



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES

**MUESTREO “ESCASO” DE SEÑALES FOTOACÚSTICAS**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ESTEBAN BAUTISTA RUIZ

TUTORES PRINCIPALES:  
DR. FERNANDO ARÁMBULA COSÍO, CCADET  
DR. CRESCENCIO GARCÍA SEGUNDO, CCADET

MÉXICO, D. F., NOVIEMBRE, 2015

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Escalante Ramírez Boris  
Secretario: Dr. Pérez Alcázar Pablo Roberto  
Vocal: Dr. Arámbula Cosío Fernando  
1 er. Suplente: Dr. García Segundo Crescencio  
2 do. Suplente: Dra. Medina Gómez Lucía

CCADET-UNAM: Laboratorio de Imagenología Biomédica, Física y Computacional

**TUTORES DE TESIS:**

Dr. Fernando Arámbula Cosío



FIRMA

Dr. Crescencio García Segundo



FIRMA

---

# Agradecimientos

Agradezco sinceramente:

- A los doctores Crescencio García Segundo y Fernando Arámbula Cosío por su dirección en este trabajo.
- Al Dr. Antonio Capella Kort por las estimulantes discusiones sobre muestreo comprimido.
- A los doctores Boris Escalante Ramírez, Pablo Roberto Pérez Alcazar y Lucía Medina Gómez por los valiosos comentarios y la revisión de este trabajo.
- Al Dr. Rogelio Alcántara Silva por inculcarme el gusto por el procesamiento digital de señales.
- Al Dr. Alfonso Gastelum Strozzi por su ayuda y sus consejos.
- Al Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM (CCADET-UNAM) por brindar el espacio y materiales necesarios para la realización de este trabajo.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo económico otorgado durante la realización de este trabajo.
- Al Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal (ICyTDF) por el contrato de investigación con el CCADET-UNAM para el desarrollo del proyecto de tomografía fotoacústica.
- A mi familia por brindarme su apoyo y la oportunidad de estudiar.
- A Marcela por su apoyo constante e incondicional.



---

## Resumen

La imagenología por métodos fotoacústicos ha motivado el reciente desarrollo de sensores fotoacústicos de amplio ancho de banda. Estos sensores generan señales cuya adquisición por métodos tradicionales es compleja. Por lo que en el presente trabajo se estudia dicho problema y se presenta un estudio preliminar, a través de simulaciones numéricas, sobre la utilización de una arquitectura de submuestreo, conocida como “demodulador aleatorio”, como un método eficiente para la adquisición de señales fotoacústicas.

Dicha arquitectura está basada en la reciente teoría del “muestreo escaso” o también conocido como “muestreo comprimido”, donde se puede reducir el número de muestras para adquirir una señal al tomar ventaja de su estructura dispersa en algún dominio. Debido a la falta de estudios sobre dominios de representación adecuados para las señales fotoacústicas, presentamos resultados de utilizar *frames* de Gabor y matrices generadas a partir de conjuntos de señales de entrenamiento como métodos de representación dispersa.

Las simulaciones brindan evidencia de que la arquitectura funciona de forma adecuada y señales experimentales se pueden reconstruir con un error RMSE de aproximadamente 1 % a partir de aproximadamente 40 % menos muestras de las sugeridas por el teorema de Shannon-Nyquist. El trabajo concluye con un modelo que explica los resultados de la simulación y relaciona la cantidad de muestras que se deben tomar en función de la dispersión que induce la base utilizada para la representación dispersa de la señal.



---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del problema . . . . .	4
1.2. Objetivo . . . . .	5
1.3. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Submuestreo</b>	<b>9</b>
2.1. Métodos Clásicos de Submuestreo . . . . .	9
2.1.1. Demodulación . . . . .	9
2.1.2. Muestreo pasabanda . . . . .	11
2.1.3. Muestreo periódico no-uniforme . . . . .	13
2.1.4. CAD intercalado . . . . .	14
2.2. Muestreo comprimido . . . . .	15
2.2.1. El problema del muestreo . . . . .	16
2.2.2. Dispersión . . . . .	18
2.2.3. Reconstrucción . . . . .	19
2.2.4. Interpretación geométrica . . . . .	20
<b>3. Diccionarios</b>	<b>23</b>
3.1. Representación Dispersa de Señales . . . . .	23
3.2. Diccionario de Gabor . . . . .	24
3.2.1. Transformada discreta de Fourier de tiempo-corto . . . . .	25

3.2.2.	Transformada discreta de Gabor . . . . .	25
3.2.3.	<i>Frames</i> de Gabor . . . . .	26
3.3.	Aprendizaje de diccionario . . . . .	27
3.3.1.	Algoritmo K-SVD . . . . .	28
<b>4.</b>	<b>Demodulador aleatorio</b>	<b>31</b>
4.1.	Introducción . . . . .	31
4.1.1.	Motivación . . . . .	31
4.1.2.	Estado del arte . . . . .	32
4.2.	Consideraciones de diseño . . . . .	34
4.2.1.	Modelo de la señal . . . . .	34
4.2.2.	Arquitectura . . . . .	35
4.3.	Modelado del sistema . . . . .	37
4.3.1.	Modelos analíticos . . . . .	37
4.3.2.	Modelo matricial numérico . . . . .	40
4.4.	Número de canales . . . . .	41
4.5.	Reconstrucción . . . . .	43
<b>5.</b>	<b>Simulaciones y resultados</b>	<b>45</b>
5.1.	Conjunto de datos . . . . .	46
5.2.	Representación dispersa de señales fotoacústicas . . . . .	49
5.2.1.	Dispersión con diccionario de Gabor . . . . .	49
5.2.2.	Dispersión con diccionario aprendido . . . . .	53
5.3.	Simulación de la arquitectura . . . . .	56
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>61</b>
6.1.	Conclusiones . . . . .	61
6.2.	Trabajo a futuro . . . . .	62
	<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

---

# Índice de figuras

1.1. Señales fotoacústicas. . . . .	2
1.2. Representación de la señal fotoacústica en el dominio de la frecuencia y en el dominio tiempo-frecuencia. . . . .	3
1.3. Estado del arte de la tecnología CAD [5]. . . . .	6
2.1. Diagrama a bloques de un demodulador I/Q. . . . .	10
2.2. Señal pasabanda. . . . .	12
2.3. Tasas de muestreo válidas para muestreo pasabanda [26]. . . . .	13
2.4. Proceso de adquisición con CAD intercalado [31]. . . . .	15
2.5. Modelo matricial del proceso de muestreo [32]. . . . .	16
2.6. Modelo matricial del proceso de compresión [32]. . . . .	18
2.7. Representación gráfica de la RIP [32]. . . . .	21
2.8. Esferas unitarias en el plano $\mathbb{R}^2$ para las normas $\ell_p$ , con $p = 1, 2, \infty, \frac{1}{2}$ . . . . .	22
2.9. Geometría de la reconstrucción $\ell_p$ para $\alpha_0$ , con $p = 1, 2, \infty, \frac{1}{2}$ . . . . .	22
3.1. Modelo matricial del aprendizaje de diccionario. . . . .	28
4.1. Diagrama a bloques del demodulador aleatorio. . . . .	35
4.2. Arquitecturas de DA operando en paralelo. . . . .	43
5.1. Señales reales seleccionadas. Conjuntos: E512 y E256. . . . .	47
5.2. Espectro en magnitud del modelo ideal. . . . .	48
5.3. Señales sintéticas seleccionadas. Conjuntos: S512 y S256. . . . .	48
5.4. Señales seleccionadas decimadas a 64 muestras. Conjuntos: E64 y S64. . . . .	49

5.5. Compresión con un diccionario de Gabor para distintos valores de redundancia, se reporta el porcentaje mínimo de coeficientes distintos de cero tal que el error de representación es no mayor a 1 % en el sentido RMSE.	50
5.6. Caso de estudio: conjunto S512 con ruido. Se muestra la robustés del <i>frame</i> de Gabor para representar señales con distintos niveles de ruido. Se reporta el mínimo error de representación alcanzado y el número de coeficientes diferentes de cero. . . . .	51
5.7. Caso de estudio: conjunto S256 con ruido. Se muestra la robustés del <i>frame</i> de Gabor para representar señales con distintos niveles de ruido. Se reporta el mínimo error de representación alcanzado y el número de coeficientes diferentes de cero. . . . .	52
5.8. Dispersión de las señales de los conjuntos <i>E64</i> y <i>S64</i> con un diccionario de Fourier y diversos diccionarios aprendidos a partir de diferentes semillas. Se reporta el mínimo número de coeficientes diferentes de cero tal que el error de representación es menor al 1 % en el sentido RMSE. . . . .	53
5.9. Caso de estudio: conjunto S64 con ruido. Se muestra la robustés de distintos diccionarios para representar señales con diversos niveles de ruido. Se reporta el mínimo error de representación alcanzado y el número de coeficientes diferentes de cero. . . . .	55
5.10. Resultados de la simulación. Se muestra la relación entre la dispersión de la señal en algún diccionario y la mínima cantidad de muestras de muestras a adquirir tal que el error RMSE de reconstrucción es no mayor al 1 %. . .	56
5.11. Resultados de la simulación. Se muestra el error de reconstrucción para diferentes tasas de submuestreo sobre las señales experimentales y sintéticas con resoluciones de: 512, 256 y 64 muestras. . . . .	58
5.12. Modelo de la arquitectura en Simulink. . . . .	59

---

## Lista de símbolos

Notación	Descripción
$x(\cdot)$	Señal continua
$x[\cdot]$	Señal discreta
$\lfloor c \rfloor$	El mayor entero no mayor a $c$
$\Phi$	Matriz de sensado
$\Psi, \mathcal{D}$	Diccionario de representación
$A^*$	Conjugada transpuesta de la matriz $A$
$\text{card}(l)$	Cardinalidad del conjunto $l$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto interno
$\ \cdot\ _p, \ell_p$	$p$ -norma de un vector
$A B$	$A$ divide a $B$
$f_s$	Frecuencia de muestreo
$f_{nyq}$	Frecuencia de Nyquist
$\mathbb{K}^N$	Espacio vectorial de dimensión $N$ sobre el campo $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}^{N \times M}$	Espacio vectorial de matrices de dimensión $N \times M$ con elementos del campo $\mathbb{K}$



---

## Lista de acrónimos

<b>Acrónimo</b>	<b>Descripción</b>
CAD	Convertidor Analógico-Digital
MC	Muestreo Comprimido
DA	Demodulador Aleatorio
PM	Modulación en Fase
AM	Amplitud Modulada
FM	Frecuencia Modulada
PSK	Modulación por Desplazamiento de Fase
FSK	Modulación por Desplazamiento de Frecuencia
PNS	Muestreo Periódico No-Uniforme
DFT	Transformada Discreta de Fourier
RIP	Propiedad de Restricción de Isometría
STFT	Transformada Discreta de Fourier de Tiempo-Corto
SVD	Descomposición de Valores Singulares
SBPA	Secuencia Binaria Pseudo-Aleatoria
LIT	Lineal e Invariante en el Tiempo
RMSE	Error Cuadrático Medio



---

# Capítulo 1

## Introducción

El interés del presente trabajo se centra en señales fotoacústicas. Esta clase de señales tienen como fin último la formación de imágenes. Su relevancia es que la imagenología por métodos fotoacústicos constituye una herramienta de potencial prometedor para la detección temprana de cáncer de mama. Además, ofrece ser una alternativa inocua respecto a los métodos basados en radiación ionizante [1]. Una señal fotoacústica se caracteriza por ser una perturbación finita, cuya anchura depende del tiempo de duración del estímulo y de las propiedades termoelásticas del medio donde se generan. En la Figura 1.1a se presenta como ejemplo, una señal fotoacústica adquirida con un sensor reportado en [2]. Una forma idealizada de representar la perturbación es asumiendo que ésta tiene una distribución de tipo Boltzman, así que la señal fotoacústica se puede representar como una derivada de una función de Gauss, que se muestra en la Figura 1.1b [3]. Así, en las aplicaciones de interés, estas perturbaciones poseen un ancho de banda del orden de los 50 [MHz], y de 20 a 30 [MHz] en el menor de los casos [1].

Para la adquisición de la señal fotoacústica se debe de estudiar la teoría del muestreo, que se encarga de todos los conceptos relacionados con la conversión de una señal en tiempo-continuo o analógica a una secuencia discreta de números. Uno de sus resultados es el teorema de Shannon-Nyquist, un enunciado matemático donde se describen las condiciones necesarias para garantizar la reconstrucción de una señal continua a partir de tomar muestras uniformes (equiespaciadas en tiempo) de ella [4]. En concreto, el teorema expone que la señal debe estar limitada en banda, y que la frecuencia de muestreo mínima debe ser por lo menos el doble de la máxima frecuencia contenida en la señal (conocida

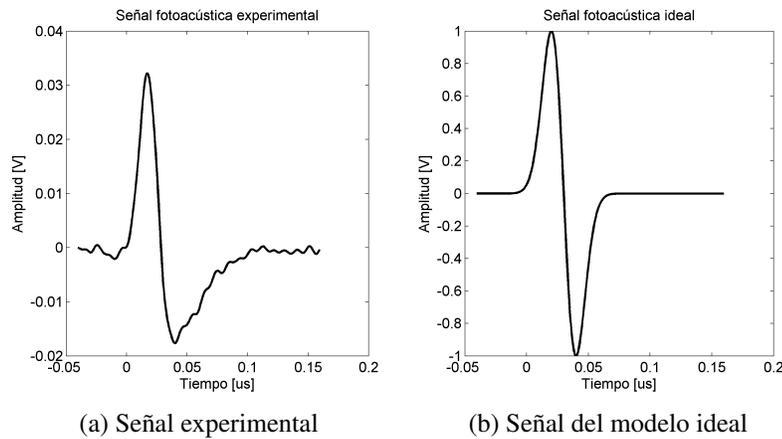


Figura 1.1: Señales fotoacústicas.

como tasa o frecuencia de Nyquist).

Los dispositivos de conversión analógico-digital (CAD) se encargan de realizar la tarea de adquirir muestras uniformes de una señal eléctrica. Cada dispositivo tiene una frecuencia de muestreo y resolución de bits diferente, por lo tanto, si se quiere utilizar la teoría de Shannon, la elección del convertidor está íntimamente relacionada con la frecuencia máxima de la señal a muestrear.

En general, el desempeño de un CAD se degrada y su costo se incrementa en función de la frecuencia de muestreo [5–7], de forma que usualmente se prefiere procesar las señales de gran ancho de banda en el dominio analógico. Como intentos para mitigar ésto se han desarrollado métodos de muestreo no uniforme, dado que la tasa de Shannon sólo es para muestreo uniforme [8–13]. Pese a estas investigaciones, la tecnología CAD no ha experimentado cambios significativos y sigue adherida al paradigma de Shannon, es decir, cualquier dispositivo CAD entrega muestras equiespaciadas de su entrada [6]. Como consecuencia, se ha vuelto un tema central de investigación el sub-muestreo de señales, donde utilizando tecnología CAD del estado del arte, se puedan adquirir señales sin tener que muestrear a la tasa de Nyquist [7].

En el año 2006, Candès publica en [14] lo que se establece como un nuevo paradigma de muestreo conocido como muestreo comprimido (MC). En el MC, el número de muestras para adquirir una señal se ve significativamente reducido. Al igual que la teoría de Shannon, el MC se basa en el hecho de que una señal posee estructura, que en este caso

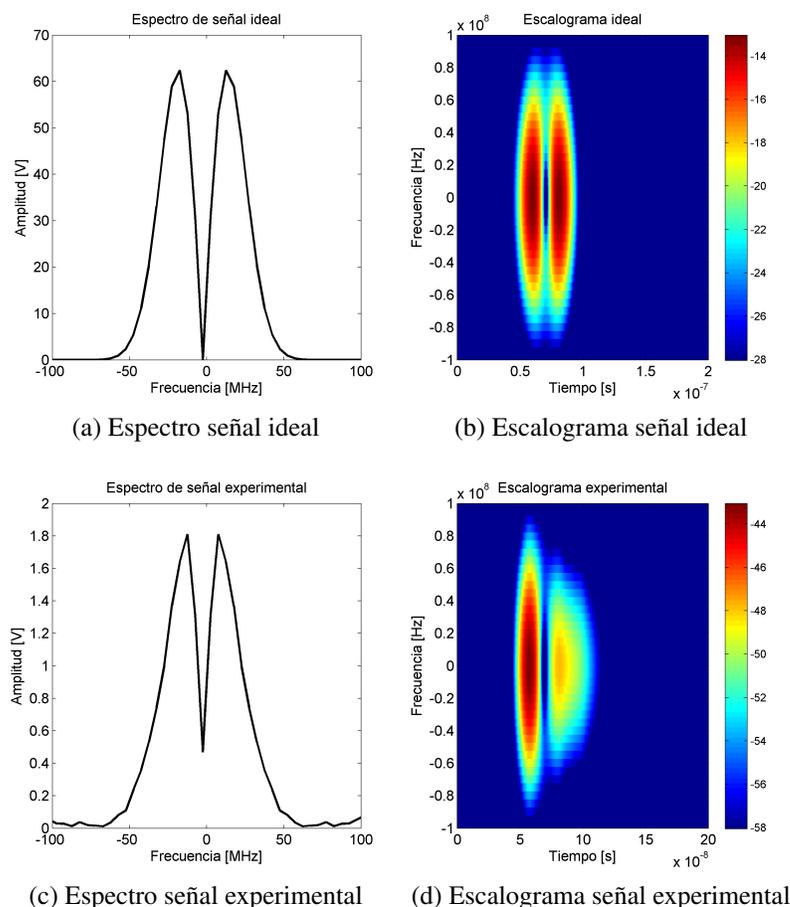


Figura 1.2: Representación de la señal fotoacústica en el dominio de la frecuencia y en el dominio tiempo-frecuencia.

se conoce como dispersión, lo cual significa que la señal se puede transformar tal que se pueda representar partir de pocos coeficientes diferentes de cero. Entonces, si se quiere utilizar la teoría del MC, surge la necesidad de encontrar una matriz (también conocida como diccionario) que promueva la dispersión [14–17].

La señal fotoacústica es dispersa en tiempo al ser un pulso de corta duración, sin embargo, no es demasiado dispersa para las ventanas de tiempo utilizadas en una adquisición. Además, la señal ocupa una gran región del espectro, como se muestra en las Figuras 1.2a y 1.2c. La hipótesis es que la señal fotoacústica es dispersa en un diccionario tiempo-frecuencia, como se muestra en las Figuras 1.2b y 1.2d.

Dado que un diccionario tiempo-frecuencia induce redundancia, la cantidad de coe-

ficientes se incrementa y el costo computacional también. La metodología conocida como “aprendizaje de diccionario” permite actualizar una matriz, de manera que represente de forma dispersa a un conjunto de señales de entrenamiento. El algoritmo “K-SVD” es una herramienta popular para el aprendizaje de diccionario y la hipótesis es que es una alternativa viable para encontrar una matriz de representación dispersa para las señales fotoacústicas.

Las ideas de muestreo y reconstrucción desarrolladas por el muestreo comprimido se plasman en una arquitectura de muestreo conocida como demodulador aleatorio (DA) [18–22]. El DA utiliza componentes genéricos en la electrónica, como un mezclador, un integrador, un generador de números pseudoaleatorio y un CAD de baja frecuencia. El trabajo más influyente se reporta en 2012 por Tropp et al. [21], en el cual se presentan garantías teóricas que implican que el DA se adhiere al paradigma del MC. En 2011, Becker en su tesis doctoral propone una arquitectura multicanal que denomina “RMPI”, utilizada para la adquisición de pulsos de radar. Presenta ideas innovadoras como una calibración del sistema haciendo una analogía en el dominio de la frecuencia a la respuesta impulso, así como un algoritmo de reconstrucción llamado “NESTA”, para el caso de uso de diccionarios redundantes [22]. La hipótesis es que la señal de radar y la señal fotoacústica comparten el mismo modelo de señal, lo que permite utilizar la arquitectura multicanal para la adquisición de señales fotoacústicas. No hay trabajos que reporten el desempeño del DA con éste fin, por lo que se vuelve la principal contribución de este trabajo de tesis.

## 1.1. Descripción del problema

**Teorema 1.** (*Teorema de Shannon-Nyquist [4]*): Si una función  $x(t)$  está limitada en banda a  $B$  [Hz], ésta puede ser completamente determinada a partir de muestrear de manera uniforme la señal cada  $T_s = \frac{1}{2B}$  segundos, a partir de la fórmula de interpolación:

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \text{sinc}(t/T_s - n), \quad \text{sinc}(\alpha) \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}. \quad (1.1)$$

El teorema expone las condiciones para realizar el muestreo de una señal, con la fórmula (1.1) completando la metodología para recuperar la señal analógica  $x(t)$ , a partir de sus

muestras  $x[n]$ .

