Nº 10 (Serie)

MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Profs.: Ramón Cervantes Beltrán, Víctor Porras Silva y Luis Ferrer A.

SERIE II

1.- USANDO LA NOTACION INDICE, PROBAR LAS SIGUIENTES RELACIONES:

a) $\underline{U} \times \underline{V} = -\underline{V} \times \underline{U}$

$\underline{U} \times \underline{V} = u_j v_k E_{jkl} \underline{i}_l$ Según la ecuación (1.7.7) y donde E_{jkl} es el símbolo de permutación.

pero $E_{jkl} = -E_{kjl}$ Por las propiedades del símbolo de permutación.

Por lo tanto: $\underline{U} \times \underline{V} = u_j v_k (-E_{kjl}) \underline{i}_l = -v_k u_j E_{kjl} \underline{i}_l = -\underline{V} \times \underline{U}$ l.q.d.d.

b) $(\underline{S} \times \underline{T}) \cdot (\underline{U} \times \underline{V}) = (\underline{S} \cdot \underline{U})(\underline{T} \cdot \underline{V}) - (\underline{S} \cdot \underline{V})(\underline{T} \cdot \underline{U})$

$s_i t_j E_{ijk} \underline{i}_k \cdot u_l v_m E_{lmn} \underline{i}_n = s_i u_i t_j v_j - s_i v_i t_j u_j$ (Según las ecuaciones 1.7.7 y 1.6.10)

$s_i t_j u_l v_m E_{ijk} E_{lmk} = s_i u_i t_j v_j - s_i v_i t_j u_j$

Analizemos el primer miembro:

Trataremos de simplificar el producto de los símbolos de permutación:

$E_{ijk} E_{lmk} = E_{ij1} E_{lm1} + E_{ij2} E_{lm2} + E_{ij3} E_{lm3}$ De acuerdo a la definición 1.5.2

Analizando el desarrollo de los símbolos de permutación, podemos observar, que de acuerdo a la definición 1.5.5, y para que estos símbolos puedan tomar un valor diferente de cero, los únicos valores posibles que pueden tomar los subíndices i, j, l, m, serán:

$$E_{ij1}\ E_{lm1} + E_{ij2}\ E_{lm2} + E_{ij3}\ E_{lm3}$$

$$E_{231}\ E_{231} \quad E_{132}\ E_{132} \quad E_{123} E_{123}$$

$$E_{321}\ E_{321} \quad E_{312}\ E_{312} \quad E_{213} E_{213}$$

De ésto, vemos que analizando los 2 desarrollos anteriores, en ambos casos, se cumple que:

$i = l$
$j = m$ Y que para cada sumando, el resultado es (+1), SIENDO EN TODOS LOS DEMAS CASOS, IGUAL A CERO.

Pero además, no es ésa la única permutación posible de los subíndices; las otras posibilidades pueden ser las que permuten los subíndices según se muestra a continuación:

$$E_{23}\ E_{23} + E_{13}\ E_{13} + E_{12}\ E_{12}$$

$$E_{32}\ E_{32} + E_{31}\ E_{31} + E_{21}\ E_{21}$$

De aquí, observamos que si analizamos de nuevo, en ambos casos se cumple que:

$j = l$
$i = m$ Y que para cada sumando, el resultado es (−1)

siendo también, como en el caso anterior, igual a cero si no se cumplen las condiciones dadas.

Ahora bien, qué símbolo de los definidos hasta aquí, durante el transcurso del semestre, cumplirá con las condiciones impuestas antes?

