



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
SISTEMAS – OPTIMACIÓN FINANCIERA

BUSCANDO OPORTUNIDADES COMERCIALES A TRAVÉS DE LA COMPARACIÓN DE
DISTRIBUCIONES IMPLÍCITAS EN OPCIONES VS DISTRIBUCIONES HISTÓRICAS DE UN
ACTIVO SUBYACENTE

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

J. JESÚS SALAZAR GUTIÉRREZ

TUTOR

DR. FEDERICO HERNÁNDEZ ÁLVAREZ
FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2015

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dra. Balderas Cañas Patricia
Secretario: Dr. Reyes Zárate Francisco Javier
1er Vocal: Dr. Hernández Álvarez Federico
2do Vocal: Dr. Martínez Miranda Elio Agustín
3er Vocal: M.I. Silva Haro Jorge Luis

Lugar donde se realizó la tesis:

Ciudad Universitaria, México, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Federico Hernández Álvarez

FIRMA

Resumen:

El objetivo de esta tesis es exponer los elementos necesarios para la elaboración y ejecución de una estrategia de inversión basada en el resultado de Breeden y Leitzerberger (1978), el cual señala que a partir de la observación de precios de mercado de opciones tipo europeo, es posible estimar curvas de probabilidad para los valores futuros de su activo subyacente en su fecha de maduración.

Exploramos las vertientes más importantes en la literatura acerca de las llamadas funciones de distribución implícitas, desde sus orígenes hasta su estado más reciente, con base a puntos de vista teóricos y prácticos.

Acompañamos esta exposición revisando los principales conceptos inherentes al mercado de opciones tales como: los de volatilidad implícita o sonrisa de volatilidad. Así también, mostramos y utilizamos algunas estrategias estándar de comercio con opciones tales como: los llamados en inglés *straddles* y *strangles* y damos un perfil general sobre la cobertura de posiciones en opciones.

Con base al marco teórico y práctico expuesto, comentamos la lógica detrás de la construcción de una estrategia de inversión que busca aprovechar las diferencias de percepciones entre un inversionista y el consenso del mercado, en cuanto al valor futuro de un activo.

Se encontró que para que las estrategias de inversión desarrolladas bajo este enfoque puedan tener posibilidades favorables de éxito, se requiere por una parte que los precios de los contratos de las opciones se determinen últimamente por un proceso de formación de precios y por otro lado, no deja de requerirse también que el administrador de la inversión tenga un buen conocimiento de la naturaleza de los activos particulares que maneja. El uso de este enfoque para detectar y ponderar las señales que manda el mercado al inversionista no garantiza ganancias y puede verse como complementario a otros más conocidos.

CONTENIDO

1	Introducción.....	1
2	Funciones de densidad implícitas	4
2.1	Funciones de densidad implícitas de riesgo neutral	4
2.1.1	Derivación	4
2.1.2	Uso de la distribución implícita de riesgo neutral	6
2.1.3	Metodologías para la estimación de la FDRN.....	8
2.2	Funciones de densidad implícitas de “mundo real”	15
2.2.1	Metodología de Fackler y King (1990).....	16
2.3	Distribuciones implícitas y el “problema del peso”	18
3	Elementos para la conformación de la estrategia de inversión.....	20
3.1	Comparación de distribuciones	20
3.2	El precio de una opción y su volatilidad implícita	22
3.3	El precio de ejercicio y la volatilidad implícita.....	23
3.4	La curva de volatilidad y la función de distribución implícita.....	24
3.5	Estrategias basadas en combinación de opciones.....	25
3.6	Las griegas y sus coberturas.....	29
3.7	La lógica detrás de la estrategia de inversión.....	32
4	Implementación.....	35
4.1	Datos.....	35
4.2	Liquidez de contratos de futuros	38
4.3	Procedimiento general	39
4.4	Análisis de un caso	39
4.4.1	Paridad call put	40
4.4.2	Señales en las distribuciones implícitas de riesgo neutral.....	41
4.4.3	Aplicación de la estrategia de inversión.....	44
5	Conclusiones	50

Anexo 1. Formulario	53
Anexo 2. Tablas.....	56
Referencias.....	63

GRAFICOS

Gráfico 2.1. Butterfly spread.....	5
Gráfico 2.2. Función call.....	9
Gráfico 3.1. Función de volatilidad	23
Gráfico 3.2. distribuciones del subyacente al momento t.....	24
Gráfico 3.3. Pago al vencimiento de un straddle largo	25
Gráfico 3.4. Pago al vencimiento de un risk reversal largo.....	26
Gráfico 3.5. Pago al vencimiento de un strangle largo	27
Gráfico 3.6. Pago al vencimiento de un fly largo	28
Gráfico 4.1. Ibex 35	35
Gráfico 4.2. Histograma del log-rendimiento diario vs rendimiento	36
Gráfico 4.3. Ibex35 vs. Futuro ibex35	37
Gráfico 4.4. Volumen diario de contratos call.....	38
Gráfico 4.5. Número de operaciones diarias	38
Gráfico 4.6. Futuro del ibex35 al 18 de junio 2014	40
Gráfico 4.7. Paridad call-put	40
Gráfico 4.8. Componentes de mezcla de lognormales.....	41
Gráfico 4.9. Mezcla de lognormales vs. Lognormal.....	43

TABLAS

Tabla 3.1. Distribución esperada de $s(t)$	21
Tabla 3.2. Comparación valida de distribuciones.....	21
Tabla 3.3 Griegas de Black Scholes cuando un activo paga un rendimiento con tasa q	30

Tabla 3.4. Reglas para explotar diferencias entre las distribuciones implícitas (f) y efectiva (g) ..	33
Tabla 3.5. Estrategias para explotar diferencias entre las distribuciones implícitas y efectiva	34
Tabla 4.1. Estadística Descriptiva del log-rendimiento del IBEX-35 del 15-01-2007 al 17-12-2014	36
Tabla 4.2. Parámetros de las funciones de densidad	42
Tabla 4.3. Straddle largo en el dinero	45
Tabla 4.4. Risk reversal corto.....	45
Tabla 4.5. Butterfly corto	45
Tabla 4.6. Ganancia neta.....	49

1 Introducción

En términos muy generales, se puede decir que existen dos filosofías en cuanto a la gestión de carteras de inversión, una es la llamada administración pasiva y la otra es la administración activa.

Un ejemplo típico de administración pasiva es invertir en un índice como el IPC mexicano y esperar que el rendimiento de su mezcla de activos sea lo suficientemente bueno después de esperar un lapso de tiempo (digamos algunos meses) sin hacer mayores cambios al portafolio. Este enfoque puede ser el más conveniente cuando no se dispone de suficiente tiempo o información para analizar el mercado en que se invierte.

Por el contrario, un administrador activo de bienes de capital busca de manera constante oportunidades de inversión implícitas en la información que hoy está disponible en el mercado para así crear escenarios informados sobre el comportamiento futuro de sus inversiones. Lo que se busca mediante este proceso es obtener rendimientos positivos de manera consistentes a través del tiempo, más sin embargo, está claro que esto es más fácil decirlo que hacerlo, incluso algunos simplemente dirían que es imposible, así lo señaló en su momento Fama (1965). No obstante, se ha recolectado evidencia de la existencia de operadores de inversión que lo han logrado si consideramos por ejemplo, como métrica de evaluación, rendimientos por encima del modelo de la caminata aleatoria¹.

Los estilos de manejo activo de un portafolio más conocidos son el análisis técnico y el análisis fundamental. Más recientemente tenemos a los administradores de portafolio de estilo dinámico², que más que nada se refiere a aquellos operadores que buscan a través del uso de activos tales como acciones, monedas o *commodities* más el uso de bonos “libres de riesgo”, replicar a lo largo del tiempo (de manera dinámica) esquemas de pagos similares a los que ofrecen las opciones financieras³, su principal argumento para hacer esto y no recurrir de manera directa a

¹ Por ejemplo, para el caso de operadores de fondos de inversión en divisas ver Nasypbek y Rehman (2011) y Pojarliev e Levich (2008,2011).

² Todos buscan de manera activa y dinámica minimizar las pérdidas o maximizar las ganancias al buscar “señales” para anticiparse a eventos futuros. Los fundamentales se enfocan mayormente a variables de naturaleza macro; los técnicos llevan implícita la idea de los mercados eficientes en el sentido del contenido de la información en los precios, mas creen que al analizar las series pueden llegar a batir el pronóstico de la caminata aleatoria.

³ Esto es lo que se conoce en inglés como *option replication* y es a su vez uno de los métodos mediante el cual se pueden valorar opciones, basándose entre otras cosas, en la idea de mercados completos y la ley de un solo precio.

los mercados formales u *over-the counter* (OTC) a comprar o vender opciones es que el intentar replicar opciones es más barato. Este argumento es muy debatido pues se sabe que no siempre es así, ya que en principio para hacer una réplica en el tiempo se requiere ajustes estrictamente continuos en la composición de la cartera, lo cual es técnicamente imposible. Por ello, y aun dentro de esta categoría de manejo activo, se considera a aquellos que si hacen un uso relativamente importante de las opciones financieras y que de manera general buscan extraer información de los mercados de opciones en busca de valor agregado (*option-based management*)⁴.

El objetivo de esta tesis es exponer este estilo de gestión en cuando a la elaboración y ejecución de una estrategia de inversión basada en el resultado de Breeden y Leitzerberger (1978), que señala que a partir de la observación de precios en el mercado de opciones de tipo europeo, es posibles estimar las probabilidades de ocurrencia de valores que el activo subyacente tomará en la fecha de maduración de los contratos.

En el capítulo dos exponemos la teoría a partir de la cual se justifica la posibilidad de extraer información sobre el futuro esperado para la cotización de un activo a partir de una muestra de precios de contratos de opciones. Exploramos las vertientes más importantes sobre el estudio de este tema desde sus orígenes hasta su estado más reciente, con base a puntos de vista teóricos y prácticos.

Dado que en este trabajo consideramos extraer información de los precios de opciones europeas, en el capítulo tres revisamos las principales variables que influyen en la determinación de sus cotizaciones y también exponemos conceptos inherentes al mercado de opciones tales como los de volatilidad implícita o sonrisa de volatilidad. En este mismo capítulo mostramos algunas estrategias básicas de comercio con opciones tales como los llamados en inglés *straddles* y *strangles* y damos un perfil general sobre la cobertura de posiciones en opciones. Por último, y con base a lo desarrollado en éste y el anterior capítulo, comentamos la lógica detrás de la construcción de una estrategia de inversión que busca explotar y hacer explícita la diferencia de percepciones entre un inversionista y el consenso del mercado.

En el capítulo cuatro, desarrollamos un ejemplo de cómo llevar a la práctica esta estrategia comercial con datos reales, considerando conceptos tales como liquidez de mercado; así también,

⁴ Una exposición más amplia acerca de enfoques de manejo de inversiones de activos financieros puede consultarse en Record(2010) y Xin(2011).

se muestran los resultados de la misma después de tomar posiciones cubiertas y descubiertas. En el capítulo cinco presentamos las conclusiones.

2 Funciones de densidad implícitas

En esta sección exponemos diversas vertientes relacionadas con la extracción de funciones de probabilidad esperadas para el valor de un activo subyacente con base a los precios observados de sus opciones europeas.⁵

2.1 Funciones de densidad implícitas de riesgo neutral

2.1.1 Derivación

Un reclamo contingente (*en inglés, state contingent claim*), S_T , expresa derechos conseguidos en función del estado que tome la economía en el momento T. Si estos derechos tuvieran precio, esperaríamos que expresaran las posibilidades que asigna el inversionista a la ocurrencia de cada posible estado. Un ejemplo importante de reclamo contingente es el *reclamo elemental*, también llamado activo de Arrow-Debreu, al cual podemos ver como un derivado que paga 1 unidad monetaria en la fecha T si su subyacente toma un valor particular o estado S_T , y paga 0 en cualquier otro estado. Los precios de los activos Arrow-Debreu son conocidos como precios de estado (conocidos en inglés como *state prices*).

Por otra parte, de manera intuitiva podemos notar que cuando tenemos dos precios diferentes para opciones *call* con precios de ejercicio contiguos, ambas con igual fecha de maduración, su diferencia reflejaría el valor que le asignan los inversionistas a la posibilidad de ejercer la opción cuando el precio del subyacente cae entre estos dos precios de ejercicio, esto por supuesto dependerá de la distribución de probabilidad que siga el subyacente. De esta forma la relación entre precios de opciones *call* y sus respectivos precios de ejercicio dan señales sobre la forma en como un inversor neutral al riesgo asignaría posibilidad de ocurrencia a cada estado S_T (gráfico 2.2).

Si bien los activos de Arrow-Debreu no se comercian en la realidad, según Breeden y Laiterberger (1978) es posible replicar uno para un estado cualquiera en el momento T con un precio de ejercicio X , esto se logra mediante una combinación de cuatro opciones europeas *call*: se

⁵ La principal aportación para el desarrollo de esta idea fue el artículo de Ross(1976) quien demostró la forma en cómo se relacionan los precios de las opciones con los precios de estado. Una buena exposición sobre el tema de distribuciones implícitas de riesgo neutral lo podemos encontrar en Carsten (2004) y Bahra (1997).

venden dos opciones *call* con precio de ejercicio $X = S_T$ y se compran dos opciones *call*, una con precio $S_T + \Delta S_T$ y otra con precio $S_T - \Delta S_T$, esto es lo que se conoce en inglés como un *butterfly spread* centrado en el estado S_T , por lo que el precio de estado es el costo de la estrategia (gráfico 2.1).

Utilizando la notación $c(X, \tau)$ para un *call* con precio de ejercicio X y τ el tiempo restante para su maduración

$$\text{costo} = \{c(S_T + \Delta S_T, \tau) - c(S_T, \tau) + c(S_T - \Delta S_T, \tau) - c(S_T, \tau)\}_{X=S_T} \quad (\text{Ec.2.1})$$

Reordenando y ajustando para que el costo sea igual a uno tenemos

$$P(S_T, \tau; \Delta S_T) = \frac{[c(S_T + \Delta S_T, \tau) - c(S_T, \tau)] - [c(S_T, \tau) - c(S_T - \Delta S_T, \tau)]}{\Delta S_T} \Big|_{X=S_T} = 1 \quad (\text{Ec.2.2})$$

Donde $P(S_T, \tau; \Delta S_T)$ es el precio de un reclamo elemental en el momento T .

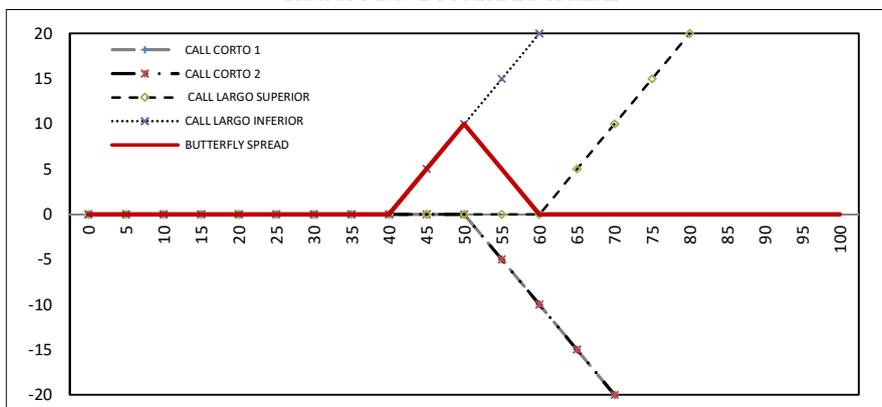
Dividiendo nuevamente el precio entre el tamaño de salto entre precios de ejercicio

$$\frac{P(S_T, \tau; \Delta S_T)}{\Delta S_T} = \frac{[c(S_T + \Delta S_T, \tau) - c(S_T, \tau)] - [c(S_T, \tau) - c(S_T - \Delta S_T, \tau)]}{\Delta S_T^2} \quad (\text{Ec.2.3})$$

En el límite cuando la diferencia entre los precios de ejercicio tiende a cero tenemos

$$\lim_{\Delta S_T \rightarrow 0} \frac{P(S_T, \tau; \Delta S_T)}{\Delta S_T} = \frac{\partial^2 c(X, \tau)}{\partial X^2} \Big|_{X=S_T} \quad (\text{Ec.2.4})$$

GRÁFICO 2.1. BUTTERFLY SPREAD



Fuente: Elaboración propia.

Podemos ver que si hacemos este mismo proceso de valuación para todo posible estado del subyacente cuando $\Delta S_T \rightarrow 0$ obtendríamos la función completa de valuación de estados.

Por otra parte, si tomamos en cuenta que el precio de un activo Arrow-Debreu $P(S_T, \tau; \Delta S_T)$ también se puede expresar como el pago en valor presente de una unidad monetaria multiplicada por su probabilidad neutral al riesgo cuando $X = S_T$, podemos generalizar para todo posible precio de ejercicio X la Ec.2.4 con lo que obtendremos la Ec.2.5.

$$e^{-r\tau} f(S_T) = \frac{\partial^2 c(X, \tau)}{\partial X^2} \quad (\text{Ec.2.5})$$

Donde r es la tasa anualizada libre de riesgo, $\tau = T - t$, y $f(S_T)$ es la **función de densidad de riesgo neutral (FDRN)**.

La FDRN refleja en un momento particular t , la probabilidad en un mundo de riesgo neutral de que el activo subyacente tome un estado particular S a la fecha de maduración de una opción europea.

Más comúnmente a esta relación entre densidad esperada del precio del subyacente y el precio de sus opciones se le encuentra en la literatura económica con el nombre de **funciones de distribución implícita de riesgo neutral**, ya que esta distribución está implícita en la dispersión de precios de ejercicio de los contratos de opciones, y a su vez la valuación de cada contrato se basa en el supuesto de neutralidad al riesgo.

2.1.2 Uso de la distribución implícita de riesgo neutral

Se ha podido ver el reconocimiento de estas funciones de densidad esperada como fuente de información a través de su uso sistemático desde la década de los 90's por parte de varias autoridades monetarias del mundo, como por ejemplo, el Banco Central de Inglaterra o el Banco Internacional de Pagos (BIS). Han utilizado como variable de estudio a las expectativas sobre el comportamiento de las tasas de interés, tipos de cambio o inflación, implícitas en los precios de sus respectivos derivados⁶. En general el interés de estas instituciones ha sido la estimación de los dos principales momentos centrales de la distribución, su media y su varianza- y con ella, la volatilidad esperada por el mercado.

