



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
MECÁNICA – MECÁNICA APLICADA

SÍNTESIS DE POSICIÓN DE MECANISMOS ESPACIALES CON ESLABONES Y  
ENGRANES

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
FRANCISCO DE MATIAS AGUILAR

DR. FRANCISCO CUENCA JIMÉNEZ-FACULTAD DE INGENIERÍA  
DR. FERNANDO VELÁZQUEZ VILLEGAS-FACULTAD DE INGENIERÍA  
DR. OCTAVIO DÍAZ HERNÁNDEZ-FACULTAD DE INGENIERÍA  
DR. PATRICIO MARTÍNEZ ZAMUDIO-FACULTAD DE INGENIERÍA  
DR. RICARDO YÁÑEZ VALDEZ-FACULTAD DE INGENIERÍA

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Fernando Velázquez Villegas

Secretario: Dr. Ricardo Yáñez Valdez

Vocal: Dr. Francisco Cuenca Jiménez

1<sup>er</sup>. Suplente: Dr. Patricio Martínez Zamudio

2<sup>d o</sup>. Suplente: Dr. Octavio Díaz Hernández

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México.

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Francisco Cuenca Jiménez

-----  
**FIRMA**

(Segunda hoja)

# *Dedicatoria*

*Dedico este trabajo a mis padres, María de Lourdes Aguilar Santelises y José Narciso Hipólito de Matias Pérez.*

*Porque gracias a su apoyo y amor es que encontré la fuerza para comenzar y concluir esta nueva etapa que guardaré por siempre con eterno agradecimiento después de todo lo que vivimos juntos y en la distancia durante este proceso.*

*Tras acontecimientos recientes, la palabra “oportunidad” viene a mi mente.*

*Hoy tengo la oportunidad de decirles: “Gracias papá, gracias mamá, los amo.”*

# Agradecimientos

*A mi tutor Francisco Cuenca Jiménez. Su dedicación y pasión por la docencia serán siempre admirables. Los alcances que he logrado han sido en gran medida a su profesionalismo y esfuerzo en su actividad docente y por su paciencia al guiarme en mi preparación durante este proyecto. Expresándole mi más sincero respeto y admiración le agradezco la oportunidad de esta experiencia. Ha sido un honor trabajar con usted.*

*A mis sinodales, Dr. Francisco Cuenca J., Dr. Fernando Velázquez V., Dr. Octavio Díaz H., Dr. Patricio Martínez Zamudio y Dr. Ricardo Yáñez V. por sus valiosas y oportunas observaciones al revisar mi trabajo.*

*Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por brindar a la humanidad este espacio que es posgrado de la Facultad de Ingeniería.*

*Gracias a CONACYT por la beca de apoyo económico brindado durante estos dos años, concluir este proyecto no habría sido posible sin su apoyo.*

*Al equipo del Laboratorio de Mecánica Aplicada del Centro Tecnológico Aragón de la FES Aragón, Ángel Romero, Salvador Cabrera, Iván Leos, Néstor García, Rodrigo Lechuga y Carlos Reséndiz por ser buenos amigos y siempre un buen apoyo moral.*

*Al Dr. Jacinto Cortés Pérez por darme la oportunidad recientemente de poner en práctica mis conocimientos en proyectos conjuntos con su equipo de trabajo. Un buen profesor, colega y amigo.*

*Al M. en I. Alberto Reyes Solís por brindarme su apoyo en mi labor docente, así como facilitarme material bibliográfico para el desarrollo de mi tesis. Trabajar con usted es siempre un gusto. Muchas gracias por sus alientos y amistad.*

*A toda mi familia, por brindar un espacio siempre agradable donde descansar y convivir. Gracias a todos por su apoyo y ánimo.*

*Gracias a la carrera de Ingeniería Mecánica de la FES Aragón y a sus alumnos, formar parte de su línea de profesores se ha convertido en otra gran motivación para concluir esta meta y buscar otras nuevas y seguirme superando. Enseñar en la carrera de Ingeniería Mecánica, en la FES Aragón, es para mí un honor y uno de mis más grandes orgullos.*

*Al Ing. Alfredo Velasco Rodríguez y al Ing. Alexis Sampedro Pinto por su apoyo constante en la labor docente.*

# Resumen

El presente trabajo de tesis trata el tema de la síntesis de mecanismos espaciales con eslabones y engranes. Esta combinación de elementos es muy común cuando se diseñan mecanismos que requieran gran capacidad de movimiento y carga también.

Existen diversas metodologías y teorías para sintetizar mecanismos planos y espaciales, las cuales son muy prácticas para algunas condiciones, como el método de número complejos para la síntesis de mecanismos planos con eslabones y engranes, el cual es un método relativamente simple de comprender en conceptos matemáticos pero tiene el inconveniente de quedar limitado al diseño de mecanismos planos debido a que la interpretación geométrica de un número complejo es un vector de  $\mathbb{R}^2$  con dos componentes.

Bajo el concepto de contar con una metodología que bajo los mismos principios matemáticos pueda abarcar problemas de plano y el espacio, considerando además la implementación de trenes de engranes a la cadena cinemática de eslabones, así como condiciones de posición, velocidad y aceleración. Se plantea establecer ecuaciones de síntesis de mecanismos espaciales que involucren eslabones y engranes, esto mediante el método de matrices de desplazamiento, el cual es aplicable tanto a problemas planos como espaciales.

Resultados de síntesis de mecanismos planos con eslabones y engranes, así como su equivalente esférico, son obtenidos exitosamente para puntos de precisión con condiciones de posición velocidad y aceleración, dejando notar que el método de matrices de desplazamiento es un método de fácil comprensión para la síntesis de mecanismos planos y además permite dar el salto a la síntesis de mecanismos espaciales con eslabones y engranes sin requerir de una nueva formulación matemática en cuanto a la herramienta matemática que se utiliza.

## Contenido

Resumen .....	iv
Capítulo 1 .....	1
Generalidades. ....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Motivación.....	2
1.3 Estado del arte. ....	3
1.4 Objetivo. ....	4
1.5 Justificación. ....	4
Capítulo 2 .....	6
Síntesis de mecanismos planos con eslabones y engranes. ....	6
2.1 Introducción.....	6
2.2 Fundamentos.....	8
2.2.1 Matrices de desplazamiento.....	9
2.2.2 Matrices de desplazamiento diferencial. ....	10
2.2.3 Razón de engranes de trenes planetarios. ....	11
2.2.4 Síntesis de generador de función de cinco barras engranado. ....	13
2.3 Síntesis de un mecanismo de 4 barras engranado revertido. ....	16
2.3.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.....	18
2.3.2 Ecuaciones cinemáticas de los engranes. ....	19
2.3.3 Función objetivo.....	19
2.3.4 Coeficientes de influencia .....	20
2.3.5 Ejemplos de diseño de un mecanismo de cuatro barras engranado revertido. ....	24
2.4 Diseño de un mecanismo de 4 barras engranado.....	28
2.4.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.....	29
2.4.2 Ecuaciones cinemáticas de los engranes. ....	29
2.4.3 Coeficientes de influencia. ....	30
2.4.4 Ejemplo de diseño de un mecanismo de cuatro barras engranado con condición de detenimiento. ....	30
Capítulo 3 .....	35
Síntesis de mecanismos esféricos con eslabones y engranes. ....	35
3.1 Introducción.....	35
3.2 Fundamentos.....	35

---

3.2.1 Matrices de desplazamiento espacial.....	35
3.2.2 Matrices de desplazamiento diferencial espaciales. ....	37
3.2.3 Razón de trenes cónicos planetarios externos. ....	38
3.2.4 Razón de trenes cónicos planetarios internos.....	43
3.3 Síntesis de un mecanismo esférico de 4 barras engranado revertido. ....	49
3.3.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.....	49
3.3.2 Ecuaciones cinemáticas de los engranes. ....	50
3.3.3 Coeficientes de influencia. ....	51
3.3.4 Ejemplo de diseño de un mecanismo de cuatro barras engranado revertido.....	59
3.4 Diseño de un mecanismo esférico de 4 barras engranado.....	64
3.4.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.....	64
3.4.2 Ecuaciones de diseño de los engranes. ....	65
3.4.3 Coeficientes de influencia. ....	67
3.4.4 Ejemplo de diseño de un mecanismo esférico de cuatro barras engranado con condición de detenimiento.....	68
Conclusiones.....	72
Trabajo Futuro .....	74
Referencias .....	75

# Capítulo 1

## Generalidades.

### 1.1 Introducción.

La mayor parte de los mecanismos utilizados en las máquinas son mecanismos clasificados como planos, ya que estos se caracterizan por contener siempre su movimiento en planos geométricos paralelos entre ellos. Sin embargo, es necesario romper la limitante del movimiento plano cuando se requiere de tareas que involucren movimiento en el espacio.

Un mecanismo esférico, análogamente a los mecanismos planos, es aquel que su movimiento siempre recae sobre el lugar geométrico de una esfera.

En general, un mecanismo espacial es aquel que su movimiento no está limitado a un plano fijo y es por esta razón que los mecanismos esféricos pueden ser considerados como mecanismos espaciales.

La síntesis dimensional es la determinación de la longitud de los eslabones para lograr una tarea requerida, esto suponiendo que ya se ha definido el tipo y cantidad de elementos que se implementaran en el mecanismo. La síntesis dimensional se divide en tres tipos: conducción de cuerpo, generación de trayectoria y generación de función.

Existen diversas metodologías para la solución de los problemas de síntesis dimensional en eslabonamientos planos, así como síntesis de eslabonamientos planos con engranes, considerando este último como un caso más general en la síntesis de mecanismos planos.

Por otro lado, si bien existen también métodos para resolver la síntesis dimensional de mecanismos espaciales, estos no son una extensión de la aplicación de los métodos de síntesis en mecanismos planos, generalmente basados en el álgebra de números complejos. Por esta razón, en el presente trabajo de tesis se presenta una extensión de los métodos matriciales desarrollados por Chung Ha Suh y Charles Radcliffe [1], de tal forma que pueda ser utilizada y generalizada para la síntesis de mecanismos planos y espaciales con eslabones y engranes para satisfacer condiciones de posición velocidad y aceleración.

## 1.2 Motivación.

Hasta ahora han sido utilizados varios métodos matemáticos para desarrollar la teoría cinemática de mecanismos, tales como el álgebra de números complejos, álgebra de números duales y cuaterniones, entre otros.

En el caso del álgebra de números complejos, se trata de un método sencillo y eficaz para analizar y sintetizar mecanismos planos, pero con el inconveniente de no poder expandir dicha teoría a mecanismos espaciales. Los métodos de números duales y cuaterniones permiten desarrollar la teoría para la cinemática de mecanismos tanto planos como espaciales pero requieren de conocimientos matemáticos más complejos en comparación con el método de números complejos.

C. H. Suh [1] presenta un método matricial que ha implementado exitosamente en el análisis y síntesis de mecanismos planos y espaciales únicamente con eslabonamientos. Una de las ventajas del método de matrices de desplazamiento desarrollado por Suh, es la fácil adaptación a problemas del plano y el espacio sin requerir grandes modificaciones en la metodología ni fundamentos matemáticos adicionales.

Es precisamente por esta facilidad de aplicar el método a mecanismos planos y también a mecanismos espaciales, que surgió la motivación para extender la aplicación de los métodos matriciales de Suh a la solución de síntesis de mecanismos planos y esféricos que ahora involucren engranes.

Los mecanismos constituidos por eslabones, tienen la característica de generar una gama amplia de movimientos, por otro lado, los trenes de engranes tienen como principal función la transmisión de movimiento, potencia o torque entre ejes. Al implementar un tren de engranes a una cadena de eslabones se forma un sistema de un mecanismo con eslabones y engranes, el cual tiene las principales virtudes ya mencionadas, un mecanismo capaz de producir una amplia variedad de movimientos con la posibilidad de multiplicación de torques. Ésta combinación de características es idónea en mecanismos utilizados en prótesis ya que por lo general, la instalación de los mecanismos se lleva a cabo en espacios reducidos por lo que la implementación de los trenes de engranes en el mecanismo permite minimizar el torque del motor del eslabón de entrada sin sacrificar la movilidad de la prótesis como lo presenta Claudio A. Domínguez M. [2] en el diseño de un mecanismo con eslabones, engranes y resortes para ser instalado en el codo de una prótesis para antebrazo.

Un mecanismo que genere movimiento plano es suficiente para el diseño de la prótesis mencionada en la referencia [2], sin embargo, mecanismos esféricos engranados pueden ser una opción adecuada para el movimiento espacial de una prótesis de hombro.

## 1.3 Estado del arte.

Es frecuente que en el ámbito industrial se requieran diseñar mecanismos que puedan producir movimientos intermitentes o no uniformes. Mecanismos de cuatro barras pueden ser sintetizados para llevar a cabo esta tarea, sin embargo cuando el movimiento a cumplir es muy complejo o necesite de una correlación entrada-salida, difícil de obtener con un mecanismo de cuatro barras, la implementación de engranes en el diseño del mecanismo suele satisfacer los requerimientos del diseño de una forma económica. [3]

A.G Erdman y G.N Sandor [3,4] han presentado un método para la síntesis cinemática de mecanismos con eslabones y engranes utilizando ecuaciones en números complejos para el diseño de mecanismos generadores de función. A diferencia de los métodos gráficos para la síntesis de mecanismos, los cuales suelen requerir de mucha intuición por parte del diseñador, el poder establecer ecuaciones algebraicas por medio de números complejos vuelve a éste método, definido como analítico por su planteamiento matemático, propicio para computarización. Esto último beneficia al diseñador al momento de iterar entre el proceso de síntesis y análisis de lo que se ha sintetizado para así hacer correcciones en un nuevo proceso de síntesis de ser necesario.

Suh [5] ha logrado aplicar las matrices de desplazamiento a la síntesis de un mecanismo de 5 barras con un par de engranes hasta para un máximo de 8 puntos de precisión al considerar la relación de engranes como una variable en las ecuaciones de diseño.

S.A Oleksa [6,7] y D. Tesar [7] han presentado trabajos también sobre la síntesis de mecanismos planos engranados de cinco barras para generación de función.

Joseph Duffy [8] analiza el desplazamiento de diferentes configuraciones de eslabonamientos engranados de 5 barras, incluyendo juntas rotacionales y prismáticas en el plano, así como sus correspondientes esféricos.

C.H. Chiang [9] presenta una obra dedica en su totalidad al estudio de los mecanismos esféricos, donde además comenta que a su conocimiento, fue apenas la segunda publicación con dichas características desde el trabajo de Dobrovolskii [10], convirtiéndose en una referencia casi obligada en el estudio de los mecanismos esféricos.

Parlaktas, Söylemez y Tanik [11] presentan un método para el análisis y síntesis de un mecanismo de cuatro barras con topología de juntas ternarias obteniendo conclusiones sobre como el efecto de la relación de engranes afecta el ángulo de transmisión, haciéndose éste último más grande mientras la razón de engranes lo haga también.

Estudios sobre la síntesis de mecanismos engranados para aplicaciones con detenimiento han sido presentadas por T. W. Lee y Y. Shereshevsky [12], presentando procedimientos tanto gráficos como analíticos para la síntesis cinemática.

Los mecanismos que involucran eslabones engranados están compuestos por trenes planetarios de éstos, trenes planetarios planos para los mecanismos planos y trenes planetarios cónicos para los mecanismos esféricos.

Los dispositivos médicos, como son los instrumentos o herramientas para llevar a cabo procedimientos quirúrgicos han sido beneficiados de la aplicación de sistemas de engranes en sus eslabonamientos ya que éstos permiten controlar la precisión gracias a la razón de engranes sin perder la fuerza o sujeción como el sujetador (grasper) presentado por Baoliang Zhao y Carl A. Nelson [13] el cual les ha permitido obtener un diseño de espacio eficiente.

Una aplicación directa de un mecanismo esférico engranado es presentada por Xialo Zhang y Carl A. Nelson [14,15] implementado en un robot serial para asistencia quirúrgica, CoBRASurge. Al tratarse de un mecanismo esférico, tiene la característica de que su actuador final se desplaza siempre apuntando hacia el centro de una esfera imaginaria, lo cual se convierte en una ventaja quirúrgica ya que permite llegar al sitio de interés desde diferentes ángulos y al mismo tiempo ser menos invasivo en el procedimiento debido a que solo es necesaria una pequeña incisión para realizar el trabajo.

## 1.4 Objetivo.

Establecer ecuaciones de síntesis de mecanismos espaciales que involucren eslabones y engranes mediante el método de matrices de desplazamiento para satisfacer condiciones cinemáticas de posición, velocidad y aceleración.

## 1.5 Justificación.

Para realizar su tarea, una máquina puede incluir elementos como eslabones, engranes, levas, resortes, bandas, cadenas, poleas, etc. Las técnicas de síntesis actuales han tratado de incluir dichos elementos en sus ecuaciones de diseño; sin embargo, la mayoría de las ecuaciones son para el movimiento plano.

Suh y Radcliffe han logrado sintetizar mecanismos para condiciones de posición incluyendo velocidades y aceleraciones para el primer punto de precisión de síntesis, esto en mecanismos únicamente con eslabonamientos.

En cuanto a la síntesis de mecanismos esféricos con matrices de desplazamiento, presentan exclusivamente síntesis para condiciones de posición. Por ésta razón, aplicar el método de matrices de desplazamiento a mecanismos con eslabones y engranes considerando condiciones de posición, velocidad y aceleración, extendería dicha metodología a una gama mucho más amplia de problemas en la síntesis de mecanismos bajo una misma teoría, siendo el diseñador el principal beneficiado de esto ya que no se vería en la necesidad de estudiar

una nueva metodología, muy probablemente basada en distintos conceptos o fundamentos matemáticos, cuando requiera diseñar mecanismos con las características y elementos anteriormente mencionados.

## Capítulo 2

# Síntesis de mecanismos planos con eslabones y engranes.

### 2.1 Introducción.

Para diseñar un mecanismo, no basta el uso de técnicas matemáticas, de hecho antes de poder hacer uso de ellas es necesaria la determinación del tipo de mecanismo que se utilizará, es decir el tipo de elementos que involucrará la cadena cinemática (eslabones, engranes, levas, bandas, etc). Esta etapa es un proceso más cualitativo que cuantitativo y requiere más de la experiencia y creatividad del ingeniero que de técnicas matemáticas. Este proceso es conocido como síntesis de tipo.

Una vez que se ha propuesto una configuración de elementos, conociendo su tipo, cantidad y forma de ensamble, el siguiente paso es especificar el tamaño o dimensiones de cada uno de los elementos incluidos en el mecanismo, esto se le conoce como síntesis dimensional.

El objetivo principal de la síntesis dimensional de eslabonamientos es determinar la longitud de los eslabones del mecanismo, de tal forma que uno de los eslabones satisfaga un movimiento deseado. [16]

La síntesis dimensional se divide básicamente en tres tipos, a) Síntesis de conducción de cuerpo, b) Síntesis de generación de trayectoria y c) generación de función. Los tres tipos de síntesis mencionados son casos particulares, aunque un problema de aplicación bien podría estar compuesto por más de uno de los tipos de síntesis mencionados.

a) Síntesis de conducción de cuerpo.

La conducción de cuerpo se presenta cuando se requiere guiar un cuerpo rígido a través de una serie de posiciones especificadas que pueden llegar a contemplar restricciones de velocidad y aceleración deseadas en dichas posiciones.

La Figura 2.1 muestra un mecanismo obtenido a partir de la síntesis dimensional de conducción de cuerpo, este mecanismo logra conducir un cuerpo rígido a través de tres posiciones específicas.

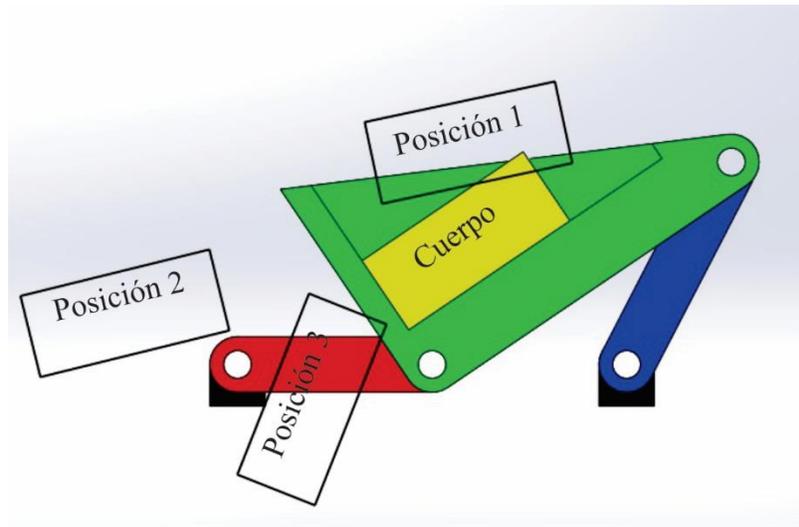


Figura 2.1 Conducción de cuerpo.

b) Síntesis de generación de trayectoria.

Un mecanismo de generación de trayectoria es diseñado para que un punto de uno de sus eslabones flotantes pase por una secuencia de puntos pertenecientes a una curva. Ya que una trayectoria tiene infinitud de puntos, ésta debe discretizarse en un número finito de pares o ternas ordenadas, según sea el caso del tipo de mecanismo (plano o espacial), para obtener un mecanismo que genere una trayectoria lo más parecida a la curva objetivo.

La Figura 2.2 muestra un mecanismo esférico sintetizado para generar la trayectoria mostrada que ha sido discretizada por cinco puntos de precisión sobre ella.

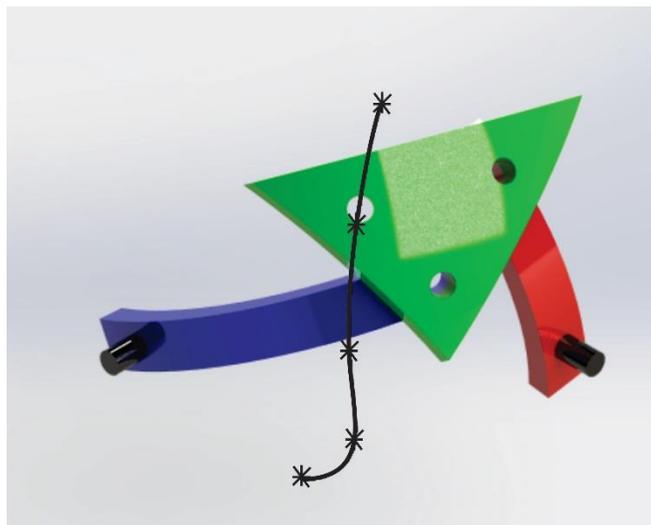


Figura 2.2 Generación de trayectoria.

c) Síntesis de generación de función

La síntesis de un mecanismo generador de función se presenta cuando se desea tener control sobre la relación entre el movimiento del eslabón de entrada y el de salida.

El mecanismo de la Figura 2.3 está diseñado de tal forma que el ángulo de salida  $\psi$  es una función dada del ángulo de entrada  $\phi$ .

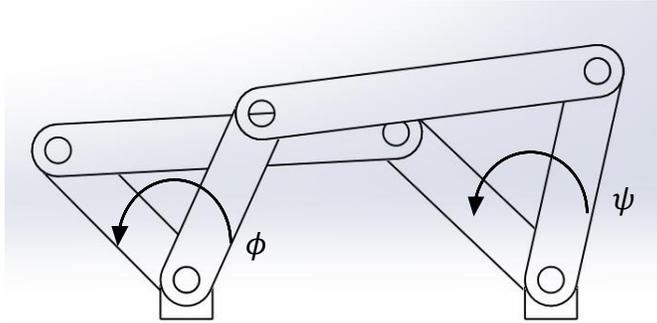


Figura 2.3 Generación de función.

La síntesis de eslabonamientos planos engranados es un tema que ha sido estudiado por Sandor y Erdman [3]. En su metodología resuelven el problema de generación de función para un mecanismo de 5 barras engranado.

La solución del problema de síntesis se lleva a cabo planteando ecuaciones de diseño de lazo cerrado expresadas en números complejos. El efecto de la razón de engranes sobre el mecanismo y la salida de éste respecto a la entrada se calcula determinando la razón del tren planetario implementado en la cadena cinemática.

Análogamente a la secuencia seguida por Sandor y Erdman, el presente capítulo muestra el desarrollo de las ecuaciones de diseño obtenidas por medio de las ecuaciones de longitud constante y sus derivadas.

## 2.2 Fundamentos.

La herramienta matemática para describir el movimiento plano de un cuerpo rígido está dada por las matrices de desplazamiento, las cuales definen matricialmente el desplazamiento lineal experimentado por un punto de referencia del cuerpo rígido, así como el desplazamiento angular de este último.

### 2.2.1 Matrices de desplazamiento.

La matriz  $[D_{1j}]$  es la matriz de desplazamiento que define el desplazamiento de la posición  $j$  –ésima relativa a su posición primera posición. [1]

De acuerdo al desplazamiento plano del cuerpo rígido mostrado en la Figura 2.4, las componentes del punto final  $q_j$  del vector que define la posición y orientación del cuerpo rígido se obtienen a aplicar la matriz  $[D_{1j}]$  al punto en su posición inicial,  $q_1$ .

$$(q_j) = [D_{1j}](q_1) \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} q_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{\theta_{1j}}] & (p_j - [R_{\theta_{1j}}]p_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Donde  $[R_{\theta_{1j}}]$  es la matriz de rotación de  $2 \times 2$  que indica el desplazamiento angular relativo de la posición  $j$  –ésima desde la posición inicial con eje de giro en el punto  $p_1$ .

Desarrollando la ecuación (2.2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} q_{2x} \\ q_{2y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{12} & -s\theta_{12} & p_{2x} - (c\theta_{12}p_{1x} - s\theta_{12}p_{1y}) \\ s\theta_{12} & c\theta_{12} & p_{2y} - (s\theta_{12}p_{1x} - c\theta_{12}p_{1y}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1x} \\ q_{1y} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

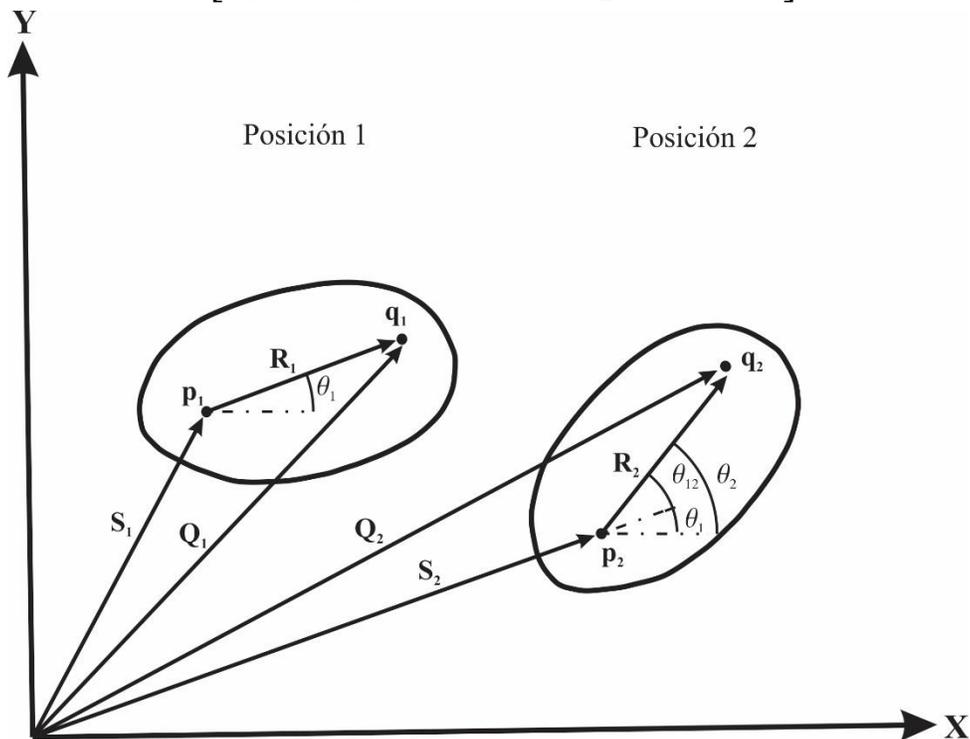


Figura 2.4 Desplazamiento plano de un cuerpo rígido.

### 2.2.2 Matrices de desplazamiento diferencial.

Para diseñar un mecanismo que presente condiciones de velocidad y aceleración específicas para los puntos de precisión de la síntesis, se requiere contar con las derivadas de las ecuaciones de longitud constante y por consecuencia, una expresión que determine la velocidad y aceleración absoluta de un punto del cuerpo rígido en su posición  $\mathbf{q}_j$ .

