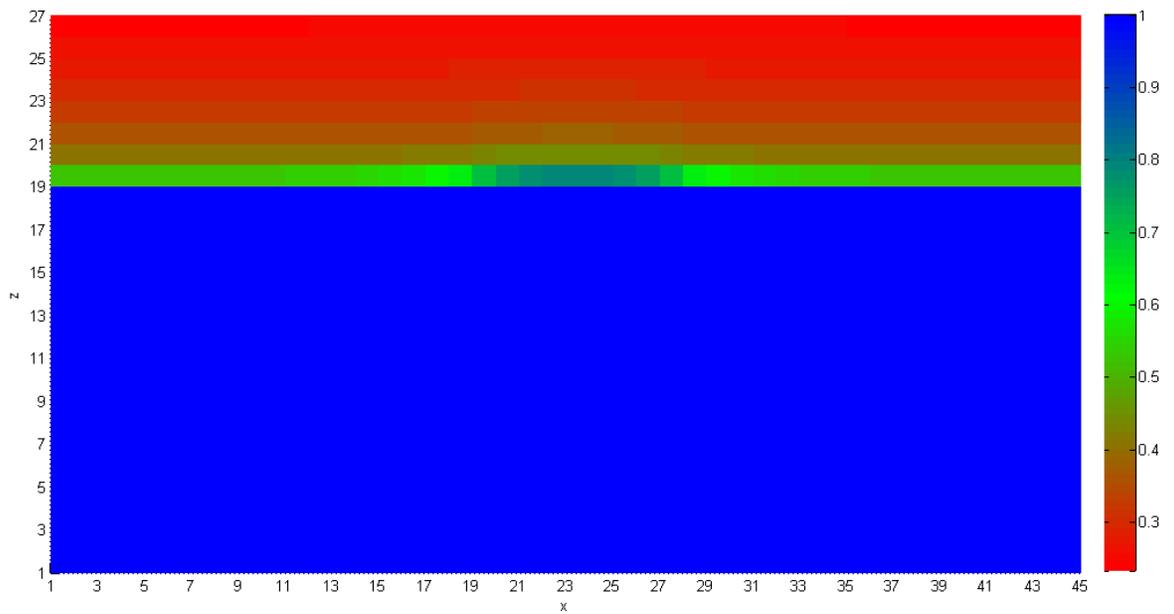


b) Sección B-B'.

Figura V.28. Caso I. Distribución de presión para el modelo fino.

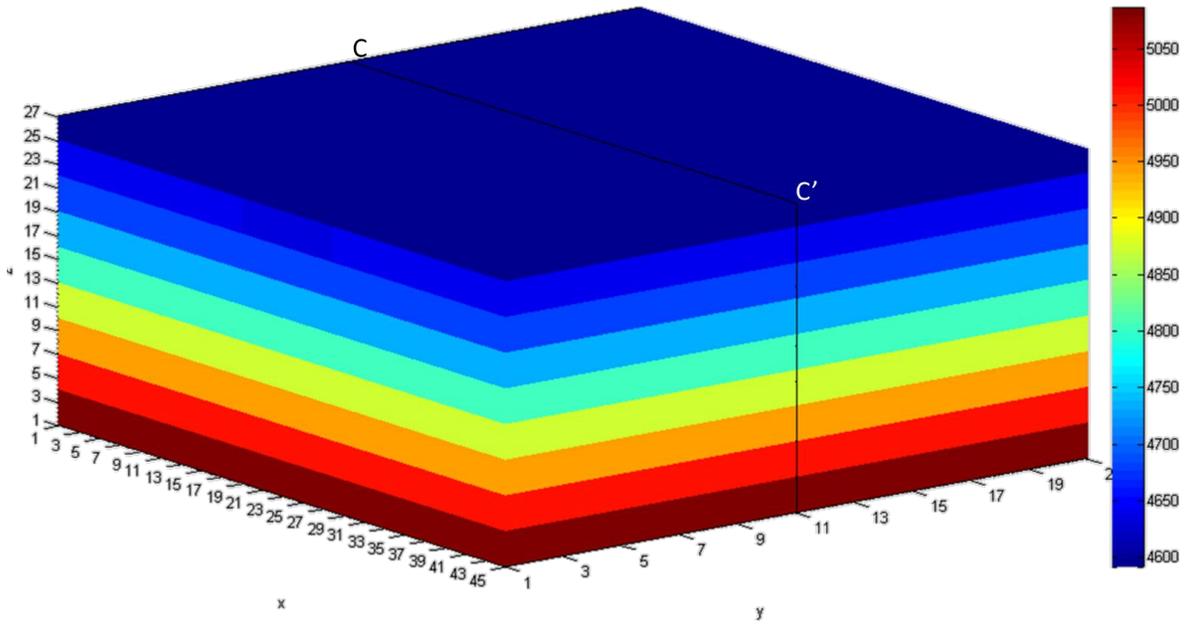


a) Vista 3D.

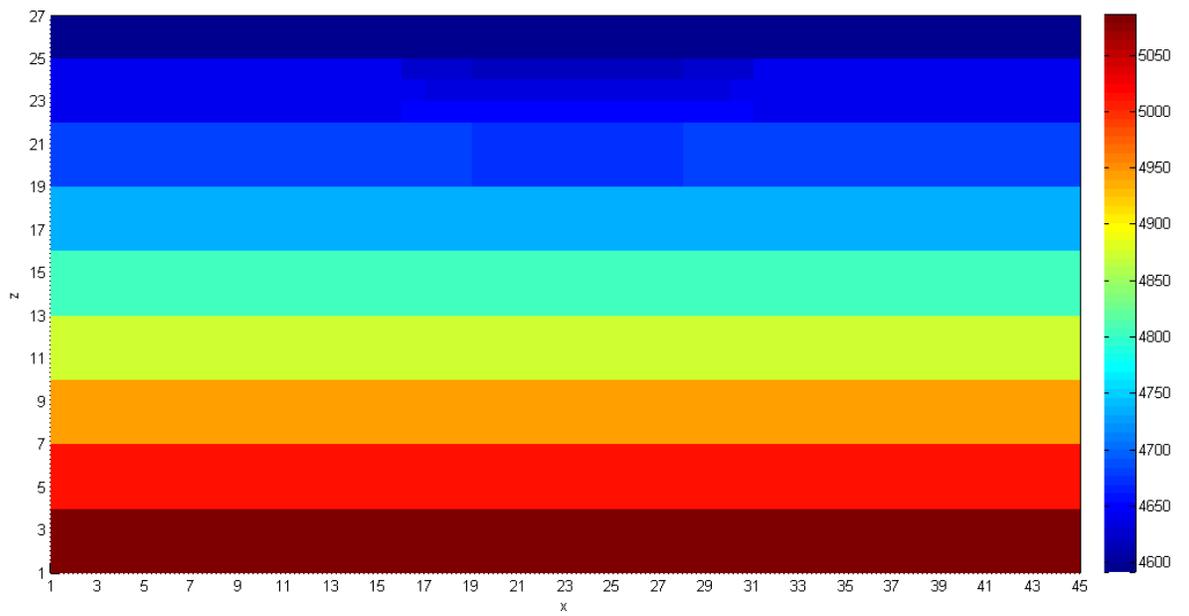


b) Sección B-B'.

Figura V.29. Caso I. Distribución de saturación para el modelo fino.

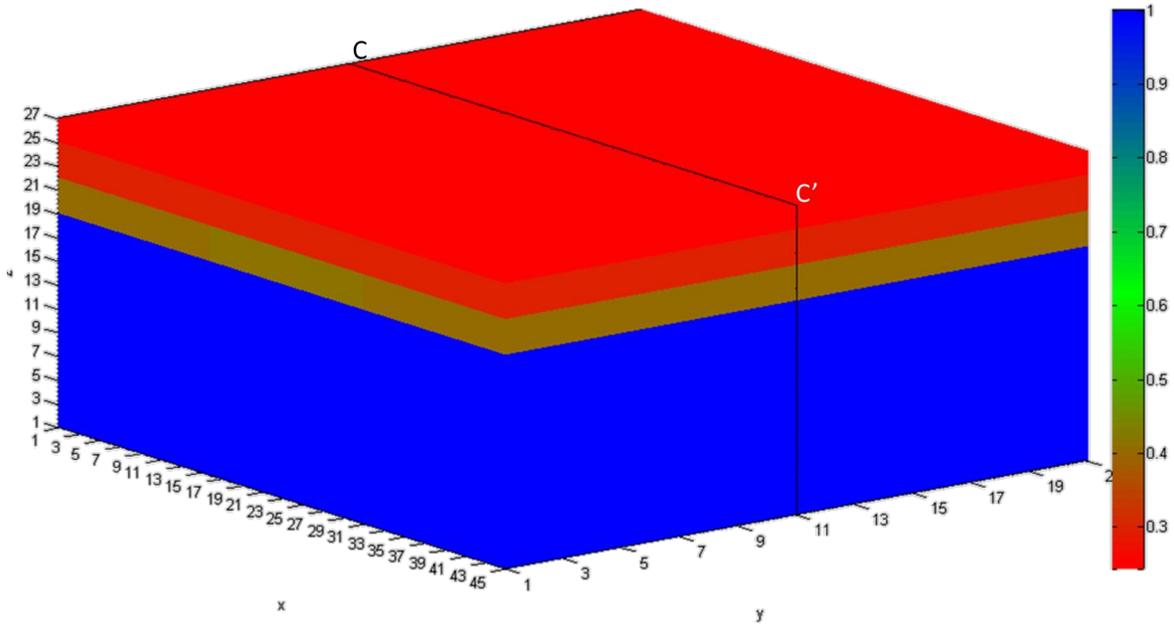


a) Vista 3D.

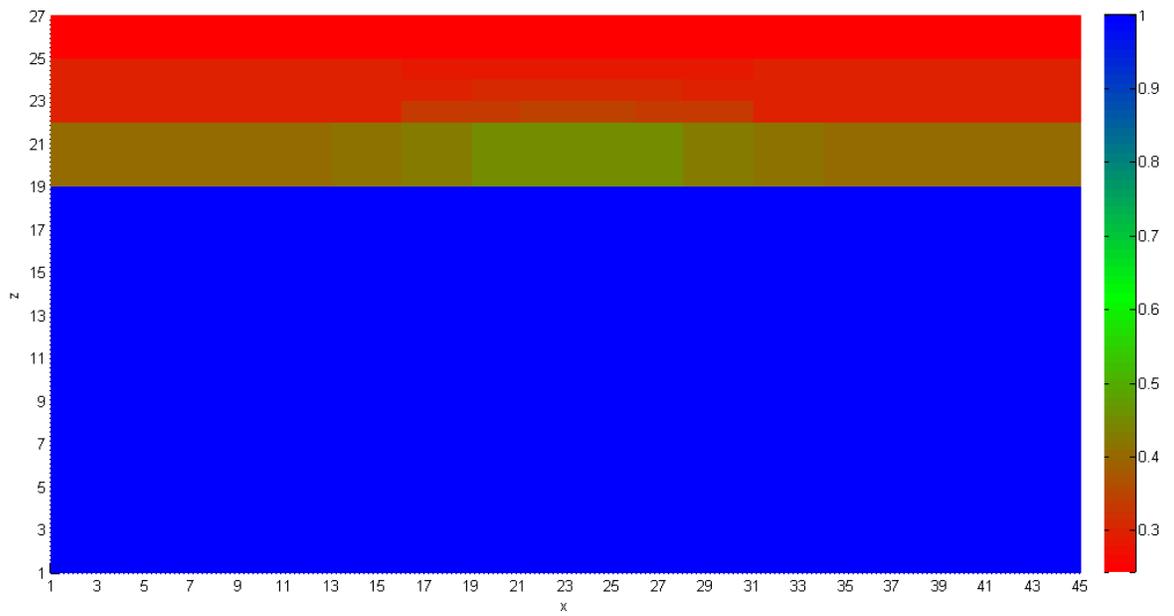


b) Sección C-C'.

Figura V.30. Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado R1.

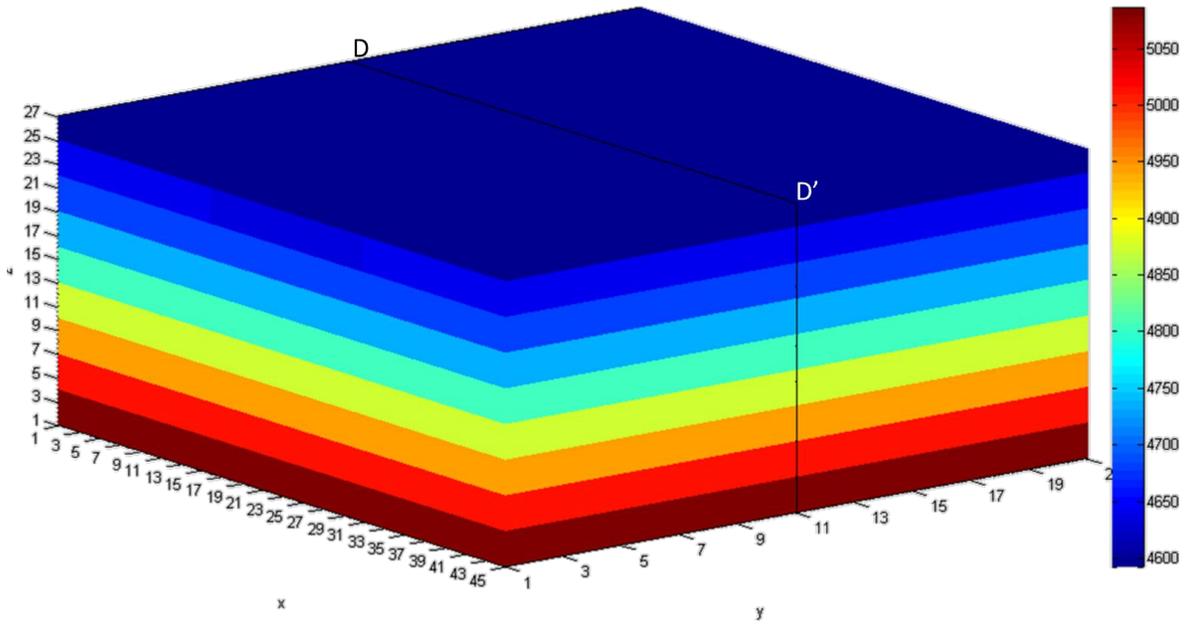


a) Vista 3D.

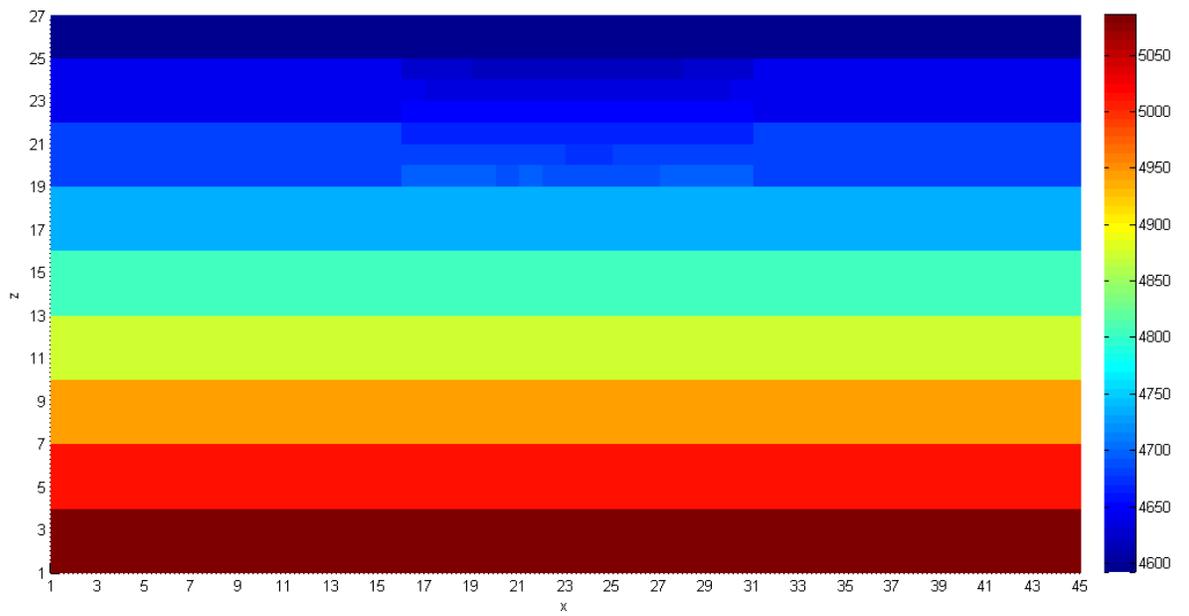


b) Sección C-C'.

Figura V.31. Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado R1.

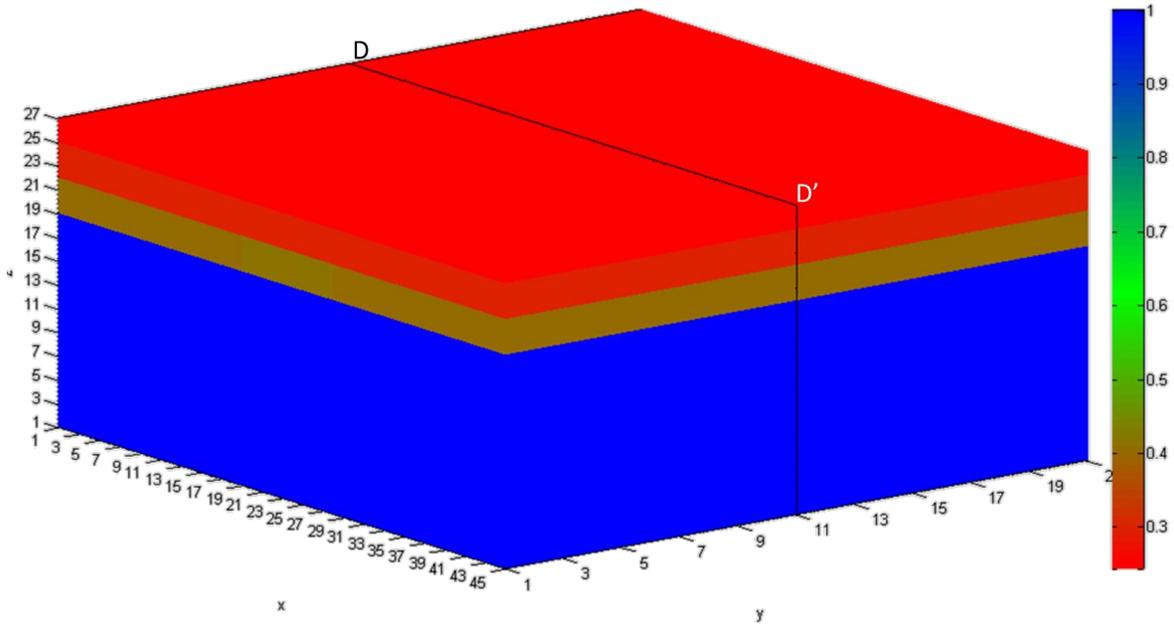


a) Vista 3D.

