



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS DE LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

*Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del Jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.*

*El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo del 80% de asistencias.*

*Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el período de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.*

*Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.*

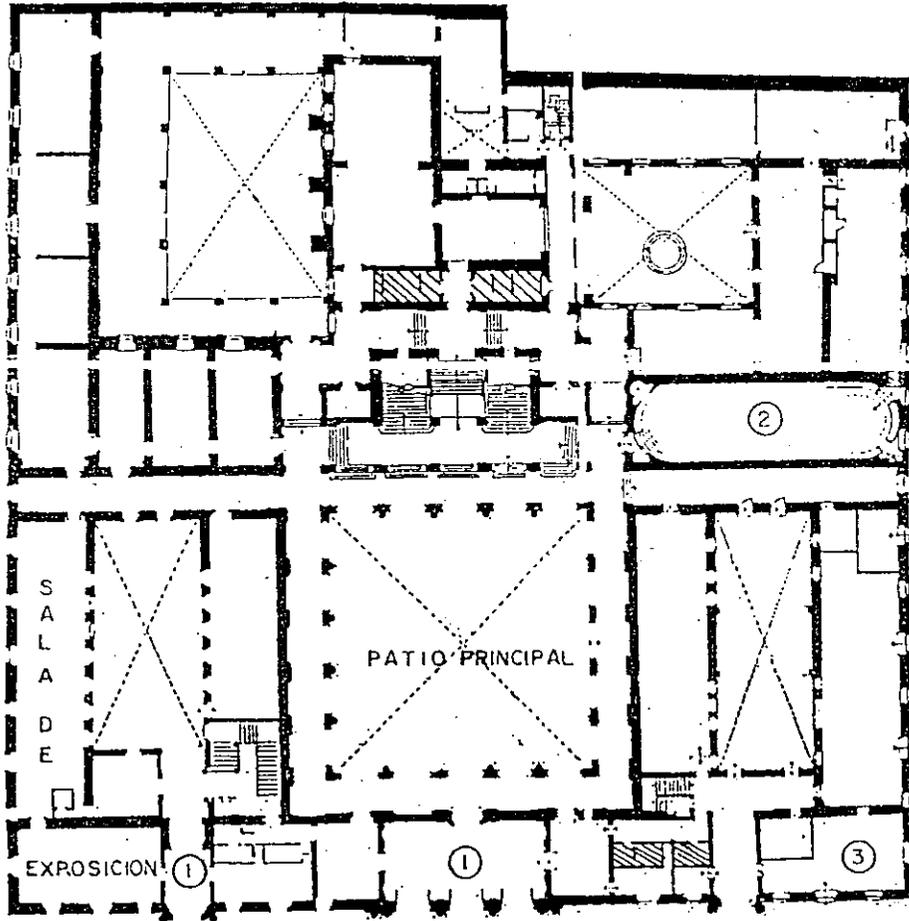
*Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.*

*Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.*

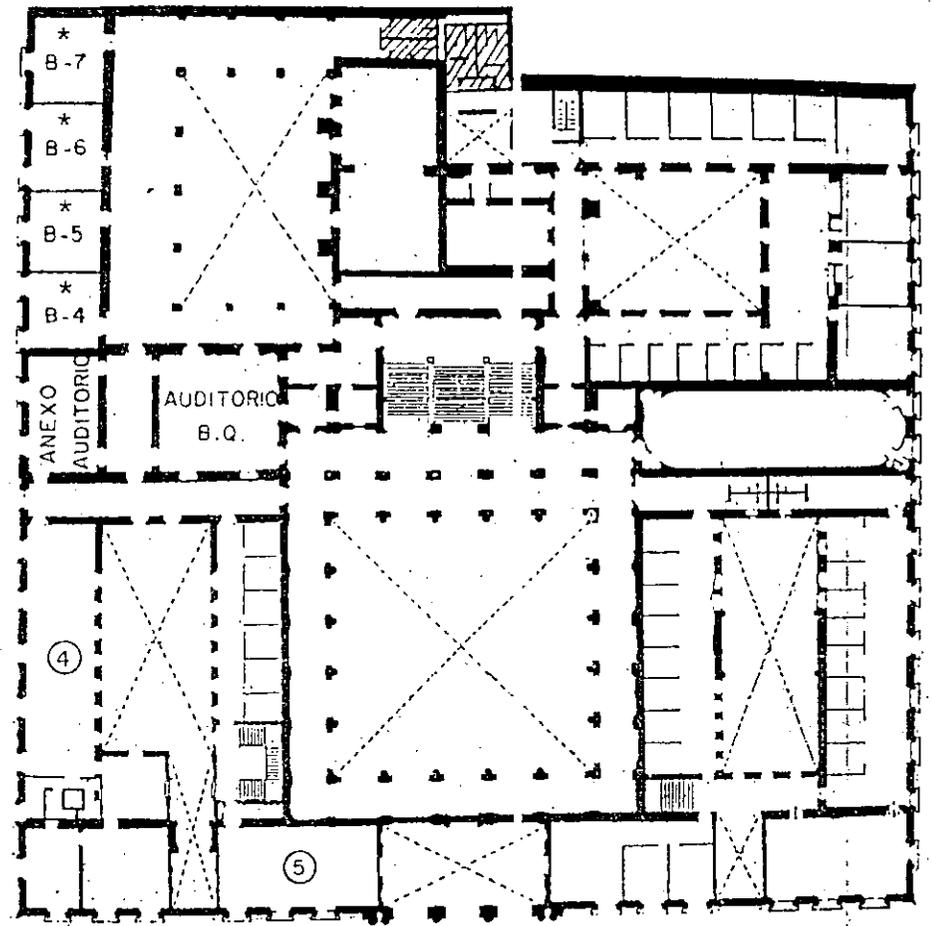
*Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con éso sean más fehacientes sus apreciaciones.*

**¡ GRACIAS !**

# PALACIO DE MINERIA



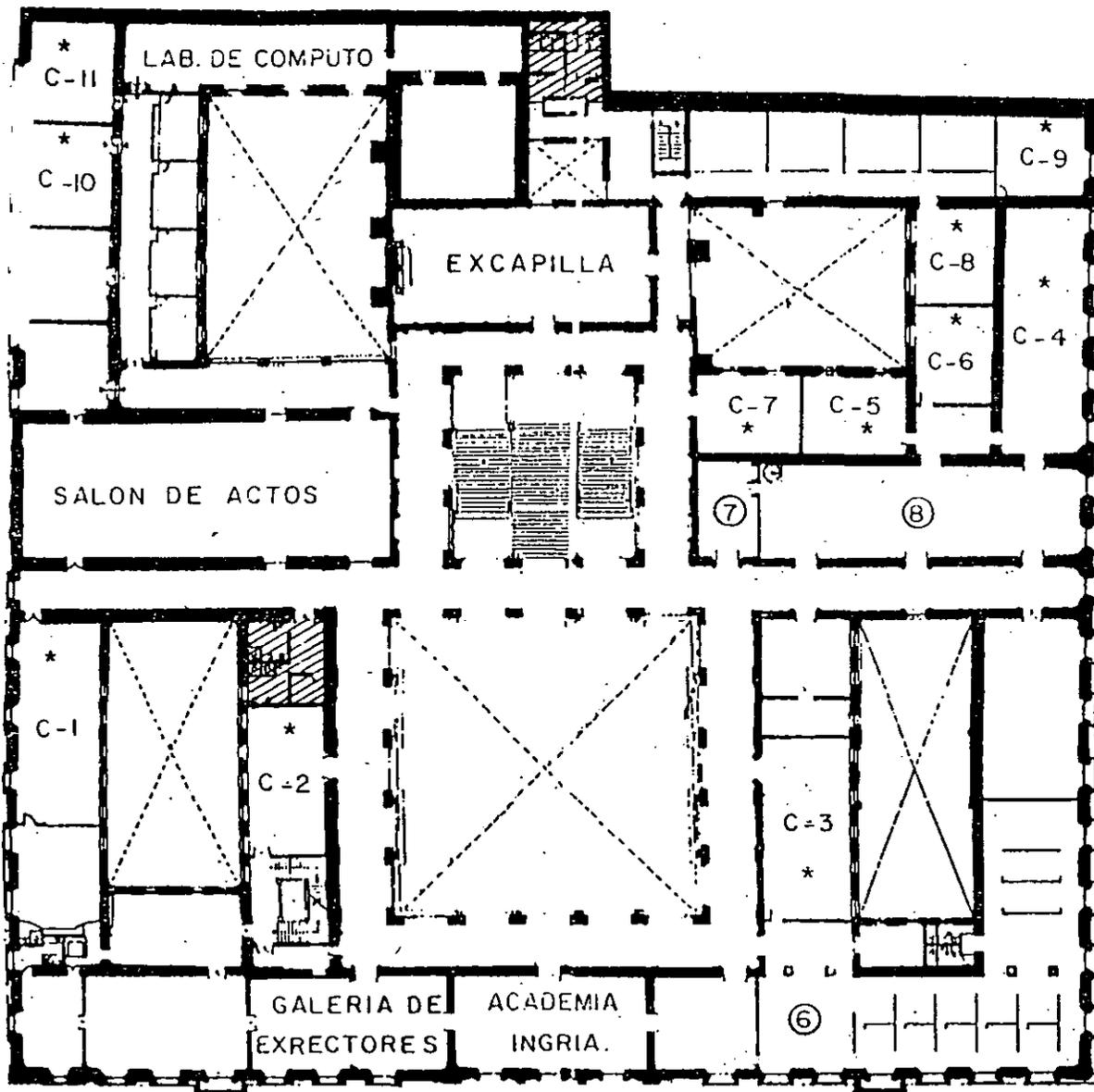
**PLANTA BAJA**



**MEZZANINNE**



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
CURSOS ABIERTOS



## GUIA DE LOCALIZACION

- 1 - ACCESO
- 2 - BIBLIOTECA HISTORICA
- 3 - LIBRERIA U N A M
- 4 - CENTRO DE INFORMACION Y DOCU-  
MENTACION "ING. BRUNO  
MASCANZONI"
- 5 - PROGRAMA DE APOYO A LA  
TITULACION
- \* AULAS
- 6 - OFICINAS GENERALES
- 7 - ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL  
DE ASISTENCIA.
- 8 - SALA DE DESCANSO
- ▨ SANITARIOS

**1er. PISO**

DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
 CURSOS ABIERTOS  
**XX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**  
**MODULO II: ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO**  
 Del 24 al 30 de junio de 1994.

F E C H A	H O R A R I O	T E M A	P R O F E S O R
Viernes 24	17;00 a 21;00 hrs.	Introducción Análisis sísmico de sistemas de un grado de libertad	Dr. Octavio A. Rascón Chávez
Sábado 25	9;00 a 13;00 hrs.	Análisis sísmico de sistemas discretos de varios grados de libertad	M.I. José Luis Trigos Suárez
Lunes 27	17;00 a 21;00 hrs.	Análisis sísmico . Consideraciones Generales	M.I. José L. Trigos Suárez
Martes 28, Miércoles 29 y Jueves 30	17;00 a 21;00 hrs.	Análisis Dinámico Análisis simplificados. Método Estático, Coeficientes Sísmicos.	M.I. Ramón Cervantes

# EVALUACION DEL PERSONAL DOCENTE

**CURSO:** Módulo II: Análisis Estático y Dinámico de Estructuras Sujetas a Sismo  
**FECHA:** Del 24 al 30 de junio de 1994.

CONFERENCISTA	DOMINIO DEL TEMA	USO DE AYUDAS AUDIOVISUALES	COMUNICACION CON EL ASISTENTE	PUNTUALIDAD
Dr. Octavio A. Rascón Chávez				
M.I. José Luis Trigos Suárez				
M.I. Ramón Cervantes				

## EVALUACION DE LA ENSEÑANZA

ORGANIZACION Y DESARROLLO DEL CURSO	
GRADO DE PROFUNDIDAD LOGRADO EN EL CURSO	
ACTUALIZACION DEL CURSO	
APLICACION PRACTICA DEL CURSO	

## EVALUACION DEL CURSO

CONCEPTO	CALIF.
CUMPLIMIENTO DE LOS OBJETIVOS DEL CURSO	
CONTINUIDAD EN LOS TEMAS	
CALIDAD DEL MATERIAL DIDACTICO UTILIZADO	

ESCALA DE EVALUACION: 1 A 10

1.- ¿LE AGRADO SU ESTANCIA EN LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA?

SI	NO
----	----

SI INDICA QUE "NO" DIGA PORQUE.

2.- MEDIO A TRAVES DEL CUAL SE ENTERO DEL CURSO:

PERIODICO EXCELSIOR		FOLLETO ANUAL		GACETA UNAM		OTRO MEDIO	
PERIODICO EL UNIVERSAL		FOLLETO DEL CURSO		REVISTAS TECNICAS			

3.- ¿QUE CAMBIOS SUGERIRIA AL CURSO PARA MEJORARLO?

---

---

4.- ¿RECOMENDARIA EL CURSO A OTRA(S) PERSONA(S)?

SI		NO	
----	--	----	--

5.- ¿QUE CURSOS LE SERVIRIA QUE PROGRAMARA LA DIVISION DE EDUCACION CONTINUA.

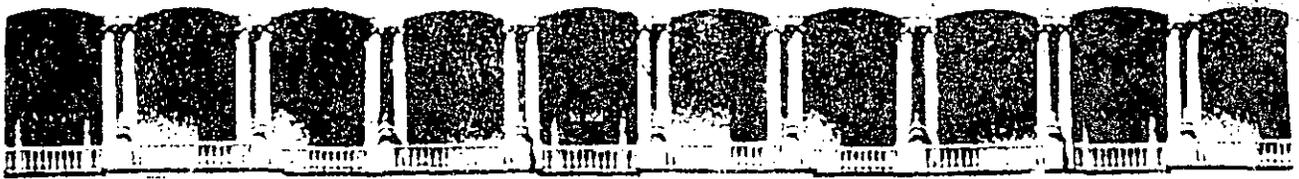
---

---

6.- OTRAS SUGERENCIAS:

---

---



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**XX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO II "ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS  
A SISMO"**

**ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON FUNDAMENTO EN EL  
REGLAMENTO DE CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (FCDF87)**

**ING. RAMON CERVANTES BELTRAN.**

**1 9 9 4.**

**CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FATULTAD DE INGENIERIA  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**JUNIO DE 1992.**

**ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON FUNDAMENTO EN EL REGLAMENTO DE  
CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RCDF87)**

**Ramón Cervantes Beltrán\***

**\* Profesor, Facultad de ingeniería, UNAM**

**ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON FUNDAMENTO EN EL REGLAMENTO DE  
CONSTRUCCIONES PARA EL DISTRITO FEDERAL (RCDF87)**

1. INTRODUCCION	1
2. MODELACION ESTRUCTURAL DE LAS EDIFICACIONES	3
3. PARAMETROS QUE DEFINEN LA MAGNITUD DE LAS FUERZAS SISMICAS	13
4. FUERZAS SISMICAS	38
5. FUERZAS SISMICAS EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES RESISTENTES DE LAS EDIFICACIONES	58
6. EJEMPLOS DESARROLLADOS PASO A PASO	66
FIGURAS	

## 1. INTRODUCCION

Uno de los temas del Curso Internacional de Ingeniería Sísmica que cada año organiza la División de Educación Continua de la Facultad de Ingeniería, UNAM, es la cuantificación de las fuerzas que un sismo de diseño le ocasiona a un edificio, de acuerdo con los métodos que recomienda algún código que refleje las experiencias del comportamiento de tales edificaciones ante la ocurrencia sistemática de dichos fenómenos naturales de magnitudes significativas, como es el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal vigente (RCDF87).

El hablar de edificios implica una geometría muy especial (trabes, columnas, muros, losas, etc.) construída con determinados materiales (concreto, acero, mampostería, etc.) que durante su vida útil va a estar sometida a una serie de sollicitaciones que tiene que resistir, entre las que se cuenta las debidas a los sismos. Durante el desarrollo de la tecnología que conduce a construir edificaciones seguras y económicas, el ingeniero ha desarrollado una serie de métodos que involucran los conceptos señalados (geometría, material y cargas), que en conjunto conducen al concepto de estructura; y, desde luego, que el concepto de cargas, a medida que se define con mayor precisión se tiene que relacionar cada vez mas con los otros dos (geometría y material).

El tratar de cuantificar a uno (fuerzas) de los tres conceptos que definen a las estructuras (geometría, material y fuerzas) independientemente de los modelos estructurales del cual forman parte, es prácticamente imposible sin involucrar hipótesis simplificadoras que necesariamente deben conducir a resultados conservadores.

Los métodos basados en hipótesis simplificadoras y modelos estructurales simplificados se utilizaron con mucha frecuencia cuando la herramienta para operarlos consistía únicamente, en calculadora, papel y lápiz. Todavía existen algunos métodos y modelos que aún se utilizan tanto con las herramientas originales como con las computadoras. Es necesario aclarar que la programación de estos métodos es menos integral que los que se desarrollaron para ser utilizados con una computadora.

En este tema se presentan los conceptos que permiten aplicar los métodos que el RCDF87 recomienda para la cuantificación de las fuerzas que un sismo de diseño le ocasiona a un edificio, a fin de determinar los elementos mecánicos y cinemáticos que dicho sismo de diseño provoca y poder así determinar los estados límites de falla y de servicio que el mismo RCDF87 establece para lograr un diseño racional de dichas edificaciones.

## 2. MODELACION ESTRUCTURAL DE LAS EDIFICACIONES

De acuerdo con el análisis estructural, que es la teoría que involucra a los conceptos de geometría, material y cargas con las leyes de la mecánica newtoniana, se pueden construir modelos que son extraordinariamente simples o bien extraordinariamente refinados, según la herramienta de trabajo (calculadora, computadora, etc) de que se disponga para su manejo. Desde luego que los modelos refinados (grandes geometrías, fuerzas dinámicas, no linealidad geométrica, no linealidad del material, etc.) implican, necesariamente, el uso de la computadora.

Art 189 del RCDF87 establece que: Las fuerzas internas (elementos mecánicos) y las deformaciones (elementos cinemáticos) producidas por las acciones se determinarán mediante un análisis estructural realizado con un método reconocido que tome en cuenta las propiedades de los materiales ante el tipo de cargas que se consideren".

Las normas técnicas complementarias (NTC) para diseño y construcción de estructuras de concreto y de estructuras metálicas del RCDF87, establecen que dichas estructuras se pueden analizar con métodos que supongan un comportamiento elástico, lineal.

Con base en lo anterior el RCDF87 permite utilizar el modelo mas simple del análisis estructural: Material elástico lineal (material de Hooke), desplazamientos pequeños (tensor de deformaciones infinitesimales), que es un modelo matemático lineal basado en la teoría de la elasticidad lineal y la teoría de la mecánica de materiales.

## 2.1 Representación esquemática

A fin de tener una referencia de los elementos que definen a un edificio, en la Fig 2.1 se representa, de manera esquemática, a los siguientes elementos.

### 2.1.1 Elementos de la superestructura

De acuerdo con la Fig 2.1 los elementos que conforman a la superestructura son aquéllos que sobresalen del suelo en el que se apoya el edificio, y son:

- a) Trabes (elementos barra tridimensionales contenidos en planos horizontales denominadas losas).
- b) Columnas (elementos barras tridimensionales contenidos en planos verticales).
- c) muros (elementos sólidos tridimensionales contenidos en uno solo o en varios planos verticales).
- d) Losas (Elementos tridimensionales contenidos en planos horizontales, idealizados ya como diafragmas flexibles o bien como diafragmas rígidos).

Los elementos de la superestructura se construyen con materiales especificados y controlados por el ingeniero.

### 2.1.2 Elementos del suelo

El soporte de la estructura lo constituye el suelo, material de dos fase (fase sólida, denominada esqueleto, y fase fluída, generalmente agua y gas) construido de manera natural, por lo que el ingeniero ha desarrollado la tecnología apropiada para su modelación.

### 2.1.3 Elementos de la cimentación

Los elementos de la cimentación se construyen con materiales especificados y controlados por el ingeniero y pueden ser los siguientes.

- a) Contratraves (elementos barra tridimensionales contenidos en planos horizontales denominadas losas de cimentación, travas de liga, etc.).
- b) Zapatas aisladas o corridas (losas y contratraves).
- c) Muros verticales contenidos en planos verticales.
- d) Losas y cascarones (elementos tridimensionales contenidos en una superficie).
- e) Pilas y pilotes.

## 2.2 Elementos estructurales

Con base en los elementos estructurales de las edificaciones indicados de manera esquemática en la sección 2.1, en esta sección

se resumen los conceptos formales de tales elementos estructurales en relación con su participación en la construcción de las ecuaciones de equilibrio de la edificación.

El método mas versatil y poderoso para formular, resolver y manejar las ecuaciones de equilibrio de las estructuras, es el método de las rigideces o de los desplazamientos (para los elementos barras, asociados a las estructuras esqueléticas o marcos) y el método del elemento finito en su formulación de los desplazamientos (para los elementos sólidos bidimensionales, placas planas y cascarones de las estructuras denominadas continuas). La versatilidad y poderío de los métodos anteriores están asociados a su adecuación al uso de las computadoras.

Las ecuaciones de equilibrio de los elementos estructurales se establecen en términos de los puntos nodales que se requieren para definir su geometría. A los puntos nodales de cada elemento finito le corresponden diferentes grados de libertad (número de componentes de desplazamiento lineales y angulares).

Para el caso de fuerzas estáticas, las ecuaciones de equilibrio de cada elemento estructural se puede escribir, de manera general, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{f}^e &= \bar{f}^0 + \bar{k}\bar{u} \\ &= \bar{f}^0 + \bar{f}^u\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde los vectores y la matriz de la ecuación anterior están asociados a los elementos mecánicos y cinemáticos de los puntos nodales del elemento estructural, y los nombres mas comunes que reciben son los siguientes.

$$\begin{aligned}\bar{f}^e &= \text{Vector de fuerzas equilibrantes} \\ \bar{f}^0 &= \text{Vector de fuerzas de empotramiento} \\ \bar{f}^u = \bar{k}\bar{u} &= \text{Vector de fuerzas de desplazamiento} \quad (2.2) \\ \bar{k} &= \text{Matriz de rigideces} \\ \bar{u} &= \text{Vector de desplazamientos}\end{aligned}$$

En las Ec 2.1 y 2.2 la magnitud y el número de los componentes de los vectores y de la matriz dependen del número de puntos nodales y de sus correspondientes grados de libertad que definen al elemento estructural.

### 2.2.1 Elementos barra

Son elementos tridimensionales para representar a trabes, columnas, contratrabes, pilas y pilotes (Fig 2.2). Geométricamente bastan dos puntos nodales que definen un eje (casi siempre recto) y sus secciones transversales (casi siempre constantes y, por tanto, con una basta). Sus ecuaciones de equilibrio se obtienen con base en la teoría de la mecánica de materiales y para su integración no se requiere del método del elemento finito (MEF), para las barras de eje recto y sección constante. A cada punto nodal se le consideran seis grados de libertad, tres lineales y tres angulares. Se presentan caso particulares como son las barras planas con tres grados de libertad por nudo (dos lineales y un angular), las barras de retícula de entrepiso con tres grados de libertad por nudo (uno lineal y dos angulares), las barras de armaduras (barras axiales o barras doblemente articuladas) con tres (tridimensionales) y dos (bidimensionales) grados de libertad por nudo (que son desplazamientos lineales, ya que los angulares son linealmente dependientes por corresponder a articulaciones). En general, los vectores tienen seis componentes.

### 2.2.2 Elementos sólidos bidimensionales (muros planos)

Son elementos tridimensionales que únicamente pueden soportar cargas y desplazamientos contenidos en su superficie media (plana). Geométricamente se pueden definir mediante un triángulo (tres o mas puntos nodales) o un cuadrilátero (con cuatro o mas puntos nodales), según se indica en la Fig 2.2. A cada punto nodal normalmente se le asignan dos componentes de desplazamiento lineal. Las ecuaciones de equilibrio se establecen mediante alguna de las teorías de la mecánica del medio continuo (como la teoría de la elasticidad lineal) y para su solución se utiliza el MEF.

### 2.2.3 Elementos placas planas (losas)

Son elementos tridimensionales que generalmente se utilizan para soportar cargas transversales a su superficie media (plana). Geométricamente se pueden definir mediante un triángulo (tres o mas puntos nodales) o un cuadrilátero (con cuatro o mas puntos nodales), según se indica en la Fig 2.2. A cada punto nodal normalmente se le asignan tres componentes de desplazamiento (uno lineal y angulares). Las ecuaciones de equilibrio se establecen mediante alguna de las teorías de la mecánica del medio continuo (como la teoría de la elasticidad lineal) y para su solución se utiliza el MEF.

### 2.2.4 Elementos cascarones (muros tridimensionales)

Son elementos tridimensionales que generalmente se utilizan para soportar tanto cargas transversales a su superficie media (losa) como cargas contenidas en su superficie (membrana). Geométricamente se pueden definir mediante un triángulo (tres o mas puntos nodales)

o un cuadrilátero (con cuatro o mas puntos nodales), según se indica en la Fig 2.2. Además de los tres componentes de desplazamiento correspondientes a los elementos losas se le adicionan los tres desplazamientos del elemento membrana (dos lineales contenidos en su superficie y uno angular normal a su superficie). Las ecuaciones de equilibrio se establecen mediante alguna de las teorías de la mecánica del medio continuo (como la teoría de la elasticidad lineal) y para su solución se utiliza el MEF.

### 2.2.5 Diafragmas flexibles

Los diafragmas son elementos planos (en los edificios) que unen a varios elementos estructurales que los obliga a desplazarse en conjunto, como si fuera una membrana. Desde luego que existen desplazamientos relativos entre los elementos unidos por el diafragma. A cada punto nodal de los elementos estructurales contenido en el diafragma le corresponden dos desplazamientos lineales y un angular, que desde luego son independientes para cada punto nodal (Fig 2.2). Los diafragmas flexibles se modelan mediante el elemento finito cascarón del inciso 2.2.4.

### 2.2.6 Diafragmas rígidos

Cuando los desplazamientos relativos entre los elementos unidos por el diafragma (descrito en el inciso 2.2.5) son pequeños y se pueden considerar nulos, se dice que el diafragma es rígido y, por tanto, los desplazamientos de los puntos nodales contenidos en el diafragma son linealmente dependientes de los tres desplazamientos del diafragma (dos lineales y un angular). Desde luego que el número de desplazamientos independientes del diafragma rígido (únicamente tres, Fig 2.2)) resulta ser mucho menor que el correspondiente a los del diafragma flexible (seis por el número de puntos nodales contenidos en dicho diafragma).

## 2.3 Modelos estructurales

Con el ensamble de los elementos estructurales descritos en el inciso 2.2 se puede construir una gran variedad de modelos estructurales que se pueden utilizar en el análisis estructural de los edificios. Independientemente de los elementos estructurales que participan en su ensamble, las ecuaciones de equilibrio de los modelos estructurales sometidos a cargas estáticas resultan ser.

$$\bar{K}\bar{U} = \bar{F} \quad (2.3)$$

Los vectores y la matriz de los modelos estructurales dados por la Ec 2.3 se denominan.

El número de componentes de los vectores de la estructura (Ec 2.4)

$$\begin{aligned}
 \vec{U} &= \text{Vector de desplazamientos de} \\
 &\quad \cdot \text{ la estructura (desconocido)} \\
 \vec{F} &= \text{Vector de fuerzas de la} \\
 &\quad \cdot \text{ estructura (conocido)} \\
 \vec{K} &= \text{Matriz de rigideces de la} \\
 &\quad \cdot \text{ estructura (conocida)}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

es igual al número de componentes de desplazamiento (lineales y angulares) desconocidos, linealmente independientes, de los puntos nodales de la estructura (grados de libertad de la estructura). Los modelos estructurales mas comunes se describen a continuación.

### 2.3.1 Marcos tridimensionales

Es un modelo estructural formado exclusivamente con los elementos barras barra descritos en el inciso 2.2.1. Necesariamente debe contener barras tridimensionales, pero también pueden existir combinaciones de barras planas, barras de retícula de entrepiso y barras axiales.

### 2.3.2 Muros tridimensionales

Este modelo se construye con el ensamble de elementos sólidos bidimensionales (inciso 2.2.2), elementos placas planas (inciso 2.2.3) y elementos cascarones (inciso 2.2.4), según el tipo de carga que actúa en sus respectivas regiones.

### 2.3.3 Muromarcos tridimensionales

El modelo de muromarcos tridimensionales es una combinación de los modelos marcos tridimensionales y muros tridimensionales.

### 2.3.4 Marcos planos

Este modelo es un caso particular de los marcos tridimensionales y se obtiene mediante el ensamble de barras planas, por lo que su geometría y cargas están contenidas en un plano.

### 2.3.5 Muros planos

Este modelo es un caso particular de los muros tridimensionales y se obtiene mediante el ensamble de elementos sólidos bidimensionales, por lo que su geometría y cargas están contenidas en un plano.

### 2.3.6 Muromarcos planos

El modelo de muromarcos planos es una combinación de los modelos marcos planos y muros planos.

### 2.3.7 Rigideces de entrepiso (resortes)

Este modelo estructural únicamente sirve para simplificar el análisis de marcos planos ante fuerzas horizontales. Con algunas hipótesis simplificadoras se hace extensivo a muros planos y a muromarcos planos.

Como se muestra en la Fig 2.3, la estructura plana original (marco, muro o muromarco) se reemplaza por una estructura a base de resortes. La constante del resorte, denominada rigidez de entrepiso, se cuantifica de acuerdo con la siguiente expresión.

$$k_i = \frac{V_i}{\Delta u_i} = \text{Rigidez de entrepiso} \quad (2.5)$$

Los elementos de la Ec 2.5 se muestran en la Fig 2.8 y se definen como.

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= \text{Desplazamiento relativo del } i\text{-ésimo entrepiso} \\ &= u_i - u_{i-1} \\ u_i &= \text{Desplazamiento horizontal del } i\text{-ésimo nivel} \\ u_{i-1} &= \text{Desplazamiento horizontal del } (i-1)\text{-ésimo nivel} \\ V_i &= \text{Fuerza cortante del } i\text{-ésimo entrepiso} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Desde luego que en la Ec 2.5 no se conocen los desplazamientos horizontales de los niveles y para cuantificar los valores de las rigideces de entrepiso se hacen hipótesis respecto a los desplazamientos angulares y fuerzas cortantes en los entrepisos y niveles adyacentes (como es el caso de las fórmulas de Wilbur).

Por supuesto que las rigideces de entrepiso se pueden cuantificar mediante el uso de la computadora al estimar las fuerzas horizontales que actúan en las estructuras planas, pero resulta mucho menos eficiente que utilizar los métodos de análisis que existen y que fueron diseñados para ser manejados por una computadora.

## 2.4 Modelos estructurales para el análisis de edificios ante fuerzas sísmicas

Un concepto básico para cuantificar las fuerzas sísmicas en las edificaciones es el modelo estructural utilizado. En este inciso se describen, de manera esquemática, los modelos estructurales que se utilizan en el análisis sísmico de las edificaciones.

### 2.4.1 Marcos y muromarcos tridimensionales unidos con diafragmas flexibles

El modelo estructural del edificio se forma con los modelos estructurales correspondientes a marcos y muromarcos tridimensionales (incisos 2.3.1 y 2.3.3) unidos mediante un diafragma flexible (inciso 2.6), según se muestra en la Fig 2.4.

El número de ecuaciones de equilibrio está asociado a los componentes de desplazamiento (lineales y angulares) linealmente independientes de los puntos nodales del edificio, que aún para edificios relativamente pequeños resulta ser un número grande comparado con otros modelos. Este modelo puede provocar problemas de aproximación debido a que la modelación de la rigidez en el plano del diafragma resulta ser muy grande.

Desde luego que este modelo estructural únicamente se puede manejar con una computadora y se construye al utilizar los programas de propósitos generales basados en el MEF (NISA, SAP90, etc.).

### 2.4.2 Marcos y muromarcos tridimensionales unidos con diafragmas rígidos

Algunos programas de propósitos generales basados en el MEF (SAP90) contemplan la posibilidad de hacer que puntos nodales contenidos en un diafragma sean linealmente dependientes respecto a un punto (centro de masas). Esto obliga a que cada diafragma tenga tres grados de libertad, lo que reduce significativamente el número de ecuaciones que genera el modelo del inciso anterior (inciso 2.4.1) y elimina los problemas de aproximación debido a las rigideces grandes en el plano del diafragma.

### 2.4.3 Subestructuras formadas con marcos y muromarcos tridimensionales unidos con diafragmas rígidos(ETABS)

Existen programas de computadora de propósitos especiales (La sigla ETABS se refiere a: Extended Three dimensional Analysis of Building System) en los que se toma en cuenta las particularidades de los elementos que conforman a un edificio (muros, trabes, columnas, juntas, diafragma rígido).

La construcción de este modelo se basa en considerar a los marcos y muromarcos tridimensionales como una subestructura, según se observa en la Fig 2.5. De las ecuaciones de equilibrio de los

marcos y muromarcos tridimensionales se condensan las ecuaciones de los grados de libertad que no están asociados a los tres desplazamientos del diafragma rígido, mediante un triangulación parcial. El número de ecuaciones de equilibrio de este modelo es igual a tres veces el número de diafragmas rígidos, que es mucho menor que el modelo descrito en el inciso 2.4.1 y también menor que el del inciso 2.4.2 en caso de existir muros en el edificio.

Al considerar varias subestructuras unidas con el diafragma rígido, existen elementos que forman parte de dos o mas subestructuras que, desde luego, se proporcionan desplazamientos independientes, a menos que se establezca un criterio que reduzca este problema característico de este modelo. Otra forma de evitar este problema es considerar una sola subestructura que resulta del tamaño del edificio.

#### 2.4.4 Subestructuras formadas con marcos y muromarcos planos unidos con diafragmas rígidos (TABS)

Este modelo corresponde a la versión original del modelo anterior (inciso 2.4.3) en donde se utilizan como subestructuras a las estructuras planas (marcos, muros y muromarcos), como se muestra en la Fig 2.6. La sigla TABS se refiere a: Three dimensional Analysis of Building System.

En este modelo siempre existe la incompatibilidad de los desplazamientos en los elementos comunes de las estructuras planas, a menos que se establezca un criterio que reduzca este problema.

#### 2.4.5 Subestructuras formadas con rigideces de entrepiso (resortes) unidas con diafragmas rígidos

Este modelo es una simplificación del modelo anterior (inciso 2.4.4) en donde las subestructuras resultan ser las rigideces de entrepiso asociadas a cada muro o muromarco, según se indica en la Fig 2.7.

Las rigideces de entrepiso se consideran que están orientadas en dos direcciones ortogonales que forman dos modelos estructurales (unidireccionales) independientes, según se muestra en la Fig 2.9. Los grados de libertad de cada modelo estructural independiente están formados por los desplazamientos horizontales de cada diafragma en la dirección que le corresponde al modelo (el número de ecuaciones es igual al número de diafragmas rígidos).

Una vez calculadas las fuerzas sismicas asociadas a cada modelo unidireccional independiente, se procede a unir cada diafragma rígido aislado con las rigideces de entrepiso que les subyace y se le aplica la fuerza cortante de dicho entrepiso. La fuerza cortante es la que se distribuye entre las rigideces de entrepiso que subyacen al diafragma, al considerar el equilibrio de cada diafragma independiente de los demás.

Con la fuerza cortante que a cada rigidez de entrepiso le corresponde, se cuantifican las fuerzas sísmicas de cada nivel, que son las que se aplican a las estructuras planas correspondientes a las rigideces de entrepiso (marcos, muros o muromarcos).

#### 2.4.6 Método simplificado del RCDF87

En este método, las Normas Técnicas Complementarias (NTC) para diseño y construcción de estructuras de mampostería establece que, es admisible considerar que la fuerza cortante que toma cada muro es proporcional a su área transversal e ignorar los efectos de torsión. Las fuerzas sísmicas con las que se obtienen las fuerzas cortantes se cuantifican de manera independiente del modelo estructural del edificio.

### 3. PARAMETROS QUE DEFINEN LA MAGNITUD DE LAS FUERZAS SISMICAS

A continuación se resumen los parámetros que el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF87) considera para cuantificar la magnitud de las fuerzas que un sismo de diseño ocasiona a una estructura.

#### 3.1 Uso de las edificaciones

De acuerdo con el RCDF87 se tiene que:

Art 174. Para los efectos de este Título (VI, Seguridad estructural de las construcciones) las construcciones se clasifican en los siguientes grupos:

#### I. GRUPO A. Construcciones cuya falla estructural podría causar:

La pérdida de un número elevado de vidas, o

Pérdidas económicas o culturales excepcionalmente altas, o

Que constituyen un peligro significativo por contener sustancias tóxicas o explosivas,

Así como construcciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una emergencia urbana como:

Hospitales y escuelas,  
Estadios,  
Templos,  
Salas de espectáculos y hoteles que tengan salas de

reunión que pueden alojar mas de 200 personas;  
Gasolinerías,  
Depósitos de sustancias inflamables o tóxicas,  
Terminales de transporte,  
Estaciones de bomberos,  
Subestaciones eléctricas y centrales telefónicas y de telecomunicaciones,  
Archivos y registros públicos de especial importancia a juicio del DDF,  
Museos,  
Monumentos y  
Locales que alojen equipo especialmente costoso

## II. GRUPO B. Construcciones comunes destinadas a:

Vivienda,  
Oficinas y locales comerciales,  
Hoteles y  
Construcciones comerciales e industriales no incluídas en el grupo A, las que se subdividen en:

- a) SUBGRUPO B1. Construcciones de más de 30 m de altura o con más de 6,000 m<sup>2</sup> de área total construída, ubicadas en las zonas I y II según se define en el artículo 175, y Construcciones de más de 15 m de altura o 3,000 m<sup>2</sup> de área total construída, en zona III, y
- b) SUBGRUPO B2. Las demás de este grupo.

### 3.2 Coeficiente sísmico

De acuerdo con el RCDF87 se tiene:

Art 206. El coeficiente sísmico,  $c$ , es el cociente de la fuerza cortante horizontal que debe considerarse que actúa en la base de la construcción por efecto del sismo ( $V_0$ ) entre el peso de ésta sobre dicho nivel ( $W_0$ ).

Con este fin se tomará como base de la estructura el nivel a partir del cual sus desplazamientos con respecto al terreno circundante comienzan a ser significativos. Para calcular el peso total se tendrán en cuenta las cargas muertas y vivas que correspondan según los capítulos IV Y V de este Título (VI).

El coeficiente sísmico para las construcciones clasificadas como grupo B en el artículo 174 se tomarán los siguientes valores:

Zona No.	Coefficiente sísmico (c)
I	0.16
II	0.32
III	0.40

A menos que se emplee el método simplificado de análisis en cuyo caso se aplicarán los coeficientes que fijan las NTC, y a excepción de las zonas especiales en las que dichas NTC especifiquen otros valores de c.

Para las estructuras del Grupo A se incrementará el coeficiente sísmico en 50 por ciento.

De acuerdo con lo anterior se puede escribir

$$c = \frac{V_0}{W_0} = \text{Coeficiente sísmico}$$

donde:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{\text{No niv}} F_i = \text{Fuerza cortante en la base} \quad (3.1)$$

$$W_0 = \sum_{i=1}^{\text{No niv}} W_i = \text{Peso de la construcción}$$

$F_i$  = Fuerza sísmica en el i-ésimo nivel

$W_i$  = Peso de la construcción en el i-ésimo nivel

### 3.3 Zonificación sísmica

De acuerdo con el RCDF87 se tiene

Art 175. Para fines de estas disposiciones, el DF se considera dividido en las zonas I, II y III, dependiendo del tipo de suelo.

Las características de cada zona y los procedimientos para definir la zona que corresponde a cada predio se fijan en el capítulo VII (Diseño de cimentaciones) de este Título (VI. Seguridad estructural de las construcciones).

Art 219. Para fines de este Título (VI) el DF se divide en tres zonas con las siguientes características generales:

Zona I. LOMAS, formadas por rocas o suelos generalmente firmes que fueron depositados fuera del ambiente lacustre, pero en los que pueden existir, superficialmente o incrustados, depósitos arenosos en estado suelto o cohesivos relativamente blandos. En esta zona, es frecuente la presencia de oquedades en rocas y de cavernas y túneles excavados en suelos para explotar minas de arena.

Zona II. TRANSICION, en la que los depósitos profundos se encuentran a 20 m de profundidad o menos, y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limoarenosos intercalados con capas de arcilla lacustre; el espesor de éstas es variable entre decenas de centímetros y pocos metros, y

Zona III. LACUSTRE, integrada por potentes depósitos de arcilla altamente compresible, separados por capas arenosas con contenido diverso de limo o arcilla. Estas capas arenosas son de consistencia firme a muy dura y de espesores variables de centímetros a varios metros.

Los depósitos lacustras suelen estar cubiertos superficialmente por suelos aluviales y rellenos artificiales; el espesor de este conjunto puede ser superior a 50 m.

La zona a que corresponda un predio se determinará a partir de las investigaciones que se realicen en el subsuelo del predio objeto de estudio, tal y como lo establecen las NTC. En caso de construcciones ligeras o medianas, cuyas características se definirán en dichas normas (NTC para cimentaciones) podrá determinarse la zona mediante el mapa incluido en las mismas (ver fig 1 NTC para cimentaciones), si el predio está dentro de la porción zonificada; los predios ubicados a menos de 200 m de las fronteras entre dos de las zonas antes descritas se supondrán ubicados en la más desfavorable.

Art 220. La investigación del subsuelo del sitio mediante exploración de campo y pruebas de laboratorio debe ser suficiente para definir de manera confiable:

Los parámetros de diseño de la cimentación.  
La variación de los mismos en la planta del predio.  
Los procedimientos de construcción.  
Además deberá ser tal que permita definir:

- I. En la zona I a que se refiere el artículo 219 del RCDF, si existen en ubicaciones de interés materiales sueltos superficiales, grietas, oquedades naturales o galerías de minas, y en caso afirmativo su apropiado tratamiento, y.
- II. En las zonas II y III del artículo mencionado en la fracción anterior, la existencia de restos arqueológicos, cimentaciones antiguas, grietas, variaciones fuertes de estratigrafía, historia de carga del predio o cualquier otro factor que pueda originar asentamientos diferenciales de importancia, de modo que todo ello pueda tomarse en cuenta en el diseño.

Las NTC para cimentaciones en su capítulo 2 (Investigaciones del subsuelo) establecen en la tabla I los requisitos mínimos para la investigación del subsuelo para las construcciones ligeras o medianas de poca extensión y con excavaciones someras, y para las construcciones pesadas, extensas o con excavaciones profundas.

Las NTC para sismo en su capítulo 3 (Espectros para diseño sísmico) establecen que el coeficiente,  $c$ , que se obtiene del Art 206 del RCDF87 sálvo en la parte sombreada de la zona II (ver fig. 3.1 de dichas NTC) toma los siguientes valores:

$c = 0.4$  para las estructuras del grupo B, y

$c = 0.6$  para las estructuras del grupo A.

### 3.4 Condiciones de regularidad

De acuerdo con las NTC para el diseño por sismo, en su capítulo 6, para que una estructura pueda considerarse regular debe satisfacer los siguientes requisitos:

1. Su planta es sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales por lo que toca a masas, así como a muros y otros elementos resistentes.
2. La relación de su altura a la dimensión menor de su base no pasa de 2.5.
3. La relación de largo a ancho de la base no excede de 2.5.
4. En la planta no tiene entrantes ni salientes cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión de la planta medida paralelamente a la dirección que se considera de la antrante o la saliente.
5. En cada nivel tiene un sistema de techo o piso rígido y resistente .

6. No tiene aberturas en sus sistemas de techo o piso cuya dimensión exceda de 20 por ciento de la dimensión en planta medida paralelamente a la dimensión que se considere de la abertura, las áreas huecas no ocasionan asimetrías significativas ni difieren de posición de un piso a otro y el área total de aberturas no excede en ningún nivel de 20 por ciento del área de la planta.
7. El peso de cada nivel, que incluye la carga viva que debe considerarse para diseño sísmico, no es mayor que el del piso inmediato inferior ni, excepción hecha del último nivel de la construcción, es menor que 70 por ciento de dicho peso.
8. Ningún piso tiene un área, delimitada por los paños exteriores de sus elementos resistentes verticales, mayor que la del piso inmediato inferior ni menor que 70 por ciento de ésta. Se exime de este último requisito únicamente al último piso de la construcción.
9. Todas las columnas están restringidas en todos los pisos en dos direcciones ortogonales por diafracmas ortogonales y por trabes o losas planas.
10. La rigidez al corte de ningún entrepiso excede en más de 100 por ciento a la del entrepiso inmediatamente inferior.
11. En ningún entrepiso la excentricidad torsional calculada estáticamente,  $e_s$ , excede del 10 por ciento de la dimensión en planta de ese entrepiso medida paralelamente a la excentricidad mencionada.

**NOTA:** En el capítulo 4 (Reducción de fuerzas sísmicas) de las NTC para diseño por sismo (inciso 4.4.2 de estas notas) se especifica que: "... En el diseño sísmico de las estructuras que no satisfacen las condiciones de regularidad que fija la sección 6 de estas normas, se multiplicará por 0.8 el valor de  $Q'$ ."

### 3.5 Factor de comportamiento sísmico

De acuerdo con el RCDF87 se tiene que

Art 207. Cuando se aplique el método estático o un método dinámico para análisis sísmico, podrán reducirse con fines de diseño las fuerzas sísmicas calculadas, empleando para ello los criterios que las NTC, en función de las características estructurales y del terreno. Los desplazamientos calculados de acuerdo con estos métodos, empleando las fuerzas sísmicas reducidas, deben multiplicarse por el factor de comportamiento sísmico que marquen dichas Normas.

Los coeficientes que especifique las NTC para la aplicación del método simplificado de análisis tomarán en cuenta todas las reducciones que procedan por los conceptos mencionados. Por ello las fuerzas sísmicas calculadas por este método no deben sufrir reducciones adicionales.

De acuerdo con las NTC para sismo del RCDF87 en su capítulo 5, los valores de los factores del comportamiento sísmico,  $Q$ , se especifican a continuación:

I. Se usará  $Q=4$  cuando se cumplan los requisitos siguientes:

1. La resistencia en todos los entrepisos es suministrada exclusivamente  
Por marcos no contraventeados de acero o concreto reforzado, o bien  
Por marcos contraventeados o con muros de concreto reforzado en los que en cada entrepiso los marcos son capaces de resistir, sin contar muros ni contravientos, cuando menos 50 por ciento de la fuerza sísmica actuante.
2. Si hay muros ligados a la estructura en la forma especificada en el caso I del artículo 204 del RCDF87, éstos se deben tener en cuenta en el análisis, pero su contribución a la capacidad ante fuerzas laterales sólo se tomará en cuenta si estos muros son de piezas macizas, y los marcos, sean o no contraventeados, y los muros de concreto reforzado son capaces de resistir al menos 80 por ciento de las fuerzas laterales totales sin la contribución de los muros de mampostería.
3. El mínimo cociente de la capacidad resistente de un entrepiso entre la acción de diseño no difiere en más de 35 por ciento del promedio de dichos cocientes para todos los entrepisos. Para verificar el cumplimiento de este requisito, se calculará la capacidad resistente de cada entrepiso teniendo en cuenta todos los elementos que puedan contribuir a la resistencia, en particular los muros que se hallen en el caso I a que se refiere el artículo 204 del Reglamento.
4. Los marcos y muros de concreto reforzado cumplen con los requisitos que fijan las normas técnicas complementarias correspondientes para marcos y muros dúctiles.
5. Los marcos rígidos de acero satisfacen los requisitos para marcos dúctiles que fijan las normas técnicas complementarias correspondientes.

II. Se adoptará  $Q=3$  cuando se satisfacen las condiciones 2,4 y 5 del caso I y en cualquier entrepiso dejan de satisfacerse las condiciones 1 ó 3 especificadas para el caso I pero la resistencia en todos los entrepisos es suministrada:

Por columnas de acero o de concreto reforzado con losas planas,  
Por marcos rígidos de acero,  
Por marcos de concreto reforzado,  
Por muros de concreto reforzado,  
Por combinaciones de muros de concreto reforzado y por marcos o por diafragmas de madera contrachapada.

Las estructuras con losas planas deberán cumplir los requisitos que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

III. Se usará  $Q=2$  cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada

Por losas planas con columnas de acero o de concreto reforzado,  
Por marcos de acero o de concreto reforzado, contraventeados o no,  
Por muros o columnas de concreto reforzado,

que no cumplen en algún entrepiso lo especificado por los casos I y II de esta sección, o

Por muros de mampostería de piezas macizas confinados por castillos, dadas, columnas o trabes de concreto reforzado o de acero que satisfacen los requisitos de las normas técnicas complementarias respectivas, o diafragmas contruados con duelas inclinadas o por sistemas de muros formados por duelas de madera horizontales o verticales combinados con elementos diagonales de madera maciza.

También se usará  $Q=2$  cuando la resistencia es suministrada por elementos de concreto prefabricado o presforzado, con la excepciones que sobre el particular marcan las normas técnicas complementarias para estructuras de concreto.

IV. Se usará  $Q=1.5$  cuando la resistencia a fuerzas laterales es suministrada en todos los entrepisos

Por muros de mampostería de piezas huecas, confinados o con refuerzo interior, que satisfacen los requisitos de las normas técnicas complementarias respectivas, o  
Por combinaciones de dichos muros con elementos como los descritos para los casos II y III, o por marcos y armaduras de madera.

- V. Se usará  $Q=1$  en estructuras cuya resistencia a fuerzas laterales es suministrada al menos parcialmente por elementos o materiales de los arriba especificados, a menos que se haga un estudio que demuestre, a satisfacción del Departamento del Distrito Federal, que se puede emplear un valor más alto que el que aquí se especifica.

En todos los casos se usará para toda la estructura en la dirección de análisis el valor mínimo de  $Q$  que corresponde a los diversos entrepisos de la estructura en dicha dirección.

El factor  $Q$  puede diferir en las dos direcciones ortogonales en que se analiza la estructura, según sean las propiedades de ésta en dichas direcciones.

### 3.5.1 Condiciones para marcos dúctiles de concreto

Con base en los puntos I.4 y II del inciso 3.5, se reproduce el Capítulo 5, Marcos dúctiles, de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87.

#### 3.5.1.1 Requisitos generales

Los requisitos de este capítulo se aplican a marcos colados en el lugar, diseñados por sismo con un factor de comportamiento sísmico,  $Q=4$ . También se aplican a los marcos de estructuras coladas en el lugar diseñadas con  $Q=4$ , formadas por marcos y muros de concreto reforzado que cumplan con el inciso 4.5.2 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), que debe incluir el inciso b) de esa sección, o marcos y contravientos que cumplan con el inciso 4.6 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), en las que la fuerza cortante resistida por los marcos sea, al menos, el 50 por ciento de la total y, asimismo, a los marcos de estructuras coladas en el lugar, diseñadas con  $Q=3$  y formadas por marcos y muros o contravientos que cumplan con el inciso 4.5.2 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), que debe incluir el inciso b) de esa sección, o marcos y contravientos que cumplan con el inciso 4.5.2 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), que debe incluir el inciso b) de esa sección, o el inciso 4.6 (de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), en las que la fuerza cortante resistida por los marcos sea menor que el 50 por ciento de la total. En todos los casos anteriores, los requisitos se aplican también a los elementos estructurales de la cimentación.

Sea que la estructura esté formada sólo de marcos o de marcos y muros o contravientos, ningún marco se debe diseñar para resistir una fuerza cortante horizontal menor que el 25 por ciento de la que le correspondería si trabajara aislado del resto de la estructura.

La resistencia especificada del concreto,  $f'_c$ , no debe ser menor de 200 kg/cm<sup>2</sup>.

Las barras de refuerzo deben ser corrugadas de grado no mayor que el 42 y deben cumplir con los requisitos de las normas NOM-B6. Además, las barras longitudinales de vigas y columnas deben tener fluencia definida, bajo un esfuerzo que no exceda al esfuerzo de fluencia especificado en más de 1300 kg/cm<sup>2</sup>, y su resistencia real debe ser, al menos, igual a 1.25 veces su esfuerzo real de fluencia.

Se deben aplicar las disposiciones de estas normas (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87) que no se modifiquen en este capítulo.

### 3.5.1.2 Miembros a flexión

Los requisitos de este inciso se aplican a miembros principales que trabajan esencialmente a flexión. Se incluyen vigas y aquellas columnas con cargas axiales pequeñas, tales que.

$$P_u \leq 0.1A_g f'_c \quad (3.2)$$

#### 3.5.1.2.1 Requisitos geométricos

- a) El claro libre no debe ser menor que cuatro veces el peralte efectivo.
- b) En sistemas de viga y losa monolítica, la relación entre la separación de apoyos que eviten el pandeo lateral y el ancho de la viga no debe exceder de 30.
- c) La relación entre el peralte y ancho no debe ser mayor que 3.
- d) El ancho de la viga no debe ser menor de 25 cm, ni debe exceder al ancho de las columnas a las que llega.
- e) El eje de la viga no debe separarse horizontalmente del eje de la columna más de un décimo de la dimensión transversal de la columna normal a la viga.

#### 3.5.1.2.2 Refuerzo longitudinal

En toda sección se debe disponer de refuerzo tanto en el lecho inferior como en el superior. En cada lecho el área de refuerzo no debe ser menor que.

$$0.7 \sqrt{f'_c} \frac{bd}{f_y} \quad (3.3)$$

y debe constar, al menos, por dos barras corridas de 12.7 mm de diámetro (No 4). El área de acero a tensión no debe exceder del 75 por ciento de la correspondiente a la falla balanceada de la sección.

El momento resistente positivo en la unión con un nudo no debe ser menor que la mitad del momento resistente negativo que se suministre en esa sección. En ninguna sección a lo largo del miembro el momento resistente negativo, ni el resistente positivo, deben ser menores que la cuarta parte del máximo momento resistente que se tenga en los extremos.

En las barras para flexión se permiten traslapes solo si en la longitud del traslape se suministra refuerzo transversal de confinamiento (refuerzo helicoidal o estribos cerrados); el paso o la separación de este refuerzo no debe ser mayor que 0.25 d, ni que 10 cm. Las uniones por traslapes no se permiten en los casos siguientes:

- a) Dentro de los nudos
- b) En una distancia de dos veces el peralte del miembro, medida desde el paño del nudo, y
- c) En aquellas zonas donde el análisis indique que se forman articulaciones plásticas.

Con el refuerzo longitudinal pueden formarse paquetes de dos barras cada uno.

Se permiten uniones soldadas o con dispositivos mecánicos, que cumplan con los requisitos del inciso 3.9 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), a condición de que en toda sección de unión, cuando mucho, se unan barras alternadas y que las uniones de barras adyacentes no disten entre sí menos de 60 cm en la dirección longitudinal del miembro.

#### 3.5.1.2.3 Refuerzo transversal para confinamiento

Se deben suministrar estribos cerrados de, al menos, 7.9 mm de diámetro (No 2.5) que cumplan con los requisitos de los párrafos que siguen, en las zonas siguientes:

- a) En cada extremo del miembro sobre una distancia de dos peraltes medida a partir del paño del nudo, y
- b) En la porción del elemento que se halle a una distancia igual a dos peraltes (2h) de toda sección donde se suponga, o el análisis lo indique, que se va a formar una articulación plástica (si la articulación se forma en una sección intermedia, los dos peraltes se deben tomar a cada lado de la sección).

El primer estribo se debe colocar a no más de 5 cm de la cara del miembro de apoyo. La separación de los estribos no debe exceder los valores siguientes:

- a) 0.25 d
- b) Ocho veces el diámetro de la barra longitudinal más delgada
- c) 24 veces el diámetro de la barra del estribo
- d) 30 cm

Los estribos a que se refiere esta sección deben ser cerrados, de una pieza, y deben rematar en una esquina con dobleces de 135 grados, seguidos de tramos rectos de no menos de 10 diámetros de largo. En cada esquina del estribo debe quedar, al menos, una barra longitudinal. Los radios de doblez deben cumplir con los requisitos del inciso 3.8 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87). La localización del reamte del estribo debe alternarse uno a otro.

En las zonas definidas en el primer párrafo de esta sección, las barras longitudinales de la periferia deben tener soporte lateral que cumpla con el inciso 3.3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87).

Fuera de las zonas definidas en el primer párrafo de esta sección, la separación de los estribos no debe ser mayor que  $0.5d$  a todo lo largo. En toda la viga la separación de estribos no debe ser mayor que la requerida por fuerza cortante.

#### 3.5.1.2.4 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos que trabajan principalmente a flexión se deben dimensionar de manera que no se presente falla por cortante antes que puedan formarse las articulaciones plásticas en sus extremos. Para ello, la fuerza cortante de diseño se obtiene del equilibrio del miembro entre caras de apoyo; se debe suponer que en los extremos actúan momentos del mismo sentido valuados con las propiedades del elemento en esas secciones, sin factores de reducción, y con el esfuerzo en el acero de tensión, al menos, igual a  $1.25 f_y$ . A lo largo del miembro deben actuar las cargas correspondientes multiplicadas por el factor de carga.

Como opción, pueden dimensionarse con base en la fuerza cortante de diseño obtenida del análisis, si el factor de resistencia  $F_R$ , se le asigna un valor de 0.6, en lugar de 0.8.

El refuerzo para fuerza cortante debe estar formado por estribos verticales cerrados de una pieza, de diámetro no menor de 7.9 mm (No 2.5), rematados como se indica en el inciso 3.5.1.2.3.

### 3.5.1.3 Miembros a flexocompresión

Los requisitos de esta sección se aplican a miembros en los que la carga axial de diseño sea tal que.

$$P_u > 0.1A_g f'_c \quad (3.4)$$

#### 3.5.1.3.1 Requisitos geométricos

- a) La dimensión transversal mínima no debe ser menor que 30 cm.
- b) El área  $A_g$ , debe cumplir con la condición.

$$A_g \geq \frac{P_u}{0.5f'_c} \quad (3.5)$$

- c) La relación entre la menor dimensión transversal y la dimensión transversal perpendicular no debe ser menor que 0.4.
- d) La relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no debe exceder de 15.

#### 3.5.1.3.2 Resistencia mínima a flexión

Las resistencias a flexión de las columnas en un nudo deben satisfacer la siguiente condición.

$$\sum M_o \geq 1.5 \sum M_g$$

donde:

$$\sum M_o = \begin{array}{l} \text{Suma de los momentos resistentes de} \\ \text{diseño de las columnas que llegan a} \\ \text{ese nudo, referidas al centro del nudo} \end{array} \quad (3.6)$$

$$\sum M_g = \begin{array}{l} \text{Suma de los momentos resistentes} \\ \text{de diseño de las vigas que llegan al} \\ \text{nudo, referidas al centro de éste} \end{array}$$

Las sumas anteriores deben realizarse de modo que los momentos de las columnas se opongan a los de las vigas. La condición debe cumplirse para los dos sentidos en que puede actuar el sismo.

Al calcular la carga axial de diseño para la cual se valúe el momento resistente,  $M_o$ , de una columna, la fracción de dicha carga debida al sismo se debe tomar igual al doble de la calculada, cuando esto conduzca a un momento resistente menor. En tal caso, la columna se debe dimensionar al tomar en cuenta el incremento de carga mencionada. El factor de resistencia por flexocompresión se debe tomar igual a 0.8.

Como opción, las columnas pueden dimensionarse con los momentos y fuerzas axiales de diseño obtenidos del análisis, si el factor de resistencia por flexocompresión se le asigna el valor de 0.6.

#### 3.5.1.3.3 Refuerzo longitudinal

La cuantía del refuerzo longitudinal,  $p$ , debe satisfacer la siguiente condición.

$$0.01 \leq p \leq 0.04 \quad (3.7)$$

Solo se deben formar paquetes de dos barras.

El traslapa de barras longitudinales solo se permite en la mitad del elemento; estos traslapes deben cumplir con los requisitos del inciso 3.9 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87). Las uniones soldadas o con dispositivos mecánicos que cumplan con los requisitos del inciso 3.9 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), pueden usarse en cualquier localización con tal de que en una misma sección cuando mas se unan barras alternadas y que las uniones de barras adyacentes no disten entre si menos de 60 cm en la dirección longitudinal del miembro.

El refuerzo longitudinal debe cumplir con las disposiciones del inciso 3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87) que no se modifican en este inciso.

#### 3.5.1.3.4 Refuerzo transversal

Debe cumplirse con los requisitos del inciso 3.3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87) y los del inciso siguiente (inciso 3.5.1.3.5), y con los requisitos mínimos que aquí se establecen. No debe ser de grado mayor que el 42.

Se debe suministrar el refuerzo transversal mínimo que se especifica enseguida en ambos extremos de la columna, en una longitud no menor que.

- a) La mayor dimensión transversal de ésta
- b) Un sexto de su altura libre
- c) 60 cm

En la parte inferior de columnas de planta baja este refuerzo debe llegar hasta media altura de la columna, y debe continuarse dentro de la cimentación, al menos, una distancia igual a la longitud de desarrollo en compresión de la barra mas gruesa (en los nudos se debe cumplir con los requisitos del inciso 3.5.1.4 que se indican posteriormente).

- a) En columnas de núcleo circular, la cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal o de estribos circulares,  $P_s$ , debe cumplir con la siguiente relación.

$$P_s \geq 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} \quad (3.8)$$

$$P_s \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

- b) En columnas de núcleo rectangular, la suma de las áreas de estribos y grapas,  $A_{sh}$ , en cada dirección de la sección de la columna debe cumplir con la relación.

$$A_{sh} \geq 0.3 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y} s h_c \quad (3.9)$$

$$A_{sh} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} s h_c$$

donde:

$A_c$  = Área transversal del núcleo, hasta la orilla exterior del refuerzo transversal

$A_c$  = Área transversal de la columna

$f_y$  = Esfuerzo de fluencia del refuerzo transversal

$h_c$  = Dimensión del núcleo, normal al refuerzo de área  $A_{sh}$

$s$  = Separación del refuerzo transversal

Este refuerzo transversal debe estar formado por estribos de una pieza, sencillos o sobrepuestos, de diámetro no menor que 9.5 mm (No 3) y rematados como se indica en el inciso 3.5.1.2.3. Puede complementarse con grapas del mismo diámetro que los estribos, espaciados igual que éstos a lo largo del miembro. Cada extremo de una grapa debe abrazar a una barra longitudinal de la periferia con doblez de 135 grados, seguido de un tramo recto de, al menos, 10 diámetros de la grapa.

La separación del refuerzo transversal no debe exceder de la cuarta parte de la menor dimensión transversal del elemento, ni de 10 cm.

La distancia centro a centro, transversal al eje del miembro, entre ramas de estribos sobrepuestos no debe ser mayor de 45 cm, y entre grapas y ramas de estribos sobrepuestos no debe ser mayor de 25 cm. Si el refuerzo consta de estribos sencillos, la mayor dimensión de éstos no debe exceder de 45 cm.

En el resto de la columna el refuerzo transversal debe cumplir con los requisitos del inciso 3 (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87).

#### 3.5.1.3.5 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos a flexocompresión se deben dimensionar de manera que no fallen por fuerza cortante antes que se formen las articulaciones plásticas en las vigas. Para ello la fuerza cortante de diseño se debe obtener del equilibrio del elemento en su altura libre al suponer en cada extremo un momento igual a la mitad de  $1.5\Sigma M_g$  (definida en la sección 3.5.1.3.2. En el extremo inferior de columnas de planta baja se debe usar el momento resistente de diseño de la columna obtenido con la carga axial de diseño que conduzca al mayor momento resistente. En el extremo superior de columnas del último entrepiso se debe usar  $1.5\Sigma M_g$ .

Cuando las columnas se dimensionen por flexocompresión con el procedimiento optativo incluido en el inciso 3.5.1.3.2, el dimensionamiento por fuerza cortante se debe realizar a partir de la fuerza de diseño obtenida del análisis, y utilizar un factor de resistencia igual a 0.5.

En elementos a flexocompresión en que la fuerza axial de diseño, incluyendo los efectos del sismo, sea menor que  $A_g f'_c / 20$ , al calcular el refuerzo para fuerza cortante, si la fuerza cortante de diseño causada por el sismo es igual o mayor que la mitad de la fuerza cortante de diseño calculada según los párrafos anteriores, se puede despreciar la contribución del concreto  $V_c$ .

El refuerzo para fuerza cortante debe estar formado por estribos cerados, de una pieza, rematados como se indica en el inciso 3.5.1.2.3, o por hélices continuas, ambos de diámetros no menor que 9.5 mm (No 3) y de grado no mayor que el 42.

#### 3.5.1.4 Uniones viga-columna

##### 3.5.1.4.1 Requisitos generales

Las fuerzas que intervienen en el dimensionamiento por fuerza cortante de la unión se deben determinar al suponer que el esfuerzo de tensión en las barras longitudinales de las vigas que llegan a la unión es  $1.25 f_y$ .

El refuerzo longitudinal de las vigas que llegan a la unión debe pasar dentro del núcleo de la columna.

En los planos estructurales deben incluirse dibujos, acotados y a escala, del refuerzo en las uniones viga-columna.

Una unión viga-columna o nudo se define como aquella parte de la columna comprendida en el peralte de las vigas que llegan a ella.

#### 3.5.1.4.2 Refuerzo transversal

En un nudo debe suministrarse el refuerzo transversal mínimo especificado en el inciso 3.5.1.3.4. Si el nudo está confinado por cuatro trabes que llegan a él y el ancho de cada una es, al menos, igual a 0.75 veces el ancho respectivo de la columna, puede usarse la mitad del refuerzo transversal mínimo.

#### 3.5.1.4.3 Resistencia a fuerza cortante

Se debe admitir revisar la resistencia del nudo a fuerza cortante en cada dirección principal de la sección en forma independiente. La fuerza cortante se debe calcular en un plano horizontal a media altura del nudo.

En nudos confinados como se dice en el inciso 3.5.1.4.2, la resistencia de diseño a fuerza cortante se debe tomar igual a

$$5.5F_R\sqrt{f'_c} b_e h \quad (3.11)$$

En otros nudos se debe tomar igual a.

$$4.5F_R\sqrt{f'_c} b_e h \quad (3.12)$$

$b_e$  es el ancho efectivo del nudo

$h$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de la fuerza.

El ancho  $b_e$  debe tomar igual al promedio del ancho de la o las vigas consideradas y la dimensión transversal de la columna normal a la fuerza, pero no mayor que el ancho de la o las vigas mas  $h$ .

#### 3.5.1.4.4 Anclaje del refuerzo

Toda barra de refuerzo longitudinal de vigas que termine en un nudo debe prolongarse hasta la cara lejana del núcleo de la columna y rematarse con un dobléz a 90 grados, seguido de un tramo recto no menor de 12 diámetros. La sección crítica para revisar el anclaje de estas barras debe ser el plano externo del núcleo de la columna. La revisión se debe efectuar de acuerdo con la sección 3.1.1c (NTC

para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), donde es suficiente usar una longitud de desarrollo del 90 por ciento de la allí determinada.

Los diámetros de las barras de vigas y columnas que pasen rectos a través de un nudo deben seleccionarse de modo que cumplan las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} h(\text{columna})/d_b(\text{barras de viga}) &\geq 20 \\ h(\text{viga})/d_b(\text{barras de columna}) &\geq 20 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde  $h(\text{columna})$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de viga consideradas.

Si en la columna superior del nudo se cumple que:

$$\frac{P_u}{A_g f'_c} \geq 0.3 \tag{3.14}$$

se puede tomar la relación siguiente:

$$h(\text{viga})/d_b(\text{barras de columna}) \geq 15 \tag{3.15}$$

La relación dada por la Ec 3.15 también es suficiente cuando en la estructura los muros de concreto reforzado resisten más del 50 por ciento de la fuerza lateral total.

#### 3.5.1.5 Sistemas losa plana-columnas para resistir sismo

Si la altura de la estructura no excede de 20 m y, además, existen al menos tres crujías en cada dirección o jay trabes de borde, para el diseño por sismo se puede usar  $Q=3$ ; también puede aplicarse este valor cuando el sistema se combine con muros de concreto reforzado que cumplan con 4.5.2, incluyendo el inciso b de esa sección (NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87), y que resistan no menos del 75 por ciento de la fuerza lateral. Cuando no se satisfagan las condiciones anteriores, se debe usar  $Q=2$ . Con relación a los valores de  $Q$ , debe cumplirse, además, con los correspondientes incisos anteriores (que es el Cap 5 de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto del RCDF87). En todos los casos se deben respetar las disposiciones siguientes:

- I Las columnas deben cumplir con los requisitos de 3.5.1.3 para columnas de marcos dúctiles, excepto en lo referente al

dimensionamiento por flexocompresión, el cual sólo se debe realizar mediante el procedimiento optativo que se establece en el inciso 3.5.1.3.2.

- II Las uniones losa-columna deben cumplir con los requisitos de 3.5.1.4 para uniones viga-columna, con las salvedades que siguen:

No es necesaria la revisión de la resistencia del nudo a fuerza cortante, sino basta cumplir con el refuerzo transversal prescrito en 3.5.1.4.2 para nudos confinados.

Los requisitos de anclaje de 3.5.1.4.4 se deben aplicar al refuerzo de la losa que pase por el núcleo de una columna. Los diámetros de las barras de la losa y columnas que pasen rectas a través de un nudo deben seleccionarse de modo que se cumplan las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} h(\text{columna})/d_b(\text{barras de losa}) &\geq 20 \\ h(\text{losa})/d_b(\text{barras de columna}) &\geq 15 \end{aligned} \tag{3.16}$$

donde  $h(\text{columna})$  es la dimensión transversal de la columna en la dirección de las barras de losa consideradas.

### 3.5.2 Condiciones para estructuras dúctiles de acero

Con base en los puntos I.4 y II del inciso 3.5, se reproduce el Capítulo 11, Estructuras dúctiles, de las NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87.

#### 3.5.2.1 Alcance

En este capítulo se indican los requisitos que deben cumplirse para que puedan adoptarse valores del factor de comportamiento sísmico  $Q$  iguales a 4.0 o 3.0.

#### 3.5.2.2 Marcos dúctiles

##### 3.5.2.2.1 Requisitos generales

Se indican aquí los requisitos que debe satisfacer un marco rígido de acero estructural para ser considerado un marco dúctil. Estos requisitos se aplican a marcos rígidos diseñados con un factor de comportamiento sísmico  $Q$  igual a 4.0 o a 3.0, que formen parte de sistemas estructurales que cumplan las condiciones enunciadas en el capítulo 5, partes I y II, de las NTC para diseño por sismo, necesarias para utilizar ese valor del factor de comportamiento sísmico.

Tanto en los casos en que la estructura está formada sólo por marcos como por aquellos en que está compuesta por marcos y muros o contravientos, cada uno de los marcos se debe diseñar para resistir, como mínimo, fuerzas horizontales iguales al 25 por ciento de las que le corresponderían si trabajase aislado del resto de la estructura.

La gráfica esfuerzo de tensión-deformación del acero empleado debe tener una zona de cedencia, de deformación creciente bajo esfuerzo prácticamente constante, correspondiente a un alargamiento máximo no menor de uno por ciento, seguida de un endurecimiento por deformación. El alargamiento correspondiente a la ruptura no debe ser menor de 20 por ciento.

#### 3.5.2.2.2 Miembros en flexión

Los requisitos de esta sección se aplican a miembros principales que trabajan esencialmente en flexión. Se incluyen vigas y columnas con cargas axiales pequeñas, tales que  $P_u$  no exceda de  $P_y/10$ .

##### 3.5.2.2.2.1 Requisitos geométricos

Todas las vigas deben ser de sección transversal I o rectangular hueca, excepto en los casos cubiertos en el inciso 3.5.2.2.5.

El claro libre de las vigas no debe ser menor que cinco veces el peralte de su sección transversal, ni el ancho de sus patines mayor que el ancho del patín o el peralte del alma de la columna con la que se conecten.

El eje de las vigas no debe separarse horizontalmente del eje de las columnas más de un décimo de la dimensión transversal de la columna normal a la viga.

Las secciones transversales de las vigas deben ser tipo 1, de manera que han de satisfacer los requisitos geométricos que se indican en los incisos 2.3.1 y 2.3.2 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87). Sin embargo, se permite que la relación ancho/grueso del alma llegue hasta  $5300/\sqrt{F_y}$  si en las zonas de formación de articulaciones plásticas se toman las medidas necesarias (refuerzo del alma mediante atiesadores transversales o placas adosadas a ella, soldadas adecuadamente) para impedir que el pandeo local se presente antes de la formación del mecanismo de colapso.

Además, las secciones transversales deben tener dos ejes de simetría, una vertical, en el plano en que actúan las cargas gravitacionales, y otro horizontal. Cuando se utilicen cubreplacas en los patines para aumentar la resistencia del perfil, deben conservarse los dos ejes de simetría.

Si las vigas están formadas por placas soldadas, la soldadura entre almas y patines debe ser continua en toda la longitud de la viga, y en las zonas de formación de articulaciones plásticas debe ser capaz de desarrollar la resistencia total en cortante de las almas.

Cuando se empleen vigas de resistencia variable, ya sea por adición de cubreplacas en algunas zonas o porque su peralte varíe a lo largo del claro, el momento resistente nunca debe ser menor, en ninguna sección, que la cuarta parte del momento resistente máximo, que se tendrá en los extremos.

En estructuras soldadas deben evitarse los agujeros, siempre que sea posible, en las zonas de formación de articulaciones plásticas. En estructuras atornilladas o remachadas, los agujeros que sean necesarios en la parte del perfil que trabaje en tensión se deben punzar a un diámetro menor y se agrandan después, hasta darles el diámetro completo, con un taladro o un escarificador. Este mismo procedimiento se debe seguir en estructuras soldadas, si se requieren agujeros para montaje o con algún otro objeto. Para los fines de los dos párrafos anteriores, las zonas de formación de articulaciones plásticas se consideran de longitud igual a un peralte, en los extremos de las vigas, y a dos peraltes, medidos uno a cada lado de la sección en la que aparece, en teoría, la articulación plástica, en zonas intermedias.

En aceros cuyo esfuerzo mínimo especificado de ruptura en tensión,  $F_u$ , es menor 1.5 veces el esfuerzo de fluencia mínimo garantizado,  $F_y$ , no se debe permitir la formación de articulaciones plásticas en zonas en que se haya reducido el área de los patines, ya sea por agujeros para tornillos o por cualquier otra causa.

No se deben hacer empalmes de ningún tipo, en las vigas propiamente dicha o en sus cubreplacas, en zonas de formación de articulaciones plásticas.

#### 3.5.2.2.2 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos que trabajan principalmente en flexión se deben dimensionar de manera que no se presenten fallas por cortante antes de que se formen las articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso. Para ello, la fuerza cortante de diseño se obtiene del equilibrio del miembro entre las secciones en que se forman las articulaciones plásticas, en los que se supone que actúan momentos del mismo sentido y de magnitudes iguales a los momentos plásticos resistentes del elemento en esas secciones, sin factores de reducción, y evaluados al tomar el esfuerzo de fluencia del material igual a  $1.25 F_y$ . Al plantear la ecuación de equilibrio para calcular la fuerza cortante se deben tener en cuenta las cargas transversales que obran sobre el miembro, multiplicadas por el factor de carga.

Como una opción se permite hacer el dimensionamiento al tomar como base las fuerzas cortantes de diseño obtenidas en el análisis, pero utilizar un factor de resistencia  $F_R$  igual a 0.7, en lugar del valor de 0.9 especificado en el artículo 3.3.3 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87).

Las articulaciones plásticas se forman, en la mayoría de los casos, en los extremos de los elementos que trabajan en flexión. Sin embargo, hay ocasiones frecuentes en las vigas de los niveles superiores de los edificios, en que una de ellas se forma en la zona central del miembro. Cuando esto suceda, la fuerza cortante debe evaluarse al tener en cuenta la posición real de la articulación plástica.

#### 3.5.2.2.2.3 Contraventeo lateral

Deben soportarse lateralmente todas las secciones transversales de las vigas en las que puedan formarse articulaciones plásticas asociadas con el mecanismo de colapso. Además, la distancia entre cada una de estas secciones y la siguiente sección soportada lateralmente no debe ser mayor que la dada a continuación.

$$L_p = 1250 \frac{I_y}{\sqrt{F_y}} \quad (3.17)$$

Este requisito se aplica a un solo lado de la articulación plástica cuando ésta se forma en un extremo de la viga, y en ambos lados cuando aparece en una sección intermedia. La expresión anterior es válida para vigas de sección transversal I o H, flexionadas alrededor de su eje de mayor momento de inercia.

En zonas que se conservan en el intervalo elástico al formarse el mecanismo de colapso, la separación entre puntos no soportados lateralmente puede ser mayor que la indicada en el párrafo anterior, pero no debe exceder el valor de  $L_u$ , calculado de acuerdo con el inciso 3.3.2.2 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87).

Los elementos de contraventeo deben proporcionar soporte lateral, directo o indirecto, a los dos patines de las vigas. Cuando el sistema de piso proporcione soporte lateral al patín superior, el desplazamiento lateral del patín inferior puede evitarse por medio de atiesadores verticales de rigidez adecuada, soldados a los dos patines y al alma de la viga.

#### 3.5.2.2.3 Miembros en flexocompresión

Los requisitos de esta sección se aplican a miembros que trabajan en flexocompresión, en los que la carga axial de diseño,  $P_u$ , es mayor que  $P_u/10$ . La mayoría de estos miembros son columnas, pero pueden

ser de algún otro tipo; por ejemplo, vigas que forman parte de crujías contraventeadas de marcos rígidos han de diseñarse, en general, como elementos flexocomprimidos.

#### 3.5.2.2.3.1 Requisitos geométricos

Si la Sección transversal es rectangular hueca, la relación de la mayor a la menor de sus dimensiones exteriores no debe exceder de 2 y la dimensión menor debe ser mayor o igual a 20 cm.

Si la sección transversal es H, el ancho de los patines no debe ser mayor que el peralte total, la relación peralte-ancho del patín no debe exceder de 1.5, y el ancho de los patines debe ser mayor o igual a 20 cm.

La relación de esbeltez máxima de las columnas no debe exceder de 60.

#### 3.5.2.2.3.2 Resistencia mínima en flexión

La resistencia en flexión de las columnas que concurren a un nudo deben satisfacer la condición dada por la Ec 5.8.5 del inciso 5.8.5 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87), con las excepciones que se indican en este inciso.

Como una opción, se permite hacer el dimensionamiento al tomar como base los elementos mecánicos de diseño obtenidos en el análisis, y reducir el factor de resistencia  $F_R$  utilizado en flexocompresión de 0.9 a 0.7.

#### 3.5.2.2.3.3 Requisitos para fuerza cortante

Los elementos flexocomprimidos se deben dimensionar de manera que no fallen prematuramente por fuerza cortante. Para ello, la fuerza cortante de diseño se obtiene del equilibrio del miembro, al considerar su longitud igual a la altura libre y suponer que en sus extremos obran momentos del mismo sentido y de magnitud igual a los momentos máximos resistentes de las columnas en el plano de estudio, que valen  $Z_c(F_{yc} - f_a)$ . El significado de las literales que aparecen en esta expresión se explica con referencia a la Ec 5.8.5 del inciso 5.8.5 (NTC para diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87).

Cuando las columnas se dimensionen por flexocompresión con el procedimiento optativo del inciso 3.5.2.2.3.2, la revisión por fuerza cortante se debe realizar con la fuerza de diseño obtenida en el análisis y utilizar un factor de resistencia de 0.7.

#### 3.5.2.2.4 Uniones viga-columna

Las uniones viga-columna deben satisfacer las recomendaciones de la sección 5.8 "Conexiones rígidas entre vigas y columnas" (NTC para

diseño y construcción de estructuras metálicas del RCDF87), con las modificaciones pertinentes cuando las columnas sean de sección transversal rectangular hueca.

#### 3.5.2.2.4.1 Contraventeo

Si en alguna junta de un marco dúctil no llegan vigas al alma de la columna, por ningún lado de ésta, o si el peralte de la viga o vigas que llegan por alma es apreciablemente menor que el de las que se apoyan en los patines de la columna, éstos deben ser soportados lateralmente al nivel de los patines inferiores de las vigas.

#### 3.5.2.2.4.2 Vigas de alma abierta (armaduras)

En esta sección se indican los requisitos especiales que deben satisfacerse cuando se desea emplear vigas de alma abierta (armaduras) en marcos dúctiles. Deben cumplirse, además, todas las condiciones aplicables de este capítulo.

Las armaduras pueden utilizarse como miembros horizontales en marcos dúctiles, si se diseñan de manera que la suma de las resistencias en flexión ante fuerzas sísmicas de las dos armaduras que concurren en cada nudo intermedio sea igual o mayor 1.25 veces la suma de las resistencias en flexión ante fuerzas sísmicas de las columnas que llegan al nudo. En nudos extremos, el requisito anterior debe ser satisfecho por la única armadura que forma parte de ellos.

Además, deben cumplirse las condiciones siguientes:

- a) Los elementos de las armaduras que trabajan en compresión o en flexocompresión, sean cuerdas, diagonales o montantes, se deben diseñar con un factor de resistencia,  $F_R$ , igual a 0.7. Al determinar cuales elementos trabajan en compresión o en flexocompresión deben tomarse en cuenta los dos sentidos en que actúa el sismo de diseño.
- b) Las conexiones entre las cuerdas de las armaduras y las columnas deben ser capaces de desarrollar la resistencia correspondiente al flujo plástico de las cuerdas.
- c) En edificios de más de un piso, el esfuerzo en las columnas producido por las fuerzas axiales de diseño no deben ser mayores de  $0.30 F_v$ , y la relación de esbeltez máxima de las columnas no debe exceder de 60.

### 3.6 Espectros para diseño sísmico

De acuerdo con las NTC para diseño por sismo, cuando se aplique el análisis dinámico modal que especifica la sección 9 de sus normas,

se adoptan las siguientes hipótesis para el análisis de la estructura:

La ordenada del espectro de aceleraciones para diseño sísmico,  $a$ , expresada como fracción de la aceleración de la gravedad, está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4} \left( 1 + 3 \frac{T}{T_a} \right) c & \forall T < T_a \\
 a &= c & \forall T_a \leq T \leq T_b \\
 a &= \left( \frac{T_b}{T} \right)^r c & \forall T > T_b
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$T$  es el período natural de interés;  $T$ ,  $T_a$ , y  $T_b$  están expresados en segundos;  $c$  es el coeficiente sísmico, y  $r$  un exponente que depende de la zona en que se halla la estructura, y se especifica en la tabla 3.1 de las NTC para diseño por sismo, reproducida a continuación.

El coeficiente sísmico  $c$  se obtiene del Art 206 del RCDF87, salvo que la parte sombreada de la zona II de la fig 3.1 de las NTC para diseño por sismo (NTC-sismo) se debe tomar  $c = 0.4$  para las estructuras del grupo B, y  $c = 0.6$  para las del A.

Zona	$c$	$T_a$ (s)	$T_b$ (s)	$r$
I	0.16	0.2	0.6	1/2
II*	0.32	0.3	1.5	2/3
III+	0.40	0.6	3.9	1

Notas: Coeficiente sísmico para construcciones del Grupo B  
 \* No sombreada (Fig 3.1, NTC-sismo)  
 + Y parte sombreada de zona II (Fig 3.1, NTC-sismo)

## 4. FUERZAS SISMICAS

En este capítulo se describen los métodos que considera el RCDF87 para cuantificar las fuerzas que se deben considerar en el diseño de una edificación para soportar los efectos de un sismo.

### 4.1 Análisis dinámico

De acuerdo con las NTC para diseño por sismo, toda estructura puede analizarse mediante un método dinámico. Se aceptan como métodos de análisis dinámico:

- a) El modal (modal espectral)
- b) El paso a paso de respuestas a sismos específicos

A fin de explicar los métodos para analizar las estructuras ante cargas dinámicas, se presentan los siguientes desarrollos:

#### 4.1.1 Ecuaciones de equilibrio dinámico de las edificaciones

Las ecuaciones de equilibrio dinámico de los modelos estructurales lineales para edificaciones se pueden expresar como:

$$\tilde{M} \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}(t) + \tilde{C} \frac{d}{dt} \bar{u}(t) + \tilde{K} \bar{u}(t) = \bar{F}(t) \quad (4.1)$$

Con las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{u}(t) |_{t=0} &= \bar{v}_0 \\ &= \text{vector de velocidades conocido} \\ \bar{u}(t) |_{t=0} &= \bar{u}_0 \\ &= \text{vector de desplazamientos conocido} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde, para la edificación en particular, se definen los siguientes conceptos.

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \text{Matriz de masas} \\ \bar{C} &= \text{Matriz de amortiguamientos} \\ \bar{K} &= \text{Matriz de rigideces} \\ \bar{u}(t) &= \text{vector de desplazamientos} \\ \frac{d}{dt} \bar{u}(t) &= \text{vector de velocidades} \\ \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}(t) &= \text{vector de aceleraciones} \\ \bar{F}(t) &= \text{vector de cargas} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En el caso de fuerzas sismicas, el vector de cargas se puede expresar en términos del vector de aceleraciones del terreno (acelerograma),  $\ddot{u}_g(t)$ , de acuerdo con la expresión siguiente:

$$\bar{F} = -\bar{M}\bar{1}\ddot{u}_g(t) \quad (4.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{1}^T &= [1 \ 1 \ \dots \ 1] \\ &= \text{vector con componentes unitarias} \end{aligned} \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 Métodos directos de integración paso a paso

Los métodos que actualmente se utilizan para integrar paso a paso las ecuaciones de equilibrio dinámico de las edificaciones se agrupan en:

- a) métodos directos
- b) métodos de superposición modal

El método directo que mas se utiliza es el denominado método de Newmark. Este método se basa en la aproximación lineal de la aceleración en el tamaño del paso de integración, según se muestra en la Fig 4.1.

De acuerdo con la hipótesis de la aceleración lineal, los elementos de las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ec 4.1) al final del paso de integración se pueden escribir como.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} &= \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \\ \frac{d}{dt} \bar{u}_{t+\Delta t} &= \frac{d}{dt} \bar{u}_t + \frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} + \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_t \right) \\ \bar{u}_{t+\Delta t} &= \bar{u}_t + \Delta t \frac{d}{dt} \bar{u}_t + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \left( \frac{d}{dt} \bar{u}_{t+\Delta t} + 2 \frac{d}{dt} \bar{u}_t \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La aproximación de Newmark consiste en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{u}_{t+\Delta t} &= \frac{d}{dt} \bar{u}_t + (1 - \gamma) \Delta t \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_t + \gamma \Delta t \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \\ &= \bar{a} + \gamma \Delta t \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \\ \bar{u}_{t+\Delta t} &= \bar{u}_t + \Delta t \frac{d}{dt} \bar{u}_t + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_t + \beta (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \\ &= \bar{B} + \beta (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt} \bar{u}_t + (1 - \gamma) \Delta t \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_t \quad (4.8)$$

$$\bar{b} = \bar{u}_t + \Delta t \frac{d}{dt} \bar{u}_t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_t$$

El parámetro  $\beta$  está relacionado con la estabilidad del método (para  $\beta = 1/4$ , el método es incondicionalmente estable) y el parámetro  $\gamma$  se relaciona con la estabilidad y convergencia del método debido al amortiguamiento matemático que puede inducirse (para  $\gamma = 1/2$ , no se presenta el amortiguamiento matemático). Para el caso en que  $\gamma = 1/6$  y  $\beta = 1/2$ , las Ec 4.7 se reducen a las correspondientes Ec 4.6.

Al valuar las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ec 4.1) al final del paso de integración (en  $t = t + \Delta t$ ) y al sustituir en la ecuación resultante a las Ec 4.7 se obtiene la siguiente ecuación.

$$\bar{M} \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} + \bar{C} \left( \bar{a} + \gamma \Delta t \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \right) + \bar{K} \left( \bar{b} + \beta (\Delta t)^2 \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} \right) = \bar{F}_{t+\Delta t} \quad (4.9)$$

La Ec 4.9 puede escribirse como:

$$\bar{K}^* \frac{d^2}{dt^2} \bar{u}_{t+\Delta t} = \bar{p} \quad (4.10)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{K}^* &= \bar{M} + \gamma \Delta t \bar{C} + \beta (\Delta t)^2 \bar{K} \\ \bar{p} &= \bar{F}_{t+\Delta t} - \bar{C} \bar{a} - \bar{K} \bar{b} \end{aligned} \quad (4.11)$$

La Ec 4.10 permite cuantificar la aceleración al final del paso es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, simétricas, de coeficientes constantes si el paso de integración se conserva constante durante el proceso de integración.

En la dinámica estructural se acostumbra cuantificar a la matriz de amortiguamientos de la estructura de acuerdo con el criterio de Rayleigh, expresado mediante la siguiente ecuación.

$$\bar{C} = \alpha \bar{M} + \mu \bar{K} \quad (4.12)$$

Al sustituir la Ec 4.12 en las Ec 4.11 se obtiene.

$$\begin{aligned}\tilde{K}^* &= (1 + \alpha\gamma\Delta t)\tilde{M} + (\gamma\mu\Delta t + \beta(\Delta t)^2)\tilde{K} \\ \tilde{p} &= \tilde{F}_{t+\Delta t} - \alpha\tilde{M}\tilde{a} - \tilde{K}(\mu\tilde{a} + \tilde{b})\end{aligned}\quad (4.13)$$

El algoritmo del método de integración paso a paso de Newmark, resumido por las Ec 4.10 y 4.13, necesariamente se debe llevar a cabo en una computadora debido al número de operaciones que involucra.

#### 4.1.3 Método directo paso a paso de superposición modal

Otra forma de integrar paso a paso las ecuaciones de equilibrio dinámico de las estructuras (Ec 4.1) es mediante la solución del problema de eigenvalores, según se indica a continuación.

##### 4.1.3.1 Solución del problema de valores característicos (eigenvalores) de las ecuaciones de equilibrio dinámico

Este caso corresponde a un problema de vibraciones libres no amortiguadas, cuyas ecuaciones resultan ser.

$$\tilde{M}\frac{d^2}{dt^2}\tilde{u}(t) + \tilde{K}\tilde{u}(t) = \tilde{0}\quad (4.14)$$

En las vibraciones libres el movimiento es armónico, es decir.

$$\frac{d^2}{dt^2}\tilde{u}(t) = -\omega^2\tilde{u}(t)\quad (4.15)$$

y las ecuaciones de vibración libre resultan ser

$$\tilde{K}\tilde{u} = \omega^2\tilde{M}\tilde{u}\quad (4.16)$$

que es el clásico problema de eigenvalores comunmente expresado como:

$$\tilde{A}\tilde{x} = \lambda\tilde{B}\tilde{x}\quad (4.17)$$

Varios son los métodos que existen para resolver el problema de eigenvalores. Los utilizados con las computadoras, entre otros, se pueden nombrar a

- . El de Jacobi
- . El de la iteración del subespacio

Cuando se emplean calculadoras de escritorio para los modelos estructurales mas simples (rigideces de entrepiso y masas con movimientos unidireccionales) se utilizan los métodos de:

- . Stodolla-Vianelo-Newmark
- . Holzer

#### 4.1.3.2 Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico

La transformación que permite desacoplar las ecuaciones de equilibrio dinámico se puede expresar como.

$$\bar{u} = \bar{R}\bar{y} \quad (4.18)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \text{vector del nuevo sistema coordenado} \\ \bar{R} &= [\bar{r}^1 \ \bar{r}^2 \ \bar{r}^3 \ \dots \ \bar{r}^n] \\ &= \text{Matriz modal} \\ \bar{r}^n &= \text{n-ésimo eigenvector} \end{aligned} \quad (4.19)$$

De acuerdo con la transformación de coordenadas anterior (Ec 4.18) las expresiones de los vectores de velocidad y de aceleración resultan ser:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bar{u}(t) &= \bar{R}\frac{d}{dt}\bar{y}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\bar{u}(t) &= \bar{R}\frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

De acuerdo con las Ec 4.18 y 4.20 las ecuaciones de equilibrio dinámico (Ec 4.1) en el sistema de referencia transformado se expresan como:

$$\bar{M}\bar{R}\frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t) + \bar{C}\bar{R}\frac{d}{dt}\bar{y}(t) + \bar{K}\bar{R}d\bar{y}d\bar{y}(t) = \bar{F}(t) \quad (4.21)$$

Al premultiplicar la Ec 4.21 por la transpuesta de la matriz modal se obtiene la siguiente expresión.

$$\bar{R}^T\bar{M}\bar{R}\frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t) + \bar{R}^T\bar{C}\bar{R}\frac{d}{dt}\bar{y}(t) + \bar{R}^T\bar{K}\bar{R}d\bar{y}d\bar{y}(t) = \bar{R}^T\bar{F}(t) \quad (4.22)$$

Al definir los siguientes conceptos

$$\bar{M}^* = \bar{R}^T\bar{M}\bar{R} = \text{Matriz de masas transformada}$$

$$\bar{C}^* = \bar{R}^T\bar{C}\bar{R} = \text{Matriz de amortiguamientos transformada} \quad (4.23)$$

$$\bar{K}^* = \bar{R}^T\bar{K}\bar{R} = \text{Matriz de rigideces transformada}$$

$$\bar{F}^*(t) = \bar{R}^T\bar{F}(t) = \text{vector de cargas transformado}$$

De acuerdo con las propiedades de ortogonalidad de los eigenvectores respecto a las matrices de masas y de rigideces, la matriz de masas transformada y la matriz de rigideces transformada resultan ser matrices diagonales. Si la matriz de amortiguamientos se selecciona de tal manera que también la matriz de amortiguamientos transformada sea una matriz diagonal, las ecuaciones de equilibrio dinámico transformadas (Ec 4.22) se pueden escribir como.

$$\bar{M}^*\frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t) + \bar{C}^*\frac{d}{dt}\bar{y}(t) + \bar{K}^*\bar{y}(t) = \bar{F}^*(t) \quad (4.24)$$

que resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado, cuya ecuación i-ésima se puede escribir como:

$$m_i^*\frac{d^2}{dt^2}y_i(t) + c_i^*\frac{d}{dt}y_i(t) + k_i^*y_i(t) = f_i^*(t) \quad (4.25)$$

La Ec 4.25 representa la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema de un grado de libertad. Por lo anterior se puede decir que un sistema de N grados de libertad se transforma en N sistemas de un grado de libertad. Los coeficientes de las ecuaciones de un grado de libertad resultan ser:

$$m_i^* = \sum_{k=1}^N m_k (r_k^i)^2 \quad (4.26)$$

$$c_i^* = 2\omega_i \zeta_i \quad (4.27)$$

$$k_i^* = \omega_i^2 m_i^* \quad (4.28)$$

$$f_i^* = -\frac{\sum_{k=1}^N m_k r_k^i}{\sum_{k=1}^N m_k (r_k^i)^2} \frac{d^2}{dt^2} u_g(t) = -c_i \frac{d^2}{dt^2} u_g(t) \quad (4.29)$$

en donde:

$m_k$  = masa asociada al grado  
 . de libertad k-ésimo  
 $r_k^i$  = componente k-ésimo del  
 . i-ésimo eigenvector (modo)  
 $\omega_i$  = frecuencia natural de  
 . vibración del i-ésimo modo  
 $\zeta_i$  = fracción del amortiguamiento  
 . crítico del i-ésimo modo

$c_i = \frac{\sum_{k=1}^N m_k r_k^i}{\sum_{k=1}^N m_k (r_k^i)^2} =$  coeficiente de  
 . participación del i-ésimo modo

#### 4.1.3.3 Integración paso a paso de las ecuaciones de movimiento desacopladas

Como las ecuaciones de movimiento desacopladas (Ec 4.25) corresponden a las de un grado de libertad, los métodos de integración son los tradicionales.

- Exacto, para el caso de aproximar la función  $f_i^*(t)$  en tramos seccionalmente continuos con una variación lineal (que es lo usual).
- Aproximado, mediante un método numérico como el método de Newmark-Wilson.

El paso de integración se define en el inciso 4.1.2

#### 4.1.3.4 Cuantificación de la respuesta de la estructura

De acuerdo con el inciso anterior para el tiempo de integración considerado se cuantifican, para cada paso de integración, los siguientes vectores.

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \text{vector de desplazamientos transformado} \\ \frac{d}{dt}\bar{y}(t) &= \text{vector de velocidades transformado} \\ \frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t) &= \text{vector de aceleraciones transformado}\end{aligned}\tag{4.31}$$

Al sustituir las Ec 4.31 en las Ec 4.18 y 4.20 se obtiene la respuesta de la estructura representada por los vectores de desplazamiento relativo, de velocidad relativa, y de aceleración relativa, es decir.

$$\begin{aligned}\bar{u}(t) &= \bar{R}\bar{y}(t) \\ \frac{d}{dt}\bar{u}(t) &= \bar{R}\frac{d}{dt}\bar{y}(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\bar{u}(t) &= \bar{R}\frac{d^2}{dt^2}\bar{y}(t)\end{aligned}\tag{4.32}$$

#### 4.1.3.4 Obtención de los elementos mecánicos y cinemáticos de la estructura debidos al sismo

Conocida la historia del vector de desplazamientos de la estructura (según se indica en el inciso anterior) se puede determinar la historia de los elementos mecánicos y cinemáticos en los puntos que se requieran de la estructura.

#### 4.1.4 Método de la respuesta espectral

Este método corresponde al denominado análisis en las NTC para diseño por sismo. Su secuencia se resume a continuación.

##### 4.1.4.1 Solución del problema de valores característicos (eigenvalores) de las ecuaciones de equilibrio dinámico

El procedimiento es el mismo que el descrito en el inciso 4.1.3.1 del método directo de superposición modal.

##### 4.1.4.2 Desacoplamiento de las ecuaciones de equilibrio dinámico

El procedimiento es el mismo que el descrito en el inciso 4.1.3.2 del método directo de superposición modal.

##### 4.1.4.3 Obtención de la respuesta espectral de cada una de las ecuaciones de equilibrio desacopladas

De acuerdo con el RCDF87 se calcula mediante la siguiente expresión.

$$y_{m\acute{a}x}^i = c_i \frac{A_i}{\omega_i^2} \quad (4.33)$$

donde:

$$\begin{aligned} y_{m\acute{a}x}^i &= \text{respuesta espectral de} \\ &\quad \cdot \text{desplazamientos transformados} \\ &\quad \cdot \text{del modo } i\text{-ésimo} \\ \omega_i &= \text{Frecuencia natural de} \\ &\quad \cdot \text{vibración del modo } i\text{-ésimo} \\ A_i &= \text{Ordenada del espectro de} \\ &\quad \cdot \text{aceleraciones de diseño} \\ &\quad \cdot \text{asociada al período natural} \\ &\quad \cdot \text{de vibración } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_i} \\ c_i &= \text{Coeficiente de participación} \\ &\quad \cdot \text{del modo } i\text{-ésimo} \end{aligned} \quad (4.34)$$

##### 4.1.4.4 Cuantificación de los vectores de respuesta máximos de la estructura para cada modo

De acuerdo con la Ec 4.32a, el vector de desplazamientos máximo de la estructura, correspondiente al modo  $i$ -ésimo, resulta ser.

$$\bar{u}_{1m\acute{a}x} = \bar{r}^i y_{m\acute{a}x}^i \quad (4.35)$$

donde:

$$\vec{r}^i = \text{Eigenvector asociado al modo } i\text{-ésimo} \quad (4.36)$$

De acuerdo con la Ec 4.36, a cada modo de la estructura le corresponde un vector de desplazamientos máximo. Con base en la formulación de las ecuaciones de equilibrio de las estructuras, a cada vector de desplazamientos le corresponden un conjunto de elementos mecánicos y cinemáticos (fuerzas normales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes, momentos de volteo, desplazamientos relativos, etc.)