La velocidad absoluta  $\dot{\mathbf{q}}_j$  del punto  $\mathbf{q}_j$ , a partir de la Figura 2.5 está dada por: [1]

$$(\dot{\mathbf{q}}_j) = [\mathbf{V}_j](\mathbf{q}_j) \quad (2.3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_j}] & (\dot{\mathbf{p}}_j - [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_j}]\mathbf{p}_j) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

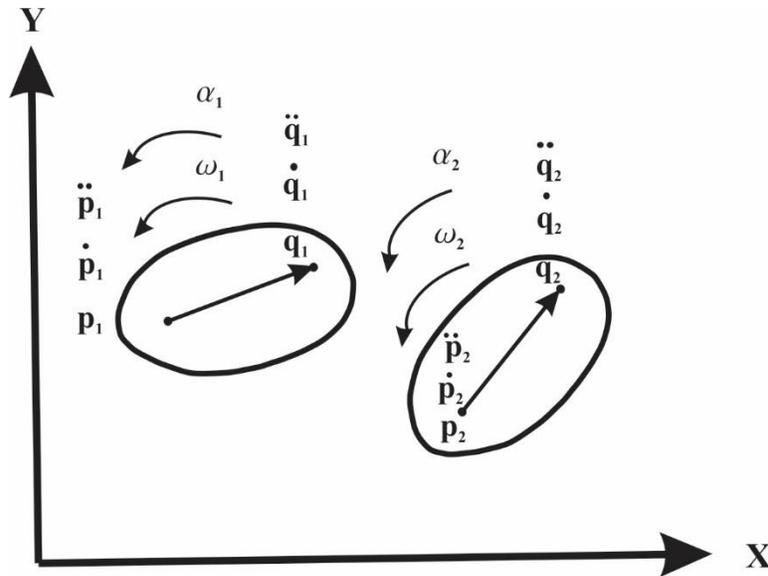


Figura 2.5 Velocidad y aceleración angular absoluta de un cuerpo rígido

Donde los términos  $[\mathbf{V}_j]$  y  $[\mathbf{W}_{\dot{\theta}_j}]$  en las ecuaciones (2.3) y (2.4) reciben el nombre de matriz de velocidad y matriz de velocidad angular respectivamente.

De manera semejante a la velocidad y de acuerdo a la Figura 2.5, la aceleración absoluta  $\ddot{\mathbf{q}}_j$  del punto  $\mathbf{q}_j$ , está dada por:

$$(\ddot{\mathbf{q}}_j) = [\mathbf{A}_j](\mathbf{q}_j) \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\ddot{\theta}_j}] & (\ddot{\mathbf{p}}_j - [\mathbf{W}_{\ddot{\theta}_j}]\mathbf{p}_j) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Donde los términos  $[\mathbf{A}_j]$  y  $[\mathbf{W}_{\ddot{\theta}_j}]$  en las ecuaciones (2.5) y (2.6) reciben el nombre de matriz de aceleración y matriz de aceleración angular respectivamente.

### 2.2.3 Razón de engranes de trenes planetarios.

El método de la fórmula permite obtener una razón de velocidades de los engranes relativa al brazo que mantiene unido el tren [17]. La Figura 2.6 muestra un tren planetario externo de engranes rectos.

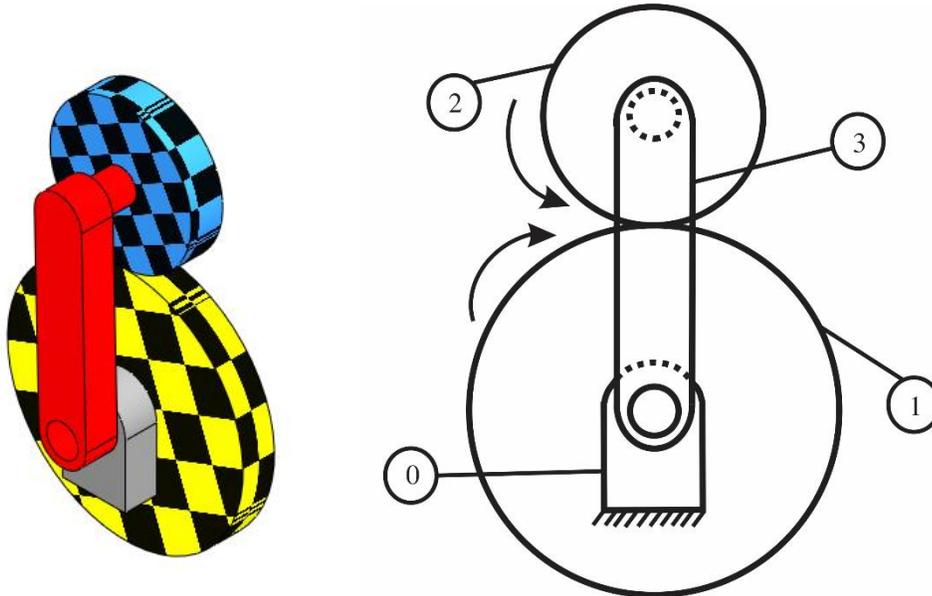


Figura 2.6 Tren planetario externo de engranes rectos.

La razón de velocidades angulares relativas al brazo del tren mostrado en la Figura 2.6 está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{13}} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (2.7)$$

Al escribir las velocidades relativas de la ecuación (2.7) como una diferencia de velocidades absolutas instantáneas, se obtiene:

$$\frac{\omega_{20} - \omega_{30}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (2.8)$$

Donde  $N_i$  es el número de dientes del engrane  $i$ , y el signo negativo se debe al giro contrario de los engranes.

La Figura 2.6 muestra un tren planetario en el que su *sol* (engrane 1) gira respecto a un eje fijo en tierra, sin embargo, un eslabonamiento engranado tendrá trenes planetarios cuyos *soles* sean de hecho el engrane planeta de un par de engranes anterior en la cadena cinemática, para considerar un caso más general, se presenta un tren planetario externo de dos engranes con *sol* móvil como se presenta en la Figura 2.7.

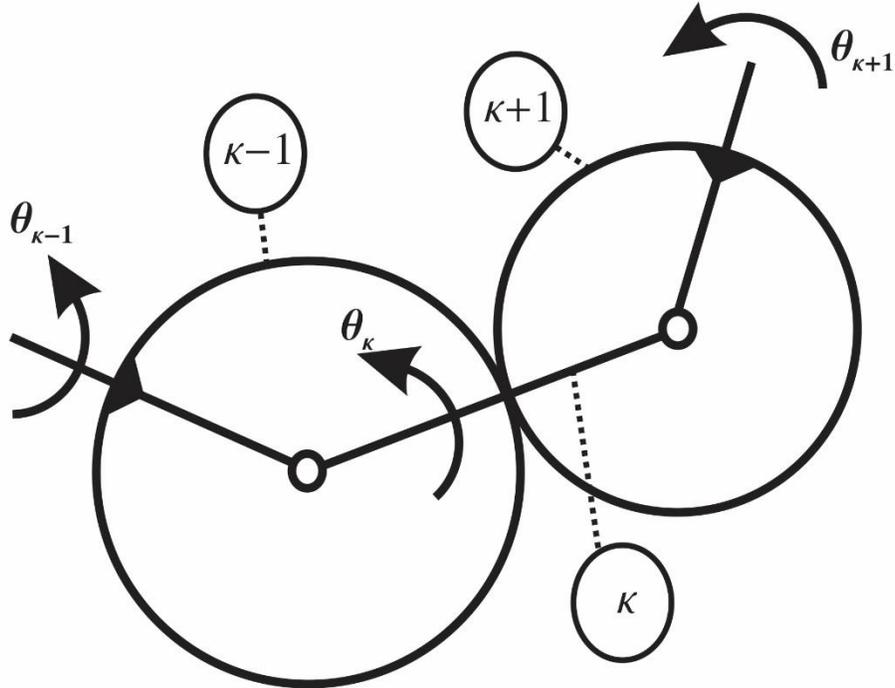


Figura 2.7

Con lo que la ecuación (2.8) puede escribirse como:

$$\frac{\omega_{k+1} - \omega_k}{\omega_{k-1} - \omega_k} = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es válida para las velocidades angulares del tren de engranes en un instante dado, sin embargo, para la síntesis de posición del mecanismo con eslabones y engranes es necesario obtener una ecuación equivalente a la (2.9) pero en función de las posiciones angulares de los engranes. Lo anterior puede llevarse a cabo al despejar y rescribir la ecuación (2.9) de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \omega_{k+1} - \omega_k &= -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} (\omega_{k-1} - \omega_k) \\ \frac{d\theta_{k+1}}{dt} - \frac{d\theta_k}{dt} &= -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} \left( \frac{d\theta_{k-1}}{dt} - \frac{d\theta_k}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Multiplicando los cocientes de diferenciales de la ecuación (2.10) por  $dt$ :

$$d\theta_{k+1} - d\theta_k = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} (d\theta_{k-1} - d\theta_k) \quad (2.11)$$

Integrando los desplazamientos angulares diferenciales:

$$\int_{(\theta_{k+1})_i}^{(\theta_{k+1})_j} d\theta_{k+1} - \int_{(\theta_k)_i}^{(\theta_k)_j} d\theta_k = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} \left( \int_{(\theta_{k-1})_i}^{(\theta_{k-1})_j} d\theta_{k-1} - \int_{(\theta_k)_i}^{(\theta_k)_j} d\theta_k \right) \quad (2.12)$$

Donde los subíndices  $j$  e  $i$  representan la condición  $j$  –ésima e inicial del desplazamiento angular de cada diferencial de desplazamiento angular. Al resolver la ecuación (2.12) se obtiene:

$$[(\theta_{k+1})_j - (\theta_{k+1})_i] - [(\theta_k)_j - (\theta_k)_i] = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} ([(\theta_{k-1})_j - (\theta_{k-1})_i] - [(\theta_k)_j - (\theta_k)_i])$$

Al simplificar la ecuación obtenida se tiene:

$$(\Delta\theta_{k+1})_{ji} - (\Delta\theta_k)_{ji} = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} ((\Delta\theta_{k-1})_{ji} - (\Delta\theta_k)_{ji}) \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) puede simplificarse si en todas las variaciones angulares hacemos cero el desplazamiento angular inicial:

$$\begin{aligned} \theta_{(k+1)_{1j}} - \theta_{(k)_{1j}} &= -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} (\theta_{(k-1)_{1j}} - \theta_{(k)_{1j}}) \\ \frac{\theta_{(k+1)_{1j}} - \theta_{(k)_{1j}}}{\theta_{(k-1)_{1j}} - \theta_{(k)_{1j}}} &= \pm \frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Que es la ecuación obtenida en la referencia [18], donde los signos  $\pm$  indican si el tren planetario es externo (signo negativo) o interno (giro positivo).

Además:

$\theta_{(k)_{1j}}$ : ángulo del eslabón  $k$  a partir de su posición inicial, a su  $j$  –ésima posición.

$\theta_{(k+1)_{1j}}$ : ángulo del eslabón  $k + 1$  a partir de su posición inicial, a su  $j$  –ésima posición.

$\theta_{(k-1)_{1j}}$ : ángulo del eslabón  $k - 1$  a partir de su posición inicial, a su  $j$  –ésima posición.

## 2.2.4 Síntesis de generador de función de cinco barras engranado.

La síntesis de mecanismos engranados con el método de números complejos desarrollado por Sandor [2], así como la síntesis de mecanismos con condiciones combinadas de desplazamiento, velocidad y aceleración para conducción de cuerpo presentado por Suh y Radcliffe [1] y el diseño de generadores de función de 5 barras con engranes obtenido por Suh en la referencia [5] son los principales antecedentes para el desarrollo del presente trabajo. La aplicación de métodos matriciales al análisis y síntesis de mecanismos con

eslabonamientos presentado por Suh [1] se utiliza en esta sección para reproducir los resultados presentados por Sandor y así, plantear un antecedente de la aplicación de las matrices de desplazamiento de Suh a la síntesis de mecanismos con eslabones y engranes.

La Figura 2.8 muestra el diagrama del mecanismo de cinco barras engranado propuesto por Sandor [3].

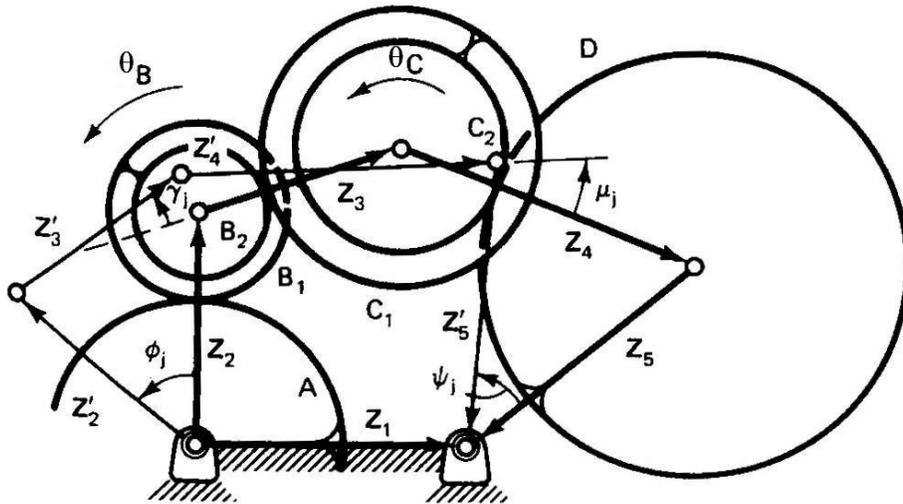


Figura 2.8 Mecanismo de cinco barras engranado para generación de función con números complejos.

Por otro lado, la Figura 2.9 muestra el diagrama del mismo mecanismo con las variables necesarias para desarrollar el mismo ejercicio con las matrices de desplazamiento como herramienta.

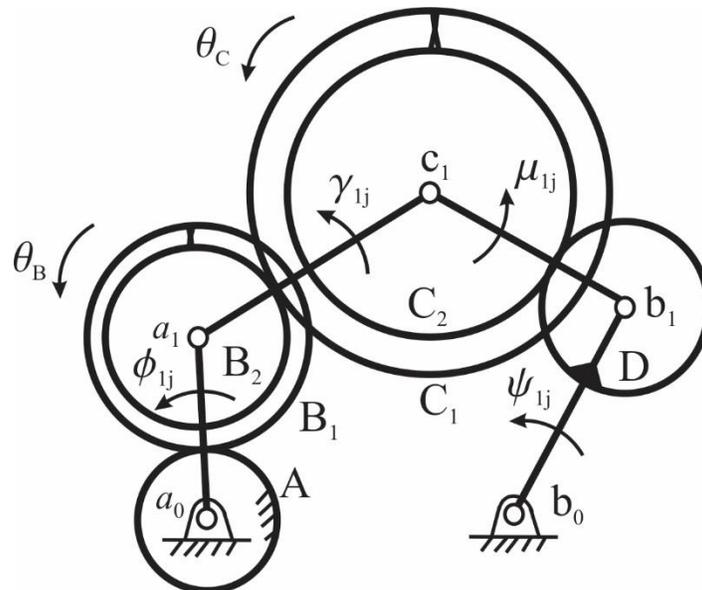


Figura 2.9 Mecanismo de cinco barras engranado para generación de función con matrices de desplazamiento.

Para el ángulo de entrada  $\phi_{1j}$  y salida  $\psi_{1j}$  se tiene la matriz de desplazamiento para cada uno de los puntos flotantes como sigue:

$$\begin{aligned} [D_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\phi_{1j},a_0}] & (\mathbf{a}_0 - [R_{\phi_{1j},a_0}] \mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{a}_j) &= [D_{1j}](\mathbf{a}_1) \\ [E_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\gamma_{1j},a_j}] & (\mathbf{a}_j - [R_{\gamma_{1j},a_j}] \mathbf{a}_1) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{c}_j) &= [E_{1j}](\mathbf{c}_1) \\ [F_{1j}] &= \begin{bmatrix} [R_{\psi_{1j},b_0}] & (\mathbf{b}_0 - [R_{\psi_{1j},b_0}] \mathbf{b}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{b}_j) &= [F_{1j}](\mathbf{b}_1) \end{aligned}$$

Con lo que las ecuaciones de diseño para los eslabones quedarían como sigue:

$$(\mathbf{c}_j - \mathbf{b}_j)^T (\mathbf{c}_j - \mathbf{b}_j) = (\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1)^T (\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1)$$

Mientras que las ecuaciones de diseño para los engranes quedan sin cambio alguno como se obtienen en la referencia [3]:

$$\mu_j = \frac{1}{Q} (\psi_j + \gamma_j R + \phi_j)$$

Donde:

$$\begin{aligned} Q &= 1 + r_{e4} & r_{e2} &= N_A/N_{B1} \\ R &= r_{e4} + r_{e3}r_{e4} & r_{e3} &= N_{B2}/N_{C1} \\ S &= r_{e3}r_{e4} + r_{e2}r_{e3}r_{e4} & r_{e4} &= N_{C2}/N_D \end{aligned}$$

Con  $N_i$  como el número de dientes del engrane  $i$  –ésimo.

Para un problema de 4 puntos de precisión, el método de números complejos de Sandor genera un sistema de 8 ecuaciones por 13 incógnitas, por lo que el diseñador puede seleccionar 5 variables a su conveniencia.

Por otro lado, para los mismos 4 puntos de precisión, el método de las ecuaciones de diseño de longitud constante genera un sistema de 3 ecuaciones por 11 incógnitas, así que el diseñador tiene que proponer el valor de las otras ocho a su conveniencia.

Ya que el método matricial deja muchos parámetros libres, debe ser posible obtener los resultados de Sandor al proponer solo algunos de los valores que se obtuvieron por números complejos, y reproducir el valor de las incógnitas faltantes al resolver las ecuaciones de diseño de longitud constante

En el problema original de la referencia [3] el diseñador debe proponer arbitrariamente 5 valores de las incógnitas además de las razones de engranes entre otros datos mostrados en la Tabla 3.6 de dicha referencia. Para la solución de este ejercicio con el método matricial y para reproducir los mismos valores obtenidos en [3] se utilizan los mismos valores además de tres más obtenidos en la solución de Sandor para así obtener las incógnitas restantes.  $b_{0x} = 1$ ,  $b_{0y} = 0$ ,  $a_{1x} = 0.402$ ,  $b_{1x} = 1.408$ ,  $c_{1x} = -0.306$ ,  $\mu_{12} = 6.807^\circ$ ,  $\mu_{13} = -4.782^\circ$ ,  $\mu_{14} = -0.711^\circ$ ,  $r_{e2} = 3$ ,  $r_{e3} = 0.5$  y  $r_{e4} = 0.5$ . Resolviendo el sistema para las incógnitas  $a_{1y}$ ,  $b_{1y}$  y  $c_{1y}$  se obtuvo  $a_{1y} = -1.12375$ ,  $b_{1y} = -1.1184$  y  $c_{1y} = -0.646631$ . Los resultados de Sandor se confirman al hacer las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0 &= (0.402, -1.12375) & \mathbf{Z}_3 = \mathbf{c}_1 - \mathbf{a}_1 &= (-0.708, 0.477115) \\ \mathbf{Z}_4 = \mathbf{b}_1 - \mathbf{c}_1 &= (1.714, -0.471772) & \mathbf{Z}_5 = \mathbf{b}_0 - \mathbf{b}_1 &= (-0.408, 1.1184) \end{aligned}$$

El mecanismo resultante de la síntesis se presenta en la Figura 2.10.

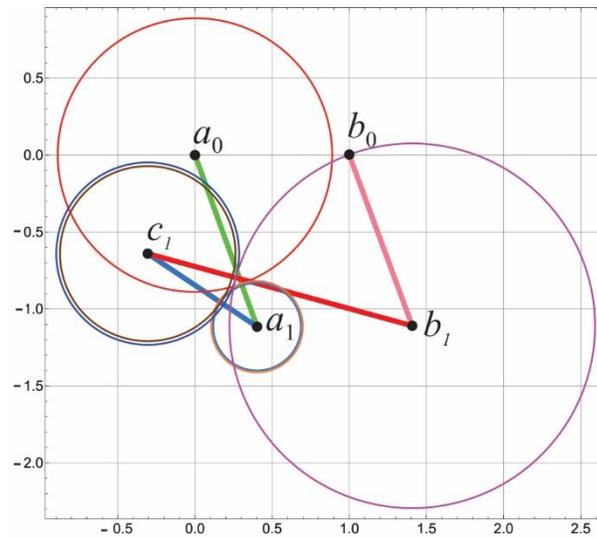


Figura 2.10 Resultado de la Síntesis de un mecanismo de 5 barras engranado.

### 2.3 Síntesis de un mecanismo de 4 barras engranado revertido.

La Figura 2.11 muestra un mecanismo de cuatro barras con dos engranes, donde la manivela (cuerpo 1) es la entrada del mecanismo, el engrane C está fijo al acoplador (cuerpo 2) y el engrane C es la salida del mecanismo coaxial a la manivela, es decir, que entrada y salida comparten el mismo eje por lo que se denomina revertido.

La razón de estudiar esta configuración en particular, así como más adelante la configuración de la sección 2.4, es la de presentar posteriormente el estudio y aplicación del método de matrices de desplazamiento a sus equivalentes esféricos que estudiados por Chiang en la referencia [9] y así demostrar que la misma metodología puede abarcar ambos problemas, plano y esférico.

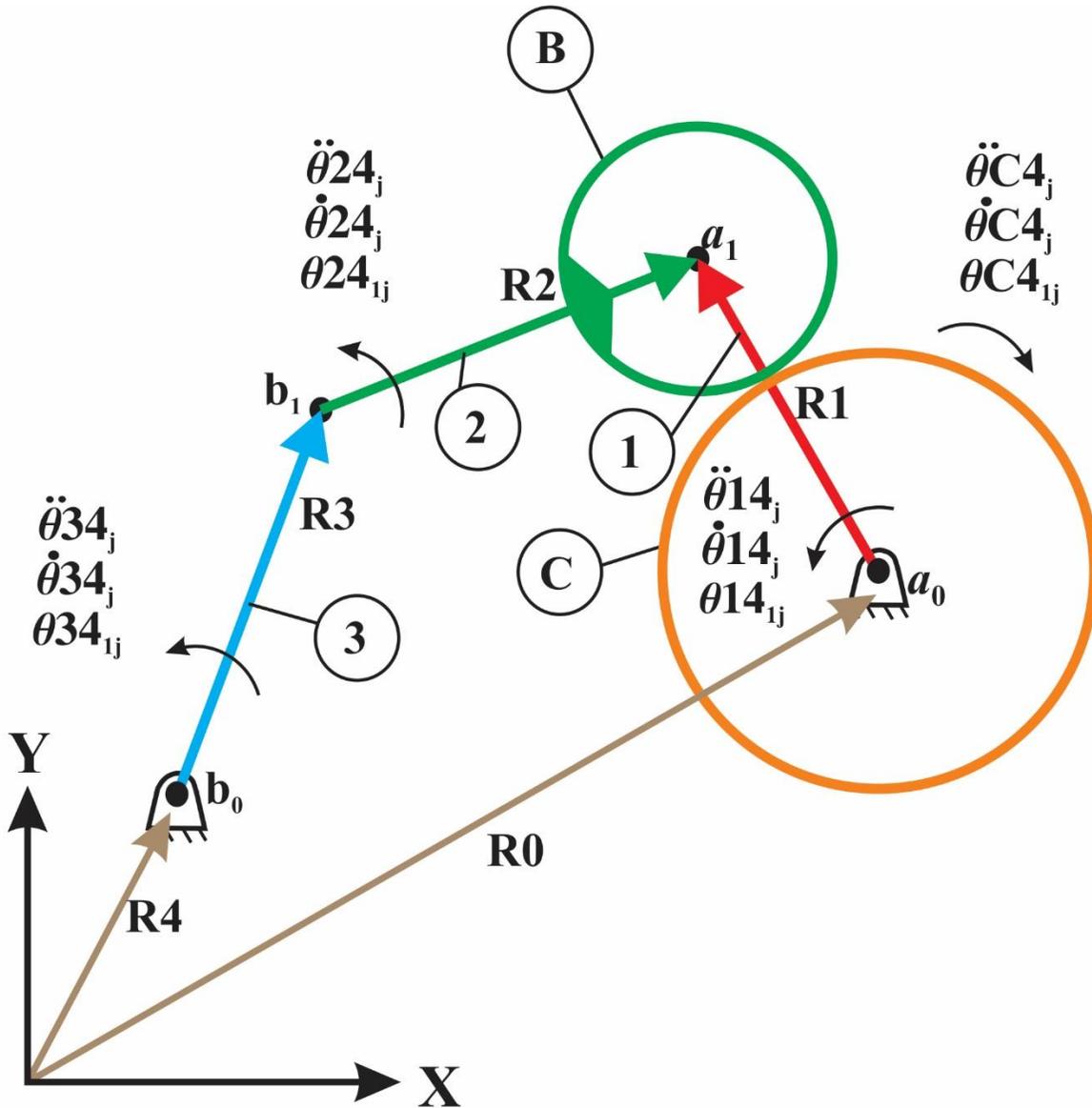


Figura 2.11 Mecanismo de 4 barras engranado revertido.

### 2.3.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.

De acuerdo a la Figura 2.11 y considerando  $j$  puntos de precisión con  $j = 1,2,3,4$ , las ecuaciones de diseño de longitud constante y sus derivadas son:

$$(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \quad (2.15)$$

$$(\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) = 0 \quad (2.16)$$

$$(\ddot{\mathbf{b}}_j - \ddot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) + (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j) = 0 \quad (2.17)$$

En las ecuaciones (2.15)-(2.17) se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_j) &= [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_1) & (\mathbf{b}_j) &= [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{b}_1) \\ (\dot{\mathbf{a}}_j) &= [\mathbf{V}_{Dj}](\dot{\mathbf{a}}_1) & (\dot{\mathbf{b}}_j) &= [\mathbf{V}_{Ej}](\dot{\mathbf{b}}_1) \\ (\ddot{\mathbf{a}}_j) &= [\mathbf{A}_{Dj}](\ddot{\mathbf{a}}_1) & (\ddot{\mathbf{b}}_j) &= [\mathbf{A}_{Ej}](\ddot{\mathbf{b}}_1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Además las matrices de desplazamiento y desplazamiento diferencial de las ecuaciones (2.18) están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta_{14_1j}}] & (\mathbf{a}_0 - [\mathbf{R}_{\theta_{14_1j}}] \mathbf{a}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{V}_{Dj}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{14_1j}}] & (\dot{\mathbf{a}}_0 - [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{14_1j}}] \mathbf{a}_0) \\ 00 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A}_{Dj}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{14_1j}}] & (\ddot{\mathbf{a}}_0 - [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{14_1j}}] \mathbf{a}_0) \\ 00 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta_{34_1j}}] & (\mathbf{b}_0 - [\mathbf{R}_{\theta_{34_1j}}] \mathbf{b}_0) \\ 00 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{V}_{Ej}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{34_1j}}] & (\dot{\mathbf{b}}_0 - [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{34_1j}}] \mathbf{b}_0) \\ 00 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A}_{Ej}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{34_1j}}] & (\ddot{\mathbf{b}}_0 - [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{34_1j}}] \mathbf{b}_0) \\ 00 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Donde el ángulo  $\theta_{m4_1j}$  es el ángulo relativo del cuerpo  $m$  en su posición  $j$  – ésima medido desde la posición inicial, así como la velocidad y aceleración  $\dot{\theta}_{m4_j}$  y  $\ddot{\theta}_{m4_j}$ , son la velocidad y aceleración absoluta del cuerpo  $m$  en su  $j$  – ésima posición.

### 2.3.2 Ecuaciones cinemáticas de los engranes.

Para los engranes  $B - C$ , y considerando que  $\dot{\theta}B4_j = \dot{\theta}24_j$ , porque el engrane  $B$  está unido al cuerpo 2, se tiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\theta}24_j - \dot{\theta}14_j}{\dot{\theta}C4_j - \dot{\theta}14_j} &= -\frac{N_C}{N_B} \\ \dot{\theta}24_j - \dot{\theta}14_j &= -\frac{N_C}{N_B}(\dot{\theta}C4_j - \dot{\theta}14_j) \\ \dot{\theta}C4_j &= \left(1 + \frac{N_B}{N_C}\right)\dot{\theta}14_j - \frac{N_A}{N_{B_1}}\dot{\theta}24_j\end{aligned}\quad (2.21)$$

Renombrando los coeficientes de la ecuación (2.21) como  $r_{BC} = N_B/N_C$  y  $Q = 1 + r_{BC}$ , quedaría como sigue:

$$\dot{\theta}C4_j = Q\dot{\theta}14_j - r_{BC}\dot{\theta}24_j \quad (2.22)$$

Integrando ahora la ecuación (2.22):

$$\theta C4_{1j} = Q\theta 14_{1j} - r_{BC}\theta 24_{1j} \quad (2.23)$$

Para obtener la aceleración angular  $\ddot{\theta}C4_{1j}$  se deriva respecto al tiempo la ecuación (2.22).

$$\ddot{\theta}C4_j = Q\ddot{\theta}14_j - r_{BC}\ddot{\theta}24_j \quad (2.24)$$

Cabe mencionar que la ecuación de posición angular (2.23), es relativa a la primera posición para  $j = 1, 2, 3, 4$ , la cual genera tres ecuaciones de diseño más, ya que cuando  $j = 1$ , la ecuación es trivial. Mientras que las ecuaciones de velocidad y aceleración angular (2.22) y (2.24), son absolutas, generando cuatro ecuaciones de diseño cada una.

