

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

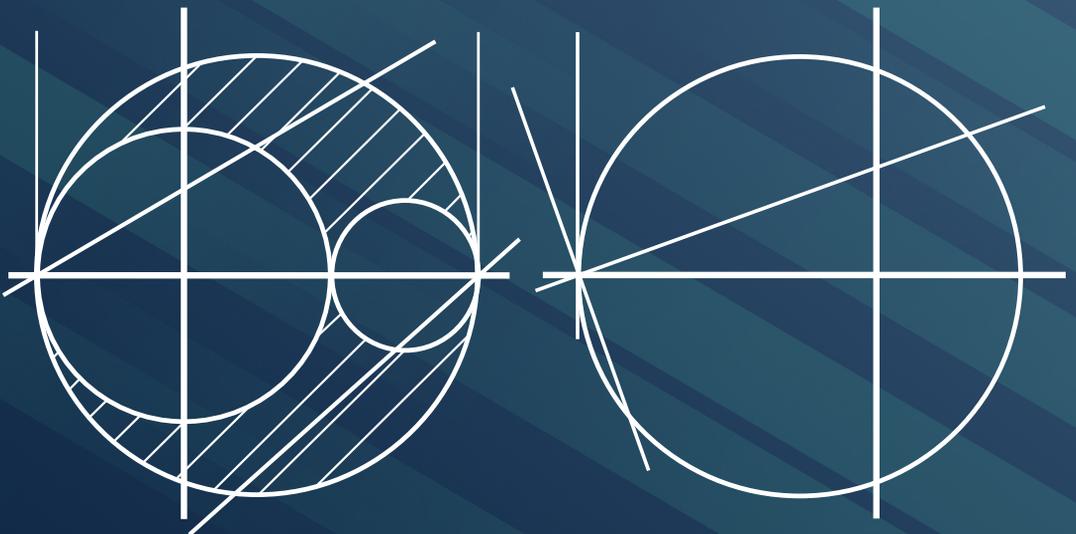
FACULTAD DE INGENIERÍA



TEMAS SELECTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

Ricardo Rubén Padilla Velázquez

DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA

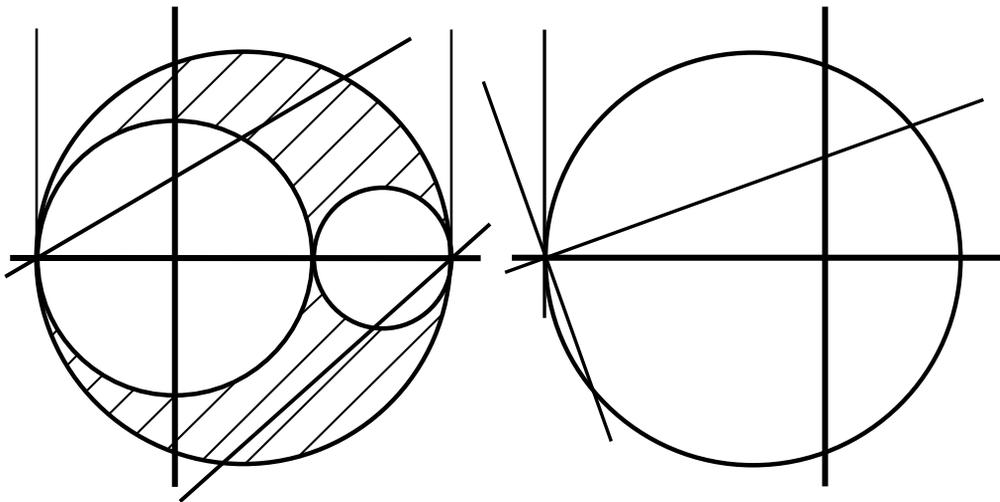




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

TEMAS SELECTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

Ricardo Rubén Padilla Velázquez



PADILLA VELÁZQUEZ, Ricardo Rubén.
Temas Selectos de Mecánica del Medio Continuo
México, Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2021, 231 p.

1

*TEMAS SELECTOS DE MECÁNICA
DEL MEDIO CONTINUO*

2

Mayo, 2021

D.R. © 2021, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México

3

FACULTAD DE INGENIERÍA
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

4

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional
Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular
de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

5

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL
Cuidado de la edición: María Cuairán Ruidíaz
Diseño de forros: Nismet Díaz Ferro

6

7

III

Deseo iniciar este Prólogo con el recuerdo que guardo de don Óscar de Buen López de Heredia (Jefe de la División de Ingeniería Civil y Topográfica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM a inicios de la década de los ochenta), quien nos reunió a un grupo de profesores (yo apenas me iniciaba como tal) y nos pidió colaborar en la impartición de una materia que pretendía reponer y que años atrás se hubiera dejado de impartir en la carrera de Ingeniero Civil, Mecánica del Medio Continuo. Por aquellos años, cuando se suspendió este curso, se impartía con un enfoque exclusivamente escalar, convirtiéndose en una materia difícil de asimilar por los estudiantes. En esa reunión don Óscar, reconocido por el gremio como un ícono de la ingeniería estructural, después de hacer comentarios sobre la importancia de la mecánica del medio continuo para los ingenieros civiles, propuso volver a impartir los temas de esta área del conocimiento, pero bajo la recomendación de ponerlos al alcance de los estudiantes del nivel licenciatura de una manera accesible, ya que también se reconocían avances en la forma de impartirlos. Ya se contaba entonces con textos con un enfoque vectorial, que hacían uso del concepto “tensor” como poderosa herramienta, tanto en el tema de esfuerzos como en el de deformaciones. El nuevo curso se llamó entonces Introducción al Comportamiento de los Materiales.

Los primeros cursos de esta materia se coordinaron desde el Departamento de Geotecnia, por el entonces jefe Don Francisco Zamora Millán. El autor de este material escrito tuvo la fortuna de ser designado como ayudante del Dr. Dagoberto de La Serna y recibir de este un curso que ponía énfasis en los fenómenos tridimensionales. Del Dr. de La Serna aprendió el método del polo fijo y la diferencia entre Análisis plano y Estado plano de esfuerzos.

El autor ha tenido muy presente la recomendación de don Óscar y ha ido integrando, a través de más de treinta y un años de impartir este curso a nivel licenciatura, unas notas que pretenden concretar aquella recomendación. El autor se propuso escribir este texto, utilizando símbolos y ecuaciones universales (en aras de un enfoque unificador a futuro), además de apoyar la idea de poder calcular todo en las ingenierías y en las ciencias, haciendo uso de un único sistema de unidades, como lo posibilita la Norma Oficial en México (el Sistema Internacional de Unidades). El autor debió realizar para este texto, una gran cantidad de dibujos que buscan que el estudiante pueda visualizar claramente el fenómeno que se analiza en cada caso. Con el afán de cumplir con un enfoque sencillo y accesible, se tomó la decisión de no utilizar la llamada “notación indicial”, considerando que esta herramienta se justifica más en los estudios de posgrado. Finalmente, el autor considera que los mejores jueces de este texto deben ser los estudiantes de nivel licenciatura, quienes podrán juzgar si se logró cumplir o no con la recomendación planteada por don Óscar de Buen.

El enfoque de este texto trata de hacer énfasis en presentar a los estudiantes primero el planteamiento espacial de un fenómeno mecánico, y después, como un caso particular, presentar una versión plana que no deje de representar al fenómeno tridimensional. El autor cree que se logra cumplir con lo antes planteado al proponer el concepto “Análisis plano”, tanto para esfuerzos como para deformaciones. El Análisis plano exige contar, en el caso de esfuerzos, con dos esfuerzos normales principales iguales y en el caso de deformaciones, con

dos deformaciones lineales unitarias principales, también iguales. Este enfoque no es el “enfoque clásico” que aparece en los textos tradicionales de mecánica de materiales o de resistencia de los materiales, donde se tratan casos planos que no cumplen con lo que se exige para el “Análisis plano”. En los textos comentados se habla del concepto “Estado plano”, tanto para los esfuerzos como para las deformaciones. El autor de este texto no pretende “corregir” el enfoque de los textos mencionados, sino que pone sobre la mesa lo que puede ser un enfoque más razonable y adecuado para nuestros estudiantes a inicios de este siglo XXI. No olvidemos que todos los fenómenos mecánicos que tienen que ver con la ingeniería, son tridimensionales, aunque muchas veces, con intenciones de una simplificación que en ocasiones no se justifica, se reduce a una forma plana, sin corroborar la validez de este proceder. Hay textos que plantean los análisis tridimensionales como “temas optativos”.

Este texto se compone de siete capítulos que el autor considera básicos para estudiantes de carreras de ingeniería a nivel licenciatura. El primer tema del texto es una Introducción que presenta la convención de signos que se utiliza más adelante, principalmente enfocado a esfuerzos normales y deformaciones unitarias. El segundo tema es Estado de esfuerzo, donde se introduce al estudiante a conceptos importantes y al uso de las herramientas matemáticas que ya conoce de cursos previos (álgebra de vectores, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales) y que aquí se aplican en forma intensiva. En este segundo tema se privilegia el análisis espacial y se muestra el caso plano bajo las condiciones en que sí se justifica plenamente. En el tema tres de Estado de deformación se presentan también conceptos fundamentales, primero en “Análisis plano” por razones didácticas, después en análisis espacial. Se presenta un enfoque de análisis y resolución de problemas con base en configuraciones. El tema cuatro de Principios generales de la mecánica, presenta una visión muy general de principios de la física que aplicados a problemas más complejos deben ser tomados muy en cuenta. En el tema cinco de Elasticidad lineal se hace una presentación, en primer término, de los parámetros asociados a esta teoría de comportamiento, posteriormente se presenta la versión tridimensional del tema y se muestran ejemplos de fenómenos espaciales. El tema seis de Modelos reológicos, introduce al cuerpo de conocimiento llamado: Reología. La reología estudia cómo fluyen los materiales en el tiempo. En el tema siete de Teorías de falla y ruptura, que es el último, se presentan criterios clásicos formales para analizar el tema.

Finalmente, el autor desea que este texto pueda ser de utilidad para estudiantes de diferentes carreras de ingeniería que requieren el conocimiento de estos temas. Si este objetivo se logra, aunque sea en cierta medida, habrá valido la pena el trabajo y el tiempo invertidos. Queda un texto con un enfoque como le habría gustado al autor contar con uno así cuando le tocó aprender estos temas.

Como autor expreso mi más sincero agradecimiento a la maestra María Cuairán Ruidíaz, Jefa de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería, por el apoyo que brindó a esta obra y también por el apreciable trabajo de su calificado equipo humano, que permitió que este texto pudiera finalmente salir a la luz.

Ricardo Rubén Padilla Velázquez

ÍNDICE

Prólogo	IV
1. Conceptos previos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Definiciones	1
1.3. Convención de signos en análisis uniaxial	1
1.4. Concepto de deformación lineal	3
1.5. Concepto de esfuerzo normal como escalar	3
1.6. Concepto de deformación lineal unitaria	4
1.7. Ejemplos de aplicación de deformación lineal unitaria	5
1.8. Concepto de deformación volumétrica	7
1.9. Concepto de deformación volumétrica unitaria	7
1.10. Deformación volumétrica unitaria, en función de deformaciones lineales unitarias	7
1.11. Ejemplos de deformación volumétrica unitaria	9
2. Estado de esfuerzo	12
2.1. Introducción	12
2.2. Problema fundamental de la mecánica del medio continuo	12
2.3. Teoría del estado de esfuerzo	14
2.4. Definición de caras positivas	21
2.5. Equilibrio del cubo diferencial de esfuerzos	22
2.6. Convención de signos para esfuerzos escalares	24
2.7. Método analítico tensorial para la determinación de los componentes normal y cortante, asociados a un plano δ que se define por su versor n	26
2.8. Esfuerzos principales en análisis tridimensional	31
2.9. Esfuerzos octaédricos	47
2.10. Análisis plano de esfuerzos	49
2.11. Método analítico tensorial de análisis plano de esfuerzos, para calcular los esfuerzos σ y τ ..	52
2.12. El elipsoide de Lamé	58
2.13. La cuadrática de Cauchy	61
2.14. Región gráfica de Otto Mohr en análisis tridimensional	62
2.15. Solución general gráfica de Mohr para obtener los valores de σ y τ en un plano δ definido por un versor n^*	70
2.16. Rotación de tensores y rotación de versores	73
2.17. Solución gráfica de Análisis plano	78
2.18. Relación entre las soluciones gráficas tridimensional y de Análisis plano	90
2.19. Descomposición de un tensor esfuerzo en sus partes esférica y desviadora	93
3. Estado de deformación	96
3.1. Introducción	96
3.2. Tensor incremental de esfuerzo	96
3.3. Componentes del estado cinemático de un cuerpo deformable	97
3.4. Manejo de configuraciones para análisis de deformaciones	98
3.5. Tipos de deformación más comunes	99
3.6. Vectores desplazamiento	106
3.7. Deformaciones pequeñas y notación ingenieril	107

3.8.	Configuraciones en primer cuadrante	108
3.9.	Deformación, deformación unitaria, vector desplazamiento y vector deformación	110
3.10.	Formación del tensor deformación en análisis plano	117
3.11.	Método analítico tensorial para cálculo de ϵ y g asociados a cierta dirección, definida por un versor n , en Análisis plano	117
3.12.	Ejemplos de aplicación con método analítico tensorial de deformaciones en Análisis plano y comentarios sobre la solución gráfica del polo fijo	120
3.13.	Análisis espacial de deformaciones con base en configuraciones.	127
3.14.	Obtención del tensor deformación en el espacio.	131
3.15.	Método analítico tensorial en análisis espacial de deformaciones, para determinación de la deformación lineal unitaria y la distorsión asociadas a la dirección de un versor n	132
3.16.	Ejemplo de aplicación usando el método analítico tensorial de deformaciones en análisis tridimensional y comentarios sobre la solución gráfica de Mohr equivalente	133
3.17.	Rosetas	140
4.	Principios generales de la mecánica	148
4.1.	Introducción	148
4.2.	Principios generales.	148
4.3.	Principio de conservación de la masa	149
4.4.	Principio de la conservación de la cantidad de movimiento	150
4.5.	Principio de conservación de la energía	150
4.6.	Principio de aumento de entropía	151
5.	Elasticidad lineal	153
5.1.	Introducción	153
5.2.	Modelación elástica lineal.	153
5.3.	Parámetros de elasticidad lineal	154
5.4.	Ejemplos de cálculo de parámetros elástico lineales	172
5.5.	Elasticidad lineal espacial o tridimensional (triaxial).	174
5.6.	Ejemplos de elasticidad lineal tridimensional.	179
6.	Modelos reológicos	193
6.1.	Introducción	193
6.2.	Unidades reológicas (de comportamiento simple)	193
6.3.	Modelos reológicos (de comportamiento más complejo)	198
6.4.	Ejemplos de modelos reológicos.	207
6.5.	Fenómeno de relajación	208
6.6.	Ejemplo del fenómeno de relajación	210
7.	Teorías de falla y ruptura	211
7.1.	Introducción	211
7.2.	Criterio de Tresca	211
7.3.	Criterio de fluencia de Von Mises	218
7.4.	Criterio de Mohr-Coulomb	223
7.5.	Criterio de falla para rocas usando representación gráfica en el plano de Mohr	226
	Bibliografía	228

1. CONCEPTOS PREVIOS

1.1. Introducción

Se presentan definiciones de conceptos relacionados con el cuerpo de conocimientos de este tema. Se comenta sobre la convención de signos que se utiliza en la mecánica del medio continuo, que es la misma que se usa en la ingeniería estructural y que es a su vez opuesta a la convención de signos que utilizan la ingeniería hidráulica y la ingeniería geotécnica (como áreas de la ingeniería civil). Finalmente, se presentan los diferentes conceptos de deformación que se van a usar en temas posteriores.

1.2. Definiciones

La mecánica de los materiales es la rama de la física que describe los fenómenos propios del comportamiento de los materiales, cuando sobre ellos actúan acciones que los alteran.

La mecánica del medio continuo comprende el estudio macroscópico de los cuerpos deformables, considerando la posibilidad de las acciones comúnmente observadas en problemas de Ingeniería.

La mecánica del medio continuo estudia las fuerzas de reacción en el interior del cuerpo deformable, por efecto de la aplicación de fuerzas externas o asociadas a la gravitación.

Se debe entender como medio continuo a un dominio físico que es una región limitada por sus fronteras, en el cual existe materia y en donde cualquier fenómeno físico se puede describir por medio de una función matemática continua.

1.3. Convención de signos en análisis uniaxial

Se hace un análisis que involucra a un solo eje (una sola dimensión en una dirección definida), como lo expresa la palabra uniaxial (*axis* significa eje).

1.3.1. Convención de signos para las fuerzas

En mecánica del medio continuo se consideró conveniente definir como fuerzas positivas (en realidad incrementos de fuerza positivos) a aquellas que se modelan con sentido saliente del centro de masa de un cuerpo. Por la misma razón, se definen como fuerzas negativas a aquellas que se modelan con sentido entrante hacia el centro de masa del cuerpo o diagrama de cuerpo libre que se analiza. En la figura 1.1 se muestra esquemáticamente cómo se vería de perfil una barra cilíndrica de cierto material, en un análisis de tensión uniaxial, antes de la

aplicación de un incremento de fuerza, suponiendo por el momento que no existe el efecto de la acción gravitatoria (bajo condición de ingravidez). Observe en esta figura el diámetro inicial (D_i) y la longitud inicial de la barra (L_i), antes de aplicar un incremento de fuerza que va a producir una deformación. Observe también el eje de análisis, única dirección donde en este caso se van a medir las longitudes y las deformaciones.

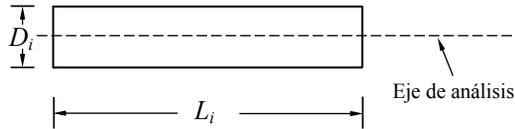


FIGURA 1.1. Barra de perfil y dimensiones iniciales

A la barra anterior se le va a aplicar un incremento de fuerza para deformarla. Se habla de incremento de fuerza en lugar de fuerza a secas, ya que en este curso asociaremos los incrementos de fuerza con las deformaciones. Con base en lo dicho se pretende lograr que:

- Fuerzas incrementales positivas (de tensión) \Rightarrow Deformaciones positivas
- Fuerzas incrementales negativas (de compresión) \Rightarrow Deformaciones negativas

1.3.2. Convención de signos para las deformaciones

Para lograr una asociación lógica de las deformaciones con las fuerzas incrementales (o incrementos de fuerza), se acepta por convención que la aplicación de un incremento de fuerza positiva produce una deformación positiva. De acuerdo con esto, una deformación positiva se da cuando se verifica, en cierta dirección de análisis, el incremento de la dimensión, en este caso de la longitud. Son deformaciones positivas también, de acuerdo con la convención usada y generalizando, cuando se tiene un aumento en el área (análisis plano) o un aumento en el volumen (análisis espacial). En la figura 1.2 se muestra la misma barra de la figura 1.1, donde se asocia una deformación positiva a la aplicación de un incremento de fuerza positiva o de tensión. En la misma figura se muestra lo que sería para la barra cilíndrica un área transversal inicial (A_i) medida antes de la aplicación de la fuerza incremental (transversal a la aplicación del incremento de fuerza).

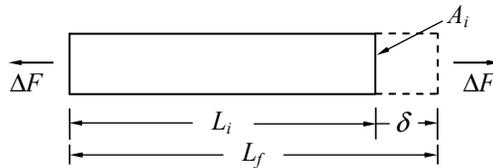


FIGURA 1.2. Dimensiones de barra y deformación

Dado que ciertos materiales que utiliza el ingeniero civil son poco deformables (para esfuerzos que se aplican en obras de ingeniería civil, en acero, concreto y rocas naturales o artificiales), se acuerda hacer uso en los cálculos del área transversal inicial (se supondrá que varía poco el área transversal cuando una barra se deforma axialmente). Existen materiales que también utiliza el ingeniero civil que no son poco deformables, como los suelos (en realidad se consideran altamente deformables), por lo que en este caso sí se debe tomar en cuenta la variación del área transversal y no únicamente el valor inicial, suponiéndolo fijo (se debe hacer corrección del área transversal, en este último caso). Se ha logrado entonces asociar lógicamente, un incremento de fuerza positiva a una deformación positiva.

En forma general y para reforzar la idea, se puede decir que, desde el punto de vista de la mecánica del medio continuo y de la ingeniería estructural, se tienen deformaciones positivas no sólo lineales cuando se tiene un aumento de la longitud, del área y del volumen.

1.4. Concepto de deformación lineal

Para que la deformación lineal sea positiva (δ), de acuerdo con la figura 1.2, se debe restar la longitud inicial a la final (L_f), como se muestra en la ecuación (1-1):

$$\delta = L_f - L_i \quad (1-1)$$

A continuación se muestra la literal y la dimensión de cada concepto utilizado en ecuaciones y figuras.

δ , deformación lineal [L]

L_f , longitud final [L]

L_i , longitud inicial [L]

ΔF , incremento de fuerza que produce la deformación [MLT^{-2}] o [F]

A_i , área transversal inicial de la barra [L^2]

1.5. Concepto de esfuerzo normal como escalar

Aunque todavía no se definen como conceptos, se pretende ahora lograr asociar un esfuerzo (normal en este caso) con una deformación lineal unitaria (adimensional), con la misma lógica que se aplicó para incrementos de fuerza y deformaciones, de modo que:

Esfuerzos normales positivos (de tensión) \Rightarrow Deformaciones lineales unitarias positivas

Esfuerzos normales negativos (de compresión) \Rightarrow Deformaciones unitarias negativas

El incremento de esfuerzo normal, que en este caso llamaremos medio o promedio, resulta de dividir el incremento de fuerza entre el área transversal inicial, como se muestra:

$$\Delta\sigma_m = \frac{\Delta F}{A_i} \quad (1-2)$$

donde:

$\Delta\sigma_m$, incremento de esfuerzo normal medio o promedio $[ML^{-1}T^{-2}]$ o $[FL^{-2}]$

1.6. Concepto de deformación lineal unitaria

Se define como deformación lineal unitaria, conforme se postuló por Augustin Louis Cauchy, a la relación entre la deformación y la longitud inicial. No se debe perder de vista que, en este caso uniaxial que analizamos, la longitud inicial y la deformación se miden en la misma dirección de análisis.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_i} = \frac{L_f - L_i}{L_i} = \frac{L_f}{L_i} - 1 \quad (1-3)$$

Este concepto así definido es adimensional [1], por lo que para garantizarlo, se deben usar las mismas unidades tanto en el numerador como en el denominador.

Es costumbre en la ingeniería civil presentar gráficas que modelan el comportamiento de deformación lineal unitaria contra incremento de esfuerzo normal, como se muestra en la gráfica de la figura 1.3. En la misma se puede ver el comportamiento de una aleación metálica frágil (acero *cold rolled*). En general, al aplicar esfuerzos a materiales como metales y rocas naturales o artificiales, en obras de ingeniería civil, se obtienen valores pequeños de deformación. Por otro lado, en una prueba a la falla, como se modela en la misma figura, se deforma el material hasta que se declara su falla por ruptura. En la figura 1.3 también se hace referencia a que la dirección de análisis es la misma del eje Z .

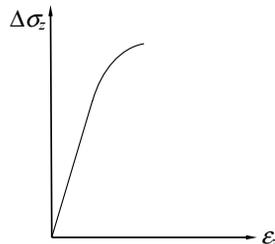


FIGURA 1.3. Curva deformación unitaria-incremento de esfuerzo (acero *cold rolled*)

1.7. Ejemplos de aplicación de deformación lineal unitaria

EJEMPLO 1.1

Calcule, con base en literales de la figura 1.4, la deformación lineal unitaria aplicando el criterio de Cauchy, de una barra metálica que se encuentra en dirección del eje Z , sujeta de la parte superior y en reposo por peso propio, que reporta como longitud inicial 1,236 458 m. En la condición final y bajo la acción de un incremento de fuerza, la barra se alarga y estabiliza su deformación al alcanzar la longitud de 1,244 480 m. A este primer cálculo lo denominaremos primer acto (con subíndice 1, “uno”), ya que posteriormente provocaremos un segundo alargamiento a la misma barra. Cierre sus cálculos a cinco cifras significativas.

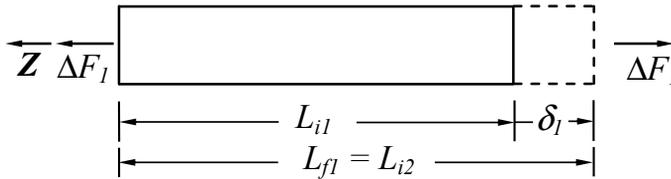


FIGURA 1.4. Alargamiento de la barra en un acto

SOLUCIÓN

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{L_{i1}} = \frac{L_{fi} - L_{i1}}{L_{i1}} = \frac{1,244\ 480\ \text{m} - 1,236\ 458\ \text{m}}{1,236\ 458\ \text{m}} - 1 \approx 6,487\ 9 \times 10^{-3} \text{ ó } 0,648\ 79\%$$

EJEMPLO 1.2

Si a la misma barra del ejemplo anterior se le aplica un incremento de fuerza adicional, con base en las literales de la figura 1.5, suponiendo que no hubiera sufrido una deformación previa, finalmente alcanza una nueva dimensión que se estabiliza en 1,255 237 m. Como segundo acto calcule la deformación lineal unitaria (adicional) aplicando el criterio de Cauchy.

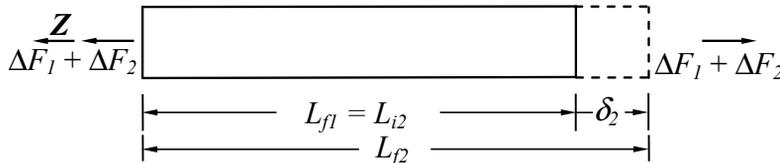


FIGURA 1.5. Alargamiento adicional en un segundo acto

SOLUCIÓN

$$\varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{L_{i2}} = \frac{L_{f2}}{L_{i2}} - 1 = \frac{1,255\ 237\ \text{m}}{1,244\ 480\ \text{m}} - 1 \approx 8,643\ 8 \times 10^{-3} \text{ ó } 0,864\ 38\%$$

EJEMPLO 1.3

Si ahora calculamos la deformación lineal unitaria en un único acto, que engloba a los dos alargamientos de los ejemplos anteriores, como se muestra en la figura 1.6, desde la longitud inicial uno hasta la longitud final tres aportada, se cumple que: $\Delta F_3 = \Delta F_1 + \Delta F_2$. Supondremos en los ejemplos que el material responde como un resorte.

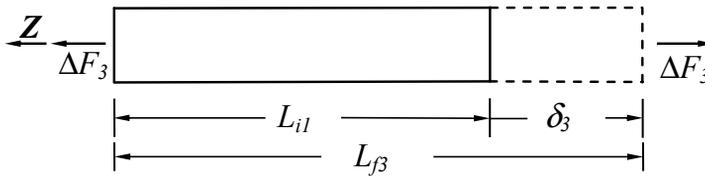


FIGURA 1.6. Alargamiento de la misma barra en un solo acto

SOLUCIÓN

$$\varepsilon_3 = \frac{\delta_3}{L_{i1}} = \frac{L_{f3}}{L_{i1}} - 1 \approx \frac{1,255\ 237\ \text{m}}{1,236\ 458\ \text{m}} - 1 \approx 1,518\ 8 \times 10^{-2} \text{ ó } 1,518\ 8\%$$

Es deseable ahora hacer una comparación entre la última deformación unitaria obtenida y el resultado de la suma de las deformaciones parciales calculadas en los actos 1 y 2. Veamos entonces el valor de la suma de las deformaciones unitarias parciales de los actos 1 y 2.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \approx 6,487\ 9 \times 10^{-3} + 8,643\ 8 \times 10^{-3} \approx 1,513\ 2 \times 10^{-2}$$

Haciendo ahora una comparación se puede concluir, de acuerdo con el criterio de Cauchy, que la suma de las deformaciones unitarias parciales (suma de lo sucedido en los actos uno y dos) no es igual a la deformación unitaria total en un solo acto (acto único tres).

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \approx 1,513\ 2 \times 10^{-2} \neq 1,518\ 8 \times 10^{-2} \approx \varepsilon_3$$

Sólo como comentario, se puede demostrar que cuando se usa el criterio de deformación unitaria natural (diferente al criterio de Cauchy) la suma de las deformaciones parciales sí es igual a la deformación en un solo acto, aunque para no complicar la comprensión de algunos conceptos en este texto, únicamente veremos el criterio de Cauchy, que históricamente es el que se ha impuesto y el aceptado oficialmente en el tratamiento de este tema.

1.8. Concepto de deformación volumétrica

Si se tiene un cuerpo con un cierto volumen inicial y se deforma para alcanzar un cierto valor de volumen final, la deformación volumétrica se define, con la convención de signos de este texto antes comentada, como la diferencia entre el volumen final y el inicial.

$$\Delta V = V_f - V_i \quad (1-4)$$

1.9. Concepto de deformación volumétrica unitaria

Se define como deformación volumétrica unitaria, con la convención de signos de este texto y desde el punto de vista del criterio de Cauchy, a la relación entre la deformación volumétrica y el volumen inicial, como se muestra.

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_i} = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1 \quad (1-5)$$

1.10. Deformación volumétrica unitaria, en función de deformaciones lineales unitarias

Para poder argumentar diversos conceptos en forma didáctica, se propone un cuerpo con forma inicial de paralelepípedo rectangular, que al deformarse y al mostrar su forma final, se siga visualizando también como un paralelepípedo rectangular (cuboide). En la figura 1.7 se muestran las configuraciones inicial y final de un cuerpo, que cumplen con lo antes especificado.

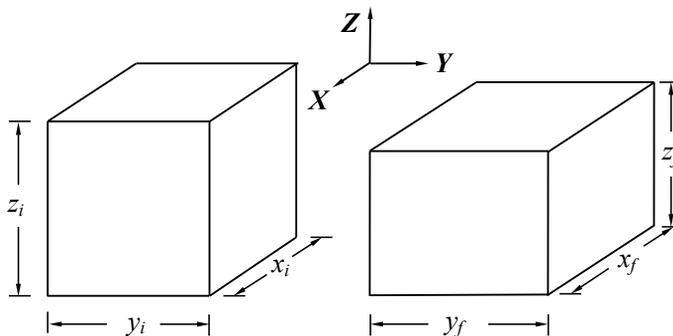


FIGURA 1.7. Dimensiones iniciales y finales de un cuerpo como paralelepípedos rectangulares

Con el criterio de Cauchy, se debe aceptar que:

En un análisis exclusivo en dirección del eje X , se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{x_i} = \frac{x_f - x_i}{x_i} = \frac{x_f}{x_i} - 1 \quad (1-6)$$

En un análisis en dirección del eje Y , se tiene:

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{y_i} = \frac{y_f - y_i}{y_i} = \frac{y_f}{y_i} - 1 \quad (1-7)$$

En un análisis en dirección del eje Z , se tiene:

$$\varepsilon_z = \frac{\delta_z}{z_i} = \frac{z_f - z_i}{z_i} = \frac{z_f}{z_i} - 1 \quad (1-8)$$

El volumen inicial, con base en las dimensiones iniciales del cuerpo que se propone, se puede expresar como:

$$V_i = x_i y_i z_i \quad (1-9)$$

Por otro lado, el volumen final del cuerpo se puede expresar, en función de sus dimensiones finales como:

$$V_f = x_f y_f z_f \quad (1-10)$$

De acuerdo con lo anterior y con la ecuación (1-5), la deformación volumétrica unitaria común o de Cauchy, se puede expresar como se muestra:

$$\varepsilon_v = \frac{V_f}{V_i} - 1 = \frac{x_f y_f z_f}{x_i y_i z_i} - 1 = \left(\frac{x_f}{x_i} \right) \left(\frac{y_f}{y_i} \right) \left(\frac{z_f}{z_i} \right) - 1 \quad (1-11)$$

Pero recordemos que, con base en las expresiones (1-6), (1-7) y (1-8), se tiene que:

$$\frac{x_f}{x_i} = 1 + \varepsilon_x \quad (1-12)$$

$$\frac{y_f}{y_i} = 1 + \varepsilon_y \quad (1-13)$$

$$\frac{z_f}{z_i} = 1 + \varepsilon_z \quad (1-14)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (1-12), (1-13) y (1-14) en la forma final de la ecuación (1-11), se llega a:

$$\varepsilon_v = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \quad (1-15)$$

Desarrollando y ordenando los términos se llega a que:

$$\varepsilon_v = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z - 1 \quad (1-16)$$

Expresando lo obtenido en su forma más compacta, se logra una ecuación, bajo un concepto exacto y aplicando el criterio estipulado (Cauchy), que es:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \quad (1-17)$$

Para el caso particular de deformaciones pequeñas, Cauchy razonó que, si se tienen pequeños valores de deformación, al efectuar un doble producto o, con más razón, un triple producto, se debe de tener un número aún más pequeño. Así, propone que únicamente para el caso de deformaciones pequeñas, se acepte suponer que la deformación volumétrica se tome como la suma de las deformaciones lineales unitarias parciales, despreciando el valor “supuestamente reducido” de los otros términos producto. De acuerdo con esto, en muchos casos aceptaremos con Cauchy, para deformaciones pequeñas, lo siguiente:

$$\varepsilon_v \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1-18)$$

Desde el punto de vista de la ingeniería civil, se propone aceptar con el criterio de Cauchy, que una deformación lineal unitaria se considere pequeña, igual o menor al tres por ciento.

$$\varepsilon \leq 0,03 \quad \text{o también expresado como porcentaje} \quad \varepsilon \leq 3\%$$

1.11. Ejemplos de deformación volumétrica unitaria

EJEMPLO 1.4

Se ha labrado una probeta con forma de paralelepípedo rectangular, donde asociando sus lados a los ejes del sistema de referencia, en forma análoga a los cuboides de la figura 1.7, se tiene que: $x_i = 1,326\ 42\ \text{m}$; $y_i = 1,275\ 37\ \text{m}$; $z_i = 1,139\ 84\ \text{m}$. Después de aplicar fuerzas a la probeta que no definiremos a detalle, se midieron las dimensiones después de la deformación (finales) que ahora son: $x_f = 1,339\ 19\ \text{m}$; $y_f = 1,292\ 98\ \text{m}$; $z_f = 1,113\ 58\ \text{m}$. Vea que se está suponiendo

una exactitud en las mediciones de hasta centésimas de milímetro, lo que permite expresar el número con seis cifras significativas.

Calcule con el criterio de Cauchy:

a) La deformación lineal unitaria en cada una de las tres direcciones del sistema de referencia. Mantenga la exactitud de los cálculos en seis cifras significativas.

b) La deformación volumétrica unitaria que ha sufrido la probeta, bajo el concepto exacto. También aquí mantenga la exactitud de los cálculos dentro de las seis cifras significativas.

SOLUCIÓN

a) Se calcula la deformación unitaria en cada dirección:

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{x_i} = \frac{x_f}{x_i} - 1 = \frac{1,339\ 19\ \text{m}}{1,326\ 42\ \text{m}} - 1 \approx 9,627\ 42 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{y_i} = \frac{y_f}{y_i} - 1 = \frac{1,292\ 98\ \text{m}}{1,275\ 37\ \text{m}} - 1 \approx 1,380\ 78 \times 10^{-2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\delta_z}{z_i} = \frac{z_f}{z_i} - 1 = \frac{1,113\ 58\ \text{m}}{1,139\ 84\ \text{m}} - 1 \approx -2,303\ 83 \times 10^{-2}$$

b) Para calcular la deformación volumétrica unitaria, se deben calcular primero los volúmenes inicial y final.

$$V_i = x_i y_i z_i = 1,326\ 42\ \text{m}(1,275\ 37\ \text{m})(1,139\ 84\ \text{m}) \approx 1,928\ 24\ \text{m}^3$$

$$V_f = x_f y_f z_f = 1,339\ 19\ \text{m}(1,292\ 98\ \text{m})(1,113\ 58\ \text{m}) \approx 1,928\ 21\ \text{m}^3$$

Observe que el volumen final es un poco menor que el inicial, por lo que se debe esperar una deformación volumétrica unitaria negativa, ya que el volumen disminuye tras la deformación. Ahora calculamos, con los volúmenes obtenidos, la deformación volumétrica unitaria bajo el concepto exacto y aplicando el criterio de Cauchy:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1 \approx \frac{1,928\ 21\ \text{m}^3}{1,928\ 24\ \text{m}^3} - 1 \approx -1,555\ 82 \times 10^{-5}$$

EJEMPLO 1.5

Se pide ahora que obtenga el valor de la suma de las deformaciones lineales unitarias (una en cada dirección), con los mismos datos del inciso a) del ejemplo 1.4.

SOLUCIÓN

Se calcula la suma solicitada:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \approx 0,962\ 742 \times 10^{-2} + 1,380\ 78 \times 10^{-2} - 2,303\ 83 \times 10^{-2} \approx 3,969\ 20 \times 10^{-4}$$

Esta suma corta que acepta Cauchy para modelar en forma aproximada una deformación pequeña volumétrica unitaria, falta a la verdad del fenómeno en este ejemplo. Vea que todas las deformaciones unitarias son pequeñas y, sin embargo, la deformación volumétrica exacta (en función de los volúmenes) nos dice que el volumen disminuye en casi 0,001 6% (por el signo negativo), cuando la suma corta aceptada para ciertas condiciones por Cauchy nos sugiere que el volumen se incrementa en casi 0,04%. Este ejemplo está diseñado para ver lo delicado que es usar el criterio de Cauchy sin un razonamiento asociado, aun para deformaciones pequeñas. El caso analizado usando la suma de las deformaciones unitarias parciales, no permite conceptualizar correctamente el sentido en que se da el fenómeno de deformación (modela una aparente expansión en lugar de una compresión volumétrica).

A partir de lo visto en el ejemplo 1.4 y haciendo uso del resultado del ejemplo 1.5, se puede estar de acuerdo con la desigualdad que se plantea a continuación, al comparar los dos cálculos, que reporta a dos fenómenos que estrictamente son diferentes (se obtiene diferente módulo y diferente signo):

$$\varepsilon_v \approx -1,555\ 82 \times 10^{-5} \neq 3,969\ 20 \times 10^{-4} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

A pesar de las diferencias en los cálculos, al tratar de modelar el fenómeno de deformación volumétrica unitaria, por un lado, con el concepto exacto y por otro con la suma del valor parcial en cada dirección, en muchas aplicaciones de mecánica del medio continuo se acepta como válido aplicar la suma corta. Más adelante se verá cómo se aplica la suma corta (concepto no exacto) en el capítulo de Elasticidad lineal.

2. ESTADO DE ESFUERZO

2.1. Introducción

Se presenta en este tema el concepto de esfuerzo en un medio continuo y se aterriza en el importante concepto de tensor esfuerzo, que permite definir el estado de esfuerzo en un punto orientado dentro de un medio continuo. El análisis de esfuerzos se presenta primero en el espacio (tres dimensiones) y posteriormente en lo que el autor denomina como “Análisis plano de esfuerzos” (se especifica su diferencia con el tema nombrado “estado plano de esfuerzos”). Se muestra la forma de obtener esfuerzos principales y la dirección en que éstos actúan. Se presenta el plano de Mohr y se muestra cómo resolver gráficamente la obtención de esfuerzos tanto en análisis espacial como en análisis plano de esfuerzos. Finalmente se indica la forma de separar las componentes esférica y desviadora de un tensor esfuerzo en el espacio.

2.2. Problema fundamental de la mecánica del medio continuo

Dada una región en el espacio (\mathcal{R}^3) ocupada por masa continuamente distribuida, con condiciones iniciales o de frontera conocidas, determinar sus características mecánicas en cualquier punto de dicha región.

Consideraciones

- Siempre se debe definir la región del espacio que ocupa el sistema en estudio.
- Se establece la condición de que la masa está continuamente distribuida, lo que implica la existencia del siguiente límite para cualquier punto de la región en estudio:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (2-1)$$

Este concepto se llama densidad o masa específica y es un límite que se supone con el mismo valor en cualquier punto de la región citada.

ΔV volumen en el entorno elemental de un punto \underline{P}
 Δm incremento de masa contenido en ΔV

En la figura 2.1 se observa una región en el espacio cartesiano, donde aparece el sistema de referencia derecho que vamos a usar en este texto, en el cual se reserva la dirección del eje \mathbf{Z}

para nuestra dirección vertical (la misma de una línea de campo gravitatorio en la superficie de nuestro planeta).

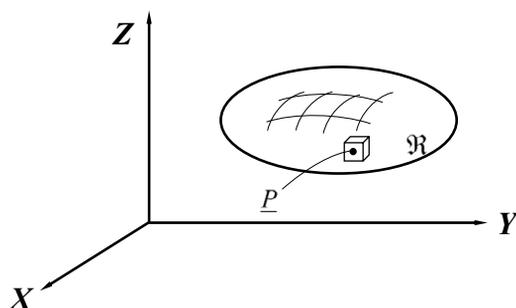


FIGURA 2.1. Región en el espacio y punto de análisis dentro de la región

A partir del concepto anterior, se puede determinar la masa (m) comprendida en la región \mathcal{R} , la cual está dada por:

$$m = \iiint_{\mathcal{R}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad (2-2)$$

- c) Se deben conocer las acciones que ejercen los contornos sobre el sistema en estudio, o bien, el estado inicial de éste. En la figura 2.2 se esquematiza un sistema rodeado de sus contornos.

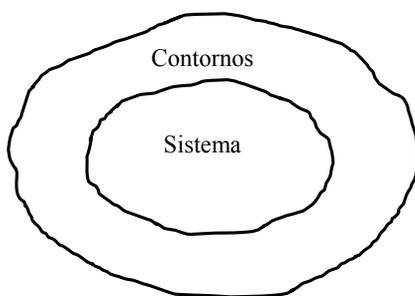


FIGURA 2.2. Esquema de un sistema y sus contornos

Definición: Los contornos son la parte del universo que gravita directamente sobre nuestro sistema.

En forma compacta, el estado energético de un sistema se compone de las siguientes partes:

- a) Estado de esfuerzo
- b) Estado cinemático
 - b.1. Traslación
 - b.2. Rotación
 - b.3. Deformación
 - b.3.1 Lineal (lineal unitaria)
 - b.3.2 Angular (o distorsión)
- c) Estado de energía interna, determinado por su temperatura (termodinámica)

Los estados de esfuerzo (o de incremento de esfuerzo) y cinemático se pueden relacionar por medio de las llamadas ecuaciones constitutivas que se suponen válidas para determinado material que se esté analizando. Las funciones que modelan el comportamiento de los materiales, en general, dependen de cuatro variables independientes (x y z t).

2.3. Teoría del estado de esfuerzo

Cuando a un cuerpo analizado como un sistema, que supondremos inicialmente en la ingravidez, se le aplican ciertas fuerzas externas, se producen esfuerzos internos equilibrantes y se generan deformaciones. Para analizar un cuerpo en condiciones de equilibrio estático, supondremos que el cuerpo reacciona en forma elástica lineal (para considerar que para ciertas fuerzas se deforma muy rápido y después ya no se sigue deformando). Otra posibilidad de estudio consiste en hacer el análisis para cierto instante congelando la acción, de modo que a ciertas fuerzas aplicadas corresponda un solo valor de deformación. Con estas consideraciones se supone que las fuerzas externas se equilibran con las fuerzas internas. Véase la figura 2.3.

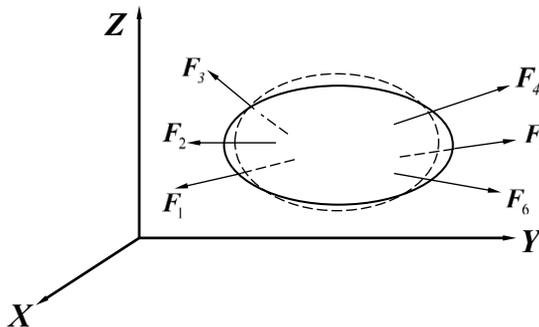


FIGURA 2.3. Cuerpo esforzado en equilibrio (analizado como sistema)

A continuación se hace un corte imaginario con la intención de generar un cuerpo libre, por medio de un plano δ que vamos a obligar a que sea normal al eje Y del sistema de referencia. Se visualiza en las figuras 2.4 y 2.5 un diagrama de cuerpo libre del subsistema izquierdo. La fuerza F que se muestra en la figura 2.5 es la que equilibra a las que se aplican desde el exterior y al peso del subsistema que se analiza. El vector n es un vector *unitario y normal* al plano δ al cual se asocia. De aquí en adelante al vector n se le va a denominar como *versor*. El área de corte en el cuerpo, normal a este versor ($n = 0i + j + 0k$), se define como A_y .

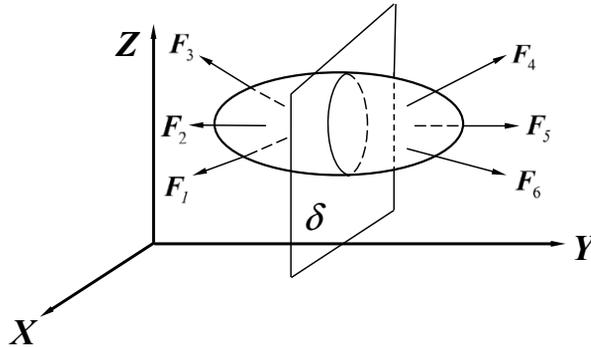


FIGURA 2.4. Plano de corte para análisis del equilibrio

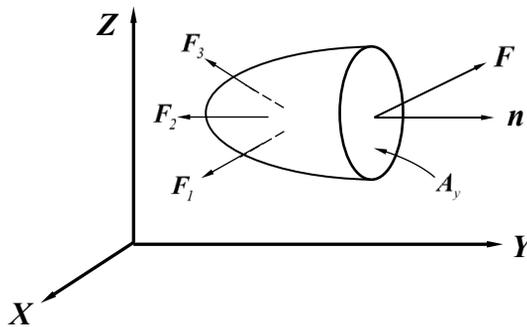


FIGURA 2.5. Subsistema izquierdo en equilibrio estático

Se define como vector esfuerzo medio (o promedio) al que resulta de dividir a la fuerza F entre el área de corte sobre el cuerpo definido por el plano δ . A este vector esfuerzo se le representa así:

$$t^{(Y)}_m = F/A_y \tag{2-3}$$

Considérese ahora a una fracción de la fuerza F que actúa en una fracción del área A_y (ΔF actuando en el área ΔA_y), en el entorno del punto \underline{P} , que se encuentra en el mismo plano de corte δ . A esta fracción de fuerza la llamaremos incremento de fuerza. Véase la figura 2.6.

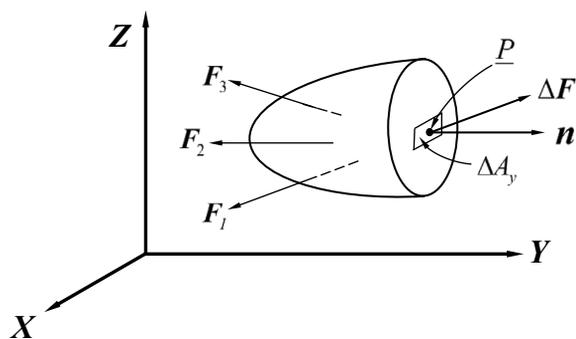


FIGURA 2.6. Incremento de fuerza actuando en incremento de área

El ángulo que forma el versor n con el vector F o el mismo versor n con ΔF son diferentes. Sería el mismo solo en un caso extraordinario.

De acuerdo con lo antes dicho, el vector esfuerzo que actúa en este plano y que se definió normal al eje Y , se puede asignar para el punto \underline{P} como sigue:

$$t^{(Y)} = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A_y} = \frac{dF}{dA_y} \quad (2-4)$$

Para no perder de vista que el vector esfuerzo está asociado a un versor que tiene la misma dirección y sentido (en este caso particular) que el eje Y , se ha puesto entre paréntesis la literal del eje como exponente del vector esfuerzo. En este supuesto caso se acepta que las direcciones del versor y del vector esfuerzo no sean las mismas. Véase la figura 2.7.

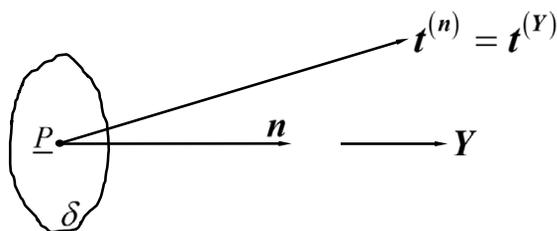


FIGURA 2.7. Vector esfuerzo en un punto, asociado a un versor

Es necesario no olvidar que cualquier vector que se ha definido tiene sus componentes en relación con el sistema de referencia XYZ . En las siguientes ecuaciones se expresa cada vector con sus componentes escalares con relación a dicho sistema y en la llamada notación de Gibbs que utilizan mucho los ingenieros:

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta F_x \mathbf{i} + \Delta F_y \mathbf{j} + \Delta F_z \mathbf{k} \quad (2-5)$$

$$\mathbf{t}^{(Y)} = t_x^{(Y)} \mathbf{i} + t_y^{(Y)} \mathbf{j} + t_z^{(Y)} \mathbf{k} \quad (2-6)$$

A continuación se muestran dos formas para expresar el versor en notación de Gibbs y en forma matricial:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad ; \quad \{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

Del versor \mathbf{n} podemos decir que al ser siempre unitario se obliga a que sus componentes escalares sean los cosenos directores n_x , n_y y n_z . Los cosenos directores se pueden expresar en función de los ángulos directores α , β y γ , como se muestra en la figura 2.8:

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \alpha \\ n_y &= \cos \beta \\ n_z &= \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-8)$$

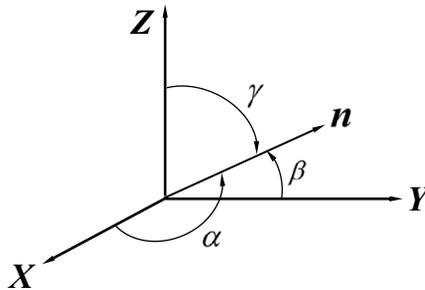


FIGURA 2.8. Ángulos directores de un versor

Para cosenos directores en el espacio, recordemos que *siempre* se debe cumplir con:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2-9)$$

Regresemos ahora al subsistema que está en análisis. Si se visualizan en la figura 2.9 las componentes escalares de ΔF en el plano δ y en el entorno del punto P , se observa que se tienen dos incrementos de fuerza escalares que actúan en el mismo plano y uno que actúa normal a este.

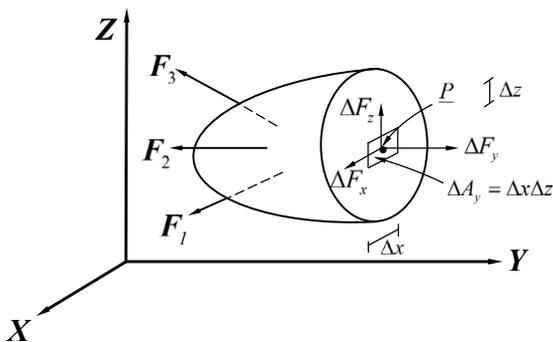


FIGURA 2.9. Componentes escalares del incremento de fuerza

El incremento de área en el entorno del punto P , en donde actúan estos incrementos de fuerza, lo definiremos como sigue:

$$\Delta A_y = \Delta x \Delta z \tag{2-10}$$

El subíndice y indica un incremento de área normal al eje Y . Los esfuerzos analizados en forma escalar que resulten de hacer tender a cero el incremento de área comentado, recibirán diferentes símbolos, según actúen: normal al plano o sobre este. Se reserva la letra griega σ (sigma) para la componente esfuerzo normal, y el símbolo τ (tau) para las componentes esfuerzos cortantes o tangenciales. Para identificar estas componentes se utilizan dos subíndices que se pueden reducir a uno solo si el subíndice se repite. En nuestro caso, el primer subíndice va a expresar la cara en que actúa el esfuerzo en forma escalar, y el segundo, la dirección que se le asigna a este esfuerzo escalar. De acuerdo con todo lo antes dicho se tiene que:

$$\tau_{yx} = t^{(y)}_x = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A_y} = \frac{dF_x}{dA_y} \tag{2-11}$$

$$\sigma_y = t^{(y)}_y = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A_y} = \frac{dF_y}{dA_y} \tag{2-12}$$

$$\tau_{yz} = t^{(y)}_z = \lim_{\Delta A_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A_y} = \frac{dF_z}{dA_y} \tag{2-13}$$

En la figura 2.10 se ve la manera en que se representan estas componentes escalares del vector esfuerzo que se asignan al plano de corte y en el punto \underline{P} .

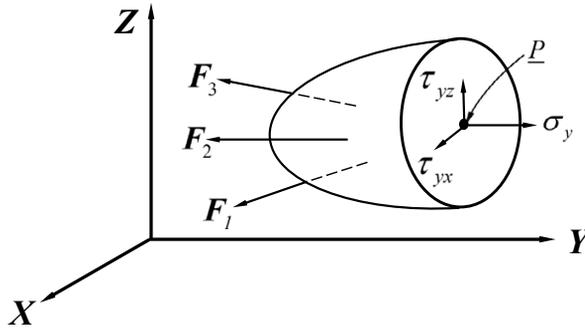


FIGURA 2.10. Componentes escalares del vector esfuerzo

Lo anterior sugiere que el vector esfuerzo que se ha estado definiendo también se escribe como:

$$\mathbf{t}^{(Y)} = \tau_{yx} \mathbf{i} + \sigma_y \mathbf{j} + \tau_{yz} \mathbf{k} \tag{2-14}$$

Haciendo un ejercicio de imaginación, se propone visualizar por analogía cómo se verían los vectores esfuerzo actuando en planos asociados a los otros ejes del sistema de referencia cartesiano (X y Z). Se debe estar de acuerdo en que la forma que deben tener es la siguiente:

$$\mathbf{t}^{(X)} = \sigma_x \mathbf{i} + \tau_{xy} \mathbf{j} + \tau_{xz} \mathbf{k} \tag{2-15}$$

$$\mathbf{t}^{(Z)} = \tau_{zx} \mathbf{i} + \tau_{zy} \mathbf{j} + \sigma_z \mathbf{k} \tag{2-16}$$

Se puede concluir que en el punto \underline{P} actúan infinidad de vectores esfuerzo, cada uno de ellos asociado al número infinito de planos que pueden cortar al punto. Recordemos que cada plano se define por su versor (en realidad son dos versores normales con la misma dirección, pero con sentido contrario). Con base en lo ya mencionado, se considera válido escribir la siguiente función vectorial de variable vectorial:

$$\mathbf{t}^{(n)} = f(\mathbf{n}) \tag{2-17}$$

El vector esfuerzo y el versor, sólo en un caso muy particular que se verá más adelante, tienen la misma dirección y sentido (esfuerzos principales).

Dado que conocemos los vectores esfuerzo asociados a los ejes del sistema de referencia XYZ actuantes en tres planos ortogonales, que se podrían visualizar como tres caras de un cubo [ecuaciones (2-14), (2-15) y (2-16)], se propone acomodar estos vectores esfuerzo cumpliendo

un orden y colocándolos en forma de columna, como se muestra a continuación, con componentes vectoriales en una matriz de 1×3 a la que denominaremos de aquí en adelante *tensor esfuerzo*. Véase la figura 2.11.

$$[T_{ij}] = [t^{(X)} \quad t^{(Y)} \quad t^{(Z)}] \tag{2-18}$$

El tensor esfuerzo se debe de entender como una representación que transmite un concepto no solamente matemático, sino también con importantes implicaciones físicas (no es una matriz común). En lo sucesivo, el tensor esfuerzo lo expresaremos en función de sus componentes escalares y que se muestra como una matriz de 3×3 que, de aquí en adelante, denominaremos *tensor esfuerzo* y que representa los esfuerzos como escalares, los cuales se pueden observar en la figura 2.12.

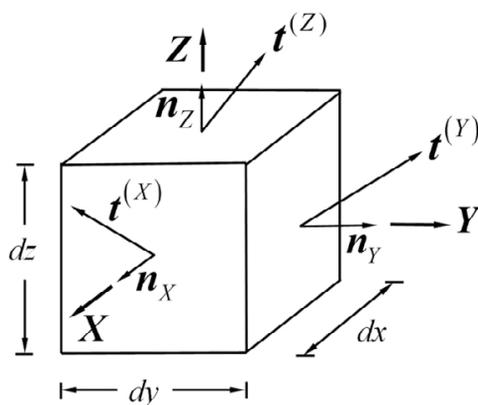


FIGURA 2.11. Vectores esfuerzo en las tres caras ortogonales orientadas

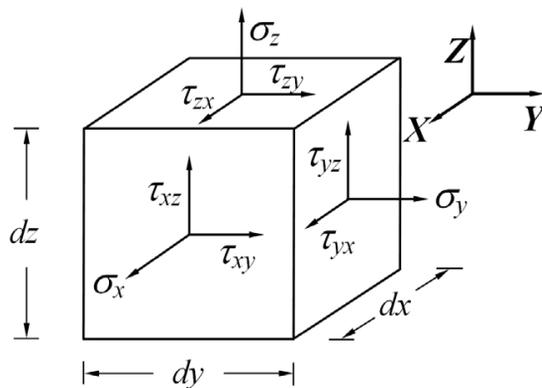


FIGURA 2.12. Componentes escalares del tensor esfuerzo

En nuestro caso, este tensor tiene dimensiones y unidades de esfuerzo. Más adelante se va a demostrar que para la condición de equilibrio (en este texto, equilibrio estático) se debe cumplir con que el tensor esfuerzo siempre debe ser una matriz simétrica.

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

Aquí modelaremos un punto donde se analizan los esfuerzos que en este actúan como un cubo orientado de dimensiones diferenciales. Se puede demostrar que si se representa un cubo en una imagen plana, solo se visualizarán tres de sus seis caras. A las tres caras que se visualizan las definiremos como *caras positivas*.

2.4. Definición de caras positivas

Se definen como caras positivas de un cubo diferencial de esfuerzos aquellas por donde saldría el sentido positivo de cada uno de los ejes del sistema de referencia XYZ , si el origen de este sistema se colocara imaginariamente en el centro del cubo, y si se mantuvieran las caras del cubo paralelas a los planos que forman cada par de ejes, como se observa en la figura 2.13.

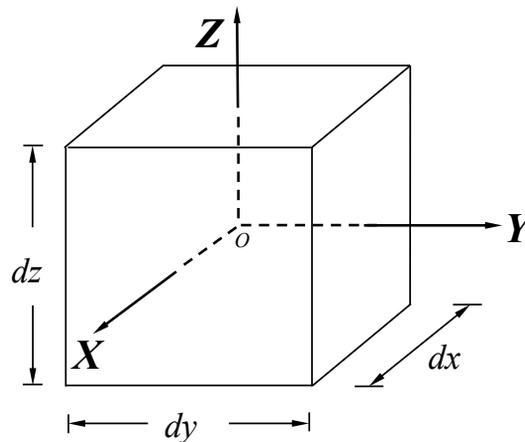


FIGURA 2.13. Caras positivas de un cubo diferencial de esfuerzos orientado

2.5. Equilibrio del cubo diferencial de esfuerzos

A los esfuerzos escalares que se muestran en las caras positivas del cubo de la figura 2.14, normales y cortantes, se les asigna un sentido que se considera positivo de acuerdo con la convención de signos (mecánica del medio continuo) que se comenta más adelante.

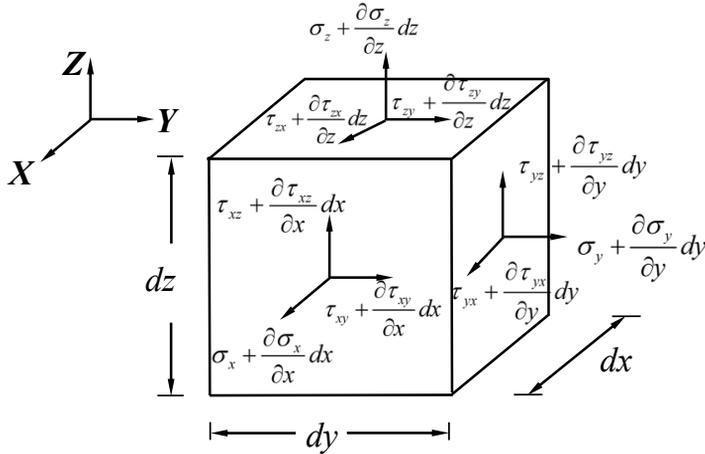


FIGURA 2.14. Esfuerzos en caras positivas para fines de análisis del equilibrio

La notación que se utiliza lleva la finalidad de poder realizar un análisis del equilibrio estático. En la figura 2.15 se muestran los esfuerzos actuantes en caras negativas con sentidos equilibrantes.

