



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Modelación numérica de
tsunamis en aguas
profundas**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniera Geofísica

P R E S E N T A

Lilibeth Zaira Contreras Alvarado

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Leonardo Ramírez Guzmán



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2023

A mi familia, por su apoyo y amor incondicional.

A Remi y Picha por su compañía y cariño.

A mis profesores por inspirarme a seguir aprendiendo.

Agradecimientos

Después de muchos años de dedicación a mi crecimiento profesional, este proyecto representa la culminación de ese proceso que con tanto esfuerzo, me permitió alcanzar mis metas y cumplir muchos de mis sueños. Si bien me agradezco a mi misma por seguir adelante, este logro no hubiera sido posible sin el apoyo, motivación y enseñanzas de las instituciones y personas que me formaron profesionalmente y como individuo.

- Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, por darme la oportunidad de estudiar y brindarme las herramientas para crecer académica y personalmente. Al Instituto de Ingeniería, por el apoyo brindado y por darme la posibilidad de desarrollar este proyecto. Al Centro Nacional de Prevención de Desastres, al Mtro. Jonatan Arreola Manzano y al Ing. Emmanuel Ramírez Álvarez, por aceptarme para hacer mi servicio social, por todo su apoyo durante el proceso y por adentrarme en el estudio de tsunamis.
- A mi tutor, el Dr. Leonardo Ramírez Guzmán por su infinita paciencia, apoyo y dedicación con este proyecto. Agradezco sus enseñanzas y que me motivara a seguir estudiando.
- A mi familia, mis abuelos: Gilberto y Juanita quienes siempre apoyaron mi formación profesional. Agradezco a mi mamá, mi mejor amiga, por todo su esfuerzo, dedicación y paciencia, y a mis mascotas: Remi y Picha por su sincera compañía y amor.
- A mis amigos de la facultad, mi segunda familia, Sebastián, Kevin y Diego, por tantas aventuras y experiencias que vivimos juntos. Gracias por su amistad.
- A mis compañeros del Instituto, Miguel, Luis, Iván, Daniela, Héctor y Fernando, por amenizar mi tiempo durante mi proyecto de tesis.

Resumen

En este proyecto se presenta la comparación de dos métodos de simulación numérica de tsunamis. El primero de ellos consiste en la implementación de las denominadas ecuaciones de aguas someras, cuya aplicación radica en simular la generación, propagación e impacto de tsunami a partir de la acción de una fuente tsunamigénica que actúa de manera directa sobre el modelo. Esta perturbación inicial, provoca el traslado del desplazamiento del fondo marino sobre la columna de agua, considerando un comportamiento rígido del material. El segundo método consiste en la propuesta de este proyecto, la cual implica la aplicación del concepto de ecuaciones integrales en la simulación de tsunamis en aguas profundas. En este método se considera la interacción cinemática que ocurre una vez activada la fuente y la propagación de la onda a través del medio.

Resaltado el funcionamiento y la teoría que sustenta ambos métodos, se muestra su aplicación. Para el caso de aguas someras se utiliza el programa *Geoclaw* y para el método de ecuaciones integrales se desarrolló un código de programación en *Matlab*. Para ambos, se destaca el uso de los mismos modelos batimétricos y fuente tsunamigénica, permitiendo aplicar las mismas condiciones sobre el problema. Como parte de los resultados de este proyecto, se expone una primera comparación que demuestra el funcionamiento del método de ecuaciones integrales respecto a una solución analítica. En el problema de referencia se calculan las presiones hidrodinámicas sobre una pared vertical, dado un movimiento horizontal. Un segundo ejercicio consistente en la evaluación de las alturas del tsunami obtenidas con ambos métodos, bajo la aplicación de la misma fuente tsunamigénica y el análisis de su propagación. Resaltadas las diferencias, se concluye con la discusión de estos resultados, considerando las ventajas y desventajas de los dos métodos empleados .

Abstract

This project presents a comparison between two numerical simulation methods for tsunamis. The first method involves implementing the shallow water equations, which simulate the generation, propagation, and impact of tsunamis resulting from the action of a tsunamigenic source that directly affects the model. This initial perturbation causes the seafloor displacement to be transferred to the water column, considering the rigid behavior of the material. The second method proposed in this project involves the application of integral equations in the simulation of tsunamis in deep waters. This method considers the kinematic interaction that occurs once the source is activated and the wave propagation through the medium.

After explaining the theory and operation of both methods, their practical application is demonstrated. The Geoclaw program is used for the shallow water simulation, while a Matlab programming code was developed for the integral equations method. Both methods employ the same bathymetric models and tsunamigenic source, ensuring consistent conditions for comparison. As part of the project's results, a first comparison is presented, demonstrating the performance of the integral equations method with an analytical solution. In the reference problem, hydrodynamic pressures on a vertical wall are calculated, given a horizontal motion. A second exercise consisted of evaluating the tsunami heights obtained using both methods, under the application of the same tsunami-generating source and the analysis of their propagation. Highlighting the differences, the discussion of these results concludes, taking into account the advantages and disadvantages of the two employed approaches.

Índice general

Resumen	I
Lista de figuras	v
Lista de tablas	IX
1 Introducción	1
2 Antecedentes	4
§2.1 Tsunamis en el contexto regional y local	4
§2.2 Características de un tsunami	10
§2.3 Estudio de tsunamis en Geoclaw	14
§2.4 Problemática	15
§2.4.1 Justificación	16
§2.4.2 Hipótesis	16
§2.4.3 Objetivos	16
3 Fundamentos teóricos	17
§3.1 Método de ecuaciones de aguas someras	17
§3.2 Método de ecuaciones integrales	21
§3.2.1 Formulación del método	21
§3.2.2 Análisis de capa simple	22
§3.2.3 Definición de la función de Green	24
§3.2.4 Ejemplo de aplicación	25
§3.3 Aproximaciones del método	28
§3.3.1 Método de imágenes	28
§3.3.2 Presión cero en superficie libre	29

§3.3.3	Acción de la gravedad sobre el modelo	30
§3.4	Desplazamiento del fondo marino	32
§3.5	Teorema de muestreo	34
4	Datos y metodología	36
§4.1	Definición del modelo en <i>Geoclaw</i>	36
§4.1.1	Modelo batimétrico	37
§4.1.2	Características de la fuente	39
§4.1.3	Definición de los parámetros de simulación	40
§4.1.4	Caso de estudio	41
§4.2	Definición del modelo para ecuaciones integrales	43
§4.2.1	Parámetros del modelo	43
§4.2.2	Características de la fuente y desplazamiento del fondo marino . . .	44
§4.2.3	Construcción del sistema de ecuaciones integrales	47
§4.2.4	Presión y desplazamiento vertical	53
§4.2.5	Caso de estudio	53
5	Resultados	55
§5.1	Análisis de presiones en contacto lateral	55
§5.2	Propagación de la onda en el modelo	58
§5.3	Altura de tsunami obtenida en <i>Geoclaw</i>	61
§5.4	Altura máxima obtenida con el método de ecuaciones integrales	66
§5.5	Comparación de métodos	71
6	Conclusiones y comentarios finales	72
A	Repositorio	76
B	Hidrodinámica y solución de <i>Westergaard</i>	77
	Bibliografía	80

Índice de figuras

2.1	<i>Mapa de fuentes tsunamigénicas. Se observa la ubicación de sismos, erupciones volcánicas, deslizamientos y otros eventos que generaron tsunamis desde 1610 hasta 2022. Modificado de UNESCO/IOC et al., 2022.</i>	5
2.2	<i>Mapa de zonas receptoras de tsunamis y actividad tectónica en México (Ramírez-Álvarez, 2019; Salazar-Monroy, 2022). Se muestran los mecanismos focales de los eventos más significativos en el estudio de tsunamis en el país, así como las alturas de tsunamis lejanos.</i>	8
2.3	<i>Características de las ondas de tsunamis. (arriba) Velocidad de fase (líneas sólidas) y velocidad de grupo (líneas punteadas) distribuidas en un océano de profundidades de 100 m a 6 km. (abajo) Longitud de onda asociada al periodo. En zonas sombreadas se muestra el periodo de las ondas de tsunami y de la marea. Modificado de Ward, 2010.</i>	12
2.4	<i>Esquema de movimiento de la partícula de una onda. Se presentan las características de movimiento de las ondas de tsunami debido a efectos de dispersión a profundidad. Modificado de Ward, 2010.</i>	13
3.1	<i>Esquema de aguas someras. Se presentan los elementos que definen a las EAS.</i>	20
3.2	<i>Dominio delimitado Ω y dominio abierto $\bar{\Omega}$ para el análisis de capa simple.</i>	22
3.3	<i>Gráfica de funciones de Bessel de primer y segundo orden con distancia r como argumento. A menor distancia r, la función de Bessel de segundo orden tiende a infinito.</i>	25
3.4	<i>Condiciones iniciales propuestas para un problema simple. Los segmentos representan las contribuciones que complementan los contactos fluido-sólido y en superficie con los triángulos rojos.</i>	26

3.5	<i>Esquema representativo del método de imágenes. Se muestran los segmentos que componen los contactos en el modelo real y su imagen con ayuda de las flechas amarillas, y el contacto entre los modelos con los puntos negros, sobre los cuales se obtiene la condición de presión cero en superficie.</i>	29
3.6	<i>Esquema representativo con condición de $P = 0$ en la superficie libre. Las flechas amarillas señalan los segmentos que componen al modelo, se destacan las regiones Γ_{AC} y Γ_{AL} como los contactos fluido-sólido y superficie, respectivamente.</i>	30
3.7	<i>Esquema de desplazamiento de campo (a) lejano y (b) cercano.</i>	33
3.8	<i>Muestreo con tren de impulsos en el dominio del tiempo. Modificada de Oppenheim et al., 1997.</i>	34
3.9	<i>Efecto que tiene el muestreo aplicado en el dominio del tiempo sobre el dominio de la frecuencia.</i>	35
4.1	<i>Modelo batimétrico definido para la simulación en Geoclaw. A la mitad de la superficie del modelo se propone una línea de receptores para registrar la evolución de la onda.</i>	37
4.2	<i>Creación del archivo batimétrico propuesto para la simulación correspondiente al modelo 1. a) Raster del modelo con ubicación de estaciones de control. Los puntos amarillos representan las estaciones de registro. b) Primeras líneas del archivo tipo Topo3.</i>	38
4.3	<i>Deslizamiento máximo obtenido con la aplicación del modelo de Okada implementado en el programa Geoclaw. Se muestra la vista de planta (a) y su sección transversal (b) aplicada en el método de ecuaciones integrales. . . .</i>	40
4.4	<i>Características del segundo modelo propuesto. a) Mapa de raster batimétrico, simulando un mar profundo y costa. b) Esquema representativo de la forma del modelo.</i>	42
4.5	<i>Esquema de modelo a resolver con el método de ecuaciones integrales. . . .</i>	43

4.6	<i>Esquema representativo de los desplazamientos impuestos en el fondo del modelo. a) El desplazamiento sobre el modelo se obtiene del producto punto entre vectores normales y desplazamiento horizontal. b) Se obtiene el desplazamiento vertical sobre una porción del modelo.</i>	45
4.7	<i>Definición de función de campo cercano. Se observa el desplazamiento obtenido con el modelo de Okada y la función rampa en el dominio temporal y de las frecuencias, así como su ubicación sobre el modelo.</i>	45
4.8	<i>Diagrama de flujo del cálculo de desplazamiento vertical usando la función de Geoclaw.</i>	46
4.9	<i>Definición de segmentos para los métodos de imágenes (a) y con aproximaciones directas en superficie libre $P = 0$ y gravedad (b).</i>	47
4.10	<i>Diagrama de flujo de procedimiento implementado en el programa de MATLAB para el método de ecuaciones integrales.</i>	48
4.11	<i>Diagrama de flujo de la solución del sistema de ecuaciones utilizando el método de imágenes.</i>	50
4.12	<i>Diagrama de flujo de solución del sistema de ecuaciones con condición $P = 0$ en superficie.</i>	51
4.13	<i>Diagrama de flujo de solución del sistema de ecuaciones con condición de gravedad en superficie.</i>	52
4.14	<i>Segundo modelo propuesto para la aplicación del método de ecuaciones integrales.</i>	53
5.1	<i>Comparación de presión obtenida con método de imágenes y solución analítica</i>	56
5.2	<i>Comparación de presión obtenida con la aproximación $P = 0$ aplicada directamente en la superficie, y solución analítica.</i>	57
5.3	<i>Comparación de presión obtenida con la condición de gravedad aplicada al modelo, y solución analítica sin gravedad.</i>	57
5.4	<i>Ubicación y definición de fuente tsunamigénica para el análisis de propagación de la onda.</i>	59
5.5	<i>Propagación de la onda después de la perturbación en el medio.</i>	60
5.6	<i>Propagación de la onda en superficie.</i>	61

5.7	<i>Simulación de propagación del tsunami de los modelos 1 (columna de la izquierda) y 2 (columna de la derecha). Los puntos negros representan las estaciones de registro en superficie.</i>	62
5.8	<i>Altura de tsunami obtenida para el modelo 1</i>	64
5.9	<i>Propagación de la onda para el modelo batimétrico 1</i>	64
5.10	<i>Altura de tsunami obtenida para el modelo 2</i>	65
5.11	<i>Propagación de la onda para el modelo batimétrico 2</i>	65
5.12	<i>Propagación en superficie con registros de desplazamiento, método de imágenes.</i>	66
5.13	<i>Propagación en superficie con registros de desplazamiento, $P = 0$</i>	67
5.14	<i>Propagación en superficie con registros de desplazamiento, condición de gravedad</i>	67
5.15	<i>Altura máxima registrada para el modelo batimétrico 1.</i>	68
5.16	<i>Propagación en superficie en el modelo 2. Se presentan los registros de desplazamiento en superficie, utilizando el método de ecuaciones integrales. . .</i>	69
5.17	<i>Altura de tsunami obtenida para el modelo 2. Se destaca la altura máxima registrada y la definición en aguas poco profundas.</i>	70
B.1	<i>Diagrama de presa rígida, con cortina vertical y extensión horizontal infinita.</i>	78

Índice de tablas

4.1	<i>Parámetros de la falla</i>	39
4.2	<i>Descripción de los parámetros establecidos para la simulación del modelo 1 en Geoclaw.</i>	41
4.3	<i>Parámetros del modelo con ecuaciones integrales.</i>	43
5.1	<i>Porcentaje de ajuste de las aproximaciones propuestas con el método de ecuaciones integrales, respecto a la solución analítica.</i>	58

Capítulo 1

Introducción

Los tsunamis, si bien son eventos poco comunes, pueden tener efectos devastadores. La costa del Pacífico es considerada como la región con mayor potencial de generar tsunamis debido a la alta actividad sísmica y volcánica asociada al Cinturón de Fuego y a la interacción de las placas tectónicas. Por su ubicación sobre el Pacífico, la costa oeste de México se encuentra expuesta a este fenómeno. En el país, se tiene registro del arribo de tsunamis generados por los sismos de Chile en 1960 y Alaska en 1964. Además de la recepción de tsunamis lejanos, también se tiene registro de tsunamis locales originados en el límite entre la placa de Cocos y la placa de Norteamérica, que han tenido efectos negativos sobre las costas mexicanas. En consecuencia, la costa del Pacífico mexicano es vulnerable a este fenómeno dada la presencia de puertos industriales, la actividad turística y las zonas costeras pobladas densamente. Por esta razón, el estudio de tsunamis es de importancia vital para prevenir los daños que estos puedan ocasionar.

En este proyecto, se aborda el estudio de tsunamis mediante la modelación numérica del fenómeno como una alternativa para conocer su comportamiento. En su implementación, se expone la comparación de la aplicación de dos métodos de modelación. Con este propósito, el proyecto se divide en cinco secciones principales:

- El capítulo 2 contiene los antecedentes del estudio de tsunamis, sus características, los eventos que han generado mayor impacto en comunidades costeras, así como la importancia del desarrollo de técnicas de simulación que permitan generar planes de acción ante esta amenaza. Establecida la problemática a abordar, se definen la hipótesis y los objetivos a alcanzar con este trabajo.
- En el capítulo 3, se presentan los fundamentos teóricos que sustentan los métodos de simulación a implementar. Se expone un panorama general de la definición del método de ecuaciones de aguas someras (EAS), y el desarrollo del método propuesto con la aplicación de ecuaciones integrales. Una vez presentada la teoría detrás de ambos métodos, se discute la implementación del método de ecuaciones integrales comenzando por el caso más sencillo para establecer las condiciones de frontera hasta aumentar la complejidad con un caso que asemeje las condiciones reales de un tsunami. La primera aproximación, implica utilizar el método de imágenes con el propósito de cumplir las condiciones en la frontera fluido-superficie libre. Verificado el funcionamiento del método, se aplica directamente la condición de frontera sobre el contacto en superficie. Finalmente, la última aproximación consiste en agregar la acción de la gravedad sobre el modelo establecido, simulando las condiciones reales a las que está sujeto el fenómeno.
- El capítulo 4 describe a detalle la aplicación de ambos métodos de simulación. En la primera parte se definen los parámetros de simulación del programa *Geoclaw*, usado para mostrar la implementación y funcionamiento del método de EAS. Entre los parámetros de simulación, se destacan la generación del archivo de batimetría del modelo, la definición de la fuente tsunamigénica, los tiempos de simulación y los niveles de refinamiento adaptativo de la malla. Por otro lado, en el método de ecuaciones integrales, se muestra la construcción del modelo bidimensional, la definición de las fuentes a implementar y la construcción del sistema de ecuaciones a resolver para las tres aproximaciones de condiciones de frontera expuestas en el capítulo previo.

- En el capítulo 5, se presentan los resultados de este proyecto. Como punto de partida, se muestra la comparación del método propuesto con una solución analítica enfocada al cálculo de presiones sobre una pared vertical, dado un movimiento horizontal. Con esta comparación, se verifica el funcionamiento de la implementación del método de ecuaciones integrales y el ajuste de los resultados respecto a las presiones obtenidas con la solución analítica. La siguiente sección consiste en el análisis de la propagación de la onda desde el fondo del modelo hasta su arribo e interacción en superficie. Con los resultados mencionados se garantiza que el método permite describir la evolución de la onda una vez que ocurre la perturbación inicial. Comprobado el funcionamiento de la implementación del método, la última sección contiene los resultados principales del proyecto, los cuales consisten en la comparación de las alturas de tsunamis obtenidas con el método de EAS y el método de ecuaciones integrales. De estos resultados, se resalta el contraste entre la aplicación de ambos métodos y las diferencias observadas.
- Finalmente, el capítulo 6 consiste en los comentarios finales del proyecto, destacando los objetivos alcanzados, las diferencias entre ambos métodos, las ventajas y desventajas que estos presentan, así como los factores a tener en cuenta en proyectos futuros.

Capítulo 2

Antecedentes

Los tsunamis representan una amenaza para las comunidades costeras, ya que su ocurrencia, combinada con la vulnerabilidad de las edificaciones e infraestructuras, ha resultado en la pérdida de miles de vidas y daños materiales. A continuación, se presenta un panorama general acerca de la importancia del estudio de tsunamis en México y el mundo. Se mencionan algunos de los eventos que han generado gran impacto en costas internacionales y en el Pacífico mexicano, provocando la muerte de al menos 600,000 personas, globalmente y a lo largo de los últimos 400 años (COI, 2014). Por otro lado, se destaca la relevancia del tema en la estimación de peligro y riesgo por este fenómeno. Adicionalmente, se introducen los conceptos que permiten describir a los tsunamis y a las fuentes que los generan, así como el enfoque con el que comúnmente se estudia al fenómeno y sus principales inconvenientes.

2.1. Tsunamis en el contexto regional y local

Los tsunamis son fenómenos naturales que son poco comunes; sin embargo, a lo largo de la historia se han registrado una serie de tsunamis catastróficos que provocaron un gran impacto en comunidades costeras. Las características tectónicas presentes en el planeta favorecen la generación de estos eventos, principalmente a lo largo del denominado Cinturón de Fuego del Pacífico. En la Figura 2.1 se presentan los eventos geológicos que han generado tsunamis en los últimos 400 años, así como su impacto sobre la costa.

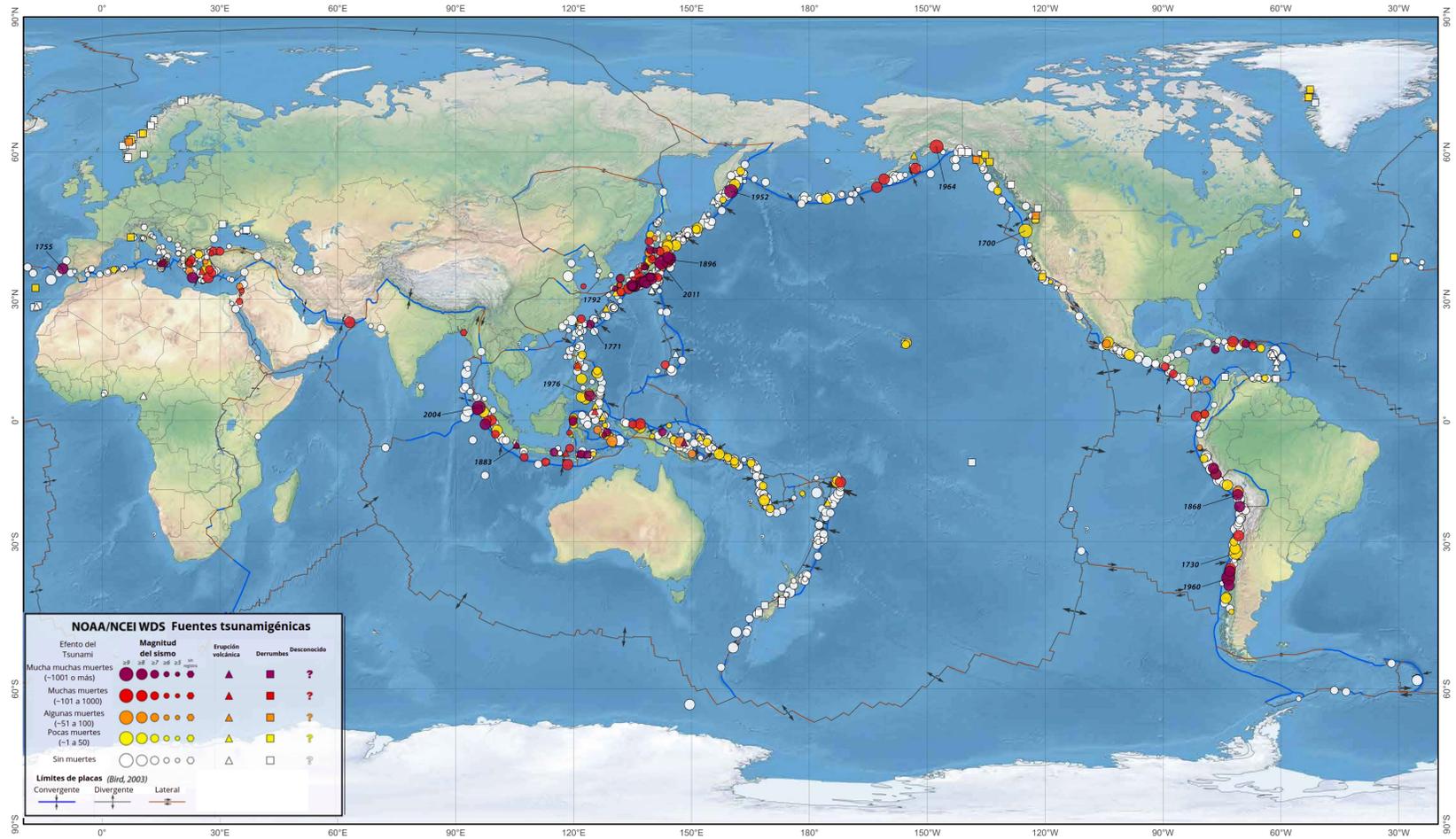


Figura 2.1: Mapa de fuentes tsunamigénicas. Se observa la ubicación de sismos, erupciones volcánicas, deslizamientos y otros eventos que generaron tsunamis desde 1610 hasta 2022. Modificado de UNESCO/IOC et al., 2022.

La pérdida de vidas y los daños materiales ocasionados por los tsunamis son la razón fundamental para estudiarlos, y buscar formas para mitigar los efectos que causan al llegar a tierra. Una de las acciones tomadas para su prevención, fue la creación del Centro Internacional de Información sobre Tsunamis (ITIC, por sus siglas en inglés) en 1965, en respuesta al tsunami de Chile de 1960 y Alaska 1964 (COI, 2019). Además del *ITIC*, se aceleró el estudio de este tema y se comenzaron a implementar sistemas de alertamiento por tsunami.

Con el objetivo de contribuir al estudio de este fenómeno, en 1990 comenzó la operación de boyas de detección de tsunamis en océano profundo, favoreciendo al desarrollo del estudio de su propagación, cuyos resultados culminaron en sistemas de alertamiento. Adicionalmente, diversos grupos comenzaron investigaciones sobre paleotsunamis con el objetivo de ampliar el registro histórico y mejorar la evaluación de riesgo en estudios futuros (UNESCO/IOC et al., 2022). Como parte de los avances, se comenzaron a implementar modelos numéricos que permitieron describir superficialmente el impacto de inundación por tsunamis (Satake, 1994; Titov et al., 1997). A pesar de esos avances, fue a partir del tsunami de Sumatra de 2004 que el estudio del fenómeno ganó mayor relevancia. Después de lo acontecido en Sumatra, el entendimiento del comportamiento de las ondas de tsunami mejoró, y con ello la capacidad de disminuir las pérdidas que estos eventos ocasionan. Además, la implementación de modelos numéricos cobró importancia, permitiendo aplicarlos en el análisis de propagación del tsunami en mar abierto y su arribo a la costa.

El tsunami de 2004 en Indonesia representó un parteaguas en la modelación numérica de tsunamis debido a las investigaciones que surgieron tras el evento y los estudios de simulación (Arcas et al., 2006; Borrero et al., 2006). Dada la relevancia del estudio de tsunamis, el interés por este fenómeno ha crecido y se han desarrollado nuevos enfoques para describir la propagación de las ondas. De esta manera, se han adaptado conceptos hidrodinámicos utilizados con otros propósitos en este ámbito, e incluso aplicándolos en los sistemas de alertamiento (COI, 2014). Sin duda, los avances que se han obtenido hasta ahora con el propósito de prevenir catástrofes han brindado beneficios, como la mejora de las estimaciones del comportamiento e impacto de un tsunami para el pronóstico y advertencia en tiempo real (Sugawara, 2021).

