



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

DEFINICIONES DE POTENCIA EN ESTADO SENOIDAL  
PERMANENTE Y EN ESTADO NO SENOIDAL

T E S I S

QUE PARA OPTAR EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

PRESENTA:  
EDER ARMAS SANTILLÁN

□ □ TUTOR  
GONZALO SANDOVAL RODRÍGUEZ  
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2015

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: CÉSAR ÁNGELES CAMACHO

Secretario: RAFAEL ESCARELA PÉREZ

Vocal: GONZALO SANDOVAL RODRÍGUEZ

1<sup>er.</sup> Suplente: PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ

2<sup>d o.</sup> Suplente: HÉCTOR GARCÍA VIVEROS

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: CIUDAD UNIVERSITARIA.

**TUTOR DE TESIS:**

GONZALO SANDOVAL RODRÍGUEZ



-----  
FIRMA

# Agradecimientos

Inicialmente a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) que es, la institución donde he realizado mi formación de bachillerato (Preparatoria número 3 Justo Sierra), de licenciatura (Facultad de Ingeniería) y de dónde quiero obtener el título de maestro.

Agradecimientos principalmente a mis padres que me apoyaron incondicionalmente en todo momento con su comprensión y tiempo, así como sus motivaciones para seguir adelante ante todo.

A mi tutor Gonzalo Sandoval, quien me brindó su apoyo y ayuda en todo momento inclusive apoyándome en cuanto a las mediciones y los instrumentos necesarios para desarrollar una comparación práctica, un tutor sumamente comprensivo.

De igual manera agradezco a mis profesores de la maestría, quienes me proporcionaron las nociones, la curiosidad de investigar más de lo que nos enseñan en ésta.

Quiero agradecer a mis sinodales Rafael Escarela Pérez, Rolando Paul Maya, Héctor García Viveros y Cesar Ángeles Camacho, por haberme indicado las correcciones y observaciones finales, y así dar por concluida ésta investigación.

## Abstract.

Sinusoidal steady state and non-sinusoidal power definitions were researched in order to use them in a real case of harmonic distortion and carry out comparisons.

Four experiments were executed for different voltage and current conditions such as sinusoidal voltage source with linear and non linear load and non-sinusoidal voltage source with linear and non linear load and comparisons were carried with the results of the equations proposed by several authors like Fryz, Budeanu, Shepherd, among others.

As part of this thesis a code in MATLAB was developed to facilitate the calculations of several power definitions. This code also allowed to assess the programming effort required for the power definitions compared.

Finally, a comparison of the results obtained is shown, as well as some advantages and disadvantages of definitions researched.

## Resumen.

Se investigaron las expresiones utilizadas para las definiciones de potencia en estado senoidal permanente y no senoidal para aplicarlas a un caso real de distorsión armónica y realizar comparaciones entre éstas.

Se realizaron experimentos para cuatro condiciones distintas de voltaje y corriente como son: fuente de voltaje senoidal con carga lineal y no lineal y fuente de voltaje no senoidal con carga lineal y no lineal, comparándose los resultados obtenidos mediante las expresiones propuestas por diversos autores como Fryze, Budeanu, Shepherd, etc.

Como parte del trabajo de tesis se programó un código en MATLAB para facilitar los cálculos de las diferentes definiciones de potencia. Dicho código también permitió evaluar el esfuerzo de programación necesario para las diversas definiciones.

Finalmente se presenta una comparación entre los resultados obtenidos, así como algunas ventajas y desventajas de las definiciones investigadas.

# Índice General

## CONTENIDO

1	Introducción .....	10
1.1	Motivación .....	10
1.2	Antecedentes .....	10
1.3	Estado del arte .....	12
1.4	Objetivos principales .....	15
1.5	Metodología .....	16
1.6	Planteamiento y Formulación del problema .....	16
1.7	Organización de la tesis .....	17
2	Definiciones en estado senoidal permanente a 60Hz.....	18
2.1	Definiciones de voltaje y corriente senoidales y su caracterización debido a su forma de onda magnitud y ángulo.....	18
2.2	Valor eficaz .....	21
2.3	Potencia instantánea y potencia promedio .....	24
2.4	Definición de potencia Activa y potencia Reactiva en el dominio de la frecuencia .....	26
2.5	Definición de Potencia Aparente en el dominio de la frecuencia .....	28
2.6	Definición de factor de potencia en el dominio de la frecuencia .....	30
2.7	Potencia trifásica en sistemas balanceados.....	31
3	Definiciones en estado no senoidal .....	33
3.1	Sistemas con corriente no senoidal y voltaje senoidal. ....	33
3.1.1	Potencia Reactiva y Distorsión de Potencia. ....	38
3.2	Sistemas con corriente no senoidal y voltaje no senoidal. ....	39
3.3	Definiciones de los parámetros de potencia .....	41
3.3.1	Postulado de Steinmetz .....	42
3.3.2	Postulado de Iliovici.....	42
3.3.3	Postulado de Budeanu.....	42
3.3.4	Postulado de Fryze .....	44
3.3.5	Postulado de Shepherd W. y Zakikhani.....	45
3.3.6	Postulado de Sharon.....	46
3.3.7	Postulado de Emanuel .....	47

3.3.8	Postulado de Czarnecki.....	48
3.3.9	Postulado de la IEEE .....	50
3.4	Resumen.....	53
3.5	Postulado de Budeanu (profundizado) [55].....	54
4	Comparación entre sistemas en estado senoidal permanente y sistemas en condiciones no senoidales .....	60
4.1	Introducción .....	60
4.2	Comparación experimental entre definiciones .....	61
4.2.1	CASO 1 “Fuente senoidal con carga lineal” .....	63
4.2.2	CASO 2 “Fuente quasi-senoidal de baja impedancia con carga lineal (resistiva) .....	65
4.2.3	CASO 3 “Fuente de voltaje no senoidal con baja impedancia y carga no lineal” .....	68
4.2.4	CASO 4 “Fuente de voltaje no senoidal de alta impedancia con carga no lineal” .....	77
4.3	Tablas de comparaciones. ....	83
5	Conclusiones generales .....	88
6	Referencias Bibliográficas.....	90

## Índice de tablas

Tabla 4.1 “COMPARACIÓN DE DEFINICIONES” .....	61
Tabla 4.2 “VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 1” .....	63
Tabla 4.3 “POTENCIAS MEDIDAS CASO 1” .....	64
Tabla 4.4 “ARMONICAS DE VOLTAJE CASO 2” .....	65
Tabla 4.5 “ARMONICAS DE CORRIENTE CASO 2” .....	66
Tabla 4.6 “VALORES DE VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 2” .....	67
Tabla 4.7 “POTENCIAS MEDIDAS CASO 2” .....	68
Tabla 4.8 “ARMONICAS DE VOLTAJE CASO 3” .....	69
Tabla 4.9 “ARMONICAS DE CORRIENTE CASO 3” .....	70
Tabla 4.10 “VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 3” .....	71
Tabla 4.11 “POTENCIAS CASO 3” .....	71
Tabla 4.12 “ARMONICAS DE VOLTAJE CASO 4” .....	77
Tabla 4.13 “ARMONICAS DE CORRIENTE CASO 4” .....	78
Tabla 4.14 “VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 4” .....	79
Tabla 4.15 “POTENCIAS CASO 4” .....	79
Tabla 4.16 “COMPARACIONES, CASO 3” .....	84
Tabla 4.17 “COMPARACIONES, CASO 4” .....	84
Tabla 4.18 “ERROR RELATIVO CASO 3” .....	85
Tabla 4.19 “ERROR RELATIVO CASO 4” .....	85

## Índice de figuras

Figura 1.1 “Nuevos dispositivos conectados a la red eléctrica” .....	13
Figura 2.1 “Función senoidal” .....	221
Figura 2.2 “Valor RMS” .....	22
Figura 2.3 “Gráfica de potencias” .....	27
Figura 2.4 “Plano de potencia reactiva inductiva y reactiva capacitiva” .....	28
Figura 2.5 “Triángulo de potencias” .....	30
Figura 3.1 “Pirámide de Potencias” .....	38
Figura 3.2 “Representación fasorial de la Potencia reactiva definida por Budeanu” .....	44
Figura 3.3 “Representación fasorial según el postulado de la IEEE” .....	52
Figura 3.4 “Representación vectorial de la corriente armónica” .....	55
Figura 4.1 “Transformador” .....	62
Figura 4.2 “Luminaria fluorescente compacta tipo 1” .....	62
Figura 4.3 “Luminaria fluorescente compacta tipo 2” .....	62
Figura 4.4 “Multímetro Fluke 39” .....	63
Figura: 4.5 “Carga lineal” .....	63
Figura 4.6 “Voltaje senoidal” .....	64
Figura 4.7 “Corriente senoidal” .....	64
Figura 4.8 “Gráfica de voltaje medido caso 2” .....	65
Figura 4.9 “Gráfica de voltaje simulado caso 2” .....	66
Figura 4.10 “Gráfica de corriente medida caso 2” .....	67
Figura 4.11 “Gráfica de corriente simulada caso 2” .....	67
Figura 4.12 “Carga no lineal” .....	68
Figura 4.13 “Forma de onda de voltaje medido caso 3” .....	69
Figura 4.14 “Gráfica de voltaje simulado caso 3” .....	69
Figura 4.15 “Forma de onda de corriente medida caso 3” .....	70
Figura 4.16 “Gráfica de corriente simulada caso 3” .....	71
Figura 4.17 “Gráfica de voltaje caso 4” .....	77
Figura 4.18 “Gráfica de corriente caso 4” .....	78

## Sección de abreviaturas.

<i>SEP</i>	Sistemas Eléctricos de Potencia.
<i>cd</i>	Corriente directa.
<i>ca</i>	Corriente alterna.
<i>V</i>	Voltaje rms.
<i>I</i>	Corriente rms.
rms	root mean square.
<i>P</i>	Potencia activa.
$P_1$	Potencia activa de la componente fundamental.
$P_n$	Potencia activa de sólo componentes armónicas.
$p$	Potencia instantánea.
<i>Q</i>	Potencia reactiva.
$Q_1$	Potencia reactiva de la componente fundamental.
$Q_n$	Potencia reactiva de sólo componentes armónicas.
<i>S</i>	Potencia aparente.
$S_1$	Potencia aparente de la componente fundamental.
<i>fp</i>	Factor de potencia.
$fp_1$	Factor de potencia de la componente fundamental.
<i>ITHD</i>	Distorsión armónica total de corriente.
<i>VTHD</i>	Distorsión armónica total de voltaje.
<i>D</i>	Distorsión de potencia (Budeanu).
$Q_B$	Potencia reactiva de Budeanu.
<i>N</i>	Potencia no activa (Budeanu).
<i>F</i>	Potencia ficticia (Budeanu).
$Q_F$	Potencia Ficticia (Fryze).
$i_A$	Corriente activa (Fryze).
$i_R$	Corriente residual (Fryze).
$S_R$	Potencia aparente real (Shepherd W. y Zakikhani).
$S_X$	Potencia aparente reactiva (Shepherd W. y Zakikhani).
$S_D$	Potencia aparente de distorsión (Shepherd W. y Zakikhani).
$I_R$	Corriente activa (Shepherd W. y Zakikhani).
$I_X$	Corriente reactiva (Shepherd W. y Zakikhani).
$I_D$	Corriente de distorsión (Shepherd W. y Zakikhani).
$S_c$	Potencia activa complementaria (Sharon).
$S_Q$	Potencia reactiva en cuadratura (Sharon).
$i_a$	Corriente activa (Czarnecki).
$i_s$	Corriente residual (Czarnecki).
$i_m$	Corriente de magnetización (Czarnecki).
$I_s$	Corriente dispersa (Czarnecki).
$I_H$	Corriente generadora de armónicas (Czarnecki).
$S_N$	Potencia aparente no fundamental (IEEE).
$P_H$	Potencia activa de sólo componentes armónicas (IEEE).

# Capítulo 1

## 1 INTRODUCCIÓN

### 1.1 Motivación

A lo largo de la historia se han presentado diferentes definiciones de los elementos que conforman y ecuaciones que rigen los sistemas eléctricos de potencia (SEP), hablese de voltaje, corriente, potencia, factor de potencia, entre otros. Pero conforme han avanzado la ciencia y la tecnología ha sido necesario modificar o cambiar el planteamiento de algunas de estas definiciones, debido a la aparición de nuevos dispositivos conectados a la red o efectos colaterales asociados a la operación de éstos, inclusive a la aparición de nuevas formas de generación de energía eléctrica [1].

En primera instancia la motivación fue un ejemplo mostrado en un foro de calidad de energía en LinkedIn en el que se habla acerca de las definiciones existentes de potencia, mencionando que éstas sirven sólo para aplicaciones donde se cuentan con señales de tipo senoidal, pero debido a la presencia de armónicas en la red o algunas otras anomalías, la señal tanto de voltaje como de corriente suelen ser no senoidales, lo cual restringe la aplicación de los conceptos de potencia.

La búsqueda de definiciones de potencia en la literatura especializada da como resultado un gran número de publicaciones [25,26,27,28,29,30,31,32,33], en donde se presentan diferentes tipos de definiciones para los mismos conceptos, algunas de éstas hacen énfasis en el fundamento matemático y otras se preocupan por la interpretación física.

Los puntos expuestos anteriormente constituyen la motivación para el presente trabajo de investigación.

### 1.2 Antecedentes

En 1882 Thomas Alba Edison, conocido como “el pionero de la corriente directa” logró alimentar alrededor de 800 lámparas eléctricas al edificio “Drexel Morgan” a un voltaje de 240 [V] lo cual sería un inconveniente a la hora de querer alimentar a más usuarios debido a las limitaciones existentes en esa época a la hora de transmitir, alcanzando una distancia de una milla o menos debido a la caída de tensión [48]. No fue hasta la introducción de la corriente alterna (ca) por la compañía Westinghouse y Nikola Tesla, quienes demostraron la facilidad de transmitir dicha corriente con el manejo de elevaciones y disminuciones de tensión, debido a esto, comenzó lo que se hizo llamar “guerra de corrientes”.

La idea de transmitir usando ca proviene de la relación de potencia  $p = vi$ , ya que la potencia es directamente proporcional a la tensión y con el apoyo del transformador, elevar la tensión era más rentable en ca que en cd.

Actualmente el uso de ca predomina al de cd, sin embargo es probable que el uso de cd sea más conveniente que ca para ciertas aplicaciones. Hoy en día ha comenzado una segunda guerra de corrientes por las siguientes razones [2]:

- Facilitan la conexión de fuentes de energía renovables
- Reducen el consumo de potencia
- Evitar el uso de convertidores AC-DC o DC-AC
- Facilidad de almacenamiento

Es necesario profundizar acerca de las definiciones de “voltaje y corriente” desde un punto de vista “electromagnético” [3], para poder comprender mejor el significado físico y matemático. Enseguida se presentan definiciones breves tomadas principalmente de [4] y [5].

- Potencia. Es aquel término asociado con la cantidad de energía por unidad de tiempo suministrada por la fuente, disipada o almacenada por los elementos que componen el circuito.
- Potencia instantánea. Es el producto del voltaje y la corriente en el dominio del tiempo asociados a los elementos o red de interés.
- Potencia promedio. Es el cálculo del valor medio de la potencia instantánea en un intervalo de tiempo, el cual suele ser el periodo del voltaje.
- Potencia activa. Es la potencia que realmente se ocupa o potencia útil medida en watts, que en ca es igual a la potencia promedio.
- Potencia reactiva. Es la potencia utilizada para generar los campos eléctricos y magnéticos de sus respectivos elementos a estudiar, se mide en VAR.
- Potencia aparente. Es el producto de los valores eficaces de voltaje y corriente, es la potencia total o la suma de potencia activa con la potencia reactiva, se mide en VA.
- Factor de potencia. Es la razón de la potencia promedio o real con la potencia aparente.

### 1.3 Estado del arte

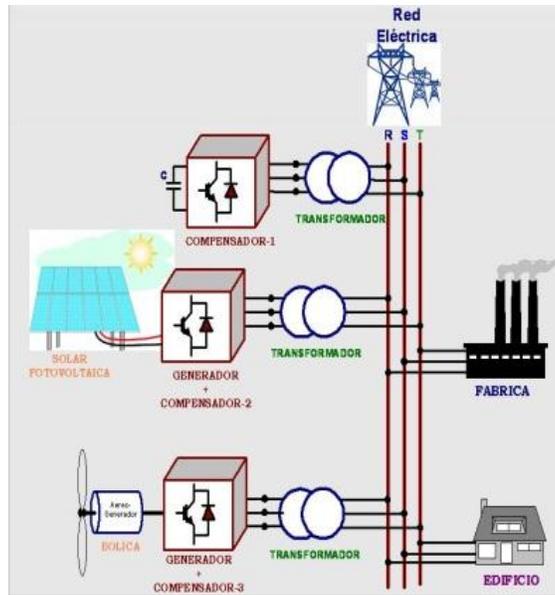
La presencia de nuevos dispositivos en la red eléctrica (elementos no lineales) ha crecido a partir de 1960. A pesar de traer consigo grandes ventajas (convertidores para el uso eficiente de la energía eléctrica, dispositivos FACTS [11]), estos nuevos elementos han ocasionado problemas, como la presencia de componentes armónicas [12] o “distorsión armónica”.

¿Pero cuál es la problemática asociada a la distorsión de la forma de onda ya sea de tensión o de corriente?

A esa modificación de la forma de onda, se le llama “distorsión armónica” ya sea en tensión o en corriente. Cuando existen corrientes distorsionadas, éstas se pueden descomponer en componentes armónicas. Las corrientes distorsionadas o no senoidales son causadas por el uso de cargas no lineales y pueden provocar algunos de los siguientes problemas:

- Aumento en las pérdidas por efecto Joule
- Sobrecalentamiento en conductores del neutro
- Sobrecalentamiento en motores, generadores, transformadores y cables, reduciendo su vida útil.
- Vibración en motores y generadores
- Efectos de resonancia que amplifican los problemas mencionados anteriormente y pueden provocar incidentes eléctricos, mal funcionamiento y fallos destructivos de equipos de potencia y control
- Problemas de funcionamiento en dispositivos electrónicos sensibles
- Problemas en los bancos de capacitores
- Interferencias en sistemas de telecomunicaciones

Los efectos dependerán de la proporción que exista entre la carga no lineal y la carga total del sistema, aunado a que se debe mantener la distorsión dentro de los límites establecidos por las normas.



**Figura 1.1 “Nuevos dispositivos conectados a la red eléctrica”**

Debido a la problemática mencionada, es necesario revisar o inclusive modificar algunas de las ecuaciones de potencia establecidas, por ello, autores como Budeanu y Fryze [25] y [26] se han dedicado a modificar o establecer nuevas definiciones considerando algunos efectos como cargas no lineales y fuente de voltaje no senoidales.

En la actualidad, la comunidad de ingenieros eléctricos todavía no ha considerado las consecuencias de no existir definiciones generales para estas situaciones (afirmación dada en la fuente [27]), aunque publicaciones más recientes [36] y [37] ya nos presentan nuevos conceptos para dichas condiciones (estado no senoidal).

Al consultar la literatura, siendo ésta antigua [4], [6], [14], [15], [17] y [20] o actual [5], [7], [16], [18] y [19], donde se presentan definiciones de interés para la potencia eléctrica, se aprecia que a lo largo de la historia los cambios que éstas presentan han sido mínimos, ya que se basan en una fuente de excitación senoidal ideal o bien en la carga no se consideran elementos no lineales. Esto es una problemática en la actualidad, ya que al realizar un cálculo de alguno de estos parámetros los resultados “no serían correctos”. Incluso en el manual del usuario del monitor de energía Yokogawa CW120, en la sección en donde se muestran las ecuaciones de cálculo para la potencia, se menciona que “en el caso de formas de onda distorsionadas pueden haber diferencias con otros instrumentos basados en diferentes principios de medición” [42].

Steinmetz [31] quien en 1888 comenzó a estudiar las definiciones de potencia en condiciones no senoidales, trató de establecer una definición general sin llegar a una conclusión válida, posteriormente Iliovici [32] en 1918 basándose en la ley de Faraday, y de ésta, tomando como base el flujo magnético, propuso una nueva

ecuación para calcular la potencia reactiva en régimen no senoidal. En ésta considera parámetros como: la intensidad de corriente consumida, la frecuencia angular y el periodo de la señal, y posteriormente empleaba series de Fourier, desafortunadamente tampoco llegó a una conclusión general.

Otro autor de nombre Liernard [42] en 1926 apoyándose de los estudios de Iliovici estableció una ecuación muy similar, pero en vez de tomar como base el campo magnético extraído de la ley de Faraday, se basó en la definición de corriente eléctrica en términos de la carga y el tiempo, dando como resultado una ecuación muy similar pero en términos de tensión, carga, frecuencia angular y periodo; posteriormente para generalizar empleó, de igual forma series de Fourier.

No fue hasta 1927 que Constantin Budeanu [25], estudiante de la Academia Rumana estableció un análisis más sólido (aprobado por ANSI/IEEE), el cual ha sido aceptado por algunos autores, inclusive en la actualidad predomina su postulado, pero su trabajo ha sido muy criticado principalmente por [34].

En 1931, Fryze [26] estableció un modelo diferente, basándose en las corrientes, a diferencia de los anteriores autores quienes se basaban en emplear las sumas de potencias. Su modelo fue aprobado por la "International Electrical Commission" en 1979. Dicho modelo, al igual que el de Budeanu es aceptado ampliamente hoy en día.

Existen más definiciones que se han ido presentando por autores como: Shepherd y Zakikhani [29] en 1973, quienes basándose en un análisis en el dominio de la frecuencia, considerando una fuente senoidal con cargas no lineales, clasificaron los armónicos como "comunes" y "no comunes", siendo los comunes los armónicos de orden " $n$ " tanto para voltaje y corriente diferentes de cero y los no comunes los de orden " $n$ " sólo de voltaje o corriente diferentes de cero.

Posteriormente en 1973, Sharon [30], basándose en el trabajo de Shepherd reformuló la definición de potencia aparente. Este autor también presentó una fórmula para la óptima compensación inductiva o capacitiva en paralelo.

Más tarde en 1977 A. Emanuel [27] y [39], basándose en el trabajo de Budeanu planteó un primer modelo para la potencia reactiva, ya que consideraba que el mayor aporte de ésta potencia provenía de la componente fundamental, más tarde en 1990, basándose ahora en el trabajo de Fryze reformuló su modelo considerando de nuevo que el mayor aporte de potencia reactiva está dado por la componente fundamental pero que también la potencia activa aporta armónicas considerables, por ello es necesaria una nueva componente a la suma de potencias.

