



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**INGENIERIA PETROLERA  
FACULTAD DE INGENIERIA**

**MEDIOS POROSOS COMO DISTRIBUCIONES DE  
PROBABILIDAD**

**Tesis para obtener el grado de: Ingeniero petrolero**

**Presenta:**

**Germán Jesús Galindo Castillo**

**Director: Dr. Fernando Samaniego Verduzco**



**México, D.F.**

**Abril 2013**

## **Agradecimientos**

A **mis padres** por su apoyo y por que con su trabajo, esfuerzo y dedicación. Nos enseñaron a mí y a mis hermanos que también nosotros debemos de esforzarnos

A mis **Sinodales** por su tiempo dedicado en el análisis y corrección de este trabajo. Al **Dr. Fernando Samaniego** por haberme apoyado en este tema.

A la **Dr. Juana Cruz y al Dr. Rafael Herrera** por su ayuda en brindarme la información necesaria para la elaboración de esta Tesis.

A mis abuelos **Manuel y Carmen** por su apoyo y por creer en mí. Al igual que mis abuelos **Roberto y Graciela** a los cuales les dedico este trabajo

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

<b>Contenido</b>	<b>Pág.</b>
<b>Contenido</b> .....	<b>2</b>
<b>Lista de figuras</b> .....	<b>4</b>
<b>Lista de tablas</b> .....	<b>7</b>
<b>1.- Introducción</b> .....	<b>10</b>
<b>2.- Revisión bibliográfica</b> .....	<b>12</b>
2.1.- Porosidad.....	12
2.2.- Clasificación de la porosidad.....	13
2.3.- Porosidad y su estructura.....	16
2.4.- Variables aleatorias.....	18
2.5.- Distribución de porosidad en materiales naturalmente porosos.....	18
2.6.- Garganta de poros.....	23
<b>3.- Modelo propuesto</b> .....	<b>25</b>
3.1.- Variabilidad del medio poroso.....	25
3.2.- Modelo Univariado.....	26
3.3.- Modelo bivariado.....	32

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

<b>4.- Validación del modelo.....</b>	<b>36</b>
4.1.- Manejo de datos.....	35
4.2.- Análisis de la distribución de probabilidad con datos de porosidad y permeabilidad.....	36
4.3.- Análisis univariado de permeabilidad del pozo Agua Fria108.....	36
4.4.- Análisis Bivariado porosidad-permeabilidad del pozo Santuario 31-T.....	49
4.5.- Análisis Bivariado porosidad-permeabilidad del pozo Tajin 336.....	79
<b>Apéndice A.- Analisis de medios porosos fracturados.....</b>	<b>103</b>
A.1.- Heterogeneidad.....	103
A.2.- Fracturas como una distribución de probabilidad discreta.....	103
A.3.- Analisis de permeabilidad para el cretácico superior de Cantarell.....	106
<b>Conclusiones.....</b>	<b>114</b>
<b>Glosario.....</b>	<b>116</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>120</b>

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### Lista de figuras

	<b>Pág.</b>
<b>Fig. 2.1.-</b> Tipos de porosidad tomado de García 2000.....	<b>15</b>
<b>Fig. 2.2.-</b> Modelo esférico romboédrico y el espacio entre poros en este modelo.....	<b>16</b>
<b>Fig. 2.3.-</b> Espacio entre poros en una arena.....	<b>17</b>
<b>Fig. 2.4.-</b> Volumen total de poros con una distribución uniforme para $n$ muestras.....	<b>20</b>
<b>Fig. 2.5.-</b> Porosidad secundaria como una distribución normal de probabilidad, para $n$ muestras.....	<b>21</b>
<b>Fig. 3.1.-</b> Modelo esférico de Hrubisek (1941).....	<b>26</b>
<b>Fig. 3.2.-</b> Garganta de poro en un modelo esférico.....	<b>27</b>
<b>Fig. 3.3.-</b> Dos muestras de diferentes materiales porosos con una porosidad total igual, y un tamaño de grano diferente.....	<b>29</b>
<b>Fig. 3.4.-</b> Grafica de variación entre la distribución del tamaño de poro (unidad – $\phi$ ) y el radio de poro (cm) según Krumbein y Pettjohn (1938).....	<b>30</b>
<b>Fig. 3.5.-</b> Efecto del tamaño de grano en la desviación estándar.....	<b>31</b>
<b>Fig. 3.6.-</b> Densidad de probabilidad normal.....	<b>33</b>
<b>Fig. 3.7.-</b> Distribución normal bivariada.....	<b>34</b>
<b>Fig. 4.1.-</b> Dispersión de la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.....	<b>39</b>
<b>Fig. 4.2.-</b> Densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108, 1ª propuesta.....	<b>41</b>
<b>Fig. 4.3.-</b> Área bajo la curva para una densidad de probabilidad con limites entre 0 y 10 milidarcys Agua Fría 108, 1ª propuesta.....	<b>42</b>
<b>Fig. 4.4.-</b> Discretización de las permeabilidades en el pozo Agua Fría 108.....	<b>43</b>
<b>Fig. 4.5.-</b> Dispersión de la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108, 2ª propuesta.....	<b>44</b>

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

<b>Fig. 4.6.-</b>	Densidad de probabilidad para la permeabilidad Agua Fría 108, 2ª propuesta.....	<b>48</b>
<b>Fig. 4.7.-</b>	Dispersión de la variación para la porosidad estimada en el pozo Santuario 31-T.....	<b>53</b>
<b>Fig. 4.8.-</b>	Dispersión de la variación para la permeabilidad estimada en el pozo Santuario 31-T.....	<b>54</b>
<b>Fig. 4.9.-</b>	Distribución de probabilidad de la porosidad en el pozo Santuario 31-T, 1ª propuesta.....	<b>57</b>
<b>Fig. 4.10.-</b>	Distribución de probabilidad de la permeabilidad en el pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.....	<b>58</b>
<b>Fig. 4.11.-</b>	Dispersión de la porosidad en el pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.....	<b>59</b>
<b>Fig. 4.12.-</b>	Densidad de probabilidad de la porosidad en el pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.....	<b>62</b>
<b>Fig. 4.13.-</b>	Factor de correlación entre la porosidad y la permeabilidad para las muestras del pozo Santuario 31-T.....	<b>65</b>
<b>Fig. 4.14.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Santuario 31-T, 1ª propuesta.....	<b>68</b>
<b>Fig. 4.15.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el 1 <sup>er</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.....	<b>78</b>
<b>Fig. 4.16.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el 2 <sup>o</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.....	<b>78</b>
<b>Fig. 4.17.-</b>	Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336.....	<b>82</b>
<b>Fig. 4.18.-</b>	Dispersión de la permeabilidad en el pozo Tajín 336.....	<b>82</b>
<b>Fig. 4.19.-</b>	Distribución de probabilidad de la porosidad en el pozo Tajín 336, 1ª	

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

	propuesta.....	<b>87</b>
<b>Fig. 4.20.-</b>	Distribución de probabilidad de la permeabilidad en el pozo Tajín 336, 1ª propuesta.....	<b>87</b>
<b>Fig. 4.21.-</b>	Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336, 1 <sup>er</sup> litotipo, 2ª propuesta...	<b>89</b>
<b>Fig. 4.22.-</b>	Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336, 2 <sup>o</sup> litotipo, segunda propuesta.....	<b>89</b>
<b>Fig. 4.23.-</b>	Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336, 3 <sup>er</sup> litotipo, segunda propuesta.....	<b>90</b>
<b>Fig. 4.24.-</b>	Densidad de probabilidad de la porosidad en el pozo Tajín 336, 2ª propuesta.....	<b>93</b>
<b>Fig. 4.25.-</b>	Factor de correlación para los datos del pozo Tajín 336.....	<b>97</b>
<b>Fig. 4.26.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336, 1ª propuesta.....	<b>102</b>
<b>Fig. A.1.-</b>	Distribución de las mediciones en el espacio muestral.....	<b>104</b>
<b>Fig. A.2.-</b>	Frecuencia y amplitud para los intervalos de permeabilidad.....	<b>108</b>
<b>Fig. A.3.-</b>	Dispersión de la permeabilidad para la formación Cretacico Superior del yacimiento Cantarell.....	<b>109</b>
<b>Fig. A.4.-</b>	Distribución de probabilidad de la permeabilidad estimada empleando experimentos de laboratorio, obtenidos en pozos del yacimiento Cantarell...	<b>111</b>
<b>Fig. A.5.-</b>	Función de probabilidad para los valores de permeabilidad de la formación Cretácico Superior de Canterell, como una serie de sumas de Riemann.....	<b>114</b>

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### Lista de Tablas

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 2.1.-</b> Ejemplos de materiales porosos.....	<b>17</b>
<b>Tabla 2.2.-</b> Ecuaciones empíricas para determinar los radios de garganta (m) correspondientes a varios porcentajes de saturación.....	<b>24</b>
<b>Tabla 4.1.-</b> Datos de permeabilidad de núcleos, pozo Agua Fría 108.....	<b>38</b>
<b>Tabla 4.2.-</b> Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.....	<b>40</b>
<b>Tabla 4.3.-</b> Estimaciones de permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.....	<b>43</b>
<b>Tabla 4.4.-</b> Datos de permeabilidades de núcleos, pozo Agua Fría 108, separados según su línea de tendencia.....	<b>45</b>
<b>Tabla 4.5.-</b> Propuestas de tendencias para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.....	<b>46</b>
<b>Tabla 4.6.-</b> Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108, 2ª propuesta.....	<b>47</b>
<b>Tabla 4.7.-</b> Resultados pozo Agua Fría 108.....	<b>49</b>
<b>Tabla 4.8.-</b> Datos de porosidad, permeabilidad y descripción litológica de núcleos del pozo Santuario 31-T.....	<b>50</b>
<b>Tabla 4.9.-</b> Datos de las líneas de tendencia para los datos de porosidad y permeabilidad en el pozo Santuario 31-T, 1ª propuesta.....	<b>54</b>
<b>Tabla 4.10.-</b> Datos de densidad de probabilidad para la porosidad y permeabilidad en el pozo Santuario 31-T.....	<b>56</b>
<b>Tabla 4.11.-</b> Comparación de la información de las líneas de tendencia para los datos de porosidad en el pozo Santuario 31-T.....	<b>60</b>

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

<b>Tabla 4.12.-</b>	Datos de densidad de probabilidad para la porosidad en el pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.....	<b>61</b>
<b>Tabla 4.13.-</b>	Diferencia entre los rangos de ordenados de las variables porosidad y permeabilidad para el pozo Santuario 31-T.....	<b>64</b>
<b>Tabla 4.14.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Santuario 31-T.....	<b>67</b>
<b>Tabla 4.15.-</b>	Diferencia entre los rangos ordenados de las variables porosidad y permeabilidad, para el 1 <sup>er</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T.....	<b>73</b>
<b>Tabla 4.16.-</b>	Diferencia entre los rangos de ordenados de las variables porosidad y permeabilidad, para el 2 <sup>o</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T.....	<b>74</b>
<b>Tabla 4.17.-</b>	Comparación de la información de las líneas de tendencia para los datos de permeabilidad en el pozo Santuario 31-T.....	<b>75</b>
<b>Tabla 4.18.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el 1 <sup>er</sup> litotipo de la 2ª propuesta, pozo Santuario 31-T.....	<b>76</b>
<b>Tabla 4.19.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el 2 <sup>o</sup> litotipo de la segunda propuesta, pozo Santuario 31-T.....	<b>77</b>
<b>Tabla 4.20.-</b>	Datos de porosidad y permeabilidad de núcleos, pozo Tajín 336.....	<b>80</b>
<b>Tabla 4.21.-</b>	Datos de las líneas de tendencia de la porosidad y permeabilidad en el pozo Tajín 336.....	<b>83</b>
<b>Tabla 4.22.-</b>	Datos de densidad de probabilidad para la porosidad en el pozo Tajín 336.....	<b>84</b>
<b>Tabla 4.23.-</b>	Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Tajín 336.....	<b>85</b>
<b>Tabla 4.24.-</b>	Datos de las líneas de tendencia de porosidad para la 2ª propuesta, pozo Tajin 336.....	<b>90</b>

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

<b>Tabla 4.25.-</b>	Datos de densidad de probabilidad de la porosidad para la 2ª propuesta, pozo Tajín 336.....	<b>91</b>
<b>Tabla 4.26.-</b>	Diferencias entre los rangos ordenados de las variaciones de porosidad y permeabilidad, pozo Tajín 336.....	<b>94</b>
<b>Tabla 4.27.-</b>	Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336.....	<b>99</b>
<b>Tabla A.1.-</b>	Datos de porosidad y permeabilidad de núcleos del yacimiento Cantarell.....	<b>107</b>
<b>Tabla A.2.-</b>	Periodos, frecuencias y Amplitud de los datos de permeabilidad de núcleos de Cantarell.....	<b>108</b>
<b>Tabla A.3.-</b>	Datos de la densidad de probabilidad para los núcleos del yacimiento de Cantarell.....	<b>110</b>

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## **1.- Introducción**

Los métodos para el análisis de las propiedades petrofísicas de los medios porosos están basados en la clasificación e interpretación de los datos de acuerdo a su litología, profundidad o a los cambios de magnitud de las propiedades petrofísicas. El objetivo de esta tesis consiste en realizar análisis y estimaciones más precisas en relación al comportamiento de los medios porosos, sin la necesidad de información adicional a la requerida por los métodos convencionales.

Los núcleos obtenidos en un pozo, son muestras diminutas en comparación con la magnitud de un yacimiento, pero las propiedades de un medio poroso se mantienen con cierta uniformidad independientemente del volumen de la muestra. Con base en esta idea, en esta tesis se presentan dos propuestas para el análisis petrofísico de núcleos; la primera considera las propiedades de porosidad y permeabilidad como dos variables aleatorias dependientes una de la otra, cuyo comportamiento puede discretizarse y predecirse mediante funciones de probabilidad; aun a pesar de las anomalías en los datos debido a fracturas, fallas o condiciones anormales de presión, todas estas condiciones presentes en medios heterogéneos reales.

La segunda propuesta consiste en vez de considerarlos como una secuencia ordenada de datos y analizar la información petrofísica de los núcleos como un conjunto aleatorio de datos. A pesar de que propiedades como la porosidad y la permeabilidad obtenidas de núcleos varían proporcionalmente con el incremento o la disminución de la profundidad en la que se tomaron las muestras, no considerará esta información como una secuencia dependiente de la profundidad, ya que en esta tesis se está proponiendo un método que se pueda emplear para analizar la información obtenida de diferentes pozos y profundidades.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Al separarse y analizarse los datos por su magnitud y comportamiento en vez de la profundidad en la que fueron registrados, es posible realizar una estimación de la magnitud y frecuencia de las anomalías de la litología que se está estudiando separando la información en un número de litotipos y no en un número de cambios en la secuencia como se realizaría en un registro geofísico. Es decir, los cambios en la litología, se deben considerar cuando existan cambios bruscos en el comportamiento de los datos de porosidad y permeabilidad, realizándose así un análisis con una separación de los datos menor y un análisis más preciso de estas separaciones (litotipos). Este método anterior se emplea para estimar las condiciones de flujo en litotipos específicos.

Los conjuntos de datos de porosidad y permeabilidad que se emplearon en esta tesis se obtuvieron de núcleos cortados de los mismos pozos, edades geológicas y las condiciones de presión en laboratorio, con la finalidad de lograr conjuntos de datos representativos de las condiciones del yacimiento en que se obtuvieron.

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## **2.- Revisión bibliográfica**

### **2.1.- Porosidad**

En el caso más general un material poroso es un sólido que contiene agujeros. Para el propósito de este estudio, a un sólido que contenga agujeros y cavidades independientemente de si están interconectados o no, dispersados de manera aleatoria o bien siguiendo cierta distribución regular se le considera un material poroso.

Los poros pueden estar interconectados o no interconectados, un fluido puede fluir a través de un material poroso solo si al menos algunos de sus poros están interconectados, el espacio utilizado por los poros interconectados se define como porosidad efectiva, mientras que la totalidad del espacio poroso se le denomina porosidad total.

La mayoría de los materiales porosos, ya sean naturales o artificiales, tienen una estructura porosa aleatoria. De hecho la estructura de estos materiales sólo puede ser descrita en términos estadísticos. A pesar de esto es posible entender el flujo a través de estos materiales, en términos macroscópicos. Pero estudiar todas las cavidades porosas del medio a un nivel microscópico representa una gran cantidad de variables y de una gran complejidad razón por la cual es preferible trabajar, considerando las cavidades porosas como variables aleatorias. Hay muchas teorías que buscan describir el comportamiento de las propiedades de los materiales porosos. Definiendo los conceptos como “distribución del tamaño de poro” o “distribución del tamaño de grano” en materiales porosos no consolidados estudiando estas propiedades en niveles macroscópicos. Estos conceptos han ayudado a entender el flujo en medios porosos a nivel microscópico y a entender los procesos físicos que se ven involucrados en estos procesos, pero generalmente no ha sido así en medios macroscópicos. Hasta ahora no existe una teoría que explique satisfactoriamente el flujo a través de materiales porosos a niveles macroscópicos.

La porosidad de un material es la fracción del volumen vacío en ese material.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

$$\phi = \frac{V_p}{V_T} = \frac{\text{Volumen de poros}}{\text{Volumen Total}} \quad (2.1)$$

El símbolo usado para representarlo es  $\phi$ , como una gran parte del material no está ocupado por los poros sino por los granos de la matriz se tiene que:

$$1 - \phi = \frac{V_s}{V_T} = \frac{\text{Volumen de la matriz}}{\text{Volumen Total}} \quad (2.2)$$

Se puede definir la porosidad de dos formas absoluta o total y efectiva, dependiendo si en su medición tomamos en cuenta o no a los poros no interconectados. La porosidad es un indicador de la permeabilidad pero no una medición de ésta.

### **2.2.- Clasificación de la porosidad**

Es de hacer notar, que la porosidad toma en cuenta todos los poros de la roca, es por ello que comúnmente se distingue a la porosidad efectiva como aquella que sólo toma en cuenta aquellos poros que forman parte de un sistema unificado de poros interconectados que pueden ser saturados con fluidos desde su exterior (Barenblatt et al., 1990).

Ahora bien, así como la porosidad puede ser clasificada en función de la interconectividad de los poros también puede ser clasificada en función de su origen, de tal forma que podemos referirnos a la porosidad de una roca como primaria o secundaria.

La porosidad primaria está asociada a aquellos poros que se forman durante el depósito de la roca. Los parámetros micro estructurales que afectan a la porosidad primaria de un sedimento no consolidado son el tamaño, la forma (geometría) y la compactación de los granos. La porosidad efectiva es proporcional al radio o al diámetro del grano, es decir, mientras el tamaño del grano aumenta la porosidad efectiva también. Aunque el efecto de la geometría de los granos sobre la porosidad no está bien entendido, si consideramos un sedimento no consolidado, formado por granos del mismo tamaño, esperaremos que la

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

porosidad sea mayor si los granos son alargados o tabulares y que sea menor si los granos son esféricos. Por otro lado, el efecto de la compactación de los granos es importante, ya que la porosidad será mayor en rocas con granos del mismo tamaño (distribución unimodal) que en rocas con granos de tamaños diferentes debido a que en éstas los intersticios entre las partículas grandes son rellenados con las partículas más pequeñas (Rzhevsky & Novik, 1971).

La porosidad secundaria está asociada a los procesos diagenéticos, que incluyen a todos los procesos físicos, químicos y biológicos que alteran al sedimento no consolidado desde el momento de su depósito y los procesos de metamorfismo o de meteorización. Entre los procesos diagenéticos se distinguen la compactación mecánica, la disolución y precipitación de minerales, la recristalización de minerales y el fracturamiento de los minerales y de la roca. La cementación (cristalización de minerales en el espacio poroso) disminuye la porosidad de una roca así como lo hace la compactación mecánica ya que a medida que los sedimentos se hacen más profundos, aumenta la presión de soterramiento y los granos se redistribuyen, ocupando menos espacio (Guéguen & Palciauskas, 1994).

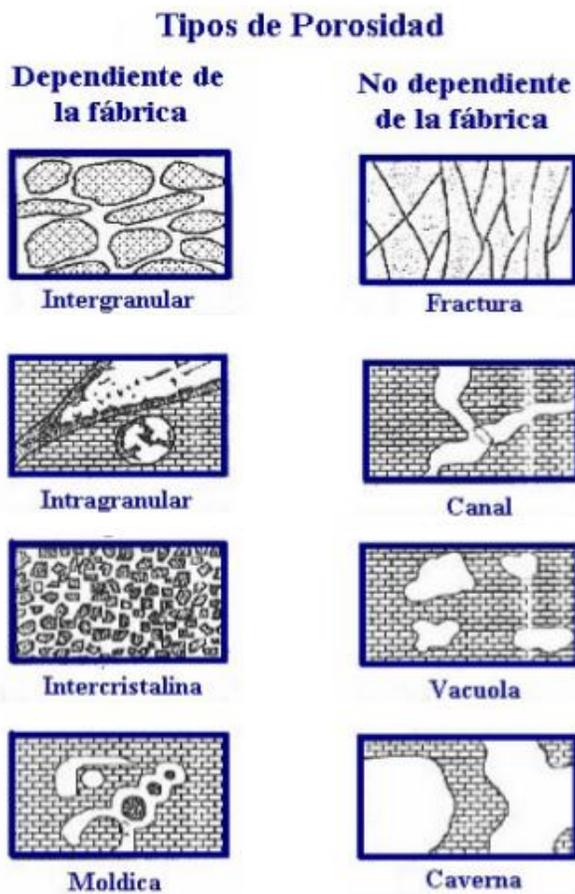
Los diversos tipos de porosidad **Fig. 2.1**, asociados a los procesos mencionados anteriormente, a menudo coexisten. Estos son: porosidad intergranular, que se forma en el momento de depositación de las partículas; porosidad intragranular, que se debe a la disolución parcial de los granos de una roca; porosidad intercristalina, relacionada a los intersticios entre los cristales; porosidad móldica, relacionada a la solubilidad de los materiales que rellenan los moldes de organismos; porosidad por fractura, debida a esfuerzos tectónicos, y porosidad por canal, por vacuola o por caverna, relacionadas a la disolución, sobretodo en carbonatos (García, 2000).

Los materiales porosos también pueden ser clasificados de acuerdo a su tamaño, hay tres clasificaciones principales posibles, éstas están basadas de acuerdo al modo en que los fluidos atraviesan el material poroso:

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

- a).- Cuando no hay un canal de flujo fijo, y el fluido atraviesa una serie de pequeños poros interconectados, hay un flujo Intersticial.
- b).- Cuando hay cavidades por las que atraviesa el fluido se llama a este flujo por cavernas, vacuolas o fracturas.
- c).- Flujo vugular típica de dolomitas en las que hay flujo a través de cavidades tan pequeñas que asemeja un flujo intersticial.

Además, existe una clasificación adicional, para los materiales porosos: Aleatorios u Ordenados. Esta clasificación determina el acomodo del material poroso. (Scheidegger, 1974).

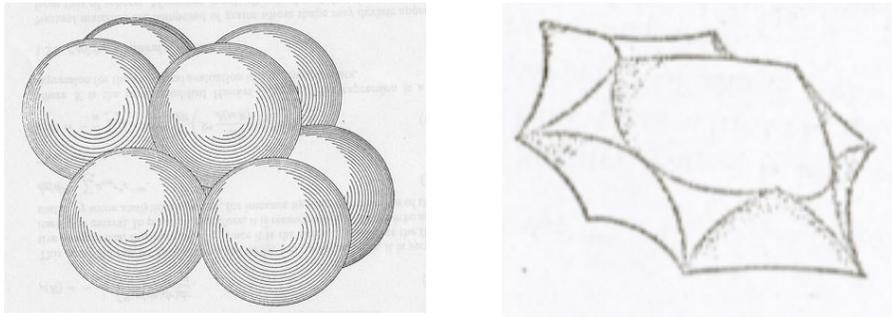


**Fig. 2.1.-** Tipos de porosidad, tomado de García (2000).

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### 2.3.- Porosidad y su estructura

La manera en que la porosidad varía de acuerdo a la estructura porosa del material, depende de considerar modelos simples, como los granos en superficies esféricas y suponer su acomodo en formas geométricas, los arreglos porosos son extremadamente simples si se comparan con los materiales que se encuentran en la naturaleza. Las condiciones ideales de porosidad se visualizaron con base en estos modelos. El modelo romboédrico ejemplifica la compactación del medio poroso cuyas condiciones presentan el mayor valor de porosidad, calculable para un medio poroso **Fig. 2.2:**



**Fig. 2.2.-** Modelo esférico romboédrico y el espacio entre poros en este modelo.

Microscópicamente, la estructura porosa de un cuerpo poroso es demasiado compleja e irregularidad, debido a una gran cantidad de variables que afectaron la estructura porosa antes y después de su formación. No es posible describirlos con modelos geométricos simples **Fig. 2.3:**

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 2.3.-** Espacio entre poros en una arena

A pesar de las complicaciones microscópicas. Hay autores que mediante pruebas experimentales han definido valores de porosidad para toda una variedad de cuerpos porosos **Tabla 2.1:**

**Tabla 2.1.-** Ejemplos de materiales porosos

<b>Material</b>	<b>Rango de Porosidad (en %)</b>	<b>Referencia</b>
Granos de Sílice	65.4	Shapiro, Kolthoff(1948)
Arena	37-50	Carman(1938)
Roca Molida	44-45	Bernard, Wilhelm(1950)
Areniscas	8-38	Muskat(1937)
Lutitas, Dolomitas	4-10	Locke, Bliss(1950)
Concreto	2-7	Verbeck(1947)

Cuando se menciona el término tamaño de poro, se hace para describir el diámetro por el

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

que fluyen los fluidos. El tamaño de poro junto con el término diámetro de garganta denotan parámetros geométricos que son difíciles de cuantificar en cuerpos porosos reales.

### **2.4.- Variables aleatorias**

Una variable aleatoria o variable estocástica, es una función que asocia un número real con cada elemento del espacio muestral, mediante una medición de forma experimental que ocurre de forma aleatoria. A diferencia de otras variables matemáticas, una variable aleatoria presenta resultados variables que se pueden interpretar en un rango de resultados posibles, asociados entre sí de forma estadística. A esta variable aleatoria se le puede dar una interpretación probabilística y con base en esta, una interpretación física.

Una variable aleatoria puede ser discreta, en la que sus resultados inciden en ciertos rangos de valores, o continua, en que puede asumir cualquier valor numérico en un intervalo o grupo de intervalos. Estos comportamientos pueden describirse en forma de funciones matemáticas, conocidas como distribuciones de probabilidad.

Una variable aleatoria se puede representar, como una función distribución de probabilidad, de la variable aleatoria con fin de predecir los resultados posibles de un experimento o evento que todavía no se realiza. Se emplea para predecir la incertidumbre en los resultados que se obtendrán, al emplear información incompleta, o bien cierta incertidumbre inducida por los datos debido a su propia naturaleza. El significado que podrían tener estos resultados no forma parte de la teoría de probabilidad, sino más bien una interpretación física de los resultados obtenidos.

### **2.5.- Distribución de porosidad en materiales naturalmente porosos**

Según Scheidegger (1974), los materiales naturalmente porosos poseen una estructura porosa más o menos aleatoria, por lo que no es una sorpresa que para muestras del mismo material, éstas presenten valores diferentes de permeabilidad y porosidad. También se

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

observa que mientras más grande sea la muestra del material analizado más similar serán los resultados obtenidos. Esto se puede explicar debido a los análisis siguientes.

Se tiene una gran muestra de material poroso que se dividirá en un conjunto de paralelepípedos rectangulares muy pequeños. Estos elementos presentan una distribución de valores de porosidad debida a la estructura porosa aleatoria. A la cual se denotará como  $F(\phi)$ , donde  $F(\phi)$  es la fracción de muestras que tienen una porosidad entre  $(\mu - \delta)$  y  $(\mu + \delta)$ , donde  $\mu$  es el valor medio obtenido y  $\delta$  es la variación en los valores de porosidad, **Fig. 2.4**. La porosidad para estos elementos se puede determinar por medio la función:

$$\phi = \int \phi F(\phi) d\phi . \quad (2.3)$$

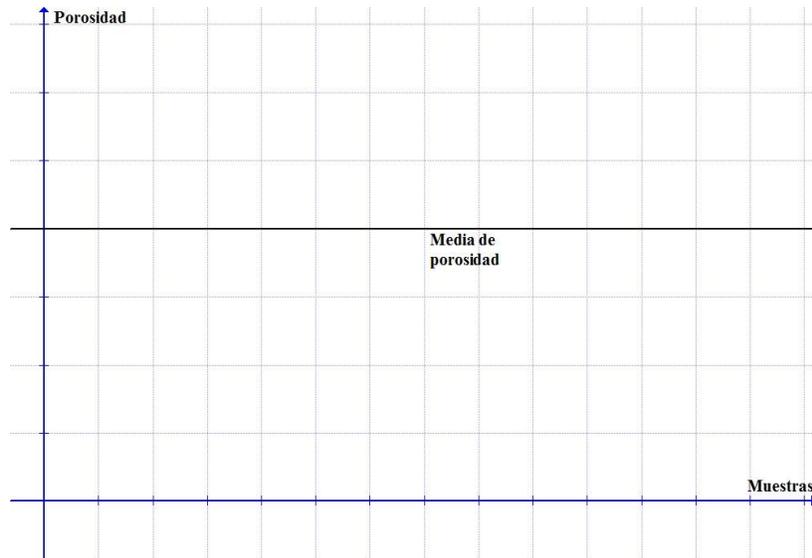
También la desviación estándar,  $\delta$  de la distribución de porosidad está definida por:

$$\delta = \int (\bar{\phi} - \phi)^2 F(\phi) d\phi . \quad (2.4)$$

Ahora se tomarán algunas muestras de material poroso, cuyo volumen total  $V$ , es la suma de las  $n$  muestras del material. La porosidad de una de estas muestras se expresa como:

$$\delta = \int \frac{1}{n} \sum \phi_i . \quad (2.5)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 2.4.-** Volumen total de poros como una distribución uniforme, para  $n$  muestras.