En este contexto, se resalta que el estudio de este fenómeno surgió por la necesidad de disminuir los riesgos asociados. Conociendo las fuentes que generaron en su mayoría a los tsunamis más catastróficos en la historia de la humanidad y la actividad sísmica predominante en el mundo que hace a las costas susceptibles al fenómeno (Figura 2.1), es crucial continuar con el estudio y desarrollo intelectual en el tema, con el objetivo de crear una cultura de prevención que sea capaz de reducir las pérdidas humanas y materiales mediante la aplicación de planes de acción.

La generación de pronósticos de peligro por tsunami representa una de las contribuciones más relevantes para el estudio del fenómeno. Los pronósticos, generalmente se desarrollan con un enfoque probabilístico de estimaciones de altura máxima del tsunami y el área de inundación sobre una zona de interés. La importancia del análisis de escenarios en los que se sustentan los pronósticos mencionados, radica en la falta de información sobre el fenómeno, siendo la modelación una alternativa favorable para estudiar eventos pasados y simular eventos potencialmente peligrosos.

Los estudios de modelación han utilizado enfoques matemáticos distintos con el objetivo de analizar a la fuente tsunamigénica y el impacto de tsunami en la costa. Además de los enfoques orientados a la modelación, la ubicación y características geológicas son cruciales en las simulaciones de tsunami. En las estimaciones de peligro se destaca el análisis de eventos pasados que han afectado directamente al país del estudio en cuestión, tales como las investigaciones de Sugawara (2021), Wei et al. (2013) y Dominey-Howes et al. (2011), en donde se resaltan las características geológicas que llevan a considerar a la zona como susceptible de sufrir el impacto de este fenómeno.

La mayoría de los estudios de simulación se aplican sobre las costas adyacentes al cinturón de fuego del Pacífico debido a su alta actividad sísmica y a los eventos que han ocurrido (Figura 2.1). En el caso de México, su ubicación y geología lo hacen susceptible a este tipo de fenómenos debido a que forma parte del cinturón mencionado y a su alta actividad sísmica, caracterizada por la interacción de cinco placas litosféricas (Figura 2.2). Aunque no es un fenómeno común en el país, se tiene registro del arribo de tsunamis en la costa mexicana tales como el sismo de Chile de 1960, que llegó a las costas de Baja California y Guerrero con alturas de tsunami entre 1 y 2 metros, y el sismo de Alaska de 1964, para el que se registró una altura máxima de 2.5 metros en Baja California. Además de estar

expuesto a tsunamis lejanos, en el país también se tiene registro de eventos generadores de tsunamis.

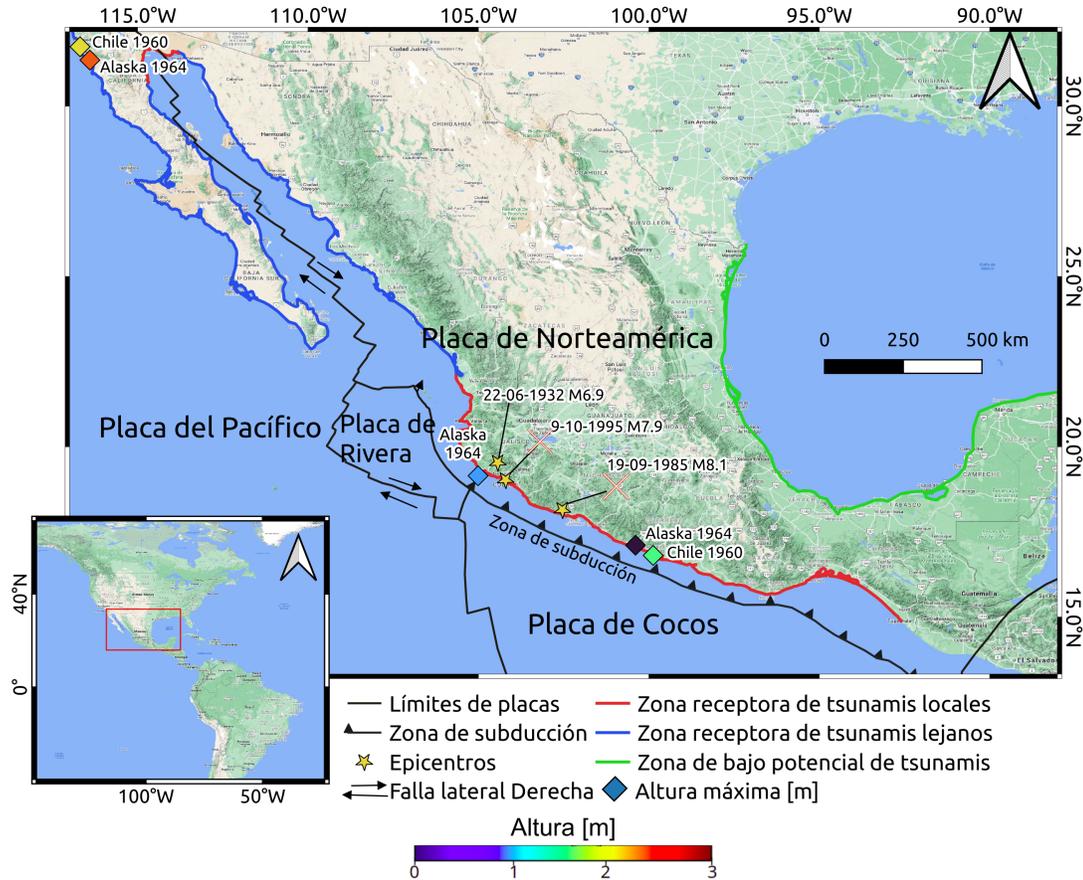


Figura 2.2: Mapa de zonas receptoras de tsunamis y actividad tectónica en México (Ramírez-Álvarez, 2019; Salazar-Monroy, 2022). Se muestran los mecanismos focales de los eventos más significativos en el estudio de tsunamis en el país, así como las alturas de tsunamis lejanos.

Localmente, la zona del Pacífico mexicano es en donde se ha registrado la mayor cantidad de tsunamis causados por fuentes tanto cercanas como lejanas. Un ejemplo es la réplica del sismo del 3 de junio de 1932 en Colima, ocurrida el 22 de junio del mismo año, la cual tuvo una magnitud M_s 6.9 que generó un tsunami con alturas de 9 a 10 m en la costa de Cuyutlán. Las alturas registradas debidas a la réplica, fueron mayores que las generadas por el sismo principal (Farreras et al., 2021; Okal et al., 2011; Singh et al., 1998; Singh et al., 1985). Otro evento relevante es el sismo de magnitud M_w 8.1 del 19 de septiembre de 1985, el cual provocó alturas de tsunami de 3 m (Farreras et al., 2007; Goguitchaichvili

et al., 2013; Hakuno et al., 1986). Finalmente, el sismo de magnitud Mw 8 del 9 de octubre de 1995, en el que se reportaron alturas de tsunami de hasta 5 metros (Mendoza et al., 1999; Mori et al., 2017 y Ortiz et al., 2000a).

Aunque se han presentado distintos eventos a lo largo de la costa del Pacífico, los registros de tsunamis en el país no son suficientes. El motivo se debe a la falta de redes mareográficas que no fueron habilitadas hasta después de 1952. Posterior a esa fecha, los registros tienen datos incompletos y un periodo de años sin registro (Farreras et al., 2021). Debido a esta falta de información, el estudio de modelación de tsunamis representa una alternativa para conocer el comportamiento y evolución de los eventos que ocurrieron en el pasado. Además, permite estimar el peligro que representaría un tsunami y evaluar el riesgo en las zonas costeras.

Ante estos hechos, existen dos maneras principales de evaluar los peligros vinculados a tsunamis:

- Evaluación determinista, en donde se estima la magnitud del impacto del tsunami asociada a un evento en particular.
- Evaluación probabilista o *PTHA* por sus siglas en inglés (*Probabilistic Tsunami Hazard Assessment*), en la que se obtiene la probabilidad de que un tsunami exceda el impacto esperado dentro de un periodo de tiempo definido y en una zona establecida.

Este tipo de evaluaciones, generalmente se abordan mediante la aproximación de las denominadas ecuaciones de aguas someras (EAS), que representan un modelo hidrodinámico en el que se considera una capa de fluido sobre una base rígida (González et al., 2012). En estos estudios, se considera igualmente al fluido como una capa rígida sobre la que se aplica directamente la deformación inicial. La implementación de estas ecuaciones se explica de manera general en Goto et al. (1997).

Algunos ejemplos de su aplicación son el estudio de Ortiz et al. (2000b), en el que se estiman áreas de ruptura mediante una comparación de alturas de tsunami simuladas y alturas registradas. Un caso más de su aplicación es el estudio de Farreras et al. de 2007 en donde se obtuvieron mapas de inundación y estimación de alturas de tsunami para varios puertos y ciudades costeras del Pacífico mexicano. Otro ejemplo de su implementación,

es el modelo sintetizador de tsunamis desarrollado por González et al. (2012), diseñado para una fuente tsunamigénica de tipo intraplaca y cuyos resultados fueron probados para el sismo del 9 de octubre de 1995. Aplicado en el mismo evento de 1995, en el estudio de Mori et al. (2017) se emplea un método estocástico de simulación con ayuda de la implementación de Goto et al. (1997). Finalmente, otros casos de aplicación se muestran en los estudios de Okal et al. (2011) y Ortiz et al. (2000a).

Dada la cantidad de investigaciones, es posible notar la relevancia del tema en la actualidad y los distintos enfoques utilizados para estimar el peligro y los riesgos que representa un tsunami en las costas de nuestro país. Si bien ahora existe un avance en el estudio del fenómeno, aún queda un camino largo para entender la severidad de estos eventos y para enfatizar la necesidad de su estudio.

Con el objetivo de entender la aplicación de los modelos de simulación, a continuación se presentan las características generales de un tsunami, así como las propiedades físicas que describen su propagación.

2.2. Características de un tsunami

Un tsunami involucra un conjunto de ondas que se producen debido a un desplazamiento en la columna de agua y que posteriormente son impulsadas por la gravedad. Si bien su descripción se asimila a las olas que comúnmente se observan en las playas, las ondas de tsunami se caracterizan por tener longitudes de onda y periodos sumamente grandes (Ward, 2010). Contrario al origen de las mareas, un tsunami se genera debido a una perturbación instantánea que sucede a gran escala en una masa de agua.

Los tsunamis suelen clasificarse según la fuente que los genere y la distancia de generación y recepción del mismo. Dentro de la primera clasificación, se encuentran los sismos asociados a zonas de subducción. Algunos ejemplos de sismos tsunamigénicos son los ocurridos en Nicaragua en 1992, Indonesia en 2004 y Japón en 2011, por mencionar algunos. Otras fuentes tsunamigénicas son las erupciones volcánicas como la sucedida en 2022 en las Islas Tonga al sur del Pacífico. La erupción del volcán submarino Hunga Tonga–Hunga Ha’apai provocó un tsunami que alcanzó playas mexicanas con alturas considerables (Ramírez-Herrera et al., 2022). Por otro lado, los deslizamientos son también fuentes generadoras

de tsunamis. Un ejemplo de esto es la erupción del Monte Santa Helena; cuyo colapso del edificio volcánico provocó un tsunami en el Lago *Spirit* en Washington en 1980. Por último, la fuente tsunamigénica menos común es el impacto de meteoritos.

Respecto a la clasificación por distancia de generación y recepción, se clasifican en tres principales:

- Los tsunamis de campo lejano (teletsunami), que son generados por una fuente distante, a más de 1000 km o 3 horas de tiempo de viaje de distancia (COI, 2019). Estos empiezan como tsunamis locales que tienen la energía suficiente para propagarse por todo el océano. El teletsunami considerado como el más destructivo es el ocurrido en Chile el 22 de mayo de 1960, registrado en costas mexicanas (Farreras et al., 2021)(Figura 2.2).
- Los tsunamis regionales se ubican a un máximo de 1000 km de la fuente generadora o entre 1-3 horas de tiempo de arribo de la onda (COI, 2019). Un ejemplo es el tsunami ocurrido en 1982 en el mar de Japón que causó daños en las costas de Corea y Rusia.
- Los tsunamis locales, que provienen de una fuente cercana y sus efectos actúan a menos de un radio de 200 km desde su origen. Según la UNESCO, este tipo de tsunamis son los que han provocado al menos el 90 % de las muertes por este fenómeno.

Por otro lado, dado que las características físicas de las ondas de tsunami cambian significativamente durante su propagación, el estudio del fenómeno se puede dividir en tres etapas principales: (1) la generación que es desde que se perturba a la columna de agua, (2) la propagación que representa su viaje desde aguas profundas cerca del epicentro hacia el litoral, y (3) el impacto/inundación que provoque el tsunami en la costa (González et al., 2012). El análisis de cada una de las etapas es de gran importancia para la definición de peligro por tsunami, en este proyecto, se hará énfasis en las etapas de generación y propagación.

Matemáticamente, el proceso de evolución y propagación de un tsunami incluye los conceptos de longitud de onda, periodo, velocidad de fase y de grupo. Dada la relación entre amplitud y longitud de onda, la generación de tsunamis se considera dentro de la teoría lineal de ondas. La manera en la que estos se relacionan entre sí, se muestra en la Figura 2.3.

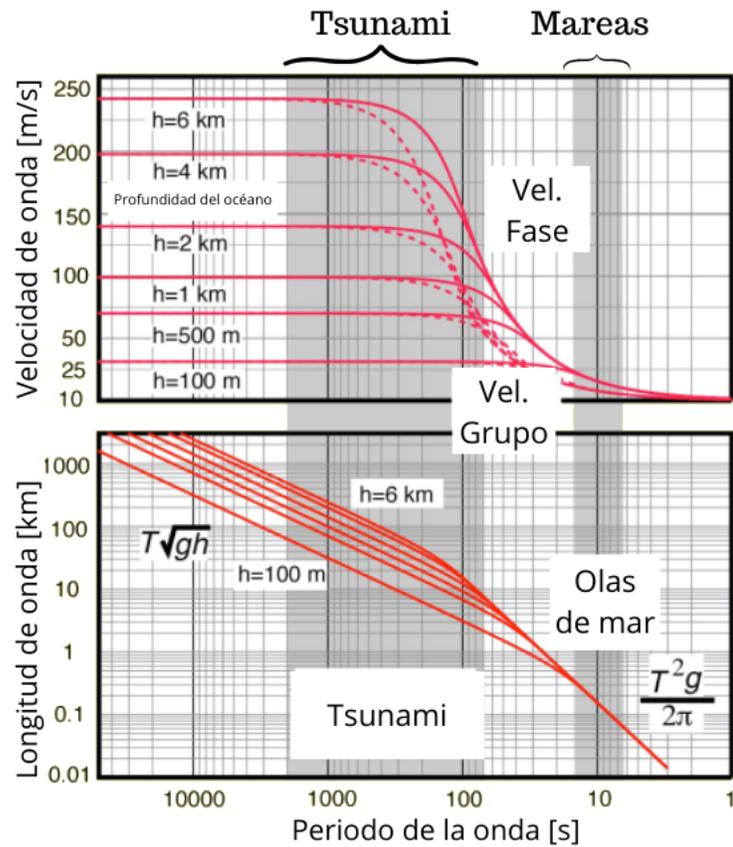


Figura 2.3: Características de las ondas de tsunamis. (arriba) Velocidad de fase (líneas sólidas) y velocidad de grupo (líneas punteadas) distribuidas en un océano de profundidades de 100 m a 6 km. (abajo) Longitud de onda asociada al periodo. En zonas sombreadas se muestra el periodo de las ondas de tsunami y de la marea. Modificado de Ward, 2010.

Comparado con las olas de mar (ver Figura 2.3), un tsunami presenta longitudes de onda y periodos grandes, la longitud de onda disminuye a menor profundidad. Asimismo, la velocidad de la onda disminuye a medida que decrece la profundidad. A pesar de esos cambios, el tsunami conserva su energía en todo momento, la desaceleración de la onda al llegar a aguas someras incrementa su amplitud y esto permite que la energía se conserve (González et al., 2012; Karaoglu, 2014).

Por otro lado, en la Figura 2.4 se presenta el movimiento de partícula de una onda a distintas profundidades, para periodos largos (1500 s), intermedios (150 s) y cortos (50 s). De este esquema se observa que las ondas de periodos cortos, no alcanzan el fondo marino. Esto significa que no pueden ser excitadas por deformaciones ocurridas en este. Para el caso de las ondas de periodos largos, se observa que aunque el desplazamiento vertical disminuye conforme aumenta la profundidad, el desplazamiento horizontal persiste.

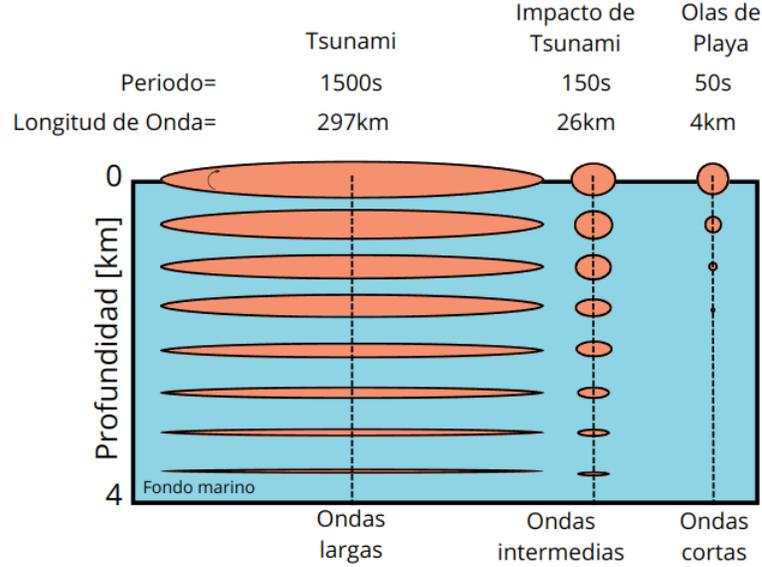


Figura 2.4: Esquema de movimiento de la partícula de una onda. Se presentan las características de movimiento de las ondas de tsunami debido a efectos de dispersión a profundidad. Modificado de Ward, 2010.

De las características descritas en el esquema de la Figura 2.4, se presentan dos simplificaciones mediante el análisis de la expresión de velocidad de fase de la onda dada por:

$$c(w) = \sqrt{\frac{g h \tanh[k(w)h]}{k(w)h}} \quad (2.1)$$

donde, g es la gravedad, h la profundidad de la columna de agua y $k(w)$ el número de onda. La primera simplificación incluye el análisis para longitudes de onda larga presentes en aguas profundas ($\lambda \gg h$), donde la profundidad se vuelve despreciable, reduciendo la ec. 2.1, considerando que $kh \rightarrow 0$ y por ende $\tanh(kh) \rightarrow kh$. De este modo, la velocidad de propagación está dada únicamente por la gravedad g y la altura h de la columna, manteniendo un carácter no-dispersivo ($c(w) = \sqrt{gh}$). Esto se muestra en la parte plana de la Figura 2.3 (arriba).

La segunda simplificación consiste en el análisis de longitudes de onda pequeñas, donde $h \gg \lambda$, por ende $kh \rightarrow \infty$ y $\tanh(kh) \rightarrow 1$, reduciendo la ec. 2.1 a $c(w) = \frac{gT}{2\pi}$, presentando un comportamiento dispersivo (Karaoglu, 2014; Ward, 2010). Las ondas de tsunami tienen un comportamiento intermedio pues estas se generan en aguas profundas y viajan hacia la costa pasando por la transición a aguas someras.

El estudio de estos conceptos, permite llevar a cabo simulaciones mediante el empleo de técnicas numéricas. La aplicación de estos procedimientos, favorece en los estudios de prevención y riesgo por tsunami al otorgar tiempos y rutas de evacuación que permiten disminuir el impacto que este fenómeno tiene sobre la costa. Generalmente, estas evaluaciones de peligro por tsunami se llevan a cabo empleando las ecuaciones de aguas someras (EAS). En este método se supone que las longitudes de onda son mucho mayores que la profundidad promedio del océano, tratándolo en su totalidad como un ambiente de poca profundidad. Comúnmente, su aplicación se hace en programas de simulación. Algunos ejemplos de programas usados con este propósito son NUMAD2 (Marras et al., 2015), MOST (Titov et al., 1997), TUNAMI (Imamura, 1995) y VOLNA (Dutykh et al., 2011), por mencionar algunos. La modelación de tsunamis en estos programas, implica la definición de un desplazamiento inicial y su acción inmediata sobre el fluido, considerando un comportamiento rígido del material. En este proyecto, se destaca la implementación del programa *Geoclaw* con el objetivo de estudiar la aplicación de las EAS y las desventajas que estas presentan.

2.3. Estudio de tsunamis en Geoclaw

Este programa es un módulo del *software Clawpack*, originalmente desarrollado por Randall Le Veque (2011). Se trata de una herramienta de simulación de gran escala basada en el procedimiento de malla con refinamiento adaptativo. Este implementa las EAS, las cuales surgen del análisis de comportamiento del fluido, involucrando las ecuaciones de conservación de masa y momento.

En el programa básicamente se define a la fuente tsunamigénica y se obtiene el desplazamiento del fondo marino mediante la aplicación del modelo de Okada (1985). Posteriormente, se establece el archivo batimétrico a usar y sobre el cual se llevará a cabo la

simulación. Por último, se definen los parámetros de la simulación tales como el dominio de modelación, los niveles de refinamiento relacionados con la malla adaptativa, las regiones de interés y estaciones de monitoreo para obtener resultados específicos.

Generalmente, Geoclaw se usa principalmente para la inversión de la fuente tsunamigénica o en la modelación y mitigación de peligro por tsunami (Hayes et al., 2010; Løvholt et al., 2012). Su sencilla aplicación permite obtener resultados rápidos que ayudan en la creación de escenarios y planes de respuesta ante el impacto de un tsunami.

Este *software* es una herramienta amigable para entender la teoría detrás de la modelación del fenómeno y para realizar estudios de simulación de peligro por tsunami, sin embargo, como cualquier otra herramienta, tiene sus limitaciones. La que más compete a este trabajo considera, al igual que en otros programas de simulación que emplean las EAS, que cualquier desplazamiento que ocurra en el fondo marino, provocará que la columna de agua se desplace la misma cantidad, es decir, una vez que ocurre el desplazamiento en el basamento, este es inmediatamente observado en la superficie del mar sin considerar la propagación de la onda y su dispersión en el medio. Asimismo, la fuente tsunamigénica se genera en aguas profundas, lo que contradice la suposición del método.

2.4. Problemática

Los tsunamis representan una amenaza para las comunidades costeras en todo el mundo. Su estudio ha logrado disminuir el impacto que estos ocasionan y ha permitido generar escenarios que ayudan a definir rutas de evacuación y planes de acción ante un tsunami. En México, el estudio de tsunamis es relativamente nuevo dado que se percibía a este fenómeno como un evento poco frecuente. No obstante, la alta actividad tectónica presente en el país demuestra que se puede generar un tsunami potencialmente peligroso para las costas mexicanas, principalmente para la costa del Pacífico. Bajo esta premisa se propone un método de modelación numérica mediante el uso de ecuaciones integrales que buscará simular la altura del tsunami en aguas profundas, considerando la interacción cinemática que existe sobre el modelo propuesto. Este método será una herramienta adicional para el estudio de tsunamis y su impacto.

2.4.1. Justificación

Las características tectónicas de México en la zona del Pacífico demuestran que existe la posibilidad de que se pueda generar un tsunami que afecte directamente sus costas. En este contexto, es importante contar con herramientas que permitan estudiar este fenómeno y que ayuden a analizar el peligro por tsunami, además de contar con una herramienta que permita describir el comportamiento de la onda y que sea consistente con las observaciones.

2.4.2. Hipótesis

La aplicación del concepto de ecuación integral como modelo numérico permite reproducir adecuadamente la propagación de un tsunami en aguas profundas.

2.4.3. Objetivos

- Definir un modelo numérico que permita describir la propagación de un tsunami a partir del análisis de la ecuación de movimiento.
- Comparar el método propuesto para verificar su funcionamiento y contrastar los resultados con una simulación de altura del tsunami en *Geoclaw* usando un modelo de aguas profundas.

Capítulo 3

Fundamentos teóricos

En este capítulo se presenta el análisis que lleva al método de EAS, así como la formulación del método de ecuaciones integrales a partir del análisis de la ecuación de movimiento y su transformación a la expresión integral. Presentado el caso general para el método propuesto, se expone el análisis de capa simple. Posteriormente, se propone su aplicación en un problema que simula un océano profundo, sobre el cual se planteará la resolución de la ecuación comenzando con una aproximación simple para aplicar las condiciones presentes en el problema. Una vez verificado su funcionamiento, las siguientes aproximaciones incluirán las condiciones reales que afectan al fenómeno. Por último, se expone la aplicación de la fuente tsunamigénica considerando su desplazamiento inicial y su patrón de radiación, así como conceptos de muestreo aplicados en el proyecto.

3.1. Método de ecuaciones de aguas someras

El método consiste en la aplicación de las ecuaciones de *Navier-Stokes* bajo ciertas consideraciones. Las ecuaciones surgen del análisis del comportamiento de un fluido en el que se busca que en cualquier instante de su movimiento, su masa y su momento se conserven. Para la conservación de momento, se parte de la segunda ley de *Newton* en la que se definen las fuerzas presentes en el fluido, tales como:

- Las fuerzas de cuerpo que actúan directamente sobre la masa del fluido y que se distribuyen por todo el volumen son:

$$\vec{F}_{cuerpo} = m\vec{g} = \int_{\Omega} \rho\vec{g}d\Omega,$$

donde m es la masa del fluido, g es la gravedad, ρ es la densidad de masa y Ω es el volumen.

- Las fuerzas de superficie dadas por la fricción y presión atmosférica que actúan sobre el fluido son

$$\vec{F}_{superficie} = \int_S \sigma \cdot \hat{n}dS,$$

donde σ representa al tensor de esfuerzos y \hat{n} es el vector normal a la superficie S .

Partiendo de estos conceptos, la ecuación se construye a partir de la existencia de un cuerpo con superficie S y volumen Ω . Se busca caracterizar este cuerpo con ayuda de la segunda ley de Newton, definiendo a la cantidad de movimiento de este volumen como $\vec{P} = \int_{\Omega} \rho\vec{v}d\Omega$, donde \vec{v} es un vector de velocidad.

