



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

**ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE ESTIMADORES
DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA
PARA SISTEMAS LINEALES
DE SEGUNDO ORDEN**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL - INGENIERÍA SÍSMICA

P R E S E N T A:

JUAN CARLOS OROZCO FONNEGRA

TUTOR:

DR. MARIO GUSTAVO ORDAZ SHROEDER

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE: (Dr. Luís Esteva Maraboto)

SECRETARIO: (Dr. Francisco Sánchez Sesma)

VOCAL: (Dr. Mario Gustavo Ordaz Shroeder)

1^{er} SUPLENTE: (Dr. David Murià Vila)

2^{do} SUPLENTE: (Dr. Ernesto Heredia Zavoni)

Lugar donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, U.N.A.M., CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Mario Gustavo Ordaz Shroeder

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'M. Ordaz Shroeder', with a horizontal line underneath.

FIRMA

*A MI MADRE Y A TODA MI FAMILIA
POR SU APOYO INCONDICIONAL DURANTE TODOS ESTOS AÑOS DE FORMACIÓN*

*A CAROLINA OCAMPO
POR SER ESA FUENTE DE AMOR Y DE OPTIMISMO CONSTANTE*

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Mario Gustavo Ordaz Shroeder, por aceptarme como su estudiante y por sus innumerables aportes a mi formación dentro del Instituto de Ingeniería.

Al Instituto de Ingeniería por el apoyo técnico y económico. Es un honor haber echo parte de una institución de tanto prestigio.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por permitirme ingresar al posgrado y estudiar dentro de sus instalaciones.

A mis grandes compañeros y amigos, Alejandro Cadena, Carlos Alberto Echeverri y Juliana Mosquera, por los incontables momentos de alegría que me brindaron durante el tiempo que convivimos. Mil gracias por venir a México.

A mis sinodales: Dr. Luís Esteva Maraboto, Dr. Francisco Sánchez Sesma, Dr. David Murià Vila y Dr. Ernesto Heredia Zavoni, quienes fueron grandes maestros durante los cursos que tuve la fortuna de tomar bajo su dirección y con sus valiosos comentarios a la tesis.

A todos los compañeros de la maestría y del instituto, en especial a Juan José Ramírez, Hugo Gómez, Said Rojas, Vicente Orozco, Ángel Noriega, Lizbeth Mendoza, Roberto Carlos Mendoza, Carlos Huerta, Carlos Cruz, José Camargo, Javier Ferretis, Luciano Fernández, Cesar Arredondo, Carlos Quiroga, Verónica Correa, Sergio Hernández, Juliana Zapata, Guillermo Aldama y Patricia Montoya. Gracias por hacerme sentir en casa.

A la todos los miembros de la coordinación de ingeniería sismológica.

....y a todos los que de alguna forma participaron en estos dos años y medio de formación académica pero que mi mala memoria no me permitió recordar durante la elaboración de estos agradecimientos, también infinitas gracias.

CONTENIDO

RESUMEN	1
ABSTRACT	1
CONTENIDO	2
NOTACIÓN Y SIMBOLOGÍA	4
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	5
CAPÍTULO 2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES	8
2.1 SOBRE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS	8
2.2 SOBRE VARIABLES ALEATORIAS	11
2.2.1 Definición de variable aleatoria, función de distribución acumulada (FDA) y función de densidad de probabilidad (FDP)	11
2.2.2 Funciones de Variables Aleatorias.....	13
2.3 SOBRE DINÁMICA ESTRUCTURAL	17
2.3.1 Función de transferencia en sistemas de un grado de libertad (SUGDL).....	17
2.3.2 Función de transferencia en SVGDL (modelo unidimensional simplificado)	18
2.3.3 Obtención de la respuesta dinámica simulada en el tiempo, a partir de un análisis en el dominio de la frecuencia.....	19
2.3.4 Función de transferencia en sistemas de varios grados de libertad (modelo tridimensional simplificado)	20
2.4 SOBRE PROCESOS ALEATORIOS	21
2.4.1 Propiedades de segundo orden.....	22
2.4.2 Procesos Homogéneos.....	22
2.4.3 Descomposición espectral de procesos aleatorios	23
2.4.4 Procesos Aleatorios Gaussianos	23
2.4.5 Ruido Blanco	23
CAPÍTULO 3 FORMULACIÓN TEÓRICA DE LOS ESTIMADORES	25
3.1 PLANTEAMIENTO INICIAL Y PROPIEDADES ESTADÍSTICAS DE LOS REGISTROS E/S	25
3.1.1 Características estadísticas de la entrada y la salida del sistema.....	30
3.1.2 Momentos de primer y segundo orden de las FDP de la excitación y de la respuesta.....	31
3.2 ESTIMADORES EN ESTUDIO Y SU APLICACIÓN A SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD	33
3.2.1 Valor esperado del cociente - VEC.....	33
3.2.2 Valor esperado del cociente al cuadrado - VEC^2	36
3.2.3 Valor esperado del producto - VEP.....	38
3.2.4 Cociente de los valores esperados (Análisis Preliminar).....	39
3.2.5 Cociente de valores esperados al cuadrado - CVE^2 ($n>2$).....	42
3.2.6 Cociente de los valores esperados - CVE ($n>2$).....	44
3.3 SISTEMAS DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD.....	46
3.3.1 Sistema de tres grados de libertad x, y, θ	46
CAPÍTULO 4 VALIDACIÓN NUMÉRICA	54
4.1 SIMULACIONES APLICADAS A SISTEMAS DE UN GRADO DE LIBERTAD	55
4.1.1 Estimador VEC.....	55
4.1.2 Estimador VEC^2	57
4.1.3 Estimador CVE^2	59
4.1.4 Estimador CVE	61
4.1.5 Estimador VEP.....	62

4.2	SIMULACIONES APLICADAS A SVGDL	64
4.2.1	<i>Estimador VEC²</i>	65
4.2.2	<i>Estimador VEC</i>	66
CAPÍTULO 5 ESTABILIDAD DE LOS MOMENTOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN.....		69
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....		80
ANEXOS		82
REFERENCIAS		86

RESUMEN

El análisis de registros de vibración ambiental para la determinación de propiedades estructurales se ha convertido hoy en día en una práctica común y su aplicación ha favorecido el desarrollo de metodologías que permiten abordar el problema de la identificación de sistemas desde ópticas diferentes. Se presenta en esta tesis el análisis estadístico de algunas formas clásicas que relacionan los registros de entrada y salida en estructuras instrumentadas en condiciones de vibración ambiental, utilizadas para determinar las ordenadas de la función de transferencia, las cuales son útiles para estimar los parámetros dinámicos más importantes como amortiguamiento y frecuencias de vibración.

Se busca establecer cuál es el mejor estimador de la función de transferencia, vista como una variable aleatoria, a partir de la estabilidad de los parámetros que definen su función de densidad de probabilidad. Para ello se supone que el proceso de entrada tiene características similares a las de un ruido blanco de banda limitada y se desarrollan procedimientos numéricos para verificar el grado de aproximación de las expresiones analíticas que describen las funciones de densidad de probabilidad de cada uno de los estimadores estudiados. El análisis dinámico se realiza con modelos de sistemas de un grado de libertad y varios grados de libertad, considerando la combinación de procesos en dos direcciones ortogonales, con el fin de examinar los efectos que pueda tener la irregularidad estructural y el acoplamiento modal en la estabilidad de cada estimador

ABSTRACT

The analysis of recorded data in ambient vibration for determining structural properties is nowadays a common practice and its application has supported the development of many of methodologies that allow different points of view to study the problem of system identification. This paper shows the statistical analysis for some classical relationships between the input and output recorded data in dynamic systems under ambient vibration conditions, utilized to asses the transfer function and with it important dynamic parameters, like modal frequencies and damping coefficient.

The scope is to determine which of some common predictors of the transfer function, have the best behavior; studying the coefficients of the TF as random variables. The stability of the first and second order moments of each predictor is evaluated, assuming that the input process has similar characteristics to a band-limited Gaussian white noise, developing numeric procedures to verify the level of approximation of the analytic expressions of each probability density function. The dynamic analysis is performed at the beginning with single degree of freedom systems to provide the necessary tools for the analysis of multiple degrees of freedom systems. A simple model of three DOF is studied, in order to show the effect in some predictors when input processes in more than one principal direction are taken into account, fundamentally examining the effects of modal coupling due to structural irregularities, in the stability of the parameters assessed.

Capítulo 1 INTRODUCCIÓN

El planteamiento de modelos para solucionar sistemas dinámicos es estudiado por diferentes ramas, como la ingeniería mecánica, la ingeniería eléctrica, la ingeniería civil, la química, la ingeniería aeroespacial e incluso la biología. La modelación matemática a partir de la estimación de parámetros y el estudio de las funciones de transferencia, es una de las herramientas más poderosas para llegar a un mejor entendimiento de las características de la mayoría de los sistemas.

La estimación de parámetros a partir de correlaciones en el tiempo o análisis en el dominio de la frecuencia, es un procedimiento que usa las observaciones de un sistema real para validar modelos que representen adecuadamente las características de dicho sistema; con el fin predecir una respuesta futura con un nivel de aproximación adecuado. La idea principal es la de minimizar el error entre la respuesta del modelo y la del sistema actual, utilizando técnicas conocidas como mínimos cuadrados, filtración, redes neuronales, etc. Lo anterior suele conocerse también como el estudio del problema inverso o como la técnica de identificación de sistemas. Se afirma que esta técnica tiene sus inicios con Gauss a finales del siglo XVIII, quien en sus estudios sobre la dinámica de los planetas formuló un modelo que le permitiera estimar las trayectorias de recorrido. El término identificación de sistemas fue puesto en circulación por primera vez en los 60, por Lotfi Zadeh, para luego ser adaptado como término común a la naciente teoría moderna de control en la misma década. Sus raíces estadísticas tienen origen con la implementación del método de máxima verosimilitud a los modelos ARMAX, con Åström y Bohlin. Sin embargo, se afirma que una vez consolidada la teoría, durante los años siguientes incluyendo la época actual, la interacción entre el área de la estadística y el campo de la identificación de sistemas ha sido poco significativa [Ljung 1996].

En la solución del problema inverso, bien sea en la determinación de los parámetros del sistema o en la estimación de los coeficientes de la función de transferencia, la naturaleza aleatoria del fenómeno, afectada por el ruido de los instrumentos de medición y el mismo medio, indican que deben ser consideradas como variables aleatorias y estudiarse como tales. Es en particular el interés de este estudio, dentro del marco que concierne la solución del problema inverso, determinar con criterios estadísticos la estabilidad de algunos estimadores empleados con frecuencia para relacionar registros de vibraciones a la entrada y salida de sistemas que mantengan un comportamiento lineal (p.e. en vibración ambiental); a partir de la obtención de sus funciones de densidad de probabilidad.

Es importante aclarar que no hace parte de los objetivos de estudio encontrar un modelo que describa el comportamiento de algún sistema en particular ni tampoco entablar una discusión sobre la cantidad de parámetros que deben ser tenidos en cuenta en el modelo de estudio. La atención se centra en la aplicación a sistemas lineales de segundo orden, por su frecuente utilización en la estimación de propiedades dinámicas de edificios y otras estructuras civiles. Se deja abierta la posibilidad para determinar cuán diferente puede llegar a ser, si se considera la no-linealidad u otros modelos que no obedezcan a las ecuaciones diferenciales conocidas.

La fase es un elemento determinante dentro del análisis espectral, muy útil en la toma de decisiones para establecer formas modales de los sistemas instrumentados que lo requieren y esencial para la reconstrucción de imágenes o registros sintéticos con características específicas. Aunque en el desarrollo de la tesis no se trabaja con la fase de las señales ni se menciona su tratamiento, se aclara que no existe ninguna intención en menospreciar su importancia. La atención se centra como se ha advertido en estudiar el comportamiento de los estimadores del espectro de amplitudes y se invita a

estudiar los estimadores del espectro de fases con procedimientos similares a los planteados reconociendo su condición aleatoria.

Los aspectos más importantes que se desarrollan en cada capítulo de la tesis se enuncian a continuación. En el capítulo 2 se establecen los criterios estadísticos y matemáticos necesarios para abordar el problema, caracterizando el proceso de entrada y los parámetros del modelo dinámico de forma que puedan compararse entre sí los resultados que se obtienen en un marco de perturbaciones reales o simuladas. En el capítulo 3 se busca definir en principio cual es la función de densidad de probabilidad de los procesos de entrada y salida que obedecen a las ecuaciones de movimiento planteadas en el capítulo 2 y a partir de ellas encontrar las expresiones de los momentos de primer y segundo orden. Es claro que al conocer las características del proceso de entrada y su interacción con el sistema, es posible conocer también la transformación de la FDP de la variable aleatoria de interés. A partir del modelo que se plantea, se establecen cinco relaciones entre los registros E/S (entrada y salida), que pueden entenderse también como cinco funciones de variables aleatorias, de las cuales interesará conocer su estabilidad y su relación con la función de transferencia a partir de los momentos que la describen. En resumen los estimadores que se estudian son 1) VEC (Valor esperado de los cocientes espectrales), 2) VEC^2 (Valor esperado del cuadrado de los cocientes espectrales), 3) VEP (Valor esperado del producto espectral), 4) CVE (Cociente de los valores esperados) 5) CVE^2 (Cociente de los valores esperados al cuadrado).

La aplicación a sistemas sencillos de un grado de libertad permite definir una base para abordar el problema que involucra múltiples grados de libertad con procesos de entrada que afectan al sistema en varias direcciones. Para sistemas de varios grados de libertad se hacen conclusiones generales acerca del efecto que tiene en el análisis considerar la interacción modal y la aplicación de otros movimientos, con base en la estabilidad de los momentos del estimador. Para algunas consideraciones, dada la imposibilidad de encontrar una expresión simplificada para la FDP de la variable aleatoria en estudio, se determina únicamente la expresión para el valor esperado.

Por definición la estimación del error puede ser determinada si se conoce el valor exacto de la variable, el cual generalmente no se tiene. La validación numérica permite desarrollar datos simulados para la justificación de los procedimientos, utilizando un modelo predefinido con parámetros fijos. Existen situaciones reales en las que se deben sacar conclusiones con base en las propiedades estadísticas que se esperan, aceptando que ésta es una condición necesaria mas no suficiente para la obtención del valor real o de su mejor aproximación. Reconociendo estas limitaciones el estudio se orienta a la evaluación de cada estimador suponiendo incluidos dentro de las consideraciones de aleatoriedad algunos efectos adicionales asociados a la instrumentación o al proceso de medición. A partir de las expresiones analíticas descritas, que hacen parte del fundamento teórico del problema, se inicia en el capítulo 4 la validación mediante procedimientos de simulación numérica, generando procesos de ruido blanco gaussiano que perturben un sistema conocido.

Los procesos generados (entrada) y las respuestas obtenidas (salida), relacionados mediante algún estimador, corresponden al conjunto de datos discretos con los que se hará el análisis estadístico de las variables aleatorias y con los cuales se corroborará el nivel de aproximación de las expresiones para las funciones de distribución de probabilidad.

En el capítulo 5 se hace un análisis de la estabilidad de los momentos de primer y segundo orden de cada estimador, considerando el proceso de simulación establecido en el capítulo 4. Validadas las expresiones, se concluye sobre la utilización de los estimadores, la relación que tiene cada uno con la función de transferencia, su aplicabilidad y posibles recomendaciones para su utilización y estudios futuros.

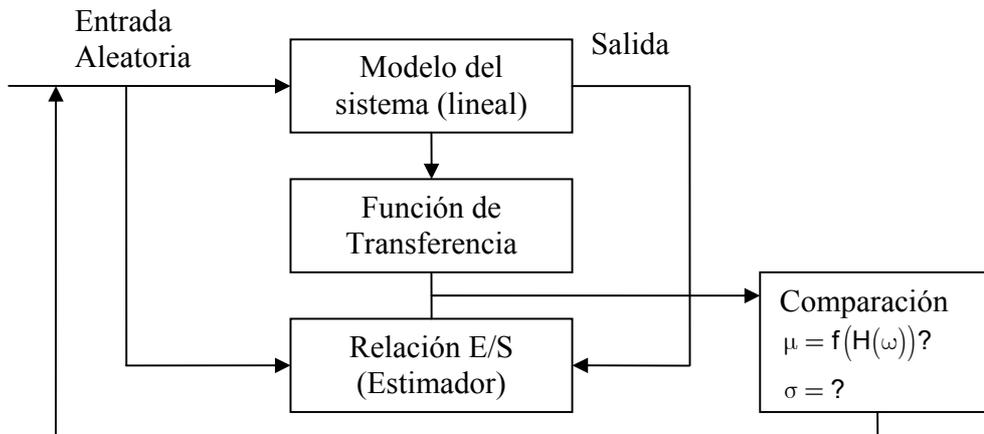


Figura 1.1 Modelo de análisis comparativo entre los estimadores y la función de transferencia esperada

Capítulo 2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

En este capítulo se establecen los fundamentos matemáticos utilizados para la deducción de las propiedades estadísticas de los estimadores planteados. La función de transferencia, las funciones de variables aleatorias, las ecuaciones fundamentales del equilibrio dinámico y las propiedades del ruido blanco como proceso estocástico son los temas principales a tratar.

2.1 Sobre la función de transferencia en la identificación de sistemas

La función de transferencia es usada en el análisis y procesamiento de señales, en diferentes campos de la ingeniería eléctrica, electrónica, civil y en el campo de las telecomunicaciones, con el fin de determinar las propiedades del sistema a través del cual es transformada una señal de entrada (perturbación), en la señal observada a la salida de alguno de los grados de libertad (respuesta). Generalmente se asocia la función de transferencia a sistemas lineales invariantes en el tiempo; sin embargo para algunos sistemas dinámicos es imposible establecer relaciones lineales para estudiar su comportamiento, siendo necesario recurrir a funciones de transferencia no-lineales [Krylov, Bogliubov, Zhabitsky]. La mayoría de los sistemas reales bajo ciertas características, se ajustan bien a modelos simplificados, los cuales serán el objetivo del presente trabajo.

Una explicación amplia sobre lo que se entiende por función de transferencia orientado a la identificación de sistemas es tratada por Ljung, estableciendo de manera más formal y con un fundamento estadístico riguroso, los modelos de operadores de transferencia utilizados en la predicción de respuestas. En el contexto del presente trabajo se tomará el modelo de la ecuación diferencial lineal (EDL), que es probablemente la relación mas sencilla de sistemas E/S que pueda establecerse, pero que sigue siendo ampliamente utilizada para estudiar el problema inverso. En el dominio "t" la EDL puede escribirse como se muestra en la ec. 2.1

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1u'(t) + b_0u(t) \quad (2.1)$$

Donde $y^{(j)}(t)$ y $u^{(j)}(t)$ son respectivamente la j-ésima derivada de la respuesta $y(t)$ y la entrada $u(t)$ con respecto a la variable "t" y $m \geq n$.

Para el estudio que nos ocupa se asumirá que "t" es la variable tiempo y en principio se supondrán condiciones iniciales iguales a cero, es decir $y^{(n)}(t) = y^{(n-1)}(t) = y'(t) = y(t) = 0$. Una transformación lineal (como la transformada de Laplace), sobre la ecuación diferencial lineal que gobierna el sistema en estudio permite obtener lo siguiente:

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \dots + a_0Y(s) = s^m U(s) + b_{m-1}s^{m-1}U(s) + \dots + b_0U(s) \quad (2.2)$$

que puede representarse también como:

$$Y(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{\underbrace{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}_{H(s)}} U(s) \quad (2.3)$$

En este nuevo dominio "s", la relación entre $Y(s)$ y $U(s)$ están determinadas por el cociente de dos polinomios, representada por $H(s)$ y que se conoce como *Función de Transferencia*.

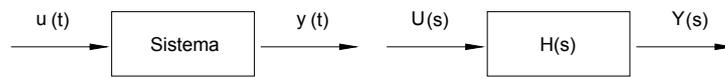


Figura 2.1 La función de transferencia $H(s)$ como proceso de transformación de una señal de entrada $y(t)$ en una de salida $u(t)$

Asumiendo entonces que efectivamente las funciones de transferencia se usarán para describir sistemas lineales invariantes en el tiempo cuyo comportamiento obedece a la formulación de ecuaciones diferenciales ordinarias, bajo ciertas condiciones podemos aceptar que:

1. $H(s) \cdot [kU(s)] = kY(s)$
2. $H(s)[U1(s) + U2(s)] = H(s)U1(s) + H(s)U2(s) = Y1(s) + Y2(s)$
3. Si $u(t) = A \sin(\omega t)$ entonces $y(t) = |H(j\omega)|A \sin(\omega t + \phi)$ (Respuesta a señales periódicas)

Lo anterior expresa que la respuesta ante una excitación del tipo armónico en estado estacionario, es una señal con la misma frecuencia pero amplificada por el valor de la función de transferencia $|H(s)|$ evaluada en $s = j\omega$ y desfasada ϕ

4. Funciones de transferencia en serie.

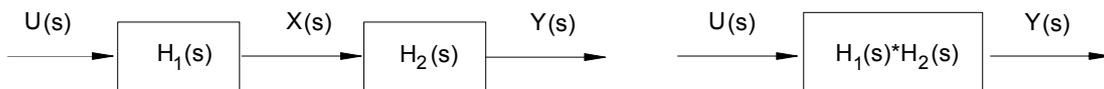


Figura 2.2
Sistemas lineales en serie

Si $X(s) = H1(s)U(s)$ y $Y(s) = H2(s)X(s)$ entonces se puede expresar la función de transferencia equivalente como.

$$Y(s) = H(s)U(s) \text{ con } H(s) = H1(s)H2(s)$$

5. Funciones de transferencia en paralelo

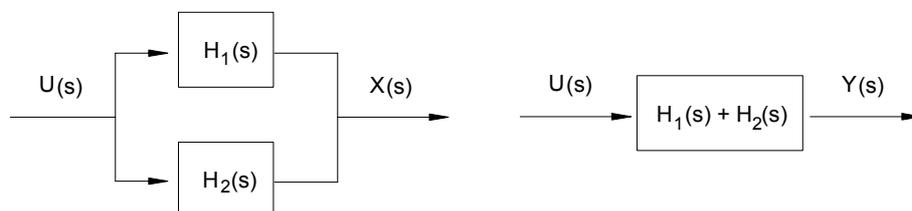


Figura 2.3
Sistemas lineales en paralelo

$$Y(s) = [H1(s) + H2(s)]U(s)$$

Sistemas de segundo orden

Considerando la forma general de la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.4)$$

Y sabiendo que $H(s)$ es el cociente de dos polinomios que se definieron anteriormente, los cuales provienen de haber aplicado la transformación lineal.

$$H(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (2.5)$$

La forma arbitraria del denominador de un sistema de segundo orden es:

$$D(s) = s^2 + a_1s + a_0 \quad (2.7)$$

El bien conocido oscilador armónico con amortiguamiento, corresponde a un sistema de segundo orden, y será la base de los sistemas dinámicos a los cuales se hará referencia en los capítulos posteriores.

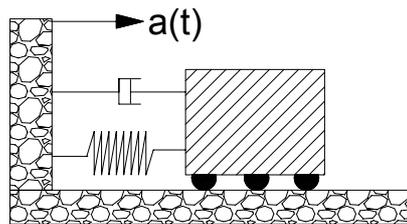


Figura 2.4 Sistema lineal de segundo orden con amortiguamiento

A manera de resumen, se entiende que al plantear el equilibrio del sistema dividir por la masa y aplicar la transformada de Laplace se obtiene.

$$[s^2 + 2\xi\Omega s + \Omega^2]X(s) = -A(s) \quad (2.8)$$

Donde la función de transferencia estará representada por la expresión:

$$H(s) = -\frac{1}{s^2 + 2\xi\Omega s + \Omega^2} \quad (2.9)$$

Es común encontrar esta función de transferencia expresada en el dominio de la frecuencia, y que suele ser equivalente a evaluar $H(s)$ en $s = i\omega$

$$H(\omega) = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + 2\xi\Omega\omega i} \quad (2.10)$$

La transformada de Laplace es ahora la transformada de Fourier.

2.2 Sobre variables aleatorias

Durante el desarrollo se tratarán algunos temas elementales de probabilidad, por lo cual, tratando de evitar ambigüedad se explicaran de manera abreviada pero concisa los fundamentos de la teoría que será utilizada en las siguientes líneas.

2.2.1 Definición de variable aleatoria, función de distribución acumulada (FDA) y función de densidad de probabilidad (FDP)

Definición

Puede definirse sin pérdida de generalidad a una *variable aleatoria* (representada con frecuencia por la letra **X**), como una regla que asigna un número real x_s a cada uno de los puntos s de un espacio muestral ℓ .

Puede pensarse también en una variable aleatoria como un valor o una magnitud que cambia de una presentación a otra, sin seguir una secuencia predecible. Los valores de una variable aleatoria son los valores numéricos correspondientes a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

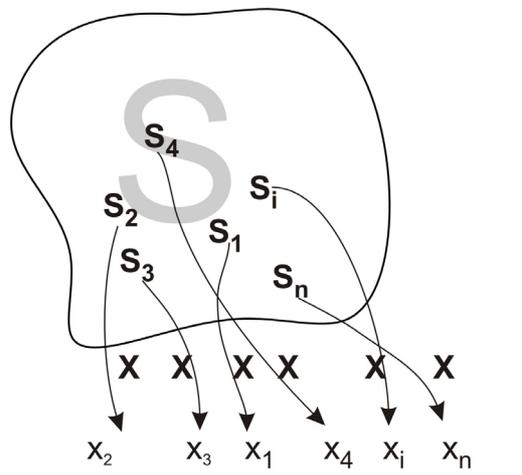


Figura 2.5 Abstracción gráfica de una variable aleatoria

Se pueden distinguir dos tipos, las variables aleatorias discretas y las continuas.

Función de distribución acumulada (FDA)

Se conoce como función de distribución acumulada a una función $F(x)$ de valores reales que satisface las siguientes propiedades:

1. $F(x_2) \geq F(x_1)$ con $x_2 > x_1$ (Función creciente para todo x en el dominio de F)
2. $F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(x + \varepsilon)$ (Para todo x , $F(x)$ debe ser al menos, continua por derecha)
3. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$

Donde el valor $F(x_i)$ es la probabilidad de que el valor que tome la variable aleatoria **X** sea menor que un cierto valor x_i . [Abramowitz]

Función de densidad de probabilidad (FDP)

Buscando representar la probabilidad de que una variable aleatoria X se encuentre dentro de un intervalo $b = [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$, podemos expresar la densidad de manera formal como:

$$f_X(x) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \text{Pr ob}\{x_i - \varepsilon \leq X < x_i + \varepsilon\}$$

Que lleva finalmente a relacionar la función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ y a la función de distribución acumulada $F_X(x)$ como:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.11)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\tau) d\tau \quad (2.12)$$

Función de densidad de probabilidad normal

Es una de las funciones de densidad de probabilidad más importantes y está definida mediante la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.13)$$

donde μ y σ^2 son la media y la varianza de la variable X y comúnmente suele representarse de forma abreviada como $N \sim (\mu, \sigma)$

Mas adelante nos interesará trabajar con la función error la cual está definida como:

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.14)$$

Función de distribución de probabilidad conjunta

$$F_{XY}(x, y) = \text{Pr}\{X < x, Y < y\} \quad (2.15)$$

Y la función de densidad será:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) \quad (2.16)$$

Igualmente para las funciones de probabilidad conjunta se deben cumplir las siguientes propiedades

- *Distribución y densidad marginal*

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) \quad (2.17)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y) dy \quad (2.18)$$

- *Densidad condicional*

$$f_{x|Y}(x|Y=y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (2.19)$$

2.2.2 Funciones de Variables Aleatorias

Si una variable aleatoria Y se obtiene a partir de otra variable aleatoria X a través de una función conocida $g(x)$, entonces la probabilidad de que Y tome valores en dentro de algún conjunto A es igual a la probabilidad de que X tome valores dentro de un conjunto B , donde B es el conjunto de todos los valores x para los cuales $g(x)$ es el conjunto A . Se debe garantizar como condición necesaria que $g(x)$ es monótonica en el intervalo de interés, para asegurar la existencia de la función inversa $g^{-1}(x)$ en el mismo intervalo. Dado lo anterior entonces puede expresarse mas formalmente la función de densidad de probabilidad (FDP) de la variable aleatoria Y como.

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|} \quad (2.21)$$

Con $x = g^{-1}(y)$

Ahora si Y es un vector de variables aleatorias, obtenidas a partir de otro vector de V.A X , como $Y = g(X)$ la FDP resultante tiene una forma similar a la presentada anteriormente, solo que en este caso en lugar de aparecer el valor absoluto de la derivada de la variable X , se tendrá el valor absoluto del Jacobiano del vector de V.A. tal y como se presenta en la sección 2.2.2.1

Funciones de distribución y de densidad de probabilidad multivariadas

Después de la anterior definición se hace intuitivo que el vector de variables aleatorias \bar{X} debe tener asociada una FDP para las variables aleatorias X_i que lo conforman.

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = f_{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (2.22)$$

La cual debe cumplir las siguientes propiedades

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) dx_2 dx_3 \dots dx_N \quad (2.23)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_N = 1 \quad (2.24)$$

$$f_{X_1/X_2, X_3, \dots, X_N}(x_1 | X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots, X_N = x_N) = \frac{f_{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)}{f_{X_2, X_3, \dots, X_N}(x_2, x_3, \dots, x_N)} \quad (2.25)$$

2.2.2.1 Funciones Básicas

Combinación Lineal

Dada la forma:

$$Y = AX + b$$

donde se entiende que Y es una función lineal de todas las variables aleatorias contenidas en el vector X y además A es una matriz conocida de dimensión $n \times n$ y b es un vector de constantes de dimensión $n \times 1$, al aplicar la expresión enunciada en el numeral 2.2.2 para *funciones de variables aleatorias* se llega a:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(A^{-1}[y-b])}{|A|} \quad (2.26)$$

Interesa principalmente el caso en el cual existe una variable que es combinación lineal de las demás variables aleatorias, el cual puede definirse de la siguiente forma:

$$Y = a^T X + b$$

$$Y_2 = X_2$$

$$Y_3 = X_3$$

.

.

$$Y_N = X_N$$

Determinada la FDP multivariada, a partir de la definición de función de densidad marginal, puede encontrarse la FDP de la variable aleatoria en estudio, por lo tanto el problema se convierte en:

$$f_Y(y) = \int \dots \int f_{Y, Y_2, \dots, Y_N}(y, y_2, \dots, y_N) dy_2 \dots dy_N$$

Uno de los casos que mas tratará en el presente documento, será la suma de dos V.A. el cual puede tratarse como se expresa en la ecuación 2.27.

$$Y = X_1 + X_2$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(y - x_2, x_2) dx_2 \quad (2.27)$$

Ahora, si las variables son independientes entonces la FDP puede expresarse como se muestra a continuación:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2) f_{X_2}(x_2) dx_2 \quad (2.28)$$

Funciones de dos variables aleatorias

Simetría Circular

Dos V.A son circularmente simétricas si su densidad de probabilidad conjunta depende solo de la distancia al origen [Papoulis]. Formalmente lo anterior puede expresarse como sigue:

$$f_{XY}(x, y) = g(r) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Más adelante se hará referencia a la propiedad de simetría circular. A continuación se presenta la forma como puede determinarse la función de distribución de dos V.A, de manera general.

Dadas dos V.A. X y Y y una función $g(x, y)$ que las relaciona, entonces la función de distribución acumulada de la V.A $Z = g(x, y)$ puede obtenerse integrando la FDP conjunta de X y Y sobre la región D_z definida como la región en el plano xy tal que $g(x, y) \leq z$. A continuación se presenta la ecuación 2.29 que resume lo expresado en estas líneas.

$$F_z(z) = P\{Z \leq z\} = \iint_{D_z} f_{XY}(x, y) dx dy \qquad (2.29)$$

Definida así la FDA de la V.A. Z , puede encontrarse fácilmente la FDP de la misma variable, como se presenta a continuación:

$$f_z(z) dz = \iint_{\Delta D_z} f_{XY}(x, y) dx dy \qquad (2.30)$$

Dentro de las relaciones básicas que interesa estudiar entre dos variables aleatorias se encuentra el cociente y el producto, por lo que se ha considerado adecuado definir las expresiones que permiten obtener las FDP de estas relaciones.

1) *Cociente de dos variables aleatorias.*

Definida Z como el cociente de dos V.A X y Y ,

$$z = \frac{x}{y}$$

puede demostrarse que al aplicar lo indicado en la ecuación 2.30, la función de densidad de probabilidad estará descrita por la expresión.

