



**Universidad Nacional Autónoma de México**

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería  
Ingeniería Mecánica – Diseño Mecánico

**Método de Adecuación para Fabricación  
de Estructuras Óptimas Tipo  
Marco Basado en Esqueletonización  
(Skeletonization)**

Modalidad de graduación: Tesis  
Que para optar por el grado de:  
Maestro en Ingeniería

Presenta:  
Ing. Asahel Mendoza San Agustín

Tutor principal  
Dr. Fernando Velázquez Villegas

México, D. F., Noviembre 2015

Asahel Mendoza San Agustín

Método de Adecuación para Fabricación  
de Estructuras Óptimas Tipo  
Marco Basado en Esqueletonización



**Universidad Nacional Autónoma de México**  
Posgrado de Ingeniería  
Ingeniería Mecánica-Diseño Mecánico

## **JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Gabriel Ascanio Gasca Gabriel

Secretario: Dr. Francisco Cuenca Jiménez

Vocal: Dr. Fernando Velázquez Villegas

1 er. Suplente: Dr. Adrián Espinosa Bautista

2 do. Suplente: Dr. José Emiliano Martínez Ordaz

Lugar donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, México D.F.

## **TUTOR DE TESIS:**

Fernando Velázquez Villegas

# **AGRADECIMIENTOS**

Fernando Velázquez Villegas

Luis Sánchez Balanzar (M.I.M.I)

José Luis Ramírez Cruz

Fernando Camacho Martínez

Alejandro Arévalo Vieyra

A la DGAPA-UNAM por el apoyo dado para la realización de este trabajo a través de los proyectos PAPIME PE104315 Fortalecimiento del proceso enseñanza-aprendizaje del comportamiento mecánico de los materiales por medio de TIC y PAPIIT IN113315 Mecánica computacional y optimización como línea de investigación en el diseño mecánico.

A mis Padres Hilda y Luis

A mi Hermano Israel

Y a mi linda Verónica

Los Amo

# RESUMEN

En esta tesis se propone un algoritmo de adecuación de una solución topológica óptima de un problema estructural a partir del proceso de esqueletonización. El objetivo es obtener la interpretación de una estructura, equivalente a la óptima topológica, cuya fabricación sea sencilla al utilizar perfiles de sección transversal comercial que sustituyan la distribución del material de la solución. Con el proceso de esqueletonización es posible obtener la representación mínima de una imagen binaria sin perder la topología de la misma. Al aplicarlo a la imagen binaria de una solución estructural topológica se obtienen trayectorias que definen a la estructura como una conexión de líneas no rectas. El algoritmo de adecuación convierte a éstas en líneas rectas con el objetivo de transformar la geometría obtenida en un marco estructural construido con perfiles de geometría regular e incluso perfiles comerciales. De esta manera, se obtiene una estructura óptima que fácilmente se puede fabricar y que equivale a la solución topológica óptima, la cual en la mayoría de los casos es imposible de producir.

El trabajo se divide en cuatro capítulos y un anexo. El primer capítulo aborda la introducción y se presentan antecedentes breves para comprender el tema y la motivación para el desarrollo del método de adecuación. En el segundo capítulo se presenta el método de adecuación propuesto descrito detalladamente, cada etapa del método se aborda en subsecciones diferentes con imágenes que simplifican la comprensión del texto. El tercer capítulo se enfoca en presentar la aplicación del método para diferentes casos de estudio: en el plano y en tres dimensiones. Y el cuarto capítulo está dedicado a las conclusiones del trabajo. En el anexo se presenta el método ESO (Evolutionary Structural Optimization) a manera de introducción a los métodos de optimización topológica.

# CONTENIDO

<b>RESUMEN</b>	<b>1</b>
<b>CONTENIDO</b>	<b>2</b>
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>3</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
<b>1.1 OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL</b>	<b>5</b>
<b>1.2 ESTRUCTURAS ÓPTIMAS TOPOLÓGICAS</b>	<b>7</b>
<b>OBJETIVO</b>	<b>11</b>
<b>1.3 SKELETONIZATION (ESQUELETONIZACIÓN)</b>	<b>12</b>
1.3.1 SKELETONIZATION EN 2D	12
1.3.2 ALGORITMO DE ESQUELETONIZACIÓN	13
1.3.3 COMENTARIOS	14
<b>MÉTODO DE ADECUACIÓN</b>	<b>15</b>
<b>2.1 ESTRUCTURA ÓPTIMA</b>	<b>16</b>
<b>2.2 SKELETONIZATION</b>	<b>16</b>
<b>2.3 LOCALIZACIÓN DE VÉRTICES</b>	<b>17</b>
<b>2.4 CONECTIVIDAD DE VÉRTICES</b>	<b>19</b>
<b>2.5 ALGORITMO DE DISTANCIA MÍNIMA</b>	<b>20</b>
<b>2.6 AJUSTE AL DOMINIO DE DISEÑO</b>	<b>21</b>
<b>2.7 DIAGRAMA DE FLUJO</b>	<b>22</b>
<b>CASOS DE ESTUDIO</b>	<b>23</b>
<b>3.1 ESTRUCTURAS PLANAS</b>	<b>23</b>
3.1.1 ESTRUCTURA DE MICHELL	24
3.1.2 ESTRUCTURA DE UN PUENTE	24
<b>3.2 ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL</b>	<b>25</b>
3.2.1 AJUSTE DE PUNTOS A PLANOS DE INTERSECCIÓN	26
3.2.2 INTERSECCIÓN DEL SKELETON-STRUCTURE Y PLANOS TRANSVERSALES	27
3.2.3 CONEXIÓN DE LOS SKELETON-STRUCTURES	28
3.2.4 ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS	30
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>32</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>34</b>
<b>ANEXO</b>	<b>35</b>
<b>OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA (ESO) [3]</b>	<b>35</b>
ESO BASADO EN EL NIVEL DE ESFUERZOS	35
ESO PARA OPTIMIZACIÓN POR RIGIDEZ O DESPLAZAMIENTO	36

# PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para encontrar la solución óptima a un problema estructural es cada vez más común utilizar herramientas computacionales que permiten encontrar, mediante métodos iterativos, la mejor solución para las condiciones de operación a las cuales una estructura se encuentra expuesta. Uno de los métodos más utilizados para dicha finalidad es la optimización estructural topológica, en la cual a partir de un dominio de diseño es posible reconfigurar la distribución del material para encontrar aquella que satisface las condiciones de frontera del problema y ciertas restricciones. Dicha solución, si bien representa la “mejor solución”, para fines de manufactura no lo es, ya que la geometría obtenida es irregular, y por lo cual, imposible de fabricar.

Por tal razón es necesario realizar una adecuación de los resultados óptimos al trazar trayectorias sobre la distribución del material para llevar a cabo una sustitución con geometrías de fácil manufactura. Sin embargo las metodologías de adecuación dependen fuertemente del criterio del diseñador ya que de manera tentativa y empírica se establecen las trayectorias que son sustituidas por un elemento estructural perdiéndose varias de las características que hacen que una estructura sea óptima.

La subjetividad de las metodológicas provoca, que para un mismo problema de optimización estructural, su adaptación varíe de un diseñador a otro, lo cual impide obtener una misma solución de manufactura, perdiéndose así la repetitividad del método. Es por tal motivo que en este trabajo se presenta una metodología, con base en un algoritmo computacional, para generar trayectorias sobre la solución óptima topológica con la finalidad de realizar una adaptación con perfiles estructurales de sección transversal comercial, en la cual la dependencia del criterio del diseñador sea mínima. El propósito es transformar una estructura óptima en una equivalente cuya fabricación, empleando perfiles comerciales, sea sencilla.

El método propuesto se limita al estudio de estructuras en dos dimensiones cuya adaptación puede analizarse como marco plano, sin embargo puede aplicarse a estructuras en tres dimensiones que son modeladas con base en placas planas.

---

# 1

## INTRODUCCIÓN

---

**E**n la actualidad el uso de algoritmos computacionales para la solución óptima de problemas estructurales se ha vuelto común en los últimos años, debido a los requerimientos de ligereza y alta resistencia en el diseño estructural. Con la aplicación de este tipo de algoritmos es posible obtener diseños aceptables para diferentes condiciones de carga sin comprometer su funcionalidad; como es el caso del método de optimización estructural topológica.

Sin embargo, aun cuando la solución encontrada es la que representa la “mejor solución”, para los fines de manufactura no lo es, debido a la alta complejidad geométrica que lleva consigo. Por tal motivo los diseñadores de ingeniería necesitan realizar diversas decisiones subjetivas en el proceso de diseño para poder adecuar la solución óptima con geometrías simples. De esta manera la solución óptima se vuelve subjetiva y el proceso se vuelve iterativo.

La distribución de material a partir de una optimización topológica está relacionada con su funcionalidad estructural, lo cual significa que el material se orienta en las áreas donde el esfuerzo es mayor. Por tal razón es posible interpretar una solución topológica mediante trayectorias.

A partir de la distribución del material los diseñadores realizan diversas decisiones sobre las geometrías para adecuar la solución óptima, comúnmente generan trayectorias sobre el dominio de diseño para hacer una interpretación que posteriormente se define a detalle en un modelo CAD.

La motivación del trabajo es presentar un método, mediante un algoritmo computacional, en el cual todo el proceso de adecuación se realice de manera automática a partir de la solución óptima topológica, obteniéndose una representación mediante trayectorias rectas que puedan ser fácilmente sustituidas con perfiles de geometría regular.

El algoritmo presentado se basa en el método de esqueletonización (skeletonization), el cual es una herramienta de procesamiento de imágenes que transforma una imagen binaria en una representación mínima conocida como esqueleto (skeleton) sin perder su topología. Una vez que el esqueleto es obtenido se identifican los vértices donde las trayectorias se intersectan, de tal manera que, basándose en su conectividad, las trayectorias del esqueleto son remplazadas con líneas rectas. Estas líneas dan lugar a su sustitución con perfiles de geometría regular.

En las siguientes secciones del presente capítulo se establecen los antecedentes necesarios para introducir al lector en el problema de optimización estructural y una breve descripción del proceso de esqueletonización. En el capítulo 2 se explicará con mayor detalle el método de adecuación propuesto.

### 1.1 Optimización estructural

Al resolver un problema de ingeniería estructural se busca que la solución a dicho problema sea la óptima para las condiciones en las que el sistema se encuentra expuesto. En el diseño tradicional la etapa de optimización se realiza de manera iterativa e intuitiva a partir de un diseño preliminar funcional con la finalidad de que en cada iteración se obtenga un mejor diseño que en el paso anterior.

La etapa de optimización tradicional se puede describir como sigue [1]:

- 1) Se sugiere un diseño preliminar.
- 2) Se analizan requerimientos específicos del diseño.
- 3) Si los requerimientos no se satisfacen, por ejemplo, que el esfuerzo sea sobre pasado, se sugiere un nuevo diseño.
- 4) La nueva propuesta de diseño se analiza otra vez desde el paso 2.

La utilización de herramientas computacionales, como el método de los elementos finitos, son útiles para poder determinar si los requerimientos de diseño se satisfacen, sin embargo el proceso de optimización sigue la misma estrategia descrita con anterioridad generando una gran cantidad de diseños que pueden llevar a una solución aceptable.

El problema de optimización estructural se puede llevar a cabo desde el punto de vista matemático, de tal forma que el proceso de optimización se puede realizar de manera automática a partir de que es posible generar un algoritmo computacional para tal efecto.

En un problema de optimización estructural se encuentran las siguientes funciones y variables [1]:

*Función objetivo ( $f$ ):* Es una función de las variables que intervienen en el diseño, y la condición habitual que se le exige a dicha función es que para una solución óptima tome un valor mínimo. En la optimización estructural los objetivos comunes son minimizar su peso y la energía de deformación, la finalidad es crear diseños de bajo peso y alta rigidez.

*Variable de diseño ( $x$ ):* Es una variable independiente que puede cambiar durante la optimización. Ejemplos de variable de diseño son la sección transversal de un elemento estructural o el espesor de una placa.

*Variables de estado ( $y$ ):* Son funciones que representan la respuesta de una estructura. Para una estructura mecánica una respuesta significa el desplazamiento, el esfuerzo, la deformación unitaria o una restricción.

El problema de optimización (PO) queda descrito de la siguiente manera:

$$PO: \begin{cases} \text{minimizar } f(x, y) \\ \text{sujeto a: } \begin{cases} \text{restricciones de comportamiento (y)} \\ \text{restricciones de diseño (x)} \\ \text{restricciones de equilibrio.} \end{cases} \end{cases}$$

Los tres tipos de restricciones indicados anteriormente son [1]:

*Restricciones de comportamiento (Behavioral constraints).* Son restricciones de la variable de estado  $y$ . Usualmente se escriben como  $g(y) \leq 0$  donde  $g$  es una función que representa, por ejemplo, el desplazamiento en una determinada dirección.

*Restricciones de diseño (Design constraints).* Son restricciones similares a las anteriores en las que se consideran las variable de diseño  $x$ .

*Restricción de equilibrio (equilibrium constraint).* En el caso estructural se representa mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{K}(x)\mathbf{u} = \mathbf{F}(x), \tag{1.1}$$

donde  $\mathbf{K}(x)$  es la matriz de rigidez de la estructura,  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos y  $\mathbf{F}(x)$  es el vector de fuerzas. Puede notarse que el vector  $\mathbf{u}$  toma el rol de la variable de estado  $y$ .

En la formulación del problema de optimización,  $y$  y  $x$  se consideran variables independientes. Esta formulación es denominada *formulación simultánea* [1] debido a que la ecuación de equilibrio se resuelve simultáneamente con el problema de optimización. Sin embargo, es común definir la variable de estado  $y$  en función de la variable  $x$ , por lo cual al resolver la ecuación (1.1) se obtiene que  $\mathbf{u}(x) = \mathbf{K}(x)^{-1}\mathbf{F}(x)$ . De esta forma, si se tiene a  $\mathbf{u}(x)$  como una función dada, el problema de optimización (PO) se establece de la siguiente manera:

$$PO: \begin{cases} \min f(x, \mathbf{u}(x)) \\ \text{s. t. } g(x, \mathbf{u}(x)) \leq 0, \end{cases}$$

este tipo de formulación se conoce como *formulación anidada (nested formulation)* [1].

