



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA – CONTROL

Función de Lyapunov Suave para el Diferenciador de Segundo Orden

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
Fernando Aaron Ortiz Ricardez.

TUTOR PRINCIPAL:
Jaime Alberto Moreno Pérez, Instituto de Ingeniería.

MÉXICO, D. F. Septiembre 2015.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. María Cristina Verde Rodarte
Secretario: Dr. José Luis Álvarez-Icaza Longoria
Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez
1^{er.} Suplente: Dr. Leonid Fridman
2^{do.} Suplente: Dr. Jorge Ángel Dávila Montoya

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., MÉXICO.

TUTOR DE TESIS:

JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

FIRMA

(Segunda hoja)

Agradecimientos

- A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme permitido formar parte de su gran comunidad y de gozar de sus privilegios como estudiante.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. CVU: 557079, por la subvención económica que me ha otorgado para mi manutención durante 2 años.
- A la DGAPA, UNAM por parte del PAPIIT (Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica), proyecto IN113614.
- Al Instituto de Ingeniería, por las facilidades técnicas que me ha dado para la realización de esta tesis.
- A mi asesor, el Dr. Jaime A. Moreno, y al Dr. Leonid Fridman; por los consejos dados, y por las observaciones y sugerencias hechas a lo largo de la realización de este trabajo.
- Al Maestro Tonámetl Sánchez, por sus consejos y apoyo durante la realización de este trabajo. Y también por su paciencia.
- A mis amigos de generación de maestría, por compartir conmigo esas fructíferas sesiones de estudio y los divertidos momentos de sana convivencia.
- Al personal académico del ITESM Campus Toluca y de la Universidad de Zaragoza, España, por haberme inspirado a incursionar y experimentar en el campo de la investigación.
- A mi padre, Fernando Ortiz Jaramillo, por su afecto, apoyo, y por permitirme compartir con él estos últimos años a su lado y al de mi abuelo.
- A mi madre, Guadalupe Ricárdez Saavedra, por su cariño incondicional, su motivación y sus consejos *sui generis* en los momentos más difíciles de mi vida.
- A mi hermano, Alejandro, por su amor fraterno y su bella expresión musical.
- Y por supuesto, a Dios y a la vida.

Resumen

Esta tesis presenta, por primera vez en la literatura, el diseño de una función de Lyapunov diferenciable (suave) para el sistema dinámico con lado derecho discontinuo denominado Diferenciador Exacto Robusto de Segundo Orden, propuesto primero por A. Levant. Teóricamente este sistema estima de manera exacta la primera y segunda derivadas de la señal a diferenciar. La función de Lyapunov candidata y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema descritas por una inclusión diferencial, pertenecen a una clase especial de funciones homogéneas denominadas Formas Generalizadas. Mediante el Teorema de Pólya se determina la positividad definida de la candidata y la negatividad definida de su derivada. En el proceso de diseño de la función de Lyapunov, se encuentra un juego de ganancias adicionales a las prescritas por A. Levant. Finalmente, con la función de Lyapunov suave obtenida para el diferenciador, se estudia la robustez del sistema ante perturbaciones, se prueba su estabilidad en el sentido de Lyapunov en tiempo finito, y se determina una cota del tiempo de convergencia de sus trayectorias.

Abstract

This thesis presents, for the first time in the literature, the design of a differentiable (smooth) Lyapunov function for the dynamical system called Robust Exact Second Order Differentiator, first proposed by A. Levant. Theoretically this system estimates exactly the first and second derivatives of a differentiated signal. The Lyapunov function candidate and its derivative along the trajectories of the system, which are described by a differential inclusion, belong to a special class of homogeneous functions denominated Generalized Forms. By means of Pólya's Theorem, the positive definiteness of the candidate function and the negative definiteness of its derivative is determined. Through the Lyapunov function design process, a new set of gains additional to the ones prescribed by A. Levant is found. Finally, with the obtained smooth Lyapunov function for the differentiator, robustness of the system against disturbances is studied, its finite time stability in the Lyapunov sense is proved, and a bound of the convergence time of its trajectories is determined.

Índice general

Índice general	v
Índice de figuras	vii
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte y Motivación	1
1.2. Diferenciador Robusto Exacto de Segundo Orden	3
1.3. Planteamiento del problema	5
1.4. Objetivos	6
1.5. Metodología	6
1.6. Contribuciones principales	7
2. Herramientas	11
2.1. Teorema de Pólya	12
2.2. Transformación de Formas Generalizadas a Formas	14
2.3. Construcción de desigualdades lineales desde el Producto de Pólya	15
2.3.1. Ejemplo de construcción	17
2.3.2. Particularidades de la construcción de desigualdades	19
2.4. Resolución de sistemas de desigualdades lineales	21
3. Construcción de la función de Lyapunov para el diferenciador	25
3.1. Moldeo de la función candidata	25
3.2. Positividad de la candidata y negatividad de su derivada	28
3.3. Esquemas de solución de desigualdades lineales	30
3.3.1. Esquema de análisis	30
3.3.2. Esquema de diseño	31
3.3.3. Observaciones	32
3.4. Gráficas de la Función de Lyapunov nominal	34
4. Propiedades de robustez y tiempo de convergencia del diferenciador.	37
4.1. Determinación de cota de perturbación de modo numérico	38
4.2. Determinación de cota de perturbación mediante Teorema de Pólya	39
4.3. Reajuste de ganancias	42

4.4. Estimación del tiempo de convergencia	43
4.5. Simulaciones	44
5. Addendum: Función de Lyapunov suave por descomposición en SOS	51
5.1. Antecedentes	51
5.2. Sumas de Cuadrados para la función de Lyapunov	52
5.3. Consideración de caso perturbado y tiempo de convergencia	55
5.4. Simulaciones	57
6. Discusión final	63
6.1. Conclusiones	63
6.2. Problemas abiertos y trabajo futuro	64
Apéndices	66
A. Sistematización del Producto de Pólya	67
A.1. Construcción de la matriz A de un sistema de desigualdades	67
A.1.1. Permutaciones de exponentes y reducción de columnas de A	68
A.1.2. Comparación entre permutaciones de exponentes de F y G	70
B. Función de Lyapunov suave y diseño de ganancias para Super-Twisting	73
C. Programa para calcular función de Lyapunov mediante SOS	79
D. Formas componentes de las representaciones SOS	83
D.1. Formas f_i componentes de $\bar{V}_1(z)$	83
D.2. Formas f_i componentes de $\bar{V}_2(z)$	87
D.3. Formas f_i componentes de $\bar{V}_3(z)$	91
Bibliografía	95

Índice de figuras

2.1.	Aumento de filas de A	20
2.2.	Cono poliédrico convexo	21
3.1.	$V(x)$ nominal	35
3.2.	$W(x)$ nominal	36
4.1.	$W(x)$ perturbada	39
4.2.	Cotas Δ_0 para distintos p	41
4.3.	$F(x)$ con valores mínimos	44
4.4.	Error de diferenciación con ganancias obtenidas	45
4.5.	Errores de diferenciación con ganancias de Levant	45
4.6.	Señales estimadas y reales	46
4.7.	Errores tras convergencia con $T_s = 2\mu s$	47
4.8.	Errores tras convergencia con $T_s = 20\mu s$	47
4.9.	$V(x)$ sobre plano x_2x_3	48
4.10.	$V(x)$ sobre plano x_1x_3	49
4.11.	$V(x)$ sobre plano x_1x_2	49
5.1.	$V(x)$ SOS	55
5.2.	$W(x)$ SOS perturbada	56
5.3.	$F(x)$ SOS perturbada	58
5.4.	Error de diferenciación con ganancias SOS	59
5.5.	Errores tras convergencia con $T_s = 2\mu s$	59
5.6.	Errores tras convergencia con $T_s = 20\mu s$	60
5.7.	Señales estimadas y reales SOS	60
5.8.	$V(x)$ SOS sobre plano x_2x_3	61
5.9.	$V(x)$ SOS sobre plano x_1x_3	61
5.10.	$V(x)$ SOS sobre plano x_1x_2	62
B.1.	$V(x)$ Super-Twisting	77
B.2.	$W(x)$ Super-Twisting	77

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estado del arte y Motivación

Una cuestión importante en el control de sistemas dinámicos retroalimentados es el conocimiento pleno de las variables de estado que describen a dichos sistemas. Los esquemas de control por retroalimentación de salida se emplean debido a que frecuentemente no es viable o posible medir todas las variables de estado, ya sea por el costo económico de los sensores empleados, por imposibilidad física debida a peculiaridades mecánicas del sistema dinámico, o bien debido a cuestiones ajenas al sistema, como el ambiente que le rodea.

Supóngase por ejemplo que, dada la variable de estado $x \in \mathbb{R}^n$ y una señal de entrada $u \in \mathbb{R}$, se tiene el sistema dinámico

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = u,$$

el cual es una cadena simple de integradores de la entrada u hasta una salida y establecida arbitrariamente como $y = x_1$. Si se supone que sólo se puede medir el la variable de estado x_1 , la única manera de obtener información sobre el resto de las variables de estado es mediante el uso de un observador, o de forma más particular, utilizando un diferenciador de cierto orden para derivar x_1 tantas veces sea necesario para determinar el resto de las variables de estado. Es por casos como este que los diferenciadores adquieren relevancia.

Una manera de obtener la derivada de alguna variable de estado es utilizar filtros paso alto. No obstante, la salida de un filtro paso alto sólo puede ser una aproximación de la derivada auténtica de una señal en un ancho de banda limitado. Se ha propuesto la utilización de diferenciadores y observadores de alta ganancia (Khalil, 2002, pp. 610-623) para evitar este problema, sin embargo, éstos presentan un fenómeno denominado «peaking», que es un sobreimpulso en la respuesta temporal de los estados directamente proporcional a la velocidad de convergencia del diferenciador u observador.

En teoría de modos deslizantes, el diferenciador robusto exacto de primer orden, mejor conocido como algoritmo «Super-Twising», provee una estimación exacta de la primera derivada

de una señal en tiempo finito. Para la obtención de derivadas de orden superior con este diferenciador, cabe señalar que el uso de múltiples diferenciadores de primer orden conectados en cascada, con el objetivo de obtener derivadas adicionales a la primera, ha sido reportado como inconveniente debido a pérdidas de precisión (Levant, 2003).

Tomando esto último, en (Levant, 2003) se ha propuesto un diferenciador por modos deslizantes de orden arbitrario para calcular la derivada de hasta orden « n » de una señal. Este diferenciador no se ve afectado por la rápida deterioración de la precisión que se presenta en los diferenciadores de primer orden en cascada. Otra buena característica de este sistema es su grado de homogeneidad negativo, lo cual implica su convergencia en tiempo finito si el origen del sistema es asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov. La convergencia de estos diferenciadores se ha probado utilizando métodos geométricos en (Levant, 1998), (Levant, 2003) y usando propiedades de homogeneidad en (Levant, 2005). Las pruebas de convergencia ofrecidas en estos últimos trabajos son de poca utilidad para analizar propiedades del diferenciador, tales como robustez y tiempo de convergencia, ya que no se emplean funciones de Lyapunov.

Para el caso particular del diferenciador de segundo orden, se diseñó por primera vez en la literatura una función de Lyapunov en (Moreno, 2012). Sin embargo, dicha función presenta dos desventajas. La primera es que no es diferenciable pese a ser homogénea y continua. La segunda es que se obtuvo resolviendo un sistema de desigualdades no lineales bastante complicadas en función de los parámetros del diferenciador (las desigualdades a resolver fueron determinadas mediante una generalización de la desigualdad de Young). De igual forma, en el trabajo de tesis de (Aparicio, 2012), se encuentra también una función de Lyapunov con las mismas peculiaridades que la mostrada en (Moreno, 2012) empleando la misma idea de la generalización de desigualdades de Young, sólo que la función candidata propuesta posee un término cruzado adicional respecto a la expuesta en (Moreno, 2012).

En la aplicación del método directo de Lyapunov, es deseable contar con una función de Lyapunov diferenciable, ya que al aplicar dicho método se evitan las dificultades características de utilizar funciones de Lyapunov no diferenciables. Se ha probado la existencia de funciones de Lyapunov homogéneas diferenciables para sistemas homogéneos continuos en (Rosier, 1992), y también para sistemas homogéneos con lado derecho discontinuo en (Nakamura *et al.*, 2002).

En (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b) se ha presentado un procedimiento para diseñar funciones de Lyapunov suaves, i. e. diferenciables, para sistemas homogéneos. En particular, el método ahí expuesto es aplicado a dos sistemas de segundo orden, uno de ellos es el Super-Twisting y el otro un integrador doble controlado por retroalimentación de estado homogénea. Tal procedimiento se sirve de la estructura del campo vectorial del sistema para elegir una función de Lyapunov candidata. Tanto el campo vectorial como la función candidata pertenecen a una clase especial de funciones homogéneas.

Con el método ahí expuesto, el probar la positividad de la función candidata y la negatividad de su derivada se reduce, mediante un resultado conocido como Teorema de Pólya (Pólya, 1928), (De Loera y Santos, 1996), (Delzell, 2008), a resolver un sistema de desigualdades lineales. Tales desigualdades son lineales en los coeficientes de la función candidata y también lineales respecto a los parámetros del diferenciador, y bilineales en ambos.

El proceso de construcción de funciones de Lyapunov en los ejemplos de (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), se utiliza como herramienta de análisis del sistema mediante la función de Lyapunov obtenida, debido a que se conocen los parámetros del sistema a priori. De acuerdo con (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), en caso de no conocer los parámetros del sistema, el método puede fungir como herramienta de diseño, ya que permite diseñarlos a la vez que se diseña la función de Lyapunov.

El procedimiento propuesto en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b) es una motivación para encontrar una función de Lyapunov suave para el diferenciador de Levant de segundo orden, y de forma simultánea, obtener una familia de ganancias adicional a las propuestas por Levant en (Levant, 2003), de tal forma que se use el método como herramienta de diseño. Posteriormente con la función de Lyapunov obtenida, es posible estudiar propiedades del sistema como convergencia en tiempo finito, estimar una cota superior del tiempo de convergencia del diferenciador y también evaluar su robustez.

Es muy importante mencionar que a diferencia de lo expuesto en (Moreno, 2012), en esta tesis el cómputo de los coeficientes de la función de Lyapunov candidata, así como de las ganancias del diferenciador puede ser más sencillo. Esto se debe a que su cómputo consiste en resolver sistemas de desigualdades lineales, y esto se puede hacer con varias herramientas informáticas disponibles, como la desarrollada en (Zolotykh, 2012) con base a un algoritmo para resolver sistemas de desigualdades lineales denominado Método de la Doble Descripción descrito en (Fukuda y Prodon, 1996) y (Zolotykh, 2012). A continuación se presenta el diferenciador robusto exacto de segundo orden, que es el objeto de estudio de este trabajo.

1.2. Diferenciador Robusto Exacto de Segundo Orden

El diferenciador robusto exacto de segundo orden es un caso particular del diferenciador exacto robusto de orden arbitrario n reportado en (Levant, 2003) y explicado en (Shtessel *et al.*, 2014, pp. 216-232). Utilizando una nomenclatura distinta a la de (Levant, 2003), se parte de dicho diferenciador

$$\begin{aligned}
\dot{s}_0 &= v_0 = -\lambda_n L^{1/(n+1)} |s_0 - \sigma(t)|^{n/(n+1)} \cdot \text{sgn}(s_0 - \sigma(t)) + s_1, \\
\dot{s}_1 &= v_1 = -\lambda_{n-1} L^{1/n} |s_1 - v_0|^{(n-1)/n} \cdot \text{sgn}(s_1 - v_0) + s_2, \\
&\vdots \\
\dot{s}_{n-1} &= v_{n-1} = -\lambda_1 L^{1/2} |s_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \cdot \text{sgn}(s_{n-1} - v_{n-2}) + s_n, \\
\dot{s}_n &= v_n = -\lambda_0 L \cdot \text{sgn}(s_n - v_{n-1}).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Donde $\sigma(t)$, $t \geq 0$ es la señal a diferenciar n veces. Las variables s_0, s_1, \dots, s_n son los estimados de las señales $\sigma(t), \dot{\sigma}(t), \dots, \sigma^{(n)}(t)$. Los parámetros de diseño $\lambda_0, \dots, \lambda_n > 0$ y $|\sigma^{(n+1)}(t)| \leq L$, donde $L > 0, L \in \mathbb{R}$ es la constante de Lipschitz de $\sigma^{(n)}(t)$. El diferenciador exacto robusto de segundo orden es un caso particular del anterior cuando $n = 2$, entonces

$$\dot{s}_0 = v_0 = -\lambda_2 L^{1/3} |s_0 - \sigma(t)|^{2/3} \cdot \text{sgn}(s_0 - \sigma(t)) + s_1, \tag{1.2}$$

$$\dot{s}_1 = v_1 = -\lambda_1 L^{1/2} |s_1 - v_0|^{1/2} \cdot \text{sgn}(s_1 - v_0) + s_2, \tag{1.3}$$

$$\dot{s}_2 = v_2 = -\lambda_0 L \cdot \text{sgn}(s_2 - v_1). \tag{1.4}$$

La manera en la que el diferenciador de segundo orden queda expresado por las ecuaciones (1.2)-(1.4) no resulta conveniente para utilizarse como una representación de variables de estado, debido a que las ecuaciones diferenciales que la componen están anidadas de la primera a la última de manera sucesiva. Tomando las consideraciones sobre λ y L dichas antes, si se sustituye (1.2) en (1.3) y lo resultante se sustituye en (1.4), se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{s}_0 &= -\lambda_2 L^{1/3} |s_0 - \sigma(t)|^{2/3} \cdot \text{sgn}(s_0 - \sigma(t)) + s_1, \\
\dot{s}_1 &= -\lambda_1 \lambda_2^{1/2} L^{2/3} |s_0 - \sigma(t)|^{1/3} \cdot \text{sgn}(s_0 - \sigma(t)) + s_2, \\
\dot{s}_2 &= -\lambda_0 L \cdot \text{sgn}(s_0 - \sigma(t)).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Simplemente para tener una numeración más conveniente de los estados $s = [s_0, s_1, s_2]^T$ de (1.5), se modifican únicamente los subíndices de forma que ahora $s = [s_1, s_2, s_3]^T$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= -k_1 |s_1 - \sigma(t)|^{2/3} \cdot \text{sgn}(s_1 - \sigma(t)) + s_2, \\
\dot{s}_2 &= -k_2 |s_1 - \sigma(t)|^{1/3} \cdot \text{sgn}(s_1 - \sigma(t)) + s_3, \\
\dot{s}_3 &= -k_3 \cdot \text{sgn}(s_1 - \sigma(t)),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

donde para el sistema (1.6), los parámetros $k = [k_1, k_2, k_3]^T$ se definen

$$k_1 = \lambda_2 L^{1/3}, \quad k_2 = \lambda_1 \lambda_2^{1/2} L^{2/3}, \quad k_3 = \lambda_0 L. \tag{1.7}$$

A partir del sistema (1.6), se describe a continuación el planteamiento del problema.

1.3. Planteamiento del problema

Tal como aparece el sistema (1.6) reportado en (Levant, 2003), permite estimar en tiempo finito y de manera exacta la primera y segunda derivadas de una señal $\sigma(t) \in \mathbb{R}$. Reescribiendo de forma más compacta el sistema (1.6)

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= -k_1[s_1 - \sigma(t)]^{\frac{2}{3}} + s_2, \\ \dot{s}_2 &= -k_2[s_1 - \sigma(t)]^{\frac{1}{3}} + s_3, \\ \dot{s}_3 &= -k_3[s_1 - \sigma(t)]^0,\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde con las ganancias k_1 , k_2 , y k_3 diseñadas apropiadamente, los estimados s_1 , s_2 y s_3 convergen como: $s_1 = \dot{\sigma}(t)$, $s_2 = \dot{\sigma}(t)$, y $s_3 = \ddot{\sigma}(t)$, $\forall t \geq T$, donde T es el tiempo de convergencia. Note que en (1.8) y en el resto de la tesis se utiliza la siguiente notación: Para una variable real $x \in \mathbb{R}$ y un número racional $\rho \in \mathbb{Q}$,

$$[x]^\rho \triangleq |x|^\rho \cdot \text{sgn}(x).\tag{1.9}$$

Por tanto, es útil observar que $[x]^1 = [x] = x$ y también que $[x]^0 = \text{sign}(x)$.

Ahora, definiendo los errores de diferenciación $x_i \triangleq s_i - \sigma^{(i-1)}(t)$, $i = 1, 2, 3$ como nuevas variables de estado, tal como se hace en (Moreno, 2012), la dinámica de (1.8) se escribe como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1[x_1]^{\frac{2}{3}} + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2[x_1]^{\frac{1}{3}} + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -k_3[x_1]^0 + \pi(t)\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde $\pi(t) = -\sigma^{(3)}(t)$ es la tercera derivada negativa de la señal $\sigma(t)$ y $k = [k_1, k_2, k_3]^T$. En adelante, $\pi(t)$ se considera como una perturbación exógena a las nuevas variables de estado $x = [x_1, x_2, x_3]^T$.

Debido a las discontinuidades del campo vectorial del sistema (1.10) y a las incertidumbres dadas por $\pi(t)$, dicho sistema puede asociarse a una inclusión diferencial $\dot{x} \in F(x)$. Las soluciones de esta inclusión diferencial se entienden en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Como el conjunto de campos vectoriales $F(x)$ es homogéneo, conviene recordar las definiciones (1.3.1) y (1.3.2) de homogeneidad ponderada para funciones y para sistemas con lado derecho discontinuo (Levant, 2005) (remítase a (Bacciotti y Rosier, 2005) para sistemas con lado derecho continuo $\dot{x} = F(x)$).

Definición 1.3.1 (Función homogénea) Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que es homogénea de grado q si $V(\kappa^{r_1}x_1, \dots, \kappa^{r_n}x_n) = \kappa^q V(x)$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}, \kappa > 0$ con pesos de homogeneidad $r \in \mathbb{R}^n$, $r = [r_1, \dots, r_n]$.

Definición 1.3.2 (Inclusión diferencial homogénea) Una inclusión $\dot{x} \in F(x)$ donde el conjunto de campos vectoriales $F(x) \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que es homogénea de grado q si cada componente f_i es homogénea de grado $q+r_i$, $\forall i \in [1, \dots, n]$, esto es $f_i(\kappa^{r_1}x_1, \dots, \kappa^{r_n}x_n) = \kappa^{q+r_i}f_i(x)$, $\forall \kappa > 0$ con pesos de homogeneidad $r \in \mathbb{R}^n$, $r = [r_1, \dots, r_n]$.

Por la Definición (1.3.2), el sistema (1.10) es homogéneo de grado -1 con pesos de homogeneidad elegidos como $r = [r_1, r_2, r_3] = [3, 2, 1]$. Dado que (1.10) es homogéneo, es posible proponer una función candidata de Lyapunov homogénea. Esto se ha demostrado factible para inclusiones diferenciales en (Nakamura *et al.*, 2002).

Las funciones homogéneas poseen propiedades útiles e interesantes, una de ellas es la capacidad de reescalar una función evaluada en un punto de su dominio para determinar todos los valores de su imagen. Otra propiedad interesante es su no acotamiento radial.

Con el propósito de aplicar el método directo de Lyapunov, se pretende encontrar una familia de funciones de Lyapunov diferenciables y homogéneas, la cual permita probar estabilidad asintótica del diferenciador (1.10). Más aún, como (1.10) es homogéneo de grado negativo, esto implica que la estabilidad asintótica del origen de (1.10) equivale a que es convergente en tiempo finito y se puede estimar el tiempo de convergencia (Levant, 2005). Dicho de otra forma, si se encuentra una función de Lyapunov diferenciable y homogénea para (1.10), se puede garantizar la convergencia global de sus trayectorias al origen en tiempo finito.

1.4. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es probar la estabilidad del diferenciador de segundo orden mediante el método directo de Lyapunov con una función de Lyapunov diferenciable, y con ella estudiar propiedades de tiempo de convergencia finito y robustez ante la tercera derivada del diferenciador. Este objetivo principal se subdivide en dos objetivos particulares:

1. Mediante el método de construcción de funciones de Lyapunov diferenciables presentado en (Sánchez y Moreno, 2014a), con el cual es posible obtener una familia de funciones de Lyapunov suaves, encontrar una función de Lyapunov para el diferenciador, y simultáneamente hallar una familia de parámetros adicionales a los prescritos por Levant en (Levant, 2003) y (Levant, 2005) para (1.10), de tal forma que también se utilice simultáneamente el procedimiento como herramienta de diseño del diferenciador.
2. Con la función de Lyapunov suave hallada, estudiar propiedades de interés del diferenciador, como son: convergencia en tiempo finito, estimar una cota del tiempo de convergencia y analizar su robustez ante variaciones de la tercera derivada (considerada como perturbación exógena para (1.10)).

1.5. Metodología

Para lograr el primer objetivo particular de la Sección 1.4, se considera el caso nominal cuando $\pi(t) = 0, t \geq 0$ para el sistema (1.10) y se utiliza el método para encontrar funciones de Lyapunov diferenciables reportado en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b). Dicho procedimiento consta de las siguientes fases descritas de manera muy breve:

1. Proponer una función de Lyapunov candidata $V(x), x \in \mathbb{R}^n$ diferenciable para el sistema. Dicha función debe pertenecer a una clase particular de funciones homogéneas denominadas Formas Generalizadas.
2. De la función candidata $V(x)$ y de su derivada negativa a lo largo de \dot{x} , esto es $W(x) = -(\partial V(x)/\partial x)\dot{x} = -\dot{V}$, determinar su positividad definida mediante el Teorema de Pólya. Esto es, obtener un conjunto finito de polinomios homogéneos con exponentes naturales (formas) $\{V_i(z)\}, i = 1, \dots, 2^n$ para $V(x)$ y un conjunto finito de formas $\{W_j(z)\}, j = 1, \dots, 2^n$ para $W(x)$, de modo que se determine la positividad de cada forma de dichos conjuntos con el Teorema de Pólya.
3. Del uso del Teorema de Pólya para el conjunto $\{V_i(z)\}$, obtener un sistema de desigualdades lineales homogéneo en términos de los coeficientes de la función candidata. De igual manera para el conjunto $\{W_i(z)\}$, obtener un sistema de desigualdades lineales homogéneo en función de los coeficientes de la función candidata, o bien, un sistema de desigualdades lineales no homogéneo en función de los parámetros del sistema dinámico.
4. Solucionar los sistemas de desigualdades lineales homogéneos, esto es, hallar un conjunto de coeficientes para la función candidata y un conjunto de parámetros para el sistema que satisfagan ambos sistemas de desigualdades simultáneamente.

Para el segundo objetivo dado en la Sección 1.4, se evalúa la robustez que tiene la función de Lyapunov nominal en el caso $\pi(t) \neq 0, \forall t \geq 0$ encontrando una cota nominal $0 < \Delta_0 \in \mathbb{R}$, de modo que aunque $|\pi(t)| \leq \Delta_0$, la función de Lyapunov nominal hallada siga siendo función de Lyapunov.

Una vez con la cota nominal determinada, se recurre a un difeomorfismo en el estado para obtener los escalamientos adecuados de los coeficientes de la función de Lyapunov nominal y de los parámetros del diferenciador, de modo que permitan a dicha función nominal seguir siendo función de Lyapunov, dada una nueva cota superior Δ de $\pi(t)$ considerando ahora el caso perturbado general $|\pi(t)| \leq \Delta, \forall t \geq 0$ donde $\Delta \geq \Delta_0$.

Con los coeficientes de la función de Lyapunov y los parámetros del sistema escalados para soportar cualquier perturbación $|\pi(t)| \leq \Delta, \forall t \geq 0$, se estima una cota del tiempo de convergencia del diferenciador.

Los detalles de los pasos del método (Sánchez y Moreno, 2014a) descritos en esta metodología se exponen en el Capítulo 2 de esta tesis.

1.6. Contribuciones principales

La contribución principal de esta tesis son los dos teoremas siguientes, que son resultado de los dos objetivos particulares antes mencionados aplicando la metodología descrita.

Teorema 1.6.1 (Función Suave) *Considere $\pi(t) = 0, \forall t \geq 0$. La función diferenciable homogénea $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12} [x_1] [x_2] + \alpha_2 |x_2|^{\frac{5}{2}} - \bar{\alpha}_{23} [x_2] [x_3]^3 + \alpha_3 |x_3|^5, \quad (1.11)$$

con coeficientes $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T$ con valores

$$\alpha_1 = 102.01, \quad \bar{\alpha}_{12} = 13.9955, \quad \alpha_2 = 3.9831, \quad \bar{\alpha}_{23} = 2.0066, \quad \alpha_3 = 13.3625, \quad (1.12)$$

es función de Lyapunov para (1.10) con parámetros $k = [k_1, k_2, k_3]^T$

$$k_1 = 9.5608, \quad k_2 = 6.8681, \quad k_3 = 0.0219. \quad (1.13)$$

Los coeficientes α y parámetros k escritos en el Teorema 1.6.1, pueden encontrarse resolviendo dos sistemas de desigualdades lineales (construidos y explicados en el Capítulo 3). Con lo cual, el par (α, k) del Teorema 1.6.1 es sólo uno de muchas soluciones para dichos sistemas de desigualdades lineales.

Como el grado de homogeneidad de (1.10) es negativo, y la función del Teorema 1.6.1 garantiza su estabilidad asintótica, se puede asegurar también su estabilidad en tiempo finito. Aunque el Teorema 1.6.1 es válido sólo para $\pi(t) = 0$, la estabilidad en tiempo finito del origen de (1.10) se mantiene para cierto $\pi(t) \neq 0$ tal como se enuncia en el siguiente lema.

Lema 1.6.1 (Robustez nominal) *Con el par (α, k) dado en el Teorema 1.6.1, y la cota Δ_0 expuesta en el Lema, las trayectorias de (1.10) convergen al origen en tiempo finito para toda $\pi(t)$ tal que $|\pi(t)| \leq \Delta_0 = 0.0081, \forall t \geq 0$.*

Mediante el Lema 1.6.1, se ofrece en el siguiente teorema una extensión del Teorema 1.6.1 considerando ahora el caso perturbado donde $\pi(t) \neq 0$.

Teorema 1.6.2 (Robustez General) *Considere $|\pi(t)| \leq \Delta, \forall t \geq 0$. Dado el par (α, k) del Teorema (1.6.1) y dada la cota Δ_0 del Lema (1.6.1), las trayectorias de (1.10) convergen al origen en tiempo finito con los parámetros escalados*

$$\bar{k} = [\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3]^T = \text{diag}(L^{1/3}, L^{2/3}, L)k, \quad (1.14)$$

donde $L = \Delta/\Delta_0$. Más aún, la función

$$V(x) = \alpha_{1s} |x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12s} [x_1] [x_2] + \alpha_{2s} |x_2|^{\frac{5}{2}} - \bar{\alpha}_{23s} [x_2] [x_3]^3 + \alpha_{3s} |x_3|^5, \quad (1.15)$$

es función de Lyapunov para (1.10) con los coeficientes escalados

$$\bar{\alpha} = [\alpha_{1s}, \bar{\alpha}_{12s}, \alpha_{2s}, \bar{\alpha}_{23s}, \alpha_{3s}]^T = \text{diag}(L^{-5/3}, L^{-2}, L^{-5/2}, L^{-4}, L^{-5})\alpha.$$

El tiempo de convergencia del sistema (1.10) está dado por (1.15) como

$$T(x_0) \leq \frac{V^{1-\delta}(x_0)}{\gamma(1-\delta)} \quad (1.16)$$

con $\delta = 4/5$ y $0 < \gamma \leq 2.8 \times 10^{-4}$, donde $x_0 = x(t_0)$

Los capítulos siguientes de esta tesis explican los pasos que se han realizado para establecer las pruebas de estos teoremas, los cuales son el resultado de convertir el problema de encontrar una función de Lyapunov diferenciable para un sistema discontinuo, en un problema de hallar soluciones que satisfagan sistemas de desigualdades lineales homogéneos: uno de ellos en términos de los coeficientes de la función candidata y el otro en términos de los parámetros del sistema. Con esto es posible hallar un conjunto infinito de coeficientes α y de parámetros k , que pueden simplemente escalarse para soportar cualquier perturbación acotada $\pi(t)$. Asimismo, en el resto de la tesis, los símbolos $\leq, <, >, \geq$ indican comparación elemento a elemento entre dos matrices.

Capítulo 2

Herramientas

Como se ha mencionado antes, se pretende encontrar una función de Lyapunov homogénea diferenciable para un sistema homogéneo discontinuo que puede verse como una inclusión diferencial homogénea. De acuerdo a lo propuesto en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), la función de Lyapunov candidata debe pertenecer a una clase particular de funciones denominadas *Formas Generalizadas*. Se presenta ahora la definición de este tipo específico de funciones.

Definición 2.0.1 (Forma Generalizada) Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función homogénea de grado m con un vector de pesos de homogeneidad $r = [r_1, \dots, r_n] \in \mathbb{Q}^n$. Sean los números $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\rho \in \mathbb{Q}$. F es una Forma Generalizada si únicamente contiene sumas y productos de términos que son de los siguientes tipos:

- $\alpha [x_k]^\rho$,
- $\alpha |x_k|^\rho$.

Un ejemplo de forma generalizada de grado $m = 3$ con vector de pesos de homogeneidad $r = [r_1, r_2] = [2, 1]$ y coeficientes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ es

$$F(x) = 2|x_1|^{3/2} - \alpha_1 [x_1]^{1/2} [x_2]^2 + \alpha_2 [x_1] [x_2] + 5|x_2|^3 \quad (2.1)$$

Las formas generalizadas son como su nombre sugiere, generalizaciones de funciones homogéneas denominadas *Formas Algebraicas*, o simplemente *Formas*. De manera sencilla, la palabra *forma* se utiliza como sinónimo de polinomio homogéneo y formalmente se define de la siguiente manera

Definición 2.0.2 (Forma) Una función $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina forma si $F(z)$ es un polinomio homogéneo de grado $q \in \mathbb{N}$, esto es $F(\kappa z_1, \dots, \kappa z_n) = \kappa^q F(z_1, \dots, z_n)$, $0 < \kappa \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que la homogeneidad de una forma es un caso particular de la definición de homogeneidad ponderada dada en (1.3.1), considerando los pesos de homogeneidad de z como $r_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$.

2.1. Teorema de Pólya

Para determinar la positividad definida de un polinomio homogéno (forma), en 1928 el matemático húngaro György Pólya presentó un resultado denominado Teorema de Pólya (Pólya, 1928) (véase también (De Loera y Santos, 1996), (Delzell, 2008) y (Habicht, 1939)), el cual se enuncia a continuación.

Teorema 2.1.1 (Pólya) *Sea el conjunto $\mathcal{P}_n = \{z \in \mathbb{R}^n | z \neq 0, z_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ y sea una forma $F(z) > 0, \forall z \in \mathcal{P}_n$. Entonces $\exists p \in \mathbb{N}$ suficientemente grande a partir del cual*

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^p F(z) = G(z), \quad \forall z \in \mathcal{P}_n,$$

donde $G(z)$ es una forma cuyos coeficientes son todos estrictamente positivos.

El poder del Teorema de Pólya reside en que si la positividad definida de una forma $F(z)$ no es evidente a priori, después de efectuar el producto $(z_1 + z_2 + \dots + z_n)^p F(z)$, en adelante denominado *Producto de Pólya*, la positividad definida de $G(z)$ se vuelve evidente al únicamente ser evaluada en el conjunto positivo \mathcal{P}_n .

El Teorema de Pólya es una condición necesaria y suficiente para asegurar la positividad definida de una forma $F(z)$. Este teorema se emplea en este trabajo de la siguiente manera: Si los coeficientes de $F(z)$ están indeterminados, se realiza el producto $(z_1 + \dots + z_n)^p F(z)$ probando distintos valores de p hasta que todos los coeficientes de $F(z)$ puedan ser diseñados de manera que todos los coeficientes de $G(z)$ sean estrictamente positivos. Se presenta a continuación un ejemplo para clarificar este proceso.

Ejemplo 2.1.1 *Considere la forma $F(z)$ como en el Teorema 2.1.1*

$$F(z) = z_1^2 - az_1z_2 + z_2^2, \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$

Con $p = 1$,

$$(z_1 + z_2)F(z) = z_1^3 + (1 - a)z_1^2z_2 + (1 - a)z_1z_2^2 + z_2^3.$$

Entonces, de acuerdo al Teorema 2.1.1, es suficiente que $a < 1$ para garantizar la positividad definida de $F(z)$.

