



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO.**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA.**

**IDENTIFICACIÓN DE MODELOS DE ORDEN REDUCIDO  
DEL NÚCLEO DE UN REACTOR DE TIPO BWR.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO ELÉCTRICO-ELECTRÓNICO  
P R E S E N T A:**

**AUGUSTO HERNÁNDEZ SOLÍS.**



**Asesor: Dr. Jaime B. Morales Sandoval.**

**México D.F.  
2004**

## ÍNDICE GENERAL

	i
ÍNDICE DE FIGURAS	
ÍNDICE DE TABLAS	iv
INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 1 Los reactores nucleares del tipo BWR	3
1.1 Introducción	3
1.2 Características del reactor BWR	4
1.2.1 Sistemas de circulación	5
1.3 Comparación entre los distintos tipos de reactores de agua ligera	6
1.4 Conclusiones	7
Referencias	7
Capítulo 2 La dinámica del núcleo de un reactor tipo BWR	8
2.1 Introducción	8
2.2 La reacción en cadena ( Ecuaciones de Cinética Puntual)	9
2.2.1 El factor de multiplicación	9
2.2.2 El nivel de neutrones	9
2.2.3 Los neutrones retardados	10
2.2.4 Las ecuaciones de cinética puntual	10
2.3 La transferencia de calor en el núcleo del reactor	11
2.4 La termo hidráulica en el núcleo del reactor	13
2.5 Análisis de la estabilidad de un reactor BWR	16
2.5.1 Clasificación de las inestabilidades termo hidráulicas	16
2.5.2 Tipos de oscilaciones	17
2.5.3 Análisis de las oscilaciones de densidad de onda	17
2.6 Conclusiones	18
Referencias	19
Capítulo 3 Representación de la dinámica del núcleo de un reactor de tipo BWR utilizando un modelo de orden reducido	20
3.1 Introducción	20
3.2 La configuración de polos y ceros de la función de transferencia del reactor (Modelo de orden reducido)	21
3.3 Estudio de la sensibilidad de ceros y polos que conforman la función de transferencia obtenida ante distintas variaciones en los parámetros del reactor	24
3.4 El significado físico del modelo de orden reducido obtenido y su modelo en el tiempo	26
3.5 Obtención del modelo en el espacio “s” a partir del modelo en el tiempo y justificación del modelo de orden reducido de March-Leuba	27

3.6 Propuesta de un modelo de orden reducido para representar la dinámica del núcleo de un reactor BWR	31
3.7 Obtención de un modelo lineal en variables de estado a partir del modelo no lineal propuesto por Morales	34
3.8 Representación de oscilaciones en fase utilizando el modelo no lineal de orden reducido de Morales	36
3.9 Conclusiones	39
Referencias	39
Capítulo 4 Identificación de sistemas	41
4.1 Introducción	41
4.2 Tipos de modelos	42
4.3 El proceso de identificación	42
4.3.1 Métodos de identificación	43
4.4 Identificación de modelos paramétricos utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos	43
4.4.1 Tipos de modelos paramétricos	43
4.4.2 El método de mínimos cuadrados recursivos	45
4.4.2.1 Fundamentación del problema	46
4.4.2.2 El teorema de proyección	47
4.4.2.3 El estimador de grupo	48
4.4.2.4 Estimación de mínimos cuadrados de manera recursiva	49
4.4.2.4.1 Desarrollo de un estimador recursivo	51
4.5 Conclusiones	51
Referencias	52
Capítulo 5 Análisis de resultados	53
5.1 Introducción	53
5.2 La estimación de la reactividad	54
5.3 Identificación de modelos de orden reducido	57
5.3.1 Inestabilidades numéricas debido al proceso de discretización	58
5.3.2 Análisis de los parámetros obtenidos en el modelo lineal identificado	64
5.4 Conclusiones	70
Referencias	71
CONCLUSIONES	72
APÉNDICE A Correlaciones empíricas termo hidráulicas utilizadas para obtener la ecuación ( 2-28)	73
APÉNDICE B Obtención del modelo lineal propuesto por Morales	75

APÉNDICE C Métodos de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden	76
APÉNDICE D Programas en Matlab	78

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Reactor de tipo BWR	5
Figura 1-2 Sistema de recirculación	6
Figura 2-1 Representación de los diversos estados del refrigerante a lo largo del canal termo hidráulico	15
Figura 2-2 Regiones de operación definidas por el boletín NCR-88	18
Figura 2-3 Representación del arranque ideal de un reactor BWR	18
Figura 3-1 Diagramas de Bode calculados por LAPUR (Prueba 3PT3, Peach Bottom )	21
Figura 3-2 Comparación de los diagramas de Bode entre el modelo (2 ceros /3 polos) y los diagramas obtenidos por LAPUR (Prueba 3PT3, Peach Bottom )	22
Figura 3-3 Comparación de los diagramas de Bode entre el modelo ( 3 ceros/4 polos) y los diagramas obtenidos por LAPUR (Prueba 3PT3, Peach Bottom )	22
Figura 3-4 Representación de la función de transferencia potencia-flujo de calor calculada por LAPUR	24
Figura 3-5 Representación de la función de transferencia flujo de calor-densidad en la reactividad calculada por LAPUR	26
Figura 3-6 Diagrama de bloques de la función de transferencia en lazo cerrado reactividad-potencia ( modelo de orden reducido)	26
Figura 3-7 Gráfica del lugar geométrico de las raíces para el modelo de orden reducido en lazo cerrado obtenido por March -Leuba	29
Figura 3-8 Acercamiento de la fig. 3-7 donde se muestra el lugar geométrico de un polo y un cero reales casi iguales	30
Figura 3-9 Potencia de salida normalizada del modelo de March – Leuba utilizando los parámetros de la tabla 3-6	30
Figura 3-10 Modelo no lineal propuesto por Morales implementado en Simulink	32
Figura 3-11 Potencia normalizada de salida utilizando el modelo no lineal implementado en Simulink utilizando los parámetros de la tabla 3-7	33
Figura 3-12 Potencia normalizada de salida obtenida mediante el modelo linealizado propuesto por Morales	35
Figura 3-13 Comparación entre las respuestas del modelo no lineal con el modelo lineal	35
Figura 3-14 Comparación entre las respuestas de los modelos lineal y no lineal para un cambio en la reactividad externa 0.5\$	36
Figura 3-15 Oscilación estable mostrada por Karve et al. bajo condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos mostrada en la tabla 3-8	37

Figura 3-16 Oscilación estable mostrada por Karve et al. bajo condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos mostrada en la tabla 3-8	37
Figura 3-17 Oscilación estable reproducida mediante el modelo no lineal implementado en Simulink bajo condiciones establecidas por Karve et al.	38
Figura 3-18 Oscilación estable reproducida mediante el modelo no lineal implementado en Simulink bajo condiciones establecidas por Karve et al.	39
Figura 4-1 Sistema dinámico con entradas $u(t)$ , perturbación $e(t)$ y salida $y(t)$	41
Figura 4-2 Diagramas de bloques de las diferentes estructuras de modelos paramétricos	45
Figura 4-3 Interpretación geométrica del Teorema de Proyección	48
Figura 5-1 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades y una potencia inicial en estado estable de 45%	54
Figura 5-2 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades y una potencia inicial en estado estable de 70%	55
Figura 5-3 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades y una potencia inicial en estado estable de 100%	55
Figura 5-4 Valor de potencia de salida del modelo no lineal para un cambio en la reactividad externa de 0.234\$	57
Figura 5-5 Potencia normalizada de salida que servirá como modelo para representar las inestabilidades numéricas en los diversos métodos de integración	59
Figura 5-6 Raíces características del modelo lineal en tiempo discreto para el método implícito	60
Figura 5-7 Raíces características del modelo lineal en tiempo discreto para el método de Cranck-Nicholson	61
Figura 5-8 Raíces características del modelo lineal en tiempo discreto para el método explícito	62
Figura 5-9 Comparación de las respuestas obtenidas por el modelo lineal discretizado para los tres métodos de integración para $T=0.01$ s	64
Figura 5-10 Comparación de las respuestas obtenidas por el modelo lineal discretizado para los tres métodos de integración para $T=0.001$	64

Figura 5-11 Potencia de salida del modelo no lineal para la 65  
representación de la condición estable en el proceso de identificación

Figura 5-12 Potencia de salida del modelo no lineal para la 67  
representación de la condición críticamente estable en el proceso de  
identificación

Figura 5-13 Potencia de salida del modelo no lineal para la 69  
representación de la condición inestable en el proceso de  
identificación

Figura A-1 Factor de deslizamiento Bankoff-Jones en función de la 74  
fracción de vacíos y la presión.

Figura A- 2 Factor de deslizamiento Bankoff-Jones en función de la 74  
calidad del vapor y la presión.

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1 Propiedades de los neutrones retardados liberados en el proceso de fisión utilizando $U^{235}$	10
Tabla 3-1 Resultados de los tres polos/4 ceros obtenidos en el modelo acoplado a los resultados de Lapur	23
Tabla 3-2 Valores de los parámetros de la ecuación (3-3)	23
Tabla 3-3 Sensibilidad de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia al cambio en la conductividad del calor en el combustible	24
Tabla 3-4 Sensibilidad de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia al cambio en el flujo de refrigerante en el núcleo	25
Tabla 3-5 Sensibilidad de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia al cambio en la potencia del núcleo	25
Tabla 3-6 Valores de los parámetros obtenidos por March-Leuba para el modelo matemático de orden reducido	28
Tabla 3-7 Valores de los parámetros utilizados en el modelo no lineal para obtener la potencia normalizada de salida mostrada en la figura 3-10	33
Tabla 3-8 Condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos utilizadas en la representación de las oscilaciones mostradas en las figuras 3-15 y 3-16	37
Tabla 4.1 Diferentes estructuras de modelos paramétricos	44
Tabla 5-1 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades bajo distintas condiciones de operación	56
	57
Tabla 5-2 Valor estimado de la reactividad externa que produce la potencia normalizada de salida mostrada en la figura 5-4	



# Introducción

En la actualidad existen alrededor de 440 reactores comerciales operando en 31 países diferentes [1], de los cuales el 25% corresponde a un reactor del tipo de agua ligera conocido comúnmente como BWR (Boiling Water Reactor) o reactor de agua hirviente. Es debido a su sencillez de operación y buena eficiencia que reactores de este tipo son utilizados con fines comerciales. De hecho, la planta nucleoelectrónica de Laguna Verde en México opera con dos unidades BWR.

Los primeros reactores nucleares que se desarrollaron con fines comerciales eran de tipo BWR, y mostraron que la energía nuclear constituía un medio eficiente y seguro para la generación de energía eléctrica. Diversos estudios se han realizado para entender la dinámica de estos reactores y analizar bajo que condiciones de operación, se presentan diferentes comportamientos y en particular: posibles oscilaciones en la potencia del núcleo del reactor al grado que pueda volverse inestable y ocasionar quizá un posible fallo en la integridad de las barras de combustible. Este tipo de condiciones es indeseable y se conocen que condiciones favorecen su aparición. Sin embargo, existen incertidumbres en la predicción absoluta de los valores con los cuales se presenta. Diversos códigos han sido implementados para obtener soluciones numéricas de las diversas variables de estado que representan su comportamiento, mediante la integración de los conjuntos de ecuaciones diferenciales que sirven para modelar en función del tiempo y del espacio. También se han desarrollado simuladores para reproducir las respuestas de potencia del núcleo de un reactor, bajo determinadas condiciones de operación. Los simuladores son implementados en programas de tiempo real y por lo general también siguen un modelo matemático que represente la dinámica del reactor. Los simuladores desarrollados son de muy diversos grados de complejidad y algunos de ellos pueden ser instalados y ejecutados en PC's con resultados satisfactorios [2].

Múltiples estudios se han realizado para saber si el núcleo del reactor tiene un comportamiento estable o inestable, es decir, se ha estudiado a fondo el desarrollo de sistemas que vigilen principalmente la potencia de salida del reactor. Un enfoque que ha dado resultados prometedores es el de implementar sistemas de monitoreo que estimen la estabilidad a la salida del reactor mediante el uso de filtros Kalman y la teoría de estimación de procesos estocásticos [3]. En estos análisis la razón de decaimiento de dos oscilaciones consecutivas es usada como la figura de mérito con la cual se determina la estabilidad global del reactor.

El objetivo de este trabajo consiste en estimar la estabilidad del reactor mediante la teoría de identificación de sistemas, donde las figuras de mérito sean el factor de amortiguamiento global y la frecuencia natural amortiguada. La identificación de un sistema consiste en medir su respuesta conociendo la entrada que provoca dicha respuesta. Para ello se pretende la estimación de los parámetros de un modelo lineal que sea capaz de reproducir la dinámica del reactor nuclear que es altamente no lineal. Se describe a continuación el contenido de cada capítulo de este trabajo.

El capítulo 1 describe los elementos principales que conforman un reactor de tipo BWR, los cuales sirven para convertir energía proveniente de las fisiones nucleares en energía térmica. Este es un capítulo introductorio y servirá para comprender mejor como funciona un reactor nuclear.

El capítulo 2 describe las ecuaciones con las que se representa la dinámica del núcleo del reactor, en donde se indica que los fenómenos termo-hidráulicos en el núcleo afectan la población neutrónica por medio de la reactividad, y por ende la potencia de salida. Estos efectos se pueden presentar incluso como oscilaciones en la potencia del reactor, conocidas como oscilaciones en fase.

En el capítulo 3 se propone un modelo no lineal obtenido por Morales [4], tomado como base del modelo obtenido anteriormente por March-Leuba [5]. Este modelo resulta de gran eficiencia al representar la dinámica antes vista del núcleo de un reactor BWR. De este modelo se obtendrá un modelo lineal el cual es válido sólo para pequeñas variaciones en las variables de estado; sin embargo, se demostrará que también es muy efectivo para representar la dinámica del núcleo. Los programas que se hicieron para reproducir las respuestas de los diversos modelos que se muestran en el capítulo, se describen en el apéndice D.

## Introducción

---

En el capítulo 4 se realiza una descripción del método de identificación de sistemas, y en específico, del algoritmo de mínimos cuadrados para identificar modelos paramétricos en tiempo discreto.

Finalmente, el capítulo 5 demuestra que resulta factible estimar la estabilidad del núcleo del reactor a través de la identificación de un modelo lineal paramétrico. A pesar de la fuerte no linealidad en la dinámica del núcleo, se puede obtener un modelo lineal que los represente de manera adecuada, aplicando así los métodos de estimación para sistemas lineales que nos aporta la teoría de control clásica. Los programas que se hicieron para reproducir las respuestas de los diversos modelos que se muestran en el capítulo, se encuentran en el apéndice D.

## Referencias

- [1] J. R. LAMARSH, A. J. BARATTA. *Introduction to nuclear engineering*. Prentice - Hall 2001 U.S.A.
- [2] J. B. Morales S., A. López R., A. Sánchez B., R. Sánchez S., A. Hernández S. *SUN-RAH: University Simulator of a BWR Nuclear Power Plant for Graduate and Undergraduate Course Support*. Conference on Simulation Technology for Nuclear Power Plants and Systems, San Diego, Ca., USA 18-21/Jan/2004
- [3] M. CECEÑAS-FALCÓN, *Stability Monitoring for Boiling Water Reactors*, PhD Dissertation, Pennsylvania State University, (1999).
- [4] J. MORALES-SANDOVAL, A. HERNÁNDEZ-SOLÍS. *Global Physical and Numerical Stability of a Nuclear Reactor Core*, Annals of Nuclear Energy. (Enviado a publicación).
- [5] J. MARCH-LEUBA. *A Reduced-Order Model of Boiling Water Reactor Linear Dynamics*. 1986. Nuclear Technology, Vol. 75.

# Capítulo 1

## Los reactores nucleares de tipo BWR

### 1.1 Introducción

En la corta historia de las plantas nucleoelectricas distintos tipos de reactores nucleares han sido propuestos para la producción de vapor utilizado en la generación de energía eléctrica. El más usado en el mundo hasta nuestros días para este fin es el *reactor de agua ligera*, debido a que es moderado, reflejado y enfriado utilizando agua ordinaria (conocida también como agua ligera). Existen dos tipos de estos reactores: los reactores nucleares de agua presurizada o de tipo PWR (Pressurized Water Reactor) y los reactores nucleares de agua hirviente o de tipo BWR (Boiling Water Reactor). Una breve comparación entre estos dos reactores es descrita en este capítulo, sin embargo, sólo se analizarán las características del reactor de agua hirviente ya que la dinámica de su núcleo es el objetivo principal de este trabajo.

Los reactores de tipo BWR comenzaron a desarrollarse al principio de la década de 1950 como reactores de tipo experimental, conocidos como los reactores BORAX. Durante mucho tiempo se pensó que si se permitía que el agua hirviera dentro del reactor, se producirían inestabilidades muy peligrosas debido a la formación no uniforme de burbujas y a su movimiento en lo largo del núcleo. Los experimentos llevados a cabo en el año de 1953 en el reactor BORAX-I mostraron que esto es cierto si el agua hierve a presiones muy bajas. Sin embargo, si la presión se incrementaba las inestabilidades tendían a desaparecer y el reactor se volvía controlable, demostrando que los reactores BWR eran seguros y que su uso podría ser factible en un futuro. En 1956 el diseño de un reactor conocido como Reactor de Agua Hirviente Experimental (EBWR, por sus siglas en inglés) incluía uranio como combustible y una turbina acoplada a un generador para la producción de energía eléctrica. Los experimentos realizados en el BORAX-I y en el EBWR demostraron que los procesos realizados en un reactor BWR podrían servir para la producción de energía eléctrica comercial [1]. Desde estas primeras demostraciones de confiabilidad estos reactores han alcanzado un nivel muy alto de desarrollo, encontrándose actualmente dentro de los más cotizados en cuanto a generación eléctrica se refiere.

### 1.2 Características de los reactores BWR

Todos los reactores nucleares son diseñados y operados para obtener una reacción controlada de las fisiones en cadena. Los reactores de potencia utilizan el proceso de fisión nuclear con el objetivo principal de producir energía eléctrica.

El reactor de tipo BWR es atractivo debido a su simplicidad básica, además de poseer gran eficiencia térmica, gran confiabilidad y bajos costos de capital en comparación con otros reactores con sistemas de agua ligera. Su función principal es la de generar energía por medio de reacciones nucleares; dicha energía es transferida al refrigerante, el cual al transformarse en vapor es utilizado directamente en el turbogenerador.

Los elementos [2] que conforman un reactor nuclear distinguen a las diferentes clases de reactores y son básicos para su buen desempeño. A continuación se presenta una descripción de ellos así como sus características en los reactores de tipo BWR:

1. Combustible. Material fisionable utilizado en cantidades específicas y dispuesto en forma tal, que permite extraer con rapidez y facilidad la energía generada. El combustible en un reactor se encuentra en forma sólida, siendo el más utilizado el Uranio bajo su forma isotópica de U-235. Sin embargo, hay elementos igualmente fisionables como por ejemplo el Plutonio, que es un subproducto de la captura de neutrones por el U-238. El combustible presenta las siguientes características generales:

- a. El combustible se fabrica en forma de pastillas cilíndricas de aproximadamente 1 cm de diámetro y altura.
- b. Las pastillas se introducen en varillas cerradas de Zircaloy-2, que agrupadas en un arreglo específico forman un elemento o ensamble de combustible.
- c. Los elementos combustibles forman aproximadamente un cilindro vertical entre la placa soporte del núcleo y la placa guía superior. Al conjunto se le denomina núcleo de reactor.
- d. Al conjunto de 4 elementos combustibles y una barra de control se le denomina celda de combustible.
- e. El control de la energía de fisión del combustible se consigue mediante determinadas barras de control, repartidas simétricamente en el núcleo.

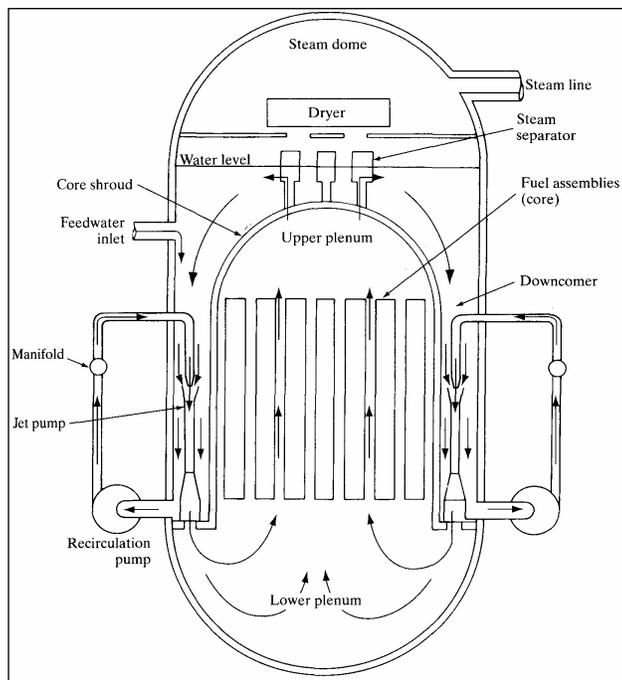
2. Barras de control. Todo reactor posee un sistema que permite iniciar o detener las fisiones nucleares en cadena. Este sistema lo constituyen las barras de control, capaces de capturar los neutrones que se encuentran en el medio circundante. La captura neutrónica evita que se produzcan nuevas fisiones de núcleos atómicos del Uranio. Generalmente las barras de control se fabrican de Cadmio o Boro.

3. Refrigerante. Es el medio primario para la extracción del calor. Para lograr este proceso se utiliza agua ligera en la cual se sumerge el núcleo. El refrigerante no debe ser corrosivo, debe poseer gran poder de absorción calorífico y tener muy pocas impurezas.

4. Moderador. Los neutrones obtenidos de la fisión nuclear emergen con velocidades muy altas. Para asegurar continuidad de la reacción en cadena, es decir, procurar que los "nuevos neutrones" sigan colisionando con los núcleos atómicos del combustible, es necesario disminuir la velocidad de estas partículas. Esto se logra disminuyendo la energía cinética de los neutrones rápidos mediante choques con átomos de otro material adecuado llamado Moderador. En los reactores de agua ligera se utiliza agua ordinaria tanto para moderar como para refrigerar.

5. Ciclo de vapor. Se define como el número total de barreras que separan al refrigerante, incluyendo a los sistemas de transferencia de calor secundarios (si es el caso).

La figura 1-1 muestra la configuración de un reactor nuclear BWR:



**Figura 1-1 Reactor de tipo BWR [3]**

La figura anterior también muestra la manera en que el agua circula dentro del núcleo del reactor [3]. Esta ingresa por la parte inferior a la cual se le conoce como *el pleno bajo o inferior* y se mueve hacia arriba del núcleo; mientras lo hace, recibe tanto calor sensible como calor latente (calor necesario para cambiar de fase un líquido). Cuando alcanza el tope conocido como *el pleno superior*, una parte del refrigerante se ha vaporizado. La mezcla de líquido-vapor de agua pasa a través de *los separadores de vapor* los cuales remueven la mayor cantidad de agua líquida posible. Entonces el vapor ingresa de manera directa a la estructura del secador, el cual termina por remover el agua líquida restante. El vapor seco está listo para salir por la línea de vapor y dirigirse hacia la turbina. El agua líquida en forma de residuo que quedó en los separadores y el secador se combina con el agua de realimentación que regresa del condensador y pasa a través de una región anular externa al núcleo, entre su base y la vasija del reactor conocida comúnmente en inglés como *downcomer*, regresando así de nuevo al pleno bajo.

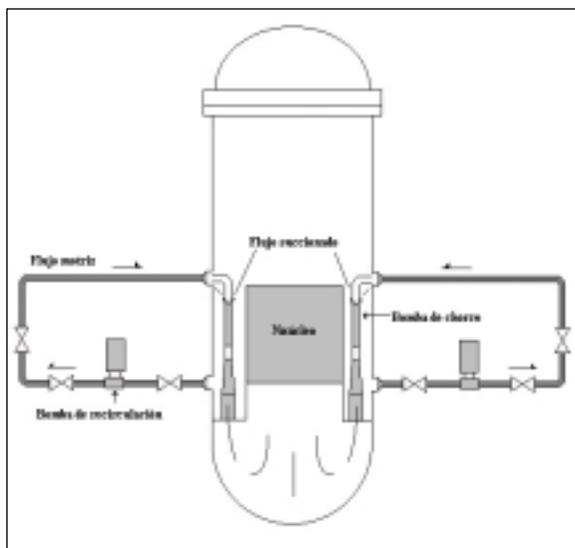
La fuerza que impulsa al flujo de refrigerante a través del núcleo proviene del sistema de recirculación, el cual se describe a continuación.

### 1.2.1 Sistema de recirculación [3]

Este sistema controla el caudal de recirculación, variando la posición de las válvulas de control de flujo de cada uno de los lazos de recirculación.

El Sistema de Recirculación proporciona un medio mecánico de bombeo que acelera la circulación del refrigerante a través del núcleo del reactor y con ello mejorar la capacidad de moderación para consecuentemente aumentar su densidad de potencia (la rapidez de generación de calor por unidad de volumen del núcleo).

El sistema consta de dos lazos que se muestran en la figura 1-2. Estos se encuentran externos a la vasija en donde se pueden observar sus tuberías, válvulas, bombas e instrumentación asociada. También consta de un conjunto de bombas de chorro en el interior para inyectar el refrigerante hacia el pleno bajo y de ahí al interior del núcleo.



**Figura 1-2 Sistema de recirculación**

Por lo tanto este sistema tiene como función principal proporcionar una circulación por convección forzada para conseguir mayor densidad de potencia y capacidad de respuesta a variaciones de carga o demanda eléctrica.

Se deben considerar tres aspectos funcionales de este sistema:

1. El sistema debe proporcionar un flujo adecuado para extraer el calor generado en el combustible del núcleo.
2. El sistema tendrá la opción para una variación automática de carga entre el 75% y el 100% de la potencia nominal, para una configuración de barras del 100%.
3. El sistema se diseña para reducir al mínimo las situaciones de mantenimiento que requieran la extracción del núcleo del reactor.

La dinámica del núcleo del reactor se estudia junto con el sistema de recirculación, ya que la potencia que pueda entregar una planta nucleoelectrónica está en función de la cantidad de vapor que se pueda generar por unidad de tiempo, dependiendo dicha cantidad del flujo de refrigerante que se suministre al núcleo. Es por ello que se describe en esta sección ya que es de interés propio al estudio de la dinámica del núcleo de un reactor BWR.

### 1.3 Comparación entre los distintos tipos de reactores de agua ligera [3]

Existen ciertas ventajas en utilizar un reactor BWR a un PWR. En el primero el vapor se forma dentro del reactor y va directamente contra las turbinas; los generadores de vapor en distintos ciclos de transferencia de calor no son necesarios como en un PWR. Por esta razón se dice que el BWR opera en ciclo directo. Además, para una cierta cantidad de agua, mayor calor puede ser absorbido como calor latente (calor necesario para cambiar de fase un líquido) que como calor sensible, y por lo tanto, menos agua debe ser bombeada por segundo a través de un BWR que a través de un PWR, para obtener la misma potencia de salida. Sin embargo, el agua se convierte radioactiva cuando pasa por el núcleo del reactor. Ya que ésta se utiliza para la generación de energía eléctrica todos los componentes de la planta -tales como turbinas, condensadores, bombas, tuberías, etc., deben encontrarse blindadas en una planta con reactor BWR.