En el año de 1980, N.L. Kusters y W. J. Moore [43] expandieron la definición dada por Fryze, ya que descompusieron en dos componentes ortogonales a la corriente reactiva residual.\*

\*Corriente reactiva residual: Es el residuo que queda al suprimir de la intensidad total de corriente, la corriente activa y la corriente reactiva correspondiente, es decir, capacitiva o inductiva.

Esta descomposición se hace dependiendo de la carga, si es predominantemente capacitiva o inductiva. Las corrientes producto de la descomposición son llamadas, corriente activa, corriente reactiva capacitiva o inductiva y corriente reactiva residual.

Continuando con los estudios de las definiciones de potencia, Czarnecki [28,40] criticó algunas de las definiciones sugeridas por posteriores autores. Él mostró que una reactancia en paralelo puede ser bastante ineficiente a niveles moderados de armónicos (aprox. 10%), si la impedancia de la fuente no es despreciable. Esto provocaba que la definición dada por Kusters y W. J. Moore [43] no fuese útil, también señala algunas debilidades del trabajo sugerido por Shepherd y Zakikhani. Czarnecki es uno de los autores que más ha criticado a Budeanu e inclusive consideraba “absurdo” su postulado y sin sentido físico.

Por último, citamos al grupo de la IEEE “Power and Energy Society” [36] y [37] que en 2000 y 2010, formalizaron las definiciones de potencia dependiendo de cuál fuese la situación, por ejemplo para sistemas monofásicos senoidales, sistemas monofásicos no senoidales (tanto voltaje como corriente), sistemas senoidales trifásicos balanceados y sistemas senoidales trifásicos desbalanceados.

#### 1.4 **Objetivos principales**

Investigar y estudiar las definiciones de potencia en estado senoidal establecidas como “universales” y algunas de las definiciones en estado no senoidal que se han ido presentando a lo largo de la historia hasta la actualidad, con el propósito de comparar los resultados arrojados por las definiciones mediante una serie de experimentos realizados bajo distintas condiciones de voltaje (senoidal y no senoidal) y carga (lineal y no lineal) con la ayuda de un código desarrollado en MATLAB y obtener conclusiones relativas a los resultados y la programación de las definiciones.

Realizar una serie de experimentos para poder comparar los resultados de los cálculos de potencias bajo las siguientes condiciones:

- Sistema con fuente senoidal y cargas lineales.
- Sistema con fuente senoidal y cargas no lineales.
- Sistema con fuente no senoidal y cargas no lineales.

Analizar los resultados para cada caso presentado apoyados en software realizado en MATLAB.

Dar conclusiones relativas a los resultados de los experimentos realizados.

## 1.5 Metodología

La metodología del presente trabajo de tesis es la siguiente:

- a) Estudio de los conceptos mencionados en los antecedentes en estado senoidal, atendiendo a su forma de onda, dependiendo el tipo de carga conectada, entre más características.
- b) Revisión de las definiciones de potencia en estado no senoidal de cada uno de los conceptos mencionados anteriormente.
- c) Comparación entre ambos estados (senoidal y no senoidal) para obtener conclusiones.
- d) Comparación entre definiciones establecidas, mediante una serie de experimentos bajo condiciones distintas de operación y con apoyo de software desarrollado en este trabajo.
- e) Conclusiones finales relativas la comparación de los resultados de las definiciones mediante la etapa experimental.

## 1.6 Planteamiento y Formulación del problema

Se sabe que desde 1888 [31] se comienzan a hacer estudios en condiciones de distorsión en la forma de onda de tensión y de corriente. Algunos autores plantean ecuaciones para estas nuevas condiciones (Budeanu y Fryze principalmente citados por la referencia [27]), sin llegar a un acuerdo general, inclusive entre ellos comienzan a criticarse, mientras que otros autores basándose en el trabajo hecho previamente introdujeron mejoras.

Entre algunas definiciones es posible que no exista problema, discrepancia o polémica, ya que son comúnmente el trabajo de algún autor anterior con pequeñas modificaciones, pero algunas otras, es posible que muestren distintos resultados, dando origen a discrepancias o polémicas por el significado físico o la utilidad práctica (por ejemplo para poder compensar potencia reactiva a 60 Hz).

Actualmente existe una amplia variedad de definiciones de potencia bajo condiciones de voltaje y corriente no senoidales. En esta investigación se hace una revisión de algunas de las diferentes definiciones existentes (de las más mencionadas o de las que existe mayor información) con el objetivo de compararlas considerando la interpretación física, la justificación matemática y resultados experimentales.

## 1.7 Organización de la tesis

La tesis se encuentra constituida por cinco capítulos donde se va abordando los distintos aspectos que se consideran para este proyecto de investigación.

En el primer capítulo se presenta la motivación de esta investigación, enseguida se muestran los antecedentes necesarios para su desarrollo; posteriormente muestra el estado del arte para tener una noción histórica de los trabajos que se han ido presentando referentes al tema. Después se presentan los objetivos, la metodología para alcanzar éstos y el planteamiento y formulación del problema.

El segundo capítulo contiene las definiciones de potencia de interés, bajo condiciones senoidales. Dichas definiciones se han usado a la largo de la formación académica universitaria, tomando como base la literatura comúnmente usada tanto actual como antigua para teoría de circuitos y sistemas eléctricos de potencia, posteriormente se agrega una pequeña sección en sistemas trifásicos.

El tercer capítulo constituye las definiciones usadas en el anterior capítulo, pero bajo condiciones no senoidales, primero se hace un análisis contemplando elementos no lineales (corriente no senoidal) y fuente de alimentación sin distorsión (voltaje senoidal). Después, tanto la corriente como el voltaje son de tipo no senoidal. Se seleccionaron algunos autores que a lo largo de la historia han tratado de resolver esta problemática y se estudiaron sus postulados para profundizar, considerando la facilidad para conseguir sus publicaciones, su volumen de aprobación al tema o el nivel de controversia que sus contribuciones generan.

En el capítulo cuarto se comparan los resultados de las definiciones revisadas mediante un experimento en tres diferentes situaciones, para poder obtener resultados prácticos y comparativos entre cada una de las definiciones establecidas a lo largo de la historia, apoyándonos de un software en MATLAB para un cálculo más veloz y eficiente.

En el capítulo quinto se presentan las conclusiones finales de este proyecto de investigación.

## Capítulo 2

### 2 DEFINICIONES EN ESTADO SENOIDAL PERMANENTE A 60HZ.

#### 2.1 Definiciones de voltaje y corriente senoidales y su caracterización debido a su forma de onda magnitud y ángulo

Tensión eléctrica diferencia de potencial o comúnmente llamado “Voltaje”, está definido como la diferencia de potenciales entre dos puntos [3], para ello es necesario hacer el siguiente análisis:

Si colocamos una carga  $q$  en una región donde existe un campo eléctrico  $E(x,y,z)$ , dicha carga experimentará una fuerza eléctrica y en consecuencia se acelerará.

$$\vec{F} = q\vec{E} [N] \quad (2.1)$$

Si queremos desplazar la carga en contra a esa fuerza ejercida por el campo eléctrico  $\vec{E}$  de un punto  $K$  a un punto  $L$ , con velocidad constante o bien cuasiestáticamente, el trabajo realizado por el agente externo se puede definir por la relación:

$$W = \int_K^L \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_K^L \vec{E} \cdot d\vec{l} [J] \quad (2.2)$$

Si la fuerza  $F$  es conservativa, el trabajo realizado por  $F$  siempre se puede expresar en términos de una energía potencial  $U$ . Cuando la carga se desplaza a un punto donde la energía potencial es  $U_K$  a un punto donde es  $U_L$  el cambio de energía potencial  $\Delta U = U_L - U_K$  y el trabajo  $W_{K \rightarrow L}$  es:

$$W_{K \rightarrow L} = U_K - U_L = -(U_L - U_K) = -\Delta U \quad (2.3)$$

Entonces con esto podemos igualar:

$$-\Delta U = W = \int_K^L \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_K^L \vec{E} \cdot d\vec{l} [J] \quad (2.4)$$

Al cociente de la energía potencial de un punto sobre la carga lo llamamos “potencial” y la expresión queda definida como:

$$V_{KL} = \int_K^L \vec{E} \cdot d\vec{l} [V] \quad (2.5)$$

Podemos expresar dicha ecuación (2.5) de la siguiente forma:

$$V_{KL} = - \int_L^K \vec{E} \cdot d\vec{l} [V] \quad (2.6)$$

Si consideramos un elemento cualquiera con una terminal  $K$  y otra  $L$  (dos caminos por los cuales la corriente puede fluir) la diferencia de potencial entre dichos puntos se define como: “el trabajo requerido para mover carga eléctrica a través del elemento o circuito de un punto al otro” [3].

Consideremos ahora un material conductor donde se establece un campo eléctrico  $\vec{E}$  constante, una partícula con carga quedará sometida a una fuerza  $\vec{F}$  debido a la expresión (2.1). En consecuencia se establece un desplazamiento de la carga dentro del conductor a una cierta velocidad llamada “velocidad de deriva”, pero al encontrarse rodeada de otras partículas se somete a colisiones con los iones del material que provoca el movimiento de éstos, en consecuencia hay una corriente neta en el conductor.

Podemos considerar que la velocidad es proporcional a la intensidad del campo eléctrico:

$$\vec{v}_p \propto \vec{E} \quad (2.7)$$

Esta relación se puede expresar como una igualdad introduciendo una constante de proporcionalidad requerida:

$$\vec{v}_p = \mu \vec{E} \left[ \frac{m}{s} \right] \quad (2.8)$$

Donde  $\mu$  se conoce como la movilidad de los portadores de carga libres y para cada material toma un valor característico.

Se sabe que el flujo de cualquier campo vectorial  $\vec{C}$  a través de un elemento de superficie  $d\vec{A}$  se define como:

$$d\phi = \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

Donde  $d\phi$  se obtiene como resultado de multiplicar la componente de  $\vec{C}$  perpendicular a la superficie por el valor de ésta.

Cuando se desea evaluar el flujo a través de una superficie finita, la ecuación quedará:

$$\phi_c = \iint_A \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (2.10)$$

Conociendo esta expresión, el volumen por unidad de tiempo que cruza una superficie cualquiera A, se obtiene evaluando el flujo del campo de velocidad  $\vec{v}_p$  con la expresión:

$$\varphi_v = \iint \vec{v}_p \cdot d\vec{A} \quad (2.11)$$

Por lo tanto, la cantidad de carga neta que cruza esa superficie por unidad de tiempo es:

$$\varphi_v' = \iint \delta_l \vec{v}_p \cdot d\vec{A} \quad (2.12)$$

Donde  $\delta_l$  es la densidad de portadores de carga libres por unidad de volumen y se obtiene conociendo el número de portadores por unidad de volumen en el material ( $n$ ) y la carga de cada uno de ellos  $q$ , entonces:

$$\delta_l = nq \quad (2.13)$$

A la expresión  $\delta_l \vec{v}_p$  se le conoce como “densidad de corriente” y se representa con la letra “ $\vec{J}$ ” entonces:

$$\delta_l \vec{v}_p = nq \vec{v}_p = \vec{J} \quad [J]_u = \frac{A}{m^2} \quad (2.14)$$

Ahora sustituyendo en la expresión (2.12):

$$\varphi_j = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (2.15)$$

Cuando evaluamos el flujo del campo vectorial J a través de una superficie cualquiera A, obtenemos la carga neta que cruza en la unidad de tiempo la superficie escogida. En general, si esta carga varía en cada instante se cumple:

$$\varphi_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad \left[ \frac{C}{s} \right] = [A]$$

A la magnitud escalar  $\varphi_j$  se conoce como corriente eléctrica “ $i$ ”.

$$i = \frac{dq}{dt} [A] \quad (2.16)$$

Una onda senoidal representa el incremento y decremento de una cantidad en el tiempo. La oscilación de corriente y de voltaje en un sistema de AC, es modelada matemáticamente mediante el uso de funciones trigonométricas senos y cosenos. En estas funciones, el tiempo suele apreciarse en minutos o segundos, pero si en términos del ángulo [5].

Una función senoidal es descrita por tres parámetros: amplitud, frecuencia y fase. La amplitud está dada por el valor máximo o altura máxima de la curva, medida

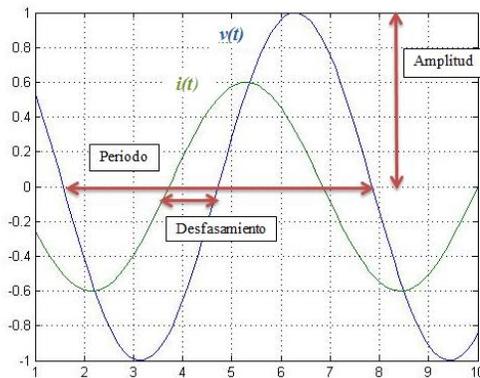
desde la posición neutra. La frecuencia está dada por el número de oscilaciones por unidad de tiempo. La fase indica el punto de comienzo de la función senoidal [5].

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t)$$

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

Donde:

$$\omega t = 2\pi f t = \frac{2\pi}{T} t \quad (2.17)$$



**Figura 2.1 “Función senoidal”**

En la cual puede apreciarse su magnitud ( $V_{max}, I_{max}$ ), su periodo (T) y su desfase ( $\varphi$ ).

El sistema eléctrico nacional tiene un voltaje de corriente alterna con un valor de frecuencia de 60 [Hz]. Lo cual indica que un ciclo se repite 60 veces en cada segundo.

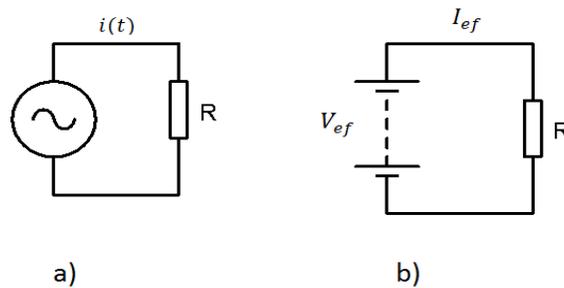
## 2.2 Valor eficaz

La idea de valor eficaz surge de la necesidad de medir la efectividad de una fuente de tensión o de corriente, al suministrar potencia a una carga resistiva [18].

El valor eficaz de una corriente periódica es la corriente de cd que suministra la misma potencia promedio o activa a una resistencia, que la suministrada por la corriente periódica [18].

Dicho de otra forma el valor eficaz o rms (root mean square) es el valor de voltaje o corriente en “ca” que produce el mismo efecto de disipación de calor que su equivalente de voltaje o corriente directa. En otras palabras, se deja que la

corriente periódica fluya a través de una resistencia R para obtener la potencia instantánea  $i^2R$  y luego se calcula el valor promedio en un periodo, ésta es la “potencia promedio”. Luego se hace que la corriente directa circule por el mismo resistor R y se ajusta el valor de la corriente directa hasta que se obtiene el mismo valor de potencia promedio. La magnitud de la corriente directa es igual al valor rms de la corriente periódica [3].



**Figura 2.2 “Valor RMS”**

La potencia promedio entregada al resistor por la corriente periódica  $i(t)$  es:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt \quad (2.18)$$

Y la potencia desarrollada por la corriente directa es:

$$P = I_{rms}^2 R \quad (2.19)$$

Igualando las expresiones anteriores:

$$I_{rms}^2 R = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (2.20)$$

Puede apreciarse que el resultado es independiente del valor de la resistencia “R”. Se obtiene una expresión análoga si se sustituye  $i$  e  $I_{ef}$  por  $v$  y  $V_{ef}$  respectivamente.

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} [V] \quad (2.21)$$

Con esta expresión, se puede observar que el valor rms se obtiene elevando la función en el tiempo al cuadrado, luego calculando su valor promedio en un periodo de la función al cuadrado y por último obteniendo su raíz, de allí viene el nombre de “raíz media cuadrática” [4].

Ahora bien si tenemos:

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.22)$$

Sustituyendo en la expresión de corriente efectiva o RMS:

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_{max}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt}$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{I_{max}^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt}$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) dt}$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{1}{2T} \left( \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \right)}$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{1}{2T} \left( T + \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \right)}$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{1}{2T} \left( T + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + 2\varphi) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi) \right)}$$

Si sabemos que:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{1}{2 \frac{2\pi}{\omega}} \left( \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega} \sin\left(2\omega \frac{2\pi}{\omega} + 2\varphi\right) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi) \right)}$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega} (\sin(4\pi + 2\varphi) - \sin(2\varphi)) \right)}$$

Ahora bien utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \sin(b) \cos(a) \quad (2.22a)$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega} (\sin(4\pi) \cos(2\varphi) + \sin(2\varphi) \cos(4\pi) - \sin(2\varphi)) \right)}$$

Si  $\sin(4\pi) = 0$  y  $\cos(4\pi) = 1$ ;

$$= I_{max} \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{\omega} + \frac{1}{2\omega} (\sin(2\varphi) - \sin(2\varphi)) \right)}$$

$$= I_{max} \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} \left( \frac{2\pi}{\omega} \right)}$$

$$I_{rms} = I_{max} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{I}{\sqrt{2}} [A] \quad (2.23)$$

Podemos apreciar que el valor rms de una función senoidal es independiente del ángulo de fase. Pero se tiene que tener en cuenta que la expresión (2.23) sólo aplica a funciones de tipo senoidal.

### 2.3 Potencia instantánea y potencia promedio

La potencia eléctrica es la medida de la energía en unidad de tiempo, en otras palabras, está dada por el radio de energía producida o absorbida de algún elemento. También se puede definir como el producto en el dominio del tiempo del voltaje y la corriente asociados con uno o más elementos de un circuito [4], [5], [17].

Si se considera:

$$p = v(t)i(t)$$

$$v(t) = V_{max} \cos(\omega t) \quad (2.24)$$

$$i(t) = I_{max} \cos(\omega t \pm \varphi) \quad (2.25)$$

$$p = V_{max} I_{max} \cos(\omega t) \cos(\omega t \pm \varphi)$$

Por otra parte se tiene que:

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b) \quad (2.25a)$$

$$\begin{aligned} p &= V_{max} I_{max} \cos(\omega t) (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \sin(\omega t)) \\ &= V_{max} I_{max} \cos^2(\omega t) \cos(\varphi) - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad (2.25b)$$

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a) \rightarrow \sin(a) \cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2} \quad (2.25c)$$

$$p = V_{max} I_{max} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \cos(\varphi) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} \sin(\varphi)$$

$$p = \frac{V_{max} I_{max}}{2} [\cos(\varphi) [1 + \cos(2\omega t)] - \sin(2\omega t) \sin(\varphi)]$$

Entonces:

$$p = \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(\varphi) [\cos(2\omega t) + 1] - \frac{V_{max}I_{max}}{2} \sen(\varphi)\sen(2\omega t) [W] \quad (2.26)$$

Esta última expresión muestra la potencia instantánea, y nos representa la potencia absorbida por un elemento en cualquier instante de tiempo.

Ahora bien, se desea obtener la potencia promedio es necesario calcular el “valor promedio” de la señal periódica.

El valor promedio de una función periódica es la integral de la función en un periodo completo, dividida por el periodo [41]. Se usa la letra “P” para representar la potencia promedio y la “p” para indicar potencia instantánea:

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt \quad (2.27)$$

Sustituyendo (2.24) en (2.25) y resolviendo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_{max}I_{max}}{2} ((\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi))) \\ P &= \frac{V_{max}I_{max}}{2T} \int_0^T ((\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi))) \\ P &= \frac{V_{max}I_{max}}{2T} \int_0^T \cos(\varphi) dt + \frac{V_{max}I_{max}}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \\ P &= \frac{V_{max}I_{max}}{2T} \cos(\varphi) \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt \end{aligned}$$

El segundo término es cero ya que el valor promedio de una función coseno en un periodo completo es cero, entonces nos queda:

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_{max}I_{max}}{2T} T \cos(\varphi) \\ P &= \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(\varphi) = \frac{V_{max}I_{max}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \cos(\varphi) = VI \cos(\varphi) [W] \quad (2.28) \end{aligned}$$

Debe observarse que la ecuación (2.28) sólo es válida para el cálculo de la potencia activa considerando corriente y voltaje senoidales y que tanto el voltaje como la corriente están expresados en su valor efectivo o rms.

## 2.4 Definición de potencia Activa y potencia Reactiva en el dominio de la frecuencia

La potencia activa es la tasa de cambio de la energía susceptible a ser transformada en otros tipos de potencia como potencia aprovechable y pérdidas. Se mide en watts [W].

De la ecuación (2.28) se tiene que:

$$P = \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(\varphi) \quad (2.29)$$

$$P = VI\cos(\varphi) [W] \quad (2.30)$$

La potencia reactiva como tal no es energía útil ya que no produce trabajo, pero está presente irremediamente cuando hay elementos del tipo inductivo o capacitivo en un circuito eléctrico y es debido a los efectos magnéticos (campo magnético) y eléctricos (campo eléctrico) de dichos dispositivos. Se representa con la letra Q y se mide en VAR.

La potencia reactiva es representada mediante la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{V_{max}I_{max}}{2} \sen(\varphi) \quad (2.31)$$

$$Q = VI\sen(\varphi) [VAR] \quad (2.32)$$

Donde  $\varphi$  es la diferencia angular ente voltaje y corriente.

De una forma más general para representar la potencia eléctrica en estado senoidal, se presenta la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P &= V_{max}\cos(\omega t)I_{max}\cos(\omega t + \varphi) = V_{max}I_{max}\cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) \\ &= V_{max}I_{max} \frac{1}{2} (\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)) \\ P(t) &= \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(\varphi) + \frac{V_{max}I_{max}}{2} \cos(2\omega t + \varphi) \mp \frac{V_{max}I_{max}}{2} \sen(2\omega t)\sen(\varphi) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Considerando (2.30) y (2.32) reescribimos la ecuación (2.33):

$$p = P + P \cos(2\omega t) \mp Q\sen(2\omega t) \quad (2.34)$$

El signo  $\mp$  del tercer miembro, es consecuencia del ángulo de fase de la corriente descrita por la ecuación (2.25).

