



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

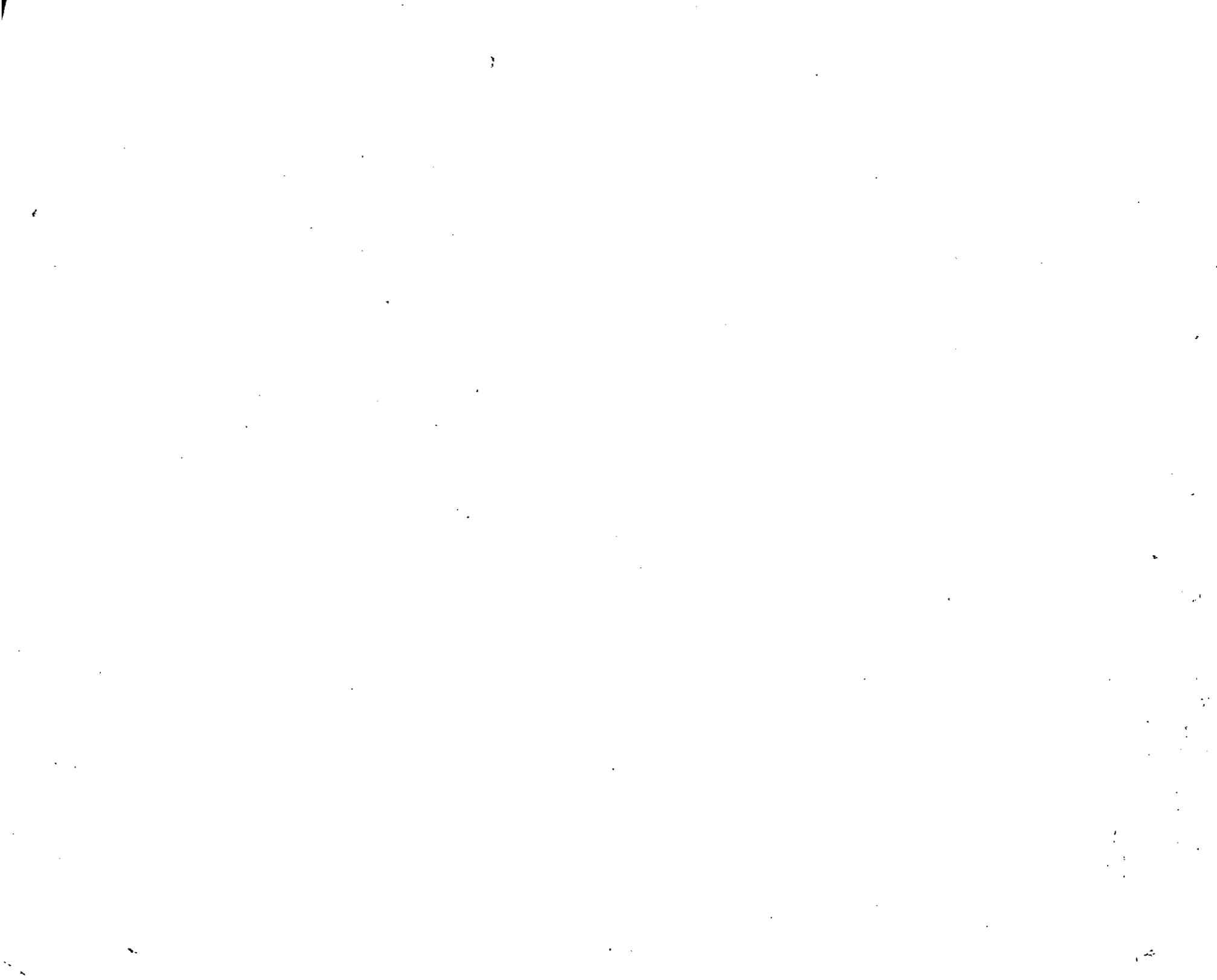
CURSO: "METODOS EXPERIMENTALES EN TERMOFLUIDOS"

CURSO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA DIVISION  
DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA PARA EL PER-  
SONAL DOCENTE DEL DEPARTAMENTO DE FLUIDOS Y  
TERMICA.

DR. JAIME CERVANTES DE GORTARI  
(COORDINADOR)

DR. MIHIR SEN

DEL 9 AL 13 DE ABRIL DE 1984.





UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

"METODOS EXPERIMENTALES EN TERMOFLUIDOS"

CURSO ORGANIZADO EN COLABORACION DE LA DIVISION  
DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA PARA EL PER-  
SONAL DOCENTE DEL DEPARTAMENTO DE FLUIDOS Y TER-  
MICA.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIDAD 2

VISUALIZACION DEL FLUJO

MIHIR SEN

RESUMEN

Se presentan aquí los principales métodos para la visualización del flujo que se usan actualmente. Se dividen los métodos en: métodos de trazadores, métodos de la pared, métodos de autovisibilidad y métodos ópticos. Se explican las bases físicas de cada método con sugerencias o ejemplos de su uso.

## I. INTRODUCCION

La visualización del flujo es una herramienta muy útil en el estudio experimental del movimiento de los fluidos sobre rangos muy amplios del número de Reynolds y del número de Mach. Se obtiene información rápida y visual de las características principales del flujo sin la necesidad de análisis de datos. Además, en muchos casos, con la ayuda simplemente de una cámara fotográfica, se obtienen mediciones y datos cuantitativos.

Las técnicas de visualización son principalmente utilizadas para ver las líneas de flujo en el interior o en la frontera de un flujo, o bien, las posiciones de las ondas de choque en un flujo compresible. Así mismo, la visualización puede usarse para proporcionar información con respecto a la turbulencia, transición, separación de la capa límite, esfuerzos de cortante, variación de densidad, etc.

Existen muchos métodos para la visualización de los flujos los cuales pueden clasificarse de varias maneras, dependiendo del fluido con que se trabaja (incompresible, compresible), parámetros que se visualizan (desplazamiento, esfuerzo, etc.), velocidades utilizadas (bajas, altas), etc. Aquí, se clasificarán de acuerdo con la técnica utilizada para la visualización en: métodos de trazadores, métodos de la pared, métodos de autovisualización y métodos ópticos.

## II. METODOS DE TRAZADORES

En estos métodos se marca una pequeña porción del fluido con una característica distinta y se sigue su trayectoria. Si el trazador es introducido continuamente en un mismo punto, se forma una línea de emisión. En un flujo permanente, la trayectoria de una partícula y la línea de emisión coinciden con la línea de corriente. En un flujo no permanente se tiene que introducir los trazadores en muchos puntos al mismo tiempo y el movimiento de éstos provee suficiente información para la gráfi-

ca de las líneas de corriente. El trazador también puede introducirse a lo largo de una línea formando así una lámina de emisión para visualizar algunos aspectos tridimensionales del flujo.

La trayectoria del trazador no corresponde exactamente a la del fluido en su vecindad. Un error resulta de la diferencia de densidad entre el trazador y el fluido, y para minimizarlo, se trata de escoger un trazador de una densidad parecida a la del fluido. Otro error puede originarse debido a la fuerza de sustentación que actúa sobre cada partícula del trazador en un flujo rotacional que tiende a desviarla. Además si se usa un electrodo o la aguja de una jeringa para introducir el trazador, la trayectoria de éste cae dentro de la estela del obstáculo donde el flujo no es igual al flujo no perturbado.

Se debe tener cuidado en la interpretación de las líneas trazadas como, por ejemplo, en el caso de ondas de inestabilidad donde las líneas de emisión se enrollan como si existieran vórtices aunque no los haya (1).

#### Colorante y humo

El trazador más común para su uso en líquidos es un colorante líquido como la tinta, los colorantes para alimentos o la leche, el cual es inyectado por una jeringa. El flujo debe ser de baja velocidad porque la turbulencia en la estela de la aguja de la jeringa usada para la inyección del colorante lo difunde rápidamente.

Para flujos de gases, se utiliza el humo generado por la combustión de la madera, el papel o el tabaco. También se usa el humo que resulta de la vaporización de un aceite mineral como se hace en el generador de tipo Preston-Sweeting (2). Otra manera es la de vaporización de naftalina de bromo ( $C_{10}H_7Br$ ) o de tetracloruro de titanio ( $TiCl_4$ ) que generan nubes bastante densas.

En general, el humo se mezcla más rápidamente en aire que el colorante en agua y por eso se debe tener cuidado en la estabilización del flujo que se esté visualizando. Con buena estabilización, se puede usar humo como trazador hasta para flujos supersónicos (2).

### Partículas sólidas

Se usan a veces partículas sólidas dentro de un flujo para visualizarlo. Pequeñas esferas de poliestireno que tiene una densidad de 1.03 se usan en flujos de agua. Es más difícil usar partículas sólidas en aire pero el uso de globos meteorológicos que funcionan también para visualización de flujo es común.

En un líquido la introducción de hojuelas de aluminio sirve para indicar capas de cortante libres dentro de un flujo. El colorante alinea las hojuelas y cambia la intensidad de la luz vista por un observador. Se utiliza este método para visualizar, por ejemplo, las ondas inerciales dentro de un fluido en rotación (3).

### Producción electrolítica del colorante

En este método se genera el colorante con electrólisis. Una manera consiste en introducir los electrodos en un flujo de una solución de azul de timol en agua. Con un pequeño voltaje entre los electrodos la solución se hace ácida cerca del ánodo y alcalina cerca del cátodo. Azul del timol es un indicador de pH y si el líquido es ligeramente ácido es amarillo en color. El cambio de pH cerca del cátodo hace la solución allí alcalina y de color azul.

En el método de telurio, se introducen los electrodos en el flujo de agua cuya conductividad se ha aumentado con cloruro de potasio (KCl). El cátodo es un alambre delgado de telurio y los iones de telurio que se separan de éste forman una suspensión coloidal negra con el oxígeno presente en el agua.

### Producción fotolítica del colorante

En el flujo de un fluido fotoactivo como es una solución de nitroespirán en kerosina o de piridina en alcohol etílico, la aplicación de un haz intenso de luz, genera una solución de color azul por una reacción fotoquímica. El haz de luz puede ser de un flash o de un laser. La venta-

ja de este método es que no es necesario introducir ninguna obstrucción en el flujo que puede perturbarlo.

#### Burbujas de hidrógeno

En el método de burbujas de hidrógeno se tienen los electrodos en agua, el cátodo siendo un alambre delgado. Burbujas de hidrógeno se forman en el cátodo. (También se forman burbujas de oxígeno en el ánodo pero por ser más grandes éstas, normalmente no son usadas para la visualización). Con un voltaje continuo se forma una lámina de burbujas que sigue el flujo. Con un voltaje de pulsos de frecuencia constante con el cátodo cubierto en secciones con aislamiento, se generan láminas en forma de rectángulos (4). El cuerpo de velocidades se determina del análisis de la deformación de estos rectángulos. Uno de los éxitos de este método fue en el estudio de la producción de turbulencia cerca de la pared en una capa límite turbulenta (5).

#### Manchas calientes

En este caso el trazador es una pequeña porción del fluido que ha sido calentada por una corriente eléctrica, disminuyendo así su densidad. El movimiento de esta mancha caliente se sigue con un método óptico como el sistema estrioscópico. Obviamente el método es útil si no hay variaciones de densidad en el flujo no perturbado y se usa principalmente para flujos de gases a bajas velocidades.

### III. MÉTODOS DE LA PARED

Muchas veces se necesita visualizar el flujo cerca de la pared, que por efectos viscosos puede ser muy diferente del flujo en el interior.

#### Hilitos

Una manera sencilla de visualización de flujo cerca de la pared es la de pegar en ésta, pequeños hilitos como por ejemplo de nailon. El hilito se orienta en la dirección del flujo en la pared. Este método es útil

para visualizar el flujo alrededor de una ala tridimensional y puede indicar el punto de separación de la capa límite donde el hilito se levanta de la pared (2).

### Caolín

Un método utilizado sobre todo para la indicación de la transición de capa límite es el de caolín. La pared se pinta con una película delgada de una suspensión de caolín en una laca de celulosa. Sobre ésta se pinta otra película de un líquido (como por ejemplo salicilato de metilo) del mismo índice de refracción que tiene el caolín (1.56), para prevenir reflexiones internas y que la capa sea transparente. Con un flujo de aire sobre esta pared el líquido evapora más rápidamente en las zonas turbulentas que en las de flujo laminar, y la pared se torna blanca en estas zonas. Como ejemplo, en la zona de contracción de un túnel de viento ocurren los vórtices de inestabilidad de Taylor-Gortler los cuales pueden visualizarse por este método por la mayor evaporación que inducen en el líquido (1).

### Película de aceite

Una película delgada de aceite sobre la pared de un flujo sirve para indicar la dirección del cortante en la pared. El aceite fluye por fricción y deja su trayectoria rayada.

### Película de hollín

Para visualizar la interacción entre ondas de choque se puede usar una película de hollín en la pared. Las líneas donde las ondas se interactúan y se anulan quedan marcadas con el hollín, mientras que las otras áreas son barridas por las ondas de choque apareciendo limpias.

### Deformación de la pared

Los cambios de presión en el flujo cerca de la pared pueden verse

en la misma si ésta es deformable o flexible. La desventaja obvia es que la deformación de la pared cambia un poco el flujo. Como un ejemplo, se puede mencionar que el rompimiento de las ondas de Tollmien-Schlichting en el flujo en la capa límite de aire sobre agua produce una variación intensa de presión que forma una onda en la superficie del agua. La forma de la variación de presión o de la onda generada es la misma.

#### IV. METODOS DE AUTOVISIBILIDAD

En unos casos algunos aspectos del flujo son autovisibles sin la necesidad de ayuda externa. Por ejemplo, la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en la interfase entre dos fluidos puede ser vista muy sencillamente con un cortante de velocidad entre un fluido superior de un color y otro inferior de otro color. Sin embargo, en otros casos, se necesitan factores externos para hacer el flujo autovisible.

##### Descarga eléctrica

La descarga eléctrica en gases a bajas presiones es acompañada por la emisión de luz que hace al flujo autovisible. El modelo de prueba dentro del flujo es uno de los electrodos y una parte del túnel de viento el otro. El calor de la luz emitida depende de la presión y de la naturaleza del gas. Se han obtenido buenos resultados con flujo hipersónico de nitrógeno y de helio (2). El mismo método se usa también en ciertos líquidos (como una solución de cloruro de potasio (KCl) y luminol en agua) llamados quimiluminiscentes, donde el flujo se hace luminiscente y autovisible alrededor del ánodo.

##### Haz de electrones

Si un haz de electrones de alta energía atraviesa un flujo de un gas rarificado, las colisiones entre los electrones y las moléculas del gas proporcionan energía a las moléculas. Estas regresan a su estado energético normal con la emisión de radiación, la cual se ve como luminiscencia. Bajo ciertas condiciones la intensidad de esta radiación es proporcional a la densidad del gas, y su análisis espectroscópico, contiene información sobre la temperatura del mismo.

## V. MÉTODOS OPTICOS

En estos métodos las propiedades ópticas del fluido en movimiento hacen posible la visualización. En flujos compresibles, el índice de refracción es una función de la densidad del fluido. La variación de la refracción de un haz de luz pasando a través de un fluido cuya densidad está variando de punto a punto puede usarse para la visualización del flujo compresible.

### Método de sombras

El método de sombras es el más sencillo de los métodos ópticos. Un haz de luz paralela pasa a través de la sección de prueba y se ve una imagen en la pantalla (fig. 1). Si el fluido es de densidad uniforme en la sección de pruebas, entonces no hay deflección de los rayos luminosos, y la imagen en la pantalla es uniforme. Si ahora el fluido tiene una variación de densidad lineal en un plano paralelo a la pantalla, entonces la deflección de todos los rayos es la misma, y la imagen queda uniforme. Pero si el fluido tiene una variación de densidad cuadrática, la deflección de todos los rayos no es la misma, por lo que se ve una variación espacial de intensidad en la imagen proyectada sobre la pantalla. En otras palabras, la variación de intensidad en la pantalla depende de la segunda derivada de la densidad del fluido.

### Estrioscopía

Existen varias versiones de aparatos que usan la estrioscopía, pero el sistema más común es el de Toppler (6). Este sistema se muestra en la fig. 2; en él se tiene una fuente de luz de ancho muy pequeño (ab). La imagen de esta fuente se forma en el plano C(a'b'). La imagen de la línea cd que se encuentra dentro de la sección de pruebas, se forma como c'd' en la pantalla. Con una cuchilla se corta en el plano C, una parte del haz. Si la sección de pruebas contiene un fluido de densidad uniforme, entonces la cuchilla disminuye uniformemente la intensidad de la imagen c'd'. Pero si existe una variación lineal de la densidad entre los puntos c y d, entonces todos los rayos sufren una deflección igual. Sin embargo,

algunos de estos rayos son obstruidos por la cuchilla y los otros no. El resultado es una variación en la intensidad luminosa de los diferentes puntos de la imagen. Este método es entonces sensitivo a la derivada de la densidad en dirección normal a la orilla de la cuchilla en un plano paralelo a la pantalla.

Tanto la estrioscopia como el método de sombras dan buenos resultados para la visualización de ondas de choque.

### Interferómetro

El interferómetro usa el principio de la interferencia entre haces de luz. Muchas versiones existen de este aparato, pero el más común es el interferómetro de Mach-Zehnder (fig. 3). En esta figura  $E_2$  y  $E_3$  son espejos mientras que  $E_1$  y  $E_4$  son espejos semireflejantes. La luz de la fuente se separa en  $E_1$ , y un haz va por la trayectoria A (haz de referencia) y el otro por la B (haz de prueba) que incluye la sección de pruebas. Los haces se juntan en  $E_4$  formando una imagen en la pantalla. Si la densidad es uniforme en todo el espacio y si la trayectoria A es exactamente igual en longitud a la trayectoria B, entonces las haces llegan a  $E_4$  con la misma fase y se ve una imagen de intensidad uniforme en la pantalla. Pero la situación cambia si se aumenta uniformemente la densidad del fluido en la sección de pruebas. La longitud de onda del haz luminoso es menor en el fluido más denso, y los haces cuando llega a E no necesariamente tienen la misma fase. Si éstos difieren por una media longitud de onda, la imagen en la pantalla es de intensidad cero. Aumentando poco a poco la densidad del fluido en la sección de pruebas, se ve la imagen pasando de intensidad cero a la máxima en forma cíclica. Para un flujo que tiene variación de densidad en un plano paralelo a la pantalla, la imagen consistirá de bandas alternantes claras y oscuras. Estas bandas representan contornos de densidad constante.

Normalmente por facilidad experimental, se hace una modificación al procedimiento anterior, en el método de desplazamiento de bandas. Sobre ejes normales al papel se giran los espejos  $E_1$  y  $E_4$  en ángulos muy pequeños. Esto implica que para una densidad uniforme en todo el espacio, los dos haces llega a  $E_4$  desfasados. Se ve entonces una serie de bandas claras

y oscuras en la pantalla. Ahora bien, con una variación de la densidad del fluido en la sección de pruebas, las bandas se mueven y este desplazamiento es proporcional al cambio de densidad.

Las pequeñas variaciones de densidad en un flujo de convección natural pueden verse claramente con ayuda del interferómetro (7).

### Método de birrefringencia

Un material birrefringente separa la luz incidente en dos componentes polarizadas en planos perpendiculares entre sí. Estos dos rayos viajan en general con velocidades diferentes dentro del material, y por consiguiente, tienen diferentes índices de refracción. La excepción es cuando los rayos viajan a lo largo del eje óptico del material en cuyo caso las velocidades son iguales.

Existen algunos líquidos, soluciones y suspensiones (como por ejemplo una solución de "milling yellow" en agua destilada) que contienen moléculas ópticamente anisotrópicas distribuidas de una manera aleatoria. Las cuales bajo la acción de esfuerzos de cortante tienden a tomar una orientación preferencial, y el líquido muestra así propiedades de birrefringencia. El eje óptico no coincide con la dirección del cortante y el ángulo entre estas direcciones es una función del cortante.

En la fig.4 los rayos paralelos de la fuente pasan a través de un polarizador, produciendo un haz polarizado. El analizador es también un polarizador pero tiene su eje a  $90^\circ$  con respecto al primero. Sin flujo en la sección de pruebas, la luz polarizada que proviene del polarizador no puede pasar el analizador y no hay una imagen en la pantalla. Pero con un flujo bidimensional en un plano paralelo a la pantalla, los cortantes dentro del flujo lo hacen birrefringente y el rayo polarizado incidente, con plano de polarización A, se separa en dos rayos con planos de polarización B y C, que tiene la misma trayectoria geométrica. Si éstos viajan a la misma velocidad (o sea, a lo largo del eje óptico), cuando llegan al analizador, tienen la misma fase y su suma no tiene ninguna componente en el plano D del analizador. Sin embargo, si los dos rayos dentro del líquido

birrefringente, viajan con velocidades diferentes (o sea, no están alineados con el eje óptico), entonces, cuando llegan al analizador, tienen las fases diferentes. La suma de los dos rayos ahora tiene componente en el plano D, y una parte del haz pasa a través del analizador hasta la pantalla. Se puede demostrar que la intensidad de la luz en la pantalla J está dada por:

$$J = \alpha J_0 \sin^2 \pi |d(n_1 - n_2)/\lambda| \sin^2 2\psi$$

donde

- $\alpha$  es un coeficiente de absorción
- $J_0$  es la intensidad de la luz de la fuente
- $d$  es el ancho geométrico de la sección de pruebas
- $n_1, n_2$  son los índices de refracción de los dos rayos
- $\lambda$  es la longitud de onda
- $\psi$  es el ángulo entre el eje de polarización del polarizador y el eje óptico del fluido birrefringente.

Se nota que para valores enteros de  $d(n_1 - n_2)/\lambda$ , se ve una banda oscura de interferencia llamada el isocromato. Para un flujo en la sección de pruebas, los isocromatos son curvas de cortante constante.

Las bandas oscuras también ocurren si el ángulo  $\psi$  es  $0, \pi/2, \pi$ , etc. Estas son las isoclinales y representan curvas de dirección de cortante constante. Hay una manera sencilla de distinguir entre los isocromatos y las isoclinales. Si se gira el polarizador y el analizador juntos sobre sus propios ejes, los isoclinales se mueven porque dependen del ángulo  $\psi$ , el cual está variando, pero los isocromatos permanecen fijos.

Con este método, se puede visualizar por ejemplo, las líneas rectas de cortante constante que ocurren en flujo laminar entre placas planas (2).

### Métodos de holografía

Holografía es la técnica de almacenar imágenes en forma tridimensional para después reproducirlas. Es una técnica fotográfica y no realmente

de visualización de flujo, pero en combinación con los otros métodos de visualización, holografía puede ser una herramienta útil para almacenar información de aspectos tridimensionales del flujo.

Uno de los varios procesos posibles para el almacenamiento de información holográfica, se muestra en la fig. 5 (8). La luz coherente de un laser se separa en dos haces A y B. El haz B se refleja en un espejo y forma el haz de referencia, mientras que el haz A es dispersado del objeto antes de llegar a una pantalla. Si la pantalla es una placa fotográfica (por ejemplo, una placa de vidrio cubierta por una capa delgada de emulsión, fig. 6), entonces, el patrón de interferencia entre el haz del objeto y el haz de referencia es grabado como puntos claros y oscuros dentro de la emulsión (una vez que la placa haya sido revelada). Los puntos claros representan los lugares donde los haces están en la misma fase y se refuerzan. En los puntos oscuros los haces están en fase contraria y se anulan. La placa fotográfica es el holograma.

Para reproducir la imagen de un holograma se usa el sistema mostrado en la fig. 7. Un haz de luz coherente de un laser idéntico al utilizado antes, se hace incidir normalmente en el holograma. Los puntos claros y oscuros actúan como rejillas de difracción no uniforme. El observador ve una imagen virtual del objeto. El efecto es como si se viese el objeto a través de una ventanilla. El observador puede moverse para ver la imagen de distintos ángulos. Además, el tiene que enfocar su vista diferentemente para la parte más cercana que para la parte más retirada de la imagen. Se forma también una imagen real del objeto que puede verse en una pantalla. Cambiando la orientación y la ubicación de la pantalla se cambia el ángulo de visión y la parte del objeto que se ve en la pantalla.

Variaciones de este método de reconstrucción son comunes. Una de las imágenes (virtual o real) normalmente es más clara que la otra, y el método escogido dependerá si el observador quiere ver la imagen virtual del objeto o la imagen real en una pantalla.

La técnica de holografía puede combinarse con los métodos de trazadores. En vez de fotografiar el movimiento de los trazadores de manera convencional, se puede grabar la información en hologramas. Los hologramas tienen así información tridimensional del movimiento de los trazadores que

puede ser reconstruída en imágenes. Con un laser de pulso se toman hologramas de exposiciones múltiples para determinar las tres componentes de velocidad del flujo.

La holografía puede ser utilizada también con los métodos ópticos. Fig. 8 muestra un arreglo para tomar el holograma de un flujo compresible que después puede ser analizado con la estrioscopia o con el método de sombras (sin cuchilla).

La holografía puede combinarse con un interferómetro. Se hace primero una exposición del holograma sin el flujo en la sección de pruebas. Este constituye el haz de referencia. Se hace una segunda exposición del mismo holograma pero con el flujo que se desea estudiar. Este es el haz de prueba. Reproduciendo la imagen contenida en el holograma, se obtiene la interferencia entre las dos imágenes individuales. Así, se obtiene el mismo patrón de interferencia como en el interferómetro de Mach-Zehnder. En el interferómetro de Mach-Zehnder los haces de referencia y los de prueba existen simultáneamente, pero tienen una separación en el espacio. En el interferómetro holográfico los haces ocupan el mismo lugar en el espacio pero son separados en el tiempo. Además en la reconstrucción del holograma se puede variar el ángulo de visión para reconstruir el campo de densidades en las tres dimensiones.

## VI. CONCLUSION

Los varios métodos para la visualización del flujo, son resumidos en la siguiente tabla. Están indicadas las características del flujo que el método visualiza, además de las principales aplicaciones o restricciones.

La visualización del flujo es una de las técnicas más antiguas para el estudio de la mecánica de los fluidos, pero actualmente sigue siendo muy popular. Se está descubriendo continuamente nuevas aplicaciones de los métodos ya conocidos, así como métodos totalmente nuevos basados en los avances recientes de la ciencia.

METODOS DE VISUALIZACION

METODO	CARACTERISTICAS QUE VISUALIZA	APLICACIONES O RESTRICCIONES
<u>METODOS DE TRAZADORES</u>		
(a) Colorante y humo	desplazamiento (cualitativo)	líquido o gas, flujos de baja turbulencia
(b) Partículas sólidas	desplazamiento (cuantitativo), esfuerzos de cortante (cualitativo)	principalmente líquidos
(c) Producción electro-lítica del colorante	desplazamiento (cualitativo)	líquidos especiales a bajas velocidades
(d) Producción fotolítica del colorante	desplazamiento (cualitativo)	líquidos especiales
(e) Burbujas de hidrógeno	desplazamiento (cuantitativo)	líquidos electrolíticos a bajas velocidades
(f) Manchas calientes	desplazamiento (cuantitativo), transición	gases a bajas velocidades
<u>METODOS DE LA PARED</u>		
(a) Hilitos	dirección de la velocidad, transición, separación (cualitativo)	gases a bajas velocidades
(b) Caolín	transición, dirección de la velocidad, separación (cualitativo)	gases
(c) Película de aceite	dirección de velocidad, separación (cualitativo)	gases
(d) Película de hollín	interacción entre ondas de choque	gases a altas velocidades
(e) Deformación de la pared	presión en la pared	casos especiales
<u>METODOS DE AUTOVISIBILIDAD</u>		
(a) Descarga eléctrica	movimiento general, densidad (cualitativo)	gases a bajas presiones (quimiluminiscencia: líquidos especiales)
(b) Haz de electrones	densidad (cuantitativo)	gases a bajas presiones

METODOS OPTICOS

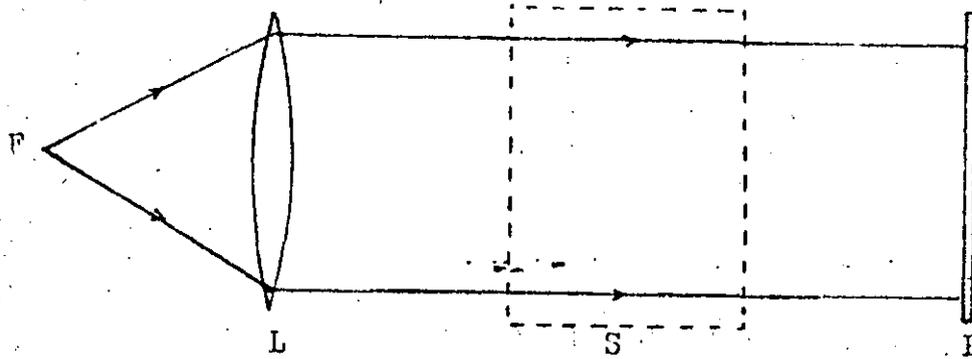
(a) Método de sombras	segunda derivada de densidad (cuantitativo)	flujos compresibles o estratificados
(b) Estrioscopía	derivada de densidad (cuantitativo)	flujos compresibles o estratificados
(c) Interferómetro	densidad (cualitativo)	flujos compresibles o estratificados
(d) Método de birrefrincia	esfuerzo de cortante (cualitativo)	fluidos especiales a bajas velocidades
(e) Método de holografía		aspectos tridimensionales de flujos visualizados por métodos de trazadores, métodos ópticos o los otros.

REFERENCIAS

La siguiente lista incluye los artículos o libros a los cuales hay referencia específica en el texto además de algunos otros que los complementan.

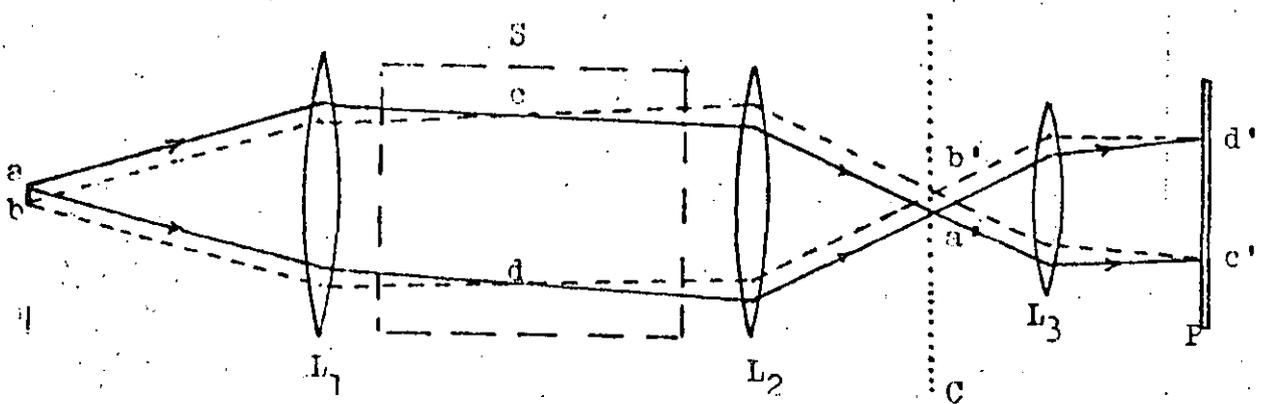
- (1) Bradshaw, P., Experimental Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1964.
- (2) Merzkirch, W., Flow Visualization, Academic Press, 1974.
- (3) Greenspan, H., The Theory of Rotating Fluids, Cambridge University Press, 1968.
- (4) National Committee for Fluid Mechanics Films, Illustrated Experiments in Fluid Mechanics, M.I.T., Press, 1972.
- (5) Kim, H.T., Kline, S.J., y Reynolds, W.C., The production of turbulence near a smooth wall in a turbulent boundary layer, J. Fluid Mech., 50, pp 133-160, 1971.
- (6) Ecole D'Eté de Mécanique des Fluides, Techniques de Mesure dans les Ecoulements, Eyrolles, 1974.
- (7) Holman, J.P., Experimental Methods for Engineers, Mc Graw Hill, 1966.
- (8) Shulman, A.R., Principles of Optical Data Processing for Engineers, NASA TR R-327, 1970.
- (9) Clayton, B.R. y Massey, B.S., Flow visualization in water: A review techniques, J. Sci. Instrum., 44, pp 2-11, 1967.
- (10) Symposium on Flow Visualization, ASEM Symposium Volume, 1960.
- (11) Werlé, H., Hydrodynamic flow visualization, Ann. Rev. Fluid Mech., 5, pp 361-382, 1973.
- (12) Witte, A.B. y Collins, D.J., Basics of flow field visualization, Fund. Aerosp. Instrum., 4, pp 37-64, 1971.
- (13) Tanner, L.H., Some applications of holography in fluid mechanics, J. Sci. Instrum., 43, pp 81-83, 1966.

19



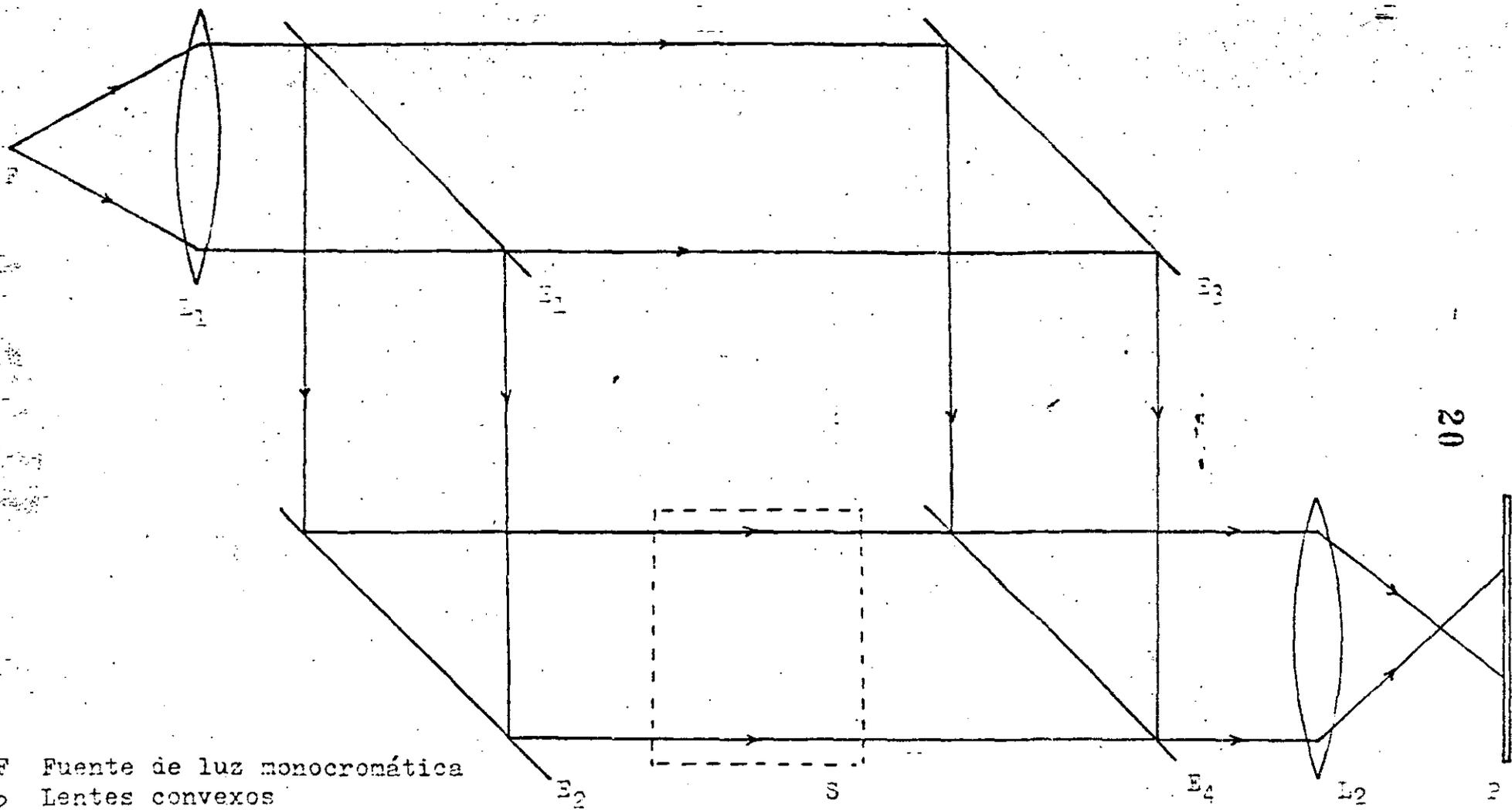
F Fuente de luz  
 L Lente convexo  
 S Sección de pruebas  
 P Pantalla (o cámara  
 fotográfica)

FIG. 1: METODO DE SOMBRAS



$L_1, L_2, L_3$  Lentes convexos  
 S Sección de pruebas  
 C Plano de la cu-  
 chilla  
 F Pantalla (o cá-  
 mara fotográfica)

FIG. 2: SISTEMA DE ESTEREOSCOPIA DE TÖPLER



- F Fuente de luz monocromática
- L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub> Lentes convexas
- E<sub>1</sub>, E<sub>4</sub> Espejos semireflejantes
- E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub> Espejos
- P Pantalla (o cámara fotográfica)
- S Sección de pruebas

FIG. 3: INTERFEROMETRO DE MACH-ZEHNDER

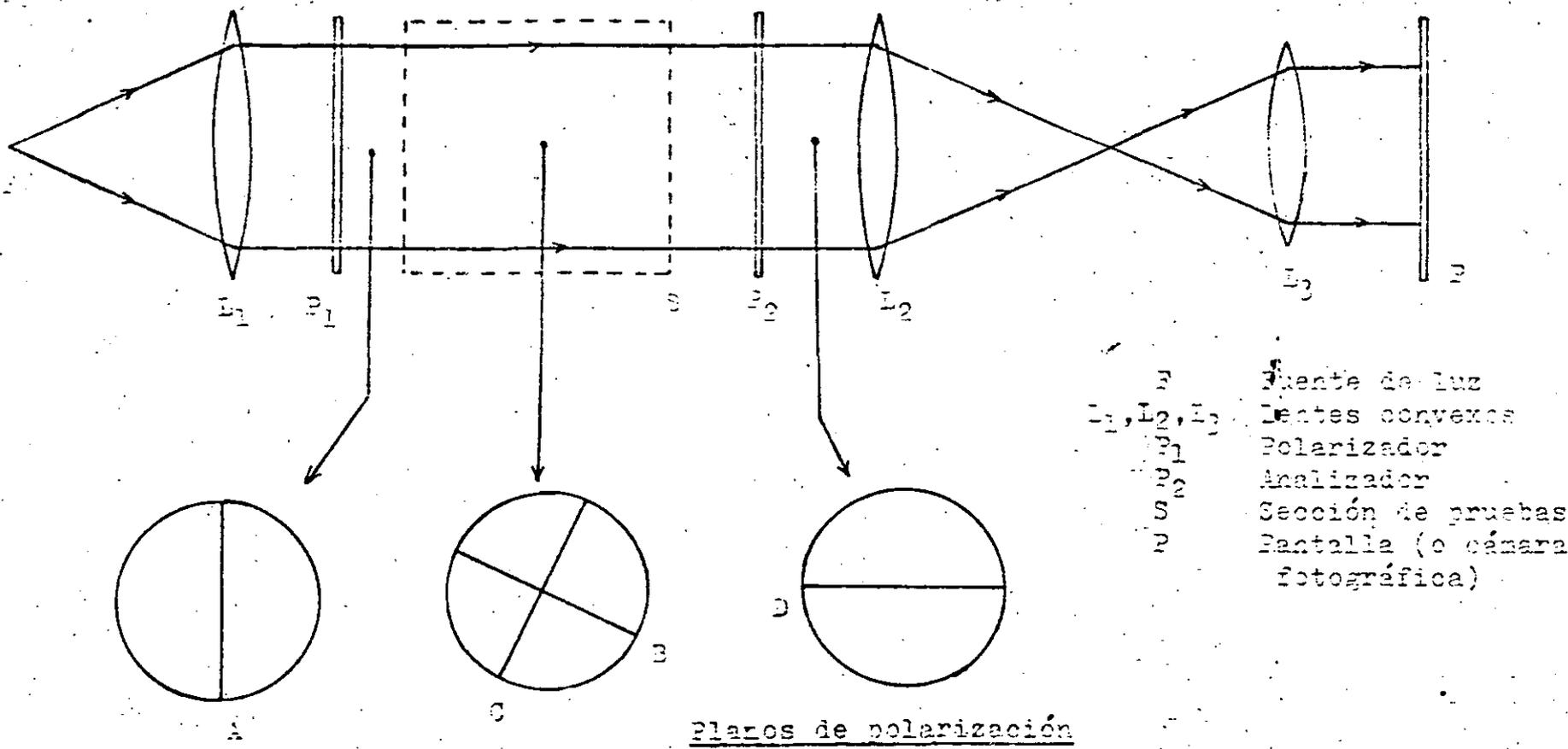
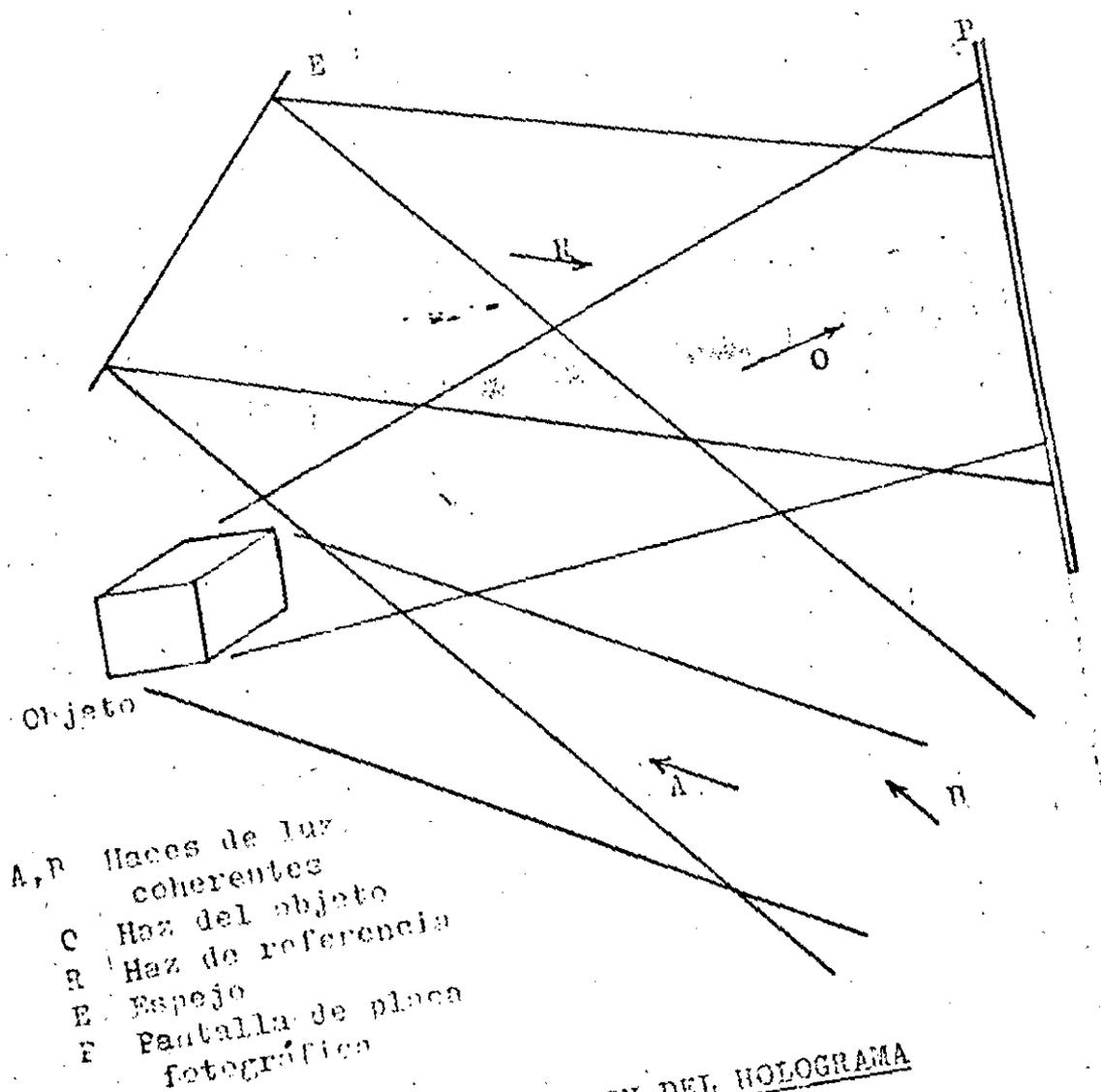


FIG. 4: VISUALIZACION POR BIRREFRINGENCIA



- A, B Haces de luz coherentes
- C Haz del objeto
- R Haz de referencia
- E Espejo
- F Pantalla de placa fotográfica

FIG. 5: EXPOSICION DEL HOLOGRAMA

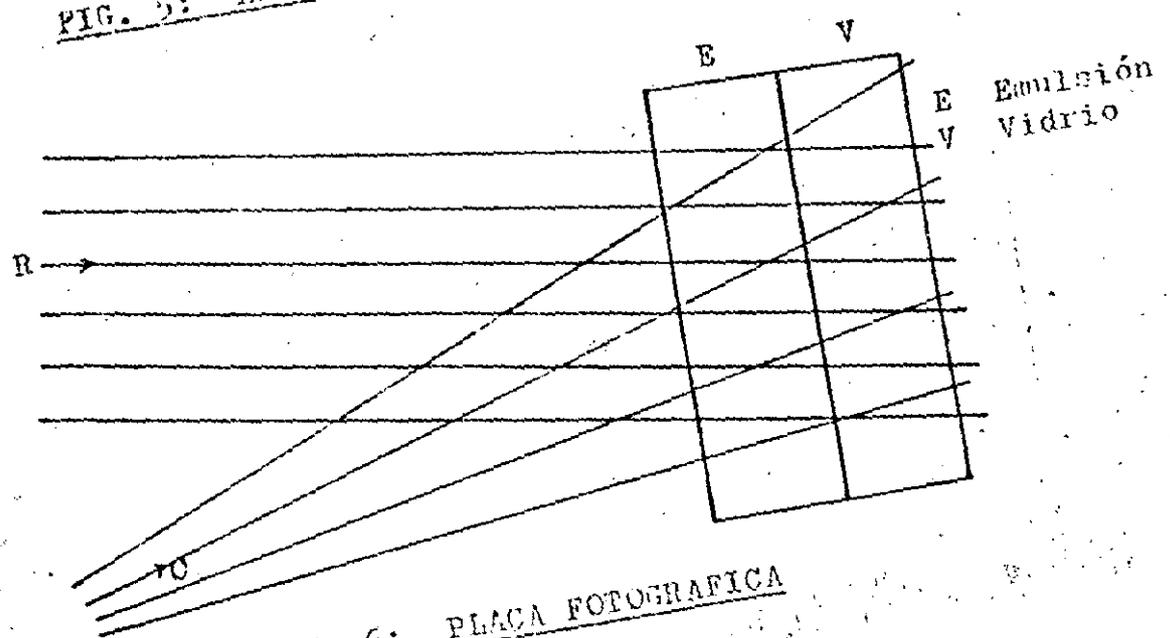


FIG. 6: PLACA FOTOGRAFICA

- L Luz coherente
- E Emulsión
- V Vidrio
- C Observador
- IV Imagen virtual
- IR Imagen real

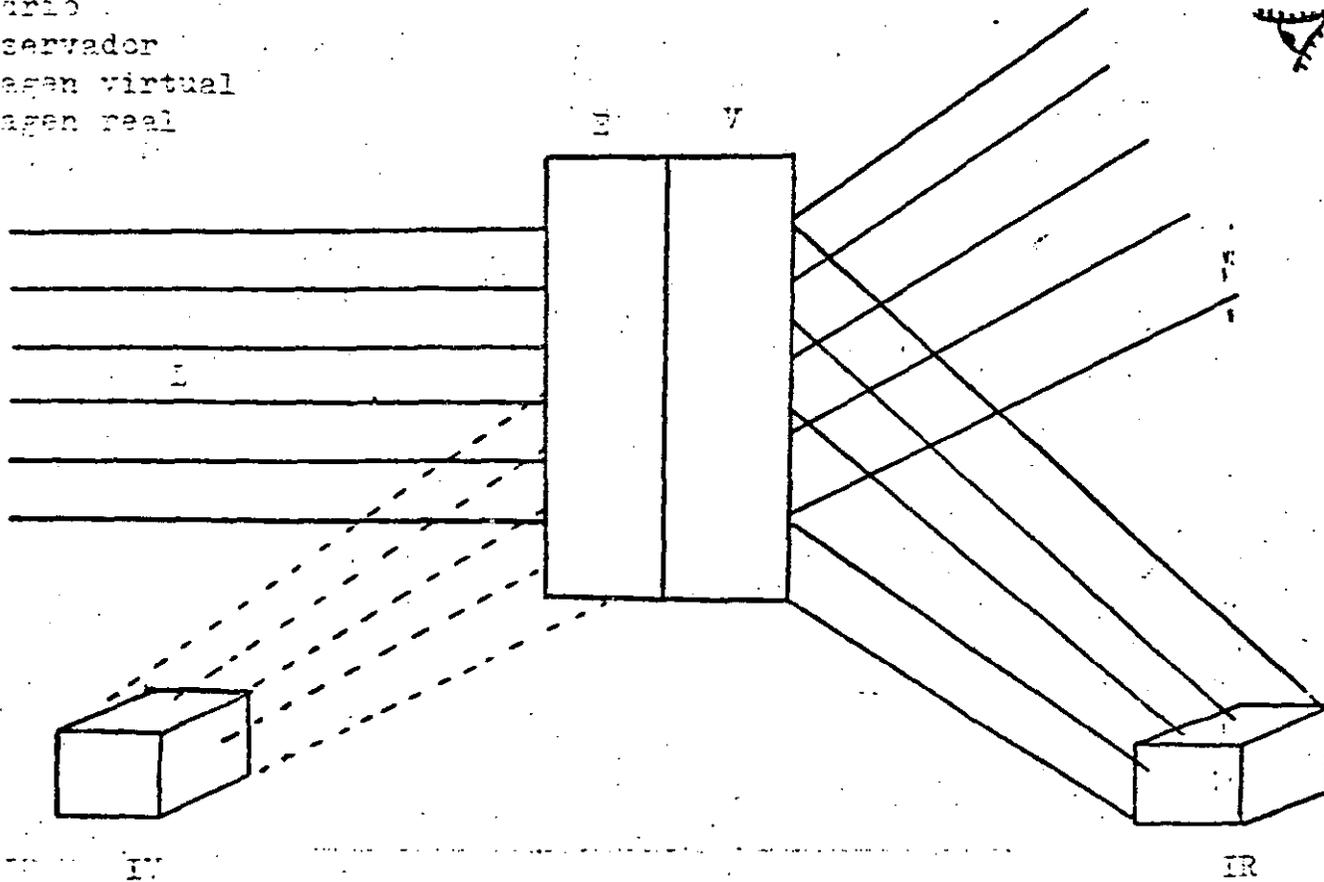
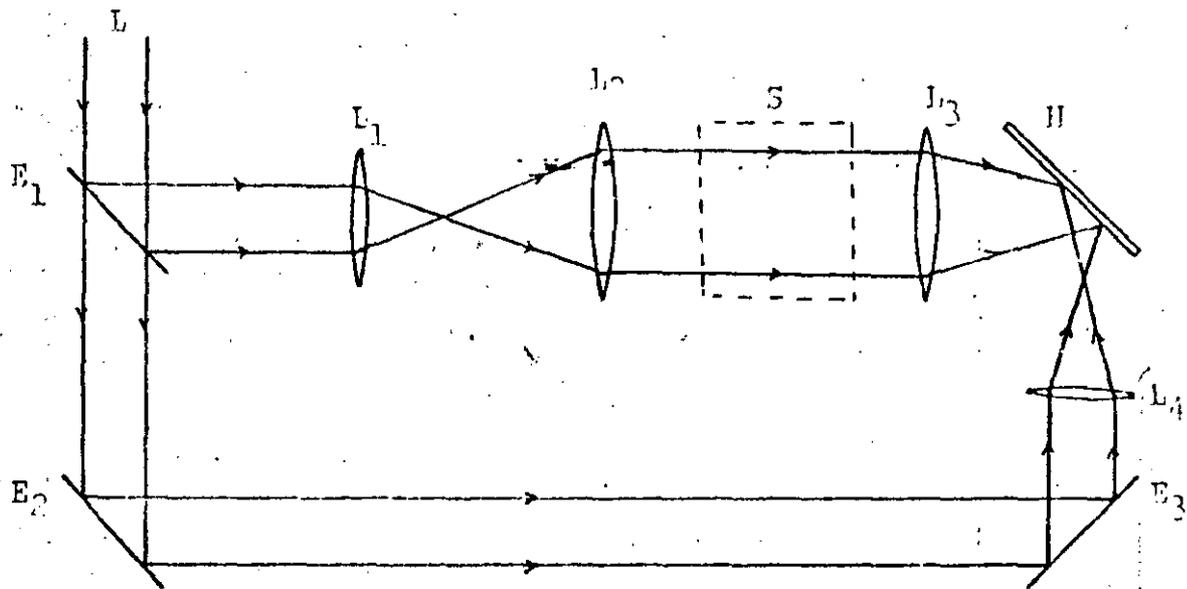
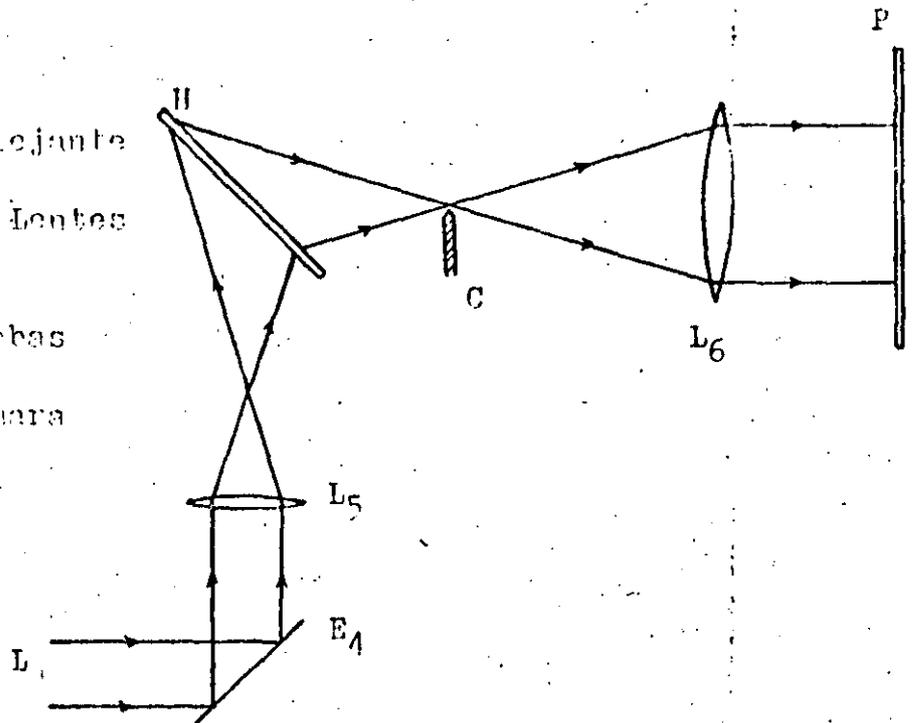


FIG. 7: RECONSTRUCCION DE LAS IMAGENES DEL HOLOGRAMA



Exposición del holograma

- L Láser coherente
- E<sub>1</sub> Espejo semirreflejante
- E<sub>2</sub>, E<sub>3</sub>, E<sub>4</sub> Espejos
- L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>, L<sub>3</sub>, L<sub>4</sub>, L<sub>5</sub>, L<sub>6</sub> Lentes convexas
- H Holograma
- S Sección de pruebas
- C Cuchilla
- P Pantalla (o cámara fotográfica)



Reconstrucción de la imagen del holograma

FIG. 3: LA ESTRUCOSCOPIA HOLOGRAFICA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIDAD 3



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

26

FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ING. MEC. Y ELECT.  
DEPARTAMENTO DE FLUIDOS Y TERMICA

INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE MEDICION

(2a. PARTE)

por

Mihir Sen  
Profesor Titular

## METODOS EXPERIMENTALES EN LA MECANICA DE LOS FLUIDOS

Mihir Sen

Departamento de Fluidos y Térmica  
División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Facultad de Ingeniería  
U.N.A.M.

## C O N T E N I D O

	<u>Página</u>
1. Introducción	1
2. Características de los Sistemas de Medición	2
2.1 Características Estáticas de los Instru <u>mentos</u> .	2
2.2 Características Dinámicas de los Instru <u>mentos</u> .	3
3. Visualización de flujos	5
3.1 Métodos de trazadores	5
3.2 Métodos de la Pared	5
3.3 Métodos Ópticos	6
4. Medición de Presión	6
4.1 Manómetros.	6
4.2 Tubo de Bourdon	7
4.3 Medidores de Diafragma	7
4.4 Medidor de Bridgman	7
4.5 Medición de Baja Presión	7
5. Medición de Gasto y Velocidad	7
5.1 Medición de Gasto	7
5.2 Medición de Velocidad	8
6. Medición de Temperatura	10
6.1 Termopar	10
6.2 Termistor	10
6.3 Errores en la Medición con Sensores	11
7. Análisis de Señales Dinámicas	11
7.1 Análisis del Contenido de Amplitudes	11
7.2 Momentos Probabilísticos	11
7.3 Correlaciones	12
7.4 Análisis del Contenido de Frecuencias	13
7.5 Procesamiento de Señales	13
8. Instalaciones Experimentales	14
8.1 Túnel de Viento de Baja Velocidad	14
8.2 Túnel de Viento de Alta Velocidad	15
8.3 Canal de Agua	15
9. Conclusión	15
Referencias	17

## 1. INTRODUCCION

El estudio de problemas en la mecánica de los fluidos puede hacerse desde tres diferentes puntos de vista: analítico, numérico y experimental. Los métodos analíticos son los más potentes, ya que la solución teórica muestra la influencia de todos los parámetros involucrados que se han tomado en cuenta. Sin embargo, las soluciones analíticas exactas o aproximadas en situaciones reales son muy pocas y cuando existen están, en la mayoría de los casos, sujetas a suposiciones o restricciones fuertes, lo que hace difícil su aplicación directa. Los métodos numéricos últimamente han despertado mucho interés por su poder y flexibilidad. Su defecto principal son también las hipótesis simplificatorias a través de las cuales se llega al modelo matemático del fenómeno. Los resultados experimentales no sufren de estas desventajas ya que representan el comportamiento del flujo bajo condiciones reales. Por esta razón los resultados analíticos o numéricos siempre deben compararse con los experimentales para confirmar su validez. Los tres métodos de estudio, son entonces complementarios.

En la mecánica de fluidos, las variables a medir pueden ser las propiedades físicas del fluido tales como la densidad, viscosidad, etc. Si estas propiedades varían en el flujo, se tiene que diseñar un sistema de medición para medirlas dentro del flujo. Otros parámetros de interés son la presión, la temperatura y la velocidad, los cuales necesitan medición directa. Estas mediciones directas sirven para el cálculo de algunas cantidades indirectas como son la intensidad acústica o el esfuerzo de Reynolds.

Las fases más importantes de la experimentación son<sup>2</sup>: (a) el diseño del experimento, (b) construcción o instalación del equipo de medición, (c) la adquisición de datos y (d) evaluación e interpretación de los mismos. El diseño del experimento y la selección de los instrumentos dependen de la aplicación específica y de los objetivos del experimento.

Existe una gran variedad de instrumentos y técnicas que se pueden utilizar en experimentos relacionados con los fluidos.<sup>3,4</sup> A veces la medición de una cierta variable puede ser hecha de varias maneras. El investigador en base a su experiencia, tiene que escoger la que ofrece mayores ventajas desde el punto de vista de costo, sencillez y precisión. Los principios físicos sobre los cuales se basa la operación de estos aparatos son muy diversos.<sup>5,6,7,8</sup> y muchas veces se necesitan conocimientos de otras ramas de las ciencias para el manejo adecuado de algunos equipos. Con la disponibilidad en el mercado de varios instrumentos de medición, puede ser suficiente para el usuario de estos instrumentos haber leído el instructivo. Pero el investigador que no conoce bien sus herramientas, no las puede usar a su máxima capacidad

y, más importante aún, no puede cuantificar sus errores. Los errores son una parte integral de los experimentos y éstos pueden ser humanos como en la lectura o interpretación de datos, así como -  
provenientes de los elementos del sistema de medición. Ya que la publicación de los resultados experimentales sirve de comunicación entre investigadores en el mismo campo, es necesario estimar los posibles errores para que estos datos sean de utilidad para otros. El elemento humano también interviene en la interpretación de los datos experimentales, lo cual no depende del sistema de medición, sino del investigador, y es la que finalmente justifica la inversión de tiempo y dinero en el experimento.

Los métodos experimentales en la mecánica de fluidos es un tema muy extenso<sup>3</sup> y el presente artículo no puede hacer más que -  
indicar algunas de las consideraciones importantes. Existe una gran cantidad de literatura sobre la experimentación y su aplicación a la mecánica de fluidos. La lista de referencias al final de este artículo incluye algunas de las de mayor interés.