La presión en un BWR es de aproximadamente 7 MPa o 900 psi, lo que equivale a la mitad de la presión en un PWR. Como resultado las paredes de la vasija en un BWR no tienen que ser tan gruesas como en un PWR. Sin embargo, resulta que la densidad de potencia ( $\text{watts/cm}^3$ ) es menor en un BWR que en un PWR, por lo que las dimensiones generales para la vasija de un BWR deben ser mayores que en un PWR para obtener la

misma potencia. Como se observa ambos tienen ventajas y desventajas por lo que en la actualidad se encuentran compitiendo comercialmente en el mercado de la generación de energía eléctrica.

### 1.4 Conclusiones

Los reactores más utilizados hoy en día en las plantas nucleares son los llamados reactores de agua ligera, los cuales han demostrado que su uso es factible y seguro en el mercado de la generación de energía eléctrica. De este tipo existe el denominado reactor de agua hirviente o BWR, del cual se describieron los elementos básicos que lo conforman para la producción de energía calorífica a través de la fisión nuclear. Esta energía en forma de calor se utiliza para producir un cambio de fase en el refrigerante cuando éste alcanza el punto de ebullición, y es entonces cuando se aprovecha el agua en forma de vapor en la generación de energía eléctrica.

Una conclusión importante de este capítulo es que la potencia de salida del reactor depende de la cantidad de flujo de refrigerante que entre al núcleo, ya que de esto depende la cantidad de vapor que se pueda generar por unidad de tiempo. Si el modo de operación del reactor es subcrítico, el número de fisiones en los núcleos de combustible no se dará de forma auto sostenida, provocando un decaimiento en el número de fisiones y por ende, en la producción de energía calorífica. Por otro lado, si se opera el reactor en modo supercrítico y no se controla la reacción en cadena a tiempo, podrían presentarse inestabilidades en la potencia de salida pudiendo causar condiciones no deseadas. Finalmente, se busca que el reactor se encuentre en una modalidad crítica donde la reacción sea auto sostenida y totalmente controlable. Toda esta dinámica del núcleo del reactor se explicará en el capítulo siguiente, estudiando los fenómenos que afectan la potencia de salida del núcleo del reactor.

### Referencias

- [1] M. CECEÑAS FALCÓN. *Stability Monitoring for Boiling Water Reactors*. 1999. U.S.A. Pennsylvania State University. PhD Dissertation.
- [2] R. T. LAHEY, F. J. MOODY. *The thermal-hydraulics of a boiling water nuclear reactor*. American Nuclear Society 1993 U.S.A.
- [3] J. R. LAMARSH, A. J. BARATTA. *Introduction to nuclear engineering*. Prentice - Hall 2001 U.S.A.

## Capítulo 2

### La dinámica del núcleo de un reactor de tipo BWR

#### 2.1 Introducción

Para que un reactor nuclear opere a un nivel de potencia constante, la tasa de neutrones producidos por las reacciones de fisión debe estar exactamente balanceada por la pérdida de neutrones debido a los procesos de absorción y fuga. Cualquier desbalance de esta condición producirá un cambio en la población neutrónica y por ende, en la potencia del reactor. Esto puede ocurrir por diversas razones. Por ejemplo, un operador del reactor que desea cambiar el nivel de potencia introduciendo las barras de control. Otro cambio más dramático en la multiplicación neutrónica puede ser causado en una situación de accidente debido a la falla de la bomba primaria del refrigerante o por un canal de refrigerante bloqueado.

Debemos reconocer que la multiplicación neutrónica en el núcleo del reactor nunca se encuentra bajo el total control de los operadores. Esto se debe a que la población neutrónica no sólo depende de la composición del núcleo si no también de otras variables a las que no se tiene acceso directo para controlarlas, tales como la temperatura del combustible o la distribución de la densidad del flujo del refrigerante a lo largo del reactor, lo cual puede llegar a producir un cambio significativo en la fracción de vacíos dentro del núcleo teniendo como consecuencia variaciones en la presión del reactor. Este fenómeno se presenta en lo que se conoce como *la termo hidráulica de los canales*.

El estudio de estos procesos temporales involucrados en la variación de la población neutrónica y por lo tanto de la potencia del reactor, se conoce como *dinámica del núcleo del reactor*.

Generalmente para modelar la dinámica de un reactor lo primero que se hace es dividir su parte transversal (en términos espaciales) en lo que se conoce como una *malla*. Esta se encuentra conformada por cortes de tipo axial (*odos axiales*) y por cortes de tipo radial (*odos radiales*), dividiendo al reactor en diferentes zonas conocidas simplemente como *odos*. Para representar la dinámica de las variables de cada nodo, tales como la reactividad, la transferencia de calor o la termohidráulica en el canal, se genera un conjunto de ecuaciones diferenciales conocidas como *ecuaciones nucleares acopladas con termohidráulica*.

El modelo se puede obtener integrando las ecuaciones que representan la dinámica del reactor sobre un número finito de nodos. Este cálculo puede ser llevado a cabo en diversos *códigos* implementados utilizando diferentes lenguajes de programación.

En las secciones siguientes de este capítulo se explicarán las ecuaciones que en conjunto modelan el comportamiento dinámico del núcleo de un reactor BWR.

**2.2 La reacción en cadena (Ecuaciones de Cinética Puntual) [1]**

**2.2.1 El factor de multiplicación**

La reacción en cadena condiciona que cada núcleo en el combustible que captura un neutrón y se fisiona debe producir como mínimo un neutrón, el cual posiblemente causará la fisión de otro núcleo. Esto nos lleva a definir el concepto de *factor de multiplicación*. El factor de multiplicación  $k$  se define como la relación del número de neutrones que se producen en una generación, entre el número de neutrones que se produjeron en la generación anterior. Si  $k$  es igual o ligeramente mayor que la unidad, se produce una reacción en cadena. Si  $k$  es menor que la unidad, la reacción en cadena no se puede mantener desapareciendo con el tiempo.

Para que la reacción en cadena suscitada en el núcleo del reactor pueda continuar, la tasa de producción de neutrones debe ser igual a la tasa de pérdidas producidas por fuga y absorción de neutrones. Por lo tanto,

$$k = \frac{\text{producción}}{(\text{fuga} + \text{absorción})} \quad (2-1)$$

El factor de multiplicación nos lleva a definir un concepto muy importante y utilizado para medir el estado del reactor conocido como *reactividad*. Esta nos indica cuanto difiere el factor de multiplicación  $k$  de la unidad, y se define como:

$$\rho = \frac{k - 1}{k} \quad (2-2)$$

Por convención histórica la unidad de medida de la reactividad es el dólar (\$).

El tiempo promedio que transcurre para producir neutrones de una generación a otra en un reactor se define como *el tiempo de vida de los neutrones* ( $l$ ). El símbolo  $\Lambda$  es utilizado para representar el tiempo de vida promedio efectivo de un neutrón en un reactor. En otras palabras,  $\Lambda$  es el tiempo medio que transcurre entre la producción de neutrones por fisión hasta que regresan a ser fisionados o son perdidos en la reacción. Por lo tanto se define como:

$$\Lambda = \frac{l}{k} \quad (2-3)$$

**2.2.2 El nivel de neutrones**

Si existen inicialmente  $n$  neutrones por centímetro cúbico en el núcleo del reactor, el incremento de neutrones en la siguiente generación estará dado por  $n\rho$ . Si  $\Lambda$  es el tiempo efectivo entre generaciones sucesivas entonces:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho}{\Lambda} n \quad (2-4)$$

Si se integra la ecuación (2-4) el resultado es:

$$n = n_0 e^{(\rho/\Lambda)t} \quad (2-5)$$

donde  $n_0$  es el número inicial de neutrones por centímetro cúbico.

Tomando como base la ecuación (2-5) se observa que el número de neutrones crece de manera exponencial con el tiempo si el factor de multiplicación  $k$  es mayor que la unidad.

El número de neutrones en el núcleo es proporcional al número de fisiones que ocurren. Así por ejemplo, para producir 1 [Watt] de potencia, se necesitan  $3 \cdot 10^{10}$  fisiones por segundo. La potencia de salida de un reactor es entonces proporcional al número de neutrones en el núcleo en cualquier instante de tiempo. Si el símbolo  $n$  se utiliza para designar un nivel de neutrones entonces se utiliza también para designar un nivel de potencia involucrado con la cantidad de neutrones en el núcleo.

### 2.2.3 Los neutrones retardados

En la ecuación (2-4) se supone que todos los neutrones creados en el proceso de fisión fueron liberados instantáneamente y que tienen una vida promedio  $\Lambda$ . En realidad una pequeña fracción de los neutrones creados en la fisión son liberados en cantidades discretas de tiempo después de que el proceso de fisión ocurra realmente. Los neutrones que son producidos después de la fisión dependen del material fisionable que se este utilizando. Por ejemplo, si se utiliza uranio enriquecido 235 ( $U^{235}$ ) aproximadamente el 0.7% del total de los neutrones producidos son estos llamados *neutrones retardados*, y el control de la potencia en el núcleo del reactor depende en gran medida de ellos.

La tabla 2-1 indica las propiedades de los neutrones retardados que son liberados en el proceso de fisión por medio de neutrones térmicos utilizando  $U^{235}$ . Los neutrones retardados pueden describirse muy certeramente como si fuesen liberados en seis distintos grupos en diferentes tiempos y en diferentes cantidades. El símbolo  $\beta$  se utiliza para designar a la fracción del total de neutrones que son neutrones retardados. De igual manera,  $\lambda$  representa la constante de decaimiento de los grupos de neutrones retardados. Los datos representados en la tabla 2.1 pertenecen a los experimentos realizados en pre-Geneva 1955 [1] y fueron ampliamente utilizados en el diseño de los sistemas de control de los primeros reactores.

Para ciertos problemas es conveniente tratar a todos los grupos de neutrones retardados como un promedio en un solo grupo, el cual quedaría utilizando una fracción total  $\beta = 0.0075$  y una constante promedio de decaimiento  $\lambda \approx 0.1(s^{-1})$ .

**Tabla 2-1 Propiedades de los neutrones retardados liberados en el proceso de fisión utilizando  $U^{235}$**

Tiempo de vida media $t_i$ (s)	Constante de decaimiento $\lambda_i$ ( $s^{-1}$ )	Fracción del total de neutrones que son retardados $\beta_i$
0.071	14	0.00025
0.62	1.61	0.00084
2.19	0.456	0.0024
6.50	0.151	0.0021
31.7	0.0315	0.0017
80.2	0.0124	0.00026

### 2.2.4 Las ecuaciones de cinética puntual

Las ecuaciones de cinética puntual describen cómo varía en el tiempo la población neutrónica dentro de un reactor nuclear. Este comportamiento depende -entre otros parámetros- de la variación temporal de los distintos grupos de precursores de neutrones retardados, los cuales junto con la reactividad determinan el comportamiento temporal de la población de neutrones y por ende el futuro de la reacción en cadena que se esté llevando a cabo dentro del núcleo del reactor.

Las ecuaciones de cinética puntual son las siguientes:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(r-1)\beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i \quad (2-6)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i c_i \quad (2-7)$$

donde:

$n(t)$  = Población neutrónica del sistema.

$c_i(t)$  = Grupos de precursores de neutrones retardados.

$r = \rho / \beta$  = Reactividad del sistema medida en dólares.

$\beta$  = Fracción total de neutrones retardados.

$\Lambda$  = Tiempo efectivo de vida de un neutrón en un reactor finito de Uranio 235.

$\lambda$  = Constantes de decaimiento.

Las ecuaciones de cinética puntual aproximadas a un solo grupo de neutrones retardados están dadas por:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(r-1)\beta}{\Lambda} n + \lambda c \quad (2-8)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda} n - \lambda c \quad (2-9)$$

### 2.3 La transferencia de calor en el núcleo del reactor [2]

El efecto de la variación de la temperatura del combustible y de la fracción de vacíos en la termohidráulica del canal producen cambios internos en la reactividad del sistema y por ende, en la potencia de salida del reactor, asociada con la población neutrónica. A estos efectos en el núcleo del reactor se les conoce como *efectos de realimentación*.

*El efecto Doppler* se debe principalmente a que un aumento de la temperatura del combustible en el núcleo del reactor disminuye la probabilidad de que los neutrones térmicos ocasionen fisiones en el material combustible. Esto en los reactores BWR produce un efecto negativo en la reactividad del núcleo, por lo tanto, se considera al efecto Doppler como *un coeficiente de reactividad de temperatura negativo*. Es por este efecto de realimentación asociado con el cambio de la temperatura que se incluye un modelo de transferencia de calor cuando se quiere modelar la dinámica del núcleo.

El calor es generado en el combustible como resultado de los procesos de fisión y se transfiere a la pared del contenedor que contiene al combustible por conducción y convección. La dinámica de este modelo se describe mediante la ecuación de difusión de calor para las siguientes tres regiones: el combustible, el espacio entre el combustible y su encamisado y la pared del encamisado. La forma general para esta ecuación es la siguiente:

$$\nabla \cdot k \nabla T + q''' = \delta c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-10)$$

donde:

$k$  = Conductividad térmica.

$T$  = Temperatura.

$\delta$  = Densidad.

$c_p$  = Calor específico.

$q'''$  = Fuente de calor volumétrica.

Si se considera que se tiene una barra de combustible muy larga, la conducción axial se puede despreciar comparada con la conducción radial; es por ello que la conducción de calor en estado estable en la dirección radial se convierte en:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{q'''}{k} = 0 \quad (2-11)$$

La solución de la ecuación (2-11) debe satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} \Big|_{r=0} &= 0 \\ T \Big|_{r=a} &= T_a \end{aligned} \quad (2-12)$$

Por lo que la distribución de la temperatura para el combustible será:

$$T_f(r) = T_a + \frac{q'}{4\pi k_f} \left( 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) \text{ para } 0 \leq r \leq a \quad (2-13)$$

donde  $k_f$  es la conductividad térmica del combustible y  $q'$  corresponde a la tasa lineal de la fuente de calor ( $q' = \pi a^2 q'''$ ). Una expresión similar puede obtenerse para el encamisado del combustible:

$$T_c(r) = T_b - \frac{q'}{2\pi k_c} \ln \left( \frac{r}{a} \right) \text{ para } a + \tau \leq r \leq b \quad (2-14)$$

donde  $T_c$  es la temperatura en el contenedor,  $k_c$  es la conductividad térmica y  $\tau$  es el espacio entre la pastilla del combustible y la pared del encamisado donde se encuentra.

Un modelo para la fuente de calor que se propaga de manera lineal en el espacio existente entre el combustible y su contenedor se puede obtener promediando las temperaturas en el encamisado y el combustible y resolviendo la ecuación de la fuente lineal de calor:

$$q'_{gap} = \frac{1}{R'_g} (\overline{T}_f(t) - \overline{T}_c(t)) \quad (2-15)$$

donde

$$R'_g = \frac{1}{8\pi k_f} + \frac{1}{2\pi a h_g} + \frac{1}{2\pi k_c} \left[ \left( \frac{b^2}{b^2 - a^2} \right) \ln \left( \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (2-16)$$

es la resistencia térmica por unidad de longitud. Las variables involucradas en las ecuaciones anteriores son:

$k_f$  = Conductividad térmica para el combustible (UO<sub>2</sub>).

$k_c$  = Conductividad térmica para el contenedor del combustible (Zircaloy-2).

$h_g$  = Coeficiente de transferencia de calor para el espacio entre combustible y contenedor.  
 $a$  = Radio de las pastillas de combustible.  
 $b$  = Radio del encamisado del combustible.

De igual manera se pueden obtener las ecuaciones correspondientes para la fuente lineal de calor para el contenedor:

$$q'_c = \frac{1}{R'_c} (\bar{T}_f(t) - \bar{T}_b(t)) \quad (2-17)$$

donde:

$$R'_c = \frac{1}{2\pi k_c} \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right] + \frac{1}{2\pi b h_c} \quad (2-18)$$

El valor del coeficiente de transferencia de calor,  $h_c$ , depende de las características del flujo del refrigerante.

Finalmente para el combustible, se puede escribir una ecuación que contemple un balance de energía por unidad de longitud:

$$m_f c_{pf} \frac{d\bar{T}}{dt} = q'(t) - \frac{1}{R'_g} [\bar{T}_f(t) - \bar{T}_c(t)] \quad (2-19)$$

donde  $m_f$  y  $c_{pf}$  son la masa y el calor específico del combustible, respectivamente. Un balance de energía similar puede escribirse para encontrar la temperatura del contenedor:

$$m_c c_{pc} \frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{1}{R'_g} [\bar{T}_f(t) - \bar{T}_c(t)] - \frac{1}{R'_c} [\bar{T}_c(t) - \bar{T}_m(t)] \quad (2-20)$$

donde  $m_c$  y  $c_{pc}$  son la masa y el calor específico del contenedor, respectivamente

Estas dos últimas ecuaciones pueden utilizarse para las calcular numéricamente las temperaturas promedio radiales del combustible.

#### 2.4 La termo hidráulica en el núcleo del reactor

Las ecuaciones que representan el comportamiento temporal de la masa, la energía y el momento [3] del flujo del refrigerante (agua) a través de un canal que está siendo calentado por la fisión de neutrones en el combustible describen *la termo hidráulica de una dimensión en el núcleo de un reactor*. Estas tres ecuaciones son las siguientes:

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial t} + \frac{\partial G_m}{\partial z} = 0 \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial G_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G_m^2}{\delta_m} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{f G_m |G_m|}{2D_e \delta_m} - \delta_m g \quad (2-22)$$

$$\delta_m \frac{\partial h_m}{\partial t} + G_m \frac{\partial h_m}{\partial z} = \frac{q'' P_h}{A_z} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{G_m}{\delta_m} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{f G_m |G_m|}{2 D_e \delta_m} \right) \quad (2-23)$$

donde:

- $\delta_m$  = Densidad.
- $G_m$  = Flujo de masa de agua.
- $h_m$  = Entalpía del agua.
- $P_h$  = Perímetro que está recibiendo calor.
- $A_z$  = Área transversal del núcleo del reactor.
- $D_e$  = Diámetro del núcleo del reactor.
- $p$  = Presión en el canal.
- $g$  = Aceleración de la gravedad.
- $q''$  = Fuente de calor por unidad de área transversal.
- $f$  = Factor de fricción.
- $z$  = Eje espacial en la dirección axial del núcleo del reactor.

Estas ecuaciones pueden resolverse mediante un método finito diferencial aplicado a los nodos axiales a lo largo del canal que esta siendo calentado, y utilizando como variables de estado a la entalpía, al flujo de masa y a la densidad. Cabe resaltar que estas tres variables de estado corresponden al agua dentro del canal como refrigerante, la cual se encuentra en una mezcla de líquido-vapor. El modelo integral de momento (ecuación 2-23) se utiliza para eliminar los efectos sónicos [3] en donde el refrigerante se supone que sea incompresible, y la densidad se especifica como una función de la entalpía a una presión constante, esto es  $\delta_m = f(h_m, p)$ .

La derivada parcial de la densidad respecto al tiempo se puede expandir como:

$$\frac{\partial \delta_m}{\partial t} = \left( \frac{\partial \delta_m}{\partial h_m} \Big|_p \frac{\partial h_m}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \delta_m}{\partial p} \Big|_{h_m} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = R_h \frac{\partial h_m}{\partial t} + R_p \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2-24)$$

donde  $R_p$  es cero ya se considera que la presión es constante, y  $R_h$  puede ser evaluada numéricamente con las propiedades del vapor. Combinando este factor con la ecuación de continuidad (2-21) se tiene que:

$$\frac{\partial G_m}{\partial z} = -R_h \left( \frac{\partial h_m}{\partial t} \right) \quad (2-25)$$

Si se desprecian tanto el término de la variación de presión respecto al eje  $z$  así como el factor de la fricción, entonces la ecuación de energía (2-22) se convierte en:

$$\delta_m \frac{\partial h_m}{\partial t} + G_m \frac{\partial h_m}{\partial z} = \frac{q'' P_h}{A_z} \quad (2-26)$$

Combinando las ecuaciones (2-25) y (2-26) el resultado es:

$$\frac{\partial G_m}{\partial z} = -\frac{R_h}{\delta_m} \left( \frac{q'' P_h}{A_z} - G_m \frac{\partial h_m}{\partial z} \right) \quad (2-27)$$

Esta última ecuación describe la variación del flujo de masa local alrededor de un valor promedio impuesto como condición de frontera.

Utilizando las ecuaciones anteriores que constituyen el modelo de termo hidráulica podemos comprender la dinámica del refrigerante (agua) a través de su flujo, densidad y entalpía. Las variaciones de presión a través del núcleo son función de las tres variables de estado que se obtienen con las ecuaciones anteriores; de ahí su importancia.

Otro factor muy importante que afecta los cambios de presión interna en el reactor es *la fracción de vacíos*, el cual es una medida de la cantidad de aire presente en la mezcla de las dos fases del refrigerante (líquido-vapor). La fracción de vacíos es una función de las densidades del agua cuando se encuentra en sus dos fases antes mencionadas así como de la calidad [4] del fluido dentro del canal.

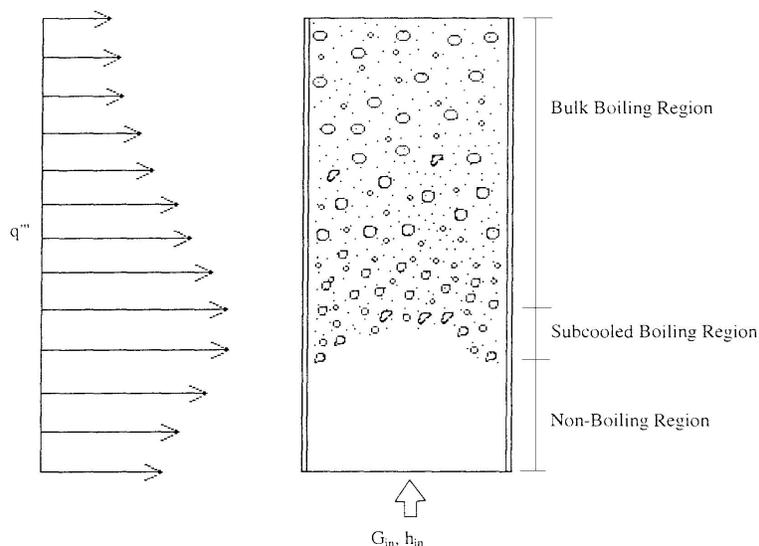
La expresión matemática para representar a la fracción de vacíos se calcula utilizando una correlación empírica (ver apéndice A) para el desprendimiento [3] de burbujas de las paredes del contenedor del combustible.

$$\alpha = \frac{x}{S\left(\frac{\delta_g}{\delta_f}\right) + x\left(1 - S\left(\frac{\delta_g}{\delta_f}\right)\right)} \quad (2-28)$$

donde:

- $\alpha$  = Fracción de vacíos.
- S = Factor de desprendimiento.
- x = Calidad de flujo bifásico en el canal.
- $\delta_g$  = Densidad del agua en estado gaseoso.
- $\delta_f$  = Densidad del agua en estado líquido.

El fenómeno de la fracción de vacíos se presenta cuando el refrigerante se encuentra en la zona conocida como *de bulo hirviente (Bulk Boiling)* en donde se presenta una mezcla homogénea de líquido-vapor. En otras palabras, es la zona dentro del canal de refrigeración en donde el agua se encuentra hirviendo resultando en una mezcla de dos fases con la presencia de aire en forma de burbujas. Esta zona se detalla en la figura 2-1:



**Figura 2-1 Representación de los diversos estados del refrigerante a lo largo del canal termo hidráulico [2]**

La siguiente ecuación representa la caída de presión cuando en el refrigerante se encuentra en la zona hirviente:

$$\Delta P = G_m^2 \left( \left[ \frac{(1-x)}{(1-\alpha)\rho_f} + \frac{x}{\alpha\rho_g} \right]_{Z_H} - \left[ \frac{(1-x)}{(1-\alpha)\rho_f} + \frac{x}{\alpha\rho_g} \right]_{Z_{BB}} \right) \quad (2-29)$$

donde la zona  $Z_H$  representa la salida del canal.

La fracción de vacíos siendo una función de las densidades de los posibles estados físicos del refrigerante es un coeficiente de realimentación *negativo* [4] el cual se conoce comúnmente con el nombre de *reactividad de vacíos* (*void reactivity*). Es decir, cuando disminuye la fracción de vacíos en el canal se presenta un aumento en la reactividad y por ende en la potencia del núcleo del reactor.

### 2.5 Análisis de la estabilidad de un reactor BWR [5]

Durante las primeras etapas en el desarrollo de la tecnología BWR, existía una gran preocupación acerca de las inestabilidades en el reactor debidas a la interacción entre los procesos de ebullición y el comportamiento de la reactividad de vacíos. Este hecho produjo que el Laboratorio Nacional de Argonne (ANL, por sus siglas en inglés) llevara a cabo una serie de experimentos los cuales indicaron que se presentaban inestabilidades en el reactor cuando este se encontraba a bajas presiones, más no así cuando el reactor estaba sometido a presiones altas. De hecho, esto ha sido probado en muchos de los reactores comerciales que se utilizan actualmente. El que no se presenten problemas de inestabilidad en el núcleo de un reactor BWR se debe a que los coeficientes de la reactividad de vacíos son mucho más pequeños cuando la presión en el reactor es de 1000 psia, que cuando el reactor se encuentra sometido a la presión atmosférica y por lo tanto, sólo se esperan pequeños cambios en la reactividad debido a las fluctuaciones en la reactividad de vacíos.

#### 2.5.1 Clasificación de las inestabilidades termo hidráulicas

Existen varios tipos de inestabilidades para sistemas de agua en ebullición. Lahey las clasifica en estáticas y dinámicas. Las inestabilidades estáticas se pueden explicar con leyes de estado estable y se clasifican de la siguiente manera:

- Inestabilidad de Ledinegg. Producida por la interacción entre las características de las bombas de recirculación y las características hidráulicas del canal de ebullición.
- Inestabilidad de régimen de flujo. Producida por cambios en el régimen de flujo.
- Inestabilidad de Geysering. Se producen cuando una circulación lenta del refrigerante permite la formación de vacíos que repentinamente se desplaza por la fuerza boyante.

Las inestabilidades dinámicas se pueden explicar con las ecuaciones de conservación, y se definen de la siguiente manera:

- Oscilaciones de densidad de onda. Producidas cuando se propagan perturbaciones de presión de manera no uniforme a lo largo del canal.
- Oscilaciones por decaimiento en la presión. Producidas por inestabilidades de tipo Ledinegg y un volumen compresible en un sistema de ebullición. Esta es una oscilación de baja frecuencia las cuales ocurren más bien en pruebas termo hidráulicas de baja presión.
- Inestabilidad inducida por régimen de flujo. Oscilaciones producidas por régimen de flujo las cuales se observan en los separadores de vapor.
- Inestabilidades de tipo acústicas. Producidas por ondas sostenidas en un sistema monofásico o bifásico. Se observan entre las líneas y los separadores de vapor.

### **2.5.2 Tipos de oscilaciones**

Las oscilaciones de potencia observadas en el sistema de monitoreo neutrónico pueden clasificarse en dos categorías:

- a) Oscilaciones en fase o a lo largo del núcleo. Son oscilaciones de potencia que se presentan a lo largo del núcleo, las cuales tienen la misma fase para todos los canales del núcleo.
- b) Oscilaciones fuera de fase. En este tipo de oscilaciones una parte del núcleo oscila fuera de fase con respecto a la otra parte. Ya que los picos de las oscilaciones que se generan dentro de una parte del núcleo se compensan con los valles de las que se generan en la otra parte, la potencia promedio no refleja la magnitud de las amplitudes por lo que son imperceptibles para la instrumentación local neutrónica, pudiendo causar daños al combustible.

