



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA EN SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

VALUACIÓN DE OPCIONES REALES PARA UNA PLANTA DE GENERACIÓN  
ELÉCTRICA MEDIANTE MATEMÁTICA DIFUSA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**CÉSAR LÓPEZ MARTÍNEZ**

TUTOR:  
Dr. Edgar Ortiz Calisto

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE 2014.



## **JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dra. Aguilar Juárez Isabel Patricia  
Secretario: Dr. Meza Puesto Jesús Hugo  
1er. Vocal: Dr. Ortiz Calisto Edgar  
2do. Vocal: Dr. Reyes Zárate Francisco Javier  
3er. Vocal: Dr. Reinking Cejudo Arturo Guillermo

Lugar donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, México, D.F.

### **TUTOR DE TESIS:**

Dr. Edgar Ortiz Calisto

---

Firma



## **RESUMEN**

Las inversiones en activos reales como aquellas en proyectos energéticos generalmente están inmersas en un ambiente de incertidumbre por lo que resulta complejo estimar los posibles rendimientos que a futuro generará la inversión dado el desconocimiento de muchas variables en el proyecto.

Tradicionalmente las empresas apoyan sus decisiones de inversión y rumbo de sus negocios a través de técnicas como valor presente neto (VPN), tasa interna de retorno (TIR), etc. Una de las principales fallas de estas técnicas es que no toman en cuenta la flexibilidad en las inversiones. En contraste, con ayuda de la teoría de opciones reales y matemática difusa, que se basa en aproximaciones matemáticas para la resolución de problemas donde los datos son imprecisos o desconocidos, se desarrolla un modelo difuso de valuación de opciones reales que entre otras cosas toma en cuenta la flexibilidad del proyecto. El modelo parte de los principios de opciones financieras y se utiliza para valuar la opción de inversión en una planta de generación eléctrica que usa la energía eólica del viento como fuente primaria; el parque eólico tiene una capacidad de 111 MW, ubicado en el estado de Baja California, México. Los resultados obtenidos utilizando la técnica del VPN indican que el valor del proyecto está muy cerca a su punto de umbral por lo que no hay suficiente certeza de aceptar o rechazar el proyecto, en contraste el modelo difuso indica que la inversión es factible de llevarse a cabo, además calcula el valor de la flexibilidad.

## **ABSTRACT**

Investments in real assets such as energy projects are frequently immersed in uncertainty environment, so that future generated incomes are difficult to estimate due to many project variables are unknown.

Traditionally, companies have taken their investment decisions and business directions through techniques such as net present value (NPV), Internal Rate of Return (IRR), etc. One of the main faults of these techniques is that they do not take account the flexibility into investments. In contrast, with real options and fuzzy mathematics theory, which is based on mathematical approximations to solve problems where data is vague or unknown, a fuzzy real option valuation model is developed that among others it take account the project flexibility. The model starts by financial options principles and is used to valuate an investment option in an electric power plant whose primary source is the wind energy; the wind farm has a capacity of 111 MW and is located in the state of Baja California, Mexico. The results obtained using NPV technique shown that project value is around the break point so that there is not enough evidence to accept or reject the project. In contrast, fuzzy model indicates the investment is feasible in addition to the flexibility value calculated.

## DEDICATORIA

**A DIOS**

– porque simplemente creo y me debo a ti.

**A mis Padres**

– por el absoluto apoyo en mi camino de cada día. Eternamente agradecido con ustedes, queridos papas.

**A mi amigo** Pedro Martínez Valencia,

– por todo su apoyo incondicional de toda la vida. Espero que la vida nos permita un reencuentro pronto!

**A tod@s aquell@s pequeñit@s**

– de mi círculo familiar para que miren a la educación como herramienta y esperanza de superación.



## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Edgar Ortíz Calisto por todo su apoyo para la realización de esta Tesis, y por su aliento para seguir el camino de la superación.

A todos aquellos profesores que con su enseñanza y profesionalismo me indicaron que el camino para la superación, sigue siendo por excelencia la educación.

Deseo externar las gracias al jurado integrado por:

Dr. Arturo Guillermo Reinking Cejudo, Dr. Hugo Meza Puesto, Dra. Isabel Patricia Aguilar Juárez, Dr. Francisco Reyes Zárate y al Dr. Edgar Ortíz Calisto

Por sus atinados comentarios realizados en el presente trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por brindarme la oportunidad de desarrollarme íntegramente, gracias mí Universidad y con especial reconocimiento al Posgrado de la Facultad de Ingeniería y FES Cuautitlán por formarme como profesionista.

Al Instituto Politécnico Nacional por abrirme sus puertas y explorar un mundo de oportunidades, contribuyendo en mi formación profesional. Gracias querido Politécnico!

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo para la realización de este proyecto.



# CONTENIDO

	Página
<b>RESUMEN</b> .....	<b>III</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>IV</b>
<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>V</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b> .....	<b>VII</b>
<b>CONTENIDO</b> .....	<b>IX</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>XI</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b> .....	<b>XIII</b>
<b>NOMENCLATURA</b> .....	<b>XIII</b>
<b>CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	<b>3</b>
<b>1.3 OBJETIVO</b> .....	<b>4</b>
<b>1.4 JUSTIFICACIÓN</b> .....	<b>4</b>
<b>1.5 ESTADO DEL ARTE</b> .....	<b>5</b>
<b>1.6 HIPÓTESIS</b> .....	<b>7</b>
<b>1.7 NATURALEZA Y DISPONIBILIDAD DE LA INFORMACIÓN</b> .....	<b>8</b>
<b>1.8 ESTRUCTURA DE LA TESIS</b> .....	<b>8</b>
<b>CAPÍTULO 2: VALUACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>11</b>
<b>2.2 CORRESPONDENCIA ENTRE OPCIONES FINANCIERAS Y OPCIONES REALES</b> .....	<b>12</b>
2.2.1 <i>Opciones Financieras</i> .....	<b>13</b>
2.2.2 <i>Tipos de Opciones Reales</i> .....	<b>16</b>
<b>2.3 LIMITACIONES DE LOS MÉTODOS TRADICIONALES</b> .....	<b>18</b>
<b>2.4 VALUACIÓN DE PROYECTOS CON ENFOQUE DE OPCIONES REALES</b> .....	<b>20</b>
2.4.1 <i>Método de Diferencias Finitas</i> .....	<b>21</b>
2.4.2 <i>Método del Árbol Binomial</i> .....	<b>23</b>
<b>CAPÍTULO 3: OPCIONES REALES CON EL ENFOQUE DE MATEMÁTICA DIFUSA</b> .....	<b>27</b>
<b>3.1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>27</b>
<b>3.2 SISTEMAS DIFUSOS</b> .....	<b>28</b>
3.2.1 <i>Principios y definiciones</i> .....	<b>29</b>
3.2.2 <i>Funciones de Pertenencia o Membresía</i> .....	<b>31</b>
3.2.3 <i>Operaciones aritméticas principales</i> .....	<b>34</b>
<b>3.3 ESPERANZA, VARIANZA Y COVARIANZA DE POSIBILIDAD</b> .....	<b>37</b>
<b>3.4 MODELO DIFUSO DE VALUACIÓN DE OPCIONES REALES</b> .....	<b>39</b>
<b>CAPÍTULO 4: VALUACIÓN DE UN PARQUE EÓLICO</b> .....	<b>43</b>
<b>4.1 INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>43</b>
4.1.1 <i>Energía Eólica</i> .....	<b>43</b>
4.1.2 <i>Perspectivas en México y en el mundo</i> .....	<b>45</b>
4.1.3 <i>Desregulación del Mercado Eléctrico en México y en el mundo</i> .....	<b>48</b>
<b>4.2 CASO DE ESTUDIO</b> .....	<b>50</b>
4.2.1 <i>Condiciones de sitio</i> .....	<b>50</b>
4.2.2 <i>Producción estimada de generación eléctrica</i> .....	<b>51</b>
4.2.3 <i>Costo de la inversión</i> .....	<b>54</b>

4.2.4 Tasa de descuento.....	55
4.2.5 Volatilidad del proyecto .....	55
<b>4.3. VALUACIÓN DIFUSA DEL PARQUE EÓLICO .....</b>	<b>56</b>
4.3.1 Valuación financiera tradicional por método de valor presente neto .....	56
4.3.2 Estimación difusa de los parámetros del proyecto .....	57
4.3.3 Valuación Financiera con Opciones Reales Difusas.....	60
<b>4.4 VALORACIÓN DE LA OPCION REAL CON OTROS MODELOS .....</b>	<b>62</b>
<b>CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES .....</b>	<b>63</b>
5.1 CONCLUSIONES .....	63
5.2 APORTACIONES.....	64
5.3 RECOMENDACIONES.....	65
5.4 TRABAJOS FUTUROS .....	66
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>67</b>
<b>APÉNDICE A.....</b>	<b>73</b>
A.1 DESARROLLO DE LA FORMULA DE BLACK & SCHOLES .....	73
A.2 METODO TRINOMIAL .....	75
A.3 CURVA DE POTENCIA Y DE DISTRIBUCIÓN DE VIENTO PARA EL MODELO DE AEROGENERADOR <i>GE-1.5S</i> .....	76
A.4 FLUJOS ESTIMADOS DE EFECTIVO DEL PROYECTO.....	78

## LISTA DE FIGURAS

	Página
FIG. 2.1. OPCIÓN DE COMPRA (ADAPTADO DE [BODIE <i>ET AL.</i> , 2009]).....	14
FIG. 2.2. OPCIÓN DE VENTA (ADAPTADO DE [BODIE <i>ET AL.</i> , 2009]).....	14
FIG. 2.3 VALOR DE LA OPCIÓN DADO EL NIVEL DE INCERTIDUMBRE (ADAPTADO DE [AMRAM AND KULATILAKA, 2001]).....	19
FIG. 2.4. ESQUEMAS DE APROXIMACIÓN DE DIFERENCIAS FINITAS ALREDEDOR DE $\hat{x}$ (ADAPTADO DE [CHOURDAKIS, 2008]).....	22
FIG. 2.5. CORRESPONDENCIA ENTRE DIAGRAMA DE LATTICE Y ÁRBOL BINOMIAL (ADAPTADO DE [BRANDÃO <i>ET AL.</i> , 2005]).....	24
FIG. 3.1. TRANSFORMACIÓN DE PROBABILIDAD A POSIBILIDAD (ADAPTADO DE [SWISHCHUK <i>ET AL.</i> , 2010]).....	29
FIG. 3.2. DISTRIBUCIÓN TRIANGULAR DE UN CONJUNTO BORROSO (ADAPTADO DE [FULLÉR, 2000]).....	30
FIG. 3.3. REPRESENTACIÓN DE UN CONJUNTO DIFUSO TIPO <i>LR</i> (ADAPTADO DE [ZIMMERMAN, 2010]).....	31
FIG. 3.4. PUNTO DIFUSO DE UN CONJUNTO BORROSO (ADAPTADO DE [FULLÉR, 2000]).....	31
FIG. 4.1. SISTEMA DE GENERACIÓN EOLIELÉCTRICA (ADAPTADO DE [HAU, 2006]).....	44
FIG. 4.2. CAPACIDAD INSTALADA DE ENERGÍA EÓLICA A NIVEL MUNDIAL (ADAPTADO DE [GWEC, 2012]).....	45
FIG. 4.3. POTENCIAL GEOGRÁFICO DE ENERGÍA EÓLICA EN MÉXICO (ADAPTADO DE [AMDEE, 2012]).....	46
FIG. 4.4. ESTIMACIÓN DE ENERGÍA GENERADA PARA EL CICLO DE VIDA DEL PARQUE EÓLICO.....	53
FIG. 4.5. ESTIMACIÓN DE LOS FLUJOS DE EFECTIVO DEL PROYECTO.....	56
FIG. 4.6. VALOR DIFUSO DEL ACTIVO SUBYACENTE, $\tilde{S}_0$ .....	58
FIG. 4.7. COSTO DE LA INVERSIÓN DEL PROYECTO, $\tilde{X}$ .....	58
FIG. 4.8. TASA DE DESCUENTO DEL PROYECTO, $\tilde{r}$ .....	59
FIG. 4.9. VOLATILIDAD DEL PROYECTO, $\tilde{\sigma}$ .....	59
FIG. 4.10. OPCIÓN REAL DIFUSA DEL PROYECTO, <i>FROV</i> .....	61
FIG. A.1. CURVA DE DISTRIBUCIÓN DE VIENTO Y POTENCIA DEL AEROGENERADOR.....	76
FIG. A.2. CURVA DE POTENCIA DEL AEROGENERADOR PROPORCIONADO POR EL FABRICANTE.....	77
FIG. A.3. FLUJOS DE EFECTIVO ESTIMADOS DEL PARQUE EÓLICO.....	78



## LISTA DE TABLAS

	Página
TABLA 2.1 DIFERENCIAS ENTRE OPCIONES REALES Y OPCIONES FINANCIERAS.....	15
TABLA 2.2 ELEMENTOS PARA LA VALUACIÓN DE OPCIONES REALES Y OPCIONES FINANCIERAS. ....	16
TABLA 3.1 FUNCIONES DE MEMBRESÍA Y DISTRIBUCIÓN.....	32
TABLA 3.1 FUNCIONES DE MEMBRESÍA Y DISTRIBUCIÓN [CONTINUACIÓN].....	33
TABLA 4.1 DATOS TÉCNICOS DEL PARQUE EÓLICO.....	51
TABLA 4.2. PRECIO PROMEDIO DE ENERGÍA ELÉCTRICA ( $\$/kWh$ )**.....	53
TABLA 4.3. VALORACIÓN DE LA OPCIÓN REAL BAJO DIFERENTES MODELOS. ....	62
TABLA A.1. SITIOS DE MÉXICO CON MEDICIONES ANEMOMÉTRICAS [USAID, 2009]. ....	77

## NOMENCLATURA

$A$	<i>Conjunto ordinario.</i>
$\tilde{A}$	<i>Conjunto Borroso.</i>
$M$	<i>Conjunto de Membresía.</i>
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	<i>Función de membresía.</i>
$\in$	<i>Membresía en un conjunto.</i>
$\notin$	<i>No membresía en un conjunto.</i>
$F$	<i>Familia de conjuntos borrosos.</i>



# CAPÍTULO 1:

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos de flujos de efectivo descontados (FED), valor presente neto (VPN), tasa interna de retorno (TIR) son métodos exclusivos con los que se ha venido valuando hasta la actualidad inversiones realizadas por empresas, muchas veces conocidos como métodos tradicionales, suelen ser eficientes para administradores y empresas que tienen la necesidad de tomar decisiones de inversión en sus negocios, no obstante las limitaciones de estos métodos pronto quedan al descubierto pues solo toman en cuenta el valor del dinero en el tiempo pero no así el riesgo y flexibilidad inherentes a todo proyecto de inversión. Después de los grandes avances que se dieron en las finanzas a partir de la publicación realizada por Fischer Black y Myron Scholes a mediados de la década de los 70's, que se refieren a la manera de como valuar opciones financieras, surgieron muchas otras técnicas que ofrecían métodos alternativos a las iniciales [Rubinstein, 1979], cada una de ellas con sus pros y contras; [Hommel and Lehman, 2001] describen la mayoría de estas técnicas clasificándolas principalmente en métodos analíticos y métodos numéricos, ver Figura 1.1. Con los recientes avances en inteligencia artificial y desarrollo computacional, hoy se llevan a las finanzas estas técnicas aplicadas a la solución de problemas que involucran principalmente la toma de decisiones [Khcherem and Bouri, 2009], valuación de compra y venta de opciones americanas [Yoshida *et al.*, 2006] y [Lee *et al.*, 2005], evaluación de mercados accionarios [Lin *et al.*, 2007], etc., otras técnicas empleadas que nacen de las ciencias computacionales para la solución de problemas destacan las redes neuronales, lógica difusa, neurodifusas y los algoritmos genéticos. Por esta razón proponemos que otra clasificación que debe agregarse a la propuesta de [Hommel and Lehmann, 2001] y que se deriva como producto de la presente tesis, es la que se remarca en el recuadro de color rojo en la Figura 1.1, esto puede fundamentarse en las aplicaciones que se han venido dando en el área financiera y por el alcance que se obtienen en la solución de problemas en muchas áreas de ingeniería al emplear las técnicas de inteligencia artificial.

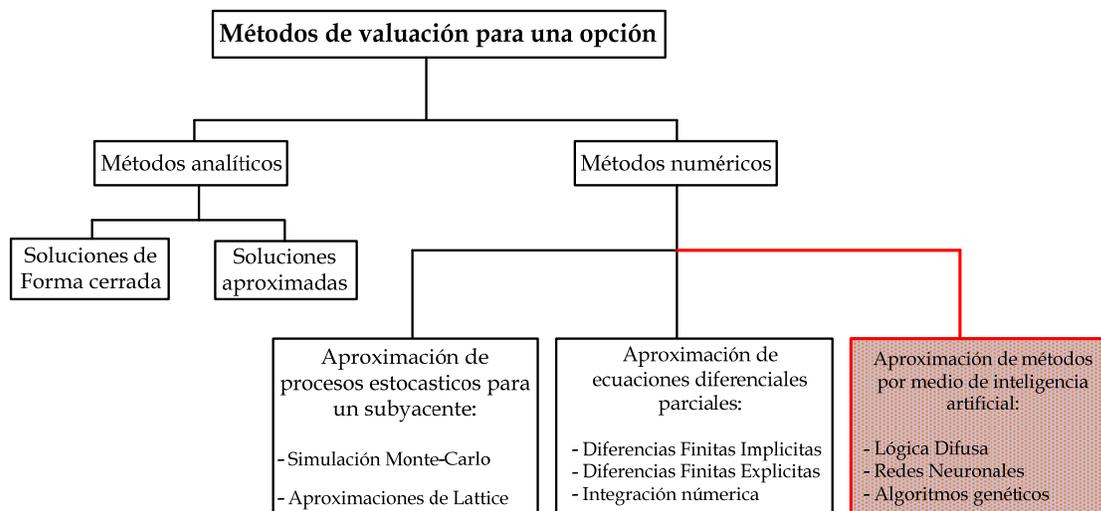


Fig. 1.1 Métodos usados para la valuación de opciones. Fuente: Elaboración Propia

La razón del surgimiento de varias alternativas de valuación que se muestran en la figura anterior es principalmente por:

- i) La falta de efectividad de los métodos tradicionales para valorar inversiones, muy frecuentemente utilizados,
- ii) La complejidad al utilizar el análisis estocástico para la valuación de opciones por parte de las empresas,
- iii) Muchas de las técnicas no contemplan la mayor parte de incertidumbre futura, y
- iv) Los métodos exactos al ser muy robustos carecen de eficiencia computacional al ser programados con algún software de cómputo.

La lógica difusa como herramienta utilizada en el presente trabajo de tesis, parte de los fundamentos de la lógica clásica la cuál asigna únicamente dos posibilidades a un evento; verdadero o falso, uno o cero. Sin embargo a pesar de que muchos de los problemas de nuestro entorno obedecen a estos principios, existen casos en donde no necesariamente se tiene que asignar dos posibilidades a los sucesos, por ejemplo; supongamos que una empresa que produce carros observa una severa turbulencia económica en el mercado al que atiende y se ha preguntado si sería conveniente cerrar una de sus plantas o continuar con sus operaciones, la lógica clásica después de un análisis respondería solo con dos sentencias, *parar* o *continuar*, mientras que la lógica difusa procura crear aproximaciones matemáticas a partir de datos imprecisos en el entorno como podría ser el grado y severidad de la crisis actual que aqueja a la empresa comparadas con las pasadas, el comportamiento de sus acciones en los mercados financieros, el nivel de confianza de los inversionistas, etc., por lo que sus posibles respuestas no son deterministas como sí lo son con la lógica clásica, así esta última nos sugeriría que tanto es posible cerrar, continuar o incluso extender las operaciones de la compañía. A este nuevo enfoque de razonamiento muchas veces se

le conoce como lógica multivaluada porque entre sus respuestas yace toda una variedad de asignaciones, según sea desarrollada por los modelos que se aplica para su estudio.

El objetivo de todo sistema de lógica difusa es introducir el grado de veracidad o falsedad dados los enunciados de entrada, algunos sistemas también son capaces de refinar los enunciados de salida conforme se refinan los de entrada, son por estas características que se considera a los sistemas de lógica difusa dentro de la inteligencia artificial.

La metodología que empleamos para determinar la flexibilidad del proyecto en estudio parte de este principio, introduciendo aquella información de incertidumbre (variables difusas) a un sistema que ajusta los datos inciertos a las características de uno de los modelos empleados (ej. sistema triangular, trapezoidal, cuadrado, etc.) por los sistemas difusos y posteriormente entregando enunciados de salida. Esta metodología que más adelante se llega a presentar se basa originalmente en la propuesta de [Carlsson and Fuller, 2000] y [Carlsson and Majlender, 2005] cuyos análisis para valorar un proyecto de inversión en tecnología empiezan representando los flujos de efectivo futuros por medio de una distribución de posibilidades y de esta forma captan la incertidumbre que estos representan para la valuación del proyecto.

Entre los modelos a los cuales se ajustan los datos se tienen, por ejemplo distribuciones de tipo trapezoidal, rectangular, función signoide, combinaciones entre estas, etc., los cuales se estudian en capítulos posteriores.

## **1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Factores como la globalización, apertura de mercados y recientemente los de tipo ambiental, entre otros, han llevado a que los proyectos energéticos de inversión presenten un mayor dinamismo y sean cada vez más vulnerables a muchos factores; es así que la gran mayoría de las inversiones, como aquellas pertenecientes al sector energético, se asocia cada vez más un mayor grado de incertidumbre durante todo su ciclo de vida, por lo que es inminente la necesidad de valorar la flexibilidad e incertidumbre intrínseca que dichos proyectos llegan a presentar en el futuro para determinar si le conviene o no a las empresas llevar a cabo este tipo de inversiones.

En torno al mercado eléctrico internacional y específicamente en México, hace algunas décadas surgió la opción de reenfocar los medios de generación de energía eléctrica utilizando como alternativa las energías renovables. Hoy se tiene la certeza de que ésta es una alternativa de generación eléctrica confiable y más aún si se ve desde el punto de vista ambiental, por esta razón en México se han venido implementado proyectos de esta naturaleza y se tienen en planes muchos otros para un futuro [POISE, 2012]. No obstante para los inversionistas puede resultar bastante

incierto invertir en estos proyectos pues se presentan diversas variables que influyen directamente en su desarrollo, afectando la salud económico-financiera del proyecto y muchas de estas su impacto es mayor en países emergentes como México, algunas de ellas son las constantes reformas energéticas adoptadas en cada sexenio, la volatilidad en el precio de electricidad, petróleo y gas, y recientemente la conciencia que la sociedad adquiere por utilizar energías verdes, etc., todas en conjunto obligan muy a menudo a que las empresas reestructuren sus planes de inversión, diseñando estrategias que le permitan competir con sus adversarios además de captar la mayor cantidad de información relevante para el proyecto y por lo tanto buscar generar valor para el proyecto y la empresa.

Poner en marcha una inversión de esta naturaleza, implica toma de decisiones estratégicas para el futuro del proyecto, de la empresa y más aún para un país. Por otra parte, los proyectos de gran escala como son los de infraestructura energética involucran un gran desembolso inicial en recursos antes de que el producto o servicio esté presente en el mercado y en momentos determinados surge la duda de cuál es el mejor momento para tomar lugar en el mercado dadas las diferentes opciones que presenta una inversión, en ocasiones cierta información anteriormente desconocida llega a los directivos responsables de la toma de decisiones, pudiendo presentarse opciones como la de expandir, aplazar, contraer o abandonar el proyecto. De ahí la necesidad de valorar la flexibilidad que un proyecto pueda llegar a tener ante los diferentes escenarios futuros y encausarla a una mejor toma de decisiones por parte de las compañías.

### **1.3 OBJETIVO**

Valuar financieramente la inversión de una planta de generación eléctrica de producción independiente ubicado en Baja California, conjuntando la teoría de opciones reales y lógica difusa para determinar si es económicamente factible en función de diversos escenarios de flexibilidad y riesgos futuros.