#### 4.1.4.5 Obtención de la respuesta total de la estructura

Una vez conocidos los elementos mecánicos y cinemáticos (fuerzas normales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes, momentos de volteo, desplazamientos relativos, etc.) asociadas a cada modo, representado por  $S_i$ , para obtener la respuesta de la estructura, representada por  $S$ , se procede como se indica a continuación.

##### 4.1.4.5.1 Método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS)

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (4.37)$$

##### 4.1.4.5.2 Método de la combinación cuadrática completa (CQC)

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N S_i P_{ij} S_j} \quad (4.38)$$

donde:

$$P_{ij} = \frac{8\sqrt{\zeta_i \zeta_j \omega_i \omega_j} (\zeta_i \omega_i + \zeta_j \omega_j) \omega_i \omega_j}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4\zeta_i \zeta_j \omega_i \omega_j (\omega_i^2 + \omega_j^2) + 4(\zeta_i^2 + \zeta_j^2) \omega_i^2 \omega_j^2} \quad (4.39)$$

Valor del amortiguamiento crítico del modo  $i$ -ésimo (que se supone consante para todos los modos)

frecuencia natural de vibración del modo  $i$ -ésimo

## 4.2 Análisis estático

Las NTC para Diseño por Sismo del RCDF87 proponen un método relativamente simple para cuantificar las fuerzas horizontales que un sismo de diseño ocasiona a una edificación cuya altura no exceda de 60 m.

### 4.2.1 Distribución de las aceleraciones horizontales

De acuerdo con el inciso 8.1 de las NTC para Diseño por Sismo del RCDF87, la hipótesis sobre la distribución de aceleraciones en las masas de las edificaciones se muestra en la Fig 4.2. Para la masa del nivel  $i$ -ésimo, la fuerza que la distribución de aceleraciones le ocasiona a la masa se puede escribir como.

$$F_i = m_i \ddot{u}_i = \frac{W_i}{g} \ddot{u}_i \quad (4.40)$$

donde se definen los componentes respectivos.

$$\begin{aligned} F_i &= \text{Fuerza horizontal del nivel } i\text{-ésimo} \\ m_i &= \text{masa del nivel } i\text{-ésimo} \\ W_i &= m_i g = \text{peso del nivel } i\text{-ésimo} \\ \ddot{u}_i &= \text{aceleración del nivel } i\text{-ésimo} \end{aligned} \quad (4.41)$$

De acuerdo con la Fig 4.2, la expresión de la aceleración de la masa  $i$ -ésima resulta ser.

$$\ddot{u}_i = \frac{h_i}{h_n} \ddot{u}_n \quad (4.42)$$

Al sustituir la Ec 4.42 en la Ec 4.40 se obtiene.

$$F_i = \frac{\ddot{u}_n}{g h_n} W_i h_i \quad (4.43)$$

#### 4.2.2 Fuerzas sísmicas horizontales

De acuerdo con la definición de fuerza cortante basal, se puede expresar la siguiente ecuación.

$$V_0 = \sum_{I=1}^N F_I = \frac{\dot{U}_n}{gh_n} \left( \sum_{I=1}^N W_I h_I \right) \quad (4.44)$$

Al considerar la definición de coeficiente sísmico,  $c$ , se puede escribir la siguiente expresión.

$$c = \frac{V_0}{W_0} = \frac{\frac{\dot{U}_n}{gh_n} \left( \sum_{I=1}^N W_I h_I \right)}{\sum_{I=1}^N W_I} \quad (4.45)$$

Con base en la Ec 4.45 se obtiene la expresión siguiente.

$$\frac{\dot{U}_n}{gh_n} = c \frac{\sum_{I=1}^N W_I}{\sum_{I=1}^N W_I h_I} \quad (4.46)$$

Al sustituir la Ec 4.46 en la Ec 4.43, la expresión de la fuerza sísmica estática se puede expresar como.

$$F_I = c \frac{\sum_{I=1}^N W_I}{\sum_{I=1}^N W_I h_I} W_I h_I \quad (4.47)$$

#### 4.2.3 Estimación del período fundamental de la estructura

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 recomienda una expresión para estimar el período de vibración del primer modo,  $T_1$ , de acuerdo con la modelación estructural a base de rigideces de entrepiso, según se indica a continuación.

a) Los datos de partida se muestran en la Fig 4.2 y son.

$$\begin{aligned} k_i &= \text{Rigideces del entrepiso } i\text{-ésimo} \\ W_i &= \text{Pesos del nivel } i\text{-ésimo} \end{aligned} \quad (4.48)$$

b) Cuantificación de las fuerzas sísmicas,  $F_i$ , de cada nivel de acuerdo con la Ec 4.47.

c) Cuantificación de las fuerzas cortantes,  $V_i$ , de cada entrepiso.

$$V_i = \sum_{k=1}^N F_k \quad (4.49)$$

d) Obtención de los desplazamientos,  $u_i$ , asociados a las fuerzas cortantes de entrepiso.

$$\Delta u_i = \frac{V_i}{k_i} \quad (4.50)$$

e) Obtención de los desplazamientos,  $x_i$ , que provocan las fuerzas sísmicas, con base en la Ec 4.50.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_i &= x_{i-1} + \Delta u_i \quad \forall i = 2 \dots N \end{aligned} \quad (4.51)$$

f) Obtención de las aceleraciones armónicas correspondientes a los desplazamientos del inciso anterior (inciso e), asociados a la frecuencia natural de vibración,  $\omega_1$ .

$$\ddot{x}_i = \omega_1^2 x_i \quad (4.52)$$

g) obtención de las fuerzas dinámicas asociadas a las aceleraciones armónicas del inciso anterior (inciso f).

$$F_{ar} = m_i \ddot{x}_i = \frac{W_i x_i}{g} \omega_1^2 \quad (4.53)$$

h) Cuantificación de los trabajos que realizan las fuerzas  $F_i$  (Ec 4.47) y  $F_{ar}$  (Ec. 4.53) debido a los desplazamientos  $x_i$  (Ec 4.51).

$$W_{Fi} = \sum_{i=1}^N F_i X_i \quad (4.54)$$

$$W_{Far} = \frac{\omega_1^2}{g} \sum_{i=1}^N W_i X_i^2$$

- i) Obtención de la frecuencia natural de vibración  $T_1$ , al igualar los trabajos dados por las Ec 4.54.

$$\omega_1^2 = g \frac{\sum_{i=1}^N F_i X_i}{\sum_{i=1}^N W_i X_i^2} \quad (4.55)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N W_i X_i^2}{g \sum_{i=1}^N F_i X_i}}$$

#### 4.2.4 Reducción de las fuerzas cortantes estáticas

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que las fuerzas sísmicas descritas en el inciso 4.2.2, obtenidas con la Ec 4.55, pueden adoptarse valores los menores que se indica a continuación.

- a) El período fundamental de vibración se obtiene con la Ec 4.55.  
 b) Si  $T_1 \leq T_b$  el valor del coeficiente sísmico,  $c$ , en la Ec 4.47 se sustituye por el valor de la ordenada del espectro de aceleraciones,  $a$ , dado por la Ec 3.38, y resulta ser.

$$F_i = a \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} W_i h_i \quad (4.56)$$

- c) Si  $T_1 > T_b$  las fuerzas sísmicas se cuantifican con las expresiones siguientes.

$$F_i = aW_i(k_1h_i + k_2h_i^2) \quad \forall a \geq \frac{c}{4} \quad (4.57)$$

donde:

$$k_1 = q[1 - r(1 - q)] \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i}$$

$$k_2 = 1.5rq(1 - q) \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i^2} \quad (4.58)$$

$$q = \left( \frac{T_b}{T_1} \right)^r$$

#### 4.3 Método simplificado

Las NTC para diseño por sismo establece el cumplimiento simultáneo de las siguientes condiciones para que sea aplicable el denominado método simplificado de análisis.

##### 4.3.1 Consideraciones generales

- I. En cada planta, al menos el 75 por ciento de las cargas verticales están soportadas por muros ligados entre sí mediante losas monolíticas u otros sistemas de piso suficientemente resistentes y rígidos al corte. Dichos muros tendrán distribución sensiblemente simétrica con respecto a dos ejes ortogonales y deben satisfacer las condiciones que establecen las NTC correspondientes. Es admisible cierta asimetría en la distribución de los muros cuando existan en todos los pisos dos muros de cargas perimetrales paralelos, cada uno con longitud al menos igual a la mitad de la dimensión mayor en planta del edificio. Los muros a que se refiere este párrafo pueden ser de mampostería, concreto reforzado o madera; en este último caso deben estar arriostrados con diagonales.
- II. La relación entre longitud y ancho de la planta del edificio no excede de 2.0 a menos que, para fines de análisis sísmico, se pueda suponer dividida dicha planta en tramos independientes cuya relación longitud a anchura satisfaga esta

restricción y cada tramo resista según el criterio que se indica en la tabla 7.1 de las NTC para diseño por sismo.

III. La relación entre la altura y la relación mínima de la base del edificio no excede a 1.5 y la altura del edificio no es mayor de 13 m.

#### 4.3.2 Consideraciones específicas

Para aplicar este método se hace caso omiso de los desplazamientos horizontales, torsiones y momentos de volteo.

Se debe verificar únicamente que en cada piso la suma de las resistencias al corte de los muros de carga, proyectados en la dirección en que se considera la aceleración, sea cuando menos igual a la fuerza cortante total que obre en dicho piso, calculada según se especifica en el inciso 4.2.2.

Los coeficientes sísmicos que se deben emplear se indican en la tabla 7.1 de las NTC para diseño por sismo, correspondientes a las construcciones del grupo B. Para las construcciones del grupo A dichos coeficientes se deben multiplicar por 1.5.

Tabla 7.1 Coeficientes sísmicos reducidos para el método simplificado, correspondiente a estructuras del grupo B (NTC para diseño por sismo RCDF87).						
ZONA	MUROS DE PIEZAS MACISAS O DIAFRAGMAS DE MADERA CONTRACHAPEADA			MUROS DE PIEZAS HUECAS O DIAFRAGMAS DE DUELAS DE MADERA*		
	ALTURA DE LA CONSTRUCCION (m)			ALTURA DE LA CONSTRUCCION (M)		
	H<4	4≤H≤7	7<H≤13	4<H	4≤H≤7	7<H≤13
I	0.07	0.08	0.08	0.10	0.11	0.11
IIyIII	0.13	0.16	0.19	0.15	0.19	0.23

\* Diafragmas de duelas de madera inclinadas o sistemas de muros formados por duelas de madera verticales u horizontales arriostradas con elementos de madera maciza.

#### 4.3.3 Consideraciones de las NTC para diseño y construcción de estructuras de mampostería

En el inciso 4.1.3 de las NTC para diseño y construcción de estructuras de mampostería se establece lo siguiente.

El análisis para la determinación de los efectos de las cargas laterales debidas a sismo se hace con base en las rigideces relativas de los distintos muros. Estas se determinan tomando en cuenta las deformaciones de cortante y de flexión. Para estas últimas se considera la sección transversal agrietada del muro cuando la relación de carga vertical a momento flexionante es tal que se presentan tensiones verticales. Se debe tomar en cuenta la restricción que impone a la rotación de los muros la rigidez de los sistemas de piso y techo y la de los dinteles.

Es admisible considerar que la fuerza cortante que toma cada muro es proporcional a su área transversal, ignorar los efectos de torsión y de momento de volteo.

La contribución a la resistencia a fuerzas cortantes de los muros cuya relación de altura de entrepiso,  $H$ , a longitud,  $L$ , es mayor que 1.33 se debe reducir al multiplicar la resistencia por el coeficiente  $(1.33 L/H)^2$ .

#### 4.4 Reducción de fuerzas sísmicas

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que las fuerzas sísmicas descritas en los incisos 4.1 y 4.2 se pueden reducir al dividir las entre el factor reductivo  $Q'$ .

##### 4.4.1 Estructuras regulares

Para las estructuras que satisfacen las condiciones de regularidad indicadas en el inciso 4.2.4,  $Q'$  se obtiene con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} Q' &= Q && \text{si } T \text{ se desconoce} \\ Q' &= Q && \forall T \geq T_a \\ Q' &= 1 + \frac{T}{T_a} (Q - 1) && \forall T < T_a \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde:

- a)  $T$  es igual al período fundamental de vibración (inciso 4.2.3) cuando se emplee el método estático (inciso 4.2.2) e igual al período de natural de vibración del modo que se considere cuando se emplee el método de análisis modal (inciso 4.1.4).

- b)  $T_s$  es un período característico del espectro de diseño utilizado (inciso 4.2.6).
- c) Los desplazamientos de diseño sísmico se obtienen al multiplicar por el factor de comportamiento sísmico,  $Q$ , a los desplazamientos obtenidos con las fuerzas sísmicas reducidas.
- d) Cuando se adopten dispositivos especiales capaces de disipar energía por amortiguamiento o comportamiento inelástico, se pueden emplear criterios de diseño sísmico que difieran de los aquí especificados, pero congruentes con ellos, con la aceptación del DDF.

#### 4.4.2 Estructuras irregulares

Para las estructuras que no satisfacen las condiciones de regularidad indicadas en el inciso 4.2.4,  $Q'$  se obtiene con las expresiones del inciso anterior (Ec 4.59) multiplicado por 0.8.

#### 4.5 Efectos de torsión

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que para fines de diseño, el momento torsionante se debe tomar por lo menos igual a la fuerza cortante de entrepiso multiplicada por la excentricidad que para cada marco o muro resulte mas desfavorable de las siguientes

$$\begin{aligned}
 e_d &= 1.5e_s + 0.1b \\
 e_d &= e_s - 0.1b
 \end{aligned}
 \tag{4.60}$$

donde:

$e_s$  = Excentricidad torsional de rigideces calculada del entrepiso, igual a la distancia entre el centro de torsión del nivel correspondiente y la fuerza cortante en dicho nivel.

$b$  = Dimensión de la planta que se considera, medida en la dirección de  $e_s$ .

La excentricidad de diseño,  $e_d$ , en cada sentido no se debe tomar menor que la mitad del máximo valor de la excentricidad calculada,  $e_s$ , para los entrepisos que se hallen abajo del que se considera, ni se debe tomar el momento torsionante de ese entrepiso menor que la mitad del máximo calculado para los entrepisos que están arriba del considerado.

#### 4.6 Efectos de segundo orden

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que se deben tomar en cuenta explícitamente en el análisis los efectos de segundo orden, esto es, los momentos y cortantes adicionales provocados por las cargas verticales al obrar en la estructura desplazada lateralmente, en toda estructura en que la diferencia en desplazamientos laterales entre dos niveles consecutivos,  $u_i$ , dividida entre la diferencia de altura correspondientes,  $h_i$ , es tal que:

$$\frac{\Delta u_i}{h_i} > 0.08 \frac{V}{W}$$

donde

(4.62)

$V$  = Fuerza cortante en el entrepiso considerado

$W$  = Peso de la construcción encima del entrepiso

El peso de la construcción incluye cargas muertas y vivas.

#### 4.7 Efectos bidireccionales

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que los efectos de ambos componentes horizontales del movimiento del terreno se deben combinar al tomar en cada dirección en que se analice la estructura, el 100 % de los efectos del componente que obra en esa dirección y el 30 % de los efectos del que obra perpendicularmente a ella, con los signos que para cada concepto resulten mas desfavorables.

## 5. FUERZAS SISMICAS EN LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES RESISTENTES DE LAS EDIFICACIONES

El concepto de fuerzas sísmicas en elementos estructurales resistentes de una edificación es la manera de especificar la magnitud de las fuerzas sísmicas que actúan en cada uno de los elementos estructurales resistentes en los métodos que utilizan simplificaciones estructurales para cuantificar las fuerzas sísmicas.

### 5.1 En los modelos estructurales donde se utilizan las ecuaciones de equilibrio dinámico de las edificaciones

En los modelos estructurales que formulan las ecuaciones de equilibrio a través del concepto de subestructuras unidas a un diafragma (nivel), rígido o no, la información que se maneja de manera sistemática es el equilibrio de cada uno de los elementos estructurales que la forman. Entonces, el concepto de fuerzas sísmicas en los elementos estructurales es transparente ya que se cuenta con la información integral de cada uno de los elementos estructurales de la edificación, al establecer las ecuaciones de equilibrio.

### 5.2 En los modelos estructurales donde se utiliza el concepto de rigidez de entrepiso

El modelo donde se emplea el concepto de rigidez de entrepiso es el modelo mas simple donde se utiliza el concepto de diafragma rigido. Es un modelo en extinción ya que los modelos a que hace referencia el inciso 5.1 son mas generales. Se presenta porque el RCDF87 hace referencia a algunos conceptos que utiliza. Se basa en las siguientes hipótesis:

- a) Se considera el equilibrio en un solo diafragma (nivel) rígido en donde la carga que actúa es la fuerza cortante en el entrepiso correspondiente, localizada en su centro de masas.
- b) Las fuerzas que resisten a la fuerza cortante las proporcionan las rigideces de entrepiso (resortes) del entrepiso correspondiente que definen el centro de torsión (o de rigideces).
- c) Las rigideces de entrepiso las forman los marcos (o muromarcos) planos, sensiblemente paralelos en dos direcciones ortogonales.
- d) En los desarrollos que siguen se considera que el edificio tiene una distribución de rigideces regular en elevación. Es decir, que las columnas de un diafragma (nivel) únicamente están unidas con niveles consecutivos.

En la Fig 5.1 se muestra la idealización del modelo estructural descrito en los incisos anteriores.

### 5.2.1 Centro de rigideces (de torsión) del entrepiso

Debido a que los elementos resistentes de un entrepiso se representan mediante las rigideces del mismo, se define como centro de rigidez (o de torsión) al punto en donde al actuar las fuerzas cortantes únicamente provocan desplazamientos lineales.

#### 5.2.1.1 Fuerzas cortantes directas en los resortes paralelos al eje y de referencia

Con base en la Fig 5.2, la fuerza que soporta cada resorte (rigidez de entrepiso) paralelo al eje y resulta ser

$$V_{jy}^d = k_{jy}v \quad (5.1)$$

De acuerdo con la condición de equilibrio de fuerzas paralelas al eje y se puede escribir como.

$$V_y = \sum_{j=1}^{NX} V_{jy}^d = v \sum_{j=1}^{NX} k_{jy} \quad (5.2)$$

Con base en las Ec 5.1 y 5.2 se obtienen las siguientes expresiones.

$$v = \frac{V_y}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}} \quad (5.3)$$

$$V_{jy}^d = \frac{k_{jy}}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}} V_y \quad (5.4)$$

### 5.2.1.2 Fuerzas cortantes directas en los resortes paralelos al eje x de referencia

Al seguir un razonamiento similar al inciso 5.2.1.1 y utilizar la Fig 5.3 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$V_{ix}^d = k_{ix}u \quad (5.5)$$

$$V_x = \sum_{i=1}^{NY} V_{ix}^d = u \sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \quad (5.6)$$

$$u = \frac{V_x}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix}} \quad (5.7)$$

$$V_{ix}^d = \frac{k_{ix}}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix}} V_x \quad (5.8)$$

### 5.2.1.3 Coordenadas del centro de torsión

Se denomina centro de torsión (CT) o centro de rigideces (CR) al punto localizado sobre el diafragma rígido donde al actuar la fuerza cortante correspondiente únicamente le provoca desplazamientos lineales.

Al aplicar la definición de CT a la fuerza cortante paralela al eje y, al establecer el equilibrio de momentos resulta.

$$\begin{aligned}
 x_t V_y &= \sum_{j=1}^{NX} x_j V_{jy}^d \\
 &= \sum_{j=1}^{NX} x_j \frac{k_{jy}}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}} V_y \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^{NX} x_j k_{jy}}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}} V_y
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

De acuerdo con la Ec 5.9 se obtiene la expresión de la abscisa del centro de torsión.

$$x_t = \frac{\sum_{j=1}^{NX} x_j k_{jy}}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}}
 \tag{5.10}$$

Al aplicar la definición de CT a la fuerza cortante paralela al eje x, se obtiene la siguiente expresión de la ordenada del centro de torsión.

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^{NY} y_i k_{ix}}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix}}
 \tag{5.11}$$

### 5.2.2 Excentricidades

Las fuerzas sísmicas asociadas a los diafragmas rígidos actúan en el punto denominado centro de masas (CM) u no en el centro de torsión, que pueden ser diferentes. A las distancias paralelas a la dirección de las fuerzas cortantes se les denominan excentricidades.

### 5.2.2.1 Excentricidades calculadas

Las excentricidades correspondientes a las dos fuerzas cortantes ortogonales se pueden escribir como.

$$e_{sx} = |x_m - x_t|$$

donde .

$$e_{sx} = \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_y \quad (5.12)$$

$$x_m = \text{Abscisa del centro de masas}$$

$$x_t = \text{Abscisa del centro de torsión}$$

$$e_{sy} = |y_m - y_t|$$

donde .

$$e_{sy} = \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_x \quad (5.13)$$

$$y_m = \text{Ordenada del centro de masas}$$

$$y_t = \text{Ordenada del centro de torsión}$$

### 5.2.2.2 Excentricidades de diseño

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que a cada excentricidad calculada se le debe asociar dos excentricidades de diseño, según se indica a continuación.

a) Excentricidades asociadas a la fuerza cortante  $V_y$ .

$$\begin{aligned} e_{dx} &= 1.5e_{sx} + 0.1b_x \\ e_{dx} &= e_{sx} - 0.1b_x \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde:

$b_x$  es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de  $e_{sx}$  (perpendicular a la fuerza cortante  $V_y$ ).

b) Excentricidades asociadas a la fuerza cortante  $V_x$ .

$$\begin{aligned} e_{dy} &= 1.5e_{sy} + 0.1b_y \\ e_{dy} &= e_{sy} - 0.1b_y \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde:

$b_y$  es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de  $e_{sy}$  (perpendicular a la fuerza cortante  $V_x$ ).

### 5.2.3 Fuerzas cortantes debidas a la torsión

De acuerdo con el inciso 5.2.2 para efectos de diseño se deben considerar los efectos de un momento torsionante,  $M$ , cuantificado con las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned} M &= M_{ty} = e_{dx}V_y \\ &= M_{tx} = e_{dy}V_x \end{aligned} \quad (5.16)$$

Con base en la Fig 5.4 se puede afirmar que el momento torsionante se equilibra con las fuerzas cortantes que provoca en todos los resortes. El movimiento de cuerpo rígido que el par torsionante le provoca al diafragma rígido es el giro, .

Los desplazamientos lineales en los resortes paralelos a cada uno de los ejes de referencia, al considerar que el desplazamiento angular es pequeño, de tal manera que el seno y la tangente del mismo se pueda aproximar por el valor del ángulo, resultan ser.

$$\begin{aligned} u_i &= \theta \bar{y}_i \\ v_j &= \theta \bar{x}_j \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i - x_c \\ \bar{y}_j &= y_j - y_c \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las fuerzas cortantes debidas al par torsionante resultan ser.

$$\begin{aligned} V_{ix}^t &= k_{ix}u_i = \theta k_{ix}\bar{y}_i \\ V_{jy}^t &= k_{jy}v_j = \theta k_{jy}\bar{x}_j \end{aligned} \quad (5.19)$$

Al establecer el equilibrio de pares respecto al centro de torsión se obtiene que.

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{NY} V_{ix}^t \bar{y}_i + \sum_{j=1}^{NX} V_{jy}^t \bar{x}_j \\ &= \theta \left[ \sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy} \bar{x}_j^2 \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$

De las Ec 5.20 se obtiene el valor del desplazamiento angular de cuerpo rígido.

$$\theta = \frac{M}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy} \bar{x}_j^2} \quad (5.21)$$

Al sustituir la Ec 5.21 en las Ec 5.19 se obtienen las expresiones de las fuerzas cortantes que el momento torsionante ocasiona a los resortes (rigideces de entrepiso).

$$V_{ix}^t = \frac{k_{ix} \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy} \bar{x}_j^2} M \quad (5.22)$$

$$V_{jy}^t = \frac{k_{jy} \bar{x}_j}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy} \bar{x}_j^2} M \quad (5.23)$$

#### 5.2.4 Fuerzas cortantes de diseño en los resortes (rigideces de entrepiso)

Con base en los desarrollos de los incisos anteriores, la fuerza cortante que cada resorte (rigidez de entrepiso) soporta es la suma de la fuerza cortante directa mas la fuerza cortante debida a la torsión, como se expresa a continuación.

$$\begin{aligned} V_{ix} &= V_{ix}^d + V_{ix}^t \\ V_{jy} &= V_{jy}^d + V_{jy}^t \end{aligned} \tag{5.24}$$

Para cuantificar la Ec 5.24a se hace uso de ls Ec 5.8 y 5.22, mientras que para la Ec 5.24b se utilizan las Ec 5.4 y 5.23.

#### 5.3 En el método simplificado

En este método se hace caso omiso del efecto de torsión, por lo que únicamente se consideran las fuerzas cortantes directas.

Las NTC para diseño y construcción de estructuras de mampostería establece que es admisible considerar que la fuerza cortante que toma cada muro es proporcional a su área transversal

## 6. EJEMPLOS DESARROLLADOS PASO A PASO

En este capítulo se presentan los ejemplos que permiten aplicar los conceptos descritos en este curso. Los ejemplos, por tratar de aplicar paso a paso los aspectos operativos de los métodos, corresponden únicamente a métodos que se pueden desarrollar sin un número exagerado de operaciones, de tal manera que se pueden llevar a cabo con calculadora, lápiz y papel.

### 6.1 Edificación utilizada

En la Fig 6.1 se muestra la planta y elevación de un edificio de interés social que sirve de base para llevar a cabo los ejemplos de aplicación. Las particularidades del edificio se indican a continuación.

#### 6.1.1 Uso de las edificaciones

Con base en el inciso 3.1 , el uso de la edificación es vivienda, por lo que le corresponde el Grupo B.

Por tratarse de una edificación de  $667 \text{ m}^2 < 6000 \text{ m}^2$  , con una altura de  $12.5 \text{ m} < 30 \text{ m}$ , se ubica en el subgrupo B2.

#### 6.1.2 Zonificación sísmica

La edificación se localiza en la zona I.

### 6.1.3 Coeficiente sísmico

De acuerdo con el inciso 3.2, y los datos especificados en los incisos 6.1.1 y 6.1.2, el coeficiente sísmico que le corresponde a la edificación es  $c = 0.16$ .

### 6.1.4 Condiciones de regularidad

Con base en los datos de la edificación (Fig 6.1) se obtienen los siguientes parámetros en relación con el inciso 3.4, a fin de definir el coeficiente de reducción de las fuerzas sísmicas,  $Q'$ .

- a) Planta sensiblemente simétrica respecto a dos ejes ortogonales (respecto a masas y elementos resistentes).
- b) Altura/dimensión menor en planta =  $12.5/8.4 = 1.49 < 2.5$ .
- c) Largo/ancho =  $15.9/8.4 = 1.9 < 2.5$ .
- d) De acuerdo con la tabla 6.1 la relación entre los pesos de los niveles superior a inferior es igual a uno, con excepción del quinto nivel (último) que es igual a 0.88.
- e) Todos los pisos tienen la misma área, igual a  $133.56 \text{ m}^2$ .
- f) En relación con los conceptos de rigidez al corte y excentricidades se discuten en los incisos correspondientes.

### 6.1.5 Factor de comportamiento sísmico

La resistencia a las fuerzas laterales se suministra por:

- a) muros de mampostería de piezas huecas.
- b) confinadas en toda la altura.
- c) de 15 cm de espesor.
- d) resistencia al esfuerzo cortante de  $2.5 \text{ kg/cm}^2$ .

Con base en el inciso 3.5, el factor de comportamiento asociado a las dos direcciones ortogonales resultan ser.

$$Q_x = 1.5$$

$$Q_y = 1.5$$

### 6.1.6 Espectro de diseño

Con base en el inciso 3.6 y la tabla 3.1 de la NTC para diseño por sismo, los parámetros del espectro de respuesta de diseño en la zona I junto con el coeficiente sísmico especificado en el inciso 6.1.3, resultan ser.

$$T_a = 0.2 \text{ s}$$

$$T_b = 0.6 \text{ s}$$

$$r = 1/2$$

## 6.2 Análisis estático

De acuerdo con el inciso 4.2.2 las fuerzas horizontales que un sismo de diseño ocasiona a una edificación están dadas por la Ec 4.39, reproducida a continuación.

$$F_1 = C \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} W_i h_i \quad (4.39)$$

En este método no es necesario hacer uso de un modelo estructural para el edificio, excepto si se desea estimar el período fundamental del mismo.

### 6.2.1 Fuerzas cortantes

Con base en los datos de la geometría y pesos del edificio, así como los datos especificados en el inciso 6.1, los elementos de la Ec 4.39 se resumen en la tabla 6.1.

Tabla 6.1 Fuerzas sísmicas (método estático)					
Nivel	$W_i$ (t)	$h_i$ (m)	$W_i h_i$ (tm)	$F_i$ (t)	$V_i$ (t)
5	91.2	12.5	1140.0	24.73	24.73
4	104.0	10.9	1040.0	22.57	47.30
3	104.0	7.5	780.0	16.92	64.22
2	104.0	5.0	520.0	11.28	75.50
1	104.0	2.5	260.0	5.64	81.14
$\Sigma$	507.2		3740.0		

De acuerdo con los valores de las columnas 2 y 4 de la tabla 6.1 se puede cuantificar el siguiente coeficiente.

$$c \frac{\sum_{i=1}^N W_i}{\sum_{i=1}^N W_i h_i} = 0.16 * \frac{507.2}{3740.0} = 0.0217 \quad (6.1)$$

### 6.2.2 Estimación del periodo fundamental de vibración

De acuerdo con el inciso 4.2.3 la estimación del periodo fundamental se obtiene mediante la Ec 4.47b, reproducida a continuación.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N W_i x_i^2}{g \sum_{i=1}^N F_i x_i}} \quad (4.47b)$$

Los valores especificados en las tablas 6.1, 6.5 y 6.6 sirven de base para la cuantificación de la Ec 4.47b.

#### 6.2.2.1 En la dirección del eje x

Las operaciones numéricas para determinar los elementos de la Ec 4.47b se resumen en la tabla 6.2.

Tabla 6.2 Estimación del periodo fundamental, $T_{1x}$ , en la dirección del eje x					
Nivel	$k_{ix}$ (t/cm)	$u_{ix}$ (m)	$x_i$ (m)	$F_i x_i$ (tm)	$W_i x_i^2$ (tm <sup>2</sup> )
5	203.65	0.00121	0.00531	0.13132	0.00257
4	372.46	0.00127	0.00410	0.09254	0.00175
3	528.42	0.00122	0.00283	0.04788	0.00083
2	749.62	0.00101	0.00161	0.01816	0.00027
1	1363.69	0.00060	0.00060	0.00338	0.00004
$\Sigma$				0.29328	0.00546

Al sustituir los valores de las columnas 5 y 6 de la tabla 6.2 en la Ec 4.47b resulta.

$$T_{1x} = 6.28 \sqrt{\frac{0.00546}{9.81 \cdot 0.29328}} = 0.2736 \text{ s} \quad (6.2)$$

#### 6.2.2.2 En la dirección del eje y

Las operaciones numéricas para determinar los elementos de la Ec 4.47b se resumen en la tabla 6.3.

Tabla 6.3 Estimación del período fundamental, $T_{1y}$ , en la dirección del eje y					
Nivel	$k_{iy}$ (t/cm)	$u_{iy}$ (m)	$x_i$ (m)	$F_i x_i$ (tm)	$W_i x_i^2$ (tm <sup>2</sup> )
5	65.93	0.0037	0.0159	0.3932	0.0231
4	121.28	0.0039	0.0122	0.2754	0.0155
3	173.85	0.0037	0.0083	0.1404	0.0072
2	253.15	0.0030	0.0046	0.0519	0.0022
1	515.28	0.0016	0.0016	0.0091	0.0003
$\Sigma$				0.8699	0.0483

Al sustituir los valores de las columnas 5 y 6 de la tabla 6.3 en la Ec 4.47b resulta.

$$T_{1y} = 6.28 \sqrt{\frac{0.0483}{9.81 \cdot 0.8699}} = 0.4724 \text{ s} \quad (6.3)$$

#### 6.2.3 Factores reductivos de las fuerzas sísmicas

De acuerdo con el inciso 4.3 los factores reductivos de las fuerzas sísmicas resultan ser.

##### 6.2.3.1 Factor reductivo para fuerzas paralelas al eje x

Al comparar el período fundamental  $T_{1x}$  con el valor de  $T_a$  resulta.

$$T_{1x} = 0.2736 > T_a = 0.2$$

donde: (6.4)

$$Q'_x = Q_x = 1.5$$

### 6.2.3.2 Factor reductivo para fuerzas paralelas al eje y

Al comparar el período fundamental  $T_{1y}$  con el valor de  $T_a$  resulta.

$$T_{1y} = 0.4724 > T_a = 0.2$$

donde: (6.5)

$$Q'_y = Q_y = 1.5$$

### 6.2.4 Fuerzas sísmicas reducidas

Al dividir las fuerzas sísmicas estáticas de la tabla 6.1 entre los correspondientes factores reductivos dados por las Ec 6.4 y 6.5 se obtienen las fuerzas sísmicas reducidas de la tabla 6.4.

Tabla 6.4 Fuerzas sísmicas estáticas sin reducir y reducidas						
Nivel	$F_i$ (t)	$V_i$ (t)	$F_{1yr}$ (t)	$V_{1yr}$ (t)	$F_{1yr}$ (t)	$V_{1yr}$ (t)
5	24.73	24.73	16.48	16.48	16.48	16.48
4	22.57	47.30	15.05	31.53	15.05	31.53
3	16.92	64.22	11.28	42.81	11.28	42.81
2	11.28	75.50	7.52	50.33	7.52	50.33
1	5.64	81.14	3.76	54.09	3.76	54.09

### 6.2.5 Reducción de las fuerzas cortantes con base en el período fundamental de vibración

De acuerdo con el inciso 4.2.4 existe la posibilidad de reducir las fuerzas sísmicas de la tabla 6.4, con base en el valor de los períodos fundamentales de vibración.

#### 6.2.5.1 En la dirección del eje x

Al ubicar el período fundamental en el espectro de diseño sísmico se tiene que.

$$T_a = 0.2 < T_{1x} = 0.2736 < T_b = 0.6 \quad (6.6)$$

De acuerdo con la Ec 6.6 se concluye que no deben reducirse las fuerzas estáticas en la dirección del eje x de la tabla 6.4.

#### 6.2.5.2 En la dirección del eje y

Al ubicar el período fundamental en el espectro de diseño sísmico se tiene que.

$$T_a = 0.2 < T_{1y} = 0.4724 < T_b = 0.6 \quad (6.7)$$

De acuerdo con la Ec 6.7 se concluye que no deben reducirse las fuerzas estáticas en la dirección del eje y de la tabla 6.4.

### 6.3 Método dinámico (análisis modal espectral)

Este método se describe en el inciso 4.1.4 y su aplicación implica un modelo estructural para el edificio.

#### 6.3.1 Modelo estructural del edificio

En este ejemplo se utiliza el modelo estructural descrito en el inciso 2.4.5, construido a base de subestructuras formadas con rigideces de entrepiso (resortes) unidas con diafragmas rígidos. Este modelo no es el recomendable, pero se utiliza porque permite ejemplificar algunos conceptos del RCDF87 y el número de operaciones que se tienen que realizar resultan ser mucho menor que el de los modelos donde se utiliza una computadora.

El modelo estructural del edificio se construye mediante subestructuras planas formados por muros planos, construidos con mampostería. La definición de los muros planos se hace en las dos direcciones ortogonales en que están orientados los ejes de la planta del edificio. Los 9 ejes letra (muros 1-x, 2-x, 3-x, 4-x, 5-x, 6-x, 7-x, 8-x y 9-x) y los 3 ejes número (muros 1-y, 2-y y 3-y).

En las Fig 6.2 y 6.3 se muestran las idealizaciones de los muros planos mediante rigideces de entrepiso, y en la Fig 6.4 se representan los dos modelos estructurales del edificio asociados a las dos direcciones ortogonales. Cada estructura unidimensional tiene 5 grados de libertad.

Las rigideces de entrepiso de los muros planos se determinaron con el método del elemento finito, al considerar que actúa un sistema de fuerzas horizontales igual al que proporciona el método estático (inciso 6.2). Los valores que resultan se muestran en las Fig 6.2 y 6.3, así como en las tablas 6.5 y 6.6.

### 6.3.2 Solución del problema de valores característicos

Las formas modales (eigenvectores) y las correspondientes frecuencias naturales de vibración (eigenvalores), según el inciso 4.1.3.1, se pueden obtener con métodos que utilicen calculadoras o computadoras. En este ejemplo el problema de valores característicos se resolvió al utilizar el método matricial de Jacobi. Las matrices de rigideces y de masas para cada modelo unidimensional se construyen como se indica en las Ec 6.8 y 6.9.

**Tabla 6.5 Rigideces de entrepiso de los muros paralelos al eje x (t/cm)**

Entrepis	1-x	2-x	3-x	4-x	5-x
1	310.45	127.57	97.53	97.53	97.53
2	194.45	60.92	47.74	47.74	47.74
3	144.19	41.07	31.58	31.58	31.58
4	104.88	28.21	21.25	21.25	21.25
5	59.04	15.06	11.09	11.09	11.09

**Tabla 6.5 Rigideces de entrepiso de los muros paralelos al eje x (t/cm) (continúa)**

Entrepis	6-x	7-x	8-x	9-x	$\Sigma$
1	97.53	97.53	127.57	310.45	1363.69
2	47.74	47.74	60.92	194.45	749.62
3	31.58	31.58	41.07	144.19	528.42
4	21.25	21.25	28.21	104.88	372.46
5	11.09	11.09	15.06	59.04	203.65

Tabla 6.6 Rigideces de entrepiso de los muros paralelos al eje y (t/cm)

Nivel	1-y	2-y	3-y	$\Sigma$
1	249.88	114.32	151.08	515.28
2	125.33	53.84	73.98	253.15
3	87.23	35.96	50.66	173.85
4	63.14	25.12	33.02	121.28
5	33.86	13.04	19.03	65.93

### 6.3.2.1 Matriz de rigideces de los modelos unidimensionales

Al establecer las ecuaciones de equilibrio de los modelos estructurales mostrados en las Fig 6.4 se obtiene la siguiente matriz de rigideces.

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

### 6.3.2.2 Matriz de masas de los modelos unidimensionales

Al establecer las ecuaciones de equilibrio de los modelos estructurales mostrados en las Fig 6.4 se obtiene la siguiente matriz de masas (concentradas).

$$\vec{M} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_5 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

### 6.3.2.3 Eigenvalores y eigenvectores

Al sustituir los valores de la tabla 6.1, 6.5 y 6.6 en las ecuaciones 6.8 y 6.9, para cada uno de los modelos estructurales asociados a las dos direcciones ortogonales, y resolver los correspondiente problemas de valores característicos, se obtienen los eigenvectores (formas modales) mostradas en la Fig 6.5.

Los valores de los períodos, frecuencias naturales de vibración y valores característicos correspondientes a los eigenvectores de la Fig 6.5 se se presentan en la tabla 6.7

Mo do	Modelo estructural, eje y			Modelo estructural, eje x		
	$T_{1y}$ (s)	(rad/s)	$(\text{rad/s})^2$	$T_{1x}$ (s)	(rad/s)	$(\text{rad/s})^2$
1	.4719	13.31	177.28	.2735	22.97	527.77
2	.2006	31.32	981.06	.1158	54.26	2944.03
3	.1302	48.26	2328.83	.0752	83.55	6981.10
4	.0945	66.49	4420.75	.0548	114.66	13146.15
5	.0676	92.95	8639.06	.0401	156.69	24551.10

### 6.3.3 Respuesta espectral de desplazamientos de cada modo para el modelo estructural paralelo a eje y

Con base en los incisos 4.1.4.3 y 4.1.4.4 la respuesta espectral desplazamientos de cada modo se obtiene con las Ec 4.25 y 4.27, y de acuerdo con el inciso 4.1.3.3 el coeficiente de participación se obtiene con la Ec 4.22e, que se reproducen a continuación.

$$c_1 = \frac{\sum_{k=1}^N m_k \Gamma_k^d}{\sum_{k=1}^N m_k (\Gamma_k^d)^2} \quad (4.22e)$$

$$y_{máx}^i = c_1 \frac{A_i}{\omega_i^2} \quad (4.25)$$

$$\bar{u}_{máx}^i = \bar{r}^i y_{máx}^i \quad (4.27)$$

### 6.3.3.1 Primer modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.8. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Nivel k-ésimo	$m_k$ ts <sup>2</sup> /cm	$r_k^1$	$m_k r_k^1$ ts <sup>2</sup> /cm	$m_k (r_k^1)^2$ ts <sup>2</sup> /cm	$u_{kmáx}^1$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.1127
2	0.106	2.9613	0.3139	0.9295	0.3337
3	0.106	5.4973	0.5827	3.2034	0.6195
4	0.106	8.2805	0.8777	7.2681	0.9332
5	0.093	11.0399	1.0267	11.3348	1.2442
Σ			2.9070	22.8418	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 1, que resulta ser.

$$c_1 = \frac{2.9070}{22.8418} = 0.1273 \quad (6.10)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del primer modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$T_a = 0.2 < T_1 = 0.4719 < T_b = 0.6 \quad (6.11)$$

$$A_1 = ag = cg = 0.16 * 981 = 156.96 \text{ cm/s}^2$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el primer modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m\acute{a}x}^1 = c_1 \frac{A_1}{\omega_1^2} = 0.1273 \frac{156.96}{177.28} = 0.1127 \text{ cm} \quad (6.12)$$

La sexta columna de la tabla 6.8 es la expresi3n de la Ec 4.27.

### 6.3.3.2 Segundo modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.9. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Nivel k-ésimo	$m_k$ ts <sup>2</sup> /cm	$r_k^2$	$m_k r_k^2$ ts <sup>2</sup> /cm	$m_k (r_k^2)^2$ ts <sup>2</sup> /cm	$u_{km\acute{a}x}^2$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0208
2	0.106	2.6245	0.2782	0.7301	0.0546
3	0.106	3.4198	0.3625	1.2397	0.0711
4	0.106	1.6282	0.1724	0.2803	0.0339
5	0.093	-4.2387	-0.3942	1.6709	-0.0882
Σ			0.5249	4.0270	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participaci3n del modo 2, que resulta ser.

$$c_2 = \frac{0.5249}{4.0270} = 0.1303 \quad (6.13)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de dise1o del segundo modo de vibraci3n, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$T_a = 0.2 < T_2 = 0.2006 < T_b = 0.6 \quad (6.14)$$

$$A_2 = a_g = c_g = 0.16 \cdot 981 = 156.96 \text{ cm/s}^2$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el segundo modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{\max}^2 = c_2 \frac{A_2}{\omega_2^2} = 0.1303 \frac{156.96}{981.06} = 0.0208 \text{ cm} \quad (6.15)$$

La sexta columna de la tabla 6.9 es la expresión de la Ec 4.27.

### 6.3.3.3 Tercer modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.10. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Nivel k-ésimo	$m_k$ ts <sup>2</sup> /cm	$r_k^3$	$m_k r_k^3$ ts <sup>2</sup> /cm	$m_k (r_k^3)^2$ ts <sup>2</sup> /cm	$u_{k\max}^3$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0074
2	0.106	2.0606	0.2184	0.4501	0.0152
3	0.106	0.6797	0.0720	0.0490	0.0050
4	0.106	-2.6831	-0.2844	0.7631	-0.0197
5	0.093	1.1754	0.1073	0.1285	0.0086
Σ			0.2213	1.4967	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 3, que resulta ser.

$$c_3 = \frac{0.2213}{1.4967} = 0.1479 \quad (6.16)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del tercer modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$T_3 = 0.1302 < T_B = 0.2$$

$$A_3 = ag = g \left(1 + 3 \frac{T_3}{T_B}\right) \frac{c}{4} \quad (6.17)$$

$$= 981 \left(1 + 3 \frac{0.1302}{0.2}\right) \frac{0.16}{4} = 115.88 \text{ cm/s}^2$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el tercer modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{m\acute{a}x}^3 = c_3 \frac{A_3}{\omega_3^2} = 0.2213 \frac{115.88}{2328.83} = 0.0110 \text{ cm} \quad (6.18)$$

La sexta columna de la tabla 6.10 es la expresi3n de la Ec 4.27.

#### 6.3.3.4 Cuarto modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.11. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Tabla 6.11 Respuesta espectral de desplazamientos: Cuarto modo					
Nivel k-ésimo	$m_k$ ts <sup>2</sup> /cm	$r_k^4$	$m_k r_k^4$ ts <sup>2</sup> /cm	$m_k (r_k^4)^2$ ts <sup>2</sup> /cm	$u_{km\acute{a}x}^4$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0039
2	0.106	1.1851	0.1256	0.1489	0.0046
3	0.106	-1.7383	-0.1843	0.3203	-0.0068
4	0.106	0.7849	0.0832	0.0653	0.0031
5	0.093	-0.1501	-0.0140	0.0021	-0.0006
Σ			0.1165	0.6426	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participaci3n del modo 4, que resulta ser.

$$c_4 = \frac{0.1165}{0.6426} = 0.1813 \quad (6.19)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del cuarto modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$\begin{aligned} T_4 &= 0.0945 < T_s = 0.2 \\ A_4 &= ag = g(1 + 3\frac{T_1}{T_s})\frac{C}{4} \\ &= 981(1 + 3\frac{0.0945}{0.2})\frac{0.16}{4} = 94.86 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el cuarto modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{\max}^4 = c_4 \frac{A_4}{\omega_4^2} = 0.1813 \frac{94.86}{4420.75} = 0.00389 \text{ cm} \quad (6.21)$$

La sexta columna de la tabla 6.11 es la expresión de la Ec 4.27.

#### 6.3.3.5 Quinto modo

Las operaciones de las Ec 4.25 y 4.27 se presentan en la tabla 6.12. La columna 2 de dicha tabla se obtiene de la columna 2 de la tabla 6.1.

Nivel k-ésimo	$\frac{m_k}{ts^2/cm}$	$r_k^5$	$m_k r_k^5$ $ts^2/cm$	$m_k (r_k^5)^2$ $ts^2/cm$	$u_{\max}^5$ cm
1	0.106	1.0000	0.1060	0.1060	0.0038
2	0.106	-0.5787	-0.0613	0.0355	-0.0022
3	0.106	0.1678	0.0178	0.0030	0.0006
4	0.106	-0.0282	-0.0030	0.0001	-0.0001
5	0.093	0.0025	-0.0002	0.0000	0.0000
$\Sigma$			0.0597	0.1446	

Con base en las columnas 4 y 5 se obtiene el valor del coeficiente de participación del modo 5, que resulta ser.

$$C_5 = \frac{0.0577}{0.1446} = 0.4129 \quad (6.22)$$

La ordenada del espectro de aceleraciones de diseño del quinto modo de vibración, de acuerdo con el incisos 3.6 y 6.1.6, es.

$$\begin{aligned} T_5 &= 0.0676 < T_a = 0.2 \\ A_5 &= ag = g(1 + 3 \frac{T_3}{T_a}) \frac{C}{4} \\ &= 981(1 + 3 \frac{0.0676}{0.2}) \frac{0.16}{4} = 79.03 \text{ cm/s}^2 \end{aligned} \quad (6.23)$$

La respuesta espectral de las ecuaciones de equilibrio desacopladas para el quinto modo, de acuerdo con la Ec 4.25 resulta ser.

$$y_{máx}^5 = C_5 \frac{A_5}{\omega_5^2} = 0.4129 \frac{79.03}{8639.06} = 0.003777 \text{ cm} \quad (6.24)$$

La sexta columna de la tabla 6.12 es la expresión de la Ec 4.27.

#### 6.3.4 Respuesta espectral de fuerzas cortantes de cada modo para el modelo estructural paralelo al eje y

Con base en la respuesta espectral de desplazamientos de cada modo (cuantificados en la columna 6 de las tablas 6.8 a 6.12, que se repiten en la columna 2 de las tablas 6.13 a 6.17) se pueden cuantificar las fuerzas cortantes correspondientes, al utilizar los conceptos relacionados con la definición de rigidez de entrepiso (Ec 2.5 y 2.6), reproducidos en la forma en que se utilizan.

$$V_k = k_k \Delta u_k \quad (2.5)$$

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \quad (2.6)$$

Los valores de las rigideces de entrepiso para el modelo estructural paralelo al eje y se muestran en la columna 2 de la tabla 6.2 o bien en la columna 12 de la tabla 6.5, y se repiten sistemáticamente en la columna 3 de las tablas 6.13 a 6.17.

En la revisión del cumplimiento de las condiciones de regularidad del edificio respecto a la rigidez al corte (inciso 3.4), la relación de rigideces entre el primer y segundo entrepisos es igual a 2.035. Aunque excede del 100 por ciento (103.5), se considera que la rigidez del primer entrepiso está sobrevaluada por la condición de frontera de empotramiento. Por tanto, el edificio es regular y los factores reductivos  $Q'$  no sufren reducciones adicionales.

#### 6.3.4.1 Primer modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.13.

Nivel/ Entrepis	$u_{l\max}^1$ cm	$k_{ky}$ t/cm	$u_{l\max}^1$ cm	$V_{l\max}^1$ t	$V_{l\max}^1$ t
1	0.1127	515.28	0.1127	58.12	38.75
2	0.3337	253.15	0.2210	55.95	37.30
3	0.6195	173.85	0.2858	49.68	33.12
4	0.9332	121.28	0.3137	38.05	25.37
5	1.2442	65.93	0.3110	20.50	13.67

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductivo  $Q'_{1y}$ , que resulta ser.

$$T_{1y} = 0.4719 > T_a = 0.2 \quad (6.25)$$

$$Q'_{1y} = Q_y = 1.500$$

#### 6.3.4.2 Segundo modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.14.

**Tabla 6.14 Respuesta espectral de cortantes: Segundo modo**

Nivel/ Entrepis	$u_{\text{máx}}^2$ cm	$k_{ky}$ t/cm	$u_{\text{máx}}^2$ cm	$V_{\text{máx}}^2$ t	$V_{\text{máx}r}^2$ t
1	0.0208	515.28	0.0208	10.72	7.15
2	0.0546	253.15	0.0338	8.56	5.71
3	0.0711	173.85	0.0165	2.87	1.91
4	0.0339	121.28	-0.0372	-4.51	-3.01
5	-0.0882	65.93	-0.1221	-8.05	-5.37

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductivo  $Q'_{2y}$ , que resulta ser.

$$T_{2y} = 0.2006 > T_a = 0.2 \quad (6.26)$$

$$Q'_{2y} = Q_y = 1.500$$

**6.3.4.3 Tercer modo**

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.15.

**Tabla 6.15 Respuesta espectral de cortantes: Tercer modo**

Nivel/ Entrepis	$u_{\text{máx}}^3$ cm	$k_{ky}$ t/cm	$u_{\text{máx}}^3$ cm	$V_{\text{máx}}^3$ t	$V_{\text{máx}r}^3$ t
1	0.0074	515.28	0.0074	3.81	2.87
2	0.0152	253.15	0.0078	1.97	1.49
3	0.0050	173.85	-0.0102	-1.77	-1.33
4	-0.0197	121.28	-0.0247	-3.00	-2.26
5	0.0086	65.93	0.0283	1.87	1.41

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductivo  $Q'_{3y}$ , que resulta ser.

$$T_{3y} = 0.1302 < T_a = 0.2$$

$$Q'_{3y} = 1 + \frac{T_{3y}}{T_a} (Q_y - 1) = 1.326 \quad (6.27)$$

#### 6.3.4.4 Cuarto modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.16.

Nivel/ Entrepis	$u_{k\max}^4$ cm	$k_{ly}$ t/cm	$u_{k\max}^4$ cm	$V_{k\max}^4$ t	$V_{k\max r}^4$ t
1	0.0039	515.28	0.0039	2.00	1.62
2	0.0046	253.15	0.0007	0.18	0.15
3	-0.0068	173.85	-0.0114	-1.98	-1.60
4	0.0031	121.28	0.0099	1.20	0.97
5	-0.0006	65.93	-0.0037	-0.24	-0.19

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductivo  $Q'_{4y}$ , que resulta ser.

$$T_{4y} = 0.0945 < T_a = 0.2$$

$$Q'_{4y} = 1 + \frac{T_{4y}}{T_a} (Q_y - 1) = 1.236 \quad (6.28)$$

#### 6.3.4.5 Quinto modo

Las operaciones de las Ec 2.6 y 2.5 se presentan en las columnas 4 y 5 de la tabla 6.17.

**Tabla 6.17 Respuesta espectral de cortantes: Quinto modo**

Nivel/ Entrepis	$u_{k\max}^5$ cm	$k_{ky}$ t/cm	$u_{k\max}^5$ cm	$V_{k\max}^5$ t	$V_{k\max r}^5$ t
1	0.0038	515.28	0.0038	1.94	1.66
2	-0.0022	253.15	-0.0060	-1.52	-1.3
3	0.0006	173.85	0.0028	0.49	0.42
4	-0.0001	121.28	-0.0007	-0.08	-0.07
5	0.0000	65.93	0.0001	0.01	0.01

La sexta columna representa los valores de la fuerza cortante reducida al dividir los valores de la quinta columna entre el factor reductivo  $Q'_{sy}$ , que resulta ser.

$$T_{sy} = 0.0676 < T_a = 0.2$$

$$Q'_{sy} = 1 + \frac{T_{sy}}{T_a} (Q_y - 1) = 1.169 \tag{6.29}$$

### 6.3.5 Respuesta total para el modelo estructural paralelo al eje y

Conocidos los elementos cinemáticos (inciso 6.3.3) y los elementos mecánicos (inciso 6.2.4) del modelo estructural en estudio para cada modo de vibración, se procede a determinar la respuesta total de dicho modelo estructural.

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que debe incluirse el efecto de todos los modos naturales de vibración con período mayor o igual a 0.4 s, pero en ningún caso se pueden considerar menos que los tres primeros modos de traslación en cada dirección de análisis.

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 recomienda utilizar el método de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS), para calcular la respuesta total, siempre que los períodos de los modos naturales en cuestión difieran al menos 10% entre si, que es el caso. el método SRSS se indica mediante la Ec 4.29, que se reproduce a continuación.

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (4.29)$$

### 6.3.5.1 Respuesta total de desplazamientos

En la tabla 6.18 se resumen las operaciones indicadas por la Ec 4.29 para los vectores de desplazamientos máximos de cada modo mostrados en la columna 6 de las tablas 6.8 a 6.12. En la columna 2 se muestra la combinación de un solo modo (el primero), en la columna 3 la combinación de los dos primeros, y así sucesivamente.

El primer elemento de cada casillero representa el componente de desplazamiento total mientras que el segundo elemento representa el cociente de ese desplazamiento entre el desplazamiento total obtenido con la combinación de todos los modos del modelo estructural, dados por la columna 6.

Nivel	1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos
1	0.1127 0.98	0.1146 0.99	0.1148 1.00	0.1149 1.00	0.1150 1.00
2	0.3337 0.97	0.3381 1.00	0.3385 1.00	0.3385 1.00	0.3385 1.00
3	0.6195 0.99	0.6236 1.00	0.6236 1.00	0.6236 1.00	0.6236 1.00
4	0.9332 1.00	0.9338 1.00	0.9349 1.00	0.9340 1.00	0.9340 1.00
5	1.2442 1.00	1.2473 1.00	1.2474 1.00	1.2474 1.00	1.2474 1.00

### 6.3.5.2 Respuesta total de fuerzas cortantes

En la tabla 6.19 se resumen las operaciones indicadas por la Ec 4.29 para los vectores de fuerzas cortantes máximos de cada modo mostrados en la columna 6 de las tablas 6.13 a 6.17. El ordenamiento de esta tabla es enteramente similar al de la tabla 6.18.

Tabla 6.19 Respuesta total de fuerzas cortantes (t)						V <sub>1</sub> Escala
Entrepí	1 modo	2 modos	3 modos	4 modos	5 modos	
1	37.75 0.98	38.42 0.99	38.53 1.00	38.56 1.00	38.60 1.00	43.28
2	37.30 0.99	37.73 1.00	37.76 1.00	37.76 1.00	37.79 1.00	42.37
3	33.12 0.99	33.18 1.00	33.20 1.00	33.24 1.00	33.24 1.00	37.27
4	25.37 1.00	25.55 1.00	25.65 1.00	25.67 1.00	25.67 1.00	28.78
5	13.67 0.93	14.69 0.99	14.75 1.00	14.76 1.00	14.56 1.00	16.55

### 6.3.5.3 Revisión por cortante basal

Las NTC para diseño por sismo del RCDF87 establecen que si con el método de análisis dinámico que se haya aplicado se encuentra que, en la dirección que se considera, la fuerza cortante basal calculada,  $V_0$ , debe ser tal que debe cumplir con la siguiente condición.

$$V_0 \geq 0.8a \frac{W_0}{Q'} = (0.8)(0.16) \frac{507.2}{1.5} = 43.28 \text{ t} \quad (6.30)$$

En caso de no cumplirse la condición anterior, Las fuerzas de diseño y los desplazamientos laterales correspondientes se deben incrementar en la proporción para que el cortante basal calculado,  $V_0$ , cumpla con la igualdad.

De acuerdo con la tabla 6.19, el cortante basal que proporciona el método dinámico es,  $V_0 = 38.60 \text{ t}$ , por lo que las fuerzas cortantes que proporciona el método dinámico (columna 6 de la tabla 6.19) se deben multiplicar por el coeficiente,  $43.28/38.6 = 1.12$ . El escalamiento se indica en la columna 7 de la tabla 6.19.

### 6.3.6 Comparación de las fuerzas cortantes obtenidas con los métodos estático y dinámico

A fin de tener una idea comparativa de los valores de las fuerzas cortantes que cada método proporciona se construye la tabla 6.20 donde se establecen tales comparaciones.

Entrepiso	$V_{est}$ (t)	$V_{din}$ (t)	$V_{est}/V_{din}$
1	54.09	43.28	1.25
2	50.33	42.37	1.19
3	42.81	37.27	1.29
4	31.53	28.78	1.10
5	16.48	16.55	1.00

## 6.4 Fuerzas sísmicas en los elementos estructurales de la edificación

### 6.4.1 Resumen de las ecuaciones utilizadas

En el inciso 5.2 se presenta el procedimiento para cuantificar las fuerzas sísmicas para el modelo estructural que utiliza el concepto de rigideces de entrepiso. Las ecuaciones que se utilizan se reproducen a continuación.

#### 6.4.1.1 Coordenadas del centro de torsión

$$x_c = \frac{\sum_{j=1}^{NX} x_j k_{jy}}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}} \quad (5.10)$$

$$y_t = \frac{\sum_{I=1}^{NY} y_I k_{Ix}}{\sum_{I=1}^{NY} k_{Ix}} \quad (5.11)$$

#### 6.4.1.2 Fuerzas cortantes directas

$$V_{jy}^d = \frac{k_{jy}}{\sum_{j=1}^{NX} k_{jy}} V_y \quad (5.4)$$

$$V_{ix}^d = \frac{k_{ix}}{\sum_{I=1}^{NY} k_{ix}} V_x \quad (5.8)$$

#### 6.4.1.3 Excentricidades calculadas

$$e_{sx} = |x_m - x_t|$$

donde

$$e_{sx} = \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_y \quad (5.12)$$

$$x_m = \text{Abscisa del centro de masas}$$

$$x_t = \text{Abscisa del centro de torsión}$$

$$e_{sy} = |y_m - y_t|$$

donde

$$e_{sy} = \text{Excentricidad de la fuerza Cortante } V_x \quad (5.13)$$

$y_m$  = Ordenada del centro de masas

$y_t$  = Ordenada del centro de torsión

#### 6.4.1.4 Excentricidades de diseño

$$e_{dx} = 1.5e_{sx} + 0.1b_x \quad (5.14)$$

$$e_{dx} = e_{sx} - 0.1b_x$$

$b_x$  es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de  $e_{sx}$  (perpendicular a la fuerza cortante  $V_y$ ).

$$e_{dy} = 1.5e_{sy} + 0.1b_y \quad (5.15)$$

$$e_{dy} = e_{sy} - 0.1b_y$$

$b_y$  es la dimensión de la planta que se considera medida en la dirección de  $e_{sy}$  (perpendicular a la fuerza cortante  $V_x$ ).

#### 6.4.1.5 Fuerzas cortantes debidas a la torsión

$$M = M_{ty} = e_{dx}V_y \quad (5.16)$$

$$= M_{tx} = e_{dy}V_x$$

$$V_{ix}^t = \frac{k_{ix}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix}\bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy}\bar{x}_j^2} M \quad (5.22)$$

$$V_{jy}^t = \frac{k_{jy} \bar{x}_j}{\sum_{i=1}^{NY} k_{ix} \bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy} \bar{x}_j^2} M \quad (5.23)$$

#### 6.4.1.6 Fuerzas cortantes de diseño en los resortes (rigideces de entrepiso)

$$\begin{aligned} V_{ix} &= V_{ix}^d + V_{ix}^t \\ V_{jy} &= V_{jy}^d + V_{jy}^t \end{aligned} \quad (5.24)$$

Las fuerzas cortantes que se utilizan son las obtenidas con el método estático, ya que con el método dinámico se obtuvieron para el modelo estructural paralelo a la dirección del eje y.

#### 6.4.2 Diafragma del nivel 1

En la Fig 6.6 se muestra la geometría del diafragma del nivel 1 así como la distribución de las rigideces de entrepiso que llegan a dicho nivel y la posición del centro de masas. Con base en dicha figura y las ecuaciones resumidas del capítulo 5 se construyen las tabla 6.21 y 6.22

Con base en las columnas 3 y 4 de la tabla 6.21 y la Ec 5.11 se obtiene el siguiente valor de la ordenada del centro de torsión.

$$y_{1t} = \frac{1084134}{136369} = 7.95 \text{ m} \quad (6.31)$$

Con los elementos de la columna 3 de la tabla 6.21, la fuerza cortante correspondiente y la Ec 5.8 se obtienen los elementos de la columna 5 de dicha tabla.

Los elementos de la columna 6 de la tabla 6.21 se obtiene mediante la Ec 6.31 y la columna 2 de dicha tabla.

Eje i-x	$y_i$ (m)	$k_{ix}$ (t/m)	$y_i k_{ix}$ (t)
1-x	0.00	31045.00	0.00
2-x	2.85	12757.00	36357.00
3-x	4.20	9753.00	40963.00
4-x	6.60	9753.00	64370.00
5-x	7.95	9753.00	77536.00
6-x	9.30	9753.00	90703.00
7-x	11.70	9753.00	114110.00
8-x	13.05	12757.00	166479.00
9-x	15.90	31045.00	493616.00
$\Sigma$		136369.00	1084134.00

Eje i-x	$V_{ifix}^d$ (t)	$\bar{y}_i$ (m)	$\bar{y}_i k_{ix}$ (t)	$\bar{y}_i^2 k_{ix}$ (tm)
1-x	12.31	-7.95	-246808.0	1962121.0
2-x	5.06	-5.10	-65061.0	331810.0
3-x	3.87	-3.75	-36574.0	137152.0
4-x	3.87	-1.35	-13167.0	17775.0
5-x	3.87	0.00	0.0	0.0
6-x	3.87	1.35	13167.0	17775.0
7-x	3.87	3.75	36574.0	137152.0
8-x	5.06	5.10	65061.0	331810.0
9-x	12.31	7.95	246808.0	1962121.0
$\Sigma$	54.09			4897715.0

A fin de cuantificar la abscisa del centro de torsión y las demás elementos de las restantes ecuaciones del capítulo 5 se construye la tabla 6.22, con base en la Fig 6.6

Con base en las columnas 3 y 4 de la tabla 6.22 y la Ec 5.10 se obtiene el siguiente valor de la abscisa del centro de torsión.

$$x_{1t} = \frac{174921}{51528} = 3.40 \text{ m} \quad (6.32)$$

Con los elementos de la columna 3 de la tabla 6.22, la fuerza cortante correspondiente y la Ec 5.4 se obtienen los elementos de la columna 5 de dicha tabla.

Los elementos de la columna 6 de la tabla 6.22 se obtiene mediante la Ec 6.32 y la columna 2 de dicha tabla.

Tabla 6.22 Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje y			
Eje j-y	$x_j$ (m)	$k_{jy}$ (t/m)	$x_j k_{jy}$ (t)
1-y	0.00	24988.0	0.0
2-y	4.20	11432.0	48014.0
3-y	8.40	15108.0	126907.0
$\Sigma$		51528.0	174921.0

Tabla 6.22 Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje y (cont)				
Eje j-y	$V_{1jy}^d$ (t)	$\bar{x}_j$ (m)	$\bar{x}_j k_{jy}$ (t)	$\bar{x}_j^2 k_{jy}$ (tm)
1-y	26.23	-3.40	-84459.0	288861.0
2-y	12.00	0.80	9146.0	7316.0
3-y	15.86	5.00	75540.0	377700.0
$\Sigma$	54.09			673877.0

De acuerdo con las coordenadas del centro de masas especificado en la Fig 6.6 y las Ec 6.31 y 6.32 se obtienen los siguientes valores de las excentricidades calculadas, de acuerdo con las Ec 5.12 y 5.13.

$$\begin{aligned} e_{1sx} &= |x_{1m} - x_{1c}| = |4.20 - 3.40| = 0.80 \text{ m} \\ e_{1sy} &= |y_{1m} - y_{1c}| = |7.95 - 7.95| = 0.00 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Con base en las Ec 6.33, 5.14 y 5.15 se obtienen las excentricidades de diseño correspondientes.

$$\begin{aligned} e_{1dx} &= 1.5e_{1sx} + 0.1b_x = 1.5(0.8) + 0.1(8.4) = 2.04 \text{ m} \\ e_{1dx} &= e_{1sx} - 0.1b_x = 0.8 - 0.1(8.4) = -0.04 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} e_{1dy} &= 1.5e_{1sy} + 0.1b_y = 1.5(0.0) + 0.1(15.9) = 1.59 \text{ m} \\ e_{1dy} &= e_{1sy} - 0.1b_y = 0.0 - 0.1(15.9) = -1.59 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Con base en las Ec 6.34, 6.35 y 5.16 se obtiene el momento torsionante que se las fuerzas sísmicas le ocasionan al diafragma rígido del nivel 1.

$$\begin{aligned} M_{1cy} &= e_{1dx}V_{1y} = 2.04(54.09) = 110.34 \text{ tm} \\ &= e_{1dx}V_{1y} = 0.04(54.09) = 2.20 \text{ tm} \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} M_{1cx} &= e_{1dy}V_{1x} = 1.59(54.09) = 86.00 \text{ tm} \\ &= e_{1dy}V_{1x} = 1.59(54.09) = 86.00 \text{ tm} \end{aligned} \quad (6.37)$$

De acuerdo con las Ec 5.22, 5.23 y la columna 8 de las tablas 6.21 y 6.22 se obtienen los siguientes coeficientes.

Las NTC para diseño por sismo, en su inciso 8.6, establece que de los dos momentos torsionantes de diseño en cada dirección (Ec 6.36 y 6.37) se debe tomar para cada marco o muro el que resulte mas desfavorable. Para cuantificar las fuerzas cortantes debidas a la torsión se utilizan las Ec 5.22 y 5.23, que de acuerdo con las columnas 8 de las tablas 6.21 y 6.22 y las Ec 6.36 y 6.37 resultan ser.

$$V_{1ix}^{ty} = \frac{k_{1x}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{1x}\bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy}\bar{x}_j^2} M_{1cy} = \frac{110.34}{4897715 + 673877} k_{1x}\bar{y}_i \quad (6.38)$$

$$= 0.000019804 k_{1x}\bar{y}_i$$

$$V_{1jy}^{ty} = \frac{k_{jy}\bar{x}_j}{\sum_{i=1}^{NY} k_{1x}\bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy}\bar{x}_j^2} M_{1cy} = 0.000019804 k_{jy}\bar{x}_j \quad (6.39)$$

$$V_{1ix}^{tx} = \frac{k_{1x}\bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{NY} k_{1x}\bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy}\bar{x}_j^2} M_{1cx} = \frac{86.00}{4897715 + 673877} k_{1x}\bar{y}_i \quad (6.40)$$

$$= 0.0000154354 k_{1x}\bar{y}_i$$

$$V_{1jy}^{tx} = \frac{k_{jy}\bar{x}_j}{\sum_{i=1}^{NY} k_{1x}\bar{y}_i^2 + \sum_{j=1}^{NX} k_{jy}\bar{x}_j^2} M_{1cx} = 0.0000154354 k_{jy}\bar{x}_j \quad (6.41)$$

En la Fig 6.7 se presentan las fuerzas cortantes, cuando el sismo de diseño actúa en uno de sus sentidos, dadas por las Ec 6.38 a 6.41 al utilizar los valores de la columna 7 de las tablas 6.21 y 6.22. Tales valores se presentan en las columnas 9 a 12 de las tablas 6.21 y 6.22, en donde se incluyen los dos sentidos en que puede actuar el sismo de diseño.

Las columnas 13 de las tablas 6.21 y 6.22 se cuantifican de acuerdo con las Ec 5.24, de tal manera que se obtenga la fuerza cortante mayor.

**Tabla 6.21 Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje x (cont)**

Eje i-x	$V_{iix}^{ty}$ (t)	$- V_{iix}^{ty}$ (t)	$V_{iix}^{tx}$ (t)	$- V_{iix}^{tx}$ (t)	$V_{iix}$ (t)
1-x	-4.89	4.89	3.81	-3.81	17.20
2-x	-1.29	1.29	1.00	-1.00	6.35
3-x	-0.72	0.72	0.56	-0.56	4.59
4-x	-0.26	0.26	0.20	-0.20	4.13
5-x	0.00	0.00	0.00	0.00	3.87
6-x	0.26	-0.26	-0.20	0.20	4.13
7-x	0.72	-0.72	-0.56	0.56	4.59
8-x	1.29	-1.29	-1.00	1.00	6.35
9-x	4.89	-4.89	-3.81	3.81	17.20
$\Sigma$					

**Tabla 6.22 Fuerzas sísmicas en las rigideces del Entrepiso 1, paralelas al eje y (cont)**

Eje j-y	$V_{ijy}^{ty}$ (t)	$- V_{ijy}^{ty}$ (t)	$V_{ijy}^{tx}$ (t)	$- V_{ijy}^{tx}$ (t)	$V_{ijy}$ (t)
1-y	-1.67	1.67	1.30	-1.30	27.90
2-y	0.18	-0.18	-0.14	0.14	12.18
3-y	1.50	-1.50	-1.17	1.17	17.36
$\Sigma$					

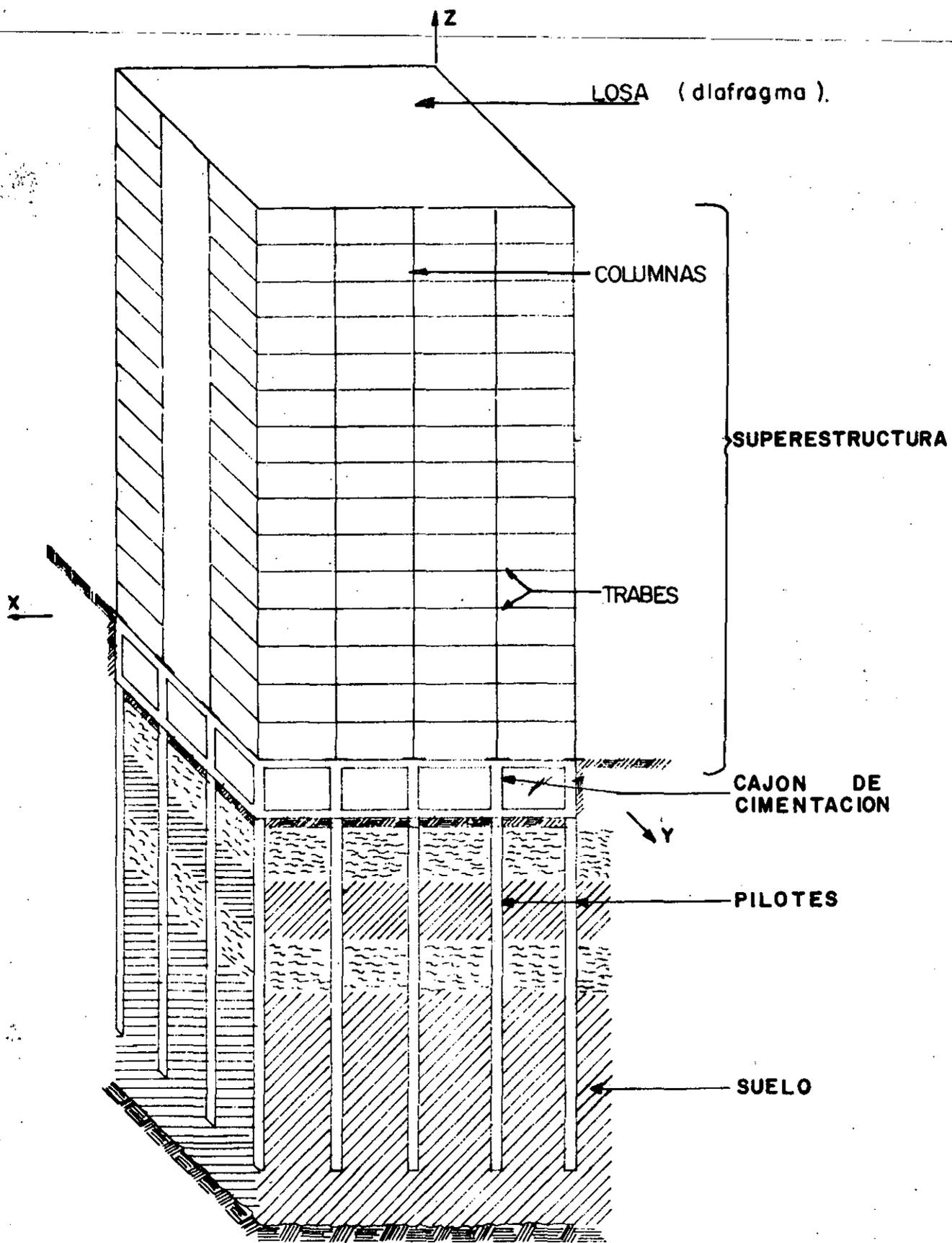


FIG 2.1 Representación esquemática de una edificación

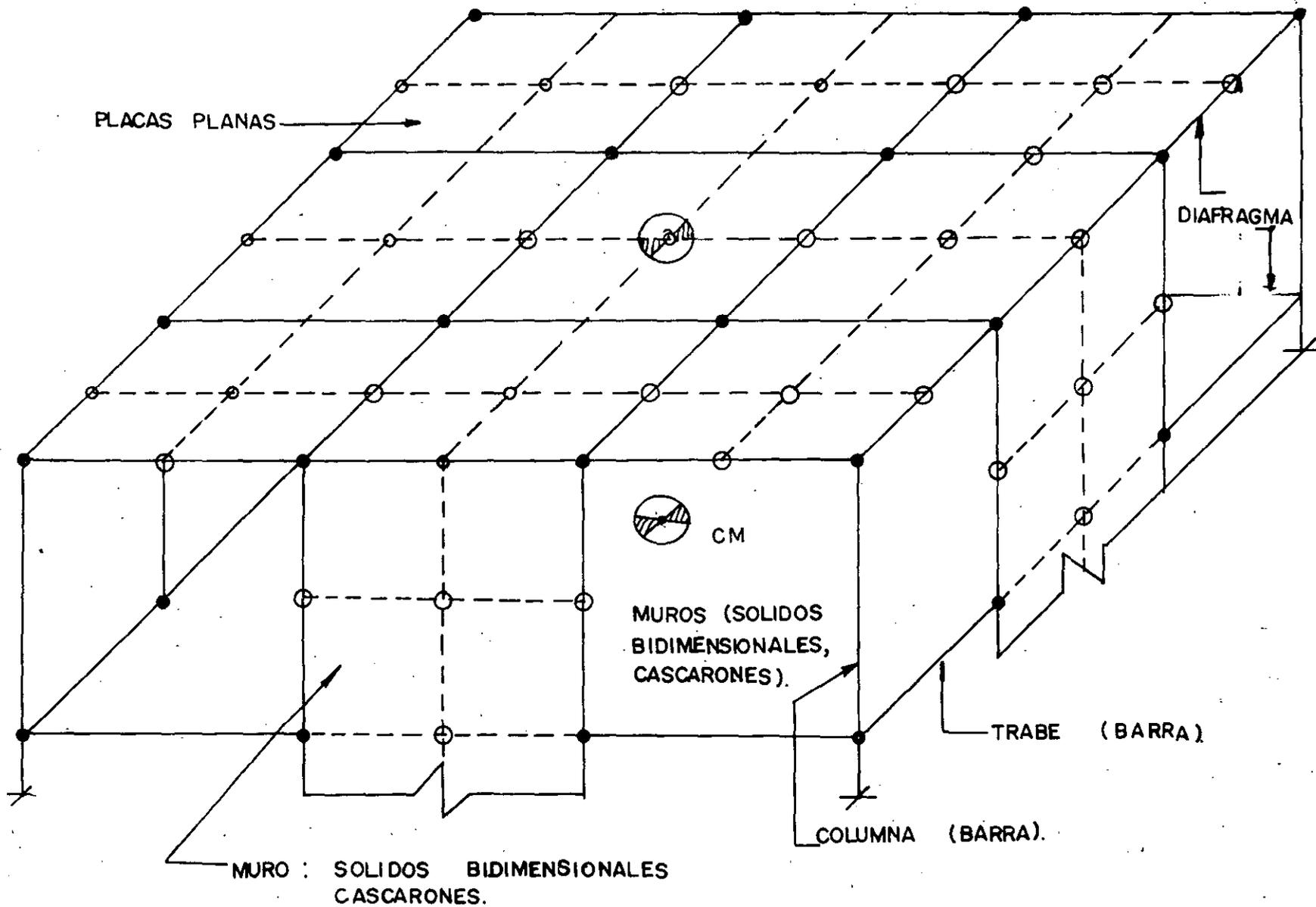


FIG 2.2 ELEMENTOS ESTRUCTURALES DE UNA EDIFICACION.

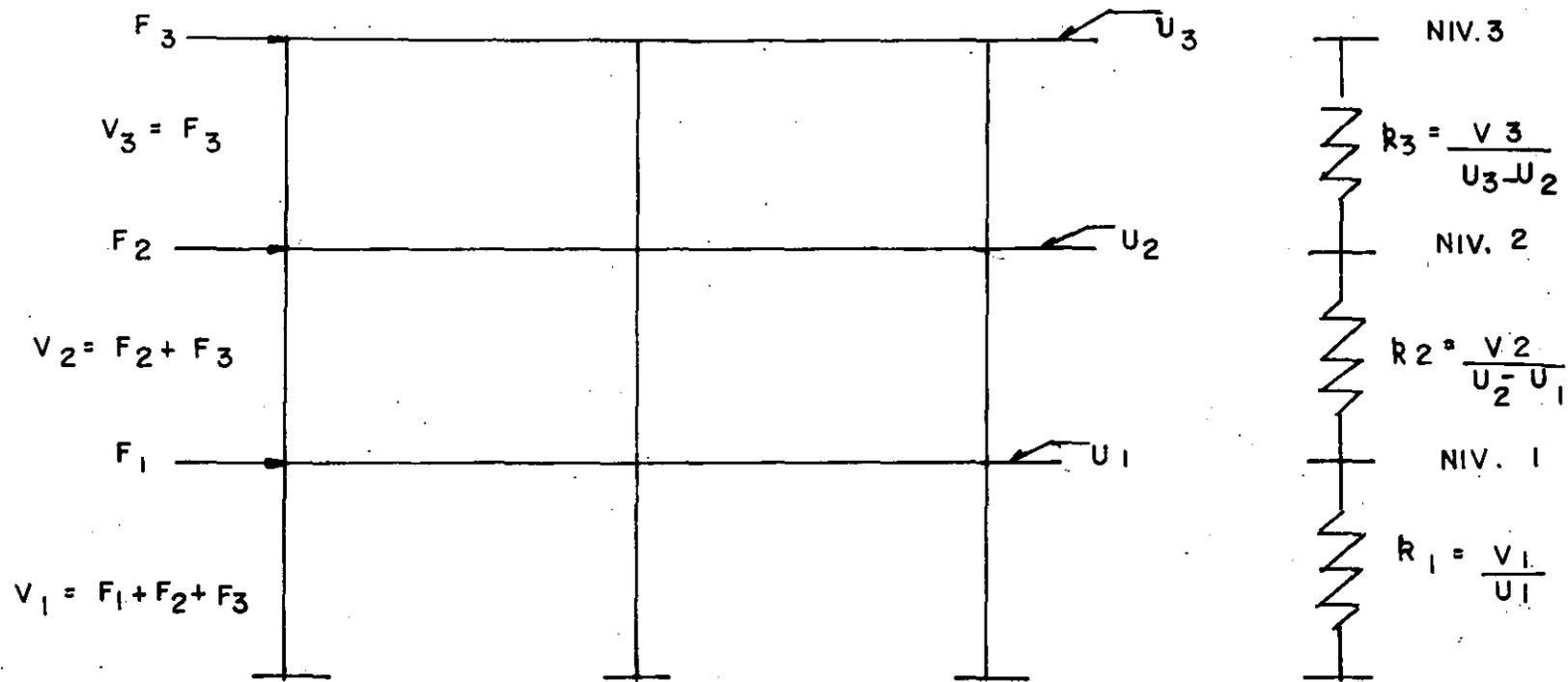


FIG 2.3 IDEALIZACION DE MARCOS PLANOS MEDIANTE RIGIDECES DE ENTREPISO.

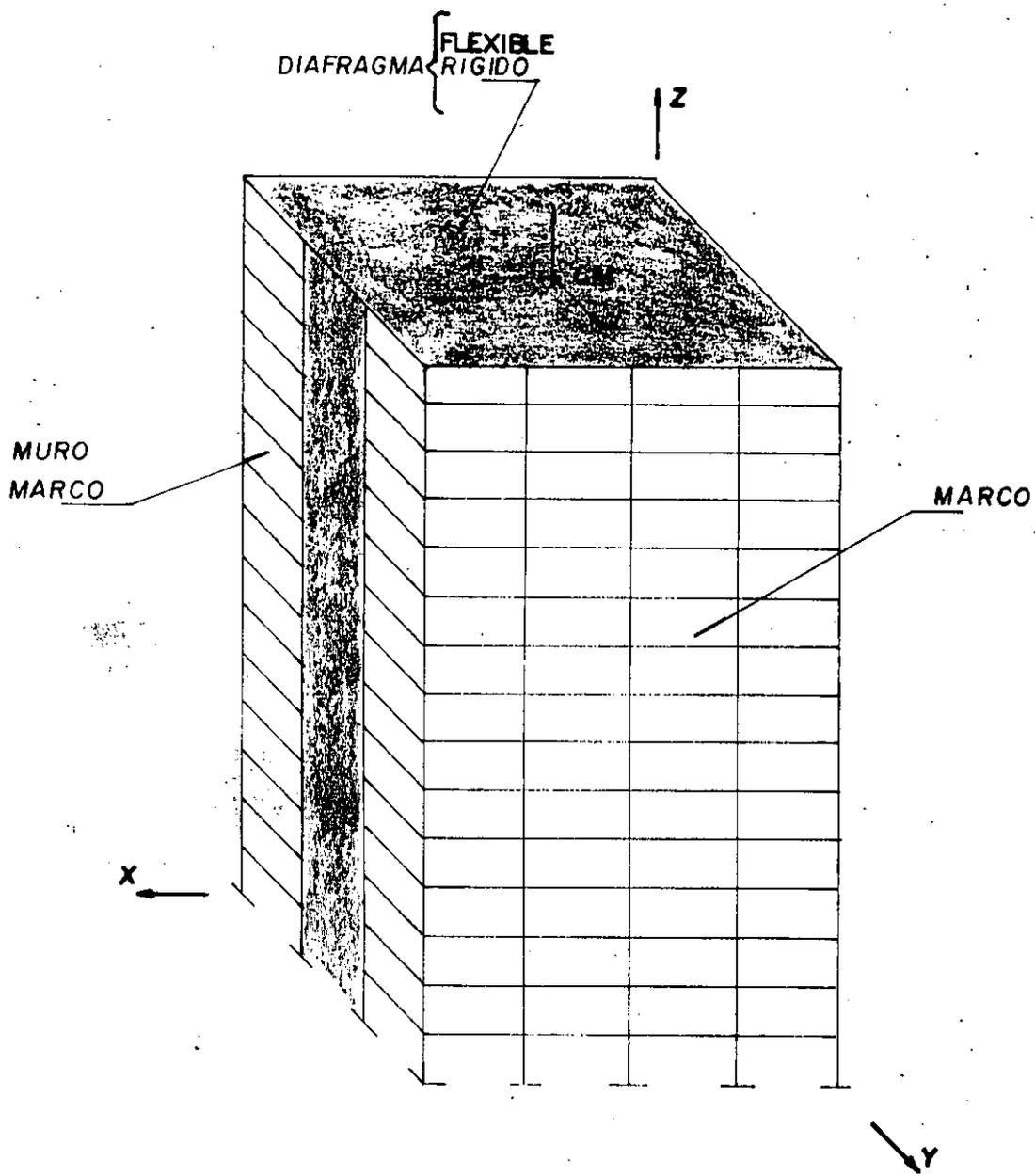
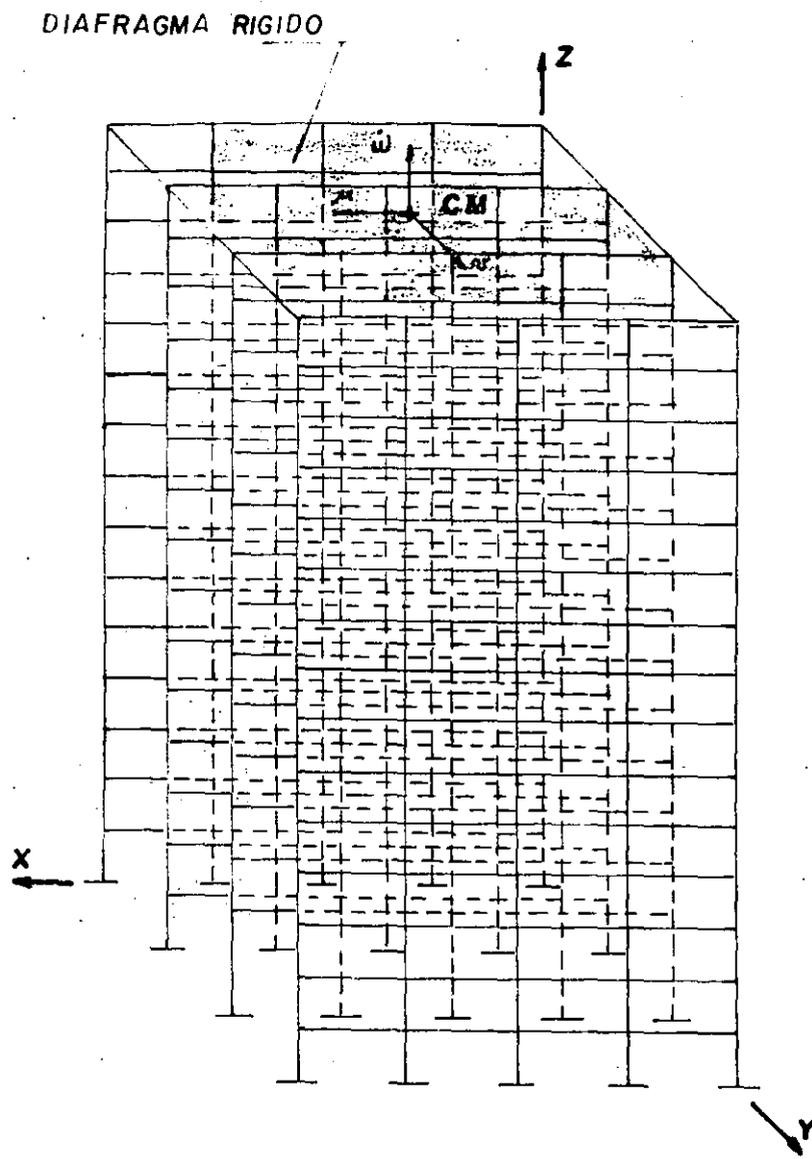
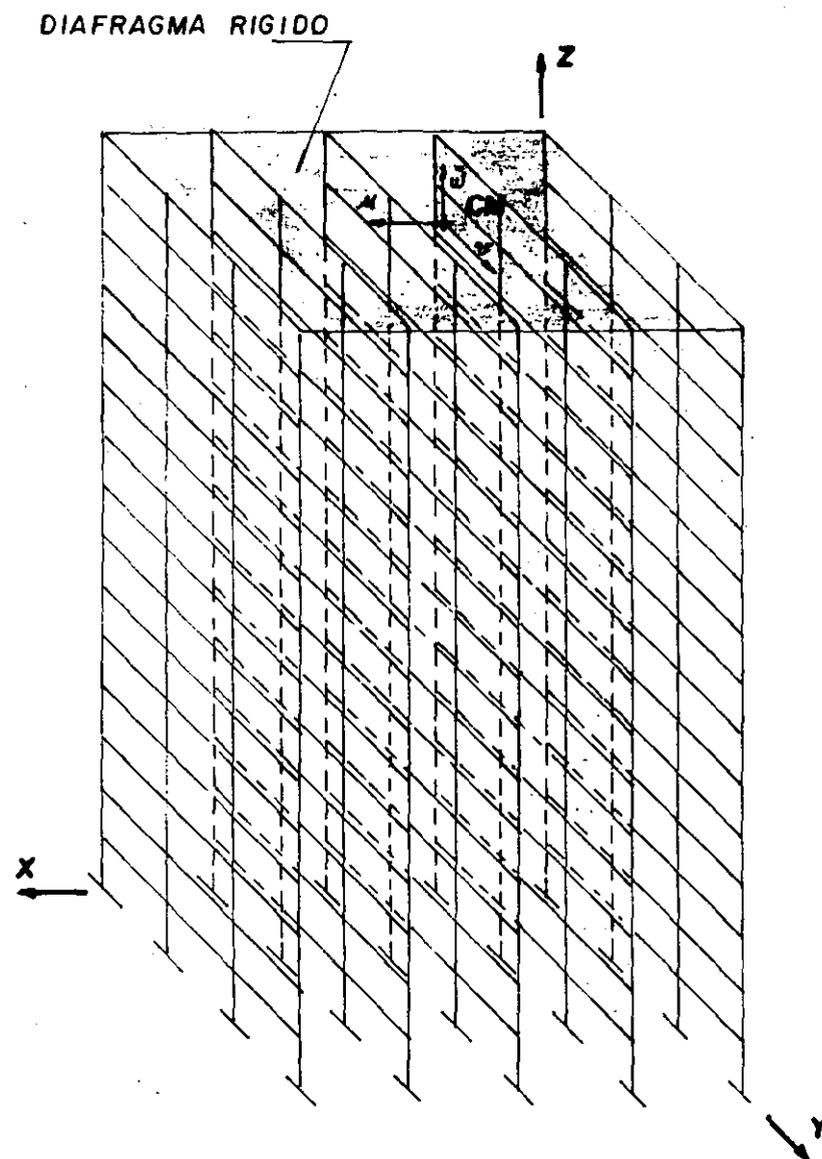


FIG 24 Muros y Muromarcos Tridimensionales unidos con diafragmas



PLANO PARALELO AL XZ



PLANO PARALELO AL YZ

FIG 2.6 Subestructuras formadas con marcos y muromarcos planos unidos con diafragmas rigidos

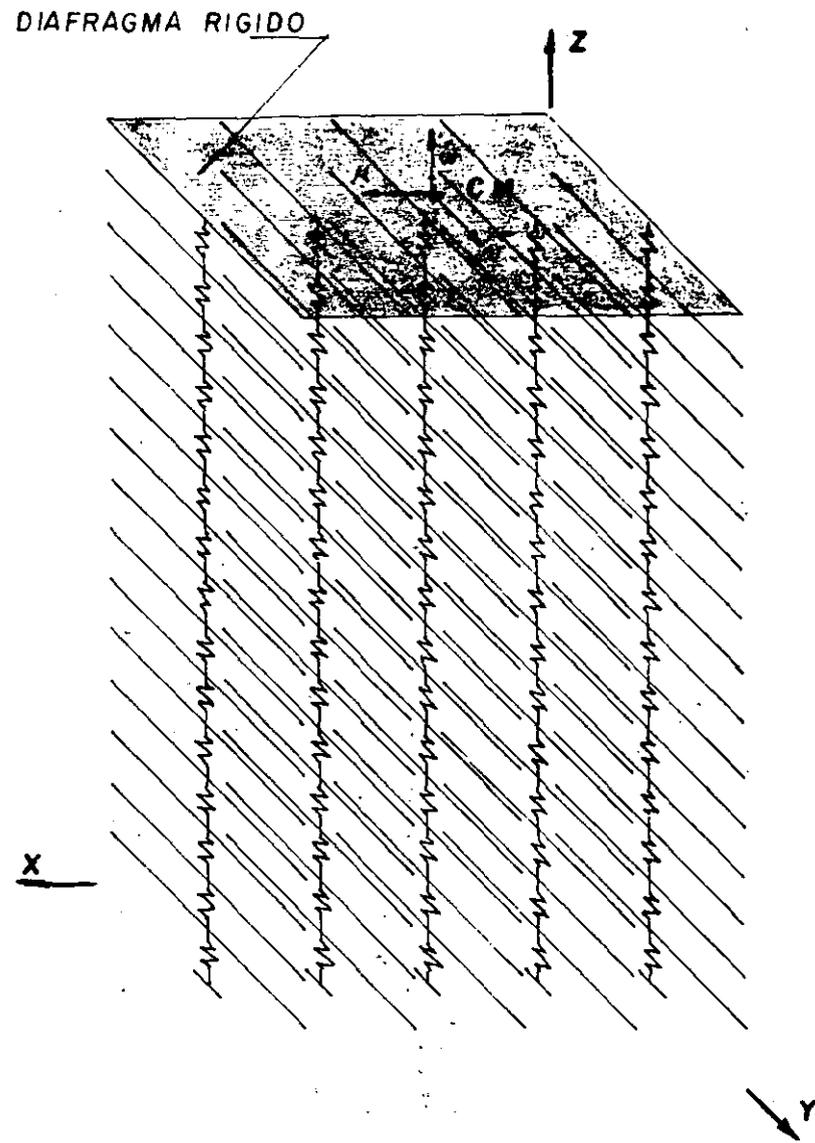
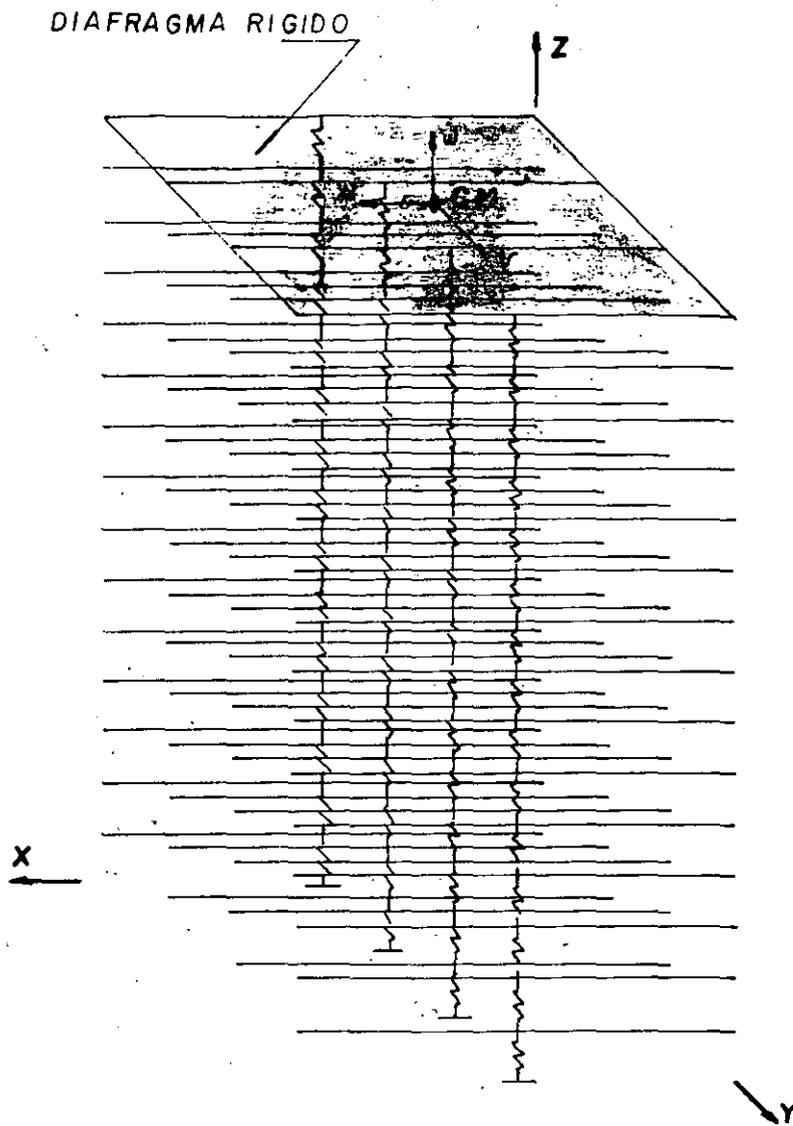
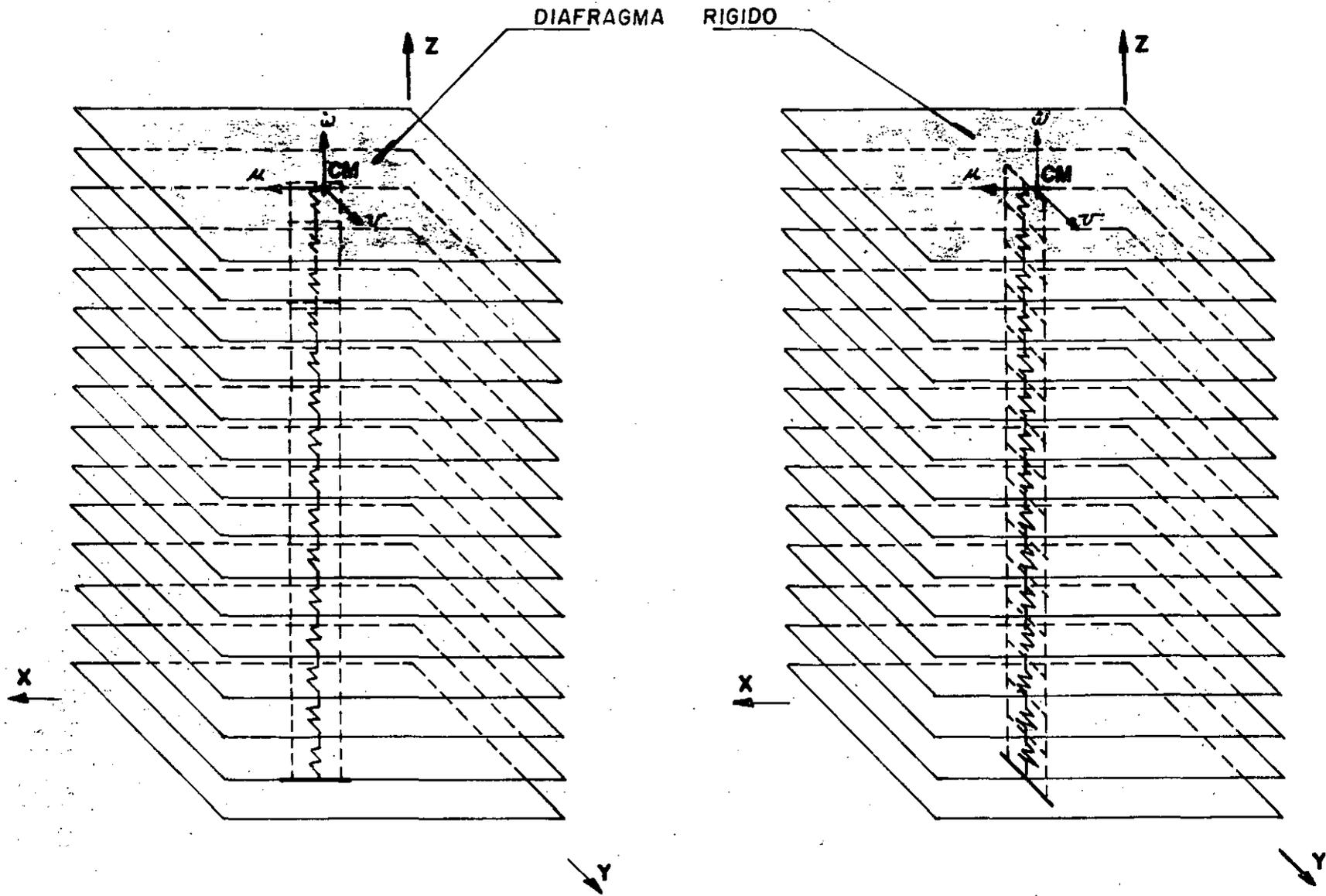


FIG 2.7 Rígideces de entrepiso (resortes) unidas con diafragmas rígidos



Plano paralelo al XZ

Plano paralelo al YZ

FIG 2.8 MODELOS UNIDIRECCIONALES INDEPENDIENTES FORMADOS CON LAS RIGIDECES DE ENTREPISO.