Tomando la forma $F(z) = z_1^2 - az_1z_2 + z_2^2$ con $a > 0$ del Ejemplo 2.1.1, es claro que con cualquier $p \in \mathbb{N}, p > 1$ es posible hallar condiciones del coeficiente a tal que la forma resultante $G(z) = (z_1 + z_2)^p F(z)$ tenga únicamente exponentes positivos. Por ejemplo, si se toma ahora $p = 5$, resulta

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^5 F(z) = & z_1^7 + (5 - a)z_1^6z_2 + (11 - 5a)z_1^5z_2^2 + (15 - 10a)z_1^4z_2^3 + \\ & + (15 - 10a)z_1^3z_2^4 + (11 - 5a)z_1^2z_2^5 + (5 - a)z_1z_2^6 + z_2^7. \end{aligned}$$

Con lo cual, para que los coeficientes de $G(z)$ sean positivos, se deben satisfacer las desigualdades

$$5 - a > 0, \quad 11 - 5a > 0, \quad 15 - 10a > 0.$$

Las desigualdades se cumplen ahora con $a < 1.5$. Se observa que conforme se incrementa el exponente p , aumenta el conjunto de valores que puede tomar $a > 0$. Se puede decir que se vuelve cada vez menos restrictiva la condición que se le exige a a . De hecho, si se reescribe la forma $F(z)$ como una forma cuadrática¹

$$F(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}^T \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & 1 \end{bmatrix}}^Q \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

su positividad definida se reduce a determinar si la matriz Q es positiva definida. Esto se puede determinar verificando que los valores propios de Q sean todos positivos. El polinomio característico de Q está dado por

$$\det(s\mathbb{I} - Q) = s^2 - 2s + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) = \left(s + \frac{a}{2}\right) \left(s - \frac{a}{2}\right)$$

y los valores propios dados por sus raíces resultan ser $s_{1,2} = 1 \pm \frac{a}{2}$. Buscando que los valores propios sean positivos, se encuentra que $a < 2$.

En (De Loera y Santos, 1996) se consideran las formas $F_1(z_1, z_2) = z_1^2 - 1.98z_1z_2 + z_2^2$ y $F_2(z_1, z_2) = z_1^2 - 1.999z_1z_2 + z_2^2$, que son formas particulares del mismo tipo que la $F(z)$ del Ejemplo 2.1.1, para las cuales se busca el valor del exponente p para el producto $G(z_1, z_2) = (z_1 + z_2)^p F(z_1, z_2)$ con el que los coeficientes de $G(z_1, z_2)$ sean todos positivos. Según lo reportado en (De Loera y Santos, 1996), los exponentes de Pólya mínimos requeridos son $p = 197$ y $p = 3997$ respectivamente.

De acuerdo a (Hardy *et al.*, 1967), en las formas de tipo $F(z_1, \dots, z_n) = z_1^n + \dots + z_n^n - (n - \epsilon)z_1 \cdots z_n$, como $F_1(z_1, z_2)$ y $F_2(z_1, z_2)$, se puede calcular aproximadamente el exponente de Pólya mínimo requerido con la expresión

$$P(n, \epsilon) = \frac{n^3(n-1)}{2\epsilon}$$

de la que resultan $p = 200$ y $p = 4000$ para $F_1(z_1, z_2)$ y $F_2(z_1, z_2)$ respectivamente.

El análisis hecho a la forma $F(z)$ del Ejemplo 2.1.1 resulta sencillo debido a la simplicidad de la forma en cuestión. No obstante, este caso particular en el que se asignan los valores empleados en (De Loera y Santos, 1996) al coeficiente a , clarifica muy bien la idea de incrementar el exponente de Pólya con objeto de relajar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la forma $F(z)$ para que los coeficientes de $G(z)$ sean positivos.

¹Con la idea de las formas cuadráticas, se presenta en el Capítulo 5 un nuevo método de construcción de funciones de Lyapunov adicional al de (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b).

2.2. Transformación de Formas Generalizadas a Formas

Una forma generalizada $F(x)$ posee exponentes racionales en sus términos y una forma $F(z)$ contiene únicamente exponentes naturales. Además, las formas generalizadas tienen como dominio todo el conjunto $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n\}$, esto es, todos los hiperoctantes de x ; y no solamente el conjunto positivo $\mathcal{C}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x \neq 0, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ correspondiente al hiperoctante positivo de x . Por tales motivos no se puede utilizar del Teorema de Pólya directamente para evaluar la positividad definida de las formas generalizadas. Por lo que hace falta modificar la forma generalizada $F(x)$ de algún modo, para que cumpla lo siguiente:

- Poseer exponentes naturales.
- Restringir su dominio x a un conjunto positivo \mathcal{P}_n , análogo a \mathcal{C}_+ .

Así pues, para verificar la positividad definida de una forma generalizada $F(x)$ como la dada en (2.1), se requiere transformarla en una forma, para poder analizarla mediante el Teorema de Pólya. Para ello, se propone el cambio de variables

$$|x_i| = z_i^{r_i}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

en cada hiperoctante de x , donde n es el orden de $F(x)$ y r es su vector de pesos de homogeneidad. Con esto se obtiene de cada hiperoctante de x , una forma $F_j(z)$, $j = 1, \dots, 2^n$. En este cambio de variables no difeomórfico, el operador $|x|$ transforma el dominio de x , i. e. el conjunto $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n\}$, a un nuevo dominio z dado por el conjunto $\mathcal{P}_n = \{z \in \mathbb{R}^n | z \neq 0, z_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$, el cual es únicamente el hiperoctante positivo de \mathbb{R}^n . Los exponentes r_i inducen a que las formas resultantes $F_j(z)$ sólo tengan exponentes naturales.

Con el cambio de variable (2.2), se obtiene un conjunto de 2^n formas distintas, ya que para cada hiperoctante de x , se traslada la forma generalizada $F(x)$ con dominio en \mathcal{C} , a una forma $F(z)$ correspondiente con dominio en \mathcal{P}_n . De este modo, $\{F_j(z)\}; j = 1, \dots, 2^n$. Si la forma generalizada $F(x)$ es simétrica respecto al origen, se genera entonces un conjunto de formas $\{F_j(z)\}; j = 1, \dots, 2^{n-1}$. Con esta transformación ya es posible emplear el Teorema de Pólya en el dominio z .

Para la forma generalizada $F(x)$ del ejemplo (2.1), si se aplica el cambio de variable $x \rightarrow z$ dado por (2.2), se tiene que $|x_1| = z_1^2$ y $|x_2| = z_1$, con lo cual se obtiene el conjunto $F_j(z)$ de $2^n = 4$ formas

$$\begin{aligned} F_1(z) &= 2z_1^3 - \alpha_1 z_1 z_2^2 + \alpha_2 z_1^2 z_2 + 5z_2^3, & x_1, x_2 > 0 \\ F_2(z) &= 2z_1^3 - \alpha_1 z_1 z_2^2 + \alpha_2 z_1^2 z_2 + 5z_2^3, & x_1, x_2 < 0 \\ F_3(z) &= 2z_1^3 + \alpha_1 z_1 z_2^2 - \alpha_2 z_1^2 z_2 + 5z_2^3, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ F_4(z) &= 2z_1^3 + \alpha_1 z_1 z_2^2 - \alpha_2 z_1^2 z_2 + 5z_2^3, & x_1 < 0, x_2 > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Como la forma generalizada $F(x)$ del ejemplo (2.1) es simétrica, hay entonces $2^{n-1} = 2$ formas distintas en un conjunto de formas $\{F_j(z)\}$; $j = 1, 2$, cuyas positividades definidas desean comprobarse.

Aunque el cambio de variables (2.2) no es difeomórfico, esto no es impedimento para determinar la positividad definida de una forma generalizada $F(x)$, ya que al analizar la positividad definida de las formas resultantes $\{F_j(z)\}$ mediante el Teorema de Pólya; si las formas $\{F_j(z)\}$ resultan positivas definidas, esto implica la positividad de la forma generalizada $F(x)$ sin tener que analizarla en el dominio x .

Ahora bien, se pretende verificar la positividad definida de las formas $\{F_i(z)\}$ mediante el Teorema de Pólya. Tras realizar los productos $G_{p_j}(z) = (z_1 + \dots + z_n)^p F_j(z)$, $j = 1, \dots, 2^n$, se espera que, para ciertos exponentes p_j , todos los coeficientes de cada forma resultante $G_{p_j}(z)$ sean positivos. Esto origina un sistema de desigualdades lineales homogéneas en términos de los coeficientes de las formas originales $F_j(z)$. La construcción de dichos sistemas de desigualdades lineales se explica a continuación.

2.3. Construcción de desigualdades lineales desde el Producto de Pólya

En esta sección se estudiará de manera detallada lo que ocurre con una forma arbitraria inicial $F(z)$ y con la forma $G_p(z)$ tras efectuar el Producto de Pólya $G_p(z) = (z_1 + \dots + z_n)^p F(z)$, y con ello establecer un método de obtención del sistema de desigualdades lineales a resolver en términos de los coeficientes de la forma inicial $F(z)$ evaluada sobre el conjunto $\mathcal{P}_n = \{z \in \mathbb{R}^n | z \neq 0, z_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$.

Para observar con más detalle la estructura de una forma, se presenta ahora la forma $F(z)$ de grado $q = 5$ y de orden $n = 2$

$$F(z) = z_1^5 + 3z_1^4 z_2 - 4z_1^2 z_2^3 + z_2^5, \quad \forall z \in \mathcal{P}_n. \quad (2.4)$$

De (2.4), conviene notar que sus 4 monomios son sólo un subconjunto de todos los posibles que pueden existir cuya suma de exponentes resulte 5. Considerando esto, el número máximo de monomios en una forma $F(z)$ de grado q en n variables está dado por

$$N_n^q = \binom{n+q-1}{q} = \frac{(n+q-1)!}{(q)!(n-1)!} \quad (2.5)$$

que es la permutación de n naturales cuya suma sea q . Así, con (2.5), el número máximo de monomios de $F(z)$ del ejemplo (2.4) es $\frac{(2+5-1)!}{(5)!(2-1)!} = 6$.

Ahora bien, de (2.5) es obvio que en una forma $F(z)$ existen máximo N_n^q colecciones de exponentes naturales q^j

$$q^j = [q_1^j, \dots, q_n^j] \quad , \quad \forall j = 1, \dots, N_n^q$$

tales que sus suma sea q , con lo cual, se tienen máximo N_n^q permutaciones de coeficientes α_j . Así, una forma $F(z)$ de grado q puede escribirse en general como

$$F(z) = \sum_{j=1}^{N_n^q} \alpha_j \prod_{i=1}^n z_i^{q_i^j}. \quad (2.6)$$

Si se considera ahora la forma $G_p(z) : z \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ obtenida tras hacer el Producto de Pólya $G_p(z) = (z_1 + \dots + z_n)^p F(z)$, es notorio que $G_p(z)$ será de grado $q+p$, con lo cual, utilizando (2.5), $G_p(z)$ tiene un número máximo de monomios dado por

$$N_n^{q+p} = \binom{n+q+p-1}{q+p} = \frac{(n+q+p-1)!}{(q+p)!(n-1)!}. \quad (2.7)$$

De manera análoga a lo que ocurre con $F(z)$ en (2.6), $G_p(z), \forall z \in \mathcal{P}_n$ puede expresarse como

$$G_p(z) = \sum_{k=1}^{N_n^{q+p}} a(s^k) \prod_{i=1}^n z_i^{s_i^k}. \quad (2.8)$$

Al igual que en la forma de $F(z)$ dada en (2.6), en (2.8) existen ahora máximo N_n^{q+p} colecciones de exponentes naturales s^k distintas

$$s^k = [s_1^k, \dots, s_n^k] \quad , \quad k = 1, \dots, N_n^{q+p}$$

tales que su suma sea $q+p$. La expresión de los N_n^{q+p} coeficientes de los monomios de $G_p(z)$ denominados $a(s^k)$ descritos en (De Loera y Santos, 1996), de acuerdo la nomenclatura aquí empleada, es

$$a(s^k) = \sum_{\{q^j | q^j \leq s^k\}} \frac{p!}{(s_1^k - q_1^j)! \cdots (s_n^k - q_n^j)!} \alpha_j. \quad (2.9)$$

donde $q^j \leq s^k$ se lee como comparación elemento a elemento entre los vectores q^j y s^k , esto es $q_i^j \leq s_i^k, \forall i = 1, \dots, n$.

Con base en el Teorema de Pólya, si los coeficientes de $G_p(z)$ cumplen que $a(s^k) > 0, \forall k \in \{1, \dots, N_n^{q+p}\}$ entonces se prueba la positividad definida de la forma $F(z)$. Al pretender satisfacer $a(s^k) > 0$, se genera un sistema de desigualdades lineales homogéneas en función de las variables α_j . Se puede reordenar matricialmente los coeficientes $a(s^k)$ como $A\alpha > 0$,

donde $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_{N_n^q}]^T$ y A es una matriz de dimensión $N_n^{q+p} \times N_n^q$ cuya estructura está dada por

$$[A_{k,j}] = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{p!}{(s_1^k - q_1^j)! \dots (s_n^k - q_n^j)!} & ; \quad q^j \leq s^k \\ 0 & ; \quad q^j > s^k \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

El siguiente ejemplo ilustra la construcción de la matriz A asociada al sistema de desigualdades lineales homogéneas $A\alpha > 0$ mediante (2.10), el cual está en función de los coeficientes de una forma a priori $F(z)$ asociada a $G_p(z) = (z_1 + \dots + z_n)^p F(z)$.

2.3.1. Ejemplo de construcción

Ejemplo: Sea la forma homogénea $F(z)$ de grado $q = 3$ de orden $n = 3$ y evaluada sobre el conjunto $\mathcal{P}_n = \{z \in \mathbb{R}^n | z \neq 0, z_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$,

$$F(z) = z_1^3 - 3az_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + bz_3^3 \quad ; \quad 0 < a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

De la expresión (2.5), el número máximo de monomios de $F(z)$ es $N_n^q = \frac{(n+q-1)!}{q!(n-1)!} = 4$. Con ello, la colección de exponentes posibles $q^j = (q_1^j, q_2^j)$, y sus respectivos coeficientes α_j para $j = 1, \dots, N_n^q$ son

$$\begin{aligned} q^1 &= (3, 0) \quad ; \quad \alpha_1 = 1 \\ q^2 &= (2, 1) \quad ; \quad \alpha_2 = -3a \\ q^3 &= (1, 2) \quad ; \quad \alpha_3 = 3 \\ q^4 &= (0, 3) \quad ; \quad \alpha_4 = b \end{aligned} \quad (2.12)$$

Operando con $p = 1$, se desea escribir los coeficientes $a(s^k)$ de $G_1(z) = (z_1 + z_2)F(z)$ como un sistema de desigualdades lineales homogéneas $A\alpha > 0$ en términos de los coeficientes α_j de $F(z)$ dados en (2.12). De (2.7), el número máximo de monomios de $G_1(z)$ es $N_n^{q+p} = \frac{(n+q+p-1)!}{(q+p)!(n-1)!} = 5$. Así, sus permutaciones de exponentes $s^k = (s_1^k, s_2^k)$ para $k = 1, \dots, N_n^{q+p}$ son

$$\begin{aligned} s^1 &= (4, 0) \\ s^2 &= (3, 1) \\ s^3 &= (2, 2) \\ s^4 &= (1, 3) \\ s^5 &= (0, 4) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Dadas las colecciones de exponentes q^j de (2.12) y s^k de (2.13), se requiere cumplir $q^j \leq s^k$ elemento a elemento, es decir, $q_i^j \leq s_i^k, \forall i = 1, 2, \forall k = 1, \dots, 5$. Por tanto

$$\begin{aligned} q^j \leq s^1 &\Rightarrow q^1 \leq s^1 \\ q^j \leq s^2 &\Rightarrow q^1, q^2 \leq s^2 \\ q^j \leq s^3 &\Rightarrow q^2, q^3 \leq s^3 \\ q^j \leq s^4 &\Rightarrow q^3, q^4 \leq s^4 \\ q^j \leq s^5 &\Rightarrow q^4 \leq s^5 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Así, dadas las relaciones $q^j \leq s^k$ satisfechas del lado derecho de (2.14), mediante (2.10) se construye la matriz $A = [A_{k,j}]$, y en consecuencia el sistema de desigualdades lineales homogéneas $A\alpha > 0$ considerando los coeficientes α_j en (2.12), resulta

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3a \\ 3 \\ b \end{bmatrix}}_\alpha > [0]$$

Es posible también factorizar los signos que afectan a las casillas del vector $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]^T$ en forma de una matriz diagonal D que contenga $+1, -1$, de modo que el sistema de desigualdades sea $AD\hat{\alpha} > 0$ con $\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\alpha}_4, \hat{\alpha}_5]^T$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3a \\ 3 \\ b \end{bmatrix}}_{\hat{\alpha}} > [0]$$

Con lo cual, el sistema de desigualdades $AD\hat{\alpha} > 0$ a resolver es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A \cdot D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3a \\ 3 \\ b \end{bmatrix}}_{\hat{\alpha}} > [0] \quad (2.15)$$

Nótese que el producto $AD\hat{\alpha}$ forma un vector columna de N_n^{q+p} elementos, que corresponden precisamente a los coeficientes de $G_1(z)$, que resultan siendo los dados por (2.9)

$$\begin{aligned} a(s^1) &= 1 > 0 \\ a(s^2) &= 1 - 3a > 0 \\ a(s^3) &= 3 - 3a > 0 \\ a(s^4) &= 3 + b > 0 \\ a(s^5) &= b > 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por lo tanto, $G_1(z) = z_1^4 + (1 - 3a)z_1^3z_2 + (3 - 3a)z_1^2z_2^2 + (3 + b)z_1z_2^3 + bz_2^4$ y así se evita la expansión algebraica a mano del Producto de Pólya $G_1(z) = (z_1 + z_2)F(z)$. Así pues, el sistema de desigualdades resultante (2.16) se satisface con $a < 1/3$ y $b > 0$.

2.3.2. Particularidades de la construcción de desigualdades

Aunque la factorización de los signos de los coeficientes $\alpha = [\alpha_j]^T, j = 1, \dots, N_n^q$ de $A\alpha > 0$ expresada como $AD\hat{\alpha} > 0$ no afecta a los coeficientes resultantes $a(s^k)$ de $G_p(z)$, si los coeficientes $\hat{\alpha}$ están restringidos a ser todos positivos, dicha factorización ofrece una manera muy sencilla de comprobar si la p elegida es necesariamente grande como para aspirar a que el sistema de desigualdades $AD\hat{\alpha} > 0$ dado en (2.15) tenga solución.

Tomando el caso (2.15), sin pérdida de generalidad, la condición necesaria que debe cumplir la matriz signada AD se presenta en el siguiente lema.

Lema 2.3.1 (Estructura de A) *Sea la matriz AD constituida por el producto de A dada en (2.10) y de la matriz diagonal $D = \text{diag}(\text{sgn}(\alpha_1), \text{sgn}(\alpha_2), \dots, \text{sgn}(\alpha_{N_n^q}))$, donde $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\alpha_j) = \{+1, -1\}, j = 1, \dots, N_n^q$. Si el vector $\hat{\alpha}$ de $AD\hat{\alpha} > 0$ tiene sólo elementos positivos, una condición necesaria para que $AD\hat{\alpha} > 0$ tenga solución es que todos los vectores fila de AD contengan al menos un elemento positivo.*

En la construcción de la matriz A dada por (2.10), se crean N_n^{q+p} desigualdades según el grado q de la forma $G_p(z)$, su orden n y el exponente de Pólya p utilizado. De la expresión (2.7) que da el número máximo de monomios y colecciones de exponentes de $G_p(z)$,

$$N_n^{q+p} = \frac{(n+q+p-1)!}{(q+p)!(n-1)!}. \quad (2.17)$$

Como p es propensa a cambiar debido a la búsqueda de una p mínima a partir de la cual, los coeficientes de $G_p(z)$ sean todos positivos, i. e. hallar una solución para el sistema $A\alpha > 0$, se ha propuesto una expresión para calcular el número de desigualdades a resolver, i. e. de sus filas, en función de p . La proposición se menciona a continuación.

Proposición 2.3.1 (Número de desigualdades) *El número de desigualdades que conforman al sistema $A\alpha > 0$ está dado respecto a p por el polinomio*

$$O_A(p) = \frac{1}{(n-1)!(p+q)} \left\{ \prod_{i=1}^n (p+q+n-i) \right\}, n, p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Prueba: Se desarrolla y escribe (2.17) como

$$N_n^{q+p} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{(p+1) \dots (p+q) \cdot (p+q+1) \dots (p+q+n-1)}{(p+1) \dots (p+q)}. \quad (2.19)$$

Tomando primero el caso de más de una variable $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Es evidente que el factorial del numerador cuenta con $n-1$ factores adicionales a los del factorial del denominador, por tanto, en el numerador habrá $n-1$ binomios de la forma $(p+q+n-i)$ con el índice

$i = 1, \dots, n-1$. Esos $n-1$ binomios situados a la derecha del numerador son los que prevalecen, ya que el resto se elimina al dividir con el factorial $(p+q)!$

$$O_A(p) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} (p+q+n-i) \right\}, n > 1; n, p, q \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Si se considera ahora el caso $n = 1$, siempre ocurre que $N_n^{q+p} = 1$ porque el productorio que involucra a p en $O_A(p)$ dada por (2.20) se indetermina. Para incluir en dicha función (2.20) el caso $n = 1$, se añade un número más al índice i como $i = 1, \dots, n$ y se agrega en el denominador el binomio $p+q$ para no modificar el resultado de $O_A(p)$ obtenido para los casos $n > 1$, con lo que se obtiene la ecuación dada en (2.18)

$$O_A(p) = \frac{1}{(n-1)!(p+q)} \left\{ \prod_{i=1}^n (p+q+n-i) \right\}, n, p, q \in \mathbb{N}.$$

Se observa un incremento de las filas polinómico dado por (2.18), en el que el término de mayor orden es de p^{n-1} . La Figura 2.1 muestra el comportamiento de la función (2.18) respecto a las variables p, q, n . Nótese que para el caso $n = 2$, el aumento del número de desigualdades es lineal respecto a p .

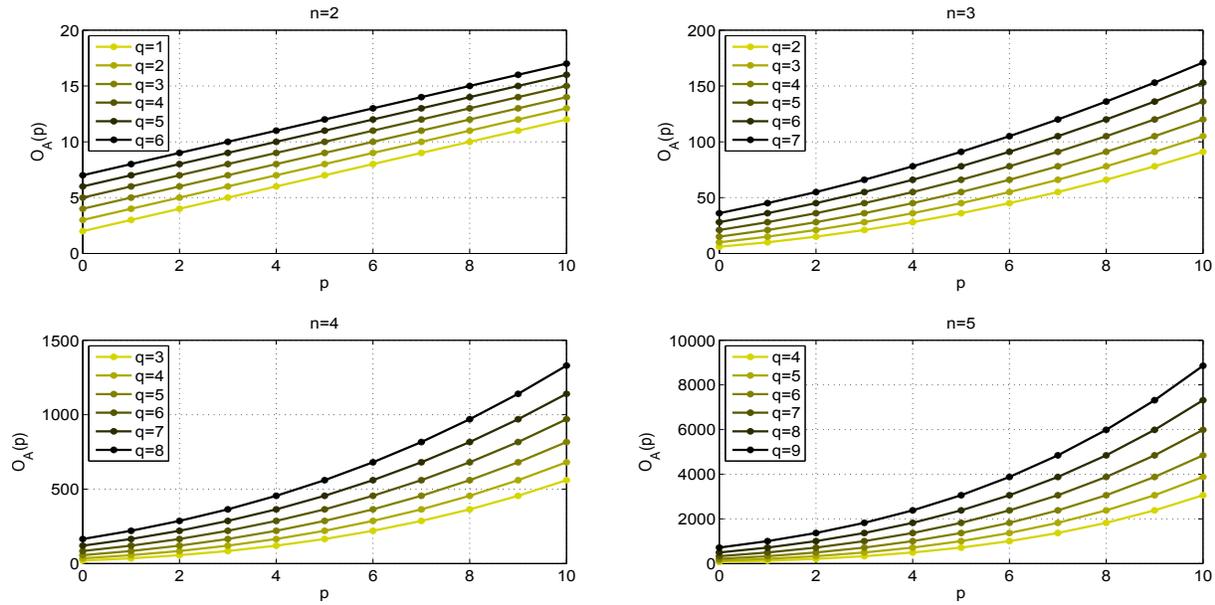


Figura 2.1: Aumento de filas de A

Hasta ahora se ha puesto énfasis en distinguir la matriz A sin signar dada por la expresión (2.10), de la matriz signada dada por el producto AD . Esto se ha hecho con el afán de clarificar el Lema (2.3.1). Por simplicidad de notación, en adelante se considera, a no ser

que se especifique lo contrario, que todas las matrices A a las que se haga mención, están signadas, esto es, A está compuesta ya por el producto AD . Por tanto, A puede contener filas con entradas positivas y negativas.

2.4. Resolución de sistemas de desigualdades lineales

El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales homogéneo está descrito por un conjunto convexo perteneciente a una clase particular muy importante denominados conos poliédricos convexos (véase (Güler, 2010)). A continuación se enuncia la definición de dichos conjuntos.

Definición 2.4.1 (Cono poliédrico convexo) Sea $\{a_i\}_{i=1}^m$ un conjunto de vectores fila que conforman una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para un sistema de desigualdades lineales homogéneas $Ax \geq 0$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Un cono poliédrico convexo está compuesto por

$$C = \{x : \langle a_i, x \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\} = \bigcap_{i=1}^m H_{a_i, 0}^+$$

esto es, que un cono poliédrico convexo es la intersección de un conjunto finito de hemiespacios solución $H_{a_i, 0}^+$ que atraviesan el origen.

Las intersecciones entre los hiperplanos dados por cada igualdad de la forma $\langle a_i, x \rangle = 0$ implicada en la Definición (2.4.1) generan un conjunto finito de aristas (bordes) y también un conjunto finito de facetas (caras) delimitadas por dichas aristas.

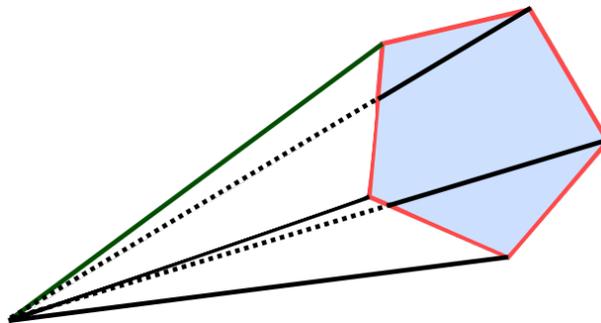


Figura 2.2: Cono poliédrico convexo

En teoría de conjuntos convexos existe un resultado muy importante llamado Teorema de Minkowski-Weyl. Dicho resultado es el teorema fundamental de la teoría de poliedros convexos, el cual da una descripción de un poliedro convexo en términos de sus vértices y aristas.

Dado que un cono poliédrico convexo es una clase particular de poliedros convexos que sólo tiene un vértice en el origen, el Teorema de Minkowski-Weyl permite dar una descripción del conjunto solución para un determinado cono poliédrico convexo unicamente en términos de sus aristas. A continuación se enuncia una particularización del Teorema de Minkowski-Weyl (véase (Güler, 2010)) para conos poliédricos convexos.

Teorema 2.4.1 (Minkowski-Weyl para conos poliédricos convexos) *Un conjunto no vacío $C \in \mathbb{R}^n$ es un cono poliédrico convexo si y sólo si existen vectores $\{b_j\}_{j=1}^h$ y constantes $\mu_j \in \mathbb{R}$ tales que*

$$C = \left\{ \sum_{j=1}^h \mu_j b_j : \mu_j \geq 0 \right\}.$$

Los vectores $\{b_j\}_{j=1}^h$ pueden ordenarse como filas de una matriz $B \in \mathbb{R}^{h \times n}$, dichas filas son vectores colineales a alguna arista o faceta del cono, en adelante rayos. El vector selector $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_h]^T$ con entradas no negativas proporciona todas las combinaciones no negativas de rayos, de forma que relacionando el Teorema (2.4.1) con la Definición (2.4.1) se tiene

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = B^T \mu, \mu \geq 0\},$$

que es una ecuación que expresa el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales homogéneo, que es un cono poliédrico convexo, en términos de las intersecciones de los hemiespacios de los hiperplanos de las desigualdades, o bien en términos de las aristas mediante un conjunto de rayos de dicho cono.

Se dice que un rayo es *extremo* si describe una arista de un cono. El conjunto de los rayos extremos de un cono poliédrico se denomina *esqueleto*. Cuando dos rayos extremos delimitan a una faceta en particular sin que en dicha faceta haya otro rayo, se dice que los dos rayos extremos son *rayos extremos adyacentes* (Zolotykh, 2012). En la Figura 2.2 se observa en color azul un cono poliédrico convexo C seccionado, el cual $C \subset \mathbb{R}^3$. Sus facetas se muestran en blanco y sus rayos extremos en negro.

Un algoritmo para encontrar un conjunto de rayos que describen un cono poliédrico convexo se denomina Método de la Descripción Doble (DDM) (Fukuda y Prodon, 1996), (Zolotykh, 2012) y cuyo teorema principal se enuncia a continuación.

Teorema 2.4.2 (Teorema principal del DDM) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = n$ y $a \in \mathbb{R}^n$. Si U es el esqueleto del cono $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0\}$ y además*

$$U_0 = \{u \in U : \langle a, u \rangle = 0\}, \quad U_+ = \{u \in U : \langle a, u \rangle > 0\}, \quad U_- = \{u \in U : \langle a, u \rangle < 0\},$$

entonces el esqueleto del cono

$$C^* = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq 0, ax \geq 0\}$$

es la union $U_0 \cup U_+ \cup U_{\pm}$ donde

$$U_{\pm} = \{w = \langle a, u \rangle v - \langle a, v \rangle u : u \in U_+, v \in U_-, (u, v) \in E(C)\},$$

y donde $E(C)$ es el conjunto de todos los pares $\{u, v\}$ de rayos extremos adyacentes de C .

Aunque el DDM ofrece una descripción del cono poliédrico solución de un sistema de desigualdades homogéneo en términos un conjunto de rayos, un problema importante es determinar el conjunto mínimo de rayos que lo describan, eso es, obtener únicamente los rayos extremos del cono poliédrico.

Esto se logra mediante una herramienta informática llamada “Skeleton” (Zolotykh, 2012). Al proporcionar una matriz A de un sistema de desigualdades de la forma $Ax \geq 0$ al programa, éste entrega el esqueleto en forma de una matriz B cuyas filas son los rayos extremos del cono poliédrico convexo que representa el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales en cuestión. El programa “Skeleton” se basa en el DDM, aunque con modificaciones realizadas² para únicamente obtener los rayos extremos del cono poliédrico solución.

²Para información detallada sobre modificaciones del DDM, véase (Zolotykh, 2012)

Capítulo 3

Construcción de la función de Lyapunov para el diferenciador

En este capítulo se construye la función de Lyapunov para el diferenciador de Levant de segundo orden partiendo del método propuesto en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b). La principal diferencia en la aplicación de dicho método respecto a los trabajos mencionados, es que ahora se aplica a un sistema de tercer orden y se pretende utilizar no sólo como una herramienta de análisis para sistemas dinámicos homogéneos, sino que también se busca utilizarlo para diseñar parámetros del diferenciador.

3.1. Moldeo de la función candidata

De manera similar a (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), se parte de una función candidata de Lyapunov a partir de una forma generalizada, la cual se propone como

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{m}{r_1}} + \alpha_{12} [x_1]^{\rho_0} [x_2]^{\rho_1} + \alpha_2 |x_2|^{\frac{m}{r_2}} + \alpha_{23} [x_2]^{\rho_2} [x_3]^{\rho_3} + \alpha_3 |x_3|^{\frac{m}{r_3}} \quad (3.1)$$

donde m es el grado de homogeneidad de la función candidata, $r_i, i = 1, 2, 3$ son los pesos de homogeneidad del diferenciador en su forma (1.10) y $\rho_j \geq 1, j = 0, 1, 2, 3$ son exponentes de ajuste. Para asegurar la diferenciabilidad y la homogeneidad de $V(x)$, los exponentes de todos los términos necesitan ajustarse de forma que se satisfagan las siguientes condiciones:

(a) Diferenciabilidad:

- Términos sencillos (una variable): $m > \max(r_i), i = 1, 2, 3$.
- Términos cruzados (varias variables): $\rho_j \geq 1, j = 0, 1, 2, 3$.

(b) Homogeneidad:

- $r_1 \rho_0 + r_2 \rho_1 = r_2 \rho_2 + r_3 \rho_3 = m$.

El ajuste de exponentes ρ_i depende de los términos que tenga $W(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) \cdot \dot{x} = -\dot{V}$, la cual debe ser positiva definida y debe moldearse de manera que posea al menos un término de signo definido en cada variable de estado. Con esto, $W(x)$ resulta

$$\begin{aligned}
W(x) = & \frac{m}{r_1} \alpha_1 k_1 |x_1|^{\frac{m}{r_1} + \frac{1}{3}} + \rho_0 \alpha_{12} k_1 [x_1]^{\rho_0 - \frac{1}{3}} [x_2]^{\rho_1} - \frac{m}{r_1} \alpha_1 [x_1]^{\frac{m}{r_1} - 1} [x_2] + \\
& - \rho_0 \alpha_{12} |x_1|^{\rho_0 - 1} |x_2|^{\rho_1 + 1} + \frac{m}{r_2} \alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{m}{r_2} - 1} + \rho_1 \alpha_{12} k_2 |x_1|^{\rho_0 + \frac{1}{3}} |x_2|^{\rho_1 - 1} + \\
& + \rho_2 \alpha_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} |x_2|^{\rho_2 - 1} [x_3]^{\rho_3} - \frac{m}{r_2} \alpha_2 [x_2]^{\frac{m}{r_2} - 1} [x_3] - \rho_1 \alpha_{12} [x_1]^{\rho_0} |x_2|^{\rho_1 - 1} [x_3] + \\
& - \rho_2 \alpha_{23} |x_2|^{\rho_2 - 1} |x_3|^{\rho_3 + 1} + \frac{m}{r_3} \alpha_3 k_3 [x_1]^0 [x_3]^{\frac{m}{r_3} - 1} + \rho_3 \alpha_{23} k_3 [x_1]^0 [x_2]^{\rho_2} |x_3|^{\rho_3 - 1} + \\
& - \pi(t) \frac{m}{r_3} \alpha_3 [x_3]^{\frac{m}{r_3} - 1} - \pi(t) \rho_3 \alpha_{23} [x_2]^{\rho_2} |x_3|^{\rho_3 - 1}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Nótese que al igual que (3.1), (3.2) es también una forma generalizada. El primer paso es ajustar los exponentes m y ρ_j de (3.2) para obtener 3 términos de una sola variable, que son necesarios para lograr la positividad definida de (3.2). En este caso, el primer término de (3.2) ya está expresado exclusivamente en términos de x_1 . Para los casos de los términos cuarto y décimo, si se les asigna $\rho_0, \rho_2 = 1$, estos términos se vuelven de una sola variable que dependen únicamente de x_2 y x_3 respectivamente.

Cabe señalar que, como se indica en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), no existe todavía un método para determinar cuántos términos cruzados debería tener la función candidata de la que se inicia. Lo único con lo que se cuenta es proponer los términos cruzados adecuados para que, cuando se hace el ajuste de exponentes m y/o ρ_j , se obtengan términos de una sola variable necesarios para la positividad definida de (3.1) y (3.2). Para efectos de reducir la complejidad debida al número de términos que pueden aparecer en la forma generalizada $W(x)$, se han elegido sólo los términos cruzados imprescindibles para (3.1).

El segundo paso es seleccionar los pesos de homogeneidad r_1, r_2 y r_3 . Estos pesos vienen de la definición de homogeneidad para un campo vectorial (Bacciotti y Rosier, 2005). Es importante mencionar que la elección de los pesos de homogeneidad r no es única, existen de hecho una infinidad de pesos de homogeneidad que producen un grado de homogeneidad negativo en el sistema (1.10). La elección de los pesos repercute en el grado de homogeneidad m resultante de la función de Lyapunov candidata (3.1) y en consecuencia, de la negativa de su derivada (3.2).