La adquisición de muestras se realiza por medio de un convertidor analógico-digital (CAD), cuya función es digitalizar señales analógicas. Posterior al proceso de toma de muestras, el CAD realiza la tarea de cuantización, discretizando la amplitud de cada muestra, asignándole un número binario de  $B$  dígitos. El proceso de cuantización es análogo al de redondeo de números, en el cual la amplitud de una muestra se aproxima al nivel discreto más cercano de los  $2^B$  posibles niveles que se pueden representar con  $B$  dígitos binarios. Las muestras  $x[n]$  sufren una distorsión por la cuantización y la reconstrucción (1.1) se ve deteriorada [23].

En la Figura 1.3 se muestra el estado del arte de la tecnología CAD [5]. En general, la figura muestra que el desempeño de la tecnología CAD se ve degradado en función la frecuencia de muestreo, donde el desempeño se cuantifica como el número de bits a la salida del dispositivo. En la figura también se resalta el segmento cuyo propósito es la adquisición de datos. Los CAD diseñados para adquisición de datos difícilmente operan a frecuencias mayores de 10 [MHz] y, en general, los CAD *pipeline* operan a mayores frecuencias, pero con menos resolución y mayor consumo de potencia. Por lo tanto, los CAD *pipeline* quedan descartados para la adquisición de datos, donde las muestras requieren ser lo más precisas posible [24].

## 1.2. Objetivo

El objetivo general de este trabajo es realizar un estudio preliminar a través de simulaciones numéricas, sobre la eficacia del demodulador aleatorio y el muestreo comprimido como estrategia de sub-muestreo para señales fotoacústicas. Se busca cuantificar la frecuencia de muestreo mínima y los errores de reconstrucción que caracterizan la operación de la arquitectura. La hipótesis es que el número de muestras a utilizar es menor al requerido por el paradigma de Shannon.

Como objetivo particular se busca encontrar un diccionario de representación dispersa para señales fotoacústicas. Esto se realiza comparando entre dos estrategias de diseño, una con un diccionario fijo y la otra con un diccionario aprendido a través de señales de ejemplo. El mejor diccionario es aquel que logre representar la información en una menor cantidad de coeficientes. En la sección de resultados se presenta que los diccionarios

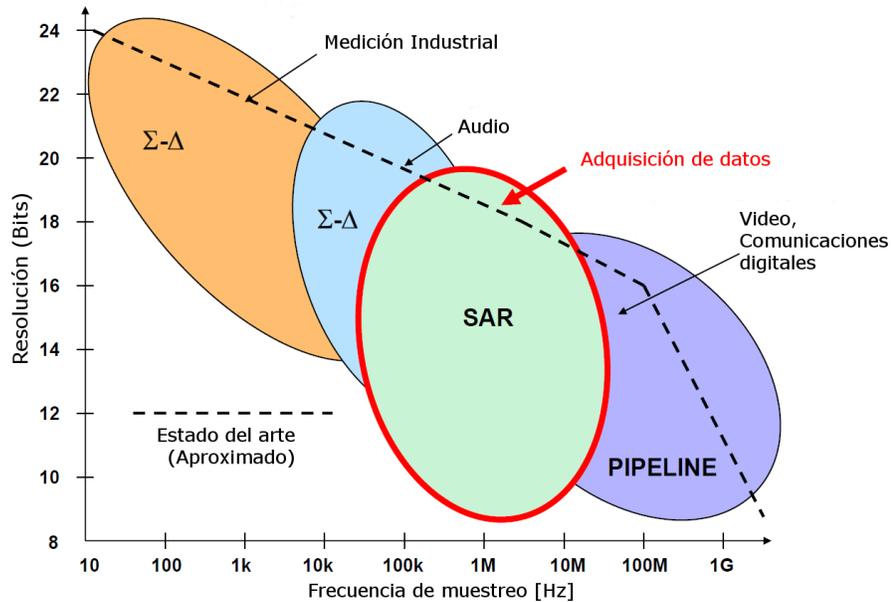


Figura 1.3: Estado del arte de la tecnología CAD [5].

redundantes se desempeñan mejor, sin embargo, los que no tienen redundancia también son adecuados. Por último, se espera encontrar un modelo que relacione la dispersión que induce el diccionario de representación y el número de muestras que requiere el demodulador aleatorio.

### 1.3. Estructura de la tesis

El resto del documento queda estructurado en tres partes principales: Conceptos teóricos en los capítulos 2 al 4, resultados en el capítulo 5 y conclusiones en el capítulo 6. A continuación se describen con más detalle el contenido de cada uno de los capítulos.

- El capítulo 2 hace una revisión de los métodos clásicos de submuestreo y se analiza porque no son una alternativa viable para la adquisición de los pulsos fotoacústicos. Además, presenta la teoría del muestreo comprimido de forma breve, enunciando los resultados más importantes y de interés para este trabajo.
- El capítulo 3 discute el uso de diccionarios como medio de representación dispersa para señales fotoacústicas. Se presenta de forma breve la teoría que lleva a la for-

mación de los *frames* de Gabor como diccionario de representación dispersa. Posteriormente, se discute la metodología de entrenamiento de diccionario y se introduce el algoritmo de K-SVD.

- El capítulo 4 está dedicado al demodulador aleatorio, donde se presenta su motivación, diseño y modelado.
- El capítulo 5 muestra los resultados de las simulaciones. El capítulo está dividido en tres secciones:
  - Presentación del conjunto de datos para realizar las pruebas;
  - Resultados de la representación dispersa de señales fotoacústicas mediante los diccionarios estudiados en el capítulo 3;
  - Resultados de la simulación de la arquitectura operando sobre señales fotoacústicas.
- El capítulo 6 presenta las conclusiones, resumiendo los resultados obtenidos, y concluye haciendo un estimado de perspectivas futuras.



---

# Capítulo 2

## Submuestreo

### 2.1. Métodos Clásicos de Submuestreo

En esta sección se describen brevemente algunas técnicas clásicas de submuestreo. Debe notarse que ninguna de las técnicas rebasa la barrera impuesta por Nyquist. En realidad, toman en cuenta información sobre la estructura de las señales y toman ventaja de ello en el diseño de algoritmos de reconstrucción, tal que permiten reconstruir la señal con un CAD que adquiere una cantidad reducida de muestras.

#### 2.1.1. Demodulación

La demodulación es la técnica mas común de evitar muestreo a la tasa de Nyquist. Existen dos variantes, dependiendo de si se conoce o no la región del espectro a sensar.

##### **Soporte frecuencial fijo**

Suponga una señal  $x(t)$  de  $N$  bandas, cada una no mayor a  $B$  [Hz], con soporte frecuencial fijo bandas centradas alrededor de las componentes frecuenciales  $f_i < f_{max}$ . Con la técnica de demodulación se busca muestrear a una tasa  $f_s = B$  en vez de  $f_s = 2f_{max}$  como lo sugiere el paradigma de Shannon.

La técnica de demodulación consiste en multiplicar la señal  $x(t)$  por una correspondiente señal de frecuencia única  $f_i$ , dependiendo la banda de interés, provocando un corrimiento desde las altas frecuencias al origen. Utilizando un filtro pasabajas se mantiene

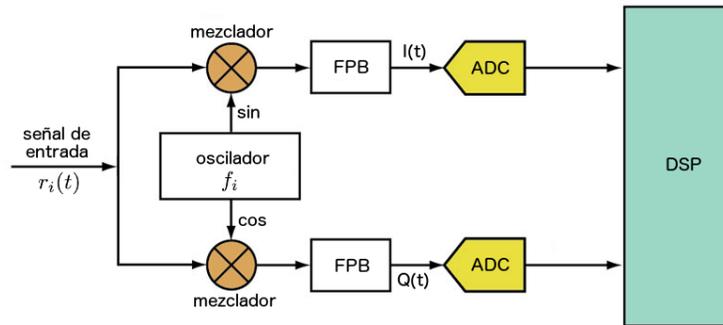


Figura 2.1: Diagrama a bloques de un demodulador I/Q.

solo la versión en banda base que posteriormente es muestreada de manera uniforme con un CAD de baja frecuencia. Para adquirir todo el espectro de la señal  $x(t)$ , este proceso se lleva a cabo de forma individual para cada una de las bandas.

A continuación se presenta el demodulador I/Q. Considere la modulación a frecuencia  $f_i$  y con un desfase de  $90^\circ$  de dos señales  $I(t)$  y  $Q(t)$ , limitadas en banda a  $B/2$  [Hz]. La señal resultante se le conoce como señal en cuadratura y está representada por [25]:

$$r_i(t) = I(t) \cos(2\pi f_i t) + Q(t) \sin(2\pi f_i t). \quad (2.1)$$

El demodulador I/Q revierte la acción que construyó a  $r_i(t)$ , por lo que se recuperan los mensajes  $I(t)$  y  $Q(t)$ . La arquitectura consta de dos canales, cada uno se encarga de multiplicar la señal  $r_i(t)$  por  $\cos(2\pi f_i t)$  y  $\sin(2\pi f_i t)$ , respectivamente, tal que el espectro de cada señal sufre un corrimiento a banda base. Los artefactos en frecuencias que son múltiplo de  $f_i$  se remueven con un filtro cuya frecuencia de corte es  $B/2$ . La Figura 2.1 muestra un diagrama a bloques de la arquitectura.

Una vez que se han recuperado  $I(t)$  y  $Q(t)$  mediante hardware, con un par de dispositivos CAD se realiza el muestreo a una tasa de  $B$  [Hz]. Tanto la reconstrucción de las señales  $r_i(t)$  y la señal multi-banda  $x(t)$ , se reduce a modular la información en sus frecuencias portadoras  $f_i(t)$  de acuerdo a (2.1).

Lo anterior muestra que la técnica de demodulación puede dividir el muestreo de una señal  $x(t)$ , de  $N$  bandas, en el muestreo de  $N$  señales de baja frecuencia. Además, si cada una de las bandas tiene un ancho de banda no mayor a  $B/2$  [Hz], entonces es posible utilizar CAD a una tasa de  $B$  [Hz], en lugar de  $2f_{max}$  [Hz].

El artículo de revisión [7] reporta las siguientes aplicaciones de la señal en cuadratura:

- *Amplitud modulada (AM)*: la información de interés es la amplitud de  $I(t)$ , mientras  $Q(t) = 0$ .
- *Modulación en Fase/Frecuencia (PM/FM, por sus siglas en inglés)*: se realiza de manera que se satisface la ecuación (2.1) y el mensaje analógico es

$$g(t) = \arctan(I(t)/Q(t)).$$

- *Modulación por desplazamiento de fase o frecuencia (PSK/FSK, por sus siglas en inglés)*:  $I(t)$  y  $Q(t)$  transportan símbolos.

### **Soporte frecuencial no-fijo**

Existen aplicaciones donde no se conoce que región del espectro ocupa la señal, por lo tanto, se requiere procesar todo el ancho de banda. Para esta situación se puede utilizar el mismo principio de demodulación.

La señal de entrada  $x(t)$  se divide en canales, cada uno de ellos procesa una región del espectro después de haber convertido la señal a banda base utilizando el principio de demodulación. Por ejemplo, una arquitectura en canales divide un ancho de banda de 50 [MHz] en 50 canales de sólo 1 [MHz]. La ventaja de esto es que cada canal requiere utilizar un CAD de 2 [MHz] cuyo desempeño es mejor de acuerdo a la Figura 1.3, y con la implicación de que cada canal sólo necesita procesar 2 [MHz] de ruido. Esto es una ventaja importante, dado que la potencia del ruido es proporcional al ancho de banda [22]. La principal desventaja es el consumo de potencia, ya que utilizar 50 CAD de 2 [MHz] consumiría alrededor de 3.4 [W], mientras que un CAD de 100 [MHz] consume en promedio 200 [mW].

### **2.1.2. Muestreo pasabanda**

El “*aliasing*” es un fenómeno que se presenta cuando una señal limitada en banda se muestrea a una tasa menor que la impuesta por el teorema de Nyquist. Se manifiesta en forma de un solapamiento espectral, quitando la posibilidad de recuperar la señal a partir de las muestras. El muestreo pasabanda permite que dada una selección adecuada

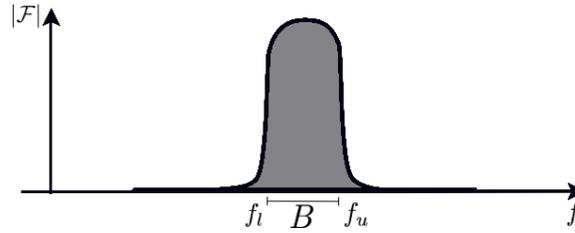


Figura 2.2: Señal pasabanda.

de la frecuencia de muestreo se pueda tomar ventaja del fenómeno de *aliasing*, tal que sea posible recuperar una señal pasabanda a una tasa menor que su frecuencia de Nyquist.

Considere una señal pasabanda como la que se muestra en la Figura 2.2, tal que su ancho de banda es menor a  $B = f_u - f_l$ . El teorema clásico de muestreo pasabanda, para muestreo uniforme, dice que una señal puede ser reconstruida si la tasa de muestreo es por lo menos [26]:

$$f_s^{(min)} = \frac{2f_u}{m}, \quad (2.2)$$

donde  $m$  es un entero dado como:

$$m = \left\lfloor \frac{f_u}{B} \right\rfloor. \quad (2.3)$$

El artículo donde se presenta el teorema se comenta que ésta tasa mínima es irreal, en el sentido de que cualquier defecto de ingeniería en la adquisición causaría *aliasing*, lo que impone una necesidad de muestrear a una tasa mayor. Además, comenta que los artículos [27–30] malinterpretan este resultado, ya que suponen que no habrá *aliasing* siempre y cuando  $f_s > 4B$ . De forma que el mismo artículo [26] presenta las tasas de muestreo válidas:

$$\frac{2f_u}{m} \leq f_s \leq \frac{2f_l}{m-1}, \quad (2.4)$$

donde  $m$  es un entero dado por:

$$1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{f_u}{B} \right\rfloor. \quad (2.5)$$

La Figura 2.3 muestra gráficamente los valores permitidos de muestreo dados por las ecuaciones (2.4) y (2.5) [26]. Las áreas en blanco son las zonas permitidas para realizar el muestreo sin que ocurra *aliasing*, mientras que el área sombreada representa tasas

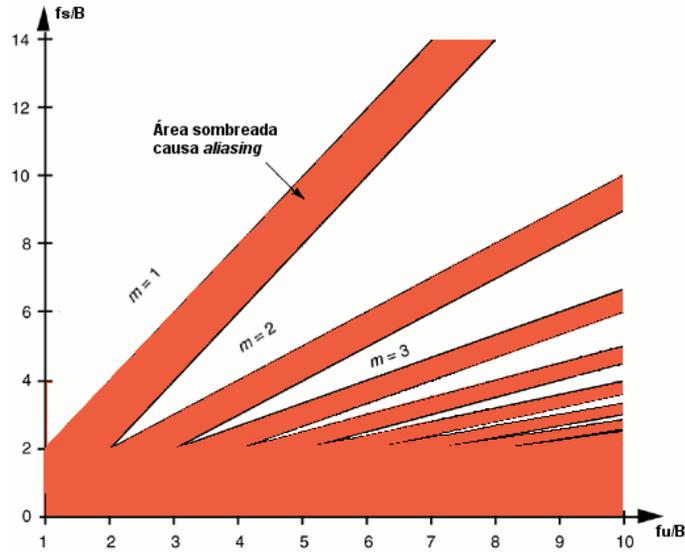


Figura 2.3: Tasas de muestreo válidas para muestreo pasabanda [26].

de muestreo que resultan en *aliasing*.

Además de que el método no es válido para señales multibanda, el artículo de Mishali et al. [7] comenta que para valores fijos de  $B$  y  $f_u$ , la región correspondiente al máximo  $K \leq f_u/B$  es la más sensible a pequeñas variaciones de  $f_u$ ,  $f_l$  y  $B$ . Entonces, la adquisición a una tasa  $f_s = 2B$  sólo se puede llevar a cabo si  $f_u$  es un múltiplo de  $B$  y para lidiar con imperfecciones se requiere de un incremento significativo en la tasa de muestreo. La ventaja principal del muestreo pasabanda es que el CAD trabaja directamente con la señal sin una etapa de preprocesamiento analógico como en el caso del demodulador I/Q.

### 2.1.3. Muestreo periódico no-uniforme

Dado que el teorema de Shannon-Nyquist está desarrollado en un contexto de muestras uniformes, se han realizado estudios para el caso del muestreo no-uniforme. Mishali en su artículo de revisión [7] hace mención sobre el teorema de Landau. A grandes rasgos, dice que para adquirir una señal multibanda  $x(t)$  de  $N$  bandas, con anchos de banda individuales no mayores a  $B$  [Hz], se necesita una tasa de muestreo no menor a la suma de los anchos de banda, i.e.,  $NB$  [Hz].

De forma que el muestreo periódico no-uniforme (PNS, por sus siglas en inglés) per-

mite alcanzar la tasa mínima de muestreo  $NB$  [Hz], sin necesidad de algún preprocesamiento analógico sofisticado. La idea principal del PNS es encontrar  $m$  secuencias submuestreadas [7]:

$$y_i[n] = x(nT_s + \phi_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad (2.6)$$

de forma que las secuencias tienen corrimientos temporales entre ellas tal que la tasa de muestreo total  $m/T_s$  es menor que la tasa de Nyquist.

Mishali concluye poniendo el siguiente ejemplo: suponga una señal real  $x(t)$  pasabanda con  $B = f_u - f_l$ . Se muestrea con una arquitectura PNS de dos canales con parámetros:  $T_s = 1/B$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = \phi$ . La reconstrucción de  $x(t)$  se lleva a cabo mediante la fórmula de interpolación:

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_1[n]g_1(t - nT_s) + y_2[n]g_2(t - nT_s). \quad (2.7)$$

Los filtros  $g_1(t)$  y  $g_2(t)$  deben tener respuesta en frecuencia:

$$G_1(f) = \frac{1}{1 - \exp -j2\pi\beta(f)\phi B}, \quad f \in (f_l, f_u); \quad (2.8)$$

$$G_2(f) = -G_1(f), \quad f \in (f_l, f_u). \quad (2.9)$$

La extensión a una señal de  $N$  bandas, con anchos de banda individuales  $B$ , se realiza utilizando el mismo procedimiento, con la excepción de que se deben utilizar  $N$  corrimientos  $\phi_l$ , con  $1 \leq l \leq N$ .

### 2.1.4. CAD intercalado

Un CAD intercalado relaja la adquisición de una señal en  $M$  canales en paralelo con un banco de elementos de retardo. Cada una de las ramas introduce un retardo de  $\phi_l$  segundos y muestrea subsecuentemente la señal  $x(t - \phi_l)$  a una tasa  $f_s = f_{nyq}/M$ , donde  $f_{nyq}$  es la frecuencia de Nyquist. Se ejemplifica el proceso en la Figura 2.4 [31].

Si  $\phi_l = l/f_{nyq}$ , entonces si se intercalan las  $M$  muestras adquiridas por la arquitectura se produce una secuencia que coincide con las muestras a tasa de Nyquist  $x(nT_{nyq})$ .

La arquitectura de PNS es equivalente al CAD intercalado pero con la ventaja de tener  $m < M$  ramas. Tanto el CAD intercalado como el PNS sufren la misma desventaja del

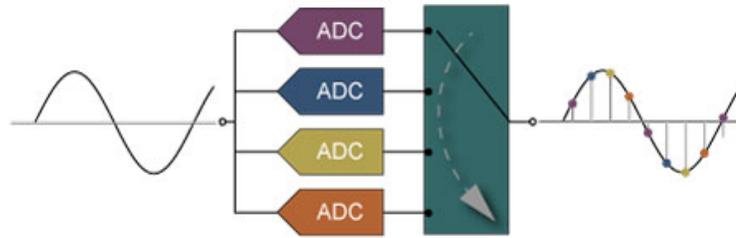


Figura 2.4: Proceso de adquisición con CAD intercalado [31].

muestreo pasabanda, donde la arquitectura trabaja directamente con una señal de gran ancho de banda y por lo tanto el ancho de banda analógico de la arquitectura debe ser mas grande que la mayor frecuencia contenida en la señal.

## 2.2. Muestreo comprimido

Algunas de las técnicas clásicas podrían ser útiles para el submuestreo de la señal fotoacústica, teniendo que lidiar con las desventajas de cada método. En esta sección se presenta una breve revisión de la teoría del muestreo comprimido (MC), un paradigma novedoso de muestreo desarrollado a partir de los trabajos reportados en [14–17]. La teoría del MC asegura que es posible reconstruir señales a partir de muchas menos mediciones que las utilizadas por los métodos tradicionales, como el de Shannon-Nyquist. De forma que se desea investigar si también se puede utilizar para la adquisición de señales fotoacústicas.