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_{XY}(zy, y) dy \qquad (2.31)$$

Ahora, si X y Y son independientes entonces la ecuación 2.31 se transforma en:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| f_x(zy) f_y(y) dy \qquad (2.32)$$

2) *Cambio de Variable.*

Dadas dos variables aleatorias X y Y y dos funciones de las V.A Z y W ,

$$z = g(x, y) \qquad w = h(x, y)$$

para determinar la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W , debe solucionarse el sistema:

$$g(x, y) = z \qquad h(x, y) = w$$

Después de encontrar las “n” raíces o soluciones del sistema, que se representaran como:

$$g(x_n, y_n) = z \qquad h(x_n, y_n) = w,$$

la función de densidad de probabilidad conjunta de Z y W responde a la siguiente expresión:

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{f_{XY}(x_1, y_1)}{|J(x_1, y_1)|} + \dots + \frac{f_{XY}(x_n, y_n)}{|J(x_n, y_n)|} \qquad (2.34)$$

donde $J(x, y)$ es el jacobiano de las V.A. Z y W evaluado en cada una de las raíces (x_i, y_i) del sistema solucionado.

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad (2.35)$$

3) *Producto de dos variables aleatorias.*

Definida la V.A. Z como el producto de dos V.A X y Y ,

$$z = xy \qquad (2.36a)$$

La FDP de Z puede encontrarse siguiendo el procedimiento planteado en la sección *cambio de variable* que acaba de definirse, para lo cual se sugiere:

- Adicionar una V.A auxiliar W tal que,

$$w = x \qquad (2.36b)$$

- Resolver el sistema de ecuaciones 2.36a y 2.36b,

$$x = w \qquad y = \frac{z}{x} = \frac{z}{w}$$

- Obtener el jacobiano y reemplazar las soluciones del sistema de ecuaciones,

$$J(x, y) = -w$$

- Finalmente aplicar la ecuación 2.34, llegando a la expresión que se muestra a continuación:

$$f_{zw}(z, w) = \frac{1}{|w|} f_{xy}\left(w, \frac{z}{w}\right) \quad (2.37)$$

4) *Raíz cuadrada de la suma de dos variables aleatorias al cuadrado.*

Definida Z como la raíz cuadrada de la suma de dos V.A X y Y elevadas al cuadrado,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mediante la propiedad de simetría circular puede demostrarse que:

$$f_z(z) = 2\pi \int_0^z rg(r) dr \quad (2.33)$$

Esta propiedad será de gran utilidad en la determinación de las V.A. que define la transformada de Fourier de un proceso estocástico gaussiano.

5) *Función de distribución normal multivariada*

La función de distribución normal conjunta o multivariada, puede ser definida de varias formas; sin embargo la más simple de todas es la siguiente: Un vector de variables aleatorias tiene distribución normal multivariada si cada polinomio lineal no trivial que pueda generarse a partir del vector es normal en sí mismo. Se representa la distribución normal conjunta de dimensión n , con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ como $N_n(\mu, \Sigma)$.

La densidad de probabilidad del vector se expresa como:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right\} \quad (2.38)$$

2.3 Sobre dinámica estructural

2.3.1 Función de transferencia en sistemas de un grado de libertad (SUGDL)

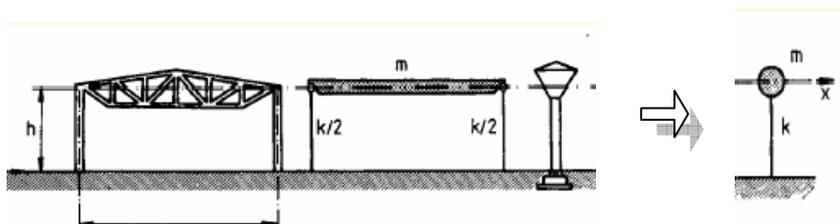


Figura 2.6 Sistemas generalizados a un grado de libertad

Dado que en ingeniería muchos problemas pueden resolverse simplificando los sistemas como si fueran de un grado de libertad, algunos como los se muestran en la figura 2.6, sometidos a una aceleración en la base, se hace referencia a la ecuación del oscilador armónico planteada en 2.8.

La ecuación del movimiento viene definida en este caso por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_s(t)$$

y al aplicarle la transformada de Fourier a este sistema se obtiene la solución en el dominio de la frecuencia, que se representa como:

$$X(\omega) = -A(\omega)H(\omega) \quad H(\omega) = \frac{1}{(\Omega^2 - \omega^2) + 2\xi\omega\Omega i} \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

2.3.2 Función de transferencia en SVGDL (modelo unidimensional simplificado)

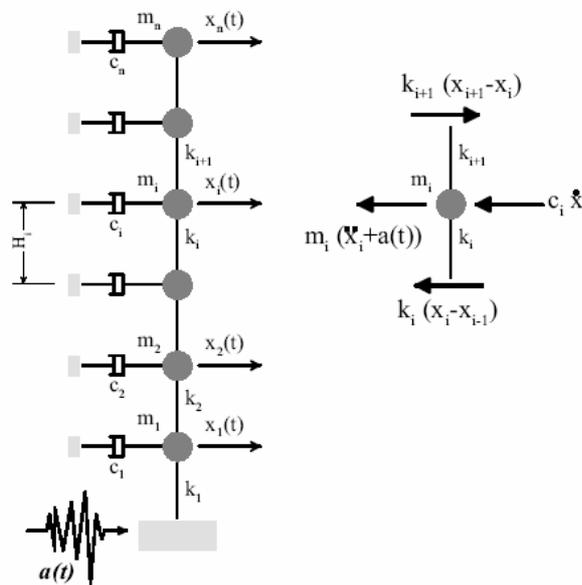


Figura 2.7 Sistema de varios grados de libertad (Diagrama de Fuerzas)

Al plantear el equilibrio dinámico para cada una de las masas m_i se llega a la expresión:

$$m_i \ddot{x}_i + c_i \dot{x}_i + (k_i + k_{i+1})x_i - k_{i+1}x_{i+1} - k_i x_{i-1} = -m_i a(t) \tag{2.39}$$

la cual puede escribirse en forma matricial para todo el sistema como,

$$M \ddot{X}(t) + C \dot{X}(t) + K X(t) = -MJ \ddot{X}_s(t) \tag{2.40}$$

Considerando que los vectores propios del sistema Φ diagonalizan a la matriz de amortiguamientos C y que estos pueden encontrarse solucionando el sistema:

$$|K - \Omega^2 M| = 0 \tag{2.41}$$

puede encontrarse la función de transferencia el sistema de varios grados de libertad tomando la transformada de la ecuación de movimiento, como se muestra en la ecuación 2.42,

$$\mathfrak{I}\left\{M\ddot{X}(t)+C\dot{X}(t)+KX(t)\right\}=\mathfrak{I}\left\{-MJ\ddot{X}_s(t)\right\} \quad (2.42)$$

$$\left[K+i\omega C-\omega^2 M\right]X(\omega)=-MJ\ddot{X}_s(\omega) \quad (2.43)$$

llegando finalmente a:

$$X(\omega)=-H(\omega)\ddot{X}_s(\omega) \quad H(\omega)=\frac{MJ}{\left[K+i\omega C-\omega^2 M\right]} \quad (2.44)$$

Para SVGDL del modelo unidimensional planteado, J es un vector de unos (1).

2.3.3 Obtención de la respuesta dinámica simulada en el tiempo, a partir de un análisis en el dominio de la frecuencia.

Conocidas las matrices de masa M y rigidez K , se encuentran los valores y vectores propios del sistema ω_i y ϕ_i , el sistema de ecuaciones desacopladas se obtiene al efectuar los siguientes productos:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{Y}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{Y}(t) + \Phi^T K \Phi Y(t) = -\Phi^T M J \ddot{X}_s(t) \quad (2.45)$$

donde cada ecuación desacoplada tiene la forma

$$m_i^* \ddot{y}_i(t) + c_i^* \dot{y}_i(t) + k_i^* y_i(t) = -\Phi^T M J \ddot{X}_s(t) \quad (2.46)$$

$$\ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \Omega_i \dot{y}_i(t) + \Omega_i^2 y_i(t) = -FP_i \ddot{X}_s(t) \quad (2.47)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i(t) \quad (2.48)$$

Si se soluciona cada ecuación diferencial para encontrar la respuesta $y(t)$, la respuesta en el sistema coordinado inicial $x(t)$ puede conocerse mediante la combinación lineal de cada respuesta $y_i(t)$ multiplicada por su correspondiente vector modal, como se muestra en la ecuación 2.48. Al aplicar la transformada de Fourier a cada ecuación desacoplada "i" se obtiene la función de transferencia del modo "i":

$$H_i(\omega) = \frac{1}{(\Omega_i^2 - \omega^2) + 2\xi_i \omega \Omega_i} \quad j \text{ representa la variable compleja.}$$

$$Y_i(\omega) = -H_i(\omega) \left[FP_i \ddot{X}_s(\omega) \right] \quad (2.49)$$

donde, bajo condiciones iniciales nulas puede afirmarse que:

$$y_i(t) = \mathfrak{I}^{-1} \left\{ -H_i(\omega) FP_i \ddot{X}_s(\omega) \right\} \quad (2.50)$$

Ahora, si la respuesta total es la combinación lineal expresada la ec (2.48), reemplazando la ec (2.50) se obtiene la ecuación 2.51,

$$x(t) = -\mathfrak{S}^{-1} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n FP_i \phi_i H_i(\omega)}_{H_T(\omega)} \ddot{X}_s(\omega) \right\} \quad (2.51)$$

donde se puede demostrar que:

$$H_T(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^n \phi_k FP_k \prod_{i=1}^n \left[(\Omega_i^2 - \omega^2) + 2\xi_i \omega \Omega_i j \right]}{\prod_{i=1}^n \left[(\Omega_i^2 - \omega^2) + 2\xi_i \omega \Omega_i j \right]} \quad (2.52)$$

Finalmente si aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación 2.51, llegamos a la siguiente representación simplificada,

$$x(t) = -\mathfrak{S}^{-1} \left\{ H_T(\omega) \ddot{X}_s(\omega) \right\} \quad \frac{X(\omega)}{\ddot{X}_s(\omega)} = -H_T(\omega) \quad (2.53)$$

La expresión para H_T se utilizó para comparar las funciones de transferencia obtenidas al hacer el cociente espectral y poder determinar cuál es la forma de la variable aleatoria de $H(\omega)$ que mejor se ajusta a $|H_T|$.

2.3.4 Función de transferencia en sistemas de varios grados de libertad (modelo tridimensional simplificado)

En un modelo de este tipo es posible considerar el aporte de las componentes de aceleración en cada dirección principal, donde la matriz J debe construirse de acuerdo con el número de componentes de aceleración que participan.

Si se consideran tres aceleraciones en la base (dos en las direcciones principales X y Y más una componente de rotación θ) se puede plantear el problema de manera similar al numeral 2.2.5 .

$$\begin{aligned} \Phi^T \underline{M} \Phi \ddot{Y}(t) + \Phi^T \underline{C} \Phi \dot{Y}(t) + \Phi^T \underline{K} \Phi Y(t) &= - \left(\Phi^T \underline{M} \underline{J}_1 \ddot{X}_s(t) + \Phi^T \underline{M} \underline{J}_2 \ddot{Y}_s(t) + \Phi^T \underline{M} \underline{J}_3 \ddot{\theta}_s(t) \right) \\ \ddot{y}_i(t) + 2\xi_i \Omega_i \dot{y}_i(t) + \Omega_i^2 y_i(t) &= - \left(FP_{iX} \ddot{X}_s(t) + FP_{iY} \ddot{Y}_s(t) + FP_{i\theta} \ddot{\theta}_s(t) \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i y_i(t)$$

$$Y_i(\omega) = -H_i(\omega) \left[FP_{iX} \ddot{X}_s(\omega) + FP_{iY} \ddot{Y}_s(\omega) + FP_{i\theta} \ddot{\theta}_s(\omega) \right]$$

$$y_i(t) = \mathfrak{I}^{-1} \left\{ H_i(\omega) \left[FP_{iX} \ddot{X}_s(\omega) + FP_{iY} \ddot{Y}_s(\omega) + FP_{i\theta} \ddot{\theta}_s(\omega) \right] \right\} \quad (2.55)$$

Nuevamente es posible encontrar el vector de respuestas $x(t)$ a partir de la combinación lineal de cada una de las soluciones encontradas en las coordenadas modales, llegando al planteamiento que se expresa en la ecuación 2.56.

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathfrak{I}^{-1} \left\{ H_i(\omega) \left[FP_{iX} \ddot{X}_s(\omega) + FP_{iY} \ddot{Y}_s(\omega) + FP_{i\theta} \ddot{\theta}_s(\omega) \right] \right\}$$

$$x(t) = \mathfrak{I}^{-1} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n \phi_i FP_{iX} H_i(\omega) \ddot{X}_s(\omega)}_{H_{TX}(\omega)} \right\} + \mathfrak{I}^{-1} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n \phi_i FP_{iY} H_i(\omega) \ddot{Y}_s(\omega)}_{H_{TY}(\omega)} \right\} + \mathfrak{I}^{-1} \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n \phi_i FP_{i\theta} H_i(\omega) \ddot{\theta}_s(\omega)}_{H_{T\theta}(\omega)} \right\}$$

$$\frac{X(\omega)}{\ddot{X}_s(\omega)} = - \frac{H_{TX}(\omega) \ddot{X}_s(\omega) + H_{TY}(\omega) \ddot{Y}_s(\omega) + H_{T\theta}(\omega) \ddot{\theta}_s(\omega)}{\ddot{X}_s(\omega)} \quad (2.56)$$

2.4 Sobre procesos aleatorios

Existe un gran número de fenómenos físicos que no pueden estudiarse como problemas deterministas y donde la predicción de valores futuros no puede establecerse de manera exacta. Algunos ejemplos de este tipo de problemas son los movimientos del terreno durante un temblor, la altura de las olas, las velocidades de viento debidas a huracanes y las microvibraciones en estructuras por ruido ambiental. Dada la imposibilidad de predecir con exactitud el valor instantáneo de cualquiera de estos fenómenos, se utiliza la teoría de procesos aleatorios para estudiarlos.

Un proceso aleatorio $x(t)$ es una regla para asignar a cada punto s de un espacio muestral \mathbf{S} una función $X(t, s)$. Es decir que un proceso estocástico podría considerarse sin pérdida de generalidad como una familia de funciones en el tiempo que dependen de un parámetro s . El dominio de s es el conjunto de todos los posibles resultados experimentales, y el dominio de t (tiempo) es un conjunto ℓ de números reales. Si ℓ es el eje de las abscisas entonces el proceso se considera como un *proceso continuo*, y si ℓ es un conjunto de enteros entonces se considera como un *proceso discreto*.

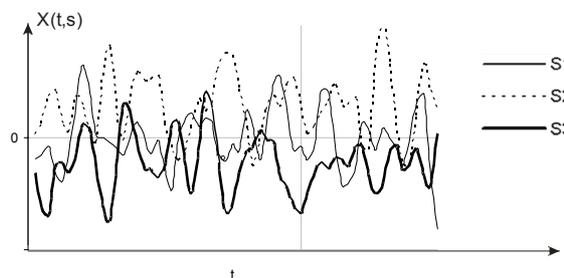


Figura 2.9 Representación de procesos aleatorios continuos

Para un valor específico t , el proceso estocástico $X(t, s)$ es una variable aleatoria X con distribución:

$$F(x, t) = P\{x(t) < x\}.$$

2.4.1 Propiedades de segundo orden

Para la determinación de las propiedades estadísticas de un proceso estocástico, se requiere conocer la función de distribución de probabilidad $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ para cada x_i, t_i . Bastará por el momento con conocer los momentos de primer y segundo orden que se definen a continuación:

Media

$$\eta(t) = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t) dx$$

Autocorrelación

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx$$

Media cuadrática

$$t_1 = t_2 \rightarrow E\{x^2(t_1)\}$$

Autocovarianza

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2)$$

En algunos procesos aleatorios los momentos de orden superior pueden encontrarse si se conocen los de 1^{er} y 2^{do} orden (por ejemplo los procesos gaussianos); además es bastante difícil poder tener un estimativo de los momentos de orden superior a partir de registros reales, los cuales generalmente presentan una gran dispersión.

2.4.2 Procesos Homogéneos

Proceso estrictamente homogéneo

Es aquel proceso en el se cumplen las siguientes condiciones

$$f_X(x_1, t_1) = f_X(x_1, t_1 + \tau)$$

$$f_X(x_1, t_1, x_2, t_2) = f_X(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau)$$

$$f_X(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = f_X(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau)$$

Si se cumple para las dos primeras condiciones se considera un proceso *al menos débilmente homogéneo*. Suele llamarse *proceso homogéneo*, si la variable "t" representa el espacio, o *proceso estacionario* si la variable "t" representa el tiempo

Las condiciones que deben cumplirse para que un proceso sea al menos débilmente estacionario se enuncian a continuación:

$$1) \quad E[x(t)] = \mu_x$$

$$2) \quad \phi_{xx}(t_1, t_2) = \phi_{xx}(t_1 - t_2)$$

2.4.3 Descomposición espectral de procesos aleatorios

Si $x(t)$ es un proceso aleatorio al menos débilmente estacionario entonces su función de densidad espectral y la función de autocorrelación están relacionadas mediante las siguientes expresiones

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

2.4.4 Procesos Aleatorios Gaussianos

En sentido amplio, un proceso aleatorio es un proceso gaussiano si para un número entero ($n > 0$) y un conjunto de instantes $\{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n\}$ las variables aleatorias $x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \dots, x(t_n) = x_n$ son conjuntamente gaussianas, es decir que su distribución de probabilidad conjunta es una FDP normal multivariada, que obedece a la expresión planteada en la ecuación 2.38.

2.4.5 Ruido Blanco

Un proceso aleatorio $x(t)$ es ruido blanco si los valores $x(t_i)$ y $x(t_j)$ no están correlacionados para todos los posibles t_i y t_j con $i \neq j$

$$C(t_1, t_2) = 0 \quad t_i \neq t_j$$

Si además de que las variables aleatorias $x(t_i)$ y $x(t_j)$ no están correlacionadas, también son independientes, entonces se tendrá un ruido blanco en el sentido estricto.

Ruido Blanco Gaussiano

Para cada t_i , la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria $X(t, s)$ es una normal con media μ y varianza σ^2 . Para el presente desarrollo se tendrán solo ruidos blancos con media $\mu = 0$.

El ruido blanco tiene función de densidad espectral constante y por lo tanto su función de autocorrelación es una delta de Dirac.

Ruido blanco de banda limitada

Es un proceso aleatorio con función de densidad espectral constante entre $-\omega_0$ y ω_0 .

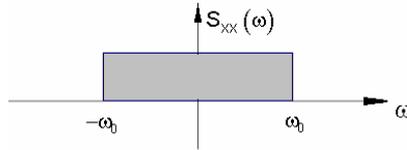


Figura 2.10 Función de densidad espectral del ruido blanco de banda limitada

Capítulo 3 FORMULACIÓN TEÓRICA DE LOS ESTIMADORES

Existen numerosas formas en las que ha sido abordado el campo de la identificación de sistemas, todas ellas partiendo de la deducción de un modelo que ajuste de manera apropiada las observaciones de un sistema real. Uno de los principales problemas es entonces poder hacer una buena elección del modelo matemático del sistema dinámico que desea estudiarse. Y otro igual de importante se refiere al método de análisis que se utilizará para la identificación de las propiedades del sistema o bien de los parámetros que fueron considerados en el modelo. La implementación de técnicas Paramétricas y No-Paramétricas son tratadas a fondo en los libros de Ljung y Raol. En el capítulo se abordará desde una perspectiva probabilista la técnica de análisis espectral utilizada comúnmente en edificios, puentes y otras estructuras civiles para determinar sus frecuencias características y el porcentaje de amortiguamiento; técnica implementada desde los 60 por Crawford y Ward. Algunos interrogantes han sido planteados acerca de la formulación de cocientes espectrales y correlaciones entre las observaciones que se realizan a diferentes niveles en las estructuras, principalmente por ingenieros de la práctica, interesados en conocer la mejor forma de obtener la función de transferencia. Tratando de dar respuesta a estos interrogantes desde otra perspectiva, se exploran a continuación algunas relaciones entre las observaciones de entrada (perturbación) y salida (respuesta) de sistemas lineales, utilizando las herramientas estadísticas y matemáticas que fueron mencionadas en el capítulo 2

3.1 Planteamiento inicial y propiedades estadísticas de los registros E/S

Dado un sistema de un grado de libertad (SUGDL), sometido a excitaciones externas en la base, se desean encontrar algunas propiedades características del cociente de la relación entre las señales transformadas de la respuesta (salida) y los registros en la base (entrada), suponiendo que la entrada puede considerarse como "Ruido Blanco Gaussiano" (RBG)

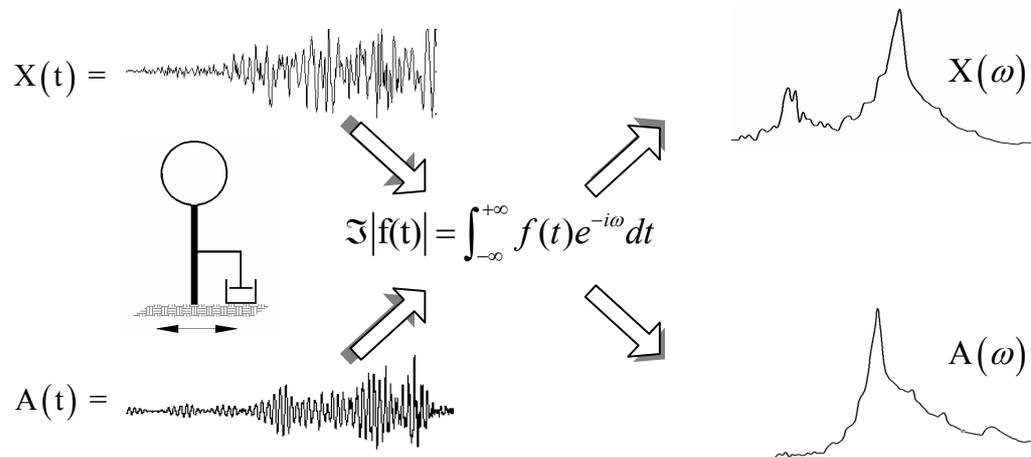


Figura 3.1 Transformación de los registros E/S al dominio de la frecuencia.

Se define el estimador $Q(\omega)$, como una función de $X(\omega)$ y $A(\omega)$

$$Q(\omega) = f(X(\omega), A(\omega)) \tag{3.1}$$

donde $X(\omega)$ y $A(\omega)$ generalmente son números complejos.

$A(\omega)$ es la transformada de Fourier de $A(t)$, que puede escribirse de la siguiente forma:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.2)$$

pero $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, luego la ecuación 3.2 también puede describirse así:

$$A(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cos \omega t dt}_{c(\omega)} - i \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \sin \omega t dt}_{d(\omega)} \quad (3.3)$$

Es decir que la transformada del proceso estocástico $A(t)$, se interpreta como la combinación lineal de dos variables aleatorias:

$$A(\omega) = c(\omega) - id(\omega) \quad (3.4)$$

Ahora $X(\omega)$ para un sistema de segundo orden como el que se muestra en la figura 3.1 puede obtenerse como el producto entre $A(\omega)$ y $H(\omega)$, donde $H(\omega)$ esta definida como la función de transferencia que aparece al aplicar la transformada de Fourier a la ecuación diferencial del oscilador amortiguado (EDOA), la cual se expresa en la ecuación 3.5,

$$H(\omega) = \frac{-1}{\Omega^2 - \omega^2 + 2\xi\Omega\omega i} \quad (3.5)$$

$$X(\omega) = A(\omega)H(\omega) \quad (3.6)$$

Reescribiendo $H(\omega)$ como se muestra en la ecuación 3.7, es posible identificar su parte real e imaginaria, a las que se asignarán las variables $a(\omega)$ y $b(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\underbrace{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\Omega\omega)^2}_{a(\omega)}} - \frac{2\xi\Omega\omega}{\underbrace{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\Omega\omega)^2}_{b(\omega)}} i \quad (3.7)$$

Escrita $H(\omega)$ como una combinación lineal de dos variables,

$$H(\omega) = a(\omega) - ib(\omega) \quad (3.8)$$

donde $a(\omega)$ y $b(\omega)$ son variables que dependen de las características de la estructura, mas específicamente del amortiguamiento y de la frecuencia natural de vibración, se procede a continuación a efectuar el producto planteado en la ecuación 3.6 para identificar ahora la parte real y la parte imaginaria del proceso de respuesta $X(t)$ en el dominio de la frecuencia.

$$X(\omega) = \underbrace{[a(\omega)c(\omega) - b(\omega)d(\omega)]}_{f(\omega)} - \underbrace{[a(\omega)d(\omega) + b(\omega)c(\omega)]}_{g(\omega)} i \quad (3.9)$$

Se decide expresar también a $X(\omega)$ (que corresponde a la transformada de Fourier de la respuesta dinámica) como la combinación lineal de dos variables aleatorias que se han nombrado como $f(\omega)$ y $g(\omega)$, por lo tanto:

$$X(\omega) = f(\omega) - ig(\omega) \quad (3.10)$$

Redefiniendo la expresión (3.1) se obtiene

$$Q(\omega) = f([f(\omega) - ig(\omega)], [c(\omega) - id(\omega)]) \quad (3.11)$$

Interesa entonces conocer las propiedades estadísticas de $Q(\omega)$, para algunas funciones particulares $f(\omega)$, para lo cual es preciso establecer antes algunas características de las variables aleatorias componentes, que serán de gran utilidad más adelante.

Sea $A(t)$ un proceso estocástico gaussiano estacionario, cuyas componentes son independientes en el tiempo, (este proceso es mejor definido como *ruido blanco gaussiano*) para el cual se cumple que:

$$E\{A(t_i)\} = 0$$

$$E\{A(t_i)^2\} = \sigma^2$$

Definido así, el proceso de ruido blanco será un proceso para el cual en cada instante t_i , la realización $A(t_i)$ tiene función de densidad de probabilidad normal con media nula y varianza σ^2 .

Conociendo las propiedades estadísticas del proceso de entrada, pueden establecerse las relaciones que se presentan a continuación para determinar las propiedades de las variables aleatorias obtenidas como producto de la transformación al dominio ω . En la ecuación 3.3 se define la variable $c(\omega)$ como:

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cos \omega t dt \quad (3.12)$$

Al aplicar el operador valor esperado a la V.A. $c(\omega)$ se encuentra que,

$$E\{c(\omega)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cos \omega t dt\right\}$$

pero al ser la integración y el valor esperado operaciones lineales la anterior puede reescribirse como:

$$\mu_{c(\omega)} = E\{c(\omega)\} = \int \underbrace{E\{A(t)\}}_{\mu=0} \cos \omega t dt = 0 \quad (3.13)$$

De la misma manera al aplicar el operador valor esperado para encontrar la varianza de la V.A. $c(\omega)$, se llega a la siguiente expresión:

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = E\{(c(\omega) - \mu_{c(\omega)})^2\} = E\{c(\omega)^2\} \quad (3.14)$$

que es equivalente a escribirlo como:

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = E \left\{ \left(\int A(t) \cos \omega t dt \right)^2 \right\} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = E \left\{ \left(\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} A(t_i) \cos \omega t_i \Delta t_i \right)^2 \right\} \quad (3.16)$$

Al escribir la ecuación 3.15 en forma discreta se obtiene la ecuación 3.16, a partir de la cual pueden establecerse algunas relaciones, que permiten simplificar la expresión y obtener las ecuaciones 3.17 y 3.18. En el numeral A.1 del anexo se presenta el desarrollo mediante el cual se llega a estas expresiones.

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sigma^2 \cos^2 \omega t_i \Delta t_i^2 \quad (3.17)$$

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = \sigma^2 \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \omega t dt \quad (3.18)$$

Es evidente que la integral 3.18 evaluada para los límites que se indican tiende a infinito y en el sentido estricto para un proceso estocástico de ruido blanco con duración infinita, la variable aleatoria $c(\omega)$ que se obtiene como producto de la transformada de Fourier debe tener varianza infinita; sin embargo para el caso de estudio y aceptando que en la realidad los registros que se consiguen como resultado de una instrumentación son de duración limitada T , la ecuación 3.18 toma la forma que se presenta a continuación considerando los nuevos límites de integración $[0, T]$,

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = \sigma^2 \Delta t \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \sigma^2 \Delta t \left[\frac{1}{2\omega} \cos(\omega T) \text{sen}(\omega T) + \frac{T}{2} \right] \quad (3.19)$$

A partir de un procedimiento similar se logran obtener los parámetros estadísticos para la variable aleatoria $d(\omega)$, llegando a las expresiones 3.20 y 3.21.

$$E \{ d(\omega) \} = \mu_{d(\omega)} = 0 \quad (3.20)$$

$$\sigma_{d(\omega)}^2 = \sigma^2 \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}^2 \omega t dt \quad (3.21)$$

Al ser las funciones $\text{sen}(t)$ y $\cos(t)$ periódicas, podemos establecer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}^2 \omega t dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \omega t dt$, considerando que los límites de integración se transforman luego en la duración del registro y que para una duración adecuada pueden suponerse aproximadamente iguales, luego

$$\sigma_{c(\omega)}^2 \approx \sigma_{d(\omega)}^2 \approx \sigma^2 \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \omega t dt \quad (3.22)$$

Se denotará esta varianza como

$$\text{Var} \{ c(\omega) \} = \sigma_c^2 \quad (3.23)$$

Antes de pasar al análisis del siguiente par de expresiones, verifiquemos la independencia entre $c(\omega)$ y $d(\omega)$.

El valor esperado del producto de las variables aleatorias puede definirse como:

$$E\{c(\omega)d(\omega)\} = E\left\{\int a(t)\cos\omega t dt \int a(t)\sin\omega t dt\right\}$$

En el numeral A.1 del anexo, se hace el desarrollo mediante el cual se llega a:

$$E\{c(\omega)d(\omega)\} = E\{c(\omega)\}E\{d(\omega)\} = 0 \quad (3.24)$$

Con la ecuación 3.24 se identifica que $c(\omega)$ y $d(\omega)$ no están correlacionadas y sabiendo que ambas variables aleatorias tienen distribución normal, se concluye que son independientes. Una vez encontrada la independencia entre las variables que se obtiene de la transformada del proceso de ruido blanco, se estudian a continuación algunas propiedades de las V.A. $f(\omega)$ y $g(\omega)$, las cuales fueron definidas en la ecuación 3.9 como:

$$f(\omega) = a(\omega)c(\omega) - b(\omega)d(\omega) \quad (3.25)$$

$$g(\omega) = a(\omega)d(\omega) + b(\omega)c(\omega) \quad (3.26)$$

Interesa conocer también los momentos de primer y segundo orden de estas variables, los cuales se determinan a partir de un procedimiento similar al que se efectuó al estudiar las V.A. resultantes de transformar al dominio de la frecuencia el proceso de entrada.

Al aplicar el operador valor esperado a la expresión 3.25 se llega a:

$$\mu_{f(\omega)} = E\{f(\omega)\} = a(\omega)\underbrace{E\{c(\omega)\}}_0 - b(\omega)\underbrace{E\{d(\omega)\}}_0 = 0 \quad (3.27)$$

obteniendo el mismo resultado si se aplica a la V.A. $g(\omega)$, por lo que puede concluirse que:

$$\mu_{f(\omega)} = \mu_{g(\omega)} = 0 \quad (3.28)$$

Al estimar el segundo momento se obtiene la expresión 3.29,

$$\sigma_{f(\omega)}^2 = a^2(\omega)\sigma_{c(\omega)}^2 + b^2(\omega)\sigma_{d(\omega)}^2 \quad (3.29)$$

que de acuerdo con las ecuaciones 3.22 y 3.23 puede reescribirse como:

$$\sigma_{f(\omega)}^2 \approx \sigma_c^2 \{a^2(\omega) + b^2(\omega)\} \quad (3.30)$$

De la misma manera que se mostró para $c(\omega)$ y $d(\omega)$, se llega a concluir que

$$\sigma_{g(\omega)}^2 = \sigma_{f(\omega)}^2 \quad (3.31)$$

La expresión que aparece entre llaves en la ecuación 3.30, es precisamente la norma al cuadrado de la función de transferencia que se presentó en la ecuación 3.7, es decir que la varianza de las V.A.

$f(\omega)$ y $g(\omega)$ que se obtienen como resultado de la transformada de Fourier de la *respuesta dinámica* $X(t)$, corresponden al producto de la norma de la función de transferencia elevada al cuadrado con la varianza de la V.A. obtenida al aplicar también la transformada de Fourier al proceso de entrada (σ_c^2).