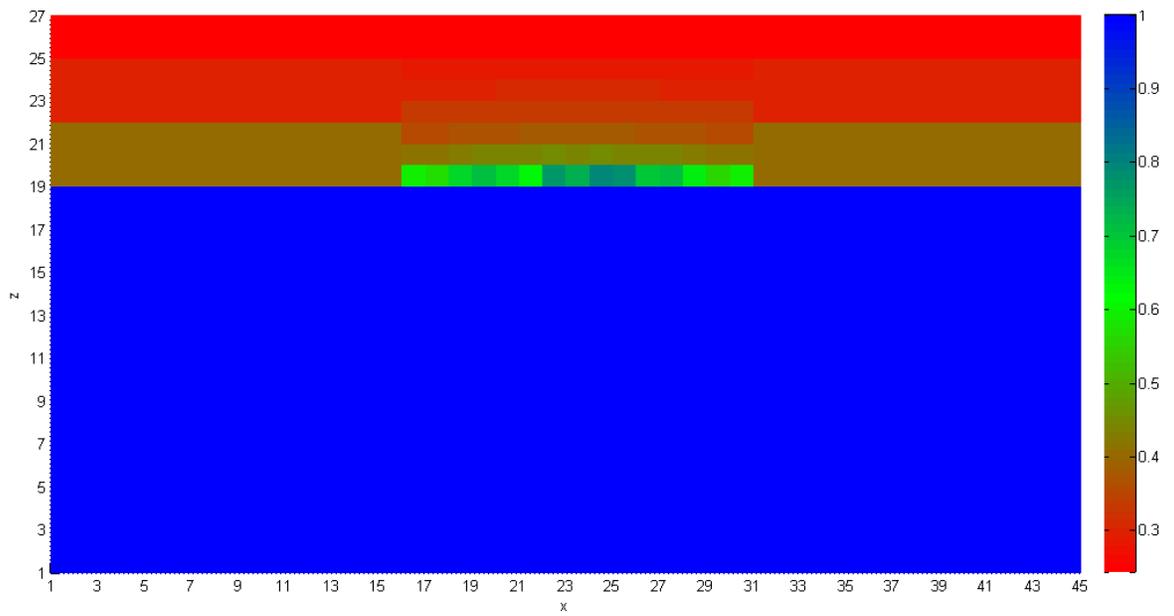


b) Sección D-D'.

Figura V.32. Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado R2.

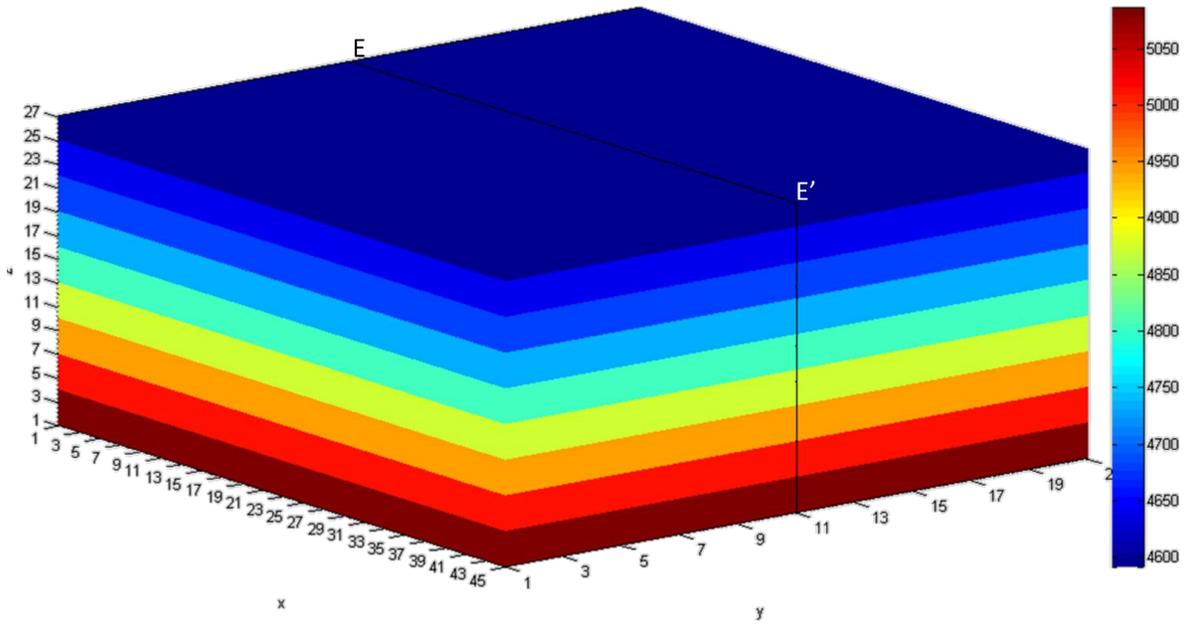


a) Vista 3D.

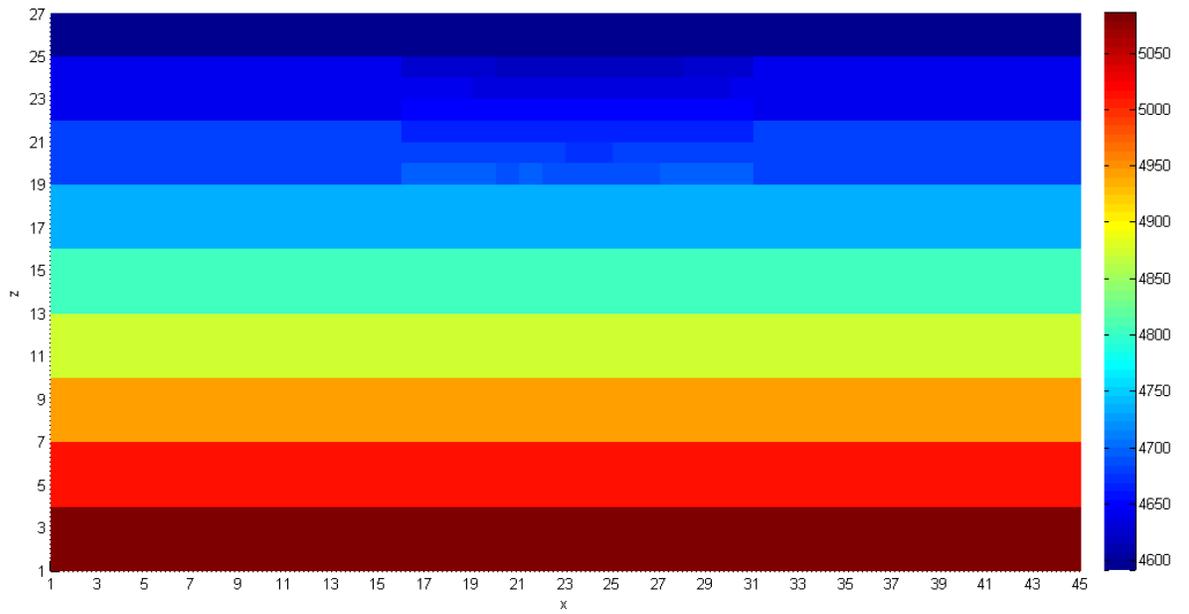


b) Sección D-D'.

Figura V.33. Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado R2.

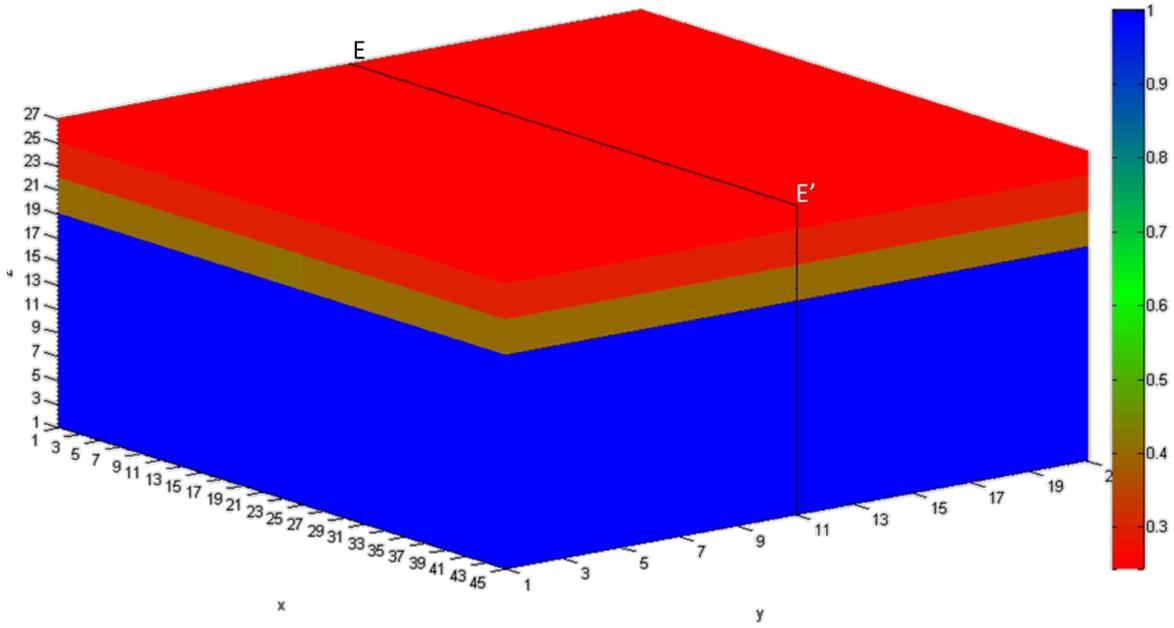


a) Vista 3D.

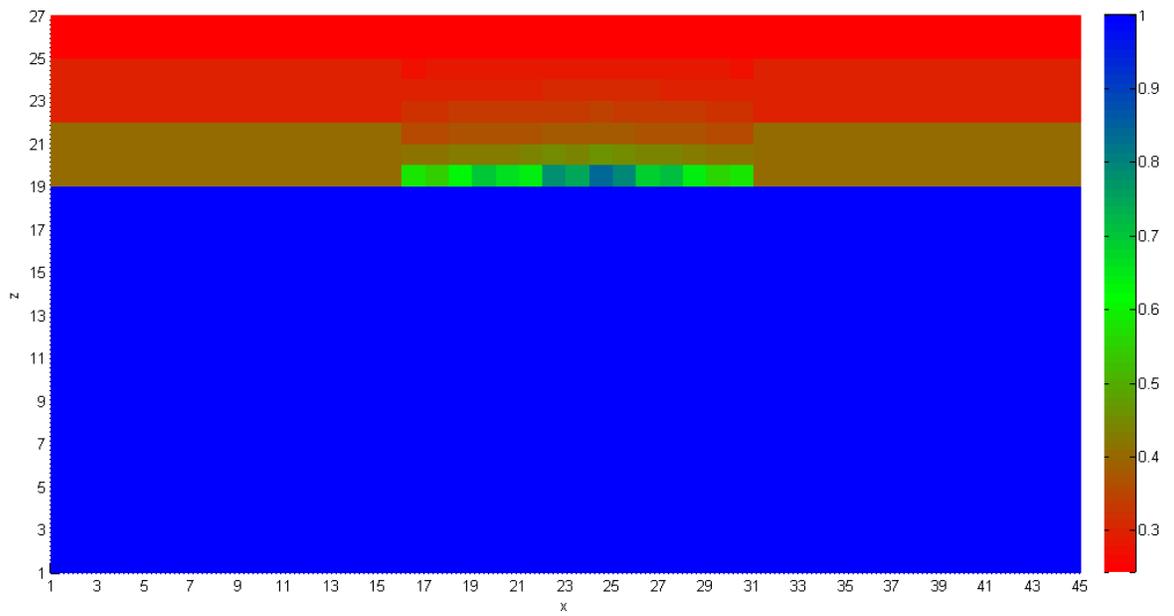


b) Sección E-E'.

Figura V.34. Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado R3.



a) Vista 3D.



b) Sección E-E'.

Figura V.35. Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado R3.

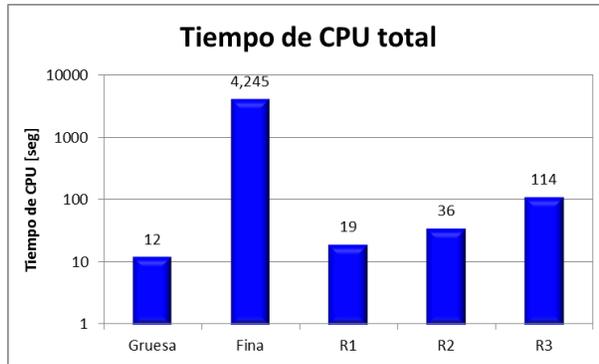


Figura V.36. Caso I. Tiempo de CPU total.

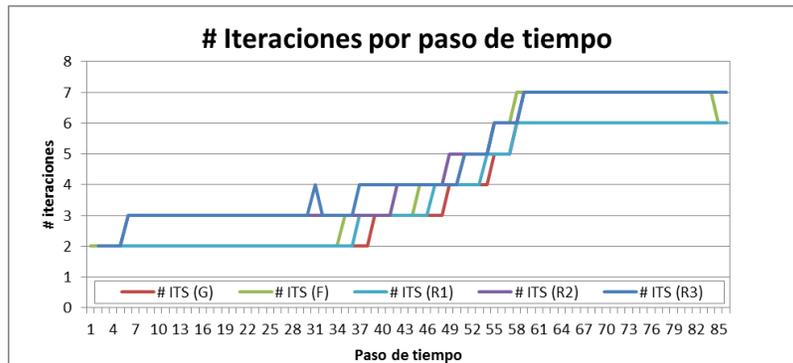


Figura V.37. Caso I. Número de iteraciones por paso de tiempo.

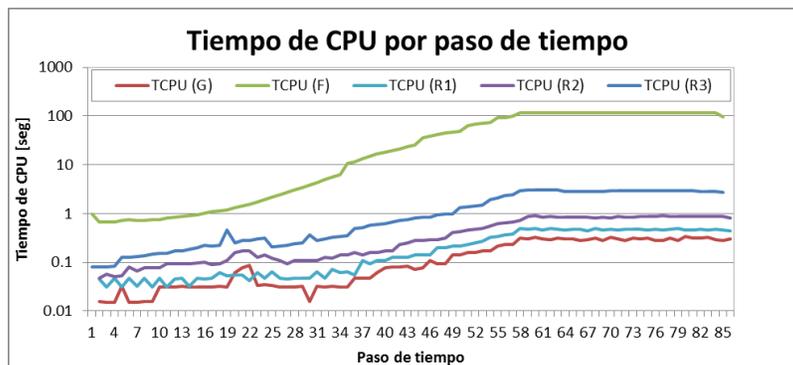


Figura V.38. Caso I. Tiempo de CPU por paso de tiempo.

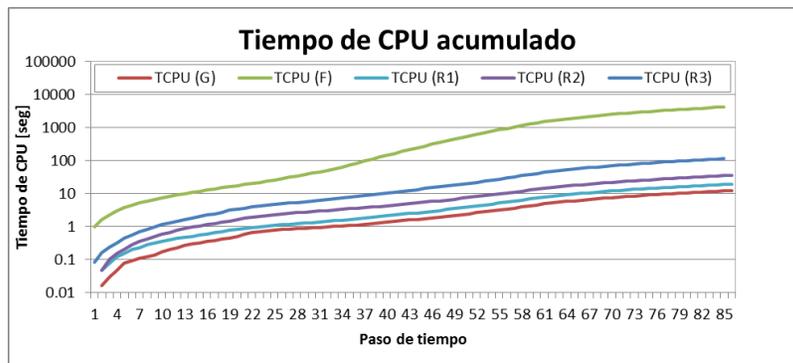


Figura V.39. Caso I. Tiempo de CPU acumulado.

Discusión de los resultados.

Saturación de agua. La **figura V.19** muestra que la malla fina presenta una mejor definición de la distribución vertical de la saturación de agua. La malla burda, aun cuando presenta valores idénticos de saturación de agua que la malla fina a una misma profundidad, exhibe una definición tosca de la misma. El caso del primer refinamiento, R1, representa muy bien la distribución vertical de la saturación de agua en las capas contiguas al pozo, sin embargo, al tener sólo una capa adicional ente los disparos y el contacto agua-aceite, se pierde esa finura. Los casos de refinamiento R2 y R3, al contemplar el refinamiento de todas las capas en la zona de transición, logran representar la distribución vertical de la saturación de agua de forma idéntica a la malla fina.

Error en presión-producción. Las **figuras V.20, V.21 y V.24** muestran que el error obtenido para la presión media del yacimiento, el gasto de aceite y la presión del bloque, en comparación con la malla fina, prácticamente es del 0%. No obstante las **figuras V.22, V.23 y V.25** muestran un comportamiento muy diferente para el gasto de agua, el flujo fraccional de agua y la presión de fondo fluyendo.

Las **figuras V.22 y V.23** presentan un comportamiento muy similar (finalmente, el flujo fraccional de agua es reflejo de la producción de agua). La malla burda mostró mayor producción de agua, y un rápido incremento en el error conforme avanzó el tiempo de simulación, hasta alcanzar valores superiores al 8%. El refinamiento R1 mostró una mejora en la estimación de la producción de agua, sin embargo, sólo redujo el error en un 2%. Los refinamientos R2 y R3 (que contemplaron el refinamiento de toda la zona de transición) presentan un comportamiento idéntico. Se observa un comportamiento más estable y se redujo el error a un máximo de 2%.

La **figura V.25** muestra que el error cometido en la presión de fondo fluyendo por los tres refinamientos, apenas pasa el 0%. El error máximo estimado con la malla burda es de -0.1%, sin embargo, éste error podría atribuirse a la geometría de la malla, ya que como se mostró en la **ecuación III.7**, la presión de fondo fluyendo es función del Δx , Δy y Δz .