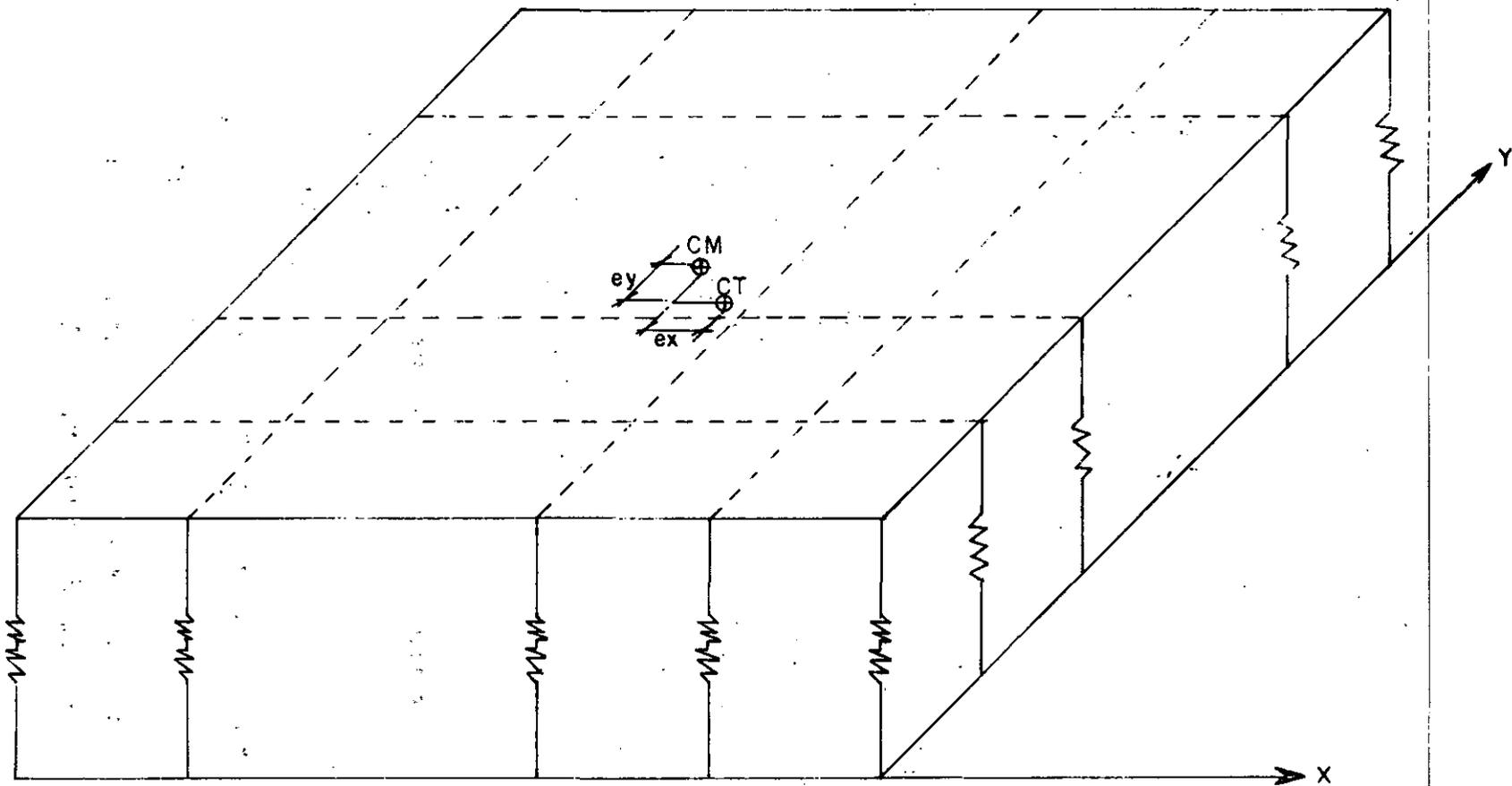
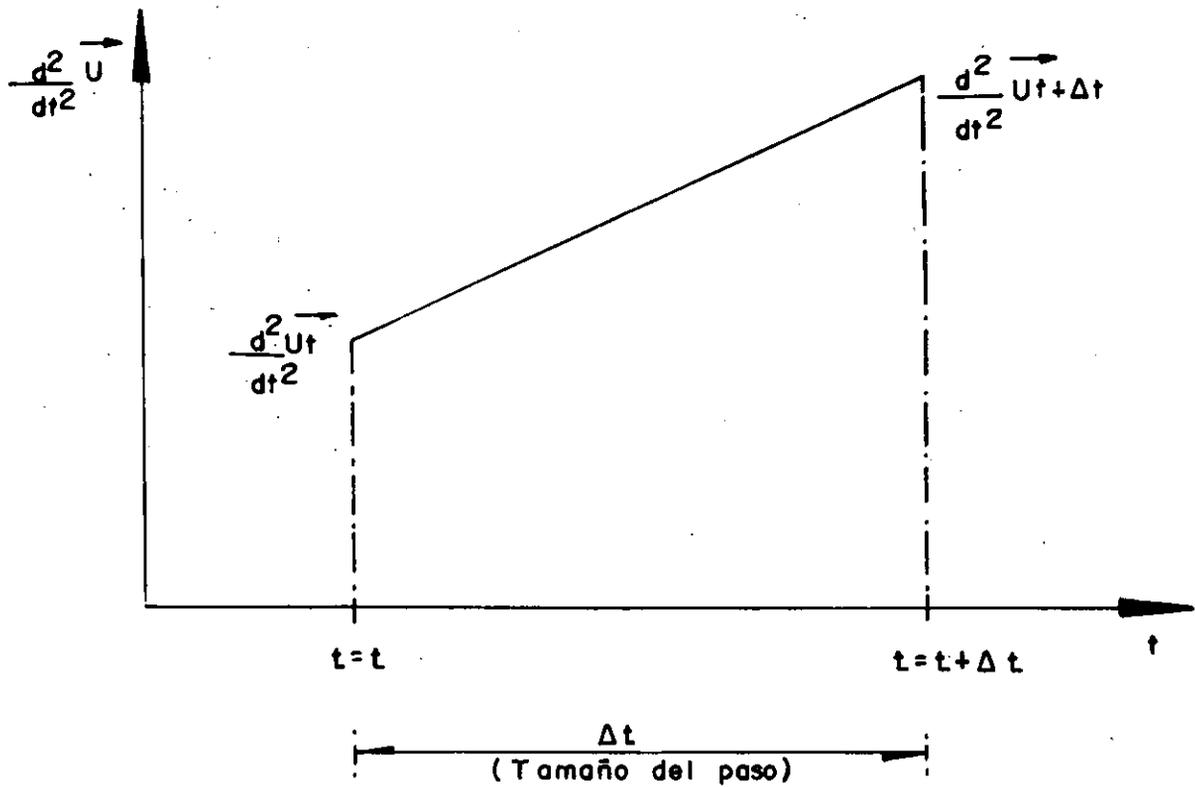


FIG 2.9 DIAFRAGMA RIGIDO UNIDO SOPORTADO LATERALMENTE POR LAS RIGIDECES DE ENTREPISO QUE LE SUBYACEN.



Valores conocidos al inicio del paso :

$$\begin{array}{l}
 \vec{U}_t \\
 \frac{d}{dt} \vec{U}_t \\
 \frac{d^2}{dt^2} \vec{U}_t \\
 \vec{U}_{t+\Delta t} \\
 \frac{d}{dt} \vec{U}_{t+\Delta t} \\
 \frac{d^2}{dt^2} \vec{U}_{t+\Delta t}
 \end{array}$$

Valores por conocer al final del paso :

FIG. 4.1 Variación lineal de la aceleración en el intervalo de integración,  $\Delta t$ .

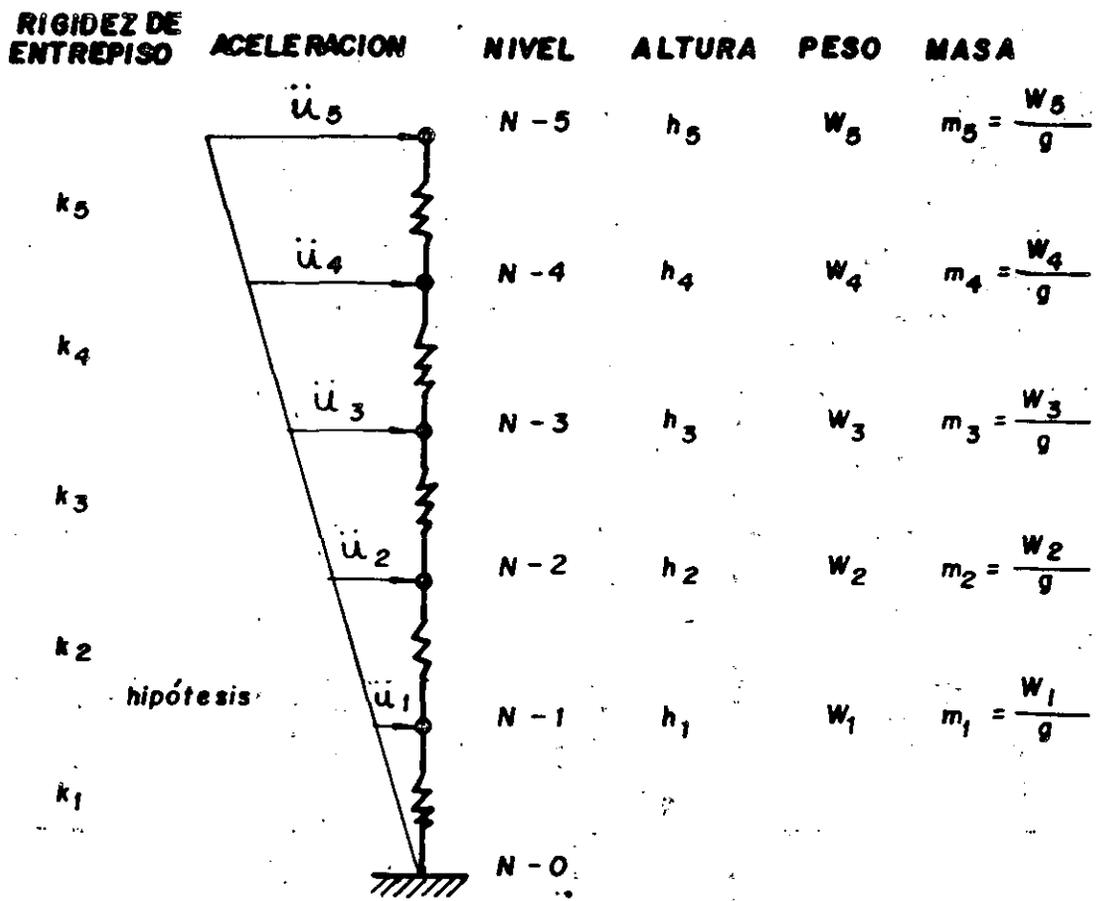


FIG 4.2 Distribución de Aceleraciones en el análisis estático.

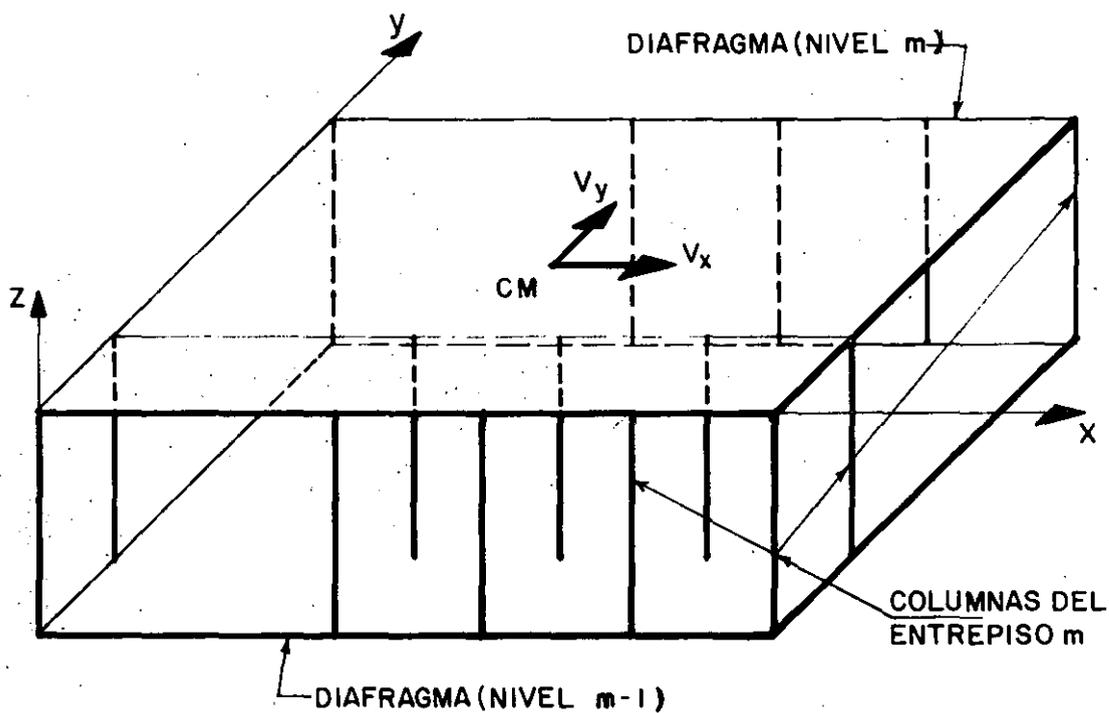


FIG. 5.1 REPRESENTACION ESQUEMATICA DEL MODELO ESTRUCTURAL CON RIGIDECES DE ENTREPISO.

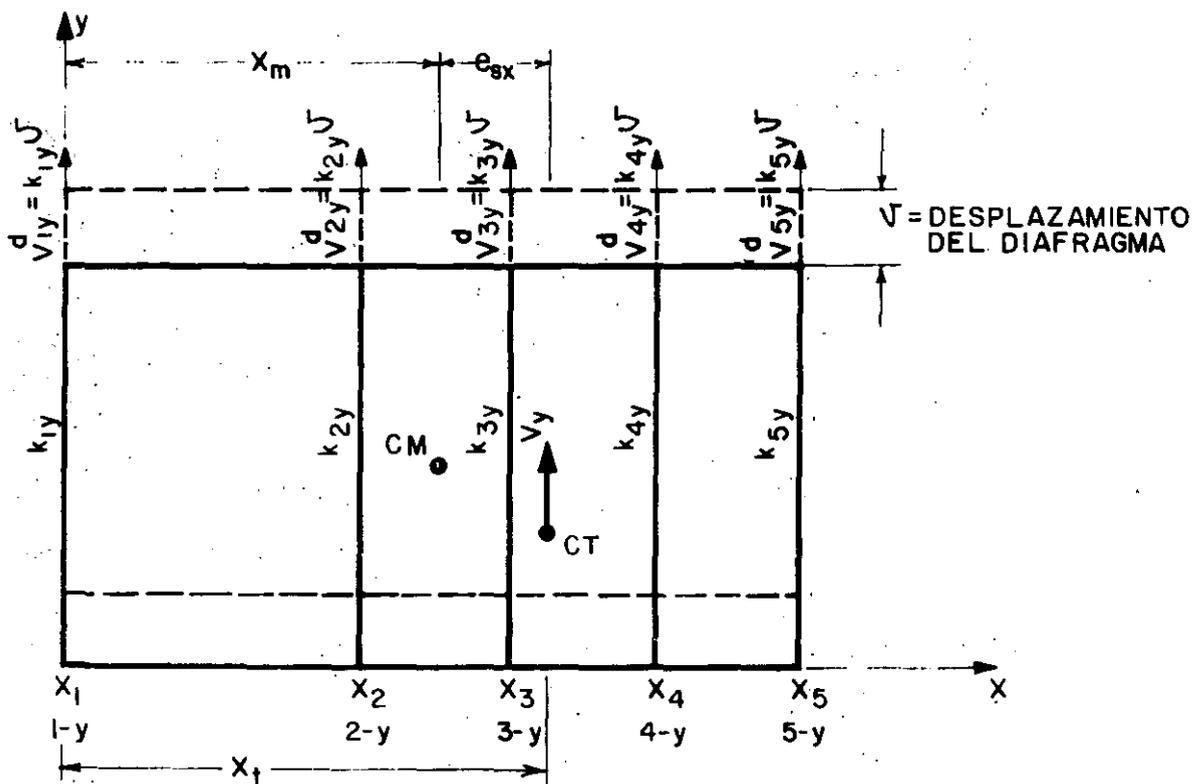


FIG. 5.2 FUERZAS CORTANTES DIRECTAS,  $V_{iy}^d$ , PARALELAS AL EJE  $y$ .

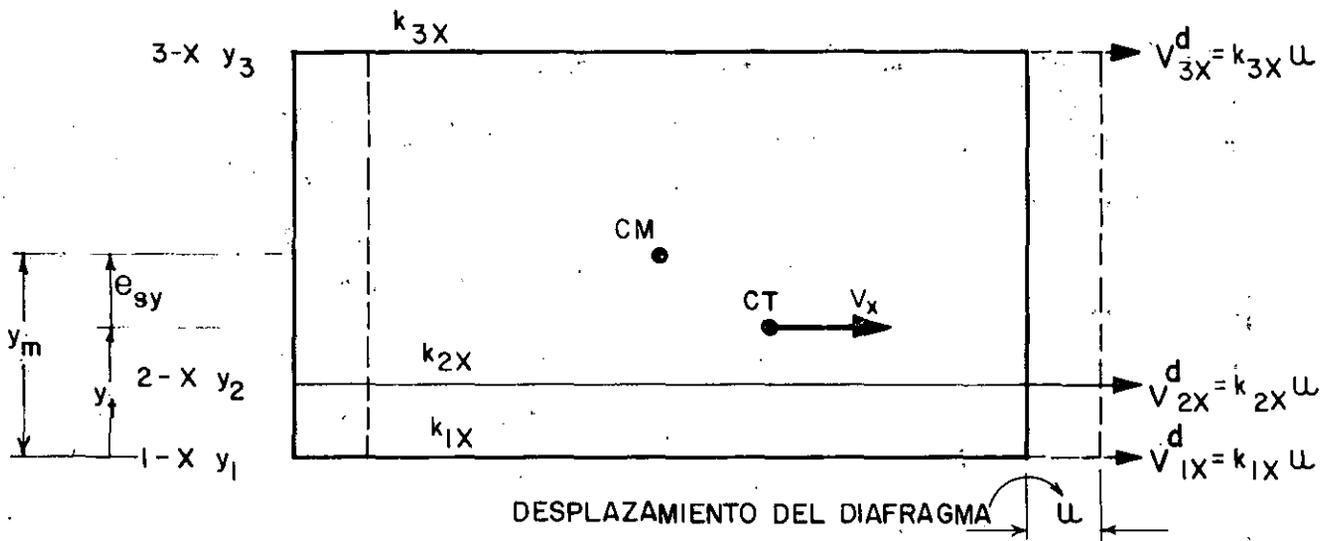


FIG. 5.3 FUERZAS CORTANTES DIRECTAS,  $V_{ix}^d$ , PARALELAS AL EJE X.

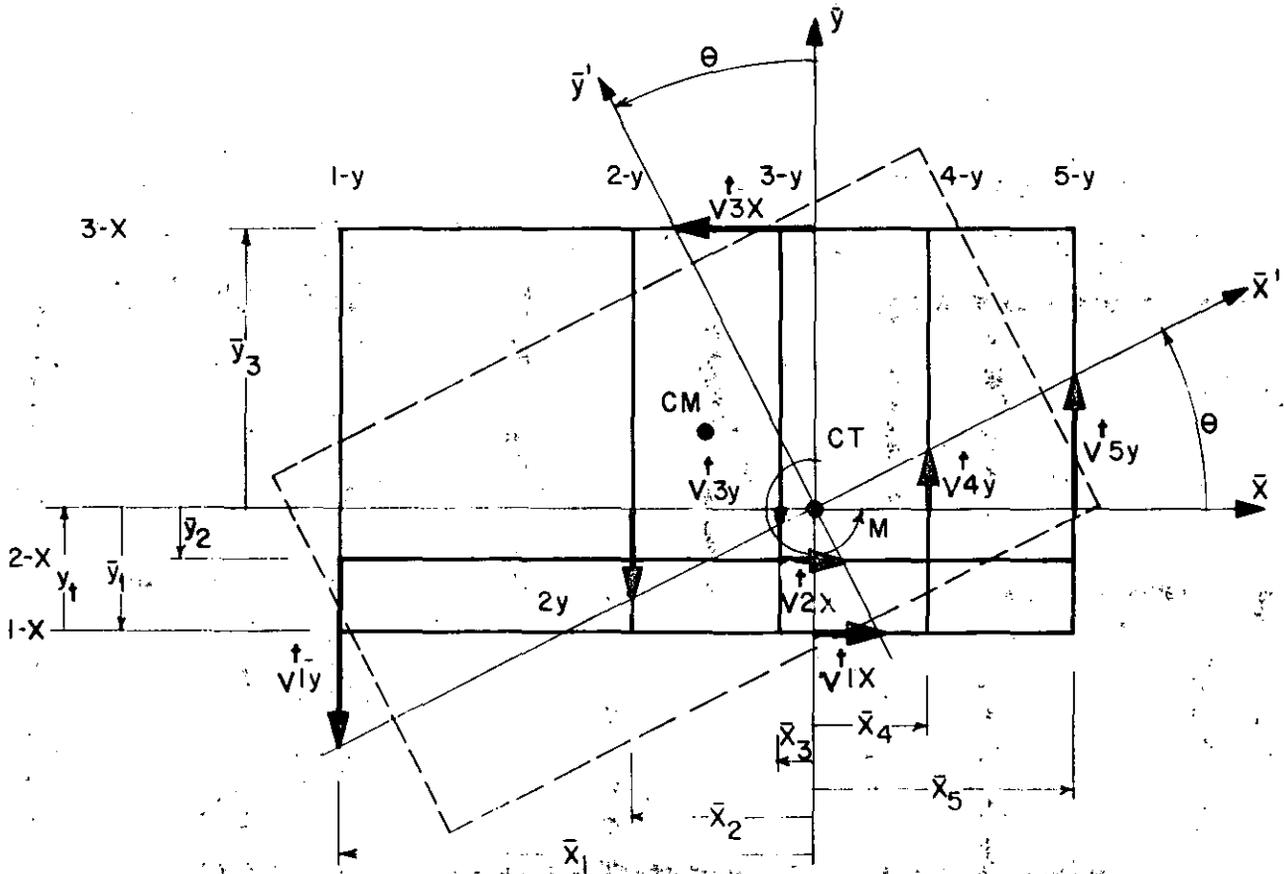
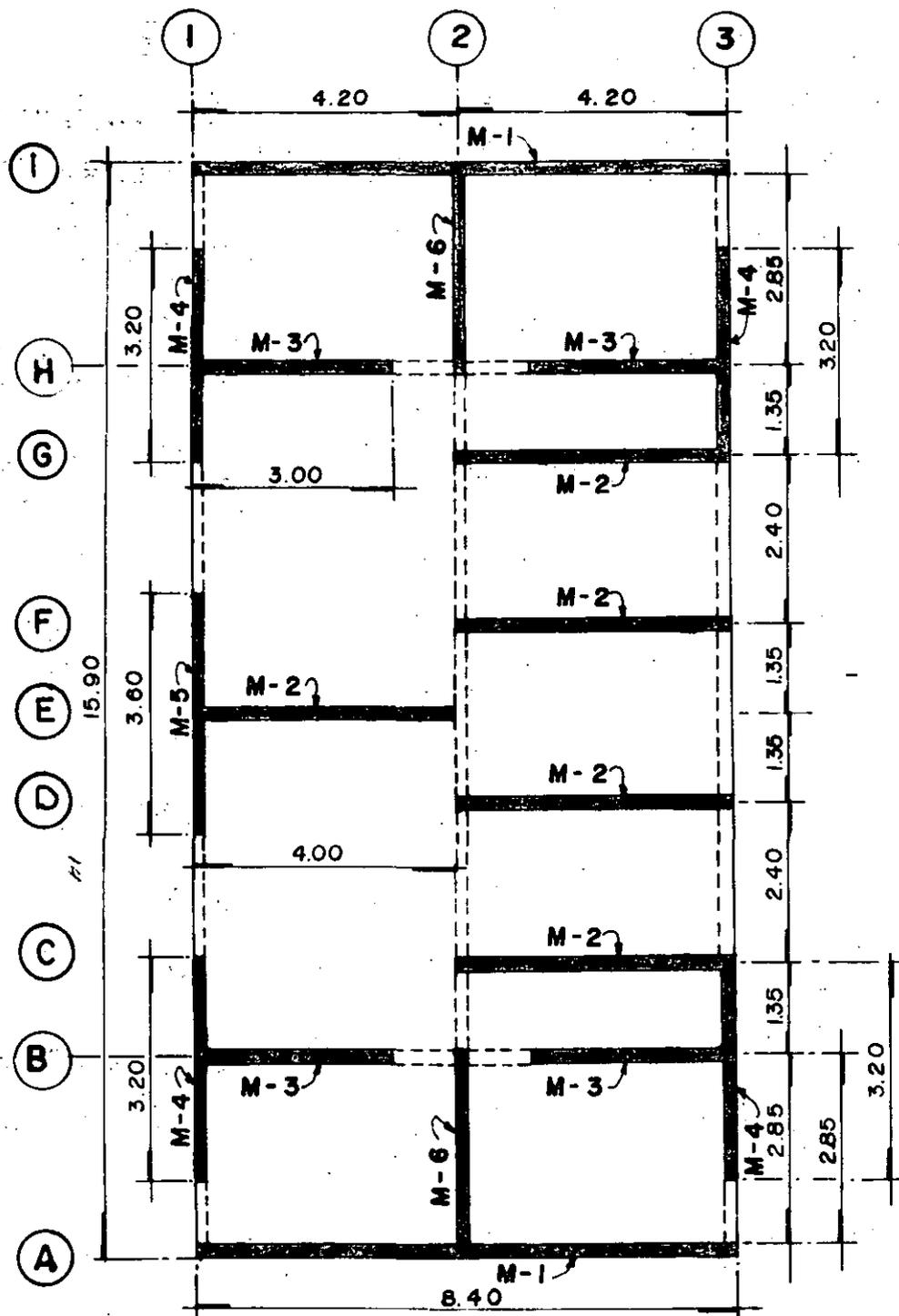
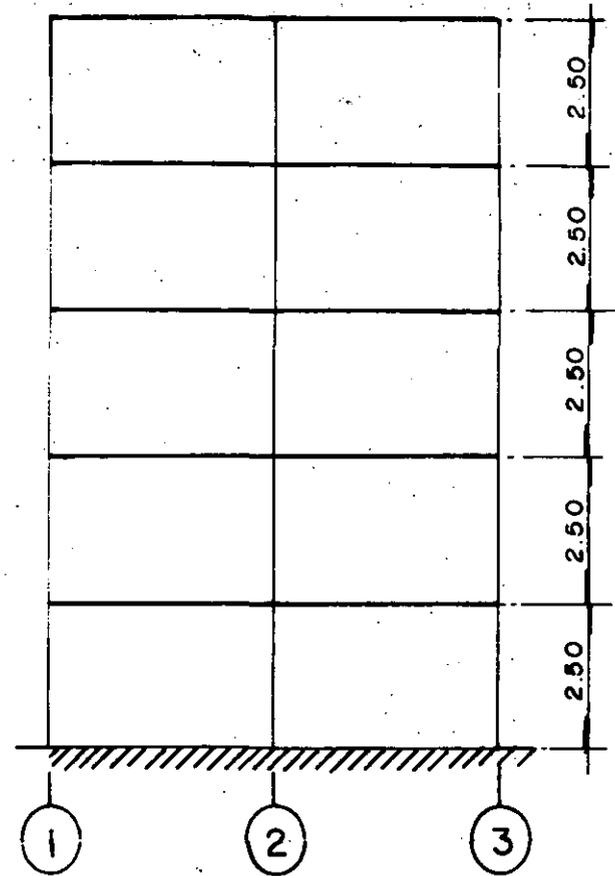


FIG. 5.4 FUERZAS CORTANTES DE TORSION,  $V_{ix}^t$  Y  $V_{jy}^t$ .

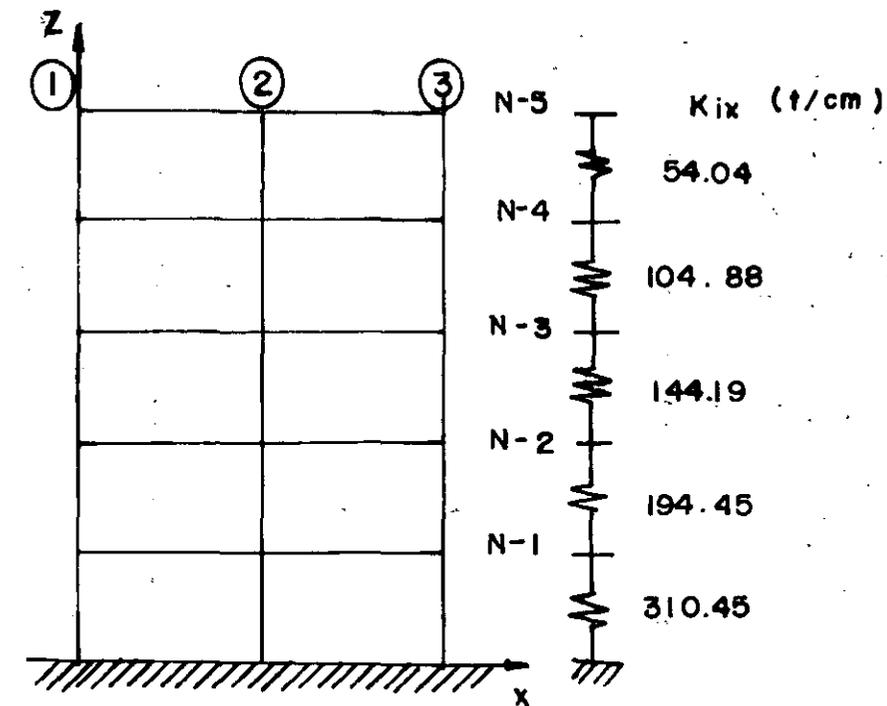


PLANTA TIPO ESC 1:100

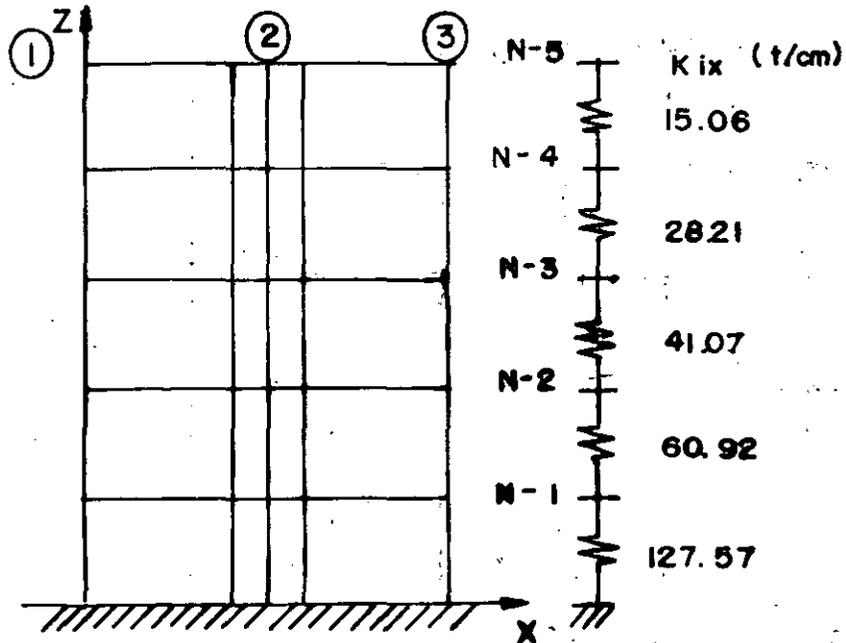


b) ELEVACION ESQUEMATICA DE NIVELES.

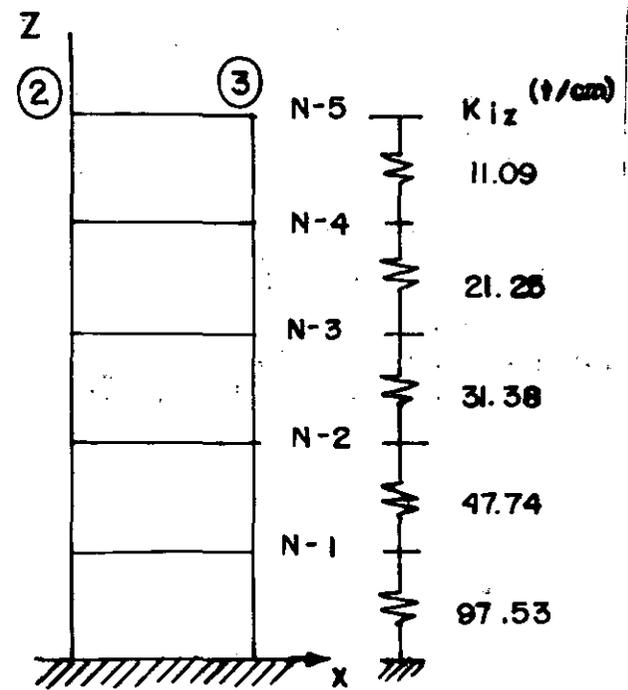
FIG 6.1 EDIFICIO PARA DESARROLLAR LOS EJEMPLOS.



MUROS: 1-X y 9-X



MUROS 2-X y 8X



MUROS: 3-X, 4-X, 5-X, 6-X y 7-X.

FIG 6.2 REPRESENTACION ESQUEMATICA MEDIANTE RIGIDEZES DE ENTREPISO DE LOS MUROS PARALELOS AL PLANO XZ.

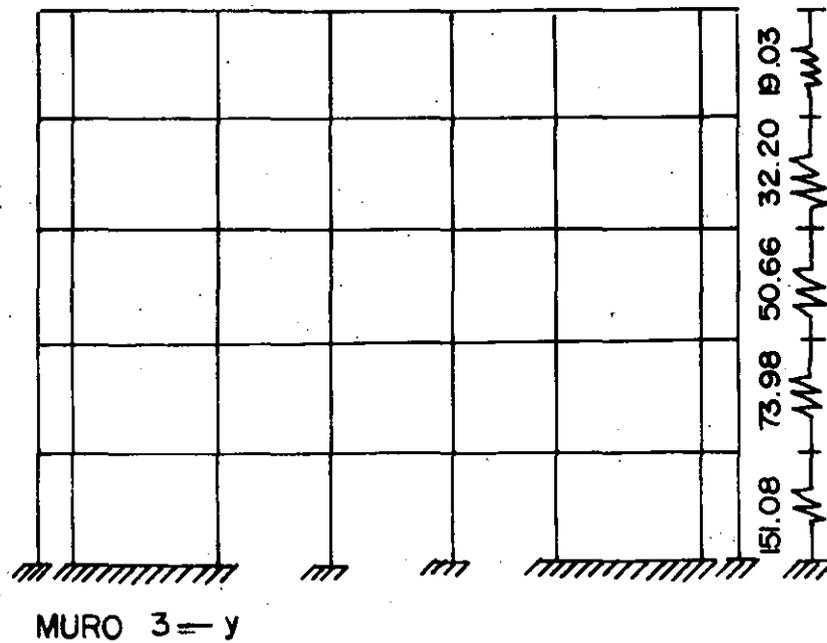
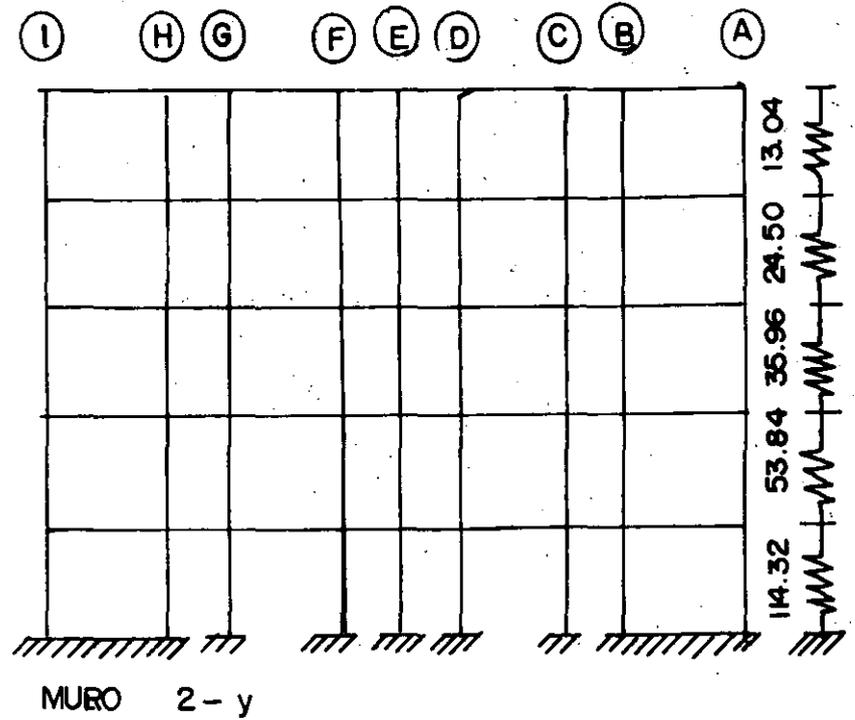
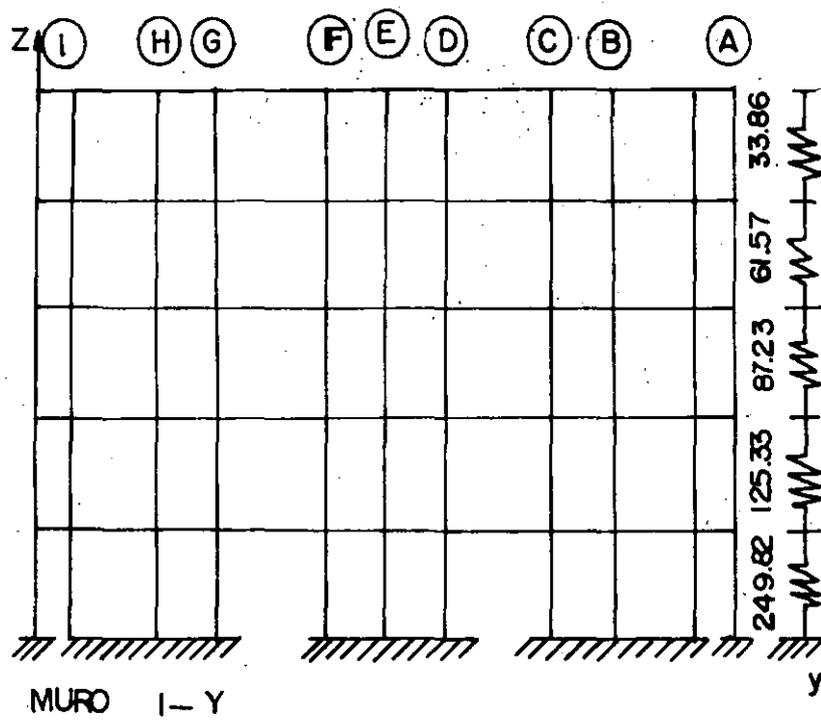
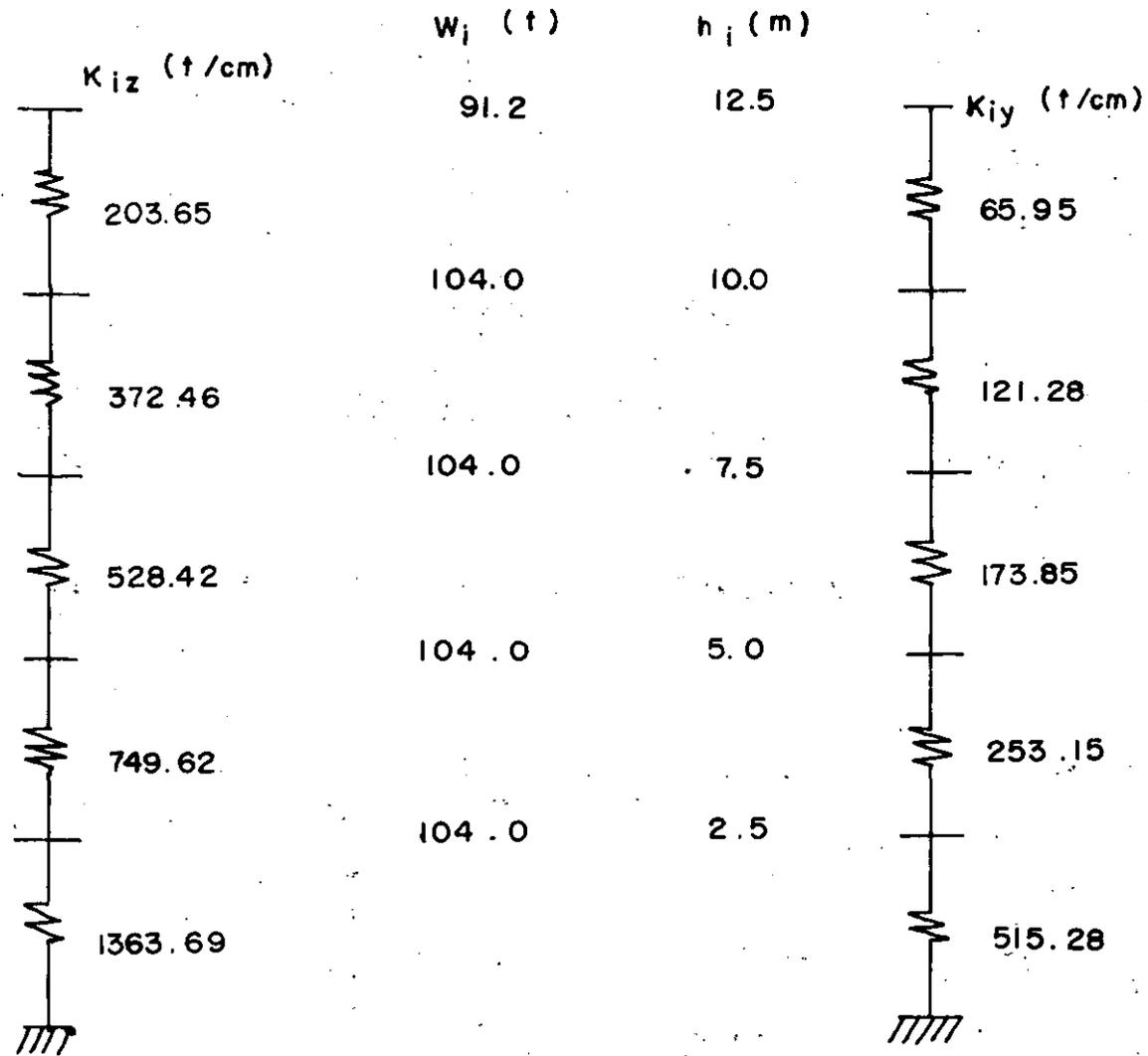


FIG 6.3 REPRESENTACION ESQUEMATICA MEDIANTE RIGIDEZES DE ENTREPISO DE LOS MUROS PARALELOS AL PLANO y z.

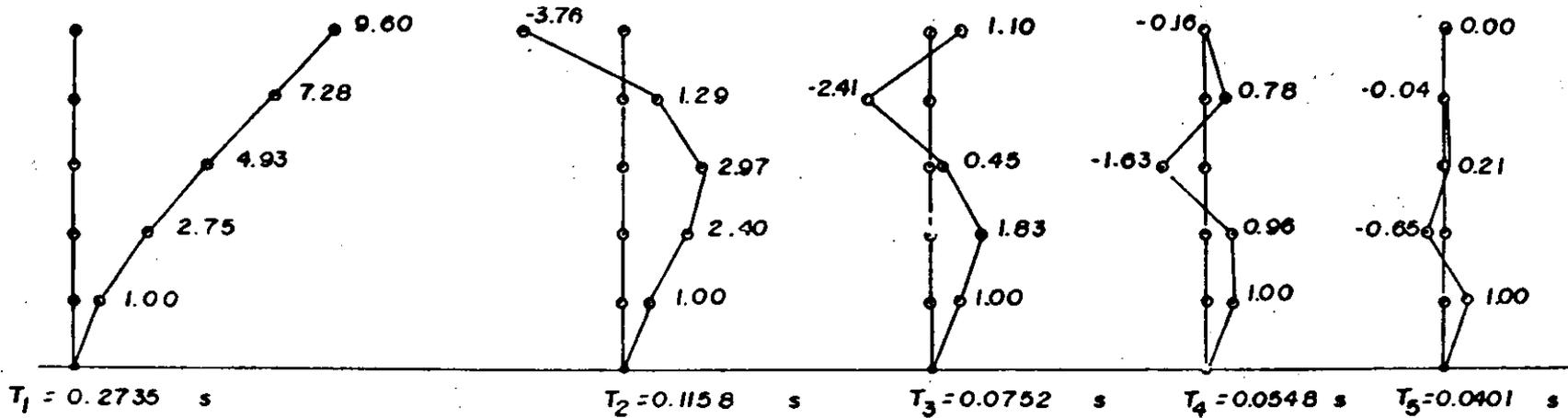


a) PARALELO AL EJE X

b) PARALELO AL EJE Y

FIG 6.4 MODELOS ESTRUCTURALES UNIDIMENSIONALES DEL EDIFICIO A BASE DE RIGIDECEZ DE ENTREPISO.

FORMAS NODALES DE LOS MUROS : DIRECCION X



FORMAS NODALES DE LOS MUROS : DIRECCION Y

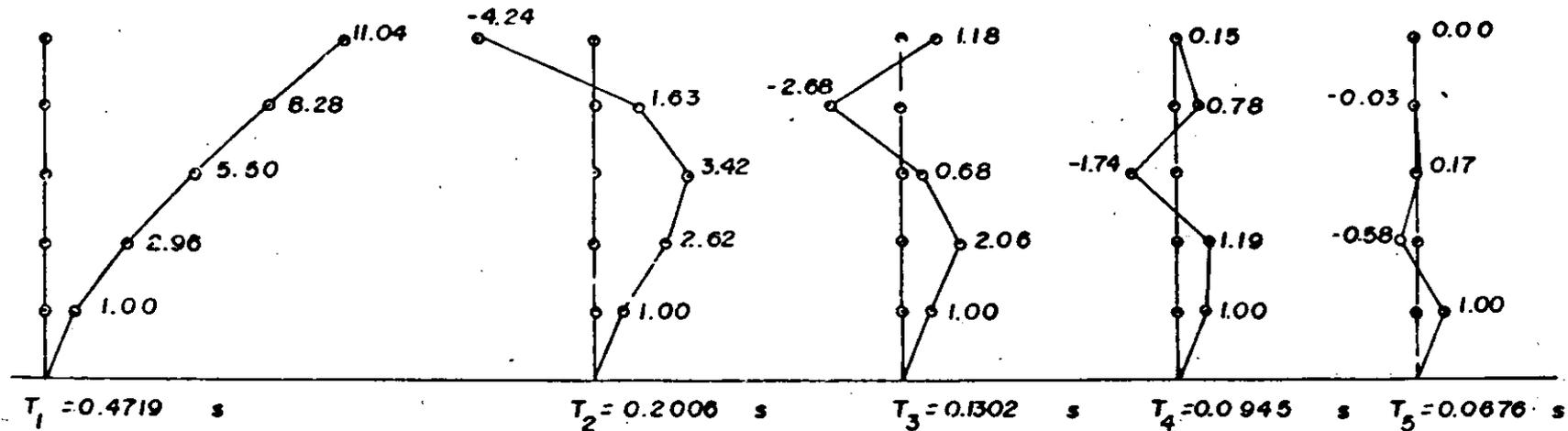


FIG 6.5 FORMAS MODALES (EIGENVECTORES) DE LOS MODELOS ESTRUCTURALES UNIDIMENSIONALES DEL EDIFICIO.

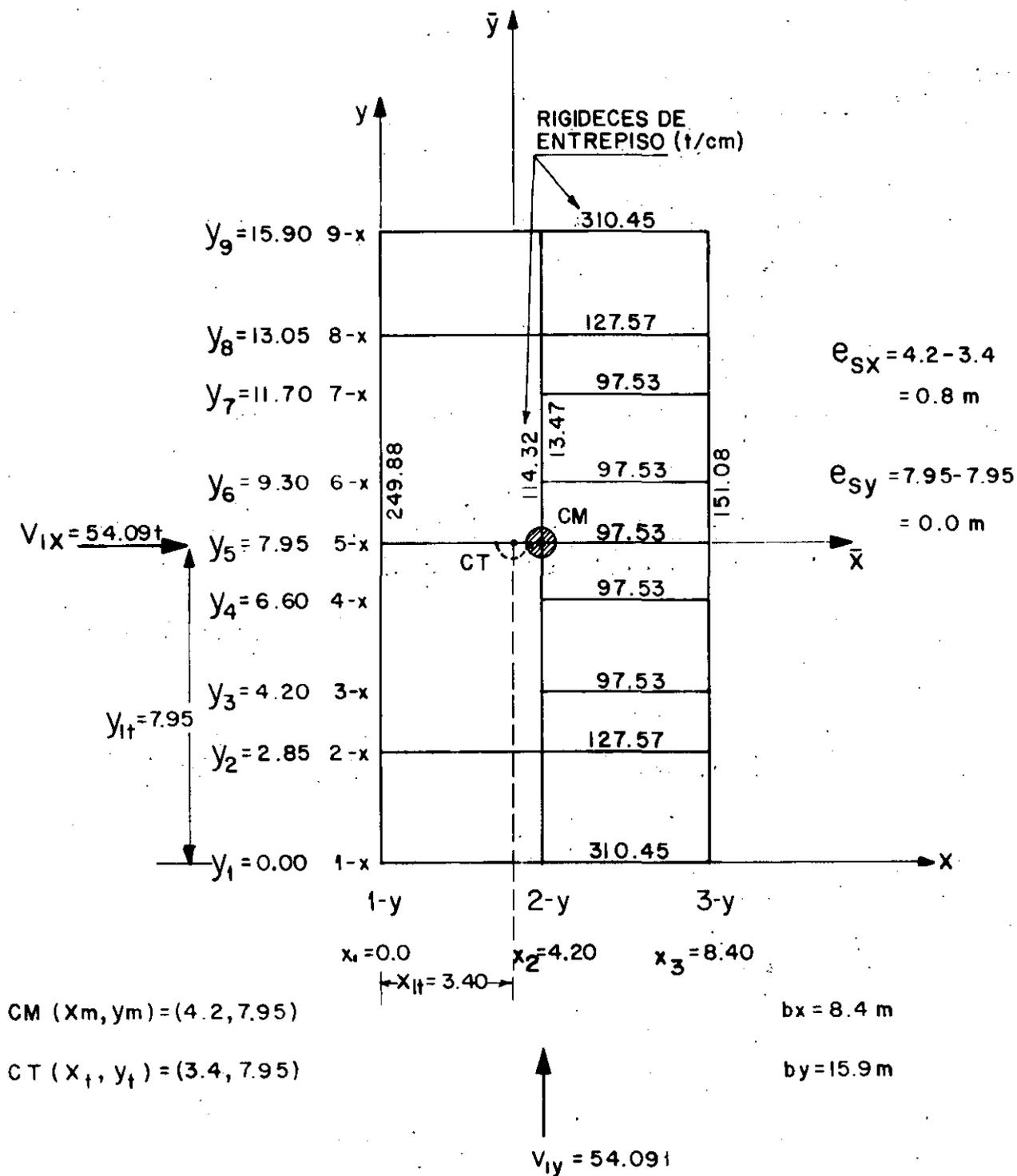
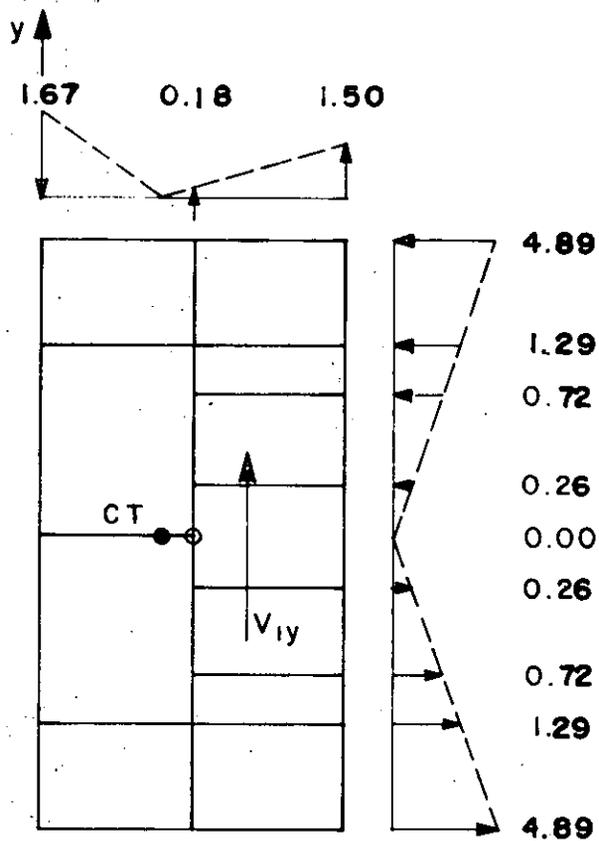
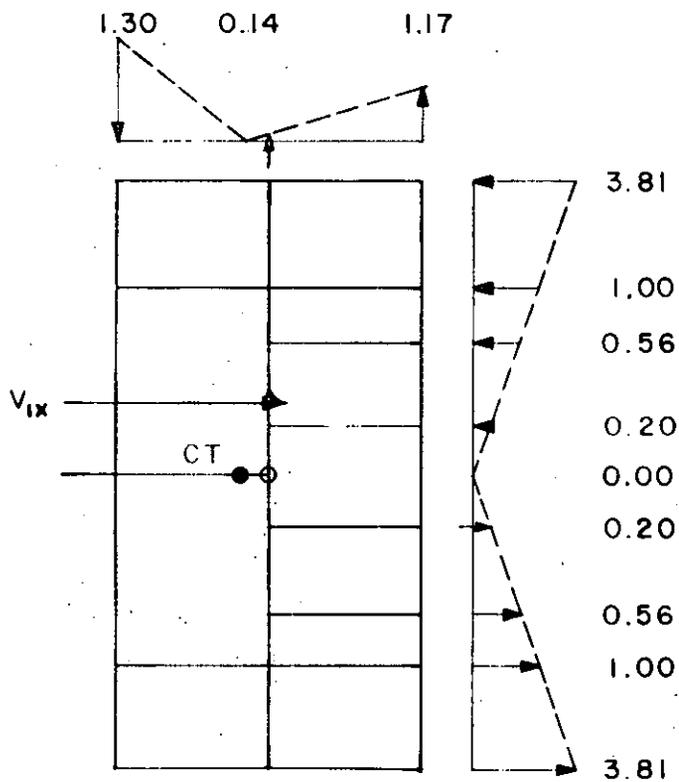


FIG 6.6 DISTRIBUCION DE LAS RIGIDECES DE ENTREPISO QUE LLEGAN AL NIVEL I.

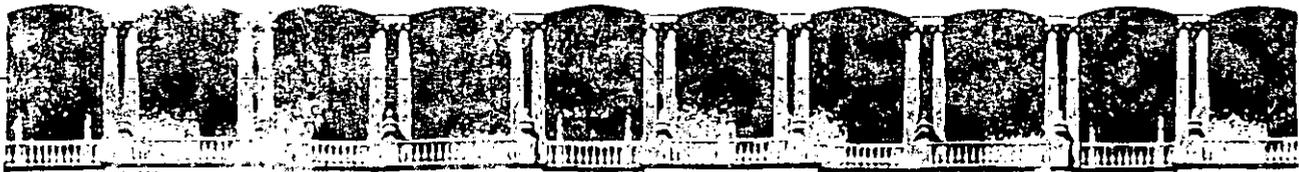


a) MOMENTO TORSIONANTE IGUAL A 110.34 tm.



b) MOMENTO TORSIONANTE IGUAL A 86.00 tm.

FIG 6.7 FUERZAS CORTANTES DEBIDAS A LA TORSION EN EL NIVEL I.



FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA

XX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA

MODULO II  
ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO

VIBRACIONES DE SISTEMA DISCRETOS DE VARIOS  
GRADOS DE LIBERTAD.

M. EN I. JOSE LUIS TRICOS.

1 9 9 4 .

# VIBRACION DE SISTEMAS DISCRETOS DE VARIOS

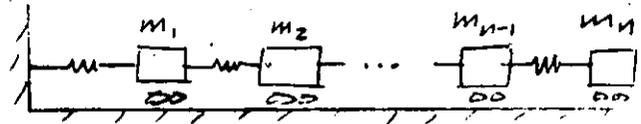
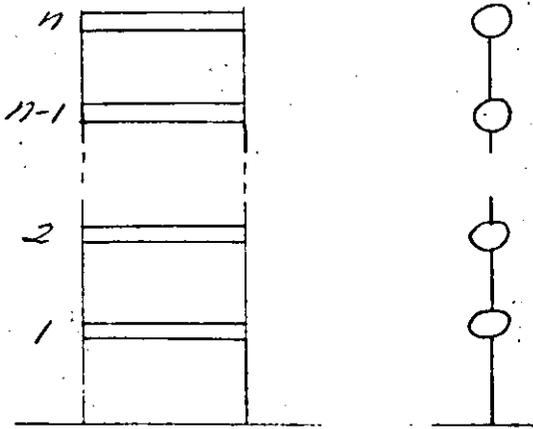
## GRADOS DE LIBERTAD

M. en I. JOSE PRINCE

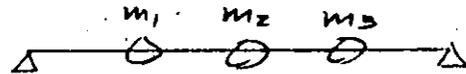
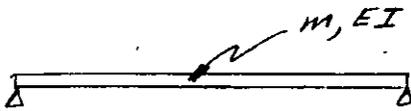
Ejemplos de sistemas de n GL

Características:

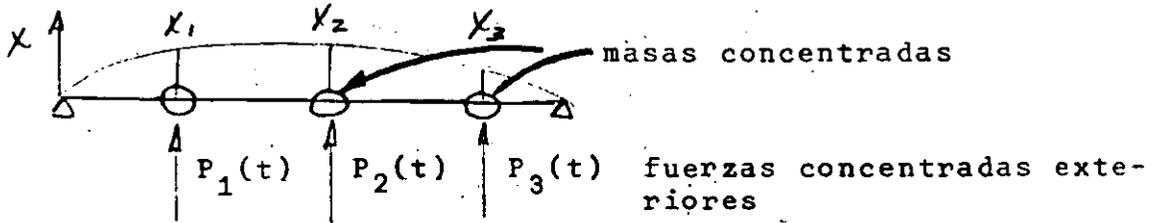
- masas { concentradas  
rígidas  
constantes
- columnas solo se deforman lateralmente
- con una coordenada por masa queda definida la configuración del sistema
- equivale a:



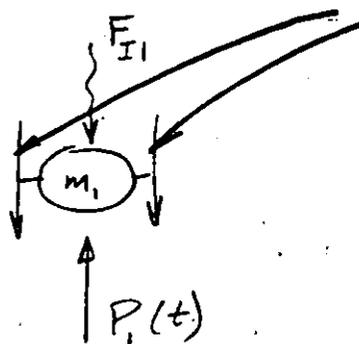
Además, la consideramos elástica, lineal



Supongamos:



aislemos una masa:



$F_{r1} = \sum$  fuerzas resistencia elástica a la deformación

$F_I =$  fuerza de inercia

Las ecuaciones condensadas de movimiento serán:

$$F_{I1} + F_{r1} = P_1(t)$$

$$F_{I2} + F_{r2} = P_2(t)$$

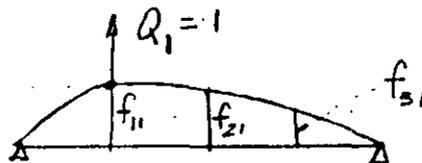
$$F_{I3} + F_{r3} = P_3(t)$$

Fuerzas asociadas al desplazamiento,  
NO al movimiento

∴ la determinación de estas fuerzas es un problema estático.

Coefficientes de influencia:

1. De flexibilidad



$f_{ij}$  = despl. de la coord. i debido a una carga unitaria en coord. j (desplazamiento y fuerza en = dirección)

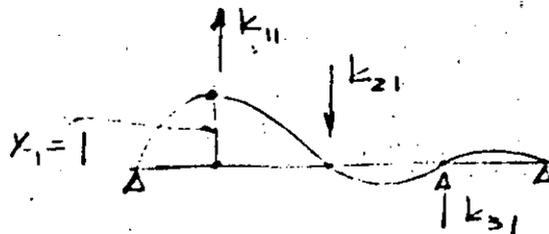
superposición

$$X_1 = f_{11} Q_1 + f_{12} Q_2 + f_{13} Q_3$$

$$X_2 = f_{21} Q_1 + f_{22} Q_2 + f_{23} Q_3 \quad \text{inv. (1)}$$

$$X_3 = f_{31} Q_1 + f_{32} Q_2 + f_{33} Q_3$$

2. De rigidez:



$K_{ij}$  = fuerza en coordenada i por un desplazamiento unitario en coordenada j.

Por superposición

$$\begin{aligned} Q_1 &= K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 \\ Q_2 &= K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 \\ Q_3 &= K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Desde luego  $K_{ij} = K_{ji}$  (y  $f_{ij} = f_{ji}$ ) (Maxwell-Mohr)

La ecuación 2 también puede escribirse:

$$Q_i = \sum_{j=1}^3 K_{ij} X_j$$

o bien, en notación matricial

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

matriz de rigideces

Ponemos:

$$\{Q\} = [K] \{X\}$$

$$\text{Claro que } [K]^{-1} = [F] = [f_{ij}]$$

Sustituyendo (2) o (3) en ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K_{11} X_1 + K_{12} X_2 + K_{13} X_3 &= P_1(t) \\ m_2 \ddot{X}_2 + K_{21} X_1 + K_{22} X_2 + K_{23} X_3 &= P_2(t) \\ m_3 \ddot{X}_3 + K_{31} X_1 + K_{32} X_2 + K_{33} X_3 &= P_3(t) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{Bmatrix}$$

o también:

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} &= \{P(t)\} \text{ (vibración forzada)} \\ &= \{0\} \text{ (vibración libre)} \end{aligned}$$

### 1. VIBRACION LIBRE.

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad (1.1)$$

Supongamos la solución

$$\begin{aligned} \{x\} &= \underbrace{\{r\}}_{\text{constante con } t} (A \underbrace{\text{sen } pt + B \text{ cos } pt}_{\text{escalar}}) = \{r\} Y(t) \\ &\quad \text{define:} \\ &\quad \text{- variación armónica} \\ &\quad \text{- amplitud} \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{r\} (A \text{ sen } pt + B \text{ cos } pt) = r Y(t) \\ \{\dot{x}\} &= \{r\} (Ap \text{ cos } pt - B p \text{ sen } pt) \\ \{\ddot{x}\} &= \{r\} (-Ap^2 \text{ sen } pt - B p^2 \text{ cos } pt) = -p^2 \{r\} Y(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Substituyendo 1.2 en 1.1 y dividiendo entre Y(t) nos queda:

$$-p^2 [M] \{r\} + [K] \{r\} = \{0\}$$

o sea:

$$\underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[F]} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}
 [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} & [K] \{r\} &= p^2 [M] \{r\} \\
 \text{pre x } [M]^{-1} & & \text{pre x } [K]^{-1} & \cdot \frac{1}{p^2} \\
 [M]^{-1} [K] \{r\} &= p^2 \{r\} & \frac{1}{p^2} \{r\} &= [K]^{-1} [M] \{r\}
 \end{aligned}$$

En las dos formas llegamos a un problema de VAC

$$[L] \{u\} = \lambda \{u\}$$

Problema de valores característicos:

- Dada una matriz cuadrada de orden  $(n \times n)$   $[L]$ , que representa una transformación lineal de vectores  $n$ -dimensionales, debe encontrarse un vector  $\{u\}$  que transformado por  $[L]$  resulte en otro vector  $\lambda \{u\}$  en la misma "dirección". O sea,  $[L]$  solo cambia la magnitud de  $\{u\}$  sin cambiar la dirección.

El vector es un vector característico (o eigenvector) de  $[L]$ .  $\lambda$  (escalar) representa la relación entre las "longitudes" antes y después de la transformación y para llegar a los VEC debe tomar valores de un conjunto de valores característicos (VAC) (o eigenvalores).

El problema de encontrar frecuencias y modos naturales puede considerarse un problema de VAC. - (STD)

Tenemos

$$[K] - p^2 [M] \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Si en el sistema de ecuaciones

$$[A] \{x\} = \{0\}$$

$[A]$  es no singular, la solución única es la trivial

$\{x\} = \{0\}$ , de donde; nos interesa el caso en que  $[A]$  es singular. En este caso la adjunta\*  $[\hat{A}]$  existe y puede pre X por ella, con el resultado

$$|A| \{x\} = \{0\}$$

porque  $[\hat{A}] [A] = |A| [I] \quad \forall [A] \quad (n \times n)$

Puesto que  $|A| = 0$ ,  $\{x\}$  no necesariamente es nulo, pero si se asigna un valor dado a uno de sus elementos los demás quedan determinados en forma única.

También notamos que si  $\{x\}$  es solución de  $[A] \{x\} = \{0\}$  y  $\alpha$  es una constante, entonces  $\alpha \{x\}$  es también solución.

Por lo tanto, hay un número infinito de soluciones. Todos estos se considerarán juntos y hablaremos de una "solución" como un conjunto de relaciones entre los elementos de  $\{x\}$ .

$$\text{Volvemos a } \underbrace{[K] - p^2 [M]}_{[E]} \{r\} = \{0\} \quad (1.3)$$

Al desarrollar  $|E| = 0$  llegamos a una ecuación de grado  $n$  en  $p^2$ , cuyas raíces son los VAC.

- Como  $[K]$  y  $[M]$  son simétricas y positivas definidas\*,

---

\*Transpuesta de la matriz de cofactores.

\*\*  $[A]$  es POS. DEF. si  $\{q\} [A] \{q\} > 0$  para todo  $\{q\}$  no nulo

puede demostrarse que las raíces de la ecuación característica son reales y positivas. Las llamamos  $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$ .

Las  $n$  frecuencias naturales son los términos positivos de las raíces y la más baja es llamada frecuencia fundamental.

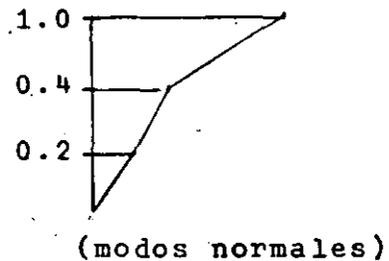
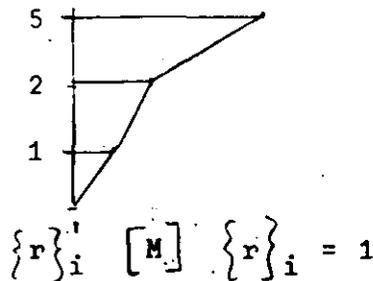
- Para la gran mayoría de los casos de interés las frecuencias son diferentes entre sí.
- Para cada frecuencia  $p_i$  existe una VEC asociado:

$$[K] \{r\}_i = p_i^2 [M] \{r\}_i \quad i = 1, \dots, n$$

o sea para cada  $p_i$  existe una solución  $\{r\}_i$  no trivial

- Normalización (solo conveniencia, sin significado físico)

Varias formas:



- Los modos y frecuencias naturales del sistema son propiedades características derivadas de las propiedades de inercia y rigidez expresadas por los elementos de  $[M]$  y  $[K]$ .
- Llamaremos matriz modal  $[R]$  a la que tiene los VEC, o vectores modales, como columnas.

## ORTOGONALIDAD DE MODOS DE VIBRACION

Se dice que dos vectores  $\{a\}$  y  $\{b\}$  son ortogonales con respecto a la matriz simétrica  $[J]$  si

$$\{a\}' [J] \{b\} = \{b\}' [J] \{a\} = 0$$

Demostremos que dos vectores modales  $\{r\}_i$  y  $\{r\}_j$ , asociados a frecuencias diferentes ( $p_i \neq p_j$ ) son ortogonales con respecto a las matrices de inercia y elástica.

- Cada uno de estos vectores satisface la ecuación 1.3

$$p^2 [M] \{r\} = [K] \{r\} \quad [M] \{r\} = \frac{1}{p^2} [K] \{r\}$$

es decir:

$$p_i^2 [M] \{r\}_i = [K] \{r\}_i \quad [M] \{r\}_i = \frac{1}{p_i^2} [K] \{r\}_i$$

$$p_j [M] \{r\}_j = [K] \{r\}_j \quad [M] \{r\}_j = \frac{1}{p_j^2} [K] \{r\}_j$$

...  $i$  y  $j$  por  $\{r\}_j'$  y  $\{r\}_i'$  respectivamente

$$\begin{aligned} p_i^2 \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_j' [K] \{r\}_i & \left\{ \begin{aligned} \{r\}_j [M] \{r\}_i &= \frac{1}{p_i^2} \{r\}_j' [K] \{r\}_i \\ \{r\}_i [M] \{r\}_j &= \frac{1}{p_j^2} \{r\}_i' [K] \{r\}_j \end{aligned} \right. & (a) \\ p_j \{r\}_i' [M] \{r\}_j &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \end{aligned}$$

pero como  $[M]$  y  $[K]$  son simétricas:

$$\begin{aligned} \{r\}_j' [K] \{r\}_i &= \{r\}_i' [K] \{r\}_j \\ \{r\}_j' [M] \{r\}_i &= \{r\}_i' [M] \{r\}_j \end{aligned}$$

∴, restando miembro a miembro en ecuaciones (a):

$$(p_i^2 - p_j^2) \left( \{r\}'_i [M] \{r\}_j \right) = 0 \quad 0 = \left( \frac{1}{p_i^2} - \frac{1}{p_j^2} \right) \{r\}'_i [K] \{r\}_j$$

y como  $p_i^2 \neq p_j^2$

---


$$\{r\}'_i [M] \{r\}_j = 0 \quad \{r\}'_i [K] \{r\}_j = 0$$


---

Tenemos ecuaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \quad \text{si } i \neq j$$

La ec

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \tag{a}$$

y la matriz modal  $[R]$

Hagamos:

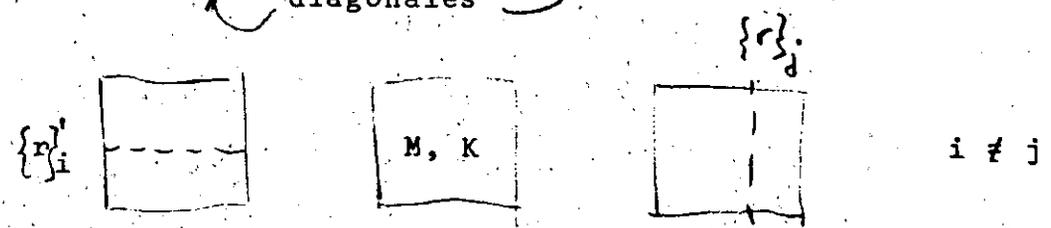
$$\{x\} = [R] \{y\}$$

y sustituyendo en (a):

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{0\}$$

premultiplicando por  $[R]'$ :

$$\underbrace{[R]' [M] [R]}_{\text{diagonales}} \{\ddot{y}\} + \underbrace{[R]' [K] [R]}_{\text{diagonales}} \{y\} = \{0\} \tag{b}$$



Llamemos

$$[R]^T [M] [R] = [M^*]$$

$$[R]^T [K] [R] = [K^*]$$

∴ la ec (b) (p. 14) puede ponerse:

$$[M^*] \{\ddot{y}\} + [K^*] \{y\} = \{0\}$$

que equivale a:

$$m_{11}^* \ddot{y}_1 + k_{11}^* y_1 = 0$$

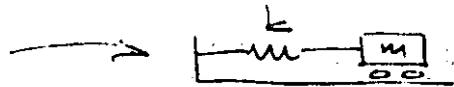
$$m_{22}^* \ddot{y}_2 + k_{22}^* y_2 = 0$$

$$m_{nn}^* \ddot{y}_n + k_{nn}^* y_n = 0$$

de las que

$$p_1^2 = \frac{k_{11}^*}{m_{11}^*}, \dots, p_n^2 = \frac{k_{nn}^*}{m_{nn}^*}$$

Recordar que para



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad y \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

O sea, con la transformación

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

aplicada a la ecuación

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\}$$

hemos descompuesto un sistema de nGL en n sistemas de 1GL independientes.

Consideremos el producto

$$\begin{aligned} [M^*]^{-1} [K^*] &= ([R]' [M] [R])^{-1} [R]' [K] [R] = [K^*] [M^*]^{-1} \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [R]^{-1} [R]' [K] [R] \\ &= [R]^{-1} [M]^{-1} [K] [R] = [P] \end{aligned}$$

$[P]$  contiene las frecuencias naturales en la diagonal principal

∴ El problema de encontrar frecuencias y modos naturales equivale al de encontrar la matriz  $[R]$  que diagonalice  $[M]$  y  $[K]$  de acuerdo con

$$\begin{aligned} [R]' [M] [R] &= [M^*] \\ [R]' [K] [R] &= [K^*] \end{aligned}$$

Las frecuencias naturales se obtendrán de

$$[M^*]^{-1} [K^*] = [K^*] [M^*]^{-1} = [P]$$

Veámoslo en otra forma

$$[M] \{x\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

$$\text{Sustituyendo } \{x\} = [R] \{y\}$$

$$[M] [R] \{y\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\}$$

premultiplicando por  $\{r\}'_j$

$$\underbrace{\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\}}_{(a)} + \underbrace{\{r\}'_j [K] [R] \{y\}}_{(b)} = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{\text{escalar}}$$

En los productos (a) y (b) solo queda (por ortogonalidad):

$$\underbrace{\{r\}'_j [M] \{r\}_j}_{M^*_j} \ddot{y}_j + \underbrace{\{r\}'_j [K] \{r\}_j}_{K^*_j = p_j^2} y_j = \underbrace{\{r\}'_j \{P(t)\}}_{P^*_j = \sum_i P_i r_{ij}}$$

y para el modo  $j$  tenemos:

$$M^*_j \ddot{y}_j + p_j^2 M^*_j y_j = P^*_j(t)$$

o bien

(1.5)

$$M^*_j \ddot{y}_j + K^*_j y_j = P^*_j(t)$$

análoga a la ecuación de movimiento para 1 GL:

$$m \ddot{x} + k x = P(t)$$

En (1.5) tenemos:

$n$  ecuaciones independientes para  $nGL$

1 ecuación independiente para cada modo

Para vibración libre (1GL)

$$\ddot{x} + p^2 x = 0 \quad p^2 = \frac{k}{m}$$

la solución es:

$$x = A \cos pt + B \sin pt \quad (c)$$

y para el modo  $j$  tendremos ( $P_j(t) = 0$ )

$$y_j = A_j \cos p_j t + B_j \sin p_j t \quad (d)$$

Si en (c) hacemos

$$\bar{x}|_{t=0} = x_0 \quad \dot{\bar{x}}|_{t=0} = \dot{x}_0$$

llegamos a

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt$$

y . . . en (d):

$$y_j = y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \sin p_j t$$

Cualquier configuración del sistema puede expresarse como una suma de formas modales multiplicadas por ciertos coeficientes. Esquemáticamente:

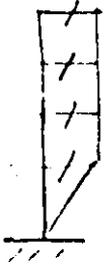
$$\begin{aligned} \{x\} &= \{r\}_1 Y_1 + \{r\}_2 Y_2 + \{r\}_3 Y_3 + \dots \\ \text{estática} & \\ \text{o} & \\ \text{dinámica} & \end{aligned} \quad (Y = Y(t))$$

$$\left( \{x\} = \{x(t)\} \right)$$

En nuestra expresión

$$\{x\} = [R] \{y\} \quad 1.4$$

$\{x\}$  puede no ser función de  $t$ , por ejemplo:



$$\{1\} = [R] \{c\} \quad (e)$$

donde  $\{c\}$  es el vector de constantes que prex  $[R]$  nos da la configuración  $\{1\}$

De la ec. (e):

$$\{c\} = [R]^{-1} \{1\} \quad ([R] \text{ NOSING})$$

En 1.4 también podríamos hacer

$$\{y\} = [R]^{-1} \{x\}$$

pero sigamos otro camino, premultiplicando por  $\{r\}'_j [M]$   
o por  $\{r\}'_j [K]$

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{x\} &= \{r\}'_j [M] [R] \{y\} = \{r\}'_j [M] \{r\}'_1 y_1 + \\ &+ \{r\}'_j [M] \{r\}'_2 y_2 + \dots \\ &+ \{r\}'_j [M] \{r\}'_n y_n \end{aligned}$$

Por ortogonalidad todos estos productos son nulos excepto el término

$$\{r\}'_j [M] \{r\}'_j y_j$$

de donde tenemos

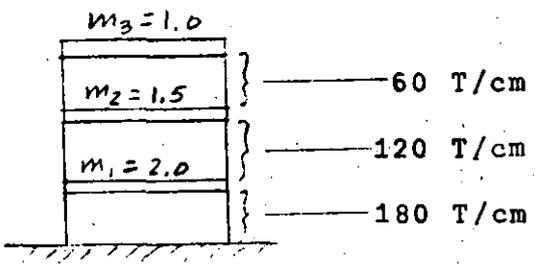
$$\{r\}'_j \cdot [M] \{x\} = \{r\}'_j [M] \{r\}_j y_j$$

de donde:

$$y_j = \frac{\{r\}'_j [M] \{x\}}{\{r\}'_j [M] \{r\}_j} = \frac{\{r\}'_j [M] \{x\}}{M_j^*} = \frac{\{r\}'_j [K] \{x\}}{K_j^*} = \frac{\{r\}'_j [K] \{x\}}{P_j^2 M_j^*}$$

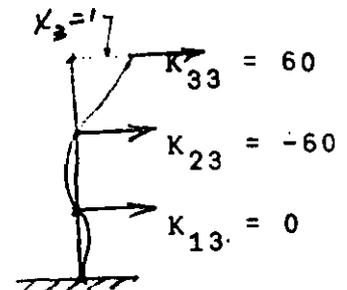
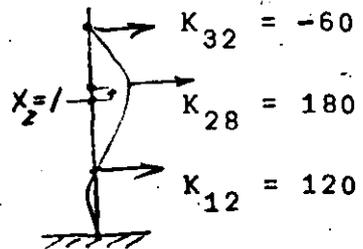
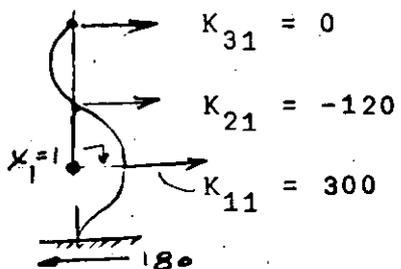
(coeficiente de participación)

Ejemplo (vigas rígidas)



$$[M] = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$$

Matriz de rigideces



$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 300 & -120 & 0 \\ -120 & 180 & -60 \\ 0 & -60 & 60 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{T/cm})$$

$$[E] = [K] - p^2 [M] \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 60 \begin{bmatrix} (5 - \frac{2}{60} p^2) & -2 & 0 \\ -2 & (3 - \frac{1.5}{60} p^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1 - \frac{1}{60} p^2) \end{bmatrix}$$

si  $d = p^2/60$  :

$$[E] = 60 \begin{bmatrix} (5-2d) & -2 & 0 \\ -2 & (3-1.5d) & -1 \\ 0 & -1 & (1-d) \end{bmatrix}$$

$$|E| = 0 = 60 (d^3 - 5.5 d^2 + 7.5 d - 2) = 0$$

$$d_1 = 0.35$$

$$d_2 = 1.61$$

$$d_3 = 3.54$$

$$p^2 = 60 d :$$

$$p_1^2 = 21.0$$

$$p_1 = 4.58$$

$$p_2^2 = 96.5$$

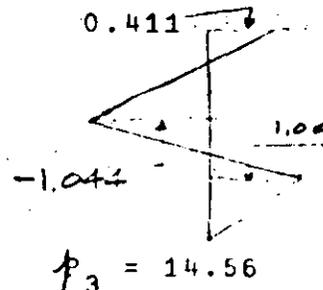
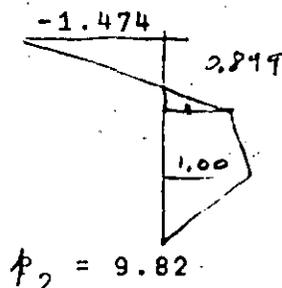
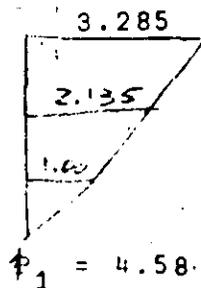
$$p_3 = 9.82$$

$$p_3^2 = 212.4$$

$$p_3 = 14.56$$

frecuencias naturales

Modos:



$$[R] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 2.135 & 0.899 & -1.044 \\ 3.285 & -1.474 & 0.411 \end{bmatrix}$$

$$[M^*] = [R]^T [M] [R] = \begin{bmatrix} 19.629 & 0.038 & 0.007 \\ 0.037 & 5.386 & -0.014 \\ 0.006 & -0.014 & 3.804 \end{bmatrix}$$

Ej:

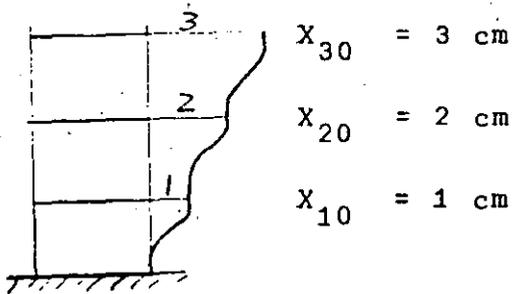
$$19.6296 = \{r\}_1^T [M] \{r\}_1 = M_1^* = \sum_i r_{i1}^2 m_i$$

$$[K^*] = [R]^T [K] [R] = 60 \begin{bmatrix} 6.899 & 0.042 & 0.034 \\ 0.042 & 8.651 & -0.040 \\ 0.034 & -0.040 & 13.473 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación con } [K^*] = [P^2 M^*] =$$

$$= \begin{bmatrix} 412.209 & 0 & 0 \\ 0 & 519.749 & 0 \\ 0 & 0 & 807.970 \end{bmatrix} = [P^2 M^*]$$

$$[K^*] = \begin{bmatrix} 413.940 & 0 \dots & 0 \dots \\ 0 \dots & 519.060 & 0 \dots \\ 0 \dots & 0 \dots & 808.380 \end{bmatrix}$$



$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$Y_{01} = \frac{\{r\}_1^T [M] \{x_0\}}{M_1^*} = \frac{2.0 + 6.405 + 9.855}{19.629} = 0.9303 \text{ cm}$$

$$Y_{02} = \frac{\{r\}_2^T [M] \{x_0\}}{M_2^*} = \frac{2.0 + 2.697 - 4.422}{5.386} = 0.0511$$

$$Y_{03} = \frac{\{r\}_3^T [M] \{x_0\}}{M_3^*} = \frac{2.0 - 3.132 + 1.233}{3.804} = 0.0266$$

Modo  $Y_1(t)$

$$P_1 = 4.58$$

$$P_2 = 9.82$$

$$P_3 = 14.56$$

En p.

0.930 cm

0.051 cm

0.026 cm

son amplitudes de los modos

Para obtener los desplazamientos de las masas debemos multiplicar por las configuraciones modales:

$$x_{i1} = \{r\}_1 \quad Y_1(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} \quad 0.93 \cos 4.58 t$$

$$x_{i2} = \{r\}_2 \quad Y_2(t) = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0.899 \\ -1.474 \end{Bmatrix} \quad 0.051 \cos 9.82 t$$

$$x_{i3} = \{r\}_3 \quad Y_3(t) = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} \quad 0.0266 \cos 14.56 t$$

y sumar. O sea los desplazamientos  $x_i(t)$  de las masas serán

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

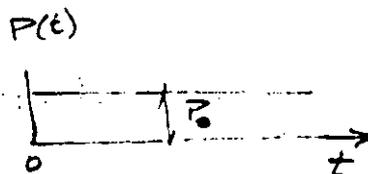
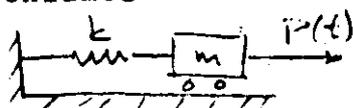
$$x_1(t) = r_{11} Y_1(t) + r_{12} Y_2(t) + r_{13} Y_3(t)$$

$$x_2(t) = r_{21} Y_1(t) + r_{22} Y_2(t) + r_{23} Y_3(t)$$

$$x_3(t) = r_{31} Y_1(t) + r_{32} Y_2(t) + r_{33} Y_3(t)$$

### Otro ejemplo

Para 1GL teníamos



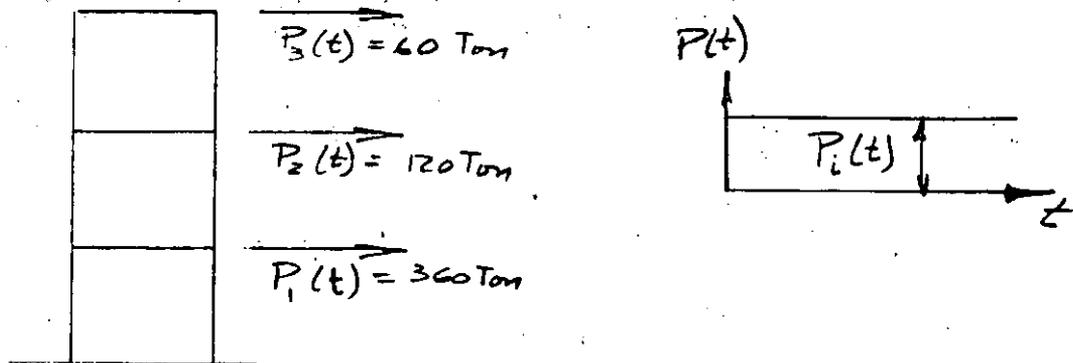
La ec:

$$x + P^2 x = \frac{P(t)}{m} = \frac{P_0}{m}$$

y para CI = 0 la solución

$$x = \frac{P_0}{K} (1 - \cos pt)$$

Tenemos ahora el problema de encontrar la respuesta de



Para el modo  $j$ :

$$\ddot{Y}_j + p_j^2 Y_j = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} = \frac{P_{j0}^*}{M_j^*} \quad \text{cuya solución es:}$$

$$Y_j = \frac{P_{j0}^*}{K_j^*} (1 - \cos p_j t) = \frac{P_{j0}^*}{p_j^2 M_j^*} (1 - \cos p_j t)$$

Cálculo de  $P_j^*$

$$P_j^* = \{r\}'_j \{P(t)\} = \{r\}'_j \begin{Bmatrix} 360 \\ 120 \\ 60 \end{Bmatrix}$$

modo

$$\begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} P_1^* = P_1 r_{11} + P_2 r_{21} + P_3 r_{31} = 360 + 256.2 + 197.1 = 813.3 \\ P_2^* = P_1 r_{12} + P_2 r_{22} + P_3 r_{32} = 360 + 107.88 - 88.4 = 379.48 \\ P_3^* = P_1 r_{13} + P_2 r_{23} + P_3 r_{33} = 360 - 125.28 + 24.66 = 259.98 \end{array} \right. \end{array}$$

Ahora bien,

$$Y_j(st) = \frac{P_j^*}{p_j^2 M_j^*} = \frac{P_j^*}{K_j^*}$$

$$Y_{1(st)} = \frac{813.30}{21 \times 19.629} = 1.973 \text{ cm}$$

$$Y_{2(st)} = \frac{379.48}{965 \times 5.386} = 0.730 \text{ cm}$$

$$Y_{3(st)} = \frac{259.38}{212.4 \times 3.804} = 0.321 \text{ cm}$$

de donde

$$Y_j = \frac{P_j^*}{P_j^2 M_j^*} (1 - \cos P_j t), \text{ y tenemos:}$$

$$Y_1(t) = Y_{1(st)} (1 - \cos p_1 t)$$

$$Y_2(t) = Y_{2(st)} (1 - \cos p_2 t)$$

$$Y_3(t) = Y_{3(st)} (1 - \cos p_3 t)$$

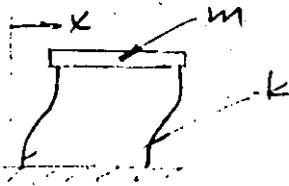
y, finalmente:

$$\{x(t)\} = \{r_1\} Y_1(t) + \{r_2\} Y_2(t) + \{r_3\} Y_3(t) = [R] \{Y\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 2.135 \\ 3.285 \end{Bmatrix} 1.973 (1 - \cos p_1 t) + \dots + \begin{Bmatrix} 1.000 \\ -1.044 \\ 0.411 \end{Bmatrix} 0.321 (1 - \cos p_3 t)$$

EXCITACION SISMICA

A. Sistemas 1GL

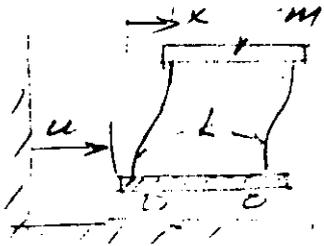


$$m \ddot{x} + kx + P(t) \quad (a)$$

Para  $P(t)$  cualquiera y para  $CI \neq 0$  la solución de (a) es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt + \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

Para excitación sísmica:



$$m(\ddot{x} + \ddot{u}) + kx = 0$$

o sea,

$$m \ddot{x} + kx = -m\ddot{u} \quad (b)$$

De la comparación de (a) y (b), la solución completa de ésta es:

$$x(t) = x_0 \cos pt + \frac{\dot{x}_0}{p} \sin pt - \frac{1}{p} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin p(t-\tau) d\tau$$

B. Sistemas de nGL:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{P(t)\} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1 \ddot{u} \\ -m_2 \ddot{u} \\ \vdots \\ -m_n \ddot{u} \end{Bmatrix}$$

$$= - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{Bmatrix} \ddot{u} \quad \ddot{u} = - \left\{ \frac{1}{m} \right\} \ddot{u}$$

Es decir, tenemos:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}$$

sust.  $\{x\} = [R] \{y\}$

$$[M] [R] \{\ddot{y}\} + [K] [R] \{y\} = \{P(t)\} = - \{m\} \ddot{u}(t)$$

pre x  $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \underbrace{\{r\}'_j \{P\}}_{P_j^*} = - \underbrace{\{r\}'_j \{m\}}_{m_j^*} \ddot{u}$$

por ortogonalidad:

$$\{r\}'_j [M] \{r\} \ddot{y}_j + \{r\}'_j [K] \{r\} y_j = P_j^* = U_j^*$$

y queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + K_j^* y_j = P_j^* = U_j^* = - m_j^* \ddot{u}$$

∴ la solución (CI = 0) de esta ecuación es:

Para  $P_j^*$ :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t P_j^*(z) \operatorname{sen} \phi_j(t-z) dz$$

Para  $U_j^*$ :

$$y_j(t) = \frac{1}{\phi_j M_j^*} \int_0^t U_j^*(z) \operatorname{sen} \phi_j(t-z) dz$$

que puede escribirse:

$$y_j(t) = - \frac{m_j^*}{p_j M_j^*} \int_0^t \ddot{u}(Z) \operatorname{sen} p_j(t-Z) dZ$$

$$+ y_{0j} \cos p_j t + \frac{\dot{y}_{0j}}{p_j} \operatorname{sen} p_j t \quad \begin{array}{l} \text{término a} \\ \text{para} \\ \text{CI} \neq 0 \end{array}$$

Una vez obtenidos los elementos de  $\{y\}$  solo falta premultiplicar por  $[R]$  para obtener  $\{x\}$  ::

$$\{x(t)\} = [R] \{y(t)\}$$

### GENERALIZACIÓN DE LAS CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

Tenemos la ecuación:

$$[K] - p^2 [M] \{x\} = \{0\}$$

que convenimos en escribir en la forma:

$$(K - p^2 M) x = 0$$

cómo los vectores modales la satisfacen:

$$K r_j = p_j^2 M r_j \quad (a)$$

y premultiplicando por:  $r_i^T M M^{-1}$  tenemos:

$$r_i^T M M^{-1} K r_j = p_j^2 M M^{-1} M r_j = p_j^2 M M^{-1} K r_j = 0$$

que puede escribirse

$$r_i' M (M^{-1} K)^2 r_j = 0$$

y así podría seguirse para llegar a:

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{entero} \\ -\infty < l < \infty \end{array} \right.$$

$$r_i' M (M^{-1} K)^l r_j = 0 \quad (b)$$

en forma análoga podemos obtener

$$r_i' (MF)^l M r_j = 0 \quad (c)$$

o

$$r_i' (K M^{-1})^l K r_j = 0$$

En (b):

$$l = -2 \quad M (M^{-1} K)^{-2} = M (M^{-1} K)^{-1} (M^{-1} K)^{-1}$$

$$(\text{en (c), con } l=2) \quad = M K^{-1} M K^{-1} M = \underline{M F M F M}$$

$$l = -1 \quad M (M^{-1} K)^{-1} = M K^{-1} M = \underline{M F M}$$

$$l = 0 \quad M (M^{-1} K)^0 = \underline{M}$$

$$l = 1 \quad M (M^{-1} K)^1 = M M^{-1} K = \underline{K}$$

$$l = 2 \quad M (M^{-1} K)^2 = M M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K}$$

$$l = 3 \quad M (M^{-1} K)^3 = M M^{-1} K M^{-1} K M^{-1} K = \underline{K M^{-1} K M^{-1} K}$$

# VIBRACION LIBRE Y FORZADA DE SISTEMAS DE N GL CON AMORTIGUAMIENTO

Las ecuaciones de equilibrio dinámico son:

$$\{F_I\} + \{F_a\} + \{F_r\} = \{P(t)\}$$

Ya tenemos:

$$\{F_I\} = [M] \{\ddot{x}\}$$

$$\{F_r\} = [K] \{x\}$$

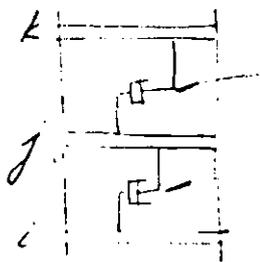
y ahora hacemos

$$\{F_a\} = [c] \{\dot{x}\}$$

donde

$$[c] = [c_{ij}]$$

y  $c_{ij}$  = fuerza de amortiguamiento en la coordenada  $i$  debido a una velocidad unitaria en la coordenada  $j$ .



$$c_{jk} = c_{kj}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

} indica  
acoplamiento

La ecuación de movimiento es

$$[M] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{P(t)\}$$

Hagamos:  $\{x\} = [R] \{y\}$  premultiplicando por  $\{r\}'_j$

$$\{r\}'_j [M] [R] \{\ddot{y}\} + \{r\}'_j [C] [R] \{\dot{y}\} + \{r\}'_j [K] [R] \{y\} = \{r\}'_j \{P(t)\}$$

Para desacoplar estas ecuaciones debemos tener

$$\left. \begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \\ \{r\}'_j [C] \{r\}_i &= 0 & i \neq j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{cierto por} \\ \text{ortogonalidad} \\ \text{¿pero ésta? (a)} \end{array}$$

1° admitamos que se cumple:

Ya definimos

$$\begin{aligned} \{r\}'_j [M] \{r\}_j &= M_j^* \\ \{r\}'_j [K] \{r\}_j &= K_j^* \\ \{r\}'_j \{P(t)\} &= P_j^* \end{aligned}$$

y ahora

$$\{r\}'_j [C] \{r\}_j = C_j^* = 2\beta_j \rho_j M_j^*$$

y nuestra ecuación para el modo  $j$  queda:

$$M_j^* \ddot{y}_j + 2\beta_j \rho_j M_j^* \dot{y}_j + \rho_j^2 M_j^* y_j = P_j^*$$

o bien:

$$\ddot{y}_j + 2\beta_j \rho_j \dot{y}_j + \rho_j^2 y_j = \frac{P_j^*}{M_j^*}$$

Como las soluciones para un sistema de 1GL (cuya ec. es  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + p^2x = \frac{P(t)}{m}$ ) ya las conocemos, solo nos falta saber cómo debe ser  $[C]$  para que se cumpla

$$\{r\}'_i [C] \{r\}_j = 0 \quad i \neq j \quad (a)$$

además, claro, de

$$y \left. \begin{aligned} \{r\}'_i [M] \{r\}_j &= 0 \\ \{r\}'_i [K] \{r\}_j &= 0 \end{aligned} \right\} i \neq j$$

La ec. (a) se satisface si

i)  $[C]$  es proporcional a  $[M]$  o a  $[K]$

ii)  $[C]$  es una combinación lineal de  $[M]$  y  $[K]$ , o

sea:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K]$$

esto es muy restringido.

iii) En forma más general:

$$[C] = [M] \sum_1^l a_1 [M^{-1}K]^1 = \sum_1^l [C_1] \quad (38.1)$$

pues ya sabemos que todas las posibles formas

$$[M] [M^{-1}K]^1 \text{ son satisfactorias y (38.1) es}$$

una C. L. de matrices de este tipo.