### **2.5.3 Análisis de las oscilaciones de densidad de onda.**

Las oscilaciones dinámicas de densidad de onda son las que podrían presentarse dentro del núcleo del reactor cuando está operando cerca de la potencia nominal, por lo que conviene realizar un análisis de cómo se producen. Son oscilaciones que generalmente se propagan en fase y se estudian aplicando las ecuaciones dinámicas del núcleo del reactor mencionadas en las tres secciones anteriores.

Considérese un flujo oscilatorio de refrigerante entrando a un canal que está siendo calentado. Las fluctuaciones de flujo entrante crean perturbaciones de la entalpía las cuales se propagan en la región monofásica líquida del refrigerante. La frontera de ebullición, definida como el punto instantáneo donde la temperatura del fluido alcanza la saturación, oscila debido a estas perturbaciones en la entalpía. Cambios en el flujo y la longitud de la región monofásica líquida se combinan para crear una caída de presión oscilatoria en esta región del canal. Por otra parte, en la frontera de ebullición, perturbaciones de entalpía son transformadas en perturbaciones de fracción de vacíos que viajan con el flujo hasta el final del canal. Los efectos combinados de las perturbaciones de flujo y de fracción de vacíos junto con las variaciones en la frontera de ebullición crean variación en la caída de presión en la región bifásica del canal. Este fenómeno realimenta una oscilación hacia la región monofásica líquida de signo contrario, la cual interfiere de manera positiva o negativa con la oscilación original. Todo esto resulta en variaciones en la fracción promedio de vacíos en el reactor sin que necesariamente se presenten variaciones en la caída de presión a lo largo del núcleo.

Esta descripción muestra las variables que intervienen para producir este tipo de oscilaciones las cuales se deben al fenómeno termo hidráulico presente en el núcleo del reactor. Como se describió en el capítulo 1, la densidad de potencia depende de la cantidad de flujo de refrigerante que se esté bombeando por unidad de tiempo a través del núcleo. Es por esto que las condiciones de operación del reactor BWR son comúnmente representadas en el mapa flujo/potencia, el cual relaciona el porcentaje de potencia térmica con el porcentaje de flujo másico o caudal en el núcleo. El caudal mínimo es determinado tanto por las condiciones de circulación natural como por la rapidez mínima de las bombas de recirculación.

Los procedimientos de operación nominal para el control de potencia se basan esencialmente en los cambios de caudal por medio del control de velocidad en las bombas, manteniendo constante la configuración de las barras de control. Aunque las estrategias de operación para optimización del núcleo, cambios de potencia rápidos y forma de seguimiento de carga, tienen en cuenta un ajuste dentro de las barras de control.

El boletín 88-07 del organismo regulador de Estados Unidos (NRC, por sus siglas en inglés) [6] define mediante un mapa de flujo-potencia tres regiones de operación en las cuales existe una gran probabilidad de que se presente una oscilación en el núcleo del reactor, las cuales se muestran en la figura 2-2 como las zonas A, B y C:

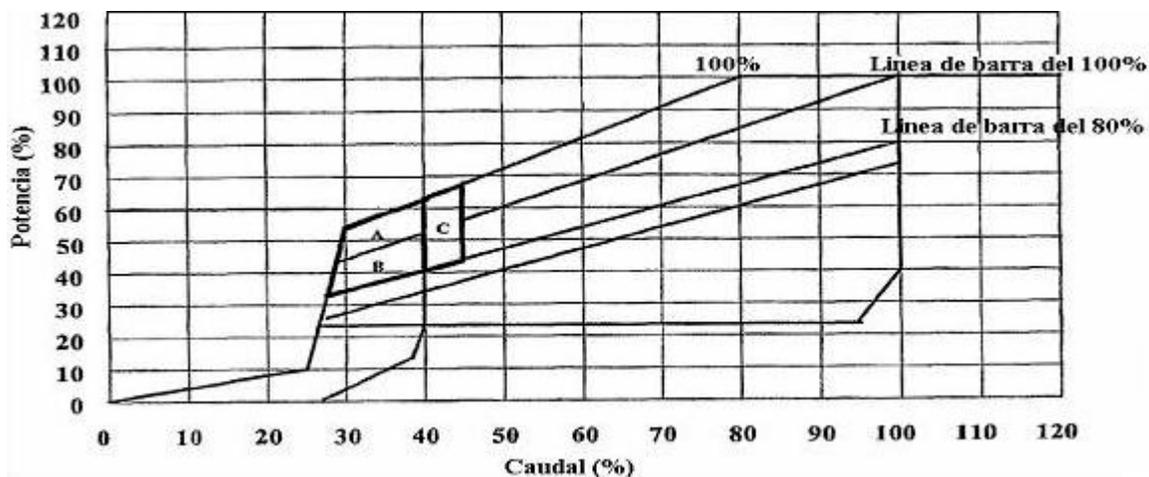


Figura 2-2 Regiones de operación definidas por el boletín NRC-88 [7]

Sólo se permite que el reactor opere en la región C durante el proceso de arranque. Sin embargo, no se permite que el reactor opere en las zonas A y B. Si se llegase a estar operando en alguna de estas dos regiones, se requieren acciones drásticas tales como la parada automática del reactor debido a la alta probabilidad de que ocurra un evento inestable [7]. La figura 2-3 muestra el procedimiento de arranque ideal, en donde se evitan las tres zonas de alta probabilidad de inestabilidad.

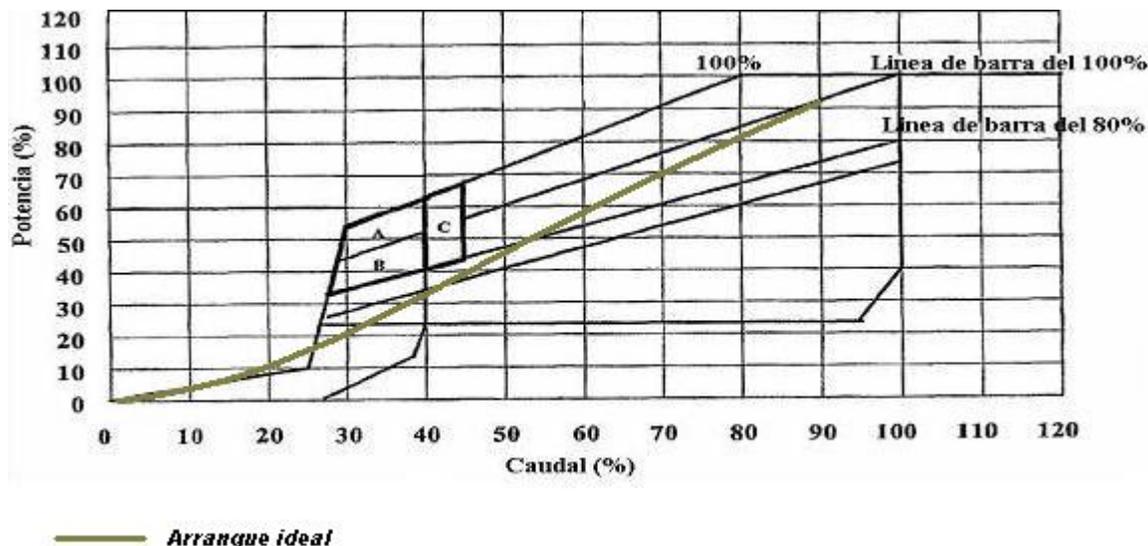


Figura 3-3 Representación del arranque ideal de un reactor BWR

## 2.6 Conclusiones

En este capítulo se resumieron los principales efectos termo hidráulicos que producen cambios en la reactividad del núcleo y por ende, en la potencia de salida del reactor. Estos son el efecto Doppler y la reactividad de vacíos. La primera es función de la temperatura del combustible mientras que la segunda depende de la fracción de vacíos en el canal. Cuando estos dos efectos se encuentran en equilibrio y no se presenta movimiento alguno en las barras de control, la potencia permanece en estado estable.

En este capítulo también se describieron las oscilaciones en fase por ondas de densidad que se presentan en el núcleo del reactor, ya que este tipo de oscilaciones son las de mayor probabilidad de ocurrencia cuando el reactor se encuentra cerca de las condiciones de operación nominal. Estas tienen su origen debido a una

oscilación de la fracción de vacíos en la frontera de flujo bifásico producida por variaciones de flujo de refrigerante. Como se describió en el capítulo 1, la potencia del reactor depende de este flujo de manera directamente proporcional, como lo muestra el mapa de caudal potencia en la figura 2-2. Esto llevó a la NRC a definir las zonas de menor densidad de flujo de refrigerante como peligrosas, debido a la alta probabilidad de que se presenten oscilaciones en la fracción de vacíos debido al poco flujo de refrigerante hacia el núcleo.

En el capítulo siguiente se desarrolla un modelo de orden reducido, el cual engloba los efectos de la cinética puntual con los efectos de la termohidráulica. Este modelo se desarrolló a partir de los resultados obtenidos de integrar numéricamente las ecuaciones nucleares acopladas con termohidráulica.

### Referencias

- [1] M. A. SCHULTZ. *Control of Nuclear Reactors and Power Plants*. Mc Graw-Hill 1978 U.S.A.
- [2] E. E. LEWIS. *Nuclear Power Reactor Safety*. John Wiley & Sons, 1977.
- [3] N.E. TODREAS, M.S. KAZIMI. *Nuclear Systems I: Thermal Hydraulic Fundamentals*. Hemisphere Publishing 1989 U.S.A.
- [4] D. A. MENELEY. *Introduction to Dynamics of Power Reactors*. 2001 McMaster University, Hamilton, ON Canada.
- [5] R. T. LAHEY, F. J. MOODY. *The Thermal-Hydraulics of a Boiling Water Nuclear Reactor*. American Nuclear Society 1993 U.S.A.
- [6] NRC. *Power Oscillation in Boiling Water Reactors (BWRs)*. 1988. Bulletin No. 88-07 Washington, U.S.A.
- [7] J. A. RUIZ-ENCISO. *Predicción de la Estabilidad de un Reactor BWR durante el Proceso de Arranque*. 2004. Congreso Internacional Conjunto Cancún 2004, Sociedad Nuclear Mexicana, Cancún, México.

## Capítulo 3

### Representación de la dinámica del núcleo de un reactor de tipo BWR utilizando un modelo de orden reducido

#### 3.1 Introducción

Todo sistema dinámico que tiene retroalimentaciones naturales o intrínsecas puede ser analizado con herramientas de teoría de control clásico y moderno, así como métodos de procesamiento digital de señales. En particular en un reactor en operación existen muchas y diversas fuentes de retroalimentación al proceso de generación de energía por medios nucleares.

Las ecuaciones determinadas en el capítulo anterior han sido programadas en diversos códigos para obtener su solución numérica. El código LAPUR [1] fue utilizado por Otaduy para modelar la dinámica de un reactor BWR. Este código trabaja utilizando las ecuaciones diferenciales nucleares acopladas con termo hidráulica linealizadas en el dominio del tiempo, de las cuales obtiene una función de transferencia la cual es analizada en el dominio de la frecuencia para estudiar su comportamiento dinámico. Se demostró que LAPUR obtiene excelentes resultados comparados con experimentos del reactor sólo si se integra sobre un número muy grande de nodos. Un cálculo típico para la dinámica de un BWR requiere una malla de alrededor de 600 nodos. Un modelo con tal cantidad de nodos es adecuado para obtener resultados numéricos; sin embargo, resulta muy difícil obtener un significado físico de estas soluciones numéricas.

El trabajo realizado por March-Leuba [2] consistió en minimizar el número de nodos involucrados en el modelado a fin de que los resultados obtenidos dieran un significado físico del comportamiento del reactor sin sacrificar la exactitud en los resultados. Esto se logró acoplando el modelo matemático a una serie de *supernodos*, en donde cada supernodo está formado por un conjunto de nodos los cuales describen el comportamiento de una región determinada del reactor tal como lo es la cinética puntual acoplada con la transferencia de calor y la termo hidráulica del canal.

Esto permite obtener de LAPUR las gráficas de Bode en magnitud y fase del comportamiento dinámico del reactor en el dominio de la frecuencia. A partir de estos diagramas se procede a buscar un modelo en el espacio "s" que reproduzca de la manera más exacta los diagramas de Bode arrojados por LAPUR. Este procedimiento se basa en los siguientes pasos:

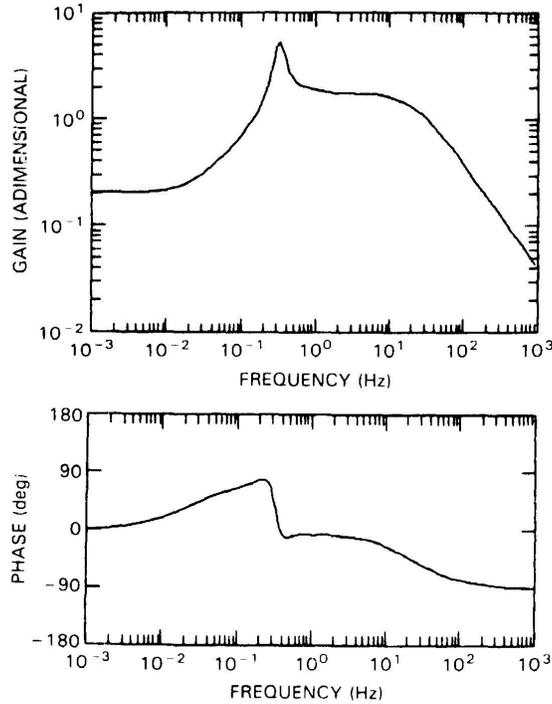
- 1) El número mínimo de polos y ceros que se necesita para una adecuada representación de la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, es determinada acoplando polinomios de distintos órdenes a la función de transferencia hasta que se tenga una convergencia bastante aproximada a los diagramas de Bode originales.
- 2) Se proceden a obtener distintos diagramas de Bode para distintos parámetros del reactor con el objeto de estudiar la sensibilidad de los ceros en el modelo de orden reducido, el cual representa a la función de transferencia en lazo cerrado. La sensibilidad de los ceros a diversos cambios en la física del reactor permite identificar el vínculo que existe entre los distintos ceros del modelo y el proceso físico al cual corresponde.

Por lo tanto, al identificar los procesos físicos en el modelo de orden reducido, March-Leuba propone un modelo matemático a base de ecuaciones diferenciales que represente la dinámica del reactor. Sin embargo, este es un modelo no lineal que, para obtener su representación en forma de función de transferencia, tiene que ser linealizado para variaciones muy pequeñas en la reactividad externa y en la población neutrónica.

En este capítulo se estudia un modelo no lineal propuesto por Morales [3], el cual está basado en el modelo obtenido por March-Leuba. Como se verá en las secciones siguientes, este modelo puede reproducir el comportamiento del núcleo del reactor de una manera muy adecuada, e incluso puede reproducir inestabilidades en fase originadas por un cambio en la fracción de vacíos.

### 3.2 La configuración de polos y ceros de la función de transferencia del reactor (Modelo de orden reducido)

La figura 3-1 muestra los diagramas de Bode en magnitud y fase calculados por LAPUR para las condiciones de prueba 3PT3 [4] en el reactor de la planta de Peach Bottom.



**Figura 3-1 Diagramas de Bode calculados por LAPUR (prueba 3PT3, Peach Bottom) [2]**

Las siguientes características dinámicas se pueden observar de la figura 3-1: un cero de baja frecuencia (0.03 Hz), una frecuencia de corte (alrededor de los 21 Hz) y un pico resonante (alrededor de 0.3 Hz) que determina la estabilidad del sistema. Estas características sugieren que se utilice una función de transferencia (1 cero/3 polos) para modelar el reactor, pero este modelo presenta un valor asintótico en la fase de  $-180^\circ$  en altas frecuencias. Ya que la fase original presenta un valor de  $-90^\circ$  a los 1000 Hz, se necesita agregar un cero al modelo.

La figura 3-2 muestra una comparación entre los diagramas de Bode obtenidos por LAPUR y los diagramas obtenidos utilizando un modelo (2 ceros/3 polos). En esta comparación se concluye que el orden de este modelo es todavía muy pequeño para representar a la función de transferencia del reactor.

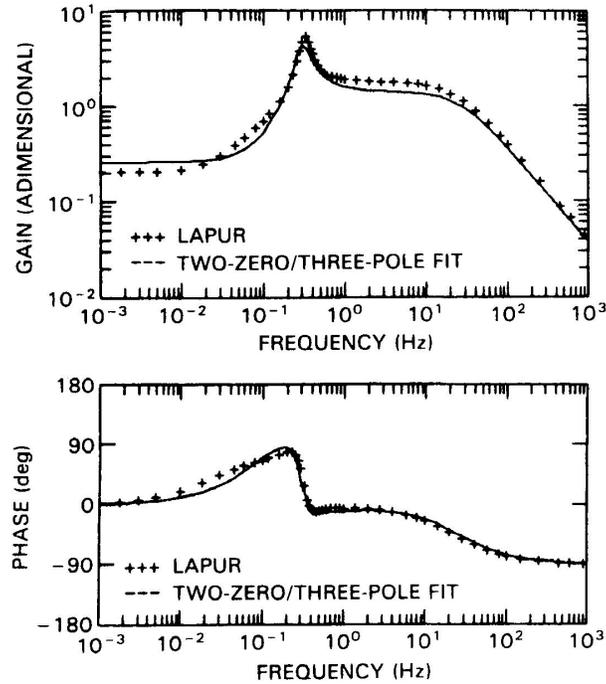


Figura 3-2 Comparación de los diagramas de Bode entre el modelo (2 ceros/3 polos) y los diagramas obtenidos por LAPUR (prueba 3PT3, Peach Bottom) [2]

Utilizando un modelo de mayor orden (3 ceros/4 polos) para intentar reproducir las características dinámicas del reactor bajo las condiciones de prueba antes mencionadas, se obtienen resultados satisfactorios como los que se muestran en la figura 3-3.

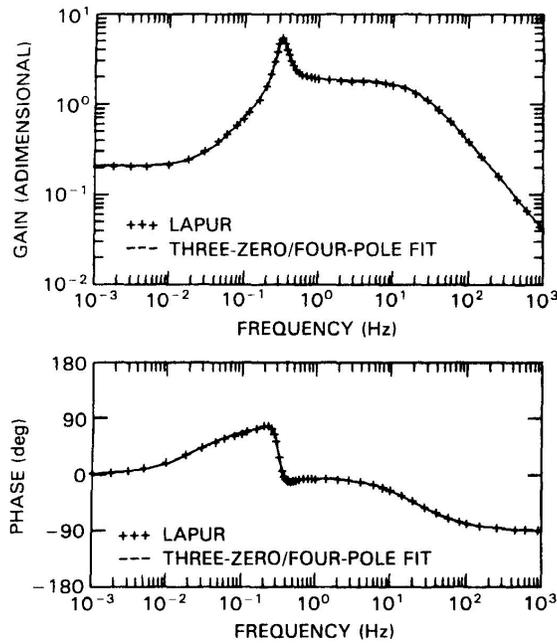


Figura 3-3 Comparación de los diagramas de Bode entre el modelo (3 ceros/4 polos) y los diagramas obtenidos por LAPUR (prueba 3PT3, Peach Bottom) [2]

Si se llegara a incrementar el orden del modelo aparecerían polos falsos debido a que se cancelarían con los nuevos ceros. Por lo tanto el modelo que se acopla de manera más exacta a los resultados determinados por LAPUR es el que corresponde al integrado por (3 ceros/4 polos). La tabla 3-1 muestra los valores de los polos y ceros obtenidos en la función de transferencia reactividad-potencia:

**Tabla 3-1 Resultados de los 3 polos/4 ceros obtenidos en el modelo acoplado a los resultados de LAPUR**

Ceros [Hz]	Polos [Hz]
-0.03	-0.25
$-0.18 \pm 0.27i$	-21.7
	$-0.045 \pm 0.32i$

Cabe destacar que la función de transferencia obtenida en el modelo de orden reducido anterior corresponde a la función de transferencia en lazo cerrado del sistema cuya entrada es la reactividad y la salida corresponde a la potencia. Esto es debido a que los resultados arrojados por LAPUR fueron obtenidos programando el modelo nuclear acoplado con término hidráulica, donde la cinética puntual es afectada a través de la realimentación del sistema debido por un lado al efecto Doppler en la transferencia de calor, y por el otro lado debido a la fracción de vacíos en la termo hidráulica del canal.

Si utilizamos la teoría de control [5] para analizar una función de transferencia  $T$  en lazo cerrado vemos que se encuentra conformada por una función de transferencia directa  $G$  y por una función de realimentación  $H$ , donde el sistema resultaría en:

$$T = \frac{G}{1 + GH} \quad (3-1)$$

Entonces los ceros de  $T$  están formados tanto por los ceros de  $G$  como por los polos de  $H$  ( $T \rightarrow 0$  cuando  $H \rightarrow \infty$ ). Los polos de  $T$ , sin embargo, toman una expresión más compleja y son determinados por la siguiente ecuación característica:

$$1 + GH = 0 \quad (3-2)$$

En una primera aproximación, la función de transferencia directa  $G(s)$  de un BWR se representa realizando la transformada de Laplace a las ecuaciones en el tiempo de la cinética puntual aproximadas a un solo grupo de neutrones retardados (ecuaciones 2-8 y 2-9), dando lugar a:

$$G(s) = \frac{dn}{d\rho} = \frac{1}{\Lambda} \frac{s + \lambda}{s(s + \frac{\beta}{\Lambda} + \lambda)} \quad (3-3)$$

En la tabla 3-2, se muestran los valores de los parámetros [6] de la ecuación (3-3):

**Tabla 3-2 Valores de los parámetros de la ecuación (3-3)**

Parámetro	Valor
$\beta$	0.0056
$\Lambda$	0.08 [s <sup>-1</sup> ]
$\lambda$	$4 * 10^{-5}$ [s <sup>-1</sup> ]

La ecuación (3-3) muestra un cero de 0.08 Hz y ningún cero que se identifica en la tabla 3-1 se encuentra cerca de esta frecuencia; por lo tanto, los ceros de la función de transferencia en lazo cerrado  $T$  no corresponden a los ceros de la función de transferencia directa  $G$ , llegando a la conclusión que los polos de la función de realimentación  $H$  corresponden a los ceros del sistema en lazo cerrado  $T$ .

Hasta este punto no se pueden asociar los ceros de  $T$  con la representación algún proceso físico en particular, por lo que debemos identificar a estos tres ceros estudiando su sensibilidad a cambios físicos en los parámetros del reactor.

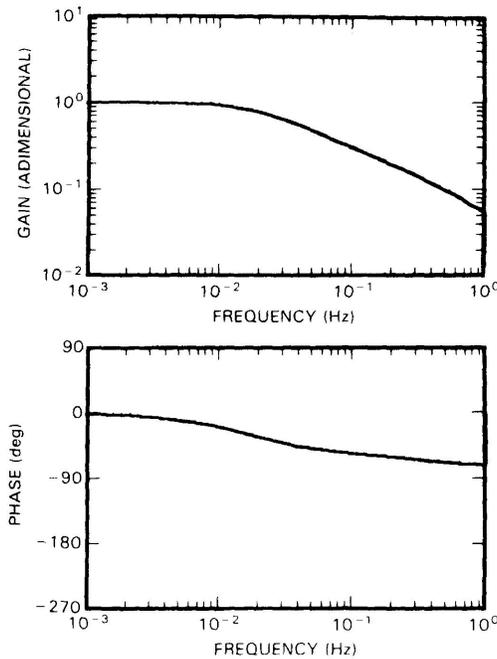
**3.3 Estudio de la sensibilidad de los ceros y polos que conforman la función de transferencia obtenida ante distintas variaciones en los parámetros del reactor**

Para estudiar el comportamiento propio de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia obtenida anteriormente, se realizaron distintos cálculos con LAPUR variando los parámetros de la dinámica del reactor (modelo nuclear acoplado con termo hidráulica) de los parámetros originales. Distintos modelos de orden reducido de 3 ceros y 4 polos fueron acoplados a los distintos diagramas de Bode observando la sensibilidad de los polos y ceros. La tabla 3-3 presenta la sensibilidad cuando se modifica la distancia que se encuentra entre el combustible y la pared de su contenedor, afectando de esta manera a la capacidad de conducir calor hacia el contenedor (conductividad).

**Tabla 3-3 Sensibilidad de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia al cambio en la conductividad del calor en el combustible**

	Reducción del espacio en un 20%	Base	Aumento del espacio en un 20%	Aumento del espacio en un 50%
Ceros	-0.028 $-0.18 \pm 0.27i$	0.030 $-0.18 \pm 0.27i$	-0.033 $-0.18 \pm 0.28i$	-0.036 $-0.18 \pm 0.28i$
Polos	$-0.051 \pm 0.31i$ -0.26 -21	$-0.045 \pm 0.32i$ -0.25 -21.7	$-0.044 \pm 0.33i$ -0.28 -20.7	$-0.042 \pm 0.34i$ -0.30 -21.9

En la tabla 3-3 se puede observar que los ceros complejos son muy insensibles a los cambios de conductividad del calor, más no así el cero de baja frecuencia el cual cambia de un valor de 0.028 a 0.036, correspondiente a un cambio del 30%. Este hecho sugiere que el cero de baja frecuencia esta relacionado con la constante de tiempo en el proceso de la transferencia de calor. Mientras se reduce la distancia entre el combustible y su contenedor, la constante de tiempo disminuye provocando un aumento en la frecuencia de corte en la magnitud de los diagramas de Bode. La figura 3-4 ilustra lo anterior:



**Figura 3-4 Representación de la función de transferencia potencia-flujo de calor calculada por LAPUR [2]**

Por lo tanto se concluye que el cero de baja frecuencia de la función de transferencia en lazo cerrado del sistema corresponde a un polo de la función de realimentación, el cual concierne a la dinámica de la transferencia de calor.

Las tablas 3-4 y 3-5 muestran el resultado de acoplar la función de transferencia a los resultados obtenidos por LAPUR cuando se modifican el flujo del refrigerante y la potencia en el núcleo, respectivamente.

Se puede observar que la frecuencia de los ceros complejos se incrementa de manera proporcional a la potencia o al flujo, pero el cero real es muy insensible a estos cambios. Estos hechos sugieren que los ceros complejos están relacionados con la fracción de vacíos en el núcleo. Cuando se incrementa el flujo o la potencia, las burbujas de vapor viajan más rápido reduciendo el tiempo de propagación, produciendo así una respuesta en frecuencia mucho mayor.

**Tabla 3-4 Sensibilidad de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia al cambio en el flujo de refrigerante en el núcleo**

	-10% del flujo original	Base	+10% del flujo original
Ceros [Hz]	-0.030 -0.16 ± 0.26i	-0.030 -0.18 ± 0.27i	-0.030 -0.18 ± 0.28i
Polos [Hz]	-0.037 ± 0.31i -0.26 -20.5	-0.045 ± 0.32i -0.25 -21.7	-0.058 ± 0.33i -0.26 -21

**Tabla 3-5 Sensibilidad de los polos y ceros de la función de transferencia reactividad-potencia al cambio en la potencia del núcleo**

	-10% de la potencia original	Base	+10% de la potencia original
Ceros [Hz]	-0.030 -0.18 ± 0.25i	-0.030 -0.18 ± 0.27i	-0.031 -0.18 ± 0.29i
Polos [Hz]	-0.054 ± 0.30i -0.25 -21	-0.045 ± 0.32i -0.25 -21.7	-0.042 ± 0.33i -0.28 -20.9

La figura 3-5 muestra la función de transferencia entre el flujo de calor y la densidad en la reactividad del moderador calculada por LAPUR. La frecuencia de corte en 0.3 Hz correspondiente al doble polo es evidente. Esto confirma la hipótesis que el par de ceros en la función de transferencia reactividad-potencia en lazo cerrado se deben a la termohidráulica del canal asociada con la reactividad de vacíos.