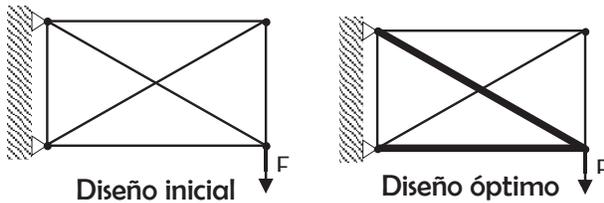
En la literatura existen tres principales métodos para resolver problemas de optimización estructural (ver Figura 1-1). Las variables de diseño  $x$  representan, como se ha mencionado anteriormente, alguna característica geométrica de la estructura, por lo cual dependiendo de la misma los métodos de optimización estructural se pueden dividir en tres clases [1]:

*Optimización de tamaño (Size optimization):* Este tipo de optimización se aplica cuando la variable de diseño  $x$  esta asociada a propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos que integran la estructura, tales como áreas de barras, espesores de placas, etc.

*Optimización de forma (Shape optimization):* En este caso la variable de diseño  $x$  representa la forma o el contorno de la frontera del dominio de la estructura. En este tipo de optimización se pueden tener diferentes propiedades topológicas fijas en la geometría, como un determinado número de agujeros. Al llevar a cabo este tipo de optimización la topología de la estructura se conserva sin crear huecos o cavidades en su interior

*Optimización topológica (Topology optimization):* La optimización topológica consiste en determinar la morfología óptima a partir de un modelo muy distante del óptimo. El proceso que se lleva a cabo parte de retirar aquel material que no represente alguna funcionalidad estructural, en cambio, el material que sí cumpla con esa función, será direccionado hacia aquellas zonas donde se satisfaga tanto las restricciones como la condición de la función objetivo.

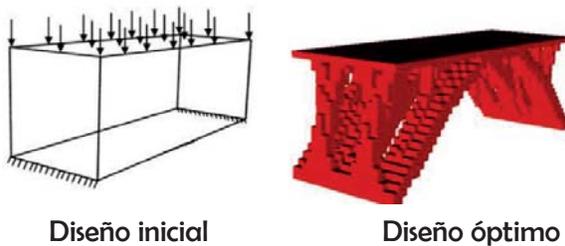
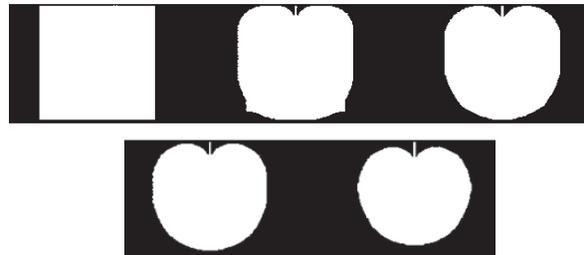
Este método suele caracterizarse a partir de fijar un valor de densidad nulo para aquellas zonas del dominio que no cuenten con material una vez comenzado el proceso de optimización topológica, comúnmente se le da un valor de 0, en cambio, se fija un valor de densidad 1 a aquellas zonas donde exista material. Se desea que los valores de densidad en el modelo varíen de manera binaria (0,1), sin embargo se ha demostrado que esta solución no es posible ya que la distribución del material presenta diferentes matices, dando como resultado valores de densidades intermedios entre cero y uno, por lo que es necesario introducir métodos de penalización que obligue la solución binaria para obtener resultados que sean de utilidad ingenieril.



**Optimización de Tamaño**

Optimización de la sección transversal de los miembros estructurales [1].

**Optimización de Forma**  
Optimización de un objeto colgado en el aire bajo acción de la gravedad [3].



**Optimización topológica**

Estructura óptima de un puente [10].

Figura 1-1. Tipos de optimización estructural.

**1.2 Estructuras óptimas topológicas**

El propósito de la optimización estructural topológica es encontrar la óptima distribución de material dentro de una región conocida como dominio de diseño. En este tipo de optimización es necesario que la conectividad del dominio se preserve para que ésta pueda considerarse como una estructura sólida. Las condiciones conocidas son las cargas aplicadas, las restricciones de movimiento, el

volumen de la estructura y algunas restricciones sobre el dominio conocidas como zonas de no diseño. En este problema el tamaño, forma y conectividad de la estructura son desconocidos.

Los métodos de optimización topológica están basados principalmente en el método de los elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) donde el dominio de diseño es discretizado con geometrías simples; de esa manera el proceso de optimización consiste en encontrar la topología de la estructura determinando, para cada elemento, si existe material (elemento sólido) o no (elemento vacío).

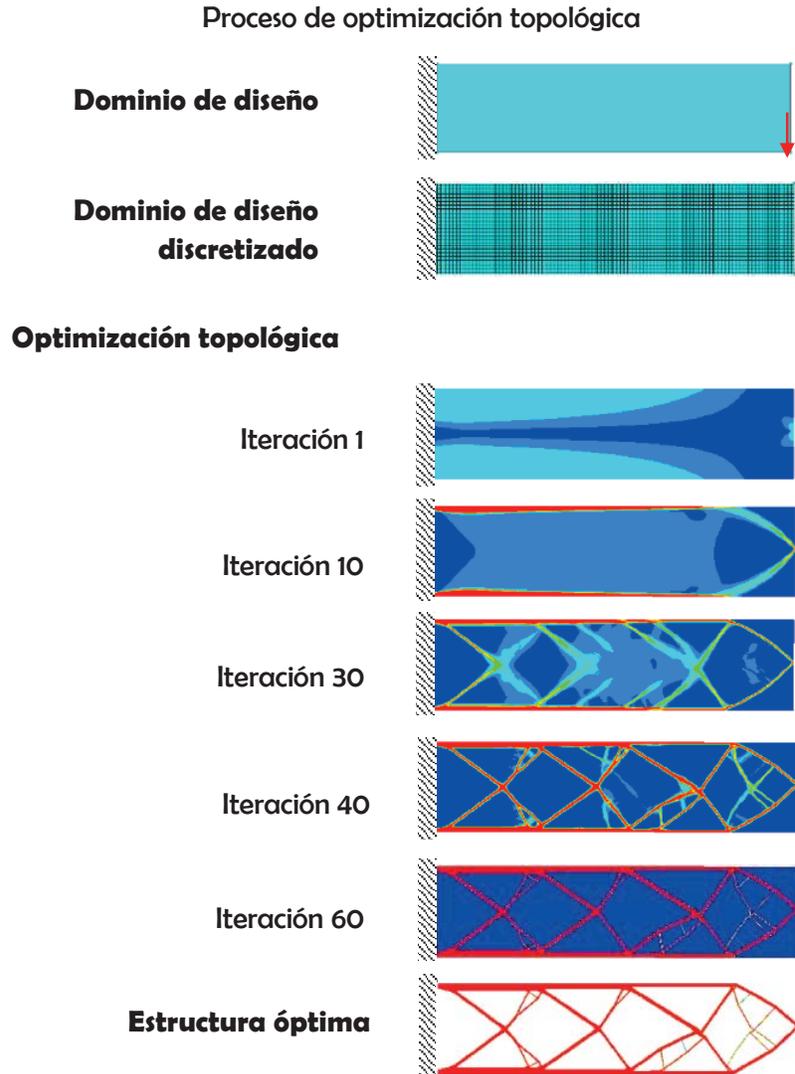


Figura 1-2. Optimización estructural topológica de la viga en voladizo. Los elementos en color azul representan densidad cero (elemento vacío), mientras que los elementos en color rojo representan elementos de densidad 1 (elementos sólidos). La escala de colores intermedios representa elementos incompletos (densidades intermedias).

Existen diferentes metodologías para llevar a cabo el proceso de optimización estructural topológica, los cuales se han presentado en diversos trabajos, tal es el caso de Bendsøe [2] y Xie y Steven [3] que han desarrollado métodos numéricos para aplicar este tipo de metodologías al diseño estructural; el método SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) desarrollado por Bendsøe y el método

## INTRODUCCIÓN

ESO (Evolutionary Structural Optimization) desarrollado por Xie y Steven son sólo algunos ejemplos (ver Anexo ). En la Figura 1-3 se pueden observar los resultados topológicos de algunos problemas estructurales característicos.

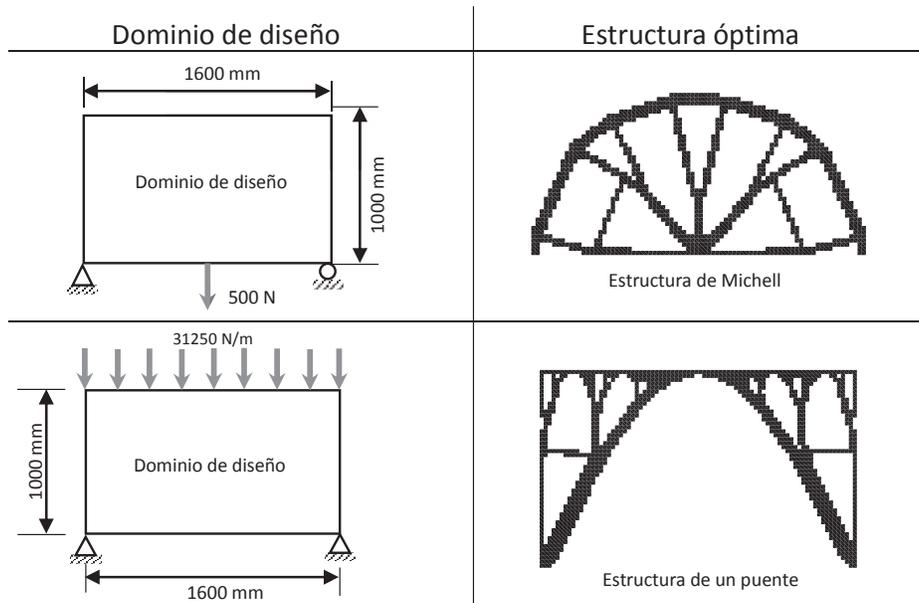


Figura 1-3. Dominio de diseño y optimización topológica de las estructuras mostradas.

Comparado con otros tipos de optimización, la optimización topológica es una técnica que permite al diseñador la creación de nuevos y eficientes diseños, sin embargo las geometrías obtenidas dificultan la manufactura de este tipo de estructuras debido a su alta irregularidad. Por tal motivo el diseño obtenido bajo una optimización topológica suele catalogarse como diseño de concepto, el cual necesita ser adecuado con geometrías regulares que permitan su fabricación y disminuyan su costo. Es en esta parte del proceso donde el diseñador toma un papel fundamental para el diseño a detalle de la estructura, pues es él quien de manera subjetiva decide con que elementos estructurales sustituir el material de la solución óptima.

El proceso de adecuación suele realizarse con la ayuda de herramientas de diseño asistido por computadora (CAD por sus siglas en inglés), con las cuales es posible importar la solución topológica y trazar trayectorias sobre la distribución del material.

## INTRODUCCIÓN

Un caso de estudio es la optimización estructural topológica de un vehículo eléctrico de reparto [4], en el cual se utilizaron herramientas CAD para su adecuación con perfiles estructurales comerciales. Para esto el diseñador seccionó la estructura en diferentes planos para poder realizar una interpretación de la topología para después realizar la adecuación. En la Figura 1-4 se muestra la adecuación del vehículo.

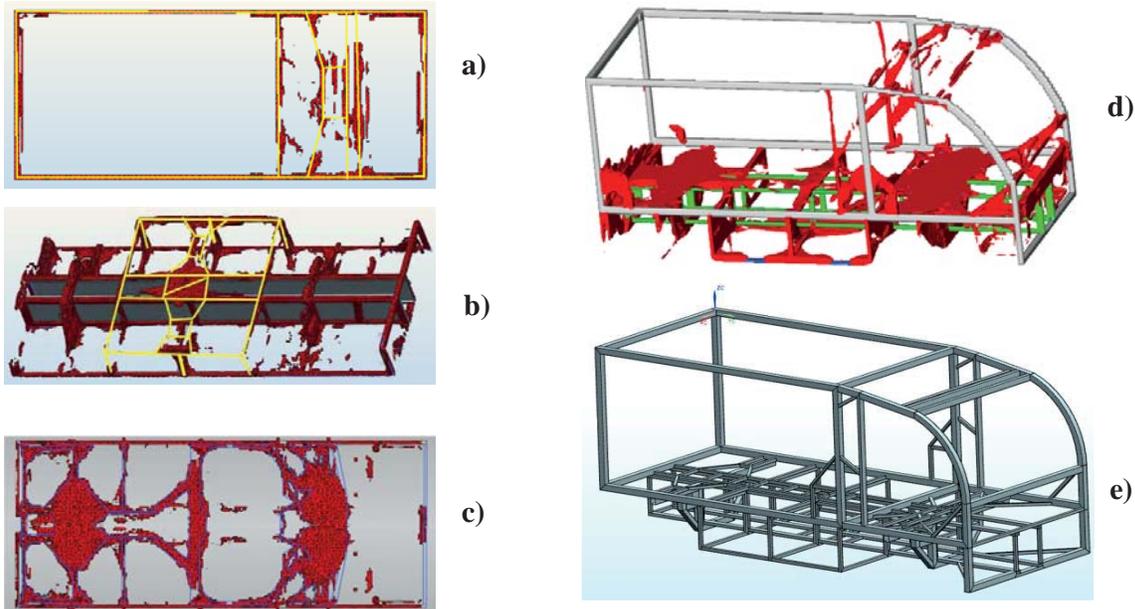


Figura 1-4. Optimización estructural de un vehículo eléctrico de reparto [4]. a), b), c) trayectorias propuestas por el diseñador sobre la solución topológica d). e) adecuación de la estructura con perfiles comerciales. Se observa que la subjetividad del proceso de adecuación es alta.

La adecuación de estructuras óptimas es el último paso antes de la fabricación de estructuras óptimas, por tales razones se han desarrollado diferentes técnicas para dar solución a tal problema. Chyi-Yeu & Shin-Hong [5], Ming-Hsiu & Yeh-Liang [6] y Yeh-Liang, Ming-Sho & Chuan-Tang [7] presentan algoritmos automáticos para interpretar soluciones topológicas óptimas, con este tipo de metodologías las irregularidades geométricas son minimizadas, sin embargo, la geometría final es aún difícil de manufacturar. La idea central de estos métodos es suavizar las irregularidades de la solución óptima tratando de interpretar la distribución del material con geometrías simples. El gran potencial de estos algoritmos es su capacidad para interpretar soluciones topológicas en tres dimensiones.

En la Figura 1-5 se muestra la interpretación de la optimización de la viga corta en voladizo con los métodos señalados anteriormente.