La selección adecuada de  $a_1$  dará a  $[C]$  las propiedades deseadas, o sea, podremos dar valores específicos a los elementos de  $[C]$ . ¿Cuáles le damos?

Asignamos un cierto valor de  $\beta$  a cada modo.

$$C_{j1}^* = \underbrace{\{r\}'_j}_{A} [C] \underbrace{\{r\}_j}_{A} = 2\beta_j \phi_j M_j^* = \sum_1 \{r\}'_j [C_1] \{r\}_j = \sum_1 C_{j1}^* \quad (38.2)$$

De 38.1 y A

$$C_{j1}^* = \{r\}'_j [M] [M^{-1}K]^{-1} \{r\}_j a_1 \quad (38.3)$$

Por otra parte, para vibración libre:

$$(K - \phi_j^2 M) r_j = 0$$

$$K r_j = \phi_j^2 M r_j \leftrightarrow \frac{1}{\phi_j^2} r_j = F M r_j$$

premultiplicando por  $r_j' M$ :

$$\frac{1}{\phi_j^2} r_j' M r_j = r_j' M F M r_j$$

es decir

$$(\phi_j^2)^{-1} M_j^* = r_j' M (M^{-1} K)^{-1} r_j$$

y así podríamos llegar a que, para cualquier  $l$ :

$$(\phi_j^2)^{-1} M_j^* = r_j' M (M^{-1} K)^{-1} r_j = \underbrace{\frac{C_{j1}^*}{a_1}}_{\text{por 38.3}}$$

39.1

De 39.1:

$$C_{j1}^* = (\phi_j^2)^{-1} M_j^* a_1$$

$$C_{j1}^* = (\phi_j^2)^{-1} M_j^* a_1$$

y sumando sobre 1:

$$\sum_1 C_{j1}^* = \sum_1 (\phi_j^2)^{-1} M_j^* a_1$$

pero ya teníamos que

$$\sum_1 C_{j1}^* = 2\beta_j \phi_j^2 M_j^*$$

$$\therefore 2\beta_j \phi_j^2 M_j^* = \sum_1 (\phi_j^2)^{-1} M_j^* a_1$$

de donde:

$$\beta_j = \frac{1}{2\phi_j^2} \sum_1 (\phi_j^2)^{-1} a_1$$

Con los  $n$  valores de  $\beta_j$  para los  $n$  modos podemos resolver para los  $n$  valores de  $a_1$  y formar nuestra  $[C]$  con la ecuación

$$[C] = [M] \sum_1 a_1 [M^{-1}K]^{-1}$$

Por ejemplo para nuestra estructura de 3GL asignemos:

$$\beta_1 = 0.10, \quad \beta_2 = 0.05, \quad \beta_3 = 0.02$$

$$\beta_1 = 0.10 = \frac{1}{2\phi_1} \left[ a_{-1}(\phi_1^2)^{-1} + a_0(\phi_1^2)^0 + a_1(\phi_1^2)^1 \right]$$

$$\beta_2 = 0.05 = \frac{1}{2\phi_2} \left[ a_{-1}(\phi_2^2)^{-1} + a_0(\phi_2^2)^0 + a_1(\phi_2^2)^1 \right]$$

$$\beta_3 = 0.02 = \frac{1}{2\phi_3} \left[ a_{-1}(\phi_3^2)^{-1} + a_0(\phi_3^2)^0 + a_1(\phi_3^2)^1 \right]$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \\ 0.02 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\phi_1^3 & 1/\phi_1 & \phi_1 \\ 1/\phi_2^3 & 1/\phi_2 & \phi_2 \\ 1/\phi_3^3 & 1/\phi_3 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

al resolver para  $a_1$  resulta

$$[C] = a_{-1} [MFM] + a_0 [M] + a_1 [K_a]$$

En p. tenemos que para  $CI = 0$  y  $\beta = 0$ , para excitación sísmica

$$y_j(t) = - \frac{m_j}{P_j M_j^2} \int_0^t u(\tau) \sin P_j(t-\tau) d\tau$$

coeficiente de participación =  $\frac{m_j}{M_j}$

$$C_j = \frac{m_j^*}{M_j^*} = \frac{\{r\}_j^m}{\{r\}_j [M] \{r\}_j} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}}{\sum_{i=1}^m m_i r_{ij}^2}$$

y  $\therefore$  podemos poner:

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

en la que  $C_j$  está definida arriba y

$$z_j(t) = -\frac{1}{p_j} \int_0^t \ddot{u}(z) \operatorname{sen} p_j(t-z) dz$$

(y semejante si  $\beta \neq 0$ )

$$y_j(t) = C_j z_j(t)$$

Además, tenemos

$$\{x\} = [R] \{y\}$$

o sea

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2j} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nj} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

††  
∴

$$x_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j z_j(t)$$

De aquí (sin sumar para todos los modos)

$$\left. \begin{aligned} |X_{ij}|_{\max} &= r_{ij} C_j |z_j(t)|_{\max} = r_{ij} C_j S_d \\ &= r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2} \end{aligned} \right\} S_a = p S_v = p^2 S_d$$

De esta ec. pasamos a:

$$|X_i|_{\max}^{\text{ABS}} = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j S_d = \sum_{j=1}^n r_{ij} C_j \frac{S_a}{p_j^2}$$

$$|x_i|_{\max}^{\text{PROB}} = \sqrt{\sum (|X_{ij}|_{\max})^2}$$



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**XX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

**MODULO II  
ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO**

**METODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER  
PARA EL CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES**

**M. EN I. JOSE LUIS TRICOS.**

**1 9 9 4 .**

METODOS DE STODOLA-VIANELLO-NEWMARK Y DE HOLZER PARA EL CALCULO  
DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES

ENRIQUE DEL VALLE C\*

Para calcular las frecuencias y configuraciones modales de estructuras idealizadas como una serie de masas unidas por resortes, sin amortiguamiento, en vibración libre, se puede suponer que cada masa se mueve en movimiento armónico simple definido por  $X=X_0 \cos wt$  o  $X=X_0 \sin wt$  donde  $X_0$  define la amplitud y  $w$  la frecuencia circular del movimiento.

La aceleración estará dada entonces por  $\ddot{X}=-w^2 X_0 \cos wt$  ó  $\ddot{X}=-w^2 X_0 \sin wt=-w^2 X$  y las fuerzas de inercia a que estará sometida cada masa, de acuerdo con la segunda ley de Newton, serán  $F_i = m\ddot{X} = -mw^2 X$ .

Por otro lado, la fuerza restitutiva que aparece en cada resorte estará dada por  $F_e=RX$ , donde  $R$  es la rigidez de entrepiso, que podemos definir como la fuerza cortante que es necesario aplicar para producir un desplazamiento unitario entre dos niveles consecutivos:  $R = V/\Delta X$ , para  $\Delta X=1$ .

Vemos entonces, que las fuerzas a que se verá sujeta cada masa dependerán de  $X$  y de  $w^2$  únicamente.

Por otro lado, sabemos que para conocer un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la frecuencia  $w$  (o período  $T$ ) como la configuración modal relativa, y que si la estructura está vibrando en un modo dado, la frecuencia del movimiento de cada masa será la misma.

Tomando en cuenta lo anterior, se pueden emplear dos métodos numéricos para el cálculo de las frecuencias y configuraciones modales.

\*Profesor Titular, División de Estudios de Posgrado, Fac. de Ingeniería UNAM.

El método propuesto por Stodola-Vianello-Newmark, consiste en:

1. Suponer una configuración deformada de la estructura:  
 $X_{i\text{supuesta}}$
2. Valuar las fuerzas de inercia asociadas a esa configuración  $F_i = -mw^2 X_i$ , dejando  $w^2$  como factor común cuyo valor no conocemos.
3. Valuar la fuerza cortante en la estructura, como la suma acumulativa de las fuerzas de inercia de arriba abajo del edificio:  $V_i = \sum_{j=1}^i F_j$  (función de  $w^2$ )
4. Calcular los incrementos de deformación correspondientes a las fuerzas cortantes.

$$\Delta X_i = \frac{V_i}{R_i} \quad (\text{función de } w^2).$$

5. Obtener la configuración calculada de la estructura como la suma acumulativa de los incrementos de deformación, de abajo hacia arriba.

$$X_{i \text{ calc}} = \sum_{i=1}^n \Delta X_i = \text{coef. } w^2$$

Esto nos dará un coeficiente multiplicado por  $w^2$  para cada masa.

6. Si la estructura está vibrando en un modo la configuración calculada será proporcional a la supuesta, y el factor de proporcionalidad será  $w^2$ . Esto es, para cada masa podremos calcular.

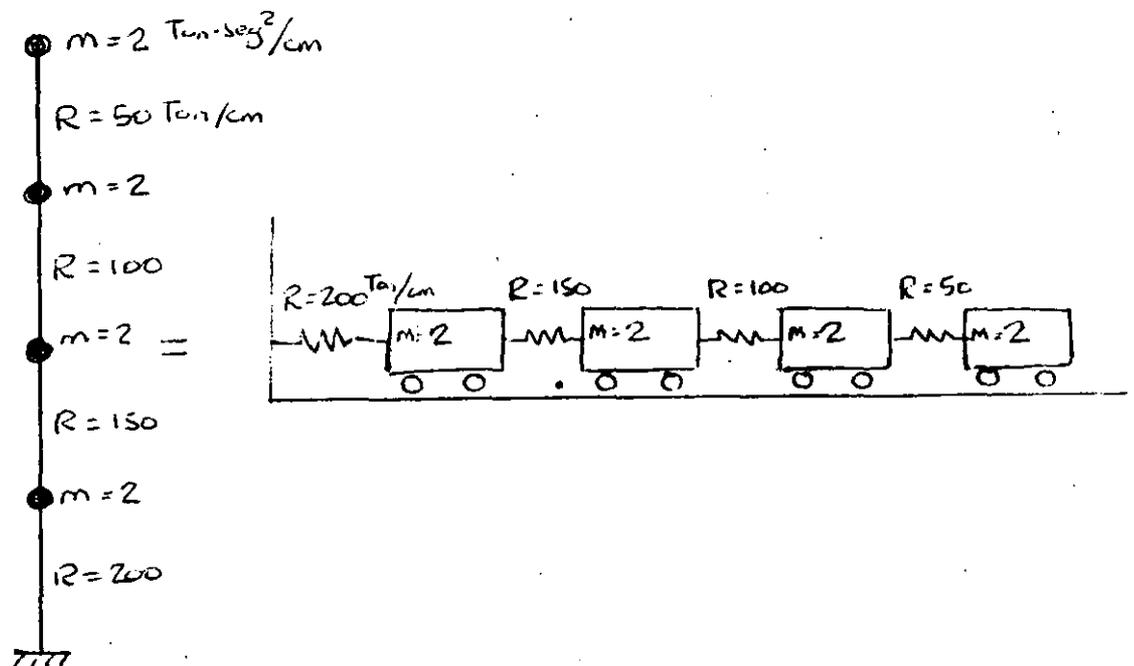
$$w^2 = \frac{X_{\text{supuesta}}}{\text{Coef. de } X_{\text{calc.}}}$$

En general, los valores de  $w^2$  calculados para cada masa, no serán iguales en el primer ciclo, pero el

método es de rápida convergencia si se usa como nueva configuración supuesta la obtenida al final de cada ciclo, de preferencia normalizándola, esto es, haciendo que la deformación de una de las masas, por ejemplo la primera, tenga siempre el mismo valor, con objeto de observar como se modifica la configuración relativa después de cada ciclo. Los valores de  $w^2$  obtenidos en cada ciclo nos dan también un intervalo de valores que se va cerrando hasta que se obtiene finalmente los mismos valores para todas las masas.

El método descrito anteriormente converge siempre hacia el modo más bajo que esté presente en la configuración supuesta, y dado que al suponer una configuración ésta estará formada por una combinación lineal de todos los modos posibles, el modo más bajo será el primero o fundamental. Más adelante se indica como hacer para calcular modos superiores.

Ejemplo. Calcular la frecuencia y configuración modal del primer modo de vibrar de la estructura representada por el modelo matemático siguiente.



Para realizar los pasos antes indicados conviene usar una tabulación como la siguiente:

1er. Ciclo.

Nivel	$\frac{\text{ton seg}^2}{\text{cm}}$ m	$\frac{\text{ton}}{\text{cm}}$ R	cm* $X_{\text{sup}}$	$F_i = m w^2 X$	V	$\Delta X = \frac{V}{R}$	$X_{\text{calc}}$	** $w^2$	*** $X_{\text{sup}}$
4	2	50	4	$8w^2$	$8w^2$	$0.16w^2$	$0.52w^2$	$7.692 = \frac{4}{0.52}$	5.2
3	2	100	3	$6w^2$	$14w^2$	$0.14w^2$	$0.36w^2$	$8.333 = \frac{3}{0.36}$	3.6
2	2	150	2	$4w^2$	$18w^2$	$0.12w^2$	$0.22w^2$	$9.091 = \frac{2}{0.22}$	2.2
1	2	200	1	$2w^2$	$20w^2$	$0.1w^2$	$0.1w^2$	$10.0 = \frac{1}{0.1}$	1
0							0		

Nótese que los valores R, V y  $\Delta X$  están defasados, pues corresponden al entrepiso.

\* Para iniciar el cálculo puede usarse cualquier valor de X. En general, el método convergirá más rápido entre más acertada sea la configuración supuesta, pero si se supone por ejemplo una configuración que se parezca a un segundo, tercero o cuarto modo, de cualquier manera, al término de algunos ciclos más, llegaremos al primer modo.

\*\* Nótese que en este caso, el valor de  $w^2$  estará comprendido entre

$$7.692 \frac{1}{\text{seg}^2} \quad \text{y} \quad 10 \frac{1}{\text{seg}^2}$$

\*\*\* En un segundo ciclo, usaremos como nueva configuración supuesta la obtenida al final del primer ciclo normalizada de tal modo

que la deformación del primer nivel, sea unitaria, esto es, dividiendo la configuración calculada entre  $0.1w^2$  en cada nivel.

### 2o. Ciclo

Nivel	m	R	$X_{sup}$	$F_i$	V	$\Delta X$	X	$w^2$	$X_{sup}$
4	2	50	5.2	$10.4w^2$	$10.4w^2$	$0.208w^2$	$0.651w^2$	7.988	5.425
3	2	100	3.6	$7.2w^2$	$17.6w^2$	$0.176w^2$	$0.443w^2$	8.126	3.692
2	2	150	2.2	$4.4w^2$	$22w^2$	$0.147w^2$	$0.267w^2$	8.240	2.225
1	2	200	1.0	$2. w^2$	$24w^2$	$0.120w^2$	$0.120w^2$	8.333	1.0
0							0		

Obsérvese que el intervalo de variación de  $w^2$  se redujo a 7.988 y 8.333 y que las variaciones en la configuración modal fueron mucho menores que las que tuvo el primer ciclo.

Tomando como base de partida nuevamente la configuración calculada, en un tercer ciclo se tiene:

Nivel	m	R	$X_{sup}$	F	V	$\Delta X$	X	$w^2$	$X_i$
4	2	50	5.425	$10.85w^2$	$10.85w^2$	$0.2170w^2$	$0.6739w^2$	8.050	5.461
3	2	100	3.692	$7.384w^2$	$18.234w^2$	$0.1823w^2$	$0.4569w^2$	8.081	3.703
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.684w^2$	$0.1512w^2$	$0.2746w^2$	8.103	2.225
1	2	200	1.0	$2.0 w^2$	$24.684w^2$	$0.1234w^2$	$0.1234w^2$	8.104	1.00
0							0		

y finalmente, en un cuarto ciclo, la aproximación se considera suficiente:

Nivel	m	R	$X_{sup}$	F	V	$\Delta X$	$X_{calc}$	$w^2$	$X_i$
4	2	50	5.461	$10.922w^2$	$10.922w^2$	$0.2184w^2$	$0.6775w^2$	8.061	5.468
3	2	100	3.703	$7.406w^2$	$18.328w^2$	$0.1833w^2$	$0.4591w^2$	8.066	3.705
2	2	150	2.225	$4.45w^2$	$22.778w^2$	$0.1519w^2$	$0.2758w^2$	8.067	2.226
1	2	200	1.00	$2.00w^2$	$24.778w^2$	$0.1239w^2$	$0.1239w^2$	8.071	1.00
0		$\Sigma$	12.389				$\Sigma = 1.5363w^2$	8.064*	

\*El valor final de  $w^2$  lo obtenemos con más precisión dividiendo la suma de  $X_{sup}$  entre la suma de coeficientes de  $X_{calc}$ . Esto es más preciso que promediar los valores de  $w^2$  de cada nivel.

$$w = \sqrt{8.064} = 2.8397; \quad T = \frac{2\pi}{w} = \frac{6.2832}{2.8397} = 2.213 \text{ seg.}$$

#### Cálculo de modos superiores empleando este método

Como se indicó antes, el método converge al modo más bajo presente en la configuración supuesta, y al suponer una combinación cualquiera ésta, estará constituida por una combinación lineal de los distintos modos de vibrar:

$X_{sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4}$ , donde  $X_{i1}$  a  $X_{i4}$  son las configuraciones modales y  $C_i$  son coeficientes de participación.

Si queremos calcular el segundo modo de vibrar empleando este método, tendremos que quitar a la configuración supuesta la participación del primer modo:  $C_1 X_{i1}$ , para lo cual necesitamos conocer  $X_{i1}$  y  $C_1$ .  $X_{i1}$  la calculamos como se indicó antes y  $C_1$  lo podemos calcular recurriendo a la propiedad de ortogonalidad de los modos de vibración que indica que  $\sum_i X_{in} X_{im} = 0$  si  $n \neq m$ , donde  $X_{in}$  y  $X_{im}$  son configuraciones modales.

Si multiplicamos la expresión anterior de  $X_{\text{sup}}$  por  $m_i X_{i1}$  y sumamos para todas las masas, considerando que los coeficientes de participación son constantes y pueden salir de la sumatoria, tendremos:

$$\sum_i m_i X_{i1} X_{\text{sup}} = C_1 \sum_i m_i X_{i1}^2 + C_2 \sum_i m_i X_{i1} X_{i2} + C_3 \sum_i m_i X_{i1} X_{i3} + \dots$$

donde los términos que multiplican a  $C_2$ ,  $C_3$ , etc. son nulos por la propiedad de ortogonalidad de los modos, quedando entonces

$$C_1 = \frac{\sum_i m_i X_{i1} X_{\text{sup}}}{\sum_i m_i X_{i1}^2}$$

Esta expresión es válida para cualquier modo  $n$ .

Por tanto, si queremos calcular el segundo modo de vibrar, supondremos una configuración que se parezca a este modo, es decir, que tenga un punto de deflexión nula, calcularemos el valor de  $C_1$  con la expresión anterior y restaremos a la configuración supuesta para el segundo modo la participación del primer modo  $C_1 X_{i1}$ , lo que da por resultado una nueva configuración supuesta para el segundo modo en la que el modo más bajo presente es el segundo y por lo tanto, al aplicar el método habrá convergencia hacia este modo. A la operación antes descrita se le llama "limpia" de modos.

Si quisiéramos calcular el tercer modo de vibrar, tendríamos que conocer de antemano las configuraciones correctas de primero y segundo modo, y suponer una configuración que se parezca al tercer modo, (que tenga dos puntos de deflexión nula); calcularíamos dos coeficientes de participación  $C_1$  y  $C_2$ , correspondientes a los modos primero y segundo, en la configuración supuesta y la limpiaríamos para que el modo más bajo presente en ella sea el tercero y el método converja a este modo.

Esto es:

$$X_{i3sup} = C_1 X_{i1} + C_2 X_{i2} + C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

$$C_1 = \frac{\sum m X_{i1} X_{i3sup}}{\sum m X_{i1}^2} ; C_2 = \frac{\sum m X_{i2} X_{i3sup}}{\sum m X_{i2}^2}$$

$$\bar{X}_{i3sup} = X_{i3sup} - C_1 X_{i1} - C_2 X_{i2} = C_3 X_{i3} + C_4 X_{i4} + \dots$$

De manera semejante se procede para calcular otros modos superiores.

En la práctica, y debido a errores numéricos o de aproximación que van acarreándose en basta con una sola limpia. Para lograr convergencia adecuada da buen resultado limpiar la configuración calculada al cabo de cada ciclo, antes de calcular los valores de  $w^2$ . Esa misma configuración limpiada, normalizada, nos sirve como nueva configuración para un nuevo ciclo. Es conveniente llevar cuando menos tres cifras significativas en los cálculos.

Para fijar ideas, calcularemos tres ciclos del segundo modo de vibrar de la estructura para la cual calculamos anteriormente el primer modo.

Ni- vel	m	R	$X_{i1}$	$mX_{i1}^2$	$mX_{i2}^2$	$X_{i2sup}$	$mX_{i1}X_{i2sup}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{X}_{i2}$	$F_{i2} = \frac{mX_{i2}^2}{mX_{i2}^2}$	V	AX	X Calc.
4	2	50	5.468	10.936	59.798	-1.0	-10.936	-0.054	-1.054	-2.108w <sup>2</sup>	-2.108w <sup>2</sup>	-0.0422w <sup>2</sup>	-0.0334w <sup>2</sup>
3	2	100	3.705	7.41	27.454	0	0	-0.036	-0.036	-0.072w <sup>2</sup>	-2.180w <sup>2</sup>	-0.0218w <sup>2</sup>	0.0088w <sup>2</sup>
2	2	150	2.226	4.452	9.910	2.0	9.910	-0.022	1.978	3.956w <sup>2</sup>	1.776w <sup>2</sup>	0.0118w <sup>2</sup>	0.0306w <sup>2</sup>
1	2	200	1.00	2.0	2.0	1.0	2.0	-0.010	0.990	1.980w <sup>2</sup>	3.756w <sup>2</sup>	0.0188w <sup>2</sup>	0.0188w <sup>2</sup>
0				$\Sigma = 99.162$			$\Sigma = 0.974$						

DATOS

$$C_1 = \frac{0.974}{99.162} = 0.00982$$

\*La configuración supuesta puede ser cualquiera, pero desde luego es conveniente que se parezca a un segundo modo, esto es, que tenga un cambio de signo en la configuración modal.

Nivel	$m\bar{x}_{i1} X_{calc}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{x}_{2calc}$	$w^2$	$X_{i2sup}^{**}$	$m\bar{x}_{i2sup} w^2$	$V$	$\Delta X$	$X_{calc}$
4	$-0.3653w^2$	$+0.00696w^2$	$-0.02644w^2$	39.86	-1.3042	$-2.6084w^2$	$-2.6084w^2$	$-0.05217w^2$	$-0.0314w^2$
3	$0.0652w^2$	$0.00472w^2$	$0.01352w^2$	-2.66	0.6669	$1.3338w^2$	$-1.2746w^2$	$-0.01275w^2$	$0.02077w^2$
2	$0.1362w^2$	$0.00284w^2$	$0.03344w^2$	59.15	1.6495	$3.2990w^2$	$2.0244w^2$	$0.01350w^2$	$0.0335w^2$
1	$.0376w^2$	$0.00127w^2$	$0.02007w^2$	49.33	0.990	$1.9800w^2$	$4.0044w^2$	$0.02002w^2$	$0.02002w^2$
$\Sigma$	$-0.1263w^2$								

$$C_1 = \frac{-0.1263w^2}{99.162} = -0.0012736w^2$$

\*\* Normalizando con respecto a 0.99 en el primer nivel, para comparar la evolución de la configuración.

Nivel	$m\bar{x}_{i1} X_{cal}$	$-C_1 X_{i1}$	$\bar{x}_{2 cal}$	$w^{2***}$	$\bar{x}_{i2sup}$	$m\bar{x}_{i2sup} w^2$	$V$	$\Delta X$
4	$-0.34339w^2$	$+0.000012w^2$	$-0.031388w^2$	41.55	-1.5520	$-3.104w^2$	$-3.104w^2$	$-0.06208w^2$
3	$0.15391w^2$	$+0.000008w^2$	$0.020778w^2$	32.10	1.0274	$2.0548w^2$	$-1.0492w^2$	$-0.01049w^2$
2	$0.14923w^2$	$+0.000005w^2$	$0.033525w^2$	49.20	1.6577	$3.3154w^2$	$2.2662w^2$	$0.01511w^2$
1	$0.04004w^2$	$+0.000002w^2$	$0.020022w^2$	49.45	0.99	$1.98w^2$	$4.2462w^2$	$0.02123w^2$

$$\Sigma = -0.00021w^2$$

$$\Sigma = 2.1231$$

$$\Sigma \quad || \quad 5.2271$$

$$C_1 = \frac{-0.00021w^2}{99.162} = -0.0000021177w^2$$

\*\*\* Nótese que el intervalo de  $w^2$  queda comprendido entre 32.1 y 49.49 y que el ajuste en la curva ocurre casi entre las dos últimas masas. Obsérvese que la corrección al limpiar es muy pequeña.

Nivel	$X_{calc}$	$mX_{i1}X_{calc}$	$-C_1X_{i1}$	$\bar{X}_{calc}$	**** $w^2$	$\bar{X}_{isup}$
4	$-0.03623w^2$	$-0.39621w^2$	+0.000023	$-0.036207w^2$	42.86	-1.705
3	$0.02585w^2$	$0.19155w^2$	+0.000015	$0.025865w^2$	39.72	1.206
2	$0.03634w^2$	$0.16179w^2$	+0.000009	$0.036349w^2$	45.61	1.695
1	$0.02123w^2$	$0.04246w^2$	+0.000004	$0.021234w^2$	46.62	0.99
0	0	$\Sigma -0.00041w^2$		$\Sigma = 0.047241w^2$	prom. 43.70 44.94	

$$\Sigma = 0.119655w^2 \quad 43.68$$

(vals. abs)

$$C_i = \frac{-0.00041w^2}{99.162} = -0.000041w^2$$

\*\*\*\*El intervalo de variación de  $w^2$  se ha reducido a 39.72 - 46.62 (dif. = 6.9) y los ajustes en la curva son menores. En uno o dos ciclos más se llegaría al valor correcto de  $w^2$  y  $X_i$ . Nótese que para estimar un valor de  $w^2$  procediendo como se indicó anteriormente podemos hacer las sumas de  $\bar{X}_{sup}$  y de los coeficientes de  $\bar{X}_{calc}$  tomando valores absolutos o tomando en cuenta el signo correspondiente. La variación que se obtiene en este caso es de 3% aprox. Si sacamos el promedio de  $w^2$  se obtiene un valor casi igual al obtenido con las sumas de valores absolutos, que es más correcto.

Si no hubiéramos hecho la limpia en ninguno de los ciclos, al cabo de 8 habríamos llegado a la configuración del primer modo (en vez de 4 ciclos que se necesitaron cuando la configuración supuesta se parecía a la del primer modo).

## Aplicación del Método de Stodola-Vianello-Newmark para Estructuras de Flexión

Como se verá más adelante, cuando las trabes de los marcos son muy flexibles en comparación con las columnas, o cuando las fuerzas laterales son resistidas por muros que trabajan esencialmente a flexión, la rigidez de entrepiso no es independiente de la distribución de fuerzas a que esté sometida la estructura y por tanto no puede suponerse constante para el cálculo de los distintos modos de vibrar. En general, la pseudorigidez equivalente que se obtendría para un segundo modo será mayor que la correspondiente al primer modo, pues los efectos de flexión de conjunto se reducen considerablemente al no tener todas las fuerzas actuando en el mismo sentido. Lo mismo podría decirse para modos superiores (ref. 1).

En esos casos, las propiedades elástico geométricas de la estructura no quedarán definidas por rigideces de entrepiso sino por la variación de los productos EI y GA con los cuales se podrán calcular las deformaciones debidas a flexión y a fuerza cortante respectivamente.

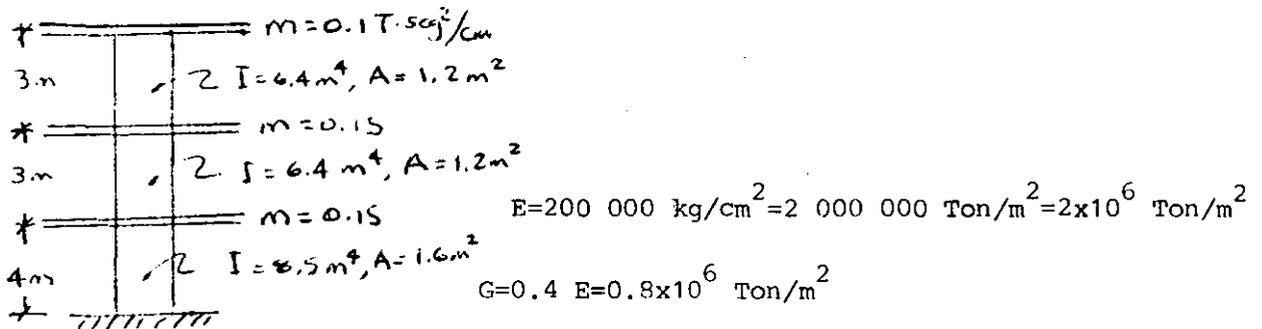
Para calcular las deformaciones por flexión es conveniente el empleo de los teoremas de la viga conjugada, que es, para el caso de un voladizo, otro voladizo empotrado en el extremo opuesto cargado con el diagrama de momentos entre EI, y en el cual los momentos flexionantes corresponden a las deformaciones de la viga real.

Las deformaciones por cortante, que en el caso de estructuras a base de muros pueden ser importantes en comparación con las de flexión, sobre todo en los niveles inferiores, se calculan mediante la expresión  $\Delta X_{v_i} = \frac{V_i h_i}{A_i G}$ , donde  $\Delta X_{v_i}$  es el incremento de deformación por cortante entre dos niveles consecutivos,  $V_i$ ,  $h_i$  y  $A_i$  son, respectivamente la fuerza cortante, la altura y el área

efectiva de cortante entre esos mismos niveles y  $G$  es el módulo de elasticidad al cortante del material de la estructura.

Para calcular los modos de vibración, se supone una configuración modal, se calculan las fuerzas de inercia  $F_i = m_i w^2 X_i$  asociadas a la configuración y las fuerzas cortantes correspondientes y a partir de ellas se valúan los incrementos de momento de cada entrepiso y los momentos de volteo acumulados de arriba hacia abajo, los cuales se dividen entre  $EI$  (habrá dos valores de  $M/EI$  en un mismo nivel en los casos en que haya cambio de sección de los muros). La integración numérica del diagrama de  $M/EI$  nos permitirá transformar ese diagrama en una serie de cargas concentradas equivalentes a él aplicadas en los distintos niveles con los cuales es muy fácil calcular los cortantes equivalentes correspondientes a cada entrepiso y los incrementos de momento flexionante en la viga conjugada que serán iguales a los incrementos de deformación por flexión entre dos niveles consecutivos (es el equivalente de  $\Delta X = V/R$  del caso visto anteriormente). A estos incrementos de deformación por flexión se sumarán los correspondientes a la deformación por cortante y con esa suma se podrá calcular la nueva configuración, que será como antes función de  $w^2$  y de donde podremos despejar este valor y en caso de que no sea igual para todas las masas volver a hacer otro ciclo tomando como configuración de partida la encontrada anteriormente normalizándola con respecto a una de las masas para poder comparar la evolución de las configuraciones de cada ciclo.

Para fijar ideas, a continuación se presenta un ejemplo de análisis de una estructura en que las fuerzas laterales son resistidas por muros, cuyos valores de  $I$  y  $A$  son los indicados en la figura siguiente:



Ni- vel	$\frac{T \cdot sec^2}{cm \cdot m}$	$\frac{m^4}{I}$	$\frac{Ton \cdot m^2}{EI}$	$\frac{m^2}{A}$	$\frac{Ton}{GA}$	$\frac{m}{h}$	$X_{sup}^{cm}$	$m X_{sup}^2 w^2$	$\frac{Ton}{V}$	$\Delta M = Vh$	$\frac{Ton \cdot m}{M}$	$\frac{1/m}{\frac{M}{EI}}$
3	0.10	6.4	$12.8 \times 10^6$	1.2	$0.96 \times 10^6$	3	5.0	$0.50 w^2$	$0.5 w^2$	$1.5 w^2$	0	0
2	0.15	6.4	$12.8 \times 10^6$	1.2	$0.96 \times 10^6$	3	2.5	$0.38 w^2$	$0.88 w^2$	$2.64 w^2$	$1.5 w^2$	$0.1172 \times 10^{-6} w^2$
1	0.15	8.5	$17.0 \times 10^6$	1.6	$1.20 \times 10^6$	4	1	$0.15 w^2$	$1.03 w^2$	$4.12 w^2$	$4.14 w^2$	$0.3234 \times 10^{-6} w^2$ $0.2435 \times 10^{-6} w^2$
											$8.26 w^2$	$0.4859 \times 10^{-6} w^2$

Ejemplo de cálculo de las concentraciones equivalentes al diagrama de M/EI

Para el nivel 3

$$P_{eq} = \frac{3}{6} (2 \times 0 + 0.1172 \times 10^{-6} w^2) = 0.0586 \times 10^{-6} w^2$$

(Ver aclaración al pie de la tabla de la página siguiente)



\*\*\*Obsérvese que en el primer entrepiso la deformación por cortante es prácticamente igual a la de flexión por lo que despreciarla conduciría a errores muy grandes. Al ir aumentando la altura de la estructura la deformación por cortante va reduciendo su importancia en comparación con la de flexión y puede llegar a ser despreciable. En este caso la deformación por cortante en el tercer entrepiso es 23% de la debida a flexión.

\*\*\*\* Debe tenerse cuidado con las unidades al valuar  $w^2$  pues es fácil equivocarse, obsérvese que  $X_{sup}$  está en cm y  $X$  calc resulta en metros.

#### Método de Holzer

Como se indicó anteriormente, para conocer completamente un modo de vibrar necesitamos conocer tanto la configuración modal como la frecuencia del modo. Hemos visto que en el método Stodola-Vianello-Newmark se supone una configuración relativa y a partir de ella se calcula el valor de  $w^2$ . Holzer procede exactamente alrevés, esto es, supone la frecuencia y a partir de ella se calcula la configuración relativa de abajo hacia arriba de la estructura. Dado que la configuración es relativa se puede suponer también la deformación de la primera masa (por consiguiente el incremento de deformación entre la base y la primera masa). El método tiene las siguientes etapas:

Los datos son las masas y las rigideces de entrepiso, igual que antes.

1. Suponer un valor de  $w^2$ .
2. Obtener los valores de  $mw_{sup}^2$  para cada masa.
3. Suponer la deformación del primer nivel:  $X_1$ ; conviene suponer un valor unitario. Esto equivale también, como ya se dijo a suponer  $\Delta X_1$ .

4. Calcular la fuerza cortante en la base de la estructura, (Primer entrepiso) que será por definición de rigidez de entrepiso:

$$V_1 = R_1 \Delta X_1 \quad \text{si} \quad \Delta X_1 = 1, \quad V_1 = R_1$$

5. Calcular la fuerza de inercia asociada a la masa del primer nivel:

$$F_1 = m_1 w^2 \text{ sup } X_1$$

6. Por definición de fuerza cortante, como la suma acumulativa de las fuerzas arriba de un cierto nivel, podremos calcular la cortante del segundo entrepiso restando a la cortante en la base la fuerza de inercia del primer nivel, esto es:

$$V_2 = V_1 - F_1$$

7. Conocida la fuerza cortante en el entrepiso 2 podemos calcular el incremento de deformación en ese entrepiso dividiendo la cortante entre la rigidez de entrepiso

$$\Delta X_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

8. Sumando  $X_2$  a la deformación del primer nivel obtendremos la deformación del segundo nivel  $X_2 = X_1 + \Delta X_2$  y podemos repetir los pasos 5 a 8 para todas las masas hasta llegar al extremo superior de la estructura.

Si la frecuencia supuesta corresponde a un modo de vibrar, obtendremos que la fuerza de inercia del último nivel es igual a la fuerza cortante del entrepiso correspondiente (por equilibrio dinámico). Si la frecuencia supuesta no es la correspondiente a un modo de vibrar, se obtendrá una diferencia entre el valor de la fuerza de inercia y el de la fuerza cortante en el extremo de la estructura. En este caso el método no es convergente, pero si hacemos otro ciclo con otro valor de  $w^2$  relativamente cercano

al anterior, encontraremos otra diferencia y podremos trazar una gráfica que nos relacione las frecuencias supuestas (abscisas) con las diferencias entre fuerza de inercia y fuerza constante en el extremo superior de la estructura (ordenadas). Una vez que tenemos dos puntos de esa gráfica podremos buscar un valor de  $w^2$  supuesto en la intersección con el eje de las abscisas de la línea que une los puntos antes obtenidos, o su prolongación si ambas diferencias tienen el mismo signo. Con este tercer valor supuesto para  $w^2$  seguramente obtendremos otra diferencia, menor que las anteriores, que nos definirá un tercer punto en la gráfica. Podremos entonces trazar una curva entre los tres puntos y definir así un nuevo valor de  $w^2$  que seguramente estará muy próximo a la frecuencia correcta de uno de los modos de vibrar de la estructura.

Cuando ya se está cerca del valor correcto, se puede mejorar el valor supuesto de  $w^2$  empleando el cociente de Crandall siguiente:

$$\bar{w}^{-2} = w^2 \frac{\sum V \Delta X}{\sum FX}$$

donde  $\bar{w}^2$  es el valor que debemos suponer en el ciclo siguiente.

El método presentado sirve para calcular cualquier modo natural de vibración teniendo como datos las masas y las rigideces de en trepiso de la estructura. El modo de que se trate se obtendrá de la inspección de la configuración modal, tomando en cuenta que en el primero todas las deformaciones tienen el mismo signo, en el segundo hay un cambio de signo, en el tercero dos cambios de signo y así sucesivamente.

Si se conoce la frecuencia del primer modo de vibrar (por haberlo calculado empleando el método Stodola-Vianello-Newmark, por ejemplo), se puede estimar gruesamente el valor de las frecuencias de los modos superiores empleando la relación  $w_2^2 \doteq 9w_1^2$  ;  $w_3^2 \doteq 25w_1^2$ , etc.

(Esta aproximación puede ser demasiado burda dependiendo de los valores relativos de las masas y rigideces en cada caso particular, pero sirve como orientación).

Ejemplo:

Calculemos el segundo modo de vibrar de la estructura que se usó en el método de Stodola-Vianello-Newmark, suponiendo

$$w_2^2 \doteq 9w_1^2 = 9 \times 8 = 72 \frac{1}{\text{seg}}^2$$

Usaremos la tabulación siguiente:

Ni- vel	m	R	$mw_{\text{sup}}^2$	$\Delta X$	$X^*$	F	V		
4	2	50	144	-2.707	-2.751	-396.1	-135.4	Dif = 260.7	
3	2	100	144	-1.417	-0.044	- 6.3	-141.7		
2	2	150	144	0.373	1.373	-197.7	56		
1	2	200	144	1.0	1.0	144	200		
			$w_{\text{sup}}^2 = 72$						

\*Obsérvese que aunque la diferencia encontrada es fuerte, la configuración se parece a un segundo modo, pues tiene un cambio de signo.

Usando un nuevo valor de  $w_{sup}^2$  de  $50 \times 1/\text{seg}^2$ , tendremos

Ni- vel	m	R	$mw_{sup}^2$	$\Delta X$	X	F	V
4	2	50	100	-3.334	-2.334	-233.4	Dif. 66.7 -166.7
3	2	100	100	-0.667	1.00	100	-66.7
2	2	150	100	0.667	1.667	166.7	100
1	2	200	100	1.00	1.0	100	200

Trazando la gráfica  $w_{sup}^2$  -diferencias encontramos:

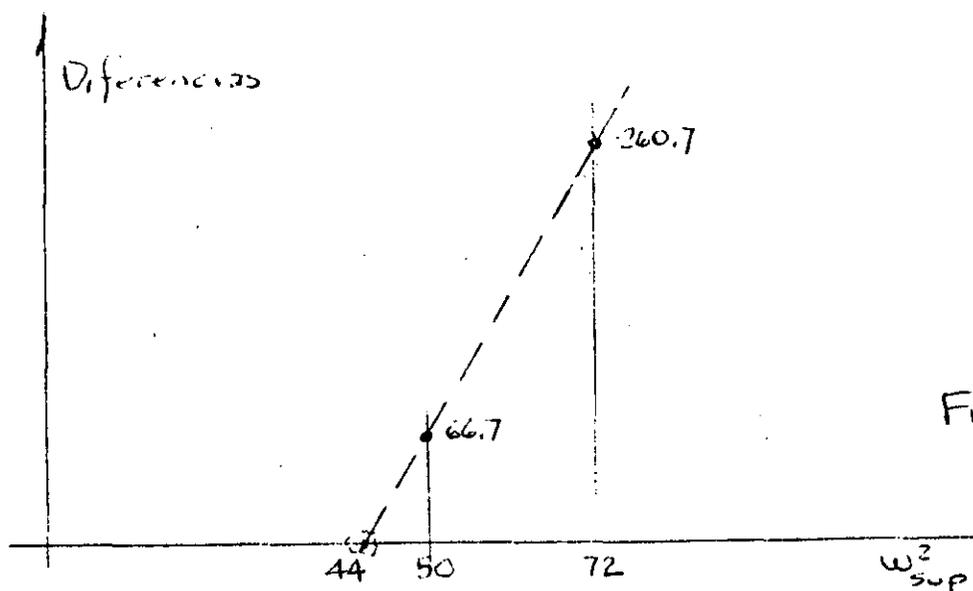


Fig 1.

que el valor de  $w^2$  que hace cero las diferencias es aproximadamen-  
te 44 (podría obtenerse por triángulos semejantes, pero sabemos  
que aún cuando se hiciera así el valor no nos llevará exactamen-  
te a cero diferencia pues la variación no es lineal como estamos  
suponiendo, excepto en intervalos muy cerrados).

Suponiendo entonces  $w^2 = 44$

Ni- vel	m	R	$mw^2$	$\Delta X$	X	F	V	FX	$V\Delta X$
4	2	50	88	-3.174	-1.844	-162.27	Dif.=3.57 -158.7	299.23	503.71
3	2	100	88	-0.417	1.33	117	- 41.7	155.61	17.39
2	2	150	88	0.747	1.747	153.7	112	268.51	83.66
1	2	200	88	1.0	1.0	88	200	88	200
0								$\Sigma 811.35$	$\underline{804.76}$

$$w^2 = 44 \frac{804.76}{811.35} = 43.64 \text{ 1/seg}^2$$

Usando  $w_{sup}^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2$

Ni- vel	m	R	$mw^2$	$\Delta X$	X	F	V
4	2	50	87.28	-3.159	-1.809	-157.89	Dif. = 0.05 -157.94
3	2	100	87.28	-0.401	1.350	117.83	- 40.11
2	2	150	87.28	0.751	1.751	152.83	112.72
1	2	200	87.28	1.0	1.0	87.28	200
0							

Como puede verse, la diferencia al final de este último ciclo es despreciable, por lo que:

$$w_2^2 = 43.64 \text{ 1/seg}^2, w_2 = 6.606 \text{ 1/seg. } T_2 = 0.951 \text{ seg}$$

y la configuración modal es la indicada.

Suponiendo otro valor mayor que  $w^2$  podría calcularse el tercero y cuarto modos. Puede también verificarse que la frecuencia del primer modo obtenido con el método Stodola-Vianello-Newmark es correcta.

#### Comentarios adicionales

En los métodos presentados para las estructuras a base de marcos rígidos se tiene como datos las masas y las rigideces de entrepiso. Las masas son relativamente fáciles de calcular y dependen exclusivamente del peso de los materiales con que esté hecha la estructura y de la carga viva que se considere para fines de análisis sísmico. Las rigideces serán función de las propiedades elástico-geométricas de los materiales empleados, que no es sencillo definir y de la estructuración, sobre todo de la relación que guarden las rigideces relativas de las barras que forman la estructura, trabes y columnas.

Dado el modelo matemático de un edificio como una serie de masas unidas por resortes, definimos como sistema estrechamente acoplado a aquel en que la rigidez de entrepiso es independiente de la distribución de cargas laterales a que se vea sometido el modelo, esto es, la rigidez de entrepiso es invariable independientemente de la elástica que adquiera la estructura al ser sometida a cargas laterales. Aquí se entiende por rigidez de entrepiso, como se indicó anteriormente, la fuerza necesaria para producir el desplazamiento unitario de un nivel con respecto al otro, esto es

$$R = \frac{V}{\Delta X} ; \text{ para } \Delta X=1, R=V$$

En la figura 2 se muestra el modelo matemático de un edificio de 4 niveles sometido a distintos sistemas de fuerzas. De acuerdo con lo antes dicho, la rigidez debe ser independiente de las fuerzas aplicadas (este tipo de estructuras se conoce también como estructura "de cortante").

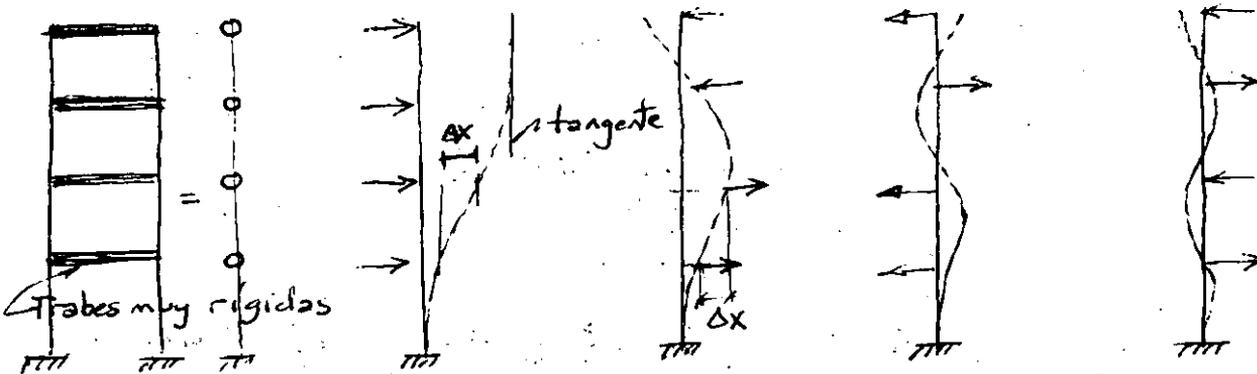
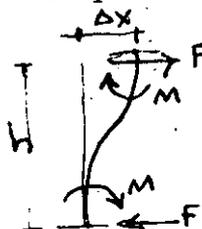


Fig 2

Para que esto se cumpla, la rigidez de entrepiso debe ser función única y exclusivamente de las columnas de cada entrepiso, para lo cual, los giros de los nudos deber ser nulos, lo que se logra si las travesas son infinitamente rígidas en comparación con las columnas, en cuyo caso la elástica de cada una de las columnas es la mostrada en la figura 3, y los elementos mecánicos que aparecen son los que ahí se muestran, para barras de sección constante.



$$F = \frac{12EI\Delta x}{h^3}$$

$$M = \frac{6EI\Delta x}{h^2}$$

Fig. 3

En la práctica, es difícil que la rigidez relativa de las travesas ( $K=I/l$ ) sea muy grande en comparación con la de las columnas, lo que hará que los giros de los nudos no sean cero, relajándose el sistema y reduciéndose la rigidez del marco para un mismo tamaño de columnas. Debido a esto, el caso de travesas infinitamente rígidas en comparación con las columnas recibe a veces el nombre de cota superior de rigidez.

Al ser significativos los giros de los nudos, la rigidez de entrepiso ya no será independiente del sistema de fuerzas horizon

tales aplicadas. En el límite inferior, llegaremos al caso del voladizo mostrado en la figura 4, para el cual no tiene sentido hablar de rigidez de entrepiso, pues será diferente para cada una de las posibles configuraciones de fuerzas aplicadas. A este caso lo definiremos como sistema remotamente acoplado.

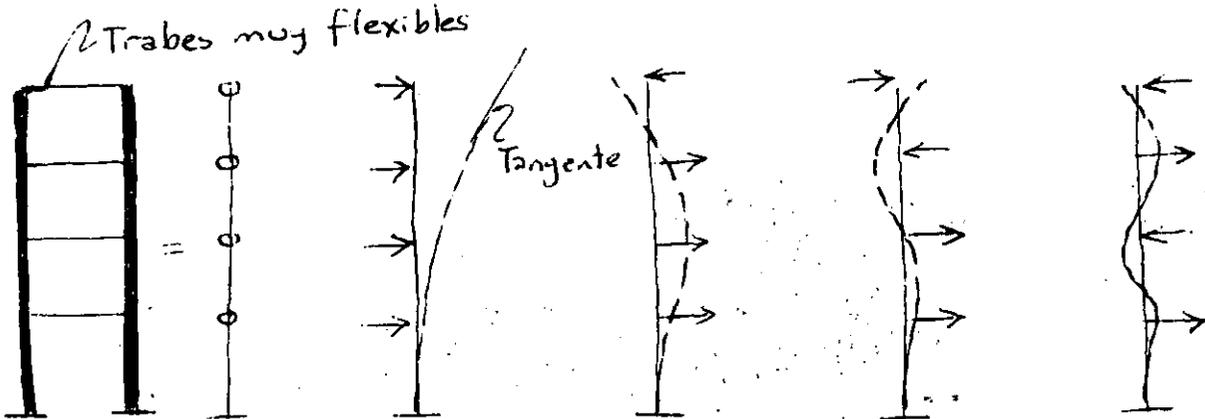
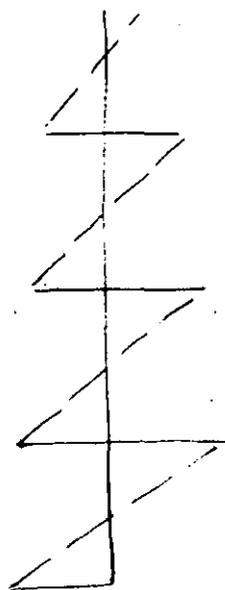


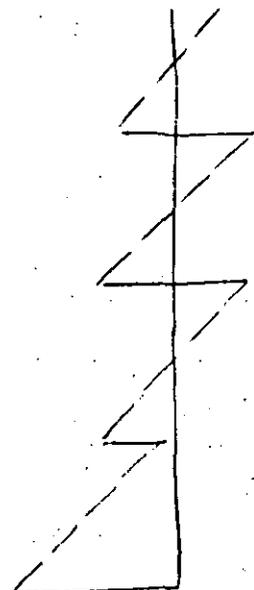
Fig. 4

Nótese que en ambos casos se trata de estructuras aparentemente iguales, constituídas por marcos rígidos formados por travesaños y columnas unidos en los nudos, sin embargo, como puede apreciarse en las figuras 1 y 3, las deformaciones de la estructura cuando todas las fuerzas se aplican en el mismo sentido son muy diferentes en uno y otro caso. En la figura 2, la tangente en el extremo superior es vertical, mientras que en la figura 4, la tangente en el extremo superior tiene la inclinación máxima.

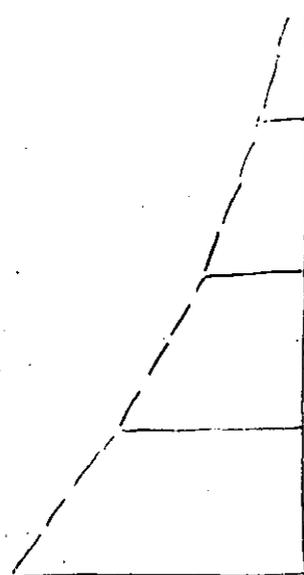
La figura 5 ilustra la forma en que variarían los momentos flexionantes en las columnas del marco en los casos extremos y en uno intermedio. Nótese que la aplicación de métodos aproximados para la obtención de momentos en travesaños y columnas sin verificar cual es la situación del marco, puede conducir a errores muy importantes de subestimación de momentos en las columnas y de desplazamientos horizontales de la estructura.



marco con traves rí-  
gidas en comparación  
con las columnas.



marco en situa-  
ción intermedia.



voladizo  
(traves muy flexi-  
bles comparadas con  
las columnas).

Momentos flexionantes en columnas. Fig. 5

ya que los métodos aproximados en general suponen la formación de articulaciones (puntos de momento nulo) en cada entrepiso, y la situación puede ser tal que los puntos de inflexión del diagrama de momentos desaparezcan en uno, varios o todos los niveles.

Cualquier edificio de la práctica estará en una posición intermedia con respecto a los casos descritos.

Para conocer cual es la situación en cada caso particular, John A. Blume (referencia 1) sugiere el empleo de un índice de rotación nodal, que define como:

$$\rho = \frac{\Sigma(I/l)_{\text{traves}}}{\Sigma(I/l)_{\text{cols}}}$$

y se puede valuar en cualquier entrepiso. (Blume lo hace para el entrepiso medio). Aquí  $\Sigma(I/l)_{\text{traves}}$  es la suma de rigideces relativas de las traves de un cierto nivel y  $\Sigma(I/l)_{\text{cols}}$  es la suma de rigideces relativas de las columnas en que se apoyan las traves antes mencionadas.

Blume encontró que si  $\rho > 0.10$  hay puntos de momento nulo en las columnas de todos los entrepisos mientras que, para valores de  $\rho$  menores de 0.01 la estructura se asemeja más a un voladizo. Para valores de  $\rho$  entre 0.01 y 0.10 la situación es intermedia y habrá entrepisos en que no haya puntos de momento nulo, por lo que los métodos aproximados de análisis pueden conducir a fuertes errores del lado de la inseguridad por lo que respecta a los valores de los momentos flexionantes para los que debe diseñarse así como respecto a los desplazamientos laterales de la estructura; la rigidez de entrepiso pierde significado y conviene emplear métodos matriciales para analizarla.

Si la estructura tiene variaciones importantes con la altura, convendrá valorar  $\rho$  en distintos niveles.

#### Efectos de deformación axial de las columnas

Hasta aquí se ha considerado que las deformaciones axiales de las columnas, en el caso de marcos rígidos, son despreciables y no contribuyen a la deformación horizontal. Esto es válido sólo si la relación entre altura y ancho de la estructura es pequeña, tal vez menor que 3. Al aumentar el valor de esa relación, el efecto de momento de volteo en el edificio adquiere mayor importancia y se pueden cometer errores importantes al despreciar los acortamientos y alargamientos de las columnas debido a fuerza axial.

Cuando las trabes se vuelven muy flexibles en comparación con las columnas, cada una de las columnas trabajará como voladizo y la fuerza axial en ellas será pequeña.

En el caso de marcos contraventeados, la crujía o crujías contraventeadas tendrán comportamiento similar al de un muro y deberán por tanto considerarse como estructuras de flexión, calculando sus periodos como se indicó en el método Stodola-Vianello-Newmark.

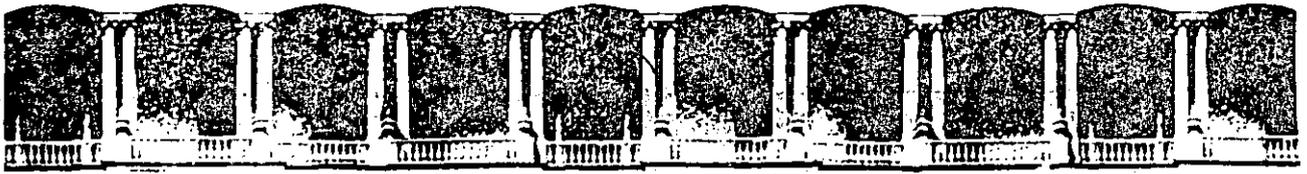
Cuando se tienen marcos y muros trabajando simultáneamente la situación se complica pues la interacción entre ambos sistemas estructurales hace que varíe la fuerza que toman uno y otro en cada entrepiso; los muros suelen tomar la mayor proporción de la cortante total en los entrepisos inferiores mientras que la situación se invierte en los niveles superiores. Ver referencia 1. Esto hace difícil la aplicación de métodos numéricos para calcular los modos de vibración de este tipo de estructuras, siendo más conveniente el empleo de métodos matriciales para este fin.

#### REFERENCIA 1

Blume, John., "Dynamic Characteristics of Multistory Buildings", Proceedings ASCE, Structural Division, February 1968.

#### REFERENCIA 2

Godden, William G., "Numerical Analysis of Beam and Column Structures", Prentice Hall.



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**XX CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA**

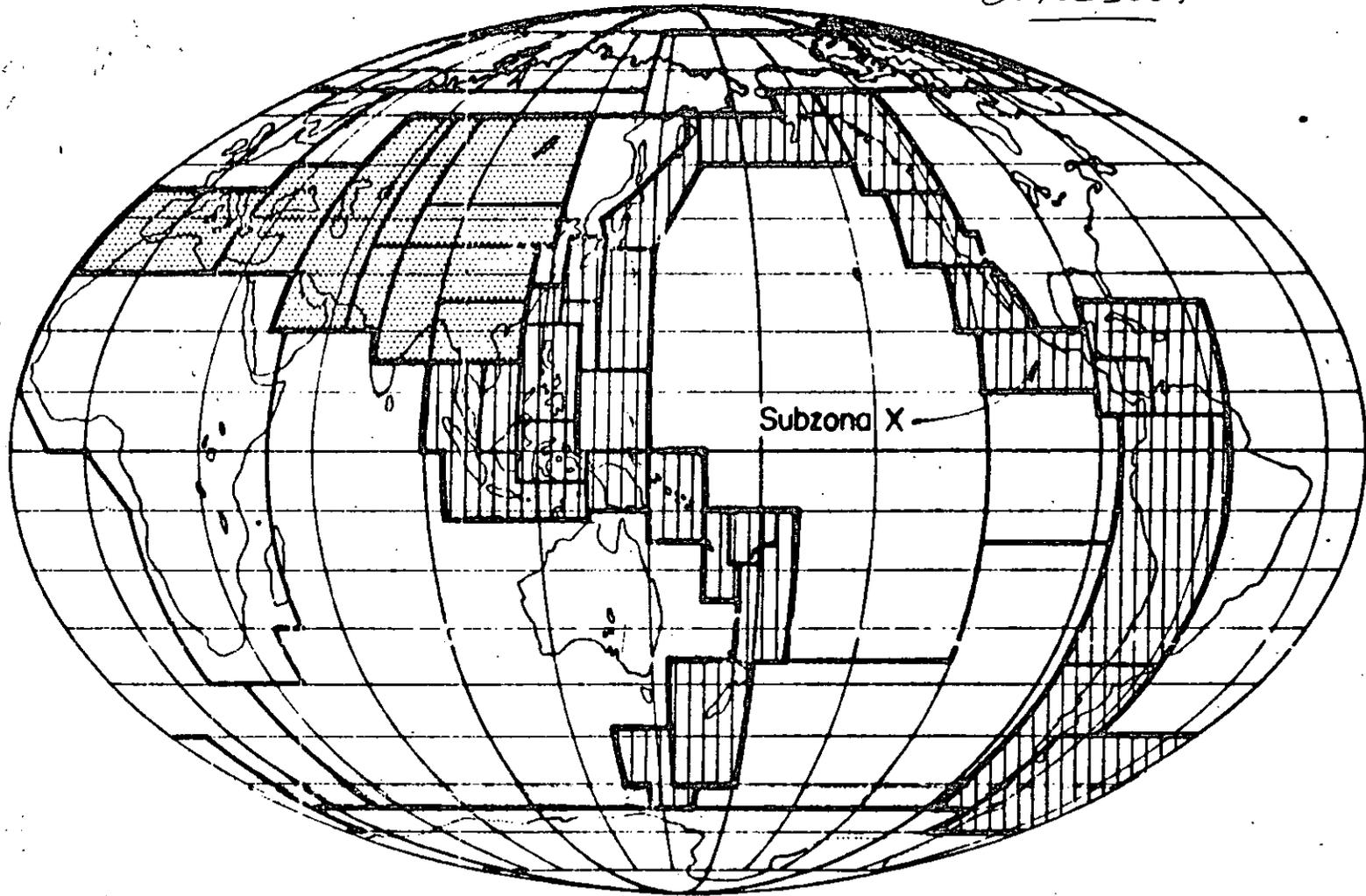
**MODULO II  
ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO**

**CARACTERISTICAS DE LOS TEMBLORES**

**ING. OCTAVIO RASCON.**

**1 9 9 4.**

3 TEMA  
CARACTERÍSTICAS DE LOS TEMBLORES  
O. Rascón



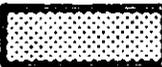
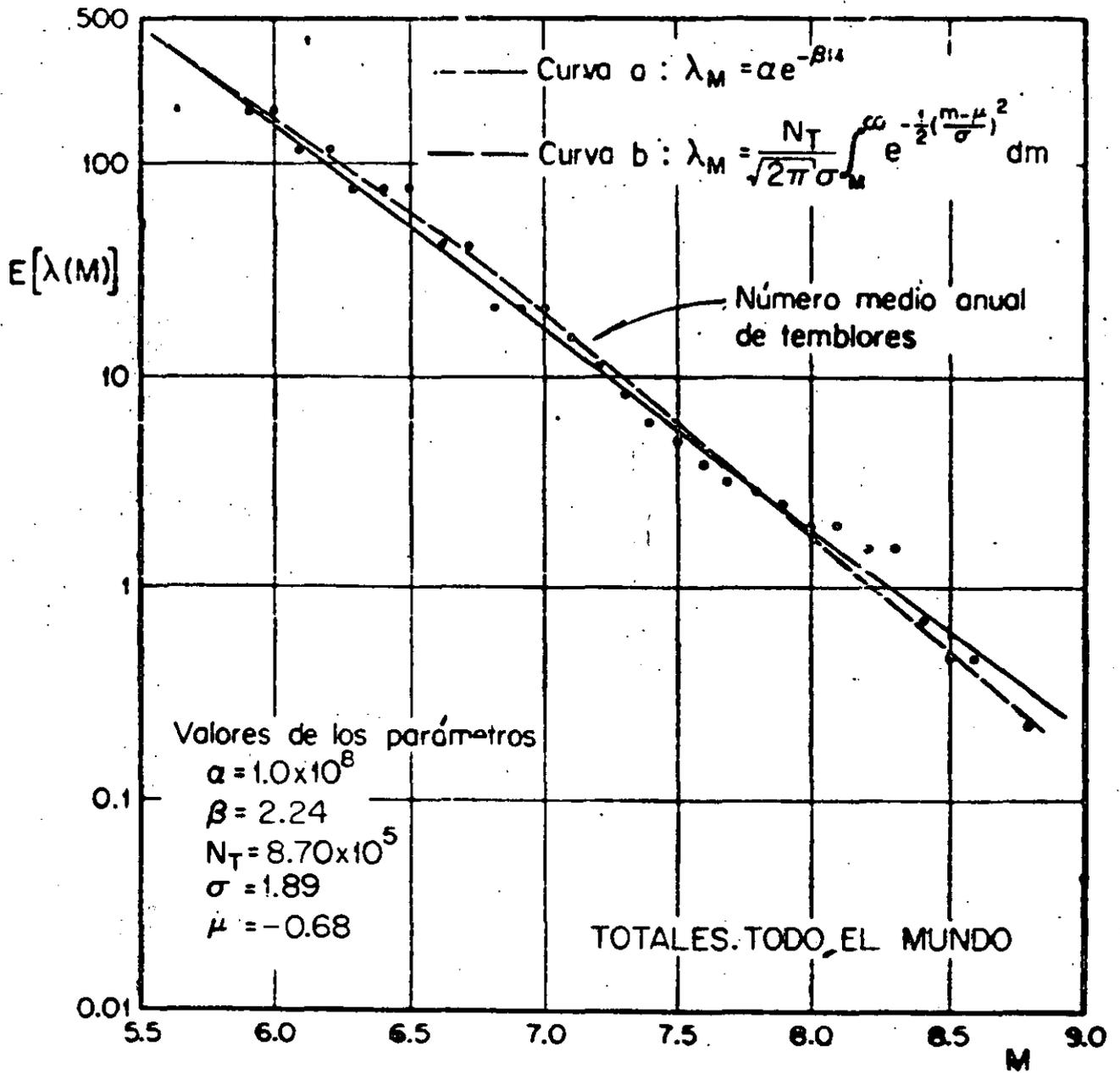
-  ZONA A  
Cinturón circumpacífico
-  ZONA B  
Cinturón alpino
-  ZONA C  
Zona de baja sismicidad

Fig.3.3 Las tres macrozonas sísmicas del mundo



Superficiales	0.67
Intermedios	0.25
Profundos	0.08
Totales	1.00

Fig. 3.2 Números medios anuales de temblores con magnitud mayor que M

## APPENDIX 2: THE MODIFIED MERCALLI INTENSITY SCALE

Mercalli's (1902) improved intensity scale served as a basis for the scale advanced by Wood and Neumann (1931), known as the modified Mercalli scale and commonly abbreviated MM. The modified version is described below with some improvements by Richter (1958). The following remarks are taken almost verbatim from *Elementary Seismology*, Charles F. Richter (W. H. Freeman and Company, San Francisco, copyright © 1958).

To eliminate many verbal repetitions in the original scale, the following convention has been adopted. Each effect is named at that level of intensity at which it first appears frequently and characteristically. Each effect may be found less strongly, or in fewer instances, at the next lower grade of intensity; more strongly or more often at the next higher grade. A few effects are named at two successive levels to indicate a more gradual increase.

*Masonry A, B, C, D.* To avoid ambiguity of language, the quality of masonry, brick or otherwise, is specified by the following lettering (which has no connection with the conventional Class A, B, C construction).

*Masonry A.* Good workmanship, mortar, and design; reinforced, especially laterally, and bound together by using steel, concrete, etc.; designed to resist lateral forces.

*Masonry B.* Good workmanship and mortar; reinforced, but not designed in detail to resist lateral forces.

*Masonry C.* Ordinary workmanship and mortar; no extreme weaknesses like failing to tie in at corners, but neither reinforced nor designed against horizontal forces.

*Masonry D.* Weak materials, such as adobe; poor mortar; low standards of workmanship; weak horizontally.

*Modified Mercalli Intensity Scale of 1931 (Abridged and Rewritten by C. F. Richter.)*

1. Not felt. Marginal and long-period of large earthquakes.

2. Felt by persons at rest, on upper floors, or favorably placed.
3. Felt indoors. Hanging objects swing. Vibration like passing of light trucks. Duration estimated. May not be recognized as an earthquake.
4. Hanging objects swing. Vibration like passing of heavy trucks; or sensation of a jolt like a heavy ball striking the walls. Standing motor cars rock. Windows, dishes, doors rattle. Glasses clink. Crockery clashes. In the upper range of 4, wooden walls and frames crack.
5. Felt outdoors; direction estimated. Sleepers wakened. Liquids disturbed, some spilled. Small unstable objects displaced or upset. Doors swing, close, open. Shutters, pictures move. Pendulum clocks stop, start, change rate.
6. Felt by all. Many frightened and run outdoors. Persons walk unsteadily. Windows, dishes, glassware broken. Knickknacks, books, and so on, off shelves. Pictures off walls. Furniture moved or overturned. Weak plaster and masonry *D* cracked. Small bells ring (church, school). Trees, bushes shaken visibly, or heard to rustle.
7. Difficult to stand. Noticed by drivers of motor cars. Hanging objects quiver. Furniture broken. Damage to masonry *D* including cracks. Weak chimneys broken at roof line. Fall of plaster, loose bricks, stones, tiles, cornices, unbraced parapets, and architectural ornaments. Some cracks in masonry *C*. Waves on ponds; water turbid with mud. Small slides and caving in along sand or gravel banks. Large bells ring. Concrete irrigation ditches damaged.
8. Steering of motor cars affected. Damage to masonry *C*; partial collapse. Some damage to masonry *B*; none to masonry *A*. Fall of stucco and some masonry walls. Twisting, fall of chimneys, factory stacks, monuments, towers, elevated tanks. Frame houses moved on foundations if not bolted down; loose panel walls thrown out. Decayed piling broken off. Branches broken from trees. Changes in flow or temperature of springs and wells. Cracks in wet ground and on steep slopes.
9. General panic. Masonry *D* destroyed; masonry *C* heavily damaged, sometimes with complete collapse; masonry *B* seriously damaged. General damage to foundations. Frame structures, if not bolted, shifted off foundations. Frames racked. Conspicuous cracks in ground. In alluviated areas sand and mud ejected, earthquake fountains, sand craters.
10. Most masonry and frame structures destroyed with their foundations. Some well-built wooden structures and bridges destroyed. Serious damage to dams, dikes, embankments. Large landslides. Water thrown on banks of canals, rivers, lakes, etc. Sand and mud shifted horizontally on beaches and flat land. Rails bent slightly.
11. Rails bent greatly. Underground pipelines completely out of service.

12. Damage nearly total. Large rock masses displaced. Lines of sight and level distorted. Objects thrown into the air.

Other commonly used intensity scales include those of Rossi-Forel (Rossi, 1883; Forel 1884), Cancani (1904), Sieberg, (1923), and Medvedev (1953). The latter is known as the Soviet scale and roughly coincides with the MM intensity scale. Also roughly equivalent is the MSK scale (Medvedev and Sponheuer, 1969). The other scales are falling slowly into disuse. The same is true of the Japanese, Chilean, and other systems of intensity grading that have enjoyed some degree of popularity at national or regional levels.

A now classical piece of work on earthquake intensity and its relation with magnitude is found in a paper by Gutenberg and Richter (1942 and 1956).

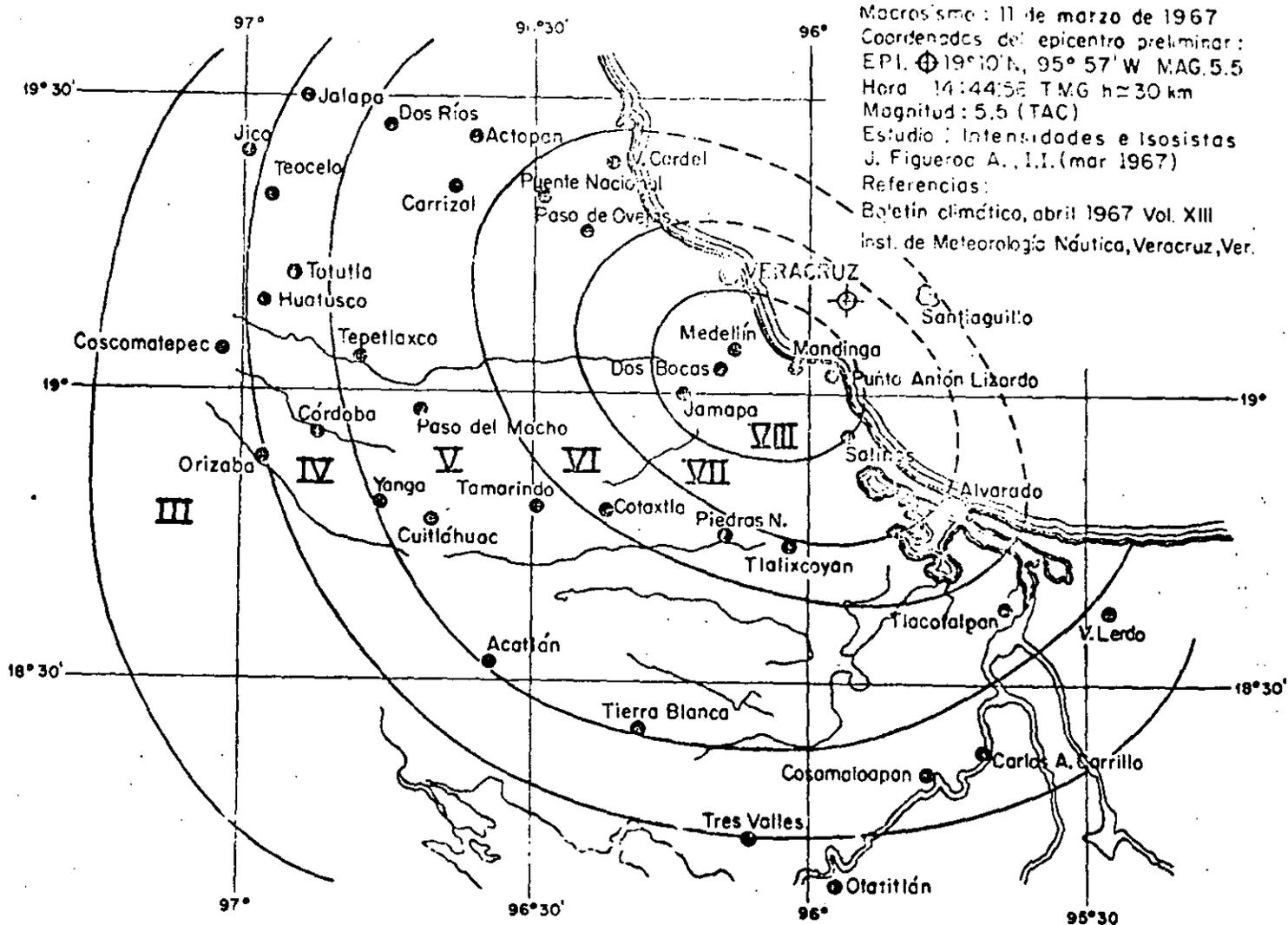


Fig 8.

GRAFICA DE TRES ARCHIVOS DE ACELERACION (gals)

Archivo:	SCT185SCT185	SCT185SCT185	SCT185SCT185
Sismo:	GRO-MICH	GRO-MICH	GRO-MICH
Hora:	13:19:43	13:19:43	13:19:43
Componente:	N30E	S60E	S60E
Distancia:	400	400	400
Max.Min:	80.44. -77.19	196.13. -169.27	<u>196.13.</u> -169.27

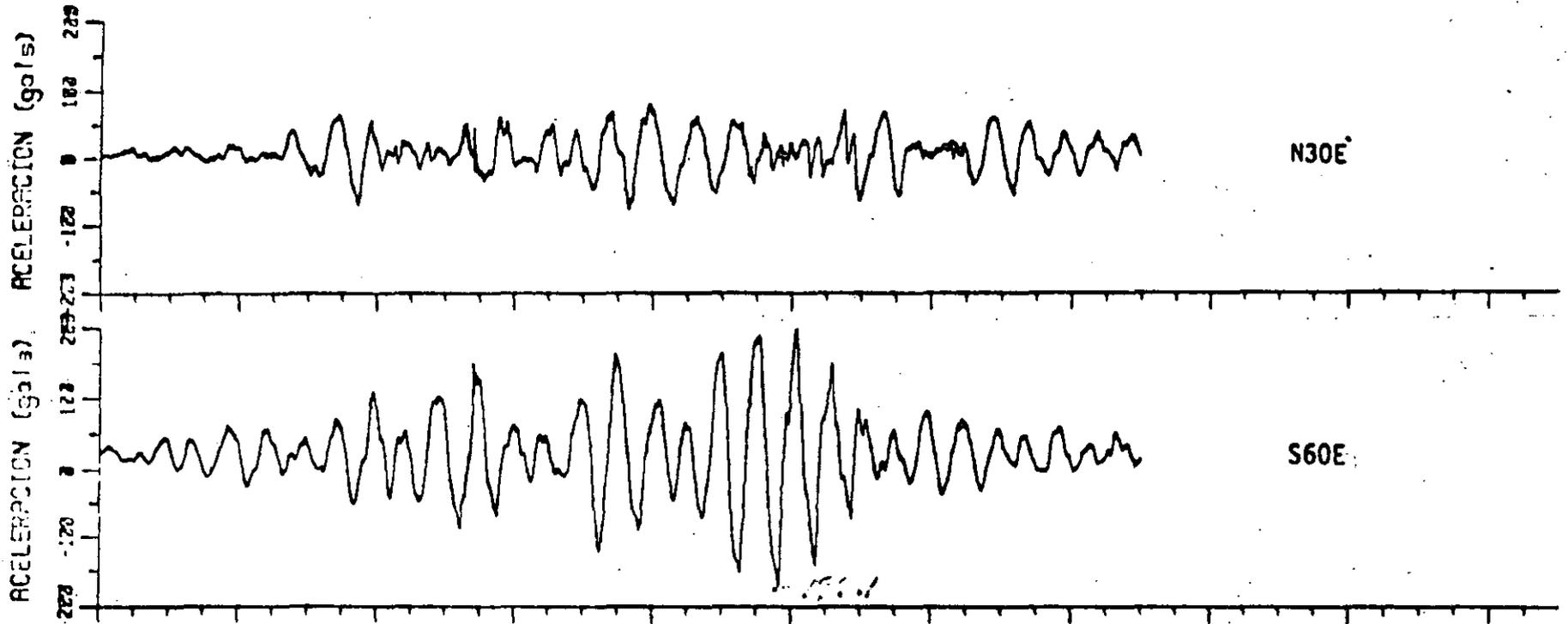


Fig 6. Aceleraciones calculadas en direcciones N30E y S60E a partir de las componentes NS y EW registradas. **SCT**

SISMO		GR0-MICH		REGISTRO		COA0850919AL.T		CORRECCION	
DATOS	10E1	ESTA	COAO	METODO	CALTECH.				
FECHA	850919	INSI	03-115	FILTRO	0.050	0.070	10.0	12.0	
HORA	14:34:51	COMP	N00E	ΔT	0.020				
EPIC	17.880 102.470	HORA	14:34:49	MAX ACCL	65.84	-69.05			
M	7.8	DUR	179.99	MAX VEL	31.24	-35.02			
H	33	DIST	400	MAX DESP	19.57	-25.08			

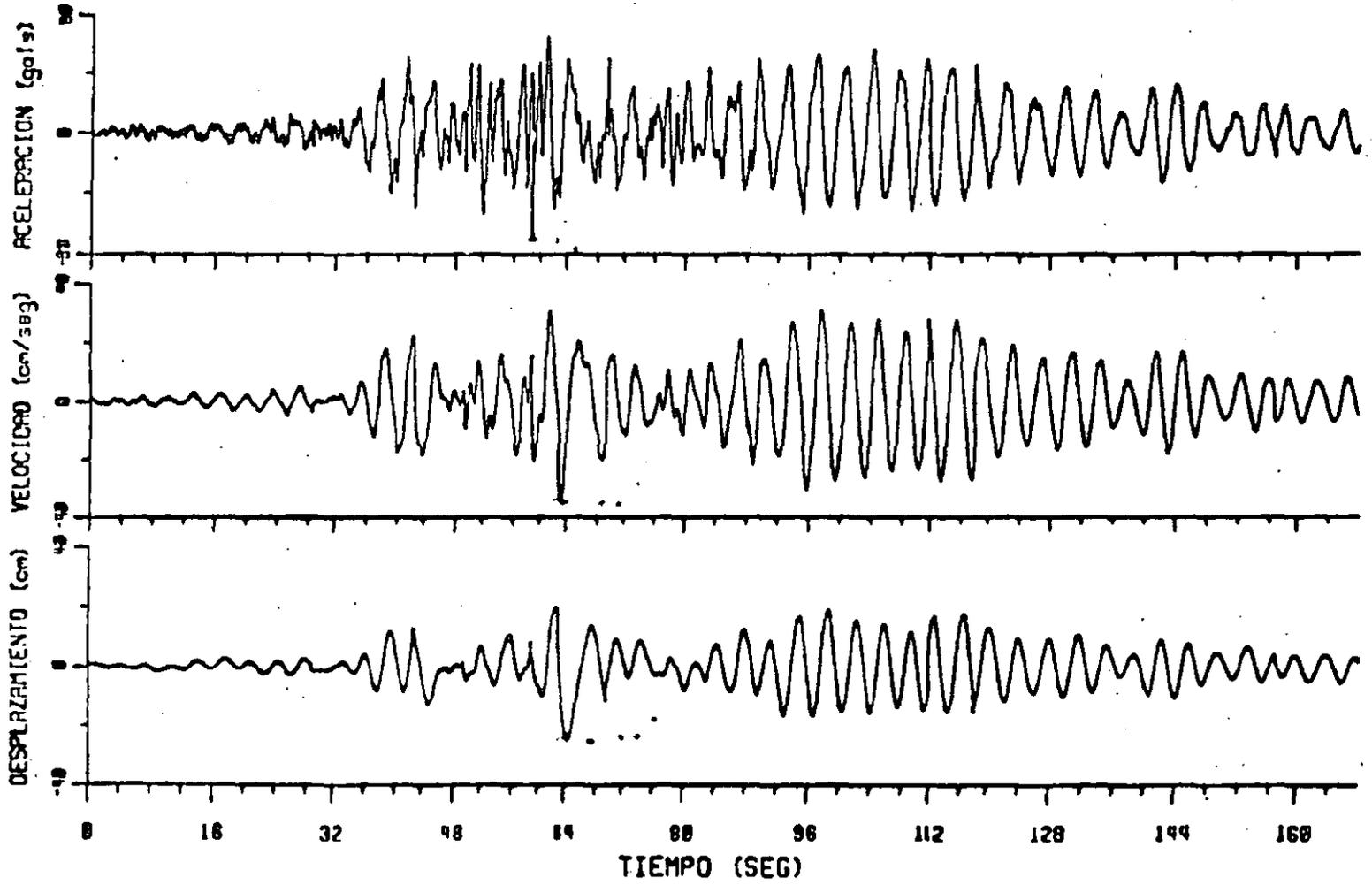


Fig 6A. Aceleración, velocidad y desplazamiento de los 3 min iniciales de la componente NS del acelerograma registrado en la oficina principal de la Central de Abastos del 19 de septiembre de 1985 en México, D.F.

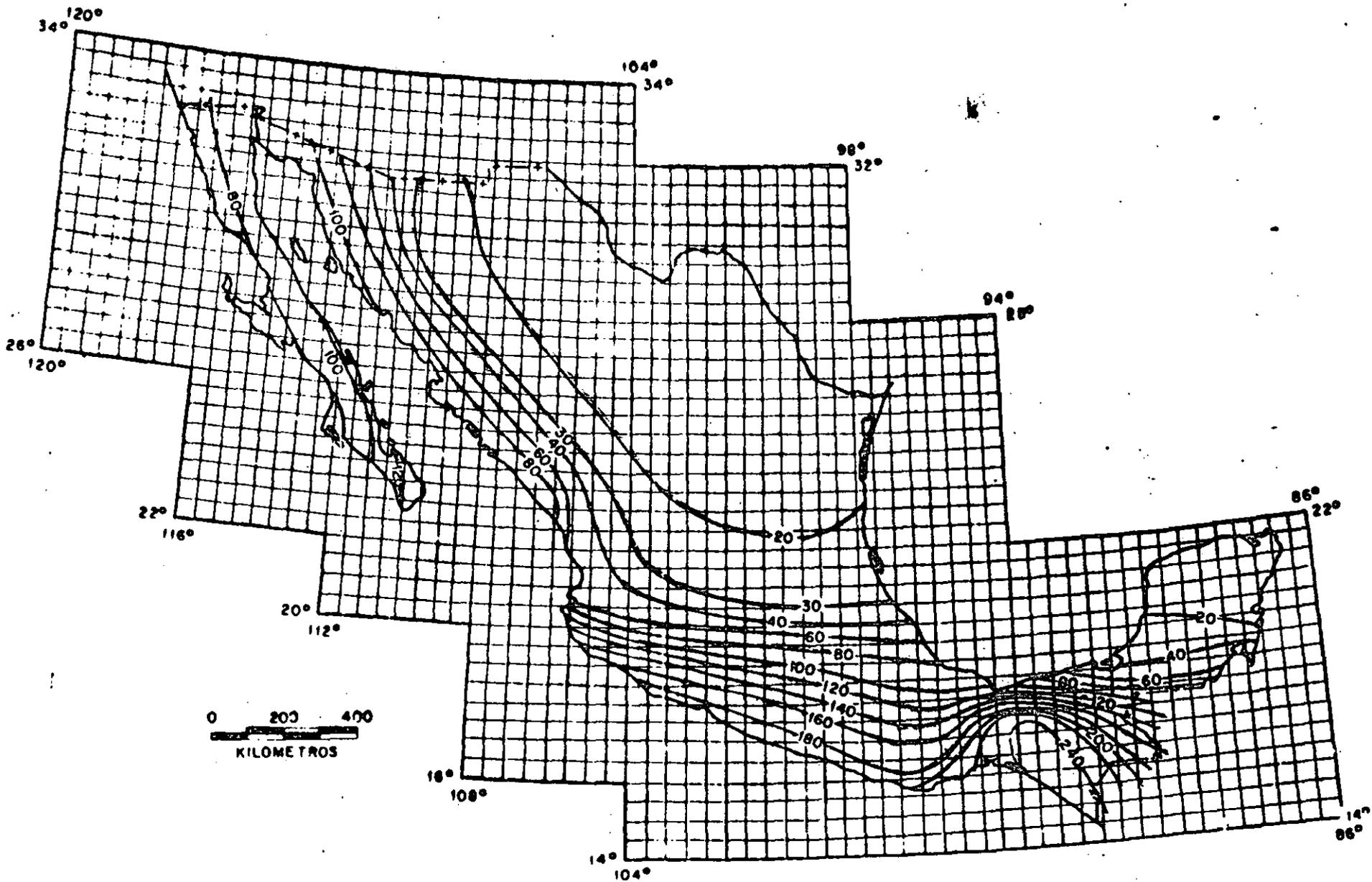
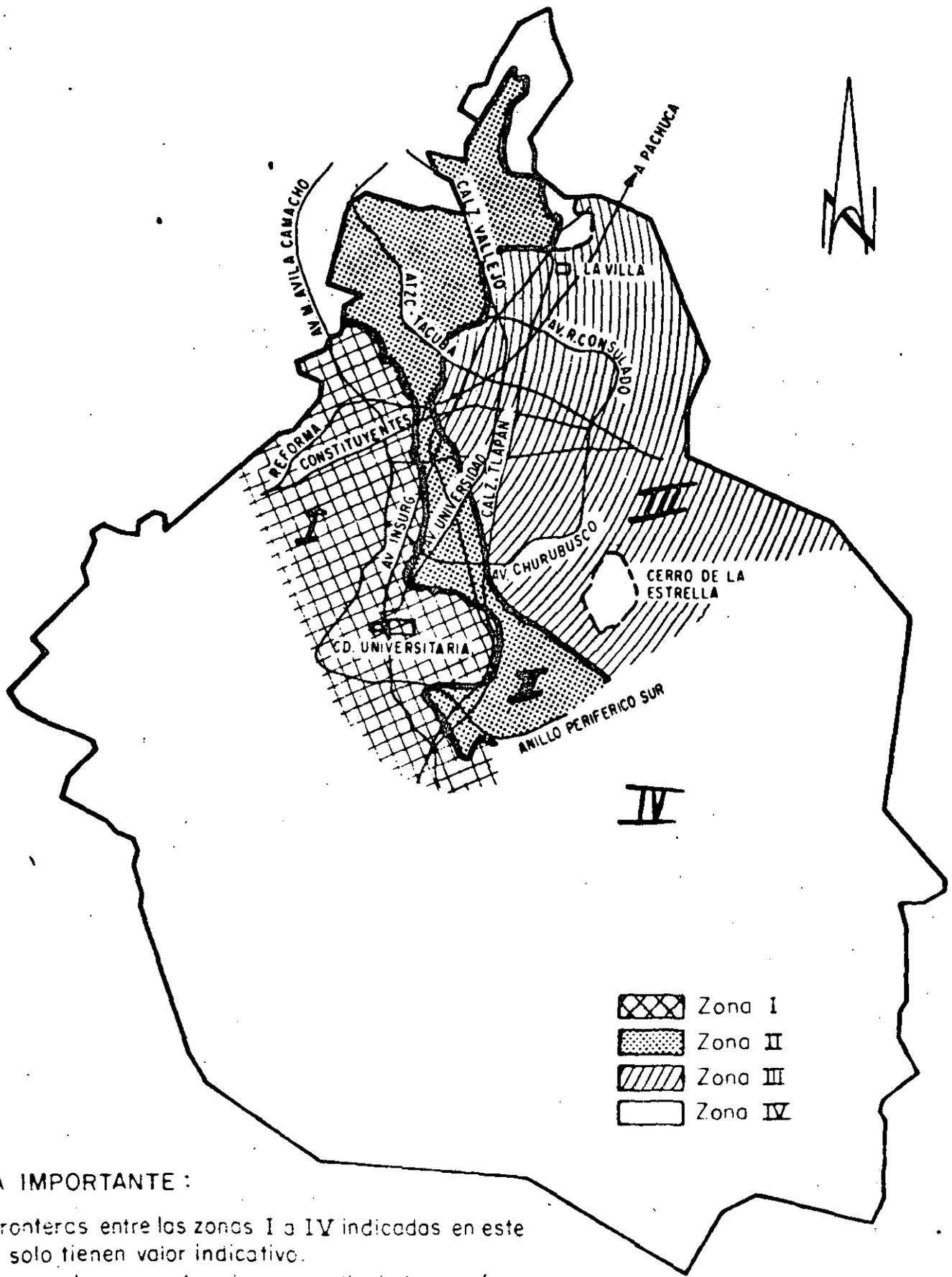


Fig. 6. Aceleraciones máximas del terreno con periodo de recurrencia igual a 30 años

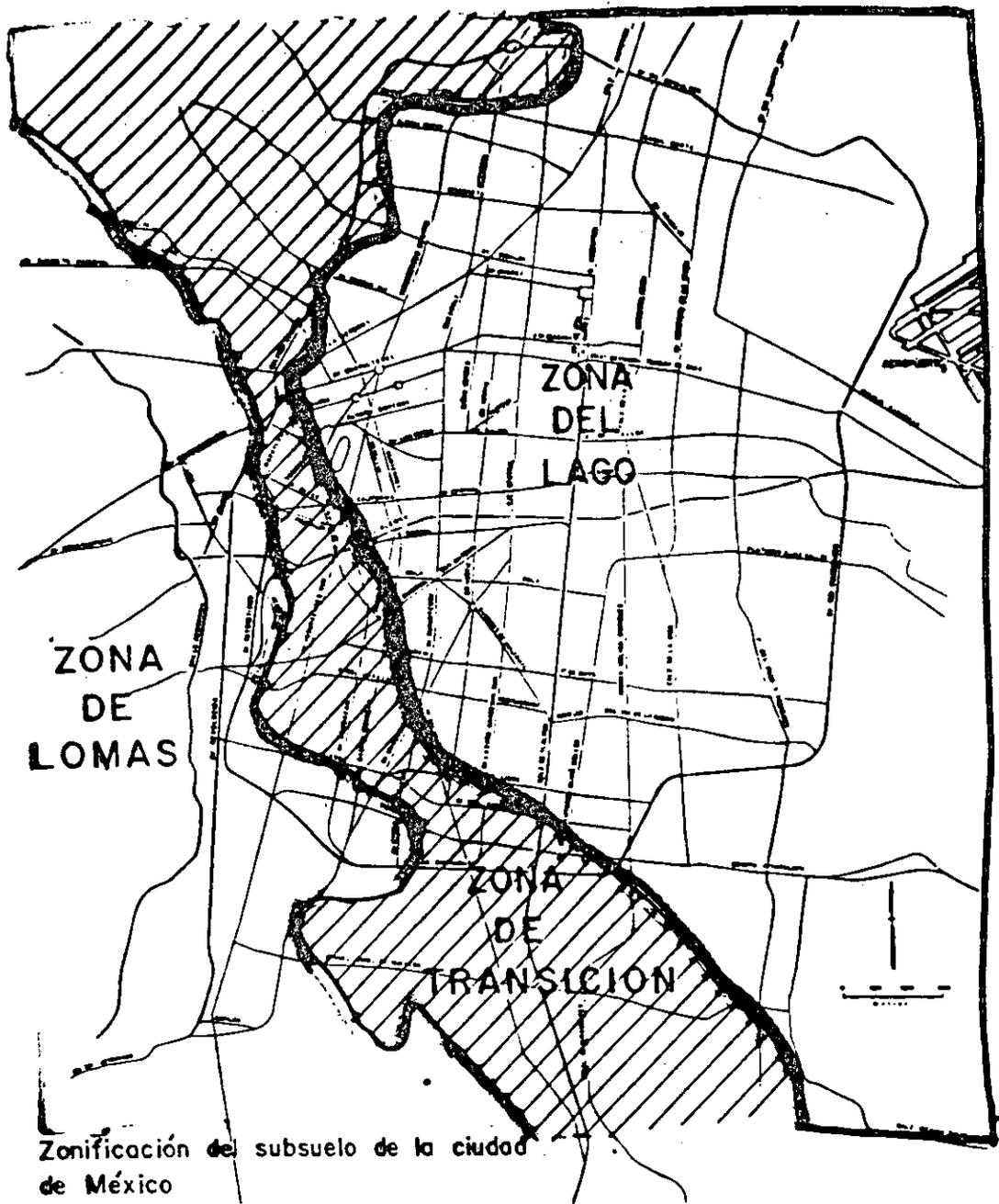


**NOTA IMPORTANTE :**

Las fronteras entre las zonas I a IV indicadas en este plano solo tienen valor indicativo.

La zona en la que se localiza un predio dado, será determinada a partir de las investigaciones que se realicen en el subsuelo.