## 2. CARACTERISTICAS DE LOS SISTEMAS DE MEDICION

El sistema de medición puede ser tan sencillo como un termómetro de mercurio para medir la temperatura del ambiente, o tan complicado como un anemómetro de hilo caliente llevado al planeta Marte, para mandar a la tierra información acerca del viento marciano<sup>9</sup>. De cualquier manera, los sistemas de medición tienen algunos elementos en común<sup>10,11</sup>. Un sensor transduce la variable a medir a una señal que puede ser mecánica, óptica o eléctrica. Muchas veces esta señal no puede analizarse directamente y se necesita una conversión, como por ejemplo, amplificación, transformación de impedancia, derivación o integración, grabación y reproducción magnética, etc. Después de la conversión se analiza la señal<sup>12</sup>. El análisis puede incluir la reducción a cantidades de interés como el valor medio, la densidad de probabilidad, el espectro de frecuencias, etc. El paso final es la exhibición de los resultados. Estos se muestran en forma visual como en un osciloscopio o graficador para su interpretación por el investigador.

La selección de los instrumentos que formarán parte de un sistema de medición depende principalmente de los objetivos del experimento y de las características estáticas y dinámicas del instrumento. Antes de su uso, estas características de los instrumentos deben checarse con los valores proporcionados por el fabricante. Esta calibración es más importante en equipos que se han fabricado por primera vez y cuyas características esencialmente son desconocidas. A continuación se explican algunos de los términos utilizados en la caracterización del comportamiento de los instrumentos bajo diferentes condiciones.

### 2.1 Características estáticas de los Instrumentos<sup>13, 14, 15</sup>

Las características estáticas son las que tiene el instrumento en mediciones de parámetros invariantes con respecto al tiempo.

El error es la diferencia entre el valor correcto de un

parámetro y la lectura del instrumento. Este error puede provenir del instrumento mismo o de factores externos (como la temperatura, por ejemplo) que afectan su comportamiento.

La precisión es el grado de reproductibilidad entre mediciones de la misma cantidad.

La sensibilidad es la relación entre un cambio en la salida de un instrumento y el cambio en el parámetro a medir. Se busca tener una sensibilidad alta sin afectar las otras características estáticas del instrumento.

La resolución es el cambio más pequeño en el parámetro a medir para el cual habrá un cambio en la salida del instrumento.

El instrumento no es lineal si su salida no varía linealmente con el parámetro a medir. Las desviaciones de la linealidad se cuantifican como un porcentaje de la lectura. Si el valor de la salida depende del sentido del cambio del parámetro a medir, se dice que el instrumento tiene histéresis.

## 2.2 Características Dinámicas de los Instrumentos<sup>16</sup>

La respuesta de los instrumentos a condiciones que varían con el tiempo es un factor muy importante en la selección de un sistema para mediciones dinámicas.

### Modelos matemáticos<sup>13, 11</sup>

Si  $e(t)$  y  $s(t)$  son la entrada y la salida del instrumento respectivamente ( $t$  es el tiempo), el comportamiento de algunos aparatos de medición puede representarse a través de los siguientes modelos matemáticos:

(a) Instrumento de orden cero:

$$s(t) = c e(t)$$

donde  $c$  es la sensibilidad.

(b) Instrumento de orden uno:

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = c e(t)$$

donde  $\tau$  es la constante de tiempo. Para una entrada de tipo escalón, la respuesta se muestra en la figura 1. En la figura 2 se indica la respuesta para una entrada senoidal. Para funciones senoidales de entrada, se tiene

$$e(t) = e_0 \sin \omega t.$$

y la salida es

$$s(t) = s_0 \text{ sen } (\omega t + \phi).$$

La relación de amplitudes es

$$G = \frac{s_0}{e_0}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$$

La diferencia de ángulo de fases es:

$$\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

La figura 3 muestra  $G$  y  $\phi$  como funciones de  $\omega$ .

(c) Instrumento de orden dos:

$$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_n} \frac{ds(t)}{dt} + s = ce(t)$$

donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento y  $\omega_n$  es la frecuencia natural.

La respuesta a una entrada de tipo escalón se indica en la figura 4. En la figura 5 se muestran la relación de amplitudes y el ángulo de fase para una entrada senoidal.

Respuesta de frecuencias<sup>7</sup>

Para mediciones dinámicas es importante que el instrumento de medición tenga una respuesta adecuada a las frecuencias presentes en el parámetro a medir. Normalmente, esta respuesta es plana entre un límite inferior y otro superior, los cuales pueden determinarse por experimentación.

Relación de Señal a Ruido<sup>17</sup>

Cualquier señal de medición viene acompañada por perturbaciones aleatorias llamadas ruido. Este ruido debe ser muy pequeño comparado con la señal. Si el ruido está en un rango de frecuencias diferentes a las de la señal, la relación de señal a ruido puede mejorarse por medio de filtración del ruido.

### 3. VISUALIZACION DE FLUJOS

La visualización de flujos<sup>18, 19, 20</sup> permite obtener información rápida de las características principales del flujo sin la necesidad de análisis de datos. Además, en muchos casos el proceso de visualización puede adaptarse para la medición cuantitativa de algunos parámetros del flujo. Existen muchas técnicas para la visualización las cuales pueden clasificarse de varias maneras, dependiendo del fluido con que se trabaje (incompresible, compresible), parámetro que se visualiza (desplazamiento, esfuerzo, etc), velocidades utilizadas (altas, bajas), etc. Aquí se clasifican en métodos de trazadores, métodos de la pared y métodos ópticos.

#### 3.1 Método de trazadores

En este método se marca una pequeña porción del fluido con alguna característica diferente y se sigue su trayectoria. Con fotografías en diferentes instantes de tiempo se puede determinar el desplazamiento de una partícula y así su velocidad de manera cuantitativa. Si el trazador es introducido continuamente en un mismo punto, se forma una línea de emisión. En un flujo permanente, la trayectoria de una partícula y la línea de emisión coinciden con la línea de corriente. El trazador también puede introducirse a lo largo de una línea, formando así una lámina de emisión para visualizar los aspectos tridimensionales del flujo.

El colorante es el trazador más común en líquidos y el humo en gases. También se utilizan partículas sólidas en el flujo como por ejemplo pequeñas esferas de poliestireno (densidad 1.03) en agua. En algunas situaciones es conveniente usar la producción electrolítica o fotolítica de un colorante o las burbujas de hidrógeno generadas por electrólisis en el cátodo.

#### 3.2 Métodos de la Pared

Estos métodos sirven para visualizar el flujo cerca de una frontera sólida. Una manera sencilla de hacerlo es la de pegar a la pared sólida pequeños hilos como por ejemplo, de nailon. Los hilos se orientan en la dirección del flujo local pudiéndose así visualizar el flujo alrededor de una ala tridimensional y el punto de separación de la capa límite. También se han utilizado películas de aceite para indicar la dirección del cortante en la pared y de hollín para indicar la interacción entre ondas de choque. En otro método para visualizar zonas de flujo turbulento, se pinta la pared con una película delgada de una suspensión de caolín en una laca de celulosa. Sobre ésta se

pinta otra película de un líquido que tenga el mismo índice de refracción que el caolín. Con un flujo de aire sobre esta pared, el líquido evapora más rápidamente en las zonas turbulentas que en las de flujo laminar, descubriendo el caolín, el cual se ve como una mancha blanca.

### 3.3 Métodos Ópticos <sup>21, 22</sup>

En estos métodos la variación de las propiedades ópticas del fluido en movimiento hace posible su visualización. La figura 6 muestra el método de sombras donde la intensidad de la luz cayendo sobre la pantalla varía como la segunda derivada con respecto al espacio de la densidad del fluido. En el sistema de estrioscopia (figura 7), el efecto de la cuchilla en el plano C es el de producir una imagen del flujo en la pantalla, donde la intensidad varía como la derivada de la densidad del fluido en la sección de pruebas. El interferómetro (figura 8) usa el principio de la interferencia entre haces de luz, produciendo en la pantalla una serie de bandas que representan líneas de densidad constante del fluido. En algunos líquidos el efecto de birrefringencia (el de separar la luz incidente en dos componentes polarizadas en planos perpendiculares) puede usarse para la visualización de líneas de cortante constante en flujos (figura 9).

Todos los métodos ópticos pueden combinarse con fotografía (en situaciones no permanentes se puede utilizar la cámara de cine) para un análisis cuantitativo posterior. También, se ha usado la técnica de holografía para almacenar e interpretar la información de la visualización en tres dimensiones.

## 4. MEDICION DE PRESION <sup>6, 10</sup>

La medición de la presión es utilizada a veces para la determinación de la velocidad. Otras aplicaciones incluyen mediciones acústicas; la medición de presión en tanques y depósitos tanto de alta presión como de baja presión. El tipo de medidor depende en gran parte de la presión a medirse.

### 4.1 Manómetros

Los manómetros son los instrumentos más comunes para la medición de presión (figura 10). La diferencia en altura del líquido en los dos brazos  $\Delta h$  es proporcional a la diferencia de presiones ( $p_1 - p_2$ ). El líquido utilizado es normalmente mercurio, aunque el uso de líquidos de menor densidad como el alcohol es también común. Para la medición de diferencias de presión muy bajas, se puede utilizar el manómetro inclinado (figura 11) el cual permite una mayor precisión en la lectura.

#### 4.2 Tubo de Bourdon

El tubo de Bourdon tiene aplicación cuando se necesita un dispositivo barato para la lectura continua de la presión. En la figura 12 se muestra esquemáticamente la construcción del instrumento. El tubo es de sección elíptica y doblado en la forma de una C. La aplicación de presión en el interior del tubo produce una deformación del mismo, la cual se transfiere al movimiento angular de la aguja.

#### 4.3 Medidores de diafragma

Para medir presiones algunos aparatos usan la deformación producida en un diafragma por una diferencia de presiones. Esta deformación puede mover una aguja o un haz de luz. En celdas de presión, esta deformación se mide por medio de un transductor. El transductor puede ser capacitivo (figura 13) o extensométrico (figura 14). Los micrófonos para la medición de presiones acústicas son de este tipo (figura 15).

#### 4.4 Medidor de Bridgman

La resistencia de un alambre cambia linealmente con la presión a que está sujeto. Este efecto puede ser utilizado para la medición de presiones tan altas como 100000 atm.

#### 4.5 Medición de baja presión

La medición de presiones muy bajas en gases requiere del uso de instrumentos especializados. El medidor de Pirani utiliza la disminución de la conductividad térmica con la presión. En otro tipo de medidor, la ionización producida por la colisión entre electrones y moléculas de gas sirve para la medición de la presión del gas. La cantidad de movimiento de las moléculas de gas, transferida a los álabes de un medidor de Kundsen, los hacen girar y con la medición de este giro se determina la presión del gas.

### 5. MEDICION DE GASTO Y VELOCIDAD

El gasto a través de un ducto y la velocidad del fluido en un punto están entre los parámetros más importantes en la experimentación en la dinámica de los fluidos.

#### 5.1 Medición de Gasto<sup>23, 3</sup>

Existen muchos dispositivos que miden el flujo volumétrico a través de un ducto.

Medidor de presión

En la figura 16 se muestra un medidor tipo venturi donde

el gasto es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de presiones  $\Delta p$ . La diferencia de presiones es también indicadora del gasto en el medidor de orificio (figura 17).

#### Rotámetro

En un rotámetro (figura 18) el arrastre del flujo sobre un cuerpo sumergido lo mueve y su posición es representativa del gasto fluyendo a través del instrumento.

#### Medidor de Desplazamiento positivo.

Existen también medidores de desplazamiento positivo, uno de los cuales se muestra en la figura 19. Por medio de resortes los álabes siempre mantienen contacto con la carcasa y su movimiento debido al flujo indica el gasto a través del aparato.

#### Medidor Electromagnético<sup>20</sup>

La inducción de un potencial eléctrico en un flujo parcialmente conductor atravesando un campo magnético, es el principio de funcionamiento de los medidores electromagnéticos de flujo. Este voltaje inducido es proporcional a la velocidad del flujo y puede medirse mediante electrodos implantados en la pared del ducto que conduce el fluido.

#### Medidor Ultrasónico<sup>5</sup>

La velocidad de propagación del sonido en un fluido es igual a la velocidad del sonido con respecto al fluido más la velocidad del fluido. En medidores ultrasónicos se utiliza este hecho y se mide el tiempo necesario para que un haz de ultrasonido atraviese la región del flujo. Así se puede determinar la velocidad media del flujo.

### 5.2 Medición de velocidad<sup>24,25</sup>

Hay muchos aparatos que pueden medir la velocidad y la selección de uno depende de la precisión y características deseadas.

#### Anemómetros Mecánicos

En algunos anemómetros se utiliza la velocidad de rotación de un elemento giratorio como medidor de la velocidad. Esta clase de aparatos incluyen el anemómetro de copas (figura 20) y el de álabes (figura 21).

#### Anemómetros Eléctricos<sup>26,27</sup>

En otro tipo de anemómetros se utiliza el enfriamiento de

un sensor por el flujo para medir la velocidad. El enfriamiento del sensor conduce a un cambio en la resistencia eléctrica del mismo, lo cual puede medirse y es indicativo de la velocidad. Este tipo de anemómetros es de gran utilidad en flujos turbulentos por su buena respuesta a altas frecuencias.

Hay dos formas básicas de operar un anemómetro de hilo caliente y en ambas se calienta el hilo por una corriente eléctrica. En la operación a corriente constante (figura 22), la corriente a través del hilo se mantiene constante y cualquier cambio en la resistencia del hilo se refleja en un cambio del voltaje de salida. En el anemómetro operado a temperatura constante (figura 23), se tiene un amplificador de retroalimentación de alta ganancia para mantener constante la resistencia (o lo que es equivalente, la temperatura) del hilo. Por esta razón la respuesta del anemómetro es más rápida en este tipo de operación.

Anemómetro Laser<sup>25, 26, 28</sup>

El anemómetro laser funciona a base del efecto Doppler. Un haz de luz laser atraviesa un flujo dentro del cual se han puesto muchas partículas pequeñas moviéndose con el fluido y dispersoras de la luz.

Si  $\hat{i}_i$  y  $\hat{i}_d$  son los vectores unitarios en las direcciones de la luz incidente y la dispersada respectivamente, el cambio de frecuencia debido a la velocidad  $\underline{V}$  de la partícula dispersora es

$$f_D = \frac{V}{\lambda_0} \cdot (\hat{i}_d - \hat{i}_i)$$

donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda de la luz incidente. Midiendo este cambio de frecuencia  $f_D$ , se puede determinar una componente de la velocidad  $\underline{V}$ . Esto se hace mediante un detector y las configuraciones comunes son mostradas en la figura 24.

Sondas de presión<sup>29</sup>

La medición de las presiones estáticas y totales en un flujo permite el cálculo de la velocidad. El tubo de Pitot utiliza este efecto y por su sencillez y precisión es un instrumento básico en un laboratorio de fluidos. Algunos modelos y variaciones del tubo de Pitot están indicados en la figura 25. La diferencia entre la presión estática y la total es normalmente leída en un manómetro de líquido.

## 6. MEDICION DE TEMPERATURA

La medición de la temperatura de los fluidos es de interés sobre todo en problemas de transferencia de calor por convección<sup>28</sup>. Existen muchos instrumentos para este propósito.

### 6.1 Termopar

En el termopar mostrado en la figura 26, una diferencia de temperaturas  $T_2 - T_1$  produce un voltaje que puede ser leído por el voltímetro. Este voltaje es función de la diferencia en temperaturas, así como de los materiales 1 y 2. Algunos de los materiales utilizados para termopares y sus temperaturas de uso se indicarán en la siguiente tabla<sup>28</sup>. La letra de designación representa las propiedades termoeléctricas de los materiales según la ASTM (American Society for Testing and Materials).

Designación	Rango de temperatura (°C)	Material 1	Material 2
B	0 a 1820	Pt-Rh (30%)	Pt-Rh (6%)
E	-270 a 1000	Ni - Cr	Cu-Ni
J	-210 a 1200	Fe	Cu-Ni
K	-270 a 1372	Ni-Cr	Ni-Al
R	- 50 a 1767	Pt-Rh (13%)	Pt
S	- 50 a 1767	Pt-Rh (10%)	Pt
T	-270 a 400	Cu	Cu-Ni

Para estos materiales se tienen curvas de calibración que muestran el voltaje calibrado como función de la temperatura  $T_2$ , siendo la temperatura  $T_1$  la de referencia, normalmente a 0°C. Como ejemplo, la figura 27 muestra la curva de calibración del termopar tipo K.

### 6.2 Termistor<sup>28</sup>

A veces la medición de temperaturas se hace por medio de termistores, dispositivos semiconductores cuya resistencia eléctrica disminuye con la temperatura en la forma:

$$R = R_0 \exp \left[ \beta \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

donde  $R_0$  es la resistencia a la temperatura de referencia

$T_0$ : El termistor es muy sensible y con buena calibración puede medir variaciones de temperatura del orden de  $0.01^\circ\text{C}$ .

### 6.3 Errores en la Medición con sensores<sup>28, 20</sup>

La medición de la temperatura de un fluido en movimiento - por medio de sensores sumergidos en el flujo está sujeta - a errores. La velocidad del fluido en la superficie del - sensor es cero y por lo tanto la temperatura allí ( $T_r$ ) es mayor que la temperatura del flujo libre ( $T_\infty$ ). El factor de recuperamiento ( $r$ ) está definido como

$$r = \frac{T_r - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

donde  $T_0$  es la temperatura de estancamiento del flujo en la posición del sensor. Normalmente,  $r$  tiene valores entre - 0.75 y 0.99, lo que se determina por la calibración.

Otras fuentes de error vienen de la transmisión de calor - por medio de la conducción en los cables eléctricos o por radiación. En mediciones no permanentes de temperatura, es importante considerar la capacidad calorífica del sensor, lo que le hace comportarse como un instrumento de primer - orden.

## 7. ANALISIS DE SEÑALES DINAMICAS

Los datos generados por los transductores en flujos no permanentes, tienen que analizarse para obtener información útil.

A continuación se discuten algunos de los parámetros más utilizados y la manera de obtenerlos.

### 7.1 Análisis del contenido de amplitudes<sup>29</sup>

Dos funciones de importancia en el estudio de señales aleatorias son la distribución de probabilidad y la densidad de probabilidad. Considerando la señal  $\sigma(t)$ , su distribución de probabilidad  $Q(c)$  es la probabilidad tal que  $\sigma$  sea menor que  $c$ . Así,

$$Q(c) = \text{Pr} \{ \sigma < c \}$$

La densidad de probabilidad  $P(c)$  está dada por

$$P(c) = \frac{dQ(c)}{dc}$$

### 7.2 Momentos probabilísticos<sup>29</sup>

El  $n$ -ésimo momento  $M_n$  de  $\sigma(t)$  se define como.

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} c^n dQ(c)$$

El primer momento es el valor medio  $\bar{\sigma}$ :

$$M_1 = \bar{\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} c dQ(c)$$

También se definen los momentos centrales  $M_n^C$  dados por:

$$M_n^C = \int_{-\infty}^{\infty} (c - \bar{\sigma})^n dQ(c)$$

Por definición, el primer momento central es cero. El segundo momento central es la varianza y su raíz cuadrada es el valor raíz media cuadrática de  $\sigma(t)$ .

El tercer momento central adimensionalizado es el factor de oblicuidad S:

$$S = \frac{M_3^C}{\sqrt{M_2^C}}$$

El factor de aplanamiento K es el cuarto momento central adimensionalizado:

$$K = \frac{M_4^C}{(M_2^C)^2}$$

### 7.3 Correlaciones

La autocorrelación  $R_{\sigma}(\tau)$  de la señal  $\sigma(t)$  está dada por:

$$R_{\sigma}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sigma(t) \sigma(t+\tau) dt$$

La correlación cruzada entre dos señales  $\sigma(t)$  y  $\sigma'(t)$  es:

$$R_{\sigma\sigma'}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sigma(t) \cdot \sigma'(t+\tau) dt$$

#### 7.4 Análisis del contenido de frecuencias

Una señal periódica  $\sigma(t)$  puede ser expresada por una serie de Fourier:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right)$$

$$\text{donde } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sigma(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sigma(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Una señal aleatoria puede analizarse a través de su espectro de potencia  $E(\omega)$ . Este es la transformada de Fourier de la autocorrelación de la señal aleatoria  $\sigma(t)$ :

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R\sigma(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

La transformada inversa es

$$R\sigma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

En  $\tau = 0$ , se tiene

$$R\sigma(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega$$

donde por definición

$$R\sigma(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \{\sigma(t)\}^2 dt$$

la cual representa la energía media en la señal  $\sigma(t)$ .  $E(\omega) d\omega$  es entonces proporcional a la energía de la señal entre las frecuencias  $\omega$  y  $\omega + d\omega$ .

#### 7.5 Procesamiento de señales <sup>12, 25</sup>

Las funciones como la distribución o densidad de probabili

dad, los momentos, las correlaciones y los espectros, son muy importantes para la interpretación de los resultados del experimento. El procesamiento necesario para llegar a estas funciones puede ser analógico o digital (o a veces híbrido)

#### Procesamiento analógico

Se usan instrumentos de análisis con componentes electrónicas analógicas. La función de cada instrumento es muy específica pero el análisis es rápido.

Por ejemplo existen instrumentos que pueden dar el espectro de frecuencias de una señal<sup>7</sup>. La operación de éstos puede ser a base de un filtro pasa banda o de la transformada de Fourier de esta autocorrelación. Otros aparatos que funcionan por medio de compuertas que se abren o se cierran según la amplitud de la señal, pueden determinar la densidad y la distribución de probabilidad<sup>7</sup>.

#### Procesamiento digital

El equipo necesario para el procesamiento digital de señales es, por lo general, más caro. Sin embargo, este método tiene la ventaja de flexibilidad en sus funciones. La señal a analizar es primero convertida a una señal digital a través de un convertidor analógico-digital. Se debe cuidar que la rapidez de muestreo sea por lo menos dos veces la frecuencia más alta presente en la señal analógica. La señal digital se alimenta como datos a una computadora digital, la cual determina las características de la señal según la programación.

## 8. INSTALACIONES EXPERIMENTALES

Para el estudio de flujos internos, como el flujo en ductos o el flujo entre cilindros giratorios, en la mayoría de los casos se tiene que construir la instalación específica tomando en cuenta la colocación de los instrumentos de medición. En el estudio de flujos externos, como en el flujo alrededor de perfiles aerodinámicos, se pueden utilizar instalaciones ya hechas tales como el túnel de viento o el canal de agua. La disponibilidad de estos aparatos facilita mucho la experimentación y es recomendable que el laboratorio cuente con ellos.

### 8.1 Túnel de viento de baja velocidad<sup>31, 32</sup>

El túnel de viento es un equipo útil en la medición de -

fuerzas sobre cuerpos sumergidos y en el estudio de la capa límite. El túnel es normalmente de circuito abierto (figura 28) o de circuito cerrado (figura 29). En ambos casos es importante estabilizar el flujo y reducir el movimiento rotatorio y turbulento inducido por el ventilador. Esto se hace mediante contracciones y álabes fijos - estabilizadores.

### 8.2 Túnel de viento de alta velocidad<sup>33</sup>

Para el estudio de flujos compresibles es necesario un túnel de viento de alta velocidad, subsónico, transónico o supersónico. La figura 30 muestra un túnel supersónico de circuito cerrado. En túneles intermitentes, se utiliza la descarga de un recipiente a presión para producir el flujo (figura 31), o el llenado de un recipiente a vacío (figura 32).

### 8.3 Canal de agua<sup>34</sup>

En algunos casos es más sencillo trabajar con un flujo de agua. Este flujo puede producirse en un ducto cerrado o en un canal abierto por medio de una bomba. A veces se prefiere utilizar un recipiente de carga a una altura para tener un flujo con menor turbulencia.

## 9. CONCLUSION

Se han mencionado algunas características de la experimentación en la mecánica de fluidos junto con los instrumentos de uso común. Obviamente, por su naturaleza, la lista es muy incompleta.

Por ejemplo, no se ha hablado de la medición de fuerza, desplazamiento, esfuerzo, densidad o viscosidad, cantidades que pueden ser de importancia en un experimento. Tampoco se han discutido instrumentos de uso especial en flujos estratificados, flujos en dos fases<sup>20</sup>, flujos con reacción química o combustión<sup>35 25</sup>, flujos de fluidos no newtonianos, flujos con superficies libres, flujos en medios porosos, etc. En estos flujos los parámetros a medir pueden ser concentración, nivel de agua, temperatura de flamas, esfuerzo de cortante etc. Aunque todos son posibles de medir, algunos presentan más dificultades que otros. En las revistas técnicas sobre el tema\*, aparecen descripciones de nuevos aparatos y técnicas de medi

\* Entre otras, se encuentran las siguientes revistas:

1. Journal of the Instrument Society of America (EEUU)
2. Transactions of the Instrument Society of America (EEUU)
3. The Review of Scientific Instruments (EEUU)
4. Instruments and Experimental Techniques (URSS, traducción a inglés)
5. Measurement Techniques (URSS, traducción a inglés)
6. Transactions of the Society of Instrument Technology (R.U)
7. Journal of Research of the National Bureau of Standards (EEUU)
8. Industrial Laboratory (URSS, traducción a inglés)
9. Journal of Scientific Instruments (R.U.)

ción. También existen casas comerciales especializadas en el desarrollo y venta de equipo de laboratorio. Pero, la gran variedad de los fenómenos de interés en la mecánica de fluidos<sup>37</sup> implica que para muchas aplicaciones muy específicas, no existan sistemas de medición y se tenga que diseñar y construir uno para poder hacer el estudio experimental.

En cualquier experimento los instrumentos realizan la medición de parámetros y el análisis de señales, pero la interpretación de datos está en las manos del investigador. El trata de inferir conclusiones generales con la ayuda de técnicas de la estadística<sup>10, 38</sup> y con el conocimiento de los procesos físicos ocurriendo en el flujo. A través de los experimentos, el investigador tiene que determinar lo que está pasando en el fluido y después dar una explicación razonable del fenómeno. Esta es la parte más difícil de toda experimentación y la más importante. Pero, por medio de sus conocimientos acumulados u con la ayuda de mediciones precisas y organizadas, el investigador puede hacer su contribución constructiva a los conocimientos básicos de la dinámica de los fluidos y a su aplicación a la ingeniería.

## REFERENCIAS

1. Sen, M. y Treviño C., Métodos numéricos en la Mecánica de los Fluidos, Memorias del IIIer Simposio de Ingeniería Mecánica, Instituto Tecnológico Regional de Mérida, Mérida, Yuc. Oct. 1979.
2. Baird, D.C., Experimentation: An Introduction to Measurement Theory and Experimental Design Prentice Hall, 1962.
3. Binder, R.C., Flow Measurements, Handbook of Fluid Dynamics V.I. Streeter (Ed.), Mc Graw Hill, 1961.
4. Bradshaw, P., Experimental Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1964.
5. Norton, H.N., Handbook of Transducers for Electronic Measuring Systems, Prentice-Hall, 1969.
6. Jones, E.B., Instrument Technology, Butterworths, Vol. I, 1965, Vol. II 1956, Vol. III 1957.
7. Keast, D.N., Measurements in Mechanical Dynamics, Mc Graw Hill 1967.
8. Considine, D.M. (Ed.), Process Instruments and Control Handbook, Mc Graw Hill, 1957.
9. TSI Quarterly Vol. V., No. 3 Aug/Sep. 1979. p. 12
10. Holman, J.P., Experimental Methods for Engineers, Mc Graw Hill 2a. Ed., 1971.
11. Doebelin, E.I., Measurement Systems: Application and Design Mc Graw Hill, 1966.
12. Bendet, J.S. y Piersol, A.G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley Interscience, 1971.
13. Graham A.R., An Introduction to Engineering Measurements, Prentice-Hall, 1975.
14. O'Higgins, P.J., Basic Instrumentacion, Mc Graw-Hill, 1966.
15. Cook, N.H., y Rabinowicz, E., Physical Measurement and Analysis, Addison-Wesley, 1963.
16. Beckwith, T.G., y Buck, W.L., Mechanical Measurements, 2a. Ed. Addison-Wesley, 1969.
17. Goldman, S., Frequency Analysis, Modulation and Noise, Dover Publications, 1948.

18. Merzkirch, W., Flow Visualization, Academic Press, 1974.
19. National Committee for Fluid Mechanics Films, Illustrated Experiments in Fluid Mechanics, M.I.T. Press, 1972.
20. Ecole d'été de Mécanique des Fluides, Techniques de Mesure dans les écoulements, Eyrolles, 1974.
21. Liepmann, H.W., y Roshko, A., Elements of Gas dynamics, John Wiley, 1957.
22. Shapiro, A.H., The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluids, Vol. I y II, Ronald, 1953.
23. Streeter V.L. y Wylie E.B., Mecánica de los fluidos, 2a. ed., Mc Graw Hill, 1975.
24. Ower, E. y Pankhurst, R.C., The Measurement of Air Flow, Pergamon Press, 5a. ed., 1977.
25. Richards, B.E. (Ed.), Measurements of Unsteady Fluid Dynamics Phenomena, Hemisphere Publishing Corp. 1977.
26. Bradshaw, P., An Introduction to Turbulence and its Measurement, Pergamon Press, 1971.
27. Cervantes, J. El Anemómetro de Hilo Caliente como Instrumento Básico de Medición en la Mecánica de Fluidos, Memorias, II Simposio de Ingeniería Mecánica, Instituto Tecnológico Regional de Mérida, Mérida, Yuc., nov. 1977.
28. Eckert, E.R.Q. y Goldstein, R.J., Measurements in Heat Transfer Hemisphere Publishing Copr. 1976.
29. Bryer, D.W. y Pankhurst, R.C., Pressure-probe methods for determining wind speed and flow direction, H.M. Stationery Office, London, 1971.
30. Finkel, J., Computer-Aided Experimentation: Interfacing to Mini-computers, John Wiley Sons, 1975.
31. Pankhurst, R.C. y Holder, D.W., Wind Tunnel Techniques, Pitman, London, 1952.
32. Pope, A. y Harper, J.J., Low-Speed wind tunnel testing, John Wiley Sons, 1966.
33. Pope, A. y Goin, K.L., High-speed wind tunnel testing, John Wiley Sons, 1965.
34. Goldstein, S., Modern Developments in Fluid Dynamics, Vols I y II, Dover Publications, 1965.
35. Goulard, R., Combustion Measurements, Academic Press, 1977.
36. Walters, K., Rheometry, Chapman & Hall, London, 1975.

37. Cockrell, D.J. (ed.), Fluid Dynamic Measurements in the Industrial and Medical Environments, Vols. I y II, Leicester Univ. Press. 1972.
38. Cochran, W.G. y Cox, G.M., Experimental Design, 2a. Ed., John Wiley & Sons, 1957.

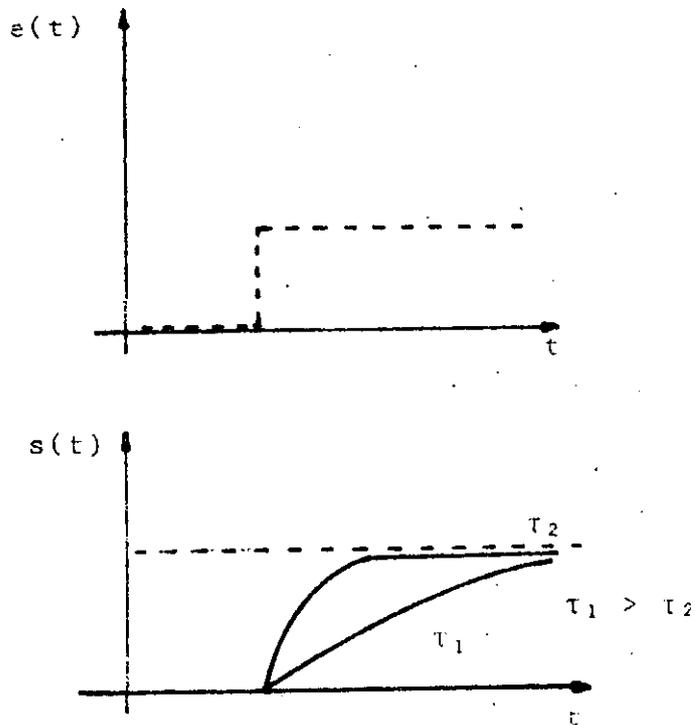


Fig. 1 Respuesta de un instrumento de orden uno a una entrada de tipo escalón.

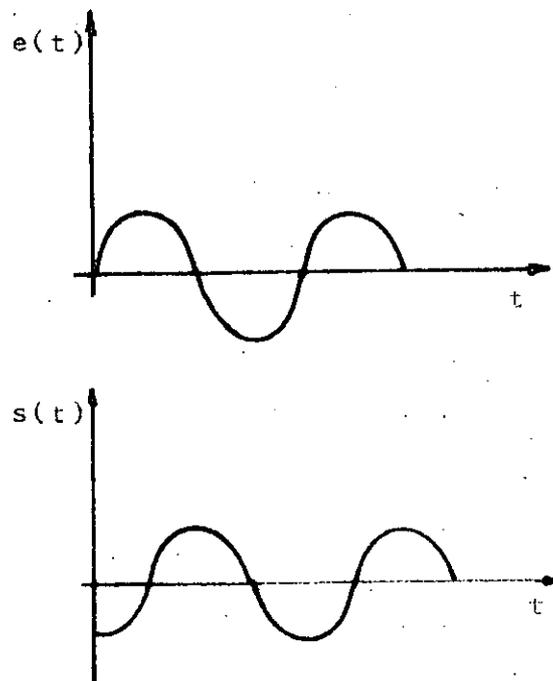


Fig. 2 Respuesta de un instrumento de orden uno a una entrada de tipo senoidal.

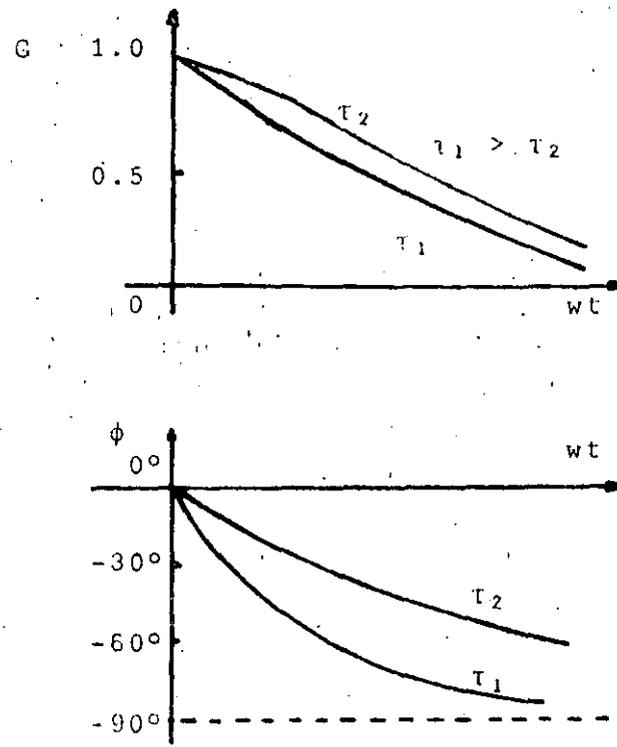


Fig. 3 Relación de amplitudes y ángulo de fase para un instrumento de orden uno con entrada senoidal

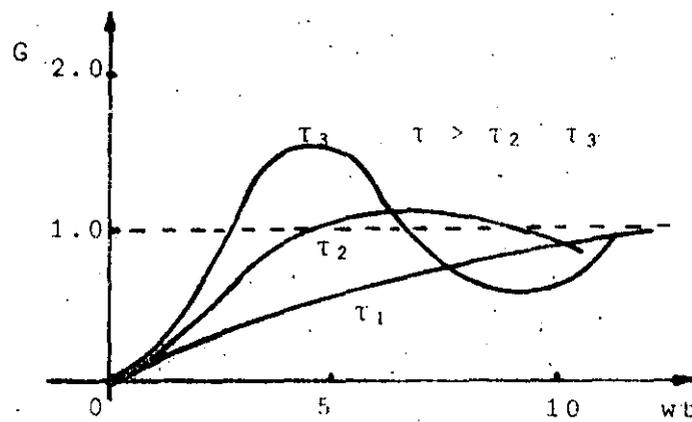


Fig. 4 Respuesta de un instrumento de orden dos a una entrada de tipo escalón.

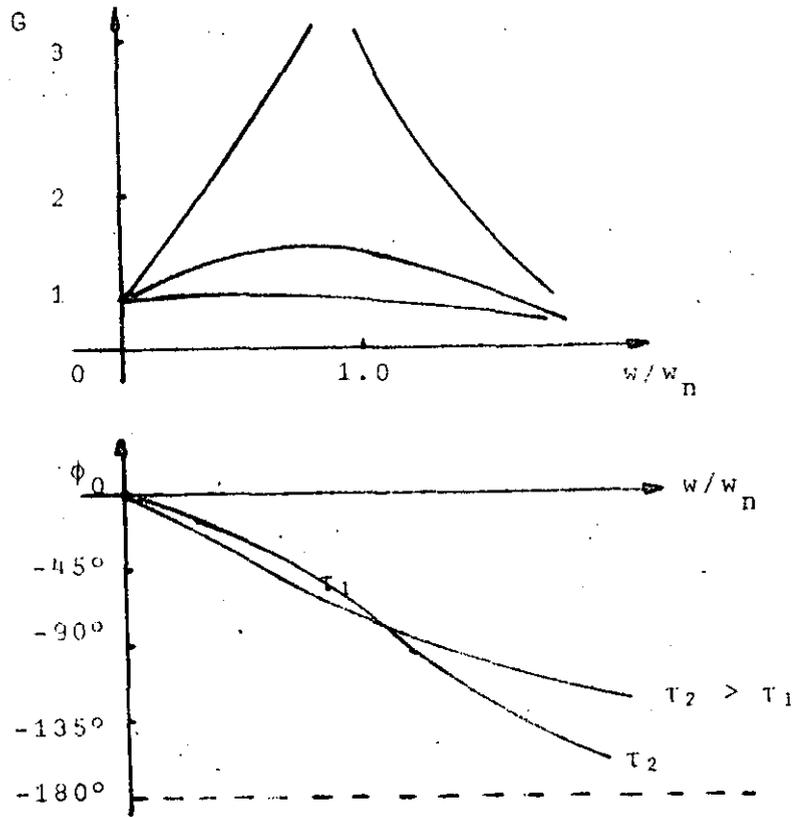


Fig. 5 Relación de amplitudes y ángulos de fase para un instrumento de orden dos con entrada senoidal.

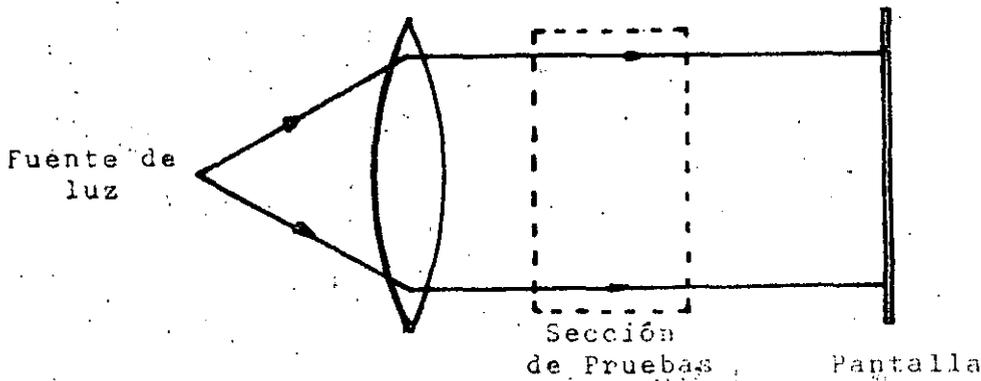


Fig. 6 Visualización por el método de sombras

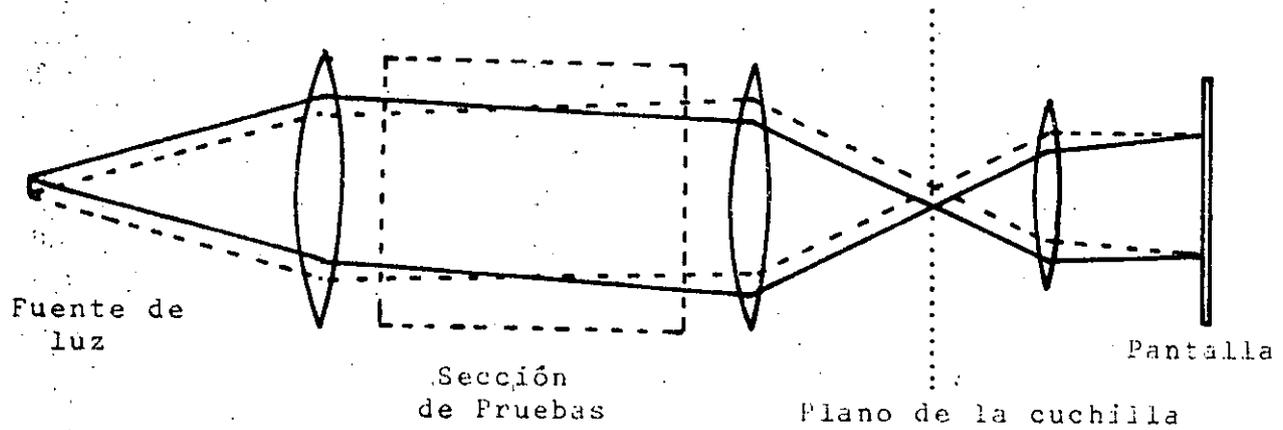


Fig. 7 Visualización por el método de estrioscopía.

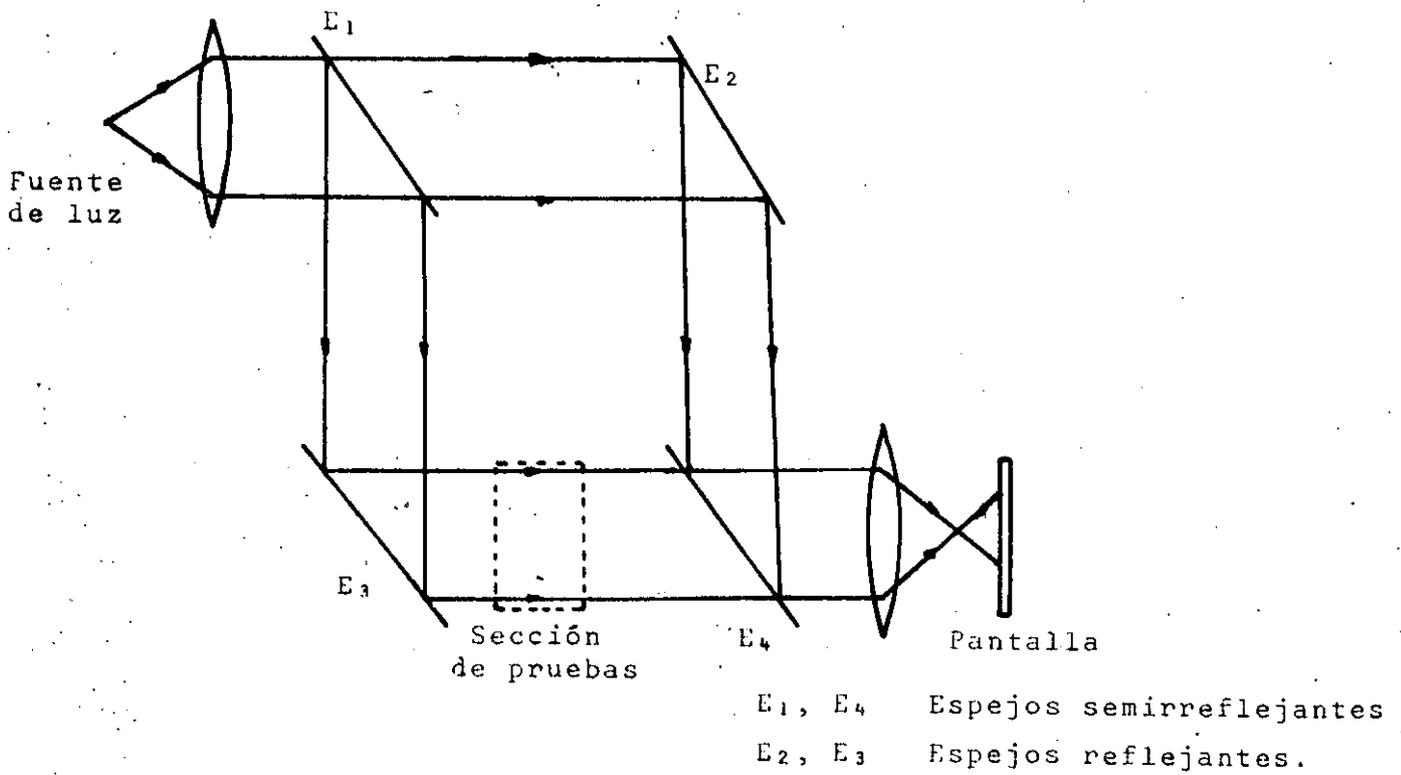


Fig. 8 Visualización por el método de interferometría.

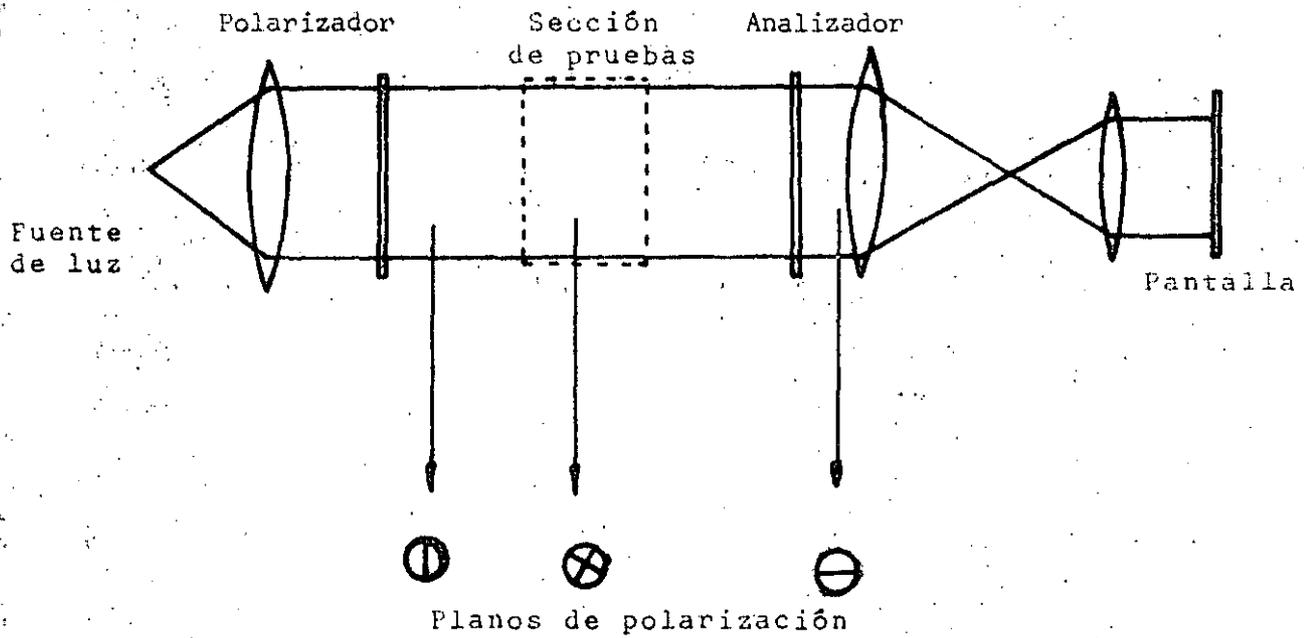


Fig. 9 Visualización por el método de birrefringencia.

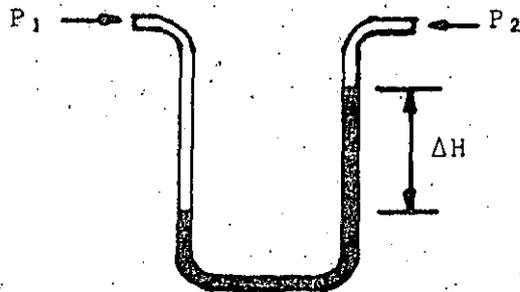


Fig. 10 Manómetro de tubo en U.

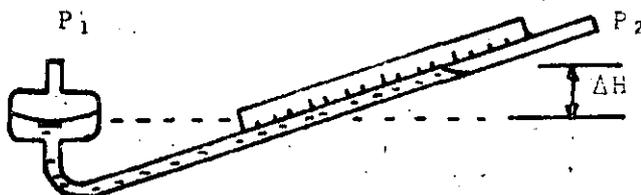


Fig. 11 Manómetro inclinado.

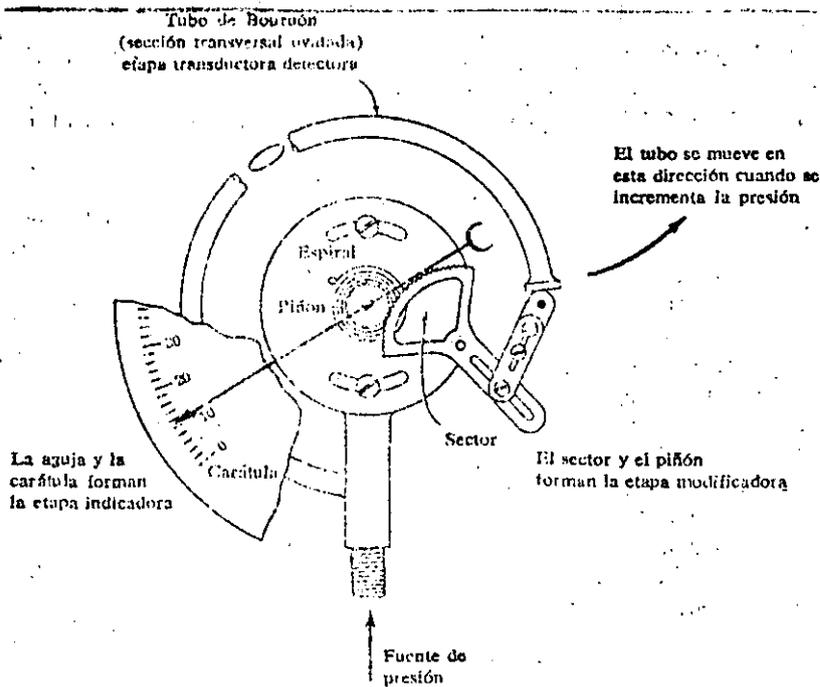


Fig. 12 Tubo de Bourdon

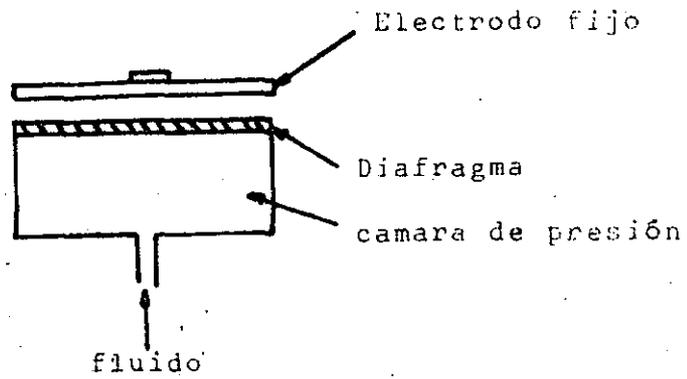


Fig. 13 Transductor tipo capacitivo

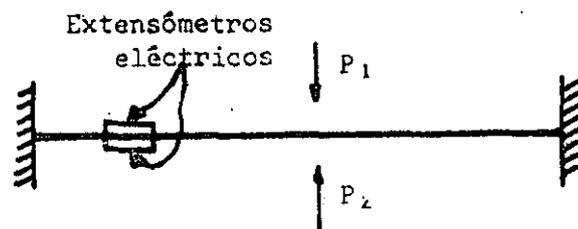


Fig. 14 Transductor tipo extensométrico

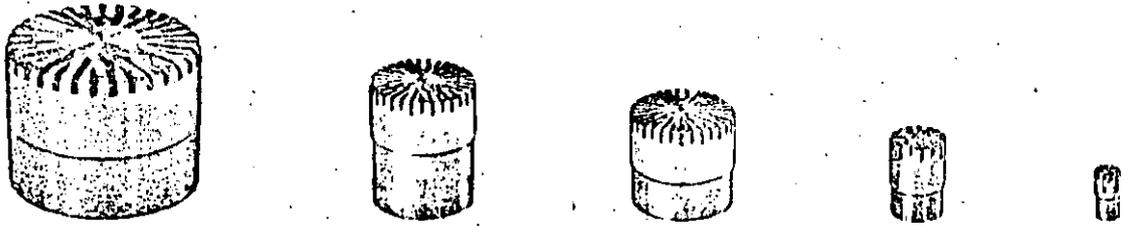


Fig. 15 Algunos tipos de micrófonos para mediciones acústicas

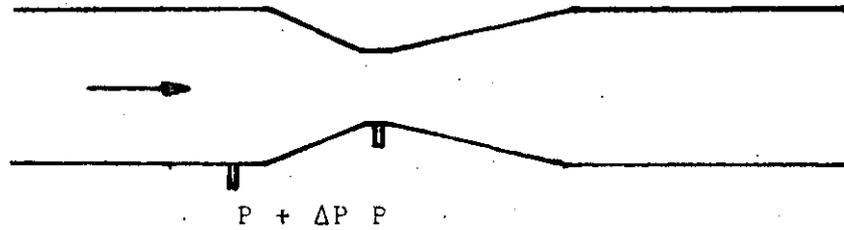


Fig. 16 Medidor tipo Venturi

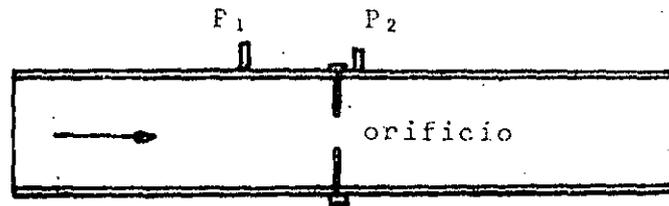


Fig. 17 Medidor de orificio

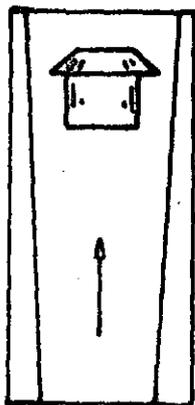


Fig. 18 Rotámetro

57

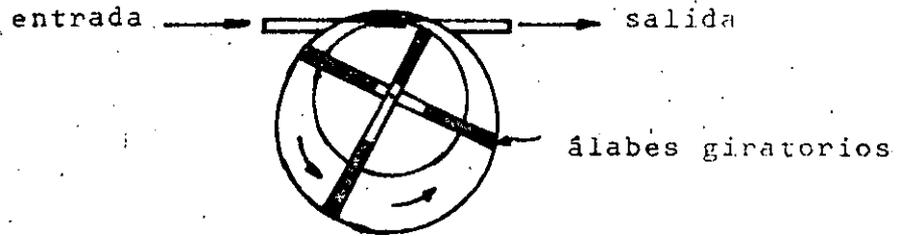


Fig. 19 Medidor de desplazamiento positivo

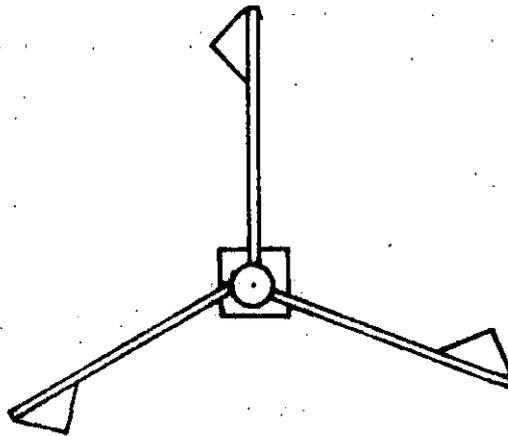


Fig. 20 Anemómetro de copas

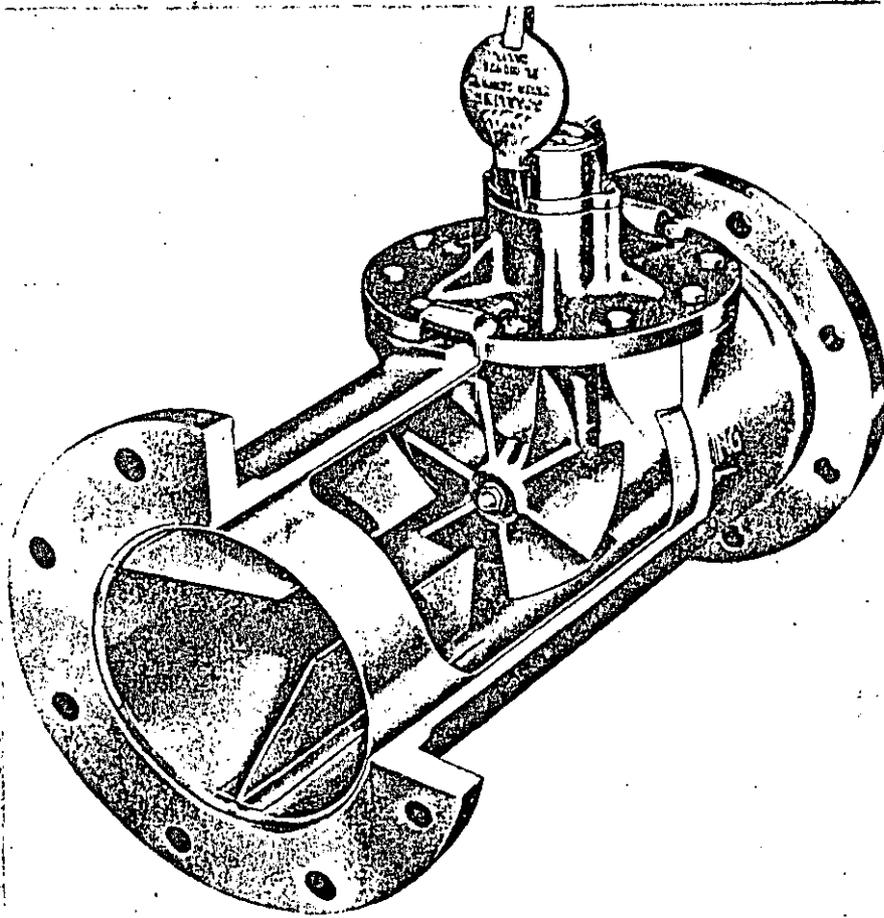


Fig. 21 Anemómetro de álabes

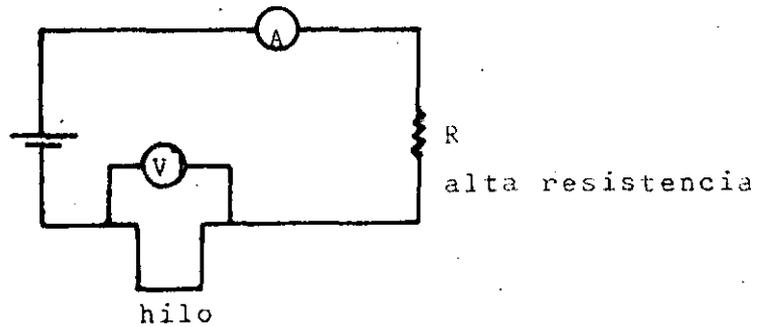


Fig. 22 Anemómetro de hilo caliente en operación a corriente constante

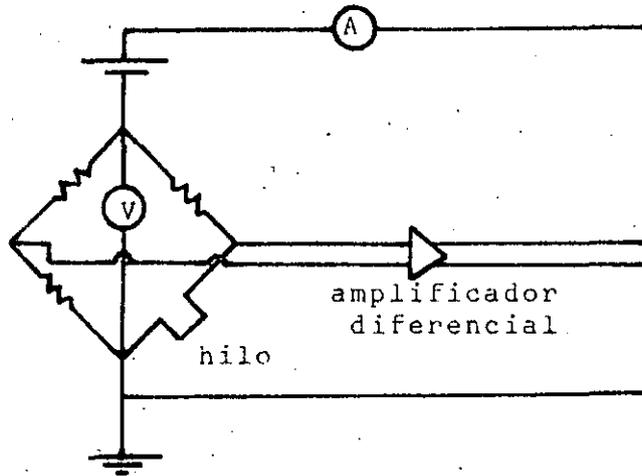


Fig. 23 Anemómetro de hilo caliente en operación a temperatura constante.

