FACULTAD DE INGENIERÍA
UNAM
INGENIERÍA GEOMÁTICA

M. EN I. ADOLFO REYES PIZANO

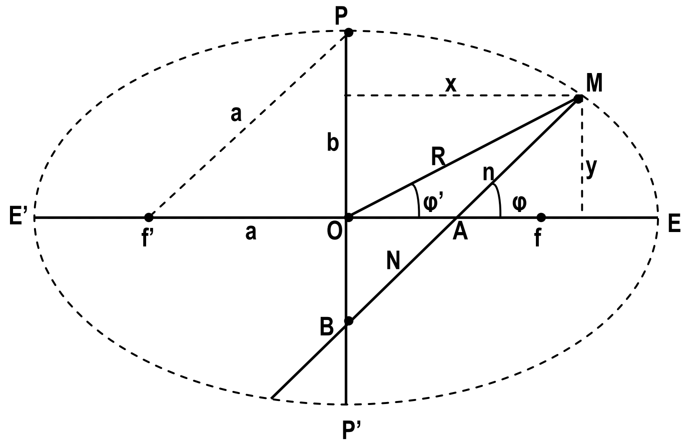
Elementos del elipsoide

Deducción matemática

Se presenta la deducción matemática de cada uno de los elementos del elipsoide

Contenido

DEDUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL ELIPSOIDE



MA = n
MB = N
R = radio geocéntrico
N = normal en el punto M
n = normal menor
φ = latitud geodésica
φ' = latitud geocéntrica

La tierra tiene forma de geoide por lo tanto requerimos de una figura matemática.
Los paralelos y el ecuador son círculos perfectos.
Los meridianos y los círculos verticales son elípticos(tienen forma de elipse).

ACHATAMIENTO:

Achatamiento
Aplanamiento
Compresión polar

$$\alpha = \frac{a-b}{b}$$

EXCENTRICIDAD:

$$e = \frac{\overline{Of'}}{a}$$

Pero $Of' = \sqrt{a^2 - b^2}$

sustituyendo en "e" $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

ECUACION DE LA ELIPSE MERIDIANA

De la ecuación de la excentricidad despejar b^2 $\quad b^2 = a^2(1 - e^2)\ldots(1)$

La ecuación de la elipse con centro en el origen: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ldots(2)$

Sustituyendo (1) en (2):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)}=1$$

Despejando y^2 Obtenemos:

LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE MERIDIANA

$$y^2=\left(a^2-x^2\right)\left(1-e^2\right)\ldots(3)$$

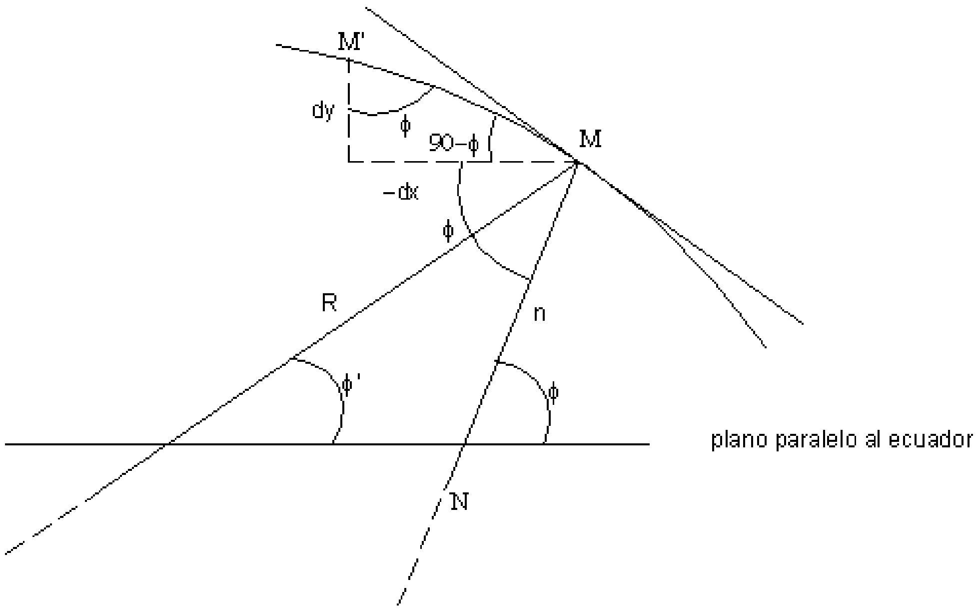
COORDENADAS CARTESIANAS DE M EN FUNCIÓN DE LA NORMAL MAYOR “N” Y NORMAL MENOR “N”

$$\left.\begin{aligned} sen\varphi &= \frac{y}{n} \\ y &= nsen\varphi\ldots(4) \\ \cos\varphi &= \frac{x}{N} \\ x &= N\cos\varphi\ldots(5) \end{aligned}\right\}\ \textbf{En función de } \varphi$$

$$\left.\begin{aligned} sen\varphi' &= \frac{y}{R} \\ y &= Rsen\varphi'\ldots(6) \\ \cos\varphi' &= \frac{x}{R} \\ x &= R\cos\varphi'\ldots(7) \end{aligned}\right\}\ \textbf{En función de } \varphi'$$