El nombre de “muestreo comprimido” viene de la idea de adquirir de forma inmediata la versión comprimida de una señal, cosa que se contrapone al proceso clásico de adquisición donde se adquieren todos los datos para posteriormente desechar la mayor cantidad de ellos con un algoritmo de compresión. El objetivo central de estas estrategias es desarrollar protocolos eficaces de sensado, que capturen la información de una señal y la condensen en unas pocas mediciones. Al igual que los otros métodos de submuestreo, el MC se cimienta en la estructura de las señales. Por lo tanto, la hipótesis subyacente es que las señales se pueden representar a partir de pocos datos en algún dominio. Para esto es necesario que la señal se pueda transformar a una base apropiada, de forma que se pueda representar con una cantidad reducida de coeficientes.

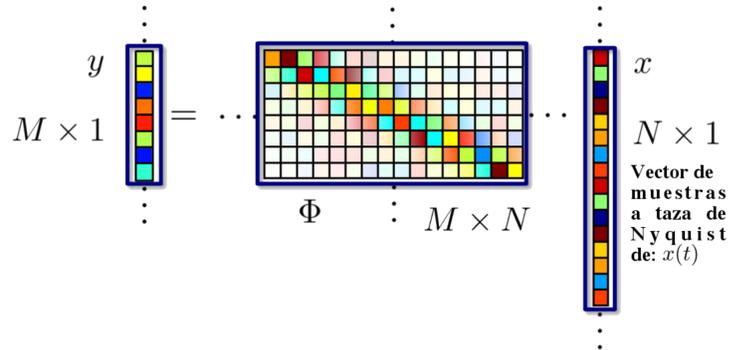


Figura 2.5: Modelo matricial del proceso de muestreo [32].

### 2.2.1. El problema del muestreo

Como un primer paso para estudiar la teoría del MC es necesario generalizar el concepto de muestreo. En vez de entenderlo como evaluar la señal en distintos instantes de tiempo, cada muestra o medida,  $y[k]$ , se interpreta como el producto interno de la señal  $x(t)$  por una función de sensado  $\phi_k$ . De forma que el proceso de adquisición de  $M$  muestras de una señal se modela como:

$$y[k] = \langle x(t), \phi_k(t) \rangle, \quad k = 1, \dots, M. \quad (2.10)$$

Si se sustituye  $x(t)$  por su representación discreta de acuerdo a la ecuación (1.1), la adquisición queda dada por:

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \langle \phi_k(t), \text{sinc}(t/T_s - n) \rangle. \quad (2.11)$$

Esta reformulación del problema permite trabajar con la secuencia  $x[n]$  en lugar de  $x(t)$ . El proceso de muestreo se modela con una matriz de sensado  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$  que actúa sobre el vector de muestras a tasa de Nyquist  $x \in \mathbb{R}^N$ , tal que:

$$y = \Phi x. \quad (2.12)$$

La Figura (2.5) representa gráficamente el proceso para obtener un vector de muestras  $y \in \mathbb{R}^M$ , donde se puede pensar que versiones discretizadas de  $\phi_k(t)$  son las filas de  $\Phi$ .

La elección de  $\phi_k(t)$  permite elegir en qué dominio se va a recolectar información de la señal. Por ejemplo, si  $\phi_k(t)$  son sinusoidales a diferentes frecuencias, entonces se están adquiriendo coeficientes de Fourier (e.g. resonancia magnética) o si son deltas de Dirac, se obtienen muestras temporales de  $x(t)$ . Además, el problema que se pretende estudiar es cuando el número de funciones de sensado disponible,  $M$ , es mucho menor que la dimensión,  $N$ , del vector de muestras. Este problema se puede presentar debido a que la cantidad de sensores es limitada, la adquisición es costosa y lenta, o el costo computacional de las  $N$  mediciones es intratable.

Por lo tanto, el reto es obtener una reconstrucción certera de  $x$  a partir de las mediciones  $y$ . En primera instancia el panorama luce desalentador, dado que si  $M < N$  se tendría que resolver un sistema de ecuaciones indeterminado, lo que implica que existe una cantidad infinita de vectores  $\hat{x}$  tal que  $y = \Phi\hat{x}$ . Romberg comenta que una metodología para resolver el problema es utilizando el estimador de mínimos cuadrados [33]. El estimador encuentra el vector que mejor explica las mediciones en un sentido euclidiano. La forma cerrada del estimador estada dada como:

$$\hat{x} = \Phi^*(\Phi\Phi^*)^{-1}y \quad (2.13)$$

La elección de las funciones  $\phi(t)$  debe ser de tal forma que permitan minimizar la cantidad de mediciones necesarias para obtener una reconstrucción adecuada. Una estrategia es empatar las funciones a la estructura de la señal y adquirir las mediciones en el mismo dominio en el que se realiza la compresión. Esta estrategia no es viable dado que el sistema siempre está leyendo los mismos  $M$  coeficientes en el dominio de la transformación, sin embargo, las posiciones de los coeficientes cambian de señal a señal. De forma que el sistema debe ser “adaptable” en el sentido de ser adecuado para la estructura de cada señal.

El resultado central del MC es que la estrategia ideal es la opuesta y se deben de diseñar las  $\phi_k(t)$  tal que no tengan relación con la estructura de la señal. Por lo tanto, se sugiere que las funciones de sensado tengan la forma de ruido aleatorio. En los artículos [15–17, 34] se demuestra que a partir de  $M$  de éstas mediciones “aleatorias” se puede reconstruir una señal tan bien como si se hubieran observado los  $M/\log N$  coeficientes mas importantes del dominio de la compresión [33].

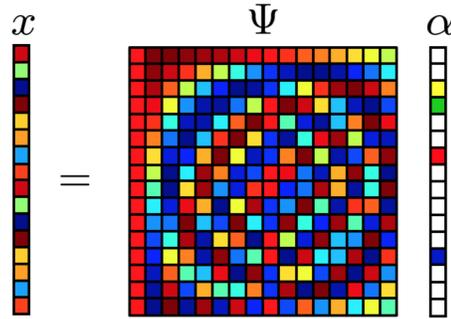


Figura 2.6: Modelo matricial del proceso de compresión [32].

### 2.2.2. Dispersión

La fórmula de reconstrucción (2.13) no toma en cuenta información adicional sobre la estructura de la señal. A continuación se describe como la teoría del MC toma en cuenta esta información para diseñar un algoritmo de reconstrucción.

El principio detrás de la compresión de señales o aproximación dispersa, es que transformando la señal a una base apropiada, la mayoría de los coeficientes serán muy pequeños o nulos y en sólo unos pocos se concentra casi la totalidad de la información. El proceso se representa gráficamente en la Figura 2.6.

Lo anterior se expresa matemáticamente como un vector  $x \in \mathbb{R}^N$  que se expande en una base (e.g. Fourier, Wavelet)  $\Psi = [\psi_1 \psi_2 \dots \psi_N]$  de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$x = \sum_{j=1}^N \alpha[j] \psi_j, \quad (2.14)$$

tal que el vector de coeficientes  $\alpha$  sea disperso.

Para poder expresar la dispersión del vector  $\alpha$ , en términos matemáticos, es necesario introducir la  $p$ -norma de un vector.

**Definición 1.** La norma  $\ell_p$  (o simplemente  $p$ -norma) de un vector  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  o  $\mathbb{C}^N$  se define como:

$$\|\alpha\|_p := \left( \sum_{j=1}^N |\alpha[j]|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty; \quad (2.15)$$

$$\|\alpha\|_0 := \text{card}(\ell : \alpha[\ell] \neq 0), \quad p = 0. \quad (2.16)$$

La dispersión se modela matemáticamente con la norma  $\ell_0$ , que se encarga de contabilizar los coeficientes distintos de cero.

**Definición 2.** Un vector  $\alpha \in \mathbb{R}^N$  o  $\mathbb{C}^N$  se dice que es  $S$ -disperso si posee a lo más  $S$  coeficientes distintos de cero, esto es:

$$\|\alpha\|_0 \leq S. \quad (2.17)$$

El MC en vez de trabajar con el problema dado por la ecuación (2.12), introduce la dispersión al problema y lo modifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y = \Phi x &\implies y = \Phi\Psi\alpha; \\ y &= A\alpha. \end{aligned} \quad (2.18)$$

El capítulo 3 se dedica por completo a estudiar la representación dispersa de la señal fotoacústica.

### 2.2.3. Reconstrucción

La representación mediante la ecuación (2.18) permite plantear un algoritmo de optimización minimizando la norma  $\ell_0$  y resolviendo para  $\alpha$ . Una vez conociendo  $\alpha$ , la solución  $x$  es directa de acuerdo a la ecuación (2.14). Por lo tanto,  $\alpha$  se define como la solución al problema:

$$\min_{\hat{\alpha}} \|\hat{\alpha}\|_0 \quad \text{tal que} \quad A\hat{\alpha} = y. \quad (2.19)$$

Es decir se busca el vector mas disperso que explica las mediciones. Desafortunadamente, la minimización de la norma  $\ell_0$ , en general es un problema NP-difícil [35]. Un método popular y bien entendido es el de “*basis pursuit*” o “minimización  $\ell_1$ ”, que consiste en la relajación convexa del problema, de forma que se representa como:

$$\min_{\hat{\alpha}} \|\hat{\alpha}\|_1 \quad \text{tal que} \quad A\hat{\alpha} = y. \quad (2.20)$$

La norma  $\ell_1$  es una función convexa mas cercana a  $\ell_0$  [35], de forma que este problema de optimización se puede resolver con métodos eficientes de optimización convexa.

Un aspecto crucial que deben de tener los algoritmos es estabilidad. Esto quiere decir

que el error de reconstrucción se mantiene bajo control cuando los vectores  $\alpha$  no son exactamente dispersos, o las mediciones  $y$  tienen algún nivel de ruido que las vuelve inexactas. Entonces, el algoritmo para que sea robusto se debe expresar como:

$$\min_{\hat{\alpha}} \|\hat{\alpha}\|_1 \quad \text{tal que} \quad \|A\hat{\alpha} - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (2.21)$$

### 2.2.4. Interpretación geométrica

En esta sección se presentan interpretaciones geométricas de dos aspectos importantes del MC que se consideran de relevancia para entender por qué funciona la teoría del MC y para desarrollo e implementación de futuros algoritmos. La primer interpretación se hace sobre la matriz  $A$ , que se plasma en una condición suficiente para su diseño llamada “propiedad de restricción de isometría” (RIP, por sus siglas en inglés). La segunda interpretación se realiza sobre la geometría de la normas  $\ell_p$  y se muestra como es que la norma  $\ell_1$  se puede decir que es la función convexa mas cercana a la norma  $\ell_0$ , dejando ver que el problema (2.20) también es capaz de recuperar vectores dispersos.

#### Propiedad de restricción de isometría

A continuación se presenta una propiedad que se demuestra suficiente a la hora de estudiar las matrices de sensado  $\Phi$  y de representación  $\Psi$ .

**Definición 3.** *Se dice que una matriz  $A$  satisface la propiedad de restricción de isometría (RIP, por sus siglas en inglés) si cumple que [36]:*

$$1 - \delta \leq \frac{\|A\alpha_1 - A\alpha_2\|_2^2}{\|\alpha_1 - \alpha_2\|_2^2} \leq 1 + \delta, \quad \|\alpha_1\|_0, \|\alpha_2\|_0 \leq S, \quad (2.22)$$

para cualesquiera vectores  $S$ -dispersos  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Cuando se satisface esta propiedad, la matriz  $A$ , que representa un mapeo de  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  con  $M < N$ , aproximadamente preserva la distancia euclidiana entre cualesquiera dos vectores  $S$ -dispersos al ser mapeados por  $A$ . Lo importante de la RIP, es que aunque el problema originalmente está en un espacio vectorial de gran dimensión, se puede pasar a trabajar a uno de dimensión menor sin perder la información. Este proceso se muestra gráficamente en la Figura 2.7.

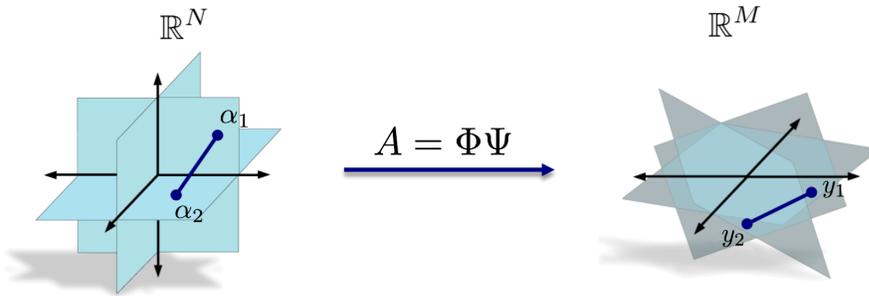


Figura 2.7: Representación gráfica de la RIP [32].

La unicidad de las observaciones es importante, ya que muestra que el vector  $\hat{\alpha}$  que se obtiene de resolver los problemas (2.19) o (2.20), es el vector más disperso que mapeó a  $y$ . Esto se puede ver de la siguiente forma: suponga que la ecuación (2.22) se satisface para vectores  $2S$ -dispersos y se hacen observaciones de un vector  $S$ -disperso  $\alpha$  como  $y = A\alpha$ . No existe otro vector  $\alpha'$  que lleve a las mismas mediciones, dado que la diferencia  $h = \alpha' - \alpha$  sería un vector  $2S$ -disperso con  $Ah = 0$ , cosa que no puede ocurrir debido a que la RIP dice que todos los vectores  $2S$ -dispersos no están en el espacio nulo de  $A$ .

En la sección 2.2.1 se mencionó que las funciones de sensado deben parecer ruido aleatorio. Uno de los resultados fundamentales del MC dice que matrices de este tipo satisfacen la RIP.

**Teorema 2.** (*Matrices de sensado [37]*): Sea  $\Phi$  una matriz de tamaño  $M \times N$  con elementos independientes e idénticamente distribuidos de acuerdo a una distribución de Gauss de media cero, o a una distribución signada de Bernoulli  $\{-1, +1\}$ . Para cualquier dispersión  $S$ , con una probabilidad de  $1 - \delta$  la matriz  $A$  satisface la RIP siempre y cuando:

$$M \geq CS \log \left( \frac{N}{S} \right), \quad (2.23)$$

para alguna constante  $C$  independiente de  $N$ .

El Teorema 2 dice que cualquier matriz de sensado aleatoria con elementos independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d), de una distribución de Gauss o de Bernoulli, es casi seguro que será compatible con cualquier base de representación  $\Psi$ . Además, da una cota inferior para el número de muestras que se deben de adquirir.

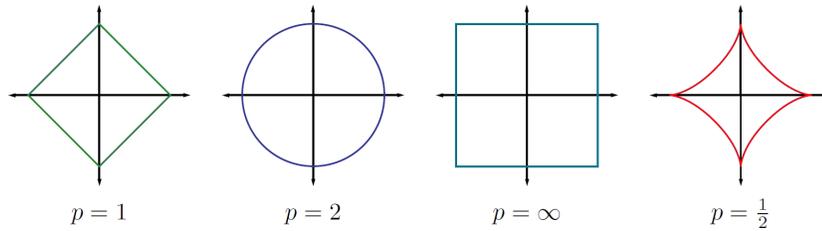


Figura 2.8: Esferas unitarias en el plano  $\mathbb{R}^2$  para las normas  $\ell_p$ , con  $p = 1, 2, \infty, \frac{1}{2}$ .

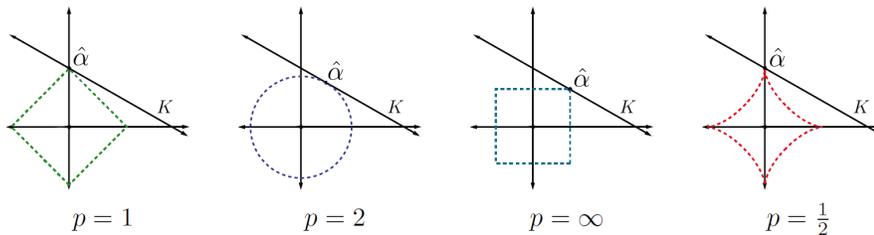


Figura 2.9: Geometría de la reconstrucción  $\ell_p$  para  $\alpha_0$ , con  $p = 1, 2, \infty, \frac{1}{2}$ .

### Normas $\ell_p$

Las normas  $\ell_p$  tienen distintas propiedades dependiendo de los valores de  $p$ . Como una forma de ilustrar esto, en la Figura 2.8 se muestra la esfera unitaria, i.e.,  $x : \|x\|_p = 1$  de cada una de estas normas en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

Se puede tener una interpretación geométrica del por qué  $\ell_1$  es un sustituto efectivo para  $\ell_0$ . En la Figura 2.9 se muestra la reconstrucción de un vector  $\hat{\alpha}$  resolviendo el problema de optimización a distintos valores de  $p$ . La línea  $K$  muestra todo el conjunto de vectores  $\hat{\alpha}$  que comparten las mismas mediciones. De forma que los problemas de optimización (2.19) y (2.20) recuperan la solución más dispersa.

Para visualizar como es que esto se lleva a cabo, imagine una esfera  $\ell_p$  de radio pequeño que se empieza a expandir gradualmente hasta que se intersecta con  $K$ . El primer punto de intersección es por definición el vector que tiene mínima norma  $\ell_p$ . Así que  $p$  debe de ser menor o igual a uno. En general, la solución siempre quedará en alguno de los ejes, por lo tanto es dispersa (Problemas 2.19 y 2.20). Comparando con lo que ocurre con la norma  $\ell_2$  (Problema 2.13) y en general, para  $p > 1$ , se puede decir que el primer punto de intersección con  $K$  no es disperso, efecto que se vuelve muy importante a mayores dimensiones.

---

# Capítulo 3

## Diccionarios

La dispersión es una característica esencial para el funcionamiento del MC. En este capítulo se estudian dos metodologías para la elección de una base que induzca dispersión, la primera consiste en elegir una base redundante fija y la segunda intenta aprender el diccionario que mejor se adapte a un conjunto de señales dadas.

### 3.1. Representación Dispersa de Señales

La representación dispersa es un área de estudio con implicaciones mas allá del MC, entre las aplicaciones que se benefician de la representación dispersa de señales están [38]:

- Compresión
- Regularización en problemas inversos
- Extracción de características
- Filtrado de Ruido

Aunque en este trabajo el principal objetivo de su estudio es encontrar una base adecuada para la señal fotoacústica. Formalmente, cuando se habla de la representación dispersa de una señal  $x \in \mathbb{R}^N$ , quiere decir que se puede representar como una combinación lineal dispersa de los  $K$  vectores columna o “átomos” de una matriz o “diccionario”  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{N \times K}$ . La representación de  $x$  puede ser exacta  $x = \mathcal{D}z$ , o bien, puede ser la aproximación  $x \approx \mathcal{D}z$  tal que  $\|x - \mathcal{D}z\|_p \leq \epsilon$ .

Para ambos casos el objetivo es encontrar la representación con el menor número de coeficientes distintos de cero, que es la solución a los problemas:

$$\min_z \|z\|_0, \quad \text{tal que} \quad x = \mathcal{D}z, \quad (3.1)$$

$$\min_z \|z\|_0, \quad \text{tal que} \quad \|x - \mathcal{D}z\|_2 \leq \epsilon. \quad (3.2)$$

El desempeño de un diccionario contempla que tan conciso puede un vector  $z$  almacenar la información de una señal  $x$  en el caso de la representación exacta, o que tan pequeño es el error de reconstrucción para ese vector  $z$ , en el caso de la representación aproximada.

En general, encontrar un diccionario  $\mathcal{D}$  que lleve a una representación dispersa no es tarea sencilla. Existen dos maneras de elegir el diccionario, ya sea a partir de una matriz de transformación preestablecida o proponer un diccionario que adapte su contenido hasta representar de forma dispersa un conjunto de señales dadas. Elegir una matriz de transformación fija es mas simple, ya que sus propiedades son conocidas y en muchos casos hay algoritmos rápidos para su implementación; sin embargo, no hay garantías en que sea la mejor. El éxito de cualquiera de estos diccionarios depende de que tan dispersa puedan representar a la señal de interés. La estrategia de adaptar diccionarios para representar un conjunto de forma dispersa es la siguiente: dado un conjunto de señales de entrenamiento  $\{x_i\}_{i=1}^L$ , se busca el diccionario  $\mathcal{D}$  que lleva a la mejor representación posible para cada miembro de este conjunto de entrenamiento bajo alguna condición sobre la dispersión.