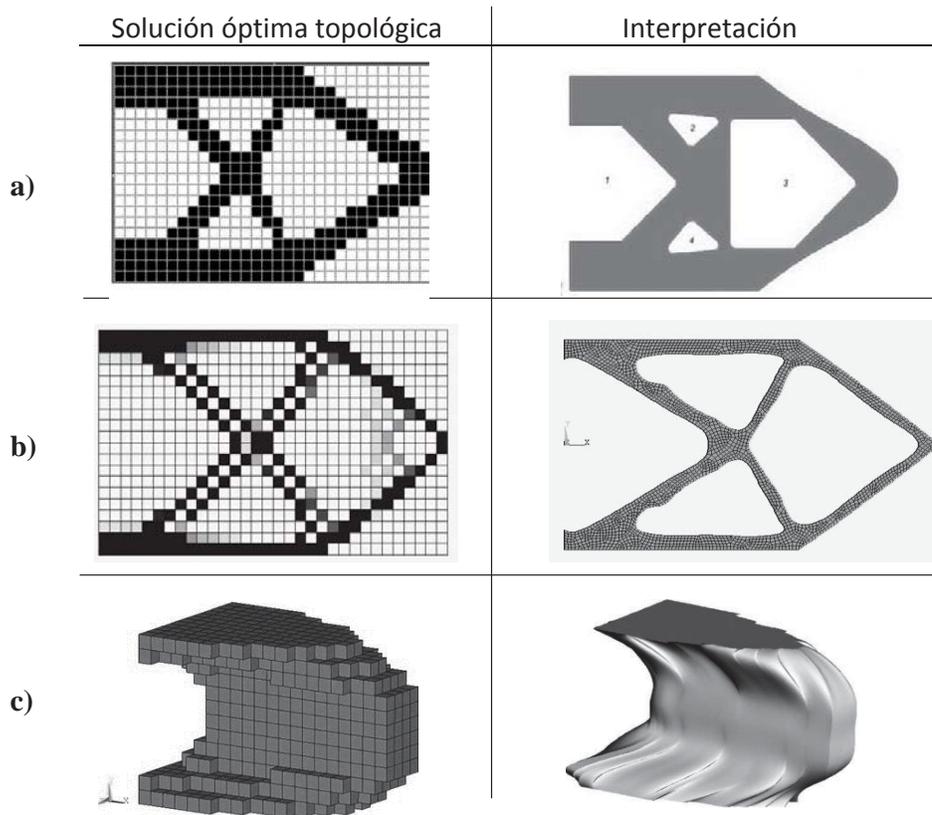


Figura 1-5. Interpretaciones de soluciones óptimas topológicas. a) Viga corta en 2D, método de Chyi-Yeu, L., & Shin-Hong, L. [5] b) Viga corta en 2D, método de Yeh-Liang, H., Ming-Sho, H., & Chuan-Tang, C. [7] c) Viga corta en 3D, método de Ming-Hsiu, H. & Yeh-Liang, H. [6].

Es importante señalar que todas las adecuaciones mostradas en la Figura 1-5 no tienen la simplicidad geométrica como para ser fácilmente manufacturables. Dado lo anterior, existe un área de oportunidad para diseñar un método de adecuación de estructuras óptimas topológicas que permita generar estructuras completamente manufacturables a partir de perfiles estructurales comerciales. Por lo cual se establece el objetivo general del trabajo:

## Objetivo

Diseñar e implementar un algoritmo de post-procesamiento para el diseño de estructuras tipo marco bajo optimización topológica y criterios de fabricación empleando perfiles estructurales comerciales.

El método propuesto en este trabajo, para realizar la interpretación y adaptación de estructuras, está basado en la herramienta de procesamiento de imágenes conocida como *Skeletonization*, punto clave en el desarrollo del algoritmo. El utilizar esta herramienta representa una nueva línea de estudio diferente a los métodos presentados por los autores anteriores, lo cual lleva a la generación de nuevos algoritmos con características propias para adaptar una solución topológica óptima.

### 1.3 Skeletonization (Esqueletonización)

El proceso de esqueletonización se basa en la extracción de una representación media de un objeto digital de dimensión menor, puede conceptualizarse como la mínima representación de un objeto que conserva sus propiedades topológicas iniciales, es decir, las características principales de la forma del objeto se conservan. A este tipo de representaciones también suelen conocerse como *thinning* o *medial axis transformation*.

A la representación media del objeto se le conoce como *Esqueleto* (o *Skeleton* en inglés) y tiene por característica que a partir de él es posible reconstruir el objeto inicial, es decir, tiene la característica de reversibilidad.

El proceso de esqueletonización ha sido inicialmente utilizado para la representación de imágenes en dos dimensiones representada por píxeles, durante este proceso los píxeles de la frontera del objeto son convertidos en píxeles de fondo (background pixels) hasta obtener un subconjunto  $S$ , el cual es la unión de arcos y curvas simétricamente ubicadas respecto a los bordes del objeto.  $S$  tiene uno o más de las siguientes características:

1.  $S$  tiene el mismo número de componentes que el objeto y cada componente de  $S$  tiene el mismo número de agujeros que el objeto.
2.  $S$  está centrado dentro del objeto.
3.  $S$  tiene un espesor de una unidad (espesor de 1 píxel) a partir de arcos y curvas.
4. Los píxeles de  $S$  están etiquetados con las distancias desde el fondo de la imagen.

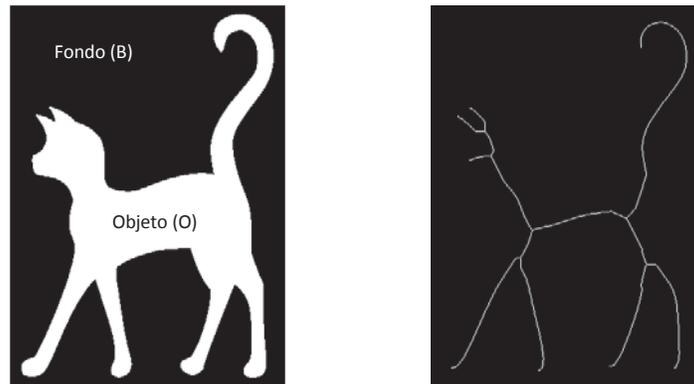


Figura 1-6. Ejemplo de una imagen binaria (a la izquierda) y su esqueleto (a la derecha). El espesor de las trayectorias del esqueleto es de 1 píxel.

Existen diferentes formas para llevar a cabo el proceso de esqueletonización de un objeto, sin embargo el que a continuación se describe considera un enfoque discreto.

#### 1.3.1 Skeletonization en 2D

Se trabaja con imágenes discretas binarias, en donde el objeto de la imagen  $O$  es un conjunto de 1's (píxeles blancos) y el fondo de la imagen  $B$  es un conjunto de 0's (píxeles negros). Un píxel  $p$  tiene cuatro vecinos que comparten el mismo borde con  $p$ , y cuatro vecinos compartiendo vértices con  $p$ . Se define como 4-conectividad a la conexión que existe ente los píxeles vecinos con píxel  $p$  que comparten el mismo borde y 8-conectividad a la conexión que existe entre los píxeles vecinos con el píxel  $p$  que comparten el mismo borde y vértice.

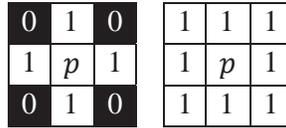


Figura 1-7. A la izquierda 4-conectividad. A la derecha 8-conectividad.

El enfoque básico de esqueletonización se basa en la repetición de operaciones de conservación y eliminación. La eliminación de un pixel  $p$  no deberá de crear agujeros, lo cual requiere que  $p$  comparta alguno de sus bordes por lo menos con algún pixel vecino (edge-neighbor) del fondo  $B$ . Las desconexiones no deben ocurrir, lo cual requiere que  $p$  tenga una 8-conectividad con alguno de los pixeles vecinos del objeto  $O$ .

Al seguir un proceso iterativo, la esqueletonización requiere un número de iteraciones proporcional al máximo espesor del objeto  $O$ . Cada iteración consiste en dos sub-iteraciones en las cuales se identifica la frontera actual y se realiza la eliminación de los pixeles de la frontera apropiados, es decir, pixeles que al ser inspeccionados no son necesarios para preservar la topología del objeto y no son *puntos finales*. El proceso es repetido hasta que ningún pixel de frontera pueda ser eliminado. En este punto se espera que todos los pixeles del objeto sean pixeles de frontera.

La detección de los *puntos finales* evita acortamientos de las ramificaciones del Skeleton. Cada protuberancia del objeto debe ser mapeada en una ramificación del Skeleton, por lo cual es necesario identificar las puntas de cada protuberancia y evitar la eliminación de los elementos que las contengan, de tal manera que se conviertan en *puntos finales* del Skeleton. Un método efectivo está basado en la distancia de los elementos de la frontera desde el interior del objeto, aquellos elementos a una distancia mayor a un valor dado corresponderán a una protuberancia cuyos pixeles no deberán de ser eliminados.

### 1.3.2 Algoritmo de esqueletonización

Definición [8]: en una imagen, una curva simple 8-conectada es un conjunto de pixeles del objeto que dividen el fondo en dos subconjuntos conectados, respectivamente llamados el exterior e interior de la curva. Los pixeles de la curva son vecinos tanto del interior y el exterior de la curva. A partir de que ambos, el interior y exterior de la curva consisten en pixeles de fondo, la 4-conectividad es usada para ambos conjuntos. Cuando la curva es la frontera del objeto, el interior consiste en pixeles del objeto mientras que el exterior en pixeles de fondo, de esta forma la 8-conectividad y la 4-conectividad se usan respectivamente para el interior y exterior de la curva.

La frontera del objeto se considera simple si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones para cada uno de sus pixeles  $p$  [8]:

A1: Un par de vecinos de borde (edge-neighbors) opuestos a  $p$  existen, de tal manera que uno de estos vecinos pertenezca al interior del objeto y el otro pertenezca al fondo.

A2: Un pixel de frontera  $v$ , vértice vecino (vertex-neighbor) de  $p$ , no existe de tal manera que los dos vecinos borde de  $p$  que también son vecinos borde de  $v$  pertenezcan al fondo.

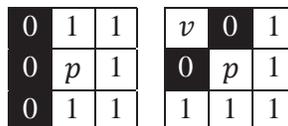


Figura 1-8. Condición A1 (a la izquierda) y A2 (a la derecha).

Las dos condiciones A1-A2 pueden ser usadas de manera eficiente utilizando el operador de Transformación de Distancia DT (Distance Transform), el cual es un operador aplicado a imágenes binarias, donde los elementos del objeto  $O$  son etiquetados con sus distancias medidas a partir del fondo  $B$  [8].

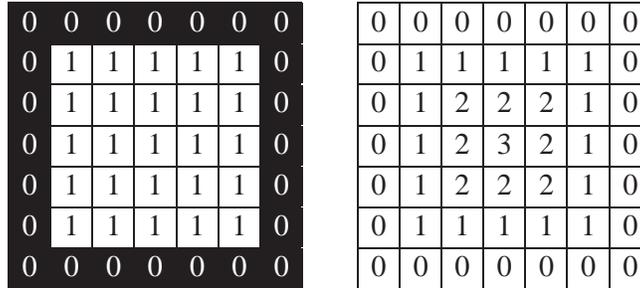


Figura 1-9. Operador de Transformación de Distancia (a la derecha) aplicado a una imagen binaria (a la izquierda).

Bajo esta operación la sub-iteración relacionada con la identificación de la frontera es eliminada a partir de que el DT mantiene un registro de todas las fronteras sucesivas. La frontera del objeto en la iteración  $k$ -ésima incluye todos los pixeles con la distancia etiquetada  $k$  en DT al igual que pixeles con la distancia etiquetada menor que  $k$ , si es que estos últimos no fueron removidos durante iteraciones previas. Los pixeles con etiqueta mayor a  $k$  son pixeles interiores en la iteración  $k$ -ésima. El fondo es, en todas las iteraciones, el conjunto de pixeles eliminados, es decir, el conjunto de ceros. De esta forma el algoritmo de esqueletonización se puede escribir como sigue [8]:

- Calcular el DT. Definir a  $m$  como la máxima distancia etiquetada en DT
- Para  $k = 1, \dots, m$
- Eliminar cada pixel  $p$  con distancia etiquetada  $k$ , que satisface las condiciones A1 y A2 cuando  $p$  es inspeccionado.

### 1.3.3 Comentarios

Debido a que la representación de una imagen binaria a través de su esqueleto genera un conjunto de líneas curvas que mantiene las propiedades topológicas del objeto, es interesante su aplicación en el algoritmo de adecuación para la generación de trayectorias de la solución óptima topológica, ya que con ello es posible obtener un conjunto de líneas rectas que pueden ser sustituidas fácilmente con algún perfil de geometría regular o incluso un perfil de dimensiones y geometría comercial. De esta forma el problema de adecuación queda resuelto para estructuras en dos dimensiones.

Dado que dicha herramienta está diseñada para el procesamiento de imágenes binarias, será necesario transformar la solución topológica óptima para poder aplicar la esqueletonización. Además, debido a que el objetivo de la tesis va más allá de la esqueletonización de imágenes binarias, el esqueleto se obtiene a través de la herramienta que el software de programación utilizado ofrece, pues existen diferentes metodologías de esqueletonización que son ampliamente conocidas y no existe gran diferencia de los resultados entre ellas, por lo cual la programación del proceso de esqueletonización queda fuera del alcance de esta tesis.

---

# 2

## MÉTODO DE ADECUACIÓN

---

Teniendo como base los antecedentes del capítulo anterior, se propone el método para el algoritmo de adecuación a partir del proceso de esqueletonización (sección 1.3). Es necesario mencionar que el tipo de estructuras que se analizan con el algoritmo son planas y tipo marco, ya que el proceso de esqueletonización trabaja con imágenes en dos dimensiones y las uniones entre los miembros estructurales se consideran rígidas.

Las etapas del proceso de adecuación de estructuras óptimas son las siguientes:

- 1) Obtención de la estructura óptima topológica.
- 2) Aplicación del proceso de esqueletonización.
- 3) Localización de vértices.
- 4) Búsqueda de la conectividad entre vértices.
- 5) Obtención del *Skeleton-Structure*.
- 6) Aplicación del algoritmo de distancia mínima.
- 7) Ajuste al dominio de diseño.

Estas etapas se estudiarán con mayor detalle en las siguientes secciones, en las cuales se describirá el algoritmo utilizado. La programación de éste se realizó en *Wolfram Mathematica 9*®.