Fig 1. Zonificación del Distrito Federal en cuanto a tipos de subsuelo



Zonificación del subsuelo de la ciudad de México

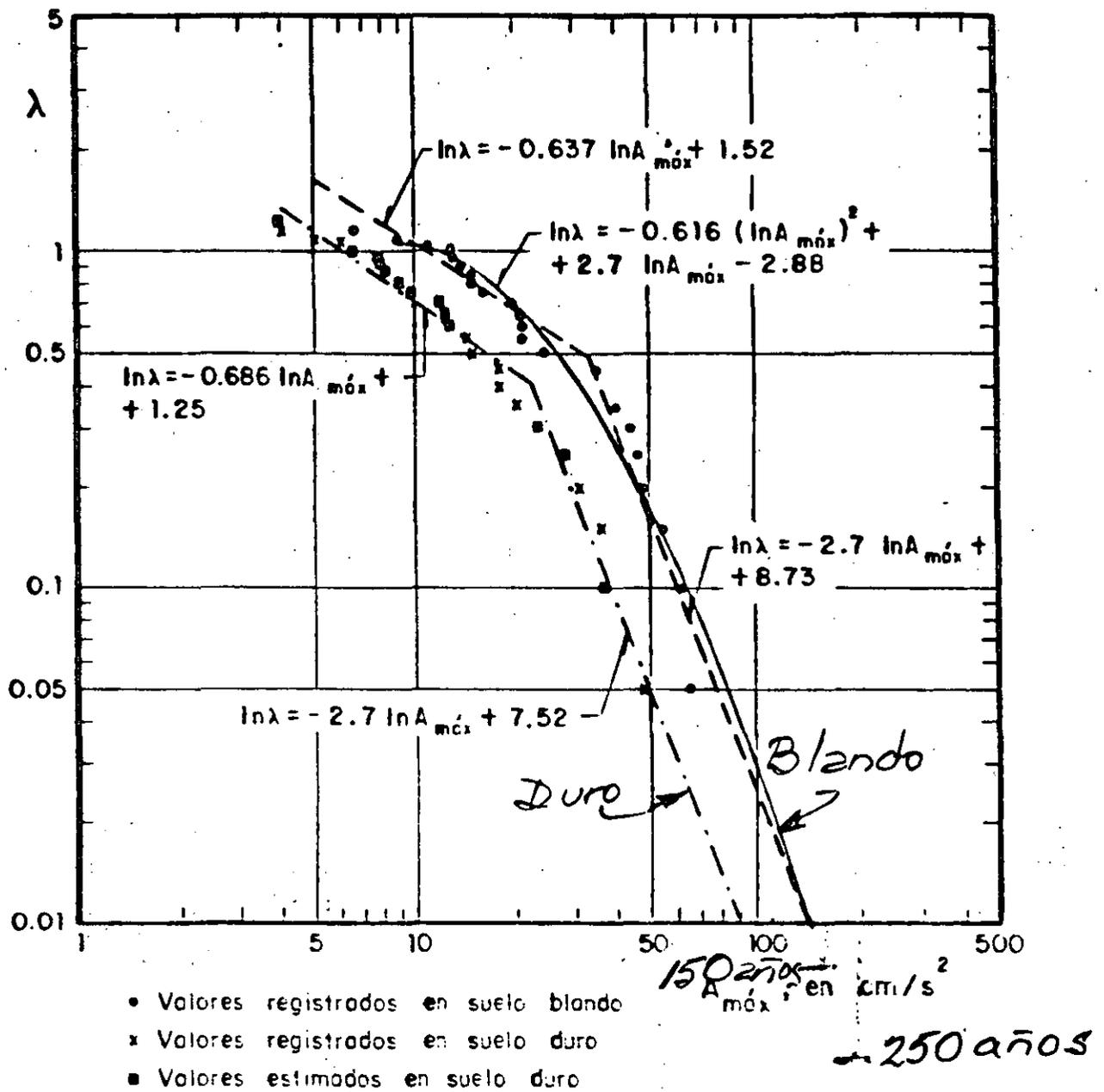


Fig 3.3 Frecuencia de ocurrencia de  $A_{m\acute{o}x}$ . Suelos blando y duro

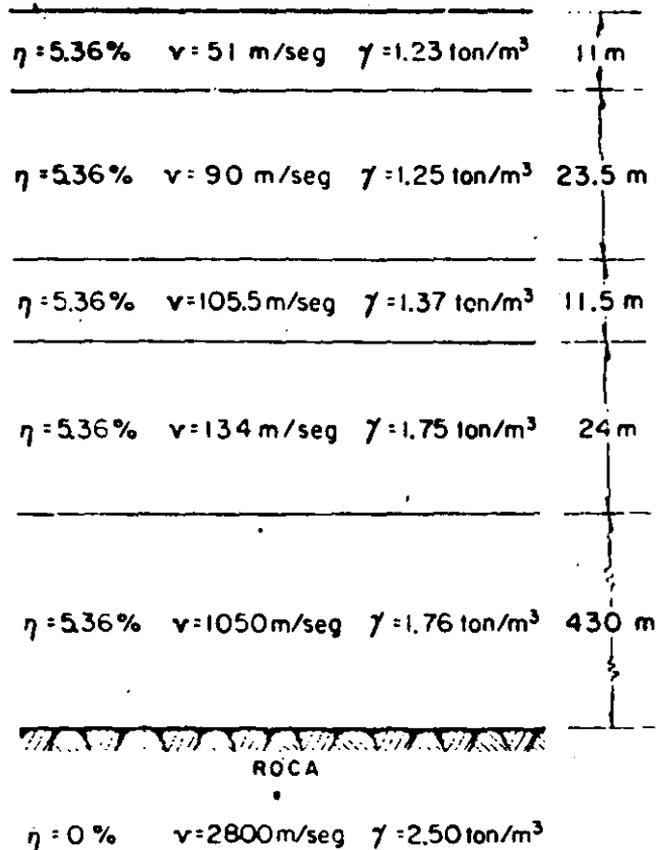


FIG. 8. Estratificación del Valle de México, utilizada para el cálculo de la curva de amplificación

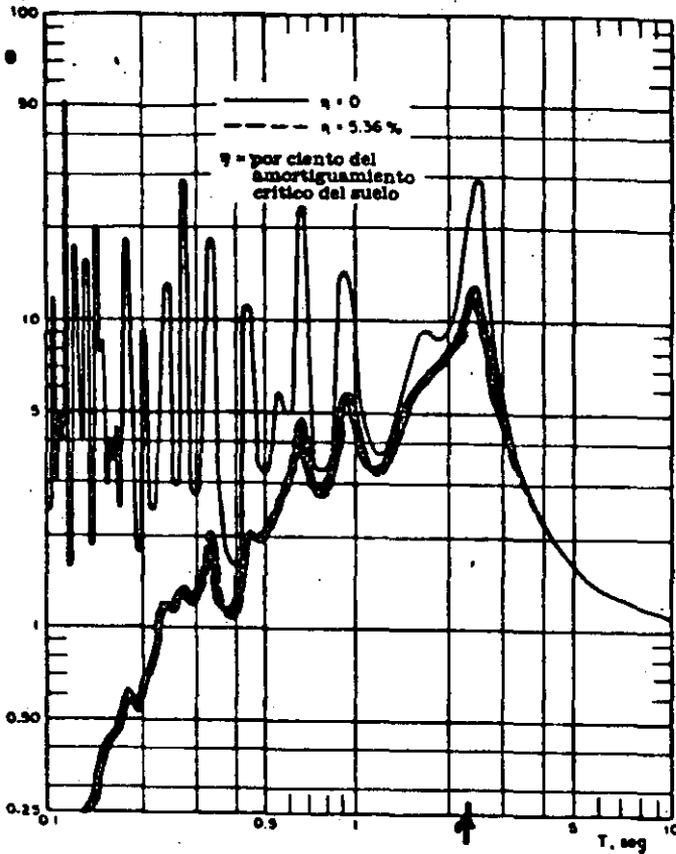


FIGURA 9.20(b) Factor dinámico de amplificación para el valle de México  
 Según Herrera, Rosenblueth y Rascón (1965)

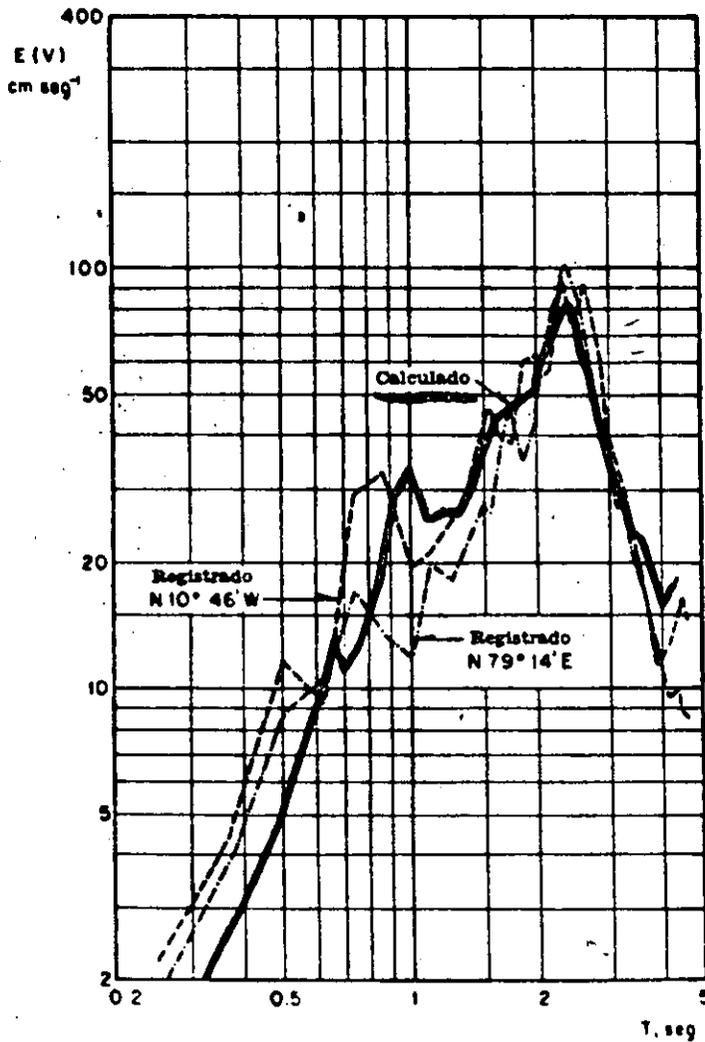
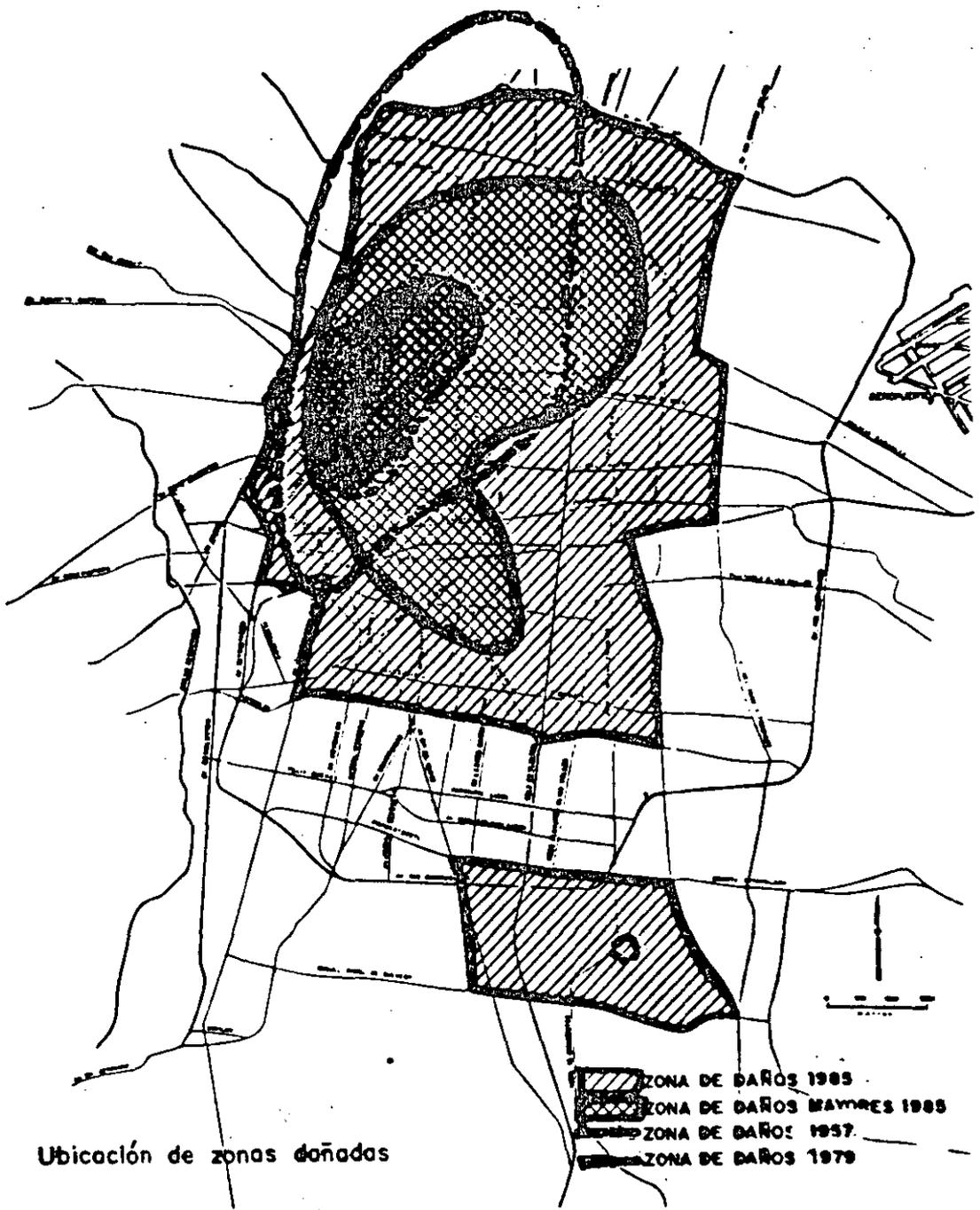


FIGURA 9.20(a) Comparación de los espectros teóricos y reales, sismo del 11 de mayo de 1962, para  $\zeta = 0.02$ . Según Herrera, Rosenblueth y Rascón (1965)



Ubicación de zonas dañadas

-  ZONA DE DAÑOS 1985
-  ZONA DE DAÑOS MAYORES 1988
-  ZONA DE DAÑOS 1989
-  ZONA DE DAÑOS 1979

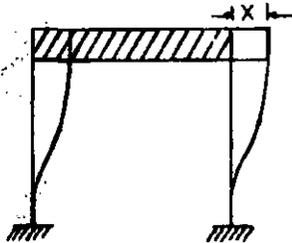
DINAMICA ESTRUCTURAL

DR. OCTAVIO A. RASCON CH.

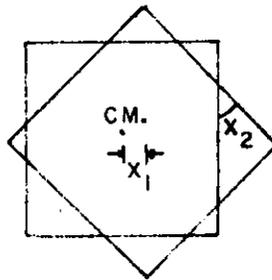
DEFINICION.

GRADOS DE LIBERTAD = NUMERO DE COORDENADAS GENERALIZADAS (DESPLAZAMIENTOS O GIROS) QUE SE REQUIEREN PARA DEFINIR LA POSICION DEL SISTEMA EN CUALQUIER INSTANTE.

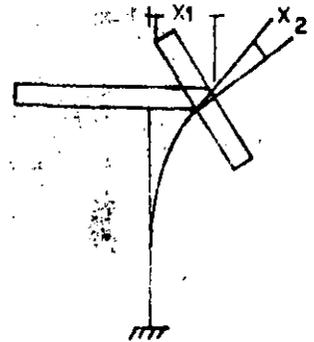
EJEMPLOS



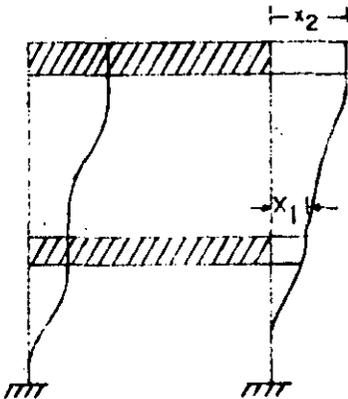
UN GRADO DE LIBERTAD



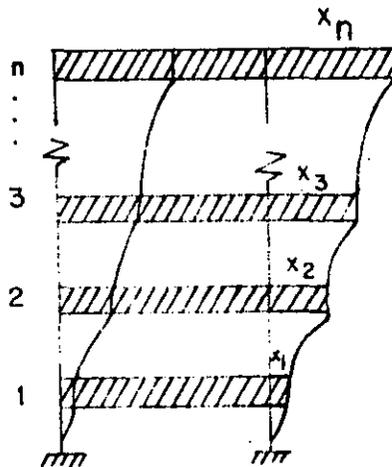
DOS GRADOS DE LIBERTAD



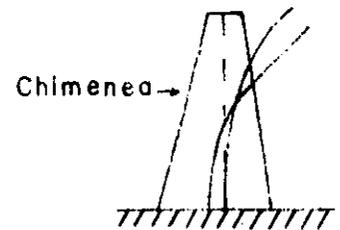
DOS GRADOS DE LIBERTAD



DOS GRADOS DE LIBERTAD



n GRADOS DE LIBERTAD

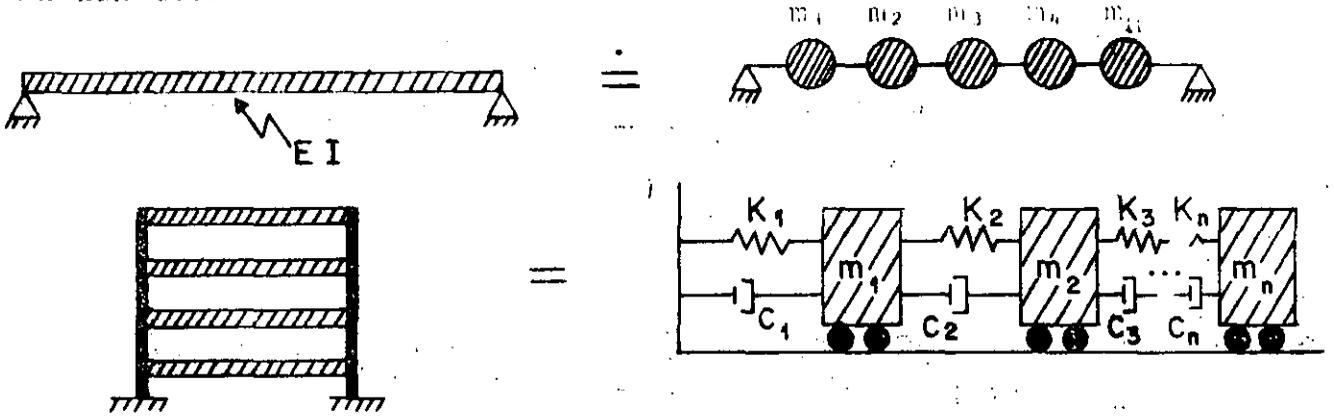


INFINITO NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD

MÉTODOS DE DISCRETIZACIÓN DE SISTEMAS CONTINUOS

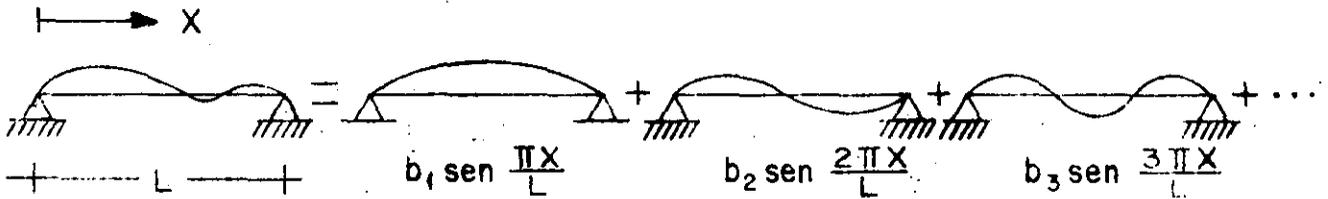
1. POR CONCENTRACION DE MASAS

MASA POR UNIDAD  
DE LONGITUD = m



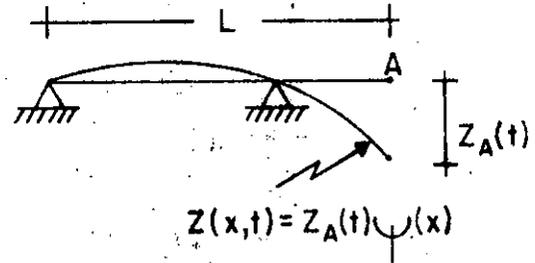
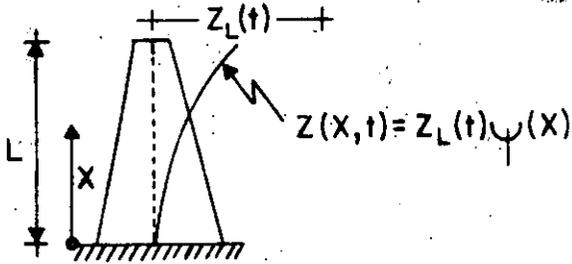
2. EXPRESANDO LA CONFIGURACION DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA COMO UNA SERIE DE FUNCIONES ESPECIFICADAS. POR EJEMPLO, SI ESTAS FUNCIONES SON ARMONICAS:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N b_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}$$

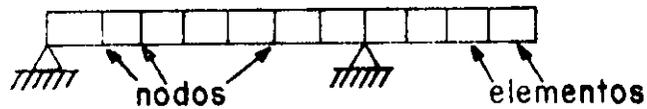


EN GENERAL, PARA CUALQUIER TIPO DE FUNCION  $\psi(x)$  :

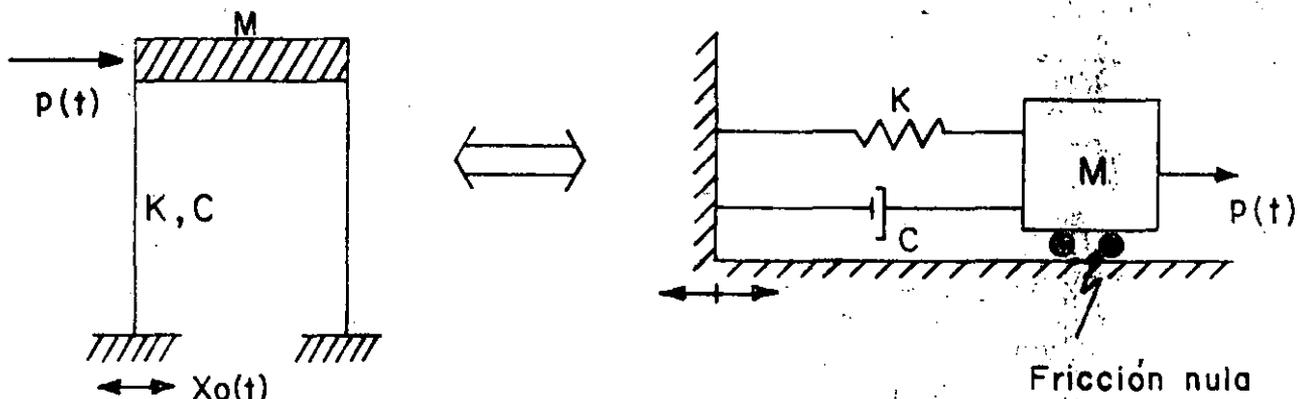
$$z(x, t) = \sum_{i=1}^N z_i(t) \psi_i(x)$$



B. MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



RESPUESTA DINAMICA DE SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD  
CON AMORTIGUAMIENTO VISCOSO



$t$  = TIEMPO

$M$  = MASA

$K$  = RIGIDEZ

$C$  = AMORTIGUAMIENTO

$f(t)$  = FUERZA EXTERNA

$X_o(t)$  = DESPLAZAMIENTO DEL SUELO

EL AMORTIGUAMIENTO VISCOSO ES TAL QUE PRODUCE UNA FUERZA DE RESTAURACION PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD RELATIVA DE LA MASA RESPECTO AL SUELO.

EL AMORTIGUAMIENTO SE DEBE PRINCIPALMENTE A LA FRICCIÓN INTERNA ENTRE LOS GRANOS O PARTICULAS DEL MATERIAL DE LA ESTRUCTURA, Y A FRICCIÓN EN LAS JUNTAS Y CONEXIONES DE LA MISMA. ES EL ELEMENTO DEL SISTEMA QUE DISIPA ENERGIA.

2a. LEY DE NEWTON:

"LA RAPIDEZ DE CAMBIO DEL MOMENTUM DE CUALQUIER MASA,  $m$ , ES IGUAL A LA FUERZA QUE ACTUA SOBRE ELLA"

$$p(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x})$$

$p(t)$  = FUERZA ACTUANTE

$x$  = DESPLAZAMIENTO

$t$  = TIEMPO

SI  $m$  ES CONSTANTE:  $p(t) = m\ddot{x}$

PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SI LA 2a. LEY DE NEWTON LA ESCRIBIMOS COMO

$$p(t) - m\ddot{x} = 0$$

AL SEGUNDO TERMINO DE LA ECUACION SE LE CONOCE COMO FUERZA DE INERCIA; EL CONCEPTO DE QUE UNA MASA DESARROLLA UNA FUERZA DE INERCIA PROPORCIONAL A SU ACELERACION Y QUE SE OPONE A ELLA SE CONOCE COMO PRINCIPIO DE D'ALAMBERT, Y PERMITE QUE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO SE EXPRESEN COMO ECUACIONES DE EQUILIBRIO DINAMICO.

ECUACION DE EQUILIBRIO

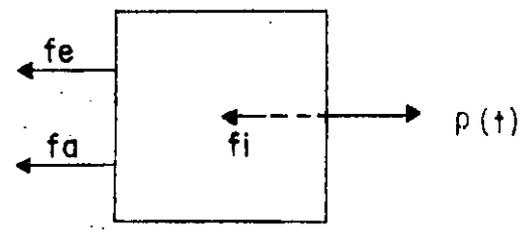
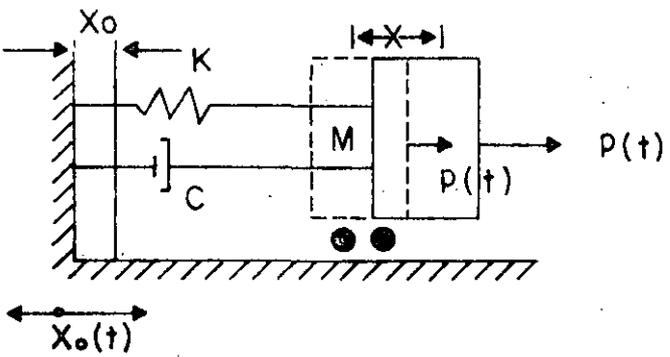


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

EQUILIBRIO:  $f_e + f_a + f_i = p(t)$  (1)

PARA UN SISTEMA ELASTICO:  $f_e = K(x - x_0) = ky$   
 PARA AMORTIGUAMIENTO VISCOSO:  $f_a = c(\dot{x} - \dot{x}_0) = c\dot{y}$  (2)

POR EL PRINCIPIO DE D'ALAMBERT

SUSTITUYENDO LAS ECS. 2 EN LA EC. 1 SE OBTIENE:

$$m(\ddot{y} + \ddot{x}_0) + c\dot{y} + ky = p(t)$$

DE DONDE

$$\boxed{\ddot{m}y + c\dot{y} + Ky = p(t) - M\ddot{x}_0} \quad (3)$$

DIVIDIENDO ENTRE M AMBOS MIEMBROS DE LA EC. 3:

$$\ddot{y} + \frac{C}{M} \dot{y} + \frac{K}{M} y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0$$

SI  $\frac{C}{M} = 2h$ , y  $\frac{K}{M} = \omega^2$ , DONDE  $\omega =$  FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL, EN RAD/SEG:

$$\boxed{\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2 y = \frac{p(t)}{M} - \ddot{x}_0} \quad (4)$$

CUANDO SE TIENEN EXCITACIONES EN EL SISTEMA SE TRATA DE UN PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS; EN CASO CONTRARIO EL PROBLEMA ES DE VIBRACIONES LIBRES.

### VIBRACIONES LIBRES

EN ESTE CASO LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

CUYA SOLUCION ES

$$y(t) = e^{-ht} (C_1 \sin \omega't + C_2 \cos \omega't) \quad (5)$$

DONDE  $\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2}$  = FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL AMORTIGUADA

Y  $C_1$  Y  $C_2$  SON CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES

(EN  $t=0$ ) DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD QUE TENGA LA MASA DEL SISTEMA.

ESTAS RESULTAN SER

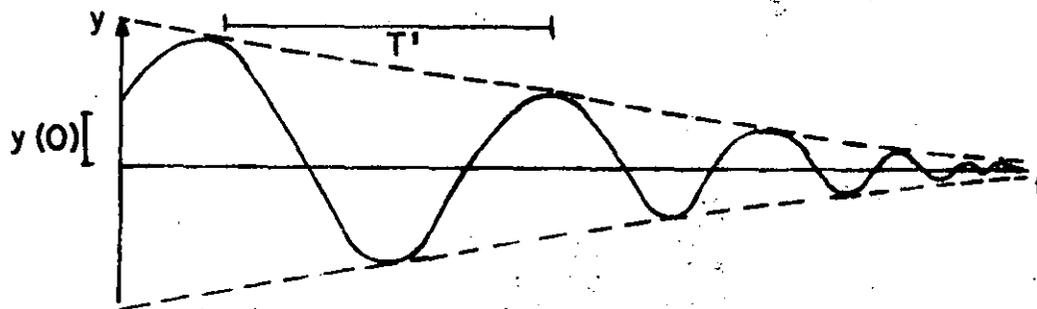
$$C_1 = \frac{\dot{y}(0) + hy(0)}{\omega'} \quad \text{Y} \quad C_2 = y(0) \quad (6)$$

LA EC (5) SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIEN COMO:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) \quad (7)$$

DONDE  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  Y  $\theta = \tan^{-1} \frac{C_1}{C_2} = \text{ANGULO DE FASE}$

LA GRAFICA DE LA EC (7) ES



$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \text{PERIODO NATURAL AMORTIGUADO, SEG}$$

$$f' = \frac{1}{T'} = \text{FRECUENCIA NATURAL AMORTIGUADA, cps}$$

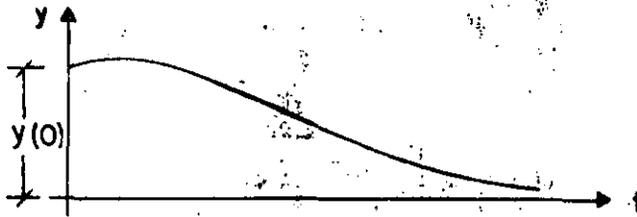
VEAMOS EL CASO ESPECIAL DE LA EC. (5) EN QUE  $h \rightarrow 0$ . EN TAL CASO,

$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} \rightarrow 0$ ,  $\cos \omega't \rightarrow 1$  Y  $\sin \omega't \rightarrow \omega't$ , CON LO CUAL LA EC. (5) SE REDUCE A

$$y(t) = e^{-\omega t} \left[ (\dot{y}(0) + hy(0)) / \omega' (\omega't) + y(0) \right]$$

$$= e^{-\omega t} [\dot{y}(0)t + (1 + \omega t)y(0)]$$

LA GRÁFICA DE ESTA ECUACIÓN ES



Y OBTIENE NO REPRESENTA UN MOVIMIENTO OSCILATORIO, POR LO CUAL SI  $h = \omega$  SE DICE QUE SE TIENE AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO. EN TAL CASO:

$$h_{cr} = \omega = \frac{C_{cr}}{2M} = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

DE DONDE  $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$ . (8)

A LA RELACION  $\zeta = C/C_{cr}$  SE LE LLAMA FRACCION DEL AMORTIGUAMIENTO CRÍTICO.

DESPEJANDO A M DE LA EC. (8) Y SUSTITUYENDOLA EN LA EC.  $h = C/(2M)$  SE OBTIENE:

$$h = \frac{C}{2 \frac{C_{cr}}{4K}} = \frac{C}{C_{cr}} \frac{2K}{2\sqrt{KM}} = \zeta \sqrt{\frac{K}{M}} = \zeta \omega$$

ADEMÁS:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega^2 \zeta^2} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

LOS VALORES USUALES EN ESTRUCTURAS QUE ASUME  $\zeta$  VARIAN ENTRE 2 Y 5%. EN ESTE INTERVALO  $\omega'$  Y  $\omega$  SON CASI IGUALES; VEAMOS, POR EJEMPLO, EL CASO EN QUE  $\zeta = 0.1$

$$\omega' = \omega \sqrt{1 - 0.01} = 0.995\omega$$

OTRA FORMA DE MEDIR EL GRADO DE AMORTIGUAMIENTO QUE TIENE UNA ESTRUCTURA ES MEDIANTE EL DECREMENTO LOGARITMICO, EL CUAL SE DEFINE COMO EL LOGARITMO DEL COCIENTE DE DOS AMPLITUDES CONSECUTIVAS

$$L = \ln \frac{y(t)}{y(t+T')} = \ln \frac{Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta)}{Ae^{-h(t+T')} \cos[\omega'(t+T') - \theta]}$$

$$= \ln \left( \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T')}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't + \omega'T' - \theta)} \right)$$

$$= \ln \left( \frac{e^{-ht}}{e^{-ht} e^{-hT'}} \frac{\cos(\omega't - \theta)}{\cos(\omega't - \theta + 2\pi)} \right)$$

$$= \ln e^{+hT'} = hT' = \zeta\omega T' = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$L = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

(10)

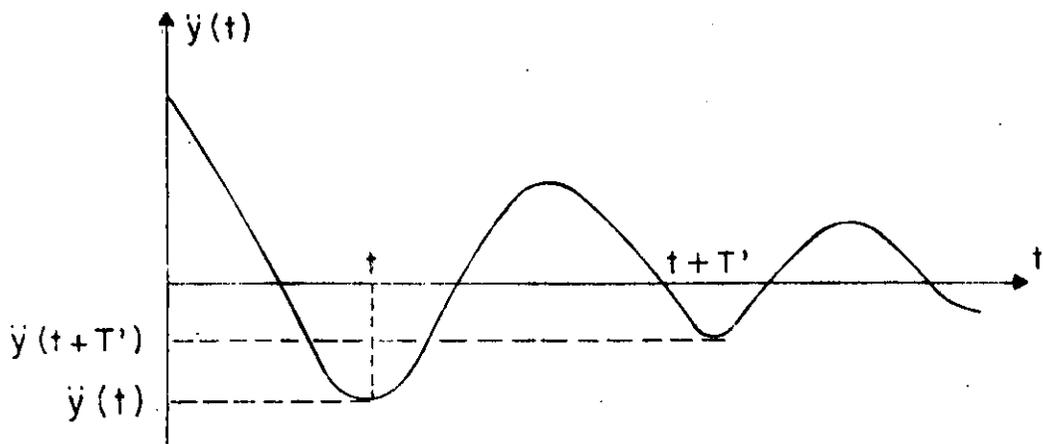
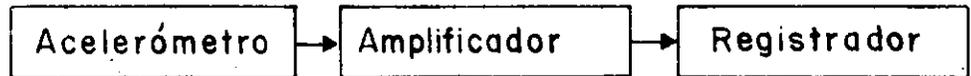
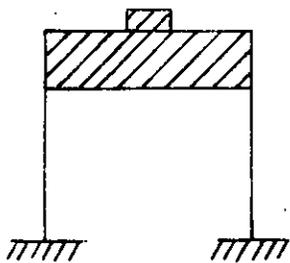
SI  $\zeta$  ES PEQUEÑO,

$$L \doteq 2\pi\zeta$$

(11)

DETERMINACION EXPERIMENTAL DE  $\zeta$  EN ESTRUCTURAS REALES O EN MODELOS

SI SE REALIZA UN EXPERIMENTO EN EL CUAL SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION SE SACA A LA ESTRUCTURA DE SU POSICION DE EQUILIBRIO ESTATICO Y SE DEJA VIBRANDO LIBREMENTE, EL REGISTRO DE LAS ACELERACIONES QUE SE REGISTREN EN LA MASA TENDRA LA MISMA FORMA QUE LA GRAFICA DE LA EC. 7.

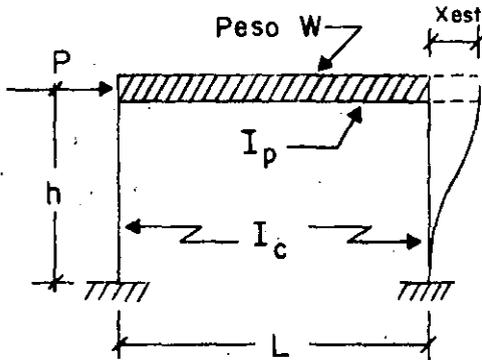


SI DE DICHO REGISTRO SE MIDEN  $\ddot{y}(t + T')$  Y  $\ddot{y}(t)$  SE PUEDE OBTENER  $L$  Y, DE LA EC. (11), DESPEJAR A  $\zeta$

$$\zeta = \frac{L}{2\pi}$$

EJEMPLO

CALCULAR EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION DE LA ESTRUCTURA MOSTRADA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



P = carga estática

$$K = \frac{P}{X_{est}}$$

X<sub>est</sub> = desplazamiento producido por P

I<sub>c</sub> = momento de inercia de las columnas

I<sub>p</sub> = momento de inercia del sistema de piso

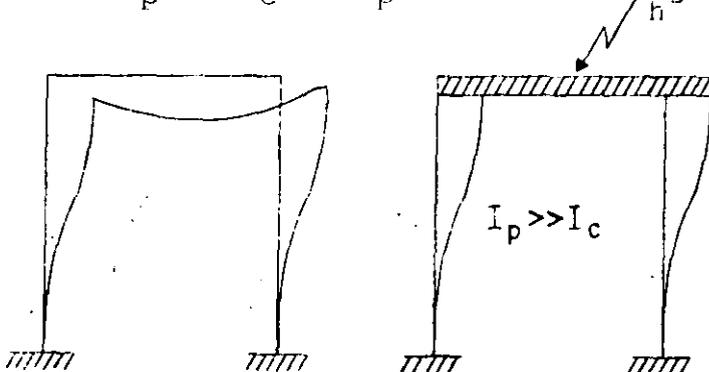
MEDIANTE EL ANALISIS ESTATICO DEL MARCO SE ENCUENTRA QUE

$$X_{est} = \frac{Ph^3}{6EI_c} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c L}{I_p h}}{6 + \frac{I_c L}{I_p h}} \Rightarrow K = \frac{6EI}{h^3} \frac{6 + \frac{I_c L}{I_p h}}{\frac{3}{2} + \frac{I_c L}{I_p h}}$$

$$\text{Período natural} = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{gK}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Wh^3}{g6EI} \frac{\frac{3}{2} + \frac{I_c L}{I_p h}}{6 + \frac{I_c L}{I_p h}}}, \text{ en seg}$$

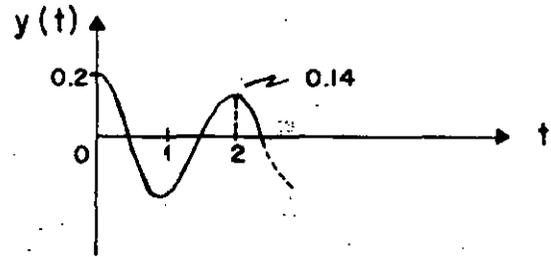
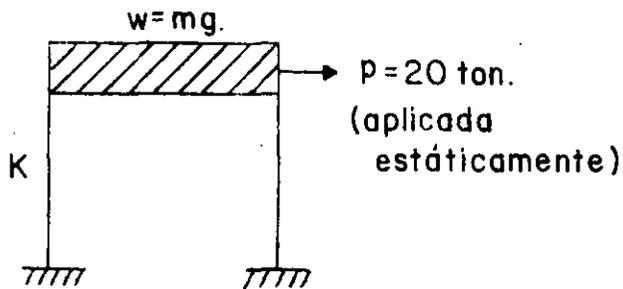
Si  $I_p \gg I_c$  ( $I_p \rightarrow \infty$ ),  $K = \frac{24EI}{h^3}$



ESTRUCTURA DE CORTANTE:  
CUANDO LAS DEFORMACIONES  
OCURREN PRINCIPALMENTE  
DEBIDO A LA FUERZA COR-  
TANTE DE ENTREPISO.

EJEMPLO

A UNA ESTRUCTURA DE UN PISO SE LE APLICA UNA CARGA HORIZONTAL DE 20 TON EN SU MASA, OBSERVANDOSE UN DESPLAZAMIENTO ESTÁTICO DE 0.2 CM. AL SOLTAR SUBITAMENTE LA FUERZA SE REGISTRA UN PERIODO DE OSCILACION DE 0.2 SEG, Y QUE LA AMPLITUD EN EL SEGUNDO CICLO ES DE 0.14 CM.



CALCULAR  $W$ ,  $\omega'$ ,  $f'$ ,  $L$  Y  $\zeta$

$$1. \quad \text{DE } T' = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \frac{2\pi\sqrt{W}}{\sqrt{Kg}} = 0.2 \quad \text{Y} \quad K = \frac{2.0}{0.2} = 100 \frac{\text{TON}}{\text{CM}}$$

SE OBTIENE

$$W = T'^2 \frac{Kg}{4\pi^2} = (0.2)^2 \times 100 \times 981 / 4\pi^2 = \frac{0.04 \times 100 \times 981}{9.87}$$

$$W = 99.4 \text{ TON}$$

$$2. \quad \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{0.2} = 10 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}} : f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ cps}$$

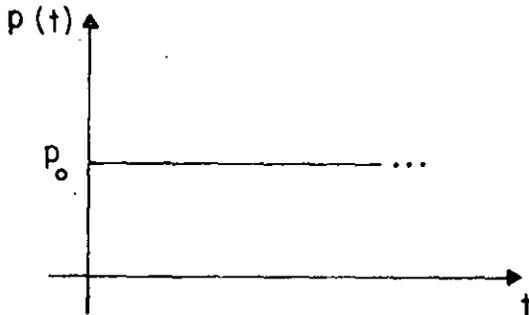
$$3. \quad L = \ln \frac{0.2}{0.14} = \ln 1.43 = 0.357$$

$$\zeta = \frac{L}{2\pi} = \frac{0.357}{2\pi} = 0.0568 \quad \text{O} \quad \zeta = 5.68 \%$$

$$C = \zeta C_{cr} = \zeta 2\sqrt{KM} = 0.1132 \sqrt{100 \times 99.4/981}$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD SUJETO A LA SIGUIENTE EXCITACION, CON  $c = 0$ :



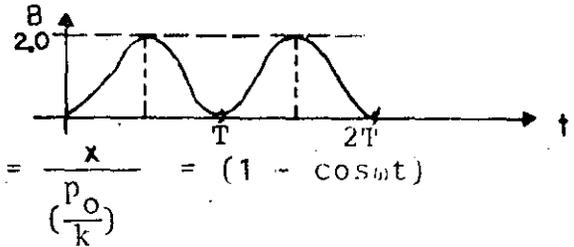
$$m\ddot{x} + kx = p_0$$

$$x = C_1 \text{sen}\omega t + C_2 \text{cos}\omega t + p_0/k$$

SI EN  $t = 0$ ,  $x = 0$  Y  $\dot{x} = 0$ :

$$C_2 = -p_0/k \quad \text{Y} \quad C_1 = 0$$

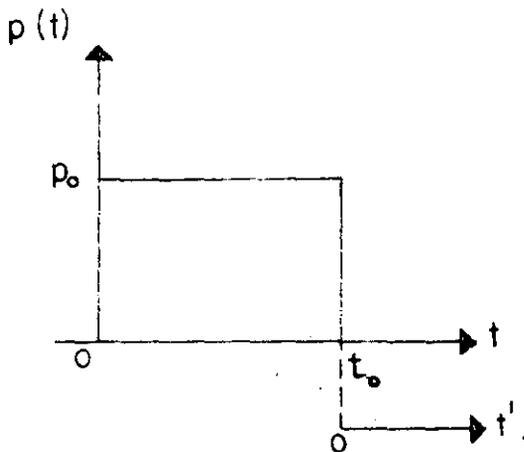
$$\therefore x = \frac{p_0}{k} (1 - \text{cos}\omega t);$$



$$B = \text{FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA} = \frac{x}{\left(\frac{p_0}{k}\right)} = (1 - \text{cos}\omega t)$$

$B_{\text{MAX}} = 2$ , EN  $t = T/2, 3T/2 \dots$

AHORA, SI LA EXCITACION ES DE DURACION  $t_0$



SI  $t < t_0$  :

$$x = \frac{p_0}{k} (1 - \text{cos}\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\omega p_0}{k} \text{sen}\omega t$$

EN  $t = t_0$  :

$$x(t_0) = \frac{p_0}{k} (1 - \text{cos}\omega t_0)$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{\omega p_0}{k} \text{sen}\omega t_0$$

CONDICIONES INICIALES PARA  $t > t_0$

SI  $t > t_0$ ,  $x = A \cos \omega t' + B \sin \omega t'$ , CON  $t' = t - t_0$

EN  $t' = 0$  ( $t = t_0$ ), SE DEBEN CUMPLIR LAS CONDICIONES INICIALES ANTERIORES, LO CUAL CONDUCE A

$$A = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \quad Y \quad B = \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0$$

$$\begin{aligned} \text{POR LO QUE } x &= \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t' + \frac{p_0}{k} \sin \omega t_0 \sin \omega t' \\ &= \frac{p_0}{k} \sqrt{(1 - \cos \omega t_0)^2 + \sin^2 \omega t_0} \sin(\omega t' - \theta) \end{aligned}$$

0

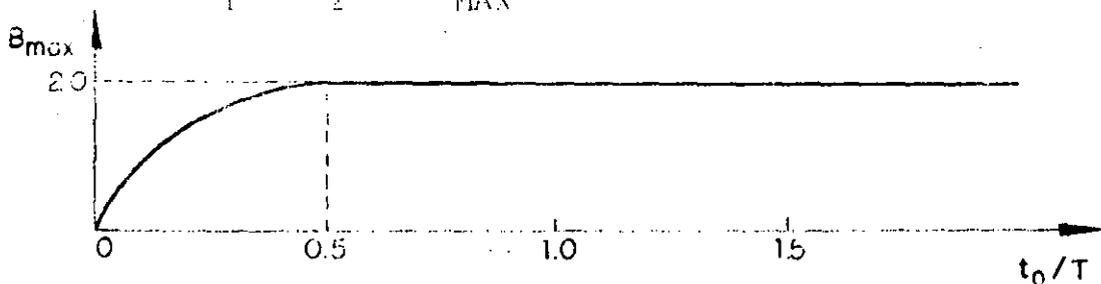
$$x = \frac{p_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega t_0)} \sin(\omega t' - \theta)$$

$$= \frac{p_0}{k} \underbrace{\left( 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} \right)}_{B} \sin(\omega t' - \theta)$$

B = FACTOR DE AMPLIFICACION

$$B_{\text{MAX}} = 2 \sin \frac{\omega t_0}{2} = 2 \sin \left( \pi \frac{t_0}{T} \right)$$

CUANDO  $\frac{\omega t_0}{2} = \frac{\pi}{2}$ ,  $B_{\text{MAX}} = 2$



EL MAXIMO OCURRE DESPUES DE LA EXCITACION

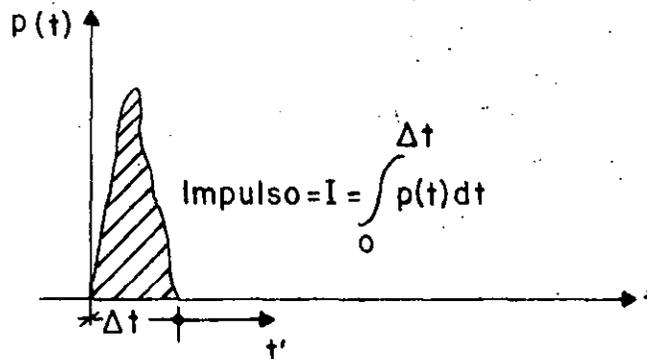
EL MAXIMO OCURRE DURANTE LA EXCITACION

SI  $t_0/T$  ES MUY PEQUEÑO.  $\sin \frac{\omega t_0}{2} = \frac{\omega t_0}{2}$

$$Y \quad x_{\text{MAX}} = \frac{2p_0}{k} \frac{\pi t_0}{T} = \frac{2p_0}{\frac{mk}{m}} \frac{\omega t_0}{2} = \frac{p_0 t_0}{m\omega} = \frac{I}{m\omega}$$

EN DONDE  $i = p_0 t_0 = \text{AREA BAJO LA EXCITACION}$

EJEMPLO: EXCITACION DADA POR UN IMPULSO.-SEA UN IMPULSO APLICADO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta t$  MUY PEQUEÑO, TAL QUE  $\Delta t/T \ll 1$ :



POR EL PRINCIPIO IMPULSO - MOMENTO SE TIENE QUE

$$I = \int_0^{\Delta t} p(t) dt = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = I/m$$

EN DONDE  $\dot{x}$  ES LA VELOCIDAD QUE EL IMPULSO LE IMPRIME A LA MASA DEL SISTEMA. DESPUES DE  $\Delta t$  EL SISTEMA QUEDA VIBRANDO LIBREMENTE CON VELOCIDAD INICIAL  $\dot{x}(0) = \frac{I}{m}$ , MIDIENDO EL TIEMPO EN LA ESCALA DE  $t'$ , Y CON DESPLAZAMIENTO INICIAL QUE PUEDE CONSIDERARSE NULO, DEBIDO A QUE EN EL CORTO INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta t$  LA MASA ADQUIERE UN DESPLAZAMIENTO DE MAGNITUD DESPRECIABLE. EN TAL CASO LA RESPUESTA RESULTA

$$x(t') = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \text{sen}\omega t' = \frac{I}{m\omega} \text{sen}\omega t'$$

SI EL SISTEMA TIENE AMORTIGUAMIENTO,

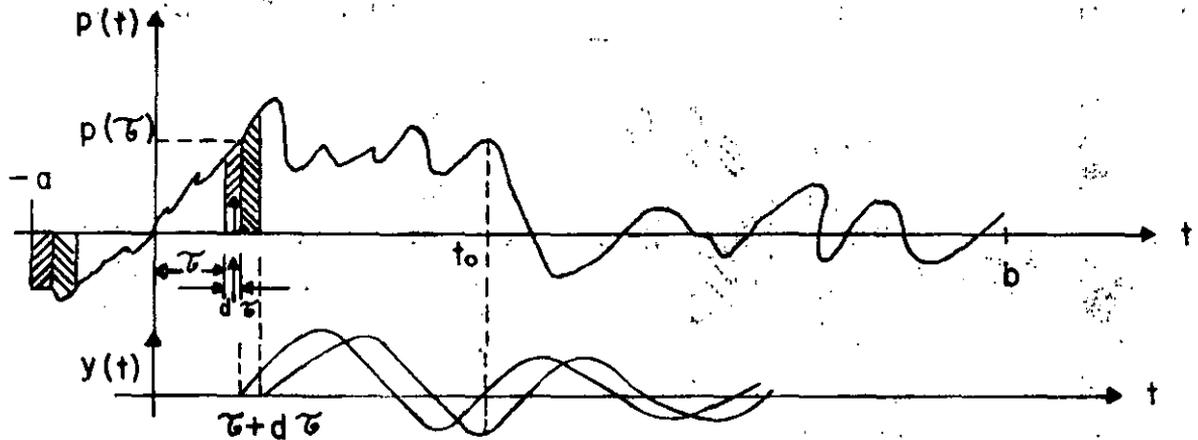
$$x(t') = \frac{I}{m\omega} e^{-\zeta\omega t'} \text{sen}\omega' t'$$

## SOLUCION AL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS

### A. FUERZA EXTERNA

VEAMOS PRIMERO EL CASO EN QUE EXISTE  $p(t)$  Y QUE  $\dot{x}_0(t) = 0$ ;

SIENDO  $p(t)$  ARBITRARIA



PUESTO QUE  $d\tau \ll T$ , LA FUERZA APLICADA EN  $t = \tau$  PRODUCIRA UN INCREMENTO INSTANTANEO EN LA VELOCIDAD DE LA MASA IGUAL A

$$\dot{y} = \frac{p(\tau)d\tau}{M}$$

Y UN INCREMENTO INSTANTANEO NULO EN EL DESPLAZAMIENTO, ES DECIR,  $y=0$ .

TOMANDO ESTOS INCREMENTOS COMO CONDICIONES INICIALES EN  $t = \tau$ , LA EC. 5

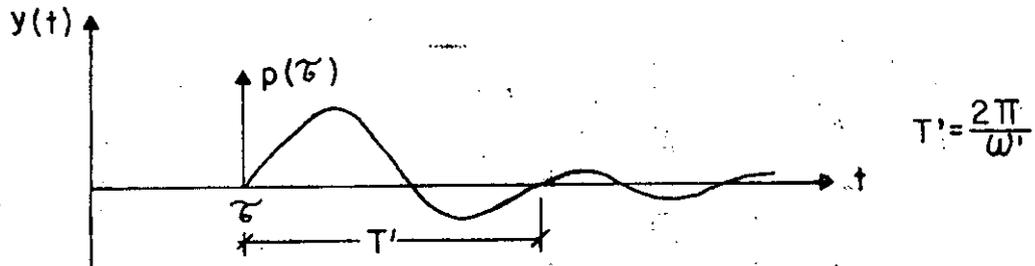
DA COMO RESULTADO

$$y(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{M\omega'} \text{ sen } \omega'(t-\tau) e^{-h(t-\tau)} ; t \geq \tau$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES LINEAL ES POSIBLE SUPERPONER LOS EFECTOS OCACIONADOS POR LOS IMPULSOS APLICADOS EN CADA  $\tau$  QUE HAYAN OCURRIDO ANTES DEL INSTANTE  $t$  DE INTERES; ES DECIR,

$$y(t) = \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau \quad (12)$$

LA FUNCION  $\frac{1}{M\omega'} e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau)$ , QUE ES LA RESPUESTA A UN IMPULSO INSTANTANEO UNITARIO DE FUERZA, SE LE CONOCE COMO FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL SISTEMA.



LA SOLUCION DADA EN LA EC (12) SE DENOMINA INTEGRAL DE DUHAMEL. ESTA CONSTITUYE LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO; LA SOLUCION GENERAL ES:

$$y(t) = Ae^{-ht} \cos(\omega't - \theta) + \frac{1}{M\omega'} \int_{-\infty}^t p(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen}\omega'(t-\tau) d\tau$$

EN DONDE A y  $\theta$  DEPENDEN DE LAS CONDICIONES INICIALES DE DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD,  $y(0)$  Y  $\dot{y}(0)$ , RESPECTIVAMENTE. EN GENERAL LA PARTE DE LA RESPUESTA DADA POR LA SOLUCION PARTICULAR ES LA MAS IMPORTANTE, YA QUE LA OTRA PARTE SE AMORTIGUA RAPIDAMENTE.

#### B. MOVIMIENTO DEL SUELO

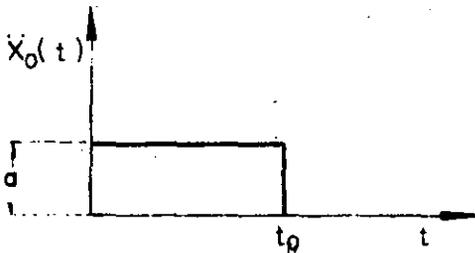
PARA ESCRIBIR LA SOLUCION PARTICULAR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO PARA EL CASO DE VIBRACION FORZADA POR MOVIMIENTO DE LA BASE DE LA ESTRUCTURA, BASTA CAMBIAR  $p(\tau)/M$  DE LA EC. (12) POR  $-\ddot{x}_0$ , YA QUE EN DICHA ECUACION APARECE EN EL MIEMBRO DERECHO  $p(t)/M$  CUANDO LA EXCITACION ES  $p(t)$  Y APARECE  $-\ddot{x}_0$  CUANDO LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DEL SUELO. EN ESTE CASO

LA SOLUCION PARTICULAR ES, ENTONCES:

$$y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^{\dots} x_0(\tau) e^{-h(t-\tau)} \text{sen} \omega'(t-\tau) d\tau \quad (14)$$

EJEMPLO

CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUANDO LA EXCITACION ES LA SIGUIENTE:



$$\zeta = 0$$

$$\ddot{x}_0(t) = a, \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$\ddot{x}_0(t) = 0, \text{ SI } t < 0 \text{ ó } t > t_0$$

CONSIDERESE QUE  $y(0)=0$  Y  $\dot{y}(0)=0$ . PUESTO QUE LAS CONDICIONES INICIALES SON NULAS SE TIENE QUE  $\lambda=0$  (UTILIZANDO LA EC (13) Y LA SOLUCION PARTICULAR QUE SIGUE, EC (A)):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t a \text{sen} \omega(t-\tau) d\tau = \frac{-a}{\omega} \int_0^t \text{sen} \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad \text{SI } 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad (A)$$

PARA FINES DE DISEÑO ESTRUCTURAL ES IMPORTANTE CONOCER LA RESPUESTA MAXIMA; ESTA OCURRE CUANDO  $\cos \omega t = -1$ , O SEA, CUANDO

$$\omega t = \pi \quad \text{ó} \quad t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi/T} = \frac{T}{2}$$

Y VALE

$$\text{MAX} \{ [y(t)] \} = \frac{2a}{\omega^2} = \frac{a}{2\pi^2} T^2, \text{ SI } 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0 \text{ O } 0 \leq T \leq 2t_0$$

PARA  $t > t_0$ , O SEA, PARA  $T/2 > t_0$  ES NECESARIO OBTENER LA RESPUESTA EN VIBRACION LIBRE CON LAS CONDICIONES INICIALES DE VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO CORRESPONDIENTES A  $t = t_0$ :

$$y(t_0) = \frac{-a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t_0) ; \dot{y}(t_0) = \frac{-a}{\omega} \text{sen} \omega t_0$$

APLICANDO LAS ECS. (5) Y (6) OBTENEMOS:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{-a}{\omega^2} [\text{sen} \omega t_0 \text{sen} \omega t' - (1 - \cos \omega t_0) \cos \omega t'] \\ &= \frac{-a}{\omega^2} \sqrt{\text{sen}^2 \omega t_0 + (1 - \cos \omega t_0)^2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{-2a}{\omega^2} \frac{\text{sen} \omega t_0}{2} \text{sen} (\omega t' - \vartheta)$$

$$\text{DONDE } t' = t - t_0 \text{ Y } \vartheta = \tan^{-1} \left( \frac{1 - \cos \omega t_0}{\text{sen} \omega t_0} \right)$$

EL VALOR MAXIMO DE LA RESPUESTA EN ESTE INTERVALO ES

$$\text{MAX} \{ [y(t)] \} = \frac{2a}{\omega^2} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|, \text{ SI } t > t_0 \text{ O } T > 2t_0$$

CONSIDEREMOS AHORA EL CASO EN QUE LA ESTRUCTURA ES EXCITADA POR LA FUERZA ARMONICA

$$p(t) = p_0 \text{ sen}\omega t$$

DE DURACION INDEFINIDA.

LA SOLUCION DE ESTE PROBLEMA SE PUEDE ENCONTRAR SUSTITUYENDO A  $p(t) = p_0 \text{ sen}\omega t$  EN LA INTEGRAL DE DUHAMEL Y OBTENIENDO SU SOLUCION. SIN EMBARGO, EL RESULTADO LO OBTENDREMOS DE LA CONSIDERACION DE QUE PARA QUE EL MIEMBRO DERECHO DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO APAREZCA UN TERMINO ARMONICO ES NECESARIO QUE EN EL IZQUIERDO SE TENGAN COMBINACIONES DE TERMINOS TAMBIEN ARMONICOS. CONSIDEREMOS, POR LO TANTO, LA SOLUCION

$$y(t) = A \text{ sen}\omega t + B \text{ cos}\omega t \quad (14)$$

Y DETERMINEMOS LOS VALORES QUE DEBEN TENER A Y B PARA SATISFACER LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO, PARA LO CUAL HAY QUE SUSTITUIR A  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  Y  $\ddot{y}(t)$  EN LA ECUACION DIFERENCIAL. HACIENDO ESTO Y FACTORIZANDO:

$$\begin{aligned} &(-A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A) \text{ sen}\omega t + \\ &(-B\omega^2 + 2hA\omega + \omega^2 B) \text{ cos}\omega t = \frac{P_0}{M} \text{ sen}\omega t + 0 \times \text{cos}\omega t \end{aligned}$$

PARA QUE ESTA IGUALDAD SE CUMPLA SE REQUIERE QUE

$$\begin{aligned} -A\omega^2 - 2h\omega B + \omega^2 A &= \frac{P_0}{M} \\ -B\omega^2 + 2hA\omega + \omega^2 B &= 0 \end{aligned}$$

RESOLVIENDO ESTE SISTEMA DE ECUACIONES SE OBTIENE:

$$A = \frac{\frac{P_0}{M} (\Omega^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

$$B = \frac{-2h\Omega \frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}$$

SUSTITUYENDO A Y B EN LA EC. (14):

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2} \{ (\Omega^2 - \omega^2) \text{sen}\Omega t - 2h\Omega \text{cos}\Omega t \} \quad (15)$$

O, TAMBIEN

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{M}}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2 \Omega^2}} \text{sen}(\Omega t - \emptyset) \quad (16)$$

$$\text{EN DONDE } \emptyset = \text{ANG TAN} \left( \frac{-B}{A} \right) = \text{TAN}^{-1} \frac{2h\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \text{ANGULO DE FASE} \quad (17)$$

DIVIDIENDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LAS ECS (16) Y (17) ENTRE  $\omega^2$

SE OBTIENE:

$$y(t) = \frac{\frac{P_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \text{sen}(\Omega t - \emptyset) \quad (18)$$

$$\emptyset = \text{TAN}^{-1} \frac{2\zeta \frac{\Omega}{\omega}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \quad (19)$$

SOLUCION GENERAL PARA EL CASO  $\xi = 0$

$$y(t) = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{P_0}{M} \frac{\operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2}$$

SI EL SISTEMA PARTE DEL REPOSO, LAS CONDICIONES INICIALES SON

$y(0) = 0$  y  $\dot{y}(0) = 0$ . EN ESTE CASO:

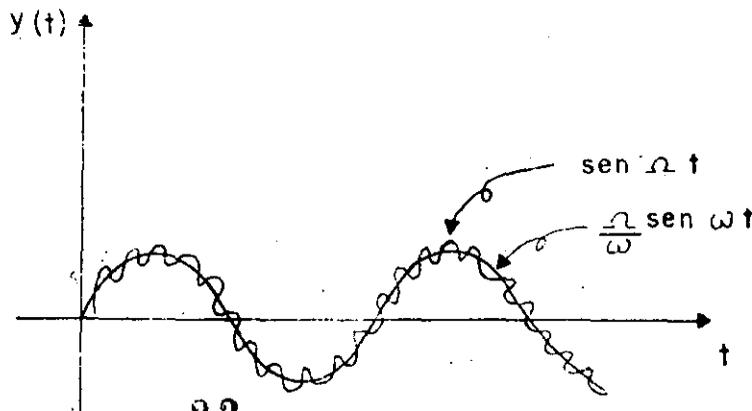
$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= C_1 \operatorname{sen}(\omega 0) + C_2 \cos(\omega 0) + \frac{P_0}{M} \frac{\operatorname{sen}(\Omega 0)}{\omega^2 - \Omega^2} = 0 \\ &= 0 + C_2 + 0 = C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= C_1 \omega \cos(\omega 0) - C_2 \omega \operatorname{sen}(\omega 0) + \frac{P_0 \Omega}{M} \frac{\cos(\Omega 0)}{\omega^2 - \Omega^2} = 0 \\ &= C_1 \omega + \frac{P_0 \Omega}{M} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore C_1 = \frac{-P_0}{M} \frac{(\Omega/\omega)}{\omega^2 - \Omega^2}$$

$$y(t) = \frac{P_0}{M} \left( \frac{\operatorname{sen} \Omega t}{\omega^2 - \Omega^2} - \frac{\Omega}{\omega} \frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega^2 - \Omega^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{(P_0/M)}{(1 - \omega^2/\Omega^2)} \left[ \operatorname{sen} \Omega t - \frac{\Omega}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right] \quad (20')$$



SI SE TIENE EXCITACION ARMONICA EN LA BASE DE LA ESTRUCTURA  
 $x_0(t) = a \sin \omega t$ , O SEA,  $\ddot{x}_0 = -a\omega^2 \sin \omega t$ . BASTA CAMBIAR A  $p_0/M$  EN LA  
 EC. (16) POR  $-a\omega^2$ ; HACIENDO ESTO SE OBTIENE

$$y(t) = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} a \sin(\Omega t - \phi) \quad (20)$$

FACTOR DE AMPLIFICACION DINAMICA DE DESPL. =  $B_d = \text{MAX}[\frac{y(t)}{a}]$

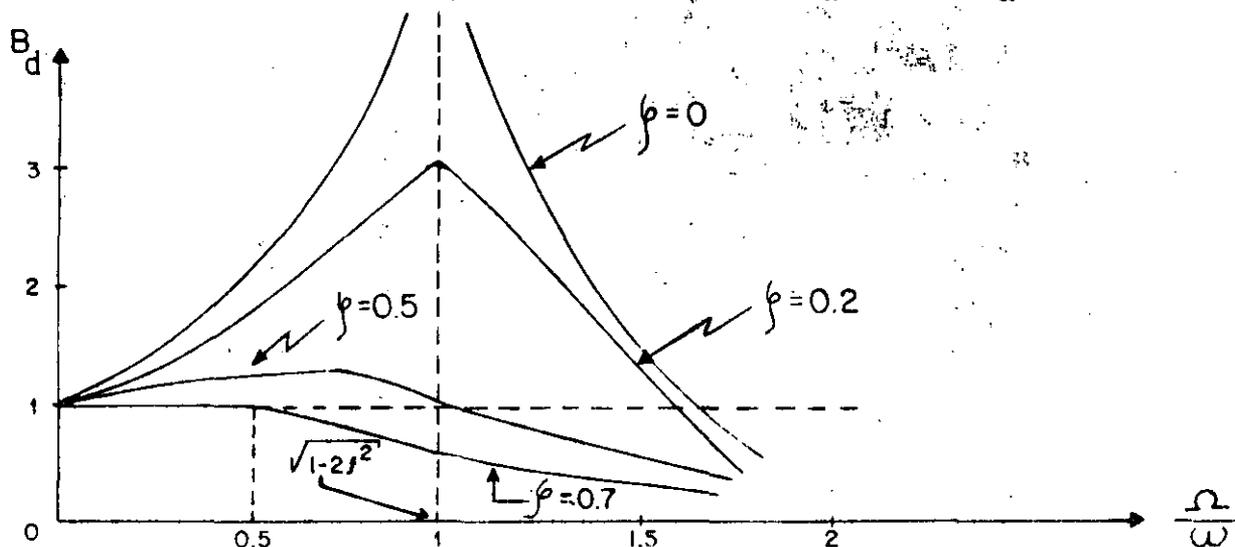


FIG. 1. CURVAS DE AMPLIFICACION DINAMICA PARA EL CASO DE FUERZA EXTERNA

$$B_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2\zeta\frac{\Omega}{\omega})^2}} \quad (21)$$

LOS FACTORES DE AMPLIFICACION DINAMICA DE VELOCIDAD Y ACELERACION SE  
 SE PUEDEN OBTENER DERIVANDO RESPECTO A  $t$  LA EC. (16) O LA (20), SEGUN  
 SEA EL CASO. LOS RESULTADOS SON, RESPECTIVAMENTE,

$$\text{MAX}[\frac{\dot{y}(t)}{a\omega}] = B_v = \frac{\Omega}{\omega} B_d \quad \text{Y} \quad B_a = (\frac{\Omega}{\omega})^2 B_d = \text{MAX}[\frac{\ddot{y}(t)}{a\omega^2}] \quad (22)$$

### EJEMPLO

CON UNA MAQUINA VIBRATORIA PORTATIL QUE PRODUCE FUERZAS ARMONICAS SE PROBO UNA ESTRUCTURA, AJUSTANDO LA MAQUINA EN LAS FRECUENCIAS  $\Omega_1 = 16 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$  Y  $\Omega_2 = 25 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$ , CON UNA FUERZA MAXIMA DE 500 LB EN CADA CASO. LAS AMPLITUDES Y ANGULOS DE FASE DE LA RESPUESTA QUE SE MIDIERON FUERON:

$$\rho_1 = 7.2 \times 10^{-3} \text{ in}, \theta_1 = 15^\circ (\cos\theta_1 = 0.966 ; \text{sen}\theta_1 = 0.259)$$

$$\rho_2 = 14.5 \times 10^{-3} \text{ in}, \theta_2 = 55^\circ (\cos\theta_2 = 0.574; \text{sen}\theta_2 = 0.819)$$

EVALUAR LAS PROPIEDADES DINAMICAS DEL SISTEMA.

HACIENDO:

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} B_{d_i} = \frac{p_o}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \frac{1}{1 + \underbrace{|2\zeta\beta/(1-\beta^2)|^2}_{\cos^2\theta_i}} \right)^{1/2}$$

$$\rho_i = \frac{p_o}{k} \frac{\cos\theta_i}{1 - \beta^2} ; \beta = \Omega/\omega$$

$$k - k\beta^2 = \frac{p_o \cos\theta_i}{\rho_i} = k - \Omega^2 m \quad (23)$$

SÚSTITUYENDO LOS VALORES EXPERIMENTALES DE LAS DOS PRUEBAS:

$$\left. \begin{aligned} k - (16)^2 m &= \frac{500 (0.966)}{7.2 \times 10^{-3}} \\ k - (25)^2 m &= \frac{500 (0.574)}{14.5 \times 10^{-3}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 100\,000 \frac{\text{lb}}{\text{in}} \\ m &= 128.5 \frac{\text{lb} \cdot \text{SEG}^2}{\text{in}} \end{aligned}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27.9 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

USANDO LAS ECS. (17) Y (23) SE OBTIENE:

$$\zeta = \frac{p_o \operatorname{sen} \theta_i}{2\beta_i k\rho_i} ; \text{ DE DONDE } \zeta = \frac{500 \cdot (0.259)}{2 \frac{16}{27.9} 100\,000 (7.2 \times 10^{-3})} = 15.7\%$$

### RESONANCIA

CUANDO LA EXCITACION TIENE FRECUENCIA IGUAL A LA NATURAL DEL SISTEMA, SE DICE QUE SE PRESENTA EL CASO DE RESONANCIA. DE LA EC. (20)

ES EVIDENTE QUE SI  $\beta = \Omega/\omega = 1$  SE TIENE

$$y(t) = \underbrace{\frac{1}{2\zeta}}_{B_d} a \operatorname{sen}(\Omega t - \theta)$$

$O(B_d)_{\text{res}} = \frac{1}{2\zeta}$  EN CASO DE MOVIMIENTO DEL SUELO Y DE FUERZA EXTERNA

SIN EMBARGO, AUNQUE ESTA RESPUESTA ES CASI IGUAL A LA MAXIMA, ESTA OCURRE CUANDO  $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$ . EN EL CASO DE  $\ddot{y}(t)$  Y  $\ddot{y}(t)$ , EL MAXIMO OCURRE, RESPECTIVAMENTE, CUANDO

$$\Omega = \omega \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \quad \text{SI } \zeta \leq 20\%, \text{ LOS VALORES DE ESTAS } \Omega \text{ NO}$$

DIFIEREN EN MAS DE 2%.

EL MAXIMO VALOR DE  $B_d$  (PARA  $\Omega = \omega \sqrt{1-2\zeta^2}$ ) ES

$$(B_d)_{\text{MAX}} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{O} \quad (B_d)_{\text{MAX}} = \frac{(\Omega/\omega)^2}{2\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}$$

SI SE TIENE FUERZA EXTERNA O MOVIMIENTO DEL SUELO, RESPECTIVAMENTE.

SE OBSERVA EN ESTAS ECUACIONES QUE SI  $\zeta=0$ ,  $(B_d)_{\text{MAX}} = \infty$ .

SI SE ANALIZA LA SOLUCION GENERAL DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE MOVIMIENTO PARA EL CASO DE CONDICIONES INICIALES NULAS Y  $\beta=1$  SE TIENE QUE:

$$y(t) = e^{-ht} (A \operatorname{sen} \omega' t + B \operatorname{cos} \omega' t) - \frac{P_0}{k} \frac{\operatorname{cos} \omega t}{2\zeta}$$

$$y(0) = B - p_0 / (2\zeta k) = 0$$

DE DONDE, HACIENDO  $y(0)=0$  Y  $\dot{y}(0)=0$ , SE OBTIENEN:

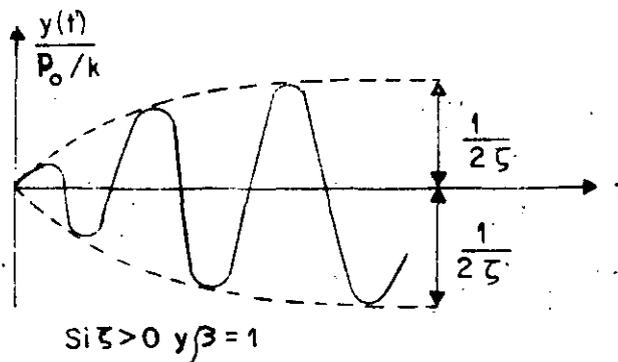
$$A = \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{2\omega'} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{p_0}{k} \frac{1}{2\zeta}$$

POR LO QUE

$$y(t) = \frac{1}{2\zeta} \frac{p_0}{k} \left[ e^{-ht} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \omega' t + \operatorname{cos} \omega' t \right) - \operatorname{cos} \omega t \right]$$

PARA AMORTIGUAMIENTOS PEQUEÑOS:

$$\frac{y(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2\zeta} (e^{-ht} - 1) \operatorname{cos} \omega t$$

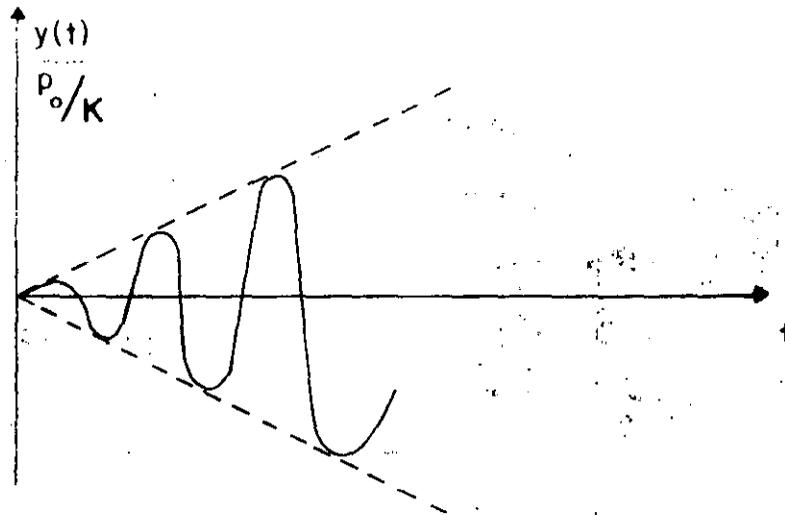


SI  $\zeta=0$ , APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL, SE OBTIENE:

26

$$\frac{y(t)}{p_0/k} = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \omega t - \omega t \operatorname{cos} \omega t)$$

O SEA, EL MAXIMO DE LA RESPUESTA TIENDE A INFINITO GRADUALMENTE.



CARACTERISTICAS DINAMICAS DE LOS REGISTRADORES DE SISMOS.

SI LA ACELERACION DE LA BASE DE UN INSTRUMENTO ES ARMONICA, DADA POR LA ECUACION

$$\ddot{x}_0(t) = a \operatorname{sen} \Omega t$$

EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER

$$\bar{B}_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{B_d}{\omega^2}$$

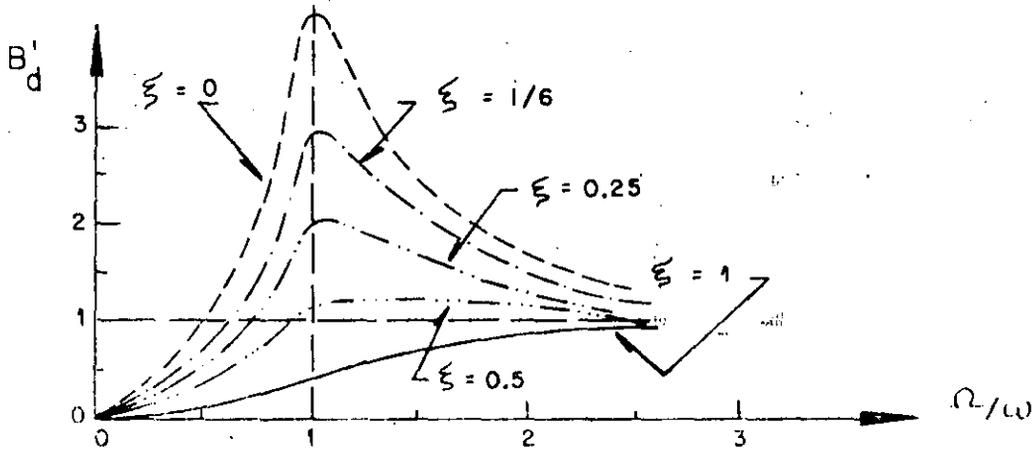
PUESTO QUE LA FIG I CORRESPONDE A  $B_d$ , Y EN ELLA SE OBSERVA QUE PARA  $\zeta = 0.7$  SE TIENE  $B_d = 1$  PARA  $0 \leq \Omega/\omega \leq 0.6$ , SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA DE UN SISTEMA ES PROPORCIONAL A LA ACELERACION DE SU BASE, SI ESTE TIENE AMORTIGUAMIENTO DEL 70% Y SI LAS EXCITACIONES QUE SE TRATAN DE REGISTRAR TIENEN FRECUENCIAS INFERIORES AL 60% DE LA FRECUENCIA NATURAL DEL SISTEMA. SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO RESULTA SER UN ACELEROMETRO.

EN INGENIERIA SISMICA LA MAXIMA FRECUENCIA DE INTERES ES DEL ORDEN DE 10 CPS ( $T = 0.1$  SEG), POR LO QUE LOS ACELEROMETROS TIENEN FRECUENCIA NATURAL DE 16 A 20 CPS.

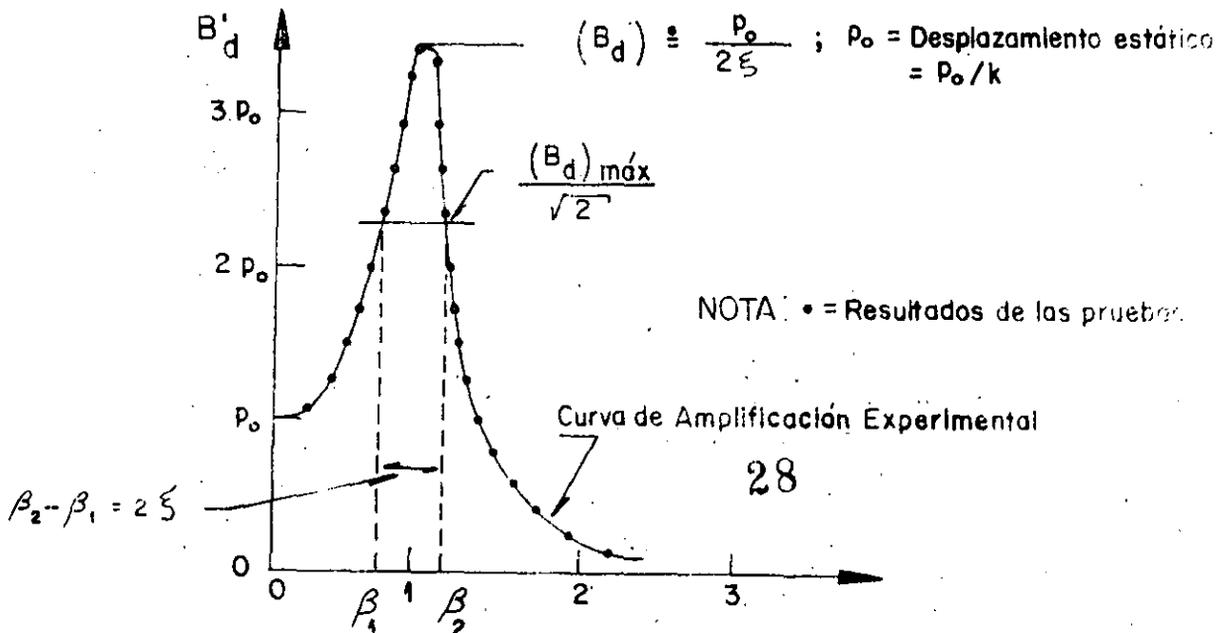
POR OTRA PARTE SI LA EXCITACION DEL SUELO ES  $x_o = a \text{ sen } \Omega t$ , O SEA,  $\ddot{x} = -a \Omega^2 \text{ sen } \Omega t$ , ENTONCES EL FACTOR DE AMPLIFICACION RESULTA SER EL SEÑALADO EN LA ECUACION (20), ES DECIR,

$$B'_d = \frac{(\Omega/\omega)^2}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega)^2)^2 + (2\zeta\Omega/\omega)^2}}$$

EN LA GRAFICA CORRESPONDIENTE SE OBSERVA QUE SI  $\zeta = 0.5$  Y  $\Omega > \omega$  EL DESPLAZAMIENTO DE LA MASA ES PROPORCIONAL AL DEL SUELO: SI ESTO SE CUMPLE, EL APARATO, CONSTITUYE UN DESPLAZOMETRO, CONOCIDO TAMBIEN COMO SISMOMETRO.



DETERMINACION EXPERIMENTAL DEL AMORTIGUAMIENTO DE UNA ESTRUCTURA MEDIANTE VIBRACIONES FORZADAS ARMONICAS



SI SE DETERMINA  $B_d$  EXPERIMENTALMENTE MEDIANTE UNA SERIE DE PRUEBAS DE VIBRACION FORZADA CON FUERZAS ARMONICAS, Y ADEMAS SE DETERMINA  $\rho_o$ , ENTONCES

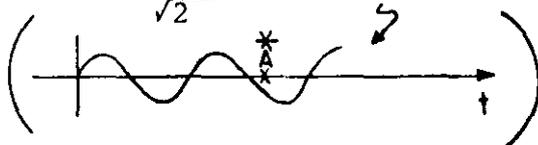
$$\tau \doteq \frac{\rho_o}{2(B_d)_{MAX}} \quad (24)$$

OTRO METODO PARA DETERMINAR  $\zeta$  CON BASE EN LA CURVA EXPERIMENTAL DE  $B_d$  SE CONOCE CON EL NOMBRE DE "METODO DEL ANCHO DE BANDA DE LA MITAD DE POTENCIA". ESTE SE BASA EN DETERMINAR LAS FRECUENCIAS QUE CORRESPONDEN AL VALOR rms DE LA AMPLITUD EN RESONANCIA, EL CUAL VALE

$(B_d)_{MAX}/\sqrt{2}$ ; SEAN  $\beta_2$  Y  $\beta_1$  ESTAS FRECUENCIAS. DE LA ECUACION DE  $B_d$

SE OBTIENE:

$$rms = \frac{A}{\sqrt{2}} = \text{RAIZ CUADRADA DEL VALOR MEDIO CUADRATICO}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\rho_o}{2\zeta} = \rho_o / \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

ELEVANDO AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS:

$$\frac{1}{8\zeta^2} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

$$\text{DE DONDE } \beta^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}$$

DE AQUI, DESPRECIANDO EL TERMINO  $\zeta^2$  DEL RADICAL, SE OBTIENE

$$\beta_1^2 \doteq 1 - 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_1 \doteq 1 - \zeta - \zeta^2$$

$$\beta_2^2 \doteq 1 + 2\zeta - 2\zeta^2 \quad ; \quad \beta_2 \doteq 1 + \zeta - \zeta^2$$

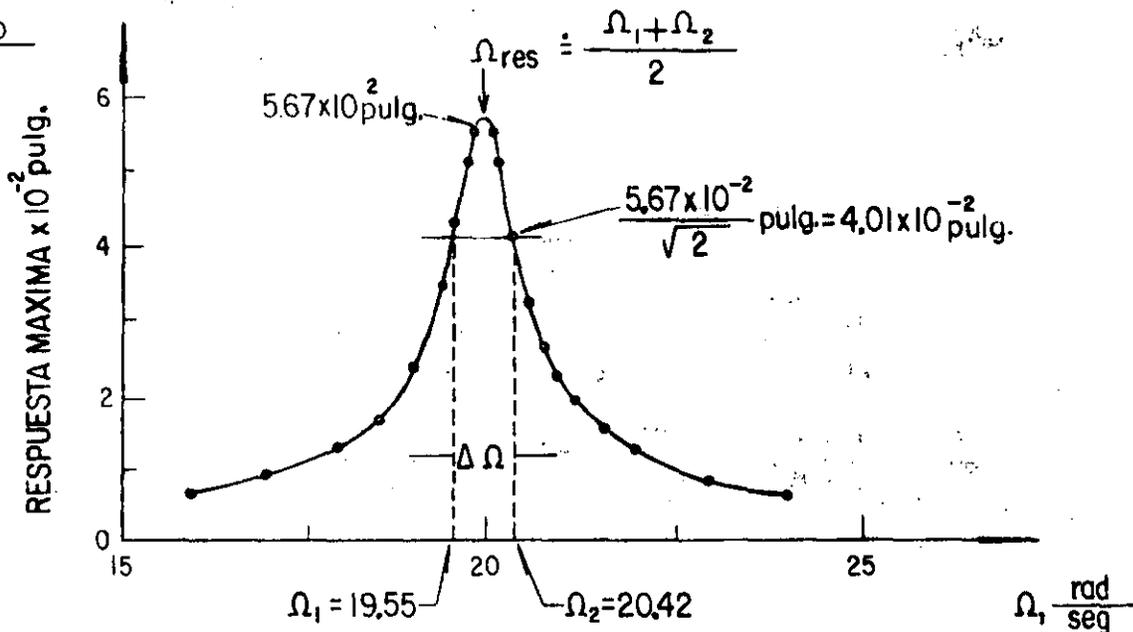
$$\beta_2 - \beta_1 \doteq 2\zeta$$

DE DONDE

$$\zeta = \frac{B_2 - B_1}{2}$$

(25)

EJEMPLO



DE LA EC (25)

$$A\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = 0.87 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$\zeta = \frac{B_2 - B_1}{2} = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_{\text{res}}} - \frac{\Omega_1}{\Omega_{\text{res}}}}{2} = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_2 + \Omega_1} = \frac{0.87}{39.97} = 2.18\%$$

METODO NUMERICO DE NEWMARK PARA RESOLVER EL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS.

EL METODO QUE A CONTINUACION SE DESCRIBE ES ADAPTABLE A SISTEMAS NO LINEALES CON VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.

PROCEDIMIENTO:

1. SEAN  $y_i, \dot{y}_i, \ddot{y}_i$  CONOCIDOS EN EL INSTANTE  $t_i$ , Y  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ . SUPONGAMOS EL VALOR DE  $\ddot{y}_{i+1}$
2. CALCULEMOS  $\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})\Delta t/2$  (26)

3. CALCULEMOS  $y_{i+1} \doteq y_i + \dot{y}_i \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{y}_{i+1} (\Delta t)$  (27)

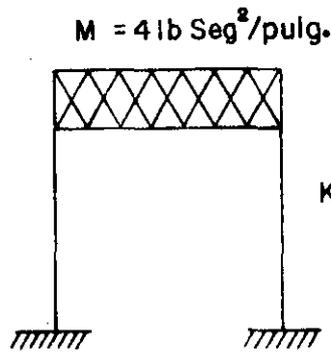
4. CALCULEMOS UNA NUEVA APROXIMACION PARA  $\ddot{y}_{i+1}$  A PARTIR DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE EQUILIBRIO:

$$\ddot{y}_{i+1} \doteq -2\zeta\omega\dot{y}_{i+1} - \omega^2(y_{i+1} - y_{est}) - (\ddot{x}_o)_{i+1} \quad (28)$$

DONDE  $y_{est} = p(t_{i+1})/k$

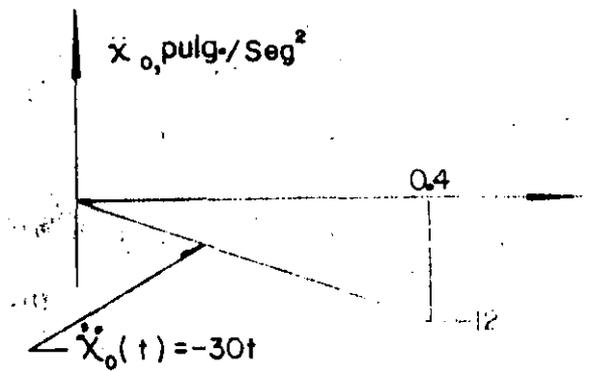
5. REPITAMOS LAS ETAPAS 2 A 4 EMPEZANDO CON EL NUEVO VALOR  $\ddot{y}_{i+1}$  HASTA QUE EN DOS CICLOS CONSECUTIVOS SE TENGAN VALORES DE  $\ddot{y}_{i+1}$  CASI IGUALES.

SE RECOMIENDAN VALORES DE  $\beta$  DE 1/6 A 1/4 Y  $\Delta t \doteq 0.1T$  PARA ASEGURAR CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD.



$$\xi = 0.2$$

$$K = 36 \frac{\text{lb}}{\text{pulg.}}$$



CALCULAR LA RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA APLICANDO EL METODO B DE NEWMARK

$$\omega = \sqrt{K/M} = \sqrt{36/4} = 3 \frac{\text{RAD}}{\text{SEG}}$$

$$h = \xi \omega = 0.2 \times 3 = 0.6 \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.09 \text{ SEG}$$

TOMAREMOS  $\beta = 0.2$  Y  $\Delta t = 0.2$  ( $\approx 0.1T$ ) SUSTITUYENDO EN LAS ECS (26),

(27) Y (28):

$$\dot{y}_{i+1} \approx \dot{y}_i + 0.1 (\ddot{y}_i + \ddot{y}_{i+1})$$

$$y_{i+1} \approx y_i + 0.2 \dot{y}_i + 0.012 \ddot{y}_i + 0.008 \ddot{y}_{i+1}$$

$$\ddot{y}_{i+1} = -1.2 \ddot{y}_i - 9y_{i+1} - (\ddot{x}_0)_{i+1}$$

EN  $t=0$  SABEMOS QUE SE TIENE  $y=0$ ,  $\dot{y}=0$  Y  $\ddot{y}=0$

EN  $t=0 + \Delta t = 0.2$  SEG; SUPONGAMOS  $\ddot{y}_{i+1} = 5.0 \text{ IN/SEG}^2$ ;  $\ddot{x}_0 = -6$

$$y_i = 0$$

$$\dot{y}_i = 0$$

$$1^{\text{er}} \text{ CICLO } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5) = 0.5 \quad ; \quad \ddot{y}_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5 = 0.04 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.5 - 9 \times 0.04 - (-30 \times 0.2) = 5.04 \end{array} \right.$$

$$2^{\text{do}} \text{ CICLO } \left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_{i+1} = 0 + 0.1 (0 + 5.04) = 0.504 \quad ; \quad \ddot{y}_{i+1} = 0 + 0 + 0 + 0.008 \times 5.04 = \\ = 0.04032 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 0.504 - 9 \times 0.4032 - (-6) = 5.033 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right.$$

ESTOS CALCULOS SE PUEDEN ORGANIZAR MEDIANTE UNA TABLA COMO LA SIGUIENTE:

t SEG	$x_0$ IN/SEG <sup>2</sup>	$\dot{y}$ ING/SEG <sup>2</sup>	$\dot{y}$ ING/SEG	$y$ IN
0	0	0	0	0
0.2	-6	5.0000	0.5000	0.04000
		5.040	0.5040	0.04032
		5.033	0.5033	0.04026
		5.034	0.5034	0.04027
0.4 -	-12	8.0000	1.8078	0.26536
		7.442	1.7510	0.26079
		7.534	1.7602	0.26163
		7.533	1.7601	0.26162
0.4 +	0	-4.467	1.7601	0.26162
0.6	0	-6.000	0.7134	0.51204
		-5.464	0.7670	0.51633
		-5.550	0.7584	0.51564
		.	.	.
		.	.	.
		.	.	.

EN  $t = 0.2 + \Delta t = 0.4$  SEG:  $x_0 = -30 \times 0.4 = -12$

$\ddot{y}_i = 5.034, \quad \dot{y}_i = 0.5034, \quad y_i = 0.04027$

SUPONENDO  $\ddot{v}_{i+1} = 8.000$  SE OBTIENE:

$$\left. \begin{array}{l} \text{1er CICLO} \\ \dot{y}_{i+1} = 0.5034 + 0.1 (5.034 + 8.000) = 1.8068 \\ \ddot{y}_{i+1} = 0.04027 + 0.2 \times 0.5034 + 0.012 \times 5.034 + 0.008 \times 8 = 0.26536 \\ \ddot{y}_{i+1} = -1.2 \times 1.8068 - 9 \times 0.26536 - (-12) = 7.442 \text{ IN/SEG}^2 \end{array} \right\}$$

EN  $t = 0.4^+$  SOLO CAMBIA  $\ddot{y}$  :  $\ddot{y}_{0.4^+} = \ddot{y}_{0.4^-} + \ddot{x}_0 = 7.533 - 12 = -4.467$

EN  $t = 0.6$ ,  $\ddot{v}_i = -4.467$ )  $\dot{y}_i = 1.7601$ ;  $y = 0.26162$

## ESPECTROS DE RESPUESTA ESTRUCTURAL

RECORDEMOS QUE LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES FORZADAS CON EXCITACION SISMICA ES

$$y(t) = \frac{-1}{\omega'} \int_{-\infty}^t \ddot{x}_0(t-\tau) e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin \omega'(t-\tau) d\tau$$

DE LA OBSERVACION DE ESTA ECUACION SE CONCLUYE QUE EL DESPLAZAMIENTO RELATIVO,  $y(t)$ , ES FUNCION DEL TIEMPO,  $t$ . EL AMORTIGUAMIENTO,  $\zeta$ , Y LA FRECUENCIA CIRCULAR NATURAL,  $\omega$  (O DEL PERIODO NATURAL):

$$y(t) = f(t, \omega, \zeta)$$

FIJEMOS UN VALOR DE  $\zeta$ , POR EJEMPLO  $\zeta=0$ , Y LUEGO ASIGNEMOS VALORES A  $\omega$ , POR EJEMPLO 0.1, 0.2, 0.3, ETC, HASTA CUBRIR UN INTERVALO DE INTERES, Y PARA CADA CASO CALCULEMOS LA FUNCION RESULTANTE DE APLICAR LA ECUACION ANTERIOR. CON ESTA OBTENEMOS

$$y_1(t) = f_1(t, 0.1, 0) = f_1(t)$$

$$y_2(t) = f_2(t, 0.2, 0) = f_2(t)$$

$$y_3(t) = f_3(t, 0.3, 0) = f_3(t)$$

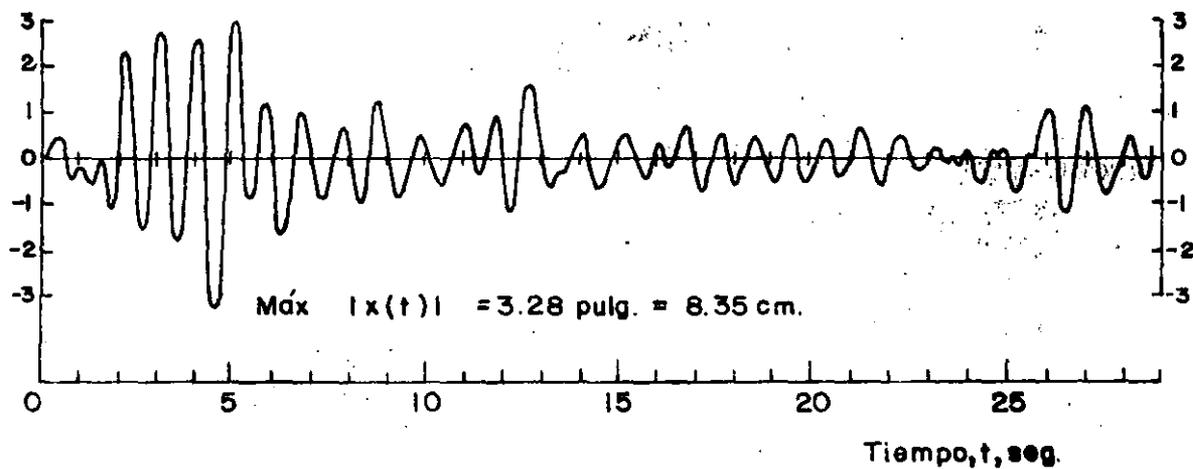
$$\text{SEAN } D_1 = \text{MAX} |y_1(t)| = D(\omega_1, \zeta)$$

$$D_2 = \text{MAX} |y_2(t)| = D(\omega_2, \zeta)$$

$$D_3 = \text{MAX} |y_3(t)| = D(\omega_3, \zeta)$$

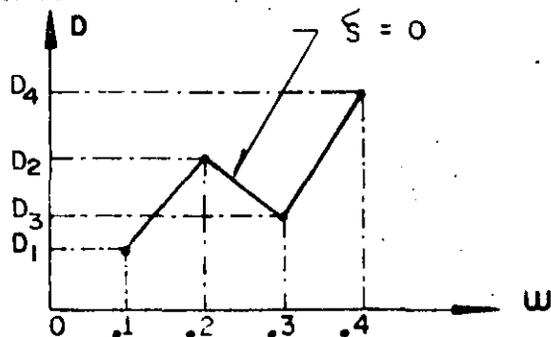
•  
•  
•

Desplazamiento relativo,  
 $x(t)$ , pulg.



Respuesta de un sistema amortiguado simple,  
con  $T_1 = 1.0$  seg y  $\zeta = 0.10$ , al sismo de  
El Centro, Cal., 1940, componente N-S

EN TAL CASO, LA GRAFICA



ES EL ESPECTRO DE RESPUESTA DE DESPLAZAMIENTOS PARA  $\zeta=0$ . SI ESTE PROCESO DE REPITE FIJANDO OTROS VALORES DE  $\zeta$ , POR EJEMPLO,  $\zeta=0.02, 0.05, 0.1, 0.2$ , ETC, SE OBTENDRAN LOS ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS CORRESPONDIENTES.

DE MANERA ANALOGA SE PUEDEN OBTENER LOS ESPECTROS PARA OTROS TIPOS DE RESPUESTA, TALES COMO VELOCIDAD RELATIVA, ACELERACION ABSOLUTA, ETC, QUE SON, RESPECTIVAMENTE

$$V = \text{MAX} |\dot{y}(t)|_{t, \omega} ; A = \text{MAX} |\ddot{x}(t)|_{t, \omega} \quad (29)$$

### PSEUDO - ESPECTROS

ESTADISTICAMENTE SE HA ENCONTRADO QUE

$$S_V = \omega D \dot{=} V \quad (30)$$

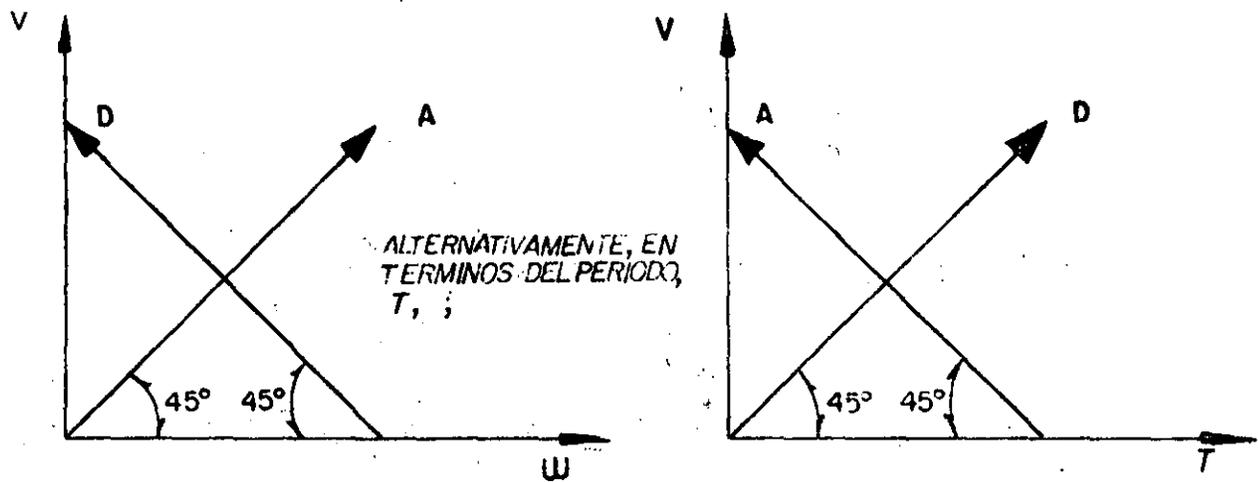
$$S_A = \omega^2 D \dot{=} A \dot{=} \omega V \quad (31)$$

A  $S_V$  Y  $S_A$  SE LES LLAMA PSEUDOSPECTROS.

DE LA EC. (30):  $\log D = \log V - \log \omega = \log V + \log T - \log 2\pi$

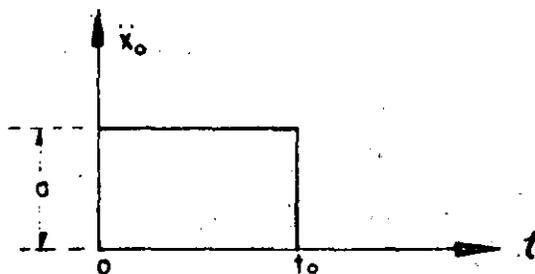
DE LA EC. (31):  $\log A = \log V + \log \omega = \log V - \log T + \log 2\pi$

ESTAS ECUACIONES CORRESPONDEN A LINEAS RECTAS EN PAPEL LOGARITMICO; LA PRIMERA CON PENDIENTE -1 Y LA SEGUNDA CON PENDIENTE +1, SI SE USA  $\omega$  COMO VARIABLE INDEPENDIENTE; SI SE USA T, LA PRIMERA TENDRA PENDIENTE + 1, Y LA SEGUNDA, -1.



