



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Enfoque multimedia, gráfico-interactivo  
tridimensional en la solución de  
problemas basados en el libro Hidráulica  
General Vol. 1 Dr. Gilberto Sotelo Ávila**

**MATERIAL DIDÁCTICO**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Civil**

**P R E S E N T A**

Lazaro Daniel Costilla Villanueva

**ASESORA DE MATERIAL DIDÁCTICO**

M.I. Amalia Adriana Cafaggi Félix



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado ENFOQUE MULTIMEDIA, GRAFICO-INTERACTIVO TRIDIMENSIONAL EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS BASADOS EN EL LIBRO HIDRAULICA GENERAL VOL.1 DR. GILBERTO SOTELO AVILA, que presenté para obtener el título de INGENIERO CIVIL es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

---

LAZARO DANIEL COSTILLA VILLANUEVA  
Número de cuenta: 405062164



Enfoque multimedia, gráfico-interactivo tridimensional  
en la solución de problemas basados en el libro  
Hidráulica General Vol. 1 del Dr. Gilberto Sotelo Ávila.

*A la memoria de mi mejor amigo Jorge Irán Sandoval Nájera (1986—2017 †)*

*A mi amada e inigualable esposa Aydé M. O.*

*A mi familia*

*Al ingeniero Eduardo Morales Flores por darme la oportunidad de un nuevo comienzo*

*A mis profesores*

# Contenido

|                        |          |
|------------------------|----------|
| <b>Agradecimientos</b> | <b>i</b> |
|------------------------|----------|

|                |           |
|----------------|-----------|
| <b>Prólogo</b> | <b>ii</b> |
|----------------|-----------|

## I. Capítulo 02. Hidrostática

---

|             |   |          |
|-------------|---|----------|
|             | <b>Antecedentes de Hidrostática</b>   | <b>v</b> |
| <b>I.1</b>  | Problema 2.01. Altura barométrica en un barómetro de mercurio.  | 1        |
| <b>I.2</b>  | Problema 2.03. Empuje que ejerce el agua sobre un recipiente abierto sobre un émbolo fijo.                                      | 3        |
| <b>I.3</b>  | Problema 2.05. Resultante de fuerzas, momento máximo de flexión en una compuerta plana.   | 4        |
| <b>I.4</b>  | Problema 2.07. Empuje hidrostático que se ejerce sobre una compuerta construida con viguetas y tableros.                        | 6        |
| <b>I.5</b>  | Problema 2.09. Empuje hidrostático que se ejerce sobre una compuerta rectangular soportada con viguetas a una profundidad $x$ . | 9        |
| <b>I.6</b>  | Problema 2.11. Empuje hidrostático que se ejerce sobre un ducto móvil construido con viguetas.                                  | 14       |
| <b>I.7</b>  | Problema 2.13. Empuje hidrostático que se ejerce sobre una compuerta compuesta por una compuerta móvil y una giratoria.         | 18       |
| <b>I.8</b>  | Problema 2.15. Compuerta articulada con dos tirantes de agua diferentes.  | 20       |
| <b>I.9</b>  | Problema 2.19. Compuerta articulada en forma de sector circular con dos empujes hidrostáticos.                                  | 22       |
| <b>I.10</b> | Problema 2.29. Empuje hidrostático sobre un muro con forma parabólica.  | 26       |
| <b>I.11</b> | Problema 2.31. Empuje hidrostático sobre una esfera sumergida en un cuerpo de agua.   | 27       |
| <b>I.12</b> | Problema 2.39. Centro de gravedad de un cajón cilíndrico sumergido para mantenerse en equilibrio.                               | 29       |
| <b>I.13</b> | Problema 2.41. Altura metacéntrica de un cuerpo que flota en el agua.   | 31       |
| <b>I.14</b> | Problema 2.43. Altura metacéntrica de un lanchón que soporta una carga, par de equilibrio.                                      | 33       |

## II. Capítulo 04. Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica

---

|             |   |             |
|-------------|---|-------------|
|             | <b>Antecedentes de Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica.</b>                           | <b>viii</b> |
| <b>II.1</b> | Problema 4.03. Componentes de la velocidad en flujos bidimensionales e incompresibles.      | 35          |
| <b>II.2</b> | Problema 4.07. Cálculo de la velocidad media del agua que circula por un conducto circular. | 39          |
| <b>II.3</b> | Problema 4.11. Cálculo del diámetro de un chorro de agua que es descargado por un chiflón.  | 41          |
| <b>II.4</b> | Problema 4.13. Cálculo de la velocidad, gasto y presión del agua en un sifón.               | 45          |

|              |  |            |
|--------------|--|------------|
| <b>II.5</b>  | Problema 4.15. Cálculo del gasto en un flujo desarrollado por una bomba.                           | 47         |
| <b>II.6</b>  | Problema 4.19. Determinación de la dirección del flujo de un aceite que corre por una tubería.     | 50         |
| <b>II.7</b>  | Problema 4.23. Potencia requerida por el motor de una bomba de flujo axial.                        | 51         |
| <b>II.8</b>  | Problema 4.25. Potencia requerida por el motor de una bomba para lograr cierta altura de chorro.   | 53         |
| <b>II.9</b>  | Problema 4.27. Potencia desarrollada por una turbina debido a un flujo de agua por una tubería.    | 55         |
| <b>II.10</b> | Problema 4.31. Cálculo de la fuerza que produce un flujo de agua en una tubería curvada.           | 57         |
| <b>II.11</b> | Problema 4.37. Cálculo de las componentes de fuerza que se generan en una tubería debido al flujo. | 59         |
|              | <b>Referencias</b>   | <b>xi</b>  |
|              | <b>Conclusiones</b>  | <b>xii</b> |

## Agradecimientos

Nunca reconocí apropiadamente el valioso esfuerzo que hicieron mis padres en mi formación como ingeniero, en esta ocasión quiero agradecer a mis padres y a mis hermanos por su paciencia, por su afán de siempre verme triunfar y por su ayuda incondicional.

A mi amigo, Jorge Irán Sandoval Nájera. Aunque ya no estés con nosotros, tengo fe en que te encuentras en un lugar mejor. Fuiste mi amigo desde la infancia, y lamento no haber pasado más tiempo contigo. Siempre te consideré casi como un hermano, eras casi idéntico a mí. Siempre te recordaré, amigo, y este trabajo también fue realizado en tu memoria. Estoy seguro de que, si estuvieras aquí, me hubieras felicitado como lo hacías con todos mis logros. Agradezco tu paciencia y todos los buenos momentos que compartimos.

A mi esposa Aydé Mendoza Oliva, quien en las buenas y en las malas siempre me alienta a terminar lo que he comenzado. Sé que estarás orgullosa de todo el valioso esfuerzo que he hecho y de la ayuda que este material significará para todos los interesados.

A la profesora Adriana Cafaggi Félix por su paciencia y empeño en la realización de este material.  
A la profesora Nikté Norma Ocampo Guerrero por su valiosa ayuda.

Al profesor Eduardo Morales Flores que sin habernos conocido tanto tiempo me proporcionó justo la ayuda que necesitaba en un momento crítico de mi vida, estaré eternamente agradecido.

A todos los profesores que me impartieron clases y me transfirieron sus valiosos conocimientos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por haberme dado la oportunidad de utilizar sus instalaciones y darme la oportunidad de graduarme.

Todo comenzó hace dieciochos años, corría el mes agosto del 2006, cuando cursaba por vez primera la asignatura Hidráulica Básica, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, era un alumno lleno de sueños e idealista. Tenía amplios conocimientos de álgebra y cálculo principalmente, pero siempre tuve problemas para entender las asignaturas que tenían que ver con la física.

En los primeros días de clase, nos fue mencionado, que la bibliografía básica sería el libro Hidráulica General Volumen 1 del Dr. Gilberto Sotelo Ávila, un libro que a primera vista vi prometedor pero que con el paso del tiempo me fue resultando cada vez más difícil de comprender. Desde entonces vi la necesidad de tener un material que ayudara a visualizar en tercera dimensión los gráficos que solamente se presentaban en dos dimensiones.

La primera vez cursando la asignatura Hidráulica Básica no me fue del todo satisfactorio, sentí que no había aprendido mucho y aún en esa condición, tuve la oportunidad de aprobar la asignatura en la primera inscripción, pero al final abandoné la asignatura para no aprobarla, porque yo quería entender a la perfección el contenido del curso.

Con el paso del tiempo me di cuenta de que parte del problema del por qué no podía entender algunos conceptos, radicaba en el hecho de que dibujos, esquemas y modelos físicos se me mostraban en dos dimensiones y con dibujos hechos en el pizarrón. Fue entonces cuando se me ocurrió la idea, de escribir y publicar un material que facilite a los estudiantes, la comprensión de los dos capítulos más complejos del libro Hidráulica General del Doctor Gilberto Sotelo, es decir, el capítulo 2 Hidrostática y el capítulo 4 Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica.

El material presentado en este trabajo puede ser mejorado por otros estudiantes interesados en el mismo tema, pero mientras tanto se encontrará disponible en Tesis UNAM.

### Cómo usar esta guía

---

Esta tesis se compone de 25 problemas resueltos de los capítulos 2 Hidrostática y el capítulo 4 Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica. Los problemas están etiquetados con letras color rojo oscuro, donde el primer número corresponde al número del capítulo y el segundo número es el número del problema, tal como se muestra en la siguiente imagen

#### Problema 2.01.

Determinar:

- a) La altura  $h$  que se alcanzará en el barómetro de la figura (al utilizar agua en lugar de mercurio) si se encuentra a una presión

Note que en el libro no sigue el mismo formato, tal como se muestra a continuación

#### **PROBLEMAS**

##### **1. Determinar:**

- a) la altura  $h$  que se alcanzará en el barómetro de la Fig. 2.6 (al utilizar agua en lugar de mercurio) si se encuentra a una presión atmosférica de 736 mm de Hg y a la temperatura de 4°C.

La justificación de realizar el cambio de formato en la numeración de los problemas fue por practicidad y para que coincidiera con la numeración de las figuras en cada uno de los problemas, Por ejemplo, observe la numeración de la siguiente figura, que corresponde al problema 1 del capítulo 2 del mencionado libro

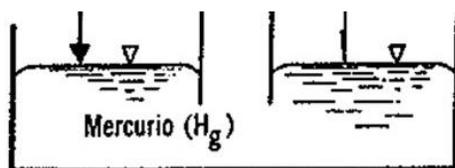


Figura 2.01.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

Si comparamos la etiqueta de numeración de la figura anterior, nos damos cuenta de que es muy similar a la numeración que se usa en el libro Hidráulica General; la diferencia radica solo en el último dígito (para el caso de la figura anterior, este dígito es la letra a), este dígito será exclusivo para los dibujos originales, tal y como están impresos en el libro. Para las demás figuras, el último dígito será un número que puede comenzar desde el número 1 en adelante tal como se muestra en la siguiente figura del problema 3 del capítulo 2 de esta tesis.

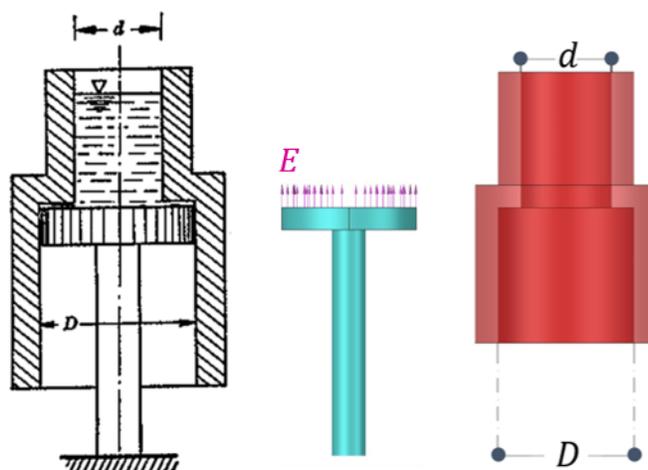


Figura 2.03.1. Observe que el empuje hidrostático se ejerce sobre el anillo circular, en el sentido ascendente.

Otra característica que es importante aclarar son las ecuaciones que están dentro de un recuadro color verde, como por ejemplo la ecuación

$$h = \frac{\bar{I}_z}{\cos \theta v_0} - h_0 \quad \text{Ecuación (2.26)}$$

Todas estas ecuaciones fueron tomadas exactamente como están escritas en el libro Hidráulica General y de hecho se respeta su numeración, para el ejemplo anterior, la ecuación (2.26) es la ecuación 26 que se encuentra en la página 62 del capítulo 2 del libro de Sotelo. Se hizo de esta forma porque cada una de las ecuaciones va asociada a una referencia enumerada, las referencias pueden consultarse en la última página de esta tesis. Para mayor claridad, la ecuación (2.26) está asociada a la Referencia 1, la cual se detalla en la sección de referencias según las normas APA, 7ma edición como:

- 1 Sotelo, G. (1997). *Hidráulica General Vol. 1*. Limusa Noriega Editores.

También hay ecuaciones dentro de esta tesis que no están referenciadas, éstas son ecuaciones auxiliares para comprender mejor el desarrollo del problema y están escritas entre paréntesis, a continuación, un ejemplo tomado de la página 33 de esta tesis

Dado que el lanchón está en equilibrio

$$E_v - W_{\text{lanchón}} = 0$$

$$E_v = W_{\text{lanchón}} \quad \dots 02)$$

Sustituyendo 01) en 02) y recordando que  $W_{\text{lanchón}} = 500 \text{ [Ton}_f]$

$$\gamma v_0 = 500 \quad \dots 03)$$

Despejando  $v_0$  de la ecuación 03)

$$v_0 = \frac{500}{\gamma} = \frac{500 \text{ [Ton}_f]}{1 \text{ [Ton}_f/\text{m}^3]} = 500 \text{ [m}^3]$$

Como podemos ver, en la imagen anterior se están utilizando las ecuaciones 02) y 03) que están auxiliando la comprensión del desarrollo del problema. Estas ecuaciones son locales en cada problema, es decir, la numeración podría repetirse en los problemas subsecuentes sin que tengan relación alguna. Las únicas ecuaciones que mantienen su numeración original, son las ecuaciones que están referenciadas al libro Hidráulica General.

Tomando en cuenta que puede no quedar claro un concepto, también se incluyen varias notas aclaratorias a manera de notas adhesivas de colores, tal como se muestra en el siguiente ejemplo, tomado de la página 1 de esta tesis

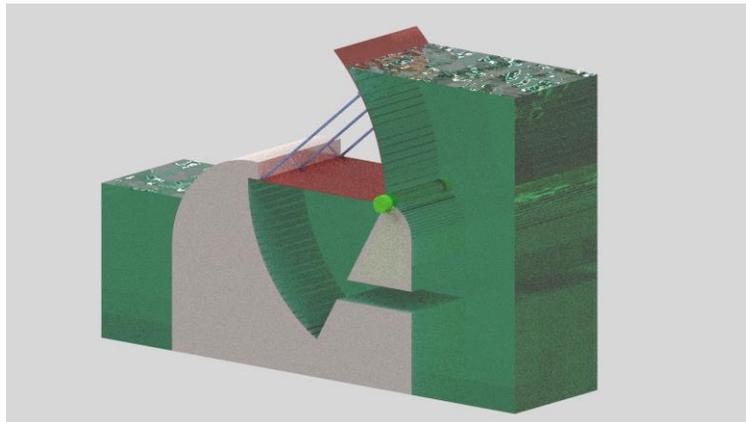
#### Nota

La nomenclatura  $\gamma_{\text{Hg}}$  se refiere al peso específico del mercurio.

$[\text{mm}]_{\text{Hg}}$  Significa milímetros de mercurio

$[\text{m}]_{\text{Hg}}$  Significa metros de mercurio.

El elemento más destacado, sin duda, fue la introducción de modelos en tercera dimensión, realizados con el programa AutoCAD de la firma Autodesk Inc. a quien agradezco el haberme dado la oportunidad de utilizar su software de manera gratuita. Un modelo renderizado con el software mencionado, se mira como el siguiente ejemplo, tomado de la página 25 de esta tesis.

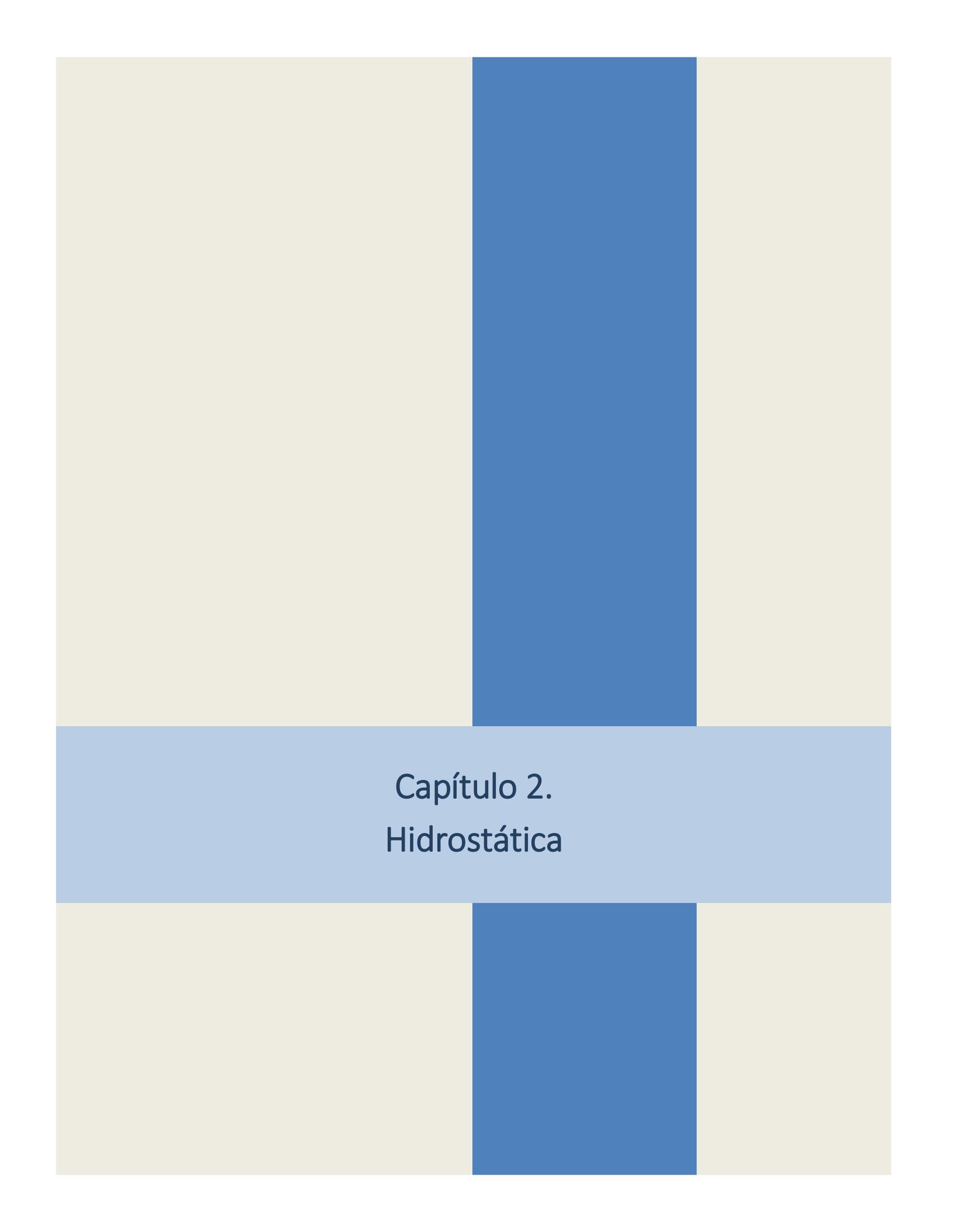


Los errores serán inevitables, pero espero que sean mínimos y que el lector tenga los conocimientos suficientes, para si es el caso, detectarlos y corregirlos.

Es importante mencionar que se ha cambiado la notación para definir los empujes hidrostáticos, es decir, ahora todos los empujes estarán definidos con la letra  $E$ . Dichos empujes estaban definidos con la letra  $P$  o la letra  $F$ .

En la realización de este trabajo se utilizó solamente el sistema técnico de unidades, esto con el fin de que los resultados de cada uno de los problemas estén expresados en las mismas unidades que utiliza el libro Hidráulica General.

En algunas imágenes se incluye un código **QR** que le dará acceso al archivo de AutoCAD que contiene el modelo 3D, el cual podrá visualizarlo más cómodamente en su computadora.



Capítulo 2.  
Hidrostática



# Antecedentes

## Capítulo 2. Hidrostática

La hidrostática es la rama de la física que estudia los líquidos en reposo, es decir aquellos que no están en movimiento. Recuerde que esta tesis solo utiliza unidades en el sistema técnico de unidades.

Lo siguiente es un resumen de los conceptos clave en el Capítulo 2 Hidrostática:

### 1. Propiedades de los fluidos.

**Densidad ( $\rho$ ):** Es la masa por unidad de volumen de un fluido. Se mide en kilogramos fuerza segundo al cuadrado por metro a la cuarta ( $\text{kg}_f \cdot \text{s}^2 / \text{m}^4$ ). Los líquidos, para presiones regulares de trabajo, se consideran incompresibles, es decir, la densidad es constante.

**Peso específico ( $\gamma$ ):** Es el peso por unidad de volumen de un fluido. Se mide en kilogramos fuerza por metro cúbico ( $\text{kg}_f / \text{m}^3$ ).

**Presión ( $p$ ):** Es la fuerza ejercida por un fluido por unidad de área. Se mide en kilogramos fuerza por metro cuadrado ( $\text{kg}_f / \text{m}^2$ ), es común también que se exprese en kilogramos fuerza por centímetro cuadrado ( $\text{kg}_f / \text{cm}^2$ ).

### 2. Distribución de presiones hidrostáticas en un líquido en reposo.

En un líquido en reposo la presión varía linealmente con la profundidad.  $z$  es una coordenada vertical medida desde un origen arbitrario y con dirección ascendente. Esto muestra que a mayor profundidad, la presión aumenta.

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{constante}$$

Ecuación (2.12)

### 3. Presión hidrostática

Presión en un punto de un fluido: En un fluido en reposo, la presión absoluta en un punto es igual en todas las direcciones. De la ecuación 2.13, la presión absoluta se calcula como

$$p_{ab} = p_{at} + \gamma h$$

Ecuación (2.13a)

Donde:

$p_{ab}$  Presión absoluta en el punto de interés.

$p_{at}$  Presión atmosférica o presión externa aplicada.

$\gamma$  Peso específico del fluido.

$h$  Profundidad, a partir de la superficie libre, del punto considerado.

### 4. Empuje hidrostático

**Sobre superficies planas.** El empuje hidrostático es la fuerza, debida a la presión, que un líquido ejerce sobre una superficie sumergida en este. En el caso de superficies planas, el empuje se puede calcular considerando la presión del líquido en diferentes puntos de la superficie. El plano  $xy$  contiene a la superficie sobre la cual se quiere calcular el empuje, y  $z$  es un eje vertical con origen en la superficie libre. En cualquier punto del líquido se cumple que  $y = z \text{ sen } \theta$ . Vea Figura A.1.

$$E = \gamma A z_G$$

Ecuación (2.15)

Donde:

$E$  Empuje hidrostático sobre una superficie plana.

$\gamma$  Peso específico del líquido.

$A$  Área de la superficie plana.

$z_G$  Centro de gravedad de la superficie plana, medido verticalmente desde la superficie libre.

El centro de presiones, de coordenadas  $y_k, x_k$ , que es el punto por el cual pasa la resultante del empuje hidrostático, se calcula como

$$y_k = \frac{\bar{r}_x^2}{y_G} + y_G$$

Ecuación (2.17)

$$x_k = \frac{I_{xy}}{y_G A}$$

Ecuación (2.18)

Donde

$\bar{r}_x^2$  Radio de giro del área  $A$  respecto del eje centroidal paralelo a  $x$ .

$I_{xy}$  Producto de inercia respecto a un plano  $xy$ .

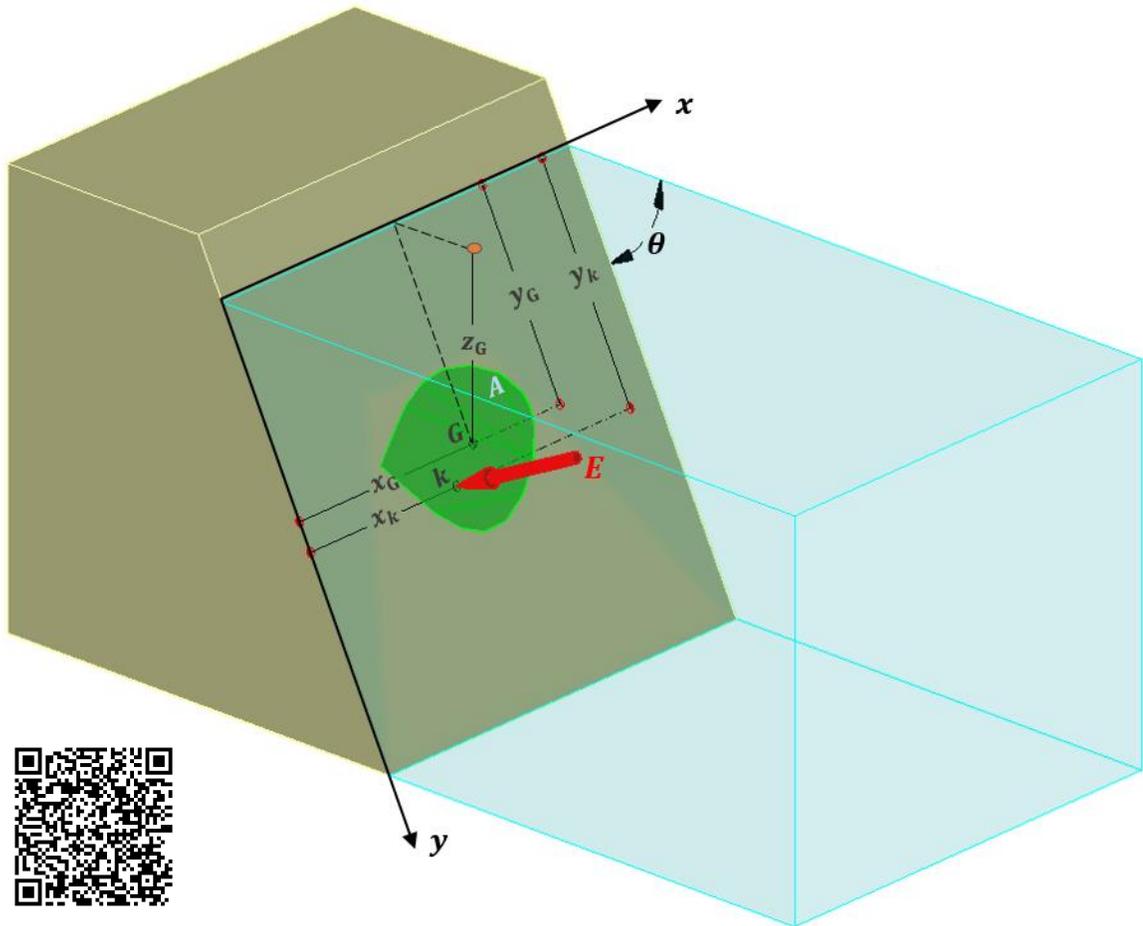


Figura A.1. Se muestra la posición del centro de gravedad  $G$  y del centro de presiones  $(x_k, y_k)$

Para una superficie rectangular simétrica, el cálculo del empuje hidrostático se puede simplificar obteniendo el volumen del prisma de presiones como se muestra a continuación (figura A.2)

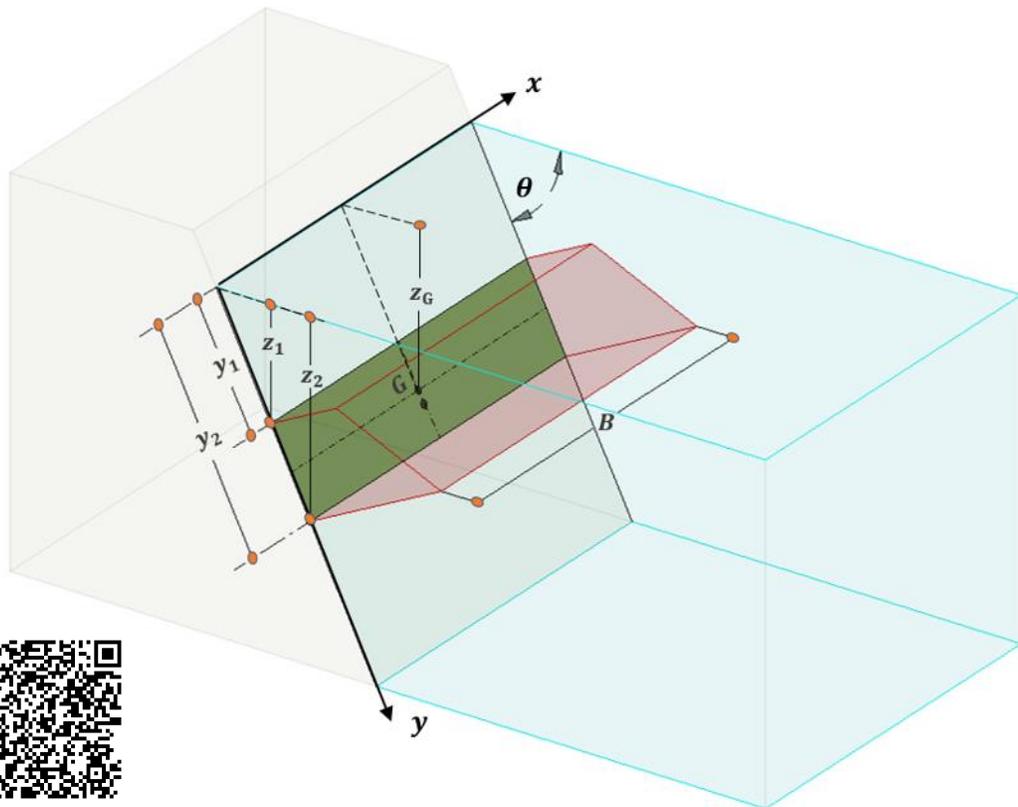


Figura A.2. Se muestra el prisma de presiones en color rojo y la superficie plana donde actúa el empuje, en color verde.

Si obtenemos el volumen del prisma de presiones

$$E = \text{Volumen del prisma de presiones} = \frac{(\gamma z_2 + \gamma z_1)}{2} (y_2 - y_1) B$$

La línea de acción pasa por el centroide del prisma y evidentemente, el punto sobre la superficie es el mismo que el calculado con el método de la expresión general.

**Sobre superficies curvas.** Para una superficie curva es necesario dividir los empujes en sus componentes horizontal y vertical para un eje  $x$  y un eje  $z$  respectivamente. Para la componente horizontal calculamos el empuje como si fuera una superficie plana con  $\theta = 90^\circ$ ; para la componente vertical, el empuje es igual al peso del volumen del líquido que se encuentre sobre la superficie curva, si el líquido se encuentra encima de la superficie curva se considerará solo el peso de dicho líquido actuando de manera descendente, pero si el líquido se encuentra debajo de la superficie curva se considerará el peso del líquido virtual actuando de manera ascendente (figura A. 3).

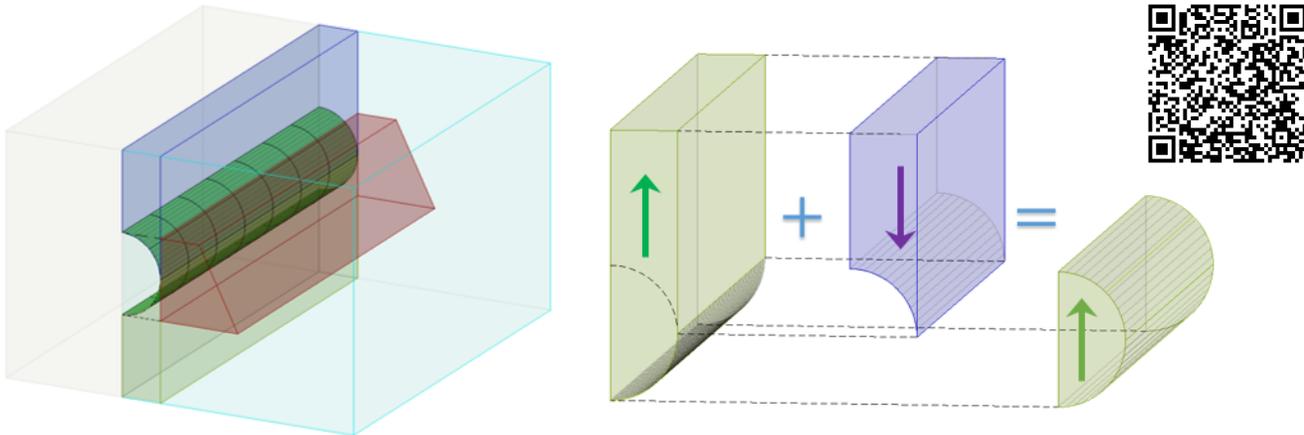


Figura A.3. Del lado derecho se muestran los empujes hidrostáticos, del lado izquierdo el empuje resultante vertical.

## 5. Principio de Arquímedes

**Fuerza de flotación:** Un objeto total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza de flotación hacia arriba igual al peso del fluido desplazado por el objeto. Esta fuerza es la que permite que los objetos floten o se hundan. Este principio puede expresarse matemáticamente como

$$E_v = \gamma v_0$$

Ecuación (2.22)

Donde

$E_v$  Fuerza de flotación ascendente

$v_0$  Volumen del líquido desplazado o volumen del cuerpo sumergido.

$\gamma$  Peso específico del líquido.

**Condición de equilibrio de los cuerpos en flotación:** Un objeto flotará si su densidad es menor que la del fluido en el que está sumergido. La altura metacéntrica ( $h$ ) es un parámetro clave en la estabilidad de cuerpos flotantes, como barcos o plataformas. Representa la distancia vertical entre el centro de gravedad del cuerpo ( $G$ ) y el metacentro ( $M$ ), que es un punto teórico relacionado con el comportamiento del cuerpo al inclinarse, se representa matemáticamente como

$$h = \frac{\bar{I}_z}{\cos \theta v_0} - h_0$$

Ecuación (2.22)

Donde

$\bar{I}_z$  Momento de inercia del área de la sección del cuerpo, a nivel de la superficie de flotación.

Por otro lado

$$h_0 = G_0 - G_1$$

Donde

$G_0$ : Centro de gravedad del cuerpo completo respecto a un eje de referencia.

$G_1$ : Centro de flotación respecto al mismo eje de referencia que  $G_0$ .

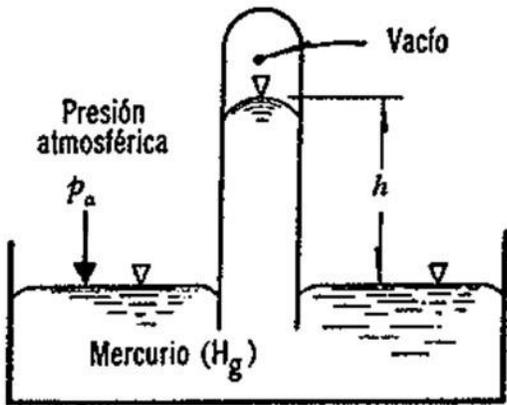


Figura 2.01.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

| Temperatura $T$ en $^{\circ}\text{C}$ | Peso específico $\gamma$ en $[\text{kg}_f/\text{m}^3]$ |
|---------------------------------------|--|
| 4 $^{\circ}$                          | 13,600   |
| 20 $^{\circ}$                         | 13,546   |
| 80 $^{\circ}$                         | 13,400   |

Tabla a. Tomada de Vukalovich, M. P.; Fokin, R. V. Thermophysical Properties of Mercury, Standards Press, 1971, 311 pp.

**Nota**

Usualmente el peso específico se representa con la letra griega  $\gamma$  y suele agregársele un cero como subíndice cuando se trata del peso específico del agua, es decir  $\gamma_0$ .

Si no se menciona lo contrario, el peso específico del agua lo podremos representar simplemente como  $\gamma$ .

**Nota**

Se debe observar que la ecuación 02) debe ser coherente con el líquido que se utilice. Es decir, si se va a calcular la presión barométrica en un barómetro de mercurio, debe emplearse el peso específico del mercurio y no el del agua. Sin embargo, es posible usar el peso específico del agua (manteniéndose la misma presión atmosférica), ya que se compensaría con la altura de la columna de agua. En otras palabras, la presión atmosférica es la misma, independientemente del tipo de líquido utilizado para medirla; lo que varía es la altura  $h$  de la columna de fluido en el barómetro.

En la práctica, no es común encontrar un barómetro que utilice agua en lugar de mercurio.

**Problema 2.01.**

Determinar:

- a) La altura  $h$  que se alcanzará en el barómetro de la figura (al utilizar agua en lugar de mercurio) si se encuentra a una presión atmosférica de 736 [mm de Hg] y a la temperatura 4  $^{\circ}\text{C}$ .
- b) La altura barométrica, si la temperatura del agua se eleva a 20  $^{\circ}\text{C}$  y 80  $^{\circ}\text{C}$ .

Las magnitudes del peso específico del agua para las diferentes temperaturas son:

|  | 4 $^{\circ}\text{C}$ | 20 $^{\circ}\text{C}$ | 80 $^{\circ}\text{C}$ |
|--|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\gamma$ , en $\text{kg}_f/\text{m}^3$ | 1,000                | 998.2                 | 971.8                 |

Solución.

De acuerdo a la ecuación fundamental de la hidrostática

$$p = \rho g h = \gamma h \quad \dots 01)$$

Como queremos encontrar la altura de la columna que se formaría si ésta fuera agua, despejamos  $h$  de 01), es decir

$$h = \frac{p}{\gamma_0} \quad \dots 02)$$

Según la tabla proporcionada por el enunciado del problema

Para  $T = 4[^{\circ}\text{C}]$

$$\gamma_0 = 1,000 [\text{kg}_f/\text{m}^3]$$

Según la Tabla a.