Donde  $\phi$ , representa a las porosidades de los bloques del material. Estas ecuaciones muestran congruencia con una distribución de probabilidad uniforme al considerar  $n$  puntos posiciones dentro del medio poroso. Teóricamente el valor de la porosidad se mantiene constante ante los cambios de volumen, pero se observa que mientras más grandes sean las muestras analizadas, más uniformes serán los valores de porosidad en la muestra.

Esta distribución uniforme de probabilidad, es una característica de los materiales con propiedades intrínsecas, como puede ser la porosidad total, pero la porosidad efectiva cuyo valor depende las características del medio poroso se ve más afectada por los cambios de volumen.

La porosidad efectiva es una variable dependiente de la porosidad total, pero de una forma no lineal; se propone la teoría del límite central, la cual es una función de distribución para que  $\phi$ , pueda tender a un valor medio mientras mayor sea  $n$  empleando, la distribución Gaussiana en que se denota la función de  $\phi$  como  $G(\phi)$ , de la teoría del límite central se

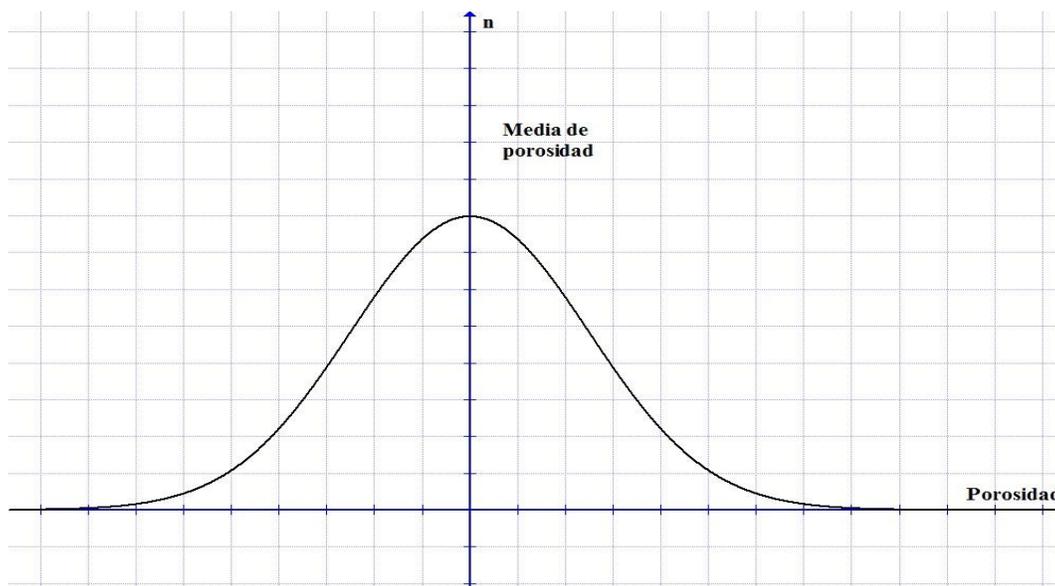
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

tiene:

$$G(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\delta}{\eta}\right)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\phi - \mu_\phi}{\delta/\sqrt{n}}\right)^2} . \quad (2.6)$$

La **Ec. 2.6** es la forma general de una distribución de probabilidad normal para la porosidad, tomando en cuenta un  $n$  número de muestras. La figura siguiente representa una distribución normal de probabilidad, según la ecuación anterior.

La función distribución de probabilidad para la porosidad posee un rango para la variación de la porosidad de  $0 << \phi << 1$ , lo que significa que las muestras, integralmente se expresan como una distribución gaussiana y que en una muestra de datos, la desviación estándar de este conjunto de datos se obtiene dividiendo esta distribución entre el número total de muestras, **Fig. 2.5**.



**Fig. 2.5.-** Porosidad efectiva como una distribución normal de probabilidad, para  $n$  muestras.

La desviación estándar para cada función de distribución de probabilidad, indica la dispersión de los datos de la variable que se está analizando, mediante una constante cuyas unidades son las mismas que las de la variable que se analiza. En la Ec. 2.6 la desviación estándar se

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

indica en unidades porcentuales al igual que la porosidad.

El número de  $n$  elementos con los que se realiza esta muestra es proporcional al volumen  $V$ , de la muestra. La desviación estándar para este número  $n$  de datos es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen de la muestra. De hecho, si se denota el volumen de un bloque del material poroso como  $e$ , entonces se tiene que:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \int F(\phi) d(\phi) = 1 - \phi \quad . \quad (2.7)$$

y entonces:

$$\lim_{\phi \rightarrow 1} \int F(\phi) d(\phi) = 1 - \phi \quad . \quad (2.8)$$

Donde  $F(\phi)$  es una función cuya integral se puede representar como un crecimiento infinitesimal en  $\phi$ . Para el caso en el que se tengan muestras muy pequeñas del material, se obtiene una distribución única, mientras el valor de  $e$  tiende cada vez más a cero. Solo dos valores de porosidad son posibles para estos bloques, cero o uno. Además, la fracción de bloques tendiendo a cero de porosidad, se aproxima a uno menos la media de porosidad, y la fracción tendiendo a una porosidad igual a uno se aproxima a la media, esto es debido a que la función de distribución de probabilidad se expresa como dos límites los cuales tienden a dos valores de porosidad; para cuando la porosidad tiende a cero:

$$n = \frac{V}{e} \quad . \quad (2.9)$$

y para cuando la porosidad tiende a uno:

$$\delta_a = \sqrt{\frac{V}{e}} \quad . \quad (2.10)$$

donde  $\delta_a$  es la desviación estándar para la distribución de la muestra. La función distribución

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

de porosidad para muestras de material poroso con volúmenes mayores a cero es:

$$G(\phi_a) = \sqrt{\frac{V}{2\pi e_0 \phi(1-\phi)}} e^{-\frac{V(\phi-\mu_\phi)^2}{2e_0 \phi(1-\phi)}} . \quad (2.11)$$

### 2.6.- Gargantas de poros

Según Winland (1976) el volumen poroso efectivo que domina el flujo a través de una roca, corresponde a una saturación de mercurio de 35%. A partir de que el 35% del espacio poroso está saturado por mercurio donde la fase mojante es el aire, el espacio poroso restante no contribuye al flujo sino al almacenamiento (Hartmann y Beaumont, 1999).

Por su parte, Pittman (1981) logró extender el trabajo de Winland (1976) al desarrollar un conjunto de relaciones empíricas, a través del uso de un sistema de análisis estadístico de regresión lineal múltiple, con los datos de porosidad, de permeabilidad y varios parámetros derivados de las curvas de presión capilar, obtenidas por el método de inyección de mercurio, de un grupo de 202 muestras de areniscas muy variadas en composición y textura, pertenecientes a 14 litologías diferentes, cuyas edades geológicas varían entre el Ordovícico y el Terciario.

Los valores de las porosidades de las muestras variaron entre 3.3 y 28% y los de las permeabilidades entre 0.05 y 998 md, respectivamente. La serie de ecuaciones empíricas obtenidas por Pittman (1981), permitieron calcular los radios de garganta para saturaciones de mercurio entre el 10 y el 75%, con los cuales se pueden graficar las curvas de presión capilar, a partir de los datos de porosidad y permeabilidad al aire.

La **Tabla 2.2** muestra los resultados de las regresiones lineales múltiples realizadas por Pittman (1981) para estimar el diámetro de las gargantas de poro, con datos de porosidad y permeabilidad en md. Las ecuaciones en la tabla siguiente presentan un subíndice que indica

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

el porcentaje de fase mojante que se inyectó en las muestras de roca durante el experimento (mercurio) y un factor de corrección que indica la exactitud de los resultados obtenidos.

**Tabla 2.2.-** Ecuaciones empíricas para determinar los radios de garganta (m) correspondientes a varios porcentajes de saturación.

<b>Ecuaciones</b>	<b>Coefficiente de Correlación</b>
$Log(r_{10}) = 0,459 + 0,500Log(k) - 0,385Log(\phi)$	0.901
$Log(r_{15}) = 0,333 + 0,509Log(k) - 0,344Log(\phi)$	0.919
$Log(r_{20}) = 0,218 + 0,519Log(k) - 0,303Log(\phi)$	0.926
$Log(r_{25}) = 0,204 + 0,531Log(k) - 0,350Log(\phi)$	0.926
$Log(r_{30}) = 0,215 + 0,547Log(k) - 0,420Log(\phi)$	0.923
$Log(r_{35}) = 0,255 + 0,565Log(k) - 0,523Log(\phi)$	0.918
$Log(r_{40}) = 0,360 + 0,582Log(k) - 0,680Log(\phi)$	0.918
$Log(r_{45}) = 0,609 + 0,608Log(k) - 0,974Log(\phi)$	0.913
$Log(r_{50}) = 0,778 + 0,626Log(k) - 1,205Log(\phi)$	0.908
$Log(r_{55}) = 0,948 + 0,632Log(k) - 1,426Log(\phi)$	0.900
$Log(r_{60}) = 1,096 + 0,648Log(k) - 1,666Log(\phi)$	0.893
$Log(r_{65}) = 1,372 + 0,643Log(k) - 1,979Log(\phi)$	0.876
$Log(r_{70}) = 1,664 + 0,627Log(k) - 2,314Log(\phi)$	0.862
$Log(r_{75}) = 1,880 + 0,609Log(k) - 2,626Log(\phi)$	0.820

Cabe destacar que, para los porcentajes más bajos de saturación de mercurio (10-35 %), la porosidad es despreciable debido a sus bajos valores y que el coeficiente de correlación disminuye a medida que aumenta el porcentaje de saturación de mercurio.

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## **3.- Modelo Propuesto**

### **3.1.- Variabilidad del medio poroso**

Analizar el medio poroso como una variable aleatoria es una consideración que se toma debido a la complejidad en la distribución de las propiedades de la roca; mismas propiedades que cambian dependiendo de la litología, lo que no hace posible representar las propiedades de la roca mediante modelos matemáticos simples.

Por ejemplo, las rocas clásticas que son depositadas en ambientes sub aéreos o sub acuáticos por una gran variedad de procesos de depósito. En estas rocas la acumulación de sedimentos detriticos depende del transporte de estos sedimentos (Allen 1985). Cuando ocurre un cambio en los regímenes de transporte, erosión o deposito. El transporte de sedimentos es un proceso periódico que puede representarse secuencialmente, para todas las secuencias el depósito de sedimentos es una característica constante. Las propiedades petrofísicas dependen de las características texturales del tamaño de poro, independientemente del ambiente de depósito (Pettijohn et al., 1987). La textura es controlada por varios parámetros primarios: características de origen, energía de depositacion, clima, etc y los cambios que estos parámetros presentan. El segundo parámetro es la compactación y diagénesis que también afectan las propiedades petrofísicas.

En rocas carbonatadas, la estructura primaria es lo más importante. Los sedimentos carbonatados son de origen biogenético o evaporitico, la estructura primaria puede ser relativamente uniforme (granitos oolíticos) o extremadamente variable (areniscas carbonatadas). Factores como cambio de la calcita a dolomita (dolomitacion) provoca una reduccion en la matriz de la roca, reduciendo la porosidad. otros procesos de disolución de los sedimentos de carbonatos durante su depositacion, asi como fracturas hacen que el análisis de las propiedades petrofísicas en rocas carbonatas sumamente complejo.

Cualquier resultado de un fenómeno físico puede ser clasificado como determinista o

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

aleatorio; en la naturaleza casi todos fenómenos tienen resultados deterministas, precisos y cuantificables, existen muy pocos fenómenos aleatorios. El paso de fluidos a través de un medio poroso es un fenómeno determinista cuantificable microscópicamente pero debido a la complejidad del medio poroso y a las variables mencionadas previamente es preferible considerarlo macroscópicamente como un fenómeno aleatorio.

### 3.2.- Modelo Univariado

Hrubisek (1941), fue el primer autor que representó al medio poroso como un modelo geométrico de esferas dentro de un cubo, **Fig. 3.1**. Aunque este es un modelo teórico que no se puede usar para representar medios heterogéneos, este trabajo tuvo un gran valor, ya que se utilizó para determinar una relación numérica entre el tamaño de grano, la porosidad y las gargantas de poro.



**Fig. 3.1.-** Modelo esférico de Hrubisek (1941).

La ventaja de este tipo de modelos es que se pueden determinar la porosidad y la garganta de poro mediante esquemas geométricos:

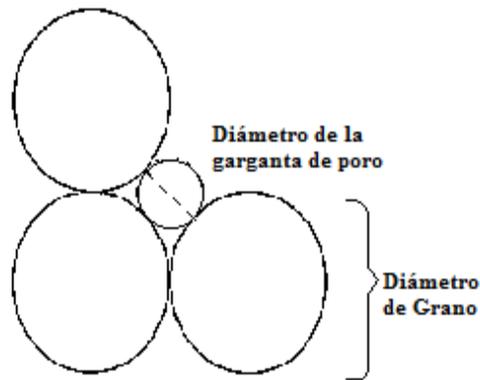
$$V_{esferas} = No.Esferas * \left( \frac{\pi d^3}{6} \right) . \quad (3.1)$$

Donde  $d$  es el diámetro de las esferas mostradas en la Fig. 3.1.

$$\phi = V_{cubo} - V_{esferas} . \quad (3.2)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

La relación entre el diámetro de los granos y la garganta de poro se muestra en la **Fig. 3.2**.



**Fig. 3.2.-** Garganta de poro en un modelo esférico.

Para determinar el diámetro de la garganta de poro ( $P_T$ ), que se representa en la Figura anterior, se emplea un teorema de Pitágoras.

La  $h$  que aparece en las Ec. 3.3 y 3.4, es la distancia longitudinal entre los extremos de los poros, la hipotenusa que se muestra en la Fig. 3.2.

$$h^2 = (2d_p)^2 + (2d_p)^2 , \quad (3.3)$$

$$h = 2\sqrt{2}d_p . \quad (3.4)$$

Si se le resta a la hipotenusa el diámetro de dos poros y después se divide entre 4 se obtiene la Ec. 3.6:

$$2P_T = 2\sqrt{2}d_p - 2d_p , \quad (3.5)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

$$P_T = \sqrt{2}d_p - d_p \quad , \quad (3.6)$$

La mayor aportación del trabajo de Hrubisek, se fundamenta en demostrar matemáticamente que el tamaño de grano no afecta la porosidad total y que el diámetro de la garganta de poro es directamente proporcional al tamaño de grano, Ec 3.6. Incluso en medios porosos heterogéneos esta relación se mantiene constante y también sirve para determinar 0.259 como el máximo valor de porosidad posible que un sólido puede tener. El modelo que se está proponiendo en esta tesis, demuestra su validez comprobando la tesis de Hrubisek por un método distinto.

El objetivo de esta tesis, es representar e interpretar medios porosos y el paso de fluidos a través de estos como distribuciones de probabilidad. Para poder representar medios porosos como funciones de densidad de probabilidad, se deben tener en cuenta las propiedades de la más básica de estas funciones, (la curva Normal de Gauss):

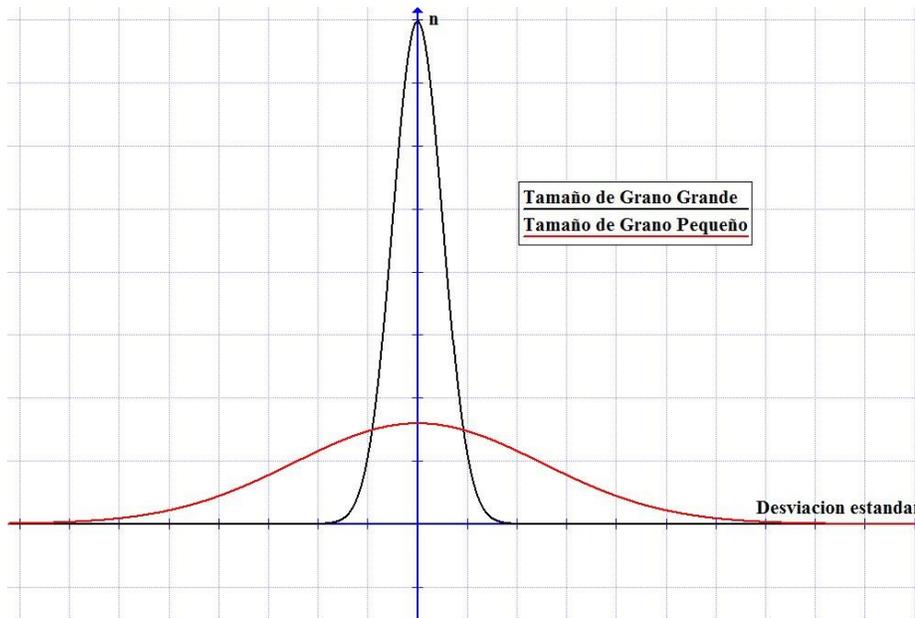
Las cuales son:

- 1.- La media, mediana y moda, es el punto sobre el eje horizontal donde la curva es un máximo ocurre en  $x = \mu$ .
- 2.- La curva es simétrica alrededor de un eje vertical a través de la media  $\mu$ .
- 3.- La curva tiene sus puntos de inflexión en  $x = \mu \pm \delta$ , es cóncava hacia abajo si  $\mu - \delta < x < \mu + \delta$ , es cóncava hacia arriba en cualquier otro caso.
- 4.- La curva normal se aproxima al eje horizontal de manera asintótica, conforme nos alejamos de la media en cualquier dirección.
- 5.- El área total bajo la curva y sobre el eje horizontal es igual a 1.

Además de las propiedades de la Curva de Gauss que se ven involucradas en la Ec. 2.11. Al tratarse de un medio poroso limitado por sus propias características físicas la porosidad está restringida en un rango de valores posibles, que permite definir un valor medio de porosidad  $\mu_\phi$ . La desviación estándar de la función  $\delta_\phi$ , al ser inversamente proporcional al tamaño de

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

grano, se le debe plantear una relación como se ve en la figura siguiente:



**Fig. 3.3.-** Dos muestras de diferentes materiales porosos con una porosidad total igual, y un tamaño de grano diferente.

La inflexión de la curva, será dependiente del tamaño de grano de las muestras que se analizan. Es decir la muestra con el tamaño de grano más pequeño, presenta una tortuosidad más grande, gargantas de poro más pequeñas, un porcentaje en el número de poros no interconectados más grande y una conductividad hidráulica más pequeña. Lo que provoca en la gráfica de porosidad efectiva una mayor dispersión en los datos obtenidos **Fig. 3.3**, haciendo que la obtención del valor medio de porosidad sea más pequeño y más inusual. En el caso opuesto, si el tamaño de grano incrementa, provoca que el número de poros interconectados disminuya, haciendo que la incidencia del valor medio de porosidad se incremente y esto hace disminuir el sesgo en los datos obtenidos. La propuesta de este modelo, consiste en estudiar el tamaño de grano como inversamente proporcional a la desviación estándar de la función.

Se presentan dificultades con el concepto de tamaño de grano y tamaño de poro, ya que las irregularidades en las formas de los granos hacen difícil su comprensión, aunque el concepto

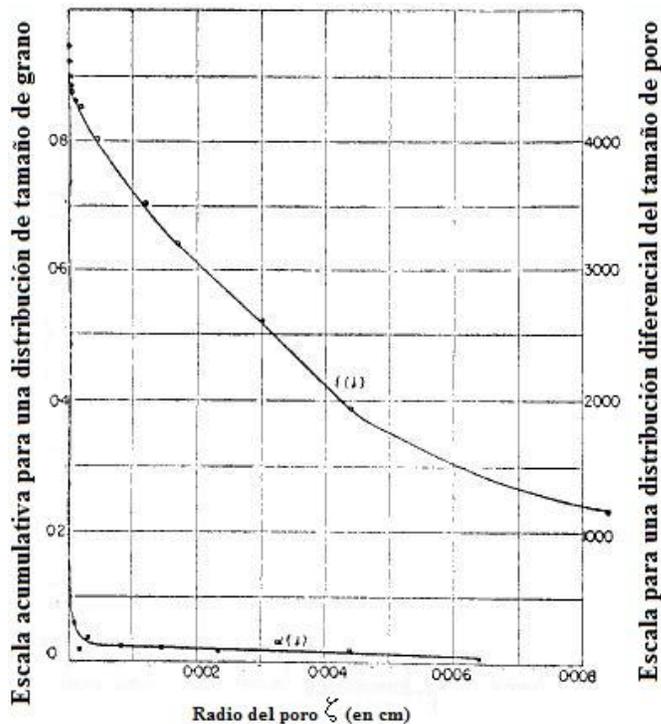
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

de diámetro al referirse al tamaño de los granos tiene sentido geoméricamente.

La disminución en el tamaño de grano provoca una dispersión en la porosidad secundaria, debido a un incremento en la distribución espacial de los poros, no hay una unidad definida para representar este parámetro. Algunos autores, se refieren a este parámetro como unidad-phi (unidad- $\phi$ ) y la relacionan con el radio del poro mediante la ecuación siguiente:

$$\delta(mm) = \left(\frac{1}{2}\right)^\phi . \quad (3.7)$$

La Ec. 3.7 se obtuvo de pruebas experimentales en núcleos para tratar de predecir el comportamiento de los medios porosos ante los cambios en la distribución de los poros. De la ecuación anterior se obtuvo la **Fig. 3.4**:



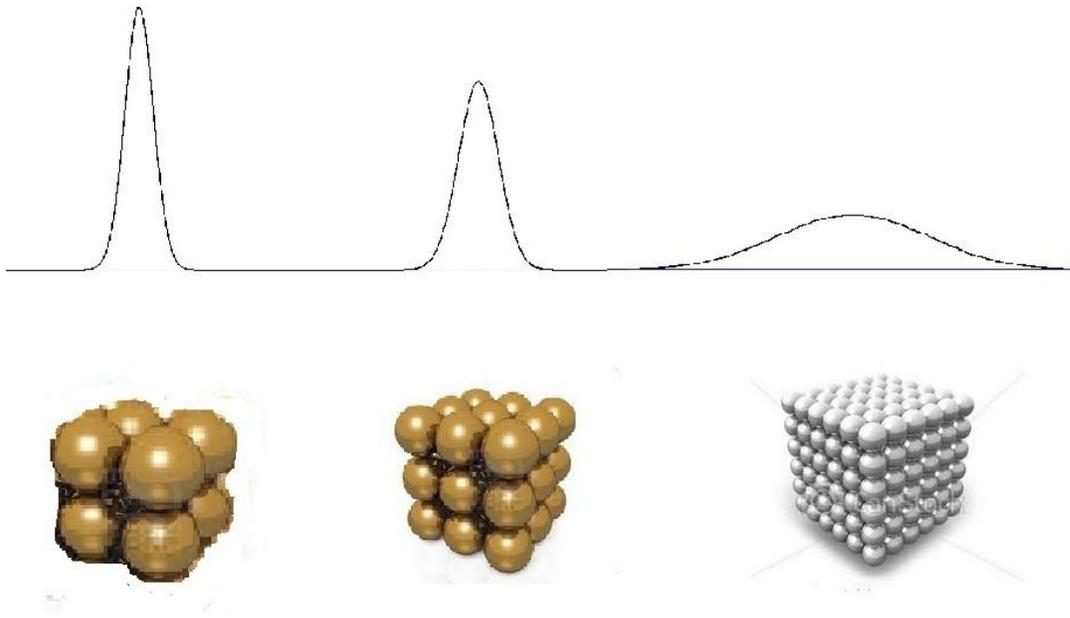
**Fig. 3.4.-** Grafica de la variación entre la distribución del tamaño de poro (unidad- $\phi$ ) y el radio de poro (cm) según Krumbein and Pettijohn 1938.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

En el caso de una distribución normal de probabilidad que represente el volumen total de poros, primeramente se debe mencionar, que el punto pico en la gráfica representa los valores que más se repitan. En seguida se tomará en cuenta que aunque la función normal representa una distribución de una variable continua, para casos prácticos la consideraremos como una distribución discreta, dado que hay un límite para los posibles valores que puede tomar la porosidad.

Además de que la forma en que se distribuyen los datos no será simétrica, debido a que la simetría solo se presentara en medios homogéneos ideales.

Según las propiedades de la curva Normal, se tiene que el área bajo la curva es un valor constante de 1, en todos los casos. Sin importar el cambio en el tamaño de grano (desviación estándar), siempre se obtendrá el mismo valor de la integral de la función (Área bajo la curva) y el único cambio que habrá es la forma del gráfico. La misma situación ocurre si se cambia el tamaño de grano, no se verá afectada la porosidad primaria pero si la porosidad secundaria. Esta relación se representa en la **Fig. 3.5**.



**Fig. 3.5.-** Efecto del tamaño de grano en la desviación estándar.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Las gráficas normales que se muestran, son obtenidas de la teoría de límite central, después de suponer una distribución uniforme en el material poroso y, de encontrar el valor típico de porosidad efectiva en la muestra. Si tenemos una cantidad  $n$  de variables tan grande, donde se logra que las variables siguientes se comporten de esta forma:

$$\delta_{\phi}^2 = \frac{\delta^2}{2} , \quad (3.8)$$

$$\mu_{\phi} = \mu , \quad (3.9)$$

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\delta_{\phi}/n)} e^{-\frac{1(\phi-\mu_0)^2}{2(\delta_{\phi}/n)^2}} . \quad (3.10)$$

Los datos de porosidad total, obtenidos de núcleos con los que se cuenta inicialmente al ser empleados en la Ec. 3.10, da como resultado una relación gaussiana entre estos valores que representa la porosidad efectiva de las muestras.

### **3.3.- Modelo bivariado.**

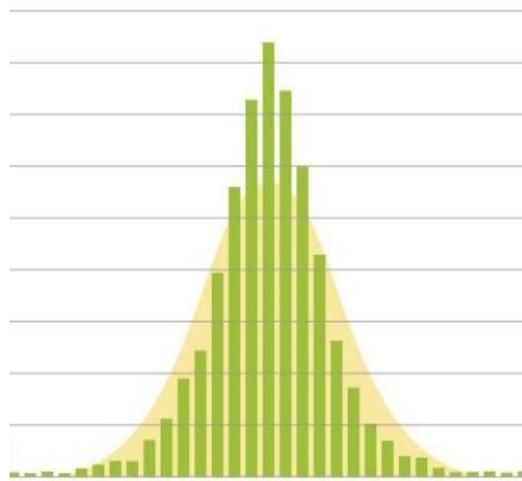
En un medio poroso y permeable, la distribución de los poros determinará el valor de estas propiedades, considerando un medio homogéneo, en el que los poros se distribuyen de forma aleatoria y uniforme. La porosidad y permeabilidad también deberán tener valores uniformes o al menos aleatoriamente discretizados en un rango de valores con cierta uniformidad.

En el caso de medios porosos heterogéneos, la presencia de elementos que afectan la uniformidad de la relación porosidad-permeabilidad como pueden ser fracturas, vóculos o arcillas. En la mayoría de los casos, también se encuentran distribuidos de forma aleatoria, lo que permite también representarlos como una distribución de probabilidad, con cierto comportamiento aleatorio.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Como se desarrolló en la Ec. 3.6, el diámetro de la garganta de poro depende directamente del tamaño de grano y también es directamente proporcional al valor de la garganta

Considerando una distribución normal para representar la porosidad y permeabilidad, contra un valor de densidad de probabilidad para formar una gráfica que representa la distribución de la porosidad o permeabilidad al repetirse un evento un número  $n$  veces (**Fig. 3.6**). Como podría ser la distribución de los poros en el medio o el paso de un fluido a través de los canales de poro. Ambos son eventos aleatorios y con cierta dependencia uno del otro. Tal como lo es la porosidad y la permeabilidad, que son variables aleatorias en las que los resultados se pueden agrupar y discretizar.



**Fig. 3.6.-** Densidad de probabilidad normal.

La extensión de la distribución normal para dos variables aleatorias es una importante distribución de probabilidad bivariada. En esta función bivariada, los parámetros  $\mu_\phi$  y  $\mu_k$  son las medias estadísticas de la porosidad y permeabilidad, son los valores que estadísticamente más se repiten en el conjunto de datos.