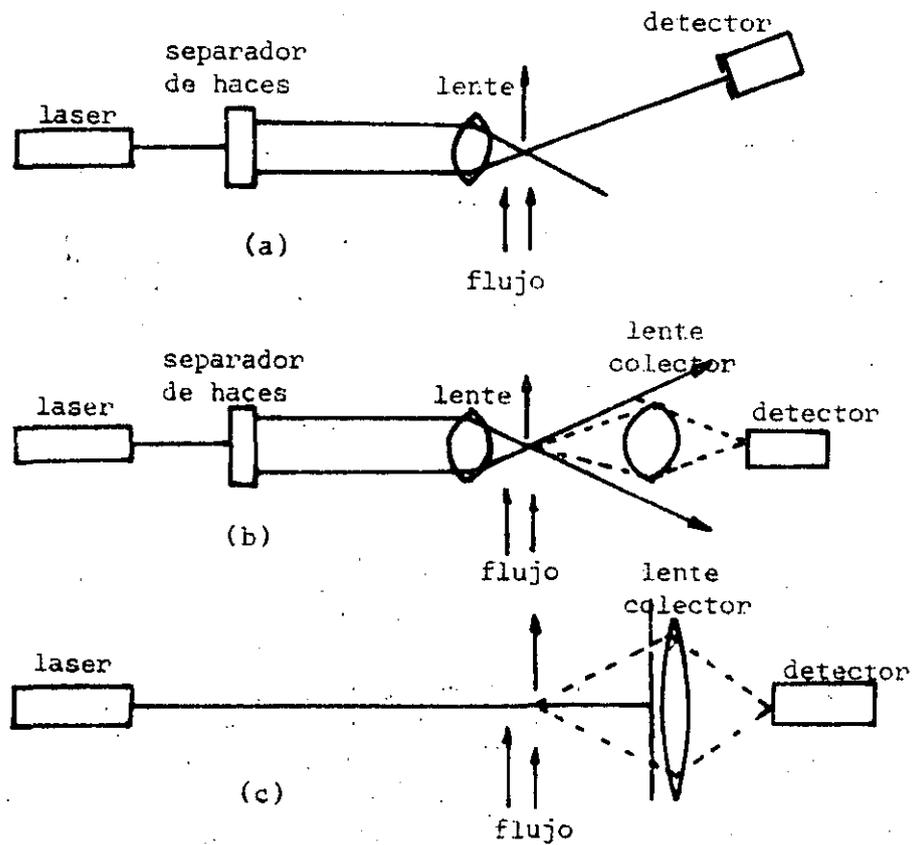


Fig. 24 Configuraciones comunes del Anemómetro laser.  
 a) Haz de referencia, b) Dispersión dual, c) Dispersión simétrica

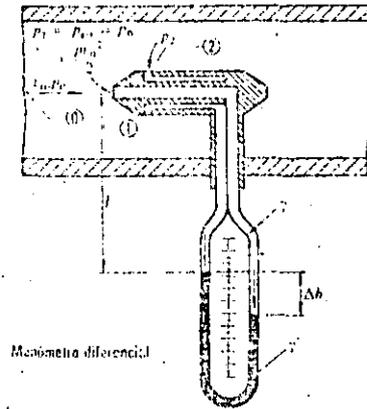
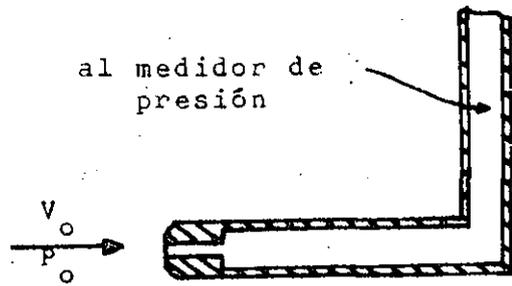


Fig. 25 Tubos de Pitot

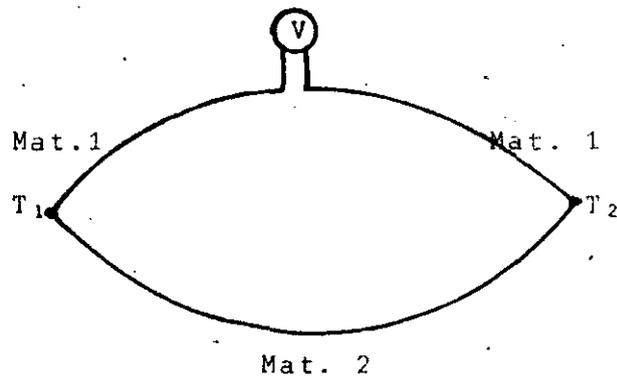


Fig. 26 Termopar

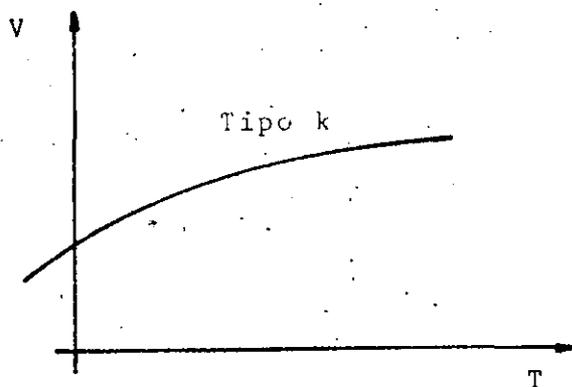


Fig. 27 Curva de calibración del termopar tipo k

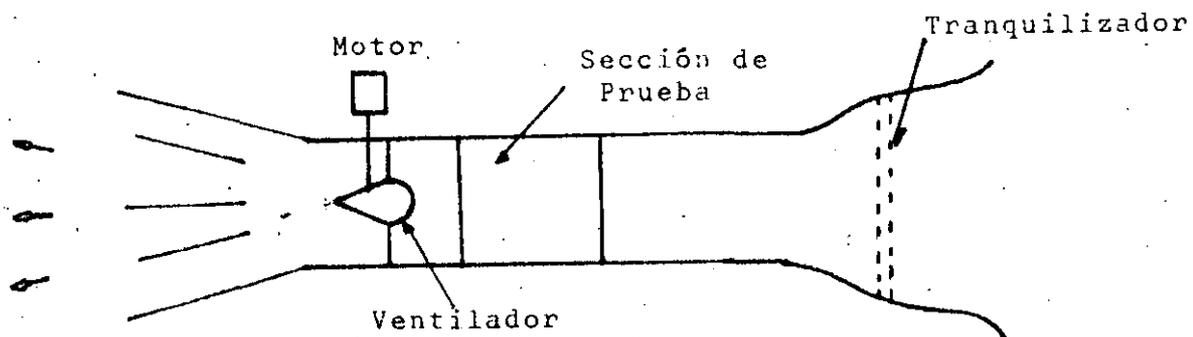


Fig. 28 Túnel de viento subsónico de circuito abierto

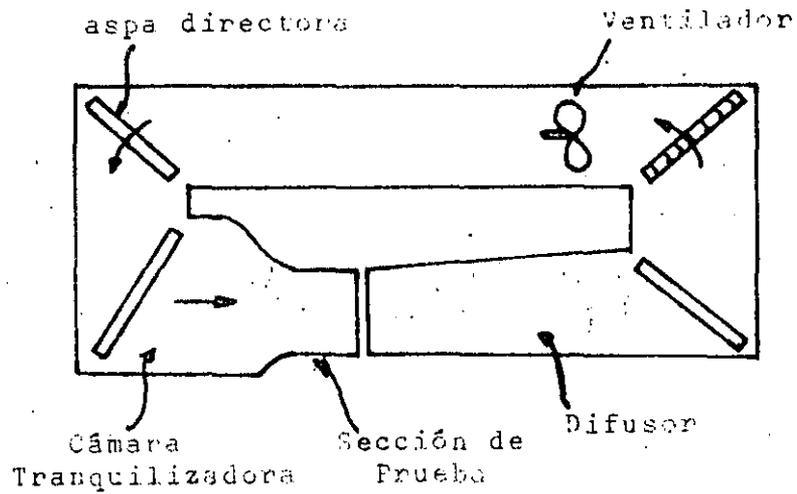


Fig. 29 Túnel de viento subsónico de circuito cerrado

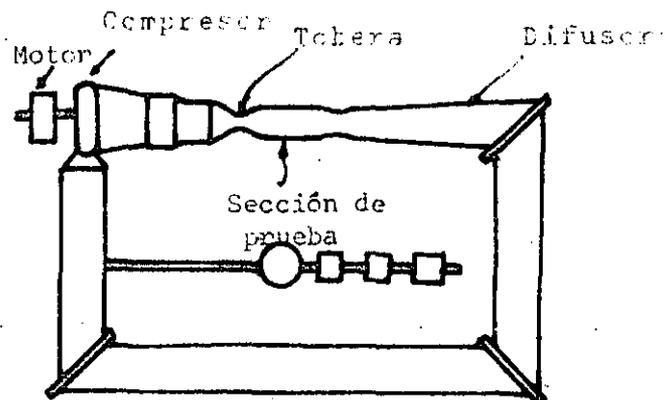


Fig. 30 Túnel de viento supersónico de circuito cerrado

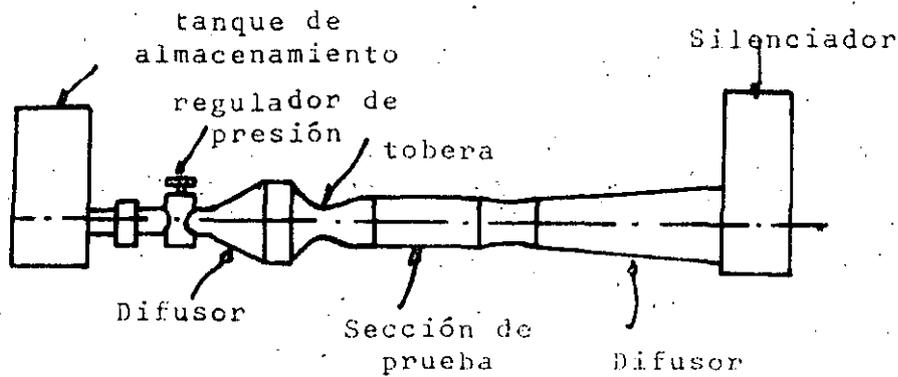


Fig. 31 Túnel de viento supersónico intermitente con recipiente a presión.

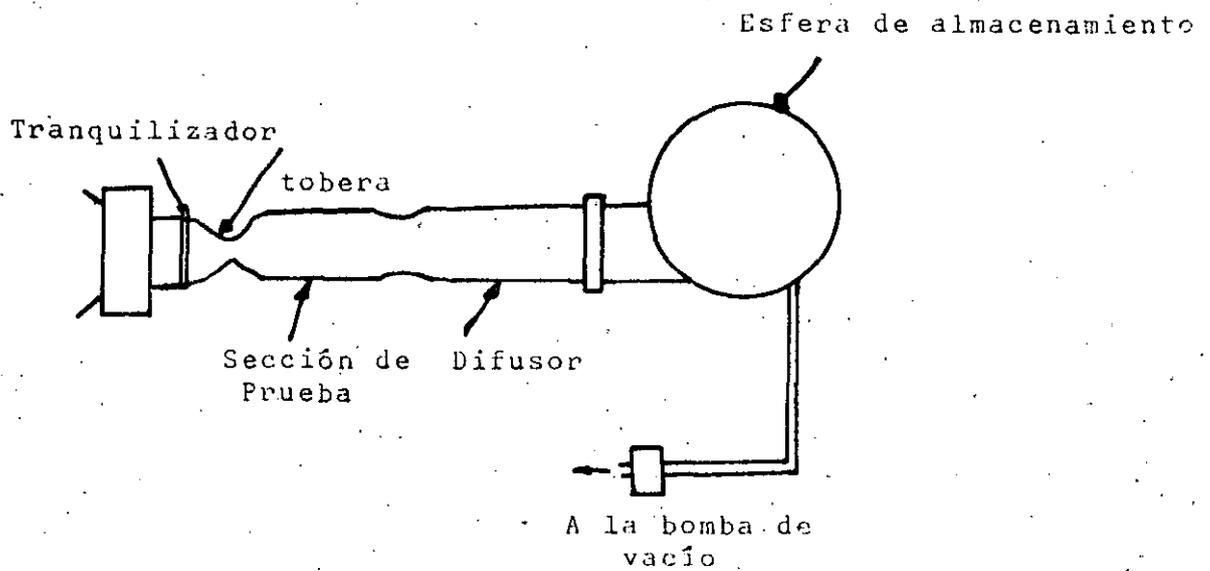


Fig. 32 Túnel de viento supersónico intermitente con recipiente a vacío



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIDAD 4

## DEFINICION

- EL TÚNEL DE VIENTO ES UN DISPOSITIVO QUE PERMITE ESTABLECER UNA CORRIENTE DE AIRE CON CARACTERÍSTICAS FÍSICAS CONTROLADAS EN LA CUAL SE PUEDEN EFECTUAR PRUEBAS Y MEDICIONES SOBRE OBJETOS SUMERGIDOS EN ELLA. EL TÚNEL DE VIENTO SIRVE EN TONCES PARA CONOCER EXPERIMENTALMENTE LOS EFECTOS QUE RESULTAN DE LA INTERACCIÓN DE UN FLUJO CON UN CUERPO, YA SEA QUE ÉSTE SE DESPLACE A TRAVÉS DE UN FLUIDO EN REPOSO O BIEN, QUE EL FLUIDO SE MUEVA ALREDEDOR DEL CUERPO.

## PARTES CONSTITUTIVAS

- SECCIÓN DE PRUEBAS
- CONDUCTO DE RETORNO
- DISPOSITIVOS TRANQUILIZADORES
  - ALABES-GUÍA EN CODOS
  - "PANAL DE ABEJA"
  - MALLAS GENERADORAS DE TURBULENCIA
- CONO DE CONTRACCIÓN
- DIFUSOR
- VENTILADOR
- INSTRUMENTACIÓN

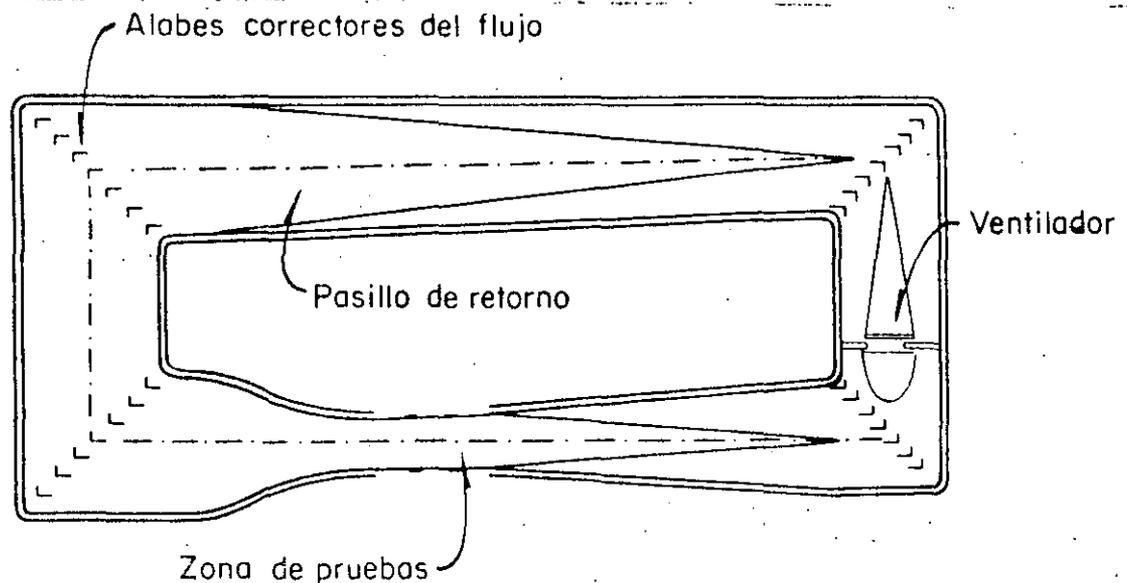


Fig 7 Túnel de viento de circuito cerrado y retorno simple

## VENTAJAS

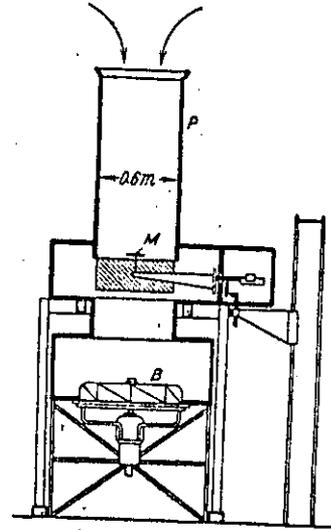
- DISPONIBILIDAD DE UN FLUJO CONTROLABLE DE CARACTERÍSTICAS CONOCIDAS PARA REPRODUCIR EN EL LABORATORIO LOS FENÓMENOS QUE SE PRESENTAN EN LOS EQUIPOS INDUSTRIALES, Y EN LA NATURALEZA.
- POSIBILIDAD DE REALIZAR PRUEBAS Y MEDICIONES EN MODELOS A ESCALA REDUCIDA DE LA SITUACIÓN REAL Y EXTRAPOLAR LOS RESULTADOS A ESTA ÚLTIMA SI SE CUMPLE CON LOS PRINCIPIOS DE SEMEJANZA.
- EMPLEO DE UN FLUIDO ABUNDANTE, INOCUO Y BARATO QUE ADEMÁS NO REQUIERE DE ALMACENAMIENTO.
- DEBIDO A LA BAJA DENSIDAD DEL AIRE, LOS REQUERIMIENTOS ESTRUCTURALES TANTO DEL CONDUCTO COMO DE LOS SOPORTES DE LOS MODELOS SON MÍNIMOS.
- LAS DEMANDAS DE POTENCIA, SALVO EN LOS TÚNELES DE GRAN TAMAÑO, SON MENORES QUE COMPARADAS CON LAS QUE SE NECESITARÍAN SI SE EMPLEARA UN LÍQUIDO.

## DESVENTAJAS

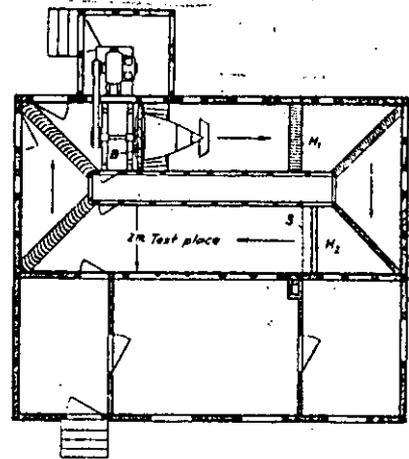
- DIFICULTAD PARA ESTUDIAR FENÓMENOS QUE SE RELACIONEN CON CIERTAS PROPIEDADES DE LOS LÍQUIDOS: CAVITACIÓN Y EN GENERAL CAMBIOS DE FASE, ESCURRIMIENTOS CON UNA SUPERFICIE LIBRE, ETC.
- COSTOS ELEVADOS TANTO DE CONSTRUCCIÓN Y MONTAJE COMO DE OPERACIÓN EN LOS CASOS DE GRAN CAPACIDAD.

## PRIMEROS TUNELES DE VIENTO

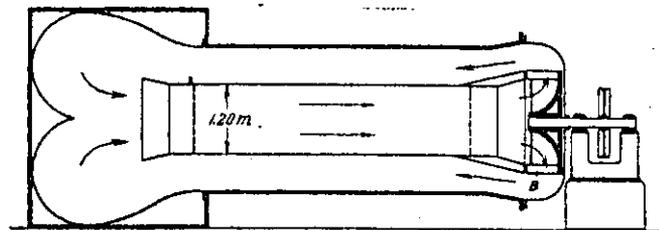
1903; T.E. STANTON; N P L.  
 CIRCUITO ABIERTO; FLUJO IN-  
 DUCIDO; VELOCIDAD MÁXIMA  
 10 M/S; 2 PIES DE DIÁMETRO.



1907; L. PRANDTL; GÖTTINGEN  
 CIRCUITO CERRADO; VELOCIDAD  
 MÁXIMA 10 M/S; 6 X 6 PIES.

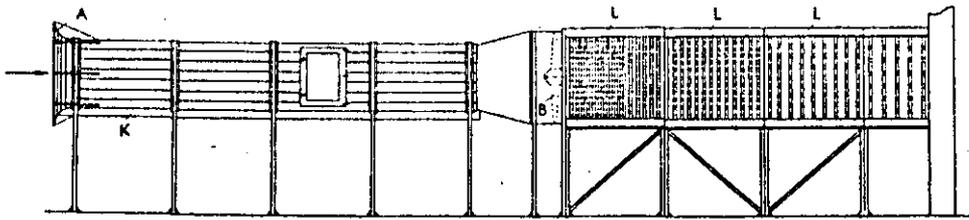
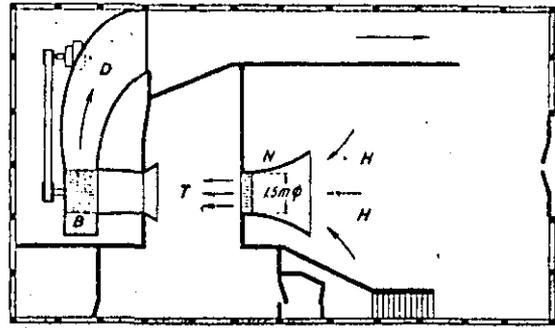


1910; T.F. STANTON; N P L  
 CIRCUITO CERRADO; 4 X 4 PIES.

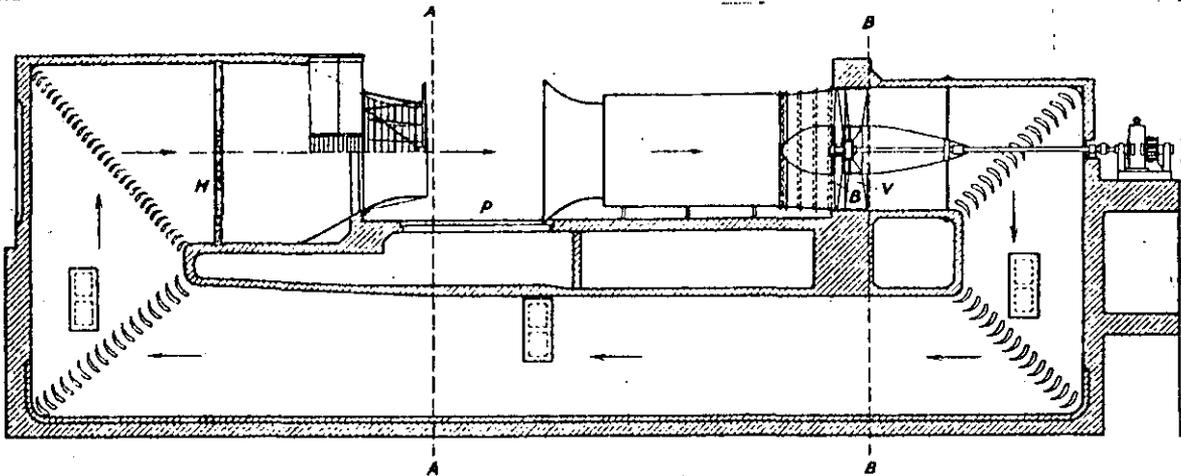


1910; G. EIFFEL; PARIS

SECCIÓN DE PRUEBAS ABIERTA;  
VELOCIDAD MÁXIMA 25 M/S.



1912; L. BAIRTOW Y H. BOOTH; TEDDINGTON. CIRCUITO ABIERTO;  
4 X 4 PIES; TRANQUILIZADOR A LA SALIDA.



1916; L. PRANDTL; GOTINGA. SECCIÓN DE PRUEBAS ABIERTA; PRE-  
SIÓN ATMOSFÉRICA

## CLASIFICACION

SEGÚN LA  
VELOCIDAD  
DEL AIRE

SUBSÓNICOS  
( $< 150$  m/s)

BAJA VELOCIDAD  
ALTA VELOCIDAD

SUPERSÓNICOS  
( $> 150$  m/s)

DE INDUCCIÓN  
INTERMITENTES

SEGÚN EL  
TIPO DE  
CIRCULACIÓN

CIRCUITO ABIERTO

EIFFEL  
N P L

CIRCUITO CERRADO

RETORNO SIMPLE  
RETORNO DOBLE  
RETORNO ANULAR

TIPOS ESPECIALES

PRUEBAS EN PROTOTIPO  
DENSIDAD VARIABLE  
BAJA TURBULENCIA  
BAJA TEMPERATURA  
ESTABILIDAD EN EL VUELO  
BIDIMENSIONAL  
ETC.

## APLICACIONES

## - AERONAÚTICA:

SUSTENTACIÓN Y ARRASTRE DE AVIONES Y OTROS VEHÍCULOS; ESTABILIDAD DEL VUELO; CONTROL DE CAPA LIMITE; DISEÑO AERODINÁMICO Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE ALABES Y PERFILES; ETC.

## - HIDRÁULICA:

DISEÑO DE GEOMETRÍA DE CONDUCTOS; TURBINAS; TRANSPORTE DE SEDIMENTOS; DISEÑO DE COMPUERTAS; TURBULENCIA ALREDEDOR DE CUERPOS SUMERGIDOS; EROSIÓN; ETC.

## - ESTRUCTURAS:

EMPUJE DE VIENTO Y VIBRACIONES CAUSADAS POR EL FLUJO EN EDIFICIOS, PUENTES, CHIMENEAS, TORRES DE TRANSMISIÓN, ETC.

## - METEOROLOGÍA:

SIMULACIÓN DE FENÓMENOS METEOROLÓGICOS; DIFUSIÓN DE CONTAMINANTES EN LA ATMÓSFERA; ETC.

## - PROBLEMAS ESPECIALES:

AERODINÁMICA DE ROTORES ÉOLICOS; AERODINÁMICA DE AUTOMÓVILES Y OTROS TRANSPORTES; ETC.

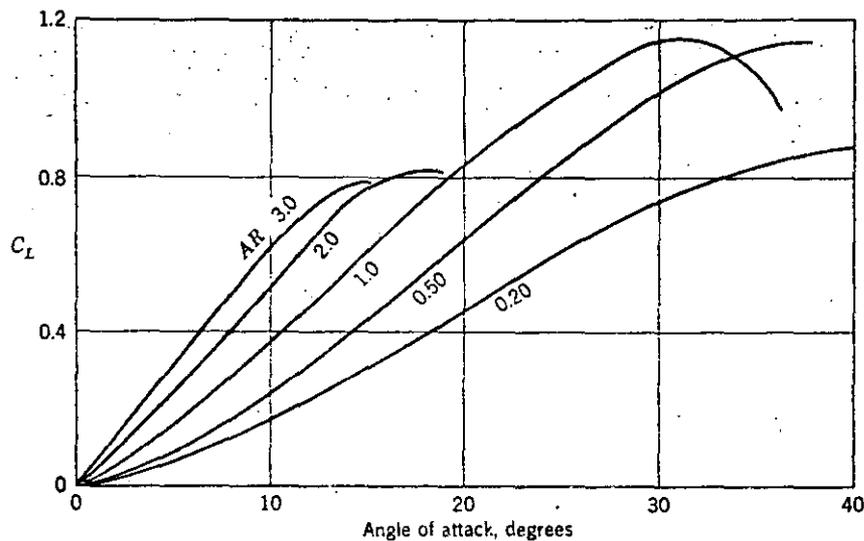


Fig. 5:64 Lift of rectangular flat plates.

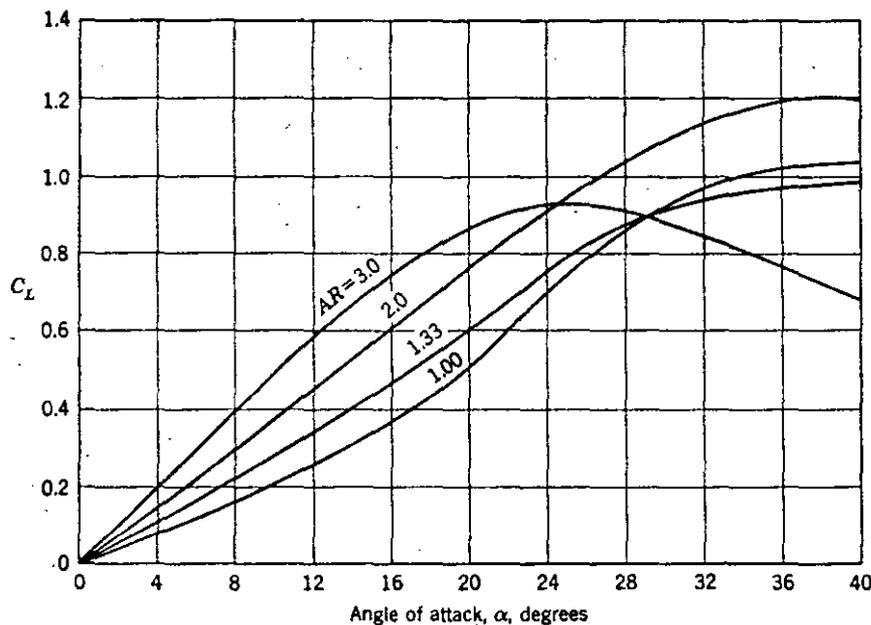


Fig. 5:65 Lift coefficients for delta wings of various aspect ratios, NACA 0012 profile.

tunnel static pressure and the pressure increments are expressed as a fraction of the freestream dynamic pressure. During the work-up the reference may be changed to airplane cabin pressure (if relevant) or other internal pressure.

### 5:22 Testing Low-Aspect-Ratio Wings

The advantages of using low aspect ratios for supersonic airplanes are quite impressive, and not infrequently the tunnel engineer finds himself testing such configurations for low-speed characteristics.

Low-aspect-ratio lift curves may look quite different from those of a high aspect ratio. Below  $AR = 2.0$  the curve is usually concave upward (Figs. 5:64 and 5:65). The lift curve slope at zero lift may be approximated by

$$dC_L/d\alpha = 0.008 + 0.018(AR) \quad (\text{per degree}) \quad (5:58)$$

below  $AR = 3.0$ . For greater aspect ratios, eq. (5:1) should be employed

### 5:23 Testing Engines

The actual operation of piston or jet engines in a wind tunnel for development reasons is a very specialized type of test possible in only a very few wind tunnels. Of the two, the piston engines present less of a tunnel problem, since their exhaust is smaller in quantity than that from a jet engine. The jet engine requires a huge scavenging system sometimes using half as much power as the tunnel itself in order to keep contamination low. This problem, incidentally, has an interesting facet in high-speed work where the presence of rather small amounts of exhaust changes the value of  $\gamma$  and hence confuses the operating Mach number. In some low-speed tunnels the air exchangers can handle the exhaust problem.

Owing to the relative rarity of engine tests, a complete discussion of proper methods will not be presented.

### 5:24 Jettison Tests

It is often necessary to determine the satisfactory release characteristics of tip tanks, underwing stores, bombs, or other devices. Although it is most direct to state that we will design model and test to duplicate the ratio of inertia forces to gravity forces (Froude number), it is probably more instructive to go through the mental gymnastics of a hypothetical case, as follows:

Assume a store 16 ft long and a model 1.6 ft long. Further assume that whenever the full-scale store falls a length, it is pulled back half a length by aerodynamic drag, and pitches 10 deg. The linear acceleration is here 16 ft/sec<sup>2</sup>, and the rotational acceleration 20 deg/sec<sup>2</sup>. Obviously

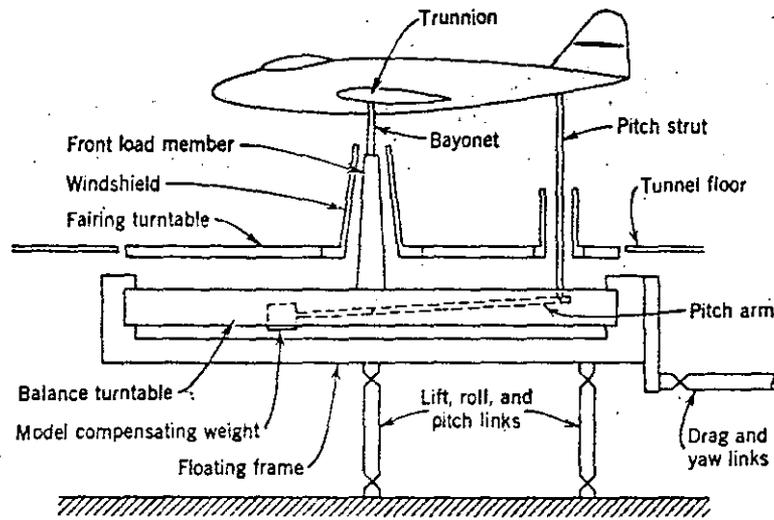


Fig. 4:3 Diagrammatic sketch (greatly simplified) of some balance components.

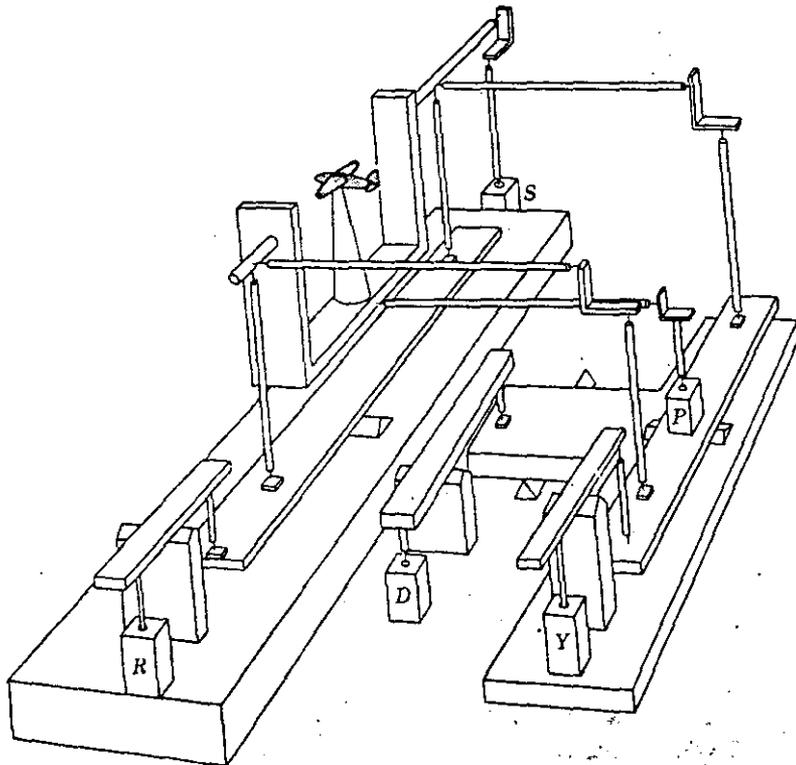


Fig. A balance linkage. The lift linkage (not shown) is beneath the roll table.

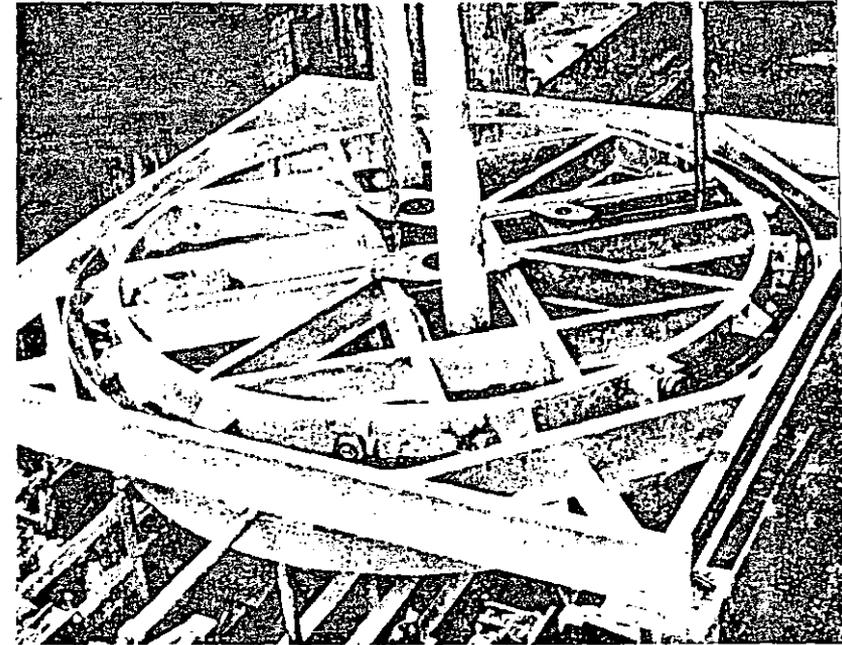


Fig. 4:5 The massiveness of a wind tunnel balance is well illustrated by this photograph of a balance designed for a 150-mph wind tunnel with a 9-ft-diameter test section. During this early setup in the factory the load members have been dropped in place without going through their respective windshield support bases. As shown, the balance has approximately 45 deg negative yaw. (Courtesy Teller and Cooper Co.)

model loads down into a system of linkages that separate them into their proper components. Such an apparatus is shown diagrammatically in Fig. 4:3, and a linkage system is shown in Fig. 4:4. The general massiveness of a balance structure may be seen in Fig. 4:5.

Tracing the pathway followed by the loads from model to measuring unit (Fig. 4:3), we see first the model is supported on two front load members of "struts," and a tail strut.\* The struts, in turn, connect to the inner part of a floating ring frame that is free to turn (model yaw), and a mechanism is provided to raise or lower the tail strut to produce model pitch. The outer part of the floating frame is held in place by a system of struts that are specially designed to be strong in tension and compression but very weak in bending. These struts separate the components of the load by means of a linkage system and feed them into the measuring units. Above the floating frame is a fairing turntable on which the windshields

\* This is the most frequently used arrangement. Others are discussed in later pages.

## Chapter four

### Model force, moment, and pressure measurements

The purpose of the load measurements of the model is to make available the forces, moments, and pressures so that they may be corrected for tunnel boundary and scale effects (Chapters 6 and 7), and utilized in predicting the performance of the full-scale airplane.

The loads may be obtained by any of three methods: (1) measuring the actual forces and moments with a wind tunnel balance; (2) measuring the effect that the model has on the airstream by wake surveys and tunnel-wall pressures; or (3) measuring the pressure distribution over the model by means of orifices connected to pressure gages.

These methods are considered in detail in the following sections.

#### 4:1 Balances

Besides lift, drag, and pitching moment, the airplane is subjected to rolling moment, yawing moment, and side force. This makes a total of six measurements in all: three forces, mutually perpendicular, and three moments about mutually perpendicular axes. The wind tunnel balance must separate these forces and moments and accurately present the small differences in large forces, all without appreciable model deflection. Further, the forces and moments vary widely in size. It is seen that the balance becomes a problem that should not be deprecated; in fact, it might truthfully be said that the balance design is among the most trying problems in the field. The cost of a balance reflects these difficulties, ranging from \$60,000 for a simple balance for a 7 by 10 ft, 150-mph tunnel to \$200,000 for a more complex apparatus for a larger tunnel.

In order to picture the situation most clearly, an impractical wire balance based on readings made with spring scales is shown in Fig. 4:1. The model, supposedly too heavy to be raised by the lift, is held by six wires, and six forces are read by the scales *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, and *F*.

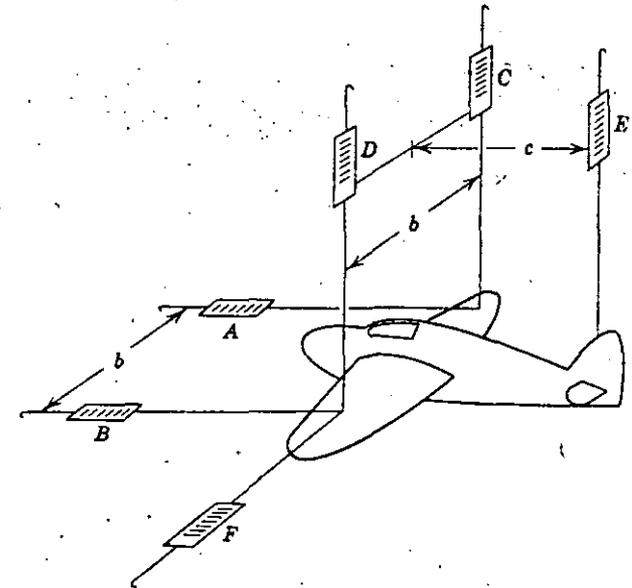


Fig. 4:1. Diagrammatic wind tunnel balance.

1. Since the horizontal wires *A*, *B*, and *F* cannot transmit bending, the vertical force (the lift)  $-L = C + D + E$ .
2. The drag  $D = A + B$ .
3. The side force  $Y = F$ .
4. If there is no rolling moment, scales *C* and *D* will have equal readings. A rolling moment will appear as  $RM = (C - D) \times b/2$ .
5. Similarly, the yawing moment  $YM = (A - B) \times b/2$ .
6. The pitching moment  $M = E \times c$ .

Exact perpendicularity between the components must be maintained. For instance, if the wire to scale *F* (Fig. 4:1) is not exactly perpendicular to wires *A* and *B*, a component of the drag will appear (improperly, of course) as side force. A similar situation exists in regard to lift and drag and lift and side force. Since the lift is the largest force by far in conventional wind-tunnel work, extreme care should be taken to assure its perpendicularity to the other components.

Before we proceed to more complicated balances, Fig. 4:1 should be studied until a clear picture is obtained of the forces and moments to be measured.

Two fundamental types of balances are in general use: external balances, which carry the loads outside the tunnel before they are measured, and internal balances, which fit into the models and are arranged to send

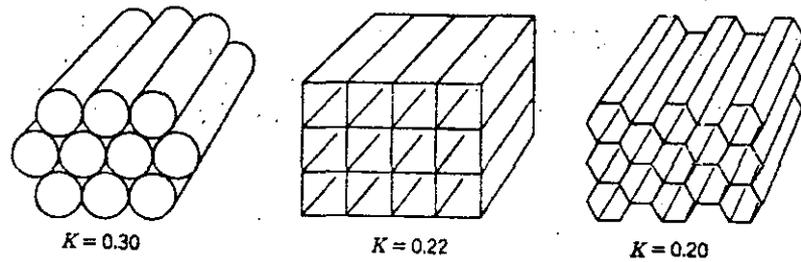


Fig. 2:16 Some honeycombs and their losses.

drop is

$$\Delta p_f = \int_0^{L_c} \lambda \frac{\rho}{2} v^2 \frac{dL}{D}$$

where  $L_c$  = length of contraction cone.

$$K_0 = K \frac{D_0^4}{D^4} = \frac{\Delta p_f}{q} \frac{D_0^4}{D^4} = \int_0^{L_c} \lambda \frac{dL}{D} \frac{D_0^4}{D^4} \frac{D_0}{D_0}$$

$$= \lambda_{ave} \frac{L_c}{D_0} \int_0^{L_c} \frac{D_0^5}{D^5} \frac{dL}{L} \quad (2:40)$$

Assuming a mean value for  $\lambda$ ,

$$K_0 = 0.32\lambda L_c / D_0 \quad (2:41)$$

→ [Since the total loss in the contraction cone usually runs below 3 per cent of the total tunnel loss] any errors due to approximations in the cone losses become of small importance.

Losses in *honeycombs* have been reported by Roberts (Ref. 2:17). Values of  $K$  suitable for use in eq. (2:34a) are given in Fig. 2:16 for

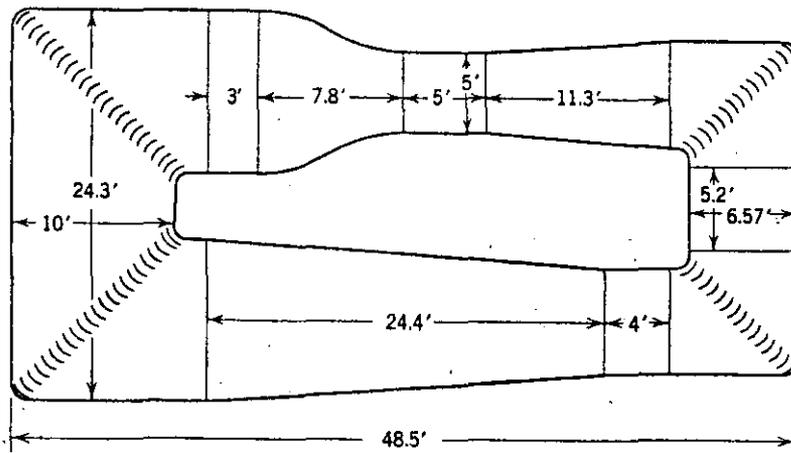


Fig. 2:17 Layout of tunnel used as example.

honeycombs with a length/diameter = 6.0, and equal tube areas. <sup>Approx</sup> Roughly speaking, the loss in a honeycomb is usually less than 5 per cent of the total tunnel loss.

The losses incurred in the single-return tunnel of Fig. 2:17 based on a tunnel temperature of 100°F ( $\rho/\mu = 5560$ ) and a test section velocity of 100 mph are as tabulated.

Section	$K_0$	% Total Loss
1. The jet	0.0093	5.1
2. Divergence	0.0391	21.3
3. Corner	0.046	25.0
4. Cylinder	0.0026	1.4
5. Corner	0.046	25.0
6. Cylinder	0.002	1.1
7. Divergence	0.016	8.9
8. Corner	0.0087	4.7
9. Corner	0.0087	4.7
10. Cylinder	0.0002	0.1
11. Cone	0.0048	2.7
	0.1834	100.0

Energy ratio,  $ER_1 = 1/\Sigma K_0 = 1/0.1834 = 5.45$

Probably this figure should be reduced about 10 per cent for leaks and joints.

The effect of varying the angle of divergence or the contraction ratio for a tunnel similar to the one of Fig. 2:17 may be seen in Figs. 2:18 and 2:19.

The possibility of attaining higher energy ratios has several promising

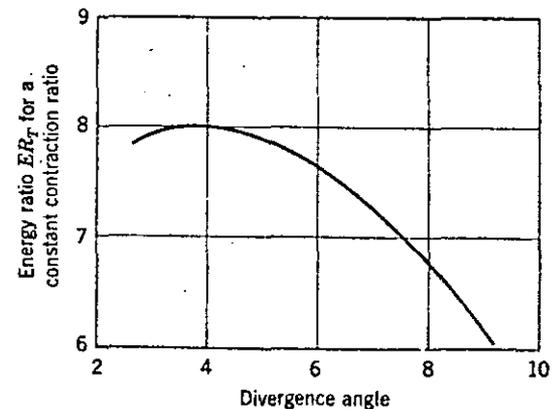


Fig. 2:18 Effect of divergence angle on energy ratio.

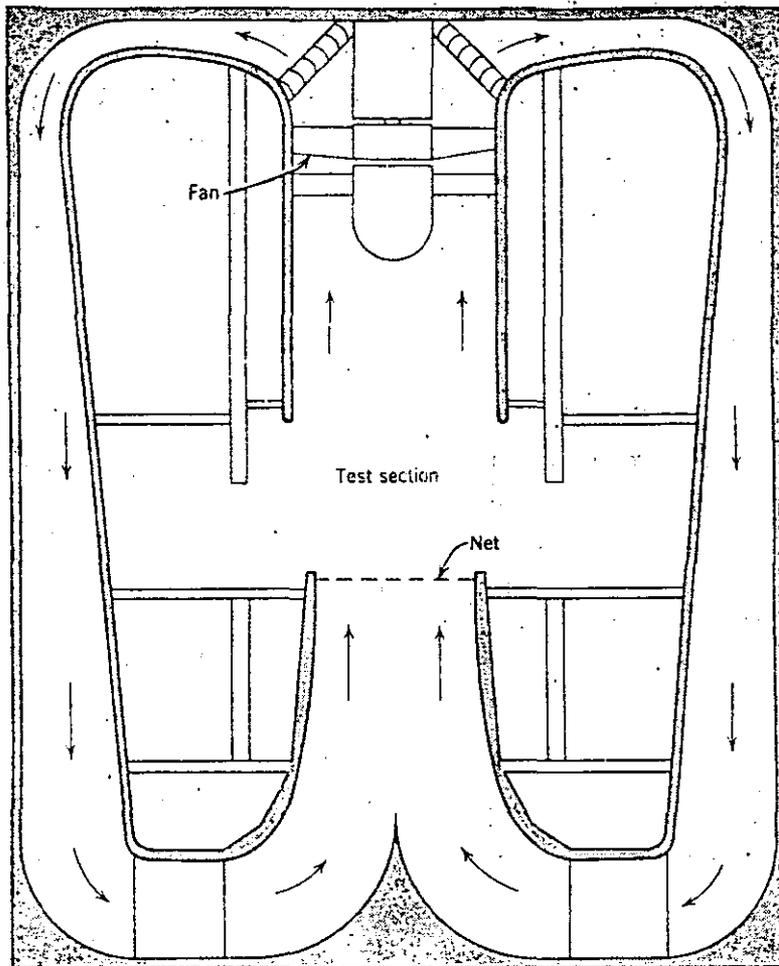


Fig. 1:13 Vertical wind tunnel with open test section.

NASA; a smaller one is at the NAE in Ottawa, Canada; a 15-ft pressurized spin tunnel is at the RAE in Bedford, England; and there is a spin tunnel in Russia. Spin tunnels (Fig. 1:13) differ from ordinary tunnels with vertical test sections in that they (1) have a saucer-shaped velocity gradient in the test section about 5 to 10 per cent lower at the centerline than at the edge, which tends to keep the spinning model in the center; and (2) they have a fast-response drive system (say one-half G) to adjust the tunnel speed to rapid changes in model drag. Almost the only drive capable of such rapid changes is a synchronous motor with a

variable-pitch propeller having a pitch change up to 6 deg per second. Although early spin tunnels had fairly low velocities (say 60 to 80 ft/sec), the newer aircraft with high wing loadings need as much as 140 ft/sec.

Whereas most tunnels can be operated by one man (after setup), spin tunnels take three: one for speed adjustment, one for photography, and one to inject the model.

The spin tunnel is useful for a number of other tests besides spin recovery. These include pilot escape by jumping or ejection, tumbling of tailless aircraft, parachute performance (including various rotating types) and the motion of parachute or rotorchute stabilized bodies. Parachute testing would be enhanced by changing the gradient to one with the maximum velocity (again 5 to 10 per cent) in the center, since parachutes move towards areas of highest velocity.

Figure 1:14 shows a model being injected into a spin tunnel. Model and spin tunnel testing procedures are discussed in Section 5:18.

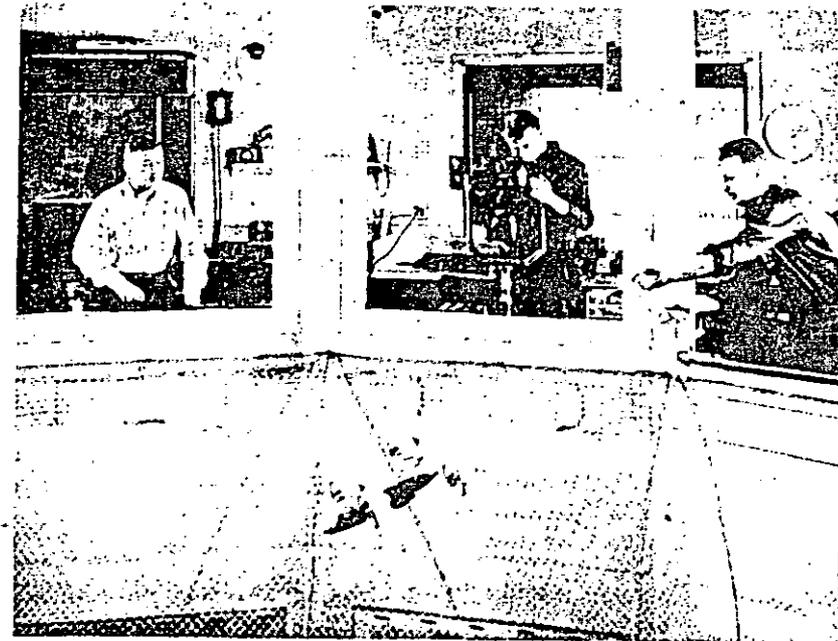


Fig. 1:14 Studying the spin recovery of the X-22A tilt-duct V/STOL aircraft in the Langley spin tunnel. The man at the left adjusts the speed of the vertical airstream, the center man makes a photographic record, and the man at the right has just tossed the model in so that it starts spinning. (Courtesy National Aeronautics and Space Administration.)

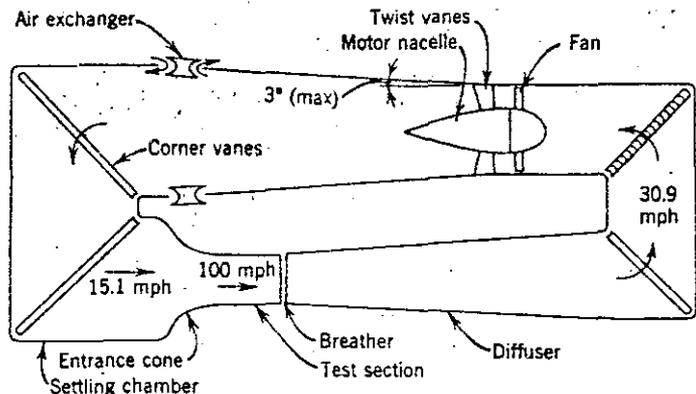


Fig. 1:3 A conventional single-return wind tunnel. Although we have defined low-speed tunnels as not needing air exchangers for cooling, we have let the figure show how they look. An alternative cooling device would be a radiator near the corner vanes before the settling chamber.

### 1:3 Types of Wind Tunnels

There are two basic types of wind tunnels. The first, called an open-circuit (or "Eiffel" or, "NPL")\* tunnel, has no guided return of the air (see Fig. 1:4). After the air leaves the diffuser, it circulates by devious paths back to the intake. If the tunnel draws its air directly from the atmosphere, entirely fresh air is used.

The second type, called a closed-circuit or "Prandtl," "Göttingen," or "return-flow" tunnel, has, as the last name implies, a continuous path for the air (see Fig. 1:3). The speeds shown are to illustrate the speed changes in the circuit. There is nothing significant about the values.

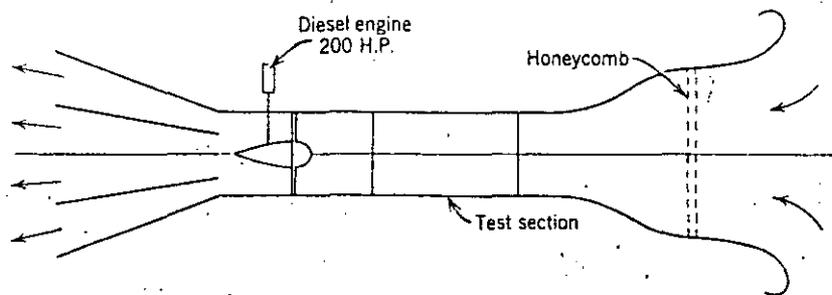


Fig. 1:4 Sketch of British Aircraft Corporation's new V/STOL open-circuit tunnel.

\* Strictly speaking, the Eiffel-type tunnel has an open jet, whereas the NPL type has a close. Both are open-circuit tunnels.

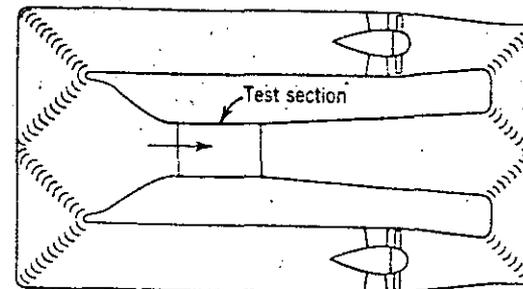


Fig. 1:5 Double-return wind tunnel.

The closed circuit may be one of three types: single- (Fig. 1:3), double- (Fig. 1:5), or annular- (Fig. 1:6) return. Of these, only the first is in general acceptance at present. In the double- and annular-return arrangements, the particular air that scrapes along the walls of the return passage forms the center of the jet and hence passes directly over the model. Unless the contraction ratio is large, this air is extremely turbulent and tends to make the interpretation of the test data difficult. A further disadvantage of the double-return tunnel is that a variation in velocity distribution may be caused by yawing a large model. In the single-return tunnel, the general mixing and stabilizing effect of the fan tends to re-establish any flow variation due to the model, but in the double-return type the flow deflected to one side can remain there, impairing the roll and yaw data.

Further identification of wind tunnels may be made through the cross-sectional form of the test section. It may be square, rectangular, rectangular with tempered corners, octagonal, circular, or elliptic. The test section may be completely walled in (closed jet) or it may consist simply of an open space with the air streaming from the entrance cone to the exit cone. Whether the test section is open or closed, the boundaries affect the flow about the model, and the test data must be corrected to

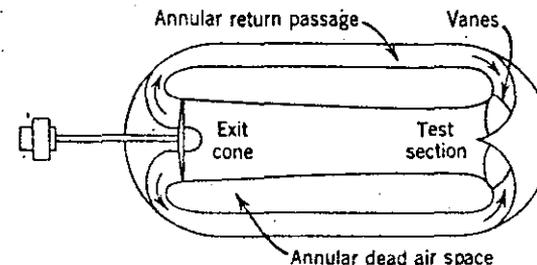


Fig. 1:6 Annular-return wind tunnel.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIDAD 5

EL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE COMO INSTRUMENTO  
BASICO DE MEDICION EN LA MECANICA DE FLUIDOS.

Jaime Cervantes de Gortari  
División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
y División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería, UNAM

RESUMEN

Se señala la importancia que tiene la experimentación en la mecánica de fluidos. Se presentan las características esenciales del anemómetro de hilo caliente y se describe su empleo en la medición de fluctuaciones de velocidad.

EL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE COMO INSTRUMENTO BASICO DE  
MEDICION EN LA MECANICA DE FLUIDOS

Jaime Cervantes de Gortari  
División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
y División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería, UNAM

1. INTRODUCCION

Posiblemente la mecánica de fluidos constituye uno de los mejores ejemplos entre las disciplinas básicas de la ingeniería donde el avance en el conocimiento de su objeto de estudio se ha logrado gracias al complemento que de los métodos teóricos ha hecho la experimentación. En efecto, desde los primeros tratamientos científicos extensos del movimiento de los fluidos en el siglo pasado hasta el desarrollo tan importante de ramas como la aerodinámica en las últimas décadas, el método experimental ha jugado un papel preponderante. La mecánica de fluidos, comparada con otras ciencias físicas, tal vez posee una de las bases matemáticas más completas y extensas: generalmente es posible formular las ecuaciones diferenciales que describen los cambios de velocidad, presión, temperatura y algunas otras cantidades de interés y completar matemáticamente el problema al especificar las condiciones de frontera apropiadas. Sin embargo, hasta ahora no ha sido posible resolver de forma general tales ecuaciones y solamente se han encontrado soluciones particulares, muchas veces aproximadas, cuando algunos términos de las ecuaciones se han despreciado, habiéndose necesitado en la mayor parte de los casos de resultados empíricos. Como consecuencia de lo anterior, una cantidad importante de los procedimientos de diseño relacionados con el manejo de los fluidos se han basado necesariamente en la experimentación. De esta manera, la mecánica de fluidos experimental se ha constituido en la actualidad tanto en una disciplina en sí misma, ofreciendo un método para resolver problemas de escurrimiento de fluidos sin incluir algunas veces un soporte teórico o matemático, como en un método para la obtención de información o para la comprobación de modelos teóricos de

relativa complejidad.

Entre los procedimientos más comunes con que cuenta la mecánica de fluidos experimental para sus objetivos, se encuentra el de efectuar pruebas en instalaciones (que pueden o no ser modelos de escala geométrica reducida) diseñadas y construidas adecuadamente. Dichas pruebas pueden consistir desde visualizaciones del flujo utilizando técnicas comúnmente aceptadas en la actualidad hasta mediciones complejas con suficiente grado de precisión.

Al intentar seleccionar un instrumento para una medición específica, el modo de operación del aparato reviste singular importancia pues de él dependerá la confiabilidad que se tenga en los resultados experimentales y determinará eventualmente el grado competitivo del instrumento comparado con otros de naturaleza semejante. Es difícil caracterizar en forma completa y detallada, la manera como un instrumento mide fidedignamente una variable física de interés. Existen sin embargo, Criterios simplificados comúnmente aceptados, mediante los cuales se puede conocer con cierto detalle el funcionamiento del instrumento. Estos criterios generalmente se pueden agrupar dentro de lo que se conoce como características estáticas y características dinámicas del sistema. No se hará aquí un estudio de este tema pues constituye en si mismo una disciplina además de que llenaría mucho espacio. (Para una revisión clara de estos conceptos consúltese por ejemplo, Doeblin [1]).

La mecánica de fluidos experimental cuenta con una amplia variedad de instrumentos y técnicas de medición que van desde la simple observación de trazadores introducidos en el flujo hasta instrumentos sofisticados como el recientemente desarrollado velocímetro de rayos laser basado en el efecto Doppler. Cada instrumento tiene su propio rango de aplicaciones donde resulta más adecuado. Para el caso de mediciones de velocidad en un escurrimiento se dispone de instrumentos sumamente confiables, entre los que destacan el tubo de Pitot, el orificio

medidor, el tubo de Venturi, etc. Sin embargo, con estos dispositivos solamente se pueden medir con suficiente precisión, valores medios temporales o valores constantes de la velocidad en un punto. Cuando se quiere determinar velocidades que fluctúan o cambian en forma repentina, es necesario utilizar instrumentos cuya respuesta sea suficientemente rápida. Tal es el caso del anemómetro de hilo caliente cuyas características se examinan en lo que sigue.