⁶ Ver por ejemplo Smith T. (2012) o Clews R. *et al.* (2000).

El uso de distribuciones de probabilidad implícitas de riesgo neutral, para propósitos de pronóstico, resulta natural ya que por definición, al basarse en precios de contratos de opciones, llevan implícitas apuestas sobre el valor futuro del subyacente, y por tanto resultan ser muy buenos indicadores del sentir del mercado sobre el futuro, así entonces la información que pueden dar podría ser más rica y completa que la usual recolección de opiniones de algunos analistas.

Desde el punto de vista de un inversionista, y dada la diferencia de objetivos con respecto a instituciones oficiales, resulta también de gran interés la estimación de momentos estadísticos mayores de estas distribuciones, como son el sesgo y la curtosis, es decir, la forma misma de las colas de la distribución ya que es aquí donde pueden presentarse valiosas oportunidades comerciales al tratarse de eventos más raros.

Así pues, el proceso que seguiría un inversionista bajo el enfoque señalado y mismo que pretendemos examinar en este trabajo, se basa en la concreción de los siguientes objetivos:

- a) Extraer e interpretar las expectativas sobre el comportamiento de un cierto activo de interés, contenidas en los precios de sus contratos de opciones, por medio de la estimación de funciones de densidad de riesgo neutral.
- b) Ver si es posible explotar esta información mediante la aplicación y evaluación de estrategias de inversión basadas en divergencias entre los momentos estadísticos de la distribución implícita y la distribución efectiva al momento de maduración.

Con lo anterior queremos decir que un inversionista buscara contrastar la posibilidad de ocurrencia de valores que espera el mercado frente a otra posible distribución de resultados que el considere como más o menos factible de ocurrir. Un caso podría darse por ejemplo cuando un inversionista que especula sobre el tipo de cambio, al ver un proceso de apreciación que se ha dado durante un periodo relativamente largo, considera que este debe regresar a los valores promedios que tenía antes, entonces el consideraría que la forma verdadera de la distribución de la cotización de la moneda debiera mostrar un sesgo hacia la baja, pero por el contrario, el mercado pudiera dar señales en su distribución implícita de que la moneda seguirá apreciándose o tomará un valor estable en un nuevo nivel a través de una distribución más simétrica u orientada hacia la derecha. En consecuencia, el inversionista procuraría invertir en contra del mercado.

2.1.3 Metodologías para la estimación de la FDRN

En la actualidad hay un número relativamente alto de metodologías para derivar la FDRN⁷, sin embargo se pueden clasificar a groso modo en dos categorías: métodos paramétricos y métodos no paramétricos. El objetivo de todos ellos es encontrar la manera más conveniente de ajustar una curva a los precios observados de las opciones. El desarrollo de ambos tipos de metodologías parte de las siguientes expresiones para el precio de un *call* y de un *put*

$$c(\tau, x) = e^{-rT} \int_X^{\infty} (S_T - X) f(S_T) dS_T \quad (\text{Ec.2.6.a})$$

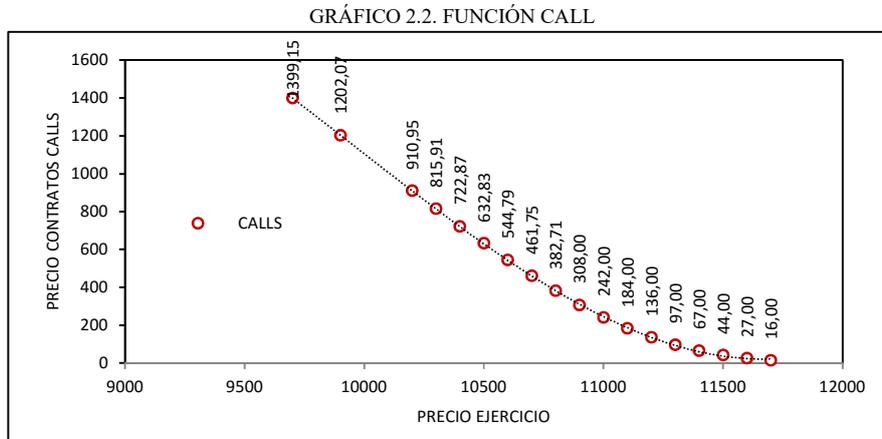
$$p(\tau, x) = e^{-rT} \int_{-\infty}^X (X - S_T) f(S_T) dS_T \quad (\text{Ec.2.6.b})$$

Los métodos paramétricos tratan de asignar cierta estructura o distribución como punto de partida, por lo que suelen requerir el ajuste de pocos parámetros, por ejemplo, una de las estructuras más comúnmente utilizada es la mezcla de distribuciones lognormales, lo cual requiere calcular la media y la varianza de cada distribución y los parámetros de ponderación para cada distribución, este tipo de métodos tiene en su contra que puede sufrir de “jorobas” y ser poco robusto a perturbaciones, Bliss y Panigirtzoglou (2002).

Por el contrario los métodos no paramétricos podrían requerir la estimación de decenas o cientos de parámetros, además de que debe asegurarse entre otras cosas, que estas distribuciones siempre sean positiva y con masa igual a uno. Al mismo tiempo, tienen la ventaja de requerir en general una menor cantidad de precios de opciones para obtener resultados relativamente buenos.

El punto de partida para la estimación de las FDRN por parte de la mayoría de metodologías es construir una curva de precios de opciones *call* en función de los precios de ejercicio $C(X, \tau)$, que de aquí en adelante llamaremos **función call** - Los datos para lograr calcular de forma explícita esta función son como los mostrados en el gráfico 2.2.

⁷ Micu (2004) hace una comparativa de seis métodos diferentes para extraer las FDRN.



Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente se recurre a la propiedad presentada por Breeden y Litzenberg (1978) que señala que la FDRN se puede obtener al derivar dos veces la función de *calls* europeas con respecto al strike X - (Ec.2.5), para posteriormente hacer el escalamiento necesario para obtener una distribución de probabilidad válida.

En los siguientes apartados presentaremos dos de las metodologías más usadas para el cálculo de las FDRN: una paramétrica que será la mezcla de dos distribuciones lognormales expuesto por Bahara (1996 y 1997) y otra no paramétrica propuesta por Bliss y Panigirtzoglou (2000,2002). Así también, presentamos una tercera metodología propuesta por Figlewski (2008) que resulta particularmente interesante, pues se enfoca principalmente a modelar las colas de la distribución.

2.1.3.1 Modelo paramétrico de Bahara (1997)

El método expuesto por Bahara (1996 y 1997) considera que la distribución del precio de un activo subyacente para la fecha de maduración T , $f(S_T)$, se puede modelar a través de la mezcla de dos distribuciones lognormales, ya que da una gran flexibilidad a la estimación. Parte entonces de forma predeterminada de la siguiente expresión

$$f(S_T) = \theta L(S_t|\alpha_1, \beta_1) + (1 - \theta)L(S_t|\alpha_2, \beta_2) \tag{Ec.2.7}$$

$$\alpha_i = \ln S_t + \left(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) \quad \beta_i = \sigma_i\sqrt{T}$$

Donde $\theta_i \in [0,1]$ es el ponderador de las funciones y $\sum \theta_i = 1$, $L(S_t|\alpha_i, \beta_i)$ es una función de densidad log-normal, α_i es la media de la distribución L_i y β_i su desviación estándar, μ_i es la media del log-rendimiento de S_t y σ_i su desviación estándar para cada L_i , τ es el tiempo por transcurrir para llegar a la fecha para la cual se estima la distribución de probabilidad (T).

Así, la metodología consiste en encontrar los parámetros α_i, β_i y θ , que mejor se ajusten a los precios observados de las opciones del subyacente S_t . En particular se modela el precio de las opciones de la siguiente manera

$$C(X, \tau) = e^{-r\tau} \left\{ \theta \left[e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} N(d_1) - XN(d_2) \right] + (1 - \theta) \left[e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} N(d_3) - XN(d_4) \right] \right\} \quad (Ec.2.8.a)$$

$$P(X, \tau) = e^{-r\tau} \left\{ \theta \left[XN(-d_2) - e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} N(-d_1) \right] + (1 - \theta) \left[XN(-d_4) - e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} N(-d_3) \right] \right\} \quad (Ec.2.8.2)$$

$$d_1 = \frac{-\ln(X) + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1} ; \quad d_2 = d_1 - \beta_1 ; \quad d_3 = \frac{-\ln(X) + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2} ; \quad d_4 = d_3 - \beta_2$$

Entonces, se tiene una forma de valuar las opciones en función de los parámetros requeridos. A continuación se procede a minimizar las diferencias entre los precios estimados con las ecuaciones y los observados en el mercado. Esto se realiza respecto a cada opción con precio de ejercicio X. Adicionalmente, si se desea que la media de las distribuciones de probabilidad coincida con la implícita en las cotizaciones a futuro, se incluye un término que permite minimizar la diferencia al cuadrado entre la media de la distribución y la de los precios del futuro o *forward*, con lo que la distribución de probabilidad obtenida es congruente en términos de valuación neutral al riesgo. Con base en lo anterior, la función a minimizar por máxima verosimilitud toma la siguiente forma:

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta} \sum_{j=1}^n \left\{ [C(X_j, \tau) - \hat{C}_j]^2 + [P(X_j, \tau) - \hat{P}_j]^2 \right\} + \left[\theta e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - \theta) e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} - F \right]^2 \quad (Ec.2.9)$$

donde \hat{C}_j y \hat{P}_j son los precios de las opciones *put* y *call* observados en el mercado y F es el valor del futuro o *forward* del precio del activo subyacente.

Esta metodología ofrecerá mejores resultados en la medida en que se cuente con la mayor cantidad posible de precios de opciones con sus respectivos precios de ejercicio ya que si como en este caso necesitamos estimar cinco parámetros necesitaremos al menos cinco precios de ejercicio.

2.1.3.2 Métodos no-paramétricos basados en la interpolación de la sonrisa de volatilidad ⁸

Para obtener la FDRN este tipo de métodos buscan estimar de manera empírica la función *call* (gráfico 2.2). Si bien pareciera sencillo hacer una interpolación sobre la serie de puntos como los que muestra la gráfica, y tomar la doble derivada de esta interpolación, varios autores han encontrado que hacer esto puede llevar a resultados altamente inestables. Por esta razón Shimko (1993) interpola una función cuadrática de volatilidades implícitas vs precios de ejercicio (grafico 3.1) en vez de hacerlo directamente sobre los precios de los contratos. Una vez que tiene una función explícita de la sonrisa de volatilidad usa las fórmulas de valuación de opciones del modelo de Black-Scholes para recuperar la función *call*. Malz (1997) aplicó este mismo procedimiento al análisis del mercado de opciones de divisas haciendo algunas modificaciones debido a la forma en como se hace la publican de cotizaciones en este mercado (se publican las volatilidades implícitas en vez de los precios de las opciones), en particular, Malz interpola la curva de volatilidades implícitas en función de las deltas⁹ (el cambio en precio de una opción dado el cambio en el precio del subyacente), para después regresar al espacio de precios del *call* (usando el modelo de valuación de Garman-Kohlhagen(1983)) y a los respectivos precios de ejercicio, solo después de este proceso es que puede desarrollar la (Ec.2.5). Una de las metodologías más recientes que utiliza este enfoque es el propuesto por Bliss y Panigirtzoglou (2002).

2.1.3.2.1 Modelo de Bliss y Panigirtzoglou (2002)

Esta es una de las técnicas que se ha adoptado como estándar para la estimación de las FDRN por varios bancos centrales. Esta metodología comienza resolviendo numéricamente la volatilidad implícita de cada contrato de opciones en el momento t usando la fórmula de Black-Scholes. Posteriormente obtiene delta dada por

$$\delta(S, K, \tau) = \frac{\partial C(S, K, \tau)}{\partial S} \quad (Ec.2.10)$$

El tercer paso consiste al igual que en Malz (1997) en interpolar en el espacio de volatilidades implícitas y deltas en vez de hacerlo en el espacio precio-strike. La interpolación se ejecuta usando un suavamiento vía Splines cúbicos como planteó en su momento Campa (1997)

⁸ Ver secciones 3.2, 3.3 y 3.4 donde se exponen los conceptos de volatilidad implícita y sonrisa de volatilidad.

⁹ Ver sección 3.6

$$\lambda \sum_{i=1}^n \omega_i (\sigma_i - g(\delta_i))^2 + (1 - \lambda) \int g(t)^2 dt \quad (\text{Ec.2.11})$$

donde λ es el parámetro de suavizado, igual a 0.99. Para el resto de los cálculos se toma como insumo a las griegas¹⁰ del modelo Black-Scholes, delta (δ) y la vega (v). La δ se representa en el eje de abscisas del Spline, en el eje de ordenadas va la volatilidad implícita σ también extraída con base al modelo Black-Scholes y los pesos están dados por $\omega_i = \frac{v_i^2}{\text{media}(v_i^2)}$. El valor de vega es casi cero para valores muy por fuera y muy dentro del dinero¹¹ y aumenta conforme nos acercamos a la zona de en el dinero, alcanza sus máximo en el dinero, por tanto se pone más peso en la zona central de la distribución, pero al mismo tiempo se le toma poca atención a las colas de la distribución, debido también a la falta de precios extremos se extrapolan con alguna función polinómica, generalmente cuadrática. Así se cubre todo el rango de delta $[0,1]$.

En el último paso, la sonrisa de volatilidad obtenida se transforma de nuevo al espacio precio del *call* vs precio de ejercicio. Esto se hace evaluando la sonrisa entre 1000 o 3000 puntos deltas igualmente espaciados entre cero y uno, estos puntos se transformaran en los precios de ejercicio usando de forma inversa $\delta(P, K, \tau)$. La volatilidad implícita la transformamos nuevamente en precios de *calls* usando el modelo de valuación de Black-Scholes y por último usamos el resultado de B.L. (1978) para derivar la FDRN.

2.1.3.3 Modelo de Figlewski (2009)

Existen varios estudios comparativos de metodologías y prácticamente todos coinciden en que existe un gran parecido entre las FDRN en la zona central de la distribución, mientras que las mayores discrepancias siempre se encuentran en las colas, esto es porque prácticamente no se presenta actividad en precios extremos¹². Dado que necesariamente se deben obtener valores para construir toda la curva de densidad, la mayoría de los autores extrapolan los valores extremos ya sea con segmentos pertenecientes a curvas lognormales, secciones cuadráticas o lineales. A este

¹⁰ Ver sección 3.6

¹¹ Típicamente el término anglosajón *moneyness* para el caso de opciones se refiere al sentido de la diferencia que existe entre el precio de ejercicio de la opción y el valor que tenga su activo subyacente en un momento particular a lo largo de la vida de la opción. Se dice que una opción está dentro del dinero (itm) cuando resulta rentable ejercerla, la opción tiene un valor intrínseco positivo. Si una opción está en el dinero (atm) implica que el precio de ejercicio de la opción es igual o está muy cerca al valor actual del subyacente. Por último si la opción está fuera del dinero (otm), quiere decir que la opción carece de valor intrínseco.

¹² Ver por ejemplo Micu M. (2004)

respecto Figlewski (2009) diseñó una metodología para evitar el exceso de discreción en esta elección, ya que si por ejemplo, se busca utilizar la FDRN para fines de administración de riesgo, simplemente resultaría en un ejercicio arbitrario. Para este propósito Figlewski recurrió a la teoría de valores extremos, en específico, utiliza la función generalizada de valores extremos para modelar los precios de las opciones muy alejadas de la zona en el dinero. El teorema de Fisher-Tippett dice que aún bajo condiciones débiles de regularidad, los valores más grandes de una muestra provenientes de una distribución desconocida convergerán en distribución a una de tres posibles tipos de distribuciones, las cuales son instancias de la distribución generalizada de valores extremos (DGVE) dada por

$$F(z) = \exp \left[- (1 + \xi z)^{-\frac{1}{\xi}} \right] \quad (\text{Ec.2.12.a})$$

$$F(z) = \exp \left[- \left(1 + \xi \left(\frac{S_T - \mu}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{\xi}} \right) \right] \quad (\text{Ec.2.13.b})$$

Donde μ es el parámetro de localización y σ es un parámetro de escala, ξ es el parámetro de la forma. Si $\xi > 0$ toma la distribución de Frechet con colas más densas que la distribución normal; si $\xi = 0$ se transforma en la distribución de Gumbel con colas como las de la normal; si $\xi < 0$ es la distribución de Weibull con colas finitas. Al tener tres parámetros para estimar tendremos que imponer tres condiciones para estimar la forma de la cola.

Siguiendo la notación de Figlewski, se denota a f_{VED} y f_{VEI} como las funciones de densidad de valores extremos que se ajustan a la FDRN por la derecha y por la izquierda respectivamente. Consideraremos al precio de ejercicio $X(\alpha)$ correspondiente al cuantil α de la función de distribución acumulada con base a los precios disponibles en el mercado, es decir, $F(X(\alpha)) = \alpha$. Elegimos $\alpha_{D,0}$ como el punto de partida de la cola estimada por DGVE y después otro más extremo $\alpha_{D,1}$ de tal manera que la forma que tome la cola coincida con la parte ya estimada de la DRN. La elección de estos puntos es flexible, sujetos a que la FDRN estimada pase por ambos. Si consideramos que tenemos N precios de ejercicios ordenados de menor a mayor, requeriríamos que $X_2 \leq X(\alpha_{I,1})$ y $X(\alpha_{D,1}) \leq X_{N-1}$. Las condiciones necesarias para hacer el ajuste para la cola derecha son: que el valor de la función acumulada de valor extremo debe ser la misma que la correspondiente a la FDRN; que tanto la función de densidad de valor extremo como la de FDRN tengan la misma forma en los dos puntos que en la cola tendrán en común

$$F_{VED} \left(X(\alpha_{D,0}) \right) = \alpha_{D,0} \quad (\text{Ec.2.14})$$

$$f_{VED} \left(X(\alpha_{D,0}) \right) = q \left(X(\alpha_{D,0}) \right)$$

$$f_{VED} \left(X(\alpha_{D,1}) \right) = q \left(X(\alpha_{D,1}) \right)$$

Dado que la DGVE se refiere a la distribución del máximo de una muestra, para el caso de la estimación de la cola izquierda, convertimos los valores a negativo por lo que la variable z estará dada por

$$z = \frac{(-\mu) - S_T}{\sigma}$$

Las condiciones de optimización serían

$$F_{VEI} \left(-X(\alpha_{L,0}) \right) = 1 - \alpha_{L,0} \quad (\text{Ec.2.15})$$

$$f_{VER} \left(-X(\alpha_{L,0}) \right) = q \left(X(\alpha_{L,0}) \right)$$

$$f_{VER} \left(-X(\alpha_{L,1}) \right) = q \left(X(\alpha_{R,1}) \right)$$

2.2 Funciones de densidad implícitas de “mundo real”

Las distribuciones de riesgo neutral serían equivalentes a las verdaderas distribuciones del mercado solo si el mundo se comportara como neutral al riesgo. Si se asume cierta racionalidad por parte de los agentes económicos y con ello aversión al riesgo, ambas distribuciones, la de medida de riesgo neutral y la de medida real, diferirán¹³.