## 3.2. Diccionario de Gabor

La señal fotoacústica tiene una representación poco dispersa en el dominio de la frecuencia, de forma que una base de Fourier es una mala elección. Sin embargo, al ser de corta duración, la señal debe ser dispersa en algún diccionario tiempo-frecuencia. A continuación se presenta una introducción a la teoría del análisis de Gabor como estrategia de construcción de un diccionario tiempo-frecuencia.

El análisis de Gabor estudia el fenómeno de representar una señal como una combinación lineal de ventanas trasladadas y moduladas. Esto se puede ver como una función que es mapeada del dominio del tiempo al plano tiempo-frecuencia. A estas transformaciones se les conoce como transformadas de Gabor.

### 3.2.1. Transformada discreta de Fourier de tiempo-corto

Un operador de traslación  $\mathcal{T}_k$  aplicado a una señal  $x \in \mathbb{R}^N$  se representa por:

$$(\mathcal{T}_k x)[n] = x[n - k], \quad 1 \leq n, k \leq N. \quad (3.3)$$

Un operador de modulación  $\mathcal{M}_m$  aplicado a una señal  $x \in \mathbb{R}^N$  se representa por:

$$(\mathcal{M}_m x)[n] = x[n] e^{2\pi i m n / N}, \quad 1 \leq n, m \leq N. \quad (3.4)$$

La función del operador de traslación es hacer corrimientos de  $k$  muestras a la señal  $x$ . El operador de modulación se encarga de modular la señal  $x$  a una frecuencia discreta  $m/N$ .

Se puede definir un operador de corrimiento tiempo-frecuencia concatenando los operadores de traslación y modulación, de forma que aplicado a una señal  $g$  se representa como:

$$(\mathcal{M}_m \mathcal{T}_k g)[n] = g[n - k] e^{2\pi i m n / N}, \quad 1 \leq m, k, n \leq N. \quad (3.5)$$

Si la señal  $g$  es una ventana, entonces una colección de ventanas con corrimientos tiempo-frecuencia  $\{\mathcal{M}_m \mathcal{T}_k g : 1 \leq m, k \leq N\}$  se le llama una base localizada de Fourier.

La transformada discreta de Fourier de tiempo-corto (STFT, por sus siglas en inglés)  $\mathcal{V}_g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}^{N \times N}$ , es una forma de representación de señales en un plano tiempo-frecuencia a partir de la base local de Fourier. La STFT opera de la siguiente manera:

$$\mathcal{V}_g x = \langle x, \mathcal{M}_m \mathcal{T}_k g \rangle, \quad 1 \leq m, k \leq N; \quad (3.6)$$

$$c(m, k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] g[n - k] e^{2\pi i m n / N}, \quad 1 \leq m, k \leq N. \quad (3.7)$$

En la matriz  $c$ , el índice  $m$  se refiere a la frecuencia sobre la cual se posiciona la ventana  $g$ . Por otro lado,  $k$  se refiere al tiempo sobre el cual se centra la ventana para realizar el análisis.

### 3.2.2. Transformada discreta de Gabor

La STFT, ecuación (3.6), tiene redundancia  $N$ , ya que representa una señal  $x \in \mathbb{R}^N$  como una matriz  $c \in \mathbb{C}^{N \times N}$ . Una versión submuestreada de la Transformada de Fourier

de Tiempo-Corto se le conoce como transformada de Gabor. Por lo tanto, la transformada de Gabor representa a una señal  $x \in \mathbb{R}^N$  en términos de un conjunto submuestreado de ventanas trasladadas y moduladas.

A una colección submuestreada de ventanas trasladadas y moduladas  $g \in \mathbb{R}^N$  se le conoce como un sistema de Gabor o de Weyl-Heisenberg y se define como:

$$\{\mathcal{M}_{mb}\mathcal{T}_{ka}g : 1 \leq m \leq M, 1 \leq k \leq K\}, \quad (3.8)$$

donde  $N = Mb = Ka$ .

En este contexto,  $a$  representa un desplazamiento en el tiempo, mientras que  $b$  un desplazamiento en frecuencia;  $N$  y  $K$  representan el número de desplazamientos en tiempo y en frecuencia, respectivamente. De forma que la transformada discreta de Gabor,  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}^{M \times K}$ , se encarga de representar a una señal en términos de los elementos de un sistema de Gabor.

La transformada de Gabor aplicada a una señal  $x \in \mathbb{R}^N$  opera de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}x = \langle x, \mathcal{M}_{mb}\mathcal{T}_{ka}g \rangle, \quad 1 \leq m \leq M, 1 \leq k \leq K; \quad (3.9)$$

$$c(m, k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]g[n - ka]e^{2\pi imbn/M}, \quad 1 \leq m \leq M, 1 \leq k \leq K. \quad (3.10)$$

La transformada discreta de Gabor mapea una señal  $x \in \mathbb{R}^N$  a una matriz  $c \in \mathbb{R}^{M \times K}$  de coeficientes de Gabor. La redundancia de la transformación se define como la relación  $\frac{MK}{N}$ . Para los valores de  $a = b = 1$  la transformada de Gabor es equivalente a la STFT.

### 3.2.3. Frames de Gabor

En álgebra lineal, un *frame* de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  es una colección de elementos  $\{v_i : i \in 1 \leq i \leq N\}$  de  $V$ , que generan a  $V$  y que son linealmente dependientes. Un *frame*, a diferencia de una base, no tiene unicidad de coeficientes a la hora de hacer la expansión de un elemento de  $v \in V$  como combinación lineal de los elementos  $v_i$ . Se puede decir que un *frame* es una base sobre completa o redundante, dado que se podrían remover elementos y el espacio generado seguiría siendo el mismo.

**Definición 4.** *Cualquier espacio vectorial de dimensión finita con producto interno es un*

espacio discreto de Hilbert,  $\mathcal{H}$ . Una colección de elementos  $\{v_i : 1 \leq i \leq N\} \subseteq \mathcal{H}$  se le llama un *frame* de  $\mathcal{H}$  si existen cotas  $A > 0$  y  $B > 0$ , tal que para todo  $v \in \mathcal{H}$  se cumple que:

$$A\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^N |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq B\|v\|^2. \quad (3.11)$$

La ecuación garantiza que cualquier  $v \in \mathcal{H}$  se puede escribir como una combinación lineal de los elementos del *frame*. Si un sistema de Gabor satisface la condición del *frame* (3.11), entonces se le conoce como un *frame* de Gabor. Además, si se tiene que  $A = B$ , a este sistema se le llama *frame* angosto de Gabor.

Si  $N$  vectores forman un *frame* para un espacio de Hilbert de dimensión  $K$ , tal que  $N > K$ , entonces la redundancia del *frame* se define como la relación  $\frac{N}{K}$ .

Un *frame* de análisis  $\mathcal{S} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  opera sobre una señal  $x$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{S}x = \sum_{i=1}^N \langle x, v_i \rangle v_i; \quad (3.12)$$

permite representar la señal como combinación lineal de los elementos del *frame*. El *frame* se puede representar en forma matricial, fijando cada  $v_i$  como un vector columna de la matriz.

La caja de herramientas conocida como *LTFAT* [39] es una librería para MATLAB que contiene métodos para la fácil manipulación de los *frames*.

### 3.3. Aprendizaje de diccionario

El aprendizaje de diccionario consiste en encontrar al diccionario que mejor represente un conjunto de señales de prueba  $X = \{x_i \in \mathbb{R}^N : i \in 1 \leq i \leq L\}$ . Es de esperarse que mientras más señales se utilicen para el entrenamiento, sea mas probable que ese diccionario pueda representar de forma dispersa otra señal de la misma clase.

Los elementos de este conjunto de entrenamiento se organizan como vectores columna de una matriz de entrenamiento  $X \in \mathbb{R}^{N \times L}$ . A su vez, el código disperso de cada uno de los elementos del conjunto se organiza como vectores columna de otra matriz  $\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{K \times L}$ , tal como se ilustra en la Figura 3.1.

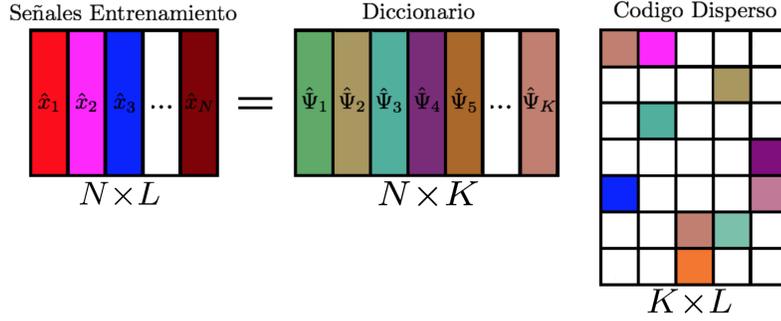


Figura 3.1: Modelo matricial del aprendizaje de diccionario.

El problema de aprendizaje de diccionario se puede modelar como un problema de optimización con respecto al diccionario  $\mathcal{D}$  y el código disperso  $Z$ . El algoritmo de optimización debe elegir entre el compromiso de minimizar alguna condición de dispersión y mantener pequeño el error de representación.

Si se desea encontrar el diccionario que lleva al menor error de representación, siempre y cuando los elementos de  $Z$  son  $S$ -dispersos, el problema se plantea de la siguiente manera [38]:

$$\min_{\mathcal{D}, Z} \|X - \mathcal{D}Z\|_2^2 \quad \text{tal que} \quad \forall i, \|z_i\|_0 \leq S. \quad (3.13)$$

Si se desea encontrar el diccionario que induce la mayor dispersión, siempre y cuando el error de representación este acotado por  $\epsilon$ , el problema se plantea de la siguiente manera [38]:

$$\min_{\mathcal{D}, Z} \sum_i \|z_i\|_0 \quad \text{tal que} \quad \|X - \mathcal{D}Z\|_2^2 \leq \epsilon. \quad (3.14)$$

### 3.3.1. Algoritmo K-SVD

A continuación se presentan de forma resumida las ideas detrás del algoritmo de K-SVD, que es un algoritmo para el aprendizaje de diccionario. Existen otros algoritmos que realizan la tarea, pero el de K-SVD es de los que permiten una convergencia en menor tiempo. Si el lector requiere profundizar en los detalles del algoritmo se le invita a leer la publicación [40].

El algoritmo trabaja con la representación (3.13) y resuelve el problema en dos etapas. La primer etapa consiste en fijar el diccionario  $\mathcal{D}$  tal que se optimiza la matriz de coeficientes  $Z$  en el sentido  $\ell_1$ . La segunda etapa consiste en actualizar cada uno de los  $\hat{\Psi}_i$  a

**Algoritmo 1:** Algoritmo de K-SVD [40]

**Tarea:** Resolver el problema de optimización:

$$\min_{\mathcal{D}, Z} \|X - \mathcal{D}Z\|_2^2 \quad \text{tal que} \quad \forall i, \|z_i\|_0 \leq S$$

**Inicialización:** Diccionario inicial  $\mathcal{D}^{(0)} \in \mathbb{R}^{N \times K}$ , con átomos normalizados.  $J = 1$ .

**Repetir** hasta que se cumpla la regla de paro:

- **Representación dispersa:** Resolver el siguiente problema para cada  $z_i$ .

$$\forall i \in \mathbb{Z}_L, \quad \min_{z_i} \|x_i - \mathcal{D}z_i\|_2^2 \quad \text{tal que} \quad \|z_i\|_0 \leq S$$

- **Actualización de diccionario:** Actualizar cada columna  $k \in \mathbb{Z}_K$  de  $\mathcal{D}^{(J-1)}$  mediante:

- Almacenar los índices de las señales que usan este átomo:

$$\omega_k = \{i : z_T^k[i] \neq 0\}$$

- Calcular el error de representación  $E_k$ :

$$E_k = X - \sum_{j \neq k} \hat{\Psi} z_T^j$$

- Restringir  $E_k$  escogiendo solo las columnas indexadas por  $\omega_k$ , obteniendo  $E_k^R$ .
- Descomposición SVD:  $E_k^R = U \Delta V^T$ .
- El  $k$ -ésimo átomo se actualiza por la primer columna de  $U$ .  $x_R^K$  se actualiza por la primer columna de  $V$  multiplicada por  $\Delta(1, 1)$ .

- **Incrementar J:**  $J = J+1$ .

la vez, manteniendo fijos los demás. De este modo se encuentra un átomo y en paralelo el algoritmo actualiza sus coeficientes de tal manera que se minimiza el error de representación, lo que acelera la convergencia a un mínimo. Esta es la razón principal por la que se decidió utilizar el algoritmo de K-SVD para el aprendizaje de diccionario, dado que hay otros métodos que fijan  $Z$  mientras actualizan  $\mathcal{D}$ .

El algoritmo comienza encontrando una matriz  $Z$  inicial. El error de representación total,  $\|X - \mathcal{D}Z\|_2^2$ , se puede reescribir como una suma de los  $L$  errores de representación de cada señal. Por lo tanto, la optimización se puede separar en  $L$  problemas independientes de la forma:

$$\min_{z_i} \|x_i - \mathcal{D}z_i\|_2^2 \quad \text{tal que} \quad \|z_i\|_0 \leq S. \quad (3.15)$$

El problema de encontrar el vector  $z_i$  que sea  $S$ -disperso se puede resolver por medio del algoritmo de “*basis pursuit*” que se introdujo en la sección 2.2.3.

Posteriormente, el algoritmo procede a actualizar el diccionario. Para ello el producto  $DZ$  se debe descomponer en la suma de  $K$  matrices, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \|X - DZ\|_2^2 &= \|X - \sum_{j=1}^K \hat{\psi}_j z_T^j\|_2^2; \\ &= \|(Y - \sum_{j \neq k} \hat{\psi}_j z_T^j) - \hat{\psi}_k z_T^k\|_2^2; \\ &= \|E_k - \hat{\psi}_k z_T^k\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En este caso el término  $E_k$  representa el error correspondiente debido a  $k - 1$  átomos. El término  $z_T^k$  corresponde a la  $k$ -ésima fila de  $Z$  y su producto con  $\hat{\psi}_k$  representa al error del  $k$ -ésimo átomo. Si el último término es libre de cambiar, entonces actualizarlo de forma que aproxime a  $E_k$  minimizará el error.

La estrategia para ello es encontrar cuales señales del conjunto de entrenamiento utilizan este átomo y sus índices se almacenan en un conjunto  $\omega_k$ :

$$w_k = \{i \in 1 \leq i \leq L : z_T^k(i) \neq 0\}. \quad (3.17)$$

Se define una matriz  $\Omega_k$  de tamaño  $L \times |\omega_k|$ , con unos en las  $(\omega_k(i), i)$ -ésimas posiciones y ceros en las demás localidades. El producto  $z_R^k = z_T^k \Omega_k$  almacena sólo las posiciones distintas de cero de  $z_T^k$ , dando como resultado un vector de longitud  $|\omega_k|$ . De igual forma, el producto  $E_k^R = E_k \Omega_k$  crea una matriz de tamaño  $N \times |\omega_k|$ , correspondiente al error proporcionado por las señales de entrenamiento que utilizan el átomo  $\hat{\psi}_k$ .

De forma que la ecuación (3.16) se puede reescribir como:

$$\|E_k \Omega_k - \hat{\psi}_k z_T^k \Omega_k\|_2^2 = \|E_k^R - \hat{\psi}_k z_R^k\|_2^2. \quad (3.18)$$

Una descomposición de valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés) descompone el término  $E_k^R$  en su forma  $U \Delta V^T$ . El átomo actualizado  $\hat{\psi}_k$  se define como la primer columna de  $U$ , y el vector de coeficientes  $z_R^k$  se define como la primer columna de  $V$  multiplicada por  $\Delta(1, 1)$ . El SVD permite que las columnas de  $D$  permanezcan normalizadas.

---

# Capítulo 4

## Demodulador aleatorio

Este capítulo presenta el demodulador aleatorio (DA) y sus principios básicos de operación. El DA es una arquitectura de sub-muestreo utilizada para adquirir señales dispersas y limitadas en banda.

Su principal ventaja es que evita el muestreo a alta frecuencia, con el costo de que ya no es posible reconstruir la señal analógica a partir de la fórmula de interpolación (1.1). La información para reconstruir la señal analógica se encuentra codificada dentro de las muestras de una forma diferente, por lo que el algoritmo de reconstrucción debe cambiar. El algoritmo de reconstrucción toma ventaja de la dispersión de la señal. Por lo tanto, el MC juega un papel fundamental para la decodificación de las muestras.

### 4.1. Introducción

#### 4.1.1. Motivación

Se desea adquirir una señal con muy grande ancho de banda utilizando un CAD a baja frecuencia, tal que  $f_s \ll f_{nyq}$ . El muestreo a baja frecuencia causa el fenómeno de *aliasing*. Que quiere decir, que dos señales con frecuencia  $f_{in}$  y  $f_{in} + f_s/2$  producen el mismo conjunto de muestras.

El problema se transforma en que dadas dos señales distintas  $x(t)$  y  $x'(t)$ , con frecuencias  $f_{in}$  y  $f_{in} + f_s/2$ , den conjuntos de muestras diferentes después de haber sufrido *aliasing*, esto es,  $x(nT_s) \neq x'(nT_s)$ . La estrategia es modificar las señales antes de la ad-

quisición. Sumarle a las señales una señal conocida no es una estrategia viable debido a la linealidad del proceso de muestreo. Es mejor multiplicar las señal con una señal conocida  $c(t)$ . A la señal  $c(t)$  se le conoce como secuencia de fragmentación. Desafortunadamente, no es posible sólo con la multiplicación, puesto que se requiere que las muestras contengan información entre  $(n-1)T_s$  y  $nT_s$ .

Considere que las muestras correspondientes a  $x(t)$  y  $x'(t)$  quedan dadas por  $y[n] = y(x(t))$  y  $y'[n] = y(x'(t))$  respectivamente, de acuerdo al siguiente modelo:

$$y[n] = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} x(t)c(t)h(t)dt, \quad (4.1)$$

donde  $h(t)$  se conoce como la respuesta impulso del integrador.

Suponga el caso de un integrador ideal, con  $h(t) = 1$ . Entonces, la diferencia entre las muestras

$$y[n] - y'[n] = \int_{(n-1)T_s}^{nT_s} (x(t) - x'(t)) c(t)dt \quad (4.2)$$

$$= \langle (x - x'), c \rangle, \quad (4.3)$$

se puede visualizar como un operador lineal  $\langle (x - x'), c \rangle$ . De manera que  $y[n] = y'[n]$ , si  $c$  está en el espacio nulo de este operador. Por definición,  $x \neq x'$ , de manera que el operador  $\langle (x - x'), c \rangle \neq 0$  y existe un complemento al espacio nulo. Si se escoge una función aleatoria  $c(t)$ , es casi seguro que no se encontrará en el espacio nulo de este operador y por lo tanto  $y[n] \neq y'[n]$  [22].

### 4.1.2. Estado del arte

El DA se conceptualizó en 2005 [41] y los trabajos preliminares [18–20]. Se asumen señales sinusoidales a la entrada con tonos dentro de la red creada por la DFT. En los trabajos se consideran algunas no-idealidades como *jitter* en el mezclador y un polo en el integrador.

El trabajo de [42] consta de un diseño multi-canal con aplicación en sensado espectral para radios cognitivos. Utilizan el algoritmo de “*Orthogonal matching pursuit*” y demuestran la viabilidad del método con simulaciones en MATLAB, reconstruyendo tonos dentro

de la red con frecuencia variable.

El artículo [21] llamado “*Beyond Nyquist*” es un trabajo principalmente teórico y bastante influyente. Su principal resultado es la demostración de que el DA sigue una curva de transición de fase consistente con los resultados de Donoho y Tanner para matrices de sensado de Bernoulli. A continuación se enuncian dos teoremas tomados de ese artículo que son de relevancia para este trabajo:

**Teorema 3.** (*Reconstrucción sin ruido de señales aleatorias dentro de la red, [21]*): Suponga una señal  $x[n]$ , que se define como las muestras a frecuencia de Nyquist de una señal analógica  $x(t)$ , con  $K$  tonos dentro de la red, y que son elegidas de forma aleatoria. Esto implica que  $\hat{x} \doteq DFT(x[n])$  tiene a lo más  $2K$  coeficientes distintos de cero. Suponga que las componentes de  $\hat{x}$  distintas de cero tienen amplitudes arbitrarias. Entonces, para un DA de un canal con una secuencia binaria pseudo-aleatoria de elementos i.i.d de Bernoulli y frecuencia de muestreo

$$f_s \geq C(K \log B + \log^3 B), \quad (4.4)$$

tal que  $f_s | B$ , se tiene que, excepto con una probabilidad  $\mathcal{O}(B^{-1})$ , el algoritmo de “basis pursuit”, (2.20), recupera la señal  $x[n]$  de forma exacta a partir de las muestras adquiridas por el DA,  $y = \Phi x$ . Donde  $C$  es una constante independiente de  $B$  y  $K$ , y  $\Phi$  es una matriz que modela al DA.