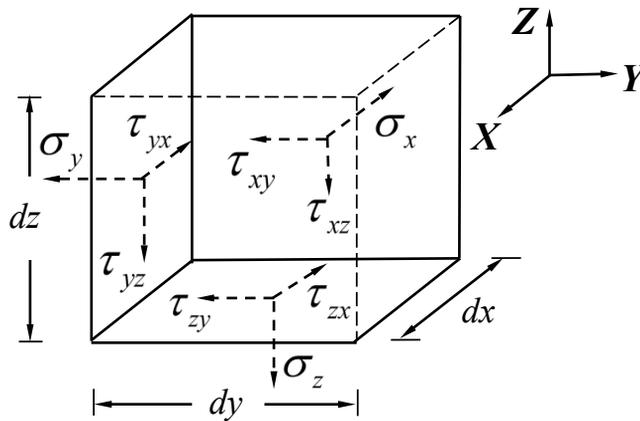


FIGURA 2.15. Esfuerzos en caras negativas para fines de análisis del equilibrio

Para el análisis del equilibrio supondremos que el cubo diferencial se encuentra inmerso en un campo gravitatorio (se supone aquí que el cubo pesa). También supondremos que la dirección de la gravedad no coincide con ninguno de los ejes del sistema de referencia. Por conveniencia, para no generar signos negativos en las ecuaciones finales, se asignan signos negativos a las componentes escalares del vector gravedad en este planteamiento, de la forma:

$$\mathbf{g} = -g_x \mathbf{i} - g_y \mathbf{j} - g_z \mathbf{k} \quad (2-20)$$

De acuerdo con la teoría de la estática, en un análisis completo, se deben cumplir con las seis ecuaciones de equilibrio estático que a continuación se muestran:

$$\begin{array}{ll} 1^a \quad \Sigma F_x = 0 & 4^a \quad \Sigma M_x = 0 \\ 2^a \quad \Sigma F_y = 0 & 5^a \quad \Sigma M_y = 0 \\ 3^a \quad \Sigma F_z = 0 & 6^a \quad \Sigma M_z = 0 \end{array} \quad (2-21)$$

En el cubo diferencial la fuerza se obtiene al multiplicar un esfuerzo por el área en que éste actúa. Con base en lo anterior y considerando que el cubo pesa, se calcula a continuación la tercera ecuación de equilibrio del cubo diferencial planteado. Con la intención de sólo usar ecuaciones universales, se introduce el concepto de densidad (o masa específica) del material que conforma al cubo diferencial. Se toma en cuenta aquí la componente escalar de la gravedad asignable al eje Z que se analiza:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z = & \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz + \\ & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_z dx dy - \tau_{yz} dx dz - \\ & - \tau_{xz} dy dz - \rho g_z dx dy dz = 0 \end{aligned} \quad (2-22)$$

Simplificando lo más posible, se llega a la forma compacta de la tercera ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho g_z \quad \text{tercera ecuación de equilibrio} \quad (2-23)$$

La primera y segunda ecuaciones de equilibrio se pueden deducir en forma análoga.

En el caso del análisis de momentos y para obtener las expresiones más compactas, conviene colocar al origen del sistema de referencia en forma imaginaria en el centro del cubo en estudio. Con lo anterior se gana que los brazos de palanca de la fuerza sean la mitad del lado del cubo diferencial. Otra ventaja para proceder como se sugiere es la posibilidad de que el peso del cubo que se asigna al centro de éste no produzca momento, porque el brazo resulta

ser nulo, al igual que con otras fuerzas que pasarían por el centro. De acuerdo con esto, la sexta ecuación se plantea así:

$$\begin{aligned} \Sigma M_z = & \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dydz \frac{dx}{2} - \\ & - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2-24)$$

Simplificando:

$$\Sigma M_z = \tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx - \tau_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy = 0 \quad (2-25)$$

Hacemos tender ahora, a cero, los lados del cubo diferencial, dado que los suponemos muy pequeños y ahora los vamos a reducir aún más: $dx \rightarrow 0$ y $dy \rightarrow 0$. Como dx y dy aparecen como coeficientes, al final se convierten en un coeficiente cero, de modo que se llega a:

$$\Sigma M_z = \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (2-26)$$

Finalmente llegamos a la expresión de la sexta ecuación de equilibrio:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \text{sexta ecuación de equilibrio} \quad (2-27)$$

Las ecuaciones cuarta y quinta se obtienen también en forma análoga. De estas últimas expresiones se puede deducir que el tensor esfuerzo debe ser simétrico si y sólo si cumple con el equilibrio.

2.6. Convención de signos para esfuerzos escalares

La convención de signos que se enuncia más adelante se utiliza en la mecánica del medio continuo y en el estudio de la resistencia de los materiales. Resulta conveniente adelantar que la convención de signos de la ingeniería geotécnica (mecánica de suelos y mecánica de rocas) es exactamente opuesta a la aquí comentada.

Convención. Conviene definir en este curso como esfuerzos positivos, tanto normales (σ) como cortantes (τ), a aquellos que actuando en caras positivas tengan el mismo sentido que el sentido positivo de su eje paralelo en el del sistema de referencia. Véase la figura 2.16.

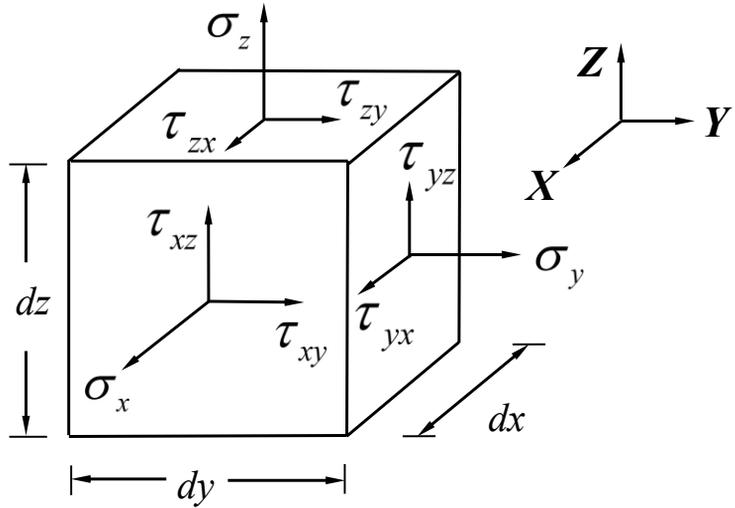


FIGURA 2.16. Esfuerzos positivos con la convención de signos de mecánica del medio continuo

EJEMPLO 2.1

A partir del cubo diferencial que se muestra en la figura 2.17, forme el tensor esfuerzo que representa este estado de esfuerzo con la orientación que se define. Use la convención de signos de mecánica del medio continuo.

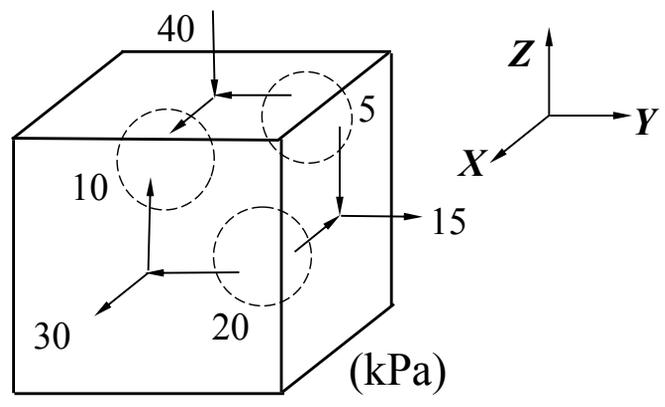


FIGURA 2.17. Cubo diferencial de esfuerzos del ejemplo 2.1

La solución debe ser:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -20 & 10 \\ -20 & 15 & -5 \\ 10 & -5 & -40 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

Observe que se cumple con el tensor simétrico (iguales valores de esfuerzo cortante a ambos lados de la diagonal principal del tensor).

2.7. Método analítico tensorial para la determinación de los componentes normal y cortante, asociados a un plano δ que se define por su versor n

Se ha mostrado que el vector esfuerzo depende de la dirección del plano en que se analiza. También se ha establecido que un plano se puede definir por alguno de los dos versores que son normales a él. En el método analítico tensorial de esfuerzos que vamos a mostrar, el vector esfuerzo se puede obtener operando matricialmente al tensor esfuerzo por el versor en donde se quieren conocer los esfuerzos que interesan al ingeniero. Al operar como se ha comentado, se obtienen las componentes escalares del vector esfuerzo como se muestra a continuación:

$$\{t^{(n)}\} = [T_{ij}]\{n\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t^{(n)}_x \\ t^{(n)}_y \\ t^{(n)}_z \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

El vector esfuerzo se puede descomponer en dos vectores de interés para el ingeniero. Uno de éstos debe ser normal al plano δ donde se analiza, y el otro debe estar contenido en el plano. Al primero se le denomina vector esfuerzo normal y al segundo vector esfuerzo cortante (o tangencial). Véase la figura 2.18.

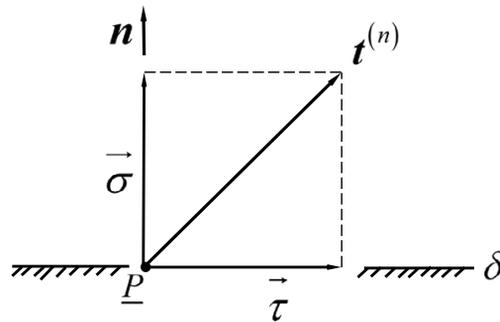


FIGURA 2.18. Componentes vectoriales normal y tangencial del vector esfuerzo

En notación vectorial y matricial, el vector esfuerzo se puede expresar como la suma vectorial del vector esfuerzo normal y el vector esfuerzo cortante, como se muestra a continuación:

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = \{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} + \{\bar{\boldsymbol{\tau}}\} \quad (2-29)$$

El valor escalar (módulo y signo) del esfuerzo normal se puede obtener como la proyección del vector esfuerzo en la dirección del versor, por medio de un producto escalar entre vectores (producto punto). A continuación se muestran dos formas matriciales para operar este producto punto:

$$\sigma = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} = \{\mathbf{t}^{(n)}\}^T \{\mathbf{n}\} \quad (2-30)$$

El vector esfuerzo normal se puede calcular multiplicando el valor del esfuerzo normal por el versor (multiplicación de un escalar por un vector):

$$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = \sigma \{\mathbf{n}\} \quad (2-31)$$

El vector esfuerzo normal se puede escribir en notación de Gibbs o en forma matricial, mostrando sus componentes escalares:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\sigma}_x \mathbf{i} + \bar{\sigma}_y \mathbf{j} + \bar{\sigma}_z \mathbf{k} \quad \text{ó} \quad \{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_z \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

El valor del esfuerzo cortante se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras, pero planteando el triángulo de la figura 2.18 en forma escalar y no vectorial. En la ecuación (2-33) se muestra la manera en que se puede escribir el teorema de Pitágoras, tomando el módulo del vector esfuerzo como la hipotenusa del triángulo:

$$|\mathbf{t}^{(n)}|^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2-33)$$

Si se despeja el esfuerzo cortante como escalar, se observa que es imposible definirlo con un solo signo, debido a que no se tiene una referencia sobre el plano pues solamente se conoce el versor normal al plano. De modo que siempre escribiremos el doble signo del valor de este esfuerzo:

$$\tau = \pm \sqrt{|\mathbf{t}^{(n)}|^2 - \sigma^2} \quad (2-34)$$

El cuadrado de la hipotenusa se obtiene operando un producto escalar del mismo vector esfuerzo, como a continuación se plantea en forma matricial:

$$|\mathbf{t}^{(n)}|^2 = \{\mathbf{t}^{(n)}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} \quad (2-35)$$

El valor del esfuerzo cortante también se puede escribir totalmente en forma escalar, introduciendo los componentes escalares del vector esfuerzo, elevados al cuadrado, como se muestra en la expresión (2-36):

$$\tau = \pm \sqrt{(t^{(n)}_x)^2 + (t^{(n)}_y)^2 + (t^{(n)}_z)^2 - (\sigma)^2} \quad (2-36)$$

Por otro lado, si se desea conocer el esfuerzo cortante como vector, se plantea como la resta entre el vector esfuerzo y el vector esfuerzo normal de la siguiente manera:

$$\{\bar{\tau}\} = \{t^{(n)}\} - \{\bar{\sigma}\} \quad (2-37)$$

El vector esfuerzo cortante, que debe estar contenido en el plano que se analiza, se puede expresar tanto en notación de Gibbs como en notación matricial, exhibiendo sus componentes escalares como se muestra en la ecuación (2-38):

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_x \mathbf{i} + \bar{\tau}_y \mathbf{j} + \bar{\tau}_z \mathbf{k} \quad \text{ó} \quad \{\bar{\tau}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_x \\ \bar{\tau}_y \\ \bar{\tau}_z \end{Bmatrix} \quad (2-38)$$

Por consiguiente, se debe estar de acuerdo que si se han calculado correctamente estos vectores y debiendo ser por fuerza ortogonales, se cumple que su producto escalar debe ser cero (como consecuencia de una proyección de vectores ortogonales). Este producto punto se muestra en la expresión (2-39) y en dos formas de plantear en notación matricial:

$$\{\bar{\sigma}\}^T \{\bar{\tau}\} = \{\bar{\tau}\}^T \{\bar{\sigma}\} = 0 \quad (2-39)$$

El producto escalar ya planteado teóricamente es cero si se opera usando números con todas sus cifras posibles. Como se recomienda cerrar los números para fines de ingeniería con un máximo de cuatro cifras significativas, en la mayoría de los casos el producto punto debe reportar un valor muy bajo, pero no exactamente cero.

A continuación se plantea un ejemplo para operar numéricamente lo ya expuesto.

EJEMPLO 2.2

Partiendo del cubo diferencial que se muestra en la figura 2.19, que representa a un punto orientado respecto al sistema de referencia, calcule los esfuerzos normal y cortante, tanto en su forma escalar como vectorial, actuantes en el plano δ que se define (como mera propuesta) como normal al vector $V_n = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Finalmente, verifique la ortogonalidad de los vectores esfuerzo normal y esfuerzo cortante.

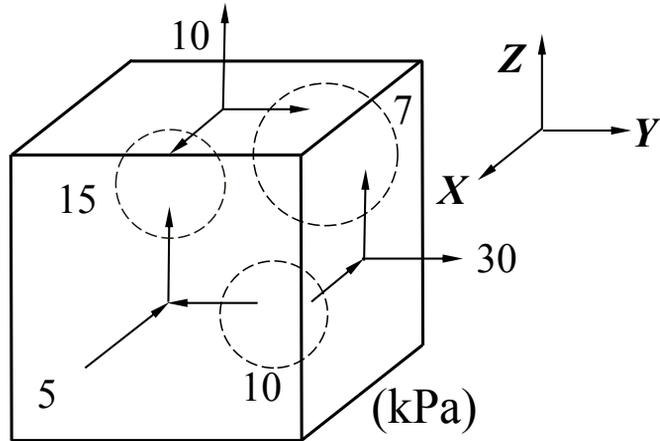


FIGURA 2.19. Cubo diferencial de esfuerzos del ejemplo 2.2

SOLUCIÓN

Con datos del cubo diferencial se forma el tensor esfuerzo:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 15 \\ -10 & 30 & 7 \\ 15 & 7 & 10 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

El versor se puede obtener a partir del vector normal (V_n) al plano de análisis que se propuso:

$$n = \frac{V_n}{|V_n|} = \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{50}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{50}}\mathbf{j} + \frac{5}{\sqrt{50}}\mathbf{k}$$

Se calcula el vector esfuerzo operando al tensor con el versor:

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = [\mathbf{T}_{ij}]\{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} -5 & -10 & 15 \\ -10 & 30 & 7 \\ 15 & 7 & 10 \end{bmatrix} \text{ kPa} \begin{Bmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{20}{\sqrt{50}} \\ \frac{125}{\sqrt{50}} \\ \frac{123}{\sqrt{50}} \end{Bmatrix} \text{ kPa} \approx \begin{Bmatrix} 2,828 \\ 17,68 \\ 17,39 \end{Bmatrix} \text{ kPa}$$

El mismo vector, pero en notación de Gibbs, queda así:

$$\mathbf{t}^{(n)} = (20\mathbf{i} + 125\mathbf{j} + 123\mathbf{k}) / \sqrt{50} \text{ kPa}$$

Se hace notar que el vector esfuerzo tiene dimensiones y unidades de esfuerzo. A continuación se calcula el valor del esfuerzo normal a través de un producto escalar, operando al versor traspuesto con el vector esfuerzo:

$$\sigma = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} = \left\{ \frac{3}{\sqrt{50}} \quad \frac{4}{\sqrt{50}} \quad \frac{5}{\sqrt{50}} \right\} \begin{Bmatrix} \frac{20}{\sqrt{50}} \\ \frac{125}{\sqrt{50}} \\ \frac{123}{\sqrt{50}} \end{Bmatrix} \text{ kPa} = \frac{1\ 175}{50} \text{ kPa} = 23,50 \text{ kPa}$$

Conocido el valor del esfuerzo normal se procede a calcular el vector esfuerzo normal:

$$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = \sigma \{\mathbf{n}\} = \frac{1\ 175}{\sqrt{2\ 500}} \text{ kPa} \begin{Bmatrix} \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3\ 525}{250\sqrt{2}} \\ \frac{4\ 700}{250\sqrt{2}} \\ \frac{5\ 875}{250\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \text{ kPa} \approx \begin{Bmatrix} 9,970 \\ 13,29 \\ 16,62 \end{Bmatrix} \text{ kPa}$$

Este mismo vector, con cuatro cifras significativas y en notación de Gibbs, se escribe como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \approx 9,970\mathbf{i} + 13,29\mathbf{j} + 16,62\mathbf{k} \text{ kPa}$$

Ahora, se calcula el valor del esfuerzo cortante expresándolo con su doble signo:

$$\tau = \pm \sqrt{(t_x^{(n)})^2 + (t_y^{(n)})^2 + (t_z^{(n)})^2 - (\sigma)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{50}}\right)^2 + \left(\frac{125}{\sqrt{50}}\right)^2 + \left(\frac{123}{\sqrt{50}}\right)^2 - \left(\frac{1175}{50}\right)^2} \text{ kPa} \approx \pm 8,416 \text{ kPa}$$

Para obtener el vector esfuerzo cortante se realiza la resta vectorial antes planteada:

$$\{\bar{\tau}\} = \{t^{(n)}\} - \{\bar{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \frac{20}{\sqrt{50}} \\ \frac{125}{\sqrt{50}} \\ \frac{123}{\sqrt{50}} \end{Bmatrix} \text{ kPa} - \begin{Bmatrix} \frac{3\,525}{250\sqrt{2}} \\ \frac{4\,700}{250\sqrt{2}} \\ \frac{5\,875}{250\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \text{ kPa} \approx \begin{Bmatrix} -7,142 \\ 4,384 \\ 0,777\,8 \end{Bmatrix} \text{ kPa}$$

El mismo vector en notación de Gibbs y con cuatro cifras significativas se escribe así:

$$\bar{\tau} \approx -7,142\mathbf{i} + 4,384\mathbf{j} + 0,777\,8\mathbf{k} \text{ kPa}$$

Por último, se revisa la ortogonalidad de los vectores ya calculados:

$$\{\bar{\sigma}\}^T \{\bar{\tau}\} \approx \{9,970 \quad 13,29 \quad 16,62\} \text{ kPa} \begin{Bmatrix} -7,142 \\ 4,384 \\ 0,777\,8 \end{Bmatrix} \text{ kPa} \approx -0,065\,24 \approx 0 \text{ kPa}^2$$

2.8. Esfuerzos principales en análisis tridimensional

Se puede demostrar que un punto, modelado como un cubo diferencial, analizado con base en la teoría de esfuerzos y para el caso general, siempre debe tener tres planos ortogonales con cierta orientación, en los cuales no existen esfuerzos cortantes. En estos tres planos ortogonales actúan exclusivamente esfuerzos normales (que pueden en algún caso particular tomar el valor nulo). A los planos así definidos se les llama *planos principales*. A los esfuerzos normales que actúan en estos planos se les llama *esfuerzos principales*.

De acuerdo con lo dicho, se debe cumplir que en cualquier estado de esfuerzo tridimensional deben existir con algún valor tres esfuerzos principales, actuando en tres direcciones ortogonales. De modo que, generalizando, siempre se debe cumplir lo que sigue:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2-40)$$

donde

σ_1 esfuerzo (normal) principal mayor

σ_2 esfuerzo principal intermedio

σ_3 esfuerzo principal menor

A partir de la condición general que marca la ecuación (2-40), se pueden plantear tres posibles casos:

Caso 1. Cuando los tres esfuerzos principales son diferentes:

$$\text{Caso más común: } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2-41)$$

Caso 2. Cuando dos de los tres esfuerzos principales son iguales:

$$\text{Caso de Análisis plano: } \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \\ 0 \\ \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \end{cases} \quad (2-42)$$

Caso 3. Cuando los tres esfuerzos principales son iguales:

$$\text{Caso de presión o esfuerzo isótropo o isotrópico: } \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (2-43)$$

Se puede demostrar que, en el caso de presión, el tensor que representa esta condición tiene el mismo valor en los tres casilleros sobre la diagonal de los esfuerzos normales, y todos los cortantes deben valer cero. Se puede demostrar que, si se propone cualquier versor para calcular en este estado de esfuerzo los esfuerzos normal y cortante, resulta siempre el mismo valor (no cambia al variar la dirección) como esfuerzo normal y siempre aparecerán esfuerzos cortantes cero. Por lo antes dicho, se puede concluir que la presión es un escalar y el esfuerzo (vector esfuerzo), un vector. Existe diferencia entre el concepto de presión y el concepto de esfuerzo, aunque los dos tengan las mismas dimensiones y las mismas unidades.

A una cara de un cubo diferencial de esfuerzos analizada como plano, donde no actúan esfuerzos cortantes, se le define como cara principal o plano principal. Como no hay cortantes se debe cumplir que coincidan el versor y el vector esfuerzo con la misma dirección. Como el versor es unitario y el vector esfuerzo en el caso general no lo es, la diferencia entre éstos es un coeficiente que denominaremos con la letra griega *lambda*, como se muestra en la expresión (2-44).

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = \lambda \{\mathbf{n}\} \quad (2-44)$$

Del coeficiente λ se puede decir lo siguiente:

- Tiene dimensión y unidades de esfuerzo (\mathbf{n} es adimensional).
- Es un valor por determinar (es un valor característico).

2.8.1. Cálculo de los esfuerzos principales como escalares

El valor de los esfuerzos principales se puede obtener haciendo uso de la llamada ecuación característica. Esta ecuación es un polinomio cúbico en un análisis tridimensional y siempre debe tener la forma que se muestra en la expresión (2-45):

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (2-45)$$

donde

- I_1 primer invariante (lineal)
- I_2 segundo invariante (cuadrático)
- I_3 tercer invariante (cúbico)

Al resolver este polinomio, las raíces que resultan son los esfuerzos principales (valores característicos). Se puede demostrar que si se obtienen los invariantes de una matriz simétrica (como por fuerza lo debe ser un tensor esfuerzo que cumpla con el equilibrio), las raíces deben ser siempre reales (jamás pueden ser complejas).

Los invariantes se obtienen a partir de datos del tensor, como se muestra a continuación:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (2-46)$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2-47)$$

$$I_3 = \det \mathbf{T}_{ij} = \det \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2-48)$$

Calculados los invariantes se introducen en la ecuación característica. Cabe comentar que los invariantes tienen dimensiones y unidades. El primer invariante es lineal con dimensiones de esfuerzo. Los invariantes son muy importantes para identificar el estado de esfuerzo particular, ya que, si los invariantes de dos tensores con forma diferente son iguales, significará que los dos representan el mismo estado de esfuerzo. Por lo tanto, los invariantes sirven como identificadores de un cierto estado de esfuerzo. Dos tensores que tuvieran componentes diferentes, pero que sus tres invariantes fueran iguales, representarían dos formas de mostrar un mismo estado de esfuerzo. Lo anterior implica que un cierto estado de esfuerzo se puede representar teóricamente con un número infinito de tensores esfuerzo.

Normalmente las raíces se obtienen en forma desordenada, por lo que se deben ordenar posteriormente para identificar los esfuerzos principales. El valor mayor se corresponde con el esfuerzo principal mayor y el menor con el principal menor.

2.8.2. Cálculo de los versores en dirección de esfuerzo principal

La misma ecuación (2-44) se presenta a continuación en forma matricial y mostrando sus componentes escalares:

$$\begin{Bmatrix} t^{(n)}_x \\ t^{(n)}_y \\ t^{(n)}_z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda n_x \\ \lambda n_y \\ \lambda n_z \end{Bmatrix} \quad (2-49)$$

La forma algebraica de la misma ecuación anterior debe ser:

$$\begin{aligned} t^{(n)}_x &= \lambda n_x \\ t^{(n)}_y &= \lambda n_y \\ t^{(n)}_z &= \lambda n_z \end{aligned} \quad (2-50)$$

Sin embargo, recordemos la forma de la ecuación (2-28):

$$\begin{Bmatrix} t^{(n)}_x \\ t^{(n)}_y \\ t^{(n)}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

que desarrollada se puede ver así:

$$\begin{Bmatrix} t^{(n)}_x \\ t^{(n)}_y \\ t^{(n)}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{Bmatrix} \quad (2-51)$$

Si ahora igualamos las ecuaciones (2-49) y (2-51) se tiene:

$$\begin{cases} \lambda n_x \\ \lambda n_y \\ \lambda n_z \end{cases} = \begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases} \quad (2-52)$$

que restando para igualar a cero se presentan como:

$$\begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{cases} - \begin{cases} \lambda n_x \\ \lambda n_y \\ \lambda n_z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (2-53)$$

Finalmente, la forma algebraica de la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \lambda) n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z &= 0 \\ \tau_{xy} n_x + (\sigma_y - \lambda) n_y + \tau_{zy} n_z &= 0 \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + (\sigma_z - \lambda) n_z &= 0 \end{aligned} \quad (2-54)$$

Llegamos a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, donde pretendemos despejar el valor de los cosenos directores. El problema que se presenta es que sólo con estas tres ecuaciones se llega a la solución trivial, que es:

$$n_x = 0 \quad ; \quad n_y = 0 \quad ; \quad n_z = 0$$

Lo anterior resulta ser inadmisibile para nuestros fines, ya que no debemos olvidar que siempre se debe cumplir la ecuación (2-9). La solución no trivial siempre será posible:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (2-9)$$

En realidad, del sistema de ecuaciones comentado, se puede demostrar que sólo dos ecuaciones son linealmente independientes, por lo que la ecuación (2-9) es en realidad la tercera ecuación que permite resolver el sistema. Si las dos ecuaciones linealmente independientes no se muestran en forma evidente, se recomienda entonces aplicar el método de Gauss para identificarlas.

La forma para obtener cada uno de los versores en dirección de esfuerzo principal, consiste en sustituir el valor del esfuerzo principal que se desea obtener por la λ de la ecuación (2-54). Los esfuerzos normales y cortantes de la misma ecuación son los que se tienen en el tensor original.

A partir de las ecuaciones útiles, se obtienen las relaciones que hay entre los cosenos directores. Conocidas las relaciones, se despejan en función de un solo coseno director y se sustituyen en la ecuación (2-9). Se despeja así el valor de un solo coseno director y con éste se regresa a las relaciones para conocer los otros cosenos directores. Conocidos éstos con doble signo (dirección, todavía no sentido) se puede ya formar el versor en dirección del esfuerzo principal que resultó con el valor de λ . Se procede en forma análoga para conocer las direcciones de los tres versores principales, si esto es posible (en casos particulares sólo se define un versor y en otros no se define ninguno).

Obtenidos los versores principales con componentes de doble signo, se recomienda dibujarlos orientados respecto al espacio cartesiano, para buscar que formen un sistema de referencia *principal derecho (I II III)*. En este texto se recomienda dibujar los versores de modo que la mayoría quede contenida en los octantes superiores y buscando que el primer octante del sistema principal se acerque lo más posible al primer octante del sistema de referencia original (*XYZ*). Si procedemos correctamente de esta forma cualquier persona obtendrá el mismo dibujo. En la figura 2.20 se muestra la forma de los dos sistemas de referencia mencionados:

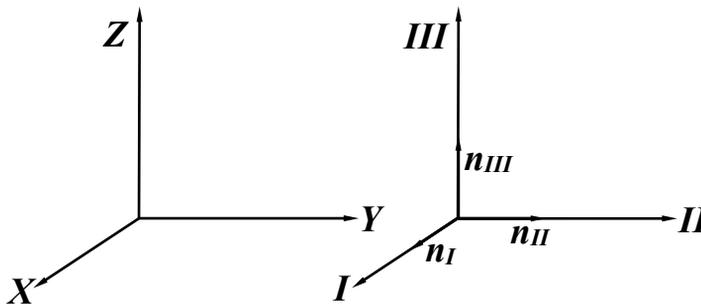


FIGURA 2.20. Sistemas de referencia derechos en análisis tridimensional (en uso y principal)

A partir del dibujo que correlaciona los sistemas de referencia, se puede deducir el signo único de los componentes (cosenos directores) de cada versor. Vale la pena comentar que, al elegir signo único para formar el sistema derecho, se deben elegir todos los signos superiores o todos los inferiores del versor con doble signo. No es válido alternar estos signos porque se produciría un cambio de dirección en relación con los dos posibles versores correctos.

Para comprobar que se han obtenido los versores principales con signo único correctamente, se propone operar los productos punto (escalares) entre cada par de ellos. Recordemos que estos versores están obligados a ser ortogonales entre sí. Para operar en forma ordenada, se sugiere realizar las operaciones (2-55), (2-56) y (2-57) que se muestran en notación matricial.

$$\{\mathbf{n}_I\}^T \{\mathbf{n}_{II}\} = 0 \quad (2-55)$$

$$\{\mathbf{n}_{II}\}^T \{\mathbf{n}_{III}\} = 0 \quad (2-56)$$

$$\{\mathbf{n}_{III}\}^T \{\mathbf{n}_I\} = 0 \quad (2-57)$$

Los ejemplos 2.3 y 2.4 ilustran la aplicación de lo expuesto en el apartado 2.8.

EJEMPLO 2.3

Con base en el tensor que se muestra a continuación, el cual está referido al sistema de referencia original XYZ , calcule:

- El valor de los esfuerzos principales.
- Los versores en dirección principal.

Además, dibuje los versores en dirección principal con respecto al sistema original XYZ , de modo que formen un sistema derecho cumpliendo las recomendaciones hechas antes. Definidos los versores definitivos con signo único, compruebe su ortogonalidad.

SOLUCIÓN

$$[\mathbf{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Primeramente se deben obtener los invariantes del tensor.

$$I_1 = 6 + 6 + 8 = 20 \text{ MPa}$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \text{ MPa} + \det \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \text{ MPa} + \det \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \text{ MPa} = 27 + 48 + 48 = 123 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = \det |\mathbf{T}_{ij}| = \det \begin{vmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} \text{ MPa} = 8(36 - 9) = 216 \text{ MPa}^3$$

La ecuación característica en este caso resulta:

$$\lambda^3 - 20\lambda^2 + 123\lambda - 216 = 0 \quad (\text{MPa}^3)$$

Observe que en el tensor el esfuerzo $\sigma_z = 8$ MPa está acompañado de cortantes cero, tanto en su renglón como en su columna. De lo anterior se deduce que indiscutiblemente este esfuerzo normal ya es un esfuerzo principal, aunque todavía no se sabe a cuál de ellos corresponde. También se infiere que actúa en la misma dirección del eje Z por la posición que ocupa en el tensor.

Sabiendo que se puede identificar por simple observación del tensor a un esfuerzo principal, se propone a este valor como una raíz del polinomio y se aplica después el método de la división sintética como se muestra a continuación:

$$8 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -20 & 123 & -216 \\ & 8 & -96 & 216 \\ \hline 1 & -12 & 27 & 0 \end{array} \right.$$

Se confirma así que es una raíz (la primera que se obtiene), de manera que le asignamos el subíndice uno $\lambda_1 = 8$ MPa, haciendo que el polinomio se reduzca a otro de segundo grado

$$\lambda^2 - 12\lambda + 27 = 0 \quad (\text{MPa}^2)$$

con solución

$$\lambda_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} \text{ MPa} = \frac{12 \pm 6}{2} \text{ MPa}$$

$$\lambda_2 = 9 \text{ MPa}$$

$$\lambda_3 = 3 \text{ MPa}$$

Ordenando los valores, con la ventaja de que todos son diferentes, de la forma:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

se obtiene finalmente que:

$$\sigma_1 = 9 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = 8 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_3 = 3 \text{ MPa}$$

Siempre se cumple que la suma de los esfuerzos normales principales es igual al primer invariante. Conocer esta propiedad permite verificar que lo que hemos obtenido hasta aquí es correcto.

A continuación se obtiene el versor con la dirección en que actúa el esfuerzo principal mayor y que se denomina n_1 , al sustituir el valor del esfuerzo principal mayor en lugar de “ λ ” en la ecuación (2-54).

$$\begin{aligned}(6-9)n_x - 3n_y + 0n_z &= 0 \\ -3n_x + (6-9)n_y + 0n_z &= 0 \\ 0n_x + 0n_y + (8-9)n_z &= 0\end{aligned}$$

Quedan a la vista tres ecuaciones de las cuales solo nos sirven dos.

$$\begin{aligned}-3n_x - 3n_y + 0n_z &= 0 \\ -3n_x - 3n_y + 0n_z &= 0 \\ 0n_x + 0n_y - n_z &= 0\end{aligned}$$

Las primeras dos ecuaciones resultan ser una sola. Por otro lado, vea que en la tercera ecuación resulta obligado que $n_z = 0$. Deducimos ahora la relación de los primeros cosenos directores y concluimos que $n_x = -n_y$. Conocida esta relación e introduciendo el valor en función de n_y a la cuarta ecuación (2-9) (en realidad tercera útil) se tiene que:

$$(-n_y)^2 + n_y^2 + (0)^2 = 1 \Rightarrow 2n_y^2 = 1 \Rightarrow n_y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con este último dato y regresando a las relaciones, se llega a la conclusión de que:

$$\begin{aligned}n_z &= 0 \\ n_y &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n_x &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

de modo que podemos formar al primer versor principal con signo doble como:

$$\mathbf{n}_I = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

A continuación se procede para obtener el versor en dirección del esfuerzo principal intermedio (\mathbf{n}_{II}), sustituyendo este valor principal en lugar de “ λ ”.

$$\begin{aligned}(6-8)n_x - 3n_y + 0n_z &= 0 \\ -3n_x + (6-8)n_y + 0n_z &= 0 \\ 0n_x + 0n_y + (8-8)n_z &= 0\end{aligned}$$

Se llega así al sistema que a continuación se muestra:

$$-2n_x - 3n_y + 0n_z = 0$$

$$-3n_x - 2n_y + 0n_z = 0$$

$$0n_x + 0n_y + 0n_z = 0$$

En este caso, a primera vista parece que se tienen tres ecuaciones linealmente independientes. Sin duda la tercera no se parece en nada a la primera ni a la segunda. Se concluye que la primera y la segunda solo serán una sola si se cumple que $n_x = n_y = 0$. Observe que en la tercera ecuación se tiene un coeficiente cero, pero n_z *no vale cero* (en este caso la única posibilidad es que debe tener un valor unitario).

$$(0)^2 + (0)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Se deduce, por fuerza, que tiene la dirección del eje **Z**.

$$n_x = 0$$

$$n_y = 0$$

$$n_z = \pm 1$$

Este versor que muestra tener dirección del eje **Z**, también se puede obtener de la pura observación del tensor o del cubo diferencial al que está asociado.

$$\mathbf{n}_{II} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} \pm \mathbf{k}$$

Finalmente, se calcula la dirección del versor donde actúa el esfuerzo principal menor (\mathbf{n}_{III}).

$$(6-3)n_x - 3n_y + 0n_z = 0$$

$$-3n_x + (6-3)n_y + 0n_z = 0$$

$$0n_x + 0n_y + (8-3)n_z = 0$$

obteniendo

$$3n_x - 3n_y + 0n_z = 0$$

$$-3n_x + 3n_y + 0n_z = 0$$

$$0n_x + 0n_y + 5n_z = 0$$

Aquí sí se ve en forma clara que las dos últimas ecuaciones son linealmente independientes. De la tercera ecuación se puede deducir que $n_z = 0$. También se puede deducir, comparando la primera y segunda ecuaciones que $n_x = n_y$. Entrando a la cuarta ecuación (2-9) en función de n_y , se tiene que:

$$(n_x)^2 + n_y^2 + (0)^2 = 1 \Rightarrow 2n_y^2 = 1 \Rightarrow n_y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Regresando a las relaciones, se obtiene que los cosenos directores deben ser:

$$n_z = 0$$

$$n_y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La forma de este versor resulta:

$$\mathbf{n}_{III} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

En la figura 2.21 se muestra cómo debe quedar la relación que guarda el sistema de referencia principal (a partir de los versores), respecto al sistema de referencia en uso (XYZ). Observe que se centró lo más posible el primer octante de ambos sistemas. Se deduce del dibujo el signo único de cada componente escalar y se concluye que:

$$\mathbf{n}_I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{II} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Por último, se muestra la forma en que se revisa la ortogonalidad de los versores principales obtenidos:

$$\{\mathbf{n}_I\}^T \{\mathbf{n}_{II}\} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\{n_{II}\}^T \{n_{III}\} = \{0 \ 0 \ 1\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix} = 0+0+0=0$$

$$\{n_{III}\}^T \{n_I\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \frac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \right\} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$$

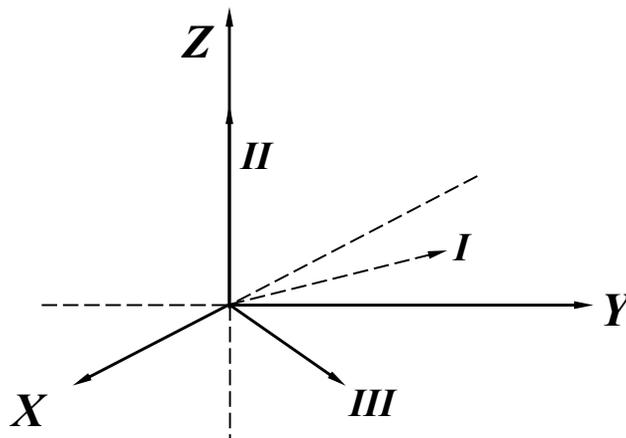


FIGURA 2.21. Direcciones principales del ejemplo 2.3.

EJEMPLO 2.4

Con base en el tensor que se propone, asociado a un cubo diferencial de esfuerzos orientado, calcule lo mismo que se pidió en el ejemplo 2.3.

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

SOLUCIÓN

Se calculan los invariantes

$$I_1 = 3 + 0 + 0 = 3 \text{ MPa}$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ MPa} + \det \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ MPa} + \det \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ MPa} = -1 - 1 - 4 = -6 \text{ MPa}^2$$

$$I_3 = \det |T_{ij}| = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ MPa} = 3(-4) - 1(-2) + 1(2) = -8 \text{ MPa}^3$$

Se forma la ecuación característica, se calculan sus raíces y se identifican los esfuerzos principales.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \quad (\text{MPa}^3)$$

donde

$$\lambda_1 = -2 \text{ MPa}$$

$$\lambda_2 = 4 \text{ MPa}$$

$$\lambda_3 = 1 \text{ MPa}$$

se ordenan, concluyendo que:

$$\sigma_1 = 4 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = 1 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_3 = -2 \text{ MPa}$$

Se calcula el versor n_i .

$$(3-4)n_x + n_y + n_z = 0$$

$$n_x + (0-4)n_y + 2n_z = 0$$

$$n_x + 2n_y + (0-4)n_z = 0$$

En este caso es preciso aplicar el método de Gauss para ver claramente las dos ecuaciones linealmente independientes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Con base en lo anterior se puede deducir la relación entre cosenos directores. De la segunda ecuación final se concluye que $n_y = n_z$. Cuando se introduce n_z en la primera ecuación final se llega a que $n_x = 2n_z$. Si se lleva esto a la cuarta ecuación en función de n_z , se tiene:

$$(2n_z)^2 + (n_z)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow 6n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Recordando las relaciones anteriores se puede concluir que:

$$n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_x = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\mathbf{n}_l = \pm \frac{2}{\sqrt{6}} \mathbf{i} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{k}$$

Se calcula ahora el versor \mathbf{n}_{ll}

$$(3-1)n_x + n_y + n_z = 0$$

$$n_x + (0-1)n_y + 2n_z = 0$$

$$n_x + 2n_y + (0-1)n_z = 0$$

Se aplica el método de Gauss:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Se deduce de la segunda ecuación final que $n_y = n_z$. Sustituyendo lo anterior en la primera ecuación, se concluye que $n_x = -n_z$. Se lleva esto a la cuarta ecuación con las relaciones anteriores y en función de n_z , se obtiene finalmente:

$$(-n_z)^2 + (n_z)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow 3n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Volviendo a las relaciones se deduce que:

$$n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n_x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$$

De esta forma se puede conformar al versor con doble signo, obteniendo:

$$\mathbf{n}_{II} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}$$

Finalmente se calcula \mathbf{n}_{III}

$$(3+2)n_x + n_y + n_z = 0$$

$$n_x + (0+2)n_y + 2n_z = 0$$

$$n_x + 2n_y + (0+2)n_z = 0$$

Se aplica el método de Gauss:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

De la segunda ecuación final se deduce que $n_y = -n_z$, lo que tomado en cuenta para la primera ecuación final obliga a que $n_x = 0$. Si se lleva esto a la cuarta ecuación y en función de n_z , se concluye que:

$$(0)^2 + (-n_z)^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow 2n_z^2 = 1 \Rightarrow n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Regresando a las relaciones, las componentes son:

$$n_z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n_x = 0$$

Finalmente, la forma de este versor con su doble signo, se presenta como:

$$\mathbf{n}_{III} = 0\mathbf{i} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

Se dibujan los ejes del sistema de referencia principal (**I II III**) con relación al sistema de referencia en uso (**XYZ**), formando sistema derecho, centrado lo más posible los primeros octantes y obligando a que el mayor número de versores se encuentren en los octantes superiores. Vea la figura 2.22.

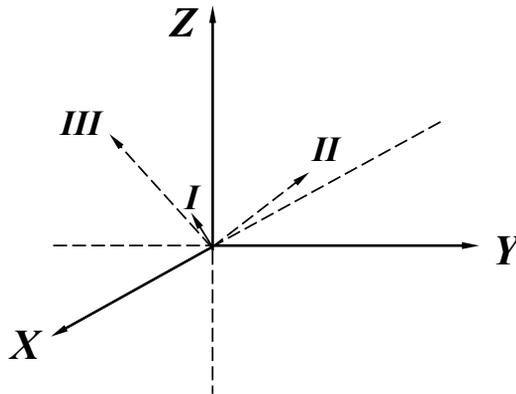


FIGURA 2.22. Direcciones principales del ejemplo 2.4

Al lograr todo esto se puede deducir el signo único de cada versor principal, con lo que se obtiene:

$$\mathbf{n}_I = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{II} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{III} = 0\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

Finalmente, se revisa la ortogonalidad (para comprobar que no se haya cometido algún error), planteando en forma ordenada el producto escalar de dos versores en dirección principal cada vez.

$$\{\mathbf{n}_I\}^T \{\mathbf{n}_{II}\} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \right\} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = -\frac{2}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\{\mathbf{n}_{II}\}^T \{\mathbf{n}_{III}\} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\{\mathbf{n}_{III}\}^T \{\mathbf{n}_I\} = \left\{ 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{Bmatrix} = 0 - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0$$

De este modo se comprueba que los resultados que se obtuvieron son los correctos.

2.9. Esfuerzos octaédricos

Se definen como esfuerzos octaédricos a los esfuerzos, tanto al normal como al cortante, que actúan en alguno de los llamados planos octaédricos. Tienen fundamental importancia en el análisis de la deformación volumétrica del material.

Se define como plano octaédrico aquel que esté asociado a un versor que guarde ángulos iguales con los ejes principales (**I II III**) sin tomar en cuenta su sentido, aunque no debemos olvidar que los versores deben estar referidos, en este caso, respecto al sistema $\mathbf{X}^* \mathbf{Y}^* \mathbf{Z}^*$. (tensor principal y ordenado) En el plano octaédrico del primer octante se cumple que su versor guarda con el sentido positivo de los tres ejes principales y de los ejes $\mathbf{X}^* \mathbf{Y}^* \mathbf{Z}^*$ el mismo ángulo

director. Los ocho planos comentados forman un octaedro en el espacio cartesiano. Véase la figura 2.23.

En este texto demostraremos cuál es el valor de los esfuerzos octaédricos en función de los esfuerzos principales. Para la demostración partiremos de un tensor que cumple con ser principal y ordenado (*). Se pretende lograr con esto el empate de los dos sistemas de referencia (el “astrisco” con el principal), ya que el versor que define al plano debe estar referido al sistema $X^*Y^*Z^*$. Véase de nuevo la figura 2.23.

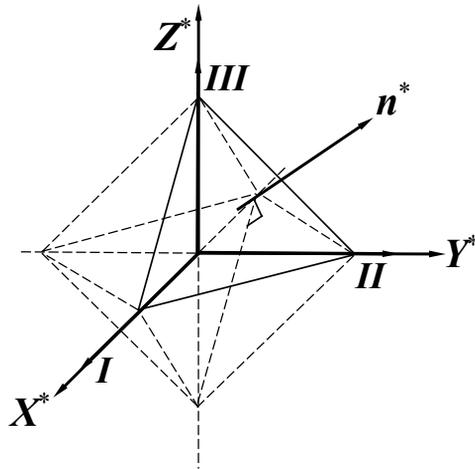


FIGURA 2.23. Octaedro y plano octaédrico del primer octante del sistema principal

Si el versor en primer octante tiene iguales ángulos directores y debe ser unitario, obligamos a operar al tensor principal y ordenado con este versor particular, como se puede ver:

$$\{t^{(n^*)}_{oct}\} = [T_{ij}^*] \{n^*\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1/\sqrt{3} \\ \sigma_2/\sqrt{3} \\ \sigma_3/\sqrt{3} \end{Bmatrix} \quad (2-58)$$

Conocido el vector esfuerzo asociado al plano octaédrico del primer octante, ya podemos calcular el esfuerzo normal que actúa en dicho plano.

$$\sigma_{\text{oct}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1}{3} + \frac{\sigma_2}{3} + \frac{\sigma_3}{3} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = \frac{I_1}{3} \quad (2-59)$$

Este esfuerzo resulta ser el promedio de los esfuerzos principales y, por lo tanto, la tercera parte del primer invariante del tensor esfuerzo. Para calcular el valor del esfuerzo cortante octaédrico, se puede aplicar la ecuación general (2.34) que se planteó con anterioridad, pero ahora para este caso particular:

$$\tau_{\text{oct}} = \pm \sqrt{\left| \mathbf{t}^{(n^*)}_{\text{oct}} \right|^2 - (\sigma_{\text{oct}})^2} \quad (2-60)$$

El planteamiento particular expandido para este caso es:

$$\tau_{\text{oct}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2} \quad (2-61)$$

No se va a demostrar aquí, pero se puede plantear, que lo que se obtiene utilizando la ecuación 2-61 es el mismo valor que se obtiene con la expresión (2-62):

$$\tau_{\text{oct}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2-62)$$

2.10. Análisis plano de esfuerzos

En este material se debe puntualizar que, lo que se muestra a continuación, es un Análisis plano de esfuerzos que permite modelar al fenómeno tridimensional. Se marca con esto una diferencia con los textos de mecánica de materiales que manejan un concepto llamado “Estado plano de esfuerzos” que puede provocar confusión en los estudiantes. A diferencia del “Estado plano de esfuerzos”, en el Análisis plano de esfuerzos siempre se debe cumplir que:

$$\text{Análisis plano} \begin{cases} \text{a) } \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \\ \quad \quad \quad \text{o} \\ \text{b) } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \end{cases} \quad (2-42)$$

Se puede demostrar fácilmente que esta condición no siempre la cumple el estado plano de esfuerzos que exponen esos textos.

Al igual que en el caso tridimensional, en Análisis plano reservaremos el eje Z para definir la dirección vertical (dirección en que actúa la gravedad). También conviene (por convención de signos de esfuerzos) asignar el eje III del sistema de referencia principal a la dirección donde actúan las compresiones (negativas) en muchos fenómenos de Ingeniería Civil. Los sistemas de referencia que usaremos en este curso, tanto el de uso como el principal, se muestran en la figura 2.24.

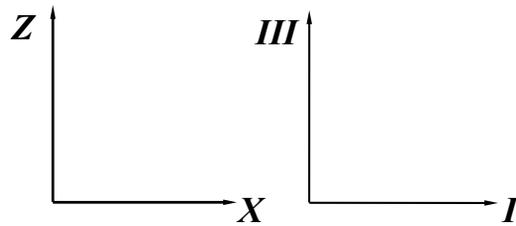


FIGURA 2.24. Sistemas de referencia derechos utilizados en Análisis plano

El tensor esfuerzo, asociado a un cuadrado diferencial de esfuerzos como el de la figura 2.27 y referido al sistema de referencia XZ como se ve en la figura 2.24, debe tener la siguiente forma:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-63)$$

En este Análisis plano, el versor debe tener la forma:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_z \mathbf{k} \quad ; \quad \{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2-64)$$

donde

$$\begin{aligned} n_x &= \cos \alpha \\ n_z &= \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-65)$$

En este caso α y γ son los ángulos directores. Véase la figura 2.25.

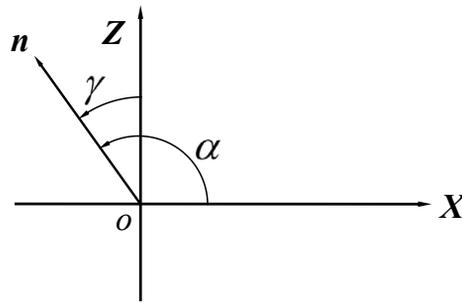


FIGURA 2.25. Ángulos directores de un versor en Análisis plano

La convención de signos para formar el tensor esfuerzo debe ser la misma que se propuso para análisis tridimensional. Sin embargo, el pasar de tres dimensiones a dos permite en Análisis plano dar signo único al esfuerzo cortante que actúe en cierto plano o cara. En la figura 2.26 se muestran las caras positivas de un cuadrado diferencial (aquellas por donde salen los sentidos positivos de los ejes del sistema de referencia derecho **XZ** si el origen se coloca en el centro).

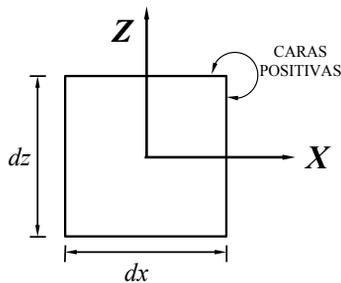


FIGURA 2.26. Caras positivas de un cuadrado diferencial orientado

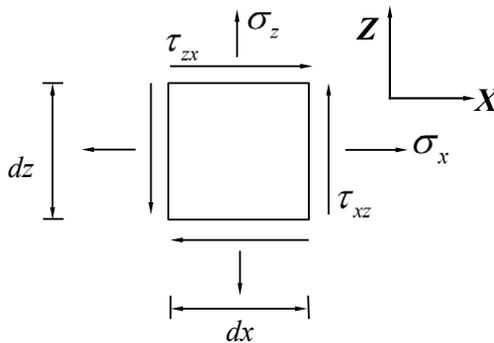


FIGURA 2.27. Esfuerzos positivos en Análisis plano de esfuerzos

En la figura 2.27 se muestra un cuadrado diferencial, cumpliendo con que todos los esfuerzos mostrados son positivos en caras positivas (normales y cortantes).

Como una propuesta del autor de este material, se muestra un artificio para obtener siempre el signo correcto del esfuerzo cortante (sentido correcto). Se propone emplear un sistema derecho de versores que están obligados a ser ortogonales. A este sistema se le denominará sistema de versores mn . En la figura 2.28 se muestra dicho sistema. No se debe olvidar que el versor n siempre es normal a un plano o cara, mientras que el versor m siempre está contenido en un plano o cara. En un ejemplo que se expone más adelante, se va a mostrar la forma de auxiliarse del versor m , para asignar signo único o sentido correcto al esfuerzo cortante.

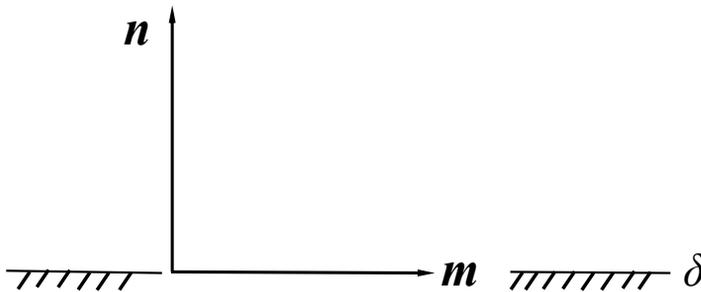


FIGURA 2.28. Sistema derecho de versores auxiliares m y n

2.11. Método analítico tensorial de análisis plano de esfuerzos, para calcular los esfuerzos σ y τ

Se procede en forma análoga a la manera en que se operó en análisis tridimensional. Se forma el tensor esfuerzo a partir del cuadrado diferencial de esfuerzos. Se define después al versor n , aprovechando para definir de una vez al versor m (sistema derecho), en función de cosenos directores de n . Siempre se cumple que, si se conocen los componentes escalares de n , es posible formar un sistema de versores mn derecho, aplicando la regla que sigue y que se presenta primero en notación de Gibbs:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_z \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = n_z \mathbf{i} + (-n_x) \mathbf{k} \quad (2-66)$$

Lo mismo, pero en notación matricial, se puede expresar como:

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{m}\} = \begin{Bmatrix} n_z \\ -n_x \end{Bmatrix} \quad (2-67)$$

El vector esfuerzo asociado al plano δ de análisis plano, con analogía al análisis tridimensional, se puede calcular como sigue:

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = [\mathbf{T}_{ij}]\{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (2-68)$$

El valor del esfuerzo normal (módulo y signo correctos) se obtiene al operar el producto escalar, como se muestra a continuación:

$$\sigma = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} = \{n_x \quad n_z\} \begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (2-69)$$

El valor del esfuerzo cortante (módulo y signo correctos) se obtiene al operar un producto escalar entre el versor \mathbf{m} y el vector esfuerzo antes obtenido.

$$\tau = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} = \{m_x \quad m_z\} \begin{Bmatrix} t_x^{(n)} \\ t_z^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (2-70)$$

Al haber procedido como se comentó, se logra asociar el sentido correcto de cada esfuerzo al sentido de su versor paralelo del sistema derecho de versores. Es decir, si el valor del esfuerzo normal es positivo, querrá decir que se debe representar con el mismo sentido positivo del versor \mathbf{n} . Si resulta ser negativo, nos indica que su sentido es el opuesto al sentido positivo del versor \mathbf{n} . Por analogía se aplica lo mismo para el valor del esfuerzo cortante y su relación con el sentido positivo del versor \mathbf{m} (sistema derecho).

Para fines de formar el tensor debe quedar clara la concepción de signo para el esfuerzo cortante al comparar su sentido con los ejes \mathbf{XZ} (convención para tensor). Otro concepto se aplica para conocer el sentido (o en su caso el signo) del cortante en un análisis individual de cara o plano, donde se compara su sentido con el sentido positivo del versor \mathbf{m} .

En la figura 2.29 se muestra un cuadrado diferencial de esfuerzos, donde por la convención vista todos los esfuerzos (normales y cortantes) son positivos al compararlos con el sentido positivo de los ejes \mathbf{X} y \mathbf{Z} . Si ahora analizamos el signo que corresponde al esfuerzo cortante en una forma aislada de cara o plano, y usando solo como planos las caras positivas del cuadrado, se puede ver que la cara \mathbf{X} reporta un valor negativo para el cortante, pero para análisis no de cuadrado diferencial sino de cara o plano (en realidad son dos convenciones diferentes). En un análisis de este tipo, la cara \mathbf{Z} reporta un signo positivo para el cortante por tener el mismo sentido positivo de \mathbf{m} . Se puede comprobar que el signo del cortante de la cara positiva \mathbf{Z} con la convención de cara o plano, coincide con el signo del cortante con la convención de signos para formar el tensor a partir del cuadrado diferencial.

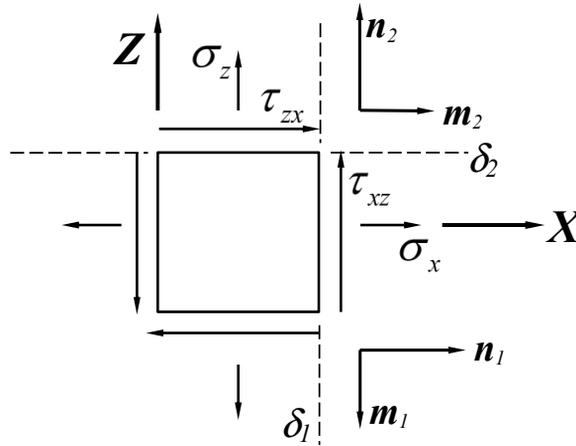


FIGURA 2.29. Caras positivas analizadas con la convención de signos para plano

A continuación se presentan dos ejemplos que pretenden aplicar cada paso y conceptos aquí expresados.

EJEMPLO 2.5

Calcule el valor de los esfuerzos normal y cortante (σ y τ) que actúan en el plano δ que se propone en el cuadrado diferencial y que se muestra en la figura 2.30. Posteriormente dibuje el plano δ orientado respecto del sistema de referencia XZ e indique allí el sentido correcto de estos esfuerzos obtenidos.

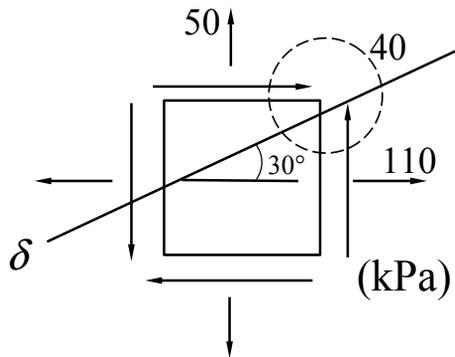


FIGURA 2.30. Cuadrado diferencial del ejemplo 2.5

SOLUCIÓN

Se conforma el tensor a partir del cuadrado diferencial que se muestra en la figura anterior.

$$[\mathbf{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 & 40 \\ 40 & 50 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

De los dos posibles versores que tiene cualquier plano δ que se proponga, elegiremos a aquel que apunte hacia arriba ($\mathbf{n} = n_I$, con segunda componente positiva). Véase la figura 2.31. En este caso el versor que usaremos es:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}$$

Aplicando la regla que se comentó, se deducen los componentes del versor \mathbf{m} a partir de los componentes del versor \mathbf{n} .

$$\mathbf{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

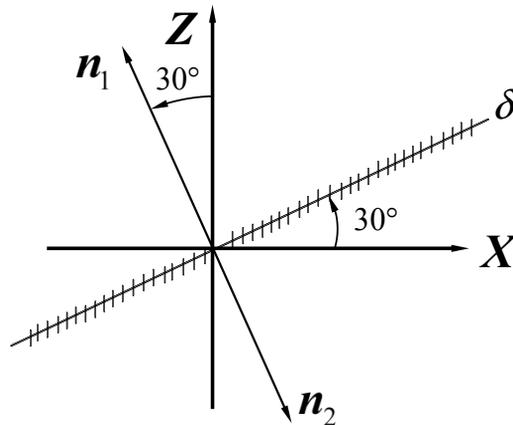


FIGURA 2.31. Dos posibles versores que definen al plano δ

Se calcula ahora el vector esfuerzo asociado a ese plano, definido por el versor \mathbf{n} elegido.