La necesidad de premios por riesgo puede llevar a que la forma y localización de una distribución de riesgo neutral sea diferente a la “verdadera” distribución esperada por el mercado, a esta la llamaríamos aquí densidad del mundo real (por sus siglas en inglés, *real world distribution*, RWD). Entonces las diferencias entre ambas distribuciones nos pueden dar indicios sobre la posible naturaleza y grado de aversión al riesgo del agente representativo.

La obtención de una RWD se basa en demostrar primeramente la existencia de diferencias sistemáticas entre una cierta función de distribución basada en datos históricos que proponemos como pronóstico para el valor futuro del subyacente y la FDRN, el segundo paso para obtener la RWD sería remover estas diferencias. Lo anterior lo podríamos expresar en términos de funciones acumuladas de probabilidad de la siguiente forma

$$F^P(S_T) = C(F^Q(S_T)) \quad (\text{Ec. 2.16})$$

donde $F^P(S_T)$ es la distribución efectiva que tomará el activo en el momento T, $F^Q(S_T)$ es la densidad acumulada con medida de riesgo neutral y $C(\cdot)$ es una función de calibración que escala a esta última, para cada valor de S_T , con un cierto premio por riesgo. Por supuesto y en la práctica, para fines de pronóstico solo podremos obtener una estimación $\hat{C}(\cdot)$. Nuestro mejor pronóstico sería la RWD o $\hat{F}^P(S_T)$. Con lo anterior queremos decir que lo que busca esta metodología es pasar de un pronóstico implícito en la FDRN que está en medida de riesgo neutral a uno también implícito pero de medida real.

Una observación importante con respecto a las distribuciones $F^Q(S_T)$ y $F^P(S_T)$ es que van cambiando de forma, conforme pasa el tiempo. En la literatura económica la conciliación entre ambas se suele hacer a través de multiplicar medidas de aversión al riesgo en términos de funciones de utilidad de un cierto agente representativo. A este respecto existen dos maneras de plantear esta relación. Por un lado, como lo plantea Bliss y Panigirtzoglou (2004), se utilizan medidas de

¹³ Las principales referencias consideradas para esta sección fueron [3], [15], [16], [20] y [22].

aversión al riesgo constante, con lo cual ambas distribuciones se mueven al unísono. El otro enfoque es el de hacer primero estimaciones históricas de $F^P(S_T)$ y dejar que el índice de aversión al riesgo fluctúe. La cuestión es que la intuición económica sugiere que en la realidad todas estas variables podrían fluctuar de una manera simultánea y no determinística como lo plantean estos modelos, además son criticables ya que la inclusión de una cierta medida de aversión al riesgo, la cual realmente nadie ve, podría verse solo como una salida “fácil” al problema, como de alguna forma lo sugiere Sahalia (2001).

No obstante lo anterior, Fackler y King (1990) se decantan por el segundo enfoque pero de una manera menos restrictiva, en particular usan como función de calibración a la función de distribución beta. Al usar una calibración netamente estadística no impone a priori como debiera ser la forma de la función de preferencias por el riesgo pues solamente se desea encontrar una función suficientemente flexible como para empatar de forma consistente las diferencias entre ambas distribuciones.

2.2.1 Metodología de Fackler y King (1990)

Para determinar si los datos de una muestra provienen de una función de distribución candidata se usa la Transformada de Probabilidad Inversa (TPI).

Sea $\hat{f}(\cdot)$ una función de densidad candidata (lo que aquí serían nuestras funciones de densidad implícitas) y sea x_T la observación ex-post en la fecha de maduración, su TPI está dada por

$$y_t = \int_{-\infty}^{x_T} \hat{f}(u) du \quad (\text{Ec. 2.17})$$

Bajo la hipótesis de que las observaciones $\{x_T\}$ son independientes y la función de densidad candidata es igual a la verdadera función de distribución, la y_t será independiente y uniformemente distribuida en $[0,1]$, por lo que el objetivo de probar la coincidencia de ambas distribuciones es equivalente a probar que y_t tiene distribución uniforme y gráficamente debería caer sobre la pendiente igual a 1 en un gráfico cuantil-cuantil (q-q).

El rango de valores transformados es garantizado por la propia probabilidad inversa, pero la uniformidad solo se logra si la función candidato es igual a la verdadera función de distribución.

Establecemos la hipótesis nula H_0 como “la secuencia de densidades de pronóstico coincide con la verdadera función de densidad”. Para probar esta hipótesis usamos pruebas de Kolmogorov Smirnov sobre la uniformidad de la serie de TPI's así como también pruebas conjuntas propuestas por Berkowitz (2001) sobre independencia y normalidad. Esta última hace un transformación a y_t hacia una distribución normal

$$z_t = \phi^{-1}(y_t) \quad (Ec. 2.18)$$

con ϕ^{-1} como la inversa de la función normal estándar. En este caso el no poder rechazar la hipótesis implica que las densidades estimadas si tienen poder de pronóstico.

Para lograr la transformación hacia una RWD se utiliza como función de calibración a la función de probabilidad acumulada de la TPI, $C(y)$.

$$C(y) = \text{prob}(Y \leq y) = \text{prob}(F(x_T) \leq y) \quad (Ec. 2.19)$$

Sea F y G las respectivas funciones de densidad acumulada de la FDRN y la RWD.

$$G(S_T) = \text{prob}(S \leq S_T) = \text{Prob}(F = C(F_t(S_T))) \quad (Ec. 2.20)$$

Por lo que $C(\cdot)$ es la función de calibración necesaria para transformar la FDRN a RWD.

$$g_t(S_T) = \frac{\partial C(F_t(S_T))}{\partial S_T} = \frac{\partial C}{\partial F_t} \frac{\partial F_t}{\partial S_T} = \frac{\partial C}{\partial F_t} f_t(S_T) \quad (Ec. 2.21)$$

Fackler y King (1990) seleccionaron como función de calibración a la distribución beta. Esta es una distribución muy flexible, tiene 2 parámetros con los cuales se puede afectar la forma de la distribución, por ejemplo con ($j = k = 1$), puede tomar la forma de una distribución uniforme, lo cual ocurriría cuando la FDRN y la RWD en realidad sean idénticas, por lo que el efecto de la transformación sería nulo. La función beta está dada por

$$\beta(i, j) = \int_0^1 x^{j-1}(1-x)^{k-1} dx = \frac{\Gamma(j)\Gamma(k)}{\Gamma(j+k)} \quad j, k > 0, \quad (Ec. 2.22)$$

$\Gamma(\cdot)$ es la función gamma. La función de densidad beta, está dada por

$$f^\beta = \frac{1}{\beta(i, j)} (x^{j-1}(1-x)^{k-1}) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (Ec. 2.23)$$

y la densidad acumulada por

$$F^\beta = \int_0^x \frac{v^{j-1}(1-v)^{k-1}}{\beta(i,j)} dv \quad (\text{Ec. 2.25})$$

Así sustituyendo en la notación $x = F_t(S_T)$ tendremos que $F^\beta = C(\cdot)$

Por último, al combinar los resultados de (Ec. 2.21) y (Ec. 2.25) tenemos que la expresión de transformación es

$$g_t(S_T) = \frac{1}{\beta(i,j)} \left(F_t(S_T)^{j-1} (1 - F_t(S_T))^{k-1} \right) f_t(S_T) \quad (\text{Ec. 2.26})$$

En conclusión, la RWD puede verse como nuestro mejor pronóstico implícito en los precios de las opciones sobre la distribución de precios reales que pudiera tomar el activo subyacente.

2.3 Distribuciones implícitas y el “problema del peso”

Se le atribuye a Milton Friedman el uso del término “problema del peso” cuando en la década de los 70's el peso mexicano aún mantenía su tasa de cambio fija frente al dólar estadounidense establecida en 1954. En esa época Friedman observó algo que parecía contradecir la idea de los mercados eficientes pues en los bancos mexicanos se pagaba una tasa de interés más alta por los depósitos que la pagada en Estados Unidos, situación que era aprovechada para obtener ganancias sin aparentemente asumir ningún riesgo, pues bastaba pedir prestado en Estados Unidos para invertirlo en México y después convertirlo nuevamente a dólares al mismo tipo de cambio¹⁴. La explicación intuitiva que se le daba a esta situación es que existía un cierto miedo latente por parte de los inversionistas de que por alguna razón, el tipo de cambio no iba a poder sostenerse por mucho tiempo, y en efecto, en septiembre de 1976, el peso paso de valer 12.5/USD a 20.5/USD, una pérdida de valor del 64%¹⁵.

De lo que trata el llamado “problema del peso”, es que puede haber situaciones en que aun cuando no existan datos históricos que justifiquen un cierto valor observado en los precios de los activos al día de hoy, no quiere decir que dicho valor sea incorrecto. Se trata de que el público percibe la posibilidad, aunque sea muy baja, de la ocurrencia de un evento en el futuro que pudiera

¹⁴ Sill(2000)

¹⁵ [43]

provocar el cambio hacia un estado del mundo muy diferente al de su presente. En consecuencia se podría decir que lo que hace la gente hoy, depende de lo que espera que pase en el futuro.

Por otra parte, y por lo expuesto hasta aquí, tenemos que la manifestación de las expectativas hacia una cierta fecha futura es justamente lo que suponemos se muestra en las funciones de distribución implícitas. De hecho la cotización forward o futura esta por definición contenido en la curva implícita, y representa el mejor pronóstico disponible del valor del activo en su fecha de maduración, por tanto se esperaría que en una comparativa entre el precio que se obtiene a posteriori y los precios futuros determinados con anticipación deberían mostrar una desviación promedio cercana a cero. Así entonces, el “problema del peso” podría manifestarse a través de un sesgo sistemático en la forma de la distribución implícita, ya sea hacia la apreciación o depreciación del activo subyacente. Esto quiere decir en términos prácticos que la distribución implícita podría señalar de manera reiterada, por ejemplo, una apreciación del activo, pero también de manera constante veríamos que este pronóstico no se cumple, o por lo menos no con la intensidad y frecuencia sugerida. Por tanto, para fines de pronóstico, resulta importante detectar situaciones de este tipo.

3 Elementos para la conformación de la estrategia de inversión

3.1 Comparación de distribuciones

Como quizás ahora se puede deducir, para poder utilizar a las distribuciones implícitas extraídas mediante las metodologías previamente expuestas en el ámbito de una estrategia de inversión, necesitamos tener un criterio de contraste con base al cual podamos decidir cuándo resulta conveniente tomar posiciones de compra o de venta. En la literatura que trata esta cuestión, se suele mencionar que se requiere disponer de la estimación de una función de probabilidad “realizada”, la cual por supuesto es un término meramente teórico, pues aún no se observa, en este caso lo que se utiliza es una estimación empírica con base a datos históricos -ver Aint-Sahalia (2011), más no existe un criterio que establezca cual debiera ser la extensión del periodo de observación.

Por otra parte tenemos que tomar en cuenta que las distribuciones implícitas corresponden a una muestra transversal de precios de opciones en la fecha t , con una medida de probabilidad de riesgo neutral, mientras que las distribuciones históricas de la serie del subyacente tienen una medida “real” de probabilidad. Por tanto para poderlas comparar, ambas deben tener la misma medida de probabilidad. Adicional a esta cuestión, es que es de esperarse que aun cuando tuviesen la misma medida, ambas funciones de distribución serían diferentes pues la distribución histórica o también llamada estadística se construye a partir de un conjunto de observaciones anteriores al momento t , mientras que la distribución extraída de las opciones toma en cuenta la información más actual que tiene el inversor, que podría estar incluso determinada por lo que observe en el mismo momento t , pues es en cierta medida una apuesta un tanto subjetiva sobre el comportamiento futuro del subyacente, el cual por supuesto no tiene por qué parecerse al del pasado más reciente. En las siguientes tablas se resume esta cuestión.

Tabla 3.1. Enfoques para la estimación de distribuciones esperadas de S(T)

TIPO DE DISTRIBUCIÓN	MEDIDA	ENFOQUE	DESCRIPCIÓN
Distribución histórica, estadística o efectiva	Real	Mira al pasado	Con base a serie de tiempo del subyacente
Distribución implícita en opciones (FDRN)	Riesgo neutral	Mira al futuro	A partir de una muestra transversal de precios de opciones al momento t
Distribución histórica (Sahalia 2001)	Riesgo neutral	Mira al pasado	Propuesta por Sahalia (2001) con base a la serie de tiempo del subyacente con un solo factor de riesgo
Distribución “real” del subyacente RWD	Real	Mira al futuro	Transforma la FDRN a RWD con base a desviaciones sistemáticas de distribuciones históricas frente a distribuciones FDRN anteriores

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3.2. Comparación válida de distribuciones

Distribución implícita en opciones (FDRN)	Vs.	Distribución histórica transformada por teorema de Girsanov
Riesgo neutral		Riesgo neutral
Mirada en el futuro		Mirada en el pasado
FDRN transformada a RWD por medio de función PIT	Vs.	Distribución histórica
Medida real		Medida real
Mirada en el futuro		Mirada en el pasado

Fuente: Elaboración propia.

A este respecto cabe mencionar que mientras más corto sea el periodo de pronóstico, las diferencias en la forma de las distribuciones causadas por la diferencia de medida tienden a desaparecer.

Así entonces la estrategia de inversión que exponemos aquí se basa en explotar oportunidades de arbitraje debidas a diferencias entre distribuciones implícitas en los precios de las opciones frente a distribuciones de rendimientos históricas para el subyacente.

En las siguientes secciones de este capítulo revisaremos algunos conceptos elementales para entender la lógica detrás de este estilo de estrategias de inversión.

3.2 El precio de una opción y su volatilidad implícita

El modelo de valoración de opciones europeas de Black-Scholes se ha convertido en uno de los principales referentes de la industria financiera mundial aun cuando se reconoce la debilidad de sus supuestos, en cuanto a la forma en cómo se comportan las variables financieras en el mundo real. En este modelo se tiene que el precio de un contrato de opción es función de cinco variables: precio spot del subyacente, precio de ejercicio, tasa libre de riesgo, tiempo para la expiración y nivel de volatilidad del subyacente. Los primeros cuatro parámetros se pueden fijar de manera unívoca al momento de emitir un contrato, pues son directamente observables en el mercado, en cuanto al quinto factor, la volatilidad, sabemos que no existe una regla que nos indique que deba tener un valor único, pues depende en gran medida de la metodología y cantidad de datos para su cálculo, es decir, cada quien usa la medida que cree pueda describir mejor el comportamiento fluctuante del subyacente. Por lo anterior, y dicho en términos prácticos, la volatilidad del activo es el parámetro más importante al momento de valorar opciones financieras. Es por ello que comúnmente los comerciantes de opciones dicen que lo que compran o venden es volatilidad.

Así pues y contrario a lo que señala el modelo de Black-Scholes en cuanto a que el valor de la volatilidad es único, es posible obtener diferentes valores para esta al introducir diferentes precios de contratos en las fórmulas de valuación de opciones. Es decir, lo que se hace en la práctica con el modelo de Black-Scholes es usarlo como una calculadora, en la que buscamos la volatilidad que coincide con el precio observado de las opciones, esto es lo que conoce como *volatilidad implícita*. Este parámetro representa la percepción que tiene un cierto grupo de agentes del mercado sobre la volatilidad esperada del activo subyacente, de allí la diferencia en los precios de las opciones. Las fórmulas del modelo de Black-Scholes claramente nos indican que a mayor volatilidad implícita, mayor el precio del derivado.

Valuación de opciones europeas de futuros por el modelo de Black Scholes.

$$c = e^{-rT}[F_0N(d_1) - KN(d_2)] \quad (Ec.3.1)$$

$$p = e^{-rT}[KN(-d_2) - F_0N(-d_1)] \quad (Ec.3.2)$$

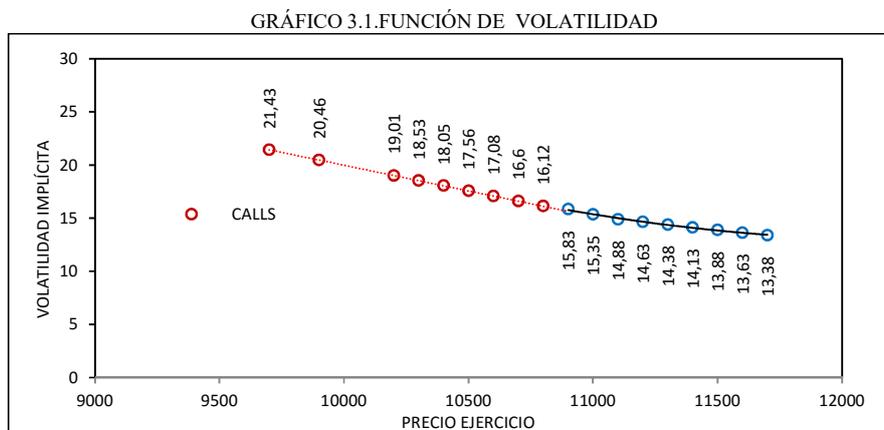
donde

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

3.3 El precio de ejercicio y la volatilidad implícita

La relación entre precio de ejercicio y volatilidad implícita se conoce como *curva, sonrisa o mueca de volatilidad*. El modelo de Black-Scholes implica que esta relación debería de ser “plana” pues fija un único valor para la volatilidad. Sin embargo suele observarse que la relación mencionada presenta una forma de curva convexa, esto ha sido motivo de diversos estudios, donde por ejemplo Campa y Chang (1995) o Bates (1996) infieren que esta curvatura es indicativa de que el mercado percibe una cierta distribución sobre el activo subyacente diferente a la que señala el modelo.