Para  $T = 4[^{\circ}\text{C}]$

$$\gamma_{\text{Hg}} = 13,600 [\text{kg}_f/\text{m}^3]$$

La presión barométrica  $p$  se calcula multiplicando la altura de la columna del líquido en el barómetro y el peso específico del líquido en el barómetro. Considerando que la columna de mercurio es igual a 736 milímetros de mercurio o 0.736 metros de mercurio, la presión barométrica es

$$p = 0.736 [\text{m}] \left( 13,600 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right] \right) = 10,009.6 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right]$$

Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación 02)

$$h = \frac{p}{\gamma_0} = \frac{10,009.6}{1,000} = 10.01$$

$h = 10.01 [\text{m}]$

Solución a)

Para el inciso b), basándonos en los resultados anteriores y en la tabla proporcionada por el enunciado del problema, tenemos que (considerando que la temperatura del mercurio no cambia, es decir,  $T_{\text{Hg}} = 4$  [°C])

$$p = 0.736(13,600) = 10,009.6 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right]$$

Para una temperatura del agua  $T = 20$  [°C], según la tabla del enunciado del problema  $\gamma = 998.2$  [kg<sub>f</sub>/m<sup>3</sup>]

De la ecuación 02) y con base en los resultados calculados anteriormente

$$h = \frac{p}{\gamma_0} = \frac{10,009.6}{998.2} = 10.03 \text{ [m]}$$

Para una temperatura del agua  $T = 80$  [°C], según la Tabla del enunciado del problema  $\gamma = 971.8$  [kg<sub>f</sub>/m<sup>3</sup>]

De la ecuación 02) y con base en los resultados calculados anteriormente

$$h = \frac{p}{\gamma_0} = \frac{10,009.6}{971.8} = 10.30 \text{ [m]}$$

Finalmente tenemos que

$$h_{T=20[\text{°C}]} = 10.03 \text{ [m]}$$

$$h_{T=80[\text{°C}]} = 10.30 \text{ [m]}$$

Solución b)

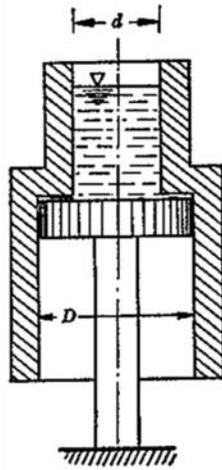


Figura 2.03.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

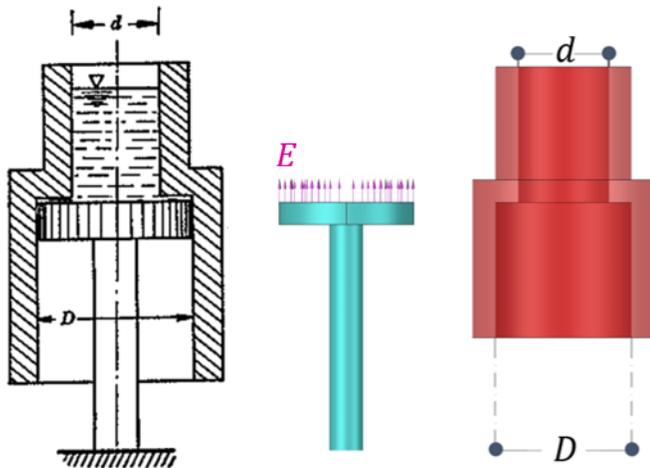


Figura 2.03.1. Observe que el empuje hidrostático se ejerce sobre el anillo circular, en el sentido ascendente.

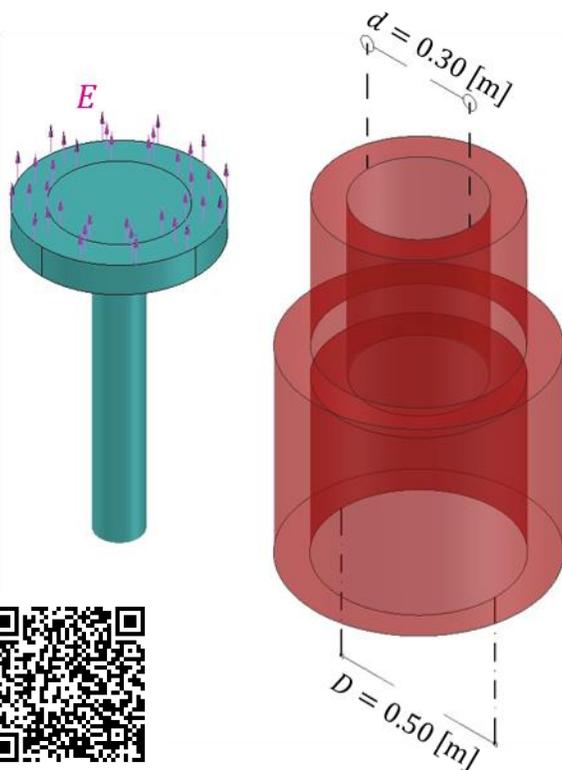


Figura 2.03.2. El empuje del agua se representa con flechas .

**Problema 2.03.**

Un recipiente abierto en ambos lados se encuentra en equilibrio estático sobre un émbolo inmóvil; el recipiente tiene un peso de  $W = 16 \text{ [kg}_f\text{]}$  y se compone de dos partes cilíndricas con diámetros  $D = 0.50 \text{ [m]}$  y  $d = 0.30 \text{ [m]}$ . Determinar el volumen mínimo de agua que debe verterse sobre la parte superior del recipiente para que éste flote sobre el émbolo. La fricción entre ambos es despreciable.

Solución.

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la figura 2.03.1, podemos observar que la fuerza de presión ascendente que ejerce el agua sobre el recipiente hueco es aplicada en el contorno entre el émbolo y el recipiente tal como se muestra en la figura 2.03.2. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 2.03.1 nos resulta la siguiente igualdad.

$$E = W \quad \dots 01)$$

Donde

$E$  es el empuje vertical ascendente ejercido por el agua sobre el recipiente.

$W$  es el peso del recipiente.

De acuerdo al principio de Pascal  $E = \gamma Ah$ , donde  $\gamma$  es el peso específico del agua,  $A$  es el área de la corona circular que se muestra en la figura 2.03.2 y  $h$  es la altura mínima para que se cumpla la ecuación 01), finalmente  $W$  es el peso del recipiente cuyo valor es  $W = 16 \text{ [kg}_f\text{]}$ . De acuerdo a lo expuesto anteriormente y considerando la ecuación 01)

$$\begin{aligned} \gamma Ah &= 16 \\ \gamma \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) h &= 16 \quad \dots 02) \end{aligned}$$

| Figura | Nombre          | Área                            |
|--------|-----------------|---------------------------------|
|        | Corona circular | $A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$ |

Tabla 1. Área de la corona circular.

El valor del área se obtuvo de la Tabla 1 para la corona circular.

Sustituyendo los datos del problema en la ecuación 02).

$$1,000 \cdot \frac{\pi}{4} (0.50^2 - 0.30^2) h = 16$$

Haciendo los cálculos respectivos, encontramos que el valor de  $h$  es  $h = 0.1273 \text{ [m]}$

Con el valor anterior, calculamos el volumen mínimo de agua necesario para que esta se derrame por los costados del recipiente. En esta ocasión, utilizaremos el área de la circunferencia que forma el diámetro  $d$ . Sabemos, de acuerdo a la ley de Pascal, que la presión en el interior de un líquido es la misma a una determinada profundidad y se ejerce en todas direcciones. Es por esto que la presión del líquido puede levantar el recipiente. Sin embargo, para calcular el volumen de agua necesario para que esto ocurra, no es relevante la fuerza que actúa sobre la sección de la corona circular. Teniendo en cuenta lo anterior, finalmente obtenemos:

$$V_{min} = \frac{\pi}{4} d^2 h = \frac{\pi}{4} \cdot 0.30^2 \cdot 0.1273$$

$$V_{min} = 0.009 \text{ [m}^3\text{]}$$

Solución

### Problema 2.05.

La compuerta plana que se muestra en la figura tiene las dimensiones  $L = 2.5 \text{ [m]}$ ,  $B = 10 \text{ [m]}$  y eleva el nivel aguas arriba hasta  $H = 2.3 \text{ [m]}$ .

Determinar:

- La resultante  $T$  de las fuerzas de tensión del cable que mantiene la compuerta en la posición indicada.
- El momento máximo de flexión  $M$  sobre la compuerta.
- La fuerza de reacción  $R_A$  sobre el apoyo inferior.

#### Solución.

Primero obtenemos el empuje total sobre la compuerta basándonos en el diagrama del volumen de presiones de la figura 2.05.1 (pintado de rosa), es decir

$$E = \frac{1}{2}(\gamma H)LB = \frac{1}{2}(1,000 \cdot 2.3)(2.5)(10)$$

$$E = 28,750 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Cuyo punto de aplicación estará a un tercio de  $L$  con respecto al punto  $A$ , llamémosle a esta distancia  $d_k$ , es decir

$$d_k = \frac{1}{3}L = \frac{1}{3}(2.5) = 0.833 \text{ [m]}$$

Supongamos que el cable que sostiene la compuerta está anclado en el punto  $C$  (figura 2.05.2), además, si consideramos que la compuerta está articulada en  $A$ , nos resultaría un diagrama de cuerpo libre como el de la figura 2.05.2.

Definimos primero un eje  $y'$  que es coplanar y ortogonal al eje  $y$ .

Del mismo diagrama de cuerpo libre de la figura 2.05.2 podremos calcular finalmente la tensión del cable haciendo una sumatoria de momentos de fuerza respecto al punto  $A$ , es decir

$$\sum M_A^{\curvearrowright} = 0 \quad -0.833E + 2.5T = 0$$

$$-0.833(28,750) + 2.5T = 0$$

$$T = 9,583.33 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Solución a)

Para calcular el momento máximo, vamos a considerar que el peso de la compuerta es despreciable, al punto  $A$  como una articulación libre de fricción y que en el punto  $C$  actúa un cable ligero, resultando un diagrama de cargas distribuidas como el mostrado en la figura 2.05.3. La solución se calcula como sigue

$$w = \gamma HB = 1,000(2.3)(10)$$

$$w = 23,000 \text{ [kg}_f\text{/m]}$$

$$\frac{2.5}{w} = \frac{y}{w_y}; w_y = \frac{y}{2.5}w = \frac{23,000}{2.5}y$$

$$w_y = 9,200y$$

Considerando que  $w_y$  tiene una distribución triangular, entonces

$$E_y = \frac{1}{2}w_y y = \frac{1}{2}(9,200y)y = 4,600y^2$$

Donde

- $w$  Fuerza distribuida del empuje total sobre la compuerta.
- $y$  Distancia respecto al punto  $C$ .
- $w_y$  Fuerza distribuida del empuje a una distancia  $y$  respecto al punto  $C$ .
- $E_y$  Fuerza concentrada debido a una fuerza distribuida de empuje a una distancia  $y$  respecto al punto  $C$ .

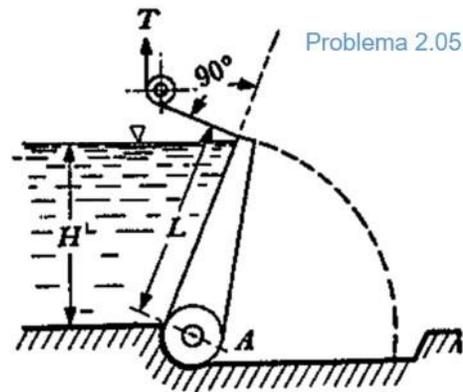


Figura 2.05.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

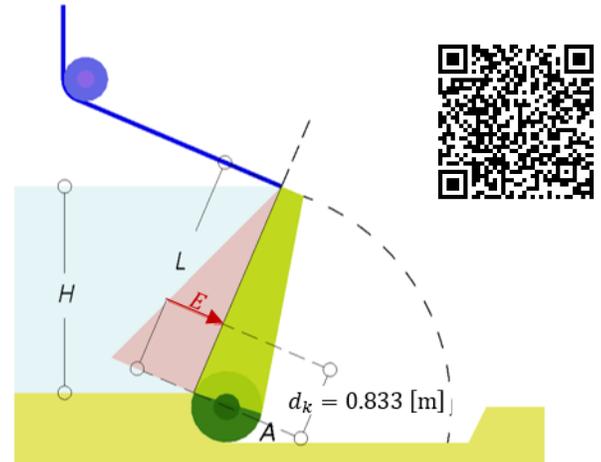


Figura 2.05.1. Diagrama del volumen de presiones.

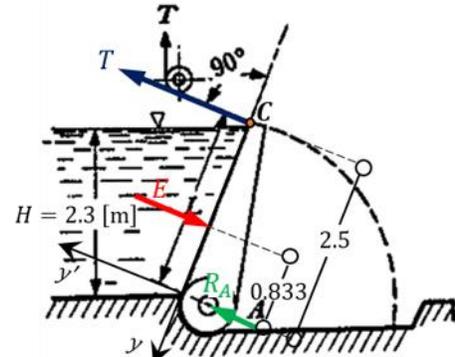


Figura 2.05.2. Diagrama de cuerpo libre de la compuerta.

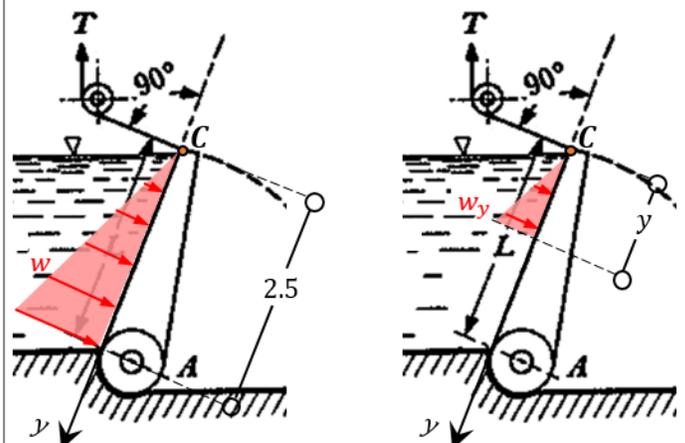


Figura 2.05.3. Diagrama de cuerpo libre de cargas distribuidas.

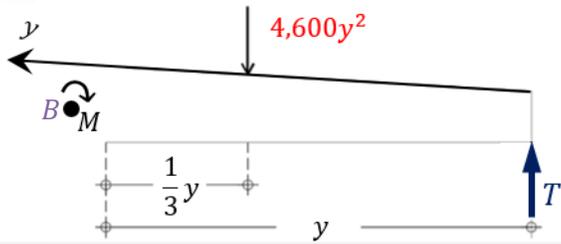


Figura 2.05.4. Diagrama de cuerpo libre para el cálculo del momento de flexión máximo. Se muestra un tramo de la compuerta cuya figura fue rotada para facilitar su comprensión.

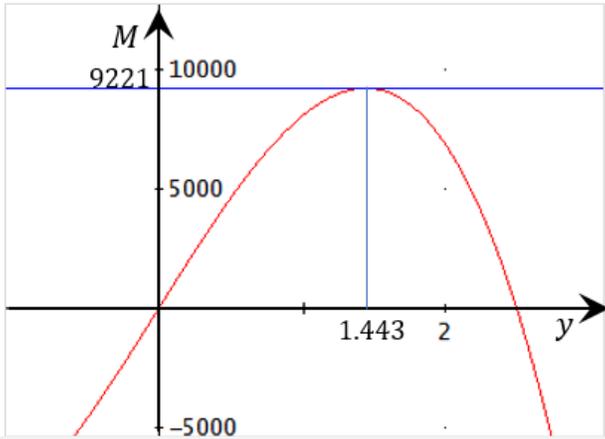


Figura 2.05.5. Para un valor de \$y = 1.443\$ se obtiene el momento máximo de flexión sobre la compuerta.

**Nota**

Recuerde que el punto de aplicación de una fuerza concentrada, originada por una fuerza distribuida triangular, coincide con el centroide del triángulo formado por la fuerza distribuida triangular.

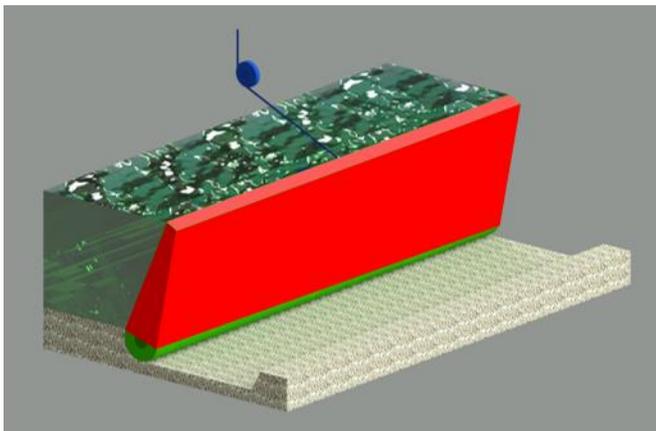


Figura 2.05.6. Se muestra un modelo aproximado del sistema.

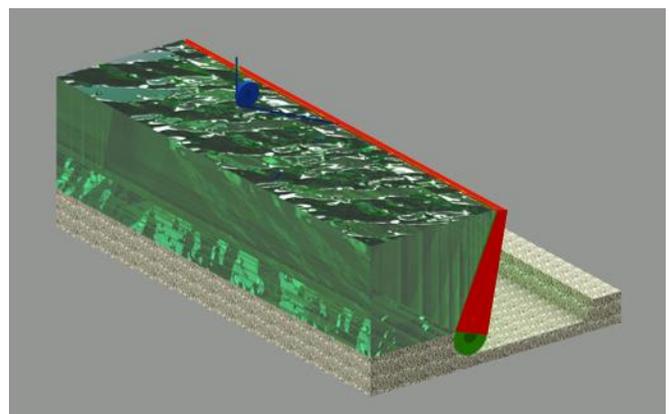


Figura 2.05.7. Se muestra un segundo modelo aproximado del sistema.

La sumatoria de momentos, respecto a un punto \$B\$ (siguiendo el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.05.4) quedaría como sigue

$$\sum M_B^{\curvearrowright} = 0 \quad -M - \left(\frac{1}{3}y\right)(4,600y^2) + yT = 0$$

$$M = 9,583.33y - \frac{4,600}{3}y^3$$

Podemos calcular el momento máximo (Referencia 2 p. 355 ), considerando que se tendrá un valor máximo del momento (figura 2.05.5) cuando

$$\frac{dM}{dy} = 0$$

Aplicando este criterio para la ecuación antes obtenida

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d\left(9,583.33y - \frac{4,600}{3}y^3\right)}{dy} = 9,583.33 - 4,600y^2 = 0$$

Resolviendo respecto a \$y\$

$$y = \sqrt{\frac{9,583.33}{4,600}} = 1.443 \text{ [m]}$$

Con este valor de \$y\$ finalmente tenemos que el valor del momento máximo de flexión sobre la compuerta es

$$M = 9,583.33(1.443) - \frac{4,600}{3}(1.443)^3$$

$$M = 9.221 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$$

Solución b)

Para calcular la fuerza de reacción \$R\_A\$ haremos una sumatoria de fuerzas en \$y'\$, basándonos en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.05.2 (los ejes coordenados se muestran en la misma figura), es decir

$$\sum F_{y'} = 0 \quad R_A + T - E = 0$$

$$R_A = E - T = 28,750 - 9,583.33$$

$$R_A = 19,166.67 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Solución c)

Como último recurso se muestran dos representaciones en tercera dimensión del sistema de la compuerta y la polea en la figura 2.05.6 y figura 2.05.7.

### Problema 2.07.

La compuerta de la figura tiene por dimensiones  $9.3 \times 31$  [m] y se encuentra articulada en el punto  $O$ , además de estar apoyada en  $A$ . Se piensa estructurar (como se muestra en la figura) formando tableros de ancho  $a = 1.8$  [m], apoyados sobre las viguetas  $B$ . Determinar.

- El empuje total  $E$  del agua sobre toda la compuerta;
- La magnitud de la reacción  $R_2$  en el punto  $A$ .
- El momento flexionante sobre las viguetas  $B$ .

#### Solución

Primero obtenemos el empuje total sobre la compuerta basándonos en el diagrama del volumen de presiones de la figura 2.07.1 (pintado de rosa), es decir

$$E = \frac{1}{2}(\gamma H)LB = \frac{1}{2}(1,000 \cdot 9.0)(9.3)(31) = 1,297.35 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

$$E = 1,297.35 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Solución a)

Como solución extra podremos encontrar también el punto de aplicación de dicha fuerza, dicho punto de aplicación estará a un tercio de  $L = 9.3$  [m] con respecto al punto  $A$ , llamemos a esa distancia  $d_k$  (figura 2.07.2), es decir

$$d_k = \frac{1}{3}L = \frac{1}{3}(9.3) = 3.10 \text{ [m]}$$

Según lo anterior

$$y_k = L - d_k = 9.3 - 3.10 = 6.20 \text{ [m]}$$

La solución anterior la utilizaremos para resolver el inciso b. Para resolver dicho inciso observe primero el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.07.2.

Definimos primero un eje  $y'$  que es coplanar y ortogonal al eje  $y$ .

De la figura 2.07.2 y considerando los resultados obtenidos anteriormente, resulta la siguiente ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned} \sum M_O^{\curvearrowright} = 0 & \quad E(y_k) - R_{2y'}(L) = 0 \\ (1,297.35)(6.20) - R_{2y'}(9.3) & = 0 \\ R_{2y'} & = 864.9 \text{ [Ton}_f\text{]} \end{aligned}$$

Pero

$$R_2 = R_{2y'} \cos \alpha$$

De acuerdo a la figura 2.07.2

$$\cos \alpha = 9/9.3$$

Finalmente

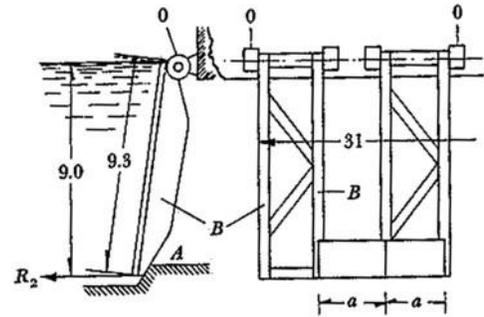
$$R_2 = 864.9 \left( \frac{9}{9.3} \right)$$

$$R_2 = 837 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Solución b)

Para poder resolver el inciso c) primero debemos considerar que cada una de las viguetas soportará la fuerza de empuje del agua sobre una columna de placas de ancho  $a = 1.8$  [m] tal como se observa en la figura 2.07.3. El enunciado del problema no menciona el número de viguetas que tendrá la estructura.

La fuerza de empuje total del agua  $E_a$  sobre la columna de placas de ancho  $a = 1.8$  [m] será



Problema 7

Figura 2.07.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

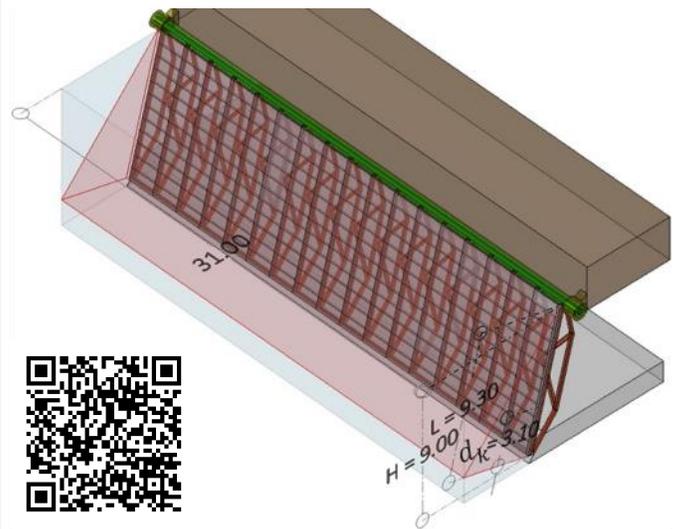


Figura 2.07.1. Diagrama del volumen de presiones. La figura presenta un sombreado en la modalidad de rayos X.

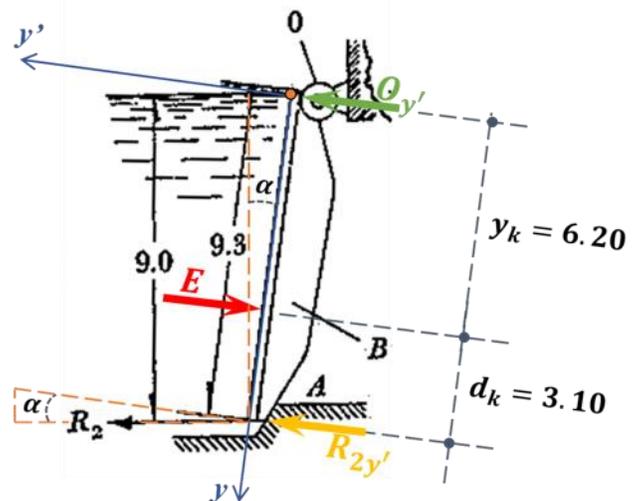


Figura 2.07.2. Diagrama de cuerpo libre de la compuerta.

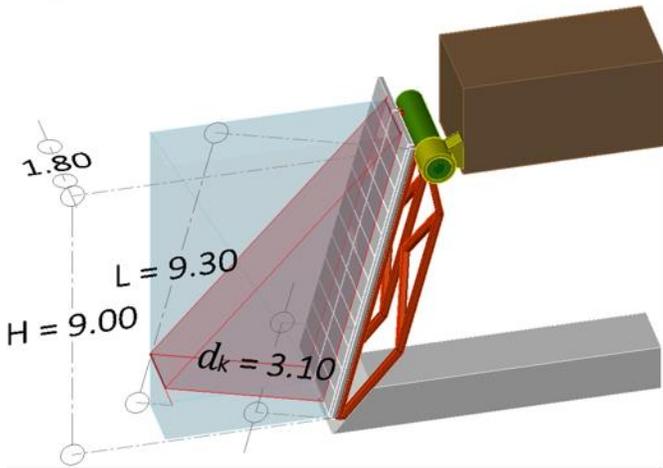


Figura 2.07.3. Diagrama del volumen de presiones que actúa sobre el área de influencia, de la columna de placas de la compuerta.

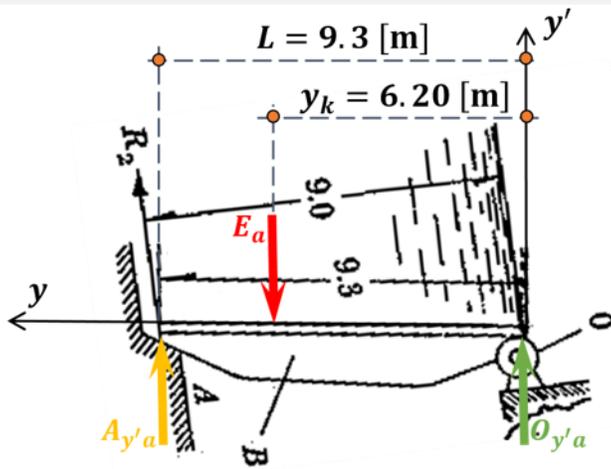


Figura 2.07.4. Diagrama de cuerpo libre referente al área de influencia de la columna de placas de la compuerta.

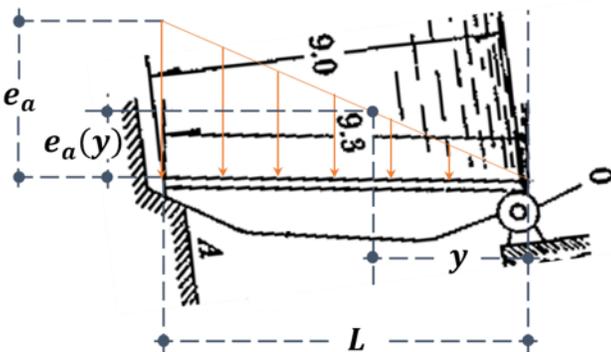


Figura 2.07.5. El procedimiento utilizado en este diagrama es conocido como Teorema de Tales.

$$E_a = \frac{1}{2}(\gamma H)La = \frac{1}{2}(1,000 \cdot 9.0)(9.3)(1.8) = 75.33 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Con éste último resultado ya podremos calcular el valor numérico de las reacciones  $O_{y'a}$  y  $A_{y'a}$  (figura 2.07.4)

Del diagrama de cuerpo libre de la figura 2.07.4 nos resultan las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_{y'} = 0 \quad A_{y'a} + O_{y'a} = E_a \quad \dots 01)$$

$$\begin{aligned} \sum M_{O'}^+ = 0 \quad & E_a y_k - A_{y'a}(L) = 0 \\ & (75.33)(6.20) - A_{y'a}(9.3) = 0 \\ & A_{y'a} = 50.22 \text{ [Ton}_f\text{]} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor numérico de  $A_{y'a}$  en 01) tenemos que

$$\begin{aligned} O_{y'a} &= 75.33 - 50.22 \\ O_{y'a} &= 25.11 \text{ [Ton}_f\text{]} \end{aligned}$$

Los valores calculados de  $A_{y'a}$  y  $O_{y'a}$  serán de utilidad para formular la ecuación de momento flexionante que se calculará más adelante.

Procedemos ahora a calcular la fuerza de empuje total distribuida sobre la placa de ancho  $a$  por unidad de longitud  $y$ , a la que llamaremos  $e_a$

$$\begin{aligned} e_a &= (\gamma H)B = (1,000 \cdot 9)(1.8) \\ e_a &= 16.2 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right] \end{aligned}$$

El valor de  $e_a$  anterior nos servirá para calcular la fuerza de empuje total distribuida como función de la distancia  $y$  con respecto al punto  $O$ .

Para realizar lo anterior definimos una regla de tres basándonos en el teorema de Tales, es decir

$$\begin{aligned} \frac{e_a}{L} &= \frac{e_a(y)}{y} \\ e_a(y) &= \frac{e_a}{L}y = \frac{16.2}{9.3}y \\ e_a(y) &= 1.742y \end{aligned}$$

Para que le sea más entendible el procedimiento, observe el diagrama de la figura 2.07.5.

Tenga cuidado con la expresión  $e_a(y)$ , dicha expresión no es el producto de  $e_a$  y  $y$  sino que es la función  $e_a$  respecto de la variable  $y$ .

Para que podamos encontrar la ecuación del diagrama de momentos necesitaremos calcular ahora la fuerza de empuje total como función de la distancia  $y$  (considerando que  $e_a(y)$  es una carga distribuida triangular), es decir

$$\begin{aligned} E_a(y) &= \frac{1}{2}y \cdot e_a(y) = \frac{1}{2}y \cdot (1.742y) \\ E_a &= 0.872y^2 \end{aligned}$$

De igual modo la expresión  $E_a(y)$ , no es el producto de  $E_a$  y  $y$  sino que es la función  $E_a$  respecto de la variable  $y$ , note también la diferencia entre las funciones  $e_a(y)$  y  $E_a(y)$ , la primer función, es la fuerza de empuje total *distribuida* a una distancia  $y$  y la segunda, es la fuerza de empuje total *concentrada* a una distancia  $y$ , ambas respecto al punto  $O$ .

Para entender el cálculo de  $E_a(y)$  observe de nuevo la figura 2.07.5, note que el valor de  $E_a(y)$  es igual al área del diagrama de cargas, dicha área corresponde al triángulo mostrado cuya base es  $y$  y su altura es la función  $e_a(y)$ . Es por eso que  $E_a(y) = \frac{1}{2}y \cdot e_a(y)$ .

Recuerda que el área de un triángulo es, un medio de su base por su altura.

Ahora vamos a analizar una sección de la vigueta para encontrar la función de momento. Basándonos en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.07.6, nos resulta la siguiente ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned} \sum M_C^{+} = 0 & \quad -M - E_a(y) \cdot \frac{1}{3}y + O_{y'a} \cdot y = 0 \\ M & = O_{y'a} \cdot y - E_a(y) \cdot \frac{y}{3} \end{aligned}$$

Recordando los valores obtenidos anteriormente

$$\begin{aligned} O_{y'a} & = 25.11 \text{ [Ton}_f\text{]} \\ E_a(y) & = 0.872y^2 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned} M & = 25.11y - 0.872y^2 \cdot \frac{y}{3} \\ M & = 25.11y - 0.291y^3 \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la función de momento flexionante que queríamos calcular.

La gráfica que resulta de la ecuación anterior se vería como se muestra en la figura 2.07.7.

Según la Referencia 2 p. 355, podremos calcular el momento máximo, considerando que se tendrá un valor máximo del momento cuando

$$\frac{dM}{dy} = 0$$

Aplicando este criterio para la ecuación antes obtenida

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d(25.11y - 0.291y^3)}{dy} = 25.11 - 0.873y^2 = 0$$

Resolviendo respecto a  $y$

$$y = \sqrt{\frac{25.11}{0.873}} = 5.363 \text{ [m]}$$

Con este valor de  $y$  finalmente tenemos que el valor del momento máximo de flexión sobre la vigueta es

$$M = 25.11(5.363) - 0.291(5.363)^3$$

$$M = 89.78 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$$

Solución c)

Finalmente, se muestran dos representaciones en tercera dimensión de la compuerta (figura 2.07.8 y figura 2.07.9).

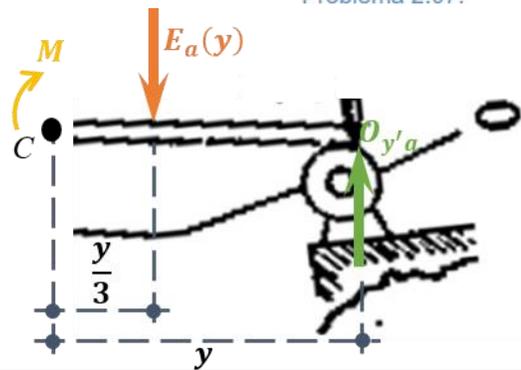


Figura 2.07.6. Se muestra una sección de la viga en estudio con el fin de obtener la función de momento flexionante.

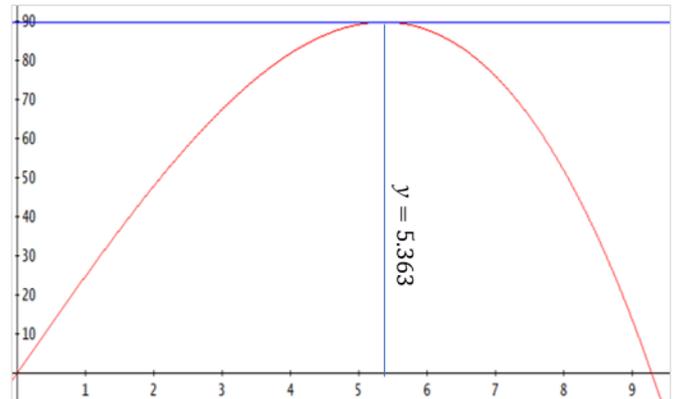


Figura 2.07.7. Se muestra en color rojo el gráfico de la función momento flexionante, en azul se muestra la recta  $M(y) = 89.78$ .

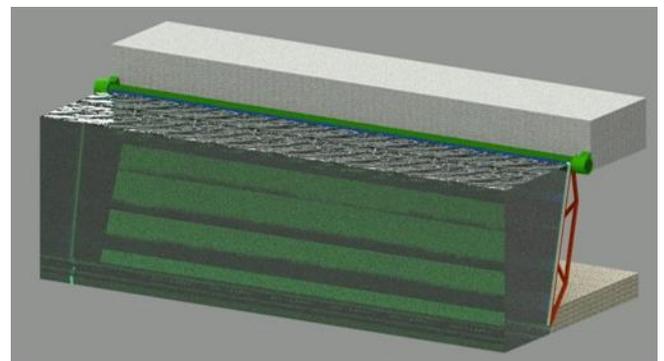


Figura 2.07.8. Se muestra una representación en tercera dimensión de la compuerta que se menciona en el problema.

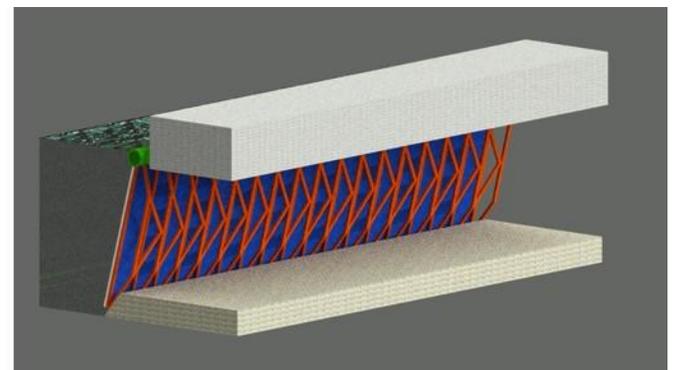
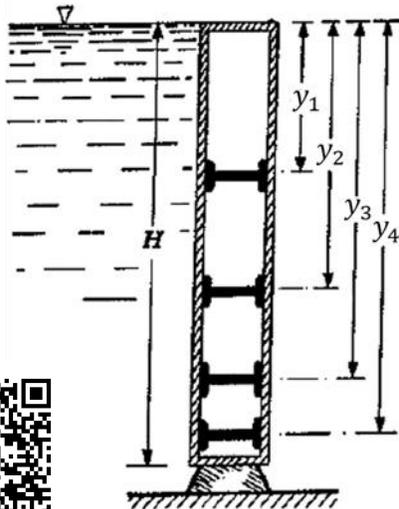


Figura 2.07.9. Se muestra otra representación en tercera dimensión de la compuerta que se menciona en el problema.



Problema 9

Figura 2.09.a. Se muestra el dibujo original adaptado del enunciado

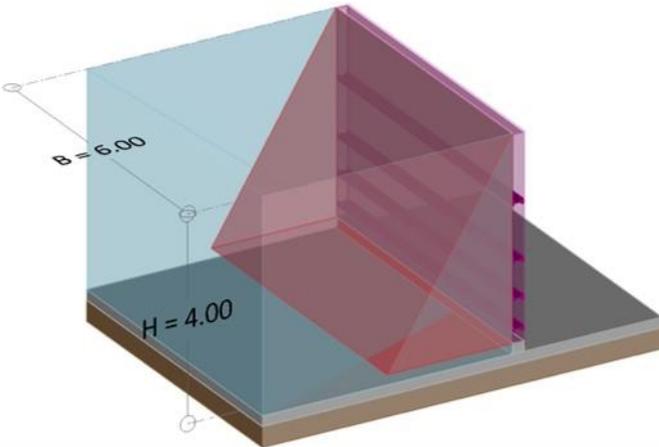


Figura 2.09.1. Diagrama del volumen de presiones. En la figura solo se acotan la altura y la base, dado que no piden el valor  $y_k$ .