## 2. EL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE. GENERALIDADES Y DESCRIPCIÓN.

El anemómetro de hilo caliente es actualmente un instrumento universalmente utilizado para la medición de velocidades fluctuantes en un escurrimiento. Debido a que la principal motivación para su desarrollo fue la necesidad de contar con un dispositivo suficientemente confiable para la investigación en la turbulencia, es precisamente en este campo donde encuentra su aplicación más natural. Dadas sus características generales tanto físicas como de operación, entre las que destacan:

- a) la suficiente pequeñez del elemento que se introduce en el flujo, de tal manera que los disturbios causados al introducirlo se mantienen en un mínimo aceptable,
- b) la respuesta prácticamente instantánea, sin distorsión, de todo el sistema de medición hasta frecuencias de varios miles de Hz,
- c) la sensibilidad para detectar pequeños cambios en el valor de la cantidad fluctuante, del orden de 1 a 2% del valor medio, el anemómetro de hilo caliente se puede utilizar prácticamente en todos los casos donde se necesite medir velocidades fluctuantes.

El anemómetro de hilo caliente consta de dos partes: un elemento sensor (el hilo caliente) y un circuito electrónico cuya base es un puente de Wheatstone. La combinación de los dos hace posible detectar cambios muy rápidos de temperatura, com

posición o velocidad. El elemento sensor consiste de un segmento corto (1 o 2mm) de alambre el cual se calienta haciendo pasar una corriente eléctrica a través de él. El fluido que circula alrededor del alambre tiende a enfriarlo mediante el mecanismo de convección forzada; al reducirse la temperatura del alambre, disminuye también la resistencia eléctrica y basándose en este resultado se puede cuantificar el cambio de velocidad en el escurrimiento alrededor del alambre.

Generalmente los alambres usados como elemento sensor tienen diámetros del orden de 5 micras y están hechos de tungsteno, platino o aleaciones de platino-iridio y platino-rodio. Típicamente tienen una resistencia eléctrica "fría" (es decir, a la temperatura ambiente) de 3.5 ohms y cuando se calientan para su operación, esta resistencia es del orden de 7 ohms. En general se prefiere usar metales puros ya que tienen mayores coeficientes de resistencia-temperatura. Así, el tungsteno tiene un coeficiente de 0.004 ohms/°C y el platino de 0.003 ohms/°C; el primero tiene mayor resistencia mecánica, pero se oxida fácilmente a temperaturas relativamente altas; el platino tiene las características opuestas; las aleaciones tienen características intermedias entre el tungsteno y el platino, pero poseen un bajo coeficiente de resistencia-temperatura (por ejemplo, 0.00085 ohms/°C para el platino-iridio). En la actualidad el material más popular es quizás el tungsteno, el cual cuando se le recubre de una capa delgada de cobre o de platino se hace más resistente a la oxidación y se puede soldar más fácilmente a las puntas del soporte.

El platino tiene una ventaja adicional sobre el tungsteno: se dispone comercialmente con un recubrimiento delgado de plata (proceso Wollanston) haciendo más fácil su manejo y montaje en el sensor. En la Tabla 1 se indican las características de los materiales más comunes usados en la manufactura de hilos para anemómetros.

Recientemente se han desarrollado sensores conocidos bajo el

nombre de "película caliente" los cuales permiten contrarrestar algunas desventajas que se tienen con los sensores de hilo caliente como son la acumulación de basura y contaminantes en el alambre que modifican sus características de calibración, y su extremadamente baja resistencia mecánica. Un sensor de película caliente consiste esencialmente en una película metálica adherida a una base de cerámica y posiblemente recubierta con una delgada capa de cuarzo o algún material semejante. Comparado con un sensor de hilo caliente posee las siguientes ventajas: (a) mejor respuesta de frecuencia que un hilo del mismo diámetro debido a que la parte sensible del sensor se encuentra distribuida sobre la superficie sin incluir todo el cuerpo del sensor; (b) para la misma relación de longitud a diámetro, el sensor de película ofrece menor conducción de calor hacia los soportes; (c) mayor flexibilidad en la configuración del sensor (se dispone de sensores en forma de cuñas, conos, superficie planas, etc., fig. 1); (d) mayor resistencia a la contaminación y facilidad en su limpieza. Con todo, debido al menor tamaño que se puede lograr con un sensor de hilo caliente, dando lugar a una mejor respuesta de frecuencia, este tipo de sensor resulta superior en numerosas aplicaciones.

Tabla 1. Materiales más comunes para la manufactura de hilos anemómetro. (Tomada de Bradshaw [2]).

Material	Esfuerzo de rotura	Temperatura máxima	Diámetro mínimo	Coefficiente de resistencia temperatura.	Resistividad eléctrica	Conductividad térmica
	N/cm <sup>2</sup>	°C	μ m	Ω/°C	Ωcm	W/cm°C
Tungsteno	250,000	300	2.5	0.0040	4.9x10 <sup>-6</sup>	1.9
Platino	30,000	1200	1	0.0038	9.8x10 <sup>-6</sup>	0.7
Platino-rodio (90/10)	60,000	1400	0.6	0.0016	19.0x10 <sup>-6</sup>	0.4

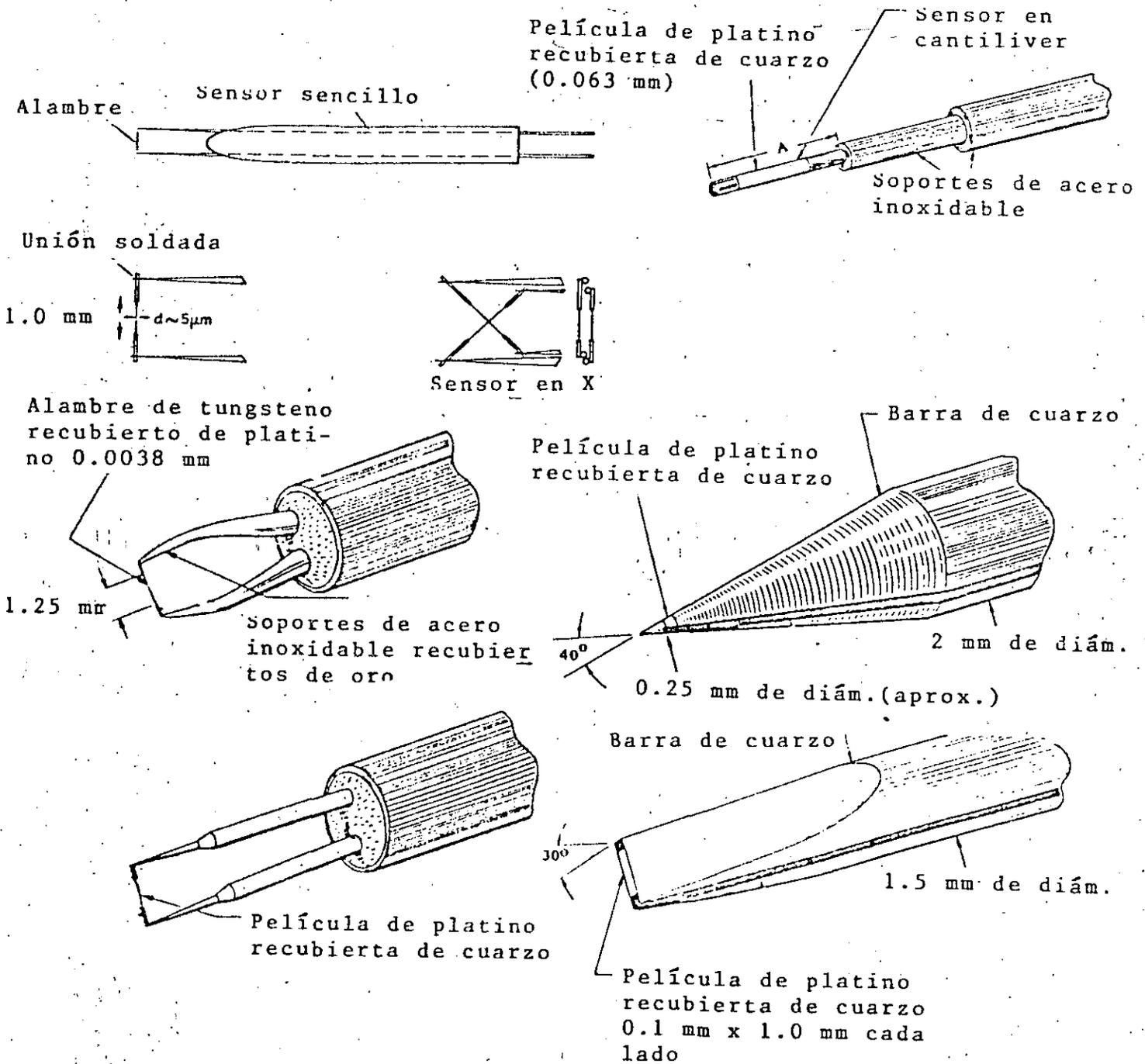


Fig. 1 Diferentes tipos de sensores

Para una descripción más detallada de las características mecánicas, eléctricas, térmicas, etc., de los materiales usados en ambos tipos de sensores, consúltese Sandborn [3]

### 3. TRANSFERENCIA DE CALOR

El calor generado dentro del alambre por efecto Joule al pasar una corriente eléctrica a través de él, se transfiere hacia el exterior del alambre mediante los mecanismos de radiación, convección natural, conducción a lo largo del alambre hacia los soportes y convección forzada. La pérdida de calor por radiación es solamente del orden de 0.1 por ciento del calor total generado y generalmente se puede despreciar excepto en flujos de densidad muy baja. El calor transferido por convección natural resulta importante en escurrimientos muy lentos y un criterio para considerarlo despreciable, establecido por Collis y Williams [4], es que el número de Reynolds debe ser más grande que el doble de la raíz cúbica del número de Grashof (relación entre las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas). Típicamente, este número es del orden de  $6 \times 10^{-6}$ , pudiéndose entonces despreciar los efectos de convección natural si la velocidad del flujo es mayor que 5cm/seg. A continuación se describe con más detalle la convección forzada y la conducción hacia los soportes.

La convección forzada desde un alambre a temperatura  $T$  sumergido en un fluido a temperatura  $T_f$  con velocidad  $v$  perpendicular al alambre, se puede expresar a través del número de Nusselt:

$$N_u = \frac{hd}{k_f} \quad (1)$$

donde  $h$  es el coeficiente de convección,  $d$  es el diámetro del alambre y  $k_f$  es la conductividad térmica del medio. En general esta transferencia de calor depende de:

- la velocidad del flujo
- las dimensiones del alambre
- las propiedades del fluido (viscosidad, conductividad térmica, etc.)
- la diferencia de temperaturas entre el alambre y el fluido.

La velocidad del flujo y las dimensiones del alambre se pueden tomar en cuenta mediante el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho_f U d}{\mu_f} \quad (2)$$

mientras que las propiedades del fluido quedan expresadas a través del número de Prandtl:

$$Pr = \frac{C_p \mu_f}{k_f} \quad (3)$$

De este modo se puede escribir:

$$Nu = f \left( Re, Pr, \frac{T}{T_f} \right) \quad (4)$$

Se tienen esencialmente dos procedimientos a seguir para conocer la función  $f$  en (4): uno de carácter empírico desarrollado por Kramers, van der Hegge Zijnen, Collis y Williams entre otros, y el otro de tipo semiempírico establecido en sus orígenes por King y Boussinesq.

De acuerdo al primer criterio, se han logrado establecer correlaciones experimentales válidas en ciertos rangos de los parámetros adimensionales; por ejemplo:

$$Nu = 0.42 Pr^{0.20} + 0.57 Pr^{0.33} Re^{0.50} \quad (5)$$

para  $0.71 < Pr < 1000$  y  $0.1 < Re < 1000$ .

En general, se han efectuado más experimentos en forma sistemática para determinar el efecto del número de Reynolds que el efecto del número de Prandtl. Una de las recopilaciones más completas en este sentido efectuadas recientemente es la de Laurence y Sandborn [5]. Probablemente (Bradshaw [2]) entre las correlaciones más precisas obtenidas hasta la fecha se encuentre la de Collis y Williams:

$$Nu \left( \frac{T_m}{T_f} \right)^{-0.17} = A + B Re^n \quad (6)$$

donde:

	0.02 < Re < 44	44 < Re < 140
N	0.45	0.51
A	0.24	0
B	0.56	0.48

siendo  $T_m = \frac{T + T_f}{2}$  la temperatura para la cual se tomaron las propiedades del fluido.

De acuerdo con el segundo procedimiento, King [6] estableció en 1914 que la forma de la ec. (4) debería ser:

$$Nu = A + B Re^{1/2} \quad (7)$$

fórmula conocida actualmente como ley de King. Esta ecuación, una vez determinados A y B, no es de suficiente aproximación fundamentalmente por el exponente de Re y solamente tiene interés histórico por ser la única formulación semiempírica obtenida con éxito hasta la fecha.

En general, es preferible efectuar una calibración para cada sensor en particular que se tenga y utilizar las correlaciones anteriores para una comprobación de los resultados obtenidos en la calibración o para un análisis teórico del comportamiento del anemómetro, como se hará más adelante en estas notas.

En relación con la conducción de calor del alambre hacia los soportes, se puede hacer un análisis aproximado. Los soportes generalmente se escogen mucho más gruesos que el alambre por razones de robustez y con objeto de que no se calienten apreciablemente por la corriente eléctrica. De esta manera la temperatura de los soportes es prácticamente la misma que la del fluido y definitivamente existe conducción de calor a lo largo del alambre. Si en forma simplificada se supone que la convección de calor hacia el fluido es directamente proporcional a la diferencia entre  $T_f$  y la temperatura local del alambre,

se obtiene una ecuación de segundo orden para  $T$  como función de la distancia a lo largo del alambre medida desde su punto medio. La solución aproximada de esta ecuación (Bradshaw [2]) es:

$$\frac{T-T_f}{T_\infty-T_f} = 1 - \frac{\cosh z/\ell_c}{\cosh L/2\ell_c} \quad (8)$$

donde  $T_\infty$  es la temperatura que tendría un alambre infinitamente largo y  $\ell_c$  es la llamada "longitud fría" del alambre (la resistencia eléctrica total corresponde a la de un alambre de longitud  $L-z\ell_c$  y temperatura  $T_\infty$ ), cuyo valor es:

$$\ell_c = \frac{d}{2} \left( \frac{R}{R_f} \frac{k_w}{k_f} \frac{1}{Nu} \right)^{1/2} \quad (9)$$

En la fig. 2 aparece la distribución de temperaturas en el alambre de acuerdo a la ec. (8).

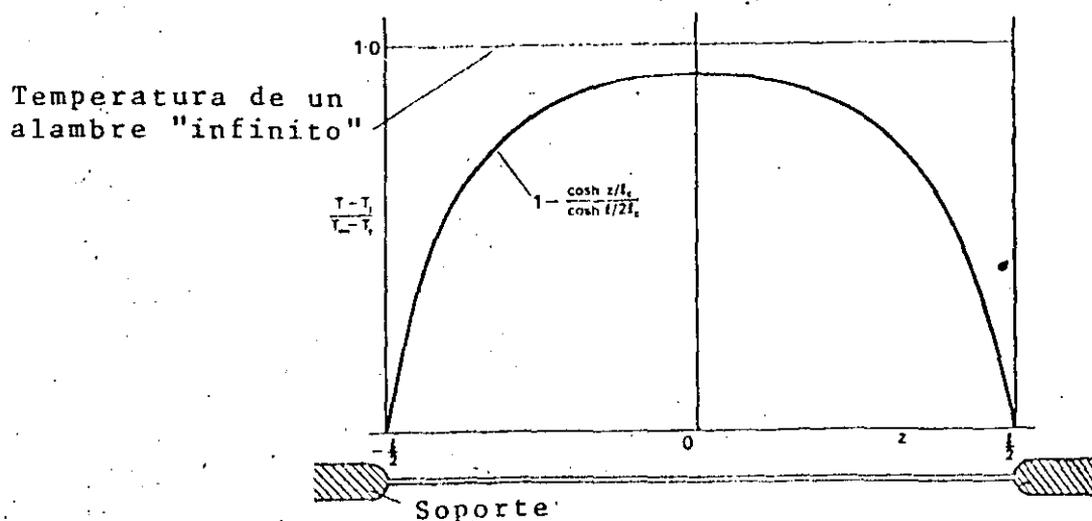


Fig. 2 Distribución de temperatura a lo largo del alambre

Para un alambre típico de tungsteno operado con  $R/R_a = 2$ ,  $\ell_c$  es del orden de  $30 d$  y si  $L/d = 200$ , la diferencia promedio de temperatura  $T - T_f$  es del orden de  $0,7 (T_\infty - T_f)$  y la diferencia

de temperaturas en el centro del alambre es aproximadamente 0.93  $(T_{\infty} - T_f)$ . El cociente del calor conducido a través de ambos soportes, entre el calor de convección hacia el fluido, está dado aproximadamente por:

$$\frac{Q_s}{Q_f} = \left( \frac{R}{R_f} \frac{k_w}{k_f} \right)^{1/2} \frac{d}{L} \frac{l}{Nu^{1/2}} \quad (10)$$

y resulta ser aproximadamente de 15%.

La distribución no uniforme de temperatura a lo largo del alambre tiene varios efectos que conviene resumir. En primer lugar, la temperatura en el punto medio del alambre resulta mayor que la que se podría inferir al medir su resistencia eléctrica y por lo tanto la oxidación en este punto se presenta antes de lo esperado. Por otro lado, las constantes de calibración dependen de la longitud del alambre y esto hace desconfiar de las calibraciones universales como la de Kramers o la de Collis y Williams. Finalmente la respuesta del alambre a las fluctuaciones en la transferencia de calor ocasiona redistribuciones de la temperatura, lo cual tiene como principal efecto alteraciones en la conducción de calor hacia los soportes. Estos cambios se caracterizan por tiempos de respuesta sumamente lentos comparados con el recíproco de las frecuencias que típicamente se tienen en un flujo turbulento, particularmente para alambres muy cortos. Más adelante se presentará un análisis aproximado acerca de este aspecto y se verá la necesidad de emplear algún sistema para la compensación correspondiente.

#### 4. MODOS DE OPERACION

Existen dos formas básicas de funcionamiento de un anemómetro de hilo caliente: a corriente constante y a temperatura constante. A continuación se describirán cada una de las dos, atendiendo a una operación del sistema en estado permanente y después se hará un análisis simplificado de sus aspectos dinámicos, estimando la constante de tiempo correspondiente.

### Operación a corriente constante

De acuerdo con este método se pueden utilizar dos circuitos básicos: (a) fig. 3, el alambre se coloca en serie con una batería, un reóstato y una resistencia mucho mayor que la del hilo; esta resistencia permite que la corriente ajustada por el reóstato, se mantenga aproximadamente constante sin importar las variaciones en la resistencia del hilo debidas al enfriamiento; la caída de voltaje a través del hilo queda relacionada con la velocidad media del flujo, si se ha calibrado previamente el alambre, (b), fig. 4, el hilo constituye un brazo de un puente de Wheatstone; la caída de voltaje a través del alambre una vez que se balancea el puente mediante otro de sus brazos, es una medida de la velocidad del flujo, previa calibración,

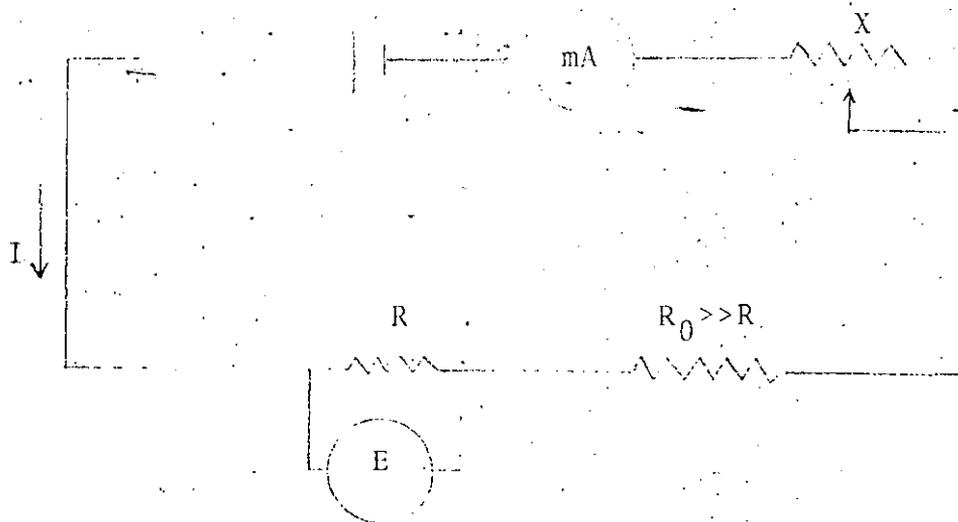


Fig. 3 Circuito básico para operación a corriente constante

Generalmente se utiliza un amplificador para elevar el voltaje de la señal a niveles adecuados para su registro u observación. Si el cambio de velocidad en el flujo se lleva a cabo muy rápidamente, la respuesta del sensor se atrasará significativamente con respecto a dicho cambio, debido a la inercia térmica del alambre. Es necesario en tal caso emplear un circuito de compen

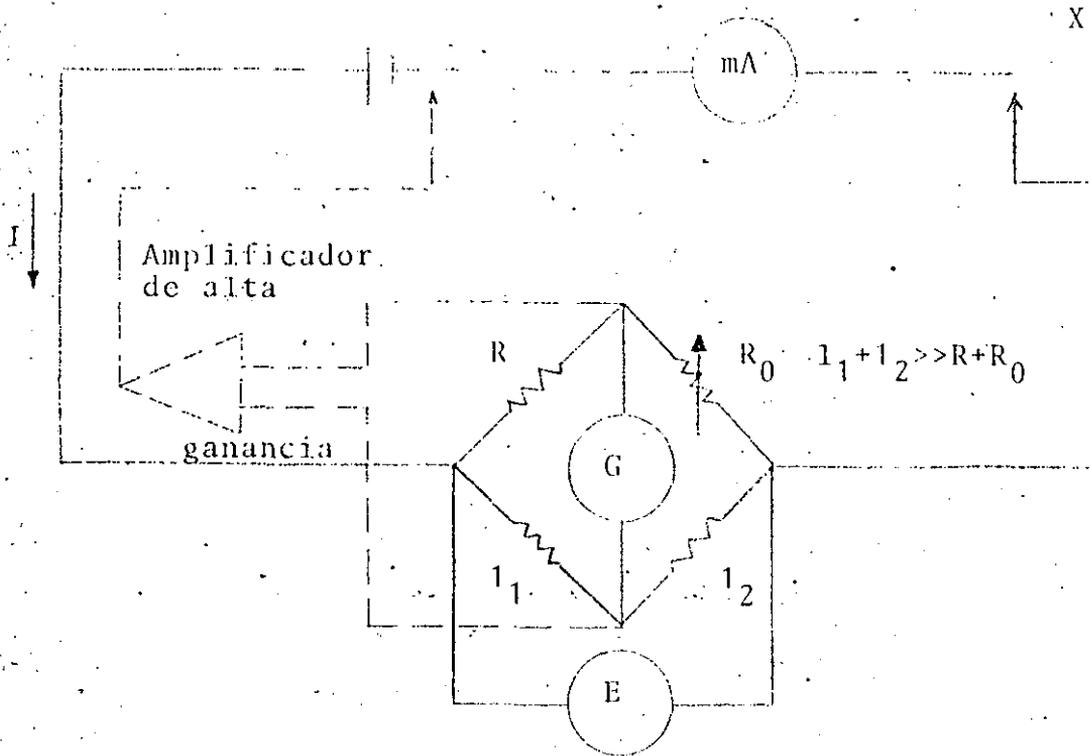


Fig. 4 Puente de Wheatstone.

sación adecuado, una vez que se haya determinado experimentalmente la constante de tiempo del sistema. La mayor dificultad al usar el método de corriente constante es que al depender la respuesta a la frecuencia del sensor tanto de las características del alambre mismo como de las características del escurrimiento, el amplificador de compensación debe reajustarse cada vez que cambie la velocidad media. En general se prefiere utilizar este método para los casos en que se tienen cambios de velocidad muy pequeños comparados con la velocidad media o para mediciones de temperatura donde solamente se necesitan corrientes eléctricas muy pequeñas a través del alambre, manteniendo de esta manera al hilo y al fluido en equilibrio.

#### Operación a temperatura constante

El circuito básico para la operación de un anemómetro a tempe-

ratura constante está formado también por una batería en serie con un reóstato y un puente de Wheatstone (fig. 4); en este caso, el aire al enfriar el sensor reduce su resistencia  $R$ , desbalanceando el puente; éste se balancea restaurando  $R$  a su valor original, pero ahora se utiliza el reóstato  $X$  en lugar de un segundo brazo del puente. Así, se ha modificado la corriente y mantenido constante la resistencia y su temperatura. La operación descrita se puede hacer manualmente en cuyo caso no presenta ventaja con respecto al método de corriente constante si se tienen cambios de velocidad bruscos; sin embargo, este sistema permite utilizar un amplificador de retroalimentación el cual si tiene suficiente ganancia, cualquier cambio en la resistencia del sensor será inmediata y automáticamente corregido. Así, la resistencia y la temperatura del sensor se mantienen constantes y el voltaje de salida del amplificador corresponderá al voltaje necesario para reajustar la corriente correspondiente. La constante de tiempo del sensor se hace efectivamente mucho menor y el sistema responderá adecuadamente a fluctuaciones con frecuencias altas.

Para terminar esta descripción de los modos de operación del anemómetro de hilo caliente, se resumirán las ventajas del sistema a temperatura constante.

- (a) El sistema es compatible con sensores del tipo película o placa caliente mientras que el sistema a corriente constante no lo es debido a las características de respuesta a la frecuencia muy complejas de la película;
- (b) la operación a temperatura constante evita que el sensor se quemé cuando la velocidad y el enfriamiento se reducen sustancialmente (esto es particularmente crítico en el caso de líquidos donde estos cambios son más drásticos);
- (c) es posible emplear linealización (se verá más adelante);
- (d) con el sistema a temperatura constante, se obtiene un voltaje de salida CD, mientras que la respuesta de un anemómetro de corriente constante está limitado a valores del orden de 2 Hz.

## 5. CARACTERISTICAS DINAMICAS. CONSTANTE DE TIEMPO

Consideremos ahora de manera simplificada, los aspectos dinámicos en la operación del anemómetro de hilo caliente. Un balance entre el calor generado por la corriente eléctrica durante un intervalo de tiempo  $dt$  por efecto Joule, la pérdida de calor por convección hacia el fluido durante el mismo intervalo y la energía almacenada como energía interna en el alambre, da como resultado la siguiente ecuación básica:

$$I^2 R dt = Ah(T - T_f) dt + mc dT \quad (11)$$

Por otro lado, la resistencia del alambre se puede expresar en función de la temperatura como:

$$R = R_f [1 + \alpha(T - T_f)] \quad (12)$$

donde  $R_f$  es la resistencia "fría" del alambre.

Dividiendo la ec. (11) entre  $dt$  y sustituyendo las temperaturas de la expresión (12):

$$I^2 R = \frac{C_1}{R_f} (R - R_f) Nu + C_2 \frac{dR}{dt} \quad (13)$$

donde

$$C_1 = \frac{kA}{\alpha d} ; \quad C_2 = \frac{mc}{\alpha R_f} ; \quad Nu = \frac{hd}{k}$$

estando  $Nu$  relacionado con la velocidad del flujo mediante una expresión del tipo (7) y siendo:

A = área exterior	} del alambre;	k = conductividad
d = diámetro		térmica del
m = masa		fluido
c = calor específico		h = coeficiente de
$\alpha$ = coeficiente de temperatura		convección

Consideremos ahora el problema en estado permanente; un número de Nusselt constante  $\bar{Nu}$  como excitación producirá una resistencia del alambre constante  $\bar{R}$  como respuesta, a través del cual se tiene una corriente constante  $\bar{I}$ :

$$\bar{I}^2 \bar{R} = \frac{C_1}{R_f} (\bar{R} - R_f) \bar{Nu} \quad (14)$$

Supongamos que se tiene una pequeña perturbación en el número de Nusselt,  $\delta Nu$ ; se obtendrán entonces perturbaciones correspondientes  $\delta R$  y  $\delta I$ . Sustituyendo en (13) y despreciando los cuadrados y productos de estas pequeñas perturbaciones:

$$2(\bar{I} + \delta I)^2 (\bar{R} + \delta R) = \frac{C_1}{R_f} (\bar{R} + \delta R - R_f) (\bar{Nu} + \delta Nu) + C_2 \frac{d}{dt}(\delta R) \quad (15)$$

Restando (14) de (15):

$$2\bar{I}\delta I\bar{R} + \bar{I}^2\delta R = \frac{C_1}{R_f} \bar{Nu}\delta R + \frac{C_1}{R_f} (\bar{R} - R_f) \delta Nu + C_2 \frac{d}{dt}(\delta R)$$

es decir:

$$\delta I(2\bar{I}\bar{R}) + \delta R(\bar{I}^2 - \frac{C_1 \bar{Nu}}{R_f} - C_2 \frac{d}{dt}) = \frac{C_1}{R_f} (\bar{R} - R_f) \delta Nu \quad (16)$$

La expresión (16) constituye la ecuación básica para la respuesta dinámica del sistema y a partir de ella se puede analizar tanto el anemómetro a temperatura constante como el de corriente constante.

#### Anemómetro de corriente constante

Se tiene para este caso  $\delta I = 0$  por lo que la ecuación (16) se reduce a:

$$\delta R \left( \frac{C_1}{R_f} \bar{Nu} - \bar{I}^2 + C_2 \frac{d}{dt} \right) = - \frac{C_1}{R_f} (\bar{R} - R_f) \delta Nu \quad (17)$$

es decir:

$$\frac{d(\delta R)}{dt} + \left( \frac{C_1 \bar{Nu}}{C_2 R_f} - \frac{\bar{I}^2}{C_2} \right) \delta R = \frac{C_1}{C_2} \left( 1 - \frac{\bar{R}}{R_f} \right) \delta Nu \quad (18)$$

donde

$$\tau_1 = \frac{C_2}{\frac{C_1 \bar{Nu}}{R_f} - \bar{I}^2} = \frac{\rho}{4} cd^2 \frac{\bar{R}}{R_f} \frac{1}{Nu} \quad (19)$$

es la constante de tiempo del sistema, siendo  $\rho$  la densidad del alambre y habiéndose utilizado la ec. (14).

Obsérvese que la última ecuación es una ecuación lineal de primer orden. Su solución para una perturbación del tipo escalón (es decir un cambio súbito desde un valor de Nu constante hasta otro valor constante diferente), es una función exponencial. La constante de tiempo  $\tau_1$  es una medida de la respuesta del sistema y se puede definir como el tiempo necesario para que la función (en este caso R) alcance el 63% del valor final que adquiriría al cambiarse súbitamente la función Nu.

La constante de tiempo  $\tau_1$  depende, como se podrá notar en las últimas expresiones, de la capacidad térmica y de las dimensiones del alambre, de la relación de sobrecalentamiento  $R/R_f$  y del número de Nusselt. Es claro que interesa reducir hasta donde sea posible, esta constante de tiempo; sin embargo, no se tiene mucho de donde echar mano. Al seleccionar ciertos metales como materiales para el alambre, se busca entre otras cosas reducir su capacidad térmica, y la relación de sobrecalentamiento debe de ser mayor que la unidad pero típicamente menor que dos; por lo tanto solamente queda como posibilidad reducir el diámetro. Con todo, se obtienen constantes de tiempo del orden de un milisegundo. Este valor no es suficientemente pequeño ya que la respuesta a la frecuencia (uniforme dentro de 3db), dada por:

$$3db = 20 \log_{10} \{ (2\pi f \tau_1)^2 + 1 \}^{1/2}$$

resulta aproximadamente  $f=160$  Hz correspondiendo a un milisegundo.

Se concluye que un sistema que trabaje con corriente constante no registrará fluctuaciones de velocidad con frecuencias mayores que 160Hz, a no ser que se disponga de un circuito electrónico adecuado para su compensación.

Para efectuar esta compensación electrónica es necesario primero determinar la constante de tiempo  $\tau_1$ . Esto generalmente no es posible de llevar a cabo con suficiente precisión mediante simples cálculos pues tal como resultó del análisis simplificado anterior, la constante de tiempo depende fuertemente del diámetro y de las propiedades del alambre, los cuales son difíciles de conocer en forma precisa para un alambre dado. Lo que se acostumbra en estos casos es medir directamente dicha constante de tiempo mediante la aplicación de una onda cuadrada sobre el alambre y se procede entonces a la selección de un compensador adecuado a base de circuitos RLC.

Como se mencionó anteriormente, la respuesta a la frecuencia del sensor depende no sólo de las propiedades del alambre sino además de las características del flujo medio y cada vez que éstas cambian es necesario reajustar el circuito compensador. En esto reside probablemente la mayor desventaja de la operación a corriente constante.

#### Operación a Temperatura Constante

Supóngase ahora que la corriente a través del alambre no sea constante sino que varíe de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$K\bar{I}\delta R = \bar{R}\delta I \quad (20)$$

donde K sea una constante conocida cuyo significado se verá más adelante.

Sustituyendo en la ecuación (16), se obtiene:

$$\delta I \left( 2\bar{I}R + \frac{\bar{I}R}{K} - \frac{C_1 \bar{Nu}}{KIR_f} - \frac{C_2 \bar{R}}{KI} \frac{d}{dt} \right) = \frac{C_1}{R_f} (\bar{R} - R_f) \delta Nu$$

es decir

$$\frac{d(\delta I)}{dt} - \left( \frac{2K\bar{I}^2}{C_2} + \frac{\bar{I}^2}{C_2} - \frac{C_1 \bar{Nu}}{C_2 R_f} \right) \delta I = - \frac{KC_1 \bar{I}}{C_2} \left( \frac{\bar{R}}{R_f} - \frac{R_f}{R} \right) \delta Nu \quad (21)$$

donde

$$\tau_2 = \frac{C_2}{\frac{C_1 \bar{Nu}}{R_f} - \bar{I}^2 - 2K\bar{I}^2}$$

La nueva constante de tiempo  $\tau_2$  no es muy diferente de  $\tau_1$ , ec. (19), para valores pequeños de la constante  $K$ . Pero si esta constante es grande y negativa,  $\tau_2$  resulta mucho menor que  $\tau_1$ .

Lo anterior se puede lograr con un amplificador de retroalimentación, siendo  $K$  su ganancia negativa. Efectivamente, la resistencia del sensor cambia con la velocidad del fluido, pero este se detecta inmediatamente en el amplificador de alta ganancia el cual reajusta la corriente a través del alambre, permitiendo que la resistencia del sensor y su temperatura se mantengan esencialmente constantes. El cambio necesario en la corriente eléctrica es una medida de la velocidad del fluido, si se efectúa previamente una calibración.

## 6. CALIBRACION. LINEALIZACION

No existiendo un criterio unificado respecto a la utilidad en emplear directamente las leyes y correlaciones universales de transferencia de calor en anemómetros de hilo caliente (como la ley de King o la fórmula de Collis y Williams), tal vez lo mejor sea, basándose en la opinión de varios investigadores experimentados, tomarlas como una base en la interpretación de los resultados que se obtengan mediante una calibración individual; de esta manera se comprobarían el diseño y la operación adecuados del sensor en particular que se trate. Una vez efectuada dicha comprobación, es posible ignorar de plano las leyes universales de calibración y simplemente graficar el voltaje en el

alambre contra la velocidad del fluido (esta última medida con un tubo de Pitot).

La curva de calibración estática se puede entonces derivar, gráfica o numéricamente, obteniéndose  $dE/dU$ , cantidad necesaria para transformar fluctuaciones de voltaje en fluctuaciones de velocidad. En las figs. 5 y 6 se muestran ejemplos de curvas de calibración.

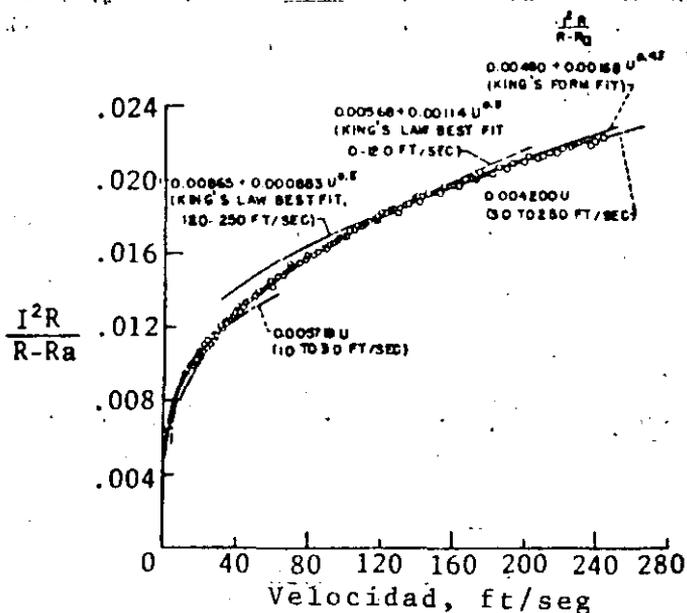


Fig. 5 Ejemplo de curva de calibración (hilo)

Si se desea mejor ajustar una curva a los puntos experimentales con objeto de determinar la pendiente directamente de la gráfica, deberá aceptarse el valor del exponente  $n$  que se obtenga en dicho ajuste y no tratar de forzarlo a ser necesariamente 0.5 o 0.45 como en las correlaciones universales. (Aquel sensor que resulte con un exponente sustancialmente diferente del exponente de otros sensores en una misma serie, por ejemplo manufacturados por la misma persona en las mismas condiciones, deberá eliminarse).

Siempre que sea posible se recomienda calibrar el sensor en el mismo aparato o instalación donde se ha de usar. Si el flujo en

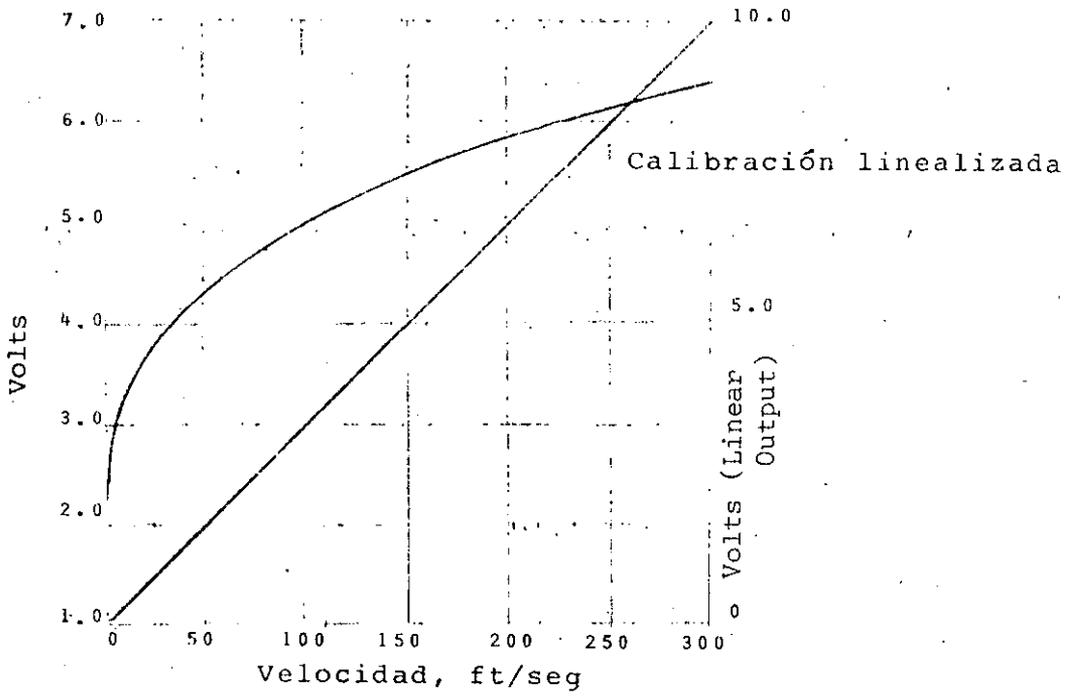


Fig. 6 Ejemplo de curva de calibración (película)

el aparato de prueba no es uniforme, entonces conviene emplear un dispositivo calibrador, el cual consiste en una instalación para producir un chorro pequeño uniforme y de baja turbulencia; la calibración se efectúa contra un tubo de Pitot, o bien, empleando la diferencia de presiones a lo largo de la boquilla en cuya garganta se coloca el sensor. Estos dispositivos se pueden manufacturar, si bien ya existen algunos en el mercado.

Los voltajes leídos con el anemómetro se pueden graficar contra los correspondientes valores de la velocidad, de tal manera de obtenerse una línea recta (es decir  $E^2$  contra  $U^{1/2}$ ). El número de puntos en una calibración depende desde luego de la precisión que se tenga en las mediciones, pero dado que un síntoma de mal funcionamiento del sensor es cualquier pequeña desviación de los puntos de calibración de una recta, se recomienda determinar por lo menos seis puntos. Una manera adecuada de comprobar la operación correcta de un nuevo sensor es midiendo los esfuerzos cortantes de Reynolds en un tubo circular: el gradiente radial de los esfuerzos deberá ser igual al gradiente longitudinal de la presión. Se puede medir también el valor r.m.s., de las fluctuaciones  $u$  en el centro del tubo, debiendo ser aproximadamente igual al 80% de la velocidad de fricción  $v^*$ .

En la medición de ciertas cantidades normalizadas, por ejemplo correlaciones, espectros, etc., no es necesario calibrar los sensores.

Como se verá en la siguiente sección, para determinar el valor r.m.s., o desviación estándar de las fluctuaciones, se necesitan dos mediciones: el voltaje medio CD y el valor r.m.s., del voltaje CA del sensor. Para una curva de calibración como la mostrada en la fig. 5, la medición del voltaje medio  $E_m$  determina el "pivote" en la curva; la magnitud  $\sqrt{e^2}$  se coloca simétricamente a uno y otro lado del pivote y de esta manera se determina  $\bar{U}$  y  $\sqrt{u^2}$  (fig. 7). En el procedimiento anterior se ha

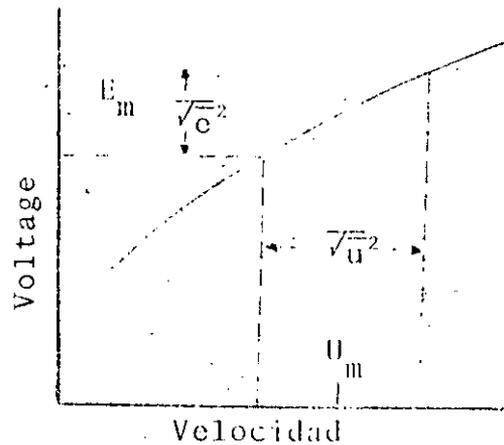


Fig. 7 Empleo de la curva de calibración

supuesto que el valor r.m.s. del voltaje está distribuido simétricamente respecto a  $E_m$ ; esto puede conducir a errores serios si las fluctuaciones son muy grandes o si se encuentran distribuidas asimétricamente respecto a la media. Lo anterior se puede evitar en gran parte mediante el empleo de un linealizador. Este consiste en un circuito analógico que operando sobre la señal de salida del anemómetro la modifica de tal manera de obtener un voltaje directamente proporcional a la velocidad; en otras palabras, su función de transferencia es inversa a la ecuación del tipo (14). El uso de un linealizador es equivalente a reemplazar la curva de calibración por la tangente en el punto  $E_m$  y la precisión de los resultados que se obtengan depende de qué tan correctamente la ecuación empírica represente a los puntos de la calibración ya que los parámetros del aparato generalmente se ajustan en función de las constantes y el exponente de la curva de calibración.

Generalmente las mismas firmas comerciales que fabrican anemómetros también manufacturan linealizadores.

#### 7. MEDICIONES CON EL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE.

El anemómetro de hilo caliente generalmente se emplea en la medición directa de velocidades medias, fluctuaciones de velocidad, esfuerzos de Reynolds, fluctuaciones de temperatura, etc.

Las señales que se obtienen de uno o varios anemómetros, se pueden procesar analógicamente o digitalmente para obtener estimaciones de correlaciones (espaciales o temporales), espectros, densidades de probabilidad, etc. Examinaremos a continuación la manera de obtener las primeras cantidades mencionadas arriba. Conviene tener presente que la transferencia de calor por convección entre el alambre y el fluido es mucho mayor cuando el sensor se encuentra en posición perpendicular a la corriente que cuando se encuentra en posición paralela; de este modo si se coloca el alambre perpendicularmente a la corriente media, responderá esencialmente a las fluctuaciones de velocidad en esa dirección. Si el alambre adopta una posición inclinada respecto a esa dirección, entonces responderá tanto a las fluctuaciones de velocidad en la dirección del flujo medio como a las fluctuaciones en dirección normal al mismo. Se analizarán ambos casos.

#### Sensor perpendicular al flujo medio

Si el alambre se coloca perpendicularmente al flujo medio (fig. 8), se tiene para la velocidad total  $U_T$  (proporcional al enfriamiento del alambre):

$$\bar{U}_T = (\bar{U} + u)^2 + v^2 + w^2 \quad (22)$$

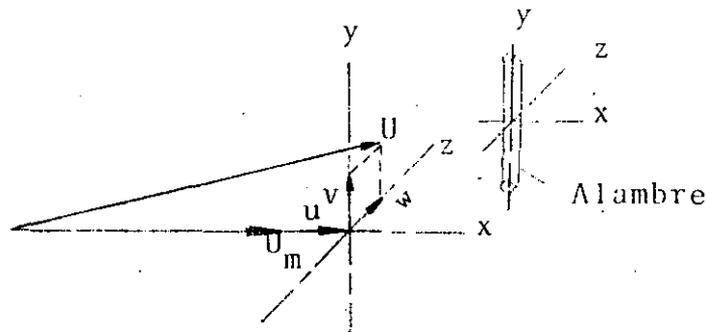


Fig. 8 Sensor perpendicular al flujo

Si se supone que las fluctuaciones de velocidad son pequeñas comparadas con el valor medio, es decir, que en (22)

$$\left(\frac{U_T}{U}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{u}{U}\right) + \left(\frac{u}{U}\right)^2 + \left(\frac{v}{U}\right)^2 + \left(\frac{w}{U}\right)^2 \quad (23)$$

se tenga

$$2 \left(\frac{u}{U}\right) \gg \left(\frac{u}{U}\right)^2 + \left(\frac{v}{U}\right)^2 + \left(\frac{w}{U}\right)^2 \quad (24)$$

entonces se puede relacionar la velocidad media con el voltaje medio en el alambre mediante la expresión:

$$\bar{U} = U_T = F(\bar{E}) \quad (25)$$

donde  $F$  es la relación de calibración (obtenida de la curva de calibración).

Análogamente se tiene para la fluctuación  $u$ :

$$e^2 = S_u^2 u^2 \quad (26)$$

donde  $e$  es la fluctuación del voltaje respecto a  $\bar{E}$  y  $S_u$  es la sensibilidad del alambre a las fluctuaciones de velocidad:

$$S_u = \left. \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial U_c} \right|_{\bar{U}_c} \quad (27)$$

El subíndice  $c$  indica que la derivada parcial se debe determinar utilizando la curva de calibración. (Obsérvese que a menos que se use un linealizador,  $S_u$  no es constante).

#### Sensor inclinado respecto al flujo medio.

Al inclinar el sensor un ángulo  $\psi$  respecto al flujo medio (fig. 9), el alambre responderá tal como se apuntó, a las fluctuaciones  $u$  y  $v$  si se encuentra en el plano  $x, y$ .

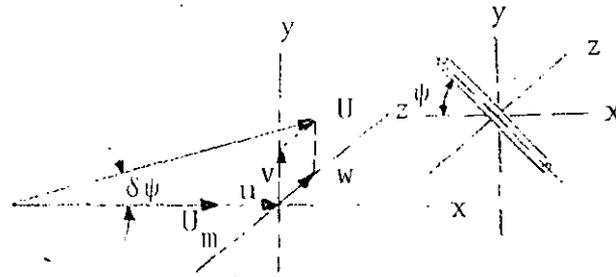


Fig. 9 Sensor inclinado respecto al flujo

Si se supone que la componente perpendicular al alambre es la más importante en la pérdida de calor por convección, se tendrá

$$U_n = \{\bar{U} + u^2 + v^2\}^{1/2} \text{ sen } (\psi + d\psi) \quad (28)$$

Se puede demostrar que para ángulos mayores de  $30^\circ$ , la expresión anterior se reduce a:

(véase Sandborn [3])

$$\frac{U_n}{U} = \text{sen } \psi \left\{ 1 + \frac{2u}{U} - \frac{2v}{U} \cot\psi \right\}^{1/2} \quad (29)$$

Esta ecuación indica que el voltaje en el alambre es función de las fluctuaciones en  $u$  y en  $\psi$  (es decir, fluctuaciones en el ángulo del flujo, fig. 9). Se puede entonces escribir:

$$e = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{U}} u + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} d\psi \quad (30)$$

pero

$$d\psi = \frac{v}{U}$$

resultando

$$e = \frac{\partial \bar{E}}{\partial U} u + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} \frac{v}{U} \quad (31)$$

es decir:

$$e = S_u u + S_v v \quad (32)$$

donde

$$S_u = \left. \frac{\partial \bar{E}}{\partial U} c \right|_{\bar{U}} \quad \text{y} \quad S_v = \frac{1}{U} \left. \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} c \right|_{\psi_c}$$

el subíndice  $c$  indica que estas sensibilidades se deben obtener de curvas de calibración.

Para determinar  $S_v$ , generalmente se calibra el sensor para varios ángulos; por ejemplo, se fija un ángulo y se miden varias velocidades y voltajes correspondientes; se cambia el ángulo y se repite la operación. (En la fig. 10 aparece un ejemplo de curvas de calibración de este tipo).

La varianza de las fluctuaciones del voltaje se obtiene de (32):

$$\bar{e}^2 = S_u^2 \bar{u}^2 + 2S_u S_v \bar{uv} + S_v^2 \bar{v}^2 \quad (33)$$

De esta manera, si se hacen lecturas de  $\bar{e}^2$  para tres ángulos  $\psi$  diferentes (por ejemplo,  $40^\circ$ ,  $-40^\circ$  y  $90^\circ$ ) y se tienen las calibraciones previas para los mismos ángulos (es decir, los valores de  $S_u$  y  $S_v$ ), al sustituir en (33) se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas:  $\bar{u}^2$ ,  $\bar{v}^2$ ,  $\bar{uv}$  pudiéndose determinar estas últimas al resolver las primeras.

Si se conoce previamente  $\bar{u}^2$ , sólo es necesario hacer mediciones para dos ángulos diferentes. La operación del alambre en "X"

(en realidad dos alambres con ángulos conocidos en el mismo soporte) se basa en lo anterior, si bien deberá tenerse cuidado en que ambos alambres concuerden, es decir, que se tenga por ejemplo  $S_{u_1} = S_{u_2}$ , donde 1 y 2 indican la identificación del alambre.

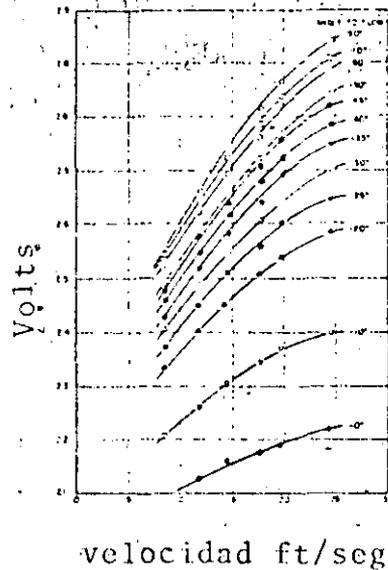


Fig. 10 Calibración para diferentes ángulos de inclinación

#### CONCLUSIONES

En las páginas anteriores se han revisado las características más importantes del anemómetro de hilo caliente. Si bien el principio de funcionamiento de dicho instrumento es bastante simple, actualmente el aparato ha alcanzado un grado de complejidad que le permite ser utilizado con suficiente confiabilidad en la medición de diversas cantidades de interés relacionadas con fluctuaciones de velocidad, temperatura, concentración, etc. De esta manera, el anemómetro de hilo caliente constituye una herramienta inmejorable para la experimentación en la mecánica de fluidos. Existen

algunas versiones comerciales del aparato elaboradas por firmas con gran experiencia en el campo; sin embargo, es posible que un investigador construya su propio instrumento a un precio reducido, dependiendo de la precisión y la versatilidad deseadas.

No se ha pretendido en este trabajo hacer una revisión exhaustiva de las posibilidades del instrumento: esto, además de requerir de mucho espacio, ya se encuentra disponible en la literatura si bien de manera un poco desarticulada y tal vez empleando un lenguaje especializado. Se ha tratado en todo caso, de resumir sus aspectos más importantes buscando de introducir en el tema a todo aquel interesado en la mecánica de fluidos experimental. Para finalizar tal vez convenga decir que el mejor maestro para adquirir habilidad en el manejo del anemómetro y en la interpretación de las mediciones, es la práctica misma y se recomienda al novato proceder de inmediato al laboratorio.

#### REFERENCIAS

1. Doebelin, E.D., Measurements Systems: Application and Design McGraw-Hill, 1966
2. Bradshaw, P., An Introduction to Turbulence and its Measurement, Pergamon Press, 1971.
3. Sandborn, V., Resistance Temperature Transducers, Metrology Press, 1972.
4. Collis, D.C., y M.J. Williams, J. Fluid Mech., 6, 357, (1959).
5. Laurence, J.C., Sandborn, V.A. Heat Transfer from Cylinders, ASME Symposium on Measurements in Unsteady Flows, Worcester, Mass., 1962.
6. King, L.V. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 214A, 373, (1914)

CALIBRACION Y USO DEL ANEMOMETRO DE HILO  
CALIENTE

Jaime Cervantes de Gortari  
Departamento de Fluidos y Térmica  
División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Facultad de Ingeniería  
UNAM

## I N D I C E

1.	INTRODUCCION	1
2.	CONSTANTE DE TIEMPO Y RESPUESTA A LA FRECUENCIA	2
	2.1 CONCEPTOS BASICOS	2
	2.2 DETERMINACION DE LA CONSTANTE DE TIEMPO	5
3.	CALIBRACION	8
	3.1 DEFINICION	8
	3.2 CALIBRACION DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE	8
4.	USOS PRINCIPALES DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE	10
	4.1 VELOCIDAD MEDIA	10
	4.2 FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD EN LA DIRECCION DEL FLUJO	11
	4.3 FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD TRANSVERSALES A LA DIRECCION DEL FLUJO	13
	4.4 FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA	15
	REFERENCIAS	18
	NOMENCLATURA	19
	APENDICES	
	A. AJUSTES NECESARIOS PARA MEJORAR LA CONSTANTE DE TIEMPO	21
	B. INSTRUCCIONES DE OPERACION DEL SISTEMA DISA 55M10	24
	C. PROCEDIMIENTO DE OPERACION DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE PARA MEDIR TEMPERATURAS.	32

## 1. INTRODUCCION

Las presentes notas tienen por objeto ofrecer al lector la información básica necesaria para la calibración y el uso del anemómetro de hilo caliente operado a temperatura constante. Desde los primeros experimentos con esta clase de instrumentos y los intentos de su caracterización teórica a principios de este siglo, se han publicado numerosos artículos técnicos y científicos cubriendo los más diversos aspectos relacionados con su fabricación y uso. La información contenida en tales publicaciones a excepción de algunas aparecidas recientemente, por ejemplo TSI [1968]<sup>1</sup>, Comte-Bellot [1977], es sin embargo, demasiado especializada en la mayor parte de los casos o presenta un grado de complejidad que no permite al nuevo usuario del anemómetro familiarizarse rápidamente con su operación. Estas notas se elaboraron precisamente con el objetivo de satisfacer esa necesidad y están dirigidas particularmente a los alumnos de ingeniería mecánica, tanto de licenciatura como de maestría, que deban participar en proyectos donde se utilicen intensamente los métodos experimentales.

El tema central en estos apuntes es la calibración y el uso del anemómetro de hilo caliente. Los aspectos más generales relacionados con este instrumento como son su descripción, su principio de operación, etc, se cubren en otros trabajos, por ejemplo, los referidos en el párrafo anterior o bien, en idioma español, el trabajo escrito por el autor en esta misma serie -- (Cervantes [1977]).

Dado que el sistema comercial del cual se dispone en la Facultad de Ingeniería corresponde al modelo DISA 55M10 que opera a temperatura constante, parte de estos apuntes se refieren al manual correspondiente sobre todo en relación con las instrucciones de operación.

<sup>1</sup>Los nombres seguidos del año entre paréntesis rectangulares indican las referencias enlistadas al final de este trabajo.

## 2. CONSTANTE DE TIEMPO Y RESPUESTA A LA FRECUENCIA

### 2.1 CONCEPTOS BASICOS

Como se sabe, todo sistema dinámico sujeto a un estímulo, ofrece una respuesta que depende de la naturaleza del estímulo y de las características del sistema mismo. En el caso de un instrumento de medición, la respuesta que de él se obtiene constituye una medida de la variable o estímulo que se desea conocer. Tanto la variable de interés como su medición generalmente son funciones del tiempo, estando enfocados el diseño y la operación del instrumento a que ambas funciones se asemejen entre sí lo más posible. Se llaman características dinámicas de un instrumento o en general de un sistema, al conjunto de parámetros y funciones que permiten conocer la diferencia entre una señal alimentada al instrumento y la respuesta correspondiente.

Ahora bien, la caracterización dinámica de un sistema para una señal cualquiera no siempre es una tarea fácil pues depende de numerosas propiedades tanto del instrumento como de la variable de interés. Lo que generalmente se hace es aproximar el sistema a un modelo lineal y representar su comportamiento mediante una ecuación diferencial lineal, sujetándolo a determinados estímulos estándar como son la función escalón, impulso, sinusoidal, etc.

El hilo caliente de un anemómetro se puede considerar, bajo ciertas simplificaciones, como un sistema de primer orden, lo cual significa que su comportamiento dinámico se puede representar mediante una ecuación diferencial de primer orden (Cervantes [1980]). De esta manera es posible determinar, en función de las propiedades físicas del sensor y de sus dimensiones, el importante parámetro llamado constante de tiempo.

En un sentido físico, la constante de tiempo es una medida del tiempo que tarda un sistema en responder a un estímulo brusco (función escalón). En el caso de los sistemas de primer orden, como el anemómetro de hilo caliente, esa respuesta toma la forma de una función exponencial, Fig. 1. Se acostumbra entonces definir específicamente a la constante de tiempo como el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 63% de su valor final (Fig. 1).

En un sentido matemático, es necesario utilizar la ecuación diferencial que describe el comportamiento del sistema con el tiempo. Resulta claro al examinar las relaciones y figuras que siguen, que un sistema ofrece mejor respuesta mientras menor sea su constante de tiempo.

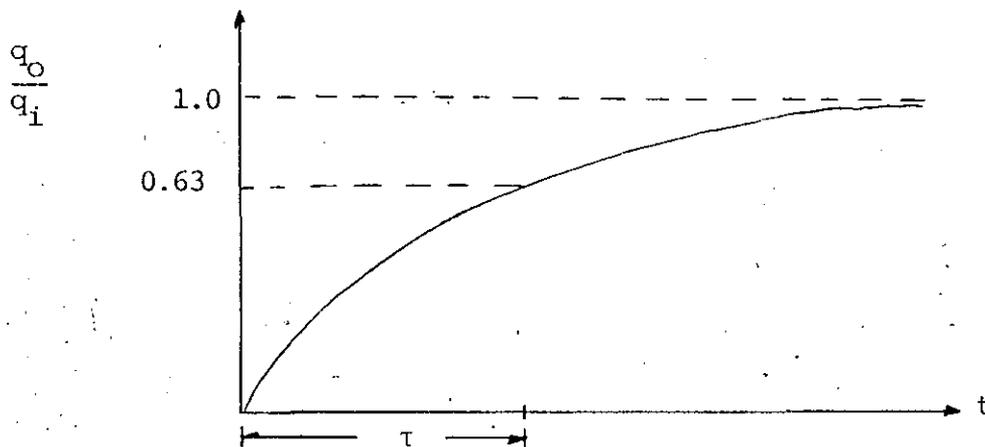


Fig. 1 Respuesta de un sistema de primer orden a una función escalón. Constante de tiempo.

En efecto, de acuerdo con la descripción dada en Cervantes [1977], la constante de tiempo de un hilo de anemometría se puede expresar como:

$$\text{A corriente constante } \tau_1 = \frac{C_2}{\frac{C_1 \bar{N}u}{R_f} - \bar{I}^2} \quad (1)^*$$

$$\text{A temperatura constante } \tau_2 = \frac{C_2}{\frac{C_1 \bar{N}u}{R_f} - \bar{I}^2 - 2K \bar{I}^2} \quad (2)$$

La constante de tiempo del sensor es muy importante pues de ella depende de manera sustancial, la respuesta a la frecuencia (tanto la relación de amplitudes como el ángulo de fase) del anemómetro. Por otra parte, conociendo la respuesta a la frecuencia del sistema se puede establecer la respuesta del anemómetro a señales periódicas complejas, transitorias y aleatorias, como se resume en las ecuaciones siguientes y en las Figs. 2, 3 y 4.