Al primer término de la suma se le denomina “potencia activa”, el cual se puede considerarse como una componente en cd, al segundo término se le llama “potencia pulsante” que puede verse que esta al doble de la frecuencia, y al tercer término se le puede llamar “potencia fluctuante” ya que varía de un valor positivo a un valor negativo, de igual forma al doble de la frecuencia, esto se puede ver en la siguiente figura:

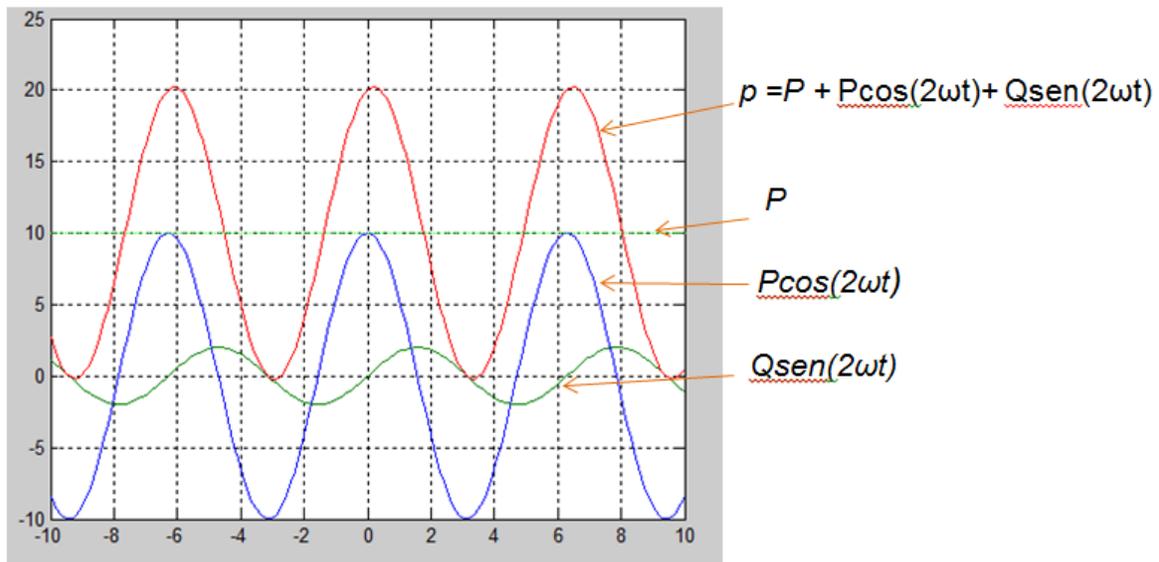


Figura 2.3 “Gráfica de potencias”

Nótese que si la corriente y el voltaje están en fase, el desplazamiento angular entre corriente y voltaje  $\varphi$  es “0”, por lo tanto en la ecuación (2.34) la componente correspondiente a “Q”  $\sin(0) = 0$ , lo cual nos indica que no hay consumo de potencia reactiva y el circuito es puramente resistivo.

Considerando los elementos que principalmente conforman una red eléctrica que tienen efecto en el desplazamiento angular “ $\varphi$ ”

Para el caso de un inductor se tiene:

$$V_L = j\omega L I_L \rightarrow +90^\circ \rightarrow P = 0 \rightarrow Q(+)$$
 (2.35)

Para el caso de un capacitor se tiene:

$$V_C = -j \frac{1}{\omega C} I_C \rightarrow -90^\circ \rightarrow P = 0 \rightarrow Q(-)$$
 (2.36)

Considerando un plano donde la potencia activa está determinada por el “eje” real (horizontal) y la potencia reactiva por el eje complejo (vertical), como se muestra en la figura (2.4).

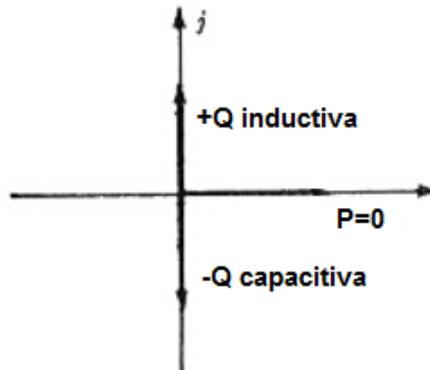


Figura 2.4 “Plano de potencia reactiva inductiva y reactiva capacitiva”

## 2.5 Definición de Potencia Aparente en el dominio de la frecuencia

Suponiendo un circuito lineal con una fuente senoidal en estado estable, todos los voltajes y corrientes de los elementos son senoidales y tienen la misma frecuencia que la entrada.

La potencia compleja representa la suma de la potencia activa con la potencia reactiva, esto es, la potencia consumida o generada total del sistema eléctrico. Está representada por la letra  $S$  y se mide en volt-amper (VA)[4].

Se define como:

$$S = VI^* \quad (2.37)$$

$$S = VI \angle (\varphi_V - \varphi)$$

La ecuación (2.37) nos dice que la potencia aparente es igual al producto del voltaje con la corriente conjugada.

En su forma rectangular está definida:

$$S = P + jQ \quad (2.38)$$

$$S = VI \cos(\varphi) + jVI \sin(\varphi)$$

$$S = VI (\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) \quad (2.39)$$

Donde  $\phi$  representa la diferencia angular entre el voltaje y la corriente.

Ahora al calcular la magnitud:

$$S = |S| = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [VA]} \quad (2.40)$$

La parte real de  $S$  es igual a la potencia promedio que se calculó anteriormente en el dominio del tiempo. Mientras que la parte imaginaria de  $S$  puede observarse que representa la potencia reactiva.

Como anteriormente se analizó, la potencia activa  $P$  dada por la ecuación (2.28) y la potencia reactiva  $Q$  dada por la ecuación (2.32) parten del hecho de que el tipo de onda es senoidal, por ello, la expresión (2.40) es consecuencia de tener funciones de tipo senoidales.

En el dominio de la frecuencia podemos representar el voltaje y la corriente:

$$\mathbb{I} = I \angle \phi_I \quad (2.41)$$

$$\mathbb{V} = V \angle \phi_V \quad (2.42)$$

Otra forma de representar la potencia total está determinada por:

$$p = vi$$

$$p = p_a + p_q \quad (2.43)$$

Donde:

$$p_a = VI \cos(\theta) [1 + \cos(2\omega t)] = P [1 + \cos(2\omega t)]$$

$$p_q = -VI \sin(\theta) \sin(2\omega t) = -Q \sin(2\omega t)$$

Una forma de representar gráficamente la potencia aparente en el plano de Argand, donde el eje vertical corresponde a los números imaginarios y el eje horizontal a los números reales:

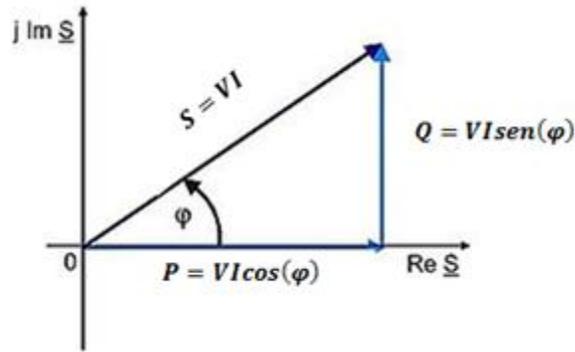


Figura 2.5 “Triángulo de potencias”

La potencia compleja es representada por la suma en cuadratura de potencia activa más potencia reactiva “sólo” para el caso de que sean puramente senoidales.

De acuerdo a la referencia [4]: “La potencia aparente no es un concepto limitado a excitaciones y respuestas de tipo senoidal. Puede calcularse para cualesquiera ondas de corriente y voltaje, tomando simplemente el producto de los valores efectivos de la corriente y el voltaje”.

## 2.6 Definición de factor de potencia en el dominio de la frecuencia

Al cociente entre potencia promedio y potencia aparente se le denomina factor de potencia y se calcula de la siguiente manera [4]:

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{VI \cos(\varphi)}{VI} = \cos(\varphi) \quad (2.44)$$

Suele hacerse referencia al ángulo  $\varphi$  como el ángulo del factor de potencia.

Es importante saber que el coseno es una función “par”, es decir,  $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$  por ende:

$$fp = \cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$$

Esto introduce una pequeña dificultad, ya que el coseno de un número ya sea negativo o positivo será el mismo, por esto, es necesario definir si el factor de potencia está en retraso o en adelanto de la siguiente forma:

$\varphi > 0$                       factor de potencia en retraso.

$\varphi < 0$                       factor de potencia en adelanto.

Debe notarse que esta convención basada en los signos del ángulo de fase entre la corriente y el voltaje es necesaria para identificar la naturaleza del factor de potencia, debido a que el cálculo de esta figura siempre da un resultado positivo indistintamente de si la potencia reactiva es inductiva (Q positiva) o capacitiva (Q negativa).

El signo negativo en el argumento de  $\cos(\omega t - \varphi)$  implica una operación de retardo angular y el ángulo es positivo, mientras que el signo positivo en el argumento de  $\cos(\omega t + \varphi)$  implica una operación de un adelanto angular y el ángulo es negativo.

Recordando la ecuación (2.28) para el cálculo de la potencia activa, ésta se puede representar de la siguiente manera:

$$P = VI \cos \varphi \quad (2.45)$$

El factor de potencia indica la capacidad de una carga de absorber potencia activa a partir de la potencia aparente consumida. Si el factor de potencia es unitario entonces toda la potencia consumida es potencia transformable y el circuito es del tipo resistivo desde la perspectiva del suministrador. En el caso de SEP's lo ideal sería que el factor de potencia fuera unitario\*, sin embargo dependiendo del ente suministrador el factor de potencia no necesariamente debe ser llevado a la unidad, dependiendo del límite entre la aplicación de un recargo o una bonificación.

## 2.7 Potencia trifásica en sistemas balanceados

La potencia total entregada en cualquier circuito trifásico (equilibrado o desequilibrado) es igual a la suma de los componentes de potencia demandados por las ramas individuales [20], es decir:

$$P_{3\varphi} = \sum P_{ramas}$$

Para un sistema balanceado, la potencia total entregada por un generador síncrono trifásico o absorbida por una carga trifásica, se encuentra simplemente sumando la potencia de cada una de las tres fases. En un circuito balanceado, esto sería lo mismo que multiplicar la potencia de cualquier fase por 3, ya que está es la misma en todas las fases [6].

Si la magnitud de los voltajes a neutro  $V_p$  para una carga conectada en Y es:

$$|V_p| = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

Y si la magnitud de las corrientes de fase  $I_p$  para la misma carga es:

\*A factor de potencia unitario la corriente eficaz, la caída de tensión y las pérdidas eléctricas alcanzan su valor mínimo [47].

$$|I_p| = |I_{an}| = |I_{bn}| = |I_{cn}|$$

La potencia trifásica será:

$$P = 3|V_p| |I_p| \cos \theta_p \quad (2.46)$$

Donde  $\theta_p$  es el ángulo por el cual la corriente de fase  $I_p$  atrasa el voltaje de fase  $V_p$ , que es el ángulo de la impedancia de cada fase. Si  $V_L$  e  $I_L$  son las magnitudes de voltaje y corriente de línea respectivamente, se tiene:

$$|V_p| = \frac{|V_L|}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad |I_p| = |I_L|$$

Que al sustituir en (2.46) nos resulta:

$$P = \sqrt{3}|V_L| |I_L| \cos \varphi_p \quad (2.47)$$

La potencia reactiva total:

$$Q = 3|V_p| |I_p| \sen \varphi_p \quad (2.48)$$

$$Q = \sqrt{3}|V_L| |I_L| \sen \varphi_p \quad (2.49)$$

La potencia aparente total:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}|V_L| |I_L| \cos \varphi_p)^2 + (\sqrt{3}|V_L| |I_L| \sen \varphi_p)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}|V_L| |I_L|)^2 (\sen^2 \varphi_p + \cos^2 \varphi_p)} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}|V_L| |I_L|)^2} \\ S &= \sqrt{3}|V_L| |I_L| \quad (2.50) \end{aligned}$$

Se usan las ecuaciones para calcular  $P$ ,  $Q$  y  $S$  en redes trifásicas balanceadas, ya que, generalmente se conocen el voltaje de línea a línea, la corriente de línea y el factor de potencia  $\cos \varphi_p$ . Cuando se habla de sistemas trifásicos se suponen, a menos que se indique otra cosa, condiciones balanceadas.

## Capítulo 3

### 3 DEFINICIONES EN ESTADO NO SENOIDAL

Hoy en día son aceptadas las definiciones de potencia aparente  $S$ , potencia activa  $P$  y de potencia reactiva  $R$  para sistemas en estado senoidal.

El aumento del uso de convertidores estáticos de potencia, la proliferación de controladores de velocidad y el uso de dispositivos de compensación para minimizar los costos de la energía contribuyen a la distorsión de la forma de onda de voltaje y corriente. Mientras que las implicaciones que hay al tener una distorsión de la forma de onda han sido investigadas por algunos [25,26], en la actualidad la comunidad de ingenieros eléctricos todavía no han considerado las consecuencias de no existir definiciones generales para estas situaciones [27].

El estudio de las definiciones de potencia, así como su significado físico viene desde 1888 con Steinmetz [31], posteriormente siguieron los postulados de Budeanu [25] en 1927 y Fryze [26] en 1931, desafortunadamente estas definiciones, no podían dar un significado físico y carecían de valor práctico. No fue hasta después de unos años, con la incorporación de nuevos dispositivos a la red, que aparecieron problemas asociados a la distorsión de la forma de onda, que ocasionaron retomar los postulados establecidos o desarrollar nuevos planteamientos para la solución de dichos problemas.

Las teorías basadas en el dominio del tiempo han tenido como principal objetivo la compensación activa de potencia reactiva, mientras que las teorías basadas en el dominio de la frecuencia fueron desarrolladas para la medida del contenido armónico principalmente [44].

La incorporación de nuevos dispositivos de tipo no lineal, ha traído consigo la modificación de la forma de onda (senoidal) en corriente o en voltaje, cuyas definiciones se analizarán en este capítulo.

#### 3.1 Sistemas con corriente no senoidal y voltaje senoidal.

Una forma de calcular la potencia, considerando una corriente no senoidal se puede hacer mediante la representación de la corriente bajo su definición por su sumatoria de Fourier de sus componentes armónicas:

$$i_s = \sqrt{2} \sum_1^n I_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (3.1)$$

$$e = E_m \cos(\omega t) = \sqrt{2}E \cos(\omega t) \quad (3.2)$$

Para este caso la potencia instantánea está determinada como:

$$p = vi = 2E \sum_1^n I_n \cos(\omega t) \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (3.4)$$

$$= 2E \sum_1^n I_n \cos(\omega t) [\cos(n\omega t) \cos(\varphi_n) - \text{sen}(\varphi_n) \text{sen}(n\omega t)] \quad (3.5)$$

$$p = 2E \sum_1^n I_n \cos(\omega t) \cos(n\omega t) \cos(\varphi_n) - \cos(\omega t) \text{sen}(\varphi_n) \text{sen}(n\omega t) \quad (3.6)$$

Considerando las siguientes identidades:

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b) \quad (3.7)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \text{sen}(a) \text{sen}(b) \quad (3.8)$$

Sumando las ecuaciones (3.7) y (3.8) resulta:

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$$

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad (3.9)$$

Sustituyendo:  $a = \omega t$  y  $b = n\omega t$

$$\cos(\omega t) \cos(n\omega t) = \frac{\cos(\omega t + n\omega t) + \cos(\omega t - n\omega t)}{2}$$

$$\cos(\omega t) \cos(n\omega t) = \frac{\cos((n+1)\omega t) + \cos((1-n)\omega t)}{2} \quad (3.10)$$

Ahora bien considerando las siguientes identidades:

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen}(a) \cos(b) + \cos(a) \text{sen}(b) \quad (3.11)$$

$$\text{sen}(a - b) = \text{sen}(a) \cos(b) - \cos(a) \text{sen}(b) \quad (3.12)$$

Restando (3.12) de (3.11) resulta:

$$\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2 \cos(a) \text{sen}(b)$$

$$\cos(a) \text{sen}(b) = \frac{\text{sen}(a+b) - \text{sen}(a-b)}{2} \quad (3.13)$$

Sustituyendo:  $a = \omega t$  y  $b = n\omega t$

$$\cos(\omega t) \text{sen}(n\omega t) = \frac{\text{sen}(\omega t + n\omega t) - \text{sen}(\omega t - n\omega t)}{2}$$

$$\cos(\omega t) \text{sen}(n\omega t) = \frac{\text{sen}((n+1)\omega t) - \text{sen}((1-n)\omega t)}{2} \quad (3.14)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.14) y (3.12) en la ecuación original (3.6):

$$p = 2E \sum_1^n I_n \frac{\cos((n+1)\omega t) + \cos((1-n)\omega t)}{2} \cos(\varphi_n) - \frac{\sen((n+1)\omega t) - \sen((1-n)\omega t)}{2} \sen(\varphi_n) \quad (3.15)$$

Ahora bien:

$$\cos((1-n)\omega t) = \cos(-(n-1)\omega t) = \cos((n-1)\omega t) \quad (3.16)$$

$$\sen((1-n)\omega t) = \sen(-(n-1)\omega t) = -\sen((n-1)\omega t) \quad (3.17)$$

Sustituimos (3.16) y (3.17) en (3.15)

$$p = E \sum_1^n I_s [\cos((n+1)\omega t) + \cos((n-1)\omega t)] \cos(\varphi_s) - [\sen((n+1)\omega t) + \sen((n-1)\omega t)] \sen(\varphi_s) \quad (3.18)$$

Separando cada componente de (3.18) y aplicando las identidades

$\cos(a) \cos(b)$  y  $\sen(a) \sen(b)$ :

$$\cos((n+1)\omega t) \cos(\varphi_n) = \frac{\cos((n+1)\omega t + \varphi_n) + \cos((n+1)\omega t - \varphi_n)}{2} \quad (3.19)$$

$$\cos((n-1)\omega t) \cos(\varphi_n) = \frac{\cos((n-1)\omega t + \varphi_n) + \cos((n-1)\omega t - \varphi_n)}{2} \quad (3.20)$$

$$\sen((n+1)\omega t) \sen(\varphi_n) = \frac{\cos((n+1)\omega t - \varphi_n) - \cos((n+1)\omega t + \varphi_n)}{2} \quad (3.21)$$

$$\sen((n-1)\omega t) \sen(\varphi_n) = \frac{\cos((n-1)\omega t - \varphi_n) - \cos((n-1)\omega t + \varphi_n)}{2} \quad (3.22)$$

Sumando (3.19), (3.20), (3.21) y (3.22) resulta:

$$p = E \sum_1^n I_n = \frac{1}{2} [\cos((n+1)\omega t + \varphi_n) + \cos((n+1)\omega t - \varphi_n) + \cos((n-1)\omega t + \varphi_n) + \cos((n-1)\omega t - \varphi_n) - \cos((n+1)\omega t - \varphi_n) + \cos((n+1)\omega t + \varphi_n) - \cos((n-1)\omega t - \varphi_n) + \cos((n-1)\omega t + \varphi_n)] \quad (3.23)$$

$$p = E \sum_1^n I_n \frac{1}{2} [2 \cos((n+1)\omega t + \varphi_n) + 2 \cos((n-1)\omega t + \varphi_n)]$$

$$p = E \sum_1^n I_n \cos((n+1)\omega t + \varphi_n) + \cos((n-1)\omega t + \varphi_n) \quad (3.24)$$

Puede observarse que para el caso de dispositivos lineales  $n=1$  entonces  $\varphi_n = \varphi$ , y la potencia instantánea resulta:

$$p = E \sum_1^n I_n \cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi) \quad (3.25)$$

Para este caso, el cálculo de la potencia activa se hace de la misma forma que en estado senoidal permanente:

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T e i_s dt \quad (3.26)$$

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T E \sum_1^n I_n \cos((n+1)\omega t + \varphi_n) + \cos((n-1)\omega t + \varphi_n) dt \quad (3.27)$$

Puede observarse que la ecuación define un número considerable de sumas de integrales, dependiendo el número de armónicas a analizar, pero considerando que la tensión es una señal senoidal, los valores serán cero sobre un periodo completo excepto para n=1 se puede definir como:

$$P_s = E I_{s1} \cos(\varphi_{s1}) \quad (3.28)$$

En otras palabras, la potencia que entra a un circuito con carga no lineal y fuente senoidal de tensión, es la que se define como la combinación de corriente y tensión a la misma frecuencia. Dicho esto, se sabe que la fuente de tensión contiene sólo la frecuencia de la componente fundamental de corriente, entonces el cálculo del valor rms como se analizó en el capítulo anterior está definido como:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} [V] \quad (3.29)$$

Para el caso de la corriente, el cálculo del valor eficaz está determinado por la ecuación citada en el capítulo anterior, la cual puede aplicarse tanto para señales senoidales o para señales no senoidales:

$$I_s^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_s^2 dt \quad (3.30)$$

$$I_s^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\sqrt{2} \sum_1^n I_n \cos(n\omega t + \varphi_n))^2 dt \quad (3.31)$$

$$I_s^2 = \frac{2}{T} \left[ \int_0^T (I_{s1} \cos(n\omega t + \varphi_{s1}))^2 + \int_0^T (I_{s2} \cos(n\omega t + \varphi_{s2}))^2 + \dots + \int_0^T (I_{sn} \cos(n\omega t + \varphi_n))^2 \right] \quad (3.32)$$

Puede observarse que para calcular el valor rms de la corriente total, resulta como la suma del valor rms de cada componente armónica:

$$I_s = \sqrt{I_{s1}^2 + I_{s2}^2 + \dots + I_{sn}^2} \quad (3.33)$$

Otra forma de expresar la ecuación (3.33):

$$I_s^2 = I_{s1}^2 + \sum_2^n I_{sn}^2 \quad (3.34)$$

El cálculo de la potencia aparente  $S_s$  anteriormente se definió como el producto de la magnitud del valor de tensión rms y de corriente rms:

$$S_s^2 = E^2 I_s^{*2} = E^2 \sum_1^n I_{sn}^{*2} \quad (3.35)$$

Para determinar el factor de potencia, consideramos la definición universal:

$$FP_S = \frac{P_s}{S_s} = \frac{P_s}{EI_s} \quad (3.36)$$

Para el caso de considerar elementos no lineales y fuente de tensión senoidal, sustituimos la ecuación (3.28) y (3.29) en (3.35):

$$FP_S = \frac{\sqrt{2}EI_{s1}\cos(\varphi_{s1})}{\sqrt{2}EI_s} = \frac{I_{s1}\cos(\varphi_{s1})}{\sqrt{I_{s1}^2 + I_{s2}^2 + \dots + I_{sn}^2}} \quad (3.37)$$

El término  $\varphi_{s1}$  es conocido como se ha mencionado anteriormente como el desplazamiento angular entre la fuente de tensión y la corriente fundamental. Consecuentemente el término  $\cos(\varphi_{s1})$  es llamado “factor de desplazamiento”.

De la ecuación (3.37), el término  $I_{s1}/I_s$  es la medida de la distorsión de la corriente debido a una carga no lineal, consecuentemente es llamado “factor de distorsión”.

Por definición,  $I_s > I_{s1}$  ya que  $I_s$  contiene a todos los armónicos sumados más la componente armónica más alta, esto nos dice que el valor de factor de distorsión será menor o igual a la unidad.

Factor de potencia = (factor de desplazamiento) (factor de distorsión)

$$FP = \cos(\varphi_{s1})(I_{s1}/I_s) \quad (3.38)$$

Una forma de cuantificar el contenido armónico en corriente se logra empleando la siguiente ecuación:

$$ITHD = \frac{\sqrt{\sum_2^n I_{sn}^2}}{I_{s1}} \quad (3.39)$$

Al término  $ITHD$  se le llama “distorsión armónica total de corriente” y se define como la relación entre el valor eficaz del total de las componentes armónicas, exceptuando la fundamental, y el valor eficaz correspondiente a la componente fundamental.