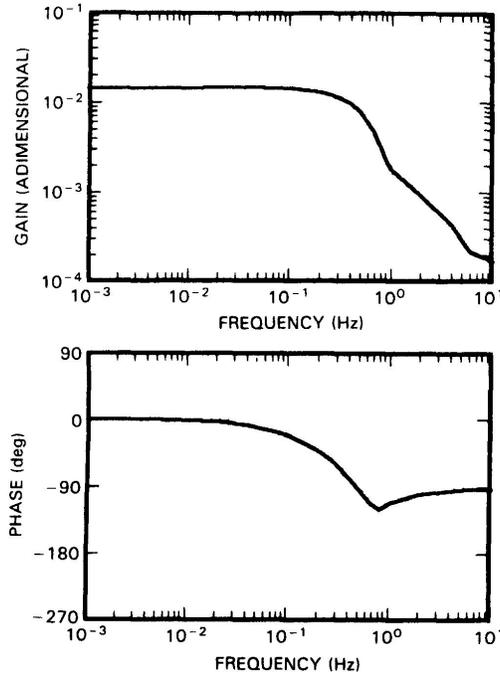


Figura 3-5 Representación de la función de transferencia flujo de calor-densidad en la reactividad calculada por LAPUR [2]

### 3.4 El significado físico del modelo de orden reducido obtenido y su modelo en el tiempo

Hasta este punto se ha propuesto un modelo de orden reducido para representar la dinámica del núcleo de un reactor BWR. La función de realimentación en lazo cerrado representa la transferencia de calor del combustible a sus alrededores así como también a los fenómenos presentes en la termohidráulica del canal como lo es la fracción de vacíos. Estos dos procesos producen efectos en la reactividad del sistema de la cual depende el comportamiento de la población neutrónica y por ende, de la potencia de salida del núcleo del reactor. Estas características de la propia dinámica del reactor se pueden representar mediante un diagrama de bloques como lo muestra la figura 3-6.

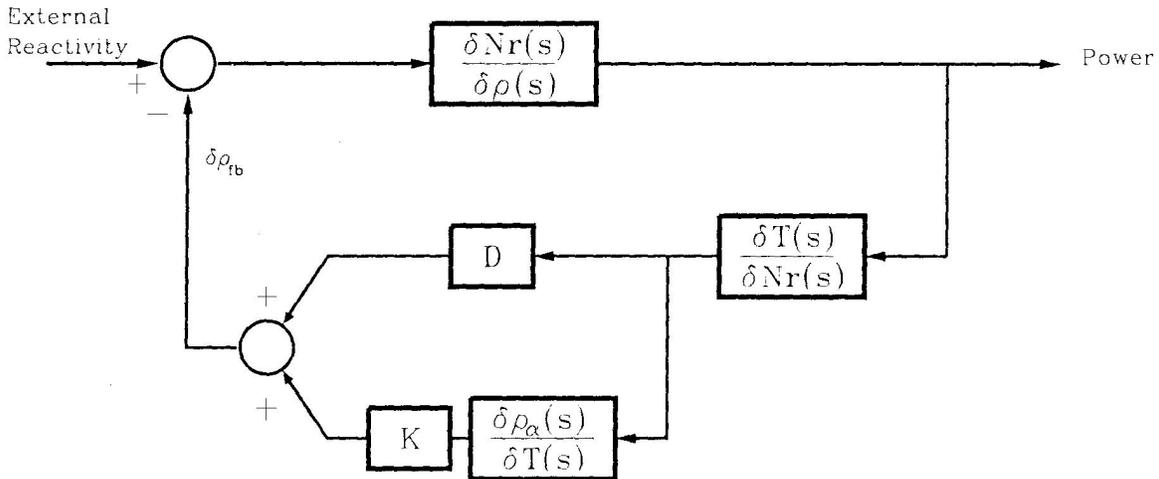


Figura 3-6 Diagrama de bloques de la función de transferencia en lazo cerrado reactividad-potencia (Modelo de orden reducido) [2]

La figura 3-6 ilustra que la potencia de salida permanecerá en estado estable siempre y cuando la suma de la reactividad externa y los efectos de realimentación sean cero. Cuando se produce un cambio en la reactividad externa debido a un movimiento en las barras de control, este se produce de la misma forma que una señal de tipo escalón. Cualquier desbalance entre la entrada del sistema y la realimentación tendrá un efecto en la potencia de salida.

Como se observó en el estudio de la sensibilidad de los ceros del modelo de orden reducido a variaciones paramétricas del reactor, el par de ceros complejos corresponden al proceso relacionado con la fracción de vacíos en la termo hidráulica y el cero real de baja frecuencia corresponde al proceso de la transferencia de calor. En el dominio del tiempo estos procesos corresponden a ecuaciones diferenciales de segundo y primer orden, respectivamente.

A todo esto March-Leuba describe un modelo matemático en el dominio del tiempo para representar la dinámica de un BWR, el cual queda descrito de la siguiente manera:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{(r-1)\beta}{\Lambda}n + \lambda c \quad (2-8)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\beta}{\Lambda}n - \lambda c \quad (2-9)$$

$$\frac{dT}{dt} = a_1n - a_2T \quad (3-4)$$

$$\frac{d^2\rho_\alpha}{dt^2} + a_3\frac{d\rho_\alpha}{dt} + a_4\rho_\alpha = K\left(\frac{dT}{dt} + a_5T\right) \quad (3-5)$$

$$\rho = \rho_\alpha + DT \quad (3-6)$$

donde:

- T = Temperatura del combustible.
- $\rho_\alpha$  = Reactividad de vacíos de realimentación.
- D = Coeficiente de reactividad Doppler de realimentación.
- $\rho$  = Reactividad del sistema.
- K = Ganancia de realimentación termo hidráulica.

El modelo anterior corresponde a la dinámica de un modelo no lineal que, cuando se lineariza representa la función de transferencia antes mencionada. Los parámetros  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  representados en las ecuaciones anteriores determinan la dinámica del modelo, ya que en el espacio “s” representan a los distintos polos y ceros de la función de transferencia. El valor que tomen dichos parámetros depende de las distintas condiciones de operación del reactor.

### **3.5 Obtención del modelo en el espacio “s” a partir del modelo en el tiempo y justificación del modelo de orden reducido de March-Leuba**

El modelo de orden reducido obtenido con anterioridad a partir de los resultados obtenidos por LAPUR, se puede justificar de forma matemática mediante la transformación de las ecuaciones (2-8, 2-9, 3-4 a 3-6) al espacio “s” mediante la transformada de Laplace. Las ecuaciones correspondientes a la cinética puntual

primero tendrían que ser linealizadas ya que estas dos ecuaciones son de carácter no lineal. Una aproximación se realiza en la ecuación (3-3) si la potencia está sujeta a variaciones muy pequeñas. Por lo tanto, el modelo en el espacio “s” queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{N(s)}{R(s)} = \frac{n_0 \beta (s + \lambda)}{\Lambda s (s + \beta/\Lambda)} \quad (3-7)$$

$$\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{a_1}{s + a_2} \quad (3-8)$$

$$\frac{\rho_a(s)}{T(s)} = \frac{K(s + a_5)}{s^2 + a_3 s + a_4} \quad (3-9)$$

Y la función de transferencia en lazo cerrado queda como:

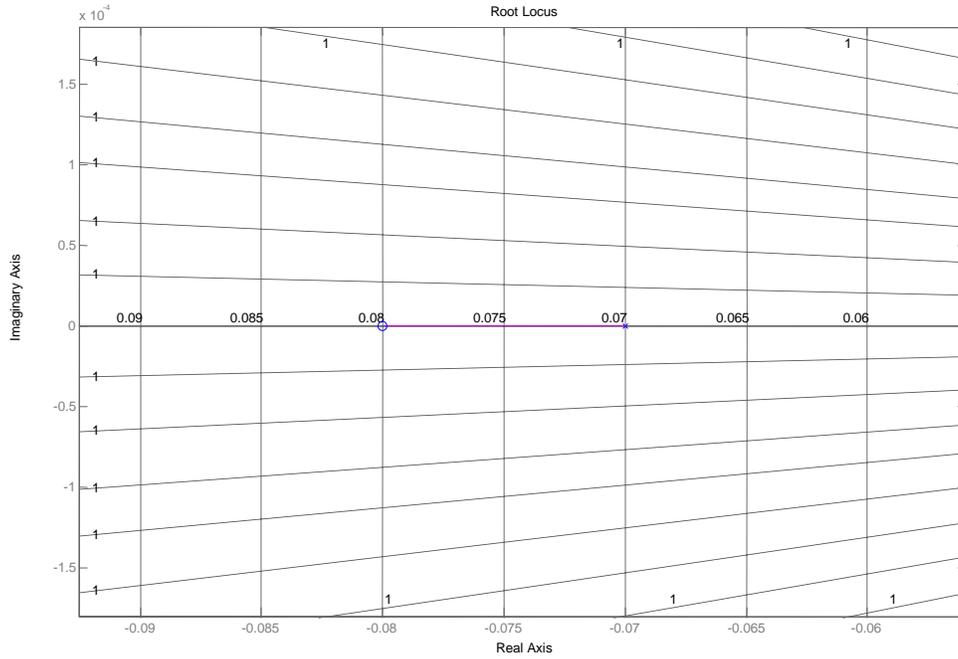
$$T = \frac{n_0 \beta (s + \lambda) (s + a_2) (s^2 + a_3 s + a_4)}{s (s + \beta/\Lambda) (s + a_2) (s^2 + a_3 s + a_4) + \frac{n_0 \beta a_1 D}{\Lambda} (s + \lambda) \left( s^2 + (a_3 + \frac{K}{D}) s + (a_4 + \frac{K a_5}{D}) \right)} \quad (3-10)$$

Como se puede observar la ecuación (3-10) es una función de transferencia de 4 ceros/5 polos, y el modelo obtenido por March-Leuba es de 3 ceros/4 polos. La justificación del modelo obtenido originalmente es que, las condiciones de operación del reactor para las cuales LAPUR obtuvo los diagramas de Bode, existe una cancelación de un cero con un polo en la función de transferencia de lazo cerrado. Esto se puede demostrar graficando el lugar geométrico de las raíces [4] para el modelo de orden reducido de la ecuación (3-10) con los parámetros obtenidos por March-Leuba, los cuales se encuentran en la referencia [2] y se muestran en la tabla 3-6:

**Tabla 3-6 Valores de los parámetros obtenidos por March-Leuba para el modelo matemático de orden reducido**

Parámetro	Valor
a <sub>1</sub>	19.08
a <sub>2</sub>	0.19
a <sub>3</sub>	3.68
a <sub>4</sub>	4.25
a <sub>5</sub>	3.68
K	-3.476 * 10 <sup>-3</sup>
D	-2.61 * 10 <sup>-5</sup>
β	0.0056
Λ	4 * 10 <sup>-5</sup>
λ	0.08

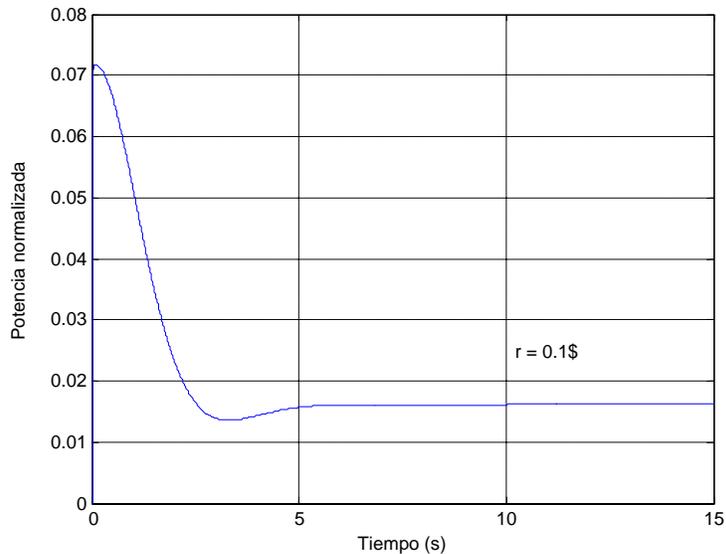




**Figura 3-8 Acercamiento de la figura 3-7 donde se muestra el lugar geométrico de un polo y un cero reales casi iguales**

El modelo matemático propuesto por March-Leuba es un modelo que reproduce de manera eficiente el comportamiento de un reactor en el que sus parámetros reflejan las condiciones de operación con las que trabaja el reactor.

La figura 3-9 muestra la respuesta del modelo de orden reducido de la ecuación (3-10) cuando se produce un cambio en la reactividad externa de 0.1\$. La ecuación (3-10) es una función de transferencia en lazo cerrado por lo que sólo responderá a cambios en la reactividad externa. Si se quiere cambiar condición alguna en la fracción de vacíos o en la temperatura del modelo, se tiene que realizar a través de las ganancias de realimentación.



**Figura 3-9 Potencia de salida normalizada del modelo de March-Leuba utilizando los parámetros de la tabla 3-6**

### 3.6 Propuesta de un modelo de orden reducido para representar la dinámica del núcleo de un reactor BWR

Esta sección presenta un modelo matemático de orden reducido propuesto por Morales [3] el cual es muy parecido al modelo anterior propuesto por March-Leuba con las siguientes modificaciones:

$$\frac{dn}{dt} = \lambda_N [(r-1)n + c] \quad (3-11)$$

$$\frac{dc}{dt} = \lambda [n - c] \quad (3-12)$$

$$\frac{dT_f}{dt} = a_n n - \lambda_f T_f \quad (3-13)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{d\alpha}{dt} + \omega_n^2 (\alpha - \alpha_0) = b_f (T_f - T_{f0}) + b_n (n - n_0) + b_{gr} \dot{T}_f \quad (3-14)$$

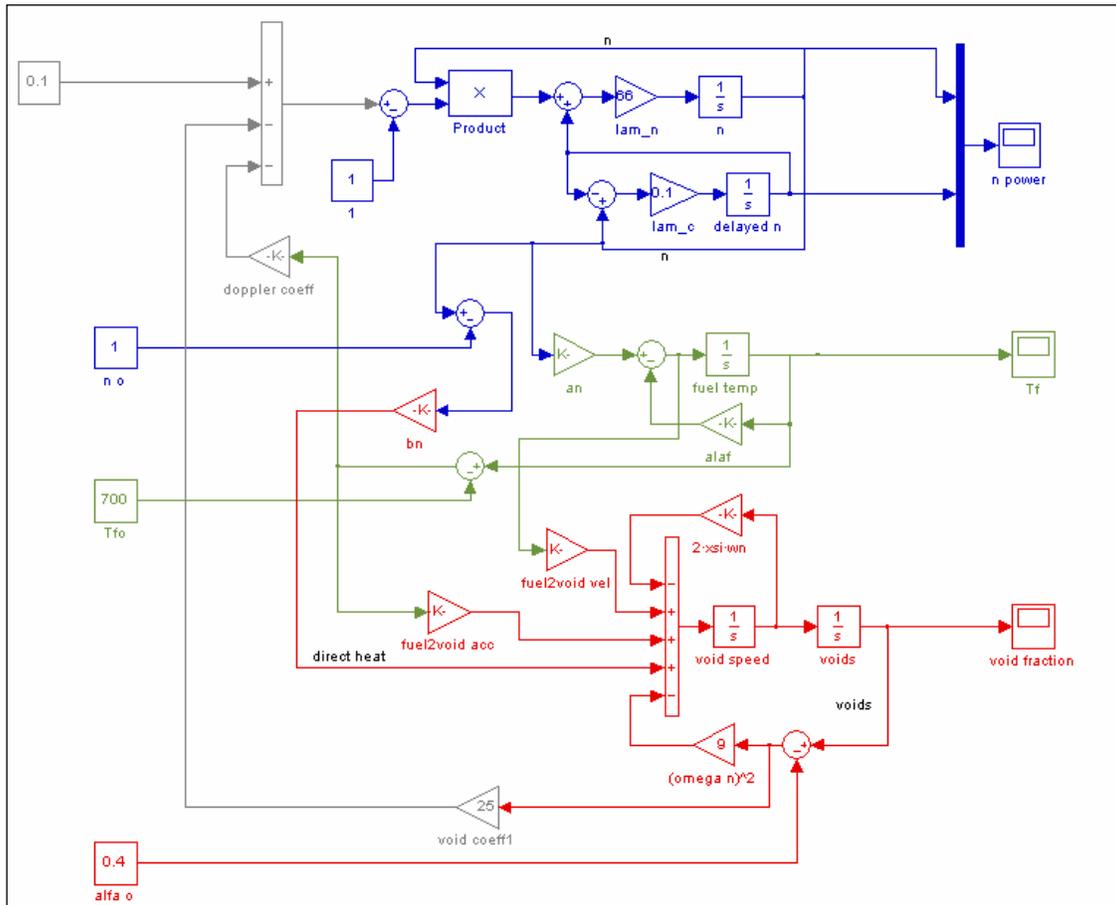
$$r = r_{ext} + \alpha_D (T_f - T_{f0}) + \alpha_V (\alpha - \alpha_0) \quad (3-15)$$

donde:

- $n$  = Potencia normalizada.
- $c$  = Grupo de neutrones retardados normalizado.
- $n_0$  = Potencia normalizada en condición de estado estable.
- $T_f$  = Temperatura del combustible.
- $T_{f0}$  = Temperatura del combustible en condición de estado estacionario.
- $\alpha$  = Fracción de vacíos.
- $\alpha_0$  = Fracción de vacíos en condición de estado estacionario.
- $r$  = Reactividad total de realimentación.
- $r_{ext}$  = Cambios en la reactividad externa debida a cambios en el movimiento de las barras de control.
- $\alpha_D$  = Coeficiente de reactividad Doppler.
- $\alpha_V$  = Coeficiente de reactividad por fracción de vacíos.
- $\lambda_N$  = Parámetro correspondiente a la función de potencia normalizada.
- $\lambda$  = Parámetro correspondiente al grupo de neutrones retardados normalizado.
- $\lambda_f$  = Parámetro correspondiente a la temperatura en la ecuación (3-13).
- $a_n$  = Parámetro correspondiente a la potencia normalizada en la ecuación (3-13).
- $\xi$  = Factor de amortiguamiento relativo.
- $\omega_n$  = Frecuencia natural no amortiguada.
  
- $b_f$  = Parámetro correspondiente a la conducción de calor del combustible a la pared de revestimiento del combustible.
  
- $b_{gr}$  = Parámetro que corresponde a la derivada de la temperatura en la superficie del combustible.

$b_n$  = Parámetro que representa la contribución del calor directo.

Este modelo no lineal fue implementado en el simulador de Matlab Simulink, el cual se muestra en la figura 3-10. Los bloques de color identifican a cada ecuación del conjunto formado por las ecuaciones (3-11 a 3-15). Los bloques de color azul corresponden a la cinética puntual (3-11 y 3-12), los bloques de color verde corresponden a la transferencia de calor (3-13), los bloques de color rojo corresponden a la ecuación de fracción de vacíos con el término añadido de calor directo (3-14) y finalmente la realimentación se encuentra formada por los bloques de color gris (3-15).



**Figura 3-10 Modelo no lineal propuesto por Morales implementado en Simulink**

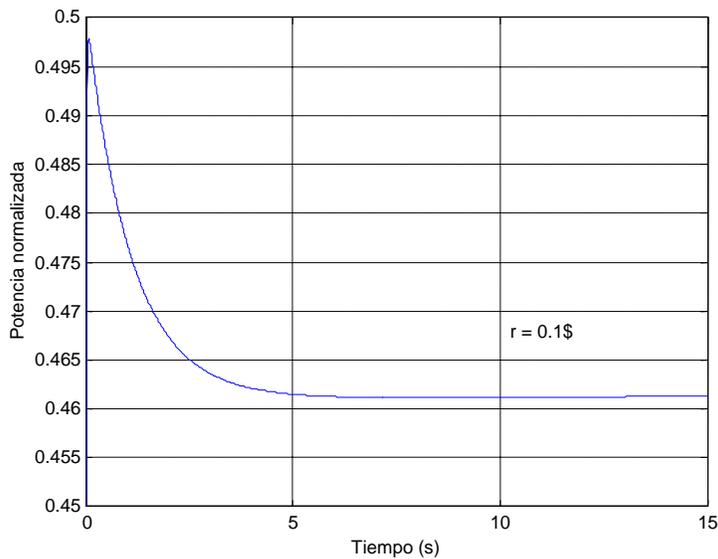
Los parámetros de esta realización sólo reflejan el estado general de un BWR y claramente al cambiar las condiciones de operación como flujo de refrigerante, potencia del reactor, presión de operación o distribución axial de potencia, los parámetros del modelo cambiarán apreciablemente. Quizá los parámetros de la cinética nuclear tendrán una variación más lenta pero los otros indudablemente tomarán valores que cambiarán la dinámica del reactor. Este modelo representa de una manera muy adecuada el comportamiento del núcleo de un reactor BWR debido a que es un modelo no linealizado por lo que responde de manera adecuada para cualquier variación en la reactividad externa, y no sólo para pequeñas variaciones como el modelo lineal obtenido por March-Leuba, seguramente aplicable a condiciones más diversas si los parámetros son adaptados de manera apropiada. La figura 3-11 muestra la potencia de salida normalizada para el modelo no lineal utilizando los parámetros que se muestran en la tabla 3-7 [3], para un cambio en la reactividad externa de 0.1\$ y utilizando condiciones iniciales igual con cero:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= 0 \\ T_f - T_{f0} &= 0 \end{aligned} \tag{3-16}$$

Esto representa finalmente que en un inicio el valor de la reactividad total sea igual a la magnitud del cambio en la reactividad externa, siendo las reactividades de realimentación cero. Este hecho resulta de gran importancia en este modelo ya que mediante las condiciones iniciales se puede otorgar un valor inicial a la condición de fracción de vacíos o de temperatura, afectando esto a la reactividad total y por ende al comportamiento de la potencia de salida. La figura 3-11 muestra que el modelo tiene un comportamiento muy similar al propuesto por March-Leuba solo que los parámetros son diferentes.

**Tabla 3-7 Valores de los parámetros utilizados en el modelo no lineal para obtener la potencia normalizada de salida mostrada en la figura 3-10**

Ecuación	Parámetros
3-11	$\lambda_N = 66 [s^{-1}]$
3-12	$n_0 = 0.45$ $\lambda = 0.1 [s^{-1}]$
3-13	$T_{f0} = 600 [K]$ $\lambda_f = 0.1818 [s^{-1}]$ $a_N = \lambda_f \cdot T_{f0} = 282.8 [K \cdot s^{-1}]$
3-14	$\xi = 0.1$ $\omega_n = 3 [rad/s]$ $\alpha_0 = 0.33$ $b_n = 0.0001$ $b_f = 0.00001$ $b_{gr} = 0.000001$
3-15	$\alpha_D = -0.006$ $\alpha_V = \frac{-150 \cdot 10^{-5}}{\beta} \approx -25$



**Figura 3-11 Potencia normalizada de salida utilizando el modelo no lineal implementado en Simulink utilizando los parámetros de la tabla 3-7**

### 3.7 Obtención de un modelo lineal en variables de estado a partir del modelo no lineal propuesto por Morales

Un modelo lineal puede obtenerse utilizando la teoría de variables de estado [7] del modelo no lineal propuesto por Morales. De igual forma que en el modelo propuesto por March-Leuba, se deben considerar pequeñas variaciones en la reactividad externa y se deberá linearizar respecto a una condición inicial igual con cero para todas las variables de estado. En esta linearización se supone que la reactividad exterior (debida al movimiento de barras) permanece constante una vez que ha cambiado. Las variaciones de reactividad por efecto Doppler y fracción de vacíos está explícitamente incluida en el modelo. El apéndice B contiene el desarrollo para llegar a obtener un modelo del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (3-16)$$

Donde las matrices quedan conformadas por:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_N (r_{exterior} - 1) & \lambda_N & \lambda_N \cdot n_0 \cdot \alpha_D & \lambda_N \cdot n_0 \cdot \alpha_V & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ a_n & 0 & -\lambda_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_d \cdot a_n + b_n & 0 & b_f - b_d \cdot \lambda_f & -\omega_n^2 & -2 \cdot \xi \cdot \omega_n \end{bmatrix}$$

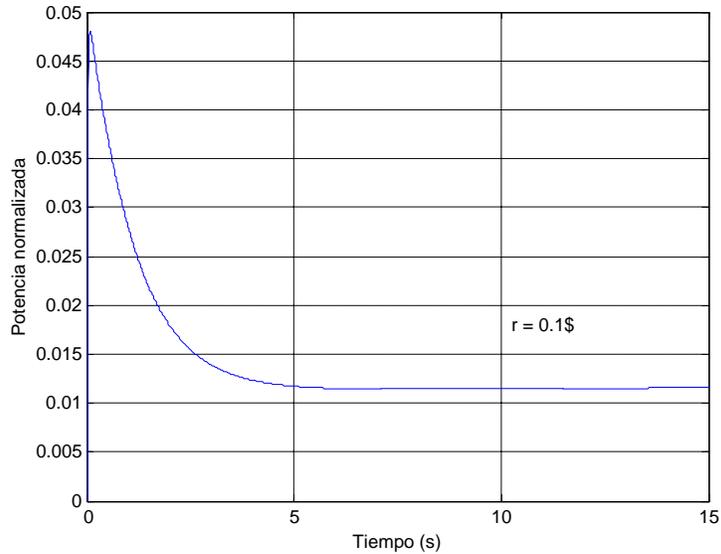
$$B = [n_0 * \lambda_N \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$D = [0]$$

(3-17)

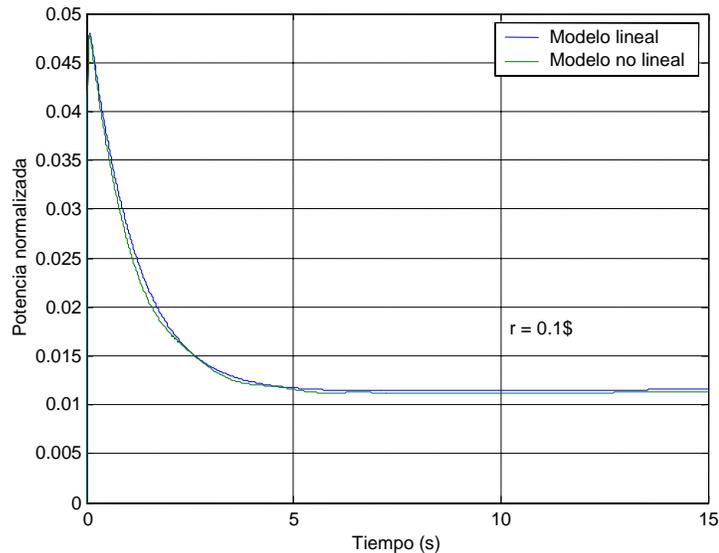
La figura 3-12 muestra la salida del modelo lineal utilizando los parámetros de la tabla 3-7 para un cambio en la reactividad externa de 0.1\$:



**Figura 3-12 Potencia normalizada de salida obtenida mediante el modelo linealizado propuesto por Morales**

Para obtener la respuesta del modelo lineal mostrada en la figura anterior, se programó la ecuación (3-16) en Matlab utilizando un vector de condiciones iniciales igual con cero.