Para las etapas que a continuación se describen se utiliza el problema de la viga corta en voladizo para ejemplificar el algoritmo, el cual se muestra en la siguiente figura.

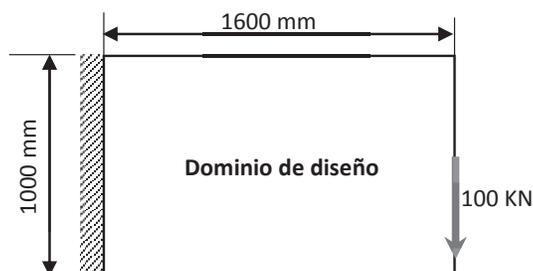


Figura 2-1. Viga corta en voladizo. Empotramiento en su extremo izquierdo y una carga puntual en su extremo libre.

## 2.1 Estructura óptima

La estructura topológica óptima se obtiene de algún software externo, en el cual se pueda llevar a cabo este tipo de optimizaciones, entre ellos se pueden mencionar los siguientes: *Genesis*® de VR&D, *HyperWorks*® y *NX*® entre otros. En este trabajo se utilizan modelos óptimos obtenidos con *HyperWorks*® y su módulo *OptiStruct* para los casos de estudio del Capítulo 3.

Es importante señalar que el algoritmo no depende del software donde la solución óptima sea obtenida, por lo cual cualquier herramienta con la capacidad de realizar optimización topológica y exportar la malla de elementos finitos resultará útil.

Para las estructuras óptimas que se presentan en esta tesis el problema de optimización se establece como sigue:

*Función Objetivo:* Rigidez.

*Variables de diseño:* Densidad de los elementos finitos.

*Restricciones:* Porcentaje de masa del dominio de diseño.

A continuación se describen los pasos correspondientes a la etapa 1 del proceso de adecuación:

Paso 1. Exportar archivo con la información de la malla óptima de elementos finitos.

Paso 2. Importar la malla en *Mathematica*®

Paso 3. Convertir la malla de la solución óptima en una imagen.

Paso 4. Convertir la imagen en una imagen binaria en blanco y negro (1's y 0's) de m por n pixeles.

En la siguiente figura se muestra la optimización de la viga corta en voladizo en su representación como imagen binaria.



Figura 2-2. Viga corta en voladizo. a) Optimización estructural topológica. b) Imagen binaria 360 X 230 pixeles.

## 2.2 Skeletonization

El proceso de esqueletonización, como ya se ha mencionado, es la base fundamental del algoritmo de adecuación de estructuras óptimas. En esta etapa, se aplica un algoritmo similar al ejemplificado en la sección 1.3.2 a la imagen binaria de la solución óptima (Figura 2-2,b). De esta manera se generan trayectorias curvas que funcionarán para identificar los vértices donde convergen dichas trayectorias.

Como se ha establecido en los comentarios de la sección 1.3.3, la eskeletonización no forma parte del alcance de este trabajo, por lo cual se utilizó la función de eskeletonización que *Mathematica*® trae como predeterminada.

El resultado de la eskeletonización para la viga corta en voladizo se muestra a continuación.

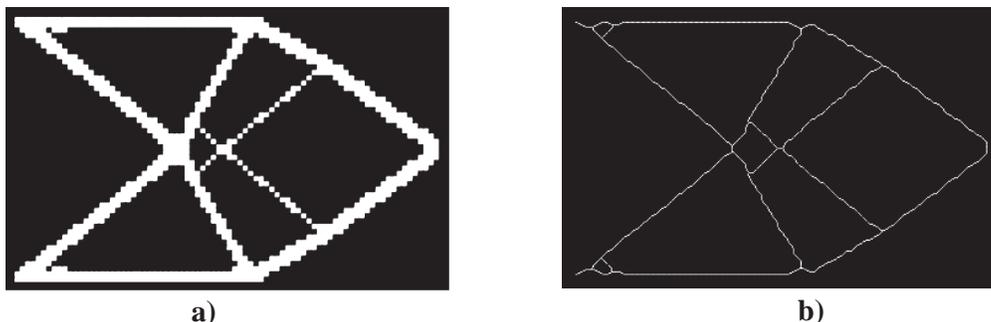


Figura 2-3. Viga corta en voladizo. a) Imagen binaria. b) Esqueleto

Como puede observarse en la Figura 2-3 el espesor del objeto (la solución óptima de la viga) (Figura 2-3,a) se reduce considerablemente al aplicar el proceso de eskeletonización (Figura 2-3,b) donde todas las trayectorias de esqueleto tienen un espesor de 1 pixel. También se puede notar que la topología de la estructura óptima se preserva en el esqueleto.

La ventaja de obtener el esqueleto de la solución óptima es que, a partir de ella, es posible identificar los vértices donde las trayectorias se unen. Esto se discutirá con mayor detalle en la siguiente sección.

### 2.3 Localización de vértices

Una vez que se ha obtenido el esqueleto de la solución óptima, es necesario encontrar los vértices donde las trayectorias convergen. Para esto se visualiza a la imagen binaria como una matriz compuesta de 1's y 0's, donde el conjunto de 1's representa al esqueleto y el conjunto de 0's el fondo de la imagen.

Se considerará un vértice  $V$  a aquel pixel donde tres o más trayectorias convergen y se construirá una sub-matriz de 3x3 que funcionará para identificar los vértices, moviéndola desde el extremo superior izquierdo de la imagen hasta el extremo inferior derecho usando desplazamientos unitarios de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Cuando la posición central de la sub-matriz ( $P_{22}$ ) se coloca sobre un pixel de valor 1, los valores adyacentes a tal pixel son sumados. Si la suma es igual o mayor a tres, el pixel central se considera como un vértice; esto quiere decir que tres o más trayectorias convergen en el mismo pixel. En otro caso se evalúa el siguiente pixel con valor 1 hasta encontrar todos los vértices. A continuación se describe el funcionamiento del algoritmo:

Se considera una sub-matriz de 3x3 centrada en un pixel de valor 1 del esqueleto de la forma:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

## MÉTODO DE ADECUACIÓN

donde  $P_{i,j}$  representa un pixel con valor 1 ó 0 y  $P_{22}$  un pixel con valor 1.  $P_{22}$  es un vértice ( $V$ ) si se satisface (2.1); de otra manera la sub-matriz se posiciona en el siguiente pixel de valor 1 hasta que la condición (2.1) se satisfaga.

$$P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{21} + P_{23} + P_{31} + P_{32} + P_{33} \geq 3 \quad (2.1)$$

Existen dos casos en donde un vértice necesita ser considerado: el inicio o final de una trayectoria del esqueleto y donde existen condiciones de frontera (cargas y restricciones). En el primero de ellos la suma de los pixeles adyacentes a  $P_{22}$  es igual a 1 (Figura 2-4,a), mientras que en el en el segundo, el vértice debe ser especificado por el usuario.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & V & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a)} & \mathbf{b)} \end{array}$$

Figura 2-4. a) Extremo de una trayectoria. b) Vecindad de vértices.

En algunos casos al aplicar el algoritmo se genera una vecindad de vértices (Figura 2-4,b) debido a que algunos pixeles de la vecindad satisfacen la condición (2.1). Por lo cual es necesario aplicar un algoritmo adicional para obtener un vértice único que defina la intersección de trayectorias basado en el cálculo del centroide de una geometría plana.

El algoritmo construye una sub-matriz de 3x3 centrada en cada vértice ( $V$ ) y define un sistema coordenado local (Figura 2-5,a). Las coordenadas locales del nuevo vértice ( $\bar{X}, \bar{Y}$ ) se calculan con las siguientes expresiones:

$$\bar{X} = \frac{\sum i V_x}{\sum V_i}; \quad \bar{Y} = \frac{\sum i V_y}{\sum V_i} \quad (2.2)$$

donde  $i$  toma los valores de 1 hasta 3.  $V_x$  y  $V_y$  representa el número de vértices a una distancia  $i$  en la dirección  $x$  y  $y$  respectivamente. Cuando (2.2) es aplicada, se obtiene un vértice único el cual define el pixel de intersección de las trayectorias (Figura 2-5,b).

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 0 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & V & V \\ 0 & 0 & V \end{array} \right] \\ Y \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & V \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \mathbf{b)} \end{array} \\ \mathbf{a)} & \end{array}$$

Figura 2-5. a) Sistema de coordenadas local. b) Vértice único a partir de la vecindad de a).

## 2.4 Conectividad de vértices

La siguiente etapa del algoritmo es identificar la conectividad de los vértices únicos a través de las trayectorias del esqueleto con la finalidad de sustituir dichas trayectorias con líneas rectas. Para esto es necesario establecer una sub-matriz de 3x3 centrada en un vértice (vértice inicial de la trayectoria) para identificar pixeles adyacentes con valor 1, estos pixeles indican la dirección de cada trayectoria conectada al vértice. Una segunda sub-matriz es centrada en uno de los pixeles de valor 1 que fueron identificados con la sub-matriz anterior. Si la segunda sub-matriz contiene a otro vértice, se considera que éste representa el final de la trayectoria y su conectividad se establece por el vértice inicial y final del trayecto; de otra manera la sub-matriz es centrada en el siguiente pixel de valor 1 hasta que otro vértice sea encontrado. El proceso es repetido para cada pixel de valor 1 adyacente al vértice inicial (pixeles de valor 1 de la primera sub-matriz) para encontrar la conectividad de las trayectorias (Figura 2-6).

Al conocer la conectividad de todos los vértices es posible conectarlos mediante líneas rectas a través de transformar la posición de los vértices en el esqueleto en puntos con coordenadas cartesianas. De esta manera el resultado topológico de una estructura queda representada por líneas rectas las cuales pueden ser sustituidas con perfiles estructurales de geometría regular.

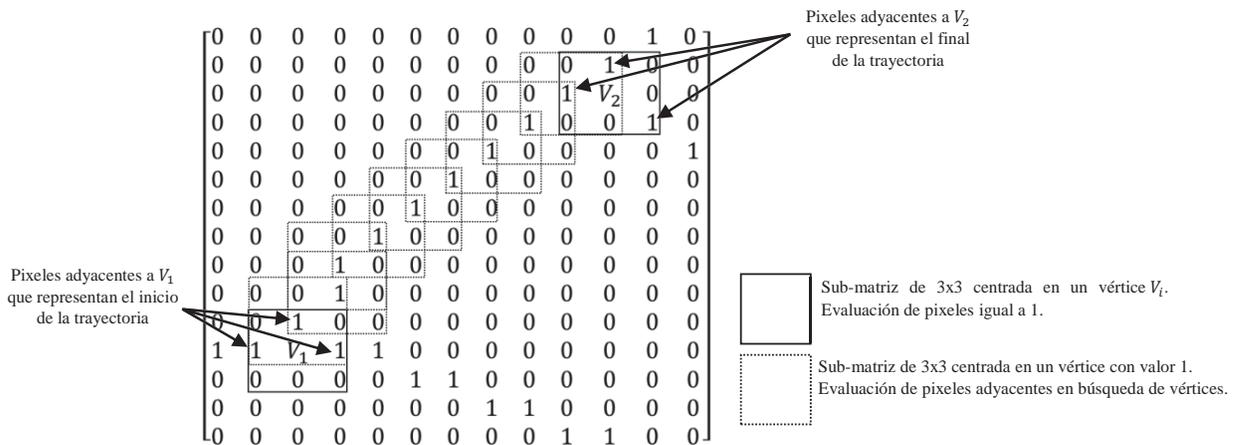


Figura 2-6. Conectividad entre los vértices  $V_1$  y  $V_2$ . Una vez que la sub-matriz encuentra un vértice, se define la conectividad de la trayectoria.

En la siguiente figura se observa la representación de las trayectorias del esqueleto como un conjunto de líneas rectas denominado *skeleton-structure*.

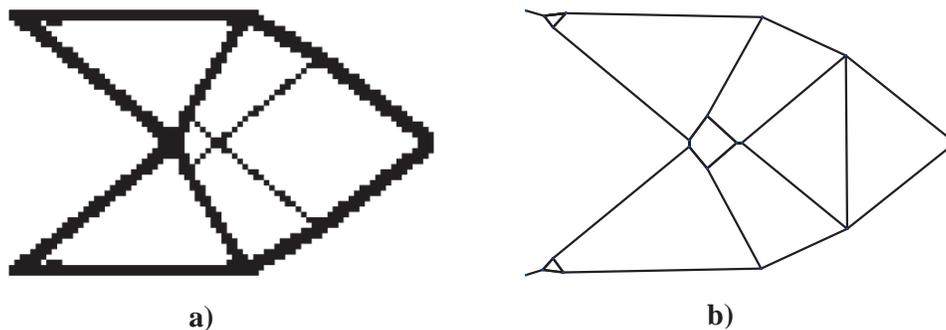


Figura 2-7. Viga corta en voladizo. a) Optimización estructural topológica. b) Skeleton-structure

## 2.5 Algoritmo de distancia mínima

En algunas ocasiones el skeleton-structure puede contener miembros muy cortos que pueden dificultar la manufactura, por tal razón se ha diseñado un algoritmo de distancia mínima. El algoritmo calcula la longitud de cada línea y crea una sub-matriz en los vértices de aquellas líneas donde la longitud es menor al valor de distancia mínima especificado por el usuario. La sub-matriz tendrá el doble de tamaño del valor de la distancia mínima (traducido a píxeles) para considerar todos los vértices que se encuentran alrededor del vértice en cuestión.

El algoritmo calcula un nuevo vértice usando la ecuación (2.2), sin embargo, debido a que el tamaño de la sub-matriz es del doble de tamaño del valor de distancia mínima, la distancia entre vértices es recalculada dentro de la sub-matriz para omitir aquellos que estén por encima de dicho valor. El proceso se repite hasta que se encuentra un único vértice, al cual serán conectadas las líneas rectas que compartían alguna conectividad con los vértices suprimidos.

Al término del algoritmo todos los miembros que no satisfacen la condición de distancia mínima son suprimidos a un vértice único. En la Figura 2-8 se muestra un ejemplo del proceso que el algoritmo sigue para el cálculo de los nuevos vértices.