Los parámetros  $\mu_\phi$  y  $\mu_k$  son valores numéricos, a los que se les da rangos de posibles resultados que pueden tomar la porosidad y permeabilidad. La función bivariada comparte las mismas propiedades que la distribución normal de Gauss, además del factor de

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

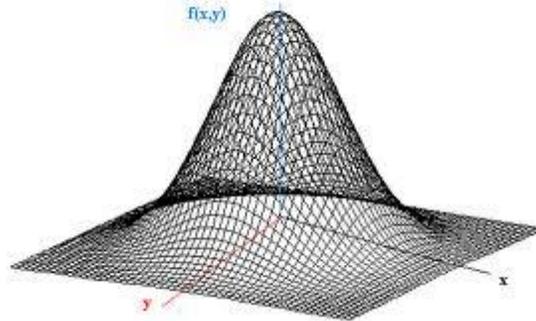
correlación  $\rho$  entre ambas variables, el cual tiene las siguientes propiedades:

- 1.- Cuando  $\rho = 0$ , no hay ninguna relación alguna entre las dos variables.
- 2.- Cuando  $\rho = 1$  o  $\rho = -1$ , se tiene una relación lineal positiva o negativa según sea el signo.

Utilizando estos parámetros para escribir la función bivariada en su forma más básica es:

$$f(\phi, k) = \frac{1}{2\pi\delta_\phi\delta_k\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\phi-\mu_\phi}{\delta_\phi}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\phi-\mu_\phi}{\delta_\phi}\right)\left(\frac{k-\mu_k}{\delta_k}\right) + \left(\frac{k-\mu_k}{\delta_k}\right)^2\right]} . \quad (3.11)$$

Los parámetros  $\delta_\phi$  y  $\delta_k$  son indicadores de la dispersión de los datos de porosidad y permeabilidad, al emplearse como términos de la Ec. 3.11 discretizan los resultados que tenemos en un rango de valores con límites finitos. La función representada por la Ec. 3.11 se ve en la **Fig. 3.7**.



**Fig. 3.7.-** Distribución normal bivariada.

Las funciones marginales de una distribución normal bivariada están definidas en las Ecs. 3.12 y 3.13.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

$$f_{\phi}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi, k) dk , \quad (3.12)$$

$$f_k(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi, k) d\phi . \quad (3.13)$$

La distribución de probabilidad de la permeabilidad y porosidad, se puede representar a través de funciones marginales de una distribución de probabilidad bivariada. Las funciones de probabilidad normal que aparecerán en secciones posteriores a diferencia de la Ec. 3.10 son obtenidas de una cantidad limitada de datos de porosidad y permeabilidad, por lo que las funciones marginales se representan como:

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{\phi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\phi - \mu_{\phi})^2}{\delta_{\phi}^2}} , \quad (3.14)$$

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_k} e^{-\frac{1}{2} \frac{(k - \mu_k)^2}{\delta_k^2}} . \quad (3.15)$$

La dependencia entre las funciones de las Ecs. 3.14 y 3.15, se define como el factor de correlación  $\rho$ , con la información de este factor de correlación junto con las desviaciones estándar  $\delta_{\phi}$  y  $\delta_k$  se puede obtener varias propiedades para las funciones bivariada y marginales, las cuales a la vez se tendrán que analizar para obtener resultados consistentes.

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## **4.- Validación del modelo**

### **4.1.- Manejo de datos**

Los conjuntos de datos que se utilizan en esta tesis son de porosidad y permeabilidad, obtenidos de núcleos mediante pruebas de laboratorio. En estos experimentos para medir estos datos se consideró una presión de confinamiento efectivo de  $500 \text{ lb/pg}^2$ , es decir, se sincronizaron los datos para obtener conjuntos de núcleos con información representativa, todos se obtuvieron de las mismas litologías, yacimientos y pozos. A estos conjuntos de datos de porosidad y permeabilidad se les asocia un factor de correlación  $\rho$ , todos los conjuntos de datos deberán tener un valor de  $\rho \neq 0$ , lo que implica la existencia de una correlación entre los datos de porosidad y permeabilidad, la cual físicamente existe. La correlación que se obtiene entre diferentes conjuntos de datos de núcleos no siempre es la misma, y al tratarse de datos de diferentes yacimientos con características específicas no tiene por qué serlo.

Los factores que causan que el medio sea heterogéneo pueden ser las fracturas, vugúlos, discordancias, efectos de una doble porosidad o doble permeabilidad, los cuales afectan la correlación de las variables de porosidad y permeabilidad, pero esta correlación aún a pesar de estos factores existe, sólo que ahora de una forma diferente a la que tendrían en un medio homogéneo.

Una característica de los datos es que no se manejan de forma continua sino discreta, considerándolos como parte de un conjunto. En algunos casos los datos que se tienen corresponden todos al mismo pozo, diferentes pozos del mismo yacimiento, o bien núcleos que correspondan todos a una misma edad geológica, pero en todos los casos se procura que pertenezcan a la misma litología, para que los resultados obtenidos de estos conjuntos de núcleos puedan ser representativos.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

La ventaja de considerar los datos como parte de un todo, sin considerar su continuidad y sin descartar ninguno de ellos, es que permite realizar una predicción del comportamiento de la porosidad y de la permeabilidad; sin embargo, pueden presentarse errores en los datos obtenidos, por medición, o simplemente anomalías dentro de las litologías, por ejemplo, por fracturas o vóculos. El aislar algunos datos anormales para mejorar la correlación del resto de los datos puede ser una opción, así como también el análisis por separado de los datos aislados, para así poder modelar el comportamiento y frecuencia de las anomalías.

Hay muchos beneficios al aislar los datos y estudiarlos por separado. El problema consiste en crear subconjuntos de un conjunto de datos. Es la cantidad de datos con los que se cuenta, los datos que se aíslan muchas veces no son suficientes como para poder modelarlos de forma representativa; como ya se mencionó anteriormente, se dispuso para su estudio en esta tesis información limitada de datos de núcleos.

### **4.2.- Análisis de la distribución de probabilidad con datos de porosidad y permeabilidad.**

Al analizar un conjunto de datos de porosidad y permeabilidad, si se requiere aislar subconjuntos de datos y estudiarlos por separado, se debe iniciar por la selección de una de las dos variables, preferentemente la que muestre el comportamiento más claro en los datos. Basándose en el análisis de esta variable, se prosigue a analizar la restante. Generalmente es la porosidad la variable seleccionada, por ser la que presenta el comportamiento más uniforme y claro, pero no siempre se podrá trabajar con la porosidad debido a la falta de información o las anomalías que presentan sus datos..

### **4.3.- Análisis univariado de permeabilidad del pozo Agua Fría 108.**

Para el pozo Agua Fría 108, se trabajará con los datos de permeabilidad obtenidos de los núcleos incluidos en la **Tabla 4.1**. La dispersión de estos datos se grafica en la **Fig. 4.1**.

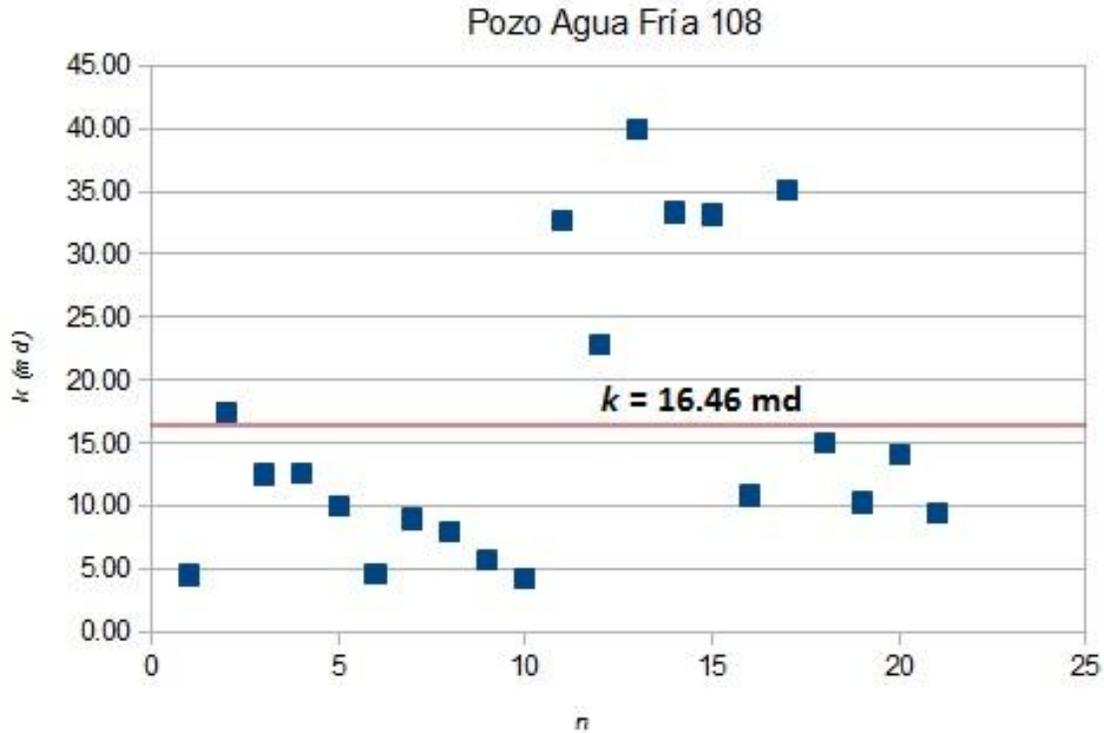
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.1.-** Datos de permeabilidad de núcleos, pozo Agua Fría 108.

No. de Muestra	Permeabilidad (md)	No. de Muestra	Permeabilidad (md)
1	4.54	11A	22.85
2	17.50	11B	39.97
3	12.54	12A	33.35
4A	12.59	12B	33.15
4B	9.99	13	10.84
5	4.66	14	35.13
6	9.01	15	14.99
7	8.01	16	10.30
8	5.70	17	14.10
9	4.30	18	9.40
10	32.67		

Este es un análisis de dispersión para una sola variable. En el eje de las abscisas se tiene graficado el número de la muestra; la línea roja es la línea de tendencia de los valores de permeabilidad; el valor medio es de 16.46 md y la desviación estándar de 11.49 md.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.1.-** Dispersión de la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.

De los datos de la Tabla 4.1. Se grafica la permeabilidad como variable marginal de la Ec. 3.11; de la Fig. 4.1 se obtiene una función de distribución de probabilidad para la permeabilidad basada en la Ec. 3.15:

$$f(k) = \frac{1}{28.80} e^{-\frac{k^2 - 32.92k + 270.93}{26404}} \quad (4.1)$$

donde  $\delta_k$  es la desviación estándar para la permeabilidad y  $\mu_k$  es el valor medio de permeabilidad para los datos de la Tabla 4.1. Para calcular y graficar la densidad de probabilidad de la permeabilidad del pozo Agua Fría 108, los datos se ordenan de menor a mayor y se emplea la Ec. 4.1, para obtener los valores de densidad de probabilidad que se incluyen en la **Tabla 4.2**.

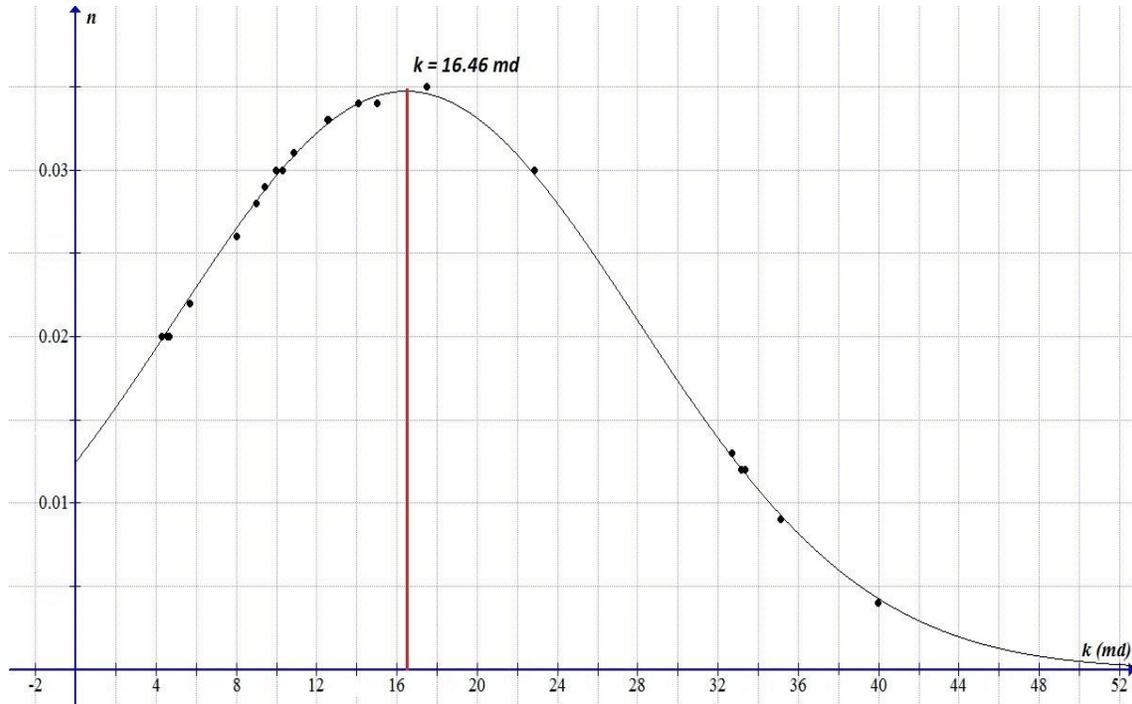
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.2.-** Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.

Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad	Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad
4.30	0.020	12.59	0.033
4.54	0.020	14.10	0.034
4.66	0.020	14.99	0.034
5.70	0.022	17.50	0.035
8.01	0.026	22.85	0.030
9.01	0.028	32.67	0.013
9.40	0.029	33.15	0.012
9.99	0.030	33.35	0.012
10.30	0.030	35.13	0.009
10.84	0.031	39.97	0.004
12.54	0.033		

Los datos de densidad de probabilidad, indican la probabilidad de que un valor de permeabilidad se repita en mediciones experimentales futuras. La **Fig. 4.2**, muestra la distribución de la probabilidad para los datos de permeabilidad:

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.2.** Densidad de probabilidad para la permeabilidad Agua Fría 108, 1ª propuesta.

Se comprueba por observación el valor medio de 16.46 md, señalado en la línea de valor medio del gráfico de dispersión en Fig. 4.1, el cual está ubicado en el punto más alto de la campana de la Fig. 4.2. A manera de ejemplo se discretizan los valores de permeabilidad entre 0 y 10 md; la ventaja de emplear este procedimiento es la de poder proporcionar resultados de permeabilidad también discretizados. Para esto, primero se expresa la Ec. 4.1 en forma más simple:

$$G_{0\delta_k}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad , \quad (4.2)$$

Dónde  $z$  es una variable adimensional que simplifica y sustituye las variables de la Ec. 4.1:

$$z = \frac{k - \mu_k}{\delta_k} \quad . \quad (4.3)$$

Se propuso un ejemplo en que se estimará la probabilidad de 0 a 10 md, la Ec. 4.1 se

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

expresa con límites de integración definidos, para poder obtener el valor de probabilidad de que una futura muestra tenga en la medición de permeabilidad valores de 10 o menos md:

$$prob(0 \leq k \leq 10) = \int_0^{10} G_{k\delta_k}(k) = \int_0^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(k-\mu_k)^2}{\delta_k^2}} dk \quad (4.4)$$

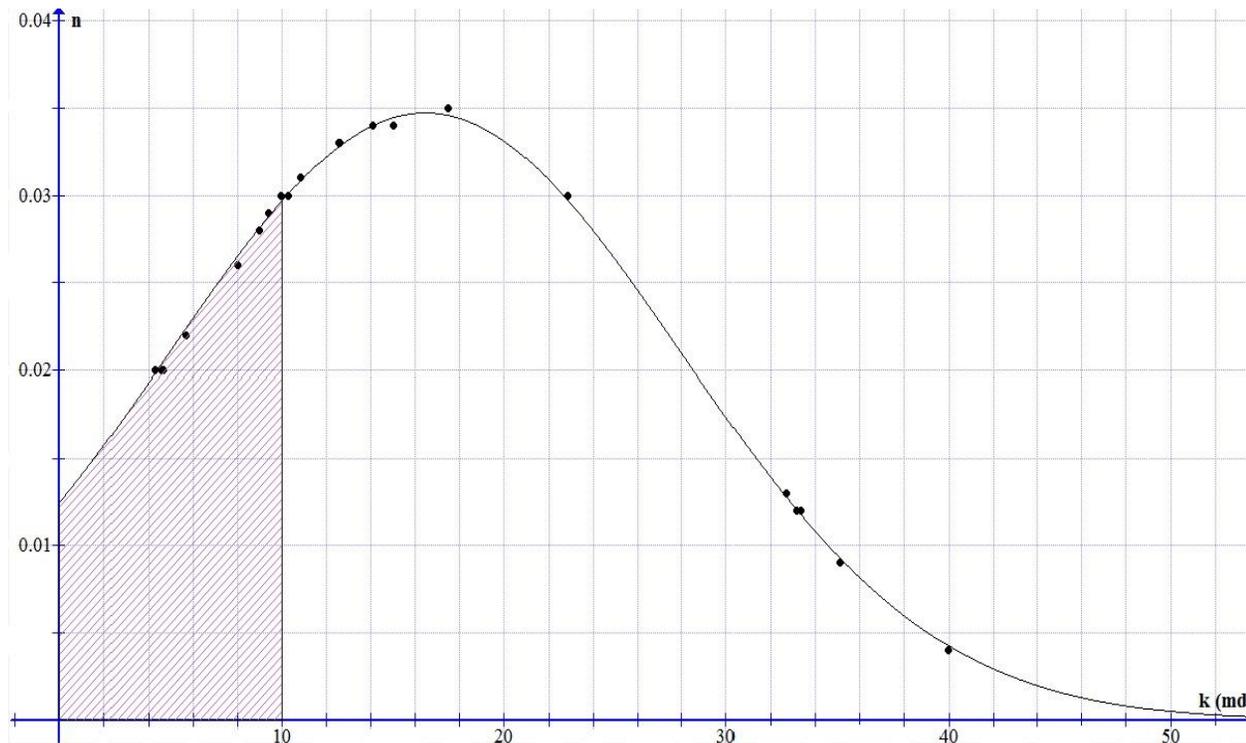
La Ec. 4.4 según la sustitución de variables de la Ec. 4.3 puede representarse como:

$$prob(0 \leq k \leq 10) = \int_0^{10} G_{z\delta_k} = \int_0^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (4.5)$$

Donde la probabilidad de una permeabilidad de 0 a 10 md es igual a la función de probabilidad Gaussiana G según la desviación estadar  $\delta$  de esta función:

$$prob(0 \leq k \leq 10) = 0.2283 \quad (4.6)$$

La **Fig. 4.3** expresa gráficamente la integral definida por la Ec. 4.4:



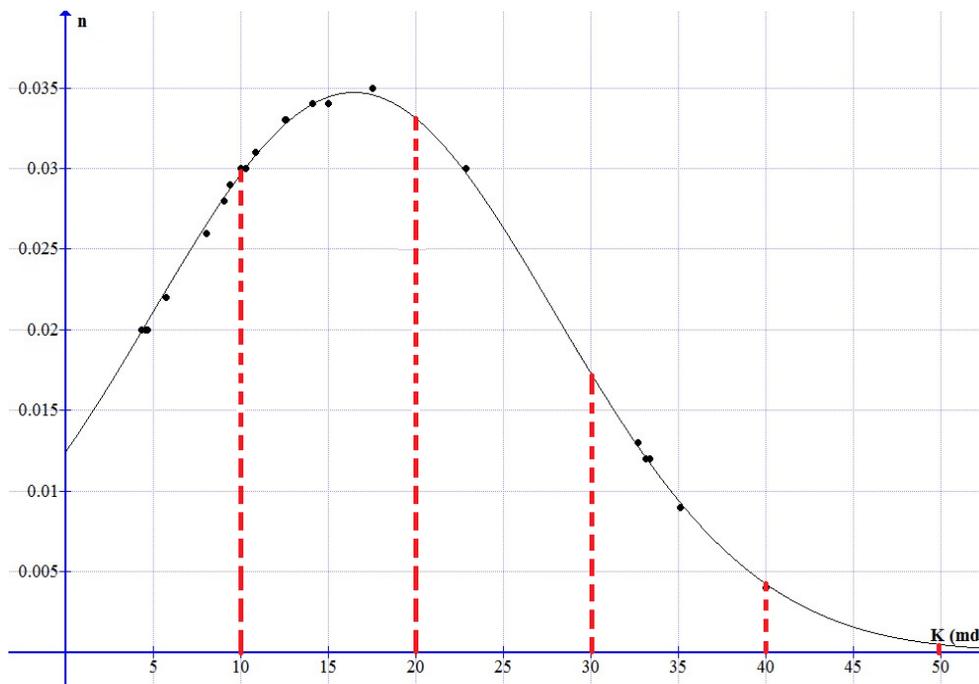
**Fig. 4.3.-** Área bajo la curva para una densidad de probabilidad con límites entre 0 y 10 milidarcys para el pozo Agua Fría 108, 1ª propuesta.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Esta es una forma de estimar los datos de permeabilidad para el pozo Agua Fría 108, pero se tendrán que ignorar los valores negativos de permeabilidad que se señalen en el gráfico; porque aunque estos valores se pueden calcular, carecen de significado físico. Si se integra considerando otros límites de integración en la Ec. 4.4 también se pueden obtener otros resultados en forma discretizada, como se observa en la **Tabla 4.3** y en la **Fig.4.4**.

**Tabla 4.3.-** Estimaciones para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.

Permeabilidad	Estimación
< 10	22.83 %
10 a 20	36.14 %
20 a 30	28.10 %
40 a 50	10.72 %
50 >	0.19 %



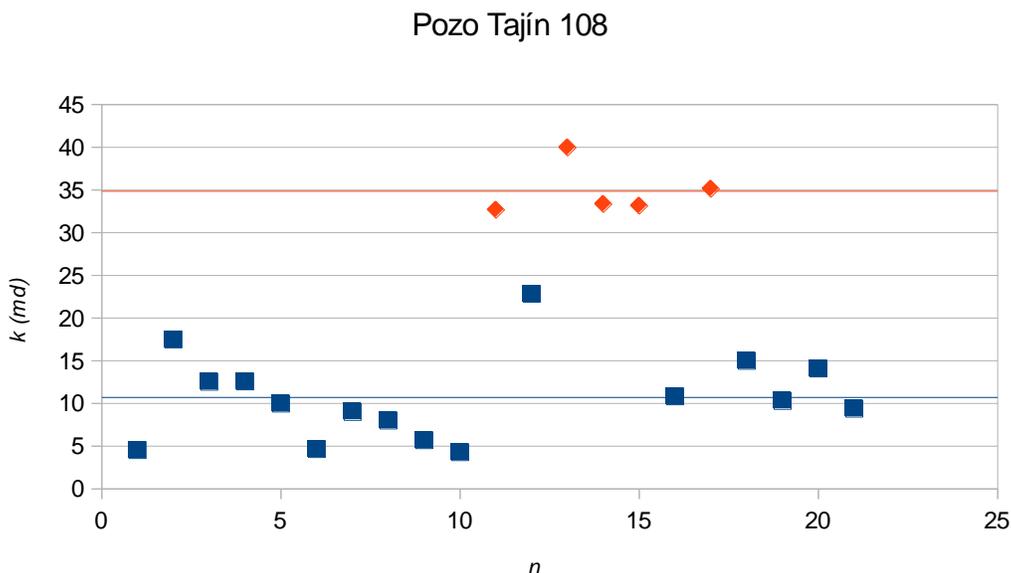
**Fig. 4.4.-** Discretización de las permeabilidades en el pozo Agua Fría 108.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Este desarrollo es una demostración del método que se propone, para analizar datos obtenidos de núcleos en pruebas de laboratorio. Los datos que se tienen pueden estudiarse de diferentes formas con la finalidad de mejorar su exactitud.

En el caso del pozo Agua Fría 108 se tiene una gran dispersión en los datos mostrados en la Fig. 4.3, tanto así que la mayoría de los puntos están muy alejados de la línea de tendencia y que para las muestras disponibles no se tiene una sola con un valor que coincida con el valor medio de 16.46 md. En este caso, no se puede considerar que el valor medio de permeabilidad es un valor representativo del conjunto de datos.

Por observación, se recomienda descartar los datos que no afecten el análisis o que se consideren errores de medición o poco representativos; otra opción es separar los datos en subconjuntos, que es lo que se propone realizar en este conjunto de datos de permeabilidad, descartando los datos poco representativos, mejorando de esta forma el valor medio de permeabilidad estimado a los valores en esta tesis y reduciendo la desviación estándar, para después analizar los datos descartados en una forma similar. Este análisis se ejemplifica en la Fig. 4.5 y en la Tabla 4.4 siguientes:



**Fig. 4.5.-** Dispersión de la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108, 2<sup>a</sup> propuesta.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.4.** - Datos de permeabilidades de núcleos del pozo Agua Fría 108, separados según su línea de tendencia.

No. de Muestra	Permeabilidad (md)	No. de Muestra	Permeabilidad (md)
1	4.54	11A	22.85
2	17.50	11B	39.97
3	12.54	12A	33.35
4A	12.59	12B	33.15
4B	9.99	13	10.84
5	4.66	14	35.13
6	9.01	15	14.99
7	8.01	16	10.30
8	5.70	17	14.10
9	4.30	18	9.40
10	32.67		

Para fines comparativos se consideran los datos de desviación estándar y de valor medio obtenidos de la Fig. 4.1 como la primera propuesta, y los datos de desviación estándar y valor medio obtenidos de la separación de los datos en dos subconjuntos de la Fig. 4.5, como la segunda propuesta. Para cada uno de los dos grupos se consideró una línea de tendencia propia, como se observa en la Fig. 4.5, las líneas de tendencia mejoraron considerablemente al compararlas con la primera propuesta. El indicador principal de la mejora en las líneas de tendencia es la disminución en la desviación estándar.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Con los datos de la **Tabla 4.5** se puede graficar dos curvas con el mismo principio de la teoría de límite central de la Ec. 4.1, mismo con el que se graficó la Fig. 4.3, considerando los dos subconjuntos de la Tabla 4.4.

**Tabla 4.5.-** Propuestas las de tendencias para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108.

	1 <sup>a</sup> . Propuesta	2 <sup>a</sup> Propuesta	
	1 <sup>a</sup> Tendencia	1 <sup>a</sup> Tendencia	2 <sup>a</sup> Tendencia
Desviación estándar	11.49	5.057	3.008
Valor medio	16.46	10.71	34.85

Una de las finalidades de separar los datos en subconjuntos para cada uno de ellos como un litotipo diferente, es la de mejorar la exactitud de las estimaciones que se obtuvieron con la primera propuesta; la forma que el gráfico toma permite estimar valores negativos de permeabilidad claramente inexistentes, problema causado por el margen de error de la primera propuesta.

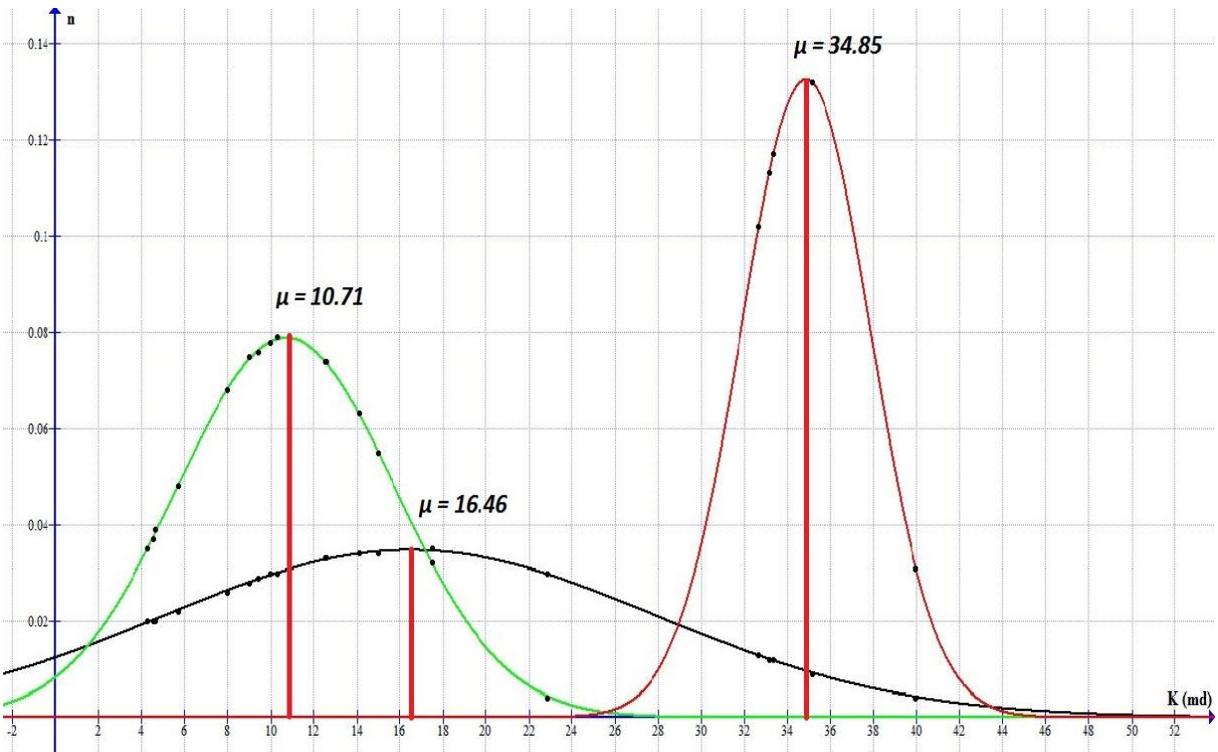
La segunda propuesta mejora disminuyendo el margen de error al reducir la dispersión de los datos, representada cuantitativamente como desviación estándar; la Tabla 4.5 compara los valores de desviación estándar, de ambas propuestas. La **Fig. 4.6** presenta los valores de la **Tabla 4.6**, observándose que el margen de valores negativos de permeabilidad se ve reducido al haberse dividido los datos en dos subconjuntos.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.6.-** Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Agua Fría 108, 2ª propuesta.