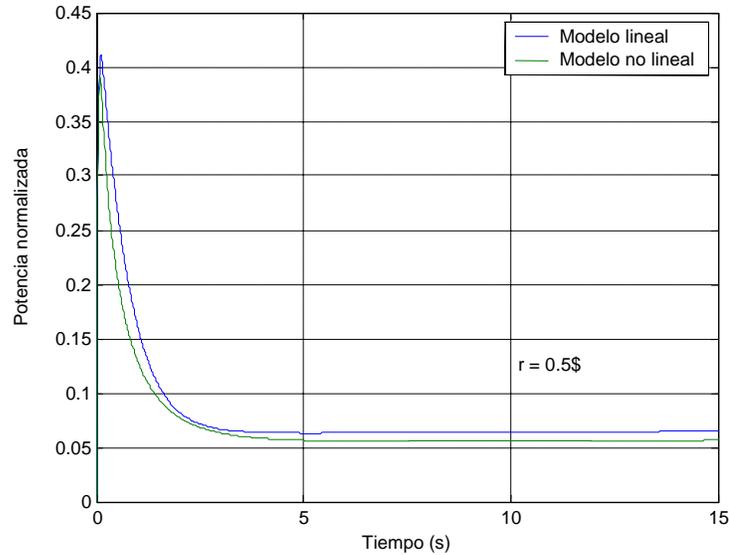
Si se comparan las figuras 3-11 y 3-12 se observaría que las respuestas son prácticamente iguales excepto por la componente de directa mostrada en el modelo no lineal. Esta componente representa la condición inicial de potencia estable en la que se encontraba el sistema antes de que se produjera cualquier perturbación en la reactividad total del núcleo del reactor. Este modelo linealizado (tal como el modelo lineal obtenido por March-Leuba) muestra en su salida una condición inicial de potencia igual con cero. Esto se debe a que cualquier modelo lineal que represente la dinámica de un sistema en particular debe tener condiciones iniciales iguales a cero. Sin embargo, si se elimina la componente de directa en la respuesta obtenida por el modelo no lineal, se puede observar en la figura 3-13 la similitud en las respuestas de ambos modelos:



**Figura 3-13 Comparación entre las respuestas del modelo no lineal con el modelo lineal**

Un modelo lineal representa de manera adecuada la dinámica del núcleo de un reactor BWR para pequeñas variaciones en la variable de estado que represente. Para variaciones mayores a  $0.4\%$  en la reactividad externa se considera que la potencia cambia a un valor muy grande por lo que el modelo lineal ya no es tan eficiente.

Sin embargo, en la realidad no ocurren cambios tan grandes en la reactividad externa [6]. Una idealización numérica se puede representar con un cambio en la reactividad externa de  $0.5\%$  para observar el efecto de la linealización. La figura 3-14 muestra una comparación entre las respuestas de los modelos lineal y no lineal para este efecto en particular. La figura nos demuestra la disparidad en las respuestas de los diferentes modelos para variaciones muy grandes en la entrada del sistema.



**Figura 3-14 Comparación entre las respuestas de los modelos lineal y no lineal para un cambio en la reactividad externa de  $0.5\%$**

### **3.8 Representación de oscilaciones en fase utilizando el modelo no lineal de orden reducido de Morales**

El modelo no lineal propuesto por Morales puede reproducir diversas oscilaciones en fase que se pueden presentar en el núcleo de un reactor. Un estudio de ellas se puede realizar mediante los parámetros que se utilicen en el modelo para reproducirlas. Para comprobar la validez que tiene el modelo para este fin, se representan oscilaciones obtenidas por otros modelos matemáticos como el implementado por Karve et al. [8].

Como se mencionó en el capítulo 2 existe una gran probabilidad de que las oscilaciones en fase se presenten por una pérdida de flujo de refrigerante en el núcleo, provocando una perturbación en la fracción de vacíos y por ende, provocando también un cambio drástico en la reactividad total. El fenómeno de la fracción de vacíos se refleja en la ecuación (3-15) que corresponde a la realimentación del modelo no lineal. Dependiendo del valor que tome la condición inicial de la fracción de vacíos será la magnitud de la amplitud de la oscilación en fase que se presente. Con respecto al periodo de oscilación este tendrá que ver con los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$  de la ecuación diferencial de segundo orden (3-14) correspondiente al comportamiento temporal de la fracción de vacíos.

Las figuras 3-15 y 3-16 muestran 2 oscilaciones de la potencia del reactor presentadas por Karve et al. bajo las mismas condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos mostradas en la tabla 3-8, pero utilizando distintos parámetros ya que una muestra una oscilación inestable mientras que la otra oscilación tiende a la estabilidad. Las condiciones iniciales de la tabla 3-8 fueron tomadas de la referencia [8].

Tabla 3-8 Condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos utilizadas en la representación de las oscilaciones mostradas en las figuras 3-15 y 3-16

Condición inicial	Valor
$n_0$	1.6
$\alpha_0$	0.08

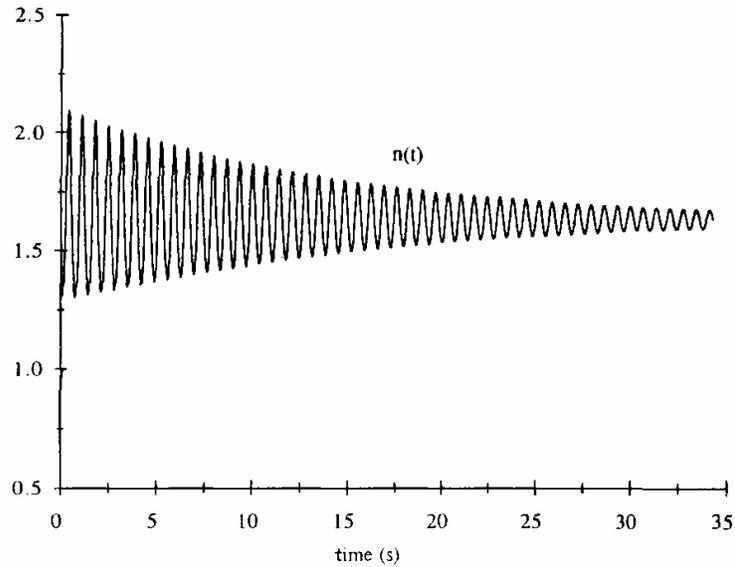


Figura 3-15 Oscilación estable mostrada por Karve et al. bajo condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos mostradas en la tabla 3-8 [8]

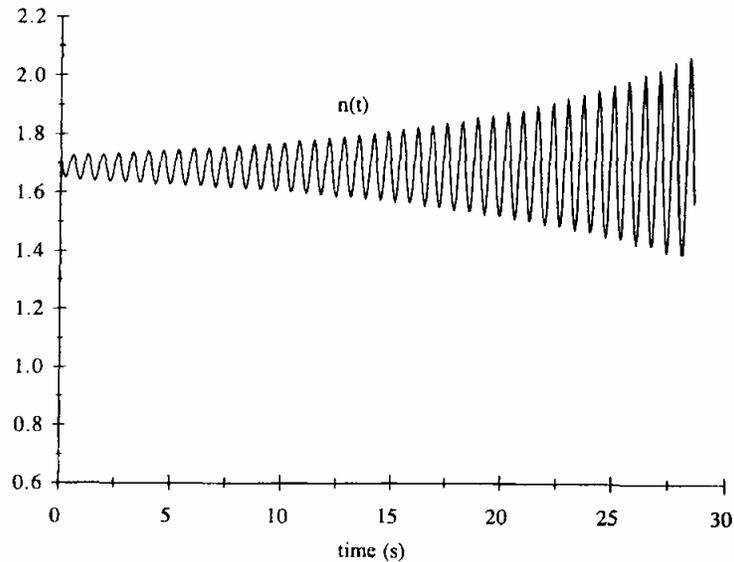


Figura 3-16 Oscilación inestable mostrada por Karve et al. bajo condiciones iniciales de potencia y fracción de vacíos mostradas en la tabla 3-8 [8]

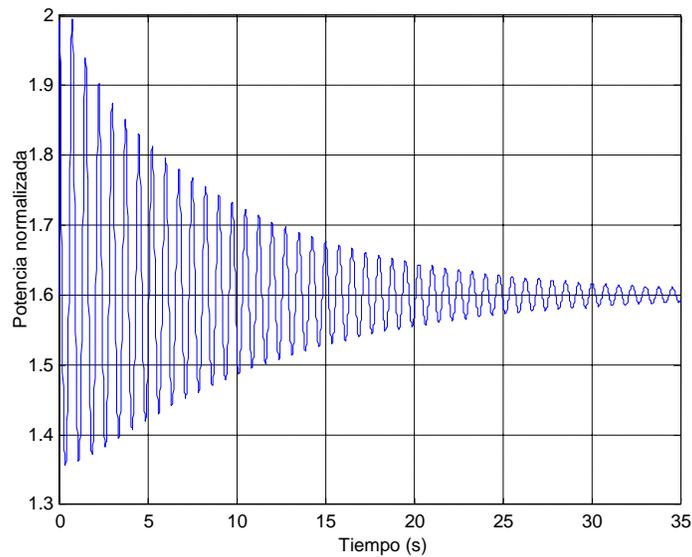
Ahora se pretende igualar esas dos oscilaciones utilizando el modelo no lineal de Morales implementado en Simulink utilizando las dos condiciones iniciales de la tabla 3-8 y buscando el ajuste de los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$  tal que se puedan reproducir ambas oscilaciones.

Para el caso de la oscilación estable se puede lograr un buen ajuste recurriendo a la teoría de sistemas [7], la cual nos dice que cuando se presenta una señal oscilante en el tiempo la frecuencia de la señal corresponde a la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$ , la cual está en función de  $\xi$  y  $\omega_n$ , dada por la siguiente ecuación:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3-18)$$

Midiendo la frecuencia de la propia oscilación estable presentada anteriormente se pueden fijar los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$ . Una manera de obtener la frecuencia en la figura 3-15 es contar el número de crestas que hay en cinco segundos el cual corresponde a siete. Si se quiere obtener el tiempo que hay entre dos crestas se puede aplicar una regla de tres. El tiempo que hay entre dos crestas consecutivas resulta ser de 1.43 segundos. El inverso de este periodo corresponde a un valor de 0.7 Hz y finalmente la frecuencia angular de amortiguamiento corresponde a un valor de 4.4 rad/s. Por lo tanto, si fijamos el valor de  $\xi$  a 0.1 (caso subamortiguado) y se aplica la ecuación (3-18), el valor de  $\omega_n$  será igual a 4.42 rad/s.

Este hecho nos llevó a programar el modelo no lineal utilizando las condiciones iniciales de la tabla 3-8, ajustando los parámetros del modelo para estas condiciones de  $\xi$  y  $\omega_n$ . La figura 3-17 muestra la potencia normalizada de salida obtenida con el modelo no lineal:

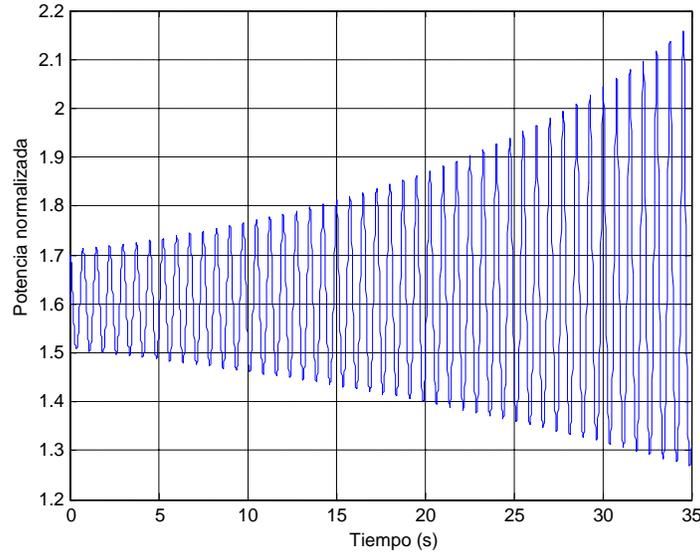


**Figura 3-17 Oscilación estable reproducida mediante el modelo no lineal implementado en Simulink bajo las condiciones establecidas por Karve et al.**

La oscilación mostrada en la figura 3-17 es prácticamente igual a la mostrada por Karve et al. en la figura 3-15.

También se puede representar la oscilación inestable de la figura 3-16, solo que aquí se tomará a prueba y error el valor de  $\xi$  para representar dicha oscilación ya que este es negativo, y no se puede obtener mediante la ecuación (3-18) por que esta expresión es para sistemas estables, pues  $\omega_d$  representa una frecuencia

amortiguada [7]. La figura 3-18 muestra una oscilación inestable muy parecida a la obtenida por Karve et al. Se utilizaron los parámetros que representaron la oscilación estable con la excepción de  $\xi = -0.05$ .



**Figura 3-18 Oscilación inestable reproducida mediante el modelo no lineal implementado en Simulink bajo las condiciones establecidas por Karve et al.**

De acuerdo a lo mostrado en la figura 3-18, solamente se necesitan ajustar los parámetros del sistema de segundo orden tal como el factor de decaimiento ( $\xi$ ) y la frecuencia natural amortiguada ( $\omega_n$ ) para obtener la estabilidad relativa requerida.

### 3.9 Conclusiones

Las ecuaciones nucleares acopladas con termo hidráulica fueron integradas numéricamente para obtener su solución en el código de LAPUR. March-Leuba tomó los resultados en forma de diagramas de Bode para una malla en donde cada nodo describía las condiciones termo hidráulicas del espacio al cual representaba. Esto lo llevó a obtener un modelo lineal en forma de función de transferencia, el cual representaba la dinámica del núcleo del reactor para las condiciones de operación establecidas en el arreglo nodal. Sin embargo, la mayor aportación de March-Leuba fue asociar los procesos físicos en el núcleo con los ceros y polos del modelo lineal, por lo que describió un conjunto de ecuaciones diferenciales para englobar la dinámica del reactor. Este modelo fue un modelo no lineal de orden reducido, retomado y mejorado por Morales para proponer otro modelo no lineal el cual englobara las condiciones iniciales del sistema y el cual pudiese ser utilizado en una más amplia gama de condiciones de operación y de transitorios. Esto permitió que la representación de este modelo fuera muy manejable cuando se requería representar oscilaciones en fase producidas por cambios en la fracción de vacíos.

Por otra parte, este modelo se linealizó con el objeto de demostrar que bajo ciertas condiciones un modelo lineal puede representar la misma dinámica del núcleo que un modelo no lineal. Esta aseveración resulta de gran importancia para el objetivo de este trabajo, ya que se demostrará que mediante la identificación de un sistema lineal se pueden estimar los parámetros del modelo no lineal que determinan la estabilidad del núcleo.

### Referencias.

- [1] P. J. OTADUY. *Modeling of the Dynamic Behaviour of Large Boiling Water Reactor Cores*. 1979. U.S.A. University of Florida. PhD. Dissertation.

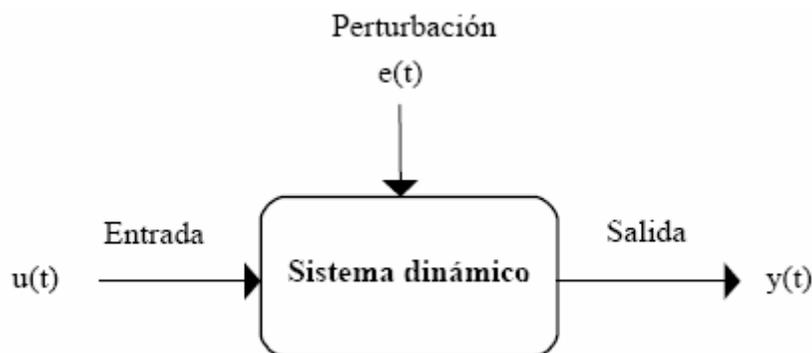
- [2] J. MARCH-LEUBA. *A Reduced-Order Model of Boiling Water Reactor Linear Dynamics*. 1986. Nuclear Technology, Vol. 75.
- [3] J. MORALES-SANDOVAL, A. HERNÁNDEZ-SOLÍS. *Global Physical and Numerical Stability of a Nuclear Reactor Core*, Annals of Nuclear Energy. (Enviado a publicación).
- [4] F. B. WOFFINDEN and R. O. NIEMI. *Low flow Stability Tests at Peach Bottom Atomic Power Station Unit 2 During Cycle 3*. 1981. EPRI NP-972. Electric Power Research Institute.
- [5] B. C. KUO. *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall 1995 U.S.A.
- [6] M. A. SCHULTZ. *Control of Nuclear Reactors and Power Plants*. Mc Graw-Hill 1978 U.S.A.
- [7] P. DeRUSSO, R. ROY, C. CLOSE. *State Variables for Engineers*, Wiley Inter-Science 1998 U.S.A.
- [8] A. A. KARVE, R. UDIN, J. J. DORNING. *Stability Analysis of BWR Nuclear-Coupled Thermal-Hydraulics using a simple model*. 1997 Nuclear Engineering and Design 177.

## Capítulo 4

### Identificación de sistemas

#### 4.1 Introducción

Un *sistema* es todo objeto en el que interactúan variables de diferentes tipos para producir señales observables. Las señales observables se denominan *salidas* del sistema mientras que las señales que pueden ser manipuladas libremente por algún observador en particular se conocen como *entradas*. El resto de señales que influyen en la evolución de las salidas pero no pueden ser manipuladas por el observador se denominan *perturbaciones*. La figura 4.1 ilustra la definición de sistema:



**Figura 4.1** Sistema dinámico con entradas  $u(t)$ , perturbación  $e(t)$  y salida  $y(t)$

Cuando es necesario conocer el comportamiento de un sistema bajo determinadas condiciones y ante determinadas entradas, se puede recurrir a la experimentación sobre dicho sistema y a la observación de sus salidas. Sin embargo, en muchos casos se puede trabajar con algún tipo de representación que se aproxime a la realidad a la que se conoce como *modelo*. Existen dos métodos principales para obtener el modelo de un sistema:

- 1) *Modelado teórico*. Se trata de un método analítico, en el que se recurre a leyes básicas de la física para describir el comportamiento dinámico de un fenómeno o proceso.
- 2) *Identificación del sistema*. Se trata de un método experimental que permite obtener el modelo de un sistema a partir de datos reales recogidos de la planta bajo estudio.

El modelado teórico tiene un campo de aplicación restringido a procesos muy sencillos de modelar, o a aplicaciones en que no se requiera gran exactitud en el modelo obtenido. En muchos casos, además, la estructura del modelo obtenido a partir del conocimiento físico de la planta posee un conjunto de parámetros desconocidos y que sólo se pueden determinar experimentando sobre el sistema real. De ahí la necesidad de recurrir a los métodos de *identificación de sistemas*.

### 4.2 Tipos de Modelos [1]

Los modelos de sistemas físicos pueden ser de muy diversos tipos. Una clasificación, en función del grado de formalismo matemático que poseen, es la siguiente:

1) *Modelos no paramétricos*. Muchos sistemas quedan perfectamente caracterizados mediante un gráfico o tabla que describa sus propiedades dinámicas mediante un número no finito de parámetros. Por ejemplo, un sistema lineal queda definido mediante su respuesta al impulso o al escalón, o bien mediante su respuesta en frecuencia.

2) *Modelos paramétricos o matemáticos*. Para aplicaciones más avanzadas, puede ser necesario utilizar modelos que describan las relaciones entre las variables del sistema mediante expresiones matemáticas como pueden ser ecuaciones diferenciales (para sistemas continuos) o en diferencias (para sistemas discretos). En función del tipo de sistema y de la representación matemática utilizada, los sistemas pueden clasificarse en:

- *Determinísticos o estocásticos*. Se dice que un modelo es determinístico cuando expresa la relación entre entradas y salidas mediante una ecuación exacta. De lo contrario, un modelo es estocástico si posee un cierto grado de incertidumbre. Estos últimos se definen mediante conceptos probabilísticos.
- *Dinámicos o estáticos*. Un sistema es estático cuando la salida depende únicamente de la entrada en ese mismo instante. En estos sistemas existe una relación directa entre entrada y salida, independiente del tiempo. Un sistema dinámico es aquél en el que las salidas evolucionan con el tiempo tras la aplicación de una determinada entrada. En estos últimos, para conocer el valor actual de la salida es necesario conocer el tiempo transcurrido desde la aplicación de la entrada.
- *Continuos o discretos*. Los sistemas continuos trabajan con señales continuas, y se caracterizan mediante ecuaciones diferenciales. Los sistemas discretos trabajan con señales muestreadas, y quedan descritos mediante ecuaciones en diferencias.

Todo modelo matemático o paramétrico, por tanto, consta de una o varias ecuaciones que relaciona la entrada y la salida.

### 4.3 El proceso de identificación [1]

Se entiende por identificación de sistemas a la obtención de forma experimental de un modelo que reproduzca con suficiente exactitud, para los fines deseados, las características dinámicas del proceso en estudio.

En términos generales, el proceso de identificación comprende los siguientes pasos:

1. *Obtención de datos de entrada - salida*. Para ello se debe excitar el sistema mediante la aplicación de una señal de entrada y registrar la evolución de sus entradas y salidas durante un intervalo de tiempo.

2. *Elección de la estructura del modelo*. Si el modelo que se desea obtener es un modelo paramétrico, el primer paso es determinar la estructura deseada para dicho modelo. Este punto se facilita en gran medida si se tiene un cierto conocimiento sobre las leyes físicas que rigen el proceso.

3. *Obtención de los parámetros del modelo*. A continuación se procede a la estimación de los parámetros de la estructura que mejor ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada-salida obtenidos experimentalmente.

4. *Validación del modelo*. El último paso consiste en determinar si el modelo obtenido satisface el grado de exactitud requerido para la aplicación en cuestión. Si se llega a la conclusión de que el modelo no es válido, se deben revisar los siguientes aspectos como posibles causas:

- a) El conjunto de datos de entrada-salida no proporciona suficiente información sobre la dinámica del sistema.
- b) La estructura escogida no es capaz de proporcionar una buena descripción del modelo.
- c) El criterio de ajuste de parámetros seleccionado no es el más adecuado.

### 4.3.1 Métodos de identificación [1]

Existen diversos métodos de identificación, que pueden clasificarse según distintos criterios:

- Dependiendo del tipo de modelo obtenido:

1. *Métodos no paramétricos*, que permiten obtener modelos no paramétricos del sistema bajo estudio. Algunos de estos métodos son: análisis de la respuesta transitoria, análisis de la respuesta en frecuencia, análisis de la correlación, análisis espectral, análisis de Fourier, etc.

2. *Métodos paramétricos*, que permiten obtener modelos paramétricos. Estos métodos requieren la elección de una posible estructura del modelo, de un criterio de ajuste de parámetros, y por último de la estimación de los parámetros que mejor ajustan el modelo a los datos experimentales.

- Dependiendo de la aplicación:

1. *Métodos de identificación off-line (a posteriori)*, utilizados en aquellas aplicaciones en que no se requiera un ajuste continuado del modelo. En estos casos, se realiza la identificación previa de la planta, considerándose que la validez de los parámetros obtenidos no se verá alterada con el paso del tiempo.

2. *Métodos de identificación on-line (identificación recursiva)*, en los que los parámetros se van actualizando continuamente a partir de los nuevos datos de entrada-salida obtenidos durante la evolución del proceso. Estos métodos son muy utilizados en sistemas de control adaptativo.

El método que se utilizará para identificar los modelos de orden reducido de un reactor BWR será un método paramétrico recursivo conocido como el método de mínimos cuadrados en línea (o recursivo).

### 4.4 Identificación de modelos paramétricos utilizando el método de mínimos cuadrados recursivos [2]

Los modelos paramétricos, a diferencia de los anteriores, quedan descritos mediante una estructura y un número finito de parámetros que relacionan las señales de interés del sistema (entradas, salida y perturbaciones). En muchas ocasiones es necesario realizar la identificación de un sistema del cual no se tiene ningún tipo de conocimiento previo. En estos casos, se suele recurrir a modelos estándar, cuya validez para un amplio rango de sistemas dinámicos ha sido comprobada experimentalmente. Generalmente estos modelos permiten describir el comportamiento de cualquier sistema lineal. La dificultad radica en la elección del tipo de modelo (orden del mismo, número de parámetros, etc.) que se ajuste satisfactoriamente a los datos de entrada - salida obtenidos experimentalmente.

#### 4.4.1 Tipos de modelos paramétricos

Generalmente los modelos paramétricos se describen en el dominio discreto, puesto que los datos que sirven de base para la identificación se obtienen por muestreo. En el caso de que se requiera un modelo continuo, siempre es posible realizar una transformación del dominio discreto al continuo.

La expresión más general de un modelo discreto es del tipo:

$$s(t) = \eta(t) + w(t) \quad (4-1)$$

donde  $w(t)$  es el término que modela la salida debida a las perturbaciones,  $\eta(t)$  la salida debida a la entrada, y  $s(t)$  la salida medible del sistema. Cada uno de estos términos puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$\eta(t) = G(q^{-1}, \theta) * u(t) \quad (4-2)$$

$$w(t) = H(q^{-1}, \theta) * e(t) \quad (4-3)$$

$$s(t) = A(q^{-1}, \theta) * y(t) \quad (4-4)$$

donde  $q^{-1}$  es el operador retardo,  $q$  representa un vector de parámetros,  $u(t)$  y  $e(t)$  son la entrada al sistema y el ruido de entrada al mismo respectivamente e  $y(t)$  es la salida de interés del sistema (que puede no coincidir con la salida medible). Tanto  $G(q^{-1}, \theta)$  como  $H(q^{-1}, \theta)$  son cocientes de polinomios del tipo:

$$G(q^{-1}, \theta) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} = \frac{b_1 * q^{-nk} + b_2 * q^{-nk-1} + \dots + b_{nb} * q^{-nk-nb+1}}{1 + f_1 * q^{-1} + \dots + f_{nf} * q^{-nf}} \quad (4-5)$$

$$H(q^{-1}, \theta) = \frac{c(q^{-1})}{D(q^{-1})} = \frac{1 + c_1 * q^{-1} + \dots + c_{nc} * q^{-nc}}{1 + d_1 * q^{-1} + \dots + d_{nd} * q^{-nd}}$$

y  $A(q^{-1}, \theta)$  un polinomio del tipo:

$$A(q^{-1}, \theta) = 1 + a_1 * q^{-1} + \dots + a_{na} * q^{-na} \quad (4-6)$$

El vector de parámetros  $\theta$  contiene los coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  y  $f_i$  de las funciones de transferencia anteriores. La estructura genérica de estos modelos es por tanto:

$$A(q^{-1}) * y(t) = G(q^{-1}, \theta) * u(t) + H(q^{-1}, \theta) * e(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} * u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} * e(t) \quad (4-7)$$

Para elegir la *estructura* de este tipo de modelos hay que determinar el orden de cada uno de los polinomios anteriores, es decir  $na$ ,  $nb$ ,  $nc$ ,  $nd$ ,  $nf$  y el retardo entre la entrada y la salida  $nk$ . Una vez elegidos estos valores, sólo queda determinar el vector de coeficientes  $q$  ( $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  y  $f_i$ ) que hacen que el modelo se ajuste a los datos de entrada - salida del sistema real.