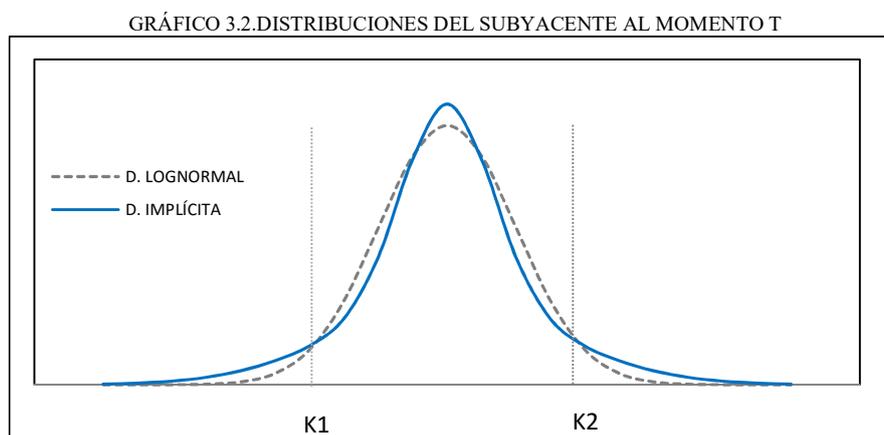


Fuente: Elaboración propia.

De aquí se tiene que la forma de la curva de volatilidad puede ser usada para extraer información acerca de las expectativas del mercado sobre la distribución del activo subyacente, y en qué medida difiere de la distribución log-normal. Para opciones sobre acciones, la sonrisa de volatilidad tiende a ser de pendiente negativa. Este hecho significa que las opciones *call* que ya están en el dinero tienden a tener una mayor volatilidad implícita que las opciones *call* fueran del dinero.

3.4 La curva de volatilidad y la función de distribución implícita

La forma de la sonrisa de volatilidad depende de dos factores, uno es la distribución de probabilidad que asuma nuestro modelo de valuación de opciones para el precio futuro del subyacente y el otro son las probabilidades que asigna el mercado de forma implícita en el precio de tales opciones. Así pues y como comentábamos anteriormente, tenemos que el modelo de valuación Black-Scholes asume que el precio de una opción para cualquier precio de ejercicio está determinado por un nivel fijo de volatilidad y que el subyacente se distribuye de forma lognormal. Ahora supongamos por un momento que conocemos la forma en como el mercado asigna probabilidades de ocurrencia a cada posible resultado futuro del subyacente, S_T , y las comparamos como en el siguiente gráfico.



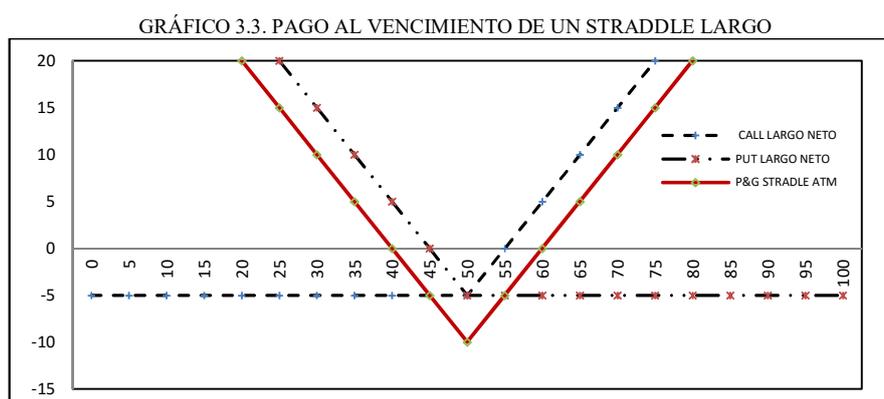
En este caso particular veríamos que la probabilidad que el mercado le asigna a S_T de alcanzar valores superiores a K_2 es mayor a la que nos dice la distribución lognormal, y por lo mismo en el mercado el precio de esta opción debería estar por encima de lo que dice Black-

Scholes, con lo cual es de esperarse que tenga una volatilidad implícita más grande a la que estable Black-Scholes. Un análisis similar podría hacerse también en la parte central de las distribuciones donde se encontrarían las cotizaciones alrededor de la zona en el dinero, aquí la distribución implícita tiene una masa acumulada mayor a la lognormal, lo que implica que es una zona menos incierta y por tanto los precios de las opciones observadas deberían ser más bajos que los que dicta el modelo o equivalentemente, mostrar menor volatilidad implícita para esa zona de precios de ejercicio.

3.5 Estrategias basadas en combinación de opciones

Sin duda el número de posibles estrategias de inversión basadas en opciones puede ser muy grande, sin embargo, existen combinaciones de opciones europeas que podríamos considerar como estándar en la industria financiera ya que incluso se pueden observar cotización de ellas de manera directa en los mercados *over-the counter* (OTC). Las estrategias a las que nos referimos son las llamadas “*risk reversals*”, “*straddles*”, “*strangles*” y “*butterflies*”¹⁶.

Straddle o cono. Una posición larga, implica posiciones largas tanto en un *call* como en un *put*, para un mismo precio de ejercicio y con la misma fecha de vencimiento. Lo más común es que se construyan con base a opciones en el dinero. La posición larga se usaría cuando se espera un mercado con una alta volatilidad. El *straddle* en posición corta se utilizaría cuando se tenga una visión opuesta, es decir, se espera que el precio se mantenga relativamente estable.



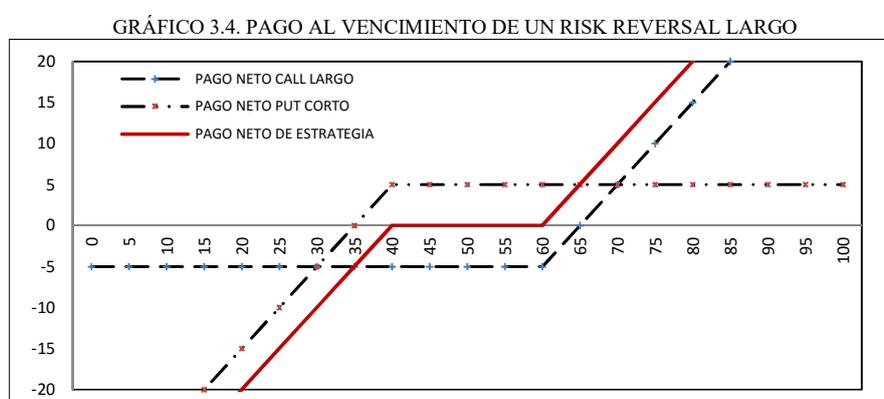
Fuente: Elaboración propia.

¹⁶ Malz (1997) desarrolla la idea de la relación entre estas estrategias y la forma de la curva de volatilidad.

Por ejemplo, en Cohen(2005), se puede consultar la forma de construir estas y otras estrategias de inversión con opciones.

En mercados OTC se cotizan *straddles* en el dinero conocidos simplemente como ATM con precio de ejercicio igual al precio forward, por ello se dice que nos da información sobre el valor esperado de la volatilidad implícita.

Risk reversal o túnel (RR). Consiste en tomar una posición larga en un *call* con un precio de ejercicio fuera del dinero y una posición corta en un *put*, usualmente con un mismo nivel de *moneyness*, ambas con la misma expiración.



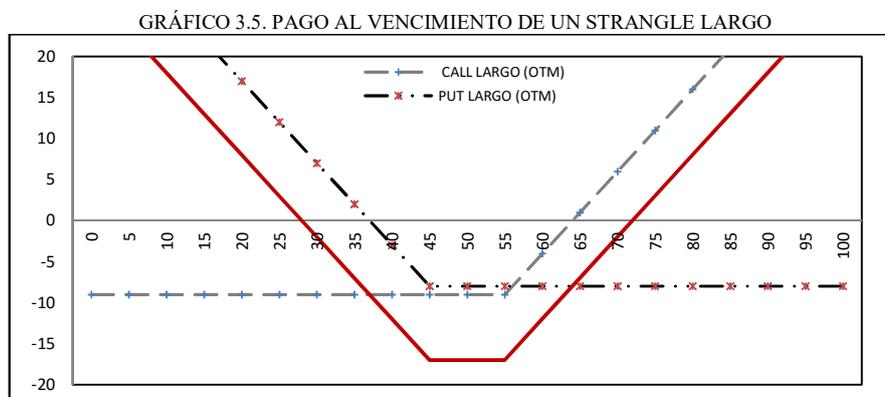
Fuente: Elaboración propia.

Cuando la expectativa en el mercado es que un activo se aprecie, esperaríamos que los *calls* a un cierto nivel de *moneyness* se vuelvan relativamente más valiosos, por la misma razón, los *puts* para el mismo nivel de *moneyness* debería bajar su valor, esto se puede traducir en términos de la sonrisa de volatilidad como la dirección de su pendiente. La lectura que se les da a esta combinación de opciones es que si su costo tiene un valor positivo implica que el mercado percibe como más probable la apreciación del activo, es decir, un sesgo en su distribución. También existe la versión de usarlo como un indicador contrario, con base a la idea de que cuando el mayor volumen del mercado se posiciona hacia un aumento del activo hace que sea mucho más difícil que siga subiendo y mucho más probable que caiga por noticias o acontecimientos negativos. Por lo anterior no sorprende que desde hace mucho tiempo se ha visto a los *risk reversal* como instrumentos de pronóstico de sesgos o tendencias sobre el precio del subyacente. A este respecto es justo mencionar el artículo de Dunis y Lequeux (2001) pues exploran estas hipótesis y si bien encontraron que existe una alta correlación contemporánea con el precio del subyacente, en sus

regresiones las observaciones rezagadas de la cotización de los *risk reversal* no resultaron significativas para determinar la dirección del subyacente, adicionalmente hicieron simulaciones de inversión con las 2 estrategias mencionadas y en ningún caso tuvo resultados positivos.

En mercados OTC las cotizaciones de esta estrategia suelen darse en número de volatilidades implícitas σ para precios expresados en niveles de *moneyness* medidos a su vez en términos de deltas, por ejemplo el costo de un $RR_{25\Delta} = \sigma_{c,25\Delta} - \sigma_{p,25\Delta}$.

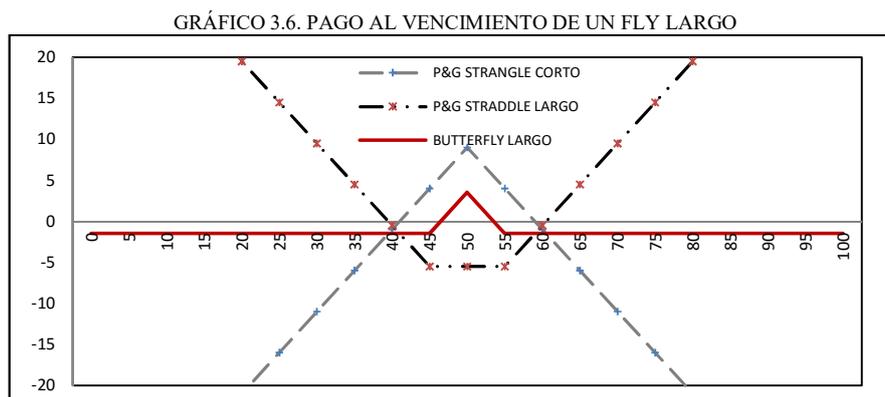
Strangle o cuna. Al igual que en el caso del *straddle* en posición larga, se toma de manera simultánea posición compradora tanto en un *call* como en un *put*, igualmente bajo esta estrategia se espera una alta fluctuación en el precio del subyacente, ya sea hacia arriba o hacia abajo. Sin embargo en este caso los precios de ejercicio para cada opción estarán fuera del dinero, por lo que para que resulte rentable el precio del subyacente se tiene que mover más que en un *straddle*, es decir la zona de pérdida es más grande, a favor se tiene que el costo de la estrategia es menor.



Fuente: Elaboración propia.

Como ejemplo podemos decir que en el mercado de divisas OTC, donde se suele comerciar esta estrategia, los precios de ejercicio tanto para un *put* y un *call* están fuera del dinero con un mismo nivel de delta, a la misma distancia del precio forward. El costo de un *strangle* largo con un *moneyness* de 25Δ lo podemos expresar como $STRANG_{25\Delta} = \sigma_{c,25\Delta} + \sigma_{p,25\Delta}$

Butterfly. O simplemente *fly* en posición larga está compuesta por un *strangle* largo y un *straddle* corto, todas las opciones con la misma fecha de maduración, esta figura también se obtiene como se describió en la sección 2.1.1. La posición larga se utiliza cuando esperamos baja o nula volatilidad. El nivel máximo de ganancias está limitado.



Fuente: Elaboración propia.

Se dice que esta combinación representa a la curvatura de la sonrisa de volatilidad, por lo que expresa también el grado de curtosis de la distribución implícita. Si tiene un valor positivo significa que las opciones fuera del dinero, son relativamente más caras que las que están en el dinero, esto es, que el mercado percibe de manera implícita una distribución del subyacente leptocúrtica- con extremos gruesos.

Resumiendo esta sección sobre combinaciones de opciones de compra y venta, podemos decir que la cotización de un *straddle* en el dinero entrega el nivel de volatilidad implícita del valor esperado del subyacente. El *risk reversal* nos da pistas sobre el nivel de sesgo de la distribución, y finalmente el *butterfly* hace lo mismo para el nivel esperado de curtosis de la distribución implícita.

3.6 Las griegas y sus coberturas

Para el caso de la cotización de contratos de opciones financieras, típicamente podemos observar que cuando el precio de su activo subyacente aumenta también aumentara el valor de sus opciones *call*, esto se debe a que en ese momento se podría ver como más probable que estas opciones terminen con un valor intrínseco positivo en la fecha de su maduración. También así se podría esperar que (manteniendo otras variables constantes) a mayor volátil presente en su activo subyacente, mayor valor tomen sus opciones pues también se verá como más probable que estas tengan un valor positivo en su expiración. Las así llamadas griegas expresan de manera cuantitativa el efecto aislado o conjunto que diversas variables tienen sobre el precio de una opción. Dado que el objetivo de este trabajo es el de extraer información a partir de la cotización de las opciones, resultara útil revisar estos conceptos propios del lenguaje común de los comerciantes de opciones.

Delta. Es la relación de cambio del precio de una opción con respecto al cambio en el precio del subyacente, es decir $\Delta = \partial \text{call} / \partial S = -\partial \text{put} / \partial S$. Así también, se puede ver como una medida de sensibilidad que puede decir que tan diferente es el precio de una opción respecto a opciones en el dinero que por definición $\Delta_{\text{en el dinero}} = 0.5$ o también podría ponerse como 50Δ , y por analogía a este caso tenemos que el precio de una opción también se puede expresar en términos de delta. De manera más específica los valores que puede tomar delta para opciones *call* están en el rango $[0,1]$ y los que puede tomar un *put* en $[-1,0]$ aunque por convención se suelen tomar en términos absolutos por lo que opciones con $\Delta < 0.5$ están fuera del dinero y opciones $\Delta > 0.5$ están dentro del dinero. La delta también suele interpretarse como la probabilidad de que una opción expire dentro del dinero. Debido a que el precio de una opción se puede expresar en términos de delta podríamos también obtener una función de volatilidad con base a unidades delta.

Gamma. Es la derivada de delta con respecto al precio del subyacente $\Gamma = (\partial^2 \text{call}) / \partial S^2$, está letra griega muestra la aceleración del precio de la opción con respecto a incrementos marginales del subyacente, tiene su máximo en la posición en el dinero y los mínimos mientras más profunda sea su posición hacia afuera o dentro del dinero.

Theta. Es la sensibilidad del precio de la opción al paso del tiempo. Posiciones largas en la opción tienen Θ negativa, es decir conforme nos acercamos a la fecha de maduración la opción va perdiendo valor, caso contrario al de la posición corta.

Vega. Es la sensibilidad del precio de la opción al cambio de volatilidad del subyacente. Ante un aumento de la volatilidad del subyacente la opción gana valor.

Rho. Es el cambio del precio de la opción debido a un incremento marginal de la tasa de interés relevante para su valuación.

Tabla 3.3 Griegas de Black Scholes cuando un activo paga un rendimiento con tasa q

Delta	$e^{-qT} N(d_1)$	$e^{-qT} [N(d_1) - 1]$
Gamma	$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$	$\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$
Theta	$-S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT} / (2\sqrt{T})$ $+ qS_0 N(d_1)e^{-qT} - rKe^{-rT} N(d_2)$	$-S_0 N'(d_1)\sigma e^{-qT} / (2\sqrt{T})$ $- qS_0 N(-d_1)e^{-qT} + rKe^{-rT} N(-d_2)$
Vega	$S_0\sqrt{T} N'(d_1)e^{-qT}$	$S_0\sqrt{T} N'(d_1)e^{-qT}$
Rho	$Ke^{-rT} N(d_2)$	$-Ke^{-rT} N(-d_2)$

Fuente: Extraído de *Options, futures and other derivatives/ John C. Hull 8th ed. pag.398*

En este mismo orden de ideas, recordemos que para un inversionista las opciones pueden servir como un instrumento que protección contra posibles cambios desfavorables en el valor de su activo subyacente. En la actualidad resulta ser que muchos portafolios de inversión están en su mayoría conformados por opciones (europeas, americanas, exóticas), posiciones que de igual manera requieren de mecanismos para mitigar los riesgos que enfrentan. En los siguientes párrafos comentamos brevemente en qué consisten estos mecanismos de cobertura.

Cabe por ultimo comentar que la intención de incluir esta sección es la de apoyar la exposición de la aplicación de un esquema de *cobertura dinámica*¹⁷ a los portafolios construidos en el capítulo cuatro.

¹⁷ Ver sección 4.4.3.2.

Cobertura delta.