Por simplificación al igual que se presentó la ecuación 3.23 se denotarán las varianzas de las V.A. $f(\omega)$ y $g(\omega)$ de la siguiente forma:

$$Var\{f(\omega)\} = Var\{g(\omega)\} = \sigma_f^2 \quad (3.32)$$

Es necesario establecer la correlación entre las variables $f(\omega)$ y $g(\omega)$, para lo cual se sugiere en primera instancia estimar el valor esperado del producto $f(\omega)g(\omega)$ cuyo resultado se muestra a en la ecuación 3.33

$$E\{f(\omega)g(\omega)\} = E\{(a(\omega)c(\omega) - b(\omega)d(\omega))(a(\omega)d(\omega) + b(\omega)c(\omega))\} = 0 \quad (3.33)$$

que junto con la ecuación 3.28 permiten concluir que no existe correlación entre las variables.

$$E\{f(\omega)g(\omega)\} = E\{f(\omega)\}E\{g(\omega)\} = 0$$

Una vez demostrado que $f(\omega)$ y $g(\omega)$ no están correlacionadas, es posible afirmar que también son independientes, a partir de los mismos argumentos con los que se sustentó la independencia de $c(\omega)$ y $d(\omega)$, los cuales formalmente puede expresarse como:

Al ser $f(\omega)$ y $g(\omega)$ obtenidas de una combinación lineal de variables aleatorias con distribución normal, su distribución es también normal, cumpliéndose que la función de distribución de probabilidad conjunta se expresa como el producto de las FDP de cada variable puesto que la correlación entre ellas es cero.

3.1.1 Características estadísticas de la entrada y la salida del sistema

Antes de comenzar con la determinación de las propiedades de las V.A que se obtienen como función de la entrada y la salida del sistema, es necesario conocer las propiedades individuales de cada una de ellas, principalmente encontrar la FDP, la media y la varianza de $|X(\omega)|$ (salida) y $|A(\omega)|$ (entrada).

Al ser $X(\omega)$ y $A(\omega)$ números complejos, la función que corresponde a la norma del número complejo ($|X(\omega)|$ o $|A(\omega)|$) es una función de dos variables aleatorias reales, en la que cada V.A. tiene FDP normal y parámetros estadísticos $\mu = 0$ y $\sigma^2 = \sigma_1^2$

Para $X(\omega)$ y $A(\omega)$, las variables aleatorias a considerar son las establecidas en la ecuación 3.10, con los parámetros que se especificaron en las ecuaciones 3.19 y 3.30.

Función de distribución de probabilidad de la norma de un número complejo

Iniciando con la norma de la transformada del proceso de entrada $|A(\omega)|$, se puede encontrar su FDP considerando que está conformada por las V.A. $c(\omega)$ y $d(\omega)$ definidas en la ecuación 3.3, distribuidas individualmente como normales con media cero, y varianza σ_c^2 . Las variables aleatorias que se consideran a continuación son función de la frecuencia, sin embargo para evitar expresiones

innecesariamente extensas se obviará este detalle, por lo tanto $c(\omega)$ y $d(\omega)$ serán ahora “ c ” y “ d ”. La función de la cual se espera obtener la FDP, se expresa en la ecuación 3.34

$$|A| = \sqrt{c^2 + d^2} \quad (3.34)$$

La FDP conjunta de las V.A. c y d depende únicamente de su distancia al origen de coordenadas, tal y como se expresa en la ecuación 3.34

$$f_{CD}(c, d) = f_C(c) f_D(d)$$

$$f_{CD}(c, d) = \frac{1}{2\pi\sigma_c^2} e^{-\frac{(c^2+d^2)}{2\sigma_c^2}}$$

la cual manifiesta que c y d pueden considerarse como V.A. circularmente simétricas como se mostró antes en la sección 2.2.2.1. Llamando a $Z_1 = |A|$ puede demostrarse que la FDP de $|A|$ es la siguiente:

$$f_{Z_1}(z_1) = \frac{z_1}{\sigma_c^2} e^{-\frac{z_1^2}{2\sigma_c^2}} \quad (3.35)$$

Un planteamiento similar para la V.A. $|X|$, considerando que está conformada por las V.A. f y g definidas en la ecuación 3.9, distribuidas individualmente como normales con media cero y varianza σ_f^2 y con FDP conjunta descrita por:

$$f_{FG}(f, g) = \frac{1}{2\pi\sigma_f^2} e^{-\frac{(f^2+g^2)}{2\sigma_f^2}}$$

permite encontrar su FDP mediante la propiedad de simetría circular. Haciendo el cambio de variable $Z_2 = |X|$, se llega a establecer que la FDP de $|X|$ es:

$$f_{Z_2}(z_2) = \frac{z_2}{\sigma_f^2} e^{-\frac{z_2^2}{2\sigma_f^2}} \quad (3.36)$$

En las anteriores expresiones σ_c^2 y σ_f^2 son las varianzas de las variables aleatorias \mathbf{C} y \mathbf{F} respectivamente, que se definieron en las ecuaciones 3.12 y 3.25. La forma de las ecuaciones 3.34 y 3.36 es conocida en la literatura como la función de distribución de Rayleigh, la cual es aplicada actualmente en monitoreo de sistemas, análisis de modelos de costos, procesamiento de señales, fuentes de energía eólica, etc.

3.1.2 Momentos de primer y segundo orden de las FDP de la excitación y de la respuesta

Conocidas las expresiones que definen las FDP de la respuesta $X(\omega)$ y la excitación $A(\omega)$ planteadas en las ecuaciones 3.34 y 3.36, pueden encontrarse de manera directa los momentos de primer y segundo orden de estas V.A., los cuales serán de gran interés más adelante en el estudio de los estimadores propiamente dichos. Estos momentos se presentan a continuación, considerando una variable aleatoria z con distribución Rayleigh como la que se muestra en la siguiente ecuación:

$$f_Z(z) = \frac{z}{\beta^2} e^{-\frac{z^2}{2\beta^2}}$$

1) Media

$$\mu_Z = E\{z\} = \int_0^{\infty} z f_z(z) dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \beta \tag{3.37}$$

2) Varianza

$$\sigma_z^2 = E\{(z - \mu)^2\} = 2\beta^2 - \frac{\pi\beta^2}{2} \tag{3.38}$$

Relacionando los resultados de las ecuaciones 3.37 y 3.38, con las ecuaciones 3.36, 3.34 y 3.30 se aprecia que en el proceso del análisis espectral al calcular las V.A. $Z_1 = |A(\omega)|$ y $Z_2 = |X(\omega)|$, antes de efectuar alguna relación entre ellas (es decir antes de calcular el cociente espectral), se pueden establecer relaciones entre los segundos momentos de las mismas para caracterizar los procesos de origen. Por ejemplo, conocidas varias realizaciones de las V.A. $Z_1 = |A(\omega)|$ y $Z_2 = |X(\omega)|$ para algún ω_1 , pueden estimarse numéricamente las medias y las varianzas de Z_1 y Z_2 ($\sigma_{z_1}^2$ y $\sigma_{z_2}^2$) y con ellas obtener un valor aproximado de las medias y las varianzas de las V.A. con distribución normal que les dieron origen (σ_c^2 y σ_f^2).

$$a) \sigma_{c,f}^2 \approx \frac{2\hat{\mu}_{z_1, z_2}}{\sqrt{2\pi}} \qquad b) \sigma_{c,f}^2 \approx \frac{2}{4-\pi} \hat{\sigma}_{z_1, z_2}^2$$

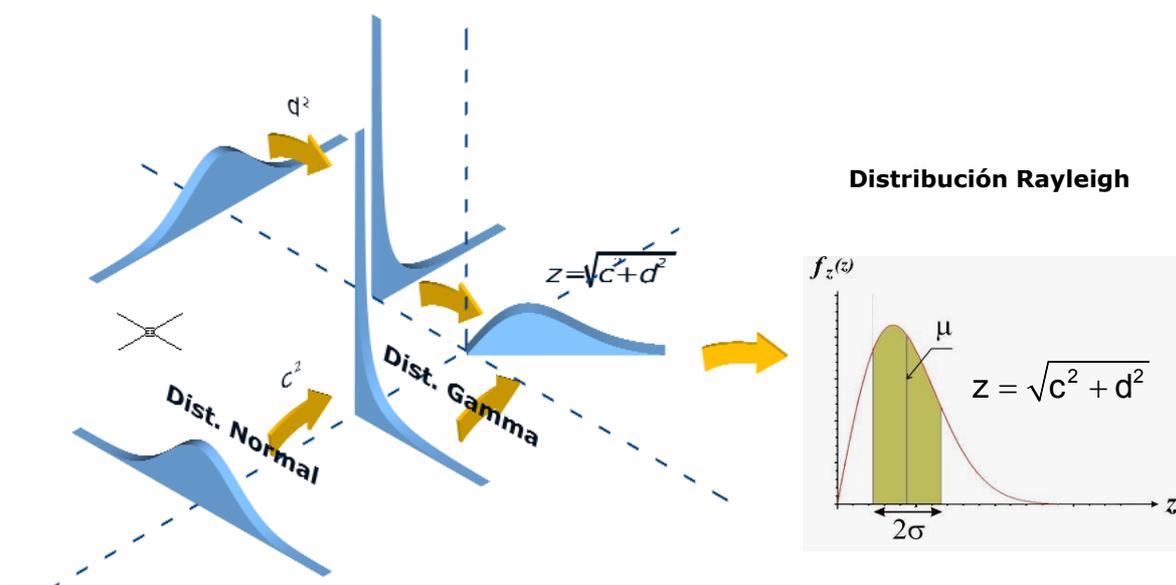


Figura 3.2 Función de distribución Rayleigh como función de variables aleatorias independientes con distribución normal

3.2 Estimadores en estudio y su aplicación a sistemas de un grado de libertad

Como se mencionó al inicio del capítulo, el interés es poder estudiar la estabilidad de algunos estimadores que pueden plantearse al relacionar los registros en el dominio de la frecuencia y efectuar el denominado análisis espectral. En principio nos interesa estudiar, si al tener un conjunto de variables aleatorias como las que se describen en el numeral 3.1, es mejor establecer alguna relación aritmética entre ellas y estimar el valor esperado de la relación, o bien obtener el valor esperado de cada variable aleatoria por separado y luego establecer una relación entre ellos. Dicho de otra forma, si la relación que se plantea es el cociente espectral entonces el interés se centra en tratar de determinar si el cociente de los valores esperados es equivalente al valor esperado de los cocientes; si no, entonces se busca establecer los criterios que hacen mejor a un estimador que a otro y la forma como cada uno se relaciona con la función de transferencia. Se estudiarán los siguientes estimadores: *el valor esperado del cociente espectral (VEC)*, *el valor esperado del cociente espectral al cuadrado (VEC²)*, *el cociente espectral de los valores esperados (CVE)*, *el cociente espectral de los valores esperados al cuadrado (CVE²)* y *el valor esperado del producto espectral (VEP)*. Este último se plantea como caso de estudio gracias a la particularidad de la FDP que lo define, ya que se encontró que para las condiciones del proceso de entrada y las características de la observación a la salida, la V.A. tiene un coeficiente de variación constante y momentos más estables que los de algunos cocientes.

En la sección 3.1 se caracterizaron las FDP de $|X(\omega)|$ y $|A(\omega)|$, encontrando además las expresiones que definen su primer y segundo momento en términos de las varianzas de las V.A. de origen. Una vez conocidos los parámetros estadísticos de los procesos de entrada y salida en el dominio de la frecuencia se procede a determinar las FDP de los estimadores expresados arriba.

3.2.1 Valor esperado del cociente - VEC

$$Q_1(\omega) = E \left\{ \frac{|X|}{|A|} \right\} = E \left\{ \frac{|f - ig|}{|c - id|} \right\} \quad (3.39)$$

En este estimador se plantea que al tener dos registros en el dominio del tiempo de duración T , (p.e. uno en la base y otro en alguno de los grados de libertad del sistema en estudio), la variable aleatoria $Q_1(\omega_i)$ se obtiene al dividir cada uno de los registros en N ventanas de duración T/N , aplicar la transformada de Fourier a cada ventana, calcular la norma de la transformada para cada ω_i y finalmente estimar el cociente entre la norma del grado de libertad escogido y la base para cada frecuencia. A continuación se presenta el procedimiento a partir del cual se determinan sus parámetros estadísticos.

Definidas $Z_1 = |A|$ y $Z_2 = |X|$ como variables aleatorias con distribución Rayleigh, se estudia a continuación la variable aleatoria:

$$Q_1 = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Para abordarlo se plantean inicialmente la posibilidad de que las variables estén o no correlacionadas, por lo cual es necesario encontrar el valor esperado del producto y el producto de la V.A. Z_1 y Z_2 , llegando a la ecuación 3.40.

$$E\{Z_1 Z_2\} = E\left\{\sqrt{f^2 + g^2} \sqrt{c^2 + d^2}\right\} = 2\sigma_c^2 \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.40)$$

$$\text{con } \sqrt{a^2 + b^2} = H(\omega)$$

mientras que para el producto de los valores esperados, se hace referencia a las expresiones 3.35, 3.36 y 3.37, obteniendo el siguiente resultado:

$$E\{Z_1\}E\{Z_2\} = \frac{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}{2} = \frac{\pi}{2} \sigma_c^2 \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.41)$$

A partir de 3.40 y 3.41 puede plantearse la covarianza entre Z_1 y Z_2 , la cual está dada por la expresión:

$$\text{cov}[Z_1, Z_2] = E[Z_1 Z_2] - E[Z_1]E[Z_2] = \sigma_c^2 \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{4 - \pi}{2} \right) \quad (3.42)$$

Cuando los registros de entrada y salida son contemporáneos y además la respuesta dinámica corresponde exactamente al resultado de la interacción entre el proceso de entrada y el sistema, entonces el valor de la varianza σ_c^2 en el numerador y denominador es el mismo, quedando descrito el coeficiente de correlación mediante la expresión 3.43

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{cov}[Z_1, Z_2]}{\sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2}} = \frac{\sigma_c^2 \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{4 - \pi}{2} \right)}{\sqrt{\left(2\sigma_c^2 - \frac{\pi\sigma_c^2}{2} \right)} \sqrt{\left(2\sigma_f^2 - \frac{\pi\sigma_f^2}{2} \right)}} \quad \text{con } \sigma_f^2 = (a^2 + b^2) \sigma_c^2 \quad \rho_{Z_1 Z_2} = 1 \quad (3.43)$$

Cuando la correlación es igual a 1, entonces el valor esperado del cociente es efectivamente la función de transferencia. Ahora, si los registros de entrada y salida no son simultáneos las variables aleatorias Z_1 y Z_2 tienen correlación nula ($\rho_{Z_1 Z_2} = 0$) y además son independientes es decir que su FDP conjunta puede expresarse como: $(f_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = f_{Z_1}(z_1) f_{Z_2}(z_2))$. Se propone entonces encontrar la FDP de la variable Q y partir de ella la relación del valor esperado con la función de transferencia.

En la sección 2.2.2.1 se presenta la expresión 2.31 que permite obtener la FDP del cociente de dos V.A.; la cual aplicada a las V.A. en cuestión se transforma en::

$$f_{Q_1}\{q_1\} = \int_0^{\infty} z_1 f_{Z_2 z_1}(q_1 \cdot z_1, z_1) dz_1$$

y considerando que Z_1 y Z_2 son independientes, la integral adquiere la forma presentada en la ecuación 3.44

$$f_{Q_1}\{q_1\} = \int_0^{\infty} z_1 f_{Z_2}(q_1 \cdot z_1) f_{Z_1}(z_1) dz_1 \quad (3.44)$$

Al reemplazar las expresiones 3.35 y 3.36 en 3.45 se obtiene:

$$f_{Q_1}\{q_1\} = 4 \int_0^{\infty} z_1^3 \alpha_1 q_1 e^{-\alpha_1 (q_1 z_1)^2} \alpha_2 e^{-\alpha_2 z_1^2} dz_1$$

donde α_1 y α_2 son variables auxiliares tales que:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_c^2} = H(\omega)^2 \quad (3.45)$$

Resolviendo se llega a:

$$f_{Q_1}\{q_1\} = \frac{2q_1 \alpha_2 / \alpha_1}{\left(q_1^2 + \alpha_2 / \alpha_1\right)^2} \quad (3.46)$$

Conocida la f.d.p de $Q_1(\omega)$, se determinan los parámetros estadísticos μ_q y σ_q^2

$$\mu_{Q_1} = E\{q_1\} = \int_0^{\infty} \frac{2q_1^2 \alpha_2 / \alpha_1}{\left(q_1^2 + \alpha_2 / \alpha_1\right)^2} dq = 2 \left[\frac{q_1 \alpha_2 / \alpha_1}{2\left(q_1^2 + \alpha_2 / \alpha_1\right)} + \frac{\alpha_2 / \alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2 / \alpha_1}} \tan^{-1} \left(\frac{q_1}{\sqrt{\alpha_2 / \alpha_1}} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{\pi \sqrt{\alpha_2 / \alpha_1}}{2} \quad (3.47)$$

$$\sigma_{q_1}^2 = E\{(q_1 - \mu_{q_1})^2\} = 2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha_2 / \alpha_1 q_1 \cdot (q_1 - \mu_q)^2}{\left(q_1^2 + \alpha_2 / \alpha_1\right)^2} du \quad (3.48)$$

La integral anterior tiende a infinito, por lo cual se asume que $\sigma_q^2 \approx \infty$, o dicho de otra forma la varianza de Q_1 no está definida. Los resultados obtenidos en 3.48 y 3.49 tienen algunas implicaciones importantes. Una de ellas es que el valor esperado de los cocientes es un estimador sesgado ya la media corresponde al valor de la función de transferencia amplificada en un factor igual a $\pi/2 \approx 1.57$, y por lo tanto los coeficientes de la función de transferencia que se estimen, estarán amplificados en un 57% aproximadamente. Por otra parte el que la varianza no esté definida predice que para una muestra de tamaño arbitrario se tendrá una gran dispersión. En los capítulos posteriores se abordará de nuevo el estimador a través del estudio de muestras de tamaño de diferentes tamaños.

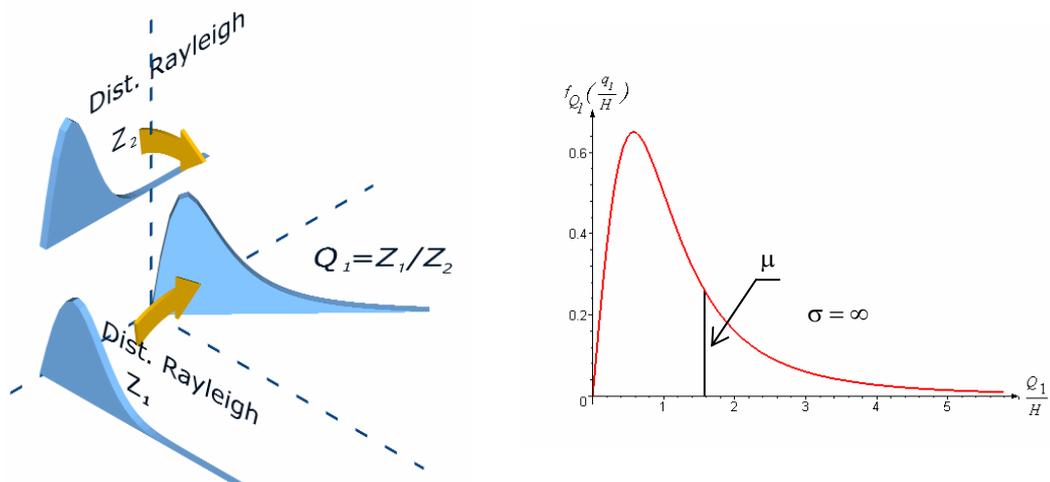


Figura 3.3 Obtención de la función de distribución del cociente de dos rayleigh independientes

3.2.2 Valor esperado del cociente al cuadrado – VEC²

$$Q_2(\omega) = E \left\{ \frac{|X|^2}{|A|^2} \right\} = E \left\{ \frac{|f - ig|^2}{|c - id|^2} \right\} \quad (3.49)$$

Es un estimador similar al anterior en el procedimiento de obtención, la diferencia se presenta al elevar al cuadrado la norma de los números complejos que aparecen como producto de la transformada de Fourier. La secuencia que se propone es la siguiente: conocidos los registros de la entrada y la salida del sistema en el dominio del tiempo, cada uno con duración T , la variable aleatoria $Q_2(\omega_i)$ se obtiene al dividir cada uno de los registros en N ventanas de duración T/N , aplicar la transformada a cada ventana, calcular la norma de la transformada para cada ω_i , elevarla *al cuadrado* y finalmente estimar el cociente entre las *normas al cuadrado* de la salida y la entrada para cada frecuencia.

En la sección 3.1 se definieron las V.A. $Z_1 = |A|$ y $Z_2 = |X|$ cada una con FDP Rayleigh, al elevarlas al cuadrado se obtiene una variable aleatoria con FDP Exponencial, (que es un caso particular de la FDP Gamma de parámetros $k=1$ y $\theta=2$), como la que se enuncia a continuación.

Si Y es una V.A con distribución Exponencial, entonces su FDP obedece a la expresión:

$$f_y(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} \quad (3.50)$$

con media y varianza

$$\mu_y = \beta$$

$$\sigma_y^2 = \beta^2$$

Como el cociente que se plantea ahora se efectúa entre dos V.A. con FDP Exponencial, se propone el cambio de variable: $Y_1 = Z_1^2$ y $Y_2 = Z_2^2$, donde las expresiones que definen las FDP de las nuevas variables aleatorias son:

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2\sigma_c^2} e^{-y_1/2\sigma_c^2} \quad (3.51)$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{2\sigma_f^2} e^{-y_2/2\sigma_f^2} \quad (3.52)$$

Considerando registros simultáneos en los que la respuesta dinámica corresponde exactamente al proceso de entrada, se tiene correlación perfecta ($\rho_{Z_1 Z_2} = 1$) y el valor esperado corresponde exactamente a la función de transferencia al cuadrado $H(\omega)^2$.

Para registros no contemporáneos, se puede considerar que las V.A. Y_1 y Y_2 son independientes y la FDP del cociente $Q_2(\omega) = \frac{Z_2^2}{Z_1^2} = \frac{Y_2}{Y_1}$ puede encontrarse a partir de la expresión 2.32, quedando definida la integral como:

$$f_{Q_2} \{q_2\} = \int_0^{\infty} y_1 f_{Y_2}(q_2 y_1) f_{Y_1}(y_1) dy_1 \quad (3.53)$$

$$f_{Q_2} \{q_2\} = \frac{\alpha_2 / \alpha_1}{\left(q_2 \alpha_2 / \alpha_1 + 1 \right)^2} \quad (3.54)$$

Reemplazando las expresiones 3.51 y 3.52 en 3.53 se puede resolver la integral de forma analítica quedando definida como se muestra en la ecuación 3.54, donde α_1 y α_2 son variables auxiliares tales que:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_c^2} = H(\omega)^2 \quad (3.55)$$

Las integrales que definen al primer y segundo momento no convergen, las cuales se expresan a continuación:

$$\mu_{q_2} = \int_0^{\infty} \frac{q_2 \alpha_2 / \alpha_1}{\left(q_2 \alpha_2 / \alpha_1 + 1 \right)^2} dq_2 = \infty$$

$$\sigma_{q_2}^2 = \int_0^{\infty} \frac{(q_2 - \mu_{q_2})^2 \alpha_2 / \alpha_1}{\left(q_2 \alpha_2 / \alpha_1 + 1 \right)^2} dq_2 = \infty$$

Estos resultados tienen implicaciones en la estimación de la función de transferencia que son determinantes. Al igual que para la V.A. Q_1 al no estar definida la varianza, la dispersión de los datos generados al aplicar este estimador será muy alta, a lo que se suma la condición de inestabilidad en la media; luego nunca habrá convergencia del valor esperado independientemente del tamaño de la muestra. Además la inestabilidad en los momentos del estimador impide establecer una expresión para el coeficiente de variación. En los capítulos posteriores se abordará de nuevo el estimador a partir de la generación realizaciones simuladas.

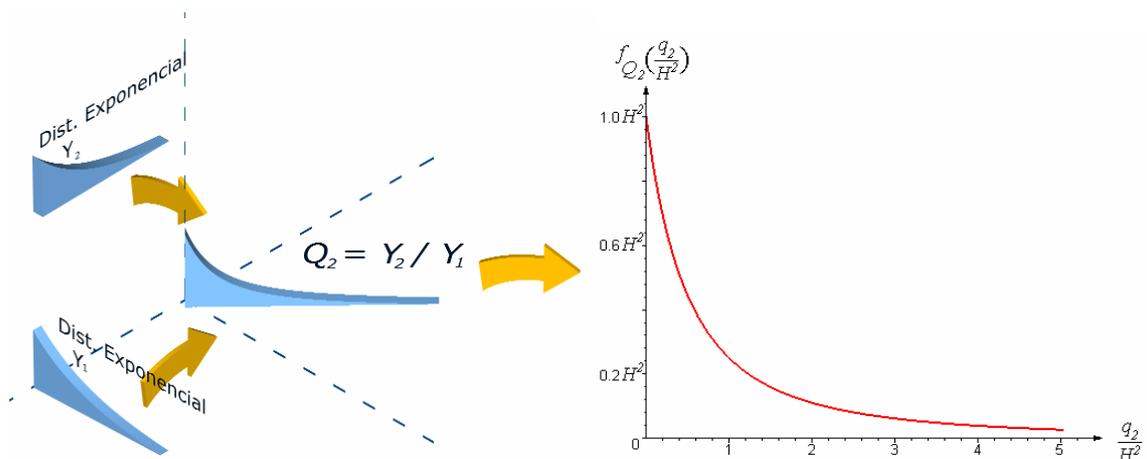


Figura 3.4 Obtención de la función de distribución del cociente de dos V.A Gamma

3.2.3 Valor esperado del producto - VEP

$$Q_3(\omega) = E\{|X| \cdot |A|\} = E\{|f - ig| \cdot |c - id|\} \quad (3.56)$$

Como se explicó en la sección 3.2, se ha decidido presentar el estudio de este estimador gracias a las particularidades que tiene la FDP que describe el producto de dos V.A. con distribución Rayleigh. Bajo el supuesto de que se cumplen las hipótesis del modelo y de las características estadísticas del proceso de entrada, la V.A. Q_3 ofrece resultados satisfactorios como se muestra mas adelante.

El procedimiento de aplicación de Q_3 es similar al de Q_1 y Q_2 . Una vez que se tengan los registros en el dominio del tiempo, se aplica la transformada de Fourier a cada segmento de duración T/N , se calcula la norma de la transformada para cada ω_i y finalmente se estima el *producto* entre las *variables* $Z_1 = |A|$ y $Z_2 = |X|$ para cada frecuencia.

Para el caso de registros simultáneos perfectamente correlacionados el valor esperado de la V.A. Q_3 obedece a la expresión 3.41. Sin embargo para evaluar el otro caso que nos interesa en el cual las variables son independientes se propone seguir el procedimiento planteado en 2.2.2.1. Definidas entonces $Z_1 = |A|$ y $Z_2 = |X|$ como V.A. con distribución Rayleigh, se puede determinar la FDP del producto introduciendo una variable auxiliar $W = Z_1$ que junto con la variable $Q_3 = Z_2 Z_1$, permiten estimar el Jacobiano $J(Q_3, W)$:

$$J(Q_3, W) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_3}{\partial Z_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial Z_1} \\ \frac{\partial W}{\partial Z_2} & \frac{\partial W}{\partial Z_1} \end{vmatrix} = Z_1 = W$$

Para obtener la FDP de Q_3 es necesario conocer la función de probabilidad conjunta $f_{Q_3, W}(q_3, w)$, que es posible encontrar a partir de la expresión presentada en la ecuación 2.37 evaluada para las variables que considera el estimador.

$$f_{Q_3, W}(q_3, w) = \frac{1}{|w|} f_{Z_2, Z_1}\left(\frac{q_3}{w}, w\right) \quad (3.57)$$

Una vez definida la FDP conjunta, de acuerdo con lo expuesto en la sección 2.2.1 se tiene por definición que $f_{Q_3}(q_3)$ es la distribución marginal en q_3 de $f_{Q_3, W}(q_3, w)$; al reemplazar las ecuaciones 2.18, 3.35 y 3.36 en 3.57 se llega a:

$$f_{Q_3}(q_3) = \frac{q_3}{\sigma_f^2 \sigma_c^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{w} e^{-\frac{1}{2\sigma_f^2 \sigma_c^2} \left(\frac{w^4 \sigma_c^2 + q_3^2 \sigma_f^2}{w^2} \right)} dw \quad (3.58)$$

La solución de la anterior integral se presenta en el anexo A.1, llegando finalmente la ecuación (3.59)

$$f_{Q_3}(q_3) = \frac{q_3 \cdot K_0\left(\frac{q_3}{\sigma_f \sigma_c}\right)}{\sigma_f^2 \sigma_c^2} \quad (3.59)$$

Mediante las relaciones de recurrencia de las funciones modificadas de Bessel es posible encontrar los primeros momentos (media y varianza) de Q_3 . Para una variable z cualquiera, se plantea en el Handbook of Mathematical Functions [Abramowitz], la siguiente relación para las derivadas de la función de Bessel modificada de orden entero.

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k \{z^\nu \mathcal{L}_\nu(z)\} = z^{\nu-k} \mathcal{L}_{\nu-k}(z) \quad (3.60)$$

las cuales sirvieron para encontrar la media y la varianza, cuyas expresiones se muestran a continuación:

$$\mu_{Q_3} = \sigma_f \sigma_c \frac{\pi}{2} \quad (3.61)$$

$$\sigma^2_{Q_3} = \sigma_f^2 \sigma_c^2 \left(4 - \frac{\pi^2}{4}\right) \quad (3.62)$$

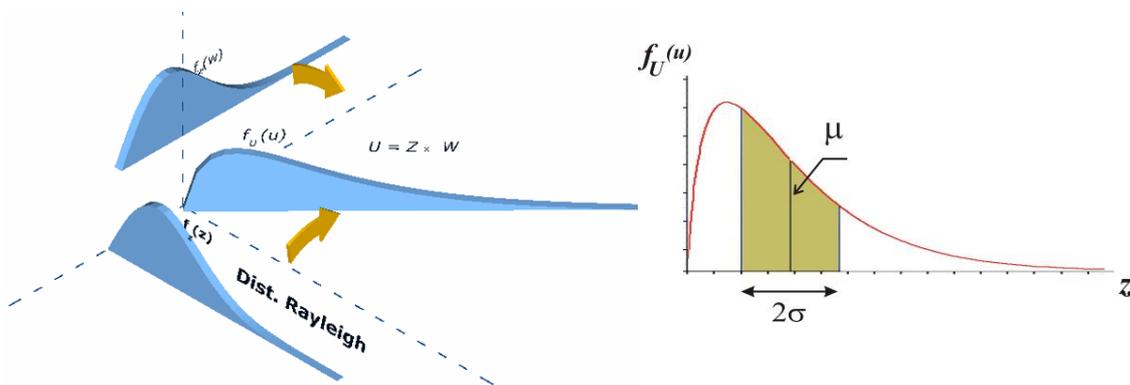


Figura 3.5 Obtención de la función de distribución del producto de dos V.A Rayleigh

A diferencia de los dos estimadores, basados en el cociente espectral que se estudian en los numerales 3.3.1 y 3.3.2, en el producto de las ordenadas espectrales está definida la varianza de la V.A., lo cual puede hacerlo un mejor estimador ya que para cualquier conjunto de realizaciones descritas por esta FDP, se tiene una menor dispersión y de valor conocido. Es importante destacar que al igual que VEC, es un estimador sesgado, pues la media no es exactamente la función de transferencia sino que aparece multiplicada por un coeficiente constante igual a $\frac{\pi}{2}$ y por las desviaciones estándar σ_c y σ_f . Determinadas las expresiones para la media y la varianza, el coeficiente de variación que denotaremos como cv_{Q_3} está definido por la expresión:

$$cv_{Q_3} = \sqrt{\frac{16 - \pi^2}{\pi^2}} \quad (3.63)$$

3.2.4 Cociente de los valores esperados (Análisis Preliminar)

$$Q_4(\omega) = \frac{E\{|X(\omega)|^2\}}{E\{|A(\omega)|^2\}} \quad \text{ó} \quad Q_5(\omega) = \frac{E\{|X(\omega)|\}}{E\{|A(\omega)|\}} \quad (3.64)$$

El procedimiento de aplicación de Q_5 y Q_4 es el siguiente: se hace un registro de vibraciones de duración T, en la base y algún grado de libertad del sistema. Una vez conocidos los registros se dividen en segmentos de duración T/N para luego aplicar a cada segmento la transformada de Fourier, se calcula la norma o la norma al cuadrado (según sea el caso) de la transformada para cada segmento y se estima el promedio entre las ordenadas de los ω_i correspondientes. Finalmente se estima el cociente entre los promedios de las ordenadas respectivas.