**Teorema 4.** (*Reconstrucción con ruido de señales arbitrarias, [21]*): Dada una SBPA fija y un DA de un canal, con frecuencia de muestreo

$$f_s \geq CK \log^6(B), \quad (4.5)$$

tal que  $f_s | B$ . Entonces, excepto con una probabilidad  $\mathcal{O}(B^{-1})$ , se puede estimar la señal  $x[n]$  a partir de las muestras  $y = \Phi x + \eta$ , con el algoritmo de “basis pursuit denoising” (2.21) de parámetro  $\epsilon = \|\eta\|_2$  con un resultado que satisface:

$$\|\hat{x} - x\|_2 \leq C \max \left\{ \epsilon, \frac{1}{\sqrt{K}} \|X - X_K\|_1 \right\} \quad (4.6)$$

donde  $X_K$  es la mejor aproximación  $K$ -dispersa a  $X$ .

Se puede interpretar el Teorema 3, como que la mayoría de las SBPA sirven para adquirir la mayoría de señales, siempre y cuando  $f_s$  sea lo suficientemente grande. De forma que mientras se seleccione la SBPA de forma aleatoria, la reconstrucción es casi seguro que ocurra.

El Teorema 4 dice que  $x$  no tiene que ser exactamente  $K$ -disperso para poder ser recuperado. De hecho, una adecuada reconstrucción ocurrirá siempre y cuando la DFT sea comprimible o aproximadamente dispersa.

Los trabajos mas recientes que estudian la arquitectura reportan aplicaciones en la adquisición de señales de radar [22], no idealidades [43, 44] y algunas modificaciones menores [45].

## 4.2. Consideraciones de diseño

### 4.2.1. Modelo de la señal

La idea de un modelo de señal es representar señales que comparten ciertos parámetros, a través de un mismo modelo matemático. El DA no es una arquitectura adecuada para el sub-muestreo de cualquier señal, por lo que se enfoca su estudio a un modelo específico adaptado a las señales fotoacústicas.

El DA opera en un intervalo de tiempo  $[0, T]$ , de forma que la señal se debe de poder caracterizar por completo en ese rango de tiempo. Esto solo es posible si  $x(t)$  es periódica con periodo  $T$  o se atenúa fuera de una ventana de duración  $T$ . Como segunda característica, se asume que las señales son limitadas en banda en el rango  $[-kf_{nyq}/2, kf_{nyq}/2]$ , con  $k \geq 1$ . Debido al principio de incertidumbre una señal no puede tener soporte compacto en tiempo y frecuencia, de forma que se considera la extensión periódica de la señal fotoacústica con periodo  $T$ .

Suponga la versión muestreada de  $x(t)$ , dada como  $x[n] = x(nT_{kf_{nyq}})$  con  $T_{kf_{nyq}} = \frac{1}{kf_{nyq}}$ . El hecho de que  $x(t)$  sea de soporte compacto implica que la señal se puede adquirir completamente con  $N = T/T_{kf_{nyq}}$  muestras. Además, el hecho de que se considere a  $x(t)$  una señal periódica implica que su espectro es discreto y coincide con la DFT de  $x[n]$ . De

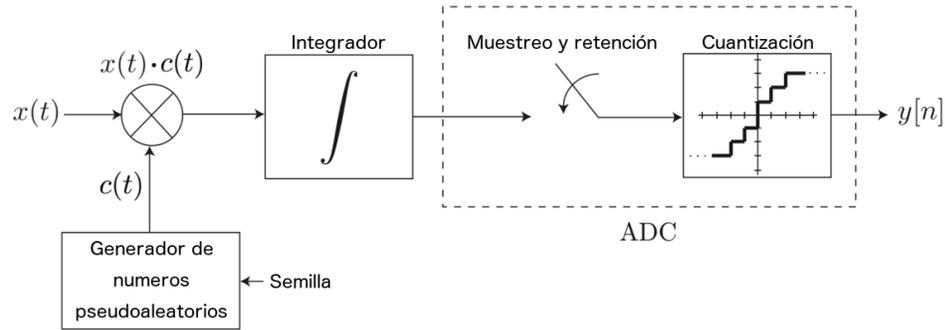


Figura 4.1: Diagrama a bloques del demodulador aleatorio.

forma que  $x(t)$  se puede expresar como

$$x(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{x}[k] e^{i2\pi kt/T}. \quad (4.7)$$

De aquí en adelante se considera la operación del DA solamente con señales que cumplan con ser:

- Limitadas en banda
- Periódicas
- Dispersas en algún diccionario

### 4.2.2. Arquitectura

En la sección 4.1.1 se presentó una estrategia que permite hacer sub-muestreo de señales evitando *aliasing*. La metodología consiste en multiplicar la señal por una secuencia aleatoria, integrar la señal mezclada para obtener información entre muestras y muestrear a baja frecuencia. De forma que la arquitectura necesita realizar tres operaciones básicas: mezclado de señales, integración y muestreo. Todos estas ideas se plasman en la arquitectura que se muestra a nivel de bloques en la Figura 4.1 [18–22].

#### Secuencia de fragmentación

La secuencia de fragmentación es parte del algoritmo de reconstrucción, por lo que la señal  $c(t)$  debe ser conocida e implementable. Para este trabajo se elige  $c$  como una

secuencia de bits pseudo-aleatoria que conmuta entre valores  $+1$  y  $-1$ . Esta secuencia cambia a una tasa múltiplo de  $T_{nyq}$  ya que la resolución de la señal después de la reconstrucción es proporcional a la tasa de  $c$ . La implementación consiste en generar una señal continua a partir de la SBPA. Los registros de desplazamiento con realimentación lineal son una tecnología conocida y bien estudiada para generar SBPA [46].

### Mezclador

Un mezclador es un dispositivo cuya salida es igual al producto de dos o más señales de entrada. Los mezcladores toman ventaja de las no-linealidades de los diodos y los transistores para multiplicar las señales. Sin embargo, también generan armónicos en múltiplos de las frecuencias de las señales de entrada, por lo que la salida presenta distorsiones que se deben de corregir a la hora del diseño.

Posiblemente, lo más recomendable es utilizar un circuito de amplificadores operacionales. Dado que la naturaleza de  $c(t)$  permite que el proceso de mezclado solo cambie o mantenga la polaridad de  $x(t)$ .

### Integrador

La siguiente etapa del dispositivo es la integración. Es ampliamente conocido que los capacitores pueden realizar esta función. Un capacitor tiene un tiempo de carga y descarga. Si estos tiempos son muy cortos, entonces la integración es algo similar a una muestra puntual y se pierde información necesaria entre muestras.

Visto en el dominio de la frecuencia, un integrador ideal tiene una función de transferencia dada por:

$$H(s) = \frac{1}{s}. \quad (4.8)$$

Un capacitor es un filtro de un polo con función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{s + a}. \quad (4.9)$$

En el caso ideal se atenúan todas las altas frecuencias. En el caso del capacitor, esta función tiene un polo a una frecuencia de  $a$  [Hz]. Esto quiere decir, que todas las frecuencias antes del polo tienen una respuesta plana. En el caso extremo, una respuesta completamente

plana significa que  $h(t) = \delta(t)$ , lo que es equivalente a un muestreo puntual. Por lo tanto, la localización del polo es un factor determinante para el desempeño del sistema.

### 4.3. Modelado del sistema

El DA es un sistema que mapea una señal continua a una secuencia de muestras. En un caso ideal, el sistema es lineal y de dimensión finita, de forma que su comportamiento se puede modelar en forma matricial. Existen dos motivos para modelar el sistema:

- Generar mediciones realistas para realizar experimentos.
- Construir una matriz de sensado  $\Phi$  para los algoritmos de reconstrucción.

En esta sección se construye un modelo matricial que describe el funcionamiento del DA para señales dentro del modelo. Además, se discuten algunas restricciones que impone este modelo sobre los parámetros del operación del DA.

#### 4.3.1. Modelos analíticos

El Teorema 2 (sección 2.2.4) dice que cualquier matriz aleatoria con elementos i.i.d. de una distribución signada de Bernoulli, es una buena matriz de sensado capaz de satisfacer la RIP con cualquier base ortogonal. Los diccionarios de Gabor y los aprendidos no son bases ortogonales al ser redundantes; esto implica que la teoría del MC no se puede aplicar de manera directa. En la sección 4.5 se discute trabajo reciente que ayuda a adaptar los resultados del MC a diccionarios redundantes.

Las matrices aleatorias son buenas matrices de sensado aun con diccionarios redundantes. De forma que el objetivo del DA, es tener un desempeño lo mas parecido posible a una matriz aleatoria de Bernoulli.

El modelo a la salida del integrador está dado por:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * (x(t)c(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)c(\tau)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned} \tag{4.10}$$

El sistema es causal, es decir,  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ . De forma que la integral de convolución puede ser calculada de  $[0, \infty]$ . La respuesta impulso  $h(t)$  del integrador se discutió en la sección 4.2.2. Su modelo es:

- Caso ideal

$$h(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad H(s) = \mathcal{L}(h) = \frac{1}{s}, \quad (4.11)$$

- Integrador de un polo

$$h(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad H(s) = \mathcal{L}(h) = \frac{1}{s+a}. \quad (4.12)$$

La arquitectura es lineal e invariante en el tiempo (LIT) hasta la etapa de integración. El proceso de muestreo periódico hace que se pierda la invarianza en el tiempo. Sin embargo, restringido a un periodo de muestreo, el sistema es LIT. De forma que la  $m$ -ésima muestra queda dada por:

$$y[m] = \int_{(m-1)T_s}^{mT_s} x(t)c(t)h(mT_s - t)dt. \quad (4.13)$$

El efecto de una SBPA que oscila a tasa  $\Delta T$  es cambiar o mantener la polaridad en intervalos de duración  $\Delta T$  de una señal analógica  $x(t)$ . Si se utiliza la representación discreta  $c[n]$  de la secuencia, entonces, el  $n$ -ésimo elemento de  $c$  corresponde a la polaridad de  $x(t)$  en intervalo  $[n\Delta T, (n+1)\Delta T]$ . Con esta información se descompone la ecuación (4.13) como la suma de integrales:

$$y[m] = \sum_{n=(m-1)N_s}^{mN_s-1} c[n] \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} x(t)h(mT_s - t)dt, \quad (4.14)$$

donde  $N_s$  es la cantidad de pulsos de  $c(t)$  o muestras de  $c[n]$  correspondientes a un intervalo de duración  $T_s$ . Esto lleva a la primer consideración sobre los parámetros de diseño.

- $T_s|T$ . De esta forma toda la información correspondiente en el intervalo  $[0, T]$  se almacena en las  $M$  muestras adquiridas; de lo contrario, la última muestra requiere información mas allá de  $T$ .

- $\Delta T | T_s$ . Así se garantiza que  $N_s$  es un entero y todas las muestras adquieren la misma cantidad de información de  $x(t)$ .

Con el fin de construir un modelo matricial se debe resolver la integral. En el caso del integrador ideal existen dos estrategias:

- la representación exacta

$$x[n] = \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} x(t) dt; \quad (4.15)$$

- la aproximación en cuadratura de la integral

$$x[n] = \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} x(t) dt = x(n\Delta T). \quad (4.16)$$

Sea cual sea la resolución, la ecuación (4.14) se simplifica al modelo:

$$y[m] = \sum_{n=(m-1)N_s}^{mN_s-1} c[n]x[n], \quad (4.17)$$

que en forma matricial se expresa como

$$y = \Phi x. \quad (4.18)$$

Las resoluciones (4.15) y (4.16) asumen  $h(t) = 1$ , algo imposible de obtener en la práctica. Se puede construir un modelo más general que contempla otros valores para  $h(t)$ . Este modelo se construye contemplando el modelo de señal estudiado en la sección 4.2.1. El modelo de señal (4.7) contempla que  $x(t)$  se puede aproximar a partir de  $N$  de sus muestras, lo que implica que  $x(t)$  se puede representar de forma exacta mediante su DFT.

Sustituyendo el modelo de señal en la expresión (4.14), se reduce a la forma

$$y[m] = \sum_{k=1}^N \hat{x}[k] \hat{\phi}_m[k], \quad (4.19)$$

donde

$$\hat{\phi}_m[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=(m-1)N_s}^{mN_s-1} c[n] \int_{n\Delta T}^{(n+1)\Delta T} e^{i2\pi kt/T} h(mT_s - t) dt. \quad (4.20)$$

En cálculo de  $\hat{\phi}_m$  sólo requiere realizar integrales definidas de exponenciales. Si el integrador es ideal, entonces  $h = 1$ . Si los polos y ceros son conocidos,  $h$  se expresa en términos de exponenciales, de forma que la integral es muy similar.

Se puede construir una matriz  $\Phi_{FFT}$  colocando cada  $\hat{\phi}_m$  como una de sus filas, por lo tanto, el modelo 4.19 se puede expresar en forma matricial como

$$y = \Phi_{FFT} \hat{x}. \quad (4.21)$$

Esta matriz opera en el dominio de la DFT. Una matriz que opere en el dominio del tiempo se puede construir a partir de  $\Phi_{FFT}$  como

$$\Phi = \Phi_{FFT} F, \quad (4.22)$$

donde  $F$  es la matriz de la DFT.

### 4.3.2. Modelo matricial numérico

La única no idealidad considerada en los modelos de la sección 4.3.1 es el polo en la integración. En esta sección se construye lo equivalente a una respuesta impulso para obtener una matriz de representación  $\Phi$  mas realista del sistema.

Suponga el DA como una caja negra. El sistema opera sobre la entrada  $x(t)$  proporcionando a su salida las muestras  $y[n]$ . Dado que  $x(t)$  se puede caracterizar a partir de  $N$  de sus muestras, entonces la entrada se considera de dimensión finita  $N$ . El sistema se asume lineal, por lo tanto se puede visualizar como una transformación lineal

$$\mathcal{T} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M. \quad (4.23)$$

El objetivo es construir la matriz  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$  que representa al operador  $\mathcal{T}$ , tal que  $\mathcal{T}(x) = \Phi x$ . La teoría del álgebra lineal dice que dicha matriz  $\Phi$  se puede construir a partir de conocer la respuesta del sistema a un conjunto de  $N$  vectores linealmente inde-

pendientes. Tradicionalmente se realiza esta tarea alimentando al sistema con funciones impulso para obtener la llamada respuesta impulso. En el caso del DA una función impulso no está limitada en banda por lo que es una señal fuera del modelo. Si se utiliza la expansión (4.7) y las propiedades de las transformaciones lineales, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(x) &= \mathcal{T}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{x}[k] e^{i2\pi kt/T}\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{x}[k] \mathcal{T}(e^{i2\pi kt/T}) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{x}[k] (\mathcal{T}(\cos(2\pi kt/T)) + i\mathcal{T}(\sin(2\pi kt/T))). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Esto construye una matriz  $\Phi_{FFT}$  que opera en el dominio de la frecuencia. Así que para obtener su representación en el dominio del tiempo,  $\Phi$ , la matriz  $\Phi_{FFT}$  se debe de invertir de acuerdo a la transformación (4.22). De esta manera se puede construir la matriz numéricamente al conocer la respuesta del sistema a funciones seno y coseno dentro de la red. Aunque cada función base requiere de dos mediciones, la naturaleza real de  $x(t)$  hace simétrico el espectro, de forma que se puede calcular la matriz a partir de  $N$  mediciones.

Como una manera de validar que el modelo es adecuado, se deben de verificar las siguientes dos condiciones:

- dada una señal fotoacústica conocida  $x$ , las muestras  $y = \mathcal{T}(x)$  son consistentes con las mediciones  $\Phi x$ ;
- la reconstrucción  $\tilde{x}$  aproxima bien a una señal fotoacústica conocida  $x$  a partir de las muestras  $y = \mathcal{T}(x)$ .

## 4.4. Número de canales

Suponga un sistema que se representa con la matriz

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

El sistema representado por  $\Phi$  adquiere dos muestras en un intervalo de operación  $T = 2T_s$ ; recordando que  $T = N\Delta T$  y  $T_s = N_s\Delta T$ . Cada fila de  $\Phi$  corresponde a una muestra, de forma que para obtener mas muestras se debe incrementar el número de filas. Para ello se sugiere utilizar alguna de las siguientes dos estrategias:

- muestrear con mayor frecuencia, lo que implica reducir  $T_s$ ;
- utilizar arquitecturas de DA que operen en paralelo.

Suponga que se decide la primer estrategia, y se reduce  $T_s$  a la mitad. Esto implica que se toman el doble de muestras, tal que la matriz queda representada por

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

En general, esta no es una buena estrategia. Reducir los tiempos de muestreo implica que las matrices tienden a una matriz identidad, sin embargo, el objetivo del sistema es aproximar a una matriz aleatoria de Bernoulli.

La segunda solución considera canales adicionales. Esto implica utilizar  $K$  arquitecturas de DA en paralelo, como se muestra en la Figura 4.2. Considere el sistema dado por (4.25) y suponga que se le anexan dos arquitecturas en paralelo. De manera que la matriz  $\Phi$  del nuevo sistema es de la forma

$$\Phi = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Los canales adicionales ofrecen mas muestras, dadas como

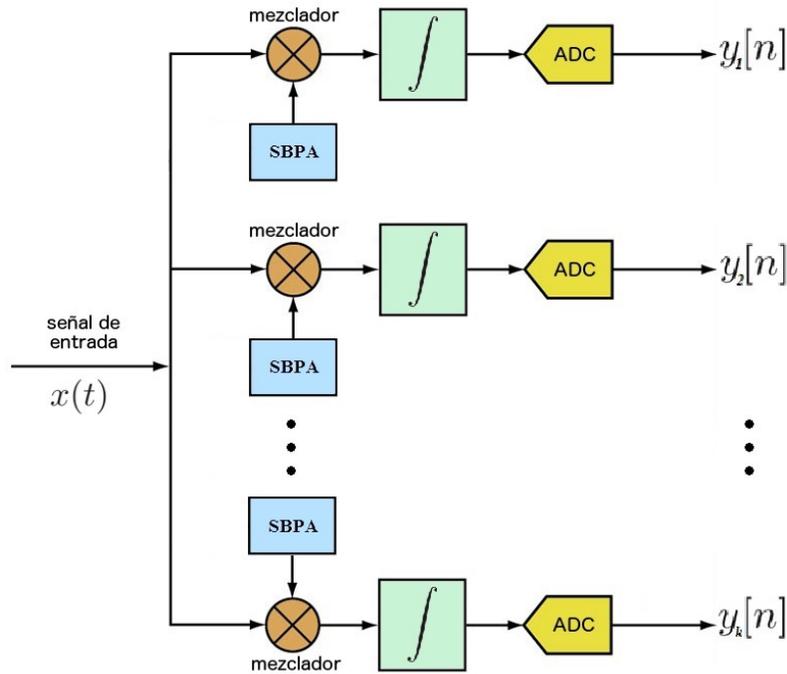


Figura 4.2: Arquitecturas de DA operando en paralelo.

$$\begin{aligned}
 M &= K \frac{T}{T_s} \\
 &= K \frac{N}{N_s}.
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

El efecto de agregar canales es que, a largos periodos de tiempo, la matriz del sistema cambia de una identidad a una de bloques de Bernoulli. Si la cantidad de muestras por unidad de tiempo que se debe de adquirir es fija, aumentar el número de canales permite reducir la frecuencia en cada CAD, de forma que la matriz es exactamente Bernoulli. Para fines prácticos el número de canales debe estar limitado, de forma que nunca se puede representar el sistema exactamente como una matriz de Bernoulli.

## 4.5. Reconstrucción

En esta sección se explica como decodificar las muestras adquiridas por el DA utilizando los conceptos de la sección 2.2.3.

El objetivo es encontrar la mejor solución  $\tilde{x}$  a partir de las muestras  $y = \Phi x + z$ .

Una estrategia es representar la señal  $x$  mediante una base de dispersión  $\Psi$ , de forma que se puedan utilizar las fórmulas de reconstrucción (2.20) y (2.21). La teoría del MC y sus fórmulas de reconstrucción están desarrolladas para diccionarios ortogonales; sin embargo, la señal fotoacústica sólo es dispersa en diccionarios redundantes.

El artículo [47] presenta una adaptación a las fórmulas de reconstrucción del MC de forma que se pueda trabajar con diccionarios redundantes. Se presenta una fórmula de síntesis y análisis para los problemas de minimización  $\ell_1$ . Sea  $\Psi$  el mapeo que sintetiza la señal  $x = \Psi\alpha$ . Sea  $\Psi^*$  el mapeo de análisis, tal que  $\Psi^*x = \alpha$ .