### **1.4 JUSTIFICACIÓN**

Muchos de los proyectos que se espera lleguen a ofrecer una atractiva tasa de rendimiento, como son aquellos realizados en energías alternativas, a menudo requieren grandes desembolsos de dinero y las técnicas tradicionales de valuación muy utilizadas como la de flujos de efectivo descontados presuponen escenarios no cambiantes o 'estáticos'. Hoy más que nunca sabemos que existe una dinámica en los mercados que afecta las fases de desarrollo e implementación de los proyectos, por consecuencia las empresas y el mundo académico se muestran insatisfechos con métodos como el valor presente neto y exigen a la vez, técnicas más sofisticadas que

contemplan la mayor parte de alternativas futuras (opciones) dentro de modelos de valuación de proyectos y cuyos resultados permitan discernir mejor entre las decisiones a tomar sobre la inversión.

Las opciones reales en conjunto con la teoría de lógica difusa ofrecen una técnica más completa que maneja la incertidumbre en la información para las decisiones de inversión, esta perspectiva de análisis aún es abordada en los proyectos de investigación llevados a cabo en la División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad y en general por otras instituciones en México, por lo tanto se pretende mostrar con la técnica de opciones reales y matemática difusa una nueva manera de valorar proyectos con las características ya mencionadas, además de motivar con nuevas aplicaciones dentro del área financiera.

## 1.5 ESTADO DEL ARTE

Desde que [Black and Scholes, 1973] desarrollaron por primera vez la manera de valorar activos financieros contingentes (opciones financieras) en el mercado, ha habido importantes aplicaciones y nuevos desarrollos en otras áreas de las finanzas, una de ellas son las nuevas técnicas de valorar los proyectos de inversión, cuya metodología derivada de la valuación de opciones financieras se denomina opciones reales. El término “opción real” fue utilizado por primera vez cuando [Myers, 1976] publicó su famoso artículo que trata de la valuación de opciones americanas para el caso de inversiones empresariales, es ahí cuando se adopta el concepto de opción real en la investigación financiera y a partir de entonces se forjaría lo que hoy se conoce como *teoría de opciones reales*. Actualmente existen numerosos artículos, libros, revistas, trabajos de investigación y tesis realizadas que estudian la teoría de opciones reales.

En términos de teoría y metodología, el primer libro publicado formalmente abordando la teoría de opciones reales fue [Trigeorgis, 1996], que en esencia busca desaparecer la brecha que existía en un principio entre la teoría académica y aplicaciones prácticas, luego en [Copeland and Antikarov, 2001] se busca un enfoque para la administración financiera corporativa usando un menor análisis cuantitativo y haciendo mayor énfasis en la toma de decisiones por parte de administradores y directivos de empresas. Más tarde otros trabajos con gran profundidad y amplitud en la teoría de opciones reales, sobre todo por las aplicaciones en varios tipos de proyectos son [Triantis and Kulatilaka, 1998] y [Mun, 2002]; otros autores como [Hull, 2002] y [Lamothe and Pérez, 2003] abordan en un principio las opciones financieras para luego presentar un enfoque hacia las opciones reales. Existen otros estudiosos que se enfocan específicamente en proyectos de inversión en diversas áreas como son manufactura, infraestructura, servicios, tecnología [Alleman and Noam, 1999] entre otros. Para el estudio de la matemática y de sistemas difusos existen muchas fuentes

bibliográficas como [Klir and Yuan, 1995] y [Lee, 2005], quienes abordan con claridad y pragmatismo las aplicaciones en diversas áreas de ciencias e ingeniería.

Múltiples han sido las aplicaciones de opciones reales para la valuación de proyectos o de empresas. Entre las aplicaciones para valorar proyectos energéticos destaca [He, 2007] quien en su trabajo de tesis sobre opciones reales del mercado energético de Holanda analiza los principales factores que afectan los precios de electricidad y los modela como funciones de restricción para cuantificar el valor de una planta de generación hidroeléctrica. En [Madlener and Stoverink, 2011] valúan inversiones en plantas de energía que pertenecen al sector eléctrico de Turquía, determinando la rentabilidad en la construcción de una planta de 560 MW e identificando las mayores fuentes de incertidumbre en el país, además de utilizar el árbol binomial para la determinación las ventajas frente al método de VPN.

#### *Artículos.*

Actualmente existe un gran cúmulo de artículos sobre el tema, sin embargo mencionamos solo aquellos en los que se ha basado el presente trabajo, empezando con [McDonald and Siegel, 1985], [Brennan and Schwartz, 1985] que proponen opciones reales bajo el enfoque de opciones financieras para valorar estrategias de inversión en corporaciones, [Kulatilaka, 1986] introduce el concepto de flexibilidad en proyectos de inversión, luego [Dixit and Pindyck, 1994] hacen lo propio con el concepto de irreversibilidad a lo que llaman la oportunidad que desaprovechan las compañías en no hacer la inversión en el momento. Otros artículos desarrollan casos prácticos de estudio en proyectos de inversión tecnológica como [Benaroch *et al.*, 2008], [Carlsson *et al.*, 2005] y [Nikookar *et al.*, 2012], aplicaciones en la industria del gas y petróleo [Dickens and Lohrenz, 1996], [Junior *et al.*, 2005], [Johnson *et al.*, 2006].

No obstante la introducción de la matemática difusa en aplicaciones en ciencias e ingeniería se da en principio desde que [Zadeh, 1963] introduce por primera vez el concepto de conjuntos difusos. A partir de entonces se han dado grandes avances y aplicaciones en estas áreas, particularmente en el área de las finanzas; los artículos más extensos y con pragmatismo son [Carlsson, 2001], [Carlsson and Fuller, 2007], [Wang and Hwang, 2005], y [Collan, 2004] que en esencia proponen el uso de conjuntos difusos para valorar opciones reales de diversa naturaleza como son aquellas relacionadas con tecnologías de la información, gas y petróleo. En [Tolga and Kahraman, 2008] y [Chakraborty and Guha, 2010] hacen uso de esta herramienta matemática para aquellas inversiones de gran magnitud y con ciclo de vida prolongado como son la explotación de minas, construcción de plantas industriales y por su puesto las plantas de generación eléctrica con fuentes de energías renovables.

*Documentos de Investigación.*

En el desarrollo del tema nos hemos apoyado en muchos trabajos y reportes realizados por varios autores reconocidos que tienen como virtud la experiencia y aporte para la adaptación de la teoría de opciones reales como [McDonald, 1998], [Carlsson and Fuller, 2000], [Brandao *et al.*, 2004], [Benaroch 2006] y [Collan, 2008], éste último combina técnicas estadísticas con procesos estocásticos para ofrecer más soporte a las decisiones en proyectos de inversión tecnológica; muchos de estos autores han llevado a cabo casos prácticos reales implementados en industrias de muchos tipos y utilizando varios métodos para su análisis.

*Tesis.*

Es evidente que se han desarrollado muchos trabajos de tesis en muchas universidades nacionales e internacionales, éstas utilizan las opciones reales como alternativa para la valuación de proyectos de inversión, por ejemplo la tesis doctoral [Schulmerich, 2005] realizada en el MIT, cuyo estudio propone varios métodos y modelos estocásticos para la valuación de proyectos de inversión, en el cual podemos incluso comparar la trascendencia y alcance de varios de los métodos utilizados. Otro trabajo de tesis que llama la atención es [Mezei, 2011] que aborda la teoría de sistemas difusos y cuyo enfoque es predominantemente abstracto sin embargo la teoría y demostraciones que lleva a cabo nos ayuda a entender varias propiedades de los conjuntos difusos, otra trabajo como [Balibrea, 2011] de la UPC se basa en el desarrollo de un proyecto de generación eléctrica estimando todo lo relacionado a costos variables y tarifas de electricidad durante la vida del proyecto. En México la **Universidad Nacional Autónoma de México** y específicamente la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, ha sido productiva en muchos proyectos aplicando la teoría de opciones reales en diversos sectores dentro de la industria como son farmacéutica, bancaria, construcción de plantas industriales y en empresas privadas; una característica peculiar de muchos de estos trabajos es que usan como técnica de valuación el método binomial para valorar los proyectos, por ejemplo, en [Guerrero, 2009] se implementa simulaciones por computadora para valorar inversiones en una planta de etanol utilizando el método binomial.

## 1.6 HIPÓTESIS

Las estrategias de inversión en las empresas y particularmente las de generación eléctrica, van encaminadas a decisiones de invertir o no invertir, aplazar, contraer, expandir o alternar opciones mientras se va esclareciendo lo que aqueja en ese momento al proyecto, la falta de información. Las opciones reales con el uso de la matemática difusa resultan en una metodología robusta y sofisticada que aproxima la información para dar certeza de cuales alternativas resultan ser idóneas dado los escenarios que se presentan en los proyectos de inversión.

Además, los sistemas difusos como herramienta matemática son los que mejor describen y ajustan las variables de entrada a los modelos de valuación, en comparación a métodos como el VPN que regularmente son utilizados.

## **1.7 NATURALEZA Y DISPONIBILIDAD DE LA INFORMACIÓN**

Debido a que el tema central tiene un enfoque hacia las energías alternativas y los sistemas difusos, la información requerida para la realización del presente trabajo se basa principalmente en datos recopilados de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), Secretaría de Energía (SENER) y otros organismos y agencias internacionales, cuya información se refiere a datos históricos sobre el desarrollo de proyectos con estas fuentes primarias y además con información que se tiene sobre proyectos a desarrollar en los próximos años.

Dado que el caso de estudio se centra como propuesta a los proyectos que se vienen generando en el estado de Baja California, la estimación de los flujos de efectivo con todo lo que implica como son generación de energía proyectada, costos O&M, tarifas eléctricas, etc., son estimadas con información referente a proyectos que ya se han desarrollado en México y con las características técnicas particulares en ese estado. Sin embargo a pesar de estas fuentes de información, aún se presentan algunos huecos para el proyecto del que no se tiene acceso pues en el presente aún es información sin conocer y por lo cual se ha sorteado y realizado algunas suposiciones tratando de apegarse a la realidad del proyecto de manera que no se pierda objetividad y claridad en el tema.

## **1.8 ESTRUCTURA DE LA TESIS**

El presente trabajo de tesis está dividido en cinco capítulos y un apéndice, el contenido principal de cada uno de ellos se resume a continuación:

En el *primer capítulo*, se revisa parte de los trabajos que se han llevado a cabo en el tema de opciones reales, se establece el objetivo y marco teórico metodológico del trabajo.

El *segundo capítulo*, describe las características principales de los métodos tradicionales como el VPN utilizados para la valuación de inversiones, las desventajas que presentan y cuando es conveniente utilizarlos. Se estudia en detalle la teoría de opciones reales y los métodos que existen para su valuación.

En el *tercer capítulo*, se estudia y detalla los principales teoremas a utilizar de los 'sistemas difusos', poniendo énfasis en las consideraciones y ajustes respectivos para la implementación del caso de estudio. Se menciona otras aplicaciones de los sistemas difusos para el manejo de información incierta, especialmente en el área de las finanzas.

El *cuarto capítulo*, presenta una breve perspectiva de la importancia de los energéticos en las economías emergentes principalmente, y a su vez la importancia en el desarrollo de proyectos que utilizan fuentes alternativas de energía. Se aplica la teoría de opciones reales bajo el concepto de sistemas difusos, ajustando nuestros datos de entrada al modelo obtenido en el capítulo tres, además se analiza cada una de las variables implícitas en el modelo para determinar la incertidumbre que existe en la construcción y operación de la planta de generación eléctrica. Finalmente se comparan los resultados obtenidos con los modelos propuestos por [Carlsson and Fullér, 2000] y [Thiagarajah *et al.*, 2007].

En el *quinto capítulo*, finalmente se expone conclusiones generales y recomendaciones acerca de las opciones reales y el alcance que llega a tener con el uso de sistemas difusos en los proyectos de inversión y en el área financiera.

En el Apéndice, se describe parte de los modelos que dan soporte a la teoría de opciones reales desarrollada en el capítulo dos principalmente, así como datos técnicos de los aerogeneradores utilizados en la construcción del parque eólico.



# CAPÍTULO 2:

## VALUACIÓN DE PROYECTOS DE INVERSIÓN

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Los presupuestos que asignan las compañías para invertir en nuevos proyectos muy a menudo se ven muy influenciados por una diversidad de factores tanto locales como globales, por lo que las decisiones a tomar por parte de las empresas también son afectadas debido a la gran competencia que se genera en los mercados existentes donde se tiene participación. En muchas situaciones ‘esperar’ puede resultar contraproducente para las empresas además de existir el riesgo de que la competencia pueda tomar ventaja dando los primeros pasos antes que ella, por lo que surge la duda de cuál es el momento oportuno para poder tomar decisiones estratégicas y buscar aprovechar las oportunidades que se presentan, a estas oportunidades implícitas en los proyectos es lo que se conoce como *opciones*.

A partir de que las finanzas corporativas surgen como una disciplina asociada con la economía financiera y cuyo objetivo se centraba principalmente en el análisis financiero a nivel corporativo, donde en principio se utilizaba para la valuación de empresas y proyectos de inversión varios métodos contables y financieros aplicando o no flujos descontados de los ingresos;<sup>1</sup> siendo la técnica más recurrente la del Valor Actual Neto (VAN). Desafortunadamente estos métodos mejor conocidos como “*tradicionales*” no añaden valor a los proyectos cuando se presentan oportunidades estratégicas en el futuro; hacer uso de estos métodos para valorar una opción una vez que fluye la información y se conoce algo que anteriormente era desconocido lleva a sobrevalorar o subvalorar un proyecto y por consecuencia el riesgo asociado al proyecto y a la empresa aumenta. Una de las características del VAN es que asume que las inversiones son *reversibles* [Dixit and Pindyck, 1995], es decir que esta puede de algún modo no realizarse y los gastos realizados son recuperados debido a las

---

<sup>1</sup> Entre los métodos tradicionales que no aplican el valor descontado de los flujos se encuentra por ejemplo el Período de Recuperación de la Inversión; entre los métodos que si toman el valor del dinero en el tiempo se encuentran, entre otros, la Tasa Interna de Rendimiento y el Valor Actual Neto.

condiciones del mercado al resultar ser peores que las anticipadas. Aunque esto llega a ser cierto para algunos casos, esto no siempre sucede y más aún en situaciones donde las decisiones de inversión son tomadas sin considerar eventos futuros relacionados a la inversión. Ante esto [Pindyck, 1994] y [Dixit and Pindyck, 1995] explican que la mayoría de las veces las inversiones son por el contrario *irreversibles*<sup>2</sup> y capaces de ser diferidas, donde el desfase puede llegar a afectar las decisiones de inversión, por lo tanto para analizar dichas decisiones necesitamos entender los conceptos de *irreversibilidad*, *incertidumbre* y más directamente el factor *tiempo*, estos elementos están interrelacionados y por lo tanto son características de una inversión.

Gracias a los trabajos realizados por muchos autores sobre la valuación de opciones financieras como [Black and Scholes, 1973], [Myers, 1977], [Brennan and Schwartz, 1985] y después opciones reales [Dixit and Pindyck, 1995], [Caballero and Pindyck, 1996], [Kulatilaka and Perotti, 1998], [Dixit *et al.*, 1999], entre otros, hoy se tiene una capacidad de respuesta a las preguntas que emergen de las empresas referente a sus decisiones de inversión, donde intervienen los tres elementos anteriormente mencionados.

## **2.2 CORRESPONDENCIA ENTRE OPCIONES FINANCIERAS Y OPCIONES REALES**

En los últimos años se ha observado que la riqueza de una sociedad ha sido determinada principalmente por su capacidad de producción, es decir, los bienes y servicios que puedan llegar a generarse. Su capacidad de producción es una función directa de los activos reales de una economía [Bodie *et al.*, 2009]: terrenos, edificios, máquinas y el conocimiento mismo pueden ser usados para producir bienes y servicios. En contraste a los activos reales, están los activos financieros como las acciones, bonos, etc., que no son más que documentos los cuales no contribuyen directamente a la producción de las economías.

Mientras los activos reales generan ingresos netos para la economía de un país, los activos financieros simplemente definen la asignación de los recursos o la distribución de la riqueza entre los inversionistas. Entonces los individuos pueden decidir entre consumir hoy o invertir para el futuro. Si la elección es invertir, ellos pueden asignar sus recursos en activos financieros mediante la compra de títulos y acciones. Cuando los inversionistas compran estos títulos de las compañías, éstas últimas canalizan dicha inversión para el pago de activos reales como la construcción de plantas de generación, plantas industriales, mayor infraestructura eléctrica, edificios, etc. Pasado los años se espera que estos proyectos reediten al inversionista con ingresos que vayan más allá de lo que se destinó en un principio con la compra de activos financieros. Es así que la tarea correspondiente para el empresario es la

---

<sup>2</sup> Se entiende por irreversible a la nula opción de recuperar la inversión realizada al principio de un proyecto, naturalmente indica lo contrario a reversibilidad.

maximización de las ganancias o minimizar el riesgo ante posibles pérdidas, en otras palabras estará a expensas de toma de decisiones estratégicas que el mismo proyecto vaya demandando durante todo su ciclo de vida.

### 2.2.1 Opciones Financieras

En [Hull, 2006] se llama opción al derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo; generalmente las opciones son clasificadas bajo diversos criterios por ejemplo según la fecha en la que se puede ejercer, pertenece a una opción de americana o europea, etc. Entre las más importantes y dado el uso que se requiere para el presente trabajo de tesis, se examinan las siguientes:

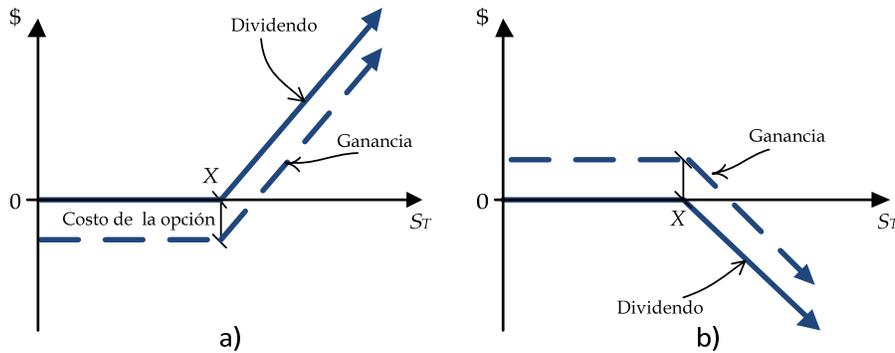
#### *Opción de Compra (Call Option)*

Una opción de compra otorga al tenedor el derecho de comprar un activo a un precio determinado, llamado precio de ejercicio ( $X$ ), antes o en la fecha de expiración acordada. El tenedor de la opción *call* no necesariamente ejerce la opción si las circunstancias en el mercado no le favorecen, es decir; optará por ejercer la opción solo si el valor del activo en el mercado para ser comprado excede el precio de ejercicio, de lo contrario la opción no es ejercida. Si ésta no se ejerce antes de la fecha de expiración del contrato, la opción *call* simplemente expira. Por lo tanto si el precio del activo es mayor que el precio de ejercicio en la fecha de expiración, el valor de la opción *call* es igual a la diferencia entre el precio del activo y el precio de ejercicio; pero si el precio del activo es menor que el precio de ejercicio en la fecha de expiración, el valor de la opción *call* es cero. Entonces el valor de la opción *call* a la fecha de expiración es:

$$\text{Dividendo para el poseedor de la call} = \begin{cases} S_T - X, & S_T > X \\ 0, & S_T \leq X \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde  $S_T$  es el valor del activo en la fecha de expiración. Esta expresión hace énfasis en el hecho de que el dividendo de la opción no puede ser negativo, pues en tal caso la opción no se ejerce.

El dividendo final por adquirir uno de estos derechos estará dado por el máximo entre la diferencia de precio del mercado y precio de ejercicio, como se aprecia en la Figura 2.1. Como sucede en la mayoría de los fenómenos naturales, que tienden al equilibrio, en las finanzas sucede algo similar ya que el dinero que llega a ganar el tenedor de la opción por ejercerla, es el dinero que pierde la contraparte quien la emite, en caso de que el precio del activo sea alto.



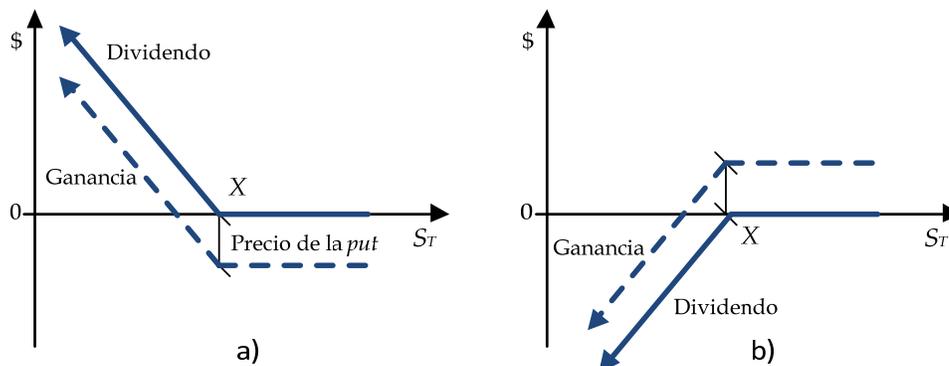
Bajo este escenario, el emisor recibirá una *call* y estará obligado a entregar un activo con valor  $S_T$  por solo  $X$  pesos, por lo que su pérdida sería de  $-(S_T - X)$ . Es así que el emisor de la opción está expuesto a pérdidas si el precio del activo crece, con lo cual está dispuesto a correr este riesgo en recompensa por recibir una prima, gráficamente se muestra en la Figura 2.1-b para esta posición.

### Opción de Venta (Put Option)

Una opción de venta otorga al tenedor el derecho de vender un activo a un precio determinado, llamado precio de ejercicio ( $X$ ), antes o en la fecha de expiración. Una opción *put* será ejercida solo si el precio de ejercicio es mayor que el precio del activo subyacente, es decir, solo si su poseedor puede entregar para el precio de ejercicio un activo con valor de mercado menor que el precio de ejercicio.

$$\text{Dividendo para el poseedor de la put} = \begin{cases} 0, & S_T \geq X \\ X - S_T, & S_T < X \end{cases} \quad (2.2)$$

Por tanto el dividendo final de la opción será el máximo entre la diferencia de precio de ejercicio y precio corriente, tal y como se muestra en la Figura 2.2.



Para las empresas que emiten o venden las opciones, su ganancia neta obtenida sobre la opción (*call* y/o *put*) es el valor de la opción menos el precio originalmente pagado para la compra de esta. El precio por adquirir los derechos sobre la opción es llamada “prima”, la cual representa la compensación que el comprador de la opción debe pagar para obtener el derecho de ejercer la opción si el ejercicio llega a ser rentable.

Dada la fecha en la que se ejerce una opción, existe otro tipo de opciones las cuales son muy utilizadas en el análisis de opciones reales, estas son: una opción Americana permite a su poseedor ejercer el derecho de compra (si es una *call*) o venta (si es una *put*) del activo subyacente antes o en la fecha de expiración, mientras que una opción Europea permite ejercer la opción solo en la fecha de expiración. Evidentemente las opciones Americanas por tener mayor libertad para ejercerlas tienen un mayor valor que las Europeas, y es precisamente el motivo por el cual se negocian más opciones Americanas en los mercados financieros.

El termino opciones reales hace referencia al uso y manejo de activos reales o físicos y no precisamente a activos financieros, sin embargo la manera de valorar opciones reales surge de aquellas técnicas empleadas para valorar opciones financieras, por lo tanto existe cierta similitud y diferencias entre opciones financieras y opciones reales, entre las principales están [Mun, 2002]:

**Tabla 2.1 Diferencias entre opciones reales y opciones financieras.**

Opciones Reales	Opciones Financieras
Reciente desarrollo en finanzas corporativas (últimas tres décadas).	Han existido por más de seis décadas.
Madurez de largo plazo (años).	Madurez de corto plazo (meses).
Las decisiones de inversión son de millones y billones de dólares.	Las decisiones de inversión son de cientos de miles de dólares.
El precio del activo subyacente son los flujos de efectivo esperados del proyecto.	El precio del activo subyacente es el precio de la acción.
Se resuelven usando ecuaciones y árboles binomiales con simulación de la variable subyacente.	Se resuelven por ecuaciones parciales diferenciales y simulación de técnicas de reducción de varianza para opciones exóticas.
El valor de la opción puede incrementarse por las decisiones administrativas y la flexibilidad de tomar nuevas decisiones en cualquier momento.	El valor de la opción es fijo, no puede manipularse por el precio de las opciones.
Deben ser identificadas por los administradores.	Están listadas en un mercado formal.