Tiene como objetivo mantener el valor de la delta de una cartera lo más cercano posible a cero. De esta manera, un pequeño cambio en el precio del activo subyacente no causará un gran cambio en el valor total del portafolio. Una posición larga en una opción de compra tiene una delta positiva, mientras que una posición corta tiene un valor negativo. Lo contrario es cierto para una opción de venta. Sin embargo los deltas de opciones cambian con el tiempo de tal manera que para estar cubiertos se debe reequilibrar la cartera con frecuencia para asegurarse de que siga siendo delta neutral, esto mediante la compra o venta en corto del subyacente de forma dinámica. Aunque esta estrategia suena razonable en teoría, los costos de transacción asociados con la compra y la venta del subyacente podrían requerir ajustes adicionales.

Cobertura de gama.

Una estrategia gamma neutral tiene como objetivo eliminar el cambio en delta con el fin de reducir la frecuencia de reequilibrio en el portafolio. Un valor grande de gamma implica que el delta cambia significativamente con el cambio del subyacente, lo que significaría que la cobertura delta es ineficiente, por esta razón un operador podría necesitar hacer su cartera gamma-neutral. En la práctica, primero se hace al portafolio gamma-neutral mediante el uso de otros derivados y después se hace delta-neutral con el subyacente.

Cobertura delta inversa

Es similar a una cobertura delta estándar en cuanto a que busca proteger la inversión en un activo a través del uso de otro, es decir igualar de forma contraria las posibles pérdidas. En una cobertura inversa no solo se busca esto, sino incluso se busca tomar ventaja de estos movimientos adversos comprando más “seguros” de los necesarios. Por ejemplo, en vez de solo cubrir una posición larga en un activo con un *put*, se comprarían 2 *puts*, a este tipo de posturas también se les conoce como *straddle* sintético.

Gamma scalping

Se refiere a la posibilidad de obtener ganancias mediante el proceso de hacer coberturas delta dinámicas de un portafolio. Este proceso se puede hacer por ejemplo, al tomar una posición larga en un *straddle* en el dinero, lo que implicaría tener inicialmente un delta de cero o muy cercano a cero. Esta posición de delta claramente depende del valor del subyacente, del que se espera cambie con el tiempo. Para hacer la cobertura de esta posición se utilizarían posiciones de compra o de venta en corto del subyacente (la delta de una posición corta en el subyacente es igual a 1 y su venta en corto de -1). De esta forma tenemos que si el precio del activo subyacente baja, la delta del *straddle* será negativa, por lo que el inversor comprara el subyacente, y si el precio del subyacente sube entonces venderá subyacente, entonces se pueden generar ingresos adicionales al valor intrínseco de la posición, pues en el proceso de cobertura el subyacente se estaría comprando barato y vendiendo caro.

3.7 La lógica detrás de la estrategia de inversión

Como mencionamos al principio de este capítulo, lo que pretendemos es poner a prueba la estrategia que señala que se pueden explotar en términos comerciales diferencias entre distribuciones implícitas y efectivas de un cierto activo subyacente. Entonces la pregunta a responder es claramente la siguiente ¿Por qué es posible hacer esto?

Comencemos por decir que en toda estrategia comercial lo que se desea es comprar barato y vender caro. Por otra parte se ha observado que la evolución de los precios de los contratos de opciones se debe principalmente a las fuerzas de la oferta y la demanda, así que en principio lo que se podría buscar es encontrar contratos “mal valuados”. A este respecto recordemos que el precio de una opción también puede expresarse en términos de volatilidad, lo cual nos permite ver a través de una curva de volatilidad sus respectivas valuaciones. Recordemos también que la forma de esta curva de volatilidad expresa la diferencia entre la distribución implícita derivada del precio de opciones en el momento t frente a una distribución lognormal, la cuestión aquí es que podemos usar otra distribución como referencia, en vez de la lognormal, digamos una distribución empírica histórica, para poder emitir una opinión propia, entonces podríamos hacer lo que se conoce como *invertir con base a la sonrisa de volatilidad*, ya que podríamos ir en favor o en contra de la visión del mercado.

Justamente esta lógica es la que se encuentra detrás de la estrategia anunciada por parte de varios fondos de cobertura, se basa pues en el seguimiento de la interacción entre las distribuciones implícitas y “realizadas” y con ello fundamentar la identificación y toma de decisiones de inversión con derivados.

Ejemplos de propuesta de inversión basada en estas ideas, las podemos encontrar en Malz(1997) y Sahalia et al.(2001). A continuación reproducimos las reglas de inversión de este último artículo así como las que aparecen en el libro *Handbook of exchange rates*, para el caso del mercado OTC de opciones sobre divisas.

Tabla 3.4. Reglas para explotar diferencias entre las distribuciones implícitas (f) y efectiva (g)		
Sesgo	$sesgo(f) > sesgo(g)$	Vender put fuera del dinero
		Comprar call fuera del dinero
	$sesgo(f) < sesgo(g)$	Comprar put fuera del dinero
		Vender call fuera del dinero
Curtosis	$Curt(f) > Curt(g)$	Vender opciones que muy fuera del dinero y posiciones en el dinero (ATM)
		Comprar opciones ligeramente fuera del dinero
	$Curt(f) < Curt(g)$	Comprar opciones ATM y muy fuera del dinero.
		Vender opciones ligeramente fuera del dinero

Fuente. Con base en la *Tabla 4 en Ait-Sahalia et al. / Journal of Econometrics (2001) 67-110*

Tabla 3.5. Estrategias para explotar diferencias entre las distribuciones implícitas y efectiva

Parámetro	Observación	Estrategia de trading
Volatilidad	La volatilidad efectiva es persistente y estadísticamente menor que la volatilidad implícita.	Comprar una ATM y hacerle cobertura delta
	$\sigma_T > \hat{\sigma}\sqrt{365}$	
	La volatilidad efectiva es persistente y estadísticamente mayor que la volatilidad implícita	Hacer cobertura delta inversa más una opción para cobertura de gamma mientras sea barato
	$\sigma_T < \hat{\sigma}\sqrt{365}$	
Asimetría	La asimetría efectiva es persistente y estadísticamente menor que la asimetría implícita	Vender risk reversals y hacer cobertura delta
	$s_T > \hat{s}/\sqrt{N}$	
	La asimetría efectiva es persistente y estadísticamente mayor que la asimetría implícita	Comprar risk reversals y hacer cobertura delta inversa
	$s_T < \hat{s}/\sqrt{N}$	
Asimetría ambigua		Vender 10-delta risky y comprar 25 delta risky, hacer cobertura delta al resto
		Comprar 10-delta risky y vender 25-delta de risky, hacer cobertura delta al resto
Curtosis ambigua	La curtosis efectiva es persistente y estadísticamente menor que la curtosis implícita	Vender fly y hacer cobertura delta
	$k_T > \hat{k}/N$	
	La curtosis efectiva es persistente y estadísticamente mayor que la curtosis implícita	Comprar fly y hacer cobertura delta
	$k_T < \hat{k}/N$	
Curtosis ambigua		Vender 10-delta fly y comprar 25-delta fly, cubrir delta lo restante
		Comprar 10-fly delta y vender 25-delta fly, el resto con cobertura delta

Fuente: Con base en la *Tabla 24.9 en el Handbook of exchange rates. Wiley handbooks in financial engineering and econometrics.*

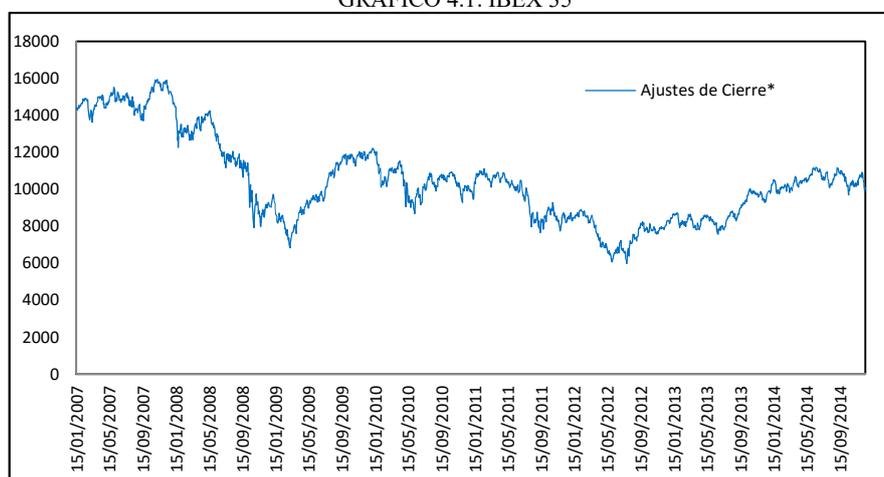
4 Implementación

4.1 Datos

Todos los datos para la ilustración de esta estrategia de inversión fueron obtenidas de manera gratuita en sitios de internet, en *yahoo-finance* encontramos series históricas diarias de cotización del IBEX-35, el cual es un índice ponderado por capitalización, compuesto por las 35 compañías más líquidas que cotizan en las cuatro Bolsas Españolas¹⁸, en la Tabla A2.1 del anexo 2 se da una descripción más amplia. Sobre este índice es que se emiten contratos de futuros (ver tabla A2.2 en anexo 2), los valores futuros sobre el índice representarían el valor del activo subyacente a los contratos de opciones tipo europeo que vamos a analizar en esta sección. Las cotizaciones expresadas en estos contratos de futuros y la de sus respectivas opciones fueron obtenidas en el sitio del Mercado Oficial de Opciones y Futuros Financieros en España (MEFF). En el sitio del Bundesbank obtuvimos las series históricas con datos diarios sobre el EURIBOR a 12 meses, esta es la tasa de descuento aplicada a la valuación tanto de los futuros como de sus opciones.¹⁹

Si bien utilizaremos como activo subyacente futuros sobre el índice IBEX35, a manera de ilustración presentamos aquí algunos datos descriptivos sobre el desempeño del índice en los últimos años (15-01-2007 al 17-12-2014).

GRÁFICO 4.1. IBEX 35



Fuente: Elaboración propia.

¹⁸ Bolsa de Madrid, Bolsa de Barcelona, Bolsa de Bilbao y Bolsa de Valencia

¹⁹ yahoo-finance: <http://finance.yahoo.com/q/hp?s=%5EIBEX&a=09&b=15&c=2007&d=11&e=18&f=2014&g=d>

MEFF: <http://www.meff.es/asp/Financiero/DescargaFicheros.aspx?id=ing>

Bundesbank:

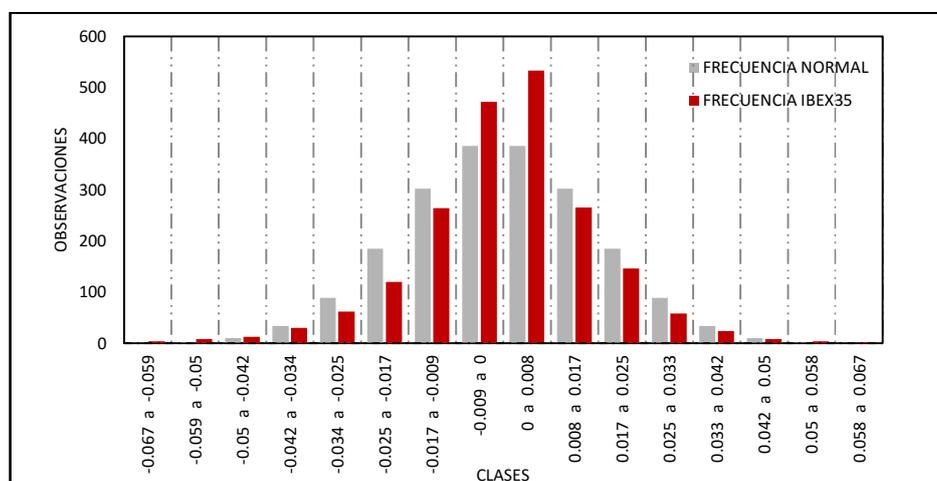
http://www.bundesbank.de/Navigation/EN/Statistics/Money_and_capital_markets/Interest_rates_and_yields/Money_market_rates/Tables/table_zeitreihenliste.html?id=16000

Tabla 4.1. Estadística Descriptiva del log-rendimiento del IBEX-35 del 15-01-2007 al 17-12-2014

Media	-0.000178469
Desviación estándar	0.016743469
Varianza de la muestra	0.000280344
Curtosis	5.443567429
Coefficiente de asimetría	0.163258727
Mínimo	-0.095858654
Máximo	0.134836352
Cuenta	2022

Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 4.2. HISTOGRAMA DEL LOG-RENDIMIENTO DIARIO VS RENDIMIENTO CON DISTRIBUCIÓN NORMAL



Fuente: Elaboración propia.

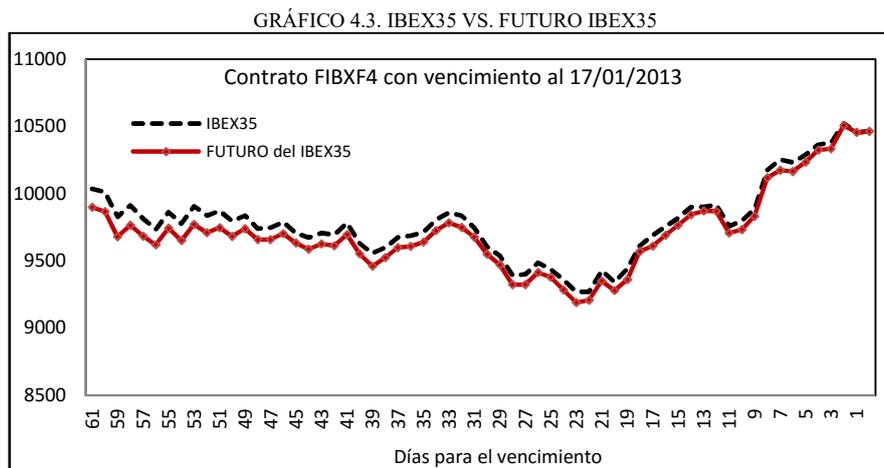
Lo que podemos observar tanto en los gráficos como en la tabla descriptiva es que esta serie, durante el periodo revisado, en promedio ha tenido un crecimiento negativo, con un concentración relativamente alta (con respecto a una distribución normal con misma media y varianza) de rendimientos bajos, lo cual se refleja en su valor de curtosis. Desde comienzos del

2009 se ha comportado como un mercado “plano”, por lo que el nivel de sesgo positivo se lo podemos atribuir a valores previos a este año.

Ilustramos el comportamiento del índice pues claramente tiene una gran correlación con su cotización futura F_t , tanto en tendencias como en su parte estocástica. Esto lo podemos decir con base a la fórmula

$$F_t = S_t e^{(r-q)(T-t)} \quad (Ec. 3.3)$$

donde F_t es el precio pactado en la fecha t para que ocurra en la fecha T , S_t es el precio del subyacente al momento t , r la tasa libre de riesgo, q es una tasa de rendimiento de los dividendos esperados y $(T - t)$ es el tiempo restante para su expiración. Esta relación también la podemos mostrar a manera de ejemplo en la siguiente gráfica que compara ambas cotizaciones.



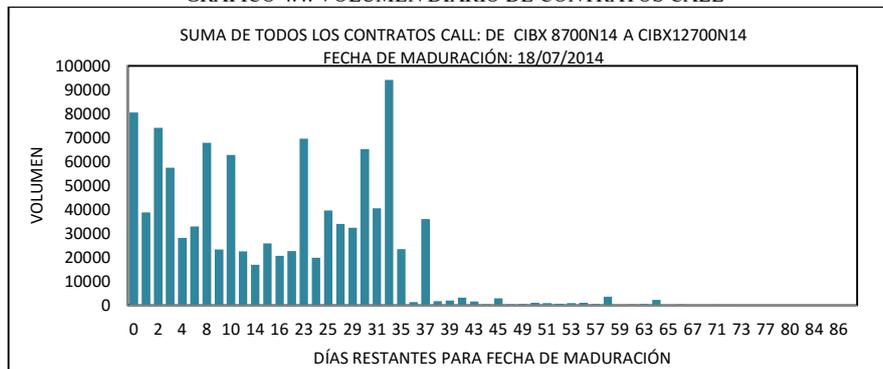
Fuente: Elaboración propia.

Por lo anterior podemos decir que estudiar las series de tiempo de un activo financiero, nos puede dar buenas pistas sobre el comportamiento de sus futuros.

4.2 Liquidez de contratos de futuros

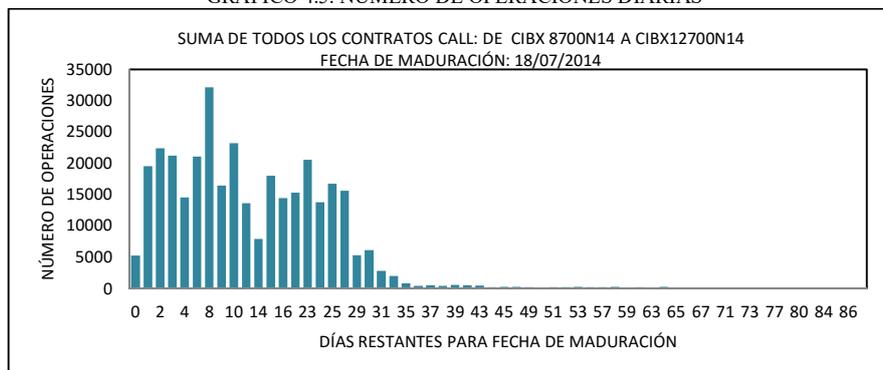
Consideramos cotizaciones de contratos de opciones europeas y buscamos las fechas que presenten un mayor grado de liquidez, expresado en el número de operaciones diarias y por volumen para que tengan una representación empíricamente válida acerca de las preferencias sobre riesgo y expectativas de mercado, es decir en estas fechas el precio observado se debe más al efecto de oferta y demanda y no solo con base a un modelo como ocurre en fechas de poca liquidez. Dentro de este rango de tiempo notamos que los contratos más demandados son aquellos que están fuera del dinero y muy cerca del dinero. Según podemos ver en las siguientes gráficas y como ocurre en muchos otros mercados, la mayor liquidez en el mercado de opciones se puede observar en fechas relativamente cercanas a su fecha de maduración.

GRÁFICO 4.4. VOLUMEN DIARIO DE CONTRATOS CALL



Fuente: Elaboración propia.

GRÁFICO 4.5. NÚMERO DE OPERACIONES DIARIAS



Fuente: Elaboración propia.

Como podemos notar, alrededor del día 30 comienza a presentar actividad, igualmente podemos considerar a la última semana como aquella en la que se cierran posiciones, por tanto, para la implementación de nuestra estrategia disponemos de un rango aproximado de entre 3 a 5 semanas antes de la fecha de maduración.