En las **figuras V.26 a V.35** se observa que los refinamientos R2 y R3, presentan las distribuciones de presión y saturación de agua muy similares a las obtenidas en el caso de la malla fina en la vecindad del pozo, lo cual, se atribuye a que el refinamiento se aplicó sobre toda la zona de transición.

Tipo de refinamiento. Los resultados muestran que la aproximación de un refinamiento local sobre la malla de simulación, depende de la forma en que dicho refinamiento se genere.

Para éste caso, se observó que la producción de agua se ve afectada por la distribución inicial de agua. Al comparar la malla burda con la malla fina, **figura V.19.a**, se observa que para ambos casos la capa donde se ubica el pozo presenta una saturación de agua inicial de 29.5%. Sin embargo, entre el pozo productor y el contacto agua-aceite, la malla burda sólo tiene una capa, con saturación inicial de agua de 40.5%, mientras que para la malla fina existen 4 capas, lo que le da una mejor representación a la distribución de la saturación. Con esta diferencia en la distribución de agua se genera que el avance del agua se vea favorecido en la malla burda, por lo cual se exhibe una mayor producción de agua.

Por lo que respecta a los diferentes tipos de refinamiento, el refinamiento R1, mejora la distribución inicial de agua, sin embargo deja una capa burda por encima del contacto agua-aceite, lo cual genera un efecto similar a la malla burda. Por otro lado, los refinamientos R2 y R3 al generar el refinamiento sobre toda la zona de transición, es posible representar de forma idéntica la distribución de saturación de agua inicial en esta zona, y por lo tanto, mejorar de forma sustancial el comportamiento del avance del agua y la producción de la misma.

Tiempo de simulación. En los resultados mostrados en la **figura V.36** se observa que el tiempo requerido por la malla burda para 1,000 días de simulación es de 12 segundos, sin embargo, se observó que éste tipo de malla sobrestima la producción de agua. Una malla fina mejoró la estimación de producción de fluidos, aun cuando el tiempo requerido fue de 4,245 segundos, 342.6 veces más que la malla burda. La malla con refinamiento

R1, incrementó el tiempo de cómputo a 19 segundos, 1.6 veces más que la malla burda, no obstante, la mejora en la estimación de producción de fluidos no fue la esperada. El refinamiento R2 incrementó el tiempo de cómputo a 36 segundos, 2.9 veces el tiempo de la malla burda, y el error calculado en la estimación de la producción de fluidos se redujo a un máximo de 2%. El refinamiento R3 incrementó el tiempo de simulación a 114 segundos, 9.2 veces el tiempo de la malla burda. El error calculado con éste refinamiento fue idéntico al obtenido con el refinamiento R2.

En los resultados mostrados en la **figura V.37** se puede observar que el comportamiento en el número de iteraciones requeridas por paso de tiempo es muy similar para todos los casos, es decir, se realizan entre 2 y 3 iteraciones por paso de tiempo hasta el paso de tiempo 35, para incrementar gradualmente hasta 6 o 7 en el paso de tiempo 59, donde se mantiene hasta el final de la simulación.

El tiempo de CPU por paso de tiempo, **figura V.38**, muestra un comportamiento similar al observado en el número de iteraciones, por lo cual, es posible establecer que el tiempo de cómputo está relacionado directamente a la dimensión del sistema de ecuaciones.

Caso II. Pozos verticales.

Se considera un yacimiento con las mismas características geométricas y petrofísicas del caso I. El contacto agua-aceite para éste caso se ubica a la profundidad de 2,780 m. La presión inicial del yacimiento es de 4,800 psi a la profundidad de 2,659 m.

Esquema de explotación.

Se considera la explotación del yacimiento a través de dos pozos verticales produciendo a gasto de aceite constante de 3,000 bd cada uno. Se consideraron restricciones de producción, que limitan el flujo fraccional de agua a un máximo de 50% en cada conexión en el pozo, cerrando la conexión al alcanzar el valor límite.

Descripción de la malla de simulación.

Se realizó la simulación empleando una malla burda, una malla fina, y una con refinamiento local. El tiempo de simulación es de 1,000 días para todos los casos.

La malla base de simulación es de $(15 \times 7 \times 9)$, con un total de 945 bloques. Los pozos se encuentran ubicados en las coordenadas $(4,4)$ y $(12,4)$ y disparados en las capas 7 a 5. La **figura V.40**, muestra una vista de planta de la malla base, mientras la **figura V.41** muestra la sección A-A'.

La malla fina se construyó aplicando un factor de refinamiento tres en las tres direcciones, por lo que la malla fina tiene dimensiones $(45 \times 21 \times 27)$, con un total de 25,515 bloques. Los pozos quedan ubicados en las coordenadas $(11,11)$ y $(35,11)$ y disparados en las capas 21 a 13. La **figura V.42**, muestra una vista de planta de la malla, mientras la **figura V.43** muestra la sección B-B'.

La malla refinada presenta dos secciones refinadas localmente, una para cada pozo. En la direcciones (x, y) , la primera cubre los bloques $(3,3)$ a $(5,5)$, la segunda cubre los bloques $(11,3)$ a $(13,5)$, y en la dirección z ambas secciones cubren las capas 4 a 8 de la malla base. El total de bloques (burdos más refinados) es 3,285. Los pozos están ubicados en el bloque $(5,5)$ y disparados en las capas 12 a 4 de cada sección refinada. La **figura**

V.44, muestra una vista de planta de la malla, mientras la **figura V.45** muestra la sección C-C'.

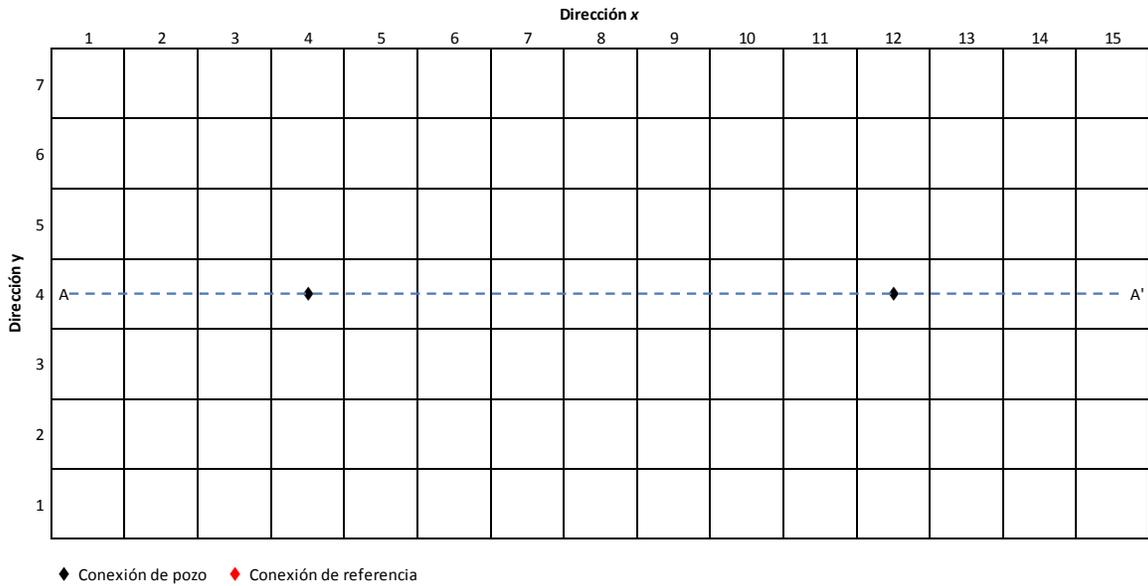


Figura V.40. Caso II. Vista de planta de la malla base.

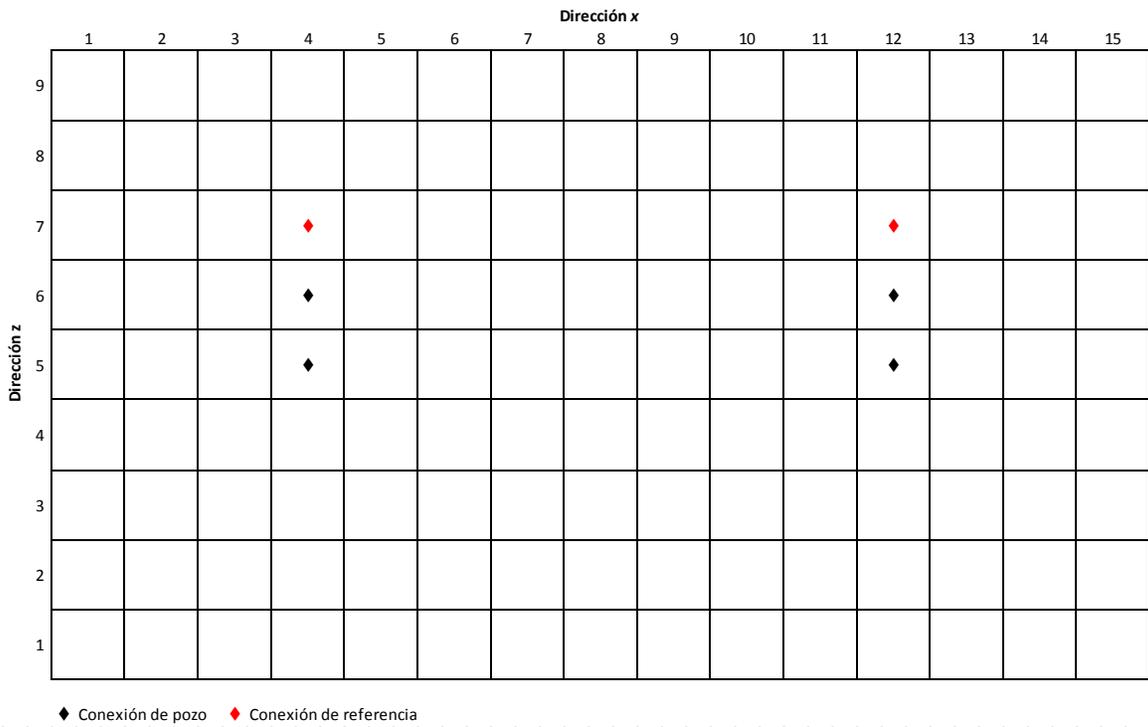


Figura V.41. Caso II. Sección A-A' de la malla base.

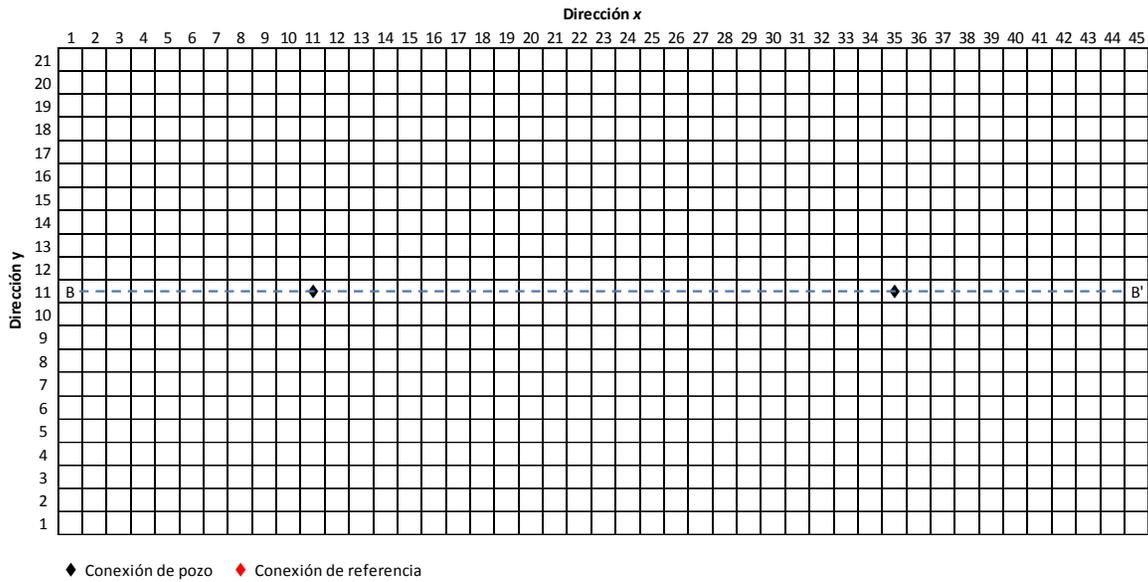


Figura V.42. Caso II. Vista de planta de la malla fina.

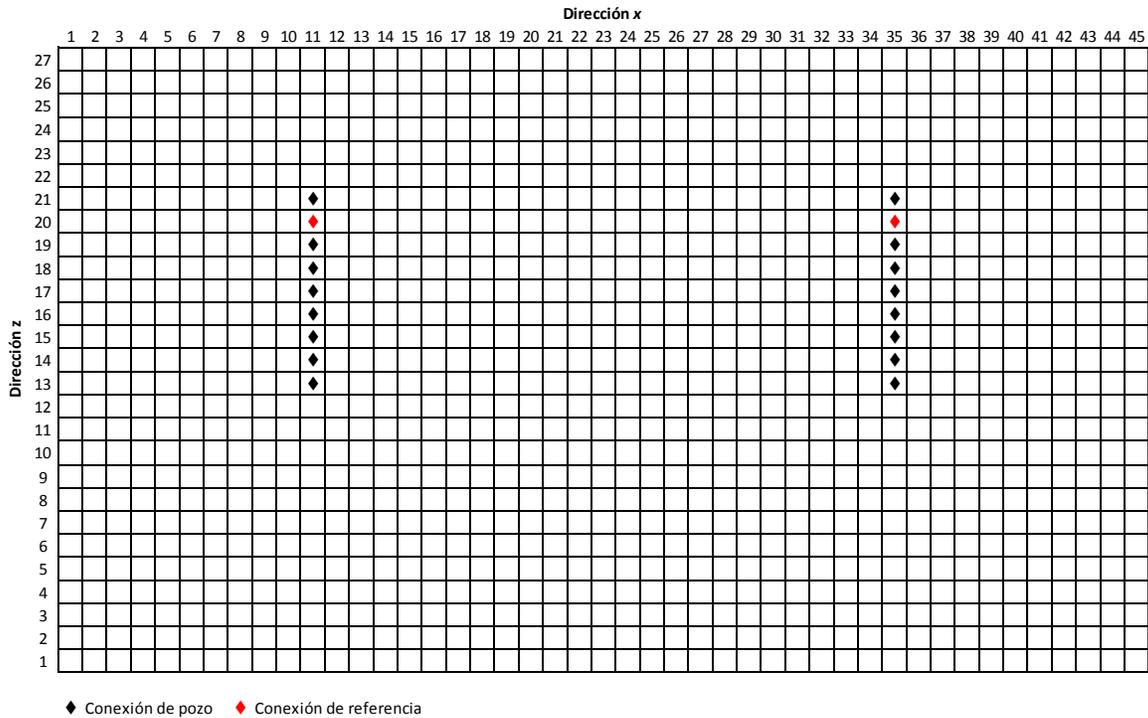


Figura V.43. Caso II. Sección B-B' de la malla fina.

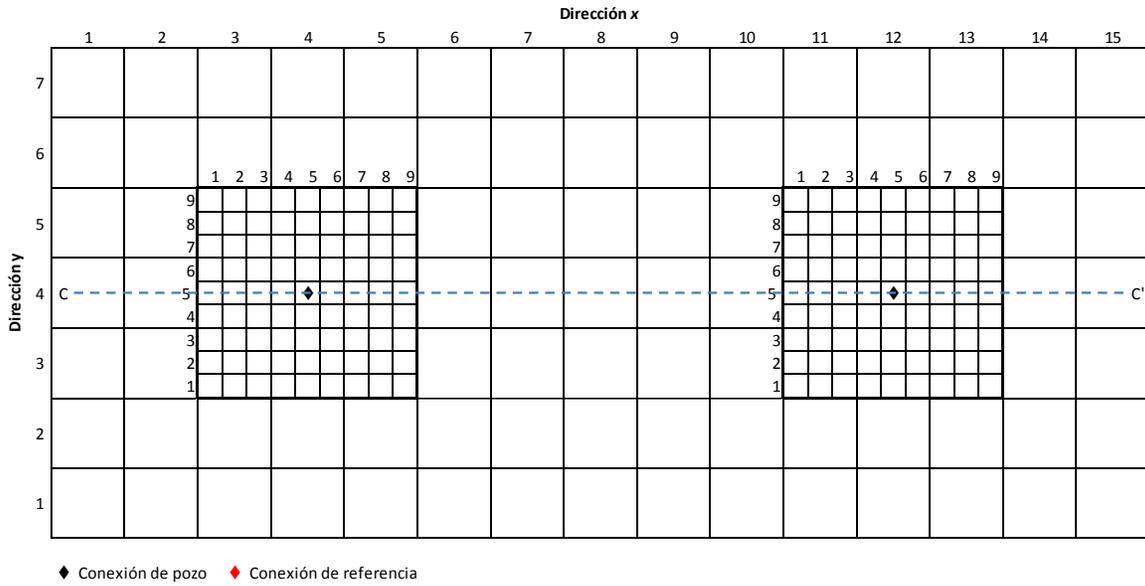


Figura V.44. Caso II. Vista de planta de la malla refinada.