De manera similar al planteamiento hecho en el numeral 3.3.1 si los procesos son simultáneos y están perfectamente correlacionados, entonces el estimador que propone realizar el cociente de los valores esperados bien sea de la norma o de la norma al cuadrado como se especifica en la expresión 3.64, se tendrá como resultado la función de transferencia ó su cuadrado según sea el caso.

$$Q(\omega) = \frac{E\{|f(\omega) + ig(\omega)|^2\}}{E\{|c(\omega) + id(\omega)|^2\}} = \frac{E\{f(\omega)^2 + g(\omega)^2\}}{E\{c(\omega)^2 + d(\omega)^2\}} = \frac{E\{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\}}{E\{c(\omega)^2\} + E\{d(\omega)^2\}}$$

$$Q(\omega) = \frac{a^2 E\{c^2\} + b^2 E\{d^2\} + a^2 E\{d^2\} + b^2 E\{c^2\}}{\sigma_c^2 + \sigma_d^2} = \frac{(a^2 + b^2)(\sigma_c^2 + \sigma_d^2)}{\sigma_c^2 + \sigma_d^2}$$

$$Q(\omega) = a^2 + b^2 = H(\omega)^2 \tag{3.65}$$

$$Q(\omega) = \frac{E\{|f(\omega) + ig(\omega)|\}}{E\{|c(\omega) + id(\omega)|\}} = \frac{E\{\sqrt{f(\omega)^2 + g(\omega)^2}\}}{E\{\sqrt{c(\omega)^2 + d(\omega)^2}\}} = \frac{E\{\sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}\}}{E\{\sqrt{c(\omega)^2 + d(\omega)^2}\}}$$

$$Q(\omega) = \frac{E\{\sqrt{(a^2 + b^2)}\sqrt{(\sigma_c^2 + \sigma_d^2)}\}}{E\{\sqrt{c(\omega)^2 + d(\omega)^2}\}} = \sqrt{(a^2 + b^2)} = H(\omega) \tag{3.66}$$

Pero cuando no es registro simultáneo perfectamente correlacionado, como puede ocurrir en el planteamiento de algunos cocientes espectrales que se construyen a partir de vibración ambiental, no puede concluirse directamente que el estimador propuesto es efectivamente la función de transferencia y evidentemente dependerá de la cantidad de registros confiables que se tengan. Se aborda a continuación el estudio del cociente de valores esperados de eventos independientes.

Para un evento la FDP del cociente de los valores esperados es igual la que se obtiene para el valor esperado de los cocientes tal y como se estableció en **3.3.1**

De manera preliminar se aborda el estudio del cociente que corresponde al promedio de dos realizaciones tipo Rayleigh, es decir que se tienen en el numerador y denominador el resultado de promediar dos ordenadas espectrales para algún ω_i con estas características. La forma general del estimador Q_5 se puede resumir en la siguiente expresión:

$$Q_5 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{2i}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{1i}} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{2i}}{\sum_{i=1}^n Z_{1i}} \tag{3.67}$$

y aceptando el caso de estudio preliminar en el que se considera solo la suma de dos V.A. Rayleigh independientes se recurre al planteamiento hecho en la sección 2.2.2.1 para la suma de dos V.A. es necesario considerar el siguiente cambio de variable

$$\bar{Z}_2 = \frac{Z_{21} + Z_{22}}{2} \quad \bar{Z}_1 = \frac{Z_{11} + Z_{12}}{2}$$

De acuerdo con la expresión 2.28, planteada para la determinación de la FDP que define la suma de dos V.A., se llega a la ecuación 3.68 para las variables en estudio.

$$\begin{aligned} f_{\bar{Z}_i}(\bar{z}_i) &= \int_0^{\bar{z}_i} f_{Z_{i1}}(\bar{z}_i - \tau) f_{Z_{i2}}(\tau) d\tau \\ f_{\bar{Z}_i}(\bar{z}_i) &= \int_0^{\bar{z}_i} \frac{\bar{z}_i - \tau}{\sigma_j^2} e^{-\frac{(\bar{z}_i - \tau)^2}{2\sigma_j^2}} \frac{\tau}{\sigma_j^2} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma_j^2}} d\tau \\ f_{\bar{Z}_i}(\bar{z}_i) &= -\frac{1}{4\sigma_j^3} e^{-\left(\frac{\bar{z}_i^2}{4\sigma_j^2}\right)} \left(2\sqrt{\pi}\sigma_j^2 - \bar{z}_i^2 \sqrt{\pi} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}_i}{2\sigma_j}\right) + \frac{\bar{z}_i}{2\sigma_j^2} e^{-\left(\frac{\bar{z}_i^2}{2\sigma_j^2}\right)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Donde $\operatorname{erf}(z)$ es la función error definida en la ecuación 2.14 y σ_j puede ser σ_c o σ_f según el caso,

Por simplificación y sin perder de vista el objetivo del presente análisis que es tratar de determinar si pueden obtenerse parámetros más estables al considerar un número de mayor de variables aleatorias en el numerador y denominador del cociente espectral, se asignará un valor unitario a σ_c^2 (que corresponde a la varianza de la distribución normal, a partir de la cual se obtiene la V.A. con distribución Rayleigh del denominador \bar{Z}_1) y se asignará además un valor de dos al la función de transferencia que pretendemos comparar $H(\omega) = 2$; por lo tanto la varianza de la V.A. con distribución normal a partir de la cual se obtiene la V.A. \bar{Z}_2 es $\sigma_f^2 = H(\omega)^2 \cdot \sigma_c^2 = 4$.

Se evalúan los valores correspondientes para cada una de las FDP del denominador y numerador llegando a:

$$\begin{aligned} f_{\bar{Z}_2}(\bar{z}_2) &= \frac{\bar{z}_2}{2} e^{-\left(\frac{\bar{z}_2^2}{2}\right)} + \frac{1}{4} \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{\bar{z}_2^2}{4}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}_2}{2}\right) (\bar{z}_2^2 - 2) \\ f_{\bar{Z}_1}(\bar{z}_1) &= \frac{\bar{z}_1}{8} e^{-\left(\frac{\bar{z}_1^2}{8}\right)} + \frac{1}{32} \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{\bar{z}_1^2}{16}\right)} \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{z}_1}{4}\right) (\bar{z}_1^2 - 8) \end{aligned}$$

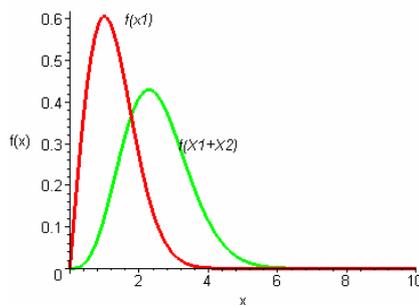


Figura 3.6 Representación gráfica una V.A con distribución Rayleigh y de la suma de dos V.A con distribución Rayleigh para los parámetros especificados en la sección 3.2.4

Una vez encontrada la FDP del numerador y denominador se presenta una primera aproximación al cociente de la suma de dos variables aleatorias con distribución rayleigh, con los valores supuestos. Este cociente es una V.A con media y varianza definidas, lo que lo hace un estimador mas estable que los cocientes planteados en 3.2.1 y 3.2.2; además es un buen indicio de que para un número mayor de variables aleatorias el comportamiento puede ser mejor, con menores dispersiones al aumentar el número de eventos considerados; además de que se elimina la inestabilidad de la varianza por el efecto del cociente.

$$f_{Q_5} \{q_5\} = \int_0^{\infty} \bar{z}_1 f_{z_2 z_1} (q_5 \bar{z}_1, \bar{z}_1) d\bar{z}_1$$

Al desarrollar la integral se obtiene:

$$f_{Q_5} \{q_5\}_{n=2} = C1(q_5) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{B(q_5)} \right) + C2(q_5) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{A(q_5)}}{q_5} \right) + C3(q_5) \tag{3.69}$$

$$C1(q) = -\frac{2(q^4 - 12q^2 - 32)}{B(q)^{3/2} C(q)^3}, \quad C2(q) = -\frac{128(q^4 + 6q^2 - 8)}{A(q)^{3/2} C(q)^3}$$

$$C3(q) = -\frac{64\pi B(q)(q^4 + 6q^2 - 8) + 4q\sqrt{A(q)}C(q)(q^4 + 6q^2 - 8)}{A(q)^{3/2} C(q)^3}$$

$$A(q) = q^2 + 8, \quad B(q) = q^2 + 2, \quad C(q) = q^2 + 4$$

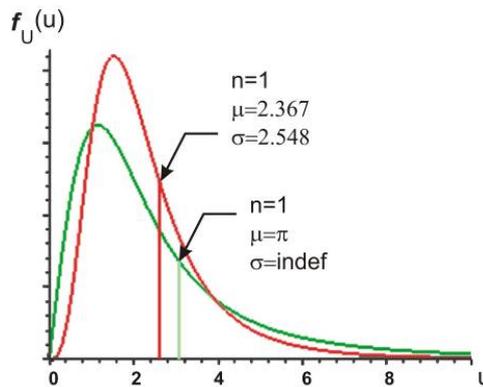


Figura 3.7 Comparación del estimador CVE considerando una y dos variables aleatorias en el numerador y denominador con los parámetros especificados en 3.2.4

Al considerar un mayor número de variables aleatorias (tres o más), poder deducir una expresión analítica de la función de densidad de probabilidad del estimador en estudio mediante este procedimiento, se convierte en una labor demandante y es difícil observar el comportamiento general, sin tener que recurrir a la evaluación de algunos casos particulares. El problema se abordará, utilizando algunas expresiones que ya se han desarrollado en la literatura.

3.2.5 Cociente de valores esperados al cuadrado - CVE² (n>2)

$$Q_4(\omega) = \frac{E\{|X|^2\}}{E\{|A|^2\}} = \frac{E\{|f - ig|^2\}}{E\{|c - id|^2\}}$$

Para obtener la FDP de este estimador, se relacionan las operaciones efectuadas en el numerador y el denominador como la suma de un conjunto de variables aleatorias con distribución normal que están elevadas al cuadrado. Por definición esta operación sobre las VA originales da como resultado una V.A. con FDP Chi-cuadrado χ^2 . Como el cociente que se plantea ahora se efectúa entre dos V.A.

con FDP χ^2 se propone el cambio de variable: $Y_1 = \sum_{i=1}^n Z_{1i}^2$ y $Y_2 = \sum_{i=2}^n Z_{2i}^2$ donde cada Z_{ji}^2 corresponde a la suma de dos V.A. con distribución normal elevadas al cuadrado, es decir $Z_{1i}^2 = c_i^2 + d_i^2$ y $Z_{2i}^2 = f_i^2 + g_i^2$.

La generación de la V.A. con distribución Chi-cuadrado se enuncia a continuación de manera general:

Dadas las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n distribuidas cada una como una normal $N(\mu_{xi}, \sigma_{xi})$, la variable aleatoria W , definida como:

$$W = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_{xi}}{\sigma_{xi}} \right)^2 \quad (3.70)$$

se distribuye como una χ^2 cuya FDP esta dada por la expresión:

$$f_w(w, n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} w^{n/2-1} e^{-w/2} \quad (3.71)$$

donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

La media y la varianza de la V.A. son $\mu_w = n$ y $\sigma_w = 2n$ donde n es el número de variables aleatorias normales que se consideraron en su generación. Ahora si $\mu_{x1} = \mu_{x2} = \dots = \mu_{xn} = 0$, $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \dots = \sigma_{xn} = \sigma_x$ que corresponde al caso de estudio entonces se obtienen las siguientes simplificaciones considerando la V.A. $Y_j = \sum_{i=1}^n Z_{ji}^2$

$$\mu_{Y_j} = n\sigma_j^2 \quad (3.72)$$

$$\sigma_{Y_j}^2 = 4n^2\sigma_j^4 \quad (3.73)$$

Dado que las variables aleatorias Y_1 y Y_2 tienen FDP χ^2 entonces la variable aleatoria $Q_5 = \frac{Y_2}{Y_1}$ tiene función de densidad de probabilidad F la cual tienen la siguiente forma.

$$f_{Q_5}(q_4) = \frac{1}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{q_4^{n/2-1}}{(q_4 + 1)^n} \quad (3.74)$$

donde $\beta(x, y)$ es la función Beta.

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

La media y la varianza de Q_4 están dadas por las expresiones 3.75a y 3.75b

$$\mu_{Q_4} = \frac{n}{n-2} H(\omega)^2 \text{ con } n > 2 \quad (3.75a)$$

$$\sigma^2_{Q_4} = \frac{4n^2(n-1)}{n(n-2)^2(n-4)} H(\omega)^4 \text{ con } n > 4 \quad (3.75b)$$

Las expresiones deducidas de manera general en las expresiones 3.75a y 3.75b indican que este estimador es mucho más estable que los anteriores, debido a que tanto la media como la varianza están definidas y se garantiza una menor dispersión. Se aprecia también que a medida que aumenta el número de variables consideradas en el procedimiento de análisis, CVE^2 se convierte en un estimador insesgado, donde el sesgo está dado por el coeficiente $\frac{n}{n-2}$. Determinadas las expresiones para la media y la varianza, el coeficiente de variación de Q_4 viene dado por la expresión:

$$cv_{Q_4, n} = 2\sqrt{\frac{n-1}{n(n-4)}} \quad (3.75c)$$

3.2.6 Cociente de los valores esperados - CVE ($n > 2$)

$$Q_5(\omega) = \frac{E\{|X\}}{E\{|A\}} = \frac{E\{|f - ig\}}{E\{|c - id\}} \quad (3.76)$$

Definida la V.A. Y_j como una variable con función de distribución χ^2 , se puede encontrar la FDP de la variable \bar{Z}_j , aplicando los criterios establecidos en la sección 2.2.2 para funciones de variables aleatorias, siendo en este caso la raíz cuadrada de Y_j la función a evaluar. Se plantea entonces que

$$\bar{Z}_j = \sqrt{Y_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^n Z_{ji}^2} \text{ y de acuerdo con la expresión 2.21 se llega a:}$$

$$f_{\bar{Z}_j}(z_j, n) \approx \frac{2^{1-n/2}}{\Gamma(n/2)} z_j^{-n-1} e^{-z_j^2} \quad (3.78)$$

$$\mu_{\bar{Z}_j} \approx \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sigma_j$$

$$\sigma^2_{\bar{Z}_j} \approx n\sigma_j^2 \quad (3.80)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para la formulación de la FDP del cociente de dos variables aleatorias independientes, se llega a la siguiente expresión para la FDP de la variable Q_5 .

$$f_{Q_5}(q_5) \approx \frac{2}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} \frac{q_5^{n-1}}{(q_5^2 + 1)^n} \quad (3.81)$$

Definida $f_{Q_5}(q_5)$ los momentos de primer y segundo orden se encuentran de manera directa

$$\mu_{Q_5, n} \approx \frac{2^{1-n} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \text{con } n > 2; \quad (3.82)$$

$$\sigma_{Q_5, n}^2 \approx -2\mu_{Q_5, n}^2 + \frac{\mu_{Q_5, n}^2 (n-1)(\mu_{Q_5, n}^2 (n-2) + n)}{2(n-2)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 \quad \text{con } n > 2 \quad (3.83)$$

Al igual que CVE² este es un buen estimador al garantizar estabilidad en los momentos y una menor dispersión a medida que se aumenta el número de eventos considerados para su obtención. La única desventaja que representa frente a la variable Q_4 es que las expresiones que definen la media y la varianza de CVE son mucho más elaboradas y requieren un mayor esfuerzo computacional. A partir de las expresiones 3.82 y 3.83 se determina el coeficiente de variación del estimador.

$$cv_{Q_5, n} \approx \sqrt{\frac{(n-1)(\mu_{Q_5, n}^2 (n-2) + n)}{2(n-2)\mu_{Q_5, n}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} \right]^2} - 2 \quad (3.83b)$$

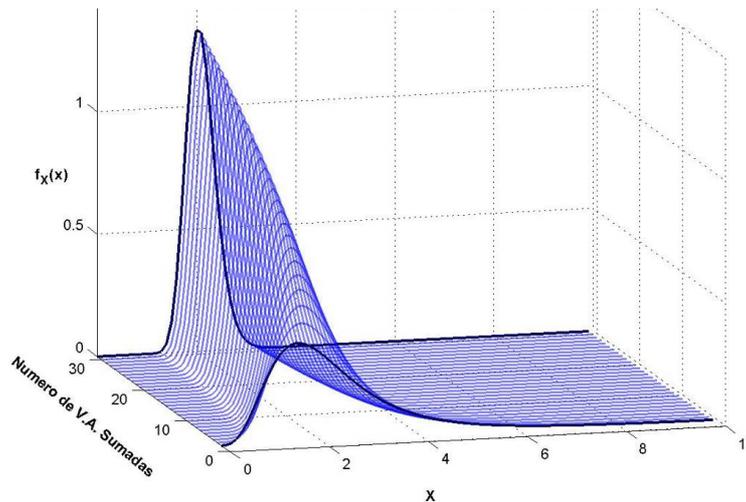


Figura 3.8 Variación de la función de densidad de probabilidad del estimador CVE en función del número de variables aleatorias consideradas

3.3 Sistemas de varios grados de libertad

Al estudiar la respuesta dinámica tridimensional, interesa conocer el resultado de la combinación de varios procesos aleatorios que afectan el sistema en sus direcciones principales (Figura 3.9). Pueden plantearse modelos complejos, que involucren una gran cantidad de factores; sin embargo manteniendo la premisa de comportamiento lineal, el efecto del modelo como tal no es determinante en la estabilidad del estimador. Se estudia en esta sección el efecto de la aleatoriedad sobre los estimadores planteados en el numeral 3.2, cuando se consideran las componentes de aceleración en las dos direcciones principales X y Y en la base. Se utiliza un modelo sencillo tridimensional con tres grados de libertad, es decir de una sola planta, tratando de establecer la relación entre los cocientes espectrales y la función de transferencia. Ese mismo procedimiento puede utilizarse para un modelo tridimensional de múltiples grados de libertad.

3.3.1 Sistema de tres grados de libertad x, y, θ

Para un sistema de varios grados de libertad, la ecuación de movimiento puede ser representada como:

$$[m]\ddot{x}(t) + [c]\dot{x}(t) + [k]x(t) = \{f(t)\}$$

Asumiendo que la matriz de amortiguamientos $[c]$ se puede expresar como la combinación lineal de las matrices de masa $[m]$ y de rigidez $[k]$, entonces las formas modales del sistema pueden obtenerse solucionando el sistema

$$\langle K - \omega^2 M \rangle = 0$$

Para un sistema de tres grados de libertad, sin considerar la matriz de amortiguamiento, las ecuaciones de movimiento pueden plantearse así:

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & -k_x e_y \\ 0 & \alpha k_x & \alpha k_x e_x \\ -k_x e_y & \alpha k_x e_x & k_x s_t^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m\rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} = -m \begin{Bmatrix} A_x(t) \\ A_y(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

Con

- m : la masa
- k_x : la rigidez en dirección "X"
- α : la relación entre las rigideces en "X" y "Y"
- e_y : la excentricidad en planta en la dirección "X"
- e_x : la excentricidad en planta en la dirección "Y"
- ρ^2 : el momento polar de inercia "J"

$$st : \frac{\sum_{i=1}^n K_{xi} y_i^2 + \sum_{i=1}^n K_{yi} x_i^2}{\sum_{i=1}^n K_{xi}}$$

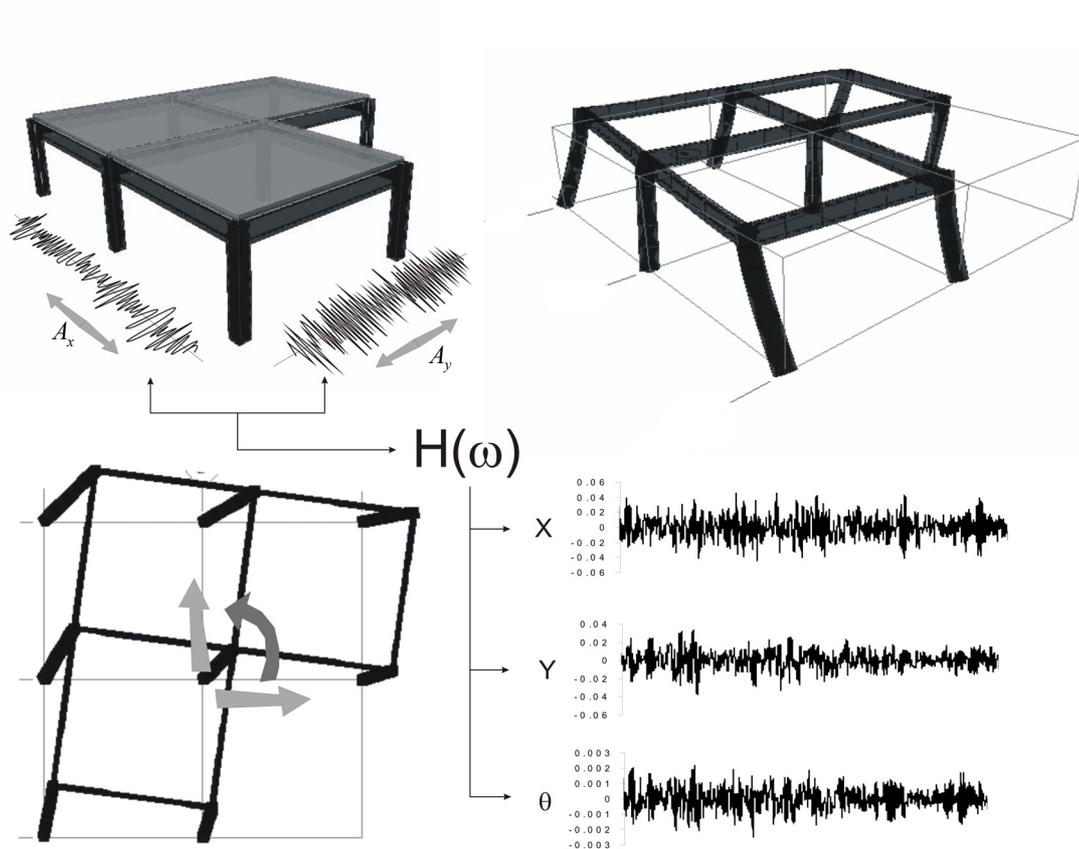


Figura 3.9 Sistema de tres grados de libertad (Representación gráfica de la transferencia entre los procesos de entrada en X y Y y sus respectivas respuestas en x, y, \$\theta\$)

Al aplicar la transformada de Fourier se obtiene la ecuación dinámica en frecuencia

$$\langle K - \omega^2 M \rangle X(\omega) = -mA(\omega) \quad (3.85)$$

Presentado así, cualquier solución \$r(\omega)\$ en el dominio de la frecuencia puede expresarse de forma general como

$$r(\omega) = \frac{k_1 A_x(\omega) + k_2 A_y(\omega)}{|K - \omega^2 M|} \quad \text{donde } k_1, k_2 \Rightarrow f(\omega, m, k_x, \alpha, e_y, e_x, \rho, st, \xi)$$

Llamando a \$|K - \omega^2 M| = D\$, \$k_1/D = g_1\$, \$k_2/D = g_2\$ Se obtiene

$$r(\omega) = g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega) \quad (3.86)$$

Al resolver la ecuación dinámica en frecuencia para el sistema de tres grados de libertad que se muestra en la ecuación 3.84, se obtienen las expresiones para g_1 y g_2 , que en el estudio de este sistema de 3gdl están dadas para la dirección X, como

$$g_1 = -m^3 \rho^2 \omega^4 + (\alpha \rho^2 + st^2) k_x m^2 \omega^2 + (\alpha e_x^2 - st^2) \alpha m k_x^2$$

$$g_2 = \alpha k_x^2 m e_x e_y$$

Planteando la relación entre la respuesta del sistema y el proceso de entrada en el dominio de la frecuencia, se llega a la ecuación 3.87

$$FT_T = \frac{g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)}{A_x(\omega)} \quad (3.87)$$

Podemos aplicar a la anterior expresión los estimadores que fueron planteados en el numeral 3.2 para estudiar el comportamiento al considerar una nueva componente de aceleración en la base.

Nota: En este nuevo análisis es importante resaltar la diferencia que existe $g(\omega)$ que es la variable aleatoria con distribución normal que se enunció en la sección 3.1 y g_1, g_2 que son funciones de las características estructurales del sistema y hacen parte de la función de transferencia que desea estimarse.

a) VEC²

$$FT_1 = E \left\{ \frac{|g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)|^2}{|A_x(\omega)|^2} \right\} = E \left\{ \frac{[g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)][g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)]^*}{|A_x(\omega)|^2} \right\}$$

Por simplicidad se dejará de especificar en algunas expresiones que A_x y A_y son función de la frecuencia con el fin de evitar representaciones innecesariamente extensas.

$$FT_1 = E \left\{ \frac{|g_1 A_x|^2 + |g_2 A_y|^2 + 2 \operatorname{Re}\{g_1 g_2^* A_x A_y^*\}}{|A_x|^2} \right\}$$

Tomando el valor esperado del ultimo término se llega a

$$E \left\{ 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{g_1 g_2^* A_x A_y^*}{|A_x|^2} \right\} \right\} = 2 \left[\operatorname{Re}\{g_1 g_2^*\} E \left[\frac{a_y a_x + b_y b_x}{|A_x|^2} \right] - \operatorname{Im}\{g_1 g_2^*\} \left[\frac{-a_x b_y + a_y b_x}{|A_x|^2} \right] \right]$$

donde a_x, b_x, a_y, b_y son las componentes real e imaginaria de los procesos transformados $A_x = a_x + ib_x$ y $A_y = a_y + ib_y$. El valor esperado de la expresión completa es entonces:

$$FT_1 = |g_1|^2 + |g_2|^2 E \left\{ \overbrace{\frac{|A_y|^2}{|A_x|^2}}^{\text{estimador inestable}} \right\} + 2 \left[\operatorname{Re}\{g_1 g_2^*\} E \left\{ \frac{a_y a_x + b_y b_x}{|A_x|^2} \right\} - \operatorname{Im}\{g_1 g_2^*\} \left\{ \frac{-a_x b_y + a_y b_x}{|A_x|^2} \right\} \right] \quad (3.88)$$

Suponiendo que A_x y A_y no están correlacionadas entonces el estimador FT_1 no converge ya que aparece el valor esperado del cociente de dos variables aleatorias con distribución exponencial tal y como se demostró en la sección 3.2.2. De tal manera que FT_1 solo converge si $A_y = \gamma A_x$ donde γ es un coeficiente cualquiera que pertenece a los reales. Reemplazando esta relación en la expresión 3.88 se obtiene:

$$FT_1 = |g_1|^2 + \gamma^2 |g_2|^2 + 2\gamma\sigma_c^2 \operatorname{Re}\{g_1 g_2^*\} \quad (3.89)$$

b) VEC

$$FT_2 = E \left\{ \frac{|g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)|}{|A_x(\omega)|} \right\} \quad (3.90)$$

Al representar A_i como $a_i + ib_i$ la expresión 3.90 se transforma en:

$$E \left\{ \frac{[g_1 a_x + g_1 i b_x] + [g_2 a_y + g_2 i b_y]}{[a_x + i b_x]} \right\} = E \left\{ \frac{[[g_1 a_x + g_2 a_y] + [g_1 b_x + g_2 b_y] i]}{[a_x + i b_x]} \right\}$$

creando las siguientes variables aleatorias $f(\omega) = g_1 a_x + g_2 a_y$ y $g(\omega) = g_1 b_x + g_2 b_y$. Ahora como a_x, b_x, a_y, b_y son V.A. con distribución normal entonces $f(\omega)$ y $g(\omega)$ también tienen distribución normal. Si todo esto se cumple entonces la variable resultante corresponde al cociente de de dos variables aleatorias con distribución Rayleigh. Para encontrar el valor esperado se plantea la siguiente integral cuádruple.

$$E \left\{ \frac{\sqrt{f(\omega)^2 + g(\omega)^2}}{\sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}} \right\} = \iiint\limits_D \frac{\sqrt{f(\omega)^2 + g(\omega)^2} f_{F,G,A,B}(f, g, a, b)}{\sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}} df dg da db \quad (3.91)$$

donde D es la región que comprende los límites de integración de la integral. Si se tienen registros simultáneos entonces como f, g, a y b son variables aleatorias con distribución normal, la función de distribución conjunta es una normal multivariada como se mostró en la sección 2.2.2.1, esta es:

$$f_{F,G,A,B}(f, g, a, b) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n |\Sigma|} \exp\left\{-\tilde{X}^T \Sigma^{-1} \tilde{X}\right\}$$

siendo Σ la matriz de covarianzas de las V.A. involucradas. A partir de algunas transformaciones y utilizando las relaciones descritas en el numeral 3.2, se llega por inducción a la siguiente expresión

$$FT_2 = E \left\{ \frac{\sqrt{(g_1 a_x + g_2 a_y)^2 + (g_1 b_x + g_2 b_y)^2}}{\sqrt{a_x^2 + b_x^2}} \right\} \approx \sqrt{\left(g_1^2 + \frac{\pi^2}{4} g_2^2\right)} \quad (3.92)$$

La anterior expresión implica que para valores de ω en los que el coeficiente g_2 sea mayor o inclusive igual al coeficiente g_1 , el valor de la función de transferencia se verá afectado por el valor de $\frac{\pi}{2}$ que aparece dentro del radical. El estudio de estas expresiones muestra que las mayores relaciones $\frac{g_2}{g_1}$, se presentan cuando hay modos acoplados, debidos a irregularidades estructurales que generan fuertes excentricidades.

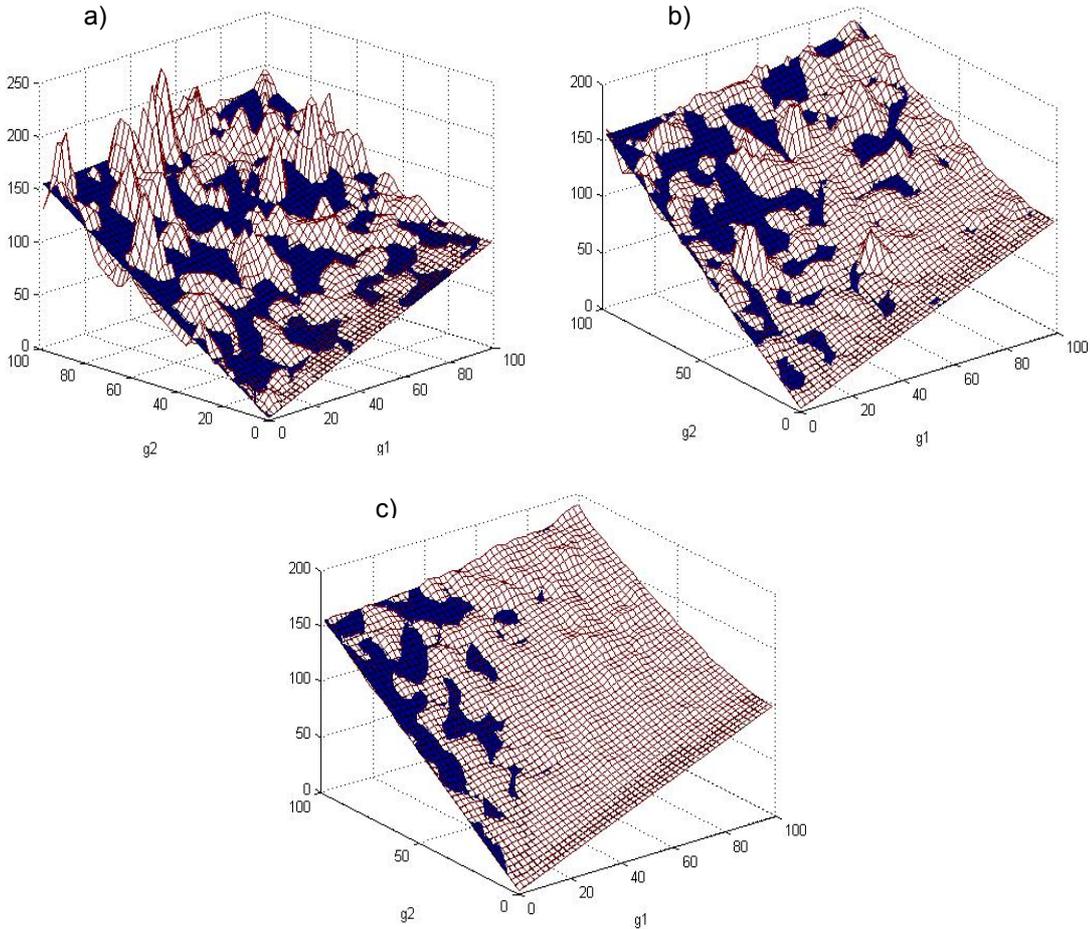


Figura 3.10 Superficie del valor esperado teórico y simulado mediante Montecarlo para el estimador VEC en SVGDL. a)100 simulaciones, b)1000 simulaciones, c)10000 simulaciones.

