

Para Reserva

BIBLIOTECA CONJUNTA DEL INSTITUTO
DE INGENIERIA Y DE LA DIVISION
* SEI. 13 1994 *
DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

CAP. II y III.

DOCUMENTO CON FALLAS DE ORIGEN

Ramón Cervantes Beltrán

Víctor Porras Silva.

BIBLIOTECA DE LAS DIVISIONES DE
INVESTIGACION Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE LA FACULTAD DE
INGENIERIA



DEPFI

MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Victor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 2

DEFORMACION

2.1. Introducción

Es un hecho experimental el que todos los cuerpos construidos con alguna substancia natural/sintética cuando se les somete a cargas externas sufren cambios de forma y se mueven. Es el propósito de este capítulo desarrollar las bases necesarias que permitan medir el movimiento y los cambios geométricos de los puntos de un medio continuo sin importar el tipo de substancia y las fuerzas en cuestión.

El desarrollo de este capítulo conducirá a la obtención de un modelo matemático que exprese las características físicas del problema. En un principio se manejarán fenómenos de la física y su representación matemática con sus respectivas manipulaciones para construir el modelo.

La observación, muestra a un cuerpo que posee un cierto volumen con una forma determinada. Desde el punto de vista matemático al cuerpo anterior se le identificará por un conjunto de

puntos denominados puntos materiales que forman un volumen \mathcal{V} limitado por una superficie cerrada \mathcal{S} . Es conveniente hacer énfasis en la existencia de puntos interiores y de puntos frontera que forman la superficie \mathcal{S} . El conjunto de puntos materiales interiores y de frontera forman una región B y se expresará con la ecuación

$$\text{Región } B = \mathcal{V} + \mathcal{S} \quad (2.1.1.)$$

En lo que sigue el cuerpo queda representado por la ec 2.1.1. y el movimiento y el cambio de forma de dicha región representará al movimiento y al cambio de forma del cuerpo.

2.2 Sistemas de Referencia.

La localización de los puntos de la región B se hará en base a un sistema de referencia cartesiano.

Definición 2.2.1. A la posición que guardan todos los puntos materiales en un instante dado se llama configuración.

Entonces, la región en un instante dado está dada por la configuración correspondiente.

El movimiento y el cambio de forma ^{que} sufre un cuerpo de un tiempo t_1 a otro tiempo t_n se podrá conocer si se conocen las configuraciones correspondientes a cualquier tiempo t comprendido entre t_1 y t_n es decir, $t_1 \leq t \leq t_n$. La fig 2.2.1 muestra en forma esquemática el movimiento y cambio de forma del cuerpo B en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_n$.

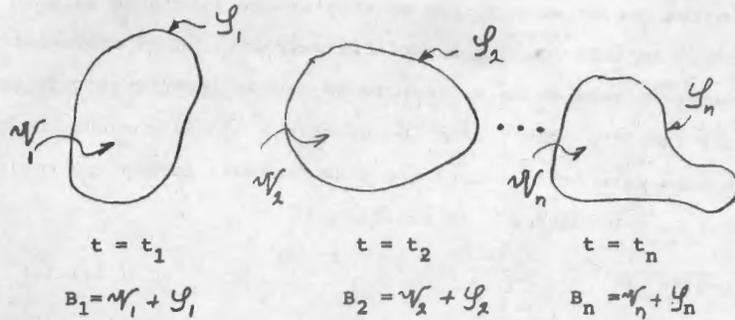


fig 2.2.1 Esquema para el movimiento y cambio de forma del cuerpo B.

Si se conocen las leyes que permitan pasar de la configuración B a la configuración B₂, el proceso se repetiría con las configuraciones subsiguientes hasta llegar a la configuración final B_n. En este capítulo únicamente se desarrollarán las leyes que relacionan a dos configuraciones sucesivas. A la configuración primera se le llamará configuración no deformada y a la sucesiva se le llamará configuración deformada.

A los puntos que constituyen la configuración no deformada se denominan puntos materiales y su localización se hará mediante un sistema de referencia cartesiano denominado material o Lagrangiano. Todas las variables medidas en el sistema lagrangiano se representarán con letras mayúsculas.

A los puntos que constituyen la configuración deformada se denominan puntos espaciales y su localización se hará con otro sistema de referencia cartesiano denominado sistema espacial o euleriano.

Así mismo la representación de las cantidades en este sistema

se hará mediante letras minúsculas. La fig 2.2.2 muestra las definiciones anteriores.

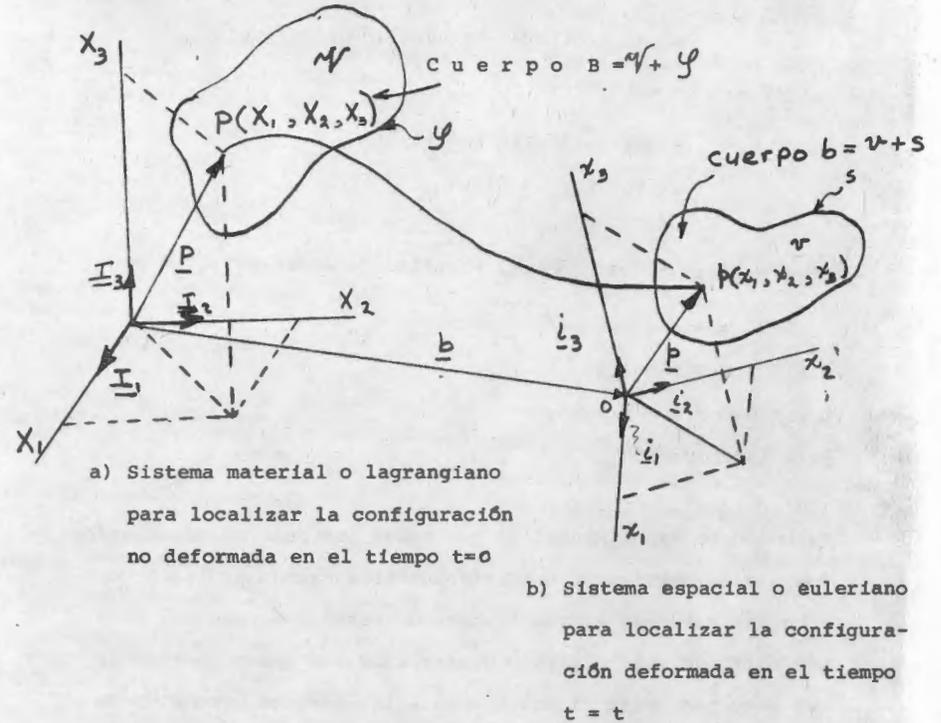


Fig 2.2.2 Sistemas de referencia en dos configuraciones sucesivas.

De acuerdo con la terminología anterior se podrá definir a la deformación y al movimiento como el transporte de los puntos espaciales en un tiempo t. La expresión matemática de lo anterior será

$$x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t) = x_k(X_k, t) \quad (2.2.1)$$

la expresión inversa de lo anterior será

$$x_k = X_k(x_1, x_2, x_3, t) = X_k(x_k, t) \quad (2.2.2)$$

en notación vectorial simbólica las ecs. quedarán expresadas como

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{(b)} \\ \underline{x} = \underline{x}(X, t) & \underline{X} = \underline{X}(x, t) \end{array} \quad (2.2.3)$$

La ec 2.2.3a. representa un mapeo de puntos de la región B a la región b y la ec 2.2.3b mapea puntos de la región b a la región B. En lo que sigue se supondrá que el mapeo indicado en las ecs. 2.2.3 es monovaluado y las derivadas parciales respecto a sus argumentos son continuas hasta el orden deseado. Además se supondrá que la ec 2.2.1 es la inversa única de la ec 2.2.2. y viceversa.

La hipótesis anterior se conoce como el axioma de continuidad en la teoría de medios continuos y expresa el hecho ^{de} que la materia no se destruye ni se genera y además es impenetrable. Lo anterior es equivalente a asegurar que una región de volumen finito no puede deformarse en otra región con volumen nulo o volumen infinito y que dos o más puntos ^{de la configuración} no deformada no pueden estar representados por uno solo en la región deformada.

El axioma de continuidad se asegura con el teorema de la función implícita y se anuncia a continuación.

Teorema 2.2.1 Teorema de la función implícita. Si para un tiempo t las funciones $x_k(x_k, t)$

- i) Son continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad $|x_k^i - x_k| < \Delta$, del punto P

- ii) El jacobiano j de la transformación en la misma vecindad no se anule, es decir

$$j = \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_k} \right| = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.2.4)$$

entonces existe una inversa única dada por la ec 2.2.2 en una vecindad $|x_k^i - x_k| < \delta$ del punto p en el mismo tiempo t.

Ejemplo 2.2.1 La descripción euleriana del movimiento de un cuerpo dada por

$$x_1 = (2A x_1 + B)^{1/2} \quad (2.2.5a)$$

$$x_2 = Cx_2 \quad (2.2.5b)$$

$$x_3 = Dx_3 \quad (2.2.5c)$$

donde las coordenadas X_k y x_k son cartesianas y A, B, C, y D son constantes. Se pide calcular, en caso de ser posible, las ecuaciones lagrangianas del movimiento.

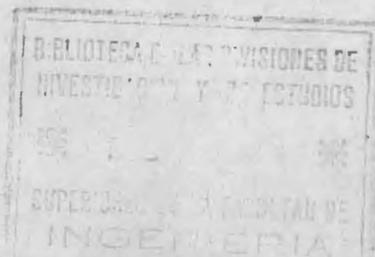
De acuerdo con el teorema de la función implícita si dada la ec

$$x_k = x_k(x_k, t) \quad (2.2.1)$$

para que exista la ecuación inversa

$$x_k = X_k(x_k, t) \quad (2.2.2)$$

se deberán cumplir los requisitos especificados en dicho teorema y son



- a) Que las funciones x_k sean monovaluadas y continuas en las vecindades de los puntos.
 Por inspección se puede asegurar que las ecs. 2.2.5 son monovaluadas siempre y cuando en la ec 2.2. 5a se especifique únicamente un solo valor ya sea el positivo o el negativo del radical y continuas en cualquier vecindad seleccionada.
- b) Las primeras derivadas parciales de las funciones x_k también deben ser continuas.

El cálculo de los elementos del gradiente de deformación $x_{k,k}$ quedará

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \frac{A}{\sqrt{2AX_1+B}} = \frac{A}{x_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial x_1}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = C \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_3} = 0$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = D$$

También por inspección se concluye que las primeras derivadas parciales $\frac{\partial x_k}{\partial X_k}$, son continuas

- b) El jacobiano de la transformación debe ser distinto de cero en la misma vecindad

$$j = \det \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_k} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A(2AX_1+B)^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}$$

$$j = ACD (2AX_1 + B)^{-1/2}$$

para que el jacobiano de la transformación sea distinto de cero se requiere que

$$A \neq 0, C \neq 0 \text{ y } D \neq 0$$

De acuerdo con lo anterior se puede asegurar la existencia de las ecuaciones Lagrangianas del movimiento y resultarán ser

- i) De la ec 2.2.5a se tiene que $X_1 = \frac{1}{2A}(x_1^2 - B)$
- ii) De la ec 2.2.5b se tiene que $X_2 = x_2 / C$
- iii) De la ec 2.2.5c se tiene que $X_3 = x_3 / D$

Entonces las ecuaciones anteriores definen el movimiento lagrangiano del cuerpo.

De acuerdo con la fig 2.2.2 se podrán escribir los vectores de posición de cualquier punto ya sea material o bien espacial mediante las expresiones

$$\underline{p} = x_k \underline{i}_k \quad \text{Vector de posición, punto material} \quad (2.2.6a)$$

$$\underline{e} = x_k \underline{i}_k \quad \text{Vector de posición, punto espacial} \quad (2.2.6b)$$

los vectores infinitesimales $d\underline{p}$ y $d\underline{e}$ se podrán obtener de las ecs 2.2.6 de la forma siguiente

$$d\underline{p} = \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_k} dx_k = dx_k \underline{i}_k \quad (2.2.7a)$$

Foundations of solid mechanics
 Y.C. Fung.
 Prentice Hall
 pag. 34.

$$d\underline{p} = \frac{\partial P}{\partial \underline{x}_k} dx_k = dx_k \underline{i}_k \quad (2.2.7b)$$

El tamaño de los vectores $d\underline{p}$ y $d\underline{p}$ se calculará mediante

$$(ds)^2 = |d\underline{p}|^2 = d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (dx_k \underline{i}_k) \cdot (dx_l \underline{i}_l) = \delta_{kl} dx_k dx_l = dx_k dx_k \quad (2.2.8a)$$

$$(ds)^2 = |d\underline{p}|^2 = d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (dx_k \underline{i}_k) \cdot (dx_l \underline{i}_l) = \delta_{kl} dx_k dx_l = dx_k dx_k \quad (2.2.8b)$$

NOTA 2.2.1. Los sistemas de referencia lagrangiano y *euleriano* se han seleccionado cartesianos y por lo tanto sus vectores base correspondientes son ortonormales. Entonces, el producto escalar

$$\underline{i}_k \cdot \underline{i}_k = \underline{i}_k \cdot \underline{i}_k = \delta_{kk} = \delta_{kk} \quad (2.2.9)$$

proporciona los cosenos directores entre los sistemas de referencia. Conviene enfatizar que el sistema de referencia lagrangiano se definió para medir una configuración no deformada y el sistema de referencia *euleriano* se definió para medir una configuración deformada, y para tener presente esta distinción, el producto escalar indicado por la ec 2.2.9 se representará por el símbolo δ_{kk} y se bautizará con el nombre de cambiador pero se operará con las reglas indicadas en el inciso 1.9, y por lo tanto el cambiador δ_{kk} es idéntico a la matriz (a_{mk}) .