En muchos casos, alguno de los polinomios anteriores no se incluye en la descripción del modelo, dando lugar a los siguientes casos particulares, entre otros:

**Tabla 4-1 Diferentes estructuras de modelos paramétricos**

Tipo de modelo	Condición	Estructura resultante
Modelo ARX	$F(q^{-1})=D(q^{-1})=C(q^{-1})=1$	$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1}) \cdot u(t) + e(t)$
Modelo Output Error (OE)	$C(q^{-1})=D(q^{-1})=A(q^{-1})=1$	$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} \cdot u(t) + e(t)$
Modelo ARMAX	$F(q^{-1})=D(q^{-1})=1$	$A(q^{-1}) \cdot y(t) = B(q^{-1}) \cdot u(t) + C(q^{-1}) \cdot e(t)$
Modelo Box Jenkins (BJ)	$A(q^{-1})=1$	$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} \cdot u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \cdot e(t)$

En la figura 4-2 se muestra el diagrama de bloques equivalente para cada uno de los modelos anteriores mostrados en la tabla 4-1.

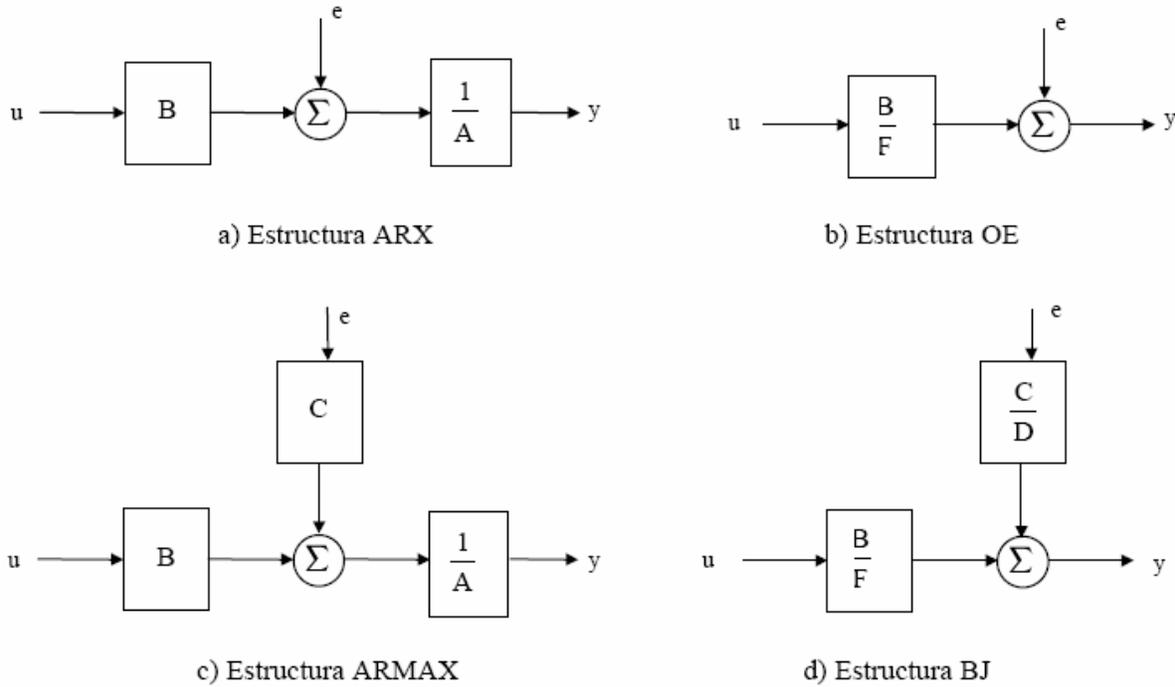


Figura 4-2 Diagramas de bloques de las diferentes estructuras de modelos paramétricos

La anulación de alguno de los polinomios, resultando estructuras simplificadas, facilita el proceso de ajuste de parámetros. Cada una de las estructuras (ARX, ARMAX, OE o BJ) tiene sus propias características y debe ser elegida fundamentalmente en función del punto en el que se prevé que se añade el ruido en el sistema. En cualquier caso, puede ser necesario ensayar con varias estructuras y con varios órdenes dentro de una misma estructura hasta encontrar un modelo satisfactorio.

Una vez elegida la estructura del modelo (tanto el tipo - ARX, ARMAX, BJ, OE...- como los órdenes de cada polinomio), es necesario determinar el valor de los parámetros del mismo que ajustan la respuesta del modelo a los datos de entrada - salida experimentales. Es importante destacar, sin embargo, que esta etapa del proceso de identificación se ve facilitada por la existencia de herramientas software que proporcionan diferentes algoritmos para el ajuste de parámetros, uno de los cuales es el método de mínimos cuadrados recursivos.

#### 4.4.2 El método de mínimos cuadrados recursivos

Un sistema discreto lineal e invariante con el tiempo de una entrada-una salida (SISO, por sus siglas en inglés) se puede representar de la siguiente manera:

$$y(k) = \varphi^T(k) \cdot \theta \tag{4-8}$$

donde  $\varphi^T$  es un vector columna formado por las salidas y entradas anteriores (conocido como *vector de observaciones*) y  $\theta$  es el vector de parámetros del modelo, los cuales se definen como:

$$\varphi^T = [-y(k-1) \dots -y(k-na) \quad u(k-nk) \dots u(k-nk-nb+1)] \tag{4-9}$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{na} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{nb}]^T \quad (4-10)$$

Si ahora se considera un sistema escalar no dinámico representado de la siguiente forma:

$$z = \sum_{j=1}^n \varphi_j \theta_j = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\theta} \quad (4-11)$$

donde:

$z$  = Salida escalar del sistema

$\boldsymbol{\varphi}^T$  = Vector de observaciones de  $1 \times n$

$\boldsymbol{\theta}$  = Vector de parámetros desconocidos de  $n \times 1$

El problema entonces consiste en estimar el vector  $\boldsymbol{\theta}$  conociendo las mediciones del vector  $\boldsymbol{\varphi}$  y las mediciones de la salida  $z$ .

#### 4.4.2.1 Fundamentación del problema

Se trata de encontrar el vector  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  el cual minimice la función de error definida como:

$$J = \sum_{i=1}^k (\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - z_i)^2 \quad (4-12)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  es el vector estimado de  $\boldsymbol{\theta}$  en  $k$  mediciones.

Para minimizar esta función de error se toma el gradiente de  $J$  respecto a  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ , lo que resulta en:

$$\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_k} J = 2 \sum_{i=1}^k \boldsymbol{\varphi}_i (\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - z_i) = 0 \quad (4-13)$$

o bien

$$0 = \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_i & \boldsymbol{\varphi}_i^T \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \end{bmatrix}_{n \times 1} - \sum_{i=1}^k \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_i & z_i \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (4-14)$$

Ahora, si escribimos en forma vectorial  $\boldsymbol{\varphi}^T = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_k]_{n \times k}$  y  $\boldsymbol{z} = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_k]^T$  se puede reescribir la ecuación (4-14) como:

$$0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T & \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \end{bmatrix}_{n \times 1} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^T \end{bmatrix}_{n \times k} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \end{bmatrix}_{k \times 1} \quad (4-15)$$

Reordenando la ecuación (4-15) resulta en:

$$\boldsymbol{\varphi}^T \left( \boldsymbol{\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \boldsymbol{z} \right) = 0 \quad (4-16)$$

En esta última ecuación,  $\boldsymbol{\varphi}^T$  es una matriz de  $n \times k$  observaciones y el factor  $\left( \boldsymbol{\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \boldsymbol{z} \right)$  es conocido como el residuo. La ecuación (4-16) significa que  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$  es elegido de tal manera que el residuo sea ortogonal a las columnas de la matriz de observación. En este hecho se fundamenta la teoría de estimación óptima.

#### 4.4.2.2 El teorema de proyección

Existe una manera geométrica de estudiar el fundamento visto en la sección anterior. Considérese el caso en que  $\boldsymbol{\varphi}^T = \left[ \boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \right]$  o bien:

$$\boldsymbol{\varphi}^T = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

y que por lo tanto existen dos parámetros a ser estimados. Ahora se definen los parámetros óptimos estimados como  $\hat{\theta}_1$  y  $\hat{\theta}_2$ ; estos son los parámetros que minimizan la ecuación (4-12). Si también se define una matriz de mediciones con los parámetros estimados y la matriz de observaciones, ésta quedaría como:

$$\boldsymbol{z}^0 = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} = \left[ \boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \right] \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

La figura 4-3 muestra las columnas de  $\boldsymbol{\varphi}$ , llamadas  $\boldsymbol{v}_1$  y  $\boldsymbol{v}_2$ , forman un espacio bidimensional y la matriz  $\boldsymbol{z}^0$  se encuentra sobre el plano formado por  $\boldsymbol{v}_1$  y  $\boldsymbol{v}_2$ . En el problema de mínimos cuadrados, el vector  $\boldsymbol{z}$  se va a aproximar a un valor mediante una combinación lineal de los vectores  $\boldsymbol{v}_1$  y  $\boldsymbol{v}_2$  tal que el vector de error,  $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{z}$ , sea de longitud mínima. Ya que  $\boldsymbol{z}^0$  se encuentra sobre el plano  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ , esto ocurre cuando los vectores  $\boldsymbol{e}$  y  $\boldsymbol{z}^0$  son perpendiculares (u ortogonales) entre si y por lo tanto  $\boldsymbol{z}^0$  es la proyección ortogonal de  $\boldsymbol{z}$  sobre el plano  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ .

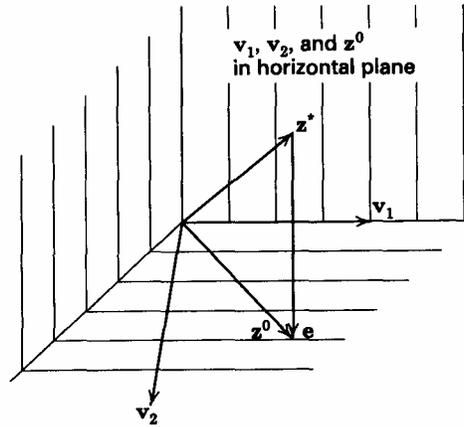


Figura 4-3 Interpretación geométrica del teorema de proyección [2]

De la figura anterior se deduce que:

$$z + e = \hat{\theta}_1 v_1 + \hat{\theta}_2 v_2 \quad (4-19)$$

Obteniendo el producto punto entre la ecuación (4-19) y  $v_1$  y  $v_2$  se tiene que:

$$v_1^T z = v_1^T v_1 \hat{\theta}_1 + v_1^T v_2 \hat{\theta}_2 \quad (4-20)$$

$$v_2^T z = v_2^T v_1 \hat{\theta}_1 + v_2^T v_2 \hat{\theta}_2$$

o escribiéndola en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_1^T v_2 \\ v_2^T v_1 & v_2^T v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

Finalmente sustituyendo para los vectores  $v_1$  y  $v_2$  la ecuación (4-21) queda como:

$$\Phi^T z = \Phi^T \Phi \hat{\theta}_k \quad (4-22)$$

la cual concuerda con la ecuación (4-16) obtenida en la sección anterior. El nombre de teorema de proyección resulta del hecho de haber utilizado el producto punto. Como se puede observar, el vector de error  $e$  resulta ser igual que el residuo.

#### 4.4.2.3 El estimador de grupo

Mediciones de la entrada y la salida pueden recolectarse para que el vector de parámetros  $\theta$  se pueda estimar. Este es esencialmente un estimador a posteriori (offline) ya que estima  $\theta$  una vez que se han obtenido las

mediciones de todos los datos de entrada y salida. Este estimador de grupo (Batch estimator, en inglés) se obtiene solucionando la ecuación (4-14) para  $\hat{\theta}_k$  de manera que:

$$\hat{\theta}_k = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi_i \varphi_i^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^k \varphi_i z_i \quad (4-23)$$

Una manera más sencilla de escribir la ecuación (4-24) es asignándole una variable a cada término de sumatoria de la siguiente manera:

$$P_k = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi_i \varphi_i^T \right]^{-1} \quad (4-24)$$

$$B_k = \sum_{i=1}^k \varphi_i z_i$$

Finalmente:

$$\hat{\theta}_k = P_k B_k \quad (4-25)$$

para  $k$  mediciones.

Un mejor estimador para  $\theta$  es aquel en el cual las mediciones en tiempo real se utilizan para actualizar al estimador. Este es conocido como el estimador recursivo.

#### 4.4.2.4 Estimación de mínimos cuadrados de manera recursiva

En un estimador recursivo no hay necesidad de guardar las mediciones pasadas para calcular una estimación en el presente. La estrategia para desarrollar tal estimador consiste en encontrar expresiones recursivas para  $P_k$  y  $B_k$  en la ecuación (4-25). Esto es sencillo para  $B_k$  rescribiendo la ecuación (4-24) como:

$$B_k = B_{k-1} + \varphi_k z_k \quad (4-26)$$

Esta es una expresión recursiva para  $B_k$  ya que nuevos datos,  $\varphi_k$  y  $z_k$ , son usados para actualizar el último estimado de  $B_k$  (el cual fue  $B_{k-1}$ ).

Esto resulta de manera más complicada para  $P_k$  por la operación inversa que se tiene que realizar a diferencia de  $B_k$ . Es posible solucionar este problema rescribiendo la ecuación (4-24) como:

$$P_k^{-1} = P_{k-1}^{-1} + \varphi_k \varphi_k^T \quad (4-27)$$

Es esta última expresión la que va a ser utilizada para encontrar una relación recursiva para  $P_k$ . Se comienza por premultiplicar la ecuación (4-27) por  $P_k$  para eliminar  $P_k^{-1}$ . Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

$$I = P_k P_{k-1}^{-1} + P_k \varphi_k \varphi_k^T \quad (4-28)$$

Ahora, se postmultiplica la ecuación (4-28) por  $P_{k-1}$  para eliminar  $P_{k-1}^{-1}$ :

$$P_{k-1} = P_k + P_k \varphi_k \varphi_k^T P_{k-1} \quad (4-29)$$

Postmultiplicando la expresión anterior por  $\varphi_k$  se tiene:

$$\begin{aligned} P_{k-1} \varphi_k &= P_k \varphi_k + P_k \varphi_k \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \\ &= P_k \varphi_k \left( 1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \right) \end{aligned} \quad (4-30)$$

El término entre paréntesis contiene  $P_{k-1}$  el cual se encuentra también en el miembro izquierdo de la ecuación (4-30). Si se divide entre este escalar resulta en:

$$\frac{P_{k-1} \varphi_k}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k} = P_k \varphi_k \quad (4-31)$$

Postmultiplicando este resultado por  $\varphi_k^T P_{k-1}$  resulta en:

$$\frac{P_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T P_{k-1}}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k} = P_k \varphi_k \varphi_k^T P_{k-1} \quad (4-32)$$

Utilizando la ecuación (4-29), el miembro derecho de la ecuación (4-32) es realmente  $P_{k-1} - P_k$ . Esto produce la actualización de  $P_k$  de la siguiente manera:

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} \varphi_k \varphi_k^T P_{k-1}}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k} \quad (4-33)$$

El miembro derecho de la ecuación (4-33) involucra observaciones presentes,  $\varphi_k$ , así como el valor previo  $P_{k-1}$ , por lo que no existe operación inversa para alguna matriz. El paso final consiste en utilizar las expresiones recursivas de  $P_k$  y  $B_k$  para obtener finalmente un estimador recursivo.

#### 4.4.2.4.1 Desarrollo de un estimador recursivo

El objetivo es tomar mediciones presentes y utilizarlas para actualizar el vector  $\hat{\theta}_{k-1}$ . La ecuación (4-25) proporciona un punto de salida para esto y se refleja de la siguiente manera:

$$\hat{\theta}_{k-1} = P_{k-1} B_{k-1} \quad (4-34)$$

Si se combinan las ecuaciones (4-34) y (4-25) obtenemos una diferencia entre el tiempo presente y el tiempo pasado de la siguiente forma:

$$\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1} = P_k B_k - P_{k-1} B_{k-1} \quad (4-35)$$

Ahora se procede a sustituir  $P_k$  de la ecuación (4-33) en la ecuación anterior:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + \left[ P_{k-1} - P_{k-1} \varphi_k \left( 1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \right)^{-1} \varphi_k^T P_{k-1} \right] \left( B_{k-1} + \varphi_k z_k \right) - P_{k-1} B_{k-1} \quad (4-36)$$

Lo que es igual a:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + P_{k-1} \varphi_k z_k - P_{k-1} \varphi_k \left( 1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \right)^{-1} \varphi_k^T \hat{\theta}_{k-1} - P_{k-1} \varphi_k \left( 1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \right)^{-1} \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k z_k \quad (4-37)$$

En la ecuación anterior, se puede observar que la suma entre el segundo y el último término es igual a:

$$P_{k-1} \varphi_k \left( z_k - \frac{\varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k z_k}{1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k} \right) = P_{k-1} \varphi_k \left( 1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \right)^{-1} z_k \quad (4-38)$$

Finalmente, el estimador recursivo toma la siguiente forma:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + P_{k-1} \varphi_k \left( 1 + \varphi_k^T P_{k-1} \varphi_k \right)^{-1} \left( z_k - \varphi_k^T \hat{\theta}_{k-1} \right) \quad (4-39)$$

Por lo tanto, si se programa la ecuación (4-39) se obtendrá un estimador del vector paramétrico  $\theta$  en tiempo real.

## 4.5 Conclusiones

En este capítulo se describió la manera de identificar los parámetros de un sistema lineal. Este método es muy efectivo cuando no se tiene modelo alguno para un sistema físico, ya que mediante las mediciones de las respuestas a diferentes entradas se puede obtener un modelo paramétrico con el cual estudiar la dinámica de dicho sistema.

El desarrollo del algoritmo de mínimos cuadrados se demostró en su totalidad, llegando finalmente a la estructura de un algoritmo de identificación en tiempo real. En el capítulo siguiente se demostrará que por medio de este algoritmo se puede estimar la estabilidad del núcleo del reactor mediante la identificación de un modelo paramétrico lineal en tiempo discreto.

**Referencias**

- [1] L. LJUNG. *System Identification. Theory for the user*, Prentice Hall 1987 Suecia.
- [2] P. DeRUSSO, R. ROY, C. CLOSE. *State Variables for Engineers*, Wiley Inter-Science 1998 U.S.A.

## Capítulo 5

### Análisis de resultados

#### 5.1 Introducción

En este capítulo se describen los resultados más notables del estudio de la dinámica del núcleo de un reactor BWR.

Primero se demuestra que cuando se produce un cambio en la potencia de salida del núcleo representado por el modelo no lineal, debido a un cambio en la reactividad externa, esta se puede estimar mediante una interpolación lineal una vez que se conoce el valor final de la potencia de salida. Esto debido a que se pueden graficar valores finales de potencia que se encuentren por encima y por debajo del valor final de potencia medido, reportando para cada caso el valor del cambio en la reactividad.

Posteriormente, se realiza una descripción de los pasos a seguir para estimar matemáticamente el valor de la estabilidad del sistema. Como la identificación del modelo lineal se realiza en tiempo discreto, entonces hay que pasar al tiempo continuo. Se demostrará hay que tener cuidado al momento de elegir un método y un período de muestreo para que, en este caso particular, se pase del tiempo discreto al tiempo continuo.

Por último se procede a identificar un modelo lineal en tiempo discreto midiendo la salida del modelo no lineal implementado en Simulink. Se demostrará que, una vez que se tiene el modelo lineal identificado en tiempo continuo, es muy sencillo estimar la estabilidad utilizando la teoría de que los parámetros que conforman los polos complejos dominantes, están en función de los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$ , los cuales sirven para determinar la estabilidad del sistema. Se llegará a la conclusión de que estos parámetros son iguales a los utilizados en el modelo no lineal el cual representó a la dinámica del núcleo de un reactor BWR, demostrando así la validez del método de identificación de sistemas para estimar la estabilidad de un reactor BWR.

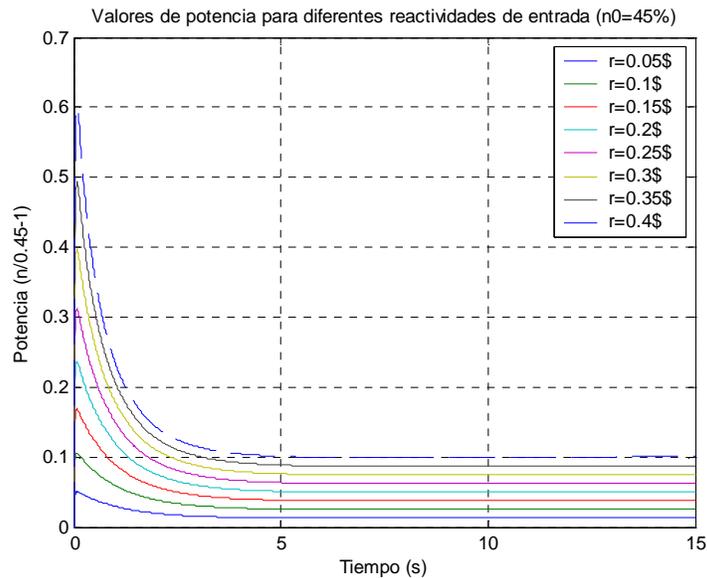
### 5.2 La estimación de la reactividad

La reactividad en un reactor nuclear es una variable de estado que no se puede medir de manera directa y por lo tanto es necesario realizar una estimación de su valor cuando se estudia la dinámica del reactor.

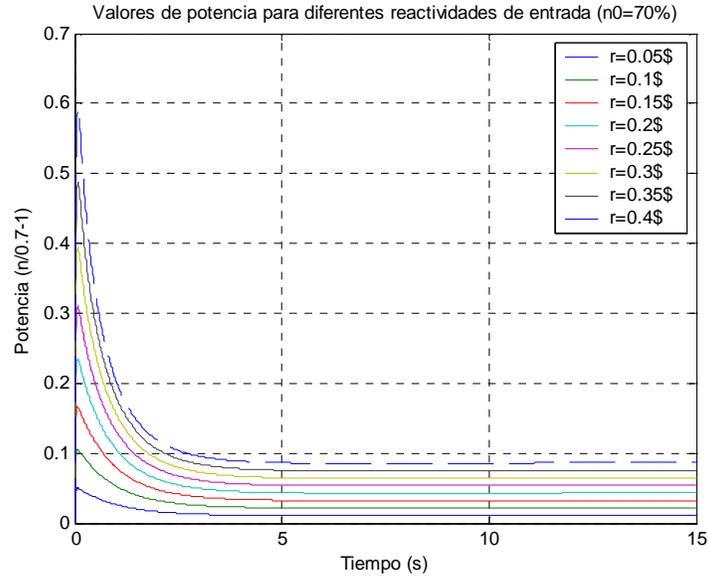
Como se puede observar en la estructura del modelo no lineal reactividad-potencia en las ecuaciones (3-11 a 3-15), un cambio en la reactividad producido de manera externa al reactor modificará su potencia de salida. Estos cambios son producidos mediante el movimiento de las barras de control y por lo general producen cambios en la reactividad de la misma forma que una señal de tipo escalón. Si se asume que el comportamiento de la reactividad es de esta forma entonces su valor de amplitud en el tiempo es constante. Si se produce un cambio en la magnitud de ésta su valor tenderá a un nuevo valor que también se mantendrá constante. Se puede demostrar que el incremento en la potencia debido a un cambio en la reactividad de tipo escalón, es el mismo para cualquier condición de operación del núcleo. Esto se verifica si se toma como valor de referencia la potencia de estado estable en donde comienza la medición, tomando este valor como el nuevo origen. Las figuras 5-1, 5-2 y 5-3 muestran los incrementos de potencia producidos por varios cambios en la reactividad externa de tipo escalón, para diferentes condiciones de operación del reactor. Para lograr esto se aplicó en cada caso la siguiente ecuación:

$$\frac{n}{n_0} - 1 \tag{5-1}$$

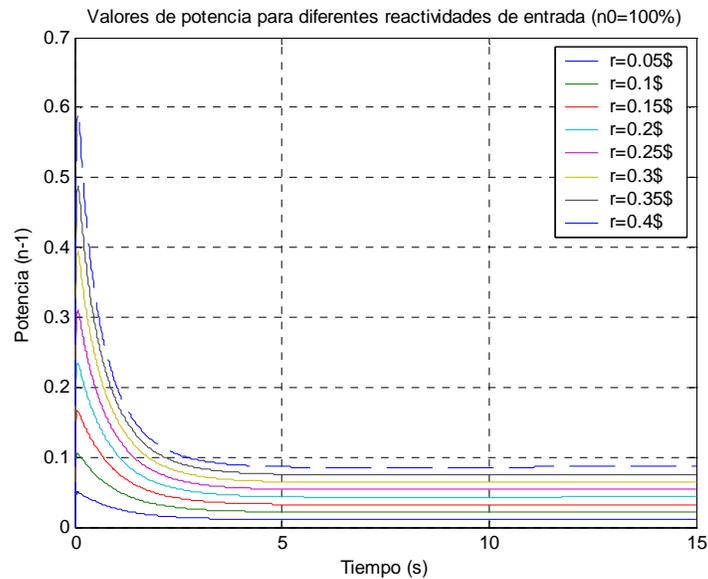
Estas gráficas se obtuvieron utilizando los parámetros de la tabla 3-7 ajustados para cada condición en específico.



**Figura 5-1 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades y una potencia inicial en estado estable de 45%**



**Figura 5-2 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades y una potencia inicial en estado estable de 70%**



**Figura 5-3 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades y una potencia inicial en estado estable de 100%**

Como se puede observar, prácticamente el valor de los incrementos es el mismo para las tres condiciones de operación del reactor. Los valores en estado estable a los cuales tiende la potencia de salida para diferentes cambios en el valor de la reactividad externa, se resumen en la tabla 5-1:

**Tabla 5-1 Incrementos en la potencia de salida para diferentes reactividades bajo distintas condiciones de operación**

Reactividad (\$)	$n_0 = 45\%$	$n_0 = 70\%$	$n_0 = 100\%$
0.05	0.0125	0.0108	0.0107
0.10	0.0251	0.0216	0.0215
0.15	0.0377	0.0324	0.0322
0.20	0.0502	0.0432	0.0432
0.25	0.0628	0.0540	0.0540
0.30	0.0754	0.0648	0.0647
0.35	0.088	0.0756	0.0756
0.40	0.1006	0.0864	0.0863

Cuando se presenta un cambio en la potencia de salida debido a un cambio desconocido en la reactividad externa de tipo escalón, y se obtiene una gráfica del incremento de potencia tomando como origen el valor inicial aplicando la ecuación (5-1), se puede obtener un estimado del valor de la reactividad realizando una interpolación lineal entre este valor de potencia, y otros valores conocidos asociados con algún valor de reactividad en específico.

Como se demostró en el capítulo 3, el modelo lineal puede reproducir de manera muy confiable la salida del modelo no lineal cuando la reactividad no presenta cambios desmesurados (no mayores de 0.4\$), por lo que la propiedad de interpolación lineal se puede aplicar a la salida del modelo no lineal.

Si se quiere obtener algún valor de reactividad en específico podemos aplicar la siguiente ecuación de interpolación junto con la ayuda de la tabla 5-1:

$$r_2 = \frac{r_3 + \left( \frac{n_3 - n_2}{n_2 - n_1} \right) r_1}{1 + \left( \frac{n_3 - n_2}{n_2 - n_1} \right)} \quad (5-2)$$

donde:

$n_2$  = El valor de la potencia medida a la salida del sistema no lineal.

$n_1$  = El valor de la potencia que se encuentra en la tabla 5-1 y que corresponde al valor menor inmediato de la potencia medida.