La segunda ley de Newton define un cambio de momentum, para esto se obtiene la derivada total respecto del tiempo de \vec{P} , obteniendo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\vec{v}d\Omega = \int_{\Omega} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\Omega.$$

Bajo esta premisa, se obtiene el cambio de momentum igual a la fuerza neta ejercida sobre el cuerpo, siendo estas las fuerzas de cuerpo y superficie. La expresión se homogeneiza al transformar a la fuerza de superficie en términos de una integral de volumen con ayuda del teorema de la divergencia. De esta forma, se construye la ecuación con el cambio de momentum igual a la suma de fuerzas de cuerpo y superficie presentes en el problema, llegando a la expresión de conservación de momentum

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} + \nabla \cdot \sigma. \quad (3.1)$$

En el caso de conservación de masa, la ecuación surge del análisis de un fluido contenido y un volumen de control del que sale/entra masa. De esto se desea comprobar que el cambio de masa es igual al flujo de masa que sale a través de la superficie, descrito como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} M(t) &= \text{Flujo de masa} \quad \text{y} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega &= - \int_S \rho \vec{v} \cdot \hat{n} ds, \end{aligned}$$

llegando a la ec. 3.2, que representa los cambios locales en la densidad con la derivada de ρ y los cambios espaciales de densidad con la divergencia de ρ y el vector de velocidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.2)$$

Ambas expresiones (ecs. 3.1 y 3.2), se unen mediante relaciones constitutivas de presión y fricción viscosa descritas como:

$$\begin{aligned} \text{Presión } \sigma_{ii} &= -P + \lambda \nabla \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad \text{y} \\ \text{Fricción Viscosa } \sigma_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

donde P es la presión, μ es el coeficiente de viscosidad estática, λ es el coeficiente de viscosidad dinámica y u representa los desplazamientos en las direcciones i y j (Ramos Musalem, 2021). Estas relaciones se simplifican al considerar que se tiene un fluido incompresible, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Desarrollando la expresión donde la velocidad se expresa como $\vec{v} = (u, v, w)$, la posición $\vec{x} = (x, y, z)$ y la gravedad $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$, se obtienen las ecuaciones *Navier-Stokes*

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Momentum:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

El concepto de las EAS se basa en la relación de profundidad y longitud de onda, que ayudan a linealizar las ecuaciones de *Navier-Stokes* considerando que las componentes horizontales son mayores que las verticales, es decir, la profundidad del mar es pequeña considerando las grandes distancias horizontales a modelar. Además, se toma en cuenta que las fuerzas viscosas son relativamente pequeñas (Ward, 2003). La solución implementada en los modelos numéricos, se obtiene primero al especificar las condiciones de frontera para una columna de agua, como la elevación de la superficie relativa al geoide (ζ), la batimetría medida del geoide hacia el fondo (b) y la profundidad total de la columna de agua (H) (Figura 3.1). Posteriormente, se establecen las condiciones de frontera del fondo y superficie de la columna de agua. Finalmente, con estas condiciones, se integra a profundidad y se llega a las ecuaciones de aguas someras de continuidad (ec. 3.3) y de momentum (ecs. 3.4 y 3.5) (Dawson et al., 2008).

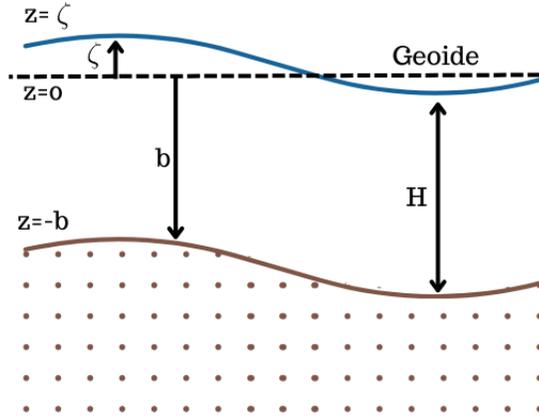


Figura 3.1: Esquema de aguas someras. Se presentan los elementos que definen a las EAS.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{u}\bar{v}) = -gH\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho}[\tau_{sx} - \tau_{bx} + F_x], \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(H\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}^2) = -gH\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho}[\tau_{sy} - \tau_{by} + F_y], \quad (3.5)$$

donde \bar{u} y \bar{v} son las velocidades promedio en las direcciones x y y , F es la fricción presente en el modelo, τ_b y τ_s representa el esfuerzo cortante en el fondo y en la superficie, respectivamente.

3.2. Método de ecuaciones integrales

El desarrollo de las ecuaciones integrales se presenta utilizando primero un sólido y posteriormente se aplica un fluido incompresible. En el segundo caso, el de interés para este trabajo, se parte de la representación integral.

3.2.1. Formulación del método

Partiendo de la ecuación de movimiento (ec. 3.1), expresándola en esta ocasión en términos de desplazamiento:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

la formulación del problema comienza con establecer reciprocidad entre dos campos de desplazamiento u y v que tienen condiciones iniciales y de frontera que actúan de manera distinta en la ec. 3.6 (Bonnet, 1995). De esta forma, se tiene a la ecuación de movimiento para cada campo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^u}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_j} + h_i = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

donde $\nabla \sigma_{ij}^u$ y $\nabla \sigma_{ij}^v$ son el gradiente del tensor de esfuerzos para los campos u y v , f_i y h_i representan la fuerza por unidad de volumen aplicada en cada campo y ρ es la densidad del medio.

Para establecer la reciprocidad entre ambos campos, y dado que no se alteran de ninguna manera las expresiones, se multiplican los campos entre sí y se integran ambas ecuaciones. Al reagrupar los términos, se llega a la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} \left(v_i \frac{\partial \sigma_{ij}^u}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_j} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (v_i f_i - u_i g_i) d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

La primera integral de la izquierda en la ec. 3.8, se simplifica aplicando el teorema de Green (Zienkiewicz et al., 1994). El teorema implica integrar por partes cada elemento logrando reducir el grado de las ecuaciones parciales e intercambiar por integrales de línea. Una vez aplicado, la primera integral de volumen se reduce:

$$\int_{\Omega} \left(v_i \frac{\partial \sigma_{ij}^u}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \sigma_{ij}^v}{\partial x_j} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}^u d\Omega + \oint_{\Gamma} v_i \sigma_{ij}^u n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ij}^v d\Omega - \oint_{\Gamma} u_i \sigma_{ij}^v n_j d\Gamma.$$

De lo anterior se identifica que las integrales de volumen se anulan, mientras que las de superficie incluyen el concepto de tracción donde $T_i = \sigma_{ij}n_j$. Adicionalmente, para hallar la solución de la ec. 3.8, se plantea que la fuerza que excita al campo v es la delta de Dirac ($h = \delta(x - \xi)\delta(t - t_0)$), por lo que igualmente se introduce a la función de Green como la solución de la ecuación de movimiento en el campo v ($v = G(x, \xi, t, t_0)$), de tal forma que:

$$u_i(x, \xi, t, t_0) = \oint_{\Gamma} G_{ij}(x, \xi, t, t_0)T_i^u d\Gamma - \oint_{\Gamma} u_i T_i^G d\Gamma + \int_{\Omega} G_{ij}(x, \xi, t, t_0)f_i d\Omega + \rho \int_{\Omega} \left(u_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right) d\Omega. \quad (3.9)$$

En la ecuación anterior, T_i^u y T_i^G representan las componentes de tracción en los límites de la superficie y la función de tracción de Green, respectivamente. Para llegar a una expresión más simple, la ec. 3.9 se transforma al dominio de la frecuencia para condiciones iniciales homogéneas, donde la parte temporal se anula dado que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2 \mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}_i(x, w) = \oint_{\Gamma} \mathbf{G}(x, \xi, w)T_i^U d\Gamma - \oint_{\Gamma} \mathbf{U}(\xi)T_i^G + \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, \xi, w)\mathbf{F}_i d\Omega, \quad (3.10)$$

donde \mathbf{F} representa la fuerza, $\mathbf{G}(x, \xi, w)$ la función de Green y $\mathbf{U}_i(x, w)$ el desplazamiento en frecuencia.

3.2.2. Análisis de capa simple

Con el objetivo de simplificar la ec. 3.10, se aplica el concepto de capa simple. Para esto, se considera un dominio delimitado Ω y un dominio complementario abierto $\bar{\Omega}$ (Figura 3.2). En cada dominio existe u y \bar{u} que representan las soluciones de un problema interior y exterior, respectivamente.

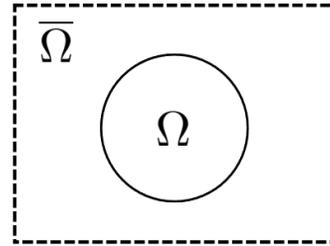


Figura 3.2: Dominio delimitado Ω y dominio abierto $\bar{\Omega}$ para el análisis de capa simple.

Analizando la contribución de ambos dominios sobre un punto interior a Ω , se reescribe la ec. 3.10 como

$$\begin{aligned} \text{Interior} \rightarrow \mathbf{U}(x, w) &= \oint_{\Gamma} \mathbf{G}(x, \xi, w) T_{22}^U d\Gamma + \oint_{\Gamma} \mathbf{U}(\xi) T_{22}^G d\Gamma + \int_A \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{F} dA \quad (3.11) \\ \text{Exterior} \rightarrow \bar{\mathbf{U}}(x, w) &= \oint_{\Gamma} \mathbf{G}(x, \xi, w) \bar{T}_{22}^U d\Gamma - \oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}(\xi) \bar{T}_{22}^G d\Gamma + \int_A \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{F} dA = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

El cambio de signo en la segunda integral de contorno del problema interior se debe a la dirección hacia donde se da el desplazamiento según el vector normal. Sumando ambas contribuciones y llevando el análisis a la frontera en la que interactúan las condiciones de Ω y $\bar{\Omega}$, en ausencia de la distribución de fuerzas F y suponiendo que los desplazamientos $\bar{\mathbf{U}}(\xi)$ en la frontera son iguales

$$\mathbf{U}(x, w) + \bar{\mathbf{U}}(x, w) = \oint_{\Gamma} \left[(T_{22}^U + \bar{T}_{22}^U) \mathbf{G}(x, \xi, w) + \bar{\mathbf{U}}(\xi) (T_{22} - T_{22}^G) \right] d\Gamma. \quad (3.13)$$

En el caso de capa simple se supone continuidad entre las fronteras teniendo $T_{22} = T_{22}^G$, eliminando así uno de los términos de la ec. 3.13. Adicionalmente, se introduce el término de densidad $\phi = T_{22}^U + \bar{T}_{22}^U$, llegando a la representación integral del desplazamiento $\mathbf{U}(x)$ de capa simple descrito por un término de densidad ϕ y la función de Green

$$\mathbf{U}(x, w) = \oint_{\Gamma} \phi(\xi) \mathbf{G}(x, \xi, w) d\Gamma. \quad (3.14)$$

En esta ecuación la $G(x, \xi, w)$ representa, el desplazamiento debido a una fuerza de amplitud unitaria aplicada en un punto ξ . Ahora, considerando que en lugar de tener una fuerza de amplitud unitaria, se tiene una fuerza modulada por una magnitud α , la función de Green también estará modulada por una magnitud que en este caso se denomina ϕ . En el análisis para el caso donde existe una distribución de fuerzas en una superficie, el desplazamiento estará dado por la suma de ϕ modulando a la función de Green, en el caso continuo, se tiene la ec. 3.14.

Cuando $x = \xi$, se tiene especial cuidado con el cálculo de las tracciones. El análisis de capa simple se modifica en la ec. 3.13, considerando ahora que $T_{22}^U = \bar{T}_{22}^U$ y que $T_{22} - T_{22}^G = \phi$. De esta manera, se obtiene la ec. 3.15 que describe las tracciones en la superficie sin considerar

la distribución de fuerzas (Sánchez-Sesma et al., 1991).

$$T_{22}^{\mathbf{U}}(x) = \frac{1}{2}\phi(\xi). \quad (3.15)$$

A primera vista, las variables involucradas en las ecuaciones integrales 3.14 y 3.15 parecen desconocidas; sin embargo, es posible obtenerlas al establecer ciertas condiciones de frontera y al definir un sistema de ecuaciones. En la siguiente sección se establecen algunas consideraciones para la resolución del problema y un ejemplo de definición de condiciones iniciales para construir un sistema de ecuaciones que permita resolver la ecuación integral.

3.2.3. Definición de la función de Green

Considerando un medio elástico, homogéneo e isótropo, la función de Green se define como (Sánchez-Sesma et al., 1991):

$$\mathbf{G} = \frac{1}{i4\rho}H_0^2(kr), \quad (3.16)$$

donde ρ es la densidad de masa, $k = w/c$ es el número de onda, c es la velocidad de la onda, r representa la distancia entre la fuente y un receptor, y H_0^2 es la función de *Hankel* de segunda especie y orden cero. La función de Hankel está dada por las funciones de *Bessel* de primer $J_0(z)$ y segundo orden $Y_0(z)$. En este caso, la función se expresa como

$$H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z). \quad (3.17)$$

Dados los argumentos de la función de Hankel y el comportamiento de las funciones de Bessel (Figura 3.3), es posible identificar que si la distancia r tiende a cero, implicando que la distancia entre el receptor y la fuente es muy corta, la función de Bessel de segundo orden tiende a infinito.

Para evitar este problema durante la resolución de la ecuación integral, se aplica el teorema de *Cauchy-Goursat* en el que básicamente se aísla el punto en el que la función no es analítica y se resuelve este punto de manera individual. En este caso, es la función Y_0 la que no es analítica. Para evitar su indeterminación, el análisis se hace al resolver la integral con la función de Bessel definida como una función logarítmica. El resultado obtenido se sustituye en la ec. 3.13, cuando $x = \xi$, llegando a la ec. 3.15.

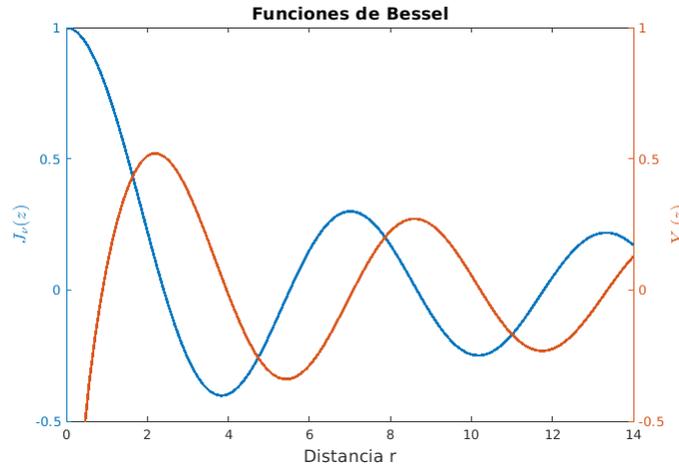


Figura 3.3: Gráfica de funciones de Bessel de primer y segundo orden con distancia r como argumento. A menor distancia r , la función de Bessel de segundo orden tiende a infinito.

Para aplicar el método al problema de interés, se trasladan los conceptos a términos que permitan describir el comportamiento de un fluido, considerando el efecto que la presión ejerce sobre este.

3.2.4. Ejemplo de aplicación

En la Figura 3.4 existen tres zonas de contacto principales: el contacto lateral, el del fondo del modelo y la superficie libre. Para el análisis se considera únicamente la interfaz fluido-superficie libre en donde se conoce que las presiones son iguales a cero.

Dadas estas características, se comienza a establecer el sistema de ecuaciones que permitirá hallar el valor que modula a la función de Green de la ec. 3.14 mediante una discretización de la superficie en cuestión.

La ecuación integral que describe el problema permite obtener a la presión P en un punto x dadas las contribuciones $\chi(\xi)$ en una superficie, en el dominio de las frecuencias

$$\mathbf{P}(x, w) = \oint_{\Gamma} \chi(\xi) \mathbf{G}(x, \xi, w) ds. \quad (3.18)$$

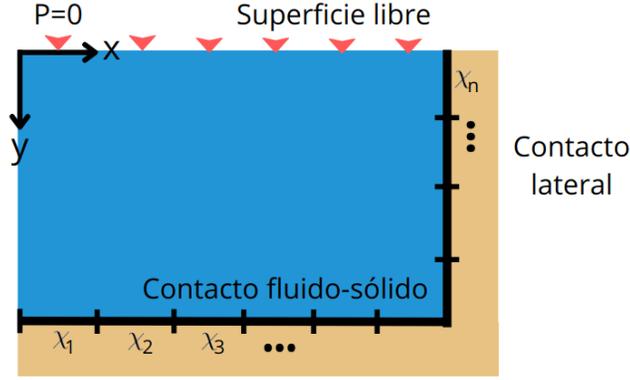


Figura 3.4: Condiciones iniciales propuestas para un problema simple. Los segmentos representan las contribuciones que complementan los contactos fluido-sólido y en superficie con los triángulos rojos.

Del problema se conoce que las presiones en la superficie libre son iguales a cero. El objetivo es obtener χ para posteriormente calcular P sobre los puntos de interés. Más adelante se utilizará la presión para conocer el desplazamiento de la columna de agua dada una perturbación inicial. Para esto se hace un análisis de equilibrio, donde:

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{w^2\rho} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \quad \text{y} \quad \mathbf{U}_2 = \frac{1}{w^2\rho} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y} = \frac{1}{w^2\rho} \int \chi(\xi) \frac{\partial \mathbf{G}(x, \xi, w)}{\partial y} ds. \quad (3.19)$$

Considerando únicamente el desplazamiento normal a la superficie del fluido:

$$\mathbf{U}_n = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \cdot (n_1, n_2) = \frac{1}{w^2\rho} (\mathbf{U}_1 n_1 + \mathbf{U}_2 n_2).$$

De este análisis se llega a la expresión final para obtener el desplazamiento normal dadas las condiciones de presión iniciales

$$\mathbf{U}_n(x, w) = \frac{1}{\rho w^2} \left[\int_s \chi(\xi) \frac{\partial \mathbf{G}(x, \xi, w)}{\partial x} n_1 + \int_s \chi(\xi) \frac{\partial \mathbf{G}(x, \xi, w)}{\partial y} n_2 \right] ds. \quad (3.20)$$

En la expresión anterior, se requiere obtener la derivada de la función de Green, además de la discretización del problema con el objetivo de construir un sistema de ecuaciones. Para construir el sistema, se divide al modelo en un conjunto de secciones sobre las cuales se calculará el desplazamiento debido a cada contribución (Figura 3.4). Un ejemplo de esto se muestra para el desplazamiento normal en el punto x_1 :

$$U_n(x_1, w) = \frac{1}{\rho w^2} \left[\chi_1 \int_{s_1} \frac{\partial \mathbf{G}(x_1, \xi_1, w)}{\partial n} ds_1 + \chi_2 \int_{s_2} \frac{\partial \mathbf{G}(x_1, \xi_2, w)}{\partial n} ds_2 \right. \\ \left. + \dots + \chi_n \int_{s_n} \frac{\partial \mathbf{G}(x_1, \xi_n, w)}{\partial n} ds_n \right] \quad (3.21)$$

$$U_n(x_1, w) = \frac{1}{\rho w^2} \sum_{i=1}^{ns} \chi(\xi_i) \int_s \frac{\partial \mathbf{G}(x_1, \xi_i, w)}{\partial n} dS. \quad (3.22)$$

De esta forma, se construye un sistema conformado por una matriz que contiene a la función de Green evaluada en cada segmento (matriz G), otra matriz de incógnitas $\chi(\xi_i)$ correspondientes a los segmentos, y ambas igualadas a la matriz de desplazamientos normales descritos por el desplazamiento en el fondo marino.

$$\begin{bmatrix} \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_1, w) dS & \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_2, w) dS & \cdots & \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_n, w) dS \\ \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_1, w) dS & \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_2, w) dS & \cdots & \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_n, w) dS \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_n, \xi_1, w) dS & \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_n, \xi_2, w) dS & \cdots & \int_s \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_n, \xi_n, w) dS \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\xi_1) \\ \chi(\xi_2) \\ \vdots \\ \chi(\xi_n) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n(x_1, w) \\ \mathbf{U}_n(x_2, w) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n(x_n, w) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Por otro lado, las derivadas normales de la función de Green se obtienen mediante la aplicación de la regla de la cadena dado que $G(x, \xi, w) = G(kr)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(kr)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{G}(kr)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{i}{4} H_1^{(2)}(kr) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad y \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}(kr)}{\partial y} = \frac{i}{4} H_1^{(2)}(kr) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.25)$$

donde $H_1^{(2)}$ representa la derivada de la función de *Hankel* de segunda especie y orden uno. Obtenidos los valores de $\chi(\xi)$ en cada uno de los segmentos que componen al modelo, se procede a calcular el desplazamiento normal sobre los puntos de interés al sustituir el valor de χ sobre el sistema.

A continuación, se presentan las maneras en las que se aborda el problema, partiendo de una aproximación simple que permite establecer las condiciones de frontera en superficie, hasta la inclusión de los efectos de gravedad que caracterizan al fenómeno.

3.3. Aproximaciones del método

Los métodos presentados en esta sección, permiten resolver el sistema de ecuaciones tomando en cuenta las condiciones de frontera que caracterizan al problema. Si la única condición a cumplir es la presión en la superficie libre igual a cero, la primera aproximación se muestra con el método de imágenes. Las otras se presentan en los capítulos 3.3.2 y 3.3.3.

3.3.1. Método de imágenes

La aplicación de este método sobre el problema implica duplicar el modelo como un espejo sobre el contacto superficie libre. El objetivo es que al momento de resolver el sistema, los valores en superficie se anulen debido a las contribuciones de los segmentos del modelo original y su imagen (Figura 3.5).

La construcción de la matriz G de la ec. 3.23, implica considerar la contribución de cada segmento presente en el modelo. En este caso se debe incluir la contribución de la imagen, obteniendo al desplazamiento normal U_n para el punto x_1 definido como:

$$U_n(x_1, w) = \frac{1}{\rho w^2} \sum_{i=1}^{ns} \chi(\xi_i) \left[\int_s \frac{\partial \mathbf{G}^O(x_1, \xi_i, w)}{\partial n} - \int_s \frac{\partial \mathbf{G}^{Im}(x_1, \xi_i, w)}{\partial n} \right] \Delta S. \quad (3.26)$$

De la ecuación anterior, los superíndices Im y O representan los segmentos de la imagen y modelo original, respectivamente. Adicionalmente, se considera que $\chi(\xi_i)$ es el mismo para el segmento x_i tanto para el modelo original como para su imagen.

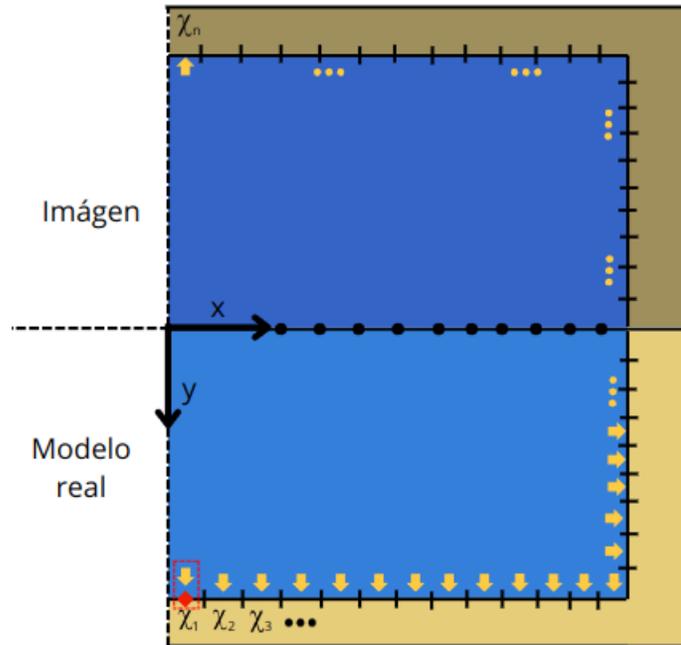


Figura 3.5: Esquema representativo del método de imágenes. Se muestran los segmentos que componen los contactos en el modelo real y su imagen con ayuda de las flechas amarillas, y el contacto entre los modelos con los puntos negros, sobre los cuales se obtiene la condición de presión cero en superficie.

3.3.2. Presión cero en superficie libre

Verificando el funcionamiento del método propuesto con ayuda de la aproximación anterior, se pasa al siguiente nivel de complejidad del problema aplicando directamente la condición sobre la superficie del modelo. Esto se hace únicamente agregando un conjunto de segmentos que dividen a la superficie libre, sobre este conjunto es donde se establece la condición de $P = 0$ (Figura 3.6). Para la construcción de la matriz G de la ec. 3.23, se consideran los desplazamientos de los contactos sólido-fluido de la región Γ_{AC} con la ec. 3.21, y la ec. 3.18 para la superficie libre correspondiente a la región Γ_{AL} .

La matriz final contiene las contribuciones de cada segmento presente en el modelo, incluyendo los de la superficie libre (ec. 3.27).