### 3.1.1 Potencia Reactiva y Distorsión de Potencia

Partiendo de la definición de potencia reactiva, para hacer un análisis que se presentan cargas no lineales, se considera una fuente de tensión senoidal y la componente de corriente armónica fundamental:

$$Q_{s1} = EI_s \text{sen } \varphi_{s1} \quad (3.40)$$

La potencia reactiva dada por la ecuación (3.40), es independiente de la existencia de elementos no lineales en la red, ya que sólo contiene la componente fundamental, pero para calcularla con sus “armónicas” es necesaria su representación en series de Fourier que posteriormente será definida, por ahora sólo se considera una potencia reactiva  $Q_s$  la cual contiene su fundamental y sus elementos armónicas.

Cuando en un circuito existe una carga no lineal es necesario definir una nueva componente para realizar el análisis de la potencia a futuro, llamada “distorsión de potencia”  $D_s$  dada por la referencia [38]:

$$S_s^2 = P_s^2 + Q_s^2 + D_s^2 \quad (3.41)$$

Para que la ecuación (3.41) se cumpla, es necesario demostrar que la distorsión de potencia  $D_s$  es ortogonal tanto a la potencia activa como a la potencia reactiva. En el capítulo anterior, se presentó el “triángulo de potencias”, el cual es válido para sistemas con cargas lineales, es decir, que no exista distorsión armónica.

Para aquellos sistemas dónde se presenta distorsión armónica en corriente es necesario hacer uso de la “pirámide de potencias que se presenta en la figura 1, para así considerar los valores fundamentales como los valores armónicos.

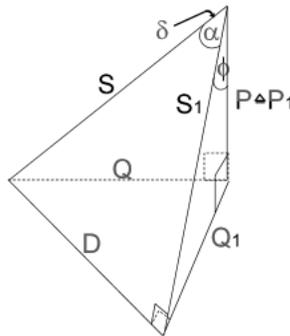


Figura 3.1 “Pirámide de Potencias”

En la figura 1 se observa que  $P = P_1$ ,  $Q$  es la potencia reactiva que contiene armónicas,  $Q_1$  es la potencia reactiva que contempla sólo la componente

fundamental,  $S_1$  es la potencia aparente con sólo las componentes fundamentales y  $S$  es la potencia aparente total con las armónicas presentes.

Si sabemos que  $S_s = EI^*$

$$P_s^2 + Q_s^2 = (EI_s^*)^2 \quad (3.42)$$

Despejando la distorsión de potencia de (3.41):

$$D_s^2 = S_s^2 - (P_s^2 + Q_s^2) \quad (3.43)$$

Sustituyendo (3.42) en (3.43) y  $S_s^2 = (EI^*)^2$  :

$$\begin{aligned} D_s^2 &= (EI_s^*)^2 - (EI_{s1}^*)^2 \\ D_s^2 &= E^2(I_s^{*2} - I_{s1}^{*2}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Por último sustituimos (3.34) en la ecuación (3.44).

$$\begin{aligned} D_s^2 &= E^2(I_{s1}^{*2} + \sum_2^n I_{sn}^{*2} - I_{s1}^{*2}) \\ D_s^2 &= E^2(\sum_2^n I_{sn}^{*2}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Para circuitos lineales o no lineales, con fuente de tensión senoidal, el término  $D_s$  puede ser expresado en términos del factor de distorsión:

$$\begin{aligned} D_s^2 &= E^2(I_s^{*2} - I_{s1}^{*2}) \\ &= E^2 I_s^{*2} \left(1 - \frac{I_{s1}^{*2}}{I_s^{*2}}\right) \\ D_s^2 &= S_s^2 (1 - (\text{factor de distorsión})^2) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Puede observarse que para circuitos lineales el factor de distorsión es igual a la unidad y  $D_s$  es cero.

### 3.2 Sistemas con corriente no senoidal y voltaje no senoidal.

Para definir tanto la tensión como la corriente en estas condiciones consideramos sus correspondientes series de Fourier:

$$v(t) = \sum_1^n \sqrt{2} V_n \cos(n\omega t) \quad (3.47)$$

$$i(t) = \sum_1^n \sqrt{2} I_m \cos(n\omega t - \varphi_m) \quad (3.48)$$

Considerando la definición dada por (3.4):

$$\begin{aligned}
p &= vi = \sum_1^n \sqrt{2}V_n \cos(n\omega t) \sum_1^n \sqrt{2}I_m \cos(n\omega t - \varphi_m) \\
&= 2 \sum_1^n V_n \cos(n\omega t) \sum_1^n I_m \cos(n\omega t - \varphi_m)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Puede observarse que la simplificación de esta ecuación no es tan sencilla como el caso anterior, el valor dado de la potencia instantánea estará en función a cuantos armónicas se quieran considerar.

$$\begin{aligned}
p &= [V_1 \cos(\omega t) + V_2 \cos(2\omega t) + V_3 \cos(3\omega t) + \dots + V_n \cos(n\omega t)][I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + \\
&I_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + I_3 \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots + I_m \cos(m\omega t - \varphi_m)]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Donde  $n$  es el número de armónicas.

$$\begin{aligned}
&= V_1 I_1 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_1) + V_1 I_2 \cos(\omega t) \cos(2\omega t - \varphi_2) + V_1 I_3 \cos(\omega t) \cos(3\omega t - \\
&\varphi_3) + \dots + V_1 I_n \cos(\omega t) \cos(n\omega t - \varphi_n) + V_2 I_1 \cos(2\omega t) \cos(\omega t - \varphi_1) + \\
&V_2 I_2 \cos(2\omega t) \cos(2\omega t - \varphi_2) + V_2 I_3 \cos(2\omega t) \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots + \\
&V_2 I_n \cos(2\omega t) \cos(n\omega t - \varphi_n) + V_3 I_1 \cos(3\omega t) \cos(\omega t - \varphi_1) + V_3 I_2 \cos(3\omega t) \cos(2\omega t - \\
&\varphi_2) + V_3 I_3 \cos(3\omega t) \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots + V_3 I_n \cos(3\omega t) \cos(n\omega t - \varphi_n) + \\
&V_n I_1 \cos(n\omega t) \cos(\omega t - \varphi_1) + V_n I_2 \cos(n\omega t) \cos(2\omega t - \varphi_2) + V_n I_3 \cos(n\omega t) \cos(3\omega t - \\
&\varphi_3) + \dots + V_n I_m \cos(n\omega t) \cos(m\omega t - \varphi_m)
\end{aligned} \tag{3.51}$$

El primer término del polinomio, es el aporte de potencia por parte de la componente fundamental, siendo los demás “productos de armónicos cruzados”.

Considerando el término general:

$$p = V_n I_m \cos(n\omega t) \cos(m\omega t - \varphi_m) \tag{3.52}$$

Ocupando la identidad (3.7):

$$\begin{aligned}
&= V_n I_m \cos(n\omega t) [\cos(m\omega t) \cos(\varphi_m) + \text{sen}(m\omega t) \text{sen}(\varphi_m)] \\
&= V_n I_m \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) \cos(\varphi_m) + \cos(n\omega t) \text{sen}(m\omega t) \text{sen}(\varphi_m)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Considerando la ecuación (3.9) y la ecuación (3.13):

$$\begin{aligned}
&= \frac{V_n I_m}{2} [\cos((n+m)\omega t) \cos(\varphi_m) \\
&\quad + \cos((n-m)\omega t) \cos(\varphi_m) \\
&\quad + \text{sen}((n+m)\omega t) \text{sen}(\varphi_m) + \text{sen}((m-n)\omega t) \text{sen}(\varphi_m)] \\
p &= \frac{V_n I_m}{2} \left[ [\cos((n+m)\omega t) + \cos((n-m)\omega t)] \cos(\varphi_m) + [\text{sen}((n+m)\omega t) + \right. \\
&\quad \left. \text{sen}((m-n)\omega t)] \text{sen}(\varphi_m) \right]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Considerando:

$$\text{sen}(n - m) = -\text{sen}(-(m - n)) = -\text{sen}(m - n) \quad (3.55)$$

Sustituyendo la ecuación (3.55) en (3.54):

$$p = \frac{V_n I_m}{2} \left[ [\cos((n + m)\omega t) + \cos((n - m)\omega t)] \cos(\varphi_m) + [\text{sen}((n + m)\omega t) - \text{sen}((n - m)\omega t)] \text{sen}(\varphi_m) \right] \quad (3.56)$$

Para el caso que  $m = n$ :

$$p = \frac{V_n I_m}{2} [[\cos(2n\omega t) + 1]\cos(\varphi_n) + [\text{sen}(2n\omega t)\text{sen}(\varphi_n)]]$$

$$p = \frac{V_n I_m}{2} [\cos(2n\omega t) + 1]\cos(\varphi_n) + \frac{V_n I_m}{2} [\text{sen}(2n\omega t)\text{sen}(\varphi_n)] \quad (3.57)$$

Se observa que la ecuación (3.57) es la misma para el caso de condiciones senoidales.

Para el cálculo de la potencia activa, la definición dada puede aplicarse, al ser general dada por la ecuación (3.26):

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T [V_1 \cos(\omega t) + V_2 \cos(2\omega t) + V_3 \cos(3\omega t) + \dots + V_n \cos(n\omega t)] [I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + I_2 \cos(2\omega t - \varphi_2) + I_3 \cos(3\omega t - \varphi_3) + \dots + I_n \cos(n\omega t - \varphi_n)] dt \quad (3.58)$$

El resultado de esta operación está determinado por la integral de cada producto de corriente y voltaje tanto de los productos de las componentes fundamentales, como de los productos de armónicas cruzados.

### 3.3 Definiciones de los parámetros de potencia

Las definiciones de potencia en su mayoría contemplan sistemas de tipo senoidal, es necesario en la actualidad detenerse en estudiar sistemas con cargas no lineales e incluso con fuentes no senoidales.

A continuación se presentan algunas definiciones de los parámetros de potencia, que a lo largo de la historia han aportado distintos autores y algunas de sus ventajas y desventajas que presentan; para después elegir dos de ellas y analizarlas de una forma más minuciosa.

### 3.3.1 Postulado de Steinmetz

Este autor [31] en 1888 consideró la corriente y la tensión con las siguientes ecuaciones:

$$v(t) = \sqrt{2}V_{rms} \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (3.59)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I_{rms} \text{sen}(\omega t) \quad (3.60)$$

Luego efectuó el producto entre la tensión y la corriente para hallar la potencia instantánea trasferida por la fuente y llegó a la siguiente ecuación:

$$p(t) = P[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)] + Q[\text{sen}(2\omega t + 2\varphi)][W] \quad (3.61)$$

Siendo P la potencia activa y Q la potencia reactiva, la cual es una componente que únicamente tenía en cuenta la tensión y la corriente fundamental rms para su cálculo:

$$Q = V_{rms1}I_{rms1} \text{sen} \varphi_1 [VAR] \quad (3.62)$$

Nótese que la ecuación (3.62) es la misma vista en el capítulo anterior, solo que en este caso el autor considera los armónicos fundamentales, aunque no se realizó un análisis muy profundo, se hace mención ya de “armónicos” en las ecuaciones de potencia.

### 3.3.2 Postulado de Iliovici

En 1918, Iliovici [32] realizó sus estudios basados en la ley de Faraday, tomándola como base, propuso calcular la potencia para régimen no senoidal:

$$Q = \frac{\omega}{T} \int_0^T \phi i dt \quad (3.63)$$

Ahora bien, para definir la potencia reactiva hizo uso de series de Fourier llegando a la siguiente ecuación:

$$Q = \sum_{n=1}^h nV_n I_n \text{sen} \varphi_n \quad (3.64)$$

Aunque sus planteamientos matemáticos contaban con una base teórica fuerte, no existía en el momento físicamente la manera de comprobar su definición.

### 3.3.3 Postulado de Budeanu

En 1927 Budeanu [25] dio un nuevo concepto para la potencia reactiva en condiciones no-senoidales, en términos de los valores rms y los armónicos de corriente y voltaje. Él postuló que la potencia total consiste en dos componentes ortogonales llamadas: potencias activa y potencia reactiva. Para calcular la

Potencia Activa, la ecuación sigue siendo la misma ya conocida, pero considerando cada componente armónico:

$$P = \sum_1^n V_n I_n \cos(\varphi_n) [W] \quad (3.65)$$

Ésta es la componente que tiene la capacidad de convertirse en trabajo útil y pérdidas.

Para el caso de la segunda componente, es necesario dividirla en dos elementos: potencia reactiva y distorsión de potencia. La componente de la “potencia reactiva”, se calcula como la suma individual de cada elemento armónico.

$$Q_B = \sum_1^n V_n I_n \sin(\varphi_n) [VAR] \quad (3.66)$$

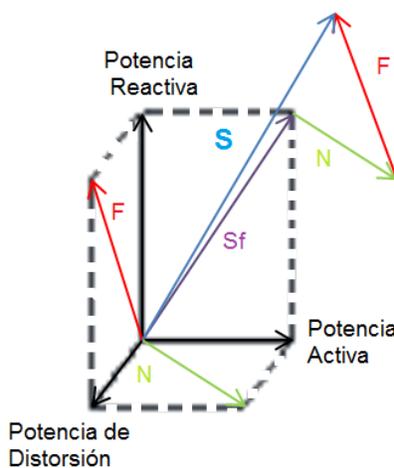
Esta ecuación se acercaba más a la realidad física, por ello fue aprobada y figura en el diccionario de Términos Eléctricos y Electrónicos de IEEE [6].

Basándose en el concepto de Potencia de Distorsión  $D_B$ , ésta se basa en la superposición de la potencia reactiva suministrada por cada armónico, representada por la siguiente ecuación:

$$D_B^2 = S^2 - P^2 - Q_B^2 = \sum_t^{n \rightarrow g} V_n^2 \cdot I_g^2 + V_g^2 \cdot I_n^2 - 2V_n \cdot I_g \cdot V_g \cdot I_n \cdot \cos(\varphi_n - \varphi_g) \quad (3.67)$$

La potencia reactiva de Budeanu puede ser fácilmente compensada con un simple capacitor, pero esto no se aplica para el caso de la Distorsión de Potencia dada por la expresión (3.72) [38].

Para poder entender el planteamiento de sus ecuaciones, Budeanu realizó la siguiente representación fasorial:



**Figura 3.2 “Representación fasorial de la Potencia reactiva definida por Budeanu”**

Los vectores en negro, puede observarse que son los mencionados en las ecuaciones citadas (3.65), (3.66) y (3.67). Las resultantes de estos vectores se denominan:

1.-Potencia fasor “ $S^p$ ”: Es la potencia aparente compleja correspondiente a un régimen senoidal con carga lineal.

2.-Potencia no reactiva “ $N$ ”: Es la Potencia que contiene componente de potencia activa a 60Hz y frecuencias armónicas y componente de potencia de distorsión a frecuencias armónicas.

3.-Potencia ficticia “ $F$ ”: Es la potencia que carece de componente activa, es decir, es el conjunto de componentes de potencia reactiva a 60 Hz y a frecuencias armónicas y componentes de distorsión de potencia a frecuencias armónicas.

Actualmente no se cuenta con una interpretación física, Budeanu buscaba mediante esta expresión, cuantificar el grado de distorsión de las ondas tanto de voltaje como de corriente, y esto no es posible, debido a que esta cantidad no corresponde a una medida de la distorsión de las ondas como él lo expresa, por lo tanto, esta potencia no puede ser ortogonal al resto de las componentes de potencia aparente. Inclusive esta definición ha sido considerada errónea y criticada fuertemente por Czarnecki [34].

### 3.3.4 Postulado de Fryze

En 1931, Fryze considerando una fuente de tipo senoidal propone descomponer la corriente en dos componentes ortogonales, llamadas corriente activa y reactiva [2]:

$$i_A \cong \frac{P}{V^2} v(t) \quad (3.68)$$

Y la corriente reactiva al ser ortogonal a la corriente activa, debe cumplir la siguiente ecuación:

$$i^2 = i_A^2 + i_R^2 [A]^2 \quad (3.69)$$

El cálculo de potencia que sugiere Fryze es:

$$S^2 = P^2 + Q_F^2 \quad (3.70)$$

Donde se puede calcular la potencia ficticia  $Q_F$  con la ecuación (3.71) al despejar la corriente reactiva de (3.69) y conociendo el valor rms de las armónicas.

$$Q_F = V \cdot I_R \quad (3.71)$$

La principal ventaja de la ecuación de Fryze es que esta descomposición proporciona información eficiente de la fuente y puede ser determinada usando medidores fasoriales ordinarios. Sin embargo, esta definición no brinda información para el cálculo de dispositivos compensadores con el fin de controlar la potencia reactiva, debido a que existen circuitos con cargas diferentes y con el mismo consumo de potencia reactiva ficticia [38].

### 3.3.5 Postulado de Shepherd W. y Zakikhani

Shepherd y Zakikhani [35] se basan en la definición comúnmente establecida de potencia reactiva, y consideran un sistema de tensión senoidal con cargas no lineales.

Para el cálculo de la potencia activa se basaron en la definición general ya establecida, y para calcular la potencia aparente realizaron lo siguiente:

$$S^2 = \frac{1}{T_v} \int_0^{T_v} v^2 dt \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} i^2 dt$$

$$S^2 = (\sum_1^n V_n^2 + \sum_1^m V_m^2)(\sum_1^n I_n^2 + \sum_1^p I_p^2) \quad (3.72)$$

Donde  $S$  es una figura de mérito que representa la capacidad de energía transferida a la carga, y está representada por la siguiente ecuación:

$$S^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2 [VA] \quad (3.73)$$

Nombrando a  $S_R$  como potencia aparente real,  $S_X$  como la potencia aparente reactiva y a  $S_D$  como la potencia aparente de distorsión, representadas como las siguientes expresiones:

$$S_R^2 = \sum_1^n V^2 \sum_1^n I^2 \cos^2 \varphi_n \quad (3.74)$$

$$S_X^2 = \sum_1^n V^2 \sum_1^n I^2 \sen^2 \varphi_n \quad (3.75)$$

$$S_D^2 = \sum_1^n V_n^2 \sum_1^p I_p^2 + \sum_1^m V_m^2 (\sum_1^n I_n^2 + \sum_1^p I_p^2) \quad (3.76)$$

Donde los valores con coeficiente “ $m$ ” son las armónicas que “solo” están presentes en voltaje y los valores con subíndice “ $p$ ” son las armónicas presentes “solo” en corriente.

Adicionalmente se pueden calcular las siguientes corrientes:

Corriente activa:

$$I_R = \sqrt{\sum_1^n I_n^2 \cos^2 \varphi_n} \quad (3.77)$$

Corriente reactiva:

$$I_X = \sqrt{\sum_1^n I_n^2 \sin^2 \varphi_n} \quad (3.78)$$

Distorsión de corriente:

$$I_D = \sqrt{I^2 - I_R^2 + I_X^2} \quad (3.79)$$

La ventaja de estas definiciones radica en que al conectar un elemento pasivo lineal con un banco de capacitores en un circuito con bajo factor de potencia, minimiza la potencia reactiva  $S_X$  [35].

### 3.3.6 Postulado de Sharon

Inicialmente Sharon descompone la tensión y la corriente [30], considerando una carga no lineal conectada a una fuente no senoidal:

$$v = \sum_1^n \sqrt{2} V_n \sin(n\omega t + \alpha_n) + \sum_1^m \sqrt{2} V_m \sin(m\omega t + \alpha_m) \quad (3.80)$$

$$i = \sum_1^n \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \alpha_n + \varphi_n) + \sum_1^p \sqrt{2} I_p \sin(p\omega t + \alpha_p) \quad (3.81)$$

Donde puede verse que “n” es el grupo de armónicas presentes en ambos, tensión y corriente; “m” y “p” son adicionalmente los grupos de armónicas presentes sólo en la tensión o en corriente respectivamente.

El factor de potencia fue definido como:

$$K = \frac{\text{Potencia eficaz}}{\text{Potencia aparente}} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T v i dt}{V_{rms} I_{rms}} \\ = \frac{\sum_1^n V_n I_n \cos \varphi_n}{\sqrt{(\sum_1^n V_n^2 + \sum_1^m V_m^2) \times (\sum_1^n I_n^2 + \sum_1^p I_p^2)}} \quad (3.82)$$

Basándose en el trabajo de Shepherd y Zands, Sharon presentó una descomposición en tres componentes:

$$S^2 = P^2 + S_C^2 + S_Q^2 \quad (3.83)$$

Siendo  $P$  la potencia activa,  $S_C$  la potencia activa complementaria y  $S_Q$  la potencia reactiva en cuadratura, descritas por las ecuaciones:

$$P = \sum_1^n V_n I_n \cos \varphi_n \text{ [W]} \quad (3.84)$$

$$S_Q = V_{rms} \sqrt{\sum_{n=1}^h I_n^2 \text{sen}^2 \varphi_n} \quad (3.85)$$

$$S_C = \sqrt{\sum_1^m V_m^2 \sum_1^n I_n^2 \cos^2 \varphi_n + V_{rms}^2 \sum_1^p I_p^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\beta \sum_1^\gamma (V_\beta I_\gamma \cos \varphi_\gamma - V_\gamma I_\beta \cos \varphi_\beta)^2} \quad (3.86)$$

Donde  $\beta$  y  $\gamma$  varían de 1 a  $n$ .

La potencia reactiva en cuadratura  $S_Q$  incluye los efectos asociados con los elementos en cuadratura de los “ $n$ ” grupos de componentes armónicas de las mismas frecuencias y cruces de frecuencias. La potencia complementaria  $S_C$  incluye los efectos asociados con los elementos de los cruces de frecuencias.

Sharon afirma que la minimización de potencia reactiva en cuadratura también proporciona un máximo factor de potencia a través de la conexión de un elemento pasivo lineal, sin embargo, comenta que independientemente del significado físico de la potencia reactiva en cuadratura o complementaria, lo importante era minimizar sus valores, tratando de cumplir  $P = S$ .

### 3.3.7 Postulado de Emanuel

Basándose en el trabajo de Sharon, Emanuel dedujo que como el mayor aporte está ligado a la componente fundamental de tensión, la potencia reactiva  $Q$  estará ligada a esta componente [27,39]:

$$Q_1 = V_1 I_1 \cos \varphi_1 \quad (3.87)$$

Con ello, la potencia aparente estará determinada por:

$$S^2 = P^2 + Q_1^2 + D_B^2 \quad (3.88)$$

Siendo  $D_B$  distorsión de potencia descrita anteriormente por Budeanu, modelo normalizado y universalmente aceptado [14].