Si todas las variables son independientes, es decir que el estimador se aplica a registros no simultáneos entonces toda la expresión se verá afectada por el valor de $\frac{\pi}{2}$, esto es:

$$FT_2 = E \left\{ \frac{\sqrt{(g_1 a_x + g_2 a_y)^2 + (g_1 b_x + g_2 b_y)^2}}{\sqrt{a_x^2 + b_x^2}} \right\} \approx \sqrt{\frac{\pi^2}{4} (g_1^2 + g_2^2)} \quad (3.92b)$$

tal y como se predijo desde el numeral 3.2.1

3) VEP

$$FT_3 = E\{g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega) | A_x(\omega)\}$$

Presentado de esta forma y de acuerdo con las relaciones establecidas en la sección 3.2 es fácil distinguir que el estimador corresponde al valor esperado del producto de dos V.A. con distribución Rayleigh. Sin embargo en este caso pueden estar o no correlacionadas, para lo cual se sugiere establecer el valor esperado a partir una integral similar a la que se planteó en el numeral anterior.

$$FT_3 = E\{g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega) | A_x(\omega)\} = \iiint_D \sqrt{f(\omega)^2 + g(\omega)^2} \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2} f_{F,G,A,B}(f, g, a, b) df dg da db$$

Aquí también se consideró que para relaciones $\frac{g^2}{g_1}$ hay poca correlación entre las variables aleatorias que del numerador y denominador, por lo cual debe aparecer el factor $\sigma_c^2 \frac{\pi}{2}$ que se encontró para la media en la sección 3.2.3. De manera que mediante simulaciones se validó la expresión 3.92, que es una buena aproximación para este estimador.

$$E\{g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega) | A_x(\omega)\} \approx \sigma_c^2 \sqrt{g_1^2 + \frac{\pi^2}{4} g_2^2} \quad (3.92)$$

Si se aplica el estimador a eventos no contemporáneos, todas las variables serán independientes y entonces el valor de $\frac{\pi}{2}$ afecta a toda la expresión.

$$E\{g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega) | A_x(\omega)\} \approx \sigma_c^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} (g_1^2 + g_2^2)}$$

4) CVE²

$$FT_4 = \frac{E\{|g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)|^2\}}{E\{|A_x(\omega)|^2\}} \quad (3.93)$$

Utilizando el desarrollo presentado para VEC² y las relaciones planteadas en la sección 3.2.5 la expresión 3.93 se puede transformar en:

$$FT_4 = \frac{\sum_{i=1}^n [|g_1 A_x|^2 + |g_2 A_y|^2 + 2 \operatorname{Re}\{g_1 g_2^* A_x A_y^*\}]_i}{\sum_{i=1}^n [|A_x|^2]_i}$$

y desarrollando la expresión del numerador se obtiene:

$$FT_4 = \frac{\sum_{i=1}^n [g_1 A_x]^2 + \sum_{i=1}^n [g_2 A_y]^2 + \sum_{i=1}^n [2 \operatorname{Re}\{g_1 g_2^* A_x A_y^*\}]_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^n [A_x]^2}_T1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n [A_y]^2}_T2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n [A_x(\omega)]^2}_T3} \quad (3.94)$$

Es fácil distinguir que en la expresión 3.94 los numeradores y denominadores de los términos T1 y T2 poseen características similares a las estudiadas en el numeral 3.2.5, por lo tanto al efectuar el cociente aparece una distribución F . En el término T3 aparece en el numerador el producto de dos variables con distribución normal no correlacionadas ya que se asume que los procesos de entrada en direcciones perpendiculares $A_x(t)$ y $A_y(t)$ son independientes. Puede demostrarse entonces que el valor esperado del término T3 es cero, simplificando la expresión 3.94 a:

$$FT_4 = \frac{\sum_{i=1}^n [g_1 A_x]^2 + \sum_{i=1}^n [g_2 A_y]^2}{\underbrace{\sum_{i=1}^n [A_x]^2}_T1 + \underbrace{\sum_{i=1}^n [A_y]^2}_T2} \quad (3.95)$$

Cuando se trata de procesos simultáneos perfectamente correlacionados, se puede afirmar que el valor de A_x es igual en el numerador y denominador simplificando el término T1 a $|g_1|^2$. Además al considerar independencia entre $A_x(t)$ y $A_y(t)$ el término T2 puede estudiarse como se presentó en el numeral 3.2.5 a partir de una distribución F , por lo que al estimar el valor esperado la expresión se transforma en:

$$FT_4 = |g_1|^2 + |g_2|^2 \frac{n}{n-2} \quad (3.96)$$

Donde n es igual al número de variables aleatorias que se consideren en el denominador o numerador, tal y como se definió en la sección 3.2. Para el caso de registros no simultáneos hay independencia entre todas las variables consideradas, por lo tanto la expresión 3.95 da el siguiente resultado.

$$FT_4 = \frac{n}{n-2} (|g_1|^2 + |g_2|^2)$$

5) CVE

$$FT_5 = \frac{E\{g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)\}}{E\{A_x(\omega)\}}$$

Planteando el problema de manera análoga al presentado en la sección 3.2.6, se pueden relacionar los resultados con los obtenidos para el estimador CVE^2 llegando a las siguientes expresiones:

Para registros simultáneos perfectamente correlacionados:

$$FT_5 \approx |g_1|^2 + |g_2|^2 \frac{2^{1-n} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (3.97)$$

Para cociente entre variables independientes:

$$FT_4 \approx (|g_1|^2 + |g_2|^2) \frac{2^{1-n} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (3.98)$$

Capítulo 4 VALIDACIÓN NUMÉRICA

La validación numérica es el proceso de examinar una expresión a partir de datos simulados, estimar su calidad y definir el grado de aceptación o rechazo para el propósito que se estudia; la aceptación está condicionada a la facilidad de aplicación a los sistemas reales que puedan hacer uso de dicha expresión.

Pensando en tener una cantidad considerable de valores, que permitan estudiar el comportamiento de las relaciones planteadas a diferentes niveles, es necesario desarrollar una herramienta de simulación que se ajuste a las necesidades del problema que desea estudiarse. Para tal fin, se ha utilizado el lenguaje de programación Fortran, implementando algunos algoritmos que facilitan la obtención de los elementos necesarios. Dada la simplicidad de los modelos, las consideraciones elástico-lineales y sistemas invariantes en el tiempo se recurre a procedimientos convencionales para la construcción de la respuesta dinámica de sistemas de uno y varios grados de libertad tal y como se presentó en el numeral 2.3.3. La ventaja de poder entender lo que en efecto desarrolla el programa, la forma como procesa la información para obtener los resultados a examinar y de los cuales se tomará base para poder inferir las conclusiones sobre el comportamiento de los mismos, es el principal motivo por el cual decidieron programarse este tipo de herramientas; además de las facilidades que brinda para realizar un análisis sistemático por su conexión entre el procedimiento estadístico, el análisis dinámico y la transformación de la respuesta en el dominio de la frecuencia. Un esquema simple que representa la forma general de los algoritmos utilizados se muestra en el siguiente diagrama de flujo.

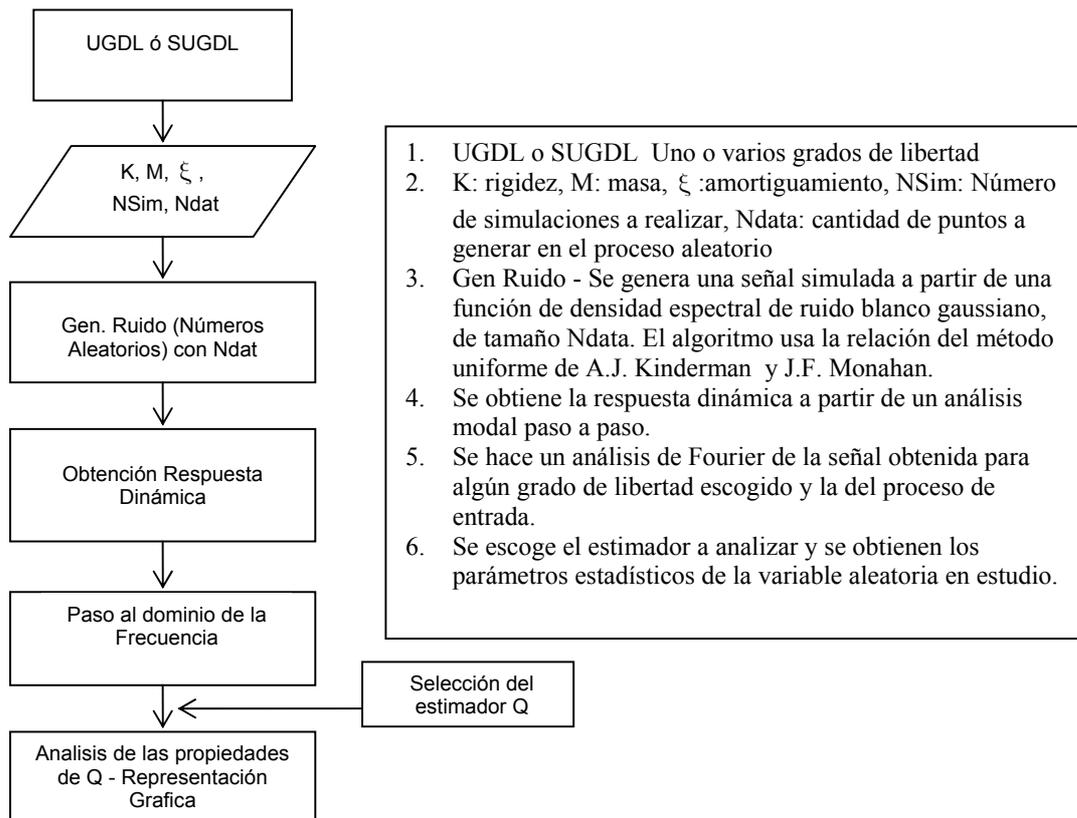


Figura 4.1 Estructura del algoritmo general utilizado para la validación numérica de los estimadores

4.1 Simulaciones aplicadas a sistemas de un grado de libertad

El desarrollo de las simulaciones se enfoca en dos aspectos fundamentales: primero la comprensión del problema de estudio, en sistemas sencillos de un grado de libertad, en los que con extrema simplicidad es posible determinar los parámetros dinámicos, como periodo y amortiguamiento. El segundo se enfoca en estudiar algunos casos sencillos para sistemas de varios grados de libertad, teniendo en cuenta las consideraciones sobre acoplamiento modal e independencia, descritas en el numeral 3.3.

4.1.1 Estimador VEC

$$Q_1(\omega) = E \left\{ \frac{|X|}{|A|} \right\}$$

En el capítulo anterior se determinó que el estimador 3.3.1, tiene una fpd que obedece a la expresión:

$$f_{Q_1} \{q_1\} = \frac{2q_1 \alpha_2 / \alpha_1}{\left(q_1^2 + \alpha_2 / \alpha_1\right)^2} \quad \text{con} \quad \alpha_2 / \alpha_1 = H^2(\omega)$$

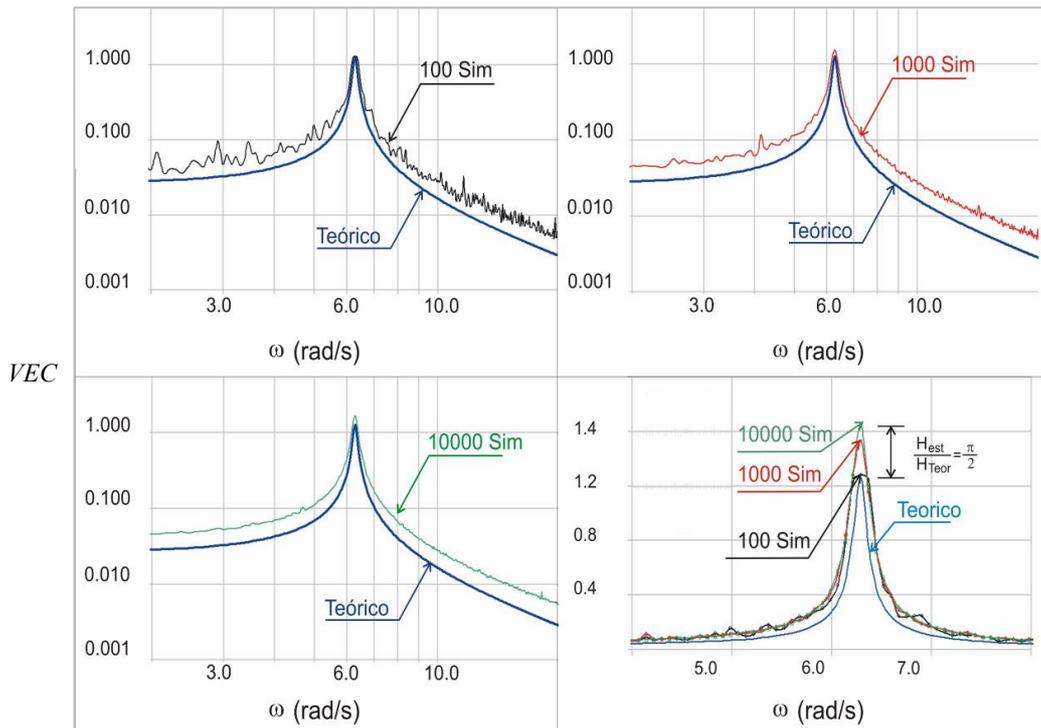


Figura 4.2 Comportamiento del estimador VEC de acuerdo con el número de simulaciones consideradas.

Se observa como al correlacionar la respuesta dinámica con un proceso de las mismas características del que proviene pero que es independiente, es decir que no ocurre simultáneamente, la función de transferencia se ve afectada por un factor igual a $\frac{\pi}{2}$, tal como lo prevé la teoría.

Para validar la función de densidad de probabilidad se tomarán los resultados de los experimentos simulados para tres frecuencias dentro del intervalo considerado para la función de transferencia, que se presentan como secciones A-A', B-B' y C-C' en la figura 4.3. Los gráficos a), b) y c) de la figura 4.4 comparan las funciones de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada para el estimador 3.3.1

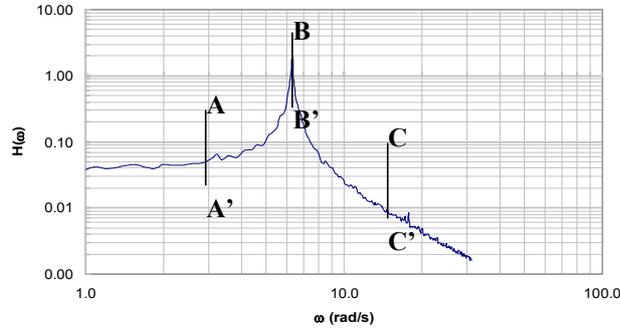
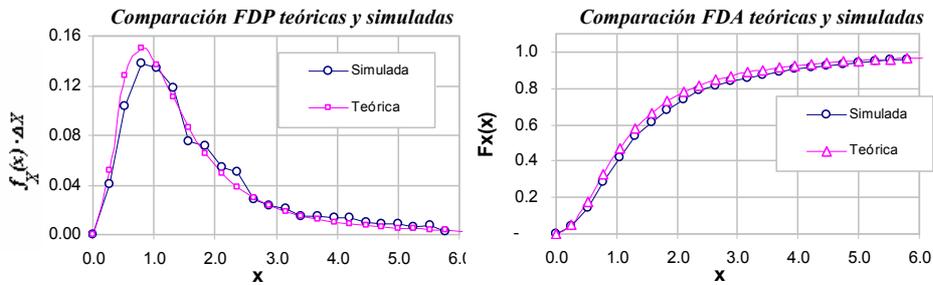
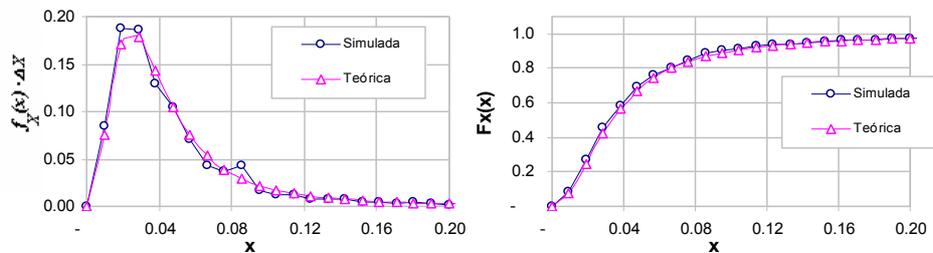


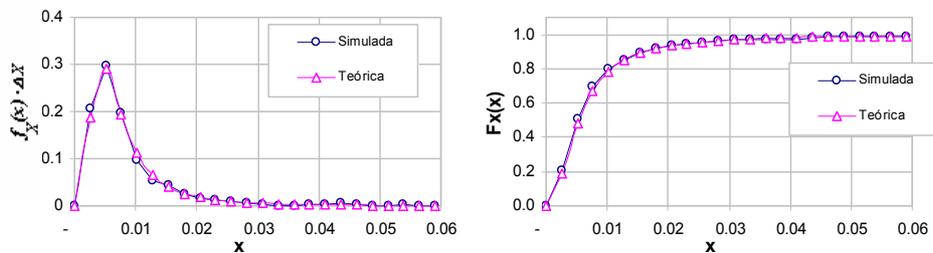
Figura 4.3 Secciones sobre las que se validará la FDP de cada estimador



a) A-A' $\omega=3.0$ rad/s



b) B-B' $\omega=6.28$ rad/s



c) C-C' $\omega=15.03$ rad/s

Figura 4.4 Comparación de las FDP teórica y simulada del estimador VEC

4.1.2 Estimador VEC²

$$Q_2(\omega) = E \left\{ \frac{|X|^2}{|A|^2} \right\}$$

En la sección 3.2 se determinó que el estimador presentado de esta forma, posee una función de densidad de probabilidad que obedece a la siguiente expresión

$$f_{Q_2} \{q_2\} = \frac{\alpha_2/\alpha_1}{\left(q_2 \alpha_2/\alpha_1 + 1\right)^2} \quad \text{con} \quad \alpha_2/\alpha_1 = H^2(\omega)$$

Utilizar un estimador de este tipo, puede presentar dificultades para determinar los parámetros dinámicos del sistema e interpretar los resultados, al no existir estabilidad ni en la varianza ni en la media. En la figura 4.5 se presenta una comparación entre la función de transferencia teórica para un sistema de un grado de libertad, y el estimador VEC², cuando se tienen 100, 1000 y 10000 simulaciones respectivamente. En el gráfico donde se comparan todas las simulaciones con el teórico se aprecia claramente que no hay estabilidad en la ordenada espectral que corresponde a la frecuencia del sistema, y que al aplicar algún método para la estimación del coeficiente de amortiguamiento ξ se obtendrán valores muy variables. Para construir las simulaciones se consideró un sistema de un grado del libertad con $\xi = 0.05$ y $T=1$ s.

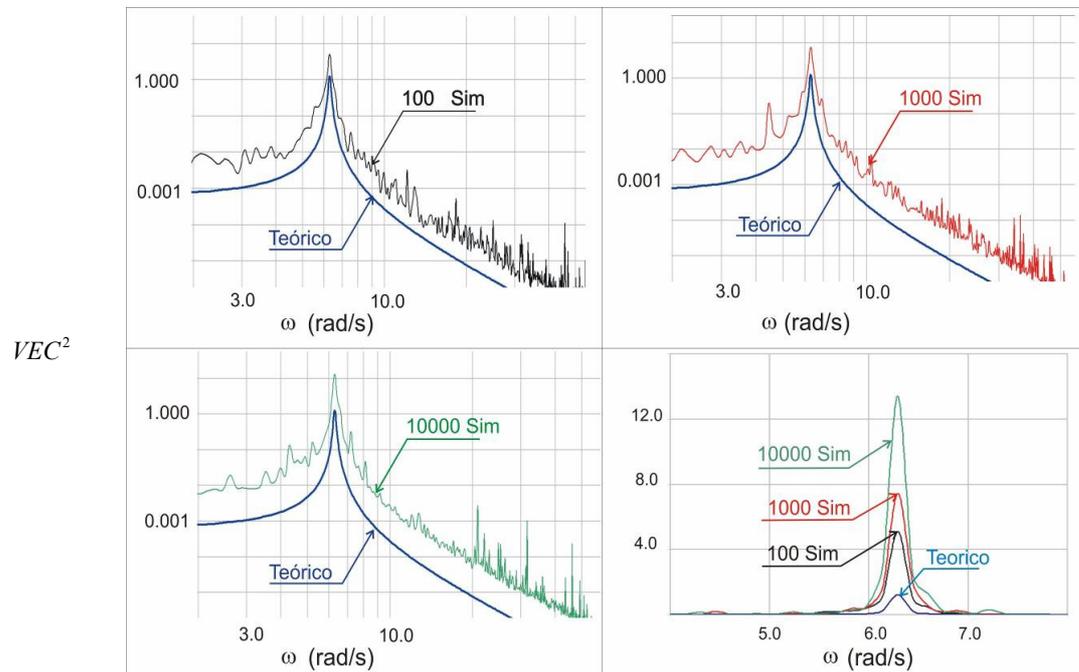


Figura 4.5 Comportamiento del estimador VEC² de acuerdo con el número de simulaciones consideradas.

En la figura 4.6 se presentan las FDP y FDA para las variables aleatorias que corresponden a las secciones A-A', B-B' y C-C' propuestas en la figura 4.3 y se comparan con las analíticas que fueron

expresadas en el capítulo 3. Se aprecia que las funciones teóricas son muy bien reproducidas por las aproximaciones numéricas que se obtienen con los resultados de las simulaciones.

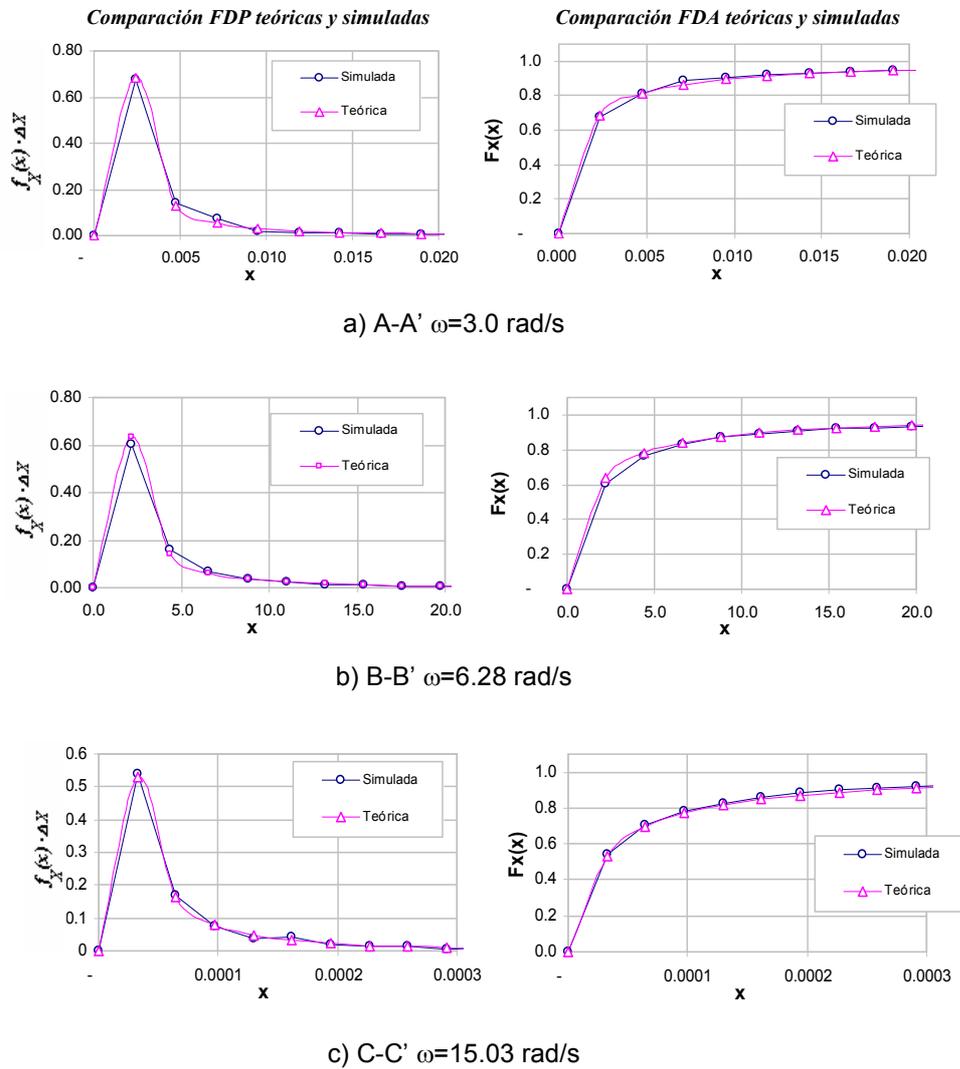


Figura 4.6 comprobación de la distribución del estimador 3.3.2 para cada una de las secciones de la figura 4.3

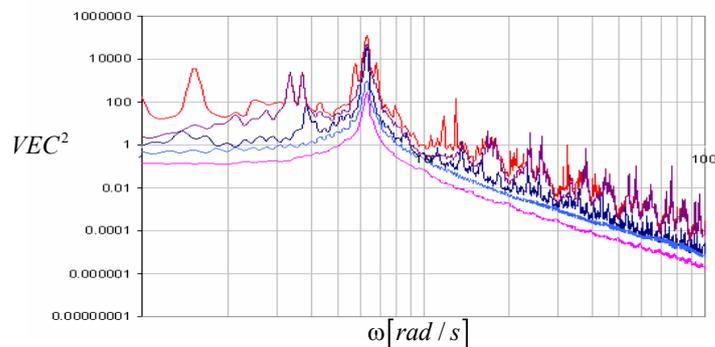


Figura 4.7 Comportamiento del estimador 3.3.2 considerando 1000 simulaciones utilizando un modelo de un SUGDL con los mismos parámetros.

Todas las representaciones de la función de transferencia simulada que se presentan en la Figura 4.7 corresponden al promedio de 1000 eventos. Se observa que en la FT así definida el valor correspondiente a la frecuencia del sistema, es precisamente el máximo, sin embargo no es estable, se aprecia además la existencia de otros máximos locales en frecuencias cercanas a la de la estructura que pueden confundirse.

4.1.3 Estimador CVE²

$$Q_4(\omega) = \left\{ \frac{\sum |X(\omega)|^2 / n}{\sum |A(\omega)|^2 / n} \right\}$$

Se determinó para este estimador que su FDP corresponde a la de una distribución F, descrita por la siguiente expresión.

$$f_{Q_4}(q_4) = \frac{1}{\beta(n/2, n/2)} \frac{q_4^{n/2-1}}{(q_4+1)^n}$$

Se genera un conjunto de 10, 100 y 1000 registros simulados de entrada y salida para los cuales se sigue el procedimiento que plantea el estimador CVE². Se promedian las ordenadas espectrales de las transformadas de Fourier de las cantidades indicadas arriba y luego se estima el cociente, un procedimiento inverso al que se plantea en los dos estimadores anteriores. Esta secuencia hace que las predicciones de las ordenadas espectrales sean mucho más estables, lo cual puede apreciarse en la figura 4.8, en contraste con lo que sucede en el estimador VEC², donde no se aprecia una mejora significativa con el aumento en el número de simulaciones.

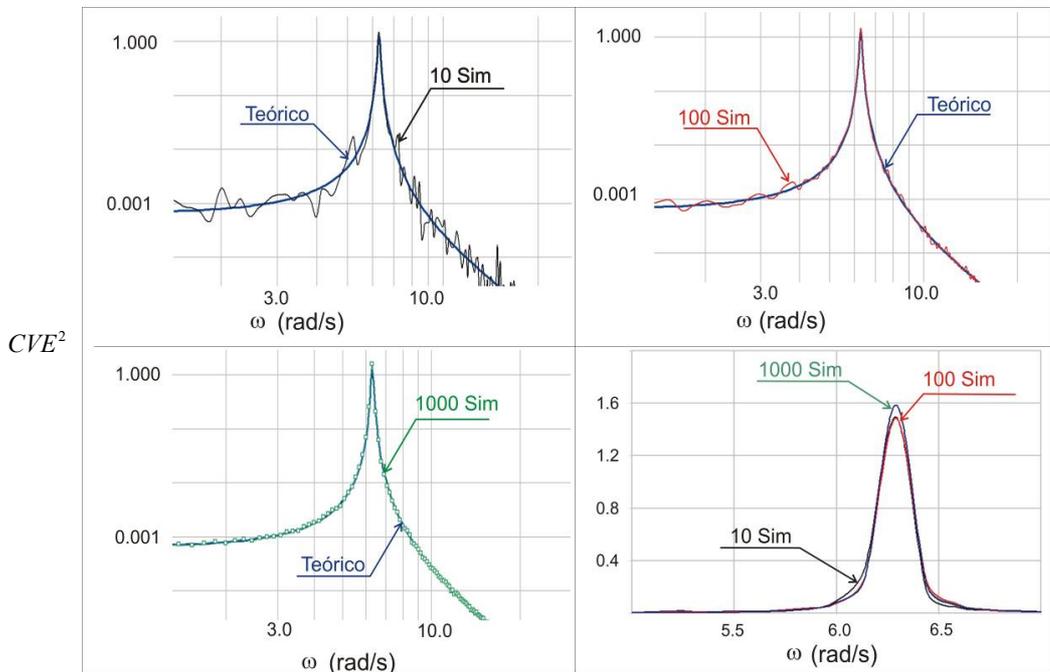


Figura 4.8 Comportamiento del estimador CVE² de acuerdo con el número de simulaciones consideradas.

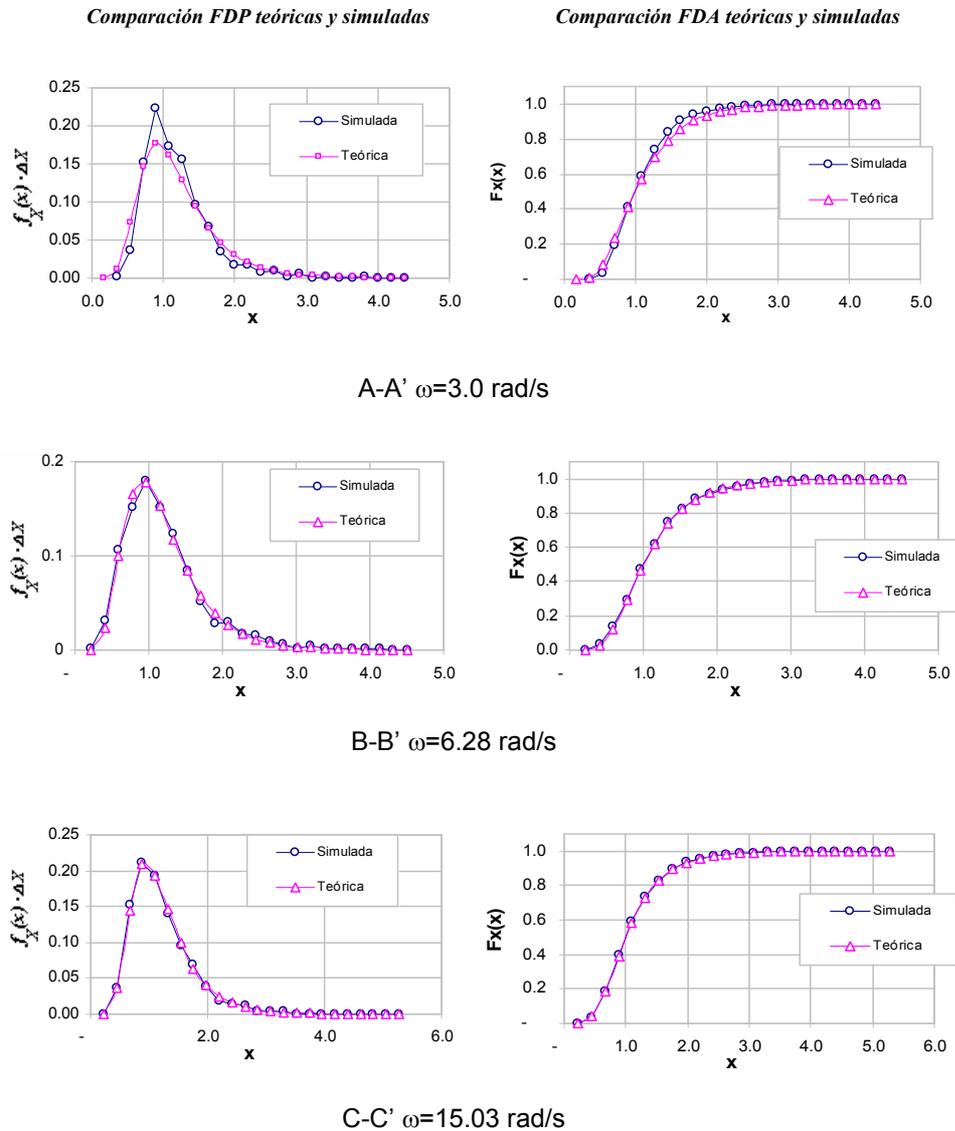


Figura 4.9 Comprobación de la distribución del estimador 3.3.3 para cada una de las secciones de la figura 4.3

En la figura 4.9 se comparan las FDP y FDA obtenidas al discretizar en intervalos las realizaciones simuladas a las que se aplicó el estimador CVE². Para poder comparar los resultados con la distribución F , las variables aleatorias se dividen entre el valor teórico de la función de transferencia es decir que de alguna forma están normalizados, por esto el eje de las abscisas es igual para todas las distribuciones de las tres secciones. El ajuste entre las funciones teóricas y las generadas es muy bueno; solo la representación para la frecuencia mas baja presenta pequeñas discrepancias respecto de la teórica.

