



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
CAMPO CONOCIMIENTO: MECÁNICA –
CAMPO DISCIPLINARIO: MECATRONICA

Manipulador Paralelo Plano $3\underline{RRR}$ -(RRR)_v con Actuación Virtual Indirecta

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
PATRICIO MARTINEZ ZAMUDIO

TUTOR PRINCIPAL
VICTOR JAVIER GONZALEZ VILLELA, FACULTAD DE INGENIERÍA
COMITÉ TUTOR
MARCELO LOPEZ PARRA, FACULTAD DE INGENIERÍA
VICENTE BORJA RAMIREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA
JESUS MANUEL DORADOR GONZALEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA
FRANCISCO CUENCA JIMENEZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. ENERO 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: MARCELO LOPEZ PARRA
Secretario: VICENTE BORJA RAMIREZ
Vocal: VICTOR JAVIER GONZALEZ VILLELA
1^{er}. Suplente: JESUS MANUEL DORADOR GONZALEZ
2^{do}. Suplente: FRANCISCO CUENCA JIMENEZ

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: FACULTAD DE INGENIERÍA

TUTOR DE TESIS:

VICTOR JAVIER GONZALEZ VILLELA

FIRMA

Para mis Padres con mucho

Cariño y Respeto.

Lucia y Patricio.

Agradecimientos:

A dios que ha puesto los medios para que el día de hoy este terminando un ciclo más de mi vida.

A mi Universidad por todo lo que me ha brindado.

A mi director de tesis el Dr. Víctor Javier González Villela, que por su desempeño y su arduo trabajo, ha sido un ejemplo a seguir.

A mis padres dado que parte de este logro no sería posible sin el esfuerzo que hacen día a día por ver que tenga lo necesario para poder seguir adelante.

A mis Hermanos Hilda, Jesús y Mauricio.

A Paty por el cariño que me ha brindado.

A mis profesores que a lo largo de mi trayectoria académica me han brindado su apoyo y transmitido sus conocimientos y a mi comité tutotal.

A Octavio por el apoyo que me ha brindado

A mi tío el Ing. Alfredo Nieto Cabrera por el apoyo que me ha brindado a lo largo de mi carrera.

Reconocimiento a CONACYT por su apoyo al programa de Doctorado.

Agradecimiento a
PAPIIT 1N115811 INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO EN SISTEMAS
MECATRÓNICOS: ROBÓTICA MÓVIL, ROBÓTICA PARALELA,
ROBÓTICA HÍBRIDA Y TELEOPERACIÓN.

I. Introducción

- I.1. Antecedentes de la investigación
- I.2. Robótica
- I.3. Robots Manipuladores
 - I.3.1. Robots seriales
 - I.3.2. Robots paralelos
 - I.3.3. Robots híbridos
 - I.3.3.1. Configuraciones
 - I.3.3.2. Aplicaciones
- I.4. La necesidad
- I.5. La tarea:
- I.6. Motivación de la tesis

II. ANÁLISIS Y REVISIÓN DE LA LITERATURA.

- II.1. Revisión de la literatura y esquema de la investigación.
- II.2. (problema de la)Cinemática directa e inversa de robots paralelos e híbridos
- II.3. Controlabilidad de robots manipuladores
 - II.3.1. Seriales
 - II.3.2. Paralelos
 - II.3.3. híbridos
- II.4. Planeación de movimientos
- II.5. Planificación de trayectorias
- II.6. Meta alcance y evasión de obstáculos: la navegación local
- II.7. Campos potenciales
- II.8. Cinemática, la representación de espacio de estado, y el estado de la entrada-salida linealización por realimentación
 - II.8.1. Cinématica
 - II.8.2. Representación del espacio de estados
- II.9. Tarea Pick & Place con cadenas virtuales
- II.10. Robots seriales con cadenas virtuales
- II.11. Robots paralelos con cadenas virtuales
- II.12. Robots híbridos con cadenas virtuales
- II.13. Existen robots híbridos con cadenas virtuales
- II.14. La tarea de pick and place del robot híbrido con y sin cadena virtual
- II.15. Análisis de las metodologías generales usadas para resolver el problema
- II.16. EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
- II.17. El objetivo de la investigación
- II.18. Las preguntas de investigación
- II.19. El alcance de la investigación
- II.20. EL ESQUEMA DE LA INVESTIGACIÓN

III. TEORÍA SOBRE ROBOTS HÍBRIDOS CON CADENAS VIRTUALES

III.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

III.2. Introducción

III.3. POSTURA DEL ROBOT HÍBRIDO CON CADENAS VIRTUALES

III.3.1. Postura del robot

III.3.2. Mapeo de los vectores de posición entre el mundo y los sistemas locales

III.3.3. Vectores de velocidad Asignación de un punto entre el mundo y sistemas locales del robot

III.3.4. Descripción de cadenas virtuales

III.3.4.1. Propagación de Velocidad del enlace i para enlazar $i + 1$

III.3.4.2. Cadenas virtuales

III.4. CINEMÁTICA DE ROBOTS HÍBRIDOS CONVENCIONALES CON CADENAS VIRTUALES

III.5. Coordenadas de configuración

III.6. La cinemática

III.7. Propiedades cinemáticas de las cadenas virtuales

III.7.1. Propiedades de movimiento cinemático de cadenas virtuales

III.7.2. Grados de libertad

III.7.3. Cadena virtual completa

III.7.4. Cadena virtual Subactuada

III.7.5. Cadena virtual sobre actuada

III.7.6. Tipo de robot híbrido

III.8. CONFIGURACIÓN CINEMÁTICA EN LA REPRESENTACIÓN DE ESTADOS

III.8.1. Configuración cinemática propiedades de representación espacial

III.8.2. Postura cinemática en la representación de espacial de estados

III.8.3. Algunas posturas cinemáticas del control del robot

IV. ROBOT EN TAREAS DE PICK AND PLACE: SELECCIÓN Y EL MODELADO DE CASOS PARTICULARES

IV.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

IV.2. ROBOT HÍBRIDO

IV.3. ROBOTS PARALELOS PARA TAREAS DE PICK & PLACE

IV.4. Configuraciones de robot paralelos e híbridos

IV.5. SELECCIÓN DEL ROBOT HÍBRIDO

IV.6. DEFINICIÓN DE LOS CASOS PARTICULARES

IV.6.1. Robot serial

IV.6.2. Robot paralelo plano

IV.6.3. Robot Paralelo espacial

IV.6.4. Robots paralelo híbrido

IV.7. La configuración del robot paralelo híbrido

IV.8. MODELADO DE CASOS PARTICULARES

IV.8.1. Tipo de robot serial

- IV.8.1.1. Modelado cinemático de tipo robot
- IV.8.1.2. Representación Espacio de estado y entrada linealización realimentación de estado
- IV.8.1.3. Entrada-salida de linealización por realimentación estado estático
- IV.8.1.4. Estabilización del mapa de entrada-salida
- IV.8.2. Tipo de robot paralelo plano
 - IV.8.2.1. Modelado cinemático de tipo robot (1,1)
 - IV.8.2.2. Representación Espacio de estado y entrada linealización realimentación de estado
 - IV.8.2.3. Salida Entrada de linealización por realimentación estado estático
 - IV.8.2.4. Estabilización del mapa de salida de entrada
- IV.8.3. Tipo de robot paralelo espacial
 - IV.8.3.1. Modelado cinemático de tipo robot (1,1)
 - IV.8.3.2. Representación Espacio de estado y entrada linealización realimentación de estado
 - IV.8.3.3. Salida Entrada de linealización por realimentación estado estático
 - IV.8.3.4. Estabilización del mapa de salida de entrada
- IV.8.4. Tipo de robot híbrido
 - IV.8.4.1. Modelado cinemático de tipo robot (1,1)
 - IV.8.4.2. Representación Espacio de estado y entrada linealización realimentación de estado
 - IV.8.4.3. Salida Entrada de linealización por realimentación estado estático
 - IV.8.4.4. Estabilización del mapa de salida de entrada
- IV.8.5. RESUMEN

V. Resultados de la simulación en casos particulares

V.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

V.2. ARQUITECTURA GENERAL DE LA SIMULACIÓN DE LOS CASOS PARTICULARES

V.3. PRUEBA DE CASOS PARTICULARES

V.4. definiciones de trayectoria

V.5. generación de trayectoria

V.6. Parámetros ley de control de Estabilización

V.7. Single robot resultados de la simulación: híbrido

V.8. Robot híbrido resultados de la simulación de configuración: híbrido 2

V.9. RESUMEN

VI. Enfoque de planificación de movimiento

VI.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

VI.2. MOVIMIENTO DE PLANIFICACIÓN ENFOQUE

VI.3. META DE DOMINIO DEL ESPACIO ENFOQUE

VI.4. PLANIFICACIÓN DE MOVIMIENTO QUE REACCIONA

VI.4.1. estrategia de seguimiento

- VI.4.2. Meta llegar: atractivo modelado meta
- VI.4.3. La evitación de obstáculos: el modelado meta repulsiva
- VI.5. MOVIMIENTO DELIBERATIVA PLANIFICACIÓN ENFOQUE
 - VI.5.1. Referencia trayectoria entornos estructurado
 - VI.5.2.
- VI.6. RESUMEN

VII. Resultados de la simulación de movimiento de planificación

- VII.1. DESCRIPCIÓN GENERAL
- VII.2. ARQUITECTURA DE LA PLANIFICACIÓN DE ENFOQUE EN MOVIMIENTO
- VII.3. MOVIMIENTO DE PLANIFICACIÓN SIMULACIÓN LOS RESULTADOS
- VII.4. Resultados deliberativos Corredor de simulación de planificación de movimiento
- VII.5. Reactivo resultados de la simulación de movimiento de planificación
- VII.6. RESUMEN

VIII. Conclusiones, aportaciones y trabajo futuro

- VIII.1. CONCLUSIONES
- VIII.2. RESUMEN DE LAS CONTRIBUCIONES
- VIII.3. trabajo futuro

Resumen de la tesis

En esta tesis, se presenta un enfoque nuevo para obtener el modelo cinemático de un manipulador paralelo delta plano de configuración $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ y un modelo cinemático de su cadena virtual serial $(RRR)_v$. Ambos modelos en variables de estado y en función de las variables articulares de la cadena virtual. Donde, en el primer modelo, se incluyen todas las variables de configuración del manipulador delta plano, incluyendo las variables de configuración de la cadena virtual en una sola matriz. Permitiendo, de esta manera, hacer un análisis cinemático completo del robot delta plano y de su controlabilidad.

Así mismo, la actuación del robot delta plano se hace a través de una actuación virtual indirecta, al retroalimentar parte del modelo de la cinemática inversa de la cadena virtual serial, al modelo de la cinemática directa del robot paralelo delta plano. El enfoque garantiza que cuando el efector final de la cadena virtual serial $(RRR)_v$, es controlado alrededor de una trayectoria, el efector final del robot paralelo plano $3\underline{R}RR$, también, sigue fielmente dicha trayectoria, ya que comparten el mismo punto de análisis.

Los resultados muestran que es posible controlar un robot paralelo delta plano $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ a partir de controlar la cadena virtual $(RRR)_v$. Por lo que este método promete ser una herramienta para resolver robots complejos como el caso de robots manipuladores híbrido.

Palabras clave

Robots híbridos, robots paralelos, cadena virtual, cinemática, controlabilidad.

Nomenclatura

$A(q_p)$: Matriz de desacoplamiento

J: matriz jacobiana del robot

JT: transposición de la matriz jacobiana

Ω : vector de velocidad angular del efector final

V: vector de velocidad cartesiana del efector final

W: vector de velocidad del efector final, constituido por V y Ω ,

C: articulación cilíndrica

H: conjunto helicoidal

P: junta prismática

Pa: paralelogramo

R: junta de revolución

S: articulación de bola y cavidad

U: junta universal

GDL: grados de libertad

I. INTRODUCCIÓN

Panorama del capítulo.

La historia de la robótica se destaca por un mundo de fantasía que ha proporcionado la inspiración para convertir la fantasía en realidad [1]. Es una rica historia con la creatividad cinematográfica, ingenio científico, y la visión empresarial. Sorprendentemente, la definición de un robot es controvertida, incluso entre los expertos en robótica. En un extremo del espectro se encuentra la versión de la ciencia ficción de un robot, típicamente uno, de una forma al ser humano o un androide. En el otro extremo el robot en el área de la automatización industrial.

En los últimos años, los manipuladores paralelos e híbridos han atraído la atención de varios investigadores e industrias debido a las aplicaciones potenciales. Un gran número de manipuladores paralelos se han construido para diversas aplicaciones, tales como la manipulación a distancia, máquinas-herramienta, robots médicos, simuladores, micro-robots y robots humanoides. La síntesis de tipo en algunos de ellos ha sido una herramienta valiosa para la generación de nuevas configuraciones de manipuladores paralelos. Por consecuencia hay una necesidad de contar con modelos que permitan realizar el análisis cinemático de una forma sencilla. En este capítulo se presentan antecedentes, definiciones generales, la necesidad y motivación para la investigación.

El capítulo se desarrolla de la siguiente manera:

- I.1. Robótica
 - I.1.1. Robots
- I.2. Antecedentes de la investigación
 - I.2.1.1. Manipuladores
 - I.2.1.1.1. seriales
 - I.2.1.1.2. paralelos
 - I.2.2. Robots paralelos planos
 - I.2.3. Tipos de robots paralelos planos
- I.3. La necesidad
- I.4. La tarea: seguimiento de trayectorias
- I.5. Motivación de la tesis
- I.6. Resumen

I.1. Robótica

La robótica es un campo interdisciplinario que va desde el diseño de componentes mecánicos y eléctricos hasta tecnologías de sensores, sistemas de computadoras e inteligencia artificial. El núcleo del material que trata la teoría, diseño y aplicaciones de los robots ha estado ampliamente disperso en numerosas revistas técnicas, actas de conferencias y congresos, monografías de investigación y algunos libros de texto que o bien enfocan su atención sobre algún área especializada de la robótica o dan una mirada «superficial» de este campo.[2].

La robótica es la rama de la tecnología que se encarga del estudio, el diseño y la construcción de los robots, así como su interacción con el medio; es el resultado de la combinación de varias ciencias orientadas a satisfacer un objetivo común, diseñar y construir máquinas capaces de desempeñar tareas realizadas por el hombre; entre las ciencias o áreas del conocimiento que se unen para formar a la robótica encontramos a la física, la mecánica, las matemáticas, la informática, la electrónica, la computación, entre otras[3].

La robótica, en combinación con las necesidades de la industria, ha dado paso a la creación del robot industrial, al cual podemos definir de una forma preliminar como un manipulador reprogramable controlado automáticamente con tres o más ejes multipropósito, empleado para realizar aplicaciones industriales[3].

I.2. Robot

La palabra robot se utiliza principalmente para referirse a una amplia gama de dispositivos o mecanismos, la característica común es que todos ellos son capaces de moverse y pueden ser utilizados para llevar a cabo tareas específicas. Los robots se pueden encontrar hoy en día en la industria manufacturera, agrícola, militar, aplicaciones domésticas, la exploración espacial, la medicina, la educación, tecnologías de la información, de la comunicación, el entretenimiento, etc. Así como también pueden ser categorizados como robots manipuladores, robots con ruedas, robots con patas, robots de

natación, androides, robots autónomos, robots reconfigurables, robots voladores, robots que pueden aplicarse a sí mismos a una tarea dada.

El Instituto de Robótica de América designa un robot como "un manipulador reprogramable y multifuncional diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de diversos movimientos programados para la realización de una gran variedad de tareas.

En la norma ISO 8373, la Organización Internacional para la Estandarización define un robot como "automático, controlable, reprogramable, manipulador de usos múltiples con tres o más ejes."

"Una definición más que se ofrece por Merriam-Webster, un robot es" una máquina que se parece a un ser humano y lleva a cabo diferentes actos complejos (como caminar o hablar)".

I.3. Antecedentes de la investigación

En los últimos años ha habido un desarrollo importante en el uso de robots en el mundo industrial, principalmente debido a su flexibilidad [4]. Los robots manipuladores se pueden clasificar de acuerdo a varios criterios[5], por el número de grados de libertad, por la tecnología de accionamiento, espacio de trabajo, características de movimiento y en función de su estructura cinemática, como robots seriales o manipuladores de lazo abierto, debido a que su estructura cinemática es de cadena abierta, manipuladores paralelos formados por cadenas cerradas y manipuladores híbridos[6, 7] que consisten en manipuladores formados por ambas cadenas cinemáticas, abiertas y cerradas, [8]. Sin embargo, la arquitectura mecánica de los robots manipuladores más comunes no parece estar adaptada a ciertas tareas[9]. Han sido, por tanto, poco estudiado otros tipos de arquitectura, y están siendo cada vez más utilizados con más frecuencia en el mundo industrial. Esto es así principalmente para los robots paralelos y los robots híbridos[4, 5, 10, 11].

I.3.1. Robots manipuladores

Los manipuladores consisten en enlaces de cuerpos rígidos, que están conectados por articulaciones que permiten el movimiento relativo entre los eslabones que lo conforman. Estas articulaciones están generalmente equipadas con sensores de posición, que permiten obtener la posición relativa de los eslabones. En el caso de juntas de rotación, estos desplazamientos se denominan ángulos de la articulación. Algunos manipuladores contienen articulaciones prismáticas o de desplazamiento, en los que el desplazamiento relativo entre los eslabones[12].

Un cuerpo rígido en el espacio se puede mover de varias maneras, por ejemplo en traslación o rotación. Lo que da lugar a los grados de libertad. El número total de grados de libertad de un cuerpo rígido en el espacio sugiere que no exceda de seis por ejemplo tres movimientos de traslación a lo largo de ejes ortogonales entre sí, y los tres movimientos de rotación alrededor de estos ejes. La posición y la orientación del efector final puede ser descrito por sus coordenadas generalizadas; por lo general son las coordenadas de un punto en específico del efector final y los ángulos que definen su orientación, pero puede ser cualquier otro conjunto de parámetros que permita definir de forma única la postura del efector final.

Los sistemas mecánicos que permiten que un cuerpo rígido, en este documento llamado efector final o base móvil, pueda moverse con respecto a una base fija, sistema inercial o universo, juegan un papel muy importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo algunas aplicaciones de robots manipuladores, como en el pintado por espray o tareas de pick and place, es necesario mover el efector final a lo largo de determinadas trayectorias con velocidades prescritas. Para cumplir con esta tarea, el movimiento de las juntas rotacionales debe de ser coordinado cuidadosamente.

Cuando el número total de grados de libertad de un robot manipulador en el espacio excede más de seis, se dice que es redundante debido que el número de grados de libertad del mismo es inferior al número de articulaciones independientes motorizadas. Por lo tanto se tiene más modos de acción que los que serían estrictamente necesarios. En el caso de manipuladores en el plano cuando se exceden más de tres grados es cuando se presenta la redundancia[13].

I.3.1.1. Manipuladores seriales

Un manipulador serial está formado por varias cadenas cinemáticas conectadas en serie, por varios tipos de juntas, básicamente juntas prismáticas o de revolución. Uno de los extremos del manipulador se encuentra unido a tierra y el otro extremo se puede mover en el espacio libremente. Por esta razón algunas veces es llamado como manipulador de cadena cinemática abierta. Se clasifican de acuerdo a su estructura cinemática los cuales pueden ser manipuladores: cartesianos, cilíndricos, esféricos, scara y antropomórficos, y de acuerdo a sus grados de libertad y si son en el plano o en el espacio.

I.3.1.2. Manipuladores paralelos completos

Los robots paralelos donde el número de cadenas es estrictamente igual al número de GDL del efector final son llamados manipuladores paralelos completos [4]. Hay dos casos de robots paralelos: planos, esféricos o espaciales. Un robot completamente paralelo plano tiene 3 GDL en su efector final, dos de traslación y uno de rotación. Un robot completamente paralelo con m GDL posee m cadenas unidas a su efector final. Si las cadenas son idénticas se puede utilizar la fórmula de Gruber's, aunque algunas veces esta fórmula puede tener errores debido a que no consideran las relaciones geométricas entre las juntas [14].

Un manipulador paralelo se puede considerar como simétrico sí se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El número de cadenas es igual al número de de grados de libertad de la plataforma móvil.
2. El tipo y número de juntas de todas las cadenas son iguales.
3. El número y la localización de las juntas activas en todas las cadenas son las mismas.

I.4. Robots paralelos planos

Para definir un cuerpo plano cartesiano se necesitan dos coordenadas y un ángulo, en el caso de los manipuladores paralelos planos de 2GDL sólo se pueden describir por dos coordenadas ya sean cartesianas o polares y en el caso de manipuladores paralelos planos de 3GDL se pueden describir las dos coordenadas y la orientación.

I.4.1. Robots paralelos planos de 2GDL

Los robots paralelos planos de 2GDL básicamente están formados por paralelogramos que permiten que el eslabón de salida a permanezcan en una orientación fija con respecto al eslabón de entrada, las ventajas son la capacidad de rotación altas. JX Liu, en 2003 [15], presenta mecanismos paralelos que tienen amplias aplicaciones en robots industriales, simuladores, micromanipuladores, máquinas denominadas de cinemática paralela, y cualquier otro dispositivo de manipulación en los que se necesitan alta capacidad de rotación y alta rigidez. Sobre todo, presenta nuevos conceptos de diseño de mecanismos paralelos, novedosos y la mejora de la capacidad de rotación de dichos sistemas.

En la Fig 1.1 se muestran algunas arquitecturas de manipuladores paralelos planos de 2GDL, Presentados por Figielski, 2007[16], los culés están formados por juntas rotacionales y juntas prismáticas.

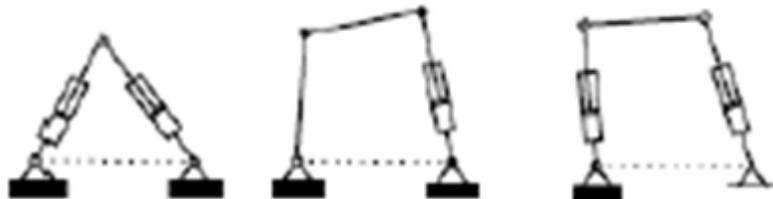


Fig. 1.1 Robots paralelos de 2GDL

I.4.2. Robots paralelos planos de 3GDL

En los manipuladores paralelos de 3GDL, se asume que cada cadena cuentan con tres juntas y dos eslabones. Utilizando juntas rotacionales R y juntas prismáticas P . Cada una

de las cadenas cinemáticas independientes se denota por un conjunto de tres letras que indican la sucesión de las juntas a partir de la tierra. Las combinaciones posibles son, por tanto: RRR , RPR , RRP , PPR , PPR , PPR , PPR , PPP , la configuración PPP presenta movimientos independientes. Si se asume que las tres cadenas cinemáticas son idénticas, se presentan todas las configuraciones posibles en la Fig. 1.2.

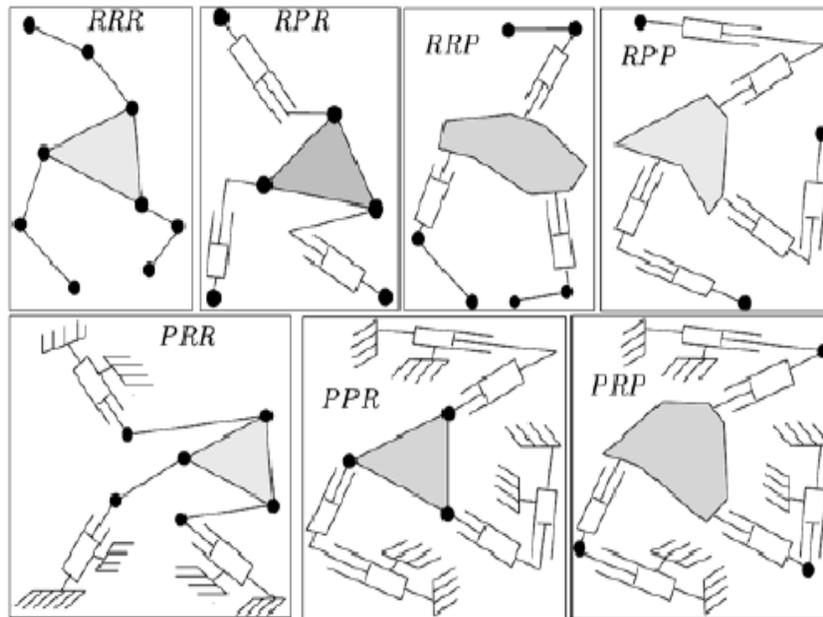


Fig. 1.2 Manipuladores paralelos planos de 3GDL

El robot paralelo plano está constituido por una plataforma móvil, conectada a tierra por tres cadenas cinemáticas independientes que tienen tres grados de libertad, independiente una articulación es accionada.

Las cadenas cinemáticas de cualquier manipulador plano completo pueden estar compuestas en cada cadena por cualquier secuencia de las juntas que se muestran en la tabla 1.1

RRR	RRR	RRR	RPR	RPR	RPR
RPP	RPP	PRR	PRR	PRR	PRP
PRP	PPR	PPR	RRP	RRP	RRP

Tabla 1.1 Cadenas cinemáticas robot 3GDL

En este documento los manipuladores paralelos planos se define por la secuencia que describe las tres cadenas cinemáticas, por ejemplo Gosselin y Angeles en 1988[17], presentan el robot paralelo $3RRR$ que es el robot con tres cadenas cinemáticas RRR . Entre los investigadores que realizaron un extenso estudio sobre estos robots, se encuentran Kassner [18], Gosselin [19]. Por otro lado la síntesis dimensional ha sido abordada por Shirkhodaie, 1987 [20] y Arsenault, 2004[21], análisis de singularidades por Gosselin y et. [22-24], espacio de trabajo Kumar, 1992, Lui, 2000 [25] [26], Gao, 2001[27], rigidez Kim, 2000 [28].

La compañía Googol Technology distribuye un robot manipulador paralelo redundante plano, para fines académicos la cual se puede apreciar en la Fig. 1.3.

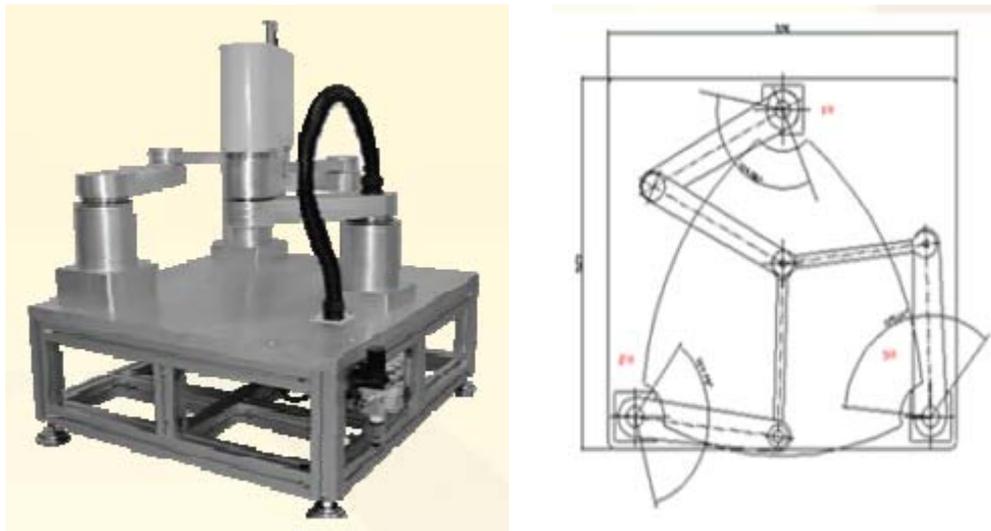


Fig. 1.3 Robot paralelo plano redundante

I.4.3. Descripción del manipulador paralelo delta plano $3RRR$

El robot manipulador paralelo delta plano de 3GDL configuración $3RRR$, está compuesto por tres cadenas cinemáticas idénticas distribuidas en un arreglo triangular dispuestas a 0° , 120° , 240° , respectivamente. Las cadenas cinemáticas que están formadas por los pivotes S , T y W definen la geometría de la base fija de todo el sistema, y los pivotes $B1$, $B2$ y $B3$ definen la geometría de la plataforma móvil del robot delta plano. Las tres cadenas que conectan los puntos S , T y W con los puntos $B1$, $B2$ y $B3$ están unidos por

juntas de rotación. Cada cadena consiste en un eslabón rígido de entrada conectado a un segundo eslabón de salida por medio de juntas rotacionales, ver Fig. 1.4.