Recordando que el sistema (1.10) es homogéneo de grado -1 con pesos de homogeneidad $r = [r_1, r_2, r_3] = [3, 2, 1]$, puede verse que el cumplimiento de las condiciones (a) y (b) se logra seleccionando $m = 5$. Por esto y como consecuencia de (b), los exponentes restantes se

fijan como $\rho_1 = 1$ y $\rho_3 = 3$. Con los exponentes ya ajustados, $W(x)$ queda como

$$\begin{aligned} W(x) = & \left(\frac{5}{3}\alpha_1 k_1 + \alpha_{12} k_2 \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - \alpha_{12} |x_2|^2 - \alpha_{23} |x_3|^4 - \left(\frac{5}{3}\alpha_1 - \alpha_{12} k_1 \right) [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 - \alpha_{12} x_1 x_3 + \\ & + \frac{5}{2}\alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \alpha_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 - \frac{5}{2}\alpha_2 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 + 5\alpha_3 k_3 [x_1]^0 [x_3]^4 + \\ & + 3\alpha_{23} k_3 [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - 5\alpha_3 \pi(t) [x_3]^4 - 3\alpha_{23} \pi(t) x_2 |x_3|^2. \end{aligned}$$

De los términos de una sola variable de la función candidata de Lyapunov, se tiene que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ son condiciones necesarias para que $V(x)$ sea positiva definida. Del mismo modo, el segundo y tercer término de $W(x)$ muestran que es necesario que $\alpha_{12}, \alpha_{23} < 0$ para lograr la positividad definida de $W(x)$.

Por convención, se reescribe $W(x)$ con el cambio de variables $\bar{\alpha}_{12} = -\alpha_{12}$, $\bar{\alpha}_{23} = -\alpha_{23}$, por tanto $\bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{23} > 0$ también son condiciones necesarias a satisfacer, por tanto es posible expresar las condiciones necesarias de los coeficientes de (3.1) como $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T > 0$. Así pues, $W(x)$ queda

$$\begin{aligned} W(x) = & \left(\frac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2 \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{5}{3}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1 \right) [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{5}{2}\alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \bar{\alpha}_{12} |x_2|^2 + \\ & + \bar{\alpha}_{12} x_1 x_3 - \frac{5}{2}\alpha_2 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 - 3\bar{\alpha}_{23} (k_3 - \pi(t) [x_1]^0) [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \bar{\alpha}_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \\ & + [\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 (k_3 - \pi(t) [x_1]^0)] |x_3|^4. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por simplicidad, se considera ahora que $\pi(t) = -\sigma^{(3)}(t) = 0$ en (3.3). Esta consideración implica que la segunda derivada de la señal a diferenciar $\ddot{\sigma}(t)$ es lineal, lo cual en un contexto mecánico no es tan restrictivo si se considera como posición la señal $\sigma(t)$. Dicho esto, (3.1) y (3.3) pueden expresarse como

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12} [x_1] [x_2] + \alpha_2 |x_2|^{\frac{5}{2}} - \bar{\alpha}_{23} [x_2] [x_3]^3 + \alpha_3 |x_3|^5, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} W(x) = & \beta_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - \beta_2 [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \beta_3 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |x_2|^2 + \beta_5 x_1 x_3 - \beta_6 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 + \\ & - \beta_7 [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \beta_8 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \beta_9 |x_3|^4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Donde los nuevos coeficientes β de $W(x)$ son

$$\begin{aligned} \beta_1 = \left(\frac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2 \right) \quad , \quad \beta_2 = \left(\frac{5}{3}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1 \right) \quad , \quad \beta_3 = \frac{5}{2}\alpha_2 k_2 \\ \beta_4 = \bar{\alpha}_{12} \quad , \quad \beta_5 = \bar{\alpha}_{12} \quad , \quad \beta_6 = \frac{5}{2}\alpha_2 \\ \beta_7 = 3\bar{\alpha}_{23} k_3 \quad , \quad \beta_8 = \bar{\alpha}_{23} k_2 \quad , \quad \beta_9 = (\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3 k_3 [x_1]^0 [x_3]^0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para que (3.5) sea positiva definida, debe satisfacerse que $\beta_1, \beta_4, \beta_9 > 0$. Como la condición $\beta_4 = \bar{\alpha}_{12} > 0$ es implícita a la condición necesaria $\alpha > 0$ de $V(x)$ mencionada antes, es

necesario cumplir para β_1 y β_9 de (3.5) las siguientes dos condiciones para su positividad

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2 > 0 \\ \beta_9 &= \bar{\alpha}_{23} - 5\alpha_3 k_3 > 0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Ahora se requiere probar la positividad definida de (3.4) y (3.5).

3.2. Positividad de la candidata y negatividad de su derivada

Para determinar la positividad definida de (3.4) y (3.5) empleando el Teorema de Pólya, se utiliza el cambio de variables (2.2) para pasar de formas generalizadas a formas clásicas. Así, los cambios de variable resultan ser: $|x_1| = z_1^3$, $|x_2| = z_2^2$, $|x_3| = z_3$ los cuales están referidos al vector de pesos de homogeneidad $r = [r_1, r_2, r_3]^T = [3, 2, 1]^T$ del sistema (1.10).

Obsérvese que ahora (3.4) y (3.5) quedan expresados como conjuntos de formas $\{V_i(z)\}$, $\{W_j(z)\}$; $i, j = 1, \dots, 2^n$ localizados en el octante positivo de z (que es el único). Con esto, habrá un máximo de 2^n formas distintas asociadas a (3.4), dependiendo de qué octante del espacio de estados $x \in \mathbb{R}^n$ se considere.

En este caso, $V(x)$ dada por (3.4) es simétrica respecto al origen de x , entonces sólo habrá un máximo de 2^{n-1} formas asociadas. Por tanto (3.4) es equivalente a $V_1(z)$ para $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $x_1, x_2, x_3 < 0$; a $V_2(z)$ para $x_1 < 0, x_2, x_3 > 0$ y $x_1 > 0, x_2, x_3 < 0$; a $V_3(z)$ para $x_1, x_2 > 0, x_3 < 0$ y $x_1, x_2 < 0, x_3 > 0$; a $V_4(z)$ para $x_1, x_3 > 0, x_2 < 0$ y $x_1, x_3 < 0, x_2 > 0$, donde

$$\begin{aligned}V_1(z) &= \alpha_1 z_1^5 - \bar{\alpha}_{12} z_1^3 z_2^2 + \alpha_2 z_2^5 - \bar{\alpha}_{23} z_2^2 z_3^3 + \alpha_3 z_3^5, \\ V_2(z) &= \alpha_1 z_1^5 + \bar{\alpha}_{12} z_1^3 z_2^2 + \alpha_2 z_2^5 - \bar{\alpha}_{23} z_2^2 z_3^3 + \alpha_3 z_3^5, \\ V_3(z) &= \alpha_1 z_1^5 - \bar{\alpha}_{12} z_1^3 z_2^2 + \alpha_2 z_2^5 + \bar{\alpha}_{23} z_2^2 z_3^3 + \alpha_3 z_3^5, \\ V_4(z) &= \alpha_1 z_1^5 + \bar{\alpha}_{12} z_1^3 z_2^2 + \alpha_2 z_2^5 + \bar{\alpha}_{23} z_2^2 z_3^3 + \alpha_3 z_3^5.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Para la positividad definida de $V(x)$ (3.4) y de $W(x)$ (3.5) establecidas en la sección anterior, es necesario que $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T > 0$. Por tanto, la positividad definida de las formas del conjunto (3.8) puede determinarse mediante el Teorema de Pólya. Note que aplicar dicho teorema a $V_4(z)$ resulta innecesario, pues sólo se tendría que efectuar el producto de Pólya con $p = 0$, lo que resultaría en la misma forma $V_4(z)$.

La forma generalizada $W(x)$ dada en (3.5) también es simétrica respecto al origen, por lo que hay también posee 2^{n-1} formas $W_j(z)$ asociadas. Con esto, (3.5) es equivalente a $W_1(z)$ para $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $x_1, x_2, x_3 < 0$; a $W_2(z)$ para $x_1 < 0, x_2, x_3 > 0$ y $x_1 > 0, x_2, x_3 < 0$; a $W_3(z)$ para $x_1, x_3 > 0, x_2 < 0$ y $x_1, x_3 < 0, x_2 > 0$; a $W_4(z)$ para $x_1, x_2 > 0, x_3 < 0$ y

$x_1, x_2 < 0, x_3 > 0$, donde

$$\begin{aligned}
W_1(z) &= \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^2 z_2^2 + \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 + \beta_5 z_1^3 z_3 - \beta_6 z_2^3 z_3 - \beta_7 z_2^2 z_3^2 - \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4, \\
W_2(z) &= \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^2 z_2^2 - \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 - \beta_5 z_1^3 z_3 - \beta_6 z_2^3 z_3 + \beta_7 z_2^2 z_3^2 + \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4, \\
W_3(z) &= \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^2 z_2^2 - \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 + \beta_5 z_1^3 z_3 + \beta_6 z_2^3 z_3 + \beta_7 z_2^2 z_3^2 - \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4, \\
W_4(z) &= \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^2 z_2^2 + \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 - \beta_5 z_1^3 z_3 + \beta_6 z_2^3 z_3 - \beta_7 z_2^2 z_3^2 + \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Conviene destacar que, si se realiza el Producto de Pólya de cada forma no trivial de los conjuntos (3.8) y (3.9) con $(z_1 + z_2 + z_3)^p$, los coeficientes de los monomios de las nuevas formas resultantes son siempre lineales respecto a α y a β respectivamente.

Si se conocen todos los coeficientes de una forma $F(z)$, sólo hace falta efectuar el producto de Pólya con p suficientemente grande para que todos los coeficientes de la forma resultante $G(z)$ sean positivos. Si no se conocen varios o ningún coeficiente de una forma a priori, que es el caso de las formas (3.8) y (3.9), el Producto de Pólya conlleva a resolver un sistema de desigualdades lineales en términos de los coeficientes de las formas $F(z)$, y en nuestro caso, de α y de β .

Aplicar el Teorema de Pólya a los conjuntos (3.8) y (3.9), para de ahí obtener los sistemas de desigualdades lineales, es prácticamente imposible de hacer a mano. Por ello, se recurre a la expresión (2.10) para construir los sistemas de desigualdades lineales resultantes de aplicar el Teorema de Pólya a cada una de las formas de los conjuntos (3.8) y (3.9).

Ahora bien, al construir los sistemas de desigualdades asociados a las formas no triviales del conjunto (3.8), se tiene que una condición necesaria expuesta en el Capítulo 3 para que $V(x)$ y $W(x)$ sean positivas definidas, es que $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T > 0$. Con lo cual es posible emplear el Lema (2.3.1) para construir las respectivas matrices A_{v1} , A_{v2} y A_{v3} . Así, se ha encontrado que para las formas (3.8) se necesitan valores de p mínimos de $p_{v1min} = 8$, $p_{v2min} = 6$ y $p_{v3min} = 6$ para que los sistemas de desigualdades

$$A_{v1}\alpha > [0], \quad A_{v2}\alpha > [0], \quad A_{v3}\alpha > [0] \quad (3.10)$$

puedan tener solución. De igual manera, para los sistemas de desigualdades asociados a las formas del conjunto (3.9), se observa que, por la estructura los coeficientes $\beta(\alpha, k)$ dados en (5.5) y por el hecho de que $k_1, k_2, k_3 > 0$ dada su estructura en (1.7), todos los coeficientes β se restringen a ser positivos al satisfacer las condiciones necesarias dadas en (3.7).

Por tanto, empleando el Lema (2.3.1), se ha encontrado que para las formas del conjunto (3.9) se requieren valores de p mínimos de $p_{w1min} = 4$, $p_{w2min} = 3$, $p_{w3min} = 3$ y $p_{w4min} = 4$ para aspirar a que los sistemas de desigualdades

$$A_{w1}\beta(\alpha, k) > [0], \quad A_{w2}\beta(\alpha, k) > [0], \quad A_{w3}\beta(\alpha, k) > [0], \quad A_{w4}\beta(\alpha, k) > [0] \quad (3.11)$$

puedan tener solución.

Hasta aquí es evidente que el problema de hallar una función de Lyapunov se ha reducido a encontrar una solución para los sistemas de desigualdades lineales homogéneos en términos de los coeficientes α de la función candidata y de los parámetros k del diferenciador. La siguiente sección versa sobre los detalles acerca de los esquemas propuestos disponibles y elegidos para la resolución de estos sistemas de desigualdades lineales (3.10) y (3.11) obtenidos, correspondientes a la función candidata de Lyapunov y la negativa de su derivada respectivamente.

3.3. Esquemas de solución de desigualdades lineales

Aunque teóricamente sea sencillo, satisfacer los conjuntos de sistemas de desigualdades (3.10) y (3.11) de manera simultánea no es una tarea trivial en la práctica. A continuación se exponen dos esquemas para abordar el problema de resolver ambos conjuntos de sistemas de desigualdades lineales (3.10) y (3.11) resultantes de los conjuntos de formas (3.8) y (3.9).

3.3.1. Esquema de análisis

Uno de los esquemas es aprovechar la linealidad de ambos sistemas (3.10) y (3.11) respecto a α , con lo cual, dichos conjuntos de sistemas de desigualdades pueden reescribirse como

$$A_{v1}\alpha > [0], \quad A_{v2}\alpha > [0], \quad A_{v3}\alpha > [0] \quad (3.12)$$

$$A_{w1}M_1(k)\alpha > [0], \quad A_{w2}M_2(k)\alpha > [0], \quad A_{w3}M_3(k)\alpha > [0], \quad A_{w4}M_4(k)\alpha > [0] \quad (3.13)$$

donde $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T$. Los coeficientes $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9]^T$ de (3.11) se han reescrito como el producto $\beta = M_j(k)\alpha$, $j = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}k_1 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5k_3[x_1]^0[x_3]^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha, \quad (3.14)$$

Note que en general hay también $M_j(\alpha)$ matrices asociadas a las formas $W_j(z)$, $j = 1, \dots, 2^{n-1}$ escritas en (3.9). Así, siendo ya lineales en α los conjuntos de sistemas de desigualdades ho-

mogéneos (3.12) y (3.13), pueden conglomerarse en un solo sistema de desigualdades como

$$\begin{bmatrix} A_{v1} \\ A_{v2} \\ A_{v3} \\ A_{w1}M_1(k) \\ A_{w2}M_2(k) \\ A_{w3}M_3(k) \\ A_{w4}M_4(k) \end{bmatrix} \alpha > [0]$$

Este último sistema conglomerado puede resolverse para los coeficientes α si en principio se conocen los valores de los parámetros k . Si se hace esto, el metodo propuesto para construir la función de Lyapunov en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), sirve como una herramienta de análisis para el sistema. Esto es lo que ya se ha hecho para los casos dados en dichos trabajos.

A pesar de que la construcción del sistema conglomerado es bastante sencilla por ser lineal y homogéneo, puede originar que el sistema de desigualdades total a resolver sea demasiado grande. Además, esta forma de proceder está restringida a conocer los parámetros k , lo cual imposibilita, al menos con este esquema, el diseño de nuevos parámetros para el diferenciador. Por lo que este esquema se ha denominado *Esquema de análisis*.

3.3.2. Esquema de diseño

Para tener mayor flexibilidad al tratar de resolver los conjuntos de sistemas, otra alternativa es utilizar la afinidad del sistema (3.11) respecto a k . Con lo cual, una forma más explícita de escribir los conjuntos de sistemas de desigualdades (3.10) y (3.11) es

$$A_{v1}\alpha > [0], \quad A_{v2}\alpha > [0], \quad A_{v3}\alpha > [0] \quad (3.15)$$

$$A_{w1}M_1(\alpha^*)\tilde{k} > [0], \quad A_{w2}M_2(\alpha^*)\tilde{k} > [0], \quad A_{w3}M_3(\alpha^*)\tilde{k} > [0], \quad A_{w4}M_4(\alpha^*)\tilde{k} > [0] \quad (3.16)$$

donde $\tilde{k} = [k_1, k_2, k_3, 1]^T$. Los coeficientes $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9]^T$ dados en (3.11) se han expresado como el producto $\beta = M_j(\alpha)\tilde{k}$, $j = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}\alpha_1 & -\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 & \frac{5}{3}\alpha_1 \\ 0 & \frac{5}{2}\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}\alpha_2 \\ 0 & 0 & 3\bar{\alpha}_{23} & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5\alpha_3[x_1]^0[x_3]^0 & \bar{\alpha}_{23} \end{bmatrix} \tilde{k}, \quad (3.17)$$

Nótese que en general hay también $M_j(\alpha)$ matrices asociadas a las formas $W_j(z), j = 1, \dots, 2^{n-1}$ escritas en (3.9).

La idea ahora es resolver el primer conjunto de sistemas de desigualdades lineales homogéneas (3.10) hallando valores para α y así conformar un vector α^* de coeficientes conocidos. Con esto, se resuelve posteriormente el segundo conjunto de sistemas de desigualdades (3.16) relacionado al conjunto de formas (3.9) encontrando valores para los parámetros k originales dados en (3.11). De este modo es posible diseñar los parámetros k , por lo que a este esquema se le conoce como *Esquema de diseño*.

El primer conjunto de sistemas de desigualdades lineales homogéneas (3.15) puede reescribirse adjuntando la matrices A_{v1}, A_{v2} y A_{v3} que lo conforman, por tanto se expresa (3.15) como

$$\begin{bmatrix} A_{v1} \\ A_{v2} \\ A_{v3} \end{bmatrix} \alpha > [0] \quad (3.18)$$

Las matrices A_{v1}, A_{v2} y A_{v3} se han construido con exponentes de Pólya $p_{v1} = p_{v2} = p_{v3} = 15$ respectivamente y considerando el Lema (2.3.1). Una solución para (3.18), compuesta por la combinación positiva de 4 rayos extremos de su esqueleto provisto por “Skeleton” para α , es

$$\alpha_1 = 102.01, \bar{\alpha}_{12} = 13.9955, \alpha_2 = 3.9831, \bar{\alpha}_{23} = 2.0066, \alpha_3 = 13.3625 \quad (3.19)$$

Con lo cual, se tienen ya valores de coeficientes conocidos para conformar α^* . Aunque el segundo conjunto de sistemas de desigualdades (3.16) no es lineal sino afín en k , por convención, la última entrada de \tilde{k} en (3.17) se cambia por una nueva variable k_4 para homogeneizar los sistemas de desigualdades lineales (3.16). Así, de (3.17) las entradas del vector \tilde{k} se escriben como $[k_1, k_2, k_3, k_4]^T$ y el segundo sistema conglomerado de desigualdades resulta

$$\begin{bmatrix} A_{w1}M_1(\alpha^*) \\ A_{w2}M_2(\alpha^*) \\ A_{w3}M_3(\alpha^*) \\ A_{w4}M_4(\alpha^*) \end{bmatrix} \tilde{k} > [0]. \quad (3.20)$$

Las matrices A_{w1}, A_{w2}, A_{w3} y A_{w4} se han construido con exponentes de Pólya $p_{w1} = p_{w2} = p_{w3} = p_{w4} = 88$ respectivamente. Una solución para (3.20), compuesta por la sumatoria de todos los rayos extremos de su esqueleto calculado con “Skeleton”, en términos de $\tilde{k} = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T$ y fijando $k_4 = 1$, es

$$k_1 = 9.5608, k_2 = 6.8681, k_3 = 0.0219. \quad (3.21)$$

3.3.3. Observaciones

Las combinaciones de rayos realizadas para obtener los coeficientes nominales α , dados en particular en (3.19), de la función de Lyapunov calculados en esta tesis, se hizo de la siguiente

manera: Primero se encontraba un esqueleto B_v con cierto número de rayos extremos que describían el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales $A_v\alpha > 0$ asociado a $V(x)$. Posteriormente, utilizando el esquema de diseño, se tomaba un solo rayo extremo de B_v para fijar los coeficientes α^* y se intentaba resolver el sistema de desigualdades lineales $A_wM(\alpha^*)k > 0$ asociado a $W(x)$; así para cada rayo extremo. Al final, tras haber hecho esto probando distintas combinaciones de exponentes p para $V(x)$ y $W(x)$, se logró hallar el par (α, k) dado por (3.19) y (3.21).

Utilizando los exponentes p_v de la Sección 3.3.2, se obtuvieron 563 rayos extremos que conformaban las filas de B_v . El rayo 525 fue el que permitió hallar solución al sistema $A_wM(\alpha^*)k > 0$ construido con los exponentes p_w . Al sólo elegir este rayo extremo, la solución del sistema de desigualdades lineales no vive dentro del cono poliédrico realmente; para introducir más la solución en el interior del cono poliédrico solución de $A_v\alpha > 0$, se eligió la combinación de 4 rayos extremos referidos por su índice como filas de B_v .

<i>fila\coef.</i>	α_1	$\bar{\alpha}_{12}$	α_2	$\bar{\alpha}_{23}$	α_3
523	1	0.0370	0.0030	0.0025	0.0222
524	1	0.0463	0.1287	0.3086	1.1111
525	1	0.1389	0.0356	0.0168	0.1212
546	1	2.3333	29.2	1.2	10.8

La combinación de rayos que resulta en los coeficientes nominales α dados en (3.19) es: $\alpha = B_v(523, :) + B_v(524, :) + 100B_v(525, :) + 0.01B_v(546, :)$. Esta combinación fue elegida a prueba y error, de modo que se redujese la sobreestimación del parámetro k_3 respecto a la cota nominal $\Delta_0 \geq |\pi(t)|$ de la perturbación $\pi(t)$. El gran peso asignado al rayo 525 en la combinación de rayos propuesta se utiliza para no alejarse de la solución provista solamente por el rayo 525, de modo que el sistema $A_wM(\alpha^*)k > 0$ siga siendo resoluble, y al mismo tiempo, que la combinación de rayos dada como solución para $A\alpha > 0$ pueda meterse más al cono poliédrico y no sólo quede en sus orillas.

Con la intención de utilizar exponentes p bajos, se debería elegir inteligentemente los rayos extremos que describen el cono poliédrico de los coeficientes de la función de Lyapunov, de modo que se asegure el encontrar solución al sistema de desigualdades lineal en los parámetros del diferenciador, de una manera menos engorrosa que probar todos los rayos extremos de manera exhaustiva como se ha hecho aquí. Asimismo, se podrían proponer metodologías que involucren la aplicación de los esquemas de análisis y diseño de una manera recursiva para refinar la selección de rayos.

Igualmente existen otros programas informáticos para la resolución de conos poliédricos convexos además de “Skeleton” (<http://www.uic.unn.ru/~zny/skeleton/>). Un de ellos es el denominado “cdd” (http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/cdd_home/cdd.html), desarrollado por Komei Fukuda, que también se basa en el DDM y se evalúa en (Zolotykh, 2012). Existe también otro llamado “lrs” (<http://cgm.cs.mcgill.ca/~avis/C/lrs.html>),

desarrollado por David Avis con base en (Avis, 1998) y documentado en (Avis, 2000). Todos ellos podrían emplearse para resolver el problema de describir el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales, que vive en un cono poliédrico convexo.

Ya con los valores de los coeficientes (3.19) y parámetros (3.21) determinados se ha asegurado la positividad definida de la función candidata de Lyapunov $V(x)$ dada en (3.4) y de la negativa de su derivada $W(x)$ dada en (3.5).

Para ejemplificar de manera más detallada este esquema de diseño, se recomienda ver el Apéndice B.

3.4. Gráficas de la Función de Lyapunov nominal

Es conveniente graficar la función de Lyapunov (3.4) y la negativa de su derivada (3.5). Como ambas son funciones cuyo mapeo se extiende $V, W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, no es posible graficar $V(x_1, x_2, x_3)$ ni $W(x_1, x_2, x_3)$ debido a que se requieren 4 dimensiones. Para solucionar esto, se recurre a un cambio de coordenadas cartesianas a esféricas, esto es, transformar $x = [x_1, x_2, x_3]^T \rightarrow [r, \theta, \phi]^T$,

$$x_1 = r \sin(\phi) \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\phi) \sin(\theta), \quad x_3 = r \cos(\phi).$$

Tras aplicar el cambio de coordenadas a (3.4) y (3.5), se evalúan dichas funciones en la superficie de una esfera de radio $r = 1.5$ centrada en $x = 0$. El ángulo azimutal θ varía en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el ángulo cenital ϕ varía en el intervalo $0 \leq \phi \leq \pi$. Ambos intervalos se evalúan cada 0.5 grados, con lo que se genera un mallado de 720×360 valores a graficar tanto para (3.4) como para (3.5). Las Figuras 3.1 y 3.2 muestran la función de Lyapunov $V(x)$ y la negativa de su derivada $W(x)$ dadas en (3.4) y (3.5), graficadas en la esfera antes descrita.

Los valores mínimos para 3.1 y 3.2 son $\min(V(x)) = 8.9594$ y $\min(W(x)) = 2.7251$, por tanto, son ambas positivas definidas. Como las funciones $V(x)$ y $W(x)$ dadas en (3.4) y (3.5) son homogéneas de grado 5 y 4 respectivamente y ya se ha asegurado que son positivas definidas en una bola de radio $r = 1.5$, la positividad se mantiene para cualquier bola de cualquier radio arbitrario.

Esto es fácil probarlo tomando la definición de homogeneidad de funciones (1.3.1) y escribiendo $\kappa^r = [\kappa^{r_1}, \kappa^{r_2}, \kappa^{r_3}]$, donde $0 < \kappa \in \mathbb{R}$ y $r = [r_1, r_2, r_3] = [3, 2, 1]$. Con lo cual, $V(\kappa^r x) = \kappa^5 V(x)$ y también $W(\kappa^r x) = \kappa^4 W(x)$. Esto implica que si $V(x), W(x) > 0$, entonces $\kappa^5 V(x), \kappa^4 W(x) > 0$, por tanto la positividad definida de $V(x)$ y $W(x)$ es global.

Cabe resaltar que, los resultados de las ganancias α y los parámetros k obtenidos en este capítulo, son válidos para el caso $\pi(t) = 0$ y con ello se ha probado el Teorema (1.6.1).

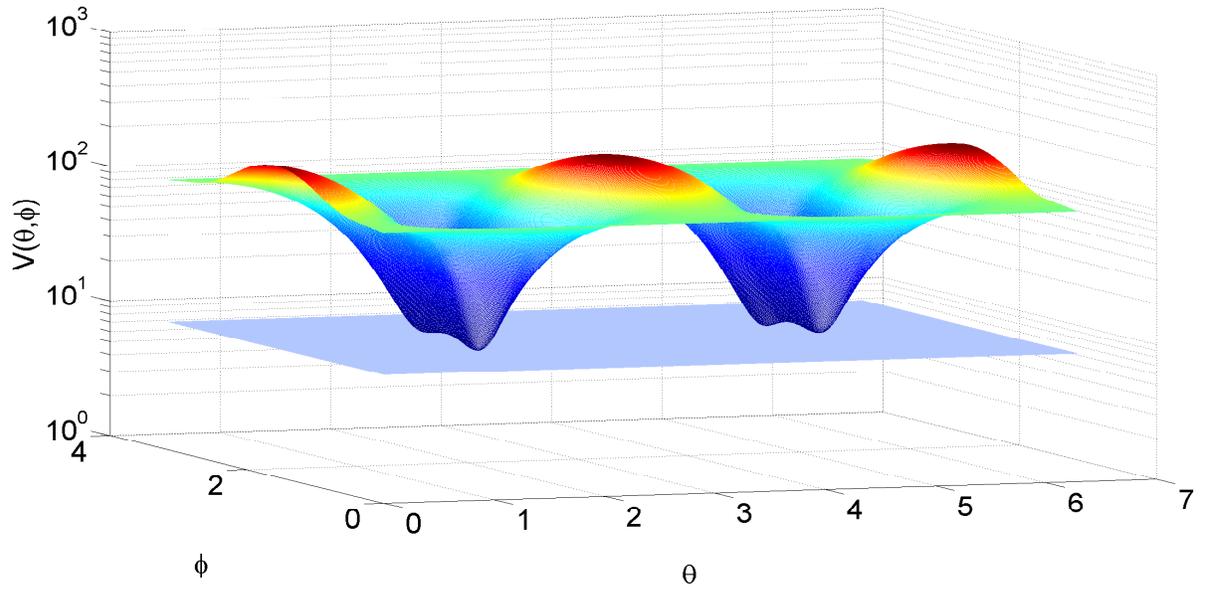


Figura 3.1: $V(x)$ nominal

El siguiente capítulo presenta la prueba constructiva del Lema 1.6.1 y del Teorema 1.6.2, los cuales tratan el caso perturbado $\pi(t) \neq 0$ y determinan una cota del tiempo de convergencia de las trayectorias del diferenciador al origen.

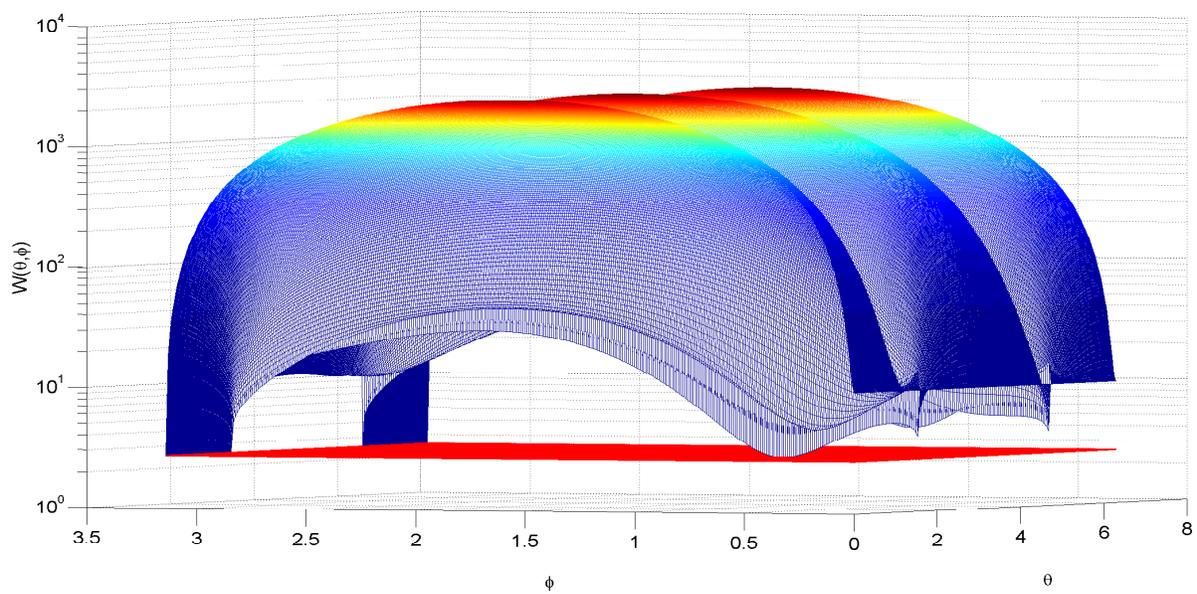


Figura 3.2: $W(x)$ nominal

Capítulo 4

Propiedades de robustez y tiempo de convergencia del diferenciador.

Considerando ahora el caso $\pi(t) \neq 0$ en las funciones $V(x)$ y $W(x)$ dadas en (3.4) y (3.3), se pretende explorar cuan robustas pueden ser dichas funciones con los coeficientes α y parámetros k obtenidos, tras haber resuelto los sistemas de desigualdades para el caso no perturbado (nominal) en el capítulo anterior.

Para recordar, las formas generalizadas $V(x)$ y $W(x)$ dadas en (3.4) y (3.3) vuelven a escribirse

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12} [x_1] [x_2] + \alpha_2 |x_2|^{\frac{5}{2}} - \bar{\alpha}_{23} [x_2] [x_3]^3 + \alpha_3 |x_3|^5. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} W(x) = & \left(\frac{5}{3} \alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2 \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{5}{3} \alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1 \right) [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{5}{2} \alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \bar{\alpha}_{12} |x_2|^2 + \\ & + \bar{\alpha}_{12} x_1 x_3 - \frac{5}{2} \alpha_2 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 - 3 \bar{\alpha}_{23} (k_3 - \pi(t) [x_1]^0) [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \bar{\alpha}_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \\ & + [\bar{\alpha}_{23} + 5 \alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 (k_3 - \pi(t) [x_1]^0)] |x_3|^4. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dado que la perturbación $\pi(t)$ no afecta a la función (4.1), únicamente es preciso buscar una cota nominal $\Delta_0 > 0$ para $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ tal que (4.2) sea negativa definida. Esto se ha resuelto de dos maneras distintas:

- De modo numérico.
- Mediante el Teorema de Pólya.

Ambos procedimientos se exponen en las siguientes secciones.

4.1. Determinación de cota de perturbación de modo numérico

Considerar la perturbación $\pi(t) \neq 0$, $t \geq 0$ conlleva a que el diferenciador (1.10) no sea una ecuación diferencial, sino una inclusión. Con ello, (4.2) es una función directamente dependiente, no sólo de las variables de estado x , sino también del tiempo t . Por lo tanto es preciso entonces tomar en cuenta los valores extremos que podría tomar $\pi(t)$, $\forall t \geq 0$. Debido a los cambios de signo de los factores del tipo $[\cdot]$ según el hiperoctante en que esté evaluado (4.2), no es trivial decir que un valor mínimo negativo de $\pi(t)$ afecta menos que un máximo positivo, ni viceversa. Es por ello que se considera el acotamiento absoluto $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ en (4.2), donde Δ_0 es una cota nominal que se pretende sea lo mayor posible, ya sea que corresponda al valor absoluto del máximo positivo, o bien al valor absoluto del mínimo negativo que tome $\pi(t)$, $\forall t \geq 0$. Con esto, $W(x)$ puede reescribirse, considerando los factores $(k_3 \pm \Delta_0)$ para englobar el caso menos positivo de (4.2), como

$$\begin{aligned}
 W(x) = & \left(\frac{5}{3} \alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2 \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{5}{3} \alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1 \right) [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{5}{2} \alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \bar{\alpha}_{12} |x_2|^2 + \\
 & + \bar{\alpha}_{12} x_1 x_3 - \frac{5}{2} \alpha_2 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 - 3 \bar{\alpha}_{23} (k_3 \pm \Delta_0) [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \bar{\alpha}_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \\
 & + (\bar{\alpha}_{23} + 5 \alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 (k_3 \pm \Delta_0)) |x_3|^4.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nótese que sólo hay dos términos de (4.3) afectados por el factor $(k_3 \pm \Delta_0)$, que son aquellos donde actúa $\pi(t)$. Observando el último término de (4.3), se observa que una condición necesaria para la positividad definida de $W(x)$ es

$$\bar{\alpha}_{23} - 5 \alpha_3 (k_3 + \Delta_0) > 0. \tag{4.4}$$

De (4.4), la cota Δ_0 está necesariamente restringida a satisfacer

$$\Delta_0 < \frac{\bar{\alpha}_{23}}{5 \alpha_3} - k_3. \tag{4.5}$$

Con los valores ya conocidos que conforman del par (α, k) dados en (3.19) y (3.21), se tiene de acuerdo a (4.5) que $\Delta_0 < 0.00813$. Así pues, se restringe la cota Δ_0 a valores en el intervalo

$$0 < \Delta_0 \leq 0.0081 \tag{4.6}$$

Para comenzar a buscar Δ_0 , se parte probando la cota superior de (4.6). Así, tomando $\Delta_0 = 0.0081$ se evalúa $W(x)$ en la superficie de la misma esfera de radio $r = 1.5$ centrada en $x = 0$ aplicando el mismo cambio de coordenadas cartesianas a esféricas utilizado en el capítulo anterior

$$x_1 = r \sin(\phi) \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\phi) \sin(\theta), \quad x_3 = r \cos(\phi).$$

El ángulo acimutal se varía en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el ángulo cenital se hace variar $0 \leq \phi \leq \pi$. Con ambos ángulos se evalúa (4.3) cada 0.5 grados en ambos intervalos, para

los dos casos $(k_3 \pm \Delta_0)$, esto es para $(k_3 + 0.0081)$ y $(k_3 - 0.0081)$, obteniendo un mallado de 720×360 valores a graficar para ambos casos. Al verificar los valores mínimos de los mallados resultantes, ambos valores son positivos con valores $\min(W(x, k_3 + \Delta_0)) = 0.0113$ y $\min(W(x, k_3 - \Delta_0)) = 2.8966$ respectivamente. Con esto se ha descubierto que el caso menos positivo para (4.3) es cuando sus términos perturbados contienen el factor $(k_2 + \Delta_0)$. La gráfica de este caso se presenta en la Fig. 4.1

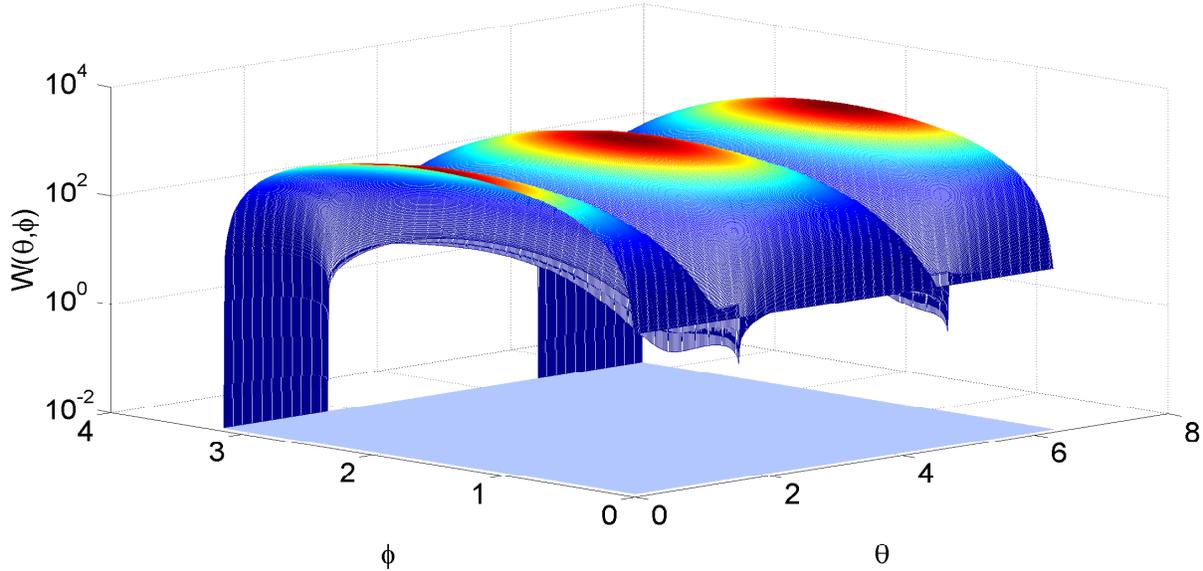


Figura 4.1: $W(x)$ perturbada

Esta forma de hallar la cota Δ_0 pese a que apela al uso de la homogeneidad es un tanto limitada y débil, pues depende de la calidad del mallado de la función $W(x)$ sobre cierta superficie esférica. La siguiente sección muestra un proceso para hallar la cota Δ_0 mediante el Teorema 2.1.1 y también se justifica la validez de la cota Δ_0 encontrada de forma numérica.