Respuesta a la frecuencia de un sistema de primer orden:

$$\frac{q_o}{q_i} (i\omega) = \frac{S}{i\omega\tau+1} = \frac{S}{\sqrt{\omega^2\tau^2+1}} \angle \tan^{-1}(-\omega\tau) \quad (3)$$

\* Al final del presente trabajo se enlista la nomenclatura empleada

es decir

relación de amplitudes:  $\frac{A_o}{A_i} = \frac{S}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$  (4)

ángulo de fase:  $\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau)$  (5)

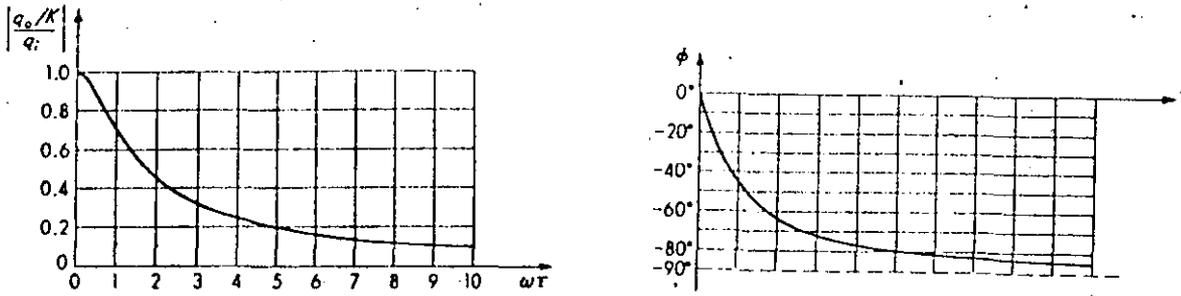


Fig. 2 Respuesta a la frecuencia de un sistema de primer orden (en forma adimensional)

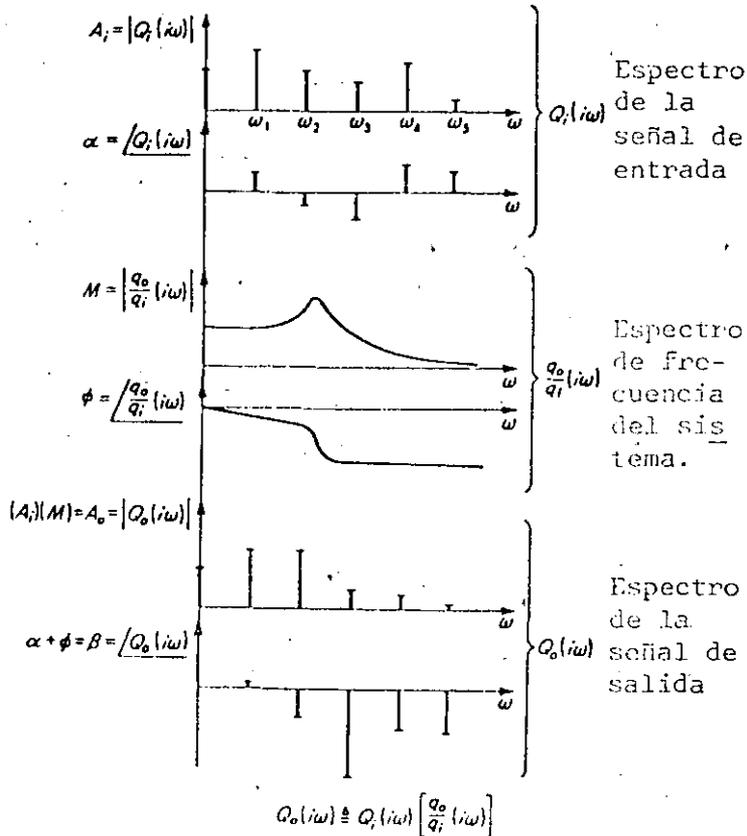


Fig. 3 Respuesta de un sistema a una función periódica.

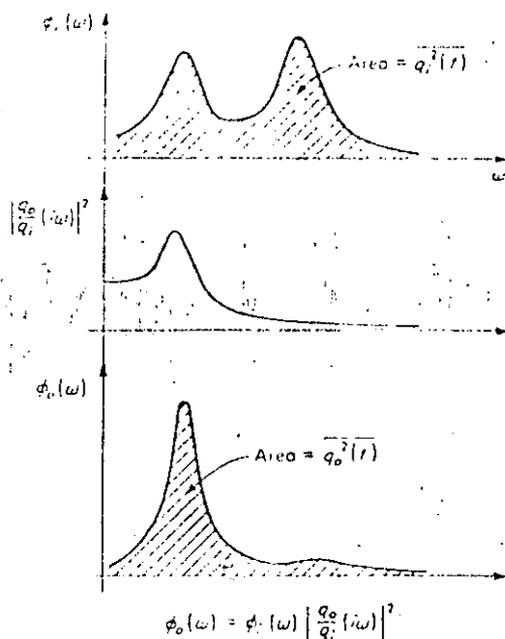


Fig. 4 Respuesta de un sistema a una señal aleatoria

## 2.2 DETERMINACION DE LA CONSTANTE DE TIEMPO

Típicamente, la constante de tiempo del hilo de un anemómetro es grande, del orden de un milisegundo, valor que corresponde a una respuesta de frecuencia uniforme dentro de 3db\* de no más de 160Hz. En otras palabras, el sensor no responde a fluctuaciones que se caractericen por frecuencias mayores a este valor y de allí la necesidad de utilizar un sistema de compensación o bien, un circuito de retroalimentación caracterizado por la ganancia K en la Ec. 2, para poder detectar fluctuaciones de velocidad hasta de varios kHz como sucede en algunos escurrimientos turbulentos. La constante de tiempo para un sensor determinado, se puede estimar por ejemplo al sustituir los valores de los parámetros que aparecen en la Ec. 1, sujeto desde luego a los numerosos efectos no controlados que son inherentes a la ley de enfriamiento -- del sensor (Cervantes [1977]).

Una forma experimental de determinar aproximadamente la constante de tiempo de un sensor de anemometría es perturbando artificialmente el voltaje (o la corriente) que se hace pasar a través del hilo cuando éste se encuentra en un flujo de velocidad cons--

\* Es decir,  $3\text{db} = 20 \log_{10} \{ (2\pi f\tau)^2 + 1 \}^{1/2}$

tante. Esta perturbación generalmente se hace aplicando una onda cuadrada al puente de Wheatstone del sistema: el resultado global es como si la velocidad del fluido tuviera superimpuesta una fluctuación periódica cuadrada. La señal cuadrada en realidad constituye una sucesión de escalones positivos y negativos; para cada uno de éstos el sensor responde como en la Fig.1, obteniéndose, al estudiar la respuesta en un osciloscopio, un diagrama como en la Fig. 5.

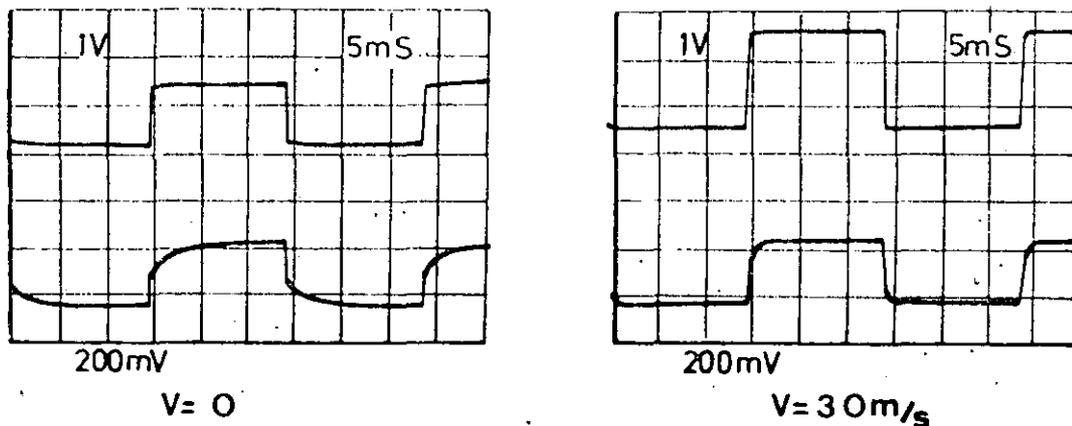


Fig. 5 Respuesta de un sensor a una función periódica cuadrada.

Ahora bien, en el caso de un anemómetro que opere a temperatura constante, (como la mayor parte de los instrumentos comerciales) resulta posible estimar experimentalmente la constante de tiempo de todo el sistema (sensor más circuito compensador de retroalimentación) al aplicar la onda cuadrada mencionada que se obtiene de un generador generalmente construido dentro del propio anemómetro. El análisis matemático de este aspecto es relativamente complicado y se puede encontrar explicado con todo detalle en Olivari y Borres [1974]. Para los fines del presente apunte, basta indicar que la respuesta del sistema completo ante un estímulo de voltaje en forma de escalón es equivalente a la respuesta que se obtendría a un estímulo de velocidad en forma de impulso, de tal manera que en el osciloscopio resulta un diagrama como el de la Fig. 6., pudiéndose determinar fácilmente la constante de tiempo y la correspondiente frecuencia máxima que puede detectar el anemómetro.

Si la constante de tiempo estimada como se indicó en los párrafos anteriores no es la adecuada para el uso que se dará al instrumento, es posible efectuar algunos ajustes para mejorarla, siguiendo las instrucciones del manual correspondiente. En el Apéndice A de estas notas aparece una traducción libre al español del inciso (7) del procedimiento de operación descrito en el Manual del sistema 55M10, el cual se refiere precisamente a este aspecto.

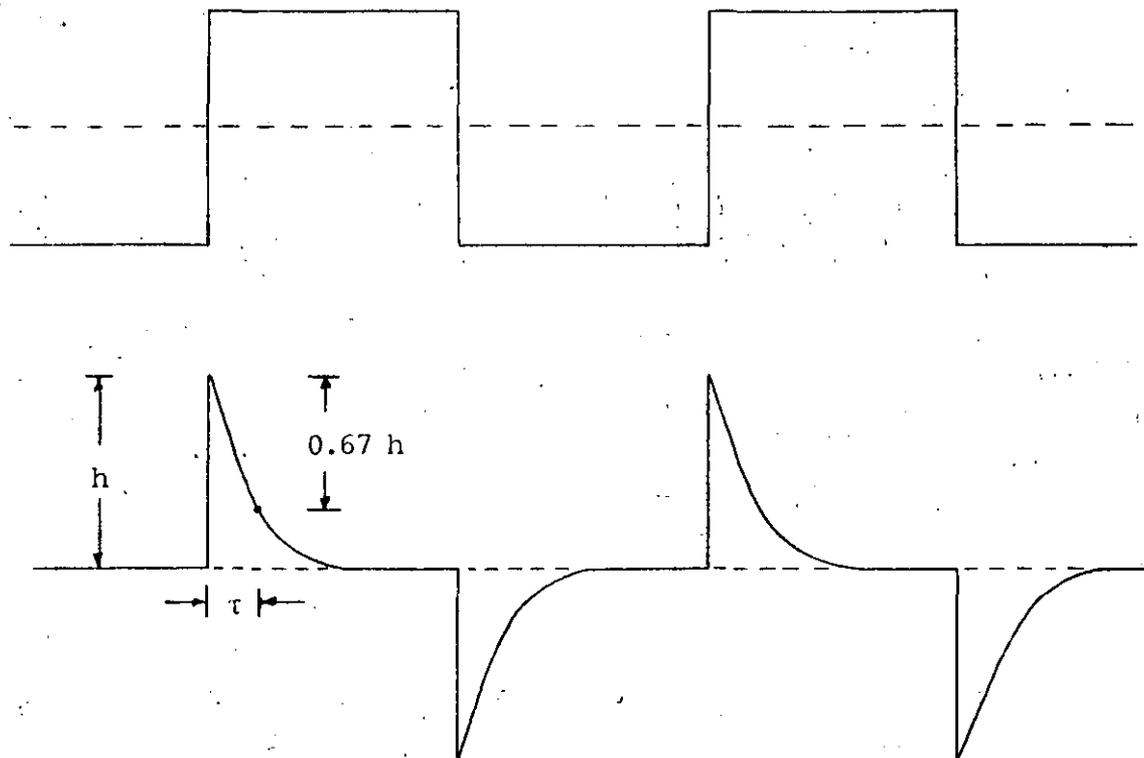


Fig. 6 Respuesta del anemómetro de temperatura constante a un función periódica cuadrada.

### 3. CALIBRACION

#### 3.1 DEFINICION

Como se sabe (veáse por ejemplo, Doeblin [1966]), el proceso de calibración estática permite conocer prácticamente las características estáticas más importantes de un instrumento o sistema de medición. Se trata de mantener en valores fijos todas las posibles variables que afectan el comportamiento del sistema menos una, la de interés en el instrumento de medición (la velocidad del fluido en el caso del anemómetro). Esta variable de interés se hace variar en un rango determinado de valores constantes dando lugar a que la variable de salida (un voltaje en el caso del anemómetro) adquiera valores correspondientes también constantes. Las relaciones que se puedan establecer entre ambas variables constituyen, de manera general, la calibración estática del instrumento y es válida en el rango investigado; y bajo las condiciones fijas establecidas para las otras variables que puedan efectuar el comportamiento del sistema.

En la práctica lo anteriormente descrito se reduce a determinar una curva de calibración teniendo en cuenta los aspectos mencionados inherentes al proceso de calibración. La curva de calibración que relaciona directamente la variable de salida del instrumento, permite conocer además de la relación misma, la sensibilidad estática del sistema que está constituida por la derivada de la curva y que puede ser variable. Asimismo, efectuando un análisis estadístico de los valores que permiten construir la curva de calibración resulta posible establecer el importante parámetro conocido como precisión mediante el cual se puede conocer los límites del error incurrido en la medición dada. Para estos y otros detalles se recomienda al lector consultar la obra de Doeblin [1966] anteriormente mencionada o cualquier otro texto semejante.

#### 3.2 CALIBRACION DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE

Para determinar la curva de calibración de un sensor --- dado es necesario efectuar pruebas junto con algún instrumento - que sirva como referencia, utilizándose generalmente para tal propósito, un tubo de Pitot. Ambos dispositivos deberán colocarse en un flujo uniforme con velocidad constante, debiéndose graficar el voltaje C.D. que resulta en el puente del anemómetro contra la velocidad leída mediante el tubo de Pitot; se recomienda cubrir el rango de interés primero en forma creciente y después en forma de decreciente. La curva de calibración así resultante es válida precisamente para las condiciones del medio en que se determinó (densidad, temperatura, etc) y el grado de sobrecalentamiento que se utilizó para operar el sensor<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Se define como relación de sobrecalentamiento al cociente  $R/R_f = 1 + \alpha(T - T_f)$  donde  $R$  = resistencia del sensor en operación a la temperatura  $T$  (caliente);  $R_f$  = resistencia del sensor a la temperatura  $T_f$  (en frío);  $\alpha$  = coeficiente resistencia-temperatura del material del sensor. Típicamente,  $1.4 < R/R_f < 1.8$ .

En la Fig. 7 se muestra de manera esquemática la curva de calibración de un anemómetro de hilo caliente. La relación entre el voltaje del puente y la velocidad del fluido es de la forma.

$$\frac{E^2}{R} = \left[ A+B (\rho V)^n \right] (T-T_f) \quad (6)$$

existiendo numerosas correlaciones empíricas y semiempíricas para el factor que aparece entre paréntesis rectangulares.

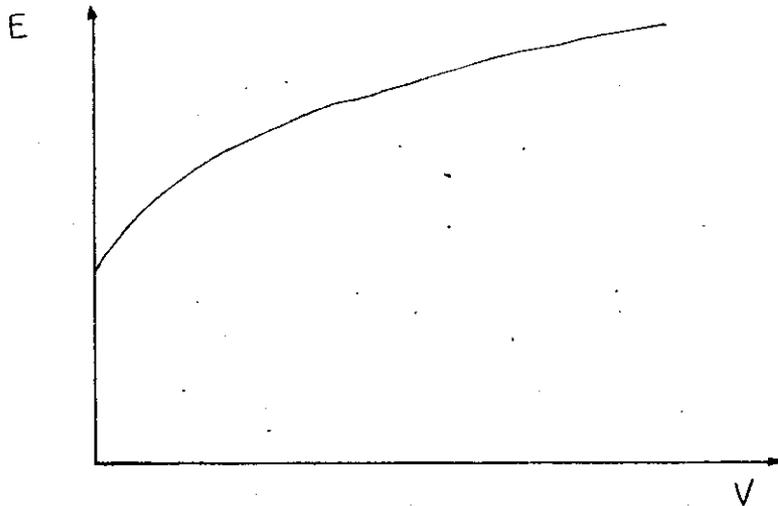


Fig. 7 Curva de calibración en forma esquemática

Tal como se señala en Cervantes [1977], al no existir un criterio unificado respecto a la utilidad en emplear directamente las leyes y correlaciones universales de transferencia de calor en un hilo caliente, lo que conviene es tomarlas únicamente como base de interpretación de los resultados que se obtengan mediante una calibración individual, comprobándose así el montaje y la operación adecuados del sensor que en particular se trate.

#### 4. USOS PRINCIPALES DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE.

Dadas las características del anemómetro de hilo caliente (respuesta a la frecuencia muy amplia, hasta varias decenas de kHz), su principal uso es la medición de velocidades y temperaturas fluctuantes con alto contenido de frecuencias, como es el caso de un flujo turbulento. En lo que sigue se resumen los aspectos fundamentales relacionados con la determinación experimental de varios parámetros características de un escurrimiento de tal naturaleza.

##### 4.1 VELOCIDAD MEDIA

###### Flujo normal

La velocidad media en un punto de un fluido en movimiento es relativamente simple de medir: basta colocar el sensor perpendicularmente a la dirección del flujo y el voltaje del puente del anemómetro, leído en la escala correspondiente, permitirá obtener la velocidad media al leer directamente en la curva de calibración. Conviene recordar que la transferencia de calor por convección forzada entre el hilo y el fluido es mucho mayor cuando el sensor se encuentra en posición perpendicular al flujo que cuando se encuentra paralelo. Por esta razón es muy importante colocarlo normalmente a la dirección del flujo medio y además perpendicular al plano donde las fluctuaciones de velocidad sean menores.

En la Fig. 8 se ilustran estos conceptos. Colocando el sensor perpendicularmente al flujo medio se tiene para la velocidad total  $U_T$  (proporcional al enfriamiento del alambre)

$$U_T^2 = (\bar{U} + u)^2 + v^2 + w^2 \quad (7)$$

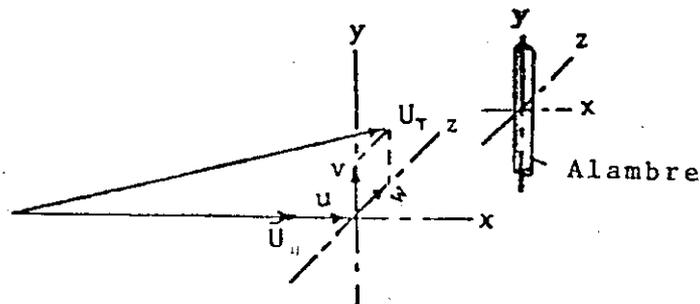


Fig. 8 Sensor perpendicular al flujo.

Si se supone que en la Ec. 7 escrita como

$$\left(\frac{U_T}{\bar{U}}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{u}{\bar{U}}\right) + \left(\frac{u}{\bar{U}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\bar{U}}\right)^2 + \left(\frac{w}{\bar{U}}\right)^2 \quad (8)$$

las fluctuaciones de velocidad son muy pequeñas comparadas con el valor medio, es decir,

$$2 \left(\frac{u}{\bar{U}}\right) \gg \left(\frac{u}{\bar{U}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\bar{U}}\right)^2 + \left(\frac{w}{\bar{U}}\right)^2 \quad (9)$$

entonces se puede relacionar la velocidad media con el voltaje medio mediante la expresión

$$\bar{U} = \bar{U}_T = f(\bar{E}) \quad (10)$$

donde  $f$  representa a la relación de calibración (es decir, la curva de calibración)

### Flujo lento

Dado que la calibración de un anemómetro de hilo caliente se efectúa tomando como referencia las mediciones que ofrece un tubo de Pitot, es fácil ver que se presentan ciertas dificultades al intentar calibrar y por consiguiente, medir, velocidades muy bajas. En efecto, para velocidades del aire por debajo de 4 m/s que corresponde a diferencias de presión de aproximadamente 1mm de columna de agua, la sensibilidad y la precisión de un manómetro resultan inadecuadas. Por otra parte cuando la velocidad del aire es menor que 0.5 m/s, empieza a sentirse el efecto de la convección natural, como se refiere en Cervantes [1977].

Sin perder de vista que éste es un aspecto que requiere de mayor información, se puede decir que una forma aproximada de solucionar el problema es extrapolando hacia la región de baja velocidad, la curva de calibración obtenida a velocidades relativamente altas para lo cual se recomienda graficar el cuadrado del voltaje contra la raíz cuadrada de la velocidad a fin de obtener una línea recta cuya extrapolación es más fácil de efectuar.

## 4.2 FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD EN LA DIRECCION DEL FLUJO.

### Valor r.m.s. de las fluctuaciones

Para determinar el valor r.m.s de las fluctuaciones de velocidad en la dirección del flujo ( $\sqrt{\bar{u}^2}$ ), es necesario efectuar dos mediciones simultáneas: el voltaje medio  $\bar{E}$  y el voltaje r.m.s.,  $\sqrt{\bar{e}^2}$ , de la señal que se obtiene del anemómetro. Con el primero -

se obtiene directamente  $\bar{U}$  y se determina el "pivote" en la curva de calibración (ver Fig. 9); el segundo voltaje, colocado simétricamente sobre el pivote, permite obtener el correspondiente valor r.m.s de las fluctuaciones de velocidad ( $\sqrt{\bar{u}^2}$ ). En el procedimiento descrito se ha supuesto que el valor r.m.s. del voltaje se distribuye simétricamente respecto a  $\bar{E}$ , lo cual puede conducir a errores serios si las fluctuaciones de velocidad son muy grandes o si se encuentran distribuidas asimétricamente respecto a la media.

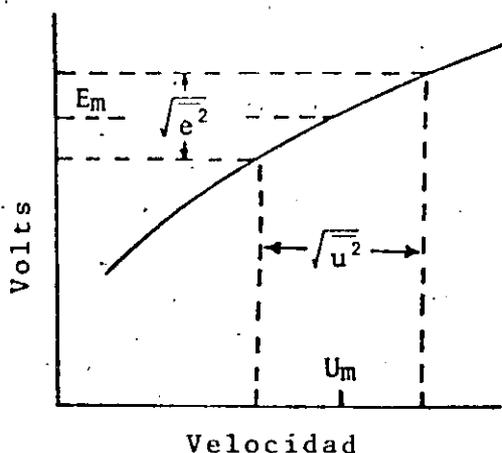


Fig. 9 Empleo de la curva de calibración

#### Intensidad y microescala de la turbulencia. Autocorrelación y Espectro de energía.

Una vez medidos el valor r.m.s. y el valor medio de las fluctuaciones de velocidad en la dirección del flujo, la intensidad de la turbulencia asociada a esa componente, se obtiene simplemente dividiendo la primera entre la segunda.

La microescala de la turbulencia, una medida del tamaño de los remolinos más pequeños que conforman la estructura de la turbulencia, se puede determinar en forma aproximada, derivando la señal fluctuante mediante un circuito analógico apropiado con una constante de tiempo  $\tau$  y midiendo después la señal resultante mediante un voltmetro r.m.s., de acuerdo con la ecuación

$$\lambda = \tau \sqrt{\left(\frac{du}{dy}\right)^2} \quad (11)$$

donde  $\lambda$  es la microescala de la turbulencia (véase por ejemplo, Cervantes [19 80]).

El análisis, ya sea analógico o digital, en forma enteramente semejante a como proceden los ingenieros de comunicaciones, de la señal que se obtiene mediante el anemómetro permite determinar el espectro de energía y la función autocorrelación de la velocidad fluctuante, información que resulta de enorme importancia para caracterizar un flujo turbulento.

#### 4.3 FLUCTUACIONES DE VELOCIDAD TRANSVERSALES A LA DIRECCION DE FLUJO

Ya se mencionó la necesidad de colocar el sensor perpendicularmente a la dirección del flujo. Esto obedece a que el enfriamiento del hilo está dictado fundamentalmente por la componente de velocidad perpendicular a él. Por lo mismo, si el alambre se encuentra inclinado con respecto a la dirección del flujo, su comportamiento desde el punto de vista de la transferencia de calor, será diferente. Se puede aprovechar este efecto para determinar fluctuaciones de velocidad en direcciones transversales a la dirección del flujo. (Aquí conviene señalar que un flujo turbulento siempre es tridimensional, es decir, aunque tenga una sola dirección para la velocidad media, siempre existen fluctuaciones tanto en sentido longitudinal como en las otras direcciones transversales).

Efectivamente, colocando el sensor con un ángulo  $\psi$  respecto al flujo medio, Fig. 10, el hilo responderá tanto a las fluctuaciones  $u$  como a las  $v$ , si se encuentra en el plano  $xy$ .

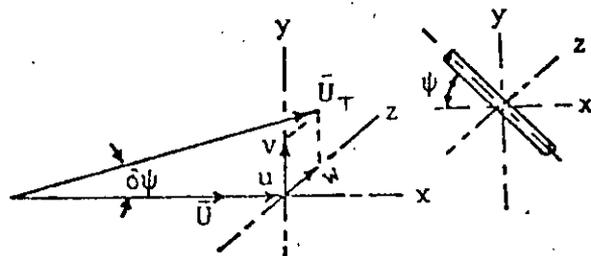


Fig. 10 Sensor inclinado

Se tiene entonces para la velocidad perpendicular al sensor,

$$U_n = \left[ (\bar{U}+u)^2 + v^2 \right]^{1/2} \text{ sen } (\psi + d\psi) \quad (12)$$

Para ángulo mayores de  $30^\circ$ , la expresión anterior se reduce a

$$\frac{U_n}{\bar{U}} = \text{sen } \psi \left[ 1 + \frac{2u}{\bar{U}} - \frac{2v}{\bar{U}} \cot \psi \right]^{1/2} \quad (13)$$

la cual se puede interpretar diciendo que el voltaje en el alambre (proporcional a  $U_n$ ) es función de las fluctuaciones en  $u$  y  $v$ , o bien, en  $u$  y  $\psi$ , puesto que  $v$  y  $\psi$  están relacionadas:

$$d\psi = \frac{v}{\bar{U}} \quad (14)$$

Se puede escribir entonces,

$$e = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{U}} u + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} d\psi \quad (15)$$

es decir, teniendo en cuenta (14),

$$e = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{U}} u + \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} \frac{v}{\bar{U}} \quad (16')$$

Escribiendo

$$e = S_u u + S_v v \quad (17)$$

quedan definidas las sensibilidades estáticas.

$$S_u = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{U}}, \quad S_v = \frac{1}{\bar{U}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \psi} \quad (18)$$

correspondientes, la primera, a la curva de calibración del sensor en posición perpendicular (anteriormente examinada); y la segunda, a la curva de calibración del sensor en posición inclinada un ángulo  $\psi$  respecto a la dirección del flujo.

De esta manera, si se considera el valor (r.m.s.)<sup>2</sup> del voltaje en el sensor inclinado, se tiene, de acuerdo con la Ec. (17),

$$\overline{e^2} = S_u^2 \overline{u^2} + 2 S_u S_v \overline{uv} + S_v^2 \overline{v^2} \quad (19)$$

Así, al obtener lecturas de  $\overline{e^2}$  para tres ángulo diferentes (generalmente  $40^\circ$ ,  $-40^\circ$  y  $90^\circ$ ) resultarían las tres ecuaciones

$$\overline{e_1^2} = S_u^2 \overline{u^2} + 2S_u S_{v_1} \overline{uv} + S_{v_1}^2 \overline{v^2} \quad (20)$$

$$\overline{e_2^2} = S_u^2 \overline{u^2} + 2S_u S_{v_2} \overline{uv} + S_{v_2}^2 \overline{v^2} \quad (21)$$

$$\overline{e_3^2} = S_u^2 \overline{u^2} \quad (22)$$

es decir, tres ecuaciones con las tres incógnitas  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{v^2}$  y  $\overline{uv}$ , habiéndose supuesto que las sensibilidades  $S_{v_1}$ ,  $S_{v_2}$  y  $S_u$  se conocen previamente como resultado de sendas calibraciones para los tres ángulos  $40^\circ$ ,  $-40^\circ$  y  $90^\circ$ . Resolviendo las tres ecuaciones simultáneas, se obtienen los valores de  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{v^2}$  y  $\overline{uv}$ .

El procedimiento se puede repetir girando el sensor  $90^\circ$  sobre el eje del soporte y obtener ahora  $\overline{w^2}$  y  $\overline{uw}$ . De este modo se logra conocer cinco de los seis esfuerzos de Reynolds para el flujo bajo estudio.

#### 4.4 FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA

De acuerdo con las expresiones para la transferencia de calor en un sensor de hilo caliente, como la ecuación general

$$Nu = f_1(Re, Pr, \frac{T}{T_f}) \quad (23)$$

la transferencia de calor debería verse afectada no sólo por las fluctuaciones de velocidad, sino además por las fluctuaciones de temperatura y de densidad del fluido. Estos efectos se pueden aprovechar para medir conjuntamente fluctuaciones de velocidad y de temperatura, o bien, fluctuaciones de velocidad y de densidad.

Consideremos el primer caso. Sin pretender estudiar al detalle el mecanismo de transmisión de calor del hilo al fluido cuando éste cambia su temperatura, se puede escribir para los cambios de enfriamiento, y por tanto de voltaje en el hilo que resultan de fluctuaciones de velocidad y de temperatura en el fluido,

$$Nu = f_2(U, T - T_f) \quad (24)$$

es decir,

$$E = f_3(U, T - T_f) \quad (25)$$

resultando,

$$e = \frac{\partial E}{\partial U} u + \frac{\partial E}{\partial (T - T_f)} \theta \quad (26)$$

donde  $\theta$  representa a las fluctuaciones de temperatura del fluido.

Así, de acuerdo con (25) y (26), cada curva de calibración E vs U implica un valor constante de  $T - T_f$ . Recuérdese que T se fija a través de la relación de sobrecalentamiento, en función del valor de  $T_f$ . Conviene entonces contar con curvas de calibración como las que se indica en la Fig. 11.

De esta manera, de acuerdo con (26), se pueden medir valores r.m.s., para las fluctuaciones de voltaje,

$$\overline{e^2} = S_u^2 \overline{u^2} + 2S_u S_\theta \overline{u\theta} + S_\theta^2 \overline{\theta^2} \quad (27)$$

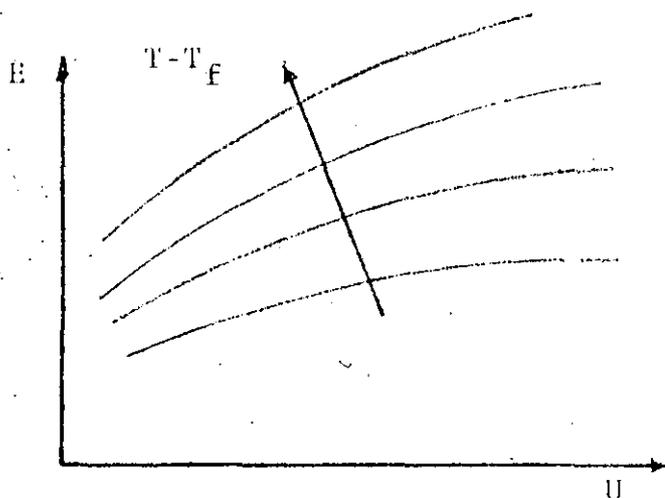
donde  $S_u$  y  $S_\theta$  son las correspondientes sensibilidades, medidas en las curvas de calibración Fig. 11 y 12. Midiendo tres valores de  $\overline{e^2}$  para sendos valores de  $T - T_f$ , se puede obtener  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{u\theta}$  y  $\overline{\theta^2}$  al resolver las ecuaciones simultáneas:

$$(\overline{e^2})_a = (S_u^2)_a \overline{u^2} + 2(S_u)_a (S_\theta)_a \overline{u\theta} + (S_\theta^2)_a \overline{\theta^2}$$

$$(\overline{e^2})_b = (S_u^2)_b \overline{u^2} + 2(S_u)_b (S_\theta)_b \overline{u\theta} + (S_\theta^2)_b \overline{\theta^2}$$

$$(\overline{e^2})_c = (S_u^2)_c \overline{u^2} + 2(S_u)_c (S_\theta)_c \overline{u\theta} + (S_\theta^2)_c \overline{\theta^2}$$

donde a, b, c corresponden a los tres casos con diferente valor  $T - T_f$  ( $T_f$  se modifica con el factor de sobrecalentamiento y  $T$  se mide independientemente).



Obsérvese que al emplear el sensor, para una medición,  $T - T_f$  debe ser el mismo que en la calibración (compensación aritmética por temperatura).

Fig. 11 Curvas de calibración para diferentes temperaturas

Igualmente, se puede calibrar fijando el valor de  $\bar{U}$  y variando  $T-T_f$ , ya sea a través de  $T$ , es decir, con diferentes factores de sobrecalentamiento, o bien, modificando la temperatura del fluido (Fig. 12).

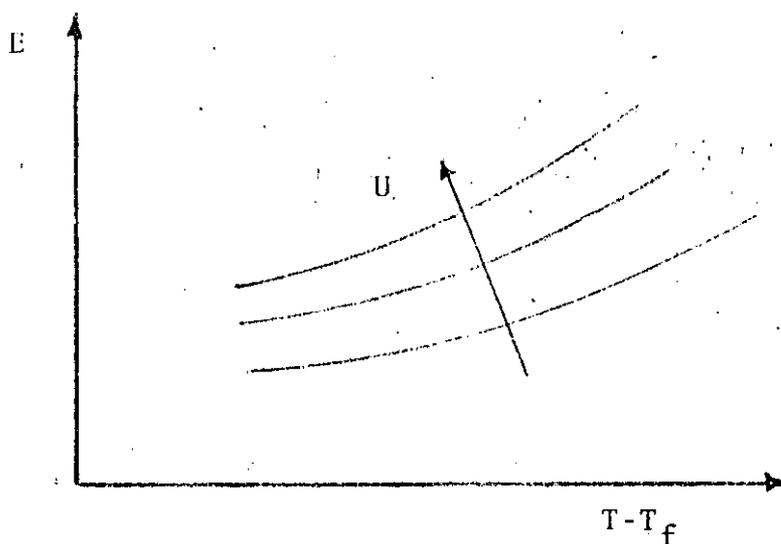


Fig. 12 Curvas de calibración para diferentes velocidades

## REFERENCIAS

- Cervantes, J., [1977] "El Anemómetro de hilo caliente como instrumento básico de medición en la mecánica de fluidos", Memorias del II Symposium de Ingeniería Mecánica, Inst. Tec. - Reg. de Mérida, Mérida, Yuc. (Disponible también como Informe Técnico FT77-1 Depto. Fluidos y Térmica, Facultad de Ingeniería, UNAM)
- Cervantes, J., [1980] "Introducción al estudio de la turbulencia" la. parte, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM (en preparación)
- Comté-Bellot, G., [1977] "Hot-wire and Hot Film Anemometry" en Measurements of Unsteady Fluid Dynamic Phenomena ed. por B.E. Richards, Hemisphere Publishing Corp.
- Doebbling, E.D. [1966] "Measurements Systems: Application and Design" Mc Graw Hill, New York, N.Y., EUA.
- Olivari, D., y Borres, R., [1974] "Theory and Design of a constant temperature linearized Hot wire Anemometer", Tech, Mem. 24 Instituto von Kármán de Dinámica de fluidos, Rhode Saint-Genese, Bélgica.
- TSI [1968], "Hot Film and Hot wire Anemometry". Theory and Application Bulletin TB5, Thermo-Systems, Inc., Saint-Paul, Minnesota, E.U.A.

## NOMENCLATURA

A	área exterior del filamento
$A_i$	amplitud de una señal
$C_1 = \frac{kA}{\alpha d}$	constante
$C_2 = \frac{mc}{\alpha R_f}$	constante
c	calor específico del filamento
d	diámetro del filamento
E	voltaje constante
e	voltaje fluctuante
f	frecuencia
h	coeficiente de convección, amplitud de señal
$\bar{I}$	corriente eléctrica constante
$i = \sqrt{-1}$	
K	ganancia negativa del circuito de retroalimentación
k	conductividad térmica del fluido
M	relación de amplitudes
m	masa del filamento
$\overline{Nu} = \frac{hd}{k}$	número de Nusselt constante
$q_o, Q_o$	señal de salida
$q_i, Q_i$	señal de entrada
$R_f$	resistencia eléctrica "en frío" del filamento
$S, S_u, S_v, S_0$	sensibilidades estáticas
T	temperatura del filamento
$T_f$	temperatura "en frío" del filamento

$t$	tiempo
$U_T$	velocidad total
$\bar{U}, \bar{U}_n$	velocidad media
$u, v, w$	velocidades fluctuantes
$V$	velocidad
$x, y, z$	coordenadas fluctuantes
$\tau, \tau_1, \tau_2$	constante de tiempo
$\alpha$	coeficiente de resistencia-temperatura
$\omega$	frecuencia
$\phi, \phi_0, \phi_i$	ángulo de fase
$\lambda$	microescala de la turbulencia
$\psi$	ángulo de inclinación

## APENDICE A

## AJUSTES NECESARIOS PARA MEJORAR LA CONSTANTE DE TIEMPO

(7) Balance del puente<sup>3</sup>

Los ajustes para balancear y compensar el puente, se pueden llevar a cabo con la ayuda del generador de onda cuadrada que viene incluido en la Unidad Principal 55M01. Para ello deberá conectarse en el enchufe de salida un osciloscopio con su sensibilidad en el eje vertical colocada en aproximadamente 0.1 V/cm.

La respuesta a la frecuencia del anemómetro completo se puede determinar sujetando el sensor a un cambio brusco (escalón) en la velocidad del fluido. Sin embargo, resulta difícil producir en forma precisa un cambio de velocidad de esta naturaleza, prefiriéndose en la práctica simularlo al alimentar en el puente una señal de onda cuadrada. Esta prueba debe dar como resultado una configuración en el osciloscopio indicando una respuesta en forma de impulso lo más corto posible sin ninguna oscilación superimpuesta (Fig. A.1). Si se satisface esta condición, se puede concluir que el puente y el amplificador compensador se encuentran en condiciones óptimas.

Durante la prueba de la onda cuadrada, el sensor deberá estar sometido a un flujo de velocidad constante con magnitud al menos igual a la máxima velocidad que se espera que ocurra en la medición. Si esto no es posible, de manera que la prueba tenga que hacerse con una velocidad menor, posiblemente cero, será necesario para completar el ajuste, reducir la ganancia del amplificador hasta alcanzar el punto en que el anemómetro funcione de manera estable durante la medición.

Para balancear el puente del anemómetro procédase como sigue:

- (a) hasta donde sea posible, expóngase el sensor a un flujo de velocidad constante, tal como se describió arriba;
- (b) enciéndase el generador de onda cuadrada (SQUARE WAVE). La selección de una de las tres frecuencias disponibles para esta onda (0.3, 3, 30 Hz) depende enteramente de la configuración que se logre en el osciloscopio. De este modo, deberá escogerse la combinación de frecuencia del generador y frecuencia de barrido del osciloscopio a fin de obtener una configuración de impulsos (respuesta del sistema) que sea fácil de leer y que indique claramente los cambios ocasionados al operar los botones de control.

<sup>3</sup> Traducción libre al español del inciso (7) de "Operating Procedure" del Manual de Instrucciones del sistema DISA 55M10.

Se puede modificar durante la prueba la frecuencia de la onda cuadrada.

- (c) Auméntese paso a paso la ganancia del amplificador mediante la perilla GAIN hasta que la señal de respuesta en la pantalla del osciloscopio presente oscilaciones amortiguadas como las mostradas en la Fig. A.1a. Incrementétese ahora, paso a paso, la frecuencia de corte del filtro del amplificador mediante la perilla HF FILTER. Esta operación reducirá las oscilaciones arriba mencionadas pero si se incrementa demasiado la frecuencia del filtro, aparecerán otras oscilaciones en la "cola" de la respuesta, Fig. A.1b. Estas últimas se pueden compensar ajustando los tornillos de compensación (capacitiva e inductiva) del cableado: CABLE COMPENSATION Q, L. Se debe comenzar con el tornillo L y si no se logra eliminar completamente a las oscilaciones, es necesario probar con otra posición del tornillo Q y repetir la operación con el tornillo L. Una vez efectuada la compensación, se puede incrementar un poco las perillas GAIN y HF FILTER hasta que vuelvan a aparecer las oscilaciones amortiguadas, las cuales deberán eliminarse mediante la compensación anteriormente descrita. El procedimiento se debe repetir hasta lograr que para determinadas posiciones en las perillas GAIN y HF FILTER no sea posible efectuar la compensación correspondiente. En tal caso regrésese un paso alguna o las dos perillas hasta eliminar las oscilaciones. En estas condiciones el sistema integrado por sensor, soporte del sensor, cables y amplificador del anemómetro estaría ajustado con su óptima respuesta en frecuencia, listo para el proceso de medición que se pretenda.

Para un sistema que utilice un cable de 5m de longitud junto con un hilo de 5 $\mu$ m de diámetro en un flujo de aire, son de esperarse los siguientes valores máximos:

GAIN: 5  
HF FILTER: 3

OBSERVACION: Si por alguna razón se debe reemplazar alguno de los componentes mencionados (por ejemplo, un sensor que se quemó o se rompió durante su uso), el procedimiento de ajuste deberá repetirse ya que aún las modificaciones mínimas de las condiciones originales puedan dar lugar a que el sistema presente oscilaciones. Lo anterior es particularmente importante en el caso de los cables.

Si una determinada medición no ha de requerir un ancho de banda en la respuesta particularmente amplio, se sugiere que las perillas GAIN y HF FILTER se regresen a la posición que permita obtener la mínima aceptable frecuencia de respuesta; esto es con objeto de lograr siempre las mejores condiciones de estabilidad del sistema.

- (d) Se puede apagar ahora el interruptor de la onda cuadrada, SQUARE WAVE y poner la perilla FUNCTION en su posición de espera STD. BY.

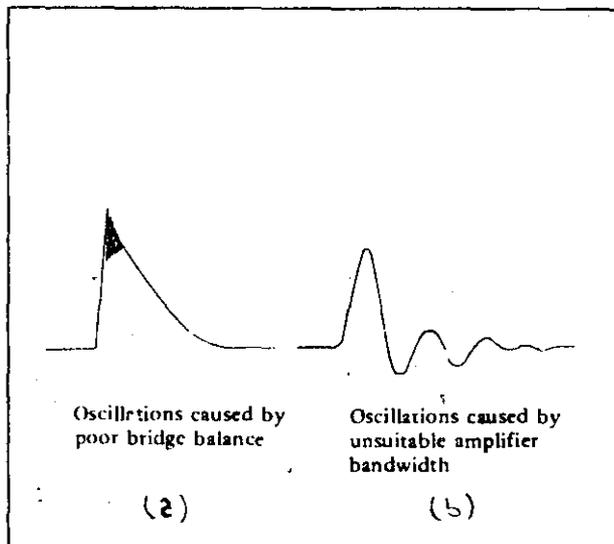


Fig. A.1 Compensación del anemómetro 55M10.

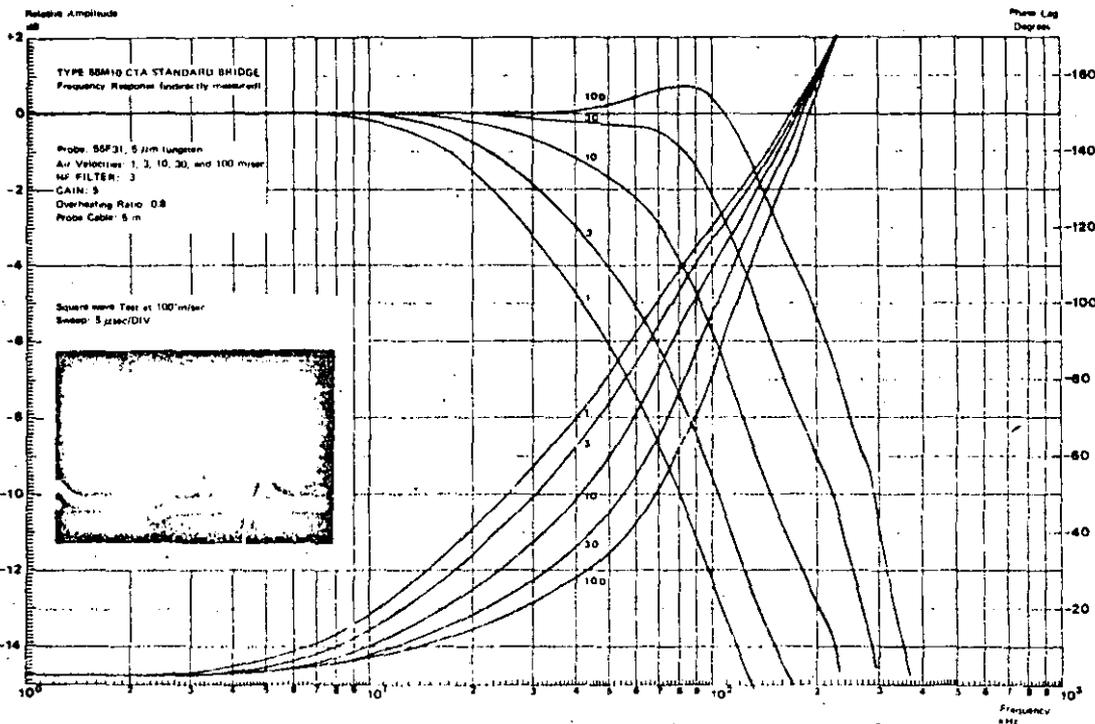


Fig. A.2 Ejemplo de respuesta a la frecuencia de un anemómetro de hilo caliente.

## APENDICE B

PROCEDIMIENTO DE OPERACION<sup>4</sup> DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE.

## (2) Posiciones iniciales de las perillas de control.

Una vez conectados e instalados la Unidad Principal (Main Unit), el Puente Estándar (Standard Bridge), los cables, el soporte, el sensor, etc., y antes de aplicar la corriente eléctrica al sistema, las perillas de control deberán tener las posiciones iniciales que se indican abajo. Este procedimiento inicial no se necesita repetir cada vez que se encienda o apague el sistema; solamente es necesario colocar la perilla FUNCTION en su posición de espera (STD. BY) antes de apagar el instrumento. Así, una vez que se vuelve a encender el aparato, éste estará listo para operar si dejando pasar suficiente tiempo de calentamiento, la perilla FUNCTION se coloca en OPERATE.

Nombre de la perilla o switch.	Posición inicial
SQUARE WAVE:	OFF
HF FILTER:	1
VOLTS:	1
FUNCTION:	STD.BY.
PROBE TYPE:	Wire o Film (Dependiendo del tipo de sensor)
GAIN:	1
DECADE RESISTANCE:	00.00

## (3) Encendido

Al aplicar la corriente eléctrica al sistema mediante el interruptor que se encuentra en la unidad POWER SUPPLY detrás del sistema, el foquito rojo POWER ON situado en la parte frontal de la Unidad Principal deberá encenderse. La aguja del medidor se moverá primero hacia la izquierda, hasta antes del cero. Si el instrumento está frío, la aguja se irá moviendo lentamente hacia la derecha, - después de 90 segundos aproximadamente, indicando así que los diversos circuitos electrónicos están listos para operar. Si el sistema estuvo en operación poco tiempo antes de esta ocasión, el período mencionado será menor.

Antes de proceder a cualquier medición, se deberá permitir que el instrumento se caliente durante por lo menos 15 minutos. La operación del instrumento con su temperatura balanceada no se alcanza sino hasta dos horas de carga constante (es decir, con el sensor en operación). La duración de este período completo de calentamiento se debe seleccionar teniendo en cuenta qué tanto "sesgo" en los voltajes que maneja el amplificador debido a la influencia de la tem

<sup>4</sup> Traducción libre al español de los incisos (2) al (6) de "Operating Procedure" del Manual de Instrucciones del Sistema DISA 55M10.

peratura, se puede tolerar<sup>5</sup>.

(4) Medición de la resistencia del sensor<sup>6</sup>.

Al conectar el sensor con su cable y soporte en el enchufe PROBE, se introduce una reactancia, adicional a la pura resistencia del sensor, en el brazo activo del puente de Wheatstone. Esta reactancia depende del tipo de sensor y de las diversas conexiones que se pueden hacer con los cables y soportes del mismo. Dicha reactancia tiene una parte debida al cable coaxial, otra debida al soporte del sensor y otra más relacionada con las puntas que sostienen al filamento. Esta última resistencia generalmente se indica en la carta donde el fabricante anotó los resultados de las pruebas efectuadas con el sensor como parte de su control de calidad.

- (a) Conéctese el cable (DISA 9006 A1864, 5m) en el enchufe PROBE. El otro extremo del cable deberá ir conectado al soporte del sensor y en lugar del sensor deberá colocarse el cortocircuitador para poder efectuar la compensación de las reactancias mencionadas y establecer el cero necesario para medir la resistencia del sensor, incluyendo la relación a las puntas que sostienen al filamento.
- (b) Gírese la perilla FUNCTION a su posición RES. MEAS. Esto ocasionará que la aguja del medidor se mueva.
- (c) Utilizando un desarmador pequeño ajústese el potenciómetro ZERO OHMS de tal manera que la aguja del medidor quede sobre la raya roja. De este modo quedan compensadas las reactancias del cable de 5m y del soporte del sensor, no así la resistencia de las puntas que sostienen al filamento.
- (d) Reemplácese el corto-circuitador por el sensor que se desea utilizar. La aguja del medidor tomará una posición por debajo del cero.

Nota: si en estas condiciones la aguja se desplaza hacia el extremo derecho de la carátula, es posible que el filamento del sensor esté roto o una de las soldaduras a las puntas esté defectuosa.

- (e) Procédase ahora a modificar la posición de las perillas del banco de resistencias (es decir, las cuatro perillas superiores, "decade resistance"), hasta lograr colocar otra vez la aguja sobre la raya roja:
  - Comiencese con la perilla que se encuentra más a la izquierda, incrementando punto por punto desde cero hasta que la aguja se desplace bruscamente hacia el otro extremo.
  - Regrésese entonces la perilla un punto.
  - Repítase el procedimiento con la siguiente perilla que se encuentra a la derecha.
  - Conforme se incrementa el valor de la última perilla (extremo derecho), la aguja apenas se irá moviendo hacia la

<sup>5</sup> Se recomienda un período de al menos una hora para el calentamiento del instrumento antes de utilizarlo.

<sup>6</sup> N. del T. En esta parte, el texto traducido se aparta un poco del original por así considerarlo de interés para la operación del sistema disponible en la Facultad de Ingeniería.

derecha en cada paso.

- La posición final de esta última perilla será aquella que logre colocar a la aguja lo más cerca posible de la marca roja.

- (f) De la lectura obtenida en las perillas del banco de resistencias, réstese y redúzcase manualmente en las perillas mismas, el valor correspondiente a la resistencia de las puntas, que como se apuntó anteriormente, no quedó compensada mediante el potenciómetro ZERO OHMS. Este valor general viene apuntado en la ficha de control de calidad que aparece adherida al estuche del sensor ( $R_L$ , "leads resistance").

Con el nuevo valor en las perillas, la aguja cambiará una vez más de posición. ESTE NUEVO VALOR INDICADO EN LAS PERILLAS DEL BANCO DE RESISTENCIAS CONSTITUYE LA RESISTENCIA ELECTRICA DEL FILAMENTO A LA TEMPERATURA AMBIENTE.

- (g) Ajústese el potenciómetro ZERO OHMS buscando colocar una vez más la aguja sobre la raya roja. Con todos estos ajustes el cable, soporte y puntas del sensor están debidamente compensadas. Muévase la perilla FUNCTION a su posición de espera (STD. BY)

- (5) Cálculo y ajuste de la relación de sobrecalentamiento.

El anemómetro que opera a temperatura constante utiliza un sensor (hilo caliente) que se mantiene, mediante un circuito electrónico de retroalimentación, a una temperatura constante seleccionada de antemano, mayor que la del ambiente, sin importar el enfriamiento fluctuante ocasionado, por ejemplo, por un flujo turbulento. Esta selección se hace mediante la llamada relación de sobrecalentamiento definida como

$$a = \frac{R - R_0}{R_0}$$

donde R es la resistencia del filamento durante su operación, es decir, calentado a la temperatura que se mencionó y  $R_0$  es la resistencia "en frío", esto es, a la temperatura ambiente que se midió con el procedimiento descrito en párrafos anteriores.

Generalmente se recomienda un valor para a entre 0.4 y 0.8 con objeto de lograr una sensibilidad adecuada del sensor y al mismo tiempo evitar una oxidación prematura del filamento debido a un excesivo calentamiento.

Una vez calculado el valor de R de acuerdo con la fórmula anterior, se procede a modificar finalmente, la posición de las perillas del banco de resistencias a leerse precisamente este valor R. Así, cuando se mueva la perilla FUNCTION a la posición OPERATE, la temperatura correspondiente a R y R misma, quedarán automáticamente establecidas en el sensor.

Una manera alternativa para calcular  $R$ , recomendada también por el fabricante, es mediante la fórmula

$$R = R_0 + \alpha_{20} R_{20}(T - T_0)$$

donde  $\alpha_{20}$  es un coeficiente de resistencia-temperatura y  $R_{20}$  es la resistencia del filamento a  $20^\circ\text{C}$  ambos medidos por el fabricante y apuntados en la ficha de control de calidad, y  $T$  es la temperatura de operación deseada la cual no deberá ser mayor que el índice señalado en la misma ficha.

#### (6) Operación del anemómetro

Colocando la perilla FUNCTION en la posición OPERATE se cerrará el circuito, se calentará el filamento y el sistema estará en operación.

El medidor con su aguja indicarán el voltaje del puente de Wheatstone, con tres posibles rangos 1, 3, 10 o 30V. Si el sensor no se expone a un flujo, el voltaje leído  $V_0$  corresponde a velocidad cero. (Este voltaje es aproximadamente 2.9V para hilos de  $5\mu\text{m}$  de diámetro colocados en aire de reposo).

137

**METER**  
For measurement of probe resistance, probe current, output voltage, and DC voltage applied from external source.

**SQUARE WAVE**  
This switch selects the frequency of the built-in square-wave generator in making the square-wave test (operated by screwdriver).

**DECADE RESISTANCE (OHMS)**  
For measurement of probe resistance and adjustment of overheating ratio (comparison resistance).

**ZERO OHMS**  
Potentiometer for compensation of probe cable resistance (operated by screwdriver).

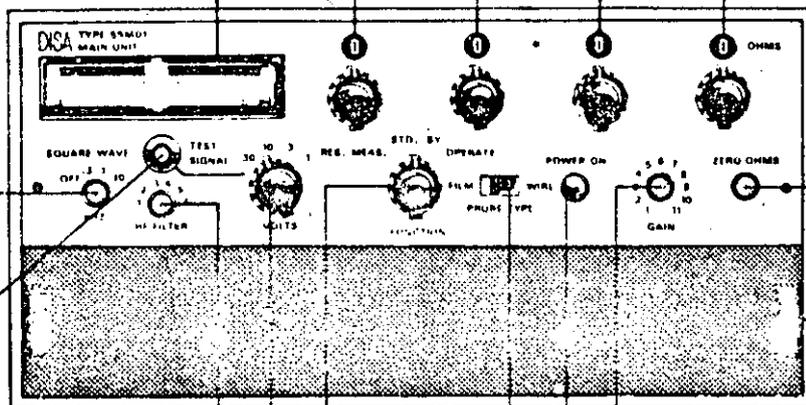


Fig. 3.

**TEST SIGNAL**  
An external test signal may be applied through this banana jack. With the VOLTS switch in its extreme counter-clockwise position, this jack serves as input terminal for measurement of external DC voltages by means of the meter.

**HF FILTER**  
This switch selects the upper frequency limit of the amplifier (operated by screwdriver).

**VOLTS**  
This switch selects the various meter ranges.

**FUNCTION**  
Rotary switch with three positions: RES. MEAS.—STD. BY—OPERATE.

**PLUG-IN HOLDERS**  
When a plug-in unit is inserted, these two holders lock the plug-in unit into position in the Main Unit. Pressing the holders down will cause the plug-in unit to be pushed so far outward that it can be pulled out easily.

**GAIN**  
Gain adjustment switch of the servo amplifier (operated by screwdriver).

**POWER ON**  
Pilot lamp — shows light when power is applied to the instrument.

**PROBE TYPE**  
This switch provides a choice of two types of system frequency response: for film and wire probes, respectively.

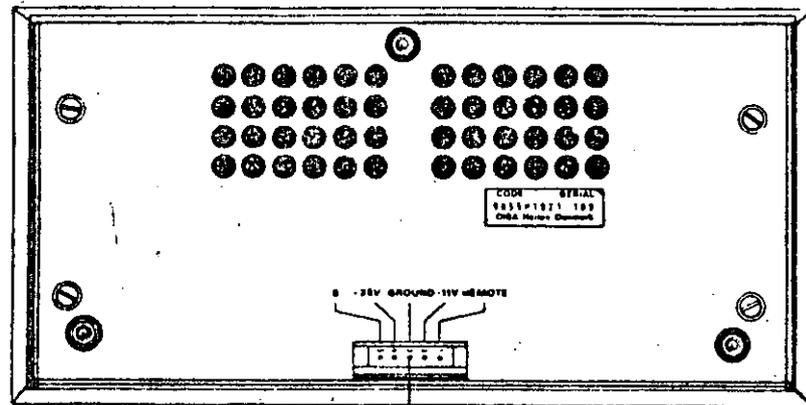


Fig. 4.

**POWER CONNECTOR**  
For connection of supply voltages — either from a 55M05 Power Pack or from external batteries via a battery cable — and a remote-control switch.

138

Top Resistance ( $R_T$ ):

50  $\Omega$

Bridge Ratio:

1:20

(Total bridge current ( $I_B$ ) equal to 1.05 X probe current ( $I_p$ )).

Sensitivity:

$V_{out} = (R_p + R_T + R_{ca}) I_p$ , where

$R_{ca}$  = Cable resistance (approx. 0.06  $\Omega$ /m), and

$R_p$  = Probe resistance.

Sensor Current ( $I_p$ ):

Sensor current depends on probe type and measuring conditions, and is determined by calibration (see examples of calibration curves).

Max. probe current: 0.55 A.

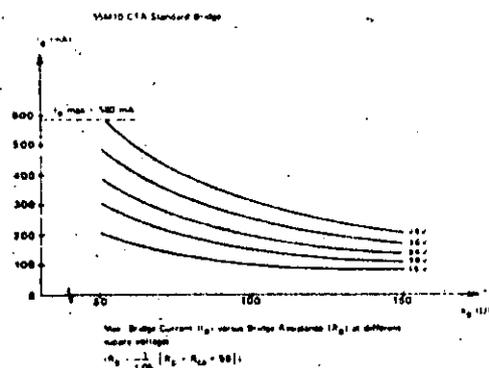
Depends on probe resistance and supply voltage, and is determined from the diagram below.

$$I_p = \frac{1}{1.05} I_B$$

bridge impedance  $R_B =$

$$\frac{1}{1.05} (R_p + R_T + R_{ca}).$$

Supply voltage is determined from Power Pack data. Total load current is calculated as  $I_B + 0.2$  A.



Max. Obtainable Probe Power:

$$R_p \times I_p^2 = 4 \text{ W}$$

Accuracy of Resistance Measurements:

$\pm 0.25\% \pm 3 \text{ m}\Omega$

Operating Current in Resistance Measurements:

0.8 mA

Probe Cable Lengths:

5 m  $\pm 0.6$  m (4 m and 5 m cables supplied)

20 m  $\pm 3$  m (with 55M85 Extension Kit)

100 m  $\pm 7$  m (with 55M86 Extension Kit)

Max. Upper Frequency Limit:

Approx. 200 kHz.

Max. obtainable upper frequency limit depends on probe type, probe cable, measuring conditions, etc. See examples of frequency characteristics.

Typical Output Noise:

Output noise depends on feedback via the bridge and will therefore normally be much lower than the noise in open-loop operation.

For example:

5  $\mu$ m tungsten probe: 80  $\mu$ V<sub>RMS</sub> corresponding to 0.013% turbulence (10 kHz bandwidth, 10 m/sec air velocity).

Film probe (Type 55A81): 0.19 mV<sub>RMS</sub> corresponding to 0.006% turbulence (10 kHz bandwidth, 3 m/sec water velocity). Values were measured at zero velocity and corrected for the reduction in loop gain which takes place when the velocity is increased.

Amplifier Setting:

SHAPED (switching to FLAT requires switching inside the plug-in unit).

Output Impedance:

Approx. 10  $\Omega$  (with normal feedback through bridge)

Max. Capacitive Load Without Data Reduction:

Approx. 1 nF

PHYSICAL DATA

Ambient Temperature Range:

0 $^{\circ}$  to +45 $^{\circ}$ C

Dimensions (HWD):

39 x 202 x 103 mm

Finish:

Pastel green and light gray enamel

Weight:

0.65 kg

Shock:

70 g, 11 msec, 3 axes, non-operating

**GROUND**  
Banana jack for grounding the instrument. Behind the jack is a potentiometer (operated by screwdriver) for adjustment of anemometer no-signal voltage; in normal operation, however, a fixed value is used and the potentiometer is inoperative.

