



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Simulación del flujo propulsado
por una hélice sobre una esfera**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Mecánico

P R E S E N T A

Rafael Antonio Munguía Valadez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Rubén Ávila Rodríguez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado SIMULACION DEL FLUJO PROPULSADO POR UNA HELICE SOBRE UNA ESFERA que presenté para obtener el título de INGENIERO MECÁNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

RAFAEL ANTONIO MUNGUÍA VALADEZ
Número de cuenta: 313307012

Agradecimientos.

Al Dr. Rubén Ávila Rodríguez por toda su paciencia, por su instrucción, su apoyo y por todo el conocimiento brindado durante la realización de este trabajo de tesis.

A mis compañeros de la Unidad MOFABI Omar Sánchez Camacho y José Gilberto Montiel Galindo por toda su ayuda y asesoría que me brindaron en este proceso desde el inicio de mi servicio social.

A todos los profesores que me formaron durante toda mi carrera universitaria, en especial al ingeniero Félix Benjamín Núñez Orozco, que en paz descanse.

A mi familia por todo su apoyo incondicional, con un agradecimiento especial a mi madre María Guadalupe Valadez Sanabría y a mi padre Máximo Rafael Munguía Méndez por hacer siempre lo que está en sus manos por sacarme adelante.

Índice general.

Nomenclatura	13
1. Introducción.	15
1.1. Contexto actual y motivación.	15
1.2. Breve Historia de las Hélices	16
1.3. Aerodinámica de las Hélices: Perfil Aerodinámico	22
1.4. Anatomía de la Hélice: Núcleo, Palas y Capacete	25
1.5. Clasificación de las Hélices Marinas	26
1.5.1. Clasificación por Tipo de Hélice	26
1.5.2. Clasificación por Número de aspas	27
1.6. Estado del Arte.	28
1.7. Objetivo y Alcance.	37
1.8. Contenido.	37
2. Modelo físico.	39
3. Modelo matemático.	45
3.1. Ecuación de continuidad.	45
3.2. Ecuación de cantidad de movimiento.	45
3.3. Condiciones de frontera.	46
4. Modelo numérico.	47
4.1. Dinámica de Fluidos Computacionales y OpenFOAM	47
4.2. Algoritmo en OpenFOAM (PIMPLE)	47
4.3. Modelo de Turbulencia	48
4.4. Malla Móvil	48
4.5. Propiedades del Fluido	49
4.6. Procesamiento de la Simulación de la Hélice Marina	49
4.6.1. Archivo <i>ControlDict</i> "	51
4.6.2. Archivos "FvSchemes" y "fvSolution"	51
5. Validación del modelo numérico.	55
5.1. Flujo Laminar sobre una Placa Plana Comparada con la Solución Semianalítica de Blasius.	55
5.1.1. Simulación de la Capa Límite Dinámica	56

5.1.2. Simulación de la Capa Límite Térmica	63
5.2. Simulación del flujo sobre una esfera a bajos números de Reynolds.	67
5.2.1. Simulación en OpenFOAM	68
5.2.2. Visualización y Análisis de los Vórtices Generados Detrás de la Esfera	69
5.2.3. Coeficientes de Arrastre en la Esfera.	73
5.3. Validación de la Malla Móvil sin Esfera	76
6. Resultados	83
6.1. Líneas de Corriente	83
6.1.1. Caso 1. Propela girando a 300 RPM.	83
6.1.2. Caso 2. Propela girando a 900 RPM.	84
6.1.3. Caso 3. Propela Girando a 1500 RPM.	86
6.2. Campo de Presión	90
6.2.1. Seguimiento de Partículas	90
6.3. Coeficientes de Arrastre Tras el Impulso de la Propela	92
7. Conclusiones y trabajo a futuro.	95
7.1. Conclusiones	95
7.2. Trabajo a Futuro.	96
Referencias.	97

Índice de figuras

1.1. Tornillo de Arquímedes. (Roca, 2021)	16
1.2. Tornillo Aéreo de Leonardo Da Vinci (L., 2017)	17
1.3. Esquema de la propela propuesta por Hooke. (Dr. Ali, 2023) . . .	18
1.4. Esquema de la propela de Paucton. (Dr. Ali, 2023)	18
1.5. Esquema de la propela de Bernoulli. (Dr. Ali, 2023)	19
1.6. Hélice marina propuesta por Joseph Bramah. (Dr. Ali, 2023) . .	19
1.7. Submarino " <i>Turtle</i> " de David Bushnell (Gargantilla, 2020)	20
1.8. Propela de Edward Shorter (SWOW, 2012)	21
1.9. Propela de Francis Smith (SWOW, 2012)	21
1.10. Propela de John Ericsson. Fotografía tomada por The Mariners Museum, (2012)	22
1.11. Esquema de los elementos de un perfil aerodinámico (L'avionnaire, 2010).	23
1.12. Fuerzas que actúan en un perfil aerodinámico (Martinez, 2017). .	24
1.13. Condiciones de velocidad antes y después del paso del fluido a través del área de acción de la hélice (Suárez Usme, 2013).	25
1.14. Partes de la propela. (N., 2023)	26
1.15. Contorno de presión con la propela a 60° (M. R., G. R. y Abbas, 2021)	28
1.16. Contorno de velocidad con la propela 60° (M. R., G. R. y Abbas, 2021)	29
1.17. Contorno de la presión estática en 2D (verde) y del torque (azul) a 1048 RPM.	30
1.18. Curvas obtenidas sobre el desempeño de la hélice (Adam <i>et al.</i> , 2019)	30
1.19. Propagación de las velocidades tangenciales de la propela en las simulaciones de Turunen.	32
1.20. Gráficas de los coeficientes de torque K_T y empuje K_Q contra el tiempo a una relación de avance $J = 0.9$ de las simulaciones de Turunen.	33
1.21. Líneas de corriente entre la propela y timón de las simulaciones de Huang Sheng (Huang <i>et al.</i> , 2007).	34
1.22. Implementación de dos aletas en el timón de las simulaciones de Huang Sheng, et al	34

1.23. Gráfica del rendimiento de la propela simulada por Huang Shen, et al en aguas abiertas comparando resultados computacionales con experimentales.	35
1.24. Líneas de corriente producidas por la propela (Muscari y Di Mascio, 2009)	35
1.25. Gráficas del desempeño de la propela (Muscari y Di Mascio, 2009)	36
1.26. Interacción de la propela con timón (Muscari y Di Mascio, 2009)	36
2.1. Vista lateral del mallado de la propela.	40
2.2. Vista frontal del mallado de la propela.	40
2.3. Mallado de la esfera visto desde el plano xz	41
2.4. Mallado de la esfera visto desde el plano yz	41
2.5. Mallado del dominio computacional visto por el plano yz	42
2.6. Mallado del dominio computacional visto desde el plano xz	42
2.7. Mallado del modelo físico completo.	43
4.1. Imágen del archivo <i>turbulenceProperties</i>	49
4.2. Archivo <i>dynamicMeshDict</i> para una velocidad angular de 1500 RPM.	50
4.3. Imágen del archivo <i>transportProperties</i>	51
4.4. Imagen del archivo <i>controlDict</i> usado en las simulaciones de este trabajo de investigación.	52
4.5. Archivo <i>fvSchemes</i>	53
4.6. Archivo <i>fvSolution</i>	54
5.1. Parte lateral del Dominio Computacional.	56
5.2. Parte frontal del Dominio Computacional.	57
5.3. Simulación de la Capa Límite Dinámica	58
5.4. Acercamiento a Capa Límite Dinámica	59
5.5. Curva de η contra f' de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).	60
5.6. Curvas de η contra f'' de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).	62
5.7. Simulación de la Capa Límite Térmica	63
5.8. Acercamiento a la Capa Límite Térmica	64
5.9. Curvas de η contra θ de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).	65
5.10. Curva de η contra θ' de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).	66
5.11. Diagrama esquemático del aparato experimental.	68
5.12. Curva de s/d contra el logaritmo natural del número de Reynolds de la prueba experimental (Taneda, 1956)	69
5.13. Malla computacional de la simulación del flujo sobre una esfera a bajos números de Reynolds.	70
5.14. Investigación de Sadatoshi contra las simulaciones en OpenFOAM con los números de Reynolds 17.9, 26.8 y 37.7.	71

5.15. Investigación de Sadatoshi contra las simulaciones en OpenFOAM con los números de Reynolds 73.6, 118 y 133.	72
5.16. Curvas de resultados teóricos de Sadatoshi Taneda contra los resultados numéricos obtenidos mediante OpenFOAM.	74
5.17. Normales en cada punto de la esfera.	74
5.18. Curvas del CD contra Re de las Simulaciones de Flujos sobre una Esfera a Diferentes Números de Reynolds.	76
5.19. Campo de velocidad con malla móvil sin esfera en la dirección y	77
5.20. Línea dibujada a lo largo del dominio computacional para la recolección de datos de velocidades y presiones.	78
5.21. Velocidad y presión graficadas pasando por la malla móvil en el dominio sin esfera.	78
5.22. Campo de velocidad de malla móvil con esfera.	79
5.23. Campo de presión de la malla móvil con esfera.	80
5.24. Curva de la presión graficada a lo largo del eje y pasando por la malla móvil y la esfera.	81
5.25. Curva de la velocidad graficada a lo largo del eje y pasando por la malla móvil y la esfera.	82
6.1. Líneas de corriente en el plano yz capturada al segundo 4 con la propela girando a 300 RPM.	84
6.2. Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 8 con la propela girando a 300 RPM.	85
6.3. Captura de las líneas de corriente en el plano xy tomada al segundo 8 con la propela girando a 300 RPM.	85
6.4. Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 12 con la propela girando a 300 RPM.	86
6.5. Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 1.3 con la propela girando a 900 RPM.	87
6.6. Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 5 con la propela girando a 900 RPM.	87
6.7. Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 7 con la propela girando a 900 RPM.	88
6.8. Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 1 con la propela girando a 1500 RPM.	88
6.9. Captura de las líneas de corriente en el plano xy tomada al segundo 3 con la propela girando a 1500 RPM.	89
6.10. Captura de las líneas de corriente en el plano xy tomada al segundo 5 con la propela girando a 1500 RPM.	89
6.11. Campo de presión del flujo de la propela impulsado hacia la esfera para el caso de 900 RPM.	90
6.12. Captura del seguimiento de partículas cuando pasan por la propela para el campo de presión.	91
6.13. Captura del seguimiento de partículas frente a la esfera para el campo de presión.	91

6.14. Captura del seguimiento de partículas detrás de la esfera para el campo de presión.	92
6.15. Curva de los Coeficientes de Arrastre Teóricos y Numéricos . . .	94
6.16. Curva del coeficiente de arrastre para una esfera (White, 2016). .	94

Índice de tablas

2.1. Número de celdas y puntos de las geometrías del modelo físico.	39
3.1. Condiciones de Frontera Fijas Usadas en las Simulaciones	46
5.1. Tabla de Datos obtenida de la simulación de OpenFOAM	73
5.2. Tabla de resultados teóricos de las fuerzas y coeficientes de arrastre.	75
5.3. Tabla de resultados experimentales de las fuerzas y coeficientes de arrastre.	75
6.1. Tabla de valores de las velocidades y números de Reynolds impulsados por la propela.	92
6.2. Tabla de los coeficientes de arrastres teóricos y numéricos con su comparación en porcentaje de error.	93
1. Tabla de Valores de la Solución Semianalítica de Blasius para la Capa Límite Dinámica.	102

Nomenclatura

ΔT_0	diferencia entre la temperatura del fluido y la temperatura de referencia.
δ_T	espesor de capa límite térmica.
μ	viscosidad dinámica.
ν	viscosidad cinemática.
ω	frecuencia angular.
ρ	densidad.
τ	esfuerzo cortante en la pared del cuerpo inmerso en el flujo.
\mathbf{e}_i	vector unitario en dirección <i>i</i> ésima.
\mathbf{u}	vector de velocidad del fluido.
C_D	coeficiente de arrastre.
D	diámetro.
F_D	fuerza de arrastre.
p	presión.
R	radio.
Re	número de Reynolds.
T	temperatura.
t	tiempo
T_0	temperatura de referencia.
T_∞	temperatura de corriente libre.
u_∞	velocidad de corriente libre.
u_a	velocidad de avance del fluido.
u_i	velocidad del fluido en dirección <i>i</i> ésima.
x_i	dirección <i>i</i> ésima.

Capítulo 1

Introducción.

Este capítulo tiene por objeto comentar el contexto y la motivación del presente trabajo. Posteriormente, se abordará brevemente el marco histórico, dando una breve historia de las hélices marinas, también conocidas como "propelas". A su vez, se tratarán temas para entender qué es una hélice marina entre los que se incluyen su composición, funcionamiento, aerodinámica, así como su clasificación. También se abordará el contexto actual sobre el estudio y el comportamiento de las hélices marinas en el Estado del Arte . Posteriormente, se plantea el objetivo y el alcance, con el fin de delimitar los alcances de este trabajo de investigación. Finalmente, se presentará el contenido de la tesis.

1.1. Contexto actual y motivación.

A lo largo de la historia de la humanidad, las propelas han servido como propulsores que ayudan a desplazar distintos vehículos como barcos, buques, lanchas y submarinos. Por lo general, las hélices marinas son geometrías complejas, al igual que el flujo que generan al estar en rotación, por lo que el análisis de diseño óptimo y de desempeño de estos dispositivos mecánicos es muy importante.

La hélice de un vehículo marino es un componente esencial ya que influye en el rendimiento y la eficiencia en la navegación. La hélice es el elemento técnico unitario más importante de una embarcación de acuerdo al documento técnico de pesca número 383 de la FAO. Según este organismo especializado de la ONU, su diseño y características repercuten directamente en el grado de eficiencia de la utilización del combustible (R. P., 2019). Esto es cierto ya que convierte la fuerza que produce el motor en impulso para mover la embarcación en el agua. Por ello es que al diseñar una hélice marina es importante garantizar su eficiencia para propulsar el barco.

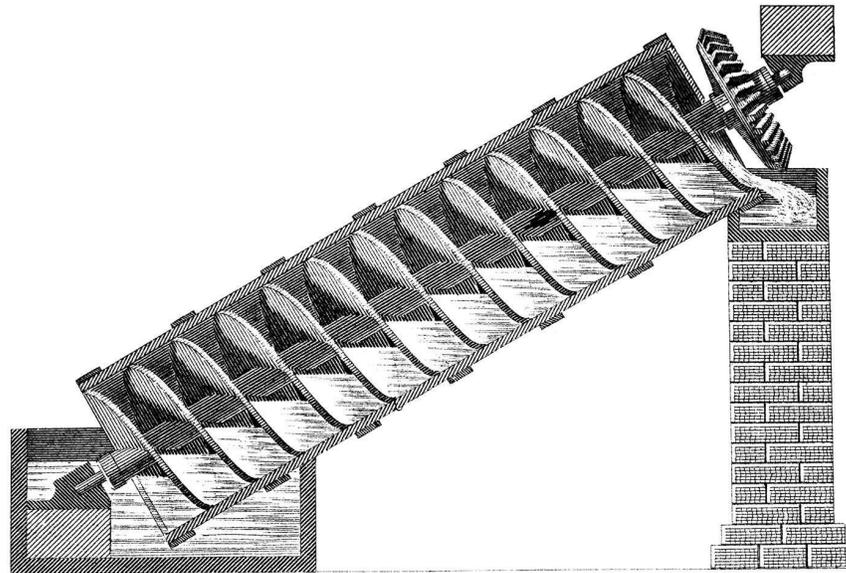


Figura 1.1: Tornillo de Arquímedes. (Roca, 2021)

1.2. Breve Historia de las Hélices

Los primeros acercamientos que dieron origen al invento de las hélices datan del año 250 A.C. con la invención de la bomba de tornillo, la cual consiste en una máquina gravimétrica helicoidal utilizada para la elevación de agua, harina, cereales o material excavado. A esta máquina se le conoce como Tornillo de Arquímedes, a quien se le atribuye dicho invento aunque hay vestigios de que los primeros en crear y usar esta bomba fueron los egipcios, por lo que se considera la bomba de desplazamiento positivo más antigua del mundo (Smil, 2021). Un esquema de esta máquina se puede observar en la Fig. (1.1) Aunque la bomba de Arquímedes no fue utilizada como mecanismo de propulsión, sirvió para dar las bases en el principio de operación de las hélices que conocemos actualmente.

Fue hasta que se empezaron a dar los primeros pasos en la aviación con el invento del Tornillo Aéreo del ingeniero, artista e inventor florentino Leonardo Da Vinci, que se empezó a hablar del concepto de hélice. Da Vinci creó este invento cerca del año de 1490 D.C. basándose en el principio del Tornillo de Arquímedes (C. J. R., 2011). Se puede ver un esquema del tornillo aéreo en la Fig.(1.2). Leonardo intuyó que el tornillo, al estar acoplado con pernos a un eje de rotación, tendría que levantarse en el aire si se le hacía girar rápidamente. Sin embargo, elevar el peso de esa estructura no hubiese bastado con la fuerza de cuatro hombres. Hubiese sido necesario un potente motor moderno. Leonardo

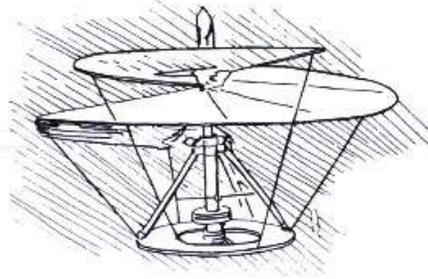


Figura 1.2: Tornillo Aéreo de Leonardo Da Vinci (I., 2017)

tampoco tuvo en cuenta que en el momento de levantarse del suelo, el disco fijo de la base comenzaría a girar en sentido contrario al del rotor. Su helicóptero hubiese necesitado un rotor de cola, como el que llevan los helicópteros modernos, para evitar la rotación de la base (J., 2017). Aunque el tornillo aéreo fue una máquina voladora que Leonardo nunca consiguió crear de forma funcional, dio la primer pauta para la invención de los vehículos aéreos impulsados por hélices y se le considera como el primer prototipo de helicóptero de la historia (Abel, 2023).

Si bien el helicóptero de Da Vinci fue un gran avance para el uso de las hélices como dispositivos de propulsión, no fue hasta el año de 1683 que Robert Hooke propuso la primera hélice marina que se puede observar en la Fig. (1.3). Tras hacerle unas modificaciones a su molino hidráulico horizontal que diseñó dos años atrás, Hooke pudo ver que éste no extraía energía del agua sino que se la entregaba, proporcionando así fuerza motriz a los barcos a través del agua (Davis, 1931).

Para el año de 1752, la Academia de Ciencias de París incentivó a los científicos de la época, mediante una convocatoria, el desarrollo e innovación de este dispositivo mecánico. Uno de los trabajos que más destacaron tras lanzar la convocatoria fue el del matemático francés Alexis-Jean-Pierre Paulton, quien propuso un sistema de propulsión en agua basado nuevamente en el tornillo de Arquímedes. En la misma convocatoria participó el matemático suizo Daniel Bernoulli, quien sugirió impulsar botes colocando álabes en un eje a 60° . Adicionalmente, el inventor inglés Joseph Bramah propuso una hélice de pocas aspas acoplada a un eje horizontal que se encuentra por debajo de la línea de flotación de una embarcación. Con estas aportaciones se dieron las bases de lo que hoy en día es la propulsión náutica. Los modelos presentados en esta convocatoria se pueden apreciar en las Figs. (1.4), (1.5 y (1.6).

A partir de entonces se fueron dando cada vez más aportes importantes en la innovación de las hélices marinas. Aunque en Europa estaba muy creciente el interés por el desarrollo de las hélices marinas, fue un americano de nombre David Bushnell, el primero en utilizarla como mecanismo de propulsión submarina al instalar una hélice de brazo en su submarino *The Turtle* en 1776, el cual

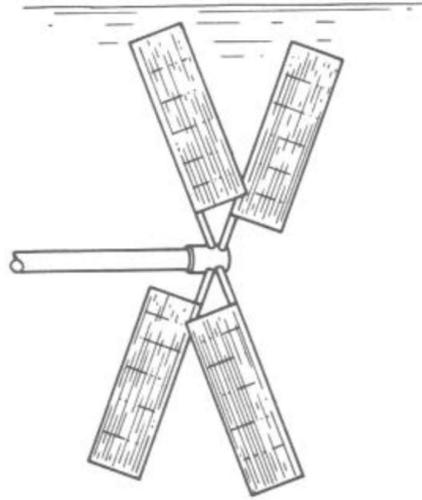


Figura 1.3: Esquema de la propela propuesta por Hooke. (Dr. Ali, 2023)

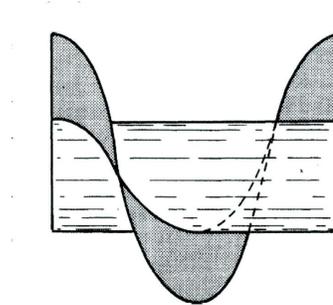


Figura 1.4: Esquema de la propela de Paucton. (Dr. Ali, 2023)

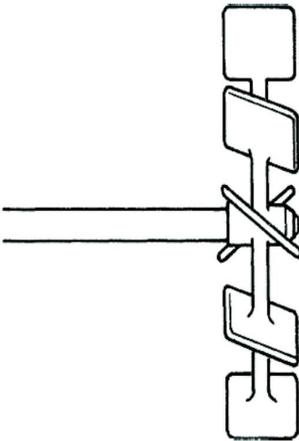


Figura 1.5: Esquema de la propela de Bernoulli. (Dr. Ali, 2023)

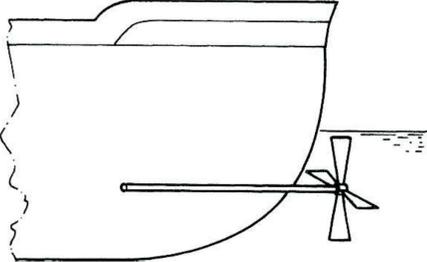


Figura 1.6: Hélice marina propuesta por Joseph Bramah. (Dr. Ali, 2023)

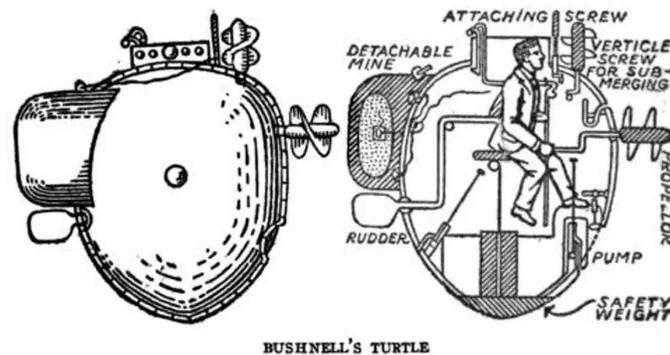


Figura 1.7: Submarino "Turtle" de David Bushnell (Gargantilla, 2020).

fue uno de los primeros submarinos de la historia (Erin, s.f.). Bushnell diseñó un pequeño submarino monoplace cuyo casco estaba fabricado en madera e íntegramente por planchas de cobre. Su tecnología era muy rudimentaria, apenas un manómetro para conocer la profundidad y un compás. Como se puede ver en la Fig (1.7), el invento de Bushnell se propulsaba por dos hélices, que giraban al accionar unos pedales que permitían alcanzar, en el mejor de los casos, una velocidad de hasta cinco kilómetros por hora (Gargantilla, 2020).

Para el año 1800, Edward Shorter, ingeniero e inventor inglés, diseñó una hélice de dos palas sobre un eje inclinado sostenido por una boya en la popa del barco. El eje inclinado que transportaba la hélice era impulsado a través de una junta universal por un segundo eje por encima de la línea de flotación.

Francis Pettit Smith patentó una similar a la de Edward Shorter en 1836, (Villar Rey, 2002) la cual consistía de una sola rosca con dos vueltas completas que tiene similitud a un gran sacacorchos. Este giraba en un hueco en la popa del barco. Smith llevó a cabo sus primeros experimentos con tornillos con un modelo accionado por un mecanismo de relojería en un estanque.

En 1839, John Ericsson introdujo y patentó el diseño de hélice de tornillo en un barco, que navegó exitosamente sobre el Océano Atlántico. El diseño de su hélice, el cual se puede ver en la Fig. (1.10) estaba compuesto por dos tambores sobre un eje. Cada tambor tenía una serie de palas helicoidales alrededor de la periferia, y las palas de un tambor estaban inclinadas en la dirección opuesta a las del otro tambor. Una característica interesante de la hélice de Ericsson fue la disposición de los dos tambores. Estos estaban montados sobre un eje común, pero giraban en direcciones opuestas. El tambor de popa giraba a mayor velocidad porque actuaba en agua que ya había sido puesta en movimiento por el tambor de proa. Esta disposición se conoce como *hélices contrarrotativas*. (Curley, s.f.) En aquella época todavía se utilizaban diseños mixtos de paletas

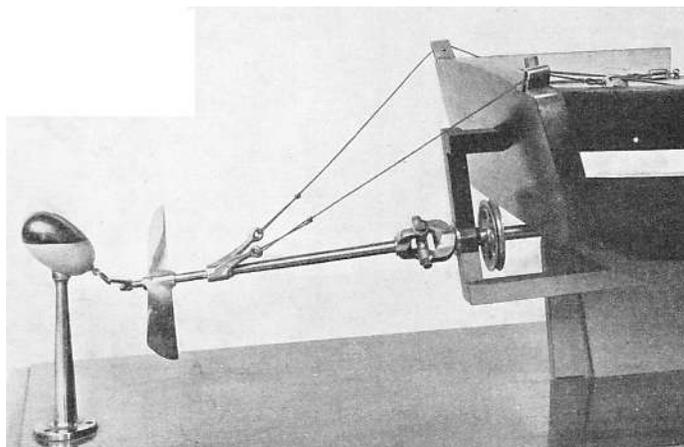


Figura 1.8: Propela de Edward Shorter (SWOW, 2012)

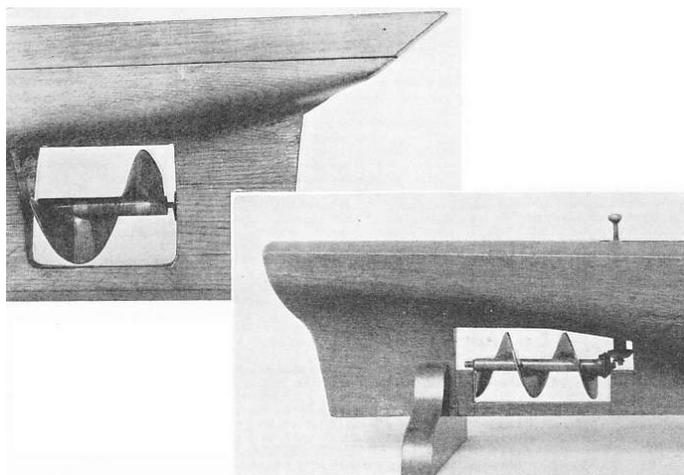


Figura 1.9: Propela de Francis Smith (SWOW, 2012)

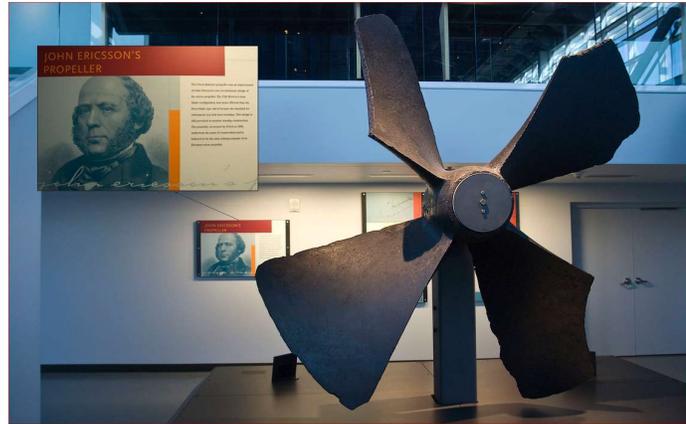


Figura 1.10: Propela de John Ericsson. Fotografía tomada por The Mariners Museum, (2012)

y hélices como el SS. Great Eastern de 1858 pero con la hélice naval de Ericsson, las ruedas de paletas fueron desplazadas.

1.3. Aerodinámica de las Hélices: Perfil Aerodinámico

Una hélice está conformada por un número variado de alas o perfiles aerodinámicos distribuidos alrededor del perímetro del cubo de la hélice. Entendemos como *ala*, según Nakayama y Boucher, como un cuerpo manufacturado con el objetivo de hacer que la sustentación sea mayor que el arrastre". En general, todo perfil aerodinámico consta de dos secciones: la región de baja presión (*extradós*) y la de alta presión (*intradós*) Esta distribución de presiones que se genera alrededor del perfil al interactuar con un fluido en movimiento es lo que da lugar a las fuerzas de sustentación y arrastre sobre el perfil.