Primera línea de tendencia		Segunda línea de tendencia	
Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad	Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad
4.30	0.035	32.67	0.102
4.54	0.037	33.15	0.113
4.66	0.039	33.35	0.117
5.70	0.048	35.13	0.132
8.01	0.068	39.97	0.031
9.01	0.075		
9.40	0.076		
9.99	0.078		
10.30	0.079		
10.84	0.079		
12.54	0.074		
12.59	0.074		
14.10	0.063		
14.99	0.055		
17.50	0.032		
22.85	0.004		

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.6.-** Densidad de probabilidad para la permeabilidad para los núcleos del pozo Agua Fría 108, 2ª propuesta.

Los litotipos determinados con base en la información de la permeabilidad obtenida de los estudios en núcleos del yacimiento Agua Fría están constituidos por arenas arcillosas. La primera suposición sugiere usar todos los datos para describir el comportamiento de un litotipo, pero en este caso no se trata de una sola litología. Para este caso se consideran dos litotipos uno de grano más grueso y otro de grano más fino.

Se propone considerar el primer litotipo como arenas arcillosas y el segundo litotipo como arenas limpias. La media representa el valor más probable que se puede obtener de una muestra de ese litotipo, y los rangos son los límites posibles para los valores de permeabilidad de estos litotipos.

Como ya se discutió en el capítulo anterior la garganta de poro representa una limitante y a la vez una de las fortalezas de este método. Los cambios en el tamaño de grano afectan

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

directamente los cambios en la permeabilidad y como se menciona en el capítulo 3 una de las propuestas de esta tesis es la de considerar el tamaño de grano como inversamente proporcional a la desviación estándar de la distribución de probabilidad para la permeabilidad. La ventaja de este método es que se puede emplear esta relación para estimar el diámetro de la garganta de poro de los litotipos.

La primera etapa consiste en mera observación para determinar las mejores líneas de tendencia de los datos, buscando disminuir la desviación estándar; empleando este procedimiento se puede obtener los resultados incluidos en la **Tabla 4.7**:

La limitante de este método es que se requiere un valor estimado del diámetro de garganta de poro de alguna de las litologías, y con base en esa información se estima cualitativamente el resto de las gargantas de poro para los litotipos. De lo contrario, tal como sucede en este ejemplo, lo que se obtienen es la proporción cualitativa del diámetro de gargantas de poro entre los litotipos, lo cual para este caso es una estimación que señala que uno de los litotipos (formación de grano fino) tiene un tamaño de garganta más grande que el otro litotipo (formación de grano grueso), en un 40.51 %, como se expresa en la cuarta columna de la Tabla 4.7.

**Tabla 4.7.-** Resultados pozo Agua Fría 108.

	Media de Permeabilidad (md)	Rango de Permeabilidad (md)	Garganta de poro
1 <sup>er</sup> . Litotipo	10.71	0 – 27.5	x
2 <sup>o</sup> . Litotipo	34.85	24.2 – 45.4	1.4051*x

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### 4.4.- Análisis Bivariado porosidad-permeabilidad del pozo Santuario 31-T.

El análisis bivariado de porosidad y permeabilidad requiere inicialmente un estudio previo de las variables de porosidad o de permeabilidad, de la misma forma en que se realizó en el ejemplo anterior para el pozo Agua Fría 108, ahora considerando los datos incluidos en la **Tabla 4.8** del pozo ubicado en el activo Bellota, Santuario 31-T; a diferencia del ejemplo anterior aquí se cuenta con una descripción de las muestras en relación a la mineralogía y la consolidación de los materiales.

**Tabla 4.8.-** Datos de porosidad, permeabilidad y descripción litológica de núcleos del pozo Santuario 31-T

No. de la Muestra	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Descripción Litológica
N1H1	26.07	41.39	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondo, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente calcárea
N1H3	25.46	41.33	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondeado, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente calcárea
N1H5	26.83	40.19	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondeado, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente calcárea, se aprecian fragmentos de moluscos calcificados y escasa presencia de materia orgánica
N1H7	25.72	26.88	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondeado, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente calcárea, se aprecian fragmentos de moluscos calcificados y escasa presencia de materia orgánica

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.8.-** Datos de porosidad, permeabilidad y descripción litológica de núcleos del pozo Santuario 31-T (Continuación).

No. de la Muestra	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Descripción Litológica
N1H8	21.34	3.475	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondeado, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente calcárea, se aprecian fragmentos de moluscos calcificados y escasa presencia de materia orgánica
N1H9	25.70	33.78	Arenisca de cuarzo, feldespatos, micas, de grano fino subredondeado a subanguloso, bien clasificada, poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente en material calcáreo, y deleznable al tacto.
N1H11	24.75	39.07	Arenisca de cuarzo, feldespatos, micas, de grano fino subredondeado a subanguloso, bien clasificada, poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente en material calcáreo, y deleznable al tacto.
N1H12	25.76	73.32	Arenisca de cuarzo, feldespatos, micas, de grano fino subredondeado a subanguloso, bien clasificada, poco consolidada en matriz arcillosa, incipientemente en material calcáreo, y deleznable al tacto.
N1H16	19.73	1.661	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondo, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, e incipientemente calcárea
N1H17	13.28	0.065	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondo, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, e incipientemente calcárea
N1H18	14.55	0.730	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondo, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, e incipientemente calcárea
N1H19	14.50	2.552	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondo, bien clasificado, moderadamente a poco consolidada en matriz arcillosa, e incipientemente calcárea

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.8.-** Datos de porosidad, permeabilidad y descripción litológica de núcleos del pozo Santuario 31-T (Continuación).

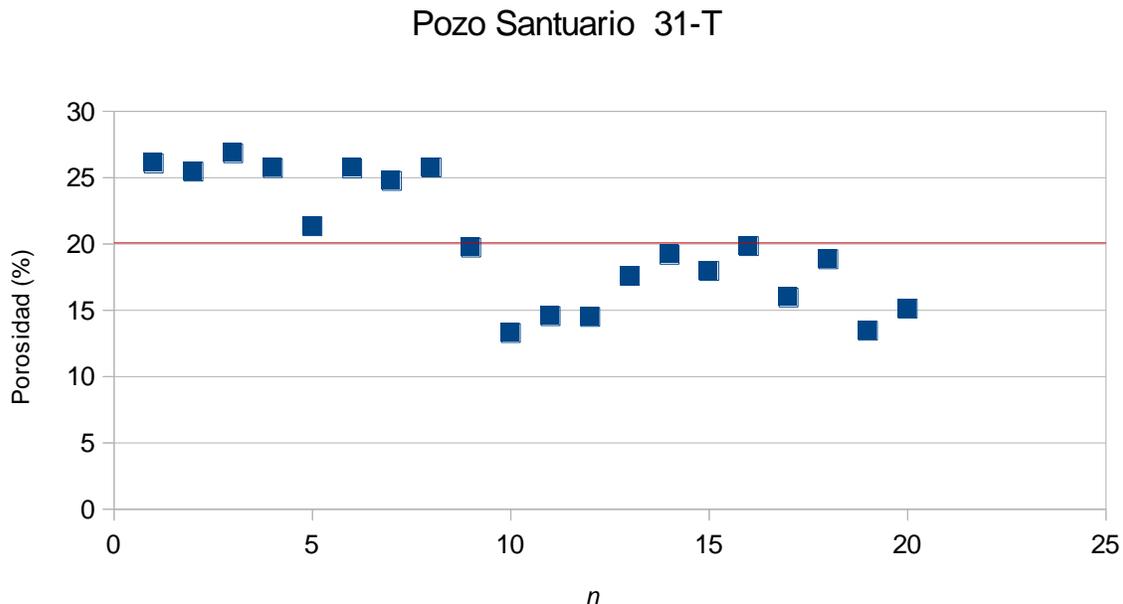
No. de la Muestra	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Descripción Litológica
N1H21	17.59	1.844	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondeado, bien clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, ligeramente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.
N1H22	19.18	1.493	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino, subanguloso a subredondeado, bien clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, ligeramente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.
N1H26	17.97	0.964	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino a muy fino, subanguloso a subredondeado, regularmente clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, incipientemente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.
N1H27	19.84	4.859	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino a muy fino, subanguloso a subredondeado, regularmente clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, incipientemente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.
N1H28	15.97	0.825	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino a muy fino, subanguloso a subredondeado, regularmente clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, incipientemente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.
N1H29	18.85	3.002	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino a muy fino, subanguloso a subredondeado, regularmente clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, incipientemente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.8.-** Datos de porosidad, permeabilidad y descripción litológica de núcleos del pozo Santuario 31-T (Continuación).

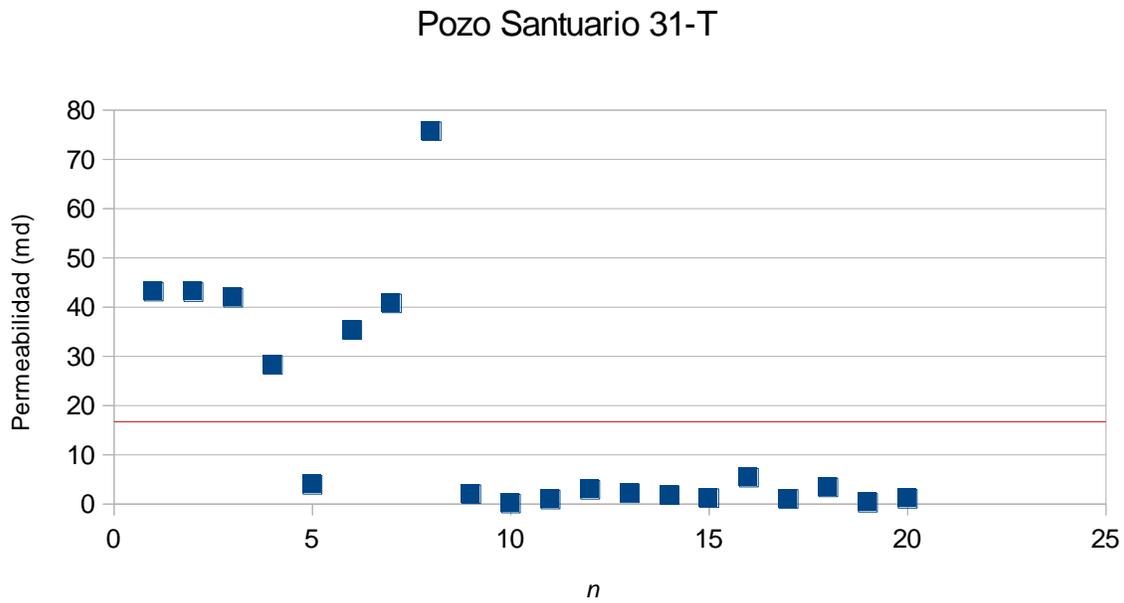
No. de la Muestra	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Descripción Litológica
N1H30	13.45	0.192	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino a muy fino, subanguloso a subredondeado, regularmente clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, incipientemente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.
N1H31	15.12	0.849	Arenisca de cuarzo, gris claro, de grano fino a muy fino, subanguloso a subredondeado, regularmente clasificada, moderadamente consolidada en matriz arcillosa, incipientemente cementada en material calcáreo; se observa ligera presencia de materia orgánica.

Se realiza un análisis de dispersión de los parámetros de porosidad y permeabilidad, utilizando los datos de la **Tabla 4.8**, obteniéndose los resultados gráficos que se muestran en las **Figs. 4.7 y 4.8**:



**Fig. 4.7.-** Dispersión de la variación para la porosidad estimada en el pozo Santuario 31-T.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.8.-** Dispersión de la variación para la permeabilidad estimada en el pozo Santuario 31-T.

Los datos de porosidad y permeabilidad se obtuvieron en laboratorio mediante pruebas de inyección de gases, considerando una presión de confinamiento de 800 lb/pg<sup>2</sup> para todas las muestras. Los resultados obtenidos de las líneas de tendencia de los graficos de dispersión se incluyen en la **Tabla 4.9**:

**Tabla 4.9.-** Datos de las líneas de tendencias para los datos de porosidad y permeabilidad en el pozo Santuario 31-T, 1<sup>a</sup> propuesta.

	1 <sup>a</sup> . Propuesta	
	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)
Desviación Estándar	4.789	22.25
Media	20.08	16.72

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Al igual que en el caso anterior, se tienen que determinar las mejores propuestas para las líneas de tendencias; de ser necesario se trazarán más de una línea, o se tendrán que eliminar datos, que presenten valores demasiado dispersos o poco representativos, en comparación con el resto de los puntos. Trazar más de una línea de tendencia puede ser el caso para ambas variables, pero eliminar datos de permeabilidad por ser demasiado dispersos afectaría gravemente el análisis de la porosidad.

La primera propuesta es una distribución de probabilidad considerando todos los datos de porosidad y permeabilidad del pozo Santuario 31-T; para graficar la densidad de probabilidad de la porosidad se ordenan los datos de porosidad de la **Tabla 4.8** de menor a mayor, para después emplear la Ec. 3.14 y obtener una función de probabilidad con los datos de porosidad y la información de la Tabla 4.9. Posteriormente se repite este mismo procedimiento para la permeabilidad usando la Ec. 3.15. El cálculo de la distribución de probabilidad para la porosidad se muestra en la **Tabla 4.10** y las funciones de probabilidad para la porosidad y la permeabilidad aparecen en las Ecs. 4.7 y 4.8 respectivamente.

Porosidad:

$$f(\phi) = \frac{1}{12} e^{-\frac{\phi^2 - 40.16\phi + 403.20}{45.86}}, \quad (4.7)$$

Permeabilidad

$$f(k) = \frac{1}{55.77} e^{-\frac{k^2 - 33.44k + 279.56}{990.12}}. \quad (4.8)$$

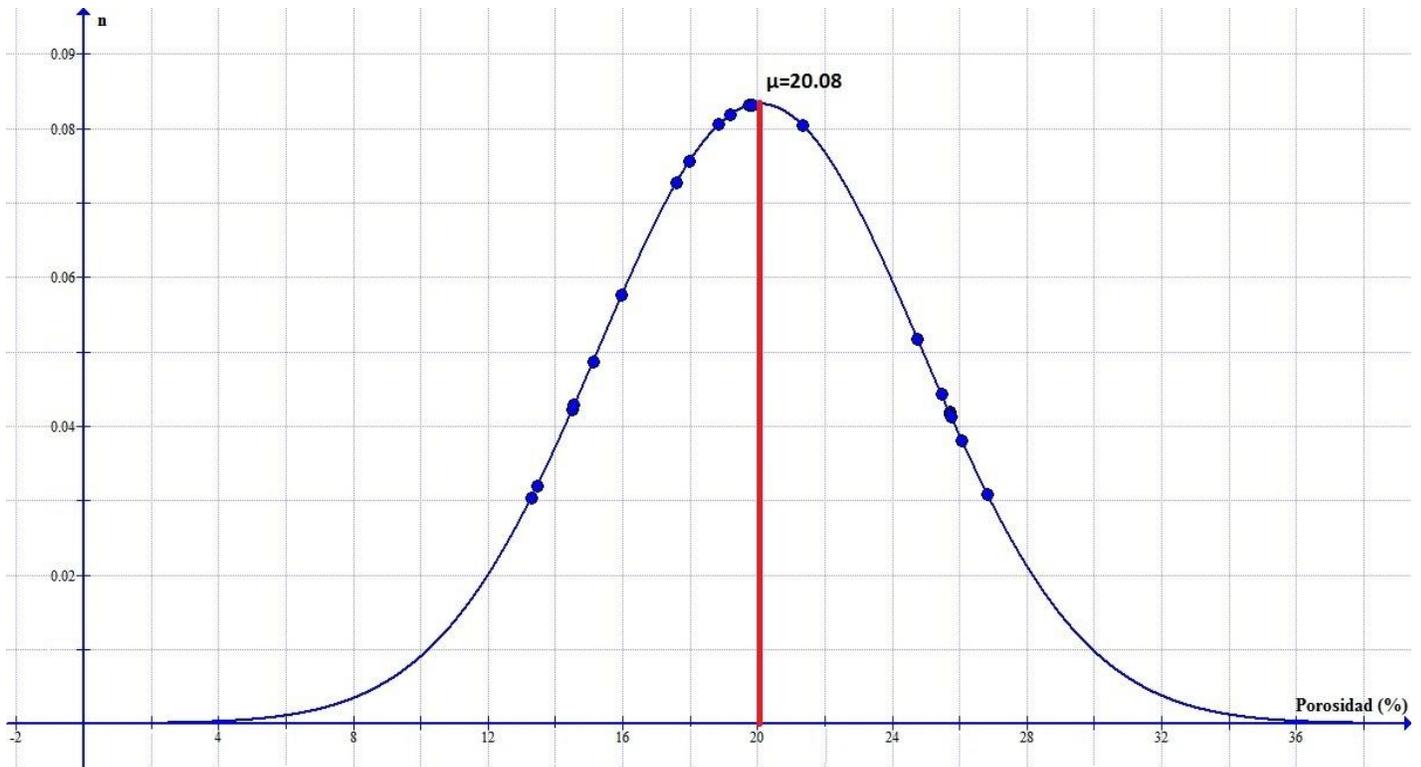
Los datos se ordenan de menor a mayor, con la finalidad de poder graficarlos como una serie de puntos dentro de la función de distribución de probabilidad, tal como se observa en las **Figs. 4.9 y 4.10**.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.10.-** Datos de densidad de probabilidad para la porosidad y permeabilidad para el pozo Santuario 31-T.

Porosidad (%)	Distribución de probabilidad	Permeabilidad (md)	Distribución de probabilidad
13.28	0.0304	0.115	0.0136
13.45	0.0320	0.277	0.0136
14.50	0.0423	0.930	0.0139
14.55	0.0428	1.046	0.0140
15.12	0.0487	1.065	0.0140
15.97	0.0576	1.206	0.0141
17.59	0.0728	1.818	0.0143
17.97	0.0756	2.014	0.0144
18.85	0.0806	2.201	0.0145
19.18	0.0819	2.910	0.0148
19.73	0.0831	3.394	0.0150
19.84	0.0832	3.904	0.0152
21.34	0.0805	5.372	0.0157
24.75	0.0517	28.26	0.0157
25.46	0.0444	35.34	0.0126
25.70	0.0419	40.75	0.0100
25.72	0.0416	41.91	0.0094
25.76	0.0412	43.07	0.0089
26.07	0.0381	43.16	0.0089
26.83	0.0308	75.73	0.0005

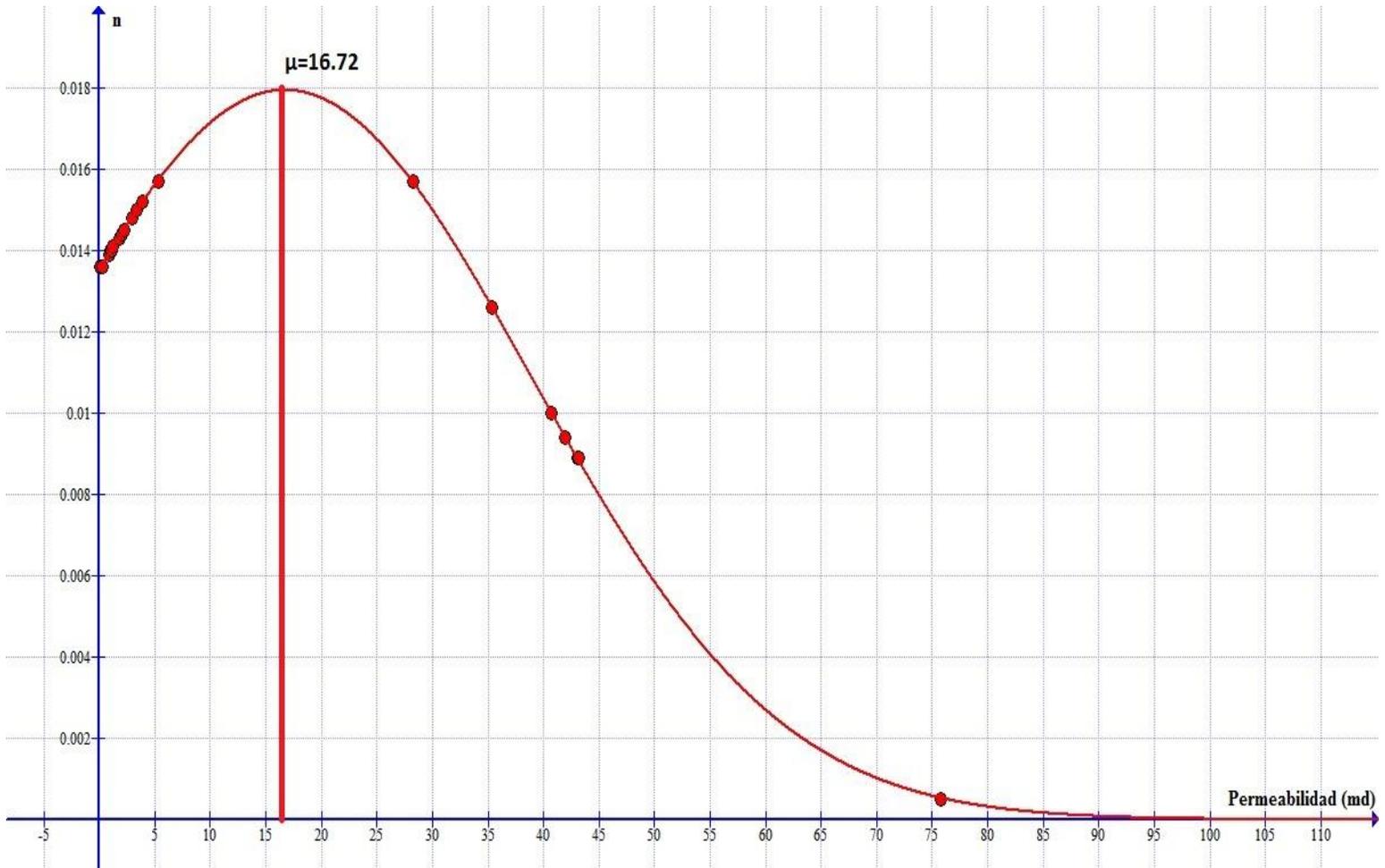
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.9.** Distribución de probabilidad de la porosidad del pozo Santuario 31-T, 1ª propuesta.

Los datos de permeabilidad para el pozo Santuario 31-T presentan una gran dispersión. La desviación estándar de 22.25 que se señala en la Tabla 4.9 indica una distribución de probabilidad muy dispersa para la permeabilidad. En la **Fig. 4.10** se aprecian valores de permeabilidad tan dispersos, que en la función distribución de probabilidad aparecen valores negativos. En la Fig. 4.10 se omitieron los valores negativos, por lo que la función parece estar incompleta, estos valores no se incluyeron debido a que los valores negativos de permeabilidad carecen de representación física y su presencia dentro de los cálculos es un error.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

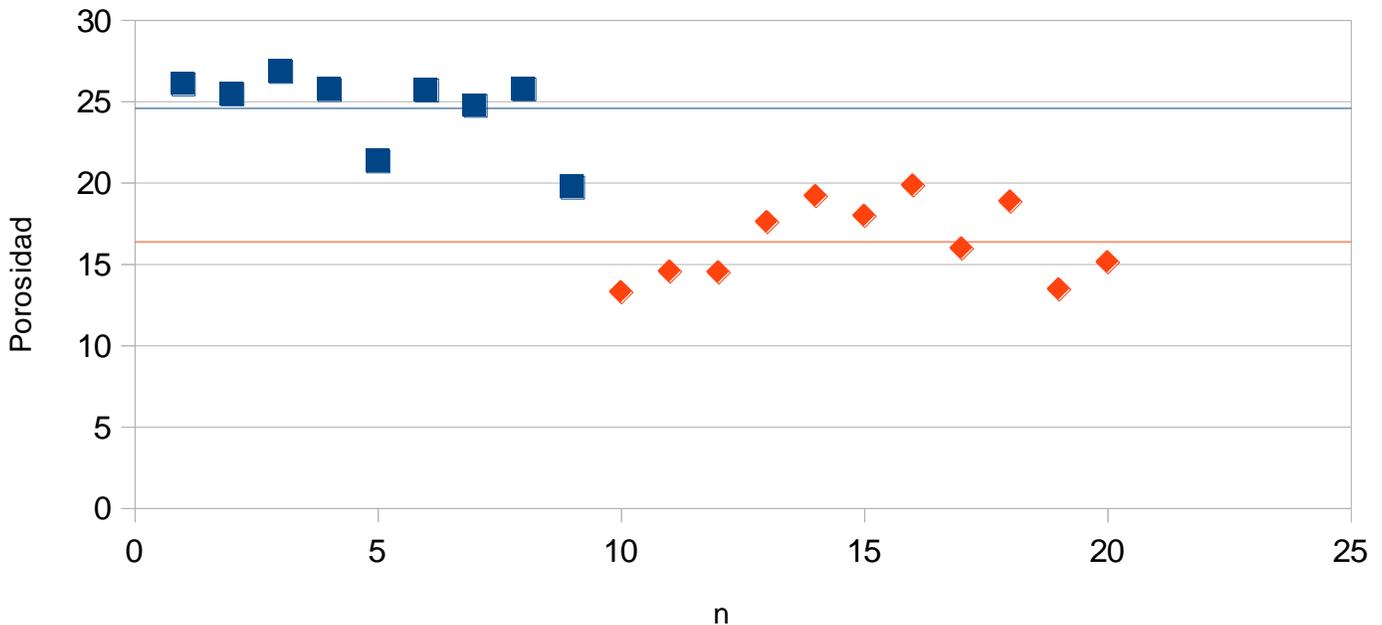


**Fig. 4.10.-** Distribución de probabilidad de la permeabilidad en el pozo Santuario 31-T, 1ª propuesta.

Para incrementar la precisión de estas estimaciones se puede realizar una segunda propuesta obtenida de la separación de los datos en subconjuntos, para después poder señalar y evaluar estos subconjuntos como litologías por separado. En el ejemplo anterior para el pozo Agua Fría 108, la separación de los datos se realizó por observación en base a los gráficos de dispersión. En este caso se cuenta con una descripción de la mineralogía y consolidación de las muestras; con esta información junto con las observaciones de los gráficos de dispersión, se dividen los datos en los subconjuntos que se ven en la **Fig. 4.11**.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### Pozo Santuario 31-T



**Fig. 4.11.-** Dispersión de los datos para la porosidad en el pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta

La separación de los datos en la Fig. 4.11 se señala con el gráfico de dispersión de la porosidad; para reducir errores es recomendable usar los datos de porosidad para indicar las divisiones entre los litotipos. Esto no implica que utilizar los datos de porosidad en lugar de los de permeabilidad no provoque errores debido a anomalías en los datos, pero si se considera que los cambios en los datos de porosidad son generalmente menos bruscos y su comportamiento es más uniforme que en los de permeabilidad; por esta razón se recomienda usar los datos de porosidad en vez de los datos de permeabilidad.

Los criterios que se siguieron para separar los datos en los dos subconjuntos de la segunda propuesta, fueron la descripción geológica y la observación de los datos en los gráficos de dispersión. Realizando un análisis más estricto de los datos disponibles estos podrían separarse en más de dos subconjuntos, pero separar los datos en múltiples subconjuntos

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

para mejorar la precisión genera subconjuntos más pequeños los cuales pierden precisión debido a la escases de datos. Dependiendo de la cantidad de datos con la que se disponga y el comportamiento que los datos presenten se determinara en cuantos subconjuntos serán divididos los datos, para el caso del pozo Santuario 31-T serán dos subconjuntos. La **Tabla 4.11** muestra con fines comparativos la información que fue obtenida de las líneas de tendencia de la primera y segunda propuesta de la **Fig. 4.11**.

**Tabla 4.11.-** Comparación de la información de las líneas de tendencias para los datos de porosidad en el pozo Santuario 31-T.