4.1.4 Estimador CVE

$$Q_5(\omega) = \left\{ \frac{\sum |X(\omega)|/n}{\sum |A(\omega)|/n} \right\}$$

La FDP de este estimador se obtuvo aplicando la teoría de variables aleatorias al estimador CVE^2 , de donde se deduce la siguiente expresión para su distribución.

$$f_{Q_5}(q_5) = \frac{2}{\beta(n/2, n/2)} \frac{s^{n-1}}{(s^2 + 1)^n}$$

En la figura 4.10a se presentan los resultados obtenidos al promediar 10, 100 y 1000 registros simulados aplicando el criterio del estimador CVE. Al igual que en CVE^2 los valores de las ordenadas espectrales son bastante estables y la cantidad de eventos que se necesitan para alcanzar dicha estabilidad es menor que la de VEC y VEP. En el capítulo siguiente se estudiará el nivel de aproximación de la media a la función de transferencia en función del número de eventos considerados.

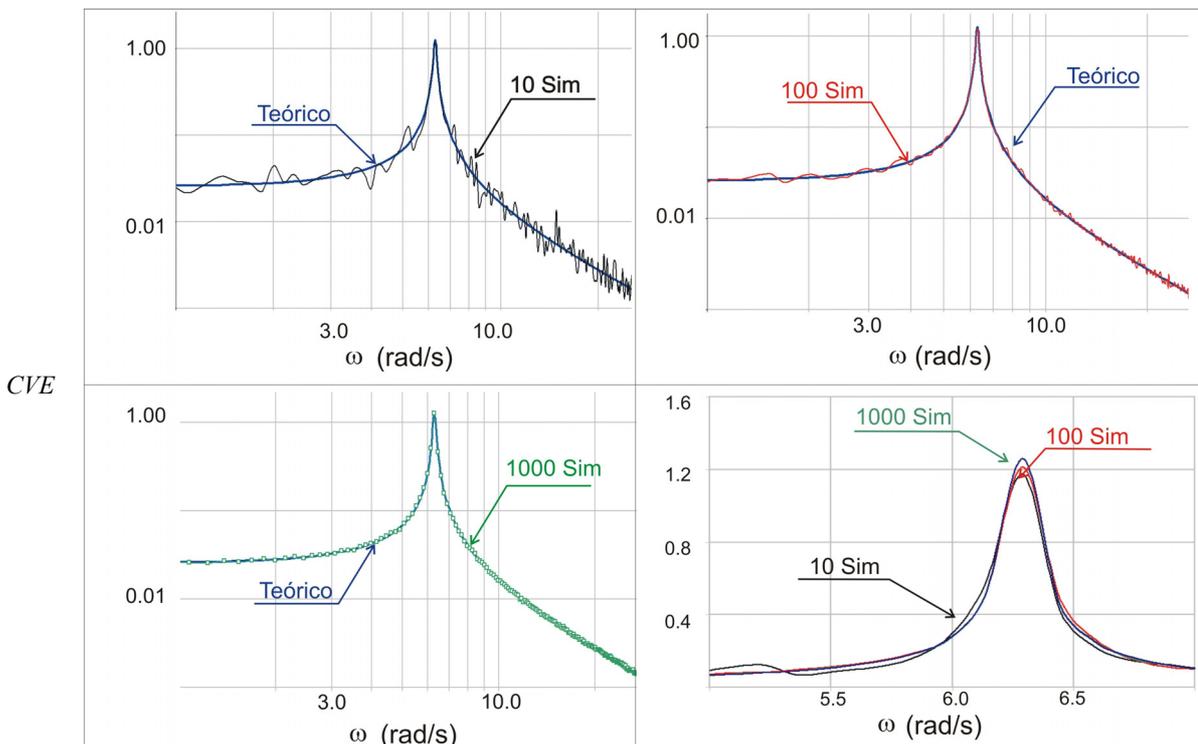


Figura 4.10 Comportamiento del estimador CVE de acuerdo con el número de simulaciones consideradas.

En la figura 4.11 se presentan las distribuciones teóricas y simuladas para el estimador CVE, donde se aprecia que la simulación reproduce bastante bien a la expresión teórica expresada en la ecuación 3.81. Es importante resaltar el cambio en la forma de la FDP que describe al estimador, ya que si se comparan las densidades de probabilidad de los estimadores CVE y CVE^2 con las de los otros dos

cocientes (VEC y VEC²) se observa una disminución importante en el tamaño de la cola, lo cual indica que es un estimador mucho más estable, con menores dispersiones.

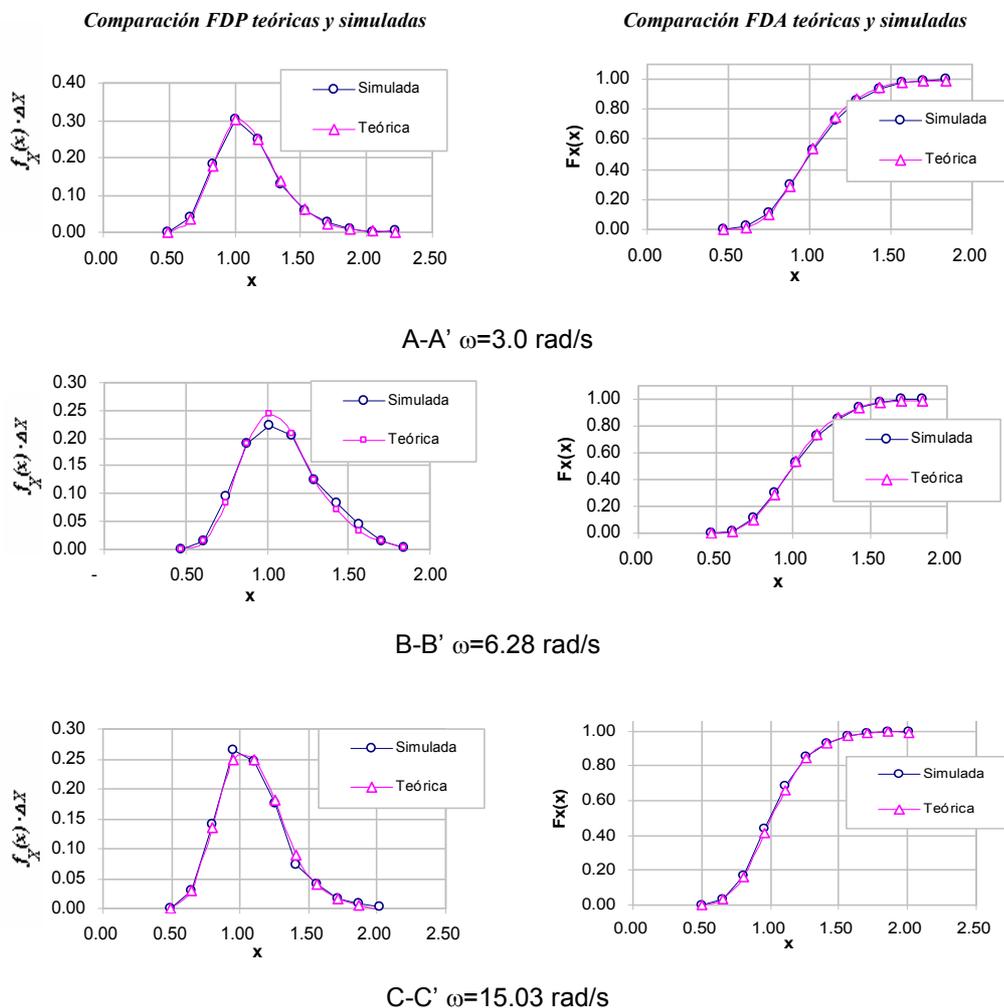


Figura 4.11 Comprobación de la distribución del estimador CVE para cada una de las secciones de la figura 4.3

4.1.5 Estimador VEP

Para el producto de las variables aleatorias $X(\omega)$ y $A(\omega)$ se determinó que su FDP estaba representada por la siguiente expresión

$$f_{Q_3}(q_3) = \frac{q_3 \cdot K_0 \left(\frac{q_3}{\sigma_f \sigma_c} \right)}{\sigma_f^2 \sigma_c^2}$$

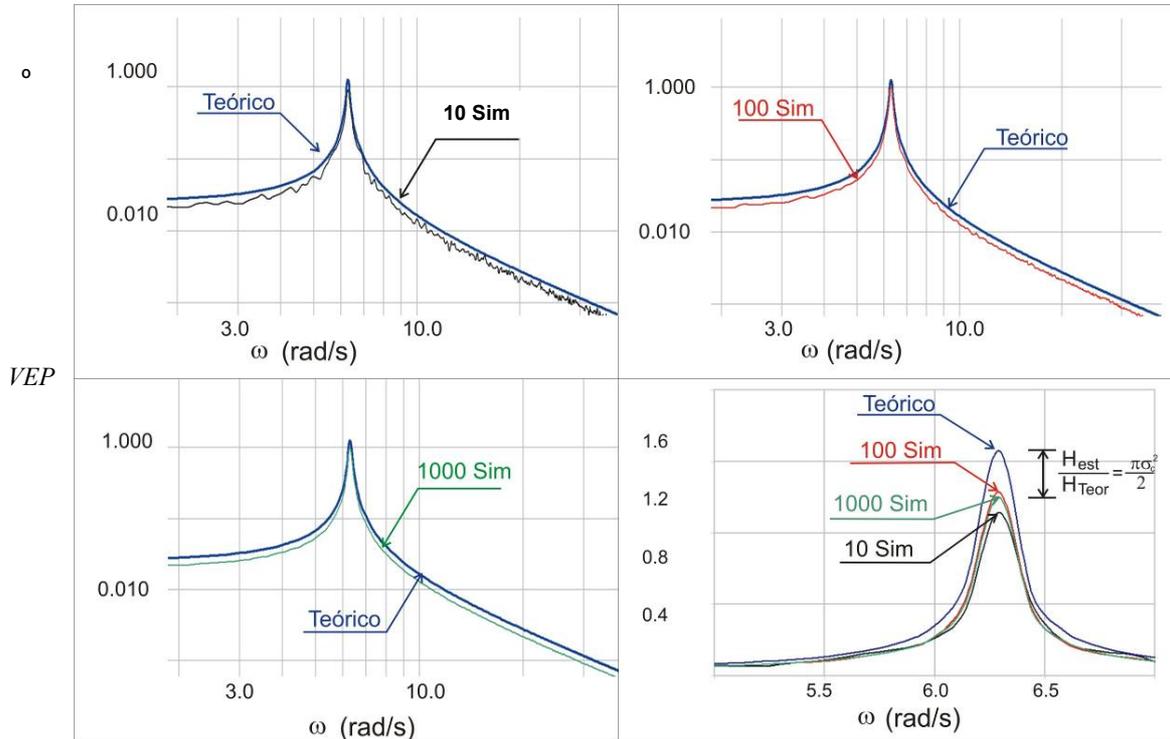


Figura 4.11 Comportamiento del estimador VEP de acuerdo con el número de simulaciones consideradas.

En la figura 4.11 se comparan la función de transferencia teórica para un sistema de un grado de libertad con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.05$ y periodo $T=1$ s, con las ordenadas que se obtienen al efectuar el cálculo del estimador VEP, para 10, 100 y 1000 simulaciones. De acuerdo con las hipótesis del modelo, al efectuar el producto entre las ordenadas espectrales de la respuesta y la perturbación, cuando estas son independientes, se obtiene la función de transferencia multiplicada por σ_c^2 . Un valor de σ_c^2 superior a uno hará que las ordenadas que se obtienen como resultado del estimador, sean mayores a las de la función de transferencia teórica y menores cuando σ_c^2 sea menor a 1. Si se satisfacen todas las condiciones a partir de las cuales se deduce la FDP del estimador en estudio, entonces los resultados que pueden obtenerse de él son bastante mas significativos que aquellos arrojados por los dos primeros estimadores (VEC y VEC^2), gracias a la estabilidad de sus momentos de primer y segundo orden al considerar una cantidad apreciable de eventos, cosa que no sucede con los dos cocientes mencionados.

En la figura 4.12 se presentan las funciones de densidad de probabilidad teórica y simulada para el estimador VEP. El ajuste simulado es bastante bueno, y se verifica que efectivamente al considerar el producto de las ordenas espectrales de los registros E/S de un sistema lineal sometido a una excitación cuya densidad espectral sea constante en un tramo, la densidad de probabilidad de dicho producto obedece a una función de Bessel modificada, en función de las varianzas del proceso de entrada y de la FT, esto es $K_0(x, \sigma_c, H(\omega))$.

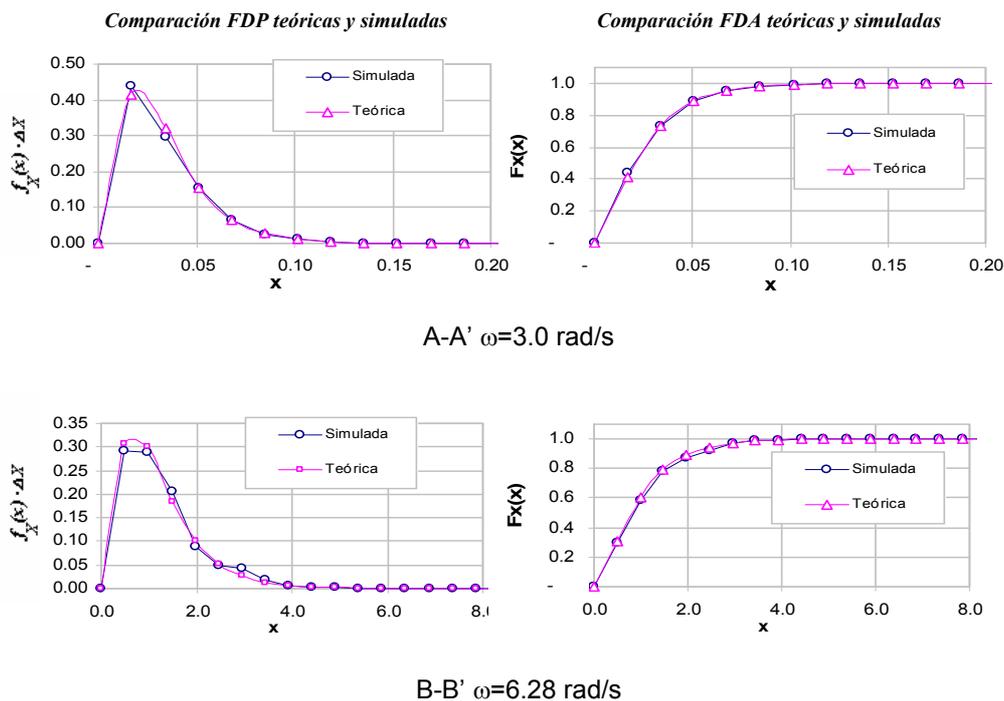


Figura 4.12 Comprobación de la distribución del estimador 3.3.5 en las secciones A-A' y B-B'

4.2 Simulaciones aplicadas a sistemas de varios grados de libertad

El acoplamiento modal ha sido un tema ampliamente tratado; en los 70 Jennings y Hoerner hicieron sus aportes acerca del acoplamiento modal en edificios altos, planteando algunas expresiones para el equilibrio dinámico, Lin en los 80 hizo sus aportaciones sobre la estabilidad en puentes con estas características. Actualmente es un tema ampliamente tratado por la industria aerodinámica que se interesa por estudiar los efectos del acoplamiento ocasionado por las corrientes de viento. Entre los múltiples factores que la originan, las irregularidades geométricas, estructurales y de materiales son en teoría las causas principales. Una forma de evaluarlo es a través del grado de excentricidad. Un valor alto de excentricidad conduce a una fuerte interacción entre las respuestas dinámicas en sus direcciones principales, aunque la aplicación de la perturbación sea en una sola dirección. En las deducciones hechas en el capítulo 3 para sistemas de varios grados de libertad, se determinó que para valores altos de la variable g_2 (que corresponde al aporte que tiene en la dirección x la aplicación de una perturbación en la dirección y), al aplicar los estimadores VEC o VEC^2 es necesario tener en cuenta algunas consideraciones adicionales, que aparecen precisamente por efecto del acoplamiento.

Para el caso de estudio presentado en el capítulo 3 se realizan simulaciones que consideren valores de excentricidades altos para visualizar mejor el efecto del acoplamiento y poder verificar numéricamente las consideraciones que deben tenerse en cuenta. Los modelos simulados cumplen con las siguientes características: Se consideran $A_x(t)$ y $A_y(t)$ independientes (las aceleraciones del terreno en direcciones perpendiculares), el cociente espectral se estimará para la dirección X únicamente, (desplazamiento), y la aceleración en la misma dirección. $A_x(t)$.

Como se mencionó, los estimadores que tienen mayores inconvenientes cuando se presenta el acoplamiento modal son los cocientes VEC, VEC^2 y por esto se centra la atención únicamente en la aplicación de estos.

4.2.1 Estimador VEC²

$$FT1_T = |g_1|^2 + |g_2|^2 E \left\{ \overbrace{\left[\frac{|A_y|^2}{|A_x|^2} \right]}^{\text{estimador inestable}} \right\} + 2 \left[\operatorname{Re} \{ g_1 g_2^* \} E \left\{ \frac{a_y a_x + b_y b_x}{|A_x|^2} \right\} - \operatorname{Im} \{ g_1 g_2^* \} E \left\{ \frac{-a_x b_y + a_y b_x}{|A_x|^2} \right\} \right]$$

En la figura 4.13 se presentan los resultados que se obtienen al aplicar el estimador VEC² a un sistema de 3 grados de libertad cuyos parámetros se muestran en la tabla “Datos del sistema”. La figura a) corresponde a la representación de todas las series en escala Log-Log, en la figura b) se han graficado las ordenadas que se encuentran en el intervalo de 6 a 10 rad/s en escala Log, y en la figura c) se presentan las mismas ordenadas de la figura b) pero en escala aritmética.

Las series superpuestas en el mismo gráfico corresponden a la realización de 1000 eventos. En las figuras b) y c) se aprecia de una manera mas clara lo que predice la expresión 3.92: un estimador inestable y poco confiable al determinar las ordenadas de la función de transferencia y al usarlo en cálculos posteriores para la estimación del coeficiente de amortiguamiento o para establecer formas modales, sus resultados pueden ser muy variables. Cabe recordar que esto sucede porque en el estimador aparece el cociente de dos V.A. independientes con distribución Exponencial, para las cuales se demostró que la media y la desviación estándar no están definidas. Se aprecia además algunos casos para los que las ordenadas máximas no se presentan exactamente en las frecuencias del sistema (ver figura c).

Datos del sistema	
kx [kN/m]	90000
alfa	0.5
masa [t]	15
a [m]	20
b [m]	20
ex [m]	3
ey [m]	8
ξ[%]	1

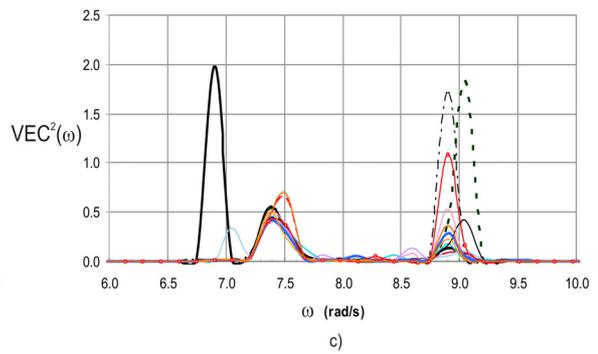
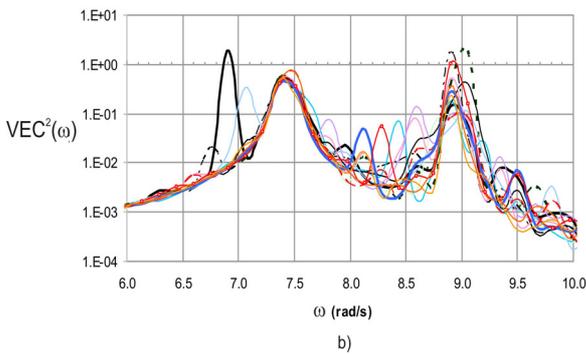
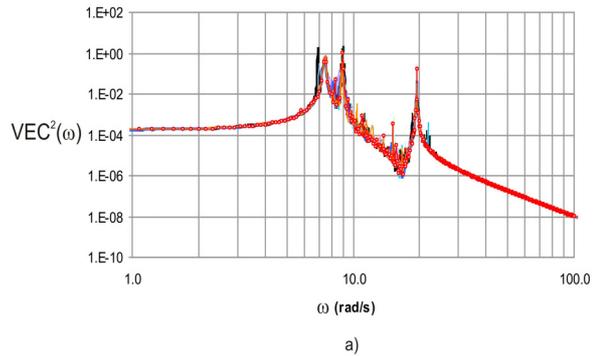


Figura 4.13 Representación del cociente VEC² en sistemas de varios grados de libertad con acoplamiento modal. a) Escala Log-Log b) Escala Log c) Escala aritmética

Si $A_x(t)$ y $A_y(t)$ son exactamente iguales es claro que el estimador converge, obedeciendo a la expresión

$$|FT_T|^2 = E \left\{ \frac{|g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)|^2}{|A_x(\omega)|^2} \right\} \sigma^2_{\theta 2}$$

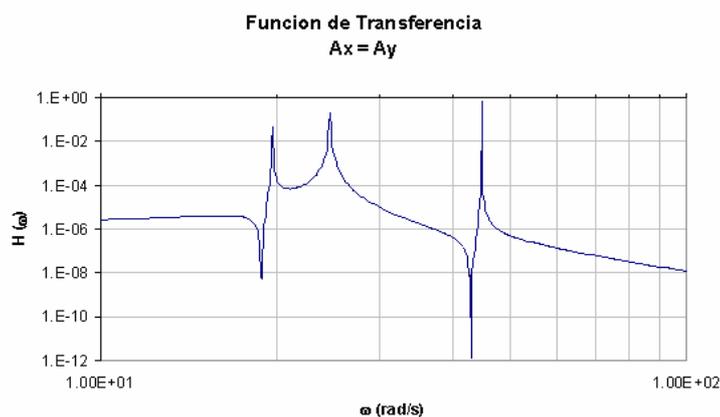


Figura 4.14 Representación del estimador VEC² SVGDL considerando procesos de entrada exactamente iguales, en las dos direcciones principales

La figura 4.14 puede entenderse como un caso teórico, pero es útil para establecer una cota inferior para la relación planteada. Es el caso de correlación perfecta, cuando se aplican perturbaciones idénticas en las dos direcciones.

4.2.2 Estimador VEC

$$|FT_T| = E \left\{ \frac{|g_1 A_x(\omega) + g_2 A_y(\omega)|}{|A_x(\omega)|} \right\}$$

En la sección 3.3 se estudió la aplicación del estimador VEC a sistemas de varios grados de libertad y se determinó que al relacionar la respuesta dinámica con alguno de los procesos de entrada, aparece un coeficiente $\frac{\pi}{2}$ multiplicando al término g_2 (ecuación 3.92). La aparición de este coeficiente se puede asociar con la pérdida de correlación entre las variables aleatorias del numerador y denominador al aumentar la relación $\frac{g_2}{g_1}$.

Se puede comprobar la pérdida de correlación entre las V.A $|X(\omega)|$ y $|A_x(\omega)|$ mediante un análisis de regresión lineal simple. En la figura 4.15 se presentan los resultados obtenidos al generar un conjunto de simulaciones para 4 relaciones diferentes de $\frac{g_2}{g_1}$. Cada punto corresponde al resultado de simular dos procesos de ruido blanco independientes $A_x(t)$ y $A_y(t)$, transformarlos al dominio de la frecuencia y combinarlos con los coeficientes g_1 y g_2 para encontrar la respuesta $X(\omega)$. El valor de $|X(\omega)|$ se asignó a las ordenadas y el de $|A_x(\omega)|$ a las abscisas.

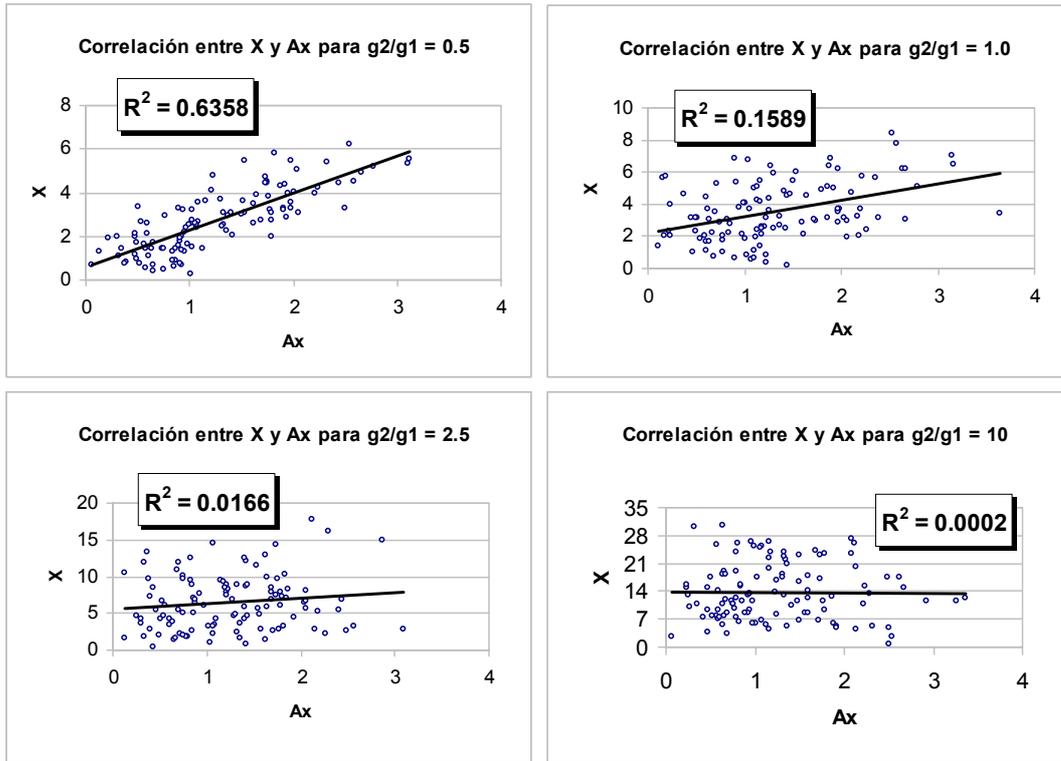


Figura 4.15 Variación de la correlación en el estimador de acuerdo con la relación g2/g1

Es claro que cuando se presenta acoplamiento modal la relación $\frac{g_2}{g_1}$ crece y se espera que cerca de las frecuencias que corresponden a valores de los modos acoplados aparezca el una amplificación en la función de transferencia debida a la pérdida de correlación. En el caso del sistema de tres grados de libertad que se presenta en la sección 3.4, se tiene la siguiente relación en $\frac{g_2}{g_1}$ en función de la frecuencia y de los parámetros descritos en el capítulo 3.

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{\alpha k_x^2 m e_x e_y}{(\alpha^2 e_x^2 - \alpha s_i^2) k_x^2 m + (\alpha \rho^2 + s_i^2) k_x m^2 \omega^2 - m^3 \rho^2 \omega^4}$$

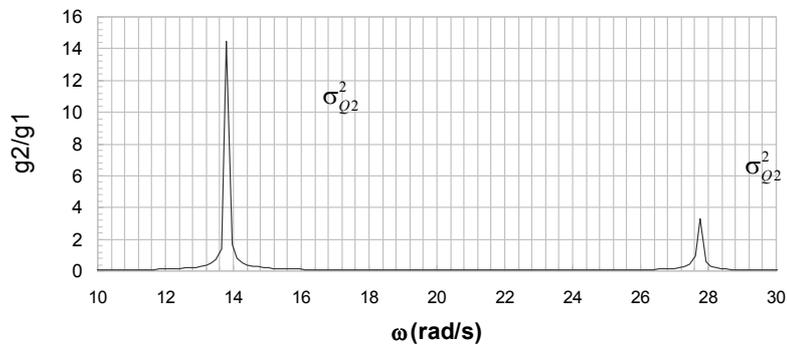


Figura 4.16 Comportamiento de la relación g2/g1 (Caso particular, sistema de tres grados de libertad con los parámetros que se especifican en la tabla)

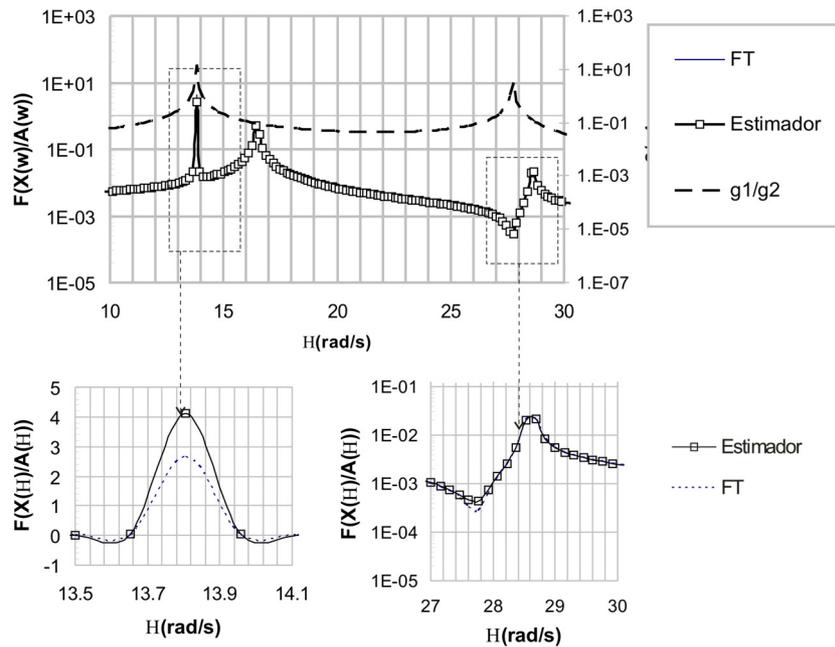


Figura 4.17 Comparación del estimador y de la función de transferencia teórica de acuerdo con la relación g_2/g_1

De la figura 4.16 se puede prever que las frecuencias que corresponde a modos acoplados para el ejemplo propuesto están entre los intervalos [13-14 rad/s] y 27-27 [rad/s] lo cual se corrobora con la figura 4.17, en la que se aprecia la amplificación de la función de transferencia alrededor de las frecuencias esperadas. La ordenada máxima se obtiene al evaluar en la expresión 3.92 los siguientes valores $g_1=0.18$ y $g_2=2.63$ que se obtienen al evaluar los valores de los parámetros estructurales en las expresiones que definen a g_1 y g_2 .

Ahora si el cociente se efectúa entre eventos no simultáneos entonces el coeficiente $\pi/2$ multiplicará tanto a g_1 como a g_2 , es decir que la función de transferencia se verá amplificada en cada una de las ordenadas que se estimen tal y como se muestra en el siguiente gráfico.