### 2.3.3 Función objetivo

La cantidad de variables involucradas en el diseño de un mecanismo como el mostrado en la Figura 2.11 para condiciones de posición, velocidad y aceleración es tal, que supera a la cantidad de ecuaciones de diseño que pueden generarse. Es por esto que la solución de dicho problema de síntesis debe llevarse a cabo a partir de métodos de optimización.

La presente sección está basada en su totalidad en el capítulo 9 de la referencia [1], la cual presenta una forma de construir la función objetivo a minimizar con la forma siguiente:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m [f_k(\mathbf{x})]^2 \quad (2.25)$$

Donde el subíndice  $k$  se refiere a la  $k$  – ésima función del vector  $\mathbf{x}$  que contiene a todas las variables de la síntesis y  $m$  es la cantidad de puntos de precisión.

Por otro lado, el mecanismo cuenta con diferentes clases de elementos y condiciones, las cuales generaran distintos tipos de ecuaciones de diseño haciendo que la función objetivo esté constituida por la suma de las funciones objetivo dadas por la ecuación (2.25) para cada una de las restricciones del movimiento, quedando como sigue:

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n F_l(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

Donde cada una de las  $F_l(\mathbf{x})$  está dada por la ecuación (2.25).

### 2.3.4 Coeficientes de influencia

Los coeficientes de influencia son escalares que permiten expresar todas las velocidades de un mecanismo en términos de la velocidad de entrada de este, así como las aceleraciones, expresarlas en función de la velocidad y aceleración de entrada.

Ya que tanto la velocidad y aceleración de entrada son funciones a su vez de la variable de posición de la entrada del mecanismo, puede decirse también que los coeficientes de influencia representan una relación entre los parámetros de entrada y los de salida en términos de la configuración geométrica del mecanismo.

Para el mecanismo de 4 barras engranado revertido, las velocidades y aceleraciones angulares de los cuerpos 2 y 3, están relacionadas con los datos de entrada  $\theta_{14_j}$ ,  $\dot{\theta}_{14_j}$  y  $\ddot{\theta}_{14_j}$  por medio de los coeficientes de influencia [19,20], los cuales pueden ser obtenidos al hacer un análisis de la cinemática de la configuración cinemática del mecanismo.

De acuerdo a la Figura 2.12, la ecuación de posición para cada configuración de la síntesis es:

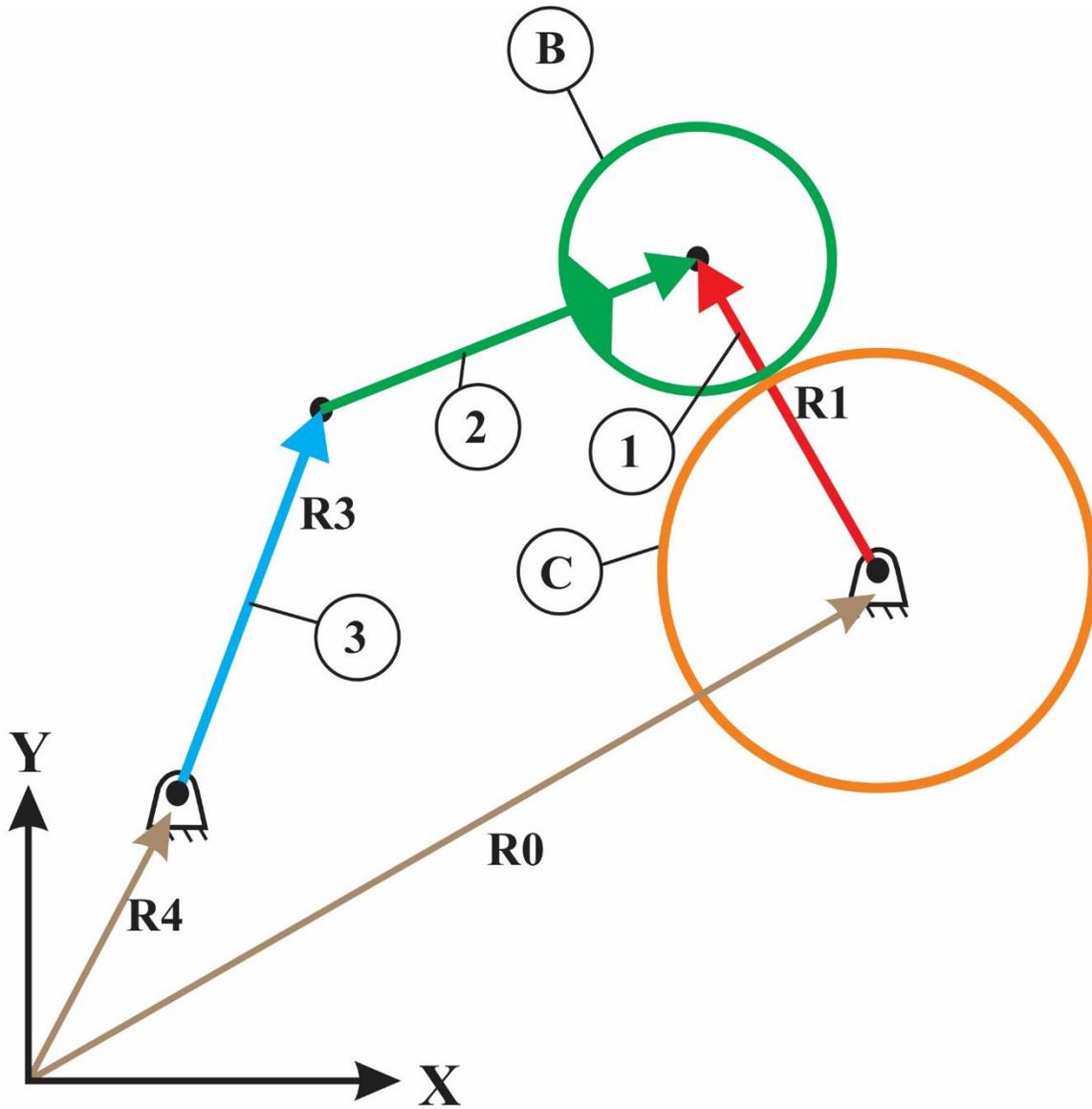


Figura 2.12 Diagrama cinemático del mecanismo de 4 barras engranado revertido.

$$\mathbf{R0} + \mathbf{R1}_j + \mathbf{R2}_j - \mathbf{R3}_j - \mathbf{R4} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

Donde:

$$\mathbf{R0} = \mathbf{a}_0 - \mathbf{0} \quad (2.28.1)$$

$$\mathbf{R1}_j = [\mathbf{R}_{\theta_{14j}}] \mathbf{r}_1 = (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \quad (2.28.2)$$

$$\mathbf{R2}_j = [\mathbf{R}_{\theta_{24j}}] \mathbf{r}_2 = (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) \quad (2.28.3)$$

$$\mathbf{R3}_j = [\mathbf{R}_{\theta_{34j}}] \mathbf{r}_3 = (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0) \quad (2.28.4)$$

$$\mathbf{R4} = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{0}) \quad (2.28.5)$$

Además:

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \quad (2.29.1)$$

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \quad (2.29.2)$$

$$\mathbf{r}_3 = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (2.29.3)$$

La ecuación de velocidad:

$$\mathbf{V0} + \mathbf{V1}_j + \mathbf{V2}_j - \mathbf{V3}_j - \mathbf{V4} = \mathbf{0} \quad (2.30)$$

Donde:

$$\mathbf{V0} = \mathbf{0} \quad (2.31.1)$$

$$\mathbf{V1}_j = [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j}] \mathbf{R1}_j = \dot{\theta}14_j [\mathbf{E}] \mathbf{R1}_j \quad (2.31.2)$$

$$\mathbf{V2}_j = [\mathbf{W}_{\dot{\theta}24_j}] \mathbf{R2}_j = \dot{\theta}24_j [\mathbf{E}] \mathbf{R2}_j \quad (2.31.3)$$

$$\mathbf{V3}_j = [\mathbf{W}_{\dot{\theta}34_j}] \mathbf{R3}_j = \dot{\theta}34_j [\mathbf{E}] \mathbf{R3}_j \quad (2.31.4)$$

$$\mathbf{V4} = \mathbf{0} \quad (2.31.5)$$

Además:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$[\mathbf{E}]^{-1} = [\mathbf{E}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.31) en (2.30):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}14_j [\mathbf{E}] \mathbf{R1}_j + \dot{\theta}24_j [\mathbf{E}] \mathbf{R2}_j - \dot{\theta}34_j [\mathbf{E}] \mathbf{R3}_j &= \mathbf{0} \\ \dot{\theta}14_j \mathbf{R1}_j + \dot{\theta}24_j \mathbf{R2}_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{R3}_j &= \mathbf{0} \\ \dot{\theta}24_j \mathbf{R2}_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{R3}_j &= -\dot{\theta}14_j \mathbf{R1}_j \end{aligned} \quad (2.33)$$

Reescribiendo matricialmente la ecuación (2.33) se obtiene lo siguiente:

$$[\mathbf{R2}_j \quad -\mathbf{R3}_j] \begin{bmatrix} \dot{\theta}24_j \\ \dot{\theta}34_j \end{bmatrix} = -\mathbf{R1}_j \dot{\theta}14_j \quad (2.34)$$

Simplificando la ecuación (2.34) quedaría como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_j] \mathbf{v23}_j &= -\mathbf{R1}_j \dot{\theta}14_j \\ \mathbf{v23}_j &= -[\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{R1}_j \dot{\theta}14_j \end{aligned} \quad (2.35)$$

Donde para obtener las velocidades  $\dot{\theta}24_j$  y  $\dot{\theta}34_j$  se tienen las siguientes expresiones:

$$\dot{\theta}24_j = \mathbf{v23}_j^T \mathbf{i} = \left( -[\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{R1}_j \right)^T \mathbf{i} \dot{\theta}14_j = K1_j \dot{\theta}14_j \quad (2.36.1)$$

$$\dot{\theta}34_j = \mathbf{v23}_j^T \mathbf{j} = \left( -[\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{R1}_j \right)^T \mathbf{j} \dot{\theta}14_j = K2_j \dot{\theta}14_j \quad (2.36.2)$$

Repitiendo el proceso anterior para la aceleración, tenemos:

$$\mathbf{A0} + \mathbf{A1}_j + \mathbf{A2}_j - \mathbf{A3}_j - \mathbf{A4} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Donde:

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0} \quad (2.38.1)$$

$$\mathbf{A1}_j = [\mathbf{A}_{\dot{\theta}_{14_j}}] \mathbf{r}_1 = (\ddot{\theta}_{14_j}[\mathbf{E}] - \dot{\theta}_{14_j}^2[\mathbf{I}]) \mathbf{R1}_j \quad (2.38.2)$$

$$\mathbf{A2}_j = [\mathbf{A}_{\dot{\theta}_{24_j}}] \mathbf{r}_2 = (\ddot{\theta}_{24_j}[\mathbf{E}] - \dot{\theta}_{24_j}^2[\mathbf{I}]) \mathbf{R2}_j \quad (2.38.3)$$

$$\mathbf{A3}_j = [\mathbf{A}_{\dot{\theta}_{34_j}}] \mathbf{r}_3 = (\ddot{\theta}_{34_j}[\mathbf{E}] - \dot{\theta}_{34_j}^2[\mathbf{I}]) \mathbf{R3}_j \quad (2.38.4)$$

$$\mathbf{A4} = \mathbf{0} \quad (2.38.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.38) en (2.37) queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_{14_j}[\mathbf{E}] - \dot{\theta}_{14_j}^2[\mathbf{I}]) \mathbf{R1}_j + (\ddot{\theta}_{24_j}[\mathbf{E}] - \dot{\theta}_{24_j}^2[\mathbf{I}]) \mathbf{R2}_j \\ & - (\ddot{\theta}_{34_j}[\mathbf{E}] - \dot{\theta}_{34_j}^2[\mathbf{I}]) \mathbf{R3}_j = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Desarrollando y agrupando convenientemente, tenemos:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}](\ddot{\theta}_{14_j} \mathbf{R1}_j + \ddot{\theta}_{24_j} \mathbf{R2}_j - \ddot{\theta}_{34_j} \mathbf{R3}_j) &= (\dot{\theta}_{14_j}^2 \mathbf{R1}_j + \dot{\theta}_{24_j}^2 \mathbf{R2}_j - \dot{\theta}_{34_j}^2 \mathbf{R3}_j) \\ \ddot{\theta}_{14_j} \mathbf{R1}_j + \ddot{\theta}_{24_j} \mathbf{R2}_j - \ddot{\theta}_{34_j} \mathbf{R3}_j &= [\mathbf{E}]^T (\dot{\theta}_{14_j}^2 \mathbf{R1}_j + \dot{\theta}_{24_j}^2 \mathbf{R2}_j - \dot{\theta}_{34_j}^2 \mathbf{R3}_j) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Despejando la ecuación (2.40) y escribiéndolas matricialmente se obtiene:

$$[\mathbf{R2}_j \quad -\mathbf{R3}_j] \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{24_j} \\ \ddot{\theta}_{34_j} \end{bmatrix} = [\mathbf{E}]^T (\dot{\theta}_{14_j}^2 \mathbf{R1}_j + \dot{\theta}_{24_j}^2 \mathbf{R2}_j - \dot{\theta}_{34_j}^2 \mathbf{R3}_j) - \ddot{\theta}_{14_j} \mathbf{R1}_j \quad (2.41)$$

Sustituyendo  $\dot{\theta}_{24_j}$  y  $\dot{\theta}_{34_j}$  por los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.36) se tiene:

$$\begin{aligned} [\mathbf{R2}_j \quad -\mathbf{R3}_j] \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{24_j} \\ \ddot{\theta}_{34_j} \end{bmatrix} &= \\ [\mathbf{E}]^T (\dot{\theta}_{14_j}^2 \mathbf{R1}_j + (K_{1_j} \dot{\theta}_{14_j})^2 \mathbf{R2}_j - (K_{2_j} \dot{\theta}_{14_j})^2 \mathbf{R3}_j) &- \ddot{\theta}_{14_j} \mathbf{R1}_j \end{aligned} \quad (2.42)$$

Desarrollando y factorizando  $\dot{\theta}_{14_j}^2$  en la ecuación (2.42) queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_j] \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{24_j} \\ \ddot{\theta}_{34_j} \end{bmatrix} &= [\mathbf{E}]^T (\mathbf{R1}_j + K_{1_j}^2 \mathbf{R2}_j - K_{2_j}^2 \mathbf{R3}_j) \dot{\theta}_{14_j}^2 - \mathbf{R1}_j \ddot{\theta}_{14_j} \\ \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{24_j} \\ \ddot{\theta}_{34_j} \end{bmatrix} &= [\mathbf{J}_j]^{-1} ([\mathbf{E}]^T (\mathbf{R1}_j + K_{1_j}^2 \mathbf{R2}_j - K_{2_j}^2 \mathbf{R3}_j) \dot{\theta}_{14_j}^2 - \mathbf{R1}_j \ddot{\theta}_{14_j}) \\ \mathbf{a23}_j &= [\mathbf{J}_j]^{-1} [\mathbf{E}]^T (\mathbf{R1}_j + K_{1_j}^2 \mathbf{R2}_j - K_{2_j}^2 \mathbf{R3}_j) \dot{\theta}_{14_j}^2 - [\mathbf{J}_j]^{-1} \mathbf{R1}_j \ddot{\theta}_{14_j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a23}_j = [\mathbf{J}_j]^{-1}[\mathbf{E}]^T(\mathbf{R1}_j + K1_j^2\mathbf{R2}_j - K2_j^2\mathbf{R3}_j)\dot{\theta}14_j^2 - [\mathbf{J}_j]^{-1}\mathbf{R1}_j\ddot{\theta}14_j \quad (2.43)$$

Para finalmente poder obtener las aceleraciones  $\ddot{\theta}21_j$  y  $\ddot{\theta}34_j$  a partir de los coeficientes de influencia  $K3_j$  y  $K4_j$  por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}24_j &= \mathbf{a23}_j^T \mathbf{i} \\ &= \left([\mathbf{J}_j]^{-1}[\mathbf{E}]^T(\mathbf{R1}_j + K1_j^2\mathbf{R2}_j - K2_j^2\mathbf{R3}_j)\dot{\theta}14_j^2 - [\mathbf{J}_j]^{-1}\mathbf{R1}_j\ddot{\theta}14_j\right)^T \mathbf{i} \\ &= \left([\mathbf{J}_j]^{-1}[\mathbf{E}]^T(\mathbf{R1}_j + K1_j^2\mathbf{R2}_j - K2_j^2\mathbf{R3}_j)\right)^T \mathbf{i}\dot{\theta}14_j^2 - \left([\mathbf{J}_j]^{-1}\mathbf{R1}_j\right)^T \mathbf{i}\ddot{\theta}14_j \\ &= K1_j\ddot{\theta}14_j + K3_j\dot{\theta}14_j^2 \end{aligned} \quad (2.44.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}34_j &= \mathbf{a23}_j^T \mathbf{j} \\ &= \left([\mathbf{J}_j]^{-1}[\mathbf{E}]^T(\mathbf{R1}_j + K1_j^2\mathbf{R2}_j - K2_j^2\mathbf{R3}_j)\dot{\theta}14_j^2 - [\mathbf{J}_j]^{-1}\mathbf{R1}_j\ddot{\theta}14_j\right)^T \mathbf{j} \\ &= \left([\mathbf{J}_j]^{-1}[\mathbf{E}]^T(\mathbf{R1}_j + K1_j^2\mathbf{R2}_j - K2_j^2\mathbf{R3}_j)\right)^T \mathbf{j}\dot{\theta}14_j^2 - \left([\mathbf{J}_j]^{-1}\mathbf{R1}_j\right)^T \mathbf{j}\ddot{\theta}14_j \\ &= K2_j\ddot{\theta}14_j + K4_j\dot{\theta}14_j^2 \end{aligned} \quad (2.44.2)$$

### 2.3.5 Ejemplos de diseño de un mecanismo de cuatro barras engranado revertido.

Suponga que se desea diseñar un mecanismo con la configuración de la Figura 2.11, de tal forma que el objetivo principal sea que el engrane  $C$  presente una aceleración de  $0 \text{ rad/s}^2$ , velocidad de  $1.5 \text{ rad/s}$  cuando éste haya girado  $90^\circ$  y la manivela se encuentre a  $90^\circ$  respecto de su primer punto de precisión con una velocidad constante de  $\pi/2 \text{ rad/s}$ .

Para éste ejemplo, y considerando las ecuaciones de diseño de las secciones 2.3.1 a 2.3.4 con  $j = 1,2,3,4$  se plantearon las siguientes condiciones de los puntos de precisión:

$$\begin{array}{ll} \theta_{14_{12}} = 89.5^\circ & \theta_{14_{12}} = 109.5^\circ \\ \theta_{14_{13}} = 89.7^\circ & \theta_{14_{13}} = 109.7.2^\circ \\ \theta_{14_{14}} = 90^\circ & \theta_{14_{14}} = 110^\circ \\ \dot{\theta}_{14_1} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0x} = 0 \\ & a_{0y} = 0 \\ \dot{\theta}_{14_2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & b_{0x} = -7.96 \\ & b_{0y} = 2.65 \\ \dot{\theta}_{14_3} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & \theta_{C4_{14}} = 90^\circ \\ \dot{\theta}_{14_4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}14_1 &= 0 \text{ rad/s}^2 & \dot{\theta}C4_4 &= 1.5 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta}14_2 &= 0 \text{ rad/s}^2 & \ddot{\theta}C4_4 &= 0 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{\theta}14_3 &= 0 \text{ rad/s}^2 & r_{BC} &= 0.5 \\ \ddot{\theta}14_4 &= 0 \text{ rad/s}^2 & & \end{aligned}$$

Al obtener las ecuaciones de diseño se obtiene un sistema no cuadrado de 22 ecuaciones por 19 incógnitas, por lo que se ha utilizado el software de *Wolfram Mathematica*, y en particular el comando *FindMinimum* [21] para minimizar el error en la función objetivo que de acuerdo a la sección 2.3.3 tendría 6 partes, como sigue:

Ecuaciones de longitud constante para la posición de los eslabones:

$$F_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)]^2$$

Ecuaciones de velocidad para los eslabones:

$$F_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración para los eslabones:

$$F_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\ddot{\mathbf{b}}_j - \ddot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) + (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)]^2$$

Ecuaciones de posición angular para los engranes:

$$F_4(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\theta C4_{1j} - (Q\theta 14_{1j} - r_{BC}\theta 24_{1j})]^2$$

Ecuaciones de velocidad angular para los engranes:

$$F_5(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\dot{\theta}C4_j - (Q\dot{\theta}14_j - r_{BC}\dot{\theta}24_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración angular para los engranes:

$$F_6(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\ddot{\theta}C4_j - (Q\ddot{\theta}14_j - r_{BC}\ddot{\theta}24_j)]^2$$

Siendo la función objetivo  $F(\mathbf{x})$  la suma de éstas 6 últimas, quedando como sigue:

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + F_4(\mathbf{x}) + F_5(\mathbf{x}) + F_6(\mathbf{x})$$

El resultado para este ejemplo se muestra en la Figura 2.13:

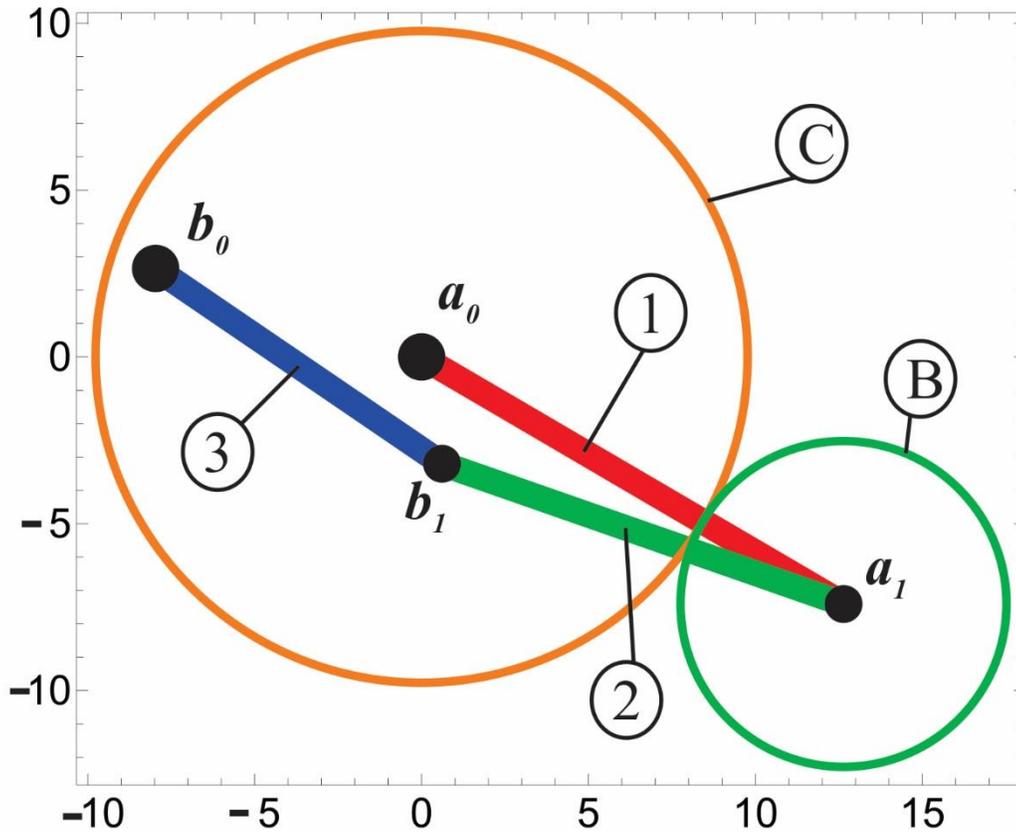


Figura 2.13 Resultado de la Síntesis de un mecanismo de 4 barras engranado revertido.

Donde:

$$\begin{array}{ll}
 a_{1x} = 12.64 & \dot{\theta}_{24_1} = 6.58 \text{ rad/s} \\
 a_{1y} = -7.41 & \dot{\theta}_{34_1} = 1.90 \text{ rad/s} \\
 b_{1x} = 0.61 & \dot{\theta}_{C4_1} = 1.58 \text{ rad/s} \\
 b_{1y} = -3.20 & \dot{\theta}_{C4_2} = 1.51 \text{ rad/s} \\
 \theta_{C4_{12}} = 5.68 \text{ rad} & \dot{\theta}_{C4_3} = 1.51 \text{ rad/s} \\
 \theta_{C4_{13}} = 0.28 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_1} = 0.01 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{24_{12}} = 2.77 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_2} = 0.00 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{24_{13}} = 0.09 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_3} = 0.00 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{24_{14}} = 2.69 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{24_1} = -1.12 \text{ rad/s}^2 \\
 & \ddot{\theta}_{34_1} = 0.69 \text{ rad/s}^2
 \end{array}$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración del engrane C son las Figuras 2.14, 2.15 y 2.16 respectivamente. Las cuales confirman que las condiciones son cumplidas.

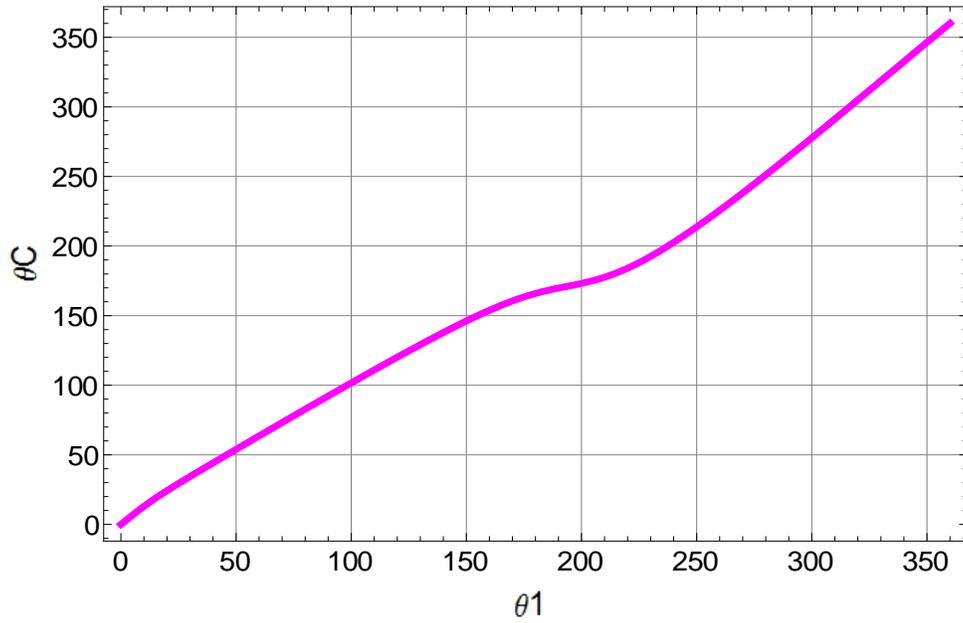


Figura 2.14 Desplazamiento angular del engrane C respecto al giro de manivela.

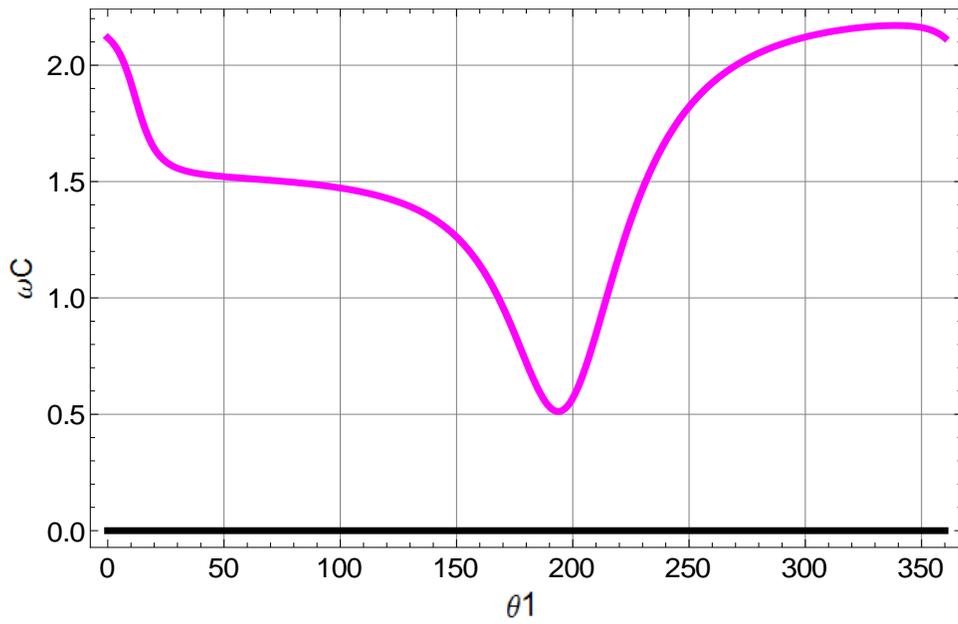


Figura 2.15 Velocidad angular del engrane C respecto al giro de manivela.