	1ª Propuesta	2ª Propuesta	
		1 <sup>er</sup> Litotipo	2 <sup>o</sup> Litotipo
Media de porosidad (md)	20.08	24.61	16.38
Desviación estándar (md)	4.789	2.372	2.365

Las desviaciones estándar de la segunda propuesta disminuyen en comparación con las de la primera propuesta, lo que indica una disminución en la dispersión y el margen de error. Se procede a calcular la densidad de probabilidad para cada subconjunto de porosidad con la Ec. 3.14 y con los datos obtenidos de las nuevas propuestas de tendencia de la Tabla 4.11. Las funciones de densidad de probabilidad de la porosidad para el primer y segundo litotipo se representan por medio de las Ecs. 4.7 y 4.8, respectivamente:

$$f(\phi_{1a}) = \frac{1}{5.9457} e^{-\frac{\phi^2 - 49.22\phi + 605.65}{11.25}}, \quad (4.9)$$

$$f(\phi_{2a}) = \frac{1}{5.9281} e^{-\frac{\phi^2 - 32.76\phi + 26830}{11.18}}. \quad (4.10)$$

Se alinean los datos de porosidad de menor a mayor valor para cada litotipo y con las Ecs. 4.9 y 4.10 se obtienen los datos de la **Tabla 4.12**.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

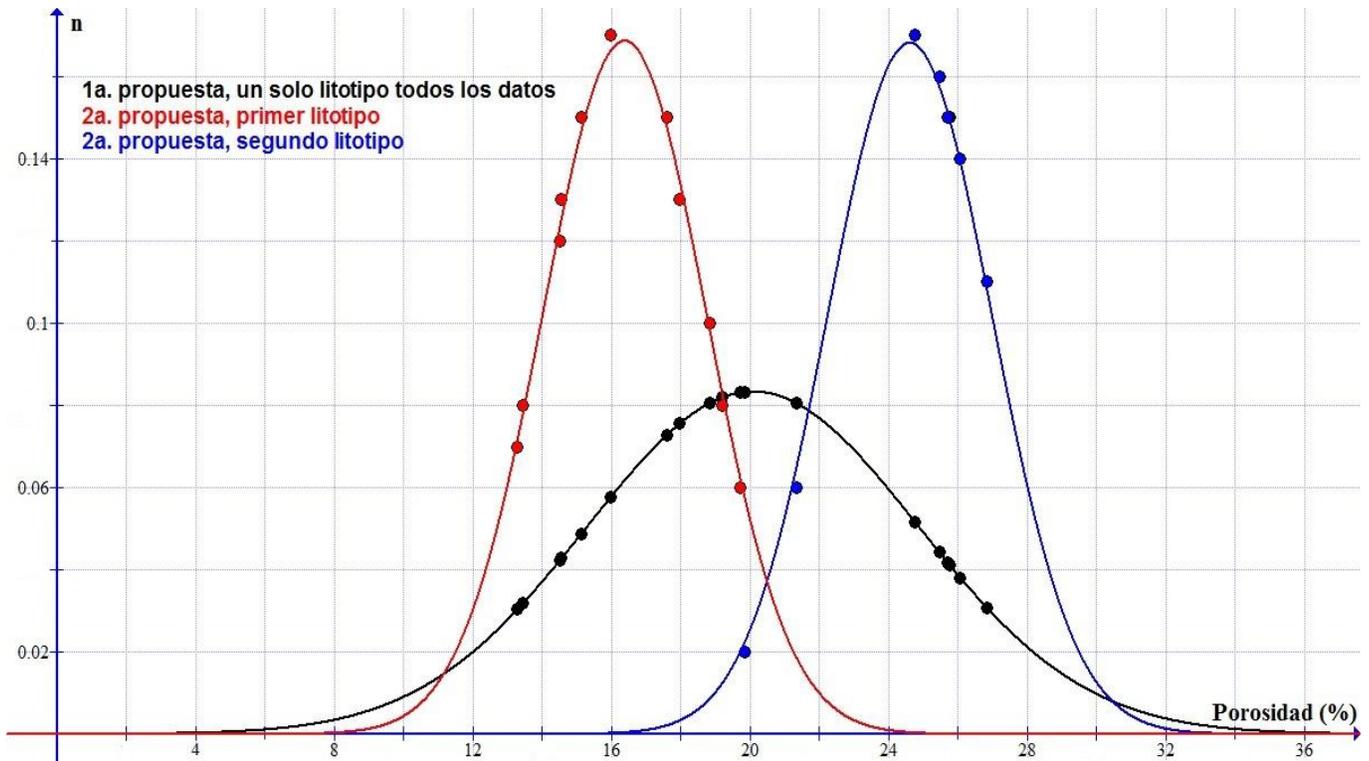
**Tabla 4.12.-** Datos de densidad de probabilidad para la porosidad en el pozo Santuario 31-T, 2ª propuesta.

1 <sup>er</sup> Litotipo	
Porosidad (%)	Densidad de probabilidad
26.07	0.14
25.46	0.16
26.83	0.11
25.72	0.15
21.34	0.17
25.70	0.15
24.75	0.17
25.76	0.15
19.73	0.02

2 <sup>o</sup> Litotipo	
Porosidad (%)	Densidad de probabilidad
13.28	0.07
14.55	0.12
14.50	0.12
17.59	0.15
19.18	0.08
17.97	0.13
19.84	0.06
15.97	0.16
18.85	0.10
13.45	0.08
15.12	0.15

En la Tabla 4.12 se aprecia otra ventaja de alinear los datos de menor a mayor. El observar como se distribuye la densidad de probabilidad de acuerdo a la secuencia de los datos, mientras más cercanos sean al valor medio de porosidad, más elevada es su densidad de probabilidad, y al contrario mientras más alejados estén del valor medio presentan una menor densidad de probabilidad. En la **Fig. 4.12**, con la Información de las Tablas 4.10 y 4.12, se grafican las funciones de probabilidad que conforman la segunda propuesta y se comparan con la primera propuesta.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.12.-** Densidad de probabilidad de la porosidad en el pozo Santuario 31 T, 2ª propuesta.

Esto es con la finalidad de tener una estimación con la mayor cantidad de datos posible. Por ejemplo para el caso de Santuario 31-T, una litología con material calcáreo ligeramente orgánico y una con material calcáreo que presenta restos de moluscos, pertenecen a edades litológicas diferentes pero para fines prácticos ambas al poseer características de porosidad y permeabilidad, similares se les considera como parte del mismo subconjunto (litotipo).

La segunda propuesta es más viable que la primera; en un gráfico de densidad de probabilidad el eje de las ordenadas indica la probabilidad. En la Fig. 4.12 son las dos curvas de la segunda propuesta la que presentan los valores de probabilidad más elevados. Los litotipos de la segunda propuesta presentan datos menos dispersos, así que las estimaciones para la porosidad son más precisas, que en la primera propuesta. Como ya se estableció previamente en la sección 3.3, el conjunto de datos de porosidad y permeabilidad se correlacionan mediante el cálculo de un factor de correlación  $\rho$ , que representa una medición

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

no paramétrica de la asociación entre las dos variables. Hay varios métodos en la literatura para calcular este factor de correlación; para este caso se utilizara el método de Spearman (Maritz, 1981). El cual consiste en ordenar una de las variables ya sea porosidad o permeabilidad de menor a mayor, y asignar un número de acuerdo a este orden a cada dato de la variable seleccionada para posteriormente repetir el mismo procedimiento para la otra variable obteniendo de esta forma los rangos ordenados para ambas variables. Este procedimiento se ejemplifica en la **Tabla 4.13**, el coeficiente de correlación de Spearman se expresa como:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2 \quad , \quad (4.11)$$

donde  $d$  es la diferencia entre los rangos ordenados de porosidad y permeabilidad y  $n$  es el número de pares de datos. En la Tabla 4.13 la porosidad ( $i$ ) y la permeabilidad ( $j$ ), son parámetros que indican el comportamiento de las dos variables de manera independiente una de la otra, se determinan después de ordenar de menor a mayor los datos de porosidad y de permeabilidad según su magnitud. En este caso se dio preferencia a los datos de porosidad y se alinearon los datos de permeabilidad de acuerdo a ellos. En el caso del pozo Santuario 31-T no hay datos que se repitan, por lo que no hay similitudes entre las variables ( $i$ ) para la porosidad y ( $j$ ) para la permeabilidad.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.13.-** Diferencia entre los rangos ordenados de las variables porosidad-permeabilidad para el pozo Santuario 31-T.

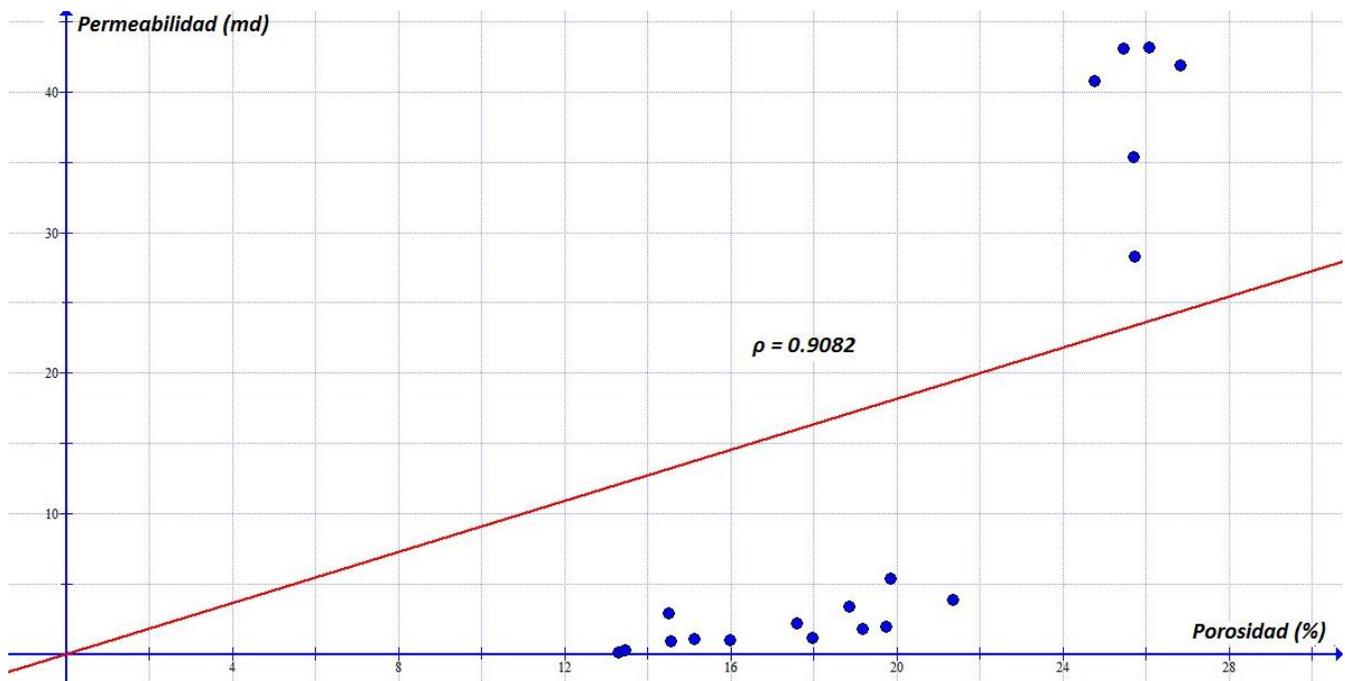
Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Rango para la porosidad ( <i>i</i> )	Rango para la permeabilidad ( <i>j</i> )	<i>d</i>	<i>d</i> <sup>2</sup>
13.28	0.115	1	1	0	0
13.45	0.277	2	2	0	0
14.50	2.910	3	10	7	49
14.55	0.930	4	3	-1	1
15.12	1.065	5	5	0	0
15.97	1.046	6	4	-2	4
17.59	2.201	7	9	2	4
17.97	1.206	8	6	-2	4
18.85	3.394	9	11	2	4
19.18	1.818	10	7	-3	9
19.73	2.014	11	8	-3	9
19.84	5.372	12	13	1	1
21.34	3.903	13	12	-1	1
24.75	40.75	14	16	2	4
25.46	43.07	15	18	3	9
25.70	35.34	16	15	-1	1
25.72	28.26	17	14	-3	9
25.76	75.73	18	20	2	4
26.07	43.16	19	19	0	0
26.83	41.91	20	17	-3	9
				$\Sigma$	122

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

El parámetro  $d$  en la quinta columna de la Tabla 4.13 se determina de la resta las variables permeabilidad ( $j$ ) menos la porosidad ( $i$ ); este valor se eleva al cuadrado y suma en la columna siguiente. Aplicando los datos de la Tabla 4.13 a la Ec. 4.11 se obtiene:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2 = 1 - \frac{6}{20(20^2 - 1)} (122) = 0.9082$$

Este valor de 0.9082 representa la correlación entre los datos incluidos en la Tabla 4.13. La **Fig. 4.13** presenta los datos de porosidad y permeabilidad, en la que se graficó el factor de correlación por medio de una recta que pasa por el origen.



**Fig. 4.13.-** Factor de correlación entre la porosidad y la permeabilidad para las muestras del pozo Santuario 31-T.

Todos los conjuntos de datos de porosidad-permeabilidad que se les aplique un análisis similar mostrarán un factor de correlación  $\rho$  entre cero y uno, debido a que físicamente existe una relación positiva entre el incremento de la porosidad y el incremento de la permeabilidad.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

En el caso de la primera propuesta para el pozo Santuario 31-T, existe un factor de correlación positivo pero con una gran dispersión de datos, provocada por la diferencia entre los litotipos.

Los conjuntos de datos de porosidad y permeabilidad que tengan coeficientes de correlación con  $\rho \approx 1$ , indican una relación lineal entre el incremento de porosidad y el de la permeabilidad, como sería el caso esperado para medios homogéneos ideales. Para este conjunto de datos se tiene  $0 < \rho < 1$ , que corresponde a medios porosos heterogéneos.

En este caso  $\rho$  es un indicador de la heterogeneidad del medio poroso; mientras más cercano a cero sea  $\rho$  más heterogéneo es el litotipo; caso opuesto mientras más cercano sea a uno más homogeneidad presenta el litotipo. Para el caso de Santuario 31-T se tiene un medio heterogéneo con cierta linealidad entre la porosidad y permeabilidad; también se tiene que considerar que la diferencia entre las magnitudes de las unidades puede afectar el factor de correlación; mientras que la porosidad oscila entre cero y uno, la permeabilidad oscila entre cero y cincuenta, pero este factor de correlación sigue siendo positivo en todos los casos y para cualquier conjunto de datos, debe seguir siéndolo; dado que en los medios homogéneos ideales el incremento en la porosidad provoca un incremento proporcionalmente lineal de la permeabilidad, y aún en los medios más heterogéneos los incrementos en la porosidad también provocan incrementos en la permeabilidad.

Con los datos de las Tablas 4.8 y 4.9, junto con el factor de correlación de 0.9082, se obtiene en la Ec. 4.12 la función de probabilidad bivariada, con la que obtienen los datos de densidad de probabilidad de la **Tabla 4.14**.

$$f(\phi, k) = \frac{1}{280.2128} e^{-2.8543 \left[ \left( \frac{\phi - 20.08}{4.789} \right)^2 - 1.8163 \left( \frac{\phi - 20.08}{4.789} \right) \left( \frac{k - 16.72}{22.25} \right) + \left( \frac{k - 16.72}{22.25} \right)^2 \right]} \quad (4.12)$$

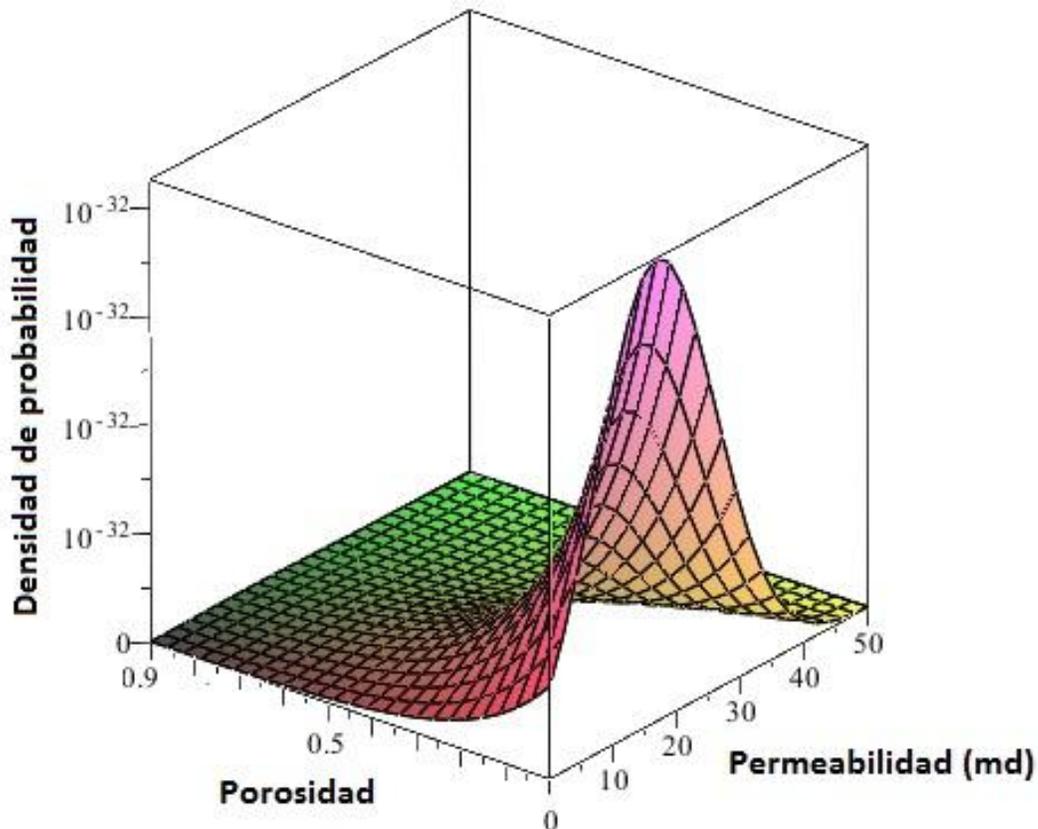
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.14.-** Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Santuario 31-T.

Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad
13.28	0.115	0.0006
13.45	0.277	0.0006
14.50	2.910	0.0010
14.55	0.930	0.0013
15.12	1.065	0.0018
15.97	1.046	0.0024
17.59	2.201	0.0028
17.97	1.206	0.0025
18.85	3.394	0.0024
19.18	1.818	0.0017
19.73	2.014	0.0013
19.84	5.372	0.0019
21.34	3.903	0.0005
24.75	40.75	0.0020
25.46	43.07	0.0018
25.70	35.34	0.0015
25.72	28.26	0.0007
25.76	75.73	0.0000
26.07	43.16	0.0016
26.83	41.91	0.0012

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

La función de la Ec. 4.12 y los datos de la Tabla 4.14, al graficarse en la **Fig. 4.14** representan una superficie de la cual se relacionan la porosidad, permeabilidad y la probabilidad entre estas dos variables



**Fig. 4.14.-** Distribución de probabilidad bivariable para el pozo Santuario 31-T, 1ª propuesta.

De igual manera que en los ejemplos anteriores la función bivariable parece estar incompleta, debido a que nuevamente se omitieron los valores que estuvieran por debajo de cero tanto para la porosidad como para la permeabilidad. Para el pozo Santuario 31-T, la Ec. 4.12 es una función de probabilidad que se puede emplear para determinar condiciones específicas de permeabilidad a ciertas condiciones de porosidad; es decir se puede predecir el comportamiento de la permeabilidad para ciertas condiciones de porosidad a través de un

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

valor de probabilidad cualitativo.

Por ejemplo, si se desea determinar la probabilidad de que se presenten valores de permeabilidad superiores a 30 md considerando los valores comunes de porosidad entre 15 y 25 %. La probabilidad está directamente relacionada con área de la superficie; para resolver este ejemplo se comienza por determinar el valor del área total de la superficie, que representará la probabilidad del 100 %, partiendo de la Ec. 4.12; para límites infinitos pero no menores a cero se tiene la Ec. 4.13

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{280.2128} e^{-2.8543 \left[ \left( \frac{\phi - 20.08}{4.789} \right)^2 - 1.8164 \left( \frac{\phi - 20.08}{4.789} \right) \left( \frac{k - 16.72}{22.25} \right) + \left( \frac{k - 16.72}{22.25} \right)^2 \right]} d\phi dk \quad (4.13)$$

Para resolver esta integral se procede a simplificar a una expresión más sencilla al exponente de la función e, completando cuadrados multiplicando la función del exponente por la expresión  $(\phi - \mu_\phi)^2 \delta_k^2 \rho$

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \left( \frac{\phi - \mu_\phi}{\delta_\phi} \right)^2 - 2\rho \left( \frac{\phi - \mu_\phi}{\delta_\phi} \right) \left( \frac{k - \mu_k}{\delta_k} \right) + \left( \frac{k - \mu_k}{\delta_k} \right)^2 \right], \quad (4.14)$$

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2) \delta_\phi^2 \delta_k^2} [(\phi - \mu_\phi)^2 \delta_k^2 - 2\rho(\phi - \mu_\phi)(k - \mu_k) \delta_\phi \delta_k + (k - \mu_k)^2 \delta_\phi^2 + (\phi - \mu_\phi)^2 \delta_k^2 \rho^2$$

$$- (\phi - \mu_\phi)^2 \delta_k^2 \rho^2], \quad (4.15)$$

$$- \frac{1}{2(1-\rho^2) \delta_\phi^2 \delta_k^2} [(\phi - \mu_\phi)^2 \delta_k^2 \rho^2 - 2\rho(\phi - \mu_\phi)(k - \mu_k) \delta_\phi \delta_k + (k - \mu_k)^2 \delta_\phi^2$$

$$+ (\phi - \mu_\phi)^2 \delta_k^2 (1-\rho)^2], \quad (4.16)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

$$-\frac{1}{2(1-\rho^2)\delta_\phi^2\delta_k^2} [((\phi-\mu_\phi)\delta_k\rho-(k-\mu_k)\delta_\phi)^2 - (\phi-\mu_\phi)^2\delta_k^2(1-\rho)^2] , \quad (4.17)$$

$$-\frac{(\phi-\mu_\phi)^2\delta_k^2(1-\rho)^2}{2(1-\rho^2)\delta_\phi^2\delta_k^2} - \frac{((\phi-\mu_\phi)\delta_k\rho-(k-\mu_k)\delta_\phi)^2}{2(1-\rho^2)\delta_\phi^2\delta_k^2} , \quad (4.18)$$

$$-\frac{(\phi-\mu_\phi)^2}{2\delta_\phi^2} - \frac{((\phi-\mu_\phi)\delta_k\rho-(k-\mu_k)\delta_\phi)^2}{2(1-\rho^2)\delta_\phi^2\delta_k^2} . \quad (4.19)$$

Evaluando la Ec. 4.19 con los datos de la Tabla 4.9, se obtiene el valor del exponente e siguiente:

$$-\frac{(\phi-20.08)^2}{45.87} - \frac{20.21(\phi-20.08)-20.08(k-16.72))^2}{3977.83} . \quad (4.20)$$

En la Ec. 4.23 se integra primero con respecto a la permeabilidad

$$\int_0^\infty \frac{1}{280.2128} e^{-\frac{(\phi-20.08)^2}{45.87} - \frac{20.21(\phi-20.08)-20.08(k-16.72))^2}{3977.83}} dk , \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{280.2128} e^{-\frac{(\phi-20.08)^2}{45.87}} \int_0^\infty e^{-\frac{20.21(\phi-20.08)-20.08(k-16.72))^2}{3977.83}} dk . \quad (4.22)$$

La Ec. 4.22, puede expresarse en la forma de la Ec. 4.23

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_\phi^2} e^{-\frac{(\phi-\mu_\phi)^2}{2\delta_\phi^2}} \int_0^\infty e^{-\frac{(k-(\mu_k+(\phi-\mu_\phi)\left[\frac{\delta_k}{\delta_\phi}\right]\rho))^2}{2(1-\rho^2)\delta_k^2}} dk , \quad (4.23)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

donde

$$\mu_{\phi} = \mu_k + (\phi - \mu_{\phi}) \left( \frac{\mu_k}{\mu_{\phi}} \right) \rho , \quad (4.24)$$

$$\delta_{\phi} = 5(1 - \rho^2) \delta_k^2 . \quad (4.25)$$

Se sustituye la Ec. 4.22 en la Ec. 4.13 con la finalidad de que se parezca lo más posible a su forma univariada más básica que se tiene en la Ec. 3.14.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k) = \frac{1}{280.1101} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\phi-20.08)^2}{45.87}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{20.21(\phi-20.08) - 20.08(k-16.72)}{397783}} dk d\phi , \quad (4.26)$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k) = \frac{1}{280.1101} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1(\phi-20.08)^2}{2 \cdot 45.87}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{k^2 - 33.44k + 111823}{\delta_k^2} \right)} dk d\phi , \quad (4.27)$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k) = \frac{1}{280.1101} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1(\phi-20.08)^2}{2 \cdot 45.87}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1(k-16.72)^2}{2 \cdot 22.25}} dk d\phi . \quad (4.28)$$

Para simplificar la Ec. 4.28 se le aplican las sustituciones de las Ec. 4.29 y 4.30:

$$w = \frac{\phi - 20.08}{6.77} , \quad (4.29)$$

$$z = \frac{k - 16.72}{4.72} , \quad (4.30)$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k) = \frac{1}{280.1101} \int_0^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz dw , \quad (4.31)$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k) = 0.773775$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Partiendo de la Ec. 4.28, se repite el mismo procedimiento anterior considerando una permeabilidad mayor a 30 md y una porosidad que varía entre 15 y 25 %, se emplean los cambios de variables expresados por las Ecs. 4.29 y 4.30.

$$\int_{15}^{25} \int_{30}^{\infty} f(\phi, k) = \frac{1}{280.1101} \int_{15}^{25} e^{-\frac{1(\phi-20.08)^2}{2 \cdot 45.87}} \int_{30}^{\infty} e^{-\frac{1(k-16.72)^2}{2 \cdot 22.25}} dk d\phi, \quad (4.32)$$

$$\int_{15}^{25} \int_{30}^{\infty} f(\phi, k) = \frac{1}{280.1101} \int e^{-\frac{w^2}{2}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz dw, \quad (4.33)$$

$$\int_{30}^{\infty} \int_{15}^{25} f(\phi, k) = 0.133372$$

Se relaciona la información de los resultados de las Ec. 4.31 y 4.33.

$$\frac{\int_{30}^{\infty} \int_{15}^{25} f(\phi, k)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\phi, k)} = \frac{0.1333}{0.7737} = 0.1723$$

La probabilidad para que se obtenga una permeabilidad de más de 30 md considerando los valores más comunes de porosidad, es de 17.23 %. Para incrementar la precisión de esta estimación es posible realizar un análisis similar considerando los subconjuntos que fueron señalados en la segunda propuesta.

En las **Tablas 4.15** y **4.16** se determinan el coeficiente de correlación para el primer y segundo litotipo de la segunda propuesta.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.15.** - Diferencia entre los rangos ordenados de las variables de porosidad y permeabilidad, para el 1<sup>er</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T.

Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Porosidad ( <i>i</i> )	Permeabilidad ( <i>j</i> )	d	d <sup>2</sup>
13.28	0.115	1	1	0	0
13.45	0.277	2	2	0	0
14.50	2.910	3	9	6	36
14.55	0.930	4	3	-1	1
15.12	1.065	5	5	0	0
15.97	1.046	6	4	-2	4
17.59	2.201	7	8	1	1
17.97	1.206	8	6	-2	4
18.85	3.394	9	10	1	1
19.18	1.818	10	7	-3	9
19.84	5.372	11	11	0	0
				Σ	56

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.16.-** Diferencia entre los rangos ordenados de las variables porosidad y permeabilidad, para el 2º litotipo del pozo Santuario 31-T.

Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Porosidad (i)	Permeabilidad (j)	d	d <sup>2</sup>
19.73	2.014	1	1	0	0
21.34	3.903	2	2	0	0
24.75	40.75	3	5	2	4
25.46	43.07	4	7	3	9
25.70	35.34	5	4	-1	1
25.72	28.26	6	3	-3	9
25.76	75.73	7	9	2	4
26.07	43.16	8	8	0	0
26.83	41.91	9	6	-3	9
				Σ	36

Los Coeficientes de correlación de la segunda propuesta se determinan por medio de la Ec. 4.11, A continuación se calculan los factores de correlación para el primer y segundo litotipos de las Tablas 4.15 y 4.16 respectivamente

$$\rho_1 = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2 = 1 - \frac{6}{9(9^2 - 1)} (36) = 0.7 \text{ ,}$$

$$\rho_2 = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2 = 1 - \frac{6}{11(11^2 - 1)} (56) = 0.7454 \text{ .}$$

Ambos litotipos presentan altos valores positivos de correlación de porosidad y permeabilidad

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

de acuerdo al rango establecido de 0 a 1, los factores de correlación y la información con la que se cuenta ambos litotipos son arenas con cierta homogeneidad. La Tabla 4.17, incluye las estimaciones para las medias de probabilidad y desviación estándar, para la permeabilidad de los dos litotipos considerados en la segunda propuesta

**Tabla 4.17.-** Comparación de la información de las líneas de tendencias para los datos de permeabilidad en el pozo Santuario 31-T.