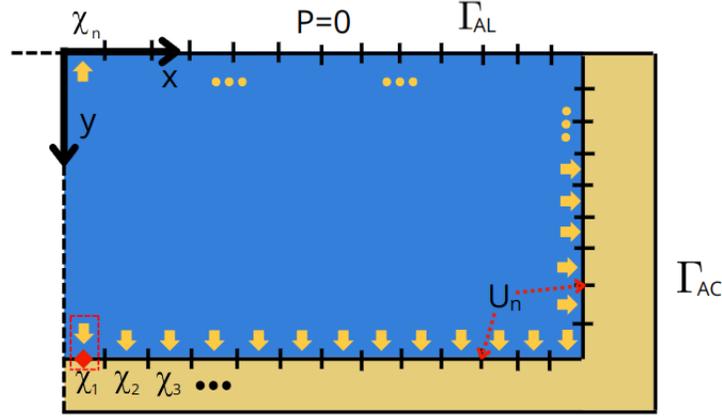


Figura 3.6: Esquema representativo con condición de $P = 0$ en la superficie libre. Las flechas amarillas señalan los segmentos que componen al modelo, se destacan las regiones Γ_{AC} y Γ_{AL} como los contactos fluido-sólido y superficie, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_1, w) d\Gamma & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_2, w) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_n, w) d\Gamma \\ \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_1, w) d\Gamma & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_2, w) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_n, w) d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{\Gamma_{AL}} \mathbf{G}(x_{n-1}, \xi_1, w) d\Gamma & \int_{\Gamma_{AL}} \mathbf{G}(x_{n-1}, \xi_2, w) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_{AL}} \mathbf{G}(x_{n-1}, \xi_n, w) d\Gamma \\ \int_{\Gamma_{AL}} \mathbf{G}(x_n, \xi_1, w) d\Gamma & \int_{\Gamma_{AL}} \mathbf{G}(x_n, \xi_2, w) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_{AL}} \mathbf{G}(x_n, \xi_n, w) d\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\xi_1) \\ \chi(\xi_2) \\ \vdots \\ \chi(\xi_{n-1}) \\ \chi(\xi_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n(x_1, w) \\ \mathbf{U}_n(x_2, w) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

3.3.3. Acción de la gravedad sobre el modelo

Hasta este punto, no se incluye la acción de la gravedad sobre el modelo. La condición se agrega sobre la superficie de la columna de agua como:

$$\frac{1}{g} \ddot{P} + P_{,i} n_i = 0. \quad (3.28)$$

La ecuación anterior surge de la condición de equilibrio hidrostático, es decir, de la consideración de equilibrio entre el gradiente de presión y la gravedad (Karaoglu, 2014; Ward,

2003). Se busca reescribir la ecuación anterior en términos de desplazamiento para introducirla en el sistema como condición del modelo. Para conseguir esto, se transforma al dominio de la frecuencia y se expande el segundo término:

$$-\frac{1}{g}w^2P + \frac{\partial P}{\partial x_1}n_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2}n_2 + \frac{\partial P}{\partial x_3}n_3 = 0.$$

La ecuación se simplifica al sustituir la ec. 3.18, identificando que el segundo término corresponde a la presión normal. Con este análisis se llega a la representación de la condición en superficie que considera la acción de la gravedad en términos de la presión y desplazamiento

$$-\frac{1}{g}w^2 \int \chi(\xi)G(x, \xi, w)dS + \int \chi(\xi)\frac{\partial G(x, \xi, w)}{\partial n}dS = 0. \quad (3.29)$$

La construcción del sistema con esta consideración, consiste en agregar la condición 3.29 al modelo, de manera que al igual que el sistema de ecuaciones para presión cero en superficie (Figura 3.6), se obtiene un sistema de ecuaciones dividido en regiones que incluyen las condiciones de desplazamiento en Γ_{AC} y la condición de gravedad en la superficie libre Γ_{AL} .

$$\begin{bmatrix} \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_1, w)d\Gamma & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_2, w)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_1, \xi_n, w)d\Gamma \\ \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_1, w)d\Gamma & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_2, w)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_{AC}} \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{G}(x_2, \xi_n, w)d\Gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A(n-1, \xi_1) & A(n-1, \xi_2) & \cdots & A(n-1, \xi_n) \\ A(n, \xi_1) & A(n, \xi_2) & \cdots & A(n, \xi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\xi_1) \\ \chi(\xi_2) \\ \vdots \\ \chi(\xi_{n-1}) \\ \chi(\xi_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n(x_1, w) \\ \mathbf{U}_n(x_2, w) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

donde:

$$A(n, \xi_i) = -\frac{1}{g}w^2 \int_{\Gamma_{AL}} G(x_n, \xi_i, w)d\Gamma + \int_{\Gamma_{AL}} \frac{\partial G(x_n, \xi_i, w)}{\partial n}d\Gamma. \quad (3.31)$$

El sistema de ecuaciones construido, además de depender de las condiciones que caracterizan espacialmente al modelo, también depende de sus propiedades. Estas propiedades consisten en el rango de frecuencias a modelar (w), la velocidad de propagación de la onda (c), densidad del medio (ρ), la batimetría y los puntos de observación. Establecidas estas características, se define a la fuente que genera la perturbación en la columna de agua, siendo una fuente unitaria para el caso más simple o el desplazamiento de fondo marino empleando el modelo de Okada para un caso cercano a la realidad.

3.4. Desplazamiento del fondo marino

Uno de los desplazamientos propuestos en este proyecto, consiste en la aplicación del modelo de Okada bajo ciertas consideraciones. Con el objetivo de justificar el procedimiento llevado a cabo durante la simulación de tsunami empleando el concepto de ecuación integral, se expone un panorama general sobre el patrón de radiación registrado en distancias cortas (campo cercano) y largas (campo lejano), respecto a una fuente y la acción de un campo de desplazamientos.

La formulación que describe el desplazamiento en un espacio completo, comienza considerando un desplazamiento u dado un par de fuerzas con magnitud que varía en el tiempo. Bajo la acción de estas fuerzas, se llega a la solución, expresada en coordenadas esféricas en la ec. 3.32, en donde la magnitud de los diferentes términos, dependen de la distancia entre la fuente y receptor (Aki et al., 2002).

$$\begin{aligned}
 u_n(x, t) = M_{pq} * G_{np,q} = & \frac{1}{4\pi\rho} A^N \frac{1}{r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_0(t - \tau) d\tau \\
 & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} A^{IP} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} A^{IS} \frac{1}{r^2} M_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right) \\
 & + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^3} A^{FP} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{4\pi\rho\beta^3} A^{FS} \frac{1}{r} \dot{M}_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right), \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

donde A superíndice representa los patrones de radiación para el campo cercano (A^N), el campo intermedio para las ondas P y S (A^{IP} y A^{IS}), y el campo lejano (A^{FP} y A^{FS}). $M_0(t)$ representa el momento sísmico, α y β son las velocidades de onda P y S, respectivamente.

El concepto de desplazamiento aplicado en el proyecto surge de la dependencia que existe con la distancia r , donde se destaca que en los términos correspondientes al campo lejano ($\frac{dM_o}{dt}$), los desplazamientos tienden a cero conforme aumenta el tiempo. Contrario a lo que sucede con el campo lejano, los términos de campo cercano otorgan un desplazamiento permanente dada su relación directa con la función de momento.

De este análisis, se puede observar que en el campo cercano, la función de momento asemeja a una función rampa, como se muestra en la Figura 3.7b. Por otro lado, en el campo lejano, se considera la derivada de la función de momento, destacando su carácter impulsivo y llegando a la representación de la función de la Figura 3.7a.

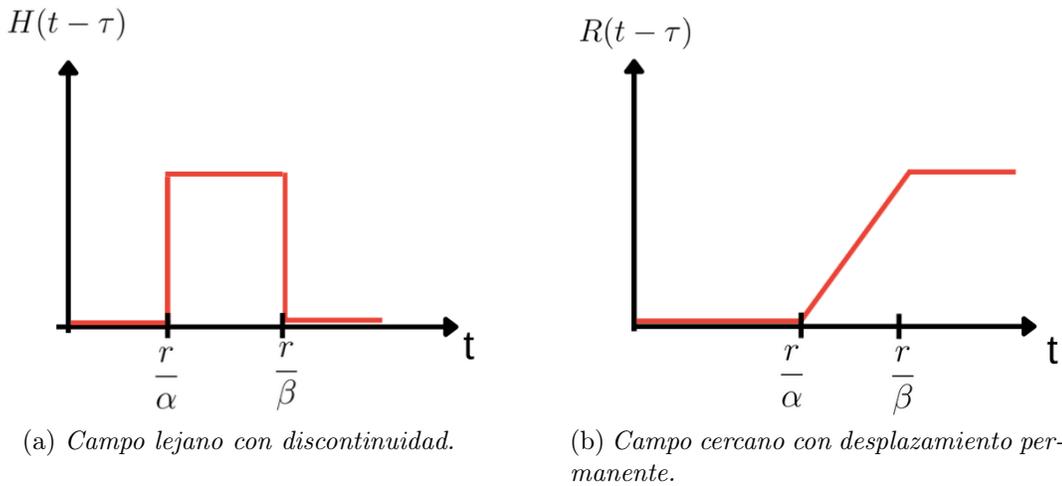


Figura 3.7: Esquema de desplazamiento de campo (a) lejano y (b) cercano.

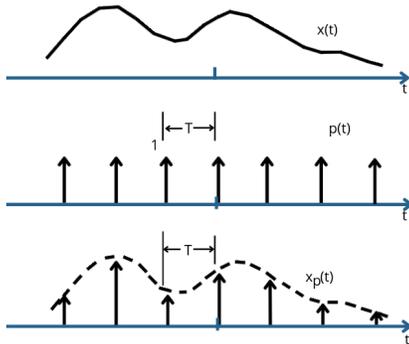
3.5. Teorema de muestreo

El objetivo de esta sección, es mostrar el comportamiento de una señal en el dominio de las frecuencias y los inconvenientes presentes al momento de muestrear la señal. Partiendo de estos inconvenientes, se establece que bajo ciertas condiciones, una señal de tiempo continuo se puede representar completamente mediante valores conocidos o muestras en puntos igualmente espaciados en tiempo. Sin embargo, en ausencia de información adicional de la señal, no se esperaría obtener a la señal requerida únicamente definida por las muestras igualmente espaciadas debido a que se pueden obtener un número infinito de señales con ese mismo conjunto de muestras. Por otro lado, si la señal es de banda limitada y las muestras están suficientemente cerca entre ellas con relación a la frecuencia más alta presente en la señal, entonces las muestras definen de manera única a la señal y por ende, se puede reconstruir (Oppenheim et al., 1997).

Una manera conveniente de representar el muestreo de una señal continua en el tiempo, es aplicando un tren de impulsos periódicos ($p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$) sobre la señal que se desea muestrear ($x(t)$). El tren de impulsos periódicos se denomina función de muestreo, el periodo T es el periodo de muestreo y $f_s = 1/T$ es la frecuencia de muestreo. En el dominio del tiempo, esta dado como

$$x_p(t) = x(t)p(t). \quad (3.33)$$

Dadas las propiedades de la función impulso, el resultado de la multiplicación es un tren de impulsos con amplitudes iguales a las muestras de $x(t)$



$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT). \quad (3.34)$$

Figura 3.8: Muestreo con tren de impulsos en el dominio del tiempo. Modificada de Oppenheim et al., 1997.

Pasando este análisis al dominio de las frecuencias (Figura 3.9a), la función de muestreo y la función a muestrear están dadas por

$$X_p(iff) = \frac{1}{2\pi} [X(iff) * P(iff)], \quad \text{donde } P(iff) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kf_s). \quad (3.35)$$

En el dominio de la frecuencia, la señal resultante de la multiplicación del tren de impulsos y la señal a muestrear, representan una función periódica que consiste en la superposición de réplicas desplazadas de la función a muestrear, escaladas por $\frac{1}{T}$. Si la frecuencia de muestreo f_s es dos veces mayor que la frecuencia máxima f_M , no existirá traslape entre las réplicas desplazadas (Figura 3.9b). Por otro lado, si no se cumple la diferencia anterior ($f_s > 2f_M$), las réplicas se traslaparán (Figura 3.9c). Este resultado se denomina teorema de muestreo, y al traslape se le conoce como *aliasing*.

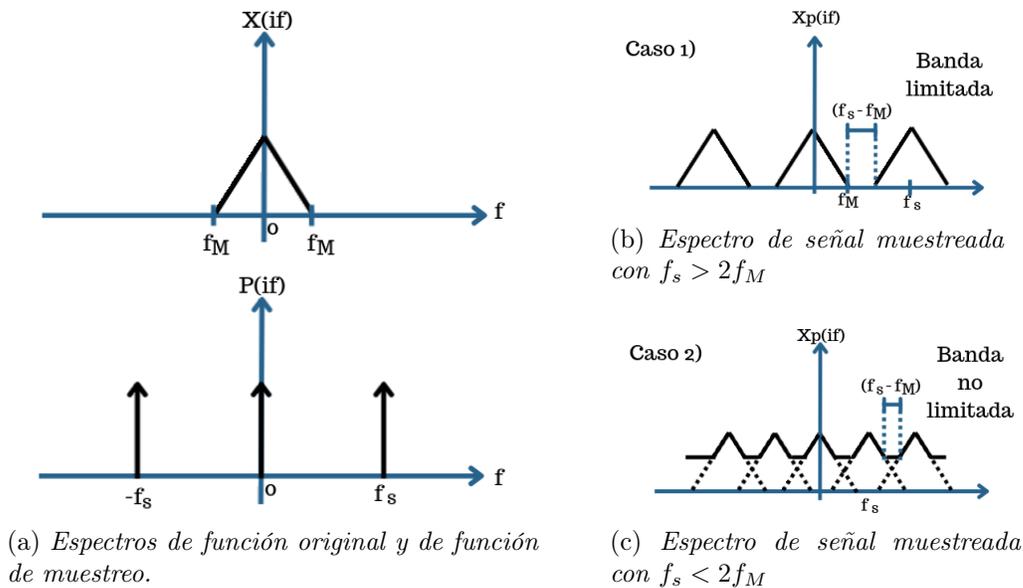


Figura 3.9: Efecto que tiene el muestreo aplicado en el dominio del tiempo sobre el dominio de la frecuencia.

Esta teoría se aplica en el proyecto con el objetivo de evitar el ruido en la señal obtenida en frecuencia, de manera que se limita la banda de la señal resultante antes de transformarla al dominio del tiempo.

Capítulo 4

Datos y metodología

En este capítulo se presenta a detalle el procedimiento llevado a cabo para comparar ambos métodos de simulación con el propósito de cumplir los objetivos de este trabajo. En la primera parte se muestra la definición de parámetros y de elementos que caracterizan al modelo para implementarlo en el programa *Geoclaw*, en donde para obtener resultados homogéneos, se define una línea de receptores en superficie que será equivalente a la propuesta en el método de ecuaciones integrales. Definido el procedimiento, se proponen dos modelos sobre los que se aplicará el método.

En la segunda parte se define el procedimiento que permitirá obtener los desplazamientos normales y presiones que caracterizan a los modelos implementados en *Geoclaw*, transformados a un dominio bidimensional, dados los conceptos definidos en la sección anterior correspondientes al método de ecuaciones integrales. Finalmente, se propone un modelo adicional cuyas características corresponden a un mar profundo con transición a la costa.

4.1. Definición del modelo en Geoclaw

El programa requiere archivos de entrada para llevar a cabo la simulación. Estos archivos consisten en un modelo batimétrico y un archivo que defina las características de la fuente. A continuación se muestran las características de estos archivos y el procedimiento para generarlos.

4.1.1. Modelo batimétrico

Idealmente, se construye el archivo batimétrico mediante la compilación de un conjunto de modelos recopilados por otras organizaciones como lo son *GEBCO* (*General Bathymetric Chart of the Oceans*, por sus siglas en inglés) o de campañas de adquisición. Adicionalmente, se completan estos archivos con datos topográficos correspondientes a la costa de interés. Estos últimos consisten en modelos digitales de elevación o continuos de elevación de libre acceso en la página del *Instituto Nacional de Estadística y Geografía* (INEGI).

Dados los objetivos de este proyecto, no se requiere un archivo batimétrico de alta resolución. Por esta razón, se construye un modelo sin variaciones, con una longitud total de 160 km, con 5000 m de profundidad y un ancho aproximado de 400 km. En la Figura 4.1 se observa la extensión del modelo, así como la línea de receptores sobre la que se obtendrá la altura del tsunami. La ubicación geográfica propuesta para el modelo es únicamente ilustrativa pues en este caso no tiene ningún efecto sobre los resultados.

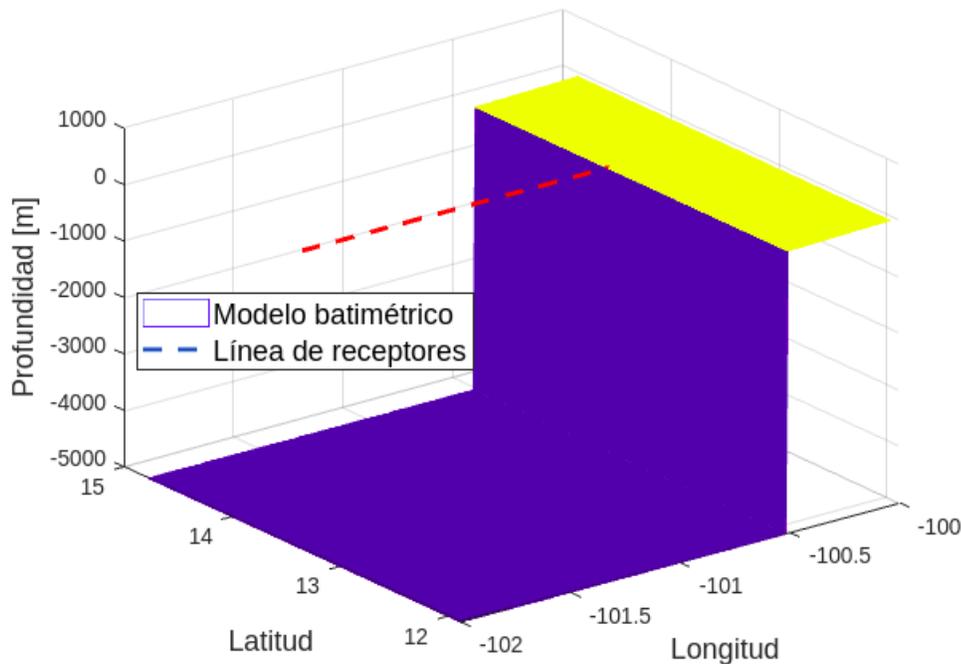


Figura 4.1: Modelo batimétrico definido para la simulación en Geoclaw. A la mitad de la superficie del modelo se propone una línea de receptores para registrar la evolución de la onda.

Para convertir el modelo al formato requerido por *Geoclaw*, se crea un archivo raster que posteriormente se convertirá a archivo *ascii* de tipo *Topo3*, que contiene un encabezado de seis líneas que establecen las características del modelo, seguidas por columnas y renglones con los valores de profundidad (Figura 4.2b). El archivo *Topo3* obtenido, se presenta en los anexos de este documento (anexo A).

Otros formatos que admite el programa son del tipo *Topo1* en el que cada renglón contiene las coordenadas *X*, *Y* y *Z*, el formato *Topo2* que igualmente comienza con un encabezado de 6 líneas, seguido de un conjunto de columnas con los valores de profundidad. Por último, el formato *Topo4* del tipo NetCDF. El archivo *ASCII* obtenido, se mueve a la carpeta *scratch* del dominio de *Geoclaw*.

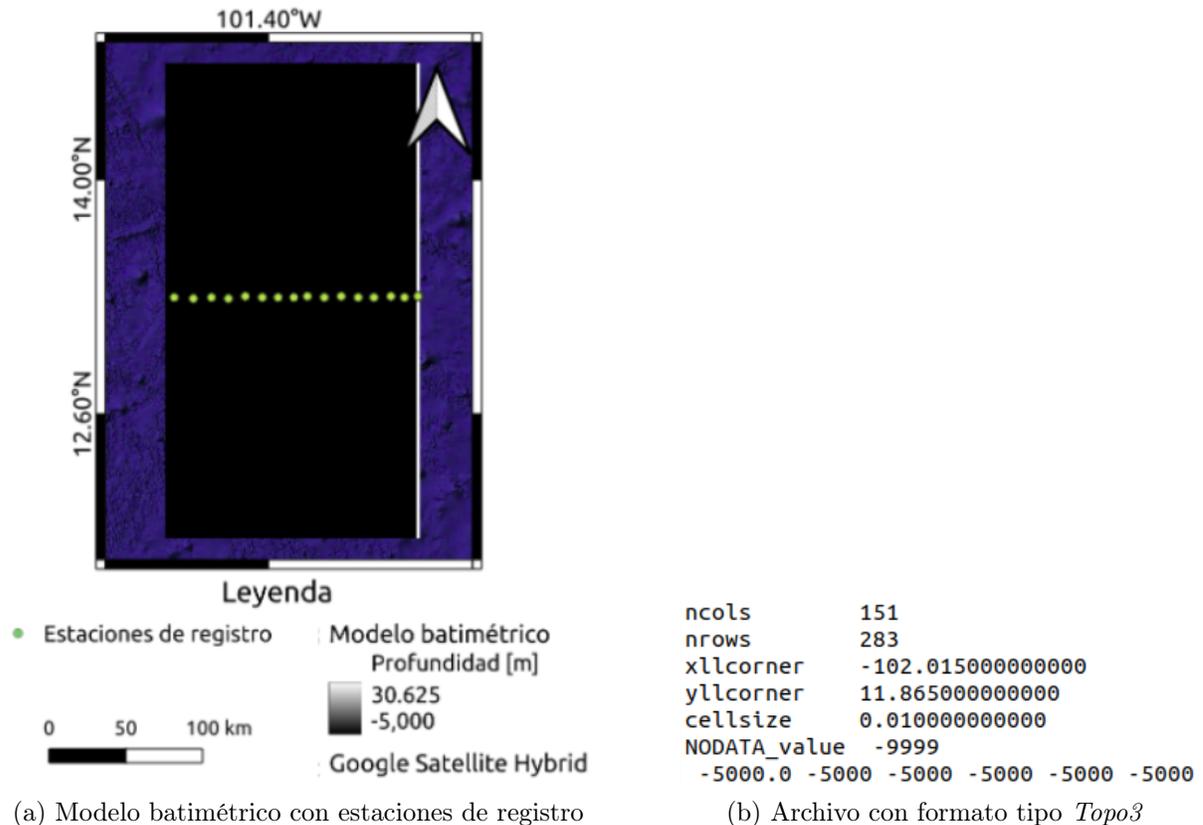


Figura 4.2: Creación del archivo batimétrico propuesto para la simulación correspondiente al modelo 1. a) Raster del modelo con ubicación de estaciones de control. Los puntos amarillos representan las estaciones de registro. b) Primeras líneas del archivo tipo *Topo3*.

Nuevamente, en la Figura 4.2a se observa un dominio espacial definido dado que *Geoclaw* así lo requiere; sin embargo, este hecho no altera los resultados. Las estaciones de control permitirán comparar la evolución de la propagación de la onda respecto a los resultados obtenidos con el método de ecuaciones integrales.

4.1.2. Características de la fuente

Una vez establecido el modelo batimétrico sobre el que se llevará a cabo la simulación, se procede a definir el movimiento del fondo marino, que en el caso de *Geoclaw* se hace mediante la aplicación del modelo de Okada, a partir de un plano de falla. Las características de la falla (Tabla 4.1), se ingresan al archivo “*maketopo.py*” y *Geoclaw* obtiene el desplazamiento del fondo marino (Figura 4.3a), generando un archivo con extensión *tt3* que será usado para llevar a cabo la simulación. El funcionamiento del archivo “*maketopo.py*”, se muestra con un programa esquemático en *Python* contenido en los anexos de este documento (anexo A).

Rumbo	0°
Longitud	50 [km]
Ancho	30 [km]
Profundidad	1 [km]
Deslizamiento	10 [m]
Dirección de deslizamiento	90°
Echado	90°

Tabla 4.1: *Parámetros de la falla*

La falla propuesta corresponde a un mecanismo de deslizamiento vertical, que de acuerdo a las leyes de escalamiento corresponde a un sismo con magnitud de entre 6.8 y 7 (Stein et al., 2009; Wells et al., 1994). En este punto, la magnitud es prescindible debido a que únicamente se busca comprobar el funcionamiento del método.

En el modelo tridimensional utilizado en el programa de *Geoclaw*, la fuente se ubica del lado contrario a la zona correspondiente a la costa y justo al centro del modelo. En el caso de su aplicación en el método de ecuaciones integrales, el resultado del desplazamiento vertical (Figura 4.3b), se sitúa al inicio del modelo bidimensional.

El resultado mostrado en la Figura 4.3b se exporta como archivo “*txt*”, con el objetivo de aplicarlo en el método de ecuaciones integrales y tener a la misma fuente tsunamigénica. Los detalles de su obtención, se abordan más adelante.

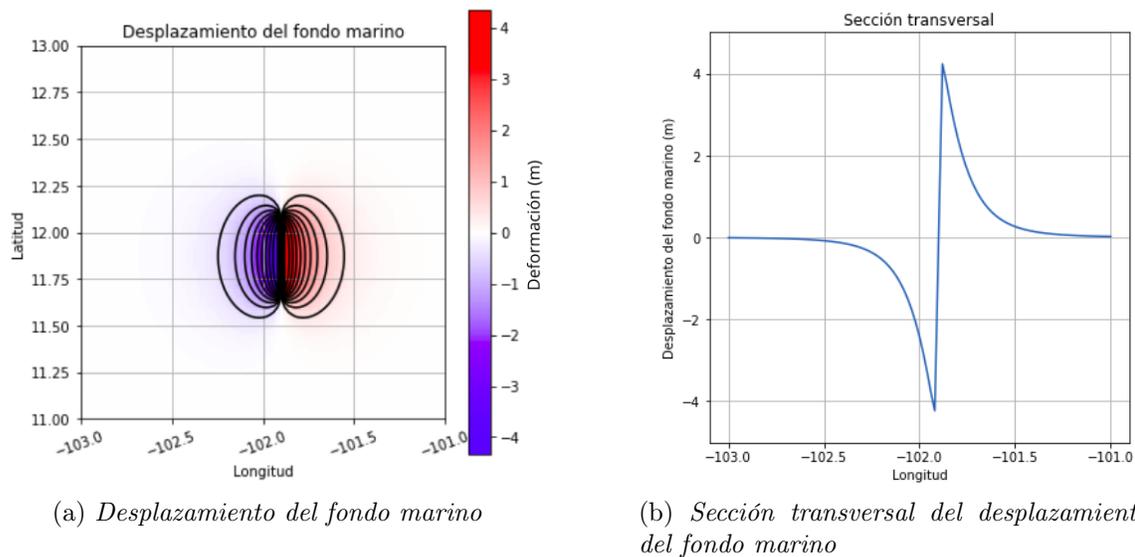


Figura 4.3: Deslizamiento máximo obtenido con la aplicación del modelo de Okada implementado en el programa Geoclaw. Se muestra la vista de planta (a) y su sección transversal (b) aplicada en el método de ecuaciones integrales.

4.1.3. Definición de los parámetros de simulación

Con los archivos de entrada generados, se definen las propiedades de la simulación. El archivo “setrun.py” contiene las características del caso a modelar (anexo A), en el que inicialmente se establece el dominio que abarca la simulación, considerando la extensión espacial del archivo de batimetría (Figura 4.2a). Posteriormente, se definen los tiempos de salidas, es decir, se da un rango de tiempo total a simular y cuántas salidas debe crear el programa durante ese tiempo.

La siguiente sección del archivo consiste en la característica principal del programa, en la cual se emplea el concepto de los parámetros de refinamiento adaptativo de la malla. Esta sección consiste en definir los niveles en los que se subdividirá el dominio total del modelo para llevar a cabo la simulación. En cada nivel se establece una subdivisión que permitirá obtener mayor detalle de la propagación de la onda en ciertas regiones cuyas coordenadas igualmente se proponen en este archivo. El objetivo de este refinamiento es obtener una mejor estimación de la derivada sobre el dominio, permitiendo seguir la evolución del frente de onda.

Finalmente, se agregan las coordenadas de las estaciones que en este caso se ubican a lo largo de una línea recta (Figura 4.1), se escriben los nombres de los archivos de batimetría y las condiciones iniciales que deberá usar el programa para llevar a cabo la simulación. Definidos estos parámetros, se ejecuta el modelo y durante este proceso, *Geoclaw* proporciona el avance del tiempo de simulación, así como cuántas salidas se han obtenido. En la Tabla 4.2, se muestran los parámetros definidos para el caso del modelo 1 con una breve descripción de su funcionamiento.