A pesar de que las diferencias pueden ser amplias entre opciones financieras y opciones reales, existen parámetros que tienen mayor influencia en el valor de una opción los cuales se resumen en la Tabla 2.2. Además de estos cinco parámetros hay que agregar los dividendos que recibirá la acción antes de la fecha de vencimiento; estos afectan a la opción porque cuando una acción paga un dividendo, el precio de mercado de la misma se ajusta para reflejar el dividendo pagado (disminuye). Es así que el poseedor de una *call* preferiría que la acción no llegase a pagar dividendos o que pague el menor dividendo posible, el caso contrario sucede con el poseedor de una opción *put* quien preferirá que la opción pague el mayor dividendo posible, porque de este modo el precio de la acción en la fecha de ejercicio será menor.

**Tabla 2.2 Elementos para la valuación de opciones reales y opciones financieras.**

Parámetros	Opción Real	Opción Financiera
$S_t$	Valor presente de los flujos de efectivo esperados en $t$ .	Precio del bien subyacente
$X$	Costo (valor presente) de la inversión del proyecto en $t$ . El nivel al que se va a operar.	Precio del ejercicio o precio pactado. El nivel al que se va operar.
$R$	Tasa de interés libre de riesgo.	Tasa de interés libre de riesgo.
$\sigma$	Volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto.	Volatilidad del subyacente.
$T-t$	Tiempo de madurez del proyecto. Fecha en la que vence el contrato.	Tiempo total para la maduración. Fecha en la que vence el contrato.

De todas las variables que se resumen en la tabla anterior, la más determinante en el valor de una opción es la volatilidad  $\sigma$  [Fernández, 2002]; ya que cuanto más grande es el tiempo hasta la fecha de ejercicio, mayor es la posibilidad de que el precio de la acción aumente o disminuya, por lo tanto su efecto en el valor de la opción también será mayor.

## 2.2.2 Tipos de Opciones Reales

En la literatura [Myers, 1976], [Dixit and Pindyck, 1995] denominan *opciones reales*, como el conjunto de alternativas disponibles que tiene aquella persona que administra el proyecto de inversión y las cuales le permiten tomar cursos de acción diferentes después de conocer algún tipo de incertidumbre pasada bajo diversos escenarios. Es decir dadas las variables de incertidumbre existentes en el ambiente de los negocios, los proyectos presentan todo un conjunto de alternativas posibles a seguir, gran parte de estas son las que a continuación se mencionan [Hull, 2006]:

- **Opción de abandono.**  
Esta es una opción para vender o cerrar un proyecto, en términos de opciones financieras es una opción Americana *put* sobre el valor del proyecto. El precio de ejercicio de la opción es el valor de liquidación (o reventa) del proyecto menos algún costo por el cierre. Cuando el valor de liquidación es bajo, el precio de ejercicio puede ser negativo. Las opciones de abandono mitigan el impacto de los muy pobres resultados de la inversión e incrementan el valor inicial del proyecto.
- **Opción de expandir.**  
Este es un tipo de opción que puede hacer más fuerte las inversiones e incrementar el resultado si las condiciones son favorables. Esta es una opción Americana *call* sobre el valor de la capacidad adicional. El precio de ejercicio de la opción *call* es el costo de crear esta capacidad adicional descontada para el tiempo de ejercicio de la opción. El precio de ejercicio a menudo depende del valor inicial de la inversión. Si la administración inicialmente elige por construir una capacidad en exceso del nivel esperado de salida, el precio de ejercicio puede ser relativamente pequeño.
- **Opción de contraer.**  
Esta es una opción para reducir la escala de operación de un proyecto. Es una opción Americana *put* sobre el valor de la pérdida de capacidad. El precio de ejercicio es el valor presente de los desembolsos futuros ahorrados como aparece en el tiempo de ejercicio de la opción.
- **Opción de aplazar.**  
Es una de las opciones más importantes disponibles para un financiero para diferir un proyecto. Aparece cuando la compañía cuenta con la flexibilidad de diferir la inversión para esperar que se cuente con más información y decidir si sigue adelante o no. Es una opción Americana *call* sobre el valor del proyecto.
- **Opción de alternar (switching).**  
Esta opción hace referencia a la posibilidad de “cambio” en el método actual utilizado y en la capacidad de adaptarse a la demanda, principalmente. Por ejemplo, reiniciar las operaciones de un proyecto que fue interrumpido es como una opción americana de compra cuyo precio de ejercicio es el costo de reiniciar las operaciones. Interrumpir las operaciones cuando surgen condiciones desfavorables es equivalente a una opción americana de venta cuyo precio de ejercicio podría ser tener que pagar indemnizaciones y otros gastos.

- Opciones Compuestas.

Este tipo de opción se refiere según se vayan concluyendo las etapas, tenemos la opción de decidir si queremos o no invertir en la siguiente, lo que en términos financieros se denomina una opción europea de compra. La regla de decisión es en general la siguiente: supóngase que hemos invertido un millón de unidades monetarias en la puesta en marcha de estudios de un sistema eléctrico para la implantación de unidades de protección más eficientes en un parque eólico y además su interconexión con la red, se ha de adquirir la opción de invertir en la siguiente fase, pero sólo si el valor estimado del proyecto en este momento supera el monto invertido.

## 2.3 LIMITACIONES DE LOS MÉTODOS TRADICIONALES

Por popularidad el método que comúnmente se estudia cuando se habla sobre proyectos de inversión es el de valor presente neto (*VPN*). Este método consiste en traer todos los flujos futuros estimados a valor presente, restando las inversiones realizadas en el proyecto. El criterio que sigue este método es que una inversión debe ser tomada siempre que el *VPN* sea positivo y rechazada cuando sea negativo. Se calcula de la siguiente manera:

$$VPN = -I_0 - \frac{I_1}{(1+\rho)} - \dots + \frac{\pi_1}{(1+\rho)} + \frac{\pi_2}{(1+\rho)^2} + \dots > 0 \quad (2.3)$$

Donde  $I_0, I_1, \dots$  son las salidas de flujos de efectivo y  $\pi_1, \pi_2, \dots$  son los flujos de entrada del proyecto,  $\rho$  es la tasa de descuento, usualmente la WACC ("*Weight Average Cost of Capital*", en inglés).

El método tiene la característica de aceptación o rechazo absoluto del proyecto, jamás toma en cuenta la flexibilidad del mismo. En muchos proyectos se suele tener funcionalidad con este método y son aquellos donde se tiene certidumbre sobre los flujos de efectivo de la inversión, por ejemplo inversiones en bonos o una empresa que desarrolla cosméticos, etc. Evidentemente en un mundo globalizado en donde la dinámica de los mercados y la competencia hace que las inversiones realizadas por las compañías exijan una mayor certeza en sus flujos, de tal manera que se pueda reducir las pérdidas o si es el caso maximizar ganancias en la medida de lo posible. Sucede que el *VPN* no toma en cuenta la flexibilidad del proyecto ante posibles escenarios como una gran aceptación en el mercado del proyecto, disminución de la productividad de la empresa o incluso contingencias ambientales que impactan directamente al proyecto, entre muchas otras. Todos estos escenarios hacen que los empresarios y los investigadores financieros vean el lado débil del *VPN* cuando existe

incertidumbre<sup>3</sup> y se presenten alternativas durante el curso del proyecto. Para un directivo de una empresa de energías renovables puede ser más viable la posibilidad de esperar y ver cómo evolucionan ciertas variables económicas, por ejemplo el precio del crudo, antes de incurrir en un costo irreversible como la compra de maquinaria especializada para instalar la plataforma de un parque eólico en altamar, así entonces si los precios del crudo suben el gerente tendrá un fundamento en su decisión de invertir o si es lo contrario (difícilmente llega a ocurrir hoy en día) podría evitar aquellos costos irreversibles; para los dos casos el gerente de la empresa estará agregando valor al proyecto al valorar el comportamiento de los precios del crudo y muchas otras variables inherentes a la inversión. Los empresarios hoy en día están a la expectativa de tener la información muy cercana de algo que es incierto, en la medida que se aclara mucho de esta incertidumbre toman decisiones de inversión, esto significa que las decisiones que generalmente abundan en el mundo empresarial son de carácter dinámico y aquí queda imposibilitada el uso de la herramienta del VPN. En muchos casos llega a resultar favorable para la empresa y el proyecto cuando se toma en cuenta la flexibilidad, lo que al final de cuentas agrega valor al mismo. La expresión para valorar y que toma en cuenta las opciones del proyecto esta dada por:

$$VPN_{\text{estratégico}} = VPN_{\text{base}} + \text{Valor de la Opción} \quad (2.4)$$

La expresión (2.4) indica que si al método base del VPN, calculado con la Ecuación (2.3), se le agrega el valor que resulta de valorar la(s) opción(es) nos arroja el valor real del proyecto,  $VPN_{\text{estratégico}}$ . Los resultados posibles nos llegan a indicar una o varias opciones como aplazar, expandir, contraer el proyecto y muchas otras como las que se mencionaron previamente.

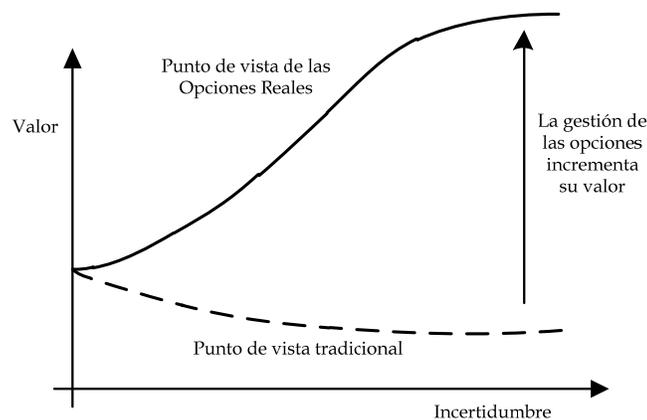


Fig. 2.3 Valor de la opción dado el nivel de incertidumbre (Adaptado de [Amram and Kulatilaka, 2001]).

<sup>3</sup> Incertidumbre es cuando se conocen los posibles resultados pero no se tiene asociado una probabilidad a cada evento.

Quizá la característica más importante que debemos notar y razón por la cual las opciones reales han tenido mucho auge, es el riesgo. La mayoría de los agentes económicos son aversos al riesgo y frecuentemente sucede que cuanto mayor es la cantidad que está en juego más es el temor por perder lo que se tiene. Las opciones reales tienen la virtud de tomar en cuenta la incertidumbre, sea favorable o desfavorable, y por lo tanto convierte el riesgo en una ventaja para el proyecto, una estrategia a favor para los directivos modernos que conocen sobre la potencialidad de las opciones. Precisamente [Amram and Kulatilaka, 2001] mencionan que a medida que la incertidumbre crece el valor del proyecto también aumenta desde el punto de vista de opciones reales, Figura 2.3, recordemos que uno de los elementos de mayor peso que influye en el valor de una opción es la volatilidad y por consiguiente el valor de la flexibilidad aumenta, caso contrario sucede con el uso de los métodos tradicionales en los cuales disminuye el valor.

## **2.4 VALUACIÓN DE PROYECTOS CON ENFOQUE DE OPCIONES REALES**

Uno de los problemas principales que se tienen para la valuación de opciones financieras, es precisamente la fijación del precio cuando la estructura de los dividendos al final del contrato son dadas, por lo que se considera como un problema de valor final. En tanto que para los proyectos de inversión es estimar los costos variables generados cuando se presentan costos fijos irreversibles al principio del proyecto, considerado así un problema de valor inicial. Conociendo que un proyecto de negocios que es diseñado para generar ingresos e involucra costos fijos y variables, donde los costos fijos pueden ser determinados al principio del proyecto y no así para los costos variables que son afectados por factores externos al proyecto, nos lleva al desarrollo de técnicas que nos permitan valorar la flexibilidad de un proyecto de inversión desde el momento en que se presentan los costos irreversibles<sup>4</sup> al inicio del proyecto.

La teoría de opciones reales empieza con el supuesto de que el valor económico de un commodity es representado por un proceso lognormal<sup>5</sup>, donde  $S$  es el valor futuro del instrumento,  $r$  el valor de la tasa esperada y  $\sigma$  la tasa de incertidumbre. Esto obedece a la siguiente expresión:

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz \quad (2.5)$$

Donde  $dz$  es un proceso Wiener.

---

<sup>4</sup> Un costo irreversible es aquel que se hace al principio de una inversión y que no se recupera o si acaso de forma parcial.

<sup>5</sup> Un proceso lognormal describe la distribución de la variable cuyo logaritmo es normalmente distribuido.

El desarrollo de esta ecuación se publica por [Black and Scholes, 1973], los autores llegan a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - qC \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6), es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica que está íntimamente relacionada con la ecuación de difusión de calor empleada en el campo de la Termodinámica. Las soluciones a esta ecuación pueden ser varias, esto depende del derivado que se defina con  $S$  como la variable del subyacente y particularmente depende de las condiciones de frontera que llegan a usarse. Por ejemplo en el caso de una opción de compra europea la condición clave de frontera es  $C = \max(S - X, 0)$  cuando  $t = T$ , para una opción venta europea la condición de frontera queda  $C = \max(X - S, 0)$  cuando  $t = T$ . Detalles sobre el desarrollo de la expresión (2.6) pueden consultarse en el Apéndice A.1.

Con los grandes avances que se han tenido en el área computacional, se han implementado métodos numéricos para la solución de problemas complejos y a veces tediosos de resolver analíticamente, como es el caso de la ecuación diferencial estocástica (2.6) para el precio futuro  $S$  del activo subyacente. Es posible que los métodos más comunes para valorar opciones sean el *método binomial* y *método de diferencias finitas* sin embargo existen otros métodos que también han tenido gran aceptación por su grado de eficiencia dentro de la investigación financiera como es el método Monte Carlo. Dada la relevancia de estos métodos y por la cantidad de trabajos y artículos realizados en opciones reales empleando estas técnicas, a continuación describimos básicamente en qué consisten cada uno de ellas.

### 2.4.1 Método de Diferencias Finitas

Este método surge como alternativa para la solución de ecuaciones diferenciales parciales como la Ecuación (2.6) de Black & Sholes, cuya funcionalidad resulta solo para opciones Europeas proporcionando una solución de forma cerrada, para el caso de opciones Americanas se recurre al apoyo de métodos de aproximación como es el de diferencias finitas el cual mediante aproximaciones busca hallar el valor del commodity  $S$ . No se pretende un análisis exhaustivo del método, sino abarcar de forma genérica la metodología que se utiliza y para un interés más profundo se puede consultar [Wilmott *et al.*, 1993] o [Duffy, 2006].

Se empieza con el análisis para una función  $h = h(x)$  de una sola variable (para el caso de varia variables el análisis es similar) en donde se estima el valor de la derivada alrededor de  $\hat{x}$ , es decir  $h'(\hat{x}) = \frac{dh(\hat{x})}{dx}$ , utilizando el concepto de límite en  $\hat{x}$ :

$$\frac{d h(\hat{x})}{dx} = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(\hat{x} + \Delta x) - h(\hat{x})}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(\hat{x}) - h(\hat{x} - \Delta x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(\hat{x} + \Delta x) - h(\hat{x} - \Delta x)}{2\Delta x} \end{cases} \quad (2.7)$$

Para una función diferenciable los tres límites son iguales y por tanto son tres las aproximaciones discretas para la derivada de  $h$ ;

- ⊕ aproximación hacia adelante,
- ⊕ aproximación hacia atrás, y
- ⊕ aproximación central.

Estos esquemas de discretización forman una malla como se muestra en la Figura 2.4.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{d h(\hat{x})}{dx} &\approx \frac{h(\hat{x} + \Delta x) - h(\hat{x})}{\Delta x} \\ \text{b) } \frac{d h(\hat{x})}{dx} &\approx \frac{h(\hat{x} + \Delta x) - h(\hat{x} - \Delta x)}{2\Delta x} \\ \text{c) } \frac{d h(\hat{x})}{dx} &\approx \frac{h(\hat{x} + \Delta x) - h(\hat{x} - \Delta x)}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

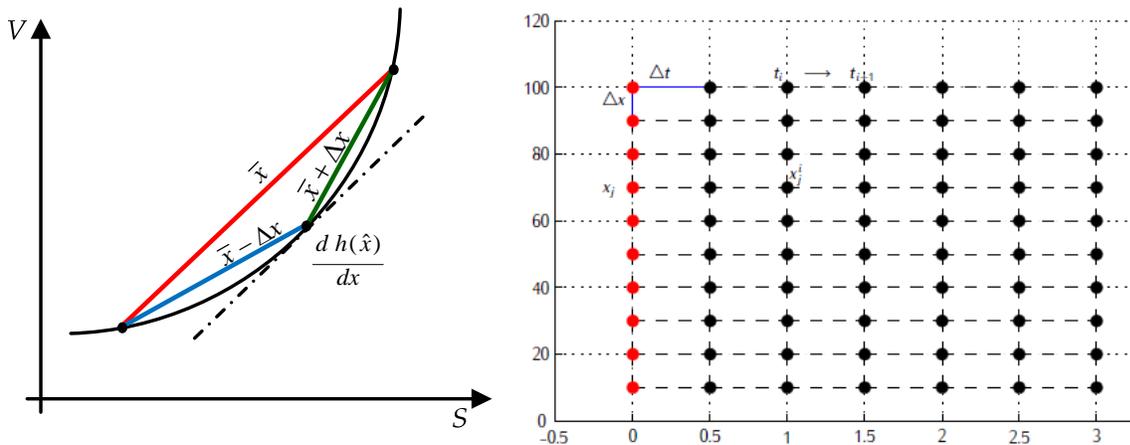


Fig. 2.4. Esquemas de aproximación de diferencias finitas alrededor de  $\hat{x}$  (Adaptado de [Chourdakis, 2008]).

Si ahora asumimos que hemos discretizado para dar soporte a  $h$  usando una maya uniforme,  $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$  con  $x_i = x_0 + i \cdot \Delta x$ , y definiendo los valores de la función  $h_i = h(x_i)$ . Por simplicidad introducimos los operadores de diferencia  $D_+$ ,  $D_-$  y  $D_0$  que denotan

los esquemas de diferencia hacia adelante, atrás y central respectivamente, estos operadores son:

$$\text{Hacia adelante: } D_+h_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x}$$

$$\text{Hacia atrás: } D_-h_i = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\text{Central: } D_0h_i = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x}$$

De las aproximaciones que se muestran en la Figura 2.4, se puede apreciar que el esquema de diferencia central está más cerca al valor de la derivada  $h$ .

El dominio del cálculo consiste en primero discretizar en cierto número de espacio de nodos en un tiempo dado. Cada nodo corresponde a un valor particular del activo y el número corresponde a para un valor particular del activo. Este número depende de la volatilidad del activo, así si la volatilidad es muy grande el método incorpora más nodos en un tiempo dado. La figura mostrada es para el caso de un solo activo, para múltiples activos la proyección de la imagen es en otras dimensiones.

#### 2.4.2 Método del Árbol Binomial

Una técnica popular y útil para la fijación del precio de una opción es el *modelo binomial*, originalmente propuesto por [Cox *et al.*, 1979] cuyas características contrastan con los métodos analíticos que involucran análisis estocástico; las principales ventajas que se obtiene de este método es incremento en la eficiencia computacional, mayor intuición para valuar una opción, además de eliminar la complejidad al hacer uso de soluciones de forma cerrada.

El principio del *modelo binomial* parte en suponer dos escenarios futuros para el precio actual  $S$  de una acción; sea que el precio de la acción suba ( $u$ ) y que el precio de la acción disminuya ( $d$ ), lo cual supone una caminata aleatoria<sup>6</sup> para el precio de una acción. Naturalmente podemos notar que los resultados son aleatorios y por lo tanto asignamos una probabilidad de ocurrencia a cada evento; sea  $p$  si el valor de la acción sube y  $q$  ( $1-p$ ) si el valor de la acción baja, tal y como se representa en la Figura 2.5-a, entonces el precio futuro de la acción será  $Su$  si el valor sube y  $Sd$  si el valor de la acción baja. En un principio se propuso como modelo de aproximación el diagrama de *Lattice Binomial*, el cual converge lentamente a un proceso de difusión lognormal para el precio de una acción y que es visto como un árbol de probabilidades con dos ramas adyacentes, Figura 2.5-a, sin embargo lo más frecuente es valuar opciones para múltiples periodos de tiempo, en cuyo caso se integra sucesivamente el diagrama de *Lattice* como se muestra en la Figura 2.5-b y si deseamos esbozar completamente el

---

<sup>6</sup> El concepto de caminata aleatoria se relaciona con los precios que un activo toma, esto es: i) el cambio en los precios sucesivos son independientes, y ii) el precio cambia conforme a algunas distribuciones de probabilidad.

árbol generado, Figura 2.5-c, podemos observar los diferentes valores que arroja este método de aproximación.

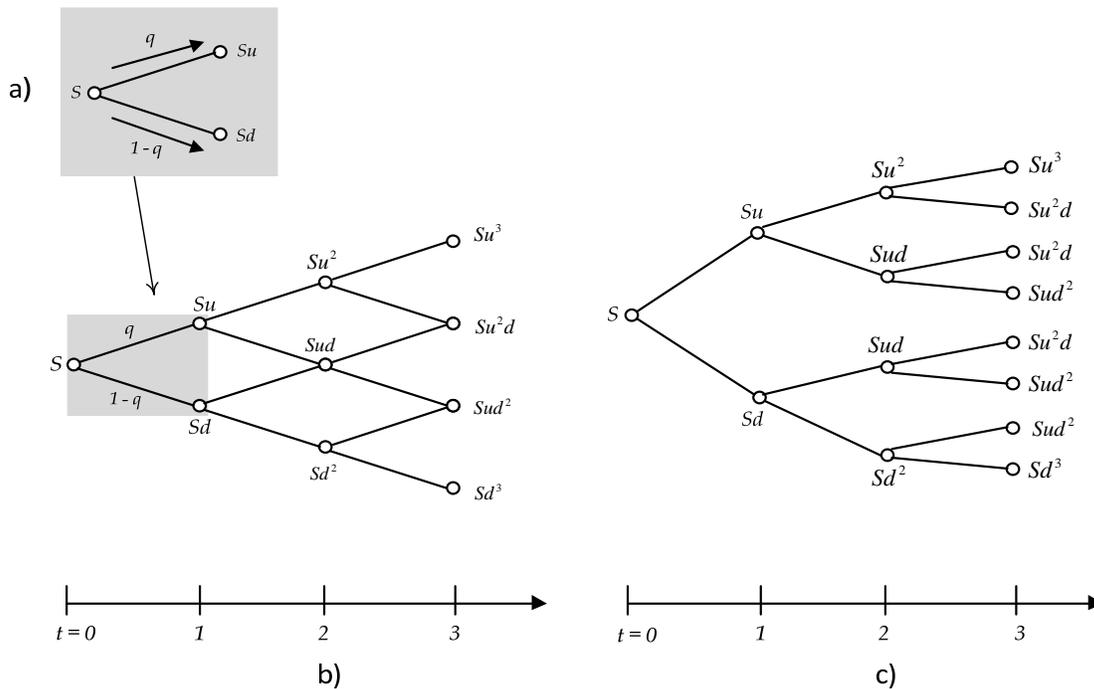


Fig. 2.5. Correspondencia entre diagrama de Lattice y Árbol Binomial (Adaptado de [Brandão *et al.*, 2005])

Desafortunadamente el proceso de trabajo a través de un diagrama de Lattice puede ser tedioso y no perceptivo para aplicaciones más complejas como son la valuación de opciones reales y financieras, para ello [Brennan and Schwartz, 1985] sugieren la creación de un portafolio cuyos dividendos repliquen los dividendos de un activo en todas las fases presentes y futuras las cuales envuelven varias opciones simultaneas y compuestas a la vez.

El método de análisis con árboles de decisión binomial es usado para modelar el manejo de la flexibilidad en tiempo discreto mediante la construcción de un árbol con nodos de decisión, que representan las decisiones que pueden tomarse para la maximización del valor del proyecto en tanto las incertidumbres sean resueltas durante la vida del proyecto, pero también es usado de igual forma para tomar decisiones que minimicen el posible riesgo que se llegue a presentar.