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = \begin{bmatrix} 110 & 40 \\ 40 & 50 \end{bmatrix} \text{kPa} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{110}{2} + \frac{40\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{40}{2} + \frac{50\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \text{kPa} = \begin{Bmatrix} -55 + 20\sqrt{3} \\ -20 + 25\sqrt{3} \end{Bmatrix} \text{kPa}$$

Operando como se propone, se obtiene el valor del esfuerzo normal (escalar).

$$\sigma = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -55 + 20\sqrt{3} \\ -20 + 25\sqrt{3} \end{Bmatrix} \text{kPa} = (65 - 20\sqrt{3}) \text{kPa} \approx 30,36 \text{kPa}$$

Con una operación análoga, se obtiene el valor del esfuerzo cortante (escalar).

$$\tau = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -55 + 20\sqrt{3} \\ -20 + 25\sqrt{3} \end{Bmatrix} \text{kPa} = (20 - 15\sqrt{3}) \text{kPa} \approx -5,981 \text{kPa}$$

Se puede deducir, a partir de los resultados obtenidos, que el esfuerzo normal por ser positivo, debe tener el mismo sentido del sentido positivo del vector \mathbf{n} . El esfuerzo cortante al resultar negativo debe tener el sentido contrario al sentido positivo del vector \mathbf{m} . En la figura 2.32 se muestran los sentidos correctos de estos esfuerzos obtenidos, al auxiliarse del sistema de versores \mathbf{mn} derecho.

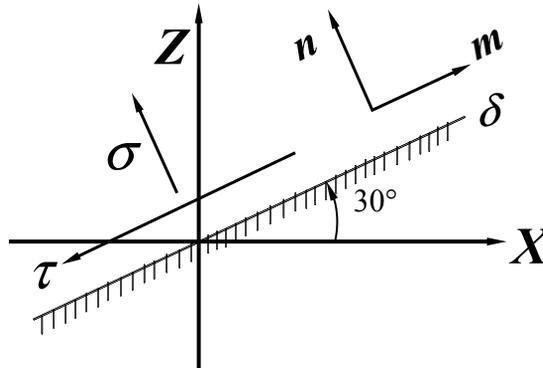


FIGURA 2.32. Sentidos correctos de los esfuerzos actuantes en el plano δ , para el ejemplo 2.5

EJEMPLO 2.6

Calcule el valor de los esfuerzos normal y cortante (σ y τ), los cuales actúan en el plano δ propuesto en el cuadrado diferencial que se muestra en la figura 2.33. Posteriormente dibuje el

plano δ orientado respecto del sistema de referencia XZ e indique allí el sentido correcto de dichos esfuerzos.

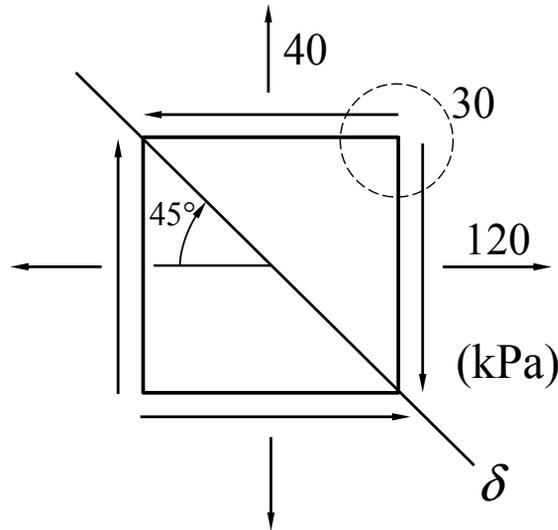


FIGURA 2.33. Cuadrado diferencial de esfuerzos del ejemplo 2.6

SOLUCIÓN

Se forma el tensor a partir del cuadrado diferencial de la figura anterior.

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

De los dos posibles versores del plano δ se elige el que tiene la segunda componente positiva.

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \approx 0,707 \mathbf{i} + 0,707 \mathbf{k}$$

Se deduce el segundo versor de los componentes del primero.

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \approx 0,707 \mathbf{i} - 0,707 \mathbf{k}$$

Se calcula el vector esfuerzo asociado al plano de análisis.

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = \begin{bmatrix} 120 & -30 \\ -30 & 40 \end{bmatrix} \text{kPa} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{90}{\sqrt{2}} \\ \frac{10}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \text{kPa} \approx \begin{Bmatrix} 63,64 \\ 7,071 \end{Bmatrix} \text{kPa}$$

Se calcula el valor del esfuerzo normal.

$$\sigma = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} \approx \{0,707 \ 1 \ 0,707 \ 1\} \begin{Bmatrix} 63,64 \\ 7,071 \end{Bmatrix} \text{kPa} \approx 50 \text{ kPa}$$

Se calcula el valor del esfuerzo cortante.

$$\tau = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} \approx \{0,707 \ 1 \ -0,707 \ 1\} \begin{Bmatrix} 63,64 \\ 7,071 \end{Bmatrix} \text{kPa} \approx 40 \text{ kPa}$$

En este caso, como los dos esfuerzos resultaron positivos, cada uno de ellos debe tener el mismo sentido de su versor auxiliar paralelo, con la condición de que el sistema de versores sea derecho, como se puede ver se cumple en la figura 2.34.

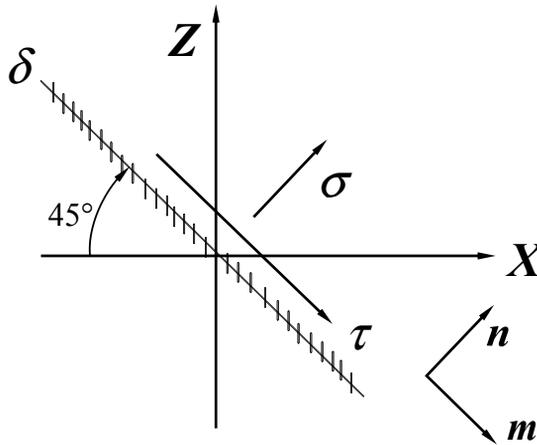


FIGURA 2.34. Sentidos correctos de los esfuerzos actuantes en el plano δ , para el ejemplo 2.6

2.12. El elipsoide de Lamé

Desde el punto de vista del cálculo operacional, se puede decir que el tensor esfuerzo $[T_{ij}]$ es un operador físico matemático que, al actuar sobre el campo de los versores, lo transforma en el campo de los vectores esfuerzo.

Lamé demuestra analíticamente que en ninguno de los planos que pueden cortar al punto P actúa un esfuerzo normal mayor que σ_1 ni menor que σ_3 . Más adelante se verá que a la misma conclusión llega Otto Mohr, pero utilizando un camino diferente.

La demostración que se plantea a continuación se va a hacer para el caso particular donde todos los esfuerzos principales son positivos y diferentes, es decir:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (2-71)$$

Lo anterior tiene que ver con plantear una figura que sea posible visualizar en el espacio independientemente de su signo. Se plantea ahora, como para planos octaédricos, asociar al tensor principal y ordenado con el “tensor asterisco”.

Se propone como vector de posición al vector esfuerzo (saliendo del origen), lo que equivale a escribir sus componentes escalares como coordenadas, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x^* &= t^{(n^*)}_x \\ y^* &= t^{(n^*)}_y \\ z^* &= t^{(n^*)}_z \end{aligned} \quad (2-72)$$

Si se propone como dato partir de un tensor principal y ordenado y se opera matricialmente con cualquier posible versor, se llega a la condición:

$$\left\{ t^{(n^*)} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n^*_x \\ n^*_y \\ n^*_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n^*_x \\ \sigma_2 n^*_y \\ \sigma_3 n^*_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t^{(n^*)}_x \\ t^{(n^*)}_y \\ t^{(n^*)}_z \end{Bmatrix} \quad (2-73)$$

Eliminando a las componentes escalares del vector esfuerzo, igualando las expresiones (2-72) y (2-73) y presentándolas en forma algebraica, se concluye que:

$$\begin{aligned} x^* &= \sigma_1 n^*_x \\ y^* &= \sigma_2 n^*_y \\ z^* &= \sigma_3 n^*_z \end{aligned} \quad (2-74)$$

Si se despejan ahora los cosenos directores “asterisco” de la ecuación (2-74), se obtiene que:

$$n^*_x = \frac{x^*}{\sigma_1}$$

$$n_y^* = \frac{y^*}{\sigma_2} \quad (2-75)$$

$$n_z^* = \frac{z^*}{\sigma_3}$$

Por otro lado, recordemos la ecuación (2-9), donde siempre se debe cumplir que:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \Rightarrow n_x^{*2} + n_y^{*2} + n_z^{*2} = 1 \quad (2-9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-75) en la ecuación (2-9) se tiene finalmente que:

$$\frac{x^{*2}}{\sigma_1^2} + \frac{y^{*2}}{\sigma_2^2} + \frac{z^{*2}}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2-76)$$

Esta expresión representa el lugar geométrico (superficie) que generarían todas las puntas de flecha de los vectores esfuerzo, conformando así una figura llamada *elipsoide*. En la figura 2.35 se muestra esta superficie únicamente en el primer octante. Observe el empate de los dos sistemas de referencia (el “asterisco” y el principal), en una forma que explica por sí misma, por qué conviene que el tensor de partida sea *principal y ordenado* (asterisco).

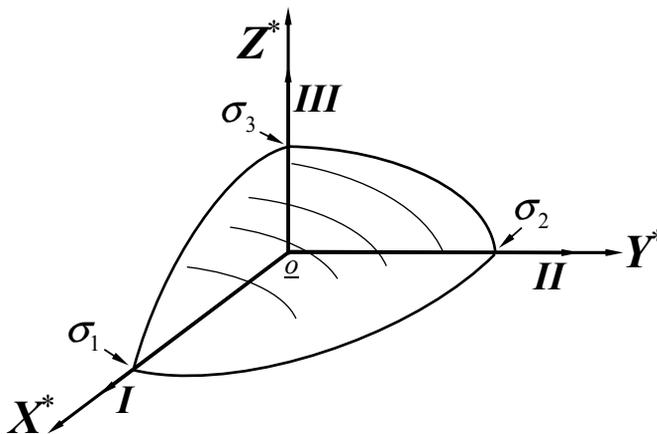


FIGURA 2.35. Elipsoide de Lamé general en el primer octante del sistema asterisco

De la misma figura 2.35, caso general en el Espacio de lamé, se puede decir que como ningún punto del elipsoide tiene una distancia más grande que la del semieje mayor, ni más pequeña que la del semieje menor, se concluye que en todos los planos que corten al punto \underline{P} , visualizado como un cubo orientado que representa al tensor principal y ordenado, se debe cumplir que en referencia al esfuerzo normal:

$$\sigma_1 \geq \sigma \geq \sigma_3 \quad (2-77)$$

Se pueden comentar tres casos adicionales al caso general antes visto. Superficies diferentes al caso general se formarían por el número infinito de puntas de flecha de los vectores esfuerzo.

- Para el caso donde los esfuerzos principales mayor e intermedio son iguales $\sigma_1 = \sigma_2$ de Análisis plano (elipsoide de revolución, con eje de rotación en los ejes Z^* y III).
- Para el caso donde los esfuerzos principales intermedio y menor son iguales $\sigma_2 = \sigma_3$ de Análisis plano (elipsoide de revolución, con eje de rotación en los ejes X^* y I).
- Para el caso isótropo (o isotrópico), con los tres esfuerzos principales iguales, se visualiza una esfera en el Espacio de Lamé.

2.13. La cuadrática de Cauchy

Se denomina como cuadrática de Cauchy a la ecuación general en forma algebraica que expresa directamente el valor del esfuerzo normal que debe actuar en un plano que se define por los cosenos directores de un versor normal.

Haciendo uso de nuestra notación matricial, se puede expresar como:

$$\sigma = \{\mathbf{n}\}^T [\mathbf{T}_{ij}] \{\mathbf{n}\} = \{\mathbf{n}\}^T \langle [\mathbf{T}_{ij}] \{\mathbf{n}\} \rangle \quad (2-78)$$

En la última parte de la expresión (2-78) se indica el orden en que se recomienda operar, ya que al operar al tensor con el versor sin trasponer, se obtiene la matriz que representa al vector esfuerzo asociado al plano de análisis.

$$\{\mathbf{t}^{(n)}\} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{Bmatrix} \quad (2-79)$$

Después se opera al versor traspuesto por el vector esfuerzo.

$$\sigma = \left\{ \begin{matrix} n_x & n_y & n_z \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \end{matrix} \right\} \quad (2-80)$$

Finalmente, se obtiene la ecuación directa que reporta el valor del esfuerzo normal (cuadrática de Cauchy).

$$\begin{aligned} \sigma = & \sigma_x n_x^2 + \tau_{yx} n_x n_y + \tau_{zx} n_x n_z + \tau_{xy} n_x n_y + \sigma_y n_y^2 + \\ & + \tau_{zy} n_y n_z + \tau_{xz} n_x n_z + \tau_{yz} n_y n_z + \sigma_z n_z^2 \end{aligned} \quad (2-81)$$

Recordando que los cortantes, por ser parte de un tensor (simétrico) tienen el mismo valor (módulo y signo), se puede reducir la cuadrática de Cauchy a:

$$\sigma = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{xz} n_x n_z \quad (2-82)$$

Si en lugar de partir del tensor general, se hace uso de un *tensor principal y ordenado* (no se va a poner el asterisco al coseno director), la ecuación toma la forma de la ecuación (2-83):

$$\sigma = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (2-83)$$

La forma de la ecuación anterior se usará cuando se demuestre la región gráfica de Mohr.

2.14. Región gráfica de Otto Mohr en análisis tridimensional

A partir del conocimiento de que dado un tensor que representa a un cubo diferencial de esfuerzos y eligiendo un plano δ que estaría definido por su versor normal y que cortase a ese punto con cierta orientación, podemos determinar analíticamente una pareja de valores de esfuerzo que representan a un punto $(\sigma \ \tau)$ en el plano que llamaremos, de ahora en adelante, *plano de Mohr*. Para tal fin, podemos usar las ecuaciones siguientes:

$$\sigma = \{n\}^T [T_{ij}] \{n\}$$

y

$$\tau = \pm \sqrt{t^{(n)}|^2 - (\sigma)^2}$$

A Otto Mohr se le ocurrió, en el año 1882, establecer un plano coordenado con ejes σ y τ , con lo que queda establecida una correspondencia entre los versores que definen a un plano que corta al punto P de un medio continuo con cierta orientación y a los puntos $(\sigma \ \pm \tau)$ en el ahora llamado plano de Mohr. Observe la figura 2.36.

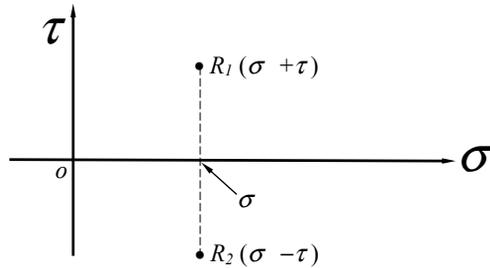


FIGURA 2.36. Puntos R en el plano de Mohr de esfuerzos

Dado un estado de esfuerzo, los esfuerzos principales acotan el menor y el máximo valor de los esfuerzos normales, de modo que éstos no se van hacia el infinito. Esto quiere decir que los valores de esfuerzo normal y, por ende, de cortantes que están asociados quedan acotados. Si están acotados, se deben poder mostrar en una región matemática que representa a todos los puntos $(\sigma$ y $\pm\tau$) en el plano propuesto (de Mohr).

En el caso general, conviene plantearse cuál es la forma de la región si enfocamos reducir el caso a que los esfuerzos principales sean positivos todos, como se ve en la ecuación (2-71).

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0 \tag{2-71}$$

Posteriormente se puede entender cómo queda la región si alguno, algunos o todos los esfuerzos principales fueran negativos. Sin embargo, en la demostración que se presenta a continuación, supondremos que todos los esfuerzos principales son positivos y diferentes.

Para responder a la pregunta que se planteó Mohr, se propone partir de un tensor principal y ordenado que se muestra ahora sin asterisco para no arrastrarlo después, como se ve aquí:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{2-84}$$

Más adelante, cuando se presente la solución gráfica de Mohr se comentará que, para aplicar esta solución gráfica, siempre se debe partir de un tensor principal y ordenado.

Se propone ahora generar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (donde las incógnitas sean los cosenos directores elevados al cuadrado), donde al resolver el sistema se pueda plantear el reconocimiento de alguna ecuación o inecuación que nos permita identificar la región que se está buscando.

Una primera ecuación útil puede ser la cuadrática de Cauchy en su forma principal y ordenada [porque el tensor se propone de esta forma, ecuación (2-83)]. Otra ecuación que se puede usar es la de la suma de cuadrados de cosenos directores, ecuación 2-9. Como las incógnitas son el cuadrado de los cosenos directores, se puede proponer como tercera ecuación útil el producto escalar del vector esfuerzo por él mismo, que en sus vectorial y matricial se plantea como:

$$\mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{t}^{(n)} = |\mathbf{t}^{(n)}|^2 = \{\mathbf{t}^{(n)}\}^T \{\mathbf{t}^{(n)}\} \quad (2-85)$$

El vector esfuerzo general, asociado al tensor principal y ordenado, lo podemos deducir como en la ecuación (2-73) y elevarlo al cuadrado por medio del producto escalar.

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_1 n_x & \sigma_2 n_y & \sigma_3 n_z \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{matrix} \right\} = \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 \quad (2-86)$$

Analizados los esfuerzos y los vectores esfuerzo en forma escalar y en analogía con el triángulo rectángulo que se plantea en la figura 2.18, se acepta que:

$$|\mathbf{t}^{(n)}|^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2-87)$$

Concluyendo, con base en lo anterior, que es válido escribir en forma escalar la siguiente expresión:

$$\sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2-88)$$

Con base en las ecuaciones anteriores que tienen como componentes los cuadrados de los cosenos directores, finalmente podemos plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, como fue originalmente la pretensión de Otto Mohr.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 &= \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 &= \sigma \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2-89)$$

La pregunta planteada se puede responder a partir de resolver, por medio de la regla de Cramer, el valor de cada coseno director elevado al cuadrado. A continuación se hace el planteamiento matricial para aplicar la regla de Cramer, en el caso del primer coseno director al cuadrado, y posteriormente para los otros cosenos directores.

$$n_x^2 = \frac{\begin{vmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad (2-90)$$

No se muestran todos los pasos de la compresión de los desarrollos que resultan de la ecuación anterior. Obviando pasos, se llega a:

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (2-91)$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \quad (2-92)$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (2-93)$$

Cada una de las ecuaciones anteriores se va a analizar a la luz de la ecuación (2-71) que nos recuerda que todos los esfuerzos principales son positivos y diferentes. Por otro lado, al hablar de los valores que puede tomar el cuadrado de un coseno director, observamos en un análisis desvinculado de momento con los otros cosenos directores que puede tomar valores desde cero hasta uno (incluidos estos extremos), por lo que se puede deducir que siempre debe tener un valor positivo o nulo.

$$0 \leq n_x^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n_x^2 \text{ siempre positivo o cero} \quad (2-94)$$

Además, el denominador de la ecuación (2-91), bajo la condición de que todos los esfuerzos principales son positivos, está obligado a ser también positivo.

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$$

Con base en lo comentado, queda obligado que el numerador de la ecuación (2-91) debe ser positivo o valer como mínimo cero, por la condición que impone la ecuación (2-94).

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0$$

Si se expande el numerador comentado, se tiene:

$$\sigma^2 - \sigma\sigma_2 - \sigma\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \tau^2 \geq 0$$

que se puede agrupar como se muestra:

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 + \tau^2 \geq 0$$

Se puede ahora introducir en ambos lados de la inecuación el término $-\sigma_2\sigma_3$ y completando el cuadrado en el lado izquierdo y equilibrando, por lo tanto, en el lado derecho, se llega a que:

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \sigma_2\sigma_3$$

Trabajando en el lado izquierdo de la inecuación se concluye lo siguiente:

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2$$

Por otro lado, desarrollando el lado derecho se llega a:

$$\geq \frac{\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} - \frac{4\sigma_2\sigma_3}{4}$$

que puede ser reducido a:

$$\geq \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

Al acomodar lo obtenido con anterioridad, se llega finalmente a que:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (2-95)$$

Si analizamos esta inecuación como si fuera una ecuación, se llega a la conclusión que tiene la misma forma de la ecuación de una circunferencia con la forma particular:

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2 \quad (2-96)$$

Ecuación que corresponde a una circunferencia con centro sobre el eje X y desplazado del eje Y en una distancia igual a h .

Trasladando estas ideas al plano de Mohr la ecuación (2-95) como igualdad nos habla de una primera circunferencia con radio:

$$r_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

y con centro primero en el punto

$$c_1 \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \quad 0 \right)$$

Finalmente, si pasamos de la igualdad a la inecuación de la expresión (2-95), podemos concluir que esta primera región corresponde a la circunferencia comentada y a toda región externa a ésta.

Analizamos ahora las consecuencias de la ecuación (2-92). En forma análoga a la ecuación (2-91), concluimos que el coseno director al cuadrado debe ser positivo o como mínimo cero.

$$0 \leq n_y^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n_y^2 \text{ siempre positivo o cero} \quad (2-97)$$

El denominador de la ecuación (2-92), a la luz de que los esfuerzos principales son positivos, queda obligado a tener un valor negativo que podemos expresar como:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$$

Como el denominador es negativo, el numerador queda obligado a ser negativo o a valer cero, como se muestra:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \leq 0$$

No haremos ahora todo el desarrollo, simplemente diremos que por analogía se debe llegar, en este caso, a la expresión (inecuación):

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (2-98)$$

En la igualdad corresponde a una segunda circunferencia con el radio y el centro mostrados a continuación:

$$r_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$c_2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad 0 \right)$$

Volviendo a la inecuación, podemos concluir que la región expresada en la inecuación (2-98) corresponde a la circunferencia comentada y a la región interior a esta.

Finalmente, procedemos al análisis de la ecuación (2-93). Igual que en los casos anteriores el cuadrado del coseno director es positivo o como mínimo vale cero.

$$0 \leq n_z^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n_z^2 \text{ siempre positivo o cero} \quad (2-99)$$

A la luz de esfuerzos principales positivos, se concluye que el denominador de la ecuación anterior (2-93) está obligado a ser positivo, como se muestra a continuación:

$$(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0$$

Por lo anterior, el numerador de la ecuación (2-93) queda obligado a ser positivo o como mínimo valer cero:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0$$

Haciendo uso de la analogía para evitar todo el desarrollo paso a paso, se llega a la siguiente inecuación:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (2-100)$$

En la igualdad, se trata de una tercera circunferencia con el radio y el centro que se muestran a continuación:

$$r_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$c_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad 0 \right)$$

Se concluye que la región representada por la inecuación (2-100) corresponde a la circunferencia comentada y a toda la región externa a esta.

Nos toca ahora concluir cuál es la región que buscaba Mohr, así que, reuniendo lo obtenido en las tres partes trabajadas y considerando que lo obtenido se debe cumplir en forma simultánea (las tres conclusiones al mismo tiempo), se concluye globalmente que la región buscada es la que se muestra en la figura 2.37.

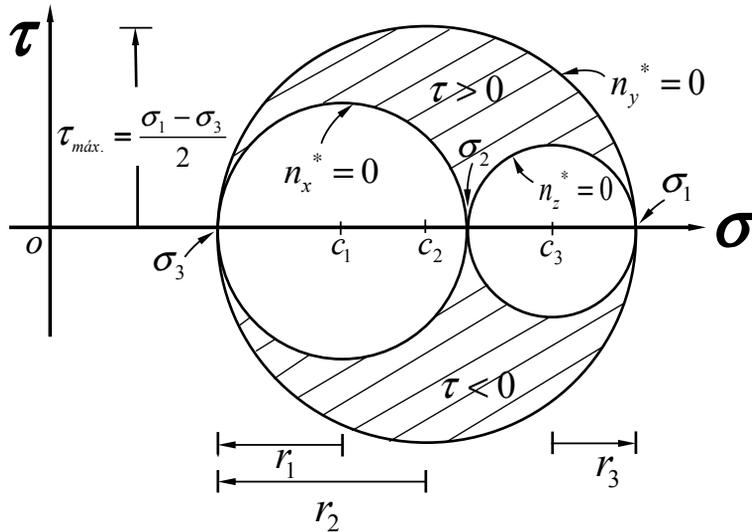


FIGURA 2.37. Región de Mohr de esfuerzos en el caso general

En la figura 2.37 se muestran las tres circunferencias, los centros, los radios, la zona de esfuerzo cortante positivo y la zona del negativo. También aparece el valor gráfico del esfuerzo cortante máximo positivo (con el mismo módulo del máximo negativo). Los cosenos directores asterisco muestran que la región en este plano está implícitamente orientada.

Se pueden comentar tres casos adicionales al caso general antes visto. Son regiones diferentes al caso general que se formarían si, a diferencia del caso visto, no se tuviera que todos los esfuerzos principales son diferentes.

- a) El caso donde los esfuerzos principales mayor e intermedio son iguales. Un caso de Análisis plano de esfuerzos ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$). Con una circunferencia visible, en realidad dos circunferencias sobrepuestas, y una tercera reducida a un punto en el lado extremo derecho.
- b) El caso donde los esfuerzos principales intermedio y menor son iguales. Otro caso de Análisis plano de esfuerzos ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$). Con una circunferencia visible, en realidad dos circunferencias sobrepuestas, y una tercera convertida en un punto en el lado extremo izquierdo.
- c) El caso donde los tres esfuerzos principales son iguales ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Como un punto sobre el eje σ , caso de esfuerzo isótropo (o isotrópico). El concepto de presión se representa así.

2.15. Solución general gráfica de Mohr para obtener los valores de σ y τ en un plano δ definido por un versor n^*

Como ya se comentó, la solución general gráfica de Mohr exige partir de un tensor principal y ordenado (\hat{C}), además de hacer uso de un versor referido al mismo sistema de referencia asociado al tensor principal y ordenado. Si no se tiene como dato de partida un tensor de este tipo, lo que corresponde es operar una rotación del tensor que permita transformar al tensor original que representa el mismo estado de esfuerzo, a una representación principal y ordenada. En caso de hacer una rotación de tensor, se debe buscar también rotar el versor original para que quede referido también al nuevo sistema. Este caso de rotación se verá más adelante y se darán elementos para rotar a un nuevo sistema de referencia al tensor y al versor.

La solución gráfica que se comenta a continuación es perfectamente compatible con el método analítico tensorial que se ha visto antes. Contaremos en cada caso con una herramienta que permite verificar los resultados del otro método.

2.15.1. Pasos a seguir en el método gráfico

- Del análisis del tensor principal y ordenado se puede evaluar el diámetro de la circunferencia máxima. Este valor es la diferencia siguiente: $\sigma_1 - \sigma_3$. Conocido este dato, se elige la escala adecuada para garantizar que la región de Mohr cabe en el espacio disponible para este fin. Como ejemplo de esto se puede ver el dibujo de la figura 2.38.
- Se define la posición de los ejes del plano de Mohr y se dibujan las tres circunferencias que conforman la región de Mohr. Vea esto esquemáticamente en la misma figura 2.38.
- Se trazan dos rectas paralelas al eje de los esfuerzos cortantes y en el lado positivo. Una toca al punto que representa al esfuerzo principal mayor σ_1 y la otra debe tocar al punto que representa al esfuerzo principal menor σ_3 . Estos puntos se encuentran sobre el eje de los esfuerzos normales.
- A partir de la línea base anterior que pasa por σ_1 , se traza una recta que denominaremos 1-1, que con esta forme un ángulo α^* (el mismo ángulo director del versor en el espacio cartesiano asterisco). Este ángulo vale $\alpha^* = \cos^{-1} n_x^*$. El cruce de las rectas comentadas se da en el punto σ_1 . Vea lo anterior también en la figura 2.38.
- A partir de la línea antes planteada que pasa por σ_3 , se traza una recta que denominaremos 3-3, que con esta forme un ángulo γ^* (el mismo ángulo director del versor en el espacio cartesiano asterisco). Este ángulo vale $\gamma^* = \cos^{-1} n_z^*$. El cruce de las rectas comentadas se da en el punto σ_3 . Vea también esto esquemáticamente en la figura 2.38.

- f) Haciendo centro en el punto c_1 , se traza un arco de circunferencia que pase por los puntos donde la línea 1-1 interseca a las circunferencias que no son la primera circunferencia (con centro c_1). Vea la figura 2.38.

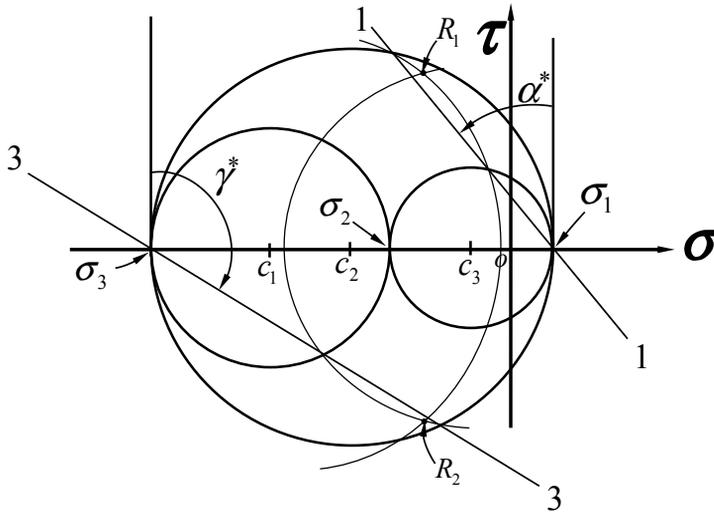


FIGURA 2.38. Notación para la solución gráfica de Mohr

- g) Ahora se hace centro en c_3 para trazar un arco de circunferencia que pase por los puntos donde la recta 3-3 interseca a las circunferencias que no son la tercera. Vea de nuevo la figura 2.38.
- h) Los dos puntos que representan la solución que se busca, vienen dados por las dos intersecciones de los arcos descritos en los incisos f) y g). Las coordenadas de estos cruces (puntos R_1 y R_2) en el plano de Mohr y con la escala que se definió, permiten obtener el valor del esfuerzo σ y el valor de τ con su doble signo, que actúan en el plano δ normal al versor \mathbf{n}^* . Vea la figura 2.38. Estos dos puntos solución justifican ahora gráficamente lo que ya habíamos definido analíticamente antes sobre el doble signo del esfuerzo cortante.

Conviene aclarar que los dos puntos solución siempre son simétricos respecto del eje σ y también están obligados a caer en la región de Mohr (interior de la circunferencia dos y exterior a las circunferencias uno y tres). También es pertinente comentar que, si el versor es unitario, al tomar los dos componentes escalares para definir los ángulos directores α^* y γ^* , el posible valor del coseno director n_y^* queda de alguna manera implícito. Se puede demostrar que la misma solución se obtiene independientemente del signo de los cosenos directores

como componentes del versor, por lo que se puede decir que existe un plano en cada octante con la misma combinación de esfuerzos σ y τ . No se deben confundir estos ocho planos (uno en cada octante) con los planos octaédricos.

Con un ejemplo donde se parte de un tensor principal y ordenado, se opera lo antes comentado.

EJEMPLO 2.7

A partir del tensor esfuerzo principal y ordenado (asterisco) que se muestra a continuación, referido respecto del sistema de referencia $X^*Y^*Z^*$ obtenga gráficamente los valores de los esfuerzos normal y cortante que actúan en el plano δ que queda definido por el versor \mathbf{n}^* que se propone:

$$[\mathbf{T}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 5,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

y

$$\mathbf{n}^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

Recordemos que para la solución gráfica, tanto el versor como el tensor esfuerzo deben estar referidos respecto del mismo sistema de referencia ($X^*Y^*Z^*$).

SOLUCIÓN

De los valores en el tensor esfuerzo (principal y ordenado) se deducen los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = 5,5 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = 1,5 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_3 = -1,5 \text{ MPa}$$

A partir de estos datos, se puede calcular el centro de cada una de las circunferencias, como se muestra a continuación:

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = \frac{1,5 - 1,5}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1(0 \ 0)$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{5,5 - 1,5}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad c_2(2 \ 0)$$

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{5,5 + 1,5}{2} = 3,5 \quad \Rightarrow \quad c_3(3,5 \ 0)$$

Conocidos los cosenos directores n_x^* y n_z^* , se deducen los ángulos directores:

$$\alpha^* = \cos^{-1} n_x^* = \cos^{-1} -\frac{1}{\sqrt{2}} = 135^\circ$$

$$\gamma^* = \cos^{-1} n_z^* = \cos^{-1} \frac{1}{2} = 60^\circ$$

Se procede siguiendo los pasos que se comentaron para resolver en forma gráfica lo que se nos pide. Vea la figura 2.39. Con la exactitud que permite el dibujo (como solución gráfica), se concluye que los mejores valores de los esfuerzos son los reportados en la misma figura:

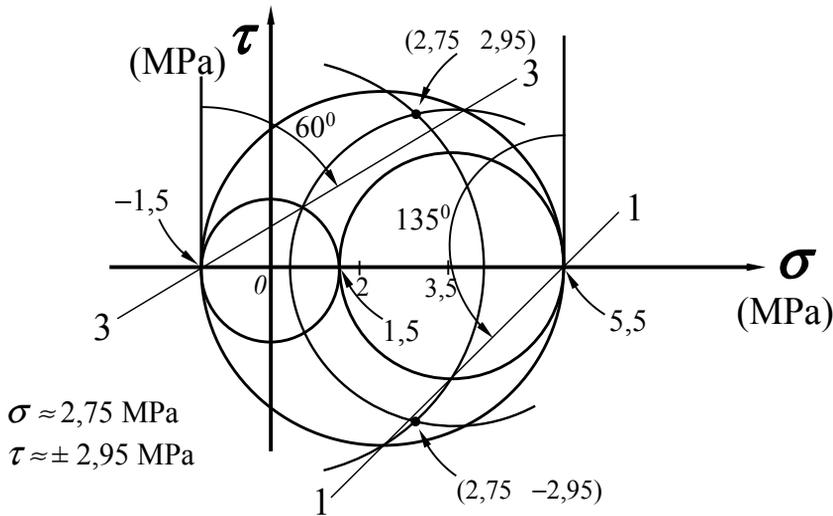


FIGURA 2.39. Solución gráfica del ejemplo 2.7

2.16. Rotación de tensores y rotación de versores

Dentro de la teoría del estado de esfuerzo, se puede demostrar que un mismo estado de esfuerzo se puede representar por una infinidad de tensores esfuerzo. Cada tensor esfuerzo está asociado a un particular sistema de referencia. Lo anterior nos permite pensar que se puede partir de un sistema de referencia original, que llamaremos XYZ , que permite modelar al tensor esfuerzo, y pasar posteriormente a visualizar otro tensor esfuerzo que representa al mismo estado de esfuerzo (con los mismos invariantes), pero referido a otro sistema de referencia que llamaremos $X^{**}Y^{**}Z^{**}$. Al nuevo tensor lo denominaremos “doble asterisco”.

Para poder efectuar la rotación simple lo primero que necesitamos es construir la llamada matriz de rotación. Esta matriz, que resulta ser una matriz ortonormal, se define como:

$$\{A_{ij}\} = \{nX^{**} \quad nY^{**} \quad nZ^{**}\} = \begin{Bmatrix} n_x X^{**} & n_x Y^{**} & n_x Z^{**} \\ n_y X^{**} & n_y Y^{**} & n_y Z^{**} \\ n_z X^{**} & n_z Y^{**} & n_z Z^{**} \end{Bmatrix} \quad (2-101)$$

Observe que la primera columna representa al versor que tiene la misma dirección y sentido positivo del eje X^{**} , respecto del sistema de referencia original XYZ . Análogamente, las columnas segunda y tercera representan el sentido positivo de los ejes Y^{**} y Z^{**} . En el caso del eje X^{**} la relación entre los ángulos directores y los cosenos directores, es:

$$\begin{aligned} n_x X^{**} &= \cos \alpha X^{**} \\ n_y X^{**} &= \cos \beta X^{**} \\ n_z X^{**} &= \cos \gamma X^{**} \end{aligned} \quad (2-102)$$

En la figura 2.40 se muestran los ángulos directores del eje X^{**} para una rotación simple alrededor del eje Y original. Por esta razón coinciden los ejes Y y Y^{**} . Los ángulos directores de los otros ejes no se dibujaron para no originar una figura sobrecargada de datos. Observe además en esta figura que el sistema de referencia asterisco está obligado a ser también un sistema de referencia derecho.

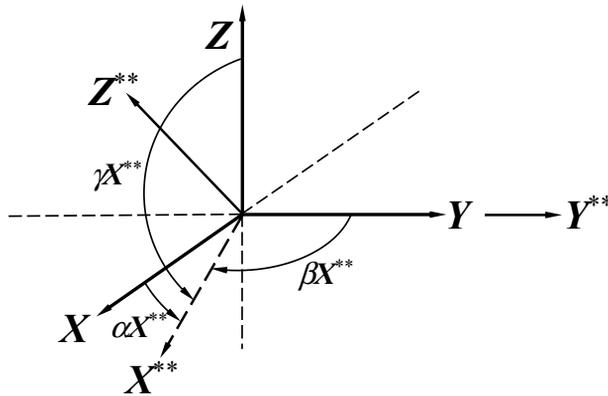


FIGURA 2.40. Ángulos directores del eje X^{**} respecto del sentido positivo del sistema de referencia

Como la matriz de rotación es siempre una matriz ortonormal (compuesta por versores ortogonales), se debe cumplir invariablemente que:

$$\{\mathbf{A}_{ij}\}^T \{\mathbf{A}_{ij}\} = \{\mathbf{I}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}, \text{ matriz identidad} \quad (2-103)$$

Para obtener un nuevo tensor (tensor doble asterisco) a partir del tensor original, se debe operar matricialmente en forma análoga a la manera en que aprendimos a operar para calcular el esfuerzo normal en el método analítico tensorial:

$$[\mathbf{T}_{ij}^{**}] = \{\mathbf{A}_{ij}\}^T \{[\mathbf{T}_{ij}]\{\mathbf{A}_{ij}\}\} \quad (2-104)$$

Al operar inicialmente el tensor esfuerzo y la matriz de rotación sin trasponer, se logra obtener la matriz que contiene, en forma de columna, a los vectores esfuerzo en las tres caras positivas de un nuevo cubo diferencial referido al sistema doble asterisco $\mathbf{X}^{**}\mathbf{Y}^{**}\mathbf{Z}^{**}$. Se genera así una matriz que llamaremos de vectores esfuerzo y que vamos a definir como:

$$[\mathbf{T}_{ij}]\{\mathbf{A}_{ij}\} = \{\mathbf{t}^{(n)}\mathbf{X}^{**} \quad \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{Y}^{**} \quad \mathbf{t}^{(n)}\mathbf{Z}^{**}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t}^{(n)}_x\mathbf{X}^{**} & \mathbf{t}^{(n)}_x\mathbf{Y}^{**} & \mathbf{t}^{(n)}_x\mathbf{Z}^{**} \\ \mathbf{t}^{(n)}_y\mathbf{X}^{**} & \mathbf{t}^{(n)}_y\mathbf{Y}^{**} & \mathbf{t}^{(n)}_y\mathbf{Z}^{**} \\ \mathbf{t}^{(n)}_z\mathbf{X}^{**} & \mathbf{t}^{(n)}_z\mathbf{Y}^{**} & \mathbf{t}^{(n)}_z\mathbf{Z}^{**} \end{Bmatrix} \quad (2-105)$$

Lo anterior justifica que en la ecuación (2-104) se indique una prioridad operacional. El vector esfuerzo actuante en la cara positiva normal al eje \mathbf{X}^{**} , se muestra en la ecuación (2-105) como la primera columna de esta matriz.

Para obtener el nuevo versor, que denominaremos versor doble asterisco (por quedar asociado al nuevo sistema de referencia $\mathbf{X}^{**}\mathbf{Y}^{**}\mathbf{Z}^{**}$), se procede como sigue:

$$\{\mathbf{n}^{**}\} = \{\mathbf{A}_{ij}\}^T \{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x^{**} \\ n_y^{**} \\ n_z^{**} \end{Bmatrix} \quad (2-106)$$

A continuación se plantea un ejemplo de rotación simple, partiendo de un tensor original:

EJEMPLO 2.8

Realizando una rotación simple, calcule el nuevo tensor partiendo del tensor original que se muestra. Calcule también la nueva forma del versor a partir del versor original que se propone. La relación entre el sistema de referencia original y el sistema de referencia asterisco se

muestra en la figura 2.41, donde se propone solo un giro alrededor del eje Y . En la figura se muestran los ángulos de desfase entre los ejes:

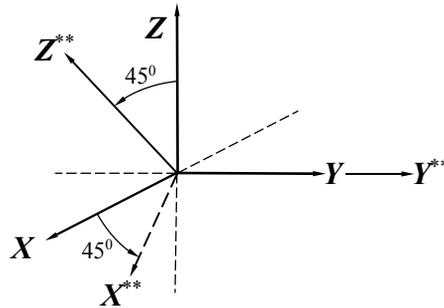


FIGURA 2.41. Ángulo de desfase de los sistemas de referencia del ejemplo 2.8

El tensor original referido al sistema XYZ es:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

El versor original tiene la forma:

$$\{n\} = \left\{ \begin{array}{c} 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \\ 1/2 \end{array} \right\}$$

SOLUCIÓN

A partir de la relación que guardan los sistemas de referencia en la figura 2.41, se deducen los versores con dirección y sentido de cada uno de los ejes asterisco, que en notación de Gibbs resultan ser:

$$nX^{**} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

$$nY^{**} = 0\mathbf{i} + \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$n\mathbf{Z}^{**} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

El colocar estos versores ordenados en forma de columna permite formar la matriz de rotación:

$$\{A_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

Procediendo como se recomendó, operamos matricialmente el tensor original con la matriz de rotación sin trasponer, a fin de obtener la matriz de vectores esfuerzo asociados al sistema de referencia $X^{**}Y^{**}Z^{**}$:

$$\left\{ \begin{Bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \text{MPa} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} & -5 & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ -\frac{6}{\sqrt{2}} & 3 & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

Para concluir en la aplicación de la ecuación (2-104), se opera matricialmente la matriz de rotación traspuesta por la matriz de vectores esfuerzo, obteniendo así el tensor esfuerzo asterisco:

$$[T_{ij}^{**}] = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{7}{\sqrt{2}} & -5 & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ -\frac{6}{\sqrt{2}} & 3 & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \text{MPa} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-6}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \\ -\frac{6}{\sqrt{2}} & 3 & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{2} & \frac{-4}{\sqrt{2}} & \frac{9}{2} \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

Al comparar este nuevo tensor doble asterisco con el que representaba al tensor original, se puede demostrar que los tres invariantes de ambos tensores deben ser iguales (representan al mismo estado de esfuerzo pero referido a dos sistemas de referencia diferentes).

Para operar la rotación del versor, aplicamos la ecuación (2-106):

$$\{\mathbf{n}^{**}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(2-\sqrt{2})}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{(2+\sqrt{2})}{4} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0,1464 \\ -0,5000 \\ 0,8536 \end{Bmatrix}$$

Se puede demostrar que si se buscan los esfuerzos σ y τ en un plano δ partiendo de un tensor y un versor originales, y si se busca lo mismo partiendo de un tensor y un versor doble asterisco, se obtiene el mismo resultado, ya que serían dos formas de referirse al mismo plano, pero visto desde dos sistemas de referencia diferentes.

En comentario adicional, se puede decir que si se quisiera transformar un tensor original a su forma principal y ordenada, se tendrían que calcular los esfuerzos principales y los versores en dirección de esfuerzo principal, como se hizo en el ejemplo 2.4. Cuando se tuvieran los versores con signo único (después de obligar a que formen sistema derecho), se podría formar la matriz de rotación que al operar con el tensor original lo convertiría en otro principal y ordenado (asterisco). Si se quisiera rotar al versor que representa algún plano original, donde se quisiera conocer por ejemplo, a los esfuerzos σ y τ actuantes, se podría deducir la forma del versor rotado, operando a la matriz de rotación traspuesta por el versor original. La matriz de rotación que podría convertir a su forma principal y ordenada al tensor del ejemplo 2.4 sería, con datos de ese ejemplo:

$$\{A_{ij}\} = \{\mathbf{n}_I \quad \mathbf{n}_{II} \quad \mathbf{n}_{III}\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

También esta matriz de rotación serviría para obtener un versor asterisco, si se quisiera conocer la forma del versor normal al mismo plano original propuesto, pero ahora referido al sistema de referencia asterisco.

2.17. Solución gráfica de Análisis plano

Al igual que se comentó para el método analítico tensorial de Análisis plano (ecuación 2-32), la solución gráfica rigurosa solo es posible en los casos donde se cumpla alguna de las ecuaciones (2-42):

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \\ & \quad \quad \quad \text{o} \\ & \text{b) } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \end{aligned} \tag{2-42}$$

Cuando se opera gráficamente el Análisis plano, se puede demostrar que la región de Mohr se reduce a la mera circunferencia visible porque dos esfuerzos principales son iguales (que ya se explicó, en realidad son dos sobrepuestas), como esquemáticamente se muestra en la figura 2.42.

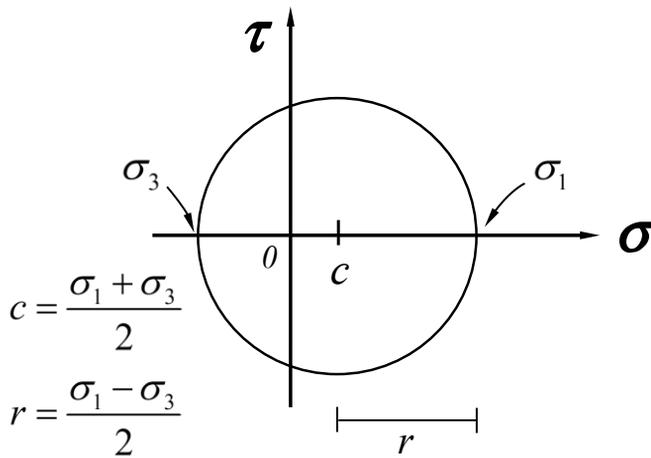


FIGURA 2.42. Circunferencia de Mohr en Análisis plano de esfuerzos

2.17.1. Reglas para dibujar la circunferencia visible en el plano de Mohr

Se parte de los datos del tensor de Análisis plano, que a su vez se obtuvieron del cuadrado diferencial de esfuerzos. Estas reglas se pueden aplicar a cualquier método de solución posterior (del ángulo doble, del polo móvil y el nuestro, del polo fijo).

- i) Asociado el cortante τ_{xz} al esfuerzo normal σ_x , se dibuja un punto con coordenadas $[\sigma_x -(\tau_{xz})]$ (se le cambia el signo al cortante en comparación a la manera en que aparece en el tensor de partida).
- ii) Asociado el cortante τ_{zx} a σ_z se dibuja un punto con coordenadas $(\sigma_z \tau_{zx})$, lo que implica que el cortante mantiene aquí el mismo signo con el que aparece en el tensor.

La distancia entre estos puntos corresponde al diámetro de la circunferencia. Si se traza una recta que una a ambos puntos, donde esta línea cruza al eje de los esfuerzos normales marca el centro de la circunferencia visible, permitiendo dibujarla con un compás.

EJEMPLO 2.9

Aplicando las reglas que antes se presentaron, dibuje la circunferencia de Mohr asociada al cuadrado diferencial de esfuerzos que se muestra en la figura 2.43.

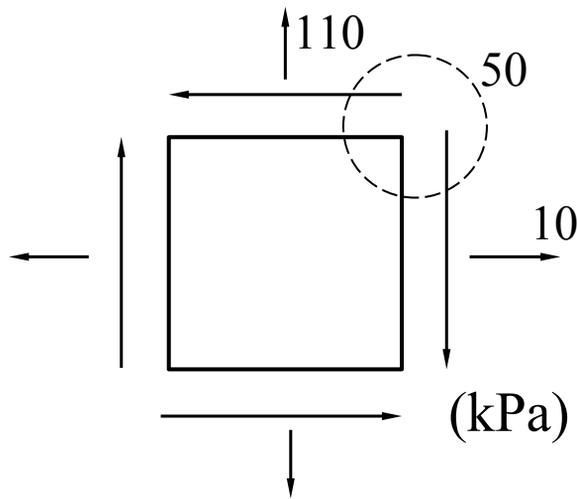


FIGURA 2.43. Cuadrado diferencial de esfuerzos del ejemplo 2.9

SOLUCIÓN

El tensor correspondiente tiene la forma:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & -50 \\ -50 & 110 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

La circunferencia visible que corresponde a este caso se muestra en la figura 2.44. Observe que los puntos que permiten formar la circunferencia representan a los esfuerzos actuantes en las caras positivas, analizadas con la convención de signos antes vista, cuando se aplica el sistema de versores derecho **mn** en el análisis de cara o plano.

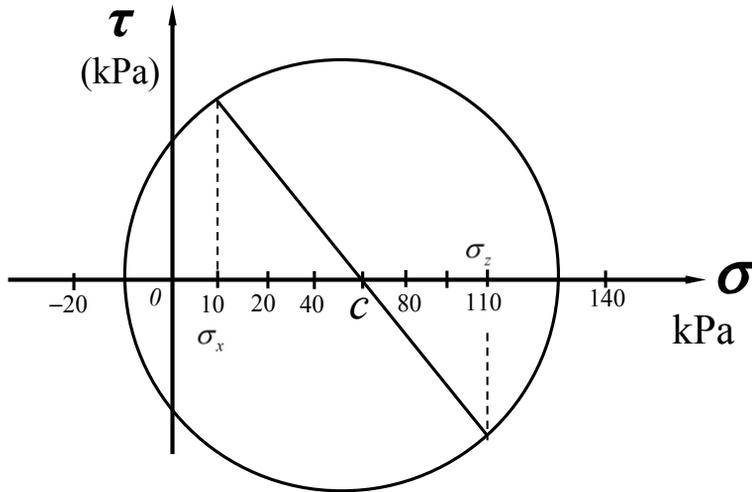


FIGURA 2.44. Circunferencia visible que representa el estado de esfuerzo del ejemplo 2.9

Por lo antes dicho, se puede demostrar que todos los tensores esfuerzo modelados con puntos opuestos y que fueran unidos por una línea que pasara por el centro de la circunferencia, deben tener los mismos invariantes. Un tensor de 2×2 de Análisis plano de esfuerzo tiene solo dos invariantes, que se calculan como sigue:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_3 \tag{2-107}$$

y

$$I_2 = \det |T_{ij}| = \det \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{2-108}$$

Estos invariantes, al igual que en el caso espacial (tridimensional), pueden servir como identificadores de un mismo estado de esfuerzo en dos tensores que fueran dados y que no se supiera si pertenecen o no al mismo estado de esfuerzo. Si los dos invariantes, en este caso de Análisis plano de esfuerzo, fueran iguales para dos tensores con componentes diferentes, sería indicador de que los dos representan al mismo estado de esfuerzo. Recordemos, y esto es válido para análisis espacial y para Análisis plano, que un mismo estado de esfuerzo se puede modelar con un número infinito de tensores, pero que debe ser representado por una única región en el plano de Mohr.

2.17.2. Método del polo fijo del doctor Dagoberto de La Serna

Este método lo enseñaba el Dr. Dagoberto de La Serna, exprofesor de la antigua División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (DIME) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Dicho método es el preferido del autor de este texto, ya que le parece extraordinariamente didáctico debido a que introduce en el plano de Mohr el sistema de referencia en uso XZ . Introduce también, con posición fija y siempre igual, el sistema de referencia principal $I III$.

Pasos para aplicar el Método del polo fijo.

- A partir del cuadrado diferencial de esfuerzos se obtiene el tensor asociado al estado de esfuerzo, referido al sistema de referencia XZ , analizando los esfuerzos en las caras positivas Véase la figura 2.45. Una vez obtenido el tensor, se dibuja la circunferencia de Mohr aplicando las reglas que se citaron antes y eligiendo la escala adecuada, para que la circunferencia quepa en el espacio asignado para este fin.

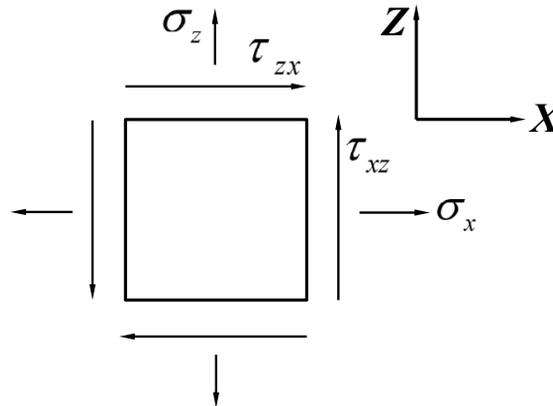


FIGURA 2.45. Cuadrado diferencial de esfuerzos orientado

- Donde la circunferencia cruza al eje de los esfuerzos normales, se pueden ubicar gráficamente los valores de los esfuerzos principales (σ_1 y σ_3). Vea la figura 2.46.
- En este método particular, el polo siempre se ubica en el mismo punto que representa al esfuerzo principal menor (σ_3) (polo de los versores \mathbf{n}). Este punto es el origen de los sistemas derechos de referencia, los que este método permite introducir en el plano de Mohr. Véase de nuevo la figura 2.46. Más adelante se introducen los mismos conceptos de análisis plano que se vieron en el método analítico tensorial.
- En el método del polo fijo la dirección del esfuerzo principal mayor (\mathbf{I}) siempre se aloja sobre el eje σ y con su mismo sentido. Véase la figura 2.46.

- e) Con dirección perpendicular al eje σ , con el mismo sentido del eje τ y teniendo como origen al polo, siempre se aloja el eje que representa al esfuerzo principal menor (**III**). Véase en la figura 2.46 la posición del sistema principal en el plano de Mohr.
- f) Con una línea recta se une al polo con el punto $[\sigma_x -(\tau_{xz})]$. Esta línea representa la dirección del eje **X**, aunque no se haya decidido todavía su sentido correcto.
- g) Con otra línea recta se une al polo con el punto $(\sigma_z \tau_{zx})$. Esta línea representa la dirección del eje **Z**, aunque tampoco se haya decidido todavía su sentido correcto.
- h) Para decidir el sentido correcto de los ejes del sistema de referencia **XZ**, se busca que formen sistema derecho, al mismo tiempo que se pretende centrar en el plano de Mohr, lo más posible, los primeros cuadrantes de ambos sistemas de referencia. La propuesta anterior pretende que todos obtengan la misma solución gráfica. El centrado de los primeros cuadrantes se ejemplifica tanto en la figura 2.46 como en la figura 2.47. Revise en ambas figuras el ángulo θ de desfase entre ambos sistemas de referencia.

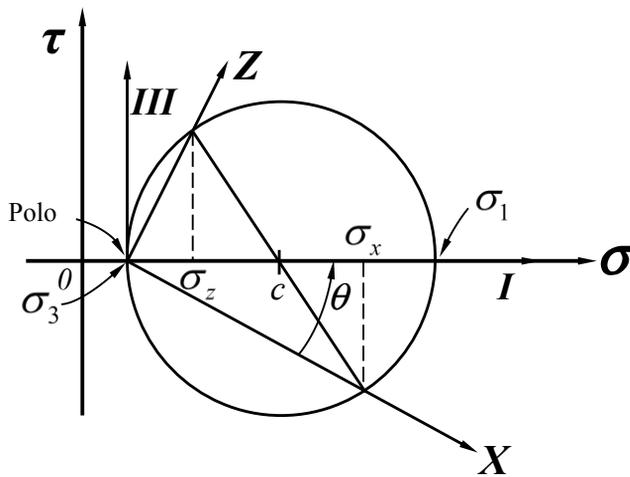


FIGURA 2.46. Circunferencia de Mohr generada a partir del cuadrado diferencial orientado y aplicación del método del polo fijo

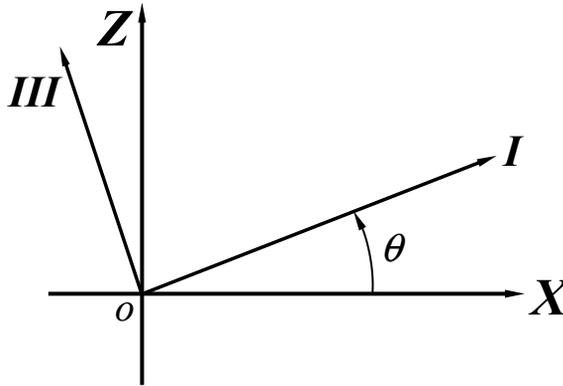


FIGURA 2.47. Centrado de primeros cuadrantes de ambos sistemas de referencia

2.17.2.1. Forma de obtener los valores de σ y τ , actuantes en un plano δ

Para obtener gráficamente el valor (módulo y signo) de σ y τ , actuantes en un plano δ , definido por el versor \mathbf{n} , basta con orientar gráficamente al versor a partir del polo, en la misma forma en que está orientado con respecto al sistema \mathbf{XZ} , en la orientación del plano definido en el cuadrado diferencial de esfuerzos. La única condición es que el versor elegido (de los dos posibles que tiene el plano) salga del polo para cruzar la circunferencia. Lo anterior permite decidir cuál de los dos sentidos posibles del versor es el que se elige. El punto que resulta de la intersección indica gráficamente los valores buscados de σ y τ (Observe la figura 2.49 donde se ve la solución del ejemplo 2.10). Posteriormente, se puede trazar el plano δ con su orientación con respecto al sistema de referencia original dibujando, con auxilio del sistema de versores \mathbf{mn} , el sentido correcto de estos esfuerzos. Con un ejemplo se ejercitará esto.

2.17.2.2. Forma de definir las direcciones de los esfuerzos principales

Haciendo uso de la solución gráfica, se obtiene el ángulo θ de desfase entre el sistema de referencia original \mathbf{XZ} y el sistema principal $\mathbf{I III}$. Después se dibuja un cuadrado diferencial con caras normales a los ejes principales. Luego se bajan los esfuerzos a las caras positivas principales y se debe mostrar el sentido correcto de estos esfuerzos, auxiliándose con el sentido positivo de los ejes principales. Lo expresado anteriormente se mostrará en el ejemplo 2.10.

2.17.2.3. Forma de definir las direcciones de los esfuerzos cortantes máximos y su esfuerzo normal asociado

Haciendo uso de la solución gráfica, se pueden introducir dos versores adicionales que salgan del polo y que apunten, uno hacia el cortante máximo negativo y el esfuerzo normal asociado (n_1) (punto más bajo de la circunferencia en el plano de Mohr) y otro hacia el cortante máximo positivo y su esfuerzo normal asociado (n_2) (punto más alto de la circunferencia en el plano de Mohr). Posteriormente, se puede obtener el ángulo de desfase entre estos versores n_1 y n_2 (que por construcción geométrica siempre son ortogonales) y el sistema de referencia XZ . Luego se dibuja un cuadrado diferencial con caras donde actúan los esfuerzos cortantes máximos, orientado con respecto al sistema de referencia, reservando la dirección vertical para el eje Z . Finalmente se pueden indicar allí los sentidos correctos de los esfuerzos cortantes. En el ejemplo 2.10 se va a operar paso a paso lo que se ha comentado.

EJEMPLO 2.10

Haciendo uso del método del polo fijo del Dr. De La Serna, calcule gráficamente lo siguiente, a partir del cuadrado diferencial de esfuerzos que se muestra en la figura 2.48:

- Los valores correctos de los esfuerzos σ y τ actuantes en el plano δ propuesto. Posteriormente muestre, en un plano orientado respecto al sistema XZ , los sentidos correctos de dichos esfuerzos.
- Los valores correctos de los esfuerzos principales. Luego dibuje un cuadrado diferencial con orientación principal, orientado respecto al sistema de referencia XZ . Indique allí los esfuerzos principales con su sentido correcto.
- Los esfuerzos cortantes máximos y su esfuerzo normal asociado. Finalmente dibuje un cuadrado diferencial orientado respecto al sistema de referencia XZ e indique allí el sentido correcto de dichos esfuerzos.