4.3 Procedimiento general

Lo que se haría para cada apertura de posiciones es lo siguiente:

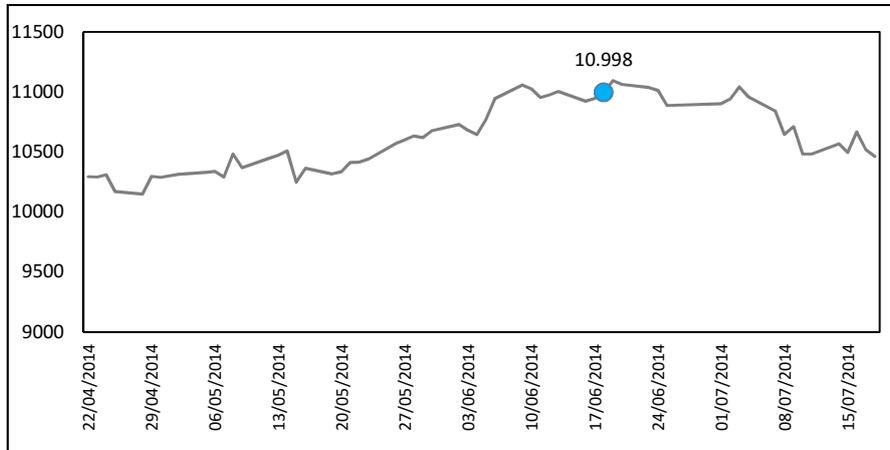
- a) Tomar una muestra transversal de precios de opciones con una fecha de maduración de entre 20 y 30 días para su maduración.
- b) Usar la paridad *call-put* para construir la curva de volatilidad con los precios que ofrezcan mayor liquidez, es decir aquello con posiciones cercanas al dinero y fuera del dinero.
- c) Estimar las curvas de distribución implícitas y estimar una distribución de contraste, digamos con base a datos históricos.
- d) Comparar la forma de ambas distribuciones y tomar decisiones de compra o venta de opciones con base a reglas como las ilustradas en las tablas 3.4 y 3.5.
- e) Considerar riesgos asociados a la posición (coberturas).
- f) Mantener la posición hasta la fecha de maduración.
- g) Contabilizar pérdidas y ganancias de la posición.

4.4 Análisis de un caso

Consideramos el valor de los futuros sobre el IBEX-35 (calculado como en Ec.3.3) que comienzan a cotizar el martes 22 de abril de 2014 y vencen el viernes 18 de julio del 2014. El día elegido para iniciar la estrategia es el 18 de junio del 2014, 30 días antes de su maduración. El rango de precios de ejercicio seleccionado va de los 10,600 a los 11,400, ya que estos cumplen con el punto (b) del procedimiento general señalado (esta selección se muestra en la Tabla A2.3 del Anexo 2).

En este gráfico se ilustra el comportamiento del futuro a largo de su vida. El valor resaltado corresponde al 18 de junio del 2014.

GRÁFICO 4.6. FUTURO DEL IBEX35 AL 18 DE JUNIO 2014



Fuente: Elaboración propia.

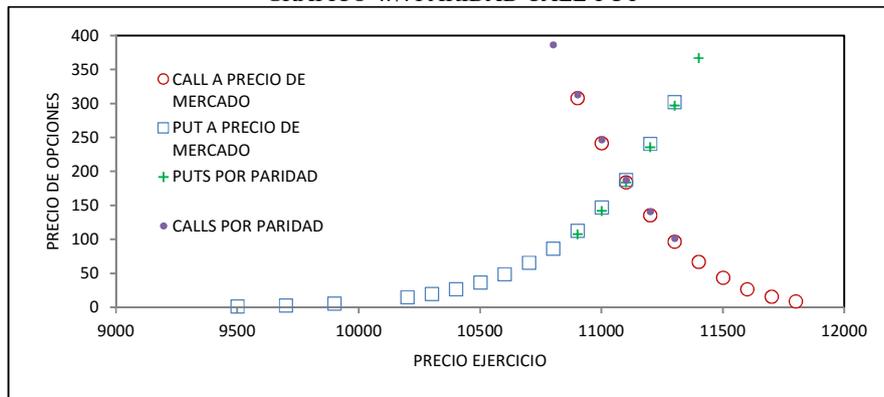
4.4.1 Paridad call put

Apoyados en la paridad *call-put* para opciones europeas sobre futuros

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0e^{-rT} \quad (Ec.3.4)$$

podemos obtener la función *call* descrita en la sección 2.1.3 necesaria para hacer la interpolación de la curva de volatilidad, así también nos es útil para ilustrar el siguiente gráfico donde marcamos los precios de los *puts* y *calls* como se observa en el mercado; así como también sus equivalentes teóricos con base a esta relación

GRÁFICO 4.7. PARIDAD CALL-PUT

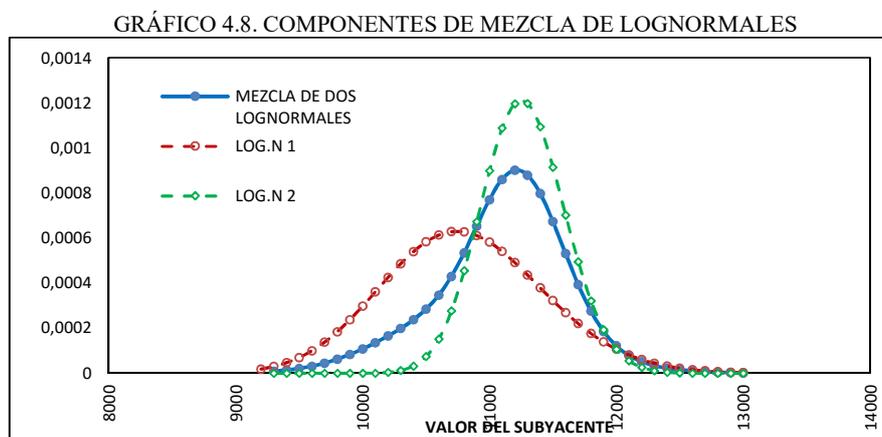


Fuente: Elaboración propia.

Podemos notar que los precios de mercado del 18 de junio del 2014 los *calls* están relativamente baratos, así también los precios de mercado de los *put* son un poco más caros a los que indica la paridad. Este simple hecho pudiera sugerir que el mercado está algo pesimista sobre el desempeño del índice.

4.4.2 Señales en las distribuciones implícitas de riesgo neutral

La principal distribución implícita que utilizaremos como indicador del comportamiento esperado del mercado a la fecha de maduración serán la estimada por el método de mezcla de lognormales, esto principalmente porque se basa en un modelo que se puede expresar por completo de forma cerrada. También mostramos una sección de la distribución proyectada por el método de Shimko(1993), en este caso es incompleta pues solo se puede calcular para los precios de ejercicio seleccionados. En este caso estaremos utilizando como distribución de referencia para la toma de decisiones de inversión aquella equivalente a la que señala el modelo de Black-Scholes, es decir la distribución lognormal del subyacente al momento T.



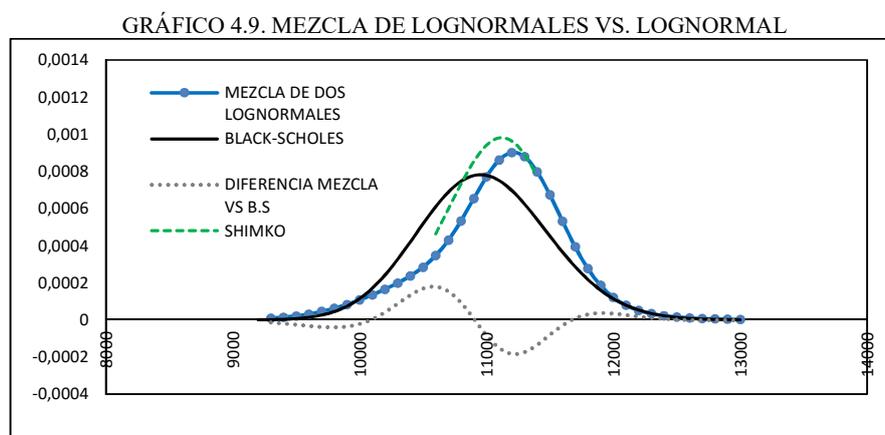
Así pues, la estimación resultante de la mezcla de lognormales nos señala los siguientes parámetros.

Tabla 4.2. Parámetros de las funciones de densidad ²⁰

		$x \sim N(\mu, \sigma^2)$	$x \sim \log N(\mu, \sigma^2)$
Densidad de la distribución lognormal	Media	9.303603	10,989.37
	Desviación estándar	0.04650435	511.3302
	Varianza		261,458.63
	Sesgo		0.1396
	Curtosis		3.0347
Densidad de las dos distribuciones componentes de la mezcla	theta	0.4507794	
	Media log.1	9.285679	10,801.12
	Media log.2	9.320156	11,165.59
	Desviación estándar log.1	0.05876147	635.24
	Desviación estándar log.2	0.02952166	329.70
	Varianza 1		403,527.55
	Varianza 2		108,701.10
	Sesgo 1		0.18
	Sesgo 2		0.09
	Curtosis 1		3.06
Mezcla de dos densidades lognormales	theta	0.4507794	
	Media		11,001.29
	Desviación estándar		523.92
	Varianza		274,489.41
	Sesgo		-0.4566
	Curtosis		7.564480851

Fuente: Elaboración propia.

²⁰ La estimación de los principales parámetros de las densidades se hizo a través del paquete RND desarrollado para R por Kam Hamidieh <kh@zoolytics.com>. Para mayor detalle sobre el proceso de estimación de los parámetros consultar el Anexo 1.



Cabe mencionar que desde un punto de vista práctico podemos decir que el tipo de uso que se le daría a estas distribuciones como indicador serían al mismo estilo que se hace en el análisis técnico, es decir, podría incluso ser solo una cuestión visual comparando las formas de las distribuciones.

Un ejemplo de lectura sería como el siguiente:

El día del cálculo de las distribuciones el valor del futuro es de 10,998 puntos. Primeramente podríamos decir que el mercado vende *puts* fuera del dinero y *calls* en el dinero relativamente baratos, *puts* en el dinero y *calls* fuera del dinero caros. **Lo cual nos permite concluir que se debería procurar comprar *puts* fuera del dinero y vender *calls* también fuera del dinero.**

Estas distribuciones implícitas tienen su máximo hacia la derecha pero también una cola izquierda más extensa que la de Black-Scholes por lo que se espera que el subyacente siga subiendo pero con una la posibilidad de tomar más valores hacia abajo que hacia arriba. En la Tabla 4.2 se puede ver que la densidad esperada por el mercado tiene un sesgo negativo y menor a la lognormal, también se muestra una curtosis de aprox. 7.5, muy por encima de la curtosis de la lognormal con un valor de 3.03.

4.4.3 Aplicación de la estrategia de inversión

Procediendo con la aplicación de reglas al estilo de las ilustradas en las tablas 3.4 y 3.5 de la sección 3.7 consideraremos la aplicación de *straddles*, *risk reversals* y *butterflies*. Mostramos en primer lugar cual hubiera sido el resultado de estas estrategias sin hacer las respectivas coberturas deltas²¹.

El día de operación corresponde al miércoles 18 de junio de 2014 cuando el precio del futuro sobre el IBEX35 cotizaba a 10,998 unidades.

Sabemos que el precio del subyacente a la fecha de maduración fue de 10,462.3.

4.4.3.1 Posición descubierta

Para evaluar la ganancia neta de un *straddle* con precios de ejercicio en el dinero igual a 11,000 consideramos la siguiente ecuación

$$\max[(S_T - 11,000), 0] + \max[(11,000 - S_T), 0] - [c_{k=110} + p_{k=110}] \quad (Ec.3.5)$$

En el caso del *risk reversal* corto, vendiendo el *call* fuera del dinero con precio de ejercicio de 11,300 y comprando el *put* fuera del dinero con precio de ejercicio de 10,700.

$$\min[(11,300 - S_T), 0] + \max[(10,700 - S_T), 0] - [p_{k=10700} - c_{k=11300}] \quad (Ec.3.6)$$

Y por último, para el *fly* vendemos las posiciones fuera del dinero y compramos las que están en el dinero.

$$\max[(S_T - 11,000), 0] + \max[(11,000 - S_T), 0] + \min[(11,300 - S_T), 0] + \min[(S_T - 10,700), 0] - [c_{k=11000} + p_{k=110} - c_{k=113} - p_{k=107}] \quad (Ec.3.7)$$

²¹ En lo referente al tema de la cobertura de riesgo en portafolios de opciones se puede consultar entre otros a Alexander (2008) y Leoni (2014).

Tabla 4.3. Straddle largo en el dinero

Posición	Instrumento	Strike	Costo
Larga	Call	11000	\$ 200.00
Larga	Put	11000	\$ 201.00
			\$ 401.00
Zona de ganancia en la fecha de maduración		$10,599 \leq s(t) \leq 11,401$	
	Ingreso final		$11,000 - 10462.3 = 537.7$
	P&G		136.7

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.4. Risk reversal corto

Posición	Instrumento	Strike	Costo
Corta	Call	11300	\$ - 79.00
Larga	Put	10700	\$ 98.00
			\$ 19
Zona de ganancia en fecha de maduración		$S(T) \leq 10,681$	
	Ingreso final		$10,700 - 10462.3 = 237.7$
	P&G		218.7

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4.5. Butterfly corto

Posición	Instrumento	Strike	Costo
Larga	Call	11000	\$ 200.00
Larga	Put	11000	\$ 201.00
Corta	Call	11300	\$ - 79.00
Corta	Put	10700	\$ -98.00
			\$ 224.00
Zona de ganancia en fecha de maduración		$S(T) \leq 10,476$	
	Ingreso final		300
	P&G		76

Fuente: Elaboración propia.

Aquí la estrategia implementada supone que la expectativa particular del inversionista es que la distribución verdadera que ocurrirá al momento T es la que indica el modelo Black-Scholes, así entonces, esto implica que se cree que el rango cerca de en el dinero es más amplio que el que señala la distribución implícita del mercado, por lo que tomar una posición larga en un *straddle* en el dinero puede ser rentable. Igualmente si la referencia es la distribución Black-Scholes vemos que esta es relativamente simétrica, mientras que la de expectativas del mercado tiene sesgo a la izquierda, entonces se apostaría por un *risk reversal* esperando que el subyacente disminuya su valor. Para el caso de la curtosis, el análisis nos indica que la distribución Black-Scholes es más ancha en la parte central que la distribución de mercado, es decir se espera que el precio del subyacente fluctúe un poco más de lo que indica implícitamente el mercado, entonces podría ser rentable tomar una posición corta en un *butterfly*. En este caso particular vemos que las tres estrategias resultaron rentables, si bien sujetas a un gran riesgo pues aquí no se hicieron coberturas.

4.4.3.2 Cobertura dinámica

El proceso de hacer cobertura dinámica consiste, en términos prácticos, en proteger el valor de un portafolio a lo largo del tiempo ante los distintos factores de riesgo que pudieran afectarle. Esta cuestión puede verse por ejemplo en el modelo de Black-Scholes donde el precio de las opciones depende entre otras variables además del precio del subyacente y su volatilidad.

La cobertura dinámica de delta es aquella que busca proteger un portafolio de opciones ante cambios en el precio del subyacente. De hecho la definición de delta parte de la observación de que el valor de un *call* aumenta cuando lo hace el precio del subyacente mientras que el precio de los *puts* aumenta cuando el del subyacente disminuye. Recordemos que cuando poseemos un activo financiero, tal como un índice o una acción, una de las maneras de protegerse contra el riesgo de una caída en su precio es mediante la compra de sus respectivas opciones *put*. Si por el contrario, lo que se posee es primeramente una posición larga en un *put*, implica que apostamos por una caída del subyacente, sin embargo, para cubrir la posibilidad de que esta caída no ocurra se procedería a comprar una cierta cantidad del subyacente, así pues la lectura de la cobertura es inversa, pero las operaciones son las mismas y el efecto también, así cubrimos el *put* largo. Otro caso básico en la cobertura de opciones ocurre cuando, por ejemplo, una institución financiera suscribe o vende *calls*, en esta situación el emisor buscara irse procurando con una cierta cantidad

del activo subyacente ante la quizás creciente posibilidad de que al poseedor de la misma le sea conveniente ejercerla, es decir, se cubriría una posición corta en un *call* con la compra del subyacente. Para el caso de tener posiciones en opciones contrarias a las dos mencionadas anteriormente, la cobertura se realiza con ventas en corto del subyacente. Los mecanismos descritos expresan lo que en teoría debiera ser un proceso continuo en el tiempo para mantenerse inmune a las fluctuaciones del subyacente, más en la práctica estos reajustes se dan, en el mejor de los casos, pocas veces al día o en periodos más largos cada vez que el administrador del portafolio lo considere conveniente, debido al costo que implica. En resumen, en cuanto a la posición en el subyacente, tenemos que las posiciones en *put* se cubren en el mismo sentido, ya sea posiciones cortas o largas, mientras que para el caso de los *calls* la posición en el subyacente son opuestas.

Por otra parte para mantener neutralidad en otras variables tales como la volatilidad (vega) o sobre la misma delta (gamma) se requiere comprar o vender opciones adicionales sobre el mismo subyacente.

Regresando al caso práctico que estamos estudiando tenemos que para crear la forma de un *straddle* en el dinero corto, también podemos tomar dos *puts* largos en el dinero junto con una posición larga en el subyacente. En este ejemplo, para aprovechar que los *puts* fuera del dinero están baratos, se utilizara un *put* en el dinero y otro fuera del dinero para posteriormente hacerles cobertura delta al tomar una posición larga en el subyacente. Si la estrategia es autofinanciada se cumplirá la siguiente igualdad al hacer el costo de la estrategia igual al monto en efectivo B para comprarla.

$$p_{1,atm} + p_{2,otm} - S_t(\delta_{p,atm} + \delta_{p,otm}) = B \quad (Ec.3.8)$$

Un *risk reversal* corto está formado por un *put* largo fuera del dinero más un *call* corto fuera del dinero. El costo de un *risk reversal* delta neutral lo podemos expresar como

$$n_p p_{otm} - n_c c_{otm} + S_t(n_c \delta_c - n_p \delta_p) = 0 \quad (Ec.3.9)$$

$$\frac{n_p}{n_c} p_{otm} - c_{otm} + S_t\left(\frac{n_p}{n_c} \delta_p - \delta_c\right) = 0$$

(En esta notación un *risk reversal* puro ocurre cuando $n_p = n_c = 1$)

Javaheri(2005) menciona que para cubrir esta estrategia ante fluctuaciones de la volatilidad implícita hay que hacer el portafolio vega neutral, para ello tendríamos que considerar la igualdad

$$n_c v_c - n_p v_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n_p / n_c = v_c / v_p \quad (Ec.3.10)$$

donde n_i es el número de opciones del tipo i , v_i es el valor de vega de la opción i .