LATITUD GEOCENTRICA

Dividiendo (6) entre (7) $\frac{y}{x} = \tan\varphi' \ldots (6')$



ECUACIÓN DIFERENCIAL DE LA ELIPSE MERIDIANA

$$\tan\varphi = -\frac{dx}{dy} \ldots (8)$$

COORDENADAS CARTESIANAS

FINALMENTE LAS COORDENADAS CARTESIANAS SE OBTIENEN DESARROLLANDO LO SIGUIENTE

Desarrollamos la ecuación (3)

$$y^2 = (a^2 - x^2)(1 - e^2)$$
$$y^2 = a^2 - a^2e^2 - x^2 + e^2x^2$$

Diferenciando:

$$2ydy = -2xdx + 2e^2xdx$$

Obtenemos $-\frac{dx}{dy}$

$$-\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x\left(1-e^{2}\right)}\ldots(8')$$

Sustituyendo (8) en (8')

$$\tan\varphi=\frac{y}{x\left(1-e^{2}\right)}\ldots(9)$$

Despejamos "x" y "y" de la ecuación (9)

$$\left.\begin{aligned} y&=x\left(1-e^{2}\right)\tan\varphi \\ x&=\frac{y}{\left(1-e^{2}\right)\tan\varphi}\end{aligned}\right\}\qquad\ldots(10)$$

Cambiando (10),(4) y (5) tenemos:

$$y=N\cos\varphi\left(1-e^{2}\right)\tan\varphi\ldots(10')$$

$$y=N\left(1-e^{2}\right)sen\varphi\ldots(11)$$

$$x=\frac{nsen\varphi}{\left(1-e^{2}\right)\tan\varphi}$$

$$x=\frac{n\cos\varphi}{\left(1-e^{2}\right)}\ldots(12)$$

Nota: las ecuaciones (11) y (12) están en función de "N" y "n"

Por lo anterior falta conocer las normales "N" y "n"

*D*ETERMINACION DE LOS PARAMETROS "N" y "n"

Si en la ecuación (3) sustituimos (10') y (5), o sea, en donde aparece N

$$y^{2}=\left(a^{2}-x^{2}\right)\left(1-e^{2}\right)\ldots(3)$$

$$N^{2}\cos^{2}\varphi\left(1-e^{2}\right)^{2}\tan^{2}\varphi=\left(1-e^{2}\right)\left(a^{2}-N^{2}\cos^{2}\varphi\right)$$

Despejando N:

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 sen^2 \varphi\right)^{1/2}} \ldots (13) \qquad Normal\ mayor$$

Por otro lado de la expresión (10)

$$y = x\left(1 - e^2\right)\tan\varphi \ldots (10)$$

y las expresiones (4) y (5)

$$y = nsen\varphi \ldots (4)$$
$$x = N\cos\varphi \ldots (5)$$

Tenemos:

$$n\ sen\varphi = N\cos\varphi\left(1 - e^2\right)\tan\varphi$$
$$n = N\left(1 - e^2\right) \ldots (13')$$

Sustituyendo la normal N en (13')

$$n = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{\left(1 - e^2 sen^2 \varphi\right)^{1/2}} \ldots (14) \qquad Normal\ menor$$

Si hacemos $r = \left(1 - e^2 sen^2 \varphi\right)^{1/2} \ldots (15)$

Entonces

$$N = \frac{a}{r}$$
$$n = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{r}$$

Si φ = 0

N = a

$$n = \frac{b^2}{a}$$

Si φ = 90

$$N = \frac{a^2}{b}$$

n =b

TRANSFORMACIÓN DE LATITUD GEODÉSICA A LATITUD GEOCÉNTRICA

De (10)

$$y = x\left(1 - e^2\right)\tan\varphi$$

$$\frac{y}{x} = \left(1 - e^2\right)\tan\varphi$$

De (6')

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi'$$

$$\tan\varphi' = \left(1 - e^2\right)\tan\varphi \ldots (19)$$

Con estas ecuaciones se puede calcular: **φ n N x** y **φ'**