**EJEMPLO**

CALCULAR EL ESPECTRO CORRESPONDIENTE A LA EXCITACION (CONSIDERESE  $\omega = 0$ )



EN UN EJEMPLO ANTERIOR SE OBTUVO

$$y(t) = \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \text{ SI } 0 \leq t \leq t_0$$

$$D = \text{MAX} |y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} ; 0 \leq \frac{T}{2} \leq t_0, (0 \leq T \leq 2t_0)$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} , S_A = \omega V = 2a$$

$$D = \text{MAX} |y(t)| = \frac{2a}{\omega^2} \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} , \text{ SI } T > 2 t_0$$

$$S_V = \omega D = \frac{2a}{\omega} \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right| ; S_A = \omega V = 2a \left| \text{sen} \frac{\omega t_0}{2} \right|$$

$$\text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} S_V = \text{LIM}_{\omega \rightarrow 0} \left\{ a t_0 \frac{\text{sen} \frac{\omega t_0}{2}}{\frac{\omega t_0}{2}} \right\} = a t_0$$

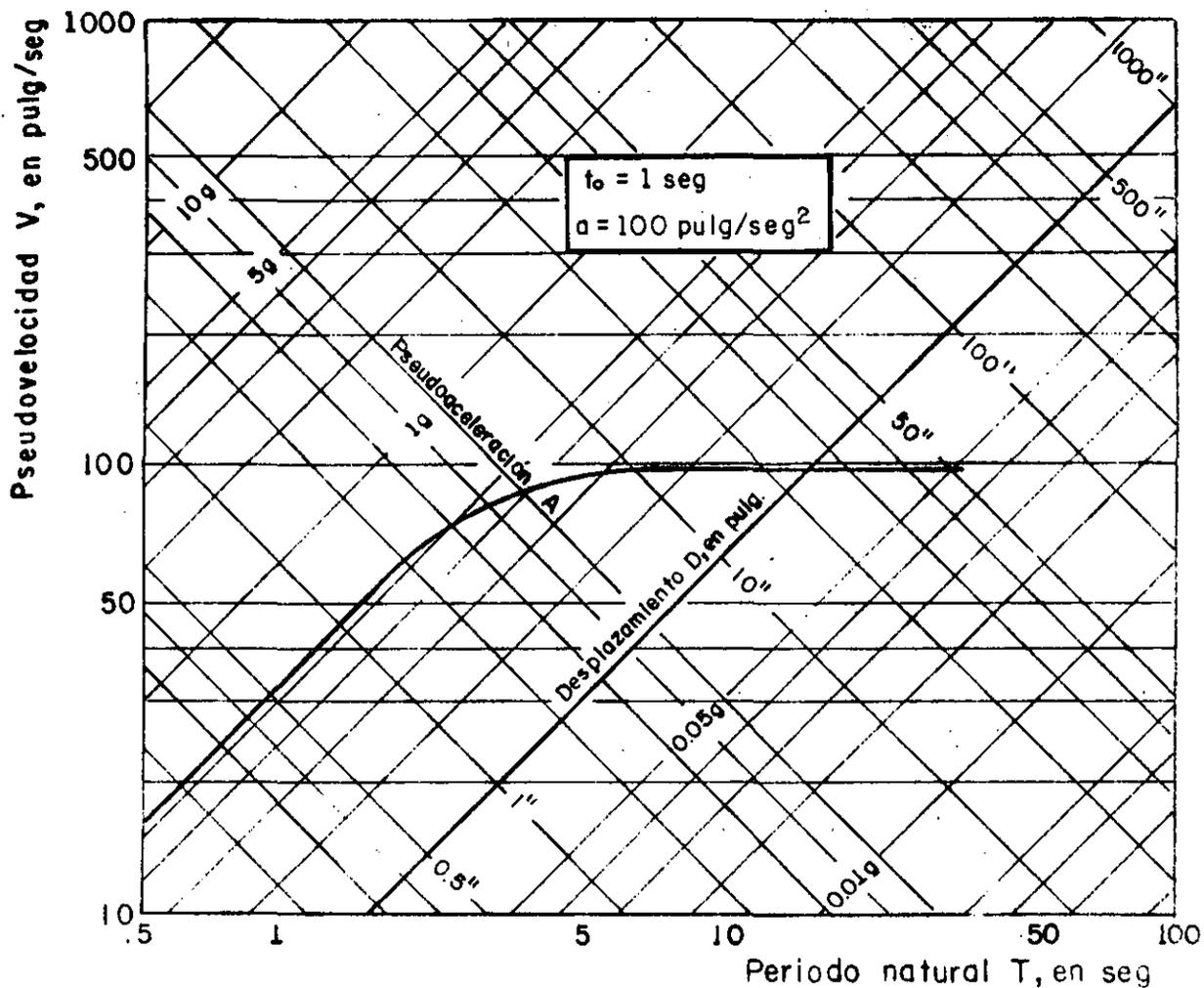
CASO PARTICULAR: SI  $t_0 = 1$  SEG y  $a = 100$  IN/SEG<sup>2</sup>

$$S_V = \frac{2 \times 100}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{100}{\pi} T, \text{ SI } 0 \leq T \leq 2 \text{ SEG}$$

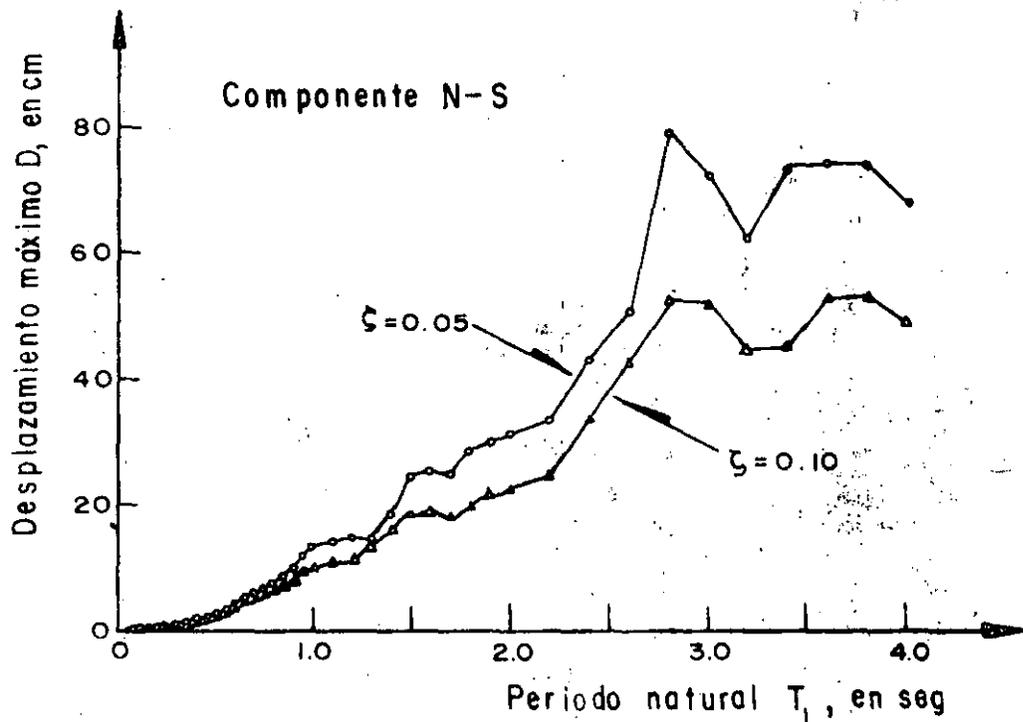
$$S_V = \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{2\pi \times 1}{2} \right|$$

$$= \frac{100T}{\pi} \left| \text{sen} \frac{\pi}{1} \right| \text{ SI } T > 2 \text{ SEG}$$

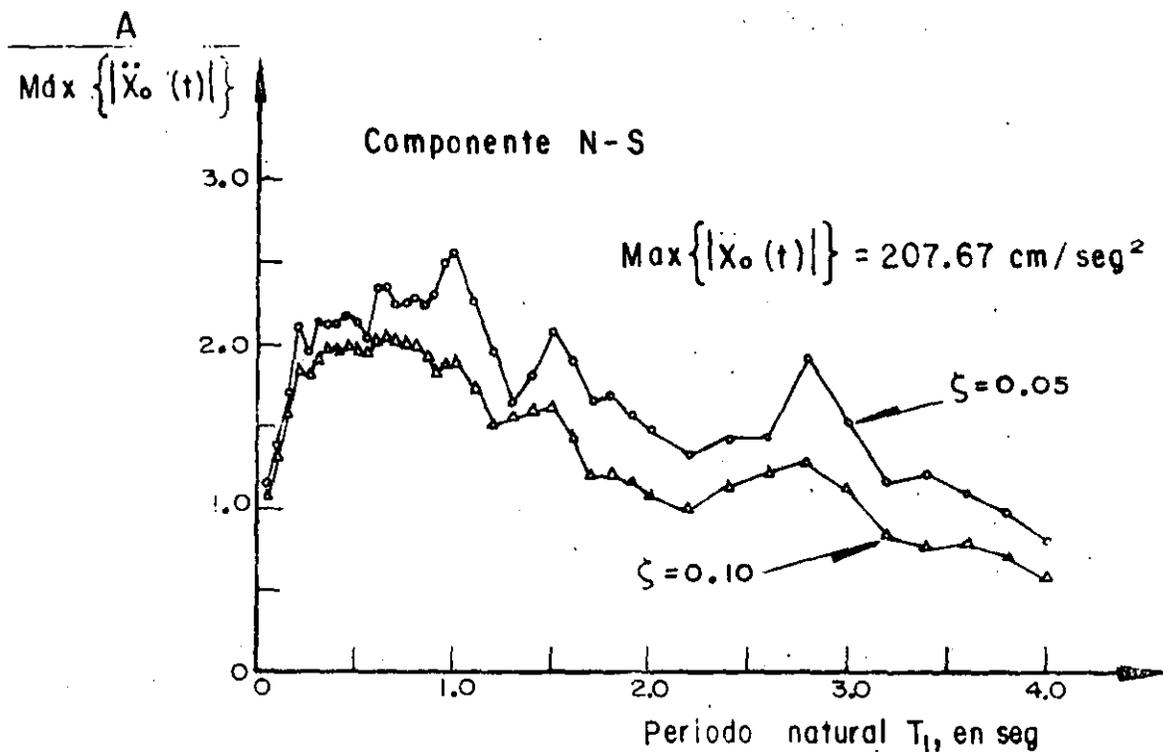
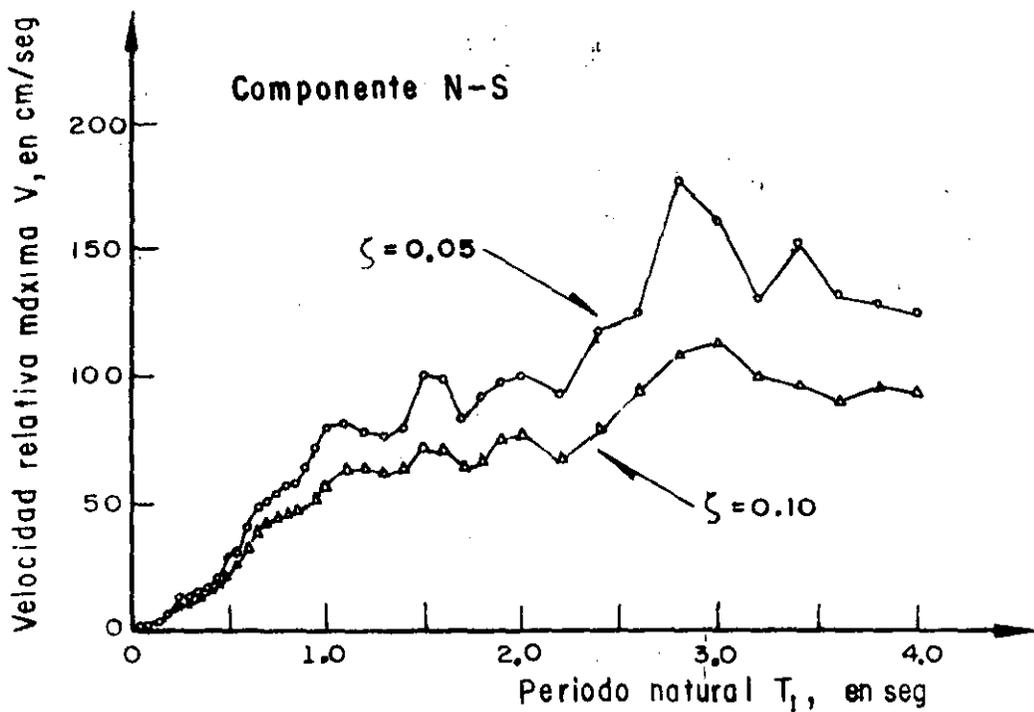
$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_V = 100 \text{ IN/SEG}$$



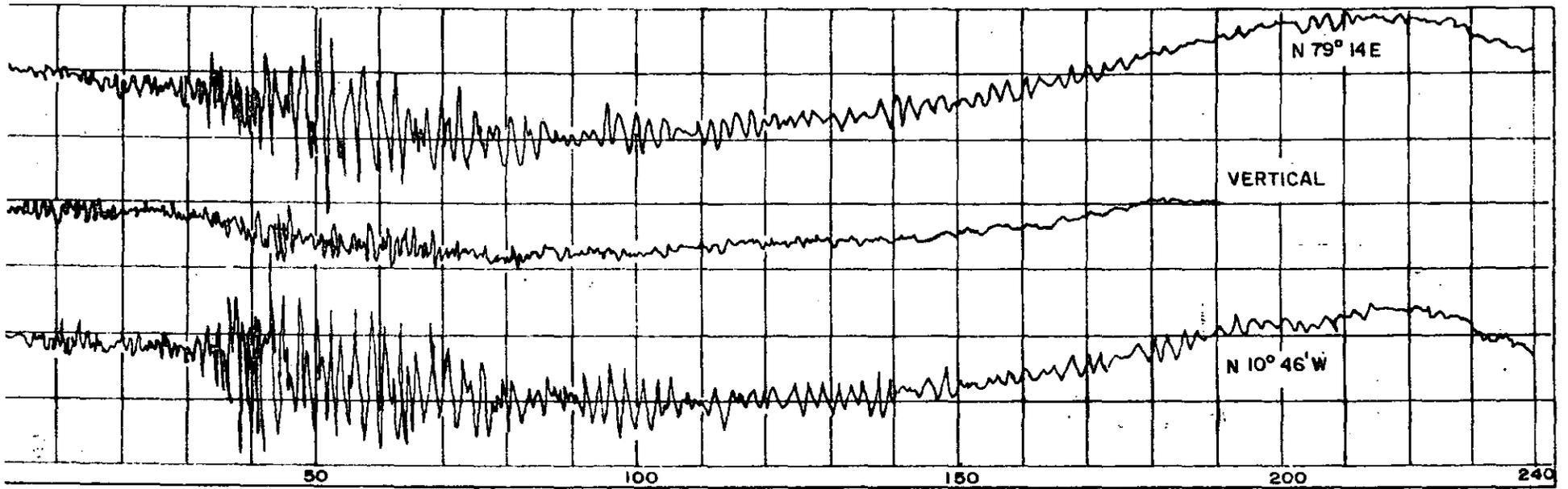
Espectro no amortiguado correspondiente a un pulso rectangular de aceleraciones. Según N. Newmark y E. Rosenblueth, ref 1



Espectro de desplazamientos. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref 4.



Espectros de velocidades y de aceleraciones. Sismo de Tokachi-Oki, Japón (1968). Según H. Tsuchida, E. Kurata y K. Sudo, ref. 4



Acelerogramas originales del sismo registrado el  
11-V-1962, en la ALAMEDA CENTRAL, Mex. D.F.  
(Tomada de la ref 2)

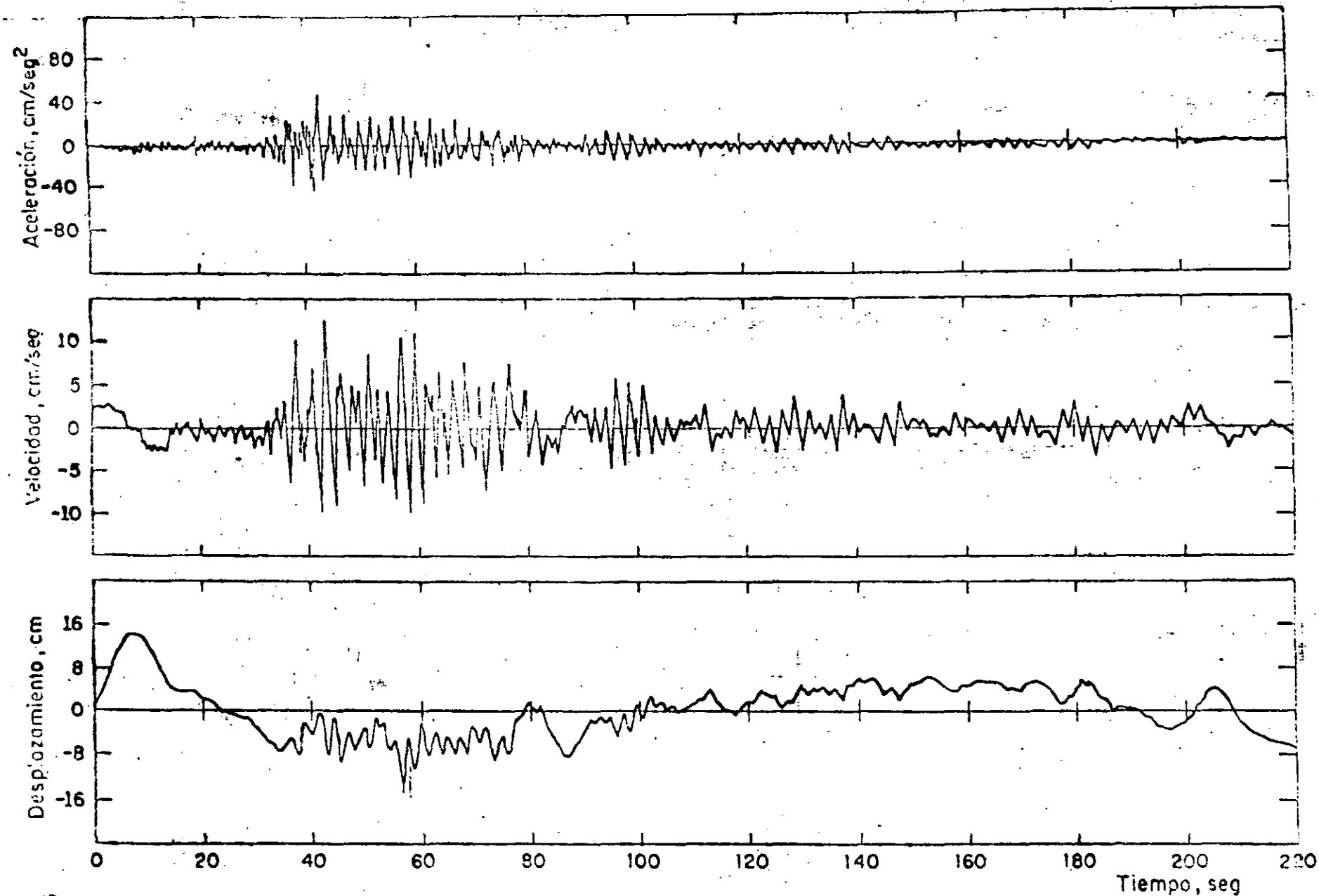
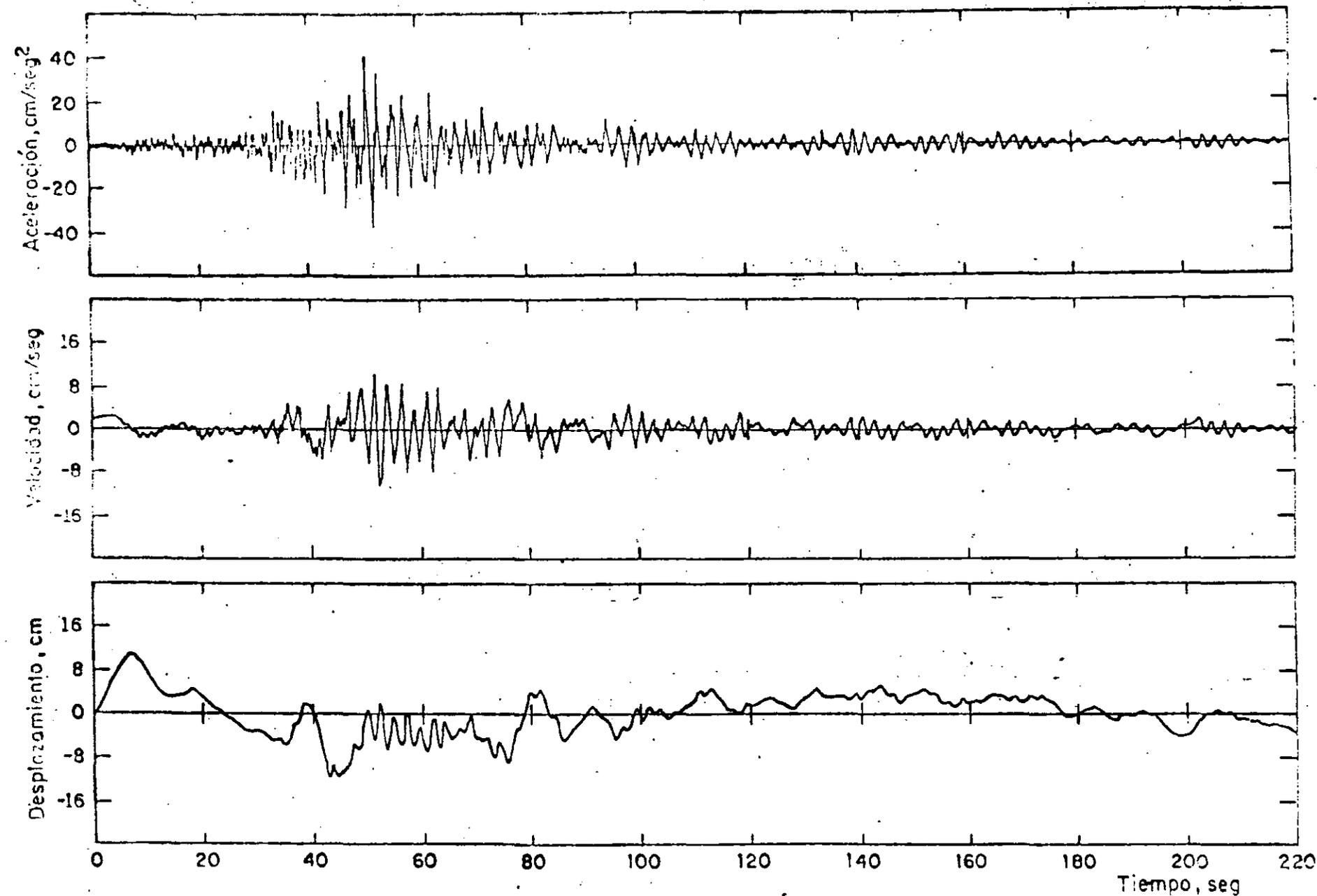


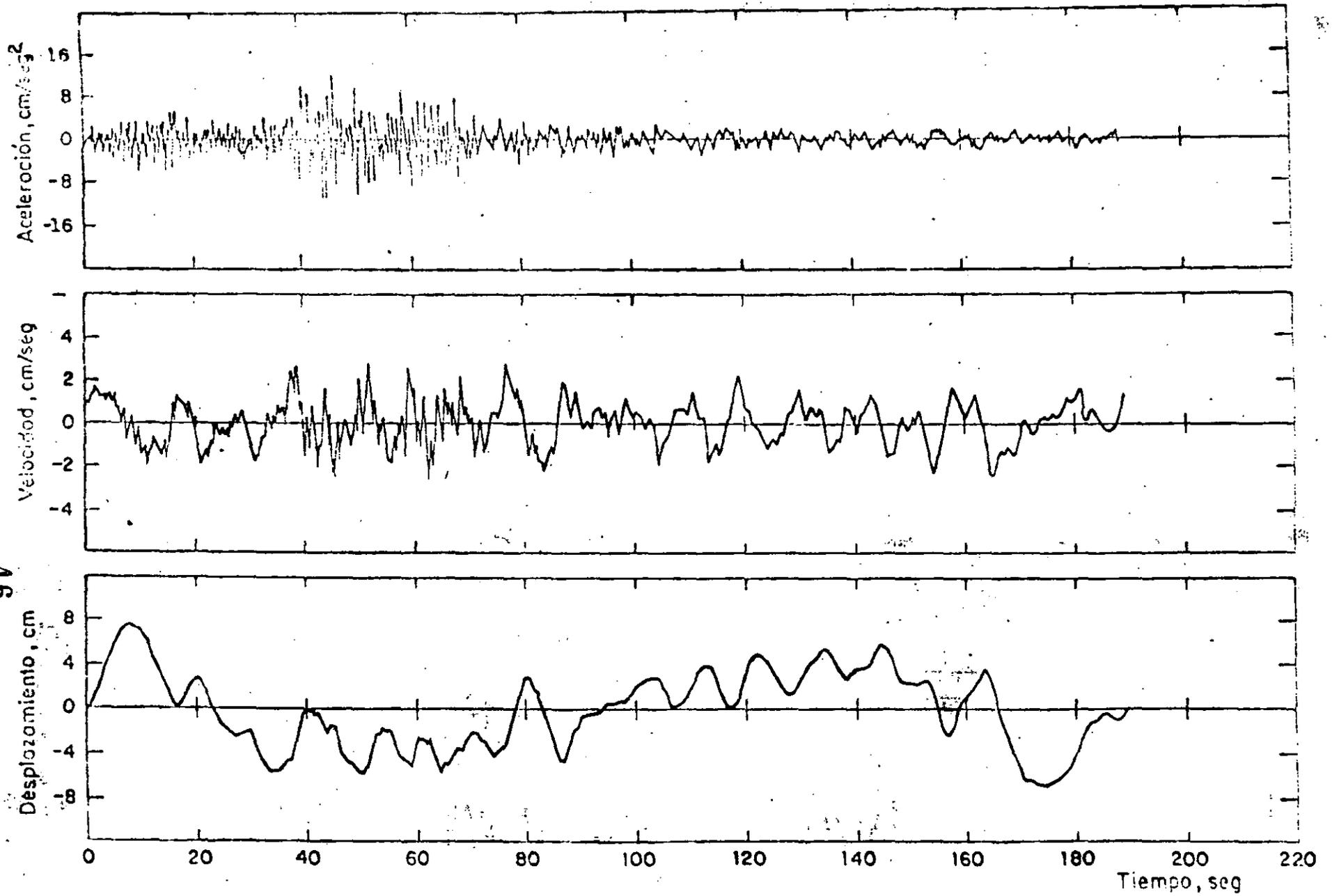
Fig 7 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

COMPONENTE N 79°14' E



45 Fig 8 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

COMPONENTE VERTICAL



46

Fig 9 Movimiento del terreno. Alameda Central, 11 de mayo de 1962

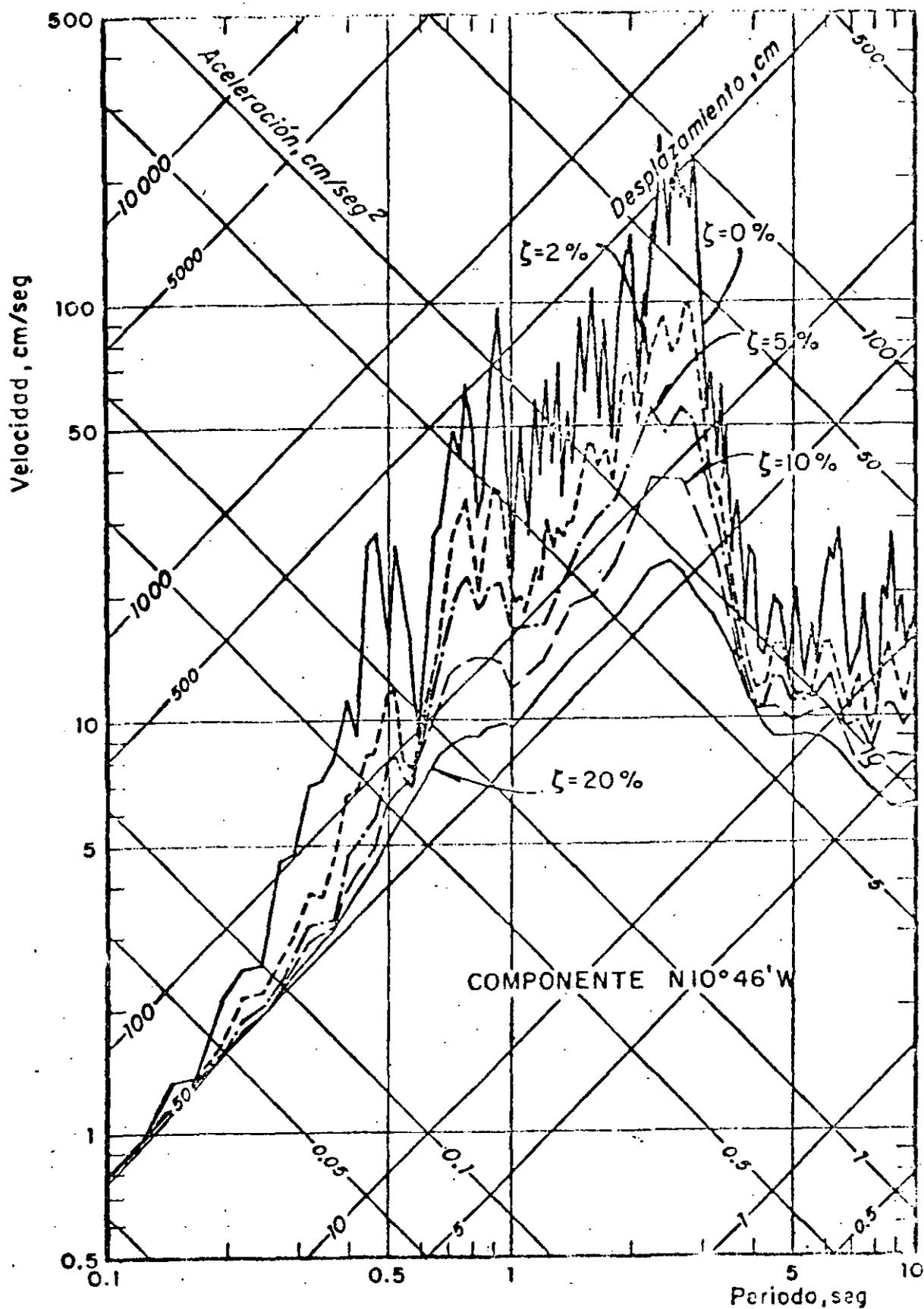


Fig 80 Espectros de respuesta. Alameda Central,  
11 de mayo de 1962

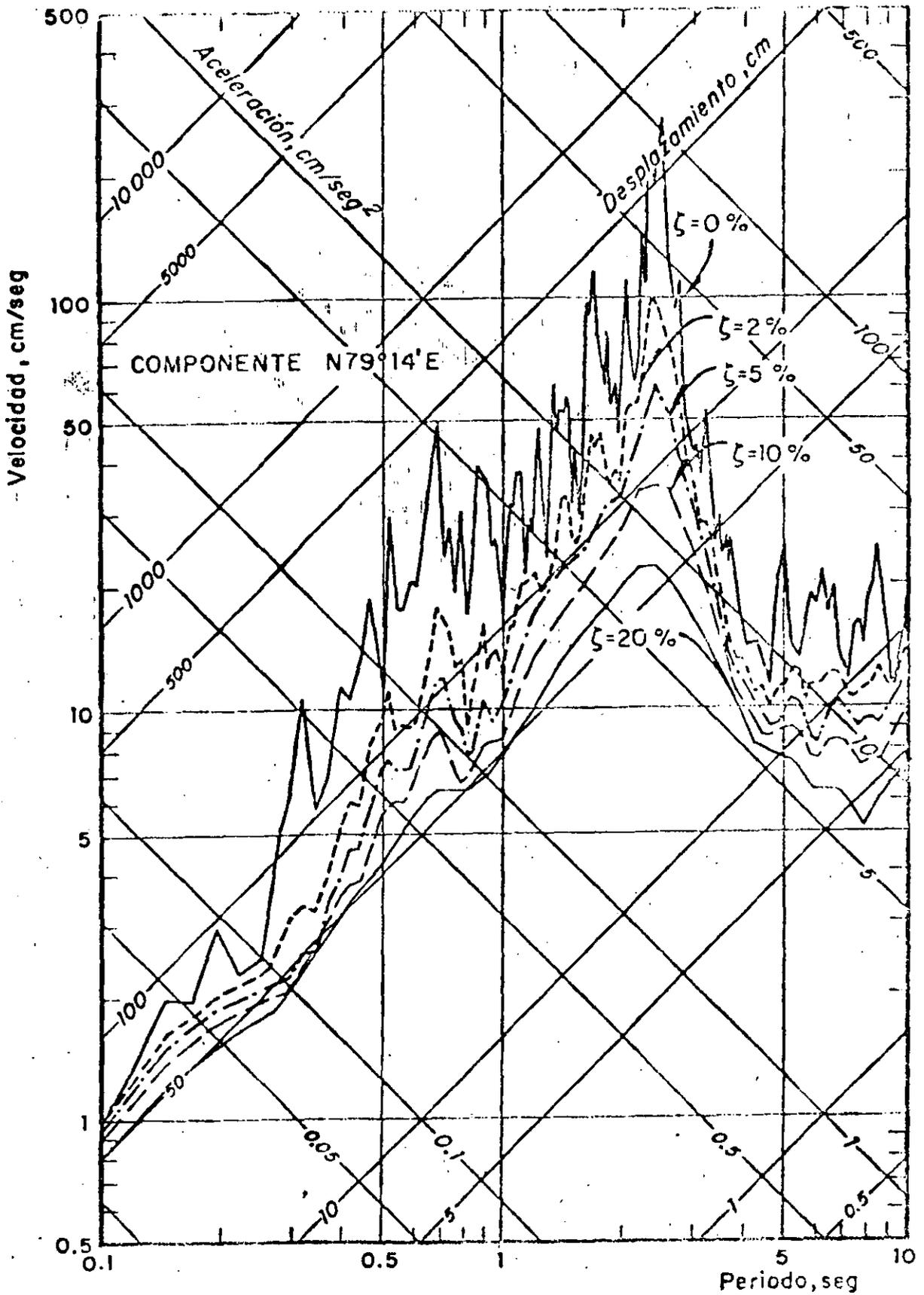


Fig 81 Espectros de respuesta. Alameda Central,  
11 de mayo de 1962

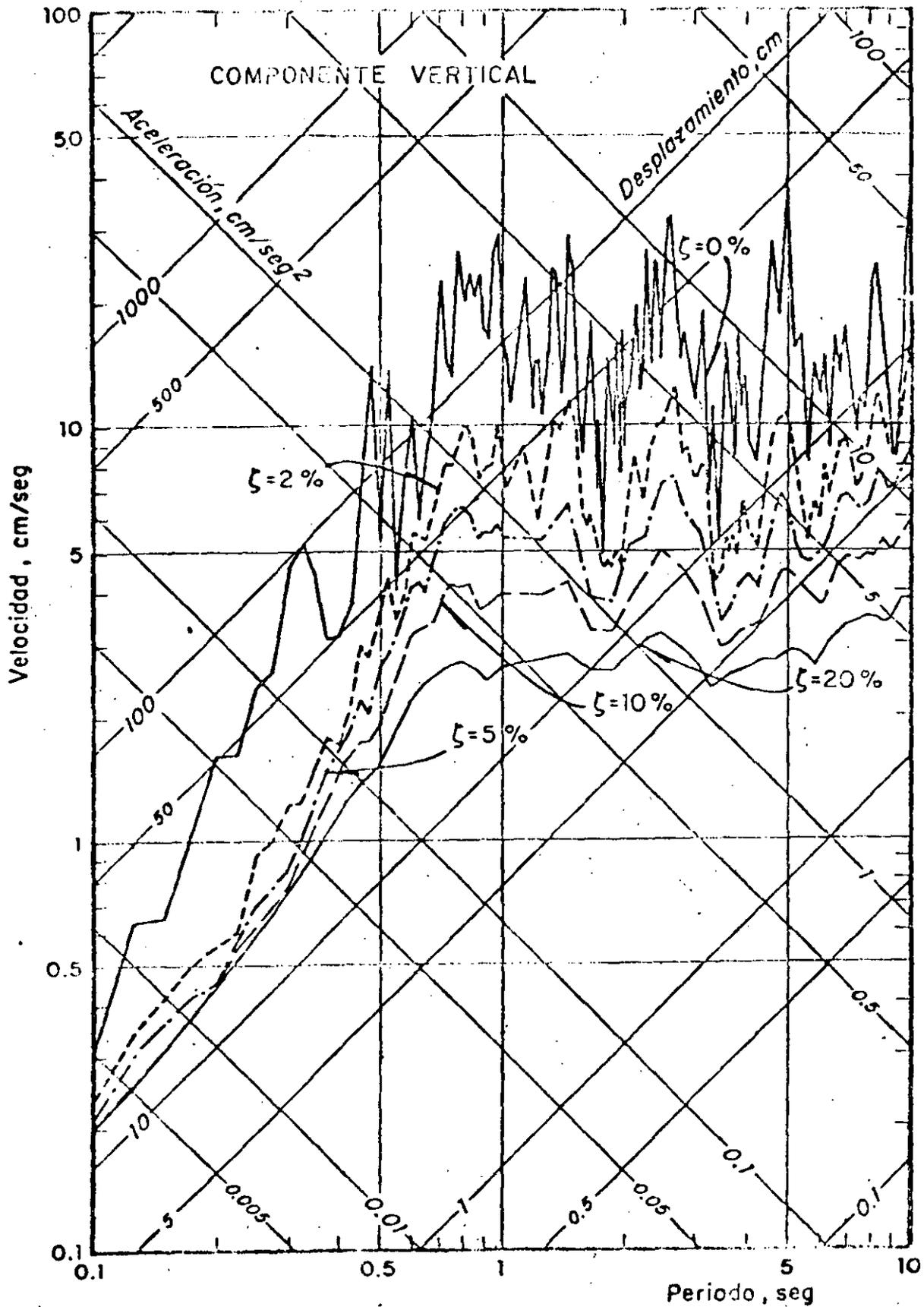


Fig 82 Espectros de respuesta. Alameda Central,  
11 de mayo de 1982

COMPONENTE E-W

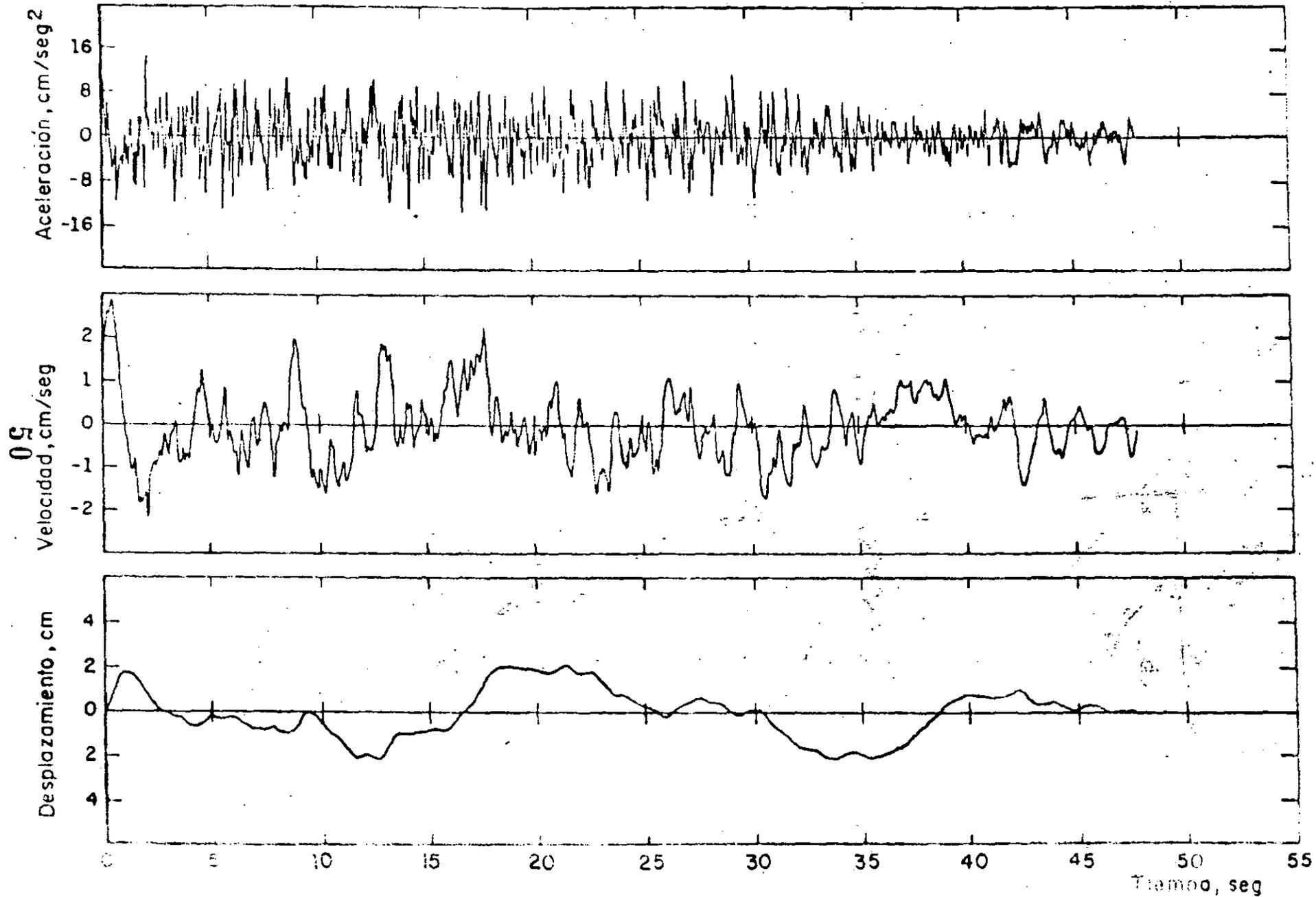


Fig. 2. Movimiento del terreno. Ciudad Universitaria, 6 de julio de 1964

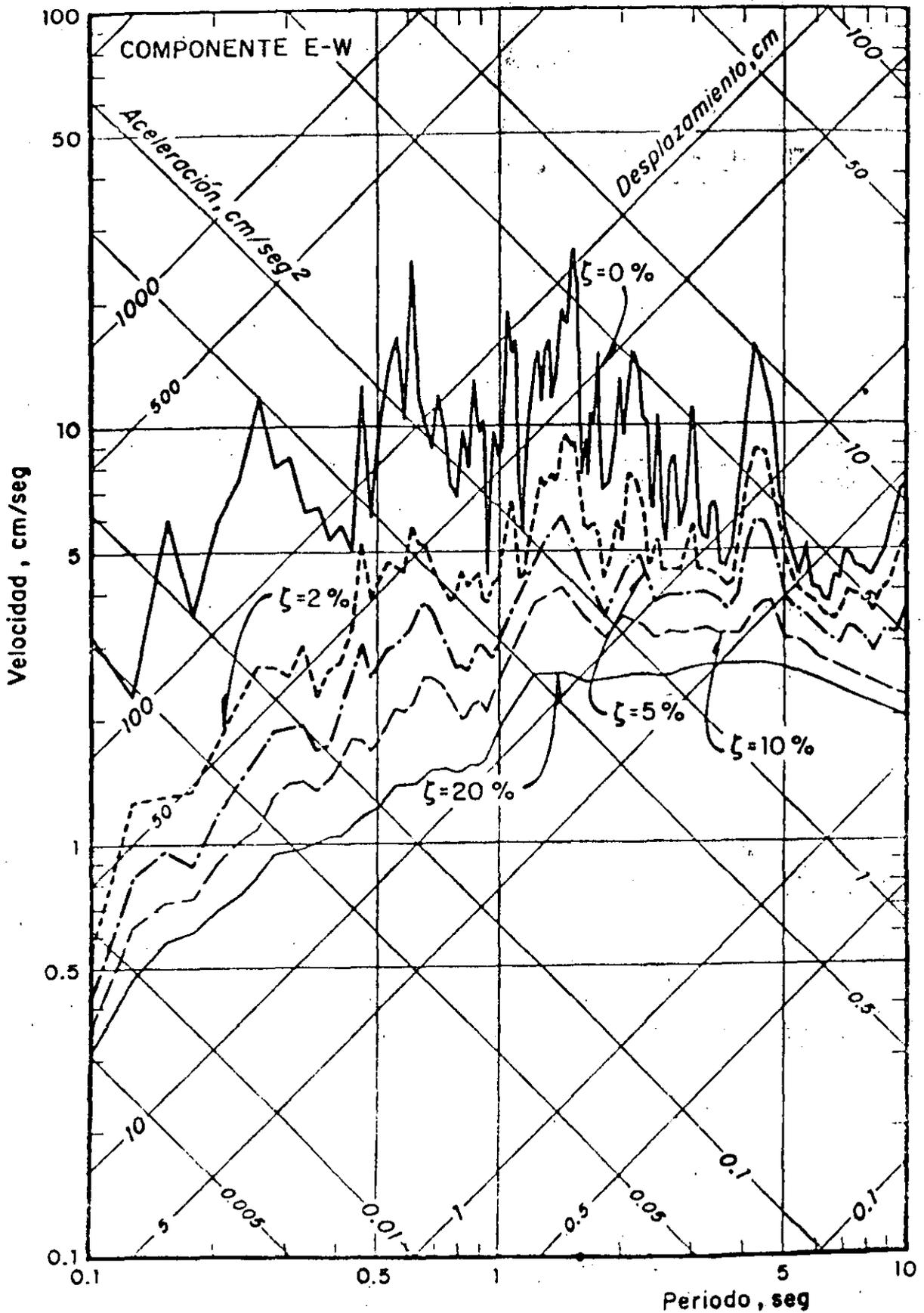
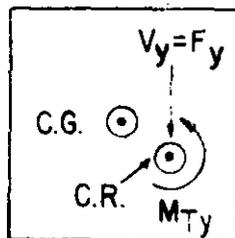
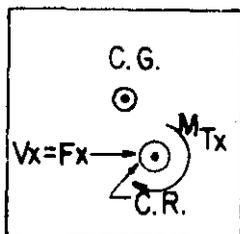
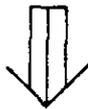
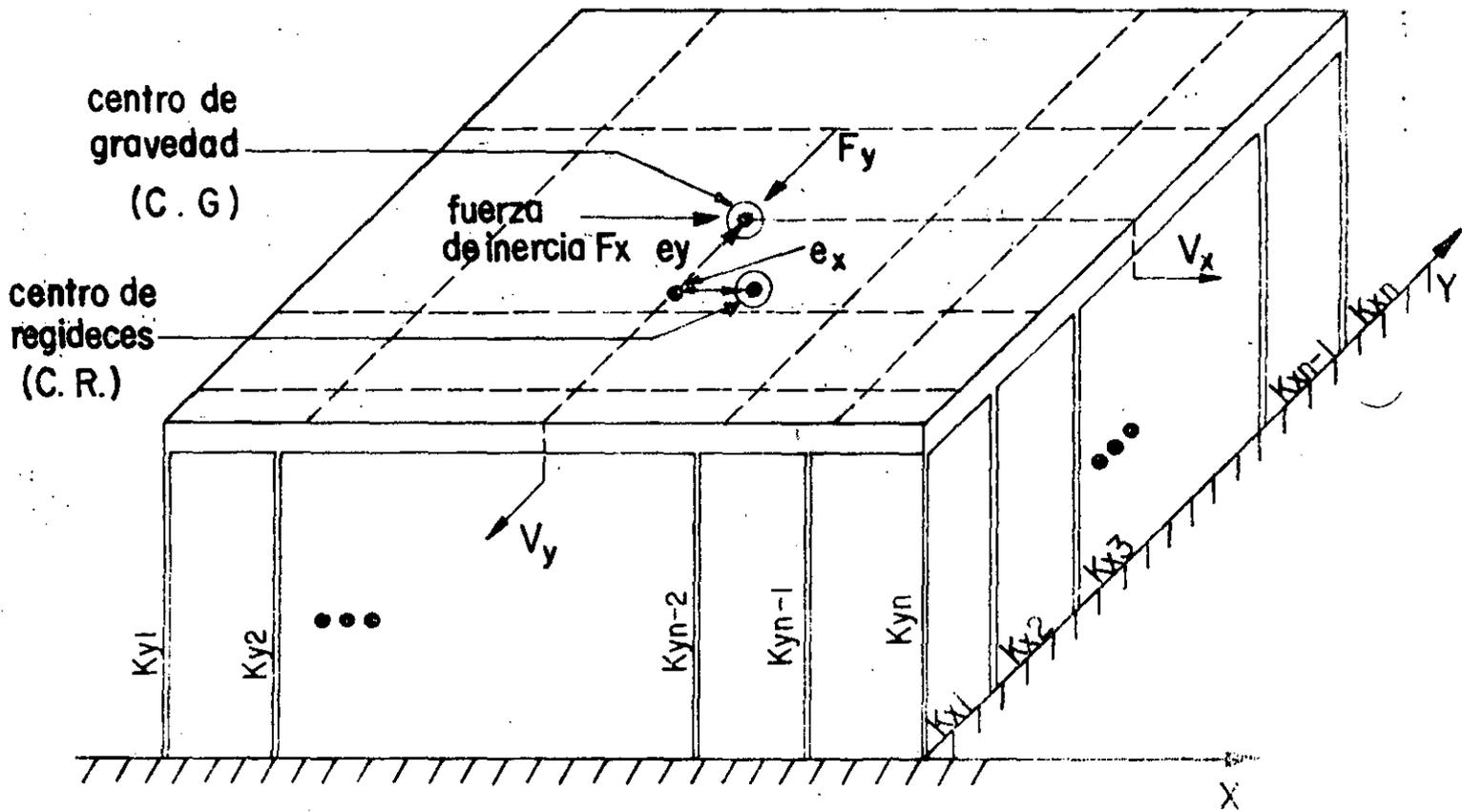
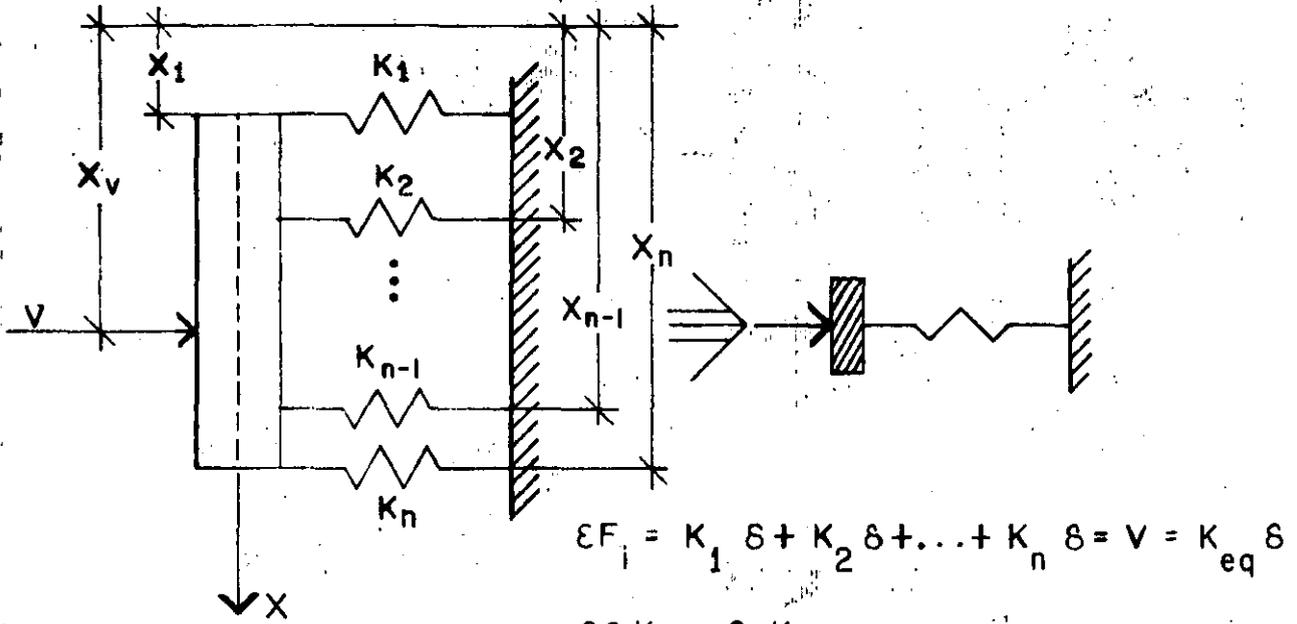


Fig 116 Espectros de respuesta. Ciudad Universitaria,  
6 de julio de 1964

# DISTRIBUCION DE FUERZAS CORTANTES DIRECTAS Y POR TORSION



DISTRIBUCION DE LAS FUERZAS CORTANTES EN UN ENTREPISO



$\delta \sum K_i = \delta K_{eq}$

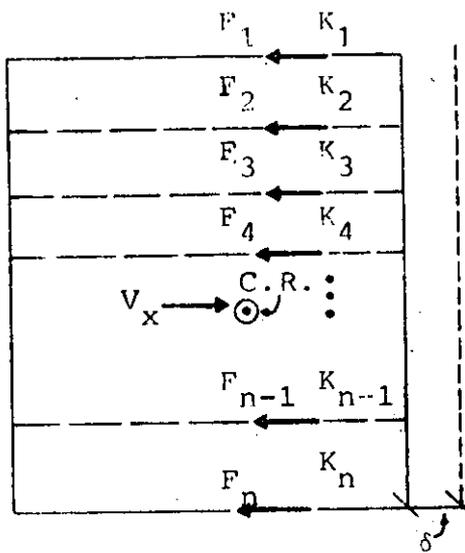
$$K_{eq} = \sum_{i=1}^n K_i$$

$$X_v = \frac{\sum_{i=1}^n K_i X_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

$\sum M_i = \sum F_i X_i = \sum K_i \delta X_i = \delta \sum K_i X_i = V X = K_{eq} \delta X_v$

← POSICION DEL CENTRO DE RIGIDECES

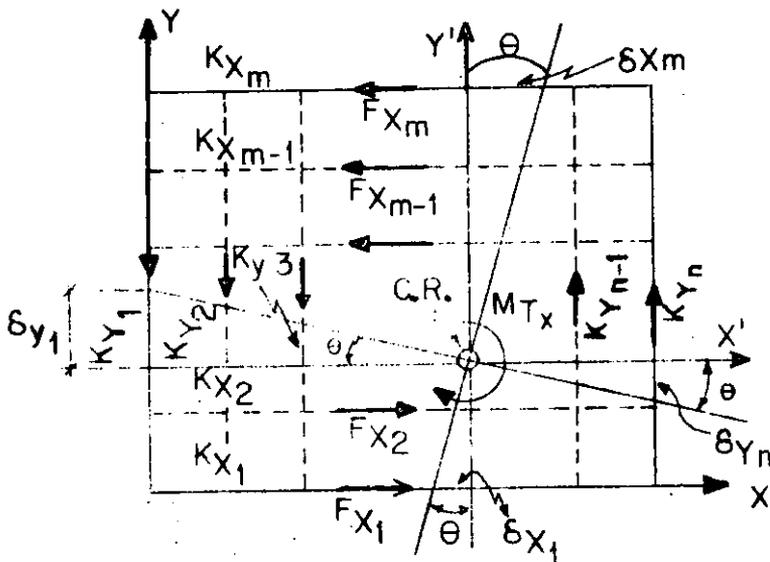
VEAMOS COMO SE DISTRIBUYEN LAS FUERZAS CORTANTES EN LOS MARCOS



$$F_i = K_i \delta$$

$$\sum F_i = \sum K_i \delta = V_x \therefore \delta = \frac{V_x}{\sum K_i}$$

$$F_i = V_x \frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$



$$F_{x_i} = K_{x_i} \delta_{x_i} = K_{x_i} Y'_i \theta$$

$$F_{y_i} = K_{y_i} \delta_{y_i} = K_{y_i} X'_i \theta$$

$$\sum M_{C.R.} = \sum F_{x_i} Y'_i + \sum F_{y_i} X'_i$$

$$= \theta (\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2)$$

$$= M_{TX}$$

DE DONDE  $\theta = \frac{M_{TX}}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$

POR LO QUE

$$F_{x_i} = M_{TX} \frac{K_{x_i} Y_i'}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$$

$$F_{y_i} = M_{TX} \frac{K_{y_i} X_i'}{\sum K_{x_i} Y_i'^2 + \sum K_{y_i} X_i'^2}$$

## SISTEMAS NO LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

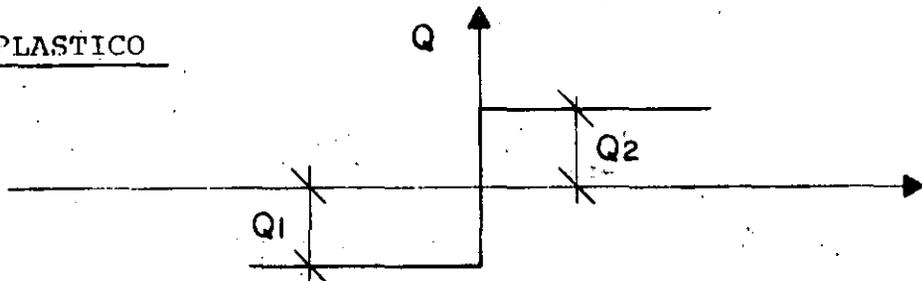
ECUACION DE MOVIMIENTO:

$$M\ddot{x} + Q(y, \dot{y}) = P(t) \quad ; \quad y = x - x_0 = \text{DESPLAZAMIENTO RELATIVO}$$

SI  $Q(y, \dot{y}) = KY + C\dot{y}$  SE TIENE EL SISTEMA ELASTICO LINEAL

MODELOS PARTICULARES

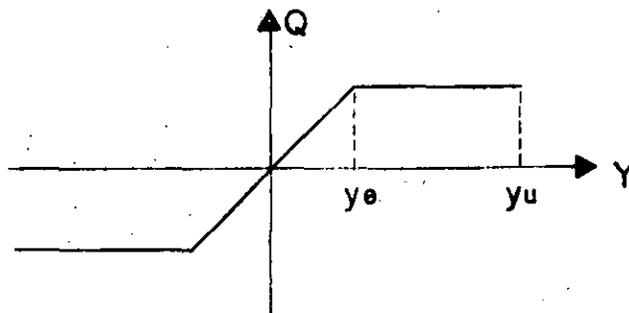
### 1. RIGIDO-PLASTICO



$$Q = -Q_1 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} < 0$$

$Q = Q_2 + C\dot{y}, \text{ SI } \dot{y} > 0$  EN DONDE C = CONSTANTE. SE HA EMPLEADO COMO MODELO EN EL ANALISIS DE TALUDES Y CORTINAS DE PRESAS DE TIERRA Y ENROCAMIENTO

### 2. ELASTO-PLASTICO



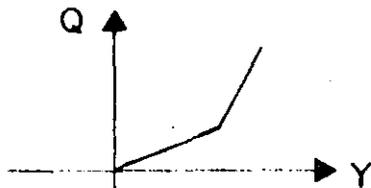
$$Q = Q_1(y) + C\dot{y}$$

SE EMPLEA COMO MODELO EN EL ANALISIS DE ESTRUCTURAS DUCTILES.

FACTOR DE DUCTILIDAD  $= \mu = y_u / y_e$

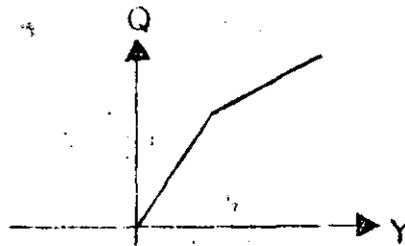
$y_u$  = DESPLAZAMIENTO MAXIMO QUE PUEDE SOPORTAR EL SISTEMA SIN FALLAR

3. SISTEMA BILINEAL



CON ENDURECIMIENTO

SE USA COMO MODELO PARA ANALISIS DE PUENTES COLGANTES

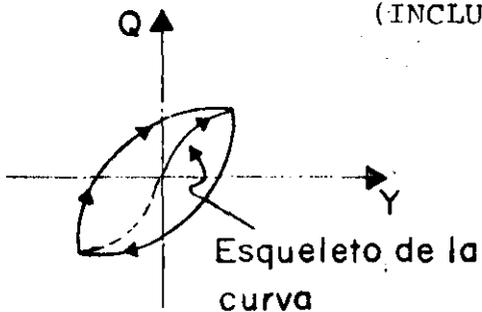


CON ABLANDAMIENTO

SE USA COMO MODELO DE SISTEMAS QUE SE DEGRADAN POR AGRIETAMIENTO (MUROS DE MAMPOSTERIA, POR EJEM).

4. TIPO MASING

(INCLUYE A LOS ANTERIORES COMO CASOS ESPECIALES)



$$\frac{Q - Q_0}{2} = \Omega_1 \left( \frac{Y - Y_0}{2} \right)$$

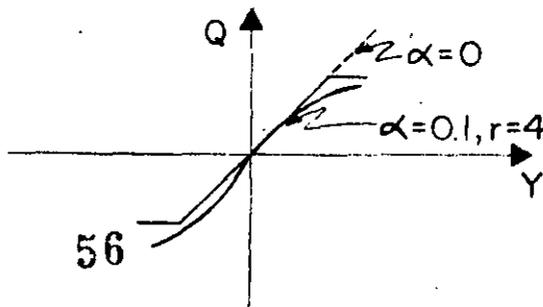
$Q_0$  = FUERZA EN  $Y = Y_0$

$Y_0$  = DESPLAZAMIENTO EN EL CUAL EL PROCESO SE INVIRTIÓ (y CAMBIO DE SIGNO) POR ULTIMA VEZ

CASO PARTICULAR DEL ESQUELETO

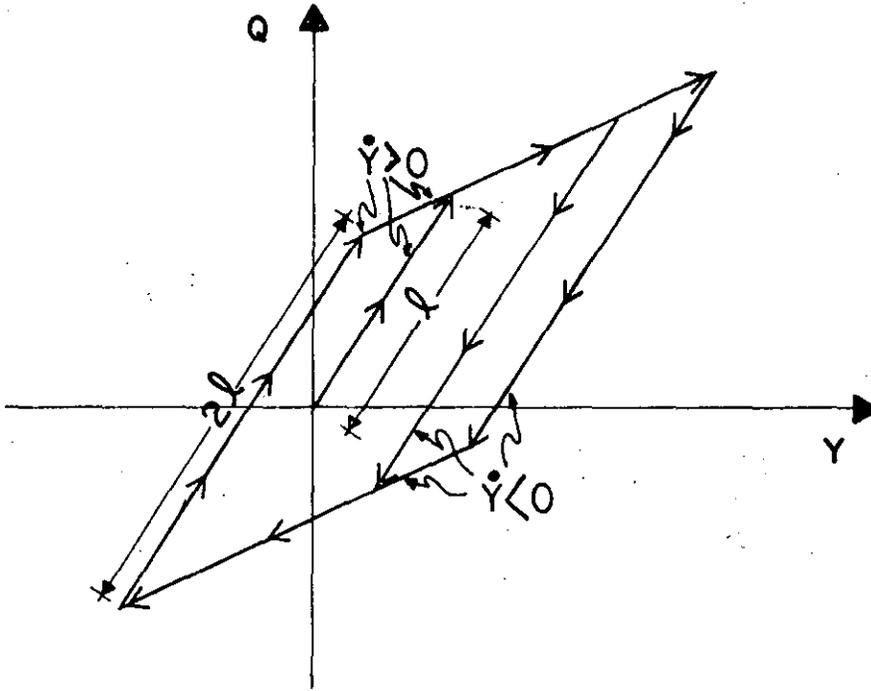
$$\frac{Y}{Y_1} = \frac{Q}{Q_1} + \alpha \left( \frac{Q}{Q_1} \right)^r \quad \text{(MODELO RAMBER - OSGOOD)}$$

DONDE  $Y_1$ ,  $Q_1$ ,  $\alpha$  Y  $r$  SON CONSTANTES POSITIVAS



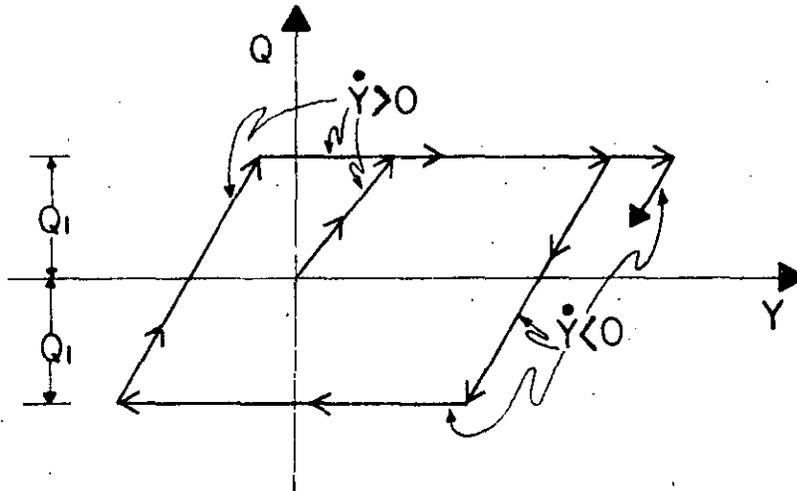
EJEMPLO:

CASO BILINEAL



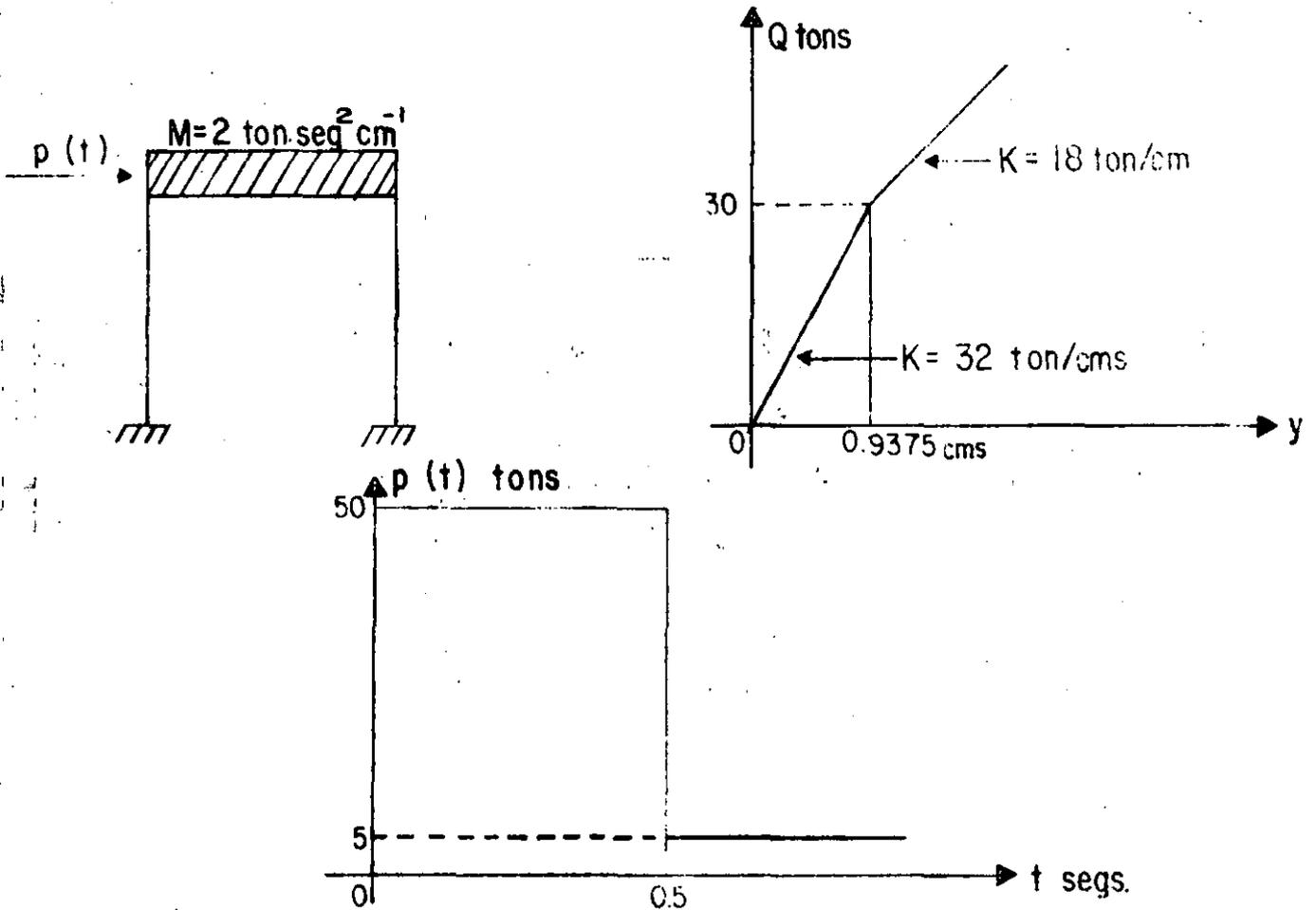
EJEMPLO

CASO ELASTOPLASTICO



METODO B DE NEWMARK

PARA EL ANALISIS DE SISTEMAS NO LINEALES SE PUEDE USAR EL METODO B  
DE NEWMARK DESCRITO ANTERIORMENTE.

EJEMPLO

ECUACION DE EQUILIBRIO DINAMICO ,  $M\ddot{Y} + Q(Y) = P(t)$

$$\ddot{Y} = \frac{P(t) - Q(Y)}{M} = \frac{\dot{P}(t) - Q(y)}{2} \quad (I)$$

PARA LA APLICACION DEL METODO DE NEWMARK SE TIENEN LAS SIGUIENTES EXPRESIONES:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta t$$

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \Delta t / 2$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i \Delta t + (0.5 - \beta) \ddot{Y}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{Y}_{i+1} (\Delta t)^2$$

CONSIDERANDO  $\Delta t = 0.10 \text{ SEG.}$  Y  $\beta = 1/6$  SE PUEDE ESCRIBIR;

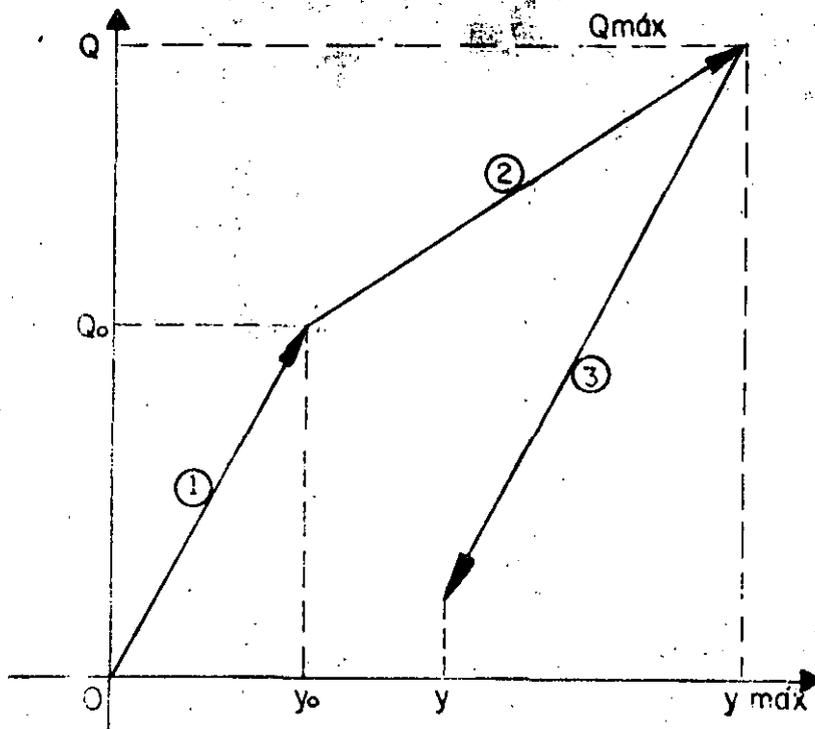
$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{20} (\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (II)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \dot{Y}_i (0.10) + \frac{1}{600} (2\ddot{Y}_i + \ddot{Y}_{i+1}) \quad (III)$$

EL PROCEDIMIENTO DE CALCULO ES COMO SIGUE:

- |      |  |                  |                       |
|------|--|------------------|-----------------------|
| {    | SE ASUME   | $\ddot{Y}_{i+1}$ |                       |
|      | SE CALCULA   | $\dot{Y}_{i+1}$  | CON LA ECUACION (II)  |
|      | SE CALCULA   | $Y_{i+1}$        | CON LA ECUACION (III) |
|      | SE CALCULA UN MEJOR VALOR DE $\ddot{Y}_{i+1}$ CON LA ECUACION (I). |                  |                       |
| ETC. |  |                  |                       |

PARA LA FUNCION DE RESISTENCIA Q SE TIENEN LOS SIGUIENTES CASOS:



- |    |                          |   |
|----|--------------------------|---|
| 1. | COMPORTEAMIENTO ELASTICO | , Q = 32 Y TONS   |
| 2. | CAMBIO DE RIGIDEZ        | , Q = 30 + 18 (Y - Y <sub>0</sub> ) TON                 |
| 3. | DESCARGA                 | , Q = Q <sub>máx</sub> - 32 (Y <sub>MÁX</sub> - Y) TONS |

ESTA ULTIMA EXPRESION MANTIENE SU VALIDEZ HASTA QUE,  $(Y_{MÁX} - Y) \leq 2Y_0$

$Y_0 = 0.9375 \text{ CMS}$  ;  $Q_0 = 30.0 \text{ TON}$

PARA  $t = 0$ ,  $\ddot{y} = \frac{P}{M} = \frac{50}{2} = 25$  ;  $y = 0$  ;  $\dot{y} = 0$

PARA  $t = 0.10$ ,  $y_i = \dot{y}_i = 0$  ;  $\ddot{y}_i = 25$

1er. CICLO

SEA  $\ddot{y}_{i+1} = 20$  COMO PRIMER TANTEO. EN TAL CASO

$\dot{y}_{i+1} = 0 + \frac{1}{20} (20 + 25) = 2.25$

$y_{i+1} = 0 + 0.10 \times 0 + \frac{1}{600} (2 \times 25 + 20) = 0.1167$

$Q = 32 \times 0.1167 = 3.7330$

$\ddot{y}_{i+1} = \frac{50 - 3.733}{2} = 23.134$

2o. CICLO

$\dot{y}_{i+1} = 23.134/2 = 16.567$

$y_{i+1} = 73.134/600 = 0.1219$

$Q = 32 \times 0.1219 = 3.9000$

$\ddot{y}_{i+1} = (50 - 3.9)/2 = 23.050$

3er. CICLO

4o. CICLO

$$\ddot{Y}_{i+1} = 23.052$$

$$Y_{i+1} = 23.052/2 = 2.4026$$

$$X_{i+1} = 73.052/600 = 0.12175$$

$$Q = 32 \times 0.12175 = 3.8960$$

$$\ddot{Y} = (50 - 3.8960)/2 = 23.052 \quad \dots \text{ ETC.}$$

LOS CALCULOS BASICOS SE MUESTRAN EN LA TABLA SIGUIENTE:

t SEGS	P TONS	$\ddot{Y}$ CM SEG <sup>-2</sup>	$\dot{Y}$ CM SEG <sup>-1</sup>	Y CMS	Q TONS
0.0	50.00	25.000	0.00	0.00	9.70
0.10	50.00	20.000 23.134 23.050 23.052	2.2500 2.4070 2.4025 2.4026	0.1167 0.1219 0.12175 0.12175	3.7330 3.9000 3.3960 3.8960
0.20	50.00	20.000 17.445 17.513 17.511	4.5552 4.4270 4.4310 4.43075	0.4722 0.46793 0.46804 0.46204	15.110 14.970 14.977 14.977
0.30	50.00	10.000 9.560 9.569	5.8060 5.7840 5.7848	0.98610 0.98540 0.98543	30.8750 30.8620 30.8630
0.40	50.00	0.00 4.0750 4.0141 4.0150	6.2630 6.4670 6.4640 6.4640	1.5958 1.6026 1.6025 1.60250	41.349 41.972 41.970 41.970
0.50 <sup>-</sup>	50.00	0.00 -1.9230 -1.9000 -1.8944 -1.8946	6.6650 6.56975 6.5700	2.2623 2.2591 2.25912	53.846 53.789 53.789
0.50 <sup>+</sup>	5.00	-24.3946	6.5700	2.25912	53.789
0.60	5.00	-30.000 -29.126 -29.136 -29.138	3.8503 3.8940 3.89347 3.89347	2.7848 2.78626 2.78624 2.78624	63.251 63.278 63.277 63.277
0.70	5.00	-32.000 -31.289 -31.320 -31.299 -31.301	0.83657 0.87057 0.87147	3.025127 3.02626 3.02641	67.577 67.575 67.600
0.7278	5.00	-31.620 -31.409 -31.420 -31.4093	-0.00313 -0.000352 -0.000205	3.03850 3.03853 3.03853	67.918 67.818 67.818

En  $t=0.5 + \text{SEG}$ ,  $\Delta \ddot{Y} = -45/2 = -22.5 \therefore -22.5 - 1.8946 = -24.3946$

CONTINUACION DEL CUADRO ANTERIOR

t	p	$\ddot{y}$	$\dot{y}$	y	Q
0.80	5.0	-28.000	-2.1449	2.959611	65.293
		-30.146			
		-30.000	-2.21708	2.957874	65.237
		-30.118			
		-30.117	-2.22127	2.95777	65.234
0.90	5.0	-27.00	-5.07712	2.59025	53.473
		-24.236			
		-25.00	-4.97712	2.59358	53.580
		-24.290			
		-24.294	-4.94182	2.59476	53.617
		-4.94242	2.59474	53.617	
1.00	5.0	-14.00	-6.85782	1.99614	34.461
		-14.7305			
		-14.7200	-6.89382	1.99494	34.423
		-14.7120	-6.89342	1.99495	34.423

EN ESTOS CALCULOS SE INTRODUJO  $t = 0.50^-$  Y  $0.50^+$  PORQUE PARA ESTE INSTANTE SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA CARGA  $P(t)$  DE 50.00 TONS A 5.00 TONS, CON LO CUAL SE PRODUCE UN CAMBIO BRUSCO EN LA ACELERACION DEL SISTEMA  $\ddot{y}$ . EN ESTE INSTANTE NO SE PRODUCEN CAMBIOS EN  $\dot{y}$  Y  $y$ . EL TIEMPO  $t = 0.7273$  SEG. SE INTRODUJO POR LA NECESIDAD DE CALCULAR LOS VALORES DE  $y$  Y DE  $Q$ , PUES A PARTIR DE DICHO INSTANTE SE INICIA LA DESCARGA DEL SISTEMA. ESTA CONDICION SE ENCONTRO SOBRE LA BASE DE APROXIMAR  $\dot{y}$  A CERO, OBTENIENDOSE  $y_{MAX} = 3.03853$  CMS Y  $Q_{MAX} = 67.818$  TON.

EN EL CUADRO SIGUIENTE SE PRESENTA UN RESUMEN DE LOS RESULTADOS.

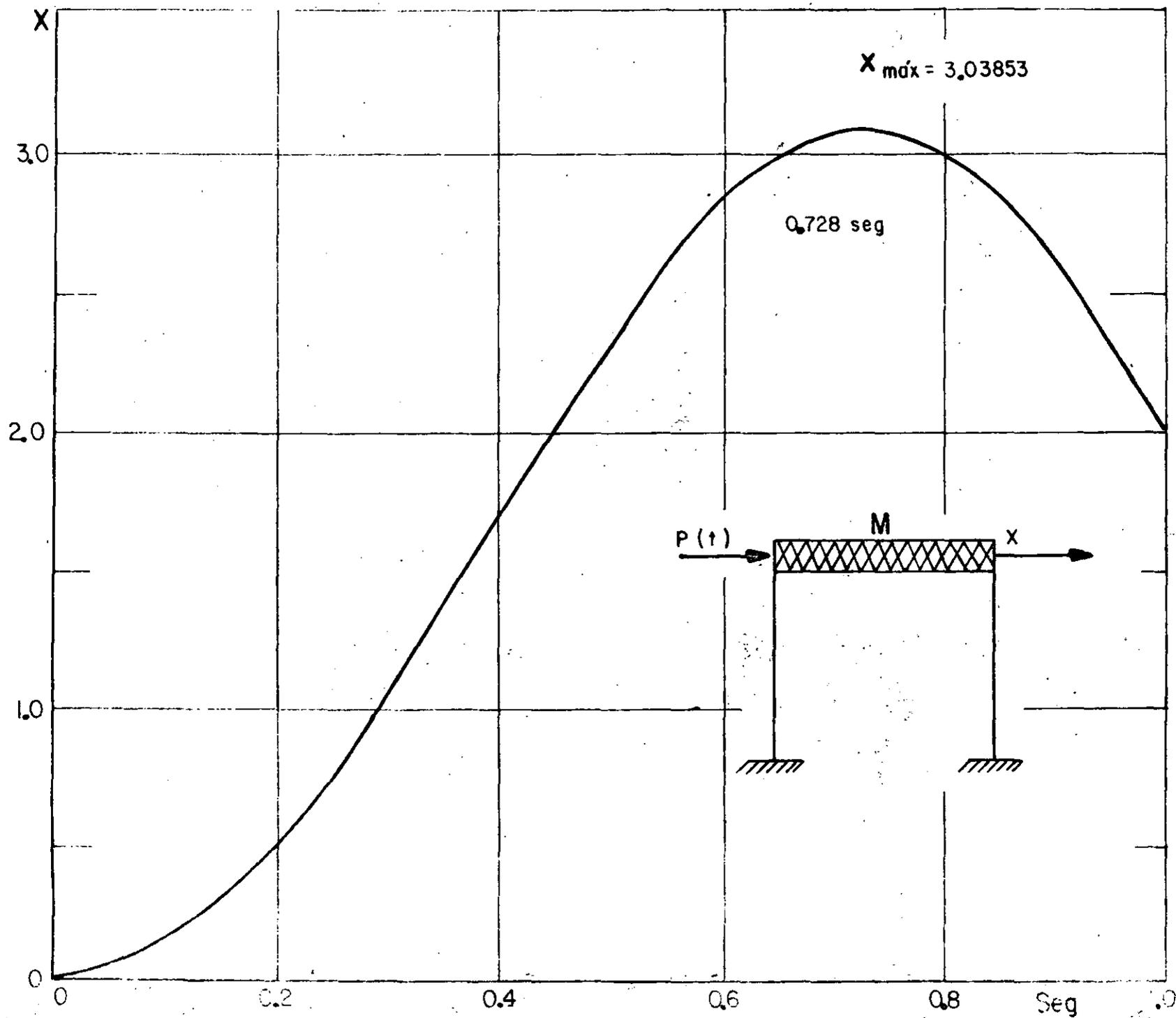
t Seg.	$\ddot{Y}$ (supuesta) Cm Seg <sup>-2</sup>	P Ton	Y Cm.	Q Ton	$\ddot{Y}$ (calculado) Cm Seg <sup>-2</sup>	$\dot{Y}$ Cm Seg <sup>-1</sup>	NOTAS
0.0	- -	50.00	0.00	0.00	25.00	0.00	
0.10	23.0520	50.00	0.12175	3.896	23.0520	2.40260	
0.20	17.5110	50.00	0.46804	14.977	17.5110	4.43075	
0.30	9.5690	50.00	0.98543	30.863	9.5690	5.78480	CAMBIO DE RIGIDEZ
0.40	4.0150	50.00	1.60250	41.970	4.0150	6.4640	
0.50 <sup>-</sup>	-1.8946	50.00	2.25912	53.789	-1.8946	6.5700	
0.50 <sup>+</sup>	- -	5.00	2.25912	53.789	-24.3945	6.5700	CAMBIO DE CARGA
0.60	-29.1380	5.00	2.78624	63.277	-29.1380	3.89347	
0.70	-31.3010	5.00	3.02641	67.600	-31.3010	0.87147	
0.7278	-31.4093	5.00	3.03853	67.818	-31.4093	-0.000205	Q <sub>máx</sub> , Y <sub>máx</sub> .
0.800	-30.1170	5.00	2.95777	65.234	-30.1170	-2.22127	
0.90	-24.3080	5.00	2.59474	53.617	-24.3080	-4.94242	
1.00	-14.7120	5.00	1.99495	34.423	-14.7120	-6.89342	

RESPUESTA MAXIMA

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ máx.} = 3.03853 \text{ cms} \\ Q \text{ máx.} = 67.818 \text{ tons} \end{array} \right.$$

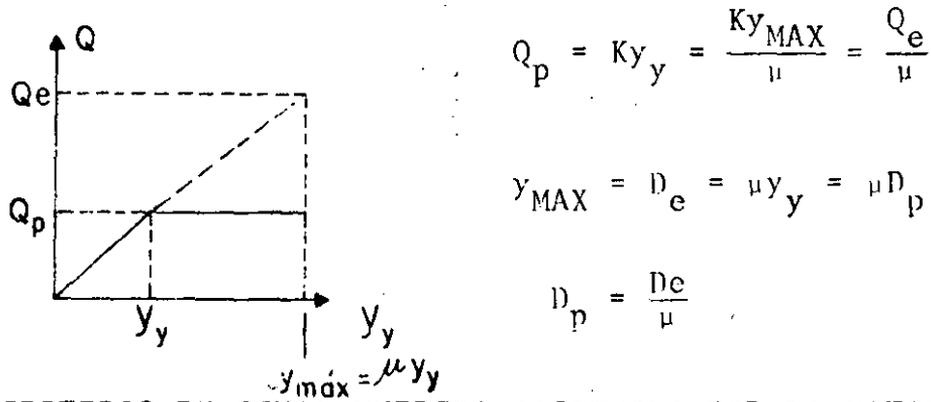
64

65

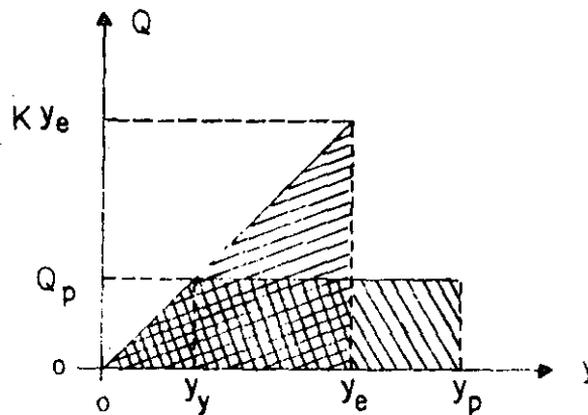


CRITERIOS PARA TRAZAR ESPECTROS DE DISEÑO ELASTOPLASTICOS A PARTIR DEL ELASTICO

1. CRITERIO DE IGUAL DESPLAZAMIENTO MAXIMO DEL SISTEMA ELASTICO Y EL ELASTOPLASTICO DE IGUAL PERIODO:



2. CRITERIO DE IGUAL ENERGIA ABSORVIDA POR LA ESTRUCTURA:



$$\frac{K y_e y_e}{2} = \frac{K y_y y_y}{2} + K y_y (y_p - y_y)$$

$$\frac{1}{2} y_e^2 = \frac{1}{2} y_y^2 + y_y y_p - y_y^2 = y_y y_p - \frac{y_y^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{y_e}{y_y} \right)^2 = \frac{y_p}{y_y} - \frac{1}{2} = \mu - \frac{1}{2}$$

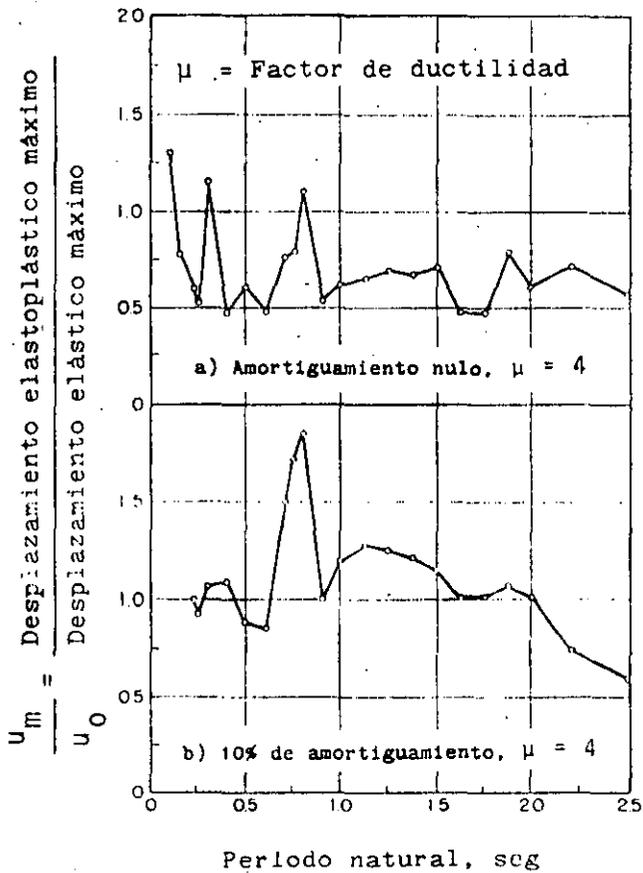
$$\frac{y_e}{y_y} = \sqrt{2\mu - 1}$$

$$y_y = \frac{y_e}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

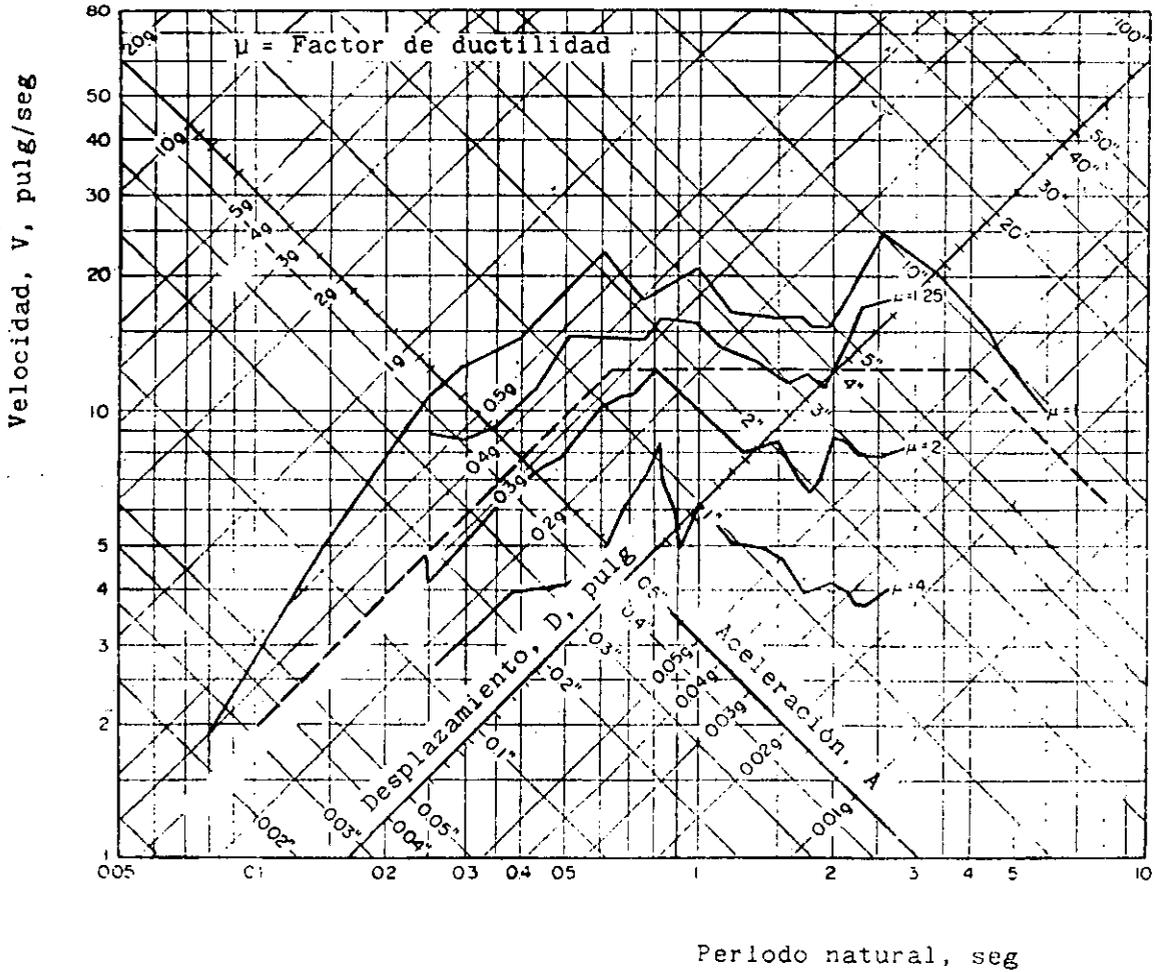
$$y_{y \text{ MAX}} = D_p = \frac{y_e \text{ MAX}}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{D_e}{\sqrt{2 - 1}}$$

POR LO TANTO

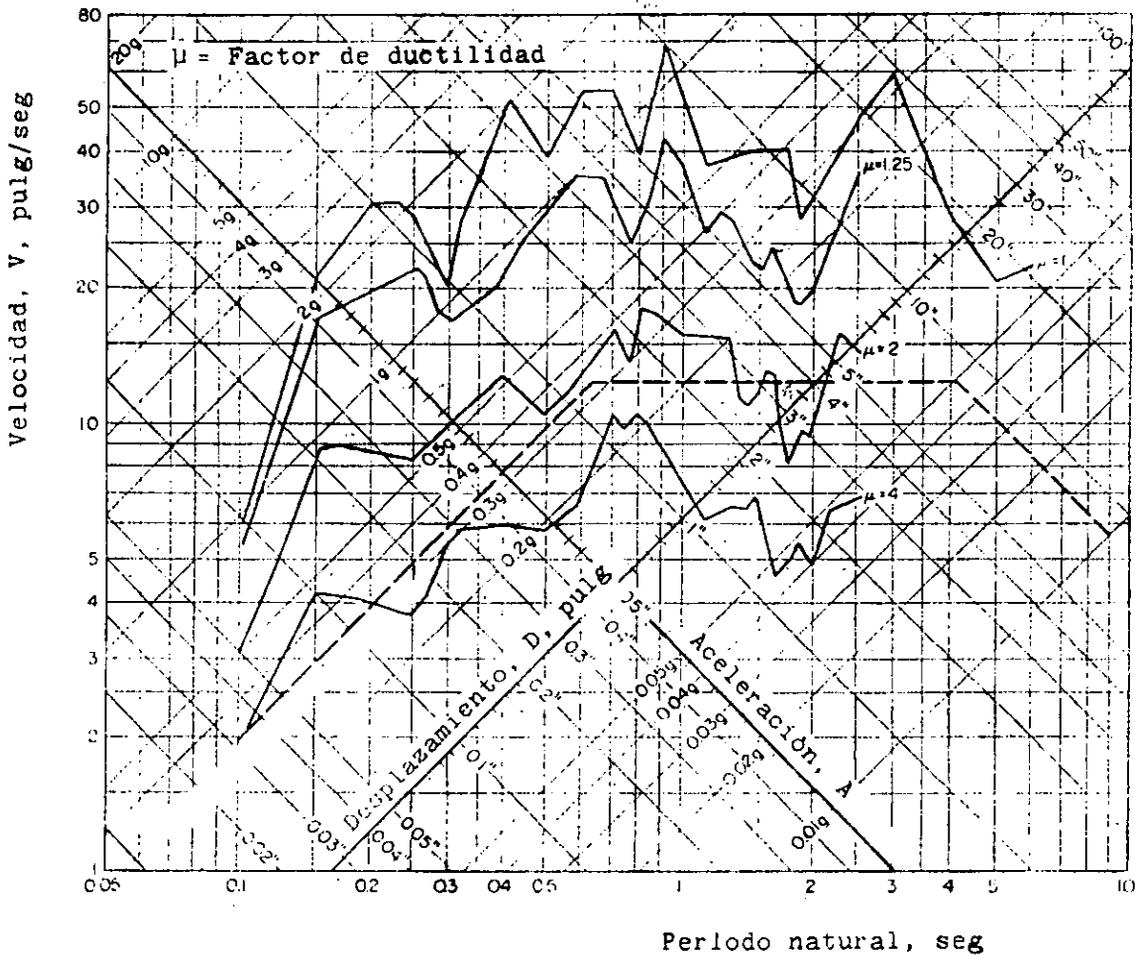
$$D_p = D_e / \sqrt{2\mu - 1} \quad \text{Y} \quad Q_p = Q_e / \sqrt{2\mu - 1} :$$



Comparación de la respuesta máxima de un sistema elastoplástico y uno elástico. Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning.



Espectro de respuesta de un sistema elastoplástico con amortiguamiento nulo (parte elástica). Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning.



Espectro de respuesta de un sistema elastoplástico con 10% de amortiguamiento (parte elástica). Sismo de El Centro, Cal. (1940). Según Blume, Newmark y Corning.

## METODO $\beta$ DE NEWMARK

### SISTEMAS ELASTICOS LINEALES DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE UN SISTEMA DE N GRADOS DE LIBERTAD Y COMPORTAMIENTO ELASTICO LINEAL SE EMPLEAN LAS MISMAS ECUACIONES QUE PARA UN SISTEMA DE UN GRADO DE LIBERTAD.

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})] \frac{\Delta t}{2}$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + \dot{x}_j(t_i)\Delta t + [(1/2-\beta)\ddot{x}_j(t_i) + \beta\ddot{x}_j(t_{i+1})](\Delta t)^2$$

EN DONDE  $j = 1, 2, \dots, N$ .

EN ESTE CASO SE RECOMIENDA TAMBIEN UN VALOR DE  $\beta$  COMPRENDIDO ENTRE 1/4 Y 1/6, Y QUE  $\Delta t \leq 0.1 T_N$ , EN DONDE  $T_N$  ES EL PERIODO NATURAL DE VIBRACION MAS PEQUEÑO.

EJEMPLO

SEA UN SISTEMA DE DOS GRADOS DE LIBERTAD CON AMORTIGUAMIENTO NULO, CUYAS MATRICES DE MASAS Y RIGIDECES SON:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

USANDO EL METODO  $\beta$  DE NEWMARK CON  $\Delta t = 0.2$  seg Y  $\beta = 1/6$  CALCULE LA RESPUESTA DINAMICA ANTE UNA EXCITACION DADA POR LOS DESPLAZAMIENTOS DEL SUELO:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.2 t & \text{SI } 0 \leq t \leq 2 \text{ seg} & \quad (x_0 \text{ EN CENTIMETROS}) \\ x_0 &= 4.8 - 1.2 t & \text{SI } 2 \leq t \leq 4 \text{ seg} \\ x_0 &= 0 & \text{SI } t < 0 \text{ o } t > 4 \text{ seg} \end{aligned}$$

PUESTO QUE ESTA EXCITACION IMPLICA QUE  $\ddot{x}_0(t) = 0$  PARA TODO  $t$ , SE TIENE QUE LA ECUACION MATRICIAL DE EQUILIBRIO RESULTA SER

$$\underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{K}\underline{Y} = \underline{M}\ddot{\underline{Y}} + \underline{Q} = \underline{0}$$

POR LO QUE

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + Q_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = Q_1/m_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 + Q_2 &= 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_2 = Q_2/m_2 \end{aligned}$$

EN DONDE  $y_1 = x_1 - x_0$  Y  $y_2 = x_2 - x_0$ .

CON  $\Delta t = 0.2$  seg Y  $\beta = 1/6$ , LAS ECUACIONES DEL METODO  $\beta$  DE NEWMARK QUEDAN EN LA FORMA

$$\dot{x}_j(t_{i+1}) = \dot{x}_j(t_i) + 0.1 [\ddot{x}_j(t_i) + \ddot{x}_j(t_{i+1})]$$

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + 0.1 \dot{x}_j(t_i) + 0.04 [\ddot{x}_j(t_i)/3 + \ddot{x}_j(t_{i+1})/6]$$

EN  $t = 0$ ,  $y_i = x_i = 0$ ,  $\dot{y}_i = \dot{x}_i = 0$ ,  $\ddot{y}_i = \ddot{x}_i = 0$ .