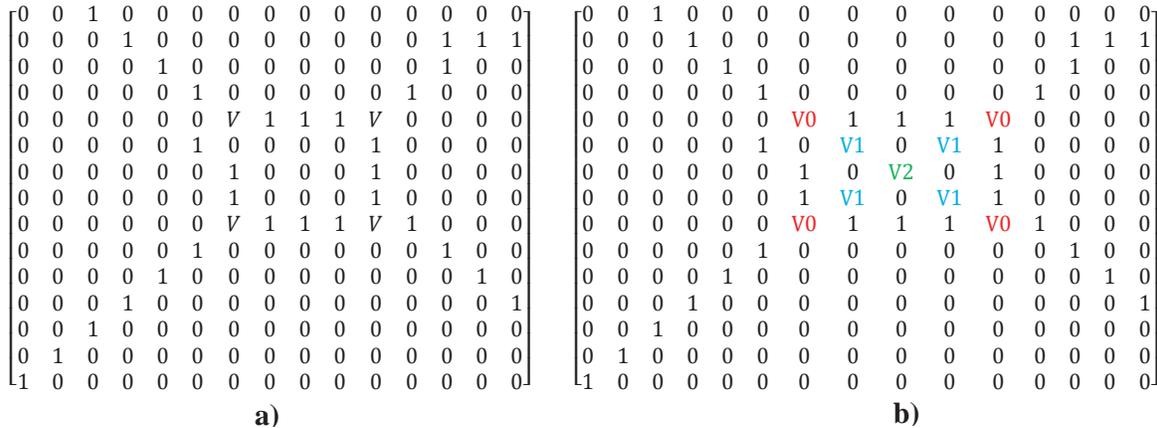


Figura 2-8. a) Vértices (V) iniciales antes de aplicar el algoritmo de distancia mínima. b) Proceso del cálculo de vértices mediante la ecuación (2.2). V0 representa los vértices iniciales antes de aplicar el algoritmo; V1 y V2 representan los vértices de la primera y segunda iteración. El algoritmo se detiene cuando se encuentra el mismo vértice en la siguiente iteración. En este caso el vértice V2 sustituye a los vértices V0.

En la Figura 2-9 se muestra el skeleton-structure de la viga corta en voladizo al aplicar el algoritmo de distancia mínima.

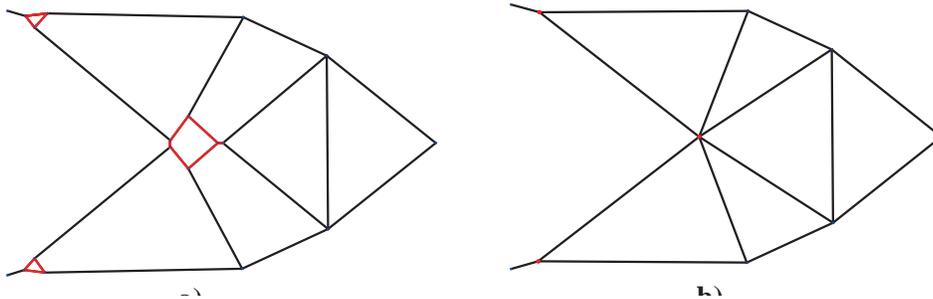


Figura 2-9. Viga corta en voladizo. a) Skeleton-structure antes de aplicar el algoritmo de distancia mínima. Los miembros en rojo son aquellos que no cumplen con el valor especificado de distancia. b) Skeleton-structure después de aplicar el algoritmo de distancia mínima. Los elementos no deseados se suprimen en un único punto.

## 2.6 Ajuste al dominio de diseño

Una vez que se han definido el skeleton-structure, corresponde hacer un redimensionamiento para ajustarlo al dominio de diseño, ya que algunas veces al realizar la esqueletonización no se respeta la frontera del dominio y en consecuencia las trayectorias rectas no se ajustan al mismo.

Para realizar el ajuste se identifica la frontera del dominio de diseño con la generación de líneas que definan a la frontera; para los casos analizados en esta tesis se consideran rectas de la forma  $y = C$  y  $x = C$ , donde  $C$  representa una constante. Se especifica un valor  $\varepsilon$ , el cual se utiliza para comparar la distancia de cada uno de los puntos del skeleton-structure con cada una de las líneas de la frontera del dominio de diseño. Aquellos puntos que se encuentran a una distancia menor o igual a  $\varepsilon$  se trasladan a la frontera del dominio al modificar su coordenada  $x$  o  $y$  según corresponda. En la Figura 2-10 se muestra el ajuste al dominio de diseño de la viga corta en voladizo.

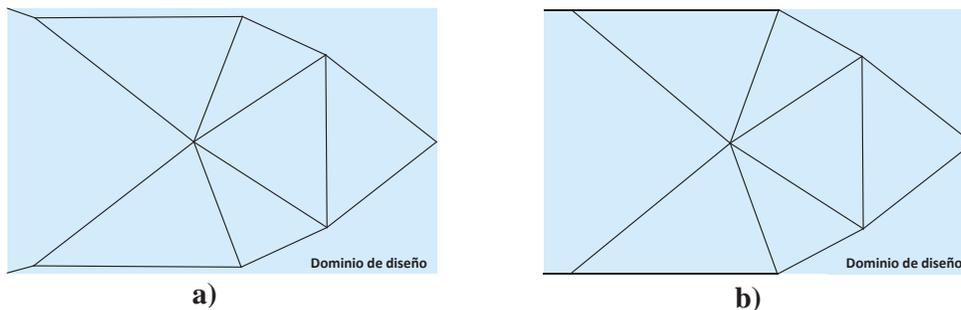


Figura 2-10. Ajuste al dominio de diseño (rectángulo en color azul) del skeleton-structure. a) Skeleton-structure antes de ajustarlo al dominio de diseño. b) Ajuste del skeleton-structure al dominio al especificar un valor  $\varepsilon$ .

Esta herramienta es útil para hacer una adaptación detallada de la solución óptima, ya que dependiendo del valor de  $\varepsilon$ , los puntos del skeleton-structure pueden ser ajustados al dominio de diseño de tal forma que la semejanza con el óptimo topológico sea mayor.

En la siguiente figura se muestra el skeleton-structure de la viga corta en voladizo al aumentar el valor de  $\varepsilon$ . Obsérvese la semejanza con la solución óptima de la viga.

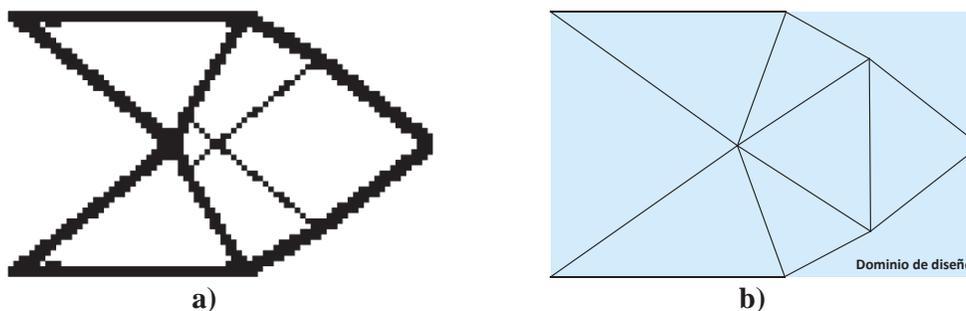
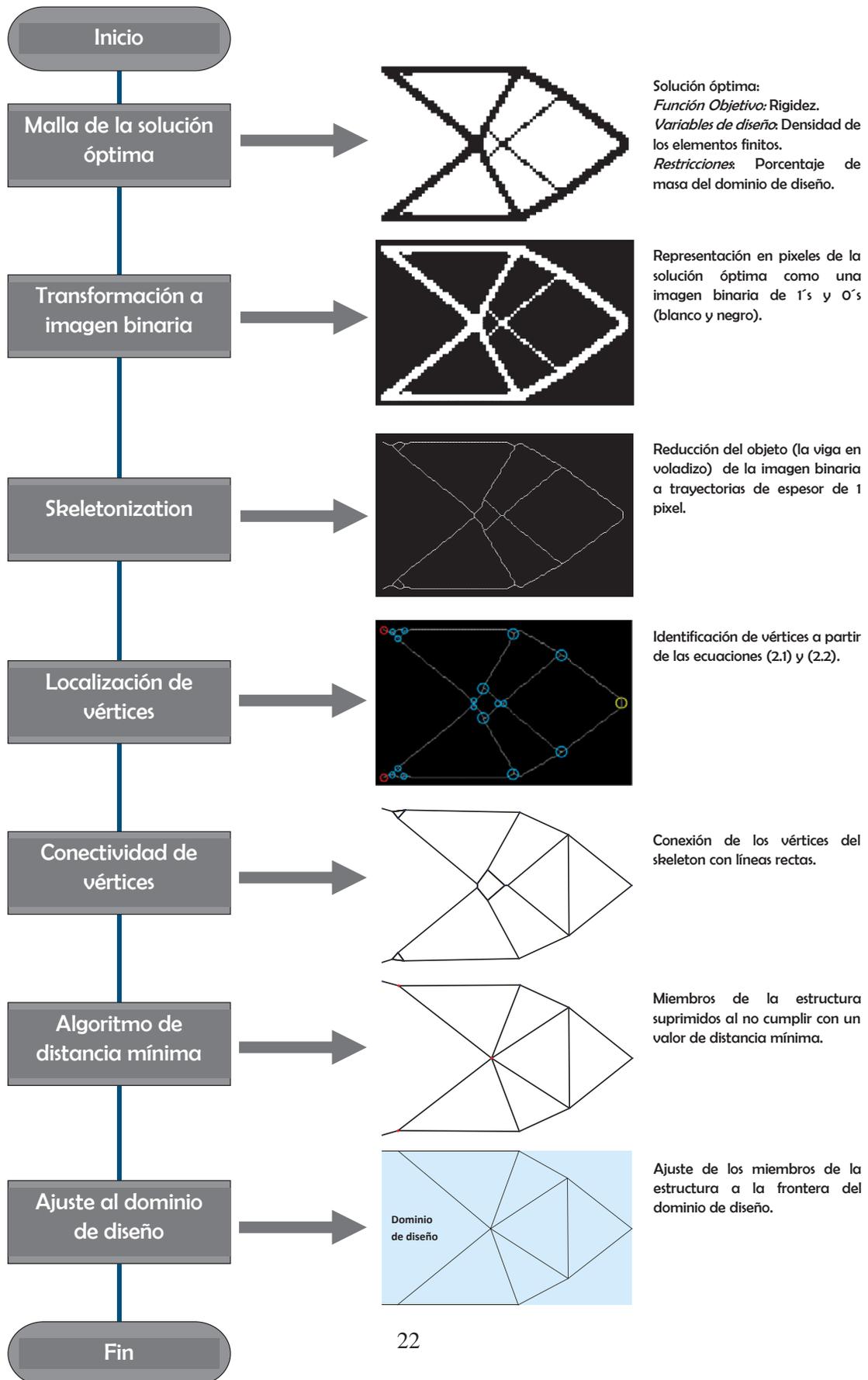


Figura 2-11. a) Optimización estructural topológica. b) Ajuste del skeleton-structure al aumentar el valor de  $\varepsilon$  con respecto al resultado mostrado en la Figura 2-10.

## 2.7 Diagrama de flujo



---

# 3

## CASOS DE ESTUDIO

---

**E**n este capítulo se presentan dos aplicaciones del método de adecuación propuesto. La primera de ellas es para estructuras planas (sección 3.1), como la analizada en el capítulo anterior, y la segunda para estructuras en tres dimensiones (sección 3.2). Es necesario especificar que éstas últimas son un caso particular ya que sólo se tomarán en cuenta estructuras tridimensionales que puedan ser representadas mediante la unión de placas planas<sup>1</sup>. De esta forma el algoritmo de adecuación puede ser aplicado directamente a estructuras tridimensionales realizando algunas modificaciones para obtener el skeleton-structure.

### 3.1 Estructuras planas

Los casos de estudio a analizar en esta sección son: la viga simplemente apoyada (cuya solución óptima es la conocida estructura de Michell) y una viga estáticamente indeterminada que simula la estructura de un puente. Los dominios de diseño y las condiciones de carga se muestran en la Figura 3-1 y en la Figura 3-2 se muestran sus respectivas soluciones óptimas topológicas.

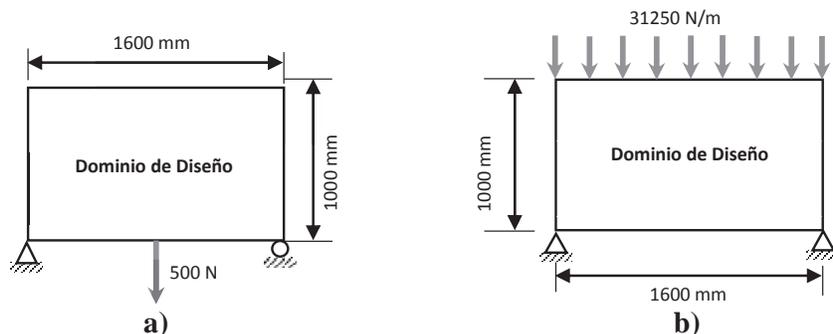


Figura 3-1. Casos de estudio planos. a) Dominio de diseño de la estructura de Michell (viga simplemente apoyada). b) Dominio de diseño de la estructura de un puente (viga estáticamente indeterminada).

---

<sup>1</sup> Cuando en este trabajo se hable de estructuras en tres dimensiones se referirá a estructuras que pueden ser construidas a partir de placas planas.

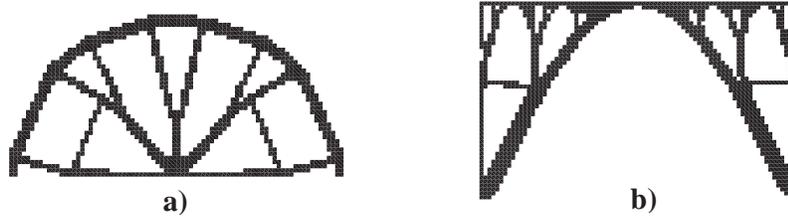


Figura 3-2. Soluciones topológicas óptimas. a) Estructura de Michell. b) Estructura de un puente.

### 3.1.1 Estructura de Michell

En las siguientes imágenes se presenta el método de adecuación para la estructura de Michell tal cual se presenta en el procedimiento descrito en el Capítulo 2.