De acuerdo con esta observación, si se tienen las componentes v_k de un vector medido en el sistema *euleriano*, sus componentes V_K en el sistema lagrangiano se podrán obtener de acuerdo con la expresión

$$V_K = \delta_{Kk} v_k \quad (2.2.9)$$

o bien si se conocen sus componentes V_K en el sistema lagrangiano sus correspondientes en el sistema *euleriano* se calcularán mediante

$$v_k = \delta_{Kk} V_K \quad (2.2.10)$$

Además la ec 1.9.17 conduce a las relaciones siguientes

$$\delta_{Kk} \delta_{Lk} = \delta_{KL} \quad (2.2.11a)$$

$$\delta_{Kk} \delta_{Kl} = \delta_{kl} \quad (2.2.11b)$$

Es de observarse la diferencia que existe entre las deltas de Kronecker δ_{KL} o δ_{kl} y los cambiadores δ_{Kk} .

2.3 Gradientes de deformación y Tensores de deformación (deformation).

Definición 2.3.1. Se define la notación derivada parcial de una función escalar ϕ o una vectorial U_k respecto a las variables independientes x_j mediante las expresiones

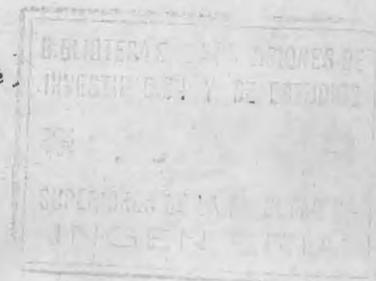
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \phi_{,j}$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = U_{k,j}$$

en caso de tenerse derivadas parciales de orden superior se escribirán como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = \phi_{,jk}$$

$$\frac{\partial^3 U_k}{\partial x_l \partial x_m \partial x_n} = U_{k,lmn} \quad \dots, \text{ etc.}$$



Las diferenciales de las ecuaciones de movimiento (ecs 2.2.1 y 2.2.2) quedarán:

$$dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_k} dX_k = x_{k,k} dX_k \quad (2.3.1a)$$

$$dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_k} dx_k = X_{k,k} dx_k \quad (2.3.1b)$$

Las cantidades $x_{k,k} = \partial x_k / \partial X_k$ y $X_{k,k} = \partial X_k / \partial x_k$ reciben el nombre de gradientes de deformación. De acuerdo con la regla de la cadena, las ecs. 2.3.1 conducen a las ecs. siguientes:

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_l} = \frac{dx_k}{dx_l} \quad \text{o bien} \quad x_{k,k} X_{k,l} = \delta_{kl} \quad (2.3.2a)$$

$$\frac{\partial X_k}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_l} = \frac{dX_k}{dX_l} \quad \text{o bien} \quad X_{k,k} x_{k,l} = \delta_{kl} \quad (2.3.2b)$$

Las ecs. 2.3.2a o 2.3.2b representan sistemas de ecuaciones algebraicas, es decir, nueve ecuaciones con nueve incógnitas.

En caso de considerar como incógnitas a los valores de $X_{k,k}$ y de acuerdo con la regla de Kramer se tendrá:

$$X_{k,k} = \frac{\text{cofactor } x_{k,k}}{j} = \frac{1}{2j} e_{KLM} e_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (2.3.3)$$

$$j = |x_{k,k}| = \frac{1}{6} e_{KLM} e_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} \quad (2.3.4)$$

Al derivar la ec. 2.3.4 se podrá obtener la identidad de Jacobi expresado como:

$$\frac{\partial j}{\partial x_{k,k}} = \text{cofactor } x_{k,k} = j X_{k,k} \quad (2.3.5)$$

Sustituyendo en las ecs. 2.2.6 las correspondiente dadas -- por las ecs. 2.3.1 se obtendrá:

$$d\underline{P} = (X_{k,k} \underline{I}_k) dx_k = \underline{c}_k dx_k \quad (2.3.6a)$$

$$d\underline{p} = (x_{k,k} \underline{i}_k) dX_k = \underline{g}_k dX_k \quad (2.3.6b)$$

En las ecs. 2.3.6 se definen en forma natural dos nuevos -- vectores base los \underline{c}_k y los \underline{g}_k de acuerdo con las expresiones.

$$\underline{c}_k = \underline{c}_k(\underline{x}, t) = X_{k,k} \underline{I}_k \quad (2.3.7a)$$

$$\underline{g}_k = \underline{g}_k(\underline{X}, t) = x_{k,k} \underline{i}_k \quad (2.3.7b)$$

Usando las ecs. 2.3.7 y las relaciones dadas por las ecs. 2.3.2 se obtendrán las expresiones inversas de las ecs. 2.3.7 quedando :

$$\underline{I}_k = X_{k,K} \underline{e}_K \quad (2.3.8a)$$

$$\underline{i}_k = X_{k,K} \underline{g}_K \quad (2.3.8b)$$

Otra forma de calcular las magnitudes de los vectores diferenciales $d\underline{p}$ y $d\underline{p}$ se obtendrá usando las ecs. (2.3.6).

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (c_{kl} dx_k) \cdot (c_{le} dx_l) \\ &= c_{kl} \cdot c_{le} dx_k dx_l = c_{kel} dx_k dx_l \quad (2.3.9a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\underline{p} \cdot d\underline{p} = (g_{kl} dX_k) \cdot (g_{le} dX_l) \\ &= g_{kl} \cdot g_{le} dX_k dX_l = g_{kel} dX_k dX_l \quad (2.3.9b) \end{aligned}$$

En las ecs. 2.3.9 se utilizan las definiciones dadas por las expresiones siguientes :

$$\begin{aligned} c_{kel} &= c_k \cdot c_l = (X_{k,K} \underline{I}_K) \cdot (X_{l,L} \underline{I}_L) \\ &= \delta_{KL} X_{k,K} X_{l,L} = X_{k,K} X_{k,L} = c_{kl} \quad (2.3.10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{kel} &= g_k \cdot g_l = (X_{k,K} \underline{i}_K) \cdot (X_{l,L} \underline{i}_L) \\ &= \delta_{KL} X_{k,K} X_{l,L} = X_{k,K} X_{k,L} = g_{kl} \quad (2.3.10b) \end{aligned}$$

Definición 2.3.2: Al elemento c_{kl} cuyos valores se calculan con la ec. 2.3.10a se le llama tensor de deformación (deformation) de Cauchy. Este tensor permite cuantificar en el sistema de referencia ^{superior} la magnitud del vector $d\underline{p}$ asociado a una configuración no deformada mediante la ec. 2.3.9a .

Definición 2.3.3. Al elemento G_{KL} cuyos valores se calculan con la ec. 2.3.10b se le llama tensor de deformación (deformation) de Green. Este tensor permite cuantificar en un sistema de referencia lagrangiano la magnitud del vector $d\underline{p}$ a una configuración deformada mediante la ec. 2.3.9b .

2.3.1 Característica tensorial de los tensores de deformación de Cauchy y de Green.

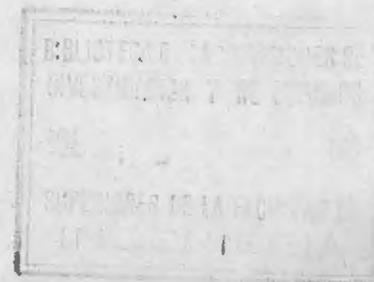
Para demostrar que una cantidad es un tensor se deberá estudiar su ley de transformación al cambiar la referencia en que se mide. En la demostración del carácter tensorial de los tensores de Cauchy y de Green se trabajará únicamente con el tensor de Green que opera en el sistema de referencia Lagrangiano. La demostración para el tensor de Cauchy será enteramente similar.

Supóngase que el sistema coordenado X_K se transforme a otro X'_k de acuerdo con la ecuación

$$X_k = X_k (X'_1, X'_2, X'_3) \quad (2.3.11)$$

Entonces la diferencial dX_k quedará

$$dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial X'_m} dX'_m \quad (2.3.12)$$



Sustituyendo la ec. 2.3.12 en la ec. 2.3.10b se tendrá :

$$(ds)^2 = G_{KL} \frac{\partial X_K}{\partial X'_M} \frac{\partial X_L}{\partial X'_N} dX'_M dX'_N = G'_{MN} dX'_M dX'_N \quad (2.3.13)$$

donde

$$G'_{MN} = G_{KL} \frac{\partial X_K}{\partial X'_M} \frac{\partial X_L}{\partial X'_N} \quad (2.3.14)$$

de segundo orden

Los tensores G'_{MN} son cantidades que se transforman de acuerdo -- con la ley de transformación especificada en la ec. 2.3.14 .

✓ Ejemplo 2.3.1 utilizando los datos del ejemplo 2.2.1 .

Calcule los conceptos siguientes :

- i) Los componentes de los vectores \underline{e}_k y \underline{G}_k
- ii) Los componentes de los tensores de Cauchy C_{kl} y de Green G_{KL}
- iii) El incremento de tamaño del vector diferencial al ocurrir la deformación, en ambos sistemas de referencia, y compruebe su equivalencia.

De acuerdo con la ec. 2.3.7a se tiene que :

$$\underline{e}_k = X_{k,k} \underline{I}_k$$

Habrá que calcular los elementos del gradiente de deformación

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \frac{x_1}{A}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial x_3} = \frac{1}{D}$$

$$\underline{e}_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \underline{I}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \underline{I}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \underline{I}_3 = \frac{x_1}{A} \underline{I}_1$$

$$\underline{e}_2 = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \underline{I}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \underline{I}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_2} \underline{I}_3 = \frac{1}{C} \underline{I}_2$$

$$\underline{e}_3 = \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \underline{I}_1 + \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \underline{I}_2 + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \underline{I}_3 = \frac{1}{D} \underline{I}_3$$

De acuerdo con la ec. 2.3.7b se tiene que:

$$\underline{G}_k = X_{k,k} \underline{i}_k$$

En el ejercicio 2.2.1 ya se calcularon los elementos del -- gradiente de deformación $X_{k,k}$, entonces

$$\underline{G}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} \dot{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \dot{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \dot{i}_3 = \frac{A}{x_1} \dot{i}_1$$

$$\underline{G}_2 = \frac{\partial x_1}{\partial X_2} \dot{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \dot{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \dot{i}_3 = C \dot{i}_2$$

$$\underline{G}_3 = \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \dot{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \dot{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \dot{i}_3 = D \dot{i}_3$$

Las componentes del tensor de Cauchy se determinan según la ec. 2.3.10a quedando su arreglo en forma matricial de la forma siguiente:

$$[C_{kl}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix}$$

El tensor de Green se construirá de acuerdo con la ec. 2.3.10b y queda:

$$[G_{KL}] = \begin{bmatrix} \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_3 \\ \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_1 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_2 & \underline{G}_3 \cdot \underline{G}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^2}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix}$$

El enunciado del inciso iii) se expresa de acuerdo con la ecuación siguiente:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = |d\underline{p}|^2 - |d\underline{P}|^2 \quad 2.3.15$$

La Ecuación 2.3.15 se puede cuantificar tanto en un sistema lagrangiano como en un sistema euleriano.