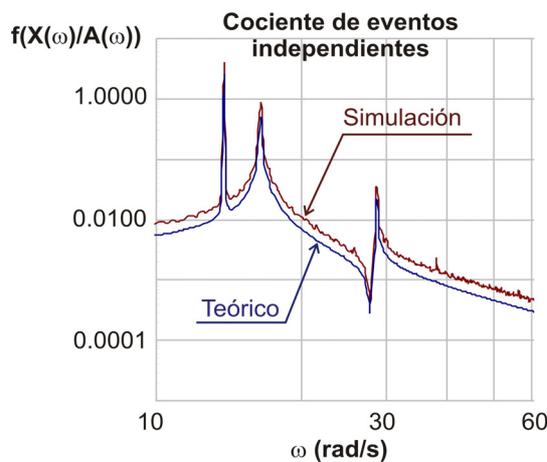


Figura 4.18 Comparación del estimador 3.2 cuando se tienen eventos completamente independientes en sistemas de varios grados de libertad

Capítulo 5 ESTABILIDAD DE LOS MOMENTOS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Se estudia en este capítulo la estabilidad de los momentos que se obtienen a partir de las FDP propuestas, en función del número de eventos considerados. El efecto del tamaño de ventana se ve reflejado principalmente en la resolución y puede ser un aspecto determinante en la interpretación de los resultados. Bendat y Piersol han establecido algunos criterios para la selección del tamaño de ventana y su aplicación a la identificación de sistemas y técnicas de estimación de parámetros. Las simulaciones se desarrollan de acuerdo con el esquema planteado en la figura 4.1 con 2^n datos para tres valores diferentes de n (9, 10 y 12), intentando representar las variaciones en el tamaño de ventana con las que se construyen los espectros de amplitudes y la incidencia que pueda tener en la correcta obtención de los momentos de primer y segundo orden.

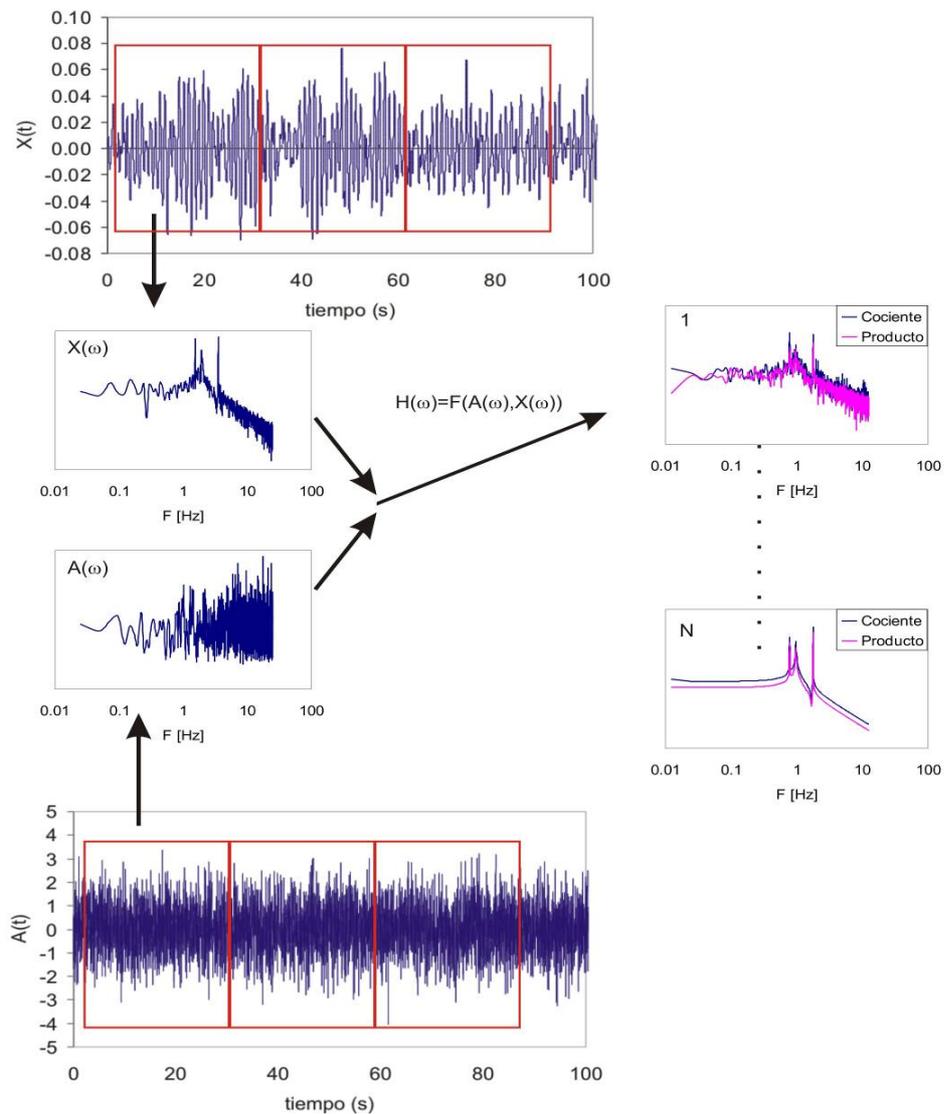


Figura 5.1 Procedimiento de análisis numérico para determinar la estabilidad de los estimadores

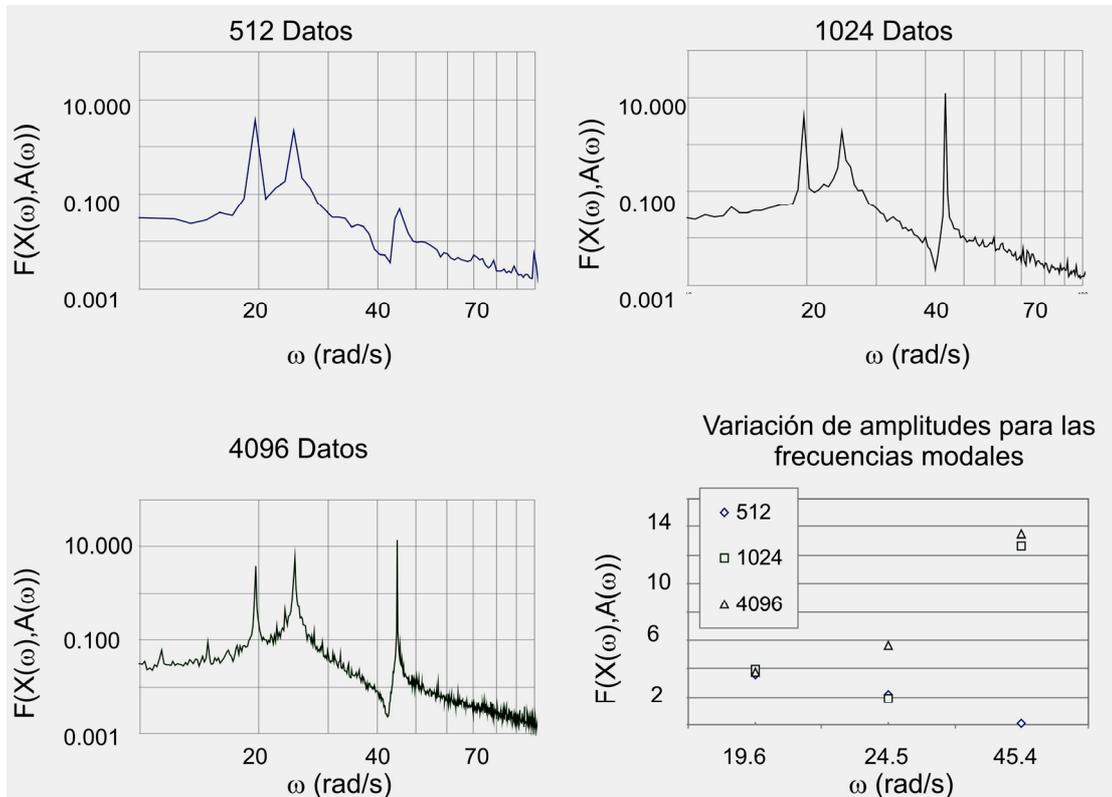


Figura 5.2 Efecto de la resolución en la lectura de las ordenadas espectrales

El valor que predicen los estimadores de la función de transferencia, no solo es función de las características de la variable aleatoria, sino, como es bien sabido, de la resolución con la que se construyen los espectros la cual esta intrínsecamente ligada a la cantidad de datos considerados en cada evento. En la figura 5.2 se presentan para una misma cantidad de eventos simulados y diferentes tamaños de ventana, los valores obtenidos al aplicar el estimador VEC a un sistema de tres grados de libertad. En la figura se comparan las amplitudes alcanzadas en cada tamaño de ventana, observando que una resolución pobre puede llevar a estimar valores significativamente menores en las frecuencias mas altas del sistema.

Al estudiar el comportamiento del estimador VEC, se aprecia que para el primer momento la estabilidad se alcanza aproximadamente para el mismo número de eventos, independientemente del tamaño de ventana que se haya elegido. Lo anterior se representa en la figura 5.3, donde se muestra la evolución de la media del estimador en la frecuencia correspondiente al primer modo de vibrar $\omega \approx 19.6$ rad/s (esta frecuencia fue determinada de acuerdo con las características estructurales que se fijaron para el ejemplo). Se utilizan los tres tamaños de ventana especificados al inicio del capítulo y para cada tamaño se observa que el promedio está bastante alejado del valor esperado antes de los 100 eventos y es solo a partir de los 1000 eventos que alcanza la estabilidad.

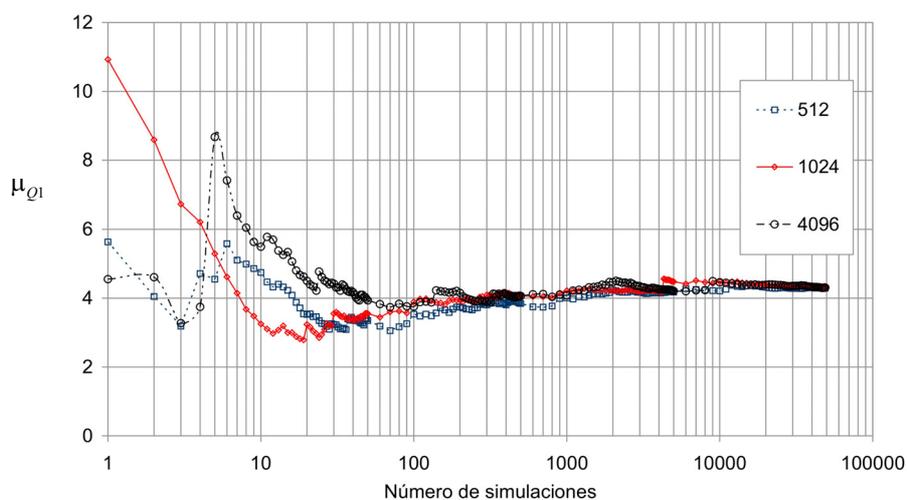


Figura 5.3 Comportamiento de la media del estimador VEC para tres tamaños de ventana

El segundo momento es muy inestable y aunque numéricamente se obtienen resultados de su variación en función del número de simulaciones consideradas, no es posible definir un tamaño de muestra que se garantice una dispersión menor. En la figura 5.4 se presentan los valores obtenidos para la varianza del estimador VEC, para el mismo valor de ω ; en función del número de simulaciones consideradas. Se destacan los cambios abruptos en el cociente en toda la historia de eventos

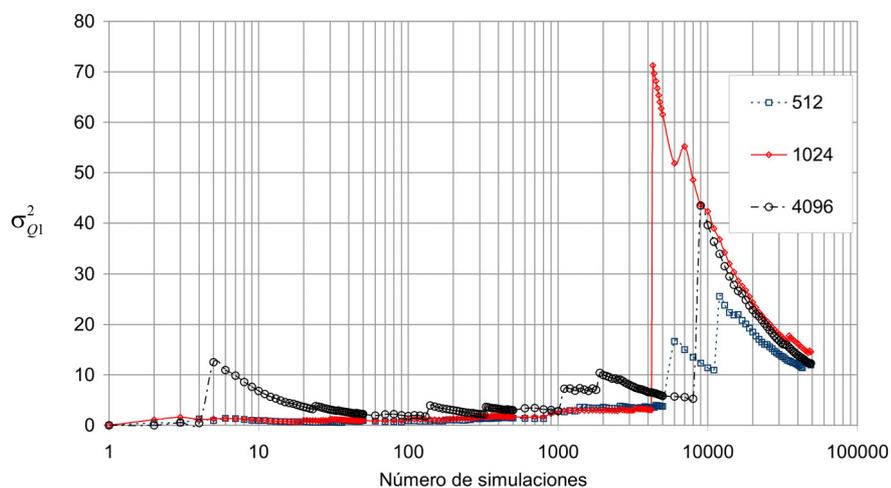


Figura 5.4 Comportamiento de la varianza del estimador VEC para tres tamaños de ventana

Para el estimador VEC^2 presentado en 3.2.2, se determinó que los momentos de cualquier orden eran inestables, lo cual puede entenderse mejor en las figuras 5.5 y 5.6. En la figura 5.5 se representa el comportamiento del primer momento donde son notables algunos cambios abruptos y sin ninguna tendencia en la estimación del valor promedio. El comportamiento es igual para los tres tamaños de ventana definidos por la potencia "n". De acuerdo con estas condiciones se concluye que no es posible determinar ni el tamaño de ventana ni la cantidad de eventos que garanticen la estabilidad. En la figura 5.6 se presenta el comportamiento de la varianza, la cual presenta las mismas características de inestabilidad y falta de convergencia.

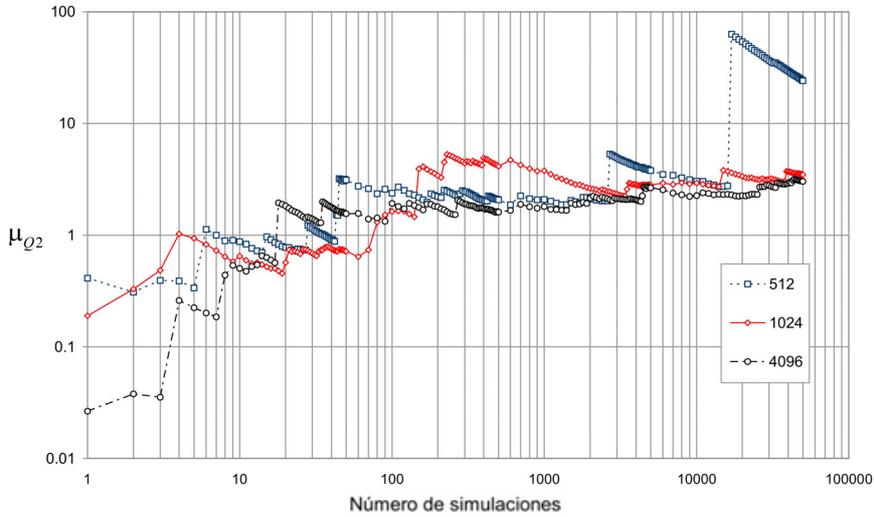


Figura 5.5 Comportamiento de la media del estimador VEC^2 para tres tamaños de ventana

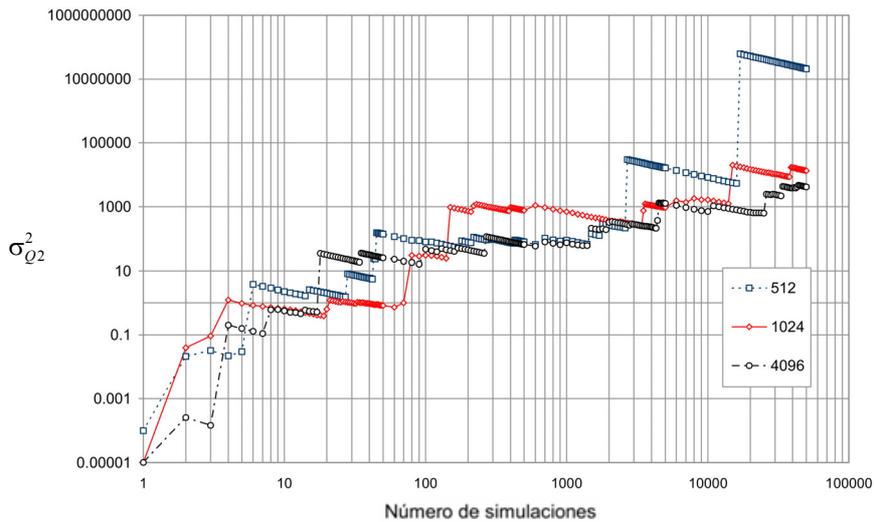


Figura 5.6 Comportamiento de la varianza del estimador VEC^2 para tres tamaños de ventana

El estudio del estimador CVE^2 presentado en la sección 3.2.5 determinó que era mucho más estable que VEC y VEC^2 . Las representaciones de la evolución de sus momentos se harán para 50 eventos, con un tamaño de ventana de 2048 datos. En la figura 5.7 se presenta un compendio de los resultados obtenidos al aplicar el CVE^2 para nueve conjuntos de 1000 realizaciones diferentes, donde cada conjunto corresponde al número de eventos promediados en cada realización. Por ejemplo un punto en el gráfico que pertenezca al conjunto de cinco eventos equivale a una de las 1000 realizaciones independientes que consideran el promedio de cinco eventos en el numerador y denominador respectivamente. El número de eventos considerados se especifica en el eje de las abscisas. El objetivo del gráfico es mostrar la evolución del estimador al incrementar la cantidad de eventos, donde se aprecia que al tomar un número pequeño de promedios para estimar las ordenadas espectrales del numerador y denominador, se predice un valor sesgado de la FT con una dispersión muy alta. La línea que aparece conectando a cada conjunto de realizaciones corresponde a la media del estimador.

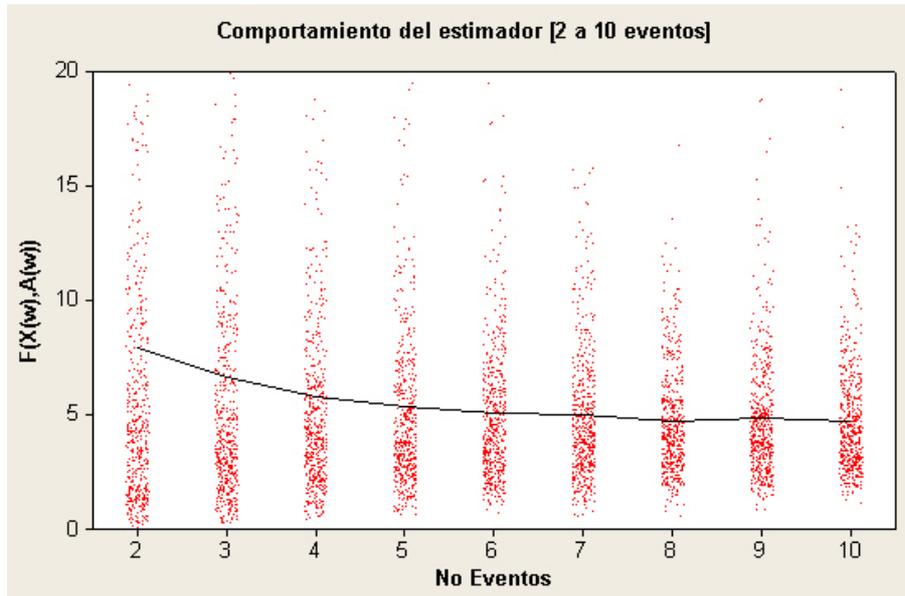


Figura 5.7 Evolución de la dispersión para el estimador CVE^2 entre 2 y 10 eventos

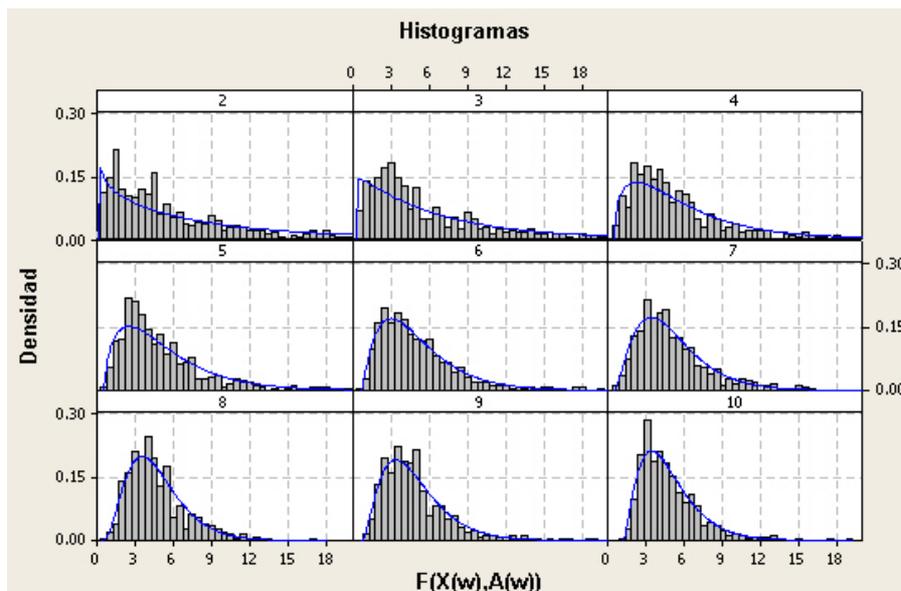


Figura 5.8 Histogramas del estimador CVE^2 y ajuste de la FDP considerando 2 a 10 eventos

En la figura 5.8 se muestra el histograma de las realizaciones presentadas en la figura 5.7. La cantidad de eventos considerada se indica en las abscisas del recuadro donde se encuentra cada histograma y se ajusta la FDP que le corresponde de acuerdo al valor de "n". En las figuras 5.9 y 5.10 se presenta la evolución de CVE^2 entre 10 y 50 eventos, con sus correspondientes histogramas y ajuste de la FDP . Se aprecia que la dispersión disminuye considerablemente al aumentar el número de eventos promediados.

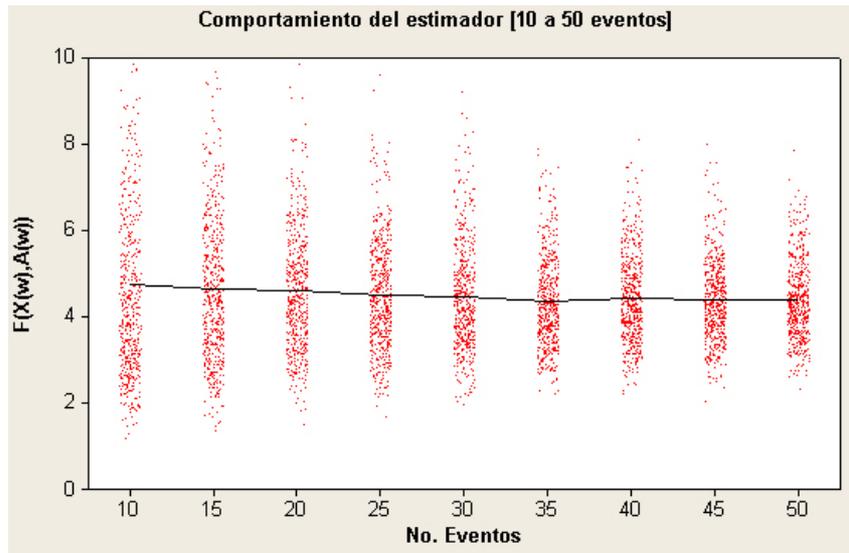


Figura 5.9 Evolución de la dispersión para el estimador CVE^2 entre 10 y 50 eventos

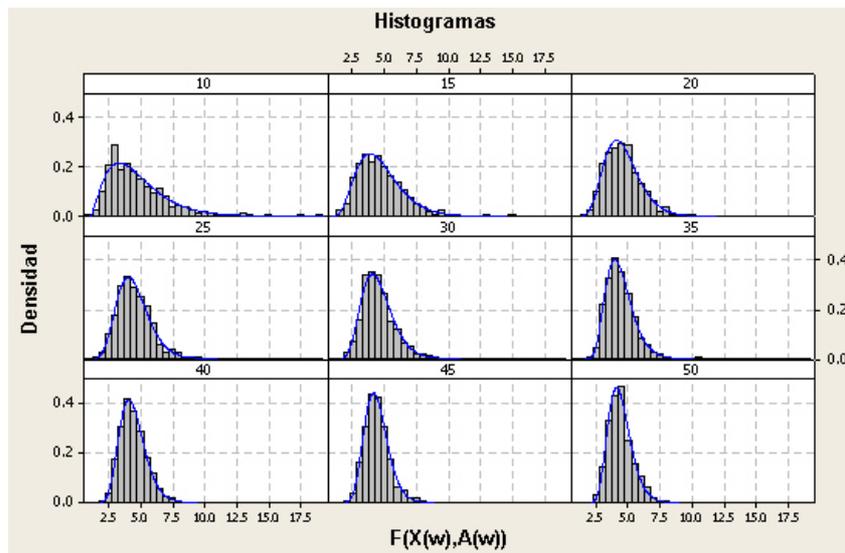


Figura 5.10 Histogramas del estimador CVE^2 y ajuste de la FDP considerando 10 a 50 eventos

En la figura 5.11 se puede apreciar mejor la evolución de la dispersión en la V.A. Se construyó con las realizaciones simuladas para un sistema de un grado de libertad con coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.01$ y periodo $T=1s$. Las expresiones con las que se compara son las presentadas en la sección 3.2.4 para la media y la varianza de Q_1 y se normalizaron con relación a la función de transferencia como se especifica en los ejes.

Es importante resaltar que el considerar una mayor cantidad de eventos, implica un gran esfuerzo en cálculos y duración de las pruebas, por lo que es importante definir el nivel de aproximación que espera obtenerse al realizar la identificación del sistema. El coeficiente de variación puede ser un buen parámetro para determinar la cantidad de eventos a considerar, el cual viene dado por la ecuación 3.75c

$$cv_{Q_1} = 2\sqrt{\frac{n-1}{n(n-4)}} \quad \text{donde } n = 2(\text{N}^\circ \text{ de eventos})$$

A la luz de las representaciones mostradas en la figura 5.11 se recomienda considerar al menos 35 eventos para realizar una estimación de la función de transferencia $|H(\omega)|^2$ con un coeficiente de variación alrededor de 0.25.

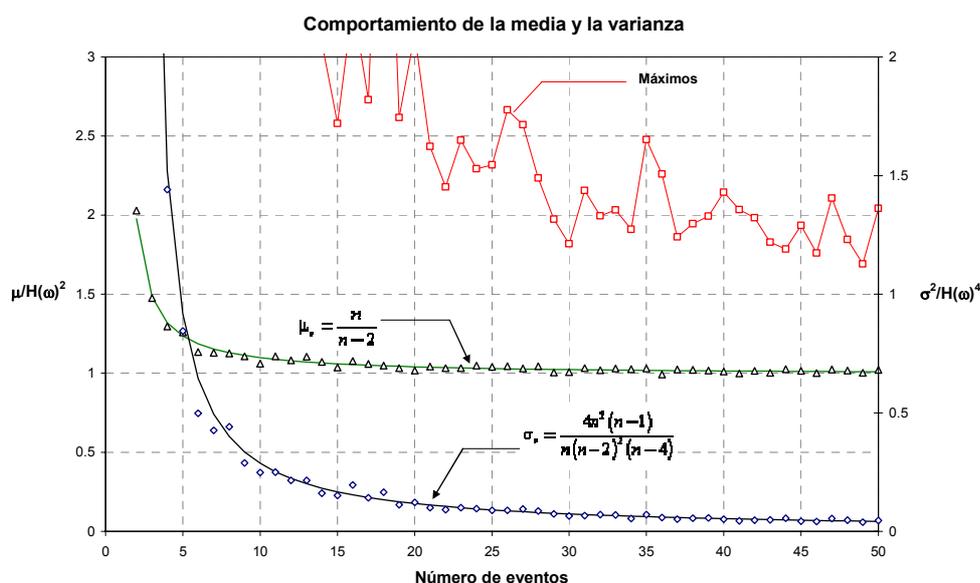


Figura 5.11 Comportamiento de la media y la varianza del estimador CVE^2 en función del número de eventos

Cabe destacar la sencillez de las expresiones que se emplean para el cálculo de la media y la varianza teóricas y su excelente aproximación a las encontradas con la muestra generada. Siguiendo el mismo procedimiento se estudia el comportamiento de los parámetros μ y σ^2 de la V.A. Q_5 .

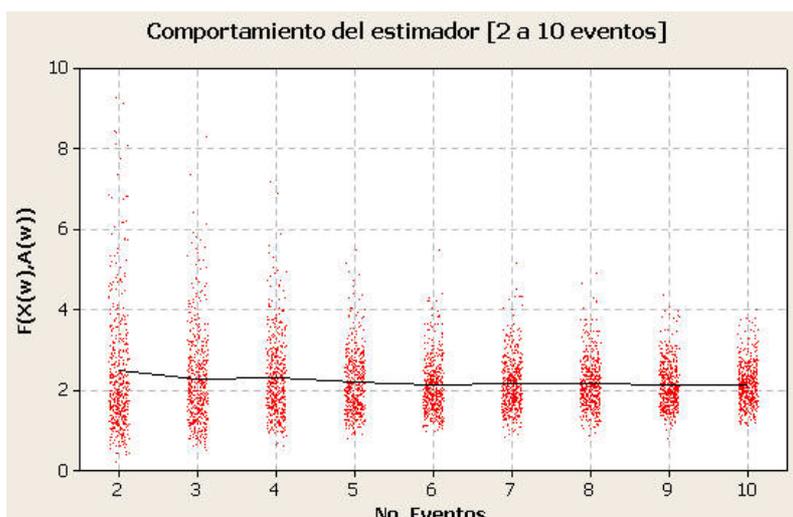


Figura 5.12 Evolución de la dispersión para el estimador CVE entre 2 y 10 eventos

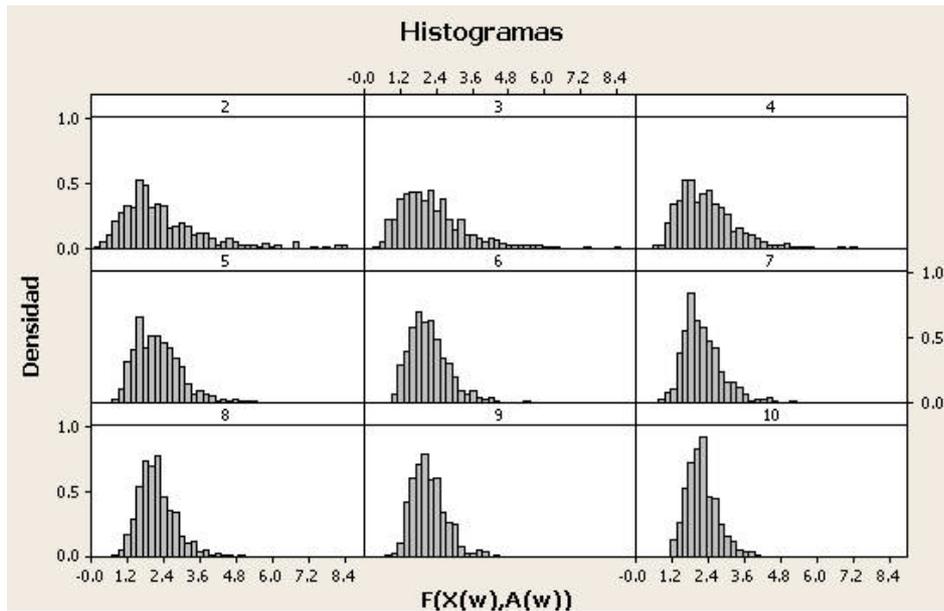


Figura 5.13 Histogramas del estimador CVE entre 2 y 10 eventos

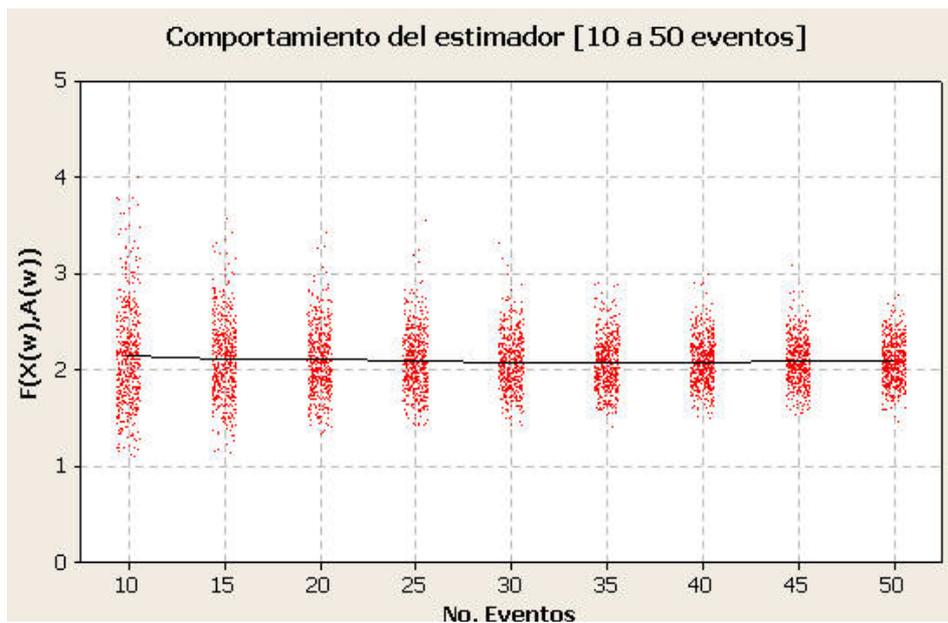


Figura 5.14 Evolución de la dispersión para el estimador CVE entre 10 y 50 eventos

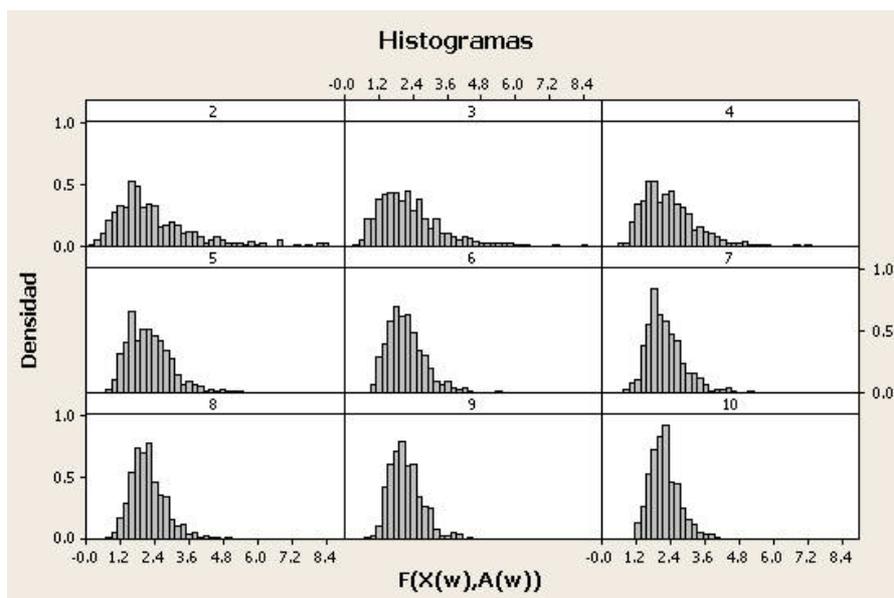


Figura 5.15 Histogramas del estimador CVE entre 10 y 50 eventos

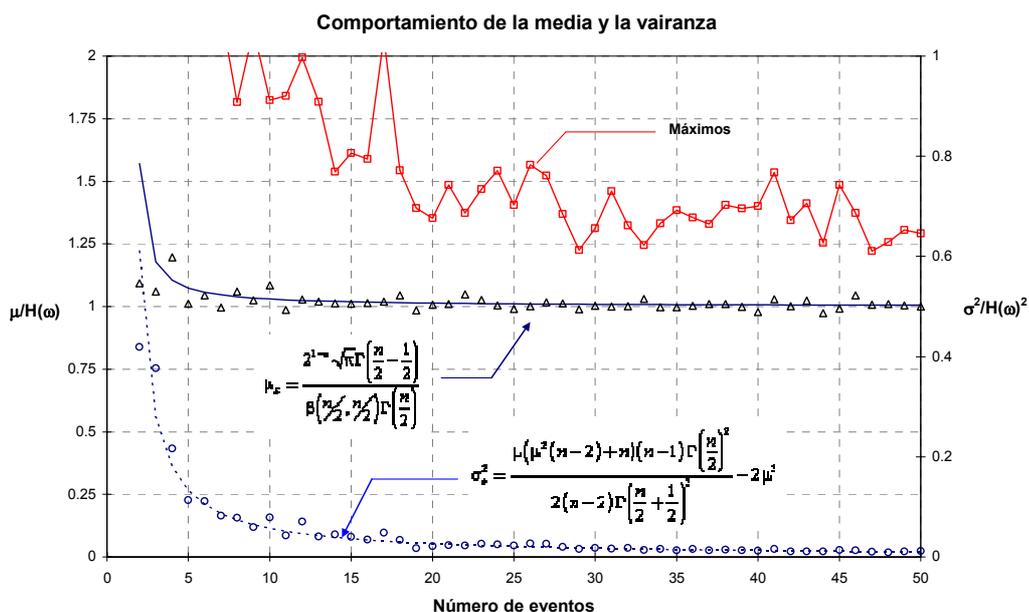


Figura 5.16 Comportamiento de la media y la varianza del estimador CVE en función del número de eventos

Se aprecia como la media rápidamente converge al valor de la función de transferencia, con una dispersión muy baja. En términos del coeficiente de variación dado por la expresión 3.83b, se encuentra que para conseguir un valor de $cv = 0.25$ o menor sería necesario considerar al menos 10 eventos. La cantidad de eventos necesarios para alcanzar el mismo coeficiente de variación propuesto para CVE^2 disminuye; sin embargo las expresiones utilizadas son más complicadas.