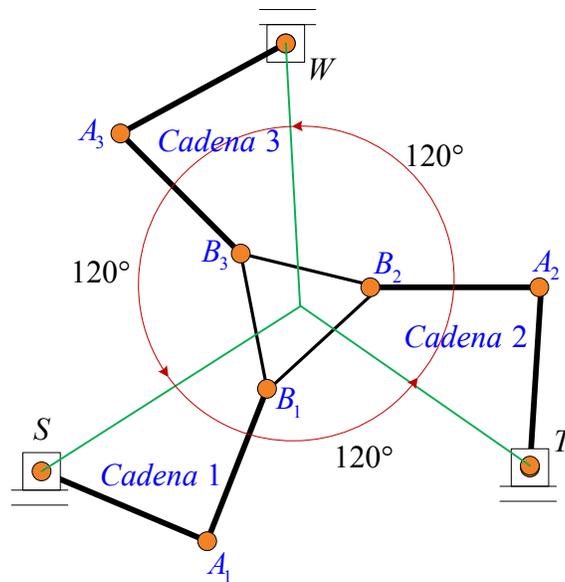


Fig. 1.4 Manipulador paralelo delta plano $3RRR$

I.4.4. Características del robot manipulador paralelo delta plano $3RRR$:

El la Fig. 1.5 se pueden observar las siguientes características

- i. El manipulador plano es del tipo $3RRR$, el cual tiene un movimiento en el plano $\{x, y\}$.
- ii. Debido a la configuración que presenta, tiene una rotación θ sobre el eje z.
- iii. Está compuesto por una plataforma fija y una plataforma móvil.
- iv. El robot manipulador paralelo delta plano está formado por tres cadenas cinemáticas.
- v. Cada cadena cinemática del robot manipulador delta plano está formado por dos eslabones rígidos conectados por juntas rotacionales.
- vi. El movimiento de los eslabones del robot manipulador paralelo delta plano son dependientes.
- vii. Se tiene un actuador para cada cadena cinemática del robo manipulador paralelo delta plano.

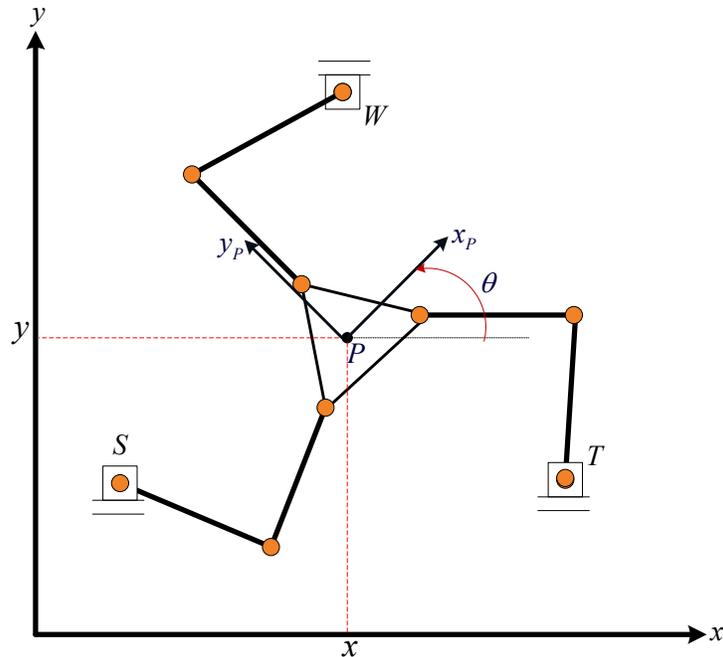


Figura 1.5 Configuración del robot paralelo 3RRR

I.5. NECESIDAD

Los manipuladores paralelos e híbridos al contar con varias cadenas cinemáticas, encontrar la solución a la cinemática directa e inversa se va complicando entre más cadenas y articulaciones se tengan [7, 29]. En la tesis *Análisis Cinemático de un Robot Manipulador Paralelo Delta Híbrido*, 2009 [7] se presenta la solución de la cinemática inversa de un robot híbrido proponiendo restricciones geométricas, para poder restringir el espacio de las múltiples soluciones que tiene el manipulador híbrido. De aquí surge la inquietud y la pregunta si es posible lograr resolver la cinemática de dichos manipuladores de una forma sencilla. Gonzalez-Villela en 2006 [30], presenta en la tesis doctoral *Research on a semiautonomous mobile robot for loosely structured environments focused on transporting mail trolleys*, un nuevo enfoque para el modelo, el control y la planificación del movimiento de un robot móvil no holonómico e introduce el concepto de llanta virtual donde la configuración del robot móvil se le ha añadido una rueda virtual orientable, situado en algún lugar en la plataforma de robot móvil, para controlar un punto específico situado en la rueda orientable virtual. De esta manera, es posible controlar indirectamente los movimientos de un punto específico situado en algún lugar en la plataforma del robot y producir los comandos para coordinar las ruedas orientables motorizadas.

En vista de las ventajas que ofrecen los robots manipuladores seriales, los robots manipuladores paralelos, la complejidad en la cinemática de los robots híbridos y el enfoque que presenta Gonzalez-Villela[30], se propone un diseño que podrían beneficiarse de ambas configuraciones, partiendo del robot híbrido [7] se toma al manipulador paralelo $3RRR$ al cual se le agrega una cadena denominada virtual.

II. *REVISIÓN DE LA LITERATURA*

Panorama del capítulo.

Para que un robot manipulador pueda realizar una tarea específica, primero se realiza el análisis cinemático de posición, donde se debe de conocer la localización del efector final con respecto al sistema inercial. En el análisis cinemático de posición hay dos tipos, la cinemática directa y la cinemática inversa. En algunas aplicaciones como el pintado por espray o soldadura es necesario realizar el análisis de velocidad, para mover al efector final por determinadas trayectorias con una velocidad prescrita, para lograr esta meta se deben de coordinar cuidadosamente las articulaciones del robot, en el análisis de la velocidad de robots manipuladores hay dos tipos, velocidad directa o cinemática diferencial directa y velocidad inversa o cinemática diferencial inversa. Por otro lado la síntesis de tipo de manipuladores paralelos consiste en encontrar las configuraciones equivalentes de manipuladores paralelos, generados a partir de patrones de movimiento específicos, en función de los movimientos de la plataforma móvil, con sus específicos grados de libertad. En la síntesis de tipo utilizan el enfoque de cadena virtual y la teoría del tornillo. Una representación de espacios de estados es un modelo matemático de un sistema físico descrito mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas por ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden.

II.1. Los problemas en la cinemática de robots manipuladores

II.1.1. Análisis cinemático de posición en manipuladores

II.1.1.1. Cinemática de posición de Manipuladores seriales

II.1.1.2. Cinemática de posición Manipuladores Paralelos

II.1.2. Cinemática diferencial de manipuladores

II.1.2.1. Seriales

II.1.2.2. Paralelos

II.1.3. Síntesis cinemática

II.1.3.1. Métodos de síntesis estructural en robots paralelos.

II.1.3.1.1. Teoría de grafos

II.1.3.1.2. Teoría de grupos

II.1.3.1.2.1. Generadores de movimiento de subgrupos

II.1.3.1.3. Teoría de tornillos

II.1.3.1.3.1. Síntesis basada en la teoría de tornillos

II.1.3.2. Síntesis de tipo

II.1.3.2.1. Patrón de movimiento

II.2. Revisión de la literatura

II.2.1. Existen robots manipuladores con cadenas virtuales

II.2.1.1. Robots seriales con cadenas virtuales

II.2.1.2. Robots paralelos con cadenas virtuales

II.2.2. Controlabilidad de robots manipuladores

II.2.3. Representación del espacio de estados de manipuladores

II.2.4. Conclusiones preliminares

II.2.5. Análisis de las metodologías generales usadas para resolver el problema

II.3. EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

II.3.1. El objetivo de la investigación

II.3.2. Las preguntas de investigación

II.3.3. El alcance de la investigación

II.3.4. EL ESQUEMA DE LA INVESTIGACIÓN

II.3.5. Discusión del capítulo

II.1. Problemas en la cinemática de manipuladores

La cinemática como es sabido estudia los movimientos sin importar las causas que lo provocan, abarca la posición, velocidad y aceleración.

En este trabajo sólo se presenta la cinemática en posición y velocidad de los robots manipuladores. La cinemática de robots manipuladores se concentra en la geometría descrita por las configuraciones y las propiedades de movimiento de este, respecto al tiempo. Las variables articulares de un robot manipulador están relacionadas con la posición y orientación del efector final, esta relación cinemática es el punto focal de interés de estudio en la cinemática de robots manipuladores. Para lo cual hay dos puntos de vista que están entrelazados y que se pueden abordar: el análisis cinemático y la síntesis cinemática [31].

II.1.1. Análisis cinemático de posición en robots manipuladores

Para que un robot manipulador pueda realizar una determinada trayectoria, es necesario localizar la posición del efector final con respecto a un sistema inercial. En el análisis

cinemático de posición de manipuladores hay dos tipos, el análisis cinemático de posición directo o cinemática directa y análisis cinemático de posición inverso o cinemática inversa. En el caso del análisis cinemático inverso el problema consiste en encontrar todos los posibles valores de las variables articulares en función de la posición y orientación del efector final. En el caso de la cinemática directa se determina la posición del efector final en función del valor de las variables articulares. Para ambos casos existen varios métodos de análisis como, análisis vectorial geométrico, algebraico por matrices, algebra de tornillos, entre otros.

II.1.1.1. Análisis cinemático de posición de manipuladores seriales

Para un manipulador serial, realizar el análisis de posición de la cinemática directa es sencillo, mientras que la cinemática inversa resulta ser complicado [31]. Por ejemplo si se tiene un manipulador con pocos grados de libertad resulta complicado posicionar al manipulador, debido a que está restringido, mientras que para un manipulador redundante hay una infinidad de soluciones para la cinemática inversa, todo depende de los grados de libertad que se tengan.

Para obtener la cinemática inversa de los manipuladores seriales de forma cerrada, es necesario resolver sistemas de ecuaciones algebraicas. Entre los métodos más comunes para la cinemática se encuentran: método algebraico vectorial [32-34], método iterativo [35, 36], método de Denavit-Hartenberg[37], método de algebra de tornillos [38, 39], método de algebra de cuaterniones [40].

El número de soluciones de la cinemática inversa de posición depende de la configuración del manipulador, así como de la localización del efector final. En general la solución de la cinemática inversa de forma cerrada, se puede obtener con ayuda de la geometría, es particularmente sencillo por así decirlo, si para un manipulador de seis GDL, tres juntas son paralelas y si las últimas tres sus ejes se interceptan en un punto común. Pero para, otros casos e problema es complicado. Entre algunos de los trabajos que hacen aportaciones importantes al problema de la cinemática inversa están:

Pieper y Roth, (1969) [41] presentan un modelo que permite la descripción sistemática de nuevos y existentes manipuladores seriales. Se estudiaron manipuladores seriales de seis grados de libertad, se presentan varias soluciones para el problema de encontrar una

posición y orientación específica. Se dan soluciones numéricas. De forma heurísticas se desarrolla la solución al problema de posición para mover un manipulador de seis grados de libertad desde una posición inicial a una posición final a través de un espacio que contiene obstáculos.

Roth, Bernard, Jahangir Rastegar, and Victor Scheinman, (1972) [42] concluyen que existen al menos 32 soluciones para la cinemática inversa de un manipulador serial con 6 GDL formado por juntas rotacionales.

Freudenstein, 1973 [43] hace referencia a los problemas de la cinemática inversa de los manipuladores seriales con seis juntas rotacionales 6R.

Duffy and Crane, 1980 [44] trabajaron con un manipulador serial 7R, obtuvieron la solución por medio del determinante de una matriz de 16×16 , al expandir el determinante se obtiene un polinomio de grado 32 para la solución de la cinemática inversa.

Albala 1982, [45] obtiene la solución de un manipulador serial 7R por medio del determinante de una matriz de 12×12 y utiliza la expresión trigonométrica de la tangente de un ángulo medio.

Tsai and Morgan, 1985 [46] Utilizan el método de homotopía para resolver la cinemática inversa de un manipulador serial 6R, y encontraron sólo 16 soluciones reales.

Primrose 1986, [47] probaron que del polinomio de grado 32 obtenido de un manipulador serial 7R [44] sólo se pueden extraer 16 soluciones reales.

Lee and Liang, 1986 [33, 34] Introdujeron el análisis vectorial por números duales así como también trabajaron con un polinomio de grado 16, para un manipulador serial 7R.

Raghavan and Roth, 1990 utilizaron el método dialítico para resolver el polinomio de grado 16 de un manipulador serial 6R, para encontrar las soluciones a la cinemática inversa.

II.1.1.2. Análisis cinemático de posición manipuladores paralelos

Para los manipuladores paralelos la cinemática inversa resulta ser más simple, en comparación con la cinemática directa.

En robots paralelos la cinemática inversa consiste en establecer el valor de las juntas activas y pasivas en función de las coordenadas del extremo del robot, las juntas activas son las juntas actuadas y las juntas pasivas son las que quedan en función de las juntas activas. Establecer la cinemática inversa es esencial para el control de la posición de los robots paralelos. El mapeo de la cinemática, tiene interesantes ecuaciones algebraicas que tienen múltiples soluciones [5]. La cinemática inversa de los manipuladores paralelos en general es idéntica a la de los manipuladores serie.

En la cinemática directa de robots paralelos el problema es determinar la posición del efector final en función de las juntas activas. En general, las soluciones para este problema no es único, es decir, hay varias maneras de atacar a un manipulador paralelo[4]. En el estudio de la cinemática directa Merlet [4], Tsai [31], Ángeles [48], Raghavan [49], recurrieron a la solución de un polinomio mostraron que el problema de la cinemática directa es reducir la solución a polinomio.

Entre los trabajos encontrados dedicados a la solución de la cinemática directa se encuentran:

Daniali, Zsombor-Murray, Angeles, 1993 [50] presentan dos mecanismos de doble triángulo, planos y esféricos de tres grados de libertad que consisten en dos triángulos que se mueven uno con respecto al otro. El análisis de la cinemática directa de los mecanismos conduce a una ecuación cuadrática para el plano y un polinomio de grado 16 para el mecanismo esférico.

Gosselin y Merlet 1994 [51] presenta nuevos resultados sobre el problema cinemático directo de manipuladores paralelos planos de tres grados de libertad.

Merlet 1996 [52] aborda el problema de encontrar todas las soluciones de la cinemática directa para diferentes arquitecturas de manipuladores paralelos planos completos. Se demuestra que para este problema todas las posibles cadenas cinemáticas pueden ser

reducidas a un conjunto de tres cadenas básicas y explica cómo calcular las soluciones de la cinemática directa para todas las combinaciones de estas cadenas y, consecuentemente, para todas las posibles arquitecturas de robots paralelos planos.

Aunque las plataformas Stewart se han aplicado en el diseño de aeronaves, vehículos simuladores y robots paralelos durante muchos años, la solución de forma cerrada del análisis de la cinemática directa no ha sido completamente resuelta. Hasta el momento, se han analizado sólo simples plataformas. Ejemplos de ello son las variantes de la plataforma Stewart como el octaedro 3-6 y los 4-4, de los cuales las soluciones de posición se derivaron a un polinomio de octavo o duodécimo grado.

Griffis and Dufy, 1989 [53] encontraron que para una plataforma de Stewart de configuración de octaedro, hay ocho pares de soluciones reales.

Chen and Song, 1994 [54] extienden el análisis de posición de cinemática directa a un caso general de la plataforma Stewart como resultado un polinomio de grado 16, lo que indica que se puede obtener un máximo de 32 soluciones. También se demuestra que las soluciones derivadas previamente de las plataformas Stewart 3-6 y 4-4 pueden fácilmente deducirse de polinomio grado 16, configurando algunos parámetros geométricos.

Es importante hacer hincapié en el problema de la validación del resultado de la cinemática directa por polinomios, el cálculo puede implicar un gran número de operaciones y por lo tanto puede ser muy sensible a errores numéricos de redondeo, por lo que la comprobación de la validez de las soluciones con la cinemática inversa puede ser necesario [4].

II.1.2. Cinemática diferencial de robots manipuladores

La matriz jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. En robots manipuladores la matriz jacobiana o el jacobiano se define como una matriz que transforma las velocidades angulares actuadas al espacio de las velocidades del efector final.

II.1.2.1. Cinemática diferencial de manipuladores seriales

Diferentes métodos se han presentado en la literatura, Craig, 1986 [55] presenta el método de propagación de velocidades. Featherstone, 1983 describe los procedimientos para realizar transformaciones de la posición y velocidad del efector final a los ángulos correspondientes, velocidades, y viceversa, para un robot manipulador de seis grados de libertad que tiene tres articulaciones rotacionales que se cruzan en la muñeca. Hunt, 1986 [56] examina el jacobiano de robots seriales por medio de la teoría de tonillos. Orin y Schrader, 1984 [57] Discuten y comparan seis métodos diferentes para calcular el Jacobiano de un robot manipulador de N GDL. Waldron, 1985 [58] presenta una metodología general para la formulación y la manipulación de la matriz jacobiana. Whitney, 1972 [59] da una nueva solución para el problema de control de posición del efector final.

II.1.2.1.1. Jacobiano de un manipulador serial de 2 y 3GDL

La matriz jacobiana directa permite conocer las velocidades del extremo final del robot a partir de las velocidades de cada articulación. Por su parte, la matriz jacobiana inversa permitirá conocer las velocidades articulares necesarias para obtener unas velocidades determinadas en el efector final del robot. En la Fig. 2.1 y 2.2 se muestran los jacobianos de un robot serial de 2 y 3GDL.

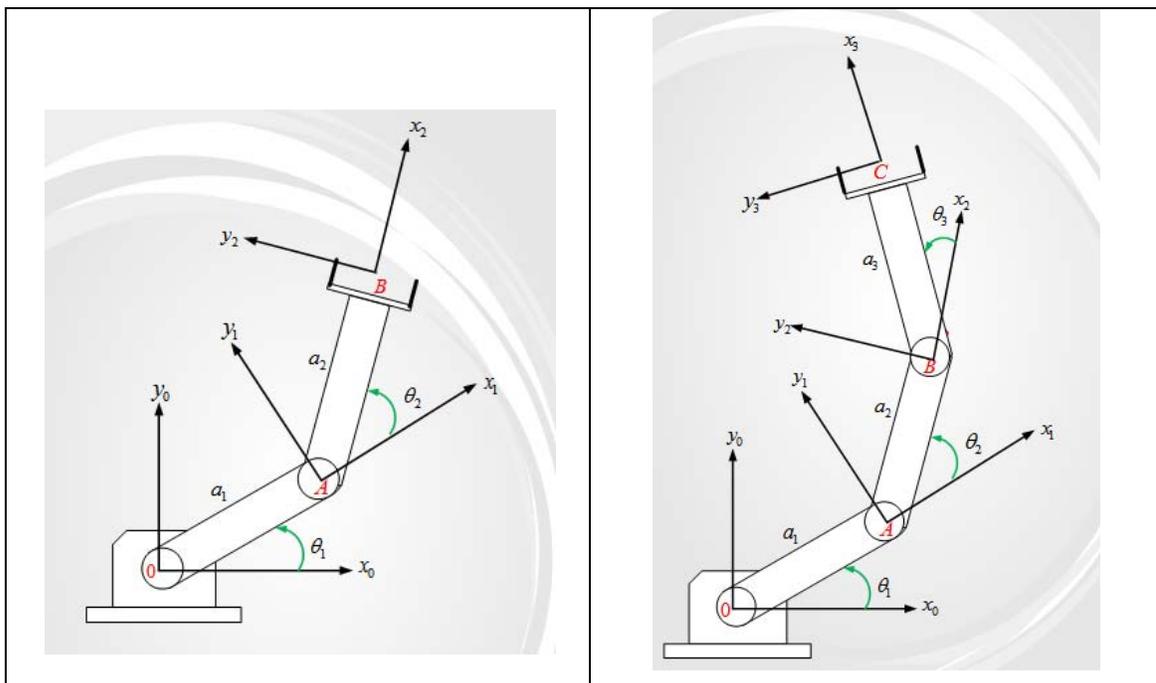


Fig. 2.1 Manipulador Serial de 2GDL**Fig. 2.2 Manipulador Serial de 2GDL**

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 S\theta_1 - a_2 S\theta_{12} & -a_2 S\theta_{12} \\ a_1 C\theta_1 + a_2 C\theta_{12} & a_2 C\theta_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 S\theta_1 - a_2 S\theta_{12} - a_3 S\theta_{123} & -a_2 S\theta_{12} - a_3 S\theta_{123} & -a_3 S\theta_{123} \\ a_1 C\theta_1 + a_2 C\theta_{12} + a_3 C\theta_{123} & a_2 C\theta_{12} + a_3 C\theta_{123} & a_3 C\theta_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

II.1.2.2. Cinemática diferencial de manipuladores paralelos

En el estudio del movimiento instantáneo de cadenas cinemáticas cerradas se encuentra Waldron (1966) [60] como uno de los pioneros. Se han propuesto varios métodos de análisis como Davies y Primrose, 1971[61]. Mohamed [62], Mohamed y Dufy [63] aplican la teoría de tornillos recíprocas, y Sugimoto[64] utiliza el álgebra de motor para el análisis del jacobiano de manipuladores paralelos.

La solución de la cinemática directa e inversa, utilizando la integración de la cinemática diferencial, es particularmente importante para los manipuladores de cadenas cinemáticas cerradas cuyas soluciones no existen, son difíciles de obtener, o son demasiado complejas para ser tratadas, por ejemplo: robots redundantes o paralelos[65]

Para los manipuladores paralelos, Goselin y Ángeles,1990 [66]sugieren separar la matriz jacobiana en dos matrices, una asociada con la cinemática directa y otra con la cinemática inversa.

Las variables actuadas se pueden denotar por el vector q , la posición de la plataforma móvil de salida se puede denotar por el vector x , las función de cada cadena se pueden expresar de la siguiente forma[67]:

$$f(x, q) = 0 \quad (\text{II.3})$$

Donde f es una función implícita de q y x , de dimensión n , y 0 , es un vector dimensional n , diferenciando la ecuación, (II.3)con respecto al tiempo se obtiene la relación de cambio de las juntas de entrada y la velocidad de salida del efector final.

$$J_x \dot{x} = J_q \dot{q} \quad (II.4)$$

Donde

$$J_x = \frac{\delta f}{\delta x} \quad (II.5)$$

$$J_q = \frac{\delta f}{\delta q} \quad (II.6)$$

La derivada de las dos matrices jacobianas separadas pueden escribirse como:

$$\dot{q} = J\dot{x} \quad (II.7)$$

$$J = J_q^{-1} J_x \quad (II.8)$$

La matriz definida en la ecuación (II.7), para manipuladores paralelos corresponde a la matriz jacobiana inversa para manipuladores seriales

II.1.2.2.1. Jacobiano de un manipulador paralelo delta plano 3RRR

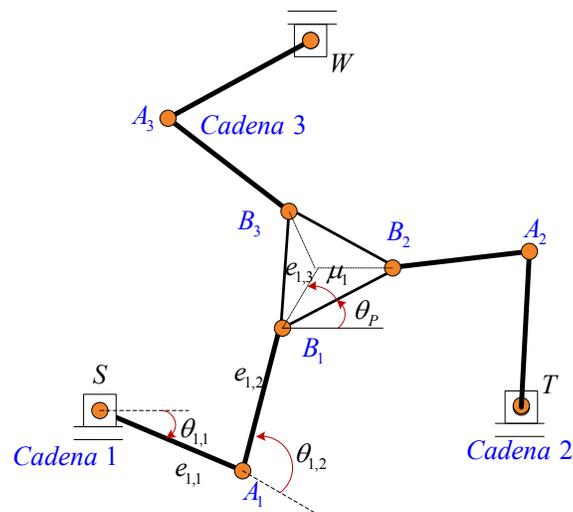


Fig. 2.3 Manipulador paralelo plano 3RRR

$$J_q = \begin{pmatrix} e_{1,1}e_{1,2}S\theta_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & e_{2,1}e_{2,2}S\theta_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & e_{3,1}e_{3,2}S\theta_{3,2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$$J_X = \begin{pmatrix} e_{1,2}C\theta_{1,1} & e_{1,2}S(\theta_{1,1} + \theta_{1,1}) & e_{1,2}e_{1,3}S(\theta_{1,1} + \theta_{1,2} - \mu_1 - \theta) \\ e_{2,2}C\theta_{2,1} & e_{2,2}S(\theta_{2,1} + \theta_{2,1}) & e_{2,2}e_{2,3}S(\theta_{2,1} + \theta_{2,2} - \mu_2 - \theta) \\ e_{3,2}C\theta_{3,1} & e_{3,2}S(\theta_{3,1} + \theta_{3,1}) & e_{3,2}e_{3,3}S(\theta_{3,1} + \theta_{3,2} - \mu_3 - \theta) \end{pmatrix} \quad (\text{II.10})$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{C\theta_{1,1}Csc\theta_{1,2}}{e_{1,1}} & \frac{Csc\theta_{1,2}C(\theta_{1,1} + \theta_{1,2})}{e_{1,1}} & -\frac{Csc\theta_{1,2}S(\theta - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} + \mu_1)e}{e_{1,1}} \\ \frac{C\theta_{2,1}Csc\theta_{2,2}}{e_{2,1}} & \frac{Csc\theta_{2,2}C(\theta_{2,1} + \theta_{2,2})}{e_{2,1}} & -\frac{Csc\theta_{2,2}S(\theta - \theta_{2,1} - \theta_{2,2} + \mu_2)e}{e_{2,1}} \\ \frac{C\theta_{3,1}Csc\theta_{3,2}}{e_{3,1}} & \frac{Csc\theta_{3,2}C(\theta_{3,1} + \theta_{3,2})}{e_{3,1}} & -\frac{Csc\theta_{3,2}S(\theta - \theta_{3,1} - \theta_{3,2} + \mu_3)e}{e_{3,1}} \end{pmatrix} \quad \text{El textc}$$

II.1.3. Síntesis cinemática

En el caso de la síntesis cinemática, el proceso es contrario al del análisis cinemático, el desafío es crear una nueva configuración tomando encuentra determinadas propiedades cinemáticas, específicamente posición y orientación del efector final con lo cual se determina el tipo y la geometría. Algunos investigadores se han centrado en la síntesis de manipuladores basados en el criterio de optimizar el espacio de trabajo. El problema de la síntesis cinemática se puede dividir en tres fases: síntesis de tipo, síntesis de número, síntesis dimensional[4] la síntesis de tipo ha dado la pauta para el desarrollo de manipuladores con cadenas equivalentes así como a cadenas virtuales, se presenta un pequeño panorama de los métodos más trascendentes.

II.1.3.1. Métodos de síntesis de tipo en robots paralelos.

Entre los métodos de síntesis y sus variantes se encuentran:

- Teoría de grafos
- Teoría de grupos
- Teoría de tornillos.

II.1.3.1.1. Teoría de grafos

Freudenstein fue el primero en proponer el uso de la teoría de grafos. Él ideó un esquema gráfico en el que los vértices corresponden a los enlaces del mecanismo, y los bordes corresponden a las articulaciones. Inicialmente descripción gráfica se utilizó como una representación gráfica simple de un mecanismo, pero trabajos posteriores mostraron que la teoría de grafos era una poderosa herramienta. La teoría de grafos se utilizó por Earl [68] para elaborar nuevas arquitecturas de robots paralelos. Sin embargo, la teoría de grafos tiene dos inconvenientes que son difíciles de superar cuando se trata de robots paralelos:

- Isomorfismo: No hay una relación uno a uno entre los grafos y los mecanismos: un mecanismo dado puede estar representado por diferentes grafos, y los grafos redundantes deben de ser eliminados de la numeración. Esta compleja cuestión no se ha resuelto por completo.
- La teoría de grafos hace un amplio uso de las fórmulas de la movilidad (tales como fórmula Gruber), y para las estructuras espaciales hay muchos mecanismos que no obedecen a esta fórmula (por ejemplo, el paralelogramo) que juegan un papel importante en la síntesis estructural. Por lo tanto estos elementos no pueden ser ignorados.

II.1.3.1.2. Teoría de grupo

Grupos de Lie y subgrupos de desplazamiento. El conjunto $\{D\}$ de desplazamientos representa el movimiento de un cuerpo rígido. Este grupo está directamente relacionado con la matriz euclidiana del grupo SE (3) que se define como el conjunto de matrices de la forma:

$$SE(3) = \left\{ \begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(II.12)}$$

Donde R es una matriz de rotación y " p " un vector de tres dimensiones. $SE(3)$ es un grupo continuo, y cualquier conjunto abierto de elementos de $SE(3)$. En terminología matemática $SE(3)$ es una variedad diferenciable que se llama un grupo de Lie. Hay subgrupos del grupo de los desplazamientos que jugarán un papel importante en la síntesis estructural. Una lista completa de estos subgrupos de Lie está dada por Herve [69]. Se mencionan sólo algunos de estos subgrupos.

$\{T(u)\}$ Las traslaciones paralelas a un vector u

$\{T\}$ Todas las traslaciones espaciales

$\{X(w)\}$ Todos los movimientos de traslación y rotación en todos los ejes que son paralelos al eje definido por el vector w .