En la figura 1.11 se pueden identificar los elementos que componen un perfil aerodinámico, los cuales son:

- *Borde de Ataque*: el extremo en donde el flujo choca primero.
- *Borde de Salida*: punto del perfil de un ala en el que el aire del extradós y del intradós confluyen y abandonan el contacto con el ala.
- *Cuerda*: la línea recta imaginaria que conecta el borde de salida con el centro de curvatura y el borde de ataque.
- *Línea de Combadura o de Curvatura*: la línea que conecta los puntos medios entre las superficies superior e inferior del perfil.

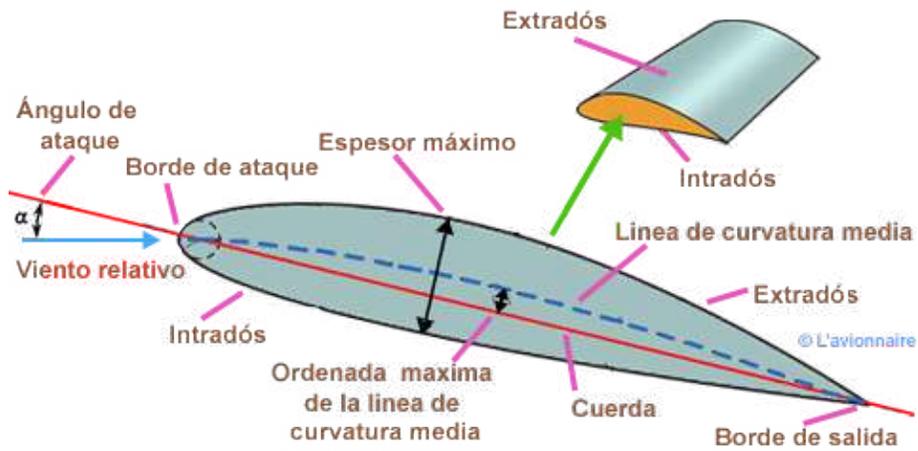


Figura 1.11: Esquema de los elementos de un perfil aerodinámico (L'avionnaire, 2010).

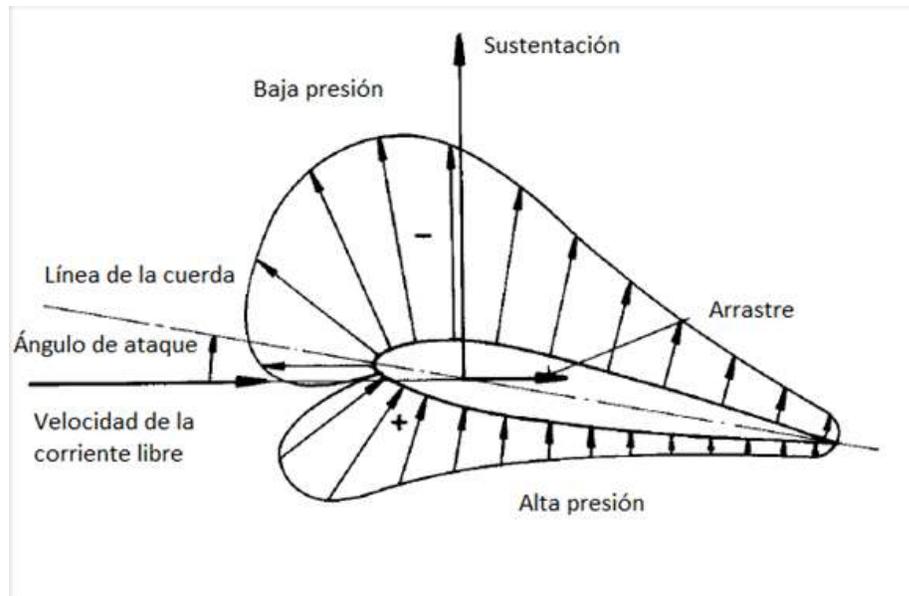


Figura 1.12: Fuerzas que actúan en un perfil aerodinámico (Martinez, 2017).

- *Curvatura Máxima*: la altura máxima de la línea de curvatura respecto de la cuerda.
- *Espesor Máximo*: es la mayor distancia vertical entre la superficie superior y la inferior.
- *Ángulo de Ataque Geométrico*: el ángulo formado entre la dirección del flujo y la cuerda.

Las fuerzas que actúan en un perfil aerodinámico se pueden apreciar en la Fig. (1.12). Estas son las fuerzas de arrastre y de sustentación, las cuales son las componentes, paralela y perpendicular, respectivamente, de la fuerza que el flujo ejerce sobre el perfil aerodinámico. Estas se generan alrededor del perfil gracias a la distribución de presiones que se da al interactuar con el fluido en movimiento, y dependen de dos variables: del ángulo de ataque α del perfil con respecto a la velocidad de flujo, y del número de Reynolds Re .

La propulsión de las hélices se fundamenta principalmente en los principios de conservación de la energía y del momentum. Al girar, la hélice realiza un trabajo sobre el fluido que la atraviesa, acelerándolo desde el borde de ataque del perfil en el plano frontal de la hélice, hasta el punto de fuga en la parte posterior de la misma. Este cambio en el momentum del fluido debido a la hélice se produce básicamente por la distribución de presión que genera la geometría misma del perfil. Así, se genera un sistema de bajas presiones delante de la hélice

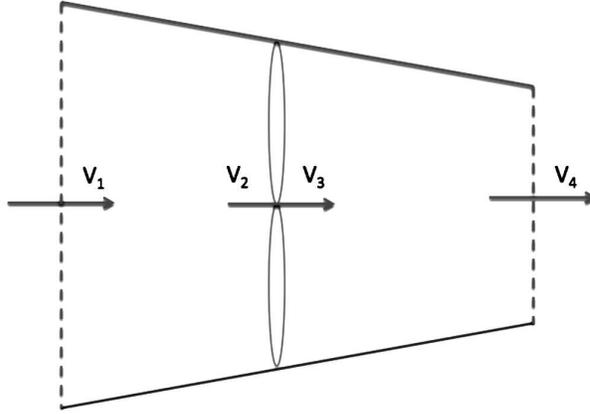


Figura 1.13: Condiciones de velocidad antes y después del paso del fluido a través del área de acción de la hélice (Suárez Usme, 2013).

y uno de alta, detrás de la misma. De acuerdo a la segunda Ley de Newton y a la conservación del momentum, la fuerza de empuje T que genera la hélice es proporcional al flujo de masa a través de su área de acción y al cambio en la velocidad del fluido (ver Fig. (1.13), esto es:

$$T = \dot{m}(v_4 - v_1) \quad (1.1)$$

El flujo de masa se determina como:

$$\dot{m} = \rho A v_2 \quad (1.2)$$

$$v_1 = U_\infty \quad (1.3)$$

Donde ρ es la densidad del fluido, A es el área donde pasa el flujo, v_2 es la velocidad justo antes de la propela y v_4 es la velocidad después de pasar la propela.

1.4. Anatomía de la Hélice: Núcleo, Palas y Capacete

En la Fig. (1.14) se pueden observar las partes que componen a la hélice marina, las cuales son (N., 2023):

- **Núcleo:** La columna vertebral de la hélice, que sostiene las palas y desempeña un papel clave en la eficiencia de la hélice al permitir un mayor volumen de agua desplazado.

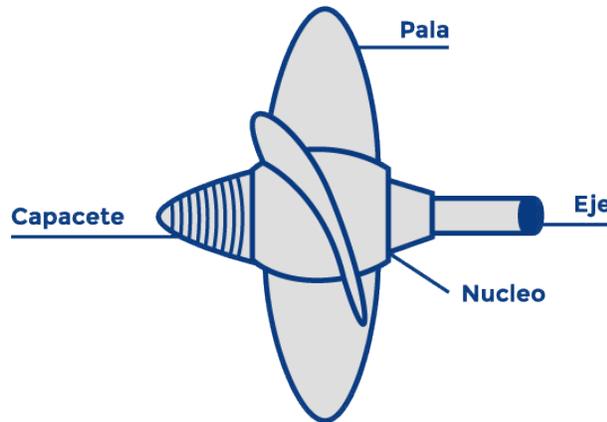


Figura 1.14: Partes de la propela. (N., 2023)

- **Palas:** Las partes de la hélice que interactúan con el agua y tienen un diseño que optimiza el desplazamiento del volumen de agua.
- **Capacete:** El capacete es una parte crucial de la hélice. Es la forma y el diseño de la parte frontal de la hélice, y su perfil influye en la eficiencia y el rendimiento de la hélice. Un buen diseño de capacete puede reducir la resistencia y mejorar la capacidad de desplazar un mayor volumen de agua de manera eficiente.

1.5. Clasificación de las Hélices Marinas

1.5.1. Clasificación por Tipo de Hélice

Existen diferentes tipos de propelas, así como aplicaciones. Se han hecho investigaciones para obtener el sistema más eficiente y algunos modelos han ido ganando popularidad conforme el campo marino da la oportunidad de probarlos. Entre los más comunes, descritos por Centramar, 2020 son:

- Hélices de paso variables: Sus palas pueden girar alrededor de su eje largo para cambiar su ángulo de ataque
- Sistemas de tobera: También llamadas hélice carenadas. La hélice está colocada dentro de una tobera rígida, la cual produce un empuje adicional al que produce la hélice.
- Azimutales: Estas hélices orientan su impulso girando alrededor de un eje vertical. Este giro es completo lo que mejora significativamente la maniobrabilidad haciendo incluso innecesario el timón.

- De chorro de agua (*Water jets*): Son hélices a propulsión por chorro de agua. Sirven como alternativa a la propulsión con hélices convencionales, en especial, para embarcaciones de alta velocidad o embarcaciones que operan en aguas poco profundas.
- Hélices de superficie: Logran conseguir la ventilación o aire en las palas en forma inmediata.
- Paso Fijo: Su paso (o ángulo de instalación de la pala) es fijo. La más común por su relativo “bajo costo” es la de paso fijo y son usadas en la mayoría de las embarcaciones comerciales como: remolcadores, arrastreros, pesqueros, etc.

1.5.2. Clasificación por Número de aspas

Las hélices marinas usualmente tienen 3, 4 o 5 aspas, siendo la más común la de 4 aspas.

- Las hélices de 2 aspas son usadas en los barcos de vela con una potencia auxiliar, porque ofrecen una menor resistencia al avance cuando se está realizando la condición de *velerear*. El problema con las hélices de 2 aspas es que la mayoría de las embarcaciones necesitarían un diámetro demasiado grande por los requerimientos de área para una efectiva propulsión.
- Las hélices de 3 aspas han demostrado ser el mejor compromiso entre el área de aspas y eficiencia. Otra razón de usar más de 3 aspas es la reducción de la vibración. Si la hélice tiene el hábito de producir un molesto zumbido y golpeteo rítmico, una hélice con más aspas usualmente solucionará dicho problema. Cada vez que las aspas pasan debajo del casco o el arbotante, causan un cambio de presión que causa un empuje. Si este empuje es muy fuerte puede generar un golpeteo, lo que equivale a vibración.
- Hélices de 4 o 5 aspas son usadas por 2 razones. La primera es que al tener más aspas, crean más área con el mismo o menor diámetro. La hélice de 4 aspas, sin embargo, podría ser raramente más eficiente que la de 3, porque la cercanía de las aspas forman una turbulencia adicional al paso del agua. Otra razón de usar más de 3 aspas es la reducción de la vibración. Cada vez que las aspas pasan debajo del casco o el arbotante, causan un cambio de presión que genera un empuje. Si este empuje es muy fuerte puede generar un golpeteo.

Según los fabricantes de propulsores marinos *Rice Propulsion* (Herrera, 2019), a menor número de aspas la eficiencia aumenta, y a mayor número de aspas el desempeño es más suave y uniforme. Esto debe ser siempre tomado en cuenta cuando se selecciona el diámetro, paso, área y forma de las aspas.

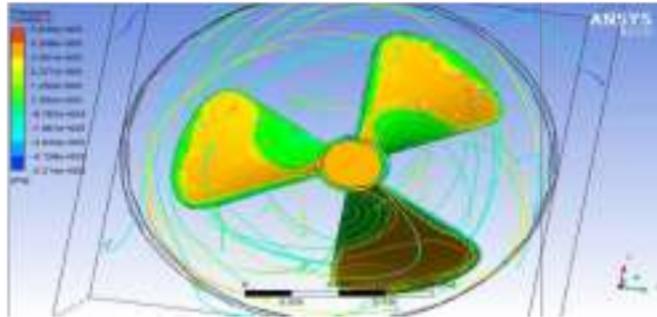


Figura 1.15: Contorno de presión con la propela a 60° (M. R., G. R. y Abbas, 2021)

1.6. Estado del Arte.

En los últimos años ha sido más necesario y demandado el que se estudien y analicen mecanismos rotatorios como lo son los ventiladores y hélices. Han sido más demandados los cálculos relacionados con estas geometrías debido al crecimiento en la industria de generación de energía eólica, en la aeronáutica, en la industria cementera, entre otras que van necesitando nuevas mejoras y un mejor desempeño en sus rotores. En este trabajo de tesis se lleva a cabo la simulación numérica del flujo generado por una hélice y su influencia sobre el coeficiente de arrastre de una esfera. Trabajos semejantes se han reportado en la literatura en los últimos años. Ver (M. R., G. R. y Abbas, 2021), (Adam *et al.*, 2019), (Turunen *et al.*, 2014), (Huang *et al.*, 2007) y (Muscari y Di Mascio, 2009).

El primer artículo de M. R., G. R. y Abbas se investiga el modelado y análisis hidrodinámico de hélices marinas, y se estudia el método de mallado y el efecto que tiene el tamaño de la malla. El análisis del modelo utiliza el software Ansys Fluent. Además, se presentan las curvas de rendimiento de la hélice obtenidas por CFD, las cuales se comparan y verifican con el resultado que se obtuvo de manera analítica. Se hizo la prueba para hélices de diferentes materiales, las cuales fueron sometidas a diferentes niveles de presión. Se presentan en la Fig. (1.15) y en la Fig. (1.16) los contornos de presión y velocidad alrededor de la hélice obtenidos. Se determinaron los valores de las presiones máximas y mínimas para una hoja de aluminio en agua. Estos valores de presión se utilizan para conocer la capacidad de resistencia del material para el valor de entrada dado.

En el segundo artículo de Adam *et al.* se presenta un análisis del rendimiento de la hélice mediante los coeficientes de torque (K_T), empuje (K_Q) y eficiencia (η) de la hélice. En este caso, se utiliza el software CFD comercial NUMECA FineTM/Turbo v12.2, para la generación de malla, resolución de flujo y para el posprocesamiento. La simulación computacional se presenta en varios números

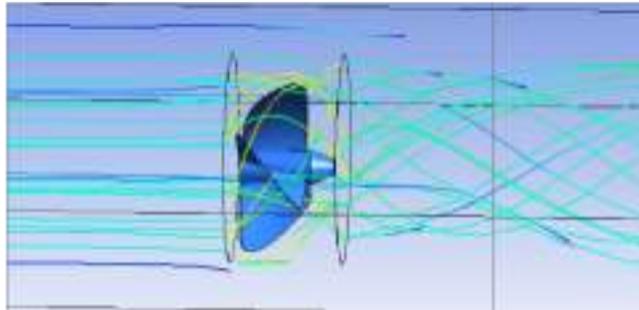


Figura 1.16: Contorno de velocidad con la propela 60° (M. R., G. R. y Abbas, 2021)

de velocidades de rotación (RPM) dentro del rango de relación de avance (J) el cual fue de $J=0,1$ hasta $1,05$. En la Fig.(1.17) se pueden apreciar los contornos de presión y de torque para dicho rango de relación de avance. Así mismo, se obtuvieron las curvas del desempeño de la hélice como se muestran en la Fig. (1.18). En la investigación se encontró que el valor más alto de J conduce a una disminución en $10K_Q$ y K_T debido a la baja velocidad axial y la resistencia a la presión que rodea la hélice. Mientras que η aumentó constantemente en el valor más bajo de J y disminuyó en el valor más alto de J . Se notó también que el aumento del número de velocidades de rotación (RPM) disminuye el rendimiento de la hélice ($10K_Q, K_T y \eta$). Los resultados también mostraron que la hélice con 1048 RPM obtiene una mejor eficiencia en $J=0,95$ con $\eta = 88,25\%$, $10K_Q = 0,1654$ y $K_T = 0,0942$. En general, el efecto de varias velocidades de rotación tiene una influencia positiva en las características de la hélice marina en aguas abiertas. Por lo tanto, estos resultados de CFD son útiles como predicción preliminar del rendimiento de la hélice simulada.

En el artículo de Turunen *et al.* se estudió el flujo alrededor de una hélice marina mediante un método de volumen finito tipo RANS. Se reprodujo computacionalmente una curva de rendimiento como se muestra en la Fig. (1.20) en condiciones de aguas abiertas y se comparó con los datos medidos en un túnel de cavitación en Kristinehamn, Suecia. Los cálculos se hicieron tanto con una sola pala de hélice como con una hélice completa de cinco palas. Para la hélice completa se aplicaron dos tipos de mallados. El primero consta de una malla continua con volúmenes de control tetraédricos con capas prismáticas cerca de la superficie de la hélice. El segundo tipo es una malla híbrida, que es una combinación de cuadrículas hexaédricas y tetraédricas malladas por separado con una interfaz de malla arbitraria (AMI) entre las dos partes. La turbulencia se modela mediante la ecuación SST k-Epsisol, modelo implementado en OpenFOAM. En los cálculos de estado estacionario, se aplica el enfoque del Marco de Referencia Móvil (MRF) para tener en cuenta los efectos debidos a la rotación. En el caso de simulaciones transitorias, se utilizan mallas móviles con el método

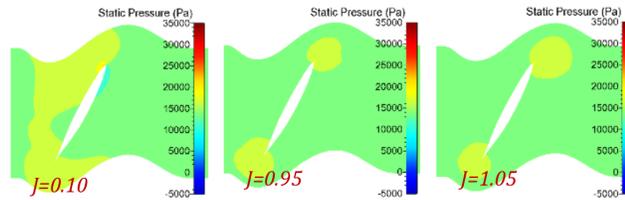


Figure 8. 2D static pressure contour for 1048 RPM

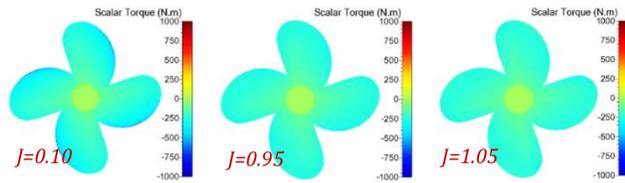
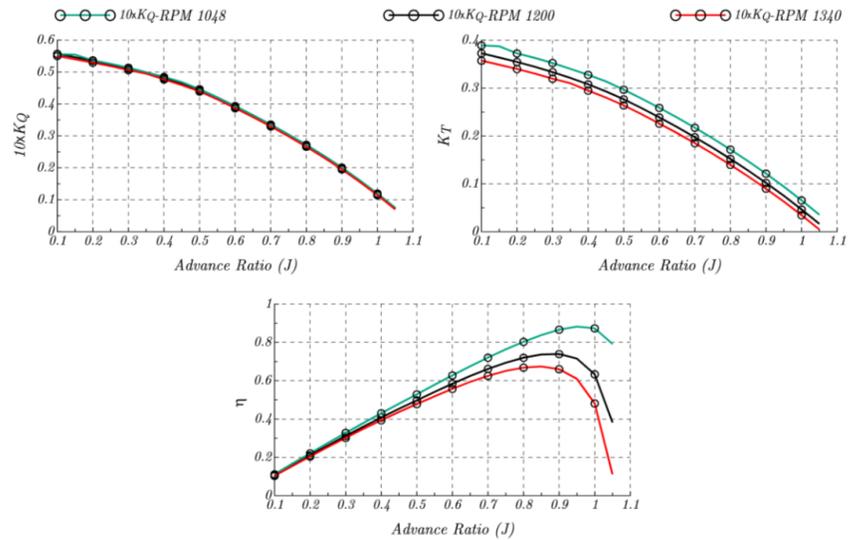


Figura 1.17: Contorno de la presión estática en 2D (verde) y del torque (azul) a 1048 RPM.

Figura 1.18: Curvas obtenidas sobre el desempeño de la hélice (Adam *et al.*, 2019)

del plano deslizante y se estudia el efecto de los errores numéricos e iterativos debido a la discretización temporal. Se analizaron tanto las fuerzas globales de la hélice como el campo de estela de la hélice como se muestra en la Fig. (1.19). Los hallazgos más importantes se enumeran a continuación.

- El código simpleFoam predice bien las fuerzas en el caso de una sola hélice con MRF.
- Una discontinuidad de la malla perjudica la estabilidad de los cálculos. Esto se soluciona utilizando la interpolación combinada de 0,75 para la convección del impulso.
- El esquema parece producir resultados en cálculos con precisión de ingeniería.
- La aplicación de MRF con más de una hélice implicará dificultades.
- El código transitorio produce resultados muy cercanos a los predichos por los cálculos de estado estacionario.
- Muy pocas iteraciones dentro de un intervalo de tiempo pueden perjudicar considerablemente la solución.
- El número requerido de iteraciones por paso de tiempo depende en gran medida del tamaño del paso de tiempo.
- La predicción del campo de estelas requiere métodos más precisos que la predicción de fuerzas

En otro artículo, de Huang *et al.*, en donde se determinó el rendimiento de una hélice y un timón (ver Fig. (1.21) y posteriormente se equiparon con aletas de empuje adicionales en el campo de flujo viscoso (ver Fig. (1.22)), con el fin de mejorar el rendimiento de propulsión de los barcos. Se utilizó el software FLUENT, el cual resolvió las ecuaciones de Reynolds Average Navier-Stokes, para calcular y simular el coeficiente de empuje y par en función del coeficiente de avance de la hélice y la eficiencia de empuje de las aletas de empuje adicionales. Se calculó la presión y el flujo de velocidad detrás de la hélice. Los nodos geométricos de la hélice se constituyeron mediante el programa FORTRAN y se utilizó el método NUMBS para crear una configuración de la hélice, que luego fue utilizada por GAMMBIT para generar el modelo de cálculo. La eficiencia de empuje de las aletas se calculó en función del número de aletas adicionales y de los ángulos de ataque. Los resultados de los cálculos concuerdan bastante bien con los datos experimentales (ver Fig. (1.23)), lo que muestra que la solución de flujo viscoso que presentamos es útil para simular el rendimiento de hélices y timones con aletas adicionales.

En el artículo *Simulation of the viscous flow around a propeller using a dynamic overlapping grid approach* de Muscari y Di Mascio se presenta el modelo en donde se prueba un código RANSE en estado inestable con capacidad de mallas dinámicas superpuestas para el estudio del flujo que pasa por una hélice

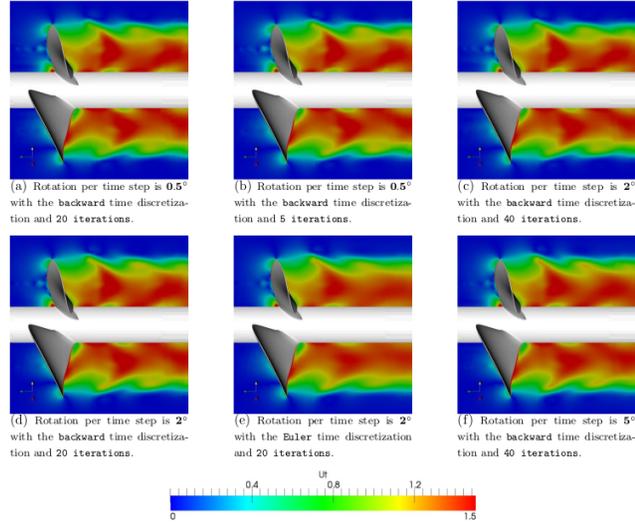
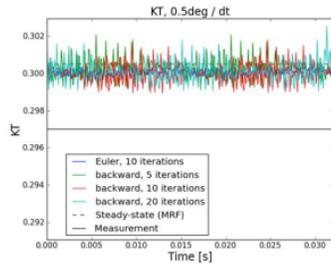


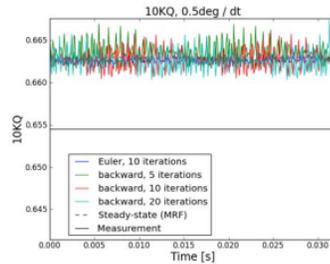
Figura 1.19: Propagación de las velocidades tangenciales de la propela en las simulaciones de Turunen.

giratoria (ver Fig. (1.24)). La hélice se consideró tanto en aguas abiertas como detrás de un timón. Para el primer caso se obtiene una buena concordancia con las curvas experimentales en aguas abiertas. Para el segundo caso de prueba se presentan resultados preliminares, es decir, obtenidos con una malla relativamente gruesa, que dan una descripción cualitativamente buena del campo de flujo. Se calcularon el empuje y el par de la hélice para tres valores del coeficiente de avance ($J = 0,2, 0,5, 1,0$) y se compararon con las curvas experimentales en aguas abiertas.

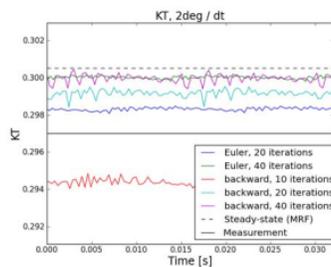
La comparación de los resultados numéricos con los experimentales tuvo una excelente predicción del empuje y el par. La gráfica de desempeño se puede ver en la Fig. (1.25). Para valores de coeficientes de avance más bajos, cuando es probable que se produzca cavitación, la comparación fue menos satisfactoria. Los resultados preliminares para la hélice detrás del timón también son buenos. Se capturan las características principales del flujo. En la Fig. (1.26) se puede ver la interacción de la propela con un timón. En particular, se notó que la carga sobre las palas de la hélice varía fuertemente según la posición relativa de las palas con respecto a la estela del timón. Un mayor refinamiento de la malla permitiría un análisis más preciso de la interacción de la hélice con las geometrías circundantes, como por ejemplo, el flujo alrededor del timón o las oscilaciones de presión en la bóveda de popa.



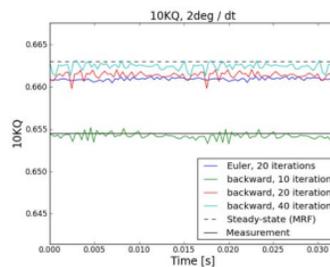
(a) Thrust coefficient K_T . Mesh movement per time step corresponds to 0.5° .



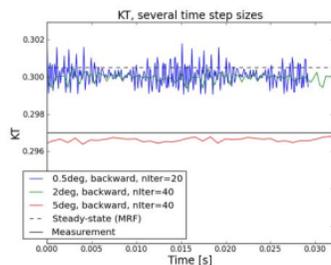
(b) Torque coefficient K_Q . Mesh movement per time step corresponds to 0.5° .



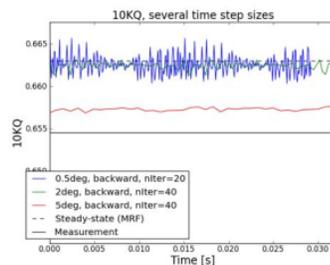
(c) Thrust coefficient K_T . Mesh movement per time step corresponds to 2° .



(d) Torque coefficient K_Q . Mesh movement per time step corresponds to 2° .



(e) Thrust coefficient K_T . Effect of the time step size.



(f) Torque coefficient K_Q . Effect of the time step size.

Figura 1.20: Gráficas de los coeficientes de torque K_T y empuje K_Q contra el tiempo a una relación de avance $J = 0.9$ de las simulaciones de Turunen.

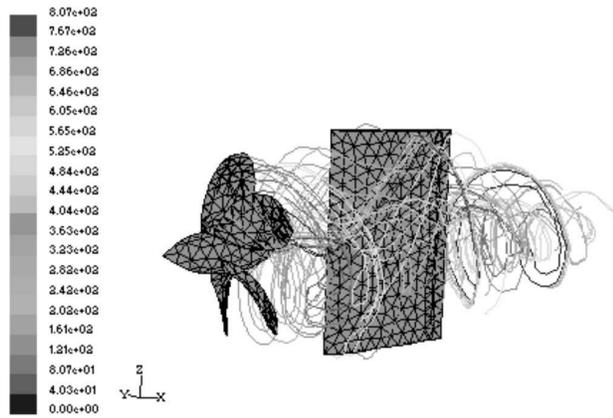


Figura 1.21: Líneas de corriente entre la propela y timón de las simulaciones de Huang Sheng (Huang *et al.*, 2007).