- La fórmula de síntesis realiza una reconstrucción resolviendo:

$$\min_{\tilde{\alpha}} \|\alpha\|_1 \quad \text{tal que} \quad \|\Phi\Psi\tilde{\alpha} - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (4.29)$$

- La fórmula de análisis realiza una reconstrucción resolviendo:

$$\min_{\tilde{x}} \|\Psi^*\tilde{x}\| \quad \text{tal que} \quad \|\Phi x - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (4.30)$$

En general, los dos programas no son equivalentes. Dado que si  $x = \Psi\alpha$ , no es necesariamente cierto que  $\Psi^*x = \alpha$ . Parte de este trabajo utiliza *frames* de Gabor (sección 3.2.3), en este contexto  $\Psi$  sería el *frame* y  $\Psi^*$  el *frame* dual.

No existe mucha investigación sobre el uso de la formulación de análisis. Resultados en [22, 48–50] reportan que el problema de análisis reconstruye señales con mejor efectividad que síntesis en casos de diccionarios redundantes. En [47] se muestra que el problema de análisis tiene propiedades teóricas muy similares al problema de síntesis, en particular las propiedades de la RIP para matrices aleatorias.

Para resolver el problema de síntesis, en este trabajo se hace uso de el software “ $\ell_1$  Magic” [51], aunque existe una gran variedad de algoritmos reportados [52]. El problema de análisis solo se encontró implementado en dos algoritmos:

- NESTA [53];
- C-SALSA [54].

Para este trabajo se utiliza el algoritmo NESTA, reportado en la tesis de Becker para reconstruir pulsos de radar con el DA [22].

---

## Capítulo 5

# Simulaciones y resultados

En este capítulo se reportan los experimentos y simulaciones realizados durante este proyecto. El capítulo se divide en tres partes:

- Descripción del conjunto de datos
- Representación dispersa de las señales fotoacústicas
- Desempeño de la arquitectura

La primera parte muestra los conjuntos de datos a utilizar para la realización de experimentos. La segunda parte se centra en las metodologías descritas en el capítulo 3 y se reporta el desempeño de diversos diccionarios para la representación dispersa de las señales fotoacústicas. La última sección se centra en DA presentado en el capítulo 4, se presentan detalles sobre su simulación y se muestran resultados del desempeño sobre diversas señales fotoacústicas.

El desempeño de las reconstrucciones se cuantifica con una variación del error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés), que se define como:

$$\text{RMSE}(x) \doteq \frac{\|x - x_0\|_2}{\|x_0\|_2}, \quad (5.1)$$

donde  $x$  es la reconstrucción y  $x_0$  es la señal original o que se intenta aproximar. La razón de utilizar esta métrica es la consistencia con la literatura existente y el beneficio de que su valor se mantiene tanto en el dominio del tiempo como el de la frecuencia.

## 5.1. Conjunto de datos

El conjunto de datos a utilizar consta de señales experimentales y sintéticas. Las señales experimentales son producidas por un sensor fotoacústico, mientras que las sintéticas se crean a partir de un modelo que emula la respuesta de un sensor ideal. Las señales ideales no se encuentran en la práctica, sin embargo, son útiles para cuantificar límites de operación en la arquitectura, que se debe desempeñar de forma adecuada ante cualquier señal fotoacústica. Además, con las señales sintéticas se tiene control de parámetros, algo difícil de tener con las señales experimentales, donde apenas se están realizando los primeros estudios sobre las propiedades de la señal producida por los sensores [2].

Las señales experimentales se obtuvieron de un sensor fotoacústico de respuesta rápida reportado en [2]. Se adquirieron 140 señales divididas en dos grupos acorde a la ventana de tiempo que se utilizó en la adquisición, de forma que varía el número de muestras. Todas las señales se adquirieron con un osciloscopio *Tektronix* modelo *MSO 3014*, de frecuencia de muestreo de 2.5 GS/s (25 veces superior a la tasa de Nyquist). La adquisición captura ruido fuera de la banda de respuesta del sensor, por lo tanto, el conjunto de datos se filtró en MATLAB con un filtro pasobajas de orden 20 y frecuencia de corte de 50 MHz. Todas las señales adquiridas son distintas y el tiempo de arribo para cada señal nunca es el mismo, efecto inherente a trabajar con altas frecuencias provocando asincronías en el *trigger* de adquisición.

Para realizar pruebas se seleccionaron cinco señales de forma aleatoria de cada conjunto. El resto se utiliza para entrenar los diccionarios (sección 5.2). A cada señal se le asocia un código que comienza por la letra E (de experimental), seguido del número de muestras y el número de señal precedido de un guión. De forma que la señal con el código “E512-3” corresponde al tercer elemento del conjunto seleccionado de señales experimentales con 512 muestras, esto con el fin de reportar resultados en las secciones posteriores y facilite la asociación con su señal correspondiente. La Figura 5.1 muestra las señales seleccionadas.

Las señales sintéticas se crearon a partir del modelo de derivada de una función de Gauss:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right) = \frac{-t}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \quad (5.2)$$

Se consideró como afecta a las señales reales de tiempo de arribo, de forma que cada pulso sintético aparece en distinto tiempo. El modelo depende de un parámetro  $\sigma$ , que se

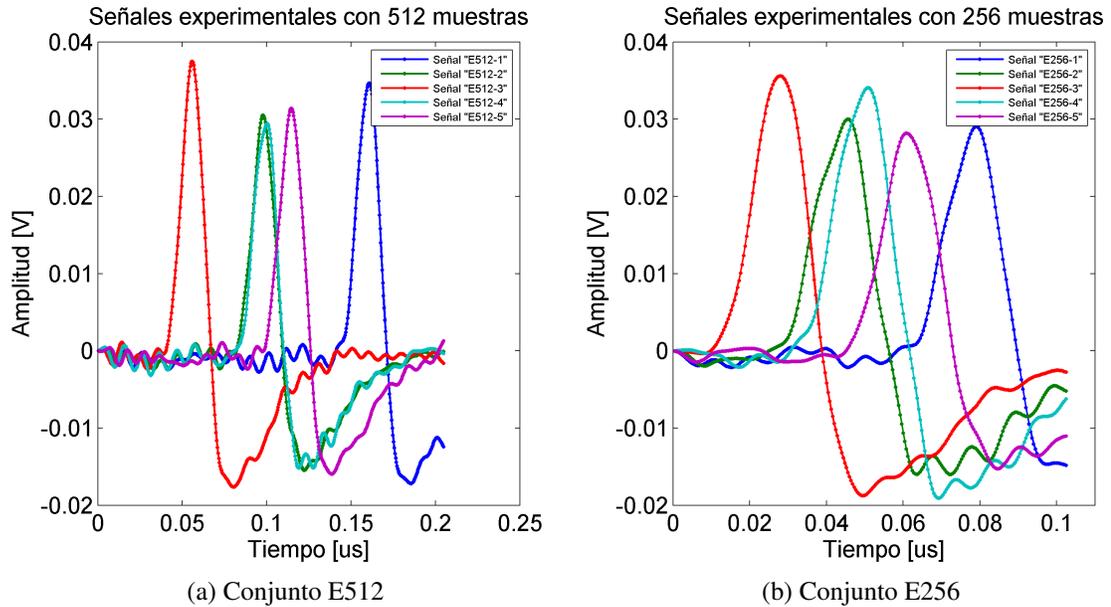


Figura 5.1: Señales reales seleccionadas. Conjuntos: E512 y E256.

calculó utilizando la transformada de Fourier del modelo, verificando a cuál valor de  $\sigma$  la función está limitada en banda a 50 MHz. De acuerdo a la figura 5.2 este valor corresponde a  $\sigma = 1 \times 10^{-8}$ .

Al igual que el conjunto experimental, se generaron 140 señales sintéticas, análogas en parámetros a las experimentales, de forma que también se clasifican en dos grupos. Para realizar pruebas se seleccionaron cinco señales de forma aleatoria de cada conjunto. El resto de señales se utiliza para entrenar los diccionarios. A cada señal se le asigna un código, que comienza por la letra S (de sintéticas), seguido del número de muestras y el número de señal precedido de un guión. La Figura 5.3 muestra las señales seleccionadas.

Fue necesario trabajar con versiones decimadas de las señales, ya que el algoritmo de aprendizaje de diccionario requiere mas elementos de entrenamiento que la dimensión de las señales (sección 3.3). Las señales se decimaron tal que la frecuencia de muestreo se redujo a aproximadamente tres veces la frecuencia de Nyquist, lo que genera versiones de 64 muestras de las señales que originalmente tenían 512. Se mantuvieron como señales de prueba las mismas cinco señales seleccionadas anteriormente en el conjunto a alta resolución. Las Figura 5.4 muestra las señales decimadas.

En la Tabla 5.1 se muestra una lista resumida de las características de las señales

utilizadas para los experimentos.

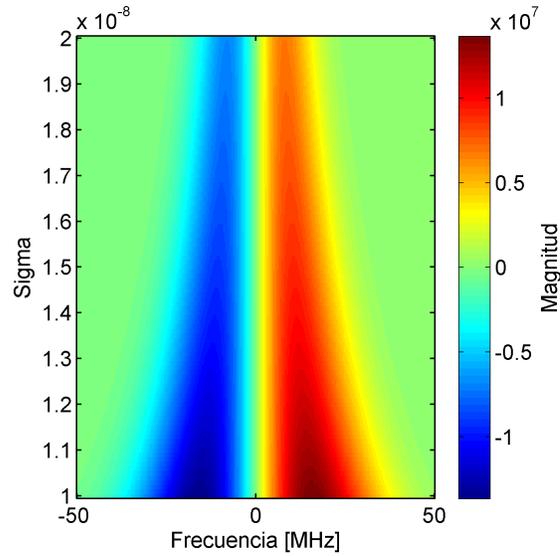


Figura 5.2: Espectro en magnitud del modelo ideal.

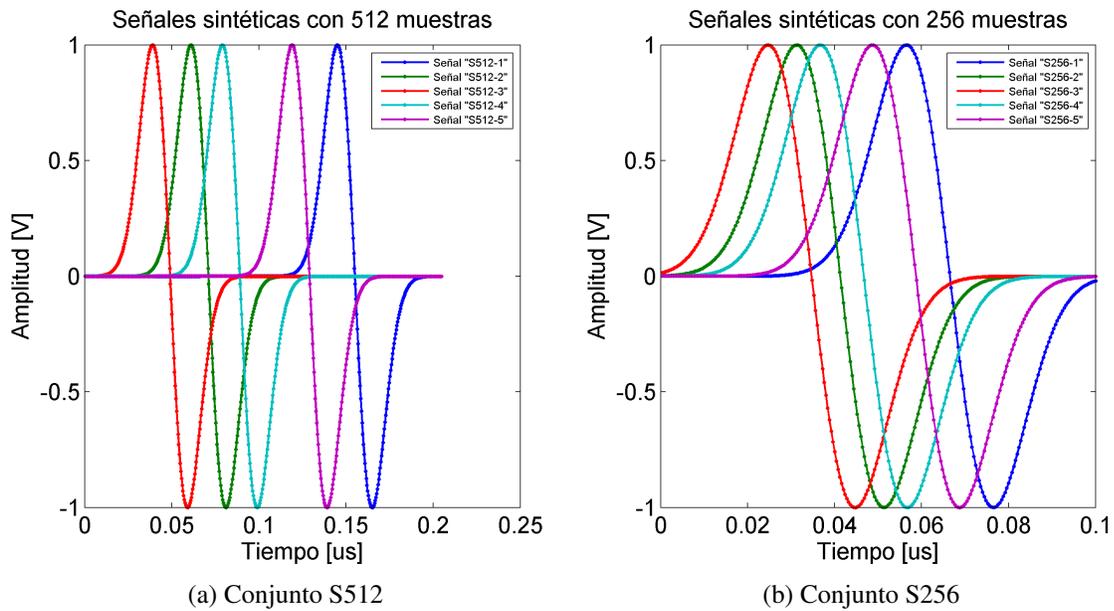


Figura 5.3: Señales sintéticas seleccionadas. Conjuntos: S512 y S256.

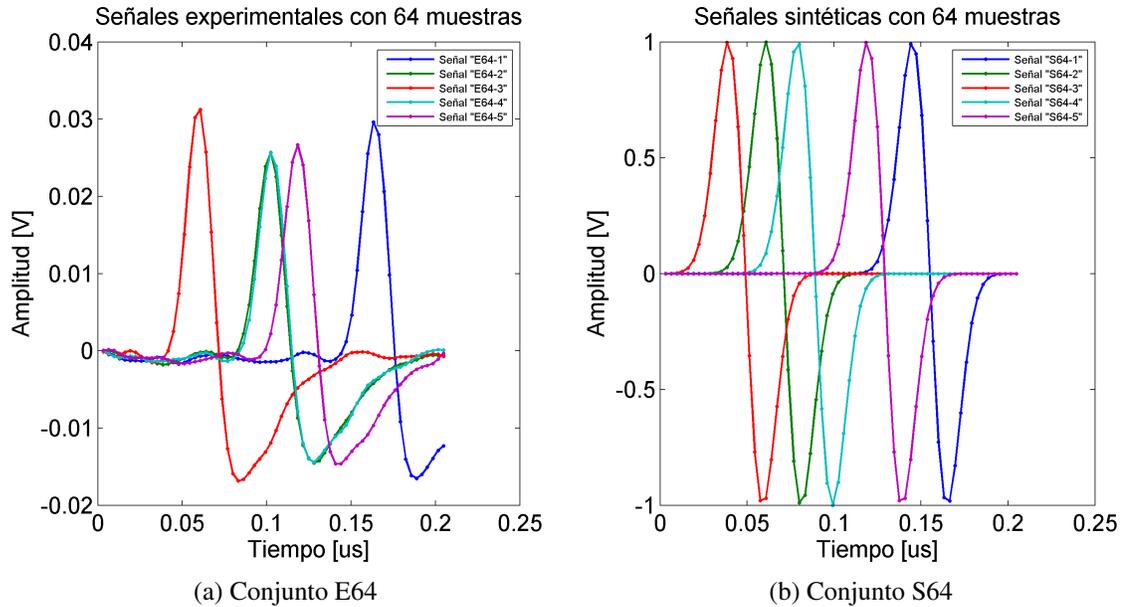


Figura 5.4: Señales seleccionadas decimadas a 64 muestras. Conjuntos: E64 y S64.

	Número	Duración [s]	Muestras	$T_s$ [s]	BW [MHz]	$\sigma$
Señales experimentales	70	$2.048 \times 10^{-7}$	512	$4 \times 10^{-10}$	50	-
	70	$1.024 \times 10^{-7}$	256	$4 \times 10^{-10}$	50	-
	70	$2.048 \times 10^{-7}$	64	$3.2 \times 10^{-9}$	50	-
Señales sintéticas	70	$2.048 \times 10^{-7}$	512	$4 \times 10^{-10}$	50	$1 \times 10^{-8}$
	70	$1.024 \times 10^{-7}$	256	$4 \times 10^{-10}$	50	$1 \times 10^{-8}$
	70	$2.048 \times 10^{-7}$	64	$3.2 \times 10^{-9}$	50	$1 \times 10^{-8}$

Tabla 5.1: Características de las señales para realizar los experimentos.

## 5.2. Representación dispersa de señales fotoacústicas

En esta sección se presentan resultados de experimentos que permiten verificar la viabilidad de los métodos presentados en el capítulo 3.

### 5.2.1. Dispersión con diccionario de Gabor

Se utilizó un *Frame* de Gabor para hacer la descomposición de las señales de los conjuntos  $E512$ ,  $E256$ ,  $S512$  y  $S256$ . Es importante verificar si la redundancia del *frame* juega

un papel importante en la dispersión. La redundancia se puede aplicar a la variable temporal, frecuencial o ambas, de forma que se realizaron experimentos con un *frame* con máxima redundancia o resolución fija en alguno de los parámetros, mientras el otro se prueba con diferentes niveles de dispersión. Los resultados del experimento se muestran en la Figura 5.5, donde cada punto representa el valor promedio y las barras de error la desviación estándar.

Dado que la señal de entrada a la arquitectura proviene de un amplificador es indispensable que el diccionario se desempeñe de forma adecuada en presencia de una entrada con ruido, de forma que se le agregó ruido gaussiano aditivo a las señales sintéticas. Para esto se toma ventaja de las propiedades de filtrado de ruido que poseen las bases redundantes. Dado que descartar los coeficientes de menor amplitud ayuda a disminuir los efectos del ruido, nunca se obtiene una representación exacta, de forma que se debe cuantificar el error de representación o reconstrucción. Las Figuras 5.6 y 5.7 muestran el desempeño del *frame* de Gabor ante las señales sintéticas con ruido añadido.

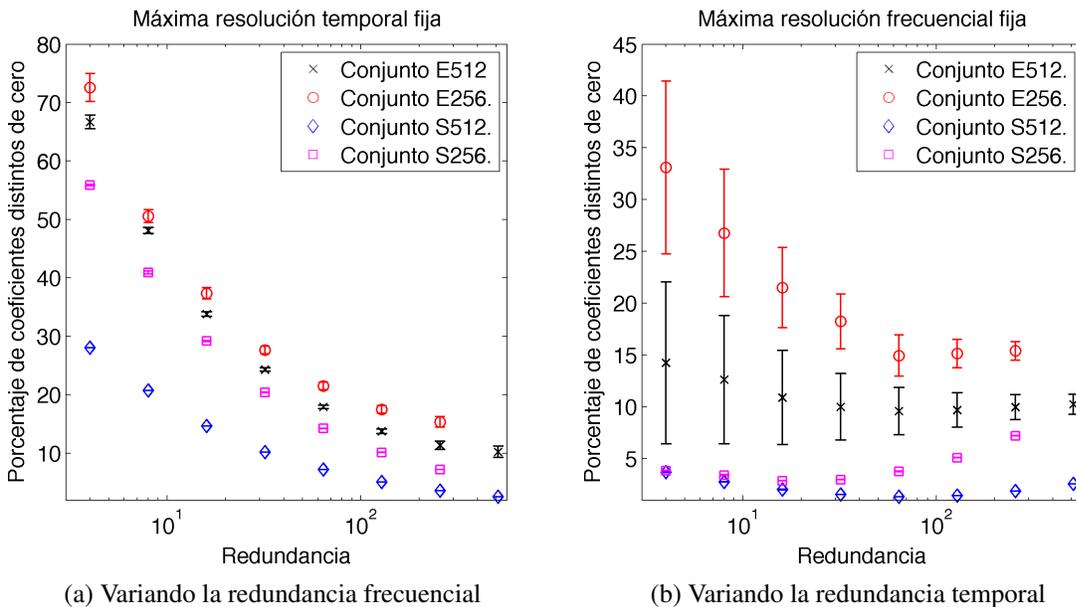


Figura 5.5: Compresión con un diccionario de Gabor para distintos valores de redundancia, se reporta el porcentaje mínimo de coeficientes distintos de cero tal que el error de representación es no mayor a 1 % en el sentido RMSE.