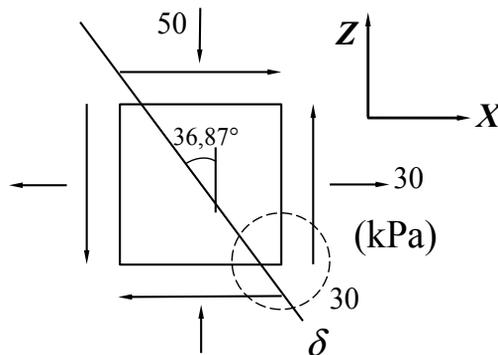


FIGURA 2.48. Cuadrado diferencial de esfuerzos del ejemplo 2.10

SOLUCIÓN

A partir del cuadrado diferencial de la figura 2.48 se obtiene el tensor esfuerzo, que en este caso resulta ser:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ 30 & -50 \end{bmatrix} \text{ kPa}$$

El versor del plano δ propuesto, debe ser en forma decimal:

$$n = 0,800 0i + 0,600 0k$$

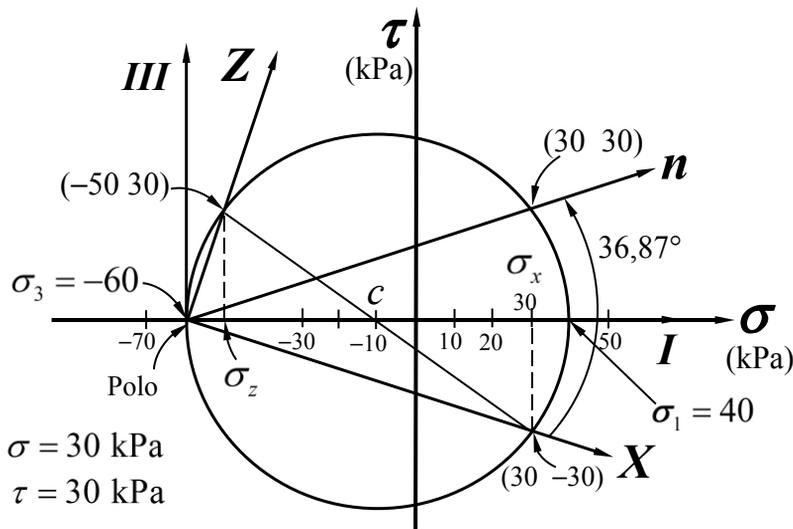


FIGURA 2.49. Obtención gráfica de esfuerzos con el método del polo fijo del ejemplo 2.10

- a) En la figura 2.49 se muestra la circunferencia de Mohr, los sentidos correctos de los sistemas de referencia, el versor correctamente orientado y la solución, que es:

$$\sigma = 30,00 \text{ kPa}$$

y

$$\tau = 30,00 \text{ kPa}$$

En la figura 2.50 se representa el plano δ orientado respecto al sistema de referencia XZ . Allí se indican los sentidos correctos de los esfuerzos ya obtenidos gráficamente.

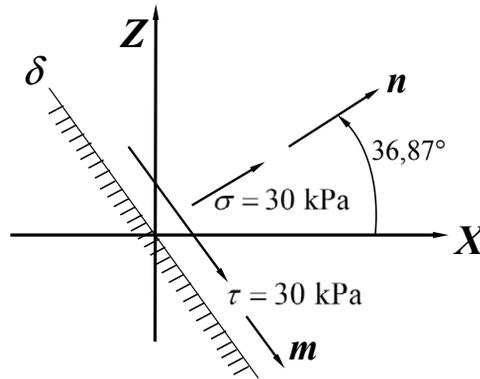


FIGURA 2.50. Esfuerzos normal y cortante con sus sentidos correctos

b) En la figura 2.51 se muestra de nuevo la misma circunferencia de Mohr. Se observa el ángulo de desfase de los dos sistemas de referencia. Se presentan también los valores de los esfuerzos principales, que son:

$$\sigma_1 = 40,00 \text{ kPa}$$

y

$$\sigma_3 = - 60,00 \text{ kPa}$$

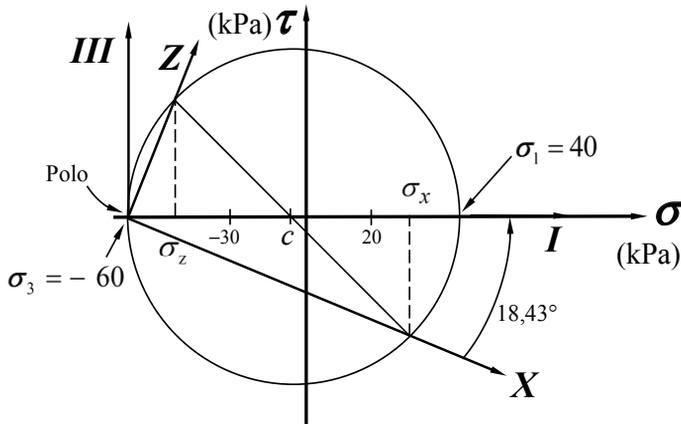


FIGURA 2.51. Relación de sistemas de referencia y valores de esfuerzos principales

En la figura 2.52 se indica la manera en que debe quedar el cuadrado diferencial orientado en su forma principal, respecto del sistema de referencia XZ. Se observan allí los sentidos

correctos de estos esfuerzos principales al compararlos con el sentido positivo de los ejes *I* y *III*.

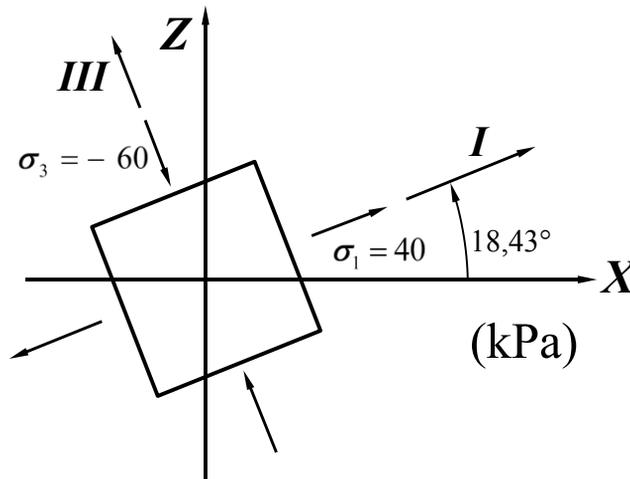


FIGURA 2.52. Orientación de los esfuerzos principales y sus sentidos correctos

- c) En la figura 2.53 se muestra nuevamente la circunferencia solución, para fines de calcular los esfuerzos cortantes máximos y el esfuerzo normal asociado. La solución gráfica reporta:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \pm 50,00 \text{ kPa}$$

y

$$\sigma_{asoc} = -10,00 \text{ kPa}$$

En la cara normal al versor \mathbf{n}_1 se debe tener actuando un esfuerzo normal de compresión (por tener signo negativo) y un esfuerzo cortante con sentido contrario al versor \mathbf{m}_1 , que debe formar un sistema derecho de versores con el versor \mathbf{n}_1 . El versor \mathbf{n}_1 es normal a esa cara (que va a ser una de las caras del cuadrado diferencial que muestra donde actúa uno de los esfuerzos cortantes máximos. Vea la figura 2.54.

En la cara normal al versor \mathbf{n}_2 se debe tener actuando al esfuerzo normal asociado, también de compresión (por tener signo negativo), y un esfuerzo cortante con el mismo sentido del que debe tener un versor \mathbf{m}_2 que forma un sistema derecho con el versor \mathbf{n}_2 . Conviene siempre revisar que los sentidos de los esfuerzos cortantes que se dibujan, deben ser en un vértice del cuadrado, los dos salientes o en su caso entrantes, por equilibrio estático. Vea de nuevo la figura 2.54.

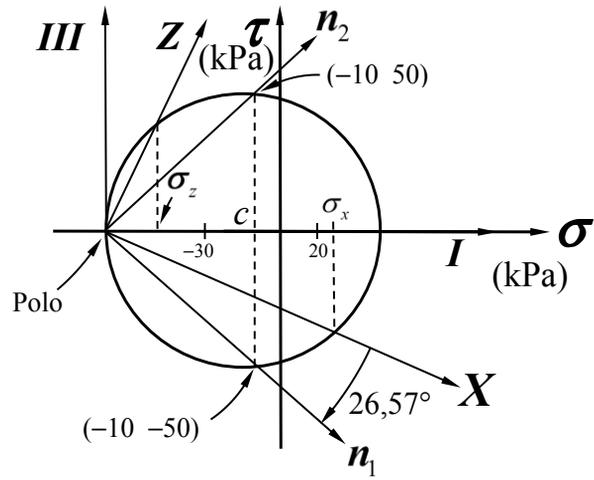


FIGURA 2.53. Esfuerzos cortantes máximos y su esfuerzo normal asociado

En la figura 2.54 se muestra un cuadrado diferencial orientado respecto al sistema de referencia XZ , que presenta las caras donde actúan los esfuerzos cortantes máximos. Se indica allí los sentidos correctos de los esfuerzos cortantes calculados y su esfuerzo normal asociado, haciendo uso del sistema de versores derecho mn , para responder a lo que se pidió.

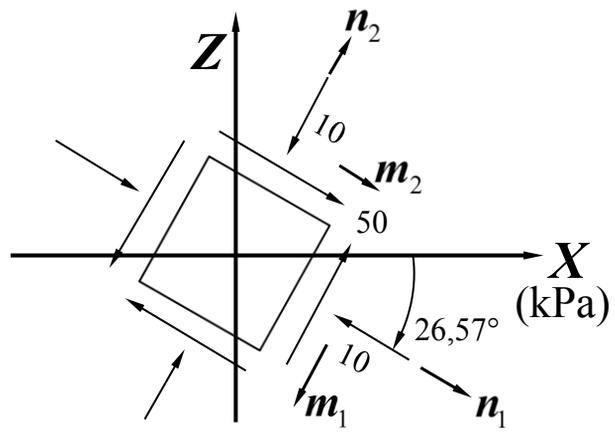


FIGURA 2.54. Orientación de esfuerzos cortantes máximos y normales asociados con sentidos correctos

2.18. Relación entre las soluciones gráficas tridimensional y de Análisis plano

Si partimos de un tensor principal y ordenado de análisis tridimensional, como el que se muestra en la expresión (2-84):

$$[\mathbf{T}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2-84)$$

teóricamente, solo para los casos que cumplen las expresiones (2-42), se puede reducir a la forma del siguiente tensor:

$$[\mathbf{T}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2-109)$$

Recordemos que en un Análisis plano no se pierde la orientación tridimensional, por lo que se debe cumplir con alguna de las dos siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \\ \text{o} \\ \text{b) } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 \end{aligned} \quad (2-42)$$

Para ejemplificar esta equivalencia se propone el siguiente ejemplo.

EJEMPLOS 2.11

Dado el tensor que se presenta a continuación, obtenga gráficamente el valor de los esfuerzos σ y τ , actuantes en el plano δ definido por el versor \mathbf{n} .

Ejemplo 2.11.1. Análisis espacial (tridimensional)

En este caso, el tensor propuesto (principal y ordenado) es:

$$[\mathbf{T}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

y en notación de Gibbs el versor (asociado) que se propone es:

$$n^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \frac{1}{2} \mathbf{k}$$

En este caso, al cumplirse que $\sigma_2 = \sigma_3$, se tiene que en la región de Mohr se puede visualizar como una circunferencia (que en realidad son dos sobrepuestas y una tercera reducida a un punto en el extremo izquierdo).

En la figura 2.55 se muestra la circunferencia y la solución gráfica tridimensional. En la misma figura se muestran los resultados. Observe que se tienen dos puntos solución, por lo que recordemos no es posible expresar al cortante con un solo signo. La solución es en este caso:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx 0,49 \text{ MPa} \\ &y \\ \tau &\approx \pm 2,59 \text{ MPa} \end{aligned}$$

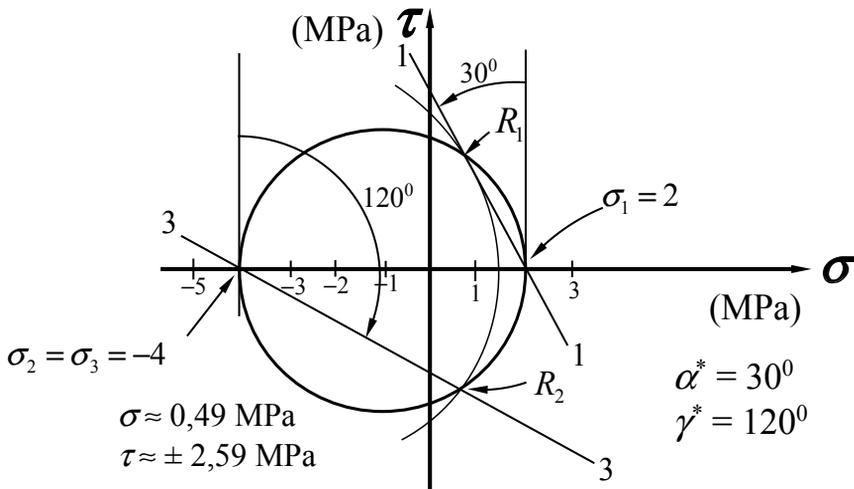


FIGURA 2.55. Solución gráfica tridimensional de Mohr del ejemplo 2.11.1

Ejemplo 2.11.2. Análisis plano con el método del polo fijo

El tensor equivalente de Análisis plano, deducido del tensor tridimensional principal y ordenado y sin colocar el asterisco, en este caso debe ser:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

El versor equivalente se deduce del versor tridimensional, que tiene una componente igual a cero en dirección del eje *Y*, reduciéndolo para este caso a:

$$n = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}k$$

En la figura 2.56 se muestra la solución, haciendo uso del método del polo fijo. En la misma figura se muestran los valores calculados gráficamente. Observe que en este caso sí es posible expresar al esfuerzo cortante con signo único:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx 0,49 \text{ MPa} \\ \tau &\approx -2,59 \text{ MPa} \end{aligned}$$

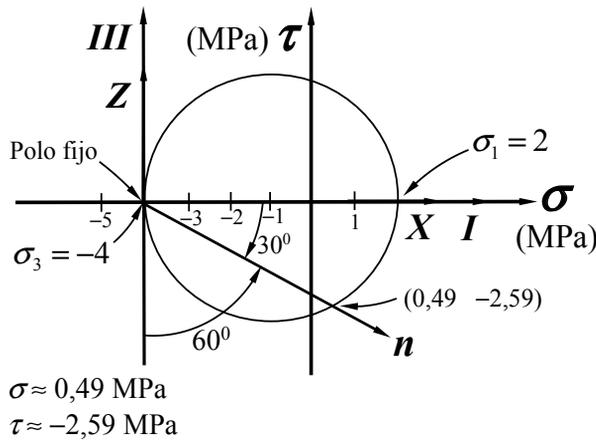


FIGURA 2.56. Solución gráfica del ejemplo 2.11.2 en Análisis plano y con el método del polo fijo

Se recomienda comparar cuidadosamente las figuras 2.55 y 2.56 y apreciar sus diferencias.

2.19. Descomposición de un tensor esfuerzo en sus partes esférica y desviadora

Un tensor esfuerzo, en análisis tridimensional (espacial), se puede descomponer en una parte esférica y en otra desviadora. En teoría de esfuerzos se sabe que la parte esférica está asociada a la deformación volumétrica del material que se analiza. La misma teoría nos dice que la parte desviadora está asociada al cambio de forma del material. A la parte esférica se le llama también isótropa u octaédrica. Siempre se debe cumplir que la suma de estas dos componentes desarticuladas, tiene que ser igual al tensor original de partida.

Vamos a partir entonces de un tensor original, definido en su forma general por la expresión (2-19):

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

Recordemos cómo se obtiene el esfuerzo normal octaédrico y su valor, en función de los esfuerzos normales (o principales), realizando la suma de la diagonal principal de cualquiera de este tipo de tensor y dividiendo entre tres (se puede concebir también como el promedio). También se puede definir en función del primer invariante del tensor esfuerzo:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (2-59)$$

La parte esférica se puede conformar de la siguiente forma:

$$[T_{ij}^o] = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{oct}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{oct}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{oct}} \end{bmatrix} \quad (2-110)$$

Se va a demostrar que el primer invariante de este tensor esférico tiene que ser igual al primer invariante del tensor original (el que no se ha descompuesto en sus partes), a partir de interpretar la ecuación (2-59).

$$I_1^o = 3\sigma_{\text{oct}} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = I_1 \quad (2-111)$$

La parte (o componente) desviadora se define como aquella que se obtiene al restar el valor del esfuerzo octaédrico a todos los esfuerzos normales sobre la diagonal principal del tensor esfuerzo original, tomando la forma de la ecuación (2-112).

$$[\mathbf{T}'_{ij}] = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_{\text{oct}}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{\text{oct}}) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{\text{oct}}) \end{bmatrix} \quad (2-112)$$

Se puede también demostrar que, el primer invariante de este tensor desviador (I'_1), *siempre debe valer cero*, como se va a verificar en el ejemplo 2.12. Para la demostración se debe interpretar de otra manera lo que nos dice la ecuación (2-59) y lo expresado ya en la ecuación (2-111), obteniéndose la ecuación (2-113):

$$\begin{aligned} I'_1 &= (\sigma_x - \sigma_{\text{oct}}) + (\sigma_y - \sigma_{\text{oct}}) + (\sigma_z - \sigma_{\text{oct}}) = \\ &= 3\sigma_{\text{oct}} - 3\sigma_{\text{oct}} = 0 \end{aligned} \quad (2-113)$$

Como ya se comentó, *siempre* se debe cumplir que:

$$[\mathbf{T}_{ij}] = [\mathbf{T}_{ij}^o] + [\mathbf{T}'_{ij}] \quad (2-114)$$

Del tensor desviador se puede decir también que, si se calculan las direcciones de los versores en dirección principal, deben ser iguales a los que se obtienen partiendo del tensor original. Lo anterior es así porque no es posible asignar un sistema de referencia principal a la componente esférica. Los ejes principales se pueden fijar para esfuerzos principales diferentes. Recordemos que para las condiciones de análisis plano, al ser iguales dos esfuerzos principales, no se les puede asignar dirección única, solo se puede calcular entonces una sola dirección (la del esfuerzo principal diferente).

EJEMPLO 2.12

Haciendo uso del tensor original que se propone, calcule sus componentes esférica y desviadora.

SOLUCIÓN

El tensor original que se propone es:

$$[\mathbf{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Calculamos ahora el primer invariante de este tensor, sabiendo que el esfuerzo normal octaédrico debe ser un tercio de este valor:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 7 + 3 + 2 \text{ MPa} = 12 \text{ MPa}$$

Por lo que el esfuerzo octaédrico resulta ser:

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{I_1}{3} = \frac{12 \text{ MPa}}{3} = 4 \text{ MPa}$$

El tensor esférico queda entonces:

$$[\mathbf{T}_{ij}^o] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Como ya se ha demostrado, el primer invariante de este nuevo tensor debe ser igual al primer invariante del tensor original:

$$I_1^o = 4 + 4 + 4 = 12 \text{ MPa}$$

Calculamos ahora el tensor desviador como sigue:

$$[\mathbf{T}_{ij}'] = \begin{bmatrix} (7-4) & -5 & 3 \\ -5 & (3-4) & 1 \\ 3 & 1 & (2-4) \end{bmatrix} \text{ MPa} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Si calculamos ahora el primer invariante de este componente que también llamamos tensor desviador, se debe verificar que tiene valor nulo:

$$I_1' = 3 \text{ MPa} - 1 \text{ MPa} - 2 \text{ MPa} = 0 \text{ MPa}$$

Para fines de comprobación, ahora se suman la parte esférica y la parte desviadora para integrar de nuevo al tensor original de partida, como se muestra abajo:

$$[\mathbf{T}_{ij}^o] + [\mathbf{T}_{ij}'] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ MPa} + \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -5 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa} = [\mathbf{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Como se ha podido apreciar a lo largo de este texto, las herramientas utilizadas permiten operar en una forma sencilla y accesible, lo que en textos viejos se presentaba con un enfoque escalar de una forma que se antoja inadecuadamente extensa. Lo anterior parece ahora absurdamente complicado a la luz de herramientas nuevas como las que aquí se han utilizado.

3. ESTADO DE DEFORMACIÓN

3.1. Introducción

En este tema se introduce al análisis de deformaciones con base en configuraciones. Se inicia con Análisis plano de deformaciones por razones didácticas, posteriormente se pasa al análisis tridimensional de deformaciones que es el caso general. Se propone en este tema, por razones de simplificación, hacer uso de un análisis en el primer cuadrante para análisis plano y hacer uso de un análisis de primer octante para análisis espacial. En los ejemplos se muestran soluciones analítico-tensoriales y se presenta también cómo debe ser la solución gráfica, haciendo uso del plano de Mohr para deformaciones. Finalmente se presenta el análisis de deformaciones utilizando rosetas en lo que sería estrictamente un análisis de Estado plano de deformaciones válido para deformaciones de placas.

3.2. Tensor incremental de esfuerzo

En este tema de Estado de deformación, se debe comentar que a diferencia de lo visto en el capítulo anterior, se tiene que, asociado al estado de deformación, se encuentra el llamado tensor incremental de esfuerzo. Lo anterior implica que antes de analizar una deformación, se tiene en el análisis de un cuerpo, un estado de esfuerzo inicial asignable por ejemplo al centro de volumen, que se puede escribir como:

$$[T_{ij}]_i = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_i \quad (3-1)$$

El tensor incremental de esfuerzo (que es el responsable de generar las deformaciones que se analizan, bajo cierta o ciertas acciones) se puede escribir como:

$$[\Delta T_{ij}] = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_x & \Delta \tau_{yx} & \Delta \tau_{zx} \\ \Delta \tau_{xy} & \Delta \sigma_y & \Delta \tau_{zy} \\ \Delta \tau_{xz} & \Delta \tau_{yz} & \Delta \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

Si al tensor esfuerzo inicial se le suma el tensor esfuerzo incremental, se obtiene el tensor esfuerzo final, como se observa a continuación en forma compacta.

$$[T_{ij}]_f = [T_{ij}]_i + [\Delta T_{ij}] \quad (3-3)$$

Lo mismo que se expresa en la ecuación (3-3), pero en forma expandida, se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x & \Delta\tau_{yx} & \Delta\tau_{zx} \\ \Delta\tau_{xy} & \Delta\sigma_y & \Delta\tau_{zy} \\ \Delta\tau_{xz} & \Delta\tau_{yz} & \Delta\sigma_z \end{bmatrix}$$

3.3. Componentes del estado cinemático de un cuerpo deformable

Recordemos que antes se comentó sobre el estado energético de un cuerpo, el cual en forma general puede estar compuesto por:

- a. Un estado de esfuerzo
- b. Un estado cinemático
- c. Un estado de energía interna

El estado cinemático está compuesto por:

- b.1. Una traslación
- b.2. Una rotación
- b.3. Una deformación

La deformación se divide en dos partes:

- b.3.1. Deformación lineal (unitaria)
- b.3.2. Deformación angular (o bajo otro concepto: distorsión)

Se prefiere utilizar en problemas de Ingeniería a la distorsión en lugar de la deformación angular, ya que al igual que la deformación unitaria se puede definir bajo una concepción adimensional, como se verá más adelante. La deformación angular es costumbre expresarla en radianes en otros problemas analizados por la mecánica.

3.4. Manejo de configuraciones para análisis de deformaciones

Modernamente se hace uso de configuraciones geométricas que muestran la forma de un cuerpo en el espacio o visto en el plano, antes de una deformación (configuración inicial) y después de una deformación (su configuración final). Con base en el análisis de las configuraciones, después de cumplir ciertos requisitos, es posible generar el tensor deformación que también debe ser simétrico. Posteriormente se puede, como se verá en el tema de Elasticidad lineal, relacionar al tensor incremento de esfuerzo con el tensor deformación, o viceversa, por medio de las ecuaciones constitutivas que se acepta pueden modelar el comportamiento de un cierto material real (p. ej.: el acero, el concreto y las rocas). En un análisis espacial, el tensor deformación debe tener la forma de una matriz de 3×3 .

Por razones didácticas, vamos a iniciar el tema de estado de deformación dentro de lo que podemos llamar Análisis plano de deformaciones (con configuraciones en el plano). En este caso particular, el tensor deformación se debe representar con la forma de una matriz de 2×2 . Posteriormente, se desea llegar al análisis tridimensional de deformaciones con un manejo de configuraciones en el espacio.

Como una analogía de lo antes visto en el tema de Estado de esfuerzo, también en este tema de Estado de deformación se cumple que existen deformaciones lineales unitarias principales (así como existen esfuerzos normales principales). En el espacio se tiene que:

ε_1 , deformación principal mayor (lineal unitaria)

ε_2 , deformación principal intermedia

ε_3 , deformación principal menor

Con acuerdo a lo antes dicho y como analogía a lo visto en el estado de esfuerzo (ecs. 2-42), en el Análisis plano de deformaciones se debe cumplir alguna de las dos condiciones siguientes:

a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

o

b) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 = \varepsilon_3$

(análogas a ecs. 2-42)

Únicamente si se cumple con alguna de las dos condiciones citadas, se puede realizar un Análisis plano, que como fenómeno geométrico condicionado a un plano no pierde la posibilidad de ser interpretado en tres dimensiones (en el espacio).

Modernamente el análisis de deformaciones se realiza haciendo uso primeramente de las configuraciones de cuerpo, bajo la suposición de deformaciones infinitesimales, lo que permite hacer uso del mismo sistema de referencia para la configuración inicial y para la configuración final o deformada. Para realizar el análisis de configuraciones, con el fin de analizar la deformación, es requisito el haber eliminado antes la traslación y la rotación del cuerpo.

Con la intención de hacer una introducción en el manejo de estos conceptos, se propone analizar tres casos de interés que son: a) Deformación volumétrica pura, b) Deformación desviadora pura y c) Mezcla de deformación volumétrica y deformación desviadora. La convención que se va a utilizar en este texto para el manejo de las configuraciones, hace uso de líneas discontinuas para modelar un cuerpo en configuración inicial (antes de la deformación) y de líneas continuas para modelar al mismo cuerpo en su configuración final (ya deformado).

En cada caso se debe manejar una configuración inicial (que como dijimos se muestra con líneas discontinuas) que representa la geometría del cuerpo, antes de que se apliquen los incrementos de fuerza que provocan deformación. Antes de buscar medir el fenómeno de deformación, se debe poder conocer los esfuerzos iniciales que se ignoran posteriormente al hacer el análisis de la deformación. Para el análisis de la deformación, se aplica un estado de fuerzas incrementales que supondremos se mantiene constante y es entonces cuando se miden las deformaciones del cuerpo. La configuración final (que se muestra con líneas continuas) representa la geometría del cuerpo deformado. Para poder generar un tensor deformación correcto (que cumpla con ser simétrico) se debe proceder a eliminar previamente una posible traslación y también una posible rotación. La traslación se elimina sobreponiendo los centros de volumen (o de área en Análisis plano) de ambas configuraciones, con el origen del sistema de referencia. La rotación se elimina igualando el valor de la distorsión, a partir de los ejes X y Z en Análisis plano. En forma análoga a lo que hicimos en estado de esfuerzo, para el Análisis plano de deformaciones haremos uso del sistema de referencia XZ .

3.5. Tipos de deformación más comunes

3.5.a. Deformación volumétrica pura (sin deformación desviadora) (producto de tensión o compresión isótropas o isotrópicas).

En la figura 3.1 se muestra en el espacio un cuerpo que se comporta como un material deformable que supondremos para su configuración inicial con forma cúbica.

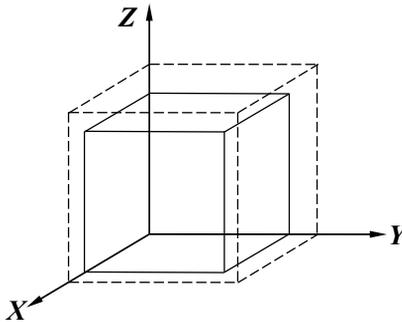


FIGURA 3.1. Configuraciones de cuerpo cúbicas antes y después de deformarse

En su configuración final (líneas continuas) se observa que al cuerpo deformado se le sigue reconociendo con una forma cúbica. Lo anterior nos permite ver que el cuerpo no ha cambiado de forma al sufrir la deformación (era un cubo y al deformarse se le reconoce también como un cubo, pero ahora con un volumen menor). Solo ha cambiado de volumen, no de forma. En la figura 3.2 se muestra el mismo cuerpo, pero visualizado en la dirección del eje Y y analizado en el plano XZ (Análisis plano).

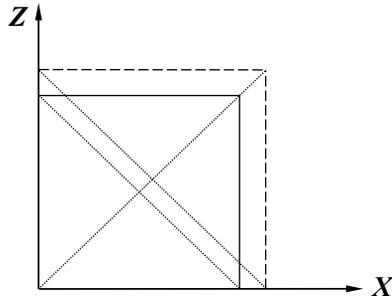


FIGURA 3.2. Modelación en Análisis plano de las mismas configuraciones de la figura 3.1

En este caso se visualiza un cuadrado (que representa a un cubo) en configuración inicial y al deformarse se ve la configuración de un cuadrado de menores dimensiones. Se puede observar que ha disminuido de área (o de volumen) por efecto de una compresión isotrópica. Se acepta que el cuerpo cambió de área, pero se sigue reconociendo como un cuadrado (no cambió de forma). Para colocar las configuraciones en condición de poder ser analizadas, la traslación se corrige sobreponiendo el centro de área de ambas configuraciones (cuadrados en Análisis plano). En la figura 3.3 se muestran las configuraciones inicial y final de este cuerpo, colocando los centros de área en la posición del origen del sistema de referencia cartesiano.

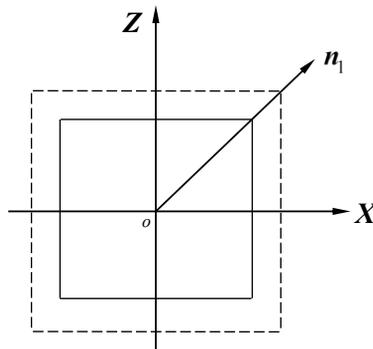


FIGURA 3.3. Deformación volumétrica pura habiendo eliminado la traslación

Observe en la figura anterior que en la misma dirección del versor n_1 se tienen los puntos vértice de ambas configuraciones en el primer cuadrante (lo anterior muestra que en un análisis, en la dirección de ese versor, no se presenta distorsión). Se puede ver por las figuras 3.2 y 3.3 que, en este caso, al pasar de la configuración de cuerpo inicial a la final, no se presentó una rotación que se tuviera que corregir.

Aprovechando las configuraciones que se muestran en la figura 3.3 comentaremos que, para el análisis que se propone, se debe aceptar que cualquier punto que fuera definido por el cruce de un versor sobre la configuración inicial, tiene un punto correspondiente en la configuración final. Lo anterior implica que se debe aceptar que el número de puntos que conforman un lado del cuadrado en la configuración inicial, debe ser el mismo número de puntos que tiene el lado correspondiente del cuadrado en su configuración final.

Es importante aquí presentar tres ideas relevantes en forma de postulado, que no las vamos a demostrar en este texto, y que son:

POSTULADO 1. Cualquier punto analizado en una configuración inicial, tiene su correspondiente en configuración final. Con la misma lógica se puede inferir que también cualquier punto de configuración final, tiene su correspondiente en la configuración inicial.

POSTULADO 2. Un punto de análisis en configuración inicial se definirá por el cruce de un versor con la configuración inicial. La dirección del análisis de la deformación será la que marca este versor. Lo anterior implica que el sistema de referencia siempre está asociado a la configuración inicial y nunca a la configuración final.

POSTULADO 3. Se acepta que el paso de una configuración inicial a una configuración final, se realiza con acuerdo al principio de proporcionalidad lineal, es decir, un punto que se marcará con cierta posición en un lado del cuerpo en configuración inicial, por ejemplo, a la mitad de un lado aparecerá en la configuración final también a la mitad del lado correspondiente en configuración final. Esta proporcionalidad lineal se garantiza con las llamadas ecuaciones de compatibilidad, que presuponen haber eliminado la traslación y la rotación (para dar pie a generar un tensor simétrico).

Se puede demostrar que, en este caso de deformación volumétrica pura en Análisis plano (figura 3.3) se cumple que cualquier versor que se proponga en el plano XZ para definir una dirección de análisis y el paso de un punto de configuración inicial a su correspondiente en configuración final, no registra distorsión (el punto final no se ubica fuera de la dirección de análisis).

Al vector que une a un punto de partida en la configuración inicial de cuerpo con su correspondiente punto de llegada en la configuración final, se define como vector desplazamiento. Se puede demostrar, para el caso que estamos analizando, que el patrón para todos los posibles vectores desplazamiento es del tipo radial (observe de nuevo la figura 3.3).

3.5.b. Deformación desviadora pura (sin deformación volumétrica) (producto de fuerzas que producen esfuerzos cortantes incrementales, sin la presencia de esfuerzos normales incrementales).

En la figura 3.4 se muestra en el espacio un cubo que representa un cuerpo deformable. Se observa también en la figura 3.4 que, al deformarse, se ha producido una distorsión al percibir que se ha despegado la cara que tocaba antes al plano YZ .

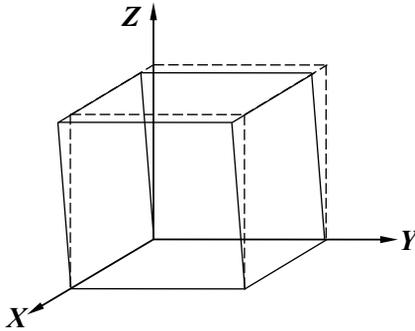


FIGURA 3.4. Cuerpo inicialmente cúbico que se distorsiona al deformarse

En la figura 3.5 se muestra el mismo cuerpo de la figura 3.4, pero visto de perfil para poder hacer un Análisis plano con su configuración final, distorsionada por efecto de una fuerza cortante que genera esfuerzos cortantes incrementales puros, actuando en el plano de análisis.

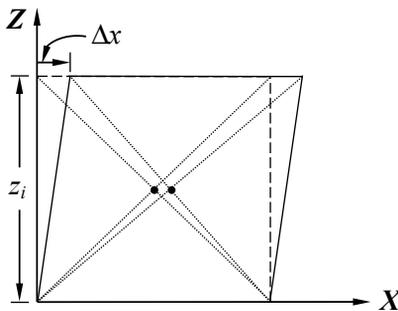


FIGURA 3.5. Configuraciones en Análisis plano del cuerpo modelado en la figura 3.4

Se va a definir el concepto de distorsión, haciendo uso de los datos que se muestran en la figura 3.5, en un abatimiento que va de una cara que tenía la misma dirección del eje Z al rotar y acercarse hacia la dirección del eje X . De modo que se define como distorsión, con base en datos de la figura 3.5, a la relación:

$$\gamma_{zx} = \frac{\Delta x}{z_i} \quad (3-4)$$

Los subíndices “zx” expresan que una cara que tenía dirección Z se acerca ahora a la dirección del eje X . En este texto, para la distorsión en lugar de la literal “ γ ” *gamma*, haremos uso de la literal “ g ” que debe ser la mitad de *gamma*, para hacer la corrección de la rotación:

$$g_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{\Delta x}{2z_i} \quad (3-5)$$

Para eliminar la rotación, se debe conseguir tener una distorsión “ g ” igual desde una cara en el eje Z hacia el X , como la que se debe tener desde el eje X hacia el eje Z . De modo que al eliminar la rotación, se van a tener como distorsiones a dos que tienen el mismo valor. Aquí ya se prefigura que cuando se forme el tensor deformación también debe de cumplir con ser simétrico. Con acuerdo a esto se debe cumplir con:

$$g_{zx} = g_{xz} \quad (3-6)$$

En la misma figura 3.5 se observa el centro de área de la configuración inicial y el de la configuración final separados. El vector que une al centro de área inicial con el centro de área final se define como vector traslación. En la figura 3.6 se muestran las configuraciones inicial y final. La inicial, como un cuadrado que representa a un cubo. A la configuración final, se le muestra habiendo eliminado la traslación, al sobreponer su centro de área con el centro de área de la configuración inicial y estos, en el origen del sistema de referencia.

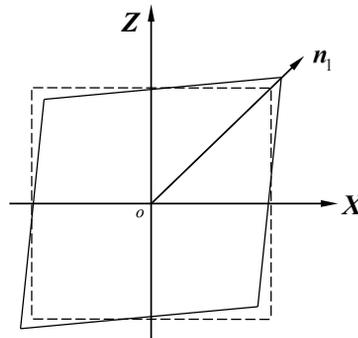


FIGURA 3.6. Configuraciones habiendo eliminado traslación y rotación

Observe que para eliminar la rotación, se gira en el sentido de revertir la rotación original, pero solo aproximadamente a la mitad de la que se ha producido bajo el concepto de distorsión “ γ ”. La configuración final en este caso ha tomado la forma de un rombo. Al haber eliminado la traslación y la rotación, se tienen las configuraciones en la condición requerida para hacer un Análisis plano de deformaciones. En la figura 3.6 se observa un versor (con subíndice “1”) que sale del origen del plano XZ , pero como este se puede proponer un número infinito.

3.5.c. Deformación volumétrica y deformación desviadora simultáneas (mezcla de los casos 3.5.a y 3.5.b).

En la figura 3.7 se muestra, en configuración inicial en el espacio, un cubo que representa un cuerpo deformable. Se observa también en la figura 3.7, como configuración final, un cuboide con una planta cuadrada en el plano XY y rectángulos iguales en los planos XZ y YZ .

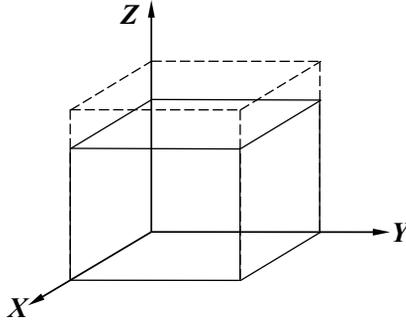


FIGURA 3.7. Cuerpo originalmente cúbico convertido después en cuboide

Lo que originalmente era un cuerpo cubico (configuración inicial), ahora no se reconoce como tal (configuración final), por lo que se puede decir que el cuerpo ha cambiado de forma. Se observa también que ha disminuido su volumen porque su dimensión vertical se muestra disminuida. Las mismas configuraciones descritas en forma espacial en la figura 3.7, se muestran para su estudio en Análisis plano en la figura 3.8, ahora en el plano XZ .

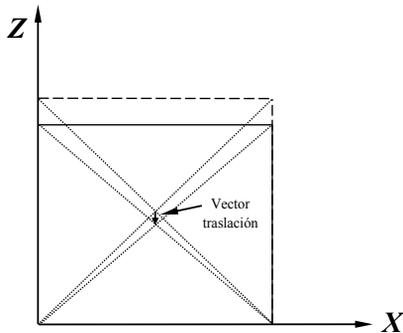


FIGURA 3.8. Configuraciones en Análisis plano del cuerpo modelado en la figura 3.7

En este caso no se ha producido una rotación, solo una traslación, al comparar el centro de área de las configuraciones inicial y final de la figura 3.8. Al eliminar la traslación en este caso, las configuraciones que permiten realizar un Análisis plano se muestran en la figura 3.9, sobreponiendo centros de área con el origen del sistema de referencia.

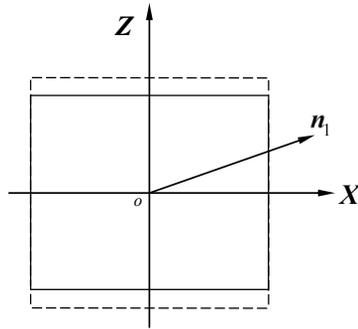


FIGURA 3.9. Configuraciones de cuerpo del caso 3.5.c. habiendo eliminado la traslación

Se debe entender que las configuraciones, con fines de análisis de un cuerpo que se deforma, se van a deducir a partir de datos de deformación que se miden en un laboratorio de pruebas de materiales. Para el análisis de deformaciones se utiliza el tipo de probetas de materiales que utilizan los ingenieros, también para fines de análisis de resistencia. En ingeniería civil las probetas pueden ser de acero, concreto y rocas como materiales poco deformables, desde el punto de vista de los esfuerzos que se aplican en obras de esta rama de la ingeniería. La forma de las probetas de materiales que se prueban en los laboratorios de ingeniería civil, son normalmente cilindros o cuboides (paralelepípedos rectangulares). Con datos de una prueba, siempre deberá ser posible modelar las configuraciones (inicial y final) tanto en análisis espacial (tridimensional) como en Análisis plano.

En este texto se propone, para fines didácticos, analizar las configuraciones de cuerpo en el primer cuadrante en un Análisis plano y en el primer octante en un análisis espacial, considerando que lo que sucede en un cuadrante o en un octante, al haber eliminado la rotación, es proporcional a lo que sucede a todo el cuerpo. Observe en la figura 3.10 análogas configuraciones de cuerpo del primer cuadrante de la figura 3.9.

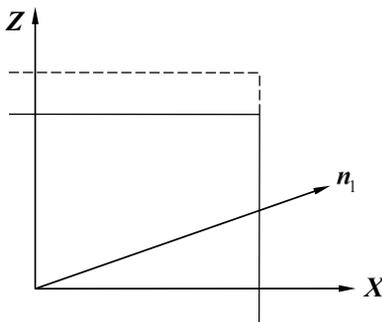


FIGURA 3.10. Configuraciones en primer cuadrante del cuerpo de la figura 3.9

Esta configuración es proporcional a lo que resulta de colocar las configuraciones de cuerpo completas, pero situadas en el primer cuadrante. Vea la proporcionalidad lineal en dirección vertical en el primer cuadrante de la figura 3.10 y en el primer cuadrante de la figura 3.8.

Esta forma de proceder es válida, ya que queremos llegar a modelar un tensor deformación (con deformaciones unitarias y distorsiones) con elementos adimensionales, que no dependen de la escala de la configuración de partida. En este texto, también por razones didácticas, modelaremos las configuraciones iniciales en Análisis plano, como cuadrados o rectángulos. A las configuraciones finales las modelaremos, en Análisis plano, como cuadrados, rectángulos, rombos y romboides (todos paralelogramos). En análisis espacial se modelarán las configuraciones iniciales como cubos y paralelepípedos rectangulares (cuboides) y cubos, ortoedros y paralelepípedos (también con caras paralelas) para las configuraciones finales. En las figuras 3.9 y 3.10 se muestra solo un versor de los infinitamente posibles.

3.6. Vectores desplazamiento

En la figura 3.11 se muestran configuraciones inicial y final de un cuerpo, con deformaciones extremadamente exageradas para cumplir con fines didácticos. Se muestran dos vectores desplazamiento ($\mathbf{U}^{(n)}$) del número infinito de estos, que unen a un punto de la configuración inicial definido por el punto de cruce del versor con la configuración inicial y su punto correspondiente en la configuración final. En la figura 3.11 el subíndice “4c” en el vector desplazamiento, expresa que se obtuvo de un análisis que toma en cuenta cuatro cuadrantes.

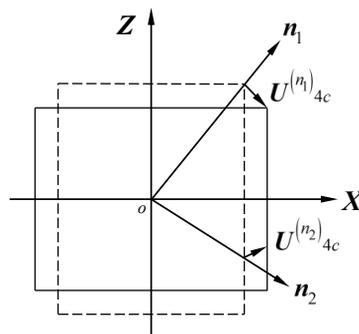


FIGURA 3.11. Configuraciones de cuerpo utilizando los cuatro cuadrantes

En un análisis de configuraciones usando los cuatro cuadrantes (como en la figura 3.11), se acepta que existe un número infinito de versores en el cruce de cada uno de ellos con la configuración inicial, se define el arranque de un vector desplazamiento. De lo anterior se deduce que, al plantear las configuraciones, inicial y final, en un análisis utilizando los cuatro cuadrantes, se debe aceptar que se generan un número infinito de vectores desplazamiento (los cuales conforman el campo particular de los vectores desplazamiento de este particular Estado de deformación). En la figura 3.11 se muestra un versor n_i que apunta al punto vértice de la

configuración inicial que se ubica en el primer cuadrante. Observe que el vector desplazamiento asociado a este versor (\mathbf{n}_1) va del punto vértice de configuración inicial al punto vértice de la configuración final. Observe también que la dirección del vector desplazamiento $\mathbf{U}^{(n)}_{4c}$ es muy diferente de la dirección del versor al que está asociado.

Se debe aceptar, con base en el postulado 1 del apartado 3.5, que todo punto en configuración inicial tiene su correspondiente en configuración final. Además, se debe partir de la idea de que el punto correspondiente en configuración final está ubicado en su posición con acuerdo a una proporcionalidad lineal en la deformación. En este orden de ideas, observe cómo el versor \mathbf{n}_2 de la figura 3.11 cruza al lado normal al sentido positivo del eje X en el cuarto cuadrante, a la mitad entre el eje X y el punto vértice inferior derecho a la configuración inicial. Vea que el punto correspondiente en configuración final también se encuentra a la mitad en el desarrollo del lado correspondiente que va del eje X al punto vértice inferior derecho de la configuración final. Que así suceda nos muestra claramente que el fenómeno de deformación lo estamos presuponiendo con una proporcionalidad lineal.

3.7. Deformaciones pequeñas y notación ingenieril

En este punto conviene comentar que el análisis de deformaciones que se ha estado comentando, desde el punto de aplicación a problemas de ingeniería civil, solamente es válido para la: *Teoría de deformación infinitesimal* (también llamada *Teoría de pequeñas deformaciones*). Para cumplir con esta teoría se deben aceptar las siguientes suposiciones:

- 3.7.1. Los desplazamientos son muy pequeños frente a las dimensiones del medio continuo que se analiza.
- 3.7.2. Los gradientes de los desplazamientos son muy pequeños (infinitesimales).

Aunque no vamos a profundizar en la teoría de deformaciones, tal como se estudia desde el punto de vista científico, baste decir sin afán de profundizar, que bajo las suposiciones de deformación infinitesimal, los *tensores material y espacial de deformación* coinciden y colapsan en el llamado *tensor de deformación infinitesimal*, el cual es usado profusamente en aplicaciones de ingeniería. Baste también decir que bajo la suposición de deformaciones infinitesimales, podemos introducir un único sistema de referencia que auxilia tanto a la configuración inicial como a la final. Bajo la suposición de deformaciones pequeñas, el problema de deformación de un cuerpo se reduce a un problema exclusivamente geométrico.

Este momento es oportuno para comentar que hay una gran tradición en ingeniería para usar una muy particular denominación para las componentes del tensor de deformación infinitesimal, por lo que existe una notación ingenieril que se sale de los cánones de la llamada notación científica, que generalmente se usa en Mecánica del Medio Continuo. En este texto se van a usar la literal griega *épsilon* (ϵ) para denominar las deformaciones unitarias longitudinales (lineales), y la literal latina *gé* (g) para denominar las distorsiones (o también

llamadas deformaciones tangenciales, transversales o de cizalladura). En algún cálculo particular de ingeniería, como licencia especial, se podría aceptar suponer una deformación como infinitesimal, aunque la deformación real no lo sea en forma estricta.

3.8. Configuraciones en primer cuadrante

De aquí en adelante, únicamente haremos un manejo de primer cuadrante para el Análisis plano de configuraciones. Bajo esta consideración se puede demostrar que lo único que nos debe preocupar es eliminar la rotación. Con acuerdo a esto se van a colocar las configuraciones iniciales con formas de cuadrado o rectángulo, con el punto vértice inferior izquierdo sobrepuesto al origen del sistema de referencia. En la figura 3.12 se muestran en el primer cuadrante las configuraciones que se plantearon para definir una deformación volumétrica pura (caso 3.5.a).

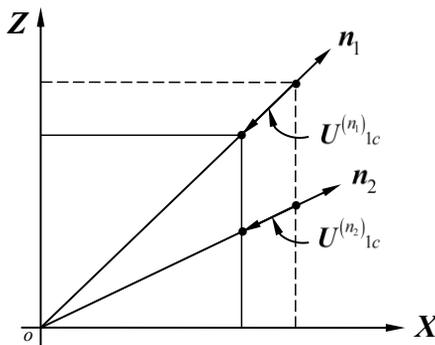


FIGURA 3.12. Configuraciones de cuerpo situadas en el primer cuadrante para su análisis

Se observa en esa figura 3.12 a dos versores (\mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2) y sus vectores desplazamiento asociados ($\mathbf{U}^{(n_1)}_{1c}$ y $\mathbf{U}^{(n_2)}_{1c}$). En este caso el subíndice del vector desplazamiento “1c” expresa que este vector se obtuvo de un análisis de primer cuadrante. Vea que para este caso particular los vectores desplazamiento tienen la misma dirección de los versores, pero con sentido contrario. Se puede ver, en esta situación especial, un patrón radial para los vectores desplazamiento (todos apuntan al origen del sistema de referencia).

En la figura 3.13 se muestran, en primer cuadrante, las configuraciones del caso de deformación desviadora pura (caso 3.5.b).

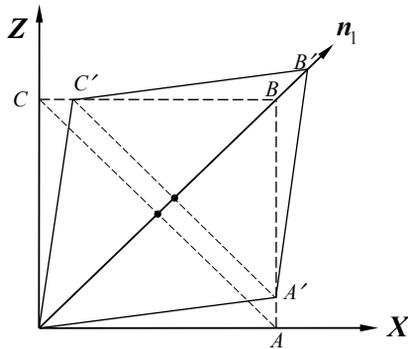


FIGURA 3.13. Configuraciones de cuerpo en primer cuadrante en deformación desviadora pura

Observe que únicamente se ha eliminado la rotación al tener igual distancia entre los puntos A y A' y los puntos C y C' , ya que los centros de área se encuentran separados y se percibe claramente una traslación en dirección del vector n_1 . Al colocar configuraciones en el primer cuadrante, nos debe preocupar el unir el vértice inferior izquierdo de ambas configuraciones con el origen del sistema de referencia. En este caso, un vector a 45° entre los sentidos positivos de los ejes X y Z (n_1) cruza los puntos vértice B y B' de ambas configuraciones, lo que muestra que en esa dirección no se presenta distorsión al producirse la deformación.

En la figura 3.14 se muestran, en primer cuadrante, las configuraciones del caso 3.5.c que se vio antes (mezcla de deformaciones volumétrica y desviadora).

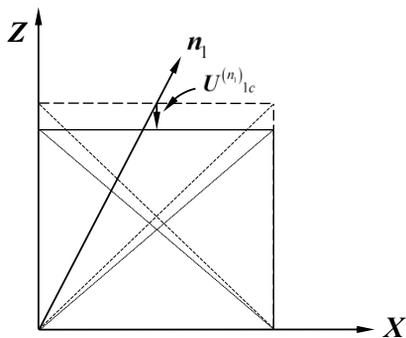


FIGURA 3.14. Configuraciones de cuerpo en primer cuadrante para el caso 3.5.c

Se puede ver que en este caso no hay rotación que se deba corregir. Se observa también un vector que apunta, con fines didácticos, a la mitad del desarrollo de la cara superior del cuerpo

en configuración inicial (n_I) y el vector desplazamiento asociado obtenido de un análisis de primer cuadrante.

A continuación se comentan las bases para formar el tensor de deformación, a partir de la información que nos aportan las configuraciones. En este texto haremos uso de la siguiente notación para deducir el vector desplazamiento asociado a alguno de los ejes del sistema de referencia, tomando como apoyo los puntos vértice de los paralelogramos que usaremos para modelar un cuerpo en configuración inicial en análisis plano de deformaciones. Llamaremos punto A de la configuración inicial a aquel que coincide con el punto vértice inferior derecho y que se encuentra sobre el eje X . El punto A' corresponde al mismo vértice, pero ahora en la configuración final. Vea de nuevo la figura 3.13. En forma análoga llamaremos punto C de configuración inicial al que se tiene en el vértice superior izquierdo y que se encuentra sobre el eje Z . El punto C' es el mismo vértice, pero ahora en la configuración final. Vea de nuevo la figura 3.13. Usaremos en este texto, únicamente en Análisis plano, a la literal B para definir el único punto vértice que no está ni en el origen ni sobre alguno de los ejes del sistema de referencia (no confundir con lo que en análisis espacial será el punto asociado al eje Y). En la misma figura 3.13 se observa el punto vértice B' en la configuración final.

3.9. Deformación, deformación unitaria, vector desplazamiento y vector deformación

Recordemos ahora conceptos elementales vistos en la introducción de este texto. En la figura 3.15 se muestra, en análisis unidimensional, la longitud inicial (que puede ser, por ejemplo, de una barra de cierto material) (L_I), pero ahora asociada a una cierta dirección definida por la dirección de un vector n_I .

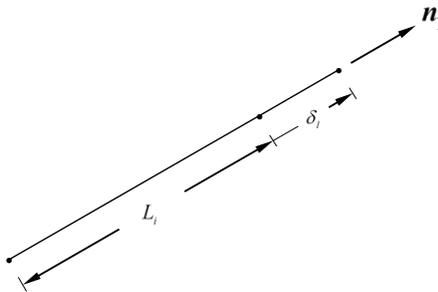


FIGURA 3.15. Conceptos de longitud inicial y deformación longitudinal

Se muestra también en la misma figura una cierta deformación que se produjo en la misma dirección del vector antes citado, que definimos con la letra *delta* y que podríamos llamar también deformación longitudinal (δ_l), definida en la misma dirección del vector n_I , como se

muestra en la figura 3.15. Ahora bien, si se dividen todas las dimensiones de la figura 3.15 entre la longitud inicial, se llega a la representación de la figura 3.16.

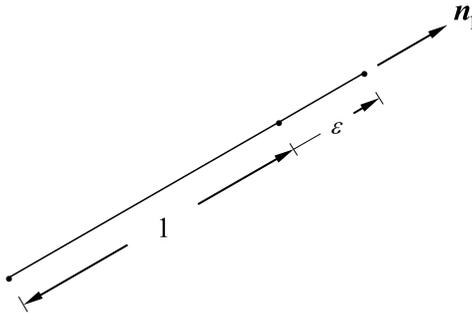


FIGURA 3.16. Longitud unitaria adimensional y deformación lineal unitaria

Ahora se tiene una longitud unitaria adimensional donde antes estaba la longitud inicial y una deformación lineal unitaria (exclusivamente longitudinal) donde estaba la deformación. Se puede manejar el mismo fenómeno en forma escalar, porque la dirección del alargamiento es la misma de la longitud inicial. Se define ahora, con mayor rigor, el concepto de vector desplazamiento, que no necesariamente está obligado a tener la misma dirección de la longitud inicial y de la dirección marcada como dirección de análisis. En la figura 3.17 se muestra la posibilidad de sustituir la deformación longitudinal por el concepto de vector desplazamiento ($U^{(n_1)}$), aunque todavía no buscamos que tenga una dirección diferente de la longitud inicial.

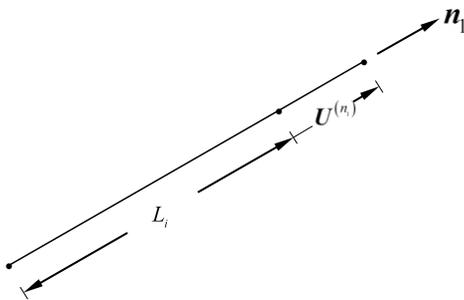


FIGURA 3.17. La deformación vista ahora como un vector (vector desplazamiento)

Respetando el compromiso de iniciarnos en estos conceptos dentro del llamado Análisis plano, en la figura 3.18 se puede observar un vector desplazamiento que tiene una dirección diferente a la de la longitud inicial.

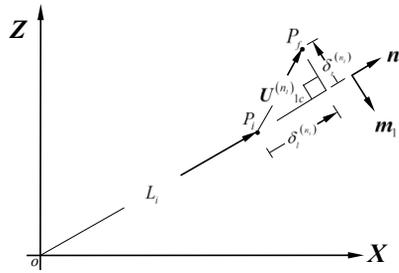


FIGURA 3.18. Vector desplazamiento general y sus componentes en análisis plano

En esta misma figura se puede ver el sistema de referencia que usamos en Análisis plano en este texto (XZ) y el sistema de versores auxiliares derecho, el cual se ha recomendado usar también en este curso (mn) para este caso particular. En la misma figura 3.18 se pueden ver las componentes escalares del vector desplazamiento, que vienen a ser los catetos de un triángulo rectángulo y que son la componente deformación longitudinal y la componente deformación transversal (a la dirección de análisis). En esa figura, ahora se asocian estas componentes a la dirección de análisis definida por el versor n_j . Se muestra también en la figura 3.18 que existe un punto inicial de arranque del vector desplazamiento (P_i) en la configuración inicial y un punto final de llegada del mismo vector desplazamiento (P_f) en la configuración final. Aunque nuestro análisis se va a restringir a las llamadas *deformaciones pequeñas*, se advierte que en los esquemas de las figuras 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18 las deformaciones se han exagerado con fines exclusivamente didácticos. Apoyados de nuevo en la figura 3.18, se puede decir que cuando la dirección del vector desplazamiento es diferente de la dirección de la longitud inicial, en el fenómeno de deformación se ha producido una distorsión asociada a esa dirección que más adelante definiremos en su acepción adimensional.

En un ejercicio análogo al realizado con anterioridad, dividiremos ahora el esquema de la figura 3.18 entre la longitud inicial, para generar ahora el esquema de la figura 3.19. Bajo esta forma de operar se puede ver que lo que antes era el vector desplazamiento, se ha convertido en lo que se define ahora como el vector deformación, asociado también a la dirección del versor n_j .

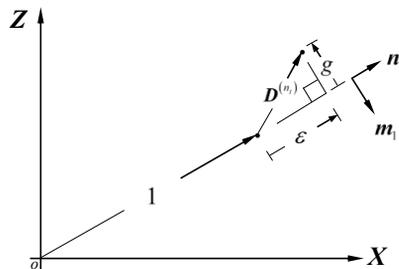


FIGURA 3.19. Vector deformación general y sus componentes escalares en Análisis plano

En la misma figura 3.19 se puede ver que lo que antes era la deformación longitudinal ahora se ha convertido en la deformación unitaria longitudinal (ε). Finalmente, lo que antes era la deformación transversal asociada a la dirección del versor \mathbf{n}_1 se ha convertido en la distorsión (g). Se debe entender que el vector deformación ($\mathbf{D}^{(n_1)}$) también tiene un punto de arranque inicial y un punto de llegada final, aunque al haber dividido todo el esquema entre la longitud inicial, no son los mismos puntos que se habían definido para el vector desplazamiento. Otro comentario respecto de la figura 3.19 tiene que ver, con analogía a lo antes visto en Estado de esfuerzo, que aunque la deformación lineal unitaria (ε) y la distorsión (g) son escalares, se les impone un sentido que queda definido por el signo asociado al valor escalar. En la misma figura se puede observar que la deformación unitaria allí mostrada es positiva porque su desarrollo tiene el mismo sentido del versor \mathbf{n}_1 . Por el contrario, la distorsión allí mostrada es negativa porque su desarrollo se representa con sentido contrario al que muestra el versor \mathbf{m}_1 , que forma sistema derecho con el versor \mathbf{n}_1 . En la figura 3.20 se muestra al mismo vector deformación, pero ahora asociado a sus componentes vectoriales (vector deformación lineal unitaria y vector distorsión).

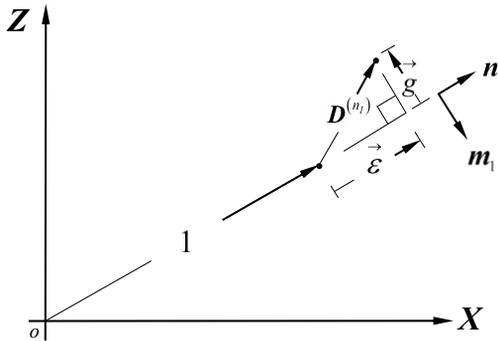


FIGURA 3.20. Vector deformación general y sus componentes vectoriales en Análisis plano

Podemos ahora adelantar que para formar el tensor deformación (que modela al estado de deformación que se desea analizar), se puede hacer a través de conocer las componentes escalares de los vectores deformación asociados a los ejes del sistema de referencia (\mathbf{XZ}). Si conocemos los vectores deformación, asociados a los ejes del sistema de referencia, se puede formar el tensor deformación (en analogía a las caras positivas del cuadrado diferencial que contenían a las componentes escalares del vector esfuerzo asociado a cada cara positiva).

Con fundamento en la intención de hacer uso exclusivo del primer cuadrante para análisis plano de deformaciones, lo que se comenta en adelante rumbo a la obtención del tensor deformación, vale para esta condición. En la figura 3.21, con acuerdo a todo lo especificado antes, se muestra al vector desplazamiento asociado ahora a la dirección del eje X .