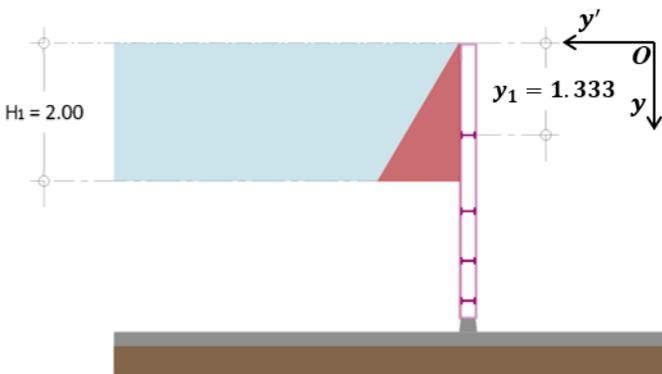


Figura 2.09.2. Diagrama del volumen de presiones para una altura de contacto hipotética  $H_1 = 2.00$  [m].

**Nota**

Si tienes dudas respecto a cómo calcular el centroide de un triángulo, revisa la Referencia 2 p. 455.

**Problema 2.09.**

La compuerta rectangular —mostrada en la figura— tiene las dimensiones  $H = 4$  [m] y  $B = 6$  [m] (ancho) y sirve para contener el agua en un recipiente. Determinar la magnitud  $E$  del empuje total debido al agua; la profundidad  $y$  a que deben colocarse las viguetas para que soporten el empuje de manera que se distribuya con la misma intensidad; por último, el momento flexionante  $M$  de cada vigueta suponiendo que se encuentran sólo apoyadas en sus extremos.

**Solución**

Primero obtenemos el empuje total sobre la compuerta basándonos en el diagrama del volumen de presiones de la figura 2.09.1 (pintado de rojo), es decir

$$E = \frac{1}{2}(\gamma H)HB = \frac{1}{2}(1,000 \cdot 4)(4)(6) = 48,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

|                                 |             |
|---------------------------------|-------------|
| $E = 48 \text{ [Ton}_f\text{]}$ | Solución a) |
|---------------------------------|-------------|

Dado que queremos dividir el empuje hidrostático en 4 partes para cada una de las viguetas, entonces el empuje individual para cada vigueta es

$$E_{\text{individual}} = \frac{E}{4} = \frac{48}{4} = 12 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Es decir

$$E_{\text{individual}} = E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 12 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Para la primera vigueta debemos tener, como lo dice el problema, un empuje de  $12 \text{ [Ton}_f\text{]}$ . Para encontrar a qué altura tendremos un empuje de dicha magnitud, basta con despejar la altura  $H_1$  de la ecuación que genera el volumen del prisma de presiones de la figura 2.09.2, es decir

$$E_1 = \frac{1}{2}(\gamma H_1)H_1B$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(\gamma H_1^2)B$$

Despejando  $H_1$  de la ecuación anterior y recordando que  $E_1 = 12 \text{ [Ton}_f\text{]} = 12,000 \text{ [kg}_f\text{]}$ , tenemos que

$$H_1 = \left[ \frac{E_1(2)}{\gamma B} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{12,000(2)}{1,000(6)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$H_1 = 2 \text{ [m]}$$

Definimos también un eje  $y'$  que es coplanar y ortogonal al eje  $y$ .

Una vez que hemos encontrado la altura de agua que soportará la primer vigueta, solo nos resta conocer, dónde tendremos que colocarla para que cumpla las condiciones mencionadas, es decir, que la presión sea igual a  $E_1 = 12 \text{ [Ton}_f\text{]}$ . Dicha posición de la vigueta corresponde precisamente al centro de presiones  $y_{k1}$  que de acuerdo a los ejes coordenados lo llamaremos  $y_1$ . El centro de presiones lo podemos calcular fácilmente sabiendo que dicho punto coincide exactamente con el centroide correspondiente al área que forma el prisma de presiones de la figura 2.09.2, es decir

$$y_{k1} = y_1 = \frac{2}{3}H_1 = \frac{2}{3}(2) = 1.333 \text{ [m]}$$

|                           |             |
|---------------------------|-------------|
| $y_1 = 1.333 \text{ [m]}$ | Solución b) |
|---------------------------|-------------|

Note que estamos sustituyendo el valor de la fuerza de presión en  $\text{kg}_f$  y no en  $\text{Ton}_f$ , esto para que sea consistente con las demás unidades.

Utilizando el mismo procedimiento anterior podremos calcular los valores faltantes. Para el caso de  $y_2$  primero calcularemos la fuerza de presión en términos de las alturas  $H_1$  y  $H_2$  basándonos en el prisma de presiones que se muestra en la figura 2.09.3 (lea la nota color púrpura), es decir

$$E_2 = \frac{1}{2} [\gamma(H_1 + H_2) + \gamma H_1] H_2 B = \frac{1}{2} \gamma (2H_1 + H_2) H_2 B$$

Recordando que,  $E_2 = 12,000 \text{ [kg}_f]$ , que  $H_1 = 2 \text{ [m]}$  y que  $B = 6 \text{ [m]}$ , tenemos que

$$E_2 = \frac{1}{2} \gamma (2H_1 + H_2) H_2 B = \frac{1}{2} (1,000) (2 \cdot 2 + H_2) H_2 (6)$$

$$12,000 = \frac{1}{2} (1,000) (2 \cdot 2 + H_2) H_2 (6)$$

Simplificando la ecuación anterior, tenemos

$$(3,000)(4 + H_2)H_2 = 12,000$$

$$(4 + H_2)H_2 = 4$$

$$H_2^2 + 4H_2 - 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$H_2 = 0.828 \text{ [m]}$$

Una vez conocido el valor de  $H_2$  solo nos resta encontrar el punto de aplicación de la fuerza de empuje  $E_2 = 12,000 \text{ [kg}_f]$ . La posición de  $y_{k2} = y_2$  coincide exactamente con el centroide correspondiente al área que forma el prisma de presiones que se muestra en la figura 02.09.3, por otro lado, el centroide de un trapecio se puede calcular con la siguiente ecuación (vea la figura 2.09.4 como referencia)

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \left( \frac{2b + a}{b + a} \right) \quad \dots 01$$

Para este problema en particular, los valores de  $\bar{y}$ ,  $h$ ,  $b$  y  $a$  serían equivalentes a los siguientes valores

$$\bar{y} = y_2 - H_1$$

$$h = H_2$$

$$b = H_1 + H_2$$

$$a = H_1$$

Sustituyendo todos los valores anteriores en la ecuación 01)

$$y_2 - H_1 = \frac{H_2}{3} \left[ \frac{2(H_1 + H_2) + H_1}{(H_1 + H_2) + H_1} \right]$$

Despejando  $y_2$

$$y_2 = \frac{H_2}{3} \left( \frac{2(H_1 + H_2) + H_1}{(H_1 + H_2) + H_1} \right) + H_1 \quad \dots 02$$

Los valores de  $H_1 = 2 \text{ [m]}$  y  $H_2 = 0.828 \text{ [m]}$  ya han sido calculados, solo resta sustituirlos en la ecuación 02), finalmente tenemos que

$$y_2 = \frac{0.828}{3} \left( \frac{2(2 + 0.828) + 2}{(2 + 0.828) + 2} \right) + 2 = 2.438 \text{ [m]}$$

$$y_2 = 2.438 \text{ [m]}$$

Solución c)

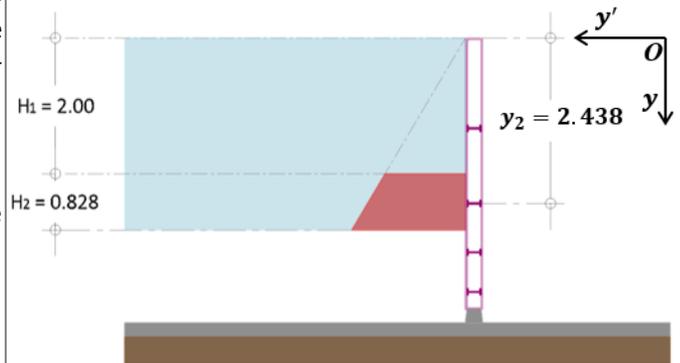


Figura 2.09.3. Diagrama del volumen de presiones para una altura de contacto hipotética  $H_2 = 0.828 \text{ [m]}$ .

| Figura | Nombre   | Área                       |
|--------|----------|----------------------------|
|        | Trapecio | $A = \frac{1}{2} (B + b)h$ |

Tabla 1.a. Área de un trapecio.

**Nota**

Para el cálculo de  $E_2$  primero necesitamos tener claro que el prisma de presiones respectivo es un prisma trapezoidal.

De acuerdo a la Tabla 1.a las dimensiones del trapecio en el prisma trapezoidal son las siguientes.

$$B = \gamma(H_1 + H_2)$$

$$b = \gamma H_1$$

$$h = H_2$$

Con la aclaración anterior, podremos ahora entender mejor cómo se obtuvo  $E_2$ .

Para las fuerzas de presión  $E_3$  y  $E_4$  se utilizará un procedimiento similar al utilizado al calcular la fuerza de presión  $E_2$ .

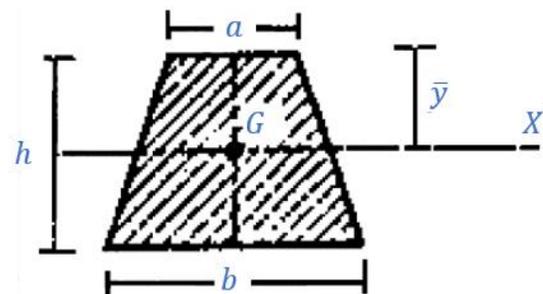


Figura 2.09.4. En la imagen están acotados los valores necesarios para calcular el centroide de un trapecio generalizado.

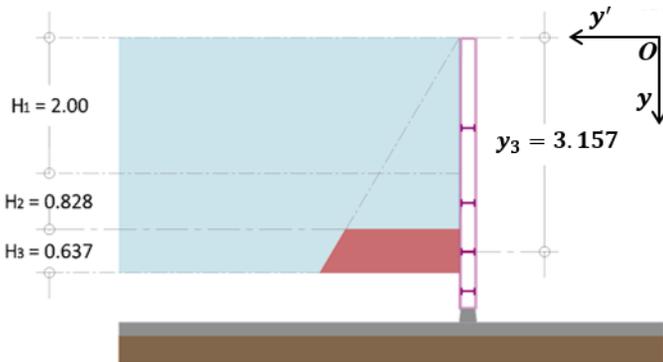


Figura 2.09.5. Diagrama del volumen de presiones para una altura de contacto hipotética  $H_3 = 0.828$  [m].

**Nota**

Para el cálculo de  $y_3$  según la ecuación para el cálculo del centroide de un trapecio

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \left( \frac{2b + a}{b + a} \right)$$

Los valores equivalentes del prisma de presiones en el trapecio según la figura 2.09.4 son

$$b = H_1 + H_2 + H_3; a = H_1 + H_2; h = H_3; \bar{y} = y_3 - (H_1 + H_2)$$

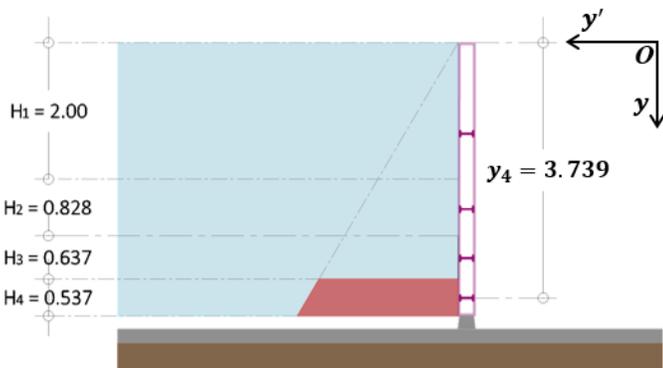


Figura 2.09.6. Diagrama del volumen de presiones para una altura de contacto hipotética  $H_4 = 0.537$  [m].

Análogamente, para el caso de  $y_3$  primero calcularemos la presión en términos de las alturas  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  basándonos en el prisma de presiones que se muestra en la figura 2.09.5, es decir

$$E_3 = \frac{1}{2} [\gamma(H_1 + H_2 + H_3) + \gamma(H_1 + H_2)] H_3 B$$

Realizando las respectivas operaciones y recordando que  $E_3 = 12,000$  [kg<sub>f</sub>],  $B = 6$  [m], podemos reducir la ecuación anterior, de modo que

$$E_3 = \frac{1}{2} \gamma [(H_1 + H_2 + H_3) + (H_1 + H_2)] H_3 B$$

$$E_3 = \frac{1}{2} \gamma [2H_1 + 2H_2 + H_3] H_3 B$$

$$12,000 = \frac{1}{2} \gamma [2(H_1 + H_2) + H_3] H_3 B$$

$$12,000 = \frac{1}{2} 1,000 [2(2 + 0.828) + H_3] 6 H_3$$

$$12,000 = 3,000 [2(2.823) + H_3] H_3$$

$$4 = [2(2.823) + H_3] H_3$$

$$H_3^2 + 5.646 H_3 - 4 = 0$$

Finalmente resulta una ecuación de segundo grado, cuya solución es

$$H_3 = 0.637 \text{ [m]}$$

Para encontrar la distancia  $y_3$  seguiremos el mismo procedimiento que utilizamos para encontrar la distancia  $y_2$ , es decir encontraremos primero el centroide del área del prisma de presiones que se muestra en la figura 2.09.5.

El centroide referenciado al punto  $O$  (el origen de coordenadas) será entonces (revise la nota de la izquierda)

$$y_3 - (H_1 + H_2) = \frac{H_3}{3} \left( \frac{2(H_1 + H_2 + H_3) + (H_1 + H_2)}{(H_1 + H_2 + H_3) + (H_1 + H_2)} \right) \dots 03$$

Los valores de  $H_1$ ,  $H_2$  y  $H_3$  ya han sido calculados, solo resta sustituirlos en la ecuación anterior, despejando  $y_3$  de la ecuación 03 y recordando que

$$H_1 + H_2 = 2 + 0.828 = 2.828$$

Finalmente tenemos que

$$y_3 = \frac{0.637}{3} \left( \frac{2(2.828 + 0.637) + 2.828}{(2.828 + 0.637) + 2.828} \right) + 2.828$$

$$y_3 = 0.212(1.551) + 2.828 = 3.157 \text{ [m]}$$

$$y_3 = 3.157 \text{ [m]}$$

Solución d)

Para el caso de  $y_4$  seguiremos el mismo procedimiento utilizado para hallar  $y_2$  y  $y_3$ , es decir calculamos primero  $E_4$  y después  $y_4$ .

Basándonos en la figura 2.09.6 tenemos que

$$E_4 = \frac{1}{2} [\gamma(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + \gamma(H_1 + H_2 + H_3)] H_4 B$$

$$E_4 = \frac{1}{2} \gamma [2(H_1 + H_2 + H_3) + H_4] H_4 B$$

Recordando que  $E_4 = 12,000$  [kg<sub>f</sub>],  $H_1 + H_2 = 2.828$  y  $H_3 = 0.637$

$$12,000 = 3000 [2(2.828 + 0.637) + H_4] H_4$$

$$[2(3.46) + H_4] H_4 = 4$$

$$H_4^2 + 6.92 H_4 - 4 = 0$$

Finalmente resulta una ecuación de segundo grado, cuya solución es

$$H_4 = 0.537 \text{ [m]}$$

Para encontrar la distancia  $y_4$  seguiremos el mismo procedimiento que hemos estado utilizando, es decir, encontraremos primero el centroide del área del prisma de presiones que se muestra en la figura 2.09.6.

El centroide referenciado al punto  $O$  será entonces

$$y_4 = \frac{H_4}{3} \left( \frac{2(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + (H_1 + H_2 + H_3)}{(H_1 + H_2 + H_3 + H_4) + (H_1 + H_2 + H_3)} \right) + (H_1 + H_2 + H_3)$$

$$y_4 = \frac{H_4}{3} \left( \frac{3(H_1 + H_2 + H_3) + 2H_4}{2(H_1 + H_2 + H_3) + H_4} \right) + (H_1 + H_2 + H_3)$$

Los valores de  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y  $H_4$  ya han sido calculados, solo resta sustituirlos en la ecuación anterior, finalmente tenemos que

$$H_1 + H_2 + H_3 = 2 + 0.828 + 0.637 = 3.465 \text{ [m]}$$

Entonces

$$y_4 = \frac{0.537}{3} \left( \frac{3(3.465) + 2(0.537)}{2(3.465) + 0.537} \right) + (3.465)$$

$$y_4 = 0.179(1.536) + (3.465) = 3.739 \text{ [m]}$$

$$y_4 = 3.739 \text{ [m]}$$

Solución e)

En la figura 2.09.7 se muestra un resumen de todas las distancias calculadas.

Para encontrar el momento flexionante  $M$  de cada vigueta (suponiendo que se encuentran sólo apoyadas en sus extremos, en los puntos  $A$  y  $B$ ), primero debemos recordar que cada vigueta soporta la misma fuerza de empuje  $E = 12,000 \text{ [kg}_f]$ , por tanto el momento flexionante es el mismo para cada una de las viguetas. El diagrama de cuerpo libre de la vigueta se muestra en la figura 2.09.8.

Considerando lo anterior, resultan las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_y = 0 \quad A_{y'} + B_{y'} = E \quad \dots 01)$$

$$\sum M_A^{\curvearrowright} = 0 \quad -E \left( \frac{B}{2} \right) + B_{y'}(B) = 0$$

$$-(12,000) \left( \frac{6}{2} \right) + B_{y'}(6) = 0$$

$$B_{y'} = 6,000 \text{ [kg}_f]$$

Sustituyendo el valor numérico de  $B_{y'}$  en 01) tenemos que

$$A_{y'} = 12,000 - 6,000 = 6,000 \text{ [kg}_f]$$

El punto  $C$  que se muestra en la figura 2.09.9 es un punto arbitrario a una distancia  $x$  con respecto al punto  $B$ , no confunda el punto  $B$  con el ancho  $B$  de las viguetas de la compuerta.

Analizando ahora una sección de la vigueta, nos resultan las siguientes ecuaciones (vea la figura 2.09.9 como referencia)

$$\sum M_C^{\curvearrowright} = 0 \quad -M - E(x) \cdot \frac{1}{2}x + B_{y'} \cdot x = 0$$

$$M = B_{y'} \cdot x - E(x) \cdot \frac{x}{2}$$

$$M = 6,000x - (2,000x) \cdot \frac{x}{2}$$

$$M = 6000x - 1000x^2$$

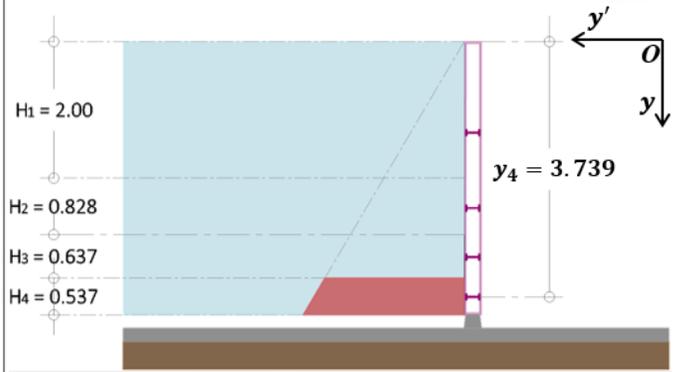


Figura 2.09.6 (repetida). Diagrama del volumen de presiones para una altura de contacto hipotética  $H_4 = 0.537$  [m].

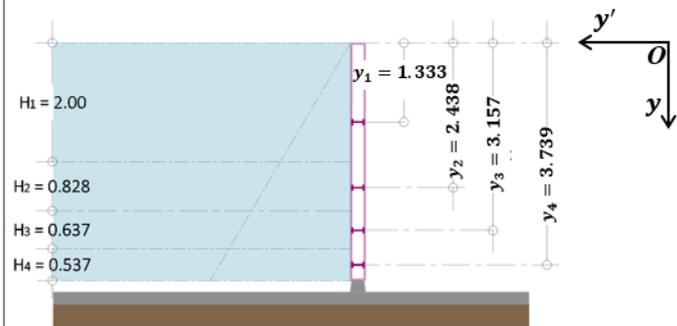


Figura 2.09.7. Se muestra un resumen con todas las dimensiones que se calcularon tanto para  $H$  como para  $y$ .

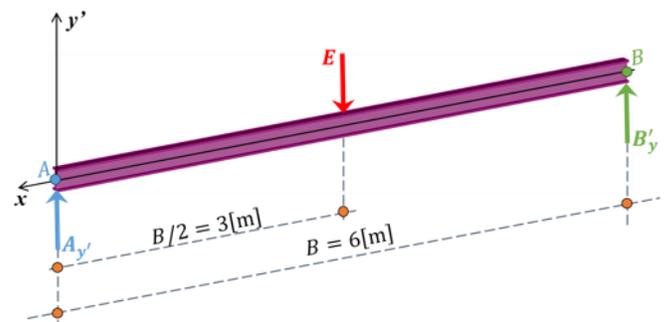


Figura 2.09.8. Diagrama de cuerpo libre de una de las vigas de la compuerta, la dirección de los ejes coordenados se mantiene.

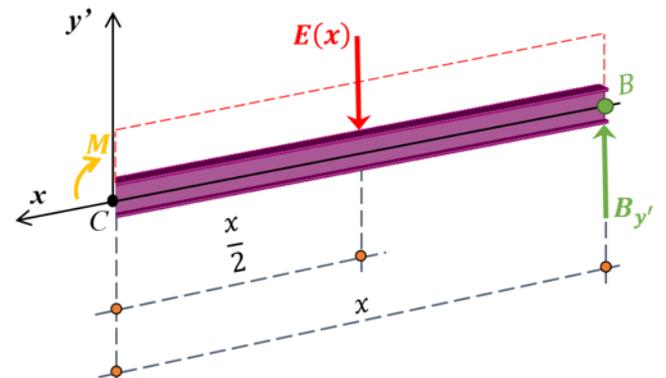


Figura 2.09.9. Diagrama de cuerpo libre para una sección de una de las vigas de la compuerta. Las líneas discontinuas de color rojo indican la presencia de una carga distribuida.

**Nota**

Recuerde que el punto de aplicación de una fuerza concentrada, originada por una carga distribuida rectangular, se encuentra exactamente a la mitad de toda la longitud donde está aplicada dicha carga. Revise la Referencia 2 p. 183–184, para mayor claridad.

**Nota**

Observe que  $E(x)$  no es el producto del empuje  $E$  y  $x$ , sino que es la función del empuje  $E$  respecto a la variable independiente  $x$ .

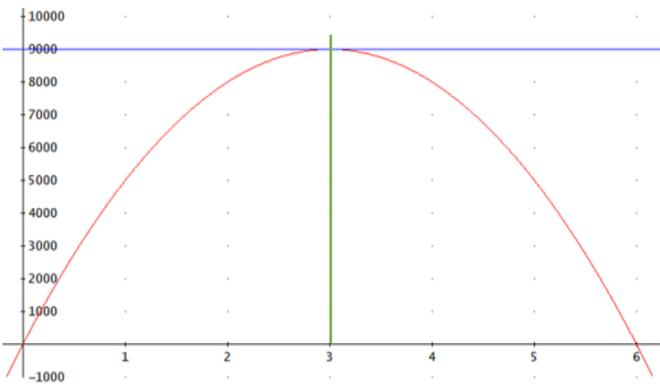


Figura 2.09.10. Se muestra en color rojo el gráfico de la función momento flexionante  $M(x)$ , en color azul se muestra la recta  $M(x) = 9,000$  y en verde la recta  $x = 3$ .

Esta última ecuación es la función de momento flexionante que estábamos buscando.

La gráfica que resulta de la ecuación anterior se vería como se muestra en la figura 2.07.10.

Podremos calcular el momento máximo, considerando que se tendrá un valor máximo del momento cuando (Referencia 2 p. 355)

$$\frac{dM}{dx} = 0$$

Aplicando este criterio para la ecuación antes obtenida

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d(6,000x - 1,000x^2)}{dx} = 6,000 - 2,000x = 0$$

Resolviendo respecto a  $x$

$$x = \frac{6,000}{2,000} = 3.00 \text{ [m]}$$

Con este valor de  $x$  finalmente tenemos que el valor del momento máximo de flexión sobre la vigueta es

$$M = 6,000(3) - 1,000(3^2)$$

$$M = 18,000 - 9,000$$

$$M = 9,000 \text{ [kg}_f \cdot \text{m]}$$

$$M = 9 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$$

Solución f)

### Problema 2.11.

Un ducto rectangular de dimensiones  $H \times C$  se proyecta construir en una presa para alimentar una turbina. Para posibles reparaciones del propio ducto o de la turbina es necesario obtener el ducto con una serie de viguetas especiales de medidas  $h \times B = 1.2 \times 3.4$  [m], cada una de ellas provistas de 2 pares de rodillos en sus extremos.

- Determinar las fuerzas de empuje hidrostático del agua,  $E_1$  y  $E_7$ , sobre la primera y séptima vigueta, así como el momento flexionante en las mismas.
- Determinar las distancias  $\Delta h_1$  y  $\Delta h_7$  entre el centro de presiones y el centro de gravedad para la primera y séptima viguetas

#### Solución

Primero obtenemos el empuje que se ejerce sobre la vigueta 1 basándonos en el diagrama del volumen de presiones de la figura 2.11.1 (pintado de rosa), es decir

$$E_1 = \frac{1}{2}(\gamma h)hB = \frac{1}{2}(1,000 \cdot 1.2)(1.2)(3.4) = 2,448 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$E_1 = 2.448 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Para obtener el momento máximo de flexión en la vigueta, supondremos que está simplemente apoyada. En esta ocasión, determinaremos el momento máximo de forma analítica, con el objetivo de simplificar los cálculos en problemas similares en el futuro.

Para lograr esto, analizaremos una vigueta cualquiera, como la que se muestra en la figura 2.11.2. A partir de ahí, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio.

$$\sum F_y = 0 \quad A_{y'} + B_{y'} = E \quad \dots 01)$$

$$\sum M_A^{+} = 0 \quad -E\left(\frac{B}{2}\right) + B_{y'}(B) = 0$$

$$B_{y'}(B) = E\left(\frac{B}{2}\right)$$

$$B_{y'} = \frac{E}{2}$$

Sustituyendo el valor de  $B_{y'}$  en 01) tenemos que

$$A_{y'} = E - \frac{E}{2} = \frac{E}{2}$$

Vamos a definir también a  $w$  como la carga distribuida que actúa sobre la vigueta y que es igual a

$$w = \frac{E}{B}$$

Es decir,  $w$  es igual a la carga concentrada  $E$  entre la longitud total de la vigueta (para este caso, dicho valor es  $B$ ).

Dicho lo anterior, la reacción  $B_{y'}$  sería igual a

$$B_{y'} = \frac{E}{2} = \frac{wB}{2}$$

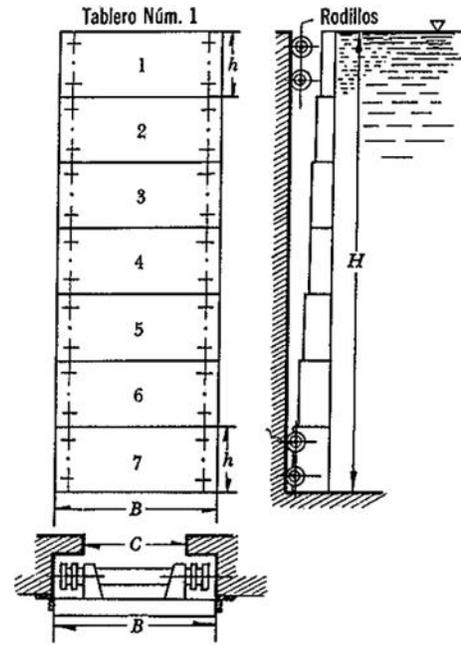


Figura 2.11.a. Se muestra el dibujo original adaptado del enunciado

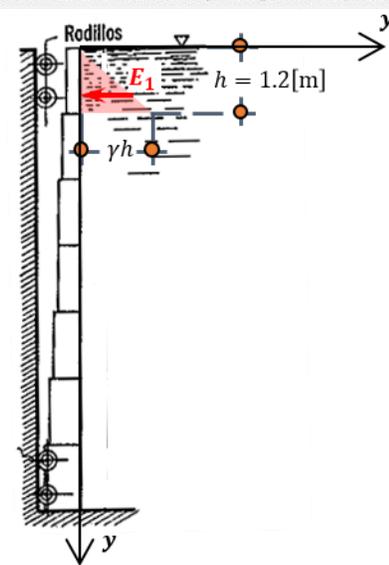


Figura 2.11.1. Se muestra el diagrama del prisma de presiones (prisma triangular) para el empuje  $E_1$

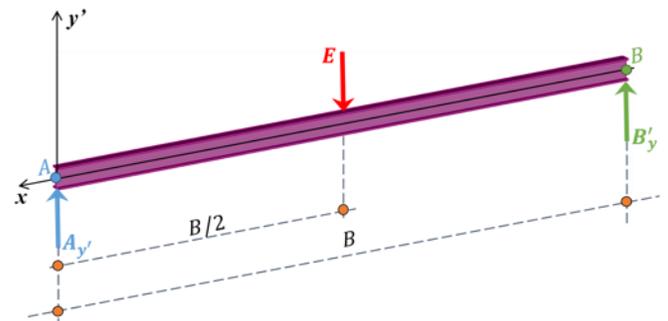


Figura 2.11.2. Diagrama de cuerpo libre de una de las viguetas de la compuerta, la dirección de los ejes coordenados se mantiene.

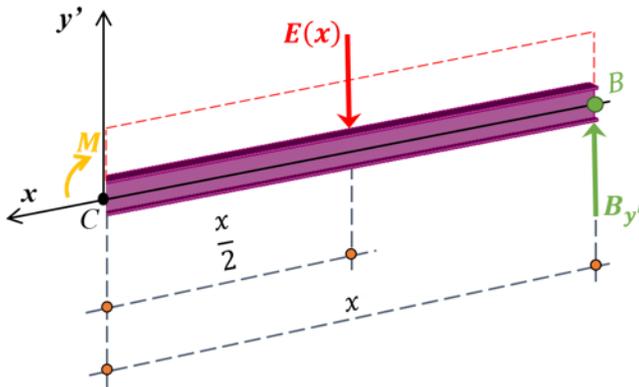


Figura 2.11.3. Diagrama de cuerpo libre para una sección de una las viguetas de la compuerta. Las líneas discontinuas de color rojo indican la presencia de una carga distribuida.

Definimos también a  $E(x)$  como la carga concentrada a cierta distancia  $x$  con respecto al punto  $C$  y que es igual a

$$E(x) = \frac{E}{B} x = \frac{wB}{B} x = wx$$

El punto  $C$  que se muestra en la figura 2.11.3 es un punto arbitrario a una distancia  $x$  con respecto al punto  $B$  (no confunda el punto  $B$  con el ancho  $B$  de las viguetas de la compuerta).

Considerando lo anterior y analizando ahora una sección de la vigueta, nos resultan las siguientes ecuaciones (vea la figura 2.11.3 como referencia)

$$\begin{aligned} \sum M_C^+ = 0 \quad & -M - E(x) \cdot \frac{1}{2}x + B_{y'} \cdot x = 0 \\ & M = B_{y'} \cdot x - E(x) \cdot \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores obtenidos anteriormente

$$\begin{aligned} M &= \frac{wB}{2} x - wx \frac{x}{2} \\ M &= \frac{wB}{2} x - \frac{w}{2} x^2 \quad \dots 02) \end{aligned}$$

Esta última ecuación es la ecuación de momento o función momento de la vigueta respecta a la variable  $x$ .

De acuerdo a la Referencia 2 p. 355, se tendrá un momento máximo cuando

$$\frac{dM}{dx} = 0$$

Aplicando este criterio en la ecuación 02), tenemos que

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d\left(\frac{wB}{2}x - \frac{w}{2}x^2\right)}{dx} = \frac{wB}{2} - wx = 0$$

Resolviendo respecto a  $x$

$$x = \frac{B}{2}$$

Con este valor de  $x$  y sustituyendo en la ecuación 02), finalmente tenemos que el momento máximo de flexión sobre la vigueta es

$$\begin{aligned} M_{\text{máx}} &= \frac{wB}{2} \left(\frac{B}{2}\right) - \frac{w}{2} \left(\frac{B}{2}\right)^2 = w \left(\frac{B^2}{4}\right) - \frac{w}{2} \left(\frac{B^2}{4}\right) = \frac{w}{2} \left(\frac{B^2}{4}\right) \\ M_{\text{máx}} &= \frac{wB^2}{8} \quad \dots 03) \end{aligned}$$

Ahora simplemente sustituimos  $w$  y  $B$  en la ecuación 03), recordando que

$$w = \frac{E_1}{B} = \frac{2.448}{3.4} = 0.72 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right]$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_{\text{máx}_1} &= \frac{0.72(3.4^2)}{8} \\ M_{\text{máx}_1} &= \mathbf{1.04 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}} \end{aligned}$$

A continuación calcularemos el empuje que se ejerce sobre la vigueta 7 basándonos en el diagrama del volumen de presiones de la figura 2.11.4 (pintado de rosa), es decir

$$\begin{aligned} E_7 &= \frac{1}{2} [7(\gamma h) + 6(\gamma h)] h B = \frac{1}{2} [13(\gamma h)] h B \\ E_7 &= \frac{1}{2} [13(1,000 \cdot 1.2)] 1.2(3.4) = 31,824 \text{ [kg}_f\text{]} \\ E_7 &= \mathbf{31.824 \text{ [Ton}_f\text{]}} \end{aligned}$$

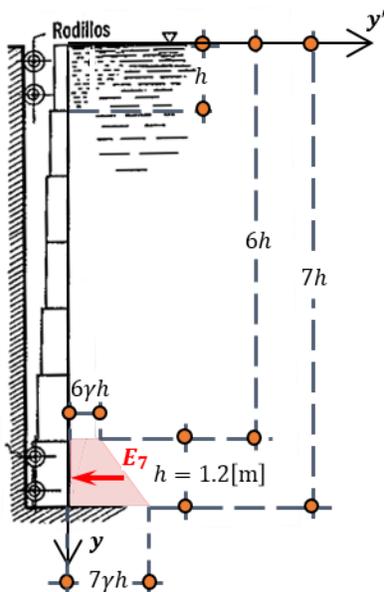


Figura 2.11.4. Se muestra el diagrama del prisma de presiones (prisma trapecial) para el empuje  $E_7$

Para calcular el momento de flexión máximo en la vigueta 7 ya no es necesario hacer el análisis completo desde cero, puesto que ya lo hicimos en la página anterior, ahora solo nos limitaremos a sustituir los valores respectivos en la ecuación 03), es decir

Siendo

$$w = \frac{E_7}{B} = \frac{31.824}{3.4} = 9.36 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right]$$

Entonces

$$M_{\text{máx}} = \frac{wB^2}{8}$$

$$M_{\text{máx}_7} = \frac{9.36(3.4^2)}{8}$$

$$M_{\text{máx}_7} = \mathbf{13.525 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}}$$

A continuación se muestra un resumen de los valores que nos pedía calcular el enunciado del problema

|   |             |
|---|-------------|
| $E_1 = 2.448 \text{ [Ton}_f]$<br>$M_1 = 1.04 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$<br>$E_7 = 31.824 \text{ [Ton}_f]$<br>$M_7 = 13.525 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$ | Solución a) |
|---|-------------|

Para el inciso b) nos piden encontrar la diferencia de alturas entre el centro de presiones  $y_k$  y el centro de gravedad  $y_G$  para la vigueta 1 y la vigueta 7.

Para ambos casos (vigueta 1 y vigueta 7) el valor de  $y_G$  es el mismo, puesto que las viguetas tienen las mismas dimensiones, es decir

$$y_G = \frac{h}{2} = \frac{1.2}{2} = 0.60 \text{ [m]}$$

Para la vigueta 1, en la figura 2.11.5 se muestra la ubicación de  $y_{k_1}$  y  $y_G$ . De acuerdo a la Referencia 1 p. 48 - 49, y al ser una placa rectangular que soporta una distribución de presiones triangular,  $y_{k_1}$  se calcula como

$$y_{k_1} = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}(1.2) = 0.80 \text{ [m]}$$

Entonces

$$\Delta h_1 = y_{k_1} - y_G = 0.80 - 0.60$$

$$\Delta h_1 = \mathbf{0.20 \text{ [m]}}$$

Para la vigueta 7, en la figura 2.11.6 se muestra la ubicación de  $y_{k_7}$ . De acuerdo a la Referencia 1 p. 48 - 49, al tratarse de una placa rectangular que soporta una distribución de presiones trapezoidal,  $y_{k_7}$  se calcula según la siguiente ecuación

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \left( \frac{2b + a}{b + a} \right) \quad \dots 04)$$

Los valores equivalentes del prisma de presiones en el trapezoid según la figura 2.11.7 son

$$\bar{y} = y_{k_7} - 6h; \quad h = h; \quad b = 7h; \quad a = 6h$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación 04)

$$y_{k_7} - 6h = \frac{h}{3} \left[ \frac{2(7h) + 6h}{7h + 6h} \right] = \frac{h}{3} \left( \frac{20h}{13h} \right) = \frac{h}{3} \left( \frac{20}{13} \right)$$

Despejando  $y_{k_7}$  de la ecuación anterior

$$y_{k_7} = \frac{h}{3} \left( \frac{20}{13} \right) + 6h$$

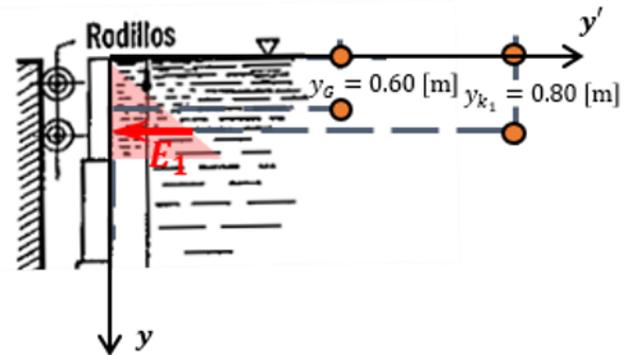


Figura 2.11.5. Se muestra la ubicación de  $y_G$  y  $y_{k_1}$  en la vigueta 1, observe que la figura de la compuerta ha sido recortada para mejorar la visualización.