	1ª. Propuesta	2ª. Propuesta	
		1 <sup>er</sup> Litotipo	2 <sup>o</sup> Litotipo
Media de permeabilidad (md)	16.72	1.85	34.90
Desviación estándar (md)	22.25	1.55	22.28

Con esta información conjuntamente con la incluida en la Tabla 4.11 se puede determinar las funciones de densidad de probabilidad para los dos litotipos de la segunda propuesta. Las Ecs. 4.34 y 4.35 expresan las funciones de probabilidad para el primer y segundo litotipos, respectivamente.

$$f(\phi, k) = \frac{1}{15.3993} e^{-1.1252 \left[ \left( \frac{\phi - 24.61}{2.372} \right)^2 - 1.4908 \left( \frac{\phi - 24.61}{2.372} \right) \left( \frac{k - 1.85}{1.55} \right) + \left( \frac{k - 1.85}{1.55} \right)^2 \right]}, \quad (4.34)$$

$$f(\phi, k) = \frac{1}{236.4347} e^{-0.9803 \left[ \left( \frac{\phi - 16.38}{2.365} \right)^2 - 1.4 \left( \frac{\phi - 16.38}{2.365} \right) \left( \frac{k - 34.90}{22.28} \right) + \left( \frac{k - 34.90}{22.28} \right)^2 \right]}. \quad (4.35)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Con las funciones de densidad de probabilidad y los datos obtenidos de los núcleos, se puede obtener la densidad de probabilidad bivariada para cada subconjunto de datos. Las **Tablas 4.18 y 4.19** indican la distribución de probabilidad bivariada para el primer y segundo litotipo, respectivamente.

**Tabla 4.18.-** Distribución de probabilidad bivariada para el 1<sup>er</sup> litotipo de la 2<sup>a</sup> propuesta del pozo Santuario 31-T.

Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad
13.28	0.115	0.0270
13.45	0.277	0.0300
14.50	2.910	0.0076
14.55	0.930	0.0483
15.12	1.065	0.0557
15.97	1.046	0.0541
17.59	2.201	0.0555
17.97	1.206	0.0202
18.85	3.394	0.0358
19.18	1.818	0.0129
19.84	5.372	0.0046

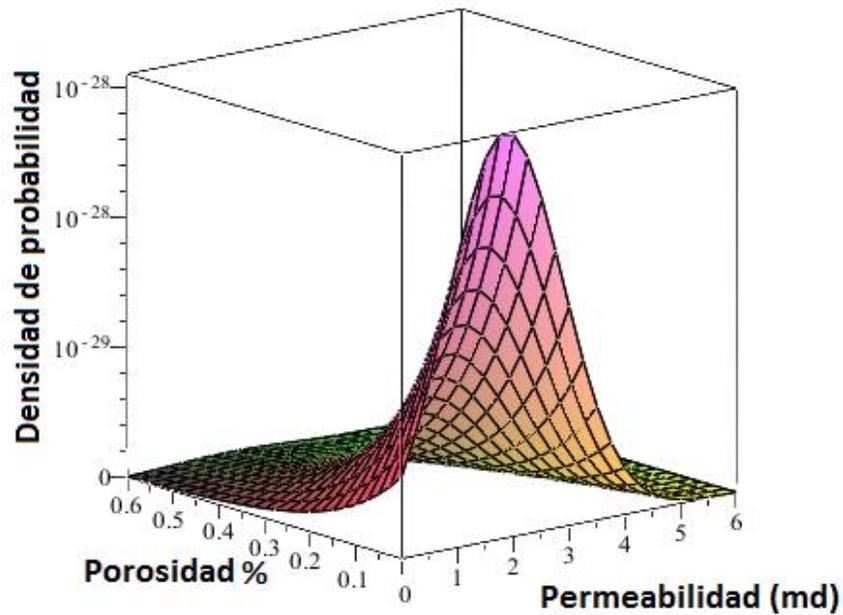
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.19.-** Distribución de probabilidad bivariada para el 2º litotipo, de la 2ª propuesta del pozo Santuario 31-T.

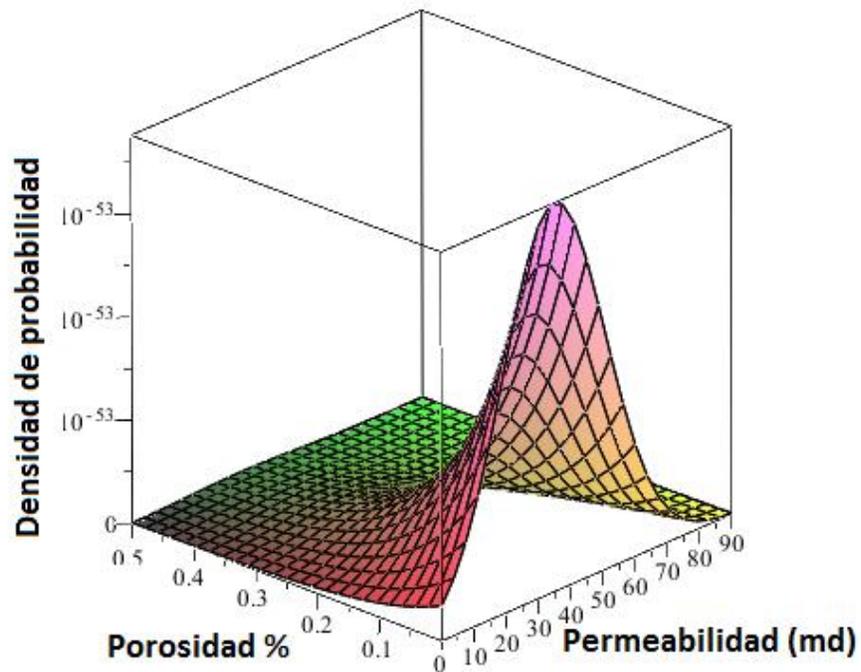
Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad
19.73	2.014	0.0005
21.34	3.903	0.0014
24.75	40.75	0.0040
25.46	43.07	0.0039
25.70	35.34	0.0035
25.72	28.26	0.0026
25.76	75.73	0.0004
26.07	43.16	0.0035
26.83	41.91	0.0024

Empleando las funciones expresadas por las Ecs. 4.34 y 4.35 se obtuvieron las graficas para las superficies de densidad de probabilidad para el primer y segundo litotipo, mostrados en las **Fig. 4.15 y 4.16**, de la misma forma en que se obtuvieron las Tablas 4.18 y 4.19.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.15.-** Distribución de la probabilidad bivariada para el 1<sup>er</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T, 2<sup>a</sup> propuesta.



**Fig. 4.16.-** Distribución de la probabilidad bivariada para el 2<sup>o</sup> litotipo del pozo Santuario 31-T, 2<sup>a</sup> propuesta.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Las muestras del pozo Santuario 31-T corresponden a litologías de arenas de cuarzo; la diferencia entre sus tamaños de grano y la mineralogía causa cierta dispersión en los datos al analizarse globalmente como se efectuó en la primera propuesta, pero al estudiarse las litologías por separado se puede apreciar que presentan una distribución entre la porosidad y la permeabilidad más homogénea, como se considero en la segunda propuesta. A pesar de que en la primera propuesta se obtuvo un coeficiente de correlación con un valor muy cercano a uno, al ser graficarse, presentaba una dispersión en dos sentidos opuestos de la grafica señal que indicaba la presencia de más de un litotipo; esta fue una de las razones por las que fue necesaria la separación de los datos en subconjuntos.

Las características casi homogéneas del medio facilitan su análisis y estimación, pero de acuerdo al comportamiento de los datos, considerar un valor medio para la porosidad y la permeabilidad solo para después suponer estimaciones en torno a estos valores medios es un error. La dispersión de los datos debido a la diferencia de las litologías hace que la segunda propuesta de separar los datos en dos subconjuntos sea una mejor opción, en caso de que se pudieran tener más datos; estimar más de dos subconjuntos puede ser una, aun mejor opción. Pueden presentarse casos en los que no se cuente con información tan detallada como la que se tiene para este pozo como fue el caso para el pozo Agua Fria 108, en la que solo se dispuso de información de la permeabilidad de las muestras. Se recomienda tener información de al menos diez núcleos para poder estimar una distribución de probabilidad representativa.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### 4.5.- Análisis Bivariado porosidad-permeabilidad del pozo Tajín 336.

El análisis bivariado del pozo Agua Fría 108, requiere de la selección y análisis de una de las variables de porosidad o permeabilidad de los núcleos que se mencionan en la **Tabla 4.20**.

**Tabla 4.20.-** Datos de la porosidad y permeabilidad de núcleos, pozo Tajín 336.

Muestra	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)
1-1-H	5.9	<0.10
1-2-H-1	5.7	<0.10
1-2-H	<3.0	<0.10
1-3-H	<3.0	<0.10
1-4-H	3.5	0.13
1-4-H-1	<3.0	<0.10
1-5-H	6.9	<0.10
1-6-H	4.8	0.15
1-8-H-2	<3.0	<0.10
2-1-H-1	3.2	<0.10
2-2-H	3.2	0.12
2-2-H-1	5.0	0.13
2-3-H	<3.0	0.15
2-4-H	<3.0	<0.10
2-5-H	<3.0	<0.10
2-5-H-1	9.5	0.18

Muestra	Porosidad (%)	Permeabilidad (md)
3-6-H	3.7	<0.10
3-7-H	3.1	<0.10
3-8-H	3.9	0.26
3-8-H-1	5.8	0.74
3-8-H-2	<3.0	<0.10
4-1-H	4.1	<0.10
4-1-H-1	<3.0	<0.10
4-2-H	<3.0	<0.10
4-3-H	8.0	0.14
4-3-H-1	3.9	0.13
4-4-H	6.5	0.18
4-5-H	5.4	0.16
4-5-H-1	6.2	0.13
4-5-H-2	6.4	0.14
4-6-H	8.3	0.16
4-6-H-1	<3.0	<0.10

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.20.-** Datos de porosidad y permeabilidad de núcleos, pozo Tajín 336  
(Continuación)

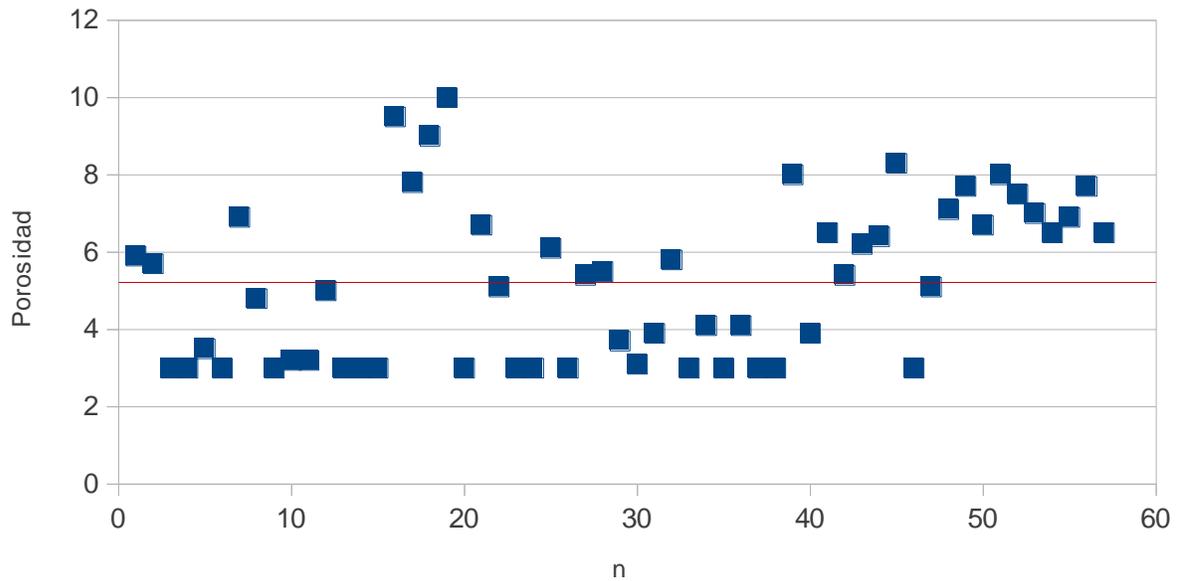
2-6-H	7.8	0.97
2-7-H	9.0	0.10
2-8-H	10.0	0.26
2-8-H-1	<3.0	<0.10
3-1-H	6.7	<0.10
3-1-H-1	<3.0	<0.10
3-2-H	<3.0	<0.10
3-3-H	6.1	0.26
3-4-H	<3.0	<0.10
3-5-H	5.4	<0.10
3-5-H-1	5.5	1.79

4-6-H-2	5.1	<0.10
6-1-H	7.1	<0.10
6-2-H	7.7	<0.10
6-3-H	6.7	<0.10
6-4-H	8.0	<0.10
6-4-H-1	7.5	<0.10
6-5-H	7.0	<0.10
6-5-H-1	6.5	<0.10
6-7-H	6.9	<0.10
6-9-H	7.7	<0.10
6-9-H-1	6.5	<0.10

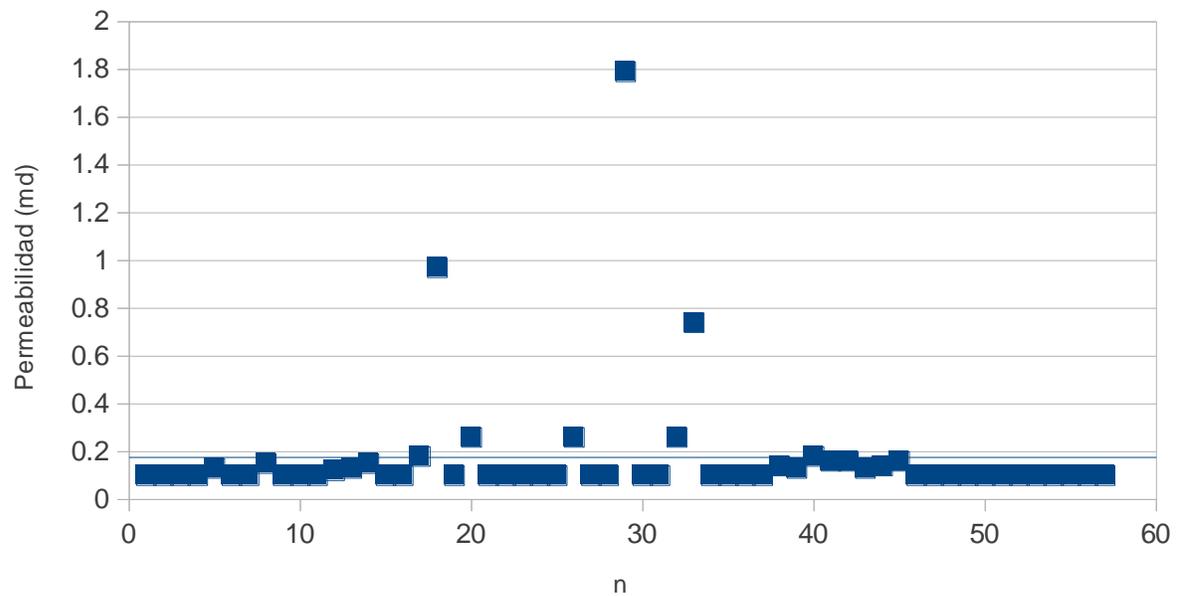
Estos datos se obtuvieron en laboratorio a condiciones de 500 lb/pg<sup>2</sup>, al igual que la mayoría de los datos que se analizan, en otros ejemplos. A diferencia de los datos del ejemplo anterior, debido al equipo de medición esta información tiene por limitante valores mínimos de medición, por lo cual no se registran valores de porosidad menores de 3 %, ni valores de permeabilidad inferiores a 0.10 md.

Se realiza un análisis individual de los parámetros de porosidad y permeabilidad, utilizando los datos de la Tabla 4.8 obteniéndose los resultados gráficos que se muestran en las **Fig. 4.17 y 4.18:**

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.17.-** Dispersión de la porosidad estimada en el pozo Tajín 336.



**Fig. 4.18.-** Dispersión de la permeabilidad en el pozo Tajín 336.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Los resultados obtenidos de las líneas de tendencia de los gráficos de dispersión anteriores se incluyen en la **Tabla 4.21**:

**Tabla 4.21.-** Datos de las líneas de tendencia de la porosidad y permeabilidad en el pozo Tajín 336.

	1 <sup>a</sup> . Propuesta	
	Porosidad	Permeabilidad
Desviación Estándar	2.04	0.18
Media	5.22	0.26

Al igual que en el caso anterior, se tienen que determinar las mejores propuestas para las líneas de tendencias; de ser necesario se trazarán más de una línea, o se tendrán que eliminar datos que presenten valores demasiado dispersos o poco representativos en comparación con el resto de los puntos. Trazar más de una línea de tendencia puede ser el caso para ambas variables pero eliminar datos de permeabilidad por ser demasiado dispersos afectaría gravemente el análisis de la porosidad.

En litotipos de baja permeabilidad la presencia de fracturas y cavidades permite el flujo de los fluidos a través del medio poroso y los valores de permeabilidad registrados por estas fracturas suelen ser muy altos en comparación con el resto de los datos, como es el caso de estos datos de permeabilidad del pozo Tajín 336 en la Fig. 4.18. La eliminación posible de datos de permeabilidad elevada, que son de hecho, los más importantes de este conjunto sería un error.

La primera propuesta que aparece en las **Tabla 4.22** y **4.23** es una distribución de probabilidad considerando todos los datos de porosidad-permeabilidad del pozo Tajín 336. La densidad de probabilidad se calcula ordenando los datos de la Tabla 4.20 de menor a mayor, para después emplear las Ec. 3.14 y 3.15, para los datos de porosidad y de permeabilidad respectivamente:



## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.22.-** Datos de densidad de probabilidad para la porosidad en el pozo Tajín 336.  
(Continuación)

3.9	0.159
3.9	0.159
4.1	0.168
4.1	0.168
4.8	0.191
5	0.194
5.1	0.195

7.7	0.093
7.8	0.088
8	0.077
8.3	0.063
9	0.035
9.5	0.022
10	0.013

**Tabla 4.23.-** Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Tajín 336.

Permeabilidad (md)	Distribución de probabilidad
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108
0.1	0.108

Permeabilidad (md)	Distribución de probabilidad
0.1	0.195
0.1	0.195
0.1	0.194
0.1	0.190
0.1	0.188
0.1	0.185
0.1	0.178
0.12	0.174
0.13	0.165

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

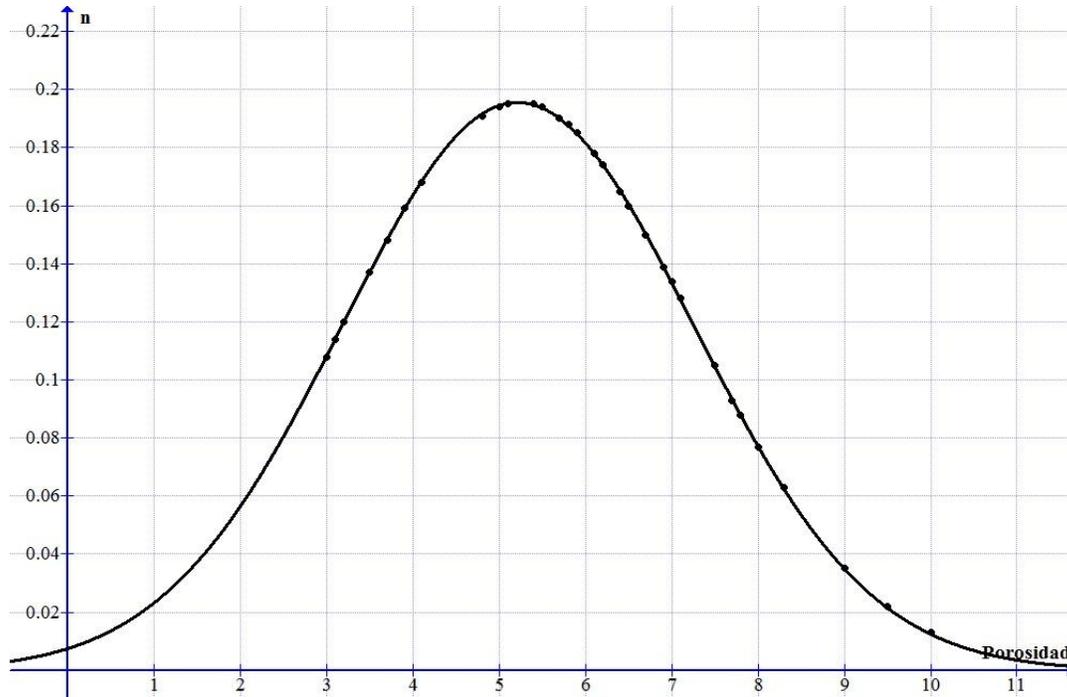
**Tabla 4.23.-** Datos de densidad de probabilidad para la permeabilidad en el pozo Tajín 336.

(Continuación)

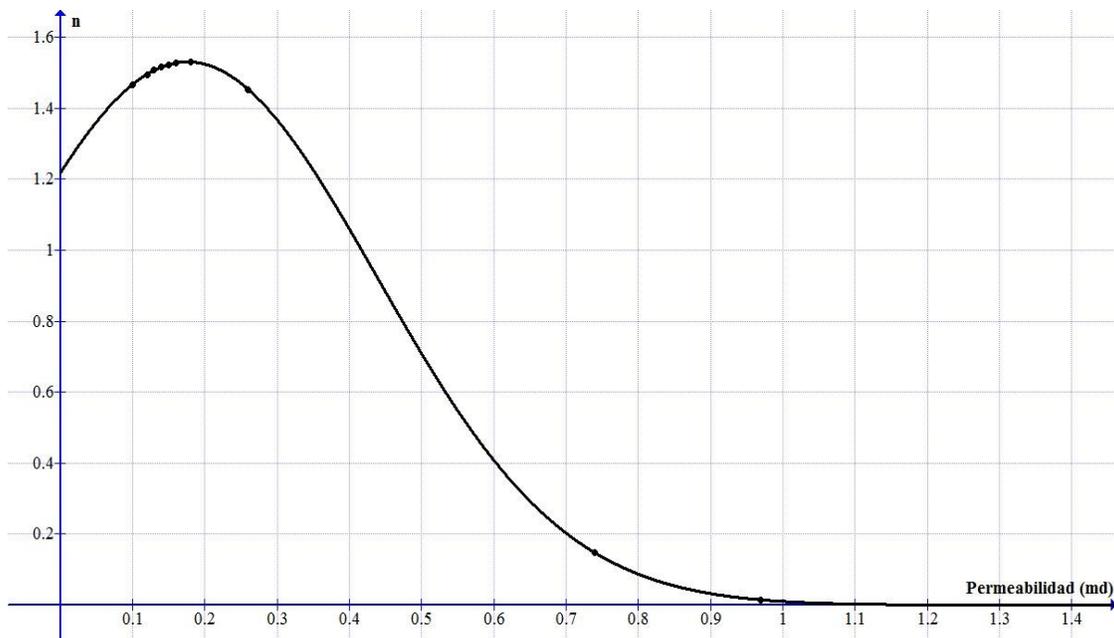
0.1	0.108	0.13	0.160
0.1	0.108	0.13	0.160
0.1	0.108	0.13	0.160
0.1	0.108	0.14	0.150
0.1	0.108	0.14	0.150
0.1	0.108	0.15	0.139
0.1	0.114	0.15	0.139
0.1	0.120	0.16	0.134
0.1	0.120	0.16	0.128
0.1	0.137	0.16	0.105
0.1	0.148	0.18	0.093
0.1	0.159	0.18	0.093
0.1	0.159	0.26	0.088
0.1	0.168	0.26	0.077
0.1	0.168	0.26	0.063
0.1	0.191	0.74	0.035
0.1	0.194	0.97	0.022
0.1	0.195	1.79	0.013

Los datos incluidos en las Tablas 4.22 y 4.23 se grafican respectivamente en las **Fig. 4.19** y **4.20**.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.19.** Distribución de probabilidad de la porosidad en el pozo Tajín 336, 1ª propuesta.



**Fig. 4.20.** Distribución de probabilidad de la permeabilidad en el pozo Tajín 336, 1ª propuesta.

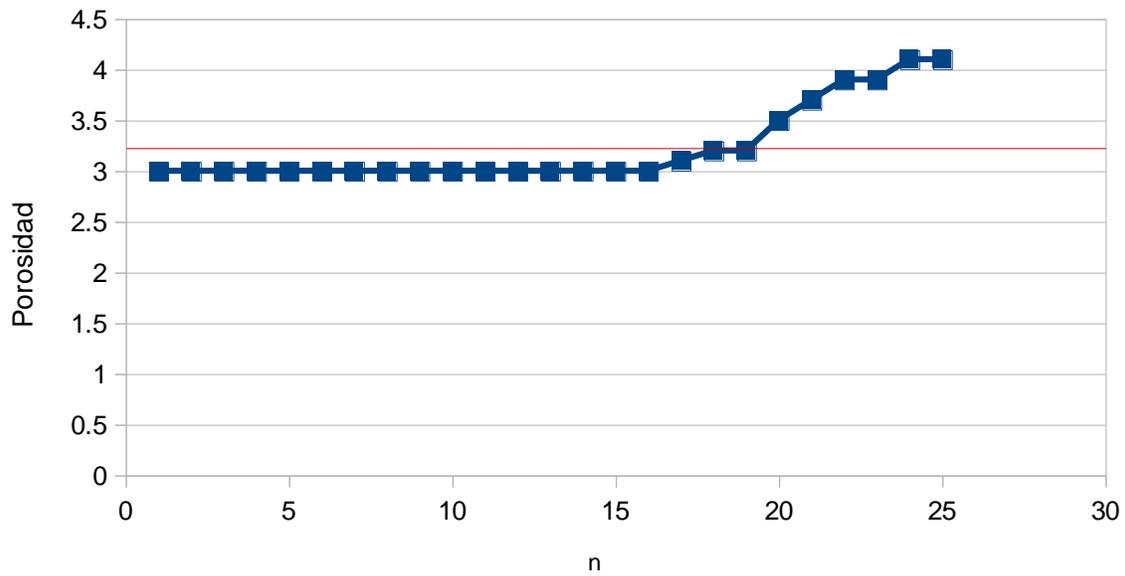
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Las figuras 4.19 y 4.20 muestran el comportamiento de la porosidad y la permeabilidad como funciones de probabilidad. Para incrementar la precisión de las estimaciones anteriores se puede realizar una segunda propuesta proveniente de la separación de los datos en subconjuntos, lo que permite determinar diferentes litotipos. La permeabilidad muestra cambios en los datos demasiado bruscos, Fig. 4.18 debido al por efecto de las fisuras y demás características de un medio heterogéneo presentes en los núcleos. La separación de los datos de permeabilidad para diferenciar litotipos presenta errores debido a estos incrementos bruscos de permeabilidad.

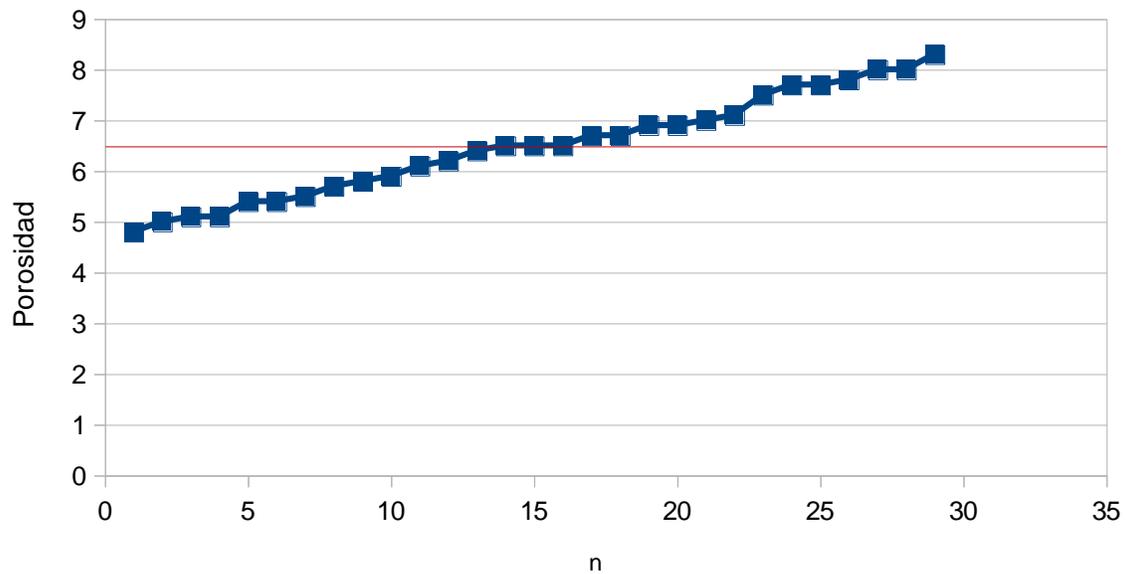
Esto no implica que utilizar los datos de porosidad en lugar de los de permeabilidad para separarlos en litotipos no provoque errores debido a anomalías en los datos, pero al menos los cambios en los datos de porosidad son menos bruscos debido a que su comportamiento es un poco más uniforme que los que se presentan normalmente para la permeabilidad.

Por observación de los datos de acuerdo a su comportamiento se sugiere separarlos de acuerdo a su porosidad en tres subconjuntos los cuales se consideran como tres litotipos.