De la definición (1.5.4) vemos que la DELTA DE KRONECKER satisface los requerimientos, quedando, para ambos casos:

$$(\delta_{il}\,\delta_{jm}) \quad y \quad (-\delta_{jl}\,\delta_{im})$$

2227

Por lo tanto, la expresión finalquedará: $E_{ijk}E_{lmk} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im})$

Sustituyendo la expresión anterior en nuestra ecuación, se tendrá:

$$s_i t_j u_l v_m(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}) = s_i u_i t_j v_j - s_i v_i t_j u_j$$

$$s_i t_j u_l v_m \delta_{il}\delta_{jm} - s_i t_j u_l v_m \delta_{jl}\delta_{im} = s_i u_i t_j v_j - s_i v_i t_j u_j$$

Cuando se satisfacen las condiciones para que tengan sentido las Deltas de Kronecker, se verifica que:

$$s_i t_j u_i v_j - s_i t_j u_j v_i = s_i u_i t_j v_j - s_i v_i t_j u_j \qquad \text{l.q.d.d.}$$

c) $\text{rot}(\text{rot } \underline{v}) = \text{grad. div. } \underline{v} - \nabla^2 \underline{v}$ Analizando el primer miembro:

$$\text{rot } (\text{rot } \underline{V}) = \text{rot } \underline{U} = E_{ijk}\frac{\partial U_i}{\partial \chi_j}\, \underline{i}_k$$

donde: $\underline{U} = \text{rot } \underline{V} = E_{lmn}\dfrac{\partial v_l}{\partial \chi_m}\, \underline{i}_n$ y sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\text{rot } (\text{rot } \underline{V}) = \text{rot } \underline{U} = E_{ijk}\frac{\partial}{\partial \chi_j}\left(E_{lmi}\frac{\partial v_l}{\partial \chi_m}\right)\underline{i}_k = E_{ijk}E_{lmi}\frac{\partial^2 v_l}{\partial \chi_j \partial \chi_m}\,\underline{i}_k$$

Sustituyendo el producto de los símbolos de permutación por la expresión encontrada y demostrada en el problema anterior:

$$\text{rot rot } \underline{V} = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\frac{\partial^2 v_l}{\partial \chi_j \partial \chi_m}\,\underline{i}_k$$

Haciendo que las Deltas de Kronecker tengan sentido, se obtiene:

$$\text{rot rot } \underline{V} = \frac{\partial^2 v_j}{\partial \chi_j \partial \chi_k}\,\underline{i}_k - \frac{\partial^2 v_l}{\partial \chi_j \cdot \partial \chi_j}\,\underline{i}_l = \frac{\partial}{\partial \chi_k}\,\frac{\partial v_j}{\partial \chi_j}\,\underline{i}_k - \frac{\partial^2 v_l}{\partial \chi_j \partial \chi_j}\,\underline{i}_l$$

Teniendo en cuenta que: $\underline{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial \chi_k}\,\underline{i}_k$ y $\underline{V} = V_l \underline{i}_l$ se concluye:

$$\text{rot rot } \underline{V} = \underline{\nabla}(\text{ div } \underline{V}) - \nabla^2 \underline{V} = \text{grad. div. } \underline{V} - \nabla^2 \underline{V}$$

2.- DETERMINAR:

a) Los vectores de posición de los puntos A, B y C

$$\underline{OA} = \underline{a} = 2\underline{i}_2 + 2\underline{i}_3$$

$$\underline{OB} = \underline{b} = 4\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2$$

$$\underline{OC} = \underline{c} = \underline{i}_1 + 2\underline{i}_3$$

b) El vector que une los puntos A y B y su tamaño.

Determinaremos este vector por una suma de vectores.

$$\underline{AC} = (1-0)\,\underline{i}_1 + (0-2)\,\underline{i}_2 + (2-2)\,\underline{i}_3 = \underline{i}_1 - 2\underline{i}_2$$

$$\underline{CB} = (4-1)\,\underline{i}_1 + (2-0)\,\underline{i}_2 + (0-2)\,\underline{i}_3 = 3\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2 - 2\underline{i}_3$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{AB} = \underline{d} = \underline{AC} + \underline{CB} = (\underline{i}_1 - 2\underline{i}_2) + (3\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2 - 2\underline{i}_3) = 4\underline{i}_1 - 2\underline{i}_3$$

$$|\underline{AB}| = |\underline{d}| = (\underline{d} \cdot \underline{d})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4.47$$

c) La distancia del origen al triángulo ABC

Efectuémoslo de acuerdo al siguiente razonamiento:

Conocida la normal al plano cuyo vector es $\underline{R} = (A, B, C)$ y el vector de posición de un punto cualesquiera del plano $\underline{V}p = (x_{p1}, x_{p2}, x_{p3})$ que sea conocido, al considerar otro vector de posición de un punto cualquiera del plano $\underline{V} = (x_1, x_2, x_3)$; el vector $\underline{V} - \underline{V}_p$ debe estar contenido en el plano y ser, por lo tanto, perpendicular a la normal al mismo.

$$(x_j \underline{i}_j - (x_p)_k \underline{i}_k) \cdot r_l \underline{i}_l = 0$$

$$x_j r_l \underline{i}_j \cdot \underline{i}_l - (x_p)_k r_l \underline{i}_k \cdot \underline{i}_l = {}_j x_l r \delta_{jl} - (x_p)_k r_l \delta_{kl} = x_l r_l - (x_p)_l r_l = 0$$

$$\Longrightarrow \quad r_l \left(x_l - (x_p)_l \right) = 0$$

Que es la ecuación del plano en forma escalar, y que pasa por el punto de coordenadas $(x_p)_l$

Si queremos ahora conocer la distancia de este plano a un punto P_d $(x_{d_1}, x_{d_2}, x_{d_3})$, trazamos el segmento dirigido del punto P_p $(x_{p_1}, x_{p_2}, x_{p_3})$ al punto P_d.

La distancia perpendicular d, es igual a la proyección del segmento dirigido $\underline{P_p P_d}$ sobre el vector $\underline{R}$ perpendicular al plano:

$$P_p P_d = \left[(x_d)_m - (x_p)_m \right] \underline{i}_m$$

$$d = \mathrm{Proy}_{\underline{r}}\, P_p P_d = \frac{\underline{r} \cdot P_p P_d}{|\underline{r}|} = \frac{r_l \underline{i}_l \cdot \left[(x_d)_m - (x_p)_m \right] \underline{i}_m}{(\underline{r} \cdot \underline{r})^{1/2}} = \frac{r_l \left[(x_d)_l - (x_p)_l \right]}{(r_l r_l)^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow \quad d = \mathrm{Proy}_{\underline{r}}\, \underline{P_p P_d} = \frac{r_l \left[(x_d)_l - (x_p)_l \right]}{(r_l r_l)^{1/2}}$$

Desarrollando la ecuación anterior, llegamos a la expresión que nos da la distancia buscada.

$$d = \frac{r_l (x_d)_l - r_l (x_p)_l}{(r_l r_l)^{1/2}}$$

donde $(x_p)_l$ son las coordenadas de un punto cualquiera conocido del plano, $(x_d)_l$ son las coordenadas del punto al que nosotros queremos calcular la distancia, y r_l son las componentes del vector normal.

$$d = \frac{A x_{d_1} + B x_{d_2} + C x_{d_3} - (A x_{p_1} + B x_{p_2} + C x_{p_3})}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Sustituyendo simplemente el punto $P_d(0,0,0)$ y $P_p(0,2,2)$

$$d = \frac{-4(0) - 2(0) - 8(0) - \left[(-4)(0) + (-2)(2) + (-8)(2) \right]}{\pm \sqrt{4^2 + 2^2 + 8^2}} = \frac{4 + 16}{\pm \sqrt{16 + 4 + 64}} = \frac{20}{\sqrt{84}}$$

La distancia d es positiva si el punto cualquiera conocido del plano se encuentra del lado del plano hacia donde apunta el vector normal. A esta región del espacio se le llama positiva. Ser-á negativa en caso contrario. Esta es la razón del doble signo en el denominador de la expresión.

d) El área del triángulo ABC y sus ángulos internos.

El módulo del producto cruz nos proporciona el área del triángulo ABC.