$\{Y(w, p)\}$ Todas las traslaciones planas perpendiculares al vector w combinado con un movimiento de tornillo de paso p en cualquier eje paralelo a w

La disposición en serie de dos elementos de un subgrupo se llama composición, y puede dar lugar a un elemento de otro subgrupo. Por ejemplo, combinando tres elementos de $\{T(u)\}$ con vectores u_1, u_2, u_3 pueden conducir a un elemento de traslación de movimientos de un subgrupo $\{T\}$ en el espacio si ciertas limitaciones en el vector u_i se satisfacen.

La operación más importante es la operación de intersección obtenido cuando los elementos de los subgrupos actúan sobre el mismo cuerpo rígido. Herve [69] presenta las normas que regulan esta operación.

II.1.3.1.2.1. Generadores de movimiento de subgrupos

Los desplazamientos de los subgrupos de Lie son generados por cadenas cinemáticas que se llaman generadores del grupo de movimiento. Estos generadores juegan un papel importante para las configuraciones de las arquitecturas de robots paralelos. Los

generadores del grupo $\{D\}$ son importantes para el diseño de manipuladores paralelos de seis grados de libertad. Sólo se utilizan R , P y S para describir las articulaciones.

El grupo de generadores de $\{D\}$ se pueden clasificar en 4 tipos principales: $RRPS$, $RPRS$, $PRRS$, $RRRS$. El tipo $RRPS$ está constituido por una junta universal, seguida por una junta prismática y por último por una junta esférica. El $RPRS$ está formado por una junta de revolución seguido por una junta prismática sobre su mismo eje, seguido de una junta de revolución y por último por una junta esférica. El generador de $PRRS$ se compone de una junta prismática seguido por una junta universal y al final por una junta esférica, por último, el tipo $RRRS$ está hecho por una junta de revolución seguida por una junta universal y por último una junta esférica.

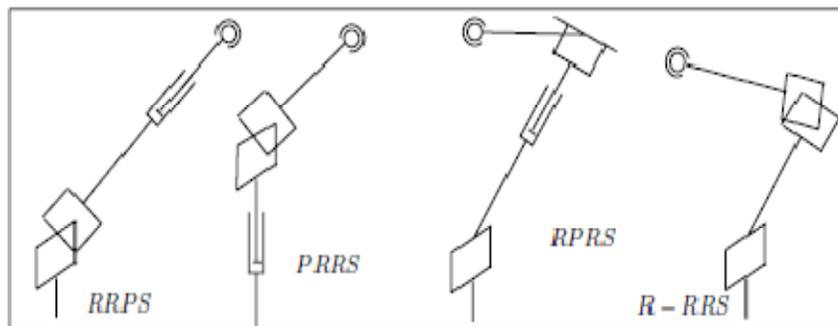


Figura 2.4 $\{D\}$ Movimientos generadores de grupo utilizando juntas de tipo S , R , P

II.1.3.1.3. Fundamentos de la Teoría del tornillo

El enfoque de la teoría de grupos permitió el descubrimiento de numerosos y nuevos manipuladores paralelos. Sin embargo, el grupo $\{D\}$ tiene propiedades más especiales que no se reflejan en la estructura del grupo de Lie. En consecuencia, el enfoque de la teoría de grupos tiene dificultades que representan casos muy especiales de movilidad, tales como mecanismos paradójicos.

Podemos extender el concepto de grupo de Lie, considerando el espacio tangente en el elemento de identidad, que es un espacio vectorial llamado álgebra de Lie del grupo de Lie. Tan pronto es elegido un origen para $SE(3)$ el álgebra de Lie asociada $se(3)$ es el espacio vectorial de todas las velocidades instantáneas cuyos elementos son vectores de dimensión 6, de la forma (Ω, v) donde Ω es la velocidad angular del cuerpo rígido, y v es

su velocidad de traslación . Estos elementos se denominan giros de velocidad o tornillos. Las fuerzas y pares de torsión son importantes para el movimiento y pueden representarse como un par de vectores de tres dimensiones, (F, M) que se le denomina llave. Un giro y una llave se puede decir que ser recíproca, si

$$\Omega.M + v.F = 0$$

Cuando una cadena cinemática está conectado a un cuerpo rígido el punto clave es que los posibles giros de velocidad instantánea del cuerpo rígido son recíprocas a las llaves impuestas por las cadenas cinemáticas (llamado la restricción de llaves). En otras palabras, los GDL del cuerpo rígido se determinan por las restricciones de las llaves. Para un manipulador paralelo las siguientes afirmaciones se cumplen:

- La velocidad de giro de la plataforma móvil es la intersección de todas las cadenas del robot
- La llave de la plataforma móvil es la unión de todas las cadenas del robot

II.1.3.1.3.1. Síntesis basado en la teoría de tornillo

En base a lo anterior, es posible concebir una metodología de síntesis:

- i. Encontrar el sistema de llave de S que es recíproca a la velocidad de giro deseada de la plataforma móvil.
- ii. Determinar las llaves de las cadenas cinemáticas del robot cuya unión se extiende por el sistema S.
- iii. Determinar todas las posibles estructuras de las cadenas cinemáticas que generarán las llaves correspondientes.
- iv. Como todos son considerados giros y llaves instantáneos es necesario para verificar que la movilidad de la plataforma no es instantánea.

La desventaja de este enfoque es que es difícil de automatizar, sobre todo los pasos 3 y 4. La teoría de grupos tiene la ventaja aquí, restringiendo las posibilidades en el paso 2, se identifican fácilmente los generadores de movimiento en el paso 3. Por otro lado, la teoría de grupos puede pasar por alto las estructuras que no caiga en el marco de los

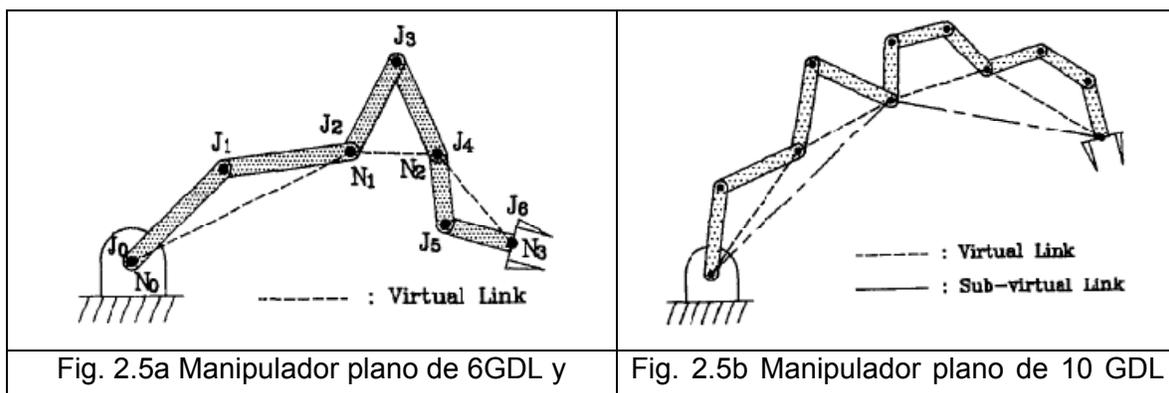
subgrupos de Lie. Sin embargo, varios autores han utilizado este método para generar un gran número de estructuras con menos de 6 GDL [70-72],[73] [74]. Mezclando el enfoque de tornillo con la fórmula de movilidad [75]. En conclusión, aunque los métodos propuestos de síntesis estructural han permitido determinar un número muy grande de estructuras, este problema aún no está resuelto.

II.2. Revisión de la literatura manipuladores con cadenas virtuales

Entre los trabajos que abordan a los manipuladores con cadenas virtuales se encuentran los manipuladores seriales, los manipuladores paralelos y los manipuladores híbridos. Así como también en los robots móviles, donde se utiliza en concepto de llanta virtual.

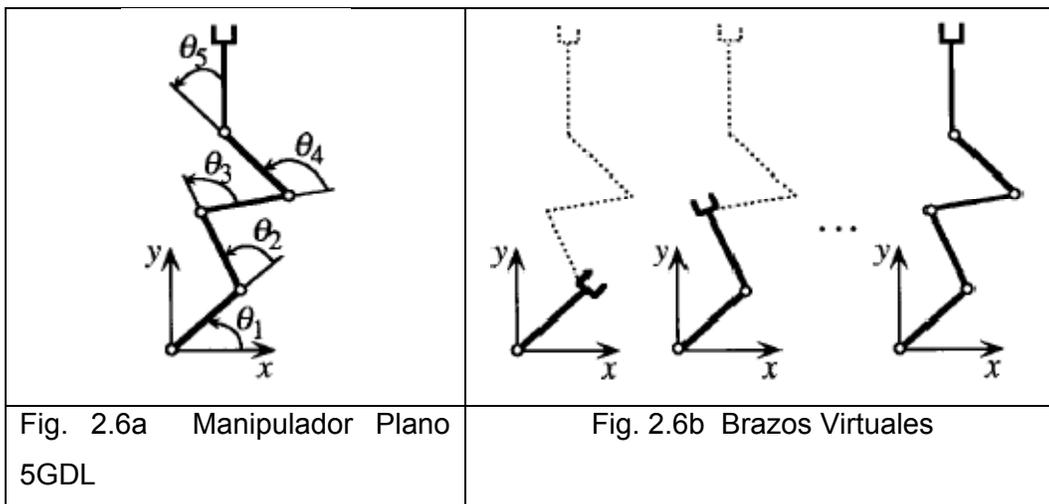
II.2.1.1. Robots seriales con cadenas virtuales

Chun, Youm, 1991. En el artículo. "Inverse kinematics of planar redundant manipulators using the virtual link and displacement distribution scheme" [76]. Presentan un método para el problema de la cinemática inversa de manipuladores planos redundantes. El método comienza por la descomposición de un brazo redundante en una serie de brazos locales que están en dos o tres módulos conectando los puntos de relación entre los brazos locales con los eslabones virtuales. Además de presentar eslabones virtuales presentan sub eslabones virtuales, ver Fig. 2.5a, b.



eslabones virtuales	eslabones virtuales y sub eslabones virtuales
---------------------	---

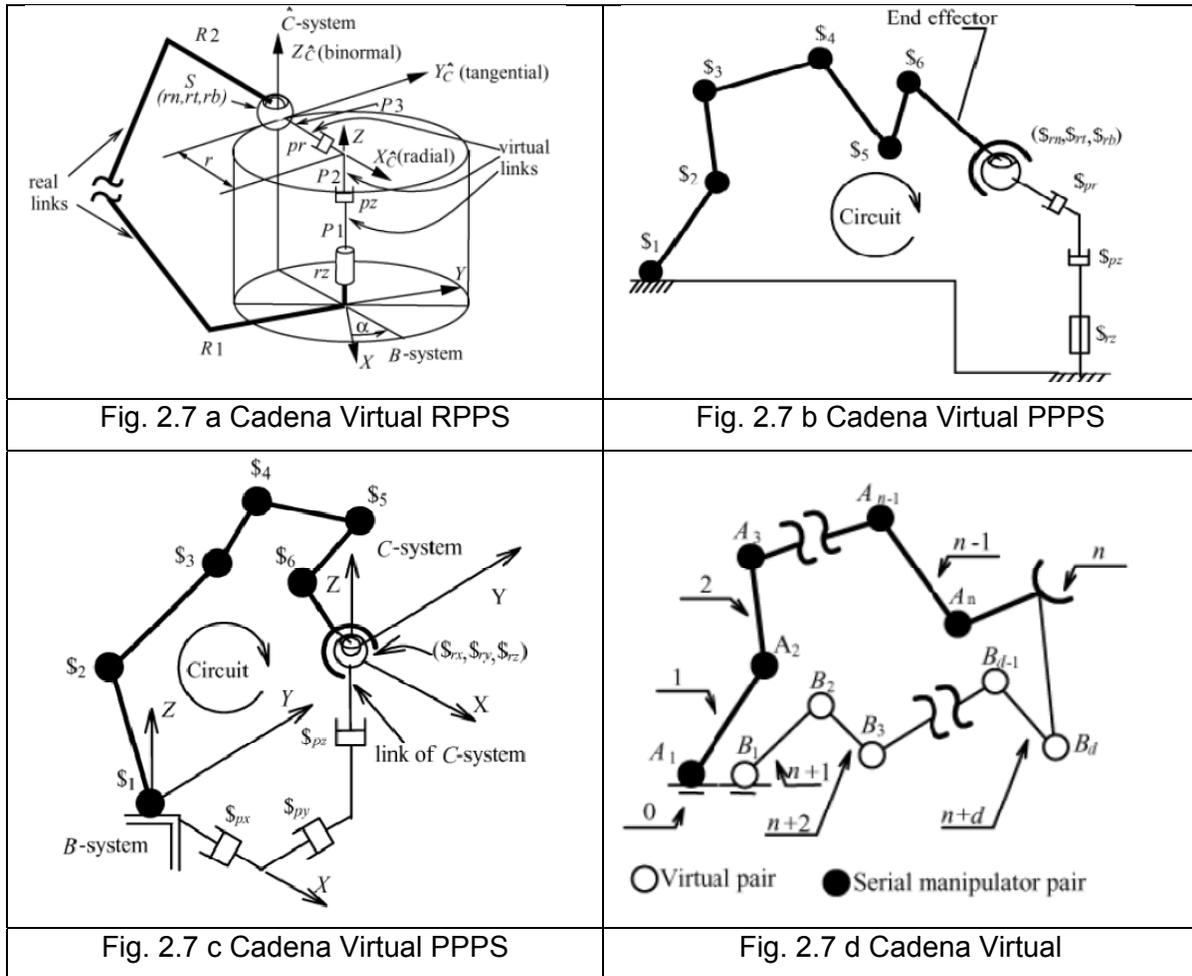
Tsuji y Nakayama, 1997 presentan en el artículo "Parallel and distributed trajectory generation of redundant manipulators through cooperation and competition among subsystems" [77, 78]. El control autónomo distribuido (ADC) como un enfoque atractivo para los sistemas robóticos. El documento propone un método paralelo y distribuido de generación de trayectoria para manipuladores redundantes a través de interacciones cooperativas y competitivas entre los subsistemas que componen el ADC, que se basa en el concepto de brazos virtuales. El brazo virtual tiene la misma estructura cinemática que el manipulador (ver Fig. 2.6a, b), con la excepción de que su punto final se encuentra en una articulación o un enlace del manipulador.



El manipulador redundante puede ser representado por un conjunto de brazos virtuales. Se discuten la generación de trayectorias y el control punto a punto del manipulador redundante y se demuestra que la redundancia cinemática del manipulador puede ser utilizada positivamente en las trayectorias generadas mediante el uso de los brazos virtuales.

Campos, Guenther, 2005 en el artículo, Differential kinematics of serial manipulators using virtual chain [65]. Presentan un enfoque nuevo para calcular la cinemática diferencial directa e inversa para manipuladores seriales. El enfoque es una extensión del método de Davies para cadenas cinemáticas abiertas basadas en un concepto de la cadena

cinemática virtual introducida en este trabajo. Es un método sistemático que unifica la cinemática de manipuladores de serie teniendo en cuenta el tipo de cinemática y el sistema de coordenadas del espacio operacional y constituye una forma alternativa para resolver la cinemática diferenciales para los manipuladores. La utilidad del método se ilustra mediante la aplicación a un robot industrial.



II.2.1.2. Robots paralelos con cadenas virtuales

II.2.1.2.1. Síntesis de tipo

En la síntesis de tipo de manipuladores de menos de 6 GDL (o de movilidad limitada) se debe de tomar en cuenta la descripción precisa y sin ambigüedades del movimiento deseado. En algunos casos, esta cuestión no es trivial, ya que lo demuestra la pluralidad

de las notaciones y convenciones que se utilizan en la literatura para describir el movimiento de manipuladores de 4GDL y 5 GDL.

En algunos trabajos se pretende proponer una clasificación de los movimientos de los manipuladores paralelos con el fin de hacer la síntesis más sistemática. Con este fin se introducen los conceptos de patrón de movimiento y de cadenas virtuales para representar el movimiento de los manipuladores paralelos. Se establece las bases para la síntesis de tipo de manipuladores paralelos, y para generar un patrón de movimiento.

Antes de realizar la síntesis de tipo de los manipuladores paralelos, se deben de definir los patrones de movimiento de la plataforma móvil. En algunos casos, este problema es trivial, para los manipuladores paralelos planos y de traslación. Sin embargo, para otros tipos de movimientos (por ejemplo manipuladores paralelos de 4 GDL y 5GDL), la especificación del movimiento deseado de la plataforma móvil es más compleja. De hecho, hay varios tipos de movimientos posibles de la plataforma, y un solo GDL no es suficiente para describir un movimiento. Por ejemplo, para un manipulador de 3 GDL el movimiento puede ser un movimiento de traslación de 3 grados de libertad, un movimiento esférico de 3 grados de libertad, un movimiento plano de 3 grados de libertad o cualquier otro movimiento de 3 grados de libertad.

II.1.3.1.3.2. Patrón de movimiento

Se define como un conjunto (posiblemente infinito) continuo de posturas que describe el tipo de movimiento deseado en la plataforma móvil. Por ejemplo, para la SPM de traslación, el patrón de movimiento es descrito por un conjunto de cuerpos rígidos.

II.1.3.1.4. Cadena virtual en la síntesis de tipo.

Dado que los métodos existentes de la descripción de los patrones de movimiento de las plataformas móviles no son convenientes en algunos casos, el concepto de cadena virtual es introducido para representar el patrón de movimiento de una plataforma móvil. Una cadena virtual está asociada con un patrón de movimientos de una cadena cinemática en serie o en paralelo cuya plataforma móvil ha dado el patrón de movimientos prescrito. Es evidente que el concepto de cadena virtual no es único y varias cadenas virtuales pueden

ser definidas por un patrón de movimientos dados. En general, para un patrón de movimiento dado, una cadena virtual es la llave de un sistema integral de un gran número de cadenas de serie y cadenas en paralelo. Las cadenas virtuales que son cadenas de serie se llaman cadenas virtuales seriales. Ejemplos de las cadenas de serie virtual se dan en las figuras. 4.1

Del mismo modo, las cadenas paralelas se llaman cadenas paralelas virtuales. Ejemplos de Paralelamente cadenas virtuales se muestran en la figura. 4.4. Una cadena de serie virtual se denota por la cadena de caracteres que indican el tipo de las articulaciones de la cadena virtual de la base de la plataforma móvil.

Por ejemplo, el PPP virtual de la cadena [fig. 4.1a] se compone de tres articulaciones P conectados en serie. Además de la cadena de PPP virtual, las cadenas de serie virtual de prácticas o interés teórico son: E [fig. 4.1b], S [fig. 4.1c], PPR [fig. 4.1d], PPPR [Fig. 4.2a], PS [fig. 4.2b], SP [fig. 4.2c], PPPU [fig. 4.3a], PPS [fig. 4.3b], EE.UU. [Fig. 4.3c] y la UE [fig. 4.3d] cadenas virtuales.

Una cadena virtual paralela se denota por el tipo de todos sus piernas conectadas por '-'. Por ejemplo, el PPS 3-cadena virtual [fig. 4.4a] se compone de tres ramas del PPS, y la cadena de 2 PPPU virtual [fig. 4.4b] se compone de dos piernas PPPU. Además clasificación de las cadenas en paralelo virtual es todavía una cuestión abierta.

Mediante la inspección de las figuras. 4.1-4.4, se puede observar que el concepto de cadena virtual es un método muy intuitivo y conveniente para representar los patrones de movimiento sin ningún tipo de ambigüedad. El concepto de cadena virtual es una herramienta eficaz en la síntesis de tipo de PMs.

II.1.3.1.4.1. Clasificación preliminar de los patrones de movimiento y mecanismos paralelos

Los patrones de movimiento y los manipuladores paralelos de la mayor aplicación potencial se presentan a continuación:

- **Movimiento PPP:** En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.1a], la plataforma móvil puede traducir arbitrariamente con respecto a la base.

- Movimiento E: En este tipo de patrón de movimiento la figura [4.1b], la plataforma móvil puede someterse a movimiento plano con respecto a la base. Aquí, se conoce como E = PM.
- Movimiento S: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.1c], debe haber un punto fijo en común entre la plataforma móvil y la base, mientras que el movimiento plataforma puede girar arbitrariamente con respecto a la base.
- Movimiento PPR: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.1d], la plataforma móvil puede girar sobre un eje con una determinada dirección constante que se puede traducir a lo largo de un plano.

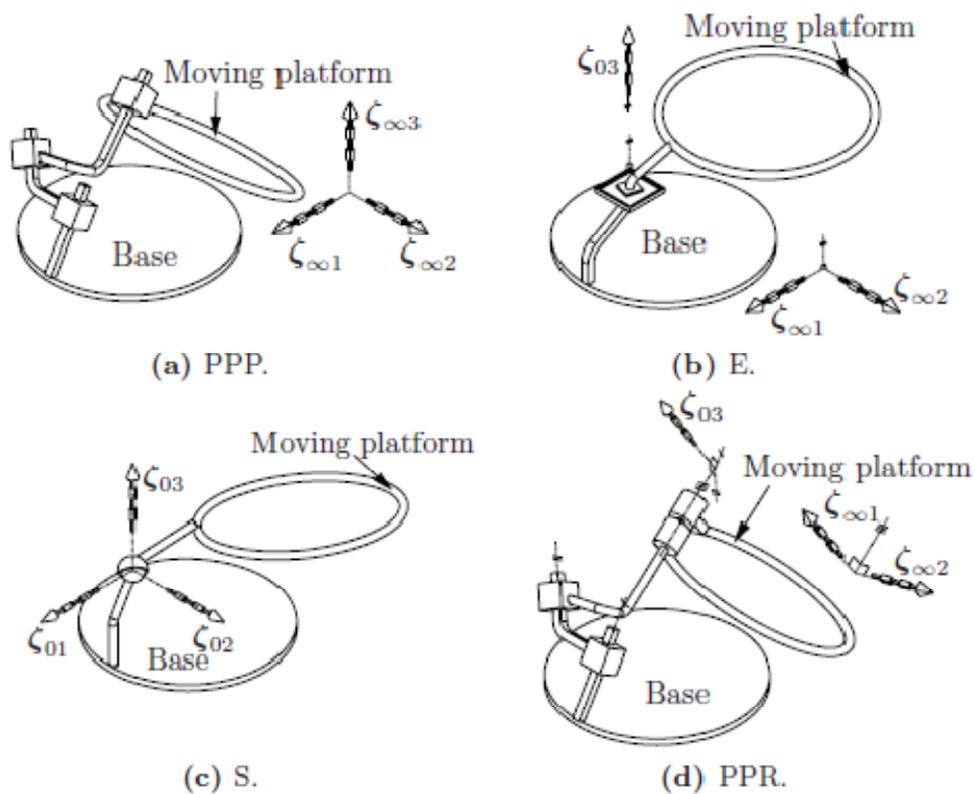


Fig. 2.8 Cadena virtual serial de 3GDL

- Movimiento PPPR: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.2a], la plataforma móvil

puede girar sobre un eje que tiene una dirección determinada y constante que puede girar de manera arbitraria.

- Movimiento PS: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.2b], la plataforma móvil puede girar alrededor de un punto de lo que se traduce en una dirección dada.
- Movimiento SP: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.2c], la plataforma móvil puede sufrir el movimiento cilíndrico a lo largo de una línea que gira de acuerdo a un conjunto U

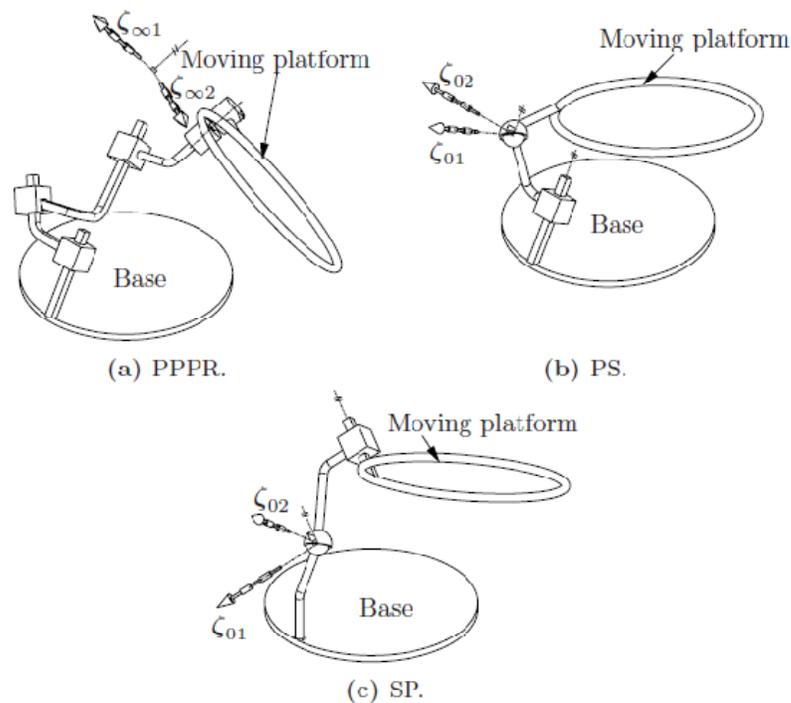


Figura 2.9 Cadena virtual serial de 4GDL

- Movimiento PPPU: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.3a], la plataforma móvil puede girar alrededor de un conjunto U, cuyo centro se puede traducir de manera arbitraria.

- Movimiento PPS: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.3b], la plataforma móvil puede girar alrededor de un punto de lo que se traduce en un plano. El correspondiente clase de PM a menudo se llama PM 2T3R
- Movimiento EE.UU: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.3c], la plataforma móvil puede girar arbitrariamente alrededor del centro de la articulación de la S que se mueve a lo largo de una superficie esférica con su centro situado en el centro de la articulación de U. La clase correspondiente de la PM que se denomina EEUU= PM.
- Movimiento UE: En este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.3d], la plataforma móvil pueden someterse a movimiento plano a lo largo de un plano que gira de acuerdo a un conjunto U.

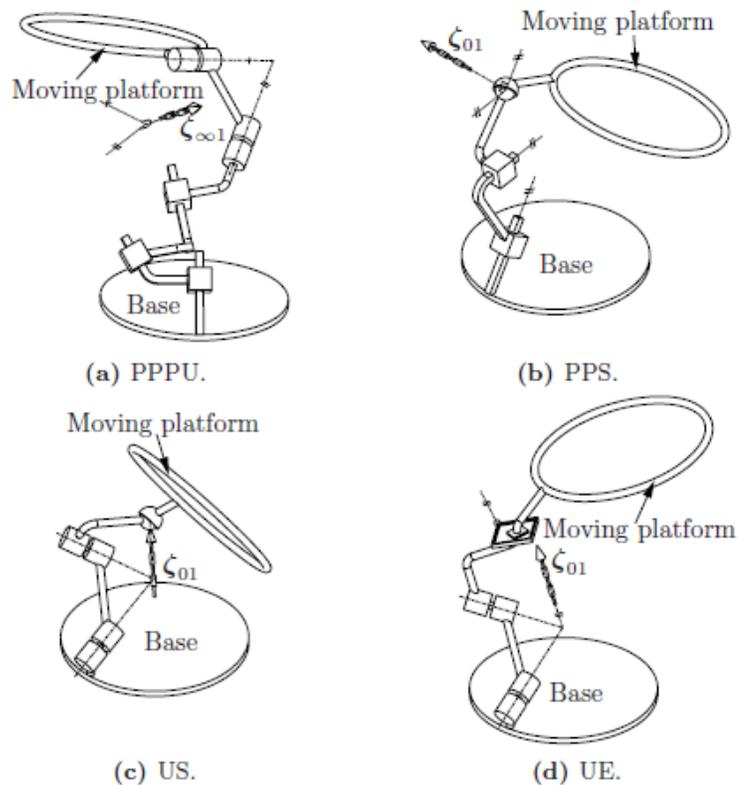


Figura 2.10 Cadena virtual serial de 5GDL

- Movimiento 3-PPS: Este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.4a] no es fácil de describir. La clase correspondiente de la PM se llama cero de torsión PM [9] en la literatura.
- Movimiento 2-PPPU: Al igual que el 3-PPS, este tipo de patrón de movimiento [fig. 4.4b] tampoco es fácil de describir. Esta clase correspondiente de la PM se llama 2 PPPU = PM. El cual se propuso por primera vez en [31]. El sistema que en realidad es una combinación lineal de los dos los sistemas PPPU dentro de la cadena de 2 PPPU virtual.