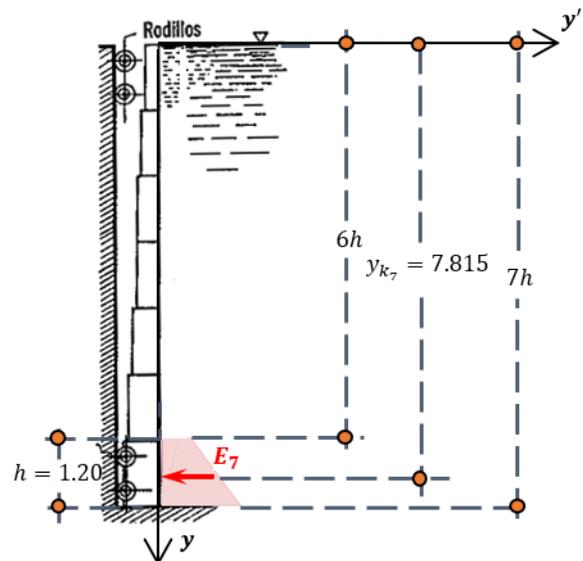


Figura 2.11.6. Se muestra la ubicación de la distancia  $y_{k_7}$  y todos los valores necesarios para obtener su valor.

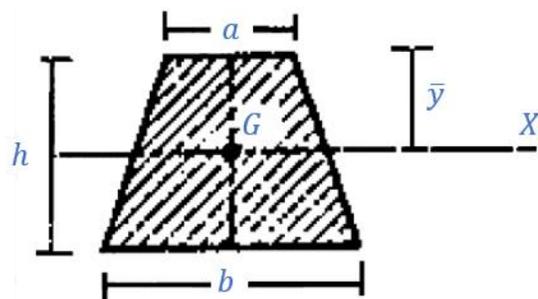


Figura 2.11.7. En la imagen están acotados los valores necesarios para calcular el centroide de un trapecio generalizado.

Sustituyendo valores

$$y_{k_7} = \frac{1.2}{3} \left( \frac{20}{13} \right) + 6(1.2) = 7.815 \text{ [m]}$$

En este caso, como estamos referenciando las distancias respecto al origen, el valor de  $y_G$  para la vigueta 7 será diferente, llamemos a este valor  $y_{G_7}$ , es decir

$$y_{G_7} = y_G + 6h = 0.60 + 6(1.2) = 7.80 \text{ [m]}$$

Finalmente, ya podremos calcular  $\Delta h_2$ , entonces

$$\Delta h_2 = y_{k_7} - y_{G_7} = 7.815 - 7.80$$

$$\Delta h_2 = \mathbf{0.015 \text{ [m]}}$$

A continuación se muestra un resumen de los valores que nos pedía calcular el enunciado del problema para el inciso b)

$$\Delta h_1 = 0.20 \text{ [m]}$$

$$\Delta h_2 = 0.015 \text{ [m]}$$

Solución a)

### Problema 2.13.

La compuerta que controla las descargas sobre un cimacio tiene una altura  $H = 6$  [m] y ancho  $B = 30$  [m]. En la parte superior tiene una compuerta giratoria superior que puede incrementar el nivel del agua en  $\Delta H = 1.5$  [m].

Determinar:

- Los empujes hidrostáticos horizontales  $E_1$  y  $E_2$  sobre la compuerta plana cuando se baje la compuerta giratoria y cuando ésta se levante;
- La distancia  $x$  entre los dos sistemas de rodillos, de tal manera que sea igual la fuerza sobre ellos cuando se baje la compuerta giratoria, siendo la distancia  $a = 0.2$  [m];

El peso total de la compuerta es  $W = 150$  [Ton<sub>f</sub>]; el diámetro,  $D = 0.6$  [m], de los rodillos,  $d = 0.3$  [m]; el coeficiente de fricción interna de los rodillos  $f = 0.01$ , el diámetro de los pernos  $d = 0.3$  [m];  $b = 0.1$  [m] y el ángulo  $\alpha = 120^\circ$ .

### Solución

Obtengamos el empuje  $E_1$  (recordando que  $B = 30$  [m]), basándonos en el diagrama del prisma de presiones triangular de la figura 2.13.1, de la siguiente manera

$$E_1 = \frac{1}{2} (6\gamma)(6)(30) = 540\gamma = 540(1,000) = 540,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$E_1 = 540 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Cuyo punto de aplicación estará a dos tercios de  $H$  con respecto al punto  $O$  (dado que la distribución de presiones es triangular), esta distancia es de hecho  $y_{k_1}$ , es decir

$$y_{k_1} = \frac{2}{3}H = \frac{2}{3}(6)$$

$$y_{k_1} = 4 \text{ [m]}$$

Para el empuje  $E_2$ , al ser una distribución de presiones trapezoidal, tenemos que (vea la figura 2.13.2)

$$E_2 = \frac{1}{2} (7.5\gamma + 1.5\gamma)(6)(30) = 810\gamma = 810(1,000) = 810,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$E_2 = 810 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

A continuación, se muestra un resumen de los valores hasta ahora obtenidos

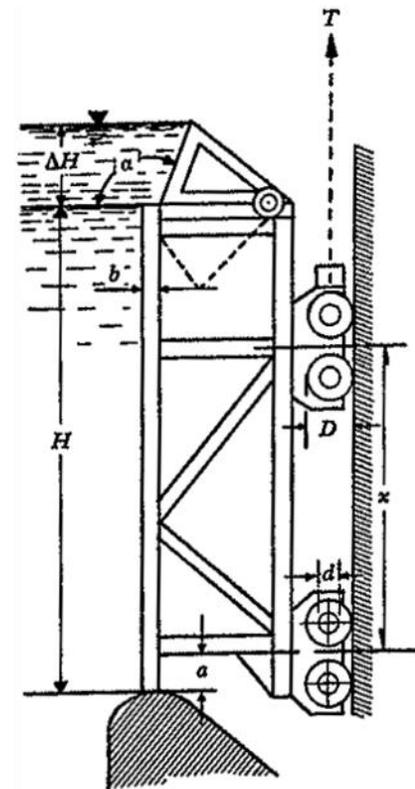
$$E_1 = 540 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

$$E_2 = 810 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Solución a)

De acuerdo a la Referencia 1 p. 48-49, al tratarse de una placa rectangular que soporta una distribución de presiones trapezoidal,  $y_{k_2}$  se calcula según la siguiente ecuación

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \left( \frac{2b + a}{b + a} \right) \quad \dots 01)$$



Problema 13

Figura 2.13.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

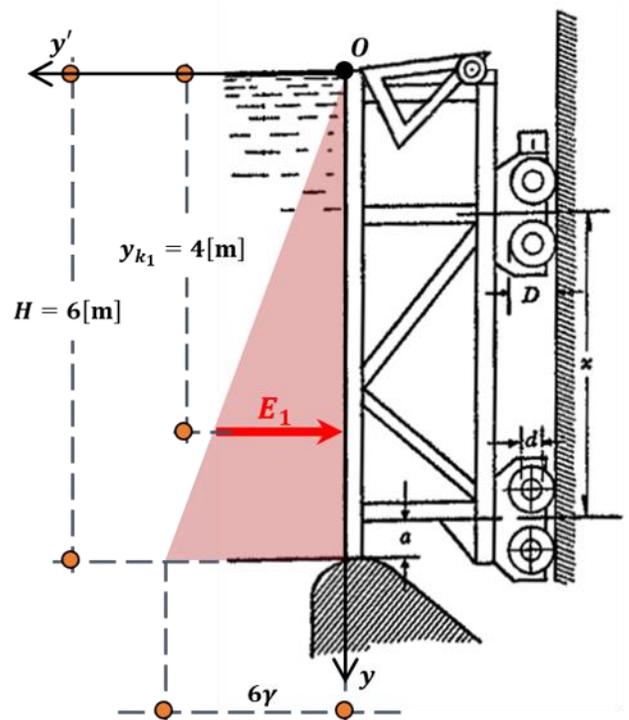


Figura 2.13.1. Se muestra la ubicación de  $y_k$  para el empuje  $E_1$

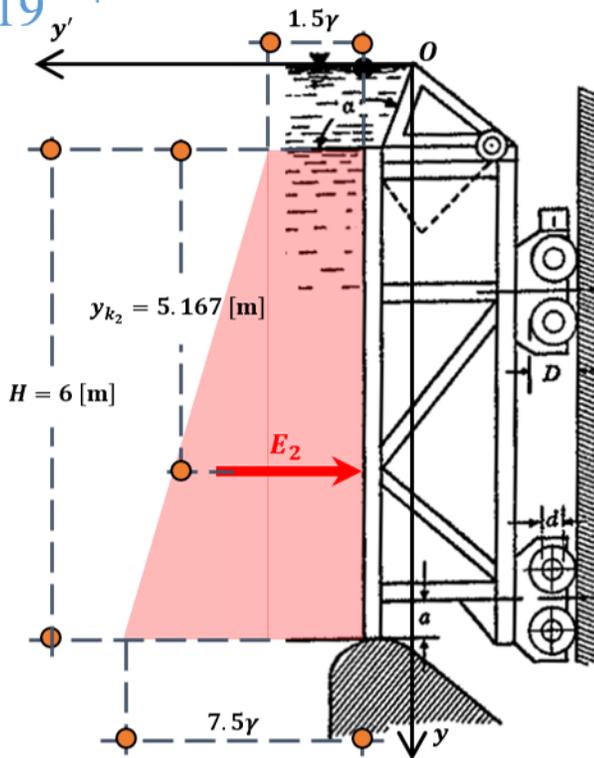


Figura 2.13.2. Se muestra la ubicación de  $y_k$  para el empuje  $E_2$

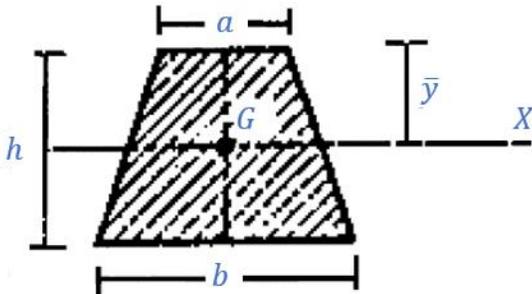


Figura 2.13.3. En la imagen están acotados los valores necesarios para calcular el centroide de un trapecio generalizado.

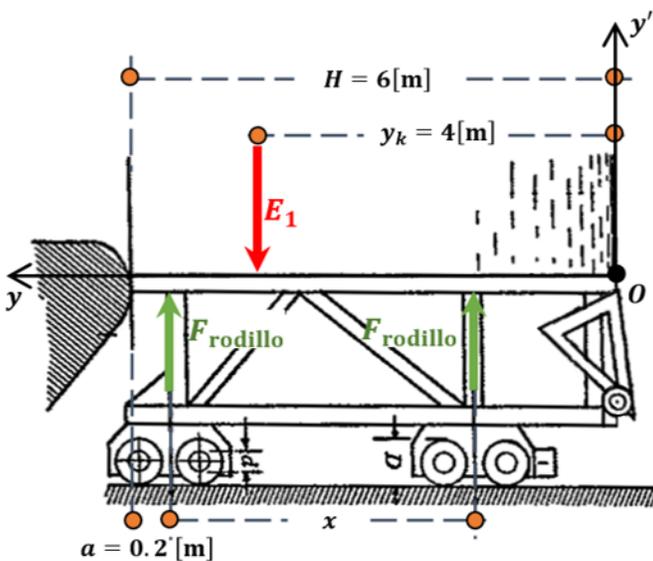


Figura 2.13.4. Note que el dibujo de la compuerta se ha rotado, para facilitar la comprensión del análisis de fuerzas.

Los valores equivalentes del prisma de presiones en el trapecio según la figura 2.13.3 son

$$\bar{y} = y_{k_2} - \Delta H; h = H; b = H + \Delta H; a = \Delta H$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación 01)

$$y_{k_2} - \Delta H = \frac{H}{3} \left[ \frac{2(H + \Delta H) + \Delta H}{(H + \Delta H) + \Delta H} \right] = \frac{H}{3} \left( \frac{2H + 3\Delta H}{H + 2\Delta H} \right)$$

Despejando  $y_{k_2}$  de la ecuación anterior

$$y_{k_2} = \frac{H}{3} \left( \frac{2H + 3\Delta H}{H + 2\Delta H} \right) + \Delta H = \frac{6}{3} \left[ \frac{2(6) + 3(1.5)}{6 + 2(1.5)} \right] + 1.5$$

$$y_{k_2} = 5.167 \text{ [m]}$$

Para el inciso b) nos piden calcular la distancia necesaria  $x$  para que la fuerza (llamemos a esa fuerza  $F_{\text{rodillo}}$ ) que soportan los rodillos sea la misma, una vez que la compuerta giratoria se ha bajado, es decir, cuando solo la compuerta plana recibe el empuje producido por el agua.

Para resolver lo anterior veamos primero la figura 2.13.4, de ahí se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_y = 0 \quad 2F_{\text{rodillo}} - E_1 = 0$$

$$F_{\text{rodillo}} = \frac{E_1}{2} = \frac{540}{2} = 270 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

$$\sum M_o^+ = 0 \quad -F_{\text{rodillo}}(6 - 0.2 - x) + E_1(4) - F_{\text{rodillo}}(6 - 0.2) = 0$$

$$-F_{\text{rodillo}}(5.8 - x) - F_{\text{rodillo}}(5.8) + E_1(4) = 0$$

$$F_{\text{rodillo}} \cdot x = 2F_{\text{rodillo}}(5.8) - E_1(4)$$

$$x = \frac{2F_{\text{rodillo}}(5.8) - E_1(4)}{F_{\text{rodillo}}} \quad \dots 02)$$

Sustituyendo los valores obtenidos anteriormente en la ecuación 02) tenemos que

$$x = \frac{2(270)(5.8) - 540(4)}{270} = \frac{972}{270}$$

$$x = 3.6 \text{ [m]}$$

Solución b)

### Problema 2.15.

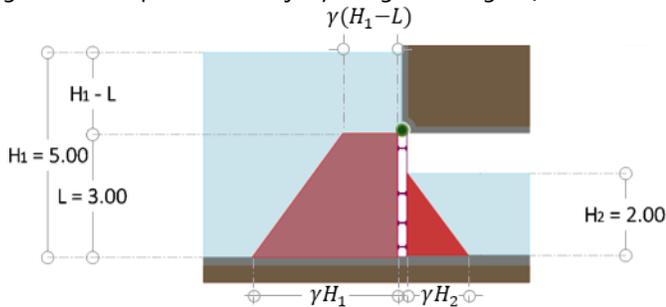
La compuerta articulada (ver la figura) tiene las dimensiones  $L \times B = 3 \times 4$  [m] y soporta los tirantes de agua  $H_1 = 5$  [m];  $H_2 = 2$  [m]

Determinar:

- La reacción  $R_A$  que se produce sobre el apoyo  $A$ ;
- La magnitud de la tensión  $T$  necesaria para mover la compuerta, considerando despreciable la fricción en la articulación.

### Solución

Primero obtendremos los empujes totales ( $E_1$  y  $E_2$ ) sobre la compuerta basándonos en el diagrama del volumen de presiones de la figura 2.15.1 (pintado de rojo) y la siguiente figura, es decir



$$E_1 = \frac{1}{2}(\gamma H_1 + \gamma(H_1 - L))LB = \frac{1}{2}\gamma(H_1 + (H_1 - L))LB$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\gamma(2H_1 - L)LB = \frac{1}{2}(1,000)(2 \cdot 5 - 3)(3)(4)$$

$$E_1 = 42,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(\gamma H_2)H_2 = \frac{1}{2}(1,000)(2)(2)(4)$$

$$E_2 = 8,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Para las fuerzas  $E_1$  y  $E_2$ , por convención, calcularemos los puntos de aplicación de dichas fuerzas respecto al punto  $O$ , como se muestra en la figura 2.15.2

Para el caso de  $E_1$ , el punto de aplicación  $d_{k1}$  coincide exactamente con el centroide del trapecio mostrado en la figura 2.15.2, el centroide del trapecio lo calcularemos como sigue (para este caso  $\bar{y} = d_{k1}$ )

Los valores equivalentes del prisma de presiones en el trapecio según la figura 2.15. b son

$$\bar{y} = d_{k1} \quad h = L; \quad b = H_1; \quad a = (H_1 - L);$$

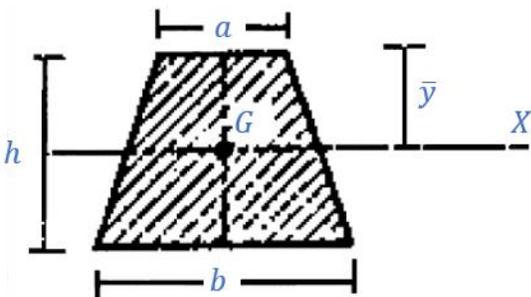
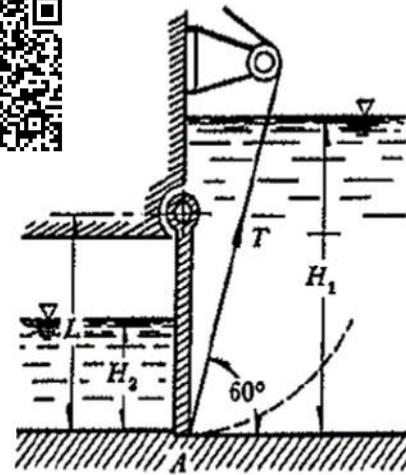


Figura 2.15.b. En la imagen están acotados los valores necesarios para calcular el centroide de un trapecio generalizado.



### Problema 15

Figura 2.15.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

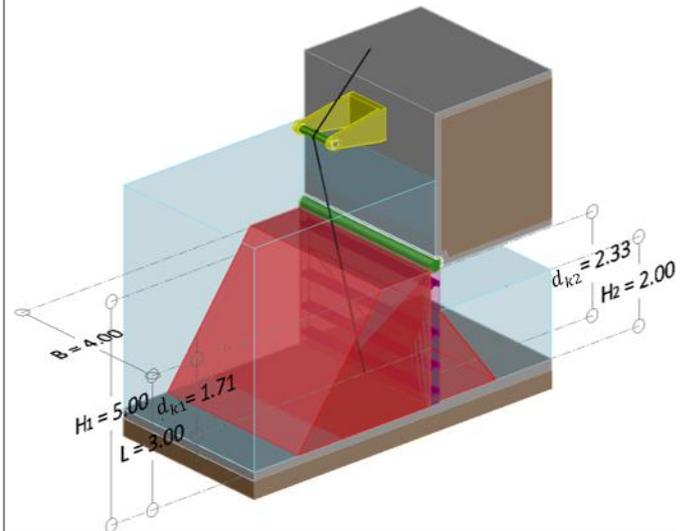


Figura 2.15.1. Diagrama del volumen de presiones. El prisma de presiones de la izquierda es un prisma trapezoidal mientras que el de la derecha es un prisma triangular recto.

### Nota

Recuerde que el centroide de un trapecio se calcula como

$$\bar{y} = \frac{h}{3} \left( \frac{2b + a}{b + a} \right)$$

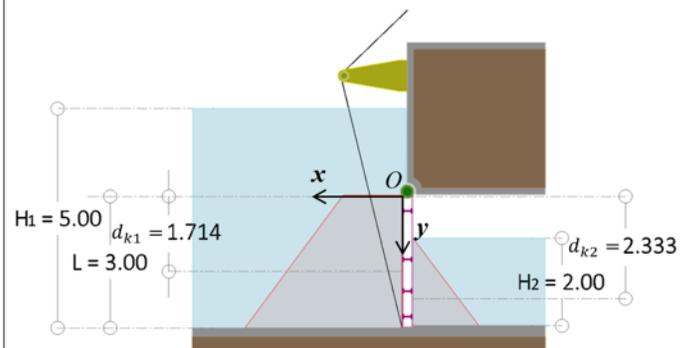


Figura 2.15.2. Se muestran todas las dimensiones necesarias para el cálculo de  $d_{k1}$  y  $d_{k2}$ . Dichas dimensiones están referenciadas respecto al punto  $O$ .

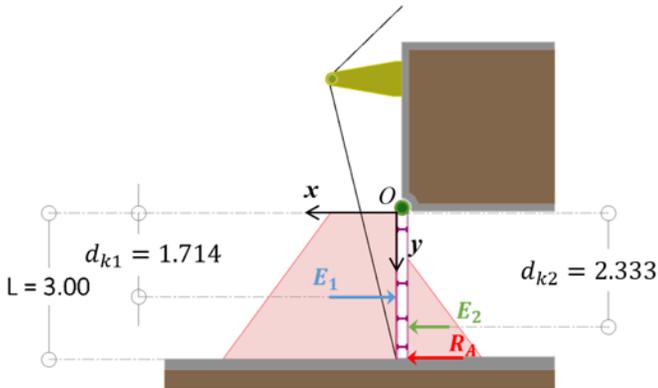


Figura 2.15.3. Diagrama de cuerpo libre para la compuerta. Observe que el origen de las coordenadas es el punto O.

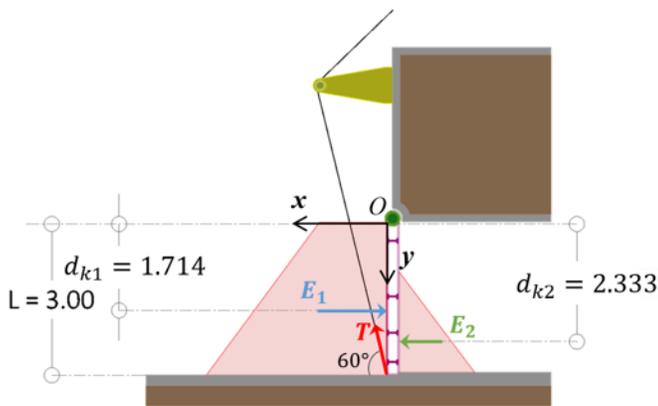


Figura 2.15.4. Diagrama de cuerpo libre auxiliar para encontrar la magnitud de la tensión T en el cable.

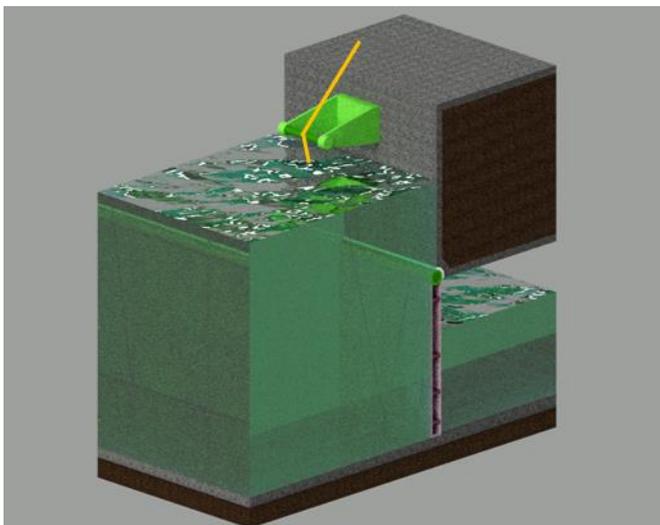


Figura 2.15.5. Vista isométrica de la compuerta, donde se ha representado el agua, la compuerta y el mecanismo que eleva la compuerta.

Con base en lo anterior tenemos que

$$d_{k1} = \frac{L}{3} \left( \frac{2H_1 + (H_1 - L)}{H_1 + (H_1 - L)} \right) = \frac{L}{3} \left( \frac{3H_1 - L}{2H_1 - L} \right) = \frac{3.00}{3} \left( \frac{3(5) - 3}{2(5) - 3} \right)$$

$$d_{k1} = 1.714 \text{ [m]}$$

Para el caso de  $E_2$ , el punto de aplicación  $d_{k2}$  coincide exactamente con el centroide del triángulo rectángulo mostrado en la figura 2.15.2, el centroide del triángulo rectángulo lo calcularemos con el siguiente razonamiento

$$d_{k2} = L - \frac{1}{3}H_2 = 3.00 - \frac{1}{3}(2.00)$$

$$d_{k2} = 2.333 \text{ [m]}$$

Fue así calculado porque necesitamos que el punto de aplicación  $d_{k2}$  esté referenciado respecto al punto O.

Basándonos en el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.15.3 podremos calcular finalmente la reacción  $R_A$  haciendo una sumatoria de momentos de fuerza respecto al punto O

$$\sum M_O^{\curvearrowright} = 0 \quad -1.714E_1 + 2.333E_2 + 3.00R_A = 0$$

$$3.00R_A = 1.714E_1 - 2.333E_2 \quad \dots a)$$

Según los resultados calculados anteriormente

$$E_1 = 42,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$E_2 = 8,000 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación a)

$$3.00R_A = 1.714(42,000) - 2.333(8,000)$$

$$R_A = \frac{1}{3.00} [1.714(42,000) - 2.333(8,000)] = 17,774.77 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$R_A = 17.775 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Solución a)

Para el inciso b) del enunciado del problema, nos piden ahora calcular la tensión T que soportará el cable, es decir, la reacción  $R_A$  ya no es necesaria y será ahora remplazada por una tensión en el cable. Es fácil deducir que en el inciso a) del enunciado del problema, el cable no estaba soportando ningún tipo de fuerza.

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la figura 2.15.4 nos resulta la siguiente ecuación de equilibrio respecto al punto O.

$$\sum M_O^{\curvearrowright} = 0 \quad -1.714E_1 + 2.333E_2 + 3.00T \cos 60^\circ = 0$$

$$3.00T \cos 60^\circ = 1.714E_1 - 2.333E_2$$

$$T = \frac{1}{3.00 \cos 60^\circ} (1.714E_1 - 2.333E_2)$$

Sustituyendo los valores correspondientes

$$T = \frac{1}{3.00(0.50)} [1.714(42,000) - 2.333(8,000)] = 35,549.33 \text{ [kg}_f\text{]}$$

$$T = 35.549 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Solución b)

En la figura 2.15.5 se muestra una representación teórica en tercera dimensión de la compuerta.

### Problema 2.19

La compuerta de sector (mostrada) tiene un radio  $R = 4.5$  [m], soporta un tirante de agua  $H = 3$  [m] y gira alrededor del punto  $O$ . Su peso es  $W = 1$  [ton<sub>f</sub>/m] localizado a la distancia  $c = 0.6$  [m]; además,  $a = 4$  [m] y  $b = 0.3$  [m].

Calcular la fuerza  $T$  de reacción sobre el punto  $A$  en la compuerta por metro de longitud.

#### Solución

Primero obtendremos los empujes totales ( $E_H$  para el empuje horizontal y  $E_V$  para el empuje vertical) sobre la compuerta, basándonos en los diagramas auxiliares que se muestran en las figuras 2.19.1, 2.19.2 y 2.19.3.

Para el caso del empuje vertical  $E_V$ , primero debemos encontrar el área  $A_V$ , que resulta de la sustracción entre un segmento circular (al que llamaremos  $A_1$ ) y un triángulo (al que llamaremos  $A_2$ ). Para facilitar la comprensión del cálculo de dicha área  $A_V$ , vea la figura 2.19.1.

Calculemos primero el área  $A_2$  (las dimensiones del área  $A_2$  se muestran en la figura 2.19.2).

Note que la longitud  $L_1$  fue una longitud propuesta para facilitar los cálculos del área  $A_2$

El área  $A_2$  sería entonces

$$A_2 = \frac{1}{2}(R - L_1)H \quad \dots 01$$

Pero

$$\cos \alpha = \frac{L_1}{R} \therefore L_1 = R \cos \alpha$$

Sustituyendo el nuevo valor de  $L_1$  en 01) tenemos que

$$A_2 = \frac{1}{2}(R - R \cos \alpha)H = \frac{1}{2}RH(1 - \cos \alpha)$$

Pero

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{H}{R}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{3.00}{4.50}\right) = 41.81^\circ$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$  en  $A_2$  finalmente tenemos que

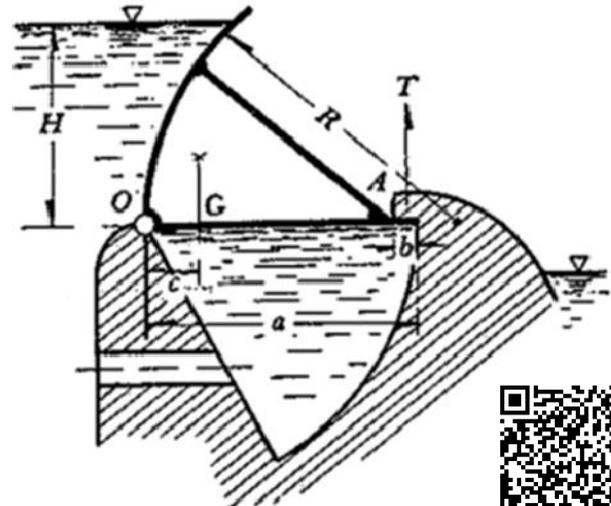
$$A_2 = \frac{1}{2}(4.50)(3.00)(1 - \cos(41.81^\circ))$$

$$A_2 = 1.718 \text{ [m}^2\text{]}$$

Procedamos entonces a calcular el valor de  $\bar{x}_2$  basándonos en la figura 2.19.2, podemos notar fácilmente que el centroide pasa exactamente por  $x = \frac{1}{3}(R - L_1)$  respecto al punto  $O$ , dado que la figura es un triángulo. Entonces, recordando que  $L_1 = R \cos \alpha$  tenemos que

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}(R - L_1) = \frac{1}{3}(4.50 - 4.50 \cos(41.81^\circ))$$

$$\bar{x}_2 = 0.382 \text{ [m]}$$



Problema 19



Figura 2.19.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

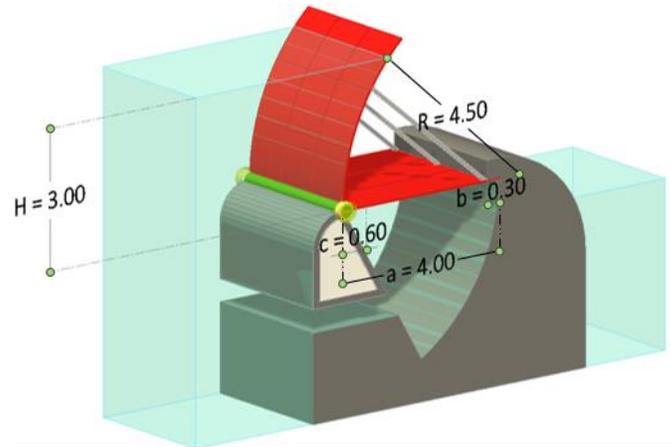


Figura 2.19.b. Se muestra una primera representación en 3D de la compuerta.

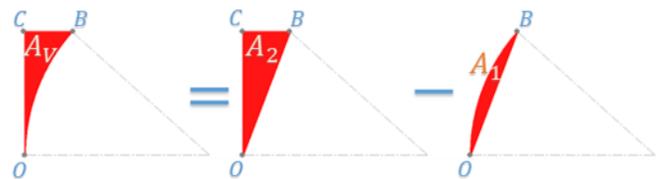


Figura 2.19.1. El área  $A_V$  es el resultado de la sustracción entre  $A_2$  y  $A_1$ .

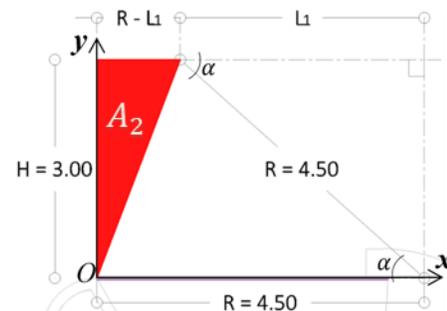


Figura 2.19.2. El área  $A_2$  corresponde a un triángulo rectángulo de base  $R - L_1$  y altura  $H = 3.00$  [m].

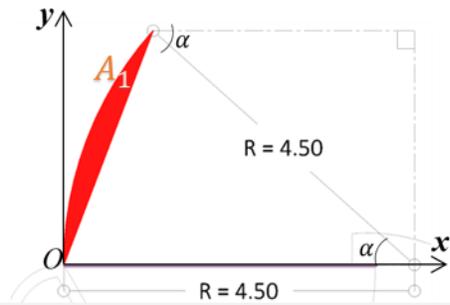


Figura 2.19.3. El área  $A_1$  corresponde a un segmento circular con un radio  $R = 4.50$  [m] y un ángulo  $\alpha = 41.81^\circ = 0.7297$  [rad].

| Figura | Nombre          | Área  |
|--------|-----------------|---|
|        | Sector Circular | $A = \frac{R^2}{2} (\alpha - \text{sen } \alpha)$ |

Tabla 1.b. Área de un sector circular (Basada en Referencia 1).

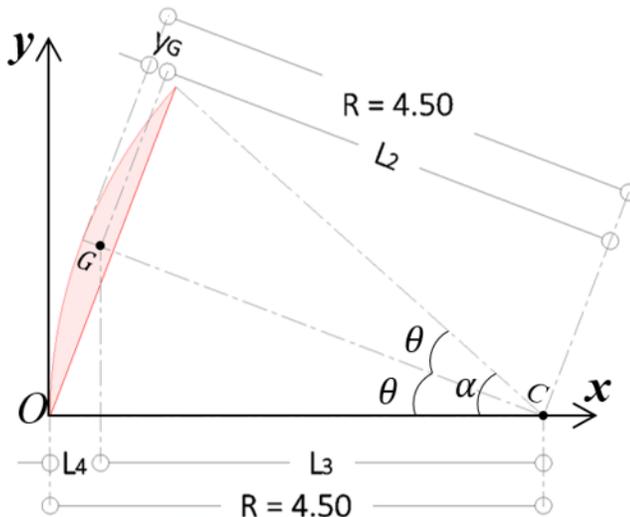


Figura 2.19.4. La longitud  $L_4$  es igual al valor de  $\bar{x}_1$  (observe que el ángulo  $\alpha = 2\theta$ ).

Para el cálculo de  $A_1$  nos basaremos en la figura 2.19.3.

Por otro lado y de acuerdo a la Tabla 1.b el área  $A_1$  sería entonces

$$A_1 = \frac{R^2}{2} (\alpha - \text{sen } \alpha) \quad \dots 02)$$

Recordemos que el valor de  $\alpha$  en la ecuación 02) deberá estar en radianes y  $\text{sen } \alpha$  se calcula usando grados sexagesimales, por lo tanto

$$\alpha = 41.81^\circ \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right) = 0.7297 \text{ [rad]}$$

Sustituimos ahora el valor de  $\alpha$  calculado anteriormente, en 02)

$$A_1 = \frac{4.50^2}{2} (0.7297 - \text{sen}(41.81^\circ)) = 10.125(0.7297 - 0.667)$$

$$A_1 = 0.638 \text{ [m}^2\text{]}$$

Para el caso del cálculo de  $\bar{x}_1$ , el procedimiento no es tan sencillo, pero nos será más fácil si nos basamos en la figura 2.19.4 para su mejor comprensión.

Observe que la longitud  $L_2$  y la longitud  $y_G$  es paralela a la recta que pasa por los puntos  $C$  y  $G$ . Las longitudes  $L_3$  y  $L_4$  son paralelas al eje  $x$ . Por otro lado y de acuerdo a la Tabla 2.1 del libro de Sotelo, la longitud  $y_G$  se calcula con la siguiente ecuación (Considerando que  $\alpha = 2\theta$ )

$$y_G = R \left( 1 - \frac{4(\text{sen } \theta)^3}{3\alpha - 3\text{sen } \alpha} \right) = R \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{(\text{sen } \theta)^3}{\alpha - \text{sen } \alpha} \right)$$

Recordando que

$$R = 4.50; \alpha = 41.81^\circ = 0.7297 \text{ [rad]}$$

$$\theta = \alpha/2 = 41.81^\circ/2 = 20.905^\circ$$

Entonces

$$y_G = 4.50 \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{(\text{sen } 20.905^\circ)^3}{0.7297 - \text{sen } 41.81^\circ} \right) = 0.176 \text{ [m]}$$

Observando de nuevo la figura 2.19.4 podremos notar que

$$L_2 = R - y_G = 4.50 - 0.176$$

$$L_2 = 4.324 \text{ [m]}$$

Y que

$$\cos \theta = \frac{L_3}{L_2} \therefore L_3 = L_2 \cos \theta = 4.324 \cos(20.905^\circ)$$

$$L_3 = 4.039 \text{ [m]}$$

Finalmente tenemos que

$$L_4 = \bar{x}_1 = R - L_3 = 4.50 - 4.039$$

$$\bar{x}_1 = 0.461 \text{ [m]}$$

Como lo menciona la etiqueta de la figura 2.19.4, la longitud  $L_4$  es de hecho la misma que la longitud  $\bar{x}_1$  que es la que necesitábamos calcular.

Dado que ya hemos calculado las áreas  $A_1$  y  $A_2$ , el área  $A_V$  será finalmente

$$A_V = A_2 - A_1 = 1.718 - 0.638$$

$$A_V = 1.08 \text{ [m}^2\text{]}$$

Aunque ya hemos calculado los valores de  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  nos restaría aún encontrar el centroide de la figura compuesta  $A_V$  y al ser así, no podremos calcular su centroide  $\bar{x}_V$  de manera directa.

Es decir, tendremos que calcular el valor de los centroides de las áreas  $A_1$  y  $A_2$  de manera separada y con base en eso, calcular  $\bar{x}_V$ .

De acuerdo a la Referencia 8 (Apéndice A.2) podemos calcular el centroide de una figura compuesta utilizando el concepto de primer momento de un área, con la siguiente ecuación (para el caso de  $x$ )

$$\bar{x}_V = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \quad \dots 03)$$

Sustituyendo los valores obtenidos anteriormente en la ecuación 03)

$$\bar{x}_V = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} = \frac{A_2 \bar{x}_2 - A_1 \bar{x}_1}{A_V} = \frac{1.718(0.382) - 0.638(0.461)}{1.08}$$

$$\bar{x}_V = 0.335$$

Recuerde que todas las distancias calculadas están referenciadas respecto al punto  $O$ .

De acuerdo a la Referencia 1 p. 52, el empuje vertical que el agua ejerce sobre una superficie curva, es igual al peso de la columna vertical del líquido (agua), que se apoya sobre dicha superficie (vea la nota a su derecha), es decir

$$E_V = A_V \gamma = (1.08 \text{ [m}^2\text{)}) \left( 1 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}^3} \right] \right)$$

$$E_V = 1.08 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right] \downarrow$$

En la figura 2.19.5 podemos observar la fuerza resultante  $E_V$  indicando claramente la posición de su punto de acción o centroide, sobre el eje  $x$ .