139

**PROBE**  
BNC socket for connection of probe.

**CABLE LENGTH**  
Window which indicates probe cable length to be used (depends on Cable Compensation Unit in use).

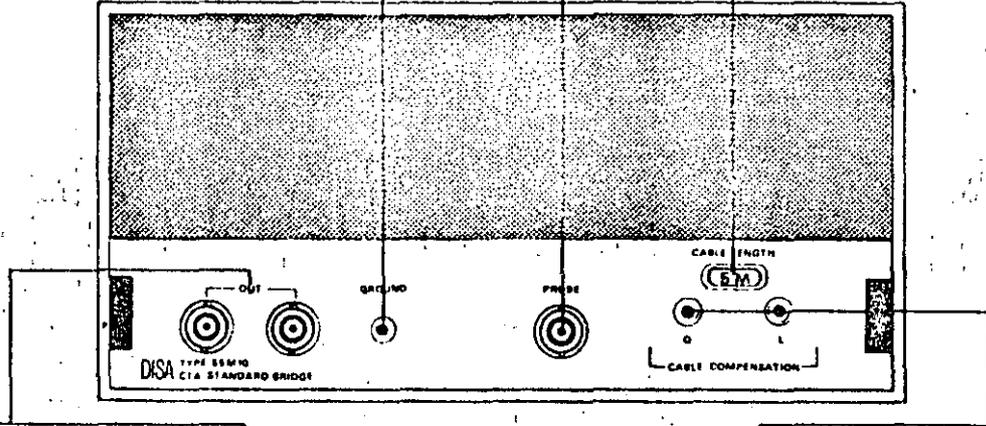


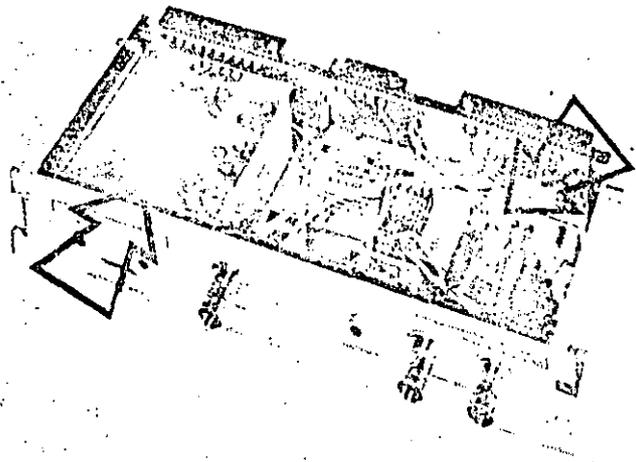
Fig. 5.

**OUT**  
Two identical output sockets for connection of indicating or recording instruments (bridge voltage).

**CABLE COMPENSATION Q and L**  
Adjusting screws for probe-cable impedance compensation; they are located in the Cable Compensation Unit installed in the Standard Bridge.

Connecting wire to be removed when filters etc. are to be connected in the bridge.

**INTERNAL SLIDE SWITCH**  
For switching the amplifier frequency response. Normal setting (locked): Shaped frequency response. Other setting, to be used only in special measurements: Flat frequency response.



CABLE COMPENSATION UNIT

Fig. 6.

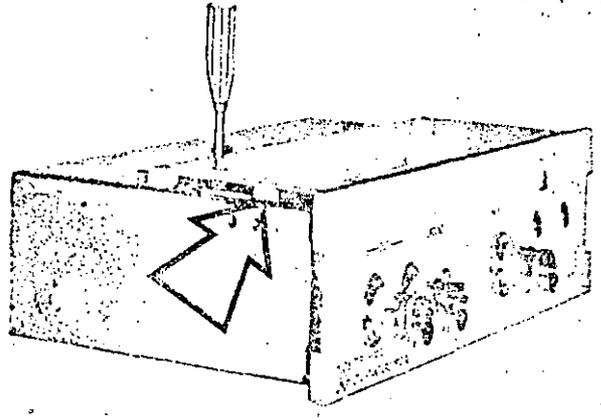
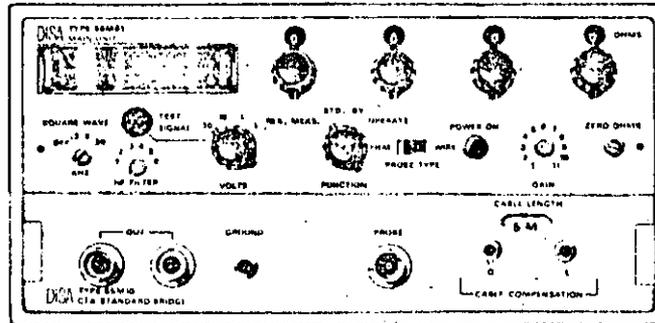


Fig. 7.

140



## POWER SUPPLY

The supply voltages required for operating the 55M System are brought in through a 5-contact connector on the rear wall of the 55M01 Main Unit. The instrument requires two supply voltages: One between +16 and +36 V DC and one between -10 and -13 V DC.

The main purpose served by the positive supply voltage is that of providing probe current; the working range — and hence also the available probe power — depends on the value of this voltage.

The 55M System may be powered either from the 55M05 Power Pack or from external power sources (batteries etc.).

### Line Operation

When the 55M System is operated from the 55M05 Power Pack, the output of the +35 V supply — and hence the max. obtainable probe current — will be dependent on the line voltage available (see data for 55M05 Power Pack).

The connection between the 55M01 Main Unit and the 55M05 Power Pack may be made in two different ways:

(a)

The Power Pack is bolted to the Main Unit with three non-losable screws so that it constitutes an extension of the Main Unit cabinet. The electrical connections will then be made simultaneously and automatically via a 5-contact plug and socket.

(b)

If the 55M05 Power Pack is to be set up physically separate from the Main Unit, the electrical connections are made via a cable included in the equipment package. The two plugs at the cable ends are designed so that they cannot be inserted the wrong way.

When the connection between the Main Unit and the Power Pack has been made in one of the two ways described, the next thing to do is to check if the Power Pack is switched to your local line voltage. The two

windows to the left of the ON/OFF switch indicate the nominal range of the permissible line voltage. Should the latter fail to agree with your local line voltage, you should remove the rear wall of the 55M05 Power Pack (to do so, loosen the four fixing screws). This will enable you to remove the red selector plug and replace it with one of the correct type for your local line voltage. Bracketed voltages on the selector plug indicate max. permissible voltage fluctuations (see also under Technical Data).

The free end of the instrument power cable supplied should be fitted with a plug of the type prescribed by your local authorities. The plug at the other end of the cable fits into the instrument socket, from where it can only be removed after you have pressed the white button.

The fuse holder is adjacent to the power socket; the fuse rating is independent of the line voltage in use. It should be 6.5 A (slow-acting).

After the power cable has been plugged in, the instrument can be turned on and off with the power switch (ON/OFF).

*NOTE: Before applying power, turn the FUNCTION switch on the Main Unit to the STD. BY position in order to eliminate any risk of probe damage.*

If the 55M System is operated in conjunction with the 55M10 CTA Standard Bridge, the PROBE CURRENT switch on the rear wall of the 55M05 Power Pack should always be at NORMAL. The HIGH position will be used only in conjunction with the 55M11 CTA Booster Adapter.

### Battery Operation

If the 55M System is to be operated in places where no line voltage is available, or if it is to be used as a portable unit that is ready for operation at any time, storage batteries or dry batteries etc. will be used as power sources. The 55M05 Power Pack will not be required, resulting in a considerable saving in weight. Between +16 V and +36 V DC is required for producing the probe current.

## APENDICE C

PROCEDIMIENTO DE OPERACION DEL ANEMOMETRO DE HILO CALIENTE PARA MEDIR TEMPERATURAS<sup>7</sup>.

## (1) Posiciones iniciales de las perillas de control

Una vez conectados e instalados la Unidad Principal (Main Unit), el Puente de Temperatura (Temperature Bridge), los cables, el soporte, el sensor, etc., y antes de aplicar la corriente eléctrica al sistema, las perillas de control deberán tener las posiciones iniciales que se indican abajo. Este procedimiento inicial no se necesita repetir cada vez que se encienda o apague el sistema; solamente es necesario colocar la perilla FUNCTION en su posición de espera (STD. BY) antes de apagar el instrumento. Así, una vez que se vuelve a encender el aparato, éste estará listo para operar si dejando pasar suficiente tiempo de calentamiento, la perilla FUNCTION se coloca en OPERATE.

Nombre de la perilla o switch.	Posición inicial
SQUARE WAVE:	OFF
HF FILTER:	1
VOLTS:	10
FUNCTION:	STD. BY.
PROBE TYPE:	Wire o Film (Dependiendo del tipo de sensor)
GAIN:	1
DECADE RESISTANCE:	00.00
PROBE CURRENT:	OFF

## (2) Encendido

Al aplicar la corriente eléctrica al sistema mediante el interruptor que se encuentra en la unidad POWER SUPPLY detrás del sistema, el foquito rojo POWER ON situado en la parte frontal de la Unidad Principal deberá encenderse. La aguja del medidor se moverá primero hacia la izquierda, hasta antes del cero. Si el instrumento está frío, la aguja se irá moviendo lentamente hacia la derecha, después de 30 segundos aproximadamente, indicando así que los diversos circuitos electrónicos están listos para operar. Si el sistema estuvo en operación poco tiempo antes de esta ocasión, el período mencionado será menor.

Antes de proceder a cualquier medición, se deberá permitir que el instrumento se caliente durante por lo menos 15 minutos. La operación del instrumento con su temperatura

<sup>7</sup> Traducción libre al español de los incisos (1) al (8) de "Operating Procedure" del Manual de Instrucciones del Sistema DISA 55M20.

balanceada no se alcanza sino hasta dos horas de carga constante (es decir, con el sensor en operación). La duración de este período completo de calentamiento se debe seleccionar teniendo en cuenta qué tanto "sesgo" en los voltajes que maneja el amplificador debido a la influencia de la temperatura, se puede tolerar<sup>8</sup>.

(3) Compensación de la resistencia de los soportes<sup>9</sup>

Al conectar el sensor con su cable y soporte en el enchufe PROBE, se introduce una reactancia, adicional a la pura resistencia del sensor, en el brazo activo del puente de Wheatsstone. Esta reactancia depende del tipo de sensor y de las diversas conexiones que se pueden hacer con los cables y soportes del mismo. Dicha reactancia tiene una parte debida al cable coaxial, otra debida al soporte del sensor y otra más relacionada con las puntas que sostienen al filamento. Esta última resistencia generalmente se indica en la carta donde el fabricante anotó los resultados de las pruebas efectuadas con el sensor como parte de su control de calidad.

- (a) Conéctese el cable (DISA 9006 A1864, 5m) en el enchufe PROBE. El otro extremo del cable deberá ir conectado al soporte del sensor y en lugar del sensor deberá colocarse el cortocircuitador para poder efectuar la compensación de las reactancias mencionadas y establecer el cero necesario para medir la resistencia del sensor, incluyendo la relativa a las puntas que sostienen al filamento.
- (b) Gírese la perilla FUNCTION a su posición RES. MEAS. Esto ocasionará que la aguja del medidor se mueva.
- (c) Utilizando un desarmador pequeño ajústese el potenciómetro ZERO OHMS de tal manera que la aguja del medidor quede sobre la raya roja. De este modo quedan compensadas las reactancias del cable de 5m y del soporte del sensor, no así la resistencia de las puntas que sostienen al filamento.
- (d) Reemplácese el corto-circuitador por el sensor que se desea utilizar. La aguja del medidor tomará una posición por debajo del cero.  
NOTA: si en estas condiciones la aguja se desplaza hacia el extremo derecho de la carátula, es posible que el filamento del sensor esté roto o una de las soldaduras a las puntas esté defectuosa.
- (e) Procédase ahora a modificar la posición de las perillas del banco de resistencias (es decir, las cuatro perillas superiores, "decade resistance"), hasta lograr colocar otra vez la aguja sobre la raya roja:

<sup>8</sup> Se recomienda un período de al menos una hora para el calentamiento del x instrumento antes de utilizarlo.

<sup>9</sup> N. del T. En esta parte, el texto traducido se aparta un poco del original por así considerarlo de interés para la operación del sistema disponible en la Facultad de Ingeniería.

- Comiencese con la perilla que se encuentra más a la izquierda, incrementando punto por punto desde cero hasta que la aguja se desplace bruscamente hacia el otro extremo.
  - Regrészese entonces la perilla un punto.
  - Repítase el procedimiento con la siguiente perilla que se encuentra a la derecha.
  - Conforme se incrementa el valor de la última perilla (extremo derecho), la aguja apenas se irá moviendo hacia la derecha en cada paso.
  - La posición final de esta última perilla será aquélla que logre colocar a la aguja lo más cerca posible de la marca roja.
- (f) De la lectura obtenida en las perillas del banco de resistencias, réstese y redúzcase manualmente en las perillas mismas, el valor correspondiente a la resistencia de las puntas, que como se apuntó anteriormente, no quedó compensada mediante el potenciómetro ZERO OHMS. Este valor generalmente viene apuntado en la ficha de control de calidad que aparece adherida al estuche del sensor ( $R_L$ , "leads resistance").
- Con el nuevo valor en las perillas, la aguja cambiará una vez más de posición. ESTE NUEVO VALOR INDICADO EN LAS PERILLAS DEL BANCO DE RESISTENCIAS CONSTITUYE LA RESISTENCIA ELECTRICA DEL FILAMENTO A LA TEMPERATURA AMBIENTE.
- (g) Ajústese el potenciómetro ZERO OHMS buscando colocar una vez más la aguja sobre la raya roja. Con todos estos ajustes el cable, soporte y puntas del sensor están debidamente compensadas. Muévase la perilla FUNCTION a su posición de espera (STD. BY)

(4) Selección de la corriente a utilizar en el sensor

Al medir temperaturas con un anemómetro de hilo caliente, se debe tener cuidado en que el sensor no se caliente demasiado mediante la corriente eléctrica que pasa a través de él ya que esto ocasionaría que el sensor resultara sensible también a la velocidad del fluido, distorsionando entonces la medición.

Por otra parte, es deseable utilizar una corriente tan alta como sea posible con objeto de lograr la mayor sensibilidad a la temperatura. Por esta razón es necesario determinar primero la resistencia del sensor como una función de la corriente eléctrica para varias velocidades del flujo. Teniendo en cuenta lo anterior, la corriente para las mediciones debe seleccionarse lo más alta posible pero sin que caliente al sensor más allá de lo compatible con el máximo error permisible. La velocidad del flujo para la cual se efectuará la medición de temperatura juega un papel muy importante en el sentido apuntado arriba ya que tendrá el efecto de enfriar al sensor en mayor o menor grado. En otras palabras, para una corriente eléctrica dada, el error incurrido resultará menor conforme la velocidad del fluido resulte mayor.

El procedimiento es como sigue:

- (a) Colóquese la perilla FUNCTION en la posición OPERATE y la perilla PROBE CURRENT en la posición CURREN ADJ.
  - (b) Utilizando el potenciómetro de diez vueltas CURRENT ADJ., ajústese a una corriente alta en el sensor (p. ej., 3mA). La perilla denominada VOLTS en la Unidad Principal 55M01 debe colocarse en 3 para este objeto: la escala completa donde se desplaza la aguja corresponderá a 3 mA, si la perilla PROBE CURRENT se encuentra en la posición CURRENT ADJ. Una vez efectuada esta operación regrésese dicha perilla a su posición OFF.
  - (c) Colóquese el tornillo GAIN en la posición 11. Contrólense la corriente mediante la perilla DC OUTPUT ADJ., de tal manera de obtener una deflexión de la aguja de fácil lectura. La lectura exacta no es muy importante pero se recomienda utilizar la marca roja correspondiente a la mitad de la escala.
  - (d) Colóquese ahora la perilla PROBE CURRENT en la posición ON; esto ocasionará que cambie de posición la aguja de la escala. Modifíquese entonces el banco de resistencias (es decir, las cuatro perillas denominadas "resistance decade" de tal modo de obtener la misma lectura de corriente que se tenía anteriormente. Al modificar el banco de resistencias se debe tener cuidado en apagar y encender el switch PROBE CURRENT, es decir, en colocar esta perilla alternamente en sus posiciones OFF y ON. La lectura en la aguja posiblemente cambie un poco de su posición original pero esto no es importante. Una vez que no se observe ningún cambio en la posición de la aguja, el valor indicado por el banco de resistencias corresponderá al valor de la resistencia del sensor.
  - (e) Redúzcase ahora un poco el valor de la corriente (p. ej. a 2.5m A) y verifíquese si cambia la resistencia del sensor. Reduciendo paso a paso la corriente y midiendo la correspondiente resistencia el sensor para diferentes velocidades del flujo (este rango de velocidades debe ser cercano al esperado durante las mediciones de temperatura de interés), se pueden generar varias curvas de la resistencia del sensor contra la corriente eléctrica a través de él, para diferentes velocidades del flujo. Estas curvas permitirán seleccionar la corriente eléctrica que ofrezca una mejor sensibilidad para un error de medición permisible.
- (5) Determinación del cambio de la resistencia del sensor para el rango de temperatura de interés.
- (a) La siguiente operación a efectuar es determinar el coeficiente  $\alpha_{20}$  de la resistencia del sensor. Para hilos de tungsteno cubiertos de platino, este coeficiente es aproximadamente 0.35%/°C y resulta prácticamente lineal en el rango de temperatura entre 0° y 150°C. Sin embargo, exis-

te demasiada dispersión de los coeficientes  $\alpha_{20}$ , si se tienen en cuenta diversos sensores, que resulta preferible la calibración individual. El sensor deberá entonces calentarse en algún horno o estufa a una temperatura conocida (p. ej.  $50^{\circ}\text{C}$ ) y medirse su resistencia eléctrica a esa temperatura. Teniendo en cuenta las dos mediciones de la resistencia, el coeficiente  $\alpha_{20}$  se puede calcular como sigue:

$$\alpha_{20} = \frac{\Delta R \times 100}{\Delta T \times R_{20}} \quad (\% \text{ por } ^{\circ}\text{C}) \quad (\text{a.1})$$

- (b) Conociendo  $\alpha_{20}$  se puede determinar el cambio de resistencia correspondiente al rango de temperaturas bajo interés, teniéndose, de la ec. (a.1),

$$\Delta R = \frac{\alpha_{20} \times \Delta T \times R_{20}}{100} \quad (\text{b.1})$$

Con objeto de poder fijar el sistema en una sensibilidad conveniente en volts/ $^{\circ}\text{C}$ , se debe calcular el cambio en el banco de resistencias  $\Delta R_C$  que ocasionaría el mismo cambio en el voltaje de salida debido al cambio en la resistencia del sensor  $\Delta R$ , previamente calculado, ec. (b.1). Para esto se dispone de una fórmula basada en la hipótesis de que el puente queda balanceado con la resistencia  $R$  del sensor y la resistencia  $R_C$  del banco de resistencias:

$$\Delta R_C = - \Delta R \frac{\Delta R + R_T}{R + R_T + \Delta R} \quad (\text{b.2})$$

donde  $R_T = 50\Omega$ . De acuerdo con esta fórmula, el cambio en el banco de resistencias tiene un valor negativo y algunas veces resulta menor que el correspondiente cambio en la resistencia del sensor.

- (6) Ajuste de la Ganancia y del Voltaje de salida.
- (a) Si se altera el banco de resistencias en una cantidad igual a la calculada, se obtiene un cambio en el voltaje de salida cuya magnitud depende del valor de  $R_C$ , es decir, un cambio en la magnitud del rango de temperaturas de interés. Resultará entonces necesario ajustar la ganancia del sistema a un nivel que proporcione un cambio en el voltaje de salida apropiado para el rango de temperaturas bajo investigación, de tal manera de obtener una buena aproximación en las lecturas. El ajuste de la ganancia se efectúa mediante la perilla GAIN y también en caso necesario, con el switch deslizante incorporado dentro del Puente de Temperatura (véase el punto (7)).

- (b) El voltaje de salida del sistema varía entre 0 y 18 volts, aproximadamente, bajo condiciones de balance en el puente. Se puede lograr entonces un ajuste apropiado del nivel del voltaje de salida mediante la perilla DC OUTPUT ADJ. (El switch PROBE CURRENT debe estar en la posición ON). El valor apropiado del voltaje de salida depende del rango de temperaturas de interés: si se desean medir cambios de temperatura positivos, se debe seleccionar un valor en la mitad superior de la escala ya que el voltaje de salida disminuye al crecer la temperatura; si el rango de temperaturas a medir cubre ambos lados de la temperatura inicial, se debe seleccionar un voltaje de salida aproximadamente en el punto medio del rango (p. ej. 10 volts).
- (c) La corriente que pasa por el sensor se puede alterar ligeramente con objeto de lograr alguna relación conveniente entre la temperatura y el voltaje indicado, de tal modo que se tenga, por ejemplo, que un volt represente a un grado de temperatura.  
Esta alteración, sin embargo, no debe exceder bajo ninguna circunstancia el valor determinado en el punto (4) ya que las fluctuaciones en el flujo introducirían errores serios en las mediciones.

(7) Medición de cambios de temperatura muy pequeños

Cuando se quieren medir fluctuaciones de temperatura muy pequeñas, puede suceder que no se logre un cambio adecuado en el voltaje de salida aún con la máxima corriente permisible y el switch GAIN en la posición 11. Se puede incrementar considerablemente la ganancia (y por lo tanto la sensibilidad de la temperatura) del sistema, operando un switch deslizante que se encuentra accesible si se desmonta el Puente de Temperatura de la Unidad Principal. Observando el puente directamente al frente, el switch deslizante se encuentra en su lado derecho y se opera mediante un pequeño desarmador. Para poder cambiar de ganancia normal a alta ganancia, se debe quitar primero la placa protectora correspondiente.

Top Resistance ( $R_T$ ):  
50  $\Omega$

Bridge Ratio:  
1:20

Probe Current ( $I_p$ ):  
0-10 mA. Continuously adjustable.  
Resolution: 3  $\mu$ A  
Temperature dependence: Approx. 0.02%/ $^{\circ}$ C

Probe Current Measurement:  
With built-in meter.  
Ranges: 1, 3, 10 mA f.s.d.  
Accuracy: 2% at 50  $\Omega$  probe resistance  
(Systematic measuring error: Reading decreases by 0.1% per ohm increase of probe resistance).

Sensitivity in Temperature Measurements:  
To be calculated, approximately, from:

$$\frac{\Delta V_{out}}{\Delta T} = 0.95 \times \Lambda \times I_p \times R_{20} \times \alpha_{20} \times \frac{R_T}{R_p + R_T}$$

$R_p$  = probe resistance

Due to spread in the gain value  $\Lambda$  and in the temperature coefficient  $\alpha_{20}$ , calibration is recommended.

#### Amplifier Setting:

Normally for  $\Lambda = -6000$  with GAIN switch at 11. Provision for switching to  $\Lambda = -66,000$  with GAIN switch at 11. Switching is carried out inside the plug-in unit.

In this particular amplifier setting, the upper frequency limit is considerably reduced.

$$\Lambda \times f_{-3dB} \approx 8 \times 10^7 \text{ [Hz]}$$

Max. Output Voltage Range:  
0-30V

DC Output Voltage at Bridge Balance:  
0-20 V. Continuously adjustable

Normal Probe Cable Length:  
5 m

Accuracy of Resistance Measurements:  
 $\pm 0.25\% \pm 3 \text{ m}\Omega$

38

147

Operating Current in Resistance Measurements:  
Using AC (300 Hz square wave): 0.8 mA  
Using DC: 0-10 mA (continuously adjustable)

Output Impedance:  
Approx. 10  $\Omega$

Data When Using 55F05 1  $\mu$ m Platinum Wire Probe

Max. Upper Frequency Limit:  
Approx. 3 kHz at 10 m/sec air velocity (indirectly measured)

Max. Output Signal at 1 mA Probe Current:  
Approx. 6 V/ $^{\circ}$ C

Overheat Temperature at Zero Velocity:  
Approx. 0.06 $^{\circ}$ C/ $\mu$ W

Max. Resolution at 1 m/s. Probe Current and Zero Velocity:  
0.01 $^{\circ}$ C

Recommended Probe Current at Velocity Fluctuations:  
Less than 0.3 mA

#### PHYSICAL DATA

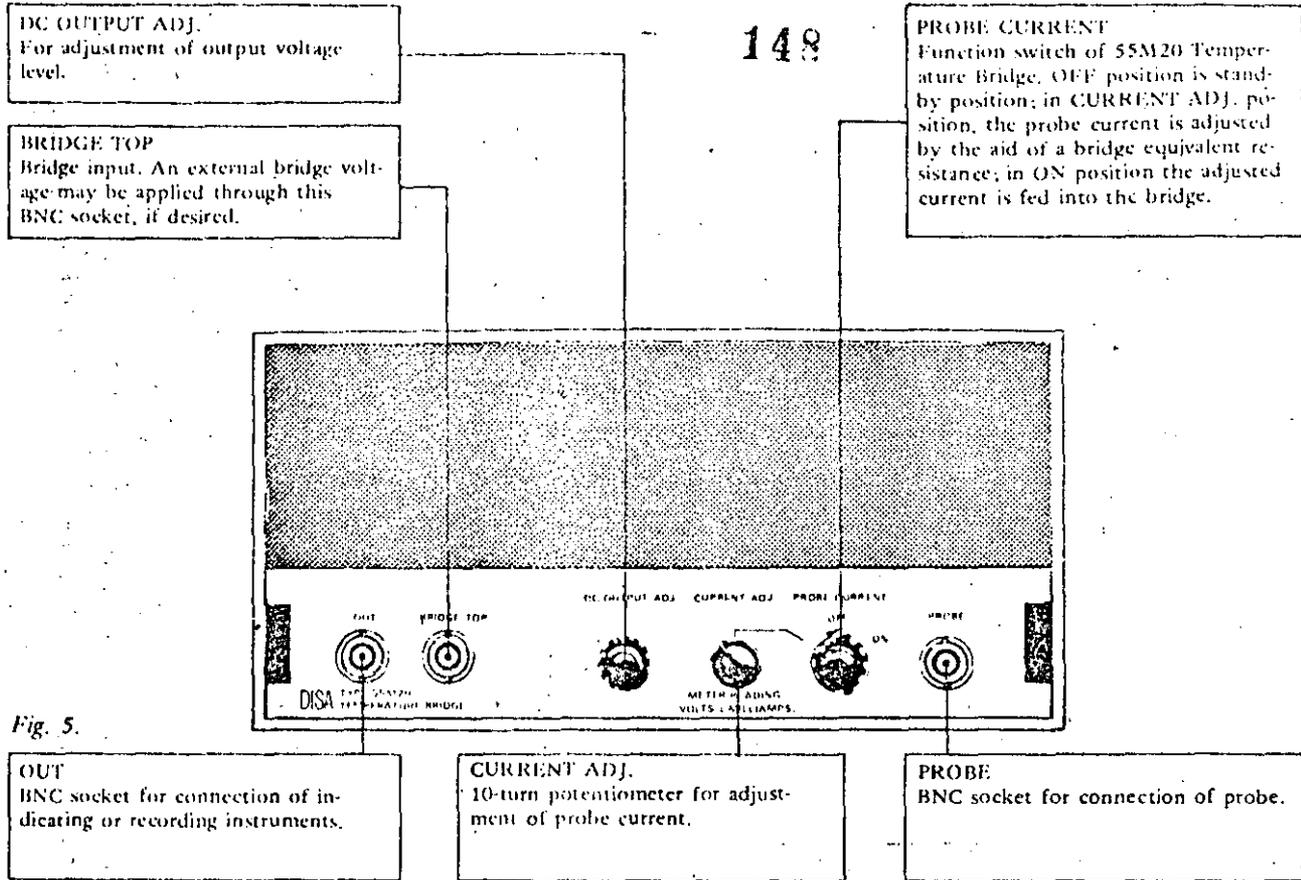
Ambient Temperature Range:  
0 $^{\circ}$  to +45 $^{\circ}$ C

Dimensions (HWD):  
39 x 202 x 103 mm

Finish:  
Light gray enamel

Weight:  
0.63 kg

Shock:  
70 g, 11 msec, 3 axes, non-operating



**INTERNAL SWITCH**  
For altering the system gain at low frequencies (locked position for general temperature measurements, non-locked position for measurement of extremely small temperature changes).

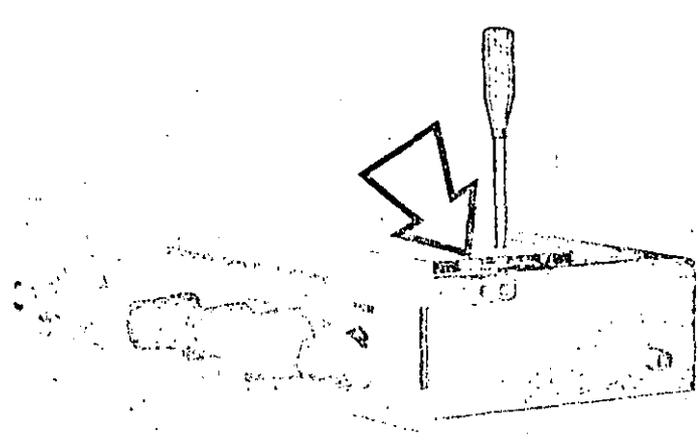
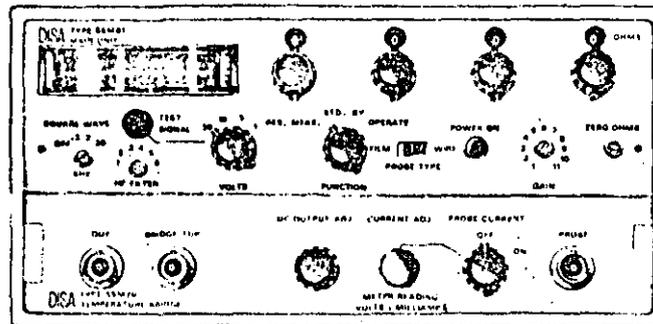


Fig. 6.

# Detailed Operating Instructions

149



## POWER SUPPLY

The supply voltages required for operating the 55M System are brought in through a 5-contact connector on the rear wall of the 55M01 Main Unit. The instrument requires two supply voltages: One between +16 and +36 V DC and one between -10 and -13 V DC. The main purpose served by the positive supply voltage is that of providing probe current.

The 55M System may be powered either from the 55M05 Power Pack or from external power sources (batteries etc.).

### Line Operation

The connection between the 55M01 Main Unit and the 55M05 Power Pack may be made in two different ways:

(a)

The Power Pack is bolted to the Main Unit with three non-losable screws so as to constitute an extension of the Main Unit cabinet. The electrical connections will then be made simultaneously and automatically via a 5-contact plug and socket.

(b)

If the 55M05 Power Pack is to be set up physically separate from the Main Unit, the electrical connections are made via a cable included in the equipment package. The two plugs at the cable ends are designed so that they cannot be inserted the wrong way.

When the connection between the Main Unit and Power Pack has been made in one of the two ways described, the next thing to do is to check if the Power Pack is switched to your local line voltage. The two windows to the left of the ON/OFF switch indicate the nominal range of the permissible line voltage. Should the latter fail to agree with your local line voltage, remove the rear wall of the 55M05 Power Pack (to do so, loosen the four fixing screws). This will enable you to remove the red selector plug and replace it with one of the correct type for your local line voltage. Bracketed voltages on the selector plug indicate max. permissible voltage fluctuations (see also under Technical Data).

The free end of the instrument power cable supplied should be fitted with a plug of the type prescribed by your local authorities. The plug at the other end of the cable fits into the instrument socket, from where it can only be removed after you have pressed the white button.

The fuse holder is adjacent to the power socket; the fuse rating is independent of the line voltage in use. It should be 0.5 A (slow-acting).

After the power cable has been plugged in, the instrument can be turned on and off with the power switch (ON/OFF).

*NOTE: Before applying power, turn the FUNCTION switch on the Main Unit to the STD. BY position in order to eliminate any risk of probe damage.*

If the 55M System is operated in conjunction with the 55M20 Temperature Bridge, the PROBE CURRENT switch on the rear wall of the 55M05 Power Pack should always be at NORMAL. The HIGH position will be used only in conjunction with the 55M11 CTA Booster Adapter.

### Battery Operation

If the 55M System is to be operated in places where no line voltage is available, or if it is to be used as a portable unit that is ready for operation at any time, storage batteries and dry batteries etc. will be used as power sources. The 55M05 Power Pack will not be required, resulting in a considerable saving in weight.

Between +16 V and +36 V DC is required for producing the probe current.

The other supply voltage operates some electronic circuits which require between -10 V and -13 V DC at approx. 130 mA. Because of the limited load, this supply voltage can be provided easily by connecting a few dry cells in series.

The power sources should be connected to the 55M01 Main Unit via the battery cable. The plug goes into the connector on the rear wall of the Main Unit (it cannot be inserted the wrong way).

The power sources should be provided with cables and banana plugs, which should be inserted in the connector



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA

UNIDAD 6

## CAPITULO I

## INTRODUCCION

En este primer Capítulo se hace una revisión de los conceptos más importantes en relación con el uso de los instrumentos de medición y se examinan los elementos principales de éstos desde el punto de vista del objetivo de la medición.

## 1.1 APLICACIONES DE LOS INSTRUMENTOS DE MEDICION

Atendiendo al empleo que puede tener un instrumento de medición, se puede establecer una clasificación como sigue:

- a) Instrumentos de "observación" (o "monitoreo"). - Se trata de aquellos dispositivos medidores cuya función es simplemente la de indicar el estado que guarda una determinada variable o cantidad de interés en una situación dada. Por ejemplo, los instrumentos que emplea el Servicio Meteorológico para informar el estado del tiempo, el medidor de consumo de agua en una casa-habitación, la etiqueta que usan los trabajadores nucleares para detectar la acumulación de radiaciones a las que han estado expuestos, etc.
  
- b) Instrumentos de control. - Estos instrumentos de medición constituyen parte del sistema automático de control en de terminado proceso u operación. El instrumento mide la variable de interés y dependiendo del valor que ella tenga, ejecuta una acción que se retroalimenta y modifica a dicha variable. Existen numerosos ejemplos de este tipo de sistemas de medición; posiblemente uno de los más familiares sean aquellos que permiten mantener una temperatura constante en un espacio determinado (una cámara frigorífica o un salón con aire acondicionado): un instrumento que mide la temperatura, continuamente alimenta al sistema de control el cual, dependiendo de la información de tempera

tura que se le está proporcionando, regula la operación de diversos elementos (bombas o ventiladores, calentadores, válvulas, etc) para mantener constante precisamente a la temperatura que sirve de fuente de información.

- c) Instrumentos usados en la experimentación.- Los dispositivos medidores que por su uso puedan agruparse en esta categoría, constituyen un elemento sumamente útil en el estudio y solución de problemas de la ingeniería y de las ciencias en general. Con ellos se persigue conocer a través de los valores que toman determinadas variables o parámetros significativos, la naturaleza de un fenómeno o el comportamiento de un sistema cuando se le sujeta a diversos estímulos. Se puede así verificar la validez de un modelo teórico, o bien, mejorar la comprensión de los diversos aspectos que conforman el problema

Obsérvese que la clasificación presentada se refiere exclusivamente al papel que los instrumentos medidores pueden jugar dentro de sistemas más complejos. De esta manera, un instrumento dado puede caer en cualquiera de las tres, y además en dos o tres a la vez de las funciones mencionadas.

## 1.2 LOS METODOS EXPERIMENTALES COMPARADOS CON LOS METODOS TEORICOS.

Conviene resumir las principales características de los métodos experimentales comparándolas con las de los métodos teóricos, teniendo presente siempre que muchos problemas necesitan de la aplicación de los dos tipos de tratamientos, alcanzándose en la actualidad la situación tal que ambos métodos son complementarios y un procedimiento de solución o de estudio que los utiliza a los dos de manera balanceada, resulta más efectivo que cuando se emplea a uno solo.

- a) Métodos experimentales:

- Generalmente permiten obtener resultados aplicables al

sistema específico en que se efectúa la prueba; se puede obtener cierta generalización sin embargo, utilizando el análisis dimensional.

- No se requieren hipótesis simplificatorias para su empleo: se exhibe la naturaleza verdadera del fenómeno.
- Es necesario efectuar mediciones precisas lo cual implica conocer con suficiente detalle la manera como funcionan, y los errores a que están sujetos, los instrumentos de medición

b) Métodos teóricos:

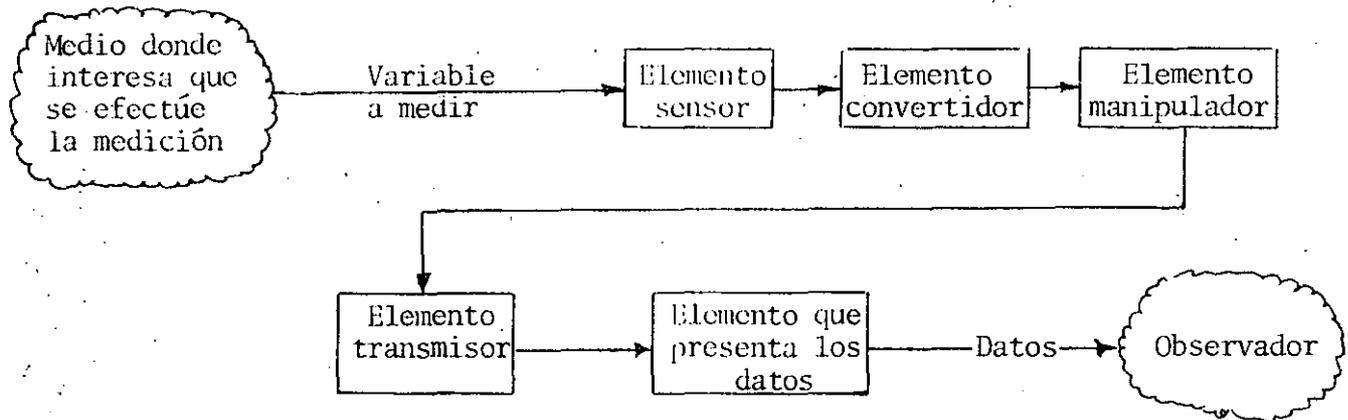
- Normalmente, los resultados que se obtienen mediante su aplicación son de uso general.
- Invariablemente requieren de la formulación de hipótesis simplificatorias: lo que se estudia no es el sistema físico real sino un modelo matemático del mismo que puede o no ajustarse adecuadamente al sistema.
- Muchas veces el modelo puede conducir a problemas matemáticos de difícil, sino es que imposible, solución.
- No necesitan más que de papel, lápiz y computadora, esta última generalmente disponible en un centro de estudio o de análisis.
- No es necesario emplear tiempo en el uso y manejo de equipo, pero sí tal vez, en la optimización de los programas de computadora.

1.3 DESCRIPCION DE LOS INSTRUMENTOS SEGUN LA FUNCION DE SUS ELEMENTOS.

Resulta interesante describir el funcionamiento de los instrumentos de medición de una manera general, sin especificar el objeto, la forma o los materiales de cada uno de sus componentes. Lo anterior se puede lograr examinando las funciones que tienen asignadas los diversos elementos de un instrumento.

En efecto, si se estudia el funcionamiento de diferentes sistemas de medición teniendo como marco de referencia la generalización, se puede concluir que todos ellos presentan caracterís

ticas muy semejantes con respecto a las funciones que desempeñan sus elementos. De esta manera se podrá encontrar que la mayor parte de los instrumentos de medición cuentan con todos o algunos de los elementos funcionales que aparecen en el siguiente esquema:



El elemento sensor es aquel que se encuentra físicamente en contacto con el medio donde interesa que se efectúe la medición, y la respuesta que produce depende tanto de sus propias características como de la naturaleza de la variable a medir. Ejemplos típicos de elemento sensor son la galga extensométrica y el hilo caliente, la primera para detectar deformaciones en un sólido y el segundo para captar las fluctuaciones de velocidad en un flujo.

El elemento convertidor tiene como función transformar la señal producida por el elemento sensor (generalmente un desplazamiento, un cambio de temperatura o un cambio de resistencia eléctrica) en otra variable más adecuada para su manejo (generalmente voltaje) pero sin perder la información contenida en ella. Un transductor de presión convierte por ejemplo, un desplazamiento proporcional a una presión, en un voltaje (obsérvese que este ejemplo en realidad constituye a la vez elemento sensor y elemento convertidor).

Muchas veces, con objeto de que el instrumento pueda cumplir su cometido de medición o de "monitoreo", se necesita poder manipular de determinada manera a la variable física de interés. Se trata esencialmente, de cambiar el valor de la variable de acuerdo con alguna regla establecida de antemano. Tal es la función

del elemento manipulador cuyo más claro ejemplo es sin duda el amplificador electrónico.

El objetivo del elemento transmisor es simplemente enviar la información contenida en la variable de interés de un elemento funcional a otro; puede por lo tanto, consistir en varios y diferentes subelementos que pueden ir intercalados en los demás elementos del instrumento. Se tienen ejemplos tan sencillos como una flecha mecánica o tan complejos como un sistema de telemetría para transmitir información de un punto a otro de la Tierra.

Finalmente, con objeto de que el observador puede proceder al uso de la información obtenida por el instrumento, es necesario contar con un elemento expositor de los datos, el cual traduce la información a una forma más adecuada para su interpretación. Este elemento puede presentar la información simplemente mediante una aguja que se mueve en una escala sobre la cual se debe efectuar la lectura, o bien, a través del registro escrito, magnético o de otra índole.

Es necesario señalar que los elementos funcionales constitutivos de un sistema de medición no necesariamente se presentan en todos los instrumentos como tampoco aparecen sus funciones en el orden esquematizado anteriormente. Además, como lo sugirió uno de los ejemplos, un mismo elemento puede tener varias funciones a la vez.

Para terminar este primer Capítulo conviene indicar que el acto de medir siempre entraña la afectación del medio donde interesa que se efectúe la medición; el instrumento medidor siempre extrae una cantidad de energía por pequeña que sea, del medio de interés. Lo anterior implica que la variable a medirse se ve afectada por el acto de medición y precisamente para reducir a un mínimo esta perturbación o sus efectos posteriores, es necesario diseñar, seleccionar y operar adecuadamente los instrumentos de medición.

#### 4.1 CLASIFICACION DE LAS SEÑALES. PROCESOS DETERMINISTAS.

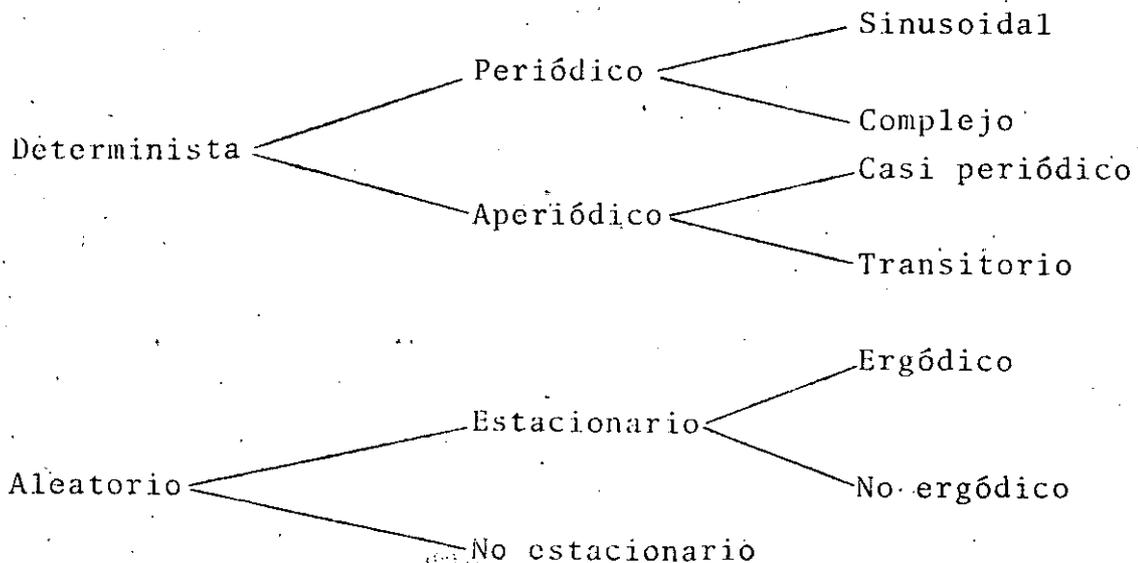
En esta Sección se presenta una posible clasificación de las señales de interés en los procedimientos de medición atendiendo a la naturaleza de los fenómenos o eventos que ellas representan. Posteriormente se revisa de manera muy breve los principales tipos de funciones deterministas.

##### 4.1.1 CLASIFICACION DE LAS SEÑALES.

Se puede decir en general que toda variable que represente algún aspecto de un fenómeno físico, puede clasificarse como determinista o no determinista (aleatoria). Pertenecen a la primera categoría, aquellos procesos que se pueden describir mediante una relación matemática explícita. Por ejemplo, el movimiento de un cuerpo suspendido mediante un resorte, la descarga del voltaje de un capacitor a través de una resistencia, o el cambio de temperatura del agua en un recipiente conforme se le aplica calor, son fenómenos que pueden describirse mediante fórmulas explícitas, resultando estas últimas de leyes fundamentales o de observaciones repetidas.

A la segunda clase pertenecen aquellos casos en los cuales no es posible escribir una relación matemática explícita entre las variables que gobiernan el fenómeno. Se trata entonces, de situaciones en las que resulta imposible predecir un valor exacto de las variables para un instante futuro (aceptando que la variable independiente sea el tiempo). Se dice que las variables son aleatorias y que sólo se pueden describir en términos de proposiciones probabilísticas y promedios estadísticos en lugar de ecuaciones explícitas. Ejemplos de ellos lo constituyen sin duda, la velocidad, la presión y la temperatura en un flujo turbulento.

El cuadro siguiente presenta una posible clasificación de los fenómenos o procesos atendiendo al carácter arriba apuntado y utilizando como variable independiente el tiempo (no es necesario emplear este último, aunque es el caso más común):



### Señales casi periódicas.

Corresponden a esta clase aquellas funciones generalmente no periódicas, compuestas de dos o más frecuencias arbitrarias. Efectivamente, la suma de dos o más ondas sinusoidales dará como resultado una función periódica siempre que todos los cocientes posibles de formar entre pares de frecuencia de las componentes, sean números racionales. Cuando no sucede así, decimos que la función tiene un carácter casi periódico. Matemáticamente se tiene:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{sen} (2\pi f_n t + \theta_n) \quad (4.1.6)$$

donde  $f_n/f_m$  no es racional.

Un ejemplo donde se presenta este tipo de función, lo constituyen las vibraciones de una hélice de avión cuando los pistones del motor están fuera de sincronización.

La figura 4.3 muestra como sería un espectro de amplitud-frecuencia para este tipo de funciones.

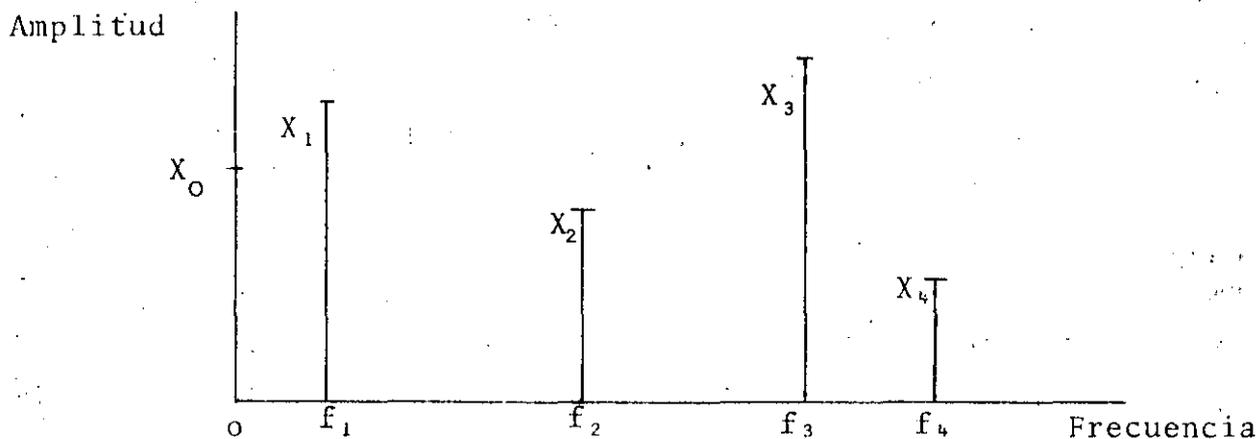


Fig. 4.3 Espectro de una función casi periódica.

### Señales transitorias.

Una clase de procesos deterministas de gran importancia en la práctica, está formada por funciones de tipo transitorio. Por ejemplo, las vibraciones amortiguadas de un sistema mecánico cuando se ha dejado de aplicar la fuerza excitatriz.

En este caso no es posible descomponer la función en series de Fourier. Sin embargo, en casi todos los casos se puede obtener una representación espectral continua mediante el uso de la integral o transformación de Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4.1.7)$$

La función transformada  $X(f)$ , generalmente es una variable compleja, pudiéndose entonces escribir:

$$X(f) = |X(f)| e^{-j\theta(f)}$$

donde  $|X(f)|$  es la amplitud y  $\theta(f)$  es el ángulo de fase.

En la figura 4.4 aparecen algunos ejemplos de señales transitorias con sus correspondientes transformadas de Fourier.

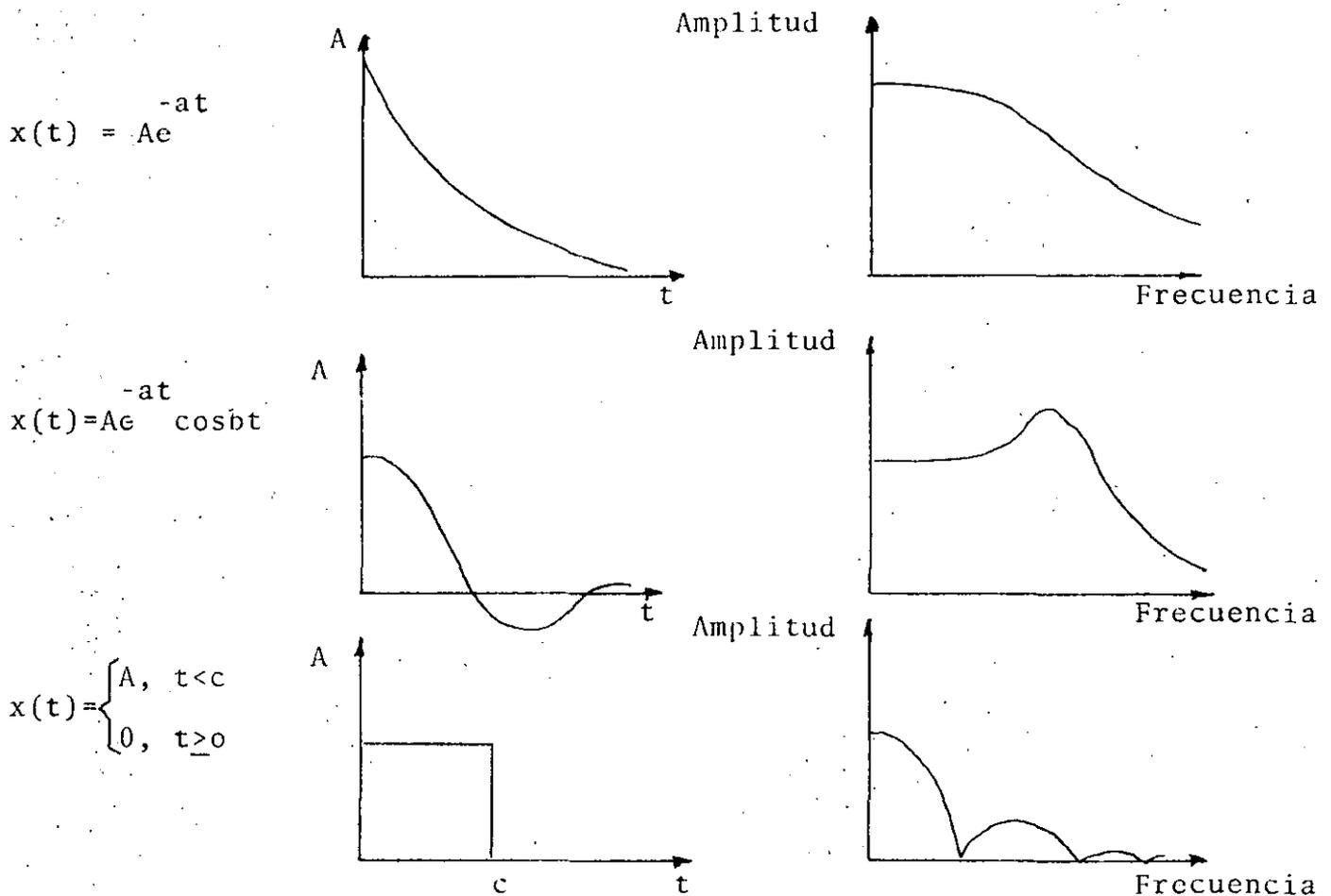


Fig. 4.4 Ejemplos de señales transitorias.

## 4.2 ELEMENTOS DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS.

Se presentan a continuación, los aspectos elementales básicos de la teoría de los procesos estocásticos.

### 4.2.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

#### Concepto de proceso estocástico

Tal como se mencionó anteriormente, existen fenómenos físicos que no pueden describirse mediante una relación matemática explícita debido a que cada observación del fenómeno es única, es decir, una observación hecha representa solamente una de las muchas posibilidades que pudieron haber ocurrido.

El concepto de procesos estocástico es una extensión del de variable aleatoria. Efectivamente, se recordará que al definir una variable aleatoria, se acostumbra asociar a cada posible resultado aleatorio de un experimento, una cantidad o número de acuerdo a una regla determinada. Para un proceso estocástico, se asocia una señal o función (generalmente respecto a alguna variable independiente de interés, por ejemplo el tiempo), a cada posible resultado del experimento. Al conjunto o "ensamble" de funciones, junto con ciertas medidas de probabilidad, se le llama precisamente proceso aleatorio o proceso estocástico. Cada una de las señales o funciones es una muestra o función-muestra del proceso estocástico. Un ejemplo típico lo constituye la señal de ruido que se tiene en un sistema electrónico. El conjunto o "ensamble" del proceso está formado por todas las ondas de ruido que se pueden tener en un número igual de sistemas electrónicos idénticos o en un mismo sistema cada vez que se le ponga a funcionar. (fig. 4.5)

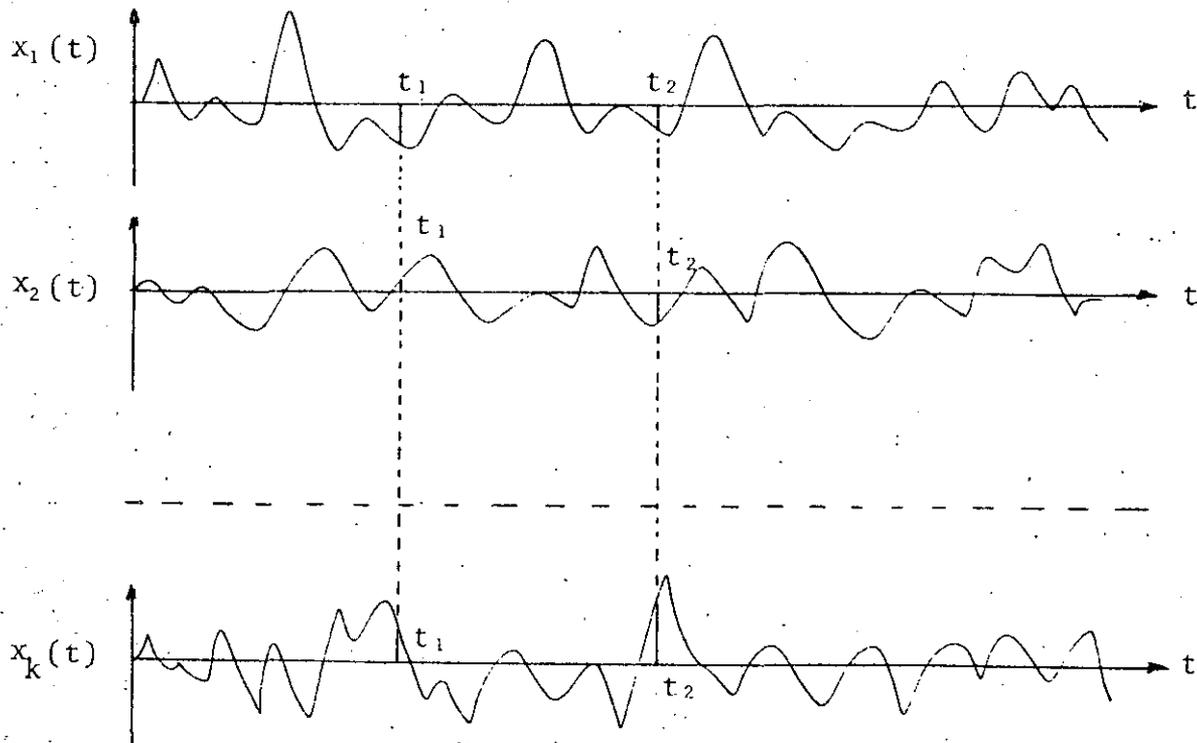


Fig. 4.5 Proceso estocástico.

Nótese que cada una de las señales que forman el proceso, pueden ser o no aleatorias en sí mismas. En realidad, la aleatoriedad involucrada en el concepto de proceso estocástico, se refiere a la ocurrencia de una señal en particular.

### Descripción de un proceso estocástico

Existen varias medidas de probabilidad empleadas en la descripción de un proceso estocástico. Considérese el proceso  $\{x_k(t)\}$  de la figura 4.5. Para un valor fijo de la variable independiente  $t=t_1$ , el conjunto de números  $x_k(t_1)$  constituyen una variable aleatoria, la cual tiene una cierta distribución de probabilidades. De la misma manera, la variable aleatoria  $x_k(t_2)$ , formada por los valores de todas las muestras  $x$  para  $t=t_2$ , tendrá asociada una distribución de probabilidades. Se puede entonces definir un número infinito de variables aleatorias correspondiendo a todos los valores de  $t$  que puede tomar, con sus respectivas distribuciones de probabilidades. A las medidas estadísticas de cada una de estas variables aleatorias, tomadas individualmente, se les llama "estadística de primer orden del proceso estocástico". Análogamente, la estadística-conjunta de dos variables aleatorias, se le llama "estadística de segundo orden del proceso". En general si se toman  $n$  variables a la vez, la estadística-conjunta recibe el nombre de "estadística de orden  $n$  del proceso estocástico"

### Estadísticas de primer y de segundo orden

La estadística de primer orden para un proceso estocástico, queda completamente especificada por la distribución de probabilidades de las variables aleatorias para cada valor de  $t$ . En forma simbólica, se tiene para la densidad de probabilidades:  $p(x;t)$ . Conociendo esta densidad de probabilidades, se puede determinar el valor medio y el valor medio cuadrado de la variable aleatoria  $x(t)$ , mediante las conocidas fórmulas:

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;t)dx & (4.2.1) \\ \overline{x^2(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x;t) dx \end{aligned}$$

El producto  $p(x;t)dx$  se puede interpretar como la probabilidad de que la amplitud de una función muestra  $x(t)$ , se encuentre en el intervalo  $(x, x+dx)$  en el instante  $t$ . Desde el punto de vista de frecuencias relativas, correspondería a que de un total de  $N$  muestras,  $n$  pasaran por la ventana de la figura 4.6., pudiéndose escribir:

$$p(x;t) dx = \frac{n}{N}$$

$$p(x;t) = \frac{n}{Ndx}$$

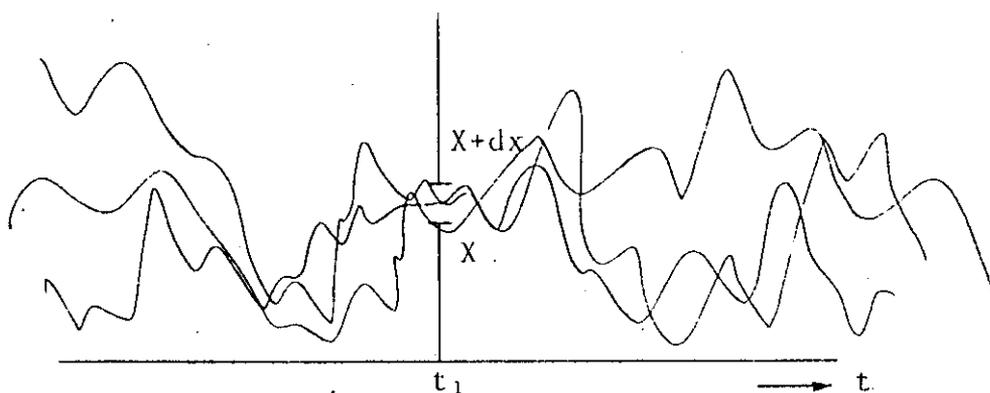


Fig. 4.6 Estadística de primer orden

Si bien la estadística de primer orden nos da información respecto a la distribución de amplitudes de las funciones muestra para todos los valores de  $t$ , no resulta adecuada para describir completamente el proceso aleatorio. Considérese por ejemplo, que el proceso estuviera formado por señales eléctricas y se deseara conocer su contenido de frecuencias. Una señal, que contenga componentes de frecuencias predominantemente bajas, cambia muy lentamente, resultando muy parecidos los valores  $x(t_1)$  y  $x(t_1+\tau)$ . Es decir, las variables aleatorias  $x(t_1)$  y  $x(t_1+\tau)$  no son estadísticamente independientes si  $\tau$  es suficientemente pequeño. En otras palabras el conocimiento de una nos da cierta información acerca de la otra. Por otro lado, si las señales contienen frecuencias predominantemente altas, entonces las señales cambian muy rápidamente y los valores de las señales separados por el mismo intervalo  $\tau$  guardarán muy poco parecido. Resulta así que la correlación entre valores de la señal para varios intervalos puede darnos información útil respecto al contenido de frecuencia del proceso en general, y la estadística de primer orden no nos ayuda en este respecto. Se recordará que se puede obtener una medida de la relación o interdependencia de dos variables aleatorias, mediante su correlación, la cual a su vez se puede determinar a partir de la función de densidad de probabilidades conjunta:  $p(\sigma; \eta; t_1, t_2)$ . La probabilidad de que una función muestra tenga su amplitud en el intervalo  $(\sigma, \sigma+d\sigma)$  para  $t=t_1$  y en el rango  $(\eta, \eta+d\eta)$  para  $t=t_2$ , está dada por  $p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta$ . Interpretando este resultado desde el punto de vista de frecuencias relativas, se diría que si de  $N$  funciones muestra,  $m$  de ellas pasan simultáneamente a través de las "ventanas"  $\sigma+d\sigma$  y  $\eta+d\eta$ , correspondientes a  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente, (figura 4.7) entonces se escribiría:

$$p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta = \frac{m}{N}$$

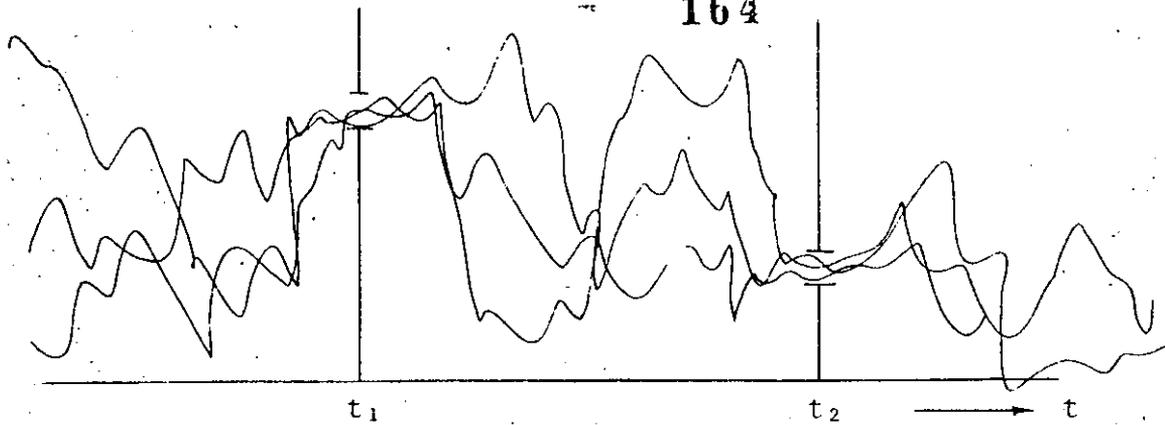


Fig. 4.7 Estadística de segundo orden

La densidad-conjunta de probabilidades para dos variables aleatorias se puede relacionar con las densidades individuales de las variables, mediante simple integración, por ejemplo:

$$p(\sigma; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\eta$$

En general, si se tiene la densidad-conjunta de probabilidades de orden  $n$ , se pueden obtener todas las densidades de orden inferior a través de integración sucesiva.