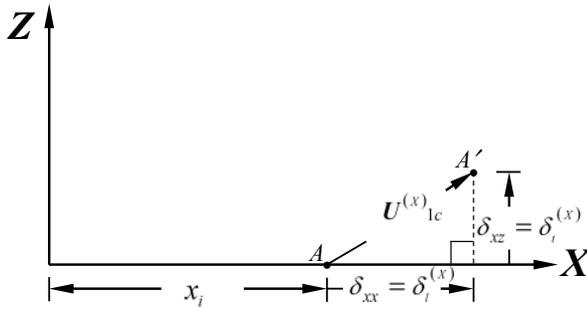


FIGURA 3.21. Vector desplazamiento asociado al eje X y sus componentes escalares

Se deduce entonces que, con la intención de formar al vector desplazamiento, se debe hacer uso de los componentes escalares mostrados en esa figura. Recordemos que el vector desplazamiento, asociado al eje X , sale del punto A y llega al punto A' , por lo que se puede recurrir a una de las dos formas de presentar: notación vectorial o notación de Gibbs. Se tiene entonces:

$$\{U_{1c}^{(x)}\} = \{A \rightarrow A'\} = \begin{Bmatrix} \delta_i^{(x)} \\ \delta_z^{(x)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{xx} \\ \delta_{xz} \end{Bmatrix} \quad ; \quad U_{1c}^{(x)} = \delta_i^{(x)}\mathbf{i} + \delta_z^{(x)}\mathbf{k} \quad (3-7)$$

En forma análoga, se puede escribir al vector desplazamiento asociado al eje Z como:

$$\{U_{1c}^{(z)}\} = \{C \rightarrow C'\} = \begin{Bmatrix} \delta_x^{(z)} \\ \delta_l^{(z)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{zx} \\ \delta_{zz} \end{Bmatrix} \quad ; \quad U_{1c}^{(z)} = \delta_x^{(z)}\mathbf{i} + \delta_l^{(z)}\mathbf{k} \quad (3-8)$$

Por otro lado, el vector deformación asociado a cada dirección de eje, se puede obtener dividiendo el vector desplazamiento asociado a cierto eje, entre la longitud inicial asociada a ese eje. Las dimensiones iniciales deben ser x_i para el análisis en dirección del eje X , y z_i para el análisis en dirección del eje Z , de modo que:

$$\{D^{(x)}\} = \frac{\{U_{1c}^{(x)}\}}{x_i} = \frac{\{A \rightarrow A'\}}{x_i} \quad (3-9)$$

Observe en la figura 3.22 cómo se debe entender este vector deformación $\{D^{(x)}\}$, como resultado de haber dividido el vector desplazamiento de la figura 3.21 entre la dimensión inicial x_i .

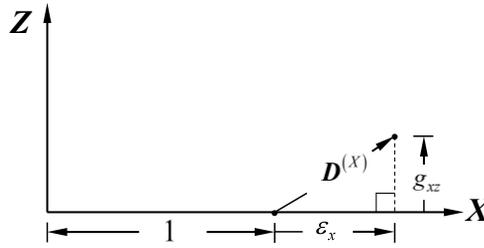


FIGURA 3.22. Vector deformación asociado al eje X y sus componentes escalares

En forma análoga se muestra cómo se debe calcular el vector deformación asociado a la dirección del eje Z.

$$\{D^{(Z)}\} = \frac{\{U_{1c}^{(Z)}\}}{z_i} = \frac{\{C \rightarrow C'\}}{z_i} \quad (3-10)$$

Con acuerdo a datos de las figuras 3.21 y 3.22 y en asociación al análisis en dirección del eje X, se deduce que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} = \frac{\delta_l^{(X)}}{x_i} = \frac{\delta_{xx}}{x_i} \quad (3-11)$$

y

$$g_{xz} = \frac{\delta_l^{(X)}}{x_i} = \frac{\delta_{xz}}{x_i} \quad (3-12)$$

Las componentes del vector deformación asociado a la dirección del eje X, se pueden deducir a partir de las componentes escalares del vector desplazamiento. Se puede escribir el vector deformación asociado al eje X como:

$$D^{(X)} = \frac{\delta_l^{(X)}}{x_i} \mathbf{i} + \frac{\delta_{xz}^{(X)}}{x_i} \mathbf{k} = \varepsilon_x \mathbf{i} + g_{xz} \mathbf{k} \quad (3-13)$$

En forma análoga, se puede deducir el vector deformación asociado a la dirección del eje Z como:

$$D^{(Z)} = \frac{\delta_{lx}^{(Z)}}{z_i} \mathbf{i} + \frac{\delta_l^{(Z)}}{z_i} \mathbf{k} = g_{zx} \mathbf{i} + \varepsilon_z \mathbf{k} \quad (3-14)$$

El vector deformación se puede escribir en notación de Gibbs o en notación matricial.

$$\mathbf{D}^{(X)} = \varepsilon_x \mathbf{i} + g_{xz} \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{0} \quad \{\mathbf{D}^{(X)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ g_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{(Z)} = g_{zx} \mathbf{i} + \varepsilon_z \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{0} \quad \{\mathbf{D}^{(Z)}\} = \begin{Bmatrix} g_{zx} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

En la figura 3.23 se presentan configuraciones de cuerpo en sus acepciones de inicial y final.

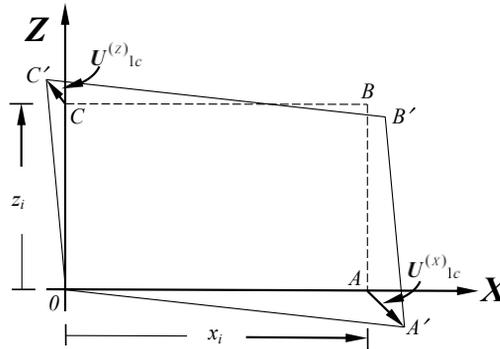


FIGURA 3.23. Configuraciones de cuerpo y vectores desplazamiento asociados a los ejes X y Z

Se puede ver el vector desplazamiento asociado a cada uno de los dos ejes del sistema de referencia. La figura 3.23 muestra gráficamente el paso de posición de los puntos vértice A y C a la nueva posición A' y C', como nuevos puntos vértice de la configuración deformada (final). También se puede observar la configuración final y compararla con la inicial en este análisis de primer cuadrante. Se recomienda que vea también, en la figura 3.23, el paso del punto vértice B a su nueva posición B'. En la figura 3.24 se muestra, en un análisis independiente para cada eje, cómo se ven los vectores deformación asociados a los ejes del sistema de referencia, deducidos a partir de los vectores desplazamiento que se observaron en la figura 3.23. También se modelan allí las configuraciones de partícula del mismo fenómeno en el primer cuadrante.

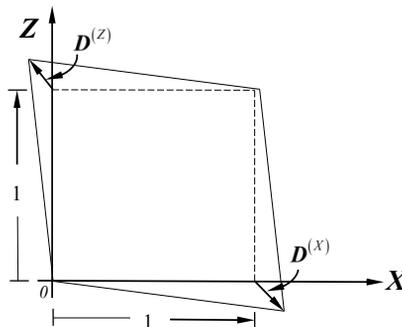


FIGURA 3.24. Configuraciones de partícula y vectores deformación asociados a los ejes X y Z

Observe en la figura 3.24 que se presentan otras configuraciones inicial (cuadrada) y final. La configuración inicial es un cuadrado con lado unitario. A estas nuevas configuraciones se les denomina de partícula. La partícula se asocia a esfuerzos incrementales y deformaciones adimensionales (la configuración de cuerpo se asocia a incrementos de fuerza y a deformaciones dimensionales). En la misma figura 3.24 se puede uno dar idea de cómo se pueden ver las configuraciones de una partícula asociadas también al primer cuadrante.

3.10. Formación del tensor deformación en análisis plano

El tensor deformación, en el caso de Análisis plano, se puede formar colocando los componentes escalares de los vectores deformación antes comentados en forma de columna, colocando en primer lugar el asociado a la dirección del eje X y en segundo lugar, el vector deformación asociado al eje Z , como se muestra:

$$[E_{ij}] = [D^{(X)} \quad D^{(Z)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & g_{zx} \\ g_{xz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

En Análisis plano, se tiene un tensor deformación con forma de matriz de 2×2 que es adimensional, ya que todos sus componentes se obtienen de una relación de longitudes.

Como analogía con el tensor esfuerzo, el tensor deformación también debe ser simétrico (debido a que en el análisis de configuraciones en primer cuadrante se debe haber eliminado la rotación). Así como un tensor esfuerzo al ser simétrico garantiza el equilibrio, el tensor deformación al ser simétrico garantiza la compatibilidad de las deformaciones. Existen unas ecuaciones llamadas de compatibilidad para los casos de Análisis plano de deformaciones y para análisis espacial (tridimensional) de deformaciones. En el primer caso es una sola y en el segundo caso se tienen seis ecuaciones.

3.11. Método analítico tensorial para cálculo de ε y g asociados a cierta dirección, definida por un versor n , en Análisis plano

Los versores n y m se van a manejar en este tema, en forma análoga a cómo se obtienen y operan en el tema de Estado de esfuerzo.

$$n = n_x \mathbf{i} + n_z \mathbf{k} \quad ; \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (3-16)$$

donde:

$$n_x = \cos \alpha \quad (3-17)$$

$$n_z = \cos \gamma$$

En este caso, como se vio en el tema de Estado de esfuerzo, α y γ son los ángulos directores, así como n_x y n_z son los cosenos directores.

El versor \mathbf{m} se puede obtener con la regla que se comentó en el tema de Estado de esfuerzo para garantizar que forma con el versor \mathbf{n} un sistema derecho de versores, de modo que con base en componentes del versor \mathbf{n} se pueden deducir los componentes del versor \mathbf{m} , como se muestra:

$$\mathbf{m} = n_z \mathbf{i} + (-n_x) \mathbf{k} = m_x \mathbf{i} + m_z \mathbf{k} \quad ; \quad \{\mathbf{m}\} = \begin{Bmatrix} n_z \\ (-n_x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (3-18)$$

Habiendo podido formar el tensor deformación y definida la dirección de análisis al proponer un cierto versor \mathbf{n} , se puede conocer ahora el vector deformación $\{\mathbf{D}^{(n)}\}$, asociado a la dirección de análisis, al operar en forma matricial como se puede ver en la ecuación (3-19). Observe la analogía que se tiene con lo visto en el tema Estado de esfuerzo.

$$\{\mathbf{D}^{(n)}\} = [\mathbf{E}_{ij}] \{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & g_{zx} \\ g_{xz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D^{(n)}_x \\ D^{(n)}_z \end{Bmatrix} \quad (3-19)$$

Finalmente, haciendo uso de los versores \mathbf{n} y \mathbf{m} , se puede calcular la deformación lineal unitaria (ε) y la distorsión (g) asociadas a la dirección de análisis \mathbf{n} , con su signo correcto y único, como se muestra:

$$\varepsilon = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} = \{n_x \quad n_z\} \begin{Bmatrix} D^{(n)}_x \\ D^{(n)}_z \end{Bmatrix} \quad (3-20)$$

y

$$g = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} = \{m_x \quad m_z\} \begin{Bmatrix} D^{(n)}_x \\ D^{(n)}_z \end{Bmatrix} \quad (3-21)$$

Se hace énfasis ahora en que la aplicación más importante de estas herramientas, tiene que ver con la posibilidad de modelar deformaciones que implican cambios de configuración (que con base en lo acordado, podremos ahora visualizar en el primer cuadrante y más adelante en análisis espacial en el primer octante). Si se ubican puntos vértice de configuración inicial que coincidan con los ejes del sistema de referencia (recordemos que el sistema de referencia está asociado a la configuración inicial) proponiendo una configuración inicial con forma de cuboide (paralelepípedo rectangular), se pueden conocer las coordenadas de los puntos vértice

en la configuración final después de aplicar a la configuración inicial un cierto estado de deformación, a través del denominado tensor deformación. Se puede comentar ahora que, aunque un cuerpo real en configuración inicial pudiera no tener forma de paralelepípedo rectangular, se pueden ubicar puntos de referencia dentro del cuerpo modelando los vértices de un paralelepípedo rectangular inicial, antes de hacer las mediciones del cuerpo deformado posteriormente.

En la configuración inicial queda implícito un vector que une el origen del sistema de referencia con un punto vértice que esté sobre el eje $X (A)$ y otro que se encuentre sobre el eje $Z (C)$ (esta es la razón por la que se eligió usar para configuración inicial en análisis plano, cuadrados o rectángulos, ya que con estas figuras forzamos a tener siempre dos puntos vértice, coincidentes con cada eje del sistema de referencia). Los vectores del origen a punto vértice sobre eje de referencia son:

Para el eje X

$$\{O \rightarrow A\} = (x_A - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{k} \quad (3-22)$$

Para el eje Z

$$\{O \rightarrow C\} = (0 - 0)\mathbf{i} + (z_C - 0)\mathbf{k} \quad (3-23)$$

Si en la deformación el punto vértice sobre el eje $X (A)$ pasa al punto A' a través del vector desplazamiento, implica que el vector que va del origen al punto A' se puede conformar como una suma de dos vectores, como se muestra:

$$\{O \rightarrow A'\} = \{O \rightarrow A\} + \{U_{1c}^{(X)}\} = \{O \rightarrow A\} + \{A \rightarrow A'\} \quad (3-24)$$

Para el análisis en dirección del eje Z se tiene, por analogía:

$$\{O \rightarrow C'\} = \{O \rightarrow C\} + \{U_{1c}^{(Z)}\} = \{O \rightarrow C\} + \{C \rightarrow C'\} \quad (3-25)$$

Se comenta, a manera de aclaración, que cualquier “flecha” dentro del paréntesis de la forma “{ }” expresa de qué punto sale el vector y a qué punto llega (de un punto inicial a uno final).

De lo anterior se deduce que el vector desplazamiento se puede calcular como la resta de dos vectores que parten del origen, como se muestra:

$$\{U_{1c}^{(X)}\} = \{A \rightarrow A'\} = \{O \rightarrow A'\} - \{O \rightarrow A\} \quad (3-26)$$

$$\{U_{1c}^{(Z)}\} = \{C \rightarrow C'\} = \{O \rightarrow C'\} - \{O \rightarrow C\} \quad (3-27)$$

La ventaja que se tiene al hacer un manejo de configuraciones en el primer cuadrante (en Análisis plano), es que los componentes de los vectores de las ecuaciones (3-24) y (3-25) son los mismos de las coordenadas de los puntos *prima* (de la configuración deformada), como se ejemplifica:

$$\{O \rightarrow A'\} = x_{A'}\mathbf{i} + z_{A'}\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad A' (x_{A'} \quad z_{A'})$$

$$\{O \rightarrow C'\} = x_{C'}\mathbf{i} + z_{C'}\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad C' (x_{C'} \quad z_{C'})$$

Si del tensor de deformación es posible desarticular el vector de deformación asociado a cada eje del sistema de referencia (cada columna), se puede conocer el vector de desplazamiento en un análisis de primer cuadrante asociado a cada uno de los ejes, como sigue:

$$\{\mathbf{D}^{(X)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\mathbf{U}_{1c}^{(X)}\} = x_i \{\mathbf{D}^{(X)}\} = \begin{Bmatrix} U_{1c}^{(X)}{}_x \\ U_{1c}^{(X)}{}_z \end{Bmatrix} \quad (3-28)$$

$$\{\mathbf{D}^{(Z)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\mathbf{U}_{1c}^{(Z)}\} = z_i \{\mathbf{D}^{(Z)}\} = \begin{Bmatrix} U_{1c}^{(Z)}{}_x \\ U_{1c}^{(Z)}{}_z \end{Bmatrix} \quad (3-29)$$

Vea que con este razonamiento se pueden ubicar los puntos vértice de la configuración final o deformada, haciendo posible el poder predecir el cambio de configuración (cambio de forma) por efecto de aplicar cierto estado de deformación, en un análisis de primer cuadrante.

3.12. Ejemplos de aplicación con método analítico tensorial de deformaciones en Análisis plano y comentarios sobre la solución gráfica del polo fijo

EJEMPLO 3.1

Se realizó una prueba de tensión simple a una probeta metálica cilíndrica que tiene como dimensiones iniciales una altura $H_i = 19,893 \text{ 7 cm}$ y un diámetro $D_i = 10,093 \text{ 6 cm}$. Se le aplicó un incremento de fuerza en la dirección de su eje de rotación (\mathbf{Z}). Al estabilizarse su deformación bajo la acción antes comentada, se midieron como dimensiones finales una altura $H_f = 20,052 \text{ 6 cm}$ y un diámetro $D_f = 10,071 \text{ 7 cm}$. Se recomienda ubicar el problema en un Análisis plano de deformaciones. Proponiendo plantear las configuraciones en primer cuadrante para la resolución, se pide calcule el valor correcto de la deformación lineal unitaria y de la distorsión que se producen en la dirección de un versor que abra desde la dirección horizontal con sentido positivo (eje \mathbf{X}) un ángulo de 60° y que apunte hacia arriba.

Cálculo de los vectores desplazamiento asociados a las direcciones X y Z , en notación de Gibbs.

$$U_{1c}^{(X)} = \{A \rightarrow A'\} = (10,0717 - 10,0936)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{k} \text{ cm} = -0,0219\mathbf{i} + 0\mathbf{k} \text{ cm}$$

$$U_{1c}^{(Z)} = \{C \rightarrow C'\} = (0-0)\mathbf{i} + (20,0526 - 19,8937)\mathbf{k} \text{ cm} = 0\mathbf{i} + 0,1589\mathbf{k} \text{ cm}$$

Cálculo de los vectores deformación asociados a las direcciones X y Z , con cuatro cifras significativas.

$$D^{(X)} = \frac{U_{1c}^{(X)}}{x_i} = \frac{-0,0219\mathbf{i} + 0\mathbf{k} \text{ cm}}{10,0936 \text{ cm}} \approx -2,170\mathbf{i} + 0\mathbf{k} \times 10^{-3}$$

$$D^{(Z)} = \frac{U_{1c}^{(Z)}}{z_i} = \frac{0\mathbf{i} + 0,1589\mathbf{k} \text{ cm}}{19,8937 \text{ cm}} \approx 0\mathbf{i} + 7,987\mathbf{k} \times 10^{-3}$$

Con estos datos se está en posibilidad de formar el tensor deformación como primer paso.

$$[E_{ij}] \approx \begin{bmatrix} -2,170 & 0 \\ 0 & 7,987 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

En la figura 3.25 se observa el versor en la dirección de análisis para este problema.

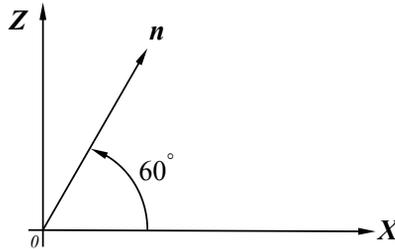


FIGURA 3.25. Versor que define la dirección de análisis del ejemplo 3.1

En este caso el versor n , como un segundo paso necesario, debe ser:

$$n = \cos 60^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k} \approx 0,5000\mathbf{i} + 0,8660\mathbf{k}$$

Por lo que el versor m debe cumplir con ser:

$$\mathbf{m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{k} \approx 0,866 \, 0\mathbf{i} - 0,500 \, 0\mathbf{k}$$

Como un tercer paso, calcularemos ahora el vector deformación asociado a la dirección de análisis operando matricialmente.

$$\{\mathbf{D}^{(n)}\} = [\mathbf{E}_{ij}]\{\mathbf{n}\} \approx \begin{bmatrix} -2,170 & 0 \\ 0 & 7,987 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} 0,500 \, 0 \\ 0,866 \, 0 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -1,085 \\ 6,917 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Como pasos cuarto y quinto, finalmente calculamos con un producto escalar la deformación lineal unitaria y la distorsión, asociadas a la dirección de análisis que define el versor \mathbf{n} .

$$\varepsilon = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} \approx \{0,500 \, 0 \quad 0,866 \, 0\} \begin{Bmatrix} -1,085 \\ 6,917 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx 5,448 \times 10^{-3}$$

y

$$g = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} \approx \{0,866 \, 0 \quad -0,500 \, 0\} \begin{Bmatrix} -1,085 \\ 6,917 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx -4,398 \times 10^{-3}$$

En la figura 3.26 se muestra la solución gráfica del mismo ejemplo, pero haciendo uso del método del polo fijo, aunque ahora utilizando la versión del plano de Mohr de deformaciones, como se comprueba en la misma figura.

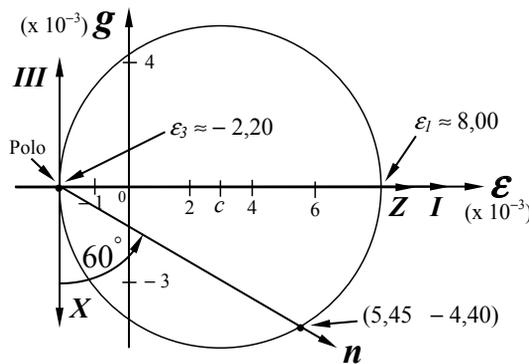


FIGURA 3.26. Solución gráfica con el método del polo fijo del ejemplo 3.1

EJEMPLO 3.2

Se desea modelar en Análisis plano, como una estimación de ingeniería, la deformación de un cuerpo de cierto material con forma espacial inicial de cuboide (paralelepípedo rectangular), con dimensiones: $x_i = 30,264 \, 7$ cm; $y_i = 30,264 \, 7$ cm; $z_i = 19,653 \, 1$ cm. En Análisis plano, el mismo cuerpo se puede modelar en configuración inicial como un rectángulo con una base de

30,264 7 cm y una altura de 19,653 1 cm. El análisis se va a plantear en el primer cuadrante del sistema de referencia cartesiano usado en el curso y con las recomendaciones antes vistas. Se desea aplicar al cuerpo, en las condiciones comentadas, (usando como base de apoyo el eje X) un estado de deformación definido por el tensor deformación que se presenta:

$$[E_{ij}] \approx \begin{bmatrix} 4,137 & -3,896 \\ -3,896 & -1,979 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Con acuerdo a plantear las configuraciones en el primer cuadrante, las coordenadas de los puntos vértice de la configuración inicial deben ser:

$$A (30,264 7 \quad 0) \text{ cm}$$

$$B (30,264 7 \quad 19,653 1) \text{ cm}$$

$$C (0 \quad 19,653 1) \text{ cm}$$

En una primera etapa de cálculo, obtenga las coordenadas de los puntos vértice asociados a los anteriores, pero ahora para la configuración final (en análisis de primer cuadrante). Posteriormente, en una segunda etapa de cálculo obtenga, para el estado de deformación comentado, cuál sería el valor de la deformación lineal unitaria y de la distorsión, asociadas a la dirección de un vector (o versor) que guarde con la dirección horizontal 35° y apunte hacia arriba en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN

Del tensor deformación se desarticula el vector deformación correspondiente a cada eje del sistema de referencia, como sigue:

$$\{D^{(X)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ g_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4,137 \\ -3,896 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\{D^{(Z)}\} = \begin{Bmatrix} g_{zx} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3,896 \\ -1,979 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Se calcula ahora el vector desplazamiento asociado a los ejes X y Z . Posteriormente, se calcularán las coordenadas del punto B' con datos de la diagonal que va del vértice origen al punto vértice B .

$$U_{1c}^{(X)} = x_i D^{(X)} = (30,264 7 \text{ cm})4,137\mathbf{i} - 3,896\mathbf{k} \times 10^{-3} \approx 0,125 2\mathbf{i} - 0,117 9\mathbf{k} \text{ cm}$$

$$U_{1c}^{(Z)} = z_i D^{(Z)} = (19,653 1 \text{ cm})-3,896\mathbf{i} - 1,979\mathbf{k} \times 10^{-3} \approx -0,076 57\mathbf{i} - 0,038 9\mathbf{k} \text{ cm}$$

En notación de Gibbs los vectores que van del origen a cada punto vértice de configuración inicial sobre cada eje del sistema de referencia deben ser:

$$\{O \rightarrow A\} = (30,264 \ 7 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{k} \text{ cm} = 30,264 \ 7\mathbf{i} + 0\mathbf{k} \text{ cm}$$

$$\{O \rightarrow C\} = (0 - 0)\mathbf{i} + (19,653 \ 1 - 0)\mathbf{k} \text{ cm} = 0\mathbf{i} + 19,653 \ 1\mathbf{k} \text{ cm}$$

El vector que va del origen a los puntos asociados a cada eje del sistema de referencia, en la configuración final A' y C' que se puede escribir en forma matricial, debe ser en cada caso:

$$\{O \rightarrow A'\} = \{O \rightarrow A\} + \{U_{1c}^{(x)}\} = \begin{Bmatrix} 30,264 \ 7 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} 0,125 \ 2 \\ -0,117 \ 9 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 30,389 \ 9 \\ -0,117 \ 9 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

que en notación de Gibbs se puede escribir como:

$$\{O \rightarrow A'\} = 30,389 \ 9\mathbf{i} - 0,117 \ 9\mathbf{k} \text{ cm}$$

Calculamos lo análogo con asociación al eje Z .

$$\{O \rightarrow C'\} = \{O \rightarrow C\} + \{U_{1c}^{(z)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 19,653 \ 1 \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} -0,076 \ 57 \\ -0,038 \ 9 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} -0,076 \ 57 \\ 19,614 \ 2 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

que también se puede escribir:

$$\{O \rightarrow C'\} = -0,076 \ 57\mathbf{i} + 19,614 \ 2\mathbf{k} \text{ cm}$$

Como los vectores que se muestran al final salen también del origen del sistema de referencia, sus componentes son los mismos de las coordenadas que deben tener los puntos que estamos buscando de la configuración final o deformada. Al final del ejemplo se listarán las coordenadas de los puntos vértice en configuración final.

Calcularemos a continuación el vector desplazamiento $\{B \rightarrow B'\}$, antes de poder escribir las coordenadas del punto B' .

Como primer paso, se calcula primero el vector de la diagonal que va del vértice inferior izquierdo, que coincide obligadamente con el origen, al superior derecho que se puede visualizar como un vector $\{O \rightarrow B\}$, que en notación de Gibbs se puede escribir:

$$\{O \rightarrow B\} = (30,264 \ 7 - 0)\mathbf{i} + (19,653 \ 1 - 0)\mathbf{k} \text{ cm} = 30,264 \ 7\mathbf{i} + 19,653 \ 1\mathbf{k} \text{ cm}$$

El módulo de este vector es igual a la longitud (inicial) de la diagonal de vértice a vértice o de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, como se muestra:

$$L_{i \text{ diag.}} = |\{O \rightarrow B\}| = \sqrt{(30,264 \text{ 7 cm})^2 + (19,653 \text{ 1 cm})^2} \approx 36,086 \text{ 0 cm}$$

El versor en esa dirección de análisis, en notación de Gibbs y con seis cifras significativas, se puede calcular como:

$$\mathbf{n} = \frac{\{O \rightarrow B\}}{|\{O \rightarrow B\}|} = \frac{\{O \rightarrow B\}}{L_{i \text{ diag.}}} \approx \frac{30,264 \text{ 7i} + 19,653 \text{ 1k cm}}{36,086 \text{ 0 cm}} \approx 0,838 \text{ 683i} + 0,544 \text{ 618 k}$$

Ahora debemos calcular el vector deformación asociado a esa dirección y para el estado de deformación planteado, de modo que:

$$\{\mathbf{D}^{(n)}\} = [\mathbf{E}_{ij}] \{\mathbf{n}\} \approx \begin{bmatrix} 4,137 & -3,896 \\ -3,896 & -1,979 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} 0,838 \text{ 683} \\ 0,544 \text{ 618} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1,347 \text{ 80} \\ -4,345 \text{ 31} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

El vector desplazamiento asociado a la dirección del versor antes calculado, que a su vez debe salir del vértice B , sería:

$$\{\mathbf{U}_{1c}^{(n)}\} = L_i \{\mathbf{D}^{(n)}\} \approx 36,086 \text{ 0 cm} \begin{Bmatrix} 1,347 \text{ 80} \\ -4,345 \text{ 31} \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx \begin{Bmatrix} 0,048 \text{ 637} \\ -0,156 \text{ 804} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Finalmente, para concluir este cálculo, el vector que va del origen al punto B' es:

$$\{O \rightarrow B'\} = \{O \rightarrow B\} + \{\mathbf{U}_{1c}^{(n)}\} \approx \begin{Bmatrix} 30,264 \text{ 7} \\ 19,653 \text{ 1} \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} 0,048 \text{ 637} \\ -0,156 \text{ 804} \end{Bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{Bmatrix} 30,313 \text{ 3} \\ 19,496 \text{ 3} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Otra forma de plantear la obtención de este vector es definirlo como la suma de los vectores que van del origen a cada vértice asociado a la dirección de un eje de referencia, para configuración final, por ejemplo:

$$\{O \rightarrow B'\} = \{O \rightarrow A'\} + \{O \rightarrow C'\} \approx \begin{Bmatrix} 30,389 \text{ 9} \\ -0,117 \text{ 9} \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} -0,076 \text{ 6} \\ 19,614 \text{ 2} \end{Bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{Bmatrix} 30,313 \text{ 3} \\ 19,496 \text{ 3} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Finalmente, ya estamos en posibilidad de presentar las coordenadas de los puntos vértice en la configuración deformada, aprovechando que, como todos los vectores salen del origen del sistema de referencia, los componentes de los vectores son los mismos de las coordenadas de los puntos vértice en este plano cartesiano. Con base en lo dicho y cerrando hasta milésimas de milímetro o micrómetros, tenemos que:

$$A' (30,389 \text{ 9} \quad -0,117 \text{ 9}) \text{ cm}$$

$$B' (30,313 \text{ 3} \quad 19,496 \text{ 3}) \text{ cm}$$

$$C' (-0,0766 \quad 19,6142) \text{ cm}$$

Pasamos ahora a la segunda etapa de cálculo, en la que se nos pide el cálculo de ε y g asociadas a la dirección que se nos ha solicitado. El tensor deformación está dado como propuesta, de modo que nos falta obtener los versores \mathbf{n} y \mathbf{m} para esta parte de la solución. En la figura 3.27 se muestra la posición del versor \mathbf{n} respecto del sistema de referencia \mathbf{XZ} .

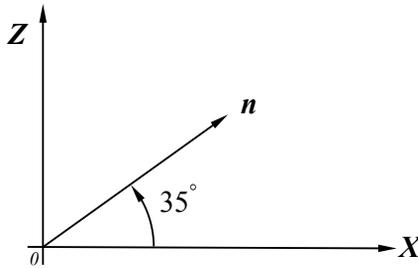


FIGURA 3.27. Versor que define la dirección de análisis del ejemplo 3.2

Los versores \mathbf{n} y \mathbf{m} sistema derecho en su versión matricial deben ser:

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} \cos 35^\circ \\ \cos 55^\circ \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 0,8192 \\ 0,5736 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\mathbf{m}\} = \begin{Bmatrix} 0,5736 \\ -0,8192 \end{Bmatrix}$$

Calculamos ahora el vector deformación asociado a la dirección del versor \mathbf{n} definido:

$$\{\mathbf{D}^{(n)}\} = [\mathbf{E}_{ij}]\{\mathbf{n}\} \approx \begin{bmatrix} 4,137 & -3,896 \\ -3,896 & -1,979 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} 0,8192 \\ 0,5736 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 1,154 \\ -4,327 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Por último, como pasos cuarto y quinto, calculamos la deformación lineal unitaria y la distorsión, asociadas a la dirección de análisis.

$$\varepsilon = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} \approx \{0,8192 \quad 0,5736\} \begin{Bmatrix} 1,154 \\ -4,327 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx -1,537 \times 10^{-3}$$

y

$$g = \{\mathbf{m}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} \approx \{0,5736 \quad -0,8192\} \begin{Bmatrix} 1,154 \\ -4,327 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx 4,207 \times 10^{-3}$$

En la figura 3.28 se muestra la misma solución, pero haciendo uso del método gráfico del polo fijo, ya visto en el tema de Estado de esfuerzo, pero ahora en el plano de Mohr de deformaciones.

Observe en la misma figura que se está planteando un análisis de cambio de configuración, exclusivamente haciendo uso del primer octante del sistema de referencia XYZ . El vector desplazamiento va de un cierto punto vértice de configuración inicial, que coincide con alguno de los ejes del sistema de referencia (puntos A , B o C), a su correspondiente en configuración final (puntos A' , B' o C'). En un análisis de partícula, el vector deformación asociado a cada eje del sistema de referencia se podría ver como se ejemplifica en la figura 3.30, donde la configuración inicial debe ser un cubo con lados unitarios.

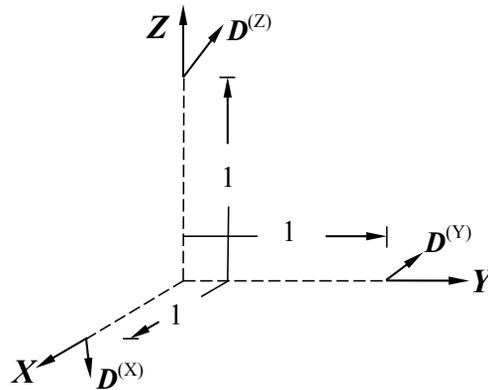


FIGURA 3.30. Vector deformación asociado a cada eje del sistema de referencia espacial

Se plantea como condición, para manejar a la configuración final en el primer octante, que se haya hecho una corrección de rotación del cuerpo, ya que el tensor deformación en análisis espacial también debe ser simétrico (para cumplir con la compatibilidad de las deformaciones). En los casos de predicción de configuración final, se la obtendrá siempre en su forma de tener eliminada la rotación, ya que se generan los vectores deformación a partir de un tensor simétrico.

Si se conocen las coordenadas de los puntos vértice de configuración final (A' , B' y C') y las coordenadas de los puntos vértice de configuración inicial (A , B y C), podemos iniciar el camino de obtener el tensor deformación con solo conocer el vector desplazamiento asociado a cada eje y la dimensión inicial del lado del paralelepípedo asociada a cada eje.

Con analogía a lo visto en el tema de Estado de esfuerzo, donde iniciamos obteniendo los componentes del vector esfuerzo asociado a la dirección del eje Y , aquí se muestra para ese mismo eje el vector desplazamiento, que no se debe olvidar tiene unidades de longitud. Vea la figura 3.31.

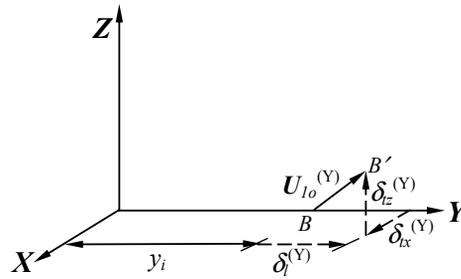


FIGURA 3.31. Vector desplazamiento asociado al eje Y y sus componentes escalares

Con base en la figura 3.31 se muestran en la ecuación (3-30) las componentes del vector desplazamiento asociado a la dirección del eje Y , en notación de Gibbs.

$$U_{1o}^{(Y)} = \{B \rightarrow B'\} = \delta_{lx}^{(Y)} \mathbf{i} + \delta_{ly}^{(Y)} \mathbf{j} + \delta_{lz}^{(Y)} \mathbf{k} = \delta_{yx} \mathbf{i} + \delta_{yy} \mathbf{j} + \delta_{yz} \mathbf{k} \quad (3-30)$$

El subíndice “1_o” significa que se está haciendo un manejo de configuraciones en el primer octante del sistema cartesiano de referencia XYZ . Ahora, por analogía, se podrían obtener los componentes de los vectores desplazamiento restantes, que también son dimensionales.

$$U_{1o}^{(X)} = \{A \rightarrow A'\} = \delta_{lx}^{(X)} \mathbf{i} + \delta_{ly}^{(X)} \mathbf{j} + \delta_{lz}^{(X)} \mathbf{k} = \delta_{xx} \mathbf{i} + \delta_{xy} \mathbf{j} + \delta_{xz} \mathbf{k} \quad (3-31)$$

$$U_{1o}^{(Z)} = \{C \rightarrow C'\} = \delta_{lx}^{(Z)} \mathbf{i} + \delta_{ly}^{(Z)} \mathbf{j} + \delta_{lz}^{(Z)} \mathbf{k} = \delta_{zx} \mathbf{i} + \delta_{zy} \mathbf{j} + \delta_{zz} \mathbf{k} \quad (3-32)$$

Se pueden calcular las coordenadas de los puntos vértice, en análisis espacial y para configuración final, aplicando una analogía a lo visto antes en Análisis plano, haciendo uso de las siguientes expresiones:

$$\{O \rightarrow A'\} = \{O \rightarrow A\} + \{U_{1o}^{(X)}\} \quad (3-33)$$

$$\{O \rightarrow B'\} = \{O \rightarrow B\} + \{U_{1o}^{(Y)}\} \quad (3-34)$$

$$\{O \rightarrow C'\} = \{O \rightarrow C\} + \{U_{1o}^{(Z)}\} \quad (3-35)$$

Las coordenadas de los puntos vértice prima deben tener los mismos componentes de los vectores del origen a los puntos prima, en este análisis de primer octante.

Si ahora dividimos las deformaciones lineales y transversales entre la longitud inicial en la dirección del eje Y de análisis, se tiene que:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{yy} = \frac{\delta_l^{(y)}}{y_i} = \frac{\delta_{yy}}{y_i} = \frac{\delta_y}{y_i} \quad (3-36)$$

Análogamente para el cálculo de las distorsiones asociadas al eje de análisis tenemos que:

$$g_{yx} = \frac{\delta_{lx}^{(y)}}{y_i} = \frac{\delta_{yx}}{y_i} \quad (3-37)$$

y

$$g_{yz} = \frac{\delta_{lz}^{(y)}}{y_i} = \frac{\delta_{yz}}{y_i} \quad (3-38)$$

El vector deformación asociado a la dirección del eje **Y**, se obtiene en un solo paso de dividir el vector desplazamiento asociado a esa dirección entre la dimensión inicial del cuerpo en esa misma dirección, como se muestra a continuación en notación de Gibbs.

$$\mathbf{D}^{(Y)} = \frac{\mathbf{U}_{l_0}^{(Y)}}{y_i} = \frac{\{B \rightarrow B'\}}{y_i} = \frac{\delta_{lx}^{(Y)}\mathbf{i} + \delta_{ly}^{(Y)}\mathbf{j} + \delta_{lz}^{(Y)}\mathbf{k}}{y_i} = g_{yx}\mathbf{i} + \varepsilon_y\mathbf{j} + g_{yz}\mathbf{k} \quad (3-39)$$

Este vector deformación que se ha obtenido y sus componentes escalares, se muestran en la figura 3.32.

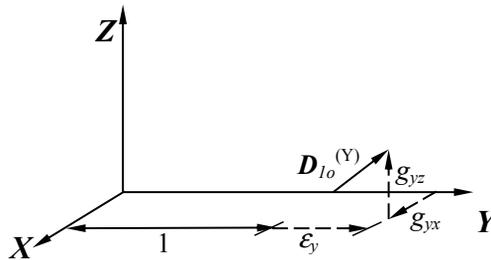


FIGURA 3.32. Vector deformación asociado al eje **Y** y sus componentes escalares

Por analogía, se puede decir que los vectores deformación restantes deben ser:

$$\mathbf{D}^{(X)} = \frac{\mathbf{U}_{l_0}^{(X)}}{x_i} = \frac{\{A \rightarrow A'\}}{x_i} = \frac{\delta_{lx}^{(X)}\mathbf{i} + \delta_{ly}^{(X)}\mathbf{j} + \delta_{lz}^{(X)}\mathbf{k}}{x_i} = \varepsilon_x\mathbf{i} + g_{xy}\mathbf{j} + g_{xz}\mathbf{k} \quad (3-40)$$

$$\mathbf{D}^{(Z)} = \frac{\mathbf{U}_{l_0}^{(Z)}}{z_i} = \frac{\{C \rightarrow C'\}}{z_i} = \frac{\delta_{lx}^{(Z)}\mathbf{i} + \delta_{ly}^{(Z)}\mathbf{j} + \delta_{lz}^{(Z)}\mathbf{k}}{z_i} = g_{zx}\mathbf{i} + g_{zy}\mathbf{j} + \varepsilon_z\mathbf{k} \quad (3-41)$$

3.14. Obtención del tensor deformación en el espacio

En este caso espacial, los componentes de los vectores deformación en notación matricial deben ser:

$$\{D^{(X)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ g_{xy} \\ g_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3-42)$$

$$\{D^{(Y)}\} = \begin{Bmatrix} g_{yx} \\ \varepsilon_y \\ g_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3-43)$$

$$\{D^{(Z)}\} = \begin{Bmatrix} g_{zx} \\ g_{zy} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (3-44)$$

De modo que, también con analogía a lo visto antes en el tensor esfuerzo y en el tensor deformación de Análisis plano, el tensor deformación tridimensional se puede formar colocando los componentes de los vectores deformación en forma de columna y en orden de ejes, como se muestra en la ecuación (3-45):

$$[E_{ij}] = [D^{(X)} \quad D^{(Y)} \quad D^{(Z)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & g_{yx} & g_{zx} \\ g_{xy} & \varepsilon_y & g_{zy} \\ g_{xz} & g_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

La obtención del tensor deformación pudiera ser el primer paso, para posteriormente calcular en una dirección dada, asociada a la dirección de un versor \mathbf{n} , la deformación lineal unitaria y la distorsión asociadas a esa misma dirección. Adicionalmente a lo antes comentado, se acepta que, habiendo obtenido el tensor deformación, se pueden calcular, en analogía a lo visto en Estado de esfuerzo, las deformaciones principales lineales unitarias y la dirección donde actúa cada una de las tres deformaciones lineales unitarias principales.

Se puede demostrar para el tema de Estado de deformaciones que también se cumple, si las deformaciones lineales unitarias principales son diferentes, el poder visualizar un elipsoide de Lamé de deformaciones. Este elipsoide de Lamé estaría asociado a un tensor principal y ordenado. Para los casos de Análisis plano, se podrían visualizar elipsoides de revolución, con un eje de rotación particular para cada caso. También se puede demostrar que, a partir de un tensor deformación en su forma principal, se puede conocer la región de Mohr que representa a ese particular estado de deformación, ahora en el plano de Mohr de deformaciones.

3.15. Método analítico tensorial en análisis espacial de deformaciones, para determinación de la deformación lineal unitaria y la distorsión asociadas a la dirección de un versor \mathbf{n}

El versor se maneja en este tema en forma idéntica a como se hizo en Estado de esfuerzo, de modo que el versor tridimensional en notación de Gibbs y en notación matricial es:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} \quad ; \quad \{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (3-46)$$

La decisión de poder definir cierta dirección en la que se desea hacer el análisis, se logra con definirla a través del versor, como un segundo paso necesario para los cálculos que se deben realizar. Como un posible tercer paso, ahora estamos en opción de calcular el vector deformación asociado a una dirección particular de análisis, aprovechando aquí para mostrar sus componentes escalares en tres dimensiones, de modo que:

$$\{\mathbf{D}^{(n)}\} = [\mathbf{E}_{ij}] \{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & g_{yx} & g_{zx} \\ g_{xy} & \varepsilon_y & g_{zy} \\ g_{xz} & g_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D^{(n)}_x \\ D^{(n)}_y \\ D^{(n)}_z \end{Bmatrix} \quad (3-47)$$

La deformación lineal unitaria, asociada a la dirección del versor (de análisis), se puede calcular por medio de un producto escalar, en analogía a lo que se hacía al calcular el valor del esfuerzo normal en Estado de esfuerzo:

$$\varepsilon = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} = \{\mathbf{D}^{(n)}\}^T \{\mathbf{n}\} \quad (3-48)$$

Se podría calcular el vector deformación lineal unitaria, pero en este tema no lo haremos.

El valor de la distorsión como escalar se puede calcular haciendo uso también del teorema de Pitágoras, como se muestra:

$$|\mathbf{D}^{(n)}|^2 = \varepsilon^2 + g^2 \quad (3-49)$$

Se hace el cálculo usando los componentes escalares del vector deformación, como se muestra en su forma expandida en la parte final de la ecuación (3-50), recordando que en el análisis espacial no se puede eludir el doble signo de la distorsión.

$$g = \pm \sqrt{|\mathbf{D}^{(n)}|^2 - \varepsilon^2} = \pm \sqrt{(D^{(n)}_x)^2 + (D^{(n)}_y)^2 + (D^{(n)}_z)^2 - (\varepsilon)^2} \quad (3-50)$$

En el ejemplo que se plantea a continuación, se presenta la solución analítica tensorial y, como complemento, se presenta también la que debe ser la solución gráfica de Mohr.

3.16. Ejemplo de aplicación usando el método analítico tensorial de deformaciones en análisis tridimensional y comentarios sobre la solución gráfica de Mohr equivalente

EJEMPLO 3.3

A una probeta de cierto material con forma inicial de paralelepípedo rectangular, que se va a analizar en el primer octante, se le quiere aplicar el estado de deformación definido por el tensor que se muestra a continuación:

$$[\mathbf{E}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

La probeta orientada respecto del sistema cartesiano de referencia espacial, tiene como dimensiones iniciales:

$$x_i = 52,483 \text{ 7 cm}$$

$$y_i = 39,872 \text{ 4 cm}$$

$$z_i = 30,675 \text{ 2 cm}$$

1. Se quiere predecir, con base en la teoría de deformación, las coordenadas de los puntos vértice A' , B' y C' de la configuración deformada.
2. Posteriormente, se desea calcular cuál es la deformación lineal unitaria y la distorsión que sufre el cuerpo en una dirección particular, si se plantea como dirección de análisis la definida por el vector $V = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
3. Para finalizar, se pide se verifique este último resultado, haciendo uso del método gráfico de Mohr, pero ahora aplicado a deformaciones en el espacio.

SOLUCIÓN

1. Primeramente calcularemos las coordenadas de los puntos vértice que se piden.

Las coordenadas de los puntos vértice de la probeta (como cuerpo) en su configuración inicial y colocada en primer octante, deben ser:

$$A (52,483 7 \quad 0,000 0 \quad 0,000 0) \text{ cm}$$

$$B (0,000 0 \quad 39,872 4 \quad 0,000 0) \text{ cm}$$

$$C (0,000 0 \quad 0,000 0 \quad 30,675 2) \text{ cm}$$

No se utilizan comas para separar los componentes numéricos de los puntos, en razón de que en este texto se hace uso de la coma como separador decimal, como se recomienda para México desde 1993 en la norma oficial NOM-008-SCFI-2002. En este texto, la separación de datos de coordenadas se hará a través de un espacio.

Para el cálculo de las coordenadas del punto A' se va a desarticular el vector deformación asociado al eje X (primera columna del tensor deformación), como se muestra.

$$\{\mathbf{D}^{(X)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{o en notación de Gibbs} \quad \mathbf{D}^{(X)} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \times 10^{-3}$$

Haciendo uso de la expresión (3-40), pero ahora mostrando el vector desplazamiento en forma matricial, se tiene que:

$$\{U_{1o}^{(X)}\} = x_i \{\mathbf{D}^{(X)}\} = 52,483 7 \text{ cm} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,157 451 \\ -0,104 967 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Para el cálculo de las coordenadas del punto B' se va a desarticular el vector deformación asociado al eje Y (segunda columna del tensor deformación), como se puede ver

$$\{\mathbf{D}^{(Y)}\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{o en notación de Gibbs} \quad \mathbf{D}^{(Y)} = 3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \times 10^{-3}$$

Calculando ahora el vector desplazamiento en forma análoga, se tiene

$$\{U_{1o}^{(Y)}\} = y_i \{\mathbf{D}^{(Y)}\} = 39,872 4 \text{ cm} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx \begin{Bmatrix} 0,119 617 \\ 0 \\ -0,079 745 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Para el cálculo de las coordenadas del punto C' se va a desarticular el vector deformación asociado al eje Z (tercera columna del tensor deformación), como se observa:

1

2

3

4

5

6

7

$$\{\mathbf{D}^{(Z)}\} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \text{ o en notación de Gibbs } \mathbf{D}^{(Z)} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 10^{-3}$$

Procediendo en forma análoga, se calcula el vector desplazamiento asociado a la dirección \mathbf{Z} .

$$\{\mathbf{U}_{1o}^{(Z)}\} = z_i \{\mathbf{D}^{(Z)}\} = 30,675 \text{ 2 cm} \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx \begin{Bmatrix} -0,061 \text{ 350} \\ -0,061 \text{ 350} \\ 0,153 \text{ 376} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Los vectores del origen a los puntos vértice de interés de configuración inicial en cada eje del sistema de referencia, deben tener iguales componentes que las coordenadas del punto correspondiente, de modo que:

$$\{O \rightarrow A\} = \begin{Bmatrix} 52,483 \text{ 7} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm} ; \{O \rightarrow B\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 39,872 \text{ 4} \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ cm} ; \{O \rightarrow C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30,675 \text{ 2} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Observe que la exactitud en la medición de los datos de partida, corresponde a poder medir hasta micrómetros (milésimas de milímetro). En los datos de coordenadas deformadas buscaremos cerrar los datos a esa misma exactitud.

Las coordenadas de los puntos vértice de interés en configuración final, se pueden obtener con los mismos componentes de vectores que van del origen a esos puntos, los que son la suma del vector que va del origen al punto vértice inicial, más el vector desplazamiento que corresponda. De acuerdo con esto se procede como sigue.

Para análisis asociado al eje X

$$\{O \rightarrow A'\} = \{O \rightarrow A\} + \{\mathbf{U}_{1o}^{(X)}\} \approx \begin{Bmatrix} 52,483 \text{ 7} \\ 0,000 \text{ 0} \\ 0,000 \text{ 0} \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} 0,000 \text{ 000} \\ 0,157 \text{ 451} \\ -0,104 \text{ 967} \end{Bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{Bmatrix} 52,483 \text{ 7} \\ 0,157 \text{ 5} \\ -0,105 \text{ 0} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Para análisis asociado al eje Y

$$\{O \rightarrow B'\} = \{O \rightarrow B\} + \{\mathbf{U}_{1o}^{(Y)}\} \approx \begin{Bmatrix} 0,000 \text{ 0} \\ 39,872 \text{ 4} \\ 0,000 \text{ 0} \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} 0,119 \text{ 617} \\ 0,000 \text{ 000} \\ -0,079 \text{ 745} \end{Bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{Bmatrix} 0,119 \text{ 6} \\ 39,872 \text{ 4} \\ -0,079 \text{ 7} \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Para análisis asociado al eje Z

$$\{O \rightarrow C'\} = \{O \rightarrow C\} + \{U_{10}^{(Z)}\} \approx \begin{Bmatrix} 0,000\ 0 \\ 0,000\ 0 \\ 30,675\ 2 \end{Bmatrix} \text{ cm} + \begin{Bmatrix} -0,061\ 350 \\ -0,061\ 350 \\ 0,153\ 376 \end{Bmatrix} \text{ cm} \approx \begin{Bmatrix} -0,061\ 4 \\ -0,061\ 4 \\ 30,828\ 6 \end{Bmatrix} \text{ cm}$$

Con estos vectores calculados que parten del origen del sistema de referencia, podemos mostrar las coordenadas de los puntos vértice de interés en la configuración final, ya que los componentes coinciden con las coordenadas del punto buscado en el espacio cartesiano.

$$\begin{aligned} A' & (52,483\ 7 \quad 0,157\ 5 \quad -0,105\ 0) \text{ cm} \\ B' & (0,119\ 6 \quad 39,872\ 4 \quad -0,079\ 7) \text{ cm} \\ C' & (-0,061\ 4 \quad -0,061\ 4 \quad 30,828\ 6) \text{ cm} \end{aligned}$$

En la figura 3.33 se muestran esquemáticamente las configuraciones de cuerpo que modelan el estado de deformación que se ha representado con el tensor, donde para fines didácticos los vectores desplazamiento se han exagerado cuarenta veces, para ver amplificadas las deformaciones calculadas en un análisis de primer octante.

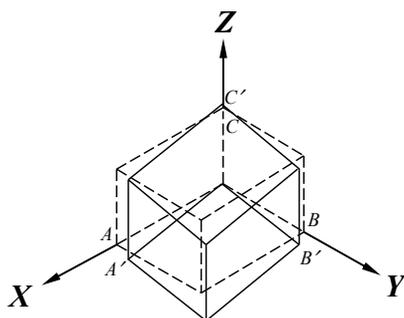


FIGURA 3.33. Configuraciones de cuerpo que modelan el estado de deformación del ejemplo 3.3

2. Calcularemos ahora lo que se nos solicita, con el propósito de obtener la deformación lineal unitaria y la distorsión, asociadas a la dirección del vector V .

El versor que tiene la misma dirección y sentido del vector V , se obtiene como sigue.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \frac{-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+4}} = -\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Calculamos ahora el vector deformación asociado a la dirección del versor obtenido.

$$\{\mathbf{D}^{(n)}\} = [\mathbf{E}_{ij}]\{\mathbf{n}\} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -2,333 \\ -3,333 \\ 5,333 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Ya estamos en la posibilidad de calcular la deformación lineal unitaria asociada a la dirección de análisis, por medio de la expresión (3-48).

$$\varepsilon = \{\mathbf{n}\}^T \{\mathbf{D}^{(n)}\} \approx \left\{ \begin{matrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -2,333 \\ -3,333 \\ 5,333 \end{matrix} \right\} \times 10^{-3} \approx 6,222 \times 10^{-3}$$

Finalmente, calculamos la distorsión con su doble signo utilizando la expresión (3-50).

$$g \approx \pm \sqrt{(-2,333)^2 + (-3,333)^2 + (5,333)^2 - (6,222)^2} \quad (\times 10^{-3}) \approx \pm 2,507 \times 10^{-3}$$

3. Se muestra el cálculo de lo mismo, pero ahora haciendo uso de la solución gráfica de Mohr.

Para poder entrar a la solución gráfica, se requiere partir de un tensor en su forma principal y ordenada. Lo primero que se debe hacer es obtener las deformaciones lineales unitarias principales.

Se calcula el primer invariante del tensor deformación:

$$I_1 = (0+0+5) \times 10^{-3} = 5 \times 10^{-3}$$

Se calcula el segundo invariante del tensor:

$$I_2 = \left\langle \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \times 10^{-3} \right\rangle = -17 \times 10^{-6}$$

Por último, se calcula también el tercer invariante:

$$I_3 = \det \mathbf{E}_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{vmatrix} \times 10^{-9} = -21 \times 10^{-9}$$

Se forma ahora la ecuación característica, en forma análoga a lo que se hizo en el tema Estado de esfuerzo, desarticulando momentáneamente, para este fin, la fracción de los invariantes.

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - 5\lambda^2 - 17\lambda + 21 = 0$$

Las raíces de este polinomio, incorporando ahora nuevamente a la fracción que corresponde (en notación científica) son:

$$\lambda_1 = 1 \times 10^{-3} \quad ; \quad \lambda_2 = -3 \times 10^{-3} \quad ; \quad \lambda_3 = 7 \times 10^{-3}$$

Ordenando estos valores de mayor a menor para identificar cada una de las deformaciones principales (lineales):

$$\varepsilon_1 = 7 \times 10^{-3} \quad ; \quad \varepsilon_2 = 1 \times 10^{-3} \quad ; \quad \varepsilon_3 = -3 \times 10^{-3}$$

Ahora se deben calcular las direcciones principales, pero para no ocupar mucho espacio, se presentan ya calculadas, con su signo único y habiendo obligado a que formen sistema derecho, como se aprendió a hacerlo en el tema de Estado de esfuerzo.

$$\mathbf{n}_I = -\frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{6}} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$$

La matriz de rotación que permite rotar tanto al versor como al tensor, de modo que este último se obtenga en su forma principal y ordenada es, en este caso:

$$\{A_{ij}\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

El tensor deformación rotado a su forma principal y ordenada (asterisco) debe tener la forma:

$$[\mathbf{E}_{ij}^*] = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

El versor rotado (referido ahora al mismo sistema de referencia asterisco) debe ser:

$$\{n^*\} = \{A_{ij}\}^T \{n\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,9526 \\ -0,1925 \\ -0,2357 \end{pmatrix}$$

Para entrar a la solución gráfica, desde un tensor principal y ordenado, se calculan los ángulos directores en este caso asterisco α^* y γ^* , en el nuevo sistema de referencia, como se muestra:

$$\alpha^* = \cos^{-1} n_x^* \approx \cos^{-1} 0,9526 \approx 17,71^\circ$$

$$\gamma^* = \cos^{-1} n_z^* \approx \cos^{-1} -0,2357 \approx 103,63^\circ$$

La solución gráfica de Mohr que corresponde a la parte 3 de este problema, se muestra en la figura 3.34.

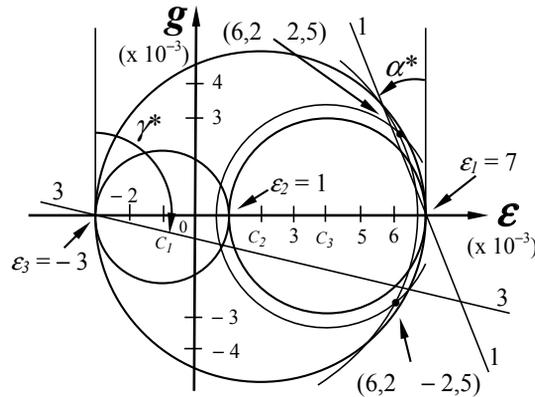


FIGURA 3.34. Solución gráfica de Mohr de la parte 3 del ejemplo 3.3

Con información de esta solución gráfica, la deformación lineal unitaria y la distorsión valen aproximadamente (en este caso con dos cifras significativas):

$$\varepsilon \approx 6,2 \times 10^{-3}$$

y

$$g \approx \pm 2,5 \times 10^{-3}$$

3.17. Rosetas

Existen instrumentos que permiten medir las deformaciones lineales (después las lineales unitarias) asociadas a cierta dirección (extensómetros mecánicos o electrónicos). Para analizar deformaciones lineales en una superficie (de una placa, por ejemplo), se puede hacer uso de una resistencia embebida en una cinta plástica, parecida a una “curita” (que se usa para curaciones superficiales de la piel), pero transparente, denominada en español como galga extensométrica (*strain gage*, en inglés). Las galgas extensométricas permiten deducir cambios de longitud a través de cambios de voltaje, detectados por un voltímetro integrado a un circuito eléctrico. Observe en la figura 3.35 una galga extensométrica individual.

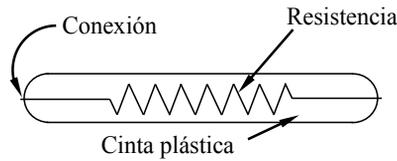


FIGURA 3.35. Esquema de una galga extensométrica

Cuando se colocan varias de estas galgas con cierto arreglo, orientadas en direcciones específicas, en ocasiones parecen flores, por lo que se les ha denominado como rosetas (palabra proveniente de “rosa”), aunque desde el punto de vista del autor se parecen más a las flores margaritas. En la figura 3.36 se muestra la representación de una placa metálica de poco espesor que se ha instrumentado con galgas extensométricas, formando una roseta de 45°, que está previsto pueda modelar un “Estado plano de deformación” en el entorno del punto P . Se denomina de 45° por tener, aparte de galgas en dirección de cada eje (X y Y), también una galga en dirección tal que guarda este ángulo con el sentido positivo de ambos ejes.

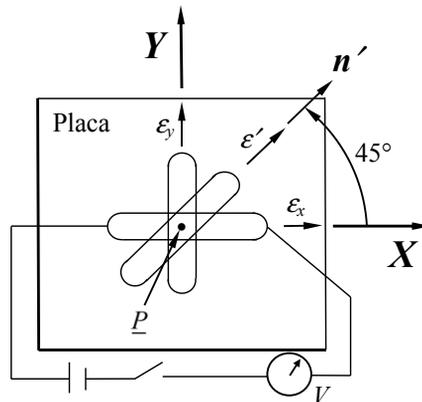


FIGURA 3.36. Placa instrumentada con roseta de 45°

Conviene recordar que en el denominado “Estado plano de deformación” no se exige cumplir con que dos deformaciones lineales unitarias principales deben ser iguales. Observe el sistema de referencia que se propone, dado que en este caso se hace la prueba en un plano horizontal (de la placa), se utiliza el sistema de referencia XY (También para no producir confusión con lo visto antes como “Análisis plano de deformación”). Vea en la misma figura la disposición de las galgas y cómo una de estas está conectada a un circuito eléctrico. En el circuito también se tienen una batería, un interruptor y un voltímetro.