Descripción	Archivo <i>setrun.py</i>
Definición del dominio espacial de la simulación correspondiente con el modelo batimétrico.	<pre># Lower and upper edge of computational domain: #Modelo 1 clawdata.lower[0] = -102. # west longitude clawdata.upper[0] = -100.5 # east longitude clawdata.lower[1] = 11.8 # south latitude clawdata.upper[1] = 14.7 # north latitude</pre>
Tiempos de salidas establecido en un tiempo total de simulación de 0.13 horas, con 30 salidas en total.	<pre># Output nout frames at equally spaced times up to tfinal: clawdata.num_output_times = 30 clawdata.tfinal = 0.13*3600. clawdata.output_t0 = True # output at initial (or restart) time?</pre>
Niveles de refinamiento y proporción de cada nivel. El primer nivel se refina 1 vez, el segundo nivel 2 y el tercero 6 respecto al dominio total.	<pre># max number of refinement levels: amrdata.amr_levels_max = 3 # List of refinement ratios at each level (length at least mxnest-1) amrdata.refinement_ratios_x = [2,6] amrdata.refinement_ratios_y = [2,6] amrdata.refinement_ratios_t = [2,6]</pre>

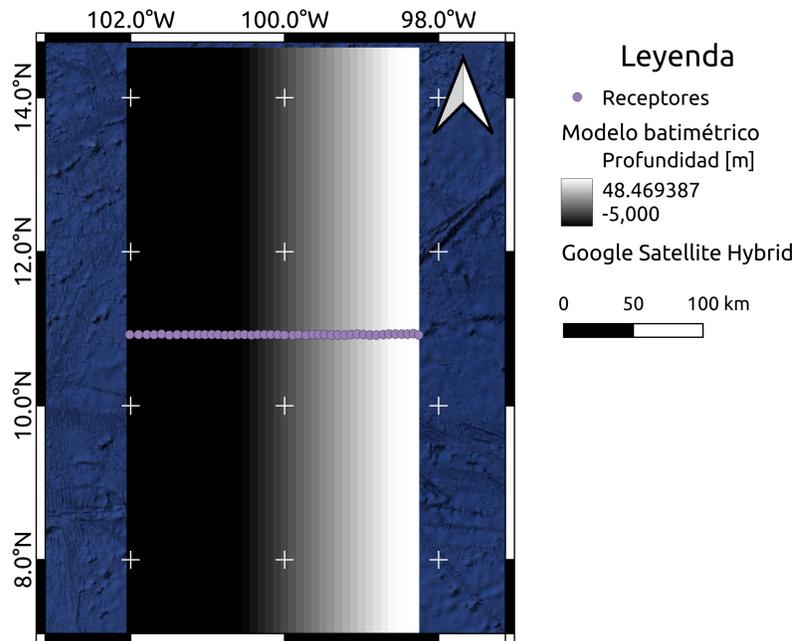
Tabla 4.2: Descripción de los parámetros establecidos para la simulación del modelo 1 en *Geoclaw*.

Los archivos empleados para la simulación y generación de gráficas en *Geoclaw*, se presentan en el anexo A.

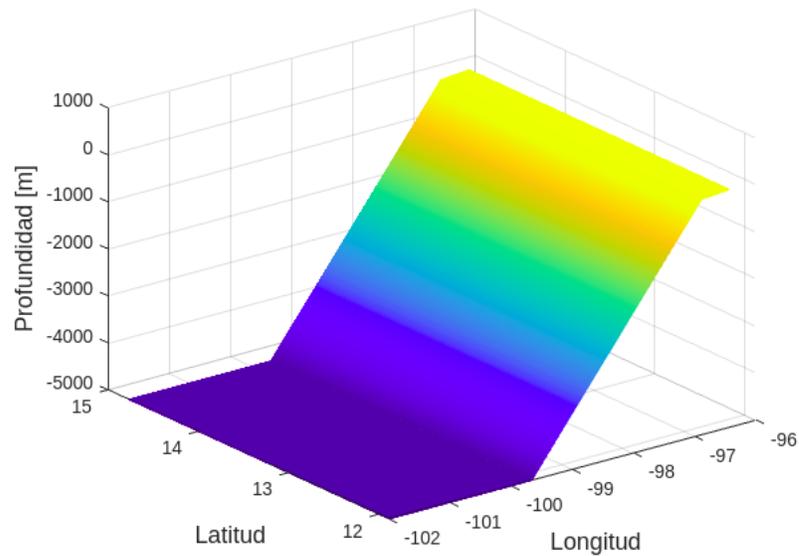
4.1.4. Caso de estudio

Aplicado el modelo simple que representa un océano profundo con una pared lateral, se busca aplicar el método a un caso con características que asemejen una batimetría real.

Por esta razón, se propone un segundo modelo de mayor extensión que presenta una disminución de profundidad simulando la transición hacia la costa (Figura 4.4).



(a) Dominio de modelo batimétrico propuesto



(b) Vista general del modelo

Figura 4.4: Características del segundo modelo propuesto. a) Mapa de raster batimétrico, simulando un mar profundo y costa. b) Esquema representativo de la forma del modelo.

En ambos casos, la fuente tsunamigénica presenta las mismas características y dada la longitud del modelo, se sitúan 42 estaciones de registro en la superficie. Este segundo modelo propuesto tiene una longitud total de 750 km, con una profundidad máxima de 5000 metros.

4.2. Definición del modelo para ecuaciones integrales

Al igual que en el método de aguas someras, el primer modelo propuesto corresponde a un océano en el que no existen variaciones importantes de profundidad. Las propiedades de este modelo se deben a que en esta primera aproximación, se desea verificar que el método funciona y permite describir correctamente la propagación de la onda dada una perturbación inicial. La extensión y demás características se presentan a continuación, así como la definición de la perturbación inicial y el comportamiento del medio.

4.2.1. Parámetros del modelo

Se establece que el modelo corresponde a un mar de 5000 m de profundidad, con una extensión de 160 km, tal como el propuesto para la simulación con EAS. El rango de frecuencias con el que se llevará a cabo la simulación, corresponde a las presentes en el esquema 2.3, respecto al caso de tsunamis. Las propiedades del medio se presentan en la Tabla 4.3 y con el esquema de la Figura 4.5.

f_i	0.01
f_f	0.22
ρ	1000 kg/m ³
c	1500 m/s
p_o	100
h	5000 m
L	160 km

Tabla 4.3: *Parámetros del modelo con ecuaciones integrales.*

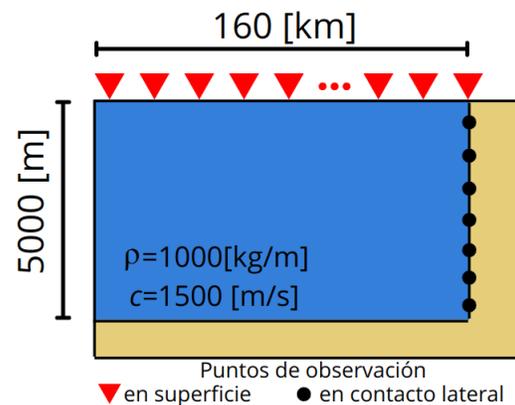


Figura 4.5: *Esquema de modelo a resolver con el método de ecuaciones integrales.*

4.2.2. Características de la fuente y desplazamiento del fondo marino

Se presentan tres casos de desplazamiento aplicados al modelo. El primero de ellos consiste en una perturbación horizontal que simula el movimiento del agua en un depósito con paredes rígidas, el segundo se trata de un desplazamiento unitario ubicado en la parte central del modelo y el último consiste en una fuente sísmica correspondiente a una falla geológica con desplazamiento vertical, que presenta las mismas características que la implementada para las simulaciones con las EAS (Tabla 4.1).

Para el primer caso, se define un vector de movimiento en dirección horizontal que será aplicado sobre la superficie del modelo definido (Figura 4.6a). En el segundo caso, se utiliza una función impulso que será operada únicamente en la parte central del modelo. Por otro lado, para obtener el desplazamiento del fondo marino dada la acción de una falla, se aplicó el modelo de Okada (1985), que es implementado en el programa *Geoclaw*. En este programa, inicialmente se definen las coordenadas de la falla de acuerdo a la distribución espacial del modelo. Posteriormente, se obtiene el desplazamiento vertical sobre la superficie de interés respecto a la ubicación de la fuente (Figura 4.6b).

Como datos de entrada de esta función, además de las coordenadas del centro de la falla, se definen la profundidad del centroide, la longitud, ancho, rumbo, echado, dirección de deslizamiento y *slip* de la falla. Dentro de esta función de *geoclaw*, se llevan a cabo los cálculos correspondientes al desplazamiento vertical definidos en Okada. La función regresa el desplazamiento vertical en la superficie de interés (Figura 4.7 arriba izq.). Sin embargo, con este valor de desplazamiento se busca obtener una función en el dominio de la frecuencia dado que el método se encuentra en ese dominio, por lo tanto, una vez calculado el desplazamiento, el archivo se exporta y se le hacen las modificaciones correspondientes.

Con el objetivo de aplicar el desplazamiento de fondo marino obtenido en *Geoclaw*, sobre los modelos propuestos para el método de ecuaciones integrales, se busca construir una función que represente los desplazamientos en el campo cercano (Figura ??). Para esto, se toma el valor máximo de desplazamiento y se construye a la función de campo cercano con un tiempo de retraso y tiempo de corte definidos. Construida la función, se transforma al dominio de la frecuencia y se define la ubicación sobre la que ocurrirá el desplazamiento

inicial (Figura 4.7).

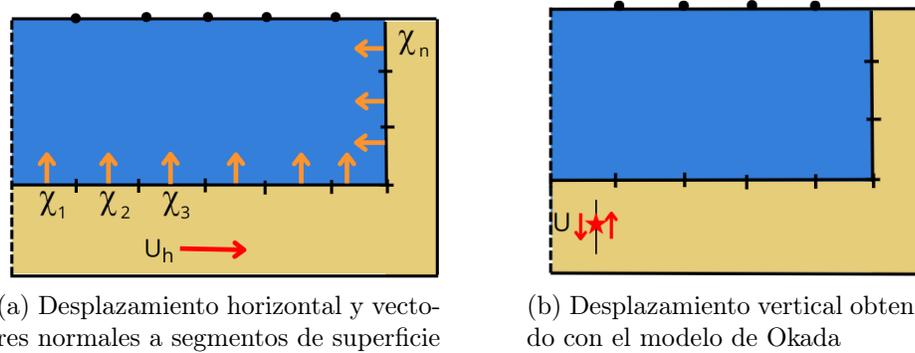


Figura 4.6: Esquema representativo de los desplazamientos impuestos en el fondo del modelo. a) El desplazamiento sobre el modelo se obtiene del producto punto entre vectores normales y desplazamiento horizontal. b) Se obtiene el desplazamiento vertical sobre una porción del modelo.

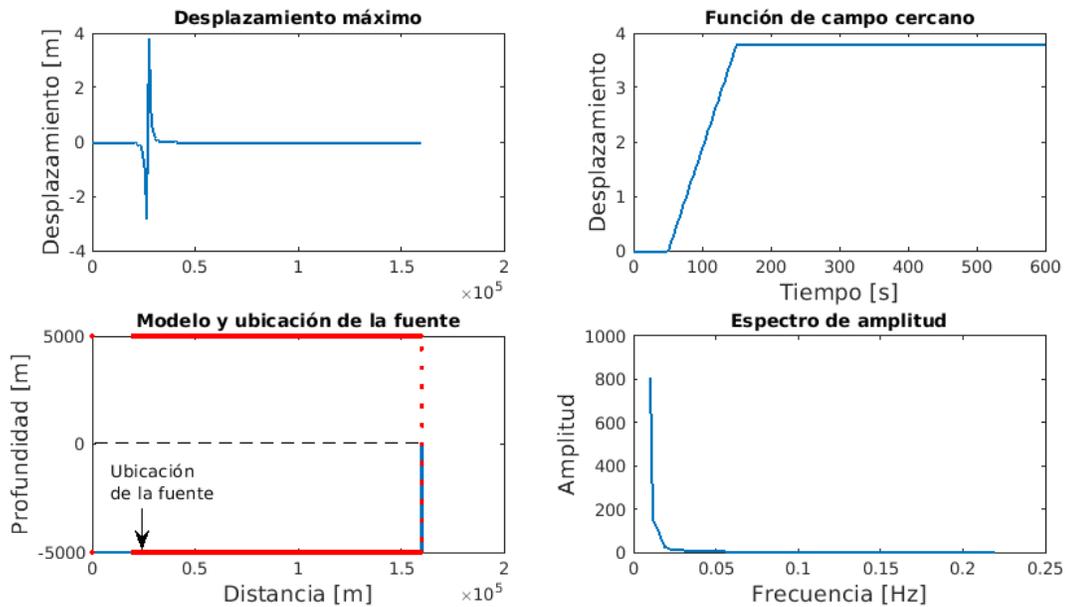


Figura 4.7: Definición de función de campo cercano. Se observa el desplazamiento obtenido con el modelo de Okada y la función rampa en el dominio temporal y de las frecuencias, así como su ubicación sobre el modelo.

Este resultado en el dominio de la frecuencia, se utiliza como desplazamiento en la frontera para resolver el sistema de ecuaciones sobre el fondo marino y así obtener el registro de altura del tsunami sobre un conjunto de puntos de observación. El procedimiento para el desplazamiento vertical, se resume en el diagrama de la Figura 4.8.

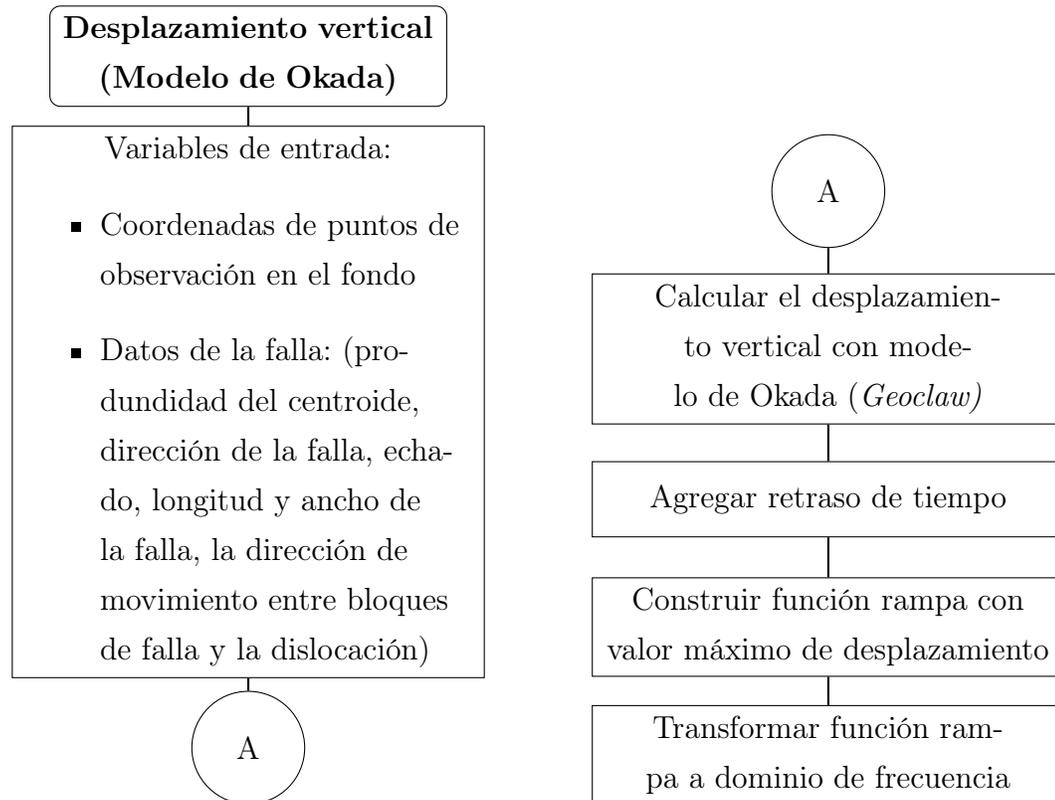


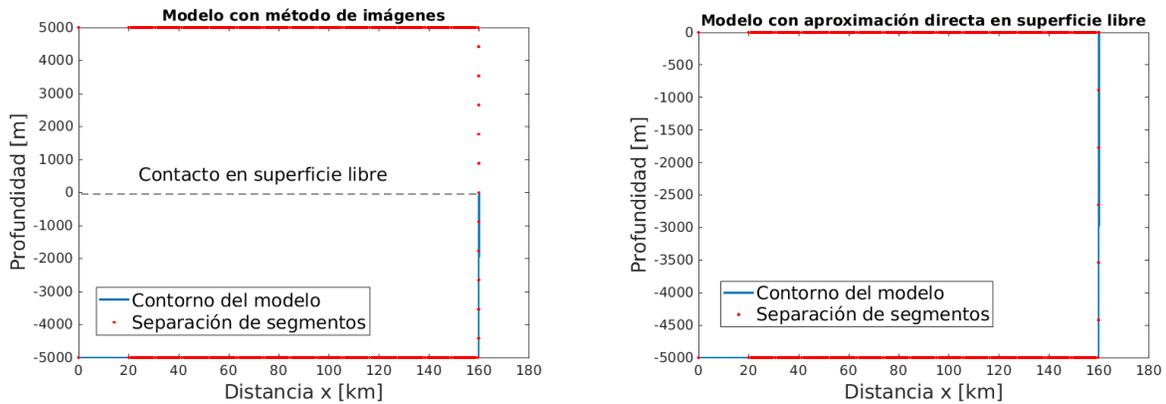
Figura 4.8: Diagrama de flujo del cálculo de desplazamiento vertical usando la función de *Geoclaw*.

Aplicar este desplazamiento vertical sobre el modelo, permitirá comparar las alturas del tsunami obtenidas con ambos métodos. Por otro lado, la aplicación del desplazamiento horizontal, permitirá comparar las presiones obtenidas sobre el contacto lateral respecto a un modelo analítico que simula la presión en una cortina de una presa dado un movimiento horizontal (ver e.g. Rosenblueth et al., 1976). Finalmente, la fuente unitaria permitirá observar la propagación de la onda desde el fondo del modelo hacia la superficie. El objetivo de aplicar estas distintas fuentes es mostrar el funcionamiento del método.

4.2.3. Construcción del sistema de ecuaciones integrales

Una vez definidas las características del modelo y el desplazamiento inicial del fondo marino, se construye el sistema de ecuaciones que permitirá obtener las magnitudes sobre los segmentos de la frontera. El sistema a definir, se hace para cada frecuencia dentro del rango a modelar y para cada una de estas se define una distancia ΔS que representa la longitud de los segmentos que componen al modelo permitiendo obtener resultados dada la longitud de onda. Los segmentos se definen de manera distinta dependiendo de la aproximación usada para definir las condiciones de frontera.

Comenzando con la primera aproximación, para el método de imágenes se definen los segmentos del modelo original y después se duplican generando la imagen. El modelo final tiene el doble de segmentos presentes (Figura 4.9a). En las otras aproximaciones, tanto al establecer directamente la condición de $P = 0$ como al definir la condición de gravedad en la superficie, los segmentos corresponden únicamente al contorno del modelo, es decir, estos representan el fondo, el contacto lateral y la superficie libre (Figura 4.9b).



(a) Segmentos correspondientes al método de imágenes

(b) Segmentos definidos directamente con superficie libre

Figura 4.9: Definición de segmentos para los métodos de imágenes (a) y con aproximaciones directas en superficie libre $P = 0$ y gravedad (b).

Definidas estas características, se establece la excitación que se aplicará sobre el modelo. La primera de ellas consiste en un movimiento horizontal, la segunda corresponde a una fuente adicional que se trata de un desplazamiento unitario generado en la parte central del modelo y la última fuente consiste en el desplazamiento vertical aplicado en EAS. El procedimiento llevado a cabo hasta este punto, se presenta en el diagrama 4.10.

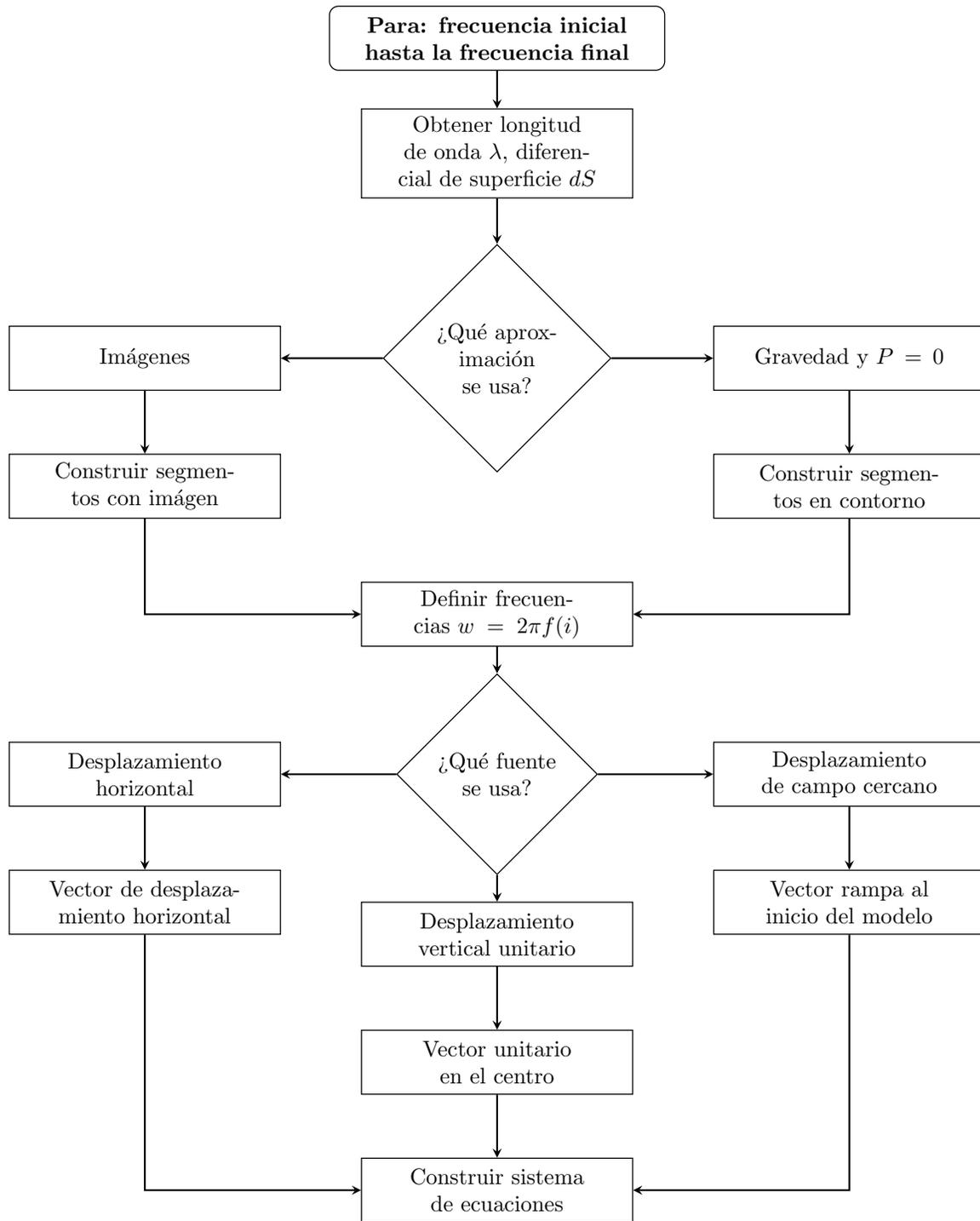


Figura 4.10: Diagrama de flujo de procedimiento implementado en el programa de MATLAB para el método de ecuaciones integrales.

Para la construcción de las matrices que conforman el sistema de ecuaciones, inicialmente, se definen como datos de entrada a las características que representan al modelo, tales como los puntos centrales entre segmentos, sus vectores normales, las propiedades del medio, la frecuencia para la que se definirá el sistema y el desplazamiento inicial del fondo marino.

En la construcción de la matriz G que contiene a las derivadas normales de la función de Green para el caso de desplazamiento y a la función de Green para el caso de presión, es importante considerar que cada renglón contiene las contribuciones/efectos de todos los segmentos que componen al modelo, sobre un solo segmento como se muestra en las ecs. 3.26, 3.30 y 3.29. Para el caso en que se calcule la contribución de los mismos segmentos (por ejemplo, $G(x_1, \xi_1)$), se aplica el concepto de *Cauchy-Goursat* usando la ec. 3.15.

La integral de cada uno de los elementos que conforman al sistema, se obtiene al aplicar el método de integración gaussiana considerando 10 puntos (Beer et al., 2008). En cada paso de la integración, se calcula la derivada de la función de Green o la función de Green según sea el caso correspondiente a cada segmento.

En el caso de la matriz de desplazamientos (ec. 3.23), cada renglón se llena con el producto punto entre el vector normal a la superficie y el vector desplazamiento obtenido con el modelo de Okada o en el caso simple, con un movimiento horizontal. Este resultado corresponde al desplazamiento en cada segmento que compone al modelo. El sistema se resuelve y se llega al valor de χ_i que representan los módulos de la función de Green sobre el contorno del modelo establecido. En las Figuras 4.11, 4.12 y 4.13, se presentan los procedimientos de manera resumida para cada aproximación, usando como guía los esquemas 3.5 y 3.6.