Para el caso del empuje horizontal  $E_H$  basta que calculemos el área lateral del prisma de presiones (pintado en color gris) cuyas dimensiones se muestran en la figura 2.19.6, es decir

$$E_H = \frac{1}{2} (\gamma H) H = \frac{1}{2} \left( 1 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}^3} \right] (3.00 \text{ [m]}) \right) (3.00 \text{ [m]})$$

$$E_H = 4.50 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right] \rightarrow$$

El punto de acción de la fuerza  $E_H$  estará a una distancia  $y_H = \left(\frac{1}{3}\right)H = \left(\frac{1}{3}\right)(3.00) = 1.00 \text{ [m]}$  respecto al punto  $O$ , esto último por tratarse de un triángulo.

En la figura 2.19.6 están señaladas todas las fuerzas que hemos calculado hasta ahora, así como las fuerzas que nos señala el enunciado del problema; se marcan también sus puntos de acción respecto al punto  $O$ .

La fuerza  $R$  marcada en color amarillo es una fuerza concentrada, generada por una fuerza distribuida rectangular  $p = \gamma H$  que actúa en la base de la compuerta debido al empuje del agua. Para que la fuerza distribuida  $p$  sea una fuerza concentrada necesitaremos multiplicar dicha fuerza por su longitud total, es decir

$$R = pa = \gamma Ha = 1 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}^3} \right] (3.00 \text{ [m]}) (4.00 \text{ [m]}) \uparrow$$

$$R = 12.00 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right]$$

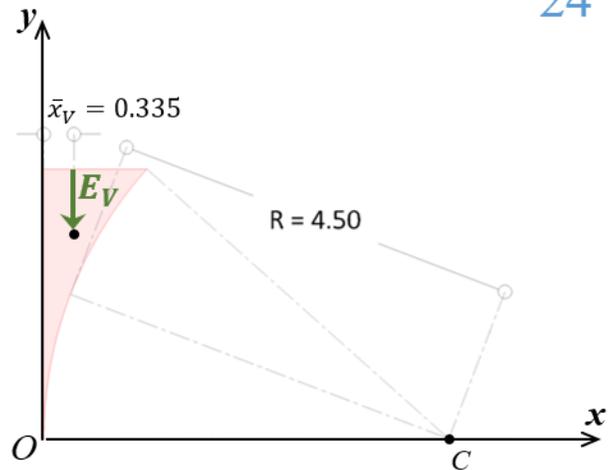


Figura 2.19.5. En la figura está claramente indicado el punto de acción de la fuerza  $E_V$ .

**Nota**

Es importante notar que el resultado de las fuerzas está expresado en toneladas-fuerza por metro lineal, ya que se nos solicita un resultado por unidad de longitud. En este caso, la unidad de longitud corresponde a la unidad de ancho. Observe que el enunciado del problema no proporciona dicha longitud.

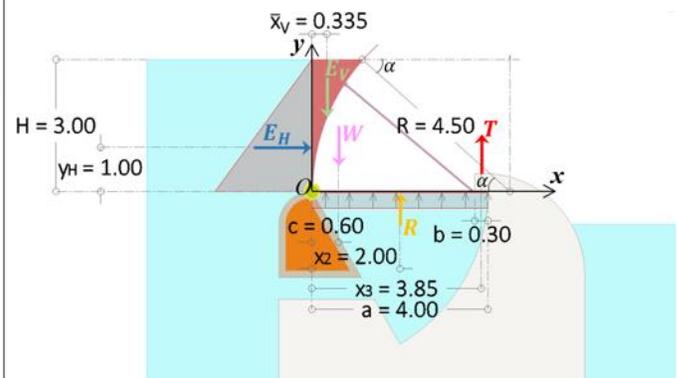


Figura 2.19.6. Diagramas de los volúmenes de presiones. Para la compuerta hay dos diagramas, uno horizontal y el otro vertical, en la base de la compuerta se presenta un diagrama rectangular.

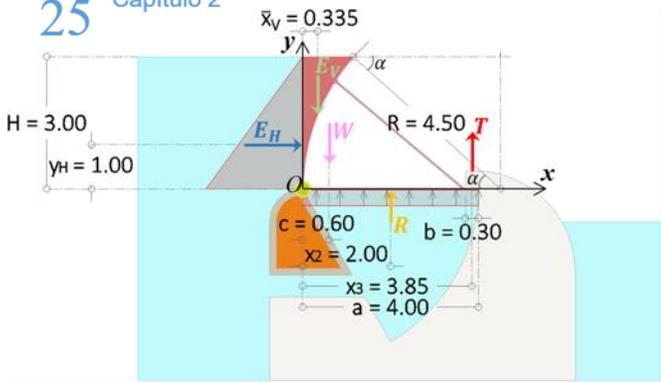


Figura 2.19.6. Se muestran todas las fuerzas involucradas.

**Resumen de fuerzas y distancias del problema 2.19**

|                                 |                                       |
|---------------------------------|---------------------------------------|
| $\bar{x}_V = 0.335 \text{ [m]}$ | $E_V = 1.08 \text{ [Ton}_f\text{/m]}$ |
| $y_H = 1.00 \text{ [m]}$        | $E_H = 4.50 \text{ [Ton}_f\text{/m]}$ |
| $x_2 = 2.00 \text{ [m]}$        | $W = 1.00 \text{ [Ton}_f\text{/m]}$   |
| $x_3 = 3.85 \text{ [m]}$        | $R = 12.00 \text{ [Ton}_f\text{/m]}$  |

Tabla 2. Para comodidad del lector se han resumido todos los valores obtenidos en la solución del problema.

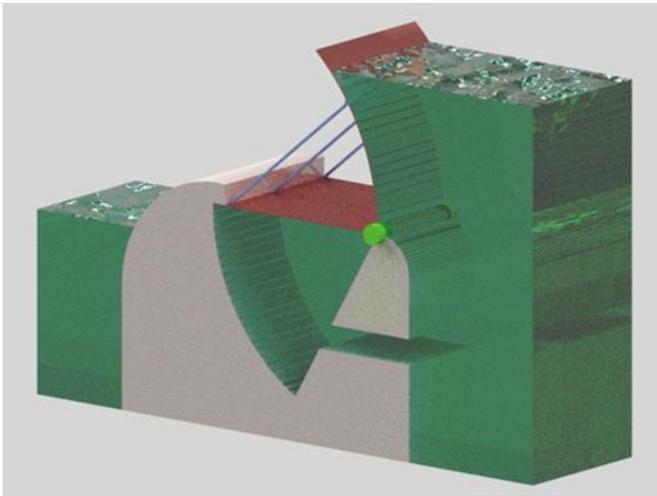


Figura 2.19.7. Vista tridimensional de todo el sistema.

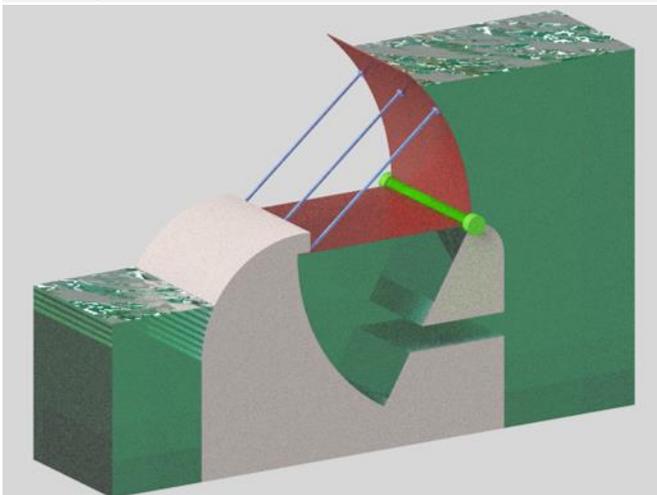


Figura 2.19.8. Se ha representado el agua, la compuerta y el mecanismo que permite la apertura de la compuerta.

Al ser una fuerza distribuida rectangular, su punto de acción estará a una distancia  $x_2 = a/2 = 4.00/2 = 2.00 \text{ [m]}$  respecto al punto  $O$ .

Respecto al peso de la compuerta  $W$ , el enunciado del problema solo dice que su centro de masa está a  $60 \text{ [cm]}$  respecto del punto  $O$ .

La tensión  $T$ , es la fuerza que el enunciado del problema nos solicita encontrar. Dicho enunciado no menciona la posición exacta de la tensión  $T$ , por lo que, por practicidad, supondremos que se encuentra a una distancia  $x_3$  respecto al punto  $O$  (vea figura 2.19.6).

$$x_3 = a - \frac{b}{2} = 4.00 - \frac{0.30}{2} = 4.00 - 0.15 = 3.85 \text{ [m]}$$

Con todos los resultados obtenidos anteriormente (Tabla 2) y basándonos nuevamente en la figura 2.19.6 finalmente podremos calcular las respectivas ecuaciones de equilibrio y por ende, la magnitud de la tensión  $T$ , es decir

$$\sum \widehat{M}_O^+ = 0 \quad \bar{x}_V E_V + y_H E_H + 0.60W - x_2 R - x_3 T = 0$$

$$0.335(1.08) + 1.00(4.50) + 0.60(1.00) - 2.00(12.00) - 3.85T = 0$$

$$T = 4.82 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right] \downarrow$$

La magnitud de la tensión  $T$  es de dirección contraria a la dirección supuesta por el enunciado del problema.

$$T = 4.82 \text{ [Ton}_f\text{/m]}$$

Solución

Como un recurso extra, se muestran dos representaciones en tercera dimensión de la compuerta, en la figura 2.19.7. y 2.19.8.

**Problema 2.29.**

Determinar el empuje hidrostático, por metro de ancho, sobre la superficie parabólica del muro mostrado en la figura cuya ecuación es  $z = 4x^2$ .

**Solución.**

Para encontrar la fuerza de empuje total que nos pide el problema utilizaremos las componentes horizontal y vertical de dicha fuerza.

Comenzaremos calculando la fuerza horizontal, como referencia, en la figura 2.29.1 (en rosa), se muestra el diagrama del volumen de presiones para el empuje horizontal, recordando que la fuerza horizontal que se ejerce sobre el muro se calcula sobre la proyección normal al eje horizontal de este muro y dado que nos piden la fuerza de empuje por metro de ancho:

$$P_x = \frac{1}{2}(\gamma \cdot 9.00)(9.00) = \frac{1}{2} \left( 1 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}^3} \right] \right) (9.00 \text{ [m]})(9.00 \text{ [m]})$$

$$P_x = 40.50 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right]$$

Para el caso de la fuerza de empuje vertical necesitaremos calcular el área superior (figura 2.29.2 en color rosa) delimitada por la parábola  $z = 4x^2$ , es decir, la función que define dicha condición sería una nueva función que podemos llamar  $u = 9 - z = 9 - 4x^2$  (Analice la figura 2.29. c), recordando que el área bajo la curva, es igual a la integral definida entre dos puntos (Referencia 3 p. 275 - 276), finalmente, el área que buscamos será

$$A_v = \int_0^{1.50} (9 - 4x^2) dx = 9x \Big|_0^{1.50} - \frac{4}{3}x^3 \Big|_0^{1.50} = 9(1.50) - \frac{4}{3} \cdot 1.50^3$$

$$A_v = 9.00 \text{ [m}^2\text{]}$$

Una vez calculada el área, calculamos la fuerza de empuje vertical la cual es igual al peso de la columna real del líquido sobre el muro, y dado que se determinará por unidad de ancho se tiene

$$P_z = \gamma A_v = \left( 1 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}^3} \right] \right) (9.00 \text{ [m}^2\text{]})$$

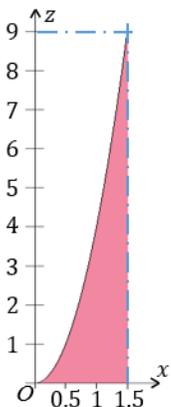
$$P_z = 9.00 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right]$$

Una vez que hemos calculado, tanto la fuerza horizontal, como la vertical, la fuerza resultante será

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{40.50^2 + 9.00^2} = 41.49 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}} \right]$$

**$P = 41.49 \text{ [Ton}_f\text{/m]}$**

**Solución**



Si nos basamos en el cálculo del área con la gráfica de la izquierda, podremos hacerlo restando el área que forman las dos líneas azules discontinuas y el área bajo la curva  $z = 4x^2$ , es decir

$$A_v = 9(1.5) - \int_0^{1.5} 4x^2 dx = 9 \text{ [m}^2\text{]}$$

La gráfica de la derecha es la función espejo de la función  $z = 4x^2$  desplazada una distancia  $z = 9$ , es decir, es una nueva función  $u = 9 - 4x^2$

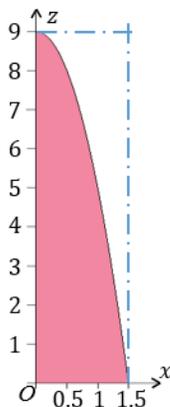
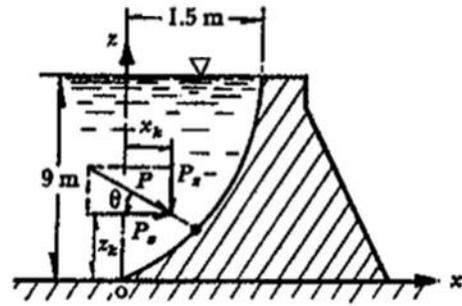


Figura 2.29.c. Se muestra dos maneras de calcular el área  $A_v$ .



**Problema 29**

Figura 2.29.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

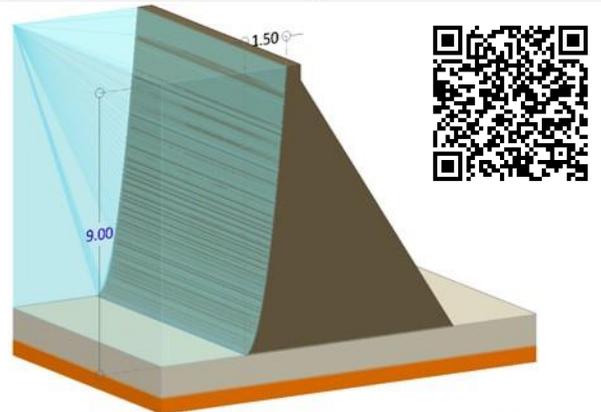


Figura 2.29.b. Se muestra una representación en 3D de la superficie parabólica del problema.

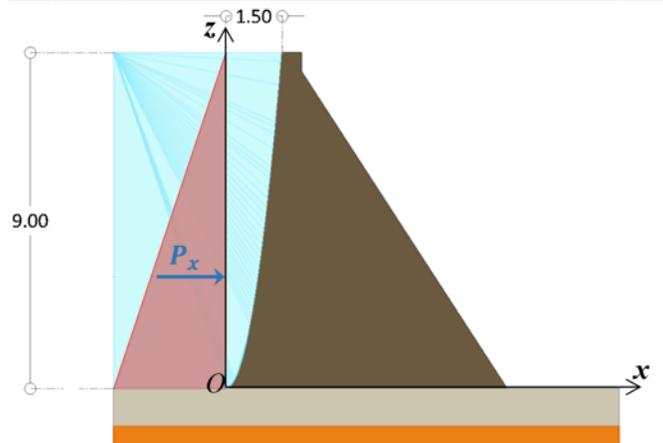


Figura 2.29.01. Diagrama del volumen de presiones para el empuje horizontal  $P_x$ .

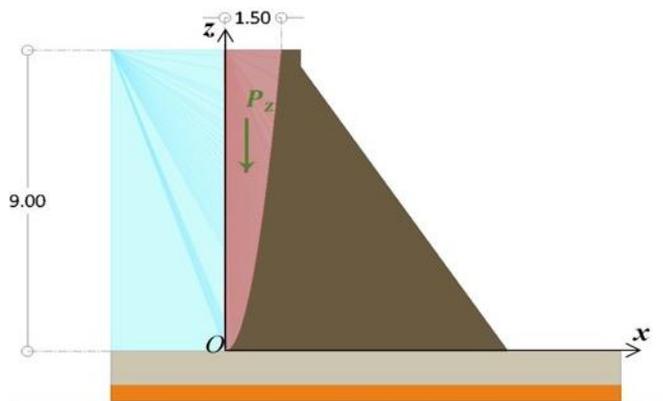
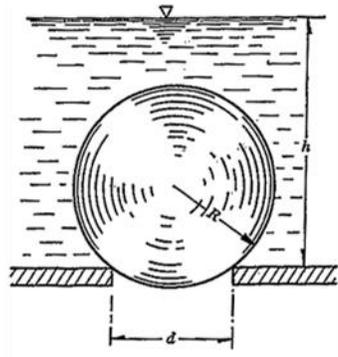


Figura 2.29.02. Diagrama del volumen de presiones para el empuje vertical  $P_z$ .



Problema 31

Figura 2.31.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

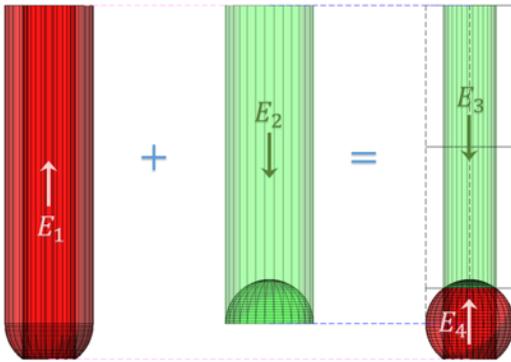


Figura 2.31.1. La resultante de los empujes verticales  $E$  se obtendrá con la suma vectorial de los empujes generados por las columnas virtual y real del agua.

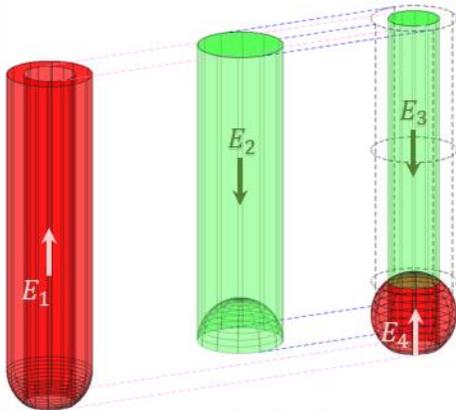


Figura 2.31.2. Se muestra una visualización en tercera dimensión de la figura 2.31.1.

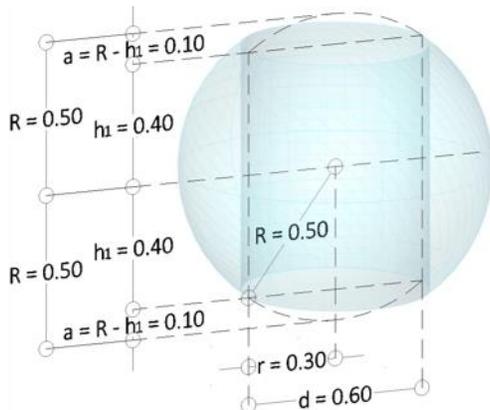


Figura 2.31.3. El volumen  $V_4$  consiste en una esfera truncada en sus extremos superior e inferior y con un hueco cilíndrico en su interior.

**Problema 2.31.**

Determinar la resultante de los empujes verticales sobre la esfera mostrada en la figura para los datos:  $d = 0.6 \text{ [m]}$ ;  $R = 0.5 \text{ [m]}$ ;  $h = 4 \text{ [m]}$ .

Solución.

Para calcular la resultante de los empujes verticales  $E$ , primero nos basaremos en el diagrama de la figura 2.31.1, lo que facilitará la comprensión del procedimiento. El primer diagrama del extremo izquierdo (figura 2.31.1) equivale al peso de la columna de líquido virtual, que genera un empuje vertical ascendente sobre cierta zona de la esfera. Para que entendamos mejor la superficie donde actúa dicho empuje, vea la figura 2.31.2, este diagrama se muestra en tres dimensiones, observe la diferencia en la visualización entre el diagrama en dos dimensiones y en el de tres dimensiones.

El segundo diagrama en el centro de la figura 2.31.1, equivale al peso de la columna de líquido real, que genera un empuje vertical descendente sobre cierta zona de la esfera. Para que entendamos mejor la superficie donde actúa dicho empuje vea la figura 2.31.2. La suma vectorial del primer y segundo diagrama (figura 2.31.1) nos dará la resultante de los empujes verticales. Como vemos, en el diagrama de la resultante de los empujes verticales, se tienen dos volúmenes diferentes, el volumen  $V_3$  genera un empuje vertical descendente y el volumen  $V_4$  genera un empuje vertical ascendente.

Observe que el volumen  $V_1$  está compuesto de un cilindro (ahuecado con un cilindro de radio  $d = 0.6 \text{ [m]}$ ) que está unido a una semiesfera (ahuecada con el mismo cilindro de radio  $d = 0.6 \text{ [m]}$  y truncada con un casquete esférico en la parte inferior), mientras que el volumen  $V_2$  está compuesto por un cilindro que está truncado en su parte inferior con una semiesfera de radio  $R = 0.5 \text{ [m]}$ .

Procederemos entonces a calcular el volumen  $V_4$ , para eso nos basaremos en la figura 2.31.3. Como podemos observar existen tres volúmenes que necesitamos obtener, el primero será el volumen de la esfera de radio  $R = 0.50 \text{ [m]}$ , el segundo será el volumen del cilindro de radio  $r = 0.30 \text{ [m]}$  y altura  $2h_1$ , finalmente, el tercer volumen serán dos casquetes esféricos situados en los extremos verticales de la esfera.

El volumen de la esfera (vea Tabla 3) será

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (0.50)^3 = 0.524 \text{ [m}^3\text{]}$$

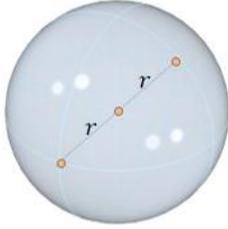
| Figura   | Nombre | Volumen                   |
|--|--------|---------------------------|
|  | Esfera | $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ |

Tabla 3. Volumen de una esfera.

El volumen del cilindro (vea Tabla 4) será

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 H' = \pi(0.30)^2(0.80) = 0.226 \text{ [m}^3\text{]}$$

Donde (según la figura 2.31.3)

$$H' = 2h_1 = 2(0.40) = 0.80 \text{ [m]}$$

Según la figura 2.31.3,  $h_1$  se obtuvo con el siguiente razonamiento

$$h_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{0.50^2 - \left(\frac{0.60}{2}\right)^2} = \sqrt{0.16} = 0.40 \text{ [m]}$$

El volumen del casquete esférico (vea Tabla 4 y figura 2.31.3) será

$$V_{\text{casquete}} = \frac{\pi a}{6} (3b^2 + a^2) = \frac{0.10\pi}{6} (3 \cdot 0.30^2 + 0.10^2) = 0.015 \text{ [m}^3\text{]}$$

Donde (Según figura 2.31.3)

$$b = r = d/2 = 0.60/2 = 0.30 \text{ [m]}$$

Una vez obtenidos los volúmenes indicados, el volumen  $V_2$  será

$$V_2 = V_{\text{esfera}} - V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{casquete}} = 0.524 - 0.226 - 2(0.015)$$

$$V_4 = \mathbf{0.268 \text{ [m}^3\text{]}}$$

Procederemos ahora a calcular el volumen  $V_3$ , para eso nos basaremos en la figura 2.31.4. Como podemos observar, existen dos volúmenes que necesitamos obtener, el primero será un cilindro de radio  $r = 0.30 \text{ [m]}$  y altura  $H = h - 2h_1$  (al que llamaremos  $V'_{\text{cilindro}}$ ) y el segundo volumen será un casquete esférico de radio  $r$  y altura  $a$ .

El volumen del cilindro (vea Tabla 4 y figura 2.31.4) será

$$V'_{\text{cilindro}} = \pi r^2 (h - 2h_1) = \pi(0.30)^2 [4.00 - 2(0.40)] = 0.905 \text{ [m}^3\text{]}$$

El volumen del casquete esférico (vea Tabla 4 y figura 2.31.4) será

$$V_{\text{casquete}} = \frac{\pi a}{6} (3r^2 + a^2) = \frac{0.10\pi}{6} (3 \cdot 0.30^2 + 0.10^2) = 0.015 \text{ [m}^3\text{]}$$

Una vez obtenidos los volúmenes indicados, el volumen  $V_3$  será

$$V_3 = V'_{\text{cilindro}} - V_{\text{casquete}} = 0.905 - 0.015$$

$$V_3 = \mathbf{0.890 \text{ [m}^3\text{]}}$$

El volumen necesario para calcular la resultante de los empujes verticales sobre la esfera será entonces

$$V_R = -V_3 + V_4 = -0.890 + 0.268 = -0.622 \text{ [m}^3\text{]}$$

El volumen  $V_3$  se consideró negativo porque produce un empuje descendente y  $V_4$  se consideró positivo porque produce un empuje ascendente, físicamente sabemos que los volúmenes negativos no existen, pero se señala el resultado con el signo menos para indicar que el volumen resultante producirá un empuje descendente.

Una vez calculado el volumen resultante, finalmente podremos calcular la resultante de los empujes verticales como sigue

$$E_R = \gamma V_R = 1 \left[ \frac{\text{Ton}_f}{\text{m}^3} \right] (0.622 \text{ [m}^3\text{]}) = 0.622 \text{ [Ton}_f\text{]} \downarrow$$

$$E_R = 0.622 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

Solución

Como último recurso, en la figura 2.31.5 se muestra una representación en tercera dimensión de todo el sistema en cuestión.

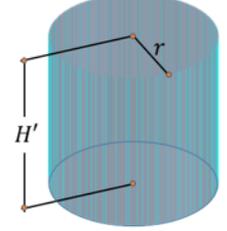
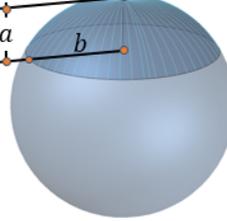
| Figura   | Nombre            | Volumen                            |
|--|-------------------|------------------------------------|
|  | Cilindro          | $V = \pi r^2 H'$                   |
|  | Casquete Esférico | $V = \frac{\pi a}{6} (3b^2 + a^2)$ |

Tabla 4. Volumen de un cilindro y un casquete esférico.

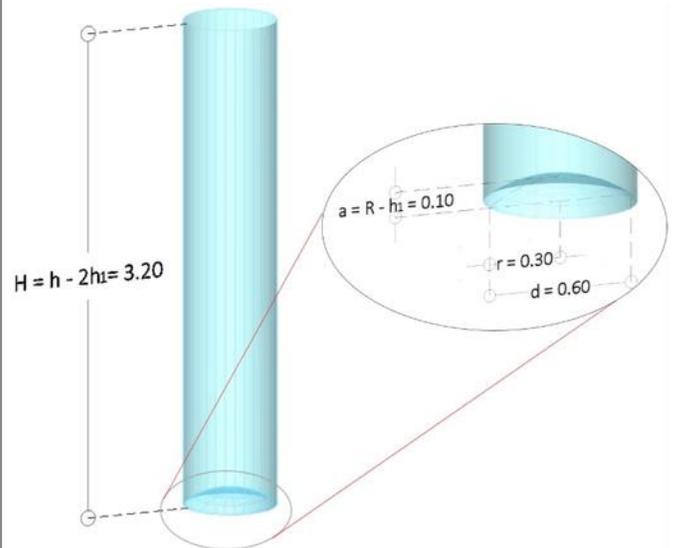


Figura 2.31.4. El volumen  $V_3$  consiste en un cilindro truncado en su extremo inferior con un casquete esférico de radio  $r$ , en la imagen se muestra también una ampliación o detalle del casquete esférico.

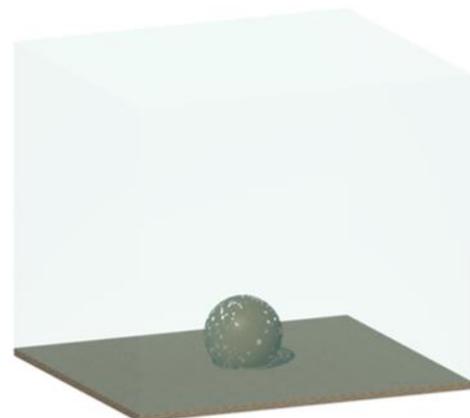
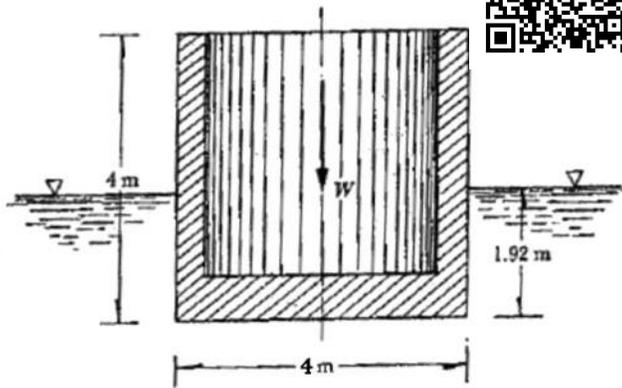


Figura 2.31.5. Se muestra una representación en tercera dimensión de la esfera sumergida en el agua.



Problema 39

Figura 2.39.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

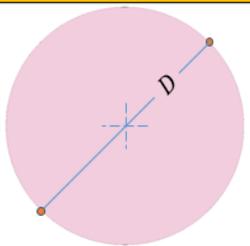
| Figura  | Nombre         | Área                    |
|---|----------------|-------------------------|
|  | Circunferencia | $A = \frac{\pi}{4} D^2$ |

Tabla 1.c. Área de una circunferencia.

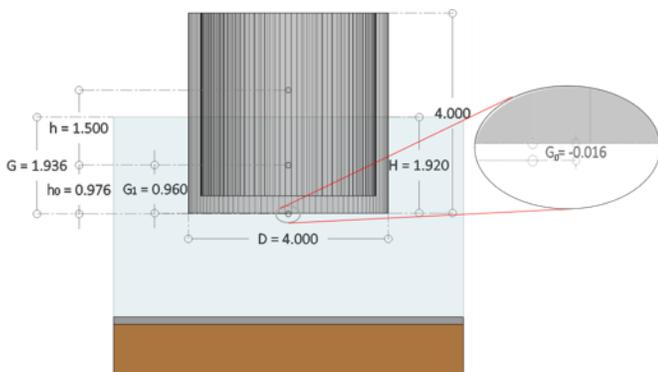


Figura 2.39.1. En la figura se señala la ubicación de  $G$  tanto respecto al espejo del agua como desde la base del cilindro.

**Problema 2.39.**

Determinar la posición del centro de gravedad que debe tener un cajón cilíndrico cuyas dimensiones se muestran en la figura (peso  $W = 24$  [Tonf] ) y que requiere para su estabilidad una altura metacéntrica  $h = 1.5$  [m]

Solución.

Como no nos proporcionan más datos, asumiremos que el peso específico del líquido es el del agua, es decir  $\gamma = 1$   $\left[\frac{\text{Tonf}}{\text{m}^3}\right]$ .

Como primer paso vamos a calcular el área de la sección transversal que en este caso será la de un círculo de diámetro  $D = 4$  [m] tal como lo indica la figura 2.39. a, la Tabla 1. c y la figura 2.39.1, es decir

$$A = \frac{\pi}{4} (4)^2 = 12.566 \text{ [m}^2\text{]}$$

Con el valor obtenido anteriormente, podremos ahora calcular la altura sumergida  $H$  del siguiente modo

Del principio de Arquímedes (Referencia 1 p. 59).

$$E_v = \gamma v_0 \quad \dots 01)$$

Donde  $E_v$  es el empuje vertical que produce el agua sobre el cilindro;  $v_0$  es el volumen de líquido desalojado y  $\gamma$  es el peso específico del agua

Dado que se asume que el cajón está en equilibrio

$$\begin{aligned} E_v - W_{\text{cilindro}} &= 0 \\ E_v &= W_{\text{cilindro}} \quad \dots 02) \end{aligned}$$

Sustituyendo 01) en 02) y recordando que  $W_{\text{cilindro}} = 24$  [Tonf]

$$\gamma v_0 = 24 \quad \dots 03)$$

Despejando  $v_0$  de la ecuación 03)

$$v_0 = \frac{24}{\gamma} = \frac{24 \text{ [Tonf]}}{1 \text{ [Tonf/m}^3\text{]}} = 24 \text{ [m}^3\text{]}$$

Pero

$$v_0 = AH \quad \dots 04)$$

Despejando  $H$  en 04) y recordando que  $A = 12.566$  [m<sup>2</sup>]

$$H = \frac{v_0}{A} = \frac{24 \text{ [m}^3\text{]}}{12.566 \text{ [m}^2\text{]}} = 1.910 \text{ [m]}$$

El dato anterior también nos lo proporciona el enunciado del problema, en este caso es  $H = 1.92$  [m], para evitar problemas o confusiones utilizaremos el valor que proporciona el enunciado.

A continuación calcularemos el centro de flotación  $G_1$  que al ser una sección rectangular, se calcula como  $G_1 = H/2$  (Referencia 4 p. 15), entonces

$$G_1 = \frac{H}{2} = \frac{1.92}{2} = 0.96 \text{ [m]}$$

El valor de  $G_1$  está referenciado respecto a la base del cilindro, tal como se muestra en la figura 2.39.1

Una vez calculado el centro de flotación solo nos restaría calcular el momento de inercia, para finalmente calcular el centro de gravedad respecto a la base de la caja cilíndrica, el cual llamaremos  $G_0$  para no confundirlo con el centro de gravedad  $G$  referenciado respecto al espejo o superficie libre del agua.

Para el caso de la altura metacéntrica, sabemos que se calcula con la siguiente expresión (Referencia 1 p. 62)

$$h = \frac{\bar{I}_z}{\cos \theta v_0} - h_0 \quad \text{Ecuación (2.26)}$$

Donde

$h$ : Altura metacéntrica.

$\bar{I}_z$ : Momento de inercia del área de la sección del cuerpo a nivel de la superficie de flotación.

$v_0$ : Volumen del cuerpo sumergido

$\theta$ : Ángulo de inclinación respecto al espejo de agua.

Por otro lado

$$h_0 = G_0 - G_1$$

Donde

$G_0$ : Centro de gravedad del cuerpo completo respecto a la base de la caja cilíndrica.

$G_1$ : Centro de flotación referenciado respecto a la base del cilindro.

Según la Referencia 1 p. 61, se debe considerar la sección transversal del cuerpo en contacto con el espejo de agua tal como se muestra en la figura 2.39.2.

El momento de inercia para un círculo (Tabla 5) se calcula como

$$\begin{aligned} \bar{I}_z &= \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi (2)^4 \\ \bar{I}_z &= 12.566 \text{ [m}^4\text{]} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores antes calculados en la ecuación (2.26) y considerando que según el enunciado  $h = 1.5\text{[m]}$  tenemos que

$$h = \frac{12.566}{\cos 0^\circ (24)} - (G_0 - 0.96) = 1.5$$

De aquí despejamos a  $G_0$  y nos queda como sigue

$$G_0 = -0.016 \text{ [m]}$$

El valor anterior es válido si se toma como referencia la base de la caja cilíndrica; es decir, el centro de gravedad  $G_0$  de la caja está por debajo de ésta. Otra forma de expresar el resultado sería tomando como referencia el espejo o nivel del agua, de modo que

$$G = H - G_0 = 1.920 - (-0.016) = 1.936 \text{ [m]}$$

$$G = 1.936 \text{ [m]} \text{ (Desde el nivel del agua)} \quad \text{Solución}$$

Es importante aclarar que el resultado, aunque es correcto, contradice el hecho de que el centro de gravedad del cuerpo no puede por sí mismo estar debajo de este.

Como último recurso se muestra una representación en tercera dimensión en la figura 2.39.3.

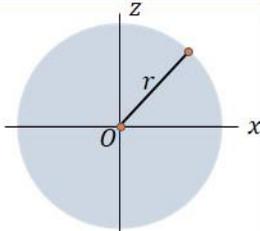
| Figura   | Nombre  | Momento de Inercia                |
|--|---------|-----------------------------------|
|  | Círculo | $\bar{I}_z = \frac{1}{4} \pi r^4$ |

Tabla 5. Momento de inercia de un círculo.

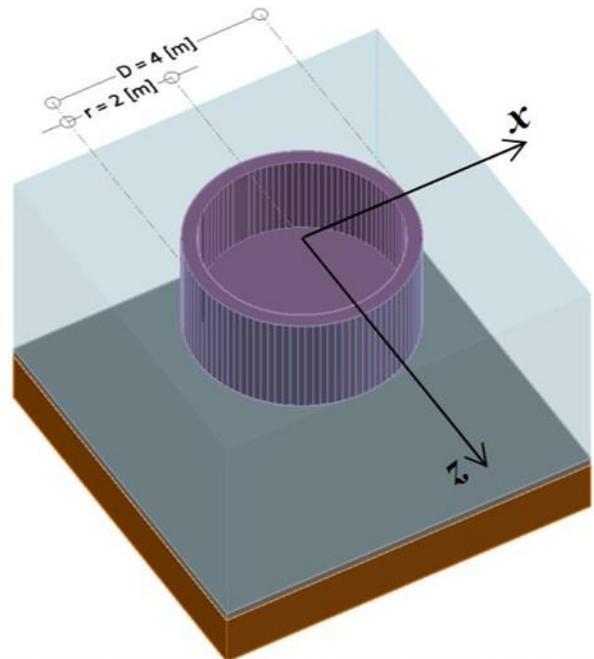


Figura 2.39.2. Para el cálculo del momento de inercia debe considerarse el área completa de la sección transversal en contacto con el espejo de agua, sin considerar huecos .

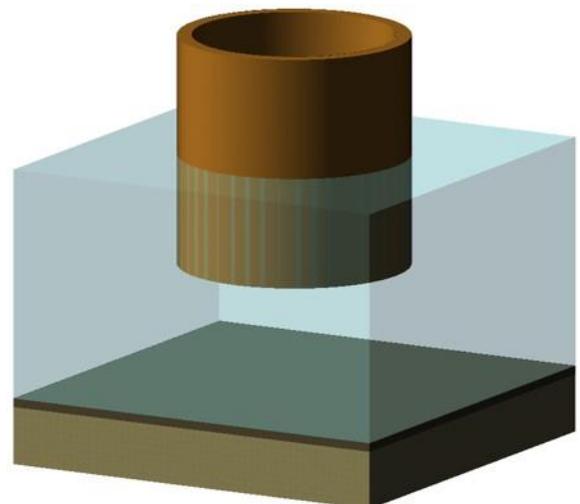
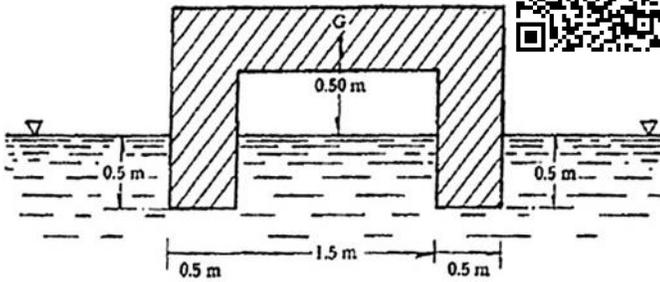


Figura 2.39.3. Se muestra una representación en 3D del cajón cilíndrico.