Es importante mencionar que a pesar de que el método binomial surgió en su momento como un método numérico 'ideal' para la valuación de opciones, el cual contrarrestaba la dificultad de resolver ecuaciones parciales estocásticas y cuyas soluciones no siempre se conseguían, actualmente pierde fuerza al encontrarse algunos nudos en su estructura por lo que gradualmente llega a ser un método obsoleto. En las últimas décadas han surgido métodos numéricos alternativos cuyas aproximaciones son mejores y más flexibles que el modelo binomial, para muestra

podríamos suponer que los escenarios futuros para el valor de una acción no sean dos sino tres<sup>7</sup>, en tal caso el método binomial colapsaría ya que no está diseñado para tal modificación. De igual forma, en la valuación de opciones nos enfrentamos siempre con la posibilidad de valuar aquellas con ejercicio antes de la fecha de expiración, opciones americanas, en cuyo caso tenemos que apoyarnos de aproximaciones numéricas ante la falta de una expresión exacta a su solución, el grado de precisión alcanzado por métodos numéricos como el de diferencias finitas es aceptable lo cual resulta una desventaja para el método binomial ya que en principio carece de ser un método numérico, pues si revisamos su estructura se basa simplemente en ejercicios aritméticos y no en ejercicios iterativos. Por lo anterior, resulta indispensable echar mano de otros métodos y técnicas que superen estas dificultades y optimicen muchas otras como es la posibilidad de valuar múltiples activos a la vez, algo muy recurrente en la realidad, además de una buena aproximación y mayor capacidad de respuesta por parte de los ordenadores.

A estas alturas podemos mencionar que otro método alternativo que ha surgido es la implementación de la matemática difusa, cuyos alcances en otras áreas de la ciencia han revolucionado con aplicaciones útiles en la sociedad, lo respectivo a su análisis y valuación para una opción real es examinado en el siguiente capítulo.

---

<sup>7</sup> Existe el *método trinomial* que consiste en suponer no dos, sino tres escenarios distintos en el valor del subyacente: a la alza, a la baja y que se mantenga en su valor. Un resumen del método puede consultarse en el Apéndice A.2 y para mayor detalle, véase por ejemplo [Duffy, 2006].



# CAPÍTULO 3:

## OPCIONES REALES CON EL ENFOQUE DE MATEMÁTICA DIFUSA

### 3.1 INTRODUCCIÓN

El término “incertidumbre” quizá sea una de las palabras más populares en finanzas y seguramente en muchas otras ciencias, tan es así que podemos afirmar actualmente que lo único seguro en los negocios es la incertidumbre; el término por sí mismo ha estado implícito siempre en los modelos matemáticos y en la mayoría de aplicaciones que se llegan a proponer, su significado está ligado con aquellas situaciones en la cual no se tiene (o es limitado) el conocimiento acerca de los estados de la naturaleza que podrían ocurrir. La mayoría de las decisiones que se toman en el mundo real toman lugar en situaciones donde la información y la secuencia de ellas no son propiamente conocidas, por lo tanto resulta más real y conveniente manejar información difusa<sup>8</sup> (o borrosa)<sup>9</sup> para expresar aquellas situaciones en las que se exige una toma de decisiones y se tiene como base información incompleta y/o desconocida.

La lógica difusa ha cobrado gran fama por la variedad de sus aplicaciones en muchas ciencias, las cuales van desde el control de procesos industriales complejos, hasta el diseño de dispositivos artificiales de deducción automática, construcción de dispositivos electrónicos de uso doméstico y de entretenimiento, así como también de sistemas de diagnóstico, pero también otra de las áreas en las que cobra fuerza ha sido en el mundo de las finanzas.

Lotfi A. Zadeh en 1965 introdujo por primera el concepto de lógica difusa por lo que se le considera como el padre en esta área de conocimiento. La lógica difusa en

---

<sup>8</sup> El adjetivo “difuso” se debe a que los valores de verdad no-deterministas utilizados en una afirmación, por lo general, tienen una connotación de incertidumbre. Ej. En la afirmación “*vi un carro bonito*”, cabe preguntarse qué tan bonito puede estar lo cual implica un elemento de incertidumbre. Por lo tanto lo difuso ofrece la posibilidad de asignar más valores de verdad a los enunciados que la lógica clásica asignaría solamente como verdadero-falso, bonito-feo, etc.

<sup>9</sup> En el presente trabajo el término difuso y borroso se utilizan indistintamente.

esencia es la lógica multivaluada que extiende a la lógica clásica o tradicional. Esta última establece en sus enunciados únicamente dos valores; verdadero o falso, sin embargo el razonamiento humano y también muchos fenómenos físicos utilizan valores de verdad que no necesariamente son deterministas. Por ejemplo, al calificar que “el cielo es azul” uno mismo podría preguntarse qué tan “azul” esta, de igual forma si “un vehículo se mueve rápido”, también se está obligado a considerar qué tan rápido se mueve el vehículo, aunque esto último y en muchos casos similares no implique necesariamente cuantificar otros parámetros como la velocidad del vehículo con toda precisión. Las lógicas difusas procuran crear aproximaciones matemáticas en la resolución de cierto tipo de problemas, pretenden producir resultados exactos a partir de datos imprecisos.

### **3.2 SISTEMAS DIFUSOS**

La falta de información es una característica muy particular de la incertidumbre y la aleatoriedad, para lidiar con este problema y poder trabajar con modelos que permitan contemplar dicha aleatoriedad se ha hecho uso de la teoría de la probabilidad la cual proporciona una herramienta cuantitativa para este fenómeno. Afortunadamente con el desarrollo de un área más en las matemáticas, matemática difusa, se han sentado las bases para muchas alternativas posibles de manejar la aleatoriedad llamada ‘teoría de posibilidad’ la cual proporciona una buena herramienta cualitativa ante la falta de información. [Dubois *et al.*, 2000b, y Dubois, 2006] señalan que la teoría de posibilidad resulta útil e interesante para transformar una medición de probabilidad a una medición de posibilidad cuando el cálculo con posibilidades es mucho más simple que con el uso de probabilidades, o más aun cuando se trabaja con información incompleta. Por lo tanto al trabajar con modelos en donde algunos de sus parámetros son desconocidos, puede optarse por asociar una distribución de posibilidad y probabilidad a la vez. La teoría de posibilidad proporciona el marco idóneo para modelar varias clases de información como: números, intervalos, conjuntos aleatorios anidados, así como información lingüística y expresiones inciertas en diferentes escenarios [Dubois *et al.*, 2006], [Prade and Sanddri, 1993]. Pero así como en la teoría de probabilidad las sentencias del mundo real son interpretadas desde diferentes puntos de vista (Ej.; punto vista frecuentista, empírico, etc.), la teoría de posibilidad nos lleva a cuatro ideas; 1) factibilidad, que tan fácil es lograr algo, 2) plausibilidad, referente a la propensión de que llegue a ocurrir un evento, 3) nivel gramatical, expresado por el significado del nivel de las sentencias (Ej. es posible que el tren arribe a tiempo), y 4) marco lógico, se refiere a la consistencia con la disponibilidad de la información.

La primero por entender en la teoría de posibilidad es sin duda lo referente a una distribución de posibilidad, la cual asigna a cada elemento  $u$  de un conjunto  $U$  de

alternativas un grado de posibilidad  $\pi(u) \in [0,1]$  de ser la descripción correcta de un estado de un evento.

La representación de una distribución de probabilidad a una distribución de posibilidad es como se muestra a continuación, Figura 3.1.

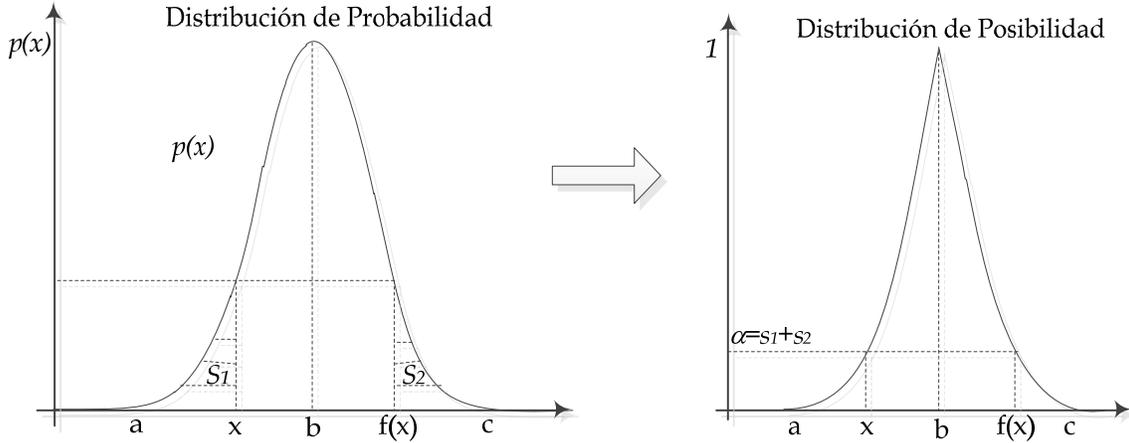


Fig. 3.1. Transformación de probabilidad a posibilidad (Adaptado de [Swishchuk *et al.*, 2010]).

En palabras de [Zadeh, 2002: 236], la desventaja más importante de la teoría de probabilidades consiste en que no se posee la capacidad para procesar información basada en la percepción, la sensación, la expectativa; esto debido a que la teoría de probabilidades no cuenta con mecanismos para representar el significado de las percepciones, y computar dichas representaciones.

### 3.2.1 Principios y definiciones.

La lógica difusa sienta sus bases en la teoría clásica de los conjuntos ordinarios o también conocida como lógica tradicional, así la mayoría de las leyes y axiomas que son aplicables también lo son para el conjunto de sistemas difusos. Dado que no es el objetivo de esta sección y además no es necesario abordar cada uno de estos axiomas,<sup>10</sup> solo nos referiremos a aquellas propiedades que resulten fundamentales y deban ser mencionadas. Partiendo de definiciones base y de la notación básica, se tiene:

**Definición 3.1 (Conjunto Borroso)** Si  $X$  es una colección de objetos denotados por un grado de pertenencia  $x$ , entonces un conjunto borroso  $\tilde{A}$  en  $X$  es un conjunto de pares ordenados:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X)\} \quad (3.1)$$

<sup>10</sup> Para un análisis profundo de los axiomas que rigen los conjuntos de números difusos, vea [Kaufmman, 1996], [Zimmerman, 2010], [Dubois *et al.*, 2006].

Donde  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  se conoce como función de membresía (o función característica generalizada) la cual mapea  $X$  al espacio de membresías  $M$ . Su rango es un subconjunto no negativo de números reales cuyos valores extremos son finitos. La familia de conjuntos borrosos será denotado por  $F$ . Así se tiene que  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  representa el grado de pertenencia de  $x$  en el conjunto borroso  $\tilde{A}$ . Desde el marco de referencia tradicional, esto se puede representar como:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

Observemos que la función de membresía  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  solo puede tomar el valor de 0 o 1. El valor 0 lo usamos para representar un grado de pertenencia nula y el valor 1 para representar pertenencia absoluta. La diferencia a señalar respecto a la lógica borrosa es que la función de membresía puede tomar cualquier valor dentro del intervalo  $[0,1]$ , luego al conjunto de valores posibles se le denomina espacio o conjunto de membresía  $M$ . Es así que los diferentes grados de pertenencia de  $x_i$  han propiciado la existencia de una estructura matemática más compleja, cuyo objetivo es manipular conceptos que regularmente están mal definidos con la lógica clásica, por lo tanto a partir del grado de membresía se pueden llegar a jerarquizar una infinidad de conceptos.

**Definición 3.2 ( $\alpha$ -cut)** Si  $\tilde{A}$  es un conjunto borroso en  $X$  y  $\alpha \in [0,1]$ . La alfa cortada  $\alpha$ -cut del conjunto borroso  $\tilde{A}$  es el conjunto ordinario  $A^\alpha$  dado por

$$A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (3.2)$$

**Definición 3.3 ( $supp(\tilde{A})$ )** El soporte de un conjunto borroso  $\tilde{A}$ ,  $S(\tilde{A})$  es el conjunto ordinario de toda  $x \in X$  tal que  $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ .

El conjunto de elementos que pertenecen al conjunto borroso  $\tilde{A}$ , al menos para el grado  $\alpha$ , es conocido como  $\alpha$ -cut. Las dos propiedades enunciadas se ilustran mediante la Figura 3.2 para una mayor comprensión.

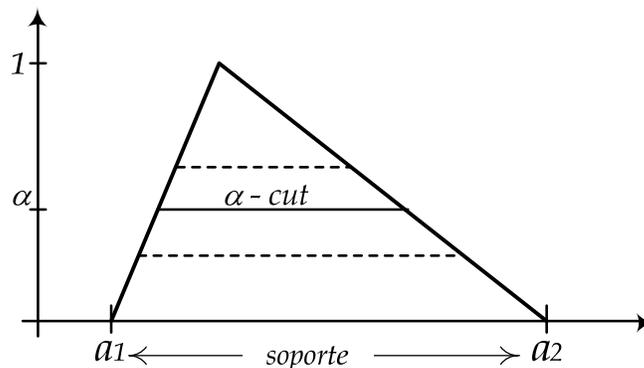


Fig. 3.2. Distribución Triangular de un conjunto borroso (Adaptado de [Fullér, 2000]).

**Definición 3.4** (Conjunto difuso - LR) Un número difuso  $\tilde{A}$  es de tipo-LR si existe funciones de referencia  $L$  (left, en inglés) y  $R$  (right, en inglés), así como escalares  $a > 0$ ,  $b > 0$ , con

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & x \geq m \end{cases} \quad (3.3)$$

La siguiente figura muestra un conjunto borroso  $\tilde{A}$  de tipo-LR.

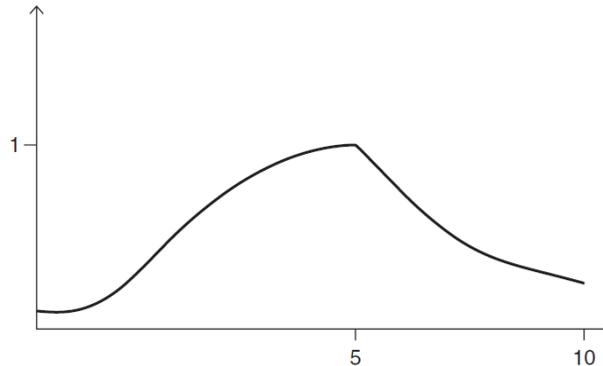


Fig. 3.3. Representación de un conjunto difuso tipo LR (Adaptado de [Zimmerman, 2010]).

**Definición 3.5** (Conjunto difuso vacío) El subconjunto difuso de  $X$  es definido como el subconjunto difuso  $\emptyset$  de  $X$  tal que  $\emptyset(x) = 0, \forall x \in X$ .

**Definición 3.6** (Punto difuso) Sea  $\tilde{A}$  un número borroso. Si  $\text{supp}(A) = \{x_0\}$  entonces  $\tilde{A}$  es llamado un punto borroso y se usa la notación  $\tilde{A} = \bar{x}_0$ , véase Figura 3.4.

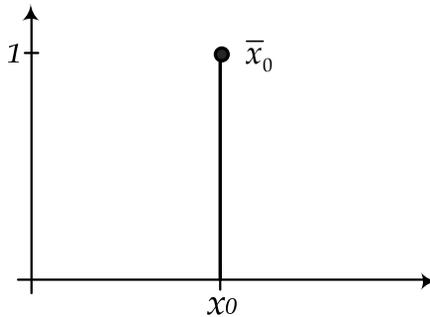


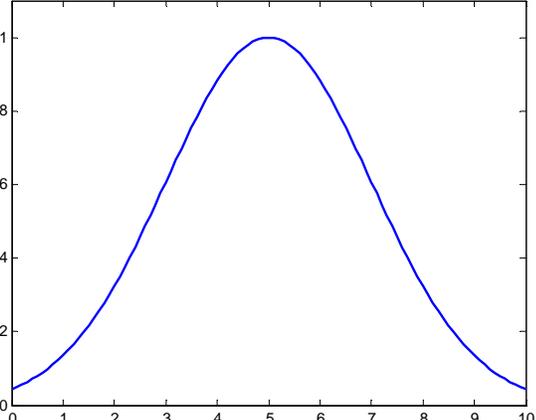
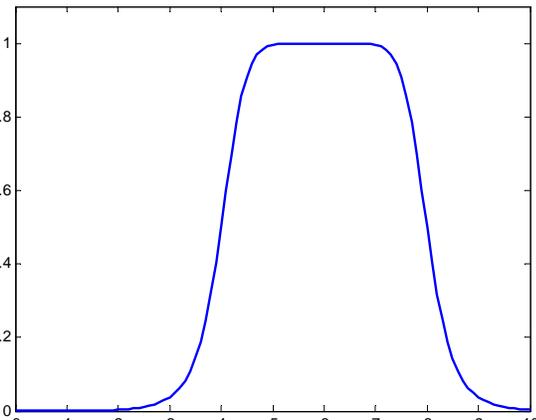
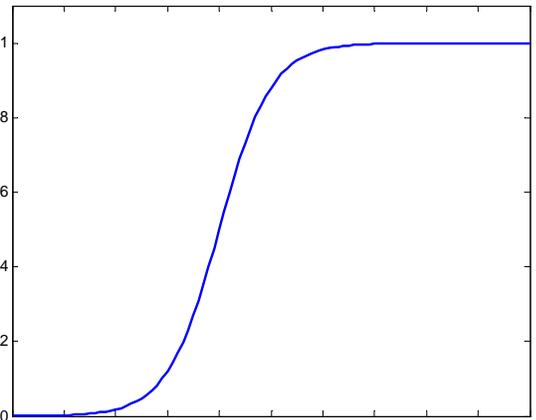
Fig. 3.4. Punto difuso de un conjunto borroso (Adaptado de [Fuller, 2000]).

### 3.2.2 Funciones de Pertenencia o Membresía.

Los métodos más usuales para definir conjuntos borrosos dependen de sí el universo discurso es discreto o continuo, así como funcional o numérico [Fuller, 1999]:

- i) Es **funcional** cuando expresa la función de membresía de un conjunto difuso en una forma funcional, generalmente una función en forma *bell*, triangular, trapezoidal, etc., y
- ii) Es **numérico**, cuando el grado de membresía de un conjunto difuso es representado como un vector de números cuya dimensión depende en el grado de discretización, e.j. en  $A(x) \in \{0.3, 0.7, 1.0\}$ .

**Tabla 3.1 Funciones de membresía y distribución.**

Función	Distribución
<p>Función de Gauss:</p> $\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$	
<p>Función Gbell</p> $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + \left  \frac{x-c}{a} \right ^{2b}}$	
<p>Función Sigmoide</p> $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$	

**Tabla 3.1 Funciones de membresía y distribución [Continuación].**

Función	Distribución
<p data-bbox="266 310 558 348">Función Trapezoidal</p> $\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ \frac{c-x}{c-b} & , c \leq x \leq d \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$	
<p data-bbox="266 772 548 810">Función Triangular:</p> $\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & , b \leq x \leq c \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$	
<p data-bbox="266 1245 667 1283">Función compuesta o mixta:</p> $\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n & , \alpha \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \left(\frac{d-x}{d-c}\right)^n & , c \leq x \leq d \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$	

En muchos casos es suficiente conocer la distribución de incertidumbre más que la variable en sí, estas distribuciones obedecen a una variedad de funciones de membresía, entre las más conocidas y aplicables se encuentran las que se resumen en la Tabla 3.1.

De las funciones de membresía anteriores cabe señalar que es más frecuente encontrarse con el uso de funciones lineales de tipo triangular y trapezoidal en aplicaciones que van orientadas a la modelación de variables de incertidumbre; como es el caso de proyectos de inversión, portafolios, entre otros. La forma en cómo representamos un conjunto borroso en forma triangular es mediante la triada  $(a,b,c)$ , donde  $b$  es el núcleo del conjunto y  $[a,c]$  es el soporte. De igual manera para un conjunto borroso trapezoidal cuya notación está dada por la terna  $(a,b,c,d)$ , se tiene como núcleo  $[b,c]$  y soporte  $[a,d]$ . Destacamos principalmente la forma de representación de estos dos conjuntos por obvias razones de aplicación en el trabajo y también porque de manera similar se representan los otros tipos de conjuntos, además de la amplia gama de aplicaciones encontradas en la literatura.

### 3.2.3 Operaciones aritméticas principales.

En muchas ocasiones cuando se trabaja con sistemas borrosos, resulta complicado en principio hallar la función de membresía, no obstante existen formas de manipular y encontrar la función mediante el método  $\alpha$ -cut [Fullér & Carlsson, 2000], [Dutta *et al.*, 2011]. El método en sí es una forma de manipular diferentes operaciones aritméticas difusas, el procedimiento es el siguiente: empezamos primero hallando el conjunto  $A^\alpha$  a partir del conjunto trapezoidal:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x \leq d \end{cases} \quad (3.4)$$

Así se tiene que

$$A^\alpha = [(b-a)\alpha + a, d - \alpha(d-c)] \quad (3.5)$$

Con este antecedente resulta sencillo hallar la función de membresía entre conjuntos borrosos. Si  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  son dos conjuntos de forma trapezoidal, sus operaciones suma, multiplicación, logaritmo y raíz estarán definidos simplemente siguiendo las operaciones elementales entre conjuntos borrosos. Otras operaciones como resta, división y función exponencial pueden ser desarrolladas con procedimientos muy similares a los que se muestran a continuación.

Sea dos conjuntos borrosos  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  cualesquiera con forma trapezoidal, cuyas funciones de membresía estarán definidas por:

$$\mu_X(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 1 & , b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & , c \leq x \leq d \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_Y(x) = \begin{cases} \frac{x-p}{q-p} & , p \leq x \leq q \\ 1 & , q \leq x \leq r \\ \frac{r-x}{r-q} & , r \leq x \leq s \end{cases}$$

Las funciones anteriores de pertenencia serán la base para todos los cálculos que se desarrollan a partir de ahora. Entonces para cada  $\mu_X(x)$  y  $\mu_Y(x)$  hallamos mediante las alfas cortadas  $\alpha$ -cut's el intervalo para el cual están definidos ambos conjuntos, al expresar  $x$  en términos de  $\alpha$  se tiene que:

$$X^\alpha = [(b-a)\alpha + a, d - \alpha(d-c)] \quad (3.6a)$$

$$Y^\alpha = [(q-p)\alpha + p, s - \alpha(s-r)] \quad (3.6b)$$

Donde  $\alpha \in [0,1]$  para ambos lados de referencia de las funciones de pertenencia de  $\tilde{A}$ .