EN  $t = 0.2$ ,  $x_0 = 1.2 \times 0.2 = 0.24$  cm; SUPONGAMOS  $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 1.35$

Y  $\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.50$  cm/seg:

PRIMER CICLO

PARA LA MASA 1:  $\dot{x}_1 = 0 + 0.1(0 + 1.35) = 0.135$  cm/seg

$x_1 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.35/6) = 0.009$  cm

$y_1 = 0.009 - 0.24 = -0.231$  cm

PARA LA MASA 2:  $\dot{x}_2 = 0 + 0.1(0 + 1.50) = 0.15$

$x_2 = 0 + 0 + 0.04(0 + 1.50/6) = 0.01$

$y_2 = 0.01 - 0.24 = -0.23$  cm

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.231 \\ -0.230 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.540 \\ -1.381 \end{bmatrix}$$

POR LO QUE  $\ddot{y}_1 = \ddot{x}_1 = 2.54/2 = 1.27 \neq 1.35$

$\ddot{y}_2 = \ddot{x}_2 = 1.381/1 = 1.381 \neq 1.50$

SEGUNDO CICLO

$\dot{x}_1 = 0.1 \times 1.27 = 0.127$

$\dot{x}_2 = 0.1 \times 1.381 = 0.138$

$x_1 = 0.04 \times 1.27/6 = 0.0085$

$x_2 = 0.04 \times 1.381/6 = 0.0092$

$y_1 = 0.0085 - 0.24 = -0.2315$

$y_2 = 0.0092 - 0.24 = -0.2308$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2315 \\ -0.2308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.546 \\ -1.386 \end{bmatrix}$$

DE DONDE

$$\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 2.546/2 = 1.273 \approx 1.27$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 1.386/1 = 1.386 \approx 1.381$$

EN  $t = 0.2 + 0.2 = 0.4$  seg SE TIENEN  $x_0 = 1.2 \times 0.4 = 0.48$ ,

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= 0.0085 & ; & & x_2(t_i) &= 0.0092 \\ \dot{x}_1(t_i) &= 0.127 & ; & & \dot{x}_2(t_i) &= 0.138 \\ \ddot{x}_1(t_i) &= 1.273 & ; & & \ddot{x}_2(t_i) &= 1.386 \end{aligned}$$

### PRIMER CICLO

SUPONIENDO  $\ddot{x}_1(t_{i+1}) = 2.3$  Y  $\ddot{x}_2(t_{i+1}) = 2.1$  SE OBTIENEN:

$$\dot{x}_1 = 0.127 + 0.1(1.273 + 2.3) = 0.484$$

$$x_1 = 0.0085 + 0.2 \times 0.127 + 0.04(1.273/3 + 2.3/6) = 0.0662$$

$$y_1 = 0.0662 - 0.48 = -0.4138$$

$$\dot{x}_2 = 0.138 + 0.1(1.386 + 2.1) = 0.486$$

$$x_2 = 0.0092 + 0.2 \times 0.138 + 0.04(1.386/3 + 2.1/6) = 0.0693$$

$$y_2 = 0.0693 - 0.48 = -0.4107$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4138 \\ -0.4107 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.548 \\ -2.468 \end{bmatrix}$$

DE DONDE

$$\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 4.548/2 = 2.274 \neq 2.3$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{y}_2 = 2.468 \neq 2.1$$

ETCETERA. LOS RESULTADOS DEL PROBLEMA SE PRESENTAN EN LA TABLA 1.

Tomado del libro de N. Newmark y E. Rosenblueth D.

Tabla 2.1. Ejemplo 2.7

$t$ seg	$Q_1$ ton	$\dot{Y}$ cm/seg	$\ddot{X}$ cm/seg <sup>2</sup>	$X_1$ cm	$X_1 - X_0$ cm	$Q_2$ ton	$\dot{Y}$ cm/seg	$\ddot{X}$ cm/seg <sup>2</sup>	$X_2$ cm	$X_2 - X_0$ cm	$Y_0$ cm
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	2.340	1.550	0.135	0.0090	-0.2310	1.340	1.500	0.150	0.0100	-0.2300	0.24
0.2	2.346	1.270	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.380	0.138	0.0082	-0.2308	0.24
0.2	2.346	1.273	0.127	0.0085	-0.2315	1.386	1.386	0.138	0.0082	-0.2308	0.24
0.4	4.548	2.300	0.484	0.0662	-0.4138	2.458	2.100	0.486	0.0493	-0.4107	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.468	0.523	0.0718	-0.4082	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.4	4.548	2.274	0.481	0.0660	-0.4140	2.455	2.455	0.522	0.0717	-0.4083	0.48
0.6	5.585	2.700	0.978	0.2105	-0.5095	2.960	3.200	1.088	0.2501	-0.4899	0.72
0.6	5.581	2.793	0.987	0.2111	-0.5049	2.947	2.960	1.064	0.2295	-0.4915	0.72
0.6	5.580	2.793	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.967	1.065	0.2296	-0.4914	0.72
0.6	5.580	2.790	0.987	0.2111	-0.5089	2.966	2.966	1.065	0.2296	-0.4914	0.72
0.8	5.409	2.920	1.556	0.4650	-0.4350	2.790	2.980	1.660	0.5010	-0.4590	0.96
0.8	5.423	2.704	1.536	0.4637	-0.4963	2.798	2.790	1.641	0.4997	-0.4603	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4352	2.797	2.798	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
0.8	5.422	2.711	1.537	0.4638	-0.4962	2.797	2.797	1.642	0.4998	-0.4602	0.96
1.0	4.104	2.150	2.023	0.8216	-0.3784	1.977	2.200	2.142	0.8802	-0.3198	1.20
1.0	4.111	2.052	2.013	0.8210	-0.3790	1.985	1.977	2.120	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.0	4.111	2.055	2.014	0.8210	-0.3790	1.985	1.985	2.121	0.8787	-0.3213	1.20
1.2	1.931	0.950	2.315	1.2575	-0.1825	0.712	0.700	2.390	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.2	1.930	0.965	2.316	1.2576	-0.1824	0.712	0.712	2.391	1.3341	-0.1059	1.44
1.4	-0.853	-0.320	2.381	1.7315	0.0515	-0.735	-0.800	2.382	1.8165	0.1365	1.68
1.4	-0.852	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.4	-0.852	-0.326	2.380	1.7315	0.0515	-0.735	-0.735	2.388	1.8169	0.1369	1.68
1.6	-3.043	-1.500	2.197	2.1932	0.2732	-2.026	-2.100	2.104	2.2707	0.3507	1.92
1.6	-3.040	-1.541	2.193	2.1929	0.2729	-2.027	-2.026	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.6	-3.040	-1.540	2.193	2.1929	0.2729	-2.027	-2.027	2.111	2.2712	0.3512	1.92
1.8	-4.830	-2.500	1.780	2.5443	0.4343	-2.869	-2.900	1.618	2.6471	0.4471	2.16
1.8	-4.836	-2.415	1.797	2.5449	0.4349	-2.871	-2.869	1.621	2.6473	0.4473	2.16
1.8	-4.836	-2.418	1.797	2.5449	0.4349	-2.871	-2.871	1.621	2.6473	0.4473	2.16
2.0	-5.547	-2.800	1.275	2.9034	0.5034	-3.069	-3.000	1.034	2.9132	0.5132	2.40
2.0	-5.549	-2.773	1.278	2.9036	0.5036	-3.069	-3.069	1.027	2.9127	0.5127	2.40
2.0	-5.549	-2.774	1.278	2.9036	0.5036	-3.068	-3.068	1.027	2.9127	0.5127	2.40

TABLE 2.1. Ejemplo 2.7 (Cont.)

L BFC	$Q_1$ ton	$\dot{V}_1$ cm/sec <sup>2</sup>	$\dot{L}_1$ cm/sec	$\dot{L}_1$ cm	$\dot{X}_1 - \dot{X}_P$ cm	$Q_2$ ton	$\dot{V}_2$ cm/sec <sup>2</sup>	$\dot{L}_2$ cm/sec	$\dot{X}_2$ cm	$\dot{X}_2 - \dot{X}_0$ cm	$\dot{X}_0$ cm
2.2	-10.156	-5.700	0.481	3.0875	0.9275	-5.332	-5.460	0.174	3.0408	0.8808	2.16
2.7	-10.165	-5.078	0.443	3.0883	0.9283	-5.337	-5.332	0.187	3.0417	0.8817	2.16
2.2	-10.165	-5.083	0.453	3.0883	0.9263	-5.337	-5.337	0.186	3.0417	0.8817	2.16
2.4	-12.578	-6.900	-0.705	3.0731	1.1531	6.386	-6.200	-0.918	2.9665	1.0465	1.92
2.4	-12.617	-6.709	-0.644	3.0772	1.1572	6.383	-6.386	-0.987	2.9657	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.309	-0.646	3.0770	1.1570	6.383	-6.383	-0.986	2.9658	1.0452	1.92
2.4	-12.615	-6.708	-0.646	3.0770	1.1570	6.383	-6.383	-0.986	2.9652	1.0452	1.92
2.6	-12.388	-6.200	-1.197	2.8175	1.1425	-5.958	-6.000	-2.224	2.6429	0.9629	1.68
2.6	-12.388	-6.154	-1.196	2.8225	1.1425	-5.959	-5.958	-2.220	2.6428	0.9632	1.68
2.6	-12.388	-6.194	-1.196	2.8225	1.1425	-5.959	-5.959	-2.220	2.6422	0.9632	1.68
2.8	-9.573	-4.500	-2.945	2.3320	0.8820	-4.155	-4.100	-3.206	2.0925	0.6525	1.44
2.8	-9.540	-4.787	-2.994	2.3788	0.6888	-4.150	-4.155	-3.212	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.6889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
2.8	-9.541	-4.770	-2.992	2.3289	0.6889	-4.150	-4.150	-3.211	2.0921	0.6521	1.44
3.0	-4.687	-2.500	-3.719	1.6502	0.4502	-1.376	-1.400	-3.766	1.3653	0.1853	1.20
3.0	-4.698	-2.343	-3.703	1.6513	0.4513	-1.378	-1.376	-3.764	1.3654	0.1854	1.20
3.0	-4.698	-2.349	-3.704	1.6513	0.4513	-1.378	-1.378	-3.764	1.3654	0.1854	1.20
3.2	1.090	0.800	-3.859	0.8845	-0.0755	1.748	1.700	-3.732	0.6255	-0.3345	0.96
3.2	1.106	0.545	-3.884	0.8820	-0.0772	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.2	1.105	0.553	-3.883	0.8829	-0.0771	1.748	1.748	-3.727	0.6259	-0.3341	0.96
3.4	6.606	3.600	-3.468	0.1377	-0.1823	4.506	4.700	-3.082	-0.0649	-0.7849	0.72
3.4	6.624	3.764	-3.428	0.1377	0.1143	4.515	4.506	-3.101	-0.0662	-0.7862	0.72
3.4	6.611	3.514	-3.429	0.1376	-0.1841	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.4	6.628	3.214	-3.439	0.1378	-0.5042	4.515	4.515	-3.100	-0.0661	-0.7861	0.72
3.6	10.578	5.400	-2.568	-0.4718	-0.9518	6.251	6.400	-1.958	-0.5799	-1.0599	0.48
3.6	10.589	5.115	-2.579	-0.4725	-0.9521	6.277	6.251	-2.023	-0.5842	-1.0642	0.48
3.6	10.589	5.259	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.6	10.589	5.259	-2.577	-0.4725	-0.9525	6.277	6.277	-2.020	-0.5841	-1.0641	0.48
3.8	12.719	6.200	-1.427	-0.6760	-1.1160	6.612	6.800	-0.712	-0.8591	-1.0991	0.24
3.8	12.764	6.110	-1.424	-0.6764	-1.1164	6.618	6.612	-0.731	-0.8603	-1.1003	0.24
3.8	12.764	6.132	-1.434	-0.6764	-1.1164	6.618	6.618	-0.730	-0.8603	-1.1003	0.24
4.0	11.323	5.400	-0.760	-1.0441	-1.0441	5.454	5.400	0.472	-0.8821	-0.8821	0
4.0	11.319	5.661	-0.755	-1.0437	-1.0437	5.453	5.414	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.0	11.319	5.660	-0.755	-1.0437	-1.0437	5.453	5.453	0.477	-0.8817	-0.8817	0
4.2	10.705	5.210	-1.546	-1.5426	-1.5426	5.330	5.700	1.549	-0.865	-0.8651	0
4.2	10.705	5.352	-1.545	-0.9526	-0.9526	5.329	5.330	1.552	-0.8659	-0.8659	0



Sustituyendo (3) en (2):

$$-J\omega^2\theta + L_T\ddot{\theta} - Ke_s z = 0$$

$$(L_T - J\omega^2)\ddot{\theta} - Ke_s z = 0 \quad (2')$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} K - \omega^2 M & -Ke_s \\ -Ke_s & L_T - J\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(K - \omega^2 M)(L_T - J\omega^2) - K^2 e_s^2 = 0$$

$$KL_T - KJ\omega^2 - \omega^2 ML_T + MJ\omega^4 - K^2 e_s^2 = 0$$

$$\omega^4 - \frac{KJ + ML_T}{MJ} \omega^2 + \frac{KL_T}{MJ} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ} = 0$$

DIVIENDO POR  $(K/M)^2$ :

$$\frac{\omega^4}{(K/M)^2} - \frac{\omega^2}{K/M} \frac{KJ + ML_T}{(MJ)(K/M)} + \frac{KL_T}{MJ(K/M)^2} - \frac{K^2 e_s^2}{MJ(K/M)^2} = 0$$

SI  $\lambda^2 = \omega^2 / (K/M)$  Y CONSIDERANDO  $e_s = cb$ :

$$\lambda^4 - \lambda^2 \left(1 + \frac{L_T/J}{K/M}\right) + \frac{L_T/J}{K/M} - \frac{c^2}{J/(Mb^2)} = 0$$

SI  $(L_T/J)/(K/M) = \eta$  Y  $j^2 = J/(Mb^2)$

$$\lambda^4 - \lambda^2 (1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = 0$$

$$\therefore \lambda_{1,2}^2 = \frac{\eta + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta + 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \lambda_1 (K/M) \text{ Y } \omega_2^2 = \lambda_2 (K/M)$$

SUSTITUYENDO A  $\omega_1^2$ , EN (1') O EN (2'):

$$\underline{z}_1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_1^2}{cb} \end{bmatrix} ;$$

SUSTITUYENDO A  $\omega_2^2$ :

$$\underline{z}_2 = \begin{bmatrix} z_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_2^2}{cb} \end{bmatrix} \quad \text{o:} \quad \underline{z}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \lambda_n^2}{cb} \end{bmatrix}$$

# Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido

Octavio RASCON CH.

## INTRODUCCION

En la práctica se presentan estructuras constituidas por una sola columna la cual sostiene una cubierta que puede ser una losa o un cascarón. Su comportamiento dinámico debe estudiarse considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total de la estructura.

A principios de este año se presentó en California, EUA. un trabajo<sup>1</sup> en el cual se trató este problema desde un punto de vista energético. Se calculó sólo el periodo fundamental y con base en él, la respuesta de la estructura a un determinado temblor. Los periodos calculados para cuatro estructuras de este tipo ya construidas fueron menores que los medidos *in situ*. La discrepancia fue atribuida a efectos de rotación y traslación de la base.

El objeto de este trabajo es introducir un análisis modal, el cual nos proporcionará los efectos del acoplamiento que existe entre los modos de vibración. También se tomarán en cuenta en forma aproximada los efectos de rotación y traslación de la base.

## CALCULO DE FRECUENCIAS Y CONFIGURACIONES MODALES DE VIBRACION

### 1. Suelo rígido

Para el caso en que el centro de gravedad de la cubierta se encuentra localizado en la prolongación del eje de la columna, el movimiento de la estructura podrá estudiarse en dos direcciones perpendiculares entre sí. En tal caso el problema podrá discretizarse como de dos modos de vibración acoplados en cada dirección.

Para el cálculo de las frecuencias de vibración se idealizará la estructura como de comportamiento lineal, constituida por una cubierta infinitamente rígida de masa simétricamente distribuida y soportada por una sola columna. Como primer caso se considerará al suelo infinitamente rígido (fig. 1).

En fig. 1

- $W$  = peso de la cubierta más la parte tributaria de la columna
- $J$  = momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje  $z$

<sup>1</sup> Asistente de Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

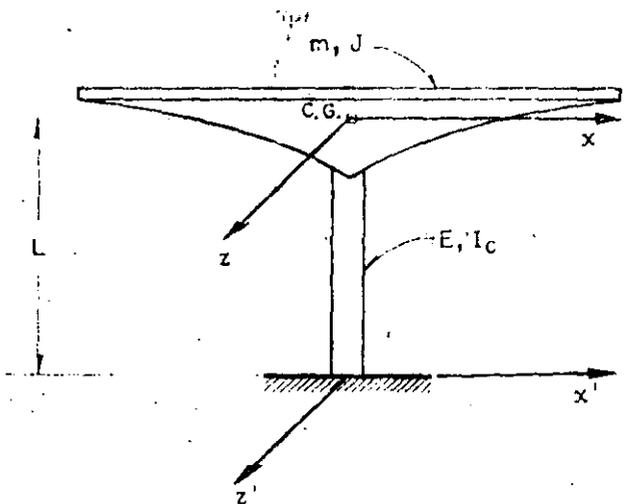


Fig. 1. Péndulo invertido

- $E$  = módulo de elasticidad del material de la columna
- $I_c$  = momento de inercia de la sección transversal de la columna con respecto al eje  $z$
- C.G. = centro de gravedad de la cubierta
- $L$  = distancia de C.G. al suelo.

Para la columna mostrada en las figs. 2a y 2b.

- $k$  = rigidez por traslación (fuerza horizontal aplicada en C.G. necesaria para que este se desplace la unidad)
- $k_r$  = rigidez por rotación (par aplicado en C.G. necesario para producir un giro unitario a la altura de C.G.)
- $\theta$  = rotación en C.G. debida a la fuerza  $k$
- $\delta$  = desplazamiento lateral de C.G. debido al momento  $k_r$ .

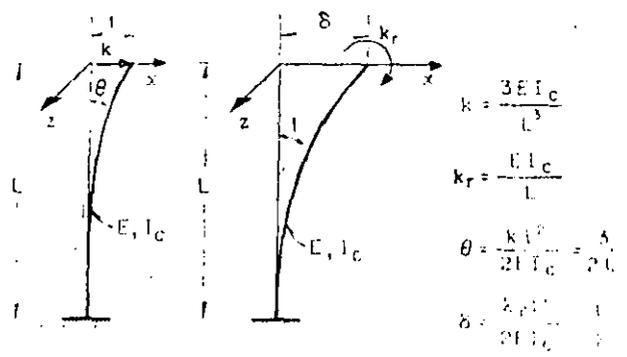


Fig. 2. Rigideces

Despreciando las deformaciones por cortante, las expresiones para  $k$ ,  $k_r$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  pueden encontrarse por estática y valen

$$k = 3EI_c/L^3; \quad (1a)$$

$$k_r = EI_c/L; \quad (2a)$$

$$\gamma = 1.5/L \quad (1b)$$

$$\delta = L/2 \quad (2b)$$

Para una fuerza de magnitud  $k\alpha$ , el desplazamiento será  $\alpha$  y el giro  $\alpha\theta$ . Para un par de magnitud  $\beta k_r$ , el giro será  $\beta$  y el desplazamiento  $\beta\delta$ . Al aplicarse ambos simultáneamente, el desplazamiento total de C.G. será  $x_1$  y el giro  $\epsilon_1$  (fig. 3).

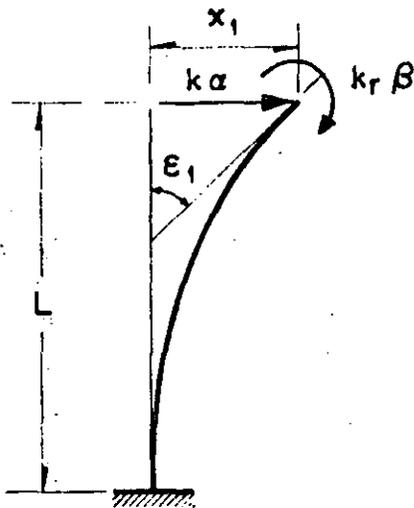


Fig. 3. Desplazamientos y giros totales

$$x_1 = \alpha + \beta\delta$$

$$\epsilon_1 = \alpha\theta + \beta$$

Por tanto los valores de  $x_1$  y  $\epsilon_1$  quedan dados por

$$x_1 = \alpha + \beta\delta \quad (3)$$

$$\epsilon_1 = \alpha\theta + \beta \quad (4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 3 y 4 para  $\alpha$  y  $\beta$ , y utilizando las ecs 1b y 2b se obtiene

$$\alpha = (x_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa \quad (5a)$$

$$\beta = (\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa \quad (5b)$$

en las cuales

$$\gamma = L^2/2EI_c \quad (6a)$$

$$\kappa = 1 - kL^3/4EI_c = 0.25 \quad (6b)$$

Para las oscilaciones del péndulo mostrado en la fig 1, el diagrama de cuerpo libre de la cubierta está indicado en la fig 4. Las ecuaciones de movimiento, despreciando efectos gravitacionales, serán

$$m\ddot{x}_1 + k\alpha = 0 \quad (7)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + k_r\beta = 0 \quad (8)$$

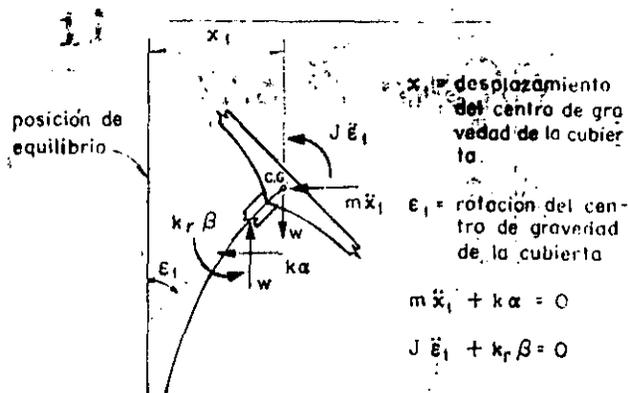


Fig. 4. Diagrama de cuerpo libre

Sustituyendo a (5a) y (5b) en (7) y (8) se obtiene

$$m\ddot{x}_1 + (kx_1 - k_r\gamma\epsilon_1)/\kappa = 0 \quad (9)$$

$$J\ddot{\epsilon}_1 + (k_r\epsilon_1 - k\gamma x_1)/\kappa = 0 \quad (10)$$

Las ecs. 9 y 10 se pueden expresar matricialmente en la forma

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\epsilon}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\gamma k k_r \\ -\gamma k k_r & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Utilizando las ecs 1a, 2a y 6a se encuentra que

$$\gamma k k_r = Lk/2 \quad (12)$$

Puesto que el movimiento es armónico se tiene que

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \quad \text{y} \quad \ddot{\epsilon}_1 = -\omega^2 \epsilon_1 \quad (13)$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural de vibración.

Sustituyendo las ecs. 12 y 13 en (11) se obtiene

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \omega^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

Factorizando en la ec. 14

$$\left[ \frac{1}{\kappa} \begin{bmatrix} k & -\frac{Lk}{2} \\ -\frac{Lk}{2} & k_r \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \epsilon_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

La ec 15 representa un sistema de ecuaciones homogéneas, el cual, para tener solución diferente de la trivial, necesita que su determinante sea nulo. Por tanto

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\kappa} - m\omega^2 & -\frac{Lk}{2\kappa} \\ -\frac{Lk}{2\kappa} & \frac{k_r}{\kappa} - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

Desarrollando el determinante se llega a

$$mJ\omega^4 - \frac{1}{\kappa} (kJ + mk_r)\omega^2 + \frac{1}{4\kappa^2} (4kk_r - L^2k^2) = 0 \quad (17)$$

Dividiendo ambos miembros entre  $mJ$  y considerando que  $L^2k^2 = 3kk_r$ , se obtiene

$$\omega^4 - \frac{kJ + mk_r}{mJ\kappa} \omega^2 + \frac{k k_r}{4mJ\kappa^2} = 0 \quad (18)$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\omega^2$ , cuyas soluciones son

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{kJ + mk_r}{2mJ\kappa} \pm \sqrt{\frac{(kJ + mk_r)^2}{4m^2J^2\kappa^2} - \frac{k k_r}{4mJ\kappa^2}} \quad (19)$$

Dividiendo numerador y denominador de (19) entre  $mJ$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k/m + k_r/J}{2\kappa} \pm \frac{1}{2\kappa} \sqrt{(k/m + k_r/J)^2 - (k/m)(k_r/J)} \quad (20)$$

Llamando a

$k/m = p^2 =$  cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación

$k_r/J = \Omega^2 =$  cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

se obtiene

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left( p^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(p^2 + \Omega^2)^2 - p^2\Omega^2} \right) \quad (21)$$

Dividiendo ambos miembros de (21) entre  $p^2$  y haciendo  $\omega^2/p^2 = \lambda$  y  $\Omega^2/p^2 = \mu$  se llega a

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \mu \pm \sqrt{(1 + \mu)^2 - \mu} \right) \quad (22)$$

Es interesante notar que si  $J = 0$  (masa concentrada) de la ec 17 se obtiene  $\omega^2 = k/m = p^2$ .

Las configuraciones modales pueden obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones algebraicas contenidas en la ecuación matricial dada en ec 15. La primera de ellas es

$$\left( \frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) x_{1,n} - \frac{Lk}{2\kappa} \theta_{1,n} = 0 \quad (23)$$

donde el índice  $n$  indica el número del modo y de la cual se obtiene

$$x_{1,n}/\theta_{1,n} = \frac{Lk}{2\kappa} \left/ \left( \frac{k}{\kappa} - m\omega_n^2 \right) \right. \quad (24)$$

dividiendo numerador y denominador de (24) entre  $m$  y considerando que  $\kappa = 0.25$ ,  $k/m = p^2$  y que  $\lambda_n = \omega_n^2/p^2$  se llega a

$$x_{1,n}/\theta_{1,n} = 2L/(4 - \lambda_n) \quad (25)$$

Si se desean tomar en cuenta las deformaciones por cortante basta con modificar las rigideces mediante un análisis de estática y partir de nuevo de la ec 17 sin considerar que  $L^2k^2 = 3kk_r$ . Si existe excentricidad en alguna dirección su efecto podrá tomarse en cuenta introduciendo un grado de libertad adicional.

En las figs 5 y 6 se encuentran representados los resultados de las ecs 22 y 25.

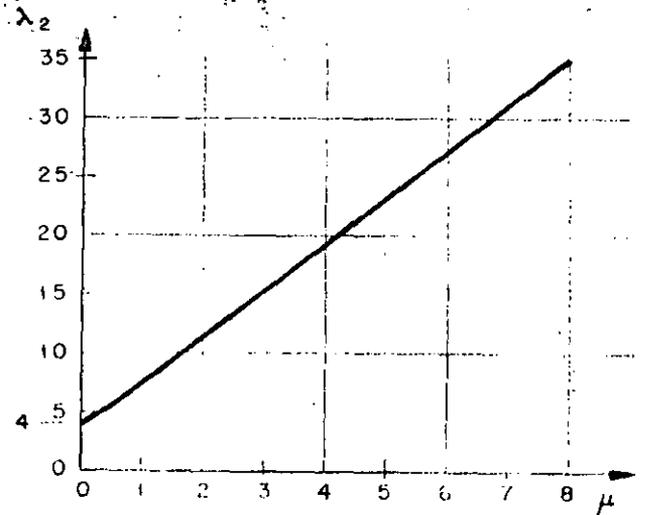
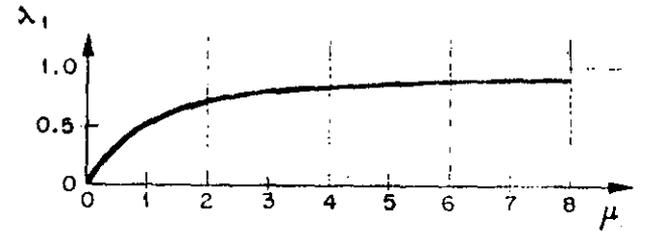


Fig. 5. Gráfica de frecuencias

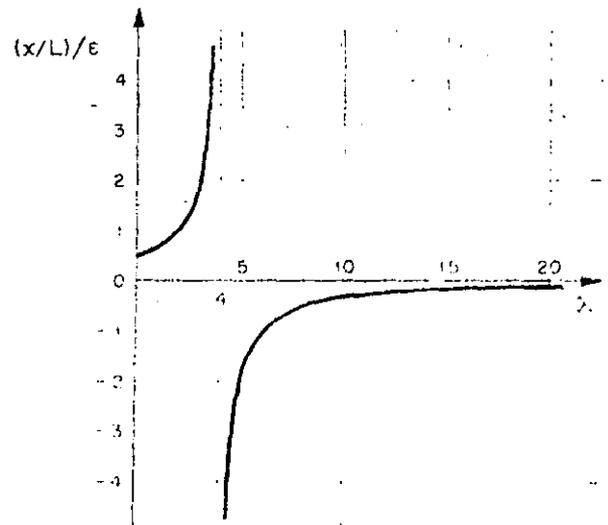


Fig. 6. Gráfica  $(x/L)/\epsilon$  vs  $\lambda$

### 2. Suelo flexible

Al oscilar una estructura cimentada en suelo blando, existe interacción dinámica suelo-estructura que en la mayoría de los casos no debe despreciarse al calcular las frecuencias y los modos de vibración. En lo que sigue se propone la adaptación de un método numérico para tomar en cuenta dicho efecto.

Las restricciones del suelo serán idealizadas mediante resortes de comportamiento lineal: uno para desplazamientos lineales horizontales y otro para deformaciones angulares de cabeceo de la cimentación.

En la fig. 7 se hace referencia a los parámetros que a continuación se mencionan

- $K$  = rigidez del resorte correspondiente a la traslación de la base  $= C_r A$
- $C_r$  = coeficiente de cortante elástico uniforme del suelo.
- $A$  = área de contacto de la cimentación.
- $R$  = rigidez del resorte correspondiente a rotación de la base  $= C_\theta I_b = W' \bar{y}$
- $C_\theta$  = coeficiente de compresión elástica no uniforme del suelo.
- $I_b$  = momento de inercia de área de la base de la cimentación con respecto al eje  $z'$
- $W'$  = peso total de la estructura
- $\bar{y}$  = altura del centro de gravedad de la estructura sobre el nivel de desplante
- $F = m \omega_n^2 x$
- $x$  = desplazamiento lineal total en C.G.
- $M = J \omega_n^2 r$
- $r$  = desplazamiento angular total en C.G.

- $L'$  = altura de C.G. sobre el nivel de desplante
- $x_0$  = traslación de la base
- $r_0$  = rotación de la base
- $x_1 = \alpha + \beta \delta$
- $r_1 = \beta + \alpha \theta$
- $x_2 = L' r_0$
- $\alpha = F/k$
- $\beta = M/k_r$

$J, L, \delta, \theta, k, k_r, x_0, r_0$  y  $W$  ya definidos anteriormente.

El problema será resuelto utilizando un procedimiento iterativo y la tabulación propuesta por N. M. Newmark<sup>1</sup>; se despreciarán la variación de la rigidez de la columna debida a la fuerza normal  $W$  y los momentos en la misma, causados por la excentricidad del peso debida a deformaciones de la columna.

Sean

- $F_0$  = fuerza horizontal en la base de la cimentación  $= F$
- $M_0$  = momento flexionante en la base de la cimentación  $= M + FL'$
- $x_0 = F_0/K$
- $r_0 = M_0/R$

A continuación se describe el procedimiento a seguir:

1. Suponer valores para  $x$  y  $r$
2. Calcular  $F$  y  $M$  usando las expresiones  $F = m \omega_n^2 x$  y  $r = J \omega_n^2 r$ . En esta etapa el valor de  $\omega_n$  aún no se conoce; por tanto se llevará como factor común en el resto del cálculo

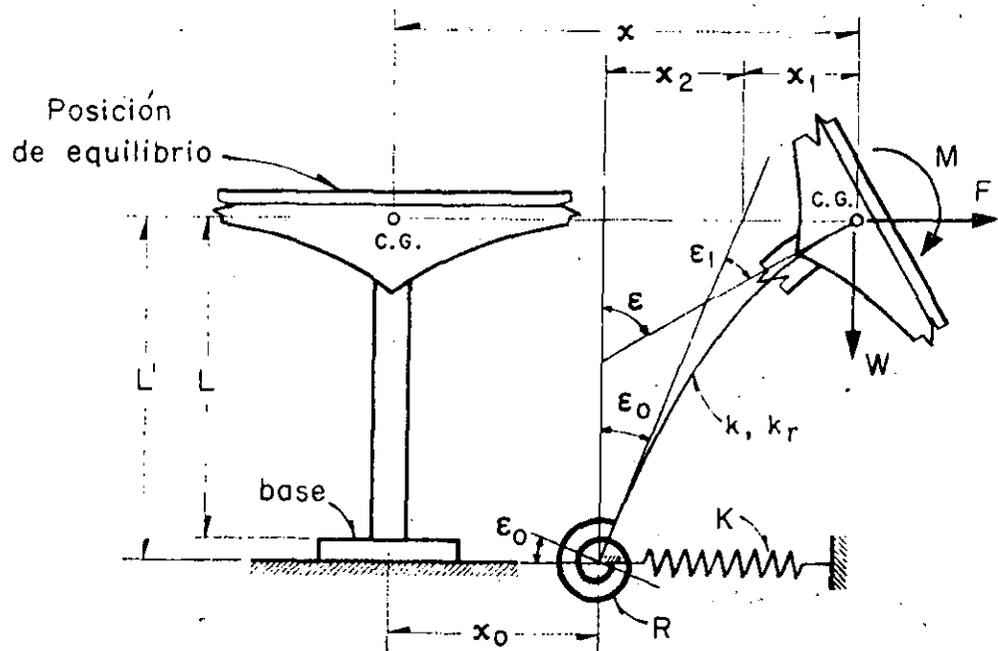


Fig. 7. Modelo de interacción dinámica suelo-estructura

3. Calcular la fuerza y el momento en la base mediante las fórmulas

$$F_u = F \quad \text{y} \quad M_u = M + FL'$$

4. Encontrar los valores de los desplazamientos  $x_u = F_u/K$  y  $r_u = M_u/R$

5. Calcular los valores de los parámetros  $\alpha = F/k$  y  $\beta = M/k$

6. Efectuar los productos  $\beta\delta$  y  $\alpha\theta$

7. Calcular  $x_1 = \alpha + \beta\delta$  y  $r_1 = \beta + \alpha\theta$

8. Efectuar el producto  $x_2 = L'r_1$

9. Calcular los desplazamientos lineales y angulares totales de C.G. mediante las expresiones

$$x' = x_u + x_1 + x_2 \quad \text{y} \quad \epsilon' = \epsilon_u + \epsilon_1$$

10. Encontrar el valor de  $\omega_n^2$  mediante los cocientes  $x/x'$  y  $r/r'$

11. Si los valores de  $\omega_n^2$  calculados en el paso anterior son aproximadamente iguales, el proceso habrá concluido. En caso contrario repitase la secuela utilizando como valores de partida para  $x$  y  $r$  los encontrados en etapa 9 o valores cuyo cociente sea igual al de  $x'$  entre  $r'$ . El proceso deberá continuarse hasta lograr la aproximación deseada.

### EJEMPLO DE APLICACION

Con motivo de ilustrar los conceptos enunciados anteriormente se calcularán las frecuencias y modos de vibración de un cascarón ya construido en California, EUA (fig 8). Los datos necesarios han sido extraídos de la ref 1. Se computarán también las respuestas sísmicas suponiendo que esa estructura fuera a construirse en la zona blanda de la ciudad de México. Se utilizarán por tanto los parámetros elásticos de las arcillas del Valle de México y los espectros de diseño propuestos en el reglamento de construcción para el Distrito Federal.

Los datos necesarios de la estructura son

$$\begin{aligned} L &= 419 \text{ cm} \\ L' &= 480 \text{ cm} \\ \bar{y} &= 249 \text{ cm} \\ W &= 20,450 \text{ kg} \quad (m = 20.81 \text{ kg seg}^2/\text{cm}) \\ W' &= 43,600 \text{ kg} \\ I_b &= 1.775 \times 10^9 \text{ cm}^4 \\ I_c &= 1.065 \times 10^6 \text{ cm}^4 \\ k &= 1.266 \times 10^4 \text{ kg/cm} \\ k_r &= 7.41 \times 10^4 \text{ kg cm/rad} \\ J &= 1.386 \times 10^6 \text{ kg seg}^2 \text{ cm} \\ \theta &= 0.00358 \text{ rad/cm} \\ \delta &= 208 \text{ cm/rad} \end{aligned}$$

Las expresiones para  $C_r$  y  $C_\tau$  son las siguientes:

$$C_r = F_1 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}}; \quad C_\tau = F_2 \frac{E'}{1 - \nu^2} \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (26)$$

En ecs 26

$$\begin{aligned} E' &= \text{módulo de elasticidad del suelo} \\ \nu &= \text{relación de Poisson del suelo} \end{aligned}$$

$A$  = área de contacto de la cimentación  
 $F_1, F_2$  = factores de forma de la cimentación

Para el caso de la zona blanda del Valle de México un valor representativo de  $E'$  es  $50 \text{ kg/cm}^2$  y  $\nu = 0.5$ . Para una cimentación cuadrada los valores de  $F_1$  y  $F_2$  son 0.704 y 2.11 respectivamente.

Sustituyendo valores en ecs 26 se obtiene

$$\begin{aligned} C_r &= 0.123 \text{ kg/cm}^3 \\ C_\tau &= 0.369 \text{ kg/cm}^3 \end{aligned}$$

### CASO 1. SUELO RÍGIDO

#### a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración

Para el cálculo de las frecuencias de vibración usaremos la fórmula dada en ec 22. Los valores de los parámetros a sustituir son

$$\begin{aligned} p^2 &= k/m = 608 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \Omega^2 &= k_r/J = 535 \text{ (rad/seg)}^2 \\ \mu &= \Omega^2/p^2 = 0.882 \end{aligned}$$

con los cuales

$$\lambda_{1,2} = 2(1.882 \pm \sqrt{3.55 - 0.882}) = 0.494; 7.034$$

Por tanto

$$\omega_1 = \sqrt{0.494 \times 608} = \sqrt{300} = 17.32 \text{ rad/seg}$$

$$\omega_2 = \sqrt{7.034 \times 608} = \sqrt{4260} = 65.30 \text{ rad/seg}$$

Los periodos naturales son

$$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 0.362 \text{ seg} \quad (T_1 \text{ obtenido de un registro de vibraciones libres de la estructura y reportado en ref 1} = 0.483 \text{ seg})$$

$$T_2 = 2\pi/\omega_2 = 0.096 \text{ seg}$$

Comparando los valores calculado y medido de  $T_1$  se puede ver la importancia de la interacción dinámica suelo-estructura.

Las relaciones modales se obtienen de las ecs. 25 y sus valores son

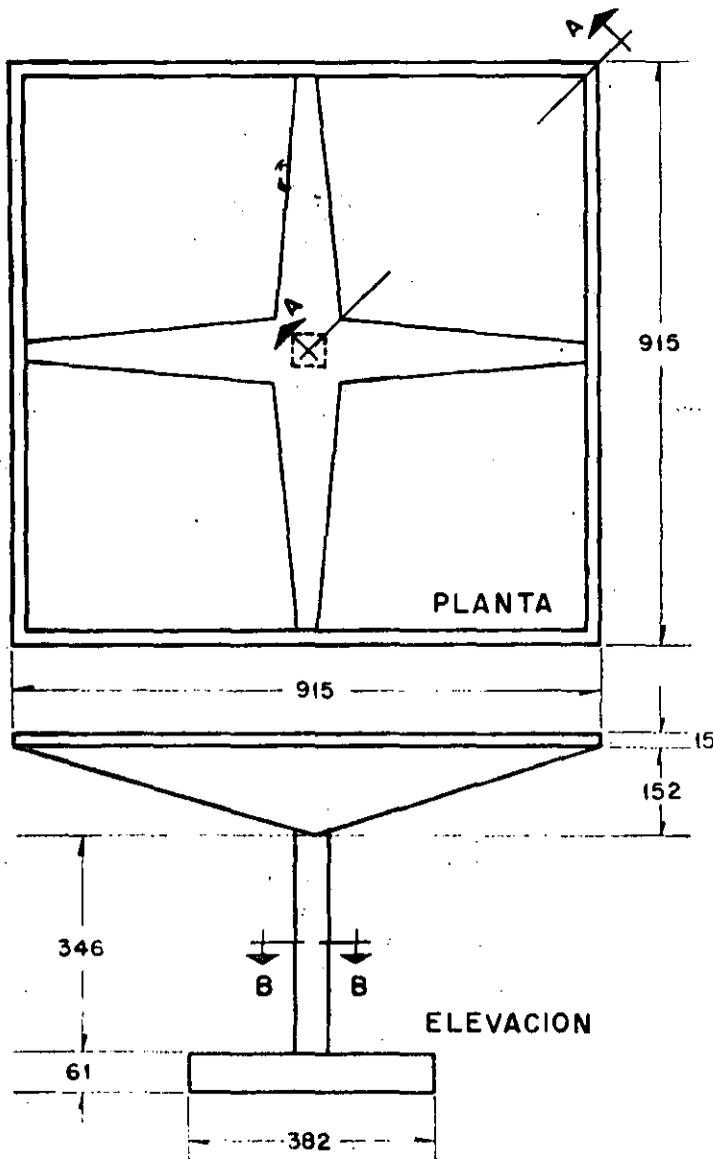
$$x_1/r_1 = \frac{2 \times 419}{4 - 0.494} = 238 \text{ cm/rad}$$

$$x_2/r_2 = \frac{2 \times 419}{4 - 7.034} = -275 \text{ cm/rad}$$

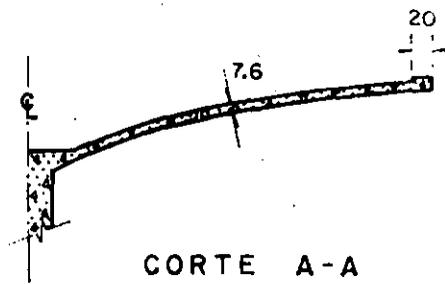
#### b) Respuesta sísmica

Para el cálculo de la respuesta sísmica de sistemas de varios grados de libertad es necesario calcular los coeficientes de participación de cada modo de vibración. Se puede demostrar que para este caso es aplicable la siguiente ecuación

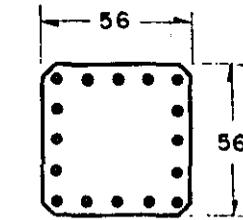
$$C_n = \frac{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{I}}{\bar{X}_n^T \bar{M} \bar{X}_n} \quad (27)$$



15



Acotaciones en centímetros



CORTE B - B

FIG. 8. Cascarón utilizado para ejemplo. (Después de R. McLean)

en la cual

$\bar{i}$  es un vector que representa los desplazamientos estáticos de cada grado de libertad de la estructura inducidos por un desplazamiento estático unitario de la base.

$\bar{X}_n$  es el vector modal para el enésimo modo ( $n$ )

$\bar{M}$  es la matriz de inercia y

$\bar{X}_n^T$  es el vector traspuesto de  $\bar{X}_n$

Para nuestro caso se tendrá

$$\bar{i} = \begin{bmatrix} X_{est} \\ F_{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1 = \begin{bmatrix} 238 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} -275 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_1^T = \begin{bmatrix} 238 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2^T = \begin{bmatrix} -275 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.81 & 0 \\ 0 & 1.386 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores en ec 27 y efectuando los productos matriciales en ella indicados se obtiene

$$C_1 = \frac{4,960}{2.566 \times 10^6} = 0.00193$$

$$C_2 = \frac{-5,720}{2.959 \times 10^6} = -0.00193$$

El valor absoluto de la respuesta máxima en cada uno de los modos será '.

$$\begin{bmatrix} V_n = \text{fuerza cortante} \\ M_n = \text{momento flexionante} \end{bmatrix} = |C_n| \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_n \\ \epsilon_n \end{bmatrix} S_{an} \quad (28)$$

donde

$S_{an}$  = ordenada del espectro de aceleraciones afectada por el coeficiente sísmico  $C = 0.15$ .

El espectro que será utilizado es el propuesto en el reglamento de construcciones del Distrito Federal° (fig. 9). Los valores de las ordenadas espectrales correspondientes a  $T_1$  y  $T_2$  son 100 cm/seg<sup>2</sup> y 80.6 cm/seg<sup>2</sup> respectivamente.

Sustituyendo valores en ec 28 se llega a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 957 \text{ kg} \\ 268,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 893 \text{ kg} \\ 216,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix} \quad (30)$$

El criterio propuesto en ref. 8 será utilizado para el cálculo de la respuesta total (considerando los efectos combinados de los dos modos). Por lo anterior la respuesta total de la estructura valdrá

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} ; M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (31a, 31b)$$

En ecs 31a y 31b

$V$  = fuerza cortante total en la columna

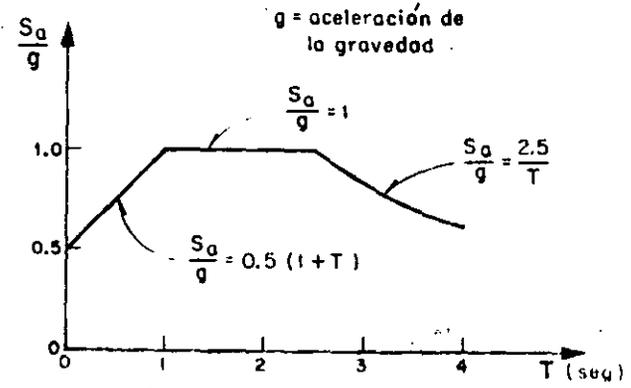


Fig. 9. Espectro de aceleraciones (Después de E. Rosenblueth y L. Esteva)

$M$  = momento flexionante total en C. G. Sustituyendo los valores dados en ecs 29 y 30 en (31) se obtiene

$$V = 1,310 \text{ kg} ; M = 344,000 \text{ kg cm}$$

El momento en la base de la columna valdrá

$$M_b = 344,000 + 1,310 \times 419 = 893,000 \text{ kg cm}$$

Los resultados de este caso se resumen en la fig. 10a.

CASO 2. SUELO FLEXIBLE

a) Cálculo de frecuencias y modos de vibración.

Para considerar las restricciones del suelo emplearemos el método propuesto anteriormente procediendo en forma tabular. Sustituyendo valores en ecuaciones para  $K$  y  $R$  se obtienen  $1.88 \times 10^4$  kg/cm y  $6.35 \times 10^6$  kg cm/rad respectivamente.

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
$x, \epsilon$ (supuestos)	$x = 400 \text{ cm}$	$\epsilon = 1 \text{ rad}$	
$F = m \omega_1^2 x, M = J \omega_1^2 \epsilon$	$F = 8320$	$M = 1,386,000$	$\omega_1^2$
$F_0 = F, M_0 = M + FL'$	$F_0 = 8320$	$M_0 = 5,376,000$	$\omega_1^2$
$x_0 = F_0/K, \epsilon_0 = M_0/R$	$x_0 = 0.4420$	$\epsilon_0 = 0.00847$	$\omega_1^2$
$\alpha = F/k, \beta = M/k,$	$\alpha = 0.6570$	$\beta = 0.00187$	$\omega_1^2$
$\beta \delta, \alpha \theta$	$\beta \delta = 0.3892$	$\alpha \theta = 0.00235$	$\omega_1^2$
$x_1 = \alpha + \beta \delta, \epsilon_1 = \beta + \alpha \theta$	$x_1 = 1.0462$	$\epsilon_1 = 0.00422$	$\omega_1^2$
$x_2 = \epsilon_0 I'$	$x_2 = 4.0650$		$\omega_1^2$
$x' = x_0 + x_1 + x_2, r' = \epsilon_0 + \epsilon_1$	$x' = 5.5532$	$r' = 0.01269$	$\omega_1^2$
$\omega_1^2 = x/x', \omega_1^2 = r/r'$	72.0	78.7	

$$x'/r' = 438, X_1^T = [438 \ 1]$$

PRIMER MODO

Parámetros	Valores (2º ciclo)		Factor común
$x, e$	438	1	
$F, M$	9130	1,386,000	$\omega_1^2$
$F_0, M_0$	9130	5,766,000	$\omega_1^2$
$x_0, e_0$	0.4860	0.00910	$\omega_1^2$
$\alpha, \beta$	0.7210	0.00187	$\omega_1^2$
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	0.002585	$\omega_1^2$
$x_1, e_1$	1.1102	0.004455	$\omega_1^2$
$x_2, e_2$	4.365	—	$\omega_1^2$
$x', e'$	5.961	0.013565	$\omega_1^2$
$\omega_1^2$	73.5	75.8	—

Suponiendo que la aproximación es suficiente resulta

$$x'/e' = 440, \bar{X}_1^T = [440, 1], \omega_1^2 \cong 74 \text{ (rad/seg)}^2$$

$$T_1 = 0.731 \text{ seg.}$$

El procedimiento para el cómputo de los parámetros del segundo modo es el mismo, sólo que la configuración supuesta deberá "limpiarse", antes de proseguir el cálculo, de las componentes del primer modo que pudiera contener. Se demuestra que si  $\bar{X}_2^T$  es el vector de la configuración supuesta, el vector libre de componentes del primer modo queda dado por

$$X_2 = X_2^T - \frac{\bar{X}_1^T M X_2^T}{\bar{X}_1^T M X_1} X_1 \quad (32)$$

Suponiendo para el primer ciclo

$$X_2^T = \begin{bmatrix} -150 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y sustituyendo valores en la ecuación matricial 32 se obtiene

$$X_2 = \begin{bmatrix} -151 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos da los valores de partida para el primer ciclo de cálculo.

SEGUNDO MODO

Parámetros	Valores (1er. ciclo)		Factor común
$x, e$	-151	1	
$F, M$	-3143	1,386,000	$\omega_2^2$
$F_0, M_0$	-3143	-123,000	$\omega_2^2$
$x_0, e_0$	-0.1672	-0.0001940	$\omega_2^2$
$\alpha, \beta$	-0.2481	0.0018700	$\omega_2^2$
$\beta\delta, \alpha\theta$	0.3892	-0.0008890	$\omega_2^2$
$x_1, e_1$	0.1411	0.0009810	$\omega_2^2$
$x_2, e_2$	-0.0930	—	$\omega_2^2$
$x', e'$	-0.1191	0.0007870	$\omega_2^2$
$\omega_2^2$	1267	1270	—

$$x'/e' = -151, \bar{X}_2^T = [-151 \ 1], T_2 = 0.176 \text{ seg.}$$

En este caso se supuso un valor cercano al real y por tanto sólo se necesitó un ciclo para que se obtuviera la aproximación deseada. Si el valor supuesto no hubiese sido ese sino otro cualquiera seguramente no hubiera sido suficiente un ciclo de cálculo. En los ciclos subsiguientes se procedería en igual forma que antes: suponer inicialmente la configuración obtenida en el ciclo anterior; limpiarla de las componentes del primer modo; etc.

b) Respuesta sísmica

Los valores de los coeficientes de participación y de las ordenadas espectrales para este caso son:

$$C_1 = 0.001689, \quad C_2 = -0.001689$$

$$S_{u1} = 127.4 \text{ cm/seg}^2, \quad S_{u2} = 86.6 \text{ cm/seg}^2$$

Las respuestas máximas para cada modo valen

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,970 \text{ kg} \\ 298,200 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 461 \text{ kg} \\ 203,000 \text{ kg cm} \end{bmatrix}$$

Las respuestas máximas totales serán (fig 10b)

$$V = 2,030 \text{ kg}$$

$$M = 361,000 \text{ kg cm}$$

$$M_b = 1,209,000 \text{ kg cm}$$

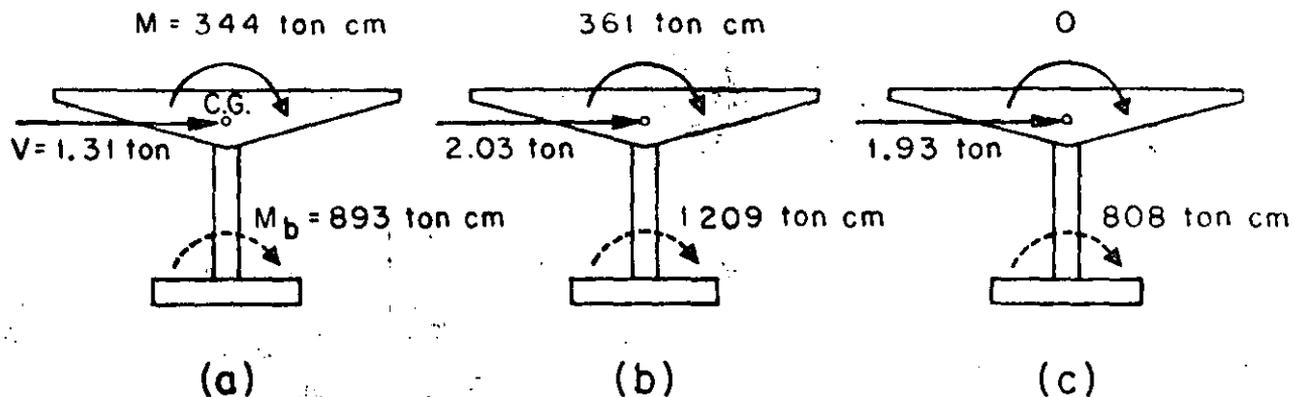


Fig. 10. Respuestas sísmicas

### CASO 3. BASE RÍGIDA Y MASA CONCENTRADA

Para comparación de resultados se verá cuál es el valor de la respuesta máxima en el caso de despreciar la inercia rotacional y la interacción suelo-estructura.

Para este caso  $p^2 = 608 \text{ (rad/seg)}^2$ ,  $T = 0.325 \text{ seg}$ ,  $0.15S_n = 92.6 \text{ cm/seg}^2$ ,  $V = mS_n = 1,930 \text{ kg}$  y  $M_b = 808,000 \text{ kg cm}$  (fig 10c).

### CONCLUSIONES

En la siguiente tabla se resumen los resultados de los tres casos, indicados como porcentajes del segundo caso.

Concepto	Caso 1	Caso 2	Caso 3
V	64.4%	100%	95.0%
M	95.2%	100%	0%
$M_b$	73.8%	100%	66.7%

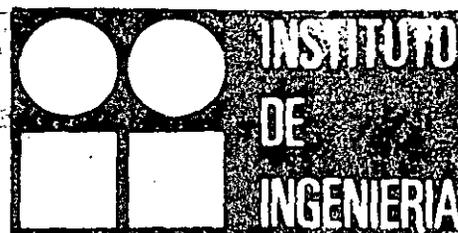
Los resultados de la tabla anterior dan una idea clara de la importancia que tiene el considerar la inercia rotacional de la cubierta y la interacción suelo-estructura. La importancia del primer concepto aumentará conforme mayor sea el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto al eje z. El último concepto es tanto más importante cuanto más blando sea el suelo de cimentación. En particular puede observarse que en el tipo de solución 3 no se obtiene momento flexionante a la altura de C.G. Esto puede traer consigo serios errores en la cuantía del acero de refuerzo necesario en la unión columna-cubierta que es donde más ductilidad necesita desarrollarse.

### AGRADECIMIENTO

El autor manifiesta su agradecimiento a los doctores E. Rosenblueth y J. A. Nieto, así como al Ing. E. del Valle por sus valiosos comentarios y sugerencias.

### REFERENCIAS

1. McLean, R. S., "Inverted pendulum structures", technical report of Consulting Civil and Structural Engineers, Fullerton, Cal. (ene, 1965).
2. Barkan, D. D., "Dynamics of bases and foundations" McGraw Hill Book Co. Inc. (1962).
3. Jacobsen, L. S., y Ayre, R. S., "Engineering vibrations", McGraw Hill Book Co. Inc. (1958).
4. Newmark, N. M., "Numerical procedure for computing deflections, moments and buckling loads", Transactions ASCE, Vol. 108 (1943), pp. 1161-1234.
5. Rosenblueth, E. y Esteva, L., "Proyecto de reglamento de las construcciones en el Distrito Federal. Folleto complementario. Diseño sísmico de edificios", Ediciones Ingeniería, México (1962).
6. Marsal, R., y Mazari, M., "El subsuelo de la Ciudad de México", Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM (1962).
7. Newmark, N. M., y Rosenblueth, E., "Earthquake Engineering", será publicado por Prentice-Hall, Inc.
8. Rosenblueth, E., "Some applications of probability theory in aseismic design", Proceedings, 1st World Conference on Earthquake Engineering, Berkeley, Cal. (1956), paper 8.



**ESTUDIO ESTADISTICO  
DE LOS CRITERIOS  
PARA ESTIMAR  
LA RESPUESTA SISMICA  
DE SISTEMAS LINEALES CON  
DOS GRADOS DE LIBERTAD**

**OCTAVIO A RASCON  
AUGUSTO G VILLARREAL**

**OCTUBRE 1973**

**323**

# Estudio estadístico de los criterios para estimar la respuesta sísmica de sistemas lineales con dos grados de libertad

Octavio A. Rascón  
Augusto G. Villarreal\*

## RESUMEN

El objeto de este trabajo es verificar el grado de aproximación de dos métodos que con frecuencia se utilizan para estimar la respuesta sísmica máxima de sistemas lineales con varios grados de libertad. Para ello se aplica el método de Monte Carlo en el estudio de tres tipos de estructuras con dos grados de libertad: torsión y traslación, cabeceo y traslación, y traslación en dos pisos. Como excitaciones se utilizan sismos simulados y reales; se comparan las respuestas estimadas con las exactas, se hacen recomendaciones acerca del empleo de dichos métodos, y se obtienen las distribuciones de probabilidades de los cocientes de las respuestas exactas entre las estimadas.

## ABSTRACT

The purpose of this work is to verify the degree of approximation of two methods used frequently for estimating the maximum seismic response of linear systems with various degrees of freedom. To do this, the Monte Carlo method is used in the study of three types of structures with two degrees of freedom: torsion and translation, rocking and translation, and translation in a two story building. Simulated and real earthquakes are used as ground excitations; estimated responses are compared with the exact ones, recommendations for the use of such methods are given, and the probability distributions of the ratios of exact to estimated responses are obtained.

## 1. INTRODUCCION

En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de algunos tipos de estructuras de comportamiento lineal de dos grados de libertad cuando se les sujeta a sollicitaciones sísmicas. El objeto es verificar el grado de aproximación de dos métodos propuestos por Rosenblueth (refs 1 y 2) para estimar la respuesta máxima total, mediante su comparación con las respuestas máximas exactas obtenidas con el método de análisis modal, al superponer en el tiempo los efectos del sismo en los dos modos naturales de vibración de la estructura.

El método 1 consiste en estimar la respuesta máxima total,  $Q$ , extrayendo la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la respuesta en cada modo natural de vibración,  $Q_i$ , es decir

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2} \quad (1.1)$$

donde  $n$  es el total de grados de libertad del sistema. El método 2 consiste en aplicar la fórmula

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^n Q_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{1 + \epsilon^2_{ij}}} \quad (1.2)$$

siendo

$$\epsilon_{ij} = \frac{\omega_i - \omega_j}{\zeta'_i \omega_i + \zeta'_j \omega_j} \quad (1.3)$$

donde

$Q_i$  respuesta máxima en el  $i$ -ésimo modo de vibración, tomada con el mismo signo que el de la correspondiente función de transferencia cuando esta alcanza su valor máximo absoluto

$\omega_i$   $i$ -ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema sin amortiguamiento

$\omega'_i = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$   $i$ -ésima frecuencia circular natural de vibración del sistema amortiguado

$\zeta_i$  fracción del amortiguamiento crítico en el  $i$ -ésimo modo natural

$\zeta'_i = \zeta_i + 2/(\omega_i S)$  fracción del amortiguamiento crítico equivalente

$S$  duración del sismo con el que se excita al sistema

El interés primordial al realizar esta verificación radica en que el método 1, actualmente en uso en varios reglamentos de construcción (refs 3 y 4), podría llegar a sustituirse por el método 2.

Se han propuesto otros procedimientos para estimar  $Q$  (ref 5) que son función no lineal de los resultados del método 1; sin embargo, no se discuten en este trabajo porque han sido estudiados con base en estructuras sin amortiguamiento, las cuales, como se verá, conducen a conclusiones diferentes de las que corresponden a estructuras amortiguadas.

Para realizar estadísticamente este estudio, se emplearon técnicas de reducción de variancia del método de Monte Carlo.

En cuanto al análisis, este se limita a tres casos, los cuales se detallan en el Apéndice:

1. Torsión en estructuras de un piso, considerando que las respuestas dinámicas son la fuerza cortante y el momento torsionante.

2. Cabeceo en estructuras de un piso, considerando como respuestas la fuerza cortante y el momento de cabeceo.

3. Traslación en estructuras de dos pisos, tomando en cuenta las fuerzas cortantes en los entrepisos uno y dos.

## 2. CÁLCULO DE LAS RESPUESTAS MÁXIMAS

Las respuestas elásticas máximas de los diversos tipos de estructuras se calcularon utilizando:

- Método 1 (ec 1.1, criterio del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal, ref 3)
- Método 2 (ec 1.2 y nuevo criterio de Rosenblueth, ref 2)
- Análisis modal (respuesta exacta).

Los resultados del análisis modal sirvieron como base de comparación del grado de aproximación de las estimaciones logradas con los otros dos criterios.

Como excitaciones sísmicas se emplearon cuatro sismos simulados de acuerdo con el método indicado en la ref 6 (figs 1 a 4), y uno real (fig 5), registrado en la zona blanda de la ciudad de México (ref 7).

El análisis de los tres casos se realizó empleando el método de Monte Carlo, que consiste en estudiar el comportamiento de un modelo matemático determinado, mediante la simulación de los datos de entrada (generalmente en computadora digital) y del estudio estadístico de los resultados. Cada vez que se introduce un conjunto de datos y se obtiene la respuesta del modelo, se dice que se efectúa un *experimento conceptual* del problema; la colección de resultados constituye la *muestra* que sirve de base para inferir cuál es el grado de aproximación con que dicho modelo matemático representa el fenómeno para el cual se formuló.

Conforme aumenta el número de parámetros que intervienen en el modelo matemático, se incrementa la cantidad de experimentos necesaria para dilucidar cuáles influyen en el problema, es decir, para verificar si en los resultados que se obtienen al variar los valores de los parámetros existen diferencias estadísticas significativas; sin embargo, eso representa un costo de computación que en ocasiones hace prohibitivo tal tipo de estudios, a menos que se emplee alguna técnica de *reducción de variancia* (refs 11 y 12), lo que permite un ahorro considerable en el número de experimentos necesario para obtener conclusiones adecuadas.

La técnica de reducción de variancia que se emplea en este trabajo es muy común y consiste en:

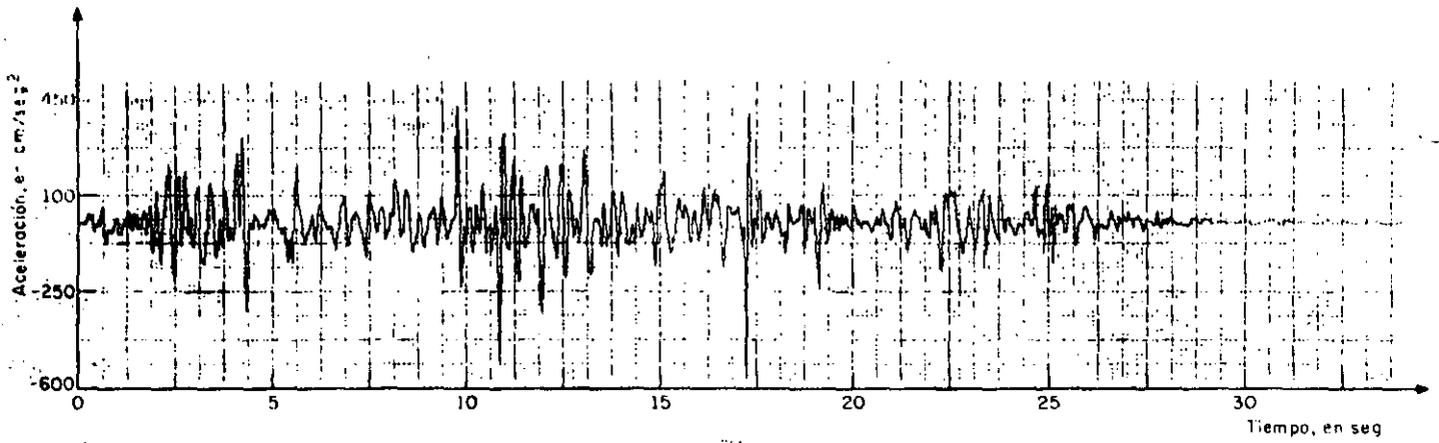


Fig 1. Sismo simulado No 1

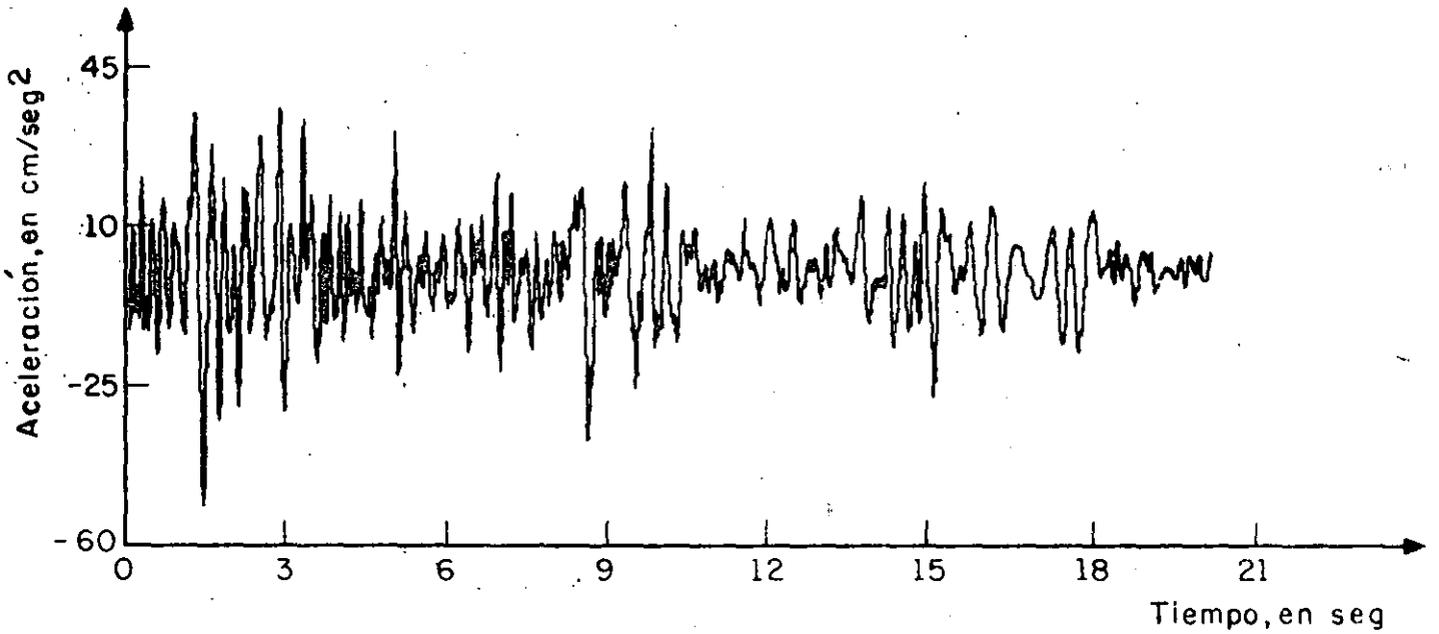


Fig 2. Sismo simulado No 2

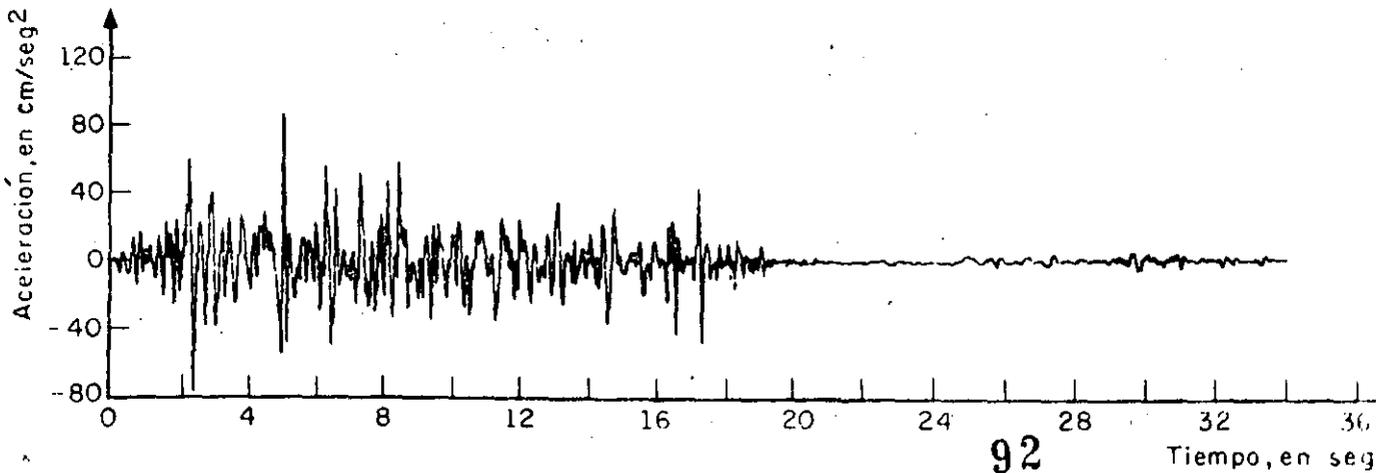


Fig 3. Sismo simulado No 3

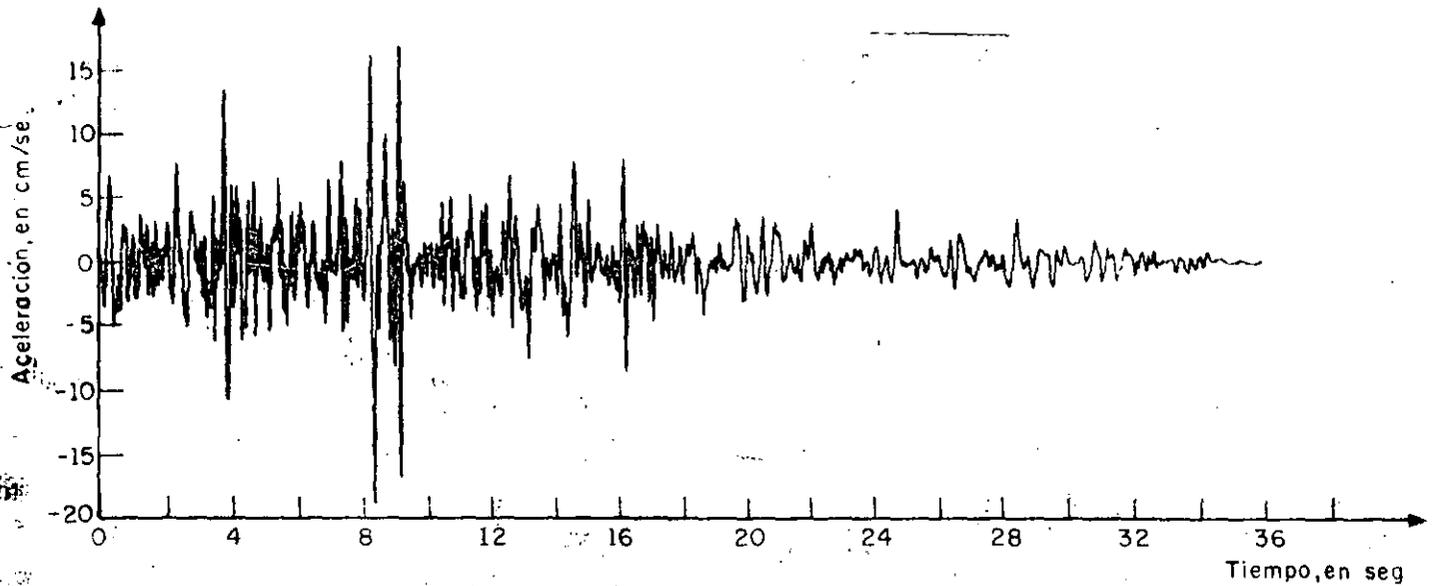


Fig 4. Sismo simulado No. 4

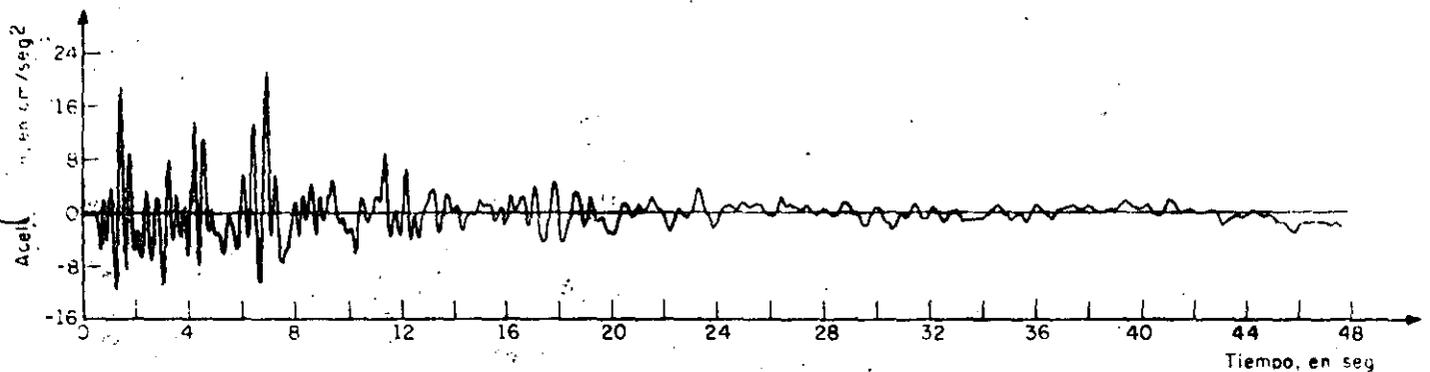


Fig 5. Sismo real registrado en la Alameda Central, México, D. F., el 10 de diciembre de 1961

- a) Asignar diversos valores a cada parámetro que interviene en el problema, de manera que se cubran los intervalos de interés de cada uno.
- b) Calcular la respuesta máxima exacta y las estimadas con los métodos 1 y 2 para cada combinación de valores de los diferentes parámetros.
- c) Obtener las respuestas normalizadas dividiendo los valores exactos entre los estimados; esto se hace para cada combinación de valores de los parámetros, con lo cual se elimina la dispersión en los resultados ocasionada por la magnitud y variación con el tiempo de los datos de entrada (se reduce la variancia).
- d) Estudiar si existen diferencias estadísticas significativas entre los resultados obtenidos al variar los valores asignados a uno de los parámetros. Si las hay, se infiere que los resultados logrados con cada valor de dicho parámetro corresponden a poblaciones estadísticas diferentes; en caso contrario, la población estadística es la misma y, por consiguiente, las mues-

tras respectivas pueden agruparse en una sola de mayor tamaño, a partir de la cual es factible obtener conclusiones más generales y confiables acerca del modelo en estudio, ya que la variancia del promedio de la estimación se reduce en proporción a  $1/n$  (rel 11). Esta etapa se repite sucesivamente para cada uno de los parámetros restantes, con lo que se realiza, de hecho, un análisis de variancia.

## 2.1 Resultados del problema de torsión (caso 1)

Para diseño sísmico de edificios, los elementos mecánicos que usualmente interesa conocer son las fuerzas y momentos que obran sobre cada elemento estructural. Para simplificar, con objeto de aislar los efectos de la fuerza cortante y del momento torsionante, en este problema de torsión se considerará una estructura (fig 6) con masa uniformemente distribuida, con un solo muro en dirección  $Z$  que resista la fuerza cortante directa, y dos idénticos en dirección  $Y$  (per-

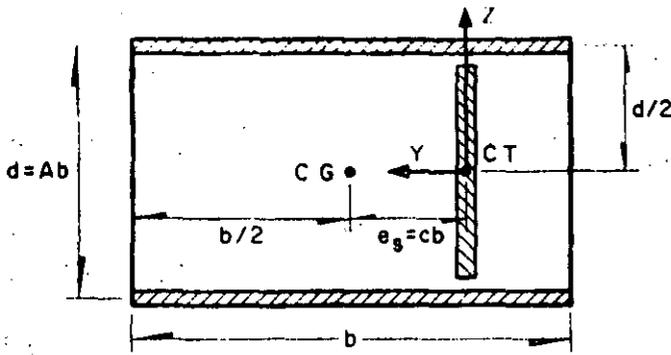


Fig 6. Estructura tipo considerada en el problema de torsión

pendicular al movimiento), de manera que cada uno de estos últimos resista una fuerza cortante igual a  $M/d$ , donde  $M$  es el momento torsionante dinámico y  $d$  es la separación de los dos muros. En este caso, la estructura presenta excentricidad solo en dirección perpendicular a la de excitación,  $Z$ .

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de torsión fueron (fig 6):

$A = b/d$

$b$  dimensión en la dirección  $Y$

$c = e_g/b$

$T_1$  periodo fundamental de vibración  $= \omega_1 / 2\pi = \lambda_1 / (2\pi K/m)$

$\zeta$  fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración

$\eta$  cociente de la frecuencia angular entre la lineal  $= (L/J)/(K/m)$

Los valores que se asignaron a  $A$ ,  $b$  y  $c$  son los consignados en la tabla 1; los de  $\zeta$  son 0, 0.05 y 0.10; los de  $\eta$ , 0.5, 0.9, 1.0, 1.1, 1.5, 2.0, 2.5, 3 y 4, y los de  $T_1$ , 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2, 3 y 4 seg. Los casos de  $\eta = 1, 0.9$  y  $1.1$  se estudiaron con especial cuidado debido a que para valores de  $\eta = 1$  y cercanos, sucede que las dos frecuencias naturales de vibración resultan más próximas entre sí (ec A.3) y, en consecuencia, el término  $\epsilon_{12}^2$  de las ecs A.8 y A.9 del Apéndice puede asumir valores pequeños (ec 1.3), en cuyo caso se pueden presentar diferencias considerables entre los resultados de ambos métodos, puesto que el término de la doble suma, de la ec 1.2 asume valores tanto mayores cuanto menores son los de  $\epsilon_{12}^2$ :

Para cada uno de los casos de la tabla 1 se obtuvieron las fuerzas cortantes y los momentos torsionantes máximos correspondientes a todas las combinaciones de  $\zeta$ ,  $T_1$  y  $\eta$ .

En las figuras que aparecen más adelante no se hace distinción de los resultados obtenidos con cada sismo

ni con cada combinación de  $A$ ,  $b$  y  $c$ , ya que las muestras respectivas se mezclaron al no haberse encontrado diferencias estadísticas significativas con un 95 por ciento de nivel de confianza en los mismos a pesar de la marcada diferencia entre los valores de dichos parámetros y de las características de los sismos, tales como duración y frecuencia dominante.

2.1.1 Momento torsionante

En las figs 7 a 9 se presentan los resultados correspondientes a los casos en los que  $T_1 = 2.0$  seg y  $\zeta = 0, 0.05$  y  $0.10$ , respectivamente. En el eje de las abscisas se localizan los valores de  $\eta$ , y en el de las ordenadas los cocientes de los momentos torsionantes exactos,  $M$ , entre los estimados,  $\hat{M}$  y  $\bar{M}$ , con los métodos 1 y 2, respectivamente (Apéndice).

En la fig 7, en la que el amortiguamiento es nulo, se aprecia mayor dispersión en los resultados de ambos métodos que corresponden a  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$  que para los demás valores de  $\eta$ . En cambio, en las figs 8 y 9, que corresponden a  $\zeta = 0.05$  y  $\zeta = 0.10$ , respectivamente, se observa que la dispersión de los resultados del método 2 es prácticamente la misma para todos los valores de  $\eta$  (el coeficiente de variación es cercano a 0.2), cosa que no sucede con los resultados del método 1, para los cuales se tiene mayor dispersión cuando  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$ . Estas observaciones llevan a la conclusión de que para el método 1 no pueden mezclarse las muestras correspondientes a todos los valores de  $\eta$ , ya que los resultados dependen de este parámetro, mientras que para el método 2 podrían mezclarse las que no se refieren a amortiguamiento nulo si se verificara que los valores medios correspondientes a cada  $\eta$  son estadísticamente iguales.

Para lograr dicha verificación, se investigó primero si los resultados del método 2 son independientes del periodo fundamental,  $T_1$ . Con este fin se trazó un juego de figuras del mismo tipo que las figs 10 a 12, que corresponden a  $\eta = 1.0$  con  $\zeta = 0, 0.05$  y  $0.10$ , respectivamente. En la fig 10, que corresponde a  $\zeta = 0$ , se observa que los resultados sí dependen de  $T_1$ , ya que los valores medios son sensiblemente más grandes para periodos mayores de 1.0 seg que para los menores. Por lo contrario, en las figs 11 y 12 se nota que los valores medios son prácticamente independientes de  $T_1$  en el intervalo de periodos estudiado, por lo que las muestras de cada periodo pueden agruparse en una sola (esta conclusión también es válida para los resultados del método 1).

Para verificar estadísticamente la conclusión anterior se realizó una prueba de hipótesis acerca de si la pendiente de la recta que se ajusta a los datos puede considerarse nula, habiéndose aceptado con 95 por ciento de nivel de confianza.

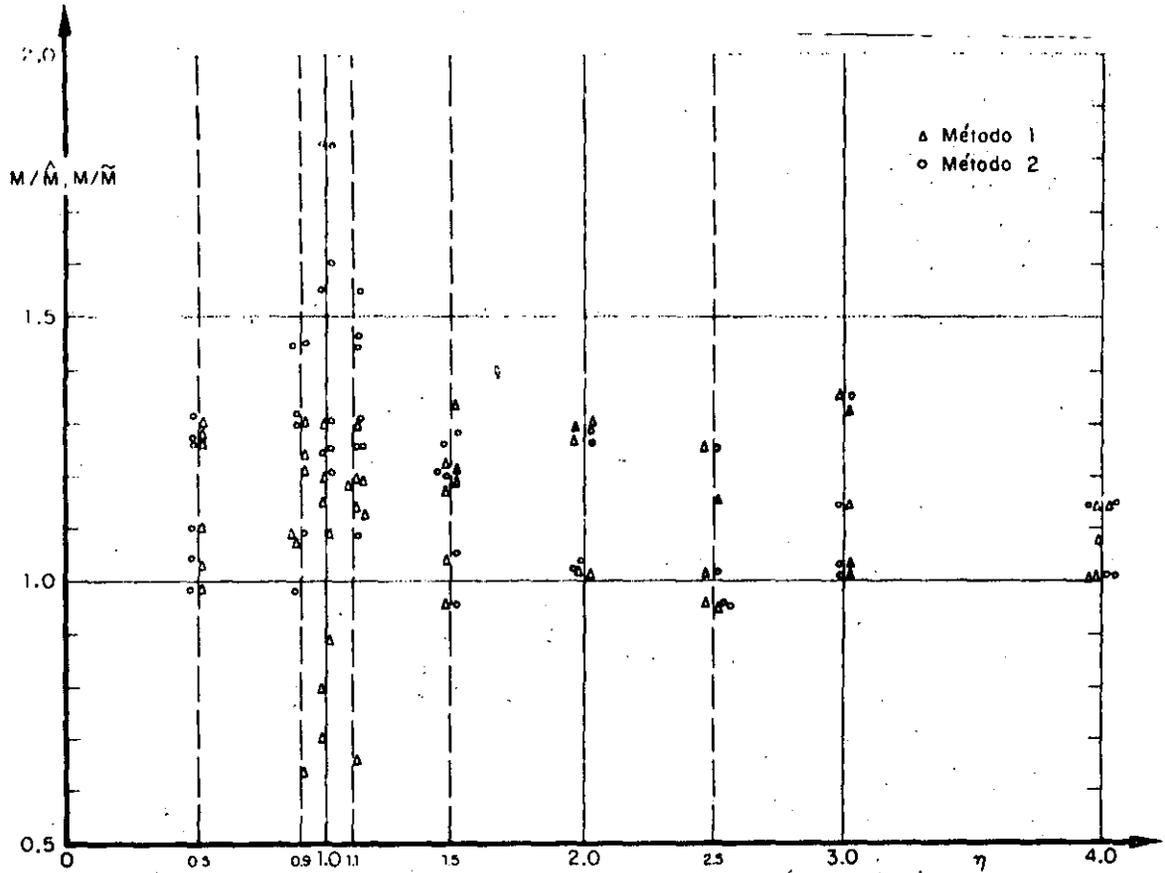


Fig 7. Resultados de los momentos torsionantes para  $T_J = 2.0$  seg, y  $\zeta = 0$

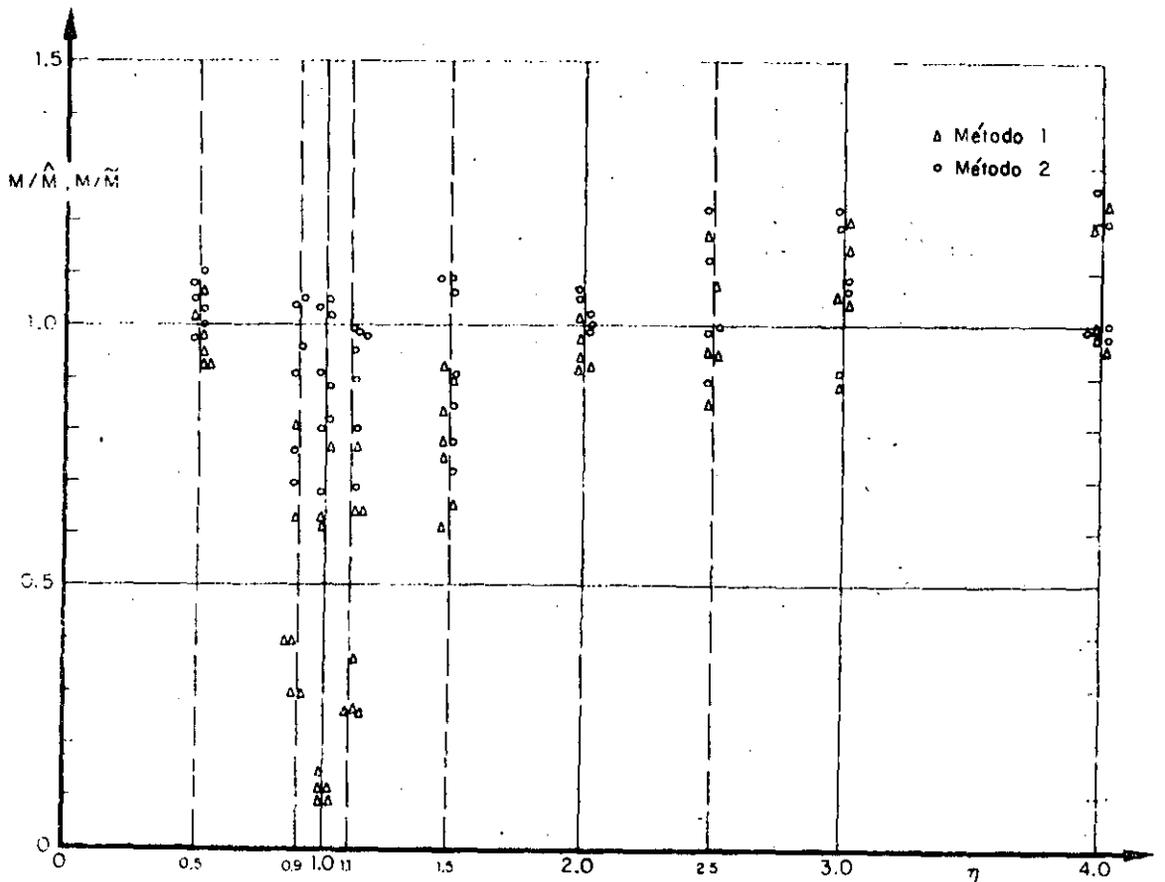


Fig 8. Resultados de los momentos torsionantes para  $T_J = 2.0$  seg, y  $\zeta = 0.05$

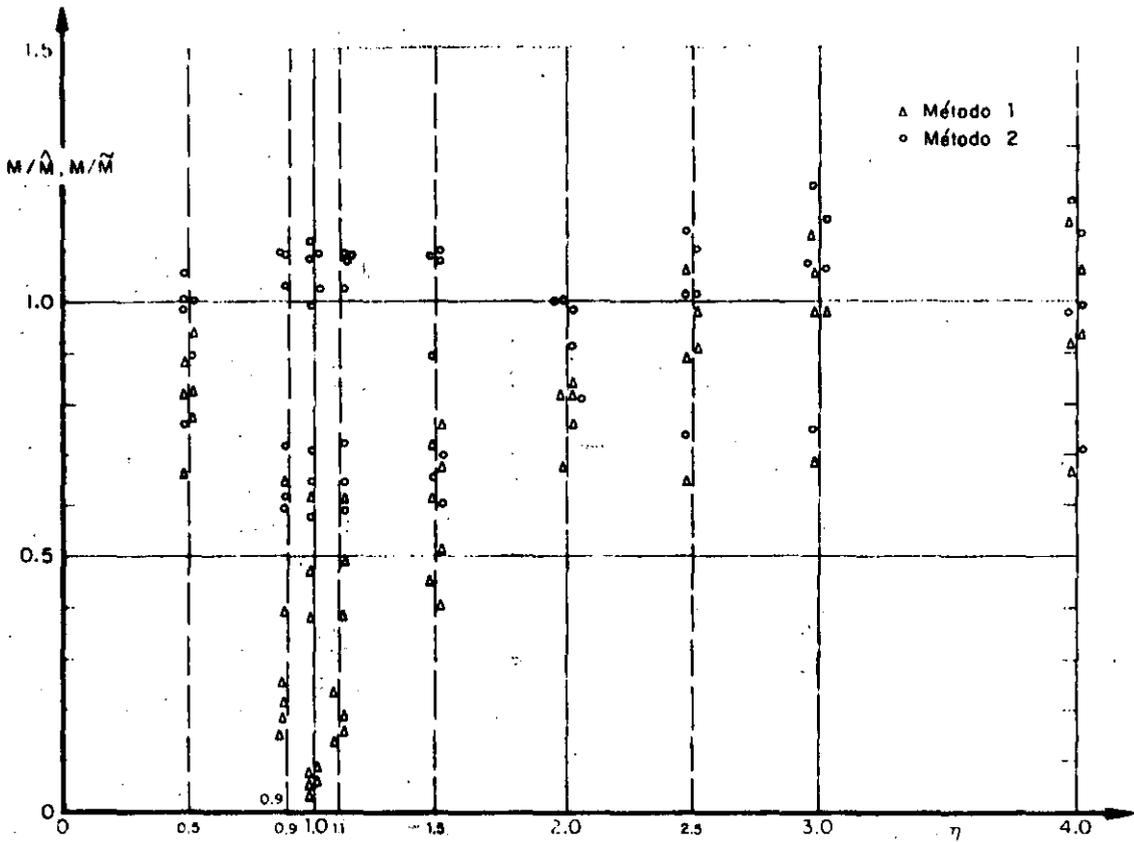


Fig 9. Resultados de los momentos torsionantes para  $T_1 = 2.0$  seg, y  $\zeta = 0.10$

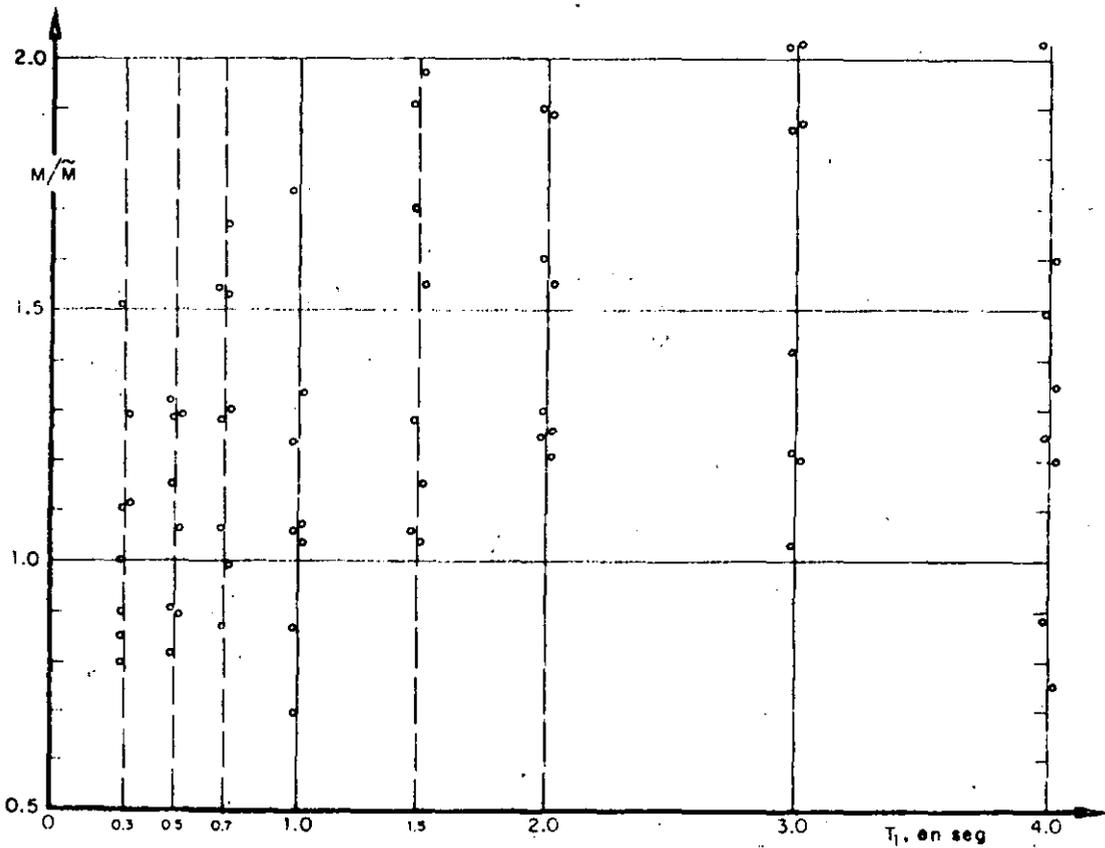


Fig 10. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.0$ , y  $\zeta = 0$ , Método 2

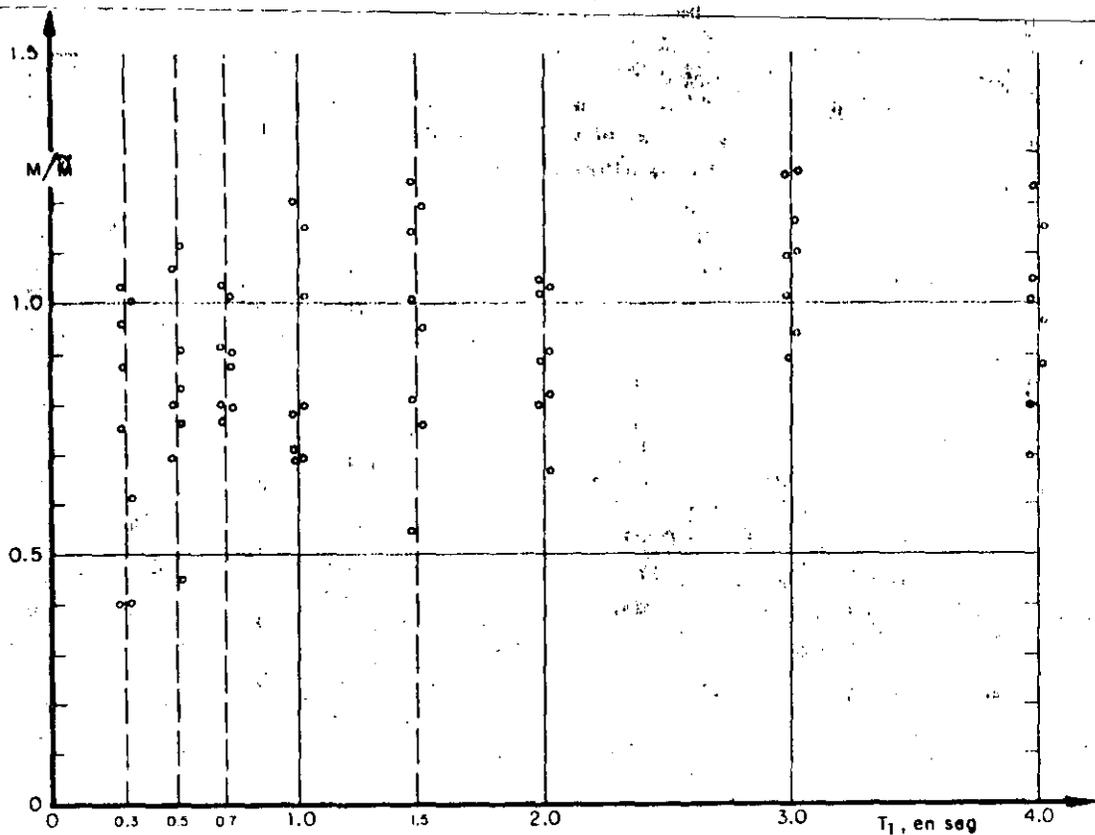


Fig 11. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.0$ , y  $\zeta = 0.05$ . Método 2

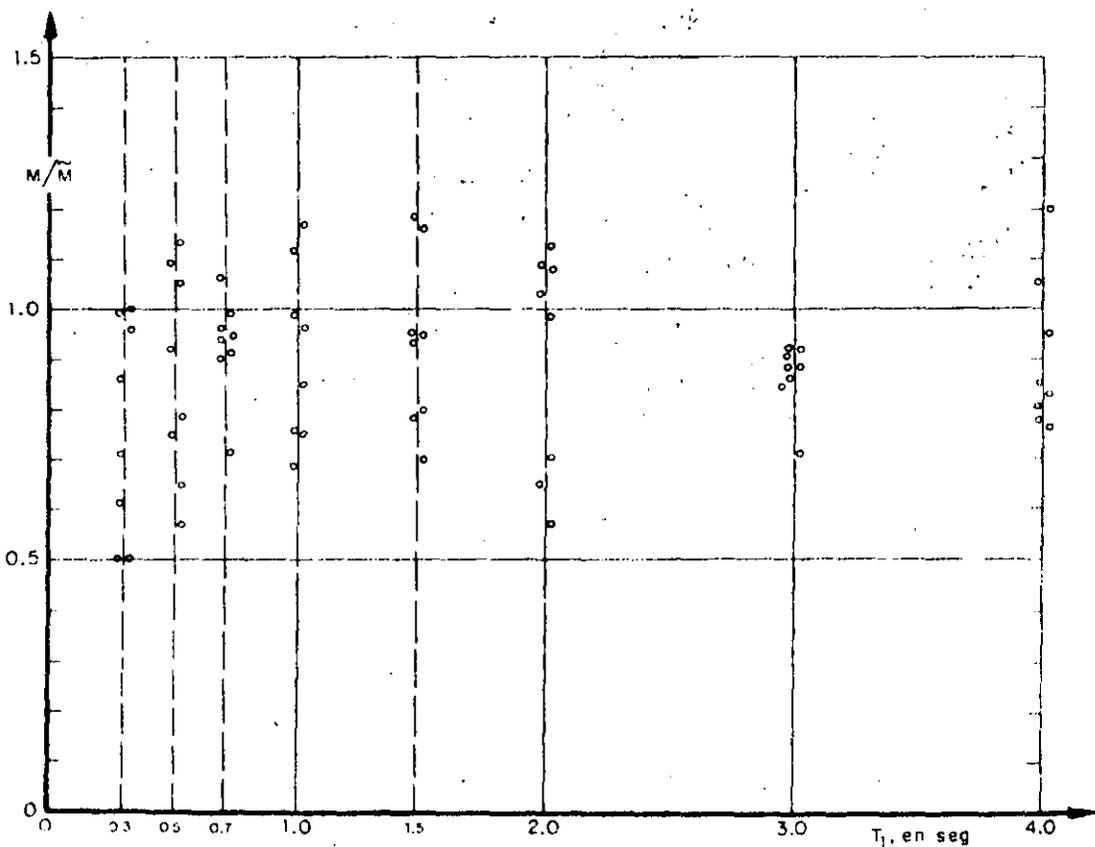


Fig 12. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.0$ , y  $\zeta = 0.10$ . Método 2

En la fig 13 se presentan en el eje de las ordenadas los promedios,  $(\bar{M}/\bar{M})$  y  $(\bar{M}/\bar{M})$ , de los resultados obtenidos respectivamente con los métodos 1 y 2, considerando que estos son independientes de  $T_1$ ; en el eje de las abscisas se localizan los valores de  $\eta$ . Se observa que, para  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$ , el método 2 sobrestima ligeramente la respuesta media (en 10 por ciento), tendiendo a subestimarla en 5 por ciento conforme los valores de  $\eta$  se alejan de 1.0, cuando  $\zeta = 0.05$  y 0.10

Con objeto de verificar si con el método 2 los resultados son independientes de  $\eta$ , se realizaron pruebas de hipótesis de igualdad de medias, siendo aceptables con 95 por ciento de nivel de confianza. Por lo contrario, los resultados del método 1 no fueron independientes de  $\eta$ , lo cual es obvio, puesto que con  $\zeta = 0.10$  se tiene que el promedio de  $M/\bar{M}$  es 0.31 para  $\eta = 1$  (el mínimo valor fue 0.04 y el máximo 0.68), y 0.99 para  $\eta = 4$  (el mínimo fue 0.66 y el máximo 1.28).