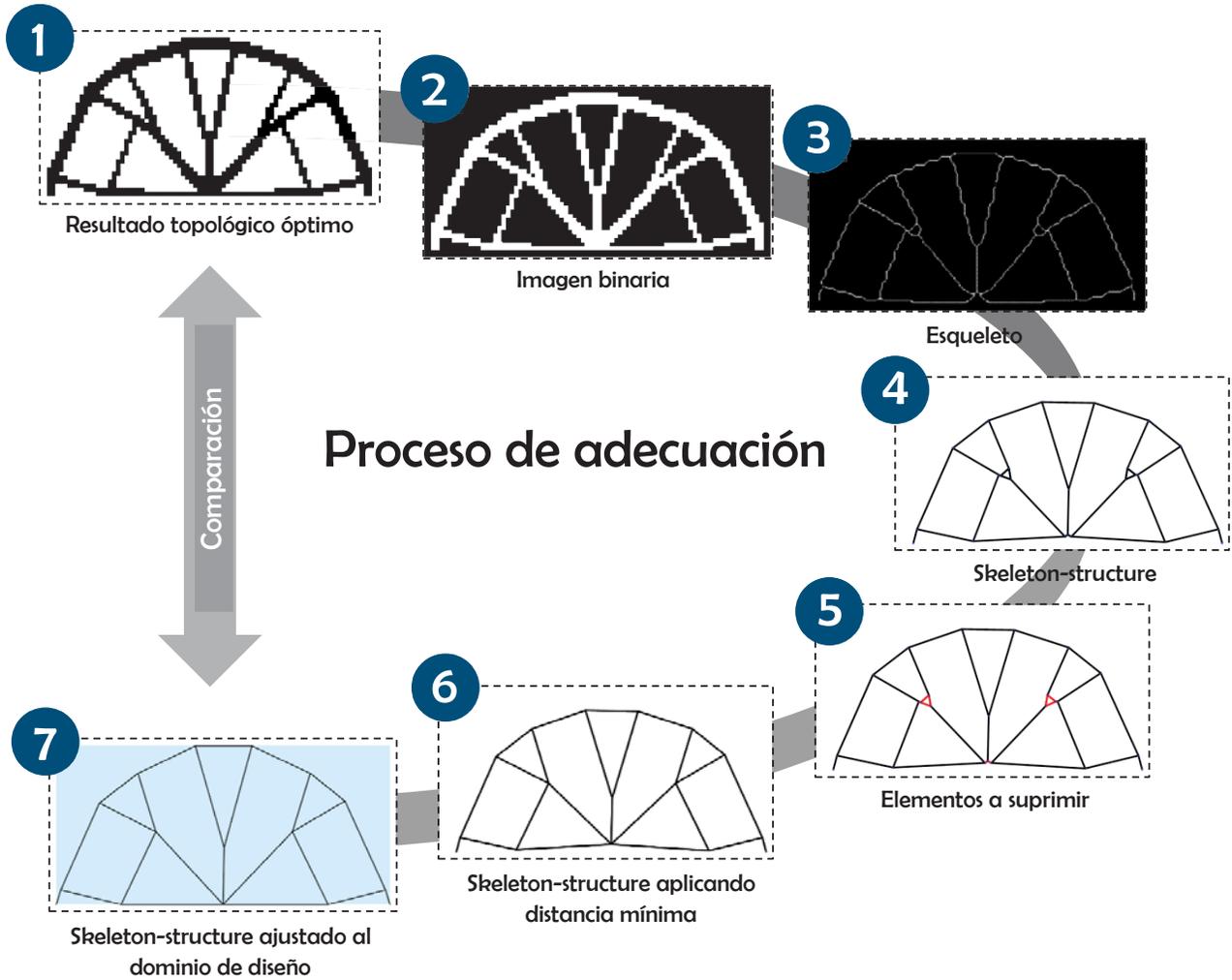


Figura 3-3. Proceso de adecuación de la estructura de Michell.

### 3.1.2 Estructura de un Puente

En las siguientes imágenes se presenta el método de adecuación para la estructura de un puente tal cual se presenta en el procedimiento descrito en el Capítulo 2.

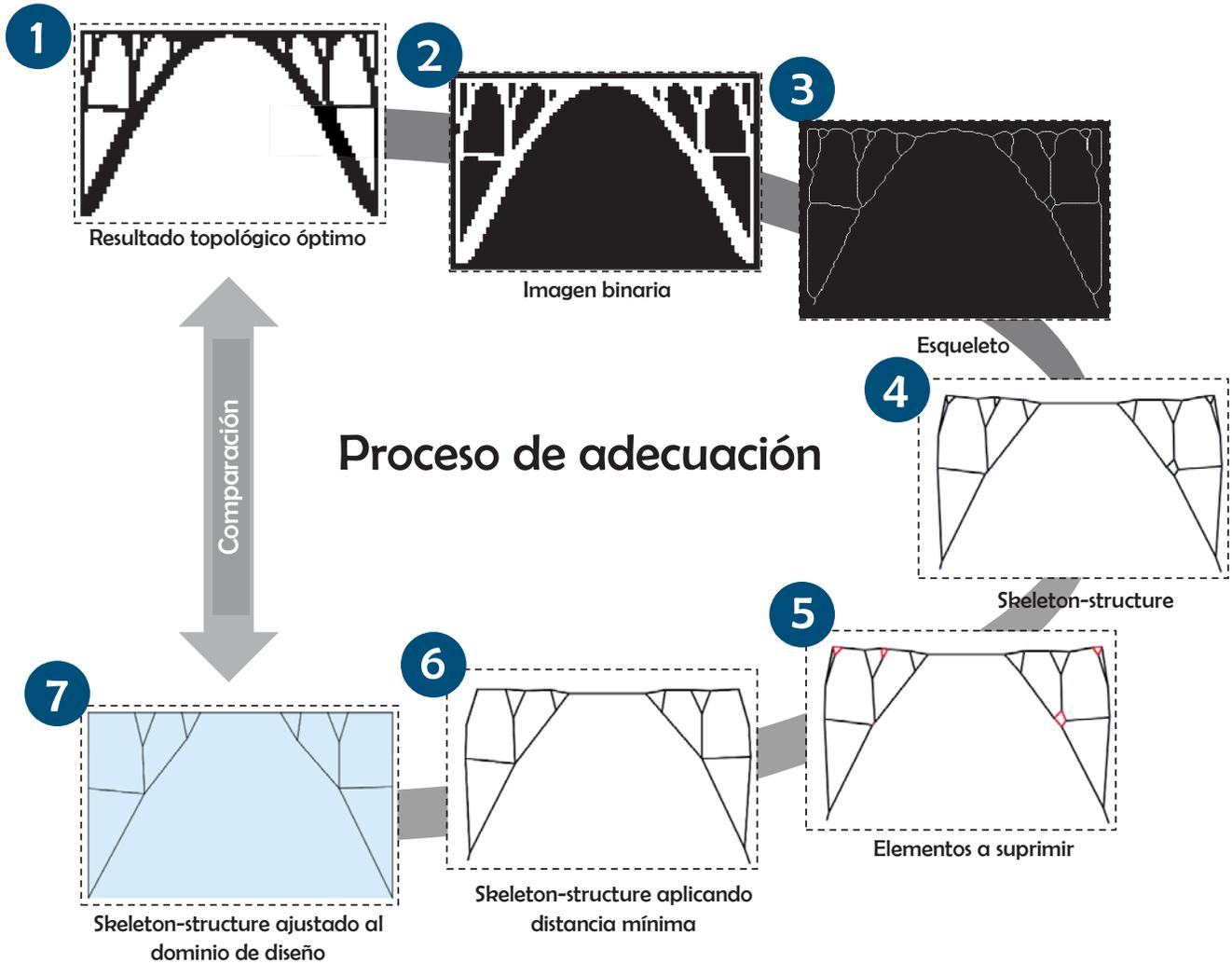


Figura 3-4. Proceso de adecuación de la estructura de un puente.

En ambos casos de estudio se puede verificar la similitud entre el skeleton-structure y el resultado topológico óptimo, sin embargo, el skeleton-structure necesita ser evaluado para conocer su seguridad ante las condiciones de frontera específicas del problema.

El programa realizado para este trabajo permite exportar los puntos y líneas del skeleton-structure, como nodos y elementos unidimensionales, para realizar un análisis por elementos finitos. Al realizar este análisis será necesario especificar una sección transversal para los elementos unidimensionales, lo cual permitirá seleccionar una sección de geometría regular de fácil manufactura o incluso un perfil de dimensiones comerciales.

### 3.2 Estructura tridimensional

Como se mencionó al inicio del capítulo las estructuras tridimensionales que se pueden analizar con el método de adecuación son aquellas que se pueden representar como placas planas. Por tal motivo

se ha tomado el problema de optimización estructural de un edificio como caso de estudio para ejemplificar el método.

La optimización topológica que se presenta a continuación es el resultado de simular las condiciones de sismo para un edificio de 30m de diez niveles desplantado en un área de  $35 \times 10 \text{m}^2$  localizado al sur de la Ciudad de México. Las cargas obtenidas fueron calculadas con el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal del 2004 [9]. La solución óptima se muestra en la Figura 3-5.

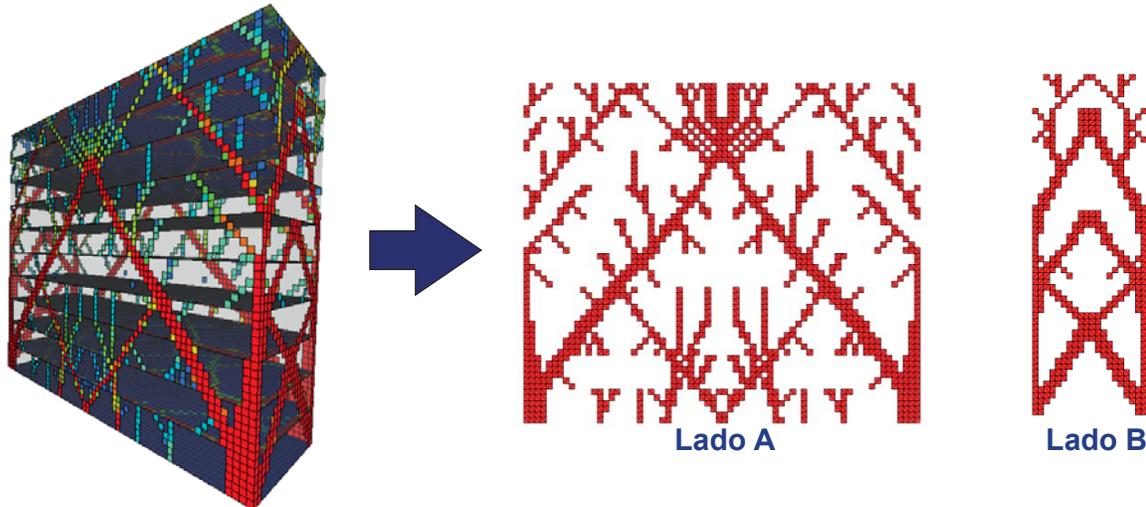


Figura 3-5. Optimización estructural de un edificio de 30m (a la izquierda) [9]. Lados simétricos a sus caras opuestas para aplicar el método de adecuación (a la derecha).

Debido a que la estructura óptima del edificio se representa con placas planas, y éstas son simétricas a sus caras opuestas, es posible identificar dos lados (A y B) para aplicar el método de adecuación (Figura 3-5).

Una vez obtenido el skeleton-structure del lado A y el lado B, se orientan y se conectan para obtener el skeleton-structure del edificio en tres dimensiones (los lados restantes no tomados en cuenta el proceso de adecuación se conectan simétricamente).

Sin embargo, la aplicación del método de adecuación no es directa como en los casos analizados en las secciones anteriores, pues los pisos del edificio intersectan los lados A y B a diferentes alturas. Para esto es necesario agregar al método de adecuación un algoritmo para ajustar el skeleton-structure a los planos (o pisos) de intersección.

### 3.2.1 Ajuste de puntos a planos de intersección

Una vez obtenido el skeleton-structure de alguno de los lados es necesario ajustar sus puntos a cada uno de los planos que lo intersectan con la finalidad de satisfacer la conectividad de la estructura.

Para realizar el ajuste se identifican los planos de intersección mediante líneas rectas de la forma<sup>2</sup>  $y = C_i$ , donde  $C_i$  representa una constante cuyo incremento es definido por el usuario (es decir,  $C_i$  representa la altura de cada uno de los pisos del edificio). Se especifica un valor de  $\varepsilon_p$ , el cual se utiliza para comparar la distancia de cada uno de los puntos del skeleton-structure con la línea recta  $i$ -ésima (en este caso el piso  $i$ -ésimo). Aquellos puntos cuya distancia sea menor o igual a  $\varepsilon_p$  se trasladarán a la recta  $i$ -ésima al modificar su coordenada  $y$  (o  $x$  en su caso).

<sup>2</sup> En el caso en que los planos de intersección sean verticales las rectas serán de la forma  $x = C_i$

Este algoritmo es similar al utilizado para el ajuste del skeleton-structure al dominio de diseño, sin embargo éste se realiza iterativamente hasta que todas las rectas de intersección sean analizadas.

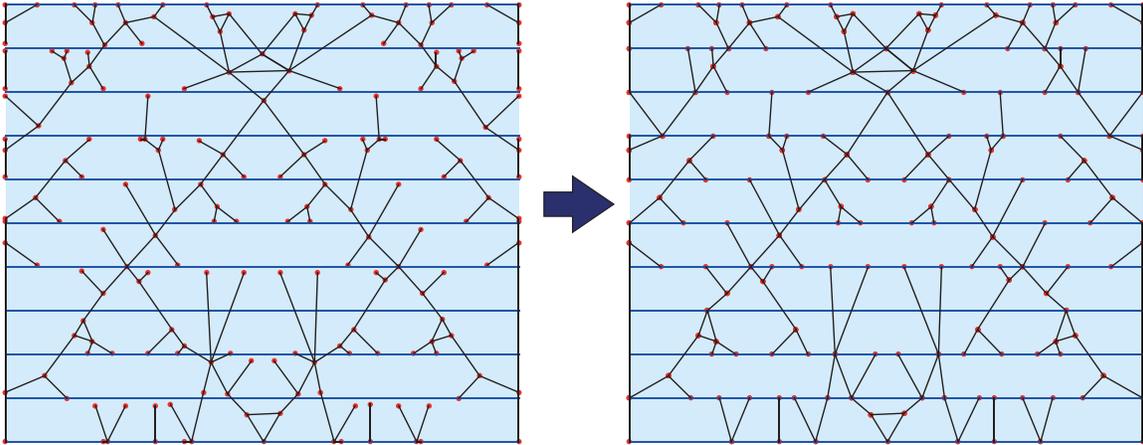


Figura 3-6. Ajuste de las trayectorias a los pisos del edificio del lado A. A la izquierda antes del ajuste y a la derecha después del ajuste. Puede notarse la desaparición de algunas trayectorias cercanas a los pisos.