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = -4\underline{i}_1 - 2\underline{i}_2 - 8\underline{i}_3$$

$$|\underline{AB} \times \underline{AC}| = \sqrt{16 + 4 + 64} = \sqrt{84} = 9.18$$

Los -ángulos internos los obtendremos de la definición de producto escalar.

$$\measuredangle CAB = (\underline{AC}, \underline{AB}) \qquad \cos(\underline{AC}, \underline{AB}) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\underline{AC}|\ |\underline{AB}|}$$

$$\underline{AC} \cdot \underline{AB} = (1)(4) + (-2)(0) + (0)(-2) = 4$$

$$|\underline{AC}| = (\underline{AC} \cdot \underline{AC})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 + 4} = 2.236$$

$$\cos(\underline{AC}, \underline{AB}) = \frac{4}{(2,236)(4.47)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\measuredangle(\underline{AC}, \underline{AB}) = \measuredangle CAB = \cos^{-1}(0.4) = 66.4° = 66°25'$$

Calculemos ahora el ángulo CBA.

$$\measuredangle CBA = (-\underline{CB}, -\underline{AB}) \qquad \cos(-\underline{CB}, -\underline{AB}) = \frac{CB \cdot AB}{|CB|\ |AB|}$$

$$\underline{CB} \cdot \underline{AB} = (3)(4) + (2)(0) + (-2)(-2) = 12 + 4 = 16$$

$$|\underline{CB}| = (\underline{CB} . \underline{CB})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9 + 4 + 4} = \sqrt{17} = 4.125$$

$$\cos(-\underline{CB}, -\underline{AB}) = \frac{16}{(4.125)(4.47)} = \frac{16}{18.42} = 0.87$$

$$\measuredangle CBA = \measuredangle(-\underline{CB}, -\underline{AB}) = \cos^{-1}(0.87) = 29.8° = 29°48'$$

Calculemos ahora el ángulo BCA

$$\measuredangle BCA = (\underline{CB}, -\underline{AC}) \qquad \cos(\underline{CB}, -\underline{AC}) = \frac{CB \cdot AC}{|CB|\ |AC|}$$

$$\underline{CB} \cdot \underline{AC} = (3)(1) + (2)(-2) + (-2)(0) = 3 - 4 = -1$$

$$\cos(\underline{CB}, -\underline{AC}) = -\frac{-1}{(4.125)(2.236)} = \frac{1}{9.22} = 0.1085$$

$$\measuredangle BCA = \measuredangle(\underline{CB}, -\underline{AC}) = \cos^{-1}(0.1085) = 83.78° = 83°47'$$

Comprobemos:

$$\begin{aligned} \measuredangle CAB &= 66°\ 25' \\ \measuredangle CBA &= 29°\ 48' \\ \measuredangle BCA &= \underline{83°\ 47'} \\ & \quad 180°\ 00' \end{aligned}$$

e) Usando - El vector perpendicular a la línea AB y que pasa por el punto C.

Usando el producto vectorial, obtenemos:

$$\text{Proy. ortog. de } \underline{AC} \text{ sobre } \underline{AB} = \frac{\underline{AC} \times \underline{AB}}{|\underline{AB}|}$$

$$\underline{AC} \times \underline{AB} = -\underline{AB} \times \underline{AC} = 4\underline{i}_1 + 2\underline{i}_2 + 8\underline{i}_3$$

$$\longrightarrow \text{Proy. ortog. de } \underline{AC} \text{ sobre } \underline{AB} = \frac{4}{\sqrt{20}}\underline{i}_1 + \frac{2}{\sqrt{20}}\underline{i}_2 + \frac{8}{\sqrt{20}}\underline{i}_3$$

APENDICE:

En el inciso c) decíamos que: "conocida la normal al plano, cuyo vector tenía por números directores (A,B,C)...." y empezábamos a hacer nuestro desarrollo. Sin embargo, en el cuerpo de la solución del problema, no aparece la forma en que se obutuvo dicha normal. El proceso es el siguiente:

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = (4\underline{i}_1 - 2\underline{i}_3) \times (\underline{i}_1 - 2\underline{i}_2)$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}_1(-4) - \underline{i}_2(2) + \underline{i}_3(-8)$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = -4\underline{i}_1 - 2\underline{i}_2 - 8\underline{i}_3$$