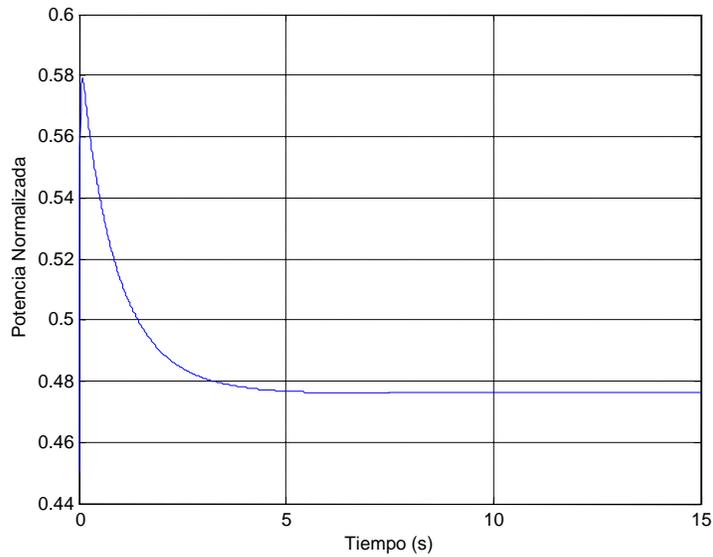
$n_3$  = El valor de la potencia que se encuentra en la tabla 5-1 y que corresponde al valor mayor inmediato de la potencia medida.

$r_2$  = El valor de reactividad a estimar.

$r_1$  = El valor de reactividad que corresponde a potencia  $n_1$  en la tabla 5-1.

$r_3$  = El valor de reactividad que corresponde a la potencia  $n_3$  en la tabla 5-1.

Así por ejemplo, la figura 5-4 muestra la medición de la potencia normalizada de salida del modelo no lineal para un cambio en la reactividad externa de 0.234\$:



**Figura 5-4 Valor de potencia de salida del modelo no lineal para un cambio en la reactividad externa de 0.234\$**

Supongamos que no se conoce el valor de la reactividad y que sólo se tiene disponible la potencia de salida. El valor al cual tiende la potencia normalizada es de 0.4765. Aplicando la ecuación (5-1) obtenemos el incremento en la potencia y por ende, mediante una interpolación lineal con la ecuación (5-2) y la tabla 5-1, obtenemos el valor estimado de la reactividad, el cual se muestra en la tabla 5-2.

**Tabla 5-2 Valor estimado de la reactividad externa que produce la potencia normalizada de salida mostrada en la figura 5-4**

Reactividad estimada (\$)	Reactividad original (\$)
0.23421	0.23400

Por lo tanto, si se necesita estimar el valor de la reactividad externa, sólo es necesario medir el valor al cual converge la potencia de salida y recurrir a una interpolación lineal.

### 5.3 Identificación de modelos de orden reducido.

El objetivo de esta sección es demostrar que se puede conocer la estabilidad del núcleo de un reactor BWR solamente midiendo la potencia de salida. Esto se logra identificando un modelo lineal que reproduzca de manera adecuada la dinámica del núcleo del reactor, bajo las condiciones de operación a las que se encuentra sometidas. Un análisis de la ubicación de los polos en el plano complejo del modelo lineal identificado en tiempo continuo, nos dirá que tan estable es este modelo lineal y por ende, que tan estable está el núcleo del reactor.

Para verificar lo anterior, el modelo no lineal implementado en Simulink representará la dinámica del núcleo del reactor. Se graficarán potencias normalizadas de salida con diferentes parámetros de estabilidad y un cambio en la reactividad externa de 0.1\$ por cuestiones pragmáticas. Posteriormente se procederá a estimar un modelo paramétrico lineal, tomando el identificador como entrada del sistema a la reactividad externa como una señal de tipo escalón de valor 0.1\$, y a la potencia normalizada para cada caso como la salida del sistema. Este modelo se presenta como una función de transferencia en tiempo discreto.

Para poder estimar matemáticamente la estabilidad del núcleo, es necesario obtener los polos complejos dominantes de este modelo lineal en tiempo continuo, ya que de acuerdo a la teoría de sistemas, el valor de sus coeficientes son función de los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$  [1]. Por lo tanto, es necesario hacer una

transformación del tiempo discreto al tiempo continuo, por lo que es necesario describir un método de discretización. Cabe resaltar que dependiendo del método y el periodo de muestreo que se elija, se pueden presentar inestabilidades numéricas las cuales afecten el resultado. Por lo tanto, a continuación se realizará un estudio con tres métodos de integración numérica en donde su solución está dada por un modelo discreto en el tiempo.

### 5.3.1 Inestabilidades numéricas debido al proceso de discretización

Existen diversos métodos para pasar del tiempo continuo al tiempo discreto y viceversa. En esta sección se probarán tres métodos de integración numérica con el objetivo de discretizar el modelo lineal en variables de estado de la ecuación (3-16), y así verificar bajo que condiciones de período de muestreo son efectivos para representar un modelo en tiempo discreto. De otra forma nos conducirán a resultados erróneos en las matrices del modelo discreto en variables de estado y por ende, se observará un comportamiento de la potencia normalizada de salida afectado por los errores en el momento de discretizar, conocidos como inestabilidades numéricas.

La ecuación diferencial (3-16) que representa el modelo lineal en tiempo continuo fue integrada numéricamente a través de los métodos conocidos como implícito, explícito y de Cranck-Nicholson. El algoritmo de cada uno de ellos es descrito en el Apéndice C. La solución que se obtiene es discreta en el tiempo y se realiza mediante la siguiente aproximación:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) = \frac{1}{T} [\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n] = (1 - \theta) \mathbf{A}_{n+1} \mathbf{x}_{n+1} + \theta \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (5-3)$$

Dependiendo del valor de  $\theta$  es el método que se este usando para integrar al vector derivada de las variables de estado:

- a) Si  $\theta = 0$ , entonces se esta usando el método implícito.
- b) Si  $\theta = 0.5$ , entonces se esta usando el método de Cranck-Nicholson.
- c) Si  $\theta = 1$ , entonces se esta usando el método explícito.

Despejando al vector  $\mathbf{x}_{n+1}$  de la ecuación (5-3) se tiene que:

$$\mathbf{x}_{n+1} = [\mathbf{I} - T(1 - \theta) \mathbf{A}_{n+1}]^{-1} [\mathbf{I} + T\theta \mathbf{A}_n] \mathbf{x}_n + T[\mathbf{I} - T(1 - \theta) \mathbf{A}_{n+1}]^{-1} \mathbf{B}_n \mathbf{u}_n \quad (5-4)$$

La estructura de la ecuación (5-4) corresponde a la representación de un sistema discreto en variables de estado:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G} \mathbf{x}_n + \mathbf{H} \mathbf{u}_n \quad (5-5)$$

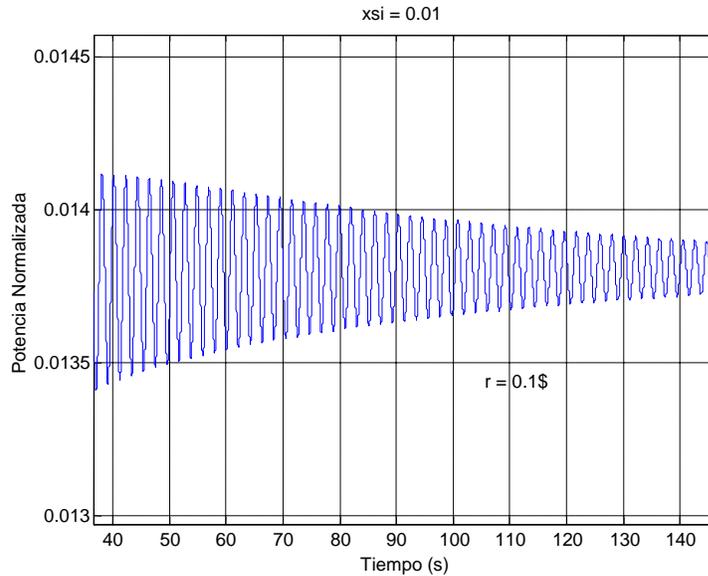
donde las matrices G y H están conformadas por:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I} - T(1 - \theta) \mathbf{A}_{n+1}]^{-1} [\mathbf{I} + T\theta \mathbf{A}_n] \quad (5-6)$$

$$\mathbf{H} = T[\mathbf{I} - T(1 - \theta) \mathbf{A}_{n+1}]^{-1} \mathbf{B}_n \quad (5-7)$$

El comportamiento del sistema en tiempo discreto de la ecuación (5-5) depende de la matriz G, mediante la ubicación de las raíces de su ecuación característica (o eigenvalores) en el círculo unitario. Si todos ellos se encuentran adentro del círculo, se sabe que el sistema es estable [2]. Para demostrar las inestabilidades numéricas se muestra un ejemplo a continuación.

Se toma como base la potencia normalizada de salida del modelo lineal en tiempo continuo de la figura 5-5: la cual fue utilizando los mismos parámetros de la tabla 3-7 excepto con  $\xi=0.01$ ; esto con el objeto de que las raíces complejas en tiempo discreto se observen con claridad, ya que estos son los polos dominantes del sistema. En el caso discreto estos son los polos que se encuentran más alejados del cero complejo dentro del círculo unitario.



**Figura 5-5 Potencia normalizada de salida que servirá como modelo para representar las inestabilidades numéricas en los diversos métodos de integración**

Ahora, se procede a discretizar el sistema que produjo la señal de la figura 5-5 programando la ecuación (5-6), para poder obtener los eigenvalores de la matriz  $G$  aplicando los tres casos de integración numérica ya mencionados. Las figuras 5-6, 5-7 y 5-8 muestran los eigenvalores para los casos implícito, de Crank-Nicholson y explícito, respectivamente. En las tres figuras se observa como cambia la posición de las raíces características dentro del círculo unitario para diferentes pasos de integración y para diferentes reactividades.

## Análisis de resultados

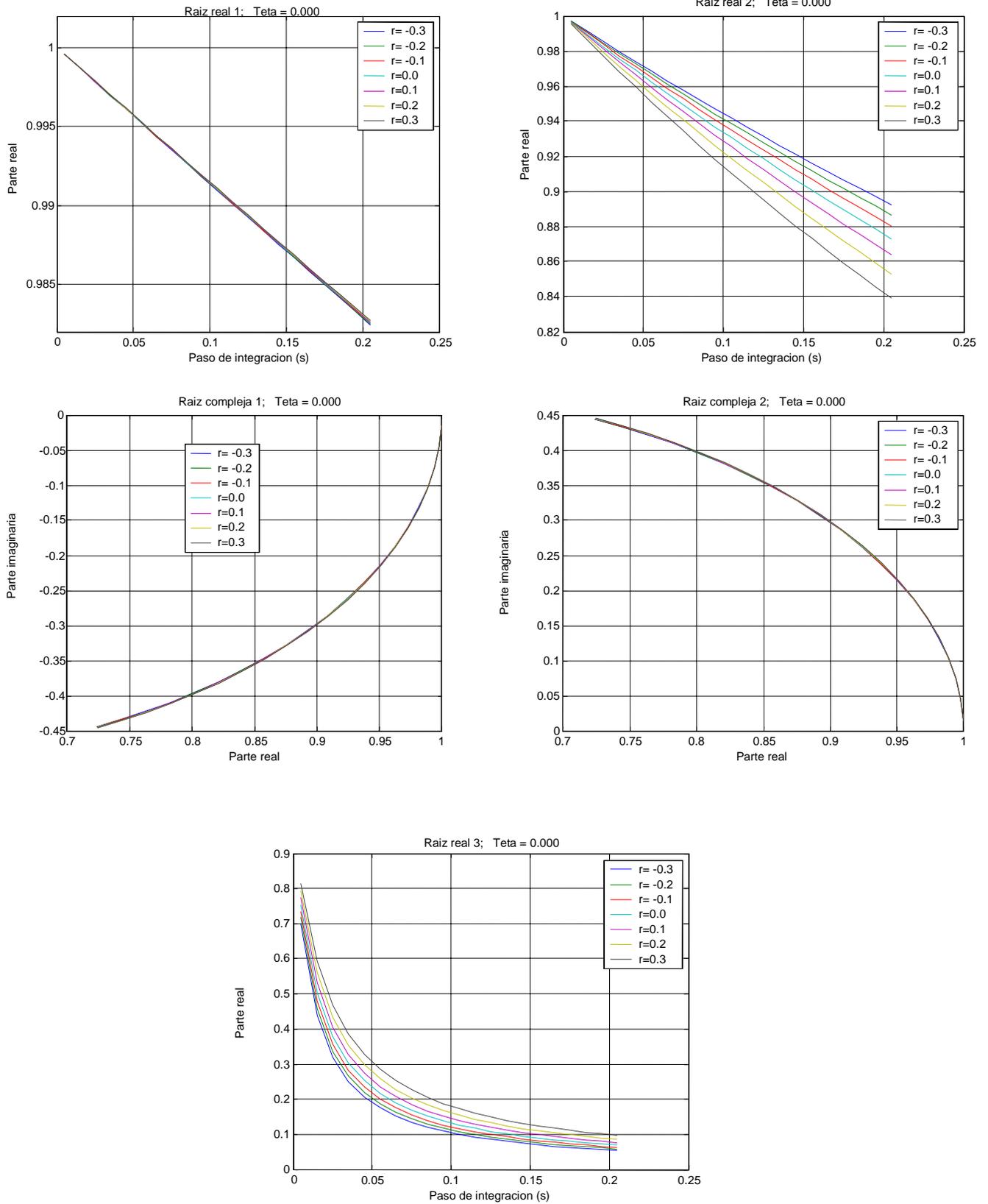
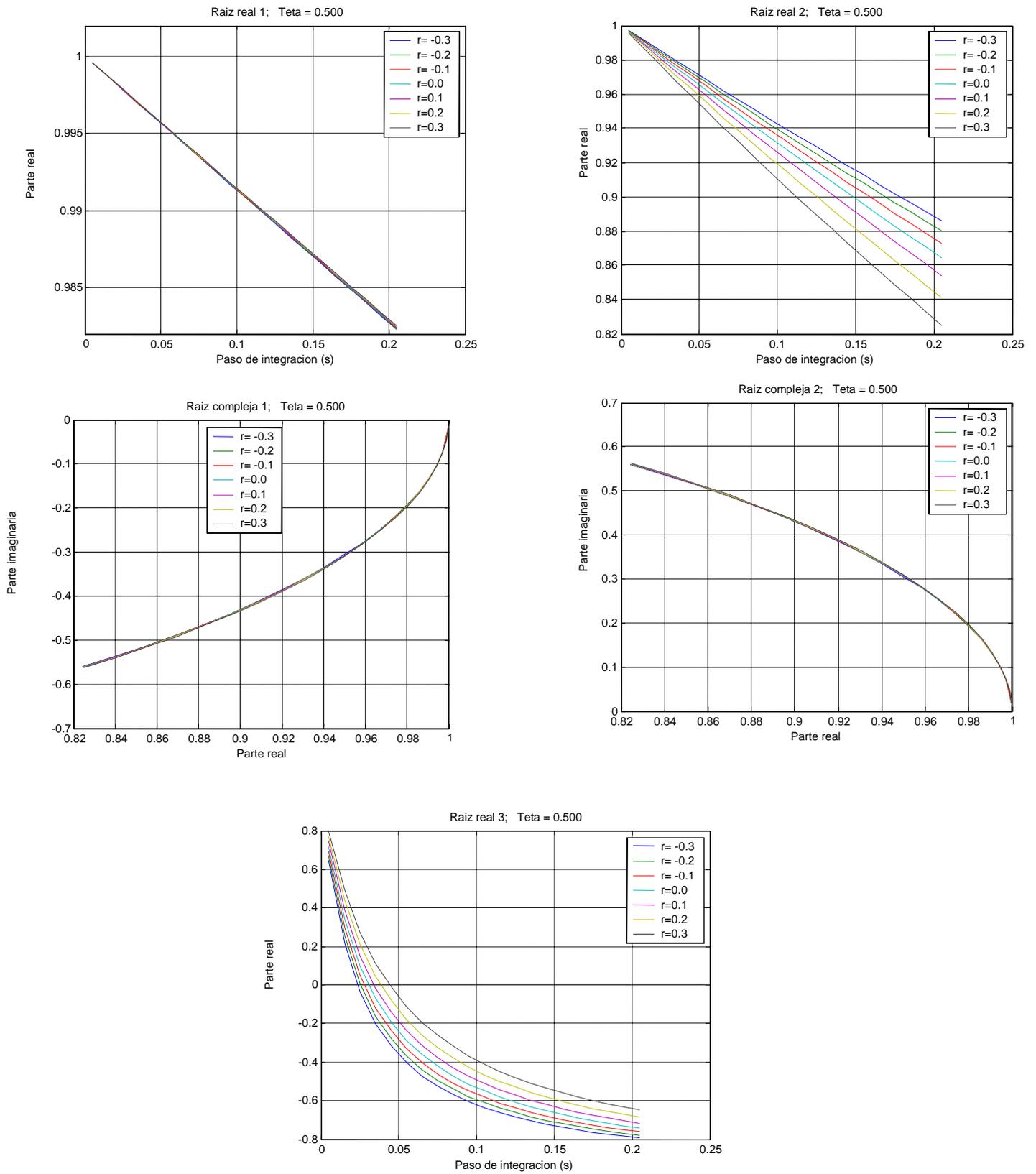


Figura 5-6 Raíces características del modelo lineal en tiempo discreto para el método implícito

## Análisis de resultados



**Figura 5-7 Raíces características del modelo lineal en tiempo discreto para el método de Crank-Nicholson**

## Análisis de resultados

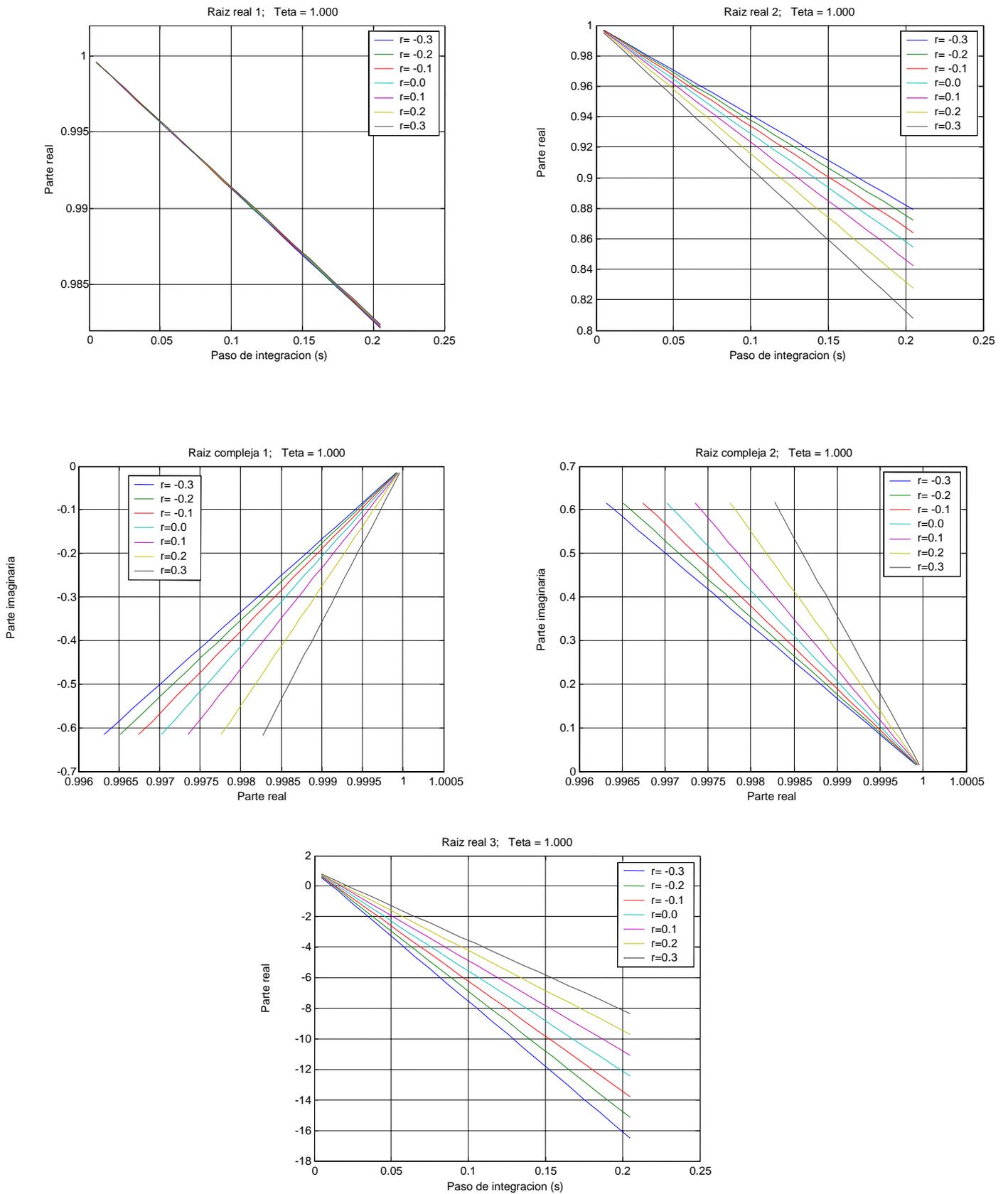


Figura 5-8 Raíces características del modelo lineal en tiempo discreto para el método explícito

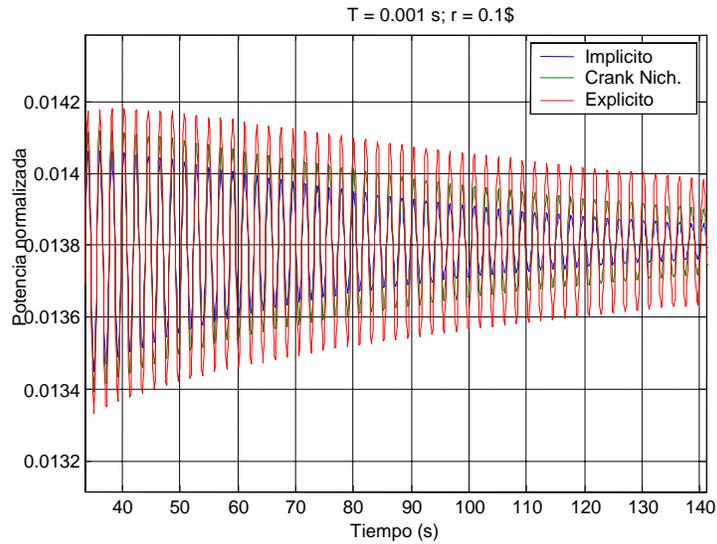
Los tres métodos muestran tres raíces reales y dos raíces complejas para todo el intervalo de tiempo sobre el cual se integró. Como se demostró en el capítulo 3 las raíces complejas están asociadas al comportamiento de la fracción de vacíos, mientras que las raíces reales se asocian al proceso de la transferencia de calor y a la cinética puntual.

Las figuras 5-6 y 5-7 muestran que los métodos implícito y de Crank-Nicholson son estables para todo paso de integración en el tiempo, ya que las raíces siempre permanecen dentro del círculo unitario. Este hecho es de gran importancia ya que el paso de integración es el homólogo del periodo de muestreo y por ende, cumple con el teorema de Nyquist para la escala de tiempo establecida en las gráficas. Esto concuerda con el estudio de la dinámica del modelo lineal con los parámetros establecidos para este caso en particular, ya que este modelo tiende a ser totalmente estable como lo muestra la figura 5-5. Sin embargo, cabe resaltar que entre más pequeño sea nuestro paso de integración más certero será nuestro conocimiento acerca de cómo se comporta el sistema ya que, como se observa en las 5 gráficas correspondientes a estos dos métodos, cuando el paso de integración se hace más grande la ubicación de los polos comienza a cambiar. Por lo tanto, entre más pequeño sea nuestro paso de integración al momento de discretizar, menos errores tendremos en la obtención de un modelo discreto que represente la dinámica de un modelo continuo en el tiempo.

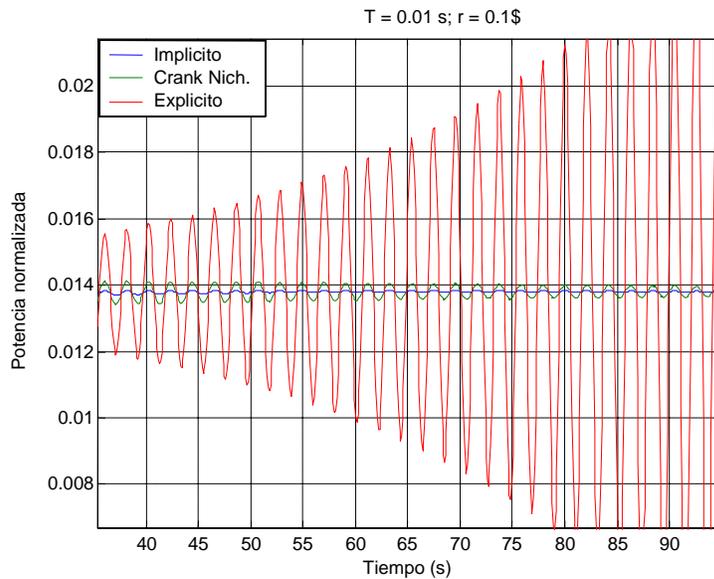
Por otra parte, la figura 5-8 nos muestra que sólo para un paso de integración muy pequeño (del orden de 1 ms) el método explícito exhibe un comportamiento estable. Esto quiere decir que si se discretiza con un tiempo de integración mayor, el sistema discreto se volverá inestable ya que la tercera raíz real se sale del círculo unitario para tiempos mayores de 1ms. Por lo tanto este método no muestra estabilidad incondicional para cualquier intervalo de tiempo sobre el cual se discretice como lo hacen los métodos anteriores.

Las figuras 5-9 y 5-10 muestran la representación de la potencia normalizada de salida de la figura 5-5, utilizando un modelo discreto obtenido mediante los tres métodos ya descritos y dos pasos de integración distintos. Se puede observar claramente en la figura 5-9 que cuando  $T$  es igual a 1ms, los tres métodos nos dan una matriz  $G$  y  $H$  que responde como el modelo en tiempo continuo; sin embargo, si  $T$  es igual a 10 ms, sólo los métodos implícito y de Crank-Nicholson nos dan matrices  $G$  y  $H$  que corresponden a la dinámica del modelo en tiempo continuo, más no así el método explícito. Esto se observa en la figura 5-10 la cual nos da una respuesta totalmente errónea en el contexto físico para este método en particular, debido a inestabilidades numéricas en el momento de la discretización. Por lo tanto, inestabilidades físicas son producto de un mal manejo en los métodos numéricos para discretizar sistemas en tiempo continuo.

Así mismo, de la figura 5-10 se observa que para los dos métodos estables un paso de integración de 10 ms es suficiente para obtener una buena representación en tiempo discreto de nuestro modelo en estudio, ya que la respuesta es igual a la obtenida en la figura 5-5.



**Figura 5-9** Comparación de las respuestas obtenidas por el modelo lineal discretizado para los tres métodos de integración para T=0.01 s



**Figura 5-10** Comparación de las respuestas obtenidas por el modelo lineal discretizado para los tres métodos de integración para T=0.001 s

### 5.3.2 Análisis de los parámetros obtenidos en el modelo lineal identificado

Una vez que se ha demostrado que los procesos de discretización pueden introducir errores en las respuestas del sistema, volvamos a tomar de nuevo el proceso de identificación. Una vez que se identifica el modelo lineal, es necesario volver al tiempo continuo.