Problema 41

Figura 2.41.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

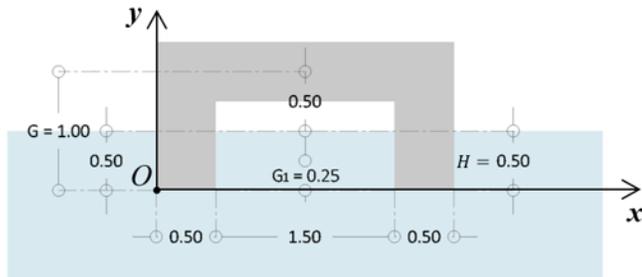


Figura 2.41.1. Se muestra la sección transversal del cuerpo, mostrando la ubicación del centro de flotación y el centro de gravedad respecto al punto O.

| Figura | Nombre     | Momento de Inercia  |
|--------|------------|---|
|        | Rectángulo | $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} hb^3$ $\bar{I}_{z'} = \frac{1}{12} bh^3$ |

Tabla 6. Momento de inercia de un rectángulo.

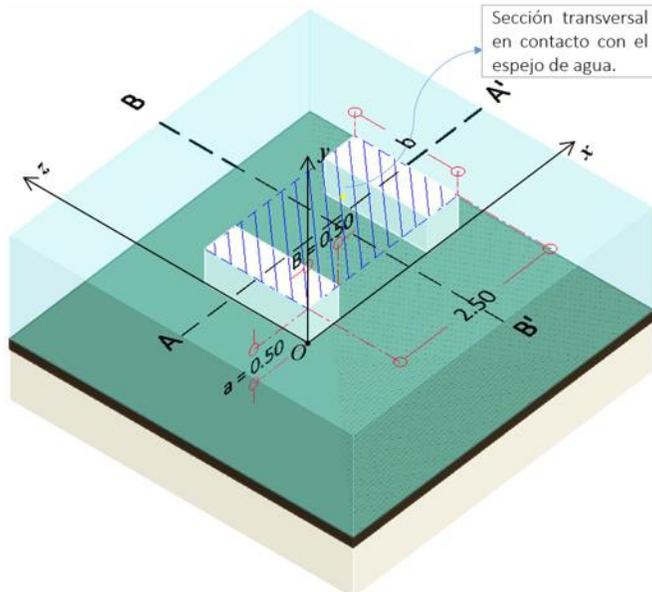


Figura 2.41.2 Para el cálculo del momento de inercia debe considerarse el área de la sección transversal en contacto con el espejo de agua, sin considerar huecos, tal como se indica.

**Problema 2.41.**

Calcular la altura metacéntrica del cuerpo mostrado en la figura para las condiciones de flotación indicadas.

Solución.

Usando los datos de la figura 2.41. a y basándonos en la figura 2.41.1, podremos calcular como primer paso, el valor de  $h_0$  (Referencia 1 p. 63), es decir

$$h_0 = G - G_1 = (0.5 + 0.5) - \frac{0.5}{2} = 1 - 0.25 = 0.75 \text{ [m]}$$

Donde.

- $G$ : Centro de gravedad del cuerpo completo respecto al punto  $O$ .
- $G_1$ : Centro de flotación o de carena respecto al punto  $O$  que de acuerdo a la Referencia 4 p. 15, es igual a  $G_1 = H/2$ .

Con el valor de  $h_0$  obtenido anteriormente, solo nos resta calcular el momento de inercia  $\bar{I}_{z'}$  o  $\bar{I}_{x'}$  (el enunciado del problema no especifica qué altura metacéntrica debe calcularse) y la magnitud del volumen sumergido  $v_0$ , los cuales sustituiremos en la ecuación (2.26) (Referencia 1 p. 62)

$$h = \frac{\bar{I}_z}{\cos \theta v_0} - h_0 \quad \text{Ecuación (2.26)}$$

Donde

- $h$  Altura metacéntrica.
- $\bar{I}_z$ : Momento de inercia del área de la sección del cuerpo a nivel de la superficie de flotación.
- $v_0$  Volumen del cuerpo sumergido.
- $\theta$  Ángulo de inclinación respecto al espejo de agua.

El volumen sumergido es igual a

$$v_0 = 0.50(0.50)b + 0.50(0.50)b = 2(0.50)(0.50)b$$

$$v_0 = 2b(0.50)^2$$

Es decir, dos veces el volumen del prisma rectangular color blanco de base  $B = 0.50 \text{ [m]}$  y altura  $a = 0.50 \text{ [m]}$  tal como se aprecia en la figura 2.41.2.

Para obtener el valor de  $\bar{I}_z$  en la ecuación (2.26) nos auxiliaremos de la figura 2.41.2, por otro lado, según la Tabla 6, el momento de inercia de un rectángulo, con las dimensiones dadas en el problema (sobre el eje  $BB'$ ) sería

$$\bar{I}_{z'} = \frac{1}{12} b(2.50)^3$$

Observe que si obtenemos la altura metacéntrica sobre el eje  $AA'$  (paralelo al eje  $x$  y donde  $\bar{I}_{x'} = 2.50b^3/12$ ) no podremos resolver el problema puesto que no conocemos el valor de  $b$ , en cambio si obtenemos la altura metacéntrica sobre el eje  $BB'$  (paralelo al eje  $z$ ) y sustituyendo el valor de  $\bar{I}_z$ , de  $h_0 = 0.75$  y  $v_0 = 2b(0.50)^2$  en la ecuación (2.26) tendremos lo siguiente:

$$h = \frac{b(2.50)^3/12}{\cos 0^\circ [2b(0.50)^2]} - 0.75 = 2.604 - 0.75 = 1.854 \text{ [m]}$$

$$h = 1.854 \text{ [m]} \quad \text{Solución}$$

Observamos que el valor de  $b$  no fue necesario para calcular el valor de la altura metacéntrica  $h$ .

Como último recurso, en la figura 2.41.3 se muestra una representación en tercera dimensión del cuerpo analizado en este problema.

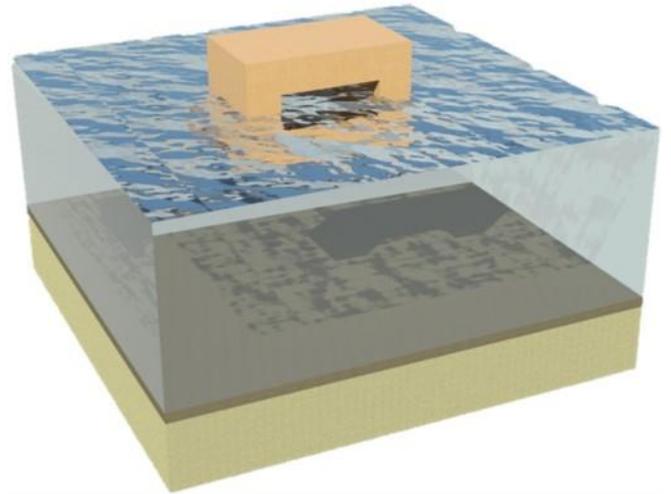
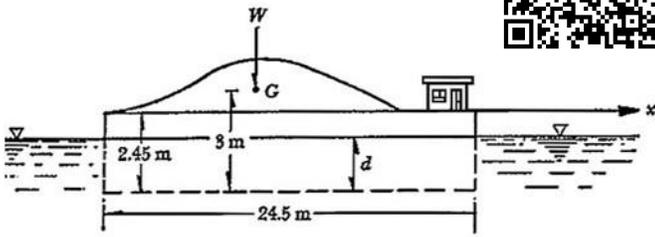


Figura 2.41.3. Se muestra una representación en 3D del cuerpo en estudio.



Problema 43

Figura 2.43.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

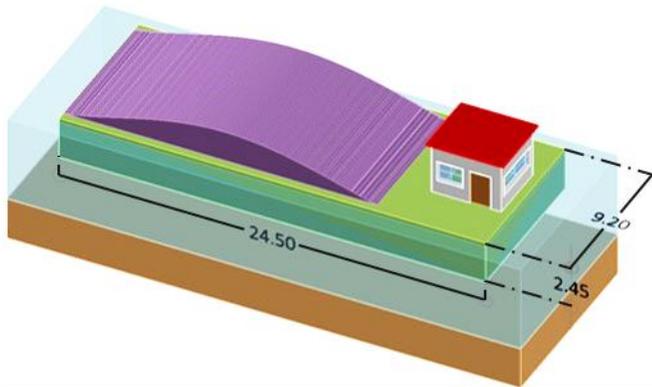


Figura 2.43.1. Se muestran las dimensiones principales del lanchón

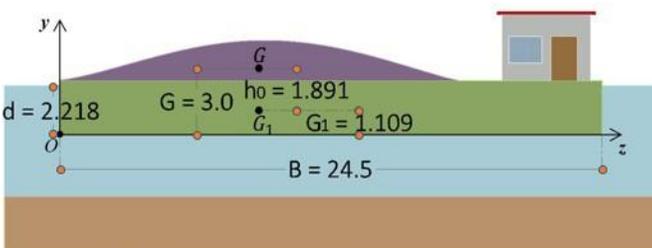


Figura 2.43.2. Se muestran las dimensiones básicas necesarias para el cálculo de  $h_0$ .

**Problema 2.43.**

Un lanchón tiene forma de paralelepípedo rectangular de  $9.2 \times 24.5 \times 2.45$  [m]; pesa 500 [Ton<sub>f</sub>] cargado y tiene su centro de gravedad a 3 [m] del fondo. Hallar la altura metacéntrica para la rotación alrededor del eje  $x$ , así como determinar si es estable. Cuando el lanchón gire  $5^\circ$  alrededor de este eje ¿Cuán será el par de equilibrio?

Solución.

Antes de comenzar con la solución de este problema, es importante aclarar que no podemos basarnos en el eje  $x$  mostrado en la figura 2.43. a, ya que hacer esto complicaría o haría confusos los cálculos. Por esta razón, hemos propuesto ejes en diferentes posiciones, como se verá en las siguientes figuras de este problema.

Calculemos primero la distancia sumergida del barco  $d$ , haciendo uso del principio de Arquímedes (Referencia 1 p. 59), es decir

$$E_v = \gamma v_0 \quad \dots 01)$$

Donde  $E_v$  es el empuje vertical que produce el agua sobre el lanchón;  $v_0$  es el volumen de líquido desalojado y  $\gamma$  el peso específico del agua. Dado que el lanchón está en equilibrio

$$\begin{aligned} E_v - W_{\text{lanchón}} &= 0 \\ E_v &= W_{\text{lanchón}} \quad \dots 02) \end{aligned}$$

Sustituyendo 01) en 02) y recordando que  $W_{\text{lanchón}} = 500$  [Ton<sub>f</sub>]

$$\gamma v_0 = 500 \quad \dots 03)$$

Despejando  $v_0$  de la ecuación 03)

$$v_0 = \frac{500}{\gamma} = \frac{500 \text{ [Ton}_f\text{]}}{1 \text{ [Ton}_f\text{/m}^3\text{]}} = 500 \text{ [m}^3\text{]}$$

Por otro lado, el lanchón es un cuerpo regular (paralelepípedo rectangular) por lo que el volumen sumergido puede obtenerse como el producto de su base por su ancho y por la altura sumergida  $d$  (figura 2.43.1), es decir

$$v_0 = B a d = 24.5(9.2)d \quad \dots 04)$$

Donde

- $B$  Base del lanchón
- $a$  Ancho del lanchón
- $d$  Distancia sumergida del barco.

Sustituyendo  $v_0 = 500$  [m<sup>3</sup>] en 04) y despejando  $d$  tenemos que

$$d = \frac{500}{Ba} = \frac{500}{(24.5)(9.2)} = 2.218 \text{ [m]}$$

Con el valor calculado de  $d$  podremos ahora calcular el valor de  $G_1$  (Referencia 4 p. 15), es decir

$$\begin{aligned} G_1 &= d/2 = 2.218/2 \\ G_1 &= 1.109 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Como el valor de  $G$  lo proporciona el enunciado del problema, también podremos calcular el valor de  $h_0$ , recordando que (Referencia 1 p. 63)

$$h_0 = G - G_1$$

Sustituyendo los valores correspondientes, tenemos que

$$\begin{aligned} h_0 &= G - G_1 = 3 - 1.109 \\ h_0 &= 1.891 \text{ [m]} \end{aligned}$$

Los valores obtenidos anteriormente se muestran en la figura 2.43.2.

La altura metacéntrica la calculamos con la ecuación (2.26) de la Referencia 1 p. 62

$$h = \frac{\bar{I}_z}{\cos \theta v_0} - h_0 \quad \text{Ecuación (2.26)}$$

Donde

$h$  Altura metacéntrica.

$\bar{I}_z$  Momento de inercia del área de la sección del cuerpo a nivel de la superficie de flotación.

$v_0$  Volumen del cuerpo sumergido.

$\theta$  Ángulo de inclinación respecto al espejo de agua.

De los valores mencionados anteriormente, solo nos falta calcular el momento de inercia para finalmente obtener la altura metacéntrica  $h$ . Para calcular el valor de  $\bar{I}_z$ , nos apoyaremos de la figura 2.41.3. Además, según la Tabla 6, el momento de inercia de un rectángulo, con las dimensiones proporcionadas en el problema sería:

$$\bar{I}_{z'} = \frac{B}{12} a^3 = \frac{24.5}{12} (9.2)^3 = 1,589.821 \text{ [m}^4\text{]}$$

Para este caso, el eje  $z'$  se encuentra exactamente sobre el eje  $AA'$ .

Sustituyendo todos los valores obtenidos a lo largo del problema (vea el resumen en la Tabla 7) en la ecuación (2.26) finalmente tenemos que

$$h = \frac{\bar{I}_{z'}}{\cos \theta v_0} - h_0 = \frac{1,589.821}{\cos 0^\circ (500)} - 1.891 = 1.289 \text{ [m]}$$

$$h = 1.289 \text{ [m]} > 0$$

$h = 1.289 \text{ [m]}$  El lanchón es estable

Solución a)

Por otro lado, según la Referencia 1 p. 61, el par de desequilibrio se calcula con la ecuación (2.24).

$$F_1 f = M = \gamma \tan \theta \bar{I}_z \quad \text{Ecuación (2.24)}$$

Donde

$M$ : Par de desequilibrio ocasionado por una fuerza externa.

$\gamma$ : Peso específico del agua  $\gamma = 1 \text{ [Ton}_f\text{/m}^3\text{]}$ .

$\theta$ : Ángulo de inclinación del cuerpo en estudio.

$\bar{I}_z$ : Momento de inercia del área de la sección del cuerpo en estudio a nivel de la superficie de flotación.

Para un ángulo  $\theta = 5^\circ$  el par de desequilibrio será

$$M = \gamma \tan \theta \bar{I}_z = 1 \text{ [Ton}_f\text{/m}^3\text{]} (\tan 5^\circ) (1,589.821 \text{ [m}^4\text{]})$$

$$M = 139.1 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$$

$M = 139.1 \text{ [Ton}_f \cdot \text{m]}$

Solución b)

Cómo último recurso se muestra una representación en tercera dimensión del lanchón en la figura 2.43.4.

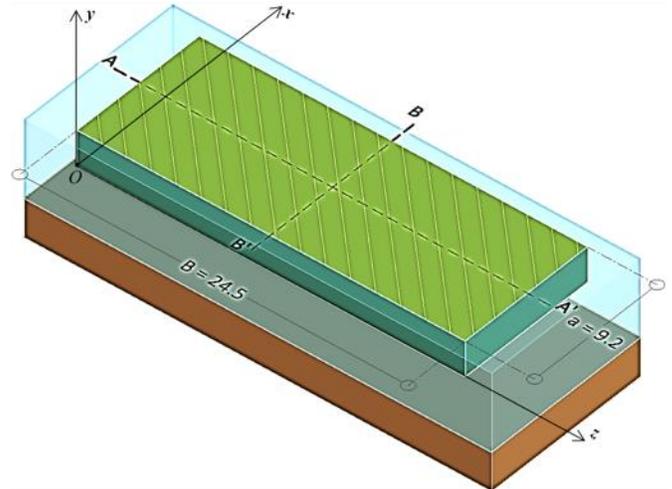


Figura 2.43.3. Se muestran las dimensiones necesarias para calcular el momento de inercia  $I_{z'}$

| Figura | Nombre     | Momento de Inercia  |
|--------|------------|---|
|        | Rectángulo | $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} h b^3$ $\bar{I}_{z'} = \frac{1}{12} b h^3$ |

Tabla 6. Momento de inercia de un rectángulo.

**Resumen de valores calculados en el problema 2.43.**

|   |
|---|
| $\bar{I}_{z'} = 1,589.821 \text{ [m}^4\text{]}$ $\theta = 0^\circ$ $v_0 = 500 \text{ [m}^3\text{]}$ $h_0 = 1.891 \text{ [m]}$ |
|---|

Tabla 7. Para comodidad del lector se han resumido todos los valores obtenidos en la solución del problema.

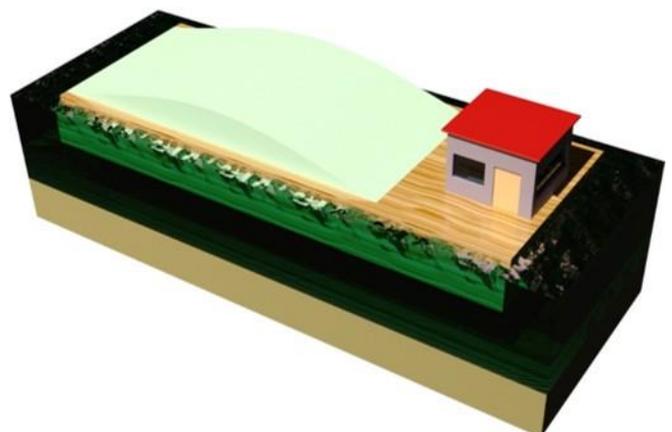


Figura 2.43.4. Se muestra una representación en 3D del lanchón en estudio.



Capítulo 4.  
Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica.



## Capítulo 4. Ecuaciones Fundamentales de la Hidráulica

Las ecuaciones fundamentales de la hidráulica son principios matemáticos que describen el comportamiento de los fluidos en movimiento. Estas ecuaciones permiten analizar el flujo de líquidos, como el agua, en canales, tuberías y otros sistemas hidráulicos. Las ecuaciones que utilizaremos en esta sección serán las siguientes:

### 1. Ecuación de continuidad.

La ecuación de continuidad se deriva del principio de conservación de la masa. En función del gasto, cuando el flujo es permanente se tiene que la suma de gastos que entra en un volumen de control es igual a la suma de gastos que sale del mismo.

$$\sum(Q_{\text{entra}}) = \sum(Q_{\text{sale}})$$

Ecuación (4.7b)

### 2. Ecuación de la Energía

Se basa en la conservación de la energía para un fluido en movimiento. Relaciona la energía cinética, potencial y de presión del fluido, y la irreversibilidad en el proceso. Es usual emplearla en términos de energía por unidad de peso, por eso las dimensiones de cada término son de longitud.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r$$

Ecuación (4.20)

Para un sistema que **no considera pérdidas** de energía, se denomina ecuación de Bernoulli:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Ecuación (4.21)

Donde

$z$  Carga de posición medida respecto a un Nivel Horizontal de Referencia (*NHR*)

$p/\gamma$  Carga de presión

$V^2/2g$  Carga de velocidad

$\sum_1^2 h_r$  Pérdida de energía (por unidad de peso) entre dos secciones.

En cada sección, la suma de estos tres términos es la carga total  $H$

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

### 3. Potencia Hidráulica.

La carga total  $H$  representa la energía por unidad de peso que posee el fluido que atraviesa la sección transversal, por lo que para determinar la energía  $E$ , basta multiplicar la carga  $H$  por el peso del fluido  $W$ , tal que  $E = WH$ . El peso es  $W = \gamma v$ , (siendo  $v$  el volumen) de donde  $E = \gamma v H$ . La transferencia de energía en la unidad de tiempo o flujo de energía es la potencia. En el caso de la potencia hidráulica  $P_H$ , ésta representa la rapidez con la cual el fluido proporciona energía a un sistema de generación hidroeléctrico o una bomba entrega energía a un sistema de bombeo, entonces

$$P_H = \gamma Q H$$

## ix

**Eficiencia.** Es una manera de medir qué tan bien se convierte la energía suministrada en energía útil o aprovechable, se expresa matemáticamente como:

Para una bomba

$$\eta = \frac{P_H}{P_n}$$

Para una turbina

$$\eta = \frac{P_n}{P_H}$$

Donde

$P_n$  Potencia nominal de la máquina

### 4. Energía añadida o aprovechada por una máquina.

La energía por unidad de peso, conocida como carga que una **bomba** añade al sistema se expresa como:

$$H_B = \frac{\eta P_n}{\gamma Q}$$

Ecuación (4.26b)

La energía que una **turbina** extrae del sistema se expresa como:

$$H_t = \frac{P_n}{\eta \gamma Q}$$

Ecuación (4.26a)

Donde

$\eta$  Eficiencia de la máquina (bomba o turbina)

### 5. Ecuación de la Cantidad de Movimiento

La **ecuación de la cantidad de movimiento** aplicada a un fluido que pasa por una tubería se deriva del principio de conservación de la cantidad de movimiento (o momento lineal). Este principio establece que el cambio en la cantidad de movimiento de un fluido a lo largo del tiempo es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el fluido. Dicho principio se expresa matemáticamente como.

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_c = \rho \sum (Q\beta\mathbf{V})$$

Ecuación (4.33)

Donde

$F_p$  Fuerza de superficie debido a la presión que se genera dentro de una tubería.

$F_\tau$  Fuerza de superficie por el esfuerzo cortante que se genera debido al arrastre en la tubería.

$F_c$  Fuerza de cuerpo generalmente debidas al peso del volumen de control.

$\beta$  Coeficiente de Boussinesq.

Las fuerzas de superficie debido a la presión  $F_p$  siempre se dirigen hacia dentro del volumen de control. Cuando realice sus cálculos considere también la dirección de los ejes coordenados o los ejes de referencia. Por otro lado, cada término del lado derecho de la ecuación (4.33) tendrá signo negativo si el gasto entra al volumen de control y positivo en caso contrario.

Dado que en esta tesis se trabaja exclusivamente en el Sistema Técnico de Unidades, será más cómodo que exprese la densidad en términos del peso específico, es decir

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

Donde  $g$  se puede considerar como la aceleración de la gravedad estándar  $g = 9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ , al menos que se indique lo contrario.

Cuando resuelva problemas que involucren la ecuación de la cantidad de movimiento, debe tener bien presente si la tubería es horizontal o vertical, ya que esa diferencia podría involucrar el uso de la fuerza de cuerpo  $F_c$ .

X

**Problema 4.03.**

Determinar la componente  $v_y$  de la velocidad (con la diferencia de una constante aditiva) para los siguientes flujos bidimensionales e incompresibles; indicar cuáles son irrotacionales.

a)  $v_x = x^2$       b)  $v_x = 6x + xy$

c)  $v_x = x^2 + x$       d)  $v_x = \frac{x}{x^2+y^2}$

e)  $v_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$       f)  $v_x = 2xy^2$

**Solución.**

Por ser un flujo bidimensional e incompresible se cumplen las siguientes igualdades (Referencia 1 p. 97, 116)

$$\begin{aligned}v_z &= 0 \\ \rho &= \text{constante} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Por otro lado, según la Referencia 1 p. 116, la ecuación para un flujo incompresible sea o no permanente es

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0$$

Ecuación (4.3)

Dado que  $v_z = 0$ , entonces

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Recordando que (Referencia 5 p. 1,094)

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Finalmente concluimos que el fluido debe cumplir la siguiente condición.

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \dots 01$$

Tomando en cuenta los resultados anteriores y considerando la ecuación (4.3), el inciso a) donde  $v_x = x^2$  se resuelve como sigue

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2x + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Resolviendo la ecuación en derivadas parciales anterior, la componente de la velocidad en  $y$  será

$$v_y = -2xy + f(x)$$

La función  $f(x)$  es para este caso la constante aditiva.

Para comprobar si el flujo es irrotacional (Referencia 5 p. 1,094) se debe cumplir que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ , tomando en cuenta que  $v_z = 0$ , tenemos

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial v_y}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (-2y + f'(x))\mathbf{k}$$

Dado que  $\text{rot } \bar{v} \neq \mathbf{0}$  el flujo es rotacional

$$v_y = -2xy + f(x), \text{ flujo rotacional}$$

Solución a)

Para el inciso b) donde  $v_x = 6x + xy$  y considerando todas las condiciones mencionadas al inicio de la solución del problema, tenemos que:

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(6x + xy)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = (6 + y) + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Resolviendo la ecuación en derivadas parciales anterior, la componente de la velocidad en  $y$  será

$$v_y = -\left(6y + \frac{y^2}{2}\right) + f(x)$$

La función  $f(x)$  es para este caso la constante aditiva.

Para comprobar si el flujo es irrotacional se debe cumplir que  $\text{rot } \bar{v} = \mathbf{0}$ , tomando en cuenta que  $v_z = 0$ , tenemos que

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\text{rot } \bar{v} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + (f'(x) - x)\mathbf{k}$$

Dado que  $\text{rot } \bar{v} \neq \mathbf{0}$  el flujo es rotacional

$$v_y = -\left(6y + \frac{y^2}{2}\right) + f(x), \text{ flujo rotacional}$$

Solución b)

Para el inciso c) donde  $v_x = x^2 + x$  y considerando todas las condiciones mencionadas al inicio de la solución del problema, tenemos que

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = (2x + 1) + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Resolviendo la ecuación en derivadas parciales anterior, la componente de la velocidad en  $y$  será

$$v_y = -(2x + 1)y + f(x)$$

La función  $f(x)$  es para este caso la constante aditiva.

Para comprobar si el flujo es irrotacional se debe cumplir que  $\text{rot } \bar{v} = \mathbf{0}$ , tomando en cuenta que  $v_z = 0$ , tenemos que

$$\text{rot } \bar{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\text{rot } \bar{v} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + (-2y + f'(x) - 0)\mathbf{k}$$

Dado que  $\text{rot } \bar{v} \neq \mathbf{0}$  el flujo es rotacional

$$v_y = -(2x + 1)y + f(x), \text{ flujo rotacional}$$

Solución c)

**Nota**

Para calcular la derivada de la función  $v_x$  respecto de  $x$   
Donde

$$v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Utilizamos la Regla del cociente (Referencia 3 p. 112)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables con  $g(x) \neq 0$ . Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Es decir,

$$D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Aplicando la Regla del cociente para calcular  $\partial v_x / \partial x$  y considerando que  $f(x) = x$  y  $g(x) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

Para calcular la integral en derivadas parciales de  $\partial v_y / \partial y$  haremos un cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= y/x \\ du &= \left(\frac{1}{x}\right) dy \\ dy &= x du \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} dv_y &= -\frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy \\ \int dv_y &= -\int \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} dy \\ v_y &= -\int \frac{x(x^2 u^2 - x^2)}{(x^2 u^2 + x^2)^2} du = -x \int \frac{(x^2 u^2 - x^2)}{(x^2 u^2 + x^2)^2} du \end{aligned}$$

Factorizando la expresión anterior

$$\begin{aligned} v_y &= -x \int \frac{(x^2 u^2 - x^2)}{(x^2 u^2 + x^2)^2} du = -x \int \frac{x^2(u^2 - 1)}{x^4(u^2 + 1)^2} du \\ v_y &= -\frac{1}{x} \int \frac{(u^2 - 1)}{(u^2 + 1)^2} du = -\frac{1}{x} \int \frac{(u + 1)(u - 1)}{(u^2 + 1)^2} du \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión anterior en fracciones parciales

$$v_y = -\frac{1}{x} \int \frac{(u + 1)(u - 1)}{(u^2 + 1)^2} du = -\frac{1}{x} \int \left[ \frac{1}{u^2 + 1} - \frac{2}{(u^2 + 1)^2} \right] du$$

Aplicando la Regla de la suma

$$v_y = -\frac{1}{x} \int \frac{1}{u^2 + 1} du + \frac{1}{x} \int \frac{2}{(u^2 + 1)^2} du$$

De las tablas de integrales (Referencia 6 p. 279, fórmula 77)

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C$$

Para la integral

$$\int \frac{2}{(u^2 + 1)^2} du = \arctan(u) + \frac{u}{1 + u^2} + C$$

Se deja al estudiante encontrar su solución como ejercicio

A continuación y con base en los resultados obtenidos

$$v_y = -\frac{1}{x} \arctan(u) + \frac{1}{x} \left[ \arctan(u) + \frac{u}{1 + u^2} \right] = \frac{1}{x} \left( \frac{u}{1 + u^2} \right)$$

Recordando que  $u = y/x$  y sustituyendo en la ecuación anterior

$$v_y = \frac{1}{x} \left( \frac{\frac{y}{x}}{1 + y^2/x^2} \right) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Para el inciso d) donde  $v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$  y considerando todas las condiciones mencionadas al inicio de la solución del problema, tenemos que

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Resolviendo la ecuación en derivadas parciales anterior (revise la nota a su izquierda), la componente de la velocidad en  $y$  será

$$v_y = \frac{y}{x^2 + y^2} + f(x)$$

La función  $f(x)$  es para este caso la constante aditiva.

Para comprobar si el flujo es irrotacional se debe cumplir que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ , tomando en cuenta que  $v_z = 0$ , tenemos que

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{v}} &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left[ -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + f'(x) + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \mathbf{k} \\ \text{rot } \bar{\mathbf{v}} &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + f'(x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dado que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$  el flujo es rotacional

$$v_y = \frac{y}{x^2 + y^2} + f(x), \text{ flujo rotacional}$$

Solución d)

Para el inciso e) donde  $v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$  y considerando todas las condiciones mencionadas al inicio de la solución del problema, tenemos que (para la solución de las derivadas e integrales básiase en la nota que se muestra en la página 38):

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Resolviendo la ecuación en derivadas parciales anterior, la componente de la velocidad en  $y$  será

$$v_y = \frac{x}{y^2 + x^2} + f(x)$$

La función  $f(x)$  es para este caso la constante aditiva.

Para comprobar si el flujo es irrotacional se debe cumplir que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ , tomando en cuenta que  $v_z = 0$ , tenemos

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{v}} &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + f'(x) - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{k} \\ \text{rot } \bar{\mathbf{v}} &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + f'(x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dado que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$  el flujo es rotacional

$$v_y = \frac{x}{x^2 + y^2} + f(x), \text{ flujo rotacional}$$

Solución e)

Para el inciso f) donde  $v_x = 2xy^2$  y considerando todas las condiciones mencionadas al inicio de la solución del problema, tenemos que

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial(2xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2y^2 + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Resolviendo la ecuación en derivadas parciales anterior, la componente de la velocidad en  $y$  será

$$v_y = -\frac{2}{3}y^3 + f(x)$$

La función  $f(x)$  es para este caso la constante aditiva.

Para comprobar si el flujo es irrotacional se debe cumplir que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ , tomando en cuenta que  $v_z = 0$ , tenemos que

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\text{rot } \bar{\mathbf{v}} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + (0 + f'(x) - 4xy)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + (f'(x) - 4xy)\mathbf{k}$$

Dado que  $\text{rot } \bar{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$  el flujo es rotacional

$$v_y = -\frac{2}{3}y^3 + f(x), \text{ flujo rotacional}$$

Solución f)

**Nota**

Para calcular la derivada de la función  $v_x$  respecto de  $x$  Donde

$$v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Utilizamos la Regla del cociente (Referencia 3 p. 112)

Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables con  $g(x) \neq 0$ . Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Es decir,

$$D_x \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

Aplicando la Regla del cociente para calcular  $\partial v_x / \partial x$  y considerando que  $f(x) = -y$  y  $g(x) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(0) + y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2yx}{(y^2 + x^2)^2}$$

Para calcular la integral en derivadas parciales de  $\partial v_y / \partial y$  haremos un cambio de variable

$$u = y^2 + x^2 \\ du = 2ydy$$

Entonces

$$dv_y = -\frac{2yx}{(y^2 + x^2)^2} dy \\ \int dv_y = -\int \frac{2yx}{(y^2 + x^2)^2} dy \\ v_y = -\int \frac{x}{u^2} du = -x \int u^{-2} du = -\frac{x}{-u} = \frac{x}{u}$$

Recordando que  $u = y^2 + x^2$

Finalmente nos resulta:

$$v_y = \frac{x}{y^2 + x^2}$$

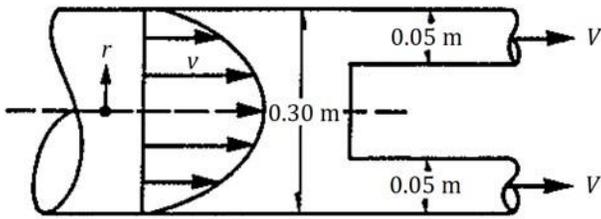


Figura del problema 7.

Figura 4.07.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

**Nota**

Si observamos detenidamente la ecuación que define la distribución de la velocidad, notaremos que la función representa un paraboloides.

A modo de ejemplo ilustrativo, convertiremos la ecuación 01) de coordenadas polares a cartesianas, para obtener la gráfica mostrada en la figura 4.07.1, de la siguiente manera (Referencia 5 p. 997)

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{a)}$$

Sustituyendo la ecuación a) en la ecuación 01) tenemos

$$v = 0.0225 - (x^2 + y^2)$$

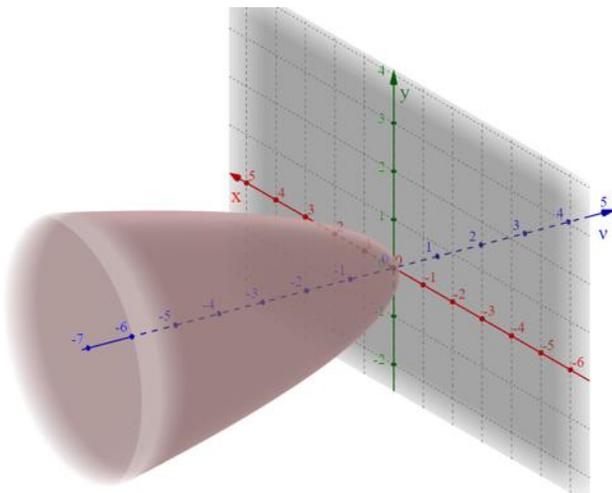


Figura 4.07.1. Se muestra la grafica de  $v = 0.0225 - (x^2 + y^2)$

**Problema 4.07**

Por el interior de un gran conducto circular de 0.3 [m] de diámetro fluye agua con velocidades que siguen la distribución señalada en la figura, según la ley  $v = 0.0225 - r^2$  (en [m/s]). Determinar la velocidad media con que el agua sale por las tuberías de 0.05 [m] de diámetro.

Solución.

Para obtener el gasto necesitaremos hacer uso de la definición general de gasto (Referencia 1 p. 104) dada por la siguiente ecuación

$$Q = \iint_A v \, dA \quad \text{Ecuación (3.12)}$$

Donde

- $Q$  Gasto en [m<sup>3</sup>/s]
- $v$  Velocidad del fluido en [m/s]
- $dA$  Elemento de superficie diferencial del área

Para obtener la velocidad media nos basaremos en la ecuación (3.13) (Referencia 1 p. 104)

$$V = \frac{Q}{A} \quad \text{Ecuación (3.13)}$$

Donde

- $Q$  Gasto
- $A$  Área total del conducto por donde circula el agua

Según el enunciado del problema, la distribución de la velocidad estaría definida por

$$v = 0.0225 - r^2 \quad \text{01)}$$

Procederemos ahora a calcular el gasto según la ecuación (3.12)

$$Q = \iint_A v \, dA$$

De acuerdo a la Referencia 5 p. 999-1,000 la ecuación anterior se podría reescribir como

$$Q = \iint_A v \, dA = \iint_A (0.0225 - r^2) r \, dr \, d\theta \quad \text{02)}$$

Donde

$$dA = r \, dr \, d\theta$$

Procederemos ahora a definir los límites de integración.

Para el caso de  $r$ , su límite de integración inferior sería  $r = 0$  y su límite de integración superior sería  $r = 0.15$  que es el radio del conducto circular por donde fluye el agua.

Para el caso de  $\theta$ , su límite de integración inferior sería  $\theta = 0$  y su límite de integración superior sería  $\theta = 2\pi$ , es decir se integra sobre todo el perímetro de la circunferencia que forma el conducto circular por donde fluye el agua.