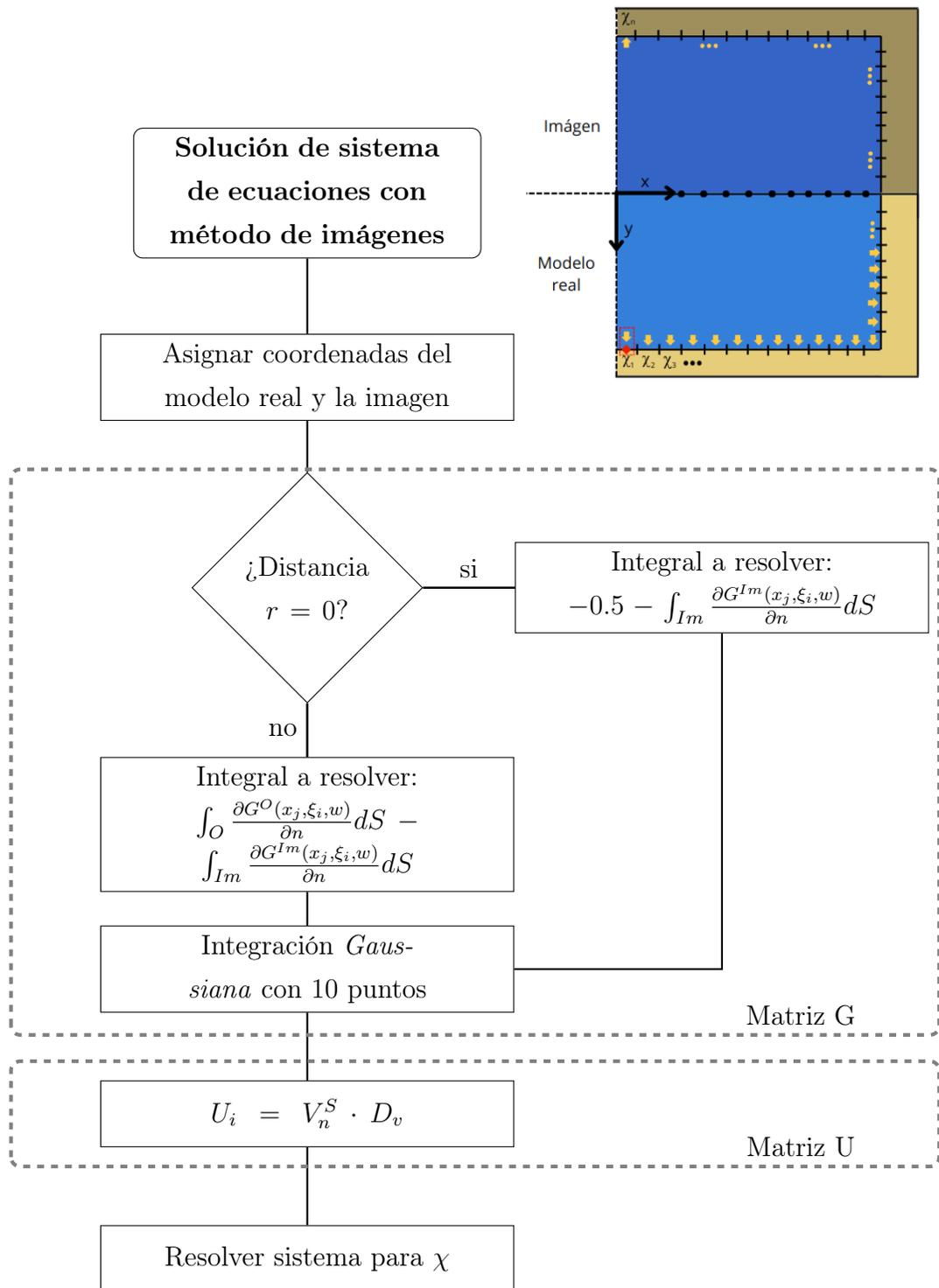


Figura 4.11: Diagrama de flujo de la solución del sistema de ecuaciones utilizando el método de imágenes.

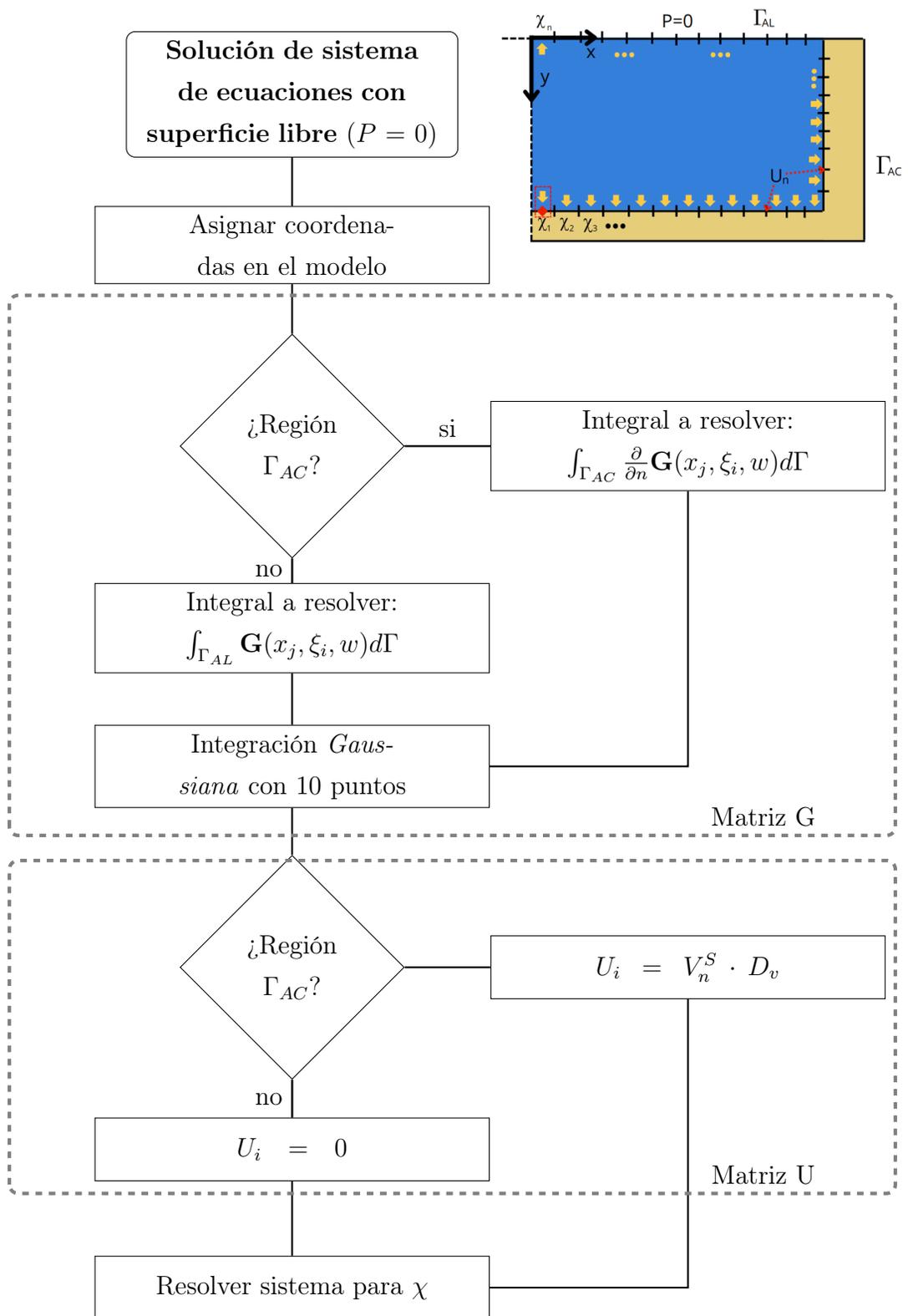


Figura 4.12: Diagrama de flujo de solución del sistema de ecuaciones con condición $P = 0$ en superficie.

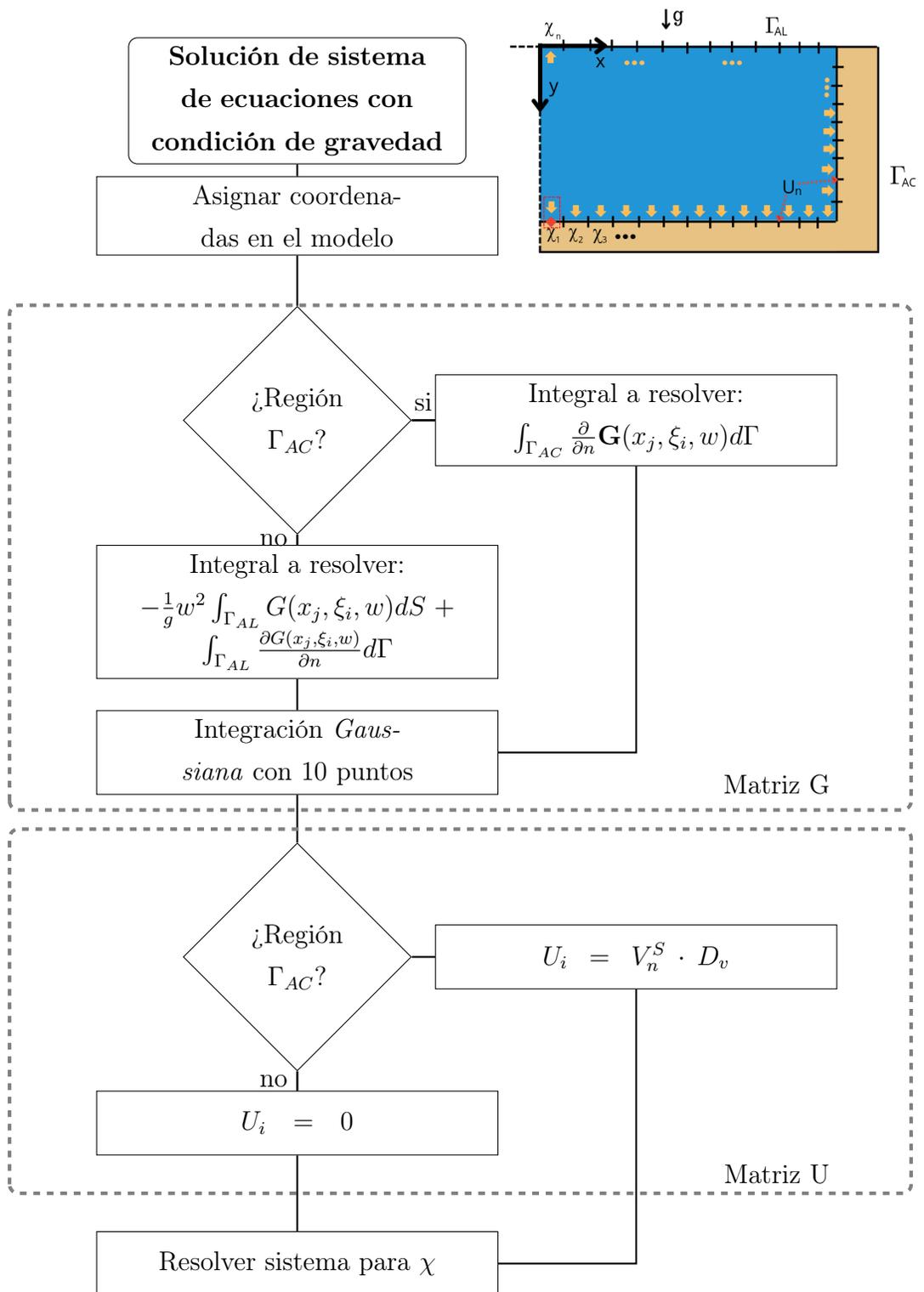


Figura 4.13: Diagrama de flujo de solución del sistema de ecuaciones con condición de gravedad en superficie.

4.2.4. Presión y desplazamiento vertical

En la sección anterior, se obtuvo el sistema para calcular el valor de χ para cada porción que compone el contorno del modelo. Con el objetivo de obtener los desplazamientos de la columna de agua y la presión final en los puntos de observación establecidos, únicamente se sustituye el valor de χ en un nuevo sistema construido con las ecs. 3.18 y 3.21.

El desplazamiento y presión para cada punto de observación, se obtiene con todas las contribuciones de los segmentos que componen al modelo. Por otro lado, los valores obtenidos, se encuentran en el dominio de la frecuencia. Para su comparación, se transforman al dominio del tiempo y se obtiene la representación del desplazamiento en la superficie del modelo. Estos resultados toman en cuenta el desplazamiento desde que se activa la fuente hasta el momento que arriba a la superficie, incluyendo su interacción con la gravedad. En el caso de las presiones, se obtiene un análisis de presiones sobre las estaciones de observación dadas las características de movimiento en el fondo.

4.2.5. Caso de estudio

Al igual que con el método de EAS, se propone la aplicación de ecuaciones integrales en un caso cercano a la realidad. En este modelo, se tiene la interacción de océano profundo y su transición a la costa. Las dimensiones del modelo propuesto, corresponden a las ya implementadas en el programa *Geoclaw* (Figura 4.14). El registro de alturas de tsunami se obtiene a través de un conjunto de 100 estaciones ubicadas en la superficie y a lo largo del modelo.

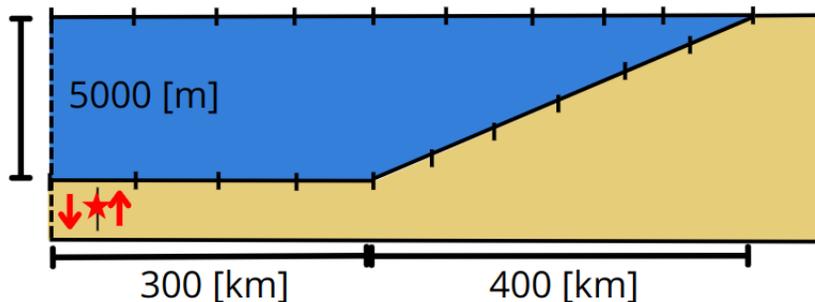


Figura 4.14: Segundo modelo propuesto para la aplicación del método de ecuaciones integrales.

La construcción del sistema de ecuaciones se hace de la misma manera que para el primer caso propuesto. Dadas las dimensiones de este modelo, se tiene un mayor número de segmentos que representan la totalidad del problema. La construcción del sistema de ecuaciones y su resolución, se plantea considerando las tres aproximaciones de aplicación de condiciones, es decir, se construye el modelo con el método de imágenes, posteriormente aplicando la condición de $P = 0$ directamente en la superficie y, finalmente se agrega la condición de gravedad sobre el modelo.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo, se presenta la comparación del método de ecuaciones integrales en los cálculos de presión, sobre una serie de estaciones de observación ubicadas en el contacto lateral del primer modelo propuesto. Los valores obtenidos, se comparan respecto a una solución analítica de las presiones hidrodinámicas sobre una cortina vertical dado un movimiento horizontal (apéndice B). Presentada la validación del método con el cálculo de presiones sobre un contacto vertical, se muestra su funcionamiento en la propagación de la onda, una vez ocurrida la perturbación inicial, mediante la aplicación de una fuente puntual situada en el centro del modelo.

Finalmente, se expone el análisis comparativo entre el método de EAS con la aplicación del programa *Geoclaw* respecto al método propuesto de ecuaciones integrales. En la comparación se destaca la propagación de la onda a lo largo del modelo para cada método y la diferencia entre las alturas de tsunami estimadas.

5.1. Análisis de presiones en contacto lateral

Las estaciones de observación para el cálculo de presiones, se situaron en la pared vertical del modelo como se observa de manera esquemática en la Figura 4.5 con los puntos negros. En el caso analítico contenido en los anexos de este trabajo (anexo B), se definió una cortina vertical con las mismas dimensiones del modelo, incluyendo sus propiedades físicas. La cantidad de puntos de registro para el caso de ecuaciones integrales depende de la distancia

ds definida, en este caso, los valores se obtuvieron con un total de 114 estaciones ubicadas sobre el contacto lateral con una distancia de 45 metros entre puntos de observación.

Por otro lado, los cálculos de presión sobre el contacto vertical, aplicando el método de ecuaciones integrales, se obtuvieron aplicando las aproximaciones: (a) del método de imágenes, (b) la condición directa en la superficie libre definiendo a la presión igual a cero y (c) la condición de gravedad que actúa directamente sobre el modelo.

En las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, se muestra la comparación de las presiones obtenidas sobre el contacto vertical, resultantes de la aplicación del método de ecuaciones integrales, comparadas con la solución analítica del anexo B (círculos rojos). Adicionalmente, sobre las gráficas de comparación se presentan los valores de error relativo correspondientes a cada aproximación.

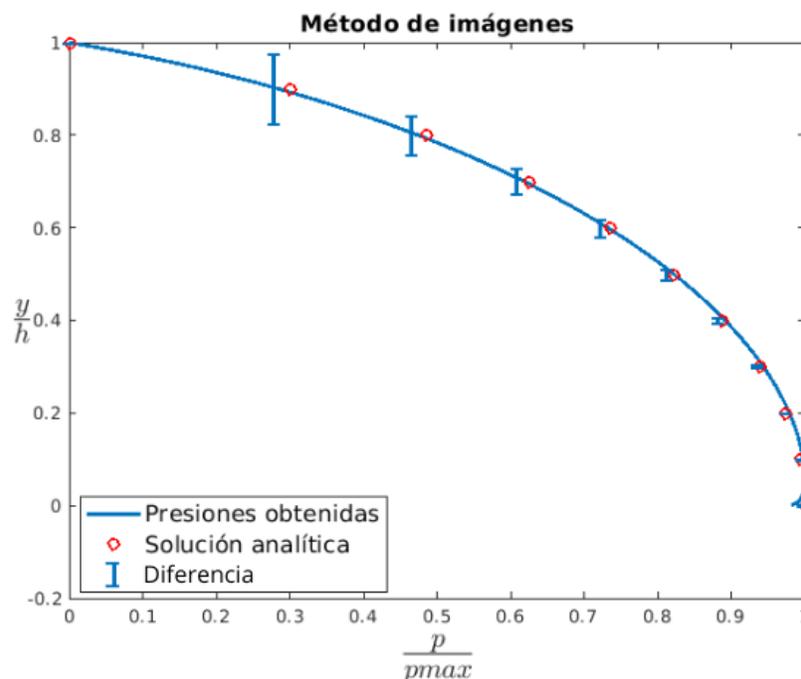


Figura 5.1: Comparación de presión obtenida con método de imágenes y solución analítica

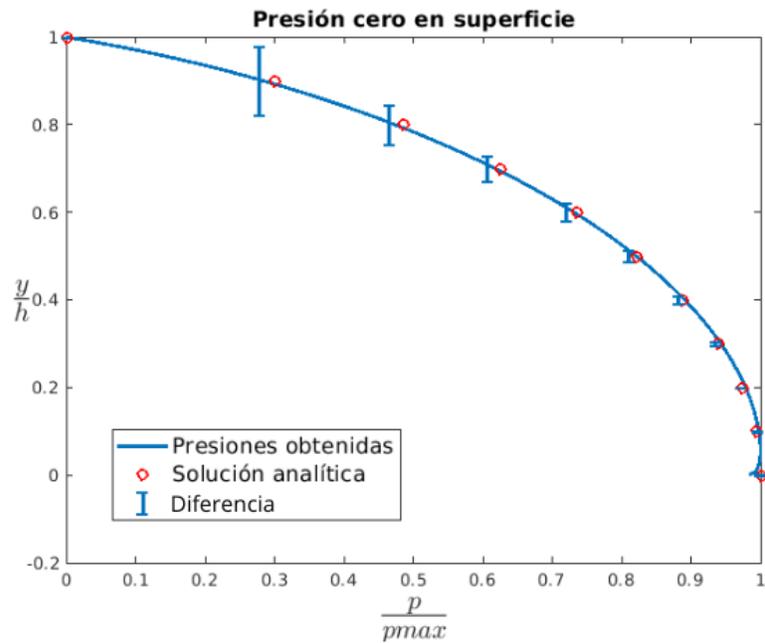


Figura 5.2: Comparación de presión obtenida con la aproximación $P = 0$ aplicada directamente en la superficie, y solución analítica.

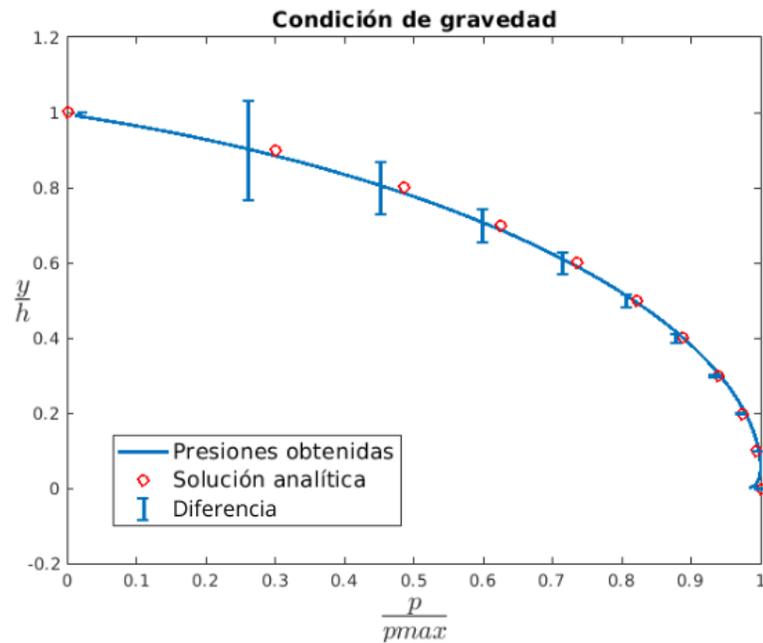


Figura 5.3: Comparación de presión obtenida con la condición de gravedad aplicada al modelo, y solución analítica sin gravedad.

	Imágenes	P=0	Gravedad
Porcentaje de ajuste	98.28 %	98.18 %	97.17 %

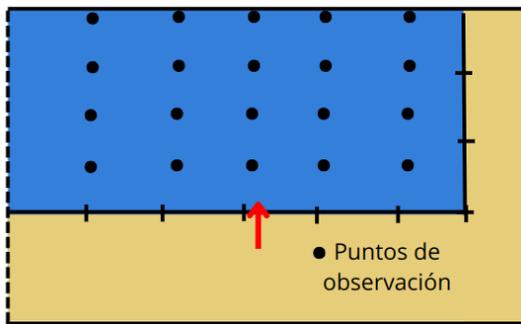
Tabla 5.1: *Porcentaje de ajuste de las aproximaciones propuestas con el método de ecuaciones integrales, respecto a la solución analítica.*

Respecto a las tres formas de aplicación de las condiciones de frontera, se muestra que las aproximaciones tienen un buen ajuste con el método analítico dadas sus similitudes y su bajo nivel de error, siendo el modelo que considera la gravedad el que se aleja, naturalmente, de los resultados analíticos y mostrando directamente la influencia de esta propiedad sobre el modelo. Con relación a esta última comparación, cabe resaltar que la solución analítica no incluye los efectos de gravedad que actúan sobre la pared vertical debido a que su análisis está enfocado a proporcionar la presión debida a un movimiento horizontal considerando únicamente las dimensiones del modelo y su densidad. De manera general, las presiones obtenidas en los tres casos, muestran valores muy cercanos a la solución analítica, (Tabla 5.1) demostrando que el método presenta resultados aproximados a los esperados. Igualmente, los resultados se ajustan a la realidad debido a que la presión máxima se encuentra justamente en el fondo del modelo y en superficie se tienen presiones iguales a cero, como se estableció en un principio. Es importante resaltar que los resultados se ajustan al modelo analítico, al incrementar el número de segmentos que componen al contacto vertical.

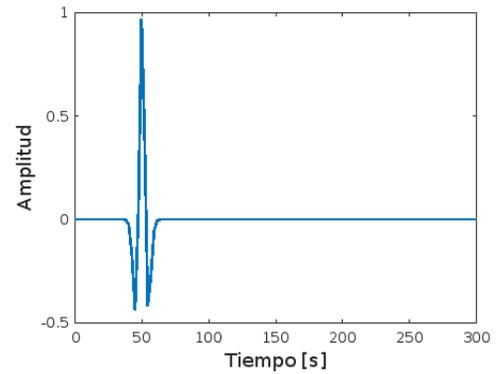
5.2. Propagación de la onda en el modelo

Para esta sección, se definió una fuente situada en la parte central del modelo. El objetivo de esta aplicación, consiste en visualizar la propagación de la onda una vez que ocurre la perturbación y su propagación en superficie. La fuente propuesta consiste en la aplicación de una ondícula *Ricker* sobre el modelo, la ondícula tiene un retraso arbitrario de 50 segundos (Figura 5.4).

En la Figura 5.5, se muestra la evolución de la onda una vez que se perturba el medio con la ondícula. En el conjunto de imágenes, se observa la propagación de manera radial y que presenta interacción con el fondo y la superficie del fluido.



(a) Esquema de aplicación de la fuente tsunamigénica y distribución de receptores.

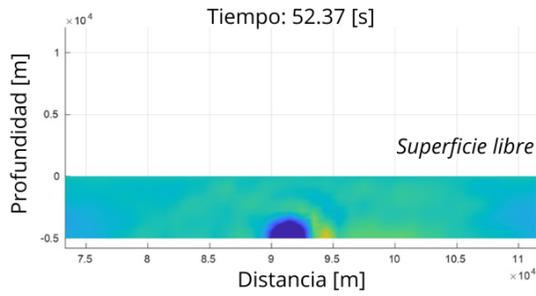


(b) Ondícula de Ricker con retraso de 50 [s].

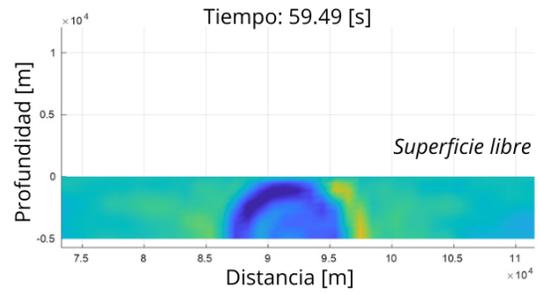
Figura 5.4: Ubicación y definición de fuente tsunamigénica para el análisis de propagación de la onda.

De estos resultados, se comprueba el funcionamiento del método de ecuaciones integrales, además de que incluye la interacción de las ondas que existe entre el fondo, durante su propagación y en su arribo a la superficie.

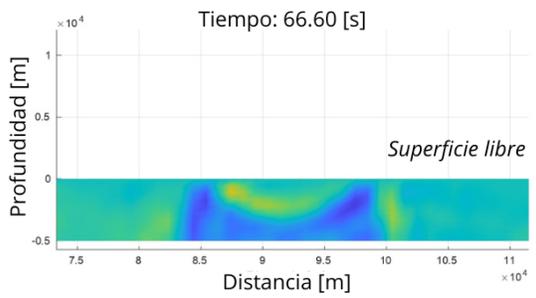
Respecto a la propagación en superficie, en la Figura 5.6 se observa la evolución de la onda de manera clara, y su rebote con la pared vertical. En este caso, el retraso de la onda se debe a la definición de la fuente como una ondícula de *Ricker*.