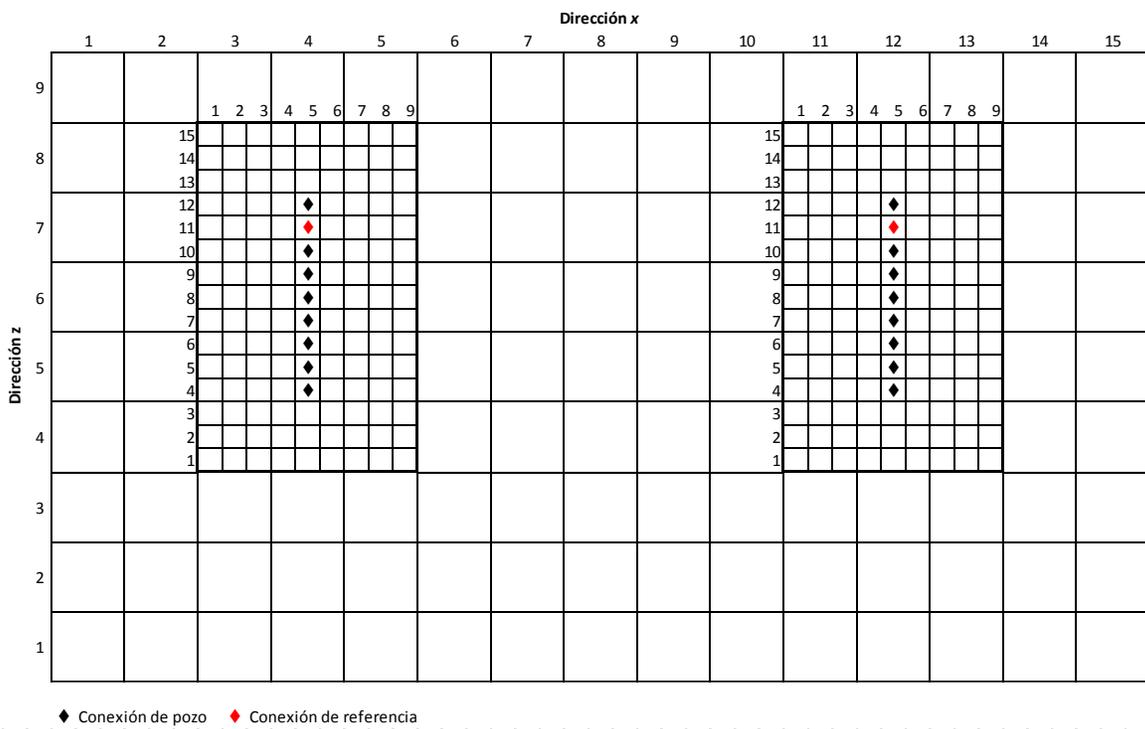


Figura V.45. Caso II. Sección C-C' de la malla refinada.

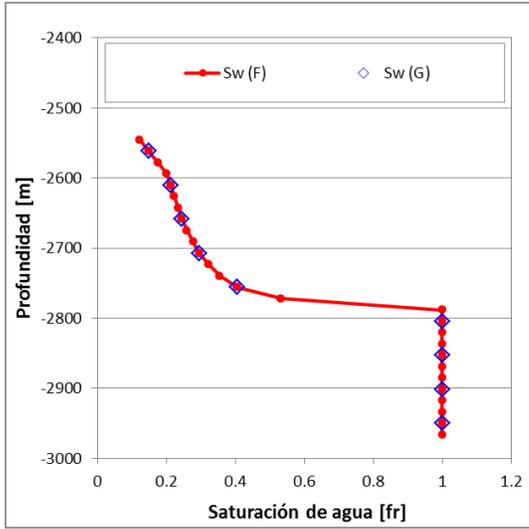
Resultados.

La **figura V.46** muestra el perfil vertical de saturación de agua inicial. Las **figuras V.47 a V.52** muestran la presión media del yacimiento, el gasto de aceite del pozo, gasto de agua, el flujo fraccional de agua del pozo, la presión del bloque y la presión de fondo fluyente, así como el error calculado de cada caso con respecto a lo obtenido por la malla fina, respectivamente. La presión media del yacimiento fue calculada como un promedio ponderado en volumen de la presión de todos los bloques del modelo (motivo por el cual, la presión inicial es superior a la presión de 4,800 psi dada al plano de referencia). Las presiones de fondo y fluyente del pozo están referidas a la conexión de referencia (**figuras V.40 a V.45**).

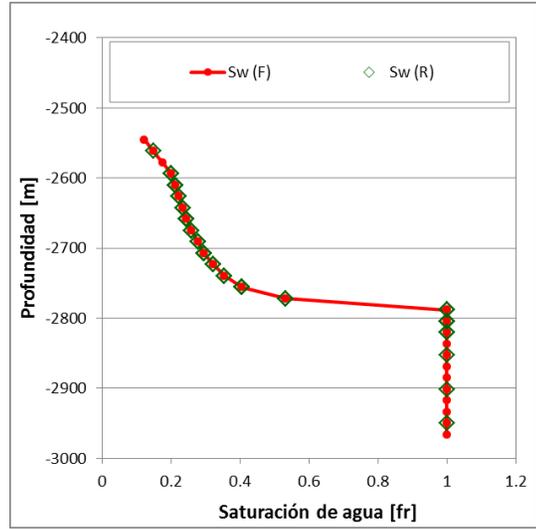
La **figura V.53** muestra, para un pozo, el comportamiento del flujo fraccional de agua para las tres conexiones de la malla burda y las nueve conexiones de las mallas fina y refinada. Los resultados mostrados de la **figura V.48 a V.53** pertenecen al pozo 1. El **Apéndice D** muestra que los resultados obtenidos en ambos pozos son idénticos.

Las **figuras V.54 a V.59** presentan la distribución de presión y la distribución de saturación en el modelo al tiempo final de 1,000 días de simulación.

Las **figuras V.60 a V.63** muestran el tiempo de CPU total de simulación, el número de iteraciones por paso de tiempo, el tiempo de CPU por paso de tiempo y el tiempo de CPU acumulado. Todos los tiempos reportados, corresponden al tiempo empleado por el simulador sólo durante la construcción y solución del sistema de ecuaciones en cada iteración del método de Newton-Raphson.



a) Malla fina Vs Malla burda.



b) Malla fina Vs Malla refinada.

Figura V.46. Caso II. Perfil de saturación.

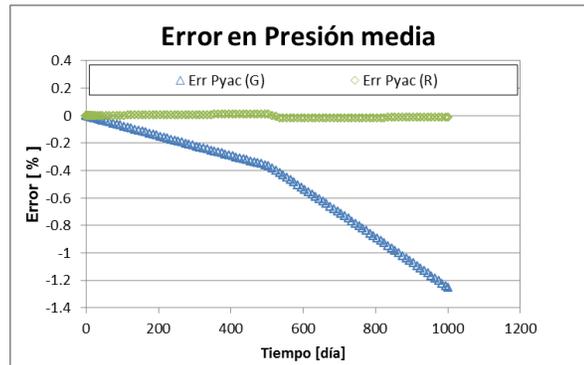
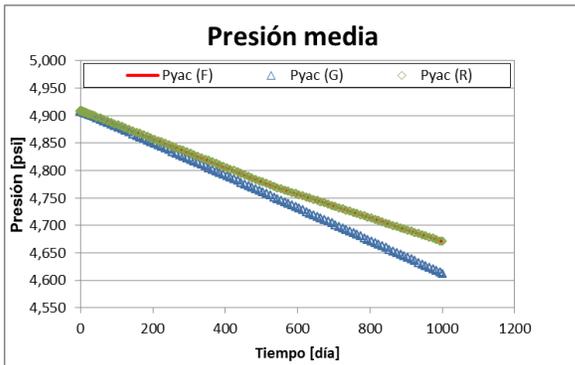


Figura V.47. Caso II. Presión media de yacimiento.

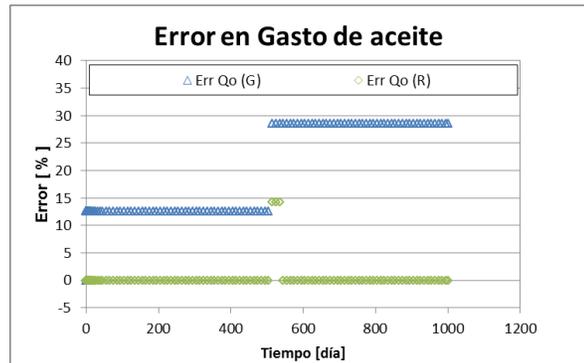
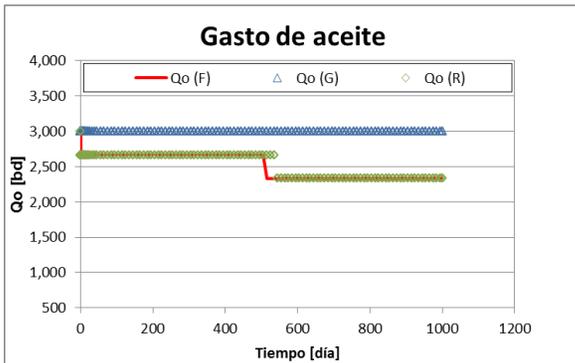


Figura V.48. Caso II. Gasto de aceite.

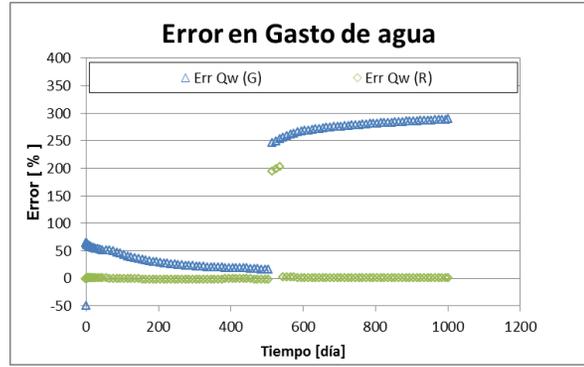
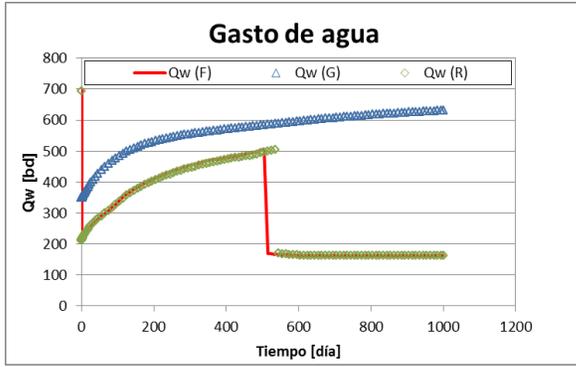


Figura V.49. Caso II. Gasto de agua.

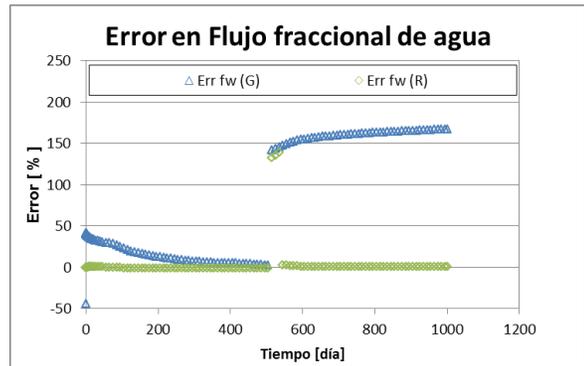
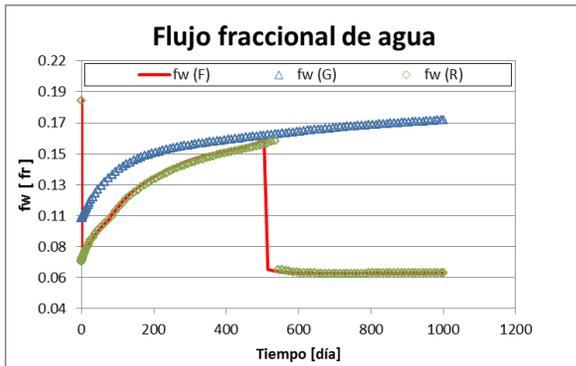


Figura V.50. Caso II. Flujo fraccional de agua.

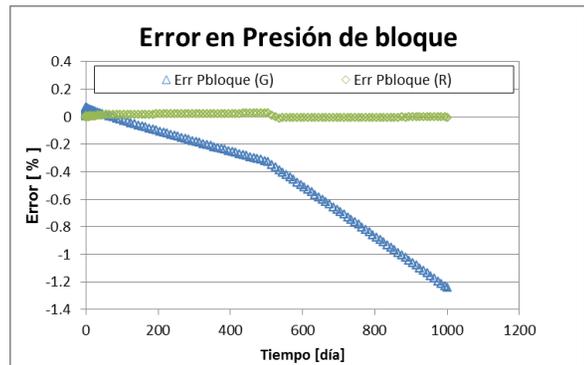
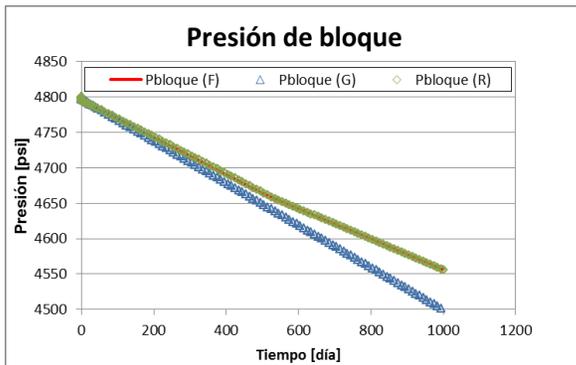


Figura V.51. Caso II. Presión de bloque.

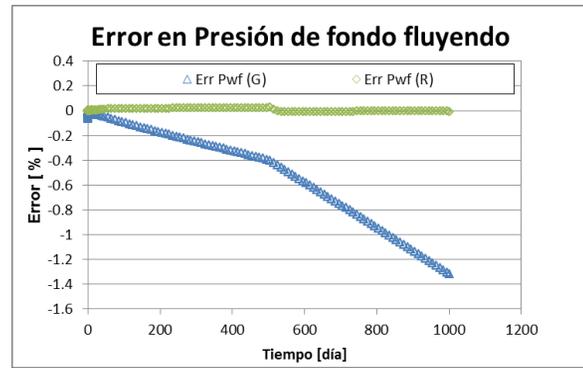
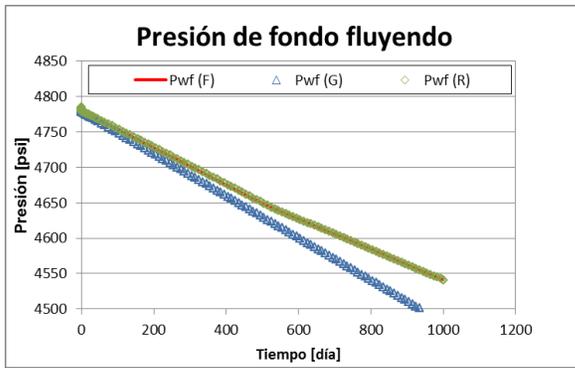


Figura V.52. Caso II. Presión de fondo fluyendo.

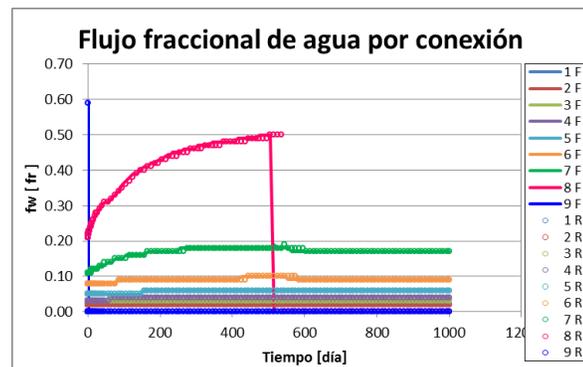
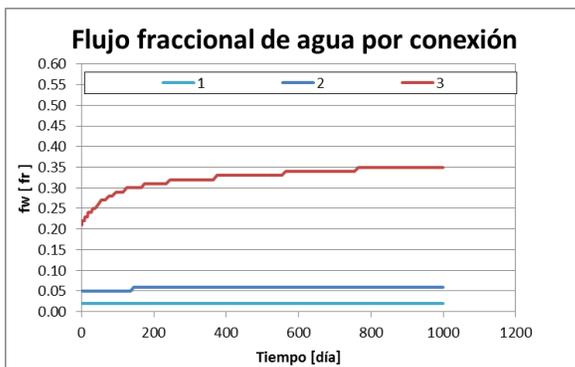
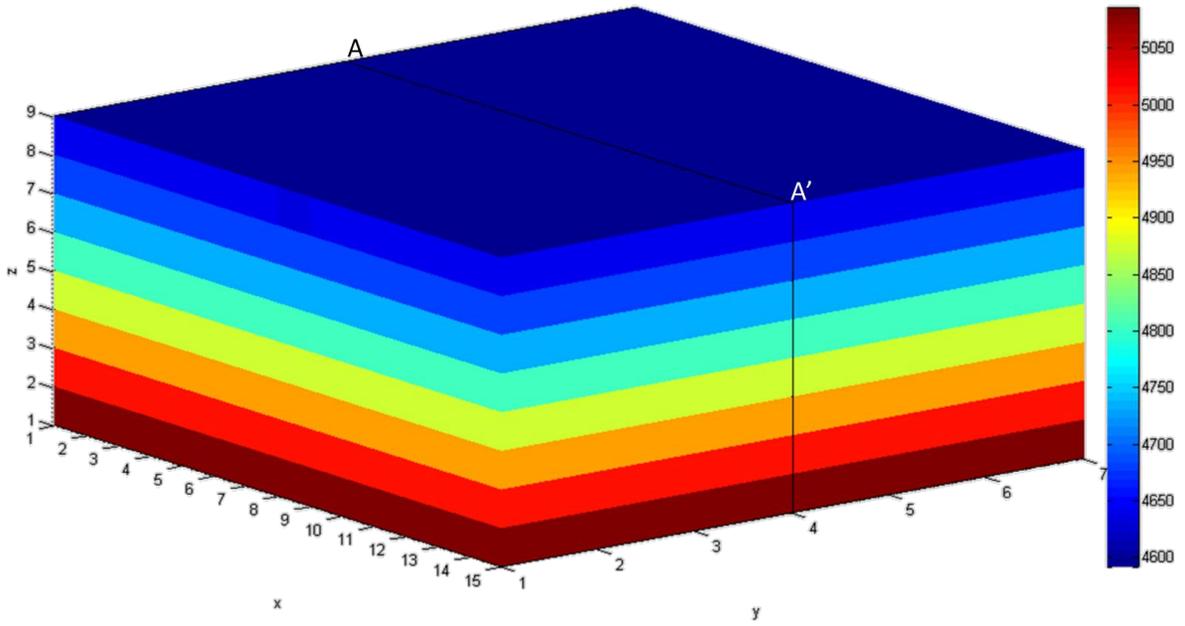
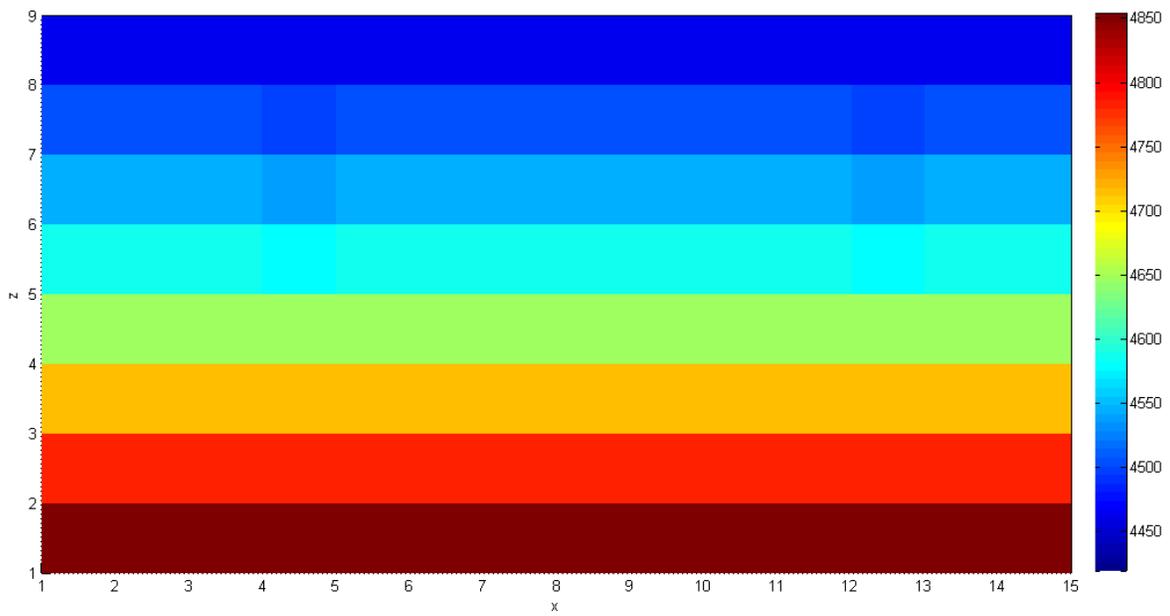


Figura V.53. Caso II. Flujo fraccional de agua en las conexiones del pozo 1.