Ahora que conocemos todos los límites de integración, la ecuación 02) se reescribiría y resolvería de la siguiente manera:

$$Q = \iint_A (0.0225 - r^2) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.15} (0.0225 - r^2) r dr d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{0.15} [(0.0225r - r^3) dr] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{0.0225r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{0.15} d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{0.0225(0.15)^2}{2} - \frac{0.15^4}{4} \right] d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} [2.53125 \times 10^{-4} - 1.26563 \times 10^{-4}] d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} [1.2656 \times 10^{-4}] d\theta$$

$$Q = [1.2656 \times 10^{-4} \theta]_0^{2\pi} = 1.2656 \times 10^{-4} (2\pi) = 2.53 \times 10^{-4} \pi$$

$$Q = 7.948 \times 10^{-4} \text{ [m}^3/\text{s]}$$

Una vez calculado el gasto  $Q$  solo nos resta calcular el área total del conducto por donde circula el agua (Tabla 1.c) para finalmente obtener la velocidad media en el conducto (sección 1), recordando que  $r = 0.15$  [m] y que  $D = 2r$ , es decir:

$$A_1 = \pi \frac{D^2}{4} = \pi \frac{(2r)^2}{4} = \pi r^2 = \pi (0.15)^2 = 0.0707 \text{ [m}^2\text{]}$$

Calculamos ahora la velocidad media que hay en el conducto circular de 0.3 [m] de diámetro (sección 1) utilizando la ecuación (3.13)

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{7.948 \times 10^{-4}}{0.0707} = 0.0112 \text{ [m/s]}$$

Por otro lado y de acuerdo a la ecuación de continuidad

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (03)$$

Es decir, el gasto que fluye por el conducto circular de 0.30 [m] de diámetro debe ser el mismo que fluye por las dos tuberías de 0.05 [m] de diámetro (vea la figura 4.07.2). Dado que no se tienen más datos, se considera que

$$Q_2 = Q_3$$

Entonces

$$Q_1 = 2Q_2 \quad (04)$$

También

$$Q_2 = V_2 A_2 = V_2 \left[ \pi \frac{D_2^2}{4} \right] = V_2 \left[ \pi \frac{0.05^2}{4} \right] = (6.25 \times 10^{-4}) \pi V_2$$

Recordando que  $Q = Q_1 = 2.53 \times 10^{-4} \pi$  y sustituyendo en 04)

$$2.53 \times 10^{-4} \pi = 2[(6.25 \times 10^{-4}) \pi V_2]$$

Finalmente, tenemos que la velocidad en cada uno de los tubos de la bifurcación es igual a

$$V_2 = \frac{2.53 \times 10^{-4} \pi}{2(6.25 \times 10^{-4}) \pi} = 0.2024 \text{ [m/s]}$$

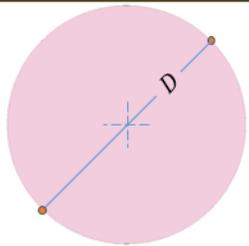
| Figura   | Nombre         | Área                    |
|--|----------------|-------------------------|
|  | Circunferencia | $A = \frac{\pi}{4} D^2$ |

Tabla 1.c. Área de una circunferencia.

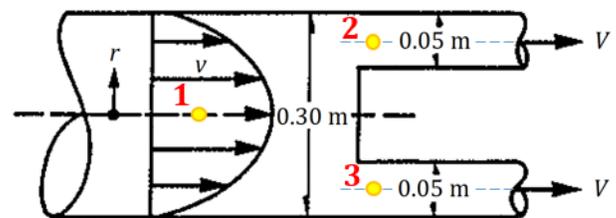


Figura 4.07.2. Se muestran los puntos 1, 2 y 3 en color amarillo.

$V = 0.2024 \text{ [m/s]}$

Solución

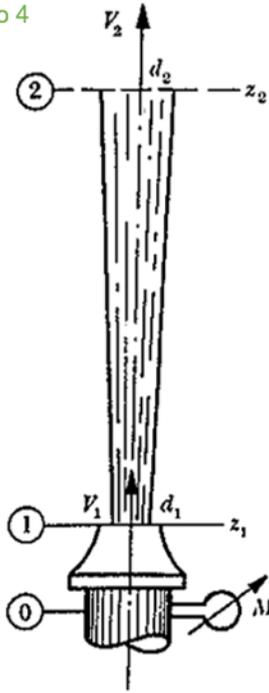


Figura del problema 11.

Figura 4.11.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

**Nota**

En caso de que se presente alguna situación donde existan pérdidas, entonces se utilizará la ecuación (4.20) de la Referencia 1 p. 127. En este problema, no se menciona que existan pérdidas, por lo tanto, solo utilizaremos la ecuación (4.21).

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad \text{Ecuación (4.20)}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{Ecuación (4.21)}$$

Tenga presente que el subíndice de las ecuaciones (4.20) y (4.21) son propuestos, es decir no siempre será la sección 1 y la sección 2, el subíndice siempre lo podremos proponer, se recomienda utilizar números enteros positivos o letras mayúsculas.

Con base en la figura 4.11.1 y analizando el sistema entre la sección 1 y la sección 2 y utilizando la ecuación (4.21), tenemos que:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Sustituyendo los valores respectivos para cada uno de los términos de la ecuación anterior, tenemos que

$$0.40 + 0 + \frac{12^2}{2g} = 5 + 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

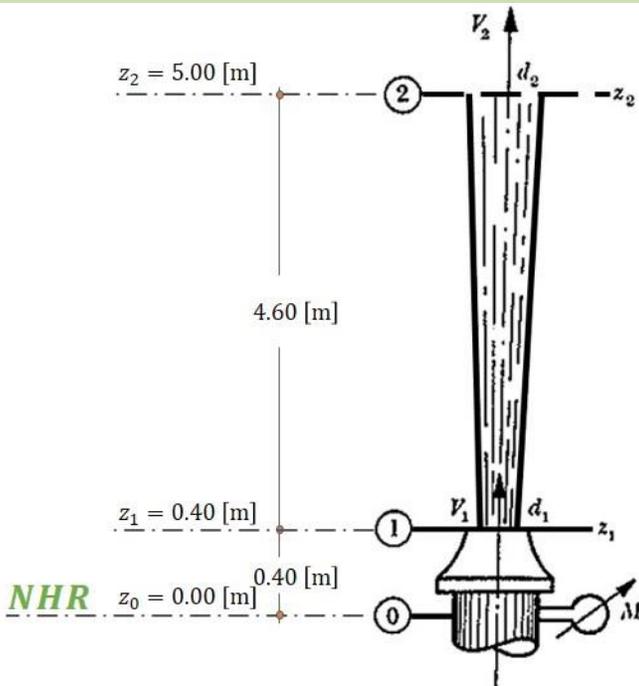
$$0.40 + \frac{12^2}{2g} = 5 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 0.40 + \frac{12^2}{2g} - 5$$

$$V_2 = \sqrt{\left(0.40 + \frac{12^2}{2g} - 5\right) 2g} = \sqrt{(2.7395)(19.62)} = \sqrt{53.749}$$

$$V_2 = 7.331 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Vamos ahora, a explicar con claridad, cada uno de los resultados anteriores.



**NHR**

Figura 4.11.1. Se muestran la posición del NHR y los datos proporcionados por el enunciado del problema.

La presión en la sección 1 (es decir  $p_1$ ) es nula debido a que no existe presión manométrica una vez que el agua sale de la tubería. De igual manera la presión  $p_2$  es nula porque tampoco existe presión manométrica dado que el agua está en contacto con la presión atmosférica.

Por otro lado, según la ecuación (3.13) de la Referencia 1 p. 104 el gasto se puede calcular considerando la velocidad media  $V$  a través de la superficie  $S$  de área  $A$ .

$$V = \frac{Q}{A} \quad \text{Ecuación (3.13)}$$

Considerando entonces la ecuación (3.13), la Tabla 1.c y los datos proporcionados por el enunciado del problema (vea la nota azul a la derecha), tenemos que

$$Q = V_1 A_1 = V_1 \left( \pi \frac{d_1^2}{4} \right) = 12 \left[ \pi \frac{(0.025)^2}{4} \right]$$

$$Q = 0.00589 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

Para calcular el diámetro en la sección 2 podremos utilizar la ecuación (4.7b) de la Referencia 1 p. 119, también conocida como Ecuación de Continuidad, para un flujo permanente e incompresible

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{Ecuación (4.7b)}$$

Observe que el gasto es el mismo para cualquier sección del sistema en cuestión, siempre y cuando el flujo sea permanente e incompresible.

Aplicando entonces la ecuación (4.7b) para las secciones 1 y 2

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = 0.00589$$

$$V_2 A_2 = V_2 \left( \pi \frac{d_2^2}{4} \right) = 0.00589$$

$$7.331 \left( \pi \frac{d_2^2}{4} \right) = 0.00589$$

$$d_2 = \sqrt{\frac{0.00589(4)}{7.331\pi}} = 0.032 \text{ [m]}$$

$$d_2 = 3.20 \text{ [cm]} \quad \text{Solución a)}$$

**Nota**

Recuerde que *NHR* significa Nivel Horizontal de Referencia

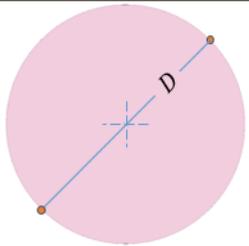
| Figura   | Nombre         | Área                    |
|--|----------------|-------------------------|
|  | Circunferencia | $A = \frac{\pi}{4} D^2$ |

Tabla 1.c. Área de una circunferencia.

**Nota**

Los siguientes valores los proporciona el enunciado del problema

$$d_1 = 2.5 \text{ [cm]} = 0.025 \text{ [m]}$$

$$z_2 - z_1 = 4.60 \text{ [m]}$$

$$V_1 = 12 \text{ [m/s]}$$

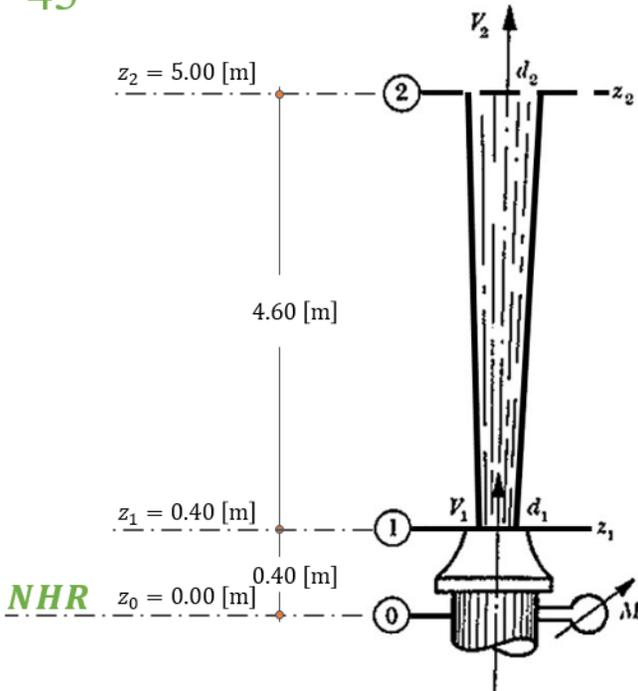


Figura 4.11.1 (Repetida). Se muestran la posición del **NHR** y los datos proporcionados por el enunciado del problema.

**Nota**

Los siguientes valores los proporciona el enunciado del problema

$$\begin{aligned} z_1 - z_0 &= 0.40 \text{ [m]} \\ V_1 &= 12 \text{ [m/s]} \\ d_0 &= 0.10 \text{ [m]} \end{aligned}$$

**Nota**

Recuerde que

$$1 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right] = 0.0001 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$$

El peso específico del agua es

$$\gamma = 1,000 \text{ [kg}_f/\text{m}^3]$$

Por otro lado, basándonos en la figura 4.11.1 y analizando el sistema entre la sección 0 y la sección 1 y utilizando la ecuación (4.21), tenemos que

$$\begin{aligned} z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} &= z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \\ \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} &= (z_1 - z_0) + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores respectivos para cada uno de los términos de la ecuación anterior (vea la primera nota a la izquierda), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} &= 0.40 + 0 + \frac{12^2}{2g} \\ \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} &= 0.40 + \frac{12^2}{2(9.81)} \\ \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} &= 7.7395 \quad \dots 01) \end{aligned}$$

Para calcular la velocidad  $V_0$  haremos uso una vez más, de la ecuación (4.7b), es decir, de la ecuación de continuidad.

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{Ecuación (4.7b)}$$

Aplicando entonces la ecuación (4.7b) entre la sección 0 y la sección 1 y sustituyendo los valores conocidos

$$\begin{aligned} Q &= V_1 A_1 = V_0 A_0 = 0.00589 \\ V_0 A_0 &= V_0 \left( \pi \frac{d_0^2}{4} \right) = 0.00589 \\ V_0 \left( \pi \frac{0.10^2}{4} \right) &= 0.00589 \\ V_0 &= \frac{4(0.00589)}{\pi(0.01)} = 0.75 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo la velocidad  $V_0$  en 01) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{1,000} + \frac{0.75^2}{2(9.81)} &= 7.7395 \\ \frac{p_0}{1,000} &= 7.7395 - \frac{0.75^2}{2(9.81)} \\ \frac{p_0}{1,000} &= 7.7395 - 0.029 \\ \frac{p_0}{1,000} &= 7.7105 \end{aligned}$$

$$p_0 = 1,000(7.7105) = 7,710.5 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{10,000 \text{ cm}^2} \right] = 0.771 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$$

$$p_0 = 0.771 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right] \quad \text{Solución b)}$$

Para obtener la velocidad que nos piden en el inciso c) haremos uso de las ecuaciones de tiro parabólico (Referencia 7 p. 39-43)

$$V_y(t) = V_0 \text{ sen } \theta - gt \quad \dots 02)$$

$$y(t) = (V_0 \text{ sen } \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots 03)$$

$$V_x(t) = V_0 \text{ cos } \theta \quad \dots 04)$$

Donde

$V_y(t)$  Componente vertical de la velocidad en un instante  $t$  en [m/s].

$V_x(t)$  Componente horizontal de la velocidad en un instante  $t$  en [m/s].

$V_0$  Velocidad inicial en [m/s].

$t$  Tiempo en [s].

$\theta$  Ángulo de inclinación inicial, en este caso  $\theta = 45^\circ$ .

$g$  Aceleración de la gravedad  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>].

$y(t)$  Posición vertical de la partícula en un instante  $t$  en [m].

La velocidad  $V_y$  será nula cuando la altura  $y = y(t)$  sea máxima, es decir, una vez que el chorro, que tiene un comportamiento de tiro parabólico, deje de ascender para comenzar su descenso.

A la altura máxima la llamaremos  $h_{m\acute{a}x}$ ; observe la figura 4.11.2.

De acuerdo a lo expuesto en el párrafo anterior y sustituyendo los valores  $V_y(t) = 0$  [m/s],  $V_0 = 12$  [m/s] y  $\theta = 45^\circ$  en 02) y 03), tenemos que

$$0 = 12 \operatorname{sen} 45^\circ - 9.81t \quad \dots 05)$$

$$y(t) = h_{m\acute{a}x} = (12 \operatorname{sen} 45^\circ)t - \frac{1}{2}(9.81)t^2 \quad \dots 06)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas anterior, tenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned} h_{m\acute{a}x} &= 3.67 \text{ [m]} \\ t &= 0.865 \text{ [s]} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor  $V_0 = 12$  [m/s] en 04) tenemos que

$$V_x(t) = 12 \cos 45^\circ = 8.49 \text{ [m/s]}$$

Finalmente

$$h_{m\acute{a}x} = 3.67 \text{ [m]}, V_x(t) = 8.49 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Solución c)

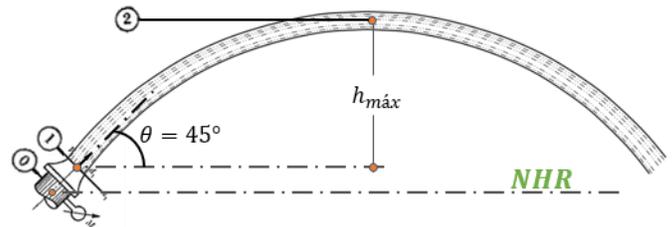


Figura 4.11.2. Se indica la posición del **NHR** así como la altura máxima que alcanza el chorro de agua a  $45^\circ$ .

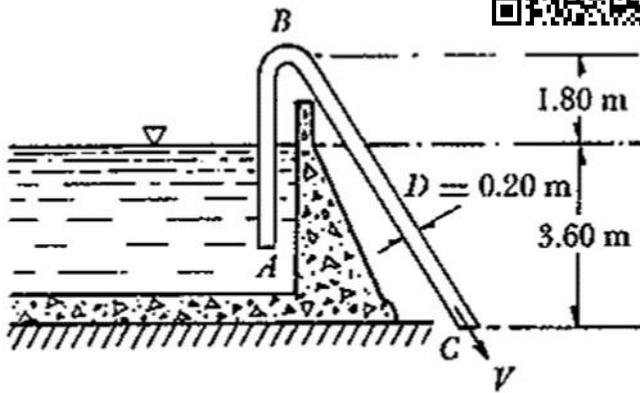


Figura del problema 13.

Figura 4.13.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

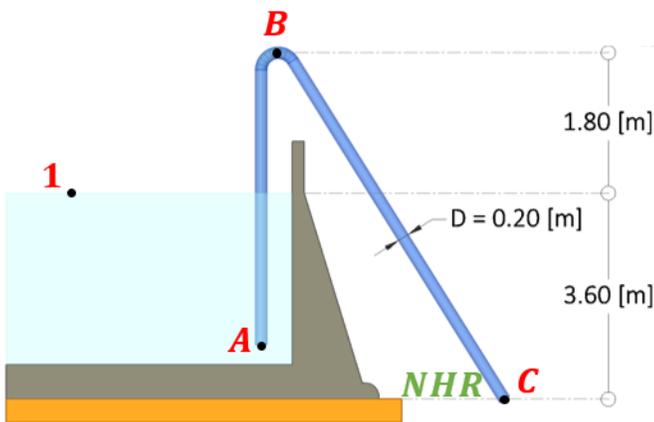


Figura 4.13.1. El punto 1 coincide con el nivel de espejo de agua.

**Nota**

Recuerde que  
 NHR significa Nivel Horizontal de Referencia  
 Y que

$$1 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right] = 0.0001 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$$

El peso específico del agua es  
 $\gamma = 1,000 \text{ [kg}_f/\text{m}^3]$

**Problema 4.13**

En el sifón —mostrado en la figura— calcular la velocidad del agua, el gasto y la presión en la sección B, en el supuesto de que las pérdidas fuesen despreciables.

Solución.

Dado que no se consideran pérdidas de energía, se emplea la ecuación de Bernoulli para una vena líquida (Referencia 1 p. 127).

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{Ecuación (4.21)}$$

Tenga presente que los subíndices de la ecuación 4.21 son propuestos, es decir no siempre será sección 1 y sección 2, el subíndice siempre lo podremos proponer. Se recomienda utilizar números enteros positivos o letras mayúsculas.

Con base en la figura 4.13.1 y analizando el sistema entre la sección que coincide con el espejo de agua (sección 1) y la sección C, y utilizando la ecuación (4.21), tenemos que

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g}$$

Sustituyendo los valores respectivos para cada uno de los términos de la ecuación anterior, tenemos que

$$3.6 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_c^2}{2g}$$

$$3.6 = \frac{V_c^2}{2g}$$

$$V_c^2 = 3.6(2g) = 3.6(2)(9.80) = 70.56$$

$$V_c = \sqrt{70.56} = 8.40 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Para que no exista confusión, vamos a explicar primero, con claridad, cada uno de los resultados anteriores.

La presión en la sección 1, es nula debido a que no existe presión manométrica en la superficie libre del agua, además, la velocidad  $V_1$  es muy pequeña ya que se considera la sección transversal en la superficie libre del agua también. De forma parecida, en la sección C no existe presión manométrica dado que el agua ha salido de la tubería.

Por otro lado, la carga de posición  $z_c$  medida respecto al nivel horizontal de referencia NHR es cero, tal como se observa en la figura 4.13.1.

Considerando entonces la ecuación (3.13) tenemos que

$$Q = V_c A_c = V_c \pi \frac{D^2}{4} = 8.40 \pi \frac{(0.20)^2}{4} = 0.2639 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$Q = 0.2639 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \quad \text{Solución a)}$$

De la ecuación de continuidad

$$Q = V_B A_B = V_C A_C = 0.2639 \text{ [m}^3/\text{s]}$$

Por lo que la velocidad en la sección  $B$  se determina como:

$$A_B = A_C = \pi \frac{(0.20)^2}{4} = 0.0314 \text{ [m}^2]$$

$$V_B = V_C = \frac{0.2639}{0.0314} = 8.40 \text{ [m/s]}$$

$$V_B = 8.40 \text{ [m/s]}$$

Solución b)

Evidentemente, como el área de las secciones  $B$  y  $C$  es la misma, la velocidad no cambia.

Planteando ahora la ecuación de la energía entre la sección 1 y la sección  $B$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

Sustituyendo los valores respectivos, tenemos que

$$3.6 + 0 + 0 = (3.6 + 1.8) + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{8.40^2}{2(9.81)}$$

$$3.6 = 5.40 + \frac{p_B}{\gamma} + 3.60$$

$$\frac{p_B}{\gamma} = 3.6 - (5.40 + 3.6)$$

$$p_B = -5.40\gamma = -5.40(1,000) = -5,400 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right] = -0.54 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$$

$$p_B = -0.54 \text{ [kg}_f/\text{cm}^2 \text{ ]}$$

Solución c)

Al mismo resultado se llega si se establece la ecuación de la energía entre las secciones  $B$  y  $C$ .

En las figuras 4.13.2 y 4.13.3 se muestran dos representaciones en tercera dimensión.

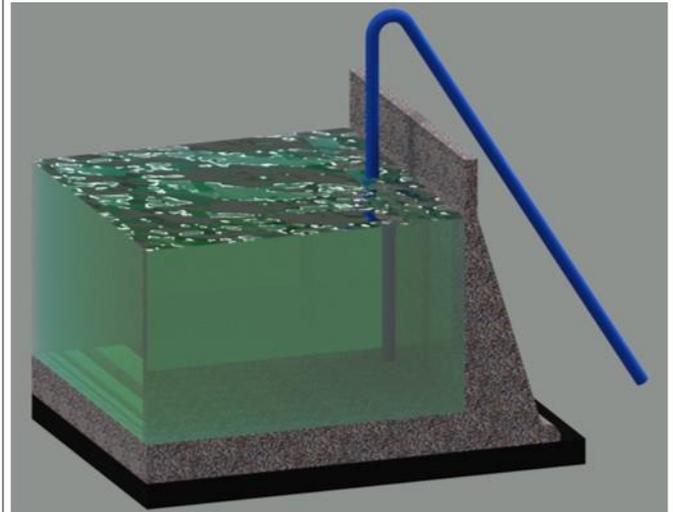


Figura 4.13.2. Se hizo una representación 3D más o menos cercana

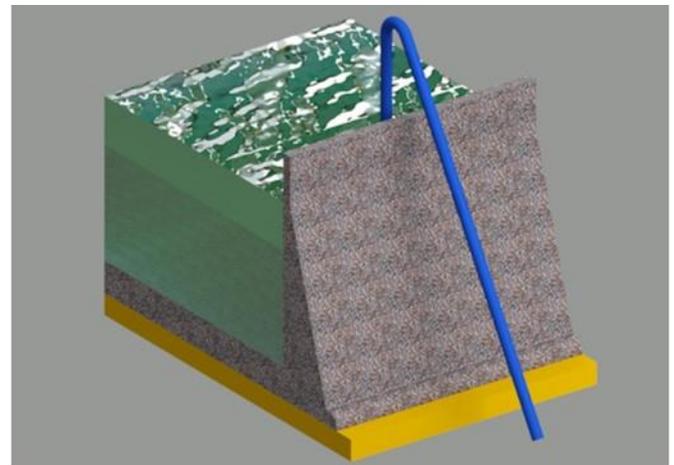


Figura 4.13.3. Se muestra un sistema más bien ilustrativo que real

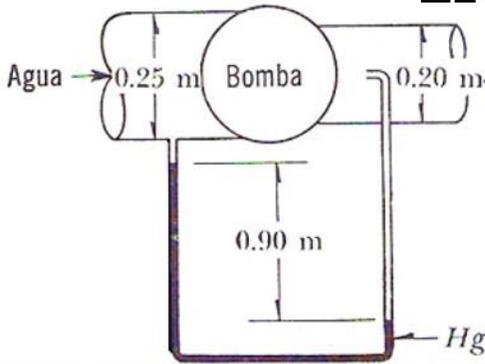


Figura 4.15.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

**Nota**

Recuerde que

$$1 \text{ [CV]} = 75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

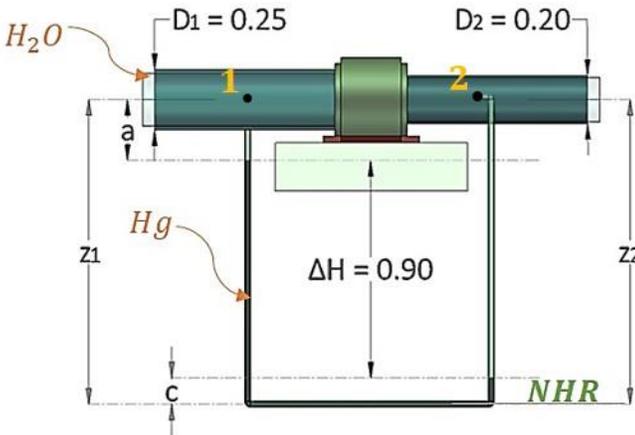


Figura 4.15.1. Note que las alturas  $z_1$  y  $z_2$  son iguales; se muestra la posición del NHR, así como los diámetros de las tuberías.

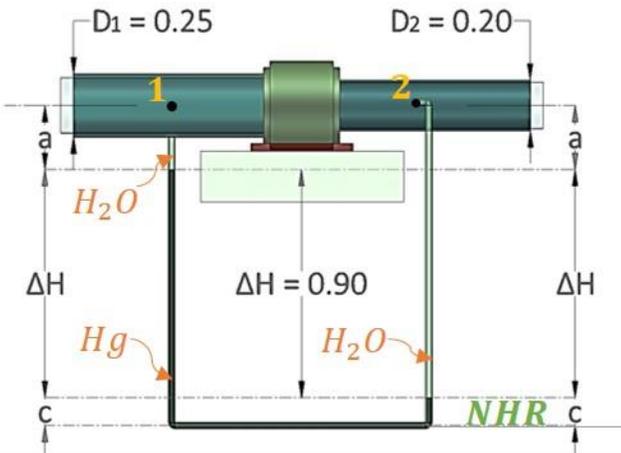


Figura 4.15.2. Note que el tubo de Pitot es visible a pesar de atravesar la segunda tubería, esto se responde aclarando que la presente figura es una representación tipo rayos X, es decir el tubo de Pitot efectivamente atraviesa la tubería.

**Problema 4.15**

Si la bomba —de la figura— desarrolla 5 CV sobre el flujo, ¿cuál es el gasto?

Solución.

De la Referencia 1 p. 129, la carga de bombeo que desarrolla una bomba se puede calcular utilizando la ecuación (4.26b)

$$H_B = \frac{\eta P_n}{\gamma Q} \quad \text{Ecuación (4.26b)}$$

Donde

$P_n$  Potencia nominal de la bomba, en  $[\text{kg}_f \text{ m/s}]$

$\gamma$  Peso específico del líquido, en  $[\text{kg}_f/\text{m}^3]$

$Q$  Gasto, en  $[\text{m}^3/\text{s}]$

$\eta$  Eficiencia de la bomba

$H_B$  Carga de bombeo (energía/unidad de peso) desarrollada por la bomba desde una sección  $a$  hasta una sección  $b$ , en  $[\text{m}]$

De acuerdo al enunciado, la bomba desarrolla una potencia hidráulica de 5 [CV], es decir  $P_H = \eta P_n = 5 [\text{CV}]$ .

Considerando que  $\gamma = 1,000 [\text{kg}_f/\text{m}^3]$  tenemos que

$$H_B = \frac{P_H}{\gamma Q} = \frac{5 [\text{CV}]}{1,000 [\text{kg}_f/\text{m}^3] Q} = \frac{5 [\text{CV}] \frac{75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]}{1 [\text{CV}]}}{1,000 [\text{kg}_f/\text{m}^3] Q} = \frac{0.375}{Q}$$

Observe que se hicieron las respectivas conversiones de unidades para ser consistente con las unidades que menciona la ecuación (4.26b).

Para calcular el gasto haremos uso de la ecuación de la energía, en la que se considera la adición de la carga de bombeo entre las secciones 1 y 2, resultando la siguiente ecuación

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots 01)$$

De acuerdo a la figura 4.15.1 podemos notar que  $z_1 = z_2$ , por tanto, solo nos resta calcular las presiones en la sección 1 y la sección 2, así como sus respectivas velocidades.

Para el cálculo de las presiones tendremos que hacer primero un análisis manométrico basándonos en la figura 4.15.2, es decir

$$p_1 = -a\gamma - \Delta h\gamma_{Hg} - c\gamma_{Hg}$$

$$p'_2 = -a\gamma - \Delta h\gamma - c\gamma_{Hg}$$

Restando  $p_1$  de  $p'_2$

$$p'_2 - p_1 = -a\gamma - \Delta h\gamma - c\gamma_{Hg} - (-a\gamma - \Delta h\gamma_{Hg} - c\gamma_{Hg})$$

$$p'_2 - p_1 = -\Delta h\gamma + \Delta h\gamma_{Hg} = \Delta h(\gamma_{Hg} - \gamma)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior entre  $\gamma$

$$\frac{p'_2 - p_1}{\gamma} = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg} - \gamma}{\gamma} \right) = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) \quad \dots 02)$$

Debido a que usamos un tubo de Pitot para calcular la presión en la sección 2, note que no hemos obtenido la presión  $p_2$  sino la presión  $p'_2$ . La presión  $p'_2$  es equivalente a la presión que se genera en la sección 2 más una carga de velocidad producida en el mismo punto multiplicada por el peso específico, es decir

$$p'_2 = p_2 + \frac{V_2^2}{2g} \gamma \quad \dots 03)$$

Sustituyendo 03) en 02) tenemos que

$$\frac{p_2 + \frac{V_2^2}{2g} \gamma - p_1}{\gamma} = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg} - \gamma}{\gamma} \right) = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right)$$

Finalmente

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) - \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots 04)$$

Reconsiderando la ecuación 01)

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Y recordando que  $z_1 = z_2$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Reordenando términos y factorizando las presiones  $p_1$  y  $p_2$

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + H_B \quad \dots 05)$$

Sustituyendo 05) en 04)

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + H_B = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) - \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + H_B = \Delta h \left( \frac{\gamma_{Hg}}{\gamma} - 1 \right) \quad \dots 06)$$

Recordando que

$$H_B = \frac{0.375}{Q}; \Delta h = 0.90 \text{ [m]}; \gamma_{Hg} = 13,600 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]; \gamma = 1,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

Sustituyendo los valores anteriores en 06)

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{0.375}{Q} = 0.90 \left( \frac{13,600}{1,000} - 1 \right) = 0.90(12.60) = 11.34$$

Finalmente

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{0.375}{Q} = 11.34 \quad \dots 07)$$

#### Nota

Recuerde que

El peso específico del mercurio es

$$\gamma_{Hg} = 13,600 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

El peso específico del agua es

$$\gamma = 1,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

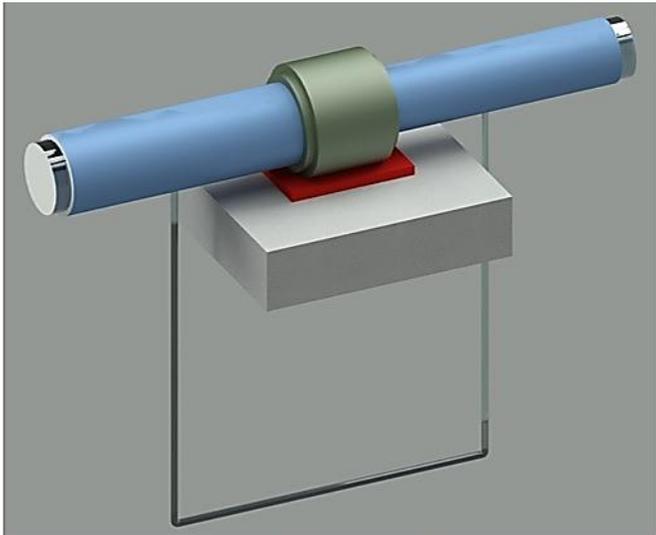


Figura 4.15.3. Representación isométrica 3D del sistema.

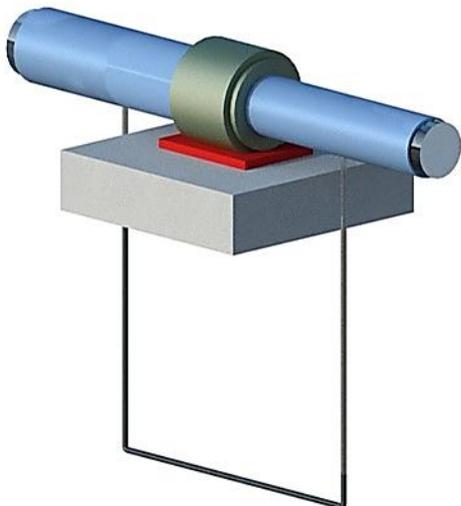


Figura 4.15.4. Segunda representación isométrica 3D del sistema.

Dado que

$$V = \frac{Q}{A}$$

Tenemos que

$$\left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 + \frac{0.375}{Q} = 11.34 \quad \dots 08)$$

Pero

$$A_1 = \pi \frac{D_1^2}{4} = \pi \frac{0.25^2}{4} = 0.049 \text{ [m}^2\text{]}$$

Sustituyendo este último resultado en 08) y considerando que  $g = 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{Q}{0.049}\right)^2}{2(9.81)} + \frac{0.375}{Q} &= 11.34 \\ \frac{Q^2}{19.62} + \frac{0.375}{Q} &= 11.34 \\ \frac{Q^2}{0.047} + \frac{0.375}{Q} &= 11.34 \quad \dots 09) \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de 09) por  $Q$

$$\begin{aligned} \frac{Q^3}{0.047} + 0.375 &= 11.34Q \\ \frac{Q^3}{0.047} - 11.34Q + 0.375 &= 0 \quad \dots 10) \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cúbica obtenida en la ecuación 10) obtendremos tres valores del gasto, es decir

$$\begin{aligned} Q &= 0.033 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right] \\ Q &= 0.713 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right] \\ Q &= -0.746 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right] \end{aligned}$$

El gasto con signo negativo no tiene significado físico. Considerando el gasto de  $0.033 \text{ [m}^3/\text{s}]$  la velocidad resulta

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.033}{0.049} = 0.674 \text{ [m/s]}$$

En cambio, para  $Q = 0.713 \text{ [m}^3/\text{s}]$  la velocidad  $V_1$  es

$$V_1 = \frac{0.713}{0.049} = 14.55 \text{ [m}^3/\text{s}]$$

Este último valor es extraordinariamente alto para la conducción, por lo que el resultado aceptable es  $Q = 0.033 \text{ [m}^3/\text{s}]$

$$Q = 0.033 \text{ [m}^3/\text{s}]$$

Solución c)

Por último se muestran dos representaciones tridimensionales del sistema en la figura 4.15.3 y figura 4.15.4, note que no es una representación exacta del sistema, como podrá observar, la bomba no está empotrada o fijada a algún elemento estructural, el tubo de Pitot tampoco se mira que tenga alguna estructura que lo sostenga.

**Problema 4.19**

Un aceite fluye por el tubo circular de 0.20 [m] de diámetro, que se muestra en la figura; el flujo es permanente y el gasto es de 0.114 [m<sup>3</sup>/s]. El peso específico del aceite es 770 [kg<sub>f</sub>/m<sup>3</sup>]. La presión y condiciones de elevación son  $p_A = 0.56$  [kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>];  $h_A = 1.50$  [m];  $p_B = 0.35$  [kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>];  $h_B = 6.10$  [m]. Determinar la dirección del flujo y la disipación de energía entre los dos puntos A y B.

(Las presiones dadas son manométricas.)

**Solución.**

Con base en la figura 4.19.1 y analizando el sistema entre la sección A y la sección B, y aplicando la ecuación de la energía, tenemos que

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma_{\text{aceite}}} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma_{\text{aceite}}} + \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B h_r$$

Sustituyendo los valores respectivos para cada uno de los términos de la ecuación anterior y dado que 10,000 [cm<sup>2</sup>] = 1 [m<sup>2</sup>], tenemos que

$$1.50 + \frac{0.56(10,000)}{770} + \frac{V_A^2}{2g} = 6.10 + \frac{0.35(10,000)}{770} + \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B h_r$$

$$1.50 + 7.2727 + \frac{V_A^2}{2g} = 6.10 + 4.5455 + \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B h_r$$

$$8.7727 + \frac{V_A^2}{2g} = 10.6455 + \frac{V_B^2}{2g} + \sum_A^B h_r \quad \dots 01)$$

Dado que

$$A_A = A_B$$

Por ende

$$V_A = V_B \quad \dots 02)$$

Sustituyendo la ecuación 02) en 01) tenemos que

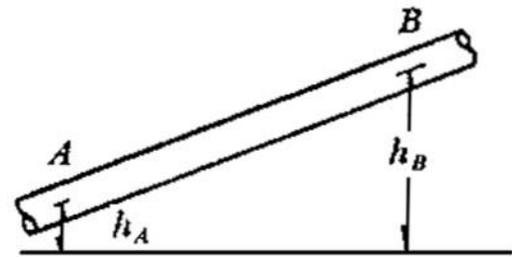
$$8.7727 + \frac{V_A^2}{2g} = 10.6455 + \frac{V_A^2}{2g} + \sum_A^B h_r$$

$$\sum_A^B h_r = 8.7727 - 10.6455 = -1.8728$$

Al ser las pérdidas negativas podemos concluir que la dirección del flujo es contraria a como se había propuesto al inicio, es decir, el flujo se dirige desde B hacia A y la disipación de energía es

$$\sum_B^A h_r = h_{r_{BA}} = 10.6455 - 8.7727 = 1.8728 \text{ [m]}$$

|                           |             |
|---------------------------|-------------|
| El flujo es de B a A      | Solución a) |
| $h_{r_{BA}} = 1.8728$ [m] | Solución b) |



**Figura del problema 19.**

Figura 4.19.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad \text{Ecuación (4.20)}$$

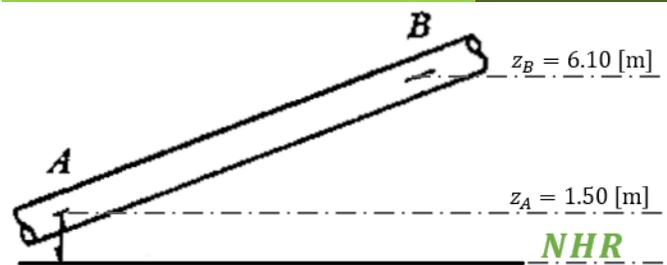


Figura 4.19.1. Se indica la posición del **NHR** (Nivel Horizontal de Referencia) así como la ubicación de  $z_A$  y  $z_B$ .

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Ecuación (4.7b)

**Nota**

Aunque el problema no lo menciona, el valor del Coeficiente de Coriolis es igual a 1, es decir  $\alpha = 1$ . De aquí en adelante, si algún problema no proporciona el valor del Coeficiente de Coriolis, vamos a suponer que vale  $\alpha = 1$ .