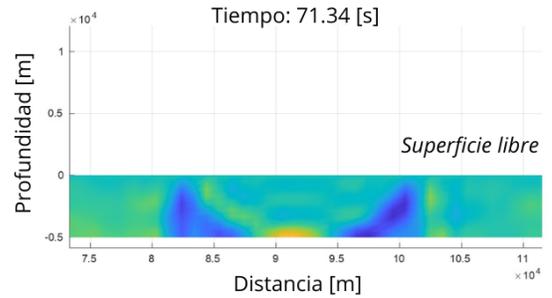
(a) *Tiempo 1*



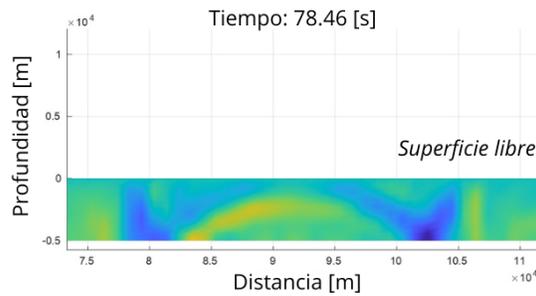
(b) *Tiempo 2*



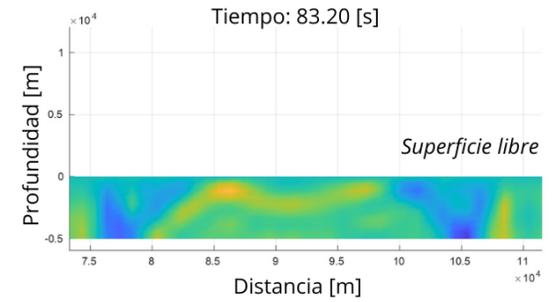
(c) *Tiempo 3*



(d) *Tiempo 4*



(e) *Tiempo 5*



(f) *Tiempo 6*

Figura 5.5: *Propagación de la onda después de la perturbación en el medio.*

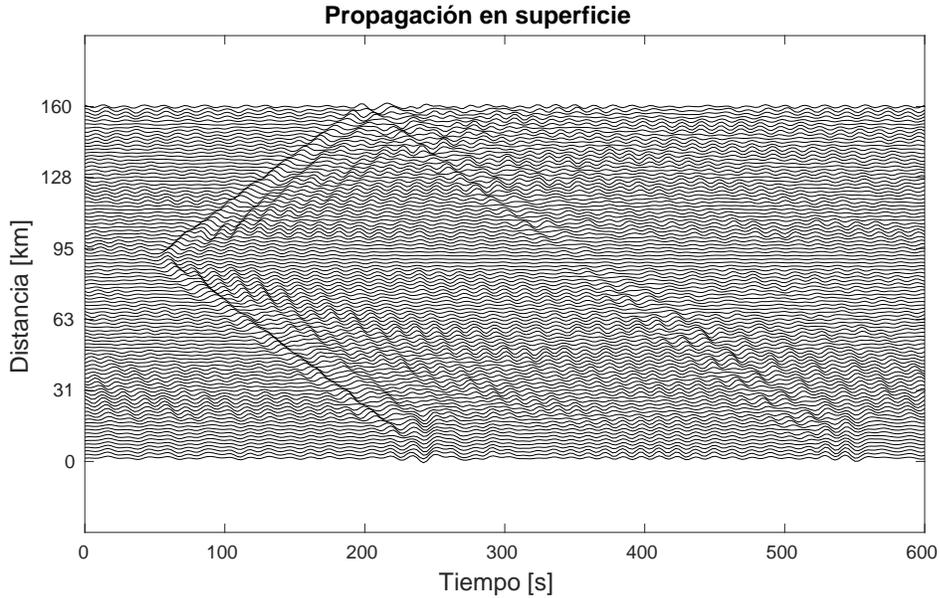


Figura 5.6: *Propagación de la onda en superficie.*

5.3. Altura de tsunami obtenida en *Geoclaw*

Considerando las dimensiones de los modelos propuestos en el capítulo anterior, los tiempos de simulación fueron de aproximadamente 215 segundos para el primer modelo y 900 segundos para el segundo. Estos se definieron con el objetivo de registrar el rebote de la onda sobre la costa y la pared vertical. Dado que no era necesario tener resolución alta en la simulación, se establecieron tres niveles de refinamiento, obteniendo una resolución mínima de 550 metros para el primer modelo y 530 metros para el segundo, con un total de 45 salidas de simulación. Por otro lado, es importante mencionar que se modificó la velocidad de propagación de la onda que *Geoclaw* define como $c = \sqrt{gh}$, con el objetivo de mantener las propiedades homogéneas entre ambos métodos de simulación, teniendo una velocidad de $1500 \frac{m}{s}$. En la Figura 5.7, se presentan algunas salidas obtenidas en la simulación con la implementación de ambos modelos batimétricos propuestos.

Los puntos negros presentes en la Figura 5.7, representan las estaciones de control sobre las que se registra la propagación de la onda de tsunami con el objetivo de analizar los resultados en un dominio bidimensional. En el primer modelo (Figuras 5.7a, 5.7c y 5.7e), las ventanas de simulación de *Geoclaw*, muestran el choque de la onda con la pared vertical de manera clara.

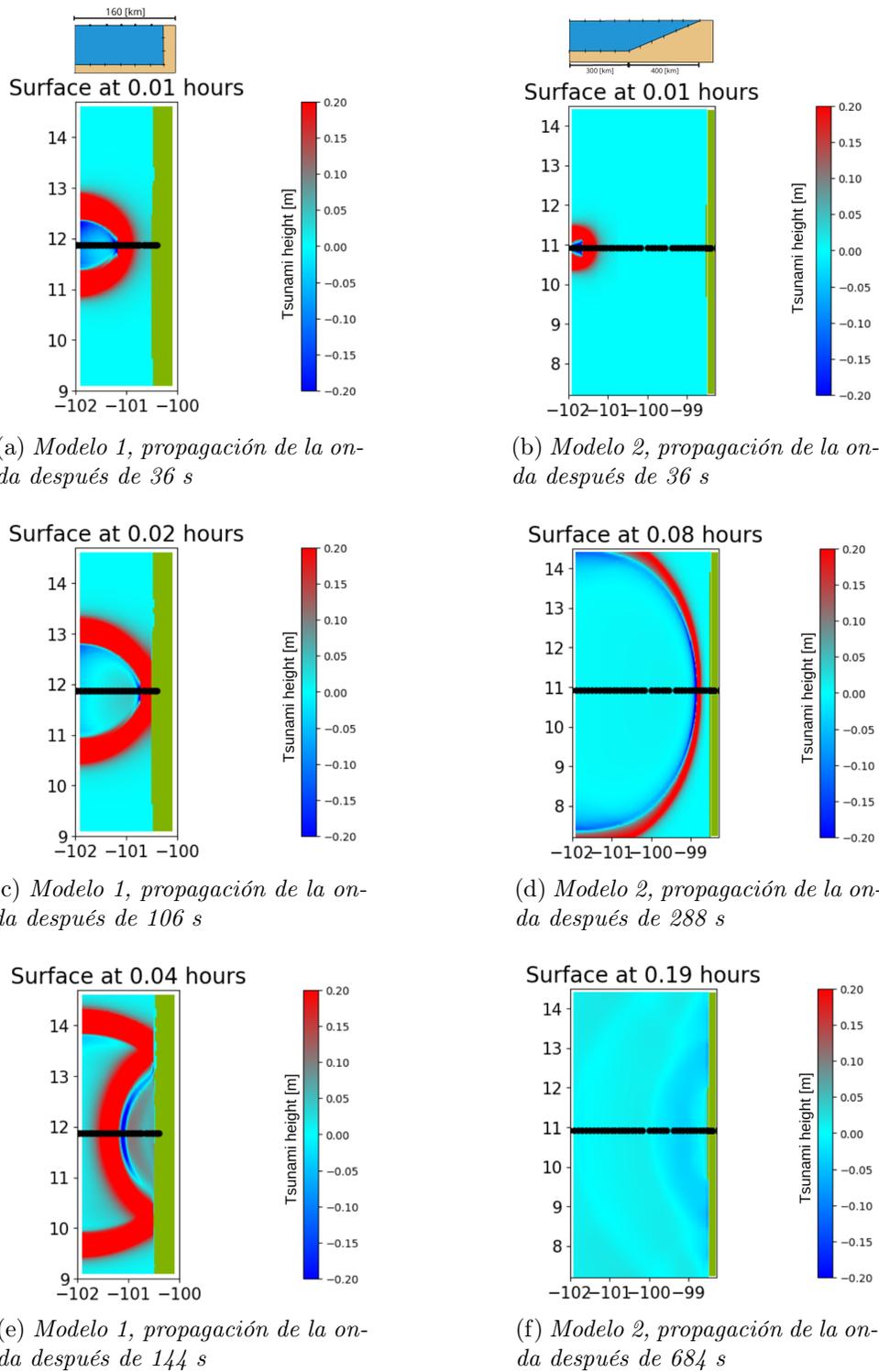


Figura 5.7: Simulación de propagación del tsunami de los modelos 1 (columna de la izquierda) y 2 (columna de la derecha). Los puntos negros representan las estaciones de registro en superficie.

El segundo modelo (Figura 5.7b , 5.7d y 5.7f), dadas sus características de transición a la costa, muestra con menor intensidad el rebote de la onda pues esta logra penetrar casi en su totalidad.

En las Figuras 5.8 y 5.10, se muestra la propagación de la onda en superficie, a lo largo de los modelos propuestos. En el modelo de menor longitud (Figura 5.8), la amplitud no presenta grandes variaciones debido a las dimensiones; sin embargo, se observa que una vez que actúa la fuente sobre el medio, la respuesta de altura del tsunami se registra inmediatamente (Figura 5.9), indicando que no se considera la propagación de la onda durante su arribo a la superficie. Además, se desprecia el fenómeno de dispersión que ocurre a lo largo de su camino hacia la superficie. Por otro lado, se observa con claridad en los registros el rebote de la onda con la pared vertical, presentando alturas menores a 1 metro una vez ocurrido este rebote.

La acción inmediata de la fuente se percibe igualmente en el modelo 2 (Figura 5.10). Debido a la mayor longitud, en este modelo si se observa el decaimiento de amplitud del tsunami conforme se propaga y la ligera disminución de velocidad al momento de acercarse a la costa (Figura 5.11). En este modelo no se percibe el rebote de la onda con claridad, debido a su penetración en la costa. Respecto a la propagación en ambos modelos, no se observa interacción entre las ondas, únicamente se presenta su evolución en el tiempo a lo largo de un solo frente.

Por otro lado, la altura máxima obtenida con la fuente de desplazamiento vertical para ambos modelos se encuentra en el rango de 4 metros para el primer modelo y 2 metros para el segundo, identificando que el desplazamiento del fondo se traslada casi en su totalidad hacia la superficie. Respecto a los tiempos de arribo, ambos se ajustan a los tiempos esperados dadas las dimensiones del modelo.

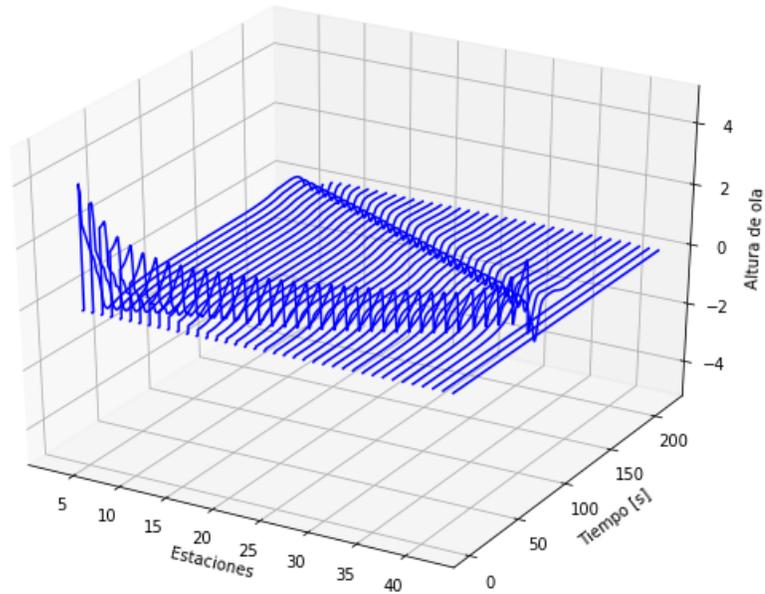


Figura 5.8: *Altura de tsunami obtenida para el modelo 1*

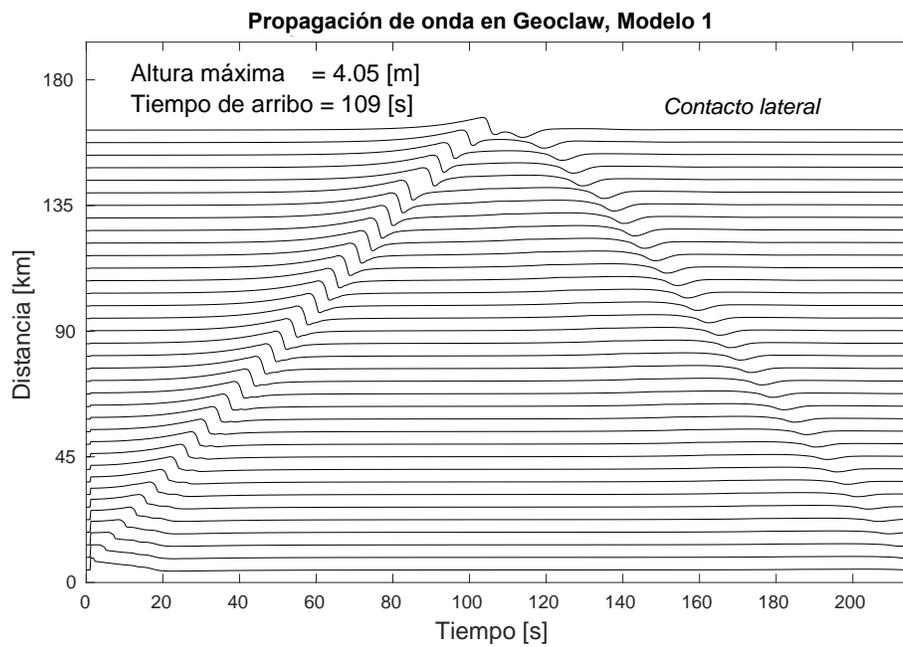


Figura 5.9: *Propagación de la onda para el modelo batimétrico 1*

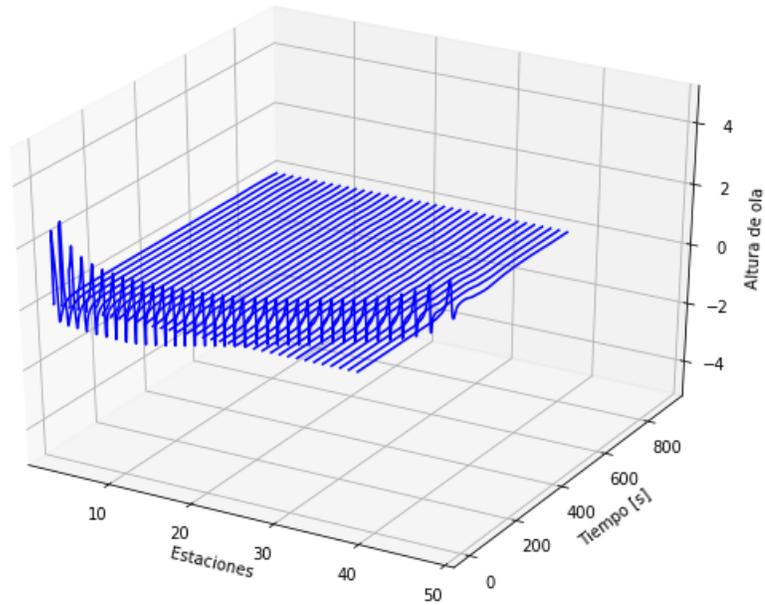


Figura 5.10: *Altura de tsunami obtenida para el modelo 2*

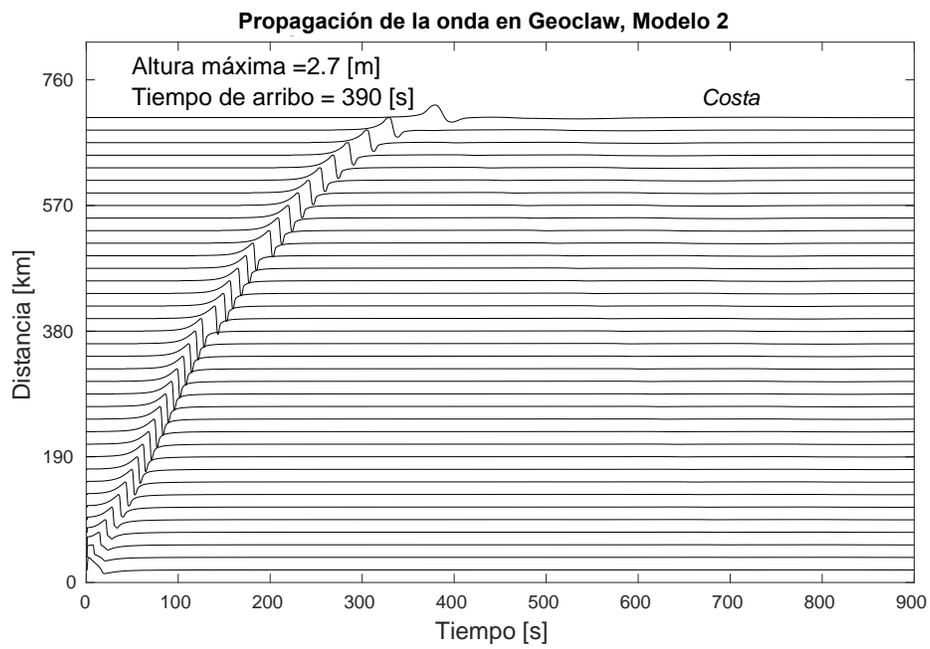


Figura 5.11: *Propagación de la onda para el modelo batimétrico 2*

5.4. Altura máxima obtenida con el método de ecuaciones integrales

Para el primer modelo propuesto, se situaron 100 estaciones a lo largo de la superficie del fluido. La fuente, al igual que en la simulación en *Geoclaw*, está ubicada al inicio del modelo. En las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14, se muestra la propagación de la onda en superficie, una vez ocurrida la perturbación en el medio. Los resultados se obtuvieron aplicando las tres aproximaciones explicadas en los capítulos anteriores, con el objetivo de verificar el funcionamiento del método.

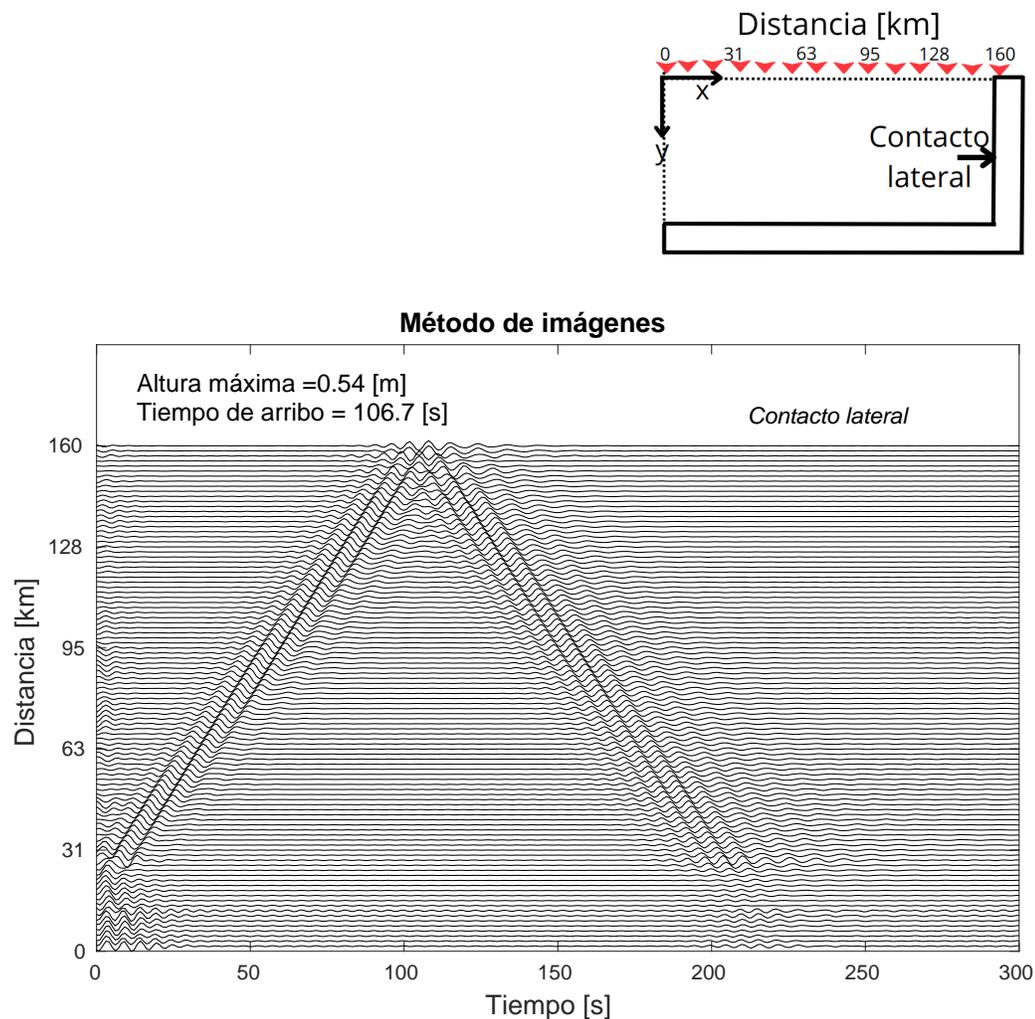


Figura 5.12: Propagación en superficie con registros de desplazamiento, método de imágenes.

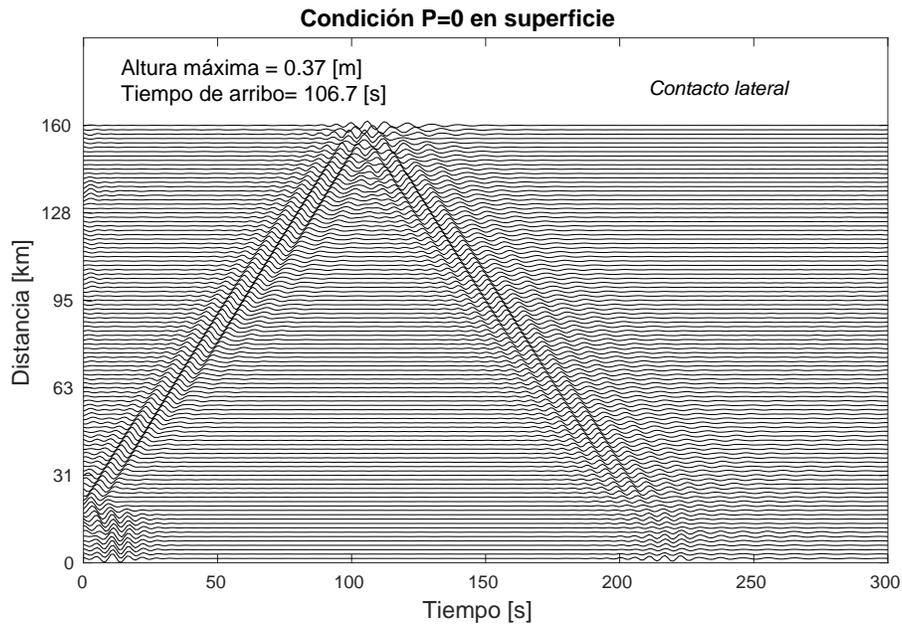


Figura 5.13: Propagación en superficie con registros de desplazamiento, $P = 0$

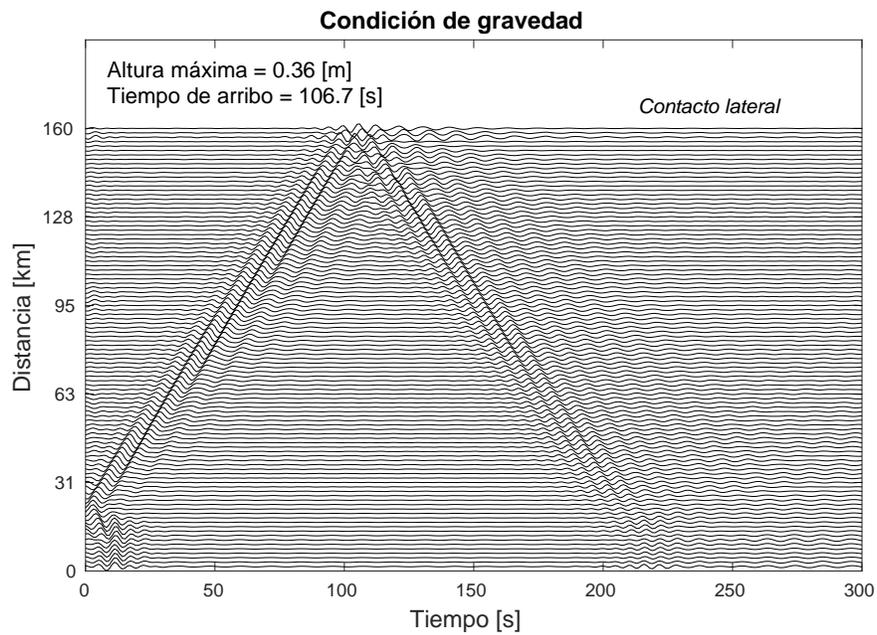


Figura 5.14: Propagación en superficie con registros de desplazamiento, condición de gravedad

De las Figuras 5.12, 5.13 y 5.14, se observan las similitudes entre las tres consideraciones, así como su reflexión con la pared lateral. Además de presentar la propagación de la onda, se identifica con la pendiente, que la velocidad de propagación es de 1500 m/s , siendo consistente con la velocidad establecida en un inicio. Dadas las similitudes de propagación de la onda, al igual que el ajuste de presiones presentado en la Tabla 5.1, se muestran los registros de altura del tsunami obtenidos únicamente bajo la aplicación de la condición de gravedad sobre el modelo debido a que esta condición es la que caracteriza la propagación de las ondas de tsunami y por ende compete en la simulación.

La altura máxima registrada para el primer modelo batimétrico propuesto fue de 0.36 metros (Figuras 5.14 y 5.15). Este resultado contrasta considerablemente con el obtenido en *Geoclaw*; cabe resaltar que el desplazamiento del fondo marino no se traslada en su totalidad sobre la superficie de la columna de agua, mostrando la interacción que existe entre las ondas que se propagan por el fluido.

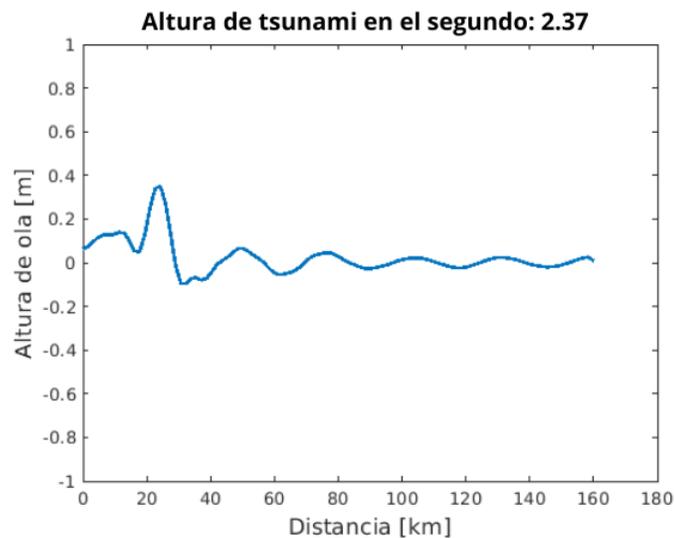


Figura 5.15: *Altura máxima registrada para el modelo batimétrico 1.*

De este resultado, se destaca que la altura del tsunami concuerda con la naturaleza del modelo dado que se trata de un mar profundo en el que no se esperaría observar grandes alturas de tsunami debidas a un desplazamiento del fondo marino. Respecto al tiempo de arribo de la onda sobre la pared lateral, considerando las dimensiones del modelo y el tiempo en que actúa la fuente, el tiempo de arribo coincide con la velocidad de la onda y la distancia de la fuente con el contacto vertical (Figura 5.14).