### 3.2.2 Intersección del skeleton-structure y planos transversales

En esta parte del algoritmo es necesario crear puntos de intersección entre las trayectorias del skeleton-structure y los planos transversales (los pisos del edificio), ya que éstos no se generan de manera automática y son necesarios para establecer la conectividad de la estructura con los pisos.

El algoritmo comienza por encontrar la ecuación de cada una de las trayectorias del skeleton-structure a partir de los puntos que definen a cada línea recta. Una vez conocida la ecuación de cada trayectoria y la ecuación de cada línea transversal (o piso), se calculan los puntos de intersección de cada trayectoria por línea transversal al igualar ambas ecuaciones. Debido a que el cálculo se realiza con la ecuación de cada línea recta, todas las líneas del skeleton-structure intersectan con todas las líneas transversales (a menos que las primeras sean de la forma  $y = C$ ), por lo cual es necesario especificar el intervalo en el que la intersección ocurre. Cada trayectoria del skeleton-structure está definida por su dominio y rango, por lo cual, el algoritmo compara el punto de intersección con el dominio y rango de la trayectoria para conocer si éste se encuentra dentro del intervalo. Si esto es así, el punto de intersección se encuentra contenido en la trayectoria estudiada y se define un punto que conecta dicha trayectoria con el plano transversal de la estructura. En otro caso la conexión no se satisface.

El proceso se puede enunciar como sigue:

Sea  $P_I(x, y)$  un punto de intersección de las trayectorias del skeleton-structure con los planos transversales, y sean  $D = (x_1, x_2)$  y  $R = (y_1, y_2)$  el dominio y rango de una trayectoria  $T$  del skeleton-structure, si  $x_1 < x < x_2$  y  $y_1 < y < y_2$ , entonces  $P_I$  es un punto de intersección que conecta la trayectoria  $T$  con el plano de transversal, si no,  $P_I$  no se considera como un punto de conexión.

Al identificarse los puntos de intersección con los planos transversales es necesario segmentar aquellas líneas de la trayectoria en las cuales estén contenidos los puntos de intersección, esto con la finalidad de poder identificar cada trayectoria individualmente al momento de exportar el skeleton-structure a un software de elementos finitos.

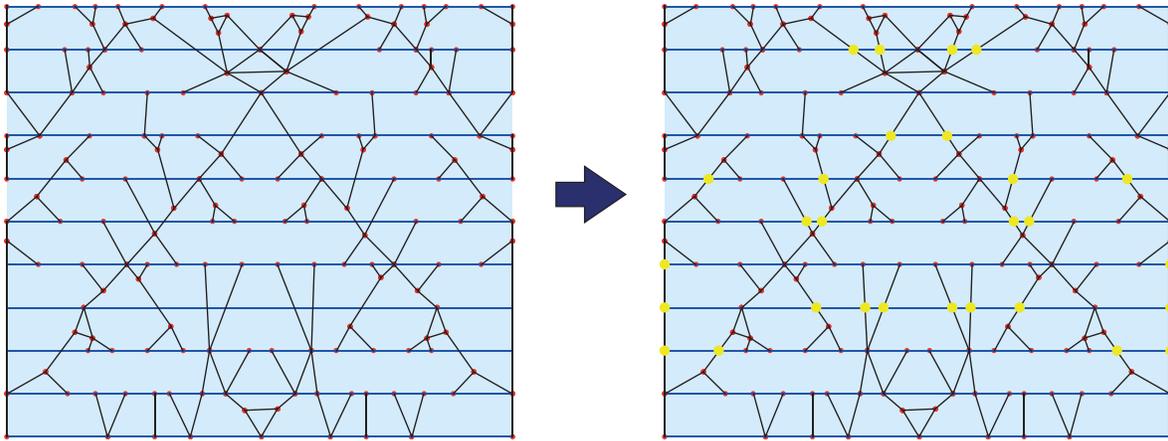


Figura 3-7. Puntos de intersección del skeleton-structure y los planos transversales. A la izquierda se muestra el lado A antes de aplicar el algoritmo. A la derecha se observan los puntos de intersección encontrados con el algoritmo (en color amarillo).

### 3.2.3 Conexión de los skeleton-structures

El último proceso para obtener el skeleton-structure en tres dimensiones es la conexión de los skeleton-structures de los lados de la estructura, en este caso los lados A y B del edificio. Para tal efecto es indispensable normalizar las dimensiones de cada lado, ya que se encuentran a diferentes escalas debido al número de píxeles que los representan. La finalidad es obtener una representación que ayude a identificar gráficamente los puntos de conexión entre los lados de la estructura.

#### *Ubicación de los skeleton-structures en el espacio*

Es necesario ubicar cada uno de los skeleton-structure en la posición que ocupan en el espacio, es decir, cada lado necesita estar orientado con respecto a un marco de referencia para representar la estructura en tres dimensiones.

Para ubicar los skeleton-structures, es necesario definir un sistema coordenado XYZ y establecer un lado base (ya sea el lado A o B) con respecto al cual sean orientados los skeleton-structures restantes. El lado base se ubica arbitrariamente en el plano XY.

Para el caso de estudio se toma al lado A como lado base y se considera que los lados opuestos C y D son simétricos a los lados A y B respectivamente. De esta forma se toma al lado A y C paralelos al plano XY separados a una distancia de 10m y el lado B y D paralelos al plano YZ separados a una distancia de 35m.

#### *Ajuste de puntos de conexión entre skeleton-structures*

En esta parte del proceso es necesario identificar los puntos de conexión entre las fronteras de los skeleton-structures de tal forma que se satisfaga la unión de los lados de la estructura. Para esto se identifican puntos y líneas repetidas del skeleton-structure en tres dimensiones y se da la opción de que el usuario identifique puntos que considere pertinentes para la conexión de la estructura.

De esta manera se obtiene la representación en tres dimensiones del skeleton-structure, el cual es posible exportarlo en un archivo para su lectura en algún software de elementos finitos al establecer nodos, elementos y su conectividad.

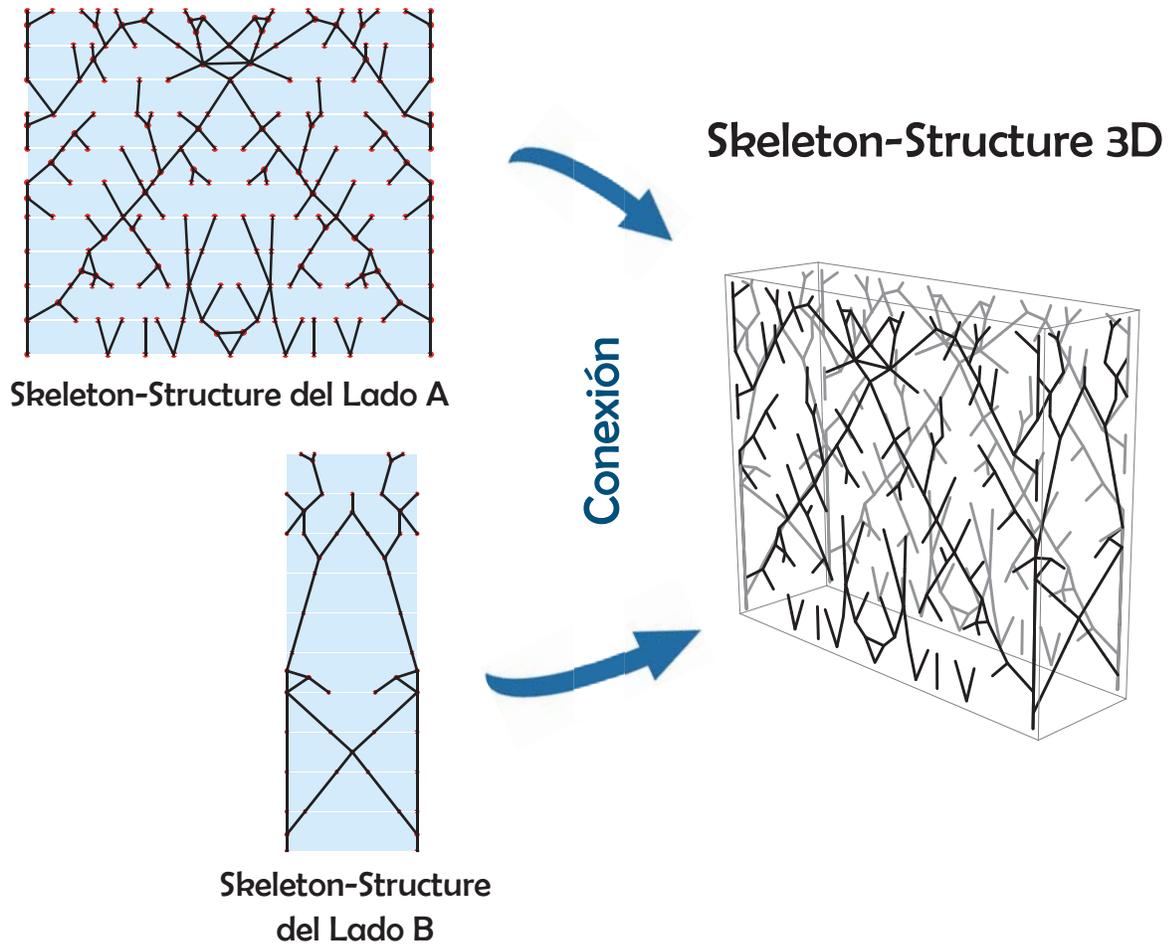


Figura 3-8. Conexión de los skeleton-structures de los lados A y B, los lados restantes (C y D) se consideran simétricos a los primeros. Se obtiene el skeleton-structure 3D que representa la estructura óptima del edificio.

De esta manera se concluye el proceso de adecuación de una estructura óptima en tres dimensiones, permitiendo al diseñador obtener una representación de elementos estructurales unidimensionales, que al igual que en las adecuaciones en el plano, es necesario realizar un análisis para determinar la sección transversal de sus elementos. El programa realizado está diseñado para exportar el skeleton-structure a un software de elementos finitos y llevar a cabo un análisis FEM de la estructura.

### 3.2.4 Análisis por elementos finitos

Como se mencionó al término de la sección anterior, es necesario importar el skeleton-structure a un software de elementos finitos para modelar la estructura, en este caso se utilizó el programa HyperWorks® mediante su módulo HyperMesh®.

El archivo obtenido por el algoritmo propuesto especifica el tipo de elemento unidimensional a utilizar en el análisis FEM (para el caso de estudio se utilizaron elementos tipo BEAM, es decir, elementos que soportan cargas a tensión, compresión, flexión y torsión), sin embargo no especifica el tipo de elemento para modelar los pisos del edificio, por lo que se modelaron directamente en el software utilizando elementos tipo SHELL de 150 mm de espesor (ver Figura 3-10).

Debido a que en el método de adecuación no se especifica algún tipo de sección transversal, es necesario que el usuario lo especifique. Para este caso se consideró una sección transversal comercial W530 con las dimensiones mostradas en la Figura 3-9.

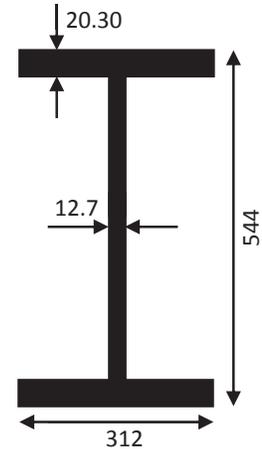


Figura 3-9. Sección W530 X150. Dimensiones en mm.

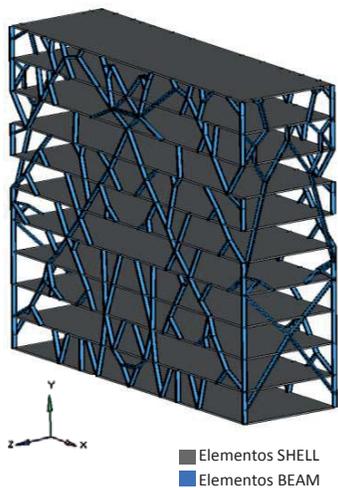


Figura 3-10. Skeleton-structure modelado en HyperMesh®.

Se consideró el caso de carga sísmica en dirección Z presentado en [9], uno de los casos de carga con el cual se obtuvo la optimización estructural topológica de la Figura 3-5 y que corresponde a la condición crítica.

La carga sísmica se distribuye en los diez niveles del edificio, según lo indica el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal del 2004, y se considera empotramiento en su base.

El material utilizado es acero estructural ASTM A36 con las siguientes propiedades mecánicas:

Resistencia a la fluencia: 250 MPa

Módulo de elasticidad: 200 GPa

Coefficiente de Poisson: 0.33

Densidad: 7850 kg/m<sup>3</sup>

De los resultados del análisis FEM se obtiene lo siguiente (ver

Figura 3-11):

Esfuerzo máximo: 167.5 MPa

Desplazamiento máximo: 68.38 mm

Factor de seguridad: 1.49

A partir de la simulación numérica se determina que la estructura resiste las condiciones de carga sin deformarse plásticamente. De esta manera se comprueba la funcionalidad del método de adecuación, ya que la configuración geométrica del skeleton-structure permite obtener un arreglo de miembros estructurales de fácil manufactura capaces de soportar las condiciones de operación al momento de seleccionar y orientar un perfil estructural con el cual no se rebase el esfuerzo de cedencia del material.