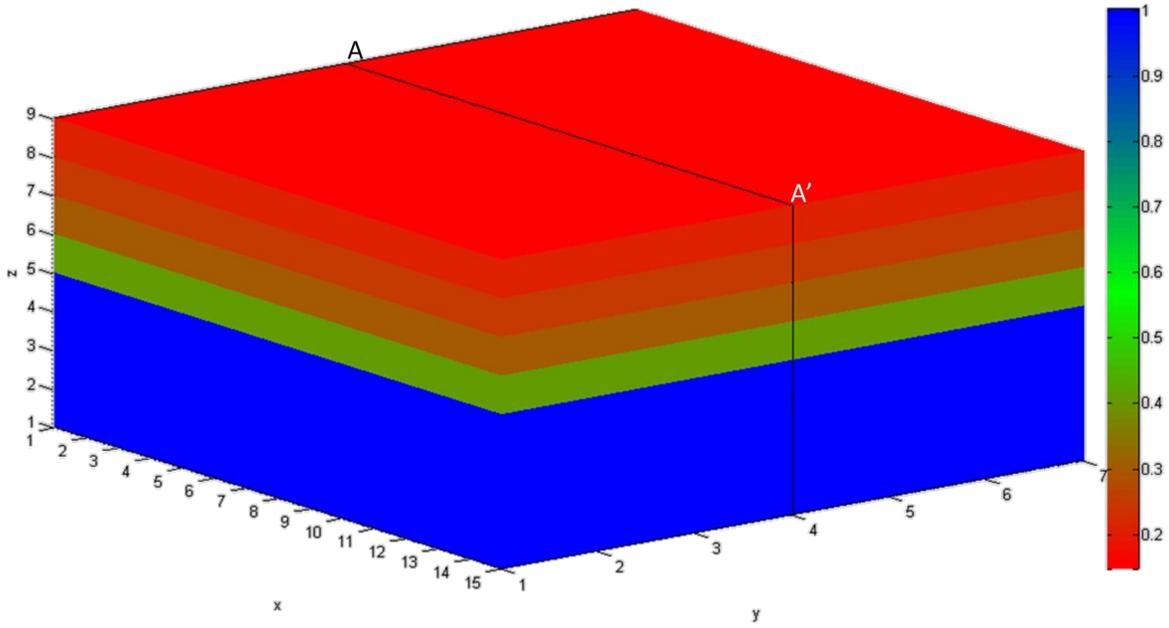


a) Vista 3D.

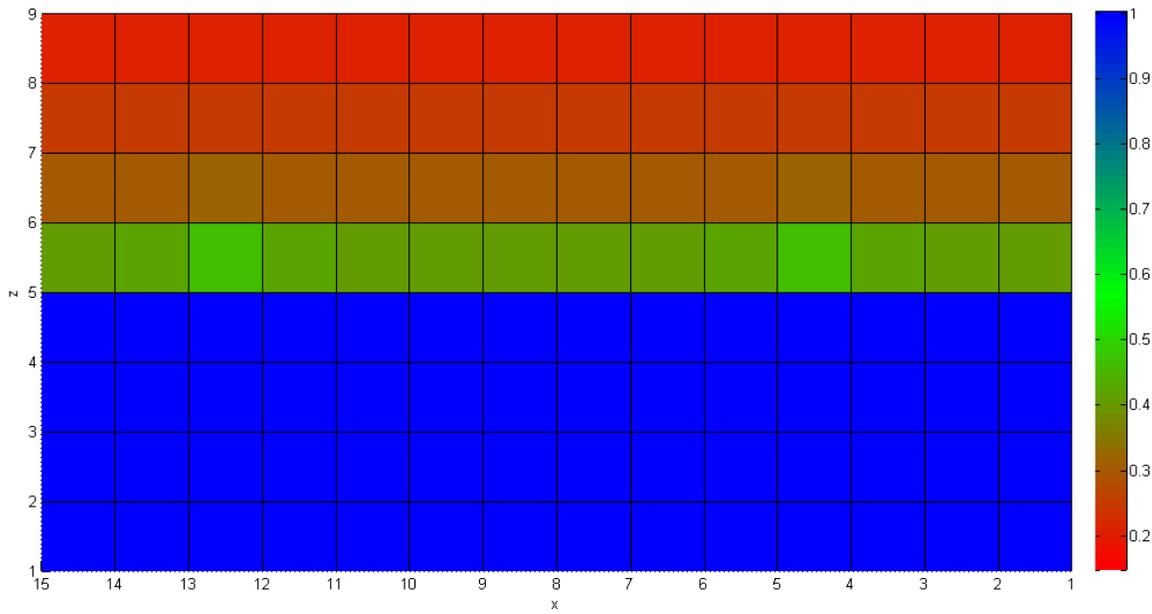


b) Sección A-A'.

Figura V.54. Caso I. Distribución de presión para el modelo burdo.

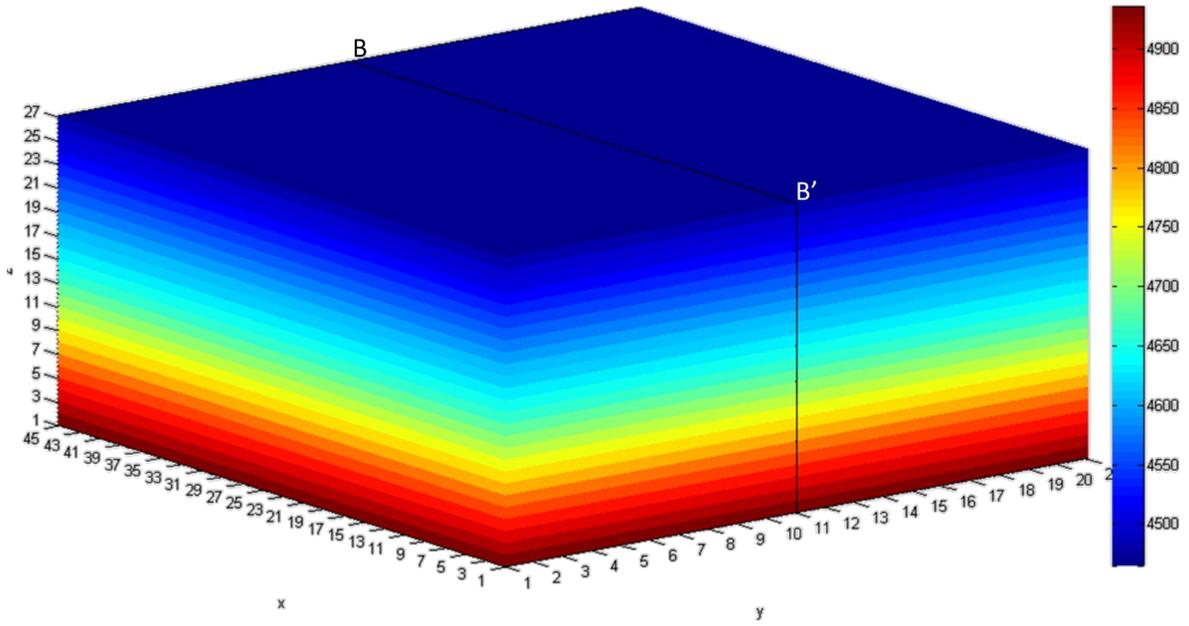


a) Vista 3D.

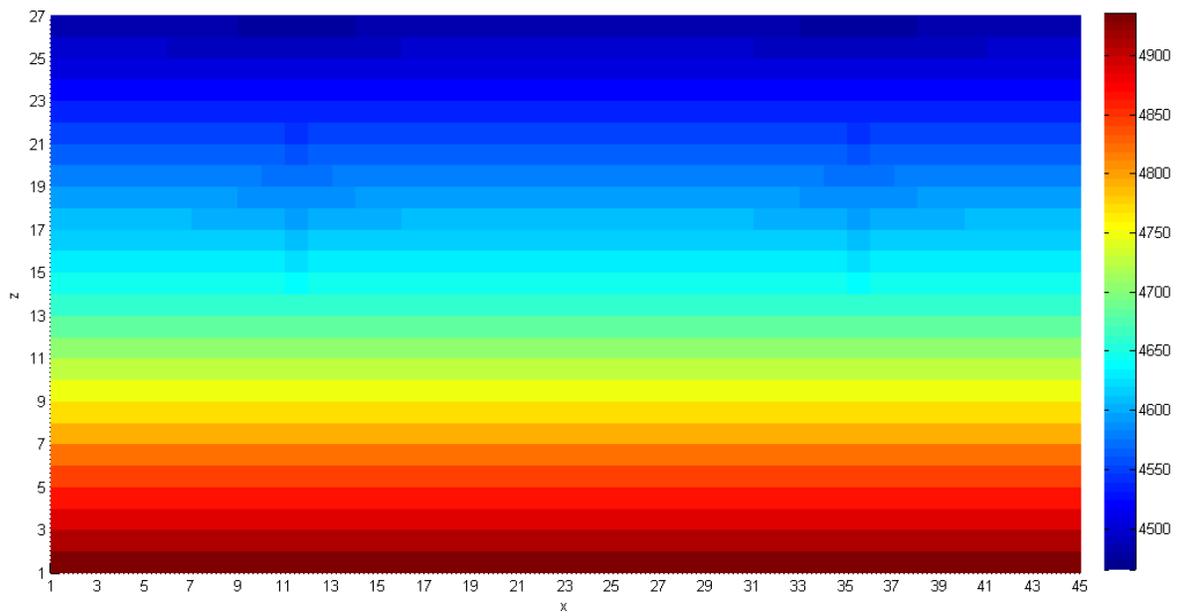


b) Sección A-A'.

Figura V.55. Caso I. Distribución de saturación para el modelo burdo.

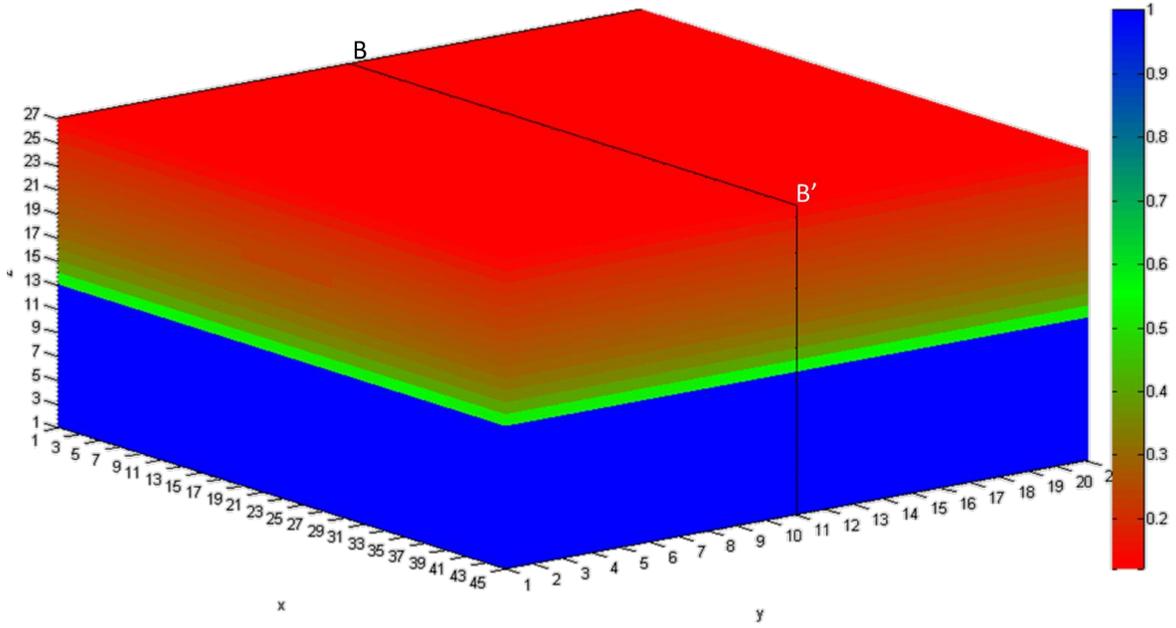


a) Vista 3D.

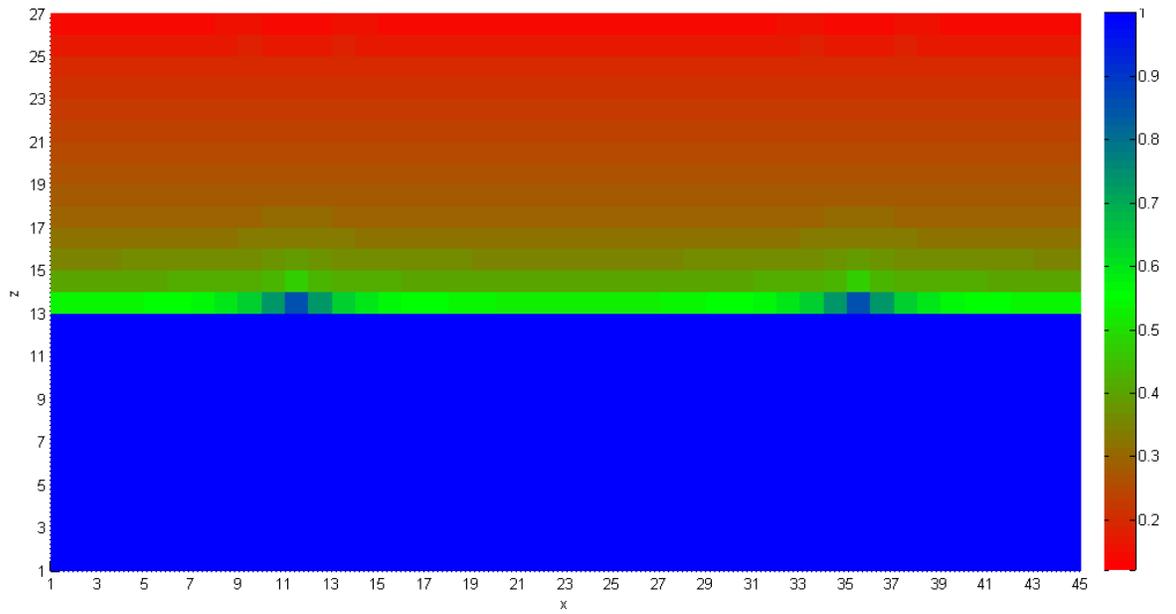


b) Sección B-B'.

Figura V.56. Caso I. Distribución de presión para el modelo fino.

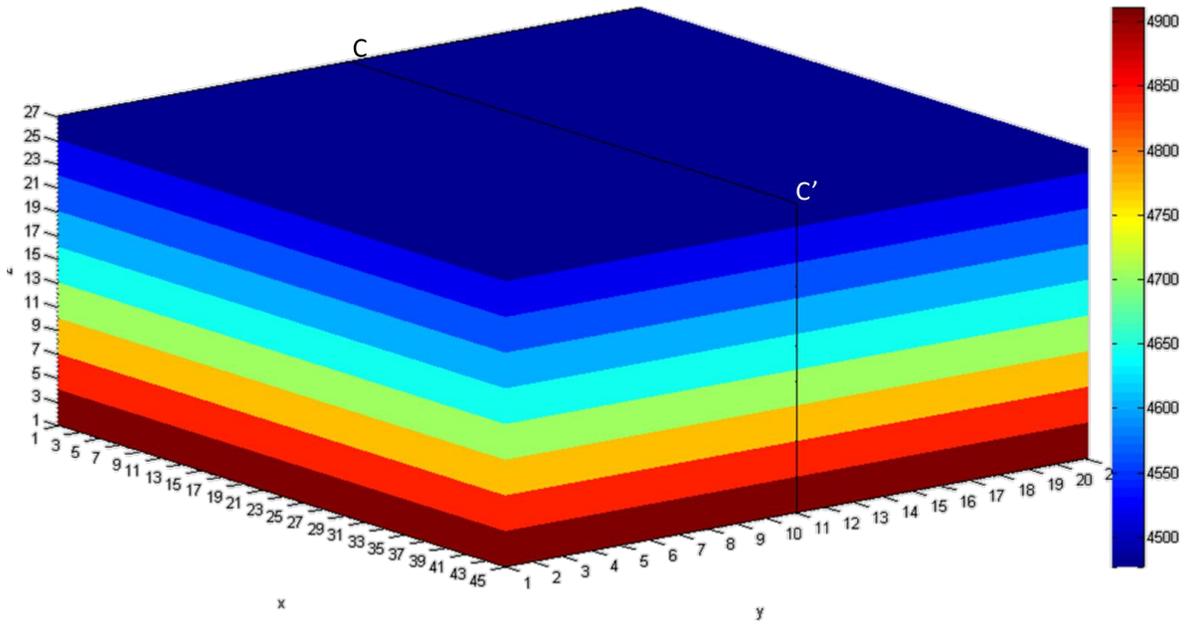


a) Vista 3D.