En la figura 5.17 se comparan las expresiones deducidas para encontrar los coeficientes de variación de los estimadores CEV^2 y CEV .

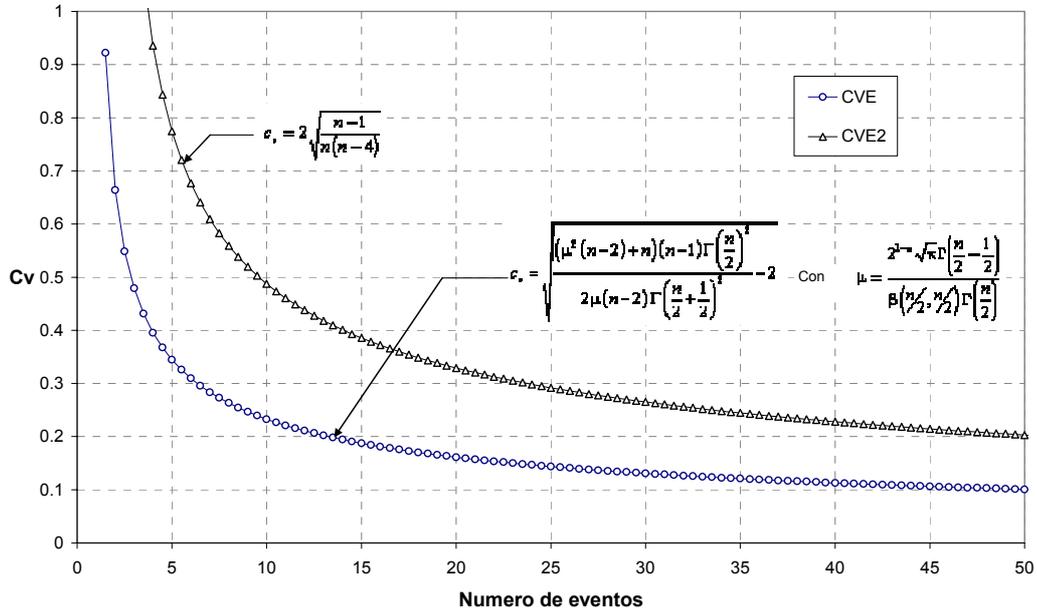


Figura 5.17 Comparación de los coeficientes de variación de los estimadores CVE y CVE^2 en función del número de eventos

A continuación se presenta el comportamiento del estimador VEP, estudiado en el numeral 3.2.3 y que corresponde a al producto de $|X(\omega)| \cdot |A(\omega)|$. Al igual que en los cocientes espectrales VEC y VEC², el valor esperado y la varianza para cualquier ω_i no es dependiente del tamaño de ventana seleccionado para obtener los espectros. En cuanto a la estabilidad de los momentos, para una cantidad menor a 100 eventos las diferencias entre el promedio y el valor esperado pueden ser muy grandes. La convergencia de los momentos se da para un número de eventos mayor a 1000. Lo anterior puede entenderse mejor en las figuras 5.18 y 5.19

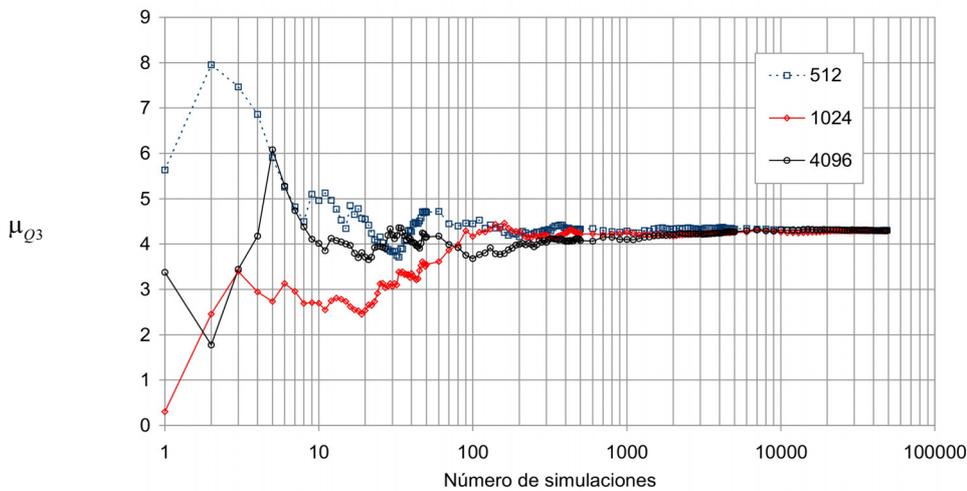


Figura 5.18 Comportamiento de la media del estimador VEP para tres tamaños de ventana

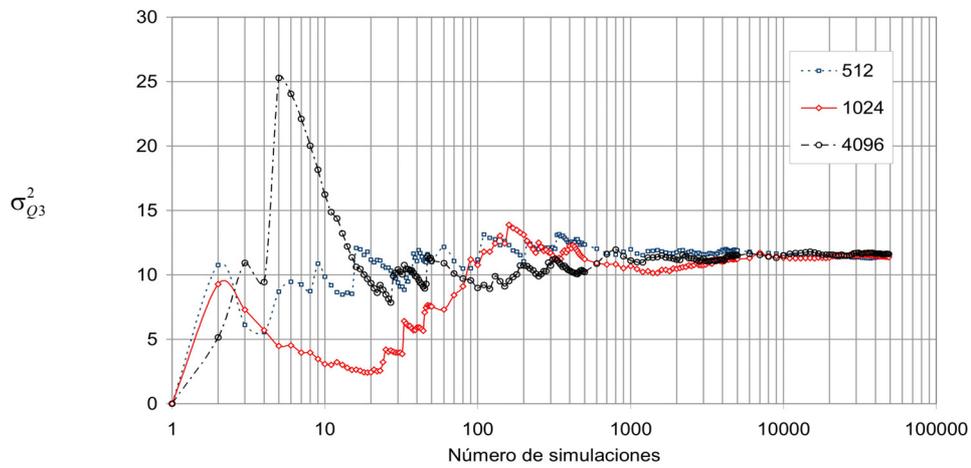


Figura 5.19 Comportamiento de la varianza del estimador VEP para tres tamaños de ventana

La varianza y la media de este estimador convergen a valores diferentes de cero, por lo tanto el coeficiente de variación del estimador es constante y tiende a:

$$cv_{Q_3} = \frac{\sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \approx 0.78$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De acuerdo con las hipótesis planteadas el capítulo 3, fue posible encontrar las funciones de densidad de probabilidad de cada uno de los estimadores propuestos en la tesis para relacionar los registros de salida y entrada en un sistema dinámico, considerando que la perturbación posee características similares a las de un ruido blanco gaussiano. En el proceso de obtención de cada FDP, fue posible identificar las características estadísticas que aparecen en la transformación de las variables aleatorias, que pueden ser útiles para efectuar una verificación intermedia y ayudar en la toma de decisiones sobre considerar o no segmentos del registro completo con algún criterio estadístico (p.e. el valor de la varianza de las variable aleatoria que se obtienen en el proceso de transformación al dominio de la frecuencia).

La validación numérica muestra que para un adecuado número de eventos las FDP y las FDA de cada estimador se reproducen con gran fidelidad, lo cual permite aceptar como válidas las expresiones que se dedujeron analíticamente.

Determinadas las FDP de cada estimador, se encontraron los momentos de primer y segundo orden, concluyendo lo siguiente: El estimador VEC tiene media estable y su desviación estándar no está definida. El estimador VEC^2 es inestable no solo en la desviación estándar sino también en la media, y su utilización puede llevar no solo a encontrar valores erróneos en la magnitud de las ordenadas espectrales, con las cuales se suele estimar el coeficiente de amortiguamiento mediante lectura directa o con el método del semi-ancho de banda, sino también que puede llevar a estimar de manera incorrecta la posición de máxima ordenada espectral (frecuencia modal). El estimador VEP tiene media y varianza estables, pero se necesita una cantidad considerable de eventos para alcanzar su estabilidad; como referencia adicional se observó que el coeficiente de variación es constante. Finalmente se determinó que los mejores predictores para efectuar el cociente espectral son CVE y CVE^2 , debido a la estabilidad que presentan sus parámetros estadísticos a medida que aumenta el número de eventos promediados. En el ejercicio de obtención de la función de transferencia mediante la realización de cocientes espectrales, es posible encontrar algunos trabajos en los que no se hace distinción entre los resultados que se logran mediante el promedio de diferentes cocientes espectrales o mediante el cociente del promedio de las transformadas de Fourier; sin embargo en el desarrollo de la tesis se ha demostrado con argumentos estadísticos que para eventos que no estén perfectamente correlacionados, es decir que la respuesta dinámica registrada no tiene correspondencia directa con el movimiento de entrada, entonces los procedimientos descritos para la obtención de la FT no son equivalentes. Dado que la definición estricta de función de densidad espectral es el promedio de un infinito número de transformadas de Fourier sobre registros de duración infinita y que además el cuadrado de la FT entre dos procesos E/S, corresponde al cociente de las funciones de densidad espectral de cada proceso, entonces el estimador que mas se acercaría a esta definición es el que se ha denominado como CVE^2 .

Se demostró además que si se estima el promedio de la norma de varios cocientes espectrales el resultado será el valor de la función de transferencia multiplicado por un coeficiente que puede variar entre 1 y $\frac{\pi}{2}$ dependiendo del nivel de correlación entre la perturbación y la respuesta dinámica.

Es claro que en el problema de identificación de sistemas debe existir un modelo base, que marcará las pautas para la determinación de los parámetros dinámicos; por lo tanto el grado de aplicabilidad de las expresiones que se han presentado en esta tesis dependerá de qué tan parecidas sean las características de los procesos de entrada y de salida a las hipótesis del modelo propuesto. Debe tenerse en cuenta que se han hecho consideraciones lineales restrictivas y que además el proceso de entrada se ha caracterizado como un proceso puro de ruido. Se deja abierta la posibilidad de estudiar el comportamiento de los estimadores cuando las características de los procesos E/S puedan variar

significativamente. Por ejemplo podría estudiarse el efecto de considerar un proceso de entrada con ordenadas espectrales que puedan ir variando con alguna función (lineal, polinómica, Kanai-Tajimi, etc) y poder generar las funciones de densidad de probabilidad de cada estimador para determinar su grado de aplicabilidad y su relación con la función de transferencia teórica.

Mientras que se haga el análisis de registros que cumplan características similares a las de sistemas invariantes en el tiempo, pueden aplicarse los criterios presentados no solo a la determinación de funciones de transferencia de sistemas de segundo orden orientadas al análisis estructural, sino también a evaluar el comportamiento estadístico de la reconstrucción de algunas funciones de transferencia utilizadas en geotecnia y geofísica, que estudian la propagación de ondas.

Las expresiones propuestas para los coeficientes de variación de los estimadores CVE, CVE^2 pueden ayudar en la toma de decisiones respecto de cuántas mediciones es necesario realizar en una vibración ambiental, teniendo en cuenta el nivel de aproximación deseado en los parámetros dinámicos a estimar. También debe tenerse en cuenta que el desarrollo se ha hecho para determinar los momentos de primer y segundo orden de las ordenadas espectrales de la función de transferencia, no para los parámetros de la ecuación diferencial de movimiento, sin embargo una vez conocida la expresión de la FT que desee validarse es bastante sencillo encontrar el comportamiento de cada parámetro aplicando los criterios de funciones de variables aleatorias descritos en el capítulo 2, puesto que se han deducido las expresiones de las FDP para cada estimador.

Dado que para los estimadores VEP, CVE y CVE^2 se conoce tanto su función de distribución de probabilidad, como las expresiones para estimar los momentos de primer y segundo orden y que además son estables; para un determinado nivel de confianza α , podría pensarse en expresar las magnitudes de las ordenadas espectrales o inclusive los parámetros que se identifiquen de ellas no como un único valor sino como un intervalo de confianza. $H(\omega) = [\bar{H}(\omega) - u_{1\alpha}\sigma, \bar{H}(\omega) + u_{2\alpha}\sigma]$.

ANEXOS

A.1 Deducciones del capítulo 3

a) Varianza de la variable aleatoria $c(\omega)$

$$\begin{aligned} \sigma_{c(\omega)}^2 &= E\left\{ (A(t_1)\cos\omega t_1\Delta t + A(t_2)\cos\omega t_2\Delta t + \dots + A(t_n)\cos\omega t_n\Delta t)^2 \right\} \\ \sigma_{c(\omega)}^2 &= E\left\{ A^2(t_1)\cos^2\omega t_1\Delta t^2 + A^2(t_2)\cos^2\omega t_2\Delta t^2 + \dots + A^2(t_n)\cos^2\omega t_n\Delta t^2 \right\} \\ &\quad + 2E\left\{ (A(t_1)\cos\omega t_1\Delta t)(A(t_2)\cos\omega t_2\Delta t) + \dots + (A(t_{n-1})\cos\omega t_{n-1}\Delta t)(A(t_n)\cos\omega t_n\Delta t) \right\} \\ \sigma_{c(\omega)}^2 &= E\left\{ \sum_{i=1}^n A^2(t_i)\cos^2\omega t_i\Delta t^2 \right\} + E\left\{ \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (A(t_j)\cos\omega t_j\Delta t)(A(t_i)\cos\omega t_i\Delta t)}_{i \neq j} \right\} \end{aligned}$$

Haciendo uso de las propiedades de linealidad en las expresiones se obtiene que

$$\sigma_{c(\omega)}^2 = \sum_{i=1}^n E\left\{ \underbrace{A^2(t_i)}_{\sigma^2} \right\} \cos^2\omega t_i \Delta t_i^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n E\{A(t_j)A(t_i)\}}_{i \neq j} (\cos\omega t_j \Delta t_j)(\cos\omega t_i \Delta t_i)$$

Por definición las variables aleatorias $A(t_i)$, que forman el proceso estocástico son independientes, y $E\{A(t_j)A(t_i)\} = E\{A(t_j)\}E\{A(t_i)\} = 0$, lo que simplifica la expresión en:

$$\text{Var}\{c(\omega)\} = \sum_{i=1}^n \sigma^2 \cos^2\omega t_i \Delta t_i^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \cos^2\omega t_i \Delta t_i^2$$

En su representación continua se expresa como:

$$\text{Var}\{c(\omega)\} = \sigma^2 \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2\omega t dt$$

b) Valor esperado del producto de las variables $c(\omega)$ y $d(\omega)$

$$\begin{aligned} E\{c(\omega)d(\omega)\} &= E\left\{ \int A(t_i)\cos\omega t_i dt_i \int A(t_j)\text{sen}\omega t_j dt_j \right\} \\ E\{c(\omega)d(\omega)\} &= E\left\{ \sum_{i=1}^n A(t_i)\cos\omega t_i \Delta t_i \sum_{j=1}^n A(t_j)\text{sen}\omega t_j \Delta t_j \right\} \\ E\{c(\omega)d(\omega)\} &= E\left\{ \sum_{i=1}^n A(t_i)^2 \cos\omega t_i \text{sen}\omega t_i \Delta t_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a(t_i)a(t_j) \cos\omega t_i \text{sen}\omega t_j \Delta t_i \Delta t_j \right\} \end{aligned}$$

Aplicando el valor esperado de la suma se obtiene:

$$E\{c(\omega)d(\omega)\} = \sum_{i=1}^n E\{A(t_i)^2\} \cos \omega t_i \sin \omega t_i \Delta t_i^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n E\left\{ \underbrace{a(t_i)a(t_j)}_{\text{independ}} \right\} \cos \omega t_i \sin \omega t_j \Delta t_i \Delta t_j$$

$$E\{c(\omega)d(\omega)\} = \sigma^2 \sum \cos \omega t_i \sin \omega t_i \Delta t_i^2$$

$$E\{c(\omega)d(\omega)\} = \sigma^2 \Delta t \underbrace{\int \cos \omega t \sin \omega t dt}_{I_1}$$

Integrando dentro de un periodo completo, "A" se hace cero.

$$E\{c(\omega)d(\omega)\} = E\{c(\omega)\} E\{d(\omega)\} = 0$$

c) El valor esperado del producto de las variables $f(\omega)$ y $g(\omega)$

$$E\{f(\omega)g(\omega)\} = E\{(a(\omega)c(\omega) - b(\omega)d(\omega))(a(\omega)d(\omega) + b(\omega)c(\omega))\} = 0$$

$$E\{f(\omega)g(\omega)\} = E\{a^2(\omega)c(\omega)d(\omega) - b^2(\omega)c(\omega)d(\omega) + a(\omega)b(\omega)c^2(\omega) - a(\omega)b(\omega)d^2(\omega)\}$$

$$E\{f(\omega)g(\omega)\} = a^2(\omega) \underbrace{E\{c(\omega)d(\omega)\}}_0 - b^2(\omega) \underbrace{E\{c(\omega)d(\omega)\}}_0 + a(\omega)b(\omega) \underbrace{E\{c^2(\omega)\}}_{\sigma_c^2} - a(\omega)b(\omega) \underbrace{E\{d^2(\omega)\}}_{\sigma_c^2}$$

$$E\{f(\omega)g(\omega)\} = 0$$

d) Función de distribución de probabilidad del producto de dos variables aleatorias con distribución Rayleigh.

$$f_{Q_3}(q_3) = \frac{q_3}{\sigma_f^2 \sigma_c^2} \int_0^\infty \frac{1}{w} e^{-\frac{1}{2\sigma_f^2 \sigma_c^2} \left(\frac{w^4 \sigma_c^2 + q_3^2 \sigma_f^2}{w^2} \right)} dw$$

Para solucionar la integral se propone el siguiente cambio de variable

$$\theta = \ln \left(\frac{q_3 \sigma_f}{w^2 \sigma_c} \right); \quad d\theta = -\frac{2}{w} dw; \quad w^2 = \frac{q_3 \sigma_f}{\sigma_c e^\theta}; \quad \begin{array}{l} w \rightarrow 0^+ \Rightarrow \theta \rightarrow \infty \\ w \rightarrow \infty \Rightarrow \theta \rightarrow -\infty \end{array} \quad (60)$$

La integral queda escrita como sigue

$$\int_0^\infty \frac{1}{w} e^{-\frac{w^2}{2\sigma_f^2} - \frac{q_3^2}{2w^2 \sigma_c^2}} dw = \left(-\frac{1}{2} \right) \int_\infty^{-\infty} e^{-\frac{q_3}{2\sigma_c e^\theta \sigma_f} - \frac{e^\theta q_3}{2\sigma_c \sigma_f}} d\theta = \int_0^\infty e^{-\frac{q_3}{\sigma_c \sigma_f} (\cosh \theta)} d\theta \quad (67)$$

Haciendo referencia a las representaciones integrales de las funciones de Bessel [Abramowitz], se encuentra que, la función modificada de Bessel de segundo orden puede escribirse en forma de integral como:

$$K_n(x) = \frac{\pi^{1/2} \left(\frac{x}{2} \right)^n}{\Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right)} \int_0^\infty e^{-x(\cosh \theta)} (\sinh \theta)^{2n} d\theta \quad (68)$$

Entonces la integral corresponde a la función de Bessel modificada de orden cero y la FDP queda descrita por la siguiente expresión:

$$f_{Q_3}(q_3) = \frac{q_3 \cdot K_0\left(\frac{q_3}{\sigma_f \sigma_c}\right)}{\sigma_f^2 \sigma_c^2}$$

e) Valor esperado de los cocientes (VEC) en SVGDL

Se define el valor esperado como:

$$E\left\{\frac{\sqrt{f(\omega)^2 + g(\omega)^2}}{\sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}}\right\} = \iiint\limits_D \frac{\sqrt{f(\omega)^2 + g(\omega)^2} f_{F,G,A,B}(f, g, a, b)}{\sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2}} df dg da db$$

con f, g, a y b variables aleatorias con distribución normal, la función de distribución conjunta es una normal multivariada como se mostró en el capítulo 2

$$f_{F,G,A,B}(f, g, a, b) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \det(C)} \exp\left\{-\tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X}\right\}$$

\tilde{X} es el vector de variables aleatorias

\tilde{C} es la matriz de covarianzas

En la matriz de covarianzas aparecen las correlaciones entre la respuesta y la aceleración respecto de la cual se desea estimar la función de transferencia.

$$C = \begin{bmatrix} E[f \cdot f] & E[f \cdot a_x] & E[f \cdot h] & E[f \cdot b_x] \\ E[a_x \cdot f] & E[a_x \cdot a_x] & E[a_x \cdot h] & E[a_x \cdot b_x] \\ E[h \cdot f] & E[h \cdot a_x] & E[h \cdot h] & E[h \cdot b_x] \\ E[b_x \cdot f] & E[b_x \cdot a_x] & E[b_x \cdot h] & E[b_x \cdot b_x] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & gl \sigma^2 & 0 & 0 \\ gl \sigma^2 & \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & gl \sigma^2 \\ 0 & 0 & gl \sigma^2 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Sin embargo si se expresa la relación a partir de las variables aleatorias originales a_x, b_x, a_y, b_y se puede llegar a una expresión mas simplificada:

$$E\left\{\frac{\sqrt{f(\omega)^2 + h(\omega)^2}}{\sqrt{a_x(\omega)^2 + b_x(\omega)^2}}\right\} = E\left\{\frac{\sqrt{(g_1 a_x + g_2 a_y)^2 + (g_1 b_x + g_2 b_y)^2}}{\sqrt{a_x^2 + b_x^2}}\right\}$$

Donde a_x, b_x, a_y, b_y son las componentes reales e imaginarias del número complejo que resulta al transformar los procesos $A_x(t)$ y $A_y(t)$ al dominio de la frecuencia.

$$\iiint \frac{\sqrt{(g_1 a_x(\omega))^2 + g_2 a_y(\omega))^2 + (g_1 b_x(\omega))^2 + g_2 b_y(\omega))^2}}{\sqrt{a_x(\omega)^2 + b_x(\omega)^2}} f_{A_x, A_y, B_x, B_y}(a_x, a_y, b_x, b_y) da_x da_y db_x db_y$$

Como a_x , a_y , b_x y b_y también son variables aleatorias con distribución normal, la función de distribución conjunta es normal, pero la matriz de covarianzas es ahora diagonal.

$$C = \begin{bmatrix} E[a_x \cdot a_x] & E[a_x \cdot a_y] & E[a_x \cdot b_x] & E[a_x \cdot b_y] \\ E[a_y \cdot a_x] & E[a_y \cdot a_y] & E[a_y \cdot b_x] & E[a_y \cdot b_y] \\ E[b_x \cdot a_x] & E[b_x \cdot a_y] & E[b_x \cdot b_x] & E[b_x \cdot b_y] \\ E[b_y \cdot a_x] & E[b_y \cdot a_y] & E[b_y \cdot b_x] & E[b_y \cdot b_y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

y la FDP conjunta toma la siguiente forma:

$$f_{A_x, A_y, B_x, B_y}(a_x, a_y, b_x, b_y) = \frac{1}{4} \frac{e^{-1/2 \left[\frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2}{\sigma_1^2} \right]}}{\pi^2}$$

Y el valor esperado queda entonces definido por:

$$\iiint \frac{1}{4} \frac{\sqrt{(g_1 a_x(\omega))^2 + g_2 a_y(\omega))^2 + (g_1 b_x(\omega))^2 + g_2 b_y(\omega))^2}}{\sqrt{a_x(\omega)^2 + b_x(\omega)^2} \pi^2} e^{-1/2 \left[\frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2}{\sigma_1^2} \right]} da_x da_y db_x db_y$$

Al proponer el siguiente cambio de variable se obtiene una expresión con características similares a la que define la FDP de una distribución Rayleigh.

$$\begin{aligned} a_x &= r_1 \sin(t_1) & a_y &= r_2 \sin(t_2) \\ b_y &= r_2 \sin(t_2) & b_x &= r_1 \cos(t_1) \end{aligned}$$

$$\iiint \frac{1}{4} \frac{\sqrt{g_1^2 r_1^2 + 2 g_1 r_1 g_2 r_2 \cos(\tau) + g_2^2 r_2^2}}{\pi^2} e^{-\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2 \sigma_1^2} \right)} r_2 dr_1 dr_2 d\tau$$

Se desarrolla la integral de manera numérica para un conjunto simulado de valores g_1 y g_2 ; y estableciendo algunas relaciones con el desarrollo hecho para un grado de libertad, se encuentra que la siguiente expresión se ajusta bastante bien a la superficie obtenida mediante simulación.

$$E \left\{ \frac{\sqrt{(g_1 a_x + g_2 a_y)^2 + (g_1 b_x + g_2 b_y)^2}}{\sqrt{a_x^2 + b_x^2}} \right\} \approx \sqrt{\left(g_1^2 + \frac{\pi^2}{4} g_2^2 \right)}$$

REFERENCIAS

- Abramowitz M. y Stegun I. (1972) "Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and tables", National Bureau of Standards, Washington.
- Bendat J. y Piersol A. (1993) "Engineering applications of correlation and spectral analysis", John Wiley, New York.
- Carvajal J.C. (2000), "Análisis espectral de movimientos sísmicos en la ciudad de México para evaluar las propiedades dinámicas del suelo", Tesis de Maestría, UNAM, México.
- Crawford R. y Ward H.S. (1964), "Determination of the natural periods of building", Bulletin of the Seismic Society of America, pag (1743-1756).
- Farrar C. R. y James G. H. (1995), "Identification of dynamic properties from ambient vibration measurements", Pacific conference on Earthquake Engineering, University of Melbourne, Australia.
- Gardner W. (1990) "Introduction to random processes with applications to signals and systems", McGraw-Hill, Neva York.
- Harichandran R. (1984) "Space-Time Variation of Earthquake Ground Motion", National Science Foundation, September.
- Hoerner J.B. (1971) "Modal coupling and earthquake response of tall buildings", California Institute of Technology.
- Krylov N.M y Bogoliubov N. (1947) "Introduction to Nonlinear Mechanics", Princeton.
- Lin Y.K y Li Q. C. (1995) "Stochastic stability of wind excited structures" Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Pages 75-82
- Lung L. (1996) "Development of system identification", Linköping University Press, Sweden.
- Lung L. (1987) "System Identification – Theory for the user", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mendel J.M. (1973) "Discrete Techniques of Parameter Estimation", Marcel Dekker, U.S.A.
- Papoulis A. (1991) "Probability, random variables, and stochastic processes", McGraw-Hill, New York.
- Raol J.R. Girija G. y Singh. J. (2004) "Modeling and parameter estimation of dynamic systems", IEE Control Engineering Book Series Vol. 65, IEE, London, UK.
- Wallpole R, (1998) "Probability and statistics for engineers and scientists", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Zhabitsky V.M. (1998) "Theory of a transverse feedback system with a nonlinear transfer function", Joint Institute for Nuclear Research, 141980 Dubna, Moscow region, Russia

ABREVIACIONES, NOTACIÓN Y SÍMBOLOS

CVE	Cociente de los valores esperados de las amplitudes
CVE^2	Cociente de los valores esperados de las amplitudes al cuadrado
EDL	Ecuación diferencial lineal
E/S	Se refiere generalmente a los registros de entrada y salida
FDP	Función de densidad de probabilidad
FDA	Función de distribución acumulada
SUGDL	Sistema de un grado de libertad
SVGDL	Sistema de varios grados de libertad
V.A.	Variable aleatoria
VEC	Valor esperado de las amplitudes de los cocientes espectrales
VEC^2	Valor esperado de las amplitudes de los cocientes espectrales al cuadrado
VEP	Valor esperado del producto de amplitudes espectrales
$cov(x)$	Covarianza del vector de variables aleatorias X
$E\{ \}$	Esperanza matemática del vector de variables aleatorias X
$\text{Im} [z]$	Parte imaginaria del número complejo z
$\text{Re} [z]$	Parte real del número complejo z
$\text{Var} [x]$	Varianza de la variable aleatoria X
cv_Q	Coefficiente de variación de la variable aleatoria Q
$f_X(x)$	Función de densidad de probabilidad del vector de variables aleatorias X
$H(\omega)$	Función de transferencia
μ_q	Media de la variable aleatoria Q
σ_Q^2	Varianza de la variable aleatoria Q