### Suma

Para calcular la adición de los conjuntos  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  llevamos a cabo la suma de las expresiones (3.6a) y (3.6b), entonces:

$$X^\alpha (+) Y^\alpha = [a+p + \alpha(b-a+q-p), d+s - \alpha(d-c+s+r)] \quad (3.7)$$

Luego para encontrar la función de membresía  $\mu_{X(+Y)}(x)$ , igualamos a  $x$  ambos componentes de (3.7) y desarrollamos para  $\alpha$ , obteniendo la función de membresía correspondiente a la suma las funciones  $\mu_X(x)$  y  $\mu_Y(x)$ :

$$\mu_{X(+Y)}(x) = \begin{cases} \frac{x-(a+p)}{(b+q)-(a+p)} & , (a+p) \leq x \leq (b+q) \\ 1 & , (b+q) \leq x \leq (c+r) \\ \frac{(c+r)-x}{(c+r)-(b+q)} & , (c+r) \leq x \leq (d+s) \end{cases} \quad (3.8)$$

### División

Procedemos a dividir los conjuntos  $\tilde{X}$  y  $\tilde{Y}$  de (3.6a) y (3.6b), entonces:

$$\frac{X^\alpha}{Y^\alpha} = \frac{[(b-a)\alpha + a, d - \alpha(d-c)]}{[(q-p)\alpha + p, s - \alpha(s-r)]} = \left[ \frac{(b-a)\alpha + a}{s - \alpha(s-r)}, \frac{d - \alpha(d-c)}{(q-p)\alpha + p} \right] \quad (3.9)$$

Para encontrar la función de membresía  $\mu_{X(J)Y}(x)$  solo llevamos a cabo el desarrollo algebraico igualando a  $x$  ambos componentes de (3.9) y despejando para  $\alpha$ , se obtiene la función de membresía correspondiente a la división entre dos conjuntos borrosos:

$$\mu_{X(J)Y}(x) = \begin{cases} \frac{sx - a}{x(s - r) + (b - a)} & , (a / s) \leq x \leq (b / r) \\ 1 & , (b / r) \leq x \leq (c / q) \\ \frac{d - px}{x(q - p) + (d - c)} & , (c / q) \leq x \leq (d / p) \end{cases} \quad (3.10)$$

### Exponencial

Si  $\tilde{A} = [a, b, c, b]$  es un conjunto borroso mayor a cero, entonces la  $\alpha$ -cut de los números borrosos de  $A$  esta dado por (3.5). Al tomar la exponencial del conjunto  $\tilde{A}$ , se tiene:

$$\exp(A^\alpha) = \exp((b - a)\alpha + a, d - (d - c)\alpha) = (\exp((b - a)\alpha + a), \exp(d - (d - c)\alpha)) \quad (3.11)$$

Si realizamos nuevamente el desarrollo correspondiente para hallar  $\alpha$  al igualar a  $x$  cada elemento de (3.11) llegamos a:

$$\mu_{e^{\tilde{A}}}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x) - a}{(b - a)} & , e^{(a)} \leq x \leq e^{(b)} \\ 1 & , e^{(b)} \leq x \leq e^{(c)} \\ \frac{d - \ln(x)}{(d - c)} & , e^{(c)} \leq x \leq e^{(d)} \end{cases} \quad (3.12)$$

### Raíz n-ésima

Si  $\tilde{A} = [a, b, c, b]$  es un conjunto borroso mayor a cero, entonces la  $\alpha$ -cut de los números borrosos de  $A$  esta dado por (3.5). Tomando la raíz n-esima del conjunto  $\tilde{A}$ , se tiene:

$$(A^\alpha)^{1/n} = ((b - a)\alpha + a, d - (d - c)\alpha)^{1/n} = \left( ((b - a)\alpha + a)^{1/n}, (d - (d - c)\alpha)^{1/n} \right) \quad (3.13)$$

Nuevamente desarrollamos para encontrar  $\alpha$  al igualar a  $x$  cada elemento de (3.13) y llegar a:

$$\mu_{\sqrt[n]{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x^n - a}{(b - a)} & , \sqrt[n]{a} \leq x \leq \sqrt[n]{b} \\ 1 & , \sqrt[n]{b} \leq x \leq \sqrt[n]{c} \\ \frac{d - x^n}{(d - c)} & , \sqrt[n]{c} \leq x \leq \sqrt[n]{d} \end{cases} \quad (3.14)$$

Las operaciones mostradas anteriormente presentan la forma en cómo podemos realizar operaciones aritméticas entre conjuntos y hallar la función de pertenencia resultante. Se puede seguir el desarrollo para las demás operaciones como resta, multiplicación, función inversa, función logarítmica, entre otras, siguiendo la misma metodología.

Con el objeto de identificar fácilmente en el futuro las operaciones principales a utilizar entre conjuntos difusos, en seguida reescribimos para  $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$  y  $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  dos conjuntos con forma trapezoidal algunas de sus propiedades:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \quad (3.15a)$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 + b_2, a_2 + b_1, a_3 + b_4, a_4 + b_3) \quad (3.15b)$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4) \quad (3.15c)$$

$$\tilde{A} / \tilde{B} = (a_1 / b_4, a_2 / b_3, a_3 / b_2, a_4 / b_1) \quad (3.15d)$$

$$\lambda \tilde{A} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4) \quad , \lambda > 0 \in \mathbb{R} \quad (3.15e)$$

$$\mu \tilde{A} = (\mu a_2, \mu a_1, |\mu| a_4, |\mu| a_3) \quad , \mu < 0 \in \mathbb{R} \quad (3.15f)$$

$$[\lambda \tilde{A}]^\alpha = \lambda [\tilde{A}]^\alpha \quad , \lambda > 0 \in \mathbb{R} \quad (3.15g)$$

Las propiedades de arriba son resultado de manejar distribuciones de tipo trapezoidal, sin embargo si se desea obtener aquellas propiedades para otro tipo de distribución los pasos y la metodología son idénticas a la que se acaba de mostrar.

### 3.3 ESPERANZA, VARIANZA Y COVARIANZA DE POSIBILIDAD

Cuando hacemos uso de alguna distribución de probabilidad para estimar los rendimientos de un activo es muy frecuente calcular ciertos indicadores como son la media, varianza y desviación estándar que nos llevan a conocer más de cerca el comportamiento que ha tenido los precios del activo. En una distribución de posibilidad sucede algo similar dado un conjunto difuso que nos representa alguna variable como es la volatilidad de una acción u otra. Por lo tanto es fundamental desarrollar las expresiones básicas que nos llevan a estimar las variables de incertidumbre en un proyecto real.

Si  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de ponderación no negativa, monótona creciente y que satisface la siguiente condición:

$$\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = 1 \quad (3.16)$$

Se tiene que  $\alpha$  puede adoptar valores dentro del intervalo  $[0, 1]$  y que la distribución de posibilidad dado un evento esta necesariamente en  $0 \leq x_i \leq 1$ .

Retomando algunas de las definiciones que propone [Fullér and Majlender, 2003], [Carlsson and Fullér, 2000], y recientemente [Thiagarajah *et al.*, 2007] las cuales resultan de gran utilidad para el desarrollo del modelo de valuación de opciones reales difusas, se tiene que:

**Definición 3.7** (Valor medio) El valor esperado de un número borroso  $\tilde{A}$  con  $A^\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ ,  $\alpha \in [0,1]$  dada  $f(\alpha) = 2\alpha$  es:

$$\begin{aligned} E_f(\tilde{A}) &= \int_0^1 M(U_\alpha) f(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} f(\alpha) d\alpha \\ &= \int_0^1 (a_1(\alpha) + a_2(\alpha)) \alpha d\alpha \\ &= \int_0^1 \left[ (a_1 + a_4) + ((a_2 - a_1) - (a_4 - a_3)) \alpha^{1/n} \right] \alpha d\alpha \\ &= \left[ \frac{(a_1 + a_4)}{2} \right] \left[ \frac{(a_2 - a_1 - a_4 + a_3)n}{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

La expresión anterior es lo que conocemos como función de ponderación del valor medio esperado de posibilidad, donde  $f(\alpha)$  puede tomar valores incluso de cero para los diferentes niveles de las alfas cortadas,  $\alpha$ -cuts.

**Definición 3.8** (Varianza) La varianza ponderada de posibilidad de  $\tilde{A}$  está definida por:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{A}) &= \int_0^1 \alpha \left[ \left( \frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} - a_1(\alpha) \right)^2 + \left( \frac{a_1(\alpha) + a_2(\alpha)}{2} - a_2(\alpha) \right)^2 \right] d\alpha ; \\ Var(\tilde{A}) &= \int_0^1 \frac{(a_2(\alpha) - a_1(\alpha))^2}{2} \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (a_4 - a_1) - (a_4 - a_3 + a_2 - a_1) \alpha^{1/n} \right]^2 \alpha d\alpha \\ &= \left[ \frac{(a_1 + a_4)^2}{4} \right] - \left[ \frac{(a_4 - a_1)(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)n}{2n+1} \right] + \left[ \frac{(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)n}{2(2n+2)} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

**Definición 3.9** (Covarianza entre dos conjuntos borrosos) La covarianza de posibilidad entre dos conjuntos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  está dada por:

$$Cov(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2} \int_0^1 [(a_2(\alpha) - a_1(\alpha))(b_2(\alpha) - b_1(\alpha))] \alpha d\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ (a_4 - a_1) - ((a_4 - a_3) + (a_2 - a_1)) \alpha^{1/n} \right] \left[ (b_4 - b_1) - ((b_4 - b_3) + (b_2 - b_1)) \alpha^{1/n} \right] \alpha \, d\alpha \\
 &= \left[ \frac{a_4(b_4 - b_1) - a_1(b_4 - b_1)}{4} \right] - \left[ \frac{(a_4 - a_1)(b_4 - b_3 + b_2 - b_1) + (b_4 - b_1)(a_4 - a_3 + a_2 - a_1) n}{2(2n+1)} \right] + \left[ \frac{(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)(b_4 - b_3 + b_2 - b_1) n}{2(2n+2)} \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

La expresión (3.19) nos indica la relación que existe entre dos conjuntos difusos cualesquiera con distribución trapezoidal. Observemos que la  $Cov(\tilde{A}, \tilde{A})$  entre el mismo conjunto nos lleva a la expresión (3.18), es decir la  $Var(\tilde{A}) = Cov(\tilde{A}, \tilde{A})$ .

### 3.4 MODELO DIFUSO DE VALUACIÓN DE OPCIONES REALES

Una vez que se ha reconocido las limitantes que tiene el modelo propuesto por Black & Scholes (BS) para valorar proyectos reales, tenemos que para su aplicación a una opción real se debe en principio desechar algunos de los supuestos que toma el modelo BS y retomar la manera en como manipular las variables características de la opción real que se está valuando. Con los principios y fundamentos de la matemática difusa desarrollados hasta este momento, se trata a las variables de incertidumbre que se señalaron en la Tabla 2.2, a excepción de la variable  $t$ , como conjuntos difusos ya que resultan de información desconocida y a lo más se suele recurrir de estimaciones en algunas de ellas para su aplicación en la valuación de proyectos. Por consiguiente modelamos la tasa de interés ( $r$ ), volatilidad ( $\sigma$ ), precio del activo subyacente ( $S_0$ ), y costo de la inversión ( $X$ ) de un proyecto de inversión como conjuntos borrosos adaptativos de la forma  $\tilde{S}_0 = (s_1, s_2, s_3, s_4)_n$ ,  $\tilde{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)_n$ ,  $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)_n$ ,  $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)_n$  ya que estos parámetros no pueden ser tratados como un valor único.

Al incluir la difusividad en las variables en la expresión de Black & Scholes llegamos a una expresión general para la valuación de una opción real difusa (*Fuzzy Real Option Valuation*, en inglés) que contempla la incertidumbre en la información, es decir:

$$FROV = \tilde{S}_0 e^{-\delta T} N(d_1) - \tilde{X} e^{-\tilde{r} T} N(d_2) \tag{3.20}$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(\tilde{S}_0)}{K}\right) + \left(E(\tilde{r}) - \delta + \frac{E(\tilde{\sigma})^2}{2}\right) T}{E(\tilde{\sigma})\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - E(\tilde{\sigma})\sqrt{T}$$

De las expresiones anteriores se tiene que  $E(\tilde{S}_0)$ ,  $E(\tilde{X})$ ,  $E(\tilde{\sigma})$  y  $E(\tilde{r})$  son los valores esperados de *posibilidad* del subyacente, precio de ejercicio, volatilidad y tasa de interés, respectivamente. Además se asume que el activo paga dividendos continuamente a una tasa  $\delta$ . La expresión (3.20) por sí misma es una mejora a las propuestas de [Fullér and Majlender, 2003] y [Thiagarajah *et al.*, 2007] cuyos esfuerzos están encaminados a la valuación de una opción real y financiera, respectivamente. En [Fullér and Majlender, 2003] aplican la ecuación (3.20) para la valuación de una opción real modelando únicamente al precio del subyacente y costo de la inversión como variables difusas de tipo trapezoidal, tomando una función de membresía lineal, posteriormente [Thiagarajah *et al.*, 2007] retoma estos principios de cálculo y los orienta para la valuación de opciones financieras mediante una función de membresía no lineal y además agregan la difusividad en la tasa de descuento ( $r$ ), sin embargo dejan de considerar al precio de ejercicio ( $X$ ) como un conjunto no difuso. Si conjuntamos parte de las propuestas anteriores y retomamos los principios de cálculo con conjuntos difusos aplicados al modelo de Black & Scholes llegamos a obtener una expresión que contempla las variables de incertidumbre de una opción real para un proyecto de inversión, es decir de la expresión (3.20) se tiene que:

$$FROV = (S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_2 e^{-r_2 T} N(d_2), S_2 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2), S_3 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2), S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_3 e^{-r_3 T} N(d_2)) \quad (3.21)$$

Al emplear el método de cálculo  $\alpha$ -cut y realizar el desarrollo correspondiente, llegamos a la expresión general:

$$FROV^\alpha = [FROV_1(\alpha), FROV_2(\alpha)]$$

$$FROV^\alpha = \left\{ S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2) + \left[ (S_2 - S_1) e^{-\delta T} N(d_1) + (X_1 e^{-r_1 T} - X_2 e^{-r_2 T}) N(d_2) \right] \alpha^{1/n}, \right. \\ \left. S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2) - \left[ (S_4 - S_3) e^{-\delta T} N(d_1) + (X_3 e^{-r_3 T} - X_4 e^{-r_4 T}) N(d_2) \right] \alpha^{1/n} \right\} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) resulta de utilizar una *función cuadrática adaptativa* y conjuntos borrosos trapezoidales, ésta expresión es flexible en el sentido de que se puede adaptar a otras funciones de membresía como son triangular, trapezoidal, etc., para diferentes valores de  $n$  y  $\alpha \in [0,1]$ . La expresión (3.22) es una extensión al modelo de [Fullér and Majlender, 2003] y [Thiagarajah *et al.*, 2007] en donde adicionalmente se ha tomado en cuenta la difusividad en el costo de la inversión  $\tilde{X}$ ; ya que en un proyecto de inversión real no puede conocerse con certeza éste y otros parámetros y se suele apoyar a través de estimaciones y/o pronósticos para tener valores estimados, algo similar ocurre con los demás parámetros  $S_0$ ,  $\tilde{r}$  y  $\sigma$ . Entonces por medio de la matemática difusa es posible conocer que el valor mínimo de una opción real estará dado por  $(S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_2 e^{-r_2 T} N(d_2))$  y el máximo por un valor de

$(S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_3 e^{-r_3 T} N(d_2))$ , teniendo un conjunto más amplio de posibilidades  $[S_2 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2), S_3 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2)]$ .

Algunas aplicaciones utilizando variables difusas en una opción real se puede ver en [Bacchini *et al.*, 2007] donde valúan una opción real difusa modelando únicamente como tal el valor del subyacente y el costo de la inversión, en el siguiente capítulo se llevará a la práctica el modelo desarrollado anteriormente, haciendo evidente la aplicación y quizá más claro el alcance del modelo, así como parte de los argumentos técnicos expuestos hasta ahora.



# CAPÍTULO 4:

## VALUACIÓN DE UN PARQUE EÓLICO

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Los proyectos de generación con energías renovables y principalmente aquellos que hacen uso de la energía cinética del viento para la generación de electricidad, buscan generalmente tres principios a seguir:

- Seguridad Operacional
- Seguridad Económica-Financiera
- Seguridad Ambiental

La seguridad operacional tiene que ver con factores técnicos y de operación de la planta cuando ésta se conecta a la red eléctrica, tema que se omite en el presente trabajo. Los otros dos puntos que tienen que ver con la seguridad ambiental y financiera de los proyectos se les dedica espacio en el presente capítulo, donde a través del *caso práctico* de un proyecto ubicado en el norte del país se analiza el aspecto económico-financiero que envuelve la construcción del parque. Para entender un poco más las vertientes que existen en estos proyectos, es preciso antes conocer algunos tópicos generales como el proceso de generación utilizando este recurso, el desarrollo y potencial eólico de México, además de las ventajas y desventajas que conlleva la construcción de parques eólicos en sitios con recursos eólicos sobresalientes.

#### 4.1.1 Energía Eólica

El proceso de generación eoloelectrónica empieza en principio captando la energía cinética del viento y a través de un motor eléctrico se convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Esquemáticamente se representa mediante el siguiente diagrama unifilar:

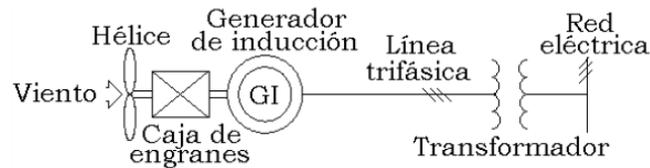


Fig. 4.1. Sistema de generación eolieléctrica (Adaptado de [Hau, 2006]).

Partiendo de la Figura 4.1, se entiende que el proceso inicia cuando el viento golpea las aspas de la turbina, una vez que la turbina es impulsada por la energía cinética del viento se desarrolla un par mecánico que se acopla mediante una flecha a un sistema de engranes, y debido a que la velocidad del rotor de la turbina eólica y la flecha giran a una velocidad menor que la requerida, la caja de engranes toma la función de regular la velocidad de la flecha del generador. La potencia mecánica transmitida de la caja de engranes se acopla a un generador de inducción el cual a su vez transfiere la energía eléctrica producida a un sistema rectificador y finalmente la energía producida se inyecta a la red eléctrica.

Existen dos técnicas principalmente a partir de las cuales se ha buscado transformar la energía eólica en electricidad [SENER, 2008]:

- i. Se utiliza una máquina generadora de eje horizontal apoyada en lo alto de una estructura, cuyo rotor está provisto con álabes o palas que le permiten capturar la energía cinética del viento. Ésta es la tecnología más estudiada y utilizada en el mundo dado que permite capturar vientos de alturas superiores, donde es más aprovechable el recurso, y su instalación y mantenimiento presenta menos complicaciones; además
- ii. Aquella donde se utiliza un generador de eje vertical apoyado en el suelo con un rotor igualmente provisto de álabes que le permiten capturar la energía.

Desde la década de los 70's cuando se instaló el primer parque Eólico en Turquía, se ha tenido una evolución en muchos de los componentes que conforman una turbina eólica, que van desde generadores, alabes, sistemas de control, rotores, etc., los cuales influyen directamente en la eficiencia de los parques utilizados para generar electricidad. En los últimos años países desarrollados y convencidos de la eficiencia por utilizar este recurso, han vuelto a ver otras maneras de cómo aprovechar más este recurso en su territorio, muchos de ellos migrando sus proyectos a zonas más complejas de instalación como es en mar abierto. Se ha observado que desde los principios de estas tecnologías su uso ha resultado muy caro, principalmente por elementos como el sistema de engranes, afortunadamente los avances y desarrollos tecnológicos alcanzados hasta ahora hacen posible gestionar los costos tecnológicos y ponderarlos con los beneficios que se obtienen.

### 4.1.2 Perspectivas en México y en el mundo.

El aprovechamiento de la energía eólica en el mundo ha tenido un crecimiento exponencial en la última década liderando países como E.U.A., Alemania, España, India, Portugal, Turquía y recientemente el nuevo líder China quien representa poco más de la mitad del mercado eólico a nivel mundial. Para el año 2011, la capacidad instalada de energía eólica en todo el mundo llegó a los 240 000 MW a pesar de presentarse un descenso en ese año en las instalaciones en muchas partes del mundo [WWEA, 2011], el crecimiento en este sector se puede observar en la Figura 4.2:

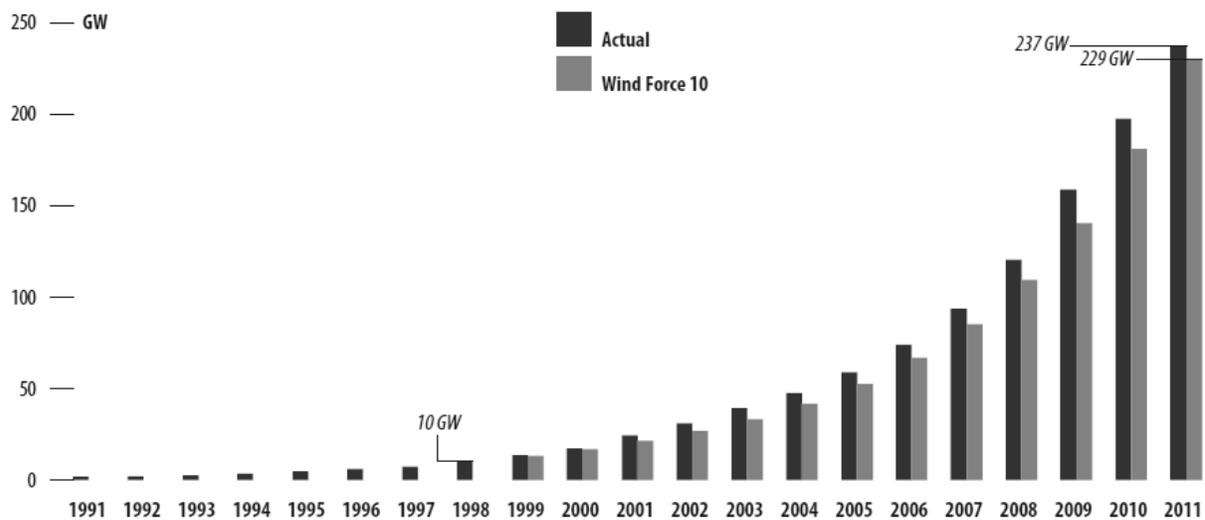


Fig. 4.2. Capacidad instalada de energía eólica a nivel mundial (Adaptado de [GWEC, 2012]).

En México con las reformas llevadas a cabo por el Ejecutivo Federal en materia energética en dirección por la Secretaría de Energía (SENER) y que a través de la Ley del Servicio Público de Energía Eléctrica (LSPEE), se tenían hasta Diciembre del 2010 875 permisos de generación e importación de energía eléctrica a empresas privadas y paraestatales, de los cuales muchos han caducado por diversas causas y otros siguen vigentes. Hasta ésta fecha la capacidad total de generación que representaba los permisos vigentes, muestran que un 80.2% se encuentran en operación, un 18.1% está en desarrollo (en construcción o por iniciar obras), y el 1.7% restante está inactivo, pero en lo que refiere a energías renovables también se tienen registros que datan de 114 permisos correspondientes a proyectos con fuentes de energía renovable y por lo que refiere al tipo de fuente primaria; 55 corresponden a biomasa, 27 son hidroeléctricas, 24 corresponden a parques eólicos y 8 son a base de biogás, por lo que representa una capacidad de generación de 3635 MW al año 2010. De lo observado y por medio de la Figura 4.2, podemos constatar que en México se ha venido una ola de proyectos de generación eléctrica con fuentes alternativas, justificados en principio por la conciencia verde de la sociedad para la protección de nuestro planeta y después por la rentabilidad que se obtiene al hacer uso de este medio de generación

eléctrica. Otro punto a favor de México es su ubicación geográfica la cual le permite sacar provecho de la energía proporcionada por el viento en muchas zonas del país.

México tiene un recurso eólico sobresaliente en muchos estados del país, especialmente en Oaxaca y aunque no se tienen las mediciones exactas para conocer su verdadero potencial eólico, se estima que existen áreas con condiciones muy favorables para desarrollar parque eólicos en donde la velocidad del viento llega a tener un promedio anual superior a los 8  $m/s$ <sup>11</sup> y algunos de ellos muy por encima de los 11  $m/s$ . Dadas estas condiciones del viento y otros factores externos a ello, organismos nacionales e internacionales [AMDEE, 2010], [GWEC, 2012] estiman que para finales del 2020 México tendrá una capacidad instalada de 519 MW conectados al Sistema Eléctrico Nacional. En la Tabla A.1 del Apéndice A se muestra información referente a mediciones anemométricas realizadas por varias instituciones nacionales, esto indica claramente el potencial que tiene México por explotar y en la Figura 4.3 observamos geográficamente las principales zonas con mayores recursos eólicos. Hoy en día muchos estudios realizados muestran que para el año en curso el país tiene una capacidad de producción de poco más de 2 GW y según los pronósticos se estima que para el año 2020 esta cifra sea superior a los 12000 MW, por lo tanto esto apunta a un mayor crecimiento dentro del sector tanto para las empresas desarrolladoras como para el mismo país.