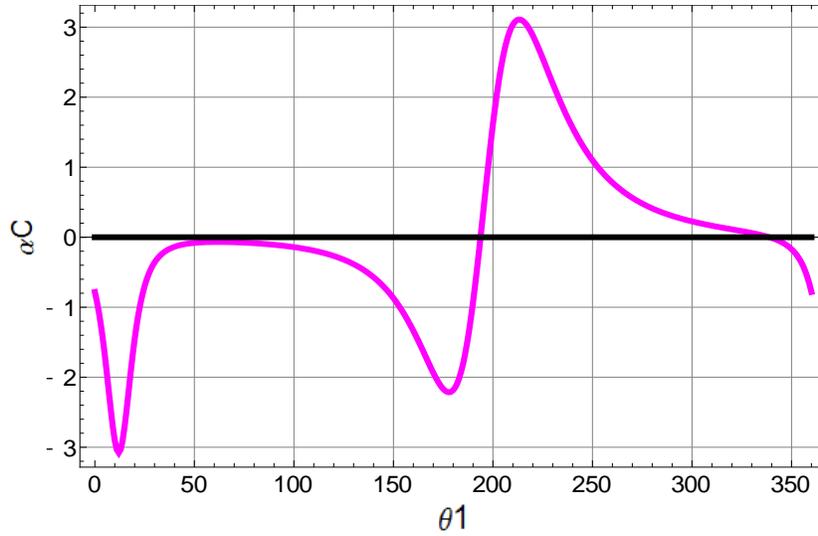


Figura 2.16 Aceleración angular de engrane C respecto al giro de manivela.

## 2.4 Diseño de un mecanismo de 4 barras engranado.

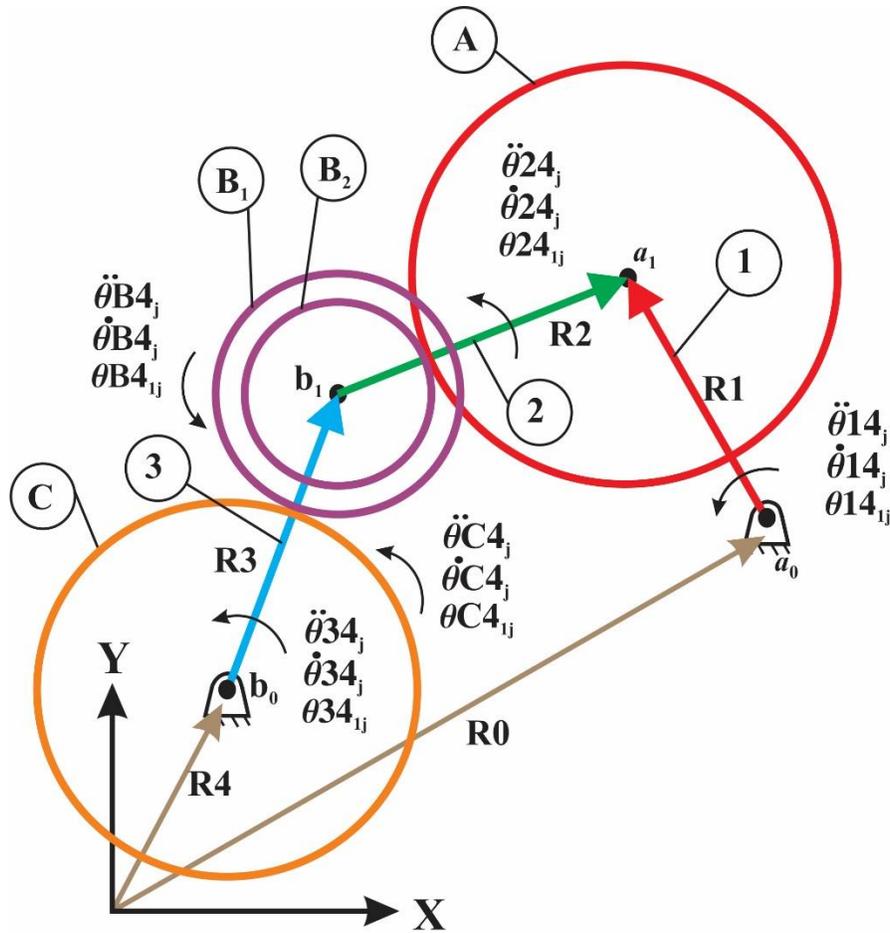


Figura 2.17 Mecanismo de 4 barras engranado.

La Figura 2.17 muestra un mecanismo de cuatro barras con engranes. Donde el engrane  $A$  está fijo a la manivela, un engrane compuesto (engranes  $B_1$  y  $B_2$ ) con eje de giro en el punto  $b_1$  y un último engrane  $C$  considerado como la salida del mecanismo.

### 2.4.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.

Las ecuaciones de diseño para los eslabones de este mecanismo, son las mismas que ya se han obtenido para el mecanismo de cuatro barras engranado revertido correspondientes a las ecuaciones de la (2.15) a la (2.20), pero la relación de movimiento de los engranes es diferente y se explica en la sección siguiente.

### 2.4.2 Ecuaciones cinemáticas de los engranes.

Para los engranes  $A - B_1$ , y considerando que  $\dot{\theta}A4_j = \dot{\theta}14_j$ , porque el engrane  $A$  está unida al cuerpo 1, se tiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}B4_j - \dot{\theta}24_j}{\dot{\theta}A4_j - \dot{\theta}24_j} &= -\frac{N_A}{N_{B_1}} \\ \dot{\theta}B4_j &= -\frac{N_A}{N_{B_1}}(\dot{\theta}14_j - \dot{\theta}24_j) + \dot{\theta}24_j \\ \dot{\theta}B4_j &= \left(1 + \frac{N_A}{N_{B_1}}\right)\dot{\theta}24_j - \frac{N_A}{N_{B_1}}\dot{\theta}14_j \end{aligned} \quad (2.45)$$

Renombrando los coeficientes de la ecuación (2.45) como  $r_{AB} = N_A/N_{B_1}$  y  $Q = 1 + r_{AB}$  la ecuación (2.45) queda como sigue:

$$\dot{\theta}B4_j = Q\dot{\theta}24_j - r_{AB}\dot{\theta}14_j \quad (2.46)$$

Integrando ahora la ecuación (2.46):

$$\theta B4_{1j} = Q\theta 24_{1j} - r_{AB}\theta 14_{1j} \quad (2.47)$$

Para obtener la aceleración angular  $\ddot{\theta}B4_j$  se deriva respecto al tiempo la ecuación (2.46).

$$\ddot{\theta}B4_j = Q\ddot{\theta}24_j - r_{AB}\ddot{\theta}14_j \quad (2.48)$$

Para los engranes  $B_2 - C$  se tiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\theta}C4_j - \dot{\theta}34_j}{\dot{\theta}B4_j - \dot{\theta}34_j} &= -\frac{N_{B_2}}{N_C} \\ \dot{\theta}C4_j &= -\frac{N_{B_2}}{N_C}(\dot{\theta}B4_j - \dot{\theta}34_j) + \dot{\theta}34_j \\ \dot{\theta}C4_j &= \left(1 + \frac{N_{B_2}}{N_C}\right)\dot{\theta}34_j - \frac{N_{B_2}}{N_C}\dot{\theta}B4_j\end{aligned}\quad (2.49)$$

Renombrando los coeficientes de la ecuación (2.49) como  $r_{BC} = N_{B_2}/N_C$  y  $R = 1 + r_{BC}$  la ecuación (2.49) queda como sigue:

$$\dot{\theta}C4_j = R\dot{\theta}34_j - r_{BC}\dot{\theta}B4_j \quad (2.50)$$

Sustituyendo (2.46) en (2.50) y desarrollando, se tiene:

$$\dot{\theta}C4_j = R\dot{\theta}34_j - r_{BC}Q\dot{\theta}24_j + r_{BC}r_{AB}\dot{\theta}14_j \quad (2.51)$$

Integrando ahora la ecuación (2.51)

$$\theta C4_{1j} = R\theta 34_{1j} - r_{BC}Q\theta 24_{1j} + r_{BC}r_{AB}\theta 14_{1j} \quad (2.52)$$

De igual forma que la aceleración  $\ddot{\theta}B4_j$ , se deriva a (2.51) respecto al tiempo para obtener  $\ddot{\theta}C4_j$ :

$$\ddot{\theta}C4_j = R\ddot{\theta}34_j - r_{BC}Q\ddot{\theta}24_j + r_{BC}r_{AB}\ddot{\theta}14_j \quad (2.53)$$

### 2.4.3 Coeficientes de influencia.

De igual forma que las ecuaciones de diseño para los eslabones, los coeficientes de influencia en este mecanismo de cuatro barras engranado son los mismos que en el caso anterior y su desarrollo está dado por las ecuaciones de la (2.27) a (2.44).

### 2.4.4 Ejemplo de diseño de un mecanismo de cuatro barras engranado con condición de detenimiento.

Suponga que se desea diseñar un mecanismo con la configuración de la Figura 2.17, de tal forma que el engrane  $C$ , presente un detenimiento, es decir, velocidad y aceleración cero cuando haya girado  $300^\circ$ .

Para este ejemplo, se plantearon las siguientes condiciones de los puntos de precisión con  $j = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{array}{ll} \theta_{14_{12}} = 299.5^\circ & \theta_{14_{12}} = 330^\circ \\ \theta_{14_{13}} = 299.7^\circ & \theta_{14_{13}} = 300^\circ \\ \theta_{14_{14}} = 300^\circ & \theta_{14_{14}} = 110^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{\theta}_{14_1} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0x} = 0 \\ & a_{0y} = 0 \\ \dot{\theta}_{14_2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & b_{0x} = -9.16 \\ \dot{\theta}_{14_3} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & b_{0y} = -6.1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dot{\theta}_{14_4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & \theta_{C4_{14}} = 300^\circ \\ \ddot{\theta}_{14_1} = 0 \text{ rad/s}^2 & \dot{\theta}_{C4_{14}} = 0 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta}_{14_2} = 0 \text{ rad/s}^2 & \theta_{C4_{14}} = 0 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{\theta}_{14_3} = 0 \text{ rad/s}^2 & r_{AB} = 3 \\ \ddot{\theta}_{14_4} = 0 \text{ rad/s}^2 & r_{BC} = 0.29 \end{array}$$

Al igual que el ejemplo mostrado en la sección 2.3.5, se presenta a continuación la obtención de la función objetivo:

Ecuaciones de longitud constante para la posición de los eslabones:

$$F_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)]^2$$

Ecuaciones de velocidad para los eslabones:

$$F_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración para los eslabones:

$$F_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\ddot{\mathbf{b}}_j - \ddot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) + (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)]^2$$

Ecuaciones de posición angular para los engranes:

$$F_4(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\theta_{C4_{1j}} - (R\theta_{34_{1j}} - r_{BC}Q\theta_{24_{1j}} + r_{BC}r_{AB}\theta_{14_{1j}})]^2$$

Ecuaciones de velocidad angular para los engranes:

$$F_5(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\dot{\theta}C4_j - (R\dot{\theta}34_j - r_{BC}Q\dot{\theta}24_j + r_{BC}r_{AB}\dot{\theta}14_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración angular para los engranes:

$$F_6(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\ddot{\theta}C4_j - (R\ddot{\theta}34_j - r_{BC}Q\ddot{\theta}24_j + r_{BC}r_{AB}\ddot{\theta}14_j)]^2$$

Siendo la función objetivo  $F(\mathbf{x})$  la suma de éstas 6 últimas, quedando como sigue:

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + F_4(\mathbf{x}) + F_5(\mathbf{x}) + F_6(\mathbf{x})$$

El resultado para este ejemplo se muestra en la Figura 2.18:

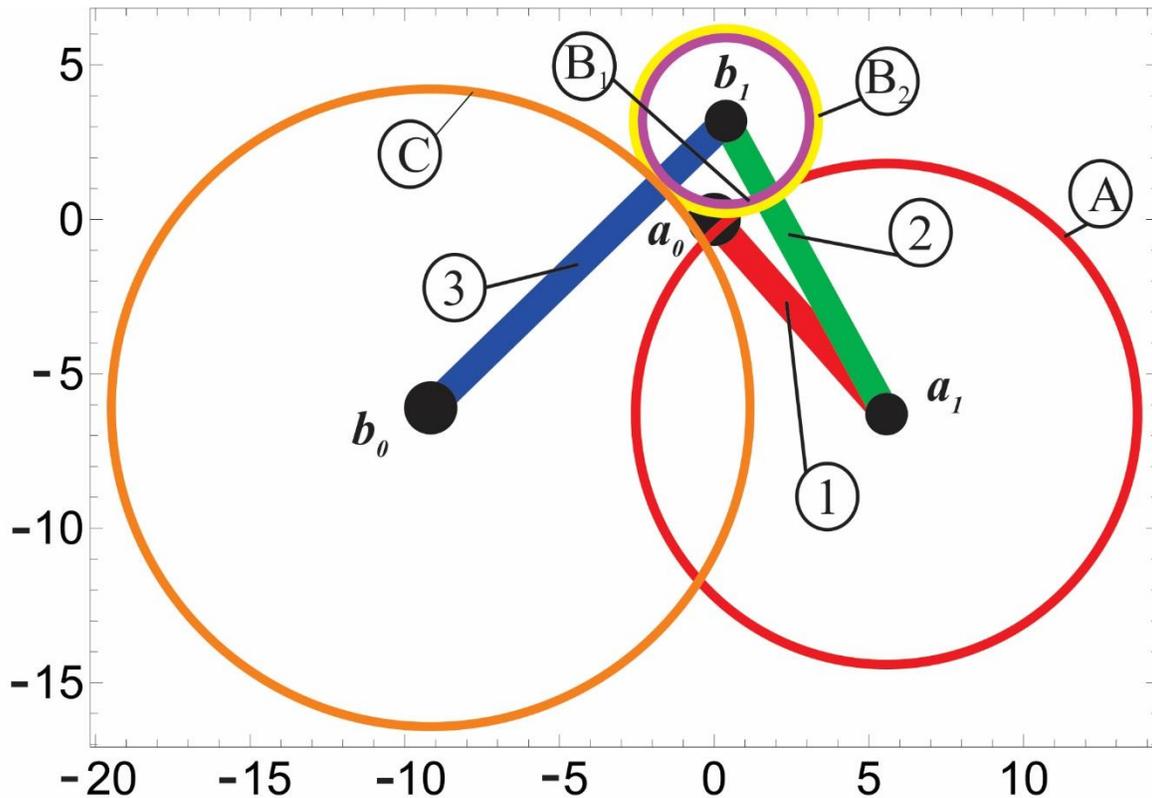


Figura 2.18 Resultado de la Síntesis de un mecanismo de 4 barras engranado.

Donde:

$$\begin{array}{ll}
 a_{1x} = 5.57 & \dot{\theta}_{24_1} = -1.28 \text{ rad/s} \\
 a_{1y} = -6.30 & \dot{\theta}_{34_1} = 0.23 \text{ rad/s} \\
 b_{1x} = 0.38 & \dot{\theta}_{C4_1} = 3.14 \text{ rad/s} \\
 b_{1y} = 3.18 & \dot{\theta}_{C4_2} = -0.74 \text{ rad/s} \\
 \theta_{C4_{12}} = 3.24 \text{ rad} & \dot{\theta}_{C4_3} = -172.07 \text{ rad/s} \\
 \theta_{C4_{13}} = 6.04 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_1} = 2.42 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{24_{12}} = 7.53 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_2} = 4.11 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{24_{13}} = 4.54 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_3} = 4.86 \times 10^6 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{24_{14}} = -0.59 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{24_1} = -1.12 \text{ rad/s}^2 \\
 & \ddot{\theta}_{34_1} = 0.69 \text{ rad/s}^2
 \end{array}$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración del engrane  $C$  son las Figuras 2.19, 2.20 y 2.21 respectivamente.

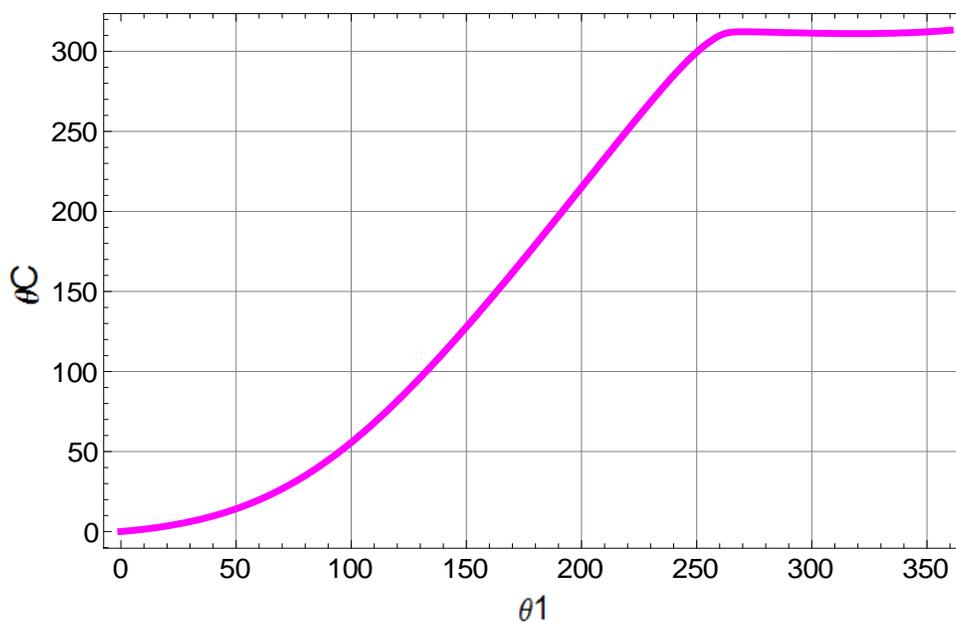


Figura 2.19 Desplazamiento angular del engrane  $C$  respecto al giro de manivela.

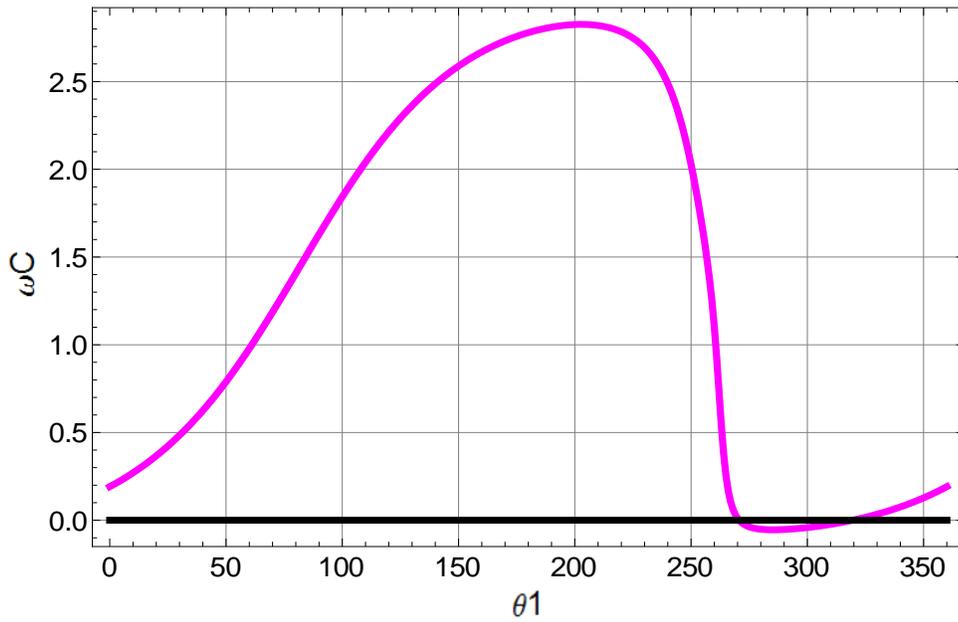


Figura 2.20 Velocidad angular del engrane C respecto al giro de manivela.

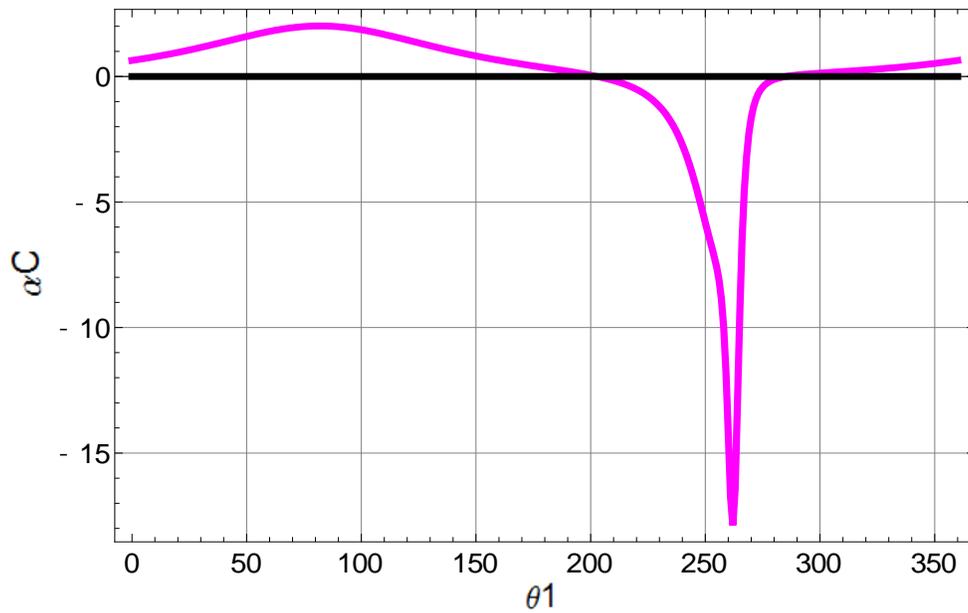


Figura 2.21 Aceleración angular del engrane C respecto al giro de manivela.

## Capítulo 3

# Síntesis de mecanismos esféricos con eslabones y engranes.

### 3.1 Introducción.

La síntesis de mecanismos esféricos engranados es un tema que ha sido estudiado por Ching-Kuo Lin y C.H. Chiang [22] para sintetizar mecanismos de cinco barras por el método del polo.

T.W. Lee y E. Akbil [23-25], presentan la síntesis de mecanismos esféricos de 5 barras y dos engranes con condiciones de detenimiento por medio de trigonometría esférica y transformaciones secuenciales coordinadas por matrices reales ortogonales.

El presente capítulo aborda la síntesis de mecanismos esféricos engranados de tal forma que la metodología desarrollada sea una extensión lógica de la utilizada en el capítulo anterior.

### 3.2 Fundamentos.

Análogamente a las matrices de desplazamiento plano, el movimiento espacial de un cuerpo rígido está dado por las matrices de desplazamiento espacial.

#### 3.2.1 Matrices de desplazamiento espacial.

Las componentes de un punto de interés  $\mathbf{q}_j$ , perteneciente a un cuerpo rígido después del desplazamiento espacial se definen de acuerdo a la ecuación (3.1):

$$(\mathbf{q}_j) = [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{q}_1) \quad (3.1)$$

Donde  $[D_{1j}]$  es la matriz de desplazamiento de dimensión  $4 \times 4$ , que define el desplazamiento de la posición  $j$  –ésima relativa a su posición inicial, la cual está dada por la siguiente expresión:

$$[D_{1j}] = \begin{bmatrix} [R_{\theta_{1j},u}] & (\mathbf{p}_j - [R_{\theta_{1j},u}]\mathbf{p}_1) \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

y  $[R_{\theta_{1j},u}]$  es la matriz de  $3 \times 3$  que indica el desplazamiento angular relativo de la posición  $j$  –ésima desde la posición inicial con giro sobre el eje definido por el vector  $\mathbf{u}$ .

La matriz de desplazamiento espacial (3.2) tiene la siguiente forma al ser desarrollada:

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} d_{11} &= C\theta_{1j} + u_x^2 - C\theta_{1j}u_x^2 \\ d_{12} &= u_xu_y - C\theta_{1j}u_xu_y - S\theta_{1j}u_z \\ d_{13} &= S\theta_{1j}u_y + u_xu_z - C\theta_{1j}u_xu_z \\ d_{14} &= -C\theta_{1j}p_{1x} + p_{jx} - p_{1x}u_x^2 + C\theta_{1j}p_{1x}u_x^2 - p_{1z}S\theta_{1j}u_y - p_{1y}u_xu_y + C\theta_{1j}p_{1y}u_xu_y \\ &\quad + p_{1y}S\theta_{1j}u_z - p_{1z}u_xu_z + C\theta_{1j}p_{1z}u_xu_z \\ d_{21} &= u_xu_y - C\theta_{1j}u_xu_y + S\theta_{1j}u_z \\ d_{22} &= C\theta_{1j} + u_y^2 - C\theta_{1j}u_y^2 \\ d_{23} &= -S\theta_{1j}u_x + u_yu_z - C\theta_{1j}u_yu_z \\ d_{24} &= -C\theta_{1j}p_{1y} + p_{jy} + p_{1z}S\theta_{1j}u_x - p_{1x}u_xu_y + C\theta_{1j}p_{1x}u_xu_y - p_{1y}u_y^2 + C\theta_{1j}p_{1y}u_y^2 \\ &\quad - p_{1x}S\theta_{1j}u_z - p_{1z}u_yu_z + C\theta_{1j}p_{1z}u_yu_z \\ d_{31} &= -S\theta_{1j}u_y + u_xu_z - C\theta_{1j}u_xu_z \\ d_{32} &= S\theta_{1j}u_x + u_yu_z - C\theta_{1j}u_yu_z \\ d_{33} &= C\theta_{1j} + u_z^2 - C\theta_{1j}u_z^2 \\ d_{34} &= -C\theta_{1j}p_{1z} + p_{jz} - p_{1y}S\theta_{1j}u_x + p_{1x}S\theta_{1j}u_y - p_{1x}u_xu_z + C\theta_{1j}p_{1x}u_xu_z \\ &\quad - p_{1y}u_yu_z + C\theta_{1j}p_{1y}u_yu_z - p_{1z}u_z^2 + C\theta_{1j}p_{1z}u_z^2 \\ d_{41} &= d_{42} = d_{43} = 0 \\ d_{44} &= 1 \end{aligned}$$

### 3.2.2 Matrices de desplazamiento diferencial espaciales.

De igual forma que se obtuvieron las derivadas de las ecuaciones de longitud constante para la síntesis de mecanismos planos engranados, se presentan a continuación las expresiones para las matrices de velocidad y aceleración espacial  $[\mathbf{V}_j]$  y  $[\mathbf{A}_j]$  respectivamente:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_j &= [\mathbf{V}_j] \mathbf{q}_j \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_j \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_j, p_j}] & (\dot{\mathbf{p}}_j - [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_j, p_j}] \mathbf{p}_j) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (3.4) \\ (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_j &= [\mathbf{A}_j] \mathbf{q}_j \\ \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_j \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [\dot{\mathbf{W}}_{\ddot{\theta}_j, p_j}] & (\ddot{\mathbf{p}}_j - [\dot{\mathbf{W}}_{\ddot{\theta}_j, p_j}] \mathbf{p}_j) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_j \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (3.6) \\ (3.7) \end{aligned}$$

Donde los términos  $[\mathbf{V}_j]$  y  $[\mathbf{W}_{\dot{\theta}_j, p_j}]$  en las ecuaciones (3.4) y (3.5) reciben el nombre de matriz de velocidad espacial y matriz de velocidad angular espacial respectivamente.

De manera semejante, las matrices  $[\mathbf{A}_j]$  y  $[\dot{\mathbf{W}}_{\ddot{\theta}_j, p_j}]$  en las ecuaciones (3.6) y (3.7) son llamadas matriz de aceleración espacial y matriz de aceleración angular espacial.