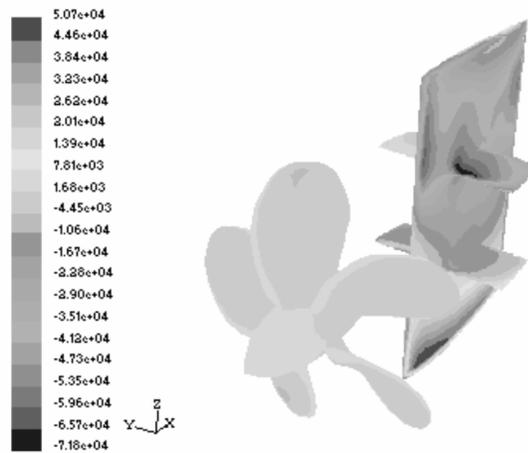


Figura 1.22: Implementación de dos aletas en el timón de las simulaciones de Huang Sheng, et al

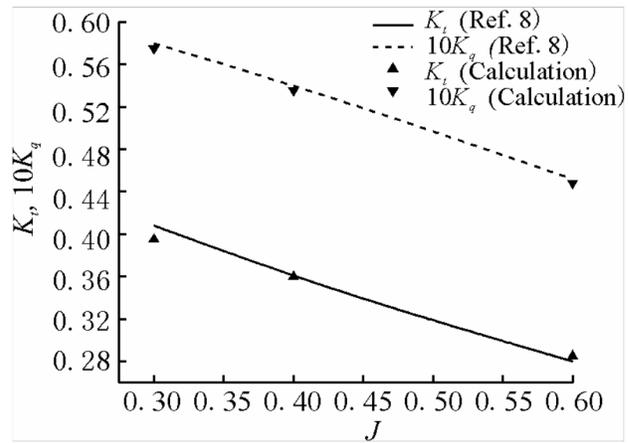


Figura 1.23: Gráfica del rendimiento de la propela simulada por Huang Shen, et al en aguas abiertas comparando resultados computacionales con experimentales.

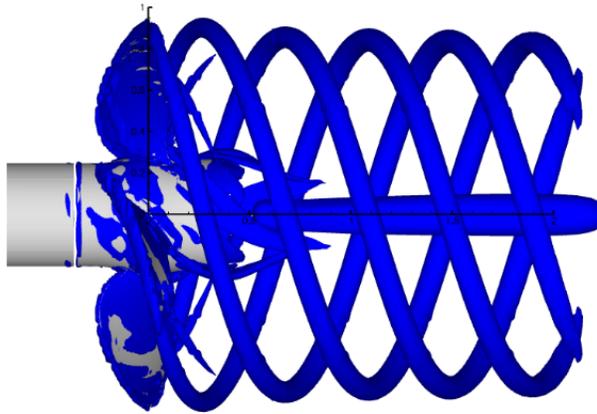


Figura 1.24: Líneas de corriente producidas por la propela (Muscarì y Di Mascio, 2009)

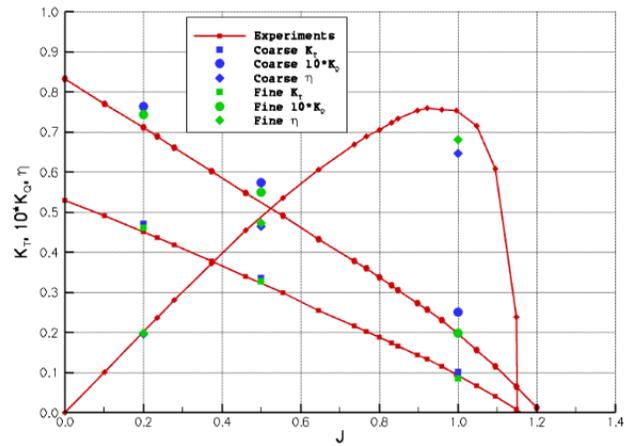


Figura 1.25: Gráficas del desempeño de la propela (Muscari y Di Mascio, 2009)

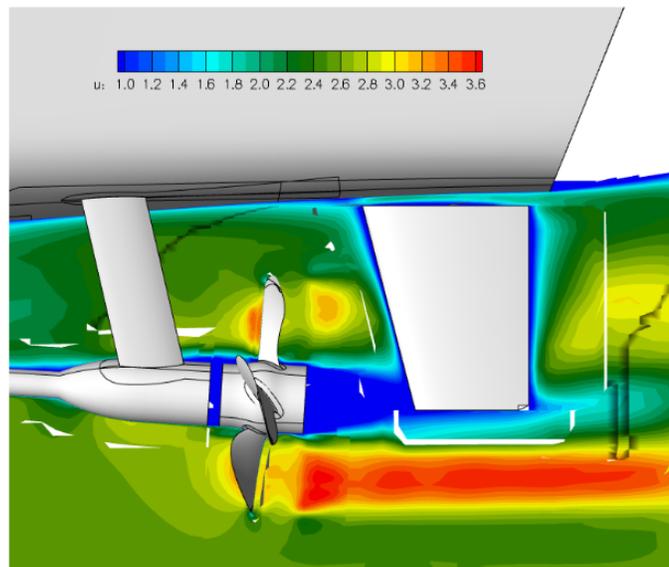


Figura 1.26: Interacción de la propela con timón (Muscari y Di Mascio, 2009)

1.7. Objetivo y Alcance.

El objetivo de este trabajo de tesis es analizar la simulación tridimensional del flujo propulsado por una hélice a diferentes revoluciones por minuto. El programa utilizado es OpenFOAM, el cual es libre y de código abierto, y resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes para la conservación de masa y momentum. A su vez, OpenFOAM puede trabajar con mallas dinámicas, por lo que se modelará una malla móvil rotatoria para simular el movimiento de la hélice. En la simulación se hará pasar un flujo de agua a un régimen laminar, el cual será impulsado por el movimiento de la hélice hacia una esfera. Al finalizar la simulación, se obtuvieron los perfiles de velocidad y presión de la interacción fluido-estructura. Del mismo modo, se obtuvieron los gradientes de velocidades y esfuerzos cortantes, con lo que se podrán conocer las fuerzas de arrastre y sustentación que se presentan en la esfera después del flujo.

Para llegar a este objetivo se presenta la simulación numérica de la hélice de paso fijo con cuatro aspas, la cual le proporcionará un chorro de agua a una esfera. Dada la geometría de la esfera, la distribución de las fuerzas de arrastre y sustentación fue diferente a las de un timón. Así mismo, al generar el flujo a mayor velocidad se observó la influencia de la rotación de la propela con respecto a los coeficientes de arrastre y sustentación, los cuales fueron aumentando al ir incrementando la velocidad angular de la hélice.

1.8. Contenido.

Se abordarán los temas del escrito de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta el modelo físico que se analiza en esta tesis, que incluye el mallado del dominio computacional y de la geometrías que en este caso serán la propela y la esfera. Así mismo se indicarán las condiciones de frontera para los tres casos en que se variará la velocidad angular.
- En el Capítulo 3 se presenta el modelo matemático, donde se presentan las ecuaciones que rigen el comportamiento del flujo.
- En el Capítulo 4 se presenta el modelo numérico donde se explicará el funcionamiento de OpenFOAM.
- En el Capítulo 5 se presentan una serie de validaciones con el fin de dar credibilidad a OpenFOAM, contrastando los resultados obtenidos mediante simulaciones con los reportados en la literatura.
- En el Capítulo 6 se presentan los resultados, así como el análisis de resultados, donde se describirá el efecto que tiene el flujo propulsado por la hélice al chocar con la esfera y los aportes de este trabajo de investigación.

- Finalmente, se cerrará el presente escrito con la sección de conclusiones, donde se resaltarán los aspectos más importantes de los resultados y se plantearán las posibilidades de un trabajo a futuro.

Capítulo 2

Modelo físico.

En este trabajo se simuló una propela de paso fijo de cuatro aspas. Su diámetro mide 0.2 m y su tallo tiene 0.23 m de longitud, medido desde la punta de la propela hasta el final de esta. En las Figuras (2.1) y (2.2) se puede apreciar el mallado de esta geometría vista desde el plano yz, es decir, del lado lateral, y del plano xz, que es la vista frontal de la propela.

A una distancia de 1.2 m, se colocó la esfera. Esta esfera tiene 0.1 m de radio. Unas imágenes de su mallado se pueden apreciar en las Figuras (2.3) y (2.4).

Ambos cuerpos están inmersos en un cilindro, que es lo que comprende el dominio computacional. Este cilindro tiene 2.72 m de longitud y 1 m de diámetro en la base. Este cilindro se puede ver en la Fig(2.5) en donde se ve su mallado visto desde el plano yz, y en la Fig(2.6) visto desde el plano xz.

Haciéndole un corte longitudinal al cilindro, se pueden ver la propela y la esfera, como se muestra en la Fig (2.7). El número de celdas y puntos de cada geometría se pueden ver en la Tabla (2.1).

Geometría	Celdas	Puntos
Esfera	3070	3792
Cilindro	14946	17987
Propela	8773	10414

Tabla 2.1: Número de celdas y puntos de las geometrías del modelo físico.

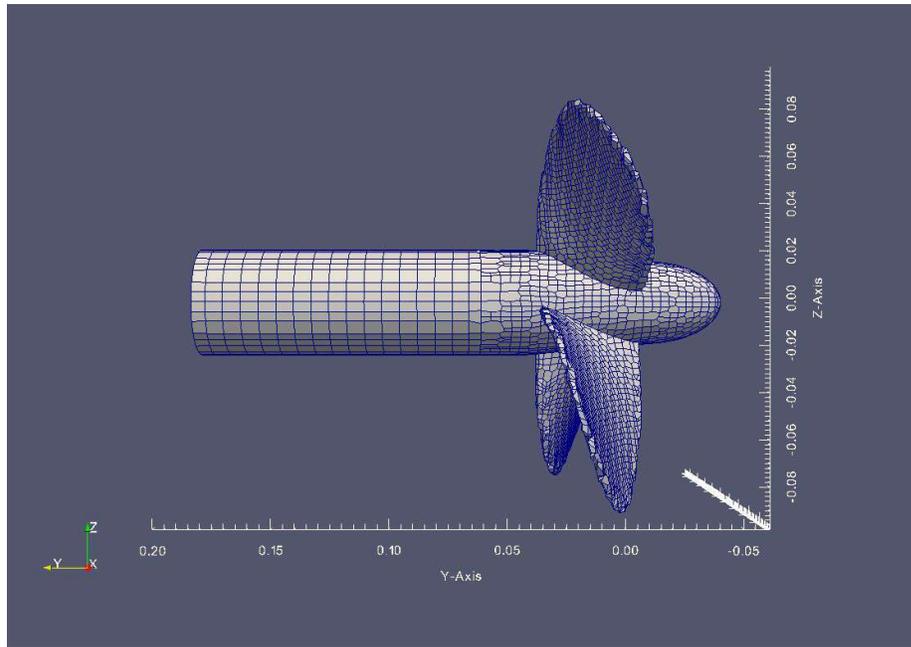


Figura 2.1: Vista lateral del mallado de la propela.

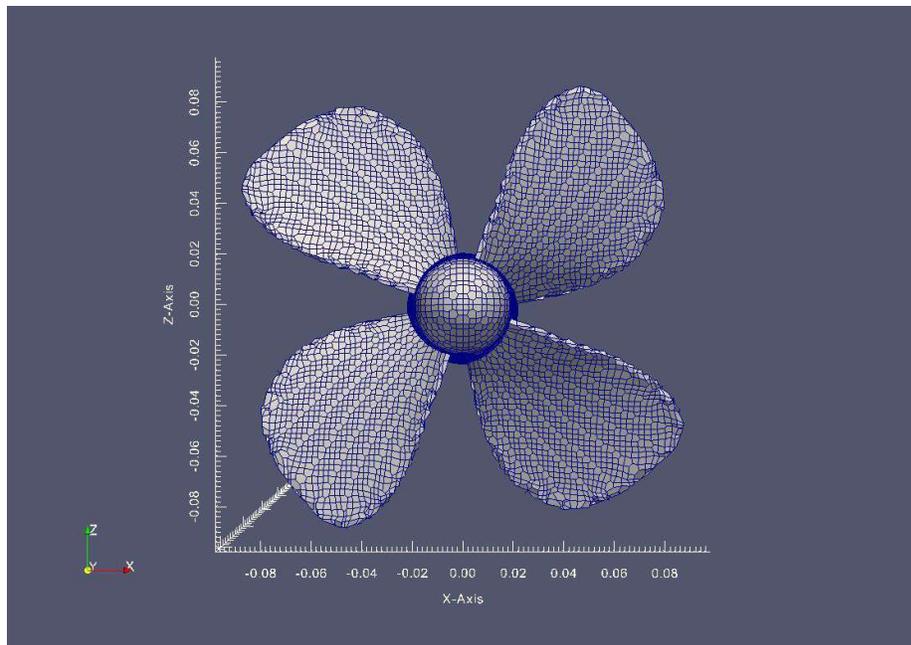


Figura 2.2: Vista frontal del mallado de la propela.

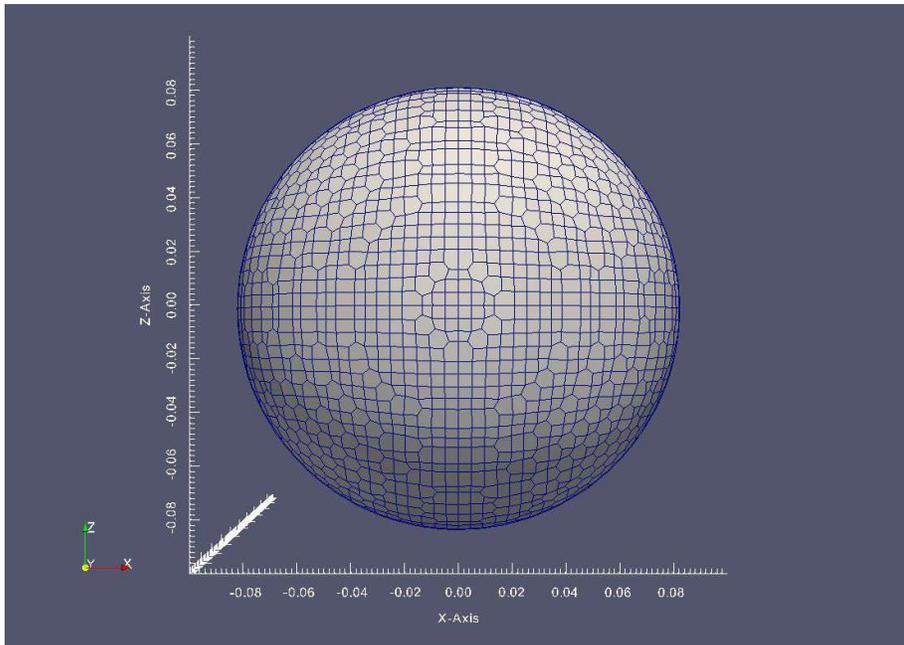


Figura 2.3: Mallado de la esfera visto desde el plano xz .

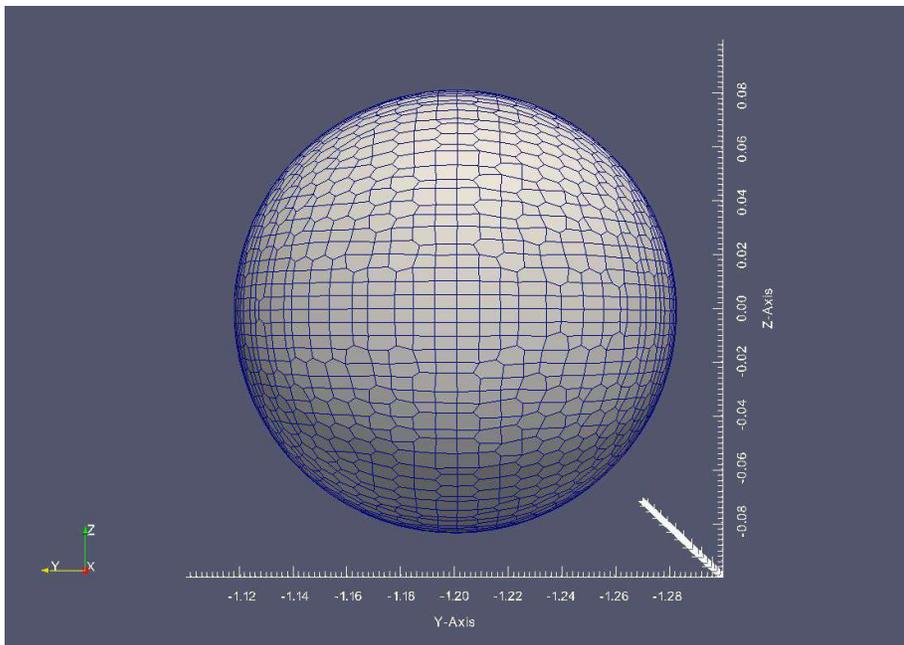


Figura 2.4: Mallado de la esfera visto desde el plano yz .

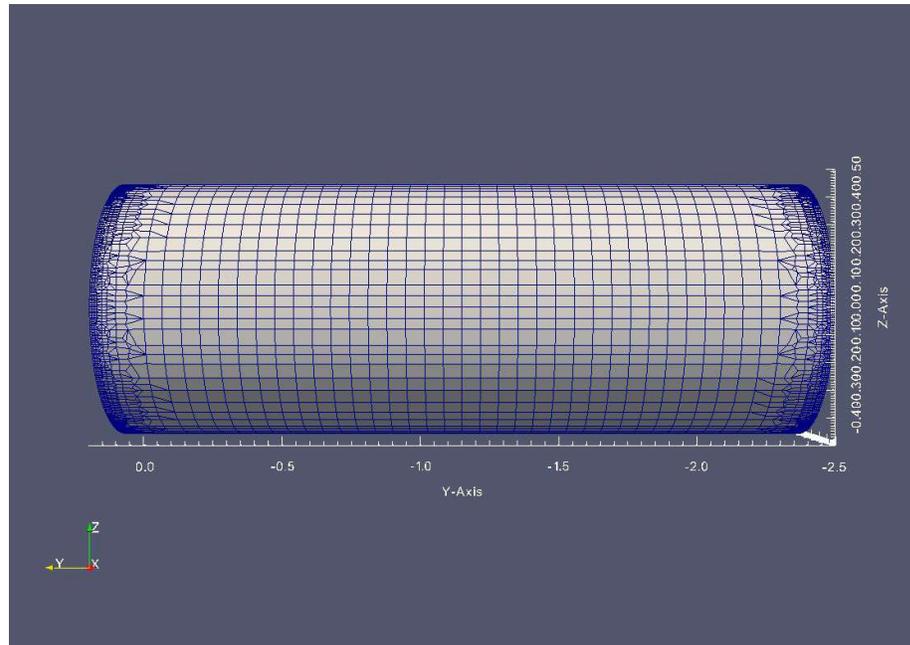


Figura 2.5: Mallado del dominio computacional visto por el plano yz .

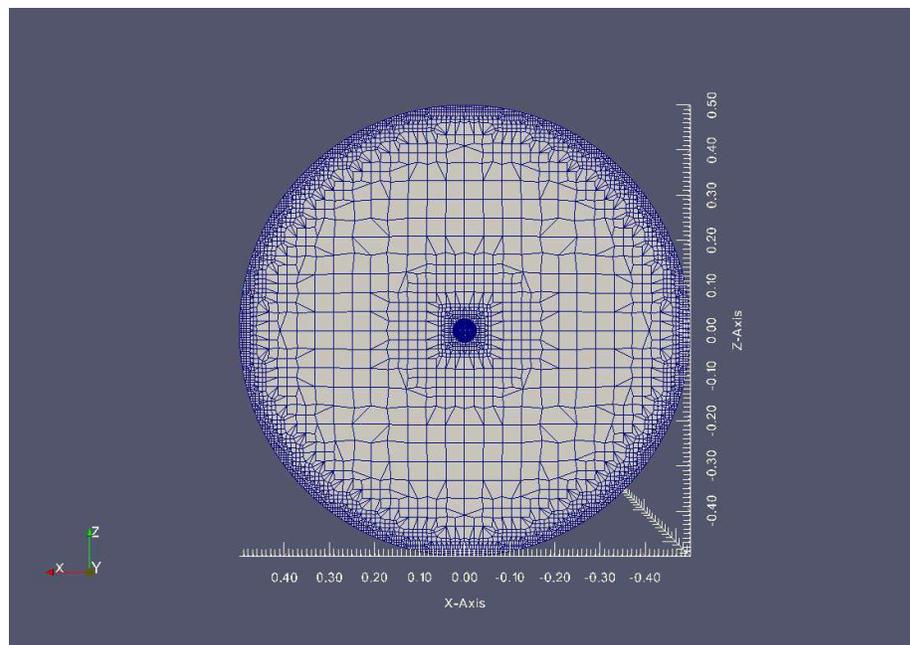


Figura 2.6: Mallado del dominio computacional visto desde el plano xz .

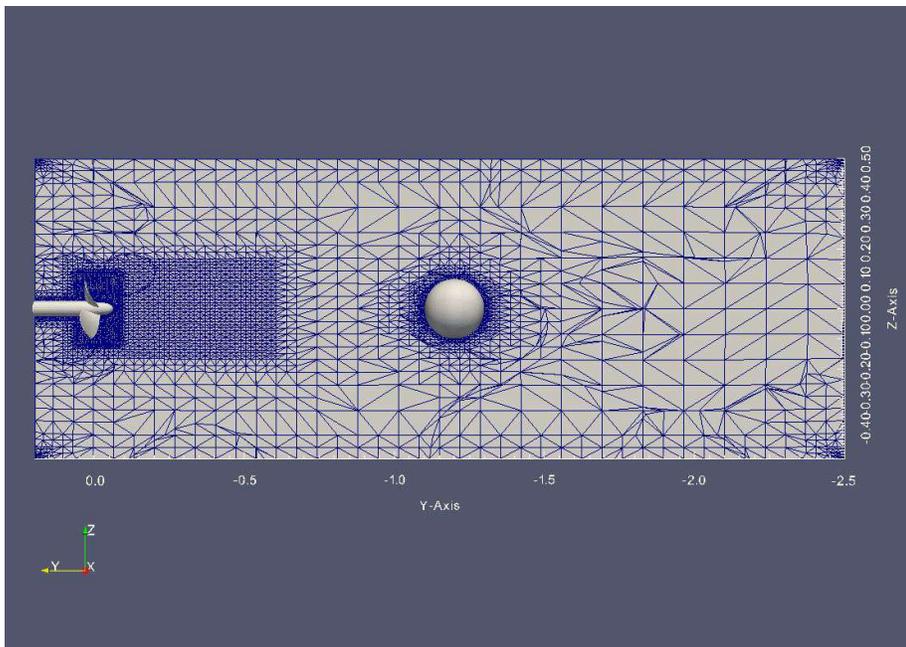


Figura 2.7: Mallado del modelo físico completo.

Capítulo 3

Modelo matemático.

Para el desarrollo matemático de este trabajo de tesis se tomarán como ecuaciones de gobierno las ecuaciones de conservación de masa y momentum, es decir, las ecuaciones de Navier-Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones serán usadas para flujo incompresible con propiedades físicas constantes. Para estado transitorio, y tomando en cuenta que se usará una malla móvil, se usará el *solverpimpleDyMFoam*, el cual nos resuelve dichas ecuaciones de Navier-Stokes a través de iteraciones con pasos de tiempo, lo cual permite el uso de relajación que nos mejora la estabilidad y permite mayores pasos de tiempo.

3.1. Ecuación de continuidad.

En esta ecuación de conservación de masa se contempla que la velocidad y la densidad son funciones continuas, y está dada por la siguiente expresión:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

siendo \mathbf{u} el vector velocidad.

Desarrollando la ecuación anterior para un caso tridimensional, se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

donde x denota las direcciones espaciales.

3.2. Ecuación de cantidad de movimiento.

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento está expresada como:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.1)$$

3.3. Condiciones de frontera.

Las condiciones de frontera se presentan en la Tabla (3.1).

Frontera	p [m ² /s ²]	U [m/s]
Inlet	zeroGradient	Uniform (0 -0.003508 0)
Outlet	internalField	inletOutlet
Walls	wallFunction	noSlip
Propeller	wallFunction	movingWallVelocity
Sphere	wallFunction	noSlip
AMI1	cyclicAMI	cyclicAMI
AMI2	cyclicAMI	cyclicAMI

Tabla 3.1: Condiciones de Frontera Fijas Usadas en las Simulaciones

Capítulo 4

Modelo numérico.

4.1. Dinámica de Fluidos Computacionales y OpenFOAM

Gracias a la Dinámica de los Fluidos Computacionales, mejor conocido por sus siglas en inglés como CFD (*Computational Fluid Dynamics*) existe la posibilidad de simular campos de flujo a través de la solución de ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía. Esto se lleva a cabo con el uso de distintos métodos numéricos, y nos permite modelar, analizar y resolver una gran variedad de problemas disminuyendo los tiempos y costos que se generan al llevar a cabo pruebas experimentales. En la industria y en la investigación se han usado distintos programas para CFD como lo son los programas comerciales STAR-CCM+ ó ANSYS en la simulación y resolución de problemas relacionados con las hélices marinas debido a su rápido desarrollo en su capacidad computacional, su interfaz gráfica y su mallado avanzado. Sin embargo, estos programas tienen un alto costo de licencia que, a la larga, podría ser una limitante viéndolo del lado económico.

No obstante, se puede usar otro programa como alternativa, el cual es el programa de uso libre y de código abierto, OpenFOAM (del inglés Open Field Operation and Manipulation). OpenFOAM está construido a base de código C++ y al ser de código abierto, es ampliamente usado en la industria, así como para fines educativos, en la resolución de problemas que involucren reacciones químicas, turbulencia, transferencia de calor, acústica, mecánica de sólidos y electromagnética. A su vez, puede trabajar con mallas dinámicas, lo que nos permite generar una malla rotatoria que simulará el movimiento de la hélice.

4.2. Algoritmo en OpenFOAM (PIMPLE)

Los algoritmos en OpenFOAM resuelven las ecuaciones de dinámica de fluidos. Estos algoritmos son procedimientos iterativos que acoplan las ecuaciones de

conservación de masa y momentum. Para nuestro caso de estudio se usó el solucionador PIMPLE (combinación de PISO y SIMPLE), usado para problemas transitorios.

El solver pimple tiene una implementación llamada *pimpleDyMFoam* el cual nos permite trabajar con mallas dinámicas, por lo que se usará este solver para el movimiento rotatorio de la hélice marina de este trabajo de tesis.

Dentro de cada paso de tiempo en la solución, ambos algoritmos resuelven una ecuación de presión, para imponer la conservación de la masa, con una corrección explícita de la velocidad para satisfacer la conservación del momento. Si bien todos los algoritmos resuelven las mismas ecuaciones de gobierno, aunque en diferentes formas, los algoritmos difieren principalmente en el bucle en que recorren las ecuaciones. El bucle está controlado por los parámetros de entrada que se enumeran a continuación:

- *nCorrectors*: establece el número de veces que el algoritmo resuelve la ecuación de presión y el corrector de momento en cada paso; normalmente se establece en 2 o 3.
- *nNonOrthogonalCorrectors*: especifica soluciones repetidas de la ecuación de presión, utilizadas para actualizar la corrección explícita no ortogonal del término laplaciano $\nabla \cdot ((1/A)\nabla p)$. Se le asigna 0 para un estado estacionario, por lo que para este caso será de 1.
- *nOuterCorrectors*: permite hacer un bucle en todo el sistema de ecuaciones dentro de cada paso de tiempo, lo que representa el número total de veces que se resuelve el sistema.

4.3. Modelo de Turbulencia

OpenFOAM trabaja con las ecuaciones promediadas de Reynolds, usando los modelos de dos ecuaciones de cierre, configurado en el archivo "*turbulenceProperties*" del directorio "*constant*". Para nuestro caso de estudio se usó el modelo de turbulencia *Laminar*, como se muestra en la Fig. (4.1).