Puede observarse que en la expresión 3.75 es similar a la ecuación (3.59) lo único que cambia es la potencia reactiva ligada a la componente fundamental.

Más tarde Emanuel cambió su planteamiento al darse cuenta que las componentes armónicas de orden diferente a uno también tienen importantes aportes, por ello modificó la ecuación, basándose en los postulados de Fryze:

$$S^2 = P^2 + Q_F^2 = (P_1^2 + P_n^2) + Q_F^2 \quad (3.89)$$

Puede observarse que en esta ecuación se consideran los efectos de las componentes armónicas  $P_n$  y siendo  $Q_F$  la potencia ficticia definida por Fryze en la ecuación 3.76.

Posteriormente, separa de igual forma que la potencia activa, la componente reactiva en su componente fundamental y su componente armónica:

$$Q_F^2 = Q_B^2 + Q_n^2 \quad (3.90)$$

Sustituyendo  $Q_F^2$  en (3.94), resulta:

$$S^2 = (P_1^2 + P_n^2) + (Q_1^2 + Q_n^2)^2 \quad (3.91)$$

El armónico de potencia  $P_n$  puede ser disipado o generado por la carga bajo ciertas circunstancias. Cuando  $P_n$  es consumida por un motor de corriente alterna, la energía transferida por  $P_n$  se convierte en pérdidas por calor.

### 3.3.8 Postulado de Czarnecki

El método empleado por Czarnecki se basa en la descomposición de la corriente en tres componentes ortogonales [34,40], (considerando cargas no lineales e invariantes en el tiempo):

Corriente activa ( $i_a$ ), es proporcional a la onda de tensión y por ende está en fase con ella.

Corriente residual ( $i_s$ ), es la componente producida por la variación de la conductancia  $G_n$  por armónico con respecto a la conductancia total o fija  $G$ .

Corriente de magnetización ( $i_m$ ), como su nombre lo dice, es la componente producida por la magnetización de los componentes reactivos de susceptancia  $B_n$  por armónico.

Calculadas las corrientes con los valores eficaces se calcula la potencia correspondiente:

$$P_A = VI_A \quad (3.92)$$

$$D_S = VI_S \quad (3.93)$$

$$Q_M = VI_M \quad (3.94)$$

Y la potencia aparente está determinada por:

$$S^2 = P_A^2 + D_S^2 + Q_M^2 \quad (3.95)$$

Para el caso de sistemas con cargas no lineales y variantes en el tiempo se hace una descomposición de la corriente instantánea total en cuatro componentes ortogonales, activa  $I_A$ , reactiva  $I_R$ , dispersa  $I_S$  y corriente generadora de armónicos  $I_H$ . La fuente de corriente puede ser expresada:

$$I^2 = I_A^2 + I_R^2 + I_S^2 + I_H^2 \quad (3.96)$$

Cada una de estas componentes es representada como:

$$I_A = GV \quad (3.97)$$

$$I_R = \sqrt{\sum_1^n B_n^2 \cdot V_n^2} \quad (3.98)$$

$$I_H = \sqrt{\sum_1^n I_n^2} \quad (3.99)$$

$$I_S = \sqrt{\sum_1^n (G_n - G_l)^2 V_n^2} \quad (3.100)$$

Donde  $n$  representa el número de corrientes armónicas que no están presentes en el conjunto de componentes armónicas de voltaje  $N$ . La conductancia equivalente de la carga está definida:

$$G_l = \frac{P}{V^2} \quad (3.101)$$

Donde la  $n$ -ésima admitancia armónica de la carga:

$$Y_n = G_n + jB_n \quad (3.102)$$

La potencia instantánea generada está compuesta por productos de armónicos a distintas frecuencias (armónicos cruzados) y la cual no tiene en cuenta los efectos de la potencia activa y reactiva ( $P=0$ ,  $Q=0$ ), es decir, se desprecian las armónicas comunes. Para este tipo de cargas la potencia se expresa:

$$S^2 = P^2 + D_S^2 + Q_R^2 + D_H^2 \quad (3.103)$$

La principal propiedad de esta ecuación es identificar el fenómeno físico responsable del incremento de la fuente de corriente [38].

### 3.3.9 Postulado de la IEEE

A continuación se presenta un análisis considerando las ecuaciones (3.47) y (3.48):

$$v = v_1 + v_h \quad (3.104)$$

$$i = i_1 + i_h \quad (3.105)$$

Donde  $v_1$  e  $i_1$  son las respectivas componente fundamental de voltaje y corriente respectivamente y  $v_h$  e  $i_h$  representan la suma de todas las componentes armónicas de voltaje y corriente respectivamente representadas por las siguientes ecuaciones:

$$v_1 = \sqrt{2}V_1 \cos(\omega t) \quad (3.106)$$

$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \quad (3.107)$$

$$v_h = \sqrt{2} \sum_{n \neq 1}^n V_n \cos(n\omega t) \quad (3.108)$$

$$i_h = \sqrt{2} \sum_{n \neq 1}^n I_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (3.109)$$

Considerando la definición general para el cálculo de “valor eficaz” es necesario de igual forma separar la parte fundamental de las armónicas y así calcular el valor eficaz total con las siguientes ecuaciones:

Para voltaje:

$$V = \sqrt{V_1^2 + V_h^2} \quad (3.110)$$

Para corriente:

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_h^2} \quad (3.111)$$

Se puede definir la potencia instantánea con la siguiente ecuación:

$$p = (v_1 + v_h)(i_1 + i_h) \quad (3.112)$$

Para determinar la potencia instantánea sustituimos (3.106), (3.107), (3.108) y (3.109) en (3.112):

$$= [\sqrt{2}V_1 \cos(\omega t) + \sqrt{2} \sum_{n \neq 1}^n V_n \cos(n\omega t)] [\sqrt{2}I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) + \sqrt{2} \sum_{n \neq 1}^n I_n \cos(n\omega t - \varphi_n)]$$

$$p = 2V_1I_1 \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi_1) + 2V_1 \cos(\omega t) \sum_{n \neq 1}^n I_n \cos(n\omega t - \varphi_n) + I_1 \cos(\omega t - \varphi_1) \sum_{n \neq 1}^n V_n \cos(n\omega t) + 2 \sum_{n \neq 1}^n V_n \cos(n\omega t) \sum_{n \neq 1}^n I_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (3.113)$$

La potencia activa estará dada por su componente fundamental expresada por  $P_1$  o frecuencia a 60Hz y su componente de armónicas  $P_H$ .

$$P = P_1 + P_H \quad (3.114)$$

De donde se puede decir que:

$$P_1 = V_1I_1 \cos\varphi_1 \quad (3.115)$$

$$P_H = V_0I_0 + \sum_{h \neq 1}^n \cos\varphi_h = P - P_1 \quad (3.116)$$

En cuanto a la potencia reactiva, es posible calcular su componente fundamental, o “potencia reactiva fundamental” con la siguiente ecuación ya vista por algunos autores anteriormente:

$$Q_1 = V_1I_1 \sen\varphi_1 \quad (3.117)$$

La potencia aparente es definida al realizar el producto de (3.115) y (3.116):

$$S^2 = (VI)^2 = (V_1I_1)^2 + (V_1I_H)^2 + (V_HI_1)^2 + (V_HI_H)^2 \quad (3.118)$$

$$S^2 = S_1^2 + S_N^2 \quad (3.119)$$

Entonces se tiene que:

$$S_N^2 = (V_1I_H)^2 + (V_HI_1)^2 + (V_HI_H)^2 \quad (3.120)$$

El primer término  $V_1I_H$  del producto de la componente fundamental de tensión con la corriente armónica, es usualmente el término dominante. Inclusive en casos extremos cuando la tensión es perfectamente senoidal este término existe y  $I_H > 0$ . A este producto lo llaman distorsión de potencia de corriente ( $D_I$ ). El segundo término  $V_HI_1$  se le llama distorsión de potencia de tensión ( $D_V$ ). La tercera componente  $V_HI_H$  es llamada potencia aparente armónica.

Otra forma de nombrar cada elemento presente en la potencia aparente total es como el que se muestra en la figura 3.3 (de forma fasorial), donde puede verse

que  $P_1$  y  $Q_1$  están relacionadas con  $(V_1 I_1)^2$ ,  $S_{1H}$  con el elemento  $(V_1 I_H)$ ,  $S_{H1}$  con el término  $(V_H I_1)$  y  $S_{HH}$  con la componente  $(V_H I_H)$ .

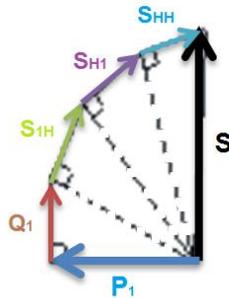


Figura 3.3 “Representación fasorial según el postulado de la IEEE”

Ahora si la ecuación (3.124) la dividimos por el producto de la tensión y la corriente fundamental al cuadrado,  $(V_1 I_1)^2$  resulta:

$$\left(\frac{S_N}{S_1}\right)^2 = \left(\frac{I_H}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{V_H}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{V_H I_H}{V_1 I_1}\right)^2 \quad (3.121)$$

El factor de potencia para condiciones no senoidales queda expresado:

$$\begin{aligned} FP &= \frac{P}{S} = \frac{P_1 + P_H}{\sqrt{S_1^2 + S_N^2}} \\ &= \frac{P_1 + P_H}{\sqrt{S_1^2 + S_N^2}} \left(\frac{1}{S_1}\right) = \frac{P_1 + P_H}{S_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{S_N}{S_1}\right)^2}} = \frac{\frac{P_1}{S_1} + \frac{P_H}{S_1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{S_N}{S_1}\right)^2}} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Si tenemos que el factor de potencia o “factor de potencia de la componente fundamental” puede ser definido como:

$$FP_1 = \cos\varphi_1 = \frac{P_1}{S_1} \quad (3.123)$$

Existe también una variable de “distorsión armónica total” para voltaje, dada por la siguiente ecuación:

$$VTHD = \frac{V_H}{V_1} = \frac{\sqrt{\sum_{n \neq 2}^h V_n^2}}{V_1} \quad (3.125)$$

Que puede verse que es el valor total de componentes de tensión armónicas sobre el valor efectivo de la componente de tensión de primer armónica.

También es posible calcular el total de armónicos presentes en la corriente:

$$VTHI = \frac{I_H}{I_1} = \frac{\sqrt{\sum_{n \neq 2}^h I_n^2}}{I_1} \quad (3.126)$$

Ahora si la ecuación 3.125 se expresa en función de los coeficientes de distorsión armónica de corriente y de tensión se tiene:

$$\left(\frac{S_N}{S_1}\right)^2 = (THDI)^2 + (THDV)^2 + (THDI * THDV)^2 \quad (3.127)$$

Actualmente los instrumentos de medición nos brindan la facilidad para medir los índices de distorsión armónica tanto de tensión como de corriente, facilitando los cálculos.

Considerando dichos índices, la ecuación (3.122) estará dada por:

$$FP = \frac{FP_1 \left(1 + \left[\frac{PH}{P_1}\right]\right)}{\sqrt{1 + (ITHD)^2 + (VTHD)^2 + (ITHD * VTHD)^2}} \quad (3.124)$$

En resumen, algunas de las ideas presentadas por los autores que se mencionan en este capítulo son las siguientes:

### 3.4 Resumen

#### **Steinmetz 1888**

El enfoque citado por este autor no es exactamente en condiciones senoidales, como pueden verse en sus ecuaciones (3.45), (3.46), pero, este autor comenzaba a hacer mención de la necesidad y la importancia en las ecuaciones habituales para condiciones no senoidales.

#### **Iliovici 1918 -1924**

Hizo uso de series de Fourier, desafortunadamente no pudo dar un significado físico a su desarrollo.

#### **Budeanu 1927**

Como se mencionó, un trabajo muy criticado, principalmente por la inexistencia de un significado físico y la carente información necesaria para poder compensar dicha potencia, además de la imposibilidad de medición de la distorsión de potencia (ecuación 3.53).

#### **Fryze 1931**

Prefirió separar las componentes de corriente a diferencia de los autores anteriores, de esta forma al contar con la corriente activa y la total, era posible calcular la corriente reactiva, y con esto, al cumplirse el principio de ortogonalidad era posible calcular la corriente ficticia  $Q_F$  (ecuación 3.57).

### **Shepherd W. y Zakikhani**

Criticando el trabajo realizado por Budeanu optaron por una nueva descomposición de potencias, las cuales cumplen el principio de ortogonalidad entre sí.

Para el cálculo de potencia aparente emplearon el producto  $vi$  calculando antes el valor promedio tanto de tensión como de corriente, siendo éste general ya sea para una función senoidal o no senoidal. Ventajosamente esta descomposición sirve para poder implementar métodos de compensación reactiva (mejorar factor de potencia). Cosa que ecuaciones anteriores (Budeanu) no era posible.

### **Sharon 1973**

Basándose en el trabajo de Shepherd W. y Zakikhani le da una definición similar a las ecuaciones, sólo que ahora contempla un análisis matemático más profundo.

### **Czarnecki 1993**

Este autor principalmente fue quien criticó mucho el trabajo de Budeanu y algunos otros trabajos que se basaban en él, básicamente su trabajo es similar al de Fryze.

Aunque existen muchos más que se han dedicado al estudio de las definiciones de potencia en condiciones no senoidales, se puede notar que las definiciones más citadas involucran a la potencia Reactiva y a la compensación de la misma, autores como:

Lienard, Filipski, Willems, Akagi, Page, Emanuel, IEEE entre otros.

## **3.5 Postulado de Budeanu (profundizado) [55]**

Considerando un sistema donde tanto tensión como corriente, no son senoidales, dicho de otro modo, contienen armónicas, consideró que no era necesario que tanto la corriente como la tensión contuvieran los mismos armónicos, así que las ecuaciones resultantes fueron:

$$V = \sqrt{\sum_v V_v^2} \quad (3.128)$$

$$I = \sqrt{\sum_w I_w^2} \quad (3.129)$$

Esto implica que los armónicos tanto de tensión como los de corriente, no tienen necesariamente que coincidir.

Este fenómeno se da cuando, por ejemplo para el caso inicialmente analizado donde se tiene una fuente de tensión senoidal con una corriente no lineal. La deformación consecuente de la onda de corriente implica que ésta tenga una serie de armónicas que no existan en la onda de tensión.

Una armónica de orden "w" cualquiera de corriente podría tener su correspondiente armónica del mismo orden de la de tensión. Existiría para esa armónica una cierta impedancia en el circuito que tendrá un ángulo de fase igual a  $\varphi_w$  que podemos ver su diagrama vectorial:

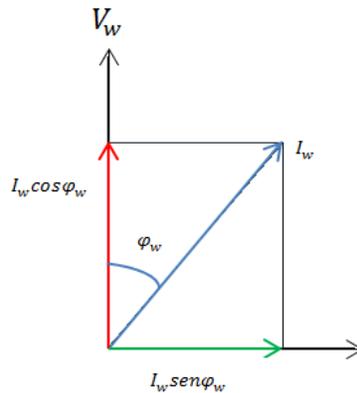


Figura 3.4 "Representación vectorial de la corriente armónica".

Entonces el vector de  $I_w$  estará representado por sus dos componentes:

$$I_w = I_w \cos \varphi_w + I_w \sen \varphi_w \quad (3.130)$$

El cuadrado del módulo de dicho vector está dado por:

$$I_w^2 = I_w^2 \cos^2 \varphi_w + I_w^2 \sen^2 \varphi_w \quad (3.131)$$

Considerando la definición dada para la potencia aparente y utilizando las expresiones (3.128), (3.129) y (3.131) se plantea la siguiente ecuación:

$$S^2 = V^2 I^2 = \sum_v V_v^2 \sum_w [I_w^2 \cos^2 \varphi_w + I_w^2 \sen^2 \varphi_w] \quad (3.132)$$

El hecho de que los armónicos de tensión como de corriente, sean diferentes, no implica que la correspondencia pueda coincidir, es decir, que el producto correspondiente de tensión con corriente, ambas contengan la armónica de mismo

orden. Se define entonces un nuevo coeficiente  $\lambda$  para aquellas armónicas comunes tanto de corriente como de tensión, en otras palabras:

$$\begin{aligned} \lambda: & \quad v = w \\ v, w: & \quad v \neq w \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (3.136) resulta:

$$S^2 = \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \cos^2 \varphi_{\lambda} + \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi_{\lambda} + \sum_v \sum_w V_v^2 I_w^2 (\cos^2 \varphi_w + \sin^2 \varphi_w) \quad (3.133)$$

Como se sabe por identidades trigonométricas que  $\cos^2 \varphi_w + \sin^2 \varphi_w = 1$ :

$$S^2 = \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \cos^2 \varphi_{\lambda} + \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi_{\lambda} + \sum_v \sum_w V_v^2 I_w^2 \quad (3.134)$$

Ahora si se suman y se restan los siguientes términos a (3.134):

$$\begin{aligned} & \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \cos \varphi_v \cos \varphi_w \\ & \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \sin \varphi_v \sin \varphi_w \end{aligned}$$

La ecuación restante:

$$\begin{aligned} S^2 = & \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \cos^2 \varphi_{\lambda} + \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \sin^2 \varphi_{\lambda} + \sum_v \sum_w V_v^2 I_w^2 + \\ & \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \cos \varphi_v \cos \varphi_w + \\ & \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \sin \varphi_v \sin \varphi_w - \\ & \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \cos \varphi_v \cos \varphi_w - \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \sin \varphi_v \sin \varphi_w \end{aligned} \quad (3.135)$$

Simplificando esta ecuación de la siguiente manera:

Considerando un término con dos armónicas, por ejemplo la fundamental y la segunda armónica:

$$V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2$$

Si se eleva al cuadrado:

$$\begin{aligned} & (V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2)^2 \\ & = V_1^2 I_1^2 \cos^2 \varphi_1 + V_2^2 I_2^2 \cos^2 \varphi_2 + V_1 I_1 \cos \varphi_1 V_2 I_2 \cos \varphi_2 \\ & + V_2 I_2 \cos \varphi_2 V_1 I_1 \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

Esta ecuación está planteada para dos armónicas, si se generaliza resulta:

$$(\sum_{\lambda} V_{\lambda} I_{\lambda} \cos \varphi_{\lambda})^2 = \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \cos^2 \varphi_{\lambda} + \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \cos \varphi_v \cos \varphi_w \quad (3.136)$$

Ahora si se considera otro término con dos armónicas, por ejemplo la fundamental y la segunda armónica:

$$V_1 I_1 \text{sen} \varphi_1 + V_2 I_2 \text{sen} \varphi_2$$

De igual forma elevando este término al cuadrado:

$$\begin{aligned} (V_1 I_1 \text{sen} \varphi_1 + V_2 I_2 \text{sen} \varphi_2)^2 &= \\ &= V_1^2 I_1^2 \text{sen}^2 \varphi_1 + V_2^2 I_2^2 \text{sen}^2 \varphi_2 + V_1 I_1 \text{sen} \varphi_1 V_2 I_2 \text{sen} \varphi_2 \\ &+ V_2 I_2 \text{sen} \varphi_2 V_1 I_1 \text{sen} \varphi_1 \end{aligned}$$

$$(\sum_{\lambda} V_{\lambda} I_{\lambda} \text{sen} \varphi_{\lambda})^2 = \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \text{sen}^2 \varphi_{\lambda} + \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \text{sen} \varphi_v \text{sen} \varphi_w \quad (3.137)$$

Ahora bien, al realizar la simplificación de (3.135) se observa que el primero y el cuarto sumando corresponden exactamente a la expresión (3.136). El primero y quinto sumando de la ecuación (3.135) corresponden exactamente a los dos términos de la expresión (3.137). Y al sexto y séptimo sumando de la ecuación (3.135) se les simplifica de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & -[\sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \cos \varphi_v \cos \varphi_w + \sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \text{sen} \varphi_v \text{sen} \varphi_w] = \\ & = -\sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w [\cos \varphi_v \cos \varphi_w + \text{sen} \varphi_v \text{sen} \varphi_w] \\ & = -\sum_v \sum_w V_v I_v V_w I_w \cos(\varphi_v - \varphi_w) \end{aligned} \quad (3.138)$$

Si se sustituyen (3.136), (3.137) y (3.138) en la ecuación (3.135), se obtiene la siguiente ecuación:

$$S^2 = \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \cos^2 \varphi_{\lambda} + \sum_{\lambda} V_{\lambda}^2 I_{\lambda}^2 \text{sen}^2 \varphi_{\lambda} + \sum_v \sum_w [V_v^2 I_v^2 - V_v I_v V_w I_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)] \quad (3.139)$$

El primer sumando representa la suma de las potencias activas elevadas al cuadrado, en otras palabras, es toda la potencia activa de la poli armónica elevada al cuadrado.

El segundo sumando representa la suma de las potencias reactivas elevadas al cuadrado, es decir, es toda la potencia reactiva de la poli armónica elevada al cuadrado.

Puede verse que con estos dos sumandos no resulta la ecuación conocida que representa la potencia aparente total y confirmamos que:

$$S^2 \neq P^2 + Q^2$$

Entonces al tercer sumando de la ecuación (3.139) se le denomina potencia de deformación “ $D$ ”, lo cual en su conjunto permite plantear:

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (3.140)$$

Mencionada anteriormente en la ecuación (3.75).

Es evidente por el tercer sumando de la ecuación (3.139) que siempre va existir potencia de deformación cuando exista doble sumatoria. Se puede ver que siempre que haya ondas deformadas, si consideramos sólo dos armónicas, tanto para la onda de tensión como para la onda de corriente, para que aparezca el producto de  $V_1 I_1$  y el producto  $V_2 I_2$  que constituyen las dos sumatorias de donde aparece el término “ $\lambda$ ”, pero también aparecen los productos cruzados  $V_1 I_2$  y  $V_2 I_1$  los cuales dan origen a la doble sumatoria.

Con lo visto anteriormente se puede asegurar que “siempre que hay más de una armónica para corriente y tensión existe la potencia de deformación”.

Si se considera que:

$$\varphi_v = \varphi_w$$

Que es cuando la impedancia del circuito para cualquier armónica tiene el mismo ángulo de fase. Esto quiere decir que, el circuito es puramente resistivo. Un circuito resistivo puro alimentado con una fuente no senoidal “armónica” tiene para todas las armónicas impedancias con el mismo ángulo de fase, que es cero, pero siempre el mismo.

$$\cos(\varphi_v - \varphi_w) = 1$$

En el caso de un circuito puramente resistivo, para cada armónica la tensión y la corriente son proporcionales entre sí. Si se supone que la resistencia es considerada la misma para todas las armónicas, el coeficiente de proporcionalidad de corriente y tensión es el mismo para todas las armónicas, si éste es llamado “ $k$ ” entonces se tiene:

$$V_1 = kI_1$$

$$V_2 = kI_2$$

...

$$I_1 = \frac{1}{k} V_1$$

$$I_2 = \frac{1}{k} V_2$$

...