4.2. Determinación de cota de perturbación mediante Teorema de Pólya

La positividad de (4.3) puede determinarse mediante el Teorema de Pólya, al igual que en el caso nominal donde $\pi(t) = 0$. No se pretende realizar todo el proceso descrito en el capítulo anterior ahora considerando la cota Δ_0 para encontrar su valor y los de los coeficientes α y parámetros k de nuevo. Eso equivaldría a calcular una función de Lyapunov nueva para cada perturbación $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ con cotas distintas cada vez, lo cual es inviable. La idea es aprovechar los valores de los coeficientes y parámetros (α^*, k^*) ya determinados en el caso nominal, y con ellos calcular Δ_0 mediante un proceso similar al descrito en el Capítulo 3. Así pues, se reescribe (4.3) como

$$W(x) = \beta_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - \beta_2 [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \beta_3 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |x_2|^2 + \beta_5 x_1 x_3 - \beta_6 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 + \\ - \beta_7 [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \beta_8 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \beta_9 |x_3|^4, \quad (4.7)$$

donde los nuevos coeficientes β de $W(x)$ son

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \left(\frac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2\right) & , & \quad \beta_2 = \left(\frac{5}{3}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1\right) & , & \quad \beta_3 = \frac{5}{2}\alpha_2 k_2 \\ \beta_4 &= \bar{\alpha}_{12} & , & \quad \beta_5 = \bar{\alpha}_{12} & , & \quad \beta_6 = \frac{5}{2}\alpha_2 \\ \beta_7 &= 3\bar{\alpha}_{23}(k_3 \pm \Delta_0) & , & \quad \beta_8 = \bar{\alpha}_{23} k_2 & , & \quad \beta_9 = (\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3(k_3 \pm \Delta_0)[x_1]^0 [x_3]^0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Obsérvese que únicamente los coeficientes β_7 y β_9 son afectados por la perturbación. De la misma manera que en la Sección 3.2, ahora (4.7) se transforma a un conjunto de formas como con el mismo cambio de variables (2.2)

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^2 z_2^2 + \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 + \beta_5 z_1^3 z_3 - \beta_6 z_2^3 z_3 - \beta_7 z_2^2 z_3^2 - \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4 \\ W_2(z) &= \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^2 z_2^2 - \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 - \beta_5 z_1^3 z_3 - \beta_6 z_2^3 z_3 + \beta_7 z_2^2 z_3^2 + \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4 \\ W_3(z) &= \beta_1 z_1^4 + \beta_2 z_1^2 z_2^2 - \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 + \beta_5 z_1^3 z_3 + \beta_6 z_2^3 z_3 + \beta_7 z_2^2 z_3^2 - \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4 \\ W_4(z) &= \beta_1 z_1^4 - \beta_2 z_1^2 z_2^2 + \beta_3 z_1 z_2^3 + \beta_4 z_2^4 - \beta_5 z_1^3 z_3 + \beta_6 z_2^3 z_3 - \beta_7 z_2^2 z_3^2 + \beta_8 z_1 z_3^2 + \beta_9 z_3^4, \end{aligned} \quad (4.9)$$

El Teorema 2.1.1 enuncia que a partir de cierto valor para el exponente $p \in \mathbb{N}$, los coeficientes resultantes de la forma $G(z)$ serán todos positivos. Eso implica que se pueden construir matrices $A_j, j = 1, 2, 3, 4$ asociadas al conjunto de formas (3.9) con exponentes de Pólya mayores que los utilizados para determinar la positividad de las formas (3.9) en el caso nominal, y en consecuencia las desigualdades (3.20) deberán satisfacerse también.

Así, para el caso perturbado, los coeficientes $\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9]^T$ de (4.7), pueden reescribirse de como $\beta = M_j(\alpha^*)[\tilde{k}, \Delta_0]^T$ con las matrices $M_j(\alpha^*), j = \{1, 2, 3, 4\}$ como

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}\alpha_1 & -\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 & \frac{5}{3}\alpha_1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\bar{\alpha}_{23} & 0 & 3\bar{\alpha}_{23} \\ 0 & \bar{\alpha}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5\alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 & \bar{\alpha}_{23} & 5\alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}^* \\ \Delta_0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

con $\tilde{k}^* = [k^*, 1]^T$ y $k^* = [k_1, k_2, k_3]^T$. Así, se añade la cota Δ_0 , donde se considera sólo el caso cuando los términos perturbados de (3.3) se encuentran multiplicados por el factor $(k_3 + \Delta_0)$,

pues se ha comprobado que es cuando (4.3) es menos positiva en la prueba gráfica. Tomando (4.10), el sistema (3.20) es ahora

$$\begin{bmatrix} A_{w1}M_1(\alpha^*) \\ A_{w2}M_2(\alpha^*) \\ A_{w3}M_3(\alpha^*) \\ A_{w4}M_4(\alpha^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}^* \\ \Delta_0 \end{bmatrix} > [0]. \quad (4.11)$$

La única variable a determinar del sistema (4.11) es la cota nominal Δ_0 , puesto que se conoce el par (α^*, k^*) que asegura la positividad definida de (3.9) para el caso no perturbado. La única restricción ahora es $\Delta_0 > 0$. Las matrices $A_j, j = 1, 2, 3, 4$ se reconstruyen con exponentes de Pólya mayores a 88, que fueron los usados para calcular el par nominal (α^*, k^*) .

La Figura 4.2 muestra valores para Δ_0 tras resolver el sistema (4.11) mediante “Skeleton”. En particular, dadas las limitaciones del programa implementado para construir dichas ma-

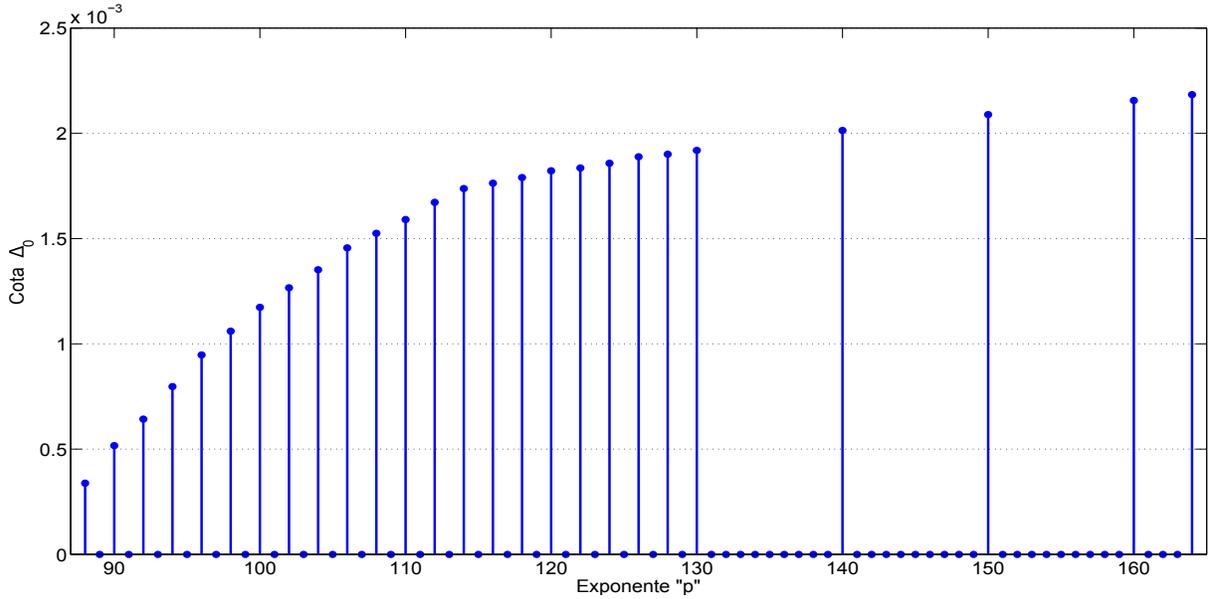


Figura 4.2: Cotas Δ_0 para distintos p

trices, se usan $p_{w1} = p_{w2} = p_{w3} = p_{w4} = 164$, que son las máximas operables por el programa codificado al considerar el orden $n = 3$ y el grado de homogeneidad $q = 4$ de las formas (4.9). Con esto, se encuentra que $\Delta_0 = 0.00218$. Los puntos que toman valor nulo en la Figura 4.2 son exponentes de Pólya no utilizados para el cómputo de la cota Δ_0 .

Retomando lo expuesto en la Sección 2.1, se puede seguir aumentando el exponente p para que vaya incrementando gradualmente el valor de la cota Δ_0 hallada tras resolver (4.11). Esto con el afán de que converja gradualmente al valor hallado numéricamente con

el mallado de la Fig. 4.1. No obstante, dadas las limitaciones del programa ya mencionadas, esto se enuncia como un problema futuro en la Sección 6.2.

4.3. Reajuste de ganancias

Ahora, se aplica el difeomorfismo

$$y = \Lambda x \quad ; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

con $0 < L \in \mathbb{R}$ al sistema (1.10) con objeto de robustecerlo contra perturbaciones $\pi(t)$ acotadas como $|\pi(t)| \leq \Delta$, de modo que $\Delta \geq \Delta_0$. Este difeomorfismo se emplea también en (Levant, 2003) para obtener el escalamiento de ganancias del diferenciador. Con esto, la versión escalada de (1.10) es

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -L^{1/3}k_1|y_1|^{2/3} + y_2, \\ \dot{y}_2 &= -L^{2/3}k_2|y_1|^{1/3} + y_3, \\ \dot{y}_3 &= -Lk_3|y_1|^0 + L\pi(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Con lo cual, los escalamientos del Teorema 1.6.2 se obtienen como $\bar{k}_1 = L^{1/3}k_1$, $\bar{k}_2 = L^{2/3}k_2$, $\bar{k}_3 = Lk_3$; donde $L = \Delta/\Delta_0$. La diferencia fundamental respecto a los escalamientos hechos en (Levant, 2003) es que el autor asigna $L = \Delta$, esto es, considera $\Delta_0 = 1$.

La validez del difeomorfismo es fácil de probar considerando lo siguiente: Sabiendo que $W(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$ con el par (α^*, k^*) ya calculado, entonces

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} < 0. \quad (4.14)$$

De manera análoga, tras aplicar el difeomorfismo (4.12), se espera que

$$\dot{V}(y) = \underbrace{\frac{\partial V(y)}{\partial y}}_a \cdot \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_b < 0. \quad (4.15)$$

La primer término del producto (4.14) se expresa ahora

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{\partial V(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4.16)$$

Dado (4.12), el último factor del lado derecho de (4.15) cambia como

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{\partial V(y)}{\partial y} \cdot \Lambda \quad (4.17)$$

De esta última expresión se despeja $\frac{\partial V(y)}{\partial y}$ como

$$\frac{\partial V(y)}{\partial y} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot \Lambda^{-1} \quad (4.18)$$

Y también por el difeomorfismo (4.12), se tiene que

$$\frac{dy(t)}{dt} = \Lambda \frac{dx(t)}{dt} \quad (4.19)$$

Las ecuaciones (4.18) y (4.20) representan las partes **a** y **b** de la ecuación (4.15), que si se reescribe se tiene

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \Lambda^{-1} \Lambda \frac{dx(t)}{dt} \quad (4.20)$$

Con lo cual, $\dot{V}(y) = \dot{V}(x)$ y con ello la convergencia al origen en tiempo finito permanece inalterada ante el difeomorfismo. Asimismo, al aplicar dicho difeomorfismo a la función de Lyapunov (3.4), se obtienen los coeficientes escalados $\bar{\alpha} = [\alpha_{1s}, \bar{\alpha}_{12s}, \alpha_{2s}, \bar{\alpha}_{23s}, \alpha_{3s}]^T$ enunciados en el Teorema 1.6.2.

4.4. Estimación del tiempo de convergencia

Para estimar la cota del tiempo de convergencia de las trayectorias del diferenciador, debe resolverse la desigualdad diferencial

$$\dot{V} \leq -\gamma V^\delta(x), \quad (4.21)$$

donde $0 < \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y $\delta < 1$ para convergencia en tiempo finito. La cota superior del tiempo de convergencia está dada por la resolución, mediante el Lema de Comparación (Khalil, 2002, p.102), de (4.21) como

$$T(x_0) = \frac{V^{1-\delta}(x_0)}{\gamma(1-\delta)}.$$

Donde $x_0 = x(t_0)$ y las constantes γ y δ deben determinarse. Como $W(x) = -\dot{V}$, la desigualdad se expresa $W(x) \geq \gamma V^\delta(x)$. Es fácil ver que $\delta = 4/5$ porque $V^{4/5}(x)$ y $W(x)$ deben ser equivalentes (en el sentido que ambas deben ser homogéneas y poseer grado de homogeneidad 4). La cuestión ahora es calcular la constante γ . Para ello, se establece la función $F(x) = W(x)/V^{4/5}(x)$ y se pretende encontrar su mínimo como cota superior de γ .

Una característica importante de $F(x)$ es su homogeneidad de grado $m = 0$. Esto se ve al aplicar la definición (1.3.1) a $F(x)$: $F(\kappa^r x) = W(\kappa^r x)/V^{4/5}(\kappa^r x) = \kappa^4 W(x)/(\kappa^5 V(x))^{4/5} = \kappa^0 W(x)/V^{4/5}(x)$. Como $F(x)$ es homogénea de grado 0, entonces sus puntos críticos permanecen inalterados para cualquier escalamiento de su argumento. Esto puede probarse con

lo siguiente: Por homogeneidad, $F(\kappa^r x) = \kappa^m F(x)$. Los puntos críticos son $dF(\kappa^r x)/dx = \kappa^m dF(x)/dx = 0$. Como $F(x)$ es homogénea de grado $m = 0$, entonces $dF(\kappa^r x)/dx = dF(x)/dx = 0$. Esto también es verdad considerando el difeomorfismo $y = Lx$ aplicado a $F(x)$.

La constante γ se ha calculado encontrando numéricamente el mínimo valor del mallado $F(x)$ sobre la misma esfera de radio 1.5 con el mismo cambio de variables usado antes para $V(x)$ y $W(x)$. El mallado de $F(x)$ sobre la bola se muestra en la Figura 4.3.

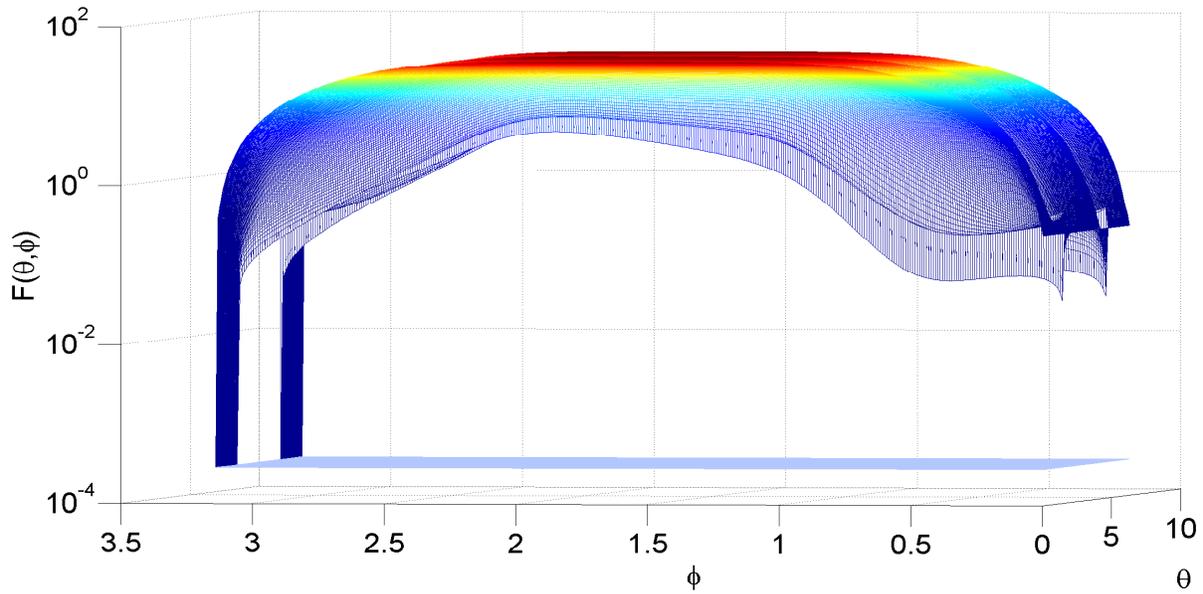


Figura 4.3: $F(x)$ con valores mínimos

Se ha encontrado que $\gamma \leq 2.8 \times 10^{-4}$. Con todo esto, se obtiene el tiempo de convergencia enunciado en el Teorema 1.6.2. Se podría hallar el mínimo de $F(x)$ analíticamente o utilizando algún método numérico pero eso se comenta en la discusión final.

4.5. Simulaciones

Tómese por ejemplo la señal a diferenciar $\sigma(t) = \text{sen}(2t)$. Sus derivadas primera, segunda y tercera son $\dot{\sigma}(t) = 2\text{cos}(2t)$, $\ddot{\sigma}(t) = -4\text{sen}(2t)$, y $\sigma^{(3)}(t) = -8\text{cos}(2t)$ respectivamente. Con lo cual, se considera para (1.10) como perturbación exógena la señal $\pi(t) = -\sigma^{(3)}(t) = 8\text{cos}(2t)$, por tanto $\Delta = 8$.

Utilizando la cota $\Delta_0 = 0.0081$ hallada de manera gráfica y de acuerdo al Teorema 1.6.2, el conjunto de parámetros escalados que logran estabilización en tiempo finito de (1.10) son $\bar{k}_1 = 95.2129$, $\bar{k}_2 = 681.1455$, $\bar{k}_3 = 21.6296$. Las simulaciones para este caso se presentan en

la Figura 4.4 con condiciones iniciales $x_1, x_2, x_3 = 5$.

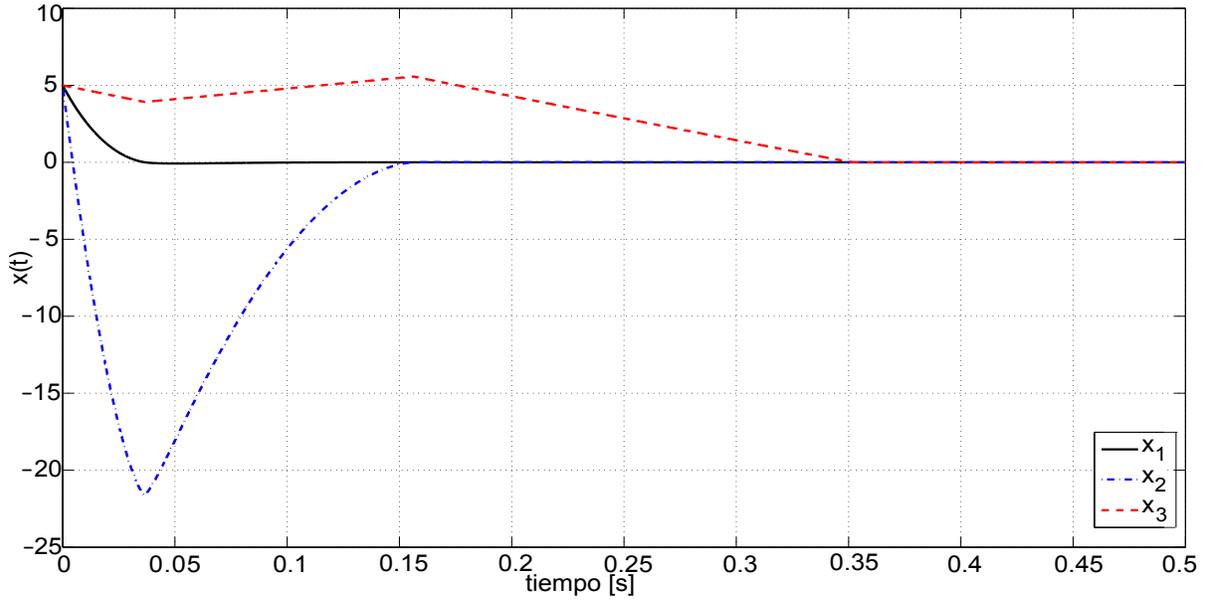


Figura 4.4: Error de diferenciación con ganancias obtenidas

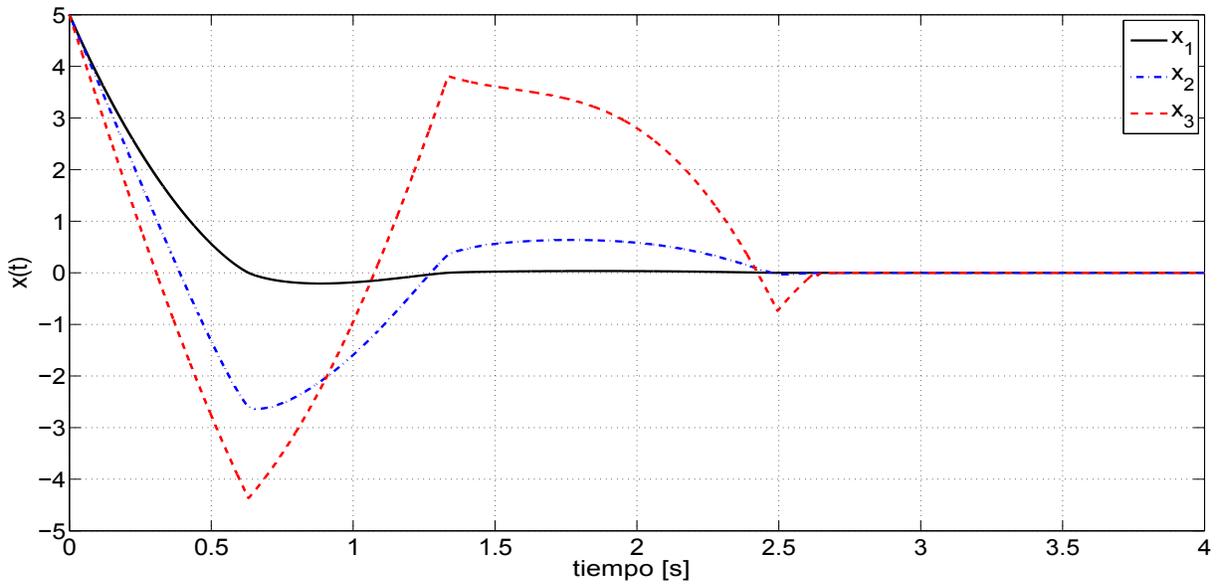


Figura 4.5: Errores de diferenciación con ganancias de Levant

Los parámetros k de (1.8) y (1.10) pueden reescribirse en términos de los coeficientes $\lambda_0 = 1.1$, $\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = 3$ propuestos en (Levant, 2003) y (Levant, 2005), como: $k_1 = \lambda_2$, $k_2 = \lambda_1 \lambda_2^{1/2}$, $k_3 = \lambda_0$. Usando estos parámetros prescritos para las mismas condiciones

iniciales y escalándolos considerando $L = \Delta$, tal como en (Levant, 2003) y (Levant, 2005), se han hecho simulaciones y se muestran en la Figura 4.5. Ambas simulaciones fueron hechas utilizando el método numérico Runge-Kuta (ode4) del resolvidor de Simulink con periodo fijo de integración $T_s = 2\mu s$. En la Figura 4.6 se muestran las estimaciones s_1, s_2 , y s_3 comparadas con las señales $\sigma(t), \dot{\sigma}(t)$, y $\ddot{\sigma}(t)$ respectivamente, cuyas diferencias son los errores de diferenciación de la Figura 4.4.

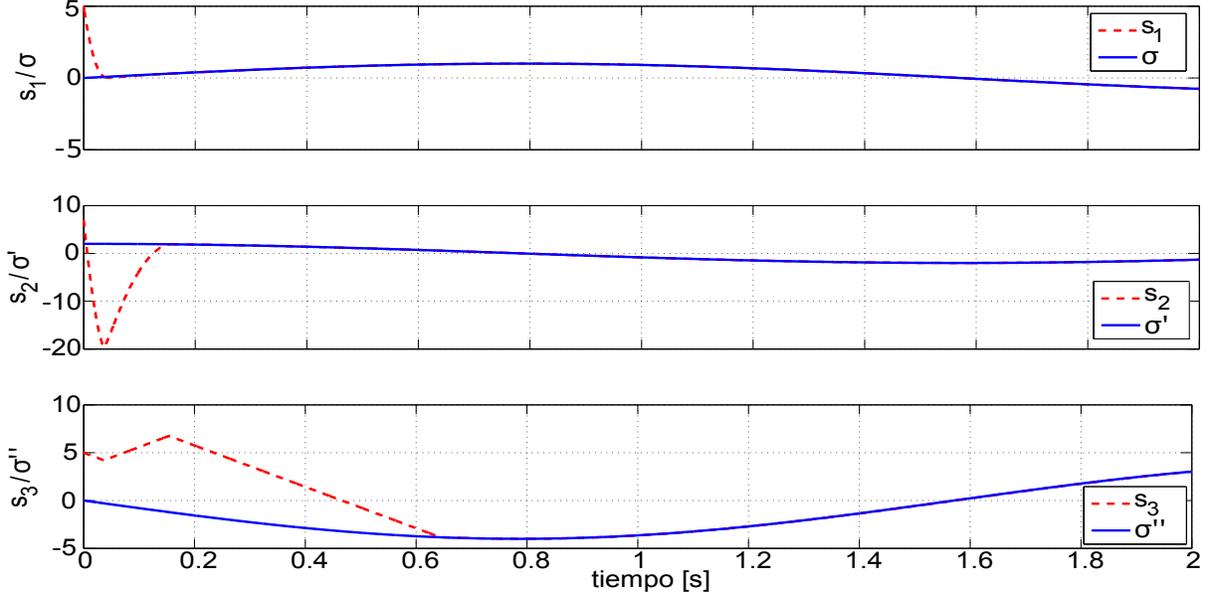


Figura 4.6: Señales estimadas y reales

Un acercamiento de la simulación hecha con las ganancias encontradas con el método propuesto (Fig. 4.4) cuando el error converge a cero se presenta en la Fig. 4.7. En la Figura 4.8 se realiza el mismo acercamiento para una simulación con $T_s = 20\mu s$. Así, en las Figuras 4.7 y 4.8 se muestran las dos simulaciones con los dos periodos de integración $T_s = 2\mu s$ y $T_s = 20\mu s$ respectivamente. De dichas figuras puede observarse que la precisión del diferenciador con las ganancias obtenidas, coincide con la dependencia del periodo de integración T_s , dado por el Teorema 7 reportado en (Levant, 2003). Dicho teorema se enuncia a continuación adaptándolo a la notación aquí empleada para el sistema (1.1)

Teorema 4.5.1 [Teorema 7 (Levant, 2003)] *Sea $\tau > 0$ el periodo de integración constante en ausencia de ruido. Entonces la siguiente desigualdad se satisface en tiempo finito para las constantes positivas μ_i , que depende exclusivamente de los parámetros del diferenciador*

$$|s_{i+1} - \sigma^{(i)}(t)| \leq \mu_i \tau^{n-i+1}; \quad i = 0, \dots, n.$$

Las señales $\sigma(t), \dot{\sigma}(t)$ y $\ddot{\sigma}(t)$ tienen los estimados s_1, s_2 y s_3 respectivamente y se toma $n = 2$.

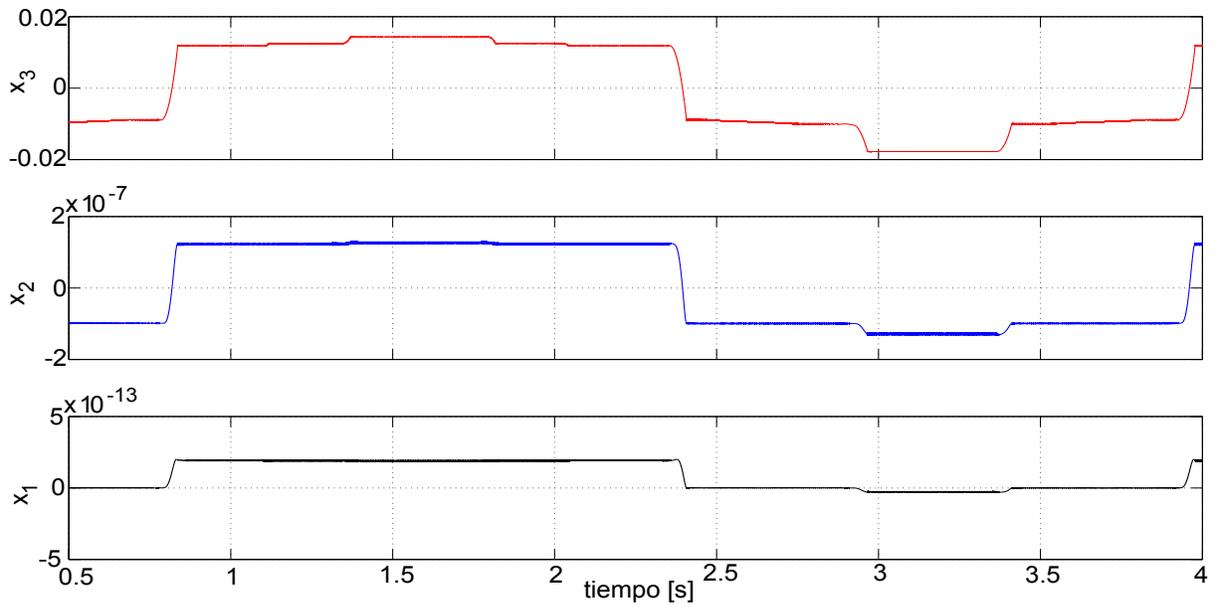


Figura 4.7: Errores tras convergencia con $T_s = 2\mu s$

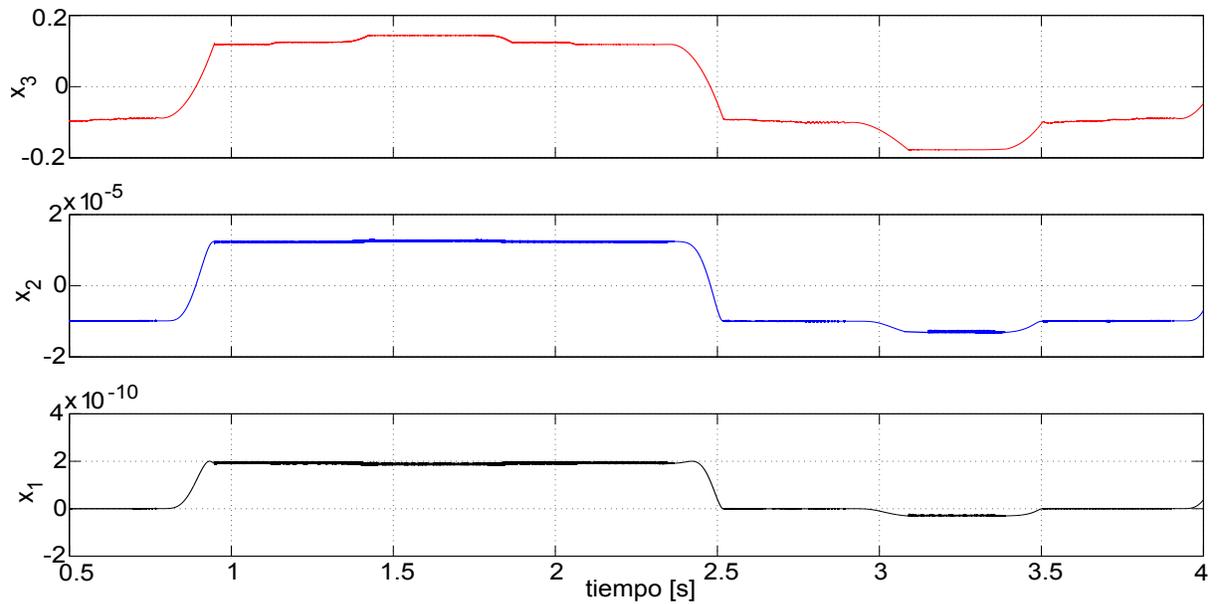


Figura 4.8: Errores tras convergencia con $T_s = 20\mu s$

Otra manera de visualizar la función de Lyapunov es utilizando los datos de la simulación graficados en la Figura 4.4. Se ha graficado el comportamiento de la función de Lyapunov proyectada en cada variable del estado x . En las Figuras 4.11, 4.10 y 4.9 se muestra la función de Lyapunov proyectada sobre las variables x_1 , x_2 y x_3 respectivamente. Esto ha sido posible

debido a que se conocen todos los valores de cada variable de estado a los largo del tiempo de simulación. En las Figuras 4.11, 4.10 y 4.9 se comprueba que, como el sistema converge al origen en tiempo finito, la función de Lyapunov converge también al origen en tiempo finito en las tres proyecciones sobre las variables x_1 , x_2 y x_3 .