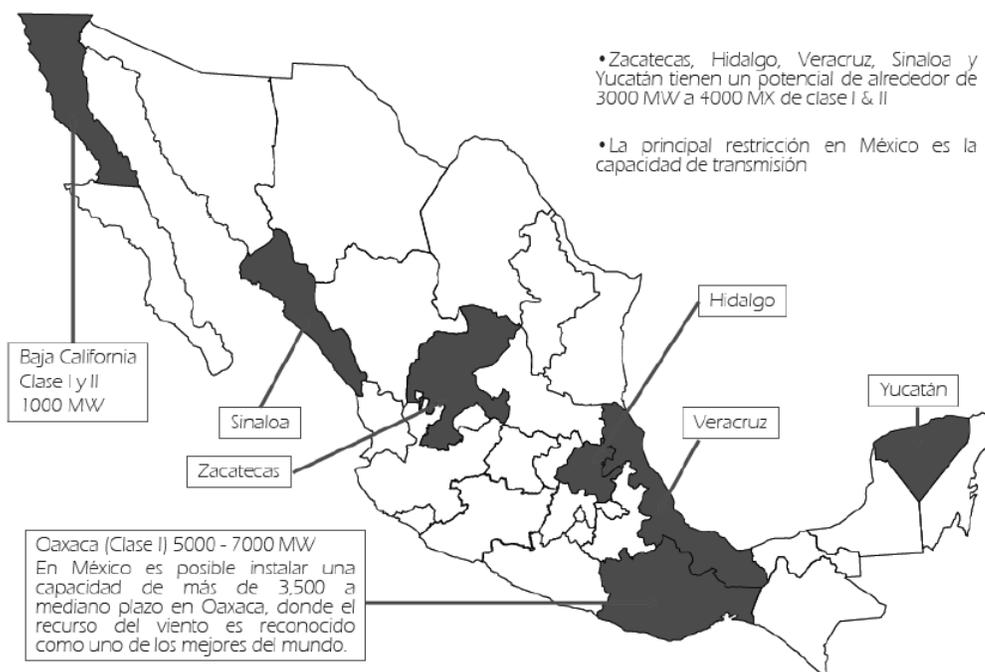


Fig. 4.3. Potencial geográfico de energía eólica en México (Adaptado de [AMDEE, 2012]).

<sup>11</sup> Para velocidades superiores a los 8  $m/s$  se considera zonas altamente potenciales

De manera asombrosa el fenómeno de energías limpias es un tema de moda y los políticos a nivel mundial son los primeros en pronunciarse a favor, sin embargo la realidad es que muchas veces también son ellos los primeros en presentar las primeras barreras que frenan el desarrollo en esta forma alternativa de generar energía, en gran parte porque se carece de apoyo político para tomar acciones trascendentes para el fomento en la utilización de la energía eólica. Por ejemplo en México no existe suficiente estabilidad y fiabilidad en la estructura del mercado así como también falta apoyo de recursos financieros.

Actualmente el beneficio más importante que ha tenido el uso de la energía eólica es disminuir el uso de combustibles fósiles para la generación de electricidad y con ello la disminución de gases efecto invernadero, no obstante existen otros beneficios indirectos; según cifras de la [WWEA, 2011] se estimaba que para el año 2011 más de 670,000 personas a nivel mundial eran empleadas directa e indirectamente en alguna de las distintas ramas del sector eólico, además de la creciente demanda de profesionales en distintas áreas, desde ingenieros, trabajadores especializados hasta gerentes y expertos en finanzas, ciencias ambientales y leyes. Podemos darnos cuenta que existen desafíos actuales y futuros que tienen que ver con el desarrollo de la energía eólica en países emergentes, como México, y muchos otros en la consolidación de este recurso para generar electricidad. Entre estos retos se encuentran [WWEA, 2011]:

- ✧ El debate actual sobre el cambio climático y como encontrar soluciones para el desarrollo de energías limpias.
- ✧ El agotamiento de los recursos fósiles y nucleares, especialmente reflejado en el aumento de los precios del petróleo que representan una carga enorme para los países en desarrollo.
- ✧ Los daños causados por la utilización de los recursos fósiles, como se hizo evidente durante el derrame de petróleo en el Golfo de México.
- ✧ La creciente conciencia sobre los riesgos de peligro relacionados con la utilización de la energía nuclear, recientemente impulsado por informes sobre el gran desastre nuclear en Fukushima y Japón.
- ✧ La creciente conciencia sobre los potenciales reales y la contribución de las energías renovables como una fuente de energía económicamente, socialmente y ecológicamente sostenibles.
- ✧ Futuras mejoras en la energía eólica y las tecnologías relacionadas, incluidas las tecnologías de apoyo y almacenamiento.

Beneficios directos a los propietarios por implementar proyectos eoloelectricos en sus comunidades:

- ✧ Regularización de tierras  
Regularización de tierras sin costo para el propietario

- Obtención de títulos de propiedad, certificados parcelarios
- ❖ Contratos de arrendamiento a largo plazo
  - Registro del contrato ante el notario, dando certeza jurídica al propietario
  - Los beneficios del contrato son transferibles ya sea por venta del terreno, herencia, etc.
- ❖ Uso del terreno
  - Baja ocupación de superficie
  - Permite tener beneficios adicionales por el uso del terreno
- ❖ Compatibilidad
  - Actividad actual:
    - Agricultura
    - Ganadería
    - Nuevos desarrollos
- ❖ Caminos
  - Mejora en el acceso a los predios
  - Facilidad de transporte de la producción
- ❖ Pagos
  - Pagos por uso
  - Pagos por afectación
  - Pagos por producción

Como contraste a los amplios beneficios por el uso del recurso eólico, las desventajas que se pueden atribuir son contadas, quizá la más importante es:

- ❖ Impactos medioambientales negativos.
  - Pese a ser una energía renovable y no contaminante, la energía eólica ha encontrado una oposición de movimientos ecologistas por los potenciales impactos negativos sobre aves y murciélagos, así como sobre el paisaje, y por el ruido generado por las turbinas. En este respecto cabe mencionar que el Istmo de Tehuantepec en Oaxaca, es uno de los corredores de aves migratorias más importantes del mundo, por el que cruzan millones de aves cada año. Ante esta situación, quienes desarrollan proyectos eólicos argumentan que el impacto sobre la fauna no es tan negativo, y que la alternativa a la generación eólica también tiene costos medioambientales asociados como una mayor emisión de gases de efecto invernadero.

#### **4.1.3 Desregulación del Mercado Eléctrico en México y en el mundo.**

La regulación de un mercado eléctrico en cualquier país a menudo se convierte en otra fuente de incertidumbre que tiene mucho impacto en los proyectos de energéticos, en gran medida porque depende mucho del clima político que se viva en los próximos 20-25 años de duración que tiene el proyecto. Simplemente las tarifas

quedan en manos del gobierno quien las regula a través de mecanismos ajenos a las que se rigen en un mercado abierto donde hay varios participantes.

Hasta el día de hoy en México la política de precios en el mercado de electricidad obedece más a criterios de ingresos del sector público que a razones de competitividad en el mercado nacional e internacional, estando a cargo la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) de ajustar, modificar y reestructurar las tarifas eléctricas, además de la participación conjunta de otras entidades gubernamentales como la Secretaría de Energía (SENER), Secretaría de Economía (SE) y la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Es así que hasta el año en curso la estructura tarifaria es determinada por:

- ✧ El uso de la energía.
- ✧ La tensión de suministro; y
- ✧ Los patrones de consumo de los distintos segmentos de usuarios.

Dado que el sistema de competencia en el mercado eléctrico es nulo, estas dependencias gubernamentales basan los precios de electricidad en costos marginales de generación que son determinados mediante un sistema conocido como “despacho económico”. En un despacho económico lo que se busca es la optimización de recursos para generar electricidad cumpliendo restricciones propias de las centrales de generación, las redes eléctricas y por supuesto los de costos de operación. Sin embargo con las reformas actuales en materia energética que el gobierno lleva a cabo, es muy previsible que en los próximos años se dé la presencia de más participantes en el mercado eléctrico, principalmente en todo lo que comprende la parte de generación y también en lo que respecta la parte de transmisión. Esto acarrea muchos aspectos a considerar en proyectos de inversión, ya que en un mercado desregulado existe el riesgo asociado a los precios de electricidad, estos precios son determinados en principio por la relación entre dos fuerzas; oferta (capacidad de generación) y demanda. En países con mercados eléctricos desregulados como Gran Bretaña, Canadá, etc., donde estas dos fuerzas son las determinantes para el comportamiento de los precios obliga a las empresas a tomar medidas para gestionar el riesgo en el mercado y en sus proyectos de inversión.

## **4.2 CASO DE ESTUDIO**

El caso de estudio consiste en la construcción de un parque eólico con una potencia instalada de 111 MW en la modalidad de producción independiente<sup>12</sup>. La información presentada y utilizada no corresponde a un proyecto en particular de alguna empresa con presencia en México, sino a un proyecto genérico como resultado de la integración de varias fuentes de información (medios electrónicos, revistas, notas periodísticas, trabajos de investigación, etc.) y también con las características que conlleva los desarrollos actuales de parques eólicos en el país.

Como sucede con la mayoría de las nuevas tecnologías, la tecnología eólica requiere en principio de una fuerte inversión de capital, incluso muchas veces superior en comparación a otras formas de generación eléctrica como son de fuentes fósil, no obstante la principal ventaja de la generación eolieléctrica frente a éstas y otras tecnologías es que para su operación no se recurre en costos de combustibles. Sin lugar a dudas esto es muy benéfico porque se elimina cierta incertidumbre asociada al proyecto, aunque no por completo, ya que persiste la incertidumbre sobre la disponibilidad del recurso eólico a lo largo de los años, lo que puede ser análogo al combustible en este tipo de proyectos. Entre los principales elementos que gobiernan los costos económicos en estas tecnologías son:

- ⊕ Costos de inversión (incluye aquellos asociados con la financiación del proyecto);
- ⊕ Costos de operación y mantenimiento (fijos y variables);
- ⊕ Factor de capacidad (basado en la velocidad del viento y el factor de disponibilidad de la turbina);
- ⊕ Ciclo de vida económica; y
- ⊕ Costo de capital

### **4.2.1 Condiciones de sitio**

El lugar donde se ubica el emplazamiento es en el segundo mejor estado de México que cuenta con recursos sobresalientes de viento, la Sierra de Juárez en el estado de Baja California, la instalación consta de 74 turbinas con una potencia total instalada de 111 MW desarrollados bajo la modalidad de producción independiente, se asume que las mediciones se han llevado a cabo previamente en el sitio correspondiente a la construcción del parque, obteniendo los siguientes datos:

---

<sup>12</sup> La modalidad de producción independiente (PPI) es un esquema en donde la generación de energía eléctrica proviene de una planta con capacidad mayor a 30MW, se destina exclusivamente para su venta a CFE o a para exportación.

Tabla 4.1 Datos técnicos del parque eólico

Estado	Sierra Juárez, Baja California
Tamaño/Capacidad	111 MW
Modelo de turbina	GE 1.5 S, 70.5m
Capacidad nominal de la turbina	1.5 MW
No. de turbinas	74
Altura de la torre	80 m
Diámetro del rotor	70.5 m
Velocidad de arranque	3.97 m/s
Velocidad de corte	24.98 m/s
Velocidad promedio	7.5 m/s
Factor de planta (%)	35.5 %
Altura sobre nivel del mar	7 msnm
Extensión territorial	10.4 ha
Ciclo de vida del proyecto	25 años

El modelo y la capacidad del aerogenerador se eligen en base a la disponibilidad de información y el ciclo de vida del proyecto durante el cual generará energía eléctrica.

#### 4.2.2 Producción estimada de generación eléctrica

Evidentemente el principal beneficio, en términos económicos, de un proyecto eólico nace de contrarrestar la demanda de electricidad que en un futuro el suministrador de electricidad (CFE) pueda llegar a requerir y por consecuencia tenga que comprar. Por lo tanto, el precio del commodity y la producción que resulte del parque determinan los ingresos para quien desarrolla el parque eólico, la incertidumbre asociada con la evolución de estos factores impacta directamente en la viabilidad económica del proyecto, esto es:

$$\text{Ingresos del proyecto} = \text{Producción} \times \text{Precio} \quad (4.1)$$

Es sabido que la demanda de electricidad en cualquier país está determinada por su actividad económica y perspectivas de crecimiento a futuro, pero actualmente podemos observar que existe otro factor adicional y permanente que influye en el nivel de demanda de energía, y son las condiciones meteorológicas que se llegan a presentar y padece una sociedad a lo largo del año. Hablar de meteorología referente a un proyecto eólico de generación es tener que contemplar el parámetro más importante, la velocidad del viento, y sucede que para este tipo de proyectos el viento es el principal recurso a la hora estimar la producción de electricidad esperada, además de repercutir de forma notable en el valor financiero del proyecto.

Con los datos mostrados en la Tabla 4.1 correspondientes a las mediciones de viento obtenidas a la altura de instalación de la turbina, la curva de potencia del modelo de

aerogenerador y las distribuciones anuales de viento<sup>13</sup> se puede estimar la producción anual de energía de cada aerogenerador y por consiguiente la producción anual energética del parque eólico, estas estimaciones deben llevarse para cada año, para todo el ciclo de vida del proyecto en el que se producirá energía.

Mediante la curva de potencia de la turbina eólica proporcionada por el fabricante podemos determinar la relación entre la velocidad del viento percibida por la turbina y su energía producida esperada. Estas curvas en combinación con las funciones de probabilidad de viento que normalmente se usan (Distribución *Weibull* y *Raleigh*) se determina la energía producida a corto plazo de una turbina eólica. Y como el proceso implica la estimación del recurso eólico a largo plazo, se tienen variables de incertidumbre que impactan financieramente en el proyecto como es la variabilidad en la producción de energía. Nos enfocamos únicamente en la variabilidad que tiene que ver con la cantidad de energía producida por el emplazamiento, omitiendo otras como son riesgos constructivos y de diseño, renegociaciones en los contratos ya establecidos, entre otros, y no por ser menos importantes sino porque queda fuera de contexto para los objetivos que se siguen en el presente trabajo.

Con el uso de una función de distribución *Weibull* podemos tener una buena aproximación en la estimación del viento a corto plazo, no obstante para una estimación a largo plazo pueden variar drásticamente muchas de las condiciones actuales. Una técnica cuantitativa que toma en cuenta las diversas posibilidades de enfrentarse a futuros escenarios es el método *Monte Carlo*; la técnica hace uso de la estadística y la capacidad de los ordenadores para imitar, mediante modelos matemáticos, el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos, esta técnica ha venido aplicándose en una infinidad de ámbitos como alternativa a modelos exactos o incluso como único medio para estimar soluciones para problemas complejos como es el comportamiento aleatorio de la velocidad del viento en los años que restan al proyecto. Mediante simulación *Monte Carlo* pronosticamos la generación de energía del parque eólico para los años de vida del proyecto, en la Figura A.1 del apéndice A se muestra la curva de potencia del generador y la distribución de velocidad del viento que proporcionan la cantidad de energía producida del aerogenerador tomando en cuenta los factores característicos al lugar donde se construye el parque, la Figura 4.4 muestra la curva obtenida de energía proyectada para los próximos 25 años de vida del proyecto. Es evidente que existen otras técnicas matemáticamente más sofisticadas que toman en cuenta otros factores para llevar a cabo pronósticos de generación de los parques eólicos<sup>14</sup>, sin embargo con los datos que hemos tomado y dada la eficacia del modelo consideramos son suficientes para obtener un buen pronóstico de producción energética del parque.

En mercados de electricidad desregulados, los precios de electricidad son determinados por la relación entre oferta (capacidad de generación) y demanda,

---

<sup>13</sup> La curva de potencia del generador y de distribución de viento corresponden a las proporcionadas por el fabricante del modelo, véase Anexo A para mayor detalle.

<sup>14</sup> Otras técnicas toman en cuenta el tipo de terreno en donde se ubicará el parque, el ancho de barrido del aerogenerador, etc.

tendiendo a presentarse altos clusters de volatilidad, entre otros. Por lo tanto cuando se requiere estimar cual sería el precio del commodity a futuro y poder determinar los flujos de caja del proyecto, regularmente se hace uso de técnicas más sofisticadas como son los procesos estocásticos.

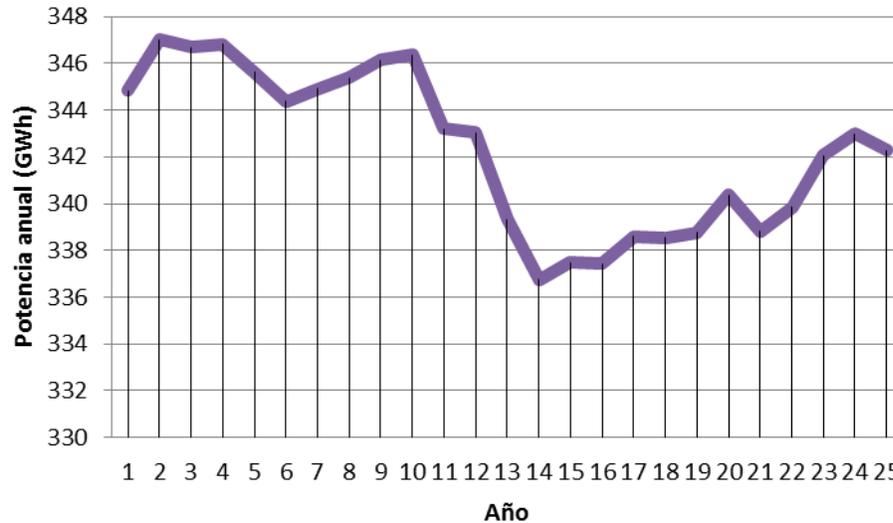


Fig. 4.4. Estimación de energía generada para el ciclo de vida del parque eólico.

En México donde el mercado eléctrico actualmente es regulado de forma directa por el gobierno, existen diferentes categorías y estructuras tarifarias que entre tantos destacan por el tipo de consumidor final y nivel de tensión.

Tabla 4.2. Precio promedio de energía eléctrica (¢/kWh)\*\*

Año	Domestico	Comercial	Servicios	Agrícola	Empresa Mediana	Gran Industria	Total
2000	55.90	126.03	104.68	28.68	61.20	43.37	60.21
2001	60.74	130.37	113.05	31.33	62.67	44.25	63.35
2002	77.44	137.76	125.14	33.58	70.16	48.08	72.15
2003	84.59	161.48	134.05	36.41	84.86	60.23	84.85
2004	88.31	186.72	140.91	39.26	97.81	70.89	95.46
2005	92.01	205.44	148.02	43.60	106.45	77.84	102.64
2006	98.35	231.58	157.04	44.39	119.14	88.63	113.79
2007	101.65	239.27	166.02	47.75	123.55	90.68	117.83
2008	106.18	254.98	172.15	50.97	152.69	118.30	137.33
2009	106.75	237.26	175.76	41.12	126.44	95.54	121.19
2010	113.27	256.91	186.11	49.18	143.27	110.02	133.88
2011	118.32	272.36	196.36	55.60	156.27	121.59	142.83
2012	116.98	290.95	208.33	58.67	163.80	126.73	148.67
2013*	114.58	293.68	224.97	56.27	166.58	130.41	150.71

Fuente: Elaboración propia con información disponible en <http://www.sener.gob.mx/>

\* Precios medios correspondientes hasta Octubre de 2013.

\*\* Para el estudio se realizará la conversión a (USD/MWh) de precios corrientes.

Las entidades gubernamentales correspondientes ajustan mensualmente las tarifas eléctricas en gran parte por los movimientos en precios de combustibles y variaciones inflacionarias, teniendo las series históricas mostradas en la Tabla 4.2 que muestran la evolución de tarifas eléctricas para los diferentes sectores.

De la tabla anterior se estima que el costo promedio de venta de energía eléctrica resulta de  $1.5 \text{ MXN}/kWh$ , esto representa un costo de  $0.0987 \text{ USD}/kWh$  por unidad de energía que genera el emplazamiento eólico si consideramos un tipo de cambio de  $13.21 \text{ MXN}/\text{USD}$ <sup>15</sup>.

### **4.2.3 Costo de la inversión**

Otra fuente de incertidumbre es aquella que tiene que ver con los costos relacionados principalmente al equipo como son los aerogeneradores; en la medida que ha venido avanzando este tipo de tecnologías con la fabricación de nuevos dispositivos y de mejor calidad, los precios de las turbinas y sus componentes han disminuido, además con los recientes avances tecnológicos alcanzados es muy probable que la tendencia en los precios siga disminuyendo. En estos casos la incertidumbre gira en torno a la confiabilidad en los pronósticos de los expertos quienes fabrican los aerogeneradores; diversas opiniones encontradas muestran que los costos del aerogenerador disminuirán en la medida que la generación eólica crezca en muchos de los países en vías de desarrollo, además del total de aerogeneradores que se instalan en cada parque que se construye.

Los costos de mantenimiento y operación pueden estimarse con mayor precisión por medio de información proporcionada por los fabricantes de los aerogeneradores, otra manera de tener datos confiables es con los proyectos actuales que desarrolla una empresa en particular u otra similar. Debido a que mucha de estas fuentes de incertidumbre son difíciles y muchas veces imposible de pronosticar, el presente estudio toma como referencia datos publicados por la Agencia Internacional de Energía Eólica (IEA, por sus siglas en ingles), [IRENA, 2012], los cuales indican  $\$1,700 \text{ USD}/kW$  como referencia al costo de la inversión por unidad de energía.

En lo referente a costos de operación y mantenimiento (O&M) hemos considerado el total que resulta de la suma de los costos fijos y variables, tal y como se hace en [IRENA, 2012, pp. 27]. Los costos fijos de O&M incluyen aquellos relacionados con la parte de seguros, administración, cuotas fijas de acceso a la red y contratos por servicio de mantenimiento programados. Los costos variables de O&M generalmente incluyen mantenimientos programados y no programados que no son cubiertos por los contratos fijos, así como el reemplazamiento de partes y materiales, entre otros costos laborales. Con los datos de estas agencias internacionales que reportan costos para ciertos países como  $0.01 \text{ USD}/kWh$  en EUA,  $0.025 \text{ USD}/kWh$  en Alemania o  $0.03$

---

<sup>15</sup> Tipo de cambio peso-dolar al 21.Junio.2014.

*USD/kWh* para España, entre otros, nos basamos para obtener un promedio estimado de *0.023 USD/MW* para México dadas las características del mercado nacional y además de los proyectos desarrollados en el país podemos darnos cuenta de que el costo por unidad de energía que se genera oscila alrededor de esta cifra.

Es interesante observar que el costo por kilowatt generado en países donde las renovables están más desarrolladas es menor, caso contrario para los países en donde se empieza a despegar en este sector, en el caso de México se tienen cifras de 1982 y 2016 *USD/kW* para los años 2009 y 2010 respectivamente. Por otra parte si nos damos cuenta en proyectos recientes que han venido desarrollándose en México, los costos por unidad rondan los *1.94 USD/MW*, por lo tanto utilizando esta cifra como referencia obtenemos que 215.34 millones de dólares es el costo del proyecto dada la capacidad del parque.

#### **4.2.4 Tasa de descuento**

Quizá sea el factor que más influye en el resultado de la valuación del proyecto. Puede variar dependiendo del tamaño de la inversión, tiempo de vencimiento de los flujos de efectivo, estructura de la serie de ingresos y el riesgo de mercado asociado con el sector, entre otros. Estimaciones en trabajos desarrollados como [CONCAMIN, 2010] y [CRE, 2012] proponen una tasa de descuento del 12% para valorar proyectos energéticos, siguiendo esta línea tomamos esta tasa para la valoración del proyecto. Es importante mencionar que dependiendo de la estructura de financiamiento del proyecto es como llega a cambiar la tasa de descuento y mucho debe tomarse en cuenta a la hora de calcularla.

#### **4.2.5 Volatilidad del proyecto**

Para valorar una opción real en un proyecto de inversión se debe conocer la volatilidad del proyecto, a veces sucede que el proyecto no está negociado en ningún mercado como es el caso de la modalidad de producción PPI y además no se dispone de información histórica lo que dificulta estimar su volatilidad. Generalmente se optan por alternativas como i) usar la volatilidad del rendimiento de alguna empresa similar, pero el gran inconveniente es que difícilmente se puede llegar a encontrar una empresa con características idénticas al proyecto que se desarrolla; y ii) utilizar la volatilidad de los factores que generan el flujo de caja del proyecto.

Ante la carencia de información y un método eficaz, [Copeland and Antikarov, 2001] sugieren utilizar el propio proyecto sin opciones como el mejor estimador del activo. Es así como se procede a calcular la volatilidad para su uso en los cálculos respectivos.



De seguir el criterio de VPN nos llevaría a aceptar el proyecto no obstante se observa que el valor está próximo a cero, por lo tanto persiste la duda referente a la decisión a tomar, ya que el valor bien podría considerarse negativo al estar en el punto de umbral del proyecto y eso nos llevaría a incurrir, por ejemplo, en costos irreversibles o hundidos.