Con esto se puede plantear que:

$$V_v I_v V_w I_w = V_v \frac{1}{k} V_w k I_w I_w = V_v^2 I_w^2$$

Si se desarrolla la última ecuación en el tercer miembro de la ecuación (3.139):

$$D^2 = \sum_v \sum_w [V_v^2 I_w^2 - V_v I_v V_w I_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)] = 0$$

Con esto se comprueba que para un circuito puramente resistivo se tiene potencia de deformación nula.

## Capítulo 4

# 4 COMPARACIÓN ENTRE SISTEMAS EN ESTADO SENOIDAL PERMANENTE Y SISTEMAS EN CONDICIONES NO SENOIDALES

### 4.1 Introducción

La potencia reactiva una definición muy bien conocida en circuitos lineales usando se considera que la corriente y el voltaje son de forma de onda completamente senoidal, y es calculada con la ecuación vista en capítulos anteriores:

$$Q = VI \sin \varphi \text{ [VAR]}$$

Las características que debe cumplir la potencia reactiva en condiciones senoidales son las siguientes:

1. Si la potencia reactiva es reducida a cero, el factor de potencia será unitario.
2. La potencia reactiva debe completar el triángulo de potencias dado por:

$$S^2 = P^2 + Q^2 \text{ [VA]}$$

3. La suma de toda la potencia reactiva en un nodo, debe ser cero.
4. La potencia reactiva puede ser positiva o negativa (el signo ésta dado por la carga al ser inductiva o capacitiva).
5. La potencia reactiva puede ser reducida a cero por la inserción de componentes inductivos o capacitivos.
6. La potencia reactiva puede ser calculada en el dominio del tiempo como el producto del voltaje por la corriente.

Varias de las características que cumplen, algunas de las definiciones existentes de potencia reactiva dadas por la fuente [46] son las siguientes:

TABLA 4.1 “COMPARACIÓN DE DEFINICIONES FUENTE [46]”						
Definiciones	Característica numero:					
	1	2	3	4	5	6
Senoidal	si	si	si	si	si	si
Budeanu	x	x	si	si	x	x
Fryze	si	si	x	si	si	si
Kimbark	x	x	x	si	x	x
Kusters and Moore	x	x	x	si	si	si
Shepherd W. y Zakikhani	x	x	x	x	x	x
Sharon	x	x	x	si	si	x
Czarnecki	x	x	x	si	si	x

Se puede observar en la tabla que comparando las definiciones propuestas entre varios autores, la definición dada por Fryze cumple con la mayor cantidad de características mencionadas, lo cual puede ser de gran ventaja para la mayoría de las industrias, por ejemplo, en cuanto al manejo del factor de potencia, el cuál al ser unitario nos refleja menos pérdidas en cuanto a reactivos. Por otro lado las definiciones dadas por Budeanu y por Kimbark carecen de muchas de éstas características, aunque a comparando Fryze con Budeanu, para aplicaciones en flujos de potencia nos puede ser más útil la definición dada por Budeanu debido a que para realizar éstos cálculos (flujos de potencia) se considera la suma de potencias en los nodos de la red.

Para poder comparar algunas de las definiciones vistas en el anterior capítulo se realizó una práctica experimental, considerando cuatro casos.

## 4.2 Comparación experimental entre definiciones

En la actualidad se ha presentado un aumento considerable en el uso de lámparas fluorescentes compactas para iluminación residencial, comercial e industrial (, y más aún en México al entrar en vigor la norma NOM-028-ENER-2010 [49] que prohíbe la venta de focos incandescentes de 100 y 40 [W] el 1 de enero de 2015 (planeada en 2011) por la CONUEE, lo cual constituye a un aumento considerable en cuanto a cargas no lineales.

Debido a lo mencionado anteriormente y por la facilidad de trabajo se empleó este tipo de cargas como no lineales.

Material utilizado:

Trasformador, 127/127, 400 [W] Z= 18%



**Figura 4.1 “Transformador”**

→Carga lineal:

Bombilla Philips 75[W] 125[V] 1070 [lm]

→Carga no lineal:

Luminaria fluorescente tipo 1 Philips 18[W] luz clara/fría 110/127 [V] 50-60 [Hz],  $I = 245$  [mA]  $T_a = -10^{\circ}\text{C} \sim +50^{\circ}\text{C}$ ,  $T_c = 50$  K 1040 [lm] 58 [lm/W]  $f_p \geq 0.05$ .



**Figura 4.2 “Luminaria fluorescente compacta tipo 1”**

Luminaria fluorescente tipo 2 Mini twister 18[W] luz clara/fría 110/127 [V] 50-60[Hz]  $I = 290$  [mA]  $T_a = -10^{\circ}\text{C} \sim +50^{\circ}\text{C}$   $T_c = 50^{\circ}\text{C}$  K 1200 [lm] 65 [lm/W]  $f_p \geq 0.05$ .



**Figura 4.3 “Luminaria fluorescente compacta tipo 2”**

→Sistema de medición:

Multimetro fluke 39.



Figura 4.4 “Multimetro Fluke 39”

Las gráficas están simuladas considerando las ecuaciones de sumas de armónicas con senos y no con cosenos, debido a que el instrumento utilizado para medir grafica de esta forma.

#### 4.2.1 CASO 1 “Fuente senoidal con carga lineal”

Para este caso sólo consideramos la fundamental de la fuente senoidal ya que no presentó armónicas.

Considerando como carga lineal 8 bombillas:



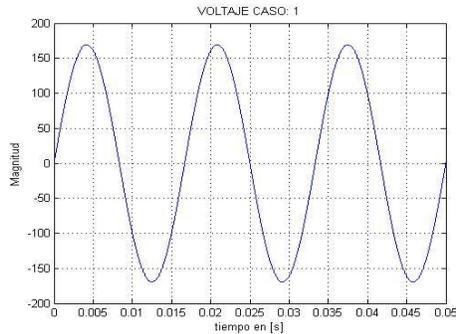
Figura: 4.5 “Carga lineal”

Mediciones:

TABLA 4.2 “VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 1”			
Variable	Valor	Variable	Valor
$V$	119.7	$I$	4.5
$V_{pk}$	169.3	$I_{pk}$	6.3
$V_{cd}$	0	$I_{cd}$	0
$V_{hm}$	0	$I_{hm}$	0
$THD_F$	0	$THD_F$	0
$THD_{RMS}$	0	$THD_{RMS}$	0
$f_c$	$\sqrt{2}$	$f_c$	$\sqrt{2}$
		$I_{kf}$	1

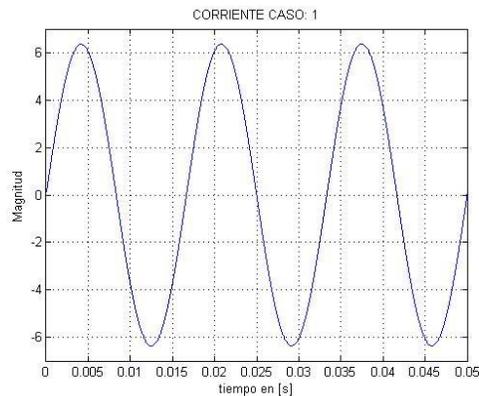
La onda de corriente y de tensión:

$$v(t) = \sqrt{2} \times 119.7 \text{sen}(377t)$$



**Figura 4.6 “Voltaje senoidal”**

$$i(t) = \sqrt{2} \times 4.5 \text{sen}(377t)$$



**Figura 4.7 “Corriente senoidal”**

Las potencias medidas fueron las siguientes:

<b>TABLA 4.3 “POTENCIAS MEDIDAS CASO 1”</b>	
Potencia activa [P]	540 [W]
Potencia reactiva [Q]	0
Potencia aparente [S]	540[VA]
Factor de potencia [fp]	1
Factor de desplazamiento [dpf]	1

No es necesario hacer comparaciones en este caso debido a que la potencia reactiva es cero y el método o definición para calcular la potencia activa es la misma para los autores mencionados.

## 4.2.2 CASO 2 “Fuente quasi-senoidal de baja impedancia con carga lineal (resistiva)”

Para este caso consideramos como carga las ocho bombillas de 75 [W] conectadas directamente a la línea de alimentación, la cual se puede apreciar que presento una muy pequeña variación.

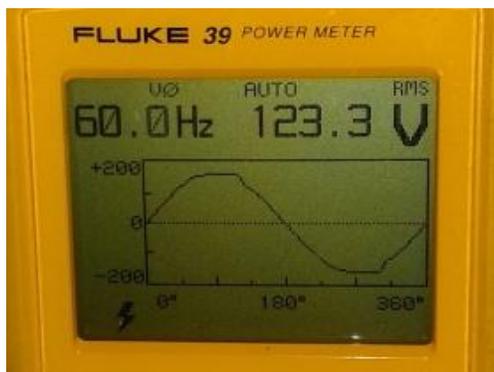


Figura 4.8 “Gráfica de voltaje medido caso 2”

Las mediciones obtenidas fueron las siguientes:

TABLA 4.4 “ARMONICAS DE VOLTAJE CASO 2”					
ARMONICA	VALOR[RMS]	ANGULO [°]	ARMONICA	VALOR [RMS]	ANGULO[°]
1	119	0	17	0.5	-150
3	1.0	72	19	0.4	-25
5	2.3	-149	21	0.2	78
7	1.8	16	23	0	0
9	1.3	150	25	0	0
11	0.9	-105	27	0	0
13	0.8	8	29	0	0
15	0.8	111	31	0	0

La onda de tensión considerando sus armónicas:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \sqrt{2} \times 119 \operatorname{sen}(377t) + \sqrt{2} \times 1.0 \operatorname{sen}(3 \times 377t + 72^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 2.3 \operatorname{sen}(5 \times 377t - 149^\circ) + \sqrt{2} \times 1.8 \operatorname{sen}(7 \times 377t + 16^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 1.3 \operatorname{sen}(9 \times 377 + 150^\circ) + \sqrt{2} \times 0.9 \operatorname{sen}(11 \times 377t - 105^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.8 \operatorname{sen}(13 \times 377t + 8^\circ) + \sqrt{2} \times 0.8 \operatorname{sen}(15 \times 377 + 111^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.5 \operatorname{sen}(17 \times 377t - 150^\circ) + \sqrt{2} \times 0.4 \operatorname{sen}(19 \times 377t - 25^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.3 \operatorname{sen}(21 \times 377t + 78^\circ)
 \end{aligned}$$

Donde tenemos su gráfica simulada:

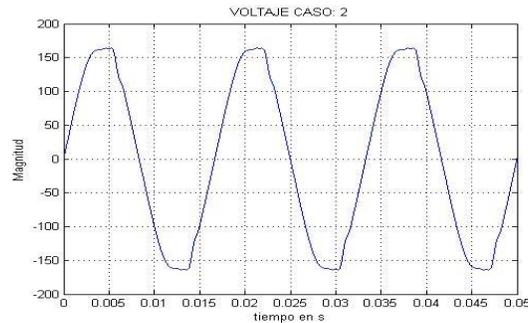


Figura 4.9 “Gráfica de voltaje simulado caso 2”

Puede observarse que hay una pequeña variación en la onda de voltaje debida a “otra carga no lineal” conectada a la red independiente a la carga lineal supuesta.

TABLA 4.5 “ARMONICAS DE CORRIENTE CASO 2”					
ARMONICA	VALOR[RMS]	ANGULO [°]	ARMONICA	VALOR [RMS]	ANGULO [°]
1	4.5	4	17	0.02	-165
3	0.03	21	19	0.01	-14
5	0.07	-150	21	0.01	72
7	0.07	14	23	0	0
9	0.05	141	25	0	0
11	0.03	-101	27	0	0
13	0.04	10	29	0	0
15	0.03	96	31	0	0

Para la onda de corriente, tenemos:

$$\begin{aligned}
 i(t) = & \sqrt{2} \times 4.5 \operatorname{sen}(377t + 4^\circ) + \sqrt{2} \times 0.03 \operatorname{sen}(3 \times 377t + 21^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.07 \operatorname{sen}(5 \times 377t - 150^\circ) + \sqrt{2} \times 0.07 \operatorname{sen}(7 \times 377t + 14^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.05 \operatorname{sen}(9 \times 377t + 141^\circ) + \sqrt{2} \times 0.03 \operatorname{sen}(11 \times 377t - 101^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.04 \operatorname{sen}(13 \times 377t + 10^\circ) + \sqrt{2} \times 0.03 \operatorname{sen}(15 \times 377t + 96^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.02 \operatorname{sen}(17 \times 377t - 165^\circ) + \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(19 \times 377t - 14^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(21 \times 377t + 72^\circ)
 \end{aligned}$$

Su grafica se muestra en la figura 4.11:

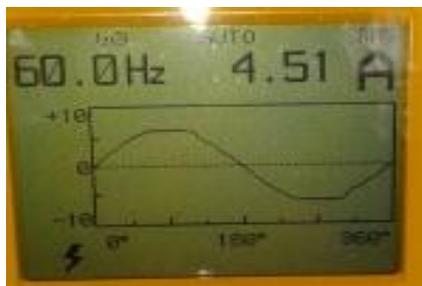


Figura 4.10 “Gráfica de corriente medida caso 2”

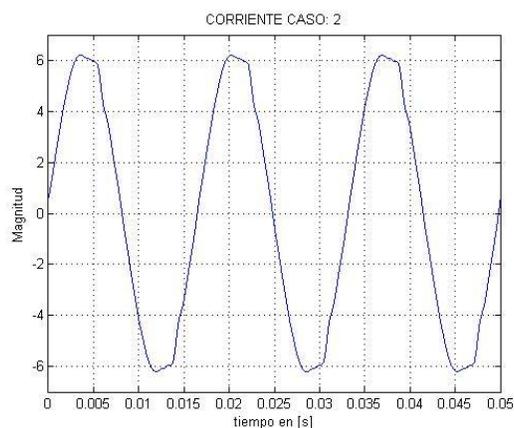


Figura 4.11 “Gráfica de corriente simulada caso 2”

De igual forma para la onda de corriente se presenta esta problemática en cuanto a la distorsión de la forma de onda.

TABLA 4.6 “VALORES DE VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 2”

VOLTAJE		CORRIENTE	
Variable	Valor	Variable	Valor
$V$	119.7	$I$	4.5
$V_{pk}$	164.5	$I_{pk}$	6.17
$V_{cd}$	-0.1	$I_{cd}$	0
$V_{hm}$	3.7	$I_{hm}$	0
$THD_F$	3.1	$THD_F$	3.0
$THD_{RMS}$	3.1	$THD_{RMS}$	3.0
$f_c$	1.37	$f_c$	1.37
		$I_{kf}$	1

TABLA 4.7 “POTENCIAS MEDIDAS CASO 2”	
POTENCIA ACTIVA [P]	540 [W]
POTENCIA REACTIVA [Q]	0
POTENCIA APARENTE [S]	540 [VA]
FACTOR DE POTENCIA [fp]	1
FACTOR DE DESPLAZAMIENTO [dpf]	1

1.-Considerando la definición de Budeanu para el cálculo de potencias:

→Potencia Activa

$$P = \sum_1^n V_n I_n \cos(\varphi_n)$$

$$\begin{aligned}
 P = & 119 \times 4.5 \cos(4^\circ) + 1.0 \times 0.03 \cos(72 + 21^\circ) + 2.3 \times 0.07 \cos(-149 - 150^\circ) \\
 & + 1.8 \times 0.07 \cos(16 + 14^\circ) + 1.3 \times 0.05 \cos(150 + 141^\circ) \\
 & + 0.9 \times 0.03 \cos(-105 - 101^\circ) + 0.8 \times 0.04 \cos(8 + 10^\circ) \\
 & + 0.8 \times 0.03 \cos(111 + 96^\circ) + 0.05 \times 0.02 \cos(-150 - 165^\circ) \\
 & + 0.04 \times 0.01 \cos(-25 - 14^\circ) \\
 & + 0.03 \times 0.01 \cos(72 + 72^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P = & 535.5 \cos(4^\circ) + 0.03 \cos(83^\circ) + 0.161 \cos(-299^\circ) + 1.8 \times 0.07 \cos(30^\circ) \\
 & + 0.065 \cos(291) + 0.027 \cos(-206^\circ) + 0.032 \cos(18^\circ) \\
 & + 0.024 \cos(207^\circ) + 0.001 \cos(-315^\circ) + 0.0001 \cos(-39^\circ) \\
 & + 0.0003 \cos(150^\circ)
 \end{aligned}$$

$$P = 534.3969811152711[W]$$

Debido a que la potencia reactiva es cero marcada por el medidor

#### 4.2.3 CASO 3 “Fuente de voltaje no senoidal con baja impedancia y carga no lineal”

Para este caso consideramos seis luminarias compactas del tipo uno y tres luminarias compactas del tipo 2 conectadas directamente a la línea de alimentación.



Figura 4.12 “Carga no lineal”

TABLA 4.8 “ARMONICAS DE VOLTAJE CASO 3”					
ARMONICA	VALOR[RMS]	ANGULO [°]	ARMONICA	VALOR [RMS]	ANGULO [°]
1	122.7	0	17	0.5	-163
3	2.4	87	19	0.1	-109
5	2.0	-127	21	0.3	34
7	1.4	-8	23	0.1	-156
9	1.9	137	25	0.1	-173
11	0.8	-96	27	0.2	41
13	0.8	-13	29	0.2	41
15	0.8	93	31	0.2	31

Su función está representada por la ecuación:

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \sqrt{2} \times 122.7 \operatorname{sen}(377t) + \sqrt{2} \times 2.4 \operatorname{sen}(3 \times 377t + 87^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 2.0 \operatorname{sen}(5 \times 377t - 127^\circ) + \sqrt{2} \times 1.4 \operatorname{sen}(7 \times 377t - 8^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 1.9 \operatorname{sen}(9 \times 377t + 137^\circ) + \sqrt{2} \times 0.8 \operatorname{sen}(11 \times 377t - 96^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.8 \operatorname{sen}(13 \times 377t - 13^\circ) + \sqrt{2} \times 0.8 \operatorname{sen}(15 \times 377t + 93^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.5 \operatorname{sen}(17 \times 377t - 163^\circ) + \sqrt{2} \times 0.1 \operatorname{sen}(19 \times 377t - 109^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.3 \operatorname{sen}(21 \times 377t + 34^\circ) + \sqrt{2} \times 0.1 \operatorname{sen}(23 \times 377t - 156^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.1 \operatorname{sen}(25 \times 377t - 173^\circ) + \sqrt{2} \times 0.2 \operatorname{sen}(27 \times 377t + 41^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.2 \operatorname{sen}(29 \times 377t + 41^\circ) + \sqrt{2} \times 0.2 \operatorname{sen}(31 \times 377t + 31^\circ)
 \end{aligned}$$

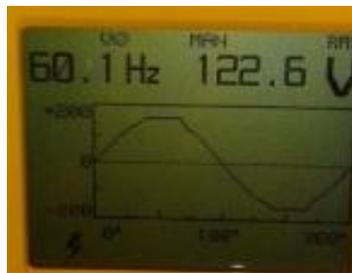


Figura 4.13 “Forma de onda de voltaje medido caso 3”

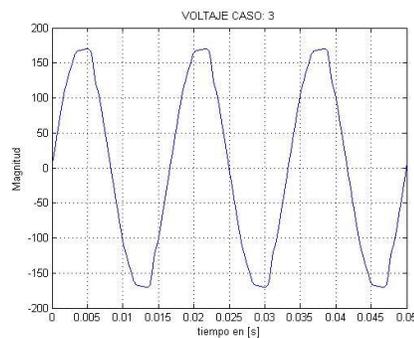


Figura 4.14 “Gráfica de voltaje simulado caso 3”

TABLA 4.9 “ARMONICAS DE CORRIENTE CASO 3”					
ARMONICA	VALOR[RMS]	ANGULO [°]	ARMONICA	VALOR [RMS]	ANGULO [°]
1	1.27	27	17	0.09	13
3	0.88	-115	19	0.05	-127
5	0.54	131	21	0.02	138
7	0.48	18	23	0	0
9	0.37	-117	25	0.04	68
11	0.19	103	27	0.05	-75
13	0.11	-32	29	0.04	165
15	0.10	174	31	0.04	55

$$\begin{aligned}
 i(t) = & \sqrt{2} \times 1.27 \text{ sen}(377t + 27^\circ) + \sqrt{2} \times 0.88 \text{ sen}(3 \times 377t - 115^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.54 \text{ sen}(5 \times 377t + 131^\circ) + \sqrt{2} \times 0.48 \text{ sen}(7 \times 377t + 18^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.37 \text{ sen}(9 \times 377t - 117^\circ) + \sqrt{2} \times 0.19 \text{ sen}(11 \times 377t + 103^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.11 \text{ sen}(13 \times 377t - 32^\circ) + \sqrt{2} \times 0.1 \text{ sen}(15 \times 377t + 174^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.09 \text{ sen}(17 \times 377t + 13^\circ) + \sqrt{2} \times 0.05 \text{ sen}(19 \times 377t - 127^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.2 \text{ sen}(21 \times 377t + 138^\circ) + \sqrt{2} \times 0.04 \text{ sen}(25 \times 377t + 68^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.05 \text{ sen}(27 \times 377t - 75^\circ) + \sqrt{2} \times 0.04 \text{ sen}(29 \times 377t + 165^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.04 \text{ sen}(31 \times 377t + 55^\circ)
 \end{aligned}$$

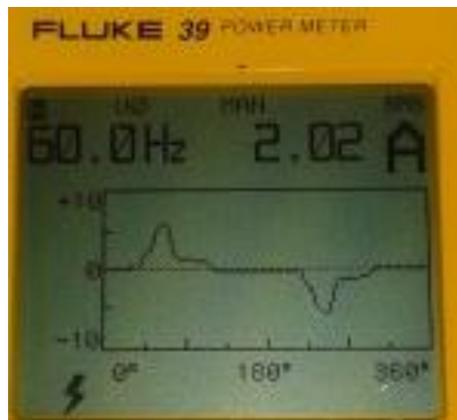


Figura 4.15 “Forma de onda de corriente medida caso 3”

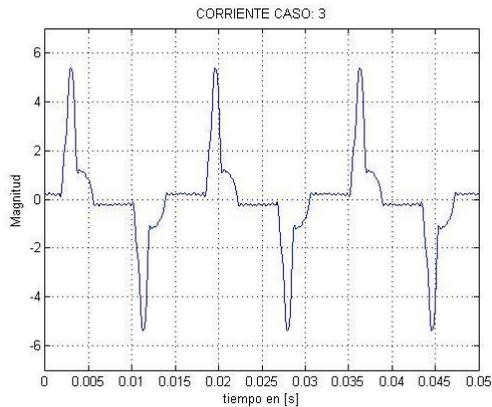


Figura 4.16 “Gráfica de corriente simulada caso 3”