Para valuar la ec. 2.3.15 en un sistema de referencia espacial o euleriano se podrá hacer de la forma siguiente:

$$(ds)^2 = |d\underline{p}|^2 = dx_k dx_k = \delta_{kl} d\underline{x}_k d\underline{x}_l \quad (2.2.8b)$$

$$(ds)^2 = |d\underline{P}|^2 = c_{kl} dx_k dx_l = d\underline{x}^T [c_{kl}] d\underline{x} \quad (2.3.9a)$$

$$\text{donde: } d\underline{x}^T = d\underline{x}_k \dot{i}_k = [dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3]$$

$$(ds)^2 = [dx_1 \quad dx_2 \quad dx_3] \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = \frac{x_1^2}{A^2} (dx_1)^2 + \frac{(dx_2)^2}{C^2} + \frac{(dx_3)^2}{D^2} \quad (a)$$

De acuerdo con las ecs. 2.2.8b y a se tiene:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = \left(1 - \frac{x_1^2}{A^2}\right) (dx_1)^2 + \left(1 - \frac{1}{C^2}\right) (dx_2)^2 + \left(1 - \frac{1}{D^2}\right) (dx_3)^2 \quad (b)$$

Para encontrar el valor de la ec. 2.3.15 en el sistema de referencia material o lagrangiano.

$$(ds)^2 = G_{KL} dX_K dX_L = d\underline{X}^T [G_{KL}] d\underline{X} \quad (2.3.9b)$$

donde: $d\underline{X} = dX_K \underline{I}_K = [dX_1 \ dX_2 \ dX_3]$

$$(ds)^2 = [dX_1 \ dX_2 \ dX_3] \begin{bmatrix} \frac{A^2}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix} = \frac{A^2}{x_1^2} (dX_1)^2 + C^2 (dX_2)^2 + D^2 (dX_3)^2 \quad (c)$$

usando la ecs. c y d se obtiene:

$$(ds)^2 = |d\underline{P}|^2 = dX_K dX_K = \delta_{KL} dX_K dX_L \quad (2.2.8a)$$

usando las ecs. 2.2.8a y c se tendrá:

$$(ds)^2 = (ds)^2 = \left(\frac{A^2}{x_1^2} - 1\right) (dX_1)^2 + (C^2 - 1) (dX_2)^2 + (D^2 - 1) (dX_3)^2 \quad (d)$$

La forma de comprobar las ecs. b y d anteriores (cuantifican la misma cantidad pero en diferentes sistemas) se hará usando las ecuaciones 2.2.5 y 2.3.1

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_K} dX_K = \frac{A}{x_1} dX_1$$

$$dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial X_K} dX_K = C dX_2 \quad (e)$$

$$dx_3 = \frac{\partial x_3}{\partial X_K} dX_K = D dX_3$$

Sustituyendo las ecs. e en la ec. b se obtiene la ecuación siguiente:

$$(ds)^2 - (ds)^2 = \left(\frac{A^2}{x_1^2} - 1\right) (dX_1)^2 + (C^2 - 1) (dX_2)^2 + (D^2 - 1) (dX_3)^2$$

que es la ecuación d.

2.4 Tensores de deformación (Strain) y vector desplazamiento.

Observando las ecs. 2.2.8 y 2.3.9 se resume que han desarrollado dos expresiones para cuantificar el cuadrado de las magnitudes $(ds)^2 - (ds)^2$ del vector diferencial deformado y no deformado $d\underline{p}$ y $d\underline{P}$. Las dos formas corresponden a mediciones asociadas a los sistemas de referencia que se han convenido usar, es decir:

$$(ds)^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L = c_{kl} dx_k dx_l \quad (2.4.1a)$$

$$(ds)^2 = G_{KL} dX_K dX_L = \delta_{kl} dx_k dx_l \quad (2.4.1b)$$

Una medida de cambio ^{de} forma de un cuerpo se podrá cuantificar a través de la diferencia $(ds)^2 - (dS)^2$ asociada a cada punto del cuerpo.

Es de esperarse que cuando la diferencia anterior se anule - para todos los puntos del cuerpo, el movimiento que esté únicamente podrá ser de cuerpo rígido. Al cuantificar la diferencia en un mismo sistema de referencia se tendrán las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= G_{KL} dX_K dX_L - \delta_{KL} dX_K dX_L = (G_{KL} - \delta_{KL}) dX_K dX_L \\ &= 2E_{KL} dX_K dX_L \quad (\text{en el sistema lagrangiano}) \quad (2.4.2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (dS)^2 &= \delta_{kl} dx_k dx_l - c_{kl} dx_k dx_l = (\delta_{kl} - c_{kl}) dx_k dx_l \\ &= 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (\text{en el sistema euleriano}) \quad (2.4.2b) \end{aligned}$$

Debido a la igualdad de las ecs. 2.4.2a y 2.4.2b se podrá escribir:

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2E_{KL} dX_K dX_L = 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (2.4.3)$$

Donde se definen dos cantidades nuevas de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$2E_{KL} = (G_{KL} - \delta_{KL}) \quad (2.4.4)$$

$$2e_{kl} = (\delta_{kl} - c_{kl}) \quad (2.4.5)$$

Definición 2.4.1 Al elemento E_{KL} cuyos valores se calculan con la ec. 2.4.4 se le llama tensor de deformación (Strain) de Lagrange. Este tensor permite cuantificar el cambio de longitud $(ds)^2 - (dS)^2$ asociado a un punto de un cuerpo, cuando éste pasa de una configuración lagrangiana a una configuración euleriana.

Las componentes de E_{KL} están referidas a un sistema lagrangiano. El tensor de deformación de Lagrange es simétrico debido a que el tensor de Green y la delta de Kronecker también lo son.

Definición 2.4.2 Al elemento e_{kl} cuyos valores se calculan con la ec. 2.4.5 reciben el nombre de tensor de deformación (Strain) de Euler.

Este tensor permite medir el mismo cambio de longitud que el tensor de Lagrange pero en un sistema de referencia euleriano. El tensor de deformación de Euler es simétrico puesto que el tensor de Cauchy y la delta de Kronecker también lo son.

NOTA 2.4.1 Al definir los tensores de deformación de Cauchy y de Green se les asoció la palabra inglesa " deformation " y a los tensores de deformación de Lagrange y de Euler la palabra " Strain ". La razón de tal hecho se debe a que en español no existe una traducción bien definida. Desde luego que todos los tensores anteriores permiten cuantificar el cambio de forma pero cada uno lo hace con una característica especial

Para evitar confusiones se convendrá asociarle al término - tensor el nombre con que fueron bautizados y el estudiante deberá tener presente la distinción entre ellos. Así al tensor c_{kl} se le llamará tensor de deformación de Cauchy, al tensor G_{KL} se le llamará tensor de deformación de Green, al tensor E_{KL} tensor de deformación de Lagrange y al tensor e_{kl} tensor de deformación de Euler.

Usando las ecs. 2.3.1 y 2.4.3 se pueden obtener las relaciones siguientes:

$$E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.4.6a)$$

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad (2.4.6b)$$

Definición 2.4.3. Se llamará vector desplazamiento \underline{u} de un punto de un medio continuo, al vector que une a un mismo punto en dos configuraciones. El extremo inicial del vector desplazamiento se encuentra en la configuración no deformada y el extremo final en la configuración deformada.

La fig. 2.4.1 muestra el vector desplazamiento.

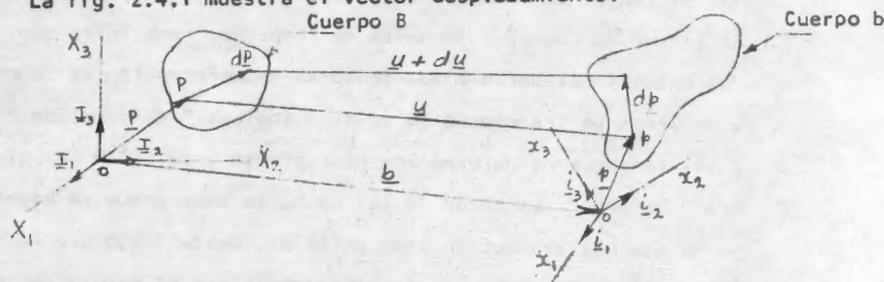


Fig. 2.4.1 Vector desplazamiento.

De la fig. 2.4.1 se puede escribir:

$$\underline{u} = \underline{p} - \underline{P} + \underline{b} = x_k \underline{i}_k - X_L \underline{I}_L + \underline{b} \quad (2.4.7)$$

Los vectores \underline{u} y \underline{b} se pueden referir a cualquier sistema de referencia, así.

$$\underline{u} = u_L \underline{I}_L = u_k \underline{i}_k \quad (2.4.8a)$$

$$\underline{b} = B_L \underline{I}_L = b_k \underline{i}_k \quad (2.4.8b)$$

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la ec. 2.4.7 por los vectores \underline{i}_k se tendrá .

$$\underline{u} \cdot \underline{i}_k = x_k \underline{i}_k \cdot \underline{i}_k - X_L \underline{I}_L \cdot \underline{i}_k + \underline{b} \cdot \underline{i}_k$$

Sustituyendo las ecs. 2.2.9 y 2.4.8 en la ecuación anterior se obtiene

$$u_k = x_k - \delta_{Lk} X_L + b_k \quad (2.4.9)$$

Si ahora se multiplica escalarmente la ec. 2.4.7 por el vector \underline{I}_K y efectuando un proceso análogo al anterior se obtiene la ecuación sig:

$$U_K = \delta_{Kl} x_l - X_K + B_K \quad (2.4.10)$$

La definición del vector de desplazamientos permite expresar a los tensores de deformación en términos de las componentes de dicho vector de acuerdo con el desarrollo presentado a continuación.

De las ecs. 2.3.7 y 2.4.7 se podrán calcular los vectores \underline{G}_k y \underline{C}_k

$$\underline{G}_k = \frac{\partial \underline{P}}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} (\underline{P} + \underline{u} - \underline{b}) = \frac{\partial \underline{P}}{\partial X_k} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial X_k} = \underline{I}_k + U_{M,k} \underline{I}_M \quad (2.4.11)$$

$$\underline{C}_k = \frac{\partial \underline{P}}{\partial X_k} - \frac{\partial}{\partial X_k} (\underline{p} - \underline{u} + \underline{b}) = \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_k} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial X_k} = \underline{i}_k - U_{M,k} \underline{i}_M \quad (2.4.12)$$

Los tensores de deformación de Cauchy se calcularán mediante las ecs. 2.3.10, 2.4.11 y 2.4.12

$$\underline{G}_{KL} = \underline{G}_K \cdot \underline{G}_L = (\underline{I}_K + U_{M,K} \underline{I}_M) \cdot (\underline{I}_L + U_{N,L} \underline{I}_N)$$

$$\underline{G}_{KL} = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + \delta_{MN} U_{M,K} U_{N,L} \quad (2.4.12)$$

$$\underline{C}_{kl} = \underline{C}_k \cdot \underline{C}_l = (\underline{i}_k - U_{M,k} \underline{i}_M) \cdot (\underline{i}_l - U_{N,l} \underline{i}_N)$$

$$\underline{C}_{kl} = \delta_{kl} - U_{k,l} - U_{l,k} + \delta_{mn} U_{m,k} U_{n,l} \quad (2.4.14)$$

Los tensores de deformación de Lagrange y Euler se calcularán usando las ecs. 2.4.4., 2.4.5, 2.4.13 y 2.4.14

$$2 \underline{E}_{KL} - \underline{G}_{KL} - \delta_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + \delta_{MN} U_{M,K} U_{N,L} \quad (2.4.15)$$

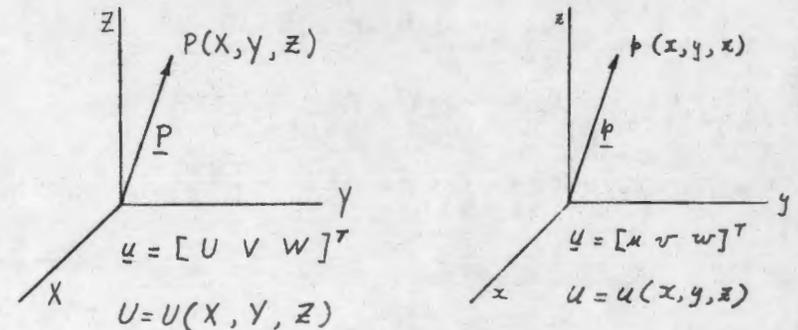
$$2 \underline{e}_{kl} - \underline{C}_{kl} - \delta_{kl} = U_{k,l} + U_{l,k} - \delta_{mn} U_{m,k} U_{n,l} \quad (2.4.16)$$

Es usual escribir a los tensores de deformación en forma matricial quedando:

$$[\underline{E}_{KL}] = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}; \quad [\underline{e}_{kl}] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4.17)$$

Debido a la simetría de los tensores \underline{E}_{KL} y \underline{e}_{kl} , de las nueve cantidades que forman a dichos tensores se requiere conocer únicamente a seis; los tres alojados sobre la diagonal principal y los otros tres serán los que están arriba o abajo de la diagonal principal.

Cuando se tiene el modelo matemático desarrollado y se busca el método de solución, es práctica usual trabajar con variables sin subíndices, según se muestra en la figura 2.4.2



a) Sistema de referencia lagrangiano.

b) Sistema de referencia euleriano.

fig. 2.4.2 Variables en los sistemas de referencia para representar los modelos matemáticos en su etapa de solución.

Al expresar las ecs. 2.4.15 y 2.4.16 en tales sistemas se tendrá:

$$2 E_{xx} = G_{xx} - 1 = 2 \frac{\partial u}{\partial X} + \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2$$

$$2E_{YY} = G_{YY} - 1 = 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$2E_{ZZ} = G_{ZZ} - 1 = 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad (2.4.18a)$$

$$2E_{XY} = 2E_{YX} = G_{XY} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$2E_{YZ} = 2E_{ZY} = G_{YZ} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2E_{ZX} = 2E_{XZ} = G_{ZX} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2e_{xx} = 1 - c_{xx} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$2e_{yy} = 1 - c_{yy} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$2e_{zz} = 1 - c_{zz} = 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad (2.4.18b)$$

$$2e_{xy} = 2e_{yx} = -c_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$2e_{yz} = 2e_{zy} = -c_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2e_{zx} = 2e_{xz} = -c_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Definición 2.4.4. Los componentes de los tensores de deformación E_{KL} y e_{kl} con subíndice repetido, es decir, los que están alojados sobre la diagonal principal en la ec. 2.4.17, reciben el nombre de deformaciones longitudinales o normales, mientras que los que están alojados -- fuera de la diagonal principal se llaman deformaciones angulares o de corte.