El desarrollo de las matrices de velocidad y aceleración angular puede estudiarse en la referencia [1,23] mientras que su expresión desarrollada se muestra en las ecuaciones (3.8) y (3.9).

$$[\mathbf{V}_j] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Donde:

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{22} = v_{33} = v_{41} = v_{42} = v_{43} = v_{44} = 0 \\ v_{12} &= -u_z \dot{\theta} \\ v_{13} &= u_y \dot{\theta} \\ v_{14} &= \dot{p}_{jx} - p_{jz} u_y \dot{\theta} + p_{jy} u_z \dot{\theta} \\ v_{21} &= u_z \dot{\theta} \\ v_{23} &= -u_x \dot{\theta} \\ v_{24} &= \dot{p}_{jy} + p_{jz} u_x \dot{\theta} - p_{jx} u_z \dot{\theta} \\ v_{31} &= -u_y \dot{\theta} \\ v_{32} &= u_x \dot{\theta} \\ v_{34} &= \dot{p}_{jz} - p_{jy} u_x \dot{\theta} + p_{jx} u_y \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$[A_j] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (u_x^2 - 1)\dot{\theta}^2 \\ a_{12} &= u_x u_y \dot{\theta}^2 - \dot{u}_z \dot{\theta} - u_z \ddot{\theta} \\ a_{13} &= u_x u_y \dot{\theta}^2 + \dot{u}_y \dot{\theta} + u_y \ddot{\theta} \\ a_{14} &= \ddot{p}_{ix} + p_{iy} u_z \ddot{\theta} + p_{iy} \dot{u}_z \dot{\theta} - p_{iy} u_x u_y \dot{\theta}^2 + p_{ix} u_y^2 \dot{\theta}^2 + p_{ix} u_z^2 \dot{\theta}^2 \\ &\quad - p_{iz} (u_y \ddot{\theta} + \dot{u}_y \dot{\theta} + u_x u_z \dot{\theta}^2) \\ a_{21} &= u_x u_y \dot{\theta}^2 + \dot{u}_z \dot{\theta} + u_z \ddot{\theta} \\ a_{22} &= (u_y^2 - 1)\dot{\theta}^2 \\ a_{23} &= u_y u_z \dot{\theta}^2 - \dot{u}_x \dot{\theta} - u_x \ddot{\theta} \\ a_{24} &= \ddot{p}_{iy} - p_{ix} u_z \ddot{\theta} - p_{ix} \dot{u}_z \dot{\theta} + p_{iy} u_x^2 \dot{\theta}^2 - p_{ix} u_x u_y \dot{\theta}^2 + p_{iy} u_z^2 \dot{\theta}^2 \\ &\quad + p_{iz} (u_x \ddot{\theta} + \dot{u}_x \dot{\theta} - u_y u_z \dot{\theta}^2) \\ a_{31} &= u_x u_z \dot{\theta}^2 - \dot{u}_y \dot{\theta} - u_y \ddot{\theta} \\ a_{32} &= u_y u_z \dot{\theta}^2 + \dot{u}_x \dot{\theta} + u_x \ddot{\theta} \\ a_{33} &= (u_z^2 - 1)\dot{\theta}^2 \\ a_{34} &= \ddot{p}_{iz} + p_{ix} u_y \ddot{\theta} + p_{ix} \dot{u}_y \dot{\theta} + p_{iz} u_x^2 \dot{\theta}^2 + p_{iz} u_y^2 \dot{\theta}^2 - p_{ix} u_x u_z \dot{\theta}^2 \\ &\quad - p_{iy} (u_x \ddot{\theta} + \dot{u}_x \dot{\theta} + u_y u_z \dot{\theta}^2) \\ a_{41} &= a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0 \end{aligned}$$

### 3.2.3 Razón de trenes cónicos planetarios externos.

El método de la fórmula permite obtener la relación del tren de engranes implementada en la cadena cinemática de mecanismos planos.

De manera análoga a este procedimiento, es necesaria la obtención de una expresión matemática que determine la razón de velocidades de un tren planetario cónico.

Para obtener la expresión matemática para trenes planetarios cónicos externos, se analiza cinemáticamente el tren de engranes mostrados en la Figura 3.1 compuesto por el sol (cuerpo 1), satélite (cuerpo 2), el brazo (cuerpo 3) que los une y la tierra (cuerpo 0).

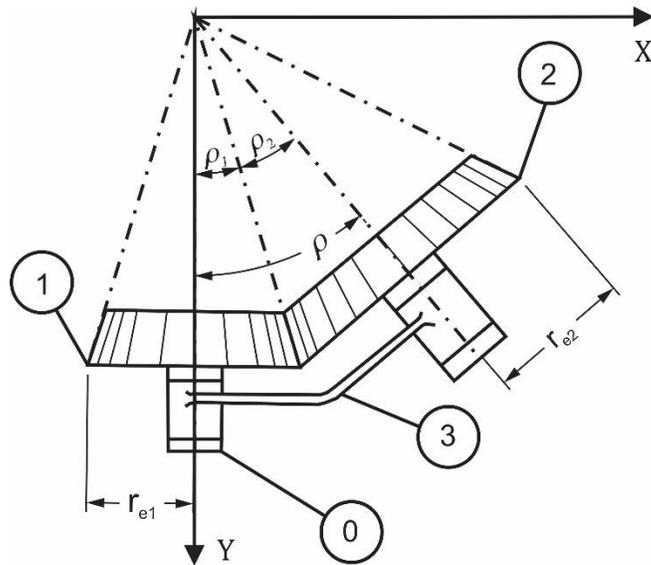


Figura 3.1 Tren planetario cónico externo.

Los grados de libertad son:

$$GDL = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2$$

$$GDL = 3(4 - 1) - 2(3) - 1$$

$$GDL = 3(3) - 6 - 1 = 2$$

El número de contornos independientes es:

$$\eta_c = J - L + 1$$

$$\eta_c = 4 - 4 + 1 = 1$$

La Figura 3.2 muestra el diagrama de contorno y el diagrama de velocidades en la Figura 3.3.

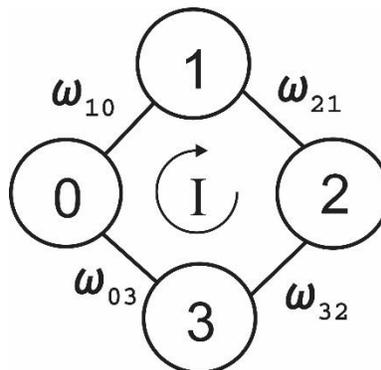


Figura 3.2 Diagrama de contorno del tren planetario cónico externo.

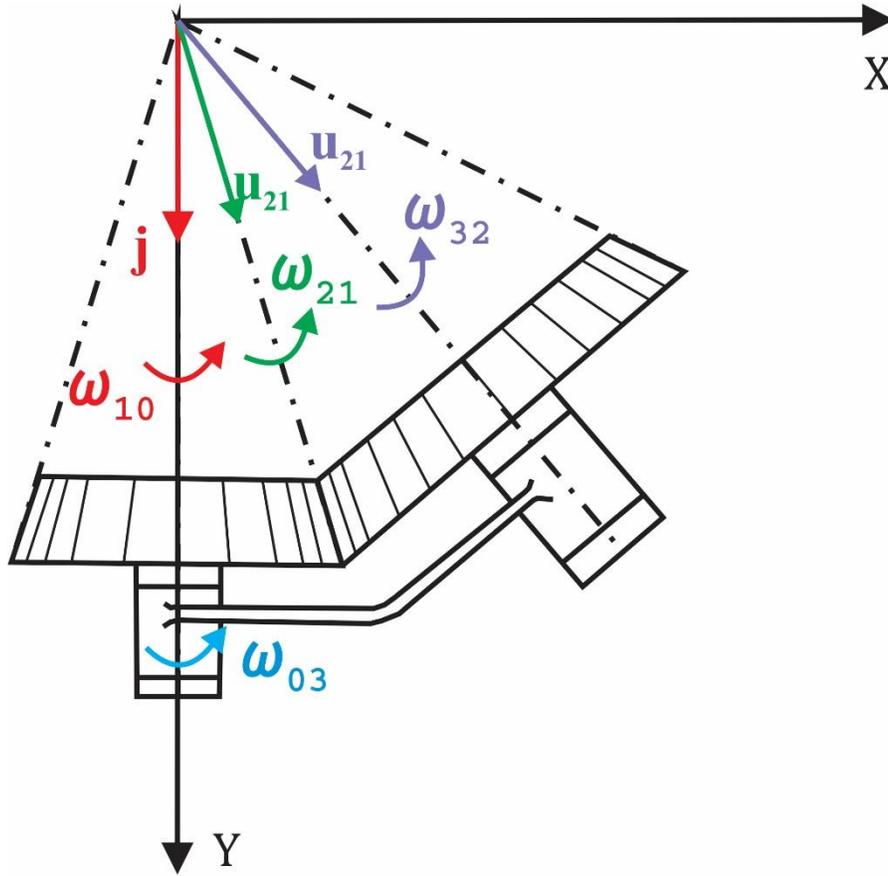


Figura 3.3 Velocidades del tren planetario cónico externo.

Del contorno  $I$  se tiene:

$$\boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{03} = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{10} &= 0\mathbf{i} + \omega_{10}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{21} &= \omega_{21}\mathbf{u}_{21} \\ \boldsymbol{\omega}_{32} &= \omega_{32}\mathbf{u}_{32} \\ \boldsymbol{\omega}_{03} &= 0\mathbf{i} + \omega_{03}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{21} &= \mathbf{R}_z(-\rho_1)\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_{32} &= \mathbf{R}_z(-\rho_1 - \rho_2)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{R}_z$  es la matriz de rotación respecto al eje  $z$ , definida como sigue:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero se sabe que el ángulo que existe entre las flechas de los engranes es  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ , entonces lo anterior queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{21} &= \mathbf{R}_z(-\rho_1)\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_{32} &= \mathbf{R}_z(-\rho)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Las velocidades angulares absolutas son:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{10} &= \boldsymbol{\omega}_{10} \\ \boldsymbol{\omega}_{20} &= \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{21} \\ \boldsymbol{\omega}_{30} &= -\boldsymbol{\omega}_{03} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Utilizando (3.12) en (3.11) se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{10} &= 0\mathbf{i} + \omega_{10}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{21} &= \omega_{21} \sin \rho_1 \mathbf{i} + \omega_{21} \cos \rho_1 \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{32} &= \omega_{32} \sin(\rho_1 + \rho_2) \mathbf{i} + \omega_{32} \cos(\rho_1 + \rho_2) \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{03} &= 0\mathbf{i} - \omega_{30}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.14) en (3.10) y separando sus componentes se obtiene un sistema de dos ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} \omega_{21} \sin \rho_1 + \omega_{32} \sin(\rho_1 + \rho_2) &= 0 \\ \omega_{10} - \omega_{30} + \omega_{21} \cos \rho_1 + \omega_{32} \cos(\rho_1 + \rho_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ya que se tienen cuatro incógnitas y dos ecuaciones escalares y se sabe que  $GDL = 2$ , se resuelve el sistema (3.15) para  $\omega_{21}$  y  $\omega_{32}$  dando  $\omega_{10}$  y  $\omega_{30}$ .

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= -\frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1 + \rho_2)}{-\cos(\rho_1 + \rho_2) \sin(\rho_1) + \cos(\rho_1) \sin(\rho_1 + \rho_2)} \\ \omega_{32} &= -\frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1)}{\cos(\rho_1 + \rho_2) \sin(\rho_1) - \cos(\rho_1) \sin(\rho_1 + \rho_2)} \end{aligned}$$

Simplificando el resultado anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= -\frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1 + \rho_2)}{\sin(\rho_2)} \\ \omega_{32} &= \frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1)}{\sin(\rho_2)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Y al despejar la diferencia de velocidades ( $\omega_{10} - \omega_{30}$ ), se tiene:

$$\frac{\omega_{32}}{(\omega_{10} - \omega_{30})} = \frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} \quad (3.17)$$

Pero:

$$\omega_{32} = -\omega_{23}$$

Entonces puede escribirse a la ecuación (3.17) como sigue:

$$\frac{-\omega_{23}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = \frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} \quad (3.18)$$

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} \quad (3.19)$$

Donde  $\omega_{23}$  es la velocidad del engrane satélite relativa el brazo,  $\omega_{10}$  es la velocidad absoluta del engrane sol y  $\omega_{30}$  es la velocidad absoluta del brazo.

Por otro lado, en la Figura 3.4 puede observarse que:

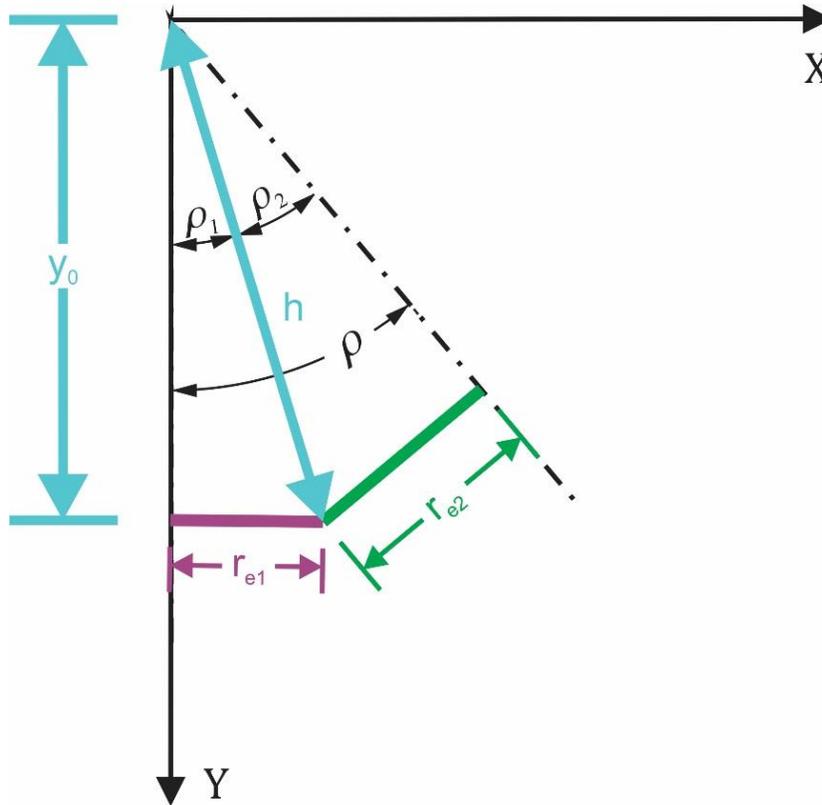


Figura 3.4

$$\sin \rho_1 = \frac{r_{e1}}{h} \quad ; \quad \sin \rho_2 = \frac{r_{e2}}{h}$$

$$\cos \rho_1 = \frac{y_0}{h} \quad ; \quad \cos \rho_2 = \frac{a}{h}$$

Por lo tanto, el segundo miembro de (3.19) puede escribirse como:

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_{e1}}{h}$$

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_{e2}}{h}$$

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_{e1}}{r_{e2}}$$

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Y finalmente puede escribirse a (3.19) como sigue:

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (3.20)$$

El resultado mostrado en la ecuación (3.20) puede escribirse de forma más general, y de acuerdo a la Figura 3.5 de la siguiente manera:

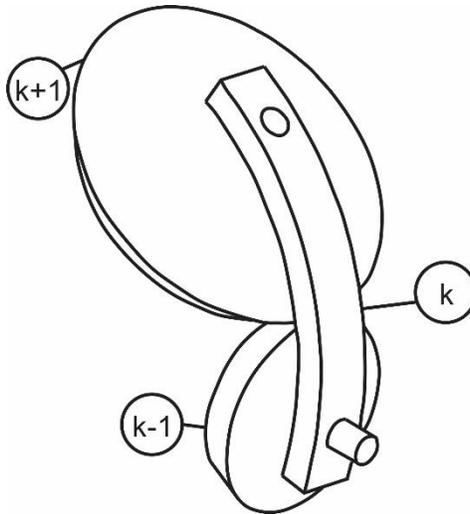


Figura 3.5 Tren planetario cónico externo.

$$\frac{\omega_{k+1,k}}{(\omega_{k-1,0} - \omega_{k,0})} = -\frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} = \frac{\sin \rho_{k-1}}{\sin \rho_{k+1}} \quad (3.21)$$

### 3.2.4 Razón de trenes cónicos planetarios internos.

De igual forma al tren cónico planetario externo, se analiza cinemáticamente el tren de engranes mostrado en la Figura 3.6.

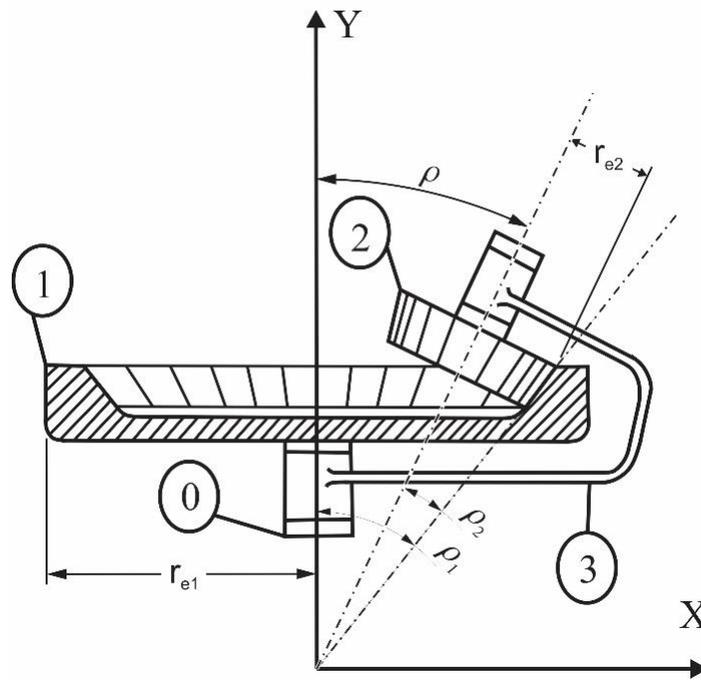


Figura 3.6 Tren planetario cónico interno.

Los grados de libertad del tren planetario interno, al igual que el externo, es  $GDL = 2$ .

El número de contornos independientes es:

$$\eta_c = J - L + 1$$

$$\eta_c = 4 - 4 + 1 = 1$$

La Figura 3.7 muestra el diagrama de contorno y el diagrama de velocidades en la Figura 3.8.

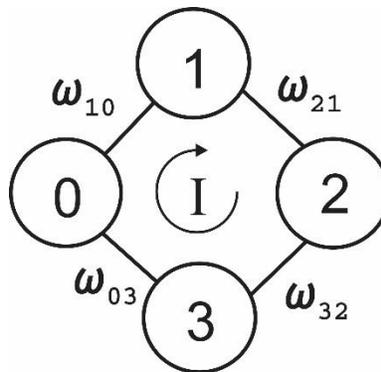


Figura 3.7 Diagrama de contorno del tren planetario cónico interno.

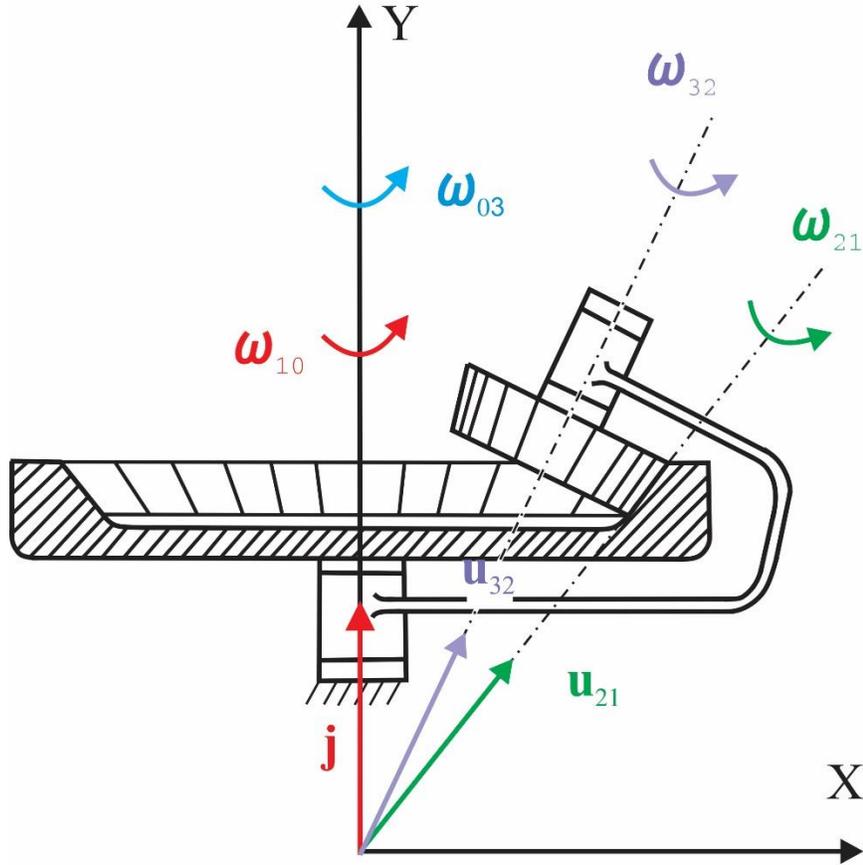


Figura 3.8 Velocidades del tren planetario cónico interno.

Del contorno  $I$  se tiene:

$$\boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32} + \boldsymbol{\omega}_{03} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{10} &= 0\mathbf{i} + \omega_{10}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{21} &= \omega_{21}\mathbf{u}_{21} \\ \boldsymbol{\omega}_{32} &= \omega_{32}\mathbf{u}_{32} \\ \boldsymbol{\omega}_{03} &= 0\mathbf{i} + \omega_{03}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{21} &= \mathbf{R}_z(-\rho_1)\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_{32} &= \mathbf{R}_z(-(\rho_1 - \rho_2))\mathbf{j} \end{aligned}$$

Pero se sabe que el ángulo que existe entre las flechas de los engranes es  $\rho = \rho_1 - \rho_2$ , entonces lo anterior queda como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{21} &= \mathbf{R}_z(-\rho_1)\mathbf{j} \\ \mathbf{u}_{32} &= \mathbf{R}_z(-\rho)\mathbf{j} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Las velocidades angulares absolutas son:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{10} &= \boldsymbol{\omega}_{10} \\ \boldsymbol{\omega}_{20} &= \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{21} \\ \boldsymbol{\omega}_{30} &= -\boldsymbol{\omega}_{03}\end{aligned}\quad (3.25)$$

Utilizando (3.24) en (3.23) se tiene:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{10} &= 0\mathbf{i} + \omega_{10}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{21} &= \omega_{21} \sin \rho_1 \mathbf{i} + \omega_{21} \cos \rho_1 \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{32} &= \omega_{32} \sin(\rho_1 - \rho_2) \mathbf{i} + \omega_{32} \cos(\rho_1 - \rho_2) \mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_{03} &= 0\mathbf{i} - \omega_{30}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.26) en (3.22) y separando sus componentes se obtiene un sistema de dos ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}\omega_{21} \sin \rho_1 + \omega_{32} \sin(\rho_1 - \rho_2) &= 0 \\ \omega_{10} - \omega_{30} + \omega_{21} \cos \rho_1 + \omega_{32} \cos(\rho_1 - \rho_2) &= 0\end{aligned}\quad (3.27)$$

Ya que se tienen cuatro incógnitas y dos ecuaciones escalares y se sabe que  $GDL = 2$  se resuelve el sistema (3.27) para  $\omega_{21}$  y  $\omega_{32}$  dando  $\omega_{10}$  y  $\omega_{30}$ .

$$\begin{aligned}\omega_{21} &= -\frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1 - \rho_2)}{-\cos(\rho_1 - \rho_2) \sin(\rho_1) + \cos(\rho_1) \sin(\rho_1 - \rho_2)} \\ \omega_{32} &= -\frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1)}{\cos(\rho_1 - \rho_2) \sin(\rho_1) - \cos(\rho_1) \sin(\rho_1 - \rho_2)}\end{aligned}$$

Simplificando el resultado anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}\omega_{21} &= \frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1 - \rho_2)}{\sin(\rho_2)} \\ \omega_{32} &= -\frac{(\omega_{10} - \omega_{30}) \sin(\rho_1)}{\sin(\rho_2)}\end{aligned}\quad (3.28)$$

Y al despejar la diferencia de velocidades  $(\omega_{10} - \omega_{30})$ , se tiene:

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -\frac{\sin(\rho_1)}{\sin(\rho_2)}\quad (3.29)$$

Pero:

$$\omega_{32} = -\omega_{23}$$

Entonces puede escribirse a la ecuación (3.29) como sigue:

$$\frac{-\omega_{23}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = -\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} \quad (3.30)$$

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = \frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2}$$

Donde  $\omega_{23}$  es la velocidad del engrane satélite relativa el brazo,  $\omega_{10}$  es la velocidad absoluta del engrane sol y  $\omega_{30}$  es la velocidad absoluta del brazo.

Por otro lado, en la Figura 3.9 puede observarse que:

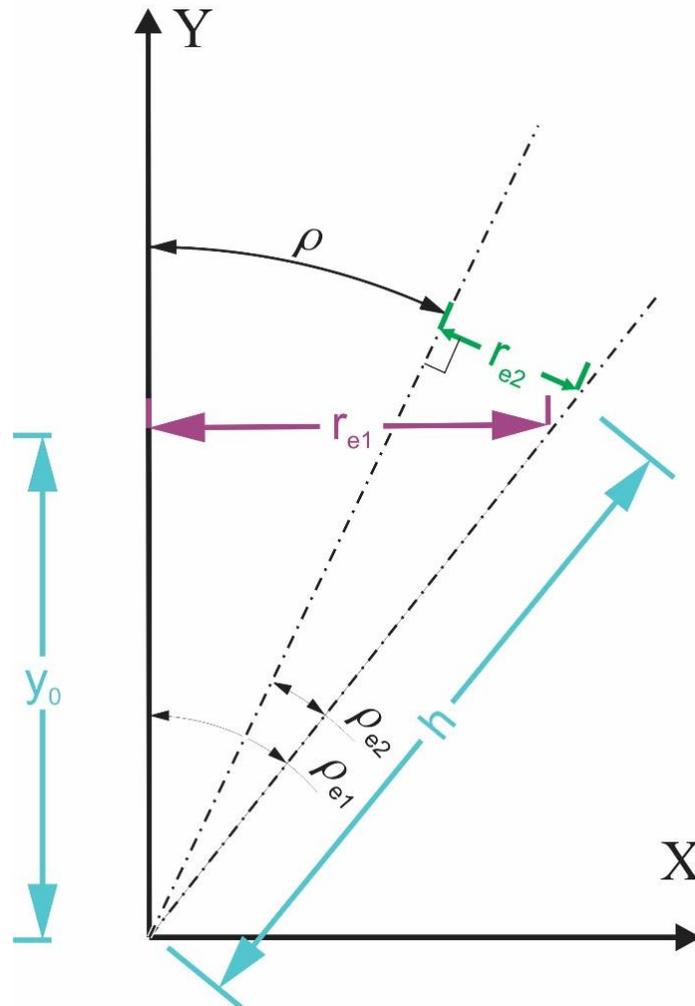


Figura 3.9

$$\sin \rho_1 = \frac{r_{e1}}{h} \quad ; \quad \sin \rho_2 = \frac{r_{e2}}{h}$$

$$\cos \rho_1 = \frac{y_0}{h} \quad ; \quad \cos \rho_2 = \frac{a}{h}$$

Por lo tanto, el segundo miembro de (3.30) puede escribirse como:

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_{e1}}{h}$$

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_{e2}}{h}$$

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{r_{e1}}{r_{e2}}$$

$$\frac{\sin \rho_1}{\sin \rho_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Y finalmente puede escribirse a (3.30) como sigue:

$$\frac{\omega_{23}}{\omega_{10} - \omega_{30}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.31)$$

El resultado mostrado en la ecuación (3.31) puede escribirse de forma más general, y de acuerdo a la Figura 3.10 de la siguiente manera:

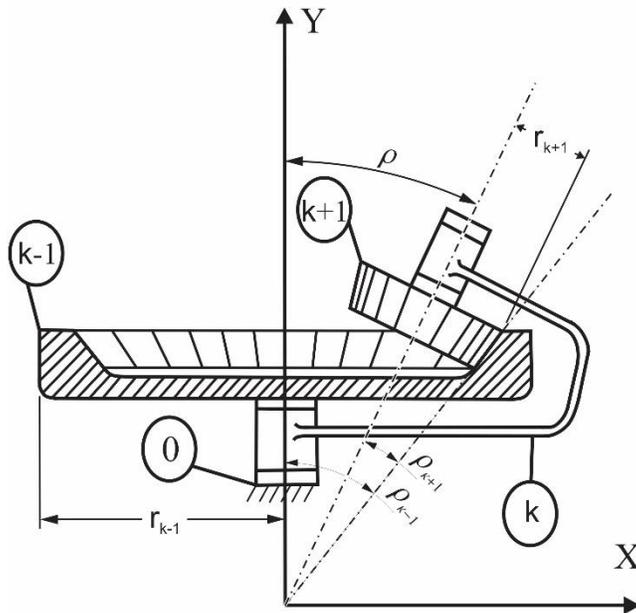


Figura 3.10 Tren planetario cónico interno.

$$\frac{\omega_{k+1,k}}{(\omega_{k-1,0} - \omega_{k,0})} = \frac{N_{k-1}}{N_{k+1}} = \frac{\sin \rho_{k-1}}{\sin \rho_{k+1}} \quad (3.32)$$

### 3.3 Síntesis de un mecanismo esférico de 4 barras engranado revertido.

La Figura 3.11 muestra un mecanismo esférico de cuatro barras engranado revertido.