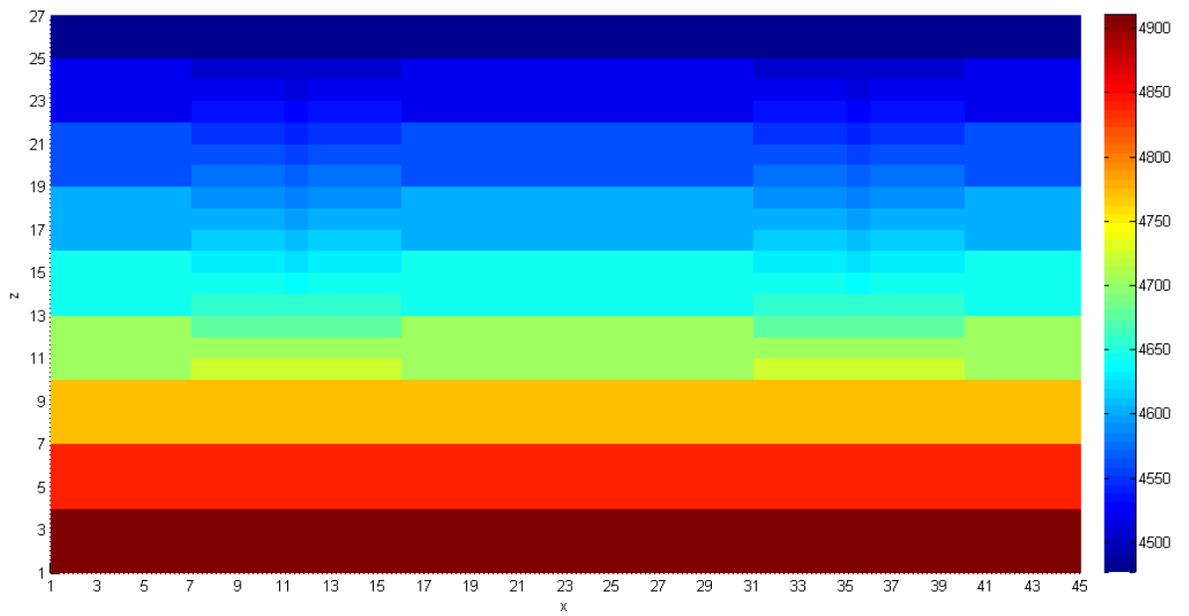


b) Sección B-B'.

Figura V.57. Caso I. Distribución de saturación para el modelo fino.

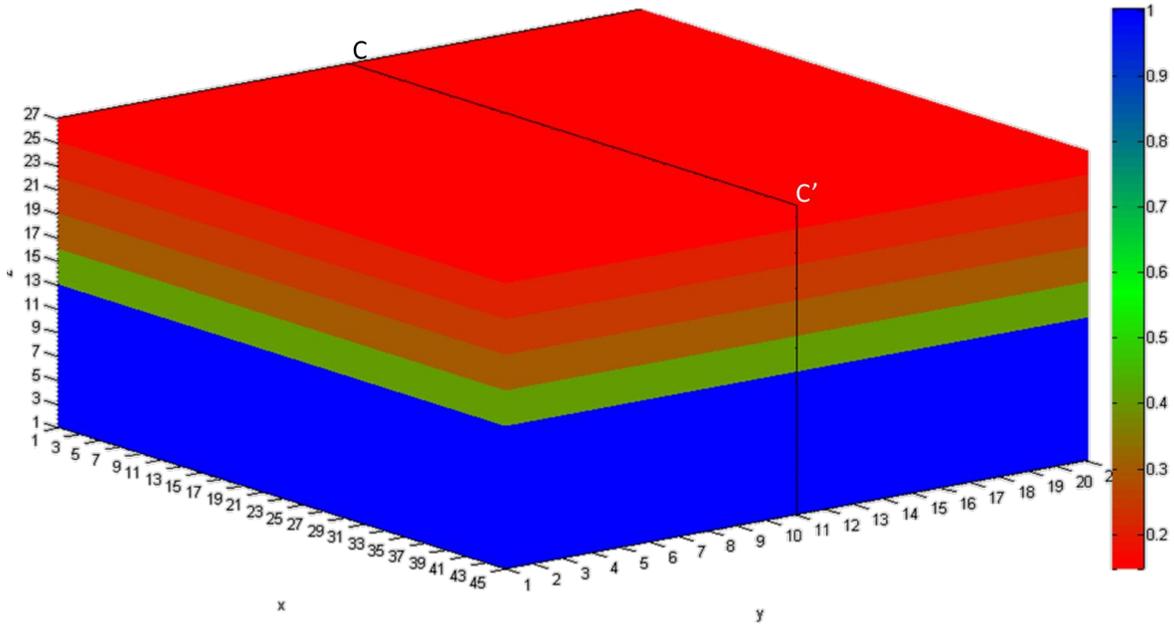


a) Vista 3D.

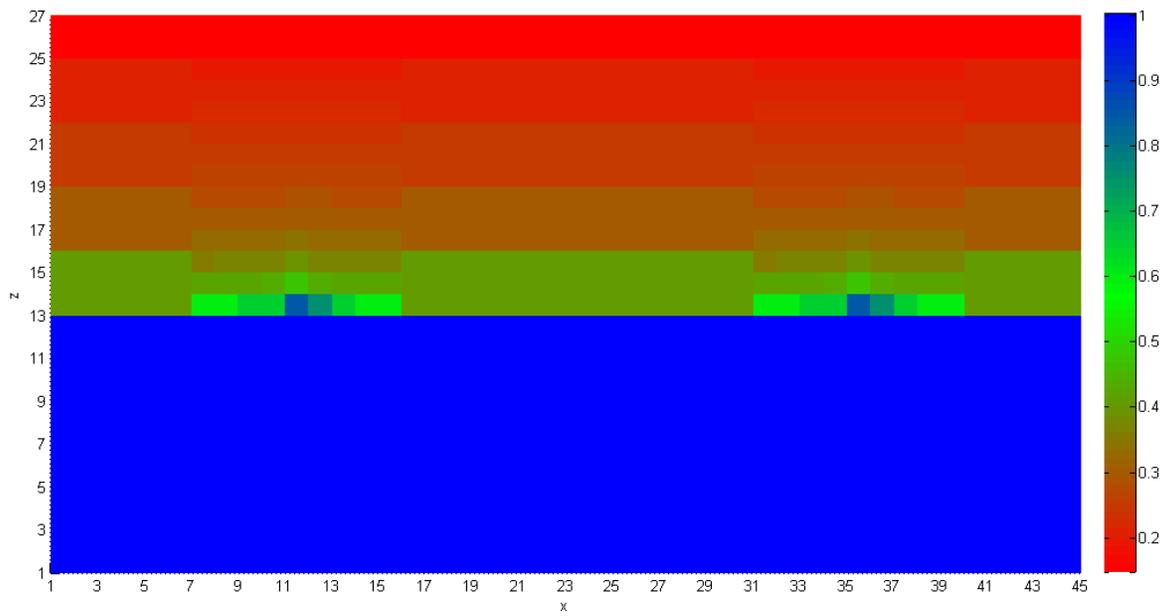


b) Sección C-C'.

Figura V.58. Caso I. Distribución de presión para el modelo refinado.



a) Vista 3D.



b) Sección C-C\'.

Figura V.59. Caso I. Distribución de saturación para el modelo refinado.

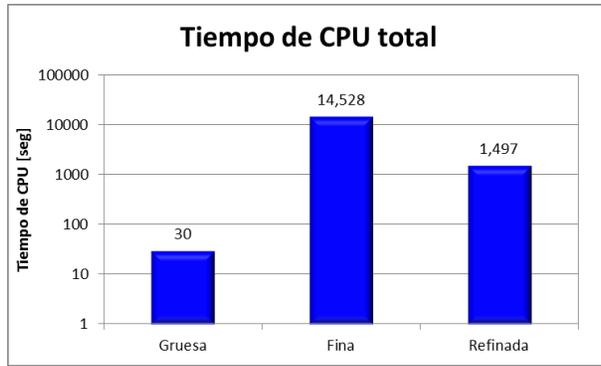


Figura V.60. Caso II. Tiempo de CPU total.

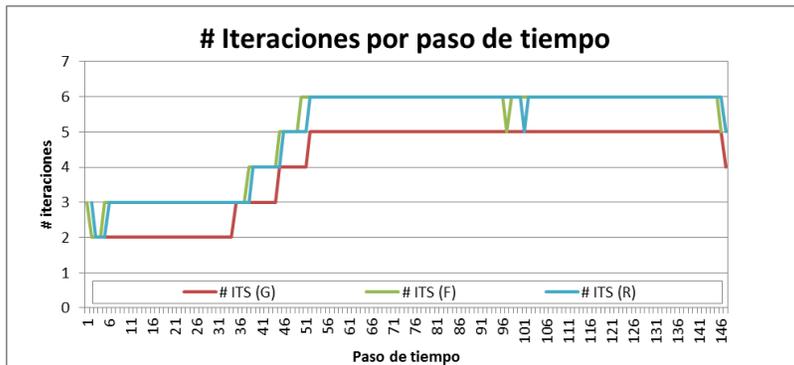


Figura V.61. Caso II. Número de iteraciones por paso de tiempo.

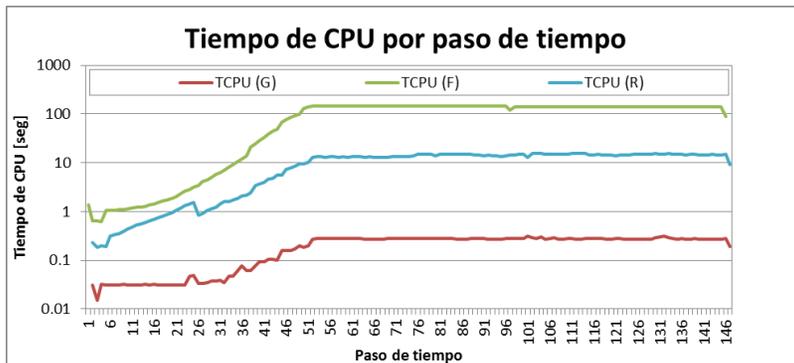


Figura V.62. Caso II. Tiempo de CPU por paso de tiempo.

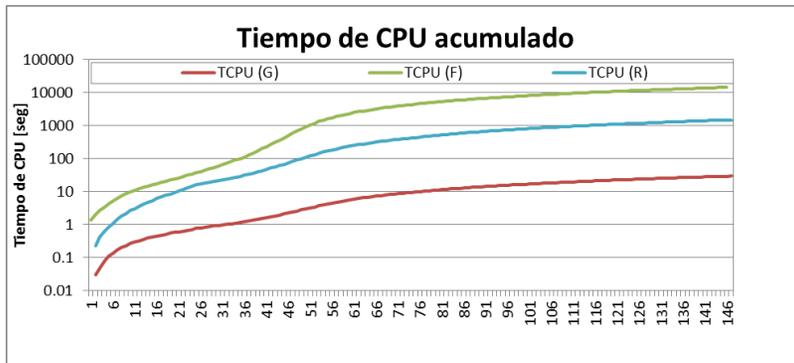


Figura V.63. Caso II. Tiempo de CPU acumulado.

Discusión de Resultados.

Saturación de agua. De forma similar al caso I, la **figura V.46** muestra que aun cuando la malla burda presenta valores idénticos de saturación a la misma profundidad que la malla fina, no se obtiene el mismo detalle que el obtenido con la malla fina. La malla refinada reproduce fielmente la zona de transición.

Error presión-producción. Las **figuras V.47 a V.52** muestran que el comportamiento de la malla base (B) es totalmente diferente al de la malla fina (F). Por el contrario, el comportamiento de la malla refinada (R) prácticamente es idéntico al de la malla fina, excepto durante dos pasos de tiempo a los 514 días de simulación. La producción de aceite se mantiene constante durante toda la simulación para la malla burda; la producción de agua y el flujo fraccional se incrementan paulatinamente. La presión media del yacimiento, la presión del bloque y la presión de fondo fluyente disminuyen constantemente conforme avanza el tiempo de simulación.

En contraparte, la malla refinada logra reproducir el comportamiento de la malla fina. Se observa que, tanto el gasto de aceite como el gasto de agua se reducen al segundo paso de tiempo. En la **figura V.53** se observa que, desde el primer paso de tiempo la conexión más profunda (conexión 9) presenta un flujo fraccional de 59%, superior al límite establecido, en consecuencia, esta conexión es cerrada. Retomando la **figura V.46.b**, se muestra que para esa conexión, la saturación de agua es de 53.3%, lo que origina que el porcentaje de agua exceda el límite establecido. Avanzando en el tiempo de simulación, la segunda conexión más profunda alcanza el 50% de agua al tiempo 504 días en la malla fina y al tiempo 534 días en la malla refinada. En la presión media del yacimiento, la presión del bloque y la presión de fondo fluyendo se observa una disminución en la caída presión como reflejo de la reducción del gasto de fluidos producidos, tanto en la malla fina como en la malla refinada.

De igual forma a lo observado en el caso I, la distribución inicial de la saturación de agua juega un papel importante en los resultados obtenidos.

En las **figuras V.54 a V.59** del modelo 3D se observa que, para la zona vecina al pozo, tanto la distribución de presión como la distribución de saturación de la malla fina se logran representar de forma prácticamente idéntica con la malla refinada, y que la zona alejada del pozo presenta una buena aproximación.

Tiempo de simulación. En los resultados mostrados en la **figura V.60** se observa que, el tiempo requerido por la malla burda para 1,000 días de simulación es de 30 segundos, sin embargo, se observó que el comportamiento de la presión y la producción fue totalmente diferente al de la malla fina. El tiempo requerido por la malla fina fue de 14,528 segundos, 490 veces más que la malla burda. La malla con refinamiento, incrementó el tiempo de cómputo a 1,497 segundos, 50.5 veces el tiempo de la malla burda, no obstante, el comportamiento observado es prácticamente idéntico al de la malla fina, lo cual muestra la factibilidad de tener resultados similares a los de la malla fina sin el incremento sustancial del tiempo de cómputo.

En la **figura V.61** se puede observar que para los tres casos el comportamiento es muy similar, es decir, se realizan entre 2 y 3 iteraciones por paso de tiempo hasta el paso de tiempo 35, para incrementar gradualmente hasta 5 o 6 en el paso de tiempo 49, donde se mantiene hasta el final de la simulación.

El tiempo de CPU por paso de tiempo mostrado en la **figura V.62**, muestra un incremento gradual en el tiempo de simulación hasta el paso 49, donde se mantiene prácticamente constante hasta el final de la simulación. Como en el caso I, es posible establecer que el tiempo de cómputo está relacionado directamente a la dimensión del sistema de ecuaciones.

Capítulo VI. Conclusiones y recomendaciones.

Para la elaboración del presente trabajo, se desarrolló un simulador numérico de yacimientos de aceite negro, flujo en dos fases (aceite y agua), en tres dimensiones y con formulación totalmente implícita. Se implementó la opción de refinamiento local a la malla de simulación, con la finalidad de reproducir los resultados obtenidos con una malla fina, sin incrementar el tiempo de cómputo de forma sustancial. Derivado del trabajo realizado, se establecen las siguientes conclusiones y recomendaciones.

VI.1. Conclusiones.

- ✓ Las técnicas de refinamiento local son una alternativa para obtener resultados realistas y confiables sin sacrificar recursos y tiempo de cómputo.
- ✓ Se comprobó que es factible reproducir los resultados de una malla fina mediante una malla localmente refinada.
- ✓ La aplicación del refinamiento local incrementa el tiempo de cómputo, sin embargo, éste sólo es una fracción del tiempo requerido por una malla fina. En los casos evaluados el tiempo requerido por una malla refinada va del 0.5% al 10.3% del tiempo requerido por una malla fina.
- ✓ De lo observado en el caso I, se determinó que los resultados obtenidos con una malla localmente refinada, pueden variar de acuerdo a la forma en que ésta sea generada. La diferencia máxima se observó en la producción de agua, siendo de 8% en el peor de los casos, logrando reducir a sólo 2% en el mejor de los casos.

- ✓ Se observó que las zonas localmente refinadas presentan una distribución de saturación y presión capilar con mayor detalle en comparación con la zona no refinada.
- ✓ Se concluyó que en la evaluación del avance del contacto agua-aceite y la conificación de agua, es importante que la zona localmente refinada cubra las capas del contacto agua-aceite. Esto permite una mejor evaluación de los cambios de saturación y del avance del contacto agua-aceite durante todo el periodo simulado.

VI.2. Recomendaciones.

El presente trabajo mostró que las técnicas de refinamiento local cartesiano son un método viable para la simulación numérica de yacimientos; sin embargo, se considera que su desempeño podría mejorarse aplicando alguna o varias de las técnicas siguientes:

- Flujo en tres fases. Escalar la aplicación del refinamiento local a un simulador de yacimientos en tres fases permitirá evaluar escenarios en yacimientos saturados.
- Refinamiento local con mallas cilíndricas. Esto mejoraría la aproximación de la solución y evaluar fenómenos como la condensación retrograda en la vecindad del pozo.
- Técnicas de descomposición de dominio. Al combinar las técnicas de refinamiento local con las técnicas de descomposición de dominio, es posible dividir un problema en pequeños subproblemas, lo cual ayudaría a resolver problemas de mayor magnitud de forma más económica, hablando en términos de recursos computacionales.
- Complemento de Schur. Representa una alternativa a las técnicas de descomposición de dominio, ya que al incorporar las ecuaciones correspondientes

a las áreas refinadas a las ecuaciones de la malla base, el tamaño del sistema de ecuaciones se reduce y por lo tanto el requerimiento de recursos computacionales así como de tiempo de simulación también se disminuye.

- Técnicas de programación en paralelo. Las técnicas de refinamiento local pueden ser desarrolladas con técnicas de programación en paralelo, lo cual podría reducir considerablemente el tiempo de cómputo.

Apéndice A. Desarrollo matemático de las ecuaciones de flujo.

Para la obtención de las ecuaciones de flujo, considérese el volumen de control, representativo del volumen poroso, mostrado en la **figura A.1**.

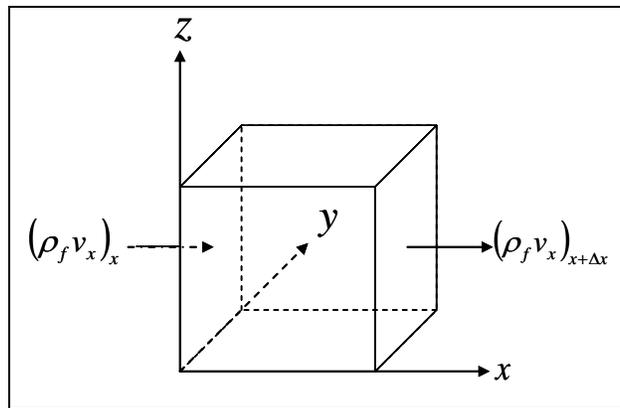


Figura A.1. Volumen de control.