Ejemplo 2.4.1 Utilizando los datos del ejemplo 2.3.1

Calcule los conceptos siguientes:

- i) El tensor de deformación de Euler e_{kl} utilizando el tensor de Cauchy c_{kl} .
- ii) El tensor de deformación de Lagrange utilizando el tensor de Green G_{KL} .
- iii) El tensor de deformaciones de Euler utilizando el tensor de deformaciones de Lagrange.
- iv) El tensor de deformaciones de Lagrange utilizando el tensor de deformaciones de Euler.

De acuerdo con la ec. 2.4.5 se tiene que :

$$2e_{kl} = (\delta_{kl} - c_{kl})$$

En el ejercicio 2.3.1 ya se calculó el tensor c_{kl} , entonces

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_1^2}{\lambda^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \quad (a)$$

De acuerdo con la ec. 2.4.4 se tiene que :

$$2E_{KL} = (G_{KL} - \delta_{KL})$$

Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio 2.3.1 para el tensor de Green G_{KL} se tiene

$$[E_{KL}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

El inciso iii) se resuelve utilizando la ec. 2.4.6b ^{se} que expresa como

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad \text{o} \quad [e_{kl}] = [X_{K,k}]^T [E_{KL}] [X_{L,l}]$$

Utilizando los elementos del gradiente de deformación calculados en el ejercicio 2.3.1 se tiene

$$[e_{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{X_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - X_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \quad (c)$$

El inciso iv) se resuelve con la ec. 2.4.6a que se expresa como

$$E_{KL} = e_{kl} X_{k,K} X_{l,L} \quad \text{o} \quad [E_{KL}] = [X_{k,K}]^T [e_{kl}] [X_{l,L}]$$

Empleando los resultados obtenidos en el ejercicio 2.2.1 -- para el gradiente de deformación $X_{k,K}$ se tiene

$$[E_{KL}] = \begin{bmatrix} \frac{A}{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{X_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A}{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X_1^2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & C^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Se hacen notar en este problema las distintas formas de calcular los tensores de deformación, dependiendo de las cantidades que se conozcan. Así, en el inciso i) y iii) se calcula el tensor de deformaciones de Euler en dos formas distintas y los resultados, como es de esperarse, son iguales. Lo mismo se puede decir del tensor de Lagrange calculado en los incisos ii) y iv).

Ejemplo 2.4.2 Sea el campo de desplazamiento referido a un sistema de referencia euleriano x, y, z el dado por

$$u = \frac{Axz}{r^3} ; \quad v = \frac{Ayz}{r^3} ; \quad w = A \left[\frac{z^2}{r^3} + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{1}{r} \right]$$

donde $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$; A, λ, μ son constantes.

Calcular el tensor de deformaciones de Euler e_{kl} en el punto de coordenadas $(\frac{1}{13}, \frac{1}{13}, \frac{1}{13})$ y con valores de las constantes

$$A = 3\sqrt{3} \times 10^{-2}, \quad \lambda = 10^5, \quad \mu = 3 \times 10^5$$

De acuerdo con las ecs. 2.4.18b para valuar las componentes del tensor se tendrán que calcular los elementos del gradiente de desplazamiento como sigue:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = r^{1/2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} r^{-1/2} (2x) = r^{-1} x ; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = r^{-1} y ; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = r^{-1} z$$

$$\frac{\partial r^{-3}}{\partial x} = -3r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x} = -3r^{-5} x ; \quad \frac{\partial r^{-3}}{\partial y} = -3r^{-5} y ; \quad \frac{\partial r^{-3}}{\partial z} = -3r^{-5} z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A z \frac{\partial (x r^{-3})}{\partial x} = A z [x(-3r^{-5} x) + r^{-3}] = \frac{Az}{r^5} (r^2 - 3x^2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = A x z \frac{\partial r^{-3}}{\partial y} = -3A x y z r^{-5} ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Az}{r^5} (r^2 - 3z^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3A x y z r^{-5} ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{Az}{r^5} (r^2 - 3y^2) ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{Ay}{r^5} (r^2 - 3z^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A \left[z^2 \frac{\partial r^{-3}}{\partial x} + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial r^{-1}}{\partial x} \right] = -\frac{Az}{r^5} \left[3z^2 + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) r^2 \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{Ay}{r^5} \left[3z^2 + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) r^2 \right]$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A \left[z^2 \frac{\partial r^{-3}}{\partial z} + r^{-3} \frac{\partial z^2}{\partial z} + \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} \right] = \frac{Az}{r^5} \left[-3z^2 + 2r^2 - \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) r^2 \right]$$

Para los valores de $A = 3\sqrt{3} \times 10^{-2}$, $\lambda = 10^5$, $\mu = 3 \times 10^5$, $x = y = z = \frac{1}{13}$

se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -3 \times 10^{-2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = -10.5 \times 10^{-2} ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -4.5 \times 10^{-2}$$

entonces sustituyendo en 2.4.18b

$$2e_{xx} = 0 - 0 - 9 \times 10^{-4} - 110.25 \times 10^{-4} = -0.011925$$

$$2e_{yy} = 0 - 0 - 9 \times 10^{-4} - 110.25 \times 10^{-4} = -0.011925$$

$$2e_{zz} = -9 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 20.25 \times 10^{-4} = -0.092025$$

$$2e_{xy} = 2e_{yx} = -3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 110.25 \times 10^{-4} = -0.071025$$

$$2e_{yz} = 2e_{zy} = 0 - 10.5 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 47.25 \times 10^{-4} = -0.109725$$

$$2e_{zx} = 2e_{xz} = -10.5 \times 10^{-2} - 0 - 0 - 0 - 47.25 \times 10^{-4} = -0.109725$$

$$[e_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.011925 & -0.071025 & -0.109725 \\ & -0.011925 & -0.109725 \\ & & -0.092025 \end{bmatrix}$$

simétrica

2.5 Representación geométrica de la deformación.

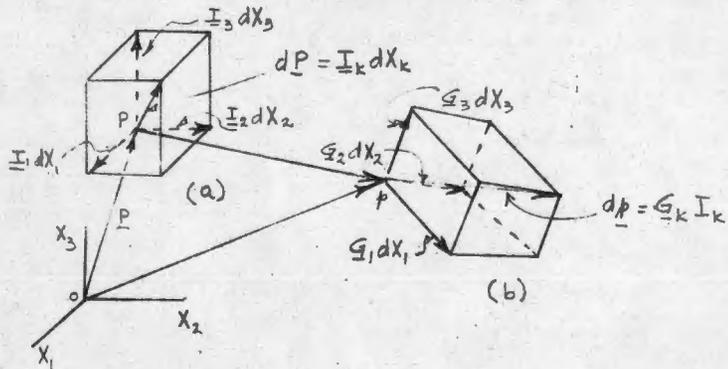
De las ecs. 2.4.11 y 2.4.12 se podrán expresar las diferenciales de los vectores

$$d\underline{p} = \underline{G}_k dX_k = (\delta_{mk} + u_{m,k}) \underline{I}_m dX_k = \underline{i}_k dX_k \quad (2.5.1)$$

$$d\underline{P} = \underline{C}_k dX_k = (\delta_{mk} - u_{m,k}) \underline{i}_m dX_k = \underline{I}_k dX_k \quad (2.5.2)$$

Puesto que la deformación transforma al vector $d\underline{P}$ en el vector $d\underline{p}$, -- entonces es conveniente observar cómo se deforman las figuras geométricas elementales.

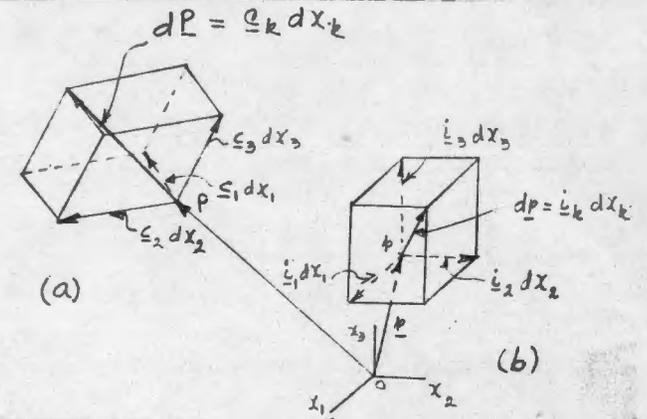
La fig. 2.5.1 muestra cómo se deforma un paralelepípedo rectangular en un paralelepípedo rectilíneo y cómo se cuantifican las aristas de éste.



a) Paralelepipedo rectangular en la configuración no deformada. b) Paralelepipedo rectilíneo en la configuración deformada

fig. 2.5.1 Deformación de un paralelepípedo en una representación lagrangiana.

En la fig. 2.5.2 se presenta la geometría que debería de tener un cuerpo para que en su configuración deformada le corresponda un paralelepípedo rectangular.



a) Paralelepipedo rectilíneo en la configuración no deformada b) Paralelepipedo rectangular en la configuración deformada.

Fig. 2.5.2 Deformación de un paralelepípedo en una representación euleriana

Las ecuaciones 2.5.1 y 2.5.2 al multiplicarse escalarmente por los vectores base \underline{i}_k y \underline{I}_K quedarán como:

$$dx_k = (\delta_{MK} + u_{M,k}) \underline{I}_M \cdot \underline{i}_k dX_K = (\delta_{MK} + u_{M,k}) \delta_{MK} dX_K \quad (2.5.3)$$

$$dX_k = (\delta_{mk} - u_{m,k}) \underline{i}_m \cdot \underline{I}_K dx_k = (\delta_{mk} - u_{m,k}) \delta_{mk} dx_k \quad (2.5.4)$$

2.6 Deformaciones y rotaciones infinitesimales.

Al observar las expresiones de los tensores ϵ_{KL} y e_{kl} se puede observar la presencia de términos lineales y términos cuadráticos.

Definición 2.6.1. Se define a los tensores de deformación (Strain) infinitesimales \tilde{E}_{KL} y \tilde{e}_{kl} a los tensores formados con los términos lineales de los expres correspondientes ϵ_{KL} y e_{kl} .

De acuerdo con las ecs. 2.4.15 y 2.4.16 se tendrá:

$$\tilde{E}_{KL} = \frac{1}{2} (u_{K,L} + u_{L,K}) \quad (2.6.1)$$

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.6.2)$$

Los tensores infinitesimales anteriores son simétricos.

Definición 2.6.2. Los tensores de rotación infinitesimales se definen con las expresiones siguientes:

$$\tilde{R}_{KL} = \frac{1}{2} (u_{K,L} - u_{L,K}) \quad (2.6.3)$$

$$\tilde{\Gamma}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} - u_{l,k}) \quad (2.6.4)$$

Al analizar las ecuaciones anteriores se puede concluir que los tensores de rotación infinitesimales son antisimétricos, es decir satisfacen la expresión.

$$\tilde{R}_{KL} = -\tilde{R}_{LK} \quad ; \quad \tilde{\Gamma}_{kl} = -\tilde{\Gamma}_{lk} \quad (2.6.5)$$

Las formas matriciales de la ec 2.6.5 quedan como

$$[\tilde{R}_{KL}] = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} \\ \tilde{r}_{12} & 0 & \tilde{r}_{23} \\ -\tilde{r}_{13} & -\tilde{r}_{23} & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\tilde{\Gamma}_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\gamma}_{12} & \tilde{\gamma}_{13} \\ -\tilde{\gamma}_{12} & 0 & \tilde{\gamma}_{23} \\ \tilde{\gamma}_{13} & -\tilde{\gamma}_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.6)$$

Puesto que en cada tensor de rotaciones infinitesimales existen únicamente tres componentes independientes, entonces se puede pensar en representar por un vector al tensor antisimétrico de la forma siguiente.

$$\tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \tilde{\Gamma}_{lm} \quad \sigma \quad \tilde{\Gamma} = \frac{1}{2} [\tilde{\Gamma}_{23} \quad -\tilde{\Gamma}_{13} \quad \tilde{\Gamma}_{12}] \quad (2.6.7a)$$

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \tilde{R}_{lm} \quad \sigma \quad \tilde{R} = \frac{1}{2} [\tilde{R}_{23} \quad -\tilde{R}_{13} \quad \tilde{R}_{12}] \quad (2.6.7b)$$

Al sumar las ecs. 2.6.1 y 2.6.3 se obtiene

$$u_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad (2.6.8)$$

sumando ahora las ecs. 2.6.2 y 2.6.4

$$u_{k,l} = \tilde{e}_{kl} + \tilde{\Gamma}_{kl} \quad (2.6.9)$$

Sustituyendo las ecs. 2.6.8 y 2.6.9 en las ecs. 2.4.15 y 2.4.16 se obtendrán las ecuaciones siguientes:

$$\epsilon_{KL} = \tilde{E}_{KL} + \frac{1}{2} (\tilde{E}_{MK} + \tilde{R}_{MK}) (\tilde{E}_{ML} + \tilde{R}_{ML}) \quad (2.6.10)$$

$$e_{kl} = \tilde{e}_{kl} + \frac{1}{2} (\tilde{e}_{mk} + \tilde{\Gamma}_{mk}) (\tilde{e}_{ml} + \tilde{\Gamma}_{ml}) \quad (2.6.11)$$