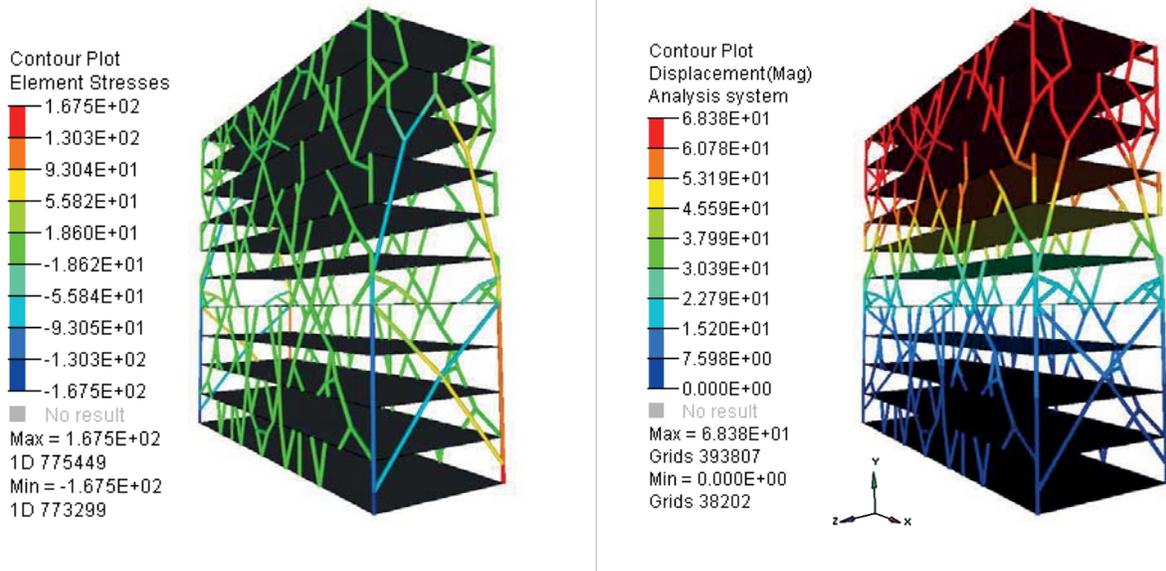


Figura 3-11. Resultado de esfuerzos axiales (a la izquierda) y resultado de desplazamientos (a la derecha).

Debe mencionarse que para el análisis FEM se propusieron diferentes secciones transversales hasta encontrar aquella que satisficiera las condiciones de carga, además de que no se consideró el tipo de conexión entre los perfiles estructurales. Es decir, todas las uniones entre elementos son rígidas. Esto se debe a que el método de adecuación no considera el diseño y selección de conexiones para los elementos estructurales.

Este último punto da pie al trabajo futuro del algoritmo en el cual se pueda generar, de manera automática, el tipo de conexión y la orientación de los elementos estructurales así como aplicar un método de optimización para seleccionar un perfil de una familia de secciones transversales, evitando las iteraciones del análisis FEM para encontrar un perfil adecuado. De esta manera se llegaría a la última etapa de la adecuación en la que, al término del algoritmo, se tendría una estructura lista para su manufactura.

---

# 4

## CONCLUSIONES

---

**E**n este breve capítulo se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado hasta la fecha para los alcances establecidos a lo largo de la maestría en diseño mecánico. Como bien puede anticiparse, se presentaron diversas dificultades en la programación del algoritmo de adecuación, lo cual no se considera pertinente presentar en este trabajo, ya que cada problema depende de la concepción del algoritmo y la habilidad del programador.

A continuación se presentan las conclusiones del método de adecuación por puntos:

- El algoritmo de adecuación presentado en esta tesis muestra la ventaja de ser un método automático, el cual no depende del criterio del diseñador y el proceso es repetible. Esta parte es fundamental en el diseño para fabricación de estructuras óptimas ya que se obtiene una estructura donde la subjetividad, en las decisiones de adecuación, se reduce al aplicar el algoritmo.
- El algoritmo propuesto cumple la principal función de transformar la solución topológica óptima, no manufacturable, en una representación geométrica simple totalmente manufacturable. Por tal razón se puede concluir que el proceso de esqueletonización es útil para adecuar estructuras topológicas óptimas.
- El método de adecuación demuestra la facilidad de la interpretación de la distribución del material debido a que es un proceso automático con el cual las decisiones subjetivas del diseñador se ven reducidas.
- Es necesario realizar un análisis para definir la sección transversal de los elementos estructurales una vez encontrado el skeleton-structure. La parte del análisis, hasta el momento, no es parte del proceso de adecuación pues ésta sólo genera líneas rectas sin alguna propiedad mecánica, no obstante pueden interpretarse fácilmente como elementos unidimensionales al realizar un análisis FEM en cualquier software de elementos finitos.
- Del análisis FEM de la estructura tridimensional se demuestra que el método de adecuación permite obtener estructuras funcionales al no rebasar el límite elástico del material.
- Aun cuando la esqueletonización puede generar trayectorias no deseadas que complican la adecuación, es posible corregirlas con el algoritmo de distancia mínima y el algoritmo de ajuste

al dominio de diseño (o el algoritmo de ajuste a los planos de intersección para estructuras en tres dimensiones). Procesos en los cuales es necesaria la interacción con el usuario, pues él definirá magnitudes para dicha adecuación. En esta parte del proceso el criterio del diseñador es evidente, por lo cual, para minimizar la subjetividad, se pretende el estudio futuro del algoritmo de adecuación para reducir las interacciones con el usuario.

- Es importante mencionar que para las estructuras adecuadas, al modelarse en elementos finitos, se consideran uniones rígidas entre los miembros estructurales, por lo cual las estructuras adecuadas son tipo marco.
- Para los casos de estudio mostrados en este trabajo se consideran rectas las fronteras del dominio de diseño, lo cual representa una particularidad del método de adecuación. Como trabajo futuro se busca generalizar el método al considerar fronteras no rectas.
- Con el método de adecuación desarrollado, únicamente se pueden adecuar estructuras en tres dimensiones si estas pueden ser modeladas como la unión de placas planas. Esta condición se presenta debido a que el proceso de esqueletonización utilizado funciona para gráficos en dos dimensiones. Sin embargo, para generalizar el método, como trabajo a futuro, se pretende el estudio de los métodos de esqueletonización en tres dimensiones para examinar su funcionalidad para la adecuación de estructuras topológicas óptimas.
- A diferencia de los trabajos previos de los métodos de adecuación presentados en [5], [6] y [7], con el método propuesto es posible generar una estructura para su manufactura a partir de perfiles comerciales. De esta forma el método representa una nueva e innovadora alternativa para la adecuación de estructuras óptimas obtenidas por optimización topológica, ya que no se basa en los algoritmos de los autores anteriores y utiliza una herramienta distinta para simplificar la geometría óptima (el proceso de esqueletonización). Por lo cual este trabajo da la posibilidad de abrir una nueva línea de investigación con base en herramientas de procesamiento de imágenes.
- Como trabajo a futuro se pretende complementar el método de adecuación al diseñar un algoritmo que permita seleccionar el tipo de perfil de manera automática así como el tipo de conexión entre miembros estructurales, de tal forma que al término del algoritmo se pueda obtener una estructura lista para su manufactura.
- Este trabajo ha sido presentado y evaluado en congresos nacionales e internacionales como el XX Congreso Internacional Anual de SOMIM 2014 en Querétaro, México y el Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería CMN 2015 en Lisboa, Portugal.

\*\*\*

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] P. W. Christensen y A. Klarbring, *An Introduction to Structural Optimization*, Springer, 2009.
- [2] M. P. Bendsoe y O. Sigmund, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer, 2003.
- [3] X. Huang y Y. M. Xie, *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*, John Wiley & Sons, 2010.
- [4] F. A. Camacho, *Grupo de diseño mecánico óptimo : diseño conceptual de un vehículo eléctrico de reparto, modelado como un monocasco*, Ciudad Universitaria, México: UNAM, 2011.
- [5] L. Chyi-Yeu y L. Shin-Hong, «Artificial neural network based hole image interpretation techniques for integrated topology and shape optimization,» *Computer methods in applied mechanics and engineering*, n° 194, pp. 3817-3837, 2005.
- [6] H. Ming-Hsiu y H. Yeh-Liang, «Interpreting three-dimensional structural topology optimization results,» *Computers & Structures*, n° 83, pp. 327-337, 2005.
- [7] H. Yeh-Liang, H. Ming-Sho y C. Chuan-Tang, «Interpreting results from topology optimization using density contours,» *Computers & Structures*, n° 79, pp. 1049-1058, 2001.
- [8] G. Sanniti di Baja, «Skeletonization of Digital Objects,» de *11th Iberoamerican Congress in Pattern Recognition, CIARP 2006*, Cancún, México, 2006.
- [9] A. Mendoza San Agustín, Tesis: *Diseño conceptual de la estructura de un edificio mediante el método de optimización topológica*, Ciudad Universitaria, México: UNAM, 2012.
- [10] D. Rodriguez Vaz, D. Rabelo Damasceno y P. Alves da Silva, *PROPOSTA DE MELHORIA ESTRUTURAL DA CAÇAMBA DE UMA MINICARREGADEIRA, UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA*, 2014.

---

# ANEXO

---

## Optimización estructural evolutiva (ESO) [3]

En esta parte del trabajo se presenta el método de optimización evolutiva ESO con la finalidad de introducir al lector en alguna de las metodologías de optimización estructural topológica. Debe señalarse que el método utilizado en esta tesis no es el que se describirá a continuación pues el acceso a la información, con relación a su funcionamiento, no es del todo clara ni accesible ya que se utilizó software comercial como herramienta para obtener topologías óptimas, sin embargo la descripción del método ESO ayuda a comprender de manera general este tipo de optimizaciones.

El método ESO fue propuesto por Xie y Steven en la década de los 90 y está basado en el concepto de remover gradualmente material ineficiente de una estructura. A través de este proceso, la estructura final “evolucionará” a su topología óptima. La finalidad de esta herramienta es generar estructuras óptimas que puedan ser utilizadas para definir el diseño conceptual de un proyecto de ingeniería.

### ESO basado en el nivel de esfuerzos

El nivel de esfuerzos de una estructura puede interpretarse como un indicador del uso eficiente o ineficiente de material en modelo de ingeniería, de tal manera que un nivel bajo de esfuerzos en ciertas partes del dominio de una estructura, da la indicación de que el material está siendo utilizado ineficientemente. Este concepto da lugar al criterio de rechazo (rejection criterion) basado en nivel de esfuerzo local, donde el material con un nivel de esfuerzos bajo se asume como subutilizado y es removido. Ya que el nivel de esfuerzo puede ser medido a partir de un modelo por elementos finitos, es conveniente borrar aquellos elementos que presenten un bajo nivel de esfuerzos.

El valor de esfuerzos de cada elemento se determina comparando, por ejemplo, el esfuerzo de Von Mises del elemento  $\sigma_e^{vm}$  con el esfuerzo máximo de Von Mises de toda la estructura  $\sigma_{max}^{vm}$ . Después de cada análisis por elementos finitos, aquellos elementos que satisfagan la siguiente condición son removidos del modelo.

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR_i, \quad (1.2)$$

Donde  $RR_i$  es la razón de rechazo en la iteración  $i$ .

Cada vez que se realiza un análisis por elementos finitos y se remueven elementos se utiliza el mismo valor de  $RR_i$  hasta que se alcance un estado estable donde no existan más elementos que remover con el valor de la razón de rechazo. Es este punto se incrementa el valor de la razón de rechazo al considerar un valor conocido como tasa de evolución  $ER$ , el cual se suma de la siguiente manera:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad (1.3)$$

Al incrementar la razón de rechazo, se reinician las iteraciones hasta que se alcance un nuevo estado estable. El proceso continúa hasta que se alcanza el óptimo deseado, por ejemplo cuando no existe material en la estructura final con un nivel de esfuerzos menor al 25% del valor máximo.

El proceso evolutivo se puede describir de la siguiente manera:

Paso 1: Discretizar la estructura usando una malla de elementos finitos.

Paso 2: Llevar a cabo el análisis de elementos finitos.

Paso 3: Remover los elementos que no satisfagan (1.2).

Paso 4: Incrementar la razón de rechazo de acuerdo con la ecuación (1.3) si el estado estable se ha alcanzado.

Paso 5: Repetir los pasos 2 y 4 hasta que se obtenga el óptimo deseado.

## ESO para optimización por rigidez o desplazamiento

En el diseño de estructuras comúnmente se desea que éstas sean lo más rígidas posibles, ya que entre más rígido sea un elemento estructural, menor será su deformación y en consecuencia el nivel de esfuerzos será bajo. Por tal razón resulta interesante investigar aquellos algoritmos que permitan obtener estructuras óptimas de alta rigidez. Para esto se considera el compliance promedio  $C$ , que representa el inverso de la rigidez de una estructura. El compliance promedio puede definirse como la energía total de deformación de la estructura o el trabajo externo realizado por las fuerzas aplicadas, matemáticamente se puede expresar como

$$C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerza y  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamiento .

En elemento finito la ecuación de equilibrio estático para una estructura se expresa como

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez global.

Cuando el elemento  $i$ -ésimo es removido de la estructura la matriz de rigidez cambia de la siguiente manera

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}^* - \mathbf{K} = -\mathbf{K}_i \quad (1.6)$$

donde  $\mathbf{K}^*$  es la matriz de rigidez de la estructura resultante después de que el elemento es removido y  $\mathbf{K}_i$  es la matriz de rigidez del elemento  $i$ -ésimo. Se asume que al remover un elemento finito no se afecta a la carga aplicada  $\mathbf{f}$ . Al variar ambos lados de la ecuación (1.5), el cambio del vector de desplazamiento queda expresado como

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (1.7)$$

de la ecuación (1.4) y (1.7) se tiene

$$\Delta \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \Delta \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (1.8)$$

donde  $\mathbf{u}_i$  es el vector de desplazamiento del elemento  $i$ -ésimo.

De esta forma, el número de sensibilidad del compliance promedio se define como

$$\alpha_i^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (1.9)$$

La ecuación anterior indica que el incremento del compliance promedio como resultado de eliminar el  $i$ -ésimo elemento es igual a su energía de deformación. Para minimizar el compliance promedio (que es lo equivalente a maximizar la rigidez) es necesario remover aquellos elementos que presenten los valores más bajos de  $\alpha_i^e$  para que el incremento de  $\mathbf{C}$  sea mínimo. El número de elementos a eliminar está determinado por la relación de eliminación de elementos (ERR) que se define como la relación entre los elementos eliminados en cada iteración con respecto al número total de elementos del FEM inicial o del FEM de la  $i$ -ésima iteración

El método evolutivo para una optimización de rigidez se describe en los siguientes pasos:

Paso 1: Discretizar la estructura usando una malla de elementos finitos.

Paso 2: Llevar a cabo el análisis por elementos finitos de la estructura.

Paso 3: Calcular el número de sensibilidad para cada elemento usando la ecuación (1.9).

Paso 4: Remover los elementos con el número de sensibilidad más bajo de acuerdo con el ERR.

Paso 5: Repetir los pasos 2 al 4 hasta que el compliance promedio de la estructura resultante alcance un límite preestablecido.