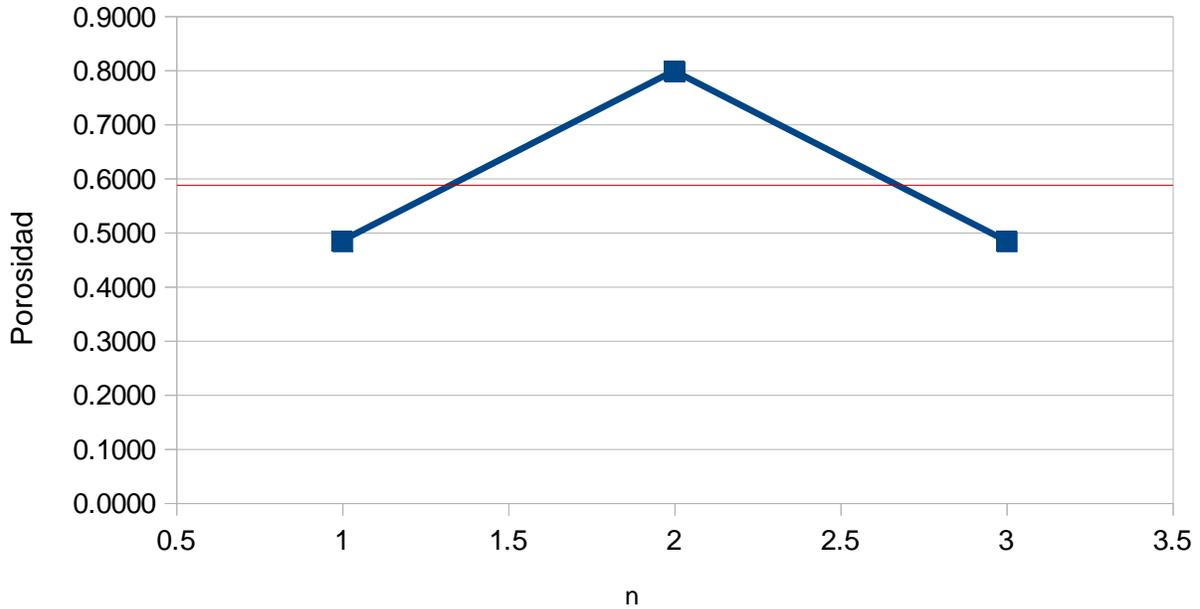
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.21.-** Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336, 1<sup>er</sup> litotipo, 2<sup>a</sup> propuesta.



**Fig. 4.22.-** Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336, 2<sup>o</sup> litotipo, 2<sup>a</sup> propuesta.



**Fig. 4.23.-** Dispersión de la porosidad en el pozo Tajín 336, 3<sup>er</sup> litotipo, 2<sup>a</sup> propuesta.

De los tres litotipos que se proponen, el tercero solo consta de tres puntos y no es lo suficientemente grande como para realizar un análisis adecuado; aunque estos datos no puedan ser analizados por separado igualmente se les separa para mejorar la correlación de los demás datos. La **Tabla 4.24** muestra la información que fue obtenida de los gráficos de dispersión de las **Fig.4.21**, **4.22** y **4.23**:

**Tabla 4.24.-** Datos de las líneas de tendencia de porosidad para la 2<sup>a</sup> propuesta del pozo Tajín 336.

	Primer litotipo	Segundo litotipo	Tercer litotipo
Media de porosidad	3.23	6.49	3.23
Desviación estándar	0.33	1.01	0.33

Se calcula la densidad de probabilidad para cada uno de los subconjuntos de porosidad con la Ec. 3.14 y con los datos obtenidos de las nuevas propuestas de tendencia de la **Tabla 4.25**:

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.25.-** Datos de densidad de probabilidad para la porosidad en el pozo Tajín 336,  
2ª propuesta.

Primer litotipo		Segudo litotipo		Tercer litotipo	
Porosidad	Densidad de probabilidad	Porosidad	Densidad de probabilidad	Porosidad	Densidad de probabilidad
3.0	0.8685	4.8	0.0974	9.0	0.4839
3.0	0.8685	5.0	0.1330	9.5	0.7979
3.0	0.8685	5.1	0.1532	10.0	0.4839
3.0	0.8685	5.1	0.1532		
3.0	0.8685	5.4	0.2206		
3.0	0.8685	5.4	0.2206		
3.0	0.8685	5.5	0.2443		
3.0	0.8685	5.7	0.2909		
3.0	0.8685	5.8	0.3128		
3.0	0.8685	5.9	0.3330		
3.0	0.8685	6.1	0.3666		
3.0	0.8685	6.2	0.3790		
3.0	0.8685	6.4	0.3934		
3.0	0.8685	6.5	0.3950		
3.0	0.8685	6.5	0.3950		
3.0	0.8685	6.5	0.3950		
3.1	0.9789	6.7	0.3865		

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

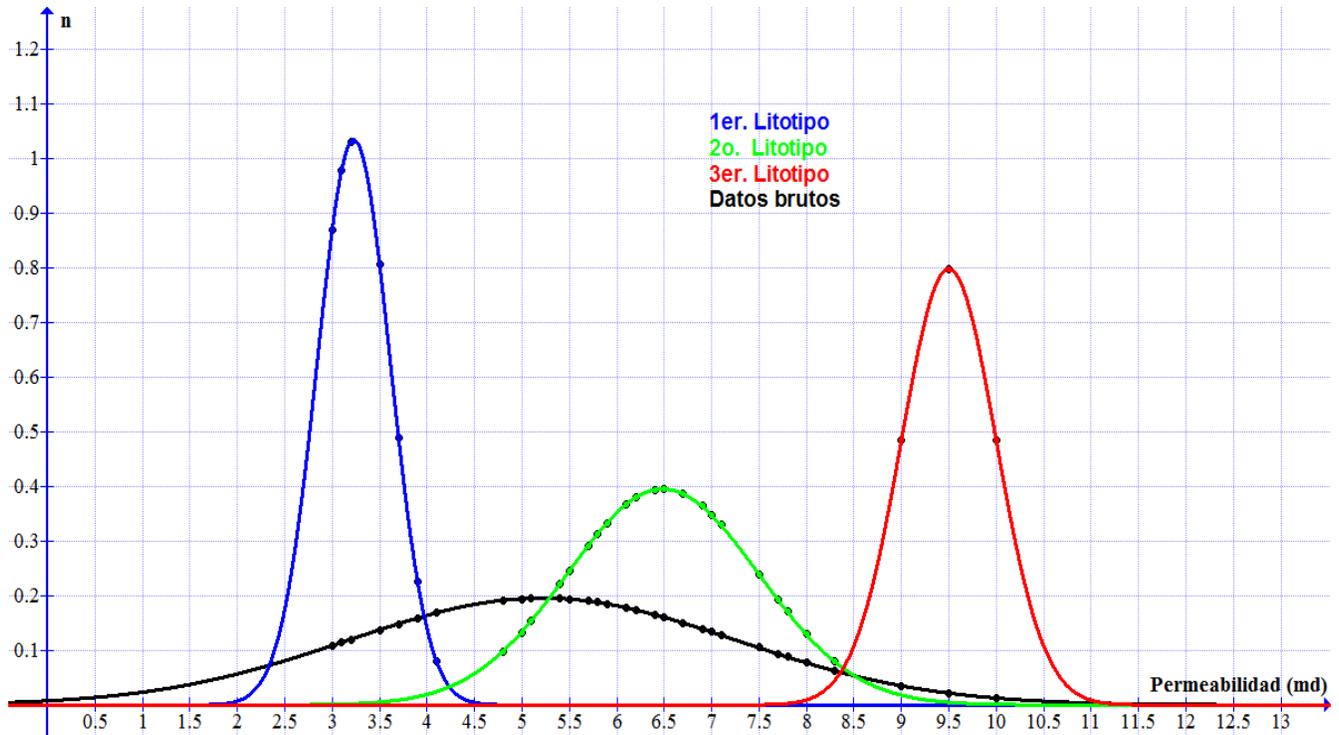
**Tabla 4.25.-** Datos de densidad de probabilidad para la porosidad en el pozo Tajín 336, 2ª propuesta. (Continuación)

3.2	1.0316
3.2	1.0316
3.5	0.8066
3.7	0.4892
3.9	0.2267
3.9	0.2267
4.1	0.0803
4.1	0.0803

6.7	0.3865
6.9	0.3638
6.9	0.3638
7.0	0.3477
7.1	0.3291
7.5	0.2396
7.7	0.1927
7.7	0.1927
7.8	0.1703
8.0	0.1292
8.0	0.1292
8.3	0.0793

En la **Fig. 4.24**, con la Información de las Tabla 4.24 y 4.25 se grafican las tres distribuciones de probabilidad que conforman la segunda propuesta y se compara con los datos de la Tabla 4.23, que conforman la primera propuesta

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.24.-** Densidad de probabilidad de la porosidad en el pozo Tajín 336, 2ª propuesta.

La segunda propuesta separa los datos de acuerdo a su magnitud; sin embargo la calidad reducida de la información con la que se cuenta (no hay datos de menos de tres por ciento de porosidad) y la disparidad con respecto a los datos de permeabilidad debido a fisuras en los núcleos, complican la extrapolación del análisis efectuado con base en la porosidad a los datos de permeabilidad. Se propone continuar con análisis basado en la primera propuesta.

De manera similar que en el ejemplo anterior para el pozo Santuario 31-T. Se calcula el factor de correlación  $\rho$  ordenando los rangos datos de acuerdo a los datos de porosidad asignando un número a cada dato para después emplear la Ec. 4.11, como se muestra en la **Tabla 4.13**.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.26.-** Diferencia entre los rangos ordenados de las variables de porosidad y permeabilidad, pozo Tajín 336.

Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Porosidad ( <i>i</i> )	Permeabilidad ( <i>j</i> )	d	d <sup>2</sup>
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.10	8.5	19.0	10.5	110.25
3.0	0.13	8.5	40.5	32.0	1024.00
3.0	0.14	8.5	43.5	35.0	1225.00
3.0	0.15	8.5	45.5	37.0	1369.00
3.0	0.26	8.5	53.0	44.5	1980.25
3.0	0.26	8.5	53.0	44.5	1980.25
3.0	0.74	8.5	55.0	46.5	2162.25
3.1	0.10	17.0	19.0	2.0	4.00
3.2	0.10	18.5	19.0	0.5	0.25
3.2	0.10	18.5	19.0	0.5	0.25

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.26.-** Diferencia entre los rangos ordenados de las variables porosidad-permeabilidad, para el Pozo Tajín 336.

(Continuación)

3.5	0.13	20.0	40.5	20.5	420.25
3.7	1.79	21.0	57.0	36.0	1296.00
3.9	0.10	22.5	19.0	-3.5	12.25
3.9	0.18	22.5	50.5	28.0	784.00
4.1	0.10	24.5	19.0	-5.5	30.25
4.1	0.10	24.5	19.0	-5.5	30.25
4.8	0.15	26.0	45.5	19.5	380.25
5.0	0.12	27.0	38.0	11.0	121.00
5.1	0.10	28.5	19.0	-9.5	90.25
5.1	0.10	28.5	19.0	-9.5	90.25
5.4	0.10	30.5	19.0	-11.5	132.25
5.4	0.16	30.5	48.0	17.5	306.25
5.5	0.10	32.0	19.0	-13.0	169.00
5.7	0.10	33.0	19.0	-14.0	196.00
5.8	0.26	34.0	53.0	19.0	361.00
5.9	0.10	35.0	19.0	-16.0	256.00
6.1	0.10	36.0	19.0	-17.0	289.00
6.2	0.13	37.0	40.5	3.5	12.25
6.4	0.14	38.0	43.5	5.5	30.25
6.5	0.10	40.0	19.0	-21.0	441.00

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.26.-** Diferencia entre los rangos ordenados de las variables porosidad-permeabilidad, para el Pozo Tajín 336.

(Continuación)

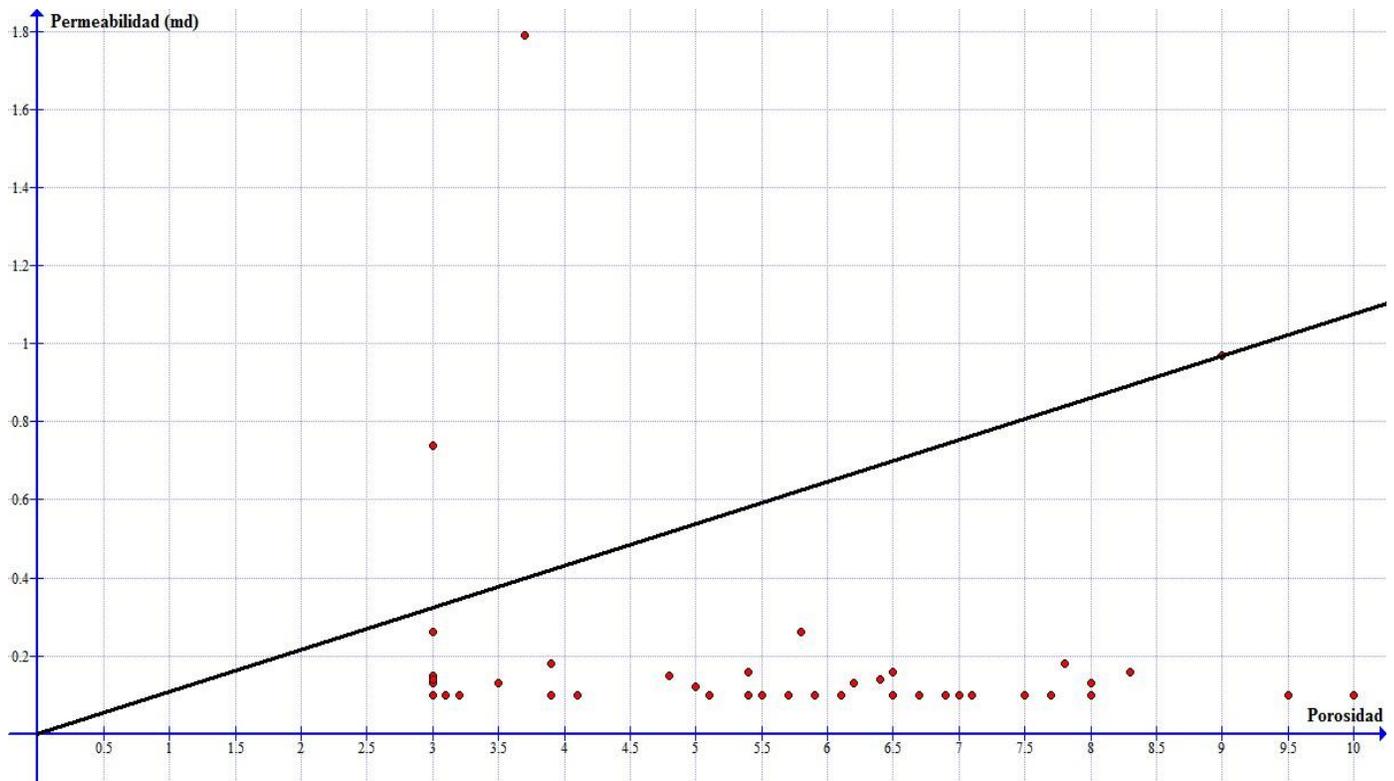
6.5	0.10	40.0	19.0	-21.0	441.00
6.5	0.16	40.0	48.0	8.0	64.00
6.7	0.10	42.5	19.0	-23.5	552.25
6.7	0.10	42.5	19.0	-23.5	552.25
6.9	0.10	44.5	19.0	-25.5	650.25
6.9	0.10	44.5	19.0	-25.5	650.25
7.0	0.10	46.0	19.0	-27.0	729.00
7.1	0.10	47.0	19.0	-28.0	784.00
7.5	0.10	48.0	19.0	-29.0	841.00
7.7	0.10	49.5	19.0	-30.5	930.25
7.7	0.10	49.5	19.0	-30.5	930.25
7.8	0.18	51.0	50.5	-0.5	0.25
8.0	0.10	52.5	19.0	-33.5	1122.25
8.0	0.13	52.5	40.5	-12.0	144.00
8.3	0.16	54.0	48.0	-6.0	36.00
9.0	0.97	55.0	56.0	1.0	1.00
9.5	0.10	56.0	19.0	-37.0	1369.00
10.0	0.10	57.0	19.0	-38.0	1444.00
$\Sigma$					27536.50

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

El pozo Tajín 336 presenta cierta repetición en los datos de porosidad y permeabilidad por lo que asignar un número ordenado a cada dato se vuelve más complicado que en el ejemplo anterior del pozo Santuario 31-T, donde ningún dato de porosidad o permeabilidad se repetía. El método que se aplica para determinar el rango de la porosidad ( $i$ ) y la permeabilidad ( $j$ ) es sumar y promediar los valores ordenados cuando los datos de porosidad y permeabilidad se repitan y asignar ese valor promediado a todos los datos con el valor repetido, por lo que, como se ve en la Tabla 4.26 también se tienen valores de porosidad ( $i$ ) y permeabilidad ( $j$ ) repetidos. Aplicando la Ec. 4.11 a los datos de la Tabla 4.26 se tiene:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum d^2 = 1 - \frac{6}{57(57^2 - 1)} (2736.5) = 0.1075$$

Este valor de 0.1075 representa la correlación entre los datos. En la **Fig. 4.25** este valor se graficó como una pendiente que atraviesa el origen, en una gráfica de porosidad contra permeabilidad.



**Fig. 4.25.-** Factor de correlación para los datos del pozo Tajín 336.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Los datos del pozo Tajín 336 presentan un factor de correlación muy bajo considerando una escala de cero a uno, debido a cierta inexactitud en la medición de los datos de baja permeabilidad y baja porosidad. A pesar de esto sigue presentándose cierta relación positiva entre la porosidad y la permeabilidad.

Con los datos de la Tabla 4.21 se modificó la Ec. 3.11 para obtener la función representativa de la permeabilidad y porosidad del pozo Tajín 336.

$$f(\phi, k) = \frac{1}{2.2938} e^{-0.5058 \left[ \left( \frac{\phi - 5.22}{2.04} \right)^2 - 0.215 \left( \frac{\phi - 5.22}{2.04} \right) \left( \frac{k - 0.26}{0.18} \right) + \left( \frac{k - 0.26}{0.18} \right)^2 \right]} . \quad (4.36)$$

La Ec. 4.36 es una función de probabilidad que se usa para determinar condiciones de permeabilidad a condiciones específicas de porosidad. A partir de una integral doble definida señalando los parámetros de porosidad-permeabilidad que se requieran determinar tal como se hizo para el pozo Santuario 31-T.

Ahora ya que se ha calculado el factor de correlación  $\rho$ , se aplica la Ec. 4.36 al conjunto de datos de la Tabla 4.20 y 4.21, para determinar en la **Tabla 4.27** la distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.27.-** Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336.

Porosidad (%)	Permeabilidad (md)	Densidad de probabilidad
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.10	0.1641
3.0	0.13	0.1664
3.0	0.14	0.1667
3.0	0.15	0.1667
3.0	0.26	0.1512
3.0	0.26	0.1512
3.0	0.74	0.0120
3.1	0.10	0.1727
3.2	0.10	0.1813
3.2	0.10	0.1813
3.5	0.13	0.2103

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.27.-** Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336.  
(Continuación)

3.7	1.79	0.0000
3.9	0.10	0.2381
3.9	0.18	0.2433
4.1	0.10	0.2518
4.1	0.10	0.2518
4.8	0.15	0.2936
5.0	0.12	0.2928
5.1	0.10	0.2881
5.1	0.10	0.2881
5.4	0.10	0.2861
5.4	0.16	0.2988
5.5	0.10	0.2840
5.7	0.10	0.2779
5.8	0.26	0.2766
5.9	0.10	0.2694
6.1	0.10	0.2585
6.2	0.13	0.2609
6.4	0.14	0.2492
6.5	0.10	0.2313
6.5	0.10	0.2313
6.5	0.16	0.2448

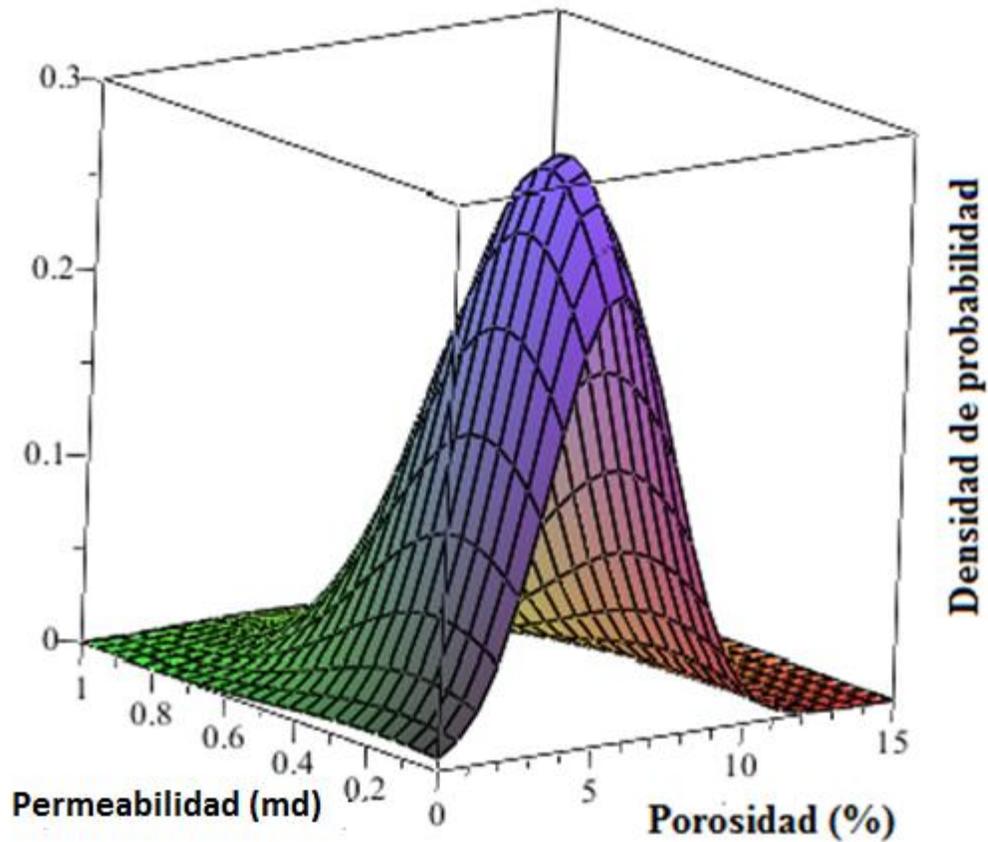
## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla 4.27.-** Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336.  
(Continuación)

6.7	0.10	0.2156
6.7	0.10	0.2156
6.9	0.10	0.1991
6.9	0.10	0.1991
7.0	0.10	0.1906
7.1	0.10	0.1820
7.5	0.10	0.1478
7.7	0.10	0.1312
7.7	0.10	0.1312
7.8	0.18	0.1342
8.0	0.10	0.1079
8.0	0.13	0.1128
8.3	0.16	0.0939
9.0	0.97	0.0009
9.5	0.10	0.0291
10.0	0.10	0.0167

De la función de probabilidad de la Ec. 4.36 se grafica la **Fig. 4.26** como la superficie que representa el comportamiento de la porosidad y la permeabilidad junto con un valor de probabilidad. Los valores de probabilidad más altos están ubicados en los puntos más altos de la superficie de manera análoga a como se mostraba para los análisis univariados.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. 4.26.-** Distribución de probabilidad bivariada para el pozo Tajín 336, 1ª propuesta.

El tratar de separar los datos en subconjuntos solo empeora la correlación de la porosidad con respecto a la permeabilidad. En estos casos se emplea la primera propuesta y la estimación bivariada se hace también siguiendo una propuesta basada en todos los datos. Como ya se estableció previamente, en medios fracturados los núcleos con datos de permeabilidades anormales son los más representativos del flujo y por lo tanto los que menos se deben de despreciar. Aunque se tengan valores anormales de permeabilidad sumamente bajos.

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## **Apéndice A.- Análisis de medios porosos fracturados.**

### **A.1.- Heterogeneidad.**

La estimación de la variabilidad puede aplicarse al análisis de las propiedades de los yacimientos, la propiedad que más afecta el flujo, la permeabilidad es la propiedad que más variabilidad presenta. En las geociencias relacionadas a la extracción del petróleo, el análisis de la variabilidad o heterogeneidad está casi exclusivamente relacionada a la permeabilidad.

Informalmente se usa el concepto de variabilidad como sinónimo de la heterogeneidad. En la caracterización de yacimientos se emplea el concepto de heterogeneidad para representar las variaciones que afectan el flujo de los fluidos; la heterogeneidad puede medirse en dos formas: dinámicamente mediante mediciones experimentales de las condiciones de flujo para obtener una relación entre el flujo y la distorsión de esas mediciones, ocasionada por el medio poroso, o estáticamente usando la información de las mediciones experimentales de los datos, para aplicar un modelo que represente el comportamiento de la heterogeneidad. En este capítulo se emplea un método de medición estático para obtener un valor de la heterogeneidad para un medio poroso fracturado.

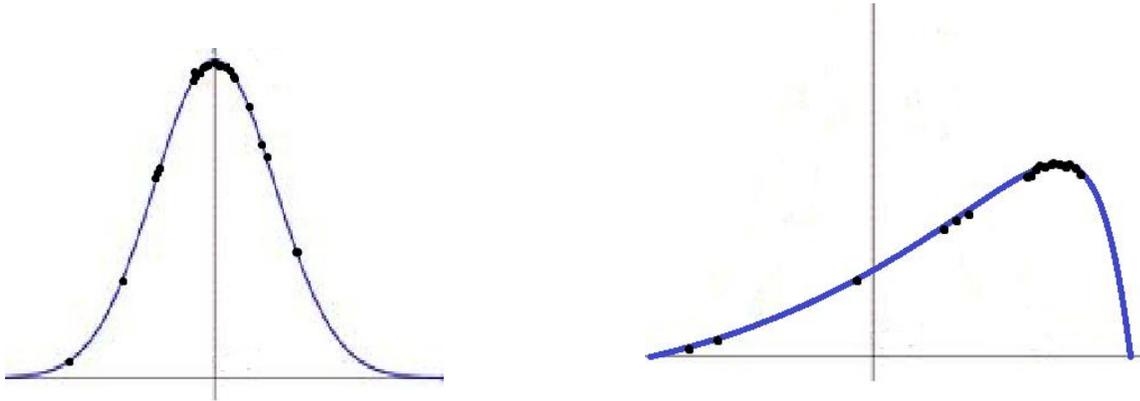
### **A.2.- Fracturas como una distribución de probabilidad discreta.**

Los medios porosos fracturados presentan valores para la permeabilidad y porosidad anormales en comparación con otros medios; el comportamiento de estas dos propiedades de la formación al representarse como una distribución de probabilidad se diferencian al de una distribución normal, como se mostró anteriormente en esta tesis.

El comportamiento de los datos entre los medios porosos fracturados y los no fracturados al momento de cuantificar su porosidad y permeabilidad se diferencian, mientras que en los medios porosos no fracturados la media, mediana y moda se encuentra distribuidas en el mismo punto **Fig. A.1** (izquierda); en medios porosos fracturados estos parámetros

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

estadísticos se localizan en diferentes puntos del espacio muestral



**Fig. A.1.-** Distribución de las mediciones en el espacio muestral.

El comportamiento para la permeabilidad que se aprecia en la parte derecha de la figura anterior indica que esta propiedad se ve afectada por la presencia de fracturas, mientras que en la izquierda se muestra una distribución de probabilidad de permeabilidad para un medio poroso homogéneo (sin fracturas). La porosidad a diferencia de la permeabilidad no se ve tan afectada por las fracturas; por lo que el método que se discutirá a continuación para medios porosos fracturados, está orientado hacia el análisis de la permeabilidad.

Un medio poroso fracturado es diferente de otros medios porosos; es decir, no existen dos fracturas iguales, por lo que para describir una función que exprese el comportamiento de una fractura es necesario, primero obtener mediciones de los valores de permeabilidad de este medio poroso. Se propone utilizar la distribución de Poisson como la distribución discreta para representar formaciones fracturadas, debido a que la función de Poisson representa la ocurrencia de una serie de eventos para una frecuencia media. Se considera la frecuencia media como la presencia de permeabilidades altas debido a las fracturas y cada núcleo cortado como un evento, La Ec. A.1 expresa esta función:

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad (\text{A.1})$$

Donde  $\lambda$  es el número de veces que el valor de permeabilidad se repite es decir la moda, y  $k$  es la permeabilidad, considerada en esta función como una variable aleatoria. Tanto el valor esperado como la varianza de una variable aleatoria con distribución de Poisson son iguales a  $\lambda$ . La distribución de Poisson (o de los sucesos raros), considera los sucesos con una muy baja probabilidad de ocurrir, como límites de una función; en particular, el paso de fluidos a través de un medio poroso. La siguiente ecuación es el límite de la función de poisson

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad (\text{A.2})$$

La Ec. A.2 representa el límite de una función binomial; en este tipo de funciones los sucesos se repiten de manera indefinida como podría ser para un caso ideal en el que se tengan  $n$  cantidad de núcleos cortados pero las probabilidades de éxito representadas por  $X_n$  son muy bajas en una sucesión de  $n$  eventos infinitos, el éxito en esta función es la presencia de valores altos de permeabilidad. La magnitud de estos valores altos de permeabilidad está determinada por la magnitud de la moda, es decir valores más altos que la moda. En la Ec. A.2  $p$  y  $q$  representan el éxito de los sucesos poco probables y la probabilidad de ese éxito respectivamente. Se desarrolla de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \quad (\text{A.3})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{n^k} \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}, \quad (\text{A.4})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n = k] = f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}. \quad (\text{A.5})$$

donde la función binomial de la Ec. A.4 converge a función exponencial, como se observa en la Ec. A.1.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### **A.3.- Análisis de permeabilidad para la formación Cretácico Superior de Cantarell**

El conjunto de datos de la Tabla A.1 se estimaron por medio de estudios de laboratorio en muestras de diámetro completo (MDC, o grandes), con dimensiones típicas de 4.5" de diámetro por 6-7" de longitud, obtenidas de núcleos de diferentes pozos del Activo Cantarell, todos pertenecientes al Cretácico Superior. Estos datos se midieron en el laboratorio a condiciones de presión de confinamiento de 500 lb/pg<sup>2</sup>.