De la ec. 2.6.10 se puede concluir; para los tensores E_{KL} y \tilde{E}_{KL} sean iguales se requiere que los términos cuadráticos \tilde{E}_{MK} \tilde{E}_{ML} \tilde{R}_{MK} \tilde{R}_{ML} , $\tilde{E}_{MK} \tilde{R}_{ML}$ y $\tilde{R}_{MK} \tilde{E}_{ML}$ sean de orden inferior respecto a los lineales para que adicionados no modifiquen a los términos lineales. Lo mismo se podrá decir para los términos no lineales de la ec. 2.6.11; con lo anterior en mente se deberá tener que

$$F_{KL} \approx \tilde{E}_{KL} \quad \text{y} \quad e_{kl} \approx \tilde{e}_{kl} \quad (2.6.12)$$

También, usando las ecs. 2.5.3, se podrá calcular la expresión siguiente

$$x_{k,k} x_{l,l} = (\delta_{MK} + u_{M,k})(\delta_{NL} + u_{N,l}) \delta_{MK} \delta_{NL} \quad (2.6.13)$$

Considerando la hipótesis de que los elementos $u_{M,k}$ y $u_{N,l}$ corresponden a deformaciones infinitesimales se tendrá que :

$$x_{k,k} x_{l,l} \approx \delta_{MK} \delta_{NL} \delta_{MK} \delta_{NL} \approx \delta_{KK} \delta_{LL} \quad (2.6.14)$$

Sustituyendo la ec. 2.6.14 en la ec. 2.4.6a se llega a

$$\tilde{E}_{KL} \approx \tilde{e}_{kl} \delta_{KK} \delta_{LL} \quad (2.6.15)$$

Análogamente la ec. 2.4.6b se transforma en

$$\tilde{e}_{kl} \approx \tilde{E}_{KL} \delta_{KK} \delta_{LL} \quad (2.6.16)$$

En base a las consideraciones enunciadas para las deformaciones infinitesimales y las ecs. 2.5.3 y 2.5.4 los cambiadores de la ec. 2.6.16 se convierten en deltas de Kronecker y, por lo tanto, se pierde la distinción entre una referencia lagrangiana y una euleriana. Por lo anterior se puede concluir que donde se utilizan tensores de deformaciones infinitesimales no se hace necesaria la utilización de los dos sistemas de referencia.

Es conveniente enfatizar que en general el hecho que el tensor de deformaciones infinitesimales se anule ($\tilde{E}_{KL} = 0$) no implica que el tensor de deformaciones de Lagrange también se anule ($E_{KL} = 0$) y por lo tanto la condición $\tilde{E}_{KL} = 0$ no es una condición suficiente para movimiento de cuerpo rígido ya que \tilde{E}_{KL} no es una medida de la deformación, sino una aproximación para el caso infinitesimal.

Ejemplo 2.6.1 Utilizando los datos del ejemplo 2.4.2...

Calcule los conceptos siguientes :

- i) El tensor de deformaciones infinitesimales \tilde{e}_{kl} y compararlo con el tensor de deformaciones finitas E_{kl} , expresando en porcentaje las diferencias entre las componentes respectivas de ambos tensores.
- ii) El tensor de rotaciones infinitesimales $\tilde{\Gamma}_{kl}$

De acuerdo con la ec. 2.6.2 se tiene que :

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$$

En el ejercicio 2.4.2 ya se calcularon los elementos del ---
gradiente de desplazamiento, entonces :

$$\tilde{e}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\tilde{e}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\tilde{e}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -4.5 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{e}_{xy} = \tilde{e}_{yx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -3 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{e}_{yz} = \tilde{e}_{zy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = -5.25 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{e}_{zx} = \tilde{e}_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -5.25 \times 10^{-2}$$

e kl	e_{kl}	\tilde{e}_{kl}	*Diferencia relativa o/o
xx	-0.0059625	0	-100
yy	-0.0059625	0	-100
zz	-0.0460125	-0.045	-2.22
xy	-0.0355125	-0.03	-15.6
xz	-0.0548625	-0.0525	-4.3
yz	-0.0548625	-0.0525	-4.3

* ESTOS VALORES ESTAN CALCULADOS RESPECTO A LAS COMPONENTES DE e_{kl}

El inciso ii) se resuelve utilizando la ec. 2.6.4 que se expresa como

$$\tilde{r}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} - u_{l,k})$$

sustituyendo los resultados obtenidos en el ejemplo 2.4.2 para los elementos del gradiente de desplazamiento, se tiene

$$\tilde{r}_{xx} = \tilde{r}_{yy} = \tilde{r}_{zz} = 0$$

$$\tilde{r}_{xy} = -\tilde{r}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (-3 + 3) \times 10^{-2} = 0$$

$$\tilde{r}_{xz} = -\tilde{r}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (0 + 10.5) \times 10^{-2} = 5.25 \times 10^{-2}$$

$$\tilde{r}_{yz} = -\tilde{r}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (0 + 10.5) \times 10^{-2} = 5.25 \times 10^{-2}$$

$$[\tilde{r}_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0525 \\ 0 & 0 & 0.0525 \\ -0.0525 & -0.0525 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.6.2. Dado el gradiente de desplazamiento en forma matricial como

$$[U_{K,L}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar los tensores \tilde{R}_{KL} y \tilde{E}_{KL}

De acuerdo a la ec. 2.6.8 que se expresa como

$$U_{K,L} = \tilde{E}_{KL} + \tilde{R}_{KL} \quad \text{o} \quad [U_{K,L}] = [\tilde{E}_{KL}] + [\tilde{R}_{KL}]$$

Por lo tanto sustituyendo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1.5 \\ -3 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

luego

$$[\tilde{E}_{KL}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1.5 \\ -3 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{R}_{KL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & -1.5 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7 Interpretación geométrica de los componentes de los tensores de deformación y de rotación.

Existe una forma de asignarles un significado geométrico a los elementos de los tensores de deformación y de rotación, mediante el cálculo de los cambios en ángulo y de longitud que se presentan en el proceso de deformación.

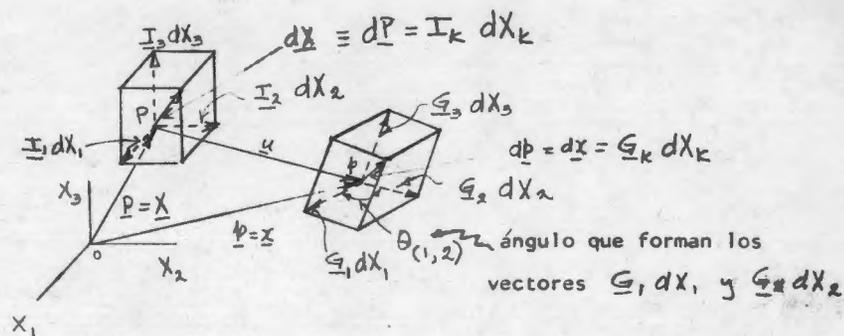
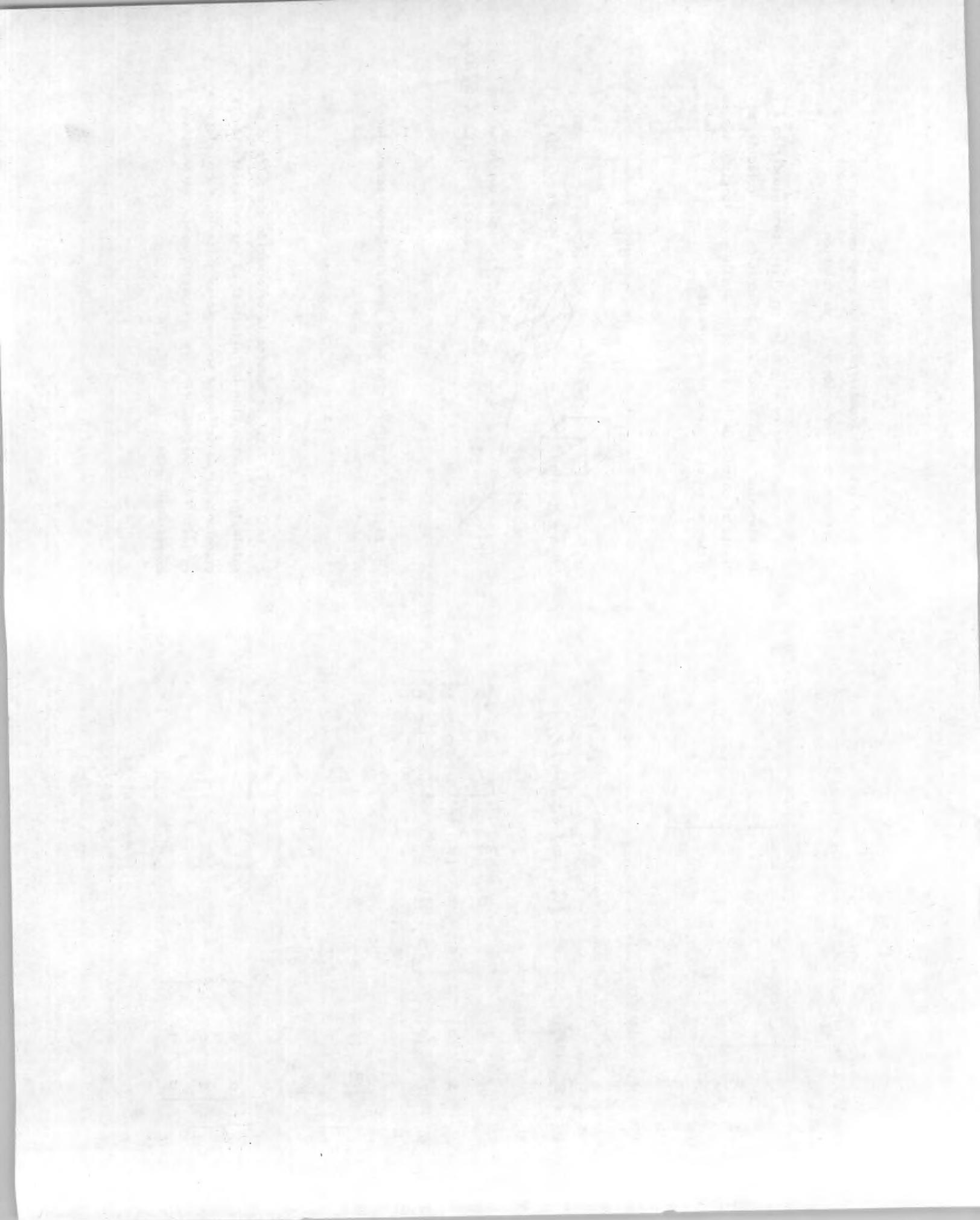


Fig. 2.7.1 Deformación de un paralelepípedo rectangular

En la fig. 2.7.1 se muestra la deformación que sufre un paralelepípedo rectangular infinitesimal en una representación la grangiana. Si se definen a dos vectores unitarios \underline{m} y \underline{n} alojados en las direcciones de $d\underline{P}$ y $d\underline{p}$ respectivamente, entonces sus expresiones serán



$$\underline{N} = \frac{dP}{|dP|} = \frac{dX}{|dX|} = \frac{dX}{ds} \quad \sigma \quad N_k = \frac{dX_k}{ds} \quad (2.7.1)$$

$$\underline{n} = \frac{d\bar{p}}{|d\bar{p}|} = \frac{d\bar{x}}{|d\bar{x}|} = \frac{d\bar{x}}{ds} \quad \sigma \quad n_k = \frac{d\bar{x}_k}{ds} \quad (2.7.2)$$

Definición 2.7.1. Al cociente constituido con las magnitudes de los vectores diferenciales $|d\bar{p}|$ y $|dP|$ se denominará alargamiento y se representará por la letra griega $\Lambda_{(N)}$ o $\lambda_{(n)}$ según se exprese en términos de cantidades medidas en un sistema de referencia lagrangiano o euleriano, es decir :

$$\Lambda_{(N)} = \frac{ds}{dS} = \frac{\sqrt{G_{KL} dX_K dX_L}}{dS} = \sqrt{\frac{G_{KL} dX_K dX_L}{dS dS}} \quad (2.7.3)$$

$$= \sqrt{G_{KL} N_K N_L}$$

$$\lambda_{(n)} = \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{1}{\frac{d\bar{s}}{ds}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{g_{kl} d\bar{x}_k d\bar{x}_l}}{ds}} = \frac{1}{\sqrt{g_{kl} \frac{d\bar{x}_k}{ds} \frac{d\bar{x}_l}{ds}}} \quad (2.7.4)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{kl} n_k n_l}}$$

Desde luego que los alargamientos $\Lambda_{(N)}$ y $\lambda_{(n)}$ son iguales, nada más que ^{se} cuantifican en diferentes sistemas de referencia.