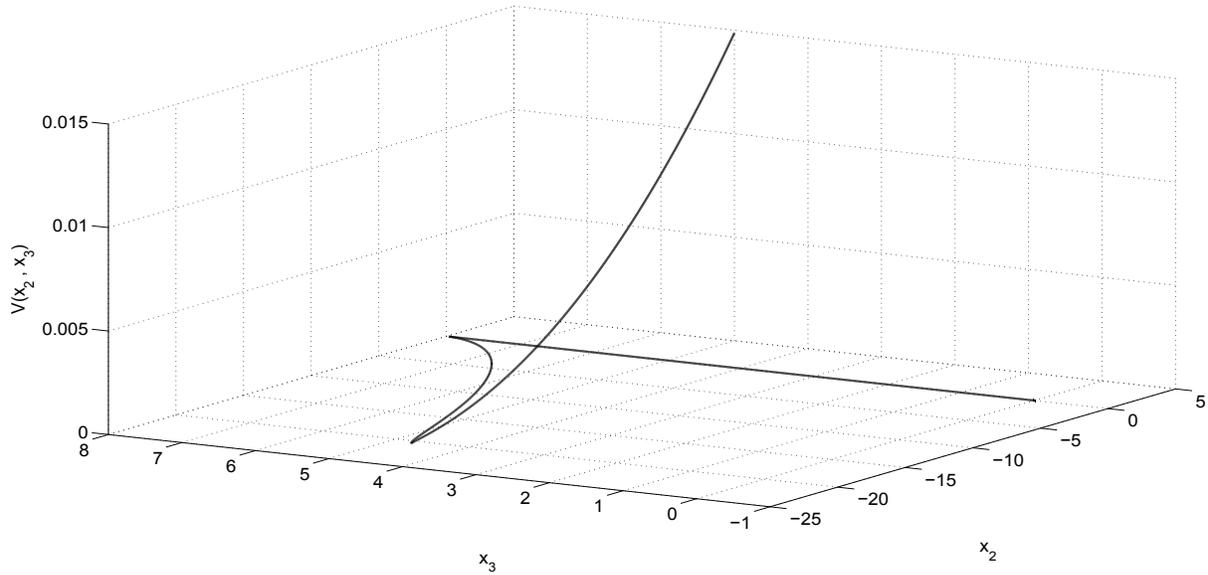


Figura 4.9: $V(x)$ sobre plano x_2x_3

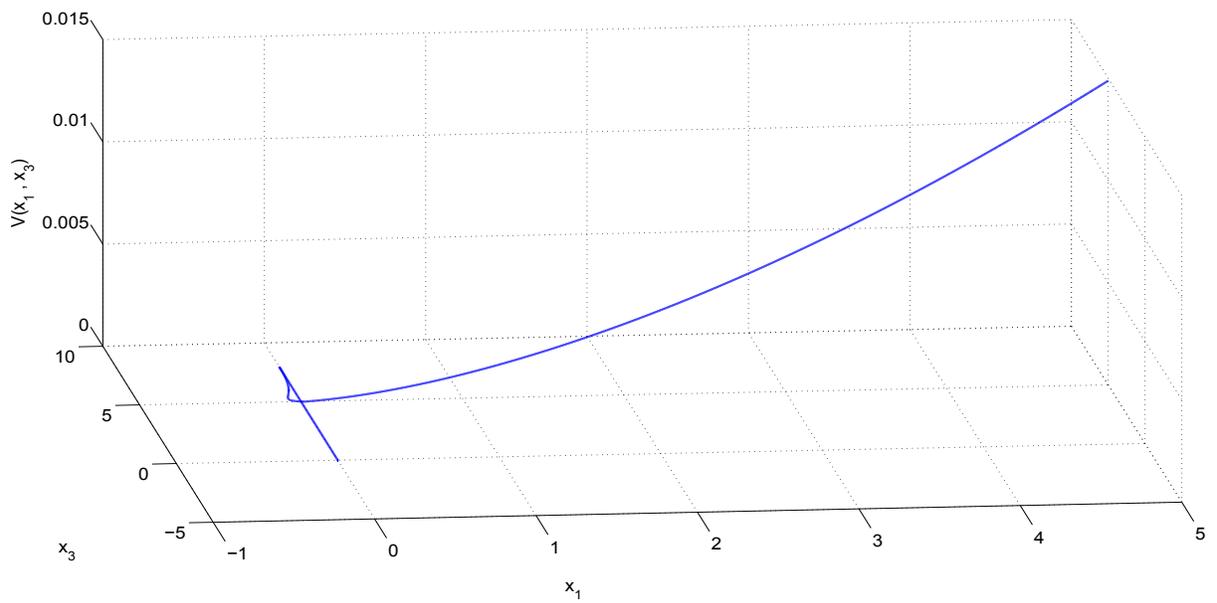


Figura 4.10: $V(x)$ sobre plano x_1x_3

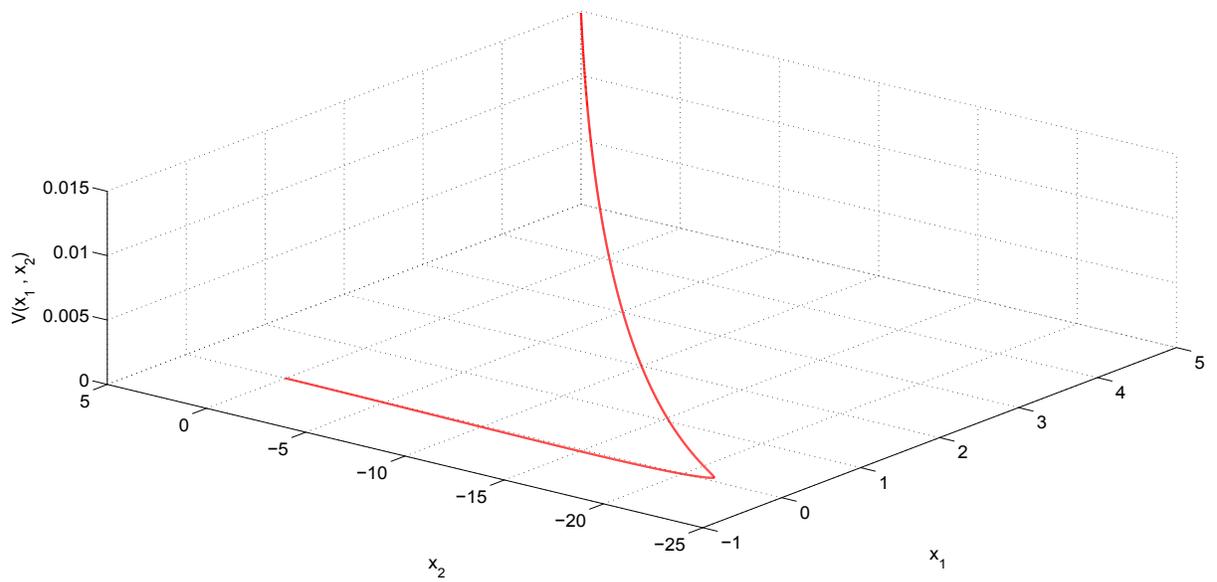


Figura 4.11: $V(x)$ sobre plano x_1x_2

Capítulo 5

Addendum: Función de Lyapunov suave por descomposición en SOS

Este capítulo presenta una manera alternativa de diseñar funciones de Lyapunov diferenciables basadas en formas generalizadas. El moldeo de la función de Lyapunov candidata se realiza de la misma manera que en la Sección 3.1. No obstante, la prueba de su positividad y la negatividad de su derivada se basa en la descomposición en Suma de Cuadrados (SOS por su acrónimo en inglés) de formas derivadas de la candidata propuesta y su derivada a lo largo de las trayectorias del diferenciador.

5.1. Antecedentes

Se dice que una forma (polinomio homogéneo) $F(z), z \in \mathbb{R}^n$ posee una descomposición en SOS si es posible descomponerla, como una suma de cuadrados de formas finitas f_i $F(z) = \sum_i f_i^2(z)$. Una condición suficiente (mas no necesaria) para demostrar la positividad semidefinida de una forma $F(z)$ es poder descomponerla como una SOS de formas. Si una forma $F(z)$ puede escribirse como una SOS de formas finitas f_i de manera que $F(z) = \sum_i f_i^2(z)$, entonces $F(z)$ es positiva semidefinida (no negativa).

La representación en SOS como manera de probar la no negatividad de polinomios homogéneos (formas) ha sido de mucho interés desde hace varios años. No obstante, en 1888 David Hilbert demostró en (Hilbert, 1888) la existencia de formas no negativas que no podían descomponerse como SOS, y aunque no fue capaz de dar un ejemplo de dichas formas, no fue sino hasta 1967 que Theodore S. Motzkin encontró una forma no negativa que no tenía descomposición en SOS (véase (Reznick, 1995)).

Tras haber demostrado la existencia de formas no negativas no representables mediante SOS de polinomios homogéneos, Hilbert planteó en el Congreso Internacional de Matemáticos de Paris de 1900, dentro de una lista de 23 problemas matemáticos a ser resueltos durante el siglo XX (Hilbert, 1900), el problema número 17. Este problema cuestionaba, de manera

más general, si era posible descomponer todas las formas no negativas como un cociente de formas expresadas en SOS, es decir, que fueran expresables como SOS de funciones racionales. El primero en resolver este problema fue Emil Artin en (Artin, 1927), donde respondía afirmativamente al problema 17 basado en una prueba no constructiva. Posteriormente, en 1940 W. Habicht propuso en (Habicht, 1939) una prueba constructiva basada en el Teorema de Pólya (Pólya, 1928) para el caso particular de formas definidas. Y aunque se han realizado ya varios trabajos respecto a representaciones en SOS de formas no negativas (véase (Reznick, 2000)), un resultado de particular interés es el propuesto por Pablo Parrilo en su tesis de doctorado (Parrilo, 2000). En dicho trabajo se afirma que encontrar una representación en SOS para una forma $F(z)$, puede plantearse como un problema de optimización convexa cuya solución se basa en la resolución de un sistema de desigualdades lineales matriciales (LMI por sus siglas en inglés). La idea principal es expresar una forma $F(z)$ no negativa mediante una representación matricial cuadrada (SMR por sus siglas en inglés), de manera que $F(z) = \xi(z)^T Q \xi(z)$. Las entradas del vector $\xi(z)$ contienen formas de grado $q/2$. Si la matriz Q es positiva semidefinida, entonces $F(z)$ puede expresarse como una SOS.

El encontrar una SMR cuya matriz Q sea positiva semidefinida se trata como un problema de optimización convexa, que puede solucionarse mediante la resolución de un sistema LMI. Para lograrlo, se utiliza el programa SOSTOOLS ¹, que es un paquete de herramientas libre y gratuito que funciona sobre MATLAB para formular y resolver problemas de optimización y sumas de cuadrados. SOSTOOLS puede usarse para especificar y resolver problemas de SOS mediante una notación sencilla, flexible e intuitiva de alto nivel. Los problemas de SOS se pueden resolver con distintos paquetes de programación semidefinida como son SeDuMi, SDPT3, CSDP, SDPNAL y SDPA. Para resolver el problema expuesto en este capítulo se ha utilizado SeDuMi v.1.3 (Sturm, 1999). Se recomienda al lector referirse al manual de SOSTOOLS dado en (Papachristodoulou *et al.*, 2013). También los trabajos (Prajna *et al.*, 2002) y (Prajna *et al.*, 2004) explican el uso este paquete mediante ejemplos ahí mostrados.

5.2. Sumas de Cuadrados para la función de Lyapunov

Se parte del diferenciador (1.10) de la Sección 1.3 escrito en términos de los errores de diferenciación $x_i \triangleq s_i - \sigma^{(i-1)}(t)$, $i = 1, 2, 3$ como variables de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 |x_1|^{\frac{2}{3}} + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_2 |x_1|^{\frac{1}{3}} + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -k_3 |x_1|^0 + \pi(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde $\pi(t) = -\sigma^{(3)}(t)$. Se considera también la misma función de Lyapunov candidata $V(x)$ dada por la forma generalizada (3.4) en la Sección 3.1, moldeada con el método propuesto

¹Disponible en: <http://www.cds.caltech.edu/sostools/>, <http://www.mit.edu/~parrilo/sostools/> y <http://sysos.eng.ox.ac.uk/sostools/>

en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b),

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{\frac{5}{3}} - \bar{\alpha}_{12} [x_1] [x_2] + \alpha_2 |x_2|^{\frac{5}{2}} - \bar{\alpha}_{23} [x_2] [x_3]^3 + \alpha_3 |x_3|^5, \quad (5.2)$$

con coeficientes $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3]^T$. Tomando la derivada de (5.2) a lo largo de las trayectorias de (5.1), resulta la forma generalizada $W(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right) \cdot \dot{x} = -\dot{V}$

$$\begin{aligned} W(x) = & \left(\frac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2\right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{5}{3}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1\right) [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{5}{2}\alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \bar{\alpha}_{12} |x_2|^2 + \\ & + \bar{\alpha}_{12} x_1 x_3 - \frac{5}{2}\alpha_2 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 - 3\bar{\alpha}_{23} (k_3 - \pi(t) [x_1]^0) [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \bar{\alpha}_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \\ & + [\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 (k_3 - \pi(t) [x_1]^0)] |x_3|^4. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Considerando $\pi(t) = -\sigma^{(3)}(t) = 0$, $W(x)$ dada por (5.3) puede expresarse como

$$\begin{aligned} W(x) = & \beta_1 |x_1|^{\frac{4}{3}} - \beta_2 [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \beta_3 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |x_2|^2 + \beta_5 x_1 x_3 - \beta_6 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 + \\ & - \beta_7 [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \beta_8 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \beta_9 |x_3|^4, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde los coeficientes β de $W(x)$ son

$$\begin{aligned} \beta_1 = \left(\frac{5}{3}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2\right) \quad , \quad \beta_2 = \left(\frac{5}{3}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1\right) \quad , \quad \beta_3 = \frac{5}{2}\alpha_2 k_2 \\ \beta_4 = \bar{\alpha}_{12} \quad , \quad \beta_5 = \bar{\alpha}_{12} \quad , \quad \beta_6 = \frac{5}{2}\alpha_2 \\ \beta_7 = 3\bar{\alpha}_{23} k_3 \quad , \quad \beta_8 = \bar{\alpha}_{23} k_2 \quad , \quad \beta_9 = (\bar{\alpha}_{23} + 5\alpha_3 k_3 [x_1]^0 [x_3]^0) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Es necesario para la positividad definida de (5.2) y (5.4), restringir los coeficientes $\alpha, \beta_1, \beta_9 > 0$ de la misma manera que en la Sección 3.1.

Como (5.2) y (5.4) son formas generalizadas pero no formas, para revisar su positividad definida mediante una descomposición en SOS, se utiliza el cambio de variables $|x_i| = z_i^{2r_i}$, con lo cual $|x_1| = z_1^6, |x_2| = z_2^4, |x_3| = z_3^2$. El cambio de variable está dado por los pesos de homogeneidad de (1.10) y se emplea para asegurar que las formas resultantes sean de grado par, lo cual es una condición necesaria para su descomposición SOS.

De esta manera se pueden expresar (5.2) y (5.4) como conjuntos de formas $V_i(z)$ y $W_j(z)$; $i, j = 1, \dots, 2^n$ cuyos dominios se localizan en $z \in \mathbb{R}^n$. Observe que habrá máximo 2^n formas distintas asociadas a (5.2), dependiendo del octante del estado $x \in \mathbb{R}^n$ considerado. En este caso (5.2) es simétrico respecto al origen, así que habrá máximo 2^{n-1} formas asociadas. Así, (5.2) equivale a $V_1(z)$ para $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $x_1, x_2, x_3 < 0$; a $V_2(z)$ para $x_1 < 0, x_2, x_3 > 0$ y $x_1 > 0, x_2, x_3 < 0$; a $V_3(z)$ para $x_1, x_2 > 0, x_3 < 0$ y $x_1, x_2 < 0, x_3 > 0$; a $V_4(z)$ para $x_1, x_3 > 0, x_2 < 0$ y $x_1, x_3 < 0, x_2 > 0$, donde

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \alpha_1 z_1^{10} - \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} - \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10}, \\ V_2(z) &= \alpha_1 z_1^{10} + \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} - \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10}, \\ V_3(z) &= \alpha_1 z_1^{10} - \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} + \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10}, \\ V_4(z) &= \alpha_1 z_1^{10} + \bar{\alpha}_{12} z_1^6 z_2^4 + \alpha_2 z_2^{10} + \bar{\alpha}_{23} z_2^4 z_3^6 + \alpha_3 z_3^{10}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las formas $W_j(z)$ son también simétricas respecto al origen, así que también hay 2^{n-1} formas asociadas. Por tanto (5.4) equivale a $W_1(z)$ para $x_1, x_2, x_3 > 0$ y $x_1, x_2, x_3 < 0$; a $W_2(z)$ para $x_1 < 0, x_2, x_3 > 0$ y $x_1 > 0, x_2, x_3 < 0$; a $W_3(x)$ para $x_1, x_3 > 0, x_2 < 0$ y $x_1, x_3 < 0, x_2 > 0$; a $W_4(z)$ para $x_1, x_2 > 0, x_3 < 0$ y $x_1, x_2 < 0, x_3 > 0$, donde

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \beta_1 z_1^8 - \beta_2 z_1^4 z_2^4 + \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 + \beta_5 z_1^6 z_3^2 - \beta_6 z_2^6 z_3^2 - \beta_7 z_2^4 z_3^4 - \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8, \\ W_2(z) &= \beta_1 z_1^8 + \beta_2 z_1^4 z_2^4 - \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 - \beta_5 z_1^6 z_3^2 - \beta_6 z_2^6 z_3^2 + \beta_7 z_2^4 z_3^4 + \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8, \\ W_3(z) &= \beta_1 z_1^8 + \beta_2 z_1^4 z_2^4 - \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 + \beta_5 z_1^6 z_3^2 + \beta_6 z_2^6 z_3^2 + \beta_7 z_2^4 z_3^4 - \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8, \\ W_4(z) &= \beta_1 z_1^8 - \beta_2 z_1^4 z_2^4 + \beta_3 z_1^2 z_2^6 + \beta_4 z_2^8 - \beta_5 z_1^6 z_3^2 + \beta_6 z_2^6 z_3^2 - \beta_7 z_2^4 z_3^4 + \beta_8 z_1^2 z_3^6 + \beta_9 z_3^8. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Note que las restricciones $\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2, \bar{\alpha}_{23}, \alpha_3 > 0$ dadas antes son suficientes para cumplir que $V_4(z)$ sea positiva definida. El verdadero problema es determinar valores para α y β que aseguren que el resto de las formas de (5.6) y (5.7) sean positivas definidas.

Por las características de las formas (5.6) y (5.7), al llegar a una representación para una de sus formas $F(z)$ de tipo $F(z) = \xi(z)^T Q \xi(z)$, el vector $\xi(z)$ debe contener elementos de una sola variable. Por lo tanto, la positividad definida de Q garantiza la positividad definida de $F(z)$. Sin embargo, puesto que SOSTOOLS es un paquete de programación semidefinida, esto implica que cualquier matriz Q que calcule será, en general, semidefinida. Por tanto siempre se debe restar el término $\epsilon \|z\|_q^q$ a cada forma de (5.6) y (5.7), donde q es el grado de la forma en cuestión, para luego introducirlas al programa semidefinido. Las restricciones empleadas para resolver el problema de SOS mediante SOSTOOLS (Papachristodoulou *et al.*, 2013) se escriben entonces en el programa como:

- $\bar{V}_1(z) = V_1(z) - \epsilon(z_1^{10} + z_2^{10} + z_3^{10}) \geq 0$,
- $\bar{V}_2(z) = V_2(z) - \epsilon(z_1^{10} + z_2^{10} + z_3^{10}) \geq 0$,
- $\bar{V}_3(z) = V_3(z) - \epsilon(z_1^{10} + z_2^{10} + z_3^{10}) \geq 0$,
- $\bar{W}_1(z) = W_1(z) - \epsilon(z_1^8 + z_2^8 + z_3^8) \geq 0$,
- $\bar{W}_2(z) = W_2(z) - \epsilon(z_1^8 + z_2^8 + z_3^8) \geq 0$,
- $\bar{W}_3(z) = W_3(z) - \epsilon(z_1^8 + z_2^8 + z_3^8) \geq 0$,
- $\bar{W}_4(z) = W_4(z) - \epsilon(z_1^8 + z_2^8 + z_3^8) \geq 0$,
- $\bar{\alpha}_{12}, \bar{\alpha}_{23} \geq 0$.

El factor $\epsilon = 0.01$ introduce el sesgo para asegurar la positividad definida de (5.6) y (5.7) ante cualquier resultado factible que se obtenga para los coeficientes α y β . Se proponen arbitrariamente los parámetros para el diferenciador $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, y $k_3 = 0.02$. Con estas restricciones, la solución devuelta por SOSTOOLS para $\alpha = [\alpha_0, \bar{\alpha}_{01}, \alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2]^T$ es

$$\alpha_1 = 2.5838, \bar{\alpha}_{12} = 1.725, \alpha_2 = 0.695, \bar{\alpha}_{23} = 1.3898, \alpha_3 = 8.0329. \quad (5.8)$$

Con los coeficientes (5.8) y el factor ϵ , las matrices Q_i de las representaciones $V_i(z) = \xi^T Q_i \xi$ de las formas (5.6), y las matrices Q_j de las representaciones $W_j(z) = \xi^T Q_j \xi$ de las formas (5.7) son positivas definidas. Y con ello, las formas (5.6) y (5.7) pueden expresarse como SOS. Las formas f_i que componen cada representación SOS calculada por SOSTOOLS se muestran en el Apéndice D.

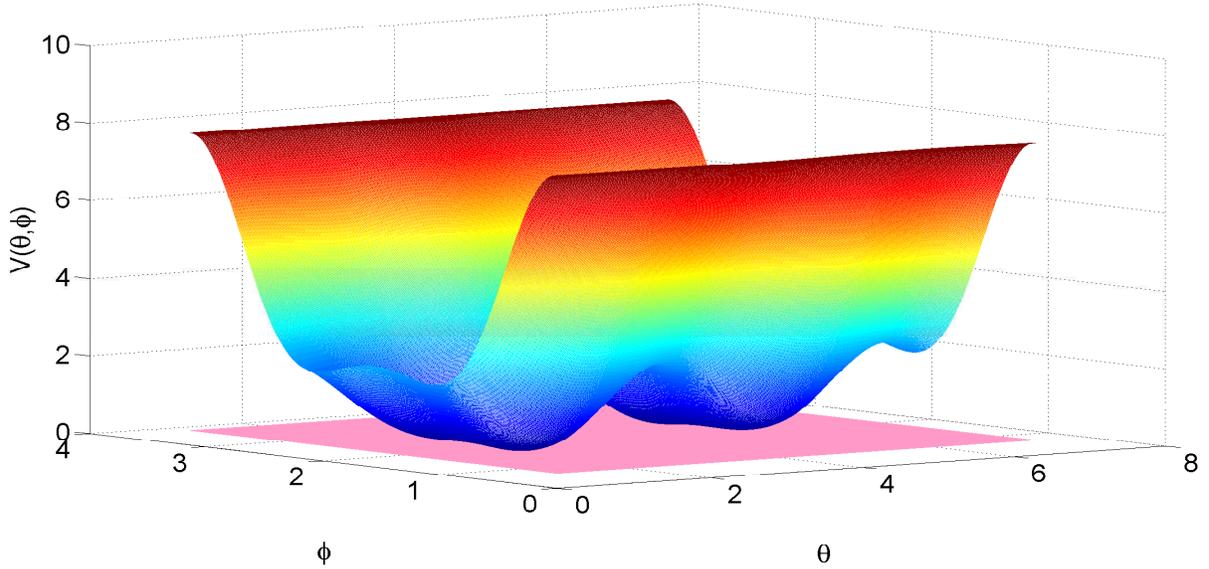


Figura 5.1: $V(x)$ SOS

La Figura 5.1 muestra la función de Lyapunov (5.2) evaluada sobre una esfera de radio $r = 1$ centrada en $x = 0$ tras emplear el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas, esto es, transformar $x = [x_1, x_2, x_3]^T \rightarrow [r, \theta, \phi]^T$,

$$x_1 = r \sin(\phi) \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\phi) \sin(\theta), \quad x_3 = r \cos(\phi). \quad (5.9)$$

El ángulo azimutal θ varía en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el ángulo cenital ϕ varía en el intervalo $0 \leq \phi \leq \pi$. Ambos intervalos se evalúan cada 0.5 grados, con lo que se genera un malla de 720×360 valores a graficar para (5.2). El valor mínimo para (5.2) mostrado en la Figura 5.1 es de 0.3866.

Los resultados de esta sección son válidos sólo en el caso $\pi(t) = 0$. La siguiente sección trata el caso perturbado general $\pi(t) \neq 0$.

5.3. Consideración de caso perturbado y tiempo de convergencia

Tomando $W(x)$ dada por (5.3), donde ahora se considera $\pi(t) \neq 0$ y utilizando los coeficientes α hallados para los parámetros k propuestos en el caso no perturbado, se busca una

cota nominal Δ_0 para $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ tal que (5.3) sea positiva definida. Esto se ha logrado considerando, al igual que en la Sección 4.1, los factores $(k_3 \pm \Delta_0)$ en los términos de (5.3) donde $\pi(t)$ está implicada, de tal forma que se englobe el caso en que (5.3) es menos positiva.

$$\begin{aligned}
W(x) = & \left(\frac{5}{3} \alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2 \right) |x_1|^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{5}{3} \alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1 \right) [x_1]^{\frac{2}{3}} x_2 + \frac{5}{2} \alpha_2 k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_2]^{\frac{3}{2}} + \bar{\alpha}_{12} |x_2|^2 + \\
& + \bar{\alpha}_{12} x_1 x_3 - \frac{5}{2} \alpha_2 [x_2]^{\frac{3}{2}} x_3 - 3 \bar{\alpha}_{23} (k_3 \pm \Delta_0) [x_1]^0 x_2 |x_3|^2 - \bar{\alpha}_{23} k_2 [x_1]^{\frac{1}{3}} [x_3]^3 + \\
& + (\bar{\alpha}_{23} + 5 \alpha_3 [x_1]^0 [x_3]^0 (k_3 \pm \Delta_0)) |x_3|^4.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Del último término de (5.10), una condición necesaria para su positividad definida es $(\bar{\alpha}_{23} - 5 \alpha_3 (k_3 + \Delta_0) > 0)$. Con los coeficientes α y parámetros k conocidos, la cota nominal queda restringida $\Delta_0 < 0.014$. Con ello se comienza a buscar un valor para la cota nominal Δ_0 contenida en $0 < \Delta < 0.014$. Una opción es recurrir a una prueba gráfico-numérica sobre la esfera ya mencionada dada por el cambio de variables (5.9). Intentando con $\Delta_0 = 0.009$, se evalúa (5.10) cada 0.5 grados en ambos intervalos de θ y ϕ , para ambos casos $(k_3 \pm \Delta_0)$, obteniendo 720×360 valores para cada caso. Se ha encontrado que el caso menos positivo para (5.10) es cuando sus términos perturbados contienen el factor $(k_3 - \Delta_0)$.

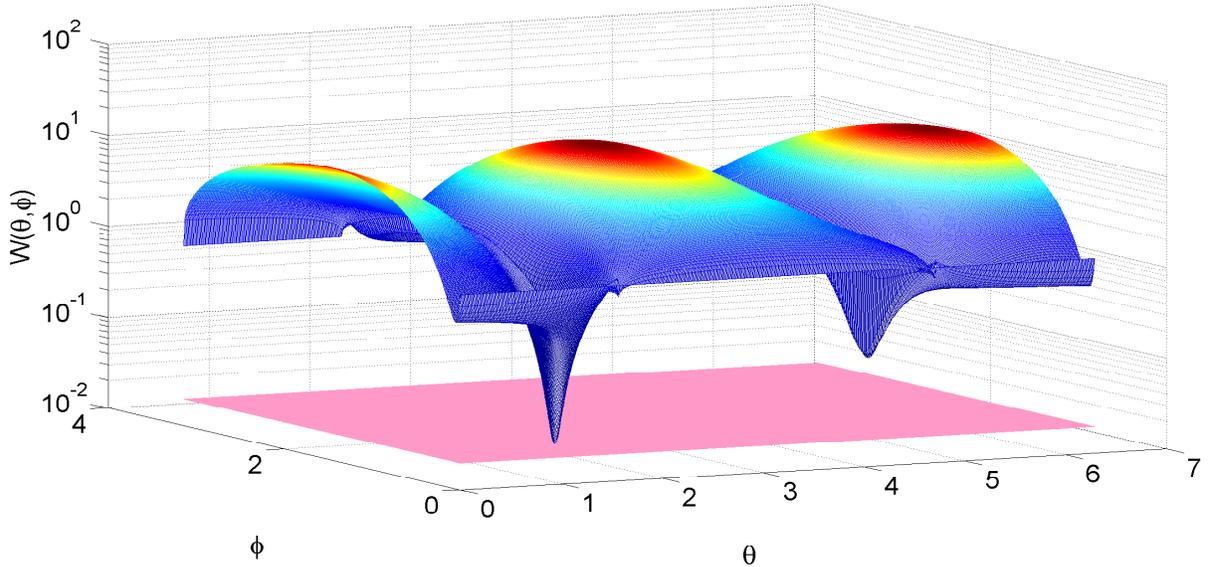


Figura 5.2: $W(x)$ SOS perturbada

Así, se ha encontrado una cota nominal Δ_0 de modo que el sistema (5.1) para una perturbación $|\pi(t)| \leq \Delta_0$ siga teniendo como función de Lyapunov a (5.2). Esta prueba numérica es válida debido a que (5.2) y (5.3) son homogéneas, con lo cual, su positividad definida localmente es válida de manera global en el estado $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora, se aplica el difeomorfismo $y = Lx, 0 < L \in \mathbb{R}$ al sistema (5.1) con objeto de robustecerlo contra perturbaciones $\pi(t)$ acotadas como $|\pi(t)| \leq \Delta$, de modo que $\Delta \geq \Delta_0$. Este difeomorfismo se emplea también en Levant (2003) y Levant (2005) para obtener el escalamiento de ganancias del diferenciador. Con esto, la versión escalada de (5.1) es

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -L^{1/3}k_1|y_1|^{2/3} + y_2, \\ \dot{y}_2 &= -L^{2/3}k_2|y_1|^{1/3} + y_3, \\ \dot{y}_3 &= -Lk_3|y_1|^0 + L\pi(t).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Con lo cual, los escalamientos son $\bar{k}_1 = L^{1/3}k_1$, $\bar{k}_2 = L^{2/3}k_2$, $\bar{k}_3 = Lk_3$; donde $L = \Delta/\Delta_0$. La diferencia fundamental respecto a los escalamientos hechos en Levant (2003) es que el autor asigna $L = \Delta$, esto es, considera $\Delta_0 = 1$.

Del mismo modo que en la Sección 4.4, para estimar la cota del tiempo de convergencia de las trayectorias del diferenciador, debe resolverse la desigualdad diferencial

$$\dot{V} \leq -\gamma V^\delta(x),\tag{5.12}$$

donde $0 < \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ y $\delta < 1$ para convergencia en tiempo finito. La cota superior del tiempo de convergencia está dada por la resolución, mediante el Lema de Comparación (Khalil, 2002, p.102), de (5.12) como

$$T(x_0) = \frac{V^{1-\delta}(x_0)}{\gamma(1-\delta)}.$$

Donde $x_0 = x(t_0)$ y las constantes γ y δ deben determinarse. Como $W(x) = -\dot{V}$, la desigualdad se expresa $W(x) \geq \gamma V^\delta(x)$. Es fácil ver que $\delta = 4/5$ porque $V^{4/5}(x)$ y $W(x)$ deben ser equivalentes (en el sentido que ambas deben ser homogéneas y poseer grado de homogeneidad 4). Para calcular la constante γ se establece la función $F(x) = W(x)/V^{4/5}(x)$ y se encuentra su mínimo como cota superior de γ .

La constante γ se ha calculado encontrando numéricamente el mínimo valor del mallado $F(x)$ sobre la misma esfera dada por el mismo cambio de variables (5.9) para $V(x)$ y $W(x)$. El mallado de $F(x)$ sobre la bola se muestra en la Figura 4.3. Se ha encontrado que $\gamma \leq 7.3 \times 10^{-3}$. Con todo esto, se obtiene una expresión para el tiempo de convergencia del error de diferenciación.

5.4. Simulaciones

A continuación se muestran simulaciones realizadas bajo las mismas condiciones que las descritas en la Sección 4.5, sólo que utilizando los parámetros propuestos k y las nuevas ganancias halladas por SOSTOOLS α dadas en (5.8).

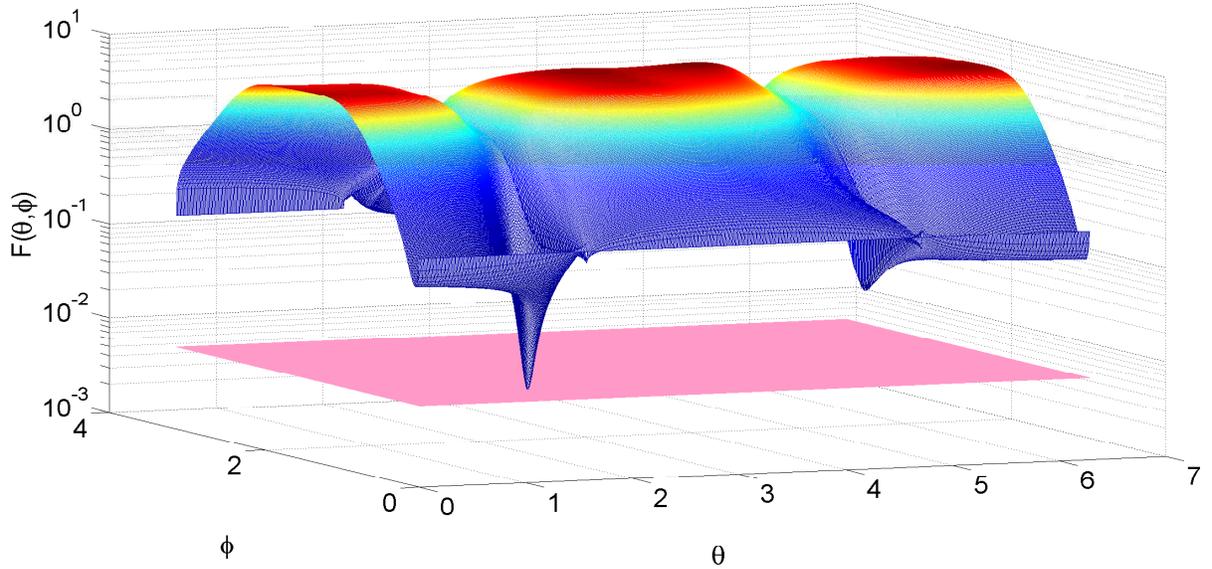


Figura 5.3: $F(x)$ SOS perturbada

Un acercamiento de la simulación hecha con las ganancias propuestas en este capítulo (Fig. 5.4) cuando el error converge a cero se presenta en la Fig. 5.5. En la Figura 5.6 se realiza el mismo acercamiento para una simulación con $T_s = 20\mu s$. Así, en las Figuras 5.5 y 5.6 se muestran las dos simulaciones con los dos periodos de integración $T_s = 2\mu s$ y $T_s = 20\mu s$ respectivamente. De dichas figuras puede observarse que la precisión del diferenciador con las ganancias propuestas, coincide, al igual que lo mostrado en la Sección 4.5, con la dependencia del periodo de integración T_s , dado por el Teorema 7 reportado en (Levant, 2003).

En la Figura 5.7 se muestran las estimaciones s_1 , s_2 , y s_3 comparadas con las señales $\sigma(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, y $\ddot{\sigma}(t)$, cuyas diferencias son los errores de diferenciación de la Figura 5.4. Con los datos generados para el estado x en la simulación mostrada por la Figura 5.4 y al igual que en la Sección 4.5, se muestra en las Figuras 5.8, 5.9 y 5.10 la función de Lyapunov $V(x)$ dada por (5.2), proyectada sobre cada variable de estado x_1 , x_2 y x_3 .