**Tabla A.1.-** Datos de porosidad y permeabilidad de núcleos del yacimiento Cantarell

	Pozo	Muestra	Permeabilidad horizontal (md)	Porosidad absoluta (%)
1	Cantarell 67	17	6.14	28.65
2	Cantarell 1035	9	33	12.9
3	Cantarell 1046D	15 A	32.2	13.7
4	Cantarell 1062	1	8.8	12.6
5	Cantarell 1062	2	8	13.38
6	Cantarell 1062	3	11	13.07
7	Cantarell 2052	18	0.051	23.08
8	Cantarell 2067	6	264.1	18.21
9	Cantarell 2067	8	183.4	20.65
10	Cantarell 2074	2	240	5.85
11	Cantarell 219C	6	14.1	22.6
12	Cantarell 2277	2	125	10.32
13	Cantarell 3001	16	36.8	11.85

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla A.1.-** Datos de porosidad y permeabilidad de núcleos del yacimiento Cantarell  
(continuación)

14	Cantarell 3001	28-sup	0.022	10.23
15	Cantarell 3002	1-sup	21.7	22.68
16	Cantarell 3002	1-inf	35.4	21.01

Para representar los datos de permeabilidad de la tabla anterior como una función de densidad de probabilidad, es necesario determinar la moda de estos datos; primero se agrupan los datos en periodos que indiquen la frecuencia según su magnitud de permeabilidad; para un conjunto de datos como el anterior en el que la permeabilidad oscila entre 0.022 md y 264 md, no es posible delimitar periodos de igual longitud, debido a que oscilan demasiado entre extremos de muy baja y alta permeabilidad. La moda ( $\lambda$ ) está determinada en la Ec. A.2 por:

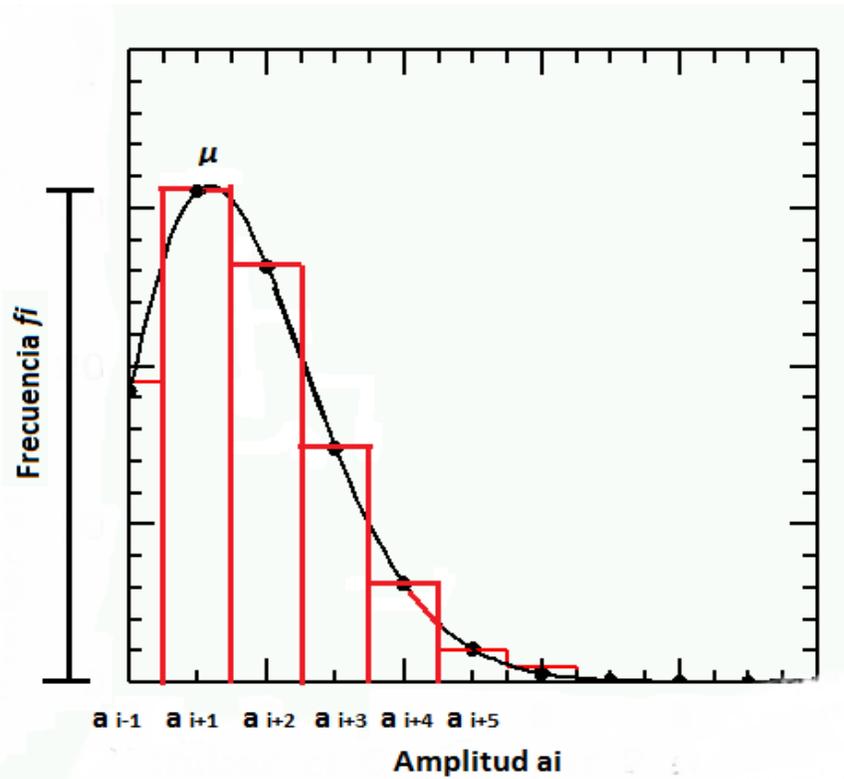
$$\lambda = L_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{(h_i - h_{i-1}) + (h_i - h_{i+1})} a_i , \quad (\text{A.6})$$

donde  $L_i$  es el límite inferior del periodo de la moda,  $h_i$  indica la altura que estamos analizando así como  $h_{i-1}$  es la altura del periodo inferior,  $h_{i+1}$  es la altura del periodo superior y  $a_i$  es la amplitud del periodo. La altura está determinada por la Ec. A3

$$h_i = \frac{f_i}{a_i} . \quad (\text{A.7})$$

donde  $f_i$  es la frecuencia (el número de veces) que se repite un valor de permeabilidad en el periodo que se está analizando. La frecuencia, amplitud y altura indican el comportamiento de los datos, son parámetros estadísticos adimensionales. La **Fig. A.2** muestra gráficamente la frecuencia y amplitud para una serie de intervalos.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. A.2.-** Frecuencia y amplitud para los intervalos de permeabilidad

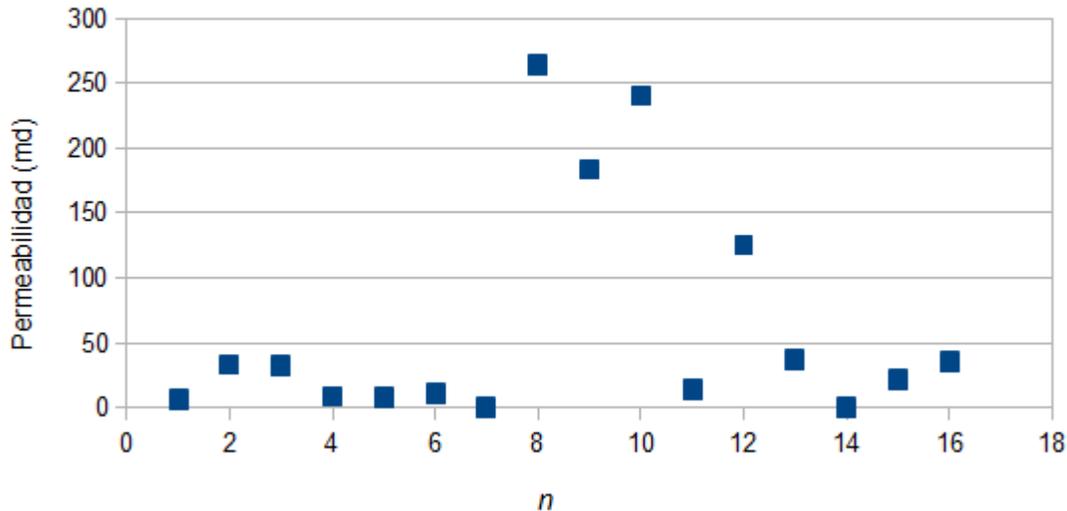
La **Tabla A.2** muestra los periodos, frecuencias y amplitudes del conjunto de datos de la Tabla A.1.

**Tabla A.2.-** Periodos, frecuencia y Amplitud de los datos de permeabilidad de núcleos de Cantarell.

Periodos md	Frecuencia $f_i$	Amplitud $a_i$	Altura $h_i$
0 – 1	2	1	2.00
1 – 10	3	9	0.33
10 – 100	7	90	0.08
100 – 1000	4	900	0.00

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Debido a la gran dispersión que presentan los datos de permeabilidad, los periodos se representaron en intervalos logarítmicos de base diez, como se muestra en la **Fig. A.2**.



**Fig. A.3.-** Dispersión de la permeabilidad para la formación Cretácico Superior del yacimiento Cantarell

Con los datos de la Tabla A.2 y la Ec. A.2 se determina la moda para los datos de permeabilidad de los núcleos de los pozos yacimiento Cantarell.

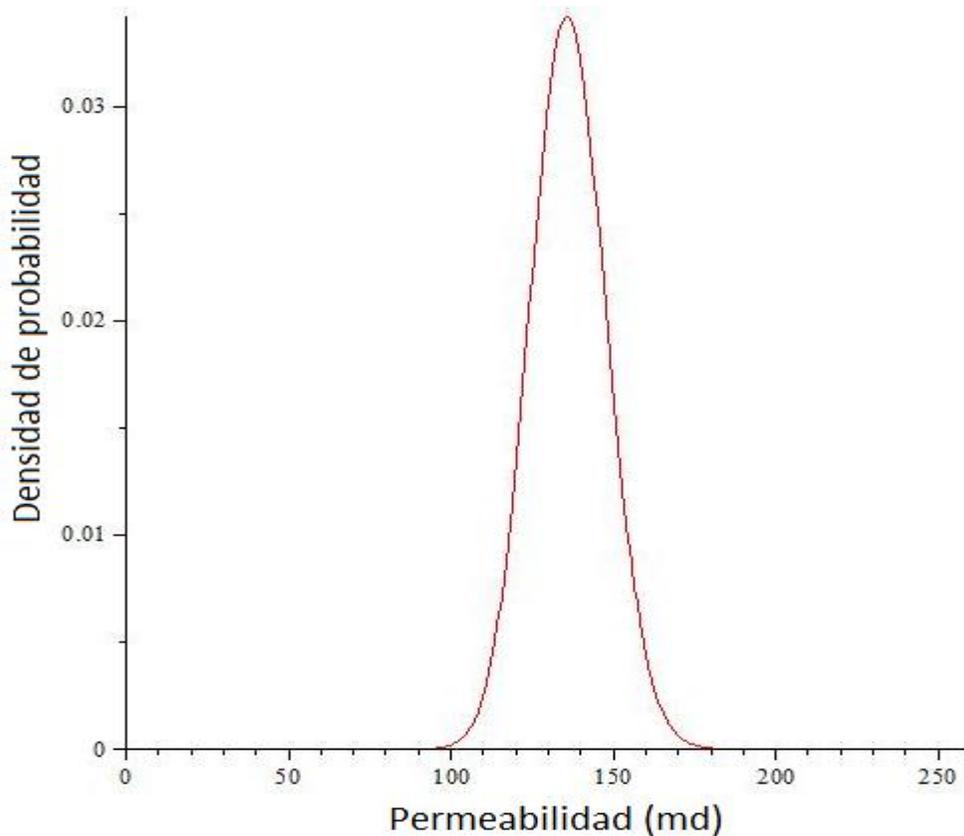
$$\lambda = 10 + \frac{0.08 - 0.33}{(0.08 - 0.33) + (0.08 - 0.00)} * 90 = 136.21 \text{ md.}$$

Con la moda y la Ec. A.1 se puede escribir la función distribución de probabilidad para los datos de la Tabla A.1:

$$f(k) = \frac{e^{-136.21} 136.21^k}{k!} . \tag{A.8}$$

La función de la Ec. A.4, se muestra en la **Fig. A.4** y en los datos de la **Tabla A.3**:

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. A.4.-** Distribución de probabilidad de la permeabilidad estimada empleando experimentos de laboratorio, obtenidos en pozos del yacimiento Cantarell

La distribución de Poisson se emplea para conjuntos de datos con una gran dispersión por lo que no es necesario el cálculo de la desviación estándar; es decir, ya se considera como un hecho la oscilación de los datos. Para casos de medios fracturados la permeabilidad depende solo de las características de la muestra de la formación analizada, información que indica en qué lado del extremo de la gráfica oscila, la permeabilidad (el lado menor o mayor de la gráfica).

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Tabla A.3.-** Datos de la densidad de probabilidad para los núcleos del yacimiento Cantarell.

Permeabilidad	Densidad de probabilidad
0.022	7.8147E-60
0.051	9.1483E-60
6.14	9.3971E-50
8	2.0370E-47
8.8	1.8064E-46
11	5.2010E-44
14.1	7.5281E-41
21.7	3.2183E-34
32.2	6.9231E-27
33	2.1469E-26
35.4	5.7198E-25
36.8	3.6013E-24
125	0.0221
183.4	1.8670E-5
240	2.8098E-16
264.1	9.8005E-23

Por ejemplo, basándose en la información de la Tabla A.1, se tienen cuatro datos con valores de permeabilidad mayores de 100 md de un conjunto de dieciséis datos; se puede determinar la probabilidad de que se presenten valores de permeabilidad de más de 100 md durante la explotación del yacimiento, empleando la Ec. A.1:

$$prob(> 100md) = \int_{100}^{\infty} \frac{e^{-13621} 136.21^k}{k!} dk \quad , \quad (A.9)$$

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Debido a la complejidad que implica integrar una función con una variable factorial, lo recomendable es representar la integral como una serie de sumas de Riemann donde se trazan un número finito de rectángulos dentro de un área irregular, para calcular el área de cada uno de los rectángulos y sumarlos.

$$prob(> 100md) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-13621} 136.21^{k_i}}{k_i!} ; \quad (A.10)$$

donde según la serie infinita de valores de permeabilidad:

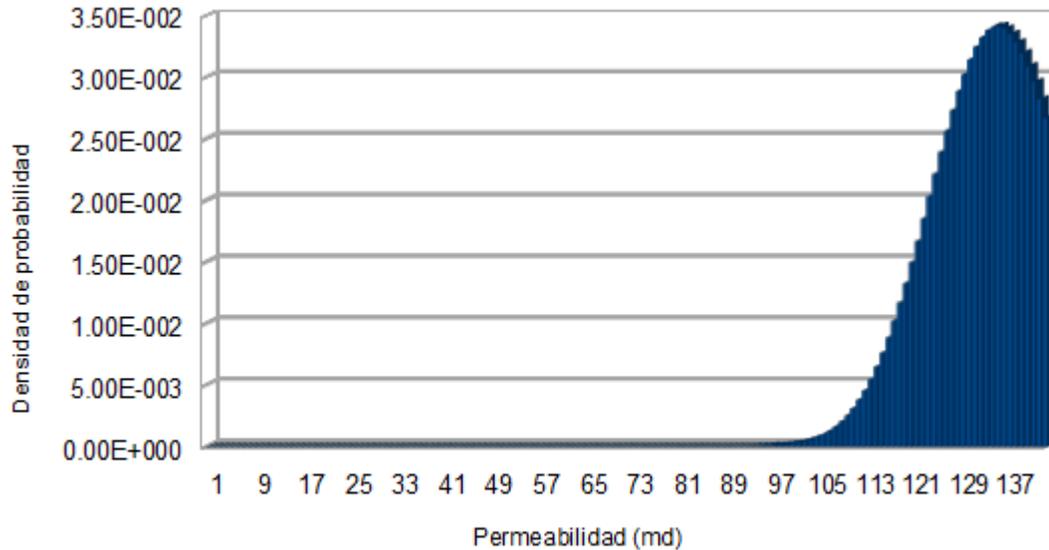
$$prob(> 100md) = \sum \left( \frac{e^{-13621} 136.21^{101}}{101!} + \frac{e^{-13621} 136.21^{102}}{102!} + \frac{e^{-13621} 136.21^{103}}{103!} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{e^{-13621} 136.21^{\infty}}{\infty!} \right) ; \quad (A.11)$$

mientras más cercano sea el valor de la variable permeabilidad a la moda de 136.21 md, más alto será el valor de probabilidad. La función converge en el punto en el que los valores de permeabilidad son tan grandes, que la existencia de estas mediciones es tan improbable que da como resultado una convergencia a cero.

$$\frac{e^{-13621} 136.21^{\infty}}{\infty!} \cong 0. \quad (A.12)$$

El efecto de convergencia descrito anteriormente para los valores altos de permeabilidad, se presenta similarmente para los valores más bajos; este efecto de convergencia se muestra en la **Fig. A.5**:

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad



**Fig. A.5.-** Función de probabilidad para los valores de permeabilidad de la formación Cretácico Superior de Canterell, como una serie de sumas de Riemann.

Realizando la suma de la Ec. A.7 se tiene que:

$$prob(> 100md) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-13621} 136.21^{k_i}}{k_i!} = 0.9993 \text{ .}$$

Considerando que en el conjunto de datos de la Tabla A.1 solo se tienen cuatro de dieciséis datos con permeabilidad de más de 100 md, una probabilidad de 99.93 % es un valor bastante alto; estos datos son tan grandes que eclipsan a los de baja permeabilidad. Es típico en yacimientos de carbonatos fracturados que la producción principalmente se dé a través de las fracturas, y que estas propicien valores altos de permeabilidad. Esta probabilidad de 99.93 % de que se presenten valores mayores de 100 md en formaciones fracturadas es creíble; si se contara con más datos de núcleos podría precisarse esta estimación, pero lo más probable es que no bajaría de 90%.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

### **Conclusiones**

1.- El incremento de la porosidad provoca un aumento de la permeabilidad de forma casi lineal en todos los tipos litologías, pero la presencia de fracturas y fallas genera datos con baja porosidad y alta permeabilidad, que se alejan de esta linealidad. Por lo tanto el método propuesto en esta tesis puede generar errores en litologías con baja porosidad y una alta presencia de fracturas, como pueden ser el caso de yacimientos carbonatados.

2.- Cuando el conjunto de datos que se tiene deba separarse en subconjuntos, se dará preferencia al grafico de dispersión de la porosidad, debido a que el comportamiento de la porosidad es más uniforme que el de la permeabilidad. La medición de la permeabilidad se ve fuertemente afectada por las fracturas y fallas, mientras que estas casi no afectan la medición de la porosidad para la mayoría de los casos.

3.- Un factor de correlación alto permite determinar el valor medio con mayor precisión; es decir, estimar el valor más probable y también los rangos de los resultados con mayor precisión. Un factor de correlación bajo reduce la precisión al estimar los valores medios para la porosidad y la permeabilidad, pero esto no indica que la discretización de los datos sea equivocada; aun así se puede determinar un rango de resultados de porosidad y permeabilidad.

4.- La razón por la que se separan los datos en subconjuntos, es para obtener estimaciones más precisas de las muestras con condiciones de porosidad y permeabilidad similares, pero no necesariamente iguales. Estos subconjuntos son catalogan como litotipos con características litológicas similares.

5.- El separar los datos de acuerdo a su porosidad y permeabilidad para clasificarlos como litotipos, puede generar errores debido a que gran parte de la separación se realiza mediante observación de los datos, principalmente cuando no se tiene información sobre la litología de las muestras.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

No hay una regla general referente a cuantos datos se requieren para realizar un análisis para algún litotipo. Yacimientos con características de porosidad y permeabilidad homogéneas pueden analizarse con una información menor a la que se requeriría para un yacimiento heterogéneo, aun así se recomienda no trabajar con menos de diez datos para cualquier litotipo debido a lo poco representativa que pudiera resultar una información reducida.

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## Glosario

**Asimetría.-** Es la falta de simetría entre los datos de una distribución. El concepto de asimetría se refiere a si la curva que forman los valores de la serie presenta la misma forma a la izquierda y derecha de un valor central (media aritmética).

**Curva normal.-** También denominada curva o campana de Gauss, en honor al matemático alemán Karl Friedrich Gauss. La curva normal es una distribución simétrica de mediciones, con el mismo número de casos a distancias específicas tanto por debajo como por encima de la media.

Su media es el punto debajo del cual cae exactamente el 50% de los casos y sobre el que se encuentra el otro 50%. En estas distribuciones la media, mediana y la moda son valores idénticos. En una curva normal la mayoría de los casos se concentran alrededor de la media.

**Distribución bidimensional.-** Es la disposición de la frecuencia de dos variables de cada elemento de la población. Por ejemplo: peso y altura de un grupo de estudiantes o en el caso de esta tesis porosidad y permeabilidad en un medio poroso.

Sea una población donde se estudia simultáneamente dos características  $x$  e  $y$ , se representa genéricamente como  $(x_i, y_j, n_{ij})$ , donde  $x_i, y_j$ , son dos valores cualesquiera y  $n_{ij}$  es la frecuencia absoluta de los valores  $x$  e  $y$ .

**Distribución normal o curva normal,-** Llamada también como distribución de Gauss, es la distribución de probabilidad más utilizada en estadística y teoría de probabilidad. Esto se debe a dos razones:

1.- Su función de densidad es simétrica y con forma de campana lo que favorece su aplicación como modelo a gran número de variables.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

2.- Es además límite de otras distribuciones y aparece relacionada con resultados ligados a la teoría de las probabilidades gracias a sus propiedades matemáticas. La función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\delta_x^2}} .$$

donde:  $\delta_x$  es la varianza de la variable x, y  $\mu_x$  es el valor medio de la variable x

**Dato.-** Conocido también como información, es el valor de la variable asociada a un elemento de una población o una muestra.

**Dato cualitativo.-** Es aquel que representa alguna característica de los elementos de una muestra o una población que presentan, atributos, actitudes o son opiniones. Son datos no numéricos.

**Dato cuantitativo.-** Es aquel dato numérico que representa aspectos de una muestra o una población que es medible o que se puede contar.

**Desviación estándar.-** Conocida también como desviación típica, es una medida de dispersión que se obtiene como la raíz cuadrada de la varianza, la desviación estándar se señala con las mismas unidades que la variable que se está analizando.

**Discordancia.-** Discontinuidad estratigráfica en la que no hay paralelismo entre los materiales infra y suprayacentes.

**Facies.-** Conjunto de caracteres que definen una roca, grupo de rocas o un depósito.

**Formación.-** Unidad litoestratigráfica fundamental. Cuerpo de rocas identificado por sus

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

características litológicas y su posición estratigráfica.

**Litofacies.-** Conjunto de propiedades litológicas que definen a unos materiales como un cuerpo rocoso delimitado por sus características litológicas.

**Litotipo.-** es un tipo de roca formado por cierto número de minerales y otros elementos como la textura y estructura que lo caracterizan de otros tipos de roca.

**Mediana.-** Es una medida de tendencia central. Es el valor que divide al conjunto de datos ordenados, en aproximadamente dos partes: 50% de valores son inferiores y otro 50% son superiores.

**Pliegue.-** deformación resultante de la flexión o torsión de rocas.

**Sesgo.-** el sesgo estadístico es la diferencia entre la media estadística y el valor medido. El no tener sesgo es una propiedad deseable en una estimación. Debido a la propiedad de consistencia la magnitud del sesgo converge a cero conforme crece el tamaño de muestra.

**Sumas de Riemann.-** es un método de integración numérica definida, que representa el área bajo una curva como la suma del área de un conjunto de rectángulos. Se expresa como:

$$S = \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1}) ,$$

$$x_i \leq y_i \leq x_{i-1} .$$

donde  $y_i$  es un valor arbitrario que determina la amplitud de estos rectángulos,  $y_i = x_{i-1}$  para todo  $i$ , denominado como la suma de Riemann por la izquierda y  $y_i = x_i$  como la suma de Riemann por la derecha.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

**Variable.**- es una característica en ciertas mediciones que al ser registradas varias veces es susceptible a obtener diferentes valores.

**Varianza.**- Conocida también como variancia, es una medida de dispersión de la información. Se obtiene como el promedio de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable respecto de su media aritmética.

# Medios porosos como distribuciones de probabilidad

## Referencias

1. Barenblatt, G.I, Entov, V.M y Ryzhik, V.M. 1990. *Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks*. Dordrecht: Kluwer Academic.
2. Bear, J. 1988. *Dynamic of Fluids in Porous Media*. New York: Dover.
3. Bo-Ming, Y. y Jian-Hua, L. 2004. A Geometry Model for Tortuosity of Flow Path in Porous Media. *Chin. Phys. Lett.* **21** (8): 1569-1571. <http://dx.doi.org/10.1088/0256-307X/21/8/044>
4. Bossie-Codreanu, D., Bia, P.R. y Sabathier, J.-C. 1985. The “Checker Model,” An Improvement in Modeling Naturally Fractured Reservoirs With a Tridimensional, Triphasic, Black-Oil Numerical Model. *SPE J.* **25** (5): 743-756. SPE-10977-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/10977-PA>
5. Concepción Frisneda, M.I. 2005. Efectividad de las Ecuaciones de Pittman y de Winland para el Cálculo de Permeabilidad en Areniscas. Tesis de Licenciatura, Universidad Simón Bolívar, Ingeniería Geofísica, Sartenejas, Miranda, Venezuela.
6. García, E. 2001. *Curso Básico de Perfiles de Pozo en Hoyo Desnudo. Guía de Curso de Petrofísica en USB*. Caracas: Universidad Simón Bolívar.
7. Gueguen, Y. y Palciauskas, V. 1994. *Introduction to the Physics of Rocks*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
8. Hartmann, D. y Beaumont, E.A. 1999. Predicting Reservoir System Quality and Performance. En *Exploring for Oil and Gas Traps*, ed. E.A. Beaumont y N.H. Foster, Cap. 9, 9-1 - 9-154. Tulsa, Oklahoma: Treatise of Petroleum Geology, Handbook of Petroleum Geology, AAPG
9. Ioannidis, M.A. y Chatzis, I. 2000. On the Geometry and Topology of 3D Stochastic Porous Media. *J. Colloid Interface Sci.* **229** (2): 323-334. <http://dx.doi.org/10.1006/jcis.2000.7055>
10. Lenormand, R. 1997. Fractals and Porous Media from Pore to Geological Scales. En *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, ed. A. Carpinteri y F. Mainardi: Cap. 1, 3-4, Cap. 5, 27-37, Wien: Springer.
11. Montero, M.A. y Francisca, F.M. Permeabilidad Intrínseca de Suelos Arenosos con Presencia de Partículas de Limo y Arcilla. *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil* **11** (1): 16-30. <http://academic.uprm.edu/laccei/index.php/RIDNAIC/article/viewFile/280/276> (descargado el 20 de junio de 2012)
12. Pittman, E. 1992. Relationship of Porosity and Permeability to Various Parameters Derived from Mercury Injection-Capillary Pressure Curves for Sandstone. *AAPG Bull.* **76** (2): 191-198.
13. Rzhnevsky, V. y Novik, G. 1971. *The Physics of Rocks*, trans. A.K. Chatterjee. Moscow: Mir Publishers.
14. Sanders, L.L. 1988. *A Manual of Field Hydrogeology*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

15. Scheidegger, A.E. 1963. *The Physics of Flow Through Porous Media*. Toronto: University of Toronto Press.
16. Shabaninenejab, M. y Bagheripour Haghghi, M. 2011. Rock Typing and Generalization of Permeability–Porosity Relationship for an Iranian Gas Reservoir. Artículo SPE 150819, presentado en Nigeria Annual International Conference and Exhibition, Abuja, Nigeria, julio 30 - agosto 3. <http://dx.doi.org/10.2118/150819-MS>
17. Wu, K., Van Dijke, M.I.J., Couples, G.D., et al. 2006. 3D Stochastic Modeling of Heterogeneous Porous Media - Applications to Reservoir Rocks. *Transport in Porous Med.* **65** (3): 443–467. <http://dx.doi.org/10.1007/s11242-006-0006-z>
18. Ming Liu, Shicheng Zhang, Jianye Mou, et al. octubre 2011 Effect of normally distributed porosities on dissolution pattern in carbonate acidizing
19. Jerry L.Jensen, Larry W. Lake, Patrick W.M Corbett, David J. Goggin, et al. 1997 *Static for Petroleum Engineers and Geoscientists*. Heriot–Watt University Edinburgh, Universidad de Austin Texas.
20. Jude O. Amaefule and Mehmet Altunbay, Core Laboratories; Djebbar Tiab; David G. Kersey and Keelan. 1993, *Core Laboratories. Enhanced Reservoir Description: Using Core and Log Data to Identify Hydraulic (Flow) Units and Predict Permeability in Uncored Intervals/Wells*. Artículo SPE 26436, Universidad de Oklahoma
21. Maritz. J.S. (1981) *Distribution–Free Statistical Methods*, Chapman & Hall. [ISBN 0-412-15940-6](http://www.amazon.com/dp/0412159406). (page 217)

### Otros:

Herrera Gómez, R. y Samaniego Verduzco, F. 1996. Reporte Petrofísico de Núcleos de Pozo con Muestras de Diámetro Completo Pozo CCAN 139, Núcleos 2 y 3.

Herrera Gómez, R. y Samaniego Verduzco, F. 1992. Reporte Petrofísico de Núcleos de Pozo con Muestras de Diámetro Completo Pozo Chuc II, Núcleos 2 y 3.

Herrera Gómez, R. y Samaniego Verduzco, F. 1996. Reporte Petrofísico de Núcleos de Pozo con Muestras de Diámetro Completo Pozo Ek 101, Núcleo 1.

Herrera Gómez, R. y Samaniego Verduzco, F. 2001. Reporte Petrofísico de Núcleos de Pozo con Muestras de Diámetro Completo Pozo Zaap 7DA, núcleo 1. Pozo 27DA, núcleos 1 y 2. Pozo 100, núcleo 2.

Herrera Gómez, R. y Samaniego Verduzco, F. 2011. Reporte de Actividades Preparado para: PEMEX Exploración y Producción, Activo Cantarell.

## Medios porosos como distribuciones de probabilidad

Cruz Hernández, J. Determinación de Propiedades Petrofísicas Pozo Tajín 336.

Cruz Hernández, J. Determinación de propiedades Petrofísicas Pozo Agua Fria 108.