Para tener una idea más objetiva sobre el alargamiento, considérese que está alojado sobre el eje X_1 , entonces

$$N_1 = 1, \quad N_2 = N_3 = 0$$

$$\Lambda_{(1)} = \sqrt{G_{11}} \quad \sigma \quad G_{11} = \Lambda_{(1)}^2 \quad (2.7.5)$$

También se deberá tener que

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0$$

$$\lambda_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \quad \sigma \quad g_{11} = \frac{1}{\lambda_{(1)}^2} \quad (2.7.6)$$

Los resultados anteriores ejemplifican que la ec. 2.7.3 indica que la componente del tensor G_{KL} en la dirección de \underline{N} está dada por el cuadrado del alargamiento en la misma dirección - mientras que la ec. 2.7.4 establece que la componente de g_{kl} en la dirección de \underline{n} está dada por el recíproco del cuadrado del alargamiento en tal dirección.

Definición 2.7.2 Se define a la extensión, cuya representación está dada mediante $E_{(N)}$ o $e_{(n)}$, de acuerdo con la expresión siguiente

$$E_{(N)} = e_{(n)} = \Lambda_{(N)}^{-1} = \lambda_{(n)}^{-1} = \frac{ds - d\bar{s}}{dS} \quad (2.7.7)$$

La extensión, para el caso de estar \underline{N} orientado en la -- dirección del eje X_1 , valdrá

$$E_{(1)} = \Lambda_{(1)}^{-1} = \sqrt{G_{11}}^{-1} - 1 = \sqrt{1 + 2E_H} - 1 \quad (2.7.8)$$

o bien

$$E_{11} = \frac{1}{2} [(1 + E_{(1)})^2 - 1] = \frac{1}{2} (\Lambda_{(1)}^2 - 1) \quad (2.7.9)$$

La expresión anterior permite cuantificar las componentes normales del tensor de deformación de Lagrange en términos de las extensiones o de los alargamientos asociados a las mismas direcciones.

Al desarrollar la ec. 2.7.9 se obtiene

$$E_{11} = E_{(1)} + \frac{1}{2} E_{(1)}^2 \quad (2.7.10)$$

En la teoría de las deformaciones infinitesimales los términos cuadráticos son de orden inferior a los lineales; se tendrá que

$$E_{11} \approx \tilde{E}_{11} \approx E_{(1)} \quad (2.7.11)$$

La ec. 2.7.11 permite aseverar que las componentes normales del tensor de deformación infinitesimales son aproximadamente iguales a las extensiones asociadas a las direcciones de los ejes del sistema coordenado de referencia para el caso de la teoría de la deformación infinitesimal.

Al calcular las extensiones en un sistema de referencia euleriano se tendrá

$$e_{(1)} = \lambda_{(1)} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_{11}}} - 1 \quad (2.7.12)$$

o bien

$$e_{11} = \frac{1}{2} [1 - (1 + e_{(1)})^2] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda_{(1)}^2} \right) \quad (2.7.13)$$

$$e_{11} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2e_{(1)} + 3e_{(1)}^2 - 4e_{(1)}^3 + \dots)] \quad (2.7.14)$$

Para el caso de deformaciones infinitesimales en donde los términos elevados a una potencia igual o mayor a dos son de orden superior a los términos lineales, se tendrá

$$e_{11} \approx \tilde{E}_{11} \approx E_{(1)} \quad (2.7.15)$$

que viene a comprobar lo afirmado para los tensores de deformación de Lagrange y de Euler para el caso especial de la teoría de deformaciones infinitesimales.

Para visualizar el significado geométrico de las deformaciones de cante E_{12} , E_{13} , E_{23} del tensor de deformaciones, se calculará el cambio de ángulo que sufren dos direcciones N_1 y N_2 .

Para simplificar el proceso se considerarán los dos vectores $\underline{\Xi}_1 dX_1$ y $\underline{\Xi}_2 dX_2$ los cuales en la configuración deformada, corresponden a los vectores $\underline{\xi}_1 dX_1$ y $\underline{\xi}_2 dX_2$ respectivamente -- (ver fig. 2.7.1). De acuerdo con la definición de producto escalar se tendrá:

$$\cos \theta_{(1,2)} = \frac{(\underline{\xi}_1 dX_1) \cdot (\underline{\xi}_2 dX_2)}{|\underline{\xi}_1 dX_1| |\underline{\xi}_2 dX_2|} = \frac{\xi_{12}}{\sqrt{\xi_{11} \xi_{22}}} = \frac{2 E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}} \quad (2.7.16)$$

la ec. 2.7.16 se puede transformar usando la ec. 2.7.8 y quedará

$$2 E_{12} = (1 + E_{(1)}) (1 + E_{(2)}) \cos \theta_{(1,2)} \quad (2.7.17)$$

Para el caso de las deformaciones infinitesimales la ec. 2.7.17 se puede escribir como:

$$2\epsilon_{12} \approx 2\tilde{\epsilon}_{12} \approx \cos \theta_{(1,2)} \quad (2.7.18)$$

el cambio de ángulo que sufren los vectores $\underline{I}_1 dX_1$ y $\underline{I}_2 dX_2$, inicialmente rectos, se escribirá como

$$\Gamma_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \theta_{(1,2)} \quad \text{o bien} \quad \theta_{(1,2)} = \frac{\pi}{2} - \Gamma_{(1,2)} \quad (2.7.19)$$

Como se considera pequeño este cambio de ángulo, se justifica la operación siguiente

$$\cos \theta_{(1,2)} = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \Gamma_{(1,2)} \right] = \sin \Gamma_{(1,2)} = \Gamma_{(1,2)} \quad (2.7.20)$$

sustituyendo a la ec. 2.7.20 en la ec. 2.7.18 se obtiene

$$2\epsilon_{12} \approx 2\tilde{\epsilon}_{12} \approx \Gamma_{(1,2)} \quad (2.7.21)$$

La ecuación anterior establece que las deformaciones de corte infinitesimales son aproximadamente iguales a la mitad del cambio de ángulo que sufren los ejes coordenados inicialmente rectos.

También de la ecuación 2.7.16 se concluye que, para que en una configuración deformada no ocurran cambios de ángulo, es condición necesaria y suficiente que se anulen las deformaciones de cortante del tensor de deformaciones. Además, de la ecuación 2.7.8 se concluye que, para que se anule la extensión, es necesario y suficiente que se anulen las deformaciones normales del tensor de deformaciones de Lagrange $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$ o bien que las deformaciones normales del tensor de Green sean iguales a la unidad: $G_{11} = G_{22} = G_{33} = 1$.

Resumiendo las conclusiones se puede aseverar que, para que un movimiento sea una deformación de cuerpo rígido, se requiere que se satisfagan algunas de las condiciones siguientes:

$$G_{KL} = \delta_{KL} \quad (2.7.22a)$$

$$e_{kl} = \delta_{kl} \quad (2.7.22b)$$

$$E_{KL} = e_{kl} = 0 \quad (2.7.22c)$$

Los elementos del tensor de deformaciones infinitesimales -- tienen otra interpretación gráfica más objetiva que la anterior y es la que ^{se} describe a continuación.

Para las deformaciones normales considérese la componente a lo largo del eje X_1 , como se muestra en la fig. 2.7.2 en donde se

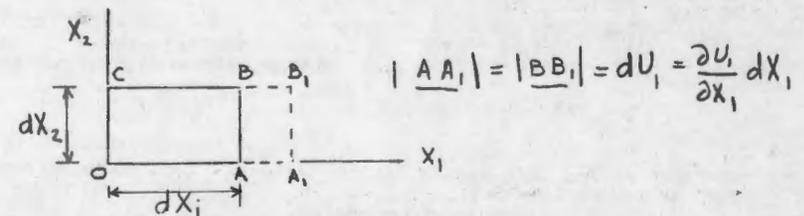


Fig. 2.7.2 Deformación normal del tensor de deformaciones infinitesimales.

muestra la cara del paralelepípedo rectangular contenido en el plano formado por los ejes coordenados X_1, X_2 . La configuración no deformada será el rectángulo OABC y la configuración deformada, para el caso en que existan únicamente deformaciones

normales, será la del rectángulo $OABC$. Tomando en cuenta la igualdad entre extensiones y deformaciones normales se tendrá

$$\tilde{\epsilon}_{11} = \epsilon_{(1)} = \frac{dU_1}{dx_1} = \frac{|OA_1| - |OA|}{|OA|} = \frac{dU_1}{dx_1} = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}$$

Para el caso de que existan únicamente deformaciones de corte, en la fig. 2.7.3 se muestra la configuración no deformada por el rectángulo $OABC$ y la configuración deformada por el paralelepípedo $OA_1B_1C_1$.

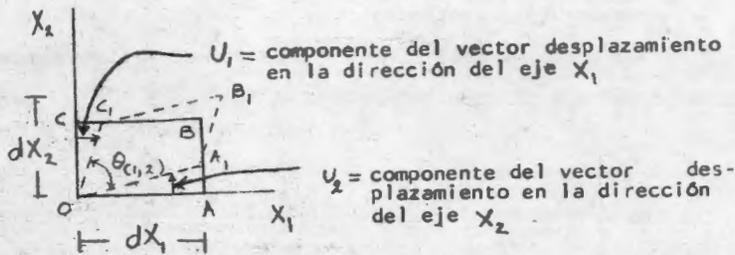


Fig. 2.7.3 Deformación de cortante del tensor de deformaciones infinitesimales.

Si θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman las líneas OA_1 en OA y OC_1 en OC respectivamente y considerando que son infinitesimales se deberá tener:

$$\theta_1 = \tan(\angle A_1OA) = \angle A_1OA = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1}$$

$$\theta_2 = \tan(\angle C_1OC) = \angle C_1OC = \frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2}$$

Entonces el cambio de ángulo que sufren los ejes coordenados X_1, X_2 se podrá calcular como

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{(1,2)} = \theta_1 + \theta_2 \approx \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 2\tilde{\epsilon}_{12}$$

El significado geométrico de las rotaciones infinitesimales se hará en base a la definición de la rotación media de un punto introducida por Novozhilov y la terminología se presenta en la fig. 2.7.4. Sea N un vector unitario apoyado en el plano

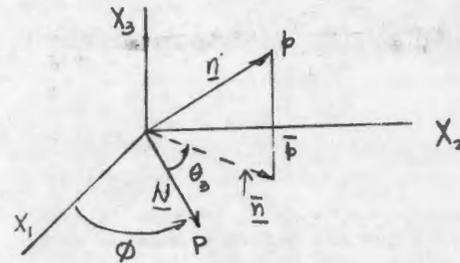


Fig. 2.7.4 Representación geométrica para la rotación media de un punto.

X_1, X_2 en la configuración no deformada y sea n el mismo vector pero en la configuración deformada. Sea θ_3 el ángulo que gira la dirección N respecto al eje X_3 y será función de ϕ .

1 Novozhilov, VV., "Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity", Graylock Press (1953)

20.112
N68

Definición 2.7.3. Se define al valor medio de $\tan \theta_3$, ($\langle \tan \theta_3 \rangle$) sobre todo el rango del ángulo, $\phi (0, 2\pi)$ mediante la expresión siguiente

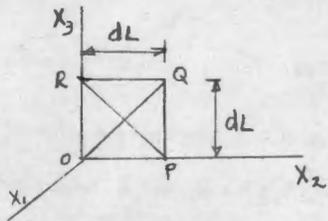
$$\langle \tan \theta_3 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tan \theta_3(\phi) d\phi \quad (2.7.23)$$

de acuerdo con Eringen² la expresión anterior resulta ser

$$\langle \tan \theta_3 \rangle = - \frac{\tilde{R}_{12}}{[(1 + \tilde{E}_{11})(1 + \tilde{E}_{22}) - \tilde{E}_{12}^2]^{1/2}} \approx -\tilde{R}_{12} \quad (2.7.24)$$

la ecuación anterior establece la relación entre la rotación media de un punto y las componentes del tensor de rotación infinitesimales.