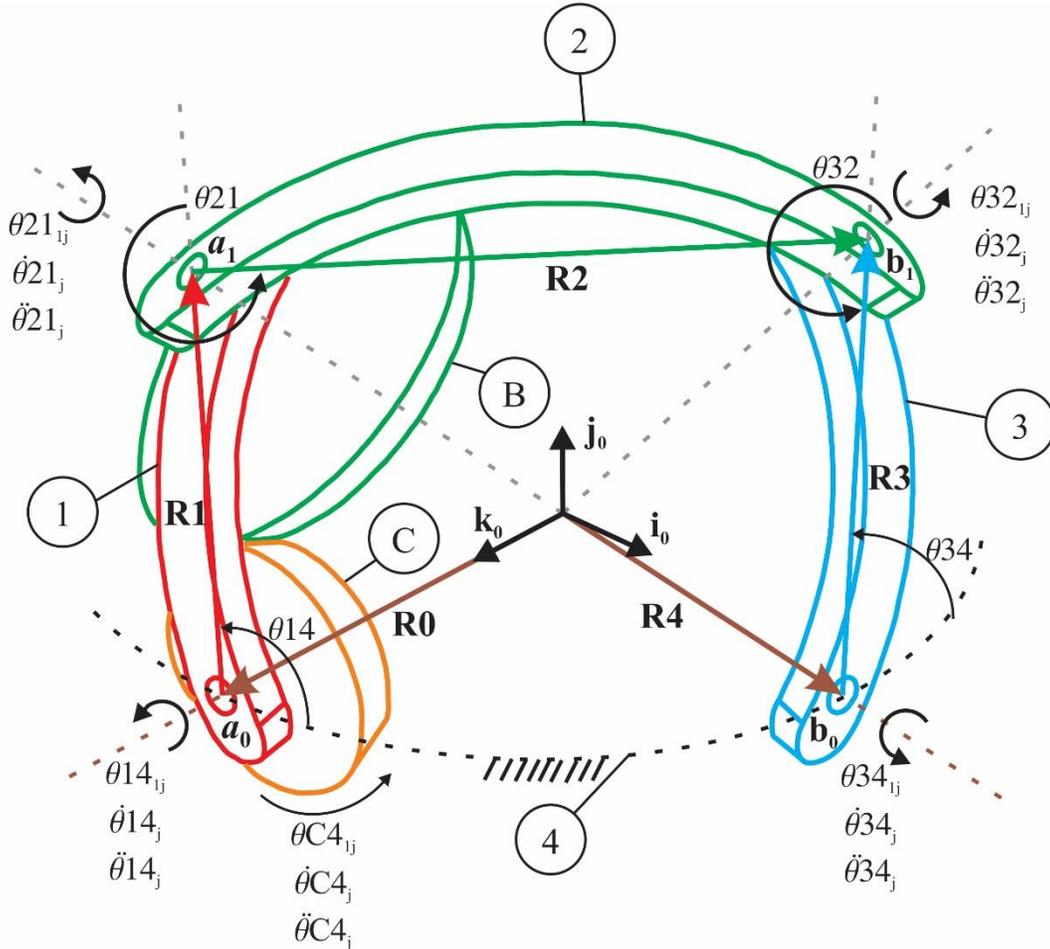


Figura 3.11 Mecanismo esférico de 4 barras engranado revertido.

#### 3.3.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.

De acuerdo a la Figura 3.11 y considerando  $j$  puntos de precisión con  $j = 1,2,3,4$ , las ecuaciones de diseño de longitud constante y sus derivadas son:

$$(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \quad (3.33)$$

$$(\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) = 0 \quad (3.34)$$

$$(\ddot{\mathbf{b}}_j - \ddot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) + (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j) = 0 \quad (3.35)$$

A estas ecuaciones se agregan 4 ecuaciones más que restringen a los puntos  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_1$  a contenidos en el lugar geométrico de una esfera unitaria. Restringir la síntesis a una esfera unitaria permite después escalar el mecanismo a las dimensiones que sea necesario.

$$(\mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_0) = 1 \quad (3.36)$$

$$(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) = 1 \quad (3.37)$$

$$(\mathbf{b}_0)^T(\mathbf{b}_0) = 1 \quad (3.38)$$

$$(\mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_1) = 1 \quad (3.39)$$

En las ecuaciones (3.33) a (3.39) se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_j) &= [\mathbf{D}_{1j}](\mathbf{a}_1) & (\mathbf{b}_j) &= [\mathbf{E}_{1j}](\mathbf{b}_1) \\ (\dot{\mathbf{a}}_j) &= [\mathbf{V}_{Dj}](\dot{\mathbf{a}}_j) & (\dot{\mathbf{b}}_j) &= [\mathbf{V}_{Ej}](\dot{\mathbf{b}}_j) \\ (\ddot{\mathbf{a}}_j) &= [\mathbf{A}_{Dj}](\ddot{\mathbf{a}}_j) & (\ddot{\mathbf{b}}_j) &= [\mathbf{A}_{Ej}](\ddot{\mathbf{b}}_j) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Además las matrices de desplazamiento y desplazamiento diferencial espaciales de las ecuaciones (3.40) están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{D}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta_{14j},\mathbf{a}_0}] & (\mathbf{a}_0 - [\mathbf{R}_{\theta_{14j},\mathbf{a}_0}]\mathbf{a}_0) \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{V}_{Dj}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{14j},\mathbf{a}_0}] & (\dot{\mathbf{a}}_0 - [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{14j},\mathbf{a}_0}]\dot{\mathbf{a}}_0) \\ 000 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A}_{Dj}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{14j},\mathbf{a}_0}] & (\ddot{\mathbf{a}}_0 - [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{14j},\mathbf{a}_0}]\ddot{\mathbf{a}}_0) \\ 000 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{1j}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{\theta_{34j},\mathbf{b}_0}] & (\mathbf{b}_0 - [\mathbf{R}_{\theta_{34j},\mathbf{b}_0}]\mathbf{b}_0) \\ 000 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{V}_{Ej}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{34j},\mathbf{b}_0}] & (\dot{\mathbf{b}}_0 - [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{34j},\mathbf{b}_0}]\dot{\mathbf{b}}_0) \\ 000 & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A}_{Ej}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{34j},\mathbf{b}_0}] & (\ddot{\mathbf{b}}_0 - [\mathbf{A}_{\ddot{\theta}_{34j},\mathbf{b}_0}]\ddot{\mathbf{b}}_0) \\ 000 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

### 3.3.2 Ecuaciones cinemáticas de los engranes.

Considerando que el engrane  $C$  es la salida del mecanismo, se obtendrá la expresión que determine el valor de su velocidad angular en función de las velocidades angulares de los eslabones y la razón de engranes cónicos planetarios.

Considerando el tren planetario formado por los engranes  $B - C$ , y de acuerdo a la ecuación (3.21), se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\theta}B1_j}{\dot{\theta}C1_j} &= -\frac{\sin \rho C}{\sin \rho B} \\ \dot{\theta}C1_j &= -\frac{\sin \rho B}{\sin \rho C} \dot{\theta}B1_j \\ \dot{\theta}C4_j - \dot{\theta}14_j &= -\frac{\sin \rho B}{\sin \rho C} \dot{\theta}B1_j \\ \dot{\theta}C4_j &= \dot{\theta}14_j - \frac{\sin \rho B}{\sin \rho C} \dot{\theta}B1_j\end{aligned}$$

Pero se sabe que  $\dot{\theta}B1_j = \dot{\theta}21_j$ , entonces:

$$\dot{\theta}C4_j = \dot{\theta}14_j - \frac{\sin \rho B}{\sin \rho C} \dot{\theta}21_j \quad (3.43)$$

Renombrando el coeficiente de  $\dot{\theta}21_j$  en la ecuación (3.43) como  $r_{BC}$ , quedaría como sigue:

$$\dot{\theta}C4_j = \dot{\theta}14_j - r_{BC} \dot{\theta}21_j \quad (3.44)$$

Integrando ahora la ecuación (3.44), para obtener la ecuación de posición angular:

$$\theta C4_{1j} = \theta 14_{1j} - r_{BC} \theta 21_{1j} \quad (3.45)$$

Para obtener la ecuación de aceleración angular  $\ddot{\theta}C4_j$ , se deriva respecto al tiempo la ecuación (3.44).

$$\ddot{\theta}C4_j = \ddot{\theta}14_{1j} - r_{BC} \ddot{\theta}21_{1j} \quad (3.46)$$

### 3.3.3 Coeficientes de influencia.

Análogamente al trabajo presentado de síntesis plana, los coeficientes de influencia que relacionan las velocidades y aceleraciones angulares de los cuerpos 2 y 3, con los datos de entrada  $\theta 14_j$ ,  $\dot{\theta}14_j$  y  $\ddot{\theta}14_j$ , son obtenidos al llevar a cabo un análisis cinemático del mecanismo.

De acuerdo a la Figura 3.12, la ecuación de posición para cada configuración de la síntesis, es:

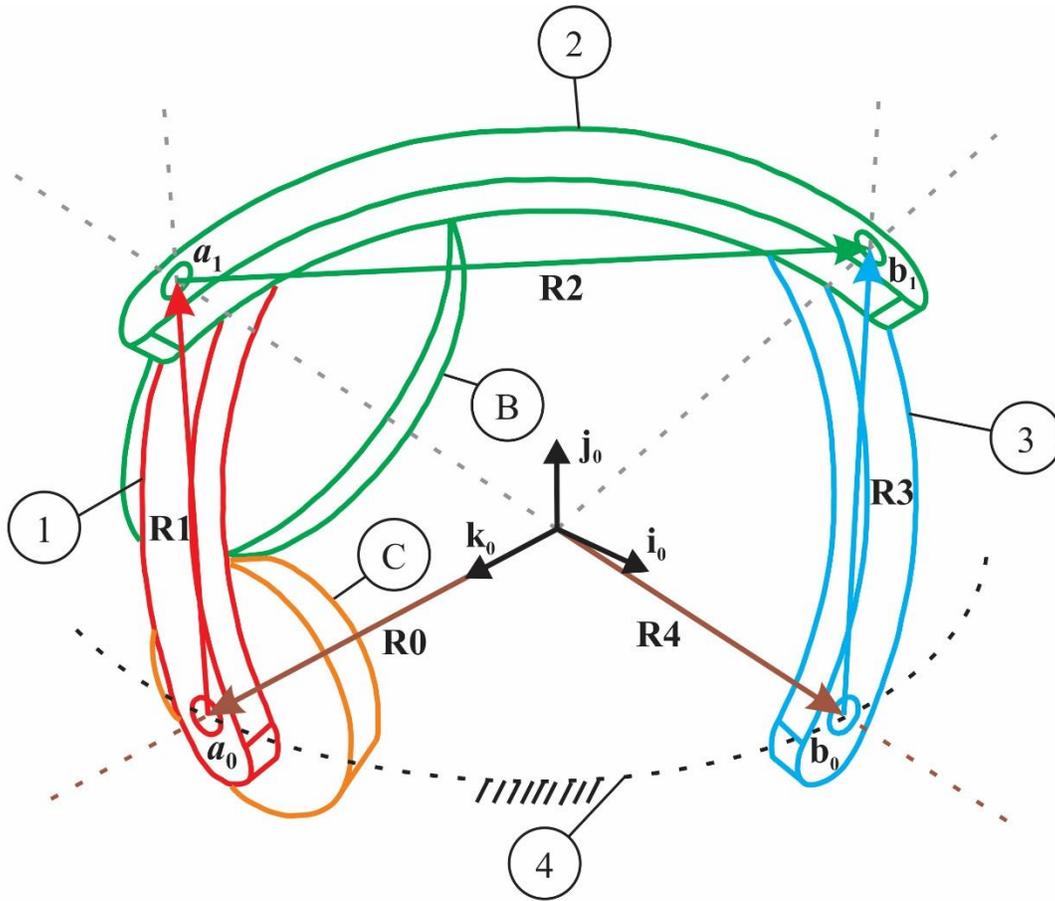


Figura 3.12 Diagrama cinemático del mecanismo esférico de 4 barras engranado revertido.

$$\mathbf{R0} + \mathbf{R1}_j + \mathbf{R2}_j - \mathbf{R3}_j - \mathbf{R4} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

Donde:

$$\mathbf{R0} = \mathbf{a}_0 - \mathbf{0} \quad (3.48.1)$$

$$\mathbf{R1}_j = [\mathbf{R}_{\theta_{14j,a_0}}] \mathbf{r}_1 = (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \quad (3.48.2)$$

$$\mathbf{R2}_j = [\mathbf{R}_{\theta_{14j,a_0}}] [\mathbf{R}_{\theta_{21j,a_j}}] \mathbf{r}_2 = (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) \quad (3.48.3)$$

$$\mathbf{R3}_j = [\mathbf{R}_{\theta_{34j,b_0}}] \mathbf{r}_3 = (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_0) \quad (3.48.4)$$

$$\mathbf{R4} = (\mathbf{b}_0 - \mathbf{0}) \quad (3.48.5)$$

Además:

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) \quad (3.49.1)$$

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) \quad (3.49.2)$$

$$\mathbf{r}_3 = (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \quad (3.49.3)$$

La ecuación de velocidad:

$$\mathbf{V0} + \mathbf{V1}_j + \mathbf{V2}_j - \mathbf{V3}_j - \mathbf{V4} = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

Donde:

$$\mathbf{V0} = \mathbf{0} \quad (3.51.1)$$

$$\mathbf{V1}_j = [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{14_j,a0}}] \mathbf{R1}_j = \dot{\theta}_{14_j} [\mathbf{E1}] \mathbf{R1}_j \quad (3.51.2)$$

$$\mathbf{V2}_j = [\mathbf{W2}_j] \mathbf{R2}_j \quad (3.51.3)$$

$$\mathbf{V3}_j = [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{34_j,b0}}] \mathbf{R3}_j = \dot{\theta}_{34_j} [\mathbf{E3}] \mathbf{R3}_j \quad (3.51.4)$$

$$\mathbf{V4} = \mathbf{0} \quad (3.51.5)$$

De las ecuaciones (3.51.1) y (3.51.5), las matrices  $[\mathbf{E1}]$ ,  $[\mathbf{E2}]$  y  $[\mathbf{E3}]$  se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E1}] &= \begin{bmatrix} 0 & -a_{0z} & a_{0y} \\ a_{0z} & 0 & -a_{0x} \\ -a_{0y} & a_{0x} & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E2}] &= \begin{bmatrix} 0 & -a_{1z} & a_{1y} \\ a_{1z} & 0 & -a_{1x} \\ -a_{1y} & a_{1x} & 0 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{E3}] &= \begin{bmatrix} 0 & -b_{0z} & b_{0y} \\ b_{0z} & 0 & -b_{0x} \\ -b_{0y} & b_{0x} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Por otro lado, se sabe que  $[\mathbf{W2}_j]$  está definida como sigue [1]:

$$[\mathbf{W2}_j] = \left( [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] \dot{[\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}]} \right) \left( [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] [\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}] \right)^T \quad (3.53)$$

Desarrollando el primer factor de (3.53) se tiene:

Donde  $\dot{[\mathbf{R}]} = [\mathbf{W}][\mathbf{R}]$ :

$$\begin{aligned} \left( [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] \dot{[\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}]} \right) &= [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] \dot{[\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}]} + [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] \dot{[\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}]} \\ &= [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{14_j,a0}}] [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] [\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}] + [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] [\mathbf{W}_{\dot{\theta}_{21_j,a_j}}] [\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}] \\ &= \dot{\theta}_{14_j} [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] [\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}] + \dot{\theta}_{21_j} [\mathbf{R}_{\theta_{14_j,a0}}] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{R}_{\theta_{21_j,a_j}}] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Desarrollando ahora el segundo factor de (3.53):

$$\left( \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right] \left[ \mathbf{R}_{\theta 21_j, a_j} \right] \right)^T = \left[ \mathbf{R}_{\theta 21_j, a_j} \right]^T \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right]^T \quad (3.55)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.54) y (3.55) en (3.53), y después de multiplicar se obtiene:

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}2_j] &= \dot{\theta}14_j [\mathbf{E}1] \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right] \left[ \mathbf{R}_{\theta 21_j, a_j} \right] \left[ \mathbf{R}_{\theta 21_j, a_j} \right]^T \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right]^T \\ &+ \dot{\theta}21_j \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right] [\mathbf{E}2_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta 21_j, a_j} \right] \left[ \mathbf{R}_{\theta 21_j, a_j} \right]^T \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right]^T \end{aligned}$$

Al simplificar la expresión anterior da como resultado:

$$[\mathbf{W}2_j] = \dot{\theta}14_j [\mathbf{E}1] + \dot{\theta}21_j \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right] [\mathbf{E}2_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right]^T \quad (3.56)$$

Puede ahora sustituirse la ecuación (3.56) en las (3.51) y estas últimas en la ecuación (3.50), lo cual da lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}14_j [\mathbf{E}1] (\mathbf{R}1_j + \mathbf{R}2_j) + \dot{\theta}21_j \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right] [\mathbf{E}2_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right]^T \mathbf{R}2_j \\ - \dot{\theta}34_j [\mathbf{E}3] \mathbf{R}3_j = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Puede manipularse la ecuación (3.57) para obtener el coeficiente de influencia para las velocidades:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}14_j \mathbf{U}1_j + \dot{\theta}21_j \mathbf{U}2_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{U}3_j &= \mathbf{0} \\ \dot{\theta}21_j \mathbf{U}2_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{U}3_j &= -\dot{\theta}14_j \mathbf{U}1_j \end{aligned} \quad (3.58)$$

Añadiendo  $\dot{\theta}14_j \mathbf{A}$  a la ecuación (3.58) para completar el sistema donde  $\mathbf{A}$  es un vector unitario:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}21_j \mathbf{U}2_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{U}3_j + \dot{\theta}14_j \mathbf{A} &= \dot{\theta}14_j \mathbf{A} - \dot{\theta}14_j \mathbf{U}1_j \\ \dot{\theta}21_j \mathbf{U}2_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{U}3_j + \dot{\theta}14_j \mathbf{A} &= \dot{\theta}14_j (\mathbf{A} - \mathbf{U}1_j) \\ \dot{\theta}21_j \mathbf{U}2_j - \dot{\theta}34_j \mathbf{U}3_j + \dot{\theta}14_j \mathbf{A} &= \dot{\theta}14_j \mathbf{B}_j \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{a}_0 - \mathbf{0}) \\ \mathbf{B}_j &= \mathbf{A} - \mathbf{U}1_j \\ \mathbf{U}1_j &= [\mathbf{E}1] (\mathbf{R}1_j + \mathbf{R}2_j) \\ \mathbf{U}2_j &= \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right] [\mathbf{E}2_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta 14_j, a_0} \right]^T \mathbf{R}2_j \\ \mathbf{U}3_j &= [\mathbf{E}3] \mathbf{R}3_j \end{aligned}$$

O matricialmente:

$$[U2_j \quad -U3_j \quad A] \begin{bmatrix} \dot{\theta}21_j \\ \dot{\theta}34_j \\ \dot{\theta}14_j \end{bmatrix} = -\dot{\theta}14_j B_j$$

Expresión que puede abreviarse como:

$$\begin{aligned} [J_j] v23_j &= \dot{\theta}14_j B_j \\ v23_j &= [J_j]^{-1} B_j \dot{\theta}14_j \end{aligned}$$

Y finalmente pueden obtenerse las velocidades  $\dot{\theta}21_j$  y  $\dot{\theta}34_j$  a partir de los coeficientes de influencia  $K1_j$  y  $K2_j$  por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}21_j &= v23_j^T i = ([J_j]^{-1} B_j)^T i \dot{\theta}14_j = K1_j \dot{\theta}14_j \\ \dot{\theta}34_j &= v23_j^T j = ([J_j]^{-1} B_j)^T j \dot{\theta}14_j = K2_j \dot{\theta}14_j \end{aligned} \quad (3.59)$$

Repetiendo el proceso para obtener los coeficientes de influencia para la velocidad, ahora para la aceleración, se deriva respecto al tiempo la ecuación (3.50):

$$A0 + A1_j + A2_j - A3_j - A4 = 0 \quad (3.60)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A0 &= 0 \\ A1_j &= [H_{\dot{\theta}14_j, \ddot{\theta}14_j, a0}] R1_j = \left( [W_{\dot{\theta}14_j, a0}] + [W_{\dot{\theta}14_j, a0}] [W_{\dot{\theta}14_j, a0}] \right) R1_j \\ A2_j &= [H2_j] R2_j \\ A3_j &= [H_{\dot{\theta}34_j, \ddot{\theta}34_j, a0}] R3_j = \left( [W_{\dot{\theta}34_j, b0}] + [W_{\dot{\theta}34_j, b0}] [W_{\dot{\theta}34_j, b0}] \right) R3_j \\ A4 &= 0 \end{aligned}$$

Tal que:

$$\begin{aligned} [W_{\dot{\theta}14_j, a0}] &= \dot{\theta}14_j [E1] \\ [W_{\dot{\theta}21_j, a1}] &= \dot{\theta}21_j [E2] \\ [W_{\dot{\theta}34_j, b0}] &= \dot{\theta}34_j [E3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j, a0}] &= \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] \\ [\mathbf{W}_{\dot{\theta}21_j, a1}] &= \ddot{\theta}21_j [\mathbf{E2}] \\ [\mathbf{W}_{\dot{\theta}34_j, b0}] &= \ddot{\theta}34_j [\mathbf{E3}] \end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones puede reescribirse como:

$$\mathbf{A0} = \mathbf{0} \quad (3.61.1)$$

$$\mathbf{A1}_j = \left( \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] + \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}][\mathbf{E1}] \right) \mathbf{R1}_j \quad (3.61.2)$$

$$\mathbf{A2}_j = [\mathbf{A2}_j] \mathbf{R2}_j \quad (3.61.3)$$

$$\mathbf{A3}_j = \left( \ddot{\theta}34_j [\mathbf{E3}] + \dot{\theta}34_j^2 [\mathbf{E3}][\mathbf{E3}] \right) \mathbf{R3}_j \quad (3.61.4)$$

$$\mathbf{A4} = \mathbf{0} \quad (3.61.5)$$

Por otro lado, la matriz  $[\mathbf{H2}_j]$  está definida como sigue:

$$[\mathbf{H2}_j] = \left( [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] \ddot{[\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}]} \right) \left( [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \right)^T \quad (3.62)$$

Desarrollando factor  $\left( [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] \ddot{[\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}]} \right)$  se tiene:

$$\left( [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] + [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{W}_{\dot{\theta}21_j, aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \right) \quad (3.63)$$

Derivando el primer término de (3.63):

$$\begin{aligned} \left( [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \right) &= [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \\ &+ [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] + [\mathbf{W}_{\dot{\theta}14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned} &= \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \\ &+ \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}][\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \\ &+ \dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Derivando ahora el segundo término de (3.63):

$$\begin{aligned} \left( [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{W}_{\dot{\theta}21_j, aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \right) &= [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{W}_{\dot{\theta}21_j, aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \\ [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{W}_{\dot{\theta}21_j, aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] &+ [\mathbf{R}_{\theta14_j, a0}] [\mathbf{W}_{\dot{\theta}21_j, aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j, aj}] \end{aligned}$$

Que puede reescribirse como:

$$\begin{aligned}
 &= \dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] \\
 &+ \ddot{\theta}21_j [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] \\
 &+ \dot{\theta}21_j^2 [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.64) y (3.65) en (3.63) y ésta última en (3.62) se tiene:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H2}_j] &= \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]^T [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &+ \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]^T [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &+ \dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]^T [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]^T [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &+ \ddot{\theta}21_j [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]^T [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &+ \dot{\theta}21_j^2 [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}] [\mathbf{R}_{\theta21_j,aj}]^T [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T
 \end{aligned}$$

Expresión que después de simplificar quedaría como:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{H2}_j] &= \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] + \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] [\mathbf{E1}] \\
 &+ 2\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &+ \ddot{\theta}21_j [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \\
 &+ \dot{\theta}21_j^2 [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{E2}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Sustituyendo la ecuación (3.66) en las ecuaciones (3.61) y estas últimas en (3.60) da lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] \mathbf{R1}_j + \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] [\mathbf{E1}] \mathbf{R1}_j + \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] \mathbf{R2}_j + \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] [\mathbf{E1}] \mathbf{R2}_j \\
 &+ 2\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \mathbf{R2}_j \\
 &+ \ddot{\theta}21_j [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \mathbf{R2}_j \\
 &+ \dot{\theta}21_j^2 [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{R}_{\theta14_j,ao}]^T \mathbf{R2}_j \\
 &- \ddot{\theta}34_j [\mathbf{E3}] \mathbf{R3}_j - \dot{\theta}34_j^2 [\mathbf{E3}] [\mathbf{E3}] \mathbf{R3}_j = \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Factorizando la ecuación (3.67) se tiene:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}14_j [\mathbf{E1}] (\mathbf{R1}_j + \mathbf{R2}_j) + \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] [\mathbf{E1}] (\mathbf{R1}_j + \mathbf{R2}_j) \\ & + 2\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right] [\mathbf{E2}_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right]^T \mathbf{R2}_j \\ & + \ddot{\theta}21_j \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right] [\mathbf{E2}_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right]^T \mathbf{R2}_j \\ & + \dot{\theta}21_j^2 \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{E2}_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right]^T \mathbf{R2}_j \\ & - \ddot{\theta}34_j [\mathbf{E3}] \mathbf{R3}_j - \dot{\theta}34_j^2 [\mathbf{E3}] [\mathbf{E3}] \mathbf{R3}_j = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Y renombrando la ecuación anterior como sigue:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}14_j \mathbf{U1}_j + \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] \mathbf{U1}_j + 2\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] \mathbf{U2}_j \\ & + \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j + \dot{\theta}21_j^2 \mathbf{U4}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j - \dot{\theta}34_j^2 [\mathbf{E3}] \mathbf{U3}_j = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Donde, en la ecuación (3.68) se tiene que:

$$\mathbf{U4}_j = \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right] [\mathbf{E2}_j] [\mathbf{E2}_j] \left[ \mathbf{R}_{\theta14_j, a0} \right]^T \mathbf{R2}_j$$

De ésta forma, entonces:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}14_j \mathbf{U1}_j + \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j \\ & = - \left( \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E1}] \mathbf{U1}_j + 2\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j [\mathbf{E1}] \mathbf{U2}_j + \dot{\theta}21_j^2 \mathbf{U4}_j - \dot{\theta}34_j^2 [\mathbf{E3}] \mathbf{U3}_j \right) \\ & = - \left( [\mathbf{E1}] \left( \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U1}_j + 2\dot{\theta}14_j \dot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j \right) + \dot{\theta}21_j^2 \mathbf{U4}_j - \dot{\theta}34_j^2 [\mathbf{E3}] \mathbf{U3}_j \right) \\ & = - \left( [\mathbf{E1}] \left( \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U1}_j + 2\dot{\theta}14_j (K1_j \dot{\theta}14_j) \mathbf{U2}_j \right) + (K1_j \dot{\theta}14_j)^2 \mathbf{U4}_j - (K2_j \dot{\theta}14_j)^2 [\mathbf{E3}] \mathbf{U3}_j \right) \\ & = - \left( [\mathbf{E1}] \left( \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U1}_j + 2\dot{\theta}14_j^2 K1_j \mathbf{U2}_j \right) + K1_j^2 \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U4}_j - K2_j^2 \dot{\theta}14_j^2 [\mathbf{E3}] \mathbf{U3}_j \right) \\ & = - \dot{\theta}14_j^2 \left( [\mathbf{E1}] (\mathbf{U1}_j + 2K1_j \mathbf{U2}_j) + K1_j^2 \mathbf{U4}_j - K2_j^2 [\mathbf{E3}] \mathbf{U3}_j \right) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}14_j \mathbf{U1}_j + \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j = -\dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j \\ & \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j = -\ddot{\theta}14_j \mathbf{U1}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j \end{aligned} \quad (3.69)$$

Añadiendo  $\ddot{\theta}14_j \mathbf{A}$  a la ecuación (3.69) para completar el sistema:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j + \ddot{\theta}14_j \mathbf{A} = \ddot{\theta}14_j \mathbf{A} - \ddot{\theta}14_j \mathbf{U1}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j \\ & \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j + \ddot{\theta}14_j \mathbf{A} = \ddot{\theta}14_j (\mathbf{A} - \mathbf{U1}_j) - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j \\ & \ddot{\theta}21_j \mathbf{U2}_j - \ddot{\theta}34_j \mathbf{U3}_j + \ddot{\theta}14_j \mathbf{A} = \ddot{\theta}14_j \mathbf{B}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j \end{aligned}$$

O matricialmente:

$$[U2_j \quad -U3_j \quad A] \begin{bmatrix} \ddot{\theta}21_j \\ \ddot{\theta}34_j \\ \ddot{\theta}14_j \end{bmatrix} = \ddot{\theta}14_j \mathbf{B}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j$$

Expresión que puede abreviarse como:

$$\begin{aligned} [J_j] \mathbf{a23}_j &= \ddot{\theta}14_j \mathbf{B}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j \\ \mathbf{a23}_j &= [J_j]^{-1} (\ddot{\theta}14_j \mathbf{B}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j) \end{aligned}$$

Para finalmente poder obtener las aceleraciones  $\ddot{\theta}21_j$  y  $\ddot{\theta}34_j$  a partir de los coeficientes de influencia  $K3_j$  y  $K4_j$  por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}21_j &= \mathbf{a23}_j^T \mathbf{i} \\ &= \left( [J_j]^{-1} (\ddot{\theta}14_j \mathbf{B}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j) \right)^T \mathbf{i} \\ &= \left( [J_j]^{-1} \mathbf{B}_j \right)^T \mathbf{i} \ddot{\theta}14_j - \left( [J_j]^{-1} \mathbf{B}_j \right)^T \mathbf{i} \dot{\theta}14_j^2 \\ &= K1_j \ddot{\theta}14_j - K3_j \dot{\theta}14_j^2 \end{aligned} \tag{3.70}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}34_j &= \mathbf{a23}_j^T \mathbf{j} \\ &= \left( [J_j]^{-1} (\ddot{\theta}14_j \mathbf{B}_j - \dot{\theta}14_j^2 \mathbf{U5}_j) \right)^T \mathbf{j} \\ &= \left( [J_j]^{-1} \mathbf{B}_j \right)^T \mathbf{j} \ddot{\theta}14_j - \left( [J_j]^{-1} \mathbf{B}_j \right)^T \mathbf{j} \dot{\theta}14_j^2 \\ &= K2_j \ddot{\theta}14_j - K4_j \dot{\theta}14_j^2 \end{aligned} \tag{3.71}$$

### 3.3.4 Ejemplo de diseño de un mecanismo de cuatro barras engranado revertido.

Suponga que se desea diseñar un mecanismo con la configuración de la Figura 3.11, de tal forma que el objetivo sea que el engrane  $C$  presente una aceleración de  $0 \text{ rad/s}^2$ , velocidad de  $1.5 \text{ rad/s}$  cuando éste haya girado  $100^\circ$  y la manivela se encuentre a  $100^\circ$  respecto de su primer punto de precisión con una velocidad constante de  $\pi/2 \text{ rad/s}$ .