#### 4.3.2 Estimación difusa de los parámetros del proyecto

Mucho se ha comentado que existen variables clave en la valuación de inversiones dado el impacto que tienen en el valor de un proyecto, además de la incertidumbre que rodean a cada una de estas. Por lo tanto no existe certeza respecto a su verdadero valor y las pésimas estimaciones que se lleguen a dar podrían encausar a una mala toma de decisiones por parte de la dirección de la empresa. En el capítulo previo se hizo la introducción de un nuevo enfoque basado en matemática borrosa para valuar opciones reales borrosas. La nobleza de esta teoría nos permite representar muchas de estas variables “difusas” en distribuciones de posibilidades, captando en los modelos mucha de la incertidumbre que estos representan.

Para el sector al que pertenece el proyecto que se está valuando, la estimación de las variables difusas requieren sino de un buen conocimiento del mercado de energías renovables, si de suficiente experiencia por parte de los administradores del proyecto, en otras palabras y como lo indica la teoría de posibilidad se debe examinar al menos que tan factible y plausible son las estimaciones. Es recomendable que estas estimaciones sean llevadas a cabo en conjunto por especialistas con conocimiento y experiencia en el mercado. Partiendo de esta premisa, estimamos la difusividad de cada una de las variables requeridas para valuar una opción real difusa.

#### Flujos de Efectivo del Proyecto ( $S_1, S_2, S_3, S_4$ )

Conscientes de la importancia que tiene modelar la incertidumbre inherente a la velocidad del viento para obtener mejores estimaciones de los flujos de caja del proyecto, modelamos esta variable que puede comportarse muy volátil en la zona donde se construye el parque. A pesar de hacer uso de distribuciones de probabilidad como la Weibull para estimar este recurso resulta insuficiente porque esta distribución es más apta para periodos cortos de tiempo y no al largo plazo, ya que nadie nos podría garantizar que dentro de 15 años las condiciones ambientales en donde se ubica el parque permanezcan iguales o cambien radicalmente, así tenemos que la distribución de posibilidades de la variable difusa para los flujos del proyecto es:

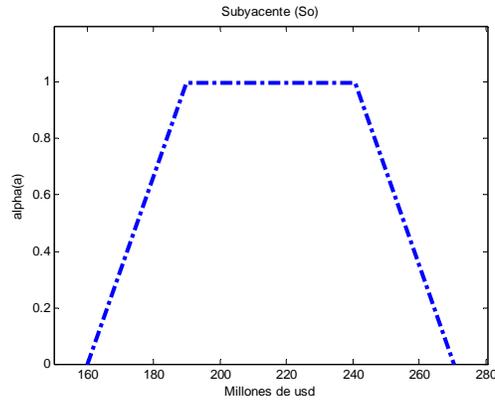


Fig. 4.6. Valor difuso del activo subyacente,  $\tilde{S}_0$ .

### Costo de la Inversión ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ )

Sin duda los costos que rodean al proyecto es otra de las variables que se desconoce y las empresas se esmeran en el uso de modelos y pronósticos para obtener estimaciones más precisas. Mediante el conjunto difuso de posibilidades para el costo de la inversión, Figura 4.7, cuyos límites están comprendidos de [198, 237] y teniendo como valor esperado el que se calculó en la sección anterior se tiene la siguiente distribución difusa para el costo de la inversión.

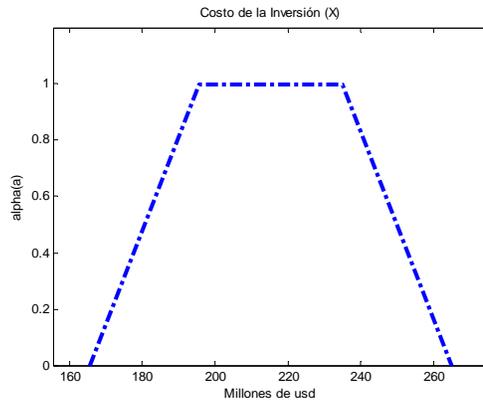


Fig. 4.7. Costo de la inversión del proyecto,  $\tilde{X}$ .

### Tasa de descuento ( $r_1, r_2, r_3, r_4$ )

La distribución para la tasa de descuento tiene una media esperada de 12%, comprendida entre porcentajes límite de [11, 13] por ciento, con valores de 1.5% a los lados de sobrepasar este rango.

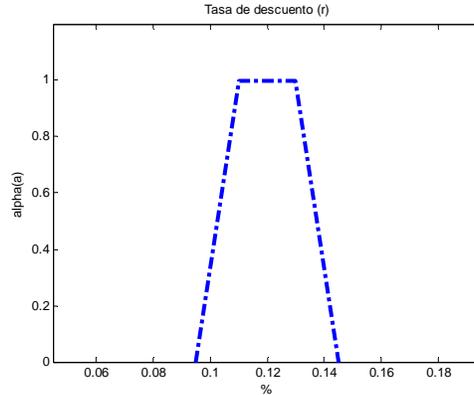


Fig. 4.8. Tasa de descuento del proyecto,  $\tilde{r}$ .

### Volatilidad del valor actual de los flujos del proyecto ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ )

Para la estimación del conjunto difuso de la volatilidad del proyecto se usó el método descrito por [Copeland and Antikarov, 2001]. Con un valor estimado de 35% se tiene la siguiente distribución.

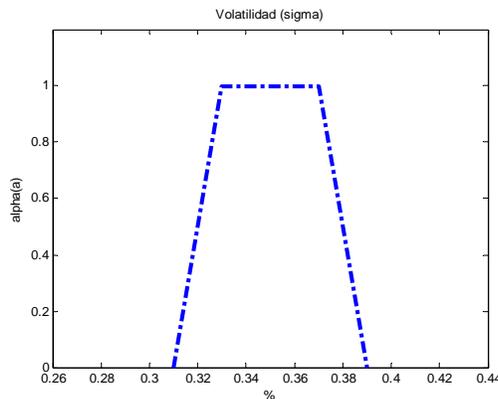


Fig. 4.9. Volatilidad del proyecto,  $\tilde{\sigma}$ .

Es importante mencionar que se pueden modificar los rangos que comprende cada conjunto de distribución, esto recae principalmente en la estrategia que la empresa tiene con el proyecto y la manera en como espera se comporten muchos elementos desconocidos que tienen efecto en cada uno de los parámetros que se estimaron. Con los conjuntos difusos de las variables requeridas por el modelo FROV para valorar la opción, se tiene hasta este momento los elementos necesarios para usar el modelo difuso de valuación de opciones reales que se ha desarrollado.

### 4.3.3 Valuación Financiera con Opciones Reales Difusas

Desde el momento en que se acuñó la teoría de opciones reales para valorar proyectos de inversión, partiendo de los principios de opciones financieras, han venido generándose avances con respecto a esta nueva forma de valorar los proyectos, proponiéndose nuevos modelos o extensiones a los que ya se han desarrollado. Con la inclusión de la matemática borrosa al campo de las finanzas han surgido nuevos modelos y mejoras a los existentes para valorar opciones, portafolios, etc. El desarrollo del modelo FROV se ha presentado en el capítulo anterior, por lo que ahora se aplica con las variables que han sido calculadas para el emplazamiento eólico en estudio.

Retomando el modelo obtenido en el capítulo previo, expresión (3.22), tenemos que el valor de la opción real está dada por una distribución de posibilidades cuya expresión es:

$$FROV^\alpha = [FROV_1(\alpha), FROV_2(\alpha)]$$

$$FROV^\alpha = \left\{ S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2) + \left[ (S_2 - S_1) e^{-\delta T} N(d_1) + (X_1 e^{-r_1 T} - X_2 e^{-r_2 T}) N(d_2) \right] \alpha^{1/n}, \right. \\ \left. S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2) - \left[ (S_4 - S_3) e^{-\delta T} N(d_1) + (X_3 e^{-r_3 T} - X_4 e^{-r_4 T}) N(d_2) \right] \alpha^{1/n} \right\} \quad (4.2)$$

Recordemos que la expresión (4.2) tiene la ventaja de una adaptación flexible a varias distribuciones de posibilidad (ej. trapezoidal, triangular, cuadrática). El tipo de distribución estará sujeto al valor que llegue a tomar  $n$ . Cabe destacar que la valuación de la opción real es análoga a una opción de compra americana, ya que la evolución de escenarios futuros determinará diferentes opciones a tomar. El horizonte de tiempo que se considera para la valuación es de 5 años, un tiempo suficiente razonable para determinar las posibles opciones inherentes al proyecto y la toma de decisiones estratégicas requeridas por parte de la gerencia del proyecto. Usar plazos de tiempo más grandes como los 25 años estimados de vida que tiene el proyecto, nos llevaría a escenarios muy aventureros con el valor que nos arroje la opción, ya que en este periodo de tiempo existe gran posibilidad de que ocurran eventos de trascendencia para el proyecto y los cuales no sean tomados en cuenta en el momento en que está realizando la valuación.

Partiendo de las distribuciones difusas tipo trapezoidal y que están dadas por:

Flujos de efectivo del proyecto  $\tilde{S}_0 = [159.92, 189.92, 240.52, 270.52]$ .

Tasa de descuento  $\tilde{r} = [0.095, 0.11, 0.13, 0.145]$ .

Volatilidad  $\tilde{\sigma} = [0.31, 0.33, 0.37, 0.39]$ .

Costo de la inversión  $\tilde{X} = [165.5, 195.5, 235, 265]$ .

Entonces, llevando a cabo la sustitución de los conjuntos en la expresión (4.2) obtenemos el valor de la opción real difusa para el parque eólico:

$$FROV^\alpha = \left\{ 159.92e^{-(0.03)(5)}(0.8330) - (165.5)e^{-(0.095)(5)}(0.5727) + \left[ (189.92 - 159.92)e^{-(0.03)(5)}(0.8330) + \left( (165.5)e^{-(0.095)(5)} - (195.5)e^{-(0.11)(5)} \right)(0.5727) \right] \alpha^{1/n}, \right. \\ \left. (270.52)e^{-(0.03)(5)}(0.8330) + (265)e^{-(0.145)(5)}(0.5727) - \left[ (270.52 - 240.52)e^{-(0.03)(5)}(0.8330) + \left( (235)e^{-(0.13)(5)} - (265)e^{-(0.145)(5)} \right)(0.5727) \right] \alpha^{1/n} \right\}$$

Simplificando

$$FROV^\alpha = \left\{ 55.7056 + [15.8548] \alpha^{1/n}, \right. \\ \left. 120.4405 - [18.2642] \alpha^{1/n} \right\} \quad (4.3)$$

Para observar los diferentes tipos de distribución a los que se llega a adaptar el modelo, ahora representado por la ecuación (4.3), asignamos valores de  $n=0.2$ ,  $n=1$  y  $n=5$  para obtener tres tipos de distribución de posibilidades, donde  $\alpha$  está comprendida dentro del intervalo  $[0,1]$ . Por lo tanto sustituyendo para cada valor de  $n$  y el valor de  $\alpha$  de 0 a 1 en la expresión (4.3) obtenemos que:

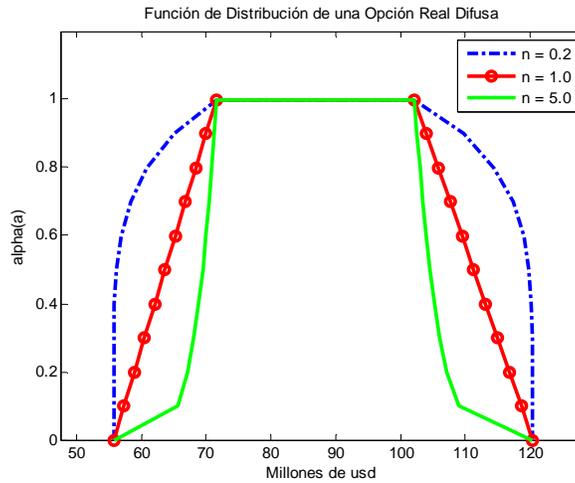


Fig. 4.10. Opción Real Difusa del proyecto, FROV.

La figura 4.10 muestra que los valores posibles de la opción real están comprendidos dentro del conjunto de distribución dado por  $FROV = [55.71, 71.56, 102.18, 120.44]$ . Es decir el núcleo de la opción está dentro del rango  $[71.56, 102.18]$  y es el rango más posible que el valor de la opción puede tomar, con un máximo posible a la izquierda comprendido por  $[55.71, 71.56]$  y valor máximo posible a la derecha comprendido por  $[102.18, 120.44]$ .

Para obtener el valor de la opción real procedemos a estimar el valor esperado de posibilidad dada la función de distribución de la Figura 4.10. De la expresión (3.17) se tiene que:

$$E(FROV) = \left[ \frac{(a_1+a_4)}{2} \right] \left[ \frac{(a_2-a_1-a_4+a_3)n}{2n+1} \right] = \left[ \frac{(55.71+71.56)}{2} \right] \left[ \frac{(71.56-55.71-120.44+102.18)(1)}{2(1)+1} \right]$$

$$E(FROV) = 87.2699 \text{ millones}$$

Se observa que el valor de la opción real bajo el enfoque de difusividad tiene un valor de 87.269 millones de dólares.

#### 4.4 VALORACIÓN DE LA OPCION REAL CON OTROS MODELOS

En la Tabla 4.3 se muestra los valores de la Opción Real utilizando el modelo original Black & Scholes y los modelos propuestos por [Carlsson & Fullér, 2000] y [Thiagarajah et al., 2007]. Se ha comentado que una aportación de la presente tesis es complementar las propuestas de estos autores respecto a estos sus trabajos de investigación y por lo cual se ha obtenido una expresión que hemos utilizado para determinar el valor del proyecto de inversión para la construcción de un parque eólico en México.

**Tabla 4.3. Valuación de la Opción Real bajo diferentes modelos.**

Modelo	Valor de la opción (millones de usd)
<i>Black &amp; Scholes</i>	111.5824
<i>Carlsson &amp; Fuller 2000</i>	86.7209
<i>Thiagarajah et al. 2007</i>	86.3812
<i>López-Martínez 2014<sup>16</sup></i>	87.2699

Podemos ver de la tabla anterior que los resultados de los últimos tres modelos no difieren mucho en sus valores, más no así el resultado que arroja el modelo original de Black & Scholes, la razón en principio y como ya se ha comentado es que el modelo original está enfocado a la valuación de opciones financieras y por consiguiente la estimación de sus variables se hace muy diferente a la manera en cómo se hacen para los otros modelos. El valor que obtenemos de \$ 87.2699 millones es una vez que hemos contemplado la incertidumbre en  $X$ ,  $S$ ,  $r$  y  $\sigma$ , por lo cual consideramos que es un valor más razonable si tomamos en cuenta en la realidad los proyectos no presentan certeza absoluta en cada uno de estos parámetros.

---

<sup>16</sup> El modelo lleva por nombre los apellidos del autor y el año en que se redacta el proyecto de investigación.

# CAPÍTULO 5:

## CONCLUSIONES

### 5.1 CONCLUSIONES

De la valuación llevada a cabo y comparando los valores del proyecto que nos arroja la técnica de VPN= \$0.124 y el de opciones reales difusas, FROV= \$ 87.269, se puede ver que:

- El VPN no nos ayuda lo suficiente para saber si aceptamos o rechazamos el proyecto, ya que el valor está cercano al valor de umbral, por lo tanto aceptar podría ser idéntico a rechazar la inversión y viceversa. Esto se debe en gran medida a que el VPN no está tomando en cuenta la incertidumbre en el proyecto o lo que es lo mismo, está ignorando la flexibilidad.
- Con la valuación financiera utilizando opciones reales y matemática difusa, método FROV, se constata que aceptar el proyecto sería una decisión estratégica y factible para la empresa. Además se tiene certeza en la toma de decisión, pues tomando en cuenta la incertidumbre en cada una de las variables se obtiene un valor muy distante al valor obtenido por el VPN. Con un valor de flexibilidad de \$ 87.145, podemos darnos cuenta que el VPN nos estaría llevando a infravalorar el proyecto y quizá ignorando la posibilidad de invertir en la construcción del parque eólico.

Por último y como conclusión general adicional al trabajo, se mencionó y se observa que México está empezando a vivir un proceso de cambio dentro del sector energético, específicamente en el mercado de electricidad se da la presencia de más participantes, principalmente en la generación de electricidad, por lo tanto para las empresas que ven la posibilidad de invertir en activos de generación eólica les resulta cada vez más indispensable tomar medidas para gestionar el riesgo inherente a la inversión y utilizar herramientas que contemplen importantes factores de incertidumbre como puede ser volatilidad en precios de electricidad, disponibilidad del recurso, certificados de reducción de emisiones de carbono, etc. El uso de herramientas que permitan y apoyen en una mejor toma de decisiones y estratégicas,

como las opciones reales, ayudarán a las empresas a sacar ventaja del ambiente de incertidumbre en el que se encuentra el proyecto.

## **5.2 APORTACIONES**

Como principales aportaciones se encuentran:

- i) Uso de *aproximaciones de métodos de inteligencia artificial*. Se presentó como una clasificación adicional a la de [Hommel and Lehmann, 2001] los métodos basados en aproximaciones desarrollados por inteligencia artificial, entre los que destacan las redes neuronales, algoritmos genéticos y lógica difusa, aplicando esta última en la presente tesis.
- ii) *Modelo difuso de valuación de opciones reales (FROV)*. Se desarrolló un modelo basado en matemática difusa y valuación de opciones reales, enfocado para la aplicación a proyectos reales con incertidumbre. El modelo contempla aquellos parámetros desconocidos en el proyecto y que afectan en la valuación del mismo, hace uso de distribuciones de posibilidad teniendo la flexibilidad de adaptarse a varios tipos de distribución según la percepción que se tenga de cada variable.

Naturalmente se alcanzó otras aportaciones como producto del contenido de la misma tesis y estas son:

- Una nueva técnica para valorar opciones financieras y opciones reales que se puede incluir en los contenidos de los programas de estudio del posgrado de Ingeniería Financiera, específicamente en los cursos de Opciones Reales e Ingeniería Financiera.
- Herramienta y medio de consulta para proyectos a futuro que impliquen el uso de matemática difusa en el campo de las finanzas.

### 5.3 RECOMENDACIONES

Durante el desarrollo del proyecto de investigación se consultaron muchas fuentes de información, entre las que nos llamó la atención están los proyectos de tesis, y además se observó la manera en como una parte de las empresas desarrolladoras de proyectos renovables evalúan sus decisiones de inversión. Es así que emitimos algunas recomendaciones enfocadas en estos dos aspectos y por supuesto en el contenido de esta tesis, por lo tanto se recomienda:

- Para proyectos de tesis referentes a la valuación financiera de proyectos eólicos y renovables, tomar en cuenta el gran alcance que ofrece la técnica de opciones reales para la valuación financiera y a su vez considerar la estimación de la principal fuente de variación que genera los flujos de efectivo en el proyecto, como es la disponibilidad del viento para el caso de proyectos eólicos. Contemplar la volatilidad en esta variable resulta importante dado que impacta directamente en los flujos de caja, dado que las condiciones ambientales van cambiando en los últimos años.
- Las empresas que desarrollan proyectos renovables en México se enfrentan a muchas fuentes de incertidumbre y con las recientes reformas en el sector energético seguramente muchas de estas aumentarán, por lo que cada vez las entidades están obligadas a considerar el riesgo en sus decisiones de inversión, es así que se recomienda la técnica de opciones reales difusas que se presentó en la tesis, la cual ofrece una mejor alternativa para la toma de decisiones estratégicas y así superando las dificultades que tienen otras técnicas como el VPN o TIR.
- El modelo difuso que se desarrolló para la valuación de la opción real, como ya se ha comentado, parte del modelo Black & Scholes. Aunque el modelo contempla parte de la incertidumbre en el proyecto, no está plenamente adaptado para tomar en cuenta eventos extremos que de pronto llegan a ocurrir como la reciente crisis a nivel mundial de 2008. Sería importante tomar en cuenta estos eventos y actualizar la estimación de las variables en el modelo, un ejemplo sería partir del modelo de Merton.
- Adicionalmente y como última recomendación, sería una ventaja el uso de técnicas difusas en cursos impartidos en el Programa de Posgrado correspondientes a Opciones, Modelación Econométrica, etc. Esto sin duda reforzaría las herramientas adquiridas por nuestros compañeros durante estos programas y que sin lugar a dudas ayudaría en la práctica financiera del mundo real.

## **5.4 TRABAJOS FUTUROS**

Queda para trabajos futuros

- Extender el modelo difuso de valuación al modelo de Merton, esto implica contar con un modelo que permita contemplar aquellos eventos extremos que pueden llegar a presentarse en economías emergentes, como es el caso de México.
- Hacer la valuación de proyectos eólicos contemplando la volatilidad en variables clave que impacten en los flujos de caja. Es previsible que esto sea cada vez más indispensable para proyectos académicos e industriales, ya que la apertura del mercado eléctrico en el país detonará en otras variables de incertidumbre para los proyectos renovables.
- En las últimas décadas la inteligencia artificial ha llamado la atención en muchas otras áreas de estudio por los alcances y oportunidades que ofrecen al resolver problemas complejos con técnicas alternativas a las numéricas. Innovar en la aplicación práctica de estas técnicas al campo de las finanzas resulta una gran ventaja frente a métodos (i.e. modelos estocásticos) que llegan a demandar demasiada capacidad de procesamiento de los ordenadores para soluciones cerradas, sólo por mencionar una de estas ventajas.

# REFERENCIAS

- [Abel et al., 1996] Andrew B. Abel, Avinash K. Dixit, Janice C. Eberly, Robert S. Pindyck. "Options, the Value of Capital, and Investment", *The Quarterly Journal of Economics*, August 1996.
- [Alleman and Noam, 1999] James Alleman, Eli Noam. *The New Investment Theory of Real Options and its Implication for Telecommunications Economics*, Kluwer Academic Publishers, Second Edition, 1999.
- [Bacchini et al., 2007] Roberto D. Bacchini, J. García-Fronti and Ezequiel Marquez Project Valuation Using Fuzzy Real Options. University of Buenos Aires, February 2007. Online at <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/6443>
- [Bailey et al., 2004] William Bailey, Benoît Couët, A. Bhandari, S. Faiz, S. Srinivasan "Unlocking the Value of Real Options", *Oilfield Review*, Winter 2004.
- [Balibrea, 2011] Balibrea Iniesta J. Desarrollo de una metodología basada en la teoría de opciones reales para la valoración de proyectos de inversión en energías renovables. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, Mayo 2011.
- [Bao et al., 2002] Qin Yanhong, Xu Taishan and Xue Yusheng. "A Fast Simulation Method for Mid-Term Voltage Stability", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 21, No. 1, February, 2002.
- [Benaroch et al., 2006] Michel Benaroch, Yossi Lichtenstein, Karl Robinson. "Real Options in IT Risk Management: An Empirical Validation of Risk-Option Relationships", Forthcoming in *MIS Quarterly*, February 2006.
- [Berk, 1999] Jonathan B. Berk, "A simple approach for Deciding when to invest", *The American Economic Review*, Vol. 89, No. 5, pp. 1319-1326, December 1999.
- [Black and Scholes, 1973] Fischer Black and Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654, 1973.
- [Bodie et al., 2009] Zie Bodie, John Kane, Alan Marcus. *Investments*, Mc Graw-Hill 8th. Ed., 2010.
- [Brandao et al., 2005] Luiz E. Brandao, James S. Dyer, Warren J. Hahn. "Using Binomial Decision Trees to Solve Real-Option Valuation Problems", *Decision Analysis Review*, Vol.2, No.2, pp. 69-88, June 2005.
- [Brennan and Schwartz, 2002] Michael J. Brennan, Eduardo S. Schwartz. "Evaluating Natural Resource Investments", *The Journal of Business*, Vol. 58, Issue 2, 2002.
- [Broyles, 2003] Jack Broyles. *Financial Management and Real Options*. John Wiley & Sons, 2003.
- [Caballero and Pindyck, 1996] Ricardo J. Caballero, Robert S. Pindyck. "Uncertainty, Investment, and Industry Evolution", *International Economic Review*, Vol. 37, No3, August 1996.
- [Capellán, 2011] Luis F. Capellán Esparza, "Evaluación financiera de inversión en proyectos de infraestructura para la producción de etanol en México probada bajo el enfoque de opciones reales", que para obtener el Título de Maestro en Ingeniería, DEP FCyA, UNAM 2010.