En la fig 13 se observa también que los promedios obtenidos con el método 1 se acercan a los exactos conforme  $\eta$  aumenta, presentándose mayores errores para valores de  $\eta$  muy cercanos a 1.0, para el cual las frecuencias naturales de la estructura resultan más

próximas entre sí (ec A.3), lo que trae como consecuencia que en muchas ocasiones las respuestas máximas en ambos modos de vibración ocurran simultáneamente y con signo contrario, por lo que la respuesta combinada máxima es la suma algebraica de ambas respuestas, que da resultados menores que los de la ec A.11.

Otra conclusión inmediata que se obtiene de la fig 13 es que los resultados del método 2 son prácticamente independientes de  $\zeta$  cuando  $\zeta > 0.05$  y que el método 1 pierde aproximación conforme aumenta  $\zeta$ , y  $\eta$  se aproxima a 1

De lo anterior se concluye también que en estructuras amortiguadas, que son las de interés práctico, el método 2 proporciona, en promedio, mejores resultados que el método 1, aunque el 2 subestime más y con mayor frecuencia la respuesta máxima. En estructuras no amortiguadas, que únicamente son de interés académico, el método 1 proporciona mejores resultados.

Otro punto importante de discusión es el del cociente de la excentricidad dinámica exacta,  $e_d$ , entre la estática,  $e_s$ . En las figs 14 a 16 se tiene  $\eta$  en el eje de las abscisas, y  $e_d/e_s$  en el eje de las ordenadas.

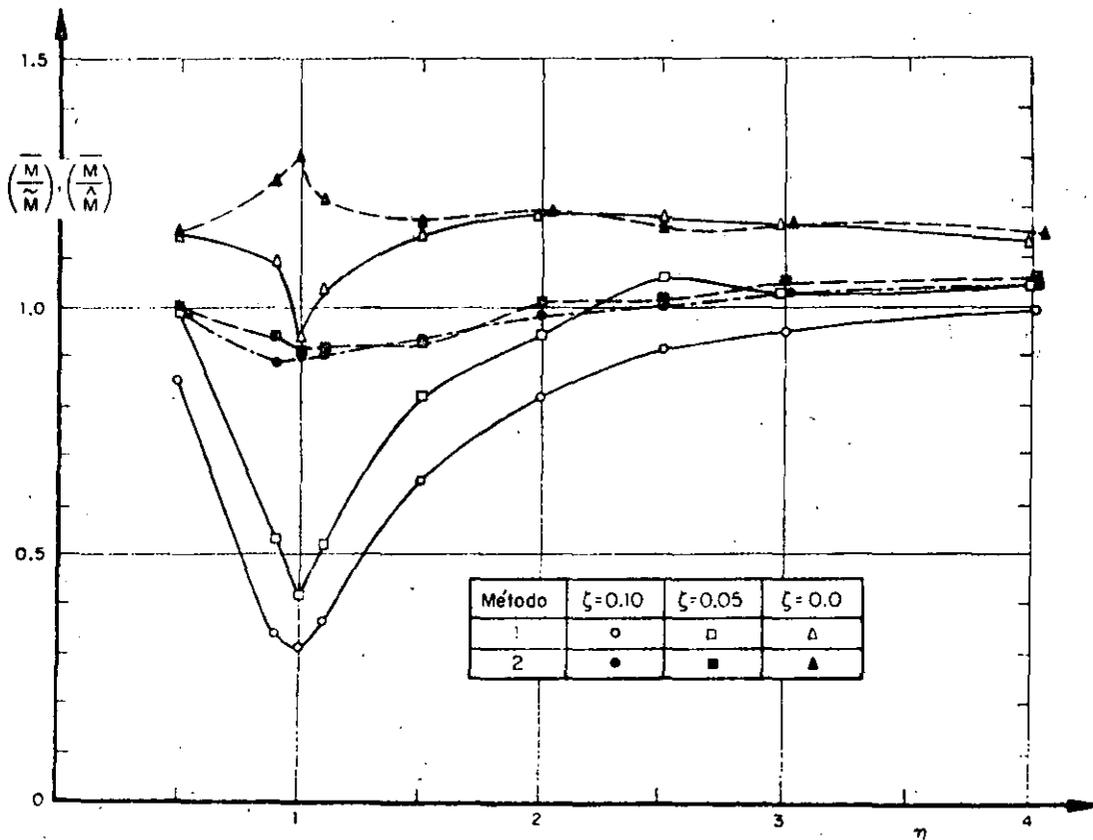


Fig 13. Variación con  $\eta$  de los promedios de los momentos torsionantes estimados

Se observa en la fig. 14, que corresponde a amortiguamiento nulo, que para  $\eta = 0.9, 1.0$  y  $1.1$  hay una marcada diferencia entre los resultados obtenidos para el caso I con los casos II y III (la de estos últimos entre sí no es tan importante). Así, cuando  $\eta = 1.0$ , en el caso I el promedio de  $e_d/e_s$  fue 38.5 y la desviación estándar 16.6; en el caso II estos parámetros estadísticos valieron 5.4 y 0.6, respectivamente. Para valores de  $\eta$  separados de 1.0 en 0.5 unidades o más hay diferencias menos apreciables entre los resultados de los tres casos. Además,  $e_d/e_s$  disminuye rápidamente conforme  $\eta$  se aleja de 1.0.

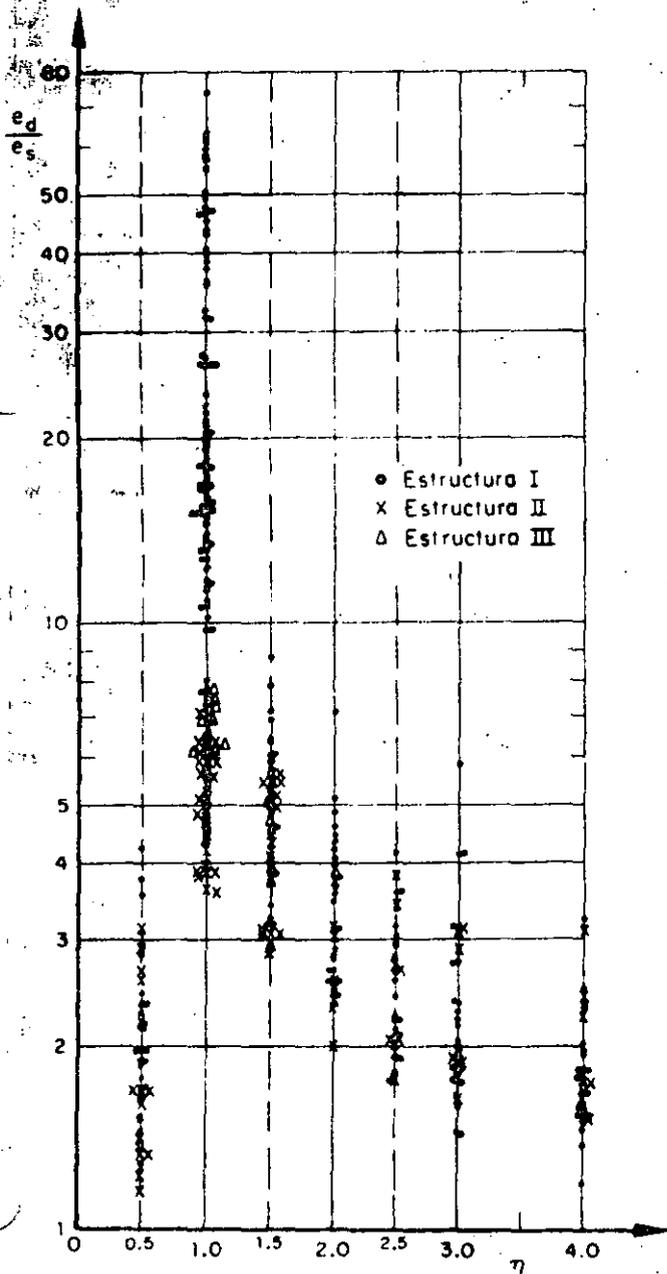


Fig. 14. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para  $\zeta = 0$

En las figs. 15 y 16, para  $\zeta = 0.05$  y  $0.10$ , respectivamente, casi no hay diferencias entre los resultados de los dos casos, aunque persiste la dependencia respecto a  $\eta$ . Comparando estas tres últimas figuras se nota también que  $e_d/e_s$  disminuye conforme el amortiguamiento aumenta. Así, para  $\zeta = 0.05$  el promedio fue 4.6 y la desviación estándar 1.3, mientras que para  $\zeta = 0.10$ , los valores correspondientes fueron 2.7 y 0.7.

De las figs. 15 y 16 se concluye que la disposición del Reglamento de Construcciones del Departamento del Distrito Federal de que se tome  $e_d/e_s = 1.5$  subestima el valor promedio para todos los valores de  $\eta$  mayores de 0.5 y menores de 4.0 (aquí se omitió el término  $\pm 0.05b$  que se agrega a 1.5 en la disposición del Reglamento, porque dicho término tiene como finalidad prevenir excentricidades accidentales ocasionadas por variaciones imprevisibles de masas y rigideces y posibles excitaciones torsionales).

Con objeto de estimar probabilidades de eventos relacionados con los momentos torsionantes, se trazaron en papel de probabilidades los datos de frecuencias acumuladas correspondientes a diferentes casos. Las distribuciones de probabilidades empleadas fueron la logarítmica normal, la extrema tipo II y la normal, de las cuales, por apreciación visual, se consideró que esta última daba en general mejores resultados (figs. 17 a 19).

Para verificar que las poblaciones bajo estudio tienen distribuciones normales, se realizaron pruebas de hipótesis estadísticas con un 95 por ciento de nivel de confianza.

Los resultados fueron:

#### Método 1

(Con resultados de  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados; fig. 17)

$\zeta = 0$ : se rechaza la hipótesis nula de que la distribución es normal con media 1.16 y desviación estándar 0.12 (esta hipótesis se rechaza también con un 99 por ciento de nivel de confianza)

$\zeta = 0.05$  y  $\zeta = 0.10$ : se aceptan las hipótesis nulas de que las distribuciones son normales con medias 0.96 y 0.85, y desviaciones estándar 0.15 y 0.17, respectivamente.

#### Método 2

(Con resultados de  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados; fig. 18)

$\zeta = 0, 0.05$  y  $0.10$ : se aceptan las hipótesis de que las distribuciones son normales con medias 1.15, 1.06 y 1.00, y desviaciones estándar 0.15, 0.15 y 0.15, respectivamente. Para  $\zeta = 0.05$ , la hipótesis se acepta con 99 por ciento de nivel de confianza; las otras con 95 por ciento.

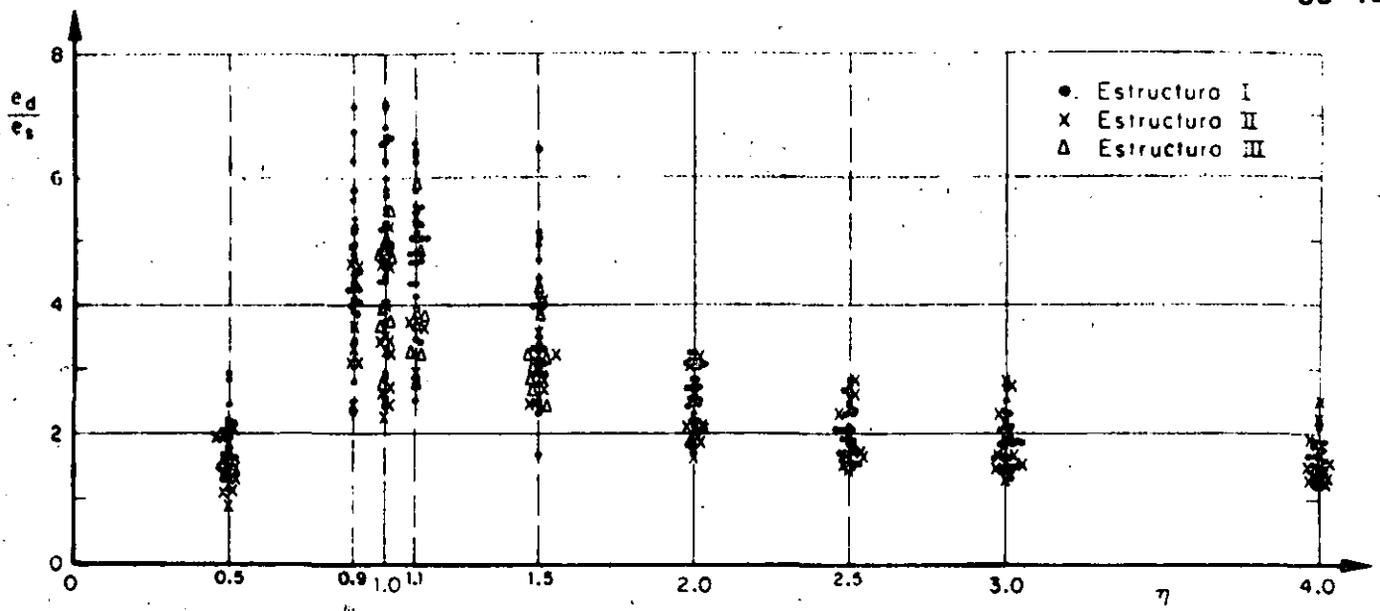


Fig 15. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para  $\zeta = 0.05$

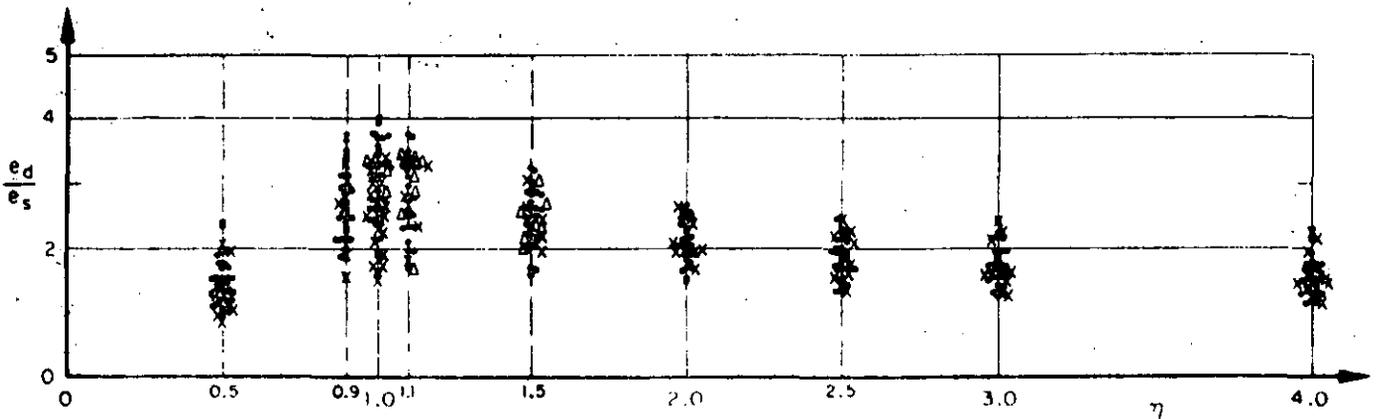


Fig 16. Cocientes de la excentricidad dinámica exacta entre la estática, para  $\zeta = 0.10$

Además, para  $\zeta = 0.10$  se estudió el caso en que se mezclaron los resultados de  $\eta = 1$  y  $\eta = 1.1$  (fig 19), obteniéndose una distribución normal con media 0.88 y desviación estándar 0.17. También se mezclaron los resultados de los valores de  $\eta$  de 1 a 4, para los cuales se obtuvo una distribución de igual tipo con media 0.95 y desviación estándar 0.16. Ambas hipótesis fueron aceptables, pero con 97.5 por ciento de nivel de confianza.

En todos los casos descritos en que se acepta la hipótesis nula, se observa que la desviación estándar es muy semejante, ya que varía de 0.15 a 0.17, mientras que la media va de 0.86 a 1.15.

### 2.1.2 Fuerza cortante

Los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2, correspondientes a  $\eta = 1.0$  y  $\zeta = 0$ , se muestran en la fig 20. En el eje de las abscisas se tienen los periodos

fundamentales,  $T_1$ , y en el de las ordenadas las fuerzas cortantes normalizadas,  $V/\bar{V}$  y  $V/\bar{V}$ , obtenidas al dividir las fuerzas cortantes,  $V$ , calculadas mediante análisis modal entre las estimadas con los métodos 1 y 2,  $\bar{V}$  y  $\bar{V}$ , respectivamente.

De la fig 20 y otras similares se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas obtenidas con ambos métodos son independientes del periodo fundamental,  $T_1$ , con 95 por ciento de nivel de confianza. Además, para valores de  $\eta$  menores de 0.9 y mayores de 1.1, los resultados fueron independientes de los parámetros  $A$ ,  $b$  y  $c$ , con errores de  $\pm 5$  por ciento. Esta independencia también se obtuvo para el método 2, inclusive cuando  $\eta = 0.9$ , 1.0 y 1.1, con errores máximos de 40 por ciento en defecto y 20 por ciento en exceso para  $\zeta = 0$ , tendiendo a reducirse conforme aumenta el amortiguamiento; así, para  $\zeta = 0.05$ , se obtuvieron errores máximos de  $\pm 20$  por ciento, y para  $\zeta = 0.10$  de  $\pm 10$  por ciento.

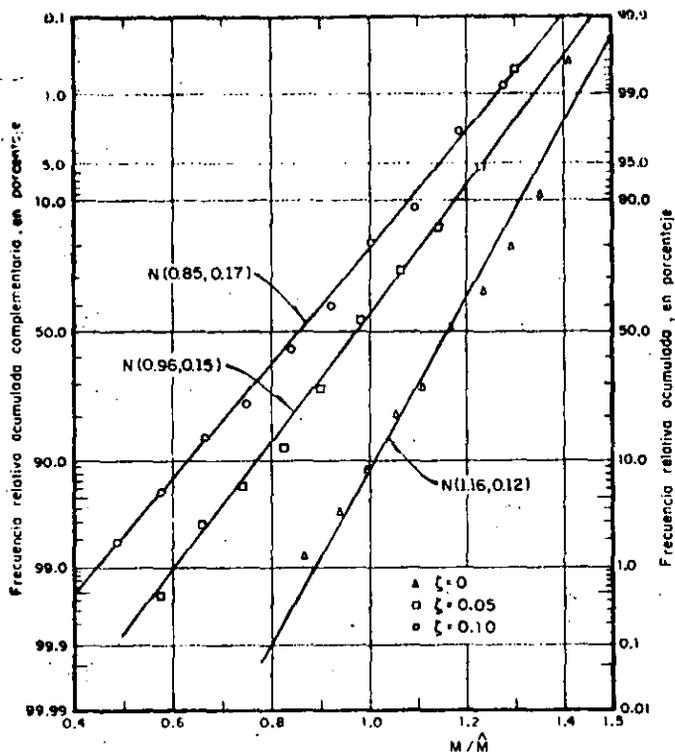


Fig 17. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados. Papel de probabilidades normal, método 1

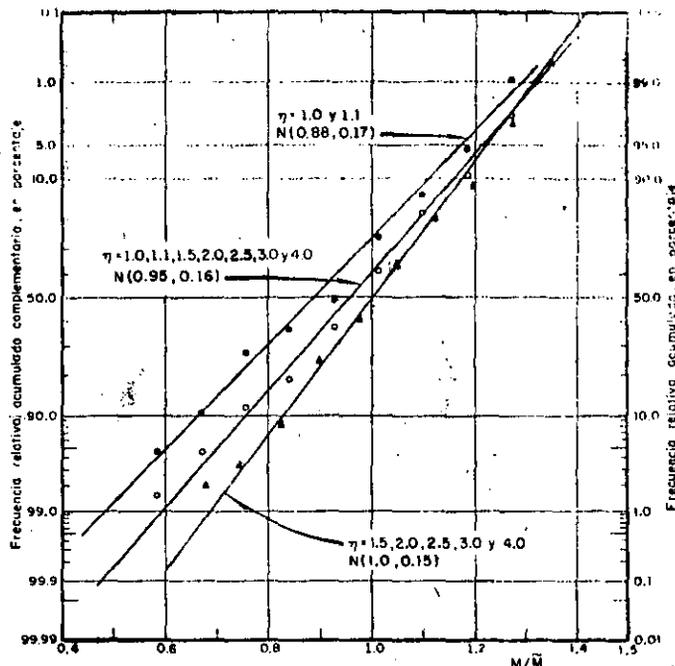


Fig 19. Resultados del método 2 para  $\zeta = 0.10$

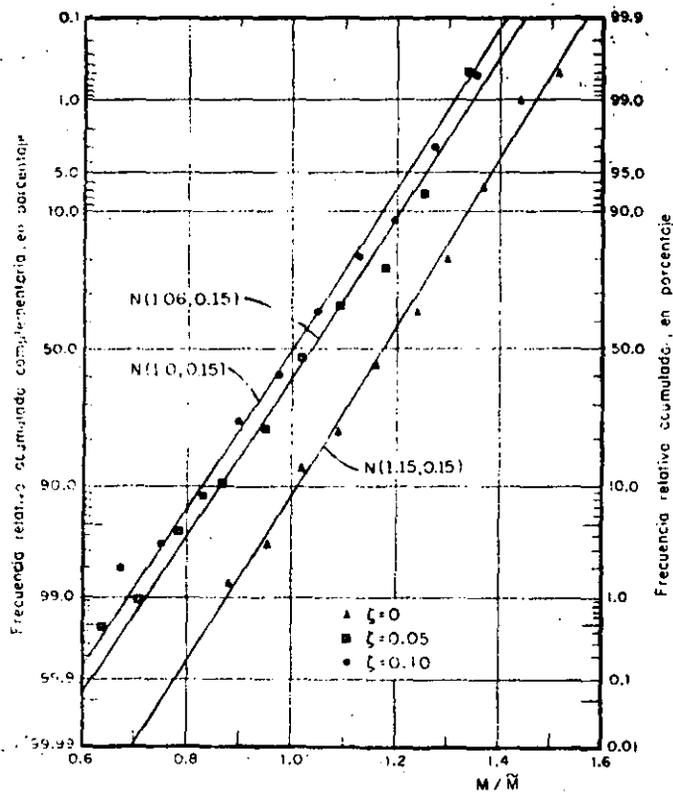


Fig 18. Resultados de los momentos torsionantes para  $\eta = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$  mezclados. Papel de probabilidades normal, método 2

Para el método 1, con  $\eta = 1.0$ , los errores máximos fueron: 41 por ciento en defecto para la estructuración del caso I y 32 por ciento en defecto en los casos II y III. Los errores medios respectivos fueron 36 y 15 por ciento, ambos en defecto. Para  $\eta = 1.1$ , la estructuración del caso I tuvo errores máximos de  $\pm 5$  por ciento, y las tipo II y III, 38 por ciento en defecto y 11 por ciento en exceso.

Respecto al amortiguamiento, se concluyó que las fuerzas cortantes normalizadas son prácticamente independientes de este; así, para  $\eta = 1$ , los promedios globales de los métodos 1 y 2 fueron 1.23 y 1.11, respectivamente, para  $\zeta = 0$ ; para  $\zeta = 0.05$  de 1.30 y 1.02, y para  $\zeta = 0.10$  de 1.30 y 1.0.

Como puede apreciarse mediante los promedios citados en el párrafo anterior, los resultados que se obtienen con el método 2 son mejores que los del 1 cuando  $\eta = 1.0$ . Una conclusión semejante se obtuvo cuando  $\eta = 0.9$  y  $1.1$ , aunque las diferencias se redujeron en un 10 por ciento. Para valores de  $\eta$  fuera del intervalo  $0.9 \leq \eta \leq 1.1$ , los resultados de ambos métodos fueron prácticamente iguales.

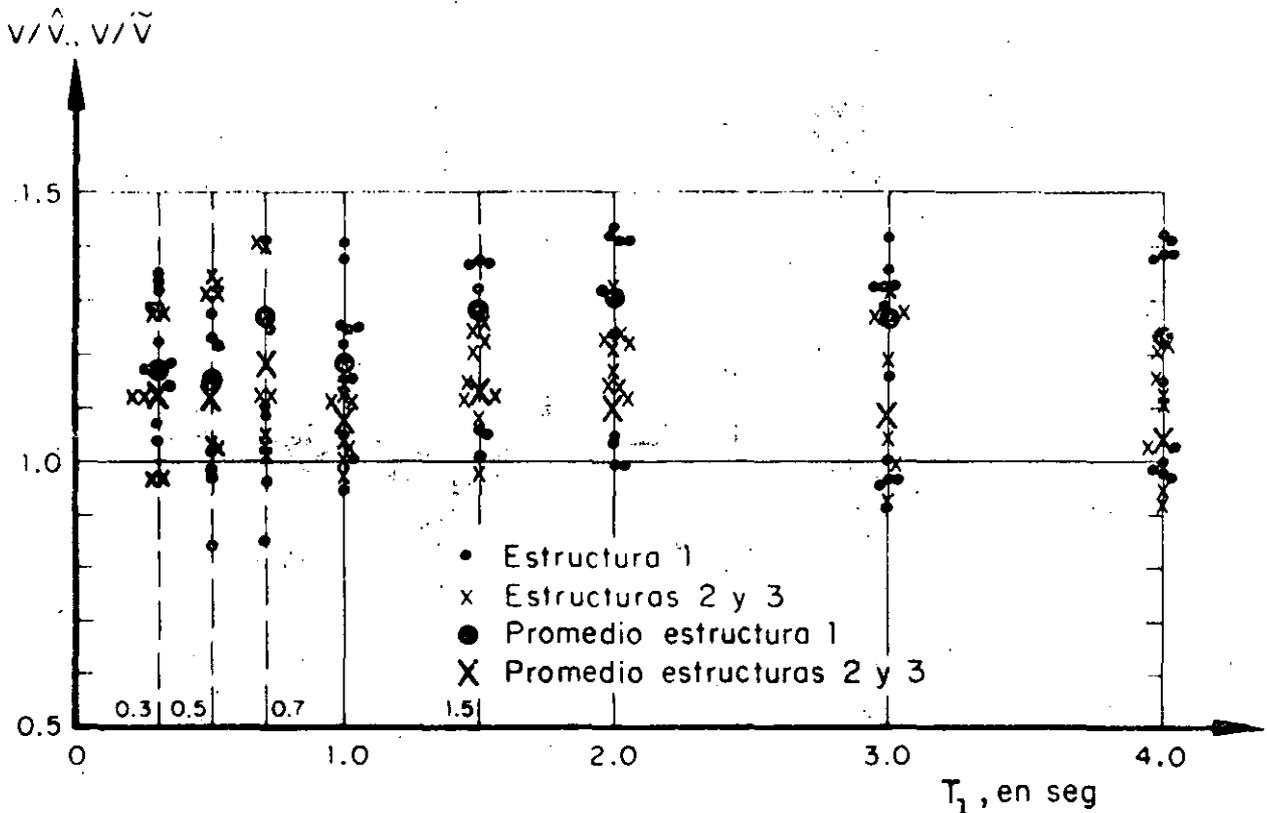


Fig. 20. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con los métodos 1 y 2, para  $\eta = 1.0$  y  $\zeta = 0$

## 2.2 Resultados del problema de cabeceo (caso 2)

Los parámetros que se escogieron para estudiar el problema de cabeceo fueron:

- $m$  masa total
- $L$  distancia del suelo al centro de gravedad
- $T_1$  periodo fundamental
- $\zeta$  fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración
- $\eta_c$  cociente de la frecuencia angular entre la lineal

Los valores que se asignaron a  $T_1$  fueron 0.3, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 y 4.0 seg; a  $\zeta$ , 0, 0.05 y 0.10, y a  $\eta_c$ , 0.2, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 y 4.0. En cuanto a  $m$  y  $L$ , únicamente se usaron 2.0 ton  $\text{seg}^2/\text{m}$  y 4 m, respectivamente, ya que por los resultados (fuerzas y momentos normalizados) que se obtuvieron con estas combinaciones se juzgó innecesario el uso de otros valores; por la misma razón se emplearon únicamente tres de los sismos del problema de torsión.

En este problema, igual que en el de torsión, no hubo diferencias apreciables entre los resultados obtenidos con los tres sismos que se emplearon como excitación, por lo cual se agruparon los resultados en una sola muestra. Además, tanto las fuerzas cortantes como

los momentos de cabeceo máximos normalizados fueron estadísticamente independientes del periodo fundamental,  $T_1$ , con nivel de confianza de 95 por ciento.

Otra conclusión interesante es que los resultados obtenidos con los métodos 1 y 2 (Apéndice) son prácticamente iguales, con diferencias máximas entre ellos de 5 por ciento. Esto se debe a que los valores de  $\epsilon_{12}^2$  (ec 1.3) son grandes porque las frecuencias de vibración no resultan con valores muy cercanos entre sí, aun cuando se usaron  $\eta_c$  muy pequeñas, de manera que el radical de la ec A.17 fuera también pequeño y, por tanto, que las diferencias entre las dos frecuencias fundamentales fueran mínimas. Esto hace que los términos que contienen a  $\epsilon_{12}^2$  en las ecs A.24 y A.25 resulten muy pequeños y que estas ecuaciones sean casi iguales a las ecs A.22 y A.23, respectivamente.

Aprovechando las conclusiones anteriores, se acumularon las muestras correspondientes a todos los periodos fundamentales, y para cada amortiguamiento se elaboraron dos gráficas: una de fuerzas cortantes y otra de momentos de cabeceo normalizados, empleando únicamente los resultados del método 2. En el eje de las abscisas representó a  $\eta_c$ , y el de las ordenadas a los cocientes  $V/\hat{V}$  o  $M/\hat{M}$ , donde  $V$  y  $M$  o bien la fuerza cortante y el momento de cabeceo exactos, y  $\hat{V}$  y  $\hat{M}$  los mismos elementos mecánicos estimados con el método 2.

Debido a que las conclusiones obtenidas de esas gráficas son prácticamente las mismas, en este trabajo solo se reproduce la correspondiente a las fuerzas cortantes con  $\xi = 0.10$  (fig 21). Dichas conclusiones fueron, además de las mencionadas, las siguientes:

- Los resultados son estadísticamente independientes de  $\eta$  con 95 por ciento de nivel de confianza, cuando  $\xi \geq 0.05$
- La respuesta normalizada se subestimó con mayor frecuencia que lo que se sobrestima, en proporción de 2 a 1
- El error máximo en defecto fue 29 por ciento, y en exceso, 22 por ciento
- El promedio global de los resultados con  $\xi \geq .05$  es 1.05, y el coeficiente de variación, 10 por ciento

Los resultados varían ligeramente al introducirse amortiguamiento a la estructura, se hace notar que para  $\xi = 0$ , la respuesta normalizada promedio se subestima aproximadamente en 10 por ciento más que con  $\xi = 0.05$  y  $0.10$  (fig-22). En estos dos últimos casos no se aprecia diferencia significativa en los promedios de las respuestas ni en las dispersiones. Así, los errores máximos que se tuvieron para  $\xi = 0.05$  alcanzaron 31 por ciento en defecto y 19 por ciento en exceso; en cuanto a  $\xi = 0.10$  fueron, respectivamente, 27 y 21 por ciento

- Dado que existe gran incertidumbre en otros factores del diseño sísmico, tales como magnitud del sismo de diseño (o en las amplitudes del espectro de diseño), contenido de frecuencias, duración y variación temporal del mismo, se puede concluir que las estimaciones obtenidas con los dos métodos son, en promedio, satisfactorias en este tipo de estructuras.

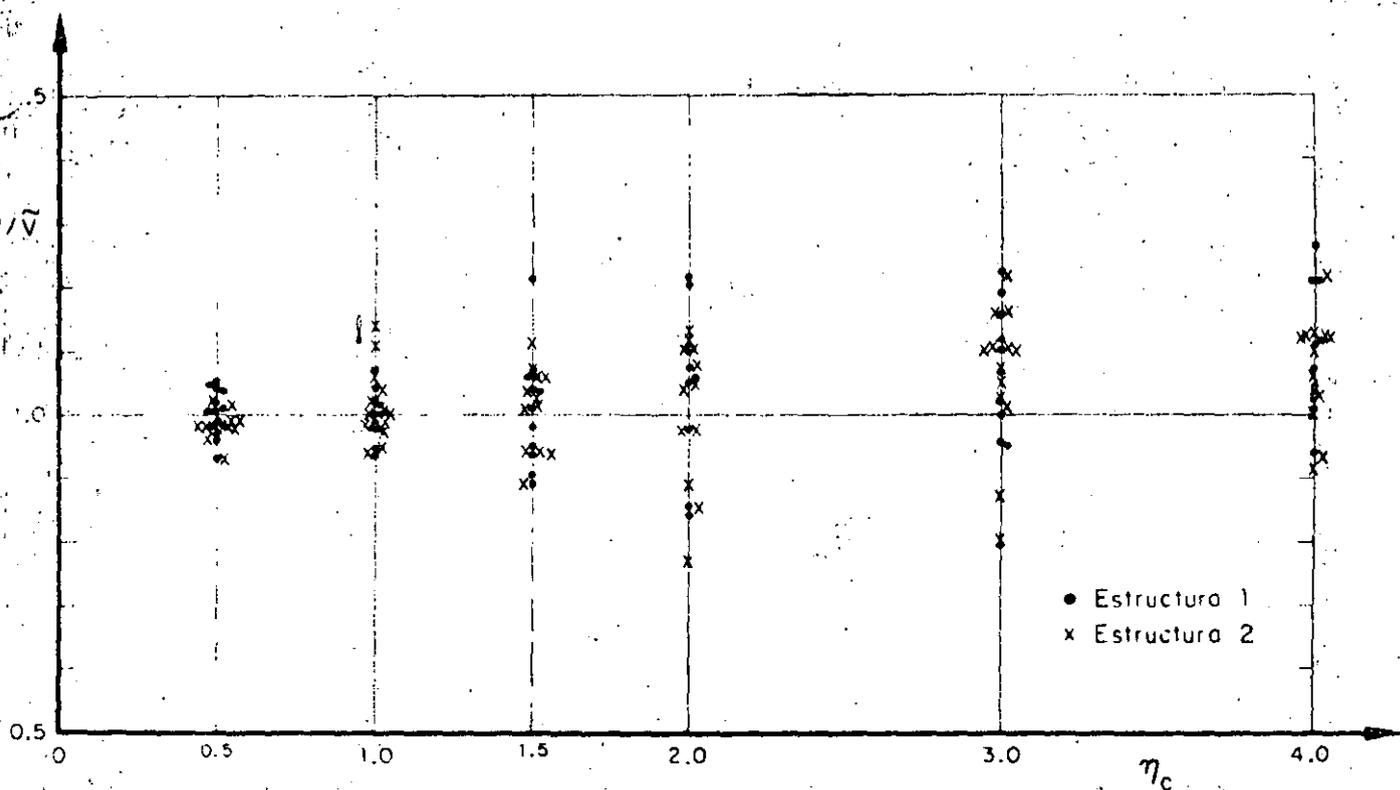


Fig 21. Fuerzas cortantes normalizadas estimadas con el método 2, para  $\xi = 0.10$ . Problema de cabeceo

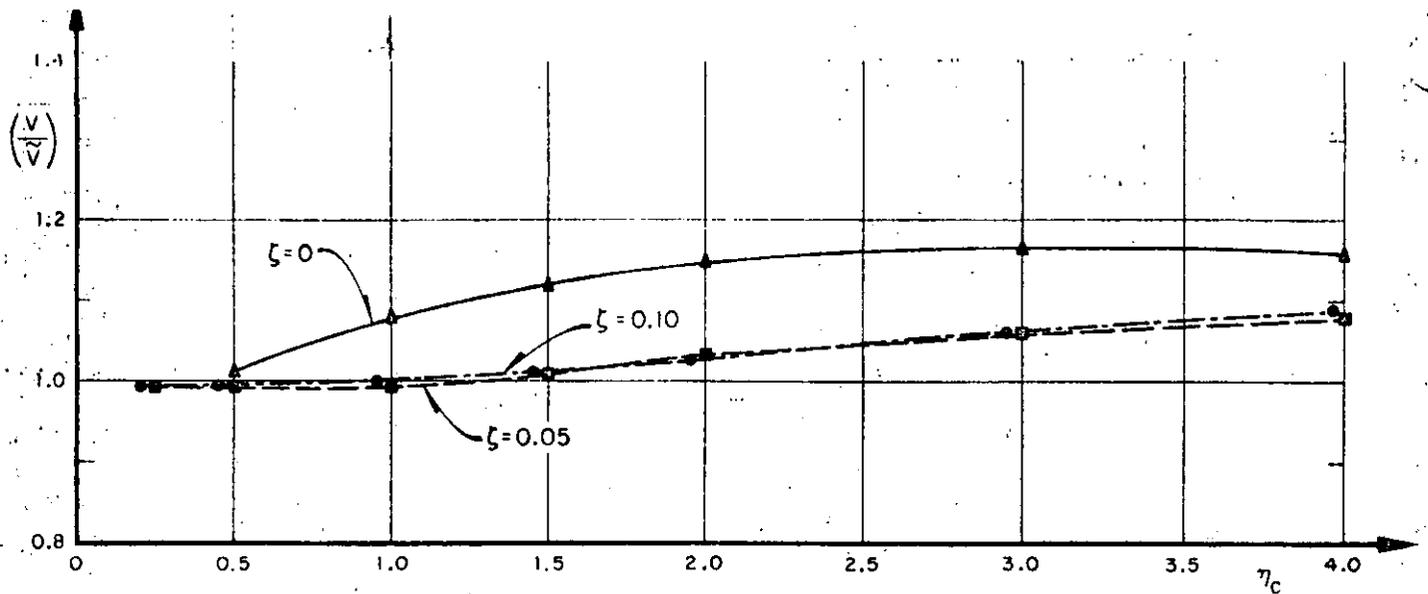


Fig. 22. Variación con  $\eta_c$  de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de cabeceo

### 2.3 Resultados del problema de traslación (caso 3)

Para estudiar este problema se escogieron como parámetros:

$$\eta_t = (k_2/m_2)/(k_1/m_1)$$

$T_1$  periodo fundamental

$\zeta$  fracción de amortiguamiento respecto al crítico en ambos modos de vibración

$m_2/m_1$  relación de masas

Los valores que se asignaron a  $\eta_t$  fueron 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 1.5 y 3; a  $T_1$ , 0.3, 1.0 y 4.0 seg; a  $\zeta$ , 0, 0.05 y 0.10; y a  $m_2/m_1$ , 0.5, 1.0 y 2.0

Los resultados se analizaron mediante gráficas con  $\eta_t$  o  $T_1$  en el eje de las abscisas, y cocientes de las fuerzas cortantes exactas entre las estimadas en el eje de las ordenadas (fuerzas cortantes normalizadas). Debido a que los resultados no difirieron mucho de los de cabeceo, se empleó únicamente un sismo como excitación. Las conclusiones a que se llegó son:

— Las estimaciones que se obtienen con los métodos 1 y 2 son prácticamente iguales, debido a que los valores de las frecuencias de vibración no resultan muy cercanas entre sí en cada caso, lo cual hace que las  $\epsilon_{1,2}^2$  (ec 1.3) resulten grandes y, por tanto, que el término de las ecs A.36 y A.37 que las incluye sea muy pequeño, en cuyo caso las ecs A.34 y A.35 son casi iguales a las ecs A.36 y A.37, respectivamente. Esto se observó aun cuando se estudiaron casos adicionales de  $m_2/m_1$  y  $\eta_t$ , para los cuales el radical de la ec A.29 fue mínimo, con lo cual hubo las dife-

rencias mínimas posibles entre las dos frecuencias fundamentales y, por tanto, los valores más pequeños de  $\epsilon_{1,2}^2$ . Esto ocurre cuando

$$\eta_t = \frac{1 - m_2/m_1}{(1 + m_2/m_1)^2}, \text{ si } m_2/m_1 < 1$$

Dichos casos adicionales fueron:  $m_2/m_1 = 0.2$  con  $\eta_t = 0.555$ ;  $m_2/m_1 = 0.5$  con  $\eta_t = 0.222$ , y  $m_2/m_1 = 0.8$  con  $\eta_t = 0.062$ . En estos, la diferencia máxima que se obtuvo entre los resultados de los dos métodos fue de 13 por ciento, siendo mejores los del método 2

— Las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes del periodo fundamental,  $T_1$ , con nivel de confianza de 95 por ciento

— En la fig 23 se observa que las estimaciones de  $V_1$  y  $V_2$  tienen, en promedio, errores muy parecidos, por lo que en las conclusiones no es necesario hacer distinciones entre ellas

— La respuesta se sobrestima solamente en 30 por ciento de los casos. El error máximo en exceso que se observó fue 46 por ciento, y en defecto 41 por ciento. El coeficiente de variación para  $\zeta = 0.10$  alcanzó 12 por ciento

— En la fig 24 se observa que los promedios de estimaciones con  $\zeta = 0.05$  y 0.10 son mejores que los que corresponden a  $\zeta = 0$ , lo cual hace pensar que las conclusiones obtenidas en la ref 5 respecto a  $\zeta = 0$  no pueden generalizarse para  $\zeta > 0$

Los promedios globales de las fuerzas cortantes normalizadas fueron, para  $\xi = 0, 1.15$ ; para  $\xi = 0.05, .04$ , y en cuanto a  $\xi = 0.10, 1.04$ . Además, se observa que respecto a  $\xi = 0.05$  y  $0.10$ , los resultados son muy similares, es decir, son independientes de  $\xi$  si  $\xi \geq 0.05$

— Las medias de los resultados normalizadas son estadísticamente independientes de la relación de masas,  $m_2/m_1$ , con un nivel de confianza de 95 por ciento, pero los casos especiales de  $m_2/m_1$  y  $\eta_1$  indicados anteriormente tuvieron mayor dispersión

— Para  $\xi = 0.05$  y  $0.10$ , las estimaciones normalizadas son estadísticamente independientes de  $\eta_1$ , con un nivel de confianza de 95 por ciento, como puede apreciarse en la fig 24 en la que aparecen únicamente los resultados del método 2. Para  $\xi = 0$  esta hipótesis no se aceptó

— Por la misma razón indicada en el último párrafo de conclusiones del problema de cabeceo, las estimaciones obtenidas con ambos métodos son en promedio satisfactorias en este tipo de estructuras

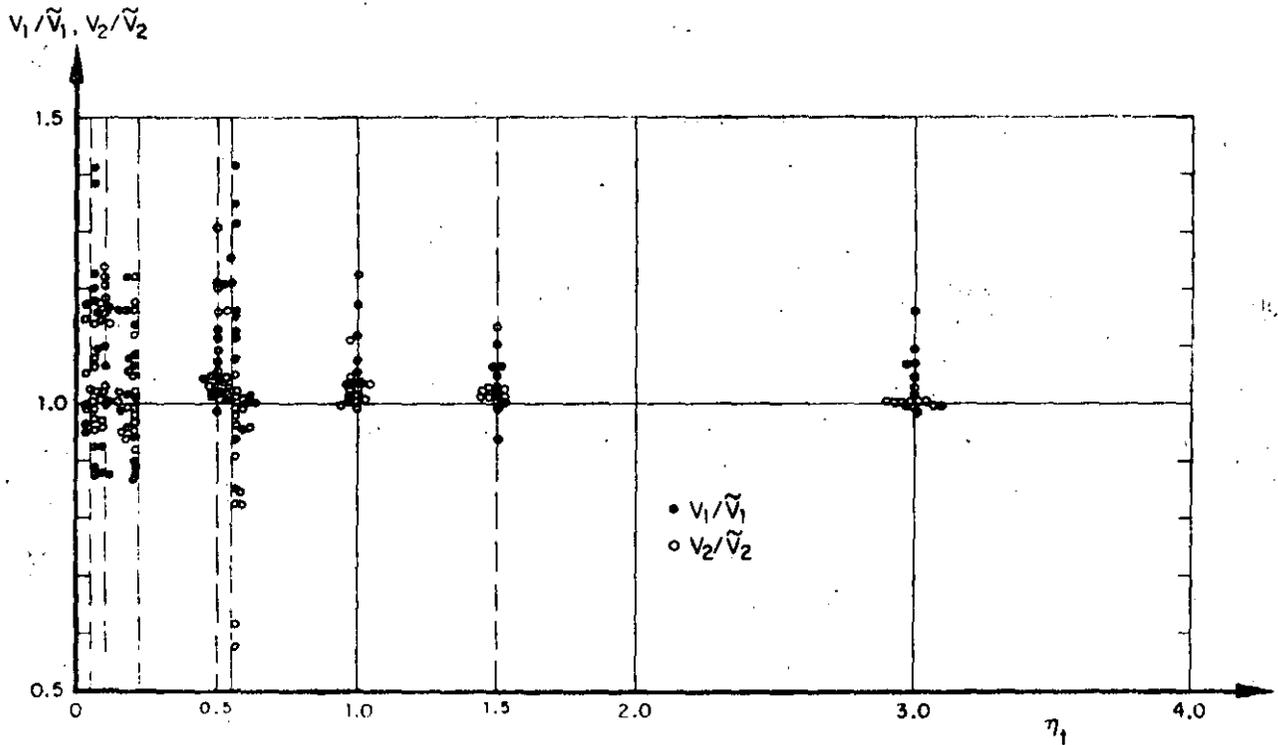


Fig 23. Fuerzas cortantes estimadas con el método 2, para  $\xi = 0.10$ . Problema de traslación

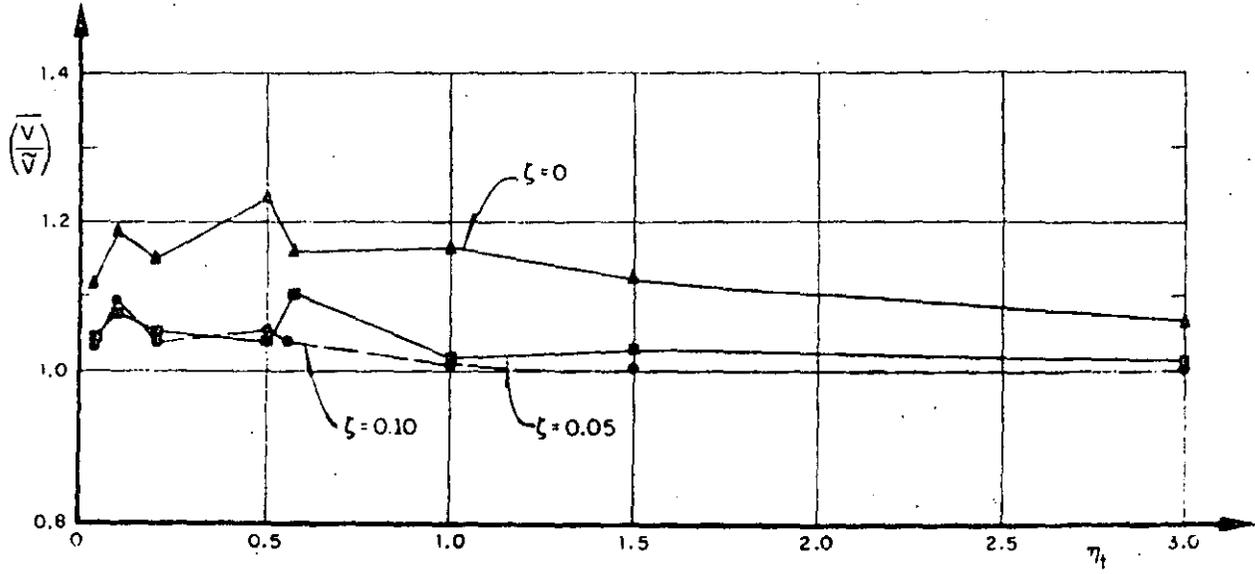


Fig 24. Variación con  $\eta_1$  de los promedios de las fuerzas cortantes estimadas con el método 2. Problema de traslación

### 3. CONCLUSIONES

El resumen de las conclusiones obtenidas de los tres problemas estudiados es:

En cabeceo y traslación:

– En promedio las estimaciones normalizadas de las respuestas máximas logradas con los métodos 1 y 2 son satisfactorias y prácticamente iguales; esto último debido a que  $\epsilon_{12}^2 \gg 0$

– La respuesta se subestimó con mayor frecuencia que lo que se sobrestimó, reduciéndose el error al considerar amortiguamiento en la estructura. Además, los valores exactos divididos entre los estimados fueron estadísticamente independientes de  $T_1$  y  $\eta_c$  o  $\eta_t$ , así como del tipo de respuesta que se trate (momento de cabeceo o fuerza cortante)

En torsión:

– Las conclusiones sí difieren al tomar en cuenta el momento torsionante o la fuerza cortante. Además, debido a que en algunos casos  $\epsilon_{12}^2$  es pequeña, los dos métodos dan resultados diferentes

– Las estimaciones del momento torsionante al considerar amortiguamiento estructural nulo dependen en gran medida de la relación de frecuencias,  $\eta$ . Además, estos difieren al usar el método 1 o el 2, siendo más aproximados los del 1 para valores de  $\eta$  comprendidos en el intervalo  $0.5 \leq \eta \leq 1.5$  o muy parecidos fuera de él

– Para los tres amortiguamientos estudiados, los resultados del método 2 son estadísticamente independientes de  $\eta$ , no así los del 1; son mejores los del método 2 cuando  $\zeta = 0.05$  y  $0.10$

– Cuando se tenga  $0.5 \leq \eta \leq 2$ , se recomienda usar el método 2; en los demás casos es indistinto el empleo de cualquiera de los dos métodos

– La relación de excentricidad dinámica a excentricidad estática se subestima en las disposiciones del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, siendo esto más cuando el valor de  $\eta$  queda comprendido entre 0.8 y 2. En particular, para  $0.9 \leq \eta \leq 1.1$  esta relación vale, en promedio, 4.6 para  $\zeta = 0.05$  y 2.7 para  $\zeta = 0.10$ . De lo anterior se concluye que es necesario realizar estudios exhaustivos sobre este aspecto, considerando vibración torsional en estructuras de varios pisos y con comportamiento inelástico

– Las distribuciones de probabilidades del cociente del valor exacto sobre el estimado son normales con desviación estándar cercana a 0.16 y media comprendida en el intervalo  $1 \pm 0.12$  (fig 19)

### APENDICE

#### A.1 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TORSION

La fig A.1 representa un edificio de un piso, de forma arbitraria, con la línea del centro de torsión (CT) al centro de gravedad (CG) perpendicular a la dirección del sismo considerado.

En dicha figura se tiene que

$m$  masa total del sistema

$J$  momento polar de masa respecto al centro de gravedad

$L_t$  rigidez torsional respecto al centro de torsión

$K$  rigidez lineal en la dirección del movimiento

$e_s$  excentricidad estática

$b$  dimensión de la estructura en dirección  $Y$

$c = e_s/b$

Considerando que la rigidez torsional respecto al centro de gravedad es

$$L = L_t + K e_s^2$$

y aplicando el principio de D'Alambert para obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema en vibraciones libres, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden (ref 8)

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + K(z - e_s \phi) &= 0 \\ J\ddot{\phi} + L\phi - K e_s z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Sustituyendo en la ec A.1 a  $\ddot{z} = -\omega^2 z$  y  $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$  (por ser vibraciones libres), donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural del sistema, y resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas resultante, se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^4 - \lambda^2(1 + \eta) + \eta - c^2/j^2 = 0 \quad (\text{A.2})$$

donde  $\lambda^2 = \omega^2/(k/m)$ ,  $j^2 = J/(mb^2)$  y  $\eta = (L/J)/(K/m)$ . Las raíces de la ec A.2 son

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{\eta + 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

mientras que los vectores de las configuraciones modales son

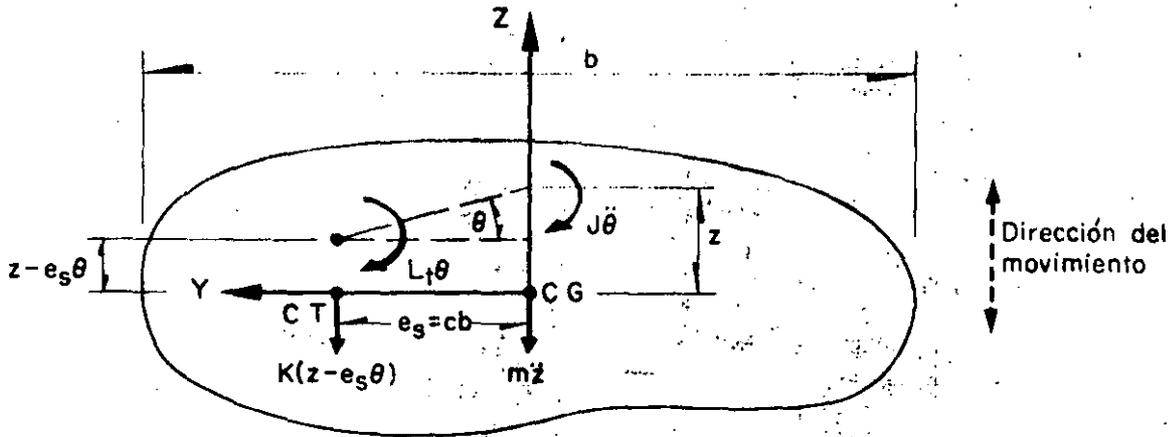


Fig A.1. Diagrama de cuerpo libre de una estructura sujeta a torsión y traslación (vista superior)

$$\begin{bmatrix} z_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \lambda_n^2 \\ cb \end{bmatrix} ; n = 1, 2 \quad (A.4)$$

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \frac{V_1 V_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (A.8)$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2 \frac{M_1 M_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (A.9)$$

En términos de las raíces  $\lambda_{1,2}^2$  de la ec A.3, se puede demostrar (ref 8) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 (las proporciones en que contribuyen los modos a la respuesta total del sistema) se encuentran dados por

$$C_n = \frac{c^2}{c^2 + (1 - \lambda_n^2)^2 j^2} ; n = 1, 2 \quad (A.5)$$

Ahora, si se suponen conocidas las aceleraciones espectrales de cada modo,  $a_n$ , la fuerza cortante máxima vale

$$V_n = m a_n C_n ; n = 1, 2 \quad (A.6)$$

y el momento torsionante máximo respecto al centro de torsión es

$$M_n = \frac{(1 - \lambda_n^2) J V_n}{cbm} ; n = 1, 2 \quad (A.7)$$

Una vez conocidos los valores de  $V_1, V_2, M_1$  y  $M_2$ , la aplicación de la ec 1.2 conduce a la estimación de la fuerza cortante y del momento torsionante máximos mediante el método 2; ellos son, respectivamente

donde  $\epsilon_{ij}^2$  se obtiene aplicando la ec 1.3. El signo negativo asociado al doble producto que aparece en la ec A.9 se debe a que las funciones de transferencia de los momentos en el primero y segundo modos tienen signo contrario, ya que el factor  $(1 - \lambda_n^2)$  que aparece en la ec A.7 es positivo para el primer modo ( $n = 1$ ) y negativo para el segundo ( $n = 2$ ), lo cual se demuestra como sigue:

De la ec A.3

$$\lambda_1^2 = \frac{\eta + 1}{2} - \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

por lo que

$$\lambda_1^2 \leq \frac{\eta + 1}{2} - \frac{\eta - 1}{2} = 1$$

Análogamente

$$\lambda_2^2 = \frac{\eta + 1}{2} + \sqrt{\frac{(\eta - 1)^2}{4} + \frac{c^2}{j^2}}$$

de ahí que, si  $\eta \geq 1$

$$\lambda_2^2 \geq \frac{\eta + 1}{2} + \frac{\eta - 1}{2} = \eta$$

O, si  $\eta \leq 1$

$$\lambda_2^2 \geq \frac{\eta + 1}{2} + \frac{1 - \eta}{2} = 1$$

En consecuencia,  $(1 - \lambda_1^2) \geq 0$  y  $(1 - \lambda_2^2) \leq 0$

Además, según el Reglamento del Distrito Federal (método 1) las respuestas dinámicas máximas del mismo sistema estarían dadas por (ec 1.1)

$$\hat{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, por el método exacto, las respuestas máximas totales,  $V$  y  $M$ , se obtienen localizando los máximos en el tiempo,  $t$ , de las sumas de las respuestas (cortante o momento, según sea el caso) en los modos 1 y 2, es decir,

$$V = \text{Máx} \left| \left\{ m C_1 a_1(t) + m C_2 a_2(t) \right\} \right| = \\ = \text{Máx} \left| \left\{ V_1(t) + V_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.12})$$

$$M = \text{Máx} \left| \left\{ \Gamma_1 V_1(t) + \Gamma_2 V_2(t) \right\} \right| \quad (\text{A.13})$$

donde

$$\Gamma_n = \frac{(1 - \lambda_n^2) J}{cbm} ; n = 1, 2 \quad (\text{A.14})$$

## A.2 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A CABECEO

Es frecuente que en la práctica se presenten estructuras constituidas por una hilera de columnas o una sola columna que sostiene una losa o un cascarón (péndulos invertidos), tal como la que aparece en la fig A.2. La respuesta dinámica de una estructura de este tipo se debe obtener (ref 9) considerando el efecto que la inercia rotacional de la cubierta induce en el movimiento total del sistema.

En la fig A.2 se empleó la notación:

- $W$  peso de la cubierta más la parte tributaria de columna
- $m$   $W/g$
- $g$  aceleración de la gravedad
- $J_c$  momento de inercia de la masa de la cubierta respecto al eje  $Z$
- $E$  módulo de elasticidad del material de la columna
- $I_c$  momento de inercia de la sección transversal de la columna respecto al eje  $Z$
- CG centro de gravedad de la cubierta
- $L$  distancia del suelo al centro de gravedad

El diagrama de cuerpo libre de la estructura anterior aparece en la fig A.3, en la cual se tiene que (ref 9)

$$K \text{ rigidez por traslación} = 3EI_c/L^3$$

$$K_r \text{ rigidez por rotación} = EI_c/L$$

$x$  desplazamiento del centro de gravedad de la cubierta

$\phi$  rotación del centro de gravedad de la cubierta

$$\alpha = (x - k_r \gamma \phi)/k$$

$$\beta = (\phi - k \gamma x)/k$$

$$\gamma = L^2/2 EI_c$$

$$k = 1 - K L^3/4EI_c = 0.25$$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento correspondientes al diagrama de cuerpo libre de la estructura son

$$m \ddot{x} + (Kx - K K_r \gamma \phi)/k = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$J_c \ddot{\phi} + (K_r \phi - K K_r \gamma x)/k = 0$$

Considerando que se satisfacen las relaciones  $\ddot{x} = -\omega^2 x$  y  $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$ , donde  $\omega$  es la frecuencia circular natural de vibración de la estructura, y resolviendo el sistema de ecuaciones A.15, se obtiene la ecuación característica

$$\omega^4 - \frac{K J_c + m K_r}{m J_c k} \omega^2 + \frac{K K_r}{4m J_c k^2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

que es una ecuación de segundo grado en  $\omega^2$ . Se efectúan algunas transformaciones algebraicas y considera que

$K/m = p^2$  cuadrado de la frecuencia circular natural por traslación.

$K_1/J_c$   $\Omega^2$  cuadrado de la frecuencia circular natural por rotación

$$\lambda = \omega^2/\rho^2$$

$$\eta_c = \Omega^2/\rho^2$$

se llega a

$$\gamma_{1,2} = 2(1 + \eta_c \pm \sqrt{(1 + \eta_c)^2 - \eta_c}) \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte, los vectores de las configuraciones modales son

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 - \lambda_n \\ 2L \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad (\text{A.18})$$

Se puede demostrar (ref 9) que los coeficientes de participación correspondientes a los modos 1 y 2 se encuentran dados por la expresión

$$C_n = \frac{x_n m}{x_n^2 m + \Phi_n^2 J_c}; n = 1, 2 \quad (\text{A.19})$$

Partiendo del hecho de que se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo,  $a_n$ , la fuerza cortante máxima y el momento máximo de cabeceo correspondientes valen

$$V_n = m a_n C_n x_n = m a_n C_n; n = 1, 2 \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} M_n &= J a_n C_n \Phi_n = J a_n C_n \frac{4 - \lambda_n}{2L} = \\ &= \frac{(4 - \lambda_n) J_c}{2Lm} V_n \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Las respuestas dinámicas de la estructura de acuerdo con los criterios del Reglamento de Construcciones del D. F. (método 1) y de Rosenblueth (método 2), se obtienen haciendo uso de las ecuaciones

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\tilde{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 \frac{V_1 V_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.24})$$

$$\tilde{M} = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 - 2 \frac{M_1 M_2}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (\text{A.25})$$

donde  $\epsilon_{12}^2$  se calcula mediante la ec 1.3. El signo menos aparece en la ec A.25 debido a que la función de transferencia del segundo modo es de signo opuesto a la del primero, ya que se puede demostrar, a partir de la ec A.17, que  $\lambda_1 \leq 4$  y  $\lambda_2 \geq 4$ , por lo que el factor  $4 - \lambda_n$  que aparece en la ec A.21 tiene signo positivo en el modo 1, y negativo en el 2.

La respuesta dinámica exacta se obtiene utilizando las expresiones

$$V = \text{Máx} \left\{ \left\{ C_1 m x_1 a_1(t) + C_2 m x_2 a_2(t) \right\} \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$M = \text{Máx} \left\{ \left\{ C_1 J_c \Phi_1 a_1(t) + C_2 J_c \Phi_2 a_2(t) \right\} \right\} \quad (\text{A.27})$$

### A.3 ANALISIS DINAMICO DE UNA ESTRUCTURA SUJETA A TRASLACION

Consideremos ahora el caso de una estructura de constante de dos pisos, en la cual no existe rotación en los planos horizontales en los niveles de los pisos (fig A.4).

La ecuación matricial de equilibrio de este sistema es (ref 10)

$$\begin{bmatrix} m_1 \omega^2 - K_1 - K_2 & K_2 \\ K_2 & m_2 \omega^2 - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \{0\} \quad (\text{A.28})$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas concentradas en los niveles 1 y 2, y  $K_1$  y  $K_2$  son las rigideces de los entrepisos 1 y 2, respectivamente.

Partiendo de este sistema de ecuaciones y haciendo  $\eta_i = (K_2/m_2)/(K_1/m_1)$  y  $\lambda = \omega^2/(K_1/m_1)$ , se obtienen las raíces

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \eta_1 + (m_2/m_1) \eta_1 + 1 \right]$$

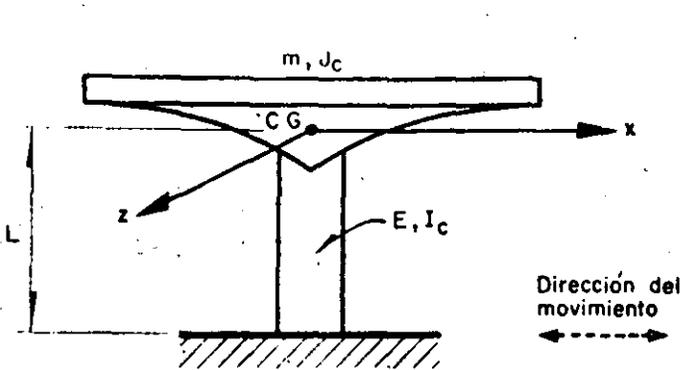


Fig A.2. Estructura en forma de péndulo invertido (vista lateral)

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[ \eta_1 + \left( \frac{m_2}{m_1} \right) \eta_1 + 1 \right]^2 - 4 \eta_1} \quad (A.29)$$

Además, los vectores de configuraciones modales resultan ser

$$\begin{bmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{(K_1/m_1) - \omega_n^2}{\eta_1 (K_1/m_1) (m_2/m_1)} \end{bmatrix}; n = 1, 2 \quad (A.30)$$

Además, se puede demostrar (ref 10) que los coeficientes de participación de los modos 1 y 2 se encuentran dados por

$$C_n = \frac{z_{1,n} + (m_2/m_1) z_{2,n}}{z_{1,n}^2 + (m_2/m_1) z_{2,n}^2}; n = 1, 2 \quad (A.31)$$

Si se conocen las aceleraciones espectrales de cada modo,  $a_n$ , la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 1 en cada modo vale

$$V_{1,n} = C_n a_n (m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n}); n = 1, 2 \quad (A.32)$$

en tanto que la fuerza cortante máxima correspondiente al entrepiso 2 es

$$V_{2,n} = C_n a_n m_2 z_{2,n}; n = 1, 2 \quad (A.33)$$

Ya conocidos los valores de  $V_{1,n}$  y  $V_{2,n}$ , las respuestas máximas dinámicas totales de la estructura estimadas con los métodos 1 y 2 se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\hat{V}_1 = \sqrt{V_{1,1}^2 + V_{1,2}^2} \quad (A.34)$$

$$\hat{V}_2 = \sqrt{V_{2,1}^2 + V_{2,2}^2} \quad (A.35)$$

$$\tilde{V}_1 = \sqrt{V_{1,1}^2 + V_{1,2}^2 + 2 \frac{V_{1,1} V_{1,2}}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (A.36)$$

$$\tilde{V}_2 = \sqrt{V_{2,1}^2 + V_{2,2}^2 - 2 \frac{V_{2,1} V_{2,2}}{1 + \epsilon_{12}^2}} \quad (A.37)$$

donde  $\epsilon_{12}^2$  se calcula mediante la ec 1.3

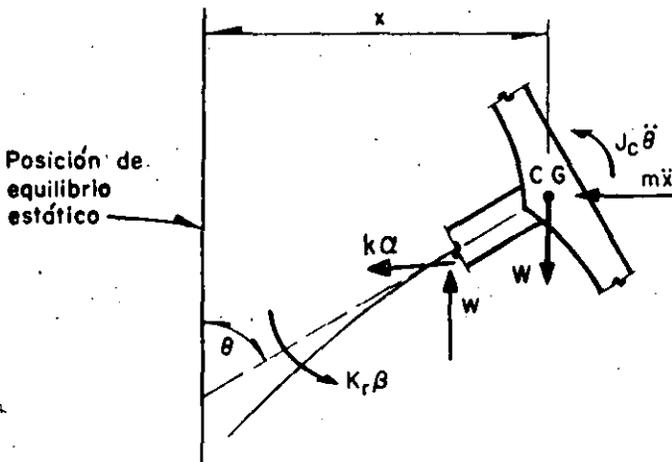


Fig A.3. Diagrama de cuerpo libre de la estructura de la fig A.2

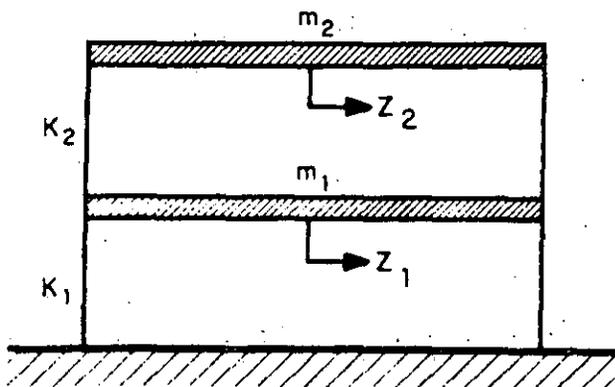


Fig A.4. Estructura de dos pisos sujeta a traslación (vista lateral)

Finalmente, las respuestas máximas dinámicas de la estructura en cuestión se pueden obtener mediante el método exacto haciendo uso de las ecuaciones

$$V_1 = \text{Máx} \left\{ \left\{ \sum_{n=1}^2 C_n a_n(t) \left[ m_1 z_{1,n} + m_2 z_{2,n} \right] \right\} \right\} \quad (\text{A.38})$$

$$V_2 = \text{Máx} \left\{ \sum_{n=1}^2 C_n a_n(t) m_2 z_{2,n} \right\} \quad (\text{A.39})$$

## REFERENCIAS

1. E. Rosenblueth, "A Basis for Aseismic Design", Tesis doctoral, *Universidad de Illinois*, Urbana (1951)
2. E. Rosenblueth, "Sobre la respuesta sísmica de estructuras de comportamiento lineal", *Segundo Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Veracruz (1968)
3. "Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", *Diario Oficial*, México, D. F. (feb 1966)
4. "Los Angeles City Building Code", Los Angeles, Cal. (1966)
5. R. Husid, "Estimación de la respuesta máxima de tranques de tierra sometidos a la acción de terremotos", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Acapulco (1971)
6. O. A. Rascón, "Modelo estocástico para simular registros de temblores en terreno duro", Tesis doctoral, *Facultad de Ingeniería, UNAM*, México, D. F. (1968)
7. M. Chávez, O. A. Rascón y L. Alonso, "Un nuevo método para corrección de la línea base de registros de temblores", *Tercer Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Acapulco (1971)
8. J. Elorduy, y E. Rosenblueth, "Torsiones sísmicas en edificios de un piso", Informe 164, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, México, D. F. (1968)
9. O. A. Rascón, "Efectos sísmicos en estructuras en forma de péndulo invertido", *Revista de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Sísmica*, Vol 3, No 1, México, D. F. (1965), pp 8-16
10. E. Rosenblueth, y L. Esteva, "Folleto complementario: diseño sísmico de edificios, proyecto de Reglamento de Construcciones en el Distrito Federal", *Ediciones Ingeniería*, México, D. F. (1962)
11. T. Naylor et al, "Técnicas de simulación en computadoras", *Limusa-Wiley*, México, D. F. (1971)
12. J. Hammersley y D. Handscomb, "Monte-Carlo Methods", *Methuen*, Londres (1964)

**Instituto de Ingeniería**

**División de Investigación de la Facultad de Ingeniería**

**Universidad Nacional Autónoma de México**

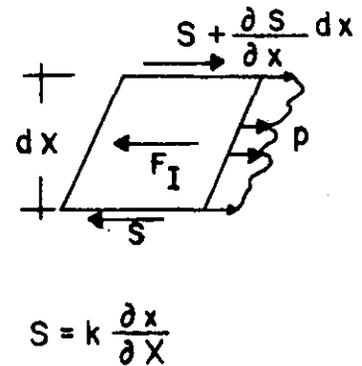
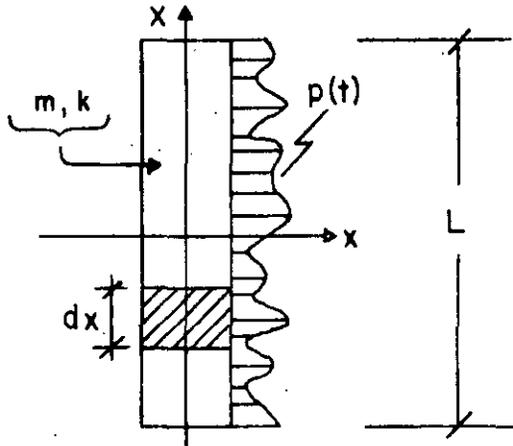
**Ciudad Universitaria, México 20, D. F.**

**MEXICO**

## VIGAS DE CORTANTE NO AMORTIGUADAS

SON SISTEMAS CONTINUOS CUYOS CAMBIOS DE PENDIENTE SON PROPORCIONALES AL CORTANTE QUE ACTUA EN LA SECCION.

SEAN  $m$  Y  $p$  LA MASA Y FUERZA EXTERNA DISTRIBUIDAS POR UNIDAD DE LONGITUD, Y SEA  $k$  LA RIGIDEZ POR CORTANTE:



$$k = FAG$$

$F$  = FACTOR DE FORMA

$A$  = AREA SECCION TRANSVERSAL

$G$  = MODULO DE ELASTICIDAD DINAMICO AL CORTANTE

$$F_I = (mdx) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

POR EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial S}{\partial x} dx + pdx - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx = 0$$

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = p(t) \quad (1)$$

2

LA EC HOMOGENEA QUEDA (CON p=0)

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = 0 ; \quad v^2 = \frac{k}{m}$$

ESCRIBIENDO  $x(t) = z_n(X)\theta_n(t)$ , LA EC (2) QUEDA

$$z_n \ddot{\theta}_n - v^2 z_n'' \theta_n = 0$$

$$\frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} - v^2 \frac{z_n''}{z_n} = 0 \Rightarrow \frac{\ddot{\theta}_n(t)}{\theta_n(t)} = v^2 \frac{z_n''}{z_n} = -\omega_n^2 = \text{CONSTANTE}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_n + \omega_n^2 \theta_n = 0 ; \quad z_n'' + \frac{\omega_n^2}{v^2} z_n = 0$$

$$\theta_n = B_n \text{sen } \omega_n (t-t_n), \quad z_n = A_n \text{sen } \frac{\omega_n}{v} (X - a_n)$$

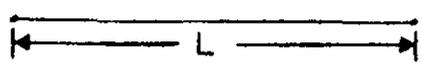
$$\therefore x_n = \bar{A}_n \text{sen} \left[ \frac{\omega_n}{v} (X - a_n) \right] \text{sen} \left[ \omega_n (t - t_n) \right], \quad n=1, 2, \dots ; \quad \bar{A}_n = B_n A_n$$

LAS CONSTANTES  $a_n$  Y  $\omega_n$  SE DETERMINAN EN CADA PROBLEMA EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA.

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L x_n(X)x_j(X) = 0, \text{ SI } n \neq j$$

EJEMPLO 1: CUERDA VIBRANTE DE LONGITUD L Y EXTREMOS FIJOS:



EN EL EXTREMO  $X=0$  SE TENDRA

$$(5) \quad x(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_n a_n}{v} = j\pi ; \quad j = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow a_n = 0$$

EN EL EXTREMO  $x = L$  SE TENDRA

$$(4) \quad x(L, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_n L}{v} = n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$$

PUESTO QUE EN LA EC (3) SE TOMA  $j=0$ , YA QUE  $j=1, 2, \dots$  DAN LA MISMA SOLUCION, LO CUAL CONDUCE A  $a_n = 0$ .

DE LA EC (4):  $\omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad ; \quad n = 1, 2, \dots$

FRECUENCIA FUNDAMENTAL

SI  $n=1$ ,  $\omega_1 = \frac{\pi v}{L} \quad \therefore \quad \omega_n = n \omega_1$

Y  $T_1 = \frac{2L}{v} \quad T_n = \frac{T_1}{n}$

LAS CONFIGURACIONES MODALES QUEDAN:

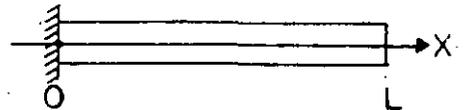
$$Z_n = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi X}{L} \quad ; \quad x(t, X) = \bar{A}_n \operatorname{sen} \frac{n\pi X}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{L} (t - t_n)$$

CONDICION DE ORTOGONALIDAD:

$$\int_0^L A_i \operatorname{sen} \frac{i\pi X}{L} A_j \operatorname{sen} \frac{j\pi X}{L} dx = 0, \quad \text{SI } i \neq j$$

EJEMPLO 2: VIGA DE CORTANTE APOYADA EN  $x = 0$  Y LIBRE EN  $x = L$ .

DE  $x(0, t) = 0 \Rightarrow a_n = 0$



DE  $x'(L, t) = 0$  (PUESTO QUE EN  $x = L$  SE DEBE CUMPLIR QUE LA FUERZA CORTANTE,  $S$ , SEA NULA),

$$x'(X, t) = A_n \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n X}{v} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n)$$

$$\therefore x'(L, t) = 0 = \cos \frac{\omega_n L}{v} \Rightarrow \frac{\omega_n L}{v} = \frac{\pi}{2}(2n-1)$$

$$0 \quad \omega_n = \frac{v}{L} \frac{\pi}{2} (2n-1) \quad n = 1, 2, \dots$$

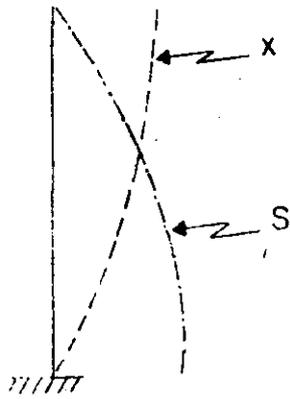
$$\text{SI } n=1, \omega_1 = \frac{\pi v}{L \cdot 2} \Rightarrow T_1 = \frac{4L}{v}$$

$$\therefore \omega_n = \omega_1(2n-1); \quad T_n = \frac{T_1}{2n-1}$$

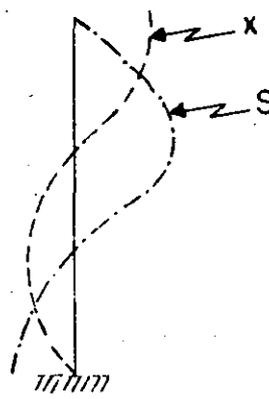
$$\text{ASI: } T_2 = \frac{T_1}{3}, \quad T_3 = \frac{T_1}{5}, \quad \text{ETC.}$$

DISTRIBUCION DE CORTANTES:

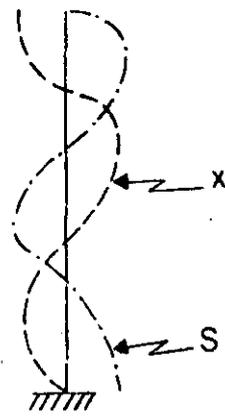
$$S_n = k \frac{\partial x}{\partial x} = \bar{A}_n k \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n x}{v} \operatorname{sen} \omega_n (t - t_n)$$



1er. MODO (FUNDAMENTAL)



2o. MODO



3er. MODO

## VIBRACIONES FORZADAS EN VIGAS DE CORTANTE

SEA  $\ddot{x}_0(t)$  LA EXCITACION DEL TERRENO. LA RESPUESTA,  $x(t)$ , DEL SISTEMA ES

$$(3) \quad x(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) \operatorname{sen} \omega_n (t-\tau) d\tau$$

DONDE

$$(4) \quad a_n = \frac{\int_0^L n \operatorname{sen} \frac{\omega_n v}{X} dx}{\int_0^L n \operatorname{sen}^2 \frac{\omega_n v}{X} dx} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

TAREA: DEMOSTRAR ECS (3) Y (4) Y ESTUDIAR SECCION 3.15.

EJEMPLO: CALCULAR EL LIMITE SUPERIOR DEL CORTANTE EN UNA VIGA DE CORTANTE A CUYA BASE SE LE SOMETE A UNA ACELERACION CONSTANTE,  $a$ .

EL ESPECTRO DE ESTA EXCITACION ES  $V = a/\omega$

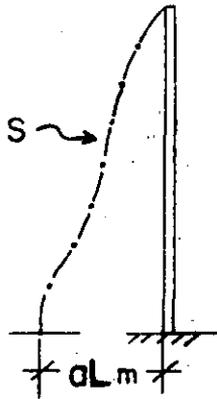
POR LO TANTO,  $S \leq k \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega_n} \operatorname{sen} \frac{\omega_n}{v} X \right) \right] V$

$$S \leq \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ka_n v}{\omega_n} \frac{\omega_n}{v} \cos \frac{\omega_n}{v} X \right] = \frac{4k a}{\pi v} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2L}(2n-1)X}{(2n-1) \frac{v}{L} \frac{\pi}{2}(2n-1)} \right]; \text{ con } v^2 = \frac{k}{m} :$$

$$S \leq \frac{8aLm}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left[ \cos \frac{(2n-1)\pi X}{2L} \right]$$

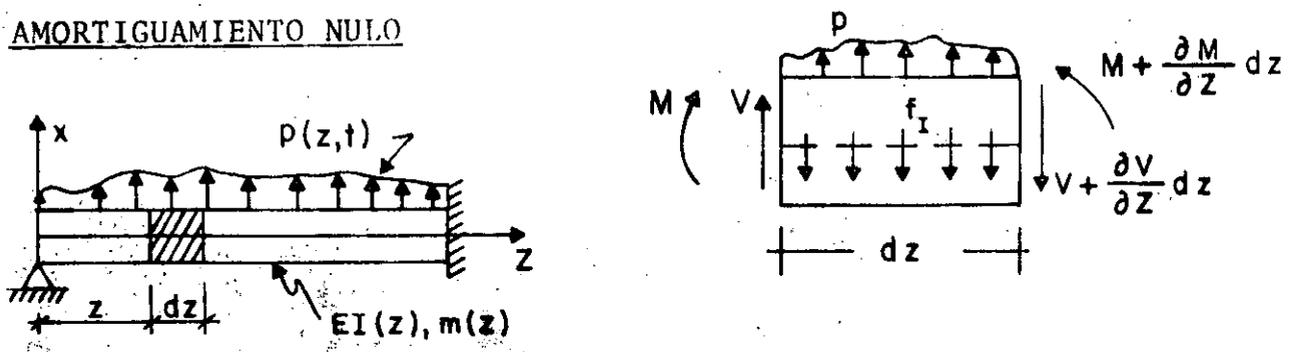
EN X 0:

$$S \leq \frac{(8aLm)}{\pi^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}}_{\pi^2/8} = aLm$$



### VIBRACION DE VIGAS EN FLEXION

#### a. AMORTIGUAMIENTO NULO



$$V + pdz - (V + \frac{\partial V}{\partial z} dz) - f_I dz = 0 \tag{1}$$

$$\text{EN DONDE } f_I dz = (mdz) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{2}$$

SUSTITUYENDO (2) EN (1) Y SIMPLIFICANDO:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tag{3}$$

$$M + Vdz - (M + \frac{\partial M}{\partial z} dz) = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial z} = V \tag{4}$$

(DESPRECIANDO LOS TERMINOS DE SEGUNDO ORDEN DE LOS MOMENTOS DE p Y f\_I).

SUSTITUYENDO (4) EN (3) SE OBTIENE

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \tag{4'}$$

TOMANDO EN CUENTA QUE  $\frac{M}{EI} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$  SE OBTIENE FINALMENTE

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = p \tag{5}$$

b. AMORTIGUAMIENTO VISCOSO

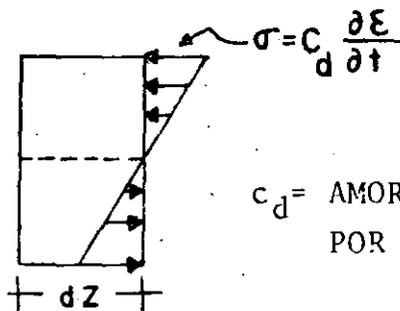
- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR

VELOCIDAD TRANSVERSAL =  $c(z) \frac{\partial x}{\partial t} dz$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = p - m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - c \frac{\partial x}{\partial t} \quad (6)$$

- FUERZA DE AMORTIGUAMIENTO POR DEFORMACION DE LA VIGA.

ACEPTANDO LA HIPOTESIS DE NAVIER DE DEFORMACION PLANA



$c_d =$  AMORTIGUAMIENTO  
POR DEFORMACION

$$M_{amort} = \int \sigma y da = c_d I(z) \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}$$

INCORPORANDO EL MOMENTO DEBIDO AL AMORTIGUAMIENTO EN LA EC. (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p \quad (6)$$

SI LA EXCITACION ES POR MOVIMIENTO DE LOS APOYOS, SE PUEDE DEMOSTRAR (CLOUGH Y PENZIEN, PAG 303) QUE:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x}{\partial z^2 \partial t}) + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + c \frac{\partial x}{\partial t} = p_{efect.}$$

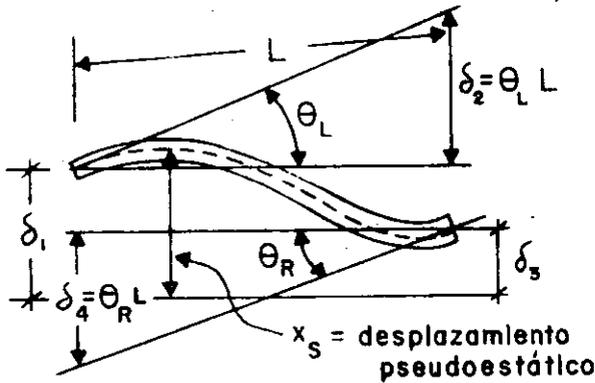
EN DONDE

$$p_{efect} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 x_s}{\partial z^2} + C_d I \frac{\partial^3 x_s}{\partial z^2 \partial t}) - m \frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} - c \frac{\partial x_s}{\partial t} \quad (7)$$

$$x(t)(z,t) = x_s(z,t) + x(z,t)$$

$x_s$  = DESPLAZAMIENTO PSEUDOESTÁTICO OCASIONADO POR EL MOV. DE  
LOS APOYOS DE MANERA ESTÁTICA

$x$  = DESPLAZAMIENTO DINAMICO



SI SE TIENE UNA ROTACION Y UNA TRASLACION POR APOYO:

$$x_s = \sum_{i=1}^4 \theta_i \delta_i(t) \quad (8)$$

$\theta_i(z)$  = CONFIGURACION DE LA VIGA  
DEBIDA A  $\delta_i=1$

INCORPORANDO (8) EN (7):

$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 \{ m \theta_i \ddot{\delta}_i(t) + c \theta_i \dot{\delta}_i(t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [ I(z) \frac{\partial^2 \theta_i(z)}{\partial z^2} (\delta_i(t) c_d + 1) ] \} \quad (9)$$

EN LA MAYORIA DE LOS CASOS EL AMORTIGUAMIENTO INFLUYE POCO EN LA FUERZA EFECTIVA Y LA EC. (9) SE SIMPLIFICA A

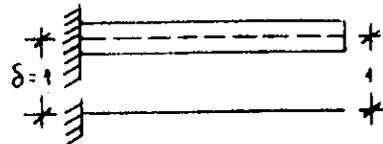
$$P_{\text{efect}} = -\sum_{i=1}^4 m \theta_i(z) \ddot{\delta}_i(t)$$

EN EL CASO DE UN VOLADIZO:

$$\theta_1(z) = 1$$

Y

$$P_{\text{efect}} = -m(z) \ddot{\delta}_1(t)$$



ANALISIS DE VIBRACIONES LIBRES

CONSIDEREMOS UNA VIGA DE SECCION CONSTANTE ( $EI = \text{CONSTANTE}$  ;  $\bar{m} = \text{MASA}$  POR UNIDAD DE LONGITUD).

DE LA EC. (5):  $EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$

$$\frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

RESOLVIENDO LA EC. (10) POR SEPARACION DE VARIABLES:

$$x(z, t) = \theta(z) Y(t)$$

$$\theta^{IV}(z) Y(t) + \frac{\bar{m}}{EI} \theta(z) \ddot{Y}(t) = 0 ; \frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = 0$$

POR LO QUE

$$\frac{\theta^{IV}(z)}{\theta(z)} = -\frac{\bar{m}}{EI} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} = C = a^4 \quad (C = \text{CONSTANTE})$$

POR LO TANTO OBTENEMOS DOS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS:

$$\theta^{IV}(z) - a^4 \theta(z) = 0$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0, \quad \text{DONDE} \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\bar{m}}$$

$$0 \quad a^4 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EI}$$

LA SOLUCION DE LA SEGUNDA DE ESTAS ES:

$$Y(t) = \frac{\dot{Y}(0)}{\omega} \text{sen} \omega t + Y(0) \text{cos} \omega t \quad (11)$$

LA SOLUCION DE LA PRIMERA ES:

$$\theta(z) = A_1 \text{ sen } az + A_2 \text{ cos } az + A_3 \text{ senh } az + A_4 \text{ cosh } az \quad (12)$$

EN DONDE LAS  $A_i$  SE CALCULAN EN FUNCION DE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE LA VIGA EN AMBOS EXTREMOS.

EJEMPLO

VIGA SIMPLEMENTE APOYADA

LAS CUATRO CONDICIONES DE FRONTERA SON:

en  $z=0$ :  $\theta(0)=0, M(0) = EI \theta''(0) = 0$

en  $z=L$ :  $\theta(L)=0, M(L) = EI \theta''(L) = 0$

SUSTITUYENDO  $\theta(0)=0$  Y  $\theta''(0)=0$  EN LA EC.(12) Y SU SEGUNDA DERIVADA:

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= A_2 + A_4 \text{ cosh } 0 = 0 \\ \theta''(0) &= a^2 (-A_2 + A_4 \text{ cosh } 0) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_2 = A_4 = 0$$

HACIENDO LO MISMO CON  $\theta(L) = 0$  y  $\theta''(L) = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \theta(L) &= A_1 \text{ sen } aL + A_3 \text{ senh } aL = 0 \\ \theta''(L) &= a^2 (-A_1 \text{ sen } aL + A_3 \text{ senh } aL) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A_3 = 0$$

POR LO TANTO,  $\theta(L) = A_1 \text{ sen } aL = 0$

PUESTO QUE  $A_1=0$  ES LA SOLUCION TRIVIAL, SE DEBE TENER QUE  $A_1$  SEA ARBITRARIA Y QUE

$$\text{sen } aL = 0 \rightarrow aL = n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

POR LO TANTO,  $a = n\pi/L$ . RECORDANDO QUE

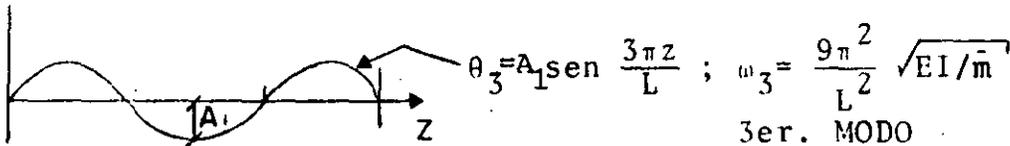
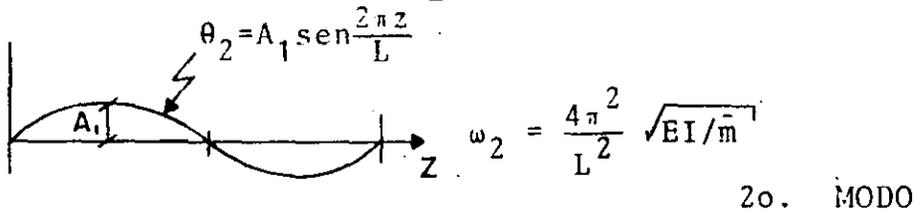
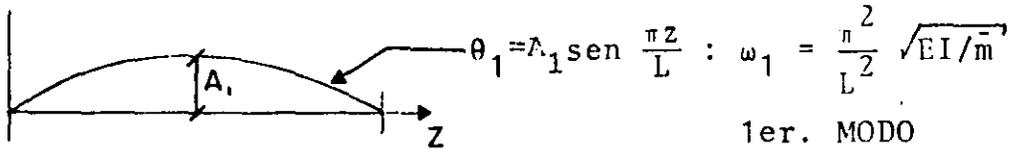
$$a^4 = \omega^2 \bar{m}/EI, \text{ SE TIENE QUE}$$

$$\omega_n^2 = (n\pi/L)^4 EI/\bar{m} \quad \text{O} \quad \omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{EI/\bar{m}}$$

SON LAS FRECUENCIAS CIRCULARES NATURALES DE VIBRACION DE LA VIGA.

LAS CONFIGURACIONES MODALES SON

$$\theta_n(z) = A_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} z$$



⋮

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 :: 1 : 4 : 9$$

$$\omega_i = n^2 \omega_1$$

XXIII CURSO INTERNACIONAL DE INGENIERIA SISMICA  
ANALISIS DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO

BIBLIOGRAFIA

1. Blume, J.A., Newmark, N.M., y Corning, L.H., " Design of multistory reinforced concrete buildings for earthquake motions", Chicago: Portland Cement, 1961.
2. Montes, R., Rosenblueth, E., "Cortantes y momentos sísmicos en chimeneas". Facultad de Ingeniería. División de Estudios de Posgrado, UNAM. 1968. México
3. Lainez-Lozana, Navarro, Asocs, "Comportamiento de las construcciones de adobe ante movimientos sísmicos". Elaborado por la Asociación de Asegurado del Perú. Perú, 1970.
4. Dowrick, D.J., "Earthquake resistant design: a manual for engineers and architects". J. Wiley, 1977. London.
5. Naciones Unidas, Departamento de Asuntos Económicos y Sociales, Centro de Vivienda, Construcción y Planificación. "Construcción económica resistente a sismos y huracanes". Naciones Unidas, 1976. Nueva York.
6. Green, N.B., "Earthquake resistant building design and construction". Van Nostrand Reinhold. 1978. New York.
7. Green, N.B., "Edificación, diseño y construcción sismorresistente". Versión castellana de Jesús Parra. Gili. 1980. Barcelona.
8. Applied Technology Council (San Francisco, Cal). "Working draft of recommended comprehensive seismic design provisions for building". National Science Foundation. 1976. San Francisco, Cal.
9. Dowrick, D.J. "Diseño de estructuras resistentes a sismos: para ingenieros y arquitectos". Versión española Trigos, J.L., García Ferrer, C.A. Limusa, 1984. México
10. Lomnitz., Rosenblueth, E. "Seismic Risk and Engineering Decisions". Elsevier Scientific. 1976.
11. Arnold, C., Reitherman, R., "Building configuration and seismic design". J. Wiley, 1982. New York.
12. Ambrose, J., Vergun, D., "Seismic design of buildings". J. Wiley. 1985. New York.
13. Bazán, E., Meli, R., "Manual de diseño sísmico de edificios: de acuerdo con el Reglamento de Construcciones del Distrito Federal". Limusa, 1985. México.

14. Newmark, N.M., Rosenblueth, E., "Fundamentals of Earthquake Engineering". Prentice Hall. 1971.
15. Oshiro H,F., "Construcción Antisísmica". Lima, 1972.
16. Fertis, D.G., "Dynamics and Vibration of Structures". Wiley Interscience. 1973. New York.
17. Okamoto, S., "Introduction to Earthquake Engineering". J. Wiley. 1973.
18. Newmark, N.M., Rosenblueth, E. "Fundamentos de Ingeniería Sísmica". Diana, 1976. México
19. Clough, R.W., Penzien, J. "Dynamics of Structures". McGraw Hill 1975. México.
20. Blevins, R.D., "Formulas for natural frequency and mode shape". Van Nostrand Reinhold, 1979. New York.
21. Paz, M. "Structural dynamics: Theory and computation". Van Nostrand Reinhold. 1980. New York.
22. Craig, R.R., "Structural dynamics: an introduction to computer methods". Wiley, 1981. New York.
23. Major, A., "Dynamics in civil engineering: analysis and design". Akademiai Kiado, 1980. Budapest.

ANALISIS ESTATICO Y DINAMICO DE ESTRUCTURAS SUJETAS A SISMO

Coordinador: Dr. Octavio A. Rascón Chávez

El siguiente material bibliográfico se encuentra a su disposición en el -  
Centro de Información y Documentación "Ing. Bruno Mascanzoni".

PUBLICACIONES PERIODICAS

NEIL, M. "Anchorage of reinforcing bars for seismic forces". -- En: ACI -  
Structural journal. -- 84 (5) : p. 407-418. -- Sep./Oct. 1987.

AHMAD, J. "Earthquake resistance of reinforced concrete interior connec-  
tions including a floor slab". -- En: ACI Structural journal. -- 84  
(5) : p. 400-406. -- Sep./Oct. 1987.

TEGOS, I.A. "Seismic resistance of short columns and coupling beams rein-  
forced with inclined bars". -- En: ACI Structural journal. -- 85 (1) :  
p. 82-86. -- Jan./Feb. 1988.

MIRZA, S.A. "Limit states design of concrete slender columns". -- En: Ca-  
nadian Journal of civil engineering. -- 14 (4) : p. 439-446. -- Aug. -  
1987.

RAINER, J. H. "Force reduction factors for the seismic provisions of the  
National Building Code of Canada". -- En: Canadian Journal of civil en-  
gineering. -- 14 (4) : p. 447-454. -- Aug. 1987.

MARCUSON, William. "Shake-proof dams". -- En: Civil engineering. -- 57  
(12) : p. 44-47. -- Dec. 1987.

FANTOZZI, Mark W. "Teleport new wave engineering". -- En: Civil enginee -  
ring. -- 57 (9) : p. 48-49. -- Sep. 1987.

- SNYDER, Gary M. "Earthquakes will not damage this bridge". -- En: Civil engineering. -- 57 (9) : p. 54-55. -- Sep. 1987.
- MARTIN, Geoffrey. "Quake-resistant transport". -- En: Civil engineering. -- 57 (5) : p. 60-61. -- May. 1987.
- CAMPANELLA, R. G. "Seismic cone penetration testing in the near offshore of the Mackenzie Delta". -- En: Canadian geotechnical journal. -- 24 (1) : p. 154-159. -- Feb. 1987.
- ABDEL-GHAFFAR, Ahmed. "Elasto-plastic seismic response of 3-D earth dams : theory". -- En: Geotechnical engineering. -- 113 (11) : p. 1239-1308. -- Nov. 1987.
- ELGAMAL, Ahemed-Waeil. "Elasto-plastic seismic response of 3-D earth dams : application". -- En: Geotechnical engineering. -- 113 (11) : p. 1309-1325. -- Nov. 1987.
- HANSON, R. D. "Performance of steel structures in the September 19 and 20, 1985 Mexico earthquakes". -- En: Earthquake spectra. -- 3 (2) : p. 329-346. -- May. 1984.
- SUAREZ, Luis E. "Floor response spectra with structure-equipment interaction effects by a mode synthesis approach". -- En: Earthquake engineering & structural dynamics. -- 15 (1) : p. 141-158. -- Jan. 1987.
- WERNER, S. D. "Seismic response evaluation of Meloland Road Overpass Using 1979 imperial valley earthquake records". -- En: Earthquake engineering & structural dynamics. -- 15 (2) : p. 249-274. -- Feb. 1987.
- LOTFI, Vahid. "A technique for the analysis of the response of dams to earthquake". -- En: Earthquake engineering & structural dynamics. -- 15 (4) : p. 463-490. -- May. 1987.
- KERR, Arnold D. "Validation of new equations for dynamic analyses of tall frame-type structures". -- En: Earthquake engineering & structural dynamics. -- 15 (5) : p. 549-563. -- Jul. 1987.

ZEMBATY, Zbigniew. "On the reliability of tower-chcaped structures under seismic excitations". -- En: Earthquake engineering & structural dynamics. -- 15 (6) : p. 761-775. -- Aug. 1987.

SING, Mahendra P. "Seismic response analysis of structure-equipment systems with non-classical damping effects". -- En: Earthquake engineering & structural dynamics. -- 15 (7) : p. 871-888. -- Oct. 1987.