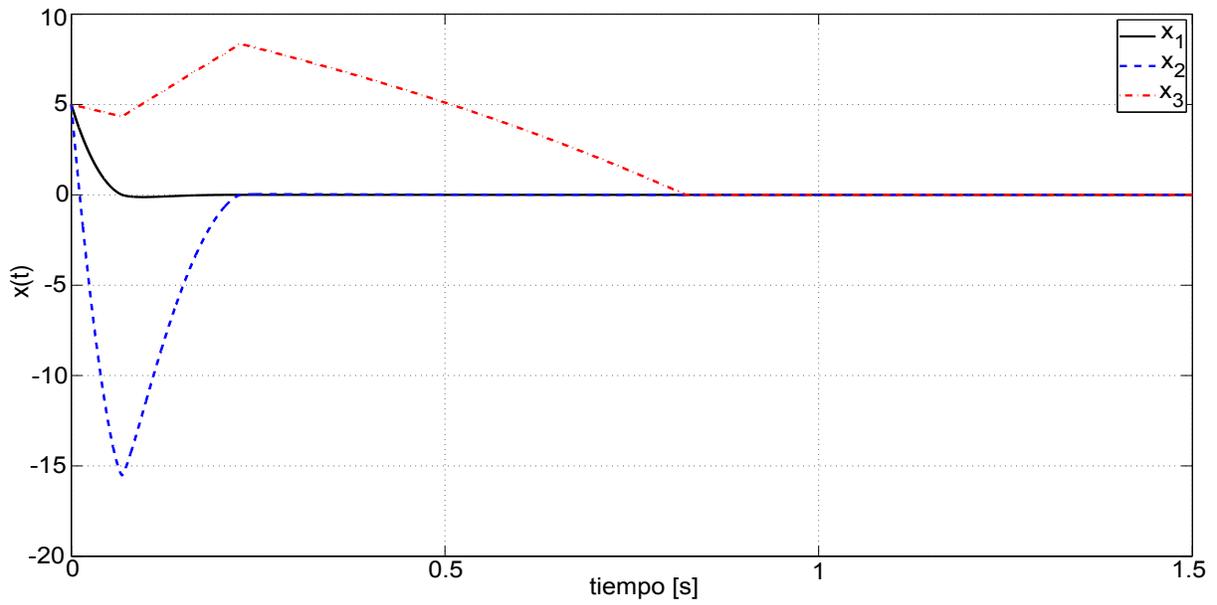


Figura 5.4: Error de diferenciación con ganancias SOS

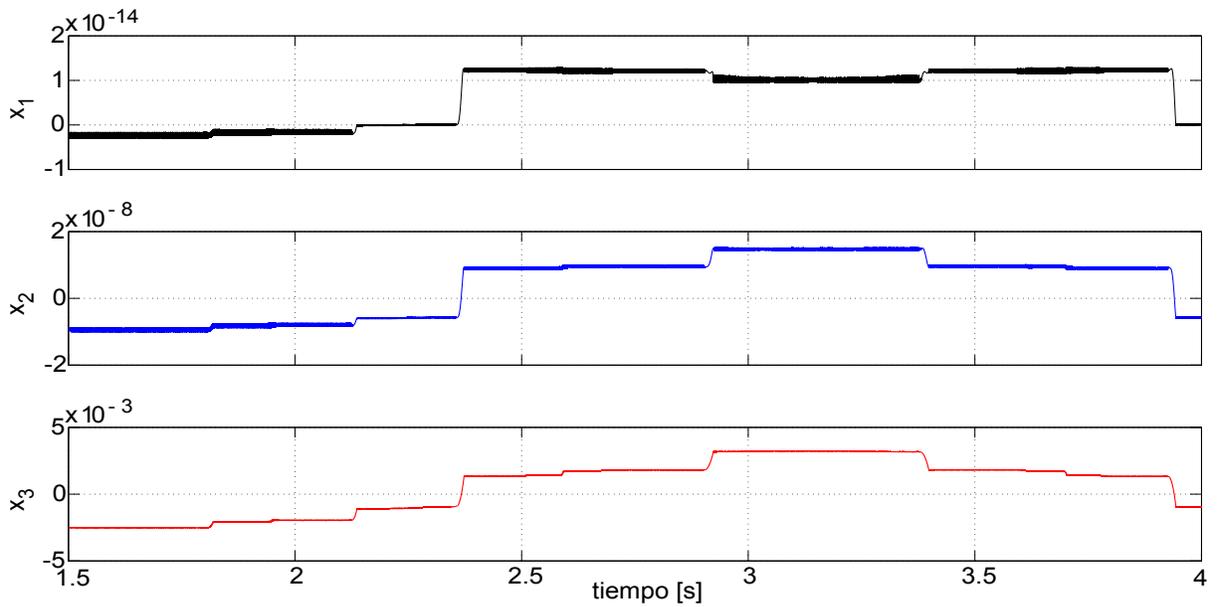


Figura 5.5: Errores tras convergencia con $T_s = 2\mu s$

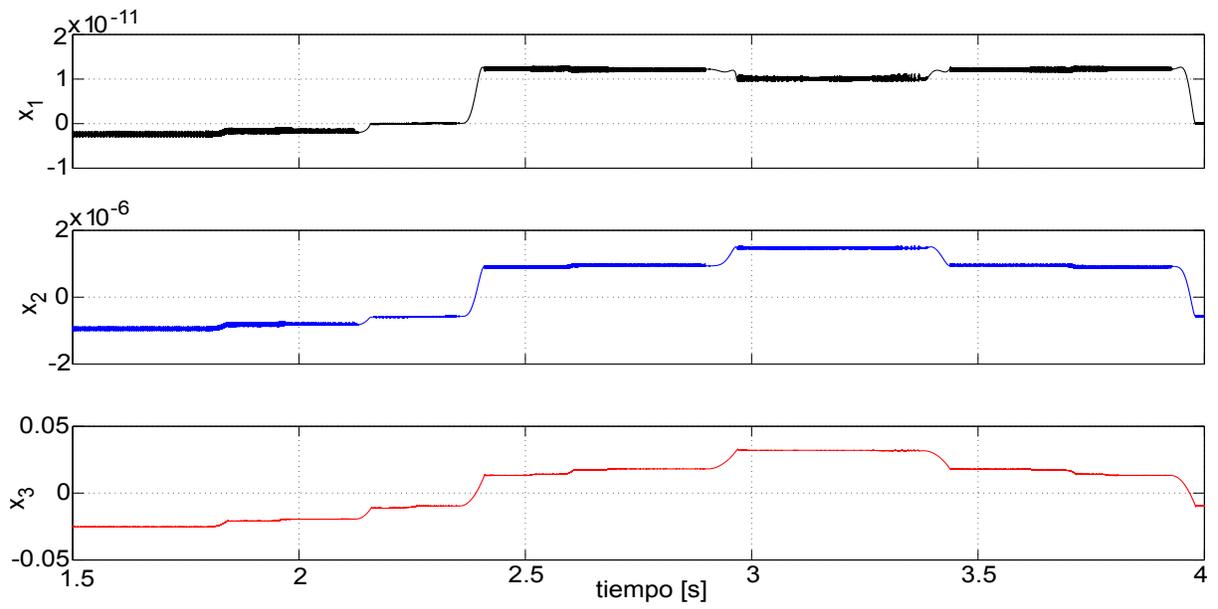


Figura 5.6: Errores tras convergencia con $T_s = 20\mu s$

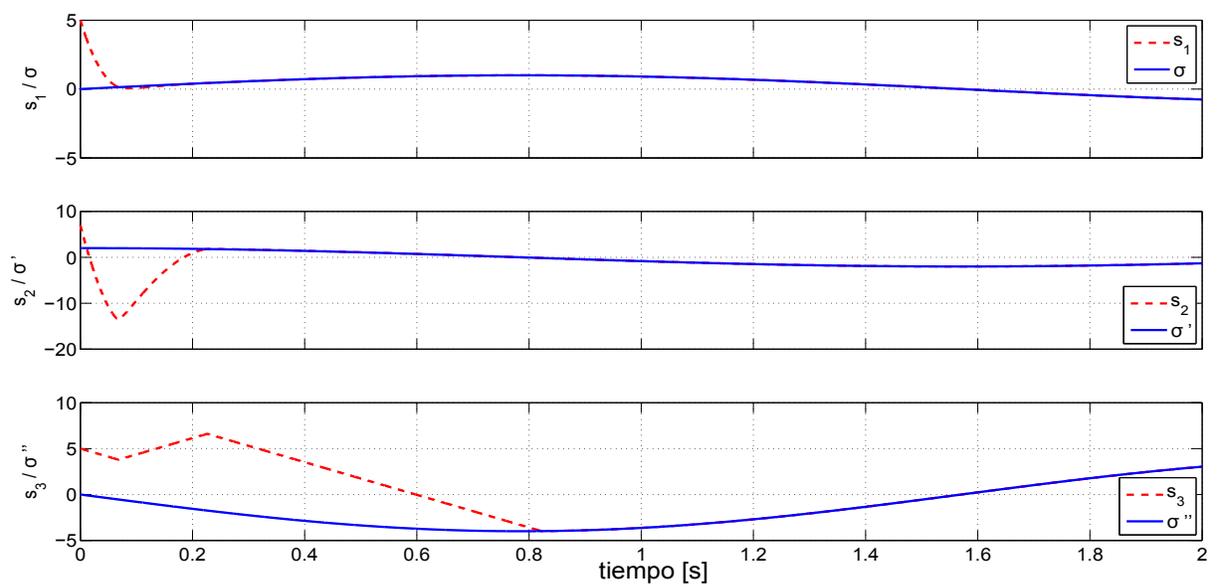


Figura 5.7: Señales estimadas y reales SOS

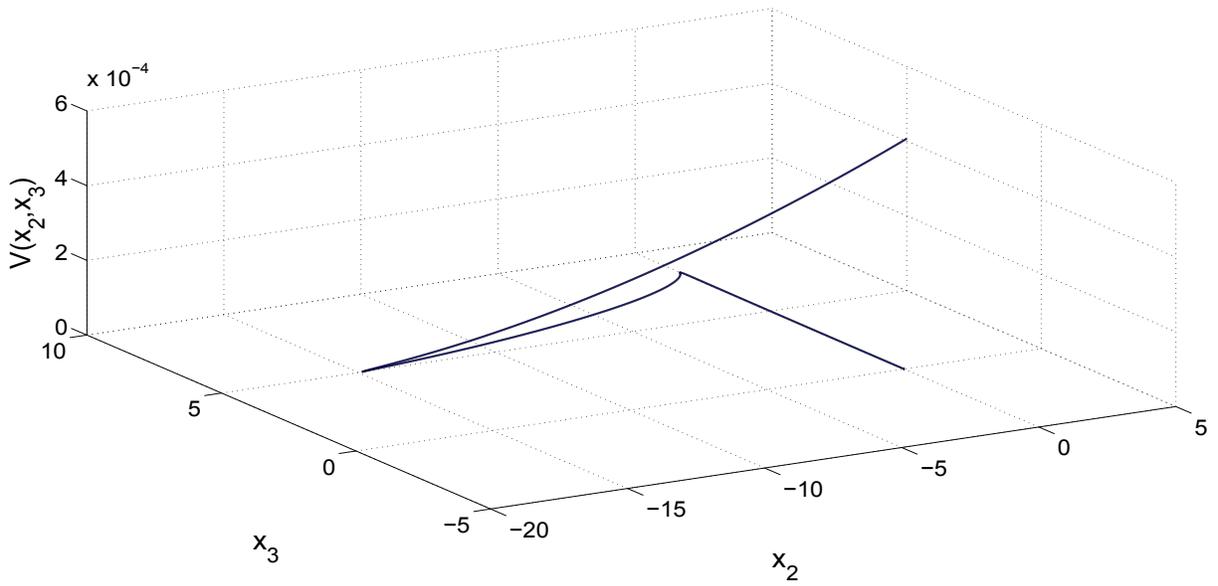


Figura 5.8: $V(x)$ SOS sobre plano x_2x_3

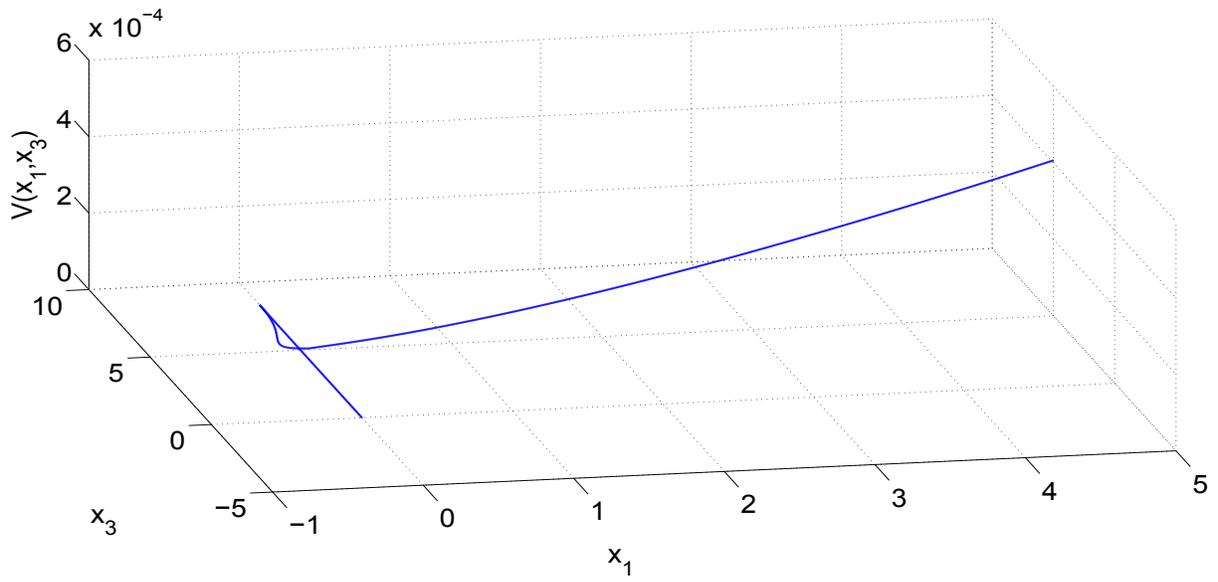


Figura 5.9: $V(x)$ SOS sobre plano x_1x_3

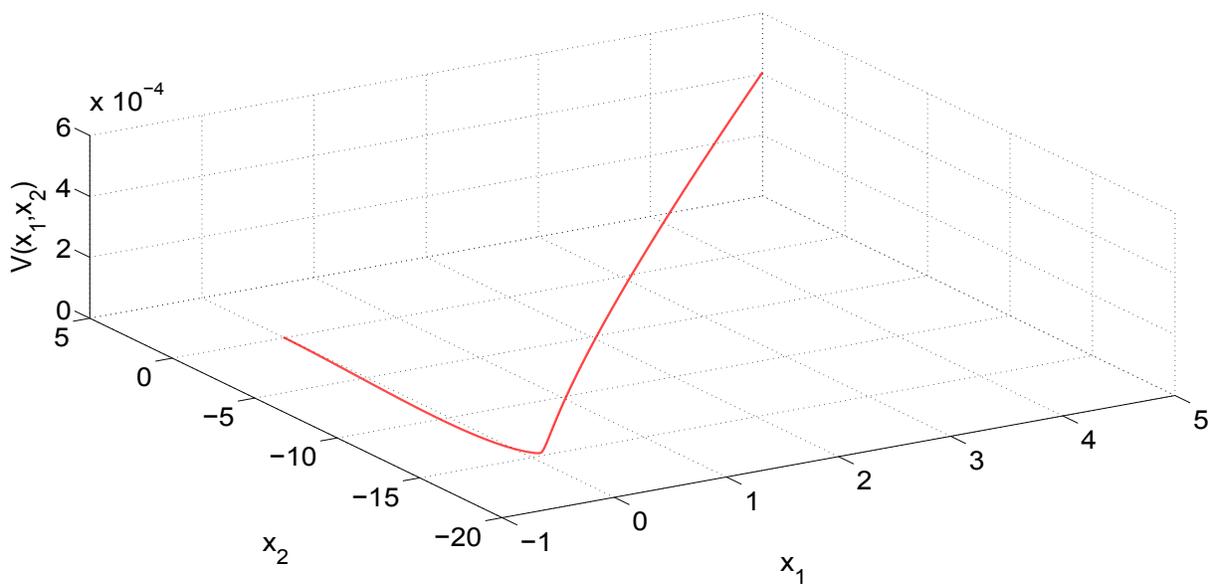


Figura 5.10: $V(x)$ SOS sobre plano x_1x_2

Capítulo 6

Discusión final

6.1. Conclusiones

Se ha diseñado una función de Lyapunov diferenciable homogénea, así como un juego de ganancias adicionales para el diferenciador de Levant de segundo orden. Es importante decir que con el método propuesto en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), se puede obtener conjuntos infinitos de coeficientes α para la función de Lyapunov candidata, y de ganancias k para el diferenciador. Dicho esto, se ha avanzado en el uso de la metodología propuesta en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b) orientada hacia el diseño de parámetros de sistemas mediante el Teorema de Pólya.

Como resultado adicional, derivado de los objetivos propuestos, se ha logrado hallar para el diferenciador de segundo orden, una función de Lyapunov diferenciable homogénea mediante una descomposición en sumas de cuadrados (SOS) de polinomios homogéneos. Así, se ha comprobado esta otra hipótesis de obtener funciones de Lyapunov diferenciables mencionada (pero no llevada a cabo) en los trabajos (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b).

No existen limitaciones teóricas que impidan aplicar la metodología de diseño de funciones de Lyapunov suaves, mediante el Teorema de Pólya o mediante sumas de cuadrados, a diferenciadores de Levant de orden mayor a dos. Las ganancias k obtenidas por el procedimiento basado en Teorema de Pólya, y las propuestas en el método por descomposición en SOS, pueden escalar en función de la cota de la tercera derivada de la señal a diferenciar, y también se han estimado cotas del tiempo de convergencia para el diferenciador para cada juego de ganancias. La dependencia de la precisión respecto al periodo de integración del diferenciador diseñado con los parámetros propuestos por el autor de esta tesis, concuerda con la reportada por A. Levant en (Levant, 2003).

La idea básica que motiva estos procedimientos de diseño de funciones de Lyapunov diferenciables es simple y poderosa, ya que permite aplicar el método directo de Lyapunov de una

forma menos complicada que al utilizar funciones no diferenciables y/o discontinuas. Por una parte, el método basado en el Teorema de Pólya aquí expuesto es computacionalmente costoso debido a las exhaustivas descripciones de conos poliédricos convexos calculadas. Por otro lado, el procedimiento basado en descomposiciones en SOS utilizando el paquete SOSTOOLS es más eficiente computacionalmente que el otro, aunque carece de flexibilidad, puesto que si se proponen los parámetros k del diferenciador, sólo ofrece al final una única solución (si es que existe) para los coeficientes α .

A continuación se enuncia una serie de problemas con los que se ha tenido que lidiar y se mencionan algunas cuestiones abiertas que se podrían resolver a futuro.

6.2. Problemas abiertos y trabajo futuro

Durante la realización de este trabajo, se encontraron muchos puntos abiertos. Algunos de ellos ya habían sido discutidos en (Sánchez y Moreno, 2014a), (Sánchez y Moreno, 2014b) y mencionados en esta tesis en la Sección 3.1, que son los referentes al moldeo de la función candidata de Lyapunov, perteneciente a la clase de funciones homogéneas denominadas formas generalizadas. Otras cuestiones son las mencionadas a continuación.

1. El programa para calcular las matrices que conforman a los sistemas de desigualdades lineales podría mejorarse en el sentido de poder operar con exponentes de Pólya mayores a los aquí empleados. La principal limitación se da porque el número positivo de punto flotante de precisión doble más grande almacenable en MATLAB es de 1.7977×10^{308} , y al ser el factorial $p!$ un operador implicado en la construcción de las matrices, la implementación del programa realizada está limitada a operar con factoriales con $p < 171$, ya que el último valor operable $p = 170$ resulta $170! = 7.2564 \times 10^{306}$.

Se podría intentar utilizar una combinación de varios datos para almacenar un número mayor, ya sea desde MATLAB o bien desde otro programa. También se podría sistematizar toda la construcción de las matrices en otro entorno distinto a MATLAB, el cual permita almacenar números todavía mayores.

2. Otra cuestión respecto a la construcción de las matrices es que para cada p distinta, toda la matriz se recalcula de nuevo. Sería deseable entonces obtener información de las matrices construidas para un cierto p bajo, y reutilizarla para construir las matrices correspondientes a dicho p bajo, sin tener que recalcular toda una nueva matriz para cierto p alto.

La capacidad de construir matrices con exponentes p mayores también contribuiría a la búsqueda exitosa de cotas nominales $\Delta_0 \geq |\pi(t)|$ para probar la robustez de alguna función de Lyapunov nominal encontrada.

3. Como ya se había mencionado, se podrían calcular los valores mínimos de la función $F(x)$ utilizando algún método numérico de búsqueda de mínimos, o bien con algún

método analítico para calcular la constante γ de forma más estricta matemáticamente hablando.

4. Aunque la construcción de funciones de Lyapunov mediante descomposición en SOS es fácil de realizar con el paquete SOSTOOLS proponiendo los parámetros del sistema, tal como se ha hecho en el Capítulo 5 de esta tesis, sería interesante encauzarlo, de manera análoga a lo que se ha realizado con el procedimiento basado en el Teorema de Pólya, al diseño simultáneo tanto de parámetros del sistema como de coeficientes para la función candidata propuesta. Esto traería como consecuencia una aceleración en la búsqueda de funciones de Lyapunov suaves no sólo para diferenciadores de Levant de orden arbitrario, sino también para muchos otros sistemas homogéneos discontinuos que pertenezcan a la clase de funciones homogéneas denominadas Formas Generalizadas.

Apéndice A

Sistematización del Producto de Pólya

A.1. Construcción de la matriz A de un sistema de desigualdades

Se presenta en este apéndice el pseudocódigo del proceso de construcción de las matrices que conforman los sistemas de desigualdades. El pseudocódigo se basa en la expresión (2.10) dada a partir del Producto de Pólya $G(z) = (z_1 + \dots + z_n)^p F(z)$, y es como sigue:

ENTRADA:

- n – Orden de $F(z)$.
- q – Grado de homogeneidad de $F(z)$.
- p – Exponente de Pólya.

SECUENCIA:

$N_n^q = \frac{(n+q-1)!}{q!(n-1)!}$; Número de coeficientes para la forma $F(z)$.

Q ; Matriz cuyas filas son las permutaciones posibles de exponentes de $F(z)$.

$N_n^{q+p} = \frac{(n+q+p-1)!}{(q+p)!(n-1)!}$; Número de coeficientes para la forma $G(z)$.

S ; Matriz cuyas filas son las permutaciones posibles de exponentes de $G(z)$.

Declarar matriz A de dimensiones $N_n^{q+p} \times N_n^q$

for $k = 1 : N_n^{q+p}$

{

 for $j = 1 : N_n^q$

 {

 Comparar filas ($S(k)$ y $Q(j)$) elemento a elemento.

 if ($S(k) \geq Q(j)$); Si fila S(k) mayor o igual, elemento a elemento, a Q(j)

 {

$A(k, j) = 1 / \prod (S(k) - Q(j))!$; Factoriales de elementos de S(k)-Q(j)

 }

 }

}

```

    }
    }
}
A = p!*A; Cada elemento de A se multiplica por p!

```

FIN

Evidentemente, no todas las permutaciones posibles contenidas en la matriz Q de exponentes de $F(z)$ son utilizadas al moldear la función de Lyaunov. Por tanto, tras construirse A , deben eliminarse algunas de sus columnas. Las columnas no implicadas se hacen cero mediante el producto de $A * D$. La matriz diagonal D tiene dimensiones $N_n^q \times N_n^q$, con entradas $\pm 1, 0$. Las entradas ± 1 se asignan de acuerdo al orden de las permutaciones de Q utilizadas en el moldeo y al signo factorizado de los términos de $F(z)$ implicados (véase Lema (2.3.1)) de la Sección 2.3.2. Naturalmente, al final todas las columnas de $A * D$ que contengan únicamente ceros se desechan.

Por la naturaleza del algoritmo dado en el pseudocódigo anterior, el orden de las permutaciones de los exponentes para conformar a las matrices Q y P es irrelevante. Por tanto, se puede utilizar cualquier ordenamiento, siempre y cuando éste contenga todas las permutaciones. De todas formas, el cómputo de las matrices Q y S aquí empleado se explica en la Sección A.1.1.

En la Sección A.1.2 se añade el código utilizado en MATLAB para realizar una comparación elemento a elemento entre dos vectores. Se espera que el pseudocódigo y los programas dados en este apéndice, sean suficientes para que el lector sea capaz de implementar el cómputo de matrices a su conveniencia.

A.1.1. Permutaciones de exponentes y reducción de columnas de A

En particular, las permutaciones de los exponentes de $F(z)$ y $G(z)$ se han hecho mediante una implementación en MATLAB¹ del algoritmo dado en (Vajnovszki, 2014). El código es el siguiente:

```

function X=colex(n,k,a,b)
%
% Generate all integer compositions of n with k parts, each between a and b
%
% n: integer whose compositions are to be generated
% k: number of parts
% a: minimum value of parts

```

¹Disponible en: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/44186-restricted-integer-compositions-with-fixed-number-of-parts/content/colex.m>

```

    \% b: maximum value of parts
    \%
    \% The algorithm is directly taken from
    \% Vincent Vajnovszki, Generating permutations with a given major index,
    \% http://arxiv.org/abs/1302.6558
    \%
    \% Matlab implementation:
    \% Steffen Eger, steffen.eger@yahoo.com, 11/5/2013
    \%
    \%

X=[];
if k*a>n || k*b<n || n<0 || k<0
    return
end
[minimum,im] = generateMin(n-k*a,k,b-a);
c = zeros(k,1);
    \% not impossible
if im==0
    \% first, compute all compositions with parts p such that 0<=p<=b-a
    X=genColex(n-k*a,k,k,b-a,c,minimum,[]);
    \% then add a such that a<=p<=b
    X = X+a;
end
end

    \% this implements Algorithm 2 in the paper
    \% b is the upper bound
function X=genColex(n,r,k,b,c,minimum,X)
if n==0
    \% leave this if you just want to have it printed out (might be memory-saving)
    \% disp(c')
    \% leave this if want to store results in matrix X
    X(end+1,:)=c;
else
    if c(r)==b
        r = r-1;
    end
l = minimum(n);
for i=l:r
if i==l
    e = n-(l-1)*b;

```

```

else
    e = 1;
end
c(i) = c(i)+e;
X=genColex(n-e,i,k,b,c,minimum,X);
c(i) = c(i)-e;
end
end
end

function [m,impossible]=generateMin(n,k,b)
m=zeros(n,1);
impossible=0;
for i=1:n
q = find(i,k,b);
    if q==-1
        impossible=1;
        break
    end
m(i) = q;
end
end

function t=find(n,k,b)
t=-1;
for s=1:k
    if s*b>=n
        t=s;
        break;
    end
end
end
end

```

Al final el programa devuelve, mediante el parámetro X , las matrices Q y P en un cierto orden.

A.1.2. Comparación entre permutaciones de exponentes de F y G

```

function [ M ] = comparavectores(A,B)
%COMPARAVECTORES toma los vectores A y B. Si todos los elementos de A
% son mayores o iguales que los de B entonces entrega M=1 en otro caso
% entrega M=0.

```

```
[r,n1]=size(A);
n=max(r,n1);
m=0;

for k=1:n;
if A(k)<B(k);
    m=0;
else
    m=m+1;
end
end

if m<n;
    M=0;
else
    M=1;
end

end
```


Apéndice B

Función de Lyapunov suave y diseño de ganancias para Super-Twisting

Como motivación previa a realizar el diseño de ganancias para el diferenciador de segundo orden y también para probar y ejemplificar el esquema de diseño explicado en la Sección 3.3.2, se presenta la construcción de una función suave y diseño de ganancias para el algoritmo Super-Twisting.

Esto es una pequeña extensión en el método propuesto en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b) para los primeros ejemplos ahí presentados. La diferencia es que ahora se consideran desconocidos los parámetros k_1 y k_2 del algoritmo Super-Twisting

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2} + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_2|x_2|^0. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

El sistema (B.1) posee, de acuerdo a (Bacciotti y Rosier, 2005), grado de homogeneidad -1 con vector de pesos de homogeneidad $r = [r_1, r_2] = [2, 1]$. Usando el método expuesto en (Sánchez y Moreno, 2014a) y (Sánchez y Moreno, 2014b), se parte eligiendo para (B.1) la función de Lyapunov candidata

$$V(x) = \alpha_1|x_1|^{m/r_1} + \alpha_{12}|x_1|^{\rho_1}|x_2|^{\rho_2} + \alpha_2|x_2|^{m/r_2} \quad (\text{B.2})$$

Y la negativa de su derivada a lo largo de las trayectorias de (B.1), esto es $W(x) = \dot{V}(x)$, resulta

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{m}{r_1}\alpha_1 k_1|x_1|^{\frac{m}{r_1}-\frac{1}{2}} + \rho_1\alpha_{12}k_1|x_1|^{\rho_1-\frac{1}{2}}|x_2|^{\rho_2} - \frac{m}{r_1}\alpha_1|x_1|^{\frac{m}{r_1}-1}|x_2| + \\ &\quad -\rho_1\alpha_{12}|x_1|^{\rho_1-1}|x_2|^{\rho_2+1} + \frac{m}{r_2}\alpha_2 k_2|x_1|^0|x_2|^{\frac{m}{r_2}-1} + \rho_2\alpha_{12}k_2|x_1|^{\rho_1}|x_2|^{\rho_2-1} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

El primer término de (B.3) es signo definido para la variable x_1 . Del cuarto término de (B.3), se observa que para que dicho término sea de signo definido para la variable x_2 , entonces $\rho_1 = 1$. Ajustando el exponente $\rho_2 = 1$ y con los pesos de homogeneidad $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$

dados, se tiene que las condiciones de diferenciabilidad y homogeneidad dadas en (Sánchez y Moreno, 2014a) se cumplen con $m = 3$. Así, (B.3) se reescribe

$$W(x) = \left(\frac{3}{2}\alpha_1 k_1 + \alpha_{12} k_2\right) |x_1| - \left(\frac{3}{2}\alpha_1 - \alpha_{12} k_1\right) [x_1]^{1/2} [x_2] + 3\alpha_2 k_2 [x_1]^0 [x_2]^2 - \alpha_{12} |x_2|^2 \quad (\text{B.4})$$

Por convención se asigna $\bar{\alpha}_{12} = -\alpha_{12} > 0$ y se reescribe

$$W(x) = \left(\frac{3}{2}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2\right) |x_1| - \left(\frac{3}{2}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1\right) [x_1]^{1/2} [x_2] + (\bar{\alpha}_{12} + 3\alpha_2 k_2 [x_1]^0 [x_2]^0) |x_2|^2 \quad (\text{B.5})$$

Así, es necesario que $[\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2]^T > 0$ para la positividad de (B.2). Se expresan ahora (B.2) y (B.5) como

$$V(x) = \alpha_1 |x_1|^{3/2} - \bar{\alpha}_{12} [x_1] [x_2] + \alpha_2 |x_2|^3 \quad (\text{B.6})$$

$$W(x) = \beta_1 |x_1| - \beta_2 [x_1]^{1/2} [x_2] + \beta_3 |x_2|^2 \quad (\text{B.7})$$

Donde los coeficientes β de (B.7) son

$$\beta_1 = \left(\frac{3}{2}\alpha_1 k_1 - \bar{\alpha}_{12} k_2\right) \quad , \quad \beta_2 = \left(\frac{3}{2}\alpha_1 + \bar{\alpha}_{12} k_1\right) \quad , \quad \beta_3 = (\bar{\alpha}_{12} + 3\alpha_2 k_2 [x_1]^0 [x_2]^0) \quad (\text{B.8})$$

Aplicando los cambios de variable $|x_1| = z_1^2$ y $|x_2| = z_2$ dados por (2.2) a (B.6) y (B.7), se obtienen los conjuntos de formas

$$\begin{aligned} V_1(z) &= \alpha_1 z_1^3 - \bar{\alpha}_{12} z_1^2 z_2^5 + \alpha_2 z_2^3 \quad ; \quad x_1 x_2 > 0 \\ V_2(z) &= \alpha_1 z_1^3 + \bar{\alpha}_{12} z_1^2 z_2^5 + \alpha_2 z_2^3 \quad ; \quad x_1 x_2 < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \beta_1 z_1^2 - \beta_2 z_1 z_2 + \beta_3 z_2^2 \quad ; \quad x_1 x_2 > 0 \\ W_2(z) &= \beta_1 z_1^2 + \beta_2 z_1 z_2 + \beta_3 z_2^2 \quad ; \quad x_1 x_2 < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Con el Teorema de Pólya, sólo es necesario analizar las formas $V_1(z)$ y $W_1(z)$. Así pues, se construye el primer sistema de desigualdades lineales $A_{v1}\alpha > [0]$ asociado a (B.9). Mediante la expresión (2.10) se construye la matriz A_{v1}

$$A_{v1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La matriz A_{v1} ya está signada de acuerdo al Lema (2.3.1) y fue construida con exponente de Pólya $p_{v1} = 3$. Se han removido columnas de A_{v1} correspondientes a términos cuyas combinaciones de exponentes no figuran en $V_1(z)$. Al sistema $A_{v1}\alpha > [0]$ sólo falta añadir la condición $\bar{\alpha}_{12} > 0$. Por tanto, sólo se añade la fila $[0 \ 1 \ 0]$ al final de la matriz A_{v1} , con lo cual, el sistema de desigualdades total a resolver asociado a (B.9) es

$$[A_{v1}; [0 \ 1 \ 0]] \alpha > [0] \quad (\text{B.12})$$

Utilizando la secuencia $\mathbf{B} = \text{skelton}(\mathbf{A})$ del paquete de “Skeleton” sobre MATLAB, se introduce una matriz A que conforma un sistema de desigualdades lineales homogéneo $Ax \geq 0$, y el programa devuelve una matriz B cuyas filas son los rayos extremos que describen el cono poliédrico convexo donde viven todas las soluciones del sistema $Ax \geq 0$. Así pues, se ingresa toda la matriz de (B.12) y el programa devuelve el conjunto de rayos extremos

$$B_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0.375 & 0.125 \end{bmatrix}$$

Donde las columnas 1, 2, 3 corresponden a $\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2$ respectivamente. Se elige como solución dentro del cono la sumatoria de las columnas de B_v . Con lo cual, los valores de α resultan

$$\alpha_1 = 3, \quad \bar{\alpha}_{12} = 1.375, \quad \alpha_2 = 3.125. \quad (\text{B.13})$$

Los coeficientes β dados en (B.8), para la $W_1(z)$ pueden ordenarse como el producto $\beta = M_1(\alpha)\tilde{k}$,

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\alpha_1 & -\bar{\alpha}_{12} & 0 \\ \bar{\alpha}_{12} & 0 & \frac{3}{2}\alpha_1 \\ 0 & 3\alpha_2 & \bar{\alpha}_{12} \end{bmatrix} \tilde{k}, \quad (\text{B.14})$$

con $\tilde{k} = [k_1, k_2, 1]$. Así, con los coeficientes $\alpha = [\alpha_1, \bar{\alpha}_{12}, \alpha_2]^T$ ya conocidos, el segundo sistema de desigualdades lineales asociado a (B.10) a satisfacer es $A_{w1}M_1(\alpha)\tilde{k} > [0]$ dada la matriz

$$A_{w1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 15 & -6 & 1 \\ 20 & -15 & 6 \\ 15 & -20 & 15 \\ 6 & -15 & 20 \\ 1 & -6 & 15 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz A_{w1} ya está signada de acuerdo al Lema (2.3.1) y fue construida con exponente de Pólya $p_{w1} = 6$. Aunque no es necesario aplicar el Teorema de Pólya a la forma $W_2(z)$ en

(B.8), ésta debe satisfacer necesariamente $\beta_1, \beta_3 > 0$. La condición $\beta_1 > 0$ está ya incluida en el sistema $A_{w1}M_1(\alpha)\tilde{k} > [0]$. Para la forma $W_2(z)$, la condición $\beta_3 = \alpha_{12} - 3\alpha_2k_2 > 0$ debe considerarse. Así mismo, como el sistema $A_{w1}\tilde{k} > [0]$ no es homogéneo, se añade una variable k_3 en la última entrada de \tilde{k} para mantenerse en el contexto de las desigualdades descritas por conos poliédricos convexos. Esta variable k_3 se restringe a ser positiva.

Dado lo anterior, se agregan las filas $[0 \quad -3\alpha_2 \quad \bar{\alpha}_{12}]$ y $[0 \quad 0 \quad 1]$ al final de la matriz dada por el producto $A_{w1}M_1(\alpha)$, con lo cual, el sistema de desigualdades total a resolver asociado a (B.10) es

$$[A_{w1}M_1(\alpha); [0 \quad -3\alpha_2 \quad \bar{\alpha}_{12}]; [0 \quad 0 \quad 1]] \tilde{k} > [0] \quad (\text{B.15})$$

Procediendo como en (B.12), los rayos extremos que describen el conjunto solución de (B.15) son

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0.0682 & 0.465 \\ 1 & 0.0392 & 0.2669 \\ 1 & 0.0431 & 0.3523 \end{bmatrix}$$

Donde las columnas 1, 2, 3 corresponden a k_1, k_2, k_3 respectivamente. Como solución dentro del cono poliédrico convexo, se elige la sumatoria de las columnas de B_w y se normaliza el vector fila resultante respecto a su última entrada, esto es, tras resolver (B.15) para \tilde{k} , se fija $k_3 = 1$. Con lo cual, los valores de k resultan

$$k_1 = 2.767, \quad k_2 = 0.1387. \quad (\text{B.16})$$

Con los coeficientes (B.13) y los parámetros (B.16), se garantiza la positividad definida de las funciones (B.6) y (B.7), mostradas en las Figuras B.1 y B.2.