Igualmente sustituyendo la ecuación anterior tenemos

$$\frac{v_c}{v_p} p_{otm} - c_{otm} + S_t \left(\frac{v_c}{v_p} \delta_p - \delta_c \right) = 0 \quad (Ec.3.11)$$

con lo que conseguimos un portafolio delta-vega neutral.

Un *butterfly* corto lo podemos construir a partir de un *straddle* largo y un *strangle* corto, éste está formado por la venta de un *call* y un *put* fuera del dinero y un *call* y un *put* comprado en el dinero.

$$\Pi = -c_{otm} - p_{otm} + c_{atm} + p_{atm} + S_t \left(-\delta_{c,otm} - \delta_{p,otm} + \delta_{c,atm} + \delta_{p,atm} \right) \quad (Ec.3.12)$$

Procediendo como en el caso anterior hacemos a ambos delta-vega neutral

$$\begin{aligned} \Pi = & -c_{otm} - \frac{v_{c,otm}}{v_{p,otm}} p_{otm} + c_{atm} + \frac{v_{c,atm}}{v_{p,atm}} p_{atm} \\ & + S_t \left(-\delta_{c,otm} - \frac{v_{c,otm}}{v_{p,otm}} \delta_{p,otm} + \delta_{c,atm} + \frac{v_{c,atm}}{v_{p,atm}} \delta_{p,atm} \right) \end{aligned} \quad (Ec.3.13)$$

Para hacer la estrategia autofinanciada integramos un depósito en efectivo B con rendimientos a la tasa libre de riesgo.

$$0 = B - c_{otm} - \frac{V_{c,otm}}{V_{p,otm}} p_{otm} + c_{atm} + \frac{V_{c,atm}}{V_{p,atm}} p_{atm} + S_t \left(-\delta_{c,otm} - \frac{V_{c,otm}}{V_{p,otm}} \delta_{p_{otm}} + \delta_{c,atm} + \frac{V_{c,atm}}{V_{p,atm}} \delta_{p_{atm}} \right)$$

(Ec.3.14)

En el anexo 2, en las Tablas de la A2.5 a la A2.7, se presenta una simulación de la cobertura dinámica delta de cada una de las estrategias autofinanciadas descritas en esta sección.

La tabla 4.6, resume las ganancias netas de las posiciones tomadas en inversiones en opciones. En todos los casos las ganancias resultaron positivas y altamente rentables. Las posiciones cubiertas presentan mayores ganancias debido principalmente al proceso de *gamma scalping* descrito en la sección 3.6.

Tabla 4.6. Ganancia neta		
Estrategia	Posición descubierta	Posición con cobertura delta
Straddle largo en el dinero	\$ 136.7	
Strangle largo		\$ 439.79
Risk reversal corto	\$ 218.7	\$ 198.37
Butterfly corto	\$ 76	\$ 842.05

Fuente: Elaboración propia.

5 Conclusiones

En esta tesis exploramos la hipótesis que señala que es posible formular una estrategia de inversión con base al pronóstico de valores de un activo financiero, implícito en una muestra transversal de precios de mercado de sus opciones de tipo europeo. El principal detonante para la realización de esta investigación fue la inquietud de explorar un enfoque de inversión diferente a los más conocidos análisis técnico y análisis fundamental –ver capítulo uno. Lo que se desea con este enfoque es encontrar señales en los precios de los derivados sobre el activo en el cual se quiere invertir.

En el capítulo dos revisamos la literatura referente a la extracción de las llamadas funciones de distribución de riesgo neutral y de sus correspondientes transformaciones a precios del mundo real, las cuales se puede utilizar como indicadores - en forma de funciones de distribución de probabilidad- de las expectativas o sentimientos en el mercado sobre el precio futuro de cierto activo subyacente. A través de la exposición de estos temas y la definición de conceptos habituales en el mercado de opciones -mayormente descritos en el capítulo tres- es que llegamos a describir en la sección 3.7 el uso de estas distribuciones en el contexto de una estrategia de inversión. Así pues, la interpretación que se le da a una distribución de probabilidad implícita de acuerdo con el desarrollo aquí presentado es muy parecida a la que se hace en el análisis técnico, en el sentido de que a partir de su forma se pueden generar reglas de decisión. Bajo este mismo orden de ideas, presentamos en la sección 2.3 el llamado “problema del peso”, condición que hay que tomar en cuenta al momento de interpretar las señales que nos da una distribución implícita. Así también, consideramos que es necesario estar al tanto del efecto que los algoritmos automáticos de negociación tienen sobre el precio de los activos, ya que podrían generar señales que no manifiestan el sentir verdadero del mercado.

Por lo anterior, podemos decir que al igual que en otros enfoques de inversión activa, es necesario que el administrador de inversiones este bien informado sobre las peculiaridades del comportamiento del activo subyacente, así como el de otras variables que pudieran afectarle de manera significativa. Esto es porque a fin de cuenta el administrador debe ser capaz de poder emitir una opinión propia en cuanto a que si resulta más conveniente seguir la dirección que plantea el mercado o ir en contra de él. De hecho el administrador puede expresar su opinión sobre el futuro

del valor de un activo mediante su propia distribución de expectativas, la cual utiliza posteriormente para valorar como caras o baratas a las opciones.

Consideramos que es muy importante señalar que para que las estrategias basadas en este enfoque de lectura del mercado tengan cierta validez, es necesario que los precios de las opciones sean verdaderos predictores del sentir del mercado, es decir, se requiere que el respectivo mercado de opciones tenga un alto nivel de liquidez o volumen de operación, de tal forma que el precio observado corresponda más a un mecanismo natural de formación de precios que el propuesto por un modelo de valuación. En este mismo sentido cabe mencionar que en un principio el autor se planteó utilizar datos sobre cotizaciones de opciones sobre futuros del IPC mexicano, sin embargo se detectó que existe aún poco volumen de operación. Derivado de esta necesidad de tener mercados de opciones con altos niveles de liquidez, la oferta de posibles activos subyacente a utilizar queda muy acotada, por lo que se debe recurrir en la mayoría de los casos a opciones sobre índices de precios y que estos coticen en mercados bien desarrollados.

Precisamente la implementación práctica de la estrategia en el capítulo cuatro, pone de manifiesto la importancia de aspectos prácticos como los señalados en los párrafos anteriores. Así también para este cuarto capítulo, vale la pena recalcar que la estrategia desarrollada se basa en la compra y venta de opciones y no directamente sobre el subyacente, lo cual resulta ser más barato en términos económicos pero que por estar altamente apalancada, potencializa las posibles ganancias o pérdidas, por lo que se recomienda que antes de tomar cualquier combinación de posiciones de compra y venta de opciones se cuente con un plan de contingencia para corregir las posiciones.

Por tanto, en lo referente a los resultados que se pudieran obtener al utilizar este enfoque, debe tenerse claramente en cuenta que aunque la información extraída no es inequívoca acerca de eventos futuros, si representa una herramienta que puede ayudar a tomar decisiones más informadas, así también sigue siendo necesario ponderar todos los posibles riesgos asociados a la inversión y en la medida de lo posible cubrirlos.

Por último, una vez expuestas las ideas principales que caracterizan este enfoque de inversión, queda como un proyecto a realizar el hacer simulaciones de estrategias orientadas a probar esquemas que busquen encontrar por ejemplo, mejores fechas de entrada y salida de los

contratos; averiguar cuales niveles de sesgo, volatilidad o curtosis en las distribuciones son los que pueden ofrecer mayores probabilidad de rentabilidad, etc.

También una posible línea de investigación a futuro podría ser la de realizar un análisis profundo de la relación que pudiera existir entre las distribuciones implícitas de probabilidad y el fenómeno del “problema del peso”, pues ambos dependen enteramente de las expectativas de los agentes económicos. Por ejemplo, preguntarse ¿cuál es la proporción en los sesgos sistemáticos - si es que los hay- en una distribución implícita causados por el “problema del peso”? ¿es posible eliminar, aprovechar o neutralizar este sesgo o el “problema del peso” en el contexto de un estrategia de inversión?

Anexo 1. Formulario

Densidad de la distribución normal

$$N(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Densidad de la probabilidad log-normal

Una distribución de de una variable aleatoria es aquella en la cual su logaritmo natural está normalmente distribuido. Es decir, Si $x \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \exp(x) \sim \text{Log} - N(\mu, \sigma^2)$. Su función de densidad está dada por

$$\text{log} - N(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

así μ y σ son la media y la desviación estándar del logaritmo de la variable x . Delo anterior tenemos que está definida solo para $x > 0$.

Mezcla de distribuciones

Implica una combinación convexa de n funciones de distribución o densidad, con ponderaciones $w_i \geq 0$ y $\sum x_i = 1$, Así por ejemplo podríamos expresar una mezcla g de dos distribuciones normales o lognormales con sus respectivos parámetros

$$g = w_1 L(S_t|\alpha_1, \beta_1) + w_2 L(S_t|\alpha_2, \beta_2)$$

Momentos

El k-esimo momento de una distribución $p(x)$ de una variable aleatoria X se definan como

$$\mu_k := E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

Los momentos centrales están definidos por

$$m_k := E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k p(x) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

En particular para el caso de una distribución lognormal tenemos

Media	$\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$
Varianza	$[\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2)$
sesgo	$[\exp(\sigma^2) + 2] \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$
curtosis	$\exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 3$

Para el caso de estimar la media de una mezcla g de n distribuciones tendremos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{i=1}^n w_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i \int_{-\infty}^{\infty} x f_i(x) dx$$

por lo que la media de la mezcla es igual a la ponderación de las medias de las distribuciones que la dan origen.

Por otra parte, el k -ésimo momento central de una mezcla de n distribuciones están dados por

$$E[(X - \mu)^k] = \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\mu_i - \mu)^{k-l} w_i E[(X_i - \mu_i)^l]$$

Expresando los momentos de la mezcla en términos de los momentos de sus n distribuciones componentes tenemos

$$\sigma_m^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n w_i [(\mu_i - \mu)^2 + \sigma_i^2]$$

$$sesgo_m = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma_m^3} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i [(\mu_i - \mu)^3 + 3(\mu_i - \mu)\sigma_i^2 + sesgo_i \sigma_i^3]}{\sigma_m^3}$$

$$curtosis_m = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma_m^4}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n w_i [(\mu_i - \mu)^4 + 6(\mu_i - \mu)^2 \sigma_i^2 + 4(\mu_i - \mu) sesgo_i + curtosis_i \sigma_i^4]}{\sigma_m^4}$$

Anexo 2. Tablas

TABLA A2.1 FUTUROS SOBRE MINI IBEX 35®

ACTIVO SUBYACENTE	Índice IBEX 35
DESCRIPCION DEL INDICE	El IBEX 35 es un índice ponderado por capitalización, compuesto por las 35 compañías más líquidas que cotizan en el Mercado Continuo de las cuatro Bolsas Españolas.
MULTIPLICADOR	1 euro.
NOMINAL DEL CONTRATO	En cada momento, el nominal del contrato se obtiene multiplicando la cotización del futuro Mini IBEX 35 por el Multiplicador.
FORMA DE COTIZACION	En puntos enteros del Índice terminados en cero o en cinco. Por lo tanto, la fluctuación mínima es de 5 puntos.
FLUCTUACION MAXIMA	No existe.
VENCIMIENTOS	<p>Estarán abiertos a negociación, compensación y liquidación:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Los diez vencimientos más próximos del ciclo trimestral Marzo-Junio-Septiembre-Diciembre. - Los dos vencimientos mensuales más próximos que no coincidan con el primer vencimiento del ciclo trimestral. - Los vencimientos del ciclo semestral Junio-Diciembre no incluidos anteriormente hasta completar vencimientos con una vida máxima de cinco años.
FECHA DE VENCIMIENTO	Tercer viernes del mes de vencimiento.
ULTIMO DIA DE NEGOCIACION	La Fecha de Vencimiento.
PRECIO DE LIQUIDACIÓN DIARIA	Igual a la de los Futuros IBEX 35.
PRECIO DE LIQUIDACION A VENCIMIENTO	Igual a la de los Futuros IBEX 35.

TABLA A2.2 OPCIONES SOBRE IBEX 35®

ACTIVO SUBYACENTE	Un Futuro mini sobre IBEX 35 del mismo vencimiento.
NOMINAL DEL CONTRATO	En cada momento, el nominal del contrato se obtiene multiplicando la cotización del futuro Mini IBEX 35 por 1 €.
ESTILO DE LA OPCION	Europea (se ejerce sólo en la Fecha de Ejercicio)
TIPOS DE OPCION	De compra (Call) y de venta (Put).
FECHA DE VENCIMIENTO	Tercer viernes del mes de vencimiento.
FECHA DE EJERCICIO	La fecha de Vencimiento.
FECHA DE LIQUIDACIÓN DEL CONTRATO	Primer Día Hábil posterior a la Fecha de Vencimiento.
EJERCICIO	Automático para todos los Contratos que aporten beneficio a su tenedor.
ÚLTIMO DÍA DE NEGOCIACIÓN	La fecha de Vencimiento.
PRECIOS DE EJERCICIO	En puntos enteros del Futuro mini sobre IBEX 35. Para los contratos con vencimiento superior a dos meses, los Precios de Ejercicio terminarán en centena exacta; para los contratos con vencimiento inferior a dos meses, los Precios de Ejercicio podrán terminar en 50 o en centena exacta.
FORMA DE COTIZACIÓN DE LAS PRIMAS	En puntos enteros del Futuro mini sobre IBEX 35, con una fluctuación mínima adecuada según la cotización del Activo Subyacente y/o las necesidades del mercado, lo que se establecerá por Circular. La fluctuación mínima podrá ser distinta en Operaciones negociadas directamente entre Miembros.
FLUCTUACIÓN MÁXIMA DE LAS PRIMAS	No existe.

En <http://www.meff.es/asp/Comun/Pagina.aspx?11=Financiero&f=OpcionesIBEX35>

TABLA A2.3 SELECCIÓN DE CONTRATOS DE OPCIONES

FECHA SESION	CONTRATO	STRIKE	MADURACIÓN	BID	ASK	MAX	MIN	CIERRE	ASENTADO	VOLATILIDAD IMPLICITA	DELTA	EURIBOR	VALOR DEL SUBYACENTE
18/06/2014	PIBX10600N14	10600	18/07/2014	65	76	75	75	75	76	17.69	-0.23	0.49	10998
18/06/2014	PIBX10700N14	10700	18/07/2014	0	97	105	97	100	98	17.22	-0.28	0.49	10998
18/06/2014	PIBX10800N14	10800	18/07/2014	121	0	140	125	127	126	16.74	-0.34	0.49	10998
18/06/2014	PIBX10900N14	10900	18/07/2014	0	350	174	162	164	160	16.27	-0.42	0.49	10998
18/06/2014	CIBX11000N14	11000	18/07/2014	155	205	205	180	188	200	15.89	0.51	0.49	10998
18/06/2014	PIBX11000N14	11000	18/07/2014	150	208	220	200	200	201	15.79	-0.49	0.49	10998
18/06/2014	CIBX11100N14	11100	18/07/2014	0	0	140	140	140	152	15.63	0.43	0.49	10998
18/06/2014	CIBX11200N14	11200	18/07/2014	0	175	115	99	108	112	15.36	0.35	0.49	10998
18/06/2014	CIBX11300N14	11300	18/07/2014	67	100	85	69	75	79	15.1	0.27	0.49	10998
18/06/2014	CIBX11400N14	11400	18/07/2014	46	0	52	46	51	54	14.84	0.21	0.49	10998

TABLA A2.4 EVOLUCIÓN DIARIA DE ALGUNOS CONTRATOS DE OPCIONES

FECHA SESION	PIBX 10700 N14			PIBX 11000 N14			CIBX 11000 N14			CIBX 11300 N14		
	ASENTADO	VOLATILIDAD	DELTA	ASENTADO	VOLATILIDAD	DELTA	ASENTADO	VOLATILIDA	DELTA	ASENTADO	VOLATILIDAD	DELTA
18/06/2014	98	17.22	-0.28	201	15.79	-0.49	200	15.89	0.51	79	15.1	0.27
19/06/2014	66	16.6	-0.22	147	15.15	-0.41	242	15.35	0.59	97	14.38	0.33
20/06/2014	60	15.56	-0.21	143	14.11	-0.43	239	16.81	0.56	101	15.9	0.32
23/06/2014	67	16.64	-0.23	158	15.18	-0.46	195	15.18	0.54	69	14.34	0.27
24/06/2014	61	15.64	-0.23	153	14.15	-0.48	171	14.39	0.52	54	13.62	0.24
25/06/2014	93	15.71	-0.32	223	14.54	-0.6	114	14.84	0.4	31	14.14	0.15
01/07/2014	69	15.95	-0.29	193	14.66	-0.6	95	14.54	0.4	20	13.92	0.12
02/07/2014	54	15.71	-0.24	164	14.33	-0.56	106	14.45	0.44	22	13.87	0.14
03/07/2014	31	15.81	-0.16	108	14.2	-0.44	149	14.14	0.56	34	13.42	0.2
04/07/2014	36	14.74	-0.2	136	13.26	-0.55	96	13.38	0.45	15	12.84	0.12
07/07/2014	60	15.63	-0.31	209	14.61	-0.71	49	14.55	0.29	5	14.05	0.05
08/07/2014	143	16.04	-0.57	367	15.57	-0.89	16	16.23	0.12	1	15.76	0.01
09/07/2014	105	16.26	-0.48	309	15.8	-0.85	21	16.1	0.15	1	15.68	0.02
10/07/2014	249	17.12	-0.78	519	16.64	-0.97	3	17.12	0.03	0	16.65	0
11/07/2014	246	17.48	-0.8	519	16.96	-0.98	2	16.54	0.02	0	16.02	0
14/07/2014	162	17.85	-0.74	432	17.38	-0.99	1	17.26	0.01	0	16.79	0
15/07/2014	215	17.71	-0.88	505	17.28	-1	0	17.58	0	0	17.16	0
16/07/2014	76	18.2	-0.59	334	17.83	-0.99	0	16.15	0.01	0	15.77	0
17/07/2014	183	21.16	-0.94	480	20.83	-1	0	20.71	0	0	20.38	0
18/07/2014	237.7	18.88	-1	537.7	18.59	-1	0	18.39	0	0	18.11	0