4.4. Malla Móvil

Las velocidades angulares (226.19 [rad/s]) se configuran en el archivo "*dynamicMeshDict*" del directorio "*constant*". Una imagen de este archivo se puede observar en la Fig. (4.2) en donde se indica la velocidad angular, seguida de la palabra *.°megaz* en unidades de radianes sobre segundo. Para este archivo, la velocidad angular se fijó a 1500 RPM. Además, se especifica la región de la malla que va a rotar, especificando el origen y el eje de rotación, siendo esta la región que encierra el cilindro interno con la Interfaz de Malla Arbitraria (AMI), la cual está basada en un algoritmo que permite la simulación en dominios de mallas desconectadas, pero adyacentes. Los dominios pueden ser estacionarios

```

1 /*-----* C++ *-----*/
2 |=====|
3 | \\ \\ \\ | F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4 | \\ \\ \\ | O p e r a t i o n | Version: 4.0
5 | \\ \\ \\ | A n d | Web: www.OpenFOAM.org
6 | \\ \\ \\ | M a n i p u l a t i o n |
7 /*-----*/
8 FoamFile
9 {
10     version      2.0;
11     format        ascii;
12     class         dictionary;
13     location      "constant";
14     object        turbulenceProperties;
15 }
16 // ***** //
17
18 simulationType    laminar;
19
20 // ***** //

```

Figura 4.1: Imágen del archivo *turbulenceProperties*

o moverse entre sí. Está disponible para interfaces deslizantes, para maquinaria rotativa, para simulaciones de acoplamiento entre regiones de malla separadas, etc.

4.5. Propiedades del Fluido

PimpleFoam, al ser un solucionador para flujo incompresible, solo se le especificó la viscosidad cinemática del fluido, el cual fue de 1.002×10^{-6} . Esto se configura en el archivo *transportProperties* del directorio *constant*. Este archivo se puede ver en la Fig. (4.3).

4.6. Procesamiento de la Simulación de la Hélice Marina

Los archivos encargados de configurar el procesamiento numérico son *controlDict*, *fvSchemes* y *fvSolution*, ubicados en el directorio *system*. En estos se especifica el tipo de solucionador, tiempo inicial-final, paso de las simulaciones y parámetros para solución de ecuaciones gobernantes.

```

/*-----* C++ -*-----*/
|=====|
| \\ \\ / | F i e l d | | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
| \\ \\ / | O p e r a t i o n | | Version: 4.0
| \\ \\ / | A n d | | Web: www.OpenFOAM.org
| \\ \\ / | M a n i p u l a t i o n | |
|-----*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       dynamicMeshDict;
}
// *****

dynamicFvMesh    solidBodyMotionFvMesh;

motionSolverLibs ( "libfvMotionSolvers.so" );

solidBodyMotionFvMeshCoeffs
{
    cellZone      innerCylinderSmall;

    solidBodyMotionFunction    rotatingMotion;
    rotatingMotionCoeffs
    {
        origin      (0 0 0);
        axis        (0 1 0);
        omega       157.08; // rad/s
    }
}

// *****

```

Figura 4.2: Archivo *dynamicMeshDict* para una velocidad angular de 1500 RPM.


```

/*-----* C++ -*-----*/
|=====|
|  \ \ /  /  F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
|  \ \ /  /  O peration  | Version: 4.0
|  \ \ /  /  A nd        | Web: www.OpenFOAM.org
|  \ \ /  /  M anipulation|
|-----|
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       controlDict;
}
// *****

application    pimpleDyMFoam;

startFrom      latestTime;

startTime      0;

stopAt         endTime;

endTime        6;

deltaT         1e-5;
writeControl   adjustableRunTime;
writeInterval  1;

////- For testing with moveDynamicMesh
//deltaT       0.01;
//writeControl timeStep;
//writeInterval 1;

purgeWrite     0;

writeFormat    binary;

writePrecision 6;

writeCompression off;

timeFormat     general;

timePrecision  6;

runtimeModifiable true;

adjustTimeStep yes;

```

Figura 4.4: Imagen del archivo *controlDict* usado en las simulaciones de este trabajo de investigación.

4.6. PROCESAMIENTO DE LA SIMULACIÓN DE LA HÉLICE MARINA53

```

  \ \ / F i e l d           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
  \ \ / O p e r a t i o n   | Version: 4.0
  \ \ / A n d                | Web: www.OpenFOAM.org
  \ \ / M a n i p u l a t i o n |
  *-----*
FoamFile
{
  version      2.0;
  format       ascii;
  class        dictionary;
  location     "system";
  object       fvSchemes;
}
// *****

ddtSchemes
{
  default      Euler;
}

gradSchemes
{
  default      Gauss linear;
  grad(p)      Gauss linear;
  grad(U)      cellLimited Gauss linear 1;
}

divSchemes
{
  default      none;
  // div(phi,U) Gauss upwind;
  div(phi,U)   Gauss linearUpwind grad(U);
  div(phi,k)   Gauss upwind;
  div(phi,epsilon) Gauss upwind;
  div((nuEff*dev2(T(grad(U)))) Gauss linear;
}

laplacianSchemes
{
  default      Gauss linear limited corrected 0.33;
}

interpolationSchemes
{
  default      linear;
}

snGradSchemes
{
  default      limited corrected 0.33;
}

```

Figura 4.5: Archivo *fvSchemes*.

```

solvers
{
  pcorr
  {
    solver          GAMG;
    tolerance       1e-2;
    relTol          0;
    smoother        DICGaussSeidel;
    cacheAgglomeration no;
    maxIter        50;
  }

  p
  {
    $pcorr;
    tolerance       1e-5;
    relTol          0.01;
  }

  pFinal
  {
    $p;
    tolerance       1e-6;
    relTol          0;
  }

  "(U|k|epsilon)"
  {
    solver          smoothSolver;
    smoother        symGaussSeidel;
    tolerance       1e-6;
    relTol          0.1;
  }

  "(U|k|epsilon)Final"
  {
    solver          smoothSolver;
    smoother        symGaussSeidel;
    tolerance       1e-6;
    relTol          0;
  }
}

PIMPLE
{
  correctPhi       no;
  nOuterCorrectors 2;
  nCorrectors      1;
  nNonOrthogonalCorrectors 0;
}

```

Figura 4.6: Archivo *foSolution*.

Capítulo 5

Validación del modelo numérico.

En este capítulo se presentan una serie de validaciones que se llevaron a cabo en tres diferentes casos para verificar que los resultados obtenidos por este programa de computo son satisfactorios. Se presenta el estudio de la capa límite llevando a cabo la simulación y análisis con OpenFOAM, comparado con la solución semianalítica de Blasius. En el segundo caso se presenta una simulación de flujo sobre esferas a bajos números de Reynolds, comparando los resultados obtenidos con OpenFOAM con una investigación experimental. Por último se presenta un tercer caso en donde se hace una prueba con mallas móviles rotatorias y se verifica que dichas mallas no perturban el flujo sobre una esfera.

5.1. Flujo Laminar sobre una Placa Plana Comparada con la Solución Semianalítica de Blasius.

En esta sección se presenta el comportamiento de la capa límite. El espesor de la capa límite se define como la distancia desde la superficie sólida, y en la dirección normal a la superficie, en donde la velocidad del fluido (u_1) ó la temperatura del fluido (T) en el interior de la capa límite alcanza el 99% de la velocidad U_∞ ó de la temperatura T_∞ de la corriente libre. Este análisis se llevará a cabo para la capa límite dinámica (δ) y térmica (δ_T) en una placa plana simulados en OpenFOAM.

Como modelo físico se tiene un prisma rectangular con un largo de 250 mm, altura de 100 mm y un ancho de 10 mm, el cual se malló en *BlockMesh*, generador de mallas incluido en OpenFOAM. El mallado computacional se muestra en las Figuras (5.1) y (5.2). Es del orden de 100000 celdas numéricas y tiene un mayor refinado en la zona de la placa. El flujo se incorpora del lado izquierdo y

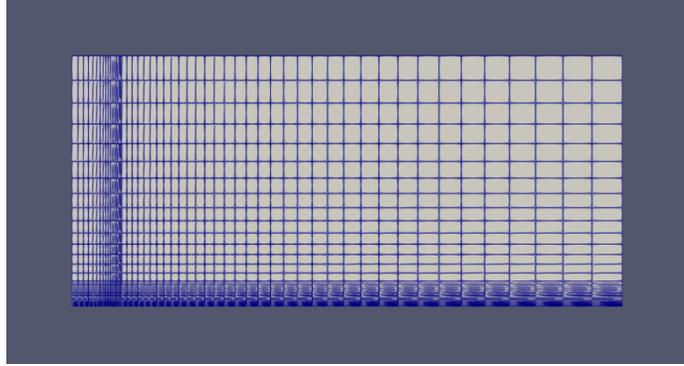


Figura 5.1: Parte lateral del Dominio Computacional.

sale del lado derecho, en dirección al eje x . Primero, la malla tendrá una pequeña sección de flujo de entrada. La placa plana está ubicada en la cara inferior del prisma y comienza en $x = 0$ para facilitar el análisis posterior.

El *solver* utilizado en esta validación fue *icoHeatFoam*, una versión que se modificó de *icoFoam*, el cual además de resolver las ecuaciones de Navier Stokes para un fluido incompresible en régimen laminar, nos resuelve la parte de transferencia de calor resolviendo la ecuación del calor en derivadas parciales. A esta placa se le asignó una condición de frontera de no deslizamiento (No Slip) y una temperatura constante de 275 K . Como condiciones de entrada, se le suministró una corriente libre de agua con $Pr = 7$ y $\nu = 1.002 \times 10^{-6}$ a $0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, y con una temperatura de 350 K . Finalmente, como condiciones de salida se le asignó la condición de gradiente cero (*zeroGradient*) tanto para la velocidad como para la temperatura. Al hacer pasar el flujo de agua sobre la placa, se analizará su espesor de capa límite dinámica y térmica con el fin de comparar los resultados obtenidos mediante OpenFOAM con los obtenidos semianálíticamente mediante la solución de Blasius. Los datos de la solución de Blasius se obtuvieron mediante un programa desarrollado en *fortran*, y facilitado por el Dr. Rubén Ávila.

5.1.1. Simulación de la Capa Límite Dinámica

La solución de Blasius se obtiene a partir de la Ecuación de Continuidad y de Cantidad de Movimiento. Para un flujo sobre una placa plana, al ser la velocidad $u_1 = U_\infty = \text{cte}$ y $u_3 = 0$ fuera de la capa límite, la presión y la velocidad permanecen constantes sobre toda la placa (dentro y fuera de la capa límite). La ecuación de continuidad se presenta en la Ec. (5.1) mientras que en las Ecs. (5.2) y (5.3) se muestran las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones x_1 y x_2 respectivamente.

Ecuación de Continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (5.1)$$

5.1. FLUJO LAMINAR SOBRE UNA PLACA PLANA COMPARADA CON LA SOLUCIÓN SEMIANALÍTICA DE

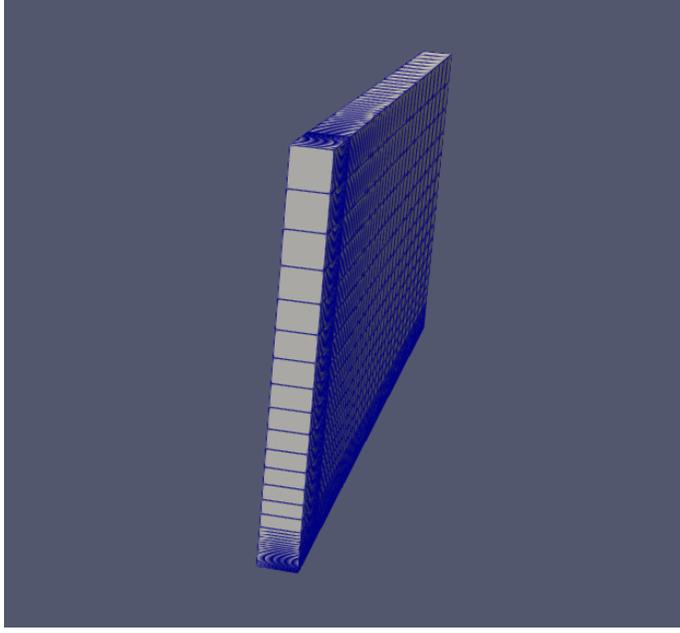


Figura 5.2: Parte frontal del Dominio Computacional.

Ecuación de Cantidad de Movimiento en la dirección x_1 :

$$\rho \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.2)$$

Ecuación de Cantidad de Movimiento en la dirección x_2 :

$$\rho \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \quad (5.3)$$

A partir de la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento se llega a la solución semianalítica de la solución de Blasius mostrada en la Ec.(22). El desarrollo de las ecuaciones se muestra en el apéndice.

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad (5.4)$$

Para su solución Blasius propuso una variable de funcionalidad η la cual definió como:

$$\eta = x_2 \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

Blasius propuso además la definición de la función f'_η que es una función única de η , tal que:

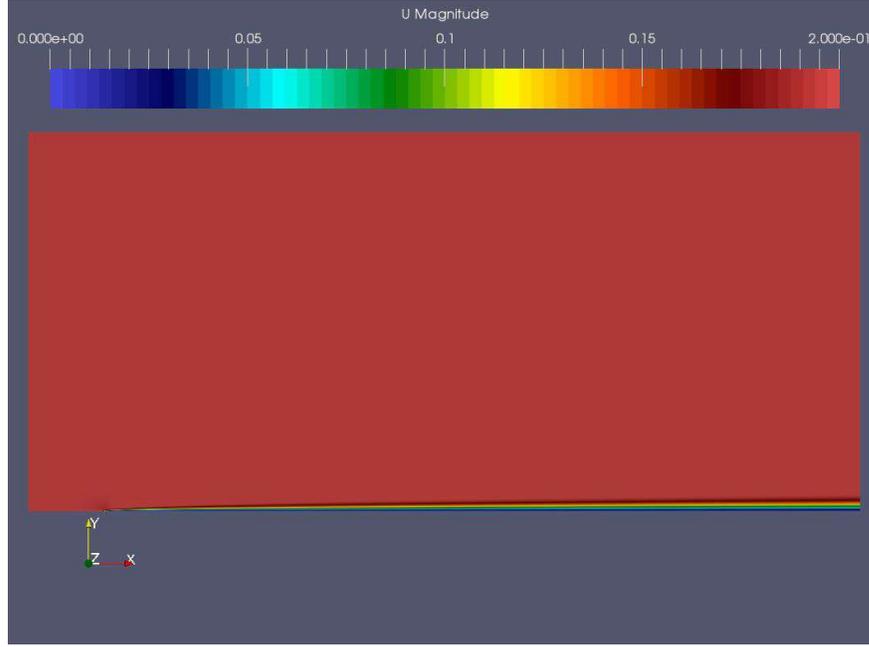


Figura 5.3: Simulación de la Capa Límite Dinámica

$$f'_\eta = \frac{df}{d\eta} = \frac{u1(x1, x2)}{U(x1)} \quad (5.6)$$

La Ec (22) se resuelve numéricamente y su solución se presenta en el Apéndice.

Al llevar a cabo la simulación, se obtuvo el contorno de velocidades que se puede apreciar en la Fig. (5.3). El flujo entra del lado izquierdo y choca con la placa. La placa al no tener velocidad produce la formación de la capa límite. Haciendo un acercamiento a la capa límite dinámica como se muestra en la Fig. (5.4) se puede observar la variación de velocidades marcada en diferentes colores.

Para hacer la comparación de los datos obtenidos con OpenFOAM, primeramente se calculó el número de Reynolds para verificar el régimen del flujo. Si el número de Reynolds es grande, ya sea para flujo laminar o para flujo turbulento, las capas límite son pequeñas. El número de Reynolds se define como:

$$Re_{x1} = \frac{\rho U x_1}{\mu} = \frac{U x_1}{\nu} \quad (5.7)$$

Sustituyendo la ecuación (5.7) con los datos de la simulación se tiene:

$$Re_{x1} = \frac{(0.2 \frac{m}{s})(0.2m)}{1.002 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 39920.15968 \quad (5.8)$$

5.1. FLUJO LAMINAR SOBRE UNA PLACA PLANA COMPARADA CON LA SOLUCIÓN SEMIANALÍTICA DE

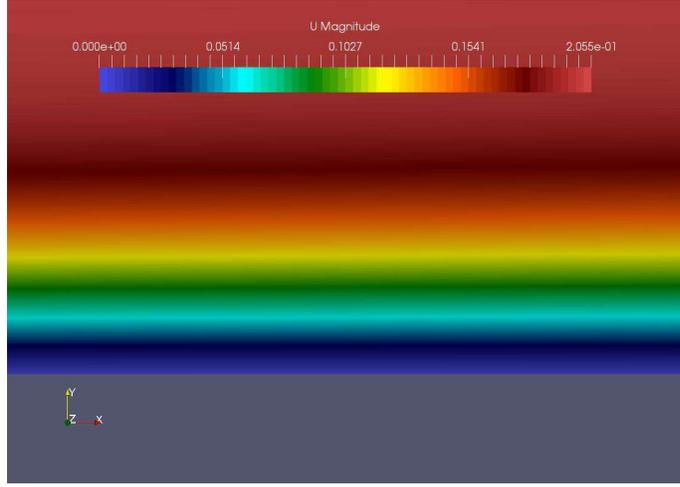


Figura 5.4: Acercamiento a Capa Límite Dinámica

Como $Re_{x1} < 10^6$ se trata de un flujo en régimen laminar. Para un flujo laminar a partir de mediciones se ha determinado que:

$$\frac{\delta_{x1}}{x1} = \frac{5}{Re_{x1}^{\frac{1}{2}}} \quad (5.9)$$

Donde δ es el espesor de la capa límite.

Para obtener los valores de f'_{η} , se utilizó un programa hecho en *Ncargraphics* en el que se tomaron los valores de x_2 y de u_1 en $x_1 = 0.120$ m y se sustituyeron en las ecuaciones (21) y (11), los cuales se graficaron contra los datos obtenidos mediante el programa del Doctor Rubén Ávila como se muestra en las curvas de la Figura (5.5).

En la Figura (5.5), se puede observar que las curvas obtenidas tanto con los datos de OpenFOAM, como con los obtenidos con el programa de la Solución de Blasius, se acoplan perfectamente y son bastante parecidas. La curva de la solución numérica se encuentra marcada con una línea, mientras que la obtenida mediante OpenFOAM se muestra con círculos.

Se prosiguió a obtener las curvas de f'' . Para ello fue necesario obtener los esfuerzos cortantes en el mismo punto $x_1 = 0.12$ m. En coordenadas cartesianas el esfuerzo cortante τ_{12} se escribe como:

$$\tau_{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \quad (5.10)$$

Despejando y derivando la Ec. (11) se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = U f'' \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (5.11)$$

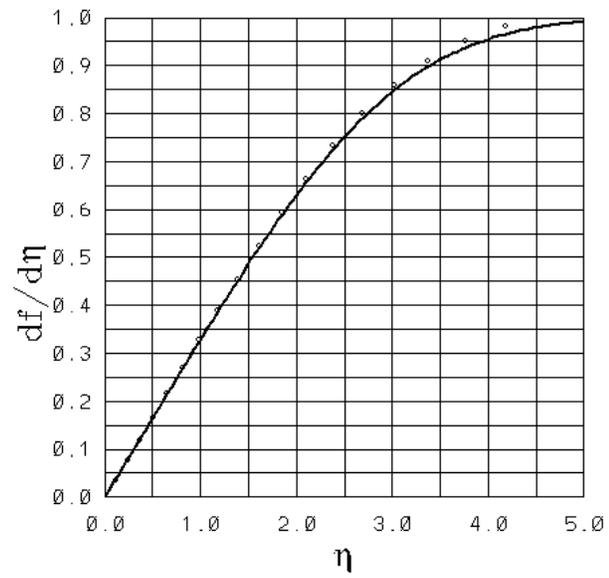


Figura 5.5: Curva de η contra f' de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).

5.1. FLUJO LAMINAR SOBRE UNA PLACA PLANA COMPARADA CON LA SOLUCIÓN SEMIANALÍTICA DE BLASIUS

Derivando la Ec (21) se tiene:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

Usando la Ec. (5.12) en la Ec. (5.11) se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = U f'' \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

Y finalmente usando la Ec. (5.13) en la Ec. (5.10), se tiene:

$$\tau_{12} = \mu U \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} f'' \Big|_{\eta} \quad (5.14)$$

Para evaluar el esfuerzo cortante en la pared τ_w se evalúa la (5.14) en $\eta = 0$. De tablas se tiene que $f''|_{\eta=0} = 0.332$, por lo que:

$$\tau_w = (0.332) \left(0.001 \left[\frac{kg}{ms} \right] \right) \left(0.2 \left[\frac{m}{s} \right] \right) \left(\frac{0.2 \frac{m}{s}}{(1.002 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}) (0.12m)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

$$\tau_w = 0.085 \frac{N}{m^2} \quad (5.16)$$

Con los datos recabados por OpenFOAM se obtuvo un esfuerzo cortante en la pared $\tau_w = 0.09 \text{ N/m}^2$. Comparándolo con el valor de la Ec. (5.16) se obtuvo un porcentaje de error del 5%, lo cual se considera aceptable.

Para obtener las curvas de f'' contra η se usó un programa en *Ncargraphics* en el que, al tener los valores de los esfuerzos cortantes, se despejó la f'' de la Ec. (5.14). Así entonces, f'' queda como:

$$f'' = \frac{\tau_{12}}{\mu U \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.17)$$

Con ello se graficaron dichas variables obtenidas los valores de f'' con sus respectivas η para todos los valores de x_2 en la capa límite. Se graficaron dichas variables obtenidas mediante OpenFOAM junto con la curva obtenida con el programa de la Solución de Blasius, obteniendo las curvas de la Fig. (5.6). Se puede ver que la curva de OpenFOAM y la curva de la solución semianalítica de Blasius se acoplan muy bien, por lo que los valores de f'' obtenidos mediante OpenFOAM son correctos.

Para conocer el espesor de capa límite con los datos de la simulación se ubicó el valor de x_2 para una $x_1 = 0.12 \text{ m}$ en donde la velocidad U alcanzará el 99% de la velocidad $U_{\infty} = 0.2 \frac{m}{s}$, es decir, para $U = 0.198 \frac{m}{s}$. Se encontró en los valores recopilados por OpenFOAM que el espesor de capa límite es de $\delta = 0.003 \text{ m}$.

Con estos resultados se puede ver que las comparaciones de las f' y f'' fueron favorables, y puede concluirse que los cálculos de la capa límite dinámica se efectuaron de manera correcta.

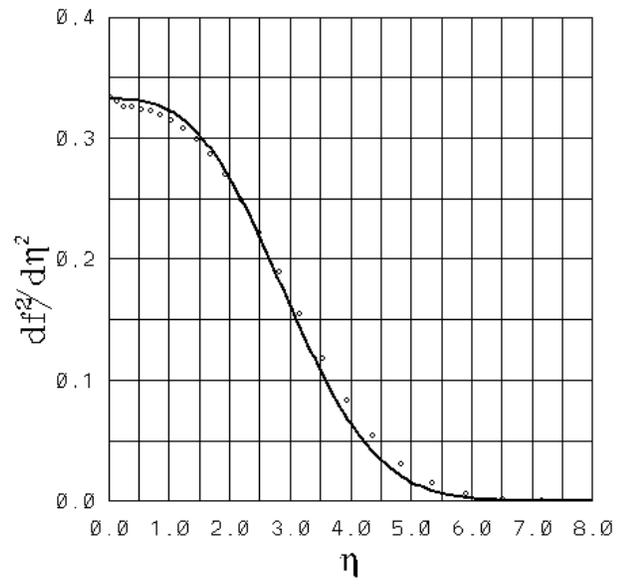


Figura 5.6: Curvas de η contra f'' de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).

5.1. FLUJO LAMINAR SOBRE UNA PLACA PLANA COMPARADA CON LA SOLUCIÓN SEMIANALÍTICA DE

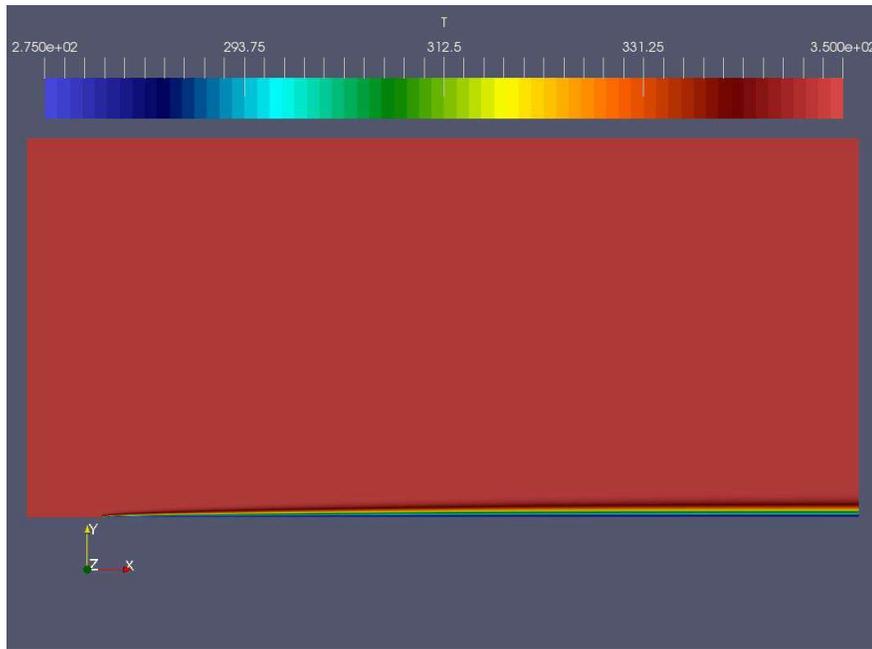


Figura 5.7: Simulación de la Capa Límite Térmica

5.1.2. Simulación de la Capa Límite Térmica

Posteriormente se llevó a cabo el análisis de la capa límite térmica. En este caso la placa tuvo una menor temperatura a la del flujo. El flujo al correr sobre la placa forma la capa límite térmica por la diferencia de temperaturas. Al correr la simulación se vio que el perfil de temperatura para un flujo sobre una placa plana isotérmica, es similar al perfil de velocidad sobre una placa plana. Esto se puede ver en la Fig. (5.3). Al hacer un acercamiento a la capa límite térmica como se puede apreciar en la Fig. (5.8, se puede apreciar la variación de temperaturas que se presenta entre la placa y el flujo, mostrada en diferentes colores.

Al ser similares los perfiles de velocidad y temperatura, la solución para la capa límite térmica deberá ser similar a la solución de la de velocidad. Para la capa térmica, l solución viene a partir de la ecuación de la energía:

$$u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \quad (5.18)$$

En el análisis se define una temperatura adimensional como:

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \quad (5.19)$$

En donde T_∞ es la temperatura en la corriente libre y T_s es la temperatura en la pared de la placa.

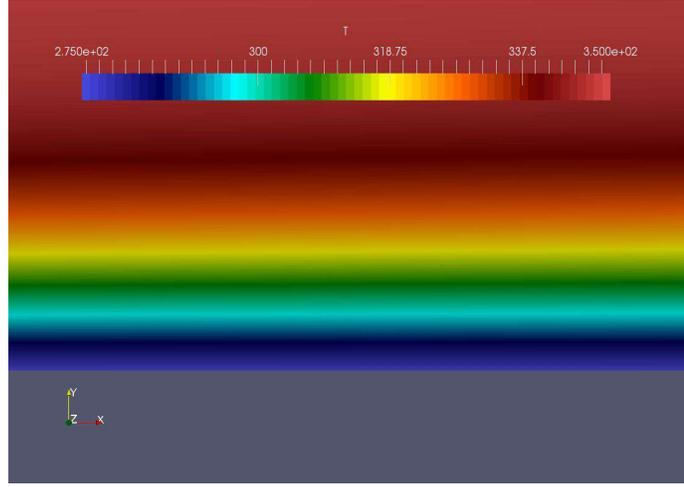


Figura 5.8: Acercamiento a la Capa Límite Térmica

Al ser la solución similar a la de la capa límite dinámica, el espesor de capa límite térmica queda como:

$$\eta_T = x_2 \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

Los datos obtenidos numéricamente a partir de la solución de Blasius se muestran en el apéndice

Se recabaron las temperaturas T en el mismo punto $x_1 = 0.18$ a lo largo del eje x_2 hasta que los valores llegaron a la temperatura $T_\infty = 350 \text{ K}$. En *Ncargraphics* se programaron las ecuaciones (5.20) y (5.29) donde se sustituyeron las x_2 con sus respectivas temperaturas T . Al igual que con la capa límite dinámica, se graficaron los valores de η contra Θ obtenidas en OpenFOAM y se compararon con los valores obtenidos mediante el programa de la solución de Blasius como se muestra en la Fig. (5.9). La curva con círculos corresponde a la de OpenFOAM, mientras que la línea corresponde a la solución de Blasius.