Para terminar esta subsección, diremos que un proceso estocástico queda completamente especificado si se conoce la densidad conjunta de probabilidades  $p(\sigma, \eta, \dots, \xi; t_1, t_2, \dots, t_n)$  para cualquier grupo finito de instantes de observación  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y para cualquier valor que tome  $n$ . Afortunadamente, en la práctica solamente es necesario considerar hasta el segundo orden para determinar valores medios, valores cuadrados, autocorrelación, espectro, etc., particularmente si se trata de transmisión de señales aleatorias a través de sistemas lineales.

### Procesos estacionarios y procesos ergódicos

Antes de examinar el concepto de proceso estacionario y proceso ergódico, vamos a definir dos promedios de gran utilidad en el manejo de procesos estocásticos.

Se define como valor medio de la variable aleatoria  $x(t_1)$ , al promedio estadístico, promedio de "ensamble" o esperanza:

$$\overline{x(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1) p(x; t_1) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \quad (4.2.2)$$

Se define como función autocorrelación del proceso estocástico  $\{x(t)\}$ , al promedio estadístico del producto de dos variables aleatorias  $\sigma = x(t_1)$  y  $\eta = x(t_2)$ :

$$R_X(t_1, t_2) = \overline{\sigma \eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \eta p(\sigma \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_2) \quad (4.2.3)$$

Existen procesos estocásticos para los cuales alguna de las funciones de densidad de probabilidades o alguna otra función descriptiva del proceso, es independiente del parámetro  $t$ . Por ejemplo, el proceso aleatorio:

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta)$$

donde  $\theta$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $(0, 2\pi)$ , tiene una densidad de probabilidades de primer orden independiente de  $t$ .

Se dice que un proceso aleatorio es (estrictamente) estacionario si toda su estadística (densidades de probabilidad de todos los órdenes) es independiente del parámetro  $t$ . Un proceso estocástico es "débilmente" estacionario si el valor medio  $\overline{x(t)}$  y la autocorrelación  $R_X(t_1, t_2)$ , son independientes de  $t$ :

$$\begin{aligned} \overline{x(t)} &= \text{constante para todo } t \\ R_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_1 + \tau) = R_X(\tau) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

En los párrafos anteriores se ha discutido cómo se pueden determinar las propiedades de un proceso estocástico mediante promedios calculados tomando todo el conjunto o "ensamble" de muestras para valores específicos del parámetro  $t$ . En muchos casos de interés práctico, se puede determinar las propiedades del proceso, calculando promedios temporales (es decir, respecto al parámetro  $t$ ) sobre determinadas muestras del proceso. Así por ejemplo, si se tiene la  $k$ -ésima muestra del proceso, es posible calcular los promedios:

$$\mu_X(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt \quad (4.2.5)$$

$$R_X(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt$$

De esta manera, si el proceso  $\{x(t)\}$  es estacionario y  $\mu_x(k)$ ,  $R_x(\tau, k)$  definidos arriba, resultan ser iguales a los promedios estadísticos (4.2.2) y (4.2.3), respectivamente, se dice que el proceso  $\{x(t)\}$  es un proceso estocástico ergódico.

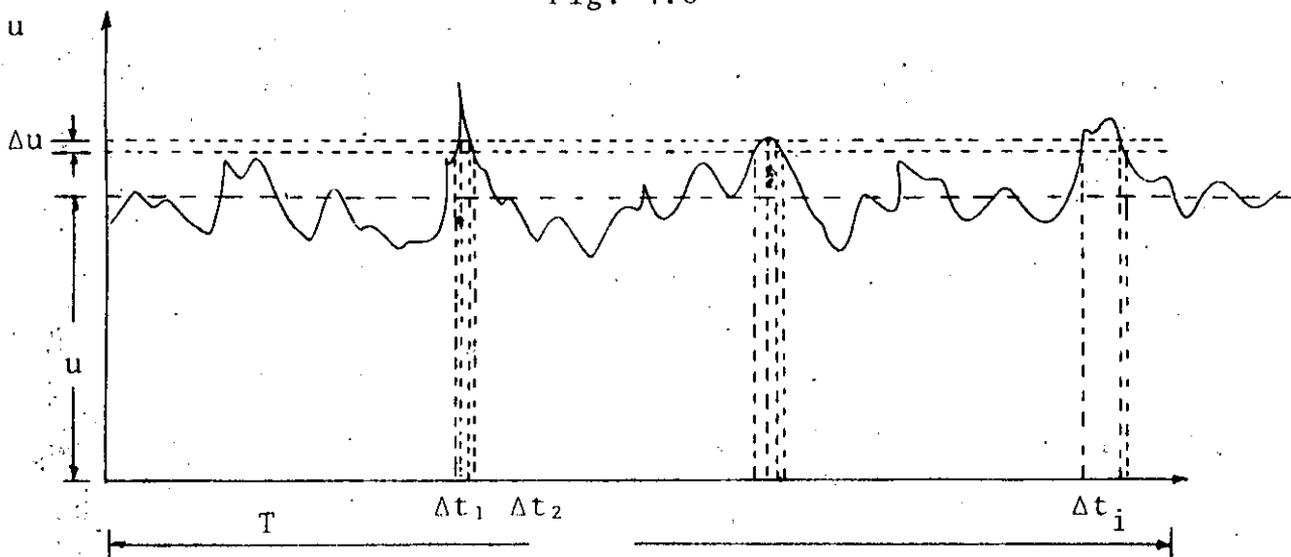
Los procesos ergódicos resultan ser una clase muy importante de procesos aleatorios, ya que todas sus propiedades pueden determinarse mediante promedios temporales en una sola función muestra. Generalmente, en la práctica un proceso aleatorio estacionario es ergódico y su tratamiento es más fácil.

#### 4.2.2 MOMENTOS. AUTOCORRELACION. ESPECTRO DE POTENCIA.

##### Función de densidad de probabilidades

Cualquier variable de naturaleza aleatoria, por ejemplo la velocidad en un punto en el seno de un flujo turbulento, puede tomar una forma como la que se indica a continuación:

Fig. 4.8



Supongamos que dentro del intervalo  $T$ , la variable toma valores entre  $u$  y  $u + \Delta u$  durante los intervalos  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_i$  de tiempo indicados en la figura; de esta manera el porcentaje del tiempo durante el cual la variable cae dentro en el intervalo indicado se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Delta \tau_i}{T}$$

y es de esperarse que este porcentaje resulte proporcional a  $\Delta u$ .

Podemos definir a la función de densidad de probabilidades como

$$p(u) = \frac{1}{\Delta u} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta r_i}{T} \quad (4.2.6)$$

de tal modo que la probabilidad de que  $u$  tome un valor entre  $u_1$  y  $u_2$  está dada por

$$P(u_1 < u < u_2) = \int_{u_1}^{u_2} p(u) du \quad (4.2.7)$$

es decir, el área bajo la curva  $p(u)$  entre las abscisas  $u_1$  y  $u_2$ .

En la última expresión  $P(u)$  recibe el nombre de función de distribución de probabilidades y se define como

$$P(u) = \int_{-\infty}^u p(u) du \quad (4.2.8)$$

y corresponde a la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor igual o menor que un determinado nivel  $u$ . Obsérvese que se tienen las siguientes propiedades para la función de densidad de probabilidades y la función de distribución de probabilidades:

$$\begin{aligned} p(u) &\geq 0 \\ P(\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1 \\ P(-\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$$0 \leq P(u) \leq 1$$

$$\frac{dP(u)}{du} = p(u)$$

Las funciones que acabamos de definir tienen en general, una forma como se indica a continuación

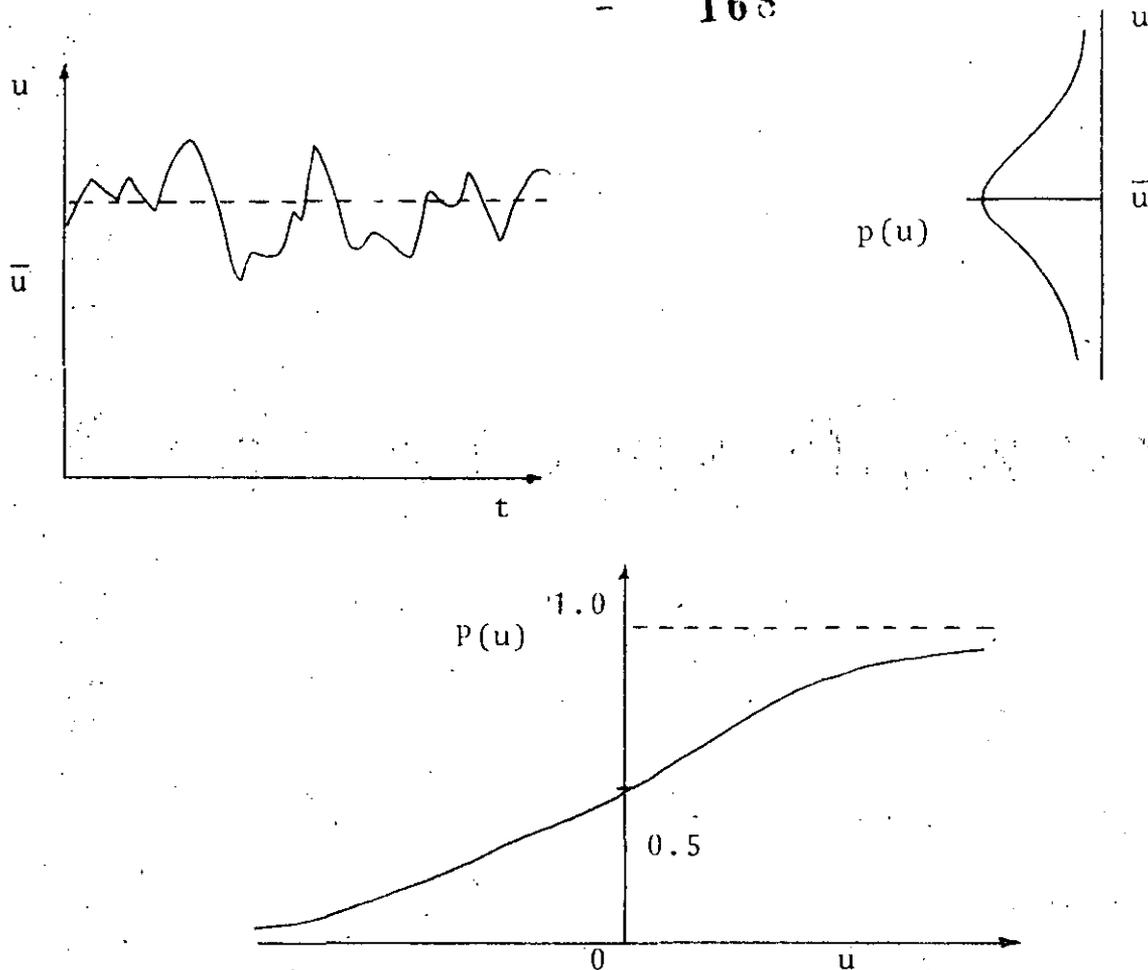


Fig. 4.9 Funciones de densidad de probabilidades y de distribución acumulada

### Momentos

Supongamos que se tiene una función  $f(u)$  y que se desea calcular su valor medio en función de  $p(u)$ ; se escribe entonces

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(u) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p(u) du \quad (4.2.10)$$

es decir, sumamos todos los intervalos de tiempo  $\Delta t_i$  incluidos entre  $0$  y  $T$  durante los cuales  $u$  se encuentra entre los valores  $u$  y  $u + \Delta u$ , multiplicamos por  $f(u)$  y sumamos para todos los niveles de  $u$ .

De interés particular en cuanto a la forma de  $f(u)$  son las potencias de  $u$ . Los correspondientes valores medios reciben el nombre de momentos; así se tiene para el momento de primer orden la conocida media:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u p(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u dt \quad (4.2.11)$$

Ahora bien, generalmente, sobre todo en el trabajo experimental, resulta más cómodo manejar a las variables fluctuantes restándoles su correspondiente valor medio. Supongamos entonces que redefinimos a nuestra variable de la manera indicada; en tal caso los momentos se convierten en momentos centrales, teniéndose para el de primer orden evidentemente  $\bar{u}=0$ . Los siguientes tres momentos centrales son de interés en el estudio de la turbulencia:

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt \quad (4.2.12)$$

Este momento de segundo orden (varianza) es una medida de la amplitud de las fluctuaciones, acostumbrándose utilizar a veces el valor r.m.s, es decir  $\sqrt{\overline{u^2}}$ .

El momento de tercer orden, adimensionalizado como se indica a continuación.

$$f.o. = \frac{\overline{u^3}}{(\overline{u^2})^{3/2}} \quad (4.2.13)$$

recibe el nombre de factor de oblicuidad, mientras que el momento de cuarto orden,

$$f.a. = \frac{\overline{u^4}}{(\overline{u^2})^2} \quad (4.2.15)$$

se conoce como factor de aplanamiento. Ambos factores generalmente se utilizan para indicar qué tanto se diferencia la densidad de probabilidades de una función de tipo normal o gaussiana, tal como se ilustra en las siguientes figuras:

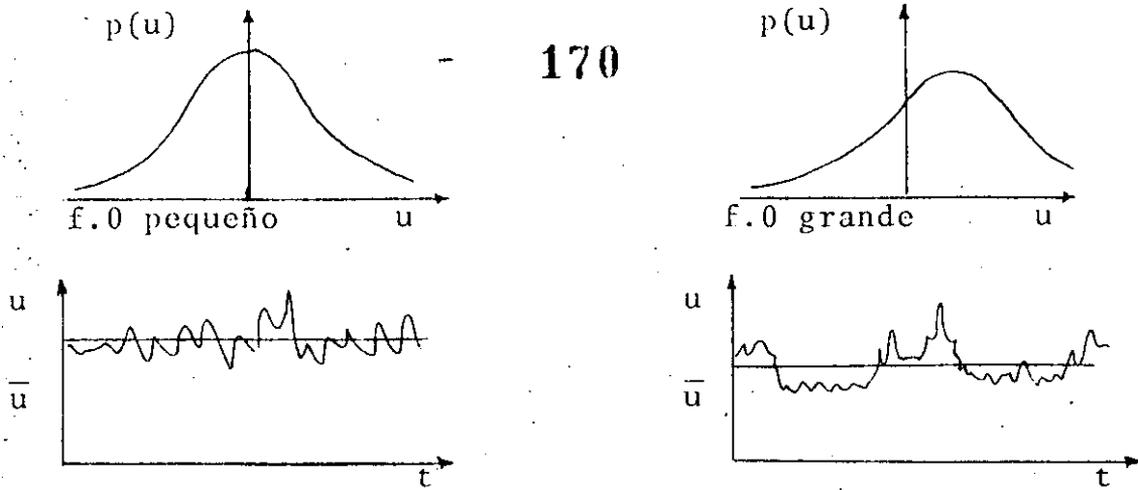


Fig. 4.10 Factor de oblicuidad

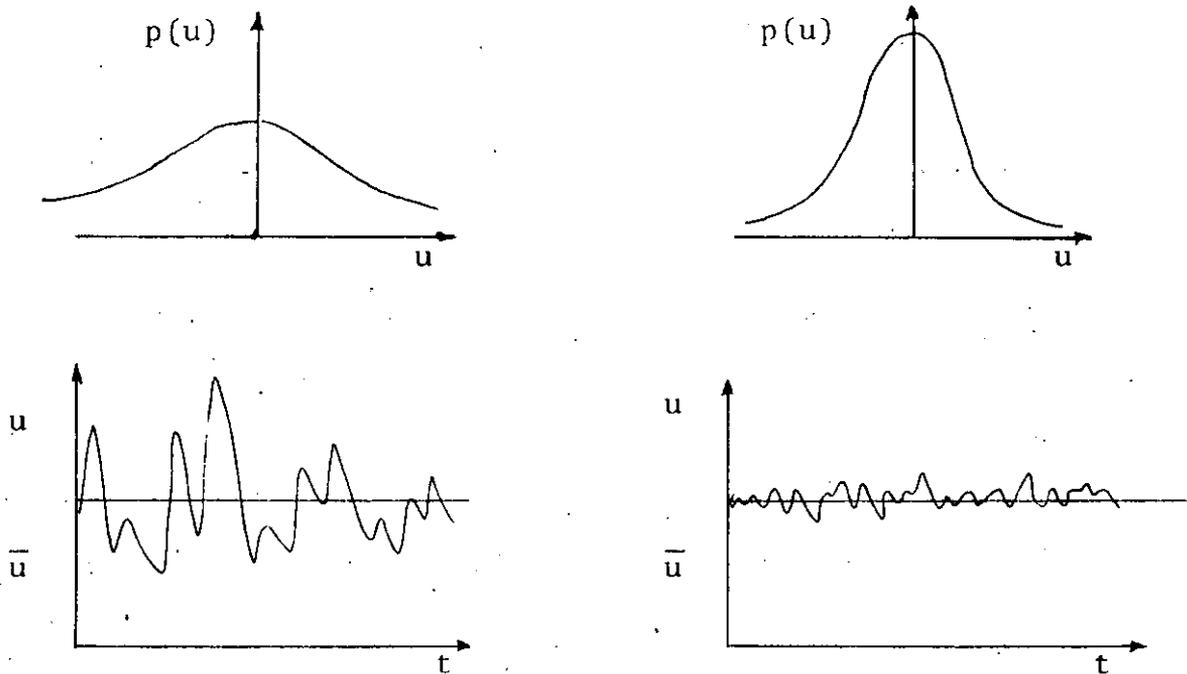


Fig. 4.11 Factor de aplanamiento

### Función autocorrelación

Para un proceso ergódico, la función autocorrelación está dada por:

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau) dt = \overline{u(t)u(t+\tau)} \quad (4.2.15)$$

la cual, en forma adimensional se acostumbra escribir:

$$R_u(\tau) = \frac{\overline{u(t)u(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u^2(t)}} \sqrt{\overline{u^2(t+\tau)}}} \quad (4.2.16)$$

Esta función es real, par y tiene su valor máximo para  $\tau=0$ .

El concepto de función de correlación expresado en (4.2.15) se puede extender al caso de dos procesos estocásticos conjuntamente ergódicos  $\{u(t)\}$  y  $\{v(t)\}$ . Se define entonces como función de correlación cruzada al promedio.

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int u(t) v(t+\tau) dt = \overline{u(t)v(t+\tau)} \quad (4.2.17)$$

o bien, en forma normalizada

$$R_{uv}(\tau) = \frac{\overline{u(t)v(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{u^2(t)}} \sqrt{\overline{v^2(t+\tau)}}} \quad (4.2.18)$$

Al igual que la autocorrelación, esta función es real; sin embargo no es par ni tiene su valor máximo para  $\tau=0$ , necesariamente.

A continuación se enlistan las principales propiedades de las funciones de correlación:

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_x(-\tau) \\ R_x(0) &= \overline{x^2} \\ R_x(\tau) &= R_x(\tau+nT) \text{ para } x(t)=x(\tau+nT) \\ R_x(0) &\geq R_x(\tau) \\ R_{xy}(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \\ |R_{xy}(\tau)| &\leq |R_x(0) R_y(0)|^{1/2} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

### Espectro de potencia

Este concepto es una extensión del espectro de amplitud frecuencia para una señal periódica (series de Fourier) y para una señal transitoria (transformada de Fourier). Efectivamente, en el segundo caso se tenía:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.2.20)$$

con condición que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt \quad \text{sea finita}$$

En el caso de una señal aleatoria la última condición no se cumple. Además, la función que resulta de interés no es  $u(t)$  sino  $u^2(t)$ .

En esas condiciones, lo que se hace es redefinir  $u(t)$  de tal manera de sólo considerar un intervalo  $0 \leq t \leq T$ . Así, la integral arriba apuntada resulta finita.

Expresemos ahora el valor medio cuadrado  $\overline{u^2(t)}$  mediante transformadas de Fourier:

$$\overline{u^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} dt \quad (4.2.21)$$

Se puede demostrar que el orden de integración no afecta al resultado de la última expresión. Se obtiene entonces:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{d\omega}{2\omega} \int_0^T u(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.2.22)$$

De la definición de transformada de Fourier, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{i\omega t} dt = F(-\omega) \quad (4.2.23)$$

y tomando en cuenta la redefinición de  $u(t)$  que nos indica un va-

Por cero fuera del rango  $0 \leq t \leq T$ , se puede escribir:

$$\int_0^T u(t) e^{i\omega t} dt = F(\omega) \quad (4.2.24)$$

Sustituyendo en (4.2.22), resulta:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.2.25)$$

y siendo  $F(\omega)$  y  $F(-\omega)$  funciones complejas conjugadas, resulta:

$$\overline{u^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.2.26)$$

La cantidad de arriba es una medida de la energía asociada a la señal  $u$ . El integrando:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(\omega)|^2}{T} \quad (4.2.27)$$

representa la distribución de esa energía en la frecuencia  $\omega$ . Se conoce bajo el nombre de espectro de energía o de potencia (el primer adjetivo se usa en el estudio de la turbulencia, mientras que el segundo lo usan los ingenieros electrónicos).

Se puede demostrar que la función autocorrelación y el espectro de energía son transformadas de Fourier, una de la otra.

En efecto, la función autocorrelación expresada en (4.2.18) se puede escribir teniendo en cuenta la primera fórmula (4.2.20), como

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega(t+\tau)} \frac{d\omega}{2\pi} dt \quad (4.2.28)$$

Separando la función exponencial e intercambiando el orden de integración

$$R_u(\tau) = \lim_T \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega\tau} \int_0^T u(t) e^{j\omega t} dt \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.2.29)$$

es decir, teniendo en cuenta (4.2.24)

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega\tau} F(-\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.2.30)$$

resultando

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{|F(\omega)|^2}{T} \right] e^{j\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.2.31)$$

Se concluye entonces que

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{R_u(\tau)\} \quad ; \quad R_u(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S(\omega)\} \quad (4.2.32)$$

Conforme se vaya estudiando la descripción estadística de la turbulencia, se irán examinando más propiedades de estas funciones.

### 4.3 RESPUESTA DE UN INSTRUMENTO GENERAL A UNA SEÑAL ALEATORIA

En esta Sección se examinan primeramente y de manera resumida, las características dinámicas de los sistemas lineales más sencillos - enseguida se presentan las respuestas que ofrece un instrumento general a señales periódicas y transitorias de naturaleza muy sencilla; finalmente, se estudian los aspectos más sobresalientes de la respuesta de un instrumento general a una señal aleatoria.

#### 4.3.1 CARACTERÍSTICAS DINÁMICAS DE LOS SISTEMAS LINEALES (UNA REVISIÓN)

##### Representación matemática de un sistema lineal

$$a_n \frac{d^n q_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} q_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dq_o}{dt} + a_0 q_o = b_m \frac{d^m q_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} q_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dq_i}{dt} + b_0 q_i \quad (4.3.1)$$

donde:

- $q_0$  = señal de salida  
 $q_i$  = señal de entrada  
 $t$  = tiempo  
 $a_k, b_k$  = combinaciones de parámetros físicos del sistema (constantes)

La expresión anterior consiste entonces en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y su solución ( $q_0$ ) representa "la respuesta" que en el tiempo ofrece el sistema "al estímulo"  $q_i$ , dependiendo de las condiciones en que se encuentre inicialmente. La solución  $q_0$  está formada por una parte transitoria (función complementaria) que invariablemente desaparece eventualmente, y una parte que permanece con el tiempo (integral particular). Existen varios métodos de solución para una ecuación diferencial ordinaria como la (4.3.1) y pueden estudiarse consultando cualquier libro de texto sobre el tema.

#### Función de transferencia operacional

Se trata simplemente de escribir, partiendo de la ecuación (4.3.1),

$$\begin{aligned} \text{Función de transferencia operacional} &= \frac{q_0}{q_i} (D) \\ &= \frac{b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0}{a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0} \end{aligned} \quad (4.3.2.)$$

donde  $D = \frac{d}{dt}$ . La función de transferencia operacional viene a ser una relación generalizada entre la señal de salida  $q_0$  y la de entrada  $q_i$  para el sistema bajo consideración. Su utilización es muy conveniente sobre todo en sistemas que resultan de la combinación de otros subsistemas (ver Fig. 4.12)

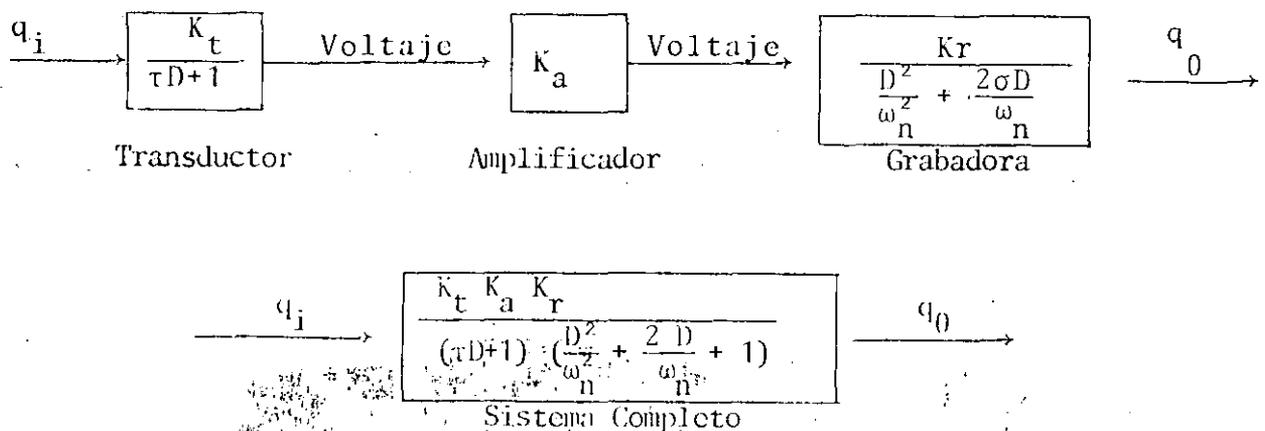


Fig. 4.12 Función de transferencia operacional

### Función de transferencia sinusoidal

Reemplazando el operador  $D$  por la cantidad  $i\omega$  en la ecuación (4.3.2) se obtiene

$$\frac{q_0}{q_i}(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + 1}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + 1} \quad (4.3.5)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $\omega =$  frecuencia circular (rad/seg).

La cantidad expresada en la ecuación (4.3.3) se reduce, mediante pasos algebraicos, a un número complejo de la forma  $M/\phi$ . Se puede demostrar que  $M$  es la relación de amplitudes  $A_0/A_i$  y  $\phi$  el ángulo de fase, entre una señal de entrada  $q_i = A_i \sin \omega t$  y la correspondiente señal de salida  $q_0 = A_0 \sin(\omega t + \phi)$

Mediante la función de transferencia sinusoidal se puede obtener la respuesta que un sistema lineal ofrece a un estímulo de la forma  $q_i = A_i \sin \omega t$ ; dicha respuesta resulta, una vez que han desaparecido los efectos transitorios, también sinusoidal de la misma frecuencia que  $q_i$  pero de amplitud diferente y con un determinado ángulo de fase (es decir la respuesta, aparece distorsionada). Tanto la relación de amplitudes  $M$  como el ángulo de fase  $\phi$  cambian al variarse la frecuencia  $\omega$ . Si se representan gráficamente  $M$  y  $\phi$  como funciones de  $\omega$  se obtiene la respuesta a la frecuencia del sistema (Fig. 4.13)

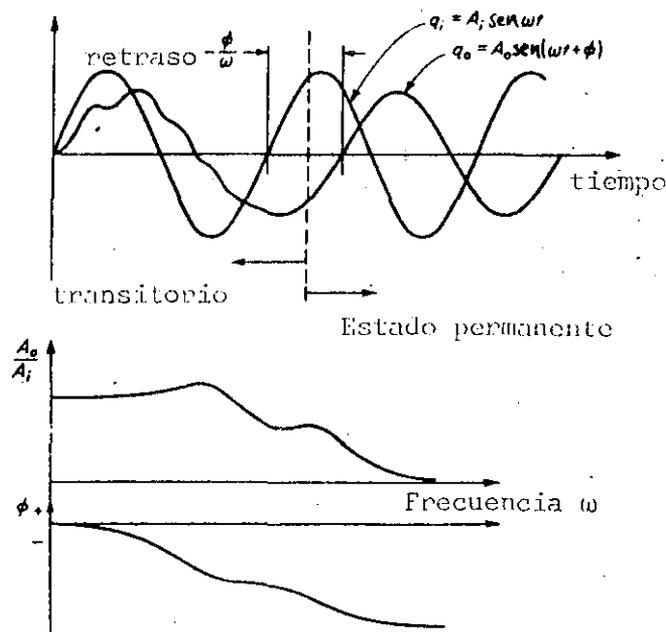


Fig. 4.13 Respuesta a la frecuencia de un sistema lineal

### Sistema de orden cero

Representa el sistema más sencillo y el más "perfecto" desde el punto de vista de la respuesta  $q_0$  comparada con el estímulo  $q_i$ . En efecto, los sistemas de orden cero no ocasionan distorsión o retraso en el tiempo, cualquiera que sea la naturaleza de la señal de entrada:  $q_0$  es una réplica instantánea a diferente escala de  $q_i$ .

$$\text{Ecuación representativa: } q_0 = \frac{b_0}{a_0} q_i \quad (4.3.4)$$

donde  $K = \frac{b_0}{a_0}$  = sensibilidad estática.

Ejemplo típico: el potenciómetro de desplazamiento para medir voltajes.

### Sistema de primer orden

Esta importante clase de sistemas queda representado por la ecuación de primer orden

$$a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i \quad (4.3.5)$$

o bien, dividiendo entre  $a_0$ ,

$$\frac{a_1}{a_0} \frac{dq_0}{dt} + q_0 = \frac{b_0}{a_0} q_i$$

es decir,

$$(\tau D + 1) q_0 = K q_i \quad (4.3.6)$$

donde  $K = \frac{b_0}{a_0}$  = sensibilidad estática

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \text{constante de tiempo}$$

La función de transferencia operacional de un sistema de primer orden, se expresa como

$$\frac{q_0}{q_i} (D) = \frac{K}{\tau D + 1} \quad (4.3.7)$$

Ejemplo típico: el termómetro común de mercurio encerrado en un bulbo y tubo capilar de vidrio.

### Sistema de segundo orden

De grandísima importancia en la dinámica de sistemas, es aquel representado por la ecuación de segundo orden

$$a_2 \frac{d^2 q_0}{dt^2} + a_1 \frac{dq_0}{dt} + a_0 q_0 = b_0 q_i \quad (4.3.8)$$

La ecuación (4.3.8) se puede escribir también como

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\sigma D}{\omega_n} + 1 \right) q_0 = K q_i \quad (4.3.9)$$

donde  $K = \frac{b_0}{a_0}$  = sensibilidad estática

$\omega_n = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$  = frecuencia natural no amortiguada

$\sigma = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$  factor de amortiguamiento

La función de transferencia operacional resulta en este caso:

$$\frac{q_0}{q_i}(D) = \frac{K}{\frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\sigma D}{\omega_n} + 1}$$

Ejemplo típico: los sismógrafos y los acelerómetros que permiten medir las vibraciones de otros sistemas.

### Respuesta a una función escalón

Se trata de caracterizar a la señal de salida  $q_0$  cuando la señal de entrada adquiere instantáneamente el valor constante  $q_{iS}$  en  $t=0$ , habiéndose tenido  $q_i = q_0 = 0$  para  $t < 0$ .

a) Sistema de primer orden

$$(\tau D + 1) q_0 = K q_{is} \quad (4.3.11)$$

$$q_0 = K q_{is} \left[ 1 - \exp(-t/\tau) \right]$$

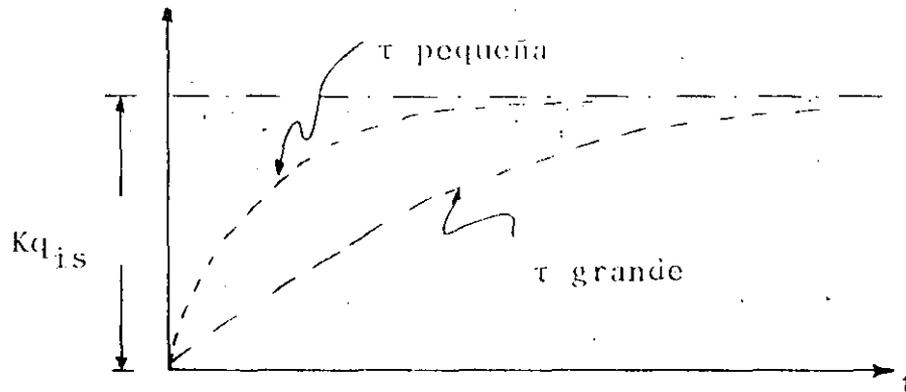


Fig. 4.14 Respuesta de un sistema de primer orden a una función escalón.

En forma adimensional,

$$\frac{q_0}{Kq_{is}} = 1 - e^{-t/\tau} \quad (4.3.13)$$

y en el caso de un sistema de medición, se puede definir un error de medición como

$$e_m = q_i - \frac{q_0}{K} \quad (4.3.14)$$

el cual, adimensionalmente se expresa como:

$$\frac{e_m}{q_i} = e^{-t/\tau} \quad (4.3.15)$$

b) Sistema de segundo orden

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\sigma D}{\omega_n} + 1 \right) q_0 = Kq_{is} \quad (4.3.16)$$

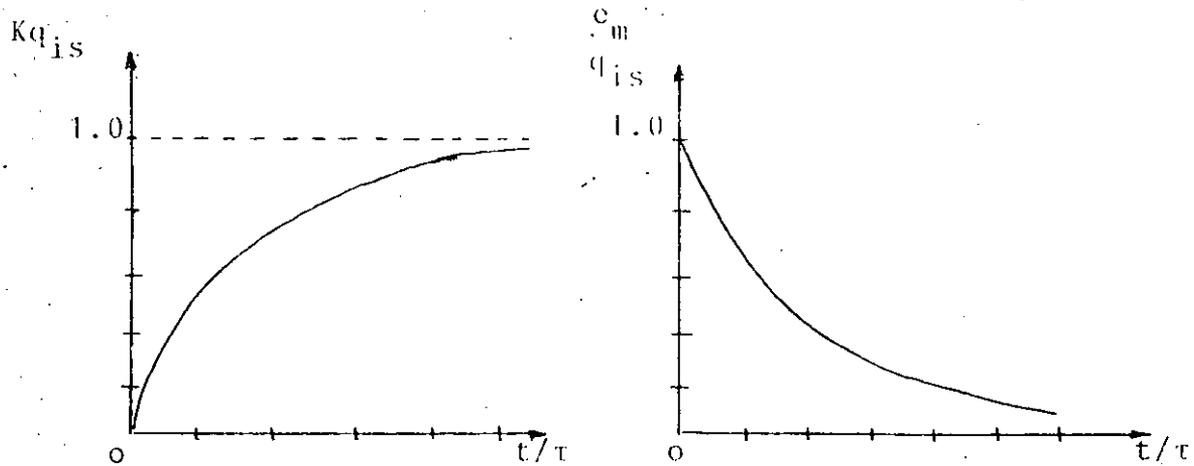


Fig. 4.15 Respuesta de un sistema de primer orden a una función escalón (en forma adimensional)

La integral particular, el igual que en los sistema de primer orden, queda expresada simplemente por  $q_{0ip} = Kq_{is}$ . La función complementaria (transitoria) puede tomar una de las tres formas diferentes, dependiendo de la forma de las raíces de la ecuación característica correspondiente.

La solución completa, en forma adimensional, se indica a continuación y se representa gráficamente en la Fig. 4.16,:

$$\frac{q_0}{Kq_{is}} = \begin{cases} \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}) \omega_n t} + \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}}{2\sqrt{\sigma^2 - 1}} e^{(-\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}) \omega_n t} + 1 & \text{sobreamortiguamiento} \\ -(1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} + 1 & \text{amortiguamiento crítico} \\ \frac{e^{-\sigma \omega_n t}}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \text{sen}(\sqrt{1 - \sigma^2} \omega_n t + \phi) + 1 & \text{subamortiguamiento } (\phi = \text{sen}^{-1} \sqrt{1 - \sigma^2}) \end{cases} \quad (4.3.17)$$

### Respuesta a un impulso

Una función impulso de intensidad  $\Lambda$ , cuya definición mediante el proceso de tomar límites se ilustra en la Fig. 4.17, consiste en un pico de altura infinitesimalmente grande pero de duración infi-

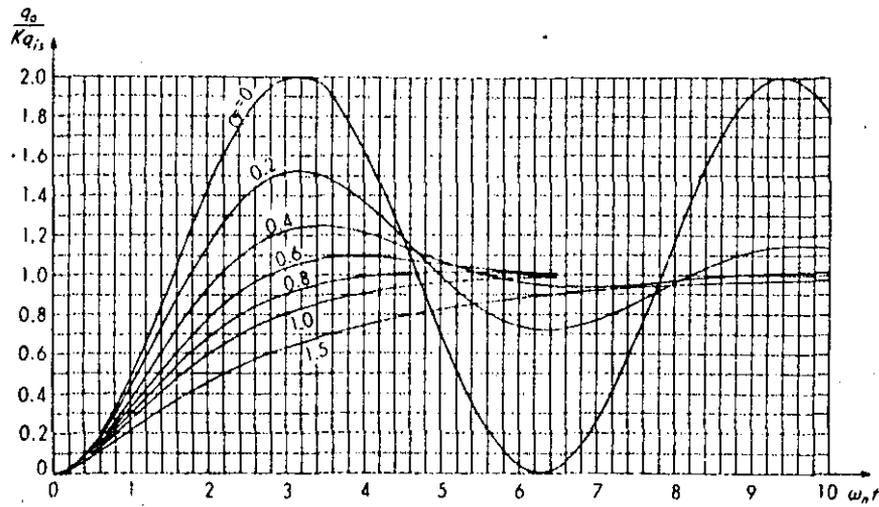


Fig. 4.16 Respuesta de un sistema de segundo orden a una función escalón (en forma adimensional)

nitesimalmente pequeña, de tal manera que el "área bajo la curva" - (producto de la altura por la duración) es igual a la intensidad  $A$ ;

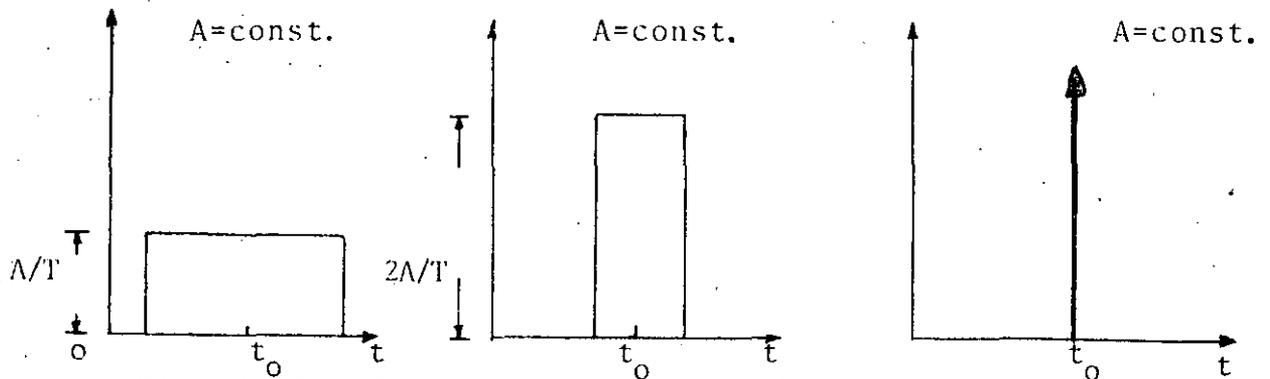


Fig. 4.17 Definición de una función impulso

A veces se acostumbra escribir para la función impulso en  $t=t_0$ ,

$$q_i = A \delta(t - t_0), \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (4.3.18)$$

a) Sistema de primer orden

$$(\tau D + 1) q_o = K q_i \quad (4.3.19)$$

donde  $q_i$  está dada por (4.3.18). Se tiene como respuesta en este caso,

$$q_o = \frac{K\Lambda}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (4.3.20)$$

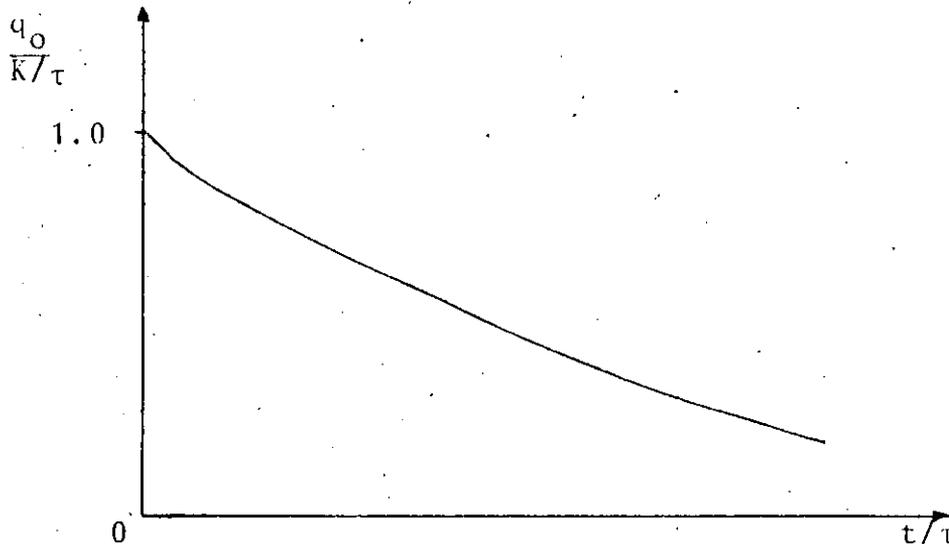


Fig. 4.18 Respuesta de un sistema de primer orden a una función impulso (en forma adimensional)

b) Sistema de segundo orden

$$\left( \frac{D^2}{\omega_n^2} + \frac{2\sigma D}{\omega_n} + 1 \right) q_o = K q_i \quad (4.3.21)$$

donde  $q_i$  está dada por (4.3.18). Se tiene como posibles respuestas, las siguientes:

$$\frac{q_o}{K\Lambda\omega_n} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\sigma^2-1}} \left[ e^{(-\sigma+\sqrt{\sigma^2-1})\omega_n t} - e^{(-\sigma-\sqrt{\sigma^2-1})\omega_n t} \right] & \text{sobreamortiguamiento} \\ \omega_n t e^{-\omega_n t} & \text{amortiguamiento crítico} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} e^{-\sigma\omega_n t} \sin(\sqrt{1-\sigma^2}\omega_n t) & \text{subamortiguamiento} \end{cases} \quad (4.3.22)$$

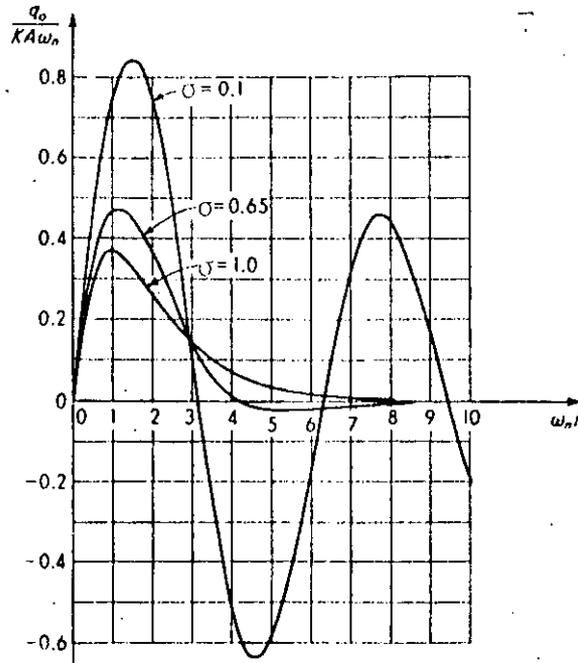


Fig. 4.19 Respuesta de un sistema de segundo orden a una función impulso (en forma adimensional)

### Respuesta a la frecuencia

De primerísima importancia, la respuesta de los sistemas lineales a señales sinusoidales se puede obtener como ya se indicó anteriormente, mediante la función de transferencia sinusoidal.

a) Sistema de primer orden

Reemplazando D por  $i\omega$  en (4.3.7),

$$\frac{q_o}{q_i}(i\omega) = \frac{K}{i\omega\tau + 1} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \angle \tan^{-1}(-\omega\tau) \quad (4.3.23)$$

es decir,

$$\text{relación de amplitudes: } \frac{A_o}{A_i} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}$$

$$\text{ángulo de fase: } \phi = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

Adimensionalmente se escribe

$$\frac{q_o/K}{q_i}(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \angle \tan^{-1}(-\omega\tau) \quad (4.3.24)$$

y se representa gráficamente como en la Fig. 4.20

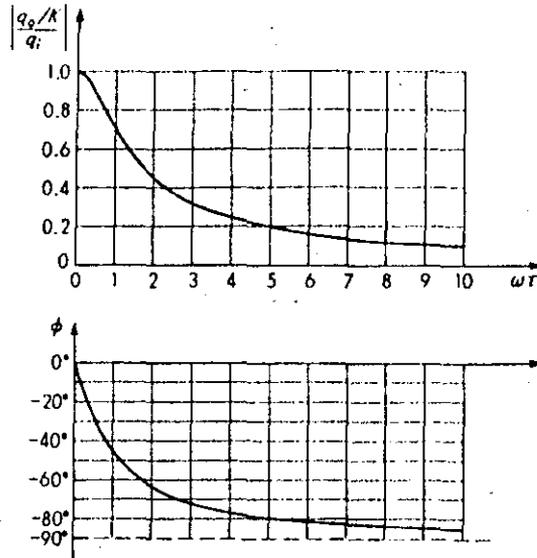


Fig. 4.20 Respuesta a la frecuencia de un sistema de primer orden (en forma adimensional)

b) Sistema de segundo orden

Se tiene en este caso, al reemplazar  $D$  por  $i\omega$  en (4.3.10),

$$\frac{q_o}{q_i}(i\omega) = \frac{K}{(i\omega/\omega_n)^2 + (2\sigma i\omega/\omega_n) + 1} \quad (4.3.25)$$

o bien, adimensionalmente (ver. Fig. 4.21),

$$\frac{q_o/K}{q_i}(i\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\sigma^2\omega^2/\omega_n^2}} \angle \tan^{-1} \frac{2\sigma}{\omega/\omega_n - \omega_n/\omega} \quad (4.3.26)$$

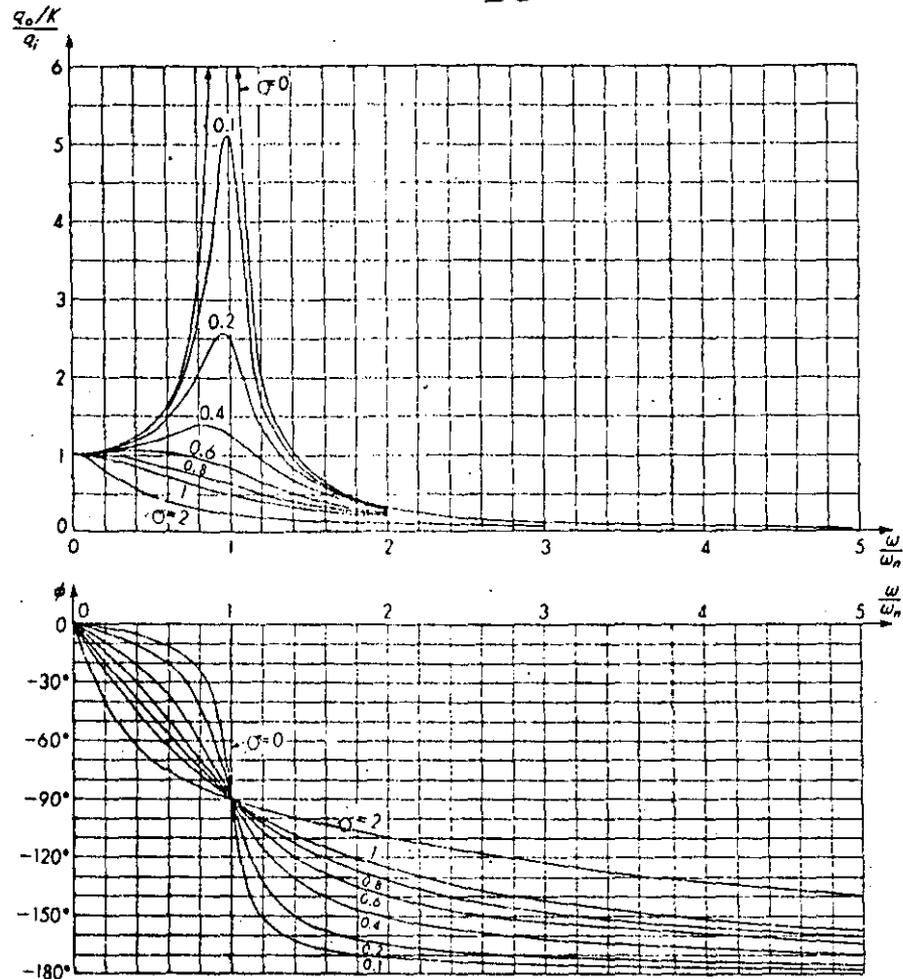


Fig. 4.21 Respuesta a la frecuencia de un sistema de segundo orden (en forma adimensional).

#### 4.3.2 RESPUESTA DE UN INSTRUMENTO GENERAL A SEÑALES PERIODICAS Y TRANSITORIAS.

El estudio resumido de los sistemas lineales presentado en la Sección anterior se limitó a sistemas o instrumentos muy simples (de primero y segundo órdenes) sujetos a estímulos también muy sencillos (función escalón, función impulso, función sinusoidal). Las combinaciones son de primera importancia y de gran utilidad, como se apuntó anteriormente. Tomando como base estos conceptos, enseguida se verán dos casos un poco más complejos que permitirán a su vez considerar más cercano a lo que realmente sucede en los instrumentos de medición.

##### Respuesta de un sistema general a una señal periódica

Tal como se indicó en la Sección 4.1.1., una función periódica es aquella que repite su valor cíclicamente y, bajo condiciones muy fáciles de cumplir acerca de continuidad y limitación en los valores que pueda tomar, se puede representar mediante las series de Fourier, ecuaciones (4.1.3) y (4.1.4).

Para que una serie de Fourier represente perfectamente a una función periódica, necesita consistir en una serie infinita de términos (n desde 1 hasta  $\infty$  en la ecuación (4.1.3)). Afortunadamente, en las aplicaciones de la ingeniería rara vez se necesitan más de 10 términos (las primeras 10 armónicas) al representar a la función periódica  $q_i$ . Existen diversos métodos para obtener los términos de interés de la serie que dependen de la naturaleza de  $q_i$ ; los hay desde los analíticos directos, cuando  $q_i$  multiplicada por las funciones coseno y seno, respectivamente, es fácil de integrar, hasta los procedimientos geométricos, mecánicos, eléctricos, ópticos, etc., cuando se dispone de un registro de  $q_i$ .

Una vez que se conocen los términos de la serie de Fourier para la señal  $q_i$  de interés, resulta posible determinar la respuesta permanente del sistema a cada uno de tales términos, los cuales consisten en señales sinusoidales. Para ello deberá emplearse la función de transferencia sinusoidal también conocida como el espectro de frecuencia del sistema (Sec.4.3.1). Como se trata de un sistema lineal, la suma de las respuestas a cada uno de los términos en la serie de Fourier de  $q_i$ , constituye la respuesta total del sistema al estímulo  $q_i$ .

A la representación de  $q_i$  en series de Fourier se le conoce como espectro de frecuencias de entrada,  $Q_i(i\omega)$ , mientras que la representación de  $q_o$  recibe el nombre de espectro de frecuencias de salida,  $Q_o(i\omega)$ . Obsérvese que estos dos espectros son discretos, es decir, solamente existen para determinados valores de la frecuencia (las armónicas de  $q_i$  y  $q_o$ ); el espectro de frecuencias del sistema, por el contrario, es un espectro continuo: existe para todos los valores de la frecuencia. La manera como se obtiene el espectro de salida, conociendo el de entrada y el espectro del sistema, lo indica la fórmula (4.3.27):

$$Q_o(i\omega_k) = Q_i(i\omega_k) \frac{q_o}{q_i} (i\omega_k) \quad (4.3.27)$$

es decir, una multiplicación de números complejos, para cada una de las frecuencias discretas (armónicas)  $\omega_k$ .

En la figura 4.22 se ilustran todos los conceptos vertidos anteriormente.

### Respuesta de un sistema general a una señal transitoria

Como se recordará una señal o función transitoria  $q_i(t)$  es aquella que se hace cero para todos los valores de  $t$  mayores que un determinado valor finito  $t_o$ ; en otras palabras, una señal transitoria siempre desaparece eventualmente. La manera de estudiar esta clase de funciones, en lo que a sus efectos en sistemas lineales respecta, es mediante la transformada de Fourier. Esta se define para una señal transi-

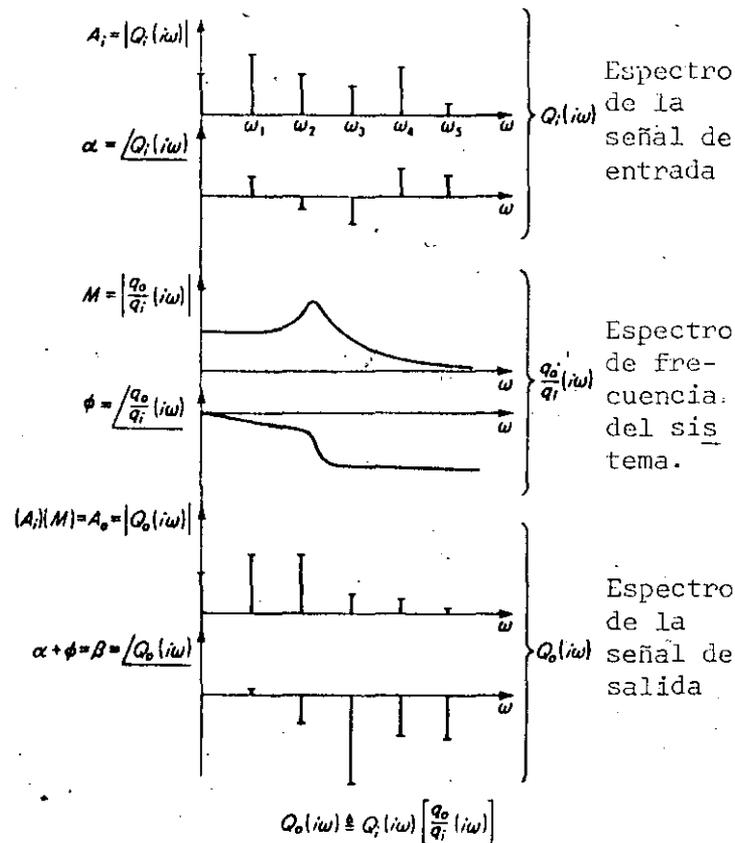


Fig. 4.22 Respuesta de un sistema a una función periódica.

toría  $q_i(t)$ , la cual es cero para  $t < 0$ , como (Ec.(4.1 7)):

$$Q_i(i\omega) = \int_0^{\infty} q_i(t) \cos \omega t dt - i \int_0^{\infty} q_i(t) \sin \omega t dt \quad (4.3.28)$$

donde  $\omega$  puede tomar valores entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . Obsérvese que la transformada de Fourier  $Q_i(i\omega)$  de una función transitoria  $q_i(t)$  es una extensión del concepto de desarrollo en series de Fourier de una función periódica, examinado en párrafos anteriores. Por esta razón,  $Q_i(i\omega)$  expresado en (4.3.28) también recibe el nombre de espectro de frecuencia de  $q_i$ . Sin embargo, el espectro de una señal transitoria es un espectro continuo, es decir,  $\omega$  puede tomar cualquier valor entre  $-\infty$  y  $+\infty$  y no solamente valores discretos como en el caso del espectro de una señal periódica.

Generalmente, el espectro continuo de una función transitoria se acostumbra representar gráficamente de manera semejante al espectro de una señal periódica: una gráfica para la magnitud y otra para el ángulo de fase. A veces conviene, dado que  $Q_i(i\omega)$  es un número complejo,

representar explícitamente en forma gráfica, la parte real y la parte imaginaria (los modernos analizadores de espectro o de Fourier, pueden ofrecer ambos tipos de representación en un osciloscopio expreso). Por otra parte, si bien  $Q_i(i\omega)$  existe para valores tanto positivos como negativos de  $\omega$ , normalmente sólo se acostumbra utilizar el rango  $0 \leq \omega < +\infty$ , teniendo en cuenta las siguientes reglas de simetría:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [Q_i(-i\omega)] &= \operatorname{Re} [Q_i(i\omega)] \\ \operatorname{Im} [Q_i(i\omega)] &= -\operatorname{Im} [Q_i(i\omega)] \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

$$\underline{\angle Q_i(-i\omega)} = - \underline{\angle Q_i(i\omega)}$$

El objetivo fundamental del análisis de Fourier (tanto de señales periódicas como transitorias) desde un punto de vista experimental, es, por lo general, trasladar las funciones del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, efectuar determinadas operaciones de análisis e interpretación (que pueden efectuarse más fácilmente o pueden resultar más reveladoras) y trasladar la información del dominio de la frecuencia otra vez al dominio del tiempo, ya que este último nos resulta más "natural". (La translación del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo se logra mediante la aplicación de la Transformada inversa de Fourier, definida en la Sección 4.2)

Cuando se dispone de una descripción matemática explícita de  $q_i(t)$ , la operación delineada en el párrafo anterior normalmente no representa mayor dificultad, excepto tal vez, en los procesos de integración en cuyo caso se puede utilizar algún esquema numérico. Sin embargo, en la ingeniería experimental, no siempre se dispone de una fórmula matemática para  $q_i(t)$  sino más bien de un registro gráfico o de datos almacenados de algún modo (por ejemplo, en una cinta magnética); es necesario entonces, proceder gráfica, numérica o electrónicamente con el análisis de Fourier.