Cuando se calibran las galgas a través de producir cambios de voltaje por variar la resistencia eléctrica, al cambiar la longitud de la galga en una dirección especificada, se puede deducir la deformación asociada al cambio de voltaje. Si se conocen la longitud inicial de la galga y la deformación deducida (a través del cambio de voltaje), se puede evaluar la deformación lineal unitaria que se produce en la dirección elegida para la galga, cuando se pasa de una configuración inicial, antes de aplicar ciertas fuerzas, a una configuración final o deformada (sosteniendo fijas las deformaciones). De aquí en adelante, con fines de simplificación, se asociará a la dirección de una galga la deformación lineal unitaria (ε) obtenida al deformar una placa.

En la figura 3.37 se muestra otra forma de arreglo para una roseta de 45° .

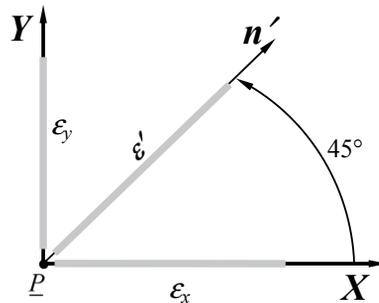


FIGURA 3.37. Otra forma de roseta de 45°

El tensor deformación general (simétrico) en el caso de Estado plano de deformación, independientemente del tipo de la roseta, pero para un plano horizontal, es de la forma:

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & g_{xy} \\ g_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

El versor que se va a usar en este caso particular de “Estado plano de deformaciones”, para hacer un contraste con lo que hemos denominado en este curso “Análisis plano de deformaciones” y dado que se muestra en el plano XY , debe ser:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} \quad ; \quad \{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} \quad (3-52)$$

Una roseta formada por galgas extensométricas que únicamente permiten medir deformaciones lineales, nos ayuda a deducir, con herramientas operacionales vistas en este texto, el valor de la distorsión en el tensor y la deformación lineal unitaria en dirección del eje Y , en el caso de una roseta de 60° , como se verá en un ejemplo más adelante. En la figura 3.38 se muestra una roseta radial de 60° .

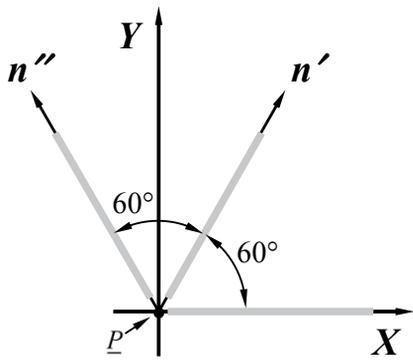


FIGURA 3.38. Roseta radial de 60°

En la figura 3.39 se muestra una roseta de 60° en Delta que se opera en la misma forma de una roseta de 60° radial.

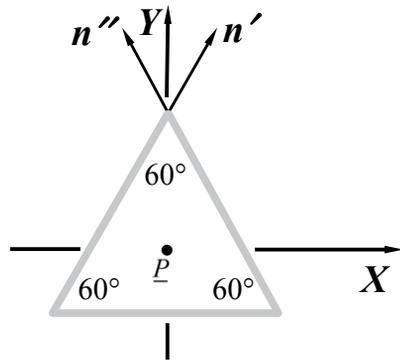


FIGURA 3.39. Roseta Delta de 60°

1

2

3

4

5

6

7

EJEMPLO 3.4

Con base en la roseta radial de 45° de la figura 3.40 y a partir de los datos de deformaciones lineales unitarias allí mostrados, obtenga la forma numérica del tensor que modela el estado de deformación sufrido por la placa, cuando se consideran los datos reportados por las galgas extensométricas.

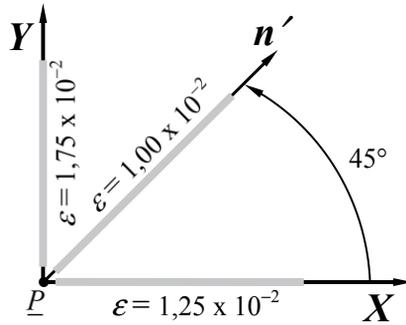


FIGURA 3.40. Roseta radial de 45° del ejemplo 3.4 con datos medidos en prueba de laboratorio

A partir de los datos que se aportan de la roseta, podemos formar provisionalmente un tensor de deformación, en parte numérico y en parte algebraico, para poder deducir posteriormente la distorsión, que en este caso es una incógnita, aprovechando que el tensor de deformación debe ser simétrico ($g_{xy} = g_{yx}$).

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 1,25 & g_{xy} \\ g_{xy} & 1,75 \end{bmatrix} \times 10^{-2} = \begin{bmatrix} 125 & g_{xy} \\ g_{xy} & 175 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

El versor que está a 45° de los sentidos positivos de los ejes del sistema de referencia **XY** (en el primer cuadrante) debe tener como componentes, tanto en notación de Gibbs como en notación matricial:

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \quad ; \quad \{\mathbf{n}'\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

Ahora vamos a operar rumbo a calcular matricialmente la deformación lineal unitaria (de la que conocemos su valor como dato de medido), en dirección del versor \mathbf{n}' . Primeramente, obtendremos en forma numérico-algebraica el vector de deformación asociado a la dirección del versor \mathbf{n}' , con solo componentes enteros en el tensor (para facilitar los cálculos).

$$\{D^{(n')}\} = [E_{ij}]\{n'\} \approx \begin{bmatrix} 125 & g_{xy} \\ g_{xy} & 175 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{125}{\sqrt{2}} + \frac{g_{xy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{g_{xy}}{\sqrt{2}} + \frac{175}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

Al operar para obtener la deformación lineal unitaria, vamos a introducir el valor medido por la galga extensométrica que se encuentra en la dirección del versor n' .

$$\varepsilon' = 100 \times 10^{-4} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{125}{\sqrt{2}} + \frac{g_{xy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{g_{xy}}{\sqrt{2}} + \frac{175}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \times 10^{-4} = \left(\frac{125}{2} + \frac{g_{xy}}{2} + \frac{g_{xy}}{2} + \frac{175}{2} \right) \times 10^{-4}$$

Se recomienda que para despejar la incógnita, en este caso g_{xy} , de momento no se tome en cuenta la potencia fraccionaria externa (para no provocar confusiones) y después se reconsidere en el momento de conformar el tensor definitivo.

$$100 = \left(\frac{300}{2} + \frac{2g_{xy}}{2} \right)$$

$$200 - 300 = 2g_{xy}$$

$$g_{xy} = \frac{-100}{2} = -50 \quad (\times 10^{-4})$$

Finalmente concluimos que el tensor numérico, considerando varias presentaciones correctas, se puede expresar de las siguientes formas.

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 125 & -50 \\ -50 & 175 \end{bmatrix} \times 10^{-4} = \begin{bmatrix} 12,5 & -5 \\ -5 & 17,5 \end{bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{bmatrix} 1,25 & -0,5 \\ -0,5 & 1,75 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

EJEMPLO 3.5

Con base en la roseta de 60° en *delta* de la figura 3.41, y a partir de los datos de deformaciones lineales unitarias allí mostrados, obtenga la forma numérica del tensor que modela el estado de deformación aplicado a la placa, cuando se consideran los datos de deformación estabilizados y reportados en la dirección de las galgas extensométricas mostradas.

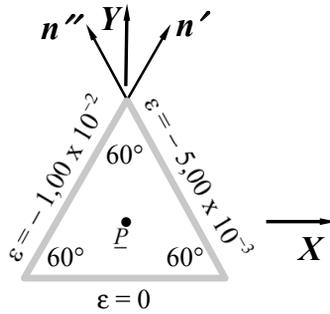


FIGURA 3.41. Roseta en delta de 60° del ejemplo 3.5 con datos medidos en prueba de laboratorio

En este caso se debe conformar un tensor provisional numérico-algebraico, basado en los datos de la roseta, donde g_{xy} y ϵ_y se tienen como incógnitas.

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & g_{xy} \\ g_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Se eligió la fracción de las milésimas para buscar un tensor final que esté formado con números enteros en todas sus componentes, ya que en los datos de roseta se tiene información en dos órdenes de magnitud diferentes.

En este caso se presentan galgas en dirección de dos versores (prima y biprima) que, con acuerdo a su orientación, para cualquiera de los casos vistos de roseta de 60° son:

$$\mathbf{n}' = \cos 60^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \mathbf{j} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} \quad ; \quad \{\mathbf{n}'\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

y

$$\mathbf{n}'' = \cos 120^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \mathbf{j} = -\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} \quad ; \quad \{\mathbf{n}''\} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

Procederemos ahora en forma análoga a como lo hicimos con la roseta de 45°, pero ahora con la variante de que habremos de obtener dos ecuaciones (a) y (b) para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Vamos a comenzar con el análisis en dirección del versor \mathbf{n}' .

$$\{\mathbf{D}^{(n')}\} = [\mathbf{E}_{ij}]\{\mathbf{n}'\} \approx \begin{bmatrix} 0 & g_{xy} \\ g_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{2} \\ \frac{g_{xy}}{2} + \frac{\varepsilon_y\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon' = -10 \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 + \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{2} \\ \frac{g_{xy}}{2} + \frac{\varepsilon_y\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \times 10^{-3} = \left(0 + \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{4} + \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} \right) \times 10^{-3}$$

Ignorando de momento la potencia fraccionaria, podemos escribir que:

$$-10 = \left(\frac{2g_{xy}\sqrt{3}}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} \right)$$

Finalmente, se puede presentar la primera ecuación (a) que toma la forma:

$$2g_{xy}\sqrt{3} + 3\varepsilon_y = -40 \quad (\text{a})$$

Procederemos ahora en forma análoga, con el fin de obtener la segunda ecuación requerida (b), para poder completar numéricamente el tensor deformación. Ahora procedemos a realizar el análisis en dirección del versor \mathbf{n}'' .

$$\{\mathbf{D}^{(n'')}\} = [\mathbf{E}_{ij}]\{\mathbf{n}''\} \approx \begin{bmatrix} 0 & g_{xy} \\ g_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{g_{xy}}{2} + \frac{\varepsilon_y\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon'' = -5 \times 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 + \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{g_{xy}}{2} + \frac{\varepsilon_y\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \times 10^{-3} = \left(0 - \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{4} - \frac{g_{xy}\sqrt{3}}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} \right) \times 10^{-3}$$

Ignorando de momento la fracción, podemos escribir que:

$$-5 = \left(-\frac{2g_{xy}\sqrt{3}}{4} + \frac{3\varepsilon_y}{4} \right)$$

Se puede ahora definir que la segunda ecuación (b), toma la forma:

$$-2g_{xy}\sqrt{3} + 3\varepsilon_y = -20 \quad (\text{b})$$

Se procede ahora a formar el sistema de dos ecuaciones para despejar las incógnitas.

$$\begin{array}{r} 2g_{xy}\sqrt{3} + 3\varepsilon_y = -40 \quad (\text{a}) \\ -2g_{xy}\sqrt{3} + 3\varepsilon_y = -20 \quad (\text{b}) \\ \hline 0 + 6\varepsilon_y = -60 \end{array} \Rightarrow \varepsilon_y = -10 \quad (\text{x } 10^{-3})$$

Este último dato lo vamos a sustituir en la ecuación (a) para despejar el valor de la distorsión.

$$2g_{xy}\sqrt{3} + 3(-10) = -40$$

Despejando la distorsión se obtiene:

$$g_{xy} = \frac{-10}{2\sqrt{3}} = -\frac{5}{\sqrt{3}} \approx -2,886 \, 8 \quad (\text{x } 10^{-3})$$

Finalmente, se introducen los valores numéricos obtenidos en la posición que antes era de la incógnita, para concluir que el tensor deformación numérico, en sus formas entera y decimal debe ser:

$$[\mathbf{E}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{\sqrt{3}} & -10 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \approx \begin{bmatrix} 0 & -2,886 \, 8 \\ -2,886 \, 8 & -10 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Una forma de verificar que el tensor deformación calculado es el correcto, consiste en proceder a operarlo con algún versor de los antes utilizados, en una dirección donde se conoce el valor de la deformación lineal unitaria como dato de partida, verificando que, con operaciones únicamente numéricas, se corrobora la igualdad o similitud (dependiendo de la exactitud de los datos) del valor calculado, como se muestra a continuación.

$$\{\mathbf{D}^{(n')}\} = [\mathbf{E}_{ij}]\{\mathbf{n}'\} \approx \begin{bmatrix} 0 & -2,886 \, 8 \\ -2,886 \, 8 & -10 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,866 \, 03 \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} -2,500 \, 1 \\ -10,104 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon' \approx \{0,5 \, 0,866 \, 03\} \begin{Bmatrix} -2,500 \, 1 \\ -10,104 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx -10,000 \, 4 \times 10^{-3} \approx -10 \times 10^{-3} = -1 \times 10^{-2}$$

El cálculo anterior verifica que el tensor deformación conformado es correcto.

4. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA

4.1. Introducción

Los principios que se presentan más adelante son leyes fundamentales que rigen el comportamiento mecánico de un material real, que se puede modelar como un medio continuo. Son principios que es importante que se tomen en cuenta en los materiales que utiliza el ingeniero civil, aunque en muchas aplicaciones es común que se ignoren. Estos principios en este tema se exponen en forma muy general y sintética para no complicar demasiado el texto con elementos que no se van a utilizar, dado que se trata de un texto básico, se ha decidido no incluir ejemplos.

4.2. Principios generales

Estos principios enuncian leyes de conservación de ciertas cantidades físicas que es deseable se consideren para un material cuando se analiza como un medio continuo.

1. Principio de conservación de la masa (implica la llamada ecuación de continuidad).
2. Principio de la conservación de la cantidad de movimiento (implica las ecuaciones de equilibrio y de cantidad de movimiento angular).
3. Principio de la conservación de la energía, asociado a la primera ley de la termodinámica (ecuación de la energía).
4. Principio de aumento de entropía, asociado a la segunda ley de la termodinámica (desigualdad de Clausius–Duhem).

En ocasiones, en el análisis de los fenómenos mecánicos reales, es frecuente no tomar en cuenta estos principios, ya que se considera que sus efectos son tan pequeños que se pueden despreciar. Al proceder de esta forma se obtienen ecuaciones más simples para poder modelar al fenómeno que se analiza. Cuando se plantea un modelo de comportamiento para un material, es común que ciertas cantidades físicas se muestren como integrales de superficie y otras como integrales de volumen. Lo anterior implica que se debe aplicar el teorema de Green en análisis planos y el teorema de Stokes para análisis espaciales.

4.3. Principio de conservación de la masa

Este principio establece que en el interior de un volumen de control geoméricamente definido, no hay creación ni destrucción de masa. Este principio es válido para evaluar a un cuerpo sólido, o para evaluar el movimiento de un fluido a través de una superficie de control.

Si la masa permanece constante en el volumen de control, su derivada material debe ser nula.

$$\text{Si } m = \int_V \rho \, dV \quad ; \quad \text{donde } \rho = f(x \, y \, z \, t)$$

donde

ρ , densidad del material

Entonces se tiene como implicación que:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(x \, y \, z \, t) \, dV = 0 \\ &= \int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

Si el medio se supone incompresible, entonces se acepta que:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4-2)$$

Lo que implica que:

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (4-3)$$

Bajo esta suposición se debe cumplir con la ecuación de continuidad, que se expresa como:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{ecuación de continuidad}) \quad (4-4)$$

Se ignoran en este caso las implicaciones relativistas de la masa, que están dadas por los postulados de Einstein:

- a) No se puede detectar el movimiento absoluto uniforme.
- b) La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente emisora.

Aquí se tiene que:

m_r , masa relativista

m_0 , masa en reposo

v , velocidad del cuerpo

c , velocidad de la luz ; donde: $c \approx 299\,792\,458$ m/s

$$m_r = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4-5)$$

4.4. Principio de la conservación de la cantidad de movimiento

Este principio se basa en la segunda ley de Newton y establece que la variación para cada unidad de tiempo de una parte arbitraria de un medio continuo (o de un sistema mecánico) es igual a la resultante de las fuerzas exteriores actuantes sobre esta parte o sistema considerado.

Este principio también implica a la tercera ley de Newton, en el equilibrio de la acción y la reacción, entendiendo que las fuerzas externas al sistema son equilibradas por fuerzas internas. Por este principio se implica el equilibrio de un tensor esfuerzo (que obliga a que cumpla con ser simétrico).

En este texto nos hemos concentrado exclusivamente al equilibrio estático, aunque se puede plantear un equilibrio dinámico, apoyado en este mismo principio.

4.5. Principio de conservación de la energía

Este principio establece que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma. Este principio es una consecuencia de la primera ley de la termodinámica.

Al enunciar el principio en esta forma, no se están considerando los efectos relativistas que rigen la transformación de masa en energía, según la relatividad de Einstein, donde:

E_0 , energía en reposo

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (4-6)$$

Si únicamente se consideran cantidades mecánicas en un medio continuo, la expresión que representa a este principio, se puede deducir directamente de las ecuaciones de movimiento. Se define que:

K , energía cinética

U , energía mecánica interna

W , cantidad de trabajo realizado por las fuerzas másicas y superficiales

Para el caso comentado, el principio quedaría como:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} \quad (4-7)$$

La “ d ” diferencial en este caso se usa para expresar que esta no es una ecuación diferencial exacta.

Si se consideran ambas energías, la mecánica y la no mecánica (calorífica), se llega a la expresión de este principio en su forma más general. Antes de mostrar la ecuación, se define adicionalmente que:

Q , cantidad de calor en el medio continuo

De modo que el principio de conservación de la energía, para un medio continuo termomecánico es:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (4-8)$$

4.6. Principio de aumento de entropía

Este principio completa la caracterización de un sistema termodinámico (para nosotros, de un medio continuo que cumpliera esta condición) y permite describir el estado del sistema. Esta descripción, en general, se especifica mediante varias cantidades termodinámicas y cinemáticas denominadas variables de estado.

Un proceso termodinámico se caracteriza por un cambio en sus variables de estado, consideradas con respecto al tiempo.

Existen relaciones funcionales (unas resultan ser función de otras) entre las variables de estado. Estas relaciones se expresan a través de las denominadas ecuaciones de estado.

El primer principio de la termodinámica postula la intercambiabilidad de las energías térmica y mecánica, poniendo de manifiesto la conversión de trabajo en energías cinética e interna durante un proceso termodinámico. Sin embargo, el primer principio no puede responder en qué medida un proceso es *reversible* o *irreversible*.

Todos los procesos reales son *irreversibles*, pero suponer a un proceso como *reversible*, puede constituir una suposición muy útil cuando en algún caso particular la energía disipada se pueda considerar despreciable. Todos los procesos irreversibles tienen en común que el sistema y su entorno se desplazan hacia un estado menos ordenado.

El Segundo Principio de la Termodinámica define la existencia de dos funciones de estado independientes: a) La temperatura absoluta T y b) La entropía S .

T es una cantidad siempre positiva que es solamente función de una temperatura absoluta y empírica denominada θ .

S es una propiedad extensiva, es decir, la entropía total del sistema es la suma de la entropía de sus partes. Es una medida del desorden del sistema.

Se define la variación de la entropía cuando un sistema pasa de un estado a otro como:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_{rev.}}{T} \quad (4-9)$$

donde:

$dQ_{rev.}$ es el calor que debe añadirse al sistema, siguiendo un proceso teóricamente reversible para llevarlo de un estado inicial a su estado final.

Al extraer calor del sistema " $dQ_{rev.}$ " se considera negativo y también lo es la variación de la entropía del mismo. Bajo este concepto se debe cumplir que:

- a) En un proceso "reversible" la variación de entropía del universo es nula.
- b) En un proceso "irreversible" la entropía del universo aumenta.
- c) En cualquier proceso la entropía del universo nunca disminuye.

5. ELASTICIDAD LINEAL

5.1. Introducción

En este tema se presentan los conceptos fundamentales de la elasticidad lineal con la que se modelan muchos fenómenos en la ingeniería civil. Se presenta cada uno de los parámetros de la elasticidad lineal y las suposiciones que la justifican. Se muestran ejemplos que buscan obtener los parámetros de esta teoría o que hacen uso de estos. Posteriormente se pasa a la elasticidad lineal generalizada que permite resolver problemas en el espacio (tercera dimensión). También se muestran ejemplos para este último caso.

5.2. Modelación elástica lineal

Desde hace mucho tiempo, el ser humano ha tratado de entender cómo se comportan los materiales que utiliza, con el fin de aprovecharlos de manera más eficiente para su beneficio. El primero en intentar la modelación de la madera como material, con el auxilio de conceptos físicos y matemáticos, fue Galileo Galilei (padre de la ciencia moderna y de la física, en particular). Galileo razonó con una concepción que podemos calificar de tempranamente moderna. Elaboró una metodología (que perfeccionada la conocemos ahora como método científico). Fue el primero en intentar predecir las deformaciones en el extremo libre de una viga de madera empotrada que se flexiona por efecto de variar cargas en ese extremo.

Una preocupación de los ingenieros modernos, similar a la experimentada por Galileo, consiste en poder construir modelos matemáticos (ecuaciones constitutivas) que permitan predecir el comportamiento de los materiales. Esta modelación implica que, si se pueden conocer algunos parámetros mecánicos particulares del material que van a alimentar a las ecuaciones constitutivas correspondientes, es posible predecir el comportamiento del material y definir su mejor dimensionamiento. Es de mucho interés para los ingenieros predecir las deformaciones si se conocen las fuerzas (o incrementos de fuerza) aplicadas, o poder deducir, como ejercicio inverso, las fuerzas que deben actuar para producir las deformaciones que se desean.

La teoría de elasticidad lineal es la más simple para explicar el comportamiento de los materiales. Se basa en la llamada ley de Hooke (científico contemporáneo de Newton) que postula para un resorte deformaciones proporcionales al aplicar cargas incrementales (dentro del tramo lineal de comportamiento). Considerar que las deformaciones son proporcionales a los incrementos de fuerza (o de esfuerzo), nos permite plantear ecuaciones constitutivas realmente sencillas. La linealidad del comportamiento a bajas deformaciones posibilita aplicar un principio que se conoce como principio de superposición de causas y efectos. Además de teoría de la elasticidad, existen otras teorías del comportamiento de materiales que se utilizan en la ingeniería civil, como son la teoría de la plasticidad y la teoría de la viscosidad lineal.

Modernamente se considera que, para cualquier teoría del comportamiento de los materiales, la modelación se puede hacer en forma general, a través de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (llamadas ecuaciones constitutivas). Las ecuaciones constitutivas se conforman en función de parámetros mecánicos, que es necesario conocer a través de pruebas experimentales, a las que se debe sujetar el material que se quiere modelar.

5.3. Parámetros de elasticidad lineal

5.3.1. Módulo de Young (o de elasticidad). (Parámetro de análisis uniaxial)

Desde los cursos de Física de educación media, el estudiante conoce la llamada ley de Hooke, explicada por medio de un resorte que es deformado en su tramo elástico (lineal). El comportamiento de un resorte (o de otro material en ese tramo lineal) se puede modelar como se muestra en la figura 5.1, suponiendo que el eje de análisis uniaxial fuera el eje Z y este estuviera en dirección vertical (de la gravedad).

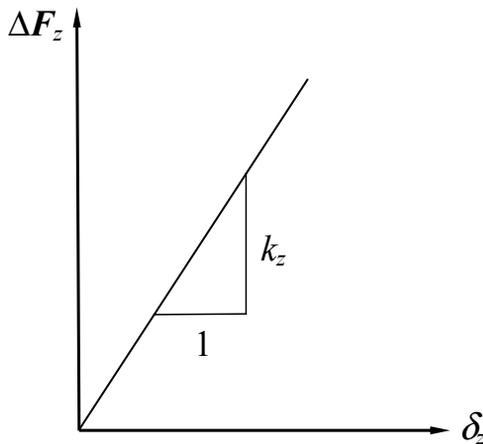


FIGURA 5.1. Comportamiento lineal de deformación contra incremento de carga

En esta figura se ve graficado el comportamiento de la deformación en función del incremento de fuerza. El parámetro k_z es la llamada constante del resorte, que se expresa en dimensiones ingenieriles de fuerza entre longitud. Las unidades de la constante del resorte en este texto, deben ser los kilonewtons en cada metro (kN/m) debido a se pretende utilizar el Sistema Internacional de Unidades en su primer supranivel, como el más adecuado para la ingeniería civil y las ciencias de la Tierra. La constante elástica se deduce como la pendiente de la relación planteada en la figura 1, la cual se muestra en la expresión (5-1).

$$k_z = \frac{\Delta F_z}{\delta_z} \quad (5-1)$$

De la relación anterior se pueden derivar dos expresiones. La primera permite ver a la constante del resorte en forma directa, como se observa en la ecuación (5-2).

$$\Delta F_z = k_z \delta_z \quad (5-2)$$

Esta expresión puede modelar, con fines de predicción, el incremento de fuerza requerido para producir una deformación que se quiere producir y que se puede medir, siempre y cuando se conozca el parámetro del material (la constante elástica). También se puede despejar la deformación, como segunda expresión, si se conoce el incremento de fuerza aplicado y el parámetro del resorte o material, que aparece finalmente en la forma de un coeficiente inverso multiplicativo. Vea la expresión final (5-3).

$$\delta_z = \frac{\Delta F_z}{k_z} = \frac{1}{k_z} \Delta F_z = k_z^{-1} \Delta F_z \quad (5-3)$$

En la expresión anterior se puede valorar la capacidad predictiva de una teoría de comportamiento. No se debe perder de vista que el análisis que estamos haciendo, implica una prueba al resorte en dirección de un solo eje (uniaxial). En este caso el subíndice “z” muestra la dirección de análisis en el experimento (dirección del eje **Z**).

Cabe comentar que la teoría de elasticidad lineal se puede aplicar a los materiales más rígidos que utiliza el ingeniero civil (acero, concreto y rocas). Se considera que las deformaciones son pequeñas, cuando a estos materiales se les aplican esfuerzos del orden de aquellos que transmiten las obras de ingeniería civil más comunes. Como se puede ver, esta condición es compatible con la teoría de las pequeñas deformaciones que se comentó en el tema Estado de deformación.

En la ingeniería civil es común probar materiales por medio de una prueba de tensión simple o una de compresión simple (sin confinamiento), aplicada a una probeta cilíndrica. El incremento de fuerza (ΔF_z) (de tensión o de compresión) supondremos, se aplica exactamente en la línea de su eje de rotación (normalmente el eje vertical **Z**).

Si se hace trabajar al material únicamente en su tramo lineal (elástico), graficando ahora deformación lineal unitaria contra incremento de esfuerzo, se puede graficar un comportamiento, como el que se muestra en la figura 5.2.

Vale la pena adelantar que todos los parámetros de la elasticidad lineal que se van a presentar y demostrar en estas notas deben tener valor positivo. En esta teoría del comportamiento se plantean los parámetros con esta característica. En el cálculo de los parámetros aparecen incrementos de esfuerzo (normal y cortante) y deformaciones lineales unitarias (o distorsiones adimensionales).

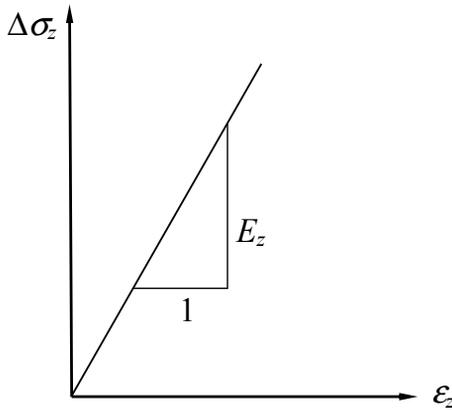


FIGURA 5.2. Comportamiento deformación unitaria contra incremento de esfuerzo

Normalmente, para calcular predicciones de los materiales más rígidos se hace uso de las dimensiones iniciales, que se pueden conocer con gran exactitud, midiendo la probeta antes de aplicar la variación de la fuerza que va a provocar las deformaciones. El área transversal inicial a la dirección donde se aplica el incremento de fuerza, se calcula en función del diámetro inicial cuando la probeta es cilíndrica.

Cuando la deformación se evalúa en la misma dirección de la aplicación del incremento de fuerza, se justifica que se trata de una prueba uniaxial. Al acero se le acostumbra aplicar pruebas de tensión simple; al concreto, pruebas de compresión simple. A estos materiales es costumbre no aplicarles corrección de área transversal al transcurrir la prueba (corrección que sí se hace a las probetas cilíndricas de suelos, por ser materiales altamente deformables). Dado que no se realiza corrección del área transversal, se hace uso del área transversal inicial, antes de aplicar el incremento de carga (o de fuerza). A la longitud inicial de la probeta cilíndrica es costumbre llamarla altura inicial (H_i). Con acuerdo a lo anterior es que se puede pasar de datos obtenidos en la prueba (deformación contra incremento de carga) a datos para ser graficados en el plano deformación lineal unitaria (ϵ_z) contra incremento de esfuerzo normal o axial ($\Delta\sigma_z$), como se muestra en las expresiones (5-4) y (5-5).

$$\epsilon_z = \frac{\delta_z}{L_i} = \frac{\delta_z}{z_i} = \frac{\delta_z}{H_i} \tag{5-4}$$

y

$$\Delta\sigma_z = \frac{\Delta F_z}{A_i} \tag{5-5}$$

La gráfica de la figura 5.2 es más potente que la gráfica de la figura 5.1, ya que expresa un comportamiento que no depende de las dimensiones de la probeta que permitió extraer la información y, consecuentemente, deducir los parámetros propios del material. Del

comportamiento mostrado en la figura 5.2, se puede deducir el módulo de elasticidad (o de Young) como pendiente, a través de la relación mostrada en la ecuación (5-6).

$$E_z = \frac{\Delta\sigma_z}{\varepsilon_z} \quad (5-6)$$

De esta relación se puede deducir la expresión directa que permite conocer el incremento de esfuerzo que se debe tener cuando se produce una cierta deformación lineal unitaria que se pudiera evaluar. El parámetro que permite formalizar esta relación es el módulo de Young. A esta expresión (5-7) se le acostumbra llamar ecuación constitutiva uniaxial de la elasticidad lineal (válida para pruebas únicamente uniaxiales).

$$\Delta\sigma_z = E_z \varepsilon_z \quad (5-7)$$

De la relación original (ecuación 5-6) también se puede deducir la expresión que predice la deformación unitaria, cuando se conoce el incremento de esfuerzo aplicado y el parámetro elástico, como se muestra en la ecuación (5-8). Observe que en esta ecuación aparece en su forma final el módulo de Young en forma inversa (como inverso multiplicativo).

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta\sigma_z}{E_z} = \frac{1}{E_z} \Delta\sigma_z = E_z^{-1} \Delta\sigma_z \quad (5-8)$$

Los materiales artificiales que produce el ser humano en la superficie de nuestro planeta no se pueden considerar estrictamente ni homogéneos ni isótropos respecto del parámetro elástico lineal (en un análisis que habría que realizar con pruebas uniaxiales independientes, en tres direcciones ortogonales), en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería civil se puede aceptar (para no generar expresiones absurdamente complicadas) que los parámetros de elasticidad lineal se supongan isótropos (o isotrópicos), lo que implica que se considera el mismo valor en tres direcciones ortogonales, como se observa planteado en la ecuación (5-9).

$$E = E_x = E_y = E_z \quad (5-9)$$

Más adelante se escribirán las expresiones sin subíndice, aceptando la suposición de isotropía, en los parámetros elásticos de los materiales usados en diversas áreas de la ingeniería.

5.3.2. Relación de Poisson (Parámetro de Análisis plano)

La relación de Poisson, que es una relación entre dos deformaciones lineales unitarias, es un parámetro que requiere datos obtenidos en dos direcciones ortogonales, a diferencia del módulo de Young que es un parámetro de análisis uniaxial (en un solo eje o dirección). Para mostrar este parámetro, partiremos de la misma prueba de tensión simple que se había planteado y que ahora se puede interpretar con más claridad al observar la figura 5.3, donde se muestra una probeta cilíndrica de cierto material (acero, por ejemplo).

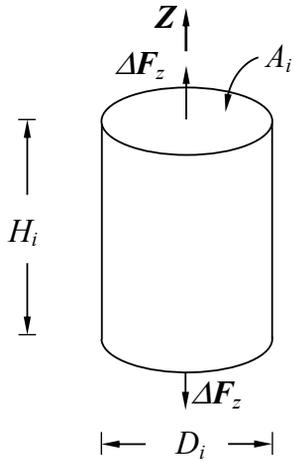


FIGURA 5.3. Probeta cilíndrica en prueba de tensión simple (inconfínada) y sus dimensiones iniciales

Al no haber incrementos de esfuerzo laterales en la probeta (en direcciones ortogonales al eje Z), considerando que actúa una presión manométrica y aceptando que la presión atmosférica (p_a) bajo este concepto tiene un valor nulo, se admite lo planteado en la ecuación (5-10).

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = p_a = 0 \tag{5-10}$$

De acuerdo a lo anterior, se puede plantear un Análisis en el plano XZ , reduciendo el cilindro a rectángulos para conformar la configuración inicial y la configuración final, como se muestra en la figura 5.4.

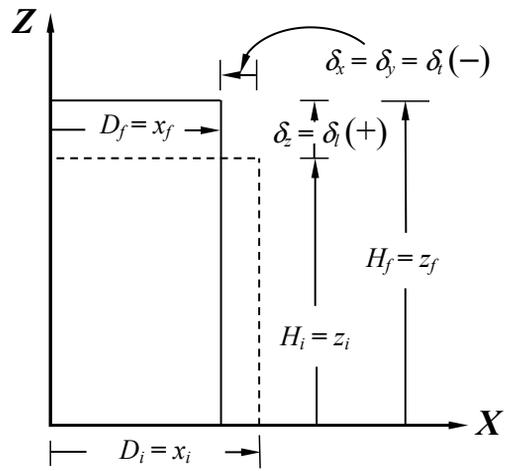


FIGURA 5.4. Configuraciones de cuerpo en Análisis plano de la probeta referida

Con la convención de signos de este texto y para la prueba que se analiza, el incremento de fuerza, el incremento de esfuerzo, la deformación y la deformación lineal unitaria asociados a la dirección del eje Z deben ser positivos, como se puede deducir al observar el cilindro de la figura 5.3. Por razón de un fenómeno denominado efecto Poisson, las deformaciones ortogonales al eje Z deben ser negativas, ya que se disminuye la dimensión de la probeta en esas direcciones, cuando aumenta en dirección del eje Z . Vea de nuevo la figura 5.4.

Haciendo uso del análisis de deformaciones con base en configuraciones, ahora mostraremos las llamadas configuraciones de partícula, al hacer unitaria por separado para cada eje (diferente escala para cada eje) la dimensión inicial en cada dirección, vaciando esta información con datos que no corresponden a la misma escala en las dos direcciones ortogonales (ejes X y Z). Destaca en esta representación la deformación unitaria en cada dirección y el signo, respetando la convención de signos antes acordada. Vea la figura 5.5.

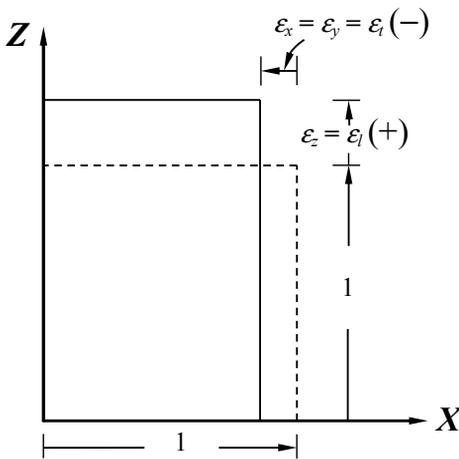


FIGURA 5.5. Configuraciones de partícula con dimensión inicial unitaria en cada eje

Observe que las deformaciones mostradas en la figura 5.4, son consistentes en cuanto a signo con las mostradas en la figura 5.5. Finalmente, la relación de Poisson se define como la relación entre la deformación lineal unitaria transversal y la deformación unitaria longitudinal con el signo cambiado, escribiéndose como se muestra en la ecuación (5-11).

$$\nu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon_l} \tag{5-11}$$

El signo negativo que precede a la relación de deformaciones lineales unitarias, tiene la finalidad de conseguir que este parámetro de elasticidad lineal sea siempre positivo, independientemente de la convención de signos que se elija (la convención de ingeniería geotécnica es contraria a la de ingeniería estructural y mecánica del medio continuo).

Para fines del cilindro en prueba de tensión simple que se analiza con rectángulos en el primer cuadrante del plano como se vio, se cumple que su relación de Poisson es:

$$\nu_{xz} = -\frac{\varepsilon_x(-)}{\varepsilon_z(+)} \quad \text{donde en este caso:} \quad \varepsilon_t = \varepsilon_z \quad \text{y} \quad \varepsilon_t = \varepsilon_x = \varepsilon_y$$

Dado que este es un parámetro de Análisis plano, cabe la duda si tendría el mismo valor para el material analizado en los dos planos ortogonales al propuesto. Al igual que con el módulo de Young, comentamos que todavía no estamos en capacidad de generar materiales que sean estrictamente homogéneos e isotropos, por lo que al igual que en el caso anterior supondremos para los materiales reales también esa isotropía, ahora para el parámetro que se analiza, con acuerdo a la ecuación (5-12) y para los tres planos ortogonales.

$$\nu = \nu_{xz} = \nu_{xy} = \nu_{yz} \quad (5-12)$$

Con todo rigor estos dos parámetros (E y ν) son los únicos de la elasticidad lineal, sin embargo, se han propuesto otros dos que están en función de los dos primeros.

5.3.3. Módulo de compresibilidad volumétrica (Módulo de análisis espacial)

Recordemos que bajo la suposición de deformaciones muy pequeñas se aceptó, de acuerdo con Cauchy, calcular la deformación volumétrica aproximada como:

$$\varepsilon_v \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (5-13)$$

Es común en mecánica del medio continuo, bajo la suposición comentada, sustituir el símbolo de aproximación “ \approx ” por el de igualdad “ $=$ ”. Por esta razón, para deformaciones muy pequeñas supondremos válido en este tema que:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (5-14)$$

En la demostración que se va a hacer de este módulo, se considera válido aplicar el principio de superposición de causas y efectos, apoyándonos en que se pueden sumar comportamientos lineales, aceptados desde el punto de vista de la elasticidad. Supondremos también, como lo hemos venido haciendo, isotropía elástica lineal para todos los parámetros.

Se propone, en primer lugar, aplicar a una configuración inicial de partícula con forma cúbica un incremento de esfuerzo de tensión en dirección del eje X . La partícula sufrirá un alargamiento en la dirección X , por efecto del incremento de esfuerzo en esa dirección, pero en las direcciones ortogonales Y y Z , por el efecto Poisson, resentirá una disminución de dimensiones. De acuerdo con la figura 5.6, se hará un análisis de lo que sucede por la aplicación de esta primera acción como un incremento de esfuerzo $\Delta\sigma_x$.

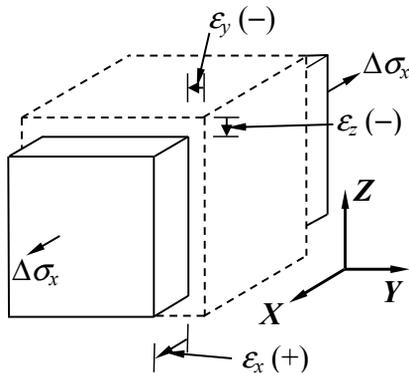


FIGURA 5.6. Deformaciones unitarias por efecto de incremento de esfuerzo en dirección X

Analizando la deformación en el eje X y de acuerdo con la expresión (5-8), se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta\sigma_x}{E}$$

Analizando en dirección del eje Y y de acuerdo con la expresión (5-11), se concluye que:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\Delta\sigma_x}{E}$$

Analizando en dirección del eje Z , con analogía al paso anterior, se llega a:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\Delta\sigma_x}{E}$$

En segundo lugar, se va a aplicar a la partícula cúbica de configuración inicial un incremento de esfuerzo de tensión ahora en dirección del eje Y , después de haber eliminado la acción anterior. La partícula sufrirá entonces un alargamiento en dirección del eje Y , pero en las direcciones ortogonales X y Z , por el efecto Poisson, sufrirá una disminución de sus dimensiones. De acuerdo con la figura 5.7 se hará un análisis del efecto que se tiene por la aplicación del incremento de esfuerzo $\Delta\sigma_y$, de modo que, por analogía, se tiene que:

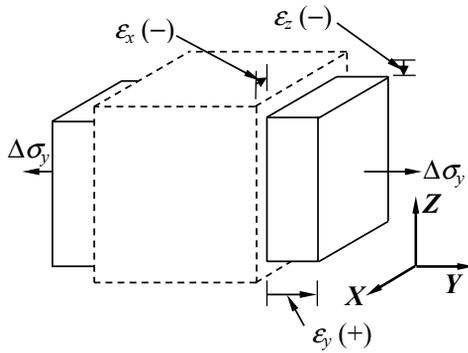


FIGURA 5.7. Deformaciones unitarias por efecto de incremento de esfuerzo en dirección **Y**

Análisis en el eje **Y**: $\epsilon_y = \frac{\Delta\sigma_y}{E}$

Análisis en el eje **X**: $\nu = -\frac{\epsilon_l}{\epsilon_t} = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} \Rightarrow \epsilon_x = -\nu \epsilon_y = -\nu \frac{\Delta\sigma_y}{E}$

Análisis en el eje **Z**: $\nu = -\frac{\epsilon_l}{\epsilon_t} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y} \Rightarrow \epsilon_z = -\nu \epsilon_y = -\nu \frac{\Delta\sigma_y}{E}$

En tercero y último lugar, se aplica a la partícula cúbica también, bajo la suposición de que se han eliminado las acciones anteriores, un incremento de esfuerzo de tensión en dirección del eje **Z**. La partícula sufrirá ahora un alargamiento en esta dirección **Z**, pero en las direcciones ortogonales **X** y **Y**, por el efecto Poisson, sufrirá una disminución de sus dimensiones. Con acuerdo a la figura 5.8 se hará un análisis del efecto por esta tercera acción, aplicando el incremento de esfuerzo $\Delta\sigma_z$, de modo que por analogía se tiene:

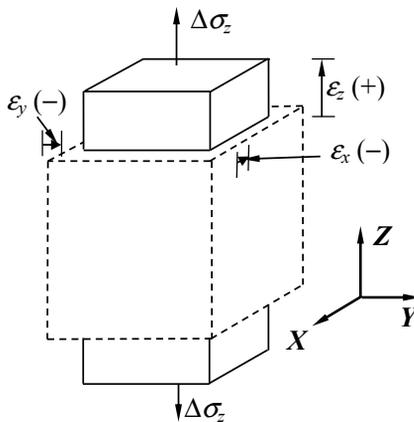


FIGURA 5.8. Deformaciones por efecto de incremento de esfuerzo en dirección **Z**

$$\text{Análisis en el eje Z: } \varepsilon_z = \frac{\Delta\sigma_z}{E}$$

$$\text{Análisis en el eje X: } \nu = -\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_l} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{\Delta\sigma_z}{E}$$

$$\text{Análisis en el eje Y: } \nu = -\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_l} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\nu \frac{\Delta\sigma_z}{E}$$

Habiendo hecho lo anterior, aplicando la acción en dirección de cada uno de los ejes por separado, ahora aplicaremos el principio de superposición, al agrupar las deformaciones en una sola dirección, por efecto de las tres acciones analizadas anteriormente y que supondremos ahora aplicadas en forma simultánea. Con esto estamos conformando un análisis que se puede definir como espacial o triaxial, de modo que, agrupando componentes de cada análisis para cada uno de los ejes, se llega a las expresiones (5-15), (5-16) y (5-17).

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_x - \nu(\Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z)] \quad (5-15)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_y - \nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_z)] \quad (5-16)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_z - \nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)] \quad (5-17)$$

Antes de continuar, plantearemos el concepto de incremento de esfuerzo octaédrico, con base en lo visto en el tema de Estado de esfuerzo, de modo que ahora:

$$\Delta\sigma_{\text{oct.}} = \frac{\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z}{3} = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (5-18)$$

El primer invariante planteado en la ecuación (5-18) se refiere ahora a un tensor incremento de esfuerzo. En muchas ocasiones, en mecánica del medio continuo, el incremento de esfuerzo octaédrico se toma como equivalente de un incremento de presión (o incremento de esfuerzo isotrópico), al suponer que:

$$\Delta p = \Delta\sigma_{\text{oct.}} \quad (5-19)$$

Por otro lado, regresando a la relación entre el primer invariante de un tensor incremental de esfuerzo y el esfuerzo octaédrico incremental, se puede decir que, de acuerdo con la ecuación (5-18):

$$3\Delta\sigma_{\text{oct.}} = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z = I_1 \quad (5-20)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5-15), (5-16) y (5-17) en la expresión (5-14) que se aceptó como suposición válida, se llega a que:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z - 2\nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z) \right] \quad (5-21)$$

Sustituyendo la suma de los esfuerzos normales incrementales por tres veces el esfuerzo octaédrico incremental, de acuerdo con la ecuación (5-20), se tiene:

$$\varepsilon_v = \frac{3\Delta\sigma_{\text{oct.}}}{E} (1 - 2\nu) \quad (5-22)$$

Si decidimos dejar en el numerador únicamente al incremento del esfuerzo octaédrico y pasar todo lo restante al denominador, llegamos a:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta\sigma_{\text{oct.}}}{\frac{E}{3(1-2\nu)}} \quad (5-23)$$

Es oportuno recordar que este módulo que se va a definir es un módulo de análisis espacial o triaxial. Finalmente, se define como módulo de compresibilidad volumétrica (que en inglés lleva el nombre de *bulk modulus*) a la relación de parámetros en el denominador y que se define con la letra K , de modo que:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5-24)$$

Observe que la deformación volumétrica unitaria se puede expresar en función del módulo de compresibilidad volumétrica como:

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta\sigma_{\text{oct.}}}{K} \approx \frac{\Delta p}{K} \quad (5-25)$$

También se puede demostrar, apoyándonos en la expresión (5-23) y desde el punto de vista de la teoría de elasticidad lineal, que para un valor específico de la relación de Poisson se revela una posibilidad teórica de incompresibilidad del material:

$$\text{si } \nu = 0,5 \Rightarrow \varepsilon_v = 0 \Rightarrow \text{material teóricamente incompresible}$$

En la naturaleza no se plantea ningún material que pudiera ser definido como incompresible (que al esforzarlo isotrópicamente no se deforme volumétricamente), por lo que desde el punto de vista de esta teoría y apoyados en resultados experimentales, ningún material real puede tener exactamente una relación de Poisson de 0,5.

5.3.4. Módulo de rigidez al cortante (Módulo plano deducido tridimensionalmente)

Para esta última demostración, original del autor de este texto, se propone el caso de distorsión en el plano **XZ** de un cuerpo espacial, por efecto exclusivo de incremento de esfuerzo cortante positivo en ese plano, como se muestra en la configuración de partícula de la figura 5.9.

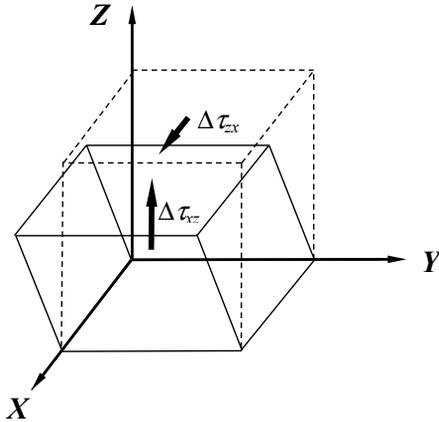


FIGURA 5.9. Esfuerzos cortantes incrementales en el plano **XZ**, en partícula espacial

El tensor esfuerzo incremental para el caso planteado, toma la forma:

$$[\Delta T_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta\tau_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta\tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta\tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta\tau & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

Como se puede ver en la parte final de la ecuación (5-26), se decidió eliminar los subíndices por tener el mismo valor, con base en la simetría del tensor que debe garantizar el equilibrio. Textos clásicos tampoco manejan los subíndices.

Para visualizar el estado de deformación asociado al estado de esfuerzo incremental antes visto, se plantean las configuraciones de partícula mostradas, habiendo eliminado la rotación y colocando para su análisis ambas configuraciones en el primer cuadrante del plano **XZ**, como se muestra en la figura 5.10.

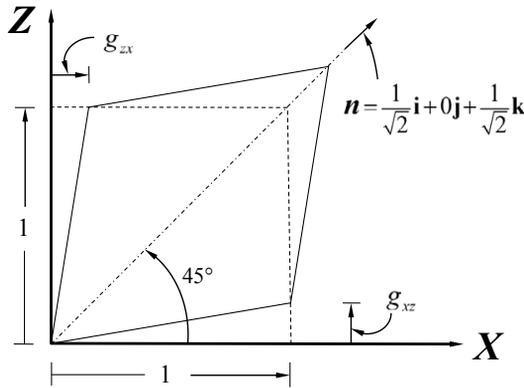


FIGURA 5.10. Configuraciones de partícula para cortante simple en primer cuadrante del plano XZ

La deformación planteada se muestra ahora en forma tensorial, eliminando también subíndices. Vea la simetría del tensor deformación (que garantiza el cumplimiento de las ecuaciones de compatibilidad) y en la doble acepción de la literal para la distorsión (g y γ).

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

Ahora se van a calcular los esfuerzos principales incrementales, a partir del tensor esfuerzo incremental planteado en la ecuación (5-26) y utilizando las herramientas antes vistas. Recordemos que la ecuación característica debe tener la forma que se muestra a continuación.

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 \quad (5-28)$$

Para este caso particular analizado, los invariantes son:

$$\begin{aligned} I_1 &= 0+0+0=0 \\ I_2 &= 0-\Delta\tau^2+0=-\Delta\tau^2 \\ I_3 &= \det|\Delta T_{ij}|=0 \end{aligned}$$

de modo que la ecuación característica en este caso debe tomar la forma siguiente:

$$\lambda^3 + 0\lambda^2 - \Delta\tau^2\lambda + 0 = \lambda^3 - \Delta\tau^2\lambda = 0$$

La primera raíz se obtiene muy fácilmente: $\lambda_1 = 0$. El polinomio entonces se reduce al caso cuadrático mostrado.

$$\lambda^2 - \Delta\tau^2 = 0$$

Se deducen ahora las raíces segunda y tercera con la ecuación cuadrática, obteniendo:

$$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\Delta\tau^2}$$

donde en forma individual tenemos:

$$\lambda_2 = \Delta\tau$$

$$\lambda_3 = -\Delta\tau$$

Ahora, se deben ordenar las raíces obtenidas de mayor a menor para identificar cada uno de los esfuerzos principales incrementales, concluyendo que:

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\tau \tag{5-29}$$

$$\Delta\sigma_2 = 0 \tag{5-30}$$

$$\Delta\sigma_3 = -\Delta\tau \tag{5-31}$$

La región que representa al estado de esfuerzo incremental, definido por las ecuaciones (5-29), (5-30) y (5-31), se muestra en el plano de Mohr, ahora de esfuerzos incrementales, como se puede ver en la figura 5.11.

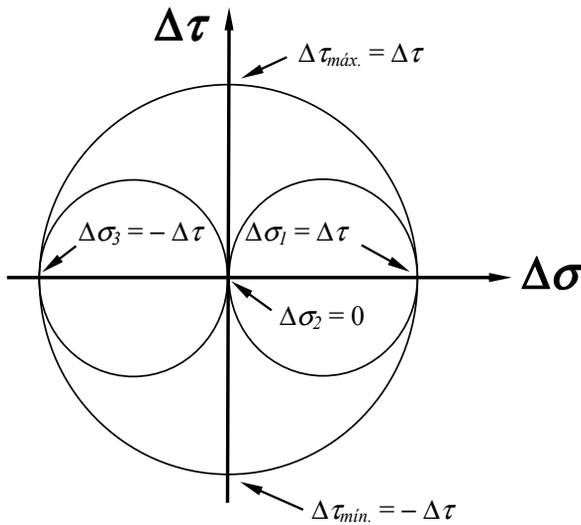


FIGURA 5.11. Región de Mohr del estado de esfuerzo incremental deducido

También con estos últimos datos obtenidos, se pueden calcular las direcciones donde actúan los esfuerzos principales incrementales. Bajo la suposición de isotropía elástica lineal, se puede demostrar que deben ser idénticas a las direcciones donde actúan las deformaciones principales (lineales unitarias). Para el caso planteado por el tensor incremento de esfuerzo, esas direcciones deben ser:

$$\mathbf{n}_I = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + 0\mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{II} = 0\mathbf{i} \pm \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_{III} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + 0\mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

Ahora, se deben calcular las deformaciones principales a partir del tensor deformación definido antes por la ecuación (5-27). Para el caso particular del tensor deformación, en función de la distorsión γ , se calculan los tres invariantes:

$$I_1 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$I_2 = 0 - \left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2 + 0 = -\frac{1}{4}\gamma^2$$

$$I_3 = \det|\mathbf{E}_{ij}| = 0$$

La ecuación característica para este caso toma la forma:

$$\lambda^3 + 0\lambda^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\lambda + 0 = 0$$

Se obtiene como primera raíz: $\lambda_1 = 0$. El polinomio reducido ahora toma la forma:

$$\lambda^2 - \frac{1}{4}\gamma^2 = 0$$

Haciendo uso de la ecuación cuadrática se obtienen las raíces segunda y tercera:

$$\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}\gamma^2}$$

donde en forma individual se define lo siguiente:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\gamma \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}\gamma$$

Al igual que en el caso de esfuerzos, se ordenan las raíces para identificar correctamente las deformaciones principales, de modo que:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \gamma \tag{5-32}$$

$$\varepsilon_2 = 0 \tag{5-33}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \gamma \tag{5-34}$$

La región de Mohr que representa ahora al estado de deformación planteado por las ecuaciones (5-32), (5-33) y (5-34), se muestra en el plano de Mohr de deformaciones en la figura 5.12, en función de la distorsión γ .

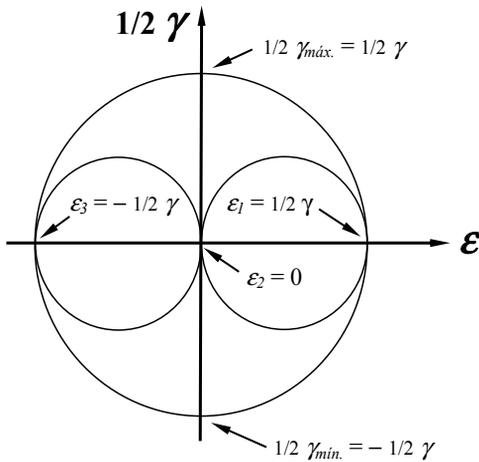


FIGURA 5.12. Estado de deformación deducido en el plano de Mohr y en función de γ

Recordemos ahora que del análisis tridimensional de la elasticidad lineal se había obtenido que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_x - \nu(\Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z)] \tag{5-15}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_y - \nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_z)] \tag{5-16}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_z - \nu(\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y)] \tag{5-17}$$

Las mismas expresiones anteriores, pero ahora escritas en función de esfuerzos incrementales principales y deformaciones lineales unitarias principales, toman la siguiente forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_1 - \nu(\Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3)] \quad (5-35)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_2 - \nu(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3)] \quad (5-36)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\Delta\sigma_3 - \nu(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2)] \quad (5-37)$$

Para llegar a la demostración prometida, haremos uso de la ecuación (5-35) donde vamos a sustituir (en dirección principal mayor) los datos obtenidos en las expresiones (5-32), (5-29), (5-30) y (5-31), obteniendo lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{E} [\Delta\tau - \nu(0 - \Delta\tau)] = \frac{1}{E} [\Delta\tau + \nu\Delta\tau] = \frac{1}{E} [\Delta\tau(1 + \nu)]$$

Si ahora se simplifica, al poner el incremento de esfuerzo cortante fuera del paréntesis cuadrado, se tiene:

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{\Delta\tau}{E}(1 + \nu) \quad (5-38)$$

Si se despeja finalmente a γ , pasando los parámetros elásticos al denominador y dejando únicamente al incremento de esfuerzo cortante en el numerador, se concluye que:

$$\gamma = \frac{\frac{\Delta\tau}{E}}{2(1 + \nu)} \quad (5-39)$$

Al denominador que ahora queda únicamente en función de los parámetros elásticos, se le llama módulo de rigidez al cortante y se abrevia con la letra mayúscula “ G ”. La forma en que aparece este parámetro en textos de elasticidad lineal es:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5-40)$$

Definido este parámetro, la ecuación (5-39) se puede escribir ahora la (5-41):

$$\gamma = \frac{\Delta\tau}{G} \quad (5-41)$$

En dirección del eje principal intermedio se plantearon incremento de esfuerzo y de deformación nulos. Se puede buscar el obtener el valor de la deformación principal ε_2 como incógnita, llegando a la conclusión de que sin duda esta vale cero (con acuerdo a las herramientas de análisis tensorial).

Para el análisis en la dirección principal menor, usando la ecuación (5-37) vamos a sustituir ahora los datos obtenidos en las expresiones (5-34), (5-29), (5-30) y (5-31), para llegar a lo siguiente:

$$-\frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{E}[-\Delta\tau - \nu(\Delta\tau + 0)] = \frac{1}{E}[-\Delta\tau(1 + \nu)]$$

que también se puede escribir:

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{\Delta\tau}{E}(1 + \nu)$$

Esta última expresión resulta ser idéntica a la ecuación (5-38) obtenida con anterioridad, de modo que se puede decir que en el análisis de estas dos direcciones principales (la mayor y la menor), se llega a la misma ecuación (5-39) al despejar la distorsión “ γ ”, logrando de nueva cuenta demostrar el valor del módulo de rigidez al cortante “ G ”.

Comentaremos ahora que, si en lugar de la distorsión γ hubiéramos usado la distorsión g , que vale la mitad de la primera, se hubiera tenido como expresión final:

$$g = \frac{\Delta\tau}{E}(1 + \nu) = \frac{\Delta\tau}{\frac{E}{1 + \nu}} = \frac{1 + \nu}{E}(\Delta\tau) \quad (5-42)$$

Se puede escribir, por último, en función de la distorsión “ g ” y del parámetro “ G ”, que:

$$g = \frac{\Delta\tau}{2G} \quad (5-43)$$

Bajo la suposición que hemos hecho de isotropía elástica lineal, se debe entender que estamos aceptando que este módulo tiene igual valor en tres planos ortogonales, por lo que:

$$G = G_{xz} = G_{xy} = G_{yz} \quad (5-44)$$

Para concluir, en esta demostración el módulo de rigidez al cortante solo se puede obtener bajo la suposición de que no se tienen, adicionalmente a la distorsión, deformaciones lineales unitarias en las direcciones X y Z .

5.4. Ejemplos de cálculo de parámetros elástico lineales

EJEMPLO 5.1

En el laboratorio de Mecánica de Rocas se realizó una prueba de compresión no confinada (unidimensional o simple), a una probeta cilíndrica de roca granítica con dimensiones iniciales de 19,721 8 cm en su diámetro y 28,437 6 cm en su altura. Dentro del tramo elástico lineal de este material y al estar aplicando un incremento de fuerza de 6,822 3 MN con dirección del eje de rotación del cilindro, se midieron como dimensiones finales (“deformadas”) 19,748 1 cm de diámetro y 28,287 6 cm de altura. Calcule para esta roca:

- Su módulo de Young (en MPa).
- Su relación de Poisson.