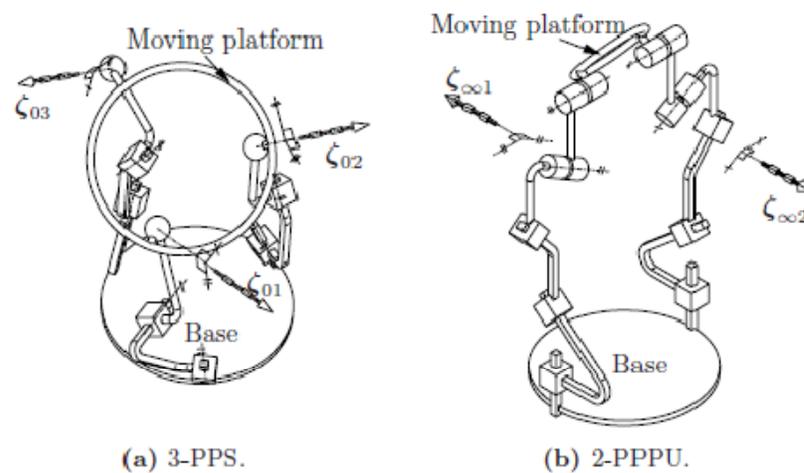


Figura 2.11 Cadena virtual Paralela

Algunos artículos relacionados con la síntesis de tipo, teoría de tornillos y cadenas virtuales son:

- Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory, 2004 [79].
- Type synthesis of 3-DOF PPR parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain, 2004[80].
- Type synthesis of 3-DOF spherical parallel manipulators based on screw theory, 2004 [81].
- Type synthesis of 3-DOF translational parallel manipulators based on screw theory and a virtual joint, 2004 [82].

- Type Synthesis of 3-DOF PPR-Equivalent Parallel Manipulators Based on Screw Theory and the Concept of Virtual Chain, 2005 [83].
- Type synthesis of 4-DOF SP-equivalent parallel manipulators: A virtual chain approach, 2006 [84].
- Type synthesis of parallel mechanisms with multiple operation modes, 2007 [85].

II.1.3.1.5. Cadena virtual de Assur.

En el artículo Differential kinematics of parallel manipulators using Assur virtual chains, [86]. Se introduce el concepto de cadenas virtual de Assur y sus aplicaciones en la cinemática diferencial de los manipuladores paralelos. El uso de cadenas virtuales de Assur la y cinemática diferencial tiene una formulación simple matricial y la elección entre la cinemática directa e inversa se reduce a seleccionar las variables primarias en un sistema lineal homogéneo. Las cadenas virtuales de Assur también son útiles para obtener información acerca de los movimientos relativos o de imponer restricciones particularmente a la cinemática entre dos eslabones de una cadena cinemática.

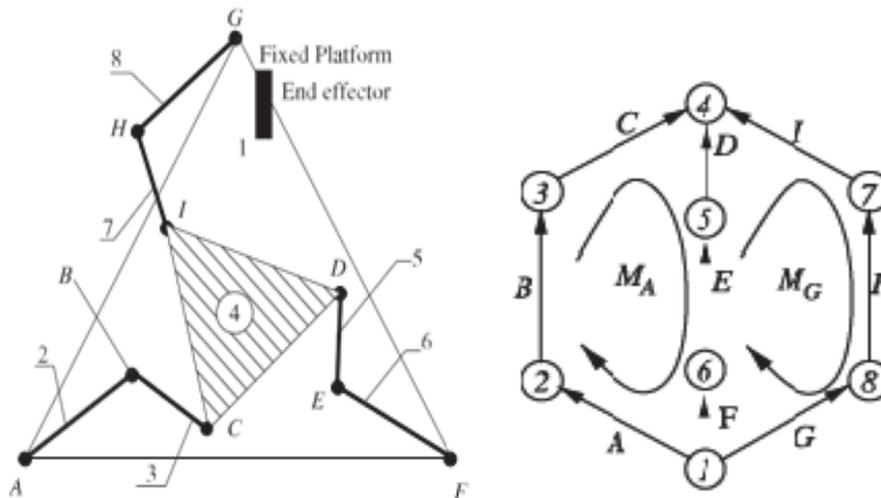
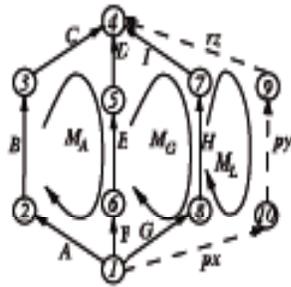
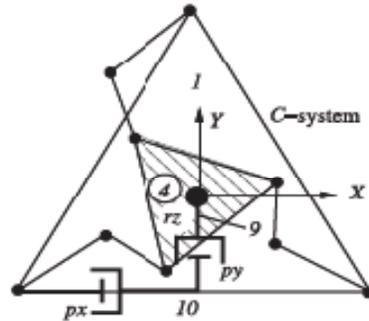


Fig. 2.12 Manipulador paralelo 3RRR y grafos del robot

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_B \\ \vdots \\ \dot{q}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \$B & \$C & -\$D & \$E & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \$D & \$E & -\$H & -\$I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \$A & -\$F & \vec{0} \\ \vec{0} & \$F & -\$G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_A \\ \dot{q}_F \\ \dot{q}_G \end{bmatrix}$$



G_M graph corresponding to the 3RRRm manipulator with $n = 10$, $e = 12$, and $l = 3$, where the Assur virtual chain is represented by dashed line



Virtually modified chain 3RRRm in the XY plane

Fig. 2.13 Cadena Virtual en el robot 3RRR

$$N_{act} \dot{q}_{act} + N_{pass} \dot{q}_{pass} + N_v \dot{q}_v = 0$$

En este nuevo algoritmo se eliminan analíticamente las juntas pasivas, y se obtienen las matrices jacobianas referentes a la cinemática diferencial directa e inversa. Este enfoque de eliminación se basa en conceptos de la teoría del tornillo, también, la teoría de tornillo se utiliza para la representación de la cadena cinemática. Al final del artículo, el método se aplica a un manipulador paralelo plano 3RRR y a una plataforma general Gough-Stewart universal.

$$\underbrace{\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{N}_{act}}_{\mathbf{J}_q} \dot{q}_{act} + \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{N}_{pass}}_{\mathbf{J}_x} \dot{q}_{pass} + \underbrace{\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{N}_v}_{\mathbf{J}_v} \dot{q}_v = [0]$$

$$\mathbf{J}_q = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{N}_{act}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{1x}b_{1y} & 0 & 0 \\ -a_{1y}b_{1y}) & & \\ 0 & (a_{2x}b_{2y} & 0 \\ -a_{2y}b_{2y}) & & \\ 0 & 0 & (a_{3x}b_{3y} \\ -a_{3y}b_{3y}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_x = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{N}_v = \begin{bmatrix} b_{1x} & b_{1y} & (b_{1y}c_{1x} - b_{1x}c_{1y}) \\ b_{2x} & b_{2y} & (b_{2y}c_{2x} - b_{2x}c_{2y}) \\ b_{3x} & b_{3y} & (b_{3y}c_{3x} - b_{3x}c_{3y}) \end{bmatrix}$$

II.2.1.3. Robots híbridos y móviles con cadenas virtuales

II.2.1.3.1. Robots híbridos

Shukla y Paul, 1992 Presentan el artículo “Motion kinematics of series-parallel robots using a virtual link concept”[87]. El cual es un enfoque genérico y sistemático para resolver la cinemática de robots manipuladores híbridos de una configuración serie-paralelo. El concepto de enlace virtual es un desarrollo teórico para resolver la cinemática de robots híbridos utilizando el método de Denavit-Hartenberg. Estas anotaciones han sido hasta ahora aplicables sólo a los robots serie. El concepto de enlace virtual emplea cadenas denominadas virtuales, para transformar un manipulador serie paralelo en un manipulador de serie equivalente. La cinemática de este manipulador serie transformada se resuelve durante anotaciones Denavit-Hartenberg. Los resultados se asignan de nuevo al manipulador de las relaciones reales con las virtuales del manipulador serie y paralelo, y se sustituye la estructura del manipulador real. Este enfoque parece ser de orden general y sistemático para el análisis de la cinemática de robots manipuladores en serie-paralelo.

Jun, Xiaorui, en 2009. En el artículo “New method for kinematic analysis of a hybrid manipulator”[88] presentan un nuevo método para analizar la cinemática utilizado el robot

manipulador híbrido comercial IRB260 de la compañía ABB. Este manipulador incluye dos mecanismos paralelos de cuatro barras que hacen de la cinemática y análisis dinámico complicado. En este trabajo, el método analítico riguroso es totalmente basado la teoría de tornillo. Este método crea a un manipulador virtual de cadena abierta que es equivalente al del manipulador híbrido. Los resultados de la simulación mostraron que este nuevo método es correcto en la cinemática de manipuladores híbridos.

II.2.1.1.1. Robots móviles

Gonzalez-Villela, en 2006, en la tesis doctoral "Research on a semiautonomous mobile robot for loosely structured environments focused on transporting mail trolleys" [30]. Presenta un enfoque nuevo para el modelo, el control y la planificación del movimiento de un robot móvil con ruedas no holonómicas. El enfoque se basa en proponer un método para obtener un conjunto de restricciones cinemáticas que están asociados con cada rueda del robot. Entonces, una configuración de la representación en espacio de estado cinemático del robot se obtiene mediante la búsqueda de un codistribución de las restricciones cinemáticas, donde por primera vez se presentan un conjunto de funciones paramétricas holonómicas que son útiles para la coordinación de la dirección de múltiples ruedas de dirección. A la configuración del robot móvil se añade una rueda virtual orientable, situada en algún lugar en la plataforma de robot, para controlar un punto específico situado en la rueda virtual orientable. De esta manera, es posible controlar indirectamente los movimientos de un punto específico del robot móvil, situado en algún lugar en la plataforma de robot y producir los comandos para coordinar las ruedas orientables motorizadas.

II.2.2. Conclusiones preliminares

Se realizó revisión bibliográfica, donde se mencionan trabajos donde abordan la cinemática de manipuladores así como en la síntesis de tipo. En la Tabla 2.1 se muestran artículos que tratan de la cinemática directa e inversa de manipuladores, así como también algunos trabajos que hablan de cadenas virtuales.

Donde se puede observa que a la fecha desde el año de 1991 se ha introducido el concepto de cadena virtual, y que ha sido aplicado a manipuladores seriales, paralelos e

híbridos, así como también a se puede observar que el termino de virtualidad también aparece en el los robots móviles con el concepto de llanta virtual.

Tabla principales artículos encontrados relacionados con la cinemática virtual.

No.	DESCRIPCIÓN	AUTOR AÑO
1	Inverse Kinematics of Planar Redundant Manipulators using Virtual Link and Displacement Distribution Schemes	W. J. Chung: W. K. Chug and Y. Youmt April 1991 KOREA
2	*Motion kinematics of series-parallel robots using a virtual link concept.	Shukla, Deepak; Paul, Frank W. September 13, 1992
3	Development of Virtual Link Method for the Solution of Hyper Redundant Spatial Robots	Hashem Ashrafiuon, Kiran Sanka January 16, 1996
4	Parallel and Distributed Trajectory Generation of Redundant Manipulators Through Cooperation and Competition Among Subsystems	Toshio Tsuji, <i>Associate Member, IEEE</i> , Seiya Nakayama, and Koji Ito, <i>Member, IEEE</i> JUNE 1997
5	Modeling and simulation of robotic systems with closed kinematic chains using the virtual spring approach	Wang, Jiegao; Gosselin, Clément M.; Cheng, Li March 2002
6	Type Synthesis of 3-DOF Spherical Parallel Manipulators Based on Screw Theory	Xianwen Kong, Clément M. Gosselin January 2004
	Type Synthesis of 3T1R 4-DOF	Xianwen Kong, Clément M. Gosselin

7	Parallel Manipulators Based on Screw Theory	April 2004
8	Type synthesis of 3-DOF PPR parallel manipulators, based on screw theory and the concept of virtual chain	Kong, Xianwen Gosselin, Clément M. September 28, 2004
9	Type Synthesis of 5-DOF Parallel Manipulators Based on Screw Theory	Xianwen Kong, Clément M. Gosselin accepted 19 May 2005
10	Mobility analysis of parallel mechanisms based on screw theory and the concept of equivalent serial kinematic chain	Xianwen Kong, Clement M. Gosselin September 24, 2005
11	Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain	Kong, Xianwen ¹ ; Gosselin, Clément M. November 2005
12	The application of the principle of virtual chain to the type synthesis of parallel mechanisms.	Xianwen Kong, Clement M. Gosselin December 2005
13	Study of dead-centre positions of singledegree of freedom planar linkages using Assur kinematic chains	G R Pennock and G M Kamthe January 2006. USA
14	Research on a semiautonomous mobile robot for loosely structured environments focused on transporting mail trolleys	Gozalez-Villela, en 2006 U.K

15	*Differential kinematics of parallel manipulators using Assur virtual chains	A Campos, R Guenther, and DMartins December 2008
16	*A new method to solve robot inverse kinematics using Assur virtual chains	H. Simas, R. Guenther, D. F. M. da Cruz and D. Martins March 6, 2009 Brazil

En los manipuladores seriales se presentan cadenas virtuales, sub cadenas virtuales y cadenas virtuales de Assur.

En la síntesis de tipo se ha realizado un exhaustivo estudio sobre cadenas virtuales principalmente quien ha encabezado dicho investigación es Xianwen Kong, Clement M. Gosselin [9]. Encontrando así que ya existen un aserie de cadenas virtuales las cuales clasifican como cadenas virtuales seriales de 3GDL (PPP, S, E, PPR), 4GDL (PPPR, PS, SP), 5GDL (PPPU, PPS, UE, EE.UU) y cadenas virtuales paralelas (3-PPS, 2-PPPU).

En las cadenas virtuales de Assur define a las cadenas virtuales en el sistema cartesiano de dos dimensiones (PPR) en el sistema polar de dos dimensiones (RPR). En los sistema de tres dimensiones: cartesiano (PPPS), cilindrico (RPPS), esferico (RRPS)

II.2.3. Análisis de las metodologías generales usadas para resolver el problema

El término de cadena virtual se utiliza libremente en la literatura con varios significados. Por ejemplo, Bruyninckx crea un concepto de cadena virtual para establecer limitaciones holonómicas sobre las ruedas de robot móviles [89], Gonzalez-Villela utiliza el concepto de llanta virtual [30]. Además, Kong y Gosselin[9, 84, 90-92] crearon otro concepto de cadenas virtuales para representar los patrones de movimiento de la plataforma móvil, con respecto a la base fija de manipuladores paralelos, para la síntesis de un tipo de tres, cuatro y cinco grados de libertad. Otro concepto manipulador virtual se utiliza para imitar la cinemática y la dinámica de un manipulador en el espacio que proporciona una manera

más simple de derivar sus ecuaciones [93, 94]. Este manipulador virtual no es realmente una cadena virtual, sino un mecanismo virtual cuyo primer eslabón es virtual y conectado con el centro de masa del enlace correspondiente a la base flotante. Campos define las cadenas virtuales de Assur y las aplica a manipuladores seriales y paralelos

En general las cadenas virtuales encontradas en la literatura se utilizan en manipuladores seriales, paralelos y en los híbridos, se ha profundizado muy poco. Así como también el termino de virtual se ha utilizado en los robots móviles con el concepto de llanta virtual.

Un método paralelo y distribuido de generación de trayectoria de los manipuladores redundantes a través de interacciones cooperativas y competitivas entre los subsistemas que componen el ADC que se basa en un concepto de brazos virtuales. El brazo virtual tiene la misma estructura cinemática que el manipulador, con la excepción de que su punto final se encuentra en una articulación o un enlace del manipulador. El manipulador superfluo puede ser representado por un conjunto de brazos virtuales. La generación de trayectoria y desde un punto a otro de control del manipulador redundante se discuten, y se demuestra que la redundancia cinemática del manipulador puede ser utilizada positivamente en las trayectorias generadas mediante el uso de los brazos virtuales.

El concepto de enlace virtual es un desarrollo teórico para resolver la cinemática de robots híbridos utilizando el método de Denavit-Hartenberg.

La síntesis de tipo de un robot equivalente 3GDL PPR. Se introduce el término de cadenas virtuales para representar los patrones de movimiento y se toman los resultados relevantes de la teoría de los tornillos. Se propone un método para la síntesis de tipo de un robot equivalente de 3GDL PPR

Se introduce el concepto de cadenas virtuales de Assur y sus aplicaciones en la cinemática de manipuladores paralelos, el método se aplica a un manipulador plano paralelo 3RRR y una plataforma general Gough-Stewart universal-prismáticos-esférica

Método para analizar la cinemática utilizado el robot manipulador híbrido comercial IRB260 de la compañía ABB. Este manipulador incluye dos mecanismos paralelos de cuatro barras que hacen de la cinemática y análisis dinámico complicado. En este trabajo,

el método analítico riguroso es totalmente basado en la coordenada exponencial descripción y la teoría de tornillo.

Se describe un algoritmo numérico para resolver la cinemática inversa de robots paralelos basados en la integración numérica. Los algoritmos de la cinemática inversa basados en la integración numérica implican los fenómenos que deriva de la solución, como consecuencia, los errores se generan cuando la ubicación efector es diferente de la deseada. El algoritmo propuesto describe un nuevo método para describir la cinemática diferencial con un método de integración numérica sencilla.

Este artículo trata de la síntesis de tipo 3-DOF PPR-MPs. Al principio, las cadenas virtuales se introducen para representar los patrones de movimiento de los movimientos 3-DOF y resultados relevantes de la teoría de los tornillos

La introducción de las cadenas virtuales para representar los patrones de movimiento de las mociones de 5-DOF, una clasificación de 5-DOF MPs (manipuladores paralelos) se propone al principio. Un método general para la síntesis de tipo 5-DOF PMs Luego se propone sobre la base de la teoría de tornillo y utilizando el concepto de cadenas virtuales

Un enfoque general ha sido propuesto basado en la teoría de tornillo para la síntesis tipo de 3T1R-MPs. 3T1R-PKC con juntas inactivas, así como 3T1R PKC-sin juntas inactivos, se han obtenido.

Se ha realizado investigación para resolver la síntesis de tipo por medio del concepto de eslabón virtual para manipuladores paralelos específicos, así como también se utilizado la teoría de tornillo para resolver este tipo de análisis, pero no se ha realizado el estudio de los eslabones virtuales aplicados a manipuladores paralelos. Así como tampoco se ha realizado el análisis en velocidades, todo ha sido en posición por métodos de tornillo, Denavit-Hartenberg, método algebraico, transformaciones homogéneas, método geométrico. Por lo que se propone un nuevo método similar al de la llanta virtual de robótica móvil[30] aplicado a los robots paralelos.

II.3. EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

El problema a desarrollar es la cinemática virtual de robots manipuladores paralelos, proponiendo nuevas teorías en la solución de la cinemática de los robots paralelos. Se mencionan algunas soluciones encontradas para este tipo de manipuladores. Se mencionan a continuación algunos trabajos que resuelven la cinemática directa e inversa de manipuladores paralelos, así como también algunos trabajos que hablan de cinemática virtual.

Proponer una cadena virtual y realizar el estudio de la cinemática virtual aplicada a robots paralelos híbridos. Aplicando las teorías de los sistemas no lineales con las teorías de la robótica paralela y la robótica móvil.

1. Proponer el concepto de cadena virtual.
2. Realizar el estudio de la cinemática en velocidades.
3. Aplicar las teorías de robótica móvil a la robótica paralela.
4. Cinemática virtual en robots híbridos

Se ha realizado la revisión bibliográfica en artículos como en libros. Aunque en el libro *Type Synthesis of Parallel Mechanisms* de Xianwen Kong and Clément Gosselin, se define el concepto de cadena virtual no utilizan el concepto de propagación de velocidades. Así como tampoco es utilizado en los artículos revisados. Como se puede observar en las referencias encontradas la mayor parte de la información de los de artículos se puede encontrar en el libro antes mencionado.

***III. TEORÍA DE
MANIPULADORES CON
CADENAS VIRTUALES***

Panorama del capítulo

Como se ha mencionado en la sección II, en la cinemática de manipuladores hay dos puntos de vista que están entrelazados: el análisis cinemático y la síntesis cinemática. En esta sección se presenta la teoría de un nuevo enfoque para obtener el modelo cinemático de un manipulador paralelo delta plano de configuración $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ y un modelo cinemático de su cadena virtual serial $(RRR)_v$. Ambos modelos en variables de estado y en función de las variables articulares de la cadena virtual. Donde, en el primer modelo, se incluyen todas las variables de configuración del manipulador delta plano, incluyendo las variables de configuración de la cadena virtual en una sola matriz. Permitiendo, de esta manera, hacer un análisis cinemático completo del robot delta plano y de su controlabilidad

III.1.INTRODUCCIÓN

III.1.1. Representación del espacio de estado

La teoría moderna de control está basada en el conocimiento del comportamiento interno de los sistemas, reflejado en las variables que influyen en su dinámica. Estas variables constituyen el concepto de estado del sistema. El conocimiento de la evolución de todas las variables que influyen en la dinámica del sistema permite efectuar un control más potente de ésta y abordar el control de sistemas más complejos. La teoría moderna de control se desarrolla para solventar algunos de los problemas en los que presenta fuertes limitaciones la denominada teoría clásica, basada en el modelado de la relación entre una entrada y una salida de los sistemas dinámicos lineales de parámetros constantes. Las ventajas de la teoría moderna de control, en contraposición a la teoría clásica, son fundamentalmente las siguientes:

Es aplicable a sistemas multivariables en los que existe un elevado grado de interacción entre las variables del sistema, no pudiendo establecerse bucles de control entre una salida y una entrada concreta que se puedan ajustar de forma independiente según se aborda en la teoría clásica.

Es aplicable a sistemas con relaciones no-lineales entre las variables involucradas en su dinámica y cuyo comportamiento no puede ser aproximado por un modelo lineal, dentro del rango de valores que van a tomar sus variables.

Es aplicable a sistemas cuyos parámetros varían en el tiempo a velocidades comparables con la evolución de sus variables, para los que no se puede obtener, en consecuencia, un modelo de parámetros constantes válido en el rango temporal necesario para efectuar el control.

Es aplicable a sistemas complejos de control, con un gran número de variables internas que condicionan el comportamiento futuro de la salida. La utilización de la realimentación sólo de la salida, según el modelo clásico, empobrece la información disponible por el regulador para controlar la planta, lo que llega a impedir un control de la salida del sistema con mejores prestaciones.

Es aplicable a la optimización del comportamiento de sistemas, entendida ésta como la minimización de una función objetivo que describe un índice de costo que a su vez refleja la calidad en la consecución de los objetivos de control. Las mencionadas ventajas diferenciadoras de la teoría son abordadas por distintas ramas del control, denominadas respectivamente: control multivariable, control no-lineal, control adaptativo, control por asignación de polos y control óptimo. Aunque cada una de estas ramas del control automático utiliza técnicas que le son propias, todas ellas confluyen en la necesidad de un modelo del comportamiento de sistemas dinámicos que incluya la evolución de sus variables internas, que pueda aplicarse a sistemas multivariables y que pueda ser no-lineal y /o de parámetros no constantes. Este modelo del sistema es el denominado modelo de estado del sistema.

Si los sistemas multivariables a los que se aplica la teoría moderna de control presentan un comportamiento dinámico que puede aproximarse por modelos lineales de parámetros constantes, se simplifica mucho su análisis y el diseño de los reguladores multivariables.

III.1.2. Representación del espacio de estado

La teoría moderna de control se basa en la representación matemática de los sistemas dinámicos por medio del concepto de estado, en contraposición con la teoría clásica de control, que utiliza únicamente la relación entre su entrada y su salida.

Se define **estado de un sistema** como la mínima cantidad de información necesaria en un instante para que, conociendo la entrada a partir de ese instante, se pueda determinar cualquier variable del sistema en cualquier instante posterior.

Es común emplear la nomenclatura de representación interna, cuando se utiliza el estado para representar un sistema, y representación externa, cuando se emplea la relación entrada-salida.

La cantidad mínima de información que define el estado viene representada por un conjunto de variables $x_i(t)$ cuyos valores dependen del instante t considerada, denominadas variables de estado del sistema. Este conjunto de variables, $x(t)$, recibe el nombre de vector de estado. En la gran mayoría de los sistemas físicos reales se podrá

obtener un modelo suficientemente aproximado donde el vector de estado sea de dimensión finita, n .

III.1.3. Controlabilidad

A la vista de la relación existente entre entrada y estado, cabe abordar el estudio de cómo se puede influir en el valor del estado a través de la entrada: así, es pertinente preguntarse si dada una trayectoria arbitraria definida en el espacio de estado, es posible encontrar la entrada que haga que el vector de estados la siga o si, por el contrario, existe alguna restricción en las posibles trayectorias que se puede inducir en el vector de estado mediante la elección de las entradas apropiadas.

El estudio de la controlabilidad de un sistema determina los puntos del espacio de estado que pueden ser alcanzados por un sistema actuando sobre las entradas de éste; puntos que determinan los denominados estados controlables. Este estudio abarca dos cuestiones a tener en cuenta:

- i. Considerando un sistema, un estado inicial y un estado final, se desea determinar la existencia de una entrada que lleve al sistema entre ambos en un tiempo finito. Esto no es posible en todos los casos, como se puede observar en el sistema de la Figura 3.1.

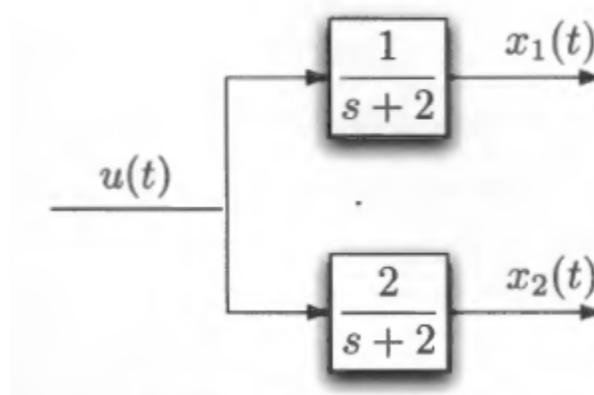


Fig. Sistema no controlable

En este caso, desde un determinado estado inicial sólo podrían ser alcanzados determinados puntos del espacio de estado, porque los valores de las dos

variables de estado están ligadas, al estar sometidas ambas a la misma dinámica; este hecho queda patente por el estudio de los bloques con cuyas salidas se corresponden a dichas variables. Entonces se dice que el sistema no es controlable, porque no puede alcanzar cualquier estado deseado a partir de un estado inicial dado.

- ii. Si un sistema no es controlable, la siguiente cuestión que surge es determinar los puntos del espacio de estado que pueden ser alcanzados partiendo de un estado inicial dado

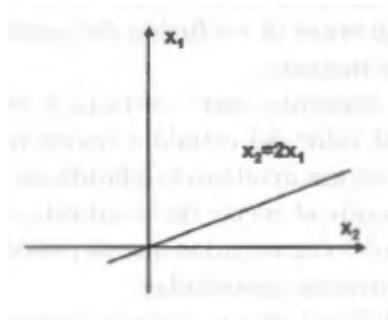


Fig. Puntos alcanzables desde (0,0)

El lugar geométrico de los puntos que pueden ser alcanzados por las variables de estado dadas para el sistema de la Figura , partiendo de condiciones iniciales nulas, es el representado en la Figura . Como puede verse, la restricción de que la dinámica de ambas variables de estado es la misma en todos los casos se traduce en que, partiendo de condiciones iniciales nulas como se ha dicho, en cualquier instante el valor de la variable x_2 es dos veces el valor de la variable x_1 :

La controlabilidad del estado en un intervalo de tiempo partiendo de un estado inicial se define:

Se dice que un punto del espacio de estado de un sistema, x_1 , es controlable desde el estado x_0 en $[t_0, t_1]$ si existe una entrada u definida en el intervalo $[t_0, t_1]$, tal que transfiera el estado del sistema desde x_0 en t_0 hasta x_1 en t_1 .

En la anterior definición se han impuesto restricciones tanto en el tiempo como en el estado inicial desde el que se comienza a aplicar la entrada; resulta un concepto de

controlabilidad condicionado en el aspecto temporal y en los estados inicial y final. Estas restricciones se pueden eliminar una por una o ambas a la vez, resultando un concepto de controlabilidad extendido a cualquier intervalo de tiempo y partiendo de cualquier estado inicial.

Se dice que un punto x_1 del espacio de estado de un sistema es controlable desde x_0 si y sólo si para todo t_0 existe un t_1 finito, tal que x_1 es controlable desde x_0 en $[t_0, t_1]$.

Se dice que un punto x_1 del espacio de estado de un sistema es controlable en $[t_0, t_1]$ si y sólo si para todo x_0 , x_1 es controlable desde x_0 en $[t_0, t_1]$.

La controlabilidad del estado para cualquier instante y para cualquier estado inicial se define como:

Se dice que un punto x_1 del espacio de estado de un sistema es controlable si, para todo estado inicial, x_0 , y para todo t_0 , existe un t_1 finito, tal que x_1 es controlable desde x_0 en $[t_0, t_1]$.