TABLA A2.5 STRANGLE LARGO (SINTETICO) (*put largo_{atm} + put largo_{otm} + subyacente*)

FECHA SESION	COSTO DE LAS OPCIONES	DELTA DE LA POSICIÓN EN OPCIONES	VALOR DEL SUBYACENTE	REQUERIMIENTO DE SUBYACENTE SEGUN DELTA	VARIACIÓN EN CAPITAL REQUERIDO	DEUDA	EURIBOR	TAO	DEUDA FINAL DEL DÍA	VALOR PORTAFOLIO
18/06/2014	299.00	0.77	10,998.00	8,468.46		8,767.46	0.4900	0.0822	8,770.99	0.00
19/06/2014	213.00	0.63	11,093.00	6,988.59	-1,479.87	7,291.12	0.4890	0.0795	7,293.96	-89.53
20/06/2014	203.00	0.64	11,063.00	7,080.32	91.73	7,385.69	0.4890	0.0767	7,388.46	-102.37
23/06/2014	225.00	0.69	11,037.10	7,615.60	535.28	7,923.74	0.4890	0.0685	7,926.39	-83.14
24/06/2014	214.00	0.71	11,014.90	7,820.58	204.98	8,131.37	0.4890	0.0658	8,133.98	-96.79
25/06/2014	316.00	0.92	10,887.90	10,016.87	2,196.29	10,330.27	0.4870	0.0630	10,333.44	2.59
01/07/2014	262.00	0.89	10,903.60	9,704.20	-312.66	10,020.78	0.4880	0.0466	10,023.06	-54.58
02/07/2014	218.00	0.80	10,941.50	8,753.20	-951.00	9,072.05	0.4870	0.0438	9,073.99	-100.85
03/07/2014	139.00	0.60	11,041.50	6,624.90	-2,128.30	6,945.69	0.4880	0.0411	6,947.08	-181.79
04/07/2014	172.00	0.75	10,958.60	8,218.95	1,594.05	8,541.13	0.4860	0.0384	8,542.73	-150.18
07/07/2014	269.00	1.02	10,840.80	11,057.62	2,838.67	11,381.39	0.4860	0.0301	11,383.06	-54.78
08/07/2014	510.00	1.46	10,646.50	15,543.89	4,486.27	15,869.33	0.4860	0.0274	15,871.45	184.56
09/07/2014	414.00	1.33	10,710.80	14,245.36	-1,298.53	14,572.92	0.4870	0.0247	14,574.67	86.44
10/07/2014	768.00	1.75	10,483.60	18,346.30	4,100.94	18,675.61	0.4870	0.0219	18,677.60	438.69
11/07/2014	765.00	1.78	10,483.40	18,660.45	314.15	18,991.75	0.4870	0.0192	18,993.53	433.70
14/07/2014	594.00	1.73	10,568.90	18,284.20	-376.26	18,617.27	0.4880	0.0110	18,618.27	260.93
15/07/2014	720.00	1.88	10,495.00	19,730.60	1,446.40	20,064.67	0.4870	0.0082	20,065.47	385.93
16/07/2014	410.00	1.58	10,666.00	16,852.28	-2,878.32	17,187.15	0.4860	0.0055	17,187.61	75.13
17/07/2014	663.00	1.94	10,520.00	20,408.80	3,556.52	20,744.13	0.4860	0.0027	20,744.41	327.67
18/07/2014	775.40	2.00	10,462.30	20,924.60	515.80	21,260.21	0.4850			439.79

Strikes: PUT ATM LARGO=11,000 y strike PUT OTM LARGO=10,700.

A la fecha de maduración: a) El subyacente cotiza a 10,462.30; b) Se posee un monto en el activo subyacente de 20,924.60; c) Se tiene una deuda por un monto de 21,228.42; d) Ambas opciones put se ejercen: 1. Se vende el subyacente que se posee, lo que implica la eliminación del activo en la cartera, y el ingreso de 11,000+10,700=21,700, monto que es suficiente para cubrir la deuda, con lo que se

tiene un una ganancia de 439.79

TABLA A2.6 RISK REVERSAL CORTO

FECHA SESION	COSTO DE LAS OPCIONES	DELTA DE LA POSICIÓN EN OPCIONES	VALOR DEL SUBYACENTE	REQUERIMIENTO DE SUBYACENTE SEGUN DELTA	VARIACIÓN EN CAPITAL REQUERIDO	DEUDA	EURIBOR	TAO	DEUDA FINAL DEL DÍA	VALOR PORTAFOLIO
18/06/2014	19.00	0.55	10,998.00	6,048.90		6,067.90	0.4900	0.0822	6,070.34	0.00
19/06/2014	-31.00	0.55	11,093.00	6,101.15	52.25	6,122.59	0.4890	0.0795	6,124.97	-52.44
20/06/2014	-41.00	0.53	11,063.00	5,863.39	-237.76	5,887.21	0.4890	0.0767	5,889.42	-64.82
23/06/2014	-2.00	0.50	11,037.10	5,518.55	-344.84	5,544.58	0.4890	0.0685	5,546.44	-28.03
24/06/2014	7.00	0.47	11,014.90	5,177.00	-341.55	5,204.89	0.4890	0.0658	5,206.57	-20.89
25/06/2014	62.00	0.47	10,887.90	5,117.31	-59.69	5,146.88	0.4870	0.0630	5,148.46	32.44
01/07/2014	49.00	0.41	10,903.60	4,470.48	-646.84	4,501.62	0.4880	0.0466	4,502.64	17.86
02/07/2014	32.00	0.38	10,941.50	4,157.77	-312.71	4,189.94	0.4870	0.0438	4,190.83	-0.17
03/07/2014	-3.00	0.36	11,041.50	3,974.94	-182.83	4,008.00	0.4880	0.0411	4,008.80	-36.06
04/07/2014	21.00	0.32	10,958.60	3,506.75	-468.19	3,540.62	0.4860	0.0384	3,541.28	-12.86
07/07/2014	55.00	0.36	10,840.80	3,902.69	395.94	3,937.21	0.4860	0.0301	3,937.79	20.47
08/07/2014	142.00	0.58	10,646.50	6,174.97	2,272.28	6,210.07	0.4860	0.0274	6,210.90	106.90
09/07/2014	104.00	0.50	10,710.80	5,355.40	-819.57	5,391.33	0.4870	0.0247	5,391.98	68.07
10/07/2014	249.00	0.78	10,483.60	8,177.21	2,821.81	8,213.78	0.4870	0.0219	8,214.66	212.42
11/07/2014	246.00	0.80	10,483.40	8,386.72	209.51	8,424.17	0.4870	0.0192	8,424.96	208.55
14/07/2014	162.00	0.74	10,568.90	7,820.99	-565.73	7,859.23	0.4880	0.0110	7,859.65	123.76
15/07/2014	215.00	0.88	10,495.00	9,235.60	1,414.61	9,274.26	0.4870	0.0082	9,274.63	176.34
16/07/2014	76.00	0.59	10,666.00	6,292.94	-2,942.66	6,331.97	0.4860	0.0055	6,332.14	36.97
17/07/2014	183.00	0.94	10,520.00	9,888.80	3,595.86	9,928.00	0.4860	0.0027	9,928.13	143.80
18/07/2014	237.70	1.00	10,462.30	10,462.30	573.50	10,501.63	0.4850	0.0000	10,501.63	198.37

El portafolio se construye con un put largo con strike de 10,700 y un call corto con strike de 13,000.

A la fecha de maduración: a) el precio de ejercicio del call no se alcanza, lo que implica que no se tendrá que pagar a la posición contraria, el put si se ejerce el cual beneficia a la actual estrategia. b) Se tiene en posesión el activo subyacente, el cual se vende a 10,462 para obtener un ingreso de 10,700 con este monto ingresado se paga el préstamo, restando la cantidad de 198.37

TABLA A2.7 BUTTERFLY CORTO

FECHA SESION	COSTO DE LAS OPCIONES	DELTA DE LA POSICIÓN EN OPCIONES	VALOR DEL SUBYACENTE	REQUERIMIENTO DE SUBYACENTE SEGUN DELTA	VARIACIÓN EN CAPITAL REQUERIDO	DEUDA	EURIBOR	TAO	DEUDA FINAL DEL DÍA	VALOR PORTAFOLIO
18/06/2014	224.00	-0.03	10,998.00	-329.94		-105.94	0.4900	0.0822	-105.98	0.00
19/06/2014	226.00	-0.07	11,093.00	-776.51	443.72	337.74	0.4890	0.0795	337.87	-888.25
20/06/2014	221.00	-0.02	11,063.00	-221.26	-553.15	-215.28	0.4890	0.0767	-215.36	215.02
23/06/2014	217.00	-0.04	11,037.10	-441.48	220.74	5.38	0.4890	0.0685	5.38	-229.86
24/06/2014	209.00	-0.03	11,014.90	-330.45	-110.15	-104.77	0.4890	0.0658	-104.80	-16.68
25/06/2014	213.00	0.03	10,887.90	326.64	-653.27	-758.08	0.4870	0.0630	-758.31	1,297.71
01/07/2014	199.00	0.03	10,903.60	327.11	0.00	-758.31	0.4880	0.0466	-758.48	1,284.42
02/07/2014	194.00	0.02	10,941.50	218.83	109.41	-649.07	0.4870	0.0438	-649.20	1,061.90
03/07/2014	192.00	-0.08	11,041.50	-883.32	1,104.15	454.95	0.4880	0.0411	455.04	-1,146.27
04/07/2014	181.00	0.02	10,958.60	219.17	-1,095.86	-640.82	0.4860	0.0384	-640.94	1,040.99
07/07/2014	193.00	0.16	10,840.80	1,734.53	-1,517.71	-2,158.65	0.4860	0.0301	-2,158.97	4,086.18
08/07/2014	239.00	0.21	10,646.50	2,235.77	-532.33	-2,691.30	0.4860	0.0274	-2,691.65	5,166.06
09/07/2014	224.00	0.24	10,710.80	2,570.59	-321.32	-3,012.98	0.4870	0.0247	-3,013.34	5,807.57
10/07/2014	273.00	0.16	10,483.60	1,677.38	838.69	-2,174.65	0.4870	0.0219	-2,174.88	4,125.03
11/07/2014	275.00	0.16	10,483.40	1,677.34	0.00	-2,174.88	0.4870	0.0192	-2,175.09	4,127.23
14/07/2014	271.00	0.24	10,568.90	2,536.54	-845.51	-3,020.60	0.4880	0.0110	-3,020.76	5,828.13
15/07/2014	290.00	0.12	10,495.00	1,259.40	1,259.40	-1,761.36	0.4870	0.0082	-1,761.43	3,310.76
16/07/2014	258.00	0.39	10,666.00	4,159.74	-2,879.82	-4,641.25	0.4860	0.0055	-4,641.37	9,058.99
17/07/2014	297.00	0.06	10,520.00	631.20	3,471.60	-1,169.77	0.4860	0.0027	-1,169.79	2,097.97
18/07/2014	300.00	0.00	10,462.30	0.00	627.74	-542.05	0.4850	0.00		842.05

Strikes: PUT LARGO ATM=11,000; PUT CORTO OTM=10,700; CALL LARGO ATM=11,000; CALL CORTO OTM=11,300.

El costo de las opciones fue de 224, la posición inicialmente es casi delta neutral, de hecho la delta nos dice que para "cubrirse" hay que hacer ventas en corto.

A la fecha de maduración: a) El subyacente cotiza a 10,462.30; b) No se posee el subyacente; c) Se tiene un ahorro neto de recursos por un monto de \$542; d) las opciones call atm y call corto otm no se ejercen, en una se pierde el premio y en la otra se gana, la opciones put se ejercen, con la put otm hay que pagar 10,700 por un activo cuyo precio es de 10,462, pero por otra parte se ejerce la put atm vendiendo a 11,000 el mismo activo (no se posee, no se necesita pues el que recibo es el que se vende)

Referencias

1. Abarca G., Benavides G., Gonzales Rangel José (2010). Exchange rate market expectations and the central bank policy: The case of the mexican peso-US dollar from 2005-2009. Banco de México, working paper No. 2010-17
2. Alexander Carol (2008). Market risk analysis, volume III, pricing, hedging and trading financial instruments, John Wiley & Sons Ltd
3. Alonso F., Blanco R, Rubio G., Option-implied preferences adjustments. Density forecast and the equity risk premium. Banco de España, documento de trabajo No. 603
4. Aint-Sahalia Yacine, Wang Yubo, Yared Francis (2001). Journal of Econometrics 102 67-110
5. Bahra Bhupinder (1997). Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application. Working Paper 66, Bank of England.
6. Bliss, R.,Panigirtzoglou N.(2000): Testing the Stability of the Implied Probability Density Functions. Bank of England
7. Bliss, R., Panigirtzoglou N.(2004). Option-Implied Risk Aversion Estimates. Journal of Finance, Vol. 59, No. 1, pp. 407-446.
8. Breeden, D, Litzenberger, R (1978). Prices of state-contingent claims implicit in options prices', The Journal of Business, Vol 51, No 4, pages 621-51
9. Carsten Jackwerth, J. (2004). Option-implied risk-neutral distributions and risk aversion. The Research Foundation of AIMR.
10. Casanova Martha E., Diaz de León A. (2004). Expectativas del mercado implícitas en los precios de instrumentos derivados: Aplicación al mercado cambiario y petrolero. Banco de México, working paper No. 2004-01.
11. Ceballos Luis (2010). Distribución de probabilidades implícita en opciones financieras. Banco central de Chile, working paper No. 596.
12. Clews Roger, Panigirtzoglou Nikolaos, Proudman James (2000). Recent developments in extracting information from options markets. Quarterly Bulletin. Bank of England
13. Cohen, Guy (2005). The Bible of Options Strategies, Financial Times Prentice Hall.

14. Cox, J and Ross, S (1976), The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3, pages 145–66.
15. De Vincent-Humphreys Rupert, Noss Josep (2012). Estimating probability distributions of future asset prices: empirical transformations from option-implied risk-neutral to real-world density functions, Bank of England, WorkingPaper No.455.
16. De Vincent-Humphreys Rupert, Puigvert Gutiérrez J. (2010). A quantitative mirror on the euribor market using implied probability density functions. European Central Bank, working paper series No. 1281.
17. Dunis Christian, Lequeux Pierre (2001). The Information Content of Risk Reversals, Liverpool Business School and Centre for International Banking, Economics and Finance
18. Fama Eugene F. (1965). "Random Walks In Stock Market Prices". *Financial Analysts Journal* 21 (5): 55–59.
19. Figlewski Stephen (2008). Estimating the implied risk neutral density for the U.S market portfolio. *Volatility and time series econometrics: Essays in honor of Robert F. Engle*, Oxford university press.
20. Hass Ornelas José R, Fajardo Barbachan José S, Rocha de Farias Aquiles (2012). Estimating relative risk aversion, risk neutral and real-word densities using brazilian real currency options. Banco central do Brasil, working paper series 269.
21. Hull John C. (2012). *Options, futures and other derivatives*. Prentice Hall.
22. Ivanova Vesela, Puigvert-Gutierrez Josep Maria (2013). Getting real forecasts, state price densities and risk premium from Euribor options.
23. James Jessica, Marsh Ian W. y Sarno Lucio (2012). *Handbook of exchange rates*. Wiley handbooks in financial engineering and econometrics.
24. Javaheri Alireza (2005). *Inside volatility arbitrage : the secrets of skewness*. Wiley finance.
25. Leoni, Peter (2014). *The greeks and hedging explained*. Financial engineering explained. Palgrave Macmillan.
26. Malz, A. (1997), 'Estimating the probability distribution of future exchange rates from options prices', *Journal of Derivatives*, Winter, pages 18–36.

27. Malz, A. (1997). Option-implied probability distributions and currency excess returns. Federal reserve bank of New York.
28. Martin D. Linderstrøm (2007). Derivatives. Introduction to option implied probabilities. Danske Bank A/S. June 8, 2007 www.danskebank.com/Research
29. Meizinger Steve. Trading with or against the skew.expiring Monthly. www.expiringmonthly.com
30. Micu Marian (2004). Extracting expectations from currency option prices: a comparison of methods. Bank of international settlements.
31. Nasybek S., Rehman S.(2011). Explaining the returns of active currency managers. BIS Papers No 58
32. Pojarliev, M, Levich R.M. (2011). Active currency management part II: Is there skill or alpha in currency investing?
33. Pojarliev, M. and R.M. Levich (2008). Do professional currency managers beat the benchmark?" *Financial Analysts Journal*, vol. 64, No. 5 (September/October): 18-30.
34. Record Neil (2010). Currency overlay. Wiley finance series
35. Ross, S (1976), 'Options and Efficiency', *Quarterly Journal of Economics*, vol. 90, pages 75-89.
36. Prosper Lamothe Fernández, Miguel Pérez Somalo (2003). *Opciones financieras y productos estructurados*, segunda edición. McGraw-Hill.
37. Shimko D. (1993). Bounds of probability. *Risk Magazine*, 6, 33-37.
38. Sill, Keith (2000). Understanding asset values: stock prices, exchange rates, and the "peso problem". Philadelphia FED.
39. Smith T. (2012). Option-implied probability distributions for future inflation. *Quarterly Bulletin*, volume 52 No. 3. Bank of England
40. Likehill group Capital Management, may 2012. likehillgroup.com.
41. Weinberg Steven A.(2001). Interpreting the volatility smile: An examination of the information content of option prices. Board of governors of the Federal Reserve System, International finance discussion papers, 706.
42. Xin Hai (2011). Currency overlay: A practical guide, second edition. Risk books.
43. Regímenes cambiarios en México a partir de 1954, Banco de México, septiembre 2009.