Si se quiere obtener a la matriz A de la ecuación (5-6), se debe de hacer una transformación del tiempo discreto al tiempo continuo. Para ello es necesario que nuestro modelo discreto se encuentre en variables de estado. Esto es sencillo ya que aunque el modelo identificado esté como función de transferencia, mediante

un comando de Matlab (*tf2ss*) se puede obtener en términos de las matrices G y H en la forma canónica controlable [2].

La ecuación (5-8) representa la matriz A en tiempo continuo para el método implícito de integración ( $\theta = 0$ ):

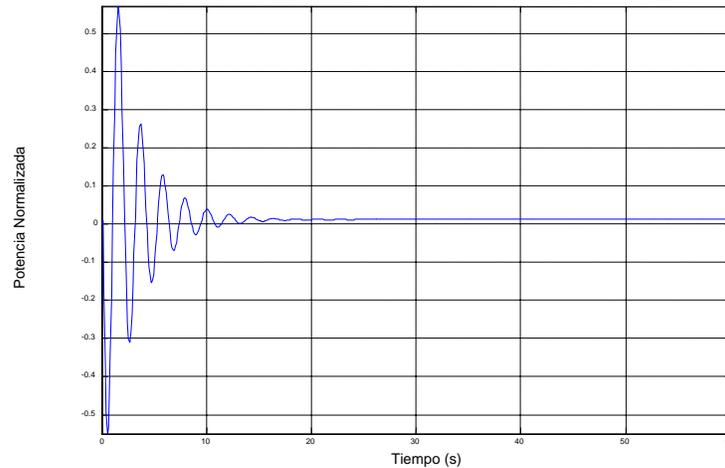
$$A = [I - G][-TG]^{-1} \tag{5-8}$$

Por lo tanto, si se programa la ecuación (5-8) para la matriz G en forma canónica controlable del modelo estimado, se pueden obtener los eigenvalores de la matriz A y por lo tanto, se puede estimar que tan estable es en este caso, el modelo no lineal propuesto por Morales mediante los polos dominantes de un modelo paramétrico lineal identificado.

Ahora, se procederá a la identificación de los modelos de orden reducido utilizando tres parámetros distintos de  $\xi$ , aunque dejando a los demás parámetros iguales. El cambio en la reactividad externa se mantendrá igual para todos los casos, con un valor de 0.1\$:

- 1) Identificación del modelo lineal con  $\xi > 0$  (modelo estable):

La figura 5-11 muestra la potencia de salida del modelo no lineal implementado en Simulink para los parámetros utilizados en la tabla 3-7, y un valor de  $\xi = 0.1$ .



**Figura 5-11 Potencia de salida del modelo no lineal para la representación de la condición estable en el proceso de identificación**

Sin embargo, la componente de directa ha sido eliminada ya que el identificador debe de medir una señal de salida con una condición inicial igual a cero en el principio de toda medición.

Ahora bien, se procede a utilizar el identificador de modelos lineales mediante el toolbox de identificación de sistemas de Matlab, una vez muestreada tanto la señal de entrada como la de salida a una tasa de 0.01 [s], obteniendo así un modelo lineal en tiempo discreto con una estructura de tipo ARX, empleando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos:

```
numd=[ 0 0.0014 0.0014 0.0014 0.0014 0.0014];  
dend =[1.0000 -2.0200 0.8238 0.7622 -0.6376 0.1196];
```

## Análisis de resultados

Ahora, mediante el siguiente comando en Matlab:

```
[G,H,C,D]=tf2ss(numd,dend)
```

A continuación se muestra el modelo discreto en variables de estado, en donde se observa que tiene la forma canónica controlable:

<b>G =</b>  2.0200 -0.8238 -0.7622 0.6376 -0.1196 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0	<b>H =</b>  1 0 0 0 0
<b>C =</b>  0.0014 0.0014 0.0014 0.0014 0.0014	<b>D =</b>  0

Ahora, programando la ecuación (5-7) se obtiene la siguiente matriz A en tiempo continuo:

```
A_c =
1.0e+003 *
0.1000 -0.1000 -0.0000 0.0000 0.0000
0 0.1000 -0.1000 0 0
0 0 0.1000 -0.1000 0
0 0 0 0.1000 -0.1000
0.8361 -1.6890 0.6888 0.6373 -0.4331
```

Mediante el comando `eig(A_c)` se pueden obtener los eigenvalores de la matriz A:

```
1.0e+002 *
-1.0829
-0.0914
-0.0611
-0.0027 + 0.0291i
-0.0027 - 0.0291i
```

Como se puede observar, los polos complejos forman un sistema de segundo orden, y deben de satisfacer la siguiente ecuación:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (5-9)$$

Por lo que retomando al par de polos complejos como un vector columna y utilizando el comando de Matlab `poly(raices)` tenemos lo siguiente:

```
raices=[-0.27+0.291i;-0.27-0.291i];
poly(raices)
ans =
1.0000 0.5400 8.5410
```

Si comparamos a este polinomio anterior con la ecuación (5-9):

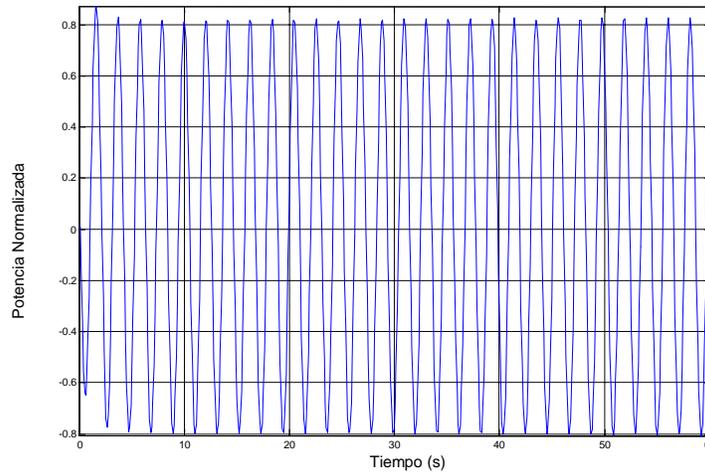
$$\begin{aligned}\omega_n &= 2.9225 \text{ rad/s} \\ \xi &= 0.0924\end{aligned}\tag{5-10}$$

donde se compara que son muy parecidas a los parámetros utilizados en el modelo mostrados a continuación:

$$\begin{aligned}\omega_n &= 3 \text{ rad/s} \\ \xi &= 0.1\end{aligned}\tag{5-11}$$

2) Identificación del modelo lineal con  $\xi = 0$  (modelo críticamente estable):

La figura 5-10 muestra la potencia de salida del modelo no lineal implementado en Simulink para los parámetros utilizados en la tabla 3-7, y un valor de  $\xi = 0$ .



**Figura 5-12 Potencia de salida del modelo no lineal para la representación de la condición críticamente estable en el proceso de identificación**

Se procede a utilizar el identificador de modelos lineales utilizando el toolbox de identificación de sistemas de Matlab, con el cual obtenemos un modelo lineal en tiempo discreto con una estructura de tipo ARX, empleando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos:

```
numd=[0 0.005071 0.005071 0.005071 0.005071 0.005071];  
dend=[1 -1.372 .2222 -0.005571 .4227 -.1032];
```

Ahora, mediante el siguiente comando en Matlab:

```
[G,H,C,D]=tf2ss(numd,dend)
```

A continuación se muestra el modelo discreto en variables de estado, en donde se observa que tiene la forma canónica controlable:

$G =$ 1.3720 -0.2222 0.0056 -0.4227 0.1032 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0	$H =$ 1 0 0 0 0
$C =$ 0.0051 0.0051 0.0051 0.0051 0.0051	$D =$ 0

Ahora, programando la ecuación (5-7) se obtiene la siguiente matriz A en tiempo continuo:

```
A_c =
1.0e+004 *
0.1000 -0.1000 -0.0000 0.0000 -0.0000
0 0.1000 -0.1000 0 0
0 0 0.1000 -0.1000 0
0 0 0 0.1000 -0.1000
-0.9690 1.3295 -0.2153 0.0054 -0.3096
```

Mediante el comando `eig(A_c)` se pueden obtener los eigenvalores de la matriz A:

```
-4.1493 +21.0634i
-4.1493 -21.0634i
-13.3078
-0.0012 + 3.0120i
-0.0012 - 3.0120i
```

Por lo que retomando al par de polos complejos dominantes como un vector columna y utilizando el comando de Matlab `poly(raices)` tenemos lo siguiente:

```
raices=[-0.0012+3.012i;-0.0012-3.012i];
poly(raices)
ans =
1.0000 0.0024 9.0721
```

Si comparamos a este polinomio anterior con la ecuación (5-9):

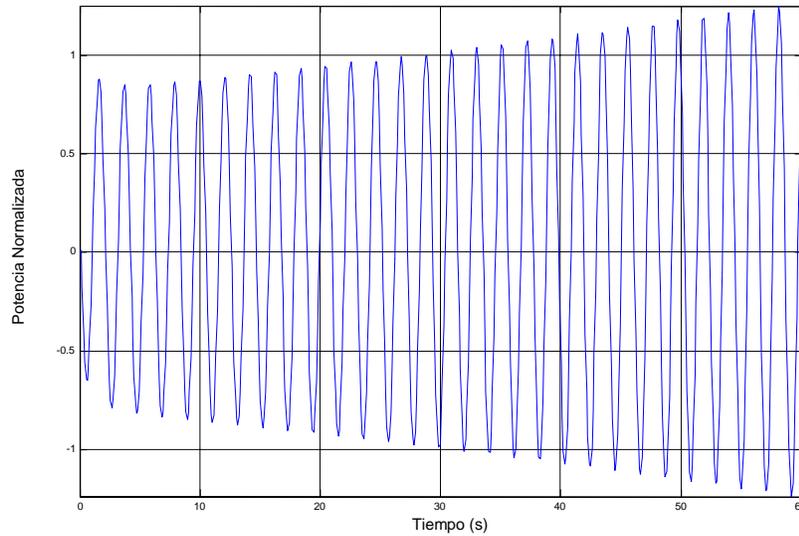
$$\begin{aligned} \omega_n &= 3.012 \text{ rad/s} \\ \xi &= 3.9841 * 10^{-4} \end{aligned} \tag{5-12}$$

donde se compara que son muy parecidas a los parámetros utilizados en el modelo mostrados a continuación:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 3 \text{ rad/s} \\ \xi &= 0 \end{aligned} \tag{5-13}$$

3) Identificación del modelo lineal con  $\xi < 0$  (modelo inestable):

La figura 5-11 muestra la potencia de salida del modelo no lineal implementado en Simulink para los parámetros utilizados en la tabla 3-7, y un valor de  $\xi = -0.017$ .



**Figura 5-13 Potencia de salida del modelo no lineal para la representación de la condición inestable en el proceso de identificación**

Se procede a utilizar el identificador de modelos lineales utilizando el toolbox de identificación de sistemas de Matlab, con el cual obtenemos un modelo lineal en tiempo discreto con una estructura de tipo ARX, empleando el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos:

```
numd=[0 0.005672 0.005672 0.005672 0.005672 0.005672];
dend=[1 -1.289 .1518 -0.07109 .4795 -.08676];
```

Ahora, mediante el siguiente comando en Matlab:

```
[G,H,C,D]=tf2ss(numd,dend)
```

A continuación se muestra el modelo discreto en variables de estado, en donde se observa que tiene la forma canónica controlable:

$G =$ 1.2890 -0.1518 0.0711 -0.4795 0.0868 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0 0 0 0 0 1.0000 0	$H =$ 1 0 0 0 0
$C =$ 0.0057 0.0057 0.0057 0.0057 0.0057	$D =$ 0

Ahora, programando la ecuación (5-7) se obtiene la siguiente matriz A en tiempo continuo:

A\_c =

```
1.0e+004 *  
  0.1000 -0.1000  0.0000  0.0000 -0.0000  
    0     0.1000 -0.1000    0     0  
    0     0     0.1000 -0.1000    0  
    0     0     0     0.1000 -0.1000  
-1.1526  1.4857 -0.1750  0.0819 -0.4527
```

Mediante el comando `eig(A_c)` se pueden obtener los eigenvalores de la matriz A:

```
-3.6568 +20.9122i  
-3.6568 -20.9122i  
-15.9604  
 0.0071 + 3.0241i  
 0.0071 - 3.0241i
```

Por lo que retomando al par de polos complejos dominantes como un vector columna y utilizando el comando de Matlab `poly(raices)` tenemos lo siguiente:

```
raices=[0.0071+3.0241i;0.0071-3.0241i];  
poly(raices)  
ans =
```

```
 1.0000  0.0024  9.0721
```

Si comparamos a este polinomio anterior con la ecuación (5-9):

$$\begin{aligned}\omega_n &= 3.0241 \text{ rad/s} \\ \xi &= -0.0023\end{aligned}\tag{5-14}$$

donde se compara que no son muy parecidas a los parámetros utilizados en el modelo mostrados a continuación:

$$\begin{aligned}\omega_n &= 3 \text{ rad/s} \\ \xi &= -0.017\end{aligned}\tag{5-15}$$

Esto se debe principalmente a que, como la medición en la potencia de salida es inestable, el error cuadrático en el algoritmo de mínimos cuadrados no logra converger a un error mínimo ya que tampoco las mediciones en la salida convergen a un valor en específico.

### 5.4 Conclusiones

En este capítulo se analizaron los resultados más importantes de los modelos dinámicos tanto lineal como no lineal, que representan la dinámica del núcleo de un reactor BWR.

Primero se demostró que a pesar de que la reactividad externa no es una variable de estado medible de manera directa, se puede estimar aplicando una interpolación lineal conociendo de ante mano valores más grandes y más pequeños del valor final de potencia medida, que la misma reactividad produjo. Este concepto se aplica para cualquier medición en la potencia de salida, ya que también cuando se presente una oscilación su valor

final corresponderá al cambio en la reactividad externa. Si se presenta una oscilación debido únicamente al cambio en las condiciones iniciales de la fracción de vacíos, entonces el valor final al que tenderá la potencia es prácticamente cero.

Por otra parte, cuando se describió el proceso para estimar la estabilidad mediante la identificación de un sistema lineal, se observó que había que utilizar un método para pasar del tiempo discreto al tiempo continuo para realizar este objetivo. Se demostró mediante tres métodos, que se debe de tener cuidado con las inestabilidades numéricas causadas por un período de muestreo que no cumpla con el teorema de Nyquist para algún método en particular.

Finalmente, se demostró que es viable estimar la estabilidad en la potencia de salida del núcleo de un reactor mediante la identificación de un modelo lineal discreto en el tiempo. Esta representación es válida ya que, como se demostró en el capítulo 3, la representación de la dinámica del núcleo se puede hacer a través de un modelo lineal para variaciones pequeñas en las variables de estado. Este principio no se violó en el momento de realizar la estimación del modelo paramétrico lineal, debido a que el cambio en la reactividad externa fue de 0.1\$ y para cuestiones matemáticas del modelo, produce cambios muy pequeños alrededor de la potencia de salida. Sin embargo, en la realidad reactividades muy grandes no ocurren por lo que el modelo lineal en términos generales funcionaria bastante bien para cualquier cambio en la reactividad externa.

### Referencias

- [1] B. C. KUO. *Automatic Control Systems*. Prentice-Hall 1995 U.S.A.
- [2] K. OGATA. *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice-Hall 1996 U.S.A.

## Apéndice A

### Correlaciones empíricas termo hidráulicas utilizadas para obtener la ecuación (2-28)

Para un flujo bifásico que se mueve de manera unidimensional a través del canal, la siguiente ecuación nos da la relación que existe entre la fracción de vacíos, la calidad y el factor de desprendimiento:

$$\alpha = \frac{x}{S(1-\eta) + x(1-S(1-\eta))} \quad (\text{A-1})$$

donde  $\eta$  corresponde a la relación:

$$\eta = \frac{\rho_f - \rho_g}{\rho_f} \quad (\text{A-2})$$

El factor de desprendimiento  $S$ , utilizado en la ecuación (B-1) se calcula mediante la correlación empírica de Bankoff determinada por Jones [1]:

$$S(z,t) = \frac{1 - \alpha(z,t)}{k_s - \alpha(z,t) + (1 - k_s)(\alpha(z,t))^r} \quad (\text{A-3})$$

donde  $k_s$  y  $r$  son expresiones que dependen de la presión:

$$k_s = 0.71 + 1.2865 * 10^{-3} p \quad (\text{A-4})$$

$$r = 3.33 - 2.56021 * 10^{-3} p + 9.306 * 10^{-5} p^2 \quad (\text{A-5})$$

Las unidad de presión que se utiliza en las ecuaciones anteriores es  $Kg/cm^2$ . Las ecuaciones (A-1) y (A-3) tienen que ser resueltas de manera iterativa para encontrar la fracción de vacíos  $\alpha$ . Una gráfica del factor de desprendimiento en función de la fracción de vacíos para diferentes presiones se muestra en la figura A-1, mientras que la figura A-2 muestra una gráfica de la fracción de vacíos en función de la calidad del vapor para diferentes presiones.

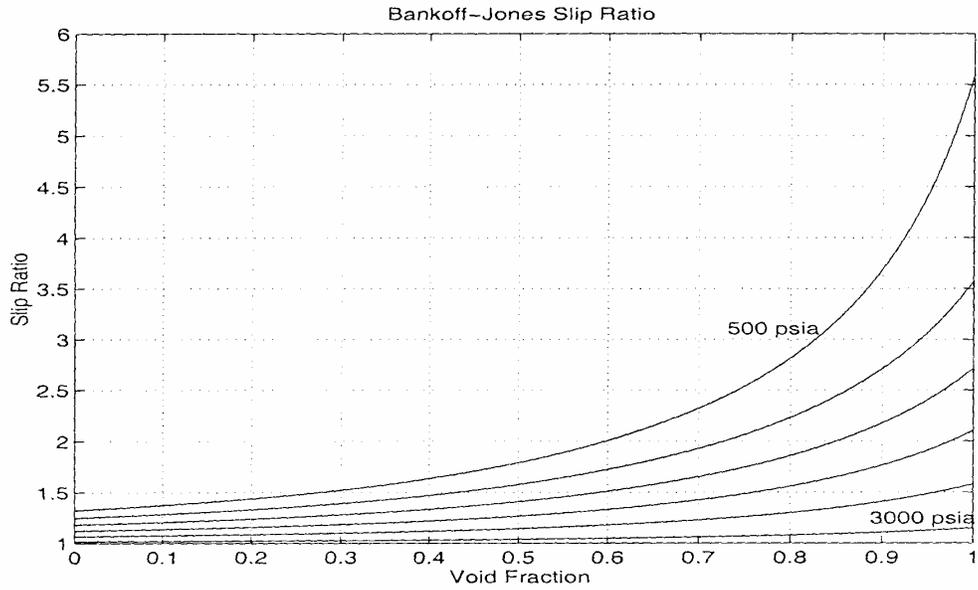


Figura A-1 Factor de deslizamiento Bankoff-Jones en función de la fracción de vacíos y la presión. La gráfica muestra curvas para 500, 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000 psia

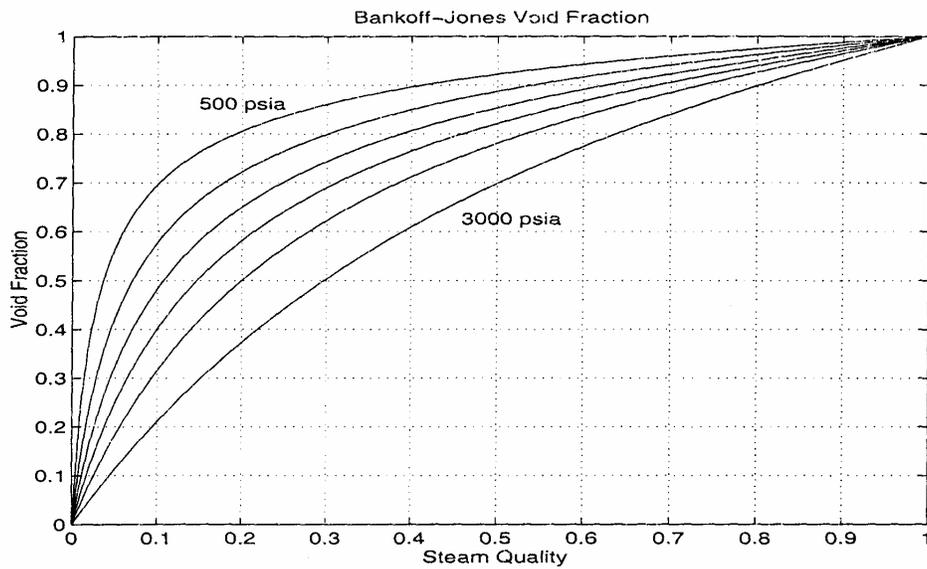


Figura A-2 Fracción de vacíos Bankoff-Jones en función de la calidad del vapor y la presión. La gráfica muestra curvas para 500, 1000, 1500, 2000, 2500 y 3000 psia

Referencias

[1] M. CECEÑAS FALCÓN. *Stability Monitoring for Boiling Water Reactors*. 1999. U.S.A. Pennsylvania State University. PhD Dissertation.

## Apéndice B

### Obtención del modelo lineal propuesto por Morales

Las matrices de la ecuación (3-17) que conforman el modelo linealizado en variables de estado se obtiene de la siguiente forma:

Se define el vector de variables de estado en términos de pequeñas variaciones alrededor de una condición de estado estable:

$$x(t) = \begin{bmatrix} n - n_0 & c - c_0 & T_f - T_{f0} & \alpha - \alpha_0 & \dot{\alpha} \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5] \quad (\text{B-1})$$

Esto quiere decir que cada variable de estado en el modelo no lineal representado en las ecuaciones (3-11 a 3-15), es igual a una pequeña diferencia de ellas mismas.

Ahora, Para obtener la matriz A, se define el vector derivada  $\dot{x}(t)$  en términos de las variables de estado como sigue:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_N [(r-1)x_1 + x_2] \quad (\text{B-2})$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda [x_1 - x_2] \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_n x_1 - \lambda_f x_3 \quad (\text{B-4})$$

$$\frac{dx_4}{dt} = x_5 \quad (\text{B-5})$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -2\xi \omega_n x_5 + \omega_n^2 x_4 + b_f x_3 + b_n x_2 + b_{gr} \dot{x}_3 \quad (\text{B-6})$$

$$r = r_{ext} + \alpha_D x_3 + \alpha_V x_4 \quad (\text{B-7})$$

Sustituyendo la ecuación de realimentación (B-7) en la ecuación (B-2), se obtendrán variables de estado en términos cuadráticos, las cuales no se toman en cuenta y sólo se toman las variables lineales. Es así como se obtiene la matriz A de la ecuación (3-17) para satisfacer el modelo en variables de estado de la ecuación (3-16).

## Apéndice C

### Métodos de solución de ecuaciones diferenciales de primer orden

#### C.1 Introducción

La idea básica detrás de la solución numérica de las ecuaciones diferenciales de primer orden es la combinación de valores que la función puede tomar en diferentes tiempos para aproximar las derivadas en el método requerido. Estos valores se determinan por medio de la serie de Taylor para el punto sobre el cual se quiere derivar. Esta aproximación se conoce como aproximación por diferencias finitas.

#### C.2 Diferencias finitas

Si se considera que la ecuación diferencial ordinaria de primer orden es de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (C-1)$$

Sujeta a condiciones iniciales  $f(t=t_0) = c$ . La solución de las diferencias finitas para la ecuación anterior se encuentra discretizando la variable independiente  $t$  a  $t_0, t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, t_0+3\Delta t, \dots$  Por lo que se debe definir la solución exacta en un punto  $t = t_n = t_0+n\Delta t$  por  $y_n = y(t=t_n)$  y aproximar nuestra solución  $Y_n$ . Por lo tanto, ahora se tiene que resolver la derivada de  $Y_n$ :

$$Y'_n = f(t_n, Y_n) \quad (C-2)$$

Para todos los puntos en el dominio.

Si se toma la expansión de la serie de Taylor para los puntos marcados en la vecindad de un punto  $t = t_n$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} & \dots \\ Y_{n-2} &= Y_n - 2\Delta t Y'_n + 2\Delta t^2 Y''_n - \frac{4}{3}\Delta t^3 Y'''_n + O(\Delta t^4) \\ Y_{n-1} &= Y_n - \Delta t Y'_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 Y''_n - \frac{1}{6}\Delta t^3 Y'''_n + O(\Delta t^4) \\ Y_n &= Y_n \\ Y_{n+1} &= Y_n + \Delta t Y'_n + \frac{1}{2}\Delta t^2 Y''_n + \frac{1}{6}\Delta t^3 Y'''_n + O(\Delta t^4) \\ Y_{n+2} &= Y_n + 2\Delta t Y'_n + 2\Delta t^2 Y''_n + \frac{4}{3}\Delta t^3 Y'''_n + O(\Delta t^4) \\ & \dots \end{aligned} \quad (C-3)$$

Si se toman combinaciones lineales de esta expansión para obtener una aproximación para la derivada  $Y'_n$  en  $t = t_n$ , se llega a:

$$Y'_n \approx \sum_{i=a}^b \alpha_i Y_{n+i} \quad (C-4)$$

#### C.3 El método de Euler o explícito

El método de Euler es el más simple de todos los métodos que utilizan diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales. Si se aproxima la ecuación (c-1) mediante la siguiente expresión:

$$Y'_n \approx (Y_{n+1} - Y_n)/\Delta t, \quad (\text{C-5})$$

$Y_n$  toma entonces la forma siguiente:

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t f(t_n, Y_n). \quad (\text{C-6})$$

Dada la condición inicial  $Y_0 = c$ , debemos obtener  $Y_1$  de  $Y_0 + \Delta t f(t_0, Y_0)$ ,  $Y_2$  de  $Y_1 + \Delta t f(t_1, Y_1)$ , y así sucesivamente en el tiempo.

#### C.4 Método implícito

También conocido como método de regresión de Euler, es casi idéntico con la única diferencia de que la derivada  $Y'_n$  es aproximada por

$$Y'_n \approx (Y_n - Y_{n-1})/\Delta t, \quad (\text{C-7})$$

Para dar como resultado la siguiente ecuación:

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t f(t_{n+1}, Y_{n+1}). \quad (\text{C-8})$$

Este método difiere del explícito en que  $Y_{n+1}$  se encuentra en ambos lados de la ecuación:  $Y_{n+1} = h(Y_n, Y_{n+1}, t_n, \Delta t)$ . Este hecho ofrece una ventaja de estabilidad en el método implícito.

#### C.5 Método de Cranck-Nicholson

Si se utilizan diferencias centrales en vez de diferencias hacia delante en el tiempo, se obtiene un método de segundo orden que se expresa en la siguiente ecuación:

$$Y'_{n+1/2} \approx (Y_{n+1} - Y_n)/\Delta t. \quad (\text{C-9})$$

Sustituyendo en nuestra ecuación diferencial  $Y_n$ :

$$(Y_{n+1} - Y_n)/\Delta t \approx f(t_{n+1/2}, Y_{n+1/2}). \quad (\text{C-10})$$

El requerimiento para  $f(t_{n+1/2}, Y_{n+1/2})$  es satisfecho por medio de una interpolación lineal para  $f$  entre  $t_{n-1/2}$  y  $t_{n+1/2}$  para obtener:

$$Y_{n+1} - Y_n \approx \frac{1}{2}[f(t_{n+1}, Y_{n+1}) + f(t_n, Y_n)]\Delta t. \quad (\text{C-11})$$

### Referencias

[1] *Numerical Methods Lecture Notes*, 1997. University of Cambridge, U.K.