La diferencia entre las definiciones de controlabilidad primera y tercera respecto a la segunda y cuarta estriba en la forma de considerar la variable tiempo. En el primer caso se considera únicamente un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ determinado, mientras que en el segundo se exige que para todo t_0 exista un t_1 , que puede ser arbitrario aunque finito. Ninguna de las dos restricciones incluye a la otra:

- Un punto x_1 puede ser controlable desde x_0 en $[t_0, t_1]$, pero puede no serlo para cualquier instante inicial.
- Por contra, un punto puede ser controlable partiendo desde cualquier instante inicial t_0 , pero no en un intervalo predeterminado $[t_0, t_1]$

Obsérvese que la controlabilidad de un punto no implica que éste sea un estado de equilibrio, sino que es posible encontrar una entrada tal que el estado describa una trayectoria que incluya al punto controlable; dicho de otra forma, la controlabilidad de un punto implica que la trayectoria en el espacio de estado pasa por él, pero no que se detenga en él, como ocurriría con un punto de equilibrio.

El concepto de controlabilidad de un punto del espacio de estado de un sistema se amplía al concepto de controlabilidad de un sistema, definido como:

Un sistema se dice controlable si todos los puntos de su espacio de estado son controlables.

III.2.POSTURA DEL ROBOT PARALELO CON CADENAS VIRTUALES

Un robot con ruedas móvil tiene dos marcos de referencia que son útiles para el análisis y el diseño. El primero es el sistema de referencia inercial principal de referencia fijo, representado por el sistema de coordenadas $\{x, y\}$ unido al punto fijo O , que contiene todo lo que está en el entorno del robot. La segunda es el marco robot de referencia en movimiento, representado por el sistema de coordenadas $\{x_1, y_1\}$ unido a que el punto P se fija firmemente a la plataforma de robot, el cual contiene todo lo relacionado con el cuerpo del robot. Por lo tanto, la postura del robot está completamente descrita por el vector:

$$\xi = [x \ y \ \theta]^T$$

Donde ξ describe la posición del punto de $P = (x, y)$ y la orientación θ del robot. El sistema $\{x_1, y_1\}$ está en relación con el sistema de referencia $\{x, y\}$. La orientación θ se mide desde el eje x hasta el eje x_1 eje. La postura de la matriz de rotación del robot móvil es una matriz de rotación ortogonal.

III.2.1. Postura del robot

La Fig. 1, muestra el robot paralelo delta plano en estudio, con sus tres cadenas cinemáticas independientes, accionadas cada una por un actuador. Como cada una de estas cadenas debe estar ligada, por un lado, a la tierra y por el otro, a la plataforma móvil al mismo tiempo, entonces, hay tres puntos de anclaje al suelo y tres puntos de unión a la plataforma móvil.

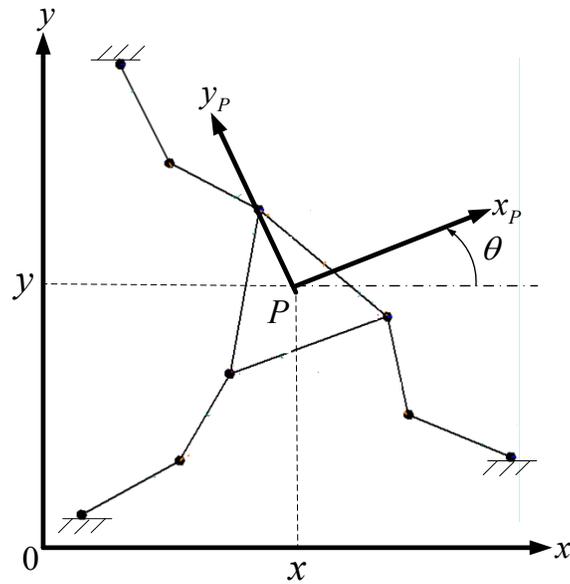


Fig 1. Postura del robot paralelo plano 3RRR

La Fig 1, muestra la postura del robot paralelo plano 3RRR y se puede describir, como sigue:

$$\xi = [x \ y \ \theta]^T$$

III.2.2. Vectores de velocidad Asignación de un punto entre el mundo y sistemas locales del robot

La cinemática diferencial del manipulador paralelo o serial se obtiene a partir de darle solución a las restricciones cinemáticas del manipulador en función de las variables generalizadas de velocidad, seleccionadas de entre el conjunto de las variables de configuración de velocidad.

III.2.2.1. Propagación de Velocidad del enlace i para enlazar $i + 1$

Una vez definido el sistema y declarado los parámetros necesarios, se resuelve la cinemática de la plataforma móvil. Esto se puede abordar de dos formas: a través de la cinemática directa o la inversa. En la directa se obtienen las ecuaciones que permiten conocer la velocidad y posición de la plataforma a partir de velocidades arbitrarias aplicadas a las ruedas. Este enfoque resulta impráctico, dado que el propósito del robot

no es el de andar de manera aleatoria por el entorno, sino el de alcanzar un objetivo en concreto.

Es por eso que se opta por resolver la cinemática inversa, donde a partir de velocidades de entrada de la plataforma se pueden obtener las velocidades de los actuadores necesarias para cumplir dicha orden. Las ecuaciones resultantes son la expresión matemática que define las restricciones cinemáticas del robot. Para ello se utiliza el método de propagación de velocidades del eslabón i al eslabón $i+1$.

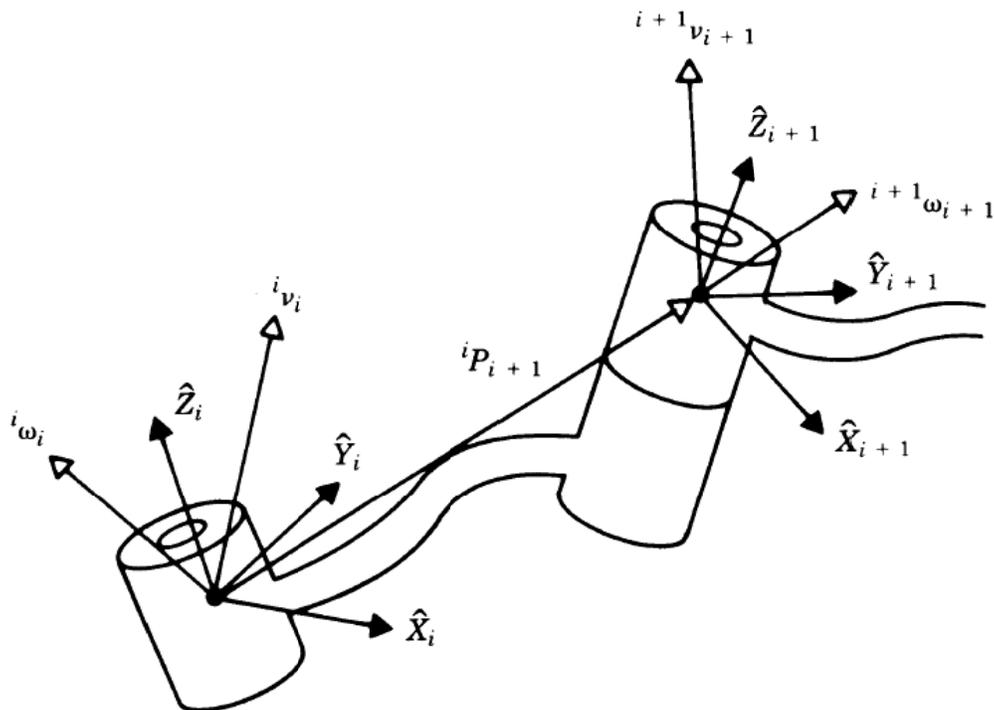


Figura 1. Propagación de velocidades del eslabón i al eslabón $i+1$

Lo que este método sugiere es que la velocidad angular del eslabón $i+1$ relativa a su propio sistema de referencia es igual a la velocidad angular del eslabón i con respecto al sistema $i+1$, más una componente propia del sistema $i+1$.

$${}^{i+1}_{i+1}\omega = {}^{i+1}_i R \times {}^i_i\omega + {}^{i+1}_{i+1}\dot{\theta}$$

Donde ${}^{i+1}_i R$ es la matriz de rotación del sistema i al sistema $i+1$. Por lo que al aplicársela a la velocidad angular de i con respecto al sistema i , obtenemos la velocidad angular de i con respecto a $i+1$ que se mencionó anteriormente.

Por otro lado, la velocidad lineal del eslabón $i+1$ con respecto a sí mismo es igual a la velocidad lineal del eslabón i más la velocidad provocada por el brazo de palanca ${}^i_{i+1}P$ y la velocidad angular de i . Todo esto referenciado al eje de coordenadas de $i+1$.

$${}^{i+1}_{i+1}v = {}^{i+1}_iR \times ({}^i v + {}^i \omega \times {}^i_{i+1}P)$$

Dado que el punto de análisis es el punto P_p de la plataforma, se realiza la propagación de las velocidades angular y lineal de dicho punto hasta las ruedas, utilizando las Ecuaciones 1 y 2 respectivamente. La definición de los sistemas coordenados permite una secuenciación ordenada del proceso.

III.2.2.2. Descripción de cadenas virtuales

En este trabajo se define a la cadena virtual como un elemento que existe en la cinemática del manipulador pero no en la dinámica de este. Debido a que la masa de los eslabones de la cadena virtual es considerada cero, los efectos inerciales en el modelo dinámico son nulos, existiendo matemáticamente en el modelo cinemático, pero no en el dinámico. Esto se puede interpretar que no existe físicamente.

III.2.2.3. Cadenas virtuales

Se utiliza la síntesis de tipo para definir las posibles cadenas virtuales a utilizar en este trabajo. Cadenas virtuales en el plano

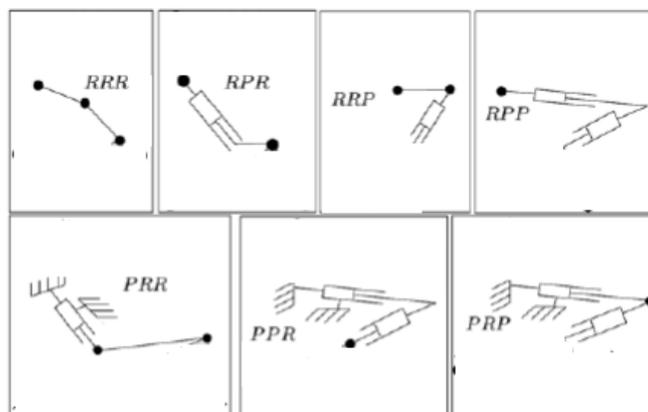


Fig. 2 Cadenas virtuales de 3GDL

***IV. MODELADO DE CASOS
PARTICULARES***

IV. Manipulador paralelo 3RRR-(RRR),: modelado

Para llevar a cabo la comprobación de que la teoría unificadora propuesta por [6] es aplicable de manera extendida a un robot paralelo plano del tipo 3RRR (Ver figura 2) . En este caso, se plantea que existe un robot paralelo con eslabones convencionales que están unidos por un cuerpo central (plataforma móvil) que será visto como el cuerpo de análisis. Las juntas que acoplan este último con eslabones permiten el libre giro entre ambos elementos unidos, además de situarse en puntos donde el eje de giro no sea normal al eje de rotación.

IV.1. DESCRIPCIÓN GENERAL

- i. El manipulador plano es del tipo 3RRR, el cual tiene un movimiento en el plano (X, Y).
- ii. Debido a la configuración que presenta, tiene una rotación (ϕ) sobre el eje Z.
- iii. El robot manipulador paralelo delta plano está compuesto por una plataforma fija y una plataforma móvil.
- iv. El robot manipulador paralelo delta plano está formado por tres cadenas cinemáticas.
- v. Cada cadena cinemática del robot manipulador delta plano está formado por dos eslabones rígidos conectados por juntas rotacionales.
- vi. El movimiento de los eslabones del robot manipulador paralelo delta plano son dependientes.
- vii. Se tiene un actuador para cada cadena cinemática del robot manipulador paralelo delta plano.
- viii. Sobre la base móvil del robot delta plano se encuentra conectado en configuración serie el robot manipulador paralelo delta en el espacio.

IV.2. Postura del robot

Para el análisis se deben definir sistemas de coordenadas que permitan describir el desplazamiento de la plataforma en su universo, así como de los elementos internos que presenten un movimiento relativo entre ellos, ver figura 3.

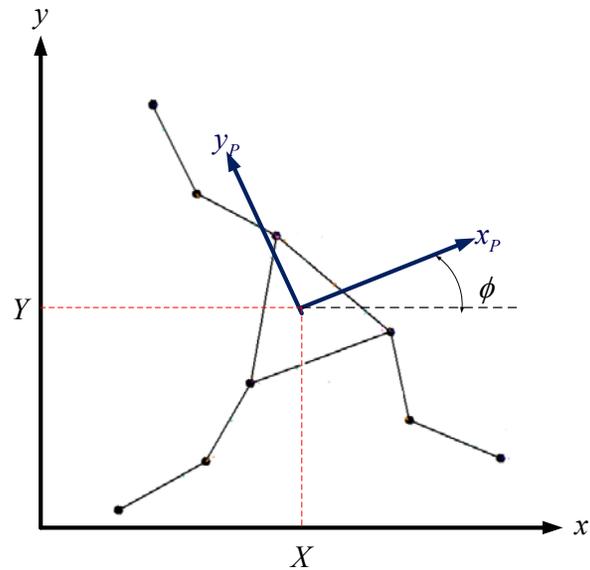


Figura 2. Configuración del robot paralelo $3RRR$

IV.3. ROBOT PARALELO $3RRR-(RRR)_v$

En la figura 3, muestra el sistemas de coordenadas para describir el desplazamiento del efector final del manipulador $3RRR-(RRR)_v$ en el sistema inercial, así como de los elementos internos que representan el movimiento relativo entre ellos.

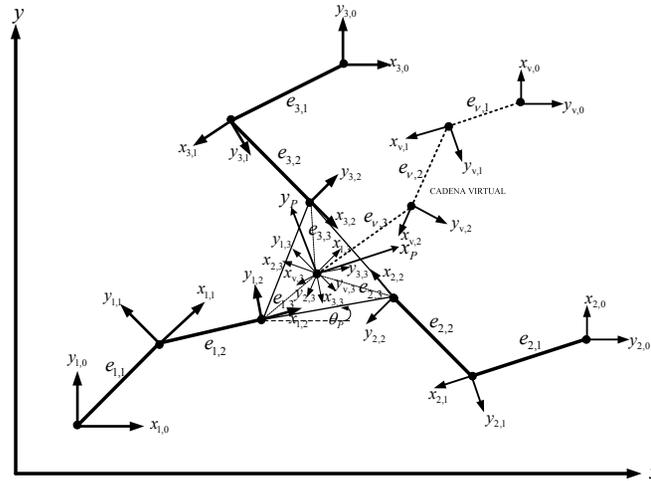


Fig. 3. Manipulador paralelo 3RRR y cadena virtual $(RRR)_v$

IV.4. Casos particulares

El robot paralelo 3RRR tiene un manipulador serial añadido como cadena virtual $(RRR)_v$, para ambos casos se realiza el análisis de su cinemática diferencial.

IV.4.1. Robot serial

Debido a que la cadena virtual es semejante a las cadenas del robot paralelo el análisis es similar y con sólo realizar el modelado de una cadena se pueden tener las demás[30, 95].

Se toma una cadena cinemática del robot paralelo ver Fig. 4 para realizar el análisis, quedando de la siguiente forma:

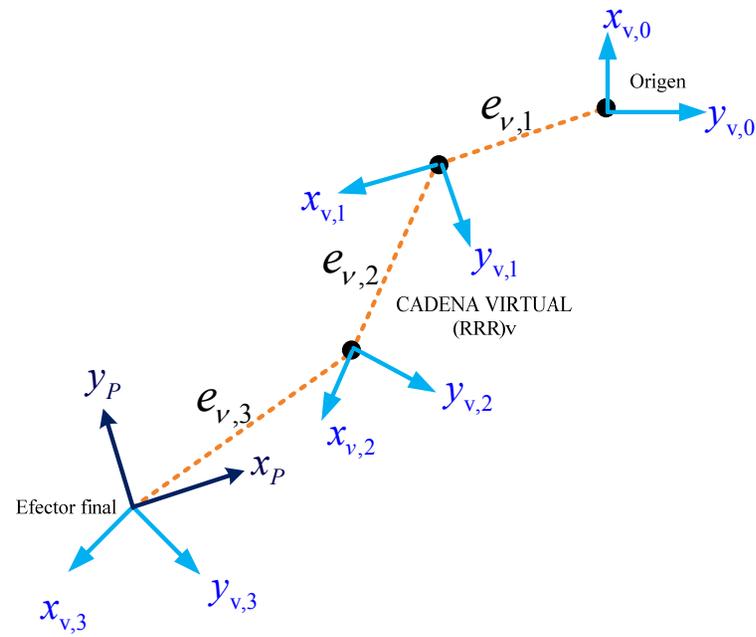


Fig. 4. Cadena cinemática virtual $(RRR)_v$

IV.4.1.1. Análisis de la cadena virtual $(RRR)_v$

Haciendo un análisis similar al que se realiza para llegar a la ecuación (2.17), se utiliza para la cadena virtual.

$$\begin{pmatrix} {}^{v,0}\mathbf{V}_{X_{v,0}} \\ {}^{v,0}\mathbf{V}_{Y_{v,0}} \\ {}^{v,0}\mathbf{a}_{v,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_v \dot{X}_p + S\alpha_v \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} + S\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} + S\beta_v \mathbf{e}_{v,3}) - S\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} \dot{\theta}_{v,3} - S\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} (\dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3}) \\ -S\alpha_v \dot{X}_p + C\alpha_v \dot{Y}_p + (C\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} + S\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} + C\beta_v \mathbf{e}_{v,3}) - C\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} \dot{\theta}_{v,3} - C\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} (\dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3}) \\ \dot{\theta}_{v,1} + \dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3} + \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Expresado de la forma $A_T(q)\dot{q} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_{v,1} & S\beta_{v,1} & ev2S\gamma_3 + ev1Sv_3 & ev2S\gamma_3 & 0 & 0 \\ -S\alpha_{v,1} & C\beta_{v,1} & ev2C\gamma_{v,1} + ev3Cv_{v,1} & ev3C\gamma_3 & ev3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_{v,1} \\ \dot{\theta}_{v,2} \\ \dot{\theta}_{v,3} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

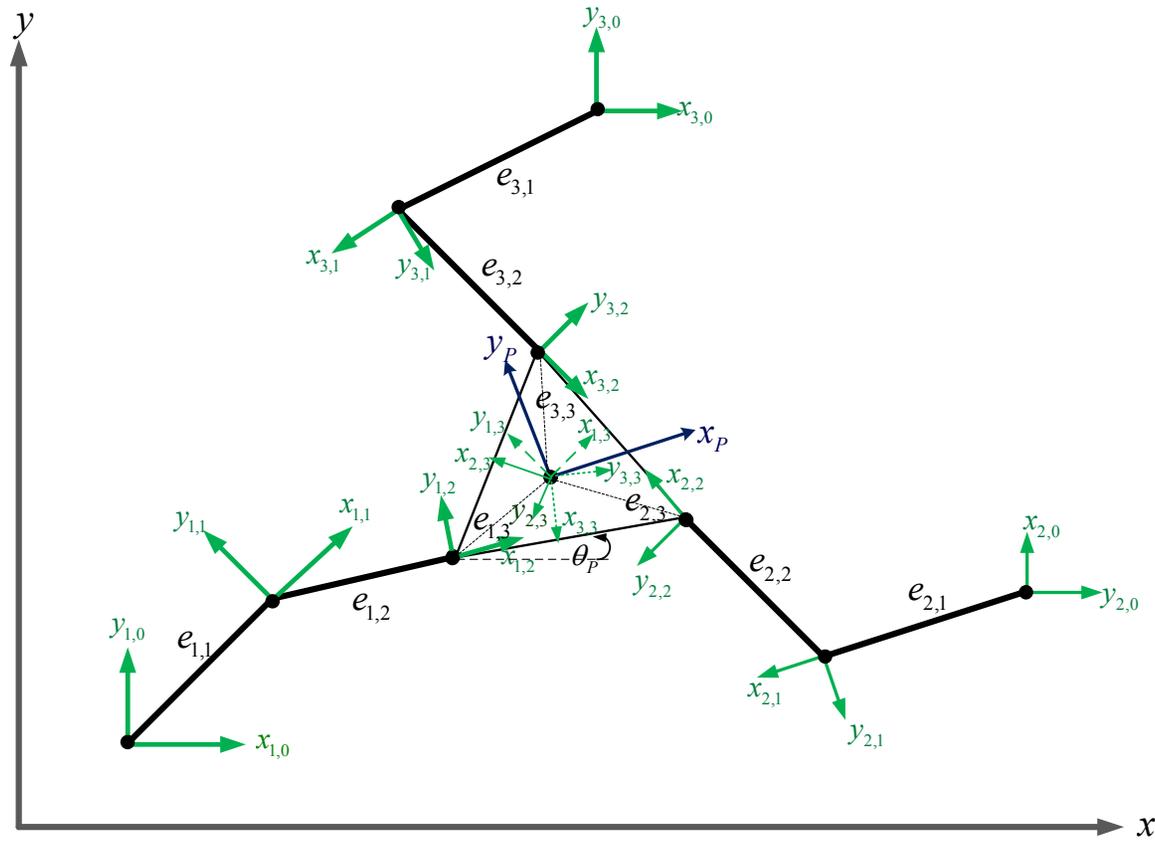
Se obtiene la representación en el espacio de estados de la cadena virtual (RRR)_v a partir de la expresión .

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{y}_v \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{q}_{v1} \\ \dot{q}_{v2} \\ \dot{q}_{v3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_p & -S\theta_p & 0 \\ S\theta_p & C\theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C\theta_3 Csc\theta_2}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3}{e_{11}} \\ Csc\theta_2 \left(-\frac{C\theta_3}{e_{11}} - \frac{C\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) e_{13} \\ \frac{C\theta_{23} Csc\theta_2}{e_{12}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_{23}}{e_{12}} & -1 - \frac{Csc\theta_2 S\theta_{23} e_{13}}{e_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \\ w_p \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Se toma la sub cadena de las variables articulares virtuales

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{v1} \\ \dot{q}_{v2} \\ \dot{q}_{v3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C\theta_3 Csc\theta_2}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3 e_{13}}{e_{11}} \\ Csc\theta_2 \left(-\frac{C\theta_3}{e_{11}} - \frac{C\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) e_{13} \\ \frac{Csc\theta_2 C\theta_{23}}{e_{12}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_{23}}{e_{12}} & -1 - \frac{Csc\theta_2 S\theta_{23} e_{13}}{e_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \\ w_p \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

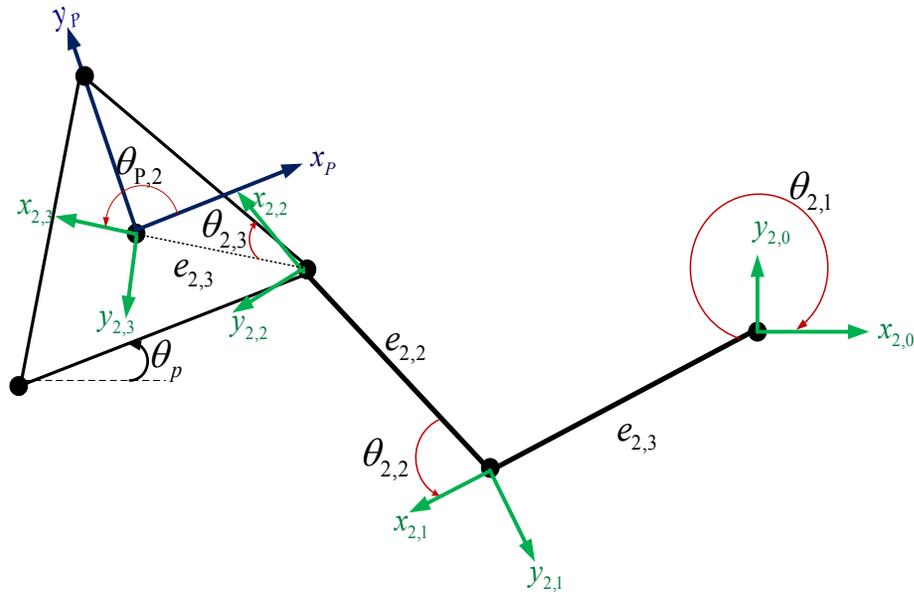
IV.4.2. Robot paralelo plano



Debido a que la cadena virtual es

semejante a las cadenas del robot paralelo el análisis es similar y con sólo realizar el modelado de una cadena se pueden tener las demás[30, 95].

Se toma una cadena cinemática del robot paralelo ver Fig. 4 para realizar el análisis, quedando de la siguiente forma:



El sistema $\{x_{ij}, y_{ij}\}$ situado en el punto P_{ij} representa al sistema de coordenadas del j -ésimo eslabón, de la i -ésima junta rotacional del manipulador.

Además, el ángulo θ_p , corresponde a la orientación de los ejes coordenados (x_p, y_p) con respecto al sistema inercial.

El ángulo θ_{ij} hace referencia a la orientación de los ejes coordenados (x_{ij}, y_{ij}) con respecto al sistema de la plataforma y de los eslabones encadenados.

$$\begin{pmatrix} {}^{20}V_{X20} \\ {}^{20}V_{Y20} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_2 \dot{X}_p + S\alpha_2 \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{2,1}e_{2,1} + S\gamma_2 e_{2,2} + S\beta_2 e_{2,3}) - S\gamma_2 e_{2,2} \dot{\theta}_{2,3} - S\theta_{2,1} e_{2,1} (\dot{\theta}_{2,2} + \dot{\theta}_{2,3}) \\ -S\alpha_2 \dot{X}_p + C\alpha_2 \dot{Y}_p + \dot{\theta}_p (C\theta_{2,1}e_{2,1} + S\gamma_2 e_{2,2} + C\beta_2 e_{2,3}) - C\gamma_2 e_{2,2} \dot{\theta}_{2,3} - C\theta_{2,1} e_{2,1} (\dot{\theta}_{2,2} + \dot{\theta}_{2,3}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

El robot paralelo delta plano del tipo 3RRR, está formado por cadenas cinemáticas idénticas, por lo tanto con solo obtener la solución para una cadena se repite el análisis para las otras dos cadenas junto con la cadena virtual.

$$\begin{pmatrix} {}^{1,0}V_{X1,0} \\ {}^{1,0}V_{Y1,0} \\ {}^{2,0}V_{X2,0} \\ {}^{2,0}V_{Y2,0} \\ {}^{3,0}V_{X3,0} \\ {}^{3,0}V_{Y3,0} \\ {}^{v,0}V_{Xv,0} \\ {}^{v,0}V_{Yv,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_1 \dot{X}_p + S\alpha_1 \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{1,1}e_{1,1} + S\gamma_1 e_{1,2} + S\beta_1 e_{1,3}) - S\gamma_1 e_{1,2} \dot{\theta}_{1,3} - S\theta_{1,1} e_{1,1} (\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{1,3}) \\ -S\alpha_1 \dot{X}_p + C\alpha_1 \dot{Y}_p + \dot{\theta}_p (C\theta_{1,1}e_{1,1} + S\gamma_1 e_{1,2} + C\beta_1 e_{1,3}) - C\gamma_1 e_{1,2} \dot{\theta}_{1,3} - C\theta_{1,1} e_{1,1} (\dot{\theta}_{1,2} + \dot{\theta}_{1,3}) \\ C\alpha_2 \dot{X}_p + S\alpha_2 \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{2,1}e_{2,1} + S\gamma_2 e_{2,2} + S\beta_2 e_{2,3}) - S\gamma_2 e_{2,2} \dot{\theta}_{2,3} - S\theta_{2,1} e_{2,1} (\dot{\theta}_{2,2} + \dot{\theta}_{2,3}) \\ -S\alpha_2 \dot{X}_p + C\alpha_2 \dot{Y}_p + \dot{\theta}_p (C\theta_{2,1}e_{2,1} + S\gamma_2 e_{2,2} + C\beta_2 e_{2,3}) - C\gamma_2 e_{2,2} \dot{\theta}_{2,3} - C\theta_{2,1} e_{2,1} (\dot{\theta}_{2,2} + \dot{\theta}_{2,3}) \\ C\alpha_3 \dot{X}_p + S\alpha_3 \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{3,1}e_{3,1} + S\gamma_3 e_{3,2} + S\beta_3 e_{3,3}) - S\gamma_3 e_{3,2} \dot{\theta}_{3,3} - S\theta_{3,1} e_{3,1} (\dot{\theta}_{3,2} + \dot{\theta}_{3,3}) \\ -S\alpha_3 \dot{X}_p + C\alpha_3 \dot{Y}_p + \dot{\theta}_p (C\theta_{3,1}e_{3,1} + S\gamma_3 e_{3,2} + C\beta_3 e_{3,3}) - C\gamma_3 e_{3,2} \dot{\theta}_{3,3} - C\theta_{3,1} e_{3,1} (\dot{\theta}_{3,2} + \dot{\theta}_{3,3}) \\ C\alpha_v \dot{X}_p + S\alpha_v \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{v,1}e_{v,1} + S\gamma_v e_{v,2} + S\beta_v e_{v,3}) - S\gamma_v e_{v,2} \dot{\theta}_{v,3} - S\theta_{v,1} e_{v,1} (\dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3}) \\ -S\alpha_v \dot{X}_p + C\alpha_v \dot{Y}_p + \dot{\theta}_p (C\theta_{v,1}e_{v,1} + S\gamma_v e_{v,2} + C\beta_v e_{v,3}) - C\gamma_v e_{v,2} \dot{\theta}_{v,3} - C\theta_{v,1} e_{v,1} (\dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3}) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Teniendo la matriz para las tres cadenas cinemáticas del robot paralelo (2.18) y con la cadena virtual se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_1 & S\beta_1 & e12S\gamma_1 + e11Sv_1 & e12S\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S\alpha_1 & C\beta_1 & e32C\gamma_1 + e11Cv_1 & e13C\gamma_1 & e13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C\alpha_2 & S\beta_2 & e22S\gamma_2 + e12Sv_2 & 0 & 0 & e22S\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S\alpha_2 & C\beta_2 & e32C\gamma_2 + e12Cv_2 & 0 & 0 & e23C\gamma_2 & e23 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C\alpha_3 & S\beta_3 & e32S\gamma_3 + e33Sv_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & e32S\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ -S\alpha_3 & C\beta_3 & e32C\gamma_3 + e33Cv_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & e33C\gamma_3 & e33 & 0 & 0 \\ C\alpha_{v1} & S\beta_{v1} & ev2S\gamma_3 + ev1Sv_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ev2S\gamma_v & 0 \\ -S\alpha_{v1} & C\beta_{v1} & ev2C\gamma_{v1} + ev3Cv_{v1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ev3C\gamma_v & ev3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{v1} \\ \dot{\theta}_{v2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Representación en variables de estado.