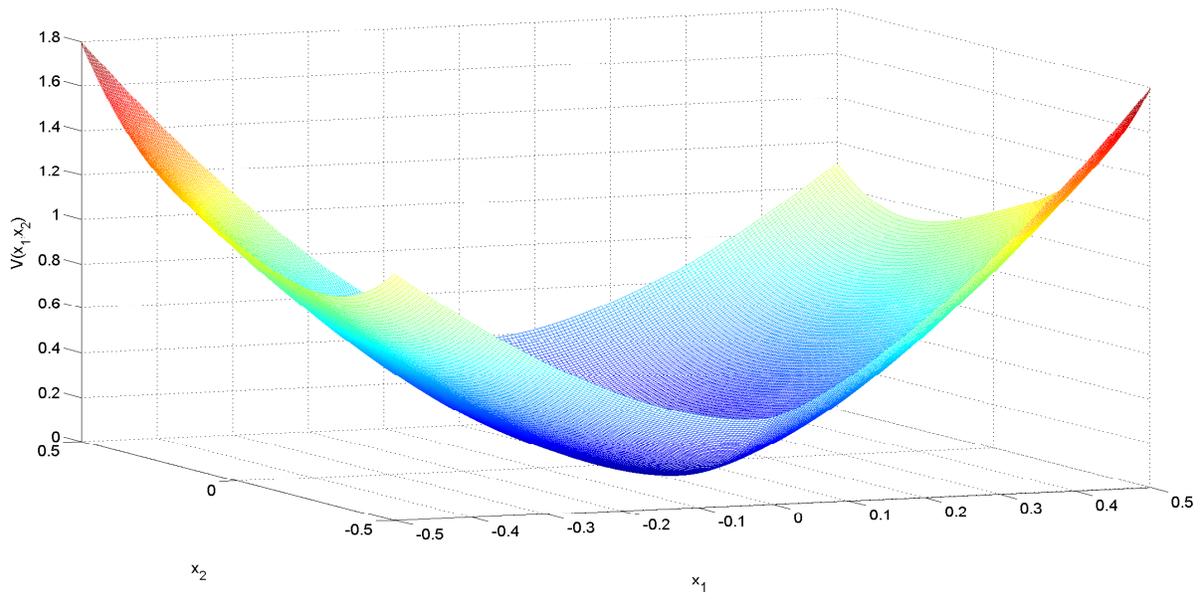


Figura B.1: $V(x)$ Super-Twisting

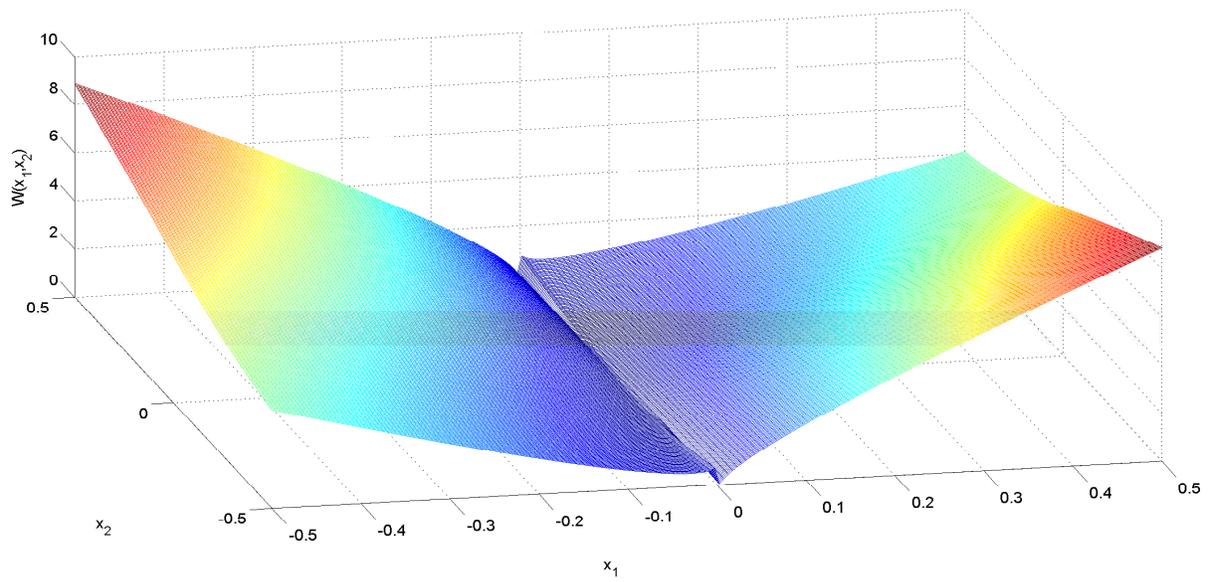


Figura B.2: $W(x)$ Super-Twisting

Apéndice C

Programa para calcular función de Lyapunov mediante SOS

```
clc
clear all
close all

syms x1 x2 x3 a1 a12 a2 a23 a3
ProgV = sosprogram([x1,x2,x3],[a1,a12,a2,a23,a3])

k1 = 5;
k2 = 3;
k3 = 0.02;

epv = 0.01;

V1=(a1-epv)*x1^10 - a12*x1^6*x2^4 + (a2-epv)*x2^10;
V1 = V1 - a23*x2^4*x3^6 + (a3-epv)*x3^10;
V2=(a1-epv)*x1^10 + a12*x1^6*x2^4 + (a2-epv)*x2^10;
V2 = V2 - a23*x2^4*x3^6 + (a3-epv)*x3^10;
V3=(a1-epv)*x1^10 - a12*x1^6*x2^4 + (a2-epv)*x2^10;
V3 = V3 + a23*x2^4*x3^6 + (a3-epv)*x3^10;

b1 = 5/3*a1*k1 - a12*k2;
b2 = 5/3*a1 + a12*k1;
b3 = 5/2*a2*k2;
b4 = a12;
b5 = a12;
b6 = 5/2*a2;
b7 = 3*a23*(k3);
b8 = a23*k2;
```

```

%% x1x2x3: +++/---
b9 = a23 + 5*a3*(k3); %Afectado

W1=(b1-epv)*x1^8 -b2*x1^4*x2^4 +b3*x1^2*x2^6 +(b4-epv)*x2^8 +b5*x1^6*x3^2;
W1 = W1 - b6*x2^6*x3^2 - b7*x2^4*x3^4 - b8*x1^2*x3^6 + (b9-epv)*x3^8;

%% x1x2x3: -++/+-
b9 = a23 - 5*a3*(k3); %Afectado

W2=(b1-epv)*x1^8 +b2*x1^4*x2^4 -b3*x1^2*x2^6 +(b4-epv)*x2^8 -b5*x1^6*x3^2;
W2 = W2 - b6*x2^6*x3^2 + b7*x2^4*x3^4 + b8*x1^2*x3^6 + (b9-epv)*x3^8;

%% x1x2x3: +-+/-+-
b9 = a23 + 5*a3*(k3); %Afectado

W3=(b1-epv)*x1^8 +b2*x1^4*x2^4 -b3*x1^2*x2^6 +(b4-epv)*x2^8 +b5*x1^6*x3^2;
W3 = W3 + b6*x2^6*x3^2 + b7*x2^4*x3^4 - b8*x1^2*x3^6 + (b9-epv)*x3^8;

%% x1x2x3: +-+/-+-
b9 = a23 - 5*a3*(k3); %Afectado

W4=(b1-epv)*x1^8 -b2*x1^4*x2^4 +b3*x1^2*x2^6 +(b4-epv)*x2^8 -b5*x1^6*x3^2;
W4 = W4 + b6*x2^6*x3^2 - b7*x2^4*x3^4 + b8*x1^2*x3^6 + (b9-epv)*x3^8;

ProgV = sosineq(ProgV,a12);
ProgV = sosineq(ProgV,a23);

ProgV = sosineq(ProgV,V1);
ProgV = sosineq(ProgV,V2);
ProgV = sosineq(ProgV,V3);

ProgV = sosineq(ProgV,W1);
ProgV = sosineq(ProgV,W2);
ProgV = sosineq(ProgV,W3);
ProgV = sosineq(ProgV,W4);

ProgV = sossolve(ProgV);

SOLV = sosgetsol(ProgV,V2);
SOLW = sosgetsol(ProgV,W4);

```

```
SOLV=1*SOLV;
[Qv,Zv,fv] = findsos(SOLV);
alfar=1*double(coeffs(SOLV));
alf1=alfar(5)+epv; alf12 = abs(alfar(4)); alf2=alfar(3)+epv;
alf23=abs(alfar(2)); alf3=alfar(1)+epv;

SOLW=1*SOLW;
[Qw,Zw,fw] = findsos(SOLW,'rational');

betar=1*double(coeffs(SOLW));
bet1=betar(9); bet2=betar(7); bet3=betar(6); bet4=betar(4); bet5=betar(8);
bet6=betar(3); bet7=betar(2); bet8=betar(5); bet9=betar(1);
```


Apéndice D

Formas componentes de las representaciones SOS

En este apéndice se muestran únicamente por simplicidad, las formas f_i que elevadas al cuadrado y sumadas, conforman a $\bar{V}_1(z)$, $\bar{V}_2(z)$ y $\bar{V}_3(z)$. Como los coeficientes de las formas $\bar{W}_1(z)$, $\bar{W}_2(z)$, $\bar{W}_3(z)$ y $\bar{W}_4(z)$ se encuentran totalmente determinados por los parámetros k propuestos y por los coeficientes α entregados por SOSTOOLS, se omiten las formas f_i componentes a las representaciones SOS de dichas formas.

D.1. Formas f_i componentes de $\bar{V}_1(z)$

$$\begin{aligned} f_1 = & 1.49287z_1^5 - 2.61124e^{-9}z_1^4z_2 - 0.339243z_1^3z_2^2 - 5.39749e^{-8}z_1^2z_2^3 - 0.368713z_1z_2^4 + \\ & + 6.52766e^{-8}z_2^5 - 3.57795e^{-10}z_1^4z_3 - 5.70149e^{-9}z_1^3z_2z_3 - 7.362e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + \\ & + 2.86782e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 4.21534e^{-9}z_2^4z_3 - 0.26408z_1^3z_3^2 - 1.47143e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + \\ & - 0.015126z_1z_2^2z_3^2 - 3.75997e^{-8}z_2^3z_3^2 + 2.71987e^{-9}z_1^2z_3^3 - 3.04926e^{-8}z_1z_2z_3^3 + \\ & - 5.73492e^{-9}z_2^2z_3^3 - 0.155303z_1z_3^4 + 2.91765e^{-10}z_2z_3^4 + 3.49469e^{-9}z_3^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 = & -2.61124e^{-9}z_1^5 + 1.10759z_1^4z_2 + 6.48165e^{-8}z_1^3z_2^2 - 0.40826z_1^2z_2^3 - 4.78972e^{-8}z_1z_2^4 + \\ & - 0.159339z_2^5 + 6.45152e^{-9}z_1^4z_3 + 1.52035e^{-8}z_1^3z_2z_3 - 8.66033e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + \\ & - 1.70457e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 6.59409e^{-9}z_2^4z_3 - 1.01776e^{-9}z_1^3z_3^2 - 0.148734z_1^2z_2z_3^2 + \\ & + 8.33268e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 + 0.0310788z_2^3z_3^2 + 1.86185e^{-8}z_1^2z_3^3 + 3.23109e^{-9}z_1z_2z_3^3 + \\ & - 3.7568e^{-10}z_2^2z_3^3 - 1.87019e^{-9}z_1z_3^4 + 0.00167826z_2z_3^4 - 1.00616e^{-8}z_3^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 = & -0.339243z_1^5 + 6.48165e^{-8}z_1^4z_2 + 1.05756z_1^3z_2^2 - 2.07055e^{-8}z_1^2z_2^3 - 0.354517z_1z_2^4 + \\
& - 3.16876e^{-8}z_2^5 - 4.39506e^{-9}z_1^4z_3 - 1.22896e^{-8}z_1^3z_2z_3 - 1.44363e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 1.32366e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 1.52136e^{-8}z_2^4z_3 - 0.0497276z_1^3z_3^2 + 1.07724e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 0.084207z_1z_2^2z_3^2 - 3.36181e^{-9}z_2^3z_3^2 - 1.25376e^{-9}z_1^2z_3^3 - 1.69593e^{-8}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 1.86227e^{-9}z_2^2z_3^3 + 0.00553409z_1z_3^4 + 3.23153e^{-8}z_2z_3^4 + 9.18359e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & -5.39749e^{-8}z_1^5 - 0.40826z_1^4z_2 - 2.07055e^{-8}z_1^3z_2^2 + 1.05114z_1^2z_2^3 + 2.0995e^{-8}z_1z_2^4 + \\
& - 0.318025z_2^5 - 1.10327e^{-8}z_1^4z_3 + 1.52524e^{-8}z_1^3z_2z_3 - 2.86511e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& - 1.19436e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 3.42111e^{-9}z_2^4z_3 + 3.67942e^{-8}z_1^3z_3^2 - 0.114761z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 2.22496e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 + 0.00673981z_2^3z_3^2 + 1.49302e^{-8}z_1^2z_3^3 - 4.33379e^{-9}z_1z_2z_3^3 + \\
& + 1.28627e^{-8}z_2^2z_3^3 + 1.23033e^{-8}z_1z_3^4 + 0.0322823z_2z_3^4 + 3.11023e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 = & -0.368713z_1^5 - 4.78972e^{-8}z_1^4z_2 - 0.354517z_1^3z_2^2 + 2.0995e^{-8}z_1^2z_2^3 + 0.830594z_1z_2^4 + \\
& + 5.98794e^{-9}z_2^5 + 1.03068e^{-8}z_1^4z_3 - 8.29062e^{-9}z_1^3z_2z_3 + 8.03998e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 5.98417e^{-9}z_1z_2^3z_3 - 8.38168e^{-9}z_2^4z_3 + 0.00702601z_1^3z_3^2 + 6.54888e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 0.181599z_1z_2^2z_3^2 + 1.32286e^{-8}z_2^3z_3^2 - 3.23399e^{-9}z_1^2z_3^3 - 5.917e^{-10}z_1z_2z_3^3 + \\
& + 1.07739e^{-8}z_2^2z_3^3 - 0.0124055z_1z_3^4 - 1.21327e^{-8}z_2z_3^4 - 1.54693e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 = & 6.52766e^{-8}z_1^5 - 0.159339z_1^4z_2 - 3.16876e^{-8}z_1^3z_2^2 - 0.318025z_1^2z_2^3 + 5.98794e^{-9}z_1z_2^4 + \\
& + 0.684335z_2^5 - 5.81603e^{-10}z_1^4z_3 - 1.52258e^{-8}z_1^3z_2z_3 + 5.379e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 5.69319e^{-9}z_1z_2^3z_3 - 2.53526e^{-9}z_2^4z_3 + 7.63877e^{-10}z_1^3z_3^2 - 0.00248436z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 2.80303e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 - 0.274701z_2^3z_3^2 + 6.21209e^{-9}z_1^2z_3^3 - 1.53907e^{-8}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 9.00272e^{-9}z_2^2z_3^3 + 8.62291e^{-9}z_1z_3^4 - 0.121141z_2z_3^4 - 1.38769e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7 = & -3.57795e^{-10}z_1^5 + 6.45152e^{-9}z_1^4z_2 - 4.39506e^{-9}z_1^3z_2^2 - 1.10327e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& + 1.03068e^{-8}z_1z_2^4 - 5.81603e^{-10}z_2^5 + 1.10061z_1^4z_3 + 5.68091e^{-9}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.246435z_1^2z_2^2z_3 - 6.79882e^{-9}z_1z_2^3z_3 - 0.0842795z_2^4z_3 - 4.94888e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& + 1.13942e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 9.87123e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 - 1.29784e^{-9}z_2^3z_3^2 - 0.210104z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.27823e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 0.0329728z_2^2z_3^3 - 9.21167e^{-9}z_1z_3^4 - 1.41009e^{-10}z_2z_3^4 - 0.20782z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_8 = & -5.70149e^{-9}z_1^5 + 1.52035e^{-8}z_1^4z_2 - 1.22896e^{-8}z_1^3z_2^2 + 1.52524e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& - 8.29062e^{-9}z_1z_2^4 - 1.52258e^{-8}z_2^5 + 5.68091e^{-9}z_1^4z_3 + 1.08822z_1^3z_2z_3 + \\
& - 5.07433e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 - 0.361672z_1z_2^3z_3 - 4.00828e^{-10}z_2^4z_3 + 9.43073e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& + 6.41732e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + 2.05792e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 - 2.3291e^{-9}z_2^3z_3^2 - 5.84056e^{-10}z_1^2z_3^3 + \\
& - 0.194434z_1z_2z_3^3 - 7.87015e^{-10}z_2^2z_3^3 + 2.09539e^{-8}z_1z_3^4 - 1.56421e^{-8}z_2z_3^4 + 1.78878e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9 = & -7.362e^{-9}z_1^5 - 8.66033e^{-9}z_1^4z_2 - 1.44363e^{-8}z_1^3z_2^2 - 2.86511e^{-9}z_1^2z_2^3 + \\
& + 8.03998e^{-9}z_1z_2^4 + 5.379e^{-9}z_2^5 - 0.246435z_1^4z_3 - 5.07433e^{-9}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 1.11621z_1^2z_2^2z_3 + 2.15682e^{-9}z_1z_2^3z_3 - 0.246968z_2^4z_3 + 5.51254e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& - 2.48599e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + 3.23598e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 - 2.79018e^{-9}z_2^3z_3^2 - 0.120818z_1^2z_3^3 + \\
& + 4.69395e^{-9}z_1z_2z_3^3 - 0.0922818z_2^2z_3^3 + 1.8997e^{-8}z_1z_3^4 + 1.02561e^{-8}z_2z_3^4 - 0.0814097z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{10} = & 2.86782e^{-8}z_1^5 - 1.70457e^{-8}z_1^4z_2 + 1.32366e^{-8}z_1^3z_2^2 - 1.19436e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& + 5.98417e^{-9}z_1z_2^4 + 5.69319e^{-9}z_2^5 - 6.79882e^{-9}z_1^4z_3 - 0.361672z_1^3z_2z_3 + \\
& + 2.15682e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + 0.899917z_1z_2^3z_3 + 1.33954e^{-8}z_2^4z_3 - 1.51984e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& + 1.36732e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 2.97828e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 + 9.47323e^{-9}z_2^3z_3^2 - 1.03023e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& - 0.252981z_1z_2z_3^3 - 1.43181e^{-8}z_2^2z_3^3 - 3.51039e^{-8}z_1z_3^4 + 1.24927e^{-8}z_2z_3^4 - 1.27391e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11} = & 4.21534e^{-9}z_1^5 - 6.5941e^{-9}z_1^4z_2 + 1.52136e^{-8}z_1^3z_2^2 - 3.42111e^{-9}z_1^2z_2^3 + \\
& - 8.38168e^{-9}z_1z_2^4 - 2.53526e^{-9}z_2^5 - 0.0842795z_1^4z_3 - 4.00828e^{-10}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.246968z_1^2z_2^2z_3 + 1.33954e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 0.818357z_2^4z_3 - 3.62029e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& + 8.26702e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 - 1.44603e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 + 1.38271e^{-8}z_2^3z_3^2 - 0.0442786z_1^2z_3^3 + \\
& - 2.96217e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 0.294778z_2^2z_3^3 - 1.17764e^{-8}z_1z_3^4 + 4.39556e^{-9}z_2z_3^4 - 0.354763z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{12} = & -0.26408z_1^5 - 1.01776e^{-9}z_1^4z_2 - 0.0497276z_1^3z_2^2 + 3.67942e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& + 0.00702601z_1z_2^4 + 7.63877e^{-10}z_2^5 - 4.94888e^{-9}z_1^4z_3 + 9.43073e^{-9}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 5.51254e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 - 1.51984e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 3.62029e^{-9}z_2^4z_3 + 1.23753z_1^3z_3^2 + \\
& - 9.62824e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 - 0.171029z_1z_2^2z_3^2 - 3.9818e^{-8}z_2^3z_3^2 + 1.43877e^{-9}z_1^2z_3^3 + \\
& + 6.89266e^{-9}z_1z_2z_3^3 - 8.62395e^{-9}z_2^2z_3^3 - 0.131233z_1z_3^4 - 1.71889e^{-8}z_2z_3^4 - 1.44268e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{13} = & -1.47143e^{-9}z_1^5 - 0.148734z_1^4z_2 + 1.07724e^{-8}z_1^3z_2^2 - 0.114761z_1^2z_2^3 + \\
& + 6.54887e^{-9}z_1z_2^4 - 0.00248436z_2^5 + 1.13942e^{-8}z_1^4z_3 + 6.41732e^{-9}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 2.48599e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + 1.36732e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 8.26702e^{-9}z_2^4z_3 - 9.62824e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& + 1.24399z_1^2z_2z_3^2 - 3.83201e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 - 0.175215z_2^3z_3^2 - 1.06473e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& - 7.12162e^{-9}z_1z_2z_3^3 - 2.6438e^{-8}z_2^2z_3^3 - 3.74509e^{-8}z_1z_3^4 - 0.132367z_2z_3^4 + 9.63303e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{14} = & -0.015126z_1^5 + 8.33268e^{-9}z_1^4z_2 - 0.084207z_1^3z_2^2 - 2.22496e^{-9}z_1^2z_2^3 + \\
& - 0.181599z_1z_2^4 - 2.80303e^{-8}z_2^5 - 9.87123e^{-9}z_1^4z_3 + 2.05792e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 3.23598e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 - 2.97828e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 1.44603e^{-9}z_2^4z_3 - 0.171029z_1^3z_3^2 + \\
& - 3.83201e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + 1.18134z_1z_2^2z_3^2 + 5.61324e^{-8}z_2^3z_3^2 - 1.81641e^{-9}z_1^2z_3^3 + \\
& + 3.3492e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 6.35615e^{-9}z_2^2z_3^3 - 0.161126z_1z_3^4 - 6.53585e^{-9}z_2z_3^4 + 7.60292e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{15} = & -3.75997e^{-8}z_1^5 + 0.0310788z_1^4z_2 - 3.36181e^{-9}z_1^3z_2^2 + 0.00673981z_1^2z_2^3 + \\
& + 1.32286e^{-8}z_1z_2^4 - 0.274701z_2^5 - 1.29784e^{-9}z_1^4z_3 - 2.3291e^{-9}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 2.79018e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 + 9.47323e^{-9}z_1z_2^3z_3 + 1.38271e^{-8}z_2^4z_3 - 3.9818e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& - 0.175215z_1^2z_2z_3^2 + 5.61324e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 + 1.1149z_2^3z_3^2 - 3.14591e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& + 2.93459e^{-8}z_1z_2z_3^3 + 1.88064e^{-8}z_2^2z_3^3 + 6.43237e^{-9}z_1z_3^4 - 0.203503z_2z_3^4 - 9.51729e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{16} = & 2.71987e^{-9}z_1^5 + 1.86185e^{-8}z_1^4z_2 - 1.25376e^{-9}z_1^3z_2^2 + 1.49302e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& - 3.23399e^{-9}z_1z_2^4 + 6.21209e^{-9}z_2^5 - 0.210104z_1^4z_3 - 5.84056e^{-10}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.120818z_1^2z_2^2z_3 - 1.03023e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 0.0442786z_2^4z_3 + 1.43877e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& - 1.06473e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 1.81641e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 - 3.14591e^{-8}z_2^3z_3^2 + 1.3454z_1^2z_3^3 + \\
& + 2.15173e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 0.0503497z_2^2z_3^3 + 1.0794e^{-9}z_1z_3^4 - 5.13659e^{-8}z_2z_3^4 - 0.235787z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{17} = & -3.04926e^{-8}z_1^5 + 3.23109e^{-9}z_1^4z_2 - 1.69593e^{-8}z_1^3z_2^2 - 4.3338e^{-9}z_1^2z_2^3 + \\
& - 5.917e^{-10}z_1z_2^4 - 1.53907e^{-8}z_2^5 + 1.27823e^{-8}z_1^4z_3 - 0.194434z_1^3z_2z_3 + \\
& + 4.69395e^{-9}z_1^2z_2^2z_3 - 0.252981z_1z_2^3z_3 - 2.96217e^{-8}z_2^4z_3 + 6.89266e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& - 7.12162e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + 3.3492e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 + 2.93459e^{-8}z_2^3z_3^2 + 2.15173e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.26311z_1z_2z_3^3 + 1.53063e^{-8}z_2^2z_3^3 + 3.2916e^{-8}z_1z_3^4 + 1.01673e^{-8}z_2z_3^4 + 9.59504e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{18} = & -5.73492e^{-9}z_1^5 - 3.75681e^{-10}z_1^4z_2 - 1.86227e^{-9}z_1^3z_2^2 + 1.28627e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& + 1.07739e^{-8}z_1z_2^4 - 9.00272e^{-9}z_2^5 - 0.0329728z_1^4z_3 - 7.87015e^{-10}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.0922818z_1^2z_2^2z_3 - 1.43181e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 0.294778z_2^4z_3 - 8.62395e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& - 2.6438e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 6.35615e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 + 1.88064e^{-8}z_2^3z_3^2 - 0.0503497z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.53063e^{-8}z_1z_2z_3^3 + 1.27614z_2^2z_3^3 - 2.52731e^{-8}z_1z_3^4 + 1.31981e^{-8}z_2z_3^4 - 0.255213z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{19} = & -0.155303z_1^5 - 1.87019e^{-9}z_1^4z_2 + 0.00553409z_1^3z_2^2 + 1.23033e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& - 0.0124055z_1z_2^4 + 8.62291e^{-9}z_2^5 - 9.21167e^{-9}z_1^4z_3 + 2.09539e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 1.8997e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 - 3.51039e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 1.17764e^{-8}z_2^4z_3 - 0.131233z_1^3z_3^2 + \\
& - 3.74509e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 0.161126z_1z_2^2z_3^2 + 6.43237e^{-9}z_2^3z_3^2 + 1.0794e^{-9}z_1^2z_3^3 + \\
& + 3.2916e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 2.52731e^{-8}z_2^2z_3^3 + 1.30907z_1z_3^4 - 1.66103e^{-8}z_2z_3^4 - 2.30035e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{20} = & 2.91765e^{-10}z_1^5 + 0.00167826z_1^4z_2 + 3.23153e^{-8}z_1^3z_2^2 + 0.0322823z_1^2z_2^3 + \\
& - 1.21327e^{-8}z_1z_2^4 - 0.121141z_2^5 - 1.41009e^{-10}z_1^4z_3 - 1.56421e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 1.02561e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + 1.24927e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 4.39556e^{-9}z_2^4z_3 - 1.71889e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& - 0.132367z_1^2z_2z_3^2 - 6.53585e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 - 0.203503z_2^3z_3^2 - 5.13659e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.01673e^{-8}z_1z_2z_3^3 + 1.31981e^{-8}z_2^2z_3^3 - 1.66103e^{-8}z_1z_3^4 + 1.31678z_2z_3^4 - 2.36986e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} = & 3.49469e^{-9}z_1^5 - 1.00616e^{-8}z_1^4z_2 + 9.18359e^{-9}z_1^3z_2^2 + 3.11023e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& - 1.54693e^{-8}z_1z_2^4 - 1.38769e^{-8}z_2^5 - 0.20782z_1^4z_3 + 1.78878e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.0814097z_1^2z_2^2z_3 - 1.27391e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 0.354763z_2^4z_3 - 1.44268e^{-9}z_1^3z_3^2 + \\
& + 9.63303e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + 7.60292e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 - 9.51729e^{-9}z_2^3z_3^2 - 0.235787z_1^2z_3^3 + \\
& + 9.59504e^{-9}z_1z_2z_3^3 - 0.255213z_2^2z_3^3 - 2.30035e^{-9}z_1z_3^4 - 2.36986e^{-9}z_2z_3^4 + 2.77965z_3^5
\end{aligned}$$

La operación $V_1(z) = \bar{V}_1(z) + \epsilon \|z\|_{10}^{10} = \sum_{i=1}^{21} f_i^2 + \epsilon \|z\|_{10}^{10}$ resulta

$$V_1(z) = 2.5838z_1^{10} - 1.72504z_1^6z_2^4 + 6.94985e^{-1}z_2^{10} - 1.38984z_2^4z_3^6 + 8.03286z_3^{10}$$