De la ecuación (5.29) se despeja la temperatura T y se obtiene:

$$T = (T_\infty - T_s)\theta + T_s \quad (5.21)$$

Derivando la Ec. (5.21) con respecto a x_2 se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = (T_\infty - T_s) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \quad (5.22)$$

Despejando la derivada de θ con respecto a x_2 se tiene:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\frac{\partial T}{\partial x_2}}{(T_\infty - T_s)} \quad (5.23)$$

5.1. FLUJO LAMINAR SOBRE UNA PLACA PLANA COMPARADA CON LA SOLUCIÓN SEMIANALÍTICA DE

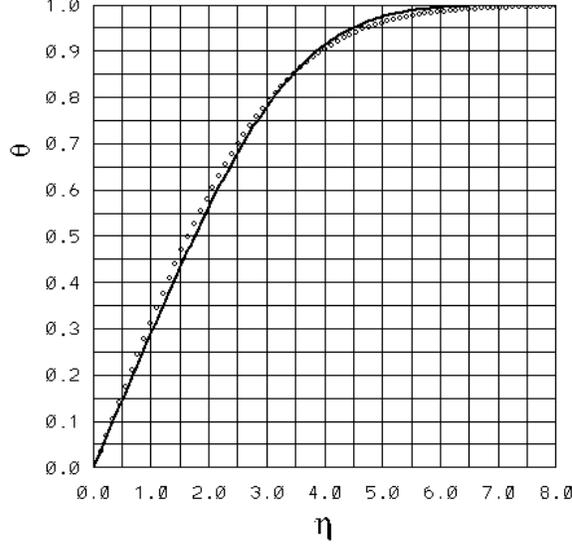


Figura 5.9: Curvas de η contra θ de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).

Se propone además que la temperatura adimensional θ sea una función única de la variable de semejanza η , por lo que se tiene:

$$\theta = \theta(\eta) \quad (5.24)$$

Usando la regla de la cadena es posible escribir:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (5.25)$$

Igualando las Ecs. (5.23) y (5.25) se tiene:

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial x_2}}{(T_\infty - T_s)} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (5.26)$$

Despejando la derivada de θ con respecto a η de la Ec. (5.30) y sustituyendo la variable de semejanza η se tiene:

$$\theta' = \frac{\frac{\partial T}{\partial x_2}}{(T_\infty - T_s) \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{1/2}} \quad (5.27)$$

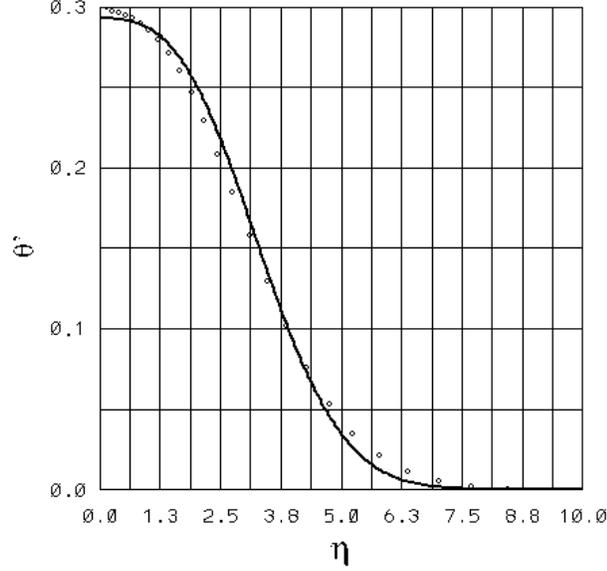


Figura 5.10: Curva de η contra θ' de la solución de Blasius (línea continua) y OpenFOAM (símbolos).

De igual manera se programaron θ' y η con un programa de *Ncargraphics* en donde se sustituyeron las variaciones de temperatura con respecto x_2 obtenidas con OpenFOAM, junto con sus respectivas η en donde se sustituyeron los valores de x_2 . De igual forma se graficaron los valores de la η contra θ' de los datos obtenidos con OpenFOAM junto con los de la solución de Blasius para comparar los resultados. En la Fig. (5.10) se puede visualizar la curva de OpenFoam, la cual fue graficada con círculos, y la de la solución de Blasius con asteriscos.

Así mismo se sustituyó la Ec. (5.20) para conocer el espesor de capa límite térmico. Se localizó de los datos el valor de x_2 para $x_1 = 0.18$ en donde la temperatura T alcanzó el 99% de la temperatura T_∞ , la cual fue de $T = 346.5 K$. Ese valor fue de $x_2 = 0.004444$.

$$\eta_T = 0.004444[m] \left(\frac{0.2[\frac{m}{s}]}{(1.002 \times 10^{-6}[\frac{m^2}{s}]) (0.18[m])} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.67 \quad (5.28)$$

Para conocer el valor de θ en ese punto se sustituyó la Ec. (5.29):

$$\theta = \frac{346.5K - 275K}{350K - 275K} = 0.95 \quad (5.29)$$

Así mismo se sustituyó la ecuación (5.30) para el $x_1 = 0.18$ y $x_2 = 0.004444$.

$$\theta' = \frac{4008[\frac{K}{m}]}{(350K - 275K) \left(\frac{0.2[\frac{m}{s}]}{(1.002 \times 10^{-6}[\frac{m^2}{s}]) (0.18[m])} \right)^{1/2}} = 0.0507 \quad (5.30)$$

En las tablas de la Solución de Blasius se ubicó el valor de $\eta = 4.67$ y se vio que el valor de $\theta = 0.9597$ $\theta' = 0.0503$. Se vio que para la capa límite térmica se tuvieron resultados favorables como en la capa límite dinámica. Así mismo se observó un comportamiento similar entre las curvas de la simulación y la solución de Blasius comprobando que el análisis de la capa límite térmica se llevó a cabo de manera correcta. Al tener resultados favorables al simular y analizar la capa límite dinámica y térmica se concluye que OpenFOAM puede llevar a cabo el análisis de la Capa Límite de Blasius de manera satisfactoria.

5.2. Simulación del flujo sobre una esfera a bajos números de Reynolds.

Para esta validación se utilizó como referencia una investigación experimental titulada "Investigación Experimental de la Estela detrás de una Esfera a Bajos Números de Reynolds" (*Experimental Investigation of the Wake Behind a Sphere at Low Reynolds Number*) de Taneda hecha en el año 1956. En esta investigación se estudiaron las estelas y los vórtices producidos por la interacción fluido-estructura entre una esfera y un flujo de agua a bajos números de Reynolds, y se obtuvieron los siguientes resultados:

- Alrededor de un número de Reynolds de 24, es cuando empiezan a aparecer los vórtices detrás de la esfera.
- El tamaño de la longitud de los vórtices es proporcional al logaritmo natural del número de Reynolds.
- La estela formada detrás de la esfera comienza a oscilar cuando el número de Reynolds alcanza un valor aproximado de 130.

Esta investigación experimental se llevó a cabo en un tanque de vidrio lleno de agua, al cual se le colocó una esfera de acero sujeta a una cuerda de piano. Un diagrama del modelo físico se puede observar en la Fig. (5.11). En el experimento se fueron variando esferas de diferentes diámetros, los cuales fueron de 9.52, 15.08 y 19.82 milímetros. Para observar el patrón del flujo detrás de la esfera se usó el método de iluminación que se usa en los ultramicroscopios, los cuales utilizan la dispersión de la luz, en vez de la reflexión o absorción de la luz. Para ello se hizo pasar una lámina de luz intensa, proveniente de lámparas incandescentes, a través de un plano horizontal que contenía el centro de la esfera. Se pudieron visualizar las líneas de corriente debido a que se usó el método del polvo de aluminio. Los resultados fueron fotografiados con una cámara montada

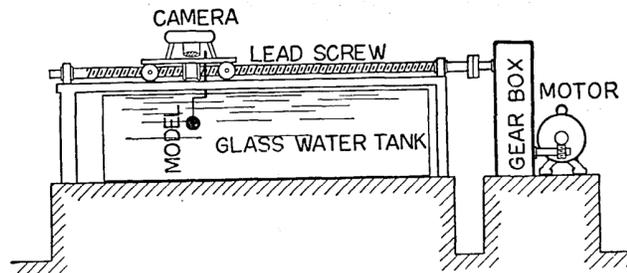


Figura 5.11: Diagrama esquemático del aparato experimental.

en un carro en la parte de arriba del contenedor, la cual capturó las imágenes inmediatamente detrás de la esfera.

Con las fotografías obtenidas durante la investigación se pudo observar que cuando el número de Reynolds se encuentra por debajo de 22, el flujo alrededor de la esfera es completamente laminar y no hay presencia alguna de vorticidad. Sin embargo, cuando el número de Reynolds alcanza un valor aproximado de 24, comienza a aparecer un pequeño anillo de vórtices en las proximidades del punto de estancamiento trasero; y mientras más va aumentando el número de Reynolds, el anillo de vórtices va creciendo en dimensión y se va elongando hacia la dirección del flujo. Igualmente se observó que cuando el número de Reynolds alcanza un valor aproximado de 130, la estela formada detrás de la esfera comienza a oscilar. Se midió el tamaño de los vórtices para cada caso y se graficó el tamaño de los vórtices contra el logaritmo natural del número de Reynolds como se muestra en la Figura 5.12. Se puede observar que para las tres esferas el comportamiento de la curva es lineal, por lo que se pudo comprobar que el tamaño de los vórtices es proporcional al logaritmo natural del número de Reynolds usado en cada caso.

5.2.1. Simulación en OpenFOAM

Para recrear este experimento se llevaron a cabo una serie de simulaciones en las que se introdujo una esfera en una caja y se le hizo pasar un flujo de agua a distintos números de Reynolds. Con ello se pudo ver el efecto de la estela producida detrás de la esfera, así como la aparición de vórtices y el incremento de su tamaño al ir aumentando la velocidad en la entrada.

Primeramente se construyó y se malló la geometría utilizando el generador de mallas de elementos finitos *Gmsh*. El dominio computacional consta de un prisma cuadrangular de 200x200x500 mm, dentro del cual se introdujo una esfera de 38 mm de diámetro, ubicada a 150 mm de la entrada. La salida del dominio se encuentra en la cara opuesta a la entrada, que es la cara más alejada de la esfera. Al tener una distancia larga entre la salida y la esfera, el flujo puede desarrollarse con mayor libertad y se puede apreciar mejor el desarrollo de la

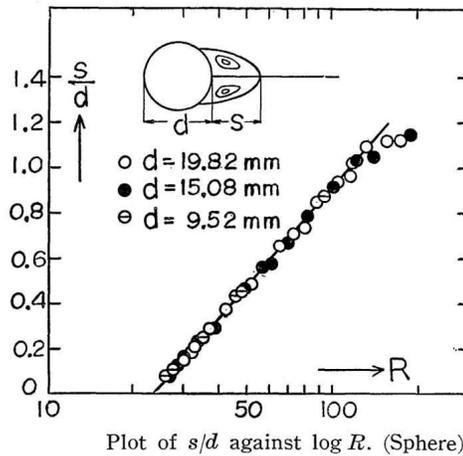


Figura 5.12: Curva de s/d contra el logaritmo natural del número de Reynolds de la prueba experimental (Taneda, 1956)

estela y de los vórtices. El mallado de este modelo físico se puede observar en la Fig. (5.13).

El solucionador de OpenFOAM a utilizar en esta serie de simulaciones fue *SimpleFoam* en régimen laminar. Al tratarse de régimen laminar solamente se tienen las condiciones de frontera de presión (p) y velocidad (U) en la carpeta 0. Las condiciones de frontera que se establecieron para la velocidad fueron de no deslizamiento en las paredes laterales, inferior y superior, así como en la esfera; y en la salida se le asignó una condición de gradiente cero. Estas condiciones de frontera mencionadas anteriormente permanecieron iguales en toda la serie de simulaciones y únicamente se fue variando la condición de frontera de velocidad de entrada.

5.2.2. Visualización y Análisis de los Vórtices Generados Detrás de la Esfera

Las simulaciones se hicieron con los números de Reynolds siguientes: 17.9, 26.8, 37.7, 73.6, 118 y 133. Finalizadas las simulaciones, se observó cada perfil de velocidad en *Paraview* usando la visualización de Convolución Integral de Línea ó *SurfaceLIC* (de sus siglas en inglés *Line Integral Convolution*), el cual nos ayuda a visualizar el movimiento de un fluido en un campo vectorial. Se compararon los perfiles obtenidos mediante las simulaciones y se compararon con los de la investigación experimental de Sadatoshi Taneda, como se puede ver en la Fig. 5.14 y en la Fig. 5.15.

Con la visualización de los campos de velocidad se notó que cuando el número de Reynolds se encuentra en un rango de $0 \leq Re \leq 20$, el flujo permanece unido a la esfera y no hay una aparente zona de recirculación. Los vórtices comienzan

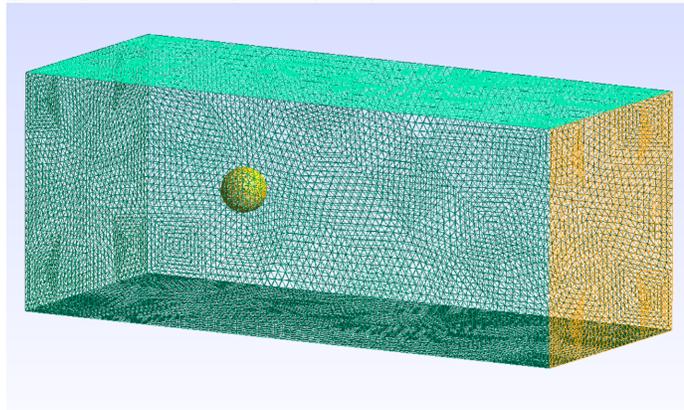


Figura 5.13: Malla computacional de la simulación del flujo sobre una esfera a bajos números de Reynolds.

a aparecer en $Re \approx 24$. En un rango de $20 \leq Re \leq 210$, la estela se vuelve más ancha y más larga y su punto de unión a la esfera avanza a medida que aumenta el valor del número de Reynolds. Según (Yen, 2017), el ángulo de separación de la estela, que comienza en 180° en $Re = 20$, disminuye al aumentar el número de Reynolds hasta un valor de aproximadamente 120° en $Re = 130$.

Tras obtener las visualizaciones se pudo notar, al observar los perfiles de velocidad a diferentes números de Reynolds, que se obtuvieron imágenes similares con respecto al experimento original de Sadatoshi Taneda como se puede apreciar en las figuras 5.14 y 5.15. En estas imágenes se puede apreciar cómo van apareciendo los vórtices y cómo van aumentando de tamaño según va aumentando el número de Reynolds.

Desde el punto de vista de la interacción flujo-estructura, es interesante comprender cómo se comporta la estela detrás de la esfera cuando se expone al paso de un flujo. Cabe mencionar que un rasgo característico de la generación de vórtices desde una esfera con números de Reynolds bajos implica la formación de un bucle de vórtice por ciclo de generación y, por lo tanto, no existe un componente armónico significativo. Por el contrario a como se da en la formación de vórtices procedentes de cilindros, en donde en cada ciclo de formación existe la formación de dos vórtices que giran en sentido contrario. Como resultado de esto, la sustentación oscila a la frecuencia de desprendimiento mientras que la resistencia oscila al doble de la frecuencia de desprendimiento (Mittal y Najjar, 1999). Así, la estela del cilindro exhibe un fuerte componente armónico que da origen a lo que conocemos como calle de vórtices de Von Kármán, que no se da en esferas.

Pasando a la parte analítica, mediante *Paraview* se obtuvieron las longitudes de los vórtices y se recopilaron los datos de la Tabla 5.1. En esta tabla de valores se incluyeron las longitudes de las estelas (s) y la relación que tuvo esta longitud con el diámetro de la esfera (s/d) para cada número de Reynolds y su respectivo

5.2. SIMULACIÓN DEL FLUJO SOBRE UNA ESFERA A BAJOS NÚMEROS DE REYNOLDS.71

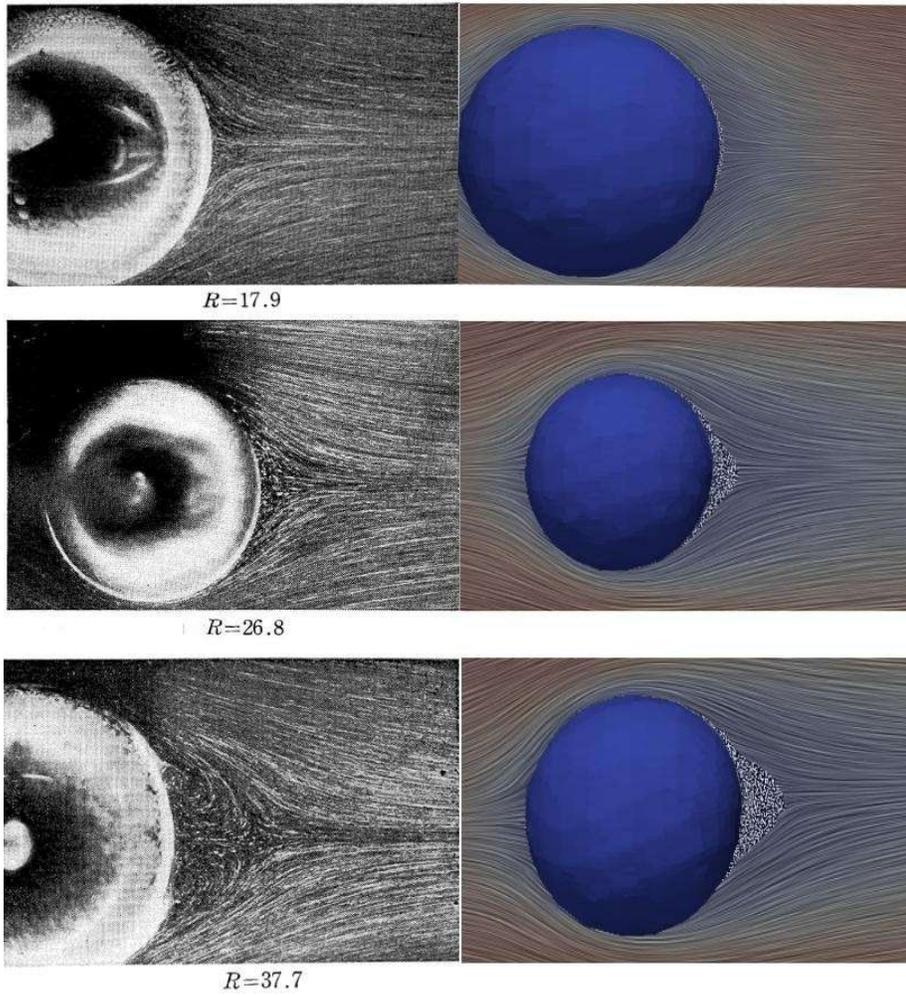


Figura 5.14: Investigación de Sadatoshi contra las simulaciones en OpenFOAM con los números de Reynolds 17.9, 26.8 y 37.7.

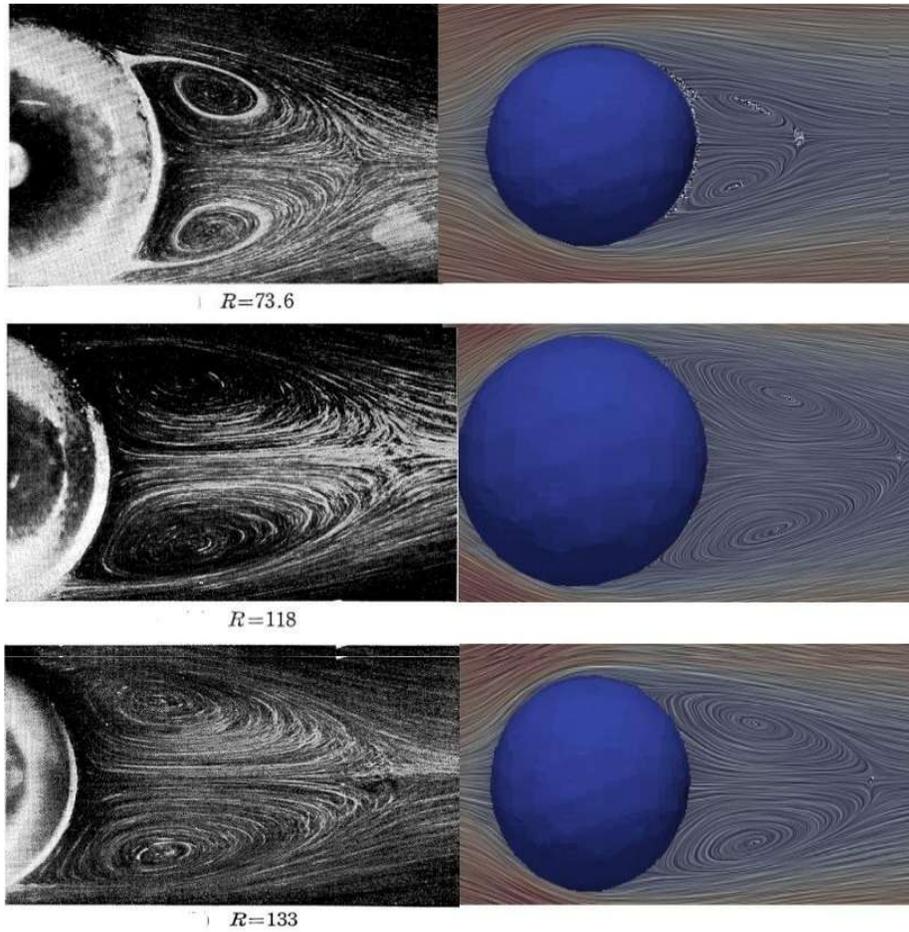


Figura 5.15: Investigación de Sadatoshi contra las simulaciones en OpenFOAM con los números de Reynolds 73.6, 118 y 133.

5.2. SIMULACIÓN DEL FLUJO SOBRE UNA ESFERA A BAJOS NÚMEROS DE REYNOLDS.73

Prueba	Re	d	s	ln(Re)	s/d
1	17.9	0.038	0	2.8848	0
2	26.8	0.038	0.007	3.2884	0.1842
3	37.7	0.038	0.012	3.6297	0.3158
4	73.6	0.038	0.025	4.2986	0.6579
5	118.0	0.038	0.034	4.7707	0.8947
6	133.0	0.038	0.037	4.8903	0.9737

Tabla 5.1: Tabla de Datos obtenida de la simulación de OpenFOAM

logaritmo natural ($\ln(\text{Re})$). Con estos datos se obtuvo la curva de la Figura 5.16.

En la Fig (5.16) se puede ver que efectivamente la relación entre la longitud de los vórtices y el logaritmo natural del número de Reynolds es proporcional al ver un comportamiento lineal en la gráfica. Comparados con los resultados numéricos se puede apreciar que ambas curvas resultan muy similares, comprobando que se tiene un comportamiento lineal entre la distancia de los vórtices y el logaritmo natural del número de Reynolds.

5.2.3. Coeficientes de Arrastre en la Esfera.

Finalmente se obtuvieron, mediante OpenFOAM, los coeficientes de arrastre de las simulaciones y se compararon con los obtenidos de manera teórica usando los mismos datos. Estos coeficientes se obtuvieron a partir del vector esfuerzo asociado a η , obtenido a partir del tensor de los esfuerzos y las normales en cada punto de la esfera como se puede observar en la Fig (5.17). A su vez, el vector esfuerzo se obtuvo a partir del tensor de los esfuerzos utilizando los gradientes de velocidades extraídos de la simulación en cada punto de la esfera.

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (5.31)$$

Después se le restó la presión y se multiplicó por su correspondiente vector normal. Así entonces, el vector esfuerzo se determinó como:

$$\vec{t}^{\eta} = \begin{bmatrix} (-p + \tau_{11})\eta_1 + \tau_{12}\eta_2 + \tau_{13}\eta_3 \\ \tau_{21}\eta_1 + (-p + \tau_{22})\eta_2 + \tau_{23}\eta_3 \\ \tau_{31}\eta_1 + \tau_{32}\eta_2 + (-p + \tau_{33})\eta_3 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Para nuestro caso de estudio, que es la fuerza y coeficiente de arrastre, se utilizó únicamente la tercera componente, ya que esta dirección es en la que se dirige el flujo en esta simulación. La tercera componente del vector esfuerzo, al tener unidades de presión ($\frac{N}{m^2}$), se multiplicó por el área transversal de la esfera

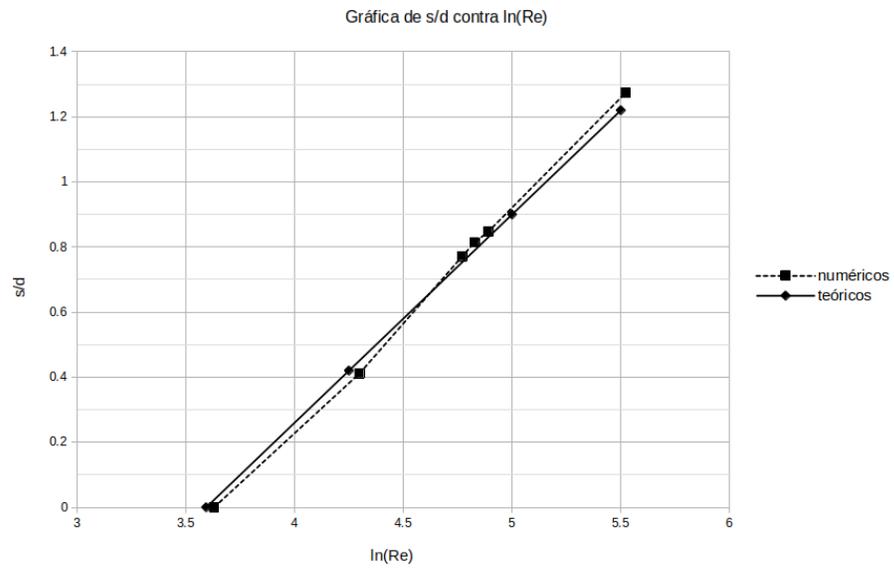


Figura 5.16: Curvas de resultados teóricos de Sadatoshi Taneda contra los resultados numéricos obtenidos mediante OpenFOAM.

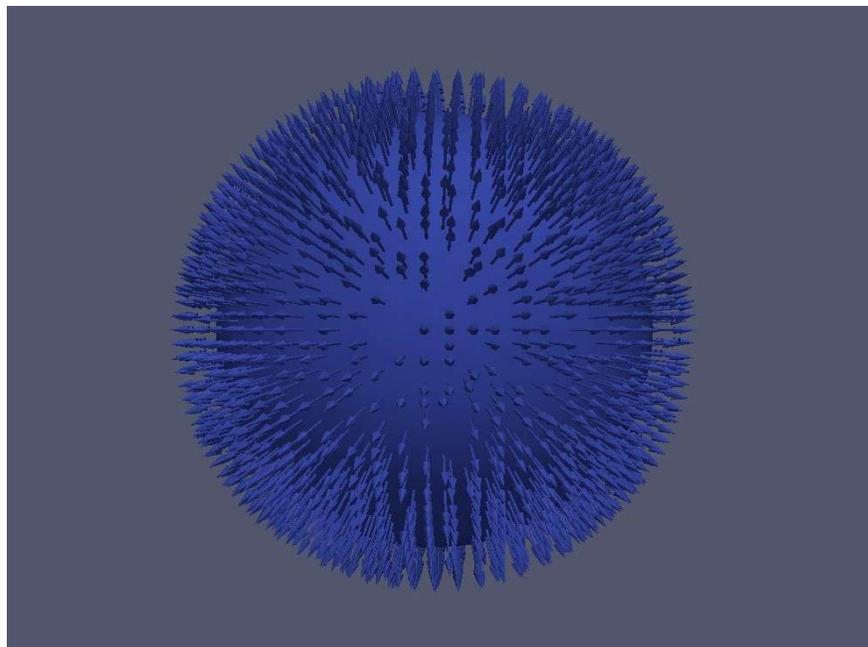


Figura 5.17: Normales en cada punto de la esfera.

5.2. SIMULACIÓN DEL FLUJO SOBRE UNA ESFERA A BAJOS NÚMEROS DE REYNOLDS.75

para obtener la fuerza de arrastre (N). El coeficiente de arrastre se obtuvo a partir de la Ec (5.33).

$$CD = \frac{t_3}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (5.33)$$

Los resultados se compararon con la Ec (6.2) de Schiller and Naumann (1933) para obtener un coeficiente de arrastre a números de Reynolds debajo de 800.

$$CD = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687}) \quad (5.34)$$

La comparación se puede apreciar en las tablas (5.2) y (5.3).

U [m/s]	Re	FD Teo [N]	CD Teo
9.9430E-04	3.7708E+01	1.0048E-06	1.7923E+00
1.9410E-03	7.3611E+01	2.6993E-06	1.2635E+00
3.5080E-03	1.3304E+02	6.6944E-06	9.5933E-01

Tabla 5.2: Tabla de resultados teóricos de las fuerzas y coeficientes de arrastre.