Utilizando la expresión (2.19) para resolver el sistema en variables d estado en función de las coordenadas articulares virtuales

$\eta_v = \dot{\theta}_{v1}, \dot{\theta}_{v2}, \dot{\theta}_{v3}$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{vp} \\ \dot{y}_{vp} \\ \dot{\theta}_{vp} \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \end{pmatrix} = (St1 \quad St2 \quad St3) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{v1} \\ \dot{\theta}_{v2} \\ \dot{\theta}_{v3} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

De esta forma se tiene la cinemática interna de la plataforma expresada en términos de las variables de entrada. Por lo que para referenciarla al sistema coordenado absoluto $\{x, y\}$, se aplica una rotación. Para esto definimos la matriz de rotación de postura del sistema $\{x_p, y_p\}$ al sistema $\{x, y\}$.

Por lo tanto, multiplicando al sistema por la matriz de rotación, se tiene la siguiente expresión:

$$\dot{q} = S_T(q)u \equiv \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = R_q \dot{q} \quad (2.21)$$

Aplicando la transformación se tiene:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{vp} \\ \dot{y}_{vp} \\ \dot{\theta}_{vp} \\ \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \end{pmatrix} = (St1 \quad St2 \quad St3) \cdot \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{V1} \\ \dot{\theta}_{V2} \\ \dot{\theta}_{V3} \end{pmatrix}$$

(2.22)

Análisis de la cadena virtual (RRR)_v

Haciendo un análisis similar al que se realiza para llegar a la ecuación (2.17), se utiliza para la cadena virtual.

$$\begin{pmatrix} {}^{v,0}\mathbf{V}_{X_{v,0}} \\ {}^{v,0}\mathbf{V}_{Y_{v,0}} \\ {}^{v,0}\boldsymbol{\omega}_{v,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_v \dot{X}_p + S\alpha_v \dot{Y}_p - \dot{\theta}_p (S\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} + S\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} + S\beta_v \mathbf{e}_{v,3}) - S\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} \dot{\theta}_{v,3} - S\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} (\dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3}) \\ -S\alpha_v \dot{X}_p + C\alpha_v \dot{Y}_p + (C\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} + S\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} + C\beta_v \mathbf{e}_{v,3}) - C\gamma_v \mathbf{e}_{v,2} \dot{\theta}_{v,3} - C\theta_{v,1} \mathbf{e}_{v,1} (\dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3}) \\ \dot{\theta}_{v,1} + \dot{\theta}_{v,2} + \dot{\theta}_{v,3} + \dot{\theta}_p \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Expresado de la forma $A_r(q)\dot{q} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha_{v,1} & S\beta_{v,1} & ev2S\gamma_3 + ev1Sv_3 & ev2S\gamma_3 & 0 & 0 \\ -S\alpha_{v,1} & C\beta_{v,1} & ev2C\gamma_{v,1} + ev3Cv_{v,1} & ev3C\gamma_3 & ev3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_{v,1} \\ \dot{\theta}_{v,2} \\ \dot{\theta}_{v,3} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Se obtiene la representación en el espacio de estados de la cadena virtual (RRR)_v a partir de la expresión .

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_v \\ \dot{y}_v \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{q}_{v1} \\ \dot{q}_{v2} \\ \dot{q}_{v3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\theta_p & -S\theta_p & 0 \\ S\theta_p & C\theta_p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C\theta_3 Csc\theta_2}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3}{e_{11}} \\ Csc\theta_2 \left(-\frac{C\theta_3}{e_{11}} - \frac{C\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) e_{13} \\ \frac{C\theta_{23} Csc\theta_2}{e_{12}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_{23}}{e_{12}} & -1 - \frac{Csc\theta_2 S\theta_{23} e_{13}}{e_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \\ w_p \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Se toma la sub cadena de las variables articulares virtuales

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{v1} \\ \dot{q}_{v2} \\ \dot{q}_{v3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C\theta_3 Csc\theta_2}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3}{e_{11}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_3 e_{13}}{e_{11}} \\ Csc\theta_2 \left(-\frac{C\theta_3}{e_{11}} - \frac{C\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) & Csc\theta_2 \left(\frac{S\theta_3}{e_{11}} + \frac{S\theta_{23}}{e_{12}} \right) e_{13} \\ \frac{Csc\theta_2 C\theta_{23}}{e_{12}} & -\frac{Csc\theta_2 S\theta_{23}}{e_{12}} & -1 - \frac{Csc\theta_2 S\theta_{23} e_{13}}{e_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \\ w_p \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Análisis de controlabilidad del manipulador 3RRR-(RRR)_v.

Se analiza la controlabilidad de la ecuación (2.22) mediante la obtención del corchete de Lie, que corresponde a la expresión. Una vez que ya no se obtienen más columnas linealmente independientes, el rango de la matriz extendida determina cuántas variables son controlables. Para comprobar la independencia lineal del nuevo elemento, se hace uso de la ecuación

Se resuelve para el manipulador $3RRR-(RRR)_v$ utilizando el corchete de LIE y la base para el álgebra de Lie [96]
 Para obtener X_4 ; $f = X_1$ y $g = X_2$

$$X_4 = [f, g] (q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener X_5 ; $f = X_2$ y $g = X_3$

Para obtener X_6 ; $f = X_3$ y $g = X_4$, y así sucesivamente,

Obteniendo los siguientes resultados.

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14
*	*	*	0	=X1	=X2	0	0	0	0	0	0	=X1=X5	=X2=X6

Tabla 2 Lie brackets para tres vectores.

Se concluye que el manipulador $3\text{RRR}-(\text{RRR})_v$ es de 3GDL y que al agregar un eslabón virtual de 3GDL, no presenta vectores linealmente independientes adicionales al aplicarle el álgebra de Lie. Por lo que el sistema, aunque se le agregó el eslabón virtual, sigue siendo de 3GDL y puede ser controlado por tres variables cualesquiera del vector de coordenadas configuración en velocidad, incluyendo a las virtuales.

Al introducir un eslabón virtual las nueve variables quedan dependientes al eslabón virtual. Pasando de ser nueve a doce variables $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\theta}_{11}, \dot{\theta}_{12}, \dot{\theta}_{13}, \dot{\theta}_{21}, \dot{\theta}_{22}, \dot{\theta}_{23}, \dot{\theta}_{31}, \dot{\theta}_{32}, \dot{\theta}_{33}$ coordenadas de configuración. Para el caso del manipulador paralelo del tipo 3RRR , internamente pueden ser actuados tres o incluso un eslabón y quedar en función de los demás.

La representación en variables de estados queda en función de las entradas de los parámetros de la cadena virtual para así poder controlar al manipulador paralelo.

$${}^{2,4}\mathbf{V}_{2,4} = \begin{pmatrix} {}^{2,4}\mathbf{V}_{X2,4} \\ {}^{2,4}\mathbf{V}_{Y2,4} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \dot{X}_p + \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \dot{Y}_p + e_{22} \text{Sin}[\gamma_2] \dot{\beta}_2 + (e_{22} \text{Sin}[\gamma_2] + e_{21} \text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2]) \dot{\theta}_p \\ -\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \dot{X}_p + \text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \dot{Y}_p + (e_{23} + e_{22} \text{Cos}[\gamma_2]) \dot{\beta}_2 + e_{23} \dot{\gamma}_2 + (e_{23} + e_{22} \text{Cos}[\gamma_2] + e_{21} \text{Cos}[\beta_2 + \gamma_2]) \dot{\theta}_p \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

El robot paralelo delta plano del tipo 3RRR , está formado por cadenas cinemáticas idénticas, por lo tanto con solo obtener la solución para una cadena se repite el análisis para las otras dos. Se tiene:

$$\begin{pmatrix} {}^{1,4}\mathbf{V}_{X1,4} \\ {}^{1,4}\mathbf{V}_{Y1,4} \\ {}^{2,4}\mathbf{V}_{X2,4} \\ {}^{2,4}\mathbf{V}_{Y2,4} \\ {}^{3,4}\mathbf{V}_{X3,4} \\ {}^{3,4}\mathbf{V}_{Y3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\dot{X}_p + \text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\dot{Y}_p + e2\text{Sin}[\gamma_1]\dot{\beta}_1 + (e2\text{Sin}[\gamma_1] + e1\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1])\dot{\theta}_p \\ -\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\dot{X}_p + \text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\dot{Y}_p + (e3 + e2\text{Cos}[\gamma_1])\dot{\beta}_1 + e3\dot{\gamma}_1 + (e3 + e2\text{Cos}[\gamma_1] + e1\text{Cos}[\beta_1 + \gamma_1])\dot{\theta}_p \\ \text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\dot{X}_p + \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\dot{Y}_p + e2\text{Sin}[\gamma_2]\dot{\beta}_2 + (e2\text{Sin}[\gamma_2] + e1\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2])\dot{\theta}_p \\ -\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\dot{X}_p + \text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\dot{Y}_p + (e3 + e2\text{Cos}[\gamma_2])\dot{\beta}_2 + e3\dot{\gamma}_2 + (e3 + e2\text{Cos}[\gamma_2] + e1\text{Cos}[\beta_2 + \gamma_2])\dot{\theta}_p \\ \text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\dot{X}_p + \text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\dot{Y}_p + e2\text{Sin}[\gamma_3]\dot{\beta}_3 + (e2\text{Sin}[\gamma_3] + e1\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3])\dot{\theta}_p \\ -\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\dot{X}_p + \text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\dot{Y}_p + (e3 + e2\text{Cos}[\gamma_3])\dot{\beta}_3 + e3\dot{\gamma}_3 + (e3 + e2\text{Cos}[\gamma_3] + e1\text{Cos}[\beta_3 + \gamma_3])\dot{\theta}_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {}^{1,4}\mathbf{V}_{X1,4} \\ {}^{1,4}\mathbf{V}_{Y1,4} \\ {}^{2,4}\mathbf{V}_{X2,4} \\ {}^{2,4}\mathbf{V}_{Y2,4} \\ {}^{3,4}\mathbf{V}_{X3,4} \\ {}^{3,4}\mathbf{V}_{Y3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & e2\text{Sin}[\gamma_1] + e1\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1] & e2\text{Sin}[\gamma_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & e3 + e2\text{Cos}[\gamma_1] + e1\text{Cos}[\beta_1 + \gamma_1] & e3 + e2\text{Cos}[\gamma_1] & e3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & e2\text{Sin}[\gamma_2] + e1\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2] & 0 & 0 & e2\text{Sin}[\gamma_2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & e3 + e2\text{Cos}[\gamma_2] + e1\text{Cos}[\beta_2 + \gamma_2] & 0 & 0 & e3 + e2\text{Cos}[\gamma_2] & e3 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & e2\text{Sin}[\gamma_3] + e1\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3] & 0 & 0 & 0 & 0 & e2\text{Sin}[\gamma_3] & 0 & 0 \\ -\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & e3 + e2\text{Cos}[\gamma_3] + e1\text{Cos}[\beta_3 + \gamma_3] & 0 & 0 & 0 & 0 & e3 + e2\text{Cos}[\gamma_3] & e3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} \dots(1.1)$$

De la matriz (1.1) se observa que se tienen nueve variables $\dot{X}_p, \dot{Y}_p, \dot{\theta}_p, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\gamma}_2, \dot{\beta}_3, \dot{\gamma}_3$.

Coordenadas generalizadas de configuración

De acuerdo a la teoría unificadora de [95], un robot móvil tiene $n_T = 3 + N_T + N_C + N_{OC}$ coordenadas de configuración $q = [q_1, \dots, q_{n_T}]^T$ y están distribuidas entre las coordenadas de postura ξ , los ángulos de las ruedas centradas α_C , los ángulos de las ruedas descentradas α_{OC} y de rotación de las ruedas ϕ .

$\xi = [{}^P_P x \quad {}^P_P y \quad \theta_P]^T$ Define la postura del robot móvil *convencional*, sin embargo para este caso se puede observar en las restricciones cinemáticas que existen otras seis componentes necesarias para la definición de la postura. Éstas corresponden al ángulo de orientación de los eslabones de los robots paralelos θ_1 y θ_2 , por lo que el número de coordenadas generalizadas aumenta dependiendo el número eslabones del robot paralelo de manera que ahora

$$n_T = 3 + N_T + N_C + N_{OC} + N_{DR} \quad \text{Ecuación 1}$$

Donde

- N_T es el número de ruedas en general = cero
- N_C el número de ruedas giratorias centradas = cero
- N_{OC} el número de ruedas descentradas = cero
- N_{ER} el número de eslabones del robot paralelo.

Y la postura del robot móvil no convencional se define ahora por ξ y por $\theta_{ER} = [\theta_1, \dots, \theta_{N_{ER}}]^T$ que corresponde a los ángulos de orientación de los eslabones del robot paralelo.

Finalmente esto da como resultado que las coordenadas generalizadas sean

$$q = [\xi \quad \theta_{ER} \quad \alpha_C \quad \alpha_{OC} \quad \phi]^T \quad \text{Ecuación 2}$$

Con las velocidades generalizadas

$$\dot{q} = [\dot{\xi} \quad \dot{\theta}_{ER} \quad \dot{\alpha}_C \quad \dot{\alpha}_{OC} \quad \dot{\phi}]^T \quad \text{Ecuación 3}$$

En particular, para el manipulador paralelo delta plano, las coordenadas y velocidades generalizadas son:

$$q = (X_p, Y_p, \theta_p, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \beta_3, \gamma_3)$$

$$\dot{q} = (\dot{X}_p, \dot{Y}_p, \dot{\theta}_p, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\gamma}_2, \dot{\beta}_3, \dot{\gamma}_3)$$

Con estos vectores definidos, se puede agrupar toda la cinemática del sistema en una sola expresión del tipo $A_T(q)\dot{q} = 0$, de modo que si se reescriben las ecuaciones 3 a 10 de las restricciones, la expresión quedaría de la siguiente:

$$\begin{pmatrix} {}^{1,4}V_{X1,4} \\ {}^{1,4}V_{Y1,4} \\ {}^{2,4}V_{X2,4} \\ {}^{2,4}V_{Y2,4} \\ {}^{3,4}V_{X3,4} \\ {}^{3,4}V_{Y3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & e_2 \sin[\gamma_1] + e_1 \sin[\beta_1 + \gamma_1] & e_2 \sin[\gamma_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & e_3 + e_2 \cos[\gamma_1] + e_1 \cos[\beta_1 + \gamma_1] & e_3 + e_2 \cos[\gamma_1] & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & e_2 \sin[\gamma_2] + e_1 \sin[\beta_2 + \gamma_2] & 0 & 0 & e_2 \sin[\gamma_2] & 0 & 0 & 0 \\ -\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & e_3 + e_2 \cos[\gamma_2] + e_1 \cos[\beta_2 + \gamma_2] & 0 & 0 & e_3 + e_2 \cos[\gamma_2] & e_3 & 0 & 0 \\ \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & e_2 \sin[\gamma_3] + e_1 \sin[\beta_3 + \gamma_3] & 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \sin[\gamma_3] & 0 \\ -\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & e_3 + e_2 \cos[\gamma_3] + e_1 \cos[\beta_3 + \gamma_3] & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 + e_2 \cos[\gamma_3] & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} \dots(1.1)$$

Definición del tipo de robot

El tipo de robot se define de acuerdo a los grados de movilidad, direccionabilidad y maniobrabilidad que posea. Éstos están definidos por los movimientos permisibles, mismos que se obtienen de la cinemática del robot definida completamente en la **¡Error!**

No se encuentra el origen de la referencia..

Grado de movilidad

El grado de movilidad corresponde a los grados de libertad instantáneos que posee un robot y se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$r_m = \dim[\xi P_P] - \text{rank}[O_{fc}] \quad \text{Ecuación 4}$$

Donde $\dim[\xi P_P]$ corresponde a la dimensión de las coordenadas generalizadas que definen la postura de la plataforma móvil y $\text{rank}[O_{fc}]$ corresponde al rango de la submatriz O_{fc} perteneciente a la matriz $A_T(q)$. Dicha submatriz corresponde a la sección de las restricciones cinemáticas ortogonales al plano de la rueda comprendida por las ruedas fijas y las ruedas centradas direccionables, que en este caso es

$$O_{fc} = \begin{bmatrix} A_T(q)_{1,1} & \cdots & A_T(q)_{1,5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_T(q)_{4,1} & \cdots & A_T(q)_{4,5} \end{bmatrix}$$

$\dim[\xi P_p]$ Ya se sabe con anterioridad que es igual a cinco, mientras que $rank[O_{fc}]$ se observa claramente que es igual a dos.

$$O_{fc} \quad \text{Ecuación 4, } r_m = 9 - 6 = 3.$$

Grado de direccionabilidad

El grado de direccionabilidad define el número de elementos que cambian la dirección del vehículo y se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$r_s = rank[O_c] \quad \text{Ecuación 5}$$

Donde $rank[O_c]$ corresponde al rango de la submatriz perteneciente a la matriz $A_T(q)$ definida por los elementos de las ruedas centradas direccionables de las restricciones cinemáticas ortogonales al plano de las ruedas. En este caso, dado que todas las ruedas son fijas, dicho rango es cero, por lo que $r_s = 0$.

Grado de maniobrabilidad

El grado de maniobrabilidad corresponde a los grados de libertad totales del robot y se define por la ecuación:

$$r_M = r_m + r_s \quad \text{Ecuación 6}$$

Por lo que se obtiene que r_M es igual a tres.

Esto significa que la plataforma móvil tiene tres grados de libertad. Utilizando nuevamente la clasificación de Campion, el tipo de robot se expresa de forma sencilla por la expresión (r_m, r_s) , por lo tanto la plataforma móvil corresponde a un robot del tipo (3,0). El que tenga tres grados de libertad comprueba que el robot es omnidireccional.

ANÁLISIS DE LA CONTROLABILIDAD Y DEFINICIÓN DE LA LEY DE CONTROL

Configuración cinemática con variables de estado

Dado que se tienen tres grados de libertad en la plataforma móvil, la siguiente cuestión es saber cuáles variables se seleccionan como variables de entrada y si el sistema es controlable. Lo que resulta más evidente es tomar directamente las variables de velocidad v_{x_p} y v_{y_p} , así como la velocidad angular ω_p .

Éstas serán las variables de estado del sistema, por lo que la expresión de la cinemática de la plataforma se tiene que expresar en términos de dichas variables, como en la siguiente ecuación:

$$\dot{q}_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_\xi(\alpha_s) & 0 \\ 0 & \Sigma_c(\alpha_s) \\ \Sigma_{oc}(\alpha_s, \alpha_{oc}) & 0 \\ \Sigma_\phi(\alpha_s, \alpha_{oc}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 7}$$

Donde Σ_ξ es la matriz asociada a las coordenadas de postura; Σ_{oc} , la matriz asociada a las coordenadas de las ruedas descentradas; Σ_ϕ , la matriz asociada a las coordenadas de rotación de las ruedas y Σ_c , la matriz asociada a las coordenadas de las ruedas centradas. Además, η y ζ corresponden a las componentes de movilidad y direccionalidad.

En el caso de la plataforma, los elementos de la Ecuación 7 Σ_{oc} , Σ_c , Σ_ϕ y ζ no existen, además el vector $\eta = [v_{x_p} \ v_{y_p} \ \omega_p]^T$ corresponde claramente a las variables de entrada definidas anteriormente. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ \theta_P \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}{e_{12}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} \\ \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}{e_{22}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{22}} \\ \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}{e_{32}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3] e_{11}}{e_{32}} \\ \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1] + \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Cof}[\gamma_1] + \text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] - \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] + \text{Cof}[\gamma_1] \text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1] e_{11} - \cos[\beta_1 + \gamma_1] e_{11} + \text{Cof}[\gamma_1] \text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} \\ \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2] + \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Cof}[\gamma_2] + \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] - \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] + \text{Cof}[\gamma_2] \text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2] e_{11} - \cos[\beta_2 + \gamma_2] e_{11} + \text{Cof}[\gamma_2] \text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{22}} \\ \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3] + \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Cof}[\gamma_3] + \text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] - \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] + \text{Cof}[\gamma_3] \text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} & \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3] e_{11} - \cos[\beta_3 + \gamma_3] e_{11} + \text{Cof}[\gamma_3] \text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3] e_{11}}{e_{32}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_P \\ \dot{Y}_P \\ \dot{\theta}_P \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix}$$

Ecuación 8

De esta forma se tiene la cinemática interna de la plataforma expresada en términos de las variables de entrada. No obstante, el hecho de que sea interna se refiere a que aún está referenciada con respecto al sistema coordenado $\{X_P, Y_P\}$, por lo que se le tiene que aplicar una rotación de forma que el sistema coordenado de referencia sea el del universo $\{X, Y\}$. Esto para que se tenga la representación completa de acuerdo a como se observa desde fuera del robot.

Para esto definimos la matriz de rotación de postura del sistema $\{X_P, Y_P\}$ al sistema $\{X, Y\}$

$${}^0_P R(\theta_P) = \begin{bmatrix} \cos \theta_P & -\sin \theta_P & 0 \\ \sin \theta_P & \cos \theta_P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la matriz de rotación de configuración, como una extensión de la matriz anterior.

$$R_q = \begin{bmatrix} {}^0_P R(\theta_P) & 0 & 0 \\ 0 & I_{N_{DR}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{N_c} \end{bmatrix}$$

Donde $R_q \in R^{(3+N_{DR}+N_c) \times (3+N_{DR}+N_c)}$ y tanto $I_{N_{DR}} \in R^{N_{DR} \times N_{DR}}$, como $I_{N_c} \in R^{N_c \times N_c}$ son matrices identidad. Dicha matriz de rotación, está definida por [6] de forma general considerando todos los tipos de ruedas que se pueden tener (para el caso de robots móviles), con la única diferencia que en este caso se agrega la matriz identidad $I_{N_{DR}}$ correspondiente al número de eslabones en el caso de robots paralelos o seriales.

Por lo tanto, multiplicando al sistema por la matriz de rotación, se tiene la siguiente expresión:

$$\dot{q} = S_T(q)u \equiv \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\theta}_{DR} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = R_q \dot{q}_1$$

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ \theta_p \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos[\theta_p] & -\sin[\theta_p] & 0 \\ \sin[\theta_p] & \cos[\theta_p] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} \\ -\frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\frac{\csc[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\csc[\gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\csc[\gamma_2]}{e_{22}} \\ -\frac{\csc[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\csc[\gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} \\ \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} -1 - \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{22}} \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{32}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\csc[\gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\cot[\gamma_1]}{e_{11}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} & \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{11}} & \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} - \frac{\cos[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_1]\sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{11}} \\ \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\csc[\gamma_2]}{e_{22}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\cot[\gamma_2]}{e_{21}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{23}} & \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} - \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{23}} + \frac{\cot[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{21}} & \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{22}} - \frac{\cos[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{23}} + \frac{\cot[\gamma_2]\sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{21}} \\ \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\csc[\gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\cot[\gamma_3]}{e_{31}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} & \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} + \frac{\cot[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{31}} & \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{32}} - \frac{\cos[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{33}} + \frac{\cot[\gamma_3]\sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{31}} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} VX_p \\ VY_p \\ \Omega\theta_p \end{pmatrix}$$

Ecuación 9

La Ecuación 9 expresa las velocidades generalizadas del robot paralelo en términos de las variables de entrada con respecto al sistema coordinado $\{X, Y\}$.

Análisis del álgebra de control de Lie

Utilizando la explicación que da [6] y el tutorial para la aplicación del álgebra de Lie para robots móviles de Paulo Coelho [7], se aplicó el método para analizar la controlabilidad del sistema no lineal de la cinemática de la plataforma móvil.

Para ello se utiliza la matriz $S_T(q)$ que corresponde a los elementos de las coordenadas de postura de la matriz $S_T(q)$, por lo que

$$\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \\ \theta_p \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos[\theta_p] & -\sin[\theta_p] & 0 \\ \sin[\theta_p] & \cos[\theta_p] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} \\ -\frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\frac{\csc[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\csc[\gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\csc[\gamma_2]}{e_{22}} \\ -\frac{\csc[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\csc[\gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} \\ \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} -1 - \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{22}} \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{32}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\csc[\gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\cot[\gamma_1]}{e_{11}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} & \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{11}} & \frac{\csc[\gamma_1]\sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} - \frac{\cos[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_1]\sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{11}} \\ \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\csc[\gamma_2]}{e_{22}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\cot[\gamma_2]}{e_{21}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{23}} & \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} - \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{23}} + \frac{\cot[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{21}} & \frac{\csc[\gamma_2]\sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{22}} - \frac{\cos[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{23}} + \frac{\cot[\gamma_2]\sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{21}} \\ \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\csc[\gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\cot[\gamma_3]}{e_{31}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} & \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} + \frac{\cot[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{31}} & \frac{\csc[\gamma_3]\sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{32}} - \frac{\cos[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{33}} + \frac{\cot[\gamma_3]\sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{11}}{e_{31}} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} VX_p \\ VY_p \\ \Omega\theta_p \end{pmatrix}$$

Donde cada columna se nombrará como un vector. Por ello, $S_T(q) = [S_{Tp1} \quad S_{Tp2} \quad S_{Tp3}]$.

Después se analiza la controlabilidad mediante la obtención del corchete de Lie, que corresponde a la expresión

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q)$$

Ecuación 10

Donde $[f, g](q)$ es el corchete de Lie; f y g son vectores columna $S_{T_{p_n}}$ elegidos arbitrariamente. El método consiste en obtener el corchete de Lie para todas las parejas de vectores columna de la matriz S_T y cada que se obtiene uno, agregarlo a la matriz S_T ; posteriormente se comprueba si la nueva columna agregada es linealmente independiente de las anteriores. De ser así, se mantiene la matriz extendida y dicha columna también se considera para el análisis de la independencia lineal de los corchetes de Lie subsecuentes; si no es linealmente independiente, se desecha y se prueba con otro par de columnas. Es claro que conforme aumenta el tamaño de la matriz, también aumentan la cantidad de pares de columnas posibles para probar.

En la Ecuación 10 se puede ver claramente que $[f, g](q) = -[g, f](q)$, por lo que invertir las columnas resultaría en un corchete de Lie linealmente dependiente.

Una vez que ya no se obtienen más columnas linealmente independientes, el rango de la matriz extendida determina cuántas variables son controlables.