SOLUCIÓN

Como primer paso se va a calcular el incremento de esfuerzo axial, aplicado en el momento de medir las dimensiones deformadas. Se calcula entonces el área transversal inicial antes de aplicar el incremento de fuerza axial (sin corrección por el efecto Poisson):

$$A_i = \frac{\pi(D_i)^2}{4} = \frac{\pi(19,721\ 8 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{4} \approx 3,054\ 8 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

De modo que:

$$\Delta\sigma_z = \frac{\Delta F_z}{A_i} \approx \frac{-6,822\ 3 \text{ MN}}{3,054\ 8 \times 10^{-2} \text{ m}^2} \approx -223,33 \text{ MPa}$$

Calculemos ahora la deformación unitaria transversal y también la longitudinal:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{x_f}{x_i} - 1 = \frac{D_f}{D_i} - 1 = \frac{19,748\ 1 \text{ cm}}{19,721\ 8 \text{ cm}} - 1 \approx 1,333\ 5 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_z = \frac{z_f}{z_i} - 1 = \frac{H_f}{H_i} - 1 = \frac{28,287\ 6 \text{ cm}}{28,437\ 6 \text{ cm}} - 1 \approx -5,274\ 7 \times 10^{-3}$$

Con lo antes realizado, ya podemos calcular el módulo de Young y la relación de Poisson, como parámetros de elasticidad lineal de esta roca granítica y con cinco cifras significativas.

$$\text{a) } E = \frac{\Delta\sigma_z}{\varepsilon_z} \approx \frac{-223,33 \text{ MPa}}{-5,274\ 7 \times 10^{-3}} \approx 42\ 340 \text{ MPa} = 42,340 \text{ GPa}$$

$$\text{b) } \nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \approx -\frac{1,333\ 5 \times 10^{-3}}{-5,274\ 7 \times 10^{-3}} \approx 0,252\ 81$$

EJEMPLO 5.2

Aprovecharemos los datos del ejemplo anterior para hacer un ejercicio de predicción. Supongamos que ahora se propone realizar una prueba de compresión isotrópica (compresión con el mismo valor de incremento de esfuerzo de compresión en tres direcciones ortogonales) a la misma probeta de roca granítica cilíndrica antes descrita, que se puede lograr con un incremento de presión del tipo hidrostática (incremento negativo de esfuerzo isotrópico). El incremento de presión hidrostática (de compresión) se plantea que alcance un valor de 98,356 MPa, con criterio manométrico. Se pide calcular, como ejercicio de predicción, cuál debe ser el volumen (en m³) y las dimensiones finales de la probeta bajo esta presión (en cm), de acuerdo con la teoría de elasticidad lineal y suponiendo isotropía.

Calcularemos ahora el volumen inicial de la probeta con los datos de dimensiones iniciales del ejemplo anterior.

$$V_i = A_i H_i \approx 3,0548 \times 10^{-2} \text{ m}^2 (0,284376 \text{ m}) \approx 8,6871 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Se calcula ahora, con base en los parámetros elásticos, el módulo de compresibilidad volumétrica (*Bulk Modulus*) de esta roca granítica, usando los parámetros calculados en el ejemplo anterior.

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \approx \frac{42\,340 \text{ MPa}}{3[1-2(0,25281)]} \approx 28\,548 \text{ MPa}$$

Desde el punto de vista de presión manométrica, la presión inicial es igual a la atmosférica (nula) y la presión final es igual a la que se da como dato, pero considerando que debe tener signo negativo, ya que se trata de una compresión.

$$\Delta p = p_f - p_i = -98,356 \text{ MPa} - 0 \text{ MPa} = -98,356 \text{ MPa}$$

De acuerdo con lo comentado en el cuerpo teórico, tenemos la opción de calcular la deformación volumétrica unitaria por efecto del incremento de presión isotrópica.

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta \sigma_{\text{oct.}}}{K} \approx \frac{\Delta p}{K} \approx \frac{-98,356 \text{ MPa}}{28\,548 \text{ MPa}} \approx -3,4453 \times 10^{-3}$$

Podemos ahora conocer el volumen final de la probeta bajo esta presión, como un cálculo predictivo.

$$V_f = V_i (1 + \varepsilon_v) \approx 8,6871 \times 10^{-3} \text{ m}^3 (1 - 3,4453 \times 10^{-3}) \approx 8,6572 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Suponiendo a la roca homogénea e isotrópica y también suponiendo deformaciones pequeñas, podemos aceptar que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_x = 3\varepsilon_x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\varepsilon_v}{3}$$

De acuerdo con esto, podemos decir que:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{\varepsilon_v}{3} \approx \frac{-3,445\ 3 \times 10^{-3}}{3} \approx -1,148\ 4 \times 10^{-3}$$

Finalmente, de acuerdo con todo lo anteriormente supuesto, las dimensiones de la probeta bajo este incremento de presión deberían ser:

$$H_f = H_i(1 + \varepsilon_z) \approx 28,437\ 6\ \text{cm}(1 - 1,148\ 4 \times 10^{-3}) \approx 28,404\ 9\ \text{cm}$$

y

$$D_f = D_i(1 + \varepsilon_x) \approx 19,721\ 8\ \text{cm}(1 - 1,148\ 4 \times 10^{-3}) \approx 19,699\ 2\ \text{cm}$$

5.5. Elasticidad lineal espacial o tridimensional (triaxial)

En el caso donde se quiera hacer un manejo de la elasticidad lineal en un problema planteado en el espacio, se aprovecha la simetría de los tensores, tanto el de incremento de esfuerzo $[\Delta T_{ij}]$ (por equilibrio) como el de deformación $[E_{ij}]$ (por compatibilidad), ya que, de sus nueve componentes, solo se requiere conocer a seis para modelar espacialmente cada estado. Por lo anterior, se puede lograr cierta economía al escribir estos componentes haciendo uso de una notación compacta para fines de ingeniería. Se plantean entonces, por un lado, el llamado *vector de esfuerzo incremental* $\{\Delta T_{ij}\}$ y, por el otro, el llamado *vector de deformación* $\{E_{ij}\}$. Estos se construyen a partir de datos del tensor correspondiente, como matrices de 6×1 (\mathbb{R}^6), donde se ordenan sistemáticamente y en forma de columna los elementos de la diagonal principal y del triángulo superior de datos de cada tensor, como se muestra:

$$[\Delta T_{ij}] = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_x & \Delta\tau_{yx} & \Delta\tau_{zx} \\ \Delta\tau_{xy} & \Delta\sigma_y & \Delta\tau_{zy} \\ \Delta\tau_{xz} & \Delta\tau_{yz} & \Delta\sigma_z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{\Delta T_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{yx} \\ \Delta\tau_{zx} \\ \Delta\tau_{zy} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (5-45)$$

y

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & g_{yx} & g_{zx} \\ g_{xy} & \varepsilon_y & g_{zy} \\ g_{xz} & g_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \Rightarrow \{E_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ g_{yx} \\ g_{zx} \\ g_{zy} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (5-46)$$

Bajo la suposición de que el material es isótropo respecto de parámetros elástico lineales, se puede construir una matriz de constantes elásticas (que en realidad es un tensor por su condición de simetría y dimensionalidad), que permite pasar de los componentes de un vector de incremento de esfuerzo a los componentes de un vector de deformación y que se denominará: $[C^{-1}]$. Este tensor condensa la información de elasticidad lineal en el espacio, deducida de la información que se obtuvo al demostrar el valor del módulo de compresibilidad volumétrica y el módulo de rigidez al cortante, como se puede ver en el tensor mostrado:

$$[C^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \quad (5-47)$$

A la expresión anterior, se podría desear sustraerle, como factor común, el inverso multiplicativo del módulo de Young, pero no lo haremos.

La forma de la relación buscada, en notación condensada, se puede escribir como:

$$\{E_{ij}\} = [C^{-1}]\{\Delta T_{ij}\} \quad (5-48)$$

Esta expresión que representa las relaciones de elasticidad lineal tridimensional entre los incrementos de esfuerzo y las deformaciones adimensionales, tiene analogía y recuerda a la relación unidimensional que muestra la expresión (5-8) que ahora se reescribe en otra forma:

$$\varepsilon_z = (E_z^{-1})\Delta\sigma_z \quad (5-8)$$

Dado que en esta expresión el módulo de elasticidad (o de Young) aparece en una forma de coeficiente inverso, es la razón por la cual, en el caso espacial, el tensor se presenta con una notación de valor inverso.

Bajo la misma suposición antes comentada, es posible decir que se puede armar otro tensor de constantes elásticas (también necesariamente simétrico) que permite pasar ahora desde los componentes de un vector de deformación a los componentes de un vector de incremento de esfuerzo, que ahora se denominará: $[C]$. Este tensor utiliza un parámetro que se denomina constante de Lamé, el cual se define como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5-49)$$

También se hace uso, para fines de simplificación del módulo de rigidez al cortante, del cual recordamos que tiene la forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5-40)$$

Finalmente, este otro tensor de transformación que permite operar a la inversa del visto para el caso anterior, queda definido como:

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

En este caso, la relación entre los vectores de deformación y de incremento de esfuerzo se puede expresar en forma condensada como:

$$\{\Delta T_{ij}\} = [C]\{E_{ij}\} \quad (5-51)$$

Esta expresión recuerda, por ser análoga, a una expresión unidimensional de elasticidad lineal antes vista que es:

$$\Delta\sigma_z = E_z \varepsilon_z \quad (5-7)$$

Observe que en esta forma de la expresión (5-7) el módulo de elasticidad aparece como un coeficiente directo, por lo que se entiende ahora que el tensor en análisis tridimensional tiene una literal de coeficiente directo $[C]$. Con base en esto se puede afirmar, con la posibilidad de revisar los tensores (como matrices) de transformación $[C]$ y $[C^{-1}]$, que:

$$[\mathbf{C}] = f(E) \quad (5-52)$$

y

$$[\mathbf{C}^{-1}] = f\left(\frac{1}{E}\right) = f(E^{-1}) \quad (5-53)$$

Con la intención de operar en forma simplificada, bajo ciertas condiciones (como isotropía elástica lineal), se tiene como caso particular el poder partir de un tensor principal (no necesariamente ordenado), donde tanto los incrementos de esfuerzo cortante como las distorsiones valieran cero. Para estos casos particulares se puede partir de unos vectores de incremento de esfuerzo y de deformación adimensional que denominaremos reducidos (_{red.}), para operar con unos tensores (como matrices) también reducidos, aceptando que:

$$[\Delta \mathbf{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \Delta \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow \{\Delta \mathbf{T}_{ij}\}_{\text{red.}} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \in \mathbb{R}^3 \quad (5-54)$$

y

$$[\mathbf{E}_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \Rightarrow \{\mathbf{E}_{ij}\}_{\text{red.}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \in \mathbb{R}^3 \quad (5-55)$$

La expresión del tensor de parámetros elásticos reducido (_{red.}) se simplifica, para el caso de paso del vector de incremento de esfuerzo al vector de deformación (lineal unitaria).

$$[\mathbf{C}^{-1}]_{\text{red.}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix}_{\text{red.}} \quad (5-56)$$

Para el paso del vector de deformación al vector de incremento de esfuerzo, en el caso reducido, se tiene entonces:

$$[\mathbf{C}]_{\text{red.}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G \end{bmatrix}_{\text{red.}} \quad (5-57)$$

Finalmente, para lograr el paso de incrementos de esfuerzo a deformaciones, en el caso general espacial, se opera matricialmente, como se muestra para la forma general.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ g_{yx} \\ g_{zx} \\ g_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{yx} \\ \Delta\tau_{zx} \\ \Delta\tau_{zy} \end{Bmatrix} \quad (5-58)$$

Como operación inversa, para lograr el paso de deformaciones adimensionales a incrementos de esfuerzo, se opera como se muestra para la forma general:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{yx} \\ \Delta\tau_{zx} \\ \Delta\tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ g_{yx} \\ g_{zx} \\ g_{zy} \end{Bmatrix} \quad (5-59)$$

Para el caso reducido, que se corresponde con tensores principales y donde se plantea el paso de incrementos de esfuerzo a deformaciones adimensionales, tenemos:

$$\{E_{ij}\}_{red.} = [C^{-1}]_{red.} \{\Delta T_{ij}\}_{red.} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{red.} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix}_{red.} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \end{Bmatrix}_{red.} \quad (5-60)$$

Finalmente, en el caso reducido, para la operación inversa que permite el paso de deformaciones adimensionales a incrementos de esfuerzo, se dispone de:

$$\{\Delta T_{ij}\}_{red.} = [C]_{red.} \{E_{ij}\}_{red.} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \end{Bmatrix}_{red.} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G \end{bmatrix}_{red.} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{red.} \quad (5-61)$$

5.6 Ejemplos de elasticidad lineal tridimensional

EJEMPLO 5.3

Se desean predecir, haciendo uso de la teoría de elasticidad lineal en análisis tridimensional, las dimensiones finales de un tanque muy largo con forma tubular, que en su condición final va a contener un gas a presión. Se conocen las dimensiones iniciales del tanque y los parámetros elásticos del acero con que fue construido. La construcción del tanque se realizó en su tramo longitudinal con una placa doblada de acero que se cerró con soldadura de costilla y con dos tapas con forma de casquete esférico. En el análisis que se va a hacer, se supone una longitud del tanque muy larga, para alejarnos de las tapas con forma de casquete que impiden en los extremos la libre deformación del tanque. Por lo anterior, el cálculo vale estrictamente para la zona central del tanque que tiene una gran longitud. Los parámetros elásticos asignables a la placa de acero son:

$$E = 223,57 \text{ GPa} \quad \text{y} \quad \nu = 0,312 \text{ 47.}$$

Las dimensiones iniciales del tanque sin considerar la acción de la gravedad (con presión interna igual a la del aire atmosférico exterior) se plantean a continuación:

L_i , longitud inicial del tanque

$L_i =$ muy larga

D_{ii} , diámetro interior inicial

$D_{ii} = 2,346 \text{ 8 m}$

e_i , espesor inicial de la placa de acero

$e_i = 1\frac{1}{4}'' = 3,175 \text{ cm} = 3,175 \times 10^{-2} \text{ m}$

D_{ei} , diámetro exterior inicial

$D_{ei} = D_{ii} + 2e_i = 2,346 \text{ 8 m} + 2(0,031 \text{ 75 m}) = 2,410 \text{ 3 m}$

Las condiciones de presión se plantean a continuación:

p_i , presión inicial en el interior del tanque

$p_i =$ presión atmosférica (como el ingeniero usa presión manométrica: $p_a = 0 \text{ kPa}$)

p_f , presión final en el interior del tanque

$p_f = 8 \text{ 783,6 kPa}$ (de compresión)

Es el incremento de presión el responsable de producir las deformaciones, por lo que tendremos que:

$$\Delta p = p_f - p_i = -8 \text{ 783,6 kPa} - 0 \text{ kPa} = -8 \text{ 783,6 kPa}$$

Dado que el gas trabaja a compresión, se escribe con signo negativo para ser consistentes con la convención de signos de este curso. En la figura 5.13 se muestra la vista de un corte de

media caña, realizado verticalmente con el plano $A-A'$. Recordemos que en este texto la dirección vertical se reserva para el eje Z . Esta dirección vertical, hay que subrayar, coincide en la mayoría de los casos con la dirección de acción de la gravedad.

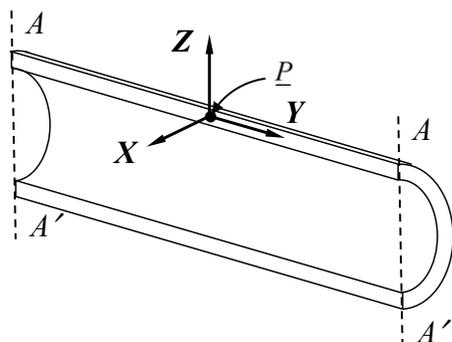


FIGURA 5.13. Corte vertical imaginario de media caña para el tanque del ejemplo 5.3

Se observa también el lugar que se ha elegido para colocar el punto P para fines del análisis. En el punto P se coloca el origen del sistema de referencia derecho que se ha decidido utilizar (se podría proponer otra posición para el punto P , por ejemplo, haciendo un corte horizontal).

En la figura 5.14 se muestra cómo se vería el corte imaginario vertical en el tanque desde el interior en el corte $A-A'$ y con una visual en la dirección del eje X .

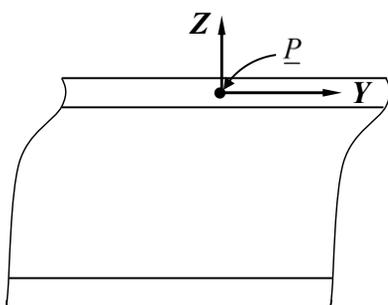


FIGURA 5.14. Imagen en una visual en dirección del eje X al corte realizado en el plano $A-A'$

Debido a que el tanque se ha definido como “muy largo”, se propone, para fines de cálculo de fuerzas y esfuerzos, limitar la longitud a un valor unitario (en este caso 1 m en dirección del eje Y). En la figura 5.15 se muestra la misma visión de la figura 5.14, pero limitada a una longitud unitaria.

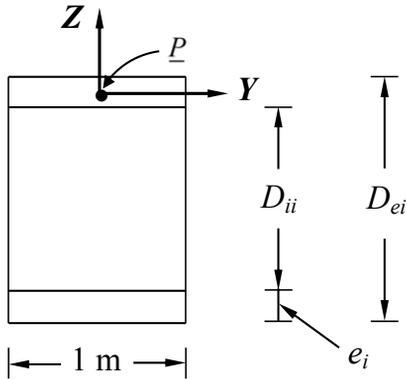


FIGURA 5.15. Misma visual de la figura 5.14, pero reducida a una longitud unitaria

En esta figura se separa la zona que recibe la presión del gas (interna) y la zona que representa al acero (que se ve como rectángulos pequeños en la figura 5.15). También en esta figura se muestran esquemáticamente las dimensiones iniciales de interés del tanque.

Se aprovecha, para fines de cálculo, el principio de la mecánica que tiene que ver con superficies curvadas (alabeadas) sujetas a la presión de un gas. Este principio establece que se puede calcular la fuerza en una dirección de análisis, por efecto de un gas que actúe sobre una superficie alabeada, si se multiplica el valor de la presión de ese gas por la superficie en que actúa, pero vista esta desde una visual en la dirección de análisis. En los cálculos que se muestran a continuación, se aprovecha que se tienen datos con cinco cifras significativas, para hacer el cierre de los cálculos también con cinco cifras significativas.

ANÁLISIS DE FUERZAS Y ESFUERZO EN DIRECCIÓN DEL EJE X (plano YZ).

Precisamente la figura 5.15 nos muestra lo que se vería en la visual del eje X, pero ahora considerando una longitud unitaria del tanque. Vamos a calcular la fuerza asociada al efecto de la presión del gas, multiplicando el incremento de presión por el área que se observa en contacto con éste, pero como se ve en la figura 5.15 (área interna). Calculamos y definimos primero esa área como:

$$A_{x \text{ int}} = A_x, \text{ área interior de vista normal al eje } X$$

$$A_{x \text{ int}} = A_x = D_{ii} (1 \text{ m}) = 2,346 \text{ 8 m}(1 \text{ m}) = 2,346 \text{ 8 m}^2$$

Calculamos ahora el incremento de fuerza por efecto del gas a presión:

$$\Delta F_x = \Delta p A_x = 8 \text{ 783,6 kPa} (2,346 \text{ 8 m}^2) \approx 20 \text{ 613 kN} = 20,613 \text{ MN}$$

Este incremento de fuerza lo dejamos positivo, porque aunque el gas que trabaja a compresión se considera negativo, el acero lo resiste a tensión, por lo que pensando en lo que le sucede al acero, donde se aloja el punto P , se mantiene el signo positivo.

En este análisis de longitud unitaria, el área de acero que resiste a tensión es dos veces el espesor multiplicado por la longitud unitaria (en metros).

A_{sx} , área de acero normal al eje X

$$A_{sx} = 2e_i(1 \text{ m}) = 2(3,175 \times 10^{-2} \text{ m})(1 \text{ m}) = 6,350 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

El incremento de esfuerzo normal promedio, tomado por el acero a tensión, debe ser:

$$\Delta\sigma_x = \frac{\Delta F_x}{A_{sx}} \approx \frac{20,613 \text{ MN}}{6,350 \times 10^{-2} \text{ m}^2} \approx 324,61 \text{ MPa}$$

ANÁLISIS DE FUERZAS Y ESFUERZO EN DIRECCIÓN DEL EJE Y (plano XZ).

Ahora vamos a calcular el área interior expuesta al gas a presión, para una visual en dirección del eje Y . Se propone hacer un corte al tanque, con un plano que llamaremos $B-B'$, que pasa por el punto P , como se plantea en la figura 5.16.

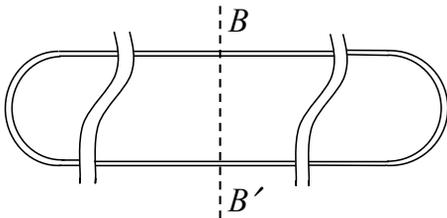


FIGURA 5.16. Corte imaginario $B - B'$ realizado al tanque, normal al eje Y

En la figura 5.17 se observa el corte visto como normal a la dirección del eje de rotación del tanque, que coincide en este caso con la visual en dirección del eje Y .

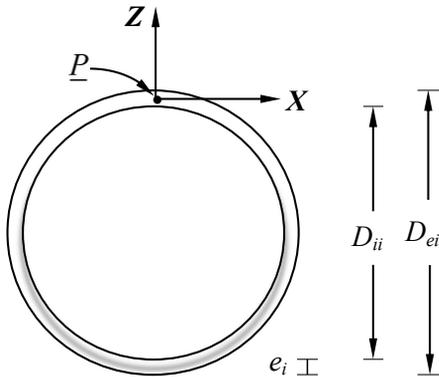


FIGURA 5.17. Vista imaginaria sobre la visual del eje Y y ubicación del punto P de análisis

En la misma figura 5.17 se puede ver que el área interior es función del diámetro interior inicial, de modo que:

$A_{y \text{ int}}$, área interior de vista normal al eje Y

$$A_{y \text{ int}} = A_y = \frac{\pi (D_{ii})^2}{4} = \frac{\pi (2,3468 \text{ m})^2}{4} \approx 4,3256 \text{ m}^2$$

Calculamos ahora el incremento de fuerza en dirección del eje Y por efecto del gas a presión.

$$\Delta F_y = \Delta p A_y \approx 8783,6 \text{ kPa} (4,3256 \text{ m}^2) \approx 37994 \text{ kN} = 37,994 \text{ MN}$$

A este incremento de fuerza le otorgamos el signo positivo, ya que también el acero lo resiste trabajando a tensión. El área de acero que resiste esta fuerza, lo podemos calcular a través de una resta de áreas, de modo que restaremos el área del círculo interior al área del círculo exterior de la figura 5.17, como se plantea a continuación:

$$A_{sy} = A_{y \text{ ext}} - A_{y \text{ int}}$$

$$A_{y \text{ ext}} = \frac{\pi (D_{ei})^2}{4} = \frac{\pi (2,4103 \text{ m})^2}{4} \approx 4,5628 \text{ m}^2$$

$$A_{sy} = A_{y \text{ ext}} - A_{y \text{ int}} \approx 4,5628 \text{ m}^2 - 4,3256 \text{ m}^2 \approx 0,2372 \text{ m}^2$$

En este caso, el incremento de esfuerzo normal de tensión promedio en el punto \underline{P} debe ser:

$$\Delta\sigma_y = \frac{\Delta F_y}{A_{sy}} \approx \frac{37,994 \text{ MN}}{0,2372 \text{ m}^2} \approx 160,18 \text{ MPa}$$

ANÁLISIS DE FUERZAS Y ESFUERZO EN DIRECCIÓN DEL EJE Z (plano XY).

En la figura 5.18 se muestra un corte imaginario normal al eje Z y que pasa por el punto \underline{P} , que denominaremos como $C - C'$.

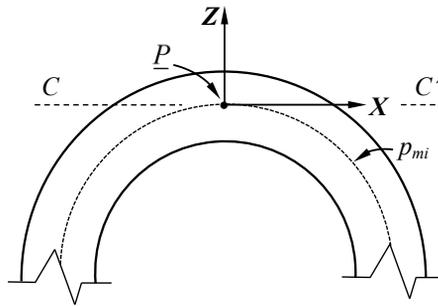


FIGURA 5.18. Corte imaginario $C - C'$ que pasa por el punto \underline{P} y es normal al eje Z

En esta figura se han exagerado las dimensiones del espesor del tanque con fines de claridad didáctica. Si el corte, en lugar de ser imaginario se hiciera físico, se encontraría que al generar el incremento de presión en el gas, este no puede llegar al corte, por lo que se puede concluir que a partir del punto \underline{P} y en dirección del eje Z no hay, en el análisis planteado, ni incremento de fuerza ni incremento de esfuerzo. Se acepta entonces que:

$$\Delta\sigma_z = 0$$

Observe también en la figura 5.18 una circunferencia (punteada en la figura incompleta), que pasa por el punto \underline{P} y que denominaremos (p_{mi}) perímetro medio inicial (que usaremos más adelante). Se establece entonces que se tiene incremento de esfuerzo en las direcciones X y Y . En la dirección del eje Z el incremento de esfuerzo es nulo (o con un valor manométrico igual a la presión atmosférica).

En la figura 5.19, se muestra un cubo diferencial de incrementos de esfuerzos que corresponde al análisis del punto P , asociado a la posición en que se ubicó y también al sistema de referencia que se propuso.

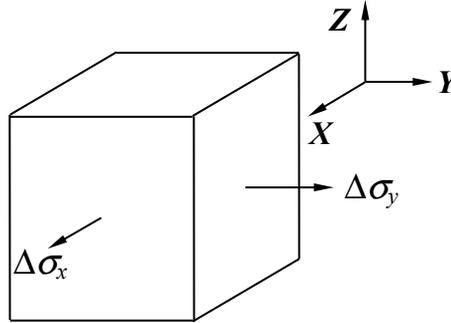


FIGURA 5.19. Cubo diferencial de incrementos de esfuerzos, deducido del ejemplo

A continuación, con base en lo obtenido y que se ha sintetizado en la figura 5.19, escribiremos el tensor incremento de esfuerzo y el vector de incremento de esfuerzo correspondientes:

$$[\Delta T_{ij}] \approx \begin{bmatrix} 324,61 & 0 & 0 \\ 0 & 160,18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa} \Rightarrow \{\Delta T_{ij}\}_{\text{red.}} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} 324,61 \\ 160,18 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

En este caso particular, coincidió que el tensor incremento de esfuerzo resultara ser del tipo principal y ordenado, lo que permitiría entrar a una solución gráfica, si se deseara, sin necesidad de realizar una rotación del tensor. Por otro lado, en la figura 5.20 se muestra el estado de incremento de esfuerzo en el plano de Mohr, que corresponde al cubo diferencial que se ha mostrado antes en la figura 5.19. Observe que este plano de Mohr es el plano incremental de esfuerzo, por lo que los ejes son $\Delta \sigma$ contra $\Delta \tau$.

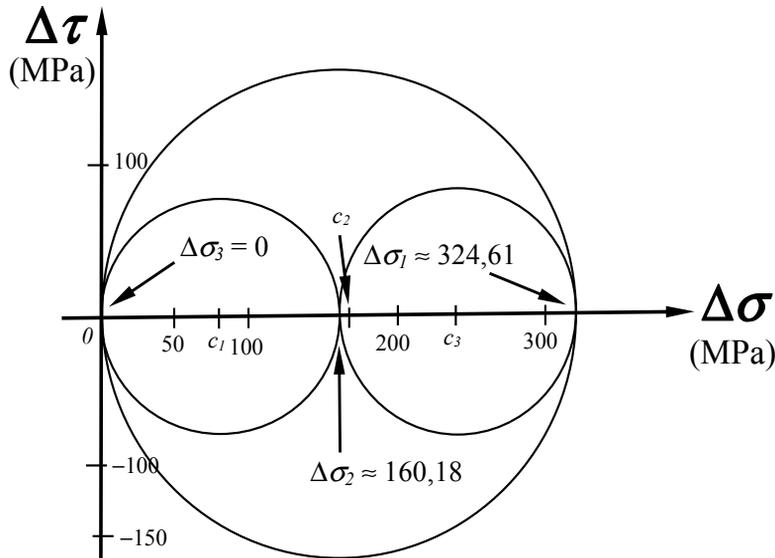


FIGURA 5.20. Región de Mohr del estado incremental de esfuerzo del ejemplo 5.3

Se deben operar el vector de incremento de esfuerzo con el tensor de parámetros elásticos reducidos, para este caso de tensor incremental de esfuerzo principal, que para las condiciones del ejemplo va a ser:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{\text{red.}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} \end{bmatrix}_{\text{red.}} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \quad (5-60)$$

Se debe tomar en cuenta que, tanto las unidades de los parámetros elásticos como las del vector de incremento de esfuerzo, deben ser las mismas para llegar a deformaciones unitarias (adimensionales). Recordemos que:

$$E = 223,57 \text{ GPa} = 223\,570 \text{ MPa}$$

y

$$\nu = 0,312\,47$$

Por lo que partiendo del vector de incremento de esfuerzo tenemos:

$$\{\Delta T_{ij}\}_{\text{red.}} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \approx \begin{Bmatrix} 324,61 \\ 160,18 \\ 0 \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \text{ MPa}$$

y haciendo uso de la relación:

$$\{\mathbf{E}_{ij}\}_{\text{red.}} = [\mathbf{C}^{-1}]_{\text{red.}} \{\Delta T_{ij}\}_{\text{red.}}$$

se llega a reconocer, después de operar matricialmente, el vector de deformación.

$$\{\mathbf{E}_{ij}\}_{\text{red.}} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \approx \begin{Bmatrix} 12,281 \\ 2,6278 \\ -6,7756 \end{Bmatrix}_{\text{red.}} \times 10^{-4}$$

El tensor deformación asociado a este estado de deformación, reconstituido a partir de los datos antes obtenidos, debe ser:

$$[\mathbf{E}_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 12,281 & 0 & 0 \\ 0 & 2,6278 & 0 \\ 0 & 0 & -6,7756 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

El estado de deformación representado por este tensor (también principal y ordenado) corresponde, en el plano de Mohr de deformaciones, a la región mostrada en la figura 5.21.

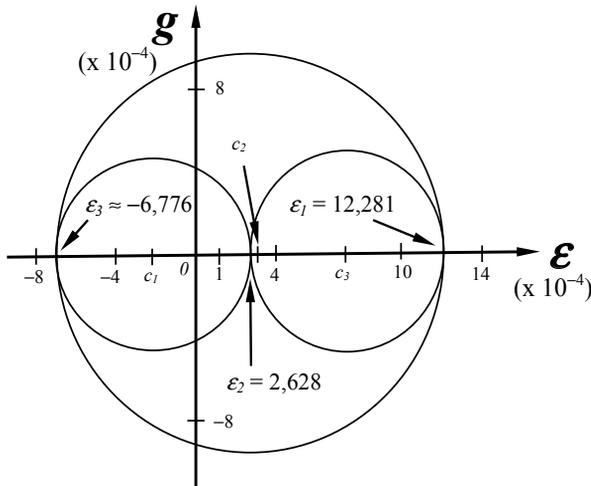


FIGURA 5.21. Región de Mohr del estado de deformación del ejemplo 5.3

Como conclusión, podemos decir que, en este ejemplo, el tensor de parámetros elástico lineales tiene la capacidad de trasladar la información de la región de Mohr de esfuerzo incremental (figura 5.20) a la región de Mohr de deformación (figura 5.21). Se ha buscado que esto quede claro, para este ejemplo que maneja información de un fenómeno tridimensional. El otro tensor de parámetros elásticos (el inverso al que se ha usado) permitiría proceder al revés, es decir, pasar información del estado de deformación mostrado en el plano de Mohr (figura 5.21) al estado de incremento de esfuerzo mostrado como región en el plano de Mohr, de la figura 5.20.

Finalmente, para concluir este ejemplo con la información obtenida de deformaciones, podemos decir que ya estamos en opción de calcular las dimensiones finales que se nos solicitaban en el enunciado del ejemplo.

- a) Cálculo de la longitud final que dejamos en forma implícita:

$$L_f = L_i(1 + \varepsilon_y) \approx L_i(1 + 2,6278 \times 10^{-4})$$

- b) Cálculo del alargamiento asociado a la dirección del eje X.

Expresiones previas para el cálculo del perímetro medio final en función del perímetro medio inicial:

$$p_{mi} = \pi D_{mi}$$

Cálculo del diámetro medio inicial:

$$D_{mi} = D_{ii} + 2\left(\frac{1}{2}e_i\right) \approx 2,3468 \text{ m} + 3,175 \times 10^{-2} \text{ m} \approx 2,37855 \text{ m}$$

Cálculo del perímetro medio inicial:

$$p_{mi} = \pi D_{mi} = \pi(2,37855 \text{ m}) \approx 7,4724 \text{ m}$$

Cálculo del perímetro medio final:

$$p_{mf} = p_{mi}(1 + \varepsilon_x) \approx 7,4724 \text{ m}(1 + 1,2281 \times 10^{-3}) \approx 7,4816 \text{ m}$$

- c) Finalmente calculamos el espesor final de la placa que conforma al tanque:

$$e_f = e_i(1 + \varepsilon_z) \approx 3,1750 \text{ cm}(1 - 6,7756 \times 10^{-4}) \approx 3,1728 \text{ cm}$$

Como lógicamente se esperaba, por efecto del incremento de presión del gas en el interior del tanque, ya que lo expande, el espesor de acero que lo constituye sufre una disminución en su espesor.

EJEMPLO 5.4

En un laboratorio de mecánica de rocas se realizaron varias pruebas mecánicas, haciendo uso de una muestra de roca sana. De varias pruebas de compresión simple, a probetas cilíndricas de la misma roca, se concluyó que los parámetros elásticos asignables (promedio) se deben tomar como:

$$E = 837,26 \text{ MPa} \text{ y } \nu = 0,247 \ 82$$

De la misma muestra se labró una probeta con forma de paralelepípedo rectangular, que tenía como dimensiones iniciales:

$$x_i = 49,768 \text{ cm} \quad ; \quad y_i = 48,534 \text{ cm} \quad ; \quad z_i = 53,287 \text{ cm}$$

Esta probeta se sometió a una prueba triaxial verdadera, donde se aplicaron incrementos de fuerza de compresión en las direcciones **X** y **Z**. La fuerza incremental se transmitió a la probeta a través de placas metálicas muy rígidas de un buen espesor, con el fin de uniformizar lo más posible el esfuerzo de contacto en las caras normales a los ejes esforzados. Al alcanzar cierto valor de incremento de fuerza en las direcciones comentadas y sosteniendo fijo el valor de las deformaciones (dentro del rango elástico), se midieron como dimensiones deformadas o finales los siguientes valores:

$$x_f = 49,597 \text{ cm} \quad ; \quad y_f = 48,695 \text{ cm} \quad ; \quad z_f = 52,935 \text{ cm}$$

Se pide deducir, cómo un cálculo de predicción a partir de los datos medidos, el valor que debe tener cada fuerza incremental de compresión, actuando en las direcciones antes comentadas, para producir las dimensiones deformadas que se midieron en la probeta bajo su acción sostenida.

Solución:

En primer lugar calcularemos la deformación unitaria en cada dirección, aprovechando que las dimensiones de la probeta se enunciaron en relación a cada dirección del sistema de referencia.

$$\varepsilon_x = \frac{x_f}{x_i} - 1 = \frac{49,597 \text{ cm}}{49,768 \text{ cm}} - 1 \approx -3,435 \ 9 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{y_f}{y_i} - 1 = \frac{48,695 \text{ cm}}{48,534 \text{ cm}} - 1 \approx 3,317 \ 3 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{z_f}{z_i} - 1 = \frac{52,935 \text{ cm}}{53,287 \text{ cm}} - 1 \approx -6,605 \ 7 \times 10^{-3}$$

Estos datos calculados modelan, como un gran promedio, las deformaciones en el entorno del punto centro de volumen de la probeta, por lo que podríamos decir que el tensor deformación reducido, bajo la acción que se analiza, debe ser:

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -3,4359 & 0 & 0 \\ 0 & 3,3173 & 0 \\ 0 & 0 & -6,6057 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Podemos ahora desarticular estos componentes del tensor y formalizar el vector equivalente reducido con los mismos datos.

$$\{E_{ij}\} \approx \begin{Bmatrix} -3,4359 \\ 3,3173 \\ -6,6057 \end{Bmatrix} \times 10^{-3}$$

Ahora podemos plantear la operación tensorial que, a través de la elasticidad lineal tridimensional, en su acepción reducida, permite pasar de deformaciones lineales unitarias a incrementos de esfuerzo normal.

Previamente calcularemos, con una exactitud de cinco cifras significativas, los componentes que alimentan el tensor elástico lineal que permite la transformación planteada.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \approx \frac{837,26 \text{ MPa}(0,24782)}{(1+0,24782)[1-2(0,24782)]} \approx 329,69 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx \frac{837,26 \text{ MPa}}{2(1+0,24782)} \approx 335,49 \text{ MPa}$$

Los componentes de la diagonal principal del tensor serán:

$$\lambda + 2G \approx 1000,67 \text{ MPa}$$

Formaremos matricialmente los componentes en el orden mostrado.

$$\{\Delta T_{ij}\}_{\text{red.}} = [C]_{\text{red.}} \{E_{ij}\}_{\text{red.}}$$

Lo anterior nos permite plantear, numéricamente y con una exactitud de cinco cifras significativas, la operación obligada:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \sigma_z \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1000,67 & 329,69 & 329,69 \\ 329,69 & 1000,67 & 329,69 \\ 329,69 & 329,69 & 1000,67 \end{bmatrix} \text{ MPa} \begin{Bmatrix} -3,4359 \\ 3,3173 \\ -6,6057 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \approx \begin{Bmatrix} -4,5224 \\ \approx 0 \\ -6,6492 \end{Bmatrix} \text{ MPa}$$

En la figura 5.22 se muestra el cubo diferencial de incremento de esfuerzo que modela lo que sucede en el punto centro de volumen del paralelepípedo esforzado, bajo las acciones calculadas.

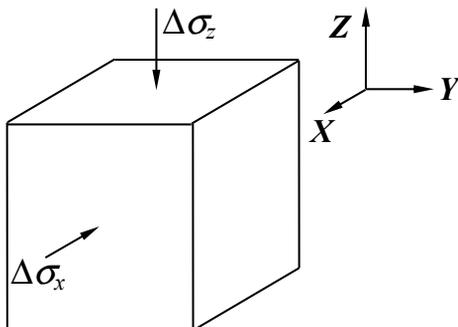


FIGURA 5.22. Cubo diferencial que muestra el estado de esfuerzo incremental del ejemplo 5.4

Calcularemos ahora el área normal a cada incremento de fuerza, a partir de las dimensiones iniciales de la probeta con forma de paralelepípedo rectangular.

$$A_{xi} = y_i \cdot z_i \approx 0,485 \text{ 34 m} (0,532 \text{ 87 m}) \approx 0,258 \text{ 62 m}^2$$

$$A_{zi} = x_i \cdot y_i \approx 0,497 \text{ 68 m} (0,485 \text{ 34 m}) \approx 0,241 \text{ 54 m}^2$$

No calcularemos el área transversal (ortogonal) a la dirección **Y**, porque desde el enunciado sabemos que no hay aplicación de un incremento de fuerza en esa dirección.

Vamos a multiplicar ahora el incremento de esfuerzo por el área normal inicial correspondiente a este, para deducir el incremento de fuerza aplicado en cada dirección, que han producido las deformaciones que se midieron y que fueron en este ejemplo datos de partida.

$$\Delta F_x = \Delta \sigma_x \cdot A_{xi} \approx -4,522 \text{ 4 MPa} (0,258 \text{ 62 m}^2) \approx -1,169 \text{ 6 MN} = -1 \text{ 169,6 kN}$$

$$\Delta F_z = \Delta \sigma_z \cdot A_{zi} \approx -6,649 \text{ 2 MPa} (0,241 \text{ 54 m}^2) \approx -1,606 \text{ 0 MN} = -1 \text{ 606,0 kN}$$

Debido a que no se aplicó incremento de fuerza en la dirección Y , estamos seguros de que es nulo, por lo que podemos escribir ya que:

$$\Delta F_y = 0 \text{ MN (ya que estrictamente } \Delta \sigma_y = 0 \text{ MPa)}$$

Lo calculado en este ejemplo presupone que lo que se ha supuesto para el punto centro de volumen, se puede extender para todo el cuerpo, lo que no deja de ser una suposición que requiere cumplir con condiciones específicas (placas de un material extremadamente rígido en íntimo contacto con las caras esforzadas para suponer esfuerzo uniforme en toda la cara analizada y con las mismas dimensiones o un poco menores a las de la cara rectangular correspondiente de la probeta, para evitar contacto entre placas) como el de ser lisas y por lo tanto no acumular esfuerzos cortantes al deformarse el cuerpo.

En la figura 5.23 se muestran esquemáticamente los incrementos de fuerza que provocaron el cambio de dimensiones de la probeta planteada, indicando que bajo estas fuerzas (o esfuerzos) se sostienen las dimensiones que se especificaron como finales del paralelepípedo.

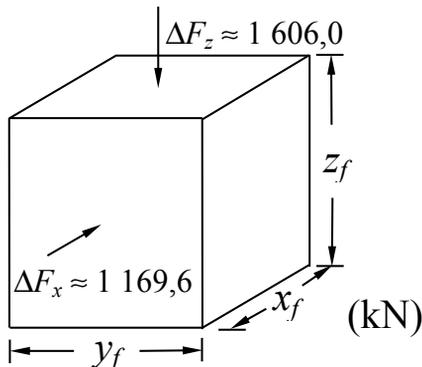


FIGURA 5.23. Configuración final de cuerpo bajo las acciones aplicadas

6. MODELOS REOLÓGICOS

6.1. Introducción

En este capítulo se va a modelar el comportamiento de deformación lineal unitaria contra incremento de esfuerzo normal (o deformación unitaria–esfuerzo normal incremental) y su posible evolución en el tiempo ($\epsilon-\Delta\sigma-t$) de los materiales reales. Este tipo de comportamiento se puede modelar con analogías mecánicas ideales (llamadas unidades reológicas) que al combinarlas modelan comportamientos más complejos (modelos reológicos).

La reología es la rama de la física que estudia el flujo de los materiales (en el tiempo). Como se puede apreciar en este tema, se estudia por primera vez en este curso el efecto del tiempo en el comportamiento de los materiales.

Parte de la formación del ingeniero civil consiste en la adquisición de elementos que le permitan modelar el comportamiento de los materiales reales. Conviene para este fin apoyarse en el conocimiento de varios tipos de comportamiento idealizados que se tienen muy bien estudiados. Se abre así la posibilidad de modelar comportamientos más complicados que presentan los materiales reales, combinando diferentes elementos simples de los cuales se tiene muy bien entendido su comportamiento individual.

6.2. Unidades reológicas (de comportamiento simple)

A continuación se enumeran las unidades básicas de comportamiento mecánico que se manejan en la ingeniería civil (cada unidad modela un comportamiento mecánico elemental).

6.2.1. Unidad de Hooke

Representa el comportamiento de un resorte, que puede modelar el comportamiento elástico lineal de un material. En la figura 6.1 se muestra la representación del resorte con datos asociados que se van a utilizar después, como es el caso del área transversal inicial (A_i).

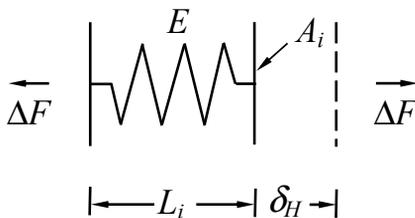


FIGURA 6.1. Unidad de Hooke modelada como un resorte

Con base en lo que se vio en el tema de Elasticidad lineal, se muestran de nuevo expresiones conocidas adaptadas a este tema, ahora como ecuaciones (6-1) y (6-2):

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta F}{A_i} \quad (6-1)$$

y

$$\varepsilon_H = \frac{\delta_H}{L_i} \quad (6-2)$$

Se acepta, por convención, que el resorte puede admitir una deformación instantánea, es decir, que se supone se deforma en un tiempo igual a cero. En la figura 6.2 se muestra una gráfica del comportamiento deformación unitaria contra incremento de esfuerzo de la unidad de Hooke, modelada como un resorte elástico lineal.

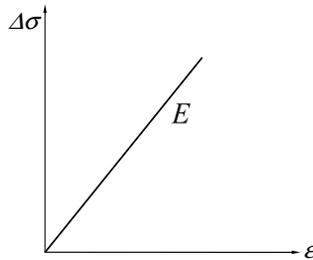


FIGURA 6.2. Comportamiento elástico lineal

Con base en la figura 6.2, se deducen las expresiones (6-3)

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon_H} \quad ; \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_H = \frac{\Delta\sigma}{E} \quad (6-3)$$

La “H” subíndice nos dice que la deformación unitaria aportada se obtiene de un comportamiento “elástico lineal o de Hooke”.

6.2.2. Unidad de Newton

Representa el comportamiento de un fluido viscoso y se puede utilizar para representar el comportamiento viscoso de un líquido o como componente de un sólido deformable.

Newton modeló la viscosidad lineal de un fluido entre dos placas (una fija y una móvil) obteniendo las expresiones que se muestran como (6-4).

$$\Delta F = \mu * \frac{\delta_N A}{t e} = \mu * \frac{v A}{e} \quad \Rightarrow \quad v = \text{cte.} \quad ; \quad v = \frac{\delta_N}{t} \quad (6-4)$$

donde:

ΔF , incremento de fuerza

δ_N , deformación de la placa móvil (esta placa se supone que se mueve a velocidad constante)

t , tiempo que transcurre conforme se mide la deformación

A , área de contacto de la placa móvil con el fluido viscoso

e , separación de las placas en contacto con el fluido viscoso

μ^* , viscosidad dinámica medida y asociada a las particularidades geométricas del modelo

Se puede modelar, con la intención de definir una unidad viscosa, un amortiguador que acepta o expulsa un fluido con esta característica, como el émbolo que se muestra en la figura 6.3. En este caso, se exhibe una representación de la viscosidad asociada al amortiguador concebido como un émbolo, por lo que ahora se define la viscosidad asociada a este tipo de amortiguador (considerando particularidades geométricas propias), como “ μ' ”.

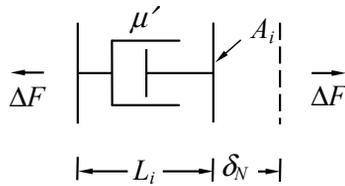


FIGURA 6.3. Amortiguador modelado como émbolo con fluido viscoso

El comportamiento del amortiguador que contiene un fluido viscoso lineal, se puede modelar en función de la velocidad de deformación unitaria ($\dot{\epsilon}$) contra incremento de esfuerzo normal ($\Delta\sigma$), como se muestra en la figura 6.4. Observe que en este gráfico la viscosidad aparece como la pendiente de la recta que muestra un comportamiento lineal.

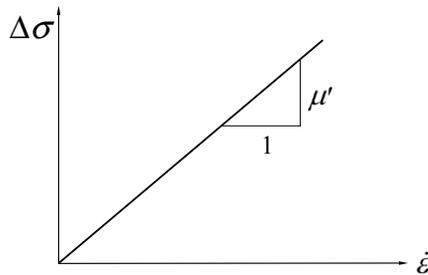


FIGURA 6.4. Comportamiento viscoso lineal (en función de la velocidad de deformación unitaria)

A continuación se presenta, en la figura 6.5, el mismo comportamiento viscoso lineal, pero ahora en un gráfico de tiempo contra deformación lineal unitaria. Observe ahora cuál es la pendiente de la recta mostrada.

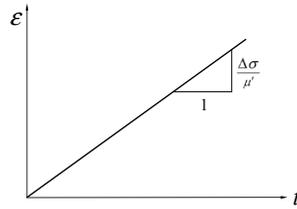


FIGURA 6.5. Otra forma de representar la viscosidad lineal (en función del tiempo)

Con base en los gráficos anteriores, suponiendo que esta unidad no tiene límite de deformación (se le suministra teóricamente todo el líquido viscoso que se requiera), se puede ahora escribir algebraicamente el incremento de esfuerzo en función de la viscosidad particular del amortiguador y de la velocidad de deformación unitaria, como se muestra en la ecuación (6-5).

$$\Delta\sigma = \mu' \dot{\epsilon} = \mu' \frac{\epsilon}{t} \quad (6-5)$$

donde

$\dot{\epsilon}$, velocidad de deformación unitaria

μ' , viscosidad asignable como propia de este amortiguador

Lo anterior implica la relación mostrada en la ecuación (6-6).

$$\frac{\epsilon}{t} = \frac{\Delta\sigma}{\mu'} \quad (6-6)$$

Para esta unidad de Newton se puede concluir que la deformación unitaria queda dada por la ecuación (6-7).

$$\epsilon_N = \frac{\Delta\sigma \cdot t}{\mu'} \quad (6-7)$$

El subíndice “N” expresa que la deformación unitaria está asociada a un comportamiento viscoso lineal de “Newton”.

6.2.3. Unidad de Coulomb

Representa el comportamiento teórico plástico puro (rígido-plástico). Se puede utilizar para modelar el supuesto comportamiento rígido-plástico, una unidad que después va a ser útil para reproducir adecuadamente el comportamiento de los sólidos deformables.

La unidad que modela este tipo de comportamiento, se muestra en su condición de no deformación (no deslizamiento) en la figura 6.6.

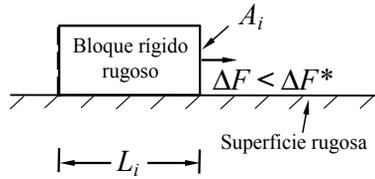


FIGURA 6. 6. Unidad de Coulomb antes de deslizar

Hay un cierto valor de incremento de fuerza (ΔF^*), o de incremento de esfuerzo ($\Delta\sigma^*$), donde comienza a deslizar el bloque rugoso. En este caso, adicionalmente se exige la condición de que el bloque se deslice a una velocidad constante (no se admite que el bloque se acelere). Esta condición de deformación (deslizamiento) se muestra en la figura 6.7.

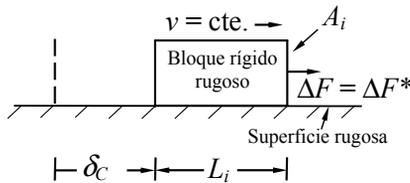


FIGURA 6.7. Unidad de Coulomb en condición de deslizamiento a velocidad constante

Con base en las figuras anteriores y pasando de incrementos de fuerza a incrementos de esfuerzo normal y de deformaciones a deformaciones unitarias, se muestra en la figura 6.8 el comportamiento teórico de un material rígido-plástico.

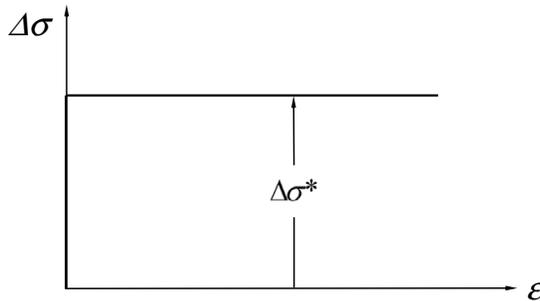


FIGURA 6.8. Comportamiento rígido-plástico

De todo lo anterior, se puede implicar lo que se muestra en las expresiones siguientes.

$$\varepsilon_c = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq \Delta\sigma < \Delta\sigma^* \quad (6-8)$$

y

$$\varepsilon_c \neq 0 \quad \text{si} \quad \Delta\sigma = \Delta\sigma^* \quad \Rightarrow \quad \text{el bloque se mueve con } v = \text{cte.} \quad (6-9)$$

El subíndice “C”, de “Coulomb”, expresa que la deformación unitaria está asociada a un comportamiento simple de plasticidad pura que fue estudiada por este investigador.

6.3. Modelos reológicos (de comportamiento más complejo)

Los modelos reológicos se forman uniendo, ya sea en serie, en paralelo o con otras combinaciones, unidades o modelos, para tratar de explicar comportamientos complejos, como los que se observan en materiales reales.

Dividiremos esta parte en dos secciones. En la primera veremos los llamados Modelos viscoelástico lineales que se forman combinando unidad(es) de Hooke y unidad(es) de Newton. En la segunda sección, veremos únicamente un modelo que no es viscoelástico lineal y que se denomina de Saint Venant o elastoplástico perfecto, formado por una unidad de Hooke y una unidad de Coulomb en serie.

6.3.1. Modelos viscoelástico lineales

6.3.1.1. Modelo de Maxwell

Formado por unidad de Hooke y unidad de Newton en serie.

En la figura 6.9 se muestra la modelación de un resorte y un amortiguador en serie.

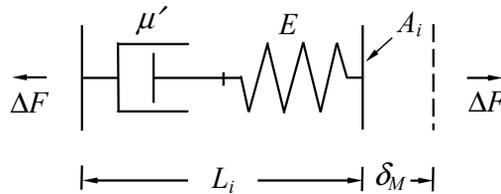


FIGURA 6.9. Modelo de Maxwell

La expresión que debe modelar matemáticamente este comportamiento, se puede formar sumando las expresiones de la deformación lineal unitaria de elasticidad lineal y la deformación lineal unitaria de la viscosidad lineal, como se muestra en la ecuación (6-10).

$$\varepsilon_M = \varepsilon_H + \varepsilon_N = \frac{\Delta\sigma}{E} + \frac{\Delta\sigma \cdot t}{\mu'} = \Delta\sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu'} \right) \quad (6-10)$$

El comportamiento tiempo contra deformación lineal unitaria de este modelo, se muestra en el gráfico de la figura 6.10. Observe que teóricamente se supone que la deformación aumenta indefinidamente, por lo que a este tipo de modelo se le asocia con el comportamiento de un líquido.

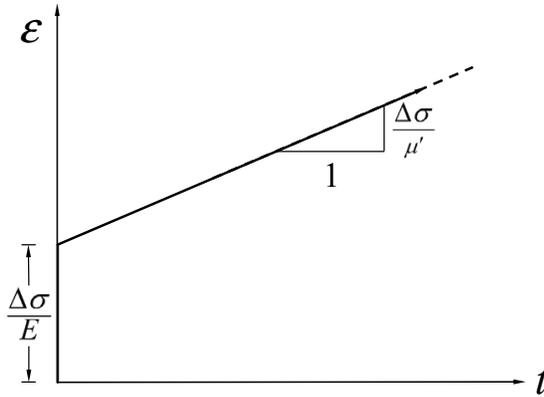


FIGURA 6.10. Comportamiento de un modelo de Maxwell

6.3.1.2. Modelo de Kelvin

Formado por una unidad de Hooke y una unidad de Newton en paralelo.

En la figura 6.11 se representa a este modelo, con la condición de que las placas extremas que sujetan al resorte y al amortiguador, no se pueden mover de otra forma que no sea en forma paralela.

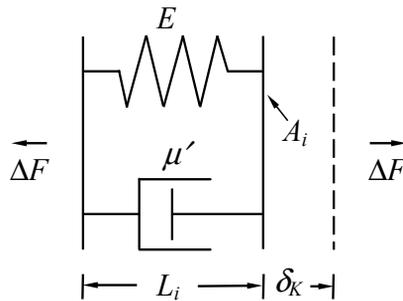


FIGURA 6.11. Modelo de Kelvin

1

2

3

4

5

6

7

En este caso particular, y por lo antes comentado, se tiene como condición que el resorte y el amortiguador estén obligados a deformarse en forma conjunta, lo que se puede expresar como la condición siguiente.

$$\delta_K = \delta_H = \delta_N$$

Lo mismo que se expresa antes, pero ahora en términos de deformaciones unitarias a las que solo se hará referencia de aquí en adelante, se puede escribir en la siguiente forma.

$$\varepsilon_K = \varepsilon_H = \varepsilon_N \quad (6-11)$$

En este caso, por otra parte, se debe cumplir que el incremento de fuerza tiene que repartirse entre el resorte y el amortiguador. Esto, expresado en términos de incremento de esfuerzo, se puede escribir como se muestra en la expresión (6-12).

$$\Delta\sigma_{Modelo} = \Delta\sigma_{Resorte} + \Delta\sigma_{Amortiguador} \quad (6-12)$$

Se busca ahora despejar el incremento de esfuerzo de cada unidad, como se muestra a continuación.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\sigma_{Resorte}}{E} \Rightarrow \Delta\sigma_{Resorte} = \varepsilon E \quad (6-13)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\Delta\sigma_{Amortiguador}}{\mu'} \Rightarrow \Delta\sigma_{Amortiguador} = \dot{\varepsilon} \mu' \quad (6-14)$$

Se sustituyen ahora estos incrementos de esfuerzo particulares antes obtenidos en la ecuación (6-12). Se acuerda poner en primer lugar el término asociado al amortiguador y después el asociado al resorte, como se expresa a continuación.

$$\dot{\varepsilon} \mu' + \varepsilon E = \Delta\sigma_{Modelo} \quad (6-15)$$

La misma expresión anterior, mostrada ahora como ecuación diferencial y acordando que de aquí en adelante al incremento de esfuerzo del modelo se le quite la etiqueta, nos permite escribir la ecuación (6-16) como:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \mu' + \varepsilon E = \Delta\sigma \quad (6-16)$$

Para buscar la solución de esta ecuación diferencial, dividiremos todos los términos entre μ' , llegando a la forma mostrada en la expresión siguiente (6-17).

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\mu'} \varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{\mu'} \quad (6-17)$$

La ecuación (6-17) resulta ser una diferencial lineal de primer orden, de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

La solución de esta ecuación diferencial debe tener la forma:

$$y e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + C$$

Para obtener la constante (C) se debe recurrir a las condiciones iniciales del fenómeno. En este caso, se debe cumplir que para un tiempo cero la deformación lineal unitaria debe también valer cero.

La expresión final a la que se llega, que permite modelar a este resorte y a este amortiguador en paralelo, se muestra a continuación. Como se puede observar, la ecuación (6-18) queda definida en función del número “ e ” de Neper.

$$\varepsilon_K = \frac{\Delta\sigma}{E} \left(1 - e^{-\frac{E \cdot t}{\mu'}} \right) \quad (6-18)$$

En la figura 6.12 se muestra el gráfico que representa el comportamiento de un modelo de Kelvin.

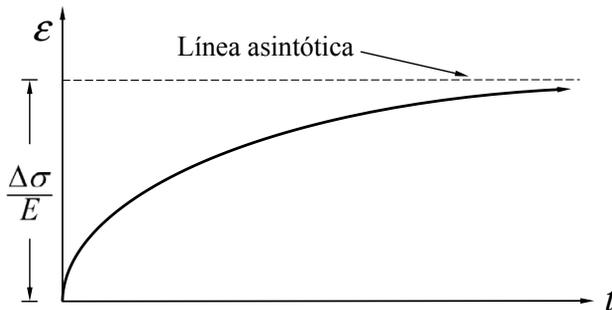


FIGURA 6.12. Comportamiento de un modelo de Kelvin

6.3.1.3. Modelo sólido de tres constantes

Formado por una unidad de Hooke libre y un modelo de Kelvin en serie.

En la figura 6.13 se muestra la conformación de este modelo reológico.

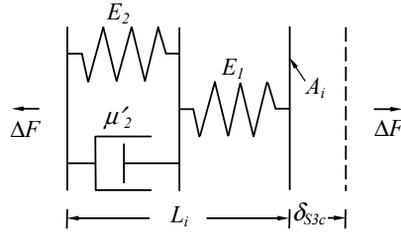


FIGURA 6.13. Modelo sólido de tres constantes

La expresión que modela este comportamiento se puede formar sumando la deformación lineal unitaria para una unidad de Hooke y la deformación lineal unitaria para un modelo de Kelvin, por lo que la ecuación que modela este comportamiento se puede escribir:

$$\epsilon_{S3c} = \epsilon_H + \epsilon_K = \frac{\Delta\sigma}{E_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu_2'}} \right) \tag{6-19}$$

En la figura 6.14 se muestra gráficamente el comportamiento de este modelo reológico.

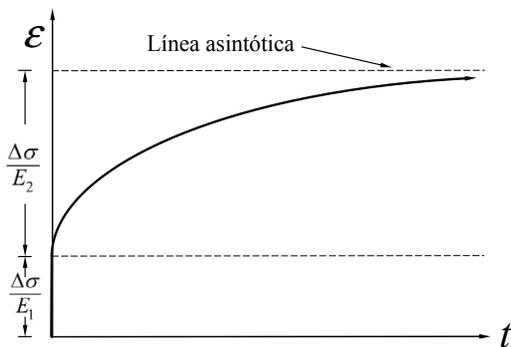


FIGURA 6.14. Comportamiento de un modelo sólido de tres constantes

6.3.1.4. Modelo líquido de tres constantes

Formado por una unidad de Newton libre y un modelo de Kelvin en serie.

La conformación de este modelo reológico se puede ver en la figura 6.15.

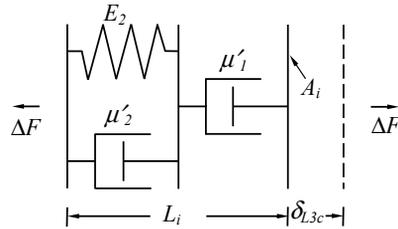


FIGURA 6.15. Modelo líquido de tres constantes

La ecuación que permite modelar este comportamiento, se puede formar sumando la expresión de deformación lineal unitaria asociada a una unidad de Newton más la expresión de un modelo de Kelvin, llegando a la ecuación que se muestra a continuación.

$$\epsilon_{L3c} = \epsilon_N + \epsilon_K = \frac{\Delta\sigma \cdot t}{\mu'_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu'_2}} \right) \tag{6-20}$$

El comportamiento gráfico de este modelo se puede visualizar en la figura 6.16.