D.2. Formas f_i componentes de $\bar{V}_2(z)$

$$\begin{aligned}
f_1 = & 1.53529z_1^5 + 1.14093e^{-11}z_1^4z_2 - 0.276422z_1^3z_2^2 + 1.47265e^{-10}z_1^2z_2^3 - 0.0353655z_1z_2^4 + \\
& + 6.72258e^{-11}z_2^5 - 2.134e^{-12}z_1^4z_3 + 1.52761e^{-11}z_1^3z_2z_3 + 9.17871e^{-12}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& - 7.50521e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 1.36567e^{-11}z_2^4z_3 - 0.298662z_1^3z_3^2 - 2.93866e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 0.0915513z_1z_2^2z_3^2 - 1.67816e^{-10}z_2^3z_3^2 - 1.79745e^{-11}z_1^2z_3^3 + 1.28819e^{-11}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 3.68301e^{-11}z_2^2z_3^3 - 0.203565z_1z_3^4 - 9.69727e^{-11}z_2z_3^4 - 1.05663e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & 1.14089e^{-11}z_1^5 + 1.22187z_1^4z_2 - 1.35175e^{-10}z_1^3z_2^2 - 0.145783z_1^2z_2^3 - 5.45374e^{-11}z_1z_2^4 + \\
& - 0.0804419z_2^5 - 1.24603e^{-11}z_1^4z_3 - 2.01805e^{-11}z_1^3z_2z_3 + 1.7757e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& - 4.40001e^{-11}z_1z_2^3z_3 + 2.08718e^{-11}z_2^4z_3 + 1.33922e^{-10}z_1^3z_3^2 - 0.15415z_1^2z_2z_3^2 + \\
& + 2.5713e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 0.0158148z_2^3z_3^2 - 4.16731e^{-11}z_1^2z_3^3 + 4.26849e^{-11}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 2.07742e^{-11}z_2^2z_3^3 + 6.8092e^{-11}z_1z_3^4 - 0.053141z_2z_3^4 + 1.4625e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 = & -0.276422z_1^5 - 1.35175e^{-10}z_1^4z_2 + 1.43367z_1^3z_2^2 - 1.35969e^{-11}z_1^2z_2^3 - 0.311637z_1z_2^4 + \\
& + 9.12382e^{-12}z_2^5 - 8.04825e^{-13}z_1^4z_3 + 5.31148e^{-11}z_1^3z_2z_3 - 3.5506e^{-12}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& - 1.12937e^{-11}z_1z_2^3z_3 + 7.45332e^{-12}z_2^4z_3 - 0.0587725z_1^3z_3^2 + 1.21663e^{-10}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 0.106952z_1z_2^2z_3^2 - 1.21557e^{-11}z_2^3z_3^2 - 1.61514e^{-11}z_1^2z_3^3 + 5.05288e^{-12}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 3.18176e^{-12}z_2^2z_3^3 - 0.0420564z_1z_3^4 - 8.25393e^{-11}z_2z_3^4 - 2.74581e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_4 = & 1.47265e^{-10}z_1^5 - 0.145783z_1^4z_2 - 1.3597e^{-11}z_1^3z_2^2 + 1.21042z_1^2z_2^3 - 1.60695e^{-11}z_1z_2^4 + \\
& - 0.254061z_2^5 - 1.4078e^{-12}z_1^4z_3 + 5.56808e^{-11}z_1^3z_2z_3 + 1.39154e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 3.26061e^{-11}z_1z_2^3z_3 + 1.54465e^{-11}z_2^4z_3 + 4.26862e^{-11}z_1^3z_3^2 - 0.132024z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 5.07734e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 0.0265716z_2^3z_3^2 - 1.67842e^{-11}z_1^2z_3^3 - 4.95985e^{-11}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 2.80781e^{-11}z_2^2z_3^3 + 9.62955e^{-11}z_1z_3^4 - 0.00990449z_2z_3^4 + 3.37174e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_5 = & -0.0353655z_1^5 - 5.45373e^{-11}z_1^4z_2 - 0.311637z_1^3z_2^2 - 1.60696e^{-11}z_1^2z_2^3 + 0.880035z_1z_2^4 + \\
& + 1.20213e^{-11}z_2^5 - 6.1763e^{-12}z_1^4z_3 - 2.83684e^{-11}z_1^3z_2z_3 + 2.06105e^{-12}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 1.09469e^{-11}z_1z_2^3z_3 + 1.60972e^{-11}z_2^4z_3 - 0.0532604z_1^3z_3^2 - 8.05962e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 0.213421z_1z_2^2z_3^2 + 5.39614e^{-11}z_2^3z_3^2 - 6.44527e^{-12}z_1^2z_3^3 - 1.16735e^{-11}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 1.44717e^{-12}z_2^2z_3^3 - 0.0805798z_1z_3^4 + 5.43367e^{-11}z_2z_3^4 + 2.23075e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_6 = & 6.72256e^{-11}z_1^5 - 0.0804419z_1^4z_2 + 9.12365e^{-12}z_1^3z_2^2 - 0.254061z_1^2z_2^3 + 1.20215e^{-11}z_1z_2^4 + \\
& + 0.711406z_2^5 + 1.58087e^{-11}z_1^4z_3 - 5.26554e^{-11}z_1^3z_2z_3 - 2.63735e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& - 1.98138e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 1.72146e^{-12}z_2^4z_3 + 7.28607e^{-11}z_1^3z_3^2 - 0.0258593z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 1.72172e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 0.298887z_2^3z_3^2 + 8.68084e^{-12}z_1^2z_3^3 - 2.90528e^{-11}z_1z_2z_3^3 + \\
& + 2.65118e^{-11}z_2^2z_3^3 + 1.07317e^{-11}z_1z_3^4 - 0.133662z_2z_3^4 - 1.76617e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7 = & -2.13403e^{-12}z_1^5 - 1.24604e^{-11}z_1^4z_2 - 8.04779e^{-13}z_1^3z_2^2 - 1.40789e^{-12}z_1^2z_2^3 + \\
& - 6.1763e^{-12}z_1z_2^4 + 1.58087e^{-11}z_2^5 + 1.23425z_1^4z_3 - 7.20608e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.138351z_1^2z_2^2z_3 + 2.60628e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 0.00896988z_2^4z_3 + 1.66051e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& - 2.55655e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 - 3.97143e^{-12}z_1z_2^2z_3^2 + 5.15267e^{-12}z_2^3z_3^2 - 0.201889z_1^2z_3^3 + \\
& - 1.00617e^{-11}z_1z_2z_3^3 - 0.036396z_2^2z_3^3 - 1.76457e^{-11}z_1z_3^4 - 6.79776e^{-12}z_2z_3^4 - 0.250923z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_8 = & 1.52762e^{-11}z_1^5 - 2.01804e^{-11}z_1^4z_2 + 5.31151e^{-11}z_1^3z_2^2 + 5.5681e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& - 2.83685e^{-11}z_1z_2^4 - 5.26555e^{-11}z_2^5 - 7.20607e^{-11}z_1^4z_3 + 1.30225z_1^3z_2z_3 + \\
& - 5.34807e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 - 0.224477z_1z_2^3z_3 + 9.38349e^{-12}z_2^4z_3 + 4.22628e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& + 3.69223e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + 2.67095e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 1.69496e^{-11}z_2^3z_3^2 - 3.06012e^{-11}z_1^2z_3^3 + \\
& - 0.177863z_1z_2z_3^3 + 8.44953e^{-11}z_2^2z_3^3 + 2.24153e^{-11}z_1z_3^4 + 2.40081e^{-11}z_2z_3^4 + 3.59306e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9 = & 9.17869e^{-12}z_1^5 + 1.77573e^{-11}z_1^4z_2 - 3.55062e^{-12}z_1^3z_2^2 + 1.39152e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& + 2.06107e^{-12}z_1z_2^4 - 2.63736e^{-11}z_2^5 - 0.138351z_1^4z_3 - 5.34807e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 1.32921z_1^2z_2^2z_3 + 7.99359e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 0.166641z_2^4z_3 - 2.36325e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& + 5.55762e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + 2.17983e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 + 3.34555e^{-11}z_2^3z_3^2 - 0.114195z_1^2z_3^3 + \\
& - 2.95086e^{-11}z_1z_2z_3^3 - 0.0894394z_2^2z_3^3 - 3.02267e^{-11}z_1z_3^4 - 5.19465e^{-11}z_2z_3^4 - 0.155897z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{10} = & -7.5052e^{-11}z_1^5 - 4.39999e^{-11}z_1^4z_2 - 1.12936e^{-11}z_1^3z_2^2 + 3.2606e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& + 1.09469e^{-11}z_1z_2^4 - 1.98137e^{-11}z_2^5 + 2.60626e^{-11}z_1^4z_3 - 0.224477z_1^3z_2z_3 + \\
& + 7.99359e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + 1.08192z_1z_2^3z_3 - 4.64193e^{-11}z_2^4z_3 - 5.57168e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& + 5.90019e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + 2.52864e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 + 2.6505e^{-11}z_2^3z_3^2 + 3.88042e^{-11}z_1^2z_3^3 + \\
& - 0.238226z_1z_2z_3^3 - 3.3295e^{-11}z_2^2z_3^3 - 3.62662e^{-11}z_1z_3^4 - 6.94827e^{-11}z_2z_3^4 + 1.35656e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11} = & -1.36567e^{-11}z_1^5 + 2.08718e^{-11}z_1^4z_2 + 7.45339e^{-12}z_1^3z_2^2 + 1.54464e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& + 1.60972e^{-11}z_1z_2^4 - 1.72173e^{-12}z_2^5 - 0.00896988z_1^4z_3 + 9.3837e^{-12}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.166641z_1^2z_2^2z_3 - 4.64191e^{-11}z_1z_2^3z_3 + 0.898731z_1^4z_3 - 3.19513e^{-12}z_1^3z_3^2 + \\
& - 2.80788e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 - 1.96056e^{-12}z_1z_2^2z_3^2 - 2.77001e^{-11}z_2^3z_3^2 - 0.0290335z_1^2z_3^3 + \\
& + 3.9443e^{-12}z_1z_2z_3^3 - 0.319801z_2^2z_3^3 - 3.06177e^{-11}z_1z_3^4 + 2.1658e^{-11}z_2z_3^4 - 0.381767z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{12} = & -0.298662z_1^5 + 1.33922e^{-10}z_1^4z_2 - 0.0587725z_1^3z_2^2 + 4.26864e^{-11}z_1^2z_2^3 - 0.0532604z_1z_2^4 + \\
& + 7.2861e^{-11}z_2^5 + 1.66052e^{-11}z_1^4z_3 + 4.2263e^{-11}z_1^3z_2z_3 - 2.36325e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& - 5.57168e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 3.19509e^{-12}z_2^4z_3 + 1.37496z_1^3z_3^2 + 5.7747e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 0.0947425z_1z_2^2z_3^2 - 2.02934e^{-10}z_2^3z_3^2 + 1.51058e^{-11}z_1^2z_3^3 - 9.62949e^{-12}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 1.4221e^{-11}z_2^2z_3^3 - 0.0911732z_1z_3^4 - 8.72447e^{-11}z_2z_3^4 - 1.50919e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{13} = & -2.93867e^{-11}z_1^5 - 0.15415z_1^4z_2 + 1.21663e^{-10}z_1^3z_2^2 - 0.132024z_1^2z_2^3 - 8.05962e^{-11}z_1z_2^4 + \\
& - 0.0258593z_2^5 - 2.55656e^{-11}z_1^4z_3 + 3.69222e^{-11}z_1^3z_2z_3 + 5.55764e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 5.90019e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 2.80786e^{-11}z_2^4z_3 + 5.77469e^{-11}z_1^3z_3^2 + 1.3869z_1^2z_2z_3^2 + \\
& + 9.95323e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 0.100227z_2^3z_3^2 - 3.36328e^{-11}z_1^2z_3^3 + 6.9514e^{-11}z_1z_2z_3^3 + \\
& + 5.26415e^{-12}z_2^2z_3^3 + 4.0036e^{-11}z_1z_3^4 - 0.0959015z_2z_3^4 - 2.39425e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{14} = & -0.0915513z_1^5 + 2.5713e^{-11}z_1^4z_2 - 0.106952z_1^3z_2^2 - 5.07735e^{-11}z_1^2z_2^3 - 0.213421z_1z_2^4 + \\
& - 1.7217e^{-11}z_2^5 - 3.97147e^{-12}z_1^4z_3 + 2.67096e^{-11}z_1^3z_2z_3 + 2.17983e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 2.52867e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 1.96058e^{-12}z_2^4z_3 - 0.0947425z_1^3z_3^2 + 9.95323e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& + 1.34118z_1z_2^2z_3^2 - 3.36494e^{-11}z_2^3z_3^2 - 1.44126e^{-11}z_1^2z_3^3 + 8.15906e^{-12}z_1z_2z_3^3 + \\
& - 3.23892e^{-12}z_2^2z_3^3 - 0.112071z_1z_3^4 + 3.45534e^{-11}z_2z_3^4 - 5.40086e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{15} = & -1.67816e^{-10}z_1^5 - 0.0158148z_1^4z_2 - 1.21556e^{-11}z_1^3z_2^2 - 0.0265716z_1^2z_2^3 + \\
& + 5.39614e^{-11}z_1z_2^4 - 0.298887z_2^5 + 5.1527e^{-12}z_1^4z_3 - 1.69498e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 3.34556e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 + 2.65051e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 2.77e^{-11}z_2^4z_3 - 2.02934e^{-10}z_1^3z_3^2 + \\
& - 0.100227z_1^2z_2z_3^2 - 3.36495e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 + 1.22191z_2^3z_3^2 + 2.00229e^{-11}z_1^2z_3^3 + \\
& + 6.42775e^{-11}z_1z_2z_3^3 + 7.10326e^{-12}z_2^2z_3^3 - 8.5655e^{-11}z_1z_3^4 - 0.187141z_2z_3^4 - 2.46162e^{-12}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{16} = & -1.79745e^{-11}z_1^5 - 4.16732e^{-11}z_1^4z_2 - 1.61514e^{-11}z_1^3z_2^2 - 1.67842e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& - 6.44524e^{-12}z_1z_2^4 + 8.68081e^{-12}z_2^5 - 0.201889z_1^4z_3 - 3.06011e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.114195z_1^2z_2^2z_3 + 3.88041e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 0.0290335z_2^4z_3 + 1.51057e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& - 3.36328e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 - 1.44125e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 + 2.00229e^{-11}z_2^3z_3^2 + 1.4332z_1^2z_3^3 + \\
& - 1.26794e^{-11}z_1z_2z_3^3 - 0.0320549z_2^2z_3^3 + 1.36667e^{-11}z_1z_3^4 + 1.95721e^{-11}z_2z_3^4 - 0.265108z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{17} = & 1.2882e^{-11}z_1^5 + 4.26849e^{-11}z_1^4z_2 + 5.05304e^{-12}z_1^3z_2^2 - 4.95985e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& - 1.16736e^{-11}z_1z_2^4 - 2.90528e^{-11}z_2^5 - 1.00616e^{-11}z_1^4z_3 - 0.177863z_1^3z_2z_3 + \\
& - 2.95089e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 - 0.238226z_1z_2^3z_3 + 3.94435e^{-12}z_2^4z_3 - 9.6296e^{-12}z_1^3z_3^2 + \\
& + 6.9514e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 + 8.1589e^{-12}z_1z_2^2z_3^2 + 6.42774e^{-11}z_2^3z_3^2 - 1.26794e^{-11}z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.3582z_1z_2z_3^3 + 1.476e^{-11}z_2^2z_3^3 + 8.80542e^{-12}z_1z_3^4 + 5.45315e^{-11}z_2z_3^4 + 4.13454e^{-11}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{18} = & -3.68301e^{-11}z_1^5 - 2.07742e^{-11}z_1^4z_2 - 3.1817e^{-12}z_1^3z_2^2 - 2.80782e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& - 1.44716e^{-12}z_1z_2^4 + 2.65118e^{-11}z_2^5 - 0.036396z_1^4z_3 + 8.44954e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.0894394z_1^2z_2^2z_3 - 3.32949e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 0.319801z_2^4z_3 - 1.4221e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& + 5.26415e^{-12}z_1^2z_2z_3^2 - 3.23889e^{-12}z_1z_2^2z_3^2 + 7.10328e^{-12}z_2^3z_3^2 - 0.0320549z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.47602e^{-11}z_1z_2z_3^3 + 1.35711z_2^2z_3^3 + 1.74905e^{-11}z_1z_3^4 + 4.82617e^{-12}z_2z_3^4 - 0.280079z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{19} = & -0.203565z_1^5 + 6.80919e^{-11}z_1^4z_2 - 0.0420564z_1^3z_2^2 + 9.62955e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& - 0.0805798z_1z_2^4 + 1.07314e^{-11}z_2^5 - 1.76458e^{-11}z_1^4z_3 + 2.24151e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 3.02268e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 - 3.62664e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 3.06177e^{-11}z_2^4z_3 - 0.0911732z_1^3z_3^2 + \\
& + 4.0036e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 - 0.112071z_1z_2^2z_3^2 - 8.56549e^{-11}z_2^3z_3^2 + 1.36667e^{-11}z_1^2z_3^3 + \\
& + 8.8053e^{-12}z_1z_2z_3^3 + 1.74905e^{-11}z_2^2z_3^3 + 1.40639z_1z_3^4 - 6.96119e^{-11}z_2z_3^4 - 5.09332e^{-12}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{20} = & 9.69727e^{-11}z_1^5 - 0.053141z_1^4z_2 - 8.25392e^{-11}z_1^3z_2^2 - 0.00990449z_1^2z_2^3 + \\
& + 5.43367e^{-11}z_1z_2^4 - 0.133662z_2^5 - 6.79774e^{-12}z_1^4z_3 + 2.4008e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 5.19466e^{-11}z_1^2z_2^2z_3 - 6.94826e^{-11}z_1z_2^3z_3 + 2.1658e^{-11}z_2^4z_3 - 8.72448e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& - 0.0959015z_1^2z_2z_3^2 + 3.45534e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 0.187141z_2^3z_3^2 + 1.95722e^{-11}z_1^2z_3^3 + \\
& + 5.45314e^{-11}z_1z_2z_3^3 + 4.8263e^{-12}z_2^2z_3^3 - 6.96119e^{-11}z_1z_3^4 + 1.3915z_2z_3^4 + 2.4039e^{-13}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} = & -1.05659e^{-11}z_1^5 + 1.4625e^{-11}z_1^4z_2 - 2.74581e^{-11}z_1^3z_2^2 + 3.37173e^{-11}z_1^2z_2^3 + \\
& + 2.23071e^{-11}z_1z_2^4 - 1.76617e^{-11}z_2^5 - 0.250923z_1^4z_3 + 3.59306e^{-11}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.155897z_1^2z_2^2z_3 + 1.35656e^{-11}z_1z_2^3z_3 - 0.381767z_2^4z_3 - 1.50917e^{-11}z_1^3z_3^2 + \\
& - 2.39426e^{-11}z_1^2z_2z_3^2 - 5.40087e^{-11}z_1z_2^2z_3^2 - 2.46162e^{-12}z_2^3z_3^2 - 0.265108z_1^2z_3^3 + \\
& + 4.13455e^{-11}z_1z_2z_3^3 - 0.280079z_2^2z_3^3 - 5.09329e^{-12}z_1z_3^4 + 2.40367e^{-13}z_2z_3^4 + 2.76426z_3^5
\end{aligned}$$

La operación $V_2(z) = \bar{V}_2(z) + \epsilon \|z\|_{10}^{10} = \sum_{i=1}^{21} f_i^2 + \epsilon \|z\|_{10}^{10}$ resulta

$$V_2(z) = 2.5838z_1^{10} + 1.72504z_1^6z_2^4 + (6.94985 * 10^{-1})z_2^{10} - 1.38984z_2^4z_3^6 + 8.03286z_3^{10}$$

D.3. Formas f_i componentes de $\bar{V}_3(z)$

$$\begin{aligned}
f_1 &= 1.48704z_1^5 - 2.98126e^{-8}z_1^4z_2 - 0.345329z_1^3z_2^2 - 8.06253e^{-8}z_1^2z_2^3 - 0.369357z_1z_2^4 + \\
&\quad - 1.44018e^{-8}z_2^5 - 1.27079e^{-9}z_1^4z_3 + 3.69783e^{-8}z_1^3z_2z_3 - 2.2434e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + \\
&\quad + 5.56911e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 4.76935e^{-9}z_2^4z_3 - 0.274442z_1^3z_3^2 + 4.89584e^{-7}z_1^2z_2z_3^2 + \\
&\quad - 0.0478515z_1z_2^2z_3^2 - 2.57733e^{-7}z_2^3z_3^2 - 8.24056e^{-8}z_1^2z_3^3 + 9.87802e^{-8}z_1z_2z_3^3 + \\
&\quad + 2.64694e^{-8}z_2^2z_3^3 - 0.170959z_1z_3^4 + 2.33755e^{-7}z_2z_3^4 - 2.06704e^{-7}z_3^5 \\
f_2 &= -2.98126e^{-8}z_1^5 + 1.12729z_1^4z_2 + 7.95374e^{-8}z_1^3z_2^2 - 0.410434z_1^2z_2^3 + 5.70492e^{-8}z_1z_2^4 + \\
&\quad - 0.161469z_2^5 - 6.52293e^{-8}z_1^4z_3 + 2.86392e^{-8}z_1^3z_2z_3 + 8.19286e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + \\
&\quad - 1.13656e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 8.16077e^{-8}z_2^4z_3 - 4.56184e^{-7}z_1^3z_3^2 - 0.139531z_1^2z_2z_3^2 + \\
&\quad + 2.58778e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 + 0.0109168z_2^3z_3^2 - 1.19106e^{-8}z_1^2z_3^3 - 1.20183e^{-7}z_1z_2z_3^3 + \\
&\quad - 6.50863e^{-8}z_2^2z_3^3 - 3.18082e^{-7}z_1z_3^4 - 0.0214101z_2z_3^4 - 1.60073e^{-7}z_3^5 \\
f_3 &= -0.345329z_1^5 + 7.95374e^{-8}z_1^4z_2 + 1.09048z_1^3z_2^2 + 1.04656e^{-8}z_1^2z_2^3 - 0.364853z_1z_2^4 + \\
&\quad - 8.04458e^{-8}z_2^5 - 2.97384e^{-8}z_1^4z_3 - 2.09579e^{-7}z_1^3z_2z_3 - 1.34692e^{-7}z_1^2z_2^2z_3 + \\
&\quad + 2.31615e^{-7}z_1z_2^3z_3 + 1.07472e^{-7}z_2^4z_3 - 0.0373728z_1^3z_3^2 - 8.58982e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + \\
&\quad - 0.0748727z_1z_2^2z_3^2 + 1.07361e^{-7}z_2^3z_3^2 - 2.14959e^{-8}z_1^2z_3^3 - 2.72041e^{-7}z_1z_2z_3^3 + \\
&\quad + 7.5601e^{-8}z_2^2z_3^3 + 0.00691878z_1z_3^4 + 1.56028e^{-7}z_2z_3^4 + 6.39308e^{-8}z_3^5 \\
f_4 &= -8.06253e^{-8}z_1^5 - 0.410434z_1^4z_2 + 1.04656e^{-8}z_1^3z_2^2 + 1.0882z_1^2z_2^3 + 9.03902e^{-8}z_1z_2^4 + \\
&\quad - 0.326674z_2^5 + 2.19958e^{-8}z_1^4z_3 + 2.11404e^{-7}z_1^3z_2z_3 - 2.45151e^{-7}z_1^2z_2^2z_3 + \\
&\quad - 9.49975e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 9.41848e^{-8}z_2^4z_3 - 4.4453e^{-8}z_1^3z_3^2 - 0.0886431z_1^2z_2z_3^2 + \\
&\quad + 7.7763e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 - 0.00228757z_2^3z_3^2 + 5.46806e^{-9}z_1^2z_3^3 - 1.23386e^{-7}z_1z_2z_3^3 + \\
&\quad + 1.48783e^{-8}z_2^2z_3^3 - 4.5638e^{-7}z_1z_3^4 + 0.0176999z_2z_3^4 - 1.08589e^{-7}z_3^5 \\
f_5 &= -0.369357z_1^5 + 5.70492e^{-8}z_1^4z_2 - 0.364853z_1^3z_2^2 + 9.03902e^{-8}z_1^2z_2^3 + 0.86129z_1z_2^4 + \\
&\quad - 2.22416e^{-8}z_2^5 - 8.04761e^{-8}z_1^4z_3 + 1.15555e^{-7}z_1^3z_2z_3 + 7.18905e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + \\
&\quad - 1.67145e^{-7}z_1z_2^3z_3 - 1.2284e^{-8}z_2^4z_3 + 0.0202138z_1^3z_3^2 - 2.20457e^{-7}z_1^2z_2z_3^2 + \\
&\quad - 0.14762z_1z_2^2z_3^2 + 5.90628e^{-8}z_2^3z_3^2 + 5.83379e^{-8}z_1^2z_3^3 + 2.10635e^{-7}z_1z_2z_3^3 + \\
&\quad - 6.8777e^{-8}z_2^2z_3^3 + 0.0137358z_1z_3^4 - 2.14324e^{-7}z_2z_3^4 + 8.04936e^{-8}z_3^5 \\
f_6 &= -1.44018e^{-8}z_1^5 - 0.161469z_1^4z_2 - 8.04458e^{-8}z_1^3z_2^2 - 0.326674z_1^2z_2^3 - 2.22416e^{-8}z_1z_2^4 + \\
&\quad + 0.696394z_2^5 - 2.7306e^{-8}z_1^4z_3 - 7.12205e^{-8}z_1^3z_2z_3 + 9.62933e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + \\
&\quad + 2.28216e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 2.84225e^{-8}z_2^4z_3 + 2.5549e^{-7}z_1^3z_3^2 - 0.0103806z_1^2z_2z_3^2 + \\
&\quad - 1.37058e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 - 0.241953z_2^3z_3^2 - 9.81675e^{-8}z_1^2z_3^3 + 1.73707e^{-7}z_1z_2z_3^3 + \\
&\quad + 7.70852e^{-8}z_2^2z_3^3 + 3.97809e^{-7}z_1z_3^4 - 0.0926431z_2z_3^4 + 1.74934e^{-7}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_7 = & -1.27079e^{-9}z_1^5 - 6.52293e^{-8}z_1^4z_2 - 2.97384e^{-8}z_1^3z_2^2 + 2.19958e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& - 8.04761e^{-8}z_1z_2^4 - 2.7306e^{-8}z_2^5 + 1.13904z_1^4z_3 - 1.27315e^{-7}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.226719z_1^2z_2^2z_3 + 7.68632e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 0.111426z_2^4z_3 + 9.8645e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& + 4.8894e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + 1.51716e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 + 8.42692e^{-8}z_2^3z_3^2 - 0.201771z_1^2z_3^3 + \\
& - 3.98156e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 0.0562303z_2^2z_3^3 + 4.17047e^{-7}z_1z_3^4 + 2.64319e^{-7}z_2z_3^4 - 0.238407z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_8 = & 3.69783e^{-8}z_1^5 + 2.86392e^{-8}z_1^4z_2 - 2.09579e^{-7}z_1^3z_2^2 + 2.11404e^{-7}z_1^2z_2^3 + \\
& + 1.15555e^{-7}z_1z_2^4 - 7.12205e^{-8}z_2^5 - 1.27315e^{-7}z_1^4z_3 + 1.13765z_1^3z_2z_3 + \\
& + 9.34537e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 - 0.346637z_1z_2^3z_3 - 4.55001e^{-8}z_2^4z_3 - 1.66335e^{-7}z_1^3z_3^2 + \\
& + 6.14673e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + 7.0236e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 - 2.93366e^{-7}z_2^3z_3^2 - 7.85263e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& - 0.1834z_1z_2z_3^3 + 1.55275e^{-7}z_2^2z_3^3 + 1.3744e^{-8}z_1z_3^4 - 5.66705e^{-8}z_2z_3^4 - 3.8566e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_9 = & -2.2434e^{-8}z_1^5 + 8.19286e^{-8}z_1^4z_2 - 1.34692e^{-7}z_1^3z_2^2 - 2.45151e^{-7}z_1^2z_2^3 + \\
& + 7.18905e^{-8}z_1z_2^4 + 9.62933e^{-8}z_2^5 - 0.226719z_1^4z_3 + 9.34537e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 1.18999z_1^2z_2^2z_3 - 1.27982e^{-7}z_1z_2^3z_3 - 0.259231z_2^4z_3 - 7.65433e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& + 8.19328e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + 2.59356e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 + 8.69336e^{-8}z_2^3z_3^2 - 0.0995002z_1^2z_3^3 + \\
& + 2.35721e^{-7}z_1z_2z_3^3 - 0.102394z_2^2z_3^3 - 2.33627e^{-7}z_1z_3^4 + 4.93763e^{-8}z_2z_3^4 - 0.131878z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{10} = & 5.56911e^{-8}z_1^5 - 1.13656e^{-8}z_1^4z_2 + 2.31615e^{-7}z_1^3z_2^2 - 9.49975e^{-8}z_1^2z_2^3 - 1.67145e^{-7}z_1z_2^4 + \\
& + 2.28216e^{-8}z_2^5 + 7.68632e^{-8}z_1^4z_3 - 0.346637z_1^3z_2z_3 - 1.27982e^{-7}z_1^2z_2^2z_3 + \\
& + 0.978802z_1z_2^3z_3 + 2.80913e^{-8}z_2^4z_3 + 8.91579e^{-8}z_1^3z_3^2 - 1.88162e^{-9}z_1^2z_2z_3^2 + \\
& - 7.40796e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 + 1.56454e^{-7}z_2^3z_3^2 + 9.70688e^{-8}z_1^2z_3^3 - 0.208092z_1z_2z_3^3 + \\
& + 3.82731e^{-8}z_2^2z_3^3 - 2.51931e^{-8}z_1z_3^4 - 3.41088e^{-8}z_2z_3^4 + 4.54212e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{11} = & 4.76935e^{-9}z_1^5 - 8.16077e^{-8}z_1^4z_2 + 1.07472e^{-7}z_1^3z_2^2 + 9.41848e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& - 1.2284e^{-8}z_1z_2^4 + 2.84225e^{-8}z_2^5 - 0.111426z_1^4z_3 - 4.55001e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.259231z_1^2z_2^2z_3 + 2.80913e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 0.849333z_2^4z_3 + 1.21328e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& - 1.18152e^{-7}z_1^2z_2z_3^2 - 2.78515e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 - 6.96922e^{-8}z_2^3z_3^2 - 0.0566059z_1^2z_3^3 + \\
& - 2.08528e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 0.276874z_2^2z_3^3 - 4.23329e^{-8}z_1z_3^4 - 1.57944e^{-7}z_2z_3^4 - 0.122093z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{12} = & -0.274442z_1^5 - 4.56184e^{-7}z_1^4z_2 - 0.0373728z_1^3z_2^2 - 4.4453e^{-8}z_1^2z_2^3 + \\
& + 0.0202138z_1z_2^4 + 2.5549e^{-7}z_2^5 + 9.8645e^{-8}z_1^4z_3 - 1.66335e^{-7}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 7.65433e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + 8.91579e^{-8}z_1z_2^3z_3 + 1.21328e^{-8}z_2^4z_3 + 1.2884z_1^3z_3^2 + \\
& + 1.50132e^{-7}z_1^2z_2z_3^2 - 0.152404z_1z_2^2z_3^2 - 1.60245e^{-7}z_2^3z_3^2 - 5.04963e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& - 1.09012e^{-7}z_1z_2z_3^3 + 8.49848e^{-8}z_2^2z_3^3 - 0.105251z_1z_3^4 + 1.89285e^{-8}z_2z_3^4 + 4.10355e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{13} = & 4.89584e^{-7}z_1^5 - 0.139531z_1^4z_2 - 8.58982e^{-8}z_1^3z_2^2 - 0.0886431z_1^2z_3^2 + \\
& - 2.20457e^{-7}z_1z_2^4 - 0.0103806z_2^5 + 4.8894e^{-8}z_1^4z_3 + 6.14673e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 8.19328e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 - 1.88162e^{-9}z_1z_2^3z_3 - 1.18152e^{-7}z_2^4z_3 + 1.50132e^{-7}z_1^3z_3^2 + \\
& + 1.306z_1^2z_2z_3^2 - 9.4928e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 - 0.169637z_2^3z_3^2 + 7.44195e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& - 2.49115e^{-8}z_1z_2z_3^3 + 9.26354e^{-8}z_2^2z_3^3 + 7.34944e^{-8}z_1z_3^4 - 0.118759z_2z_3^4 - 9.5206e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{14} = & -0.0478515z_1^5 + 2.58778e^{-7}z_1^4z_2 - 0.0748727z_1^3z_2^2 + 7.7763e^{-8}z_1^2z_3^2 + \\
& - 0.14762z_1z_2^4 - 1.37058e^{-7}z_2^5 + 1.51716e^{-7}z_1^4z_3 + 7.0236e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 2.59356e^{-7}z_1^2z_2^2z_3 - 7.40796e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 2.78515e^{-7}z_2^4z_3 - 0.152404z_1^3z_3^2 + \\
& - 9.4928e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + 1.2631z_1z_2^2z_3^2 - 1.73954e^{-7}z_2^3z_3^2 + 1.37884e^{-7}z_1^2z_3^3 + \\
& - 1.72925e^{-7}z_1z_2z_3^3 - 3.64232e^{-8}z_2^2z_3^3 - 0.110199z_1z_3^4 - 1.99697e^{-7}z_2z_3^4 + 3.29146e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{15} = & -2.57733e^{-7}z_1^5 + 0.0109168z_1^4z_2 + 1.07361e^{-7}z_1^3z_2^2 - 0.00228757z_1^2z_3^2 + \\
& + 5.90628e^{-8}z_1z_2^4 - 0.241953z_2^5 + 8.42692e^{-8}z_1^4z_3 - 2.93366e^{-7}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 8.69336e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 + 1.56454e^{-7}z_1z_2^3z_3 - 6.96922e^{-8}z_2^4z_3 - 1.60245e^{-7}z_1^3z_3^2 + \\
& - 0.169637z_1^2z_2z_3^2 - 1.73954e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 + 1.18759z_2^3z_3^2 + 2.13517e^{-7}z_1^2z_3^3 + \\
& - 5.61094e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 8.90356e^{-8}z_2^2z_3^3 + 5.94539e^{-7}z_1z_3^4 - 0.0778587z_2z_3^4 + 1.01705e^{-7}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{16} = & -8.24056e^{-8}z_1^5 - 1.19106e^{-8}z_1^4z_2 - 2.14959e^{-8}z_1^3z_2^2 + 5.46806e^{-9}z_1^2z_3^2 + \\
& + 5.83379e^{-8}z_1z_2^4 - 9.81675e^{-8}z_2^5 - 0.201771z_1^4z_3 - 7.85263e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.0995002z_1^2z_2^2z_3 + 9.70688e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 0.0566059z_2^4z_3 - 5.04963e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& + 7.44195e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + 1.37884e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 + 2.13517e^{-7}z_2^3z_3^2 + 1.40681z_1^2z_3^3 + \\
& + 2.50645e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 0.030201z_2^2z_3^3 - 5.24873e^{-8}z_1z_3^4 + 2.32386e^{-7}z_2z_3^4 - 0.246925z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{17} = & 9.87802e^{-8}z_1^5 - 1.20183e^{-7}z_1^4z_2 - 2.72041e^{-7}z_1^3z_2^2 - 1.23386e^{-7}z_1^2z_3^2 + \\
& + 2.10635e^{-7}z_1z_2^4 + 1.73707e^{-7}z_2^5 - 3.98156e^{-8}z_1^4z_3 - 0.1834z_1^3z_2z_3 + \\
& + 2.35721e^{-7}z_1^2z_2^2z_3 - 0.208092z_1z_2^3z_3 - 2.08528e^{-8}z_2^4z_3 - 1.09012e^{-7}z_1^3z_3^2 + \\
& - 2.49115e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 1.72925e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 - 5.61094e^{-8}z_2^3z_3^2 + 2.50645e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& + 1.35164z_1z_2z_3^3 - 3.46995e^{-7}z_2^2z_3^3 - 6.04378e^{-8}z_1z_3^4 + 2.42757e^{-8}z_2z_3^4 - 2.41986e^{-7}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{18} = & 2.64694e^{-8}z_1^5 - 6.50863e^{-8}z_1^4z_2 + 7.5601e^{-8}z_1^3z_2^2 + 1.48783e^{-8}z_1^2z_3^2 + \\
& - 6.8777e^{-8}z_1z_2^4 + 7.70852e^{-8}z_2^5 - 0.0562303z_1^4z_3 + 1.55275e^{-7}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.102394z_1^2z_2^2z_3 + 3.82731e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 0.276874z_2^4z_3 + 8.49848e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& + 9.26354e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 3.64232e^{-8}z_1z_2^2z_3^2 - 8.90356e^{-8}z_2^3z_3^2 - 0.030201z_1^2z_3^3 + \\
& - 3.46995e^{-7}z_1z_2z_3^3 + 1.47137z_2^2z_3^3 - 5.61113e^{-9}z_1z_3^4 - 1.14093e^{-7}z_2z_3^4 - 0.236057z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{19} = & -0.170959z_1^5 - 3.18082e^{-7}z_1^4z_2 + 0.00691878z_1^3z_2^2 - 4.5638e^{-7}z_1^2z_2^3 + \\
& + 0.0137358z_1z_2^4 + 3.97809e^{-7}z_2^5 + 4.17047e^{-7}z_1^4z_3 + 1.3744e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 2.33627e^{-7}z_1^2z_2^2z_3 - 2.51931e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 4.23329e^{-8}z_2^4z_3 - 0.105251z_1^3z_3^2 + \\
& + 7.34944e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 - 0.110199z_1z_2^2z_3^2 + 5.94539e^{-7}z_2^3z_3^2 - 5.24873e^{-8}z_1^2z_3^3 + \\
& - 6.04378e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 5.61113e^{-9}z_2^2z_3^3 + 1.36831z_1z_3^4 + 3.8702e^{-7}z_2z_3^4 + 4.07248e^{-9}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{20} = & 2.33755e^{-7}z_1^5 - 0.0214101z_1^4z_2 + 1.56028e^{-7}z_1^3z_2^2 + 0.0176999z_1^2z_2^3 + \\
& - 2.14324e^{-7}z_1z_2^4 - 0.0926431z_2^5 + 2.64319e^{-7}z_1^4z_3 - 5.66706e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& + 4.93763e^{-8}z_1^2z_2^2z_3 - 3.41088e^{-8}z_1z_2^3z_3 - 1.57944e^{-7}z_2^4z_3 + 1.89285e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& - 0.118759z_1^2z_2z_3^2 - 1.99697e^{-7}z_1z_2^2z_3^2 - 0.0778587z_2^3z_3^2 + 2.32386e^{-7}z_1^2z_3^3 + \\
& + 2.42757e^{-8}z_1z_2z_3^3 - 1.14093e^{-7}z_2^2z_3^3 + 3.8702e^{-7}z_1z_3^4 + 1.3597z_2z_3^4 + 2.21403e^{-8}z_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{21} = & -2.06704e^{-7}z_1^5 - 1.60073e^{-7}z_1^4z_2 + 6.39308e^{-8}z_1^3z_2^2 - 1.08589e^{-7}z_1^2z_2^3 + \\
& + 8.04936e^{-8}z_1z_2^4 + 1.74934e^{-7}z_2^5 - 0.238407z_1^4z_3 - 3.8566e^{-8}z_1^3z_2z_3 + \\
& - 0.131878z_1^2z_2^2z_3 + 4.54212e^{-9}z_1z_2^3z_3 - 0.122093z_2^4z_3 + 4.10355e^{-8}z_1^3z_3^2 + \\
& - 9.5206e^{-8}z_1^2z_2z_3^2 + 3.29146e^{-9}z_1z_2^2z_3^2 + 1.01705e^{-7}z_2^3z_3^2 - 0.246925z_1^2z_3^3 + \\
& - 2.41986e^{-7}z_1z_2z_3^3 - 0.236057z_2^2z_3^3 + 4.07248e^{-9}z_1z_3^4 + 2.21403e^{-8}z_2z_3^4 + 2.7959z_3^5
\end{aligned}$$

La operación $V_3(z) = \bar{V}_3(z) + \epsilon\|z\|_{10}^{10} = \sum_{i=1}^{21} f_i^2 + \epsilon\|z\|_{10}^{10}$ resulta

$$V_3(z) = 2.5838z_1^{10} - 1.72504z_1^6z_2^4 + (6.94985e^{-1})z_2^{10} + 1.38984z_2^4z_3^6 + 8.03286z_3^{10}$$

Bibliografía

- Aparicio, A. (2012). Función de Lyapunov para el Diferenciador por Modos Deslizantes de Tercer Orden. Tesis de Maestría, UNAM.
- Artin, E. (1927). Über die Zerlegung definitiver Funktionen in Quadrate. En *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, volumen 5, pp. 100–115. Springer.
- Avis, D. (1998). Computational Experience with the Reverse Search Vertex Enumeration Algorithm. *Optimization Methods and Software*, 10:107–124.
- Avis, D. (2000). lrs: A Revised Implementation of the Reverse Search Vertex Enumeration Algorithm. En Kalai, G. y Ziegler, G., editores, *Polytopes - Combinatorics and Computation*, volumen 29 de *DMV Seminar Band*, pp. 177–198. Birkhäuser.
- Bacciotti, A. y Rosier, L. (2005). *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, volumen 3. Springer, 2da. edición.
- De Loera, J. A. y Santos, F. (1996). An effective version of Pólya's theorem on positive definite forms. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 108:231–240.
- Delzell, C. N. (2008). Impossibility of extending Pólya's theorem to forms with arbitrary real exponents. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212:2612–2622.
- Filippov, A. (1988). *Differential equations with discontinuous right hand side*. Kluwer, The Netherlands.
- Fukuda, K. y Prodon, A. (1996). Double Description Method Revisited. En *Combinatorics and computer science*, volumen 1120 de *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 91–111. Springer, Berlin.
- Güler, O. (2010). Foundations of Optimization. En Axler, S. y Ribbet, K. A., editores, *Graduate Texts in Mathematics*, volumen 258, pp. 175–180. Springer, California, USA, 3ra. edición.
- Habicht, W. (1939). Über die Zerlegung strikte definitiver Formen in Quadrate. *Comentarii Mathematici Helvetici*, 12(1):317–322.

- Hardy, G., Littlewood, J., y Pólya, G. (1967). *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 2da. edición.
- Hilbert, D. (1888). Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten. *Mathematische Annalen*, 32(3):342–350.
- Hilbert, D. (1900). Mathematische probleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1900:253–297.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*, volumen 3. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3ra. edición.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3):379–384.
- Levant, A. (2003). Higher order sliding modes: differentiation and output feedback control. *International Journal of Control*, 76(9-10):924–941.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(23):823–830.
- Moreno, J. A. (2012). Lyapunov Function for Levant’s Second Order Differentiator. *51st. IEEE Conference on Decision and Control. Maui, Hawaii, USA*, pp. 6448–6453.
- Nakamura, H., Yamashita, Y., y Nishitani, H. (2002). Smooth Lyapunov Functions for Homogeneous Differential Inclusions. *SICE Annual Conference, Osaka, Japan*, pp. 1974–1979.
- Papachristodoulou, A., Anderson, J., Valmorbidia, G., Prajna, S., Seiler, P., y Parrilo, P. A. (2013). *SOSTOOLS: Sum of squares optimization toolbox for MATLAB. User’s Guide*. <http://arxiv.org/abs/1310.4716>.
- Parrilo, P. (2000). *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods*. PhD. Thesis, California Institute of Technology (CALTECH), Pasadena, CA, USA.
- Pólya, G. (1928). Über positive Darstellung von Polynomen. *Vierteljahrschrift Naturforschenden Gesellschaft, Zürich*, (3):141–145.
- Prajna, S., Papachristodoulou, A., y Parrilo, P. (2002). Introducing SOSTOOLS: a general purpose sum of squares programming solver. *41st. IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, Nevada, USA*, 1:741–746.
- Prajna, S., Papachristodoulou, A., Seiler, P., y Parrilo, P. (2004). New developments in sum of squares optimization and SOSTOOLS. *American Control Conference, Boston, Massachusetts*, 6:5606–5611.
- Reznick, B. (1995). Uniform denominators in Hilbert’s seventeenth problem. *Mathematische Zeitschrift*, 220(1):75–97.

- Reznick, B. (2000). Some concrete aspects of Hilbert's 17th problem. *Contemporary Mathematics*, 253:251–272.
- Rosier, L. (1992). Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field. *Systems and Control Letters*, 19:467–473.
- Sánchez, T. y Moreno, J. A. (2014a). A Constructive Lyapunov function design method for a class of homogeneous systems. *53rd. IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, California, USA*, pp. 5500–5505.
- Sánchez, T. y Moreno, J. A. (2014b). Un método de construcción de funciones de Lyapunov para una clase de sistemas homogéneos. *Memorias del XVI Congreso Latinoamericano de Control Automático CLCA, Cancún, Quintana Roo, México*, pp. 176–181.
- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., y Levant, A. (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhäuser, New York, 1ra. edición.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11(1-4):625–653.
- Vajnovszki, V. (2014). An efficient Gray code algorithm for generating all permutations with a given major index. *Journal of Discrete Algorithms*, 26:77–88.
- Zolotykh, N. Y. (2012). New Modification of the Double Description Method for Constructing the Skeleton of a Polyedral Cone. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 52(1):146–156.