Para comprobar la independencia lineal del nuevo elemento, se hace uso de la ecuación

$$[f, g](q) = k_1 S_{T_{p_1}} + \dots + k_n S_{T_{p_n}}$$

Partiendo del álgebra de la matriz aq:

$$\ln[1] = aq = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos[\theta_p] \\ \sin[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \csc[\gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \csc[\gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \csc[\gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin[\theta_p] \\ \cos[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\csc[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\csc[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{32}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \csc[\gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \cot[\gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{33}} \\ \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \csc[\gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \cot[\gamma_2]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{33}} \\ \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \csc[\gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \cot[\gamma_3]}{e_{33}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\csc[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{33}} \\ \frac{\csc[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{33}} \\ \frac{\csc[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} + \frac{\cot[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} \end{matrix} & \begin{matrix} \frac{\csc[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} - \frac{\cos[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{13}} \\ \frac{\csc[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{12}} - \frac{\cos[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{13}} + \frac{\cot[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{13}} \\ \frac{\csc[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{32}} - \frac{\cos[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{33}} + \frac{\cot[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{33}} \end{matrix} \end{pmatrix} ;$$

Se obtienen los vectores denominados:

$$X1 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos[\theta_p] \\ \sin[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \csc[\gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \csc[\gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \csc[\gamma_3]}{e_{32}} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \csc[\gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \cot[\gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{33}} \\ \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \csc[\gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \cot[\gamma_2]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{33}} \\ \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \csc[\gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \cot[\gamma_3]}{e_{33}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$X2 = \begin{bmatrix} -\sin[\theta_p] \\ \cos[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\text{Csc}[\gamma_2]\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\text{Csc}[\gamma_3]\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \\ \frac{\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{32}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_1]\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} \\ \frac{\text{Csc}[\gamma_2]\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_2]\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{13}} \\ \frac{\text{Csc}[\gamma_3]\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_3]\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{33}} \end{bmatrix}$$

$$X3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_2]\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_3]\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3]e_{31}}{e_{32}} \\ \frac{\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_1]\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{13}} \\ \frac{\text{Csc}[\gamma_2]\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_2]\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2]e_{11}}{e_{13}} \\ \frac{\text{Csc}[\gamma_3]\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3]e_{31}}{e_{32}} - \frac{\text{Cos}[\beta_3 + \gamma_3]e_{31}}{e_{33}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_3]\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3]e_{31}}{e_{33}} \end{bmatrix}$$

Para completar la matriz se necesitan 6 vectores linealmente independientes:

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
*	*	*	*	*	*	*	*	*

Tabla 3.0 Vectores necesarios para completar la matriz

Los cuales se obtendrán utilizando el corchete de LIE. Al aplicar el algoritmo cuando se tienen dos y tres vectores se obtienen la tabla 3.1 y 3.2.

The Algorithm

The idea is to build a PH-family, based upon a family of sets \mathcal{H}_i , where \mathcal{H}_i is a part of \mathcal{X}_i . We will also build a total order \prec on the union of the \mathcal{H}_i 's. Assume

Example 2. For a classical example [4], take $\mathcal{X} = \{X_1, X_2\}$. The first 14 elements of the PH-family generated by the procedure (if it does not stop before) are:

$\mathcal{H}_1 :$	X_1	X_2
$\mathcal{H}_2 :$	$X_3 = [X_1, X_2]$	
$\mathcal{H}_3 :$	$X_4 = [X_1, [X_1, X_2]]$	$X_5 = [X_2, [X_1, X_2]]$
$\mathcal{H}_4 :$	$X_6 = [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]]$	$X_7 = [X_2, [X_1, [X_1, X_2]]]$
	$X_8 = [X_2, [X_2, [X_1, X_2]]]$	
$\mathcal{H}_5 :$	$X_9 = [X_1, [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]]]$	$X_{10} = [X_2, [X_1, [X_1, [X_1, X_2]]]]$
	$X_{11} = [X_2, [X_2, [X_1, [X_1, X_2]]]]$	$X_{12} = [X_2, [X_2, [X_2, [X_1, X_2]]]]$
	$X_{13} = [[X_1, X_2], [X_1, [X_1, X_2]]]$	$X_{14} = [[X_1, X_2], [X_2, [X_1, X_2]]]$

Procedure Controllability(c)

(initialize \mathcal{H}_1)

$\mathcal{H}_1 \leftarrow \mathcal{X}$

$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{X}$

$cnt \leftarrow n - r$

(build \mathcal{H}_2)

For X, Y in $\mathcal{H}_1, X \prec Y$ **do**

add $[X, Y]$ in \mathcal{H}_2 ;

If $\{[X, Y](c)\} \cup \mathcal{B}(c)$ is a free family ⁽¹⁾
then

add $[X, Y]$ in \mathcal{B}

$cnt \leftarrow cnt + 1$

$i \leftarrow 2$

While $cnt < n$ **do**

$i \leftarrow i + 1$

(build \mathcal{H}_i)

For $1 \leq j \leq \lfloor i/2 \rfloor$ **do**

For $X \in \mathcal{H}_j, Y = [U, V] \in \mathcal{H}_{i-j}$ **do**

If $U \preceq X$ ⁽²⁾

then

add $[X, Y]$ in \mathcal{H}_i

If $\{[X, Y](c)\} \cup \mathcal{B}(c)$ is a free family ⁽³⁾

then

add $[X, Y]$ in \mathcal{B}

$cnt \leftarrow cnt + 1$

PROCEDIMIENTO PARA DOS VECTORES:

H1	X1	X2
H2	X3=[X1,X2]	X3P=[X2,X1]
H3	X4 = [X1 , [X1 , X2]] = [[X1,X3]] X4P = [X1 , [X2 , X1]] = [[X1,X3P]]	X5 = [X2 , [X1 , X2]] = [[X2,X3]] X5P = [X2 , [X2 , X1]] = [[X2,X3P]]
H4	X6 = [X1 , [X1,[X1 , X2]]] = [[X1,X4]] X8P = [X1 , [X2,[X1 , X2]]] = [[X1,X5]]	X7 = [X2 , [X1,[X1 , X2]]] = [[X2,X4]] X8 = [X2 , [X2,[X1 , X2]]] = [[X2,X5]]
H5	X9 = [X1 , [X1,[X1 [X1 , X2]]]] = [[X1,X6]] X11P = [X1 , [X2,[X1 [X1 , X2]]]] = [[X1,X7]] X12P = [X1 , [X2,[X2 [X1 , X2]]]] = [[X1,X8]] X13 = [[X1,X2],[X1,[X1[X1,X2]]]] = [[X3,X4]] X14 = [[X1,X2],[X2,[X1[X1,X2]]]] = [[X3,X5]]	X10 = [X2 , [X1,[X1 [X1 , X2]]]] = [[X2,X6]] X11 = [X2 , [X2,[X1 [X1 , X2]]]] = [[X2,X7]] X12 = [X2 , [X2,[X2 [X1 , X2]]]] = [[X2,X8]]

Código de colores

Verde son ceros

Amarillos según el algoritmo no se utiliza

PROCEDIMIENTO PARA TRES VECTORES:

H1	X1	X2	X3
H2	X4=[X1,X2] X4P=[X1,X3] = -X6	X5=[X2,X3] X5p=[X2,X1] = -X4	X6=[X3,X1] X6P=[X3,X2] = -X5
H3	X7=[X1,[X1,X2]] = [X1,X4] X12P=[X1,[X2,X3]] = [X1,X5] X14P=[X1,[X3,X1]] = [X1,X6] X16P=[X1,[X1,X3]] = [X1,X4P] X18P=[X1,[X2,X1]] = [X1,X5P] X20P=[X1,[X3,X2]] = [X1,X6P]	X8=[X2,[X1,X2]] = [X2,X4] X13P=[X2,[X2,X3]] = [X2,X5] X15P=[X2,[X3,X1]] = [X2,X6] X17P=[X2,[X1,X3]] = [X2,X4P] X19P=[X2,[X2,X1]] = [X2,X5P] X21P=[X2,[X3,X2]] = [X2,X6P]	X9=[X3,[X1,X2]] = [X3,X4] X10=[X3,[X2,X3]] = [X3,X5] X11=[X3,[X3,X1]] = [X3,X6]

H4	$X12=[X1, [X1,[X1,X2]] = [X1,X7]$ $X22P=[X1, [X2,[X1,X2]] = [X1,X8]$ $X24P=[X1, [X3,[X1,X2]] = [X1,X9]$ $X26P=[X1, [X3,[X2,X3]] = [X1,X10]$ $X28P=[X1, [X3,[X3,X1]] = [X1,X11]$	$X13=[X2, [X1,[X1,X2]] = [X2,X7]$ $X23P=[X2, [X2,[X1,X2]] = [X2,X7]$ $X25P=[X2, [X3,[X1,X2]] = [X2,X8]$ $X27P=[X2, [X1,[X1,X3]] = [X2,X9]$ $X29P=[X2, [X2,[X2,X3]] = [X2,X10]$ $X30P=[X2, [X3,[X2,X3]] = [X2,X11]$	$X14=[X3, [X1,[X1,X2]] = [X3,X7]$ $X15=[X3, [X2,[X1,X2]] = [X3,X8]$ $X16=[X3, [X3,[X1,X2]] = [X3,X9]$ $X31=[X3, [X3,[X2,X3]] = [X3,X10]$ $X32=[X3, [X3,[X3,X1]] = [X3,X11]$
	$X19=[[X1,X2], [X1,[X1,X2]]] = [X4,X7]$ $X28=[[X1,X2], [X2,[X1,X2]]] = [X4,X8]$ $X30=[[X1,X2], [X1,[X2,X3]]] = [X4,X9]$ $X31=[[X1,X2], [X2,[X2,X3]]] = [X4,X10]$	$X20=[[X2,X3], [X1,[X1,X2]]] = [X5,X7]$ $X34=[[X2,X3], [X2,[X1,X2]]] = [X5,X8]$ $X36=[[X2,X3], [X1,[X2,X3]]] = [X5,X9]$ $X33=[[X2,X3], [X2,[X2,X3]]] = [X5,X10]$	$X21=[[X3,X1], [X1,[X1,X2]]] = [X6,X7]$ $X22=[[X3,X1], [X2,[X1,X2]]] = [X6,X8]$ $X23=[[X3,X1], [X3,[X1,X2]]] = [X5,X9]$ $X24=[[X3,X1], [X3,[X2,X3]]] = [X4,X10]$ $X34=[[X2,X3], [X3,[X3,X1]]] = [X5,X11]$ $X35=[[X3,X1], [X3,[X2,X3]]] = [X6,X10]$ $X36=[[X3,X1], [X3,[X3,X1]]] = [X6,X11]$

Se resuelve para el robot utilizando el corchete de LIE:

Para obtener X4; $f = X1$ y $g = X2$

$$X4 = [f, g] (q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener X5; $f = X2$ y $g = X3$

$$X5 = [f, g] (q) = \begin{bmatrix} \cos[\theta_p] \\ \sin[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \csc[\gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \csc[\gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \csc[\gamma_3]}{e_{32}} \\ \csc[\gamma_1] \left(\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right) \\ \csc[\gamma_2] \left(\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right) \\ \csc[\gamma_3] \left(\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right) \end{bmatrix}$$

Para obtener X6; $f = X3$ y $g = X1$

$$X6 = [f, g](q) = \begin{bmatrix} -\sin[\theta_p] \\ \cos[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \\ \csc[\gamma_1]\left(\frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}}\right) \\ \csc[\gamma_2]\left(\frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}}\right) \\ \csc[\gamma_3]\left(\frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}}\right) \end{bmatrix}$$

Para obtener X7 = X8 = X9 = 0;

Para obtener X10; $f = X3$ y $g = X5$ EL RESULTADO ES IGUAL AL DE X6

$$X10 = [f, g](q) = \begin{bmatrix} -\sin[\theta_p] \\ \cos[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\csc[\gamma_1]\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_2]\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ -\frac{\csc[\gamma_3]\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \\ \csc[\gamma_1]\left(\frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}}\right) \\ \csc[\gamma_2]\left(\frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}}\right) \\ \csc[\gamma_3]\left(\frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}}\right) \end{bmatrix}$$

Para obtener X11; $f = X3$ y $g = X6$ EL RESULTADO ES IGUAL AL DE X6

$$\mathbf{X11} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}
 -\text{Cos}[\theta_p] \\
 -\text{Sin}[\theta_p] \\
 0 \\
 \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}{e_{12}} \\
 \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}{e_{12}} \\
 \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}{e_{32}} \\
 \text{Csc}[\gamma_1] \left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right) \\
 \text{Csc}[\gamma_2] \left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right) \\
 \text{Csc}[\gamma_3] \left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right)
 \end{bmatrix}$$

Para obtener X31; $f = X3$ y $g = X10$ **EL RESULTADO ES IGUAL AL DE XX**

$$\mathbf{X31} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix}
 -\text{Cos}[\theta_p] \\
 -\text{Sin}[\theta_p] \\
 0 \\
 \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}{e_{12}} \\
 \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}{e_{12}} \\
 \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}{e_{32}} \\
 \text{Csc}[\gamma_1] \left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right) \\
 \text{Csc}[\gamma_2] \left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right) \\
 \text{Csc}[\gamma_3] \left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right)
 \end{bmatrix}$$

Para obtener X32; $f = X3$ y $g = X11$ **EL RESULTADO ES IGUAL AL DE -X5**

$$\mathbf{x32} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \sin[\theta_p] \\ -\cos[\theta_p] \\ 0 \\ \frac{\csc[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ \frac{\csc[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ \frac{\csc[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \\ \csc[\gamma_1] \left(-\frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right) \\ \csc[\gamma_2] \left(-\frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right) \\ \csc[\gamma_3] \left(-\frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right) \end{bmatrix}$$

Tabla de los resultados del LIE

X1	X2	X3
$\begin{aligned} & \cos[\theta_p] \\ & \sin[\theta_p] \\ & 0 \\ & -\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}{e_{12}} \\ & -\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}{e_{12}} \\ & -\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}{e_{12}} \\ & \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Cot}[\gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} \\ & \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Cot}[\gamma_2]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{13}} \\ & \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Cot}[\gamma_3]}{e_{13}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{13}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -\sin[\theta_p] \\ & \cos[\theta_p] \\ & 0 \\ & -\frac{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ & -\frac{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ & -\frac{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{12}} \\ & \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{32}} - \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{13}} \\ & \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{13}} \\ & \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{13}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0 \\ & 0 \\ & 1 \\ & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} \\ & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{12}} \\ & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{32}} \\ & \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} - \frac{\cos[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{13}} \\ & \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{12}} - \frac{\cos[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{13}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{13}} \\ & \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{32}} - \frac{\cos[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{33}} + \frac{\text{Cot}[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{33}} \end{aligned}$
$\begin{aligned} & \cos[\theta_p] \\ & \sin[\theta_p] \\ & 0 \\ & -\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}{e_{12}} \\ & -\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}{e_{12}} \\ & -\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}{e_{12}} \\ & \text{Csc}[\gamma_1] \left(\frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right) \\ & \text{Csc}[\gamma_2] \left(\frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right) \\ & \text{Csc}[\gamma_3] \left(\frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{13}} \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & -\sin[\theta_p] \\ & \cos[\theta_p] \\ & 0 \\ & -\frac{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ & -\frac{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} \\ & -\frac{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{12}} \\ & \text{Csc}[\gamma_1] \left(\frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right) \\ & \text{Csc}[\gamma_2] \left(\frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right) \\ & \text{Csc}[\gamma_3] \left(\frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{13}} \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} & 0 \\ & 0 \\ & 1 \\ & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\beta_1 + \gamma_1] e_{11}}{e_{12}} \\ & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\beta_2 + \gamma_2] e_{11}}{e_{12}} \\ & -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\beta_3 + \gamma_3] e_{31}}{e_{32}} \\ & \text{Csc}[\gamma_1] e_{11} \left(\frac{\sin[\beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\sin[\beta_1]}{e_{13}} \right) \\ & \text{Csc}[\gamma_2] e_{11} \left(\frac{\sin[\beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\sin[\beta_2]}{e_{13}} \right) \\ & \text{Csc}[\gamma_3] e_{31} \left(\frac{\sin[\beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\sin[\beta_3]}{e_{33}} \right) \end{aligned}$

X4	X5= -X11	X6	X7	X8	X9	X10 =X6	X11= X5
----	----------	----	----	----	----	---------	---------

0	$\frac{\cos[\theta_p]}{\sin[\theta_p]}$ $\frac{0}{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}$ $\frac{e_{12}}{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}$ $\frac{e_{12}}{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}$ $\text{Csc}[\gamma_1] \left(\frac{e_{32} \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_2] \left(\frac{e_{12} \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_3] \left(\frac{e_{12} \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right)$	$\frac{-\sin[\theta_p]}{\cos[\theta_p]}$ $\frac{0}{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}$ $\frac{e_{12}}{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}$ $\frac{e_{12}}{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}$ $\text{Csc}[\gamma_1] \left(\frac{e_{32} \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_2] \left(\frac{e_{12} \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_3] \left(\frac{e_{12} \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right)$	0	0	0	$\frac{-\sin[\theta_p]}{\cos[\theta_p]}$ $\frac{0}{\text{Csc}[\gamma_1] \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}$ $\frac{e_{12}}{\text{Csc}[\gamma_2] \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}$ $\frac{e_{12}}{\text{Csc}[\gamma_3] \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}$ $\text{Csc}[\gamma_1] \left(\frac{e_{32} \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_2] \left(\frac{e_{12} \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} + \frac{\sin[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_3] \left(\frac{e_{12} \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\sin[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right)$	$\frac{-\cos[\theta_p]}{-\sin[\theta_p]}$ $\frac{0}{\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] \text{Csc}[\gamma_1]}$ $\frac{e_{12}}{\cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] \text{Csc}[\gamma_2]}$ $\frac{e_{12}}{\cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \text{Csc}[\gamma_3]}$ $\text{Csc}[\gamma_1] \left(-\frac{e_{32} \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_2] \left(-\frac{e_{12} \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\cos[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}} \right)$ $\text{Csc}[\gamma_3] \left(-\frac{e_{12} \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\cos[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}} \right)$
---	--	---	---	---	---	---	---

X12.....X30	X31=X11	X32= - X6	X33..X36
0	$-\text{Cos}[\theta_p]$	$\text{Sin}[\theta_p]$	
0	$-\text{Sin}[\theta_p]$	$-\text{Cos}[\theta_p]$	
0	0	0	0
0	$\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\text{Csc}[\gamma_1]$	$\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]$	0
0	$\frac{e_{12}}{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}\text{Csc}[\gamma_2]$	$\frac{e_{12}}{\text{Csc}[\gamma_2]}\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]$	0
0	$\frac{e_{12}}{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}\text{Csc}[\gamma_3]$	$\frac{e_{12}}{\text{Csc}[\gamma_3]}\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]$	0
0	$\text{Csc}[\gamma_1]\left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}}\right)$	$\text{Csc}[\gamma_1]\left(-\frac{\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} - \frac{\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}}\right)$	0
0	$\text{Csc}[\gamma_2]\left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}}\right)$	$\text{Csc}[\gamma_2]\left(-\frac{\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{12}} - \frac{\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{13}}\right)$	
0	$\text{Csc}[\gamma_3]\left(-\frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}}\right)$	$\text{Csc}[\gamma_3]\left(-\frac{\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} - \frac{\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}}\right)$	

Tabla 3.5 Comparación de algunos vectores del álgebra de LIE

Resumen de los corchetes de LIE

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X31	X32
*	*	*	0	*	*	0	0	0	=	=	=	=

Tabla 3.0 Vectores para completar la matriz

Por lo que sólo se completa la matriz con tres vectores linealmente independientes:

Según Murray se tiene la siguiente tabla para tres vectores:

Example 7.12. Philip Hall basis of order 3

A basis for the nilpotent Lie algebra of order 3 generated by g_1, g_2, g_3 is

$$\begin{array}{cccc}
 g_1 & & g_2 & & g_3 \\
 [g_1, g_2] & & [g_2, g_3] & & [g_3, g_1] \\
 [g_1, [g_1, g_2]] & & [g_1, [g_1, g_3]] & & [g_2, [g_1, g_2]] & & [g_2, [g_1, g_3]] \\
 [g_2, [g_2, g_3]] & & [g_3, [g_1, g_2]] & & [g_3, [g_1, g_3]] & & [g_3, [g_2, g_3]]
 \end{array}$$

Note that $[g_1, [g_2, g_3]]$ does not appear since

$$[g_1, [g_2, g_3]] + [g_2, [g_3, g_1]] + [g_3, [g_1, g_2]] = 0$$

by the Jacobi identity and the second two terms in the formula are already present.

El color verde indica que al aplicar el álgebra de Lie el resultado es cero.

El color amarillo significa que los vectores generados son linealmente dependientes.

H1	X1	X2	X3	
H2	X4 = [X1,X2]	X5 = [X2,X3]	X6 = [X3,X1]	
H3	X7 = [X1,[X1,X2]] = [X1,X4]	X8 = [X1,[X1,X3]] = [X1,-X6]	X9 = [X2,[X1,X2]] = [X2,X4]	X10 = [X2,[X1,X3]] = [X2,-X6]
H4	X11 = [X2,[X2,X3]] = [X2,X5]	X12 = [X3,[X1,X2]] = [X3,X4]	X13 = [X3,[X1,X3]] = [X3,-X6]	X14 = [X3,[X2,X3]] = [X3,X5]

Tabla 4.1 Lie brackets para tres vectores.

$$[f, g](q) = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q)$$

Al aplicar el álgebra de LIE se obtienen los siguientes resultados:

Por lo que sólo se completa la matriz con tres vectores linealmente independientes.

La matriz del sistema completo tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{pmatrix} \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11} + \sin[\gamma_1]e_{12} & \sin[\gamma_1]e_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{21} + \sin[\gamma_2]e_{22} & 0 & \sin[\gamma_2]e_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{31} + \sin[\gamma_3]e_{32} & 0 & 0 & \sin[\gamma_3]e_{32} & 0 & 0 & 0 \\ -\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \cos[\beta_1 + \gamma_1]e_{11} + \cos[\gamma_1]e_{12} + e_{13} & \cos[\gamma_1]e_{12} + e_{13} & 0 & 0 & e_{13} & 0 & 0 \\ -\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \cos[\beta_2 + \gamma_2]e_{21} + \cos[\gamma_2]e_{22} + e_{23} & 0 & \cos[\gamma_2]e_{22} + e_{23} & 0 & 0 & e_{23} & 0 \\ -\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \cos[\beta_3 + \gamma_3]e_{31} + \cos[\gamma_3]e_{32} + e_{33} & 0 & 0 & \cos[\gamma_3]e_{32} + e_{33} & 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$

Rango = 9

Dimensión = 6

Su transpuesta es:

$$\begin{pmatrix} \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & -\sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & -\sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & -\sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \\ \sin[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \sin[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] & \cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] & \cos[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] & \cos[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3] \\ \sin[\beta_1 + \gamma_1]e_{11} + \sin[\gamma_1]e_{12} & \sin[\beta_2 + \gamma_2]e_{21} + \sin[\gamma_2]e_{22} & \sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{31} + \sin[\gamma_3]e_{32} & \cos[\beta_1 + \gamma_1]e_{11} + \cos[\gamma_1]e_{12} + e_{13} & \cos[\beta_2 + \gamma_2]e_{21} + \cos[\gamma_2]e_{22} + e_{23} & \cos[\beta_3 + \gamma_3]e_{31} + \cos[\gamma_3]e_{32} + e_{33} \\ \sin[\gamma_1]e_{12} & 0 & 0 & \cos[\gamma_1]e_{12} + e_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \sin[\gamma_2]e_{22} & 0 & 0 & \cos[\gamma_2]e_{22} + e_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \sin[\gamma_3]e_{32} & 0 & 0 & \cos[\gamma_3]e_{32} + e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & e_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$

La traza es:

$$\cos[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1] + \sin[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2] + \cos[\gamma_1]e_{12} + e_{13} + \cos[\gamma_2]e_{22} + e_{23} + \sin[\beta_3 + \gamma_3]e_{31} + \cos[\gamma_3]e_{32} + \sin[\gamma_3]e_{32} + e_{33}$$

La matriz en variables de estado que se genera sin considerar los elementos virtuales es:

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{Y}_p \\ \dot{\theta}_p \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \text{Cos}[\theta_p] \\ \text{Sin}[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]\text{Csc}[\gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]\text{Csc}[\gamma_2]}{e_{22}} \\ -\frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]\text{Csc}[\gamma_3]}{e_{32}} \\ \text{Csc}[\gamma_1]\left(\frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\text{Cos}[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}}\right) \\ \text{Csc}[\gamma_2]\left(\frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} + \frac{\text{Cos}[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{23}}\right) \\ \text{Csc}[\gamma_3]\left(\frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\text{Cos}[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}}\right) \end{matrix} & \begin{matrix} -\text{Sin}[\theta_p] \\ \text{Cos}[\theta_p] \\ 0 \\ -\frac{\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} \\ -\frac{\text{Csc}[\gamma_2]\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} \\ -\frac{\text{Csc}[\gamma_3]\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} \\ \text{Csc}[\gamma_1]\left(\frac{\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\text{Sin}[\alpha_1 + \beta_1]}{e_{13}}\right) \\ \text{Csc}[\gamma_2]\left(\frac{\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} + \frac{\text{Sin}[\alpha_2 + \beta_2]}{e_{23}}\right) \\ \text{Csc}[\gamma_3]\left(\frac{\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\text{Sin}[\alpha_3 + \beta_3]}{e_{33}}\right) \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_1]\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1]e_{11}}{e_{12}} \\ -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_2]\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2]e_{21}}{e_{22}} \\ -1 - \frac{\text{Csc}[\gamma_3]\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3]e_{31}}{e_{32}} \\ \text{Csc}[\gamma_1]e_{11}\left(\frac{\text{Sin}[\beta_1 + \gamma_1]}{e_{12}} + \frac{\text{Sin}[\beta_1]}{e_{13}}\right) \\ \text{Csc}[\gamma_2]e_{21}\left(\frac{\text{Sin}[\beta_2 + \gamma_2]}{e_{22}} + \frac{\text{Sin}[\beta_2]}{e_{23}}\right) \\ \text{Csc}[\gamma_3]e_{31}\left(\frac{\text{Sin}[\beta_3 + \gamma_3]}{e_{32}} + \frac{\text{Sin}[\beta_3]}{e_{33}}\right) \end{matrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{VX}_p \\ \dot{VY}_p \\ \dot{\Omega}\theta_p \end{pmatrix}$$

V. SIMULACIÓN

Se obtiene la representación en el espacio de estados del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$, ver ecuación (2.22), donde se contemplan las juntas activas, pasivas en función de las variables virtuales.

Así mismo, la actuación del robot paralelo delta plano $3\underline{R}RR$ se hace a través de una actuación virtual indirecta. Esto se logra retroalimentando al modelo en variables de estado del robot paralelo $3\underline{R}RR$, con el modelo en variables de estado de la cadena virtual $(RRR)_v$, ver ecuación (2.22)

Los experimentos a realizar fueron pensados para la apreciación visual de las propiedades del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ en función de la cadena virtual $(RRR)_v$.

Movimiento Sinusoidal del punto de análisis

Se realiza un movimiento sinusoidal del punto P de análisis con respecto al sistema $\{x, y\}$. Este movimiento permite observar cómo la velocidad lineal puede cambiar sin alterar la orientación de la plataforma móvil. Para ello se introducen perfiles sinusoidales de velocidad a la entrada, uno desfasado 90° del otro. La velocidad angular se mantiene nula.

Simulación de la cadena virtual $(RRR)_v$.

En la figura. 5 se observa la simulación de la cadena virtual. Los parámetros de entrada para la cinemática diferencial inversa de la cadena virtual son:

- Velocidades de entrada de la cadena virtual

$$v_{xP} = 1 \sin(\omega t) \left[\frac{cm}{s} \right], \omega = \frac{\pi}{79}$$
$$v_{yP} = 2 \cos(\omega t) \left[\frac{cm}{s} \right], \omega = \frac{2\pi}{79}$$
$$\omega_{pv} = 0 \left[\frac{rad}{s} \right]$$

En la figura 6 se muestran las gráficas de la evolución de las coordenadas generalizadas de la cadena virtual en el seguimiento de una trayectoria.