TABLA 4.10 “VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 3”			
VOLTAJE		CORRIENTE	
Variable	Valor	Variable	Valor
$V$	122.7	$I$	1.76
$V_{pk}$	170.5	$I_{pk}$	5.38
$V_{cd}$	-0.1	$I_{cd}$	-0.03
$V_{hm}$	4.7	$I_{hm}$	1.22
$THD_F$	3.4	$THD_F$	96.6
$THD_{RMS}$	3.4	$THD_{RMS}$	69.5
$f_c$	1.39	$f_c$	3.05
		$I_{kf}$	17.7

TABLA 4.11 “POTENCIAS CASO 3”	
POTENCIA ACTIVA [P]	140 [W]
POTENCIA REACTIVA [Q]	70 [VAR]
POTENCIA APARENTE [S]	220[VA]
FACTOR DE POTENCIA [fp]	0.64 ADELANTO
FACTOR DE DESPLAZAMIENTO [dpf]	0.89

### 1.- Calculo de potencias basadas en Budeanu:

→Potencia activa

$$\begin{aligned}
P = & 155.829 \cos(-27^\circ) + 3.28 \cos(202^\circ) + 1.08 \cos(-258^\circ) + 0.672 \cos(-26^\circ) \\
& + 0.703 \cos(254^\circ) + 0.152 \cos(-199^\circ) + 0.088 \cos(19^\circ) \\
& + 0.08 \cos(-81^\circ) + 0.045 \cos(-176^\circ) + 0.005 \cos(18^\circ) \\
& + 0.006 \cos(-104^\circ) + 0.004 \cos(-241^\circ) + 0.01 \cos(-116^\circ) \\
& + 0.008 \cos(-124^\circ) + 0.008 \cos(-24^\circ)
\end{aligned}$$

$$P = 143.2710244887436 [W]$$

→Potencia reactiva

$$\begin{aligned}
Q = & 155.829 \operatorname{sen}(-27^\circ) + 3.28 \operatorname{sen}(202^\circ) + 1.08 \operatorname{sen}(-258^\circ) + 0.672 \operatorname{sen}(-26^\circ) \\
& + 0.703 \operatorname{sen}(254^\circ) + 0.152 \operatorname{sen}(-199^\circ) + 0.088 \operatorname{sen}(19^\circ) \\
& + 0.08 \operatorname{sen}(-81^\circ) + 0.045 \operatorname{sen}(-176^\circ) + 0.005 \operatorname{sen}(18^\circ) \\
& + 0.006 \operatorname{sen}(-104^\circ) + 0.004 \operatorname{sen}(-241^\circ) + 0.01 \operatorname{sen}(-116^\circ) \\
& + 0.008 \operatorname{sen}(-124^\circ) + 0.008 \operatorname{sen}(-24^\circ)
\end{aligned}$$

$$Q = 70.039736889133067 [VAR]$$

→Distorsión de potencia

Definida por Budeanu, se calcula considerando sólo el tercer miembro de la ecuación (3.139), que son las armónicas que se cruzan:

$$D^2 = \sum_v \sum_w [V_v^2 I_w^2 - V_v I_v V_w I_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)]$$

Para calcular esta potencia se hizo uso de un pequeño software en MATLAB, los resultados obtenidos fueron:

$$D = 145.8798632581407$$

→Potencia aparente

Para calcular esta potencia nos basamos en la ecuación (3.140) el resultado es:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$$

$$S = 216.1321024414629 [VA]$$

## 2.- Postulado de Fryze

→Potencia activa

La potencia activa es calculada de la misma forma que Budeanu:

$$P = 143.2710244887436 [W]$$

Con la potencia activa se puede calcular la corriente activa  $I_a$  con la ecuación (3.68):

$$i_a \cong \frac{P}{V^2} v(t)$$

$$I_a = \frac{143.2710244887436}{122.7722688557966^2} \times 1.222934942377009 =$$

$$= 1.162414869985907[A]$$

Donde  $V$  es la suma de los valores rms de las armónicas con la fundamental y  $v(t)$  es el voltaje total en el tiempo considerando todas las armónicas.

Ahora para calcular  $I_r$  la despejamos de (3.69):

$$I^2 = I_A^2 + I_R^2$$

$$I_r = \sqrt{I^2 - I_a^2}$$

$$I_r = 1.330973955431002[A]$$

Nótese que es necesario que se cumpla la ecuación (3.69) debido a que una de las condiciones impuestas por Fryze es que sean ortogonales dichas corrientes.

→Potencia Ficticia

Definida por Fryze, para calcular la potencia ficticia se hace uso de la ecuación (3.71), dando un valor de:

$$Q_F = V \cdot I_R$$

$$Q_F = 122.7722688557966 \times 1.330973955431002$$

$$Q_F = 163.4066922962380[VAR]$$

→Potencia aparente.

Con la ecuación (3.70).

$$S^2 = P^2 + Q_F^2$$

$$S = \sqrt{143.2710244887436^2 + 163.4066922962380^2}$$

$$S = 217.3208078975678[VA]$$

### 3.- Postulado de Shepherd W. y Zakikhani

→Potencia aparente activa

Estos autores a la potencia activa la llamaron “potencia aparente real” y la ecuación para calcularla ésta determinada por la ecuación (3.74), que como las sumatorias contienen los mismos valores, puede verse que es la definición general de potencia, entonces la potencia será:

$$S_R = 197.1761295916865 [W]$$

→Potencia aparente reactiva

De igual forma la ecuación (3.75) representa la misma ecuación para la potencia reactiva, sólo que fue llamada “potencia aparente reactiva” y su valor considera la fundamental y las armónicas por ende es:

$$S_X = 91.366410951960191[VAR]$$

→Potencia aparente complementaria

Para el calcular esta potencia, hacemos uso de la ecuación (3.76):

$$S_D^2 = \sum_1^n V_n^2 \sum_1^p I_p^2 + \sum_1^m V_m^2 (\sum_1^n I_n^2 + \sum_1^p I_p^2)$$

$$S_D = 0$$

La potencia aparente de distorsión puede verse que es “0” ya que no hay armónicas propias en este caso.

→Potencia aparente

Para calcular ésta potencia hacemos uso de la ecuación (3.73), despejamos S:

$$S^2 = S_R^2 + S_X^2 + S_D^2$$

$$S = 217.3160075351101 [VA]$$

### 4.- Postulado Sharon

→Potencia activa

Este autor para calcular la potencia activa lo hace como la definición general para ésta:

$$P = 143.2710244887436[W]$$

→Potencia aparente reactiva

Él a la potencia reactiva la llama “potencia aparente reactiva, y la calcula con la ecuación (3.85):

$$S_Q = V_{rms} \sqrt{\sum_{n=1}^h I_n^2 \text{sen } \varphi_n^2}$$

Con la ecuación (3.85) calculamos la potencia aparente reactiva:

$$S_Q = 140.5271790568043 [VAR]$$

→Potencia aparente complementaria

Con la ecuación (3.86) calculamos la potencia aparente complementaria:

$$S_C = \sqrt{\sum_1^m V_m^2 \sum_1^n I_n^2 \cos^2 \varphi_n + V_{rms}^2 \sum_1^p I_p^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\beta \sum_1^\gamma (V_\beta I_\gamma \cos \varphi_\gamma - V_\gamma I_\beta \cos \varphi_\beta)^2}$$

Considerando que el tercer monomio del polinomio sólo contempla las armónicas en cruzadas.

$$S_C = 91.637585509301118$$

→Potencia aparente total

$$S^2 = P^2 + S_C^2 + S_Q^2$$

$$S = 220.6171380235266 [VA]$$

## 5.- Postulado IEEE

→Potencia activa

Para el cálculo de la potencia activa es necesario separar la potencia por si componente fundamental y sus componentes armónicas.

$$P_1 = V_1 I_1 \cos \varphi_1$$

$$P_1 = 138.8446556577492 [W]$$

Si la potencia activa fundamental  $P_1$  calculada anteriormente y su potencia activa por armónicas  $P_H$  esta dada por la ecuación (3.116).

$$P_H = 4.426368830994421 [W]$$

Entonces la potencia activa total es:

$$P = 143.2710244887436[W]$$

→Potencia reactiva

En este caso para el cálculo de la potencia reactiva se aprecia que el mayor aporte de ésta, está dado por la fundamental con la ecuación (3.117):

$$Q_1 = V_1 I_1 \text{sen} \varphi_1$$

$$Q_1 = 70.744885583913828 [VAR]$$

→Potencia aparente

Para el cálculo de potencia aparente dada por la ecuación (3.119) y (3.120) los resultados son:

$$S_1 = 155.829[VA]$$

$$S_N = 150.9499040741663[VA]$$

Despejando "S" de la ecuación (3.119) el valor de potencia aparente es:

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_N^2}$$

$$S = 216.9528768673050[VA]$$

→Factor de potencia

Si utilizamos la ecuación (3.122):

$$fp = \frac{P}{S} = \frac{143.2710244887436}{216.9528768673050} = 0.66$$

#### 4.2.4 CASO 4 “Fuente de voltaje no senoidal de alta impedancia con carga no lineal”

TABLA 4.12 “ARMONICAS DE VOLTAJE CASO 4”					
ARMONICA	VALOR[RMS]	ANGULO [°]	ARMONICA	VALOR [RMS]	ANGULO [°]
1	116.6	0	17	0.7	180
3	6.4	67	19	0.2	-41
5	3.5	-109	21	0.6	37
7	1.0	-15	23	0.4	180
9	1.8	126	25	0.2	-103
11	1.0	-146	27	0.4	44
13	1.5	-13	29	0.3	117
15	0.6	77	31	0.2	-115

$$\begin{aligned}
 v(t) = & \sqrt{2} \times 116.6 \text{sen}(377t) + \sqrt{2} \times 6.4 \text{sen}(3 \times 377t + 67^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 3.5 \text{sen}(5 \times 377t - 109^\circ) + \sqrt{2} \times 1.0 \text{sen}(7 \times 377t - 15^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 1.8 \text{sen}(9 \times 377t + 126^\circ) + \sqrt{2} \times 1.0 \text{sen}(11 \times 377t - 146^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 1.5 \text{sen}(13 \times 377t - 13^\circ) + \sqrt{2} \times 0.6 \text{sen}(15 \times 377t + 77^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.7 \text{sen}(17 \times 377t + 180^\circ) + \sqrt{2} \times 0.2 \text{sen}(19 \times 377t - 41^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.6 \text{sen}(21 \times 377t + 37^\circ) + \sqrt{2} \times 0.4 \text{sen}(23 \times 377t - 156^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.2 \text{sen}(25 \times 377t - 103^\circ) + \sqrt{2} \times 0.4 \text{sen}(27 \times 377t + 44^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.3 \text{sen}(29 \times 377t + 117^\circ) + \sqrt{2} \times 0.2 \text{sen}(31 \times 377t - 115^\circ)
 \end{aligned}$$

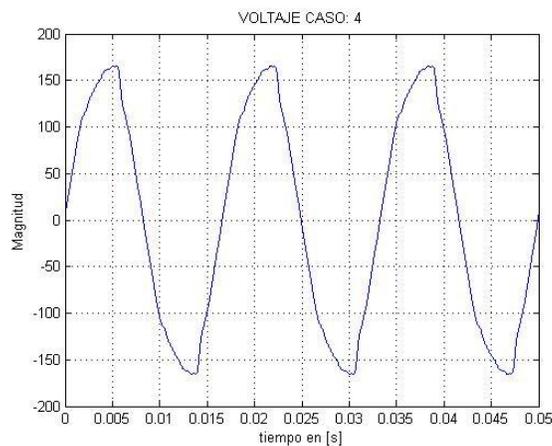


Figura 4.17 “Gráfica de voltaje caso 4”

TABLA 4.13 “ARMONICAS DE CORRIENTE CASO 4”

ARMONICA	VALOR[RMS]	ANGULO [°]	ARMONICA	VALOR [RMS]	ANGULO [°]
1	1.3	16	15	0.02	98
2	0.03	136	17	0.04	-70
3	0.74	-140	19	0.01	72
4	0.02	-146	21	0.03	138
5	0.29	71	23	0.01	-53
6	0.01	-109	25	0.01	6
7	0.13	-12	27	0.01	152
9	0.07	-162	29	0	0
11	0.05	-74	31	0.01	6
13	0.05	96			

$$\begin{aligned}
 i(t) = & \sqrt{2} \times 1.3 \operatorname{sen}(377t + 16) + \sqrt{2} \times 0.03 \operatorname{sen}(2 \times 377t + 136^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.74 \operatorname{sen}(3 \times 377t - 140^\circ) + \sqrt{2} \times 0.02 \operatorname{sen}(4 \times 377t - 146^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.29 \operatorname{sen}(5 \times 377t + 71^\circ) + \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(6 \times 377t - 109^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.13 \operatorname{sen}(7 \times 377t - 12^\circ) + \sqrt{2} \times 0.07 \operatorname{sen}(9 \times 377t - 162^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.05 \operatorname{sen}(11 \times 377t - 74^\circ) + \sqrt{2} \times 0.05 \operatorname{sen}(13 \times 377t + 96^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.02 \operatorname{sen}(15 \times 377t + 98^\circ) + \sqrt{2} \times 0.04 \operatorname{sen}(17 \times 377t - 70^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(19 \times 377t + 72^\circ) + \sqrt{2} \times 0.03 \operatorname{sen}(21 \times 377t + 138^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(23 \times 377t - 53^\circ) + \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(25 \times 377t + 6^\circ) + \\
 & \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(27 \times 377t + 152^\circ) + \sqrt{2} \times 0.01 \operatorname{sen}(31 \times 377t + 6^\circ)
 \end{aligned}$$

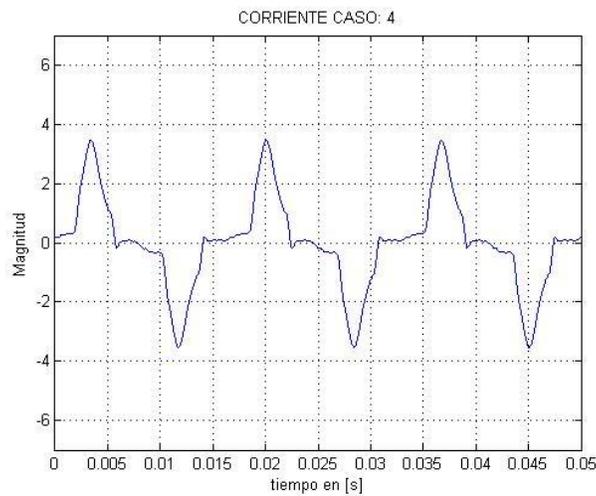


Figura 4.18 “Gráfica de corriente caso 4”

TABLA 4.14 “VOLTAJE Y CORRIENTE CASO 4”			
VOLTAJE		CORRIENTE	
Variable	Valor	Variable	Valor
$V$	116.8	$I$	1.52
$V_{pk}$	165.5	$I_{pk}$	3.49
$V_{cd}$	0.1	$I_{cd}$	0
$V_{hm}$	7.9	$I_{hm}$	0.82
$THD_F$	6.8	$THD_F$	62.7
$THD_{RMS}$	6.8	$THD_{RMS}$	53.1
$f_c$	1.42	$f_c$	2.27
		$I_{kf}$	5.1

TABLA 4.15 “POTENCIAS CASO 4”	
POTENCIA ACTIVA [P]	140 [W]
POTENCIA REACTIVA [Q]	50[VAR]
POTENCIA APARENTE [S]	180[VA]
FACTOR DE POTENCIA [fp]	0.78 ADELANTO
FACTOR DE DESPLAZAMIENTO [dpf]	0.96

### 1.- Calculo de potencias basadas en Budeanu:

→Potencia activa.

$$\begin{aligned}
 P = & 151.58 \cos(16^\circ) + 4.736 \cos(-73^\circ) + 1.05 \cos(-38^\circ) + 0.13 \cos(-27^\circ) \\
 & + 0.126 \cos(-36^\circ) + 0.05 \cos(-220^\circ) + 0.075 \cos(83^\circ) \\
 & + 0.012 \cos(175^\circ) + 0.028 \cos(110^\circ) + 0.002 \cos(31^\circ) \\
 & + 0.018 \cos(175^\circ) + 0.004 \cos(127^\circ) + 0.002 \cos(-97^\circ) \\
 & + 0.004 \cos(196^\circ) + 0.002 \cos(-109^\circ)
 \end{aligned}$$

$$P = 148.0389970557633[W]$$

→Potencia reactiva

$$\begin{aligned}
 Q = & 151.58 \sen(16^\circ) + 4.736 \sen(-73^\circ) + 1.05 \sen(-38^\circ) + 0.13 \sen(-27^\circ) \\
 & + 0.126 \sen(-36^\circ) + 0.05 \sen(-220^\circ) + 0.075 \sen(83^\circ) \\
 & + 0.012 \sen(175^\circ) + 0.028 \sen(110^\circ) + 0.002 \sen(31^\circ) \\
 & + 0.018 \sen(175^\circ) + 0.004 \sen(127^\circ) + 0.002 \sen(-97^\circ) \\
 & + 0.004 \sen(196^\circ) + 0.002 \sen(-109^\circ)
 \end{aligned}$$

$$Q = 36.621309772157105[VAR]$$

→Distorsión de potencia

Definida por Budeanu, se calcula considerando sólo el tercer miembro de la ecuación (3.139), que son las armónicas que se cruzan:

$$D^2 = \sum_v \sum_w [V_v^2 I_w^2 - V_v I_v V_w I_w \cos(\varphi_v - \varphi_w)]$$

Para calcular esta potencia se hizo uso de un pequeño software en MATLAB, los resultados obtenidos fueron:

$$D = 147.2383287907049$$

→Potencia aparente

Para calcular esta potencia nos basamos en la ecuación (3.140) el resultado es:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$$

$$S = 211.9806369548509e[VA]$$

## 2.- Postulado de Fryze

→Potencia activa.

La potencia activa es calculada de la misma forma que Budeanu:

$$P = 148.0389970557633[W]$$

Con la potencia activa se puede calcular la corriente activa  $I_a$  con la ecuación (3.68):

$$I_a = \frac{148.0389970557633}{116.8664194711210^2} \times 118.3887393401927$$

$$= 1.283237531968516[A]$$

Donde  $V$  es la suma de los valores rms de las armónicas con la fundamental y  $v(t)$  es el voltaje total en el tiempo considerando todas las armónicas.

Ahora para calcular  $I_r$  la despejamos de (3.69):

$$I^2 = I_A^2 + I_R^2$$

$$I_r = \sqrt{I^2 - I_a^2}$$

$$I_r = 1.283237531968516 [A]$$

Nótese que es necesario que se cumpla la ecuación (3.69) debido a que una de las condiciones impuestas por Fryze es que sean ortogonales dichas corrientes.

→Potencia Ficticia

Definida por Fryze, para calcular la potencia ficticia se hace uso de la ecuación (3.71), dando un valor de:

$$Q_F = 116.8664194711210 \times 1.283237531968516$$

$$Q_F = 98.140063032479077 \text{ [VAR]}$$

→Potencia aparente

Con la ecuación (3.70).

$$S = \sqrt{148.0389970557633^2 + 98.140063032479077^2}$$

$$S = 177.6147984299035 \text{ [VA]}$$

### 3.- Postulado de Shepherd W. y Zakikhani

→Potencia aparente activa

Estos autores a la potencia activa la llamaron “potencia aparente real” y la ecuación para calcularla ésta determinada por la ecuación (3.74), que como las sumatorias contienen los mismos valores, puede verse que es la definición general de potencia, entonces la potencia será:

$$S_R = 152.1307439637976 \text{ [W]}$$

→Potencia aparente reactiva

De igual forma la ecuación (3.75) representa la misma ecuación para la potencia reactiva, sólo que fue llamada “potencia aparente reactiva” y su valor considera la fundamental y las armónicas por ende es:

$$S_X = 96.163419172892802 \text{ [VAR]}$$

→Potencia aparente complementaria

Para el calcular esta potencia, hacemos uso de la ecuación (3.76):

$$S_D = 4.372741016799418$$

La potencia aparente “S” se calculó comúnmente como con los valores rms  $S = VI$

$$S = 1800.285735931939[\text{VA}]$$

#### 4.- Postulado Sharon

→Potencia activa

Este autor para calcular la potencia activa lo hace como la definición general para ésta:

$$P = 148.0389970557633 [\text{W}]$$

→Potencia aparente reactiva

Él a la potencia reactiva la llama “potencia aparente reactiva, y la calcula con la ecuación (3.85):

Con la ecuación (3.85) calculamos la potencia aparente reactiva:

$$S_Q = 77.362395709098195[\text{VAR}]$$

→Potencia aparente complementaria

Con la ecuación (3.86) calculamos la potencia aparente complementaria:

$$S_C = \sqrt{\sum_1^m V_m^2 \sum_1^n I_n^2 \cos^2 \varphi_n + V_{rms}^2 \sum_1^p I_p^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\beta \sum_1^\gamma (V_\beta I_\gamma \cos \varphi_\gamma - V_\gamma I_\beta \cos \varphi_\beta)^2}$$

Considerando que el tercer monomio del polinomio sólo contempla las armónicas en cruzadas.

$$S_c = 76.633422750308142$$

→Potencia aparente total

$$S = 183.7747708515912[\text{VA}]$$

#### 5.- Postulado IEEE

→Potencia activa

Para el cálculo de la potencia activa es necesario separar la potencia por si componente fundamental y sus componentes armónicas.

$$P_1 = V_1 I_1 \cos \varphi_1$$

$$P_1 = 145.7080478703304[W]$$

Si la potencia activa fundamental  $P_1$  calculada anteriormente y su potencia activa por armónicas  $P_H$  esta dada por la ecuación (3.116).

$$P_H = 2.330949185432925[W]$$

Entonces la potencia activa total es:

$$P = 148.0389970557633[W]$$

→Potencia reactiva

En este caso para el cálculo de la potencia reactiva se aprecia que el mayor aporte de ésta, está dado por la fundamental con la ecuación (3.117):

$$Q_1 = V_1 I_1 \text{sen} \varphi_1$$

$$Q_1 = 41.781110394740729 [VAR]$$

→Potencia aparente

Para el cálculo de potencia aparente dada por la ecuación (3.119) y (3.120) los resultados son:

$$S_1 = 151.58[VA]$$

$$S_N = 95.630483340825975[VA]$$

Despejando “S” de la ecuación (3.119) el valor de potencia aparente es:

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_N^2}$$

$$S = 179.2252374639241[VA]$$

→Factor de potencia

Si utilizamos la ecuación (3.122):

$$fp = 0.825994146530629$$

### 4.3 Tablas de comparaciones

Para comparar los resultados obtenidos se presentan las siguientes tablas:

<b>TABLA 4.16 “COMPARACIONES, CASO 3”</b>				
Autor	Potencia activa. a. Potencia aparente real.	Potencia Reactiva. a. Potencia aparente reactiva. b. Potencia Reactiva en cuadratura.	a. Distorsión de potencia. b. Potencia ficticia. c. Potencia aparente complementaria. d. Potencia activa complementaria. e. Potencia aparente no fundamental.	Potencia aparente.
Budeanu	143.2710244887436	70.039736889133067	a. 145.8798632581407	216.1321024414629
Fryze	143.2710244887436	X	b. 163.4066922962380	217.3208078975678
Sheperd	a. 197.1761295916865	a. 91.366410951960191	c. 0	217.3160075351101
Sharon	143.2710244887436	b. 140.5271790568043	d. 91.637585509301118	220.6171380235266
IEEE	143.2710244887436	70.744885583913828	e. 150.9499040741663	216.9528768673050
Medida	140	70	X	220.