Re	tw [N/m ²]	FD Num [N]	CD Num	Error Num [%]
37.7079840319361	5.0988E-04	5.7826E-07	1.8858E+00	0.0522
73.6107784431138	2.5575E-03	2.9005E-06	1.3577E+00	0.0745
133.037924151697	1.1603E-02	1.3160E-05	1.0315E+00	0.0752

Tabla 5.3: Tabla de resultados experimentales de las fuerzas y coeficientes de arrastre.

Con estos coeficientes de arrastre obtenidos tanto de manera teórica como experimental se obtuvieron las curvas de la Fig (5.18), en las que se obtuvieron coeficientes de arrastre similares y por ende, se concluye que los resultados son favorables.

Con los resultados descritos anteriormente se puede afirmar que los resultados obtenidos en esta serie de simulaciones con OpenFOAM son satisfactorios, y al ser favorables se concluye que OpenFOAM puede llevar a cabo simulaciones sobre flujos sobre esferas de manera correcta.

En esta validación se puso a prueba el funcionamiento de la malla móvil que envolverá a la propela haciendo que esta gire e impulse el flujo impuesto hacia la esfera. Lo que se pretende es verificar que la malla móvil no interfiera ni perturbe el flujo que se le hace pasar. Para esta simulación se usó el mismo

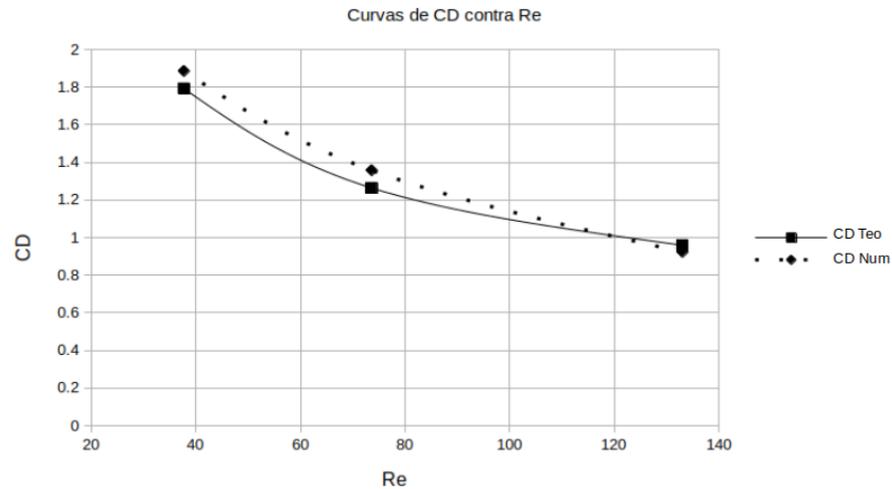


Figura 5.18: Curvas del CD contra Re de las Simulaciones de Flujos sobre una Esfera a Diferentes Números de Reynolds.

dominio computacional explicado en el apartado del Modelo Físico, pero se quitó a la hélice de este. En una primera validación se llevó a cabo la prueba sin esfera y en una segunda, agregando la esfera.

5.3. Validación de la Malla Móvil sin Esfera

Primero se le hizo pasar un flujo a la malla móvil sin esfera para verificar que no hay alteraciones en la velocidad al pasar por esta malla. En esta simulación se hizo pasar un flujo de agua en la entrada con una velocidad de 0.03 metros sobre segundo y una presión igual a cero. En la Fig. 5.19 se muestra un corte longitudinal al dominio computacional a lo largo del eje y, en donde se muestra el contorno de velocidad y se puede apreciar que no hay un cambio de color en la zona de la malla móvil, lo que indica que no hay un cambio de velocidad en el flujo y que, por lo tanto, esta malla móvil no altera ni perturba el flujo.

Como parte de esta validación, se dibujó una línea con *Paraview* que pasara por dentro de la malla móvil desde el inicio del dominio computacional hasta el término de éste como se puede ver en la Fig. (5.20). Se recabaron los puntos de dicha línea obteniendo así sus correspondientes datos de velocidades y presiones, con los que se realizó la gráfica de la Fig. (5.21). En esta gráfica se puede ver que tanto la velocidad como la presión permanecen constantes, por lo que se determinó que no hay alteración alguna con la malla móvil y el flujo impuesto..

Terminando el análisis de la malla móvil sin interacción con otro cuerpo, se le agregó la esfera y se le volvió a suministrar un flujo de agua a 0.0035 metros sobre segundo (Velocidad usada en la última simulación de la validación

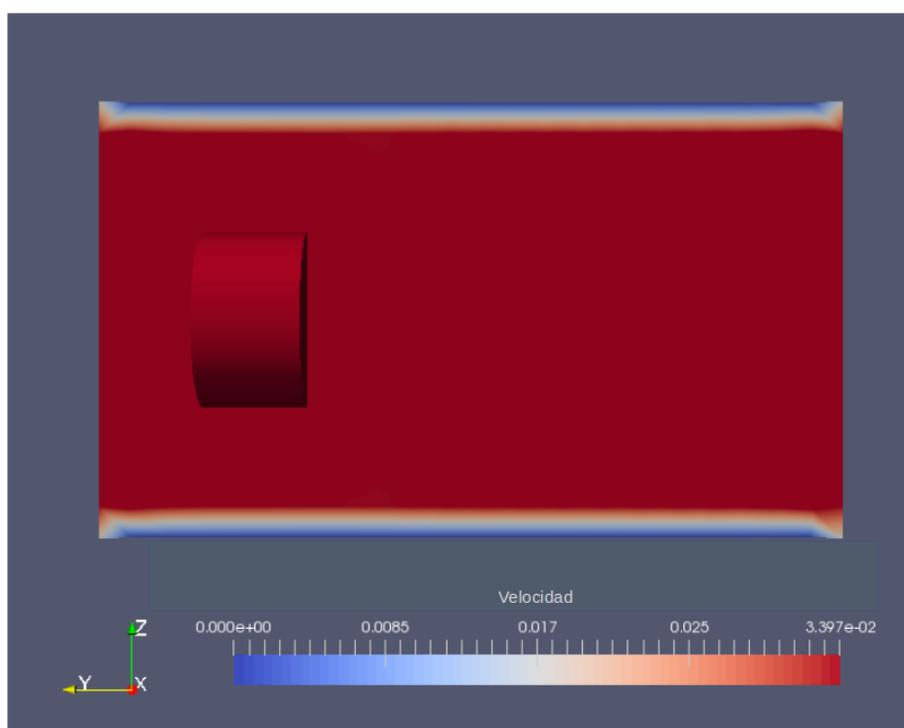


Figura 5.19: Campo de velocidad con malla móvil sin esfera en la dirección y.

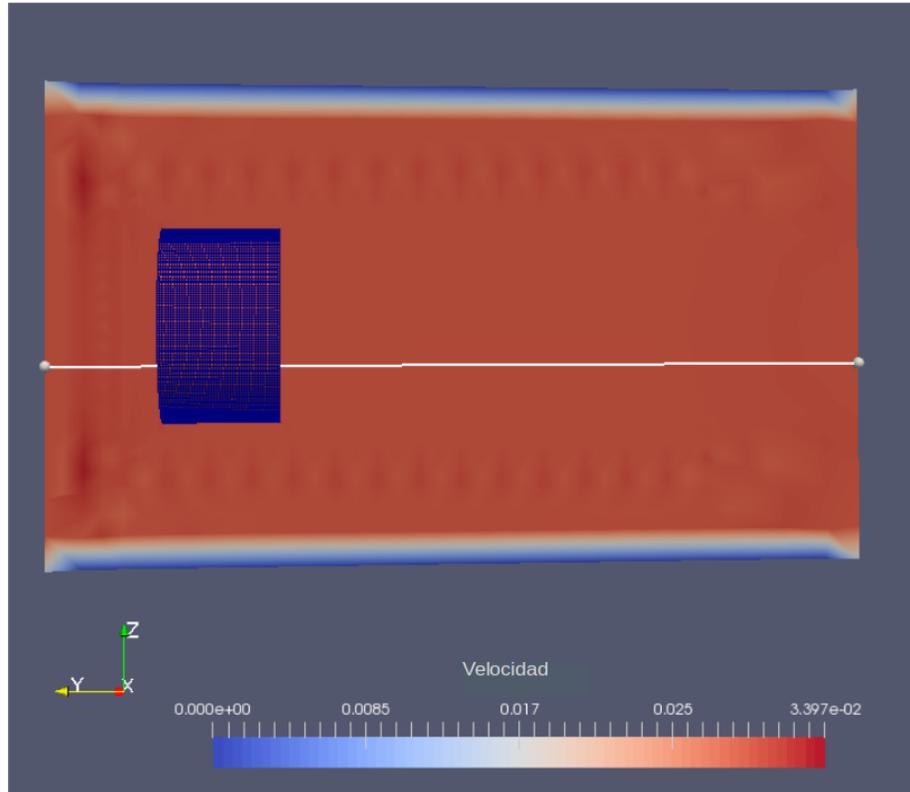


Figura 5.20: Línea dibujada a lo largo del dominio computacional para la recolección de datos de velocidades y presiones.

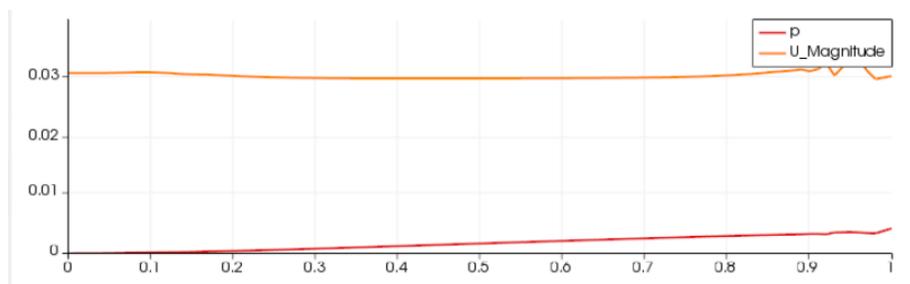


Figura 5.21: Velocidad y presión graficadas pasando por la malla móvil en el dominio sin esfera.

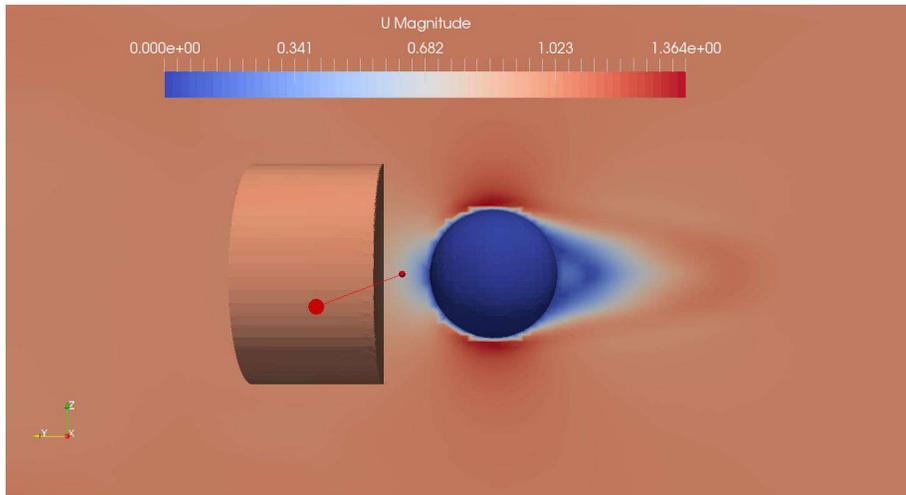


Figura 5.22: Campo de velocidad de malla móvil con esfera

de Flujos Sobre Esferas.), para verificar que la malla móvil no interfiriera con el paso del flujo sobre la esfera. En las Fig 5.22 y 5.23 se pueden observar los campos de velocidad y presión respectivamente, haciendo un corte longitudinal sobre el eje y y a la mitad del dominio. Al igual que en el primer caso en donde no se agregó la esfera, se puede observar que no hay variaciones en la velocidad y en la presión al notar que no existen cambios de color en dichos campos de la velocidad y la presión.

Como en el caso donde no se agregó esfera, se graficaron las presiones y velocidades a lo largo de una línea en el eje y colocada a la mitad del dominio computacional y que pasó por la malla móvil y la esfera. Dichas curvas se observan en las Figuras (5.24) y (5.25) en donde no se muestra interferencia o alteraciones en el flujo hasta que este choca con la esfera. Así entonces, se comprueba que la malla móvil no afecta el paso del flujo, por lo que se pudo proceder a agregar la propela y llevar a cabo las simulaciones propuestas para este trabajo de investigación.

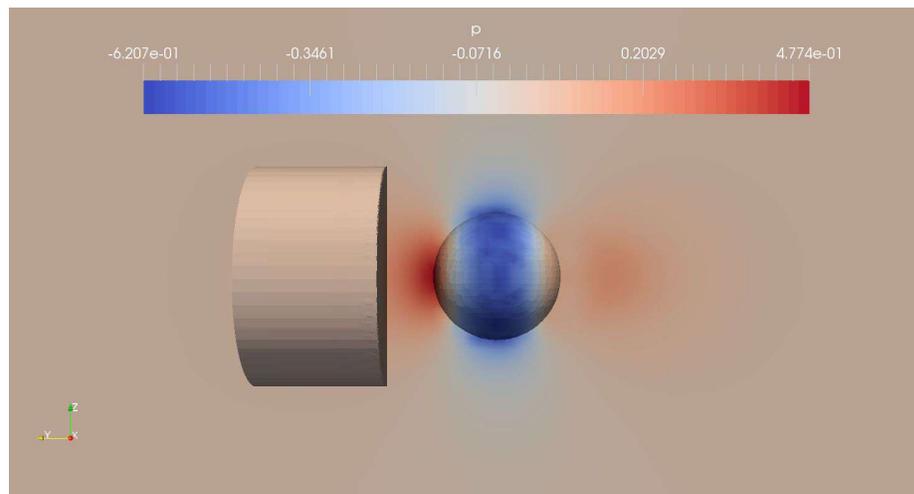


Figura 5.23: Campo de presión de la malla móvil con esfera.

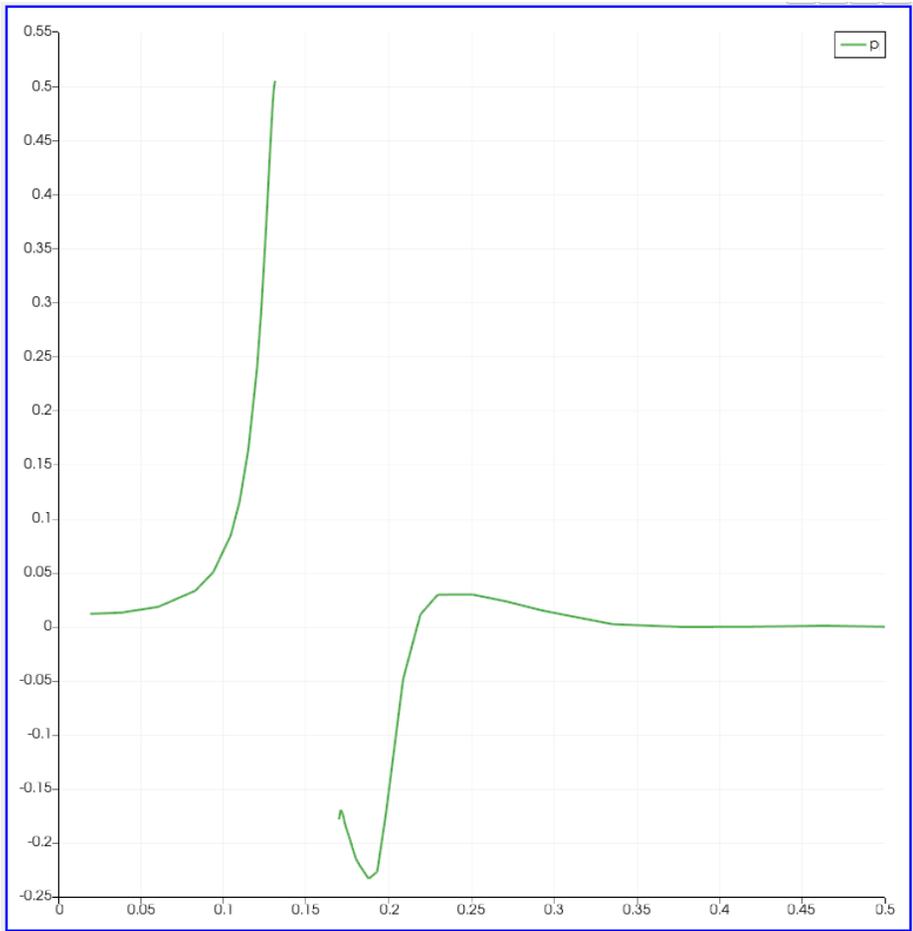


Figura 5.24: Curva de la presión graficada a lo largo del eje y pasando por la malla móvil y la esfera.

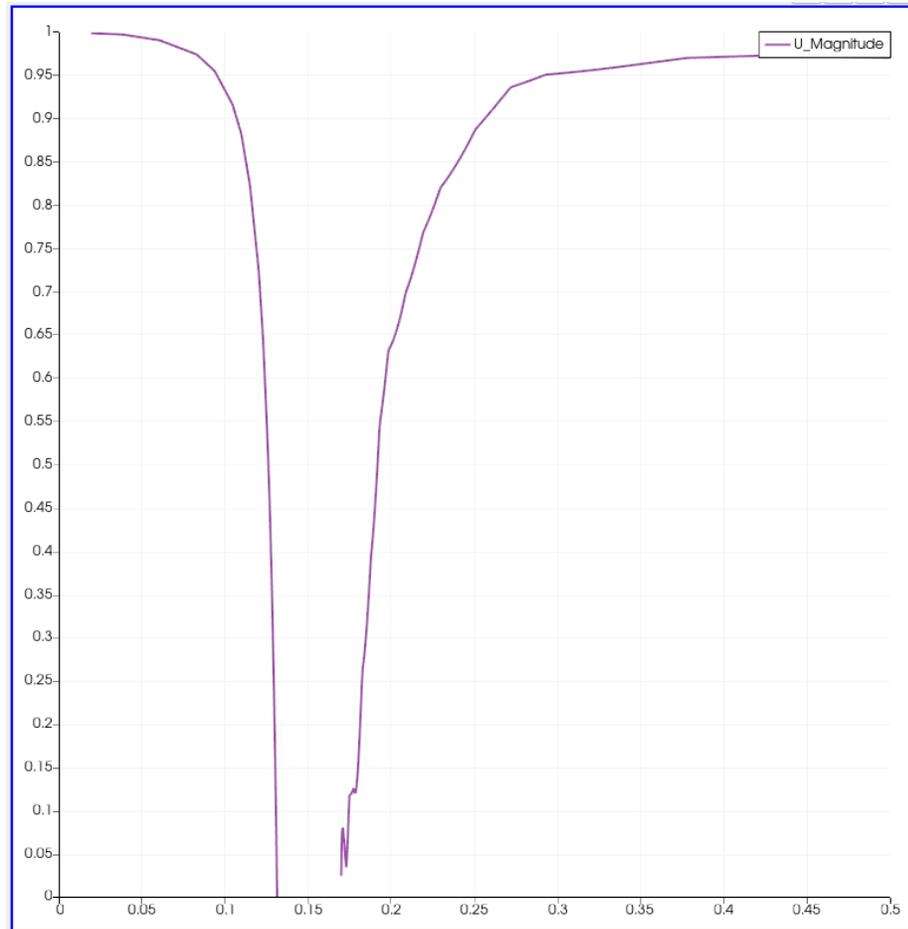


Figura 5.25: Curva de la velocidad graficada a lo largo del eje y pasando por la malla móvil y la esfera.

Capítulo 6

Resultados

En este capítulo se muestra un compendio de los resultados obtenidos para los tres casos de estudio de esta investigación al ir accionando la propela en diferentes revoluciones por minuto, las cuales fueron 300, 900 y 1500 RPM. Estos tres casos están inmersos en un flujo con número de Reynolds de 133, el cual fue el último valor utilizado en la validación de Flujo sobre Esferas a Bajos Números de Reynolds del Capítulo 5.

Para cada caso se presenta la visualización de los campos de líneas de corriente en las que se puede ver el impulso del flujo y su proceso de evolución en el tiempo. Adicionalmente, se presentan los campos de presión y movimiento de partículas para tener un mejor entendimiento entre la interacción fluido-estructura de la hélice y la esfera. Así mismo, se incluye la visualización de gráficas de la evolución del Coeficiente de arrastre contra el aumento del número de Reynolds, con lo que se pudo llevar a cabo el análisis de los cambios en las fuerzas y coeficientes de arrastre en la esfera. Con ello, se describe la influencia de la velocidad angular de la propela en el flujo generado hacia la esfera con las condiciones de frontera consideradas para este trabajo de investigación, mostradas anteriormente en el capítulo Modelo Matemático.

6.1. Líneas de Corriente

6.1.1. Caso 1. Propela girando a 300 RPM.

En un primer caso se accionó la propela a una baja velocidad angular la cual fue de 300 RPM. Observando el campo de velocidad de la simulación se pudo ver la evolución del flujo propulsado hacia la esfera. Se pudo apreciar también la aparición de vórtices antes y después de pasar la esfera. Estos vórtices son ocasionados por el movimiento rotatorio de la propela, y a esta velocidad angular, presentan simetría axial a lo largo de todo el dominio computacional. Por otra parte, con el impulso de la hélice, el número de Reynolds que era de 133 (ver Capítulo 5.3) aumentó a un valor de 725.

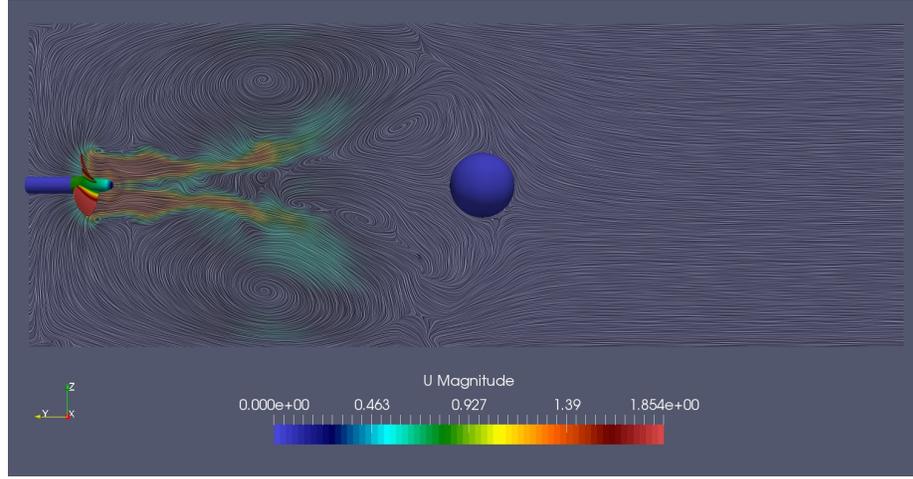


Figura 6.1: Líneas de corriente en el plano yz capturada al segundo 4 con la propela girando a 300 RPM.

Se observó que el flujo choca con la esfera al segundo 4 como se muestra en la Fig. (6.1). Se observa además, la aparición de un par de vórtices inmediatamente después de la propela, y la formación de otros dos antes de chocar con la esfera. Para el segundo 8 se observa el aumento de tamaño de dichos vórtices que se formaban antes de la esfera. Se observa además que mantienen la simetría axial incluso pasando la esfera como se muestra en las Figuras (6.3) y (6.2), las cuales fueron tomadas al mismo tiempo pero en el plano xy y yz . Como se puede apreciar las imágenes son casi idénticas para ambos planos, por lo que se comprueba que la simetría axial ocurre en todo el dominio y no solamente en un solo plano. Para el segundo 12 esta simetría axial se pierde un poco, como se muestra en la Fig. (6.4), y se observa además que pasada la estela con vorticidad, el flujo se restablece hasta la salida del dominio.

6.1.2. Caso 2. Propela girando a 900 RPM.

Para este segundo caso, se pudo apreciar el incremento de la propulsión del flujo y que hay una mayor generación de vórtices ocasionados por la propela al girar a una velocidad angular mayor. Al tener una velocidad angular mayor, el flujo propulsado chocó con la esfera a un tiempo mucho menor de 1.3 segundos. En la Fig. (6.5) se observa una captura de dicho instante. Analizando las líneas de corriente tomadas al segundo 5, ver la Fig. (6.6), se observa cómo en el caso anterior, la aparición de los dos pares de vórtices formados después de la propela y al pasar por la esfera. Sin embargo, la simetría axial sólo se presenta en los vórtices formados inmediatamente después de la propela. Cuando el flujo propulsado choca con la esfera, los vórtices ya no son tan simétricos como en el primer caso. Al pasar el tiempo, el flujo se va haciendo inestable y pierde toda

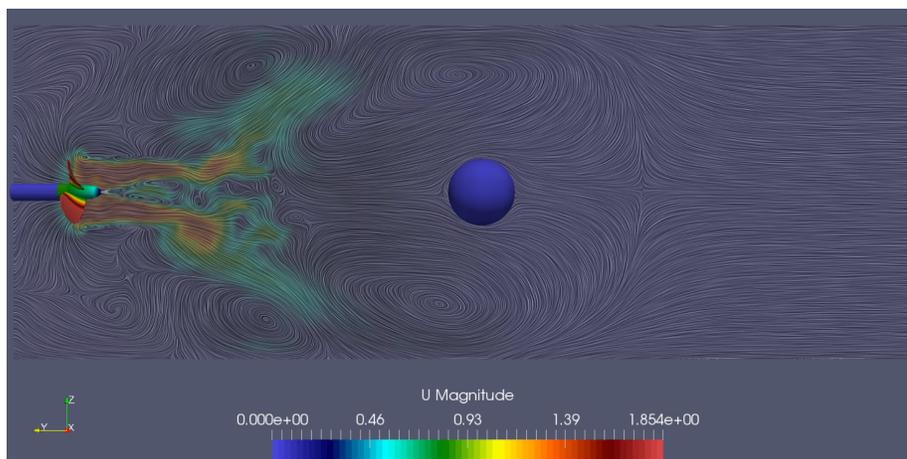


Figura 6.2: Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 8 con la propela girando a 300 RPM.

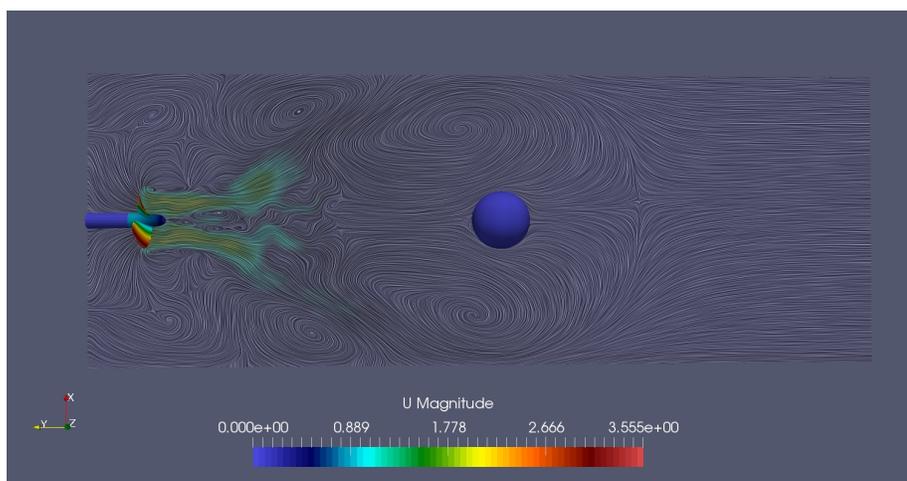


Figura 6.3: Captura de las líneas de corriente en el plano xy tomada al segundo 8 con la propela girando a 300 RPM.