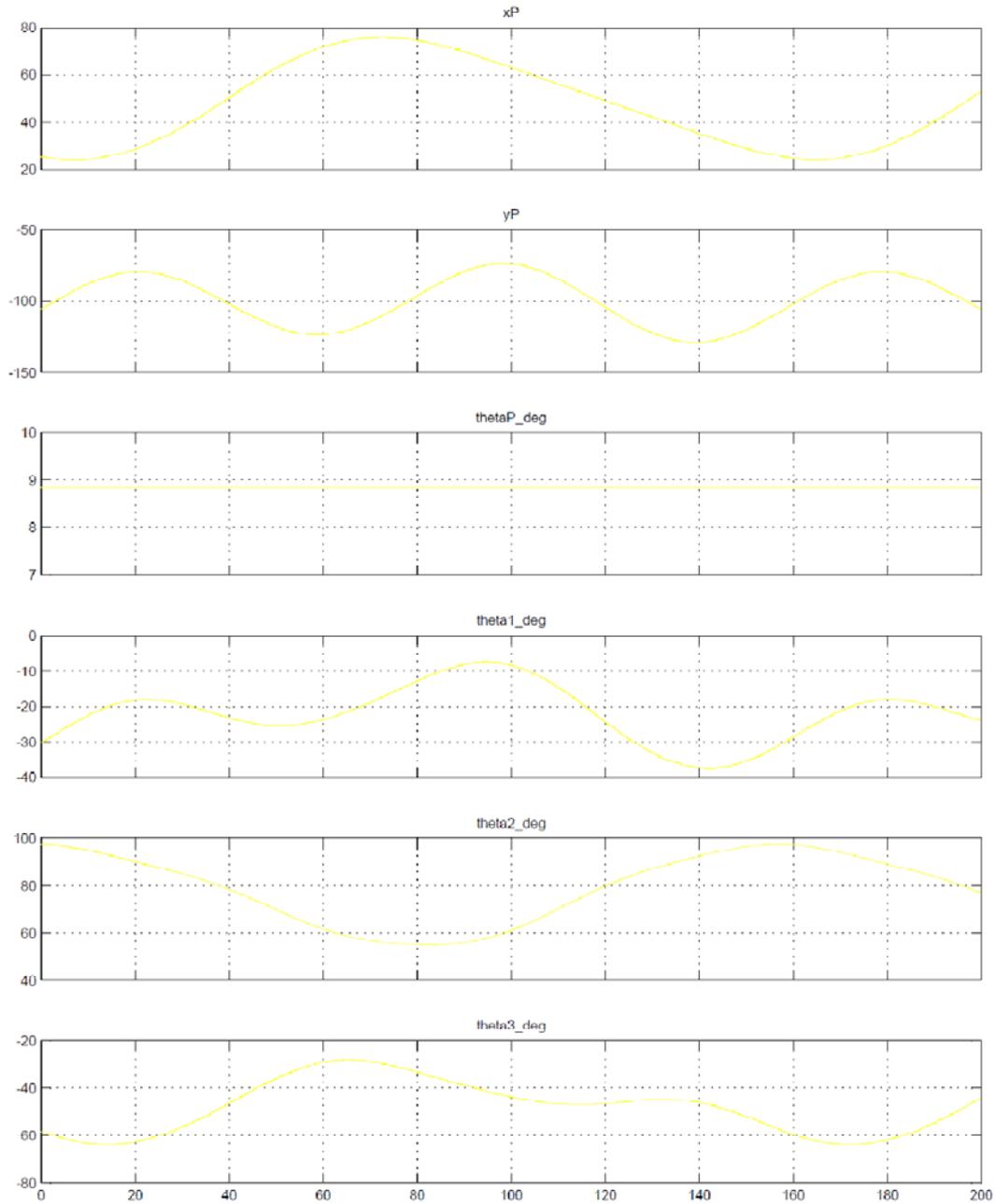


Fig. 6 Variables virtuales.

Simulación del manipulador paralelo en función de las variables virtuales.

Una vez que se tienen las velocidades angulares virtuales se introducen a la ecuación (2.20)

En la Fig. 7 se muestra cada bloque que contiene la información de la cadena virtual y del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$.

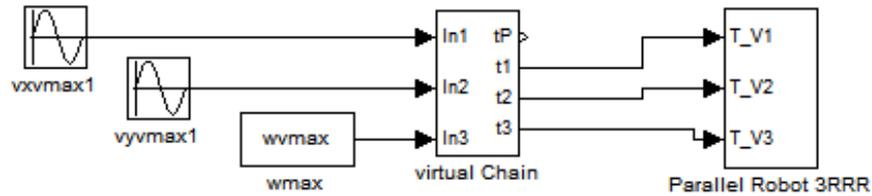


Fig. 7 Diagrama de bloques en MatLab

Se obtiene la representación en el espacio de estados en función de las variables virtuales como entradas. En la figura. 8 se observa el resultado de la simulación del robot paralelo $3\underline{R}RR$, teniendo como las entradas las variables articulares virtuales $(RRR)_v$.

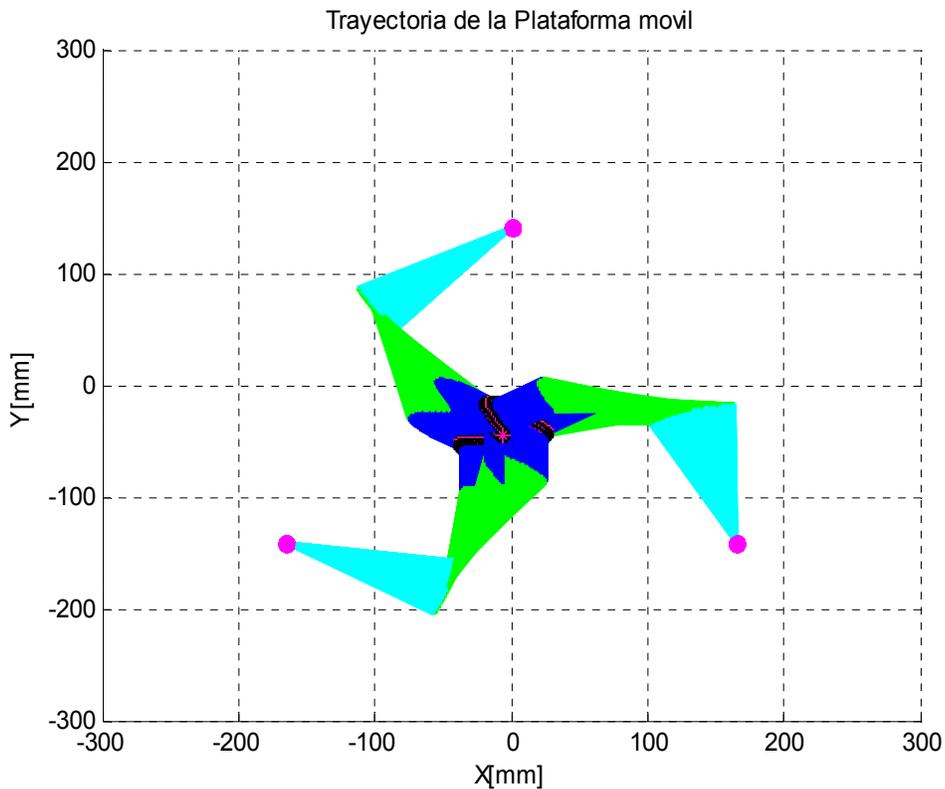


Fig. 8 Manipulador $3\underline{R}RR$ en función de las variables articulares virtuales.

En la figura 9 se muestran las gráficas de la evolución de las coordenadas generalizadas del robot paralelo $3\underline{R}RR$, en función de la cadena virtual $(RRR)_v$.

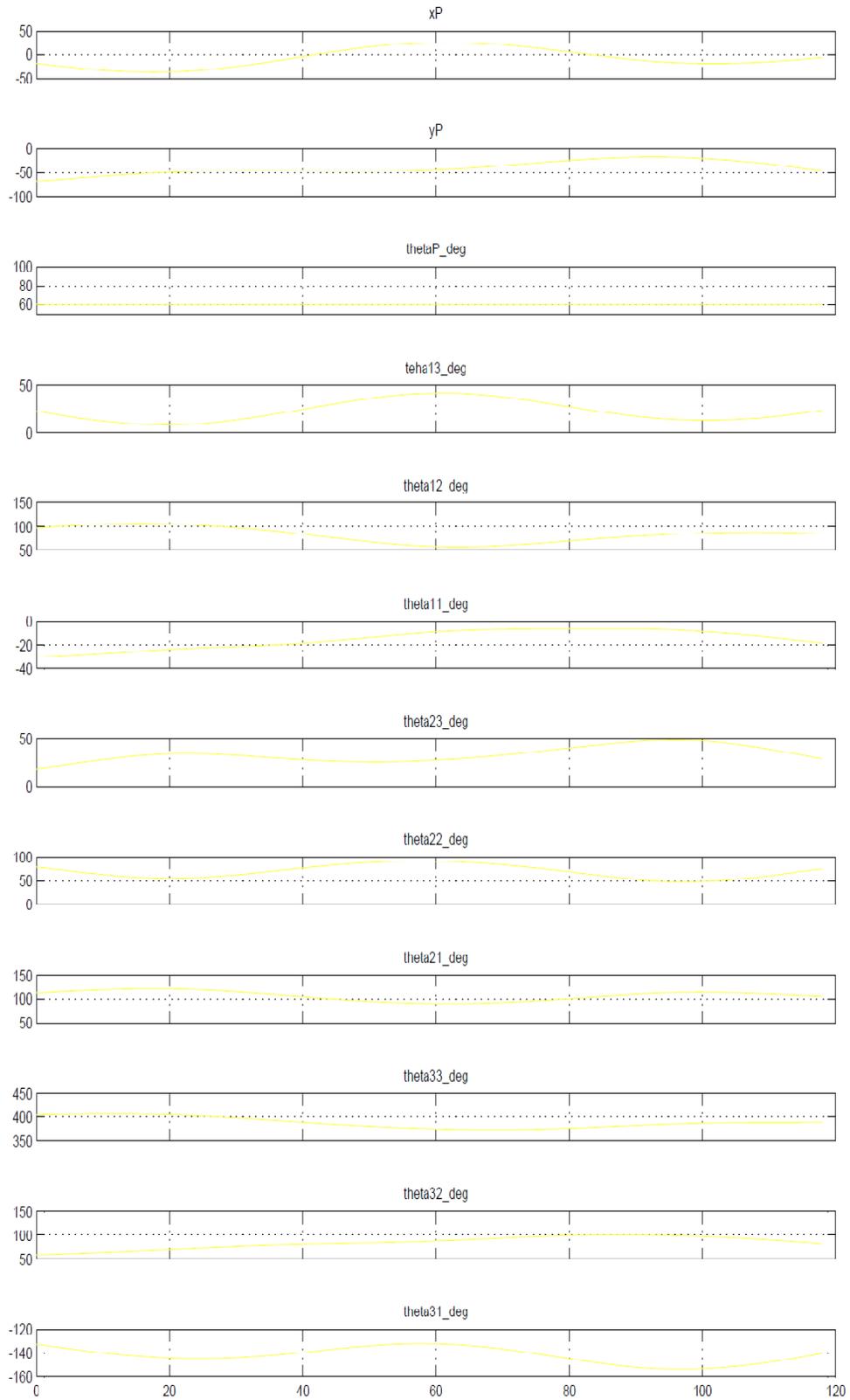


Fig. 9 Coordenadas generalizadas del manipulador. 3RRR-(RRR)_v

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se obtiene por primera vez dos modelos cinemáticos en variables de estado, de un manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ y de un manipulador serial (cadena virtual) $(RRR)_v$. Donde cada modelo toma en cuenta todas sus variables de configuración. Cada modelo, quedó representado por una sola matriz jacobiana. Lo anterior permite, proporcionar una actuación virtual, utilizando parte de la cinemática inversa en variables de estado del manipulador $(RRR)_v$, retroalimentándola al modelo del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$, con las variables articulares en velocidad de la cadena virtual, cuando el efector final del manipulador $(RRR)_v$ es controlado alrededor de una trayectoria.

Utilizando el algebra de Lie sobre el modelo cinemático del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ y el modelo cinemático inverso de la cadena virtual $(RRR)_v$, fue posible hacer el análisis de controlabilidad, dando como resultado que este análisis nos proporciona la movilidad de cada uno de ellos.

A diferencia de otros trabajos, el modelo en variables de estado del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ presentado en este trabajo incluye: las variables articulares activas, pasivas y del espacio de trabajo. Otra diferencia es que, en la literatura, el problema de la cinemática directa es reducir la solución a un polinomio. Sin embargo, la solución del polinomio sólo modela la evolución de las variables de las juntas activas al ejecutar una tarea dada. Con la matriz en variables de estado del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ es posible conocer la evolución de todas las juntas activas y pasivas.

Otro problema que establece la literatura es la validación del resultado de la cinemática directa por polinomios. El cálculo puede implicar un gran número de operaciones y por lo tanto puede ser muy sensible a errores numéricos de redondeo, por lo que la comprobación de la validez de las soluciones, con la cinemática inversa puede ser necesaria. Con el modelo en variables de estado del manipulador $3\underline{R}RR-(RRR)_v$ es posible conocer la velocidad lineal y la angular del efector final del manipulador paralelo en función de las velocidades angulares de la cadena virtual del manipulador $(RRR)_v$.

La matriz jacobiana que se obtiene del modelo en variables de estado para los dos manipuladores es diferente a la que se presenta en la literatura. Además, para el

manipulador paralelo, los modelos actuales representan la cinemática diferencial de estos manipuladores con dos matrices, una para la cinemática diferencial directa y otra para la cinemática diferencial inversa.

Más importante, este trabajo muestra un nuevo enfoque en el análisis de la cinemática de los robots manipuladores serie y paralelo, al utilizar: por un lado, sus modelos en variables de estado y por el otro, en función de sus cadenas virtuales. Lo cual promete ser una herramienta novedosa para resolver manipuladores paralelos complejos, como el caso de robots manipuladores paralelos redundantes o híbridos. Queda como trabajo a futuro la propuesta de un esquema de control para el manipulador.

REFERENCIAS

1. Kurfess, T.R., *Robotics and Automation Handbook* 2005: Taylor & Francis.
2. Fu, K.S., R.C. González, and C.S.G. Lee, *Robótica: control, detección, visión e inteligencia* 1988: McGraw-Hill.
3. Cortés, F.R., *Robótica: Control de Robots Manipuladores* 2011: Marcombo.
4. Merlet, J.P., *Parallel Robots* 2006: Springer.
5. Tsai, L.W., *Robot Analysis: Asian Edition* 2005: John Wiley & Sons Australia, Limited.
6. Martínez-Zamudio and Gonzalez-Villela, *ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN ROBOT MANIPULADOR PARALELO DELTA HÍBRIDO.*, 2009.
7. Martínez-Zamudio and Gonzalez-Villela, *Análisis Cinemático de un Robot Manipulador Paralelo Delta Híbrido*, in *Facultad de Ingeniería UNAM* 2010.
8. Sukhan, L. and K. Sungbok. *Efficient inverse kinematics for serial connections of serial and parallel manipulators.* in *Intelligent Robots and Systems '93, IROS '93. Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on.* 1993.
9. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type Synthesis of Parallel Mechanisms* 2007: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
10. Huang, Z., Q. Li, and H. Ding, *Theory of Parallel Mechanisms* 2012: Springer.
11. Gogu, G., *Structural Synthesis of Parallel Robots* 2008: Springer Netherlands.
12. J, C.J., *Introduction To Robotics: Mechanics And Control*, 3/E 2008: Pearson Education.
13. Ebrahimi, I., J.A. Carretero, and R. Boudreau, *A family of kinematically redundant planar parallel manipulators.* *Journal of Mechanical Design*, 2008. **130**(6): p. 062306.
14. Gogu, G., *Mobility of mechanisms: a critical review.* *Mechanism and Machine Theory*, 2005. **40**(9): p. 1068-1097.
15. Liu, X.-J. and J. Wang, *Some new parallel mechanisms containing the planar four-bar parallelogram.* *The International Journal of Robotics Research*, 2003. **22**(9): p. 717-732.
16. Figielski, A., I.A. Bonev, and P. Bigras. *Towards development of a 2-DOF planar oparallel robot with optimal workspace use.* in *Systems, Man and Cybernetics, 2007. ISIC. IEEE International Conference on.* 2007. IEEE.
17. Gosselin, C. and J. Angeles, *The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator.* *Journal of Mechanical Design*, 1988. **110**(1): p. 35-41.
18. Pennock, G. and D. Kassner, *The workspace of a general geometry planar three-degree-of-freedom platform-type manipulator.* *Journal of Mechanical Design*, 1993. **115**(2): p. 269-276.
19. Gosselin, C., *Kinematic analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators* 1989.
20. Shirkhodaie, A. and A. Soni. *Forward and inverse synthesis for a robot with three degrees of freedom.* in *Summer Computer Simulation Conference.* 1987.
21. Arsenault, M. and R. Boudreau, *The Synthesis of Three-Degree-of-Freedom Planar Parallel Mechanisms with Revolute Joints (3-RRR) for an Optimal Singularity-Free Workspace.* *Journal of Robotic Systems*, 2004. **21**(5): p. 259-274.

22. Boudreau, R. and C. Gosselin, *The synthesis of planar parallel manipulators with a genetic algorithm*. Journal of Mechanical Design, 1999. **121**(4): p. 533-537.
23. Bonev, I.A., D. Zlatanov, and C.M. Gosselin, *Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory*. Journal of Mechanical Design, 2003. **125**(3): p. 573-581.
24. Gosselin, C.M. and J. Wang, *Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators*. Robotics and Autonomous Systems, 1997. **21**(4): p. 377-398.
25. Liu, X.-J., J. Wang, and F. Gao, *Performance atlases of the workspace for planar 3-DOF parallel manipulators*. Robotica, 2000. **18**(05): p. 563-568.
26. Kumar, V., *Characterization of workspaces of parallel manipulators*. Journal of Mechanical Design, 1992. **114**(3): p. 368-375.
27. Gao, F., X.-J. Liu, and X. Chen, *The relationships between the shapes of the workspaces and the link lengths of 3-DOF symmetrical planar parallel manipulators*. Mechanism and Machine Theory, 2001. **36**(2): p. 205-220.
28. Kim, W.-k., B.-J. Yi, and W. Cho, *RCC characteristics of planar/spherical three degree-of-freedom parallel mechanisms with joint compliances*. Journal of Mechanical Design, 2000. **122**(1): p. 10-16.
29. Shahinpoor, M., *Kinematics of a parallel-serial (hybrid) manipulator*. Journal of Robotic Systems, 1992. **9**(1): p. 17-36.
30. Gonzalez-Villela, V.J., *Research on a semiautonomous mobile robot for loosely structured environments focused on transporting mail trolleys*, 2006.
31. Tsai, L.W., *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators* 1999: Wiley.
32. Chace, M.A., *Vector analysis of linkages*. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 1963. **85**(3): p. 289-297.
33. Lee, H.-Y. and C.-G. Liang, *Displacement analysis of the general spatial 7-link 7R mechanism*. Mechanism and Machine Theory, 1988. **23**(3): p. 219-226.
34. Lee, H.-Y. and C.-G. Liang, *A new vector theory for the analysis of spatial mechanisms*. Mechanism and Machine Theory, 1988. **23**(3): p. 209-217.
35. Uicker, J., J. Denavit, and R. Hartenberg, *An iterative method for the displacement analysis of spatial mechanisms*. Journal of Applied Mechanics, 1964. **31**(2): p. 309-314.
36. Albala, H. and J. Angeles. *Numerical solution to the input output displacement equation of the general 7r spatial mechanism*. in *Proceedings of the Fifth world congress on theory of machines and mechanisms*. 1979.
37. Denavit, J.a.H., R. S., *A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanism Based on Matrices*. ASME J. Appl. Mech 1955. **77**: p. 215-221.
38. Yuan, M.S.C., F. F, and L. Woo. *KINEMATIC ANALYSIS OF SPATIAL MECHANISMS BY MEANS OF SCREW COORDINATES. 2. ANALYSIS OF SPATIAL MECHANISMS*. in *MECHANICAL ENGINEERING*. 1971. ASME-AMER SOC MECHANICAL ENG 345 E 47TH ST, NEW YORK, NY 10017.
39. Kohli, D. and A. Soni, *Kinematic analysis of spatial mechanisms via successive screw displacements*. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 1975. **97**(2): p. 739-747.
40. Yang, A.T. and F. Freudenstein, *Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms*. Journal of Applied Mechanics, 1964. **31**(2): p. 300-308.
41. Peiper, D.L., *The kinematics of manipulators under computer control*, 1968, DTIC Document.
42. Roth, B., J. Rastegar, and V. Scheinman, *On the design of computer controlled manipulators*, in *On Theory and Practice of Robots and Manipulators* 1974, Springer. p. 93-113.

43. Freudenstein, F., *Kinematics: past, present and future*. Mechanism and Machine Theory, 1973. **8**(2): p. 151-160.
44. Duffy, J. and C. Crane, *A displacement analysis of the general spatial 7-link, 7R mechanism*. Mechanism and Machine Theory, 1980. **15**(3): p. 153-169.
45. Albala, H., *Displacement Analysis of the General N-Bar, Single-Loop, Spatial Linkage. Part 1: Underlying Mathematics and Useful Tables*. Journal of Mechanical Design, 1982. **104**(2): p. 504-519.
46. Tsai, L.-W. and A.P. Morgan, *Solving the kinematics of the most general six-and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods*. Journal of Mechanical Design, 1985. **107**(2): p. 189-200.
47. Primrose, E., *On the input-output equation of the general 7R-mechanism*. Mechanism and Machine Theory, 1986. **21**(6): p. 509-510.
48. Angeles, J., *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods and Algorithms*. Second Edition ed, ed. F.F. Ling2002: Springer.
49. Raghavan, M., *Stewart platform of general geometry has 40 configurations*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 1993. **115**(2): p. 277-280.
50. Daniali, H.M., P. Zsombor-Murray, and J. Angeles, *The kinematics of 3-dof planar and spherical double-triangular parallel manipulators*, in *Computational Kinematics1993*, Springer. p. 153-164.
51. Gosselin, C.M. and J.-P. Merlet, *The direct kinematics of planar parallel manipulators: Special architectures and number of solutions*. Mechanism and Machine Theory, 1994. **29**(8): p. 1083-1097.
52. Merlet, J.-P. *Direct kinematics of planar parallel manipulators*. in *Robotics and Automation, 1996. Proceedings., 1996 IEEE International Conference on*. 1996. IEEE.
53. Griffis, M. and J. Duffy, *A forward displacement analysis of a class of Stewart platforms*. Journal of Robotic Systems, 1989. **6**(6): p. 703-720.
54. Chen, N.-X. and S.-M. Song, *Direct position analysis of the 4–6 Stewart platforms*. Journal of Mechanical Design, 1994. **116**(1): p. 61-66.
55. Craig, J.J., *Introduction to robotics: mechanics & control. Solutions Manual*1986: Addison-Wesley Pub. Co.
56. Hunt, K.H., *Special configurations of robot-arms via screw theory*. Robotica, 1986. **4**(03): p. 171-179.
57. Orin, D.E. and W.W. Schrader, *Efficient computation of the Jacobian for robot manipulators*. The International Journal of Robotics Research, 1984. **3**(4): p. 66-75.
58. Waldron, K., S.-L. Wang, and S. Bolin, *A study of the Jacobian matrix of serial manipulators*. Journal of Mechanical Design, 1985. **107**(2): p. 230-237.
59. Whitney, D.E., *The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1972. **94**(4): p. 303-309.
60. Waldron, K.J., *The constraint analysis of mechanisms*. Journal of Mechanisms, 1966. **1**(2): p. 101-114.
61. Davies, T. and E.J. Primrose, *An algebra for the screw systems of pairs of bodies in a kinematic chain*. Proc. Third World Congress Theory Mach. and Mech, 1971.
62. Mohamed, M.G., J. Sanger, and J. Duffy. *INSTANTANEOUS KINEMATICS OF FULLY-PARALLEL DEVICES*. in *Proceedings of the Sixth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. 1984. New Delhi, Ind: Halsted Press.

63. Mohamed, M.G. and J. Duffy, *DIRECT DETERMINATION OF THE INSTANTANEOUS KINEMATICS OF FULLY PARALLEL ROBOT MANIPULATORS*. Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design, 1985. **107**(2): p. 226-229.
64. Sugimoto, K., *KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF PARALLEL MANIPULATORS BY MEANS OF MOTOR ALGEBRA*. Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design, 1987. **109**(1): p. 3-7.
65. Campos, A., R. Guenther, and D. Martins, *Differential kinematics of serial manipulators using virtual chains*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2005. **27**(4): p. 345-356.
66. Gosselin, C. and J. Angeles, *Singularity analysis of closed-loop kinematic chains*. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, 1990. **6**(3): p. 281-290.
67. Tsai, L.W., *Robot Analysis, The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators* 1999. 505.
68. Earl, C.F. and J. Rooney, *SOME KINEMATIC STRUCTURES FOR ROBOT MANIPULATOR DESIGNS*. Journal of mechanisms, transmissions, and automation in design, 1983. **105**(1): p. 15-22.
69. Herve, J. *Group mathematics and parallel link mechanisms*. in *Transactions of the IMACS/SICE International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems, Sep 16 - 20 1992*. 1993. Kobe, Japan: Publ by Elsevier Science Publishers B.V.
70. Fang, Y. and L.-W. Tsai, *Structure synthesis of a class of 4-DoF and 5-DoF parallel manipulators with identical limb structures*. The International Journal of Robotics Research, 2002. **21**(9): p. 799-810.
71. Frisoli, A., et al., *Synthesis by screw algebra of translating in-parallel actuated mechanisms*, in *Advances in Robot Kinematics 2000*, Springer. p. 433-440.
72. Gao, F., et al., *New kinematic structures for 2-, 3-, 4-, and 5-DOF parallel manipulator designs*. Mechanism and Machine Theory, 2002. **37**(11): p. 1395-1411.
73. Huang, Z. and Q. Li, *Type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel mechanisms using the constraint-synthesis method*. The International Journal of Robotics Research, 2003. **22**(1): p. 59-79.
74. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type synthesis of three-degree-of-freedom spherical parallel manipulators*. The International Journal of Robotics Research, 2004. **23**(3): p. 237-245.
75. Huang, Z. and Q. Li, *General methodology for type synthesis of symmetrical lower-mobility parallel manipulators and several novel manipulators*. The International Journal of Robotics Research, 2002. **21**(2): p. 131-145.
76. Chung, W.J., W.K. Chung, and Y. Youm. *Inverse kinematics of planar redundant manipulators using virtual link and displacement distribution schemes*. 1991. Sacramento, CA, USA: Publ by IEEE.
77. Tsuji, T., S. Nakayama, and K. Ito, *Parallel and distributed trajectory generation of redundant manipulators through cooperation and competition among subsystems*. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on, 1997. **27**(3): p. 498-509.
78. Tsuji, T., J. Kaneta, and K. Ito. *A hierarchical collision-free path planning for redundant manipulators based on virtual arms*. in *Intelligent Motion Control, 1990. Proceedings of the IEEE International Workshop on*. 1990. IEEE.
79. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004. **20**(2): p. 181-190.
80. Kong, X. and C.M. Gosselin. *Type synthesis of 3-DOF PPR parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain*. in *2004 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, September 28,*

- 2004 - October 2, 2004. 2004. Salt Lake City, UT, United states: American Society of Mechanical Engineers.
81. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type Synthesis of 3-DOF Spherical Parallel Manipulators Based on Screw Theory*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2004. **126**(1): p. 101-108.
 82. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type Synthesis of 3-DOF Translational Parallel Manipulators Based on Screw Theory*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2004. **126**(1): p. 83-92.
 83. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type Synthesis of 3-DOF PPR-Equivalent Parallel Manipulators Based on Screw Theory and the Concept of Virtual Chain*. Journal of Mechanical Design, 2005. **127**(6): p. 1113-1121.
 84. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type synthesis of 4-DOF SP-equivalent parallel manipulators: A virtual chain approach*. Mechanism and Machine Theory, 2006. **41**(11): p. 1306-1319.
 85. Kong, X., C.M. Gosselin, and P.-L. Richard, *Type synthesis of parallel mechanisms with multiple operation modes*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2007. **129**(Compendex): p. 595-601.
 86. Campos, A., R. Guenther, and D. Martins, *Differential kinematics of parallel manipulators using Assur virtual chains*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2009. **223**(7): p. 1697-1711.
 87. Shukla, D. and F.W. Paul. *Motion kinematics of series-parallel robots using a virtual link concept*. 1992. Scottsdale, AZ, USA: Publ by ASME.
 88. Jun, S., Z. Xiaorui, and L. Zexiang. *New method for kinematic analysis of a hybrid manipulator*. in *Information and Automation, 2009. ICIA '09. International Conference on*. 2009.
 89. Bruyninckx, H. and J. De Schutter, *Unified kinetostatics for serial, parallel and mobile robots*, in *Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control*1998, Springer. p. 343-352.
 90. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type synthesis of 5-DOF parallel manipulators based on screw theory*. Journal of Robotic Systems, 2005. **22**(10): p. 535-547.
 91. Kong, X. and C.M. Gosselin, *Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2005. **127**(Compendex): p. 1113-1121.
 92. Tale Masouleh, M., et al., *Kinematic analysis of 5-RPUR (3T2R) parallel mechanisms*. Meccanica, 2011. **46**(1): p. 131-146.
 93. Dubowsky, S. and E. Papadopoulos, *The kinematics, dynamics, and control of free-flying and free-floating space robotic systems*. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, 1993. **9**(5): p. 531-543.
 94. Vafa, Z. and S. Dubowsky. *On the dynamics of manipulators in space using the virtual manipulator approach*. in *Robotics and Automation. Proceedings. 1987 IEEE International Conference on*. 1987. IEEE.
 95. Coelho, P. and U. Nunes, *Lie algebra application to mobile robot control: A tutorial*. Robotica, 2003. **21**(5): p. 483-493.
 96. Murray, R.M. and S.S. Sastry, *A mathematical introduction to robotic manipulation*1994: CRC PressINC.