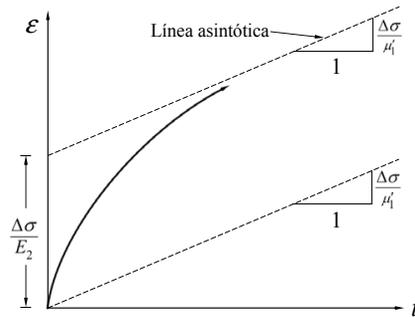


FIGURA 6.16. Comportamiento de un modelo líquido de tres constantes

6.3.1.5. Modelo de Burgers

Formado por un modelo de Maxwell y un modelo de Kelvin en serie.

La conformación de este modelo reológico se muestra en la figura 6.17.

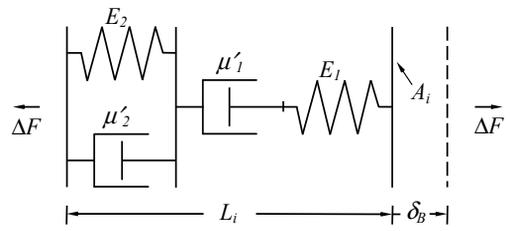


FIGURA 6.17. Modelo de Burgers

Al sumar las ecuaciones de deformación lineal unitaria del modelo de Maxwell y del modelo de Kelvin, se llega a la expresión que permite modelar el comportamiento de Burgers.

$$\varepsilon_B = \varepsilon_M + \varepsilon_K = \frac{\Delta\sigma}{E_1} + \frac{\Delta\sigma \cdot t}{\mu'_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu'_2}} \right) = \Delta\sigma \left[\frac{1}{E_1} + \frac{t}{\mu'_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu'_2}} \right) \right] \quad (6-21)$$

El comportamiento gráfico de este modelo se puede visualizar en la figura 6.18.

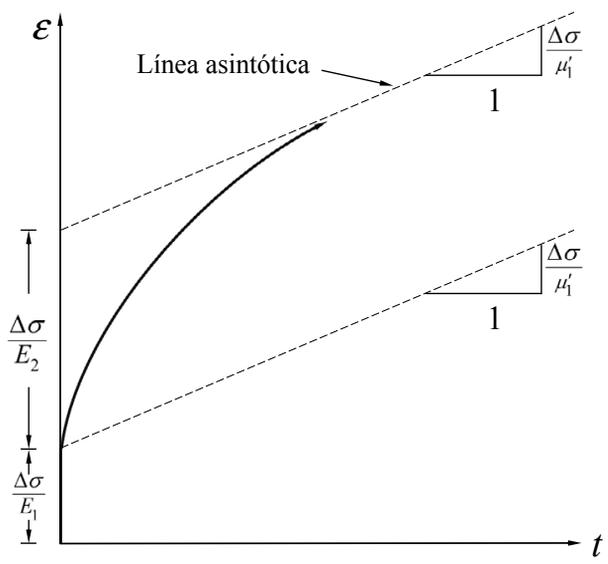


FIGURA 6.18. Comportamiento del modelo de Burgers

6.3.2. Modelo no viscoelástico lineal

6.3.2.1. Modelo de Saint Venant o elastoplástico perfecto

Compuesto por una unidad de Hooke y una unidad de Coulomb en serie.

En la figura 6.19 se muestra este modelo en su condición teórica de reposo que se corresponde con la condición de deformación lineal unitaria nula.

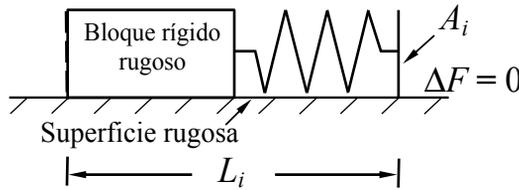


FIGURA 6.19. Modelo de Saint Venant en condición de reposo

En este modelo se puede reproducir el comportamiento elástico lineal teóricamente, desde un incremento de esfuerzo muy pequeño hasta un valor que no llegue al valor asterisco. Esta condición se puede escribir como se muestra en la expresión (6-22).

$$\varepsilon_{SV} = \varepsilon_H \quad \text{si} \quad 0 < \Delta\sigma < \Delta\sigma^* \quad (6-22)$$

En la figura 6.20 se muestra cierto momento de la condición antes comentada.

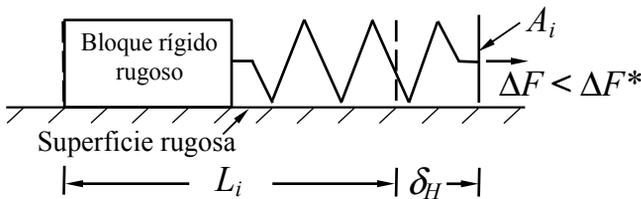


FIGURA 6.20. Modelo de Saint Venant con solo cierta deformación elástica

En este modelo se supone teóricamente que el final de la deformación elástica marca el inicio de la deformación plástica. La deformación elástica ya no continúa a partir de este último momento y la deformación plástica teóricamente sigue en forma indefinida, si se sostiene el

incremento de esfuerzo asterisco como constante. Esta última condición se muestra en la expresión siguiente.

$$\epsilon_{SV} = \epsilon_H + \epsilon_C \quad \text{si} \quad \Delta\sigma = \Delta\sigma^* \quad \Rightarrow \quad \text{el bloque se mueve con } v = \text{cte.} \quad (6-23)$$

En la figura 6.21 se muestra el modelo de Saint Venant o elastoplástico perfecto, en esta última condición.

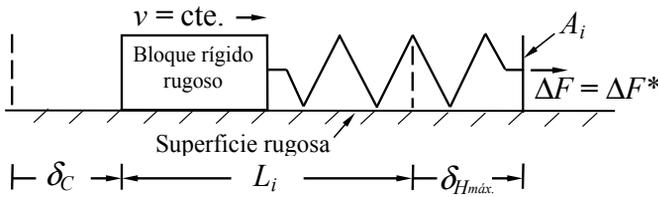


FIGURA 6.21. Modelo de Saint Venant mostrando solo deformación plástica

Se le ha denominado a este modelo como elastoplástico perfecto, porque la modelación queda compuesta, tanto de una elasticidad lineal primero como por una plasticidad mostrada como una línea horizontal después y sin ninguna zona de transición, como sí se observa en el comportamiento de los materiales reales.

En la figura 6.22 se puede ver el comportamiento de un modelo (o de un sólido) elastoplástico perfecto (Saint Venant). En la misma figura, se aprecia una curva discontinua que representa el comportamiento real de los materiales y que se sale de los comportamientos lineales. Esta gráfica se puede obtener si la prueba de falla de un material real se realiza bajo la concepción de incrementos de carga. Cuando la prueba se hace en un material real con un equipo que aplica una carga que aumenta bajo la condición de velocidad constante, el punto que representa la falla del material se ubica por debajo del punto más alto de la curva.

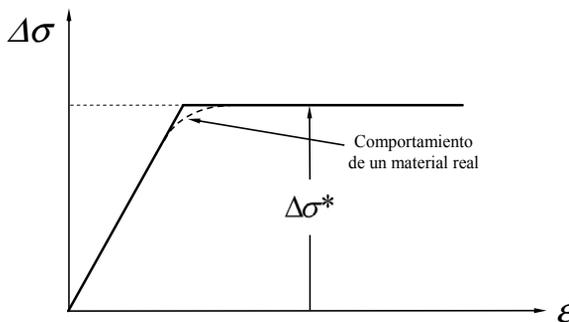


FIGURA 6.22. Comportamiento del modelo elastoplástico perfecto

6.4. Ejemplos de modelos reológicos

EJEMPLO 6.1. Ejemplo de deformación en el tiempo de un modelo viscoelástico lineal.

Cierto material real se probó en el laboratorio para conocer su comportamiento de deformación unitaria contra tiempo. Se decidió modelar su comportamiento comparándolo con el de modelos viscoelástico lineales. Se concluyó que se puede modelar como un modelo sólido de tres constantes. Se obtuvo que el valor asignable al resorte libre debe ser de: 93 740 kPa. Los parámetros del modelo de Kelvin, se propone que sean: un módulo de Young de 46 850 kPa y viscosidad dinámica propiamente del amortiguador del modelo de 505,7 MPa·s.

Con acuerdo a los parámetros propuestos y como un ejercicio de predicción, diga cuál es la deformación unitaria que se esperaría tener si el material se deforma aplicándole un incremento de esfuerzo de 1 100 kPa exactamente, obligando que este permanezca constante. Calcule para:

- a) $t = 0$ s
y
b) $t = 14$ s

En este ejemplo se debe aplicar la expresión (6-19).

$$\varepsilon_{s3c} = \frac{\Delta\sigma}{E_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu_2}} \right) \quad (6-19)$$

Para operar correctamente este tipo de expresión se recomienda elegir, tanto en el numerador como en el denominador, las mismas unidades, ya que el resultado en este caso debe ser un número adimensional (como lo es la deformación unitaria). Se recomienda hacer uso de las unidades que permiten que los números sean más manejables (los pascals no serían remendables en este ejemplo). Se sugiere usar en este caso los kilopascals o los megapascals como máximo. En este ejemplo se usarán los megapascals para operar los cálculos.

Para el inciso a), donde $t = 0$ s, se tiene que:

$$\varepsilon_{s3c} = \frac{\Delta\sigma}{E_1} = \frac{1,100 \text{ MPa}}{93,740 \text{ MPa}} \approx 1,173 \times 10^{-2} \quad (1,173\%)$$

Para el inciso b), donde $t = 14$ s, se tiene que:

$$\varepsilon_{s3c} \approx 1,173 \times 10^{-2} + \frac{1,100 \text{ MPa}}{46,850 \text{ MPa}} \left(1 - e^{-\frac{46,850 \text{ MPa} (14 \text{ s})}{505,7 \text{ MPa}\cdot\text{s}}} \right) \approx 2,879 \times 10^{-2} \quad (2,879\%)$$

6.5. Fenómeno de relajación

Se denomina fenómeno de relajación al comportamiento que tienen los materiales reales al aplicarles una deformación instantánea (muy rápida) que se obliga después a permanecer constante. Para lograr mantener la deformación constante, se debe reducir el incremento de esfuerzo respecto del que logró producir la deformación inicial que se buscaba.

El fenómeno de relajación se muestra gráficamente en la figura 6.23.

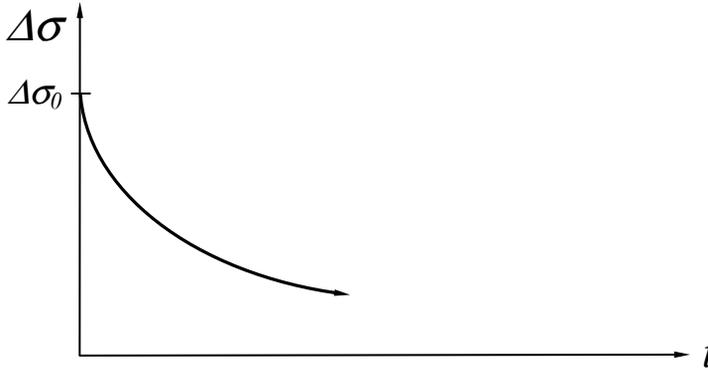


FIGURA 6.23. Representación del fenómeno de relajación

Este fenómeno se puede modelar únicamente, con modelos viscoelástico lineales que tienen un resorte libre (que admite teóricamente una deformación instantánea). Los modelos que pueden entrar en este tipo de análisis son el de Maxwell, el modelo sólido de tres constantes y el de Burgers.

6.5.1. Modelo de Maxwell

Formado por una unidad de Hooke y una unidad de Newton en serie.

Dado que conocemos la expresión para deformación unitaria, se despeja en este caso el incremento de esfuerzo para poder analizar su variación conforme transcurre el tiempo.

Si la expresión anterior para deformación unitaria del modelo de Maxwell (6-10) es:

$$\varepsilon_M = \frac{\Delta\sigma}{E} + \frac{\Delta\sigma \cdot t}{\mu'} = \Delta\sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu'} \right) \quad (6-10)$$

despejando el incremento de esfuerzo (para este modelo), se concluye que se puede escribir como se muestra en la expresión (6-24).

$$\Delta\sigma_M = \frac{\varepsilon \text{ (cte.)}}{\left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu'}\right)} \quad (6-24)$$

6.5.2. Modelo sólido de tres constantes

Formado por una unidad de Hooke y un modelo de Kelvin en serie.

Se despeja también en este caso el incremento de esfuerzo, para poder analizar su variación conforme transcurre el tiempo.

Si la expresión anterior para deformación unitaria del modelo sólido de tres constantes es:

$$\varepsilon_{S3c} = \frac{\Delta\sigma}{E_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\mu'_2}}\right) = \Delta\sigma \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\mu'_2}}\right) \right]$$

despejando el incremento de esfuerzo (para este modelo), resulta la ecuación (6-25):

$$\Delta\sigma_{S3c} = \frac{\varepsilon \text{ (cte.)}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\mu'_2}}\right)} \quad (6-25)$$

6.5.3. Modelo de Burgers

Formado por un modelo de Maxwell y un modelo de Kelvin en serie.

Al igual que en los casos anteriores, se despeja el incremento de esfuerzo para poder analizar su variación conforme transcurre el tiempo.

Si la expresión anterior para deformación unitaria del modelo de Burgers se definió como ecuación (6-21), que ahora se reproduce:

$$\varepsilon_B = \frac{\Delta\sigma}{E_1} + \frac{\Delta\sigma t}{\mu'_1} + \frac{\Delta\sigma}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\mu'_2}}\right) = \Delta\sigma \left[\frac{1}{E_1} + \frac{t}{\mu'_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\mu'_2}}\right) \right]$$

Vamos a despejar el incremento de esfuerzo (para este modelo), que ahora se presenta como ecuación (6-26):

$$\Delta\sigma_B = \frac{\varepsilon \text{ (cte.)}}{\frac{1}{E_1} + \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu_2}} \right)} \quad (6-26)$$

6.6. Ejemplo del fenómeno de relajación

EJEMPLO 6.2. Que modela la relajación en el tiempo de un modelo viscoelástico lineal.

Para aprovechar los datos del ejemplo 6.1 anterior, se pide ahora hacer el ejercicio de calcular la relajación para el mismo material que se modeló como un sólido de tres constantes.

Con acuerdo a los parámetros antes propuestos y ahora como un ejercicio de predicción, calcule cuál debe ser el incremento de esfuerzo que se esperaría tener si al material se le aplica una deformación unitaria instantánea de 2,346%, obligando a que esta permanezca constante en el tiempo. Calcule para:

- a) $t = 0$ s
y
b) $t = 8$ s

En este caso se debe aplicar la expresión (6-25).

$$\Delta\sigma_{S3c} = \frac{\varepsilon \text{ (cte.)}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2 \cdot t}{\mu_2}} \right)}$$

Para el inciso a), donde $t = 0$ s, se tiene:

$$\Delta\sigma_{S3c} = E_1 \cdot \varepsilon = 93,740 \text{ MPa} (0,02346) \approx 2,199 \text{ MPa} = 2199 \text{ kPa}$$

Para el inciso b), donde $t = 8$ s, se tiene que:

$$\Delta\sigma_{S3c} = \frac{0,02346}{\frac{1}{93,740 \text{ MPa}} + \frac{1}{46,850 \text{ MPa}} \left(1 - e^{-\frac{46,850 \text{ MPa} (8 \text{ s})}{505,7 \text{ MPa}\cdot\text{s}}} \right)} \approx 1,074 \text{ MPa} = 1074 \text{ kPa}$$

7. TEORÍAS DE FALLA Y RUPTURA

7.1. Introducción

Se muestran algunas teorías clásicas de falla y ruptura. En primer lugar se presenta el criterio de Tresca, que históricamente es el primero que se plantea en forma consistente para falla por cortante máximo (aplicable a metales). Después se presenta el criterio de Von Mises, conocido como el de la máxima energía de distorsión. En los dos primeros criterios se parte de una prueba de tensión inconfínada (o simple) aplicada a un metal. Posteriormente se expone el criterio de Mohr-Coulomb, que aprovecha la posibilidad de graficar en el plano de Mohr los resultados de pruebas de resistencia y definir una envolvente de falla o de resistencia que teóricamente es una frontera límite (no se puede sobrepasar). En este tema se muestran gráficos de pruebas de compresión realizadas a suelos en un equipo denominado cámara triaxial. En todos los casos se supone una falla del tipo elastoplástica perfecta. Por último se muestra una envolvente para roca obtenida a partir de varias pruebas a la falla, asociada a un estado de esfuerzo en condición de falla y se hacen algunos comentarios.

7.2. Criterio de Tresca

El criterio de Tresca también es conocido como del esfuerzo cortante máximo. Esta propuesta surge de la observación de que en un material dúctil aparece deslizamiento de constituyentes durante la fluencia (o falla), a lo largo de planos claramente orientados.

Analizaremos el caso para una prueba de tensión simple, aplicada a una probeta cilíndrica de cierto metal que se sujeta suspendida, haciendo coincidir el eje Z (vertical) con el eje de rotación del cilindro, como se muestra en la figura 7.1.

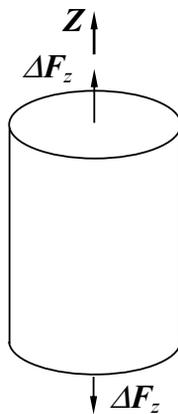


FIGURA 7.1. Prueba de tensión simple (inconfínada)

En las dos teorías que se exponen a continuación, supondremos que el metal que se modela tiene un comportamiento elastoplástico perfecto o elástico perfectamente plástico (sin transición no lineal en el paso del comportamiento elástico lineal al comportamiento plástico), como se muestra en la figura 7.2. En este caso el subíndice “f” expresa condición de falla.

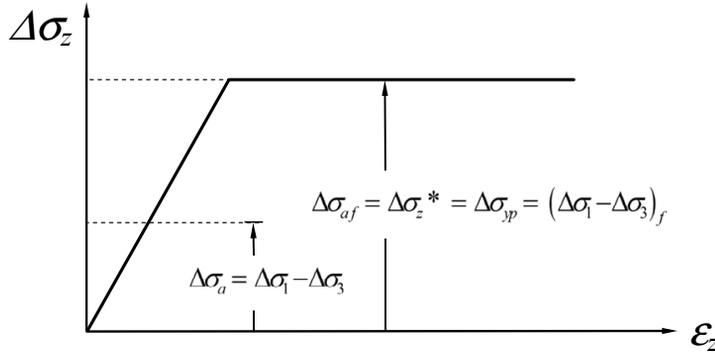


FIGURA 7.2. Comportamiento elástico perfectamente plástico en dos tramos lineales

En la misma figura se define el incremento de esfuerzo axial ($\Delta\sigma_a$) como la diferencia entre los esfuerzos principales incrementales ($\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3$). También se observan en la misma figura dos trayectorias durante la prueba. Una que se corresponde con la integridad del material en el tramo elástico lineal, alejado de la falla, y otra que se corresponde con la condición de fluencia plástica o condición de desarrollo de la falla.

En la figura 7.3 se muestran, en el plano de Mohr de esfuerzos incrementales, circunferencias visibles (en realidad dos superpuestas) que representan el estado de esfuerzo que se tiene como promedio para el centro de volumen del cilindro metálico comentado, para los mismos dos comportamientos que se mostraron en la figura 7.2, así como la condición inicial en el origen del plano de Mohr. Se tiene como un punto, en el origen de este plano, al estado de esfuerzo antes de comenzar a aplicar el incremento de fuerza de tensión (el cilindro se sujeta en la parte superior y suspendido por peso propio se toman sus dimensiones iniciales). Se muestra también una circunferencia visible discontinua que no es la de mayor diámetro y que representa el estado de esfuerzo incremental en una cierta condición que no es la de falla (en el tramo elástico lineal), donde el esfuerzo incremental principal mayor está en el extremo derecho de la circunferencia.

Finalmente, se muestra una circunferencia visible continua (la mayor), que representa al estado de esfuerzo incremental en la condición de falla. Esta última circunferencia visible (dos superpuestas) define, con sus puntos el más alto y el más bajo, a envolventes paralelas al eje $\Delta\sigma$ de fluencia plástica o falla plástica (o de resistencia, porque teóricamente no puede existir una circunferencia más grande que rebasara estas envolventes). Vea la figura 7.3 con una presentación con acuerdo al método del polo fijo, donde se muestran también las envolventes de falla (o resistencia).

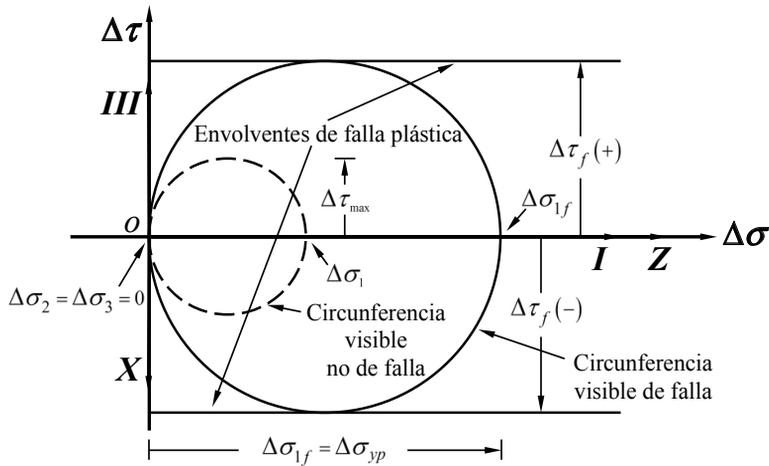


FIGURA 7.3. Prueba de tensión simple analizada en el plano de Mohr de esfuerzos incrementales

Debido a que la prueba que se representa en la figura 7.3 es inconfiada, esto implica que los dos esfuerzos principales horizontales deben valer cero (por considerar a la presión atmosférica con valor nulo, desde el punto de vista manométrico). Lo anterior explica por qué las circunferencias de esfuerzo representadas, coinciden en su parte izquierda con el origen del plano de Mohr. Por esta misma razón, el esfuerzo principal mayor incremental en la falla, coincide con el esfuerzo incremental desviador de falla, al que denominaremos incremento de esfuerzo que produce una condición de fluencia plástica $\Delta\sigma_{yp}$.

Los subíndices “yp” en inglés significan “yielding for plasticity” (fluencia por plasticidad). Comparando las figuras 7.2 y 7.3 se puede ver que la altura que va tomando el gráfico en el plano $\varepsilon_z - \Delta\sigma_z$ de la figura 7.2, se corresponde con el diámetro de la circunferencia visible en el plano de Mohr de la figura 7.3.

De la misma figura 7.3 se puede deducir, por condición geométrica, que el esfuerzo incremental desviador de falla coincide con ser dos veces el esfuerzo incremental cortante máximo en la falla, ya que el primero es el diámetro y el segundo se corresponde con el radio de la circunferencia visible de falla, como se plasma a continuación en la ecuación (7-1).

$$\Delta\sigma_{yp} = (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)_f = \Delta\sigma_{1f} - \Delta\sigma_{3f} = \pm 2\Delta\tau_f \quad (7-1)$$

El doble signo del incremento de esfuerzo cortante en la ecuación (7-1) representa, en la parte más alta de la circunferencia visible de falla, al cortante máximo positivo, pero en la parte más baja de la circunferencia visible, se tiene también al cortante máximo negativo (ambos con el valor del radio de la circunferencia).

Si se despeja ahora el esfuerzo incremental principal mayor de falla en una primera ecuación de partida con signo doble, se tiene que:

$$\Delta\sigma_{1f} = \Delta\sigma_{3f} \pm 2\Delta\tau_f$$

La anterior ecuación se puede expresar en dos formas aisladas, como se plasma por separado en las ecuaciones (7-2) y (7-3).

$$\Delta\sigma_{1f} = \Delta\sigma_{3f} + 2\Delta\tau_f \quad (7-2)$$

$$\Delta\sigma_{1f} = \Delta\sigma_{3f} - 2\Delta\tau_f \quad (7-3)$$

Por otro lado, partiendo también de la misma ecuación (7-1), podemos implicar las dos siguientes posibilidades como ecuaciones (7-4) y (7-5).

$$\text{Si } \Delta\sigma_{1f} = 0 \Rightarrow \Delta\sigma_{3f} = \mp 2\Delta\tau_f \quad (7-4)$$

y

$$\text{Si } \Delta\sigma_{3f} = 0 \Rightarrow \Delta\sigma_{1f} = \pm 2\Delta\tau_f \quad (7-5)$$

Ahora se propone que grafiquemos las ecuaciones (7-2), (7-3), (7-4) y (7-5) en el plano $\Delta\sigma_1$ contra $\Delta\sigma_3$ (posteriormente empataremos estos ejes de esfuerzos principales incrementales con el sistema de referencia XYZ , para evocar un tensor principal no ordenado para la prueba comentada). Comenzaremos por la ecuación (7-4), que se muestra en la figura 7.4 como líneas discontinuas y acotadas a la vecindad de su eje paralelo $\Delta\sigma_1$ y con un desarrollo no lejano al entorno del origen del plano (aunque teóricamente deben tener una longitud infinita).

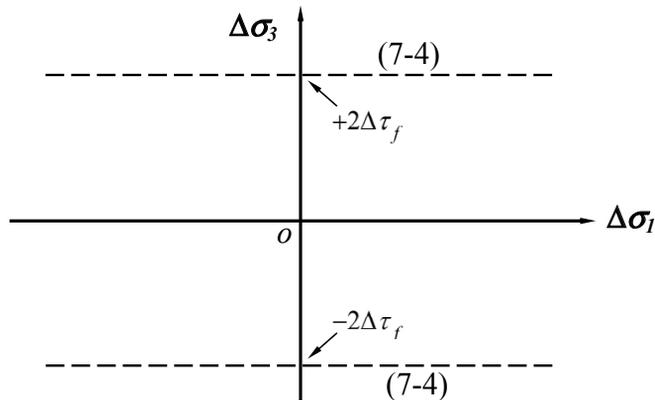


FIGURA 7.4. Representación gráfica parcial de las rectas que representa a la ecuación (7-4)

Ahora vamos a graficar la ecuación (7-5) con dos líneas discontinuas, cercanas a su eje paralelo $\Delta\sigma_3$, con un desarrollo no lejano al entorno del origen del plano (aunque en realidad deben tener una longitud teórica infinita), como se puede ver en la figura 7.5.

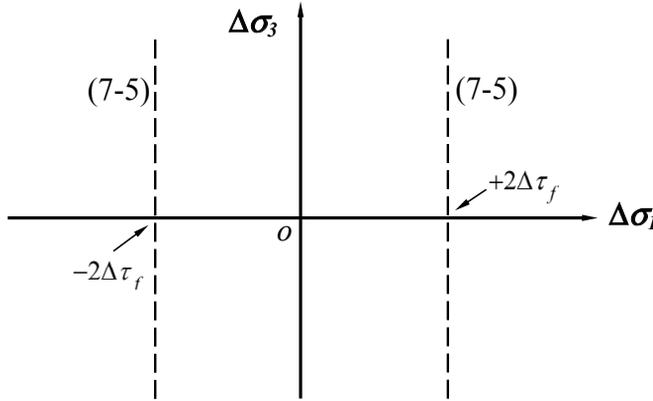


FIGURA 7.5. Representación gráfica parcial de las rectas asociadas a la ecuación (7-5)

Ahora vamos a graficar, también con líneas discontinuas a las ecuaciones (7-2) y (7-3), en el entorno del origen del mismo plano (aunque también son infinitas), como se muestra en la figura 7.6.

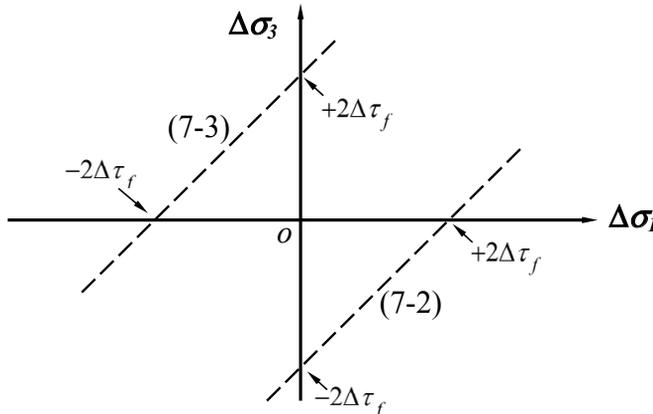


FIGURA 7.6. Representación parcial de las rectas que representan a las ecuaciones (7-2) y (7-3)

Si ahora superponemos en el mismo plano a todas las rectas modeladas en las figuras 7.4, 7.5 y 7.6 en una condición simultánea, obtenemos el contorno que se muestra en la figura 7.7. Este

contorno representa la frontera (o superficies) de fluencia plástica en el plano donde hemos estado modelando las ecuaciones antes definidas.

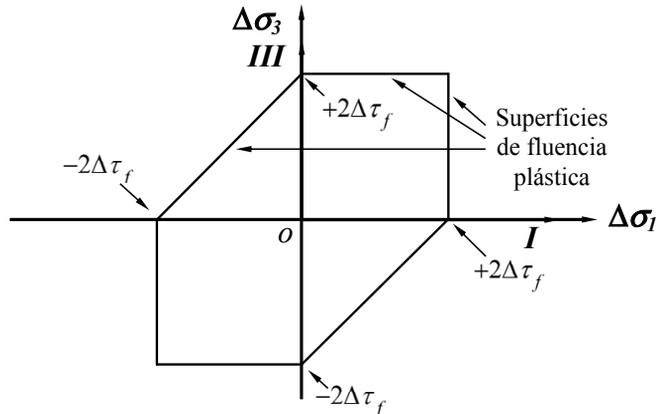


FIGURA 7.7. Trazo de las superficies de fluencia plástica en el plano utilizado

En la figura 7.7 se observa un hexágono irregular. Los puntos internos al hexágono representan una condición de estabilidad (elástica lineal). Los puntos que se encuentran en la traza del hexágono representan combinaciones de esfuerzos principales incrementales que provocan ya la fluencia plástica del material (recordemos que la prueba se realiza bajo la suposición de aplicarla a un metal). Con acuerdo a lo anterior, no pueden existir puntos exteriores al hexágono, porque se rebasaría una frontera de fluencia donde el material ya falló y ha perdido su capacidad de estabilidad (ya no se puede concebir como un sólido). Dicho de otra manera, no pueden existir puntos exteriores al hexágono asignables al material probado.

En el interior del hexágono se tienen combinaciones de esfuerzos que mantienen al material, teóricamente, dentro de un comportamiento elástico lineal que permite el equilibrio estático y donde el metal modelado se comporta como un sólido.

Ahora vamos a voltear el hexágono representado en la figura 7.7, con la intención de imaginar que el eje $\Delta\sigma_2$, ahora concebido para visualizar una imagen tridimensional, sale del origen en el plano visible con sentido hacia nosotros. Con lo dicho, podemos imaginar un sistema de referencia principal derecho que empataremos con el sistema de referencia XYZ , reservando la misma dirección y sentido para los ejes I y Z (dado que se representa una prueba de tensión simple con eje de rotación vertical). La figura volteada con las características comentadas, se muestra en la figura 7.8.

Al espacio modelado con los ejes $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$ y $\Delta\sigma_3$ se le denomina espacio de Westergaard (en este caso incremental), que más adelante se mostrará para representar las superficies de fluencia para diferentes teorías de comportamiento de materiales en la condición de falla.

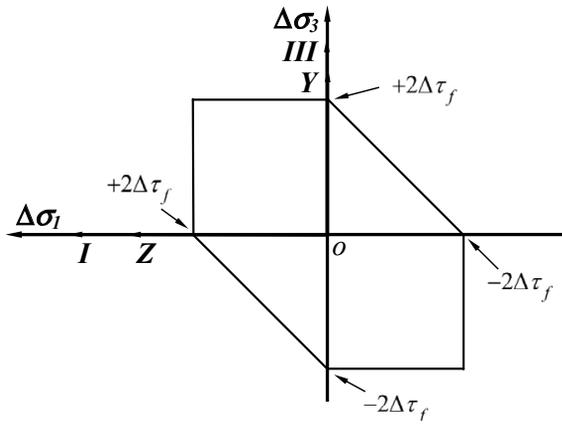


FIGURA 7.8. Figura volteada respecto de la 7.7 con ejes de referencia principal empatados con *YZ*

Finalmente, se pide al lector observe de nuevo la figura 7.8, imaginando ahora como se vería el mismo hexágono, pero desde una línea visual que coincidiera con la dirección de un versor que tuviera iguales ángulos directores con los ejes del sistema de referencia *XYZ* (y también con los del sistema principal): $n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{i} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{j} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{k}$.

La imagen que resulta, si se procede como se ha comentado, es la que se muestra en la figura 7.9. Se puede ver ahora, un hexágono regular que se repetiría con igual forma si proponemos otros planos paralelos de corte, normales todos al versor que se propuso.

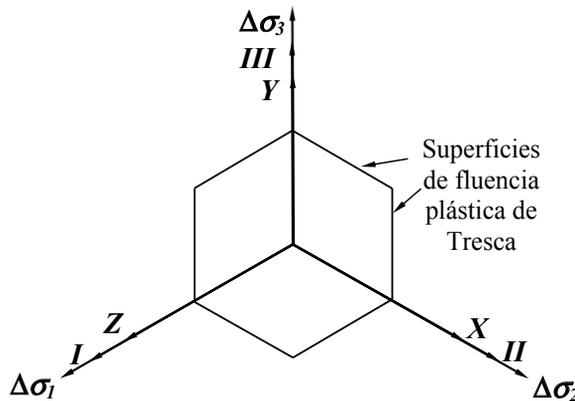


FIGURA 7.9. Hexágono regular de Tresca, visto en la dirección visual del versor recomendado

7.3. Criterio de fluencia de Von Mises

El criterio de fluencia de Von Mises también es conocido como de la energía máxima de distorsión. En esta propuesta se aplica el principio de superposición de causas y efectos utilizado en la teoría de elasticidad lineal. Se propone, con acuerdo a lo anterior, restar a la expresión general para la energía total de deformación para una unidad de volumen, la energía de deformación para una unidad de volumen debida a esfuerzos dilatacionales o volumétricos. Se obtiene así la energía de deformación por distorsión para esfuerzos combinados, que se puede escribir en función de esfuerzos principales incrementales como se muestra en la ecuación (7-6).

$$U_{DIST.} = \frac{1}{12G} [(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 + (\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1)^2] \quad (7-6)$$

La literal “G” en la ecuación (7-6) es el módulo de rigidez al cortante de la elasticidad lineal.

En la figura 7.10 se muestra, en el plano de Mohr, la misma prueba de tensión inconfiada, utilizada también por Tresca, pero ahora con la nomenclatura que usaremos para la demostración de la superficie de fluencia de Von Mises. Se aplica aquí también el método del polo fijo del Dr. de La Serna para inferir la relación de ejes principales.

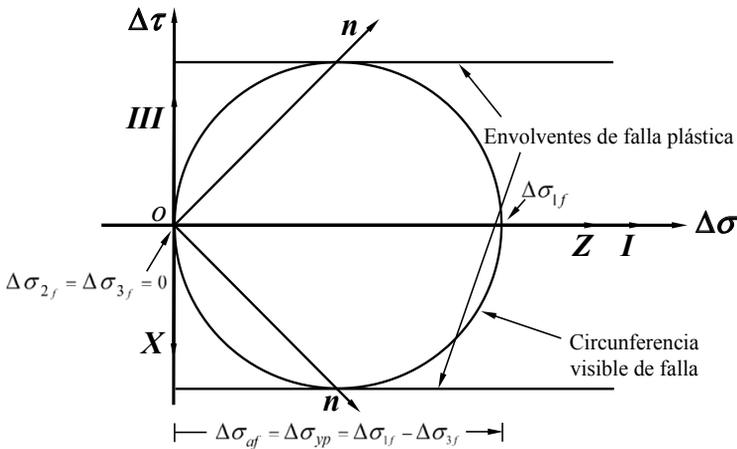


FIGURA 7.10. Representación de una prueba de tensión inconfiada usando el método del polo fijo

Aplicando estas ideas de energía de deformación por distorsión a una prueba de tensión inconfiada, pero analizada en su condición de falla, se acepta que la ecuación (7-6) se puede modificar a la forma siguiente:

$$U_{DIST.f} = \frac{1}{12G} \left[(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)_f^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)_f^2 + (\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1)_f^2 \right] \quad (7-7)$$

Tomando como base la figura 7.10, donde $\Delta\sigma_{2f} = \Delta\sigma_{3f} = 0$ y $\Delta\sigma_{1f} - \Delta\sigma_{3f} = \pm 2\Delta\tau_f$, se puede deducir que la ecuación adaptada a esta condición es la mostrada como (7-8):

$$U_{DIST.f} = \frac{1}{12G} \left[\Delta\sigma_{1f}^2 + 0 + \Delta\sigma_{1f}^2 \right] = \frac{1}{12G} \left[2\Delta\sigma_{1f}^2 \right] = \frac{1}{12G} \left[2(2\Delta\tau_f)^2 \right] \quad (7-8)$$

Igualando ahora las ecuaciones (7-7) y (7-8) y eliminando el factor común, se llega a:

$$\frac{(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)_f^2}{2} + \frac{(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)_f^2}{2} + \frac{(\Delta\sigma_3 - \Delta\sigma_1)_f^2}{2} = 4\Delta\tau_f^2 \quad (7-9)$$

Con la idea ahora de manejar el mismo plano inicial que se utilizó para el criterio de Tresca $\Delta\sigma_1\Delta\sigma_3$, obligaremos a que en la ecuación (7-9) se cumpla que $\Delta\sigma_{2f} = 0$, llegando a:

$$\frac{\Delta\sigma_{1f}^2}{2} + \frac{\Delta\sigma_{3f}^2}{2} + \frac{\Delta\sigma_{3f}^2}{2} - \frac{2\Delta\sigma_{1f}\Delta\sigma_{3f}}{2} + \frac{\Delta\sigma_{1f}^2}{2} = 4\Delta\tau_f^2$$

Obteniendo finalmente, al compactar la expresión antes mostrada:

$$\Delta\sigma_{1f}^2 - \Delta\sigma_{1f}\Delta\sigma_{3f} + \Delta\sigma_{3f}^2 = 4\Delta\tau_f^2 \quad (7-10)$$

Si dividimos ahora la ecuación (7-10) entre $4\Delta\tau_f^2$, se obtiene la expresión (7-11).

$$\frac{\Delta\sigma_{1f}^2}{4\Delta\tau_f^2} - \frac{\Delta\sigma_{1f}\Delta\sigma_{3f}}{4\Delta\tau_f^2} + \frac{\Delta\sigma_{3f}^2}{4\Delta\tau_f^2} = 1 \quad (7-11)$$

Ahora bien, se debe estar de acuerdo que la ecuación (7-11) también se puede escribir como se muestra en la expresión (7-12).

$$\left(\frac{\Delta\sigma_{1f}}{2\Delta\tau_f} \right)^2 - \left(\frac{\Delta\sigma_{1f}}{2\Delta\tau_f} \right) \left(\frac{\Delta\sigma_{3f}}{2\Delta\tau_f} \right) + \left(\frac{\Delta\sigma_{3f}}{2\Delta\tau_f} \right)^2 = 1 \quad (7-12)$$

Finalmente, se puede demostrar que esta ecuación (7-12) representa a una elipse que se visualiza girada 45° en el plano $\Delta\sigma_1\Delta\sigma_3$, como se muestra a continuación en la figura 7.11.

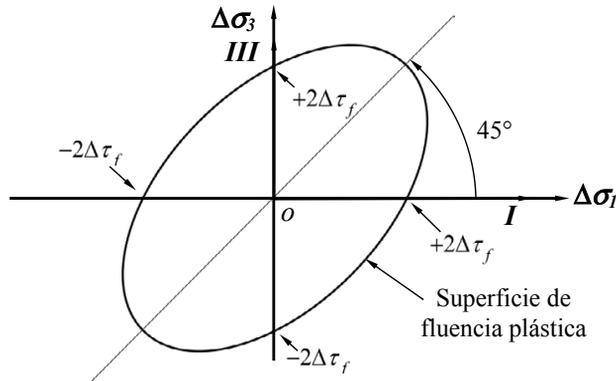


FIGURA 7.11. Elipse de Von Mises simétrica al eje a 45°, como envolvente de fluencia plástica

Se puede demostrar, de acuerdo con la ecuación de la elipse antes mostrada como la expresión (7-12), que los cruces de la elipse de la figura 7.11 con los ejes $\Delta\sigma_I$ y $\Delta\sigma_3$, son los mismos puntos que permitieron, como vértices, dibujar el hexágono irregular de Tresca.

En forma análoga a lo que hicimos con el hexágono irregular de Tresca, se propone ahora invertir el sentido del eje $\Delta\sigma_I$ para imaginar también que el sentido positivo del eje $\Delta\sigma_2$ es saliente hacia nosotros desde el origen (sistema derecho), como se debe entender para la figura 7.12.

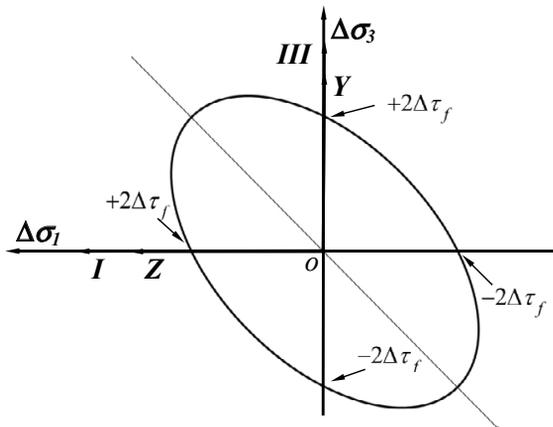


FIGURA 7.12. Elipse invertida respecto a la mostrada en la figura 7.11

En la figura anterior se ha propuesto, también en forma análoga a lo que hicimos para el hexágono irregular, que se deben empatar los ejes I y Z , en razón de estar analizando una

prueba de tensión simple donde el incremento de fuerza actúa en dirección vertical. También se busca, como se hizo para Tresca, observar con una visual en la misma dirección del versor que guarde iguales ángulos directores con el sistema derecho XYZ . La imagen que se debe ver se muestra en la figura 7.13, que se corresponde con una circunferencia.

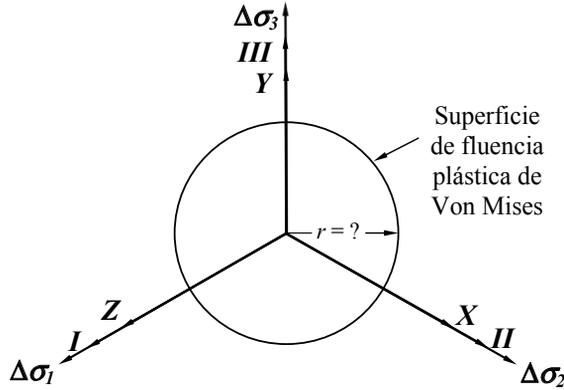


FIGURA 7.13. Circunferencia de Von Mises en el espacio de Westergaard incremental

A partir de la información que aporta la figura 7.13, surge la pregunta: ¿Cuánto debe valer el radio “ r ” de la circunferencia de fluencia de Von Mises? Esto es un reto. ¿Alguien puede encontrar la respuesta?

Como ejercicio final, se propone que veamos la elipse y el hexágono irregular simultáneamente, como se muestra en la figura 7.14.

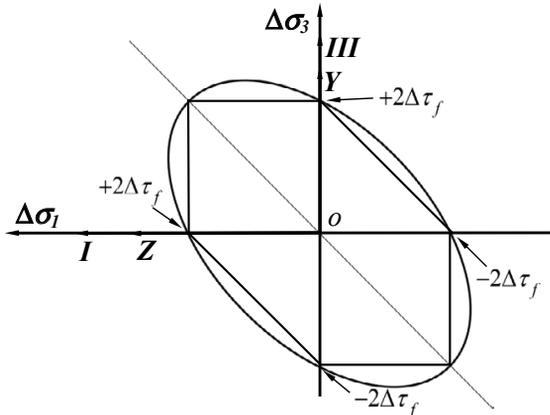


FIGURA 7.14. Hexágono irregular y elipse reunidos en el mismo plano

Ahora se van a visualizar ambos contornos en la dirección del versor antes sugerido con iguales cosenos directores. Se pueden ver juntos el hexágono ahora regular de Tresca y la circunferencia de Von Mises, como lo muestra la figura 7.15.

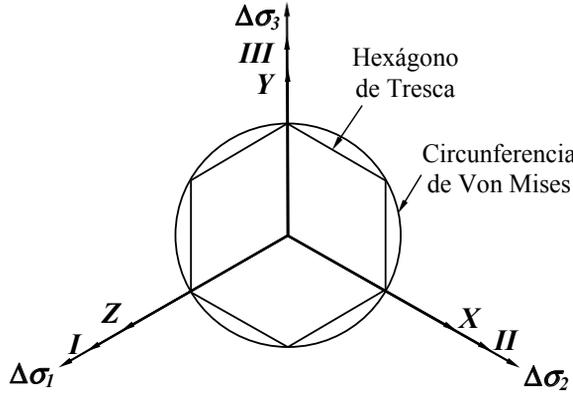


FIGURA 7.15. Hexágono regular de Tresca y circunferencia de Von Mises reunidos

Ambas figuras se podrían visualizar, teóricamente repetidas, en cualquier plano que se planteara normal al versor antes sugerido, con los mismos contornos de la figura 7.15. Como un ejercicio de imaginación adicional, lo dicho anteriormente se esquematiza ahora desde otra dirección visual a la anterior propuesta, en la figura 7.16.

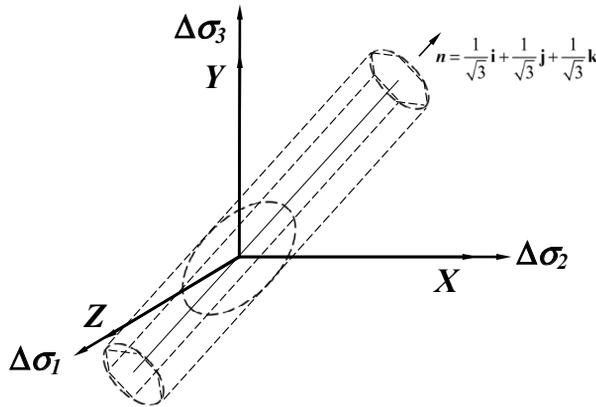


FIGURA 7.16. Imagen parcial de las superficies de fluencia analizadas en el espacio de Westergaard

En la figura 7.16 se muestran juntas las superficies de fluencia de Tresca y de Von Mises. Ninguna condición de estabilidad elástica lineal se podría plantear con condiciones en la superficie de fluencia (según cada criterio). Una condición externa a la superficie de fluencia resulta teóricamente imposible. La condición más segura, ya que ni siquiera se generan esfuerzos cortantes (la más lejana de la falla), resulta estar o encontrarse sobre la línea eje de rotación de ambas superficies de fluencia, bajo una condición isotropa (o isotrópica).

Por el tipo de prueba que permitió hacer las demostraciones, tanto de Tresca como de Von Mises, es que presentamos la imagen de la figura 7.15 con ejes de esfuerzos incrementales principales (suponiendo esfuerzos iniciales nulos). Se puede demostrar que, en un análisis de falla riguroso, se tendría que considerar una imagen análoga para el caso de esfuerzos principales finales (iniciales más incrementales), como se muestra en la figura 7.17.

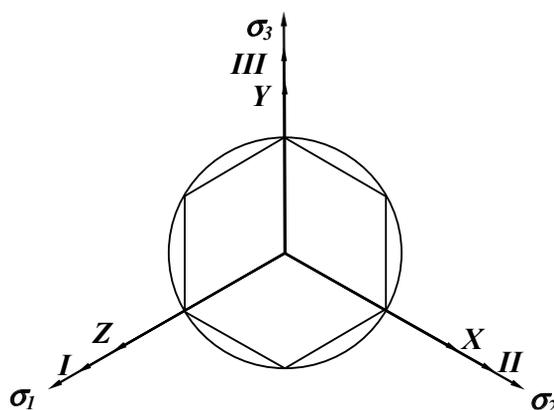


FIGURA 7.17. Espacio de Westergaard para esfuerzos principales finales

7.4. Criterio de Mohr-Coulomb

El criterio de Mohr-Coulomb se puede considerar como una generalización del criterio de Tresca. El esfuerzo cortante final (en realidad siempre son dos, uno positivo y otro negativo) asociado a la falla (τ_f), que en suelos en la mayoría de los casos siempre se encuentra asociado a un esfuerzo normal diferente de cero, se representa como un punto específico de la región de Mohr (en realidad dos). Esta es la razón por la que este criterio propone, en el caso de suelos, hacer un manejo de este plano, introduciendo una envolvente recta simétrica de falla o ley de resistencia lineal, que en forma general debe ser función de los conceptos “*cohesión*” y “*ángulo de fricción interna*”, que se consideran como “*parámetros*” del material. Esta envolvente de falla o de resistencia, se puede definir experimentalmente en mecánica de suelos, haciendo uso de un equipo llamado cámara triaxial que diseñó el Dr. Arturo Casagrande (pionero de esta rama de la ingeniería civil, de la que es fundador Karl Terzaghi).

Estas envolventes lineales se definen para una gama de esfuerzos normales (asociados a esfuerzos de confinamiento o de presión dentro de la cámara triaxial), con base en una programación que pretende modelar el comportamiento del suelo, desde esfuerzos anteriores a los iniciales del suelo en campo hasta esfuerzos posteriores a los finales del suelo en campo, que resultan de añadir a los iniciales, los esfuerzos incrementales que produce una obra civil que se construye.

La ley general del criterio de Mohr-Coulomb, respecto de la resistencia al esfuerzo cortante de un material (s , *shear strength*), se puede escribir utilizando la convención de signos que se utiliza en este texto y para un análisis de esfuerzos finales (o totales), como se muestra en la ecuación (7-13). En la mecánica de suelos la convención de signos es exactamente la opuesta a la aquí utilizada.

$$s = \tau_f = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (7-13)$$

Al ángulo “ ϕ ” se le denomina en forma *clásica* como ángulo de fricción interna y también aparece representado en la figura que sigue. El parámetro “ c ” se denominó originalmente por Terzaghi como cohesión y es el valor de la ordenada al origen de la envolvente de falla. En la figura 7.18 se muestra esta ley lineal y simétrica, en el plano de Mohr. Modernamente se acepta que estos parámetros no pueden ser valores intrínsecos ni permanentes de este tipo de material, ya que el suelo no es un sólido, sino una estructura sólida porosa que puede contener agua y/o aire en sus huecos.

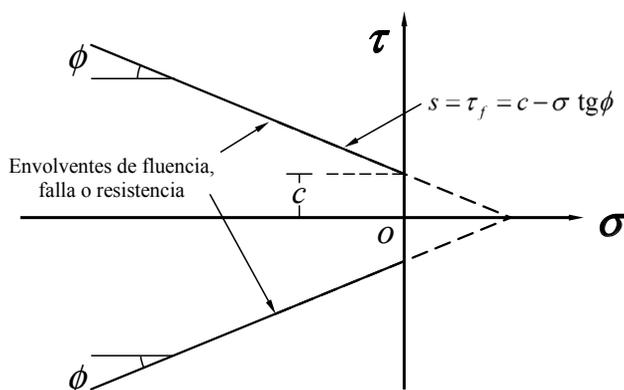


FIGURA 7.18. Ley de resistencia general del criterio de Mohr-Coulomb

En la mecánica de suelos, como rama de la ingeniería geotécnica, este tipo de envolvente es clásica de suelos “parcialmente saturados” o de suelos “secos cementados”. En un curso de mecánica de suelos se pueden ver estos conceptos, pero cambiando la convención de signos para los esfuerzos, donde al igual que en la ingeniería hidráulica, las compresiones son positivas y las tensiones, negativas. Regresando a la figura 7.18 podemos decir que, cuando una región de Mohr que representara a un cierto estado de esfuerzo se mostrara tocando a la

envolvente de resistencia, el material estaría fallando. Lo anterior implica que no puede existir para un material particular (en este caso para un suelo) un estado de esfuerzo que rebasara a la envolvente de resistencia (ya que antes el material habría perdido la capacidad de soportar esfuerzos adicionales).

En la figura 7.19 se muestra la envolvente simétrica de lo que en mecánica de suelos se define como la resistencia de un suelo fino saturado por agua, en la condición de una prueba donde no se permite la salida de esta, con envolvente de una resistencia constante y con un ángulo de fricción interna nulo. Esta forma de responder de un suelo fino saturado se asemeja mucho al comportamiento resistente que presenta un metal, aunque hay que aclarar que un metal puede resistir tensión en forma teóricamente permanente, mientras que un suelo, aunque puede resistir pequeñas tensiones bajo ciertas condiciones, no garantiza resistirlas en tiempos largos debido a la posibilidad de movilizar agua en los huecos de su estructura.

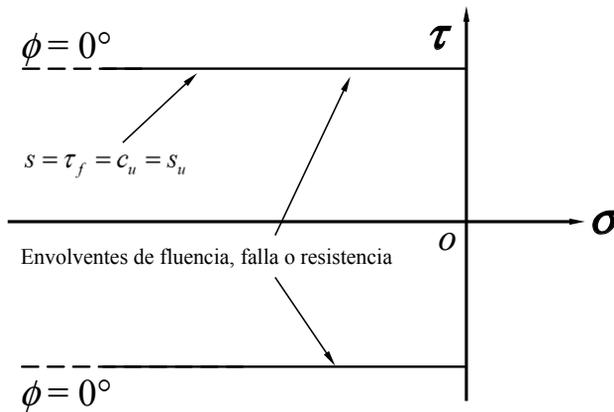


FIGURA 7.19. Envolventes de resistencia de un suelo fino saturado en condición no drenada

La ley de resistencia para este tipo de comportamiento en la falla, en un análisis de esfuerzos totales y finales (tomando en cuenta conceptos de mecánica de suelos), se considera con un valor constante, como se muestra en la ecuación (7-14).

$$s = \tau_f = c_u = s_u \quad (7-14)$$

La “*u*” como subíndice de la cohesión (*c*) o de la resistencia (*s*), deriva del inglés *undrained* (no drenado) como condición del suelo en la falla y antes de esta. En la figura 7.20 se puede ver una envolvente simétrica típica de suelos granulares (gravas y arenas) limpios de finos. Estos suelos tienen una alta permeabilidad y es por esto que su resistencia no se considera influida por la presencia del agua en su interior, ya que esta se puede mover muy rápidamente. Por esta misma razón se dice que el análisis de resistencia de este tipo de suelo se hace bajo el concepto de esfuerzos efectivos (sin cambio de la presión del agua o del aire dentro del suelo).

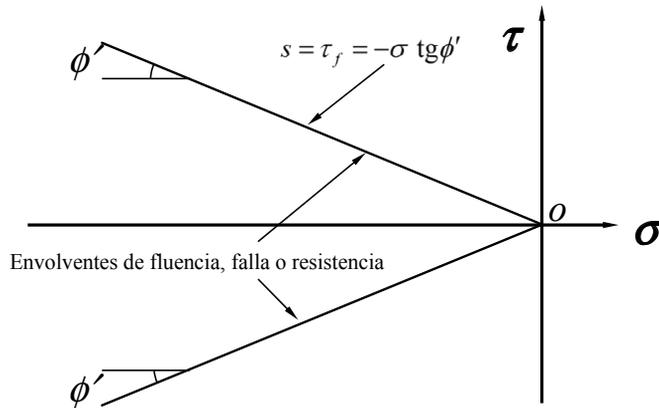


FIGURA 7.20. Envolventes típicas de suelos granulares limpios de partículas finas

La ley de resistencia para este tipo de comportamiento en la falla, en un análisis de esfuerzos efectivos, se evalúa con un único parámetro que es el ángulo de fricción interna del material granular (ϕ'). Como se puede deducir, a partir de la figura 7.20, cuando este tipo de suelo tiene un esfuerzo normal nulo (o un esfuerzo de confinamiento nulo), la resistencia es también nula (condición en el origen del plano de Mohr, para este tipo de material). La ecuación de la envolvente de resistencia para este tipo de suelos y para la convención de signos de este texto, se presenta en la ecuación (7-15).

$$s = \tau_f = -\sigma \operatorname{tg} \phi' \quad (7-15)$$

Observe que el ángulo de fricción interna asignado a este tipo de comportamiento, se presenta con un símbolo “prima” adicional. La razón de esto es puntualizar que este parámetro se obtiene de un análisis de resistencia en esfuerzos efectivos (la prueba se hace en condición de agua que drena antes de reportar un dato o que el suelo está seco y solo contiene aire).

7.5. Criterio de falla para rocas usando representación gráfica en el plano de Mohr

Una muestra de roca sana se puede partir en fragmentos menores y con estos labrar probetas para diferentes tipos de prueba. Las pruebas de falla más comunes para rocas son: la prueba de tensión simple (inconfínada), la prueba brasileña, la prueba de compresión simple (inconfínada), la prueba triaxial común (que se puede realizar con diferentes probetas, usando varios y diferentes confinamientos) y la prueba triaxial verdadera (con región de Mohr diferente a una única circunferencia visible). Con los resultados de estas pruebas se puede conformar (definir) una envolvente de falla o de resistencia que en rocas no es lineal, como se muestra en forma discontinua en la figura 7.21.

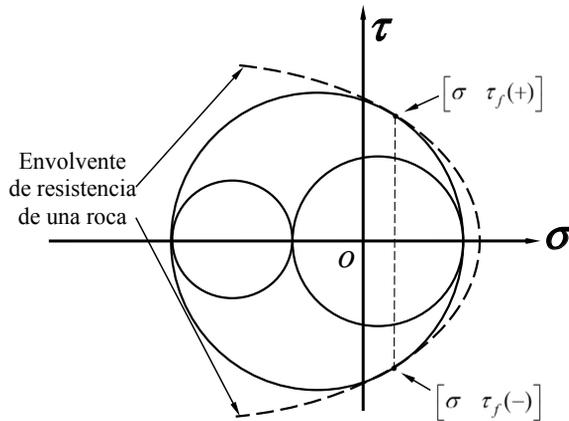


FIGURA 7.21. Envolvente de resistencia de una roca sana y su estado de esfuerzo en la falla

En esta figura se puede observar a un cierto estado de esfuerzo (región tridimensional) representado por tres circunferencias. Este tipo de estado de esfuerzo es típico de una prueba realizada en un equipo triaxial verdadero (donde se pueden aplicar tres esfuerzos principales diferentes). Observe que la región que representa al estado de esfuerzo toca a la envolvente de resistencia en dos puntos (uno con cortante positivo y otro con cortante negativo). Cada punto de contacto representa a un plano de falla, donde se resiente esta extrema condición.

Con las herramientas que se han presentado en este curso: ¿Se puede definir al versor de alguno de los planos que se encuentra en condición de falla? ¿Alguien puede decir cuáles deben ser los componentes de este versor en el espacio?

BIBLIOGRAFÍA

1

2

3

4

5

6

7

- Asaro, R. y Lubarda, V. *Mechanics of solids and materials*, First paperback edition, Cambridge University Press, New York, 2011
- De la Serna, D. *Introducción al comportamiento de los materiales*, Notas de su curso tomadas por Ricardo R. Padilla Velázquez, Facultad de Ingeniería, UNAM, sin publicar, 1984
- Fung, Y. C. *A first course in Continuum Mechanics*, Third Edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1994
- Levi, E. *Elementos de mecánica del medio continuo*, Limusa Noriega Editores, México, 1980
- Malvern, E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1997
- Mase, G. T., and Mase G. E. *Continuum Mechanics for engineers*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton, USA, 1999
- Oliver, X., y Agelet, C. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, Alfaomega-Ediciones UPC, México, 2004
- Padilla, R. *Notas en borrador del curso: Fundamentos de mecánica del medio continuo*. Sin editar, México, material que se actualiza cada año

Temas Selectos de Mecánica del Medio Continuo se publicó
en mayo de 2021 en la plataforma oficial de la Unidad de Apoyo
Editorial (UDAE) de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México,
Ciudad de México. C.P. 04510