Para este ejemplo, y considerando las ecuaciones de diseño de los puntos 3.3.1 a 3.3.3 con  $j = 1,2,3,4$  se plantearon las siguientes condiciones de los puntos de precisión:

$$\begin{aligned}
 \theta_{14_{12}} &= 99.5^\circ & \theta_{34_{12}} &= 109.5^\circ \\
 \theta_{14_{13}} &= 99.7^\circ & \theta_{34_{13}} &= 109.7^\circ \\
 \theta_{14_{14}} &= 100^\circ & \theta_{34_{14}} &= 110^\circ \\
 \dot{\theta}_{14_1} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0x} &= 0 \\
 \dot{\theta}_{14_2} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0y} &= 0 \\
 \dot{\theta}_{14_3} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0z} &= 1 \\
 \dot{\theta}_{14_4} &= \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & b_{0x} &= 1 \\
 \ddot{\theta}_{14_1} &= 0 \text{ rad/s}^2 & b_{0y} &= 0 \\
 \ddot{\theta}_{14_2} &= 0 \text{ rad/s}^2 & b_{0z} &= 0 \\
 \ddot{\theta}_{14_3} &= 0 \text{ rad/s}^2 & \theta_{C4_{14}} &= 80^\circ \\
 \ddot{\theta}_{14_4} &= 0 \text{ rad/s}^2 & \dot{\theta}_{C4_{14}} &= 1.5 \text{ rad/s} \\
 & & \ddot{\theta}_{C4_{14}} &= 0 \text{ rad/s}^2
 \end{aligned}$$

La función objetivo se obtiene de la siguiente manera:

Ecuaciones de longitud constante para la posición de los eslabones:

$$F_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)]^2$$

Ecuaciones de velocidad para los eslabones:

$$F_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración para los eslabones:

$$F_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\ddot{\mathbf{b}}_j - \ddot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) + (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)]^2$$

Ecuaciones de esfera unitaria:

$$\begin{aligned}
 F_4(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{a}_0)^T (\mathbf{a}_0) - 1)^2 \\
 F_5(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{a}_1)^T (\mathbf{a}_1) - 1)^2 \\
 F_6(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{b}_0)^T (\mathbf{b}_0) - 1)^2 \\
 F_7(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{b}_1)^T (\mathbf{b}_1) - 1)^2
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de posición angular para los engranes:

$$F_8(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\theta_{C4_{1j}} - (\theta_{14_{1j}} - r_{BC}\theta_{21_{1j}})]^2$$

Ecuaciones de velocidad angular para los engranes:

$$F_9(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\dot{\theta}C4_j - (\dot{\theta}14_j - r_{BC}\dot{\theta}21_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración angular para los engranes:

$$F_{10}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\ddot{\theta}C4_j - (\ddot{\theta}14_{1j} - r_{BC}\ddot{\theta}21_{1j})]^2$$

Siendo la función objetivo  $F(\mathbf{x})$  la suma de éstas 6 últimas, quedando como sigue:

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + F_4(\mathbf{x}) + F_5(\mathbf{x}) + F_6(\mathbf{x}) + F_7(\mathbf{x}) + F_8(\mathbf{x}) + F_9(\mathbf{x}) + F_{10}(\mathbf{x})$$

El resultado para este ejemplo se muestra en la Figura 3.13:

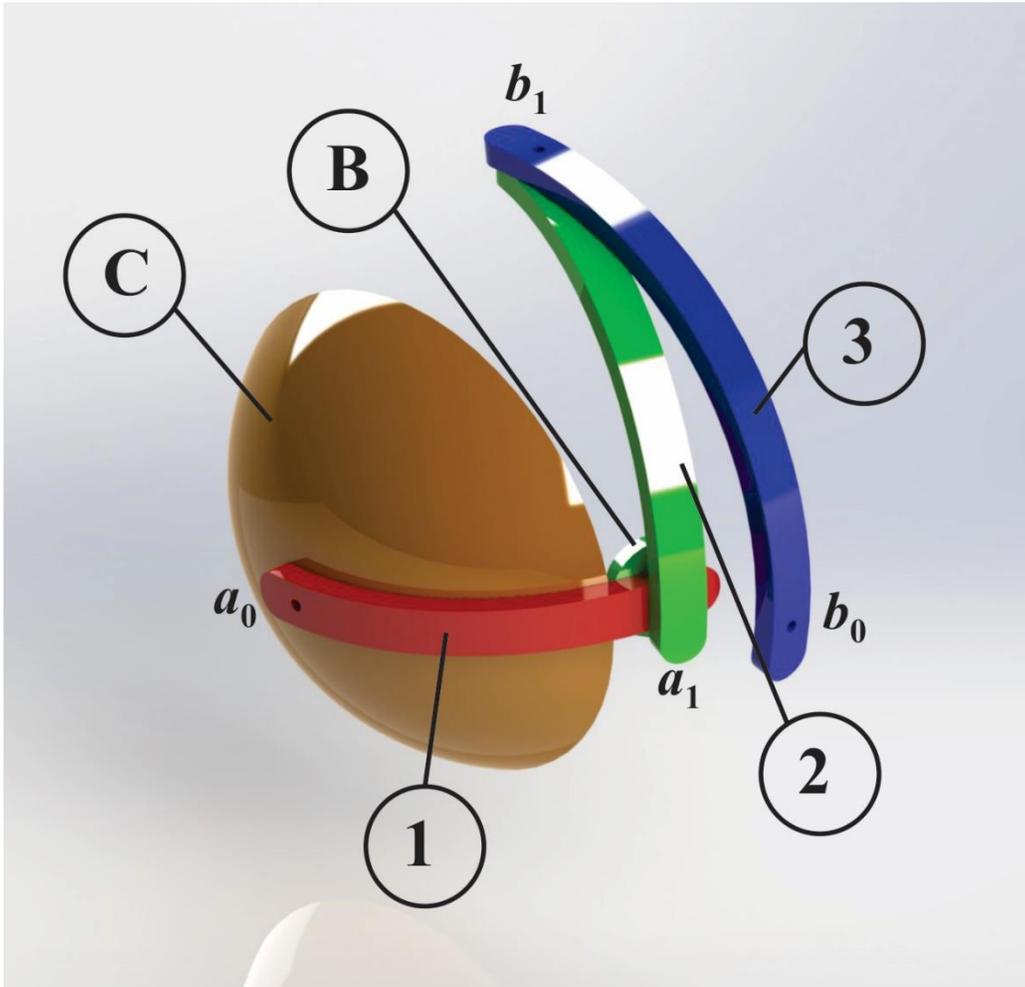


Figura 3.13 Resultado de la síntesis de un mecanismo esférico de 4 barras engranado revertido.

Donde:

$$\begin{aligned}
 a_{1x} &= 0.949 & \dot{\theta}_{32_1} &= -1.041 \text{ rad/s} \\
 a_{1y} &= -0.089 & \dot{\theta}_{32_2} &= -3.593 \text{ rad/s} \\
 a_{1z} &= 0.302 & \dot{\theta}_{32_3} &= -3.287 \text{ rad/s} \\
 b_{1x} &= -0.039 & \dot{\theta}_{32_4} &= -2.202 \text{ rad/s} \\
 b_{1y} &= -0.996 & \dot{\theta}_{C4_1} &= 1.145 \text{ rad/s} \\
 b_{1z} &= 0.080 & \dot{\theta}_{C4_2} &= 1.638 \text{ rad/s} \\
 \theta_{C4_{12}} &= 0.942 \text{ rad} & \dot{\theta}_{C4_3} &= 1.639 \text{ rad/s} \\
 \theta_{C4_{13}} &= 1.354 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{32_1} &= -0.535 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{21_{12}} &= 4.1197 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{32_2} &= -3.617 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{21_{13}} &= 2.059 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{32_3} &= -1.672 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{21_{14}} &= 2.931 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{32_4} &= 2.578 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{32_{12}} &= -4.966 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_1} &= 0.240 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{32_{13}} &= -1.619 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_2} &= 0.001 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta_{32_{14}} &= 1.150 \text{ rad} & \ddot{\theta}_{C4_3} &= 0.003 \text{ rad/s}^2 \\
 \dot{\theta}_{21_1} &= 2.144 \text{ rad/s} & \ddot{\theta}_{21_1} &= -1.214 \text{ rad/s}^2 \\
 \dot{\theta}_{34_1} &= -3.764 \text{ rad/s} & \ddot{\theta}_{34_1} &= -3.108 \text{ rad/s}^2 \\
 & & r_{BC} &= 0.2
 \end{aligned}$$

Las gráficas de posición velocidad y aceleración del engrane  $C$  son las Figuras 3.14, 3.15 y 3.16 respectivamente. Las cuales confirman que las condiciones son cumplidas.

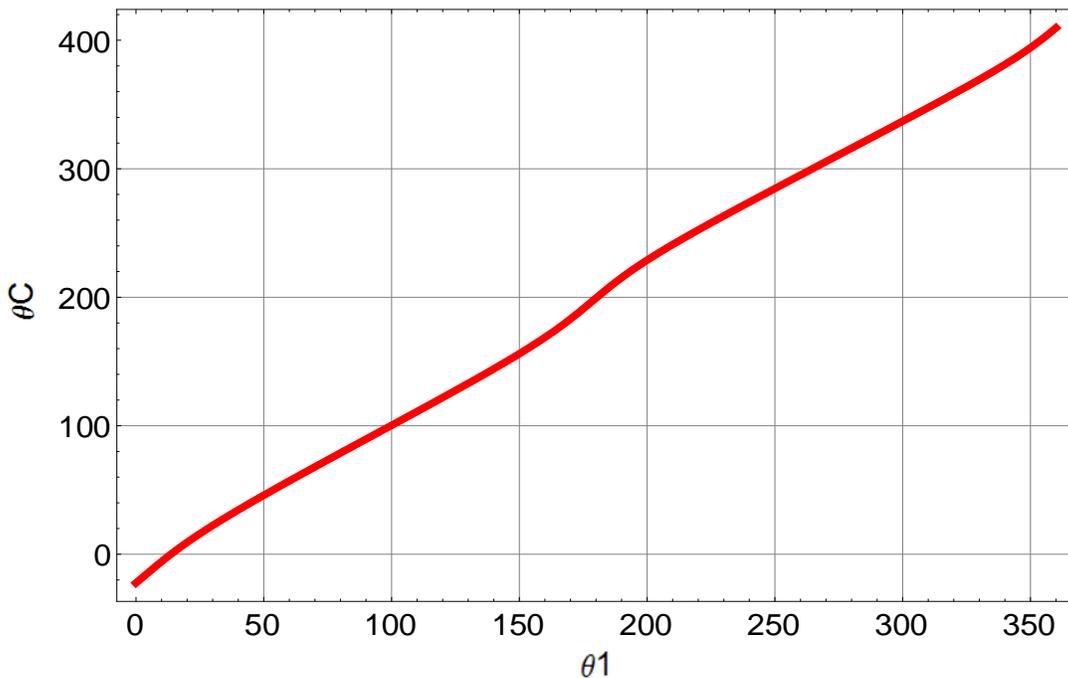


Figura 3.14 Desplazamiento angular del engrane  $C$  respecto al giro de manivela.

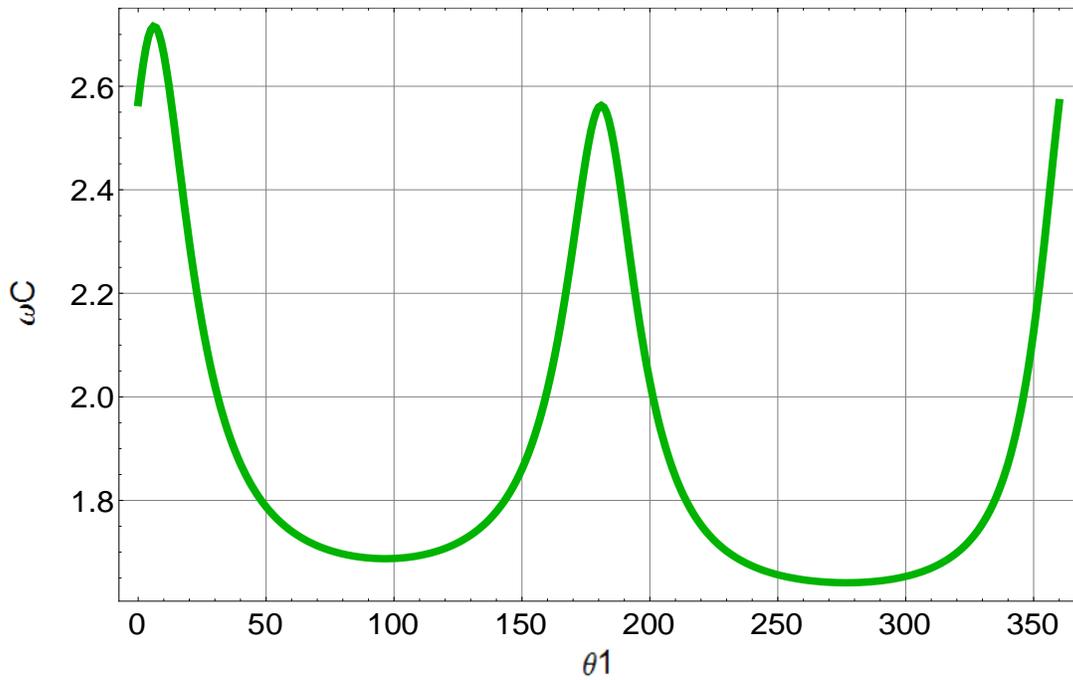


Figura 3.15 Velocidad angular del engrane C respecto al giro de manivela.

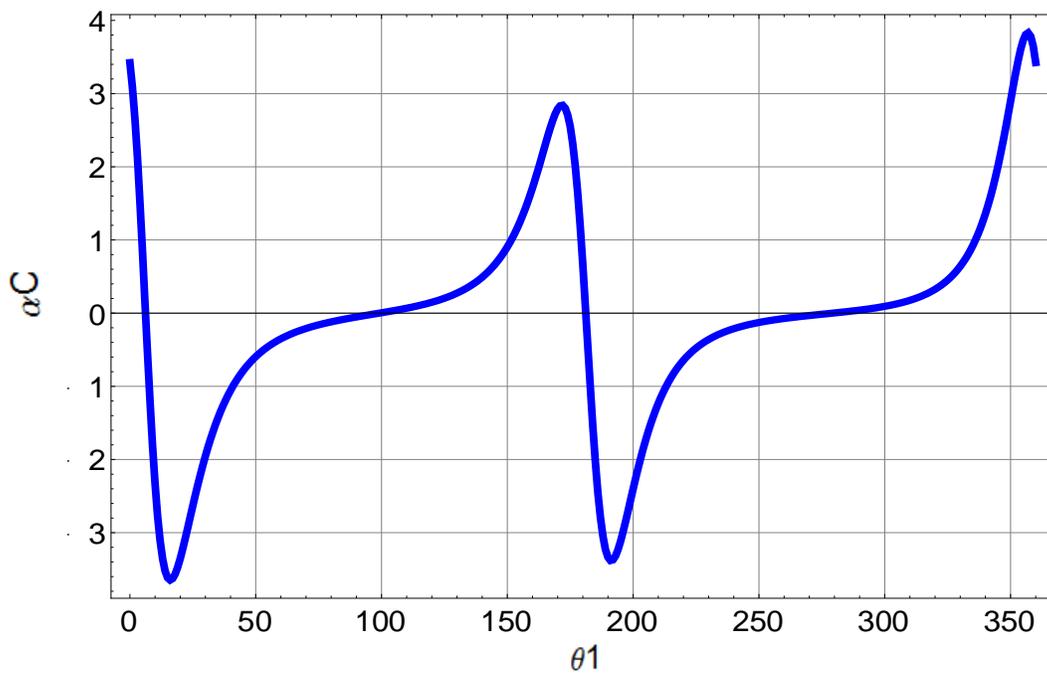


Figura 3.16 Aceleración angular del engrane C respecto al giro de manivela.

### 3.4 Diseño de un mecanismo esférico de 4 barras engranado.

La Figura 3.17 muestra un mecanismo esférico de 4 barras con un tren de engranes cónicos planetarios de tres ejes y cuatro engranes en total.

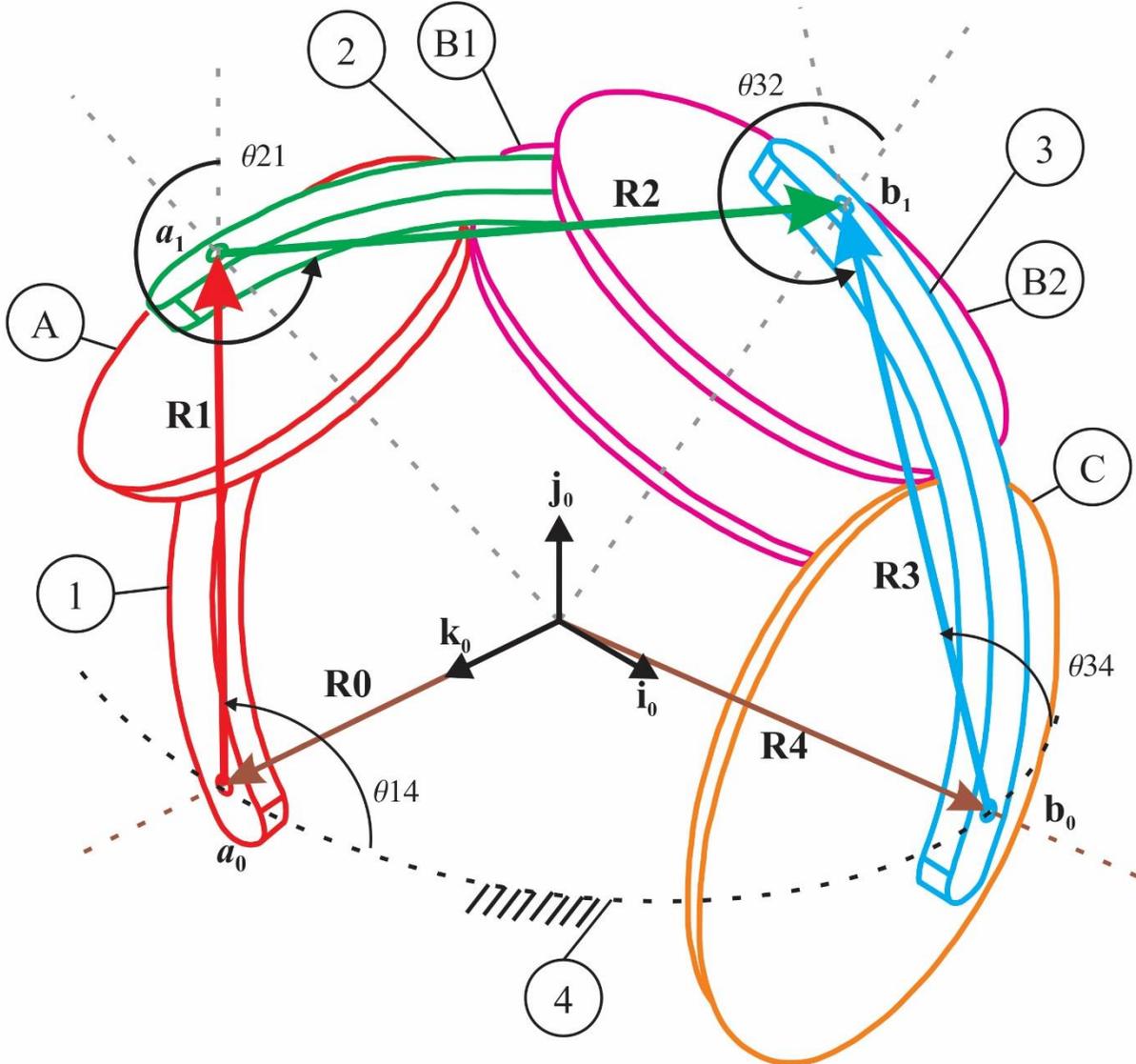


Figura 3.17 Diagrama cinemático del mecanismo esférico de 4 barras engranado.

#### 3.4.1 Ecuaciones de diseño para los eslabones.

Las ecuaciones de diseño para los eslabones de este mecanismo, son las mismas que ya se han obtenido para el mecanismo de cuatro barras engranado revertido correspondientes a las ecuaciones de la (3.33) a la (3.42)

### 3.4.2 Ecuaciones de diseño de los engranes.

La Figura 3.18 muestra las variables que están involucradas en la síntesis:

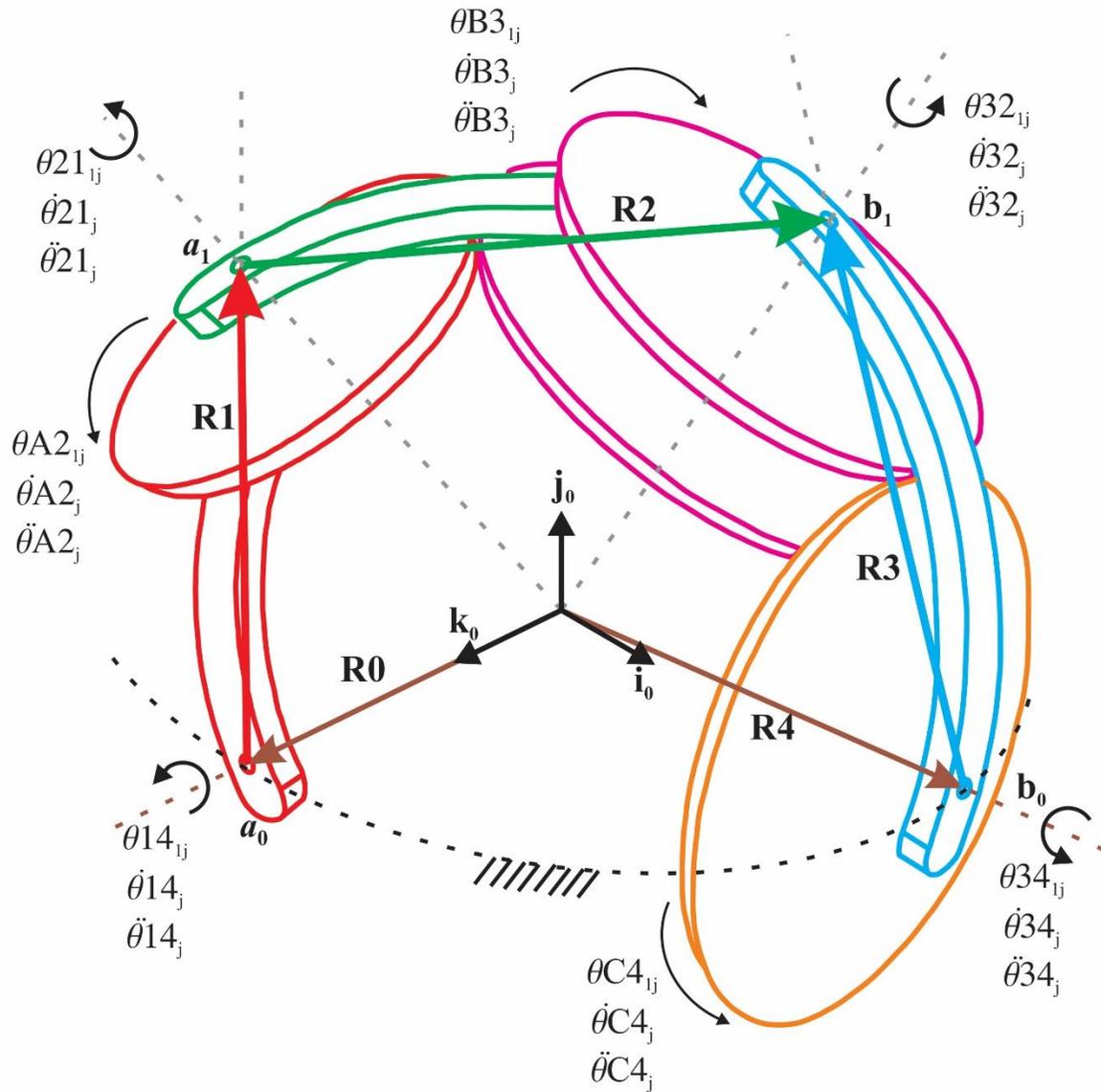


Figura 3.18 Variables involucradas en la síntesis del mecanismo esférico engranado.