Ejemplo 2.7.1. Sea el cuadrado infinitesimal mostrado en la figura



Para la descripción euleriana del movimiento

$$x_1 = (A X_1 + B)^{1/2}, \quad x_2 = C X_2, \quad x_3 = D X_3$$

del problema 2.2.1, Calcular los alargamientos $\Delta_{(N)}$, $\lambda_{(n)}$ y las extensiones $E_{(N)}$, $e_{(n)}$ para

1) El elemento OP paralelo al eje X_2

² Eringen, A.C. "Mechanics of Continua", John Wiley (1967)

ii) El elemento diagonal OQ

De acuerdo a las expresiones 2.7.3 y 2.7.4 se tiene que

$$\Lambda^2_{(N)} = G_{KL} N_K N_L \quad \text{o} \quad \Lambda^2_{(N)} = \underline{N}^T [G_{KL}] \underline{N}$$

$$\lambda^2_{(n)} = \frac{1}{e_{kl} n_k n_l} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\lambda^2_{(n)}} = \underline{n}^T [e_{kl}] \underline{n}$$

Para la dirección paralela al eje X_2

$$\underline{N}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$$

En el ejercicio 2.3.1 ya se calculó el tensor G_{KL} , entonces

$$\Lambda^2_{(N_2)} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{A^2}{X_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & C^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C^2$$

Para calcular $\lambda_{(n)}$ es necesario obtener \underline{n} , es decir la dirección paralela al eje X_1 , en la configuración deformada, por lo tanto:

$$\underline{n}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$$

En el ejercicio 2.3.1 ya se calculó el tensor e_{kl} entonces

$$\frac{1}{\lambda^2_{(n)}} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{C^2}$$

De acuerdo a la expresión 2.7.7

$$E_{(N)} = e_{(n)} = \Lambda_{(N)}^{-1} = \lambda_{(n)}^{-1} = C^{-1}$$

Para resolver el inciso ii) se determinará \underline{N} y \underline{n} en la dirección de la diagonal OQ

$$\underline{N} = \frac{1}{\sqrt{dL^2 + DL^2}} (0 \underline{i}_1 + dL \underline{i}_2 + DL \underline{i}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} [0 \ 1 \ 1]$$

$$\Lambda_{(N)}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A^2}{x_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (c^2 + D^2)$$

$$\Lambda_{(N)} = \sqrt{\frac{1}{2} (c^2 + D^2)}$$

Para encontrar \underline{n} se tiene

$$\underline{OQ} = 0 \underline{i}_1 + dL \underline{i}_2 + DL \underline{i}_3$$

utilizando la transformación dada por la descripción euleriana - del movimiento las posiciones de los puntos O y Q son $(B^{1/2}, 0, 0)$ y $(B^{1/2}, c dL, D dL)$ respectivamente

$$\text{luego } \underline{OQ} = 0 \underline{i}_1 + c dL \underline{i}_2 + D dL \underline{i}_3$$

$$|\underline{OQ}| = \sqrt{c^2 + D^2} dL ; \quad \underline{n} = \frac{\underline{OQ}}{|\underline{OQ}|} = \frac{1}{\sqrt{c^2 + D^2}} [0 \ c \ D]$$

$$\frac{1}{\lambda_{(n)}} = \left(\frac{1}{c^2 + D^2} \right) [0 \ c \ D] \begin{bmatrix} \frac{x_1^2}{A^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ D \end{bmatrix} = \frac{2}{c^2 + D^2}$$

$$\lambda_{(n)}^2 = \frac{1}{2} (c^2 + D^2) ; \quad \lambda_{(n)} = \sqrt{\frac{1}{2} (c^2 + D^2)}$$

finalmente

$$E_{(N)} = e_{(n)} = \sqrt{\frac{1}{2} (c^2 + D^2)}^{-1} = 1$$

Ejemplo 2.7.2. El campo de desplazamiento de un cuerpo está dado por

$$U_1 = -C X_2 + B X_3$$

$$U_2 = -A X_3 + C X_1$$

$$U_3 = A X_2 - B X_1$$

donde A, B, C , son constantes pequeñas. Si se considera válida - la teoría de deformaciones pequeñas, investigar bajo que condiciones el cuerpo tiene una deformación de cuerpo rígido.

Para que la deformación sea de cuerpo rígido se debe satisfacer cualquiera de las condiciones expresadas por las ecs. 2.7.22 como

$$G_{KL} = \delta_{KL} ; \quad Q_{kl} = \delta_{kl} ; \quad F_{KL} = E_{kl} = 0$$

Para el campo de desplazamiento dado, utilizando la ec. 2.4.12 se tiene

$$G_{11} = 1 + 0 + 0 + 0 + C^2 + B^2 = 1 + C^2 + B^2$$

$$G_{22} = 1 + 0 + 0 + 0 + C^2 + 0 + A^2 = 1 + C^2 + A^2$$

$$G_{33} = 1 + 0 + 0 + 0 + B^2 + 0 + A^2 = 1 + B^2 + A^2$$

$$G_{12} = 0 - C + C + 0 + 0 - AB = -AB$$

$$G_{13} = 0 + B - B + 0 - AC + 0 = -AC$$

$$G_{23} = 0 - A + A - CB + 0 + 0 = -CB$$

despreciando términos de orden superior,

$$[G_{KL}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

luego se trata de una deformación de cuerpo rígido.

2.8 Elipsoide de deformación. Teoremas de Cauchy.

Para fortalecer la noción de la deformación local en la vecindad de un punto P de un cuerpo no deformado, se estudiará la deformación de una esfera infinitesimal de radio constante con centro en el punto P localizado por el vector de posición \underline{X} . Si $d\underline{X}$ es la representación de cualquier radio de la esfera infinitesimal, su ecuación estará dada por

$$\delta_{KL} dx_K dx_L = d\underline{X} \cdot d\underline{X} = (ds)^2 = k^2 \quad (2.8.1)$$

La ecuación anterior es una forma cuadrática positiva definida.

La forma cuadrática de la ecuación 2.8.2 medida en una configuración deformada quedará, de acuerdo con la ecuación 2.3.9a

$$c_{kl} dx_k dx_l = (ds)^2 = k^2 \quad (2.8.2)$$

que también será una forma cuadrática positiva definida y la forma geométrica será un elipsoide.³

De manera similar considere una esfera en la configuración deformada con radio constante ds , cuya ecuación será una forma cuadrática dada por

$$\delta_{kl} dx_k dx_l = (ds)^2 = k^2 \quad (2.8.3)$$

en la configuración no deformada, la esfera se transforma en una forma cuadrática según la ecuación 2.3.9b que corresponde a un elipsoide.

$$G_{KL} dX_K dX_L = (ds)^2 = k^2 \quad (2.8.4)$$

A los elipsoides anteriores se les conocen con el nombre de elipsoide de deformación de Cauchy. El elipsoide dado por la ec. 2.8.2 se conoce con el nombre de elipsoide material de Cauchy y el descrito por la ec. 2.8.4 elipsoide espacial de Cauchy. El estudio de las características básicas de alguno de los elipsoides contribuirá a clasificar el carácter de la deformación en la vecindad de un punto.

Un análisis que proporciona mucha información consiste en estudiar cómo se deforma una terna de radios de la esfera construida en el punto P .

Este problema se contempla en los teoremas de Cauchy descritos a continuación.

Teorema 2.8.1. Primer teorema de Cauchy.

Los diámetros perpendiculares en una esfera infinitesimal en \underline{X} se deforman en diámetros conjugados de elipsoide material en \underline{x} .

La demostración del teorema se hace al considerar dos vectores diferenciales ortogonales $d\underline{X}^1, d\underline{X}^2$ según se muestran en la fig. 2.8.1

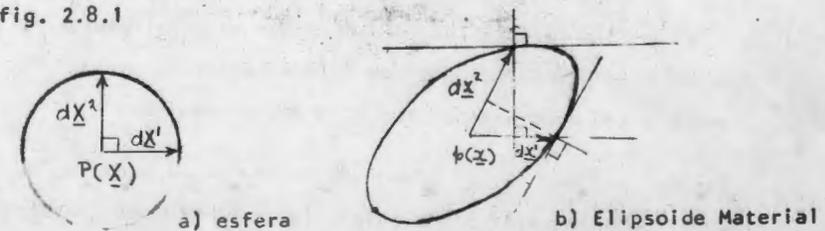


Fig. 2.8.1 Deformación de una esfera en un elipsoide de Cauchy.

De la fig. 2.8.1a se tiene que la condición de ortogonalidad quedará

$$dx^1 \cdot dx^2 = 0 \quad (2.8.5)$$

De acuerdo con las ecs. 2.3.7 la ecuación anterior se transforma en :

$$(\underline{e}_k dx_k^1) \cdot (\underline{e}_l dx_l^2) = e_{kl} dx_k^1 dx_l^2 = 0 \quad (2.8.6)$$

La ec. 2.8.6 indica que el vector gradiente del elipsoide en el extremo de dx^1 , $e_{kl} dx_k^1$ es perpendicular al vector dx^2

También se puede interpretar como el vector gradiente del elipsoide en el extremo de dx^2 , $e_{kl} dx_k^2$ perpendicular al vector dx^1 . Lo anterior se muestra con la fig.2.8.1b.

De acuerdo con las propiedades geométricas del elipsoide se pueden concluir los corolarios siguientes:

Corolario 2.8.1. En un punto $P(\underline{x})$ de la configuración no deformada existen, al menos, tres direcciones mutuamente perpendiculares, las cuales en la configuración deformada permanecen mutuamente perpendiculares y constituyen los ejes principales del elipsoide de deformación en el punto $p(\underline{x})$.

El corolario anterior se debe a que en un elipsoide existen al menos tres diámetros que son perpendiculares a sus planos conjugados y son precisamente los ejes del elipsoide.

Corolario 2.8.2. Si el tensor de Cauchy en el punto P está referido a los ejes principales, las deformaciones de cortante se anulan; es decir $e_{12} = e_{13} = e_{23} = e_{21} = e_{13} = e_{32} = 0$

Lo anterior se basa en el hecho de que si se construye un paralelepípedo rectangular en la terna de diámetros en P , correspondientes a los ejes principales del elipsoide de deformación en p , el paralelepípedo sigue siendo rectangular por no haber cambios angulares de los ejes sobre los que se construyó.

Corolario 2.8.3. La deformación gira los ejes principales del elipsoide de deformación en \underline{x} a los ejes principales del elipsoide de deformación en \underline{x} .

La fig. 2.8.2 muestra las aseveraciones del corolario 2.8.3 para los elipsoides de Cauchy material y espacial.

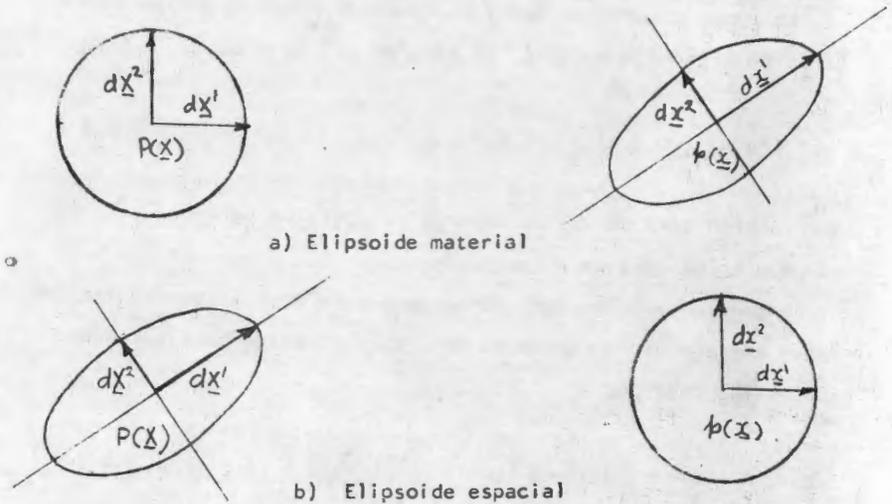


Fig. 2.8.2 Rotación de los ejes principales con la deformación

Bajo condiciones especiales los elipsoides pueden degenerarse en el elipsoide de rotación o en esferas. En el caso de elipsoides de rotación, la terna de ejes principales se deformará de tal manera que en el plano perpendicular al eje de rotación se pueda seleccionar cualquier par de ejes perpendiculares y el restante será el eje de rotación. En el caso en que el elipsoide se degenera en una esfera, cualquier terna ortogonal serán los ejes principales.

que los diámetros de una esfera en el punto material P se deforman.
 Se ha observado en los diámetros de una elipsoide en el punto espacial P . Por lo tanto se puede concluir que los alargamientos son los cocientes formados con los diámetros del elipsoide entre los diámetros correspondientes de la esfera.

En un elipsoide se puede observar que las longitudes de los ejes principales son tales que al menos uno es mayor, otro es menor y el tercero está entre los anteriores.

Teorema 2.8.2 Segundo teorema de Cauchy.

En cualquier punto P existen el menos tres direcciones mutuamente perpendiculares en donde se presenta la particularidad siguiente

- i) Sobre alguna dirección se presenta que el alargamiento no es menor que para cualquier dirección.
- ii) De las dos direcciones restantes, en alguna se presentará un alargamiento que no es mayor que en otra dirección cualesquiera.
- iii) En la tercera dirección el alargamiento es un minimax.

Cuando los alargamientos se ordenan como $\Lambda_{(1)} \geq \Lambda_{(2)} \geq \Lambda_{(3)}$, se conservarán en la proporción $\Lambda_{(1)} : \Lambda_{(2)} : \Lambda_{(3)}$ la longitud de los ejes principales del elipsoide de deformación.

De acuerdo con lo anterior la extensión máxima $E_{(1)} = \Lambda_{(1)} - 1$ ocurrirá a lo largo del eje mayor del elipsoide de deformación, mientras que la extensión menor $E_{(2)}$ ocurrirá sobre el eje menor. A las extensiones que ocurren sobre los ejes principales del elipsoide de deformación se denominarán extensiones principales.

Con los razonamientos presentados en este inciso se puede aseverar que el proceso de la deformación local queda lo suficiente claro. También se puede sintetizar que los puntos materiales, localizados sobre la esfera en el punto P y sobre sus diámetros, adquieren una posición final sobre un elipsoide en p y sus diámetros correspondientes. La posición final se puede visualizar en las tres etapas mostradas en la fig. 2.8.3.