El primer paso de dicho análisis (la obtención de la transformada de Fourier) para una señal transitoria cualquiera  $q_i(t)$  y suponiendo que se proceda mediante cualquiera de los caminos mencionados, se ilustra gráficamente en la Fig. 4.23. Obsérvese que desde el punto de vista práctico, la señal transitoria se termina para un tiempo finito  $t_0$ . De esta manera, resulta posible escribir en lugar de (4.3.28),

$$Q_i(i\omega) = \int_0^{t_0} q_i(t) \cos \omega t dt - i \int_0^{t_0} q_i(t) \sin \omega t dt \quad (4.3.30)$$

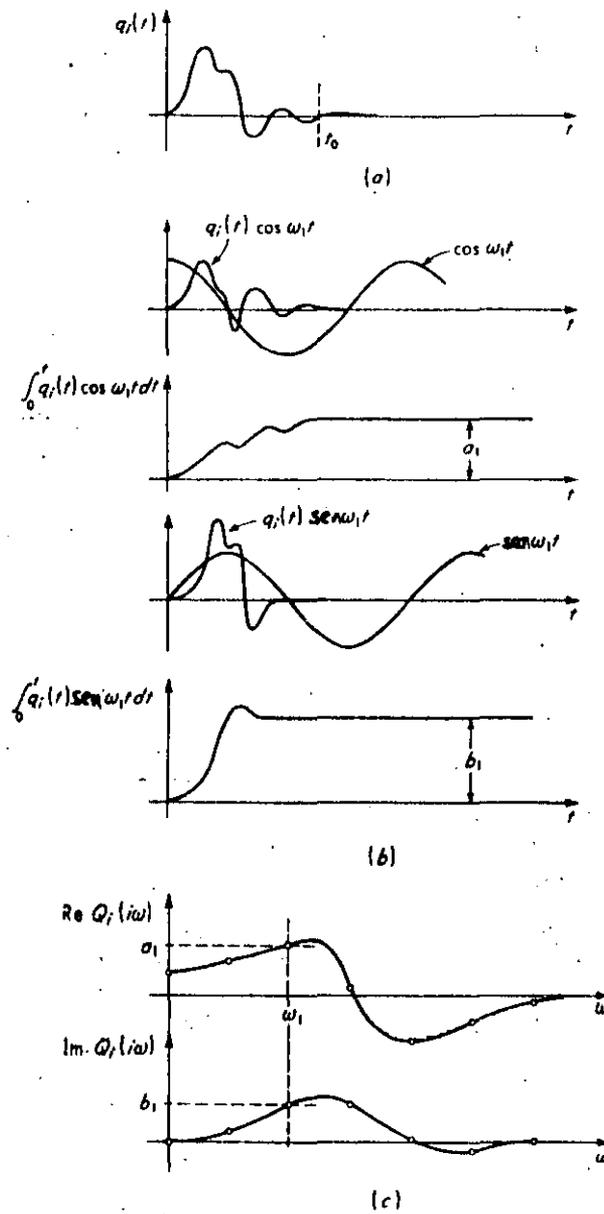


Fig. 4.23 Interpretación gráfica de la transformada directa de Fourier.

Así, observando la Fig. 4.23, se tienen los siguientes pasos para obtener un solo punto del espectro de frecuencia de  $q_i(t)$ :

1. Seleccionar un valor de  $\omega$ , por ejemplo,  $\omega_1$ .
2. Dibujar o construir  $\cos \omega_1 t$ , la cual es una función completa

mente definida.

3. Multiplicar punto por punto  $q_i(t)$  y  $\cos \omega_1 t$ .
4. Integrar (gráficamente, numéricamente, etc.), la curva  $q_i(t) \cos \omega_1 t$  entre  $t$  y  $t_0$ ; al resultado llamarlo  $a_1$ .
5. Efectuar la operación anterior para  $q_i(t) \sin \omega_1 t$ ; llamar al resultado  $b_1$ .
6. Se tiene  $Q_i(i\omega_1) = a_1 + ib_1$
7. Repetir todo el procedimiento para tantos valores de  $\omega$  como sea necesario de tal manera de poder construir las curvas  $Q_i(i\omega)$

El último paso en el análisis de Fourier la obtención de la transformada inversa a partir de un determinado espectro, se puede describir de manera muy parecida a como se hizo con el primer paso. En este segundo caso, la fórmula para la transformada inversa de Fourier se puede escribir, para los efectos prácticos, como

$$q_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} \text{Re} [Q_i(i\omega)] \cos \omega t \, d\omega, \quad t > 0 \quad (4.3.31)$$

$$q_i(t) = 0, \quad t < 0$$

Lo anterior resulta prácticamente cierto ya que todos los espectros que representan a cantidades físicas se anulan para  $\omega$  mayores que un determinado valor  $\omega_0$  (es decir,  $q_i(t)$  no puede contener frecuencias infinitamente grandes). De esta manera, observando la Fig. 4.24, se tienen los siguientes pasos para obtener un solo punto de  $q_i(t)$  a partir de su espectro de frecuencia:

1. Seleccionar un valor  $t_1$  de  $t$ .
2. Dibujar o construir  $\cos \omega t$ , la cual es una función completamente definida.
3. Multiplicar punto por punto  $\text{Re} [Q_i(i\omega)]$  por  $\cos \omega t_1$ .
4. Integrar (gráficamente numéricamente, etc), la curva  $\text{Re} [Q_i(i\omega)] \cos \omega t_1$  desde 0 a  $\omega_0$ ; el resultado es  $(\pi/2)q_i(t_1)$
5. Repetir todo el procedimiento para tantos valores de  $t$  como sea necesario de tal manera de poder construir la curva  $q_i(t)$ .

Para complementar esta Sección conviene apuntar la relación que existe entre la transformada  $Q_i(i\omega)$  de una señal estímulo, la transformada  $Q_0(i\omega)$  de la correspondiente respuesta, y el espectro de frecuencia (respuesta a la frecuencia)  $(q_0/q_i)(i\omega)$  de un sistema lineal, nuestra conocida fórmula (4.3.27) generalizada:

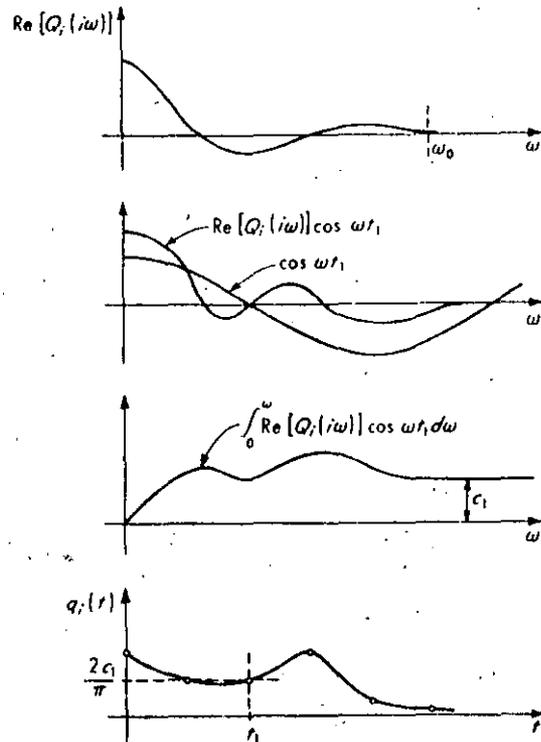


Fig. 4.24 Interpretación gráfica de la transformada inversa de Fourier,

$$Q_0(i\omega) = Q_i(i\omega) \left| \frac{q_0}{q_i}(i\omega) \right| \quad (4.3.32)$$

La única restricción en (4.3.32), aparte de la linealidad del sistema, es que se debe partir siempre de condiciones iniciales igualadas a cero.

La Fig. 4.25 ilustra la aplicación de la Ec. (4.3.32) en la obtención de la respuesta de un sistema lineal general a una señal transitoria. Una consecuencia interesante desde el punto de vista de las mediciones de la Ec. (4.3.32) es la siguiente. Para que un sistema de medición sea preciso, es necesario que se tenga en lo posible,  $q_0(t) \approx Kq_i(t)$ . Esto implica a su vez que se tenga  $Q_0(i\omega) \approx KQ_i(i\omega)$ , y dado que  $Q_0(i\omega)$  se obtiene multiplicando  $Q_i(i\omega)$  por  $(q_0/q_i)(i\omega)$ , este último debe ser, en lo posible, de la forma  $K / \omega^0$  en el rango de frecuencias en que  $Q_i(i\omega)$  sea diferente de cero, pero puede ser de cualquier otra forma en otros rangos de frecuencias. En otras palabras, la condición de perfección  $K / \omega^0$  para la respuesta a la frecuencia del sistema de medición no necesita ser tan rígida en la práctica, y depende del contenido de frecuencias de las señales a medir o a procesar.

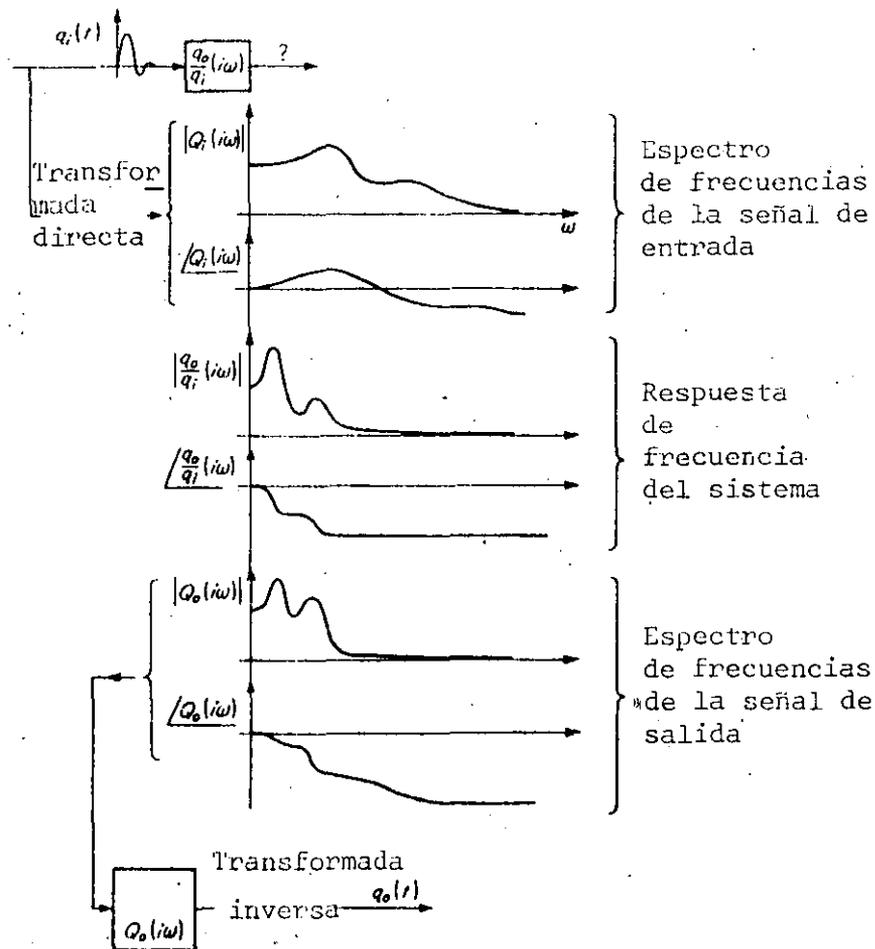


Fig. 4.25 Respuesta de un sistema general a una señal transitoria

#### 4.3.3 RESPUESTA DE UN INSTRUMENTO GENERAL A SEÑALES ALEATORIAS.

Para completar esta Sección, se estudiará a continuación la respuesta que ofrece un instrumento o sistema lineal de carácter general, a una señal aleatoria. Dada la enorme utilidad que representan los métodos de Fourier delineados en las subsecciones anteriores, resulta lógico tratar de aplicarlos al caso de una señal aleatoria. Sin embargo, para que esto se pueda llevar a cabo, es necesario hacer algunas modificaciones que tomen en cuenta los siguientes dos aspectos fundamentales:

- Una señal aleatoria no es una función periódica y no puede, por lo tanto, expresarse en términos de una serie de Fourier; una señal aleatoria no es absolutamente integrable (es decir, no cumple con la condición expresada inmediatamente después de (4.2.20)) y, por lo tanto, su transformada de Fourier no existe.
- Es necesario contar con una descripción (en el sentido de los métodos de Fourier) que sea igualmente representativa de cualquier función muestra que pertenezca al proceso estocástico ba

jo consideración; en otras palabras, la posible representación de Fourier para las diversas funciones-muestra deberá promediarse estadísticamente en todo el conjunto de dichas funciones.

Para tomar en cuenta el inciso (a) de arriba fue necesario truncar (redefinir en un intervalo finito  $0 < t < T$ ) a la función, como se hizo al obtener la Ec. (4.2.27). En relación con el inciso (b), sería necesario tomar el valor medio estadístico, como en la expresión ---- (4.2.2), antes de proceder al límite en la Ec. (4.2.26), obteniéndose así la densidad espectral del proceso aleatorio  $\{x(t)\}$  :

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_x(\omega)|^2}{T} \quad (4.3.33)$$

la cual se relaciona con el valor cuadrado medio del proceso mediante:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (4.3.34)$$

En las dos ecuaciones anteriores, la raya trazada encima del símbolo significa el valor medio estadístico.

Por otra parte, resulta sumamente difícil e impráctico tener que manejar la densidad espectral así como otros parámetros estadísticos de un proceso estocástico atendiendo a todas las funciones-muestra que forman al conjunto (esto equivaldría, por ejemplo a que se tuviera que considerar simultáneamente a todas las señales de temperatura que se obtuvieran en un conjunto de hornos iguales mediante sendos termopares con sus correspondientes instrumentos de registro). Es necesario entonces aceptar que el proceso bajo estudio es ergódico y que determinando las propiedades estadísticas de una sola función miembro de un conjunto, se determina de hecho las propiedades de todo el proceso.

Finalmente, al considerar una señal aleatoria se tiene el problema de decidir hasta qué valor de  $t$  resultará adecuado un determinado registro de la señal para que a partir de él se determinen los parámetros estadísticos de interés. Sin entrar en detalles respecto a niveles de confianza en la estimación de estos parámetros, es fácil concluir que mientras más grande sea el valor de  $t$  a lo largo del cual se considere la muestra, menos deberá resultar el error en que se incurra al efectuar la estimación. En la práctica, tal vez la mejor manera de atender a este aspecto es efectuando estimaciones sobre diferentes tamaños de la muestra y comparando entre sí los parámetros así determinados; de esta manera, aquellos valores que no ofrezcan diferencias sustanciales pueden ser aceptados.

El interés principal en los conceptos anteriores es que precisamente conociendo la densidad espectral de potencia  $S_i(\omega)$  de una señal aleatoria  $q_i(t)$  que alimiente a un sistema lineal de respuesta a la frecuencia conocida, es posible determinar la correspondiente densidad

espectral  $S_o(\omega)$  de la señal  $q_o(t)$  que se obtiene del sistema. En efecto, las tres funciones se relacionan como sigue:

$$S_o(\omega) = S_i(\omega) \left| \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right|^2 \quad (4.3.35)$$

En la figura 4.26 se ilustra gráficamente esta relación.

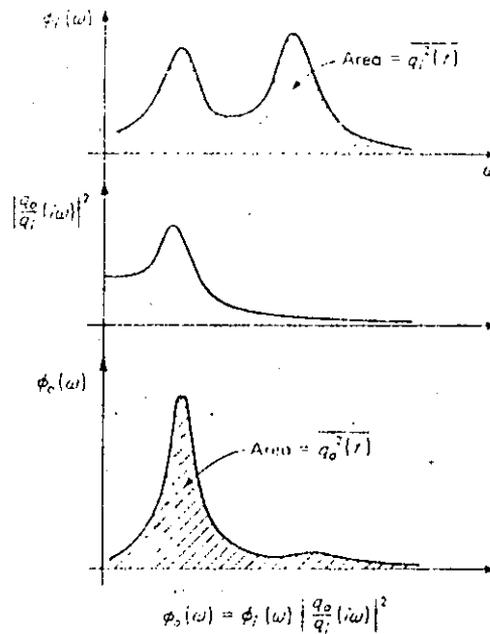


Fig. 4.26 Respuesta de un sistema general a una señal aleatoria.

Una forma particular de  $S_i(\omega)$ , de gran utilidad práctica, es el llamado ruido blanco, el cual cuando es matemáticamente perfecto, consiste en un valor constante de la densidad espectral para todas las frecuencias (Fig. 4.27). Precisamente esta característica lo hace ser muy útil como una especie de señal de prueba para un sistema de interés. En la realidad no es posible construir un generador de ruido blanco perfecto, si bien el rango de frecuencias a lo largo del cual la densidad espectral se mantiene constante puede ser suficientemente extenso para las necesidades particulares que se tengan. Otro uso también importante de un generador de ruido blanco es que junto con filtros electrónicos adecuadamente diseñados (es decir, la forma apropiada de  $\left| \frac{q_o}{q_i}(i\omega) \right|^2$  en (4.3.35)), resulta posible construir casi cualquier densidad espectral  $S_o(\omega)$ .

Finalizando nuestro resumen sobre la respuesta de un instrumento gene

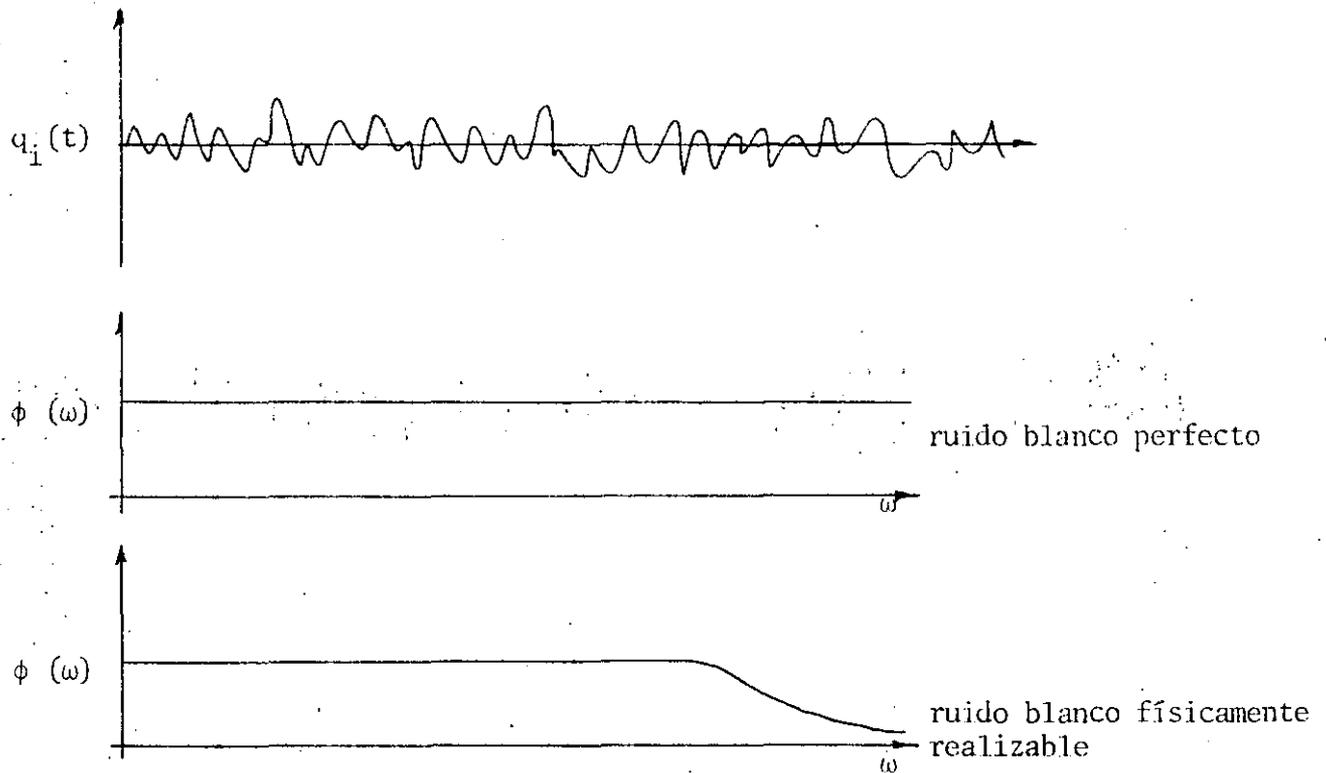


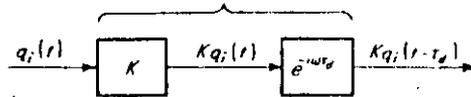
Fig. 4.27 Ruido blanco

ral a un estímulo, conviene señalar que de acuerdo con lo examinado en las secciones anteriores desde el punto de vista del contenido de frecuencias, para lograr una reproducción perfecta sin distorsión ni retraso entre las señales  $q_i(t)$  y  $q_o(t)$ , un sistema lineal debe satisfacer las condiciones siguientes, las cuales dependen de la naturaleza de la señal de entrada:

- Señales periódicas:  $(q_o/q_i)(i\omega)$  debe ser igual a  $K \angle 0^\circ$  para todas las frecuencias con amplitud significativa contenidas en  $q_i(t)$
- Señales transitorias:  $(q_o/q_i)(i\omega)$  debe ser igual a  $K \angle 0^\circ$  para todo el rango continuo de frecuencias en el cual la transformada de Fourier de  $q_i(t)$  tenga una magnitud significativa.
- Señales aleatorias:  $(q_o/q_i)(i\omega)$  debe ser igual a  $K \angle 0^\circ$  en todo el rango de frecuencias para el cual  $S_i(\omega)$  tenga un valor significativamente mayor que cero.

En la práctica, tratándose de instrumentos de medición (no de control) generalmente es aceptable un retraso en el tiempo  $\tau_d$  con tal de que la forma de  $q_i$  se reproduzca en  $q_o$ . De esta manera, la función de transferencia del instrumento se puede aceptar como  $K \angle -\omega\tau_d$ , es decir la relación entre amplitudes de  $q_o$  y  $q_i$  es constante pero el ángulo de fase aumenta linealmente con la frecuencia  $\omega$ , tal como se ilustra en la Fig. 4.28:

función de transferencia deseable para el instrumento



respuesta a la frecuencia deseable para el instrumento.

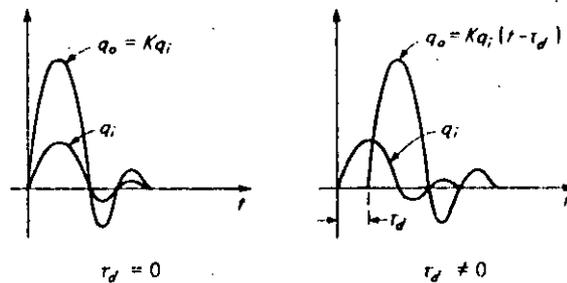
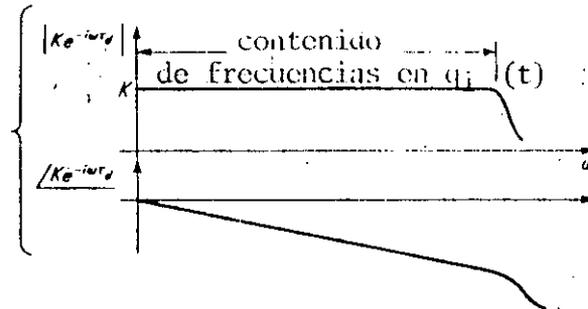


Fig. 4.28 Requisitos para una medición precisa.

#### 4.4 PROCESAMIENTO DE SEÑALES ALEATORIAS

En esta Sección se resumen los procedimientos tanto analógicos como digitales, más relevantes para el análisis de señales aleatorias.

##### 4.4.1 TIEMPO Y FRECUENCIA, DOS FORMAS DE DESCRIBIR A UNA SEÑAL ALEATORIA.

Tal como se ha revisado en las Secciones anteriores, existen en la práctica dos maneras esenciales equivalentes para describir a una señal cualquiera: en el dominio del tiempo y en el dominio de la

frecuencia. Esto permite en ocasiones, cierta versatilidad y comprobación en las mediciones que se han de llevar a cabo para una señal de interés.

Cada una de las descripciones mencionadas cuenta con diversos parámetros, funciones, etc., para caracterizar a una señal dada, los cuales, como se vió anteriormente, dependen de la naturaleza de la señal bajo estudio (periódica, transitoria, aleatoria). En el caso de una señal aleatoria son dos, indudablemente, las cantidades sobre las cuales se centra su descripción: la función de autocorrelación en el dominio del tiempo y la densidad espectral de potencia en el dominio de la frecuencia. Estas funciones se presentaron anteriormente desde un punto de vista esencialmente matemático. A continuación se describen las mismas funciones en forma esquemática, atendiendo fundamentalmente, a la forma como se obtienen en la práctica.

### Función de autocorrelación

Esta función, definida por la Ec. (4.4.1)

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_i(t) q_i(t+\tau) dt \quad (4.4.1)$$

indica el parecido que tiene una señal dada  $q_i(t)$  con una versión, corrida un intervalo de tiempo  $\tau$ , de ella misma: si el valor de  $R(\tau)$  es alto, existe un gran parecido entre las señales (se dice -- que existe una alta "correlación" entre ambas); tal es el caso -- cuando  $\tau=0$ , evidentemente. Como se observa en el Ec. (4.4.1), se trata de un promedio temporal del producto entre  $q_i(t)$  y  $q_i(t+\tau)$ . En la práctica se procede tal como lo expresa dicha ecuación: se multiplica punto por punto la señal y la versión corrida, por ejemplo,  $\tau_1$  segundos, se promedia, y el resultado constituye un punto,  $R(\tau_1)$ , de la función de autocorrelación. En la figura 4.29 se -- ilustra esquemáticamente el procedimiento descrito.

Dadas las propiedades de la función de correlación (resumidas en (4.2.19)), su utilización permite detectar componentes deterministas, por ejemplo periódicas, en una señal de apariencia completamente aleatoria. Posiblemente su uso más generalizado sea en el caso de dos señales diferentes, donde a través del concepto de función de correlación cruzada, resulta posible establecer la relación entre las dos señales, aún cuando éstas aparenten no depender la una de la otra.

### Densidad espectral de potencia (Espectro de potencia).

La densidad espectral de potencia queda definida por la Ec. (4.4.2)

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|Q_T(\omega)|^2}{T} \quad (4.4.2)$$

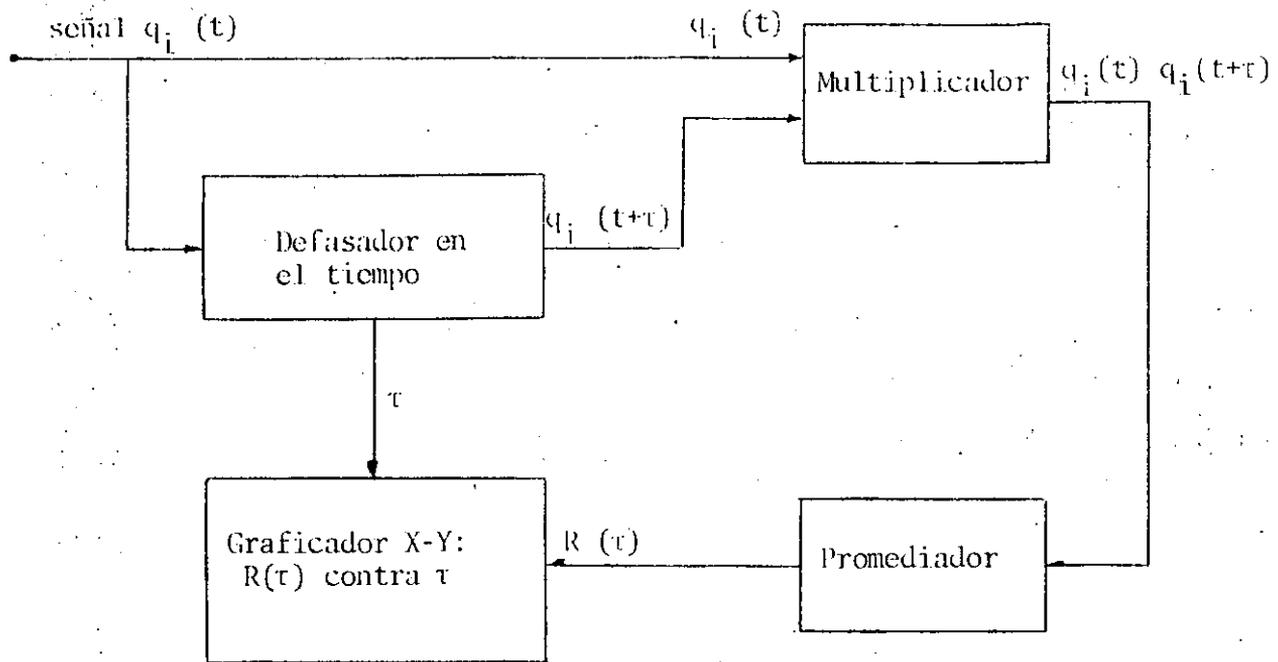


Fig. 4.29 Diagrama de bloques para determinar la función de autocorrelación.

donde  $Q_{iT}$  es la transformada de Fourier de la señal  $q_i$  truncada al intervalo  $0 \leq t < T$ . Este espectro de potencia, que se relaciona con el valor cuadrado medio de  $q_i$  mediante

$$\overline{q_i^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (4.4.3)$$

expresa, a través del valor cuadrado medio, la composición general de  $q_i(t)$  por las diferentes frecuencias. De esta manera, el valor cuadrado medio  $q_i^2$  correspondiente a una determinada frecuencia  $\omega_1$  se obtiene haciendo que la señal  $q_i$  pase a través de un filtro centrado en  $\omega_1$ , con ancho de banda  $\Delta\omega$ , evitando así el paso de todas las frecuencias contenidas en  $q_i$  mayores que  $\omega_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega$  y menores que  $\omega_1 - \frac{1}{2}\Delta\omega$ ; la señal filtrada se eleva al cuadrado y se promedia. La operación anterior se ilustra en la Fig. 4.30.

Si el procedimiento descrito se repite para otras frecuencias ( $\omega_2, \omega_3$ , etc), resulta posible obtener el espectro de potencia de  $q_i$  completo.

Finalmente, conviene recordar una vez más que las dos representaciones examinadas contienen la misma información respecto a  $q_i(t)$ , y que conociendo una se puede obtener la otra, al constituir ambas funciones la pareja de transformación de Fourier.

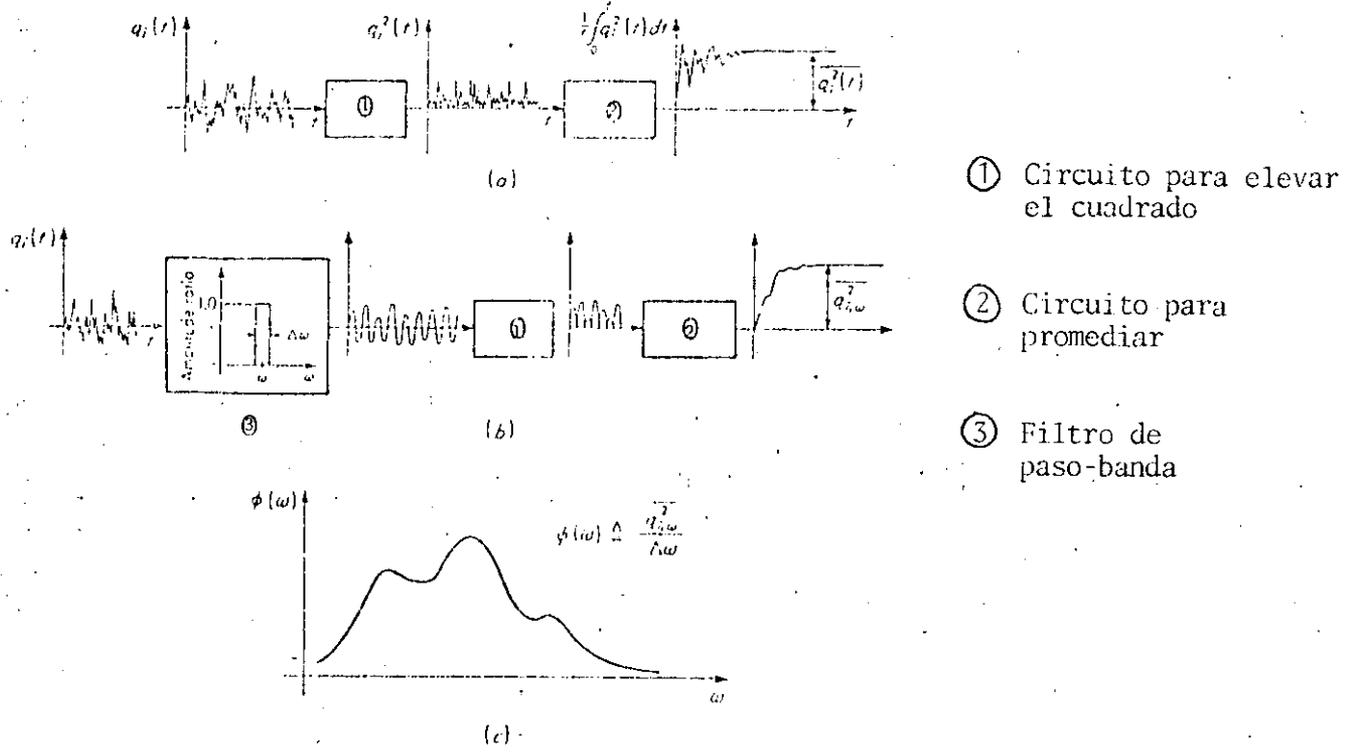


Fig. 4. 30 Obtención de un punto del espectro de potencia.

#### 4.4.2. ASPECTOS GENERALES DE LOS METODOS UTILIZADOS EN EL PROCESAMIENTO DE SEÑALES.

##### Métodos analógicos y métodos digitales.

Existen dos procedimientos diferentes para el análisis de señales aleatorias: el analógico y el digital; además, ambos métodos se pueden combinar. En el primero se incluyen todas aquellas operaciones a través de dispositivos o instrumentos apropiados, que se efectúan directamente sobre las señales eléctricas continuas que a su vez representan a las variables físicas de interés. De este modo las funciones que realizan los transductores, los amplificadores, los filtros activos y pasivos, etc., caen dentro de los métodos analógicos de procesamiento de señales. Igualmente resulta con aquellos dispositivos de propósito específico como un voltmetro o un analizador analógico de frecuencias. Las computadoras analógicas que pueden programarse para resolver ecuaciones diferenciales utilizando circuitos a base de amplificadores operacionales y potenciómetros (formando "analogías" de los operadores matemáticos correspondientes), constituyen un ejemplo típico de sistemas para el procesamiento analógico de señales.

De acuerdo con los métodos digitales por otra parte, las operaciones deseadas se efectúan sobre versiones discretizadas de aquellas señales eléctricas continuas que representan a las variables físicas de interés. Los instrumentos o sistemas que efectúan este tipo de procesamiento generalmente consisten en una computadora de propósito general que opera esencialmente siguiendo técnicas de naturaleza numérica, a una gran velocidad, o bien, computadoras diseñadas específicamente para realizar una determinada función, como los analizadores de Fourier.

Ambos procedimientos tienen ventajas y desventajas. Existen desde luego determinadas operaciones para la medición de señales de cualquier naturaleza que resultan inmejorables y posiblemente necesarias de realizar con instrumentos analógicos, dado lo compacto, avanzado y versátil que resultan éstos en la actualidad. Tal es el caso, por ejemplo, de la función de detección de las variables físicas de interés mediante sensores-transductores, y de la operación manipuladora de amplificación. En realidad, antes de los años 50, la mayor parte de los instrumentos generales y de propósito específico en el manejo de señales aleatorias eran de naturaleza analógica, habiendo permanecido los dispositivos de uso particular al avanzar la electrónica tan notablemente.

A partir de los años 50 se desarrollaron vertiginosamente las computadoras digitales y hasta 1965 se polemizó ampliamente sobre las ventajas relativas de ambos procedimientos. Así por ejemplo se aseguraba que las computadoras digitales ofrecían más precisión que los instrumentos analógicos, aunque el error generalmente era aceptable si se comparaba con los errores asociados al muestreo estadístico y a las operaciones previas al uso de los procedimientos digitales. Se tomaban en cuenta también al comparar un método con el otro, aspectos de orden económico: alto costo de las computadoras digitales pero uso más diversificado dentro de una misma organización contra bajo costo relativo de un instrumento analógico pero de uso muy restringido.

A partir de 1965 muchos de los aspectos a considerar en la comparación entre ambos procedimientos cambiaron radicalmente al desarrollarse los algoritmos apropiados para el cálculo rápido de transformadas de Fourier en las computadoras digitales. En efecto, estos algoritmos que reciben el nombre genérico de Transformada de Fourier Rápida (FFT) y que han dejado un profundo impacto en el análisis de Fourier digital, permiten reducir el tiempo global de computadora de 10 a 1 al calcular directamente la transformada de Fourier de las muestras de una señal aleatoria y a partir de ella estimar el espectro de potencia, la autocorrelación, etc. Anteriormente, el cálculo digital de la mencionada transformada llevaba mucho tiempo y se prefería primeramente determinar la autocorrelación y a partir de ella estimar la densidad espectral de potencia.

El análisis espectral utilizando los algoritmos de la Transformada de Fourier Rápida se puede llevar a cabo en la actualidad en minicomputadoras, las cuales debido a su tamaño reducido y a su fácil operación, constituyen verdaderos instrumentos que se utilizan en la "línea de medición" con las ventajas de rapidez y precisión de los procedimientos digitales.

### Conversión analógica-digital (digitación)

Numerosas operaciones que muchas veces se llevan a cabo con las señales aleatorias pueden considerarse como pertenecientes propiamente al análisis de la señal, o bien, como operaciones previas y operaciones posteriores a dicho análisis; de esta manera, puede tratarse de métodos analógicos, digitales o híbridos. Ejemplos típicos lo constituyen operaciones como el registro en cinta magnética, la amplificación de voltaje o la integración respecto al tiempo. Dado el espacio limitado en estos apuntes, no se examinarán estas operaciones. Sin embargo, teniendo en cuenta la disponibilidad de procedimientos digitales y analógicos, y con relación al enfoque hacia las descripciones en el tiempo y en la frecuencia que se dará en las siguientes subsecciones, conviene examinar brevemente la conversión analógica a digital de una señal cualquiera.

El proceso de conversión analógica-digital o digitación esta formado de dos partes diferentes: muestreo y cuantificación. El primero se refiere a la identificación de los diversos instantes en los cuales se ha de observar a la señal, y el segundo consiste en la conversión de los valores de la señal en los puntos muestreados a información de carácter numérica.

El muestreo de una señal dada generalmente se realiza en intervalos de tiempo igualmente espaciados (Fig. 4.31) y el problema se reduce esencialmente a determinar un intervalo de muestreo  $h$  apropiado para la señal bajo estudio. Es indudable por una parte, que puntos de muestreo muy próximos entre sí dará como resultado información digital redundante y un mayor costo en el proceso de digitación; por otra parte, puntos de muestreo muy alejados entre sí ofrecerán información incompleta además de ocasionar el grave pro-

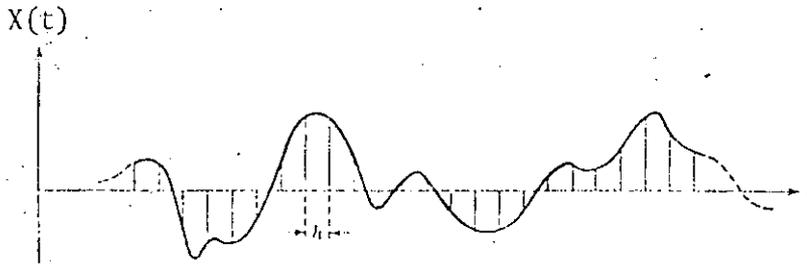


Fig. 4.31 Muestreo de una señal.

blema de desdoblamiento de las frecuencias de la señal. Este efecto, inherente a todo procedimiento de conversión analógica-digital, consiste en la confusión de frecuencias altas y bajas durante el muestreo. Efectivamente, si el intervalo de tiempo entre puntos de muestreo es  $h$  segundos, la rapidez de muestreo es  $1/h$  muestras por cada segundo y se necesitan al menos dos muestras por cada ciclo para definir una componente de la frecuencia de la señal; de esta manera, la frecuencia más alta que se puede definir mediante  $1/h$  muestras por cada segundo es  $1/2h$  ciclos por segundo. Las frecuencias en la señal que están por arriba de  $1/2h$  ciclos por segundo se "desdoblaron" hacia el rango o a  $1/2h$  y se confundirán con las frecuencias en ese rango, como se ilustra en la Fig. 4.32.

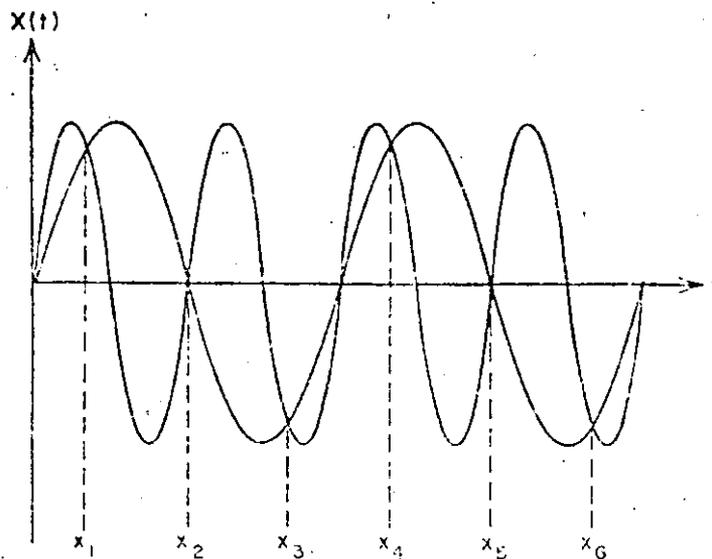


Fig. 4.32 Confusión de dos frecuencias durante el muestreo.

Para evitar el efecto descrito muchas veces se acostumbra filtrar a la señal previamente a la conversión analógica-digital, de tal modo de asegurar que la señal bajo estudio no contenga frecuencias más altas que la correspondiente al muestreo ( $f_c = 1/2h$ , frecuencia de Nyquist).

Mediante la operación de cuantificación se busca expresar la magnitud de cada valor muestreado mediante un número fijo de dígitos, disponiéndose únicamente de una cantidad determinada de niveles para aproximar la infinidad de niveles de la señal analógica continua. El proceso de aproximación, que se efectúa mediante un dispositivo electrónico diseñado apropiadamente, se ilustra esquemáticamente en la Fig. 4.33. La precisión de este proceso depende del número de niveles disponibles - que puede ser hasta 65,536 cuando el sistema de conversión proporciona 16 dígitos binarios a la computadora. Para una descripción más completa de este aspecto se recomienda consultar los textos y manuales sobre interconexión de sistemas computacionales.

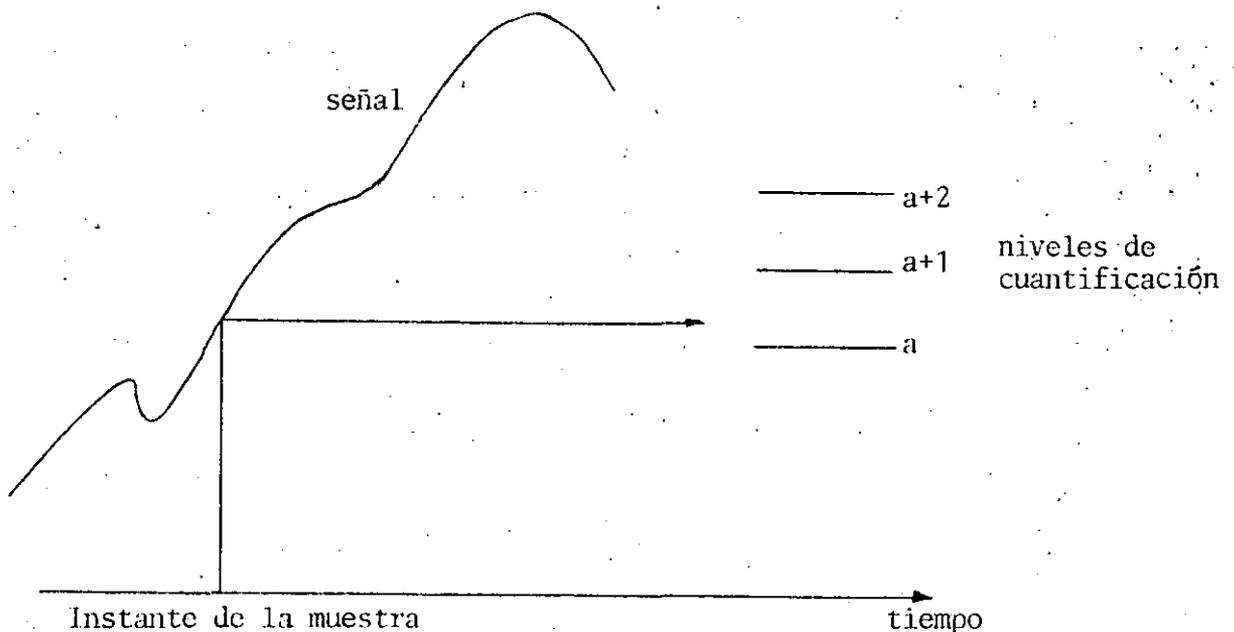


Fig. 4.33 Cuantificación digital de una señal.

#### 4.4.3 PROCESAMIENTO ANALÓGICO.

Se revisan a continuación los aspectos más relevantes para el análisis de señales aleatorias en el tiempo y en la frecuencia, de los principales sistemas de procesamiento analógico.

## Filtros

Se trata de dispositivos electrónicos que, como su nombre lo indica, son selectivos de las frecuencias contenidas en una señal dada con la cual se les alimenta. En la Fig. 4.34 se resumen los principales tipos de filtros desde el punto de vista de su selectividad a las frecuencias.

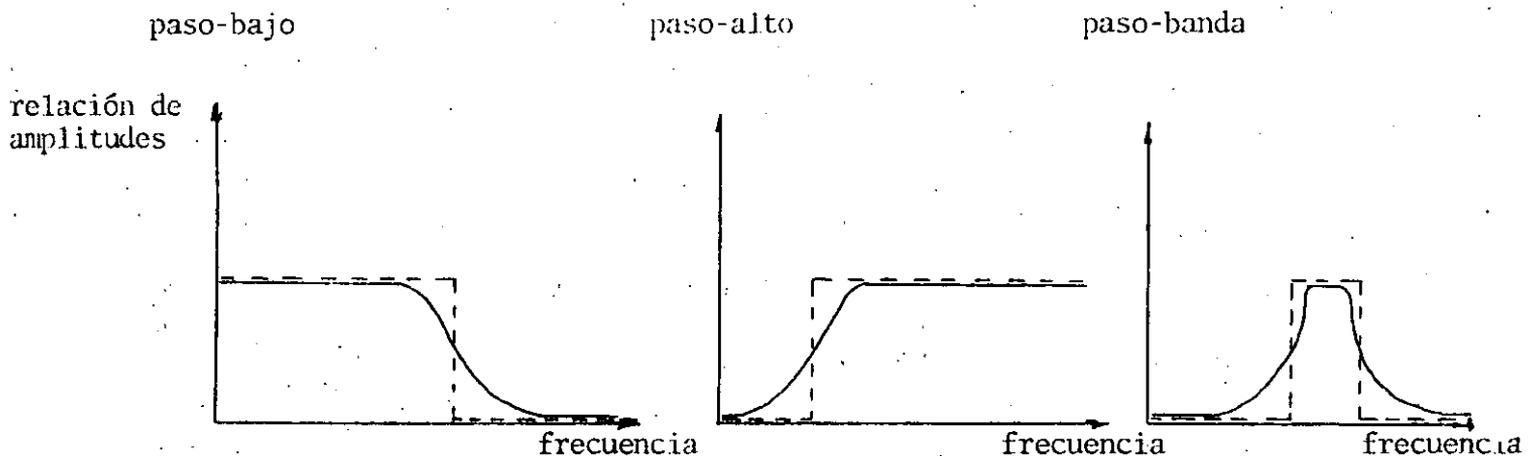


Fig. 4.34 Principales tipos de filtros.

Desde el punto de vista de su construcción y en relación a la clase de información que manejan, existen filtros mecánicos, hidroneumáticos, electrónicos, etc. Los más comunes son, desde luego, los electrónicos que pueden ser pasivos (a base de circuitos RLC) o activos (constituidos por circuitos donde se incluyen amplificadores), estos últimos con rangos de frecuencias más amplios y características ajustables.

## Vóltmetros.

Estos instrumentos de medición que permiten obtener ya sea el valor medio o bien, el valor cuadrado medio de un voltaje variable, son indudablemente de gran utilidad en el estudio de señales aleatorias pues permiten obtener muy rápidamente la tendencia central y la dispersión de esta clase de señales.

Para medir el valor medio de un voltaje, simplemente se promedia el valor instantáneo continuo de la señal a lo largo de un intervalo de tiempo determinado. El vóltmetro consiste en un circuito adecuado para promediar y un dispositivo galvanómetro para la lectura. El circuito puede ser de integración (amplificador operacional con condensador de retroalimentación) o bien, de tipo pasivo (filtro de paso bajo).

En las mediciones del valor cuadrado medio de un voltaje aleatorio es necesario utilizar un vóltmetro de "valor cuadrado medio verdadero" (TMS), el cual se eleva al cuadrado instantáneamente el valor de la señal alimentada mediante un circuito apropiado, y enseguida efectúa el promedio de la misma manera que el vóltmetro para medir valores medios.

### Correlacionador

Como se sabe, los procesos involucrados en la determinación de una función de correlación son:

- a) un corrimiento o retraso en el tiempo de la señal cuya autocorrelación se desea medir (o bien, de una de las dos señales cuando se trata de una correlación cruzada). Dicho corrimiento debe poderse variar de tal manera de generar diferentes valores de  $\tau$ . Esta operación en los correlacionadores analógicos generalmente se lleva a cabo mediante un sistema de dos cabezas, grabadora y reproductora, para cinta magnética, siendo variable la distancia entre ambas. (Fig. 4.35)
- b) una multiplicación de los valores instantáneos de la señal por los correspondientes valores defasados o corridos  $\tau$  segundos mediante el dispositivo descrito en el inciso anterior
- c) una integración de los productos obtenidos en b) para un valor dado de  $\tau$ .

Los tres pasos se repiten para diferentes valores de  $\tau$  al variar la distancia entre las dos cabezas de magnetización. De esta manera se puede generar continuamente la función  $R(\tau)$  a partir de los valores cuantificados para tiempos de corrimiento específicos.

En el procedimiento que se acaba de describir el intervalo que exista entre los corrimientos de tiempo determina la resolución de la función de correlación resultante, de tal manera que mientras menor sea el intervalo entre los corrimientos de tiempo, mejor será la resolución<sup>1</sup> de la función de correlación. Sin embargo, al disminuir dicho intervalo, la cantidad de mediciones que es necesario efectuar para cubrir un determinado tiempo real, se incrementa. Es por lo tanto necesario en la práctica, establecer un compromiso entre ambas necesidades con objeto de lograr correlogramas con adecuada resolución analizando registros de la señal (o señales) de interés con una lon-

<sup>1</sup> El término "mejor resolución" significa esencialmente, la mayor cercanía entre los puntos discretos que representan a una curva determinada.

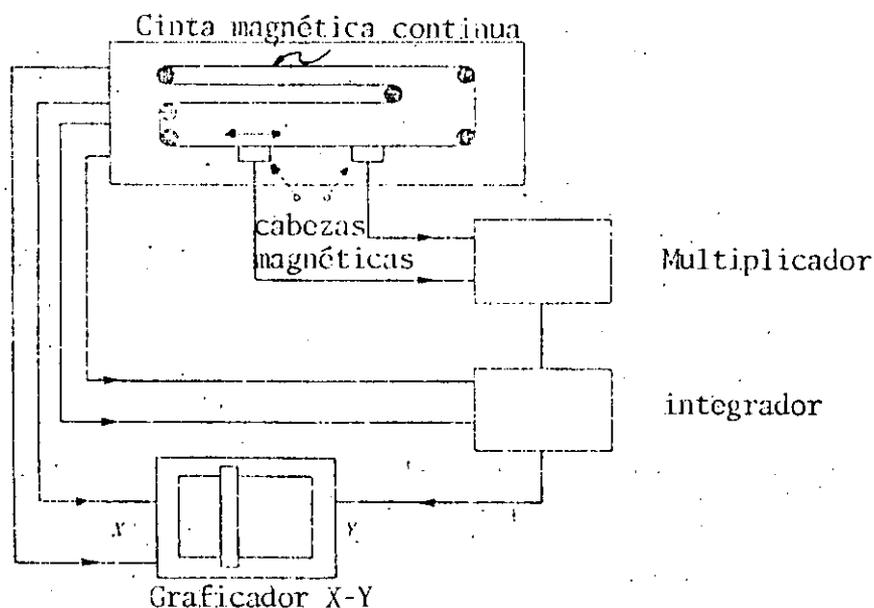


Fig. 4.35 Correlacionador analógico

gitud razonable. Generalmente después de dos o tres funciones de correlación diferentes medidas tentativamente, se puede establecer el intervalo entre corrimientos de tiempo, adecuado para satisfacer ese compromiso.

Existe un tipo de correlacionador que primeramente realiza un proceso de digitación en la señal (o señales) de interés y almacena los datos obtenidos en una unidad de memoria. Después, tomando estos datos de la memoria, efectúa el corrimiento en el tiempo para posteriormente multiplicar y promediar analógicamente. Se trata entonces, de un instrumento de carácter híbrido.

### Analizador de espectro de potencia

El procedimiento analógico para determinar la densidad espectral de potencia de una señal aleatoria, quedó esencialmente descrito en la Sección 4.4.1. El método comprende los siguientes pasos:

- a) filtración de la señal mediante un filtro electrónico de ancho de banda muy estrecho;
- b) elevación al cuadrado de la señal filtrada;
- c) promedio de la señal cuadrada;
- d) división del valor cuadrado medio entre el ancho de banda del filtro.

Los pasos anteriores se repiten para diferentes frecuencias (las cuales constituyen los centros de los correspondientes anchos de banda durante la filtración) y se obtiene al graficar, un espectro de potencia de la señal bajo estudio. La mayor parte de los analizadores de espectro de potencia efectúan la operación de filtrado utilizando los principios de modulación heterodina, requiriéndose para tal efecto, esencialmente un oscilador de frecuencia variable y un filtro altamente selectivo de frecuencia central fija.

#### 4.4.4 PROCESAMIENTO DIGITAL

Casi se puede asegurar que los métodos digitales de procesamiento de señales ofrecen en la actualidad una gama de posibilidades más amplia que los procedimientos analógicos. Esto se debe indiscutiblemente al desarrollo tan extraordinario que han tenido los sistemas de computación. Dadas las limitaciones de espacio y teniendo en cuenta el carácter puramente introductorio e informativo que tienen estos apuntes, en esta Sección nos limitaremos exclusivamente a establecer algunos comentarios respecto a los algoritmos que constituyen la Transformada de Fourier Rápida. Estos algoritmos, como se indicó anteriormente, constituyen la esencia del análisis de Fourier digital moderno.

#### Transformada de Fourier discreta

Tal como se apuntó anteriormente, se puede definir la transformada de Fourier de una señal aleatoria  $x(t)$ , con la condición de restringir el intervalo a un valor finito  $(0, T)$ , escribiendo para la transformada,

$$X(\omega) = \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.4.4)$$

Supóngase ahora que la señal  $x(t)$  se muestrea en  $N$  puntos igualmen

te espaciados con un intervalo entre ellos  $h$ , habiendo tenido en cuenta para la selección de este último el criterio de Nyquist - comentado con anterioridad. Se tiene entonces para la señal muestreada,

$$x_n = x(nh), \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (4.4.5)$$

mientras que la Ec. (4.4.4),

$$X(\omega) = h \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i\omega nh) \quad (4.4.6)$$

Generalmente se escoge para las frecuencias discretas,

$$f_k = k f_s = k \frac{\omega}{2\pi} = \frac{k}{T} = \frac{k}{Nh}, \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (4.4.7)$$

de tal manera que se tiene para (4.4.6),

$$X_k = \frac{X(f_k)}{h} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp(-i \frac{2\pi kn}{N}) \quad k=0,1,2,\dots,N-1 \quad (4.4.8)$$

La Ec. (4.4.8) constituye la versión discreta de la transformada de Fourier.

### Transformada de Fourier Rápida

Si se divide a la señal muestreada  $x_n$  en dos secuencias  $y_n$  y  $z_n$ , cada una con  $N/2$  muestras, de tal manera que  $y_n$  consista de los puntos cuyo orden es par, y  $z_n$  aquellos cuyo orden es impar, es decir,

$$\begin{aligned} y_n &= x_{2m} & n=0,1,2,\dots, \frac{1}{2}(N-1) \\ z_n &= x_{2m+1} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

entonces cada una de las secuencias formadas tendrá su correspondiente transformada de Fourier,

$$Y_k = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} y_n \exp(-i 4 \pi kn/N)$$

$$Z_k = \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}(N-1)} z_n \exp(-4ink/N) \quad (4.4.10)$$

La transformada  $X_k$  se puede obtener a partir de  $Y_k$  y de  $Z_k$  mediante fórmulas que no se apuntan aquí dada la brevedad en el espacio que se busca. Lo importante en todo caso es observar que mediante (4.4.9) y (4.4.10) resulta posible expresar una transformada obtenida mediante  $N$  puntos, en términos de dos transformadas cada una a partir de  $N/2$  muestras. Ahora bien, para calcular una transformada discreta utilizando  $N$  puntos se necesitan, en general,  $N^2$  operaciones aritméticas, entonces, utilizando en su lugar las otras dos transformadas se requerirán  $2(N/2)^2 = N^2/2$  operaciones. Para completar el cálculo de  $X_k$  es necesario efectuar en general  $2N$  operaciones. De este modo si  $N$  es suficientemente grande  $(N^2/2) + 2N$  resulta bastante menor que  $N^2$ . Obviamente este resultado se traduce en una reducción del tiempo empleado por una computadora al estimar una transformada de Fourier discreta. La descomposición de una secuencia en otras dos mencionada se puede llevar hasta lograr secuencias de un solo punto con lo cual se incrementa muy sustancialmente el poderío de la herramienta.

Dada la corta edad de la Transformada de Fourier Rápida (nació a la luz pública en 1965, con el artículo de Cooley y Tukey<sup>1</sup>) es lógico suponer que posea en la actualidad un desarrollo muy dinámico, ofreciendo para el futuro, insospechadas aplicaciones en el análisis de las señales aleatorias.

<sup>1</sup>Cooley, J.W. and Tukey, J.W., "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", Math. of Computation. 19, 1965.

BIBLIOGRAFIA

A continuación se enlistan las obras que fundamentalmente sirvieron para la elaboración de este Capítulo, haciendo un breve comentario respecto al contenido y nivel de cada libro.

1. Doebelin, E.O., Measurement Systems: Application and Design, Mc Graw Hill Book Co., New York, N.Y., 1966.  
Posiblemente una de las mejores obras existentes para el estudio generalizado de los sistemas de medición y para la descripción introductoria de numerosos dispositivos e instrumentos en particular, todo desde el punto de vista de la ingeniería mecánica. Nivel básico.
2. Lathi, B.P., An Introduction to Random Signals and Communication Theory, International Textbook Co., Scranton, Penn, 1968.  
Libro de texto riguroso pero suficientemente claro sobre la teoría de las señales aleatorias desde el punto de vista de la ingeniería de comunicaciones. Nivel intermedio.
3. Bendat, J.S. and Piersol, A.G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, N.Y., 1971.  
Indiscutiblemente uno de los mejores textos escritos sobre el tema. Sin perder rigor matemático pero buscando siempre las aplicaciones y sobre todo, la cuantificación experimental de los procesos estocásticos, los autores han logrado en pocos años hacer que su obra figure entre las consideradas como "clásicas" de todo ingeniero que tenga que manejar esta clase de datos. Nivel intermedio.
4. Harris, R.W., and Ledwidge, T.J., Introduction to Noise Analysis Pion Ltd., London, U.K., 1974.  
Resume en menos de 100 páginas los aspectos más importantes del análisis de señales aleatorias. Incluye las consideraciones matemáticas esenciales y los principales métodos de medición. El libro es recomendable especialmente por su brevedad. Nivel intermedio.
5. Chirlian, P.M., Signals, Systems and the Computer, Intext Educational Publishers, New York, N.Y., 1973.  
Constituye un tratado muy completo de los sistemas lineales y los métodos computacionales para su análisis. Particularmente interesante es la explicación de la Transformada de Fourier Rápida. Nivel Intermedio.