Las pérdidas de energía se pueden expresar de cualquiera de las dos siguientes formas

$$\sum_A^B h_r = h_{r_{AB}}$$

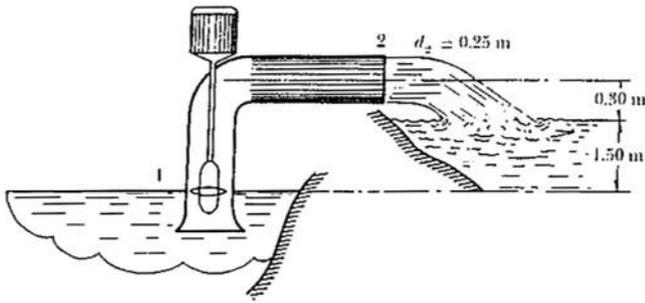


Figura del problema 23.

Figura 4.23.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

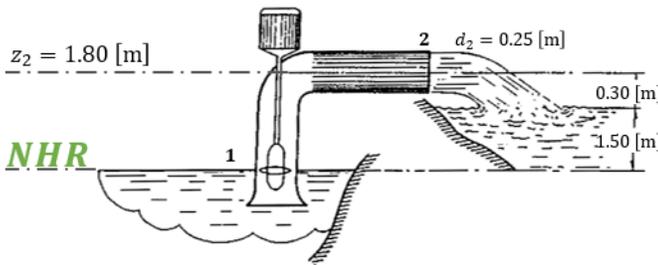


Figura 4.23.1. Se muestran la posición del **NHR** y la ubicación de  $z_2$ .

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Ecuación (4.7b)

### Problema 4.23

Una bomba de flujo axial eleva el agua desde un canal y la descarga hacia una zanja de riego cuyo nivel se encuentra 1.5 [m] por encima del nivel del canal, tal como se muestra en la figura. Si el gasto requerido es de 3.785 [m<sup>3</sup>/min] y la eficiencia de la bomba es del 65%, determinar la potencia aproximada que requiere el motor.

#### Solución.

La potencia que se pide calcular es la potencia nominal de la bomba. Para calcularla haremos uso de la ecuación de la energía, considerando la carga de bombeo que adiciona la máquina.

Tomando en cuenta lo anterior nos resulta la siguiente ecuación

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_B = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots 01)$$

Donde

$H_B$  Carga hidráulica, conocida como carga de bombeo, que genera la bomba.

De acuerdo a la figura 4.23.1

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 1.50 + 0.30 = 1.80$$

En la sección 1, la presión es nula dado que la sección coincide con la superficie libre del agua, y la carga de velocidad se considera despreciable. De igual manera la presión  $p_2$  es nula ya que descarga en condiciones atmosféricas.

Considerando lo anterior y sustituyendo valores en 01) tenemos que

$$0 + 0 + 0 + H_B = 1.80 + 0 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_B = 1.80 + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots 02)$$

Por otro lado, aunque el enunciado del problema no lo dice, el flujo lo podemos considerar permanente e incompresible, de modo que podremos utilizar la ecuación (4.7b) de la Referencia 1 p. 119 también conocida como Ecuación de Continuidad, es decir

$$Q_1 = Q_2$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 \left( \pi \frac{d_1^2}{4} \right) = V_2 \left( \pi \frac{d_2^2}{4} \right)$$

Pero

$$d_1 = d_2$$

Finalmente

$$V_1 = V_2 \quad \dots 03)$$

Sustituyendo 03) en 02) tenemos que

$$\frac{V_1^2}{2g} + H_B = 1.80 + \frac{V_1^2}{2g}$$

$$H_B = 1.80$$

Por otra parte y de acuerdo al enunciado del problema

$$Q = 3.785 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \right]$$

Convirtiendo el gasto  $Q$  a  $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right]$

$$Q = 3.785 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right] = 0.063 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

Recordando la ecuación (4.26b) de la Referencia 1 p. 129 y sustituyendo los valores que proporciona el enunciado del problema y el obtenido anteriormente  $H_B = 1.80$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 1.80 &= \frac{0.65P_n}{1,000(0.063)} \\ 0.65P_n &= 1,000(0.063)(1.80) \\ 0.65P_n &= 113.40 \\ P_n &= \frac{113.40}{0.65} = 174.462 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

De igual modo, se nos pide expresar la potencia nominal en caballos de vapor, es decir

$$P_n = 174.462 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \frac{1 \text{ [CV]}}{75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]} = 2.326 \text{ [CV]}$$

$$P_n = 2.33 \text{ [CV]}$$

Solución

$$H_{a,b} = \frac{\eta P_n}{\gamma Q}$$

Ecuación (4.26b)

### Nota

Observe la notación  $H_{a,b}$  en la ecuación (4.26b) que difiere de la notación  $H_B$  usada en este texto, para efectos prácticos ambas notaciones significan lo mismo.

Recuerde que un caballo de vapor es igual a

$$1 \text{ [CV]} = 75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

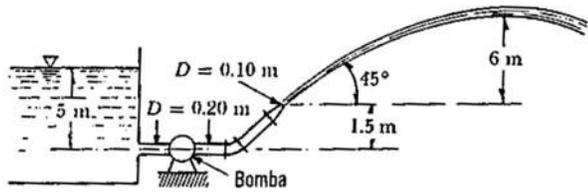


Figura del problema 25.

Figura 4.15.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{Ecuación (4.21)}$$

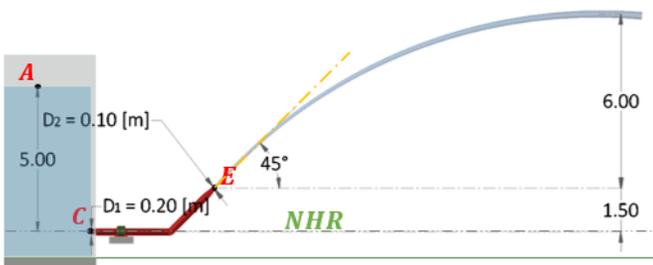


Figura 4.25.1. Se muestra la ubicación de cada uno de los puntos de análisis, así como el Nivel Horizontal de Referencia *NHR*.

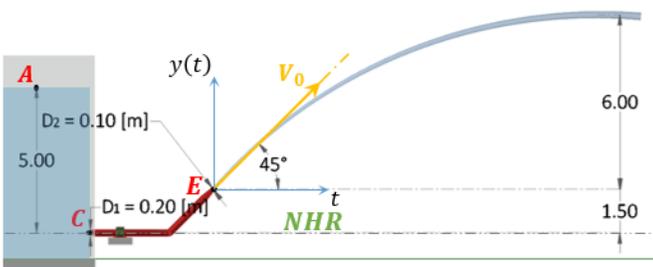


Figura 4.25.2. Se muestra la ubicación de los ejes coordenados y el vector velocidad inicial  $V_0$ .

**Nota**

Para efectos prácticos, hemos considerado la velocidad inicial  $V_0$  igual a la velocidad media  $V_E$ .

**Problema 4.25**

El agua de un gran depósito, como se muestra en la figura, tiene su superficie libre 5[m] arriba del tubo de salida. Según se muestra, el agua es bombeada y expulsada en forma de chorro libre mediante una boquilla. Para los datos proporcionados, ¿cuál es la potencia en caballos de vapor requerida por la bomba?

Solución.

Con base en la figura 4.25.1 y analizando el sistema entre la sección que coincide con el espejo de agua (punto A) y la sección E y aplicando la ecuación (4.21), tenemos que

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + H_B = z_E + \frac{p_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g}$$

Sustituyendo los valores respectivos para cada uno de los términos de la ecuación anterior, tenemos que

$$5 + 0 + 0 + H_B = 1.5 + 0 + \frac{V_E^2}{2g} \quad \dots 01)$$

$$H_B = -3.5 + \frac{V_E^2}{2g}$$

Para obtener la velocidad  $V_E$  haremos uso de las ecuaciones de tiro parabólico (Referencia 7 p. 39-43) ya empleadas en el Problema 4.11 y cuyas variables ya fueron definidas (siendo en este caso, el chorro de agua la partícula)

$$V_y(t) = V_0 \text{ sen } \theta - gt \quad \dots 02)$$

$$y(t) = (V_0 \text{ sen } \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \dots 03)$$

De acuerdo a las condiciones iniciales  $V_y(t) = 0$  [m/s] cuando  $y(t) = 6$  [m], es decir, se alcanzará la altura máxima cuando la velocidad  $V_y$  sea cero porque el chorro hace un cambio de dirección, es decir, cambia de un movimiento ascendente a uno descendente, en ese cambio de dirección, forzosamente debe existir una velocidad vertical nula, observe la figura 4.25.2

De acuerdo a lo expuesto en el párrafo anterior y sustituyendo los valores  $V_y(t) = 0$  [m/s],  $y(t) = 6$  [m] y  $\theta = 45^\circ$  en 02) y 03), tenemos que

$$0 = V_0 \text{ sen } 45^\circ - gt$$

$$6 = (V_0 \text{ sen } 45^\circ)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas anterior, tenemos los siguientes resultados

$$V_0 = 15.344 \text{ [m/s]}$$

$$t = 1.106 \text{ [s]}$$

Sustituyendo el valor  $V_0 = 15.344$  [m/s] =  $V_E$  en 01) tenemos que

$$H_B = -3.5 + \frac{15.344^2}{2(9.81)} = -3.5 + 12$$

$$H_B = 8.5 \text{ [m]}$$

Recordando la ecuación (4.26b) de la Referencia 1 p. 129, donde el término  $\eta P_n$  es igual a la potencia hidráulica que proporciona la bomba  $P_H$  que es precisamente lo que queremos encontrar, es decir

$$H_B = \frac{\eta P_n}{\gamma Q} = \frac{P_H}{\gamma Q}$$

Despejando  $P_H$  de la ecuación anterior y sustituyendo el valor obtenido anteriormente  $H_B = 8.5$  [m] y el valor  $\gamma = 1,000$  [ $\text{kg}_f/\text{m}^3$ ] por tratarse de agua

$$P_H = H_B \gamma Q = 8.5(1,000)Q = 8,500Q \quad \dots 04)$$

Ahora solo nos queda determinar el valor del gasto. Para ello, utilizaremos la ecuación (3.13) de la Referencia 1 p. 104, es decir

$$Q = VA$$

Dado que  $V_0 = 15.344$  [m/s] =  $V_E$  y el diámetro  $D_E = 0.10$  [m], sustituyendo este valor en 04) considerando que el gasto  $Q = V_E A_E$  tenemos que

$$P_H = 8,500Q = 8,500V_E A_E = 8,500(15.344) \left( \pi \frac{0.10^2}{4} \right)$$

$$P_H = 1,024.348 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Ahora solo nos resta hacer la respectiva conversión a caballos de vapor, es decir

$$P_H = 1,024.348 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \frac{1 [\text{CV}]}{75 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]} = 13.658 [\text{CV}]$$

$$P_H = 13.658 [\text{CV}]$$

Solución

Por último, en la figura 4.25.3 y figura 4.25.4 se muestran dos representaciones tridimensionales del sistema.

$$H_B = \frac{\eta P_n}{\gamma Q}$$

Ecuación (4.26b)

$$V = \frac{Q}{A}$$

Ecuación (3.13)

**Nota**

Recuerde que

El área de un círculo es

$$A = \pi \frac{D^2}{4}$$

Así como también

$$1 [\text{CV}] = 75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

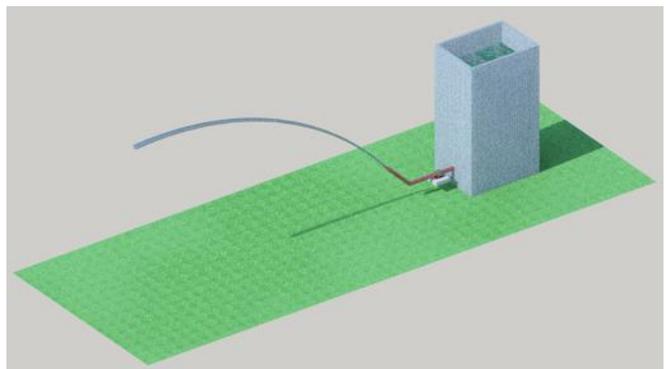


Figura 4.25.3. Representación isométrica 3D del sistema.

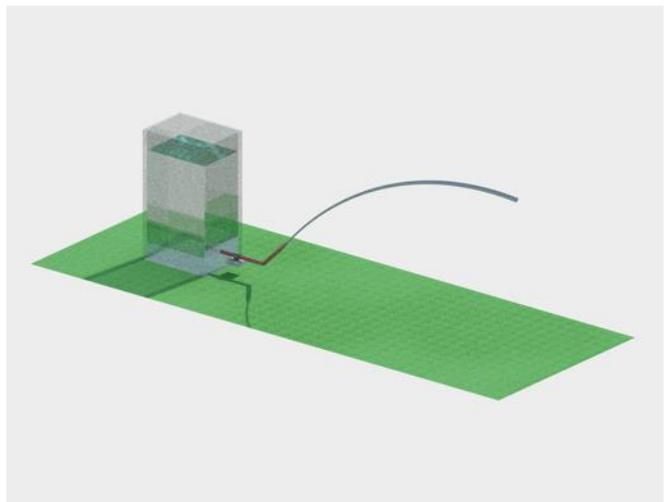


Figura 4.25.4. Segunda representación isométrica 3D del sistema.

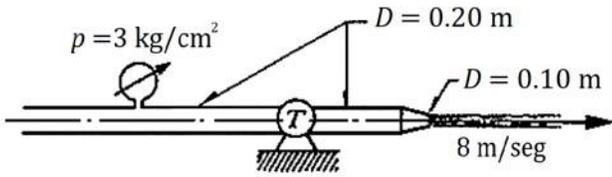


Figura del problema 27.

Figura 4.27.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{Ecuación (4.21)}$$

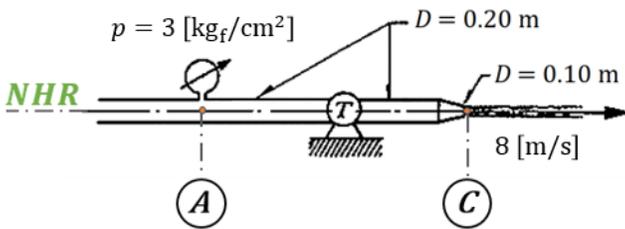


Figura 4.27.1. Observe que  $z_A$  y  $z_C$  están al mismo nivel que el NHR (Nivel Horizontal de Referencia), es decir son iguales a cero.

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{Ecuación (4.7b)}$$

| Figura | Nombre         | Área                    |
|--------|----------------|-------------------------|
|        | Circunferencia | $A = \frac{\pi}{4} D^2$ |

Tabla 1.c. Área de una circunferencia.

**Problema 4.27**

Despreciando la fricción en la tubería (mostrada en la figura) calcular la potencia —en caballos de vapor— desarrollada en la turbina  $T$ , por el agua procedente de una tubería a  $3 \text{ [kg}_f\text{/cm}^2\text{]}$  de presión.

Solución.

Analizando el sistema entre la sección  $A$  y la sección  $C$ , y utilizando la ecuación (4.21) de la Referencia 1 p. 127, considerando que

- Existe energía cedida a la turbina, entre la sección  $A$  y la sección  $C$  tal como se muestra en la figura 4.27.1.
- No existen pérdidas de energía o son despreciables.
- La carga cedida a la turbina es  $H_t$ .
- La presión en la sección  $C$  (vea figura 4.27.1) es nula porque el chorro ya ha salido de la tubería.

Tomando en cuenta lo anterior nos resulta la siguiente ecuación

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} - H_t = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g}$$

Sustituyendo los valores respectivos para cada uno de los términos de la ecuación anterior y recordando que  $1 \text{ [m}^2\text{]} = 10,000 \text{ [cm}^2\text{]}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} - H_t &= 0 + 0 + \frac{V_C^2}{2g} \\ 3 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \cdot \frac{10,000 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \right] + \frac{V_A^2}{2g} - H_t &= \frac{8^2}{2g} \\ \frac{30,000}{1,000} + \frac{V_A^2}{2g} - H_t &= \frac{64}{2g} \\ 30 + \frac{V_A^2}{2g} - H_t &= \frac{64}{2g} \quad \dots 01 \end{aligned}$$

Ahora solo nos resta encontrar la velocidad  $V_A$  para lo cual haremos uso de la Ecuación de Continuidad, ecuación (4.7b) de la Referencia 1 p. 119, considerando que el flujo es permanente e incompresible, es decir

$$\begin{aligned} Q_A &= Q_C \\ V_A A_A &= V_C A_C \\ V_A \left( \pi \frac{D_A^2}{4} \right) &= V_C \left( \pi \frac{D_C^2}{4} \right) \quad \dots 02 \end{aligned}$$

De la ecuación anterior conocemos los siguientes valores:

Diámetro  $D_A = 0.20 \text{ [m]}$ , velocidad  $V_C = 8 \text{ [m/s]}$  y diámetro  $D_C = 0.10 \text{ [m]}$ . Sustituyendo todos estos valores en 02) y de acuerdo a la Tabla 1. c, tenemos que

$$\begin{aligned} V_A \left( \pi \frac{0.20^2}{4} \right) &= 8 \left( \pi \frac{0.10^2}{4} \right) \\ V_A &= \frac{8 \left( \pi \frac{0.10^2}{4} \right)}{\left( \pi \frac{0.20^2}{4} \right)} = 8 \left( \frac{0.10^2}{0.20^2} \right) = 8(0.25) = 2 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación 01) y sustituyendo el valor de la velocidad  $V_A = 2 \text{ [m/s]}$

$$\begin{aligned} 30 + \frac{2^2}{2g} - H_t &= \frac{64}{2g} \\ H_t &= 30 + \frac{4}{2g} - \frac{64}{2g} = 26.942 \text{ [m]} \end{aligned}$$

El gasto es

$$Q = V_A \left( \pi \frac{D_A^2}{4} \right) = 2 \left( \pi \frac{0.20^2}{4} \right) = 0.06283 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

La potencia hidráulica que se proporciona a la turbina es

$$P_t = \gamma Q H_t = 1,000(0.06283)(26.942)$$
$$P_t = 1,692.766 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Haciendo la conversión correspondiente a caballos de vapor tenemos que

$$P_t = 1,692.766 \left[ \text{kg}_f \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \frac{1 \text{ [CV]}}{75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]} = 22.57 \text{ [CV]}$$

$$P_t = 22.57 \text{ [CV]}$$

Solución

### Nota

Recuerde que

El peso específico del agua es

$$\gamma = 1000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

La aceleración de la gravedad es

$$g = 9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Así como también

$$1 \text{ [CV]} = 75 \left[ \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$$

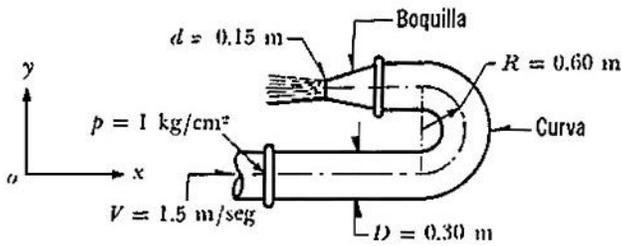


Figura del problema 31.

Figura 4.31.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2$$

Ecuación (4.7b)

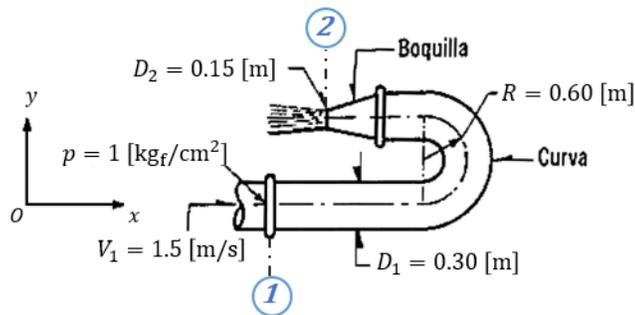


Figura 4.31.1. Se indican los puntos de control en color azul.

**Problema 4.31**

Calcular la fuerza que produce el flujo de agua sobre la curva y la boquilla del chiflón, mostrados en la figura; el agua abandona la boquilla como un chorro libre. El volumen interior del conjunto del codo y de la boquilla es de 115 litros y todo el conjunto está contenido en un plano horizontal.

Solución.

Para obtener la velocidad  $V_2$  vamos a hacer uso de la ecuación de continuidad

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \frac{\pi \frac{D_1^2}{4}}{\pi \frac{D_2^2}{4}} = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \quad \dots 01)$$

De 01) podremos obtener  $V_2$  como (vea la figura 4.31.1)

$$V_2 = V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 1.50 \left( \frac{0.30}{0.15} \right)^2 = 6.00 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Calcularemos también el gasto  $Q$  con los valores de  $V$  y  $A$  en la sección 1 los cuales ya habían sido proporcionados, es decir

$$Q = V_1 A_1 = V_1 \left( \pi \frac{D_1^2}{4} \right) = 1.50 \left( \pi \frac{0.30^2}{4} \right) = 0.1060 \left[ \frac{m^3}{s} \right]$$

Por otro lado, para calcular las componentes de la fuerza requeridas, necesitaremos utilizar las ecuaciones de la cantidad de movimiento (Referencia 1 p. 133), a saber:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_\tau + \mathbf{F}_c = \rho \sum (Q\beta\mathbf{V})$$

Ecuación (4.33)

Donde

- $\mathbf{F}_p$  Fuerzas de presión que actúan desde el exterior hacia el volumen de control.
- $\mathbf{F}_\tau$  Fuerzas debidas a los esfuerzos cortantes.
- $\mathbf{F}_c$  Fuerza de cuerpo debida al peso del volumen de control.
- $Q$  Gasto en la sección considerada.
- $\beta$  Coeficiente de Boussinesq.
- $\mathbf{V}$  Velocidad media.

Con base en lo anterior y según el enunciado del problema, se concluye lo siguiente

- a) Las fuerzas debidas a los esfuerzos cortantes se consideran despreciables.
- b) Al ser el flujo permanente e incompresible el gasto  $Q$  es el mismo en toda la sección.
- c) El coeficiente de Boussinesq es igual a 1 ( $\beta = 1$ )
- d) La densidad  $\rho$  es igual al peso específico  $\gamma$  entre la aceleración de la gravedad  $g$ , es decir  $\rho = \gamma/g$ , donde  $g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}$

Considerando lo anterior, la ecuación (4.33) se reescribiría como

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{W} = \frac{\gamma}{g} \sum Q\mathbf{V}$$

Ecuación (4.33d)

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la figura 4.31.2 y según la ecuación (4.33d), debido a que en la sección 2 la descarga es libre, no hay fuerza de presión estática. Por lo tanto, la ecuación de cantidad de movimiento resulta

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_{p_1} + \mathbf{W} = \frac{\gamma}{g} (-QV_1 + QV_2) \quad \dots 04)$$

Dado que la tubería está contenida en un plano horizontal, no hay componente del peso, tanto en la dirección  $x$  como en la dirección  $y$ .

Descomponiendo 04) en sus componentes escalares  $x$  y  $y$

$$-R_x + F_{p_{1x}} = \frac{\gamma}{g} (-QV_{1x} - QV_{2x}) \quad \dots 05)$$

$$R_y = 0 \quad \dots 06)$$

Recordando que  $F_p = pA$  y sustituyendo en 05)

$$-R_x + p_{1x}A_1 = \frac{\gamma}{g} (-QV_{1x} - QV_{2x}) \quad \dots 07)$$

Recuerde que el gasto en la sección 1 lleva signo negativo porque **entra** al volumen de control, mientras que la velocidad  $V_{1x}$  es positiva por tener una dirección positiva en el eje  $x$ . El gasto en la sección 2 tiene signo positivo porque **sale** del volumen de control, mientras que la velocidad  $V_{2x}$  es negativa según lo indican los ejes coordenados.

Tenga en cuenta que no hay valores escalares para el eje  $y$ , ni existe presión manométrica en la sección 2, debido a que en dicha sección, el agua ya no se encuentra dentro de la tubería.

Una vez explicada la teoría, procedemos entonces a calcular la reacción  $R_x$  que se aplica desde el exterior al volumen de control, para eso vamos a sustituir los valores anteriormente obtenidos en 07) recordando también que

$$A_1 = \pi \frac{D_1^2}{4} = \pi \frac{0.30^2}{4} = 0.07069 \text{ [m}^2\text{]}$$

Nos resulta entonces

$$\begin{aligned} -R_x + 10,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right] (0.07069) \text{ [m}^2\text{]} \\ = \frac{1,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]}{9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]} \left( 0.106 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \right) \left( -1.50 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] - 6.00 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \right) \\ -R_x + 706.9 = 101.9368(-0.159 - 0.636) \\ -R_x + 706.9 = 101.9368(-0.795) \\ R_x = 706.9 + 81.040 \\ R_x = 787.94 \text{ [kg}_f\text{]} \end{aligned}$$

$$R_x = 787.94 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Solución

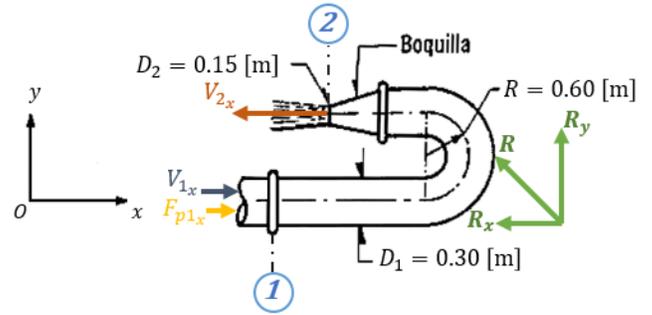


Figura 4.31.2. Se indican todas las fuerzas que actúan en el sistema.

### Nota

Recuerde que

El peso específico del agua es

$$\gamma = 1,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

La aceleración de la gravedad

$$g = 9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Así como también

$$1 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right] = 10,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right]$$

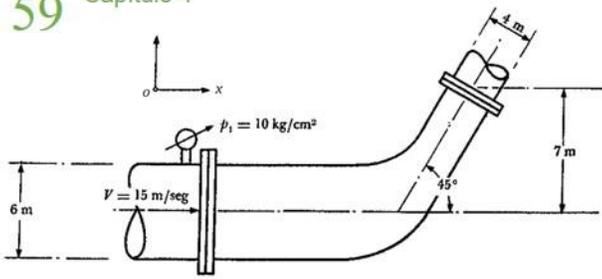


Figura del problema 37.

Figura 4.37.a. Se muestra el dibujo original del enunciado

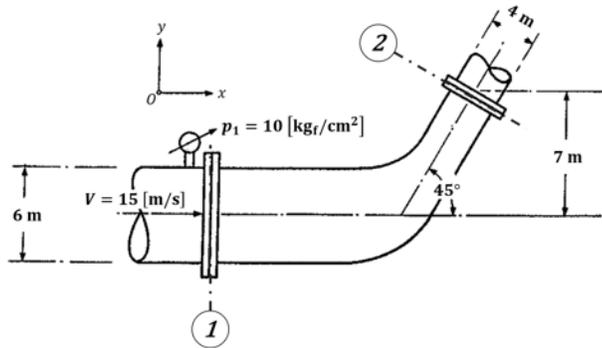


Figura 4.37.1. Se muestran los puntos 1 y 2 en la tubería horizontal.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \text{Ecuación (4.21)}$$

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \text{Ecuación (4.7b)}$$

**Nota**

Recuerde que

El peso específico del agua es

$$\gamma = 1,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

Así como también

$$1 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right] = 10,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right]$$

**Problema 4.37**

Una tubería horizontal de 6 [m] de diámetro tiene un codo reductor que conduce el agua a una tubería de 4 [m] de diámetro, unida a 45° de la anterior. La presión a la entrada del codo es de 10 [kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup>] y la velocidad de 15 [m/s]. Determinar las componentes de la fuerza que han de soportar los anclajes del codo. Despreciar las pérdidas en el codo y el peso del líquido dentro del mismo.

**Solución.**

Con base en la figura 4.37.1 y analizando el volumen de control entre la sección 1 y la sección 2, utilizando la ecuación (4.21)

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots a)$$

Dado que es una tubería horizontal

$$z_1 = z_2 = 0 \text{ [m]}$$

Sustituyendo los valores respectivos (revise la nota a su izquierda) para cada uno de los términos de la ecuación a), tenemos que

$$0 + \frac{10 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \cdot \frac{10,000 \text{ cm}^2}{1 \text{ m}^2} \right]}{1,000} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$100 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad \dots 01)$$

Para obtener la velocidad V<sub>2</sub> vamos a hacer uso de la ecuación (4.7b)

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \frac{\pi \frac{D_1^2}{4}}{\pi \frac{D_2^2}{4}} = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \quad \dots 02)$$

De la ecuación 02) podremos obtener V<sub>2</sub> como

$$V_2 = V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 = 15 \left( \frac{6}{4} \right)^2 = 33.75 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Calcularemos también el gasto Q con los valores de V y A en la sección 1 los cuales ya habían sido proporcionados, es decir

$$Q = V_1 A_1 = V_1 \left( \pi \frac{D_1^2}{4} \right) = 15 \left( \pi \frac{6^2}{4} \right) = 424.115 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

Por otro lado, sustituyendo la ecuación 02) en 01) tenemos que

$$100 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\left[ V_1 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2}{2g}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 100 + \left[ 1 - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 \right] \frac{V_1^2}{2g} \quad \dots 03)$$

Sustituyendo los datos proporcionados por el enunciado problema D<sub>1</sub> = 6 [m], D<sub>2</sub> = 4 [m] y V<sub>1</sub> = 15 [m/s] en 03) tenemos que

$$\frac{p_2}{1,000} = 100 + \left[ 1 - \left( \frac{6}{4} \right)^4 \right] \frac{15^2}{2(9.81)}$$

$$\frac{p_2}{1,000} = 100 - \left[ \frac{14,625}{32(9.81)} \right]$$

$$\frac{p_2}{1,000} = 53.411697$$

$$p_2 = 53,411.697 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^2} \right]$$

Por otro lado, para el cálculo de los componentes de la fuerza requeridos, necesitaremos utilizar las ecuaciones de cantidad de movimiento, a saber

$$F_p + F_\tau + F_c = \rho \sum (Q\beta V) \quad \text{Ecuación (4.33)}$$

Según el enunciado del problema, se concluye lo siguiente:

- a) Las fuerzas debidas a los esfuerzos cortantes se consideran despreciables.
- b) El peso del líquido no se considera porque no se tienen datos y es poco significativo comparado con las fuerzas de presión.

Por lo tanto

$$F_p = \frac{\gamma}{g} \sum QV \quad \text{Ecuación (4.33d)}$$

De acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la figura 4.37.2 y según la ecuación (4.33d) nos resultaría la siguiente ecuación:

$$-R + F_{p1} + F_{p2} = \frac{\gamma}{g} Q(-V_1 + V_2) \quad \dots 04)$$

Descomponiendo 04) en sus componentes escalares  $x$  y  $y$

$$-R_x + F_{p1x} - F_{p2x} \cos \theta = \frac{\gamma}{g} Q(-V_1 + V_2 \cos \theta) \quad \dots 05)$$

$$R_y - F_{p2y} \sin \theta = \frac{\gamma}{g} Q(V_2 \sin \theta) \quad \dots 06)$$

Recordando que  $F_p = pA$  y sustituyendo en 05) y 06)

$$-R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta = \frac{\gamma}{g} Q(-V_1 + V_2 \cos \theta) \quad \dots 07)$$

$$R_y - p_2 A_2 \sin \theta = \frac{\gamma}{g} Q(V_2 \sin \theta) \quad \dots 08)$$

Procedemos entonces a calcular primero la reacción  $R_x$ , para eso vamos a sustituir los valores anteriormente obtenidos en la ecuación 07) recordando también que (Tabla 1. c)

$$A_1 = \pi \frac{D_1^2}{4} = \pi \frac{6^2}{4} = 28.274 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_2 = \pi \frac{D_2^2}{4} = \pi \frac{4^2}{4} = 12.566 \text{ [m}^2\text{]}$$

Nos resulta entonces

$$-R_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta = \frac{\gamma}{g} Q(-V_1 + V_2 \cos \theta)$$

$$-R_x + 100,000(28.274) - 53,411.697(12.566) \cos 45^\circ = \frac{1,000}{9.81} (424.115)(-15 + 33.75 \cos 45^\circ)$$

$$-R_x + (2,827,400) - 474,589.837 = 43,232.926(8.865)$$

$$-R_x + 2,352,810.163 = 383,259.889$$

$$R_x = 2,352,810.163 - 383,259.889$$

$$R_x = 1,969,550.274 \text{ [kg}_f\text{]}$$

Haciendo la conversión correspondiente a toneladas fuerza tenemos que

$$R_x = 1,969,550.274 \text{ [kg}_f\text{]} \frac{1 \text{ [Ton}_f\text{]}}{1,000 \text{ [kg}_f\text{]}} = 1,969.550 \text{ [Ton}_f\text{]}$$

$$R_x = 1,969.55 \text{ [Ton}_f\text{]} \leftarrow$$

Solución a)

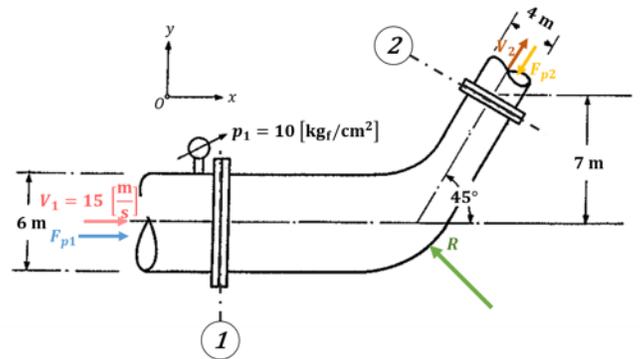


Figura 4.37.2. La posición de la resultante  $R$  ha sido supuesta tal como se muestra en la imagen .

**Nota**

Recuerde lo visto en teoría: las fuerzas de presión  $F_p$  siempre se dirigen hacia dentro del volumen de control. Por eso,  $F_{p2x}$  y  $F_{p2y}$  son negativas, ya que apuntan hacia dentro del volumen de control y, según los ejes coordenados asignados, indican una dirección negativa. Por otro lado, cada término del lado derecho de la ecuación 04) tendrá signo negativo si el gasto entra al volumen de control y positivo en caso contrario.

| Figura | Nombre         | Área                    |
|--------|----------------|-------------------------|
|        | Circunferencia | $A = \frac{\pi}{4} D^2$ |

Tabla 1.c. Área de una circunferencia.

**Nota**

Los siguientes valores los proporciona el enunciado del problema

$$V_1 = 15 \text{ [m/s]}$$

$$p_1 = 100,000 \text{ [kg}_f\text{/m}^2\text{]}$$

$$\theta = 45^\circ$$

Los siguientes valores fueron calculados anteriormente

$$p_2 = 53,411.697 \text{ [kg}_f\text{/m}^2\text{]}$$

$$Q = 424.115 \text{ [m}^3\text{/s]}$$

$$V_2 = 33.75 \text{ [m/s]}$$

**Nota**

Recuerde que

El peso específico del agua es

$$\gamma = 1,000 \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{m}^3} \right]$$

La aceleración de la gravedad es

$$g = 9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

La conversión de toneladas fuerza a kilogramos fuerza es

$$1 [\text{Ton}_f] = 1,000 [\text{kg}_f]$$

Para el caso de la reacción  $R_y$  vamos a sustituir los valores anteriormente obtenidos en 08), es decir

$$R_y - p_2 A_2 \sin \theta = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 \sin \theta)$$

$$R_y - 53,411.697(12.566) \sin 45^\circ = \frac{1,000}{9.81} (424.115)(33.75 \sin 45^\circ)$$

$$R_y - 474,589.837 = (101.937)(424.115)(23.865)$$

$$R_y - 474,589.837 = 1,031,755.801$$

$$R_y = 1,031,755.801 + 474,589.837$$

$$R_y = 1,506,345.638 [\text{kg}_f]$$

Haciendo la conversión correspondiente a toneladas fuerza tenemos

$$R_y = 1,506,345.638 [\text{kg}_f] \frac{1 [\text{Ton}_f]}{1,000 [\text{kg}_f]} = 1,506.346 [\text{Ton}_f]$$

$$R_y = 1,506.346 [\text{Ton}_f] \uparrow$$

Solución b)

- 1 Sotelo, G. (1997). *Hidráulica General Vol. 1*. Limusa Noriega Editores.
- 2 Hibbeler, R. C. (2010). *Ingeniería Mecánica Estática* (12<sup>va</sup> ed.). Prentice Hall.
- 3 Purcell. Varberg. Rigdon (2007). *Cálculo diferencial e integral* (9<sup>na</sup> ed.). Pearson Prentice Hall.
- 4 Mandelli A. (1986). *Elementos de Arquitectura Naval* (3<sup>ra</sup> ed.). Editorial Alsina.
- 5 Stewart J. (2012). *Cálculo de Varias Variables* (7<sup>ma</sup> ed.). Cengage Learning.
- 6 Ramos J. A. *Cálculo Integral Formulario*. Alfaomega.
- 7 Hibbeler, R. C. (2010). *Ingeniería Mecánica Dinámica* (12<sup>va</sup> ed.). Prentice Hall.
- 8 Beer. Johnston (2017). *Mecánica de Materiales* (7<sup>ma</sup> ed.). McGraw-Hill Education.

La labor docente es de gran importancia para el progreso de cualquier país, especialmente en México, que sigue siendo catalogado como un país en vías de desarrollo. Su relevancia radica en la transmisión de conocimientos a futuros ingenieros, quienes, a su vez, contribuirán con sus habilidades a la solución de problemas reales que puedan surgir en el futuro. Uno de estos problemas es el del agua, considerado crítico por todos los países del mundo. La hidráulica es la ciencia que estudia el comportamiento del agua, y el objetivo de este trabajo es precisamente contribuir a la comprensión de dos de sus temas más representativos: la hidrostática y las ecuaciones fundamentales de la hidráulica.

En estas últimas líneas concluyen una parte importante de los conocimientos adquiridos a lo largo de mi estancia en la Universidad Nacional Autónoma de México.

El trabajo de edición de esta tesis fue exhaustivo debido a la complejidad de encontrar un diseño adecuado que facilitara la comprensión de los temas. La realización de los gráficos, esquemas, representaciones tridimensionales, la redacción, la revisión de errores, el diseño de colores, las portadas, entre otros atributos fue también un desafío.

Estas son mis últimas palabras como alumno de la Facultad de Ingeniería. Me llevo gratos recuerdos de ella y de la cuál quizá pude haber sacado más provecho.

Gracias por todo.