De la Figura 3.18 y para los engranes A – B<sub>1</sub>, considerando que  $\dot{\theta}_{A2_j} = -\dot{\theta}_{21_j}$ , se utiliza la ecuación (3.21):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}_{B2_j}}{\dot{\theta}_{A2_j}} &= -\frac{\sin \rho_A}{\sin \rho_{B_1}} \\ \dot{\theta}_{B2_j} &= -\dot{\theta}_{A2_j} \frac{\sin \rho_A}{\sin \rho_{B_1}} \\ \dot{\theta}_{B2_j} &= \frac{\sin \rho_A}{\sin \rho_{B_1}} \dot{\theta}_{21_j} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Renombrando el coeficiente de  $\dot{\theta}21_j$  como  $r_{AB}$  se puede reescribir la ecuación como sigue:

$$\dot{\theta}B2_j = r_{AB}\dot{\theta}21_j \quad (3.73)$$

Ahora para los engranes  $B_2 - C$  se tiene la relación:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}C3_j}{\dot{\theta}B3_j} &= -\frac{\sin \rho B_2}{\sin \rho C} \\ \dot{\theta}C3_j &= -\frac{\sin \rho B_2}{\sin \rho C} \dot{\theta}B3_j \end{aligned} \quad (3.74)$$

Renombrando el coeficiente de  $\dot{\theta}B3_j$  como  $r_{BC}$  la ecuación queda como:

$$\dot{\theta}C3_j = -r_{BC}\dot{\theta}B3_j \quad (3.75)$$

Cuando el eje de giro de tres cuerpos coincide, es posible obtener una relación útil entre sus velocidades angulares, como en el caso de los cuerpos que giran respecto a los ejes que pasan por  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_1$  respectivamente, se tiene que:

$$\dot{\theta}34_j = \dot{\theta}3C_j + \dot{\theta}C4_j \quad (3.76)$$

$$\dot{\theta}23_j = \dot{\theta}2B_j + \dot{\theta}B3_j \quad (3.77)$$

Considerando que  $\dot{\theta}3C_j = -\dot{\theta}C3_j$  y despejando  $\dot{\theta}C4_j$  de la ecuación (3.76):

$$\dot{\theta}C4_j = \dot{\theta}34_j - \dot{\theta}3C_j$$

$$\dot{\theta}C4_j = \dot{\theta}34_j + \dot{\theta}C3_j \quad (3.78)$$

Sustituyendo la ecuación (3.75) en (3.78):

$$\dot{\theta}C4_j = \dot{\theta}34_j - r_{BC}\dot{\theta}B3_j \quad (3.79)$$

Despejando  $\dot{\theta}B3_j$  de la ecuación (3.77):

$$\dot{\theta}B3_j = \dot{\theta}23_j - \dot{\theta}2B_j \quad (3.80)$$

Puede sustituirse (3.80) en (3.78):

$$\begin{aligned} \dot{\theta}C4_j &= \dot{\theta}34_j - r_{BC}(\dot{\theta}23_j - \dot{\theta}2B_j) \\ \dot{\theta}C4_j &= \dot{\theta}34_j - r_{BC}\dot{\theta}23_j + r_{BC}\dot{\theta}2B_j \end{aligned} \quad (3.81)$$

De la ecuación (3.73) se sabe que  $\dot{\theta}B2_j = r_{AB}\dot{\theta}21_j$ , además  $\dot{\theta}2B_j = -\dot{\theta}B2_j$ , por lo tanto, la ecuación (3.81) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}C4_j &= \dot{\theta}34_j - r_{BC}\dot{\theta}23_j + r_{BC}(-r_{AB}\dot{\theta}21_j) \\ \dot{\theta}C4_j &= \dot{\theta}34_j - r_{BC}\dot{\theta}23_j - r_{AB}r_{BC}\dot{\theta}21_j \end{aligned} \quad (3.82)$$

Finalmente, para que la ecuación (3.82) esté en función de las variables de la Figura 3.18 y sabiendo que  $\dot{\theta}32_j = -\dot{\theta}23_j$ , se reescribe de la siguiente manera:

$$\dot{\theta}C4_j = \dot{\theta}34_j + r_{BC}\dot{\theta}32_j - r_{AB}r_{BC}\dot{\theta}21_j \quad (3.83)$$

Integrando la ecuación (3.83) se tiene:

$$\theta C4_{1j} = \theta 34_{1j} + r_{BC}\theta 32_{1j} - r_{AB}r_{BC}\theta 21_{1j} \quad (3.84)$$

Y se deriva a (3.83) respecto al tiempo para obtener la aceleración del engrane de salida C:

$$\ddot{\theta}C4_j = \ddot{\theta}34_j + r_{BC}\ddot{\theta}32_j - r_{AB}r_{BC}\ddot{\theta}21_j \quad (3.85)$$

Por otro lado, el ángulo relativo  $\theta 32$  como función del ángulo de entrada de manivela  $\theta 14$ , puede obtenerse de la siguiente manera de acuerdo a la referencia [27].

$$\text{Cos}\theta 32 = \frac{\text{Cos}\beta\text{Cos}\eta - \text{Cos}\gamma\text{Cos}\alpha - \text{Sen}\gamma\text{Sen}\alpha\text{Cos}\theta 14}{\text{Sen}\beta\text{Sen}\eta} \quad (3.86)$$

Donde  $\alpha, \beta, \eta$  y  $\gamma$  son los ángulos de la manivela, balancín, acoplador y tierra, respectivamente definidos de la siguiente manera:

$$\alpha = \text{ArcCos}\left(\frac{(\mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_1)}{\|\mathbf{a}_0\|\|\mathbf{a}_1\|}\right) \quad (3.87.1)$$

$$\beta = \text{ArcCos}\left(\frac{(\mathbf{b}_0)^T(\mathbf{b}_1)}{\|\mathbf{b}_0\|\|\mathbf{b}_1\|}\right) \quad (3.87.2)$$

$$\eta = \text{ArcCos}\left(\frac{(\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{b}_1)}{\|\mathbf{a}_1\|\|\mathbf{b}_1\|}\right) \quad (3.87.3)$$

$$\gamma = \text{ArcCos}\left(\frac{(\mathbf{a}_0)^T(\mathbf{b}_0)}{\|\mathbf{a}_0\|\|\mathbf{b}_0\|}\right) \quad (3.87.4)$$

Para obtener  $\dot{\theta}32_j$  y  $\ddot{\theta}32_{1j}$  se deriva la ecuación (3.86) respecto al tiempo dos veces, quedando lo siguiente:

$$\dot{\theta}32 = -\dot{\theta}14 \frac{\text{Sen}\gamma\text{Sen}\alpha\text{Sen}\theta 14}{\text{Sen}\beta\text{Sen}\eta\text{Sen}\theta 32} \quad (3.88)$$

$$\ddot{\theta}32 = -\left(\frac{\text{Sen}\gamma\text{Sen}\alpha}{\text{Sen}\beta\text{Sen}\eta}(\ddot{\theta}14\text{Sen}\theta 14 + \dot{\theta}14^2\text{Cos}\theta 14) + \dot{\theta}32^2\text{Cos}\theta 32\right)\frac{1}{\text{Sen}\theta 32} \quad (3.89)$$

### 3.4.3 Coeficientes de influencia.

De igual forma que las ecuaciones de diseño para los eslabones, los coeficientes de influencia en este mecanismo de cuatro barras engranado son los mismos que en el caso anterior y su desarrollo está dado por las ecuaciones de la (3.47) a (3.71).

### 3.4.4 Ejemplo de diseño de un mecanismo esférico de cuatro barras engranado con condición de detenimiento.

Suponga que se desea diseñar un mecanismo con la configuración de la Figura 3.17, de tal forma que el engrane  $C$ , presente un detenimiento, es decir, velocidad y aceleración cero cuando haya girado  $180^\circ$ .

Para este ejemplo, y considerando las ecuaciones de diseño de los puntos 3.3.1 a 3.3.3 con  $j = 1,2,3,4$  se plantearon las siguientes condiciones de los puntos de precisión:

$$\begin{array}{ll}
 \theta_{14_{12}} = 99.8^\circ & \theta_{34_{12}} = 199.8^\circ \\
 \theta_{14_{13}} = 99.9^\circ & \theta_{34_{13}} = 199.9^\circ \\
 \theta_{14_{14}} = 100^\circ & \theta_{34_{14}} = 200^\circ \\
 \dot{\theta}_{14_1} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0x} = 0 \\
 \dot{\theta}_{14_2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0y} = 0 \\
 \dot{\theta}_{14_3} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & a_{0z} = 1 \\
 \dot{\theta}_{14_4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s} & b_{0y} = 0 \\
 \ddot{\theta}_{14_1} = 0 \text{ rad/s}^2 & \theta_{C4_{14}} = 180^\circ \\
 \ddot{\theta}_{14_2} = 0 \text{ rad/s}^2 & \dot{\theta}_{C4_{14}} = 0 \text{ rad/s} \\
 \ddot{\theta}_{14_3} = 0 \text{ rad/s}^2 & \ddot{\theta}_{C4_{14}} = 0 \text{ rad/s}^2 \\
 \ddot{\theta}_{14_4} = 0 \text{ rad/s}^2 &
 \end{array}$$

La función objetivo se obtiene de la siguiente manera:

Ecuaciones de longitud constante para la posición de los eslabones:

$$F_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)^T (\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1)]^2$$

Ecuaciones de velocidad para los eslabones:

$$F_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración para los eslabones:

$$F_3(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [(\ddot{\mathbf{b}}_j - \ddot{\mathbf{a}}_j)^T (\mathbf{b}_j - \mathbf{a}_j) + (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)^T (\dot{\mathbf{b}}_j - \dot{\mathbf{a}}_j)]^2$$

Ecuaciones de esfera unitaria:

$$\begin{aligned}
 F_4(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{a}_0)^T(\mathbf{a}_0) - 1)^2 \\
 F_5(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{a}_1)^T(\mathbf{a}_1) - 1)^2 \\
 F_6(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{b}_0)^T(\mathbf{b}_0) - 1)^2 \\
 F_7(\mathbf{x}) &= ((\mathbf{b}_1)^T(\mathbf{b}_1) - 1)^2
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de posición angular para los engranes:

$$F_8(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\theta C4_{1j} - (\theta 34_{1j} + r_{BC}\theta 32_{1j} - r_{AB}r_{BC}\theta 21_{1j})]^2$$

Ecuaciones de velocidad angular para los engranes:

$$F_9(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\dot{\theta} C4_j - (\dot{\theta} 34_j + r_{BC}\dot{\theta} 32_j - r_{AB}r_{BC}\dot{\theta} 21_j)]^2$$

Ecuaciones de aceleración angular para los engranes:

$$F_{10}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^4 [f_k(\mathbf{x})]^2 = \sum_{j=1}^4 [\ddot{\theta} C4_j - (\ddot{\theta} 34_j + r_{BC}\ddot{\theta} 32_j - r_{AB}r_{BC}\ddot{\theta} 21_j)]^2$$

Siendo la función objetivo  $F(\mathbf{x})$  la suma de éstas 6 últimas, quedando como sigue:

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) + F_3(\mathbf{x}) + F_4(\mathbf{x}) + F_5(\mathbf{x}) + F_6(\mathbf{x}) + F_7(\mathbf{x}) + F_8(\mathbf{x}) + F_9(\mathbf{x}) + F_{10}(\mathbf{x})$$

El resultado para este ejemplo se muestra en la Figura 3.18 con los siguientes valores:

$$\begin{array}{ll}
 b_{0x} = 0.965 & \dot{\theta} 32_1 = -2.842 \text{ rad/s} \\
 b_{0z} = 0.264 & \dot{\theta} 32_2 = -0.369 \text{ rad/s} \\
 a_{1x} = 0.937 & \dot{\theta} 32_3 = -0.658 \text{ rad/s} \\
 a_{1y} = 0.307 & \dot{\theta} 32_4 = 3.063 \text{ rad/s} \\
 a_{1z} = 0.168 & \dot{\theta} C4_1 = -0.843 \text{ rad/s} \\
 b_{1x} = 0.432 & \dot{\theta} C4_2 = 4.483 \text{ rad/s} \\
 b_{1y} = -0.422 & \dot{\theta} C4_3 = 4.490 \text{ rad/s} \\
 b_{1z} = -0.797 & \ddot{\theta} 32_1 = -1.679 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta C4_{12} = 2.663 \text{ rad} & \ddot{\theta} 32_2 = -1.998 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta C4_{13} = 2.053 \text{ rad} & \ddot{\theta} 32_3 = -2.610 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta 21_{12} = 0.471 \text{ rad} & \ddot{\theta} 32_4 = 2.147 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta 21_{13} = 0.820 \text{ rad} & \ddot{\theta} C4_1 = 0.363 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta 21_{14} = 1.197 \text{ rad} & \ddot{\theta} C4_2 = -0.841 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta 32_{12} = -1.288 \text{ rad} & \ddot{\theta} C4_3 = -0.837 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta 32_{13} = 1.032 \text{ rad} & \ddot{\theta} 21_1 = -0.207 \text{ rad/s}^2 \\
 \theta 32_{14} = -4.235 \text{ rad} & \ddot{\theta} 34_1 = 1.744 \text{ rad/s}^2 \\
 \dot{\theta} 21_1 = 1.379 \text{ rad/s} & \\
 \dot{\theta} 34_1 = 1.221 \text{ rad/s} &
 \end{array}$$

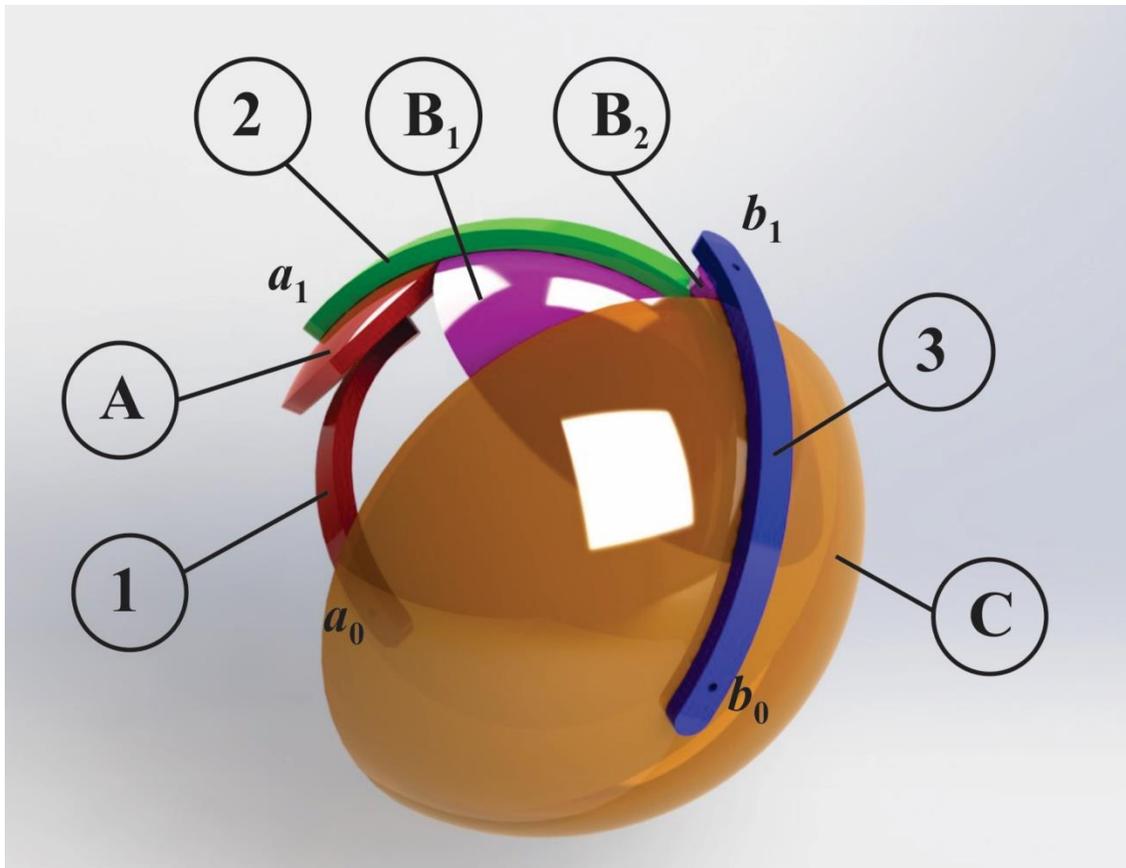


Figura 3.18 Resultado de la síntesis de un mecanismo esférico de 4 barras engranado revertido.

Las gráficas de posición velocidad y aceleración del engrane C son las Figuras 3.19, 3.20 y 3.21 respectivamente. Las cuales confirman que las condiciones son cumplidas.

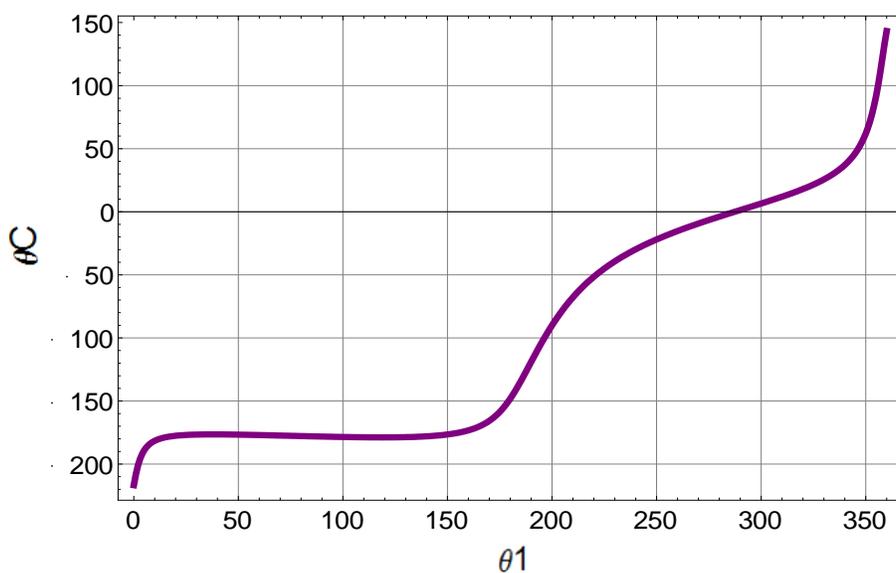


Figura 3.19 Desplazamiento angular del engrane C respecto al giro de manivela.

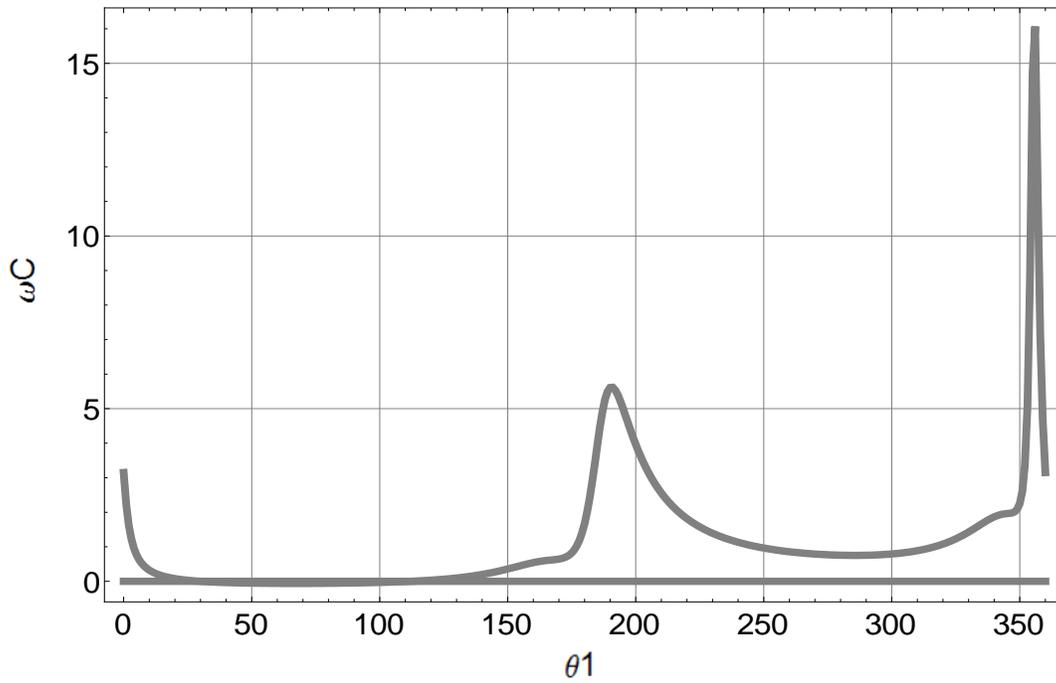


Figura 3.20 Velocidad angular del engrane C respecto al giro de manivela.

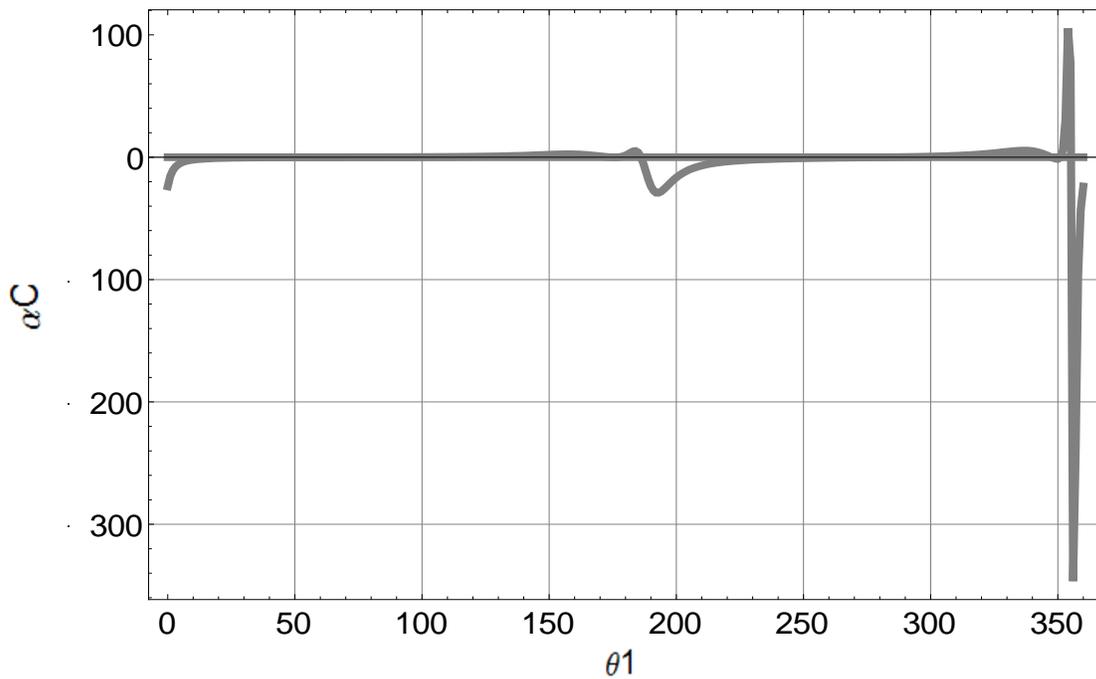


Figura 3.21 Aceleración angular del engrane C respecto al giro de manivela.

## Conclusiones.

Si bien ya es conocida la aplicación del método de matrices de desplazamiento a la síntesis de mecanismos planos con engranes, los resultados de la sección 2.2.4 son una comparación directa entre la metodología de números complejos y matrices de desplazamiento aplicadas a un mismo ejercicio de tal forma que permiten comprobar su adaptabilidad y funcionalidad a la síntesis de mecanismos con eslabones que implementen trenes de engranes compuestos.

Los resultados obtenidos en los ejemplos de diseño presentados en las secciones 3.3.4 y 3.4.4 son la prueba de que se han logrado establecer exitosamente ecuaciones para la síntesis de mecanismos espaciales que involucren eslabones y engranes con el uso de matrices de desplazamiento para satisfacer condiciones cinemáticas de posición, velocidad y aceleración.

Las matrices diferenciales de desplazamiento plano y espacial, permiten incluir condiciones de velocidad y aceleración en las ecuaciones de diseño para la síntesis de mecanismos con eslabones y engranes en cada uno de los puntos de precisión, lo cual representa un avance al compararlo con la síntesis de mecanismos con posición, velocidad y aceleración inicial especificadas.

Las fórmulas desarrolladas en el presente trabajo de tesis, equivalentes al método de la fórmula de Sandor para trenes cónicos planetarios son una herramienta fundamental para el análisis y diseño de mecanismos con eslabones y engranes.

A diferencia de la síntesis de mecanismos generadores de función para condiciones de posición, especificar los pivotes fijos en un diseño con condiciones de posición, velocidad y aceleración complica la obtención de una solución satisfactoria debido a la cantidad de variables que se agregan al problema. Dicha cantidad de incógnitas forzarán a traducir el problema de síntesis al de minimizar una función objetivo, función de todas esas variables, teniendo múltiples soluciones correspondientes a mínimos locales, que a pesar de poder ser una buena solución matemática, es decir que lleve el error casi a cero, puede no traducirse necesariamente en una buena solución al llevarla a la práctica.

Como ya se ha comentado, resolver el problema de síntesis implica también la minimización del error en la función objetivo formada por la suma de cuadrados de las

ecuaciones de diseño, y el obtener una solución satisfactoria depende en gran medida de los valores iniciales y restricciones sobre la función objetivo en el método numérico.

El cálculo de los coeficientes de influencia en la síntesis de mecanismos esféricos, el cual implica la inversión de matrices, conlleva a un manejo excesivo de información, por lo que es conveniente realizar un cambio de variable para los elementos de dichas matrices, realizar la inversión y así tener un manejo eficientes de los recursos computacionales.

El desarrollo matricial para obtener los coeficientes de influencia de los mecanismos de 4 barras engranados, planos y esféricos, son característicos de la cadena de eslabonamientos que se esté utilizando e independientes de la cantidad de engranes que se utilicen, por lo que pueden considerarse como un desarrollo general en cada uno de sus casos, plano y esférico de 4 barras.

## Trabajo Futuro

Ahora que se ha comprobado la efectividad del método de las matrices de desplazamiento a mecanismos esféricos de cuatro barras engranados, es recomendable estudiar la aplicación de dicha metodología a la síntesis de mecanismos de cinco barras engranados, ya que en general, un mecanismo de cinco barras engranado puede generar las mismas funciones que uno de cuatro barras engranado, e incluso más complejas.

Para evitar hacer tediosa la búsqueda de una buena solución, sería de gran ayuda la implementación de algoritmos que discriminen las malas soluciones de las buenas y lleve a la convergencia de una óptima solución, tales como los algoritmos genéticos.

El paso siguiente ahora que se tiene la capacidad de sintetizar mecanismos para condiciones de posición, velocidad y aceleración, es considerar la influencia de estas variables sobre la masa de los cuerpos del mecanismo y así incluir condiciones de fuerza para realizar síntesis dinámica.

---

# Referencias

- [1] Chung Ha Suh & Charles Radcliffe, **Kinematics & Mechanisms Design**, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [2] Claudio Arturo Domínguez Migoya, **Síntesis Cinemática y Estática de Mecanismos Planos con Eslabones, Engranajes y Resortes**, Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Ciudad Universitaria, México D.F, 2011.
- [3] George N. Sandor, Arthut G. Erdman, **Advanced Mechanism Design: Analysis and synthesis, Vol 2**, Prentice-Hall, New Jersey ,1984.
- [4] A. G. Erdman, G. N. Sandor, **Kinematic Synthesis of a geared five-bar function generator**, Journal of Mechanisms. Volume 5. December 1970. Pages 59 – 87.
- [5] Chung Ha Suh, **Computer Aided Design of Mechanisms**, University of Colorado, 1971.
- [6] Oleksa, Stephen Alexander, **Generalized Synthesis of the Geared Five-Bar Mechanism for Function Generator**, Master's Thesis, University of Florida, June 1970.
- [7] S.A. Oleksa, D. Tesar, **Multiply separated position design of the geared five-bar function generator**, Transactions of the ASME-Journal of Engineering for Industry, pp298-305, 1963
- [8] Joseph Duffy, **Analysis of Mechanisms and Robot Manipulators**, Edward Arnold (Publishers), 1980.
- [9] C. H. Chiang, **Kinematics of Spherical Mechanisms**, Cambridge University Press,1988.
- [10] Dobrovolskii, **Theory of Spherical Mecanisms** (in Russian), Moscow, 1947.
- [11] Volkan Parlaktas, Eres Söylemez, Engin Tanik, **On the synthesis of a geared four-bar**, Mechanisms and Machine Theory Vol. 45, pp 1142-1152, 2010.
- [12] T. W. Lee, Y. Shereshevsky, **Kinematic Synthesis of Planar Two-Gear Drive With Prescribed Dwell Characteristics**.
- [13] Baoliang Zhao, Carl A. Nelson, **Decoupled Cable-Driven Grasper Design Base don Planetary Gear Theory**, Journal of Medical Devices Vol 7, 2013.
- [14] Xiaoli Zhang, Carl A. Nelson, **On the Dynamic Modeling of a Bevel-Geared Surgical Robotic Mechanism**, Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computer and Information in Engineering Conference,2010.

- [15] Xiaoli Zhang, Carl A. Nelson, **Multiple-Criteria Kinematic Optimization for the Design of Spherical Serial Mechanisms Using Genetic Algorithms**, Journal of Mechanical Design, 2011.
- [16] Robert L. Norton, **Design of Machinery, An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines**, McGraw-Hill, fifth edition, 2011.
- [17] Arthur G. Erdman & George N. Sandor. **Diseño de Mecanismos, Análisis y síntesis**, Prentice Hall, Tercera edición, México, 1998.
- [18] George N. Sandor et al. **Kinematic Synthesis of Geared Linkages**. Journal of Mechanisms. Volume 5. December 1970. Pages 59 – 87.
- [19] J. Modrey, **Analysis of Complex Kinematic Chains with influence Coefficients**, Journal of Applied Mechanics, vol. 26, Trans. ASME, vol 81, pp184-188, 1959.
- [20] Burton Paul, **Kinematics and Dynamics of Planar Machinery**, pp 335-348, Prentice-Hall, New Jersey, 1979.
- [21] Stan Wagon, **Mathematica in Action. Problem Solving Through Visualization and Computation**, Springer, Third edition, New York, pp 330-333.
- [22] Ching-Kuo Lin, C.H. Chiang, **Synthesis of planar and spherical geared five-bar function generators by the pole method**, Mechanisms and Machine Theory, vol 27, pp131-141, 1992.
- [23] T.W. Lee, E. Akbil, **Kinematics Synthesis of spherical Two-Gear Drives With Prescribed Entire-Motion Characteristics: Displacement Analysis and Dwell Characteristics**, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol 105, pp 663-671, 1983.
- [24] T.W. Lee, E. Akbil, **Kinematics Synthesis of spherical Two-Gear Drives With Prescribed Entire-Motion Characteristics: Unlimited Crank Rotations and Optimum Transmission Part 1**, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol 108, pp 46-52, 1986.
- [25] T.W. Lee, E. Akbil, **Kinematics Synthesis of spherical Two-Gear Drives With Prescribed Entire-Motion Characteristics: Unlimited Crank Rotations and Optimum Transmission Part 2**, ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, vol 108, pp 53-59, 1986.
- [26] V. K Gupta, **Kinematic Analysis of Plane and Spatial Mechanisms**, ASME Journal of Engineering for Industry, pp 481-486, 1973.
- [27] J. Michael McCarthy, **Geometric Design of Linkages**, Springer, Chapter 6 “ Analysis of Spherical Linkages”, New York, 2000.