Por simplicidad, considere el flujo en una sola dirección. Aplicando la Ley de conservación de la masa, es posible establecer el siguiente balance de materia siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ritmo másico} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ritmo másico} \\ \text{de salida} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ritmo de acumulación} \\ \text{de masa} \end{array} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Cada término de la **ecuación (A.1)** se puede representar como:

$$\left\{ \text{Ritmo másico de entrada} \right\} = A_x (\rho_f v_x)_x, \quad (\text{A.2})$$

$$\{\text{Ritmo másico de salida}\} = A_x (\rho_f v_x)_{x+\Delta x}, \quad (\text{A.3})$$

$$\{\text{Ritmo de acumulación de masa}\} = A_x \Delta x \left\{ \frac{(\phi \rho_f S_f)_{t+\Delta t} - (\phi \rho_f S_f)_t}{\Delta t} \right\}, \quad (\text{A.4})$$

donde:

A_x es el área transversal a la dirección de flujo x .

ρ_f es la densidad del fluido a las condiciones de yacimiento.

v_x es la velocidad de la fase en la dirección del flujo x .

Sustituyendo las **ecuaciones (A.2) a (A.4)** en **(A.1)** y dividiendo por el volumen de control, $A_x \Delta x$, se obtiene:

$$\frac{(\rho_f v_x)_x - (\rho_f v_x)_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{(\phi \rho_f S_f)_{t+\Delta t} - (\phi \rho_f S_f)_t}{\Delta t}. \quad (\text{A.5})$$

Tomando límites, e incluyendo el término fuente/sumidero:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_f v_x) + \rho_f \hat{q}_f = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_f S_f), \quad (\text{A.6})$$

donde:

\hat{q}_f es el gasto volumétrico de fluido @c.y. por unidad de volumen de roca.

En la **ecuación (A.6)**, un gasto positivo indica que el fluido entra al volumen de control y un gasto negativo, indica que el fluido sale del volumen de control.

La **ecuación (A.6)** puede ser escrita de forma general para cualquier sistema de ecuaciones de la forma siguiente:

$$-\nabla \cdot (\rho_f v_f) + \rho_f \hat{q}_f = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_f S_f) \quad (\text{A.7})$$

La ley de Darcy es describe en la forma de la **ecuación (A.8)**.

$$v_f = -\frac{kk_{rf}}{\mu_f} \nabla \Phi_f, \quad (\text{A.8})$$

donde v_f es positiva en la dirección del flujo, y el potencial del fluido, Φ_f , está definido, para el sistema de coordenado de la **figura A.1**, como:

$$\Phi = p_f + \gamma_f D. \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo **(A.8)** en **(A.7)** se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\rho_f \frac{kk_{rf}}{\mu_f} \nabla \Phi \right) + \rho_f \hat{q}_f = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_f S_f) \quad (\text{A.10})$$

Para el caso de las fases aceite y agua, el factor de volumen se expresa como:

$$B_f = \frac{\rho_f @ \text{c.s.}}{\rho_f @ \text{c.y.}} \quad (\text{A.11})$$

Despejando $\rho_f @ \text{c.y.}$ de **(A.11)** y sustituyendo en **(A.10)** se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho_f @ \text{c.s.}}{B_f} \frac{kk_{rf}}{\mu_f} \nabla \Phi \right) + \frac{\rho_f @ \text{c.s.}}{B_f} \hat{q}_f = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_f @ \text{c.s.}}{B_f} \phi S_f \right) \quad (\text{A.12})$$

Considerando que la ρ_f @ c.s. es constante y haciendo $b_f = \frac{1}{B_f}$, la **ecuación (A.12)**

puede escribirse como:

$$\nabla \cdot \left(\frac{kk_{rf}b_f}{\mu_f} \nabla \Phi \right) + b_f \hat{q}_f = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_f S_f) \quad (\text{A.13})$$

En el sistema de coordenadas cartesianas, el operador diferencial nabra, ∇ , se define como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k, \quad (\text{A.14})$$

y el vector de velocidades, v_f , se define como:

$$v_f = v_{f,x} i + v_{f,y} j + v_{f,z} k. \quad (\text{A.15})$$

La **ecuación (A.13)**, escrita para la fase aceite es:

$$\nabla \cdot \left(\frac{kk_{ro}b_o}{\mu_o} (\nabla p_o + \gamma_o \nabla D) \right) + b_o \hat{q}_o = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_o S_o), \quad (\text{A.16})$$

donde se incorporó la definición de potencial descrita por la **ecuación (A.9)**.

De forma similar para la fase agua se tiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{kk_{rw}b_w}{\mu_w} (\nabla p_w + \gamma_w \nabla D) \right) + b_w \hat{q}_w = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_w S_w) \quad (\text{A.17})$$

Las **ecuaciones (A.16)** y **(A.17)** describen el flujo en dos fases para un yacimiento bajo condiciones isotérmicas y flujo laminar.

Apéndice B. Desarrollo numérico de las ecuaciones de flujo.

El sistema de ecuaciones que representa el flujo de fluidos en un medio poroso es no lineal, y por lo tanto, para su solución se debe recurrir a métodos numéricos. Un método numérico muy popular es el de diferencias finitas.

El método de diferencias finitas, consiste en obtener una aproximación de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, mediante una expansión truncada en serie Taylor para las incógnitas y superponiendo un conjunto de celdas, llamado malla de simulación, sobre la extensión del yacimiento. La implementación del método resulta en ecuaciones algebraicas, llamadas ecuaciones en diferencias finitas, las cuales cambian el carácter continuo de las ecuaciones diferenciales por un carácter discreto, así, las soluciones obtenidas por las ecuaciones discretas corresponden a puntos discretos dentro del dominio del yacimiento.

A continuación se muestra la aproximación de las ecuaciones diferenciales mediante el esquema de diferencias finitas. Tomando como base la **ecuación (A.13)**, se realiza una discretización en espacio aplicando diferencias centrales al término de flujo, y diferencias regresivas en tiempo al término de acumulación.

Por simplicidad, consideremos flujo solo en la dirección x . Para el caso de flujo en la direcciones y y z , se realiza de forma similar. Desarrollando el operador ∇ , la **ecuación (A.13)** toma la forma siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{rf}b_f}{\mu_f} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]^{n+1} + (b_f \hat{q}_f)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi b_f S_f)^{n+1}, \quad (\text{B.1})$$

donde se incluyó la definición de potencial, y el superíndice $n + 1$ indica el nivel tiempo.

Tomando en cuenta solo término de flujo de la **ecuación (B.1)**, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{kk_{rf}b_f}{\mu_f} \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]^{n+1}. \quad (\text{B.2})$$

Considere que:

$$u = \lambda_f \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \gamma \frac{\partial D}{\partial x} \right), \quad (\text{B.3})$$

donde:

$$\lambda_f = \frac{kk_{rf}b_f}{\mu_f}. \quad (\text{B.4})$$

Aplicando diferencias centrales a la **ecuación (B.2)**, se tiene:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i}, \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left[\lambda_f \right]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\frac{p_{f,i+1} - p_{f,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \gamma_{f,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]^{n+1}, \quad (\text{B.6})$$

y

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \left[\lambda_f \right]_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\frac{p_{f,i} - p_{f,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + \gamma_{f,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1}. \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo las **ecuaciones (B.6)** y **(B.7)** en **(B.5)**, se tiene:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x} = \frac{\left[\lambda_f \right]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \left[\frac{p_{f,i+1} - p_{f,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \gamma_{f,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} - \frac{\left[\lambda_f \right]_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \left[\frac{p_{f,i} - p_{f,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + \gamma_{f,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1}. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, tomando en cuenta solo el término de acumulación de la **ecuación (B.1)**, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi b_f S_f)^{n+1} \quad (\text{B.9})$$

Aplicando diferencias regresivas a la **ecuación (B.9)**, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi b_f S_f)_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} \left[(\phi b_f S_f)^{n+1} - (\phi b_f S_f)_i^n \right]. \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo las **ecuaciones (B.8)** y **(B.10)** en la **ecuación (B.1)**, se tiene:

$$\frac{\left[\lambda_f \right]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \left[\frac{p_{f,i+1} - p_{f,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} + \gamma_{f,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} - \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{[\lambda_f]_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \left[\frac{p_{f,i} - p_{f,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} + \gamma_{f,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} + (b_f \hat{q}_f)^{n+1} =$$

$$\frac{1}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_f S_f)^{n+1} - (\phi b_f S_f)^n]_i.$$

Multiplicando la **ecuación (B.11)** por el volumen de roca de la celda i , se tiene:

$$\left[\frac{\lambda_f A_x}{\Delta x} \right]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,i+1} - p_{f,i} + \gamma_{f,i+\frac{1}{2}} (D_{i+1} - D_i) \right]^{n+1} -$$

$$\left[\frac{\lambda_f A_x}{\Delta x} \right]_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,i} - p_{f,i-1} + \gamma_{f,i-\frac{1}{2}} (D_i - D_{i-1}) \right]^{n+1} + (b_f q_f)^{n+1} = \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{V_{r,i}}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_f S_f)^{n+1} - (\phi b_f S_f)^n]_i.$$

donde:

$$V_r = A_x \Delta x, \quad (\text{B.13})$$

y q_f , es el gasto volumétrico del fluido @ c.y.

El concepto de transmisibilidad, en la dirección x , se define como:

$$T_{f,x} = \left[\frac{\lambda_f A_x}{\Delta x} \right]; \quad (\text{B.14})$$

para las direcciones y y z , se define de forma similar.

Aplicando la **ecuación (B.14)** en la **ecuación (B.12)**, se tiene:

$$\begin{aligned}
& \left[T_{f,x} \right]_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,i+1} - p_{f,i} + \gamma_{f,i+\frac{1}{2}} (D_{i+1} - D_i) \right]^{n+1} - \\
& \left[T_{f,x} \right]_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[p_{f,i} - p_{f,i-1} + \gamma_{f,i-\frac{1}{2}} (D_i - D_{i-1}) \right]^{n+1} + (b_f q_f)^{n+1} = \\
& \frac{V_{r,i}}{\Delta t^{n+1}} \left[(\phi b_f S_f)^{n+1} - (\phi b_f S_f)^n \right]_i.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Finalmente, en términos de los operadores en diferencias, la **ecuación (B.15)** puede expresarse en forma más compacta como:

$$\Delta [T_f (\Delta p_f + \gamma_f \Delta D)]_i^{n+1} + (b_f q_f)_i^{n+1} = \frac{V_{r,i}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_f S_f]_i, \tag{B.16}$$

donde el operador en diferencias centrales se define por:

$$\Delta u_i^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \tag{B.17}$$

y el operador en diferencias regresivas se define como:

$$\Delta_t v_i^{n+1} = v_i^{n+1} - u_i^n. \tag{B.18}$$

La **ecuación (B.16)**, escrita para la fase de aceite es:

$$\Delta [T_o (\Delta p_o + \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + (b_o q_o)_i^{n+1} = \frac{V_{r,i}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_o S_o]_i; \tag{B.19}$$

de forma similar para la fase de agua se tiene:

$$\Delta [T_w (\Delta p_w + \gamma_w \Delta D)]_i^{n+1} + (b_w q_w)_i^{n+1} = \frac{V_{r,i}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_i. \tag{B.20}$$

Las **ecuaciones (B.19)** y **(B.20)** son las ecuaciones de flujo en dos fases para un yacimiento bajo condiciones isotérmicas y flujo laminar, escritas en términos de los operados en diferencias.

Apéndice C. Datos de entrada en los modelos de simulación.

A continuación se muestran los datos empleados, en cada caso de simulación, para las características geométricas del yacimiento y de la malla de simulación, así como de la ubicación de los pozos. Salvo que se indique lo contrario, los datos de fluidos (PVT) y las funciones de saturación fueron los mismos para cada caso, y se muestran en la última sección del apéndice: Datos de fluidos y funciones de saturación.

Caso Validación 1.

TABLA C.1. V1 DATOS DEL YACIMIENTO.	
Longitud en X [m]	3,048.00
Longitud en Y [m]	3,048.00
Longitud en Z [m]	45.72
Cima del yacimiento [m]	-2,537.46
Contacto agua-aceite [m]	---
Profundidad de referencia [m]	-2,560.32
Presión de referencia [psi]	4,800.00
Compresibilidad [psi ⁻¹]	3.00E-06
Permeabilidad [mD]	500.00
Porosidad [%]	30.00
Saturación de agua irreductible [%]	12.00

TABLA C.2. V1 GEOMETRÍA DE LA MALLA.		
Nx	Ny	Nz
9	9	3

TABLA C.3. V1 DATOS DE POZOS.							
# Pozo	Conexiones				Condiciones de producción.		
	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
1	5	5	3	0.0762	300.0	100.0	100.0

TABLA C.4. V1 PERMEABILIDAD RELATIVA.

Sw [%]	krw [fr]	kro [fr]
12.0	0.0	1.0
100.0	0.0	1.0

TABLA C.5. V1 PRESIÓN CAPILAR.

Sw [%]	Pc [psi]
0.0	0.0
100.0	0.0

Caso Validación 2.**TABLA C.6. V2 DATOS DEL YACIMIENTO.**

Longitud en X [m]	3,048.00
Longitud en Y [m]	3,048.00
Longitud en Z [m]	151.48
Cima del yacimiento [m]	-2,537.46
Contacto agua-aceite [m]	---
Profundidad de referencia [m]	-2,613.20
Presión de referencia [psi]	4,800.00
Compresibilidad [psi ⁻¹]	3.00E-06
Permeabilidad [mD]	500.00
Porosidad [%]	30.00
Saturación de agua irreductible [%]	12.00

TABLA C.7. V2 GEOMETRÍA DE LA MALLA FINA.

Nx	Ny	Nz
27	27	9

TABLA C.8. V2 GEOMETRÍA DE LA MALLA BASE.

Nx	Ny	Nz
9	9	5

TABLA C.9. V2 GEOMETRÍA DEL REFINAMIENTO.

Factor de refinamiento			Extensión del refinamiento					
FRX	FRY	FRZ	I1	J1	K1	I2	J2	K2
3	3	3	4	4	2	6	6	4

TABLA C.10. V2 DATOS DE POZOS EN LA MALLA FINA.

# Malla	# Pozo	Conexiones.				Condiciones de producción.		
		i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
0	1	14	14	9	0.0762	1,000.0	100.0	100.0
0	1	14	14	8	0.0762	1,000.0	100.0	100.0
0	1	14	14	7	0.0762	1,000.0	100.0	100.0

TABLA C.11. V2 DATOS DE POZOS EN LA MALLA REFINADA.								
Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	J	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
1	1	5	5	6	0.0762	1,000.0	100.0	100.0
1	1	5	5	5	0.0762	1,000.0	100.0	100.0
1	1	5	5	4	0.0762	1,000.0	100.0	100.0

TABLA C.12. V2 PERMEABILIDAD RELATIVA.

Sw [%]	Krw [fr]	Kro [fr]
12.0	0.0	1.0
100.0	0.0	1.0

TABLA C.13. V2 PRESIÓN CAPILAR.

Sw [%]	pc [psi]
0.0	0.0
100.0	0.0

Caso I. Pozo horizontal.

TABLA C.14. CI DATOS DEL YACIMIENTO.

Longitud en X [m]	3,000.00
Longitud en Y [m]	1,400.00
Longitud en Z [m]	437.16
Cima del yacimiento [m]	-2,537.46
Contacto agua-aceite [m]	-2,683.20
Profundidad de referencia [m]	-2,600.32
Presión de referencia [psi]	4,800.00
Compresibilidad [psi ⁻¹]	3.00E-06
Permeabilidad [mD]	500.00
Porosidad [%]	30.00
Saturación de agua irreductible [%]	12.00

TABLA C.15. CI GEOMETRÍA DE LA MALLA BASE.

Nx	Ny	Nz
15	7	9

TABLA C.16. CI GEOMETRÍA DE LA MALLA FINA.

Nx	Ny	Nz
45	21	27

TABLA C.17. CI GEOMETRÍA DEL REFINAMIENTO R1.

Factor de refinamiento			Extensión del refinamiento					
FRX	FRY	FRZ	I1	J1	K1	I2	J2	K2
3	3	3	6	4	8	10	4	8

TABLA C.18. CI GEOMETRÍA DEL REFINAMIENTO R2.								
Factor de refinamiento			Extensión del refinamiento					
FRX	FRY	FRZ	I1	J1	K1	I2	J2	K2
3	3	3	6	4	7	10	4	8

TABLA C.19. CI GEOMETRÍA DEL REFINAMIENTO R3.								
Factor de refinamiento			Extensión del refinamiento					
FRX	FRY	FRZ	I1	J1	K1	I2	J2	K2
3	3	3	6	3	7	10	5	8

TABLA C.20. CI DATOS DE POZOS EN LA MALLA BURDA.								
Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
0	1	7	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	100.0
0	1	8	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	100.0
0	1	9	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	100.0

TABLA C.21. CI DATOS DE POZOS EN LA MALLA FINA.								
Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
0	1	19	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	20	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	21	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	22	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	23	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	24	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	25	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	26	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0
0	1	27	11	23	0.0762	333.3	100.0	100.0

TABLA C.22. CI DATOS DE POZOS EN LA MALLA REFINADA R1.								
Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
1	1	4	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	5	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	6	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	7	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	8	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	9	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	10	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	11	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	12	2	2	0.0762	333.3	100.0	100.0

TABLA C.23. CI DATOS DE POZOS EN LA MALLA REFINADA R2.								
Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
1	1	4	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	5	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	6	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	7	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	8	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	9	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	10	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	11	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	12	2	5	0.0762	333.3	100.0	100.0

TABLA C.24. CI DATOS DE POZOS EN LA MALLA REFINADA R3.								
Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
1	1	4	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	5	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	6	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	7	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	8	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	9	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	10	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	11	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0
1	1	12	5	5	0.0762	333.3	100.0	100.0

Caso II. Pozos verticales.