En el caso del segundo modelo batimétrico, se definieron un conjunto de 100 estaciones situadas en la superficie del fluido. La fuente y su ubicación presenta las mismas características que las establecidas en el modelo anterior y en el implementado en *Geoclaw*. Para este caso, se estableció un tiempo de simulación de 800 segundos y se aumentó el rango de frecuencias a modelar con el objetivo de captar la propagación de la onda en aguas poco profundas. Los resultados se muestran en las Figuras 5.16 y 5.17 con la propagación en superficie y la altura máxima registrada, respectivamente.

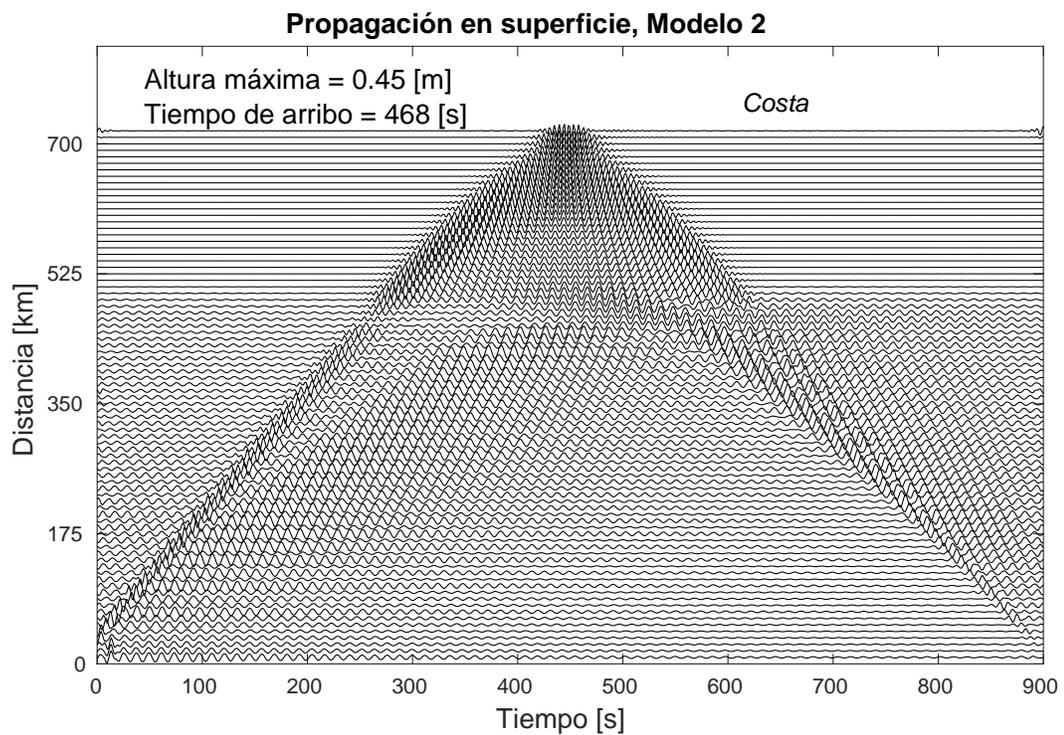


Figura 5.16: *Propagación en superficie en el modelo 2. Se presentan los registros de desplazamiento en superficie, utilizando el método de ecuaciones integrales.*

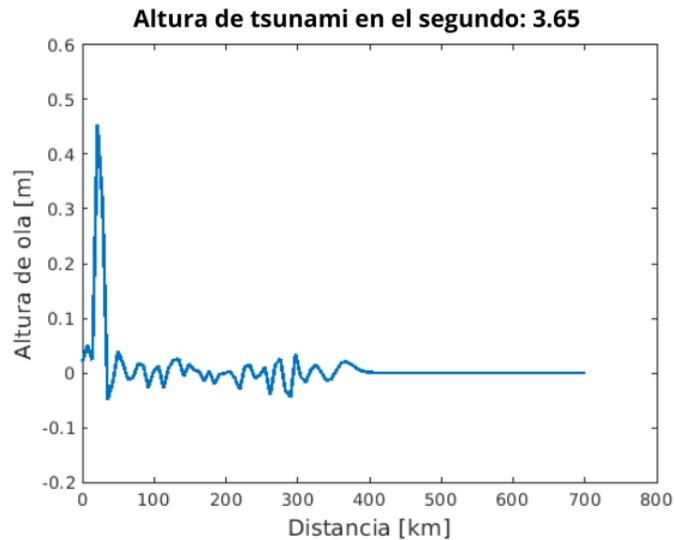


Figura 5.17: *Altura de tsunami obtenida para el modelo 2. Se destaca la altura máxima registrada y la definición en aguas poco profundas.*

En la Figura 5.16, se observa la propagación de la onda a lo largo del modelo, así como su arribo a la costa. Respecto al tiempo de arribo y velocidad de propagación, estas corresponden con las esperadas para este modelo. A pesar de que se percibe la tendencia del frente de onda, estos resultados presentan ruido provocado por las dimensiones del modelo y que se encuentran predominantemente en los primeros kilómetros del mismo. Además, en aguas poco profundas se nota que las frecuencias analizadas no representan la propagación en la costa.

La altura máxima registrada para este segundo modelo es de 0.45 metros (Figura 5.16 y 5.17). Contrario al resultado obtenido en *Geclaw*, a pesar del ruido presente, se logra captar el arribo de la onda a la costa y su reflejo.

5.5. Comparación de métodos

Los resultados obtenidos con los dos métodos implementados en este proyecto, presentan diferencias considerables. Como primer distintivo, se destaca la generación de la fuente y su acción sobre los modelos. En el programa *Geoclaw* se obtiene el desplazamiento del fondo marino que posteriormente se traslada directamente sobre la columna de agua. De esta manera, el fluido se desplaza la misma cantidad que el fondo, como se observa en las Figuras 5.8 y 5.10, incluso cuando se trata de un mar profundo. Contrario al desplazamiento impuesto en *Geoclaw*, en el método de ecuaciones integrales se considera la propagación de las ondas una vez ocurrida la perturbación inicial, hasta llegar a la superficie, es decir, no se impone el desplazamiento directamente sobre la columna de agua. Este hecho, permite incluir la interacción entre las ondas, una vez generado el desplazamiento inicial.

Por otro lado, otro distintivo presente es la teoría detrás de ambos métodos. La aplicación de las ecuaciones de aguas someras, implica la definición de un desplazamiento inicial sobre la columna de agua para después modelar su comportamiento bajo la acción de la gravedad, con ayuda de las ecuaciones de continuidad y momento, integradas a profundidad. En el método de ecuaciones integrales, se incluyen los efectos que tiene la fuente sobre el fluido y el resultado de la interacción de las ondas sobre la superficie.

Finalmente, la manera en la que se implementa la fuente y la forma en que se describe su desplazamiento, tiene un efecto inmediato en el registro de altura del tsunami. En aguas someras, las alturas tienen el mismo desplazamiento que la perturbación inicial establecida en *Geoclaw*. En el método de ecuaciones integrales, las alturas de tsunami son menores a un metro; sin embargo, se incluyen los efectos de dispersión, permitiendo obtener resultados consistentes con las observaciones dadas las características y dimensiones de los modelos.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios finales

Se implementó el método de ecuaciones integrales, que permite describir la propagación de un tsunami en aguas profundas, considerando un problema de interacción cinemática. Su funcionamiento se comprobó mediante un análisis de presiones sobre un contacto lateral, cuyos resultados se compararon con una solución analítica que precisamente otorga las presiones sobre un contacto vertical, dado un movimiento horizontal. Este análisis permitió observar el ajuste entre el método propuesto y la solución analítica, con errores mínimos para las tres aproximaciones de condiciones de frontera establecidas.

Por otro lado, los resultados de propagación de la onda una vez ocurrida la perturbación inicial, aunque se observa la evolución del desplazamiento de forma radial, este resultado muestra poca definición debido al ruido presente en la señal y a las dimensiones de los modelos propuestos, en los que se distorsiona la propagación de la onda y por ende, causa la distorsión de la señal. Además de estas características, también se genera ruido por la discretización o malla que caracteriza al modelo.

Comprobado el funcionamiento del método en cuanto a la propagación de la onda y la distribución de presiones, se compararon los resultados de su aplicación en una simulación de altura de tsunami respecto a una simulación realizada con el método de ecuaciones de aguas someras, implementado en el programa *Geoclaw*. El contraste entre ambos métodos muestra precisamente la diferencia que existe respecto a la manera en que se implementa la fuente y como actúa sobre los modelos. Como se mencionó en un inicio, *Geoclaw* coloca

directamente el desplazamiento del fondo marino sobre la columna de agua y posteriormente deja actuar al modelo bajo el efecto de gravedad. Contrario a esta aplicación, en el método propuesto se buscaba incluir la interacción que existe entre las ondas al momento de su propagación, y como afectaba esta consideración a la superficie del fluido. Los resultados de altura de tsunami obtenidos con el método de ecuaciones integrales, son más representativos en la sección correspondiente a aguas profundas en los modelos propuestos, pues concuerdan con la naturaleza del fenómeno según el ITIC, quien reporta alturas de centímetros a un metro entre valle y cresta, para aguas profundas (UNESCO/IOC-NOAA, 2023). Por otro lado, el método se ve afectado en aguas poco profundas provocando que no se describa correctamente la propagación de la onda como se muestra en las figuras 5.16 y 5.17.

Mediante la comparación de los métodos de ecuaciones de aguas someras y ecuaciones integrales, se demuestra que: (1) *Geoclaw* representa una herramienta amigable que permite analizar el impacto de un tsunami sobre la costa. Su aplicación da resultados que si bien no concuerdan con el comportamiento esperado en aguas profundas, describen de manera acertada su evolución al momento de ingresar a la costa. (2) El método de ecuaciones integrales permite describir las etapas de generación y propagación de un tsunami. Los resultados se aproximan de manera adecuada respecto al modelo analítico con el que se comparó, y concuerdan con el comportamiento esperado de un tsunami en aguas profundas dada la información reportada por el ITIC.

Finalmente, al igual que el método de aguas someras, la metodología propuesta tiene sus limitaciones. La primera de ellas consiste en los tiempos de simulación que se hacen mayores conforme aumentan las dimensiones del modelo y la resolución requerida para el problema. La siguiente desventaja del método consiste en su aplicación sobre modelos de aguas someras pues la naturaleza de su aplicación no permite describir la propagación de la onda con certeza. Sin embargo, estas limitaciones tienen solución. Para disminuir los tiempos de simulación se recomienda implementar el método con cómputo en paralelo, de esta manera, los tiempos de simulación serán menores y se podrán realizar simulaciones de modelos con mayores dimensiones y resolución. Para reducir la segunda desventaja, una vez implementado el método en paralelo, se recomienda hacer el análisis con un mayor rango de frecuencias de manera que se pueda describir el comportamiento del tsunami

en aguas poco profundas. Si bien estas desventajas quedan fuera de los alcances de este proyecto, se espera retomarlas y mejorar el funcionamiento de este método en un futuro.

Apéndice A

Repositorio

`https://github.com/LiliContreras/Modelaci-n-num-rica-de-tsunamis-en-aguas-profundas.git`

Apéndice B

Hidrodinámica y solución de *Westergaard*

La teoría aplicada a la hidrodinámica comienza definiendo simplificaciones para cada tipo de problema. En este caso se desprecia la viscosidad, se consideran desplazamientos y números de Reynolds muy pequeños, este último implicando que no hay turbulencia. Describas las condiciones a considerar, el movimiento de un líquido está dado por la ecuación diferencial, definida por los términos de dilatación ($\theta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$), de sólidos elásticos (Rosenblueth et al., 1976)

$$c^2 \nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (\text{B.1})$$

En donde $c = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}$ es la velocidad del sonido, λ la constante de Lamé y ρ la densidad. Generalmente, se usa una ecuación diferencial equivalente descrita con un potencial de velocidad ϕ , descrito por la relación $\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$:

$$c^2 \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (\text{B.2})$$

Demostrando la equivalencia entre las ecuaciones B.1 y B.2, se define a la presión dinámica en cualquier punto como $P = -\lambda\theta$, de manera que al derivar e incluir la relación del potencial de velocidad:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i \partial t} = \lambda \nabla^2 \phi. \quad (\text{B.3})$$

La expresión anterior se simplifica al sustituir la ecuación B.2, la definición de velocidad del sonido c y despejando $\nabla^2 \phi$, llegando a:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \rightarrow P = \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (\text{B.4})$$

La equivalencia se establece al analizar que las relaciones entre ϕ , P y θ en la ecuación B.4, satisfacen las ecuaciones B.1 y B.2. Por otro lado, la definición del potencial de velocidad permite establecer las condiciones de frontera en una superficie perpendicular a la dirección x_i del sistema de coordenadas. De esta manera se llega a la solución elemental del problema descrito generalmente en el cálculo de presiones en la cortina de una presa.

El problema se idealiza al considerar que se trata con un modelo bidimensional, además de que se supone que la longitud es infinita y que el movimiento del terreno es armónico y horizontal

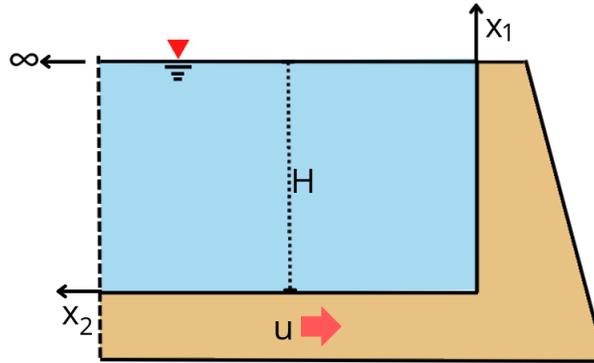


Figura B.1: Diagrama de presa rígida, con cortina vertical y extensión horizontal infinita.

Dadas estas características, las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} &= 0 & \text{en} & & x_1 &= 0 \\ u_2 &= a \sin(\omega t) & \text{en} & & x_2 &= 0, \end{aligned}$$

donde a representa la amplitud de las vibraciones del terreno, así como $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -a\omega \cos(\omega t)$ en $x_2 = 0$. Otras consideraciones del problema son que ϕ tiende a cero cuando x_2 tiende

a ∞ , así como que $x_1 = H$. Suponiendo ahora que se trata de un fluido incompresible, la ecuación B.2 se convierte en

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Aplicando este análisis en la ecuación B.4 se obtiene la ecuación B.6, en la que aparece una suma que incluye la condición $\phi \rightarrow 0$ cuando $x_2 \rightarrow \infty$ expresada con la función exponencial. Adicionalmente, se tiene a la función coseno correspondiente a la condición $x_1 = H$ y por último la condición de incompresibilidad (ec. B.5) donde el primer término es cero

$$P = -2a\omega^2 \rho H \sin(\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^2} \exp\left(\frac{-\lambda_n x_2}{H}\right) \cos\left(\frac{\lambda_n x_1}{H}\right), \quad (\text{B.6})$$

donde

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad \text{y} \quad s_n^2 = k^2 - \lambda_n^2.$$

Sustituyendo en la ecuación B.6, considerando un desplazamiento en la dirección horizontal, se llega a la distribución de presiones hidrodinámicas sobre una pared lateral:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4(-1)^{n+1} \rho w^2 u_i}{\pi(2n-1)\sqrt{k^2 - \lambda_n^2}} \cos(\lambda_n y) \exp -i s_n x. \quad (\text{B.7})$$

Bibliografía

- Aki, K., & Richards, P. G. (2002). *Quantitative seismology*. [Segunda edición.]. University Science Books.
- Arcas, D., & Titov, V. (2006). Sumatra tsunami: lessons from modeling. *Surveys in Geophysics*, 27, 679-705. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10712-006-9012-5>
- Beer, G., Smith, I., & Duenser, C. (2008). *The boundary element method with programming: for engineers and scientists*. Springer Science Business Media.
- Berger, M. J., George, D. L., LeVeque, R. J., & Mandli, K. T. (2011). The GeoClaw software for depth-averaged flows with adaptive refinement. *Advances in Water Resources*, 34(9), 1195-1206. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.02.016>
- Bonnet, M. (1995). *Équations intégrales et éléments de frontiere* [Sciences et techniques de l'ingénieur.]. CNRS éditions/Eyrolles.
- Borrero, J. C., Sieh, K., Chlieh, M., & Synolakis, C. E. (2006). Tsunami inundation modeling for western Sumatra. *PNAS*, 103(52), 19673-19677. <https://doi.org/https://doi.org/10.1073/pnas.0604069103>
- COI. (2014). *Tsunamis: las grandes olas* [tercera edición, Folleto 2012-4rev. de la COI.]. UNESCO/IOC, NOAA/ITIC, SHOA,
- COI. (2019). *Glosario de tsunamis* [cuarta edición, Colección Técnica de la COI].
- Dawson, C., & Mirabito, C. (2008). The shallow water equations. https://users.odn.utexas.edu/~arbogast/cam397/dawson_v2.pdf
- Dominey-Howes, D., & Goff, J. (2011). Tsunami Risk Management in the Context of the Pacific Islands. *EAP DRM Knowledge Notes*, 25. <http://hdl.handle.net/10986/10085>

- Dutykh, D., Poncet, R., & Dias, F. (2011). The VOLNA code for the numerical modeling of tsunami waves: Generation, propagation and inundation [Special Issue: Nearshore Hydrodynamics]. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 30(6), 598-615. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2011.05.005>
- Farreras, S., Domínguez Mora, R., & Gutiérrez Martínez, C. (2021). *Serie Fascículos: Tsunamis*. Secretaría de Seguridad y Protección Ciudadana, Centro Nacional de Prevención de Desastres. www.cenapred.gob.mx/es/Publicaciones/archivos/6-FASCCULOTSUNAMIS.PDF
- Farreras, S., Ortiz, M., & Gonzalez, J. (2007). Steps Towards the Implementation of a Tsunami Detection, Warning, Mitigation and Preparedness Program for Southwestern Coastal Areas of Mexico. *Pure and Applied Geophysics*, 164(1), 605-616. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00024-006-0175-2>
- Goguitchaichvili, A., Ramírez-Herrera, M., Calvo-Rathert, M., Aguilar, B., Carrancho, A., Caballero, C., Bautista, F., & Morales Contreras, J. (2013). Magnetic fingerprint of tsunami-induced deposits in the Ixtapa–Zihuatanejo Area, Western Mexico. *International Geology*, 55(12), 1462-1470. <https://doi.org/10.1080/00206814.2013.779781>
- González, R., Ortiz Figueroa, M., & Montoya Rodríguez, J. M. (2012). Tsunami: Un problema matemáticamente interesante. *Revista de Matemática Teoría y Aplicaciones*, 19(1), 107-119. https://doi.org/http://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1409-24332012000100009&lng=en&tlng=e
- Goto, C., Ogawa, Y., & Shuto, N. (1997). Numerical method of tsunami simulation with the leap-frog scheme. *IOC Manuals and Guides UNESCO*, (35). <https://doi.org/https://www.vliz.be/imisdocs/publications/269372.pdf>
- Hakuno, A. K., M., M., Takeuchi, & Katada, T. (1986). TSurvey report on the tsunami of the Michoacan, México earthquake of September 19, 1985. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, 61(3), 475-481. https://doi.org/https://repository.dl.itc.u-tokyo.ac.jp/record/32861/file_preview/ji0613004.pdf
- Hayes, G. P., & Furlong, K. P. (2010). Quantifying potential tsunami hazard in the Puysegur subduction zone, south of New Zealand. *Geophysical Journal International*, 183(3), 1512-1524. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04808.x>
- Imamura, F. (1995). Tsunami numerical simulation with the staggered leap-frog scheme (numerical code of TUNAMI-N1 and N2). *Disaster Control Research Center, Toho-*

- ku University, 33*. https://www.tsunami.irides.tohoku.ac.jp/media/files/_u/project/manual-ver-3_1.pdf
- Karaoglu, H. (2014). *Finite element simulation of earthquake with coupling tsunamis in large domains* (Doctor of Philosophy). Carnegie Mellon University.
- Løvholt, F., Pedersen, G., Bazin, S., Kühn, D., Bredesen, R. E., & Harbitz, C. (2012). Stochastic analysis of tsunami runup due to heterogeneous coseismic slip and dispersion. *Journal of Geophysical Research: Oceans, 117*(C3). <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2011JC007616>
- Marras, S., Kopera, M. A., & Giraldo, F. X. (2015). Simulation of Shallow Water Jets with a Unified Element-based Continuous/Discontinuous Galerkin Model with Grid Flexibility on the Sphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 142*, 1727-1739. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/qj.2474>
- Mendoza, C., & Hartzell, S. (1999). Fault-slip distribution of the 1995 Colima-Jalisco, Mexico, earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America, 89*(5), 1338-1344. <https://doi.org/https://doi.org/10.1785/BSSA0890051338>
- Mori, N., Muhammad, A., Goda, K., Yasuda, T., & Ruiz-Angulo, A. (2017). Probabilistic tsunami hazard analysis of the pacific coast of Mexico: case study based on the 1995 Colima earthquake tsunamis. *Frontiers in Built Environment, 3*. <https://doi.org/10.3389/fbuil.2017.00034>
- Okada, Y. (1985). Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America, 75*(4), 1135-1154. <https://doi.org/https://doi.org/10.1785/BSSA0750041135>
- Okal, E. A., & Borrero, J. C. (2011). The tsunami earthquake of 1932 June 22 in Manzanillo, Mexico: seismological study and tsunami simulations. *Geophysical Journal International, 187*(3), 1443-1459. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05199.x>
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., Nawab, S. H., & Ding, J. J. (1997). *Signals and systems*. [Segunda edición.]. Prentice hall.
- Ortiz, M., Kostoglodov, V., Singh, S. K., & Pacheco, J. (2000a). New constraints on the uplift of October 9, 1995 Jalisco-Colima earthquake (Mw 8) based on the analysis of tsunami records at Manzanillo and Navidad, Mexico. *Geofísica Internacional, 39*(4), 349-357. <https://doi.org/https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=56839405>

- Ortiz, M., Singh, S. K., Kostoglodov, V., & Pacheco, J. (2000b). Source areas of the Acapulco-San Marcos, Mexico earthquakes of 1962 (M 7.1; 7.0) and 1957 (M 7.7), as constrained by tsunami and uplift records. *Geofísica Internacional*, 39(4), 337-348. <https://doi.org/10.22201/igeof.00167169p.2000.39.4.244>
- Ramírez-Álvarez, E. (2019). *Simulación numérica de tsunamis en costas Mexicanas como herramienta para la prevención, mitigación y preparación*. Centro Nacional de Prevención de Desastres, CENAPRED.
- Ramírez-Herrera, M., Coca, O., & Vargas-Espinosa, V. (2022). Tsunami Effects on the Coast of Mexico by the Hunga Tonga-Hunga Ha'apai Volcano Eruption, Tonga. *Pure and applied geophysics*, 179(4), 1117-1137. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00024-022-03017-9>
- Ramos Musalem, K. (2021). Repaso de dinámica de fluidos [Presentación en el curso de modelado numérico de tsunamis, CDMX, México].
- Rosenblueth, E., & Newmark, N. M. (1976). *Fundamentos de ingeniería sísmica*. Diana.
- Salazar-Monroy, E. F. (2022). *Estimación del peligro generado por sismos tsunamigénicos en el Pacífico mexicano* (Doctor en Ciencias de la Tierra). UNiversidad Nacional Autónoma de México.
- Sánchez-Sesma, F., & Campillo, M. (1991). Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6), 2234-2253. <https://doi.org/https://doi.org/10.1785/BSSA0810062234>
- Satake, K. (1994). Mechanism of the 1992 Nicaragua Tsunami Earthquake. *Geophysical Research Letters*, 21(23), 2519-2522. <https://doi.org/10.1029/94GL02338>
- Singh, S. K., Pacheco, J., & Shapiro, N. (1998). The earthquake of 16 November, 1925 (Ms=7.0) and the reported tsunami in Zihuatanejo, Mexico. *Geofísica Internacional*, 37(1), 49-52. <https://doi.org/https://doi.org/10.22201/igeof.00167169p.1998.37.1.2160>
- Singh, S. K., Ponce, L., & Nishenko, S. P. (1985). The great Jalisco, Mexico, earthquakes of 1932: Subduction of the Rivera plate. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 75(5), 1301-1313. <https://doi.org/https://doi.org/10.1785/BSSA0750051301>
- Stein, S., & Wysession, M. (2009). *An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure*. John Wiley Sons.

- Sugawara, D. (2021). Numerical modeling of tsunami: advances and future challenges after the 2011 Tohoku earthquake and tsunami. *Earth-Science Reviews*, 214, 103498. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2020.103498>
- Titov, V. V., & Gonzalez, F. I. (1997). Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model. *NOAA Tech. Memorandum ERL PMEL-112*. <https://www.pmel.noaa.gov/pubs/PDF/tito1927/tito1927.pdf>
- Titov, V., & González, F. (1997). Implementation and Testing of the Method Of Splitting Tsunami (MOST) Model. *NOAA technical memorandum ERL PMEL, 1927*. <https://repository.library.noaa.gov/view/noaa/10979>
- UNESCO/IOC & NOAA. (2022). *Tsunami Sources 1610 B.C. to A.D. 2022. From Earthquakes, Volcanic Eruptions, Landslides, and Other Causes*. UNESCO/IOC, NOAA/ITIC, SHOA,
- UNESCO/IOC-NOAA, I. T. I. C. (2023). *Tsunami Waves*. Consultado el 27 de agosto de 2023, desde http://itic.ioc-unesco.org/index.php?option=com_content&view=category&id=1340&Itemid=1414#:~:text=In%20the%20deep%20ocean%2C%20the,depending%20on%20the%20generating%20source.
- Ward, N. (2003). Classical tsunami theory. <https://websites.pmc.ucsc.edu/~ward/papers/Basic>
- Ward, N. (2010). Tsunami. [University of California at Santa Cruz.]. *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, Springer Press.
- Wei, Y., Chamberlin, C., Titov, V., Tang, L., & Bernhard, E. (2013). Modeling of the 2011 Japan Tsunami: Lessons for Near-Field Forecast. *Pure and Applied Geophysics*, 170, 1309-1331. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00024-012-0519-z>
- Wells, D., & Coppersmith, K. (1994). New empirical relationships among magnitude, rupture length, rupture width, rupture area, and surface displacement. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(4), 974-1002. <https://doi.org/10.1785/BSSA0840040974>
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1994). *The finite element method, ; volume 1: basic formulation and linear problems* [Mathematics series]. McGraw-Hill International Editions.