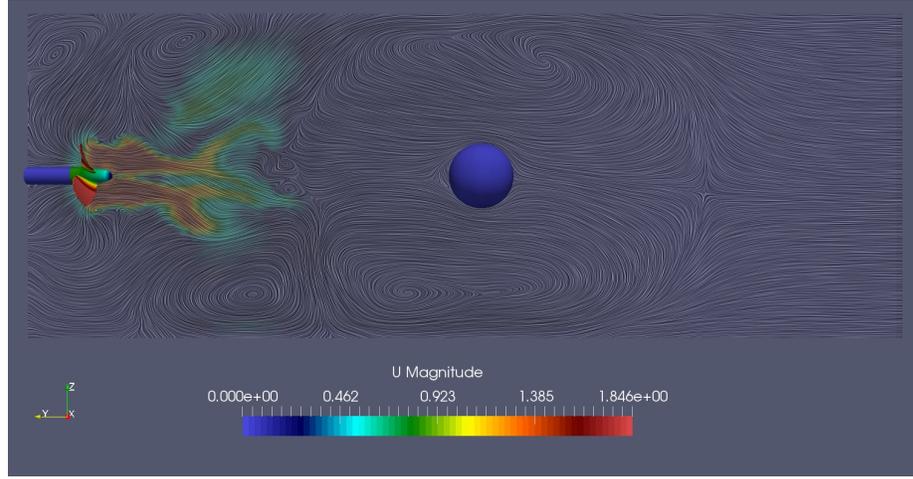


Figura 6.4: Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 12 con la propela girando a 300 RPM.

simetría para el segundo 7, como se muestra en la Fig. (6.7). Con este aumento de velocidad angular, el flujo alcanzó una velocidad máxima de 0.045 metros sobre segundo y un número de Reynolds de 9961.

6.1.3. Caso 3. Propela Girando a 1500 RPM.

En el tercer y último caso se elevó la velocidad angular de la propela a 1500 RPM. Los vórtices para esta simulación son mayores y distorsionados, ya que el flujo se vuelve inestable a mayores números de Reynolds. La evolución de las líneas de corriente mostró que se alcanzó un comportamiento inestable más rápido que en el segundo caso. El tiempo en que el flujo propulsado chocó con la esfera fue de un segundo. Una captura de ese instante se muestra en la Fig. (6.8), en donde se muestra que hasta los vórtices formados al frente de la propela son empujados. Los vórtices formados tras chocar con la esfera ya no presentan simetría como se muestra en la Fig. (6.9) y el flujo comienza a mostrar inestabilidad. Para el segundo 5 el flujo ya es completamente inestable, como se muestra en la Fig. (6.10) en donde se puede ver que los vórtices se generan arbitrariamente a lo largo del dominio. En este caso la velocidad máxima alcanzada fue de 0.1303 metros sobre segundo, con un número de Reynolds igual a 26026.

Cabe mencionar que para las esferas, el número de Reynolds crítico más bajo, reportado por primera vez por Cometta (1957), es de $Re = 6 \times 10^3$ según Achenbach (Achenbach, 1974). Llegado a este número de Reynolds es cuando se da el desprendimiento de vórtices. Para los casos 2 y 3, se observa que el flujo propulsado llega al número crítico de Reynolds, e incluso lo rebasa. Sin embargo, al tener un flujo helicoidal proveniente de la propela, y a altas velocidades, se

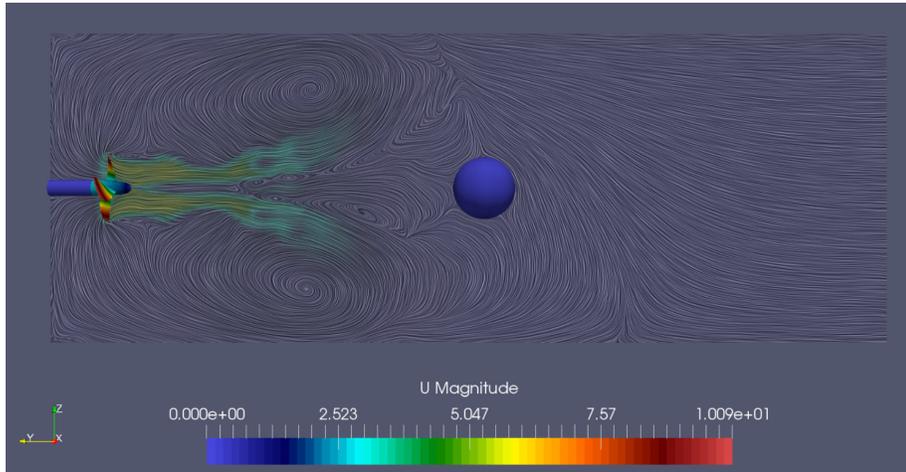


Figura 6.5: Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 1.3 con la propela girando a 900 RPM.

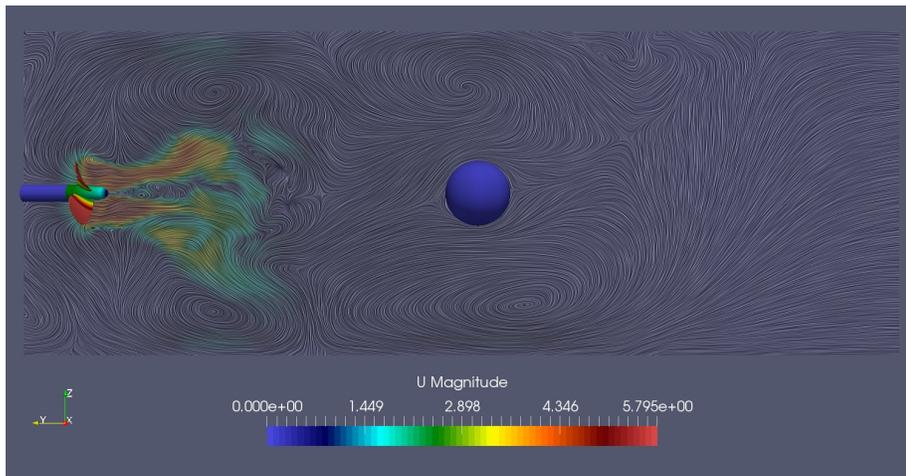


Figura 6.6: Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 5 con la propela girando a 900 RPM.

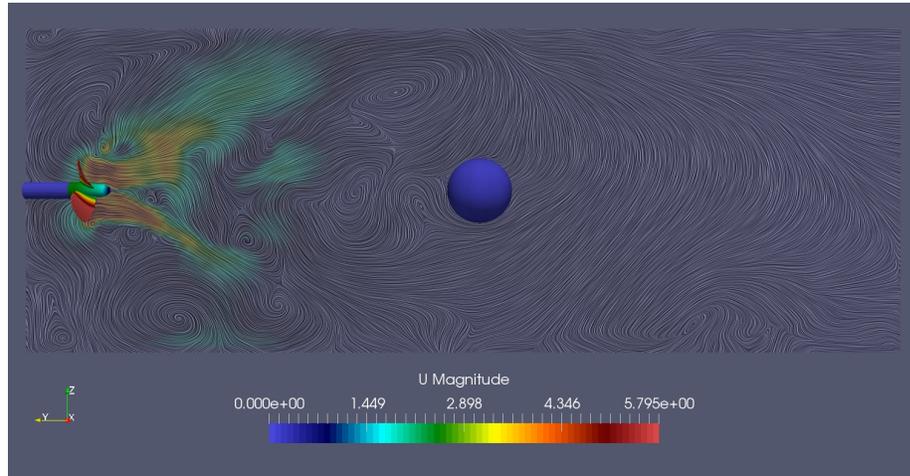


Figura 6.7: Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 7 con la propela girando a 900 RPM.

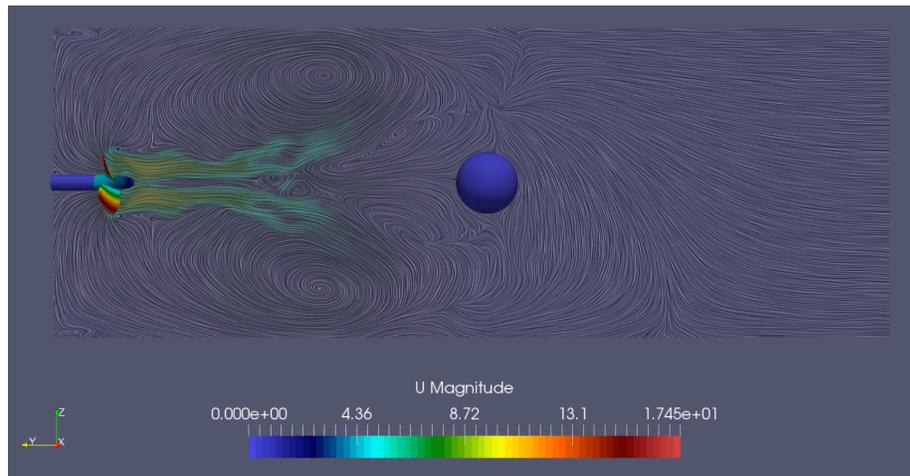


Figura 6.8: Captura de las líneas de corriente en el plano yz tomada al segundo 1 con la propela girando a 1500 RPM.

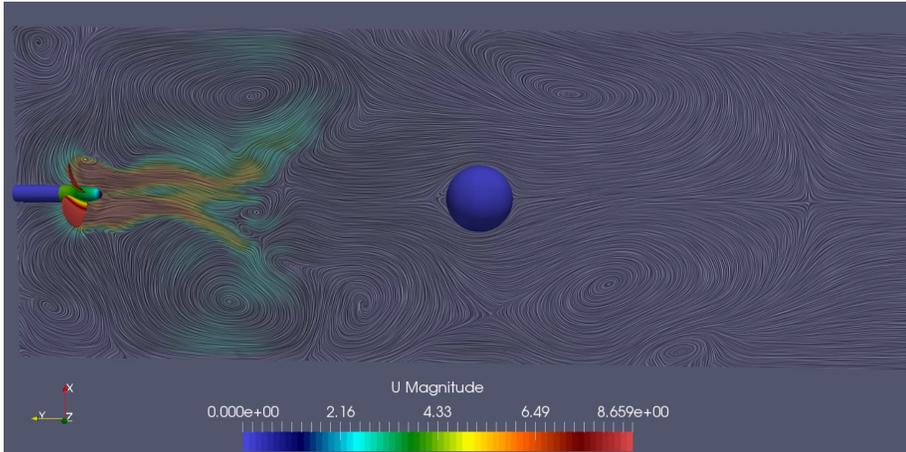


Figura 6.9: Captura de las líneas de corriente en el plano xy tomada al segundo 3 con la propela girando a 1500 RPM.

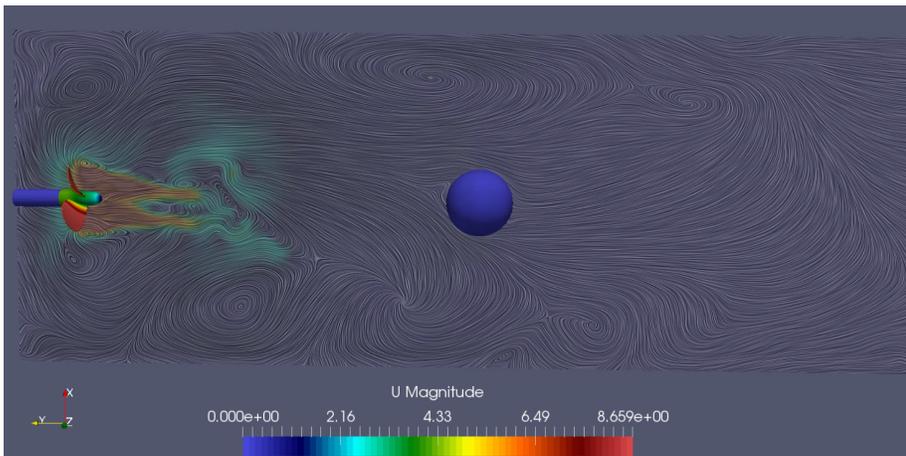


Figura 6.10: Captura de las líneas de corriente en el plano xy tomada al segundo 5 con la propela girando a 1500 RPM.

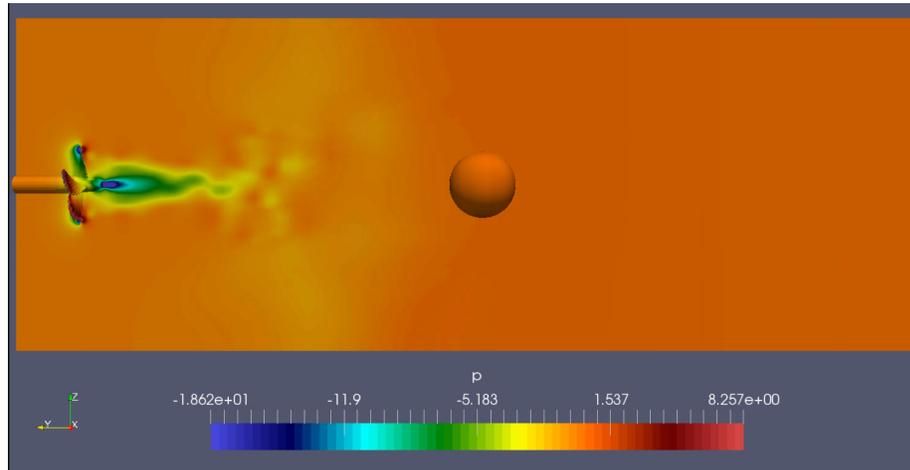


Figura 6.11: Campo de presión del flujo de la propela impulsado hacia la esfera para el caso de 900 RPM.

genera un flujo inestable, lo cual provoca que no se desarrollen los vórtices detrás de la esfera y en su lugar, los vórtices se van desplazando sin un patrón uniforme por todo el dominio computacional.

6.2. Campo de Presión

En la Fig. (6.11) se presenta el campo de presión de la interacción fluido-estructura de la hélice marina y la esfera. La imagen corresponde a la simulación del segundo caso, en donde la propela gira a 900 RPM. Se presenta únicamente una imagen, ya que el campo de presión es semejante para los tres casos. En este campo se puede observar que inmediatamente después de la esfera el flujo propulsado presenta una caída de presión, y su valor aumenta mientras el flujo va avanzando hacia la esfera. Pasando la esfera, su valor vuelve a aumentar y se mantiene constante hacia la salida del dominio computacional.

6.2.1. Seguimiento de Partículas

Para tener un mejor entendimiento de los cambios de presión en las simulaciones se optó por realizar un seguimiento de partículas del flujo propulsado. Cuando el flujo pasa por la propela, las partículas presentan una baja de presión como se muestra en la Fig. (6.12) porque es en donde el flujo es impulsado y es en donde se aumenta la velocidad. En la Fig. (6.13) se muestra cómo el flujo presenta un aumento de presión cuando choca con la esfera, pues es cuando la velocidad se hace igual a cero. Por último, detrás de la esfera la presión aumenta como se observa en la Fig. (6.14) debido a la recirculación que se presenta en el flujo tras pasar la esfera.

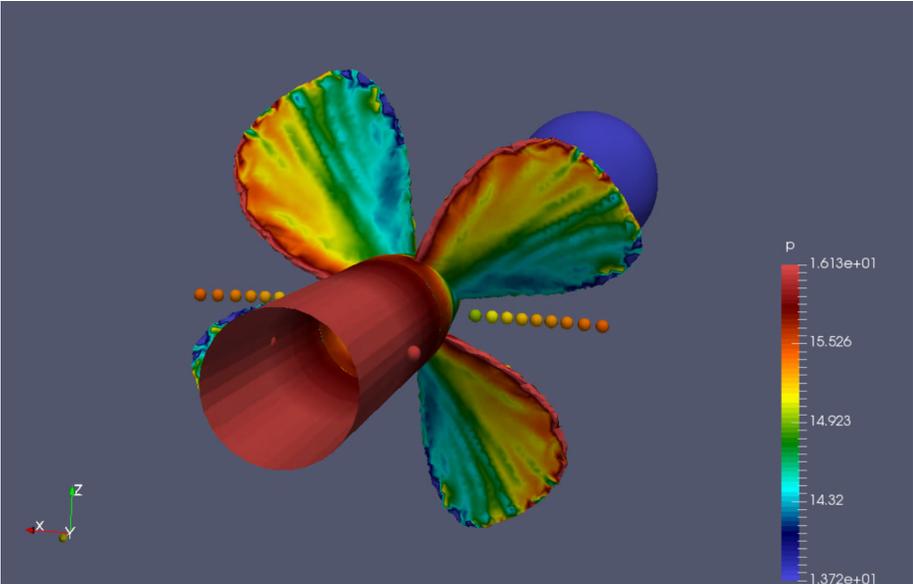


Figura 6.12: Captura del seguimiento de partículas cuando pasan por la propela para el campo de presión.

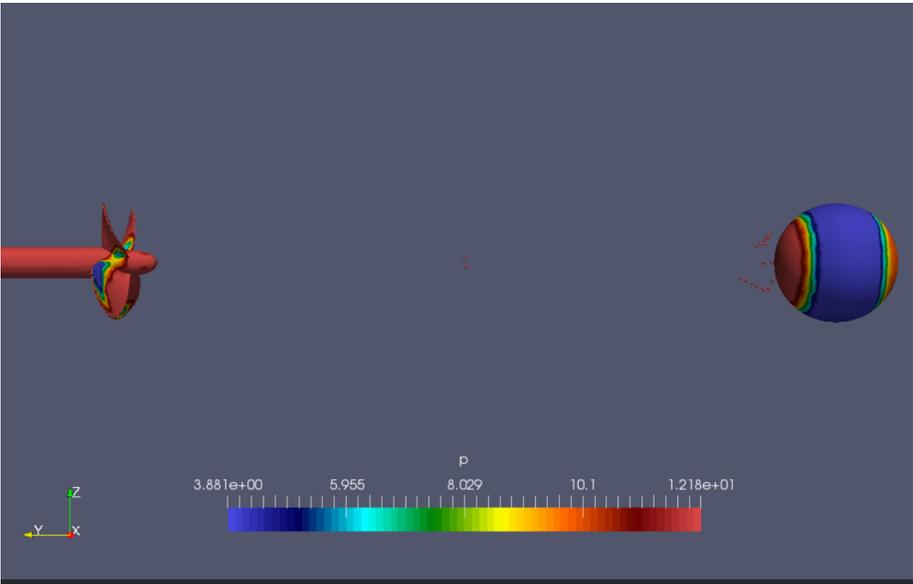


Figura 6.13: Captura del seguimiento de partículas frente a la esfera para el campo de presión.

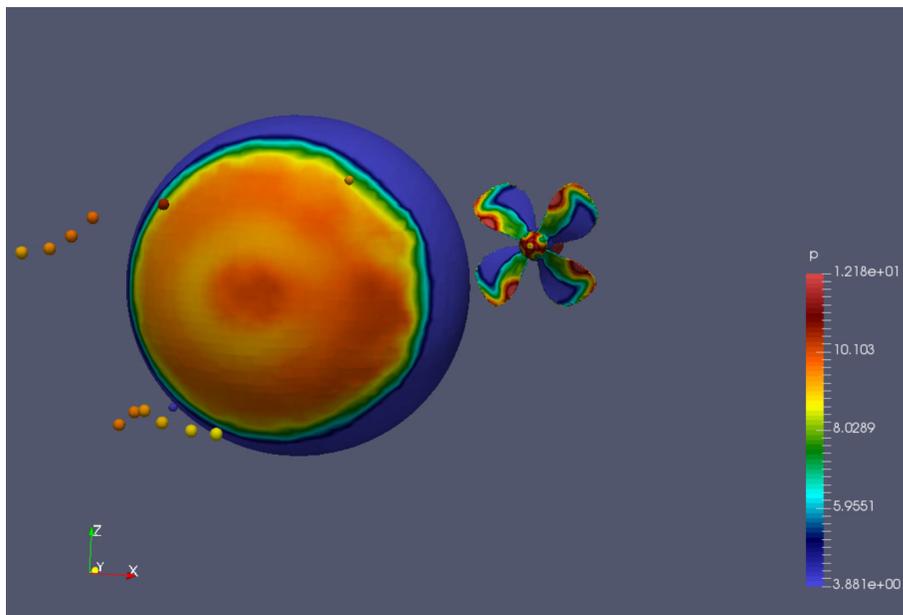


Figura 6.14: Captura del seguimiento de partículas detrás de la esfera para el campo de presión.

6.3. Coeficientes de Arrastre Tras el Impulso de la Propela

En la Tabla (6.1) se muestran los valores de las velocidades tras ser impulsadas por las propelas, con sus respectivos números de Reynolds para los tres casos estudiados.

RPM	Uavance [m/s]	Re
300	0.0036	725.7305
900	0.0499	9961.1577
1500	0.1303	26016.7665

Tabla 6.1: Tabla de valores de las velocidades y números de Reynolds impulsados por la propela.

Los coeficientes de arrastre se obtuvieron de la misma manera en la se se explicó en la validación de Flujo Sobre Esferas a Bajos números de Reynolds, obteniendo el vector esfuerzo asociado a η . De igual forma que en la validación, el coeficiente de arrastre se obtuvo a partir de la siguiente ecuación:

6.3. COEFICIENTES DE ARRASTRE TRAS EL IMPULSO DE LA PROPELA93

$$CD = \frac{t_2}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (6.1)$$

Solamente que para este caso, se usó la segunda componente del vector esfuerzo ya que corresponde a la dirección en la que se dirige el flujo (eje y).

Los valores numéricos se compararon con valores teóricos, los cuales, al igual que en la validación, se obtuvieron mediante la ecuación de Schiller y Naumann (1933).

$$CD = \frac{24}{Re} (1 + 0.15Re^{0.687}) \quad (6.2)$$

Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla (6.2) en los que se puede ver la segunda componente del vector esfuerzo asociado a η obtenidos numéricamente con ayuda de OpenFOAM. En la siguiente columna se tienen sus correspondientes coeficientes de arrastre, seguidos de los coeficientes de arrastre teóricos, con los que se obtuvieron las curvas de la Fig. (6.15) para tener una mayor apreciación de la comparación, mostrando que las curvas son bastante similares y, por ende, satisfactorias. Finalmente, en la última columna se muestra el porcentaje de error numérico para cada caso, los cuales fueron muy bajos y aceptables.

RPM	t2 [N/m ²]	CD Num	CD Teo	Error Núm [%]
300	0.0030	0.4571	0.4911	0.0692
900	0.2485	0.1996	0.2042	0.0231
1500	1.2156	0.1431	0.1503	0.0504

Tabla 6.2: Tabla de los coeficientes de arrastres teóricos y numéricos con su comparación en porcentaje de error.

Como parte de la comprobación con la literatura se utilizó de referencia la Fig. (6.16) en la que se puede observar la curva del coeficiente de arrastre en las esferas contra el número de Reynolds caracterizado para las esferas. Se observa que el coeficiente de arrastre presenta un comportamiento descendiente, mientras el número de Reynolds va aumentando. Así entonces se comprobó y verificó que a mayor número de Reynolds el coeficiente de arrastre disminuye.

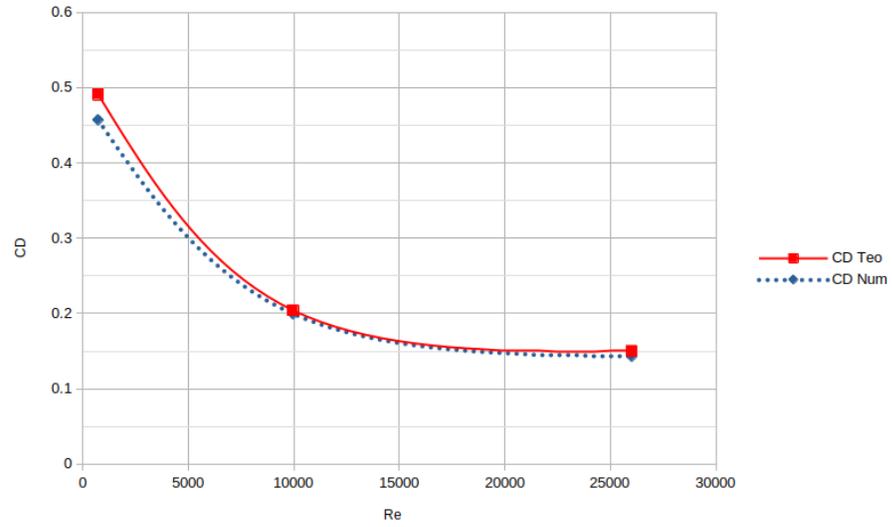


Figura 6.15: Curva de los Coeficientes de Arrastre Teóricos y Numéricos

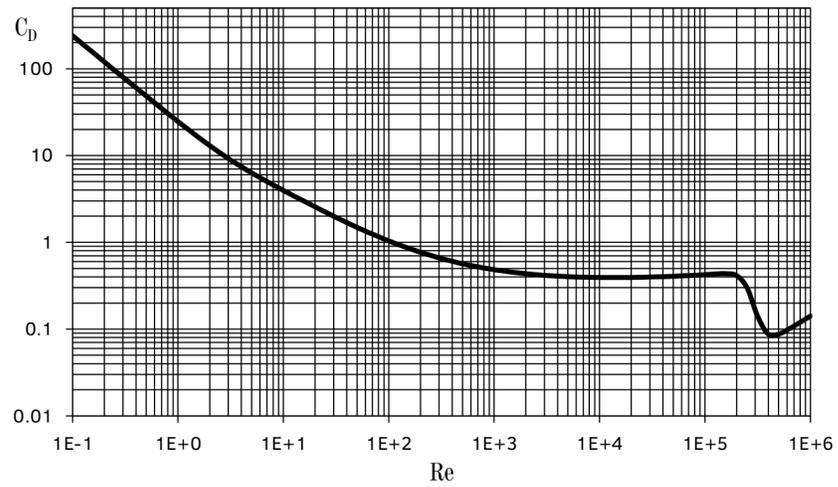


Figura 6.16: Curva del coeficiente de arrastre para una esfera (White, 2016).

Capítulo 7

Conclusiones y trabajo a futuro.

7.1. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones en base a los resultados obtenidos y al análisis de cada caso de estudio con las diferentes revoluciones por minuto. Además se presentan comparaciones entre cada caso.

- Tras realizar la serie de simulaciones con las tres diferentes velocidades angulares se determinó que los resultados numéricos de los coeficientes de arrastre obtenidos de manera numérica concuerdan bien con los datos teóricos por los bajos porcentajes de error obtenidos. Se concluye entonces que el impulso del flujo ocasionado por la propela afecta significativamente las fuerzas y coeficientes de arrastre ejercidos sobre la esfera, comprobando que al alcanzar mayores números de Reynolds, se tienen mayores fuerzas de arrastre mientras que los coeficientes de arrastre disminuyen.
- Se pudo observar el desarrollo de vórtices detrás de la esfera cuando el flujo fue uniforme. Estos vórtices comenzaron a aparecer en un número de Reynolds de 24, y se fueron desarrollando y haciendo más grandes mientras se aumentó el número de Reynolds. Se determinó que se tiene una relación proporcional entre el tamaño de los vórtices y el logaritmo natural del número de Reynolds, y que presentan simetría axial. No se llegó al desprendimiento de vórtices puesto que las simulaciones se hicieron a bajos números de Reynolds y no se llegó al número crítico de las esferas. Comparado contra el flujo helicoidal, se observó que la perturbación del flujo no permitió el desarrollo ni el desprendimiento de vórtices detrás de la esfera, aunque se llegó y se arrebasó el número crítico de Reynolds. Sin embargo, se observó la generación de vórtices producidos por la propela, los cuales a menores revoluciones por minuto presentan simetría axial y se desarrollan más al chocar con la esfera. A mayores revoluciones por

minuto se llega, casi de manera instantánea, a un estado inestable, en donde la generación de vórtices se da de manera arbitraria a lo largo de todo el dominio computacional y la esfera sólo funge cómo un obstáculo para estos.

- Sobre el uso de la Interfaz de Malla Arbitraria (AMI) se concluye que es una interfaz que opera dependientemente del tiempo y nos permitió simular efectivamente el comportamiento del campo de flujo alrededor de la hélice en rotación, por lo que fue de gran utilidad para modelar la interacción entre la esfera y la hélice. También se puede señalar que entre más procesadores se usen para correr el programa se reduce el tiempo necesario de la simulación. Aunque sea más costoso el usar más procesadores, se reducen los tiempos de simulación si el número de nodos en la malla es alto. Para esta serie de simulaciones resultó que el rendimiento óptimo se dio cuando el código se ejecutó con 8 procesadores.
- Se pudieron modelar, resolver e interpretar los problemas propuestos en este trabajo de investigación usando la Dinámica de los Fluidos Computacionales (CFD) con el software OpenFOAM. Las comparaciones de los resultados obtenidos generaron una alta confianza en la calidad de la simulación. La CFD nos permite examinar, analizar y resolver algunos detalles que serían mucho más complicados de resolver de manera experimental. Sin embargo, OpenFOAM al ser de código libre y abierto no genera costos en licencias para llevar a cabo estas simulaciones, lo que va en tendencia en la industria para reducir costos.