TABLA C.25. CII DATOS DEL YACIMIENTO.	
Longitud en X [m]	3,000.00
Longitud en Y [m]	1,400.00
Longitud en Z [m]	437.16
Cima del yacimiento [m]	-2,537.46
Contacto agua-aceite [m]	-2,780.33
Profundidad de referencia [m]	-2,658.89
Presión de referencia [psi]	4,800.00
Compresibilidad [psi ⁻¹]	3.00E-06
Permeabilidad [mD]	500.00
Porosidad [%]	30.00
Saturación de agua irreductible [%]	12.00

TABLA C.26. CII GEOMETRÍA DE LA MALLA BASE.

Nx	Ny	Nz
15	7	9

TABLA C.27. CII GEOMETRÍA DE LA MALLA FINA.

Nx	Ny	Nz
45	21	27

TABLA C.28. CII GEOMETRÍA DEL REFINAMIENTO.

# Malla	Factor de refinamiento			Extensión del refinamiento					
	FRX	FRY	FRZ	I1	J1	K1	I2	J2	K2
1	3	3	3	3	3	4	5	5	8
2	3	3	3	11	3	4	13	5	8

TABLA C.29. CII DATOS DE POZOS EN LA MALLA BURDA.

# Malla	# Pozo	Conexiones.				rw [pie]	Condiciones de producción.		
		i	j	k	Qo [bd]		Qo min [bd]	fw max [%]	
0	1	4	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	50.0	
0	1	4	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	50.0	
0	1	4	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	50.0	
0	2	12	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	50.0	
0	2	12	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	50.0	
0	2	12	4	8	0.0762	1,000.0	100.0	50.0	

TABLA C.30. CII DATOS DE POZOS EN LA MALLA FINA.

# Malla	# Pozo	Conexiones.				rw [pie]	Condiciones de producción.		
		i	j	k	Qo [bd]		Qo min [bd]	fw max [%]	
0	1	11	11	21	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	20	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	19	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	18	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	17	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	16	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	15	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	14	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	1	11	11	13	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	21	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	20	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	19	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	18	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	17	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	16	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	15	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	14	0.0762	333.3	100.0	50.0	
0	2	35	11	13	0.0762	333.3	100.0	50.0	

TABLA C.31. CII DATOS DE POZOS EN LA MALLA REFINADA.

Conexiones.						Condiciones de producción.		
# Malla	# Pozo	i	j	k	rw [pie]	Qo [bd]	Qo min [bd]	fw max [%]
1	1	5	5	12	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	11	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	10	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	9	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	8	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	7	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	6	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	5	0.0762	333.3	100.0	50.0
1	1	11	11	4	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	12	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	11	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	10	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	9	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	8	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	7	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	6	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	5	0.0762	333.3	100.0	50.0
2	1	5	5	4	0.0762	333.3	100.0	50.0

Datos de fluidos y funciones de saturación.

TABLA C.32. PVT DEL ACEITE.			
Presión [psi]	B_o [m³/m³]	μ_o [cp]	Densidad [kg/m³]
14.70	1.062	1.040	740.7
264.70	1.150	0.975	697.5
514.70	1.207	0.910	677.4
1014.70	1.295	0.830	656.8
2014.70	1.435	0.695	624.6
2514.70	1.500	0.641	613.6
3014.70	1.565	0.594	605.2
4014.70	1.695	0.510	593.4
9014.70	1.579	0.740	637.0

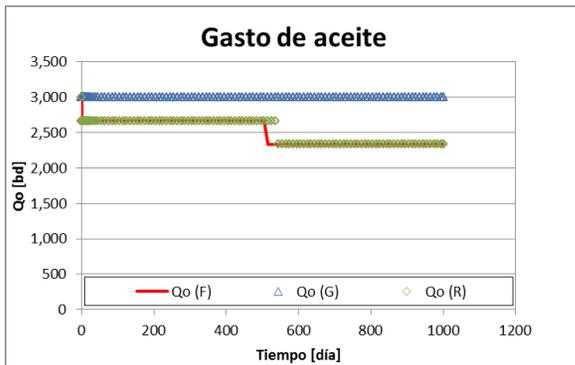
TABLA C.33. PVT DEL AGUA.			
Presión [psi]	B_w [m³/m³]	μ_w [cp]	Densidad [kg/m³]
14.70	1.042	0.31	996.1
264.70	1.041	0.31	996.9
514.70	1.040	0.31	997.7
1014.70	1.039	0.31	999.2
2014.70	1.035	0.31	1002.3
2514.70	1.034	0.31	1003.9
3014.70	1.032	0.31	1005.4
4014.70	1.029	0.31	1008.6
9014.70	1.013	0.31	1024.4

TABLA C.34. PERMEABILIDAD RELATIVA.		
Sw [%]	krw [fr]	kro [fr]
1.0	0.000	1.000
9.9	0.000	0.810
18.8	0.001	0.640
27.7	0.006	0.490
36.6	0.018	0.360
45.5	0.044	0.250
54.4	0.091	0.160
63.3	0.168	0.090
72.2	0.287	0.040
81.1	0.459	0.010
90.0	0.700	0.000
100.0	1.000	0.000

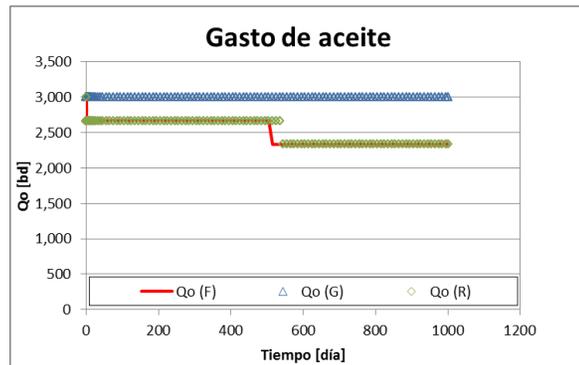
TABLA C.35. PRESIÓN CAPILAR.	
Sw [%]	pc [psi]
0.1	180.0
20.0	109.2
25.0	66.2
30.0	40.2
35.0	24.4
40.0	14.8
45.0	9.0
50.0	5.4
60.0	3.3
70.0	2.0
80.0	1.2
100.0	0.0

Apéndice D. Resultados del caso II.

El caso de aplicación II considera un yacimiento homogéneo, el cual es producido a través de dos pozos verticales. Las **figuras D.1 a D.5** muestran que el comportamiento del gasto de aceite, gasto de agua, flujo fraccional de agua, presión de bloque y presión de fondo fluyendo para los dos pozos es idéntico. Lo anterior, como consecuencia de la localización simétrica que guardan los pozos.

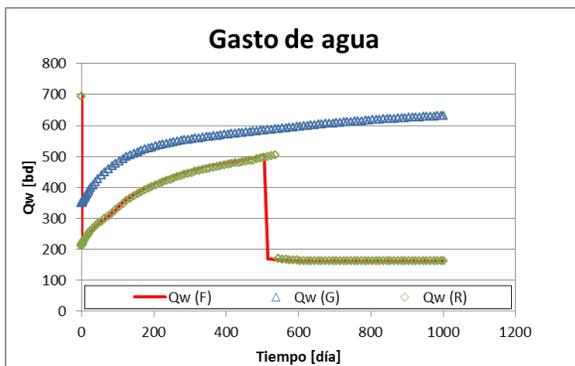


a) Pozo 1.

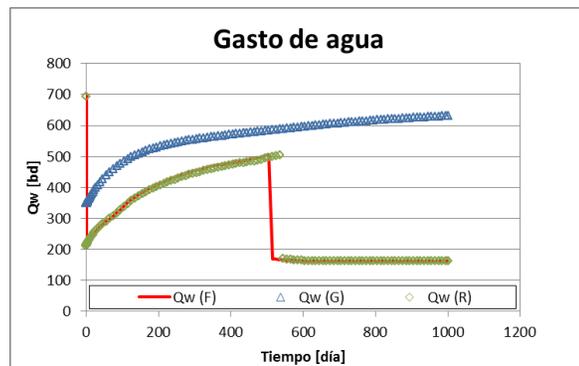


b) Pozo 2.

Figura D.1. Caso II. Gasto de aceite.

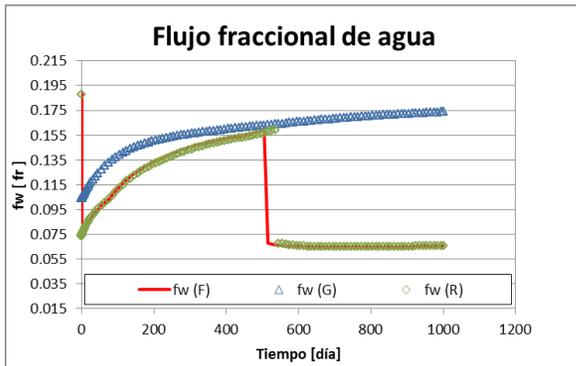


a) Pozo 1.

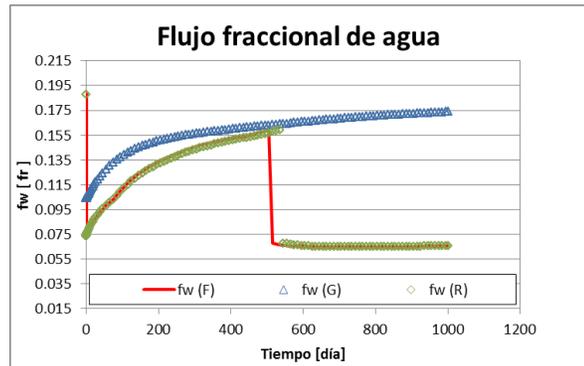


b) Pozo 2.

Figura D.2. Caso II. Gasto de agua.

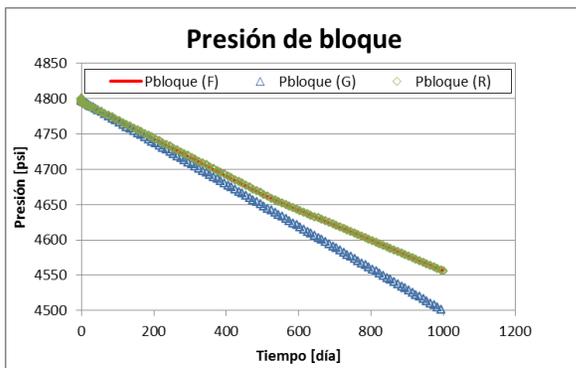


a) Pozo 1.

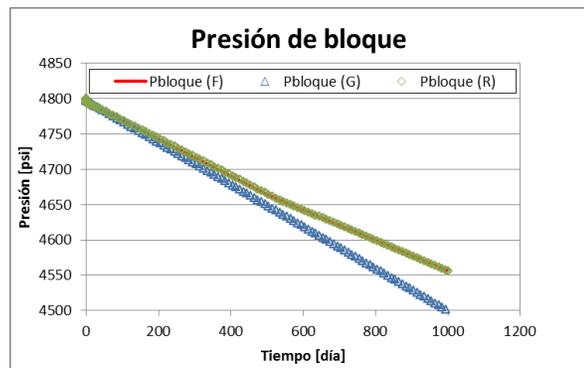


b) Pozo 2.

Figura D.3. Caso II. Flujo fraccional de agua.

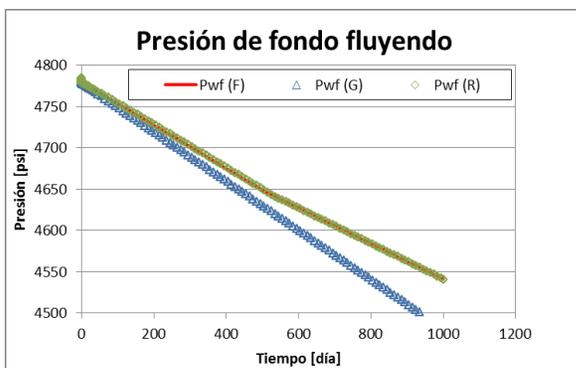


a) Pozo 1.

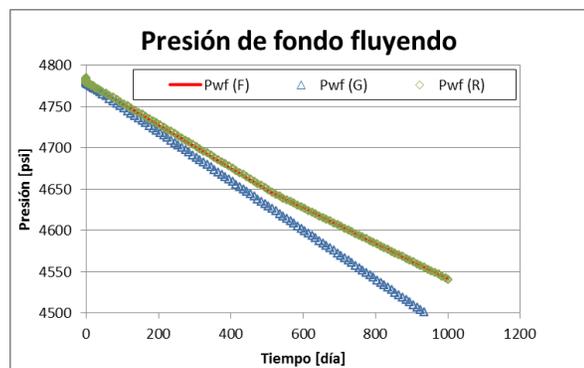


b) Pozo 2.

Figura D.4. Caso II. Presión de bloque.



a) Pozo 1.



b) Pozo 2.

Figura D.5. Caso II. Presión de fondo fluyendo.

Referencias.

1. Al-Sabeeh, A.N.N. 2009. A New Simulator for Dynamic Local Grid Refinement for Reservoir Simulation. *Basrah Journal for Engineering Science* **9** (1): 100-120. <http://www.iasj.net/iasj?func=fulltext&aId=56441> (descargado septiembre de 2012).
2. Aziz, K. 1986. Reservoir Simulation Grids: Opportunities and Problems. *J. Pet Tech* **45** (7): 658-663. SPE-25233-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/25233-PA>. (descargado noviembre de 2006)
3. Aziz, K. y Settari, A. 1979. Petroleum Reservoir Simulation. London: Applied Science Publishers.
4. Breitenbach, E.A. 1991. Reservoir Simulation: State of the Art. *J. Pet Tech* **43** (9): 1033-1036. SPE-23472-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/23472-PA>. (descargado septiembre de 2006)
5. Coats, K.H. 1980a. An Equation of State Compositional Model. *SPE J.* **20** (5): 363-376. SPE-8284-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/8284-PA>. (descargado septiembre de 2006)
6. Coats, K.H. 1980b. Reservoir Simulation: State of the Art. *J. Pet Tech* **34** (8): 1633-1642. SPE-10020-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/10020-PA>. (descargado septiembre de 2006)
7. Ertekin, T., Abou-Kassem, J.H. y King, G.R. 2001. *Basic Applied Reservoir Simulation*, Vol. 7. Richardson, Texas: Textbook Series, SPE.
8. Forsyth, P.A. y Sammon, P.H. 1985. Local Mesh Refinement and Modeling of Faults and Pinchouts. *SPE Form Eval* **1** (3): 275-285. SPE- 13524-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/13524-PA>. (descargado noviembre de 2006)
9. García, J. y Pruess, K. 2000. Local Grid Refinement for Multi-Scale Geothermal Reservoir Simulation with TOUGH2. LBNL-45646, Earth Science Division, Lawrence

Berkeley National Laboratory, University of California, Berkeley, California. (mayo 2000). <http://0-www.osti.gov.iii-server.ualr.edu/geothermal/servlets/purl/764389-I9X5hL/webviewable/764389.pdf> (descargado noviembre de 2006).

10. Heinemann, Z.E., Gerken, G. y Hantelmann, G. von 1983. Using Local Grid Refinement in a Multiple-Application Reservoir Simulator. Artículo SPE 12255, presentado en SPE Reservoir Simulation Symposium, San Francisco, California, EUA, noviembre 15-18. <http://dx.doi.org/10.2118/12255-MS>. (descargado diciembre de 2006)
11. Mattax, C.C. y Dalton, R.L. 1990. *Reservoir Simulation*, Vol. 13. Richardson, Texas: Monograph Series, SPE.
12. McCorquodale, P., Colella, P., Grote, D.P., et al. 2004. A Node-Centered Local Refinement Algorithm for Poisson's Equation in Complex Geometries, *Journal of Computational Physics* **201** (1): 34-60. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2004.04.022>. (descargado septiembre de 2012)
13. Mustafiz, S. e Islam, M.R. 2008. State-of-the-Art Petroleum Reservoir Simulation. *Petroleum Science and Technology* **26** (10-11): 1303-1329. <http://dx.doi.org/10.1080/10916460701834036>. (descargado septiembre de 2012)
14. Nacul, E.C. 1991. Use of Domain Decomposition and Local Grid Refinement in Reservoir Simulation. PhD dissertation, Stanford University.
15. Odeh, A.S. 1969. Reservoir Simulation ...What is it? *J. Pet Tech* **21** (11): 1383-1399. SPE-2790-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/2790-PA>. (descargado septiembre de 2006)
16. Peaceman, D.W. 1977. Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation. *SPE J.* **18** (3): 183-194. SPE-6893-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/6893-PA>. (descargado septiembre de 2006)
17. Pedrosa Jr., O.A. 1984. Use of Hybrid Grid in Reservoir Simulation. PhD dissertation, Stanford University.
18. Pedrosa Jr., O.A. y Aziz, K. 1986. Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation. *SPE Res Eng* **1** (6): 611-621. SPE-13507-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/13507-PA>. (descargado septiembre de 2006)

19. Pruess, K. y García, J. 2000. A Systematic Approach to Local Grid Refinement in Geothermal Reservoir Simulation. Proc. World Geothermal Congress, Kyushu-Tohoku Japón, 2809-2814.
20. Quandalle, P. 1983. The Use of Flexible Gridding for Improved Reservoir Modeling. Artículo SPE 12239, presentado en SPE Reservoir Simulation Symposium, San Francisco, California, EUA, noviembre 15-18. <http://dx.doi.org/10.2118/12239-MS>. (descargado diciembre de 2006)
21. Rosenberg, D.U. von. 1982. Local Mesh Refinement for Finite Difference Methods. Artículo SPE 10974, presentado en SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, EUA, septiembre 26-29. <http://dx.doi.org/10.2118/10974-MS>. (descargado diciembre de 2006)
22. Sammon, P.H. 2003. Dynamic Grid Refinement and Amalgamation for Compositional Simulation. Artículo SPE 79683, presentado en SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, EUA, febrero 3-5. <http://dx.doi.org/10.2118/79683-MS>. (descargado diciembre de 2006)
23. Solog, H.H. y Holden, L. 1998. Gridding for Petroleum Reservoir Simulation. 6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations [http://publications.nr.no/2689/Soleng -
Gridding for petroleum reservoir simulation.pdf](http://publications.nr.no/2689/Soleng-_Gridding_for_petroleum_reservoir_simulation.pdf) (descargado septiembre de 2012).
24. Wasserman, M.L. 1987. Local Grid Refinement for Three-Dimensional Simulators. Artículo SPE 16013, presentado en SPE Symposium on Reservoir Simulation, San Antonio, Texas, EUA, febrero 1-4. <http://dx.doi.org/10.2118/16013-MS>. (descargado diciembre de 2006)

Contacto:

Uriel Cedillo Trejo

urielcedillo@gmail.com