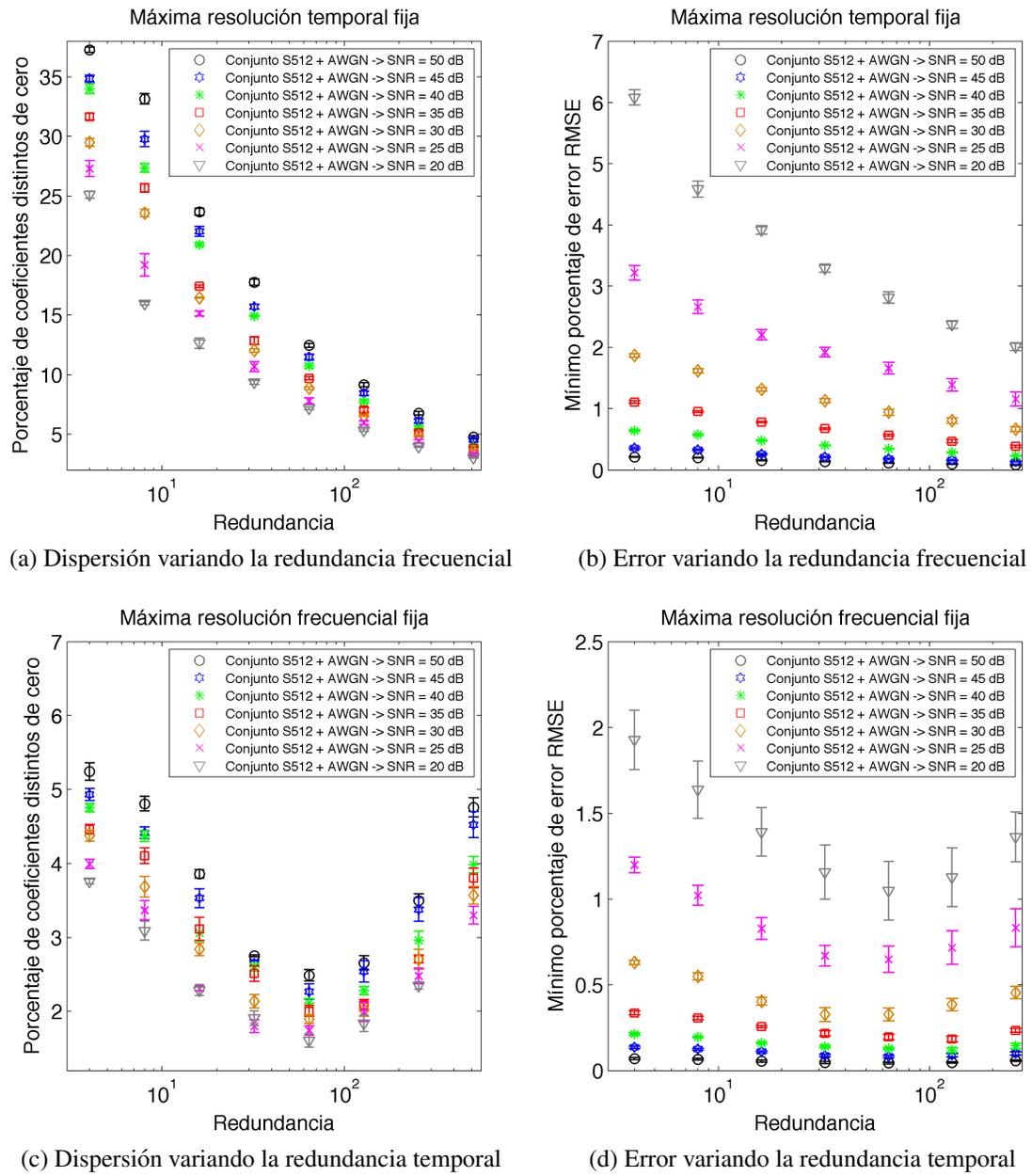


Figura 5.6: Caso de estudio: conjunto S512 con ruido. Se muestra la robustés del *frame* de Gabor para representar señales con distintos niveles de ruido. Se reporta el mínimo error de representación alcanzado y el número de coeficientes diferentes de cero.

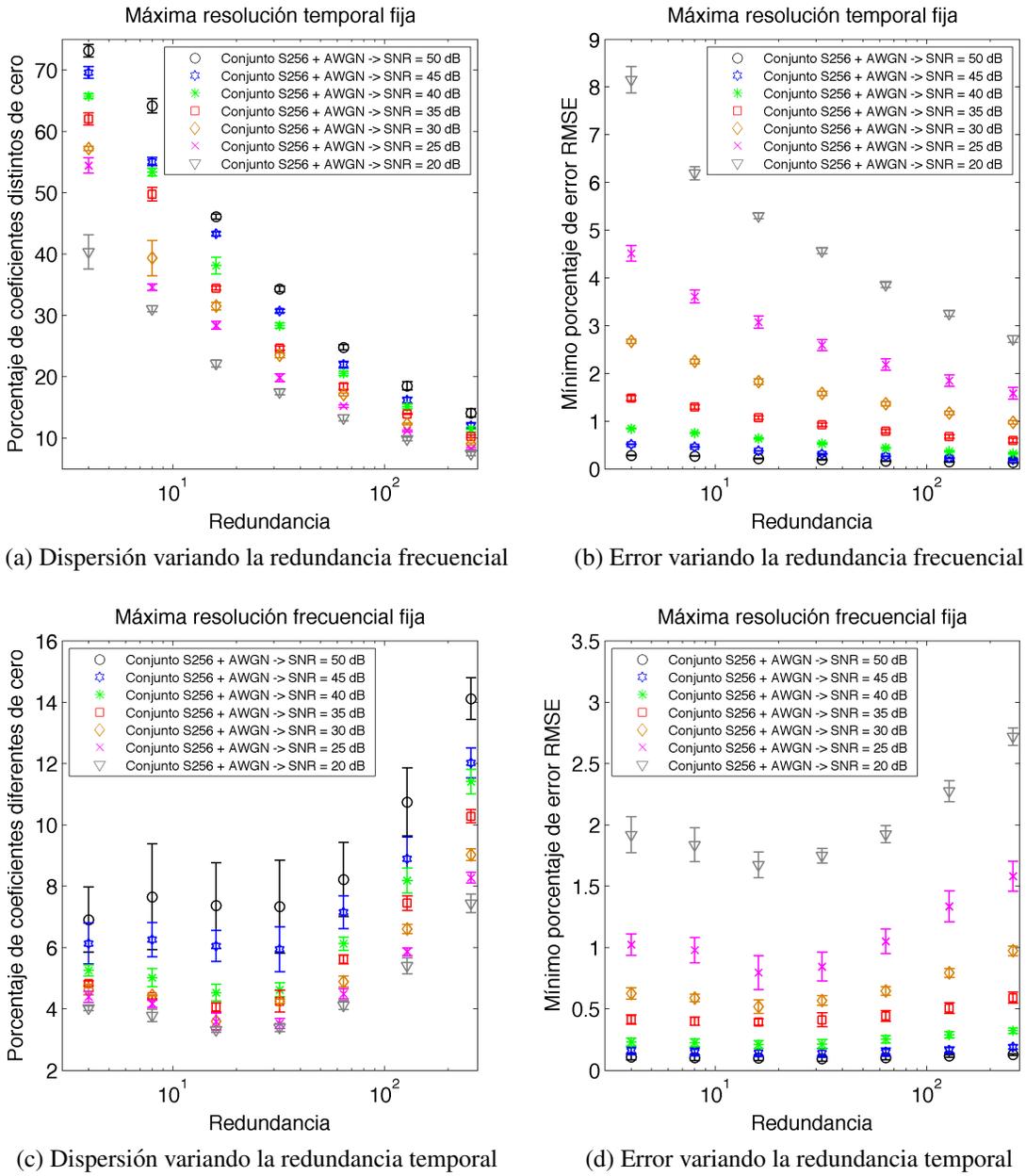


Figura 5.7: Caso de estudio: conjunto S256 con ruido. Se muestra la robustés del *frame* de Gabor para representar señales con distintos niveles de ruido. Se reporta el mínimo error de representación alcanzado y el número de coeficientes diferentes de cero.

### 5.2.2. Dispersión con diccionario aprendido

A continuación se muestran los resultados de haber aprendido un diccionario a partir de un conjunto de señales de entrenamiento. El aprendizaje se realizó con el algoritmo de K-SVD (sección 3.3.1). Se utilizaron los conjuntos *E64*, y *S64* para realizar pruebas, y las señales restantes para el entrenamiento. Un parámetro importante para el algoritmo es la semilla o diccionario inicial, por lo que se realizan pruebas con tres distintos tipos de semilla: Un diccionario de Fourier, Las mismas señales de entrenamiento como diccionario y uno aleatorio.

Los experimentos se realizan para las señales de 64 muestras, debido a que el conjunto de entrenamiento debe tener mas elementos que la dimension de la señales y el conjunto total de señales adquiridas fue de 70, menos las 5 que se excluyeron para las pruebas. De forma que estas pruebas no contemplan diccionarios redundantes.

El resultado de representar las señales de los conjuntos *E64* y *S64* con los diccionarios bajo distintas semillas se muestra en la Figura 5.8.

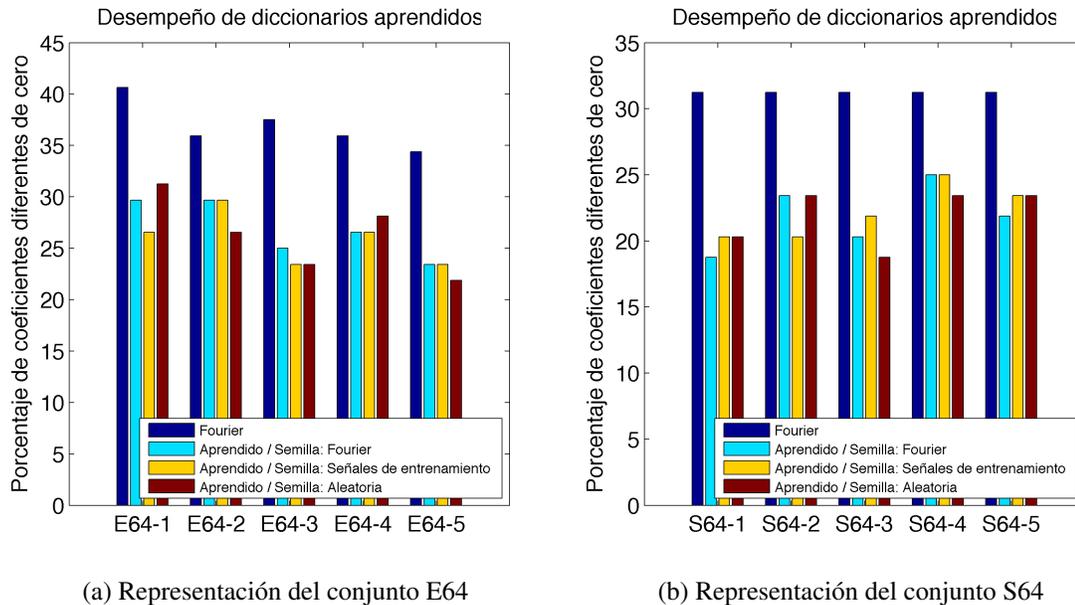
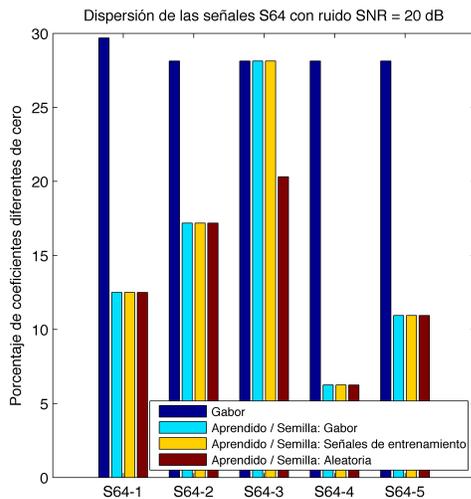


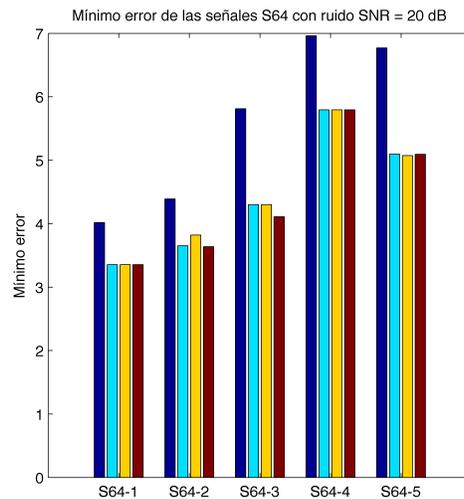
Figura 5.8: Dispersión de las señales de los conjuntos *E64* y *S64* con un diccionario de Fourier y diversos diccionarios aprendidos a partir de diferentes semillas. Se reporta el mínimo número de coeficientes diferentes de cero tal que el error de representación es menor al 1 % en el sentido RMSE.

El diccionario aprendido debe ser robusto al ruido por los mismos motivos que el

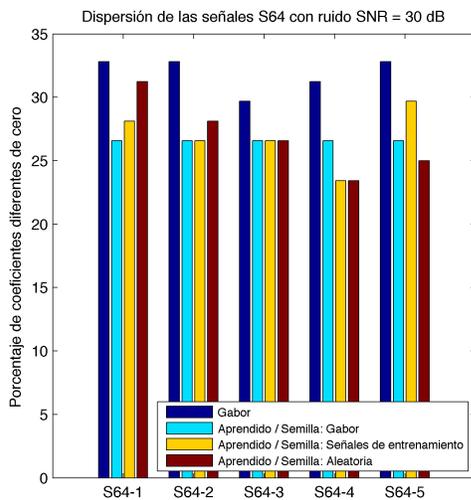
diccionario de Gabor. La Figuras 5.9 muestran el resultado de representar las señales del conjunto  $S64$  con distintos niveles de ruido añadido, bajo los diferentes diccionarios aprendidos.



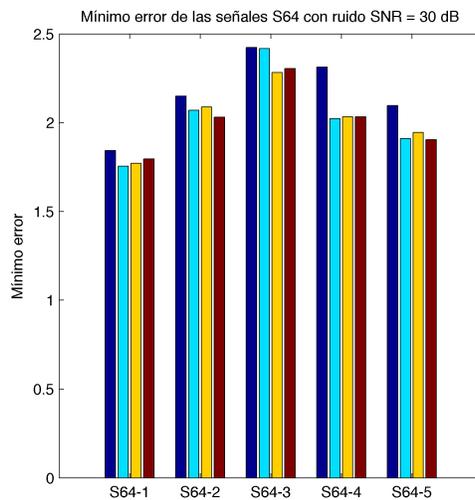
(a) Dispersión con SNR = 20 dB



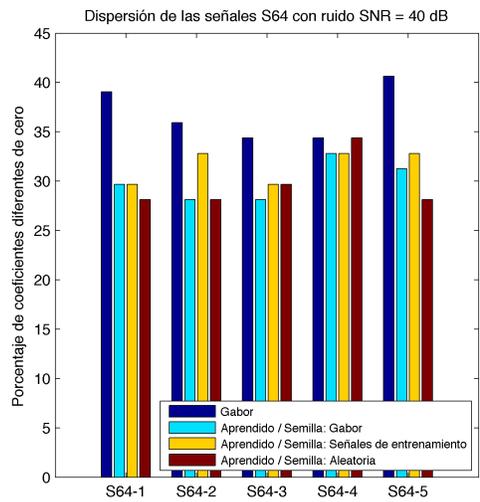
(b) Error con SNR = 20 dB



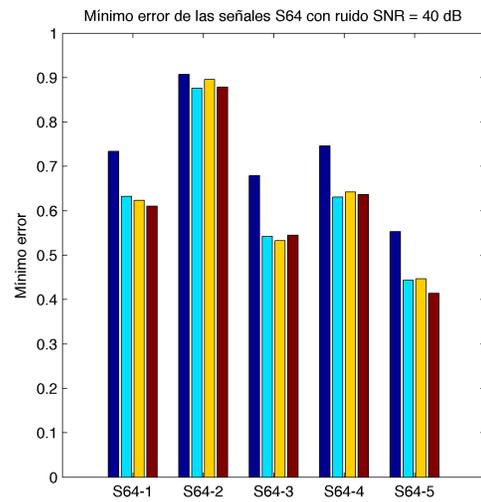
(c) Dispersión con SNR = 30 dB



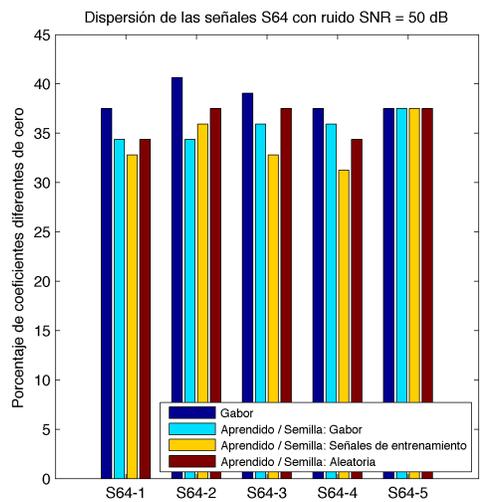
(d) Error con SNR = 30 dB



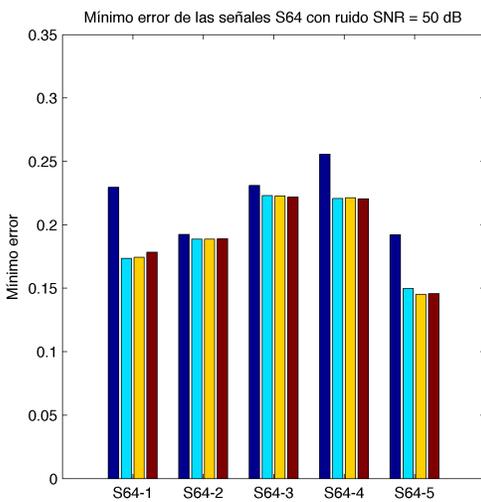
(e) Dispersión con SNR = 40 dB



(f) Error con SNR = 40 dB



(e) Dispersión con SNR = 50 dB



(f) Error con SNR = 50 dB

Figura 5.9: Caso de estudio: conjunto S64 con ruido. Se muestra la robustés de distintos diccionarios para representar señales con diversos niveles de ruido. Se reporta el mínimo error de representación alcanzado y el número de coeficientes diferentes de cero.

### 5.3. Simulación de la arquitectura

Se simuló la arquitectura sobre los conjuntos de señales  $E512$ ,  $E256$ ,  $S512$ ,  $S256$ ,  $E64$  y  $S64$  utilizando Simulink con el *solver ode3*. Se adicionaron los efectos del ruido de un amplificador antes de la entrada y un polo en el integrador a 100 [Hz]. La reconstrucción se realizó con el algoritmo de NESTA y el diccionario se eligió de los resultados de la sección anterior. El *solver* no pudo realizar la simulación sobre los conjuntos  $S32$  y  $E32$  por los tiempos de simulación. Los resultados se presentan en la Figura 5.11.

Se obtuvo un modelo que explica los resultados y relaciona la mínima cantidad de muestras que se deben adquirir en función de la dispersión con que se puede representar la señal a adquirir:

$$\frac{M}{N} \approx 3.137e^{-0.5167\frac{K}{S}} + 0.179, \quad (5.3)$$

donde:  $M$  es la cantidad de muestras a adquirir,  $N$  es el la dimensión de la señal a reconstruir,  $K$  es el número de átomos que posee el diccionario de representación,  $S$  es el número de coeficientes distintos de cero en el diccionario de representación. El modelo ajusta los resultados experimentales de acuerdo a la Figura 5.10

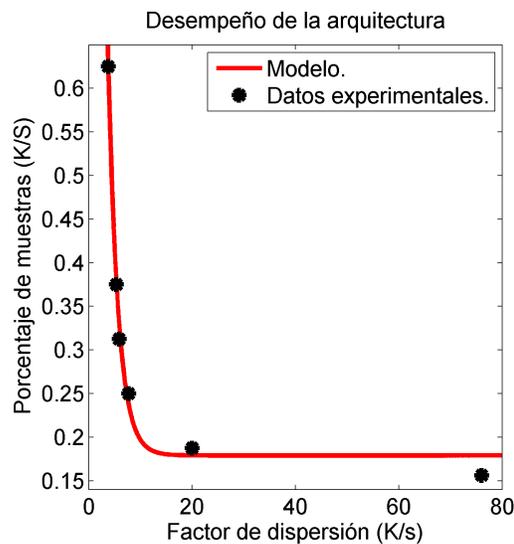
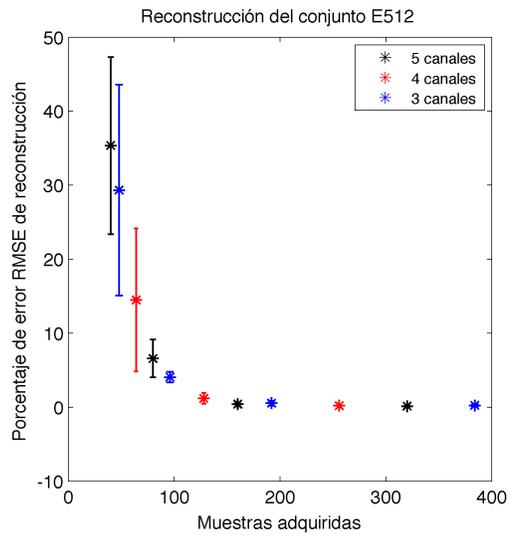
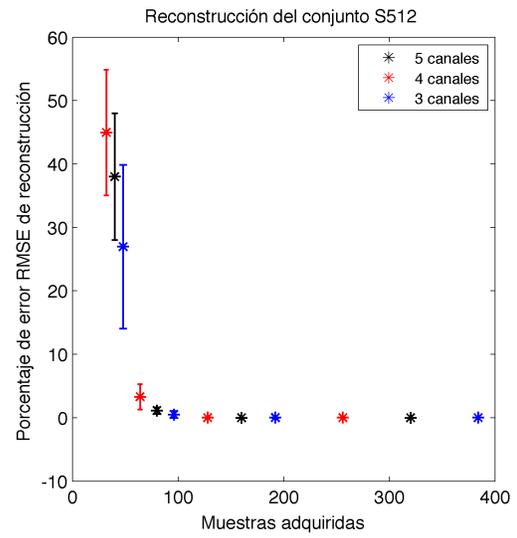


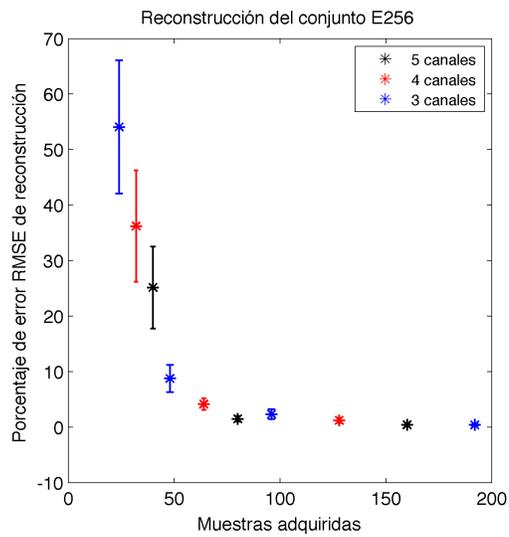
Figura 5.10: Resultados de la simulación. Se muestra la relación entre la dispersión de la señal en algún diccionario y la mínima cantidad de muestras de muestras a adquirir tal que el error RMSE de reconstrucción es no mayor al 1 %.