<b>TABLA 4.17 “COMPARACIONES, CASO 4”</b>				
Autor	Potencia activa. a. Potencia aparente real.	Potencia Reactiva. a. Potencia aparente reactiva. b. Potencia reactiva en cuadratura.	a. Distorsión de potencia. b. Potencia ficticia. c. Potencia aparente complementaria. d. Potencia activa complementaria. e. Potencia aparente no fundamental.	Potencia aparente.
Budeanu	145.7080478703304	36.621309772157105	a. 147.2383287907049	211.9806369548509
Fryze	145.7080478703304	X	b. 98.140063032479077	177.6147984299035
Sheperd	a. 152.1307439637976	a. 96.163419172892802	c. 4.372741016799418	180.0285735931939
Sharon	145.7080478703304	b. 77.362395709098195	d. 76.633422750308142	183.7747708515912
IEEE	145.7080478703304	41.781110394740729	e. 95.630483340825975	179.2252374639241
Medida	140	50	X	180

Sólo se presentaron los casos 3 y 4 ya que en el caso uno no hay componentes armónicas y los cálculos son directos, en el caso 2 la potencia reactiva medida puede verse que el medidor nos indica un valor de cero.

Los valores de potencia aparente presentados por cada autor se compararon con respecto al valor medido, los resultados obtenidos son los siguientes:

<b>TABLA 4.18 “ERROR RELATIVO CASO 3”</b>	
<b>Autor</b>	<b>Error relativo [%]</b>
Budeanu	1.7581352538805
Fryze	1.2178145920146
Shepherd	1.2199965749500
Sharon	0.2805172834212
IEEE	1.3850559694068

Al comparar las potencias aparentes puede verse que la más cercana al valor medido es la dada por Sharon y la de mayor error es la expresada por Budeanu.

Los valores son muy similares, la diferencia radica en cómo se calculó dicha potencia.

<b>TABLA 4.19 “ERROR RELATIVO CASO 4”</b>	
<b>Autor</b>	<b>Error relativo [%]</b>
Budeanu	17.7670205304727
Fryze	1.3251119833869
Shepherd	0.00015874218441
Sharon	2.0970949175507
IEEE	0.00430423631153

Para este caso, Shepher y la IEEE cuentan con la mejor aproximación y de nuevo Budeanu nos da el mayor margen de error.

Algunas de las ventajas y desventajas que se presentaron a la hora de realizar los experimentos del capítulo 4 y que se pueden notar al observar sus ecuaciones, son las siguientes:

#### Budeanu.

##### **-Ventajas.**

Con sus ecuaciones es más sencillo visualizar los efectos de las armónicas al calcular la potencia aparente, ya que dicha definición presenta por separado las potencias.

En el cálculo de flujos de potencia, puede agregarse un nuevo parámetro “D” el cual es ortogonal a la potencia activa y reactiva.

##### **-Desventajas.**

No existe interpretación física al parámetro “D”.

La programación del parámetro “D” es relativamente complicada.

Valores muy alejados al instrumento de medición, al aumentar armónicas al sistema.

#### Fryze

##### **-Ventajas:**

Cálculos relativamente más sencillos.

Se cumple la ecuación general para calcular la potencia aparente sin necesidad de establecer un tercer término.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

##### **-Desventajas:**

Es complicado visualizar los efectos de las armónicas y de la potencia reactiva, debido a que ambos están contenidos en un mismo parámetro.

Es complicado de realizar el cálculo de las corrientes definidas por dicho autor, ya que en la mayoría de la literatura consultada no especifican su origen.

#### Shepherd

##### **-Ventajas:**

Presenta una ecuación definida como “Potencia aparente de distorsión” en la cual se visualizan los efectos de las armónicas presentes sólo en voltaje o sólo en corriente.

Valores comparativos muy cercanos al instrumento de medición al aumentar los efectos de armónicas (el más similar).

**-Desventajas:**

Los efectos de las armónicas y la potencia reactiva se presentan en un mismo parámetro, que en fines de visualización, es más complicado.

Valores alejados al instrumento de medición, al presentarse pocos efectos debidos a armónicas.

Programación relativamente más complicada.

Sharon

**-Ventajas:**

Presenta una ecuación definida como “Potencia activa complementaria” en la cual se visualizan los efectos de las armónicas presentes sólo en voltaje o sólo en corriente (diferente a la establecida por Shepherd).

Programación más sencilla.

**-Desventajas:**

Al igual que Shepherd los efectos de las armónicas y la potencia reactiva se presentan en un mismo parámetro, que en fines de visualización, es más complicado.

Valores lejanos al instrumento de medición, al aumentar los efectos de las armónicas.

IEEE

**-Ventajas:**

Presenta una descomposición en sus definiciones donde es muy sencillo visualizar los efectos de las armónicas y de la fundamental.

Programación sencilla.

Valores muy similares al instrumento de medición cuando hay más efectos de armónicas presentes en el sistema.

**-Desventajas:**

Valores con algo de error al comparar con el instrumento de medición cuando se presentan baja cantidad de armónicas.

## Capítulo 5

### 5 CONCLUSIONES GENERALES

El desarrollo de esta investigación ha cumplido su objetivo planteado, ya que se presentaron algunas comparaciones importantes entre las definiciones de potencia que se han presentado a lo largo de la historia, algunas de éstas son ventajosas ya que nos permiten acceder a la información según sea el caso, por ejemplo hablando de Fryze, es posible acceder a los valores de corriente y de voltaje, debido a que sus definiciones se basan en la descomposición de ésta, por otro lado no nos habla de potencia reactiva como tal, nos menciona una potencia ficticia la cual incluye los efectos de la potencia reactiva y la distorsión de potencia. Otro caso puede ser el de Sharon y Shepherd, quienes contemplan las armónicas presentes ya sea sólo en voltaje o sólo en corriente y es más sencillo observar los efectos de éstas en los cálculos.

En lo personal Budeanu cuenta con una muy buena representación de las ecuaciones de potencia, ya que, separa los efectos de cada tipo de potencia existente en la red, es decir, un efecto considera la potencia activa, otro la potencia reactiva y en un término de su ecuación para el cálculo de potencia aparente se puede apreciar la contribución de la distorsión de potencia o efectos de las armónicas.

En cuanto a la IEEE, el cálculo es más sencillo ya que sólo contemplan los valores rms según sea el caso, voltaje o corriente o suma de armónicas. En sus definiciones es un poco complicado observar los efectos de las armónicas ya que al calcular la potencia aparente sólo se aprecian dos términos (similar a Fryze) potencia activa y potencia aparente no fundamental, pero en cuanto al desarrollo de ésta potencia se aprecia muy claramente los efectos de las armónicas.

Un punto importante que hay que mencionar en esta investigación, es que: cada autor presentaba nuevas definiciones (Budeanu “distorsión de potencia”, Fryze “potencia ficticia”, etc.) pero no se mencionaban las unidades de dichas definiciones.



## 6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] IEEE International conference on power and energy, Johor Bahaur, Malasya, 2008. (Elbuluk M. "The role Power Electronics Future Energy system and green Industrialization").
- [2] Fairley Peter, *dc versus ac the second war of currents has already begun*, IEEE power & energy magazine, num. 104, December 2012.
- [3] Jaramillo M., Gabriel A. y ALVARADO C., Alfonso A. *Electricidad y Magnetismo*, 2ª Preedición, México, Facultad de ingeniería, UNAM, Trillas, 2004.
- [4] Hayt Jr, William H., Kemmerly, Jack E. *Análisis de circuitos en Ingeniería*. Tercera edición en español. McGraw-Hill. México, 1993.
- [5] Meier Alexandra. *Electric Power System*, Wiley Interscience, New Jersey, 2006
- [6] Stevenson William, *Analisis de Sistemas Eléctricos de Potencia*, Segunda edición, McGraw Hill, México, 1988.
- [7] Nilson Riedel, *Electric Circuits*, Eighth edition, Prentice Hall, New Jersey, 2008.
- [8] IEEE Std 1459-2010. *IEEE Standard definition for the measurement of electric power quantities under sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced conditions*, Power System instrumentation and measurements committee, United States, 2010.
- [9] Hirofumi Akagi, *Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning*, IEEE 2007.
- [10] Gringer John, *Análisis de Sistemas de Potencia*, primera edición, McGraw Hill, México, 1996.
- [11] Hacha Enrique, *Facts Modelling and simulation in Power Networks*, Wiley, England, 2004.
- [12] Sandoval, Gonzalo. *Componentes armónicas en sistemas eléctricos de potencia. Generación, efectos y medidas correctivas*. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México, 2004.
- [13] Saada Hadi, *Power System Analysis*, McGraw Hill, New York, 1999.
- [14] Lawrencep. Huelsman, *Teoría de Circuitos*, Segunda Edición, Prentice Hall, México, 1989.
- [15] Johnson E. David, *Análisis Básico de Circuitos Eléctricos*, Cuarta Edición, Prentice Hall, México, 1991.
- [16] Nilson James, *Circuitos Eléctricos*, Sexta edición, Pearson Education, México 2001.
- [17] Bobraw Leonard, *Análisis de Circuitos Eléctricos*, McGraw Hill, México, 1991.
- [18] Alexander K. Charles, *Circuitos Eléctricos*, México, 2003.
- [19] IRWIN David, *Basic Engineering Circuit Analysis*, 8th Edition, Wiley, United Stated of America, 2005.

- [20] Hubert Charles, *Circuitos Eléctricos CA/CC Enfoque Integrado*, McGraw Hill, Colombia, 1985.
- [21] IEEE Proceedings, vol 135, M. A. Slonim, *Power Components in a new System With sinusoidal and Nonsinusoidal Voltages and/or Currents*, USA, March 1988.
- [22] IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 5, Alexander Eigeles Emmanuel, *Power in Nonsinusoidal Situations a Review of Definitions and Physical Meaning*.
- [23] IEEE Sudipta Nath and Pampa Sinha, *Measurement of Power Quality under Nonsinusoidal condition using Wavelet and Fuzzy logic*, Third International Conference on Power System, Kharagpur India December 2009.
- [24] IEEE, Golam Mostafa, *In Quest of Experimental Support for the Increased Real and Reactive in the Czarnecki Power Model under Nonsinusoidal Waveforms*, Proceedings of 2013 2<sup>nd</sup> International Conference and Advances in Electrical Engineering (ICAE 2013) 19-21 December, 2013, Dhaka, Bangladesh.
- [25] C. Budeanu, "Reactive and Fictitious Powers", Publ. No.2 of the Rumanian National Inst. Bucuresti 1927.
- [26] S. Fryze, "Active, Reactive and Apparent Powers in Networks with Nonsinusoidal Waveforms of Voltage and Current", ETZ, Vol. 53, No.25, 1932.
- [27] A. E. Emanuel, "Power in Nonsinusoidal Situations. A review of Definitions and Physical Meaning", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 5, No.3, July 1990.
- [28] I. S. Czarnecki "Considerations on the Reactive Power in Nonsinusoidal Situations", International Conference on Harmonics in Power Systems, Worcester Polytechnic Institute, Worcester, 1984.
- [29] Shepherd, W. and Zand P., "Energy Flow and Power Factor in Nonsinusoidal Circuits, (Cambridge University Press, 1979).
- [30] Sharon D. "Reactive Power Definitions and Power Factor Improvement in Nonlinear Systems", Proc. IEE, 120, 1973.
- [31] Steinmetz C. P. "Theory of Alternating Current Phenomena", McGraw Hill, New York, 1987, p.78-93.
- [32] Iliovici M. "Definition et mesure de la Puissance et de L'Energie Reactives", Bulletin de la Soc. Francaise des Electriciens, 1925, p.931-935.
- [33] IEEE. "The New IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms" Fifth Edition, IEEE, (1993).
- [34] Czarnecki L. S. "What is Wrong with the Budeanu Concept of Reactive and Distortion power and why it should be Abandoned", IEEE, Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 3, 1987.
- [35] Shepherd, W. and Zakikhani, P. , "Suggested Definition of Reactive Power in NonSinusoidal Situations" Proc. IEE, Vol. 119 , 1972
- [36] IEEE Working Group on Nonsinusoidal Situations, "Practical Definitions for Power in Systems with Nonsinusoidal Waveforms and Unbalanced Loads: A Discussion". IEEE Transactions on Power Delivery, Vol 11, No. 1 1996.
- [37] IEEE "Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions", 2010.

- [38] M. Erhan “Comparison of Power Definition of Reactive Power Compensation in Nonsinusoidal Conditions”, 2004
- [39] Emanuel A. E., “Energetical Factors in Power Systems with Nonlinear Loads”, 1977.
- [40] Czarnecki L. S “Scattered and Reactive Current, Voltage and Power in Circuits with Nonsinusoidal Waveforms and Their Compensation”, IEEE, Transactions on Instrumentation and Measurement, 1991.
- [41] Dorf Richard. *Circuitos Eléctricos*. Sexta edición. Alfaomega. México, 2006.
- [42] EGUILUZ L. I., Arrillaga, J “Comparison of Power Definitions in the Presence of Waveform Distortion”, Int. J. Elect. Enging. Educ., Vol 32, (April 1995).
- [43] N. L. Kusters and W. J. M. Moore, “On the definition of reactive power under Nonsinusoidal conditions”, IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99, No. 5, pp 1845-1854, 1980.
- [44] Lara, P “Aportación de las definiciones de potencia en régimen polifásico no sinusoidal”. Tesis Doctoral. Dpto. de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad de Cantabria, 1999.
- [45] Spinadel Erico, Circuitos eléctricos y magnéticos temas especiales”, 2da edición, ed. nueva librería, Buenos Aires Argentina, 2004.
- [46] Masoudipour Iman, “Comparison of various reactive power definitions in non sinusoidal networks with the practical data of electrical arc furnace”, CIRED, Stockholm, 10-13 June 2013
- [47] CFE, “Instructivo para la interpretación y aplicación de las tarifas para el suministro y venta de energía eléctrica”, pg. 34-35, noviembre 2004.
- [48] John Cowdrey “the war of the currents”, pg. 88-92, 2006.
- [49] Norma Oficial Mexicana NOM-028-ENER-2010 “Eficiencia Energética de lámparas para uso general. Limitantes y métodos de prueba”.

## ANEXO

Código implementado en MATLAB.

```
%Código para el calculo de potencias aparantes de 5 autores, caso 4

clc
format long

p=0;
q=0;
d=0;
d1=0;
d2=0;
v_a =0;
i_a=0;
v_total =0;
i_total =0;
q1=0;
p1=0;
vh=0;
ih=0;
ph=0;
vh_e =0;
ih_e=0;
sc_sha=0;
s_b =0;
sc1 =0;
sc2=0;
sq1=0;
pr=0;
pr1=0;
c1 =0;
c2=0;
pr=0;
sr1=0;
sx1=0;
sm =180;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%seccion de datos
val=116.6;
vag1=0;
va2=0;
vag2=0;
va3=6.4;
vag3=67;
va4=0;
vag4=0;
```

```
va5=3.5;
vag5=-109;
va6=0;
vag6=0;
va7=1;
vag7=-15.;
va9=1.8;
vag9=126;
va11=1;
vag11=-146;
va13=1.5;
vag13=-13;
va15=0.6;
vag15=77;

va17=0.5;
vag17=180;
va19=0.2;
vag19=-41;
va21=0.6;
vag21=37;
va23=0.4;
vag23=180;
va25=0.2;
vag25=-103;
va27=0.4;
vag27=44;
va29=0.3;
vag29=117;
va31=0.2;
vag31 =-115;

ia1= 1.3;
iag1= 16;
ia2= 0.03;
iag2= 136;
ia3= 0.74;
iag3= -140;
ia4= 0.02;
iag4= -146;
ia5= 0.29;
iag5= 71;
ia6= 0.01;
iag6= -109;
ia7= 0.13;
iag7= -12;
ia9= 0.07;
iag9= -162;
ia11= 0.05;
iag11= -74;
ia13= 0.05;
iag13= 96;
ia15= 0.02;
iag15= 98;
ia17= 0.04;
iag17= -70;
ia19= 0.01;
```

```

iag19= 72;
ia21= 0.03;
iag21= 138;
ia23= 0.01;
iag23= -53;
ia25= 0.01;
iag25= 6;
ia27= 0.01;
iag27= 152;
ia29= 0;
iag29= 0;
ia31= 0.01;
iag31 = 6;

%fin seccion datos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Ecuación

vol = [va1 va3 va5 va7 va9 va11 va13 va15 va17 va19 va21 va23 va25 va27
va29 va31];
cor = [ia1 ia3 ia5 ia7 ia9 ia11 ia13 ia15 ia17 ia19 ia21 ia23 ia25 ia27
ia29 ia31];

ang_v = [vag1 vag3 vag5 vag7 vag9 vag11 vag13 vag15 vag17 vag19 vag21
vag23 vag25 vag27 vag29 vag31];
ang_i = [iag1 iag3 iag5 iag7 iag9 iag11 iag13 iag15 iag17 iag19 iag21
iag23 iag25 iag27 iag29 iag31];

for i=1:1:16;
    dif_ang(i) = (ang_v(i) + ang_i(i))*pi/180;
end

                                %VOLTAJES Y CORRIENTES
%FUNDAMENTALES
v1 = vol(1)*cos(ang_v(1)*pi/180);
i1= cor(1)*cos(ang_i(1)*pi/180);

%ARMONICAS.
for i=2:1:16;
    vh = vh + vol(i)*cos(ang_v(i)*pi/180);
end
for i=2:1:16;
    ih = ih + cor(i)*cos(ang_i(i)*pi/180);
end

%VALORES EFICACEZ

for i=2:1:16;
    vh_e = vh_e + vol(i)^2;
end
    vh_ef = sqrt(vh_e);

for i=2:1:16;
    ih_e=ih_e + cor(i)^2;
end
    ih_ef = sqrt(ih_e);

```

```

        %VOLTAJE Y CORRIENTE
        v_ef = sqrt(vol(1)^2 + vh_ef^2);
        i_ef= sqrt(cor(1)^2 + ih_ef^2);

%Potencia activa A
for i=1:1:16;
        p = p + vol(i) *cor(i)*cos(dif_ang(i));
end
%Potencia reactiva R
for i=1:1:16;
        q = q + vol(i) *cor(i)*sin(dif_ang(i));
end

%potencia reactiva fundamental
for i=1:1:1;
        q1 = q1 + vol(i) *cor(i)*sin(dif_ang(i));
end
%potencia activa fundamental
for i=1:1:1;
        p1 = p1 + vol(i) *cor(i)*cos(dif_ang(i));
end
%potencia Aparente S GENERAL
for i=1:1:16;
        v_a = v_a + vol(i)^2;
        i_a = i_a + cor(i)^2;
end
s= sqrt(v_a) * sqrt(i_a);

%DEFINICIONES IEEE //////////////////////////////////////

%potencia de armonicas
for i=2:1:16;
        ph = ph + vol(i) *cor(i)*cos(dif_ang(i));
end

        p_ieee= p1 + ph;%ACTIVA IEEE
        s1 = vol(1)*cor(1);
        sn_ieee= sqrt( (vol(1)* ih_ef)^2 + (vh_ef*cor(1))^2 +
(vh_ef*ih_ef)^2);

        s_ieee= sqrt(s1^2 + sn_ieee^2) ;%Potencia aparente IEEE

sh= vh*ih;
thd_v= vh/ vol(1);
thd_i = ih / cor(1);
fp= p/s_ieee; %Factor de potencia general

%Distorsion de potencia BUDEANU////////////////////////////////////

for i=1:1:16;

        d1= d2 + (vol(i)^2 * cor(i)^2);

        if(i~=j)
                for j=1:1:16;

```

```

        d2 = d2 + vol(i)*vol(j)*cor(i)*cor(j)*cos((ang_v(i) +
ang_i(j))*pi/180);

        end
    end
end

d= sqrt(d1); %Distorsión de potencia Budeanu
s_b = sqrt(p^2 + q^2 + d^2); %Potencia aparente Budeanu

%FRYZE////////////////////////////////////
for i=1:16;
    v_total = v_total + vol(i)*cos(ang_v(i)*pi/180);
    i_total = i_total + cor(i)*cos(ang_i(i)*pi/180);
end

    ia_f = p/(v_ef)^2 * v_total;

    ir_f = sqrt(i_ef^2 - ia_f^2);

    q_f = v_ef * ir_f;

    s_f = sqrt(p^2+q_f^2); %Potencia aparente Fryze

%SHEPHER //////////////////////////////////
for i=1:1:16;
    for j=1:16;
        c1 = c1+ cor(j)^2 * cos(dif_ang(j))^2;
    end
    sr1 = sr1 + vol(i)^2*c1;
end
sr = sqrt(sr1);

for i=1:1:16;
    for j=1:16;
        c2 = c2+ cor(j)^2 * sin(dif_ang(j))^2;
    end
    sx1 = sx1 + vol(i)^2*c2;
end
sx = sqrt(sx1);

for i=1:16;
    pr1 = ia2^2 + ia4^2 + ia6^2;
    pr = pr +vol(i)^2*pr1;
end
scz = sqrt(pr);

s_shep = sqrt (sr^2 + sx^2 + scz^2); %Potencia aparente Shepherd

%SHARON////////////////////////////////////
for i=1:16;

    sq1 =sq1 + (v_ef*cor(i) * sin(ang_i(i)*pi/180))^2;
    sq= sqrt(sq1) ;

```

```

end
%valores sólo de corriente
for i=1:16
    sc2 = v_ef^2*(ia2^2+ ia4^2 +ia6^2);
end
%armonicas cruzadas
for i=1:1:16;
    for j=1:1:16;
        if (i~=j)
            sc1 = sc1 + 0.5*(vol(i)*cor(j)*cos(ang_i(j)*pi/180) ...
                - vol(j)*cor(i)*cos(ang_i(i)*pi/180))^2;
        end
    end
end

sc= sqrt(sc1 + sc2); %contemplando armonicas únicas
s_sha = sqrt( p^2 + sq^2 + sc^2); %Potencia aparente Sharon

```