- [Cariño y Medrano, 2013] Rubén Cariño Garay, M. Consolación Medrano Vaca. Factores de incertidumbre en la formulación financiera de proyectos de energías renovables: caso de proyectos eólicos y de energía solar. Boletín IIE, Artículo técnico Julio-Septiembre 2013.
- [Carlsson and Fullér, 2000] Christer Carlsson and Robert Fullér. “Real Option evaluation in fuzzy environment”, *International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence*, Budapest, pp. 69-77, November 2, 2000.
- [Carlsson and Fullér, 2001] Christer Carlsson and Robert Fullér. “On optimal investment timing with fuzzy real options”, *Workshop on Preference Modelling and Applications*, Granada, Spain, April 25-28, 2001.
- [Carlsson et al., 2001] Christer Carlsson, Robert Fullér, Péter Majlender. “Project selection with fuzzy real options”, *Proceedings of the Second International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence*, Budapest, pp. 81-88, November 2001.
- [Chourdakis, 2008] Kyriakos Chourdakis. Lectures notes on Financial Engineering, 2008. Disponible en <http://www.theponytail.net/>
- [CIF, 2009] Climate Investment Funds. “Clean Technology Fund Investment Plan for Mexico,” Meeting of the CFT Trust Fund Committee, CTF/TFC.2/8, Washington D.C., January 29-30, 2009.
- [Collan et al., 2009] Mikael Collan, Robert Fullér, and József Mezei. “A Fuzzy Pay-Off Method for Real Option Valuation”, *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, Volume 2009, Article ID 238196, 14 pages, 2009.
- [CONCAMIN, 2010] Proyectos de generación de energía eléctrica en la modalidad de autoabastecimiento. Confederación de Cámaras Industriales de los Estados Unidos Mexicanos, CONCAMIN, 2010.
- [Copeland and Antikarov, 2001] T. Copeland, V. Antikarov. “Real options”, Texere LLC, New York, 2001.
- [Copeland and Tufano, 2004] Tom Copeland and Peter Tufano. “A Real-World Way to Manage Real Options”. *Harvard Business Review*, March 2004.
- [Cortazar and Schwartz, 1997] Gonzalo Cortazar, Eduardo S. Schwartz. “Implementing a Real Option Model for Valuing an Undeveloped Oil Field”, *International Transactions in Operational Research*, Vol. 4, No. 2, 1997.
- [Cortazar et al., 1998] Gonzalo Cortazar, Eduardo s. Schwartz, Marcelo Salinas. “Evaluating Environmental Investments: A Real Options Approach”, *Management Science*, Vol. 44, Issue 8, August 1998.
- [CRE, 2010] Comisión Reguladora de Energía, 2010.
- [CRE, 2012] Comisión Reguladora de Energía, Documento de Consulta DC/02/DGT/2012, México D.F. 2012.
- [Dickens and Lohrenz, 1996] Ross N. Dickens and John Lohrenz, “Evaluating Oil and Gas Assets: Option Pricing Methods Prove No Panacea”, *Journal of Financial and Strategic Decisions*, Vol. 9, No. 2, 1996.
- [Dixit and Pindyck, 1995] Avinash Dixit and Robert S. Pindyck, “The Options Approach to Capital Investment”, *Harvard Business Review*, June 1995.
- [Dixit and Pindyck, 2000] Avinaxh K. Dixit and Robert S. Pindyck, “Expandability, Reversibility, and Optimal Capacity Choice” Oxford University Press, 2000.
- [Dixit et al., 1999] Avinash Dixit, Robert S. Pindyck, Sigbjorn Sodal. “A Markup Interpretation of Optimal Investment Rules”, *The Economic Journal*, Vol. 109, No. 455, pp. 179-189, April, 1999.

- [Dubois, 2006] Didier Dubois. "Possibility theory and statistical reasoning", *Computational Statistics & Data Analysis* 51, pp. 47-69, Toulouse Cedex 4, France, 2006.
- [Dubois et al., 2006] Didier Dubois, Laurent Folloy, Gilles Mauris, and Henri Prade. Probability-Possibility Transformations, Triangular Fuzzy Sets and Probabilistic inequalities. *Reliable Computing* 10: 273-297, 2004.
- [Dutta et al., 2011] P. Dutta, H. Boruah and T. Ali. Fuzzy Arithmetic with and without using a-cut method: A comparative study. *International Journal of Latest Trends in Computing*, Vol. 2, Issue 1, March 2011.
- [EXTENDA, 2011] El sector de las energías renovables en México. Agencia andaluza de promoción exterior (EXTENDA), México, Octubre 2011.
- [Fernández, 2008] Pablo Fernández, "Valoración de Opciones Reales: Dificultades, Problemas y Errores", *IESE-CIFF Business School Universidad de Navarra*, DI-760, Agosto 2008.
- [Fuller, 1995] Robert Fullér. *Neuronal Fuzzy Systems*. ISBN 0358-5654, Åbo 1995.
- [Fullér and Majlender, 2003] Robert Fullér and Peter Majlender. On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets & Fuzzy Systems* 136, pp. 363-374, 2003.
- [Guerrero, 2009] Luis G. Guerrero Gutiérrez, "Evaluación económica de un mejorador de crudo por medio de Opciones Reales", que para obtener el Título de Maestro en Ingeniería, DEP FI, UNAM 2009.
- [GWEC, 2012] Global Wind Energy Council, April 2013, [www.gwec.net](http://www.gwec.net)
- [Hau, 2006] E. Hau. *Wind Turbine Fundamentals, Technologies, Applications, Economics*. 2nd Edition, Springer 2006.
- [He, 2007] Yizhi He, "Real Options in the Energy Markets", Phd. Dissertation, University of Twente, Holland, 2007.
- [Hommel and Lehmann, 2001] U. Hommel and H. Lehmann, "Die Bewertung von Investitionsprojekten mit dem Realoptionsansatz: Ein Methodenüberblick", pp. 113-129, Ed. U. Hommel, M. Scholich & r. Vollrath, Springer, 2001.
- [Hull, 2002] John C. Hull. *Options, Futures & other Derivatives*. Prentice Hall, 2002, Fifth Edition.
- [Hull, 2006] John C. Hull. *Options, Futures & other Derivatives*. Prentice Hall, 2006, Sixth Edition.
- [IRENA, 2012] Renewable Energy Technologies: Cost Analysis Series. International Renewable Energy Agency (IRENA), Working Paper Vol. 1, Issue 5/5, June 2012.
- [Johnson et al., 2006] Scott T. Johnson, Tim Taylor, David N. Ford, "Using System Dynamics to Extend Real Options Use: Insights from the Oil & Gas Industry", Working Paper, Texas A&M University, 2006.
- [Junior et al., 2005] Frederico M. Junior, Roberto M. Montezano, Luiz E. Brandão, "Valuation of Onshore Mature Oil Fields: The New Bidding Rounds in Brazil", Working Paper, Faculdades Ibmecc, Brazil, 2005.
- [Kaufmann and Gupta, 1985] A. Kaufmann and M. M. Gupta. *Introduction to Fuzzy Arithmetic-Theory and Applications*. Van Nostrand Reinhold, New York 1985.
- [Khcherem and Bouri, 2009] Fatma Khcherem and Abdelfettah Bouri, "Fuzzy Logic and Investment Strategy", *Global Economy & Finance Journal*, Vol. 2 No. 2, pp. 22-37, September 2009.
- [Klir and Yuan, 1995] George J. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.

- [Kogut and Kulatilaka, 2001] Bruce Kogut and Nalin Kulatilaka. “Strategy, Heuristics, and Real Options”, The Oxford Handbook of Strategy, Chapter 30, 2001.
- [Kulatilaka and Perotti, 1998] Nalin Kulatilaka, Enrico C. Perotti. “Strategic Growth Options”, *Management Science Review*, Vol. 44, No 8, pp. 1021-1031, August 1998.
- [Kulatilaka, 1986] Nalin Kulatilaka. “The Value of Flexibility”, Boston University, March, 1986.
- [Lamothe and Pérez, 2003] P. Lamothe Fernández, M. Pérez Somalo. *Opciones Financieras y Productos Estructurados*, McGraw Hill, Segunda Edición, 2003.
- [Lee et al., 2005] Cheng-Few Lee, Gwo-Hshiong Tzeng, Shin-Yun Wang, “A new application of fuzzy set theory to the Black-Scholes option pricing model”, *Expert Systems with Applications* 29, pp. 330-342, 2005
- [Lee, 2005] Kwang H. Lee. *First Course on Fuzzy Theory and Applications*. Advances in soft Computing, Springer, 2005.
- [Lin et al., 2007] Li Lin, Longbing Cao, Jiaqi Wang, Chengqi Zhang, “The Applications of Genetic Algorithms in Stock Market Data Minig Optimisation”, Working Paper NSW Faculty of Information Technology, University of Technology, Sydney, Australia, 2007.
- [Luehrman, 1998] Timothy A. Luehrman. “Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers”, *Harvard Business Review*, Reprint 98404, July-August 1998.
- [MAIN, 2012] Case Study: Mexico’s Renewable Energy Program, Mitigation Action Implementation Network, MAIN, January 2012.
- [Martin, 2008] Ian W.R. Martin, “Disasters and the Welfare Cost of Uncertainty”, *The American Economic Review: Papers & Proceedings*, Vol. 98, No. 2, pp. 74-78, 2008.
- [Mezei, 2011] József Mezei. “A *Quantitative View on Fuzzy Numbers*”, Turku Centre for Computer Science, TUCS Dissertations No 142, December 2011.
- [Mun, 2002] Johnathan Mun. *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions*. John Wiley & Sons, 2002.
- [Myers, 1977] Stewart C. Myers, “Determinants of Corporate Borrowing”, *Journal of Financial Economics*, pp. 147-175, July 1977.
- [Nikookar et al., 2012] Gholamhossien Nikookar, Seyed A. Azarmsa, Farzam Pooramazan, Ali Shahvazian. “A fuzzy Real Option Valuation Approach to Capital Budgeting under Uncertainty”, *European Journal of Economics, Finance and Administrative Sciences*, Issue 45, 2012.
- [Pennings and Lint, 1997] Enrico Pennings, Onno Lint. “The Option value of advanced R&D”, *European Journal of Operational Research*, pp. 83-94, 1997.
- [Pindyck, 2011] Robert S. Pindyck. “Information and the Strategic Timing of Investments”, *Industrial Economics for Strategic Decisions*, MIT, August 2011.
- [Pindyck, 2012] Robert S. Pindyck, “Risk and Return in Environmental Economics”, *Massachusetts Institute of Technology*, Cambridge, July 23, 2012.
- [Schwartz and Kraft, 2010] Eduardo Schwartz and Holger Kraft, “Cash Flow Multipliers and Optimal Investment Decisions”, Los Angeles USA, March 2010.

- [SENER, 2008] Secretaría de Energía. “Programa Especial para el Aprovechamiento de Energías Renovables”, México 2008. [www.energia.gob.mx](http://www.energia.gob.mx)
- [Swishchuk et al., 2007] A. Swishchuk, A. Ware, H. Li, “Option Pricing with Stochastic Volatility Using Fuzzy Sets Theory”, 2007.
- [Thiagarajah et al., 2007] K. Thiagarajah, S.S. Appadoo and A. Thavaneswaran. Option valuation model with adaptive fuzzy numbers. *International Journal of Computers & Mathematics with applications* 53, pp. 831-841, 2007.
- [USAID, 2009] Análisis Comparativo del Marco Eléctrico Legal y Regulatorio de EE. UU. y México para la Promoción de la Energía Eólica, Marzo 2009. [www.usaid.gov](http://www.usaid.gov)
- [USAID, 2009] Elementos para la Promoción de la Energía Eólica en México. USAID 2009.
- [Wang and Hwang, 2005] Juite Wang and W.L. Hwang. “A Fuzzy set approach for R&D portfolio selection using a real options valuation model”, *The International Journal of Management Science*, Elsevier Ltd., 2005.
- [WWEA, 2011] World Wind Energy Association, Report 2011, [www.wwindea.org](http://www.wwindea.org)
- [Yoshida et al., 2006] Yuji Yoshida, Masami Yasuda, Jun-ichi Nakagami, Masami Kurano, “A new evaluation of mean value for fuzzy numbers and its application to American put option under uncertainty”, *Fuzzy Sets and Systems* 157, pp. 2614-2626, 2006.
- [Zadeh, 1965] L.A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, 338-353, 1965.
- [Zadeh, 1978] L.A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Inform. Sci. Part I: 8, 199-249; Part II: 8, 301-357; Part III: 9, 43-80*, 1978.
- [Zimmermann, 2010] H. J. Zimmermann. “Fuzzy Set Theory”, *Advanced Review Volume 2*, DOI: 10.1002/wics.82 May/June 2010.



# APÉNDICE A

Los desarrollos que se presentan más adelante por simplicidad han sido llevados a cabo de manera concreta buscando complementar parte del contenido que se aborda dentro del capitulo, una mayor profundidad de cada uno de ellos sin duda merece una revisión de fuentes de información como las que se detallan en el apartado de referencias.

## A.1 DESARROLLO DE LA FORMULA DE BLACK & SCHOLES

El desarrollo de la fórmula de Black & Scholes demanda cierta complejidad matemática y conceptos que involucran otras disciplinas; desarrollamos la ecuación de manera simple y con un claro entendimiento de los conceptos. Sabiendo que el valor de una opción está determinada principalmente por el precio futuro  $S$  del activo y el tiempo  $t$ , es decir  $V(S,t)$ , procedemos a construir un portafolio. Si  $\Pi$  denota el valor del portafolio para una posición larga y corta en cierta cantidad delta, del subyacente:

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S$$

Donde

$V(S,t)$  : valor de la opción

$\Delta S$  : Posición corta del activo

Luego si asumimos que el subyacente sigue un proceso lognormal con caminata aleatoria:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX \tag{A.1}$$

Resulta natural preguntarse cómo cambia el valor del portafolio de  $t$  a  $t + dt$ , estos cambios se deben en parte al cambio en el valor de la opción y del subyacente:

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

Aplicando el lema de Ito, llegamos a:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

De manera que los cambios en el portafolio quedan como:

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS \quad (\text{A.2})$$

Es importante notar que los términos  $dt$  denotan términos determinísticos y  $dS$  términos aleatorios. Suponiendo que por el momento conocemos  $V$  y sus derivadas, entonces lo único por conocer sería  $dS$ , término que jamás podemos conocer en adelante. Estos términos aleatorios, representan el riesgo en nuestro portafolio. En la práctica una forma de reducir o aún eliminar este riesgo es eligiendo cuidadosamente delta. De la ecuación anterior, los términos aleatorios son:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS$$

Si elegimos

$$\Delta = \partial V / \partial S \quad (\text{A.3})$$

Él termino de aleatoriedad es reducido a cero, a esto se le conoce como delta de cobertura, la cual es una estrategia de cobertura dinámica. Esto sucede ya que se aprovecha la correlación entre las opciones *call* y *put*.

Después de elegir cuantitativamente a  $\Delta$ , mantenemos un portafolio cuyos cambios en el valor están dados por la cantidad:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (\text{A.4})$$

Este cambio es completamente riesgoso. Si tenemos un cambio completamente libre de riesgo  $d\Pi$  en el valor de portafolio  $\Pi$ , entonces esto debe ser lo mismo como el crecimiento que podríamos conseguir si ponemos la cantidad equivalente de efectivo en una cantidad libre de riesgo e interés bajista (interest bearing, en inglés):

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (\text{A.5})$$

Esto es un ejemplo del principio de no arbitraje. Para ver porque esto debería ser...

Sustituyendo A.1, A.2, A.4 en A.5

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left( V - S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt$$

Dividiendo entre  $dt$  y reordenando,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (\text{A.6})$$

Esta expresión es la conocida ecuación de Black & Scholes, la cual es un ecuación diferencial parcial lineal parabólica, que está íntimamente relacionada con la ecuación de difusión de calor empleada en Termodinámica. La ecuación A.6, contiene todos las variables de los parámetros  $S$ ,  $t$ , sigma, pero no menciona nada sobre la tendencia  $u$ .

## A.2 METODO TRINOMIAL

El método trinomial es una extensión de los métodos de *Lattice* expuesto en el Capítulo 2; muchas de las limitantes que llega a presentar el método binomial, se ven mejoradas con el método trinomial, por lo que llega a ser más preferido que el primero. La fórmula de Black & Scholes llega a ser un equivalente al utilizar los flujos descontados esperados en un árbol trinomial. Re-expresando la Ec. (A.6) se tiene

$$-\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + v \frac{\partial C}{\partial x} - rC$$

Ahora partiendo de la fecha al vencimiento a tiempo cero, se construye la aproximación de diferencias finitas explícita:

$$-\frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{C_{j+1}^{n+1} - 2C_j^{n+1} + C_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + v \frac{C_{j+1}^{n+1} - C_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} - rC_j^{n+1}$$

Reordenando y simplificando se tiene:

$$C_j^n = p_u C_{j+1}^{n+1} + p_m C_j^{n+1} + p_d C_{j-1}^{n+1}$$

Donde

$$p_u = A + B$$

$$p_m = 1 - 2A - r\Delta t$$

$$p_d = A - B$$

$$A = \frac{\Delta t \sigma^2}{2\Delta x^2}, \text{ y } B = \frac{\Delta t v}{2\Delta x}$$

Este método generalmente es usado para aproximar la solución a opciones Americanas, entonces para una opción de venta se tiene

$$C_j^n = \max(C_j^n, S_j^n - K)$$

para cada nivel de tiempo. En general la relación entre los pasos en tiempo y  $S$  están dados por [Clewlow and Strickland, 1998]:

$$\Delta x = \sigma \sqrt{\Delta t}$$

Si esta relación no se cumple, podríamos tener valores negativos para el precio de la opción, algo que es imposible desde el punto de vista financiero.

El método trinomial es un claro ejemplo del esquema de diferencias finitas explícita, teniendo como única condición que ésta sea estable.

### A.3 CURVA DE POTENCIA Y DE DISTRIBUCIÓN DE VIENTO PARA EL MODELO DE AEROGENERADOR GE-1.5S

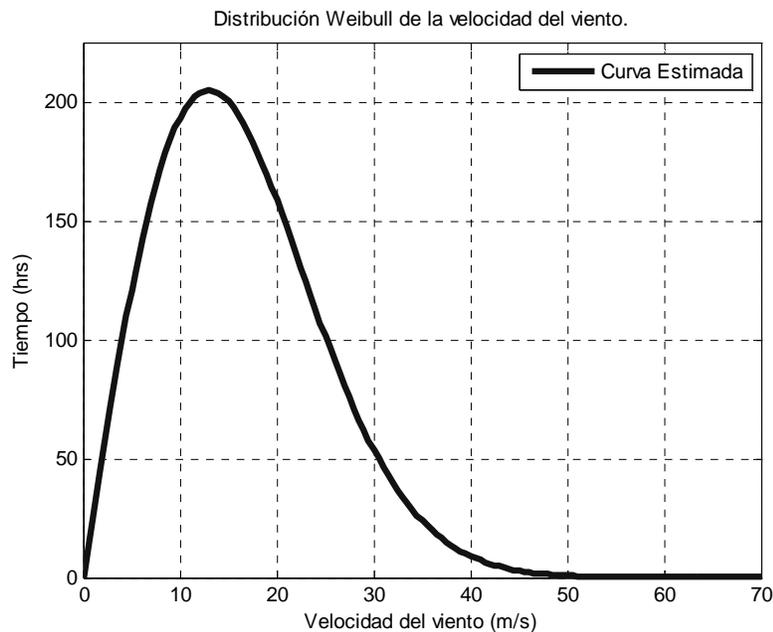


Fig. A.1. Curva de distribución de viento y potencia del aerogenerador.

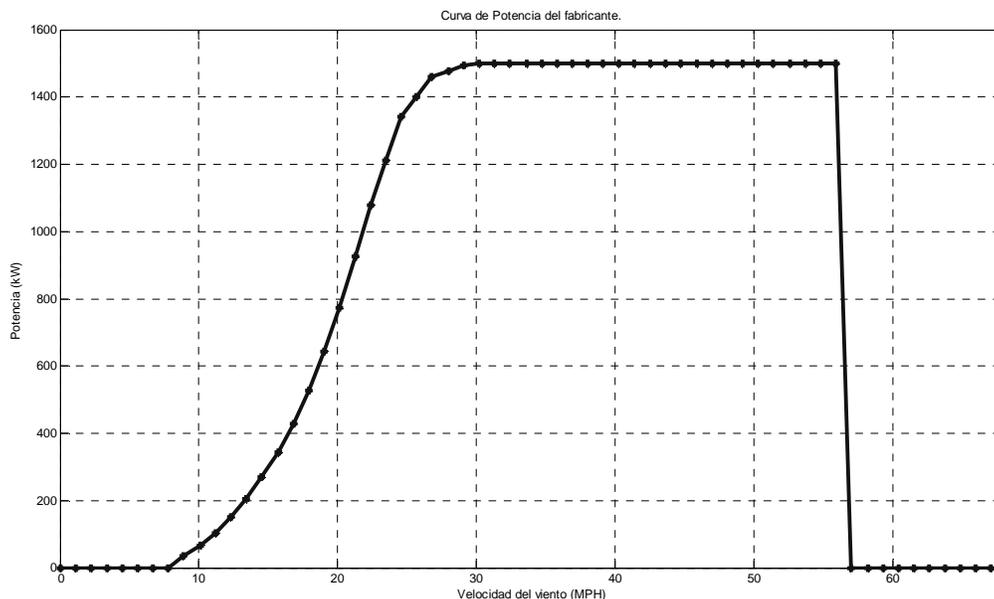


Fig. A.2. Curva de potencia del aerogenerador proporcionado por el fabricante.

**Tabla A.1. Sitios de México con mediciones anemométricas [USAID, 2009].**

Estado	Sitios con información
Baja California	Laguneros y Vizcaíno (CFE)
Baja California Sur	Región Pacífico Norte, San Bartolo, Rancho Mar Azul y Bahía Magdalena (IIE+SNL), San Carlos e Isla Margarita (CFE)
Campeche	Isla del Carmen (IIE)
Coahuila	Valle del Hundido y Valle de Acatitla (IIE)
Estado de México	Valle de México (IIE)
Hidalgo	El Gavillero y Pachuca (IIE)
Oaxaca	La Ventosa (CFE, IIE)
Quintana Roo	Puerto Juárez, Cancún, Cozumel, Puerto Morelos, Chemuyil, Coba y Xcalak (IIE+SNL)
Veracruz	Laguna Verde (IEE, CFE), Lerdo y Acayucan (CFE)
Zacatecas	Cerro de la Virgen (IEE)

### A.4 FLUJOS ESTIMADOS DE EFECTIVO DEL PROYECTO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
<b>FLUJOS DE EFECTIVO ESTIMADOS DEL PARQUE EÓLICO (millones de USD)</b>																													
Ingresos	35.06	36.11	37.19	38.31	39.46	40.64	41.86	43.12	44.41	45.74	47.11	48.53	49.98	51.48	53.03	54.62	56.26	57.94	59.68	61.47	63.32	65.22	67.17	69.19	71.26				
Costos Variables	8.17	8.41	8.67	8.93	9.19	9.47	9.75	10.05	10.35	10.66	10.98	11.31	11.65	12.00	12.36	12.73	13.11	13.50	13.91	14.33	14.75	15.20	15.65	16.12	16.61				
Costos Fijos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Depreciación	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	
EBIT	5.36	6.16	6.99	7.85	8.73	9.64	10.57	11.53	12.53	13.56	14.64	15.76	16.91	18.10	19.33	20.60	21.91	23.26	24.65	26.08	27.55	29.06	30.61	32.20	33.83	35.50	37.21	38.96	
Tax (ISR)	1.61	1.85	2.10	2.35	2.62	2.89	3.17	3.46	3.76	4.07	4.40	4.74	5.10	5.48	5.88	6.30	6.74	7.20	7.68	8.18	8.70	9.24	9.80	10.38	10.98	11.60	12.24	12.90	
Depreciación	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53
Inversión	(215.34)																												
Flujos de Efectivo	(215.34)	25.28	25.85	26.43	27.03	27.64	28.28	28.93	29.61	30.34	31.11	31.93	32.79	33.69	34.63	35.61	36.63	37.69	38.79	39.93	41.11	42.33	43.59	44.89	46.23	47.61	49.03	50.49	52.00
VP0 = \$215.464																													
VPN = \$0.124																													
WACC = 12%																													

Fig. A.3. Flujos de Efectivo Estimados del Parque Eólico.