7.2. Trabajo a Futuro.

Como trabajo a futuro se seguirá con la línea de investigación de la interacción fluido-estructura entre las propelas o hélices marinas y otras geometrías. Lo que se pretende como próximo caso de estudio es intercambiar la geometría de la esfera con la de un timón y estudiar, al igual que con la esfera, los cambios en los coeficientes de arrastre y la generación de vórtices detrás del timón, mientras se incrementan las revoluciones por minuto de la propela. A diferencia de este trabajo, ya existen varios estudios en la Dinámica de Fluidos Computacionales (CFD) sobre la interacción de hélice-timón. Sin embargo, estos trabajos no estudian la generación de vórtices detrás de la geometría, sino que están más enfocados en el desempeño de la propela, que tiene que ver con la generación de curvas de los coeficientes de torque y empuje contra los coeficientes de avance.

Referencias.

- Abel, G.M. (2023). *Los fabulosos inventos de Leonardo da Vinci*. URL: https://historia.nationalgeographic.com.es/a/fabulosos-inventos-leonardo-da-vinci_16634. (accessed: 20.03.2024).
- Achenbach, Elmar (1974). «Vortex shedding from spheres». En: *Journal of Fluid Mechanics* 62.2, págs. 209-221. DOI: 10.1017/S0022112074000644.
- Adam, Nur *et al.* (ago. de 2019). «Prediction of Propeller Performance Using Computational Fluid Dynamics Approach». En: *EPI International Journal of Engineering* 2, págs. 185-193.
- Çengel, Yunus A. y John M. Cimbala (2014). *Fluid mechanics: fundamentals and applications*. McGraw - Hill Education. ISBN: 9780073380322.
- Centramar (2020). *Principales Sistemas de Propulsión en Buques*. URL: <https://www.centramar.es/sistemas-de-propulsion-en-buques/>. accessed: 03.04.2024.
- Curley., Robert (s.f.). *Great Eastern ship*. URL: <https://www.britannica.com/topic/Great-Eastern>. (accessed: 12.03.2024).
- Davis, Commander H. F. D. (1931). *The Early History Of The Screw Propeller*. URL: <https://www.usni.org/magazines/proceedings/1931/april/early-history-screw-propeller>. accessed: 20.02.2024.
- Dr. Ali, Can Takinaci (2023). *Historical Development of the Screw propeller*. (accessed: 20.03.2024).
- Erin, Blakemore (s.f.). *La historia del Tortuga, uno de los primeros sumergibles del mundo*. URL: <https://www.nationalgeographic.es/historia/historia-tortuga-primeros-sumergibles-mundo>. accessed: 20.03.2024).
- Gargantilla, Pedro (2020). *El Tortuga, el sumergible del siglo XVIII iluminado con hongos*. URL: https://www.abc.es/ciencia/abci-tortuga-sumergible-siglo-xviii-iluminado-hongos-202009060146_noticia.html. (accessed: 20.03.2024).
- Gershuni, Grigori Z. y E. M. Zhukhovitskii (1976). *Convective stability of incompressible fluids*. Keter publishing House Jerusalem, Ltd. ISBN: 0706515625.
- Herrera, Ramses (2019). *NÚMERO DE ASPAS*. URL: <http://www.ricepropulsion.com/TNL/Ramses/TNL27.htm>. (accessed: 12.03.2024).
- Huang, Sheng *et al.* (dic. de 2007). «CFD simulation of propeller and rudder performance when using additional thrust fins». En: *Journal of Marine Science and Application* 6, págs. 27-31. DOI: 10.1007/s11804-007-7023-3.

- I., S. H. (2017). *Un boceto de Leonardo da Vinci de una máquina voladora conocida como el Tornillo de aire helicoidal o airscrew*. (accessed: 20.03.2024).
- J., Doctor (2017). *El Helicóptero de Leonardo da Vinci*. URL: <https://www.elrelojdesol.com/wp/doctor-j/helicoptero-leonardo-da-vinci/index.html>. accessed: 20.03.2024).
- L'avionnaire (2010). *Perfil Alar*. URL: <https://www.lavionnaire.fr/EspAlas.php>. accessed: 03.04.2024.
- Levi, Enzo (1976). *Mecánica del medio continuo*. Limusa. ISBN: 0706515625.
- Martinez, Edgar (ago. de 2017). «Aplicación del método de múltiples tubos de corriente a una turbina Darrieus». Tesis doct. DOI: 10.13140/RG.2.2.19112.88321.
- Mittal, Rajat y Fady Najjar (jun. de 1999). «Vortex Dynamics in the Sphere Wake». En: *AIAA Journal* 99. DOI: 10.2514/6.1999-3806.
- Muscari, Roberto y Andrea Di Mascio (jun. de 2009). «Simulation of the viscous flow around a propeller using a dynamic overlapping grid approach». En.
- N., E. N. (2023). *La hélice de un barco. ¿Como funciona?* URL: <https://www.neptuno.es/la-helice-de-un-barco>. (accessed: 03.04.2024).
- Nakayama, Y. y R. F. Boucher (2000). *Introduction to Fluid Mechanics*. Butterworth - Heinemann. ISBN: 0340676493.
- P.E., Farrell y Maddison J.R. (2011). «Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection». En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200.1, págs. 89-100. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510002276>.
- R., C. J. (2011). *Propellers: A complete history*. URL: <https://www.cjrprop.com/propellers-a-complete-history/>. (accessed: 20.02.2024).
- R., Mani, Gobiraj R. y Mohamed Abbas (jul. de 2021). «Design And Analysis of Marine Propeller Using Computational Fluid Dynamics». En: *IARJSET* 8, págs. 447-450.
- R. P., M. A. (2019). *La hélice, elemento de propulsión de gran importancia en el sector pesquero*. URL: <https://pescaymedioambiente.com/la-helice-elemento-de-propulsion-de-gran-importancia-en-el-sector-pesquero/>. (accessed: 03.04.2024).
- Roca, Ramón (2021). *Físicos de Stanford encuentran un nuevo estado de la materia en un gas cuántico gracias a una novedosa versión del tornillo de Arquímedes*. URL: <https://elperiodicodelaenergia.com/fisicos-de-stanford-encuentran-un-nuevo-estado-de-la-materia-en-un-gas-cuantico-gracias-a-una-novedosa-version-del-tornillo-de-arquimedes/>. (accessed: 20.03.2024).
- Smil, V. (2021). *Energía y civilización. Una historia*. Arpa. ISBN: 9788418741173.
- Suárez Usme, Laura Estefany (2013). *Estudio experimental sobre hélices para propulsión náutica*. Inf. téc. Fundación Universitaria de Ciencias de la Salud. URL: <http://hdl.handle.net/1992/25351>.
- SWOW (2012). *Development of the Screw Propeller*. URL: https://www.shippingwondersoftheworld.com/screw_propeller.html. (accessed: 20.03.2024).

- Taneda, Sadatoshi (1956). «Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers». En: *Journal of the Physical Society of Japan* 11, págs. 1104-1108.
- Turunen, Tuomas *et al.* (jul. de 2014). «OPEN-WATER COMPUTATIONS OF A MARINE PROPELLER USING OPENFOAM». En.
- Villar Rey, Cristina (2002). «Hélice / tornillo: la denominación de un nuevo propulsor marino en el castellano del XIX». En: *Revista de lexicografía* 8, págs. 253-265.
- White, Frank M. (2016). *Fluid Mechanics*. McGraw - Hill Education. ISBN: 9789385965494.
- Yen, C. H. (2017). «Numerical study of flow past a solid sphere at high Reynolds number». En: *Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 243.

Apéndice

Para comenzar el análisis de la teoría de la capa límite se tiene la suposición de que:

$$u_2 \ll u_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \ll \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (2)$$

Usando las Ecs. (1) y (2) en la ecuación de cantidad de movimiento en x_2 , Ec. (5.3), se tiene:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (3)$$

Por lo que la presión es una constante a lo largo de la dirección x_2 , es decir no depende de la coordenada x_2 , sin embargo, si existe la variación de la presión a lo largo de x_1 , por lo que puede escribirse:

$$p = p(x_1) \quad (4)$$

El término $\partial p / \partial x_1$ que aparece en la ecuación de cantidad de movimiento en x_1 , ver la Ec. (5.2), puede obtenerse a partir de la ecuación de Bernoulli del flujo externo:

$$\rho U \frac{dU}{dx_1} = -\frac{dp}{dx_1} \quad (5)$$

Sustituyendo la Ec. (7) en la Ec. (5.2) se tiene:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = U \frac{dU}{dx_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (6)$$

Si se supone que:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \ll \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (7)$$

La Ec. (6) puede escribirse como:

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = U \frac{dU}{dx_1} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (8)$$

En la solución de Blasius se introdujo una variable independiente llamada "Variable de Similaridad" η . La cual Blasius determinó como:

$$\eta = \eta(x_1, x_2) \quad (9)$$

Se propone que la variable η sea una función directamente dependiente (incrementando monóticamente) de x_2 y de una función h que es una función única de x_1 , tal que:

$$\eta = x_2 h(x_1) \quad (10)$$

Blasius propuso además la definición de la función f'_η que es una función única de η , tal que.

$$f'_\eta = \frac{df}{d\eta} = \frac{u_1(x_1, x_2)}{U(x_1)} \quad (11)$$

Despejando $u_1(x_1, x_2)$ de la Ec. (11) y llevando a cabo el cambio de las variables independientes por la variable dependiente η , se sustituye y se integra la Ec. (8), se llegó a que:

$$f''' + f'' g_1(\eta) = f f'' g_2(\eta) + (f'^2 - f f'' - 1) g_3(\eta) \quad (12)$$

Donde:

$$g_1(\eta) = \frac{\partial^2 \eta / \partial x_2^2}{(\partial \eta / \partial x_2)^2} \quad (13)$$

$$g_2(\eta) = U \frac{\partial^2 \eta / \partial x_1 \partial x_2}{\nu (\partial \eta / \partial x_2)^3} \quad (14)$$

$$g_3(\eta) = \frac{dU/dx_1}{\nu (\partial \eta / \partial x_2)^2} \quad (15)$$

Se supone que $U = cte$, por lo que $dU/dx_1 = 0$, por lo que

$$g_3(\eta) = 0 \quad (16)$$

Se sabe además que η es directamente proporcional a x_2 , por lo que $\partial^2 / \partial x_2^2 = 0$, por lo que:

$$g_1(\eta) = 0 \quad (17)$$

La única función que es diferente de cero es $g_2(\eta)$. Derivando la Ec. (10) con respecto a x_2 se llegó a que:

$$g_2(\eta) = \frac{U h'}{\nu h^3} \quad (18)$$

Blasius propuso que el valor de $g_2 = cte$ y le propuso un valor de $g_2 = -1/2$, por lo que la Ec.(18) se escribe como:

$$g_2(\eta) = \frac{Uh'}{\nu h^3} = -\frac{1}{2} \quad (19)$$

A partir de la Ec.(19 se determinó h como:

$$h = \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Por lo que η queda como:

$$\eta = x_2 \left(\frac{U}{\nu x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Así entonces, regresando a la ecuación diferencial ordinaria, ver Ec(12), y tomando en cuenta los valores de g_1 , g_2 y g_3 , se tiene:

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (22)$$

La ecuación de continuidad para un flujo incompresible es:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (23)$$

En principio se efectúa el producto escalar:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 \right) \cdot (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (24)$$

donde \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son los vectores unitarios que apuntan en cada dirección del sistema de coordenadas rectangulares. Posteriormente se sustituyen las variables adimensionales como sigue:

$$\frac{\partial(u_1^* \omega c)}{\partial(x_1^* c)} + \frac{\partial(u_2^* \omega c)}{\partial(x_2^* c)} = 0 .$$

Se extraen los valores constantes ω y c de las derivadas parciales, se simplifica y se factoriza:

$$\left(\frac{\omega c}{c} \right) \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \left(\frac{\omega c}{c} \right) \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0$$

$$\omega c \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right) = 0 .$$

eta	teta	teta'
	0	0
	4.65E-02	1.36E-02
	9.30E-02	2.72E-02
0.13953488372093	4.08E-02	0.29266496740691
0.186046511627907	5.45E-02	0.292643863343575
0.232558139534884	6.81E-02	0.292609073956392
0.27906976744186	8.17E-02	0.29255718382224
0.325581395348837	9.53E-02	0.292484783306031
0.372093023255814	0.108877163305195	0.292388471068377
0.418604651162791	0.122473864685335	0.292264857023285
0.465116279069767	0.136064116196085	0.29211056574166
0.511627906976744	0.149646412840909	0.291922240295042
0.558139534883721	0.163219093999381	0.291696546532452
0.604651162790698	0.176780344594306	0.291430177781508
0.651162790697674	0.190328196487166	0.291119859963055
0.697674418604651	0.203860530120822	0.290762357106534
0.744186046511628	0.217375076427782	0.290354477251073
0.790697674418605	0.230869419021581	0.289893078714979
0.837209302325581	0.244340996687946	0.289375076713835
0.883720930232558	0.257787106191466	0.288797450304836
0.930232558139535	0.271204905412356	0.288157249632385
0.976744186046512	0.284591416826707	0.287451603447226
1.02325581395349	0.297943531342233	0.286677726868684
1.06976744186047	0.31125801250007	0.285832929356802
1.11627906976744	0.324531501051565	0.284914622858451
1.16279069767442	0.337760519917253	0.283920330088774
1.2093023255814	0.350941479533369	0.28284769290674
1.25581395348837	0.364070683589275	0.281694480741069
1.30232558139535	0.377144335157058	0.280458599020422
1.34883720930233	0.39015854321241	0.27913809755961
1.3953488372093	0.403109329543567	0.277731178851562
1.44186046511628	0.415992636042723	0.276236206213128
1.48837209302326	0.428804332371888	0.274651711731331
1.53488372093023	0.441540223992646	0.272976403955581
1.58139534883721	0.45419606054671	0.271209175280602
1.62790697674419	0.466767544571598	0.269349108964433

Después se multiplican ambos lados de la ecuación por $1/(\omega c)$ para obtener:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \quad (25)$$

y si se define el operador nabla adimensional como:

$$\nabla^* = \frac{\partial}{\partial x_1^*} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2^*} \mathbf{e}_2 \quad (26)$$

se llega finalmente a la ecuación adimensionalizada:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 . \quad (27)$$

La ecuación de cantidad de movimiento viene dada por

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (28)$$

donde μ es la viscosidad dinámica y \mathbf{g} es el vector gravedad, $-g \mathbf{e}_2$, apuntando \mathbf{e}_2 en dirección vertical. Se tiene que la densidad que acompaña a la derivada material de la velocidad es constante, toma un valor de referencia y se denota ρ_0 . Por otro lado, se requiere una ecuación de estado para la densidad en el término de fuerza de cuerpo, asociado a la gravedad, la cual depende de la presión y de la temperatura. Es decir, que:

$$\rho = \rho(p, T) . \quad (29)$$

Diferenciando (29) se obtiene:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT . \quad (30)$$

Por otro lado, se definen a los coeficientes de compresibilidad isotérmica, α_{ci} , y de expansión térmica, β , como en (Çengel y Cimbala, 2014):

$$\alpha_{ci} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad \beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p .$$

Despejando las derivadas parciales se tiene:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \rho_0 \alpha_{ci} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = -\rho_0 \beta$$

y sustituyendo los resultados anteriores en (8) se llega a:

$$d\rho = \rho_0 \alpha_{ci} dp - \rho_0 \beta dT$$

$$\frac{1}{\rho_0} d\rho = \alpha_{ci} dp - \beta dT . \quad (31)$$

Tómese en cuenta que se asume que las variaciones en la temperatura y en la presión, ΔT y Δp respectivamente, son pequeñas, y en ese mismo sentido lo serán los cambios en la densidad. Ahora bien, la expresión (31) puede aproximarse por medio de cambios finitos de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta \rho = \alpha_{ci} \Delta p - \beta \Delta T \quad (32)$$

donde la diferencia de temperaturas es entre la de cualquier punto en el campo de flujo y una temperatura de referencia; es decir, $\Delta T = \Delta T_0$. El miembro izquierdo puede escribirse, a su vez, como:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\rho}{\rho_0} - 1 . \quad (33)$$

De esta forma, sustituyendo (33) en (32) se sigue que:

$$\frac{\rho}{\rho_0} - 1 = \alpha_{ci} \Delta p - \beta \Delta T_0 \quad (34)$$

y despejando la densidad de (34):

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha_{ci} \Delta p - \beta \Delta T_0) . \quad (35)$$

Sin embargo, se asume que las variaciones de densidad debidas a la presión no uniforme son muy limitadas en comparación con aquellas que se deben a los cambios de temperatura:

$$\alpha_{ci} \Delta p \ll \beta \Delta T_0$$

así que, despreciando el término de cambio de presión, (35) se reduce a:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) . \quad (36)$$

Nótese que la persistencia del término asociado a la temperatura no uniforme se debe a que, en principio, este es el mecanismo que produce la convección. Sustituyendo (36) en (28) se tiene:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) \mathbf{g} . \quad (37)$$

Observando el miembro derecho de la ecuación,

$$-\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) \mathbf{g} \quad (38)$$

se tiene que la presión puede expresarse con

$$p = \bar{p} + \Delta p \quad (39)$$

como se indica en (Gershuni y Zhukhovitskii, 1976), donde \bar{p} es la presión hidrostática con la densidad de referencia y Δp es el cambio de la presión respecto a \bar{p} . Sustituyendo (39) en (38) se tiene:

$$-\nabla(\bar{p} + \Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0(1 - \beta \Delta T_0) \mathbf{g} \quad (40)$$

y desarrollando los paréntesis en (40) se llega a:

$$-\nabla \bar{p} - \nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \beta \Delta T_0 \mathbf{g} . \quad (41)$$

Ahora bien, la presión hidrostática varía únicamente con la dirección vertical de la siguiente manera:

$$\Delta \bar{p} = -\rho_0 g \Delta x_2 \quad (42)$$

$$\frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x_2} = -\rho_0 g$$

$$\lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} -\rho_0 g$$

$$\frac{d\bar{p}}{dx_2} = -\rho_0 g . \quad (43)$$

El gradiente de la presión hidrostática viene dado por

$$\nabla \bar{p} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2$$

pero como no tiene cambios en la primera dirección, y considerando el resultado en (43), se tiene que:

$$\nabla \bar{p} = \frac{d\bar{p}}{dx_2} \mathbf{e}_2 = -\rho_0 g \mathbf{e}_2 = \rho_0 \mathbf{g} . \quad (44)$$

Sustituyendo (44) en (41) se sigue:

$$-\rho_0 \mathbf{g} - \nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \beta \Delta T_0 \mathbf{g}$$

para llegar finalmente, después de simplificar términos semejantes, a:

$$-\nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \beta \Delta T_0 g \mathbf{e}_2 . \quad (45)$$

Con (45), la ecuación (37) se hace:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla(\Delta p) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 g \beta \Delta T_0 \mathbf{e}_2$$

y si se divide entre ρ_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla(\Delta p) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g \beta \Delta T_0 \mathbf{e}_2. \quad (46)$$

donde ν es la viscosidad cinemática. La ecuación (46), las suposiciones consideradas y el proceso para llegar a ella se conocen como la aproximación de Boussinesq.

Conviene efectuar el proceso de adimensionalización en cada una de las direcciones espaciales, así que en la primera se tiene:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right). \quad (47)$$

Incorporando las variables adimensionales, (47) se hace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u_1^* \omega c)}{\partial(t^*/\omega)} + u_1^* \omega c \frac{\partial(u_1^* \omega c)}{\partial(x_1^* c)} + u_2^* \omega c \frac{\partial(u_1^* \omega c)}{\partial(x_2^* c)} = \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial(x_1^* c)} + \nu \left(\frac{\partial^2(u_1^* \omega c)}{\partial(x_1^* c)^2} + \frac{\partial^2(u_1^* \omega c)}{\partial(x_2^* c)^2} \right) \end{aligned}$$

y al extraer los valores constantes de las derivadas parciales, además de simplificar y factorizar:

$$\omega^2 c \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} \right) = -\frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1^*} + \frac{\nu \omega}{c} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}} \right)$$

para posteriormente multiplicar ambos miembros por $1/(\omega^2 c)$, obteniendo:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial x_2^*} = -\frac{1}{\rho_0 \omega^2 c^2} \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x_1^*} + \frac{\nu}{\omega c^2} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}} \right). \quad (48)$$

Al inspeccionar los términos del miembro derecho de (48), se tiene en el que está asociado a la presión que las constantes pueden introducirse a la derivada parcial, es decir:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 \omega^2 c^2} \right)$$

donde surge la presión adimensional, siendo la escala el producto de la densidad media con el cuadrado de la frecuencia de oscilación y el cuadrado de la cuerda, resultando entonces:

$$-\frac{\partial}{\partial x_1^*} \left(\frac{\Delta p}{\rho_0 \omega^2 c^2} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*}. \quad (49)$$

Para el otro término en la porción derecha de (48), se considera la definición del número de Reynolds:

$$Re = \frac{u_\infty c}{\nu} \quad (50)$$

donde u_∞ es la velocidad de corriente libre, así como la frecuencia adimensional:

$$\omega^* = \frac{\omega c}{u_\infty} \quad (51)$$

y se nota que en el coeficiente del término hay elementos comunes a los dos parámetros. Se efectúa entonces la siguiente manipulación algebraica:

$$\frac{\nu}{\omega c^2} = \frac{\nu}{\omega c^2} \frac{u_\infty}{u_\infty} = \frac{\nu}{u_\infty c} \frac{u_\infty}{\omega c} = \frac{1}{Re} \frac{1}{\omega^*} .$$

De tal manera, el término en cuestión puede escribirse como sigue:

$$\frac{\nu}{\omega c^2} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}} \right) = \frac{1}{Re \omega^*} \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^{*2}} \right) . \quad (52)$$

Adicionalmente, si se define el operador laplaciano adimensional como:

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{*2}} \quad (53)$$

al incorporar (53) en (52) y usando (49), el miembro derecho de la ecuación adimensionalizada termina siendo:

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re \omega^*} \nabla^{*2} u_1^* . \quad (54)$$

Con lo anterior, al sustituir (54) en (48), la ecuación adimensionalizada en la primera dirección se escribe:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* u_1^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_1^*} + \frac{1}{Re \omega^*} \nabla^{*2} u_1^* . \quad (55)$$

En la segunda dirección se tiene:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) + g \beta \Delta T_0 . \quad (56)$$

El proceso de adimensionalización es muy similar al caso de la primera dimensión, salvo por el último término del miembro derecho, asociado a la gravedad. Sustituyendo con las variables adimensionales y extrayendo valores constantes de las derivadas parciales se llega a:

$$\omega^2 c \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} \right) = -\frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2^*} + \frac{\nu \omega}{c} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^{*2}} \right) + g \beta \Delta T_a \Delta T_0^* .$$

Multiplicando toda la ecuación por $1/(\omega^2 c)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = \\ - \frac{1}{\rho_0 \omega^2 c^2} \frac{\partial \Delta p}{\partial x_2^*} + \frac{\nu}{\omega c^2} \left(\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^{*2}} \right) + \frac{g \beta \Delta T_a}{\omega^2 c} \Delta T_0^* . \end{aligned} \quad (57)$$

Ahora bien, observando el coeficiente del último término,

$$\frac{g \beta \Delta T_a}{\omega^2 c} \quad (58)$$

se observan elementos comunes al número de Rayleigh, que está definido como:

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T_a c^3}{\alpha_T \nu} . \quad (59)$$

donde α_T es la difusividad térmica. Se propone entonces completarlo al multiplicar (58) por $(c^3 \nu \alpha) / (c^3 \nu \alpha)$ y reordenar los factores de la siguiente manera:

$$\frac{g \beta \Delta T_a c^3 \nu \alpha_T}{\omega^2 c c^3 \nu \alpha_T} = \frac{g \beta \Delta T_a c^3}{\nu \alpha_T} \frac{\nu \alpha_T}{\omega^2 c c^3} = Ra \frac{\nu \alpha_T}{\omega^2 c^2 c^2} .$$

Con esta manipulación de términos se encuentra el número de Rayleigh. La presencia de la difusividad térmica sugiere la aparición del número de Prandtl, que se define como:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_T} . \quad (60)$$

Para completarlo, se multiplica el coeficiente por ν/ν , obteniendo:

$$Ra \frac{\nu \alpha_T}{\omega^2 c^2 c^2} \frac{\nu}{\nu} = Ra \frac{\alpha_T}{\nu} \frac{\nu^2}{\omega^2 c^2 c^2} = Ra \frac{1}{Pr} \frac{\nu^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 c^2} .$$

Con la aparición de los números de Rayleigh y de Prandtl, queda manipular el resto de los factores. Se identifican elementos comunes al número de Reynolds y a la frecuencia adimensional, elevados al cuadrado, faltando únicamente la velocidad de corriente libre. En ese sentido, se propone multiplicar el coeficiente por u_∞^2/u_∞^2 como sigue:

$$\frac{Ra \nu^2}{Pr} \frac{1}{c^2} \frac{1}{\omega^2 c^2} \frac{u_\infty^2}{u_\infty^2} = \frac{Ra}{Pr} \frac{\nu^2}{u_\infty^2 c^2} \frac{u_\infty^2}{\omega^2 c^2} = \frac{Ra}{Pr} \frac{1}{Re^2} \frac{1}{\omega^{*2}} .$$

Tomando en cuenta lo anterior, puede concluirse que el coeficiente del término de flotación es:

$$\frac{g \beta \Delta T_a}{\omega^2 c} = \frac{Ra}{(Re \omega^*)^2 Pr} . \quad (61)$$

Así entonces, sustituyendo (61) en (57), y usando los operadores adimensionales (26) y (53), la ecuación adimensional en la segunda dirección es:

$$\frac{\partial u_2^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* u_2^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_2^*} + \frac{1}{Re \omega^*} \nabla^{*2} u_2^* + \frac{Ra}{(Re \omega^*)^2 Pr} \Delta T_0^* . \quad (62)$$

Finalmente, con (55) y (62) se puede formular la ecuación de conservación de cantidad de movimiento adimensional en su forma vectorial, siendo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re \omega^*} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ra}{(Re \omega^*)^2 Pr} \Delta T_0^* \mathbf{e}_2 . \quad (63)$$

La ecuación de la energía viene dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha_T \nabla^2 T \quad (64)$$

donde no hay generación de calor. Al desarrollar los operadores diferenciales se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) \quad (65)$$

y al incorporar las variables adimensionales:

$$\frac{\partial(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(t^*/\omega)} + u_1^* \omega c \frac{\partial(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_1^* c)} + u_2^* \omega c \frac{\partial(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_2^* c)} = \alpha_T \left(\frac{\partial^2(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_1^* c)^2} + \frac{\partial^2(\Delta T_a T^* + T_\infty)}{\partial(x_2^* c)^2} \right) .$$

Extrayendo valores fijos de las derivadas parciales y eliminando las derivadas de valores constantes:

$$\omega \Delta T_a \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} \right) = \alpha_T \frac{\Delta T_a}{c^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right) .$$

Al multiplicar ambos miembros por $1/(\omega \Delta T_a)$:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} = \frac{\alpha_T}{\omega c^2} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right) \quad (66)$$

Si se observa con detenimiento el coeficiente que acompaña al miembro derecho de la ecuación (66), se identifica al numerador de la frecuencia adimensional, al tiempo que la difusividad térmica sugiere la presencia del número de Prandtl. Para completar estos parámetros, conviene en principio reescribir el coeficiente de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\omega c^2}{\alpha_T} \right)^{-1} = \left(c \frac{\omega c}{\alpha_T} \right)^{-1}$$

para multiplicar posteriormente por u_∞/u_∞ y por ν/ν :

$$\left(\frac{\omega c u_\infty}{\alpha_T u_\infty} \right)^{-1} = \left(u_\infty c \frac{\omega c}{u_\infty} \frac{1}{\alpha_T} \frac{\nu}{\nu} \right)^{-1} = \left(\frac{u_\infty c}{\nu} \frac{\omega c}{u_\infty} \frac{\nu}{\alpha_T} \right)^{-1}$$

donde, además de los parámetros previamente mencionados, se identifica al número de Reynolds. De esta forma:

$$\left(\frac{u_\infty c}{\nu} \frac{\omega c}{u_\infty} \frac{\nu}{\alpha_T} \right)^{-1} = \left(Re \omega^* Pr \right)^{-1} = \frac{1}{Re \omega^* Pr} . \quad (67)$$

Al sustituir (67) en (66) se tiene:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u_1^* \frac{\partial T^*}{\partial x_1^*} + u_2^* \frac{\partial T^*}{\partial x_2^*} = \frac{1}{Re \omega^* Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right)$$

y haciendo uso de (26) y (53), la ecuación de la energía puede escribirse en términos adimensionales como:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* T^* = \frac{1}{Re \omega^* Pr} \nabla^{*2} T^* . \quad (68)$$