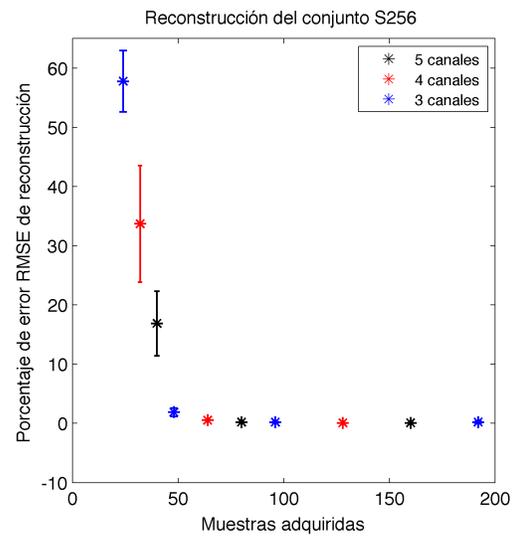
(a) Adquisición del conjunto E512



(b) Adquisición del conjunto S512



(c) Adquisición del conjunto E256



(d) Adquisición del conjunto S256

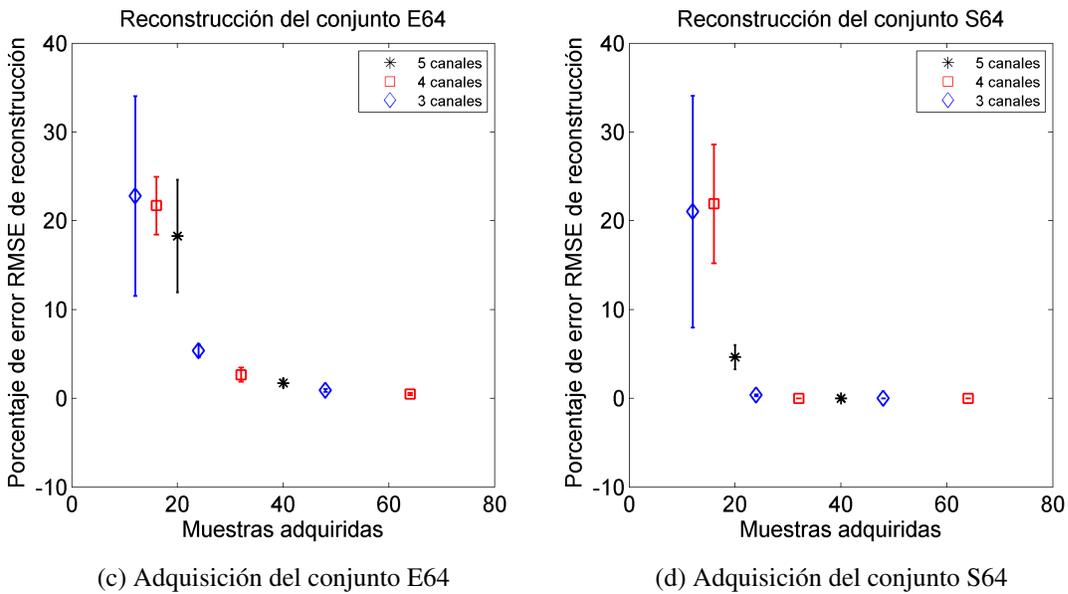


Figura 5.11: Resultados de la simulación. Se muestra el error de reconstrucción para diferentes tasas de submuestreo sobre las señales experimentales y sintéticas con resoluciones de: 512, 256 y 64 muestras.

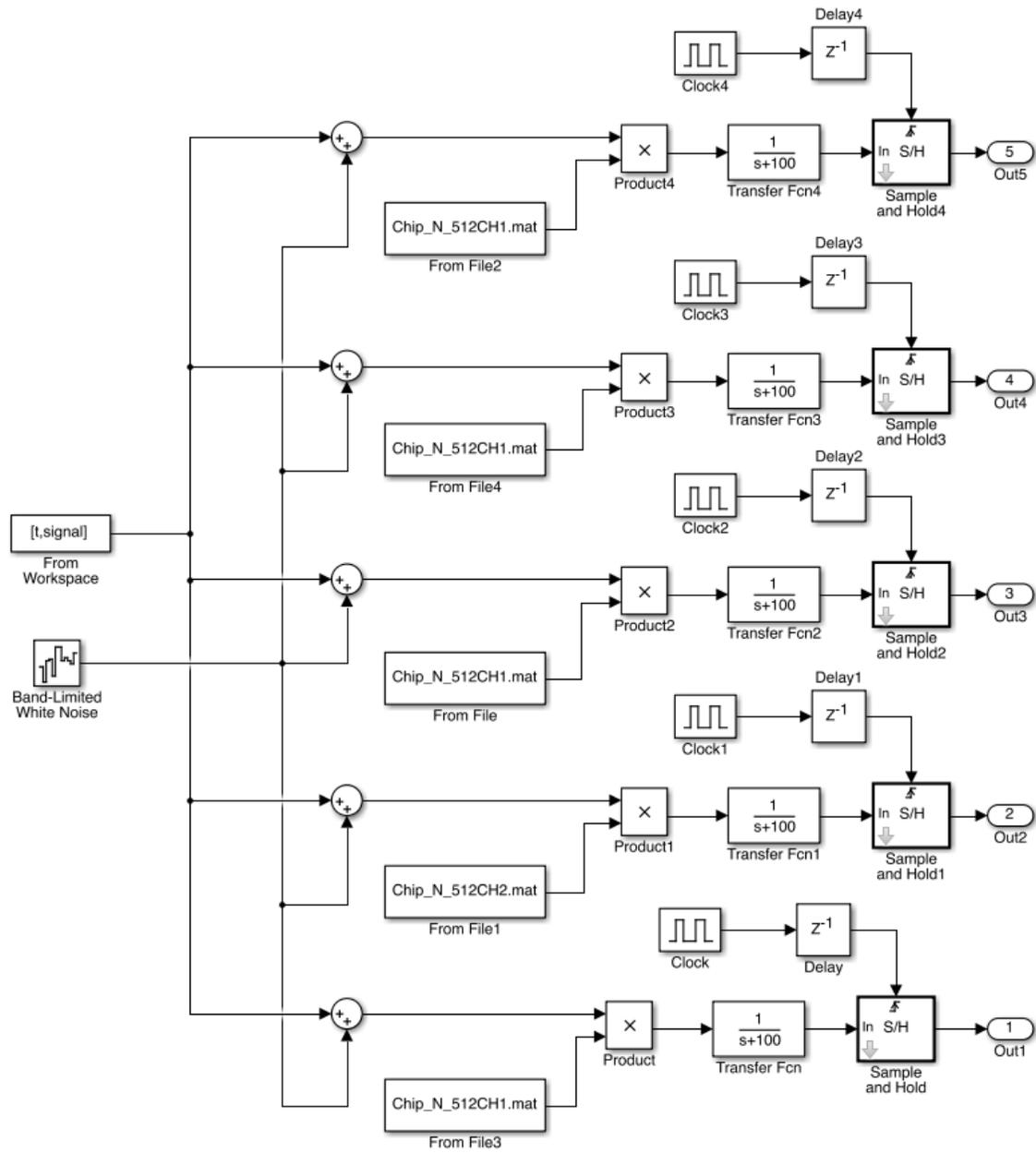


Figura 5.12: Modelo de la arquitectura en Simulink.



---

# Capítulo 6

## Conclusiones y trabajo futuro

### 6.1. Conclusiones

El muestreo comprimido provee de una metodología efectiva a la hora de adquirir señales fotoacústicas para formación de imágenes. El ahorro alcanzado en mediciones es lo suficientemente significativo como para disminuir los costos de diseño y la complejidad de la instrumentación electrónica de un tomógrafo.

El diccionario de Gabor, que por definición es redundante, se encuentra adecuado para la representación dispersa de señales fotoacústicas. Los resultados muestran, para el caso sin ruido, que un diccionario con máxima resolución frecuencial promueve más la dispersión, sin que la redundancia temporal afecte demasiado. A su vez, el diccionario de Gabor es robusto, de forma que su desempeño se degrada gradualmente a mayores niveles de ruido, pero siempre tiende al mismo comportamiento. La metodología de aprendizaje de diccionario a partir del algoritmo de K-SVD también es capaz de mejorar la dispersión inducida por un diccionario de Fourier. Al comparar el desempeño entre diversos diccionarios entrenados a partir de diversas semillas de iniciales no se encuentran diferencias significativas. El costo de utilizar señales de entrenamiento para mejorar el desempeño de los diccionarios, es que el número de señales debe ser igual o mayor al número de átomos y la dimensión de las señales, de lo contrario siempre se obtiene la solución trivial.

A partir de proponer la extensión periódica de la señal fotoacústica, se puede representar a partir de un conjunto finito de sus muestras a tasa de Nyquist. Esto permite un modelo discreto de la señal, paso fundamental para utilizar la teoría del muestreo comprimido. A

su vez, se puede hallar un modelo numérico más realista que los modelos analíticos mediante un símil a la respuesta impulso del sistema en el dominio de la frecuencia. Este modelo es necesario para el algoritmo de reconstrucción, además de que para fines de simulación permite generar mediciones realistas.

Las simulaciones del sistema realizadas en Simulink, junto con la teoría del muestreo comprimido, brindan evidencia de que el demodulador aleatorio cumple con su objetivo y permite la adquisición eficiente de señales fotoacústicas. Dichas simulaciones muestran que se pueden obtener reconstrucciones de las señales sintéticas y experimentales con un error RMSE de aproximadamente 1 % a partir de aproximadamente 70 % y 40 % menos muestras de lo que exige la tasa de Shannon-Nyquist, respectivamente. Las simulaciones muestran un decaimiento exponencial en el número de muestras a adquirir con respecto a la dispersión que induce el diccionario utilizado en la reconstrucción. Además, el incremento de canales de la arquitectura en paralelo disminuye aún más la carga sobre los convertidores analógico digital, permitiendo que la arquitectura aproxime el comportamiento teórico de una matriz aleatoria de Bernoulli.

## 6.2. Trabajo a futuro

El trabajo a futuro inmediato es simular la arquitectura contemplando un mayor número de no-idealidades, en algún software de simulación con modelos más reales que Simulink. Posteriormente, se debe hacer una implementación e integración en el sistema objetivo, que es un tomógrafo fotoacústico.

Respecto al procesamiento de señales, la teoría del muestreo comprimido y el demodulador aleatorio, se deben estudiar matrices de representación alternativas a los *frames* de Gabor que permitan la dispersión de señales fotoacústicas. Sólo se encontraron dos algoritmos para resolver el problema de análisis y que tienen muchas restricciones (NESTA requiere que el diccionario sea un *frame*), de forma que el desarrollo de algoritmos es un problema abierto. La arquitectura tiene como objetivo aproximar su comportamiento al de una matriz aleatoria, de forma que hay posibilidades de realizar cambios con este fin. A su vez, se puede buscar su adaptación a señales que no estén limitadas al modelo dado en la sección 4.2.1.

---

## Bibliografía

- [1] V. Moock, R. Quispe-Siccha, B. Reyes-Ramirez, C. García-Segundo, F. Arámbula-Cosío, y E. Garduño-Ángeles, “Formación de imágenes en tomografía computarizada por métodos fotoacústicos,” *MEXCAS*, 2011.
- [2] B. Reyes-Ramírez, C. García-Segundo, y A. García-Valenzuela, “An examination of polyvinylidene fluoride capacitive sensors as ultrasound transducer for imaging applications,” *Measurement Science and Technology*, vol. 25, no. 5, p. 055109, 2014.
- [3] C. A. Bravo-Miranda, A. González-Vega, y G. Gutiérrez-Juárez, “Influence of the size, geometry and temporal response of the finite piezoelectric sensor on the photoacoustic signal: the case of point-like source,” *Appl. Phys. B*, vol. 115, no. 4, pp. 471–482, 2014.
- [4] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.
- [5] W. Kester, “High speed system applications,” *Analog Devices*, 2006.
- [6] B. Le, T. Rondeau, J. Reed, y C. Bostian, “Analog-to-digital converters,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 22, pp. 69–77, Nov 2005.
- [7] M. Mishali y Y. Eldar, “Sub-nyquist sampling,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 28, pp. 98–124, Nov 2011.
- [8] A. J. Jerri, “The shannon sampling theorem — its various extensions and applications: A tutorial review,” *Proc. IEEE*, vol. 65, no. 11, pp. 1565–1596, 1977.
- [9] P. Butzer, “A survey of the wittaker-shannon sampling theorem and some of its extensions,” *J. Math. Res. Exposition*, vol. 3, no. 1, pp. 185–212, 1983.

- 
- [10] M. Unser, “Sampling - 50 years after shannon,” *Proc. IEEE*, vol. 88, no. 4, pp. 569–587, 2000.
- [11] P. P. Vaidyanathan, “Generalizations of the sampling theorem: Seven decades after nyquist,” *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 48, no. 9, pp. 1094–1109, 2001.
- [12] A. Aldroubi y K. Gröchenig, “Non-uniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces,” *SIAM Rev.*, vol. 43, no. 4, pp. 585–620, 2001.
- [13] Y. Eldar y T. Michaeli, “Beyond bandlimited sampling,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 26, no. 43, pp. 48–68, 2009.
- [14] E. J. Candès, “Compressive sampling,” *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: invited lectures*, vol. 3, pp. 1433–1452, August 2006.
- [15] E. Candes, J. Romberg, y T. Tao, “Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 489–509, Feb 2006.
- [16] D. Donoho, “Compressed sensing,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 1289–1306, April 2006.
- [17] E. Candes y T. Tao, “Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 5406–5425, Dec 2006.
- [18] S. Kirolos, J. Laska, M. Wakin, M. Duarte, D. Baron, T. Ragheb, Y. Massoud, y R. Baraniuk, “Analog-to-information conversion via random demodulation,” in *Design, Applications, Integration and Software, 2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on*, pp. 71–74, Oct 2006.
- [19] J. Laska, S. Kirolos, M. Duarte, T. Ragheb, R. Baraniuk, y Y. Massoud, “Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation,” in *Circuits and Systems, 2007. ISCAS 2007. IEEE International Symposium on*, pp. 1959–1962, May 2007.

- [20] S. Kirolos, T. Ragheb, J. Laska, M. Duarte, Y. Massoud, y R. Baraniuk, “Practical issues in implementing analog-to-information converters,” in *System-on-Chip for Real-Time Applications, The 6th International Workshop on*, pp. 141–146, Dec 2006.
- [21] J. Tropp, J. Laska, M. Duarte, J. Romberg, y R. Baraniuk, “Beyond nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 56, pp. 520–544, Jan 2010.
- [22] S. R. Becker, *Practical Compressed Sensing: modern data acquisition and signal processing*. Tesis doctoral, California Institute of Technology, 2011.
- [23] R. Gray y D. Neuhoff, “Quantization,” *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 44, pp. 2325–2383, Oct 1998.
- [24] M. Computing, *Data Acquisition Handbook, A Reference For DAQ And Analog & Digital Signal Conditioning*, ch. 1, pp. 6–8. Measurement Computing, 2012.
- [25] J. Crols y M. S. J. Steyaert, “Low-if topologies for high-performance analog front ends of fully integrated receivers,” *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, vol. 45, pp. 269–282, March 1998.
- [26] R. G. Vaughan, N. L. Scott, y D. R. White, “The theory of bandpass sampling,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, pp. 1973–1984, September 1991.
- [27] P. Panter, *Modulation, Noise and Spectral Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [28] S. Haykin, *Communication Systems*. New York: Wiley, 1978.
- [29] K. S. Shanmugam, *Digital and Analogue Communications Systems*. New York: Wiley, 1979.
- [30] C. B. Feldman y W. R. Bennett, “Bandwidth and transmission performance,” *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 28, pp. 490–595, 1949.
- [31] “Cortesía de: Signal processing devices sweden ab.” <http://spdevices.com/index.php/interleaving>. Accesado: 2015-06-07.

- [32] M. A. Davenport, “The fundamentals of compressive sensing.” <http://www.brainshark.com/brainshark/brainshark.net/portal/title.aspx?pid=zCdz10BfTRz0z0>. Accesado: 2015-09-06.
- [33] J. Romberg, “Imaging via compressive sampling,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 25, pp. 14–20, March 2008.
- [34] E. Candès, J. Romberg, y T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223, 2006.
- [35] S. Foucart y H. Rauhut, *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*, vol. XVIII of *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhäuser Basel, 2013.
- [36] E. Candes y M. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 25, pp. 21–30, March 2008.
- [37] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, y M. Wakin, “A simple proof of the restricted isometry property for random matrices,” *Constructive Approximation*, vol. 28, no. 3, pp. 253–263, 2008.
- [38] M. Elad, *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed., 2010.
- [39] Z. Průša, P. L. Søndergaard, N. Holighaus, C. Wiesmeyr, y P. Balazs, “The Large Time-Frequency Analysis Toolbox 2.0,” in *Sound, Music, and Motion* (M. Aramaki, O. Derrien, R. Kronland-Martinet, y S. Ystad, eds.), *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 419–442, Springer International Publishing, 2014.
- [40] M. Aharon, M. Elad, y A. Bruckstein, “k-svd: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 54, pp. 4311–4322, Nov 2006.
- [41] W. Skones, B. Oyama, S. Stearns, J. Romberg, y E. Candès, “Analog to information (a-to-i), technical and management proposal,” in *response to DARPA BAA 05-35*, Aug 2005.

- [42] O. Taheri y S. Vorobyov, “Segmented compressed sampling for analog-to-information conversion: Method and performance analysis,” *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 554–572, Feb 2011.
- [43] P. Pankiewicz, T. Arildsen, y T. Larsen, “Sensitivity of the random demodulation framework to filter tolerances,” *Signal Processing Conference, 2011 19th European*, pp. 534–538, Aug 2011.
- [44] S. Smaili y Y. Massoud, “Accurate and efficient modeling of random demodulation based compressive sensing systems with a general filter,” *Circuits and Systems (IS-CAS), 2014 IEEE International Symposium on*, pp. 2519–2522, June 2014.
- [45] D. Karampoulas, L. Dooley, y S. Kouadri, “Integration of a precolouring matrix in the random demodulator model for improved compressive spectrum estimation,” *Signal and Information Processing (GlobalSIP), 2014 IEEE Global Conference on*, pp. 1209–1213, Dec 2014.
- [46] P. H. Bardell, W. H. McAnney, y J. Savir, *Built-in Test for VLSI: Pseudorandom Techniques*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 1987.
- [47] E. J. Candès, Y. C. Eldar, D. Needell, y P. Randall, “Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 31, no. 1, pp. 59–73, 2011.
- [48] M. Elad, R. Rubinstein, y P. Milanfar, “Analysis versus synthesis in signal priors,” *Inverse Problems*, vol. 23, no. 3, pp. 947–968, 2007.
- [49] E. Candès, M. Wakin, y S. Boyd, “Enhancing sparsity by reweighted  $\ell_1$  minimization,” *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 14, no. 5-6, pp. 877–905, 2008.
- [50] P. A. Randall, *Sparse recovery via convex optimization*. Tesis doctoral, California Institute of Technology, May 2009.
- [51] E. J. Candès y J. K. Romberg, “ $\ell_1$  - magic,” tech. rep., California Institute of Technology, 2007.

- [52] J. A. Tropp y S. J. Wright, “Computational methods for sparse solution of linear inverse problems,” tech. rep., California Institute of Technology, 2008.
- [53] S. Becker, J. Bobin, y E. J. Candès, “Nesta: A fast and accurate first-order method for sparse recovery,” *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 4, no. 1, pp. 1–39, 2011.
- [54] M. V. Afonso, J. M. Bioucas-Dias, y M. A. Figueiredo, “An augmented lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems,” *Trans. Img. Proc.*, vol. 20, pp. 681–695, Mar. 2011.