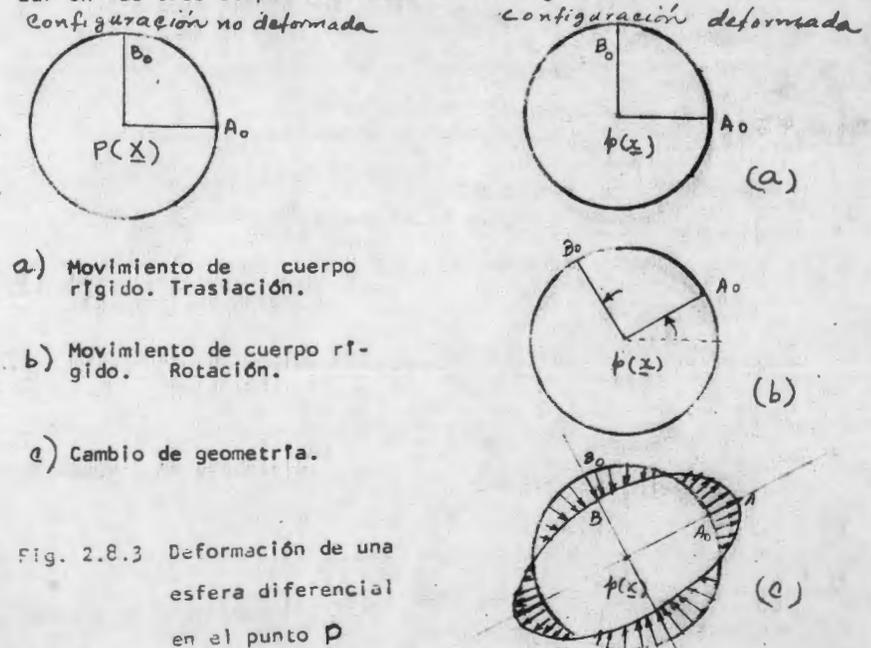


Fig. 2.8.3 Deformación de una esfera diferencial en el punto P

En el movimiento asociado a las etapas a y b se preservan las distancias originales entre los puntos materiales y es por eso que se le llama movimiento de cuerpo rígido. En la etapa c únicamente se modifican las distancias originales y por lo tanto el cambio de geometría.

El proceso de la deformación se resume en el teorema siguiente cuya demostración se encuentra en el libro de Eringen¹

Teorema 2.8.3. La deformación en un punto, de cualquier elemento lineal se puede considerar como el resultado de una translación y una rotación de cuerpo rígido de los ejes principales de deformación y de alargamientos a lo largo de dichos ejes.

Ejemplo 2.8.1 Dada la descripción euleriana del movimiento por

$$x = \frac{b}{a} X \quad , \quad y = Y$$

Verificar que esta transformación mapea;

- i) La elipse $\left(\frac{b^2}{a^2}\right)X^2 + Y^2 = b^2$ en el círculo $x^2 + y^2 = b^2$.
 ii) El círculo $X^2 + Y^2 = a^2$ en la elipse $\left(\frac{a^2}{b^2}\right)X^2 + Y^2 = a^2$.

Aplicada la transformación $X = \frac{a}{b}x$, $Y = y$ a la elipse $\left(\frac{b^2}{a^2}\right)X^2 + Y^2 = b^2$ se tiene $x^2 + y^2 = b^2$

Para el inciso ii) se aplica la transformación al círculo

$$X^2 + Y^2 = a^2 \quad \text{y se tiene} \quad \left(\frac{a}{b}x\right)^2 = a^2$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}\right)x^2 + y^2 = a^2$$

2.9 Deforcaciones y direcciones principales.

En el inciso anterior se dijo que la deformación gira las direcciones principales del elipsoide de deformación en P a las direcciones principales del elipsoide de deformación en P' .

También se dijo que en las direcciones principales se presentan los valores extremales de los alargamientos. Entonces conviene conocer las orientaciones de las direcciones principales respecto al sistema de referencia que se esté utilizando; para ello se requiere plantear el problema para encontrar los valores extremales de los alargamientos.

Si $N_k = \frac{dX_k}{dS}$ son las componentes de la dirección unitaria de uno de los ejes principales, el cálculo del alargamiento en dicha dirección se hará de acuerdo con la ec. 2.7.3

$$\Lambda^2(N) = G_{KL} N_K N_L \quad (2.9.1)$$

en donde N_k debe satisfacer la condición de ser una dirección unitaria.

$$\delta_{KL} N_K N_L = 1 \quad \text{o bien} \quad \delta_{KL} N_K N_L - 1 = 0 = 1 - \delta_{KL} N_K N_L \quad (2.9.2)$$

El problema de encontrar los valores extremales de la ec. 2.9.1 con la condición de que las variables independientes satisfagan la restricción indicada en la ec. 2.9.2, se simplifica si se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange⁴. Si ζ es el multiplicador de Lagrange, la función por minimizar será

⁴ ver por ejem. Courant, R. Y Hilbert, D. "Methods of Mathematical Physics", Interscience Publishers, 1953

$$F = G_{KL} N_K N_L + G (1 - \delta_{KL} N_K N_L) \quad (2.9.3)$$

de la condición

$$\frac{\partial}{\partial N_M} [G_{KL} N_K N_L + G (1 - \delta_{KL} N_K N_L)] = 0 \quad (2.9.4)$$

se obtienen las expresiones siguientes

$$(G_{KL} - G \delta_{KL}) N_L = 0 \quad (2.9.4)_-$$

El problema indicado por la ec. 2.9.4 es un caso particular de un modelo matemático conocido con el nombre de Problema de Valores Característicos y expresado en forma matricial de la forma siguiente:

$$\underline{A} \underline{x} = \lambda \underline{x} \quad \text{o bien} \quad (\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{x} = 0 \quad (2.9.5)$$

Definición 2.9.1. A los vectores \underline{x} que satisfacen la ec. 2.9.5 se les conoce con los nombres de vectores característicos, eigenvectores o vectores propios.

Definición 2.9.2. Los valores del parámetro λ que satisfacen la ec. 2.9.5 reciben el nombre de valores característicos, eigenvalores o valores propios.

La identificación de los términos de la ec. 2.9.4 con la ec. 2.9.5 son tales que al tensor de Green G_{KL} le corresponde la matriz \underline{A} , la delta de Kronecker δ_{KL} con la matriz identidad \underline{I} , el multiplicador de Lagrange G con

el valor característico λ y el vector asociado a la dirección de los ejes principales N_L con el vector característico \underline{x}

La ec. 2.9.4 se puede expresar en términos del tensor de Lagrange E_{KL} usando la ec. 2.4.4 y queda

$$(E_{KL} - E \delta_{KL}) N_L = 0 \quad (2.9.6)$$

donde

$$E = \frac{1}{2} (G - 1) \quad (2.9.7)$$

El método que más se acomoda para resolver el problema de ^{valores} característicos, ya que G_{KL} y E_{KL} son matrices de 3×3 , es el de encontrar las raíces del polinomio característico⁵

Definición 2.9.3. Se denomina polinomio característico al determinante del sistema indicado por las ecs. 2.9.4. o 2.9.5 o -- 2.9.6 igualado a cero. Así para la ec. 2.9.6 el polinomio característico será

$$|E_{KL} - E \delta_{KL}| = \begin{vmatrix} E_{11} - E & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} - E & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} - E \end{vmatrix} = 0 \quad (2.9.8)$$

De acuerdo con teoremas desarrollados en la teoría del problema de valores característicos se puede concluir lo siguiente para el caso muy especial de la matriz E_{KL} .

⁵ ver por ejem. Wilkinson, J. H. "The Algebraic Eigenvalue Problem", Clarendon Press (1965.)

i) Existen tres valores de E indicados por E_1, E_2 y E_3 ; tres vectores N_1, N_2, N_3 ; a cada valor E_α le corresponde un vector N_α , $\alpha = 1, 2, 3$.

ii) Por ser el tensor E_{KL} real y simétrico se puede aseverar que los valores característicos E_α y los vectores característicos N_α son reales. Además los vectores característicos serán ortogonales.

Definición 2.9.4. A los valores del multiplicador de Lagrange E_α que vienen a ser los valores característicos de la ec. 2.9.6, reciben el nombre de *deformaciones principales*. De acuerdo con el método de solución seleccionado, las deformaciones principales se obtienen al calcular las raíces del polinomio característico.

Al desarrollar la ec. 2.9.8 se obtiene

$$-E^3 + I_E E^2 - II_E E + III_E = 0 \quad (2.9.9)$$

donde los coeficientes del polinomio están dados por las expresiones

$$I_E = E_{KK} = E_{11} + E_{22} + E_{33} \quad (2.9.10)$$

$$II_E = E_{22} E_{33} + E_{33} E_{11} + E_{11} E_{22} - E_{23}^2 - E_{31}^2 - E_{12}^2$$

$$III_E = \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{13} \\ E_{31} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} \quad (2.9.11)$$

$$III_E = E_{11} E_{22} E_{33} + 2E_{12} E_{23} E_{31} - E_{11} E_{23}^2 - E_{22} E_{31}^2 - E_{33} E_{12}^2$$

$$III_E = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \quad (2.9.12)$$

Definición 2.9.5. A los tres vectores característicos N_α asociados a las tres deformaciones principales E_α , se les llaman direcciones principales. Desde luego que, de acuerdo con el método seleccionado, las direcciones principales se calcularán de los sistemas de ecuaciones homogéneas que resulten al sustituir los valores E_α en la ec. 2.9.6 es decir

- i) Para E_1 , se forma el sistema $(E_{KL} - E_1 \delta_{KL}) N_{1L} = 0$
- ii) Para E_2 , se forma el sistema $(E_{KL} - E_2 \delta_{KL}) N_{2L} = 0$
- iii) Para E_3 , se forma el sistema $(E_{KL} - E_3 \delta_{KL}) N_{3L} = 0$

El Tensor de deformación se simplifica sensiblemente cuando el sistema de referencia utilizado para su medición coincide con las direcciones principales. En este sistema de referencia las direcciones principales N_α deberán satisfacer

$$N_{\alpha k} = 0 \quad \text{para } \alpha \neq k$$

$$N_{\alpha k} = 1 \quad \text{para } \alpha = k$$

entonces $N_{\alpha k}$ en este sistema de referencia es una delta de Kronecker, es decir

$$N_{\alpha k} = \delta_{\alpha k} \quad (2.9.13)$$

Al sustituir E_{α} y $N_{\alpha k}$ en la ecuación 2.9.6 se tiene

$$E_{KL} N_{\alpha L} = E_{\alpha} \delta_{KL} N_{\alpha L} = E_{\alpha} N_{\alpha k} \quad (2.9.14)$$

NOTA 2.9.1. Una raya horizontal sobre un índice indicará que se destruye la notación suma; es decir

$$E_{\alpha} N_{\alpha k} \quad \underline{\text{no}} \text{ indica suma sobre el índice } \alpha$$

sustituyendo la ec. 2.9.1, en la ec. 2.9.14 se tiene

$$E_{KL} \delta_{\alpha L} = E_{\alpha} \delta_{\alpha k}$$

que se transforma en

$$E_{k\alpha} = E_{\alpha} \delta_{\alpha k} \quad (2.9.15)$$

La ecuación anterior puesta en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix} \quad (2.9.16)$$

Lo anterior demuestra que las deformaciones principales E_k son deformaciones normales asociadas a los ejes principales.

También se puede aseverar que las componentes de cortante (E_{kl} para $k \neq l$) se anulan en un sistema de referencia paralelo a los ejes principales.

La ecuación del elipsoide de deformación referido a un sistema de referencia principal queda como

$$(ds)^2 = k^2 = G_{KL} dX_K dX_L = \sum_{\alpha} G_{\alpha} (dX_{\alpha})^2 \quad (2.9.17)$$

donde los G_{α} llamados números propios se calculan con la ec. 2.9.7.

Los alargamientos calculados con las ecs. 2.7.3 y 2.7.4 tomando en cuenta la ec. 2.9.17 y la ecuación del elipsoide espacial - en términos de los números propios G_{α} de C_{kk} quedan

$$\Lambda(\alpha) = \frac{k}{dX_{\alpha}} = \sqrt{G_{\alpha}} \quad (2.9.18)$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{dX_{\alpha}}{k} = \frac{1}{\sqrt{G_{\alpha}}} \quad (2.9.19)$$

como $\Lambda(\alpha) = \lambda(\alpha)$ se tiene que

$$G_{\alpha} = \frac{1}{C_{\alpha}} = \lambda_{\alpha}^2 \quad (2.9.20)$$

También se puede demostrar que las direcciones principales del elipsoide de deformación material están relacionadas con las direcciones principales del elipsoide de deformación espacial mediante las expresiones siguientes

$$N_{\alpha k} = X_{k,\alpha} n_{\alpha k} / \sqrt{C_{\alpha}} \quad (2.9.21)$$

$$n_{\alpha k} = \sqrt{C_{\alpha}} = X_{k,\alpha} N_{\alpha k} \quad (2.9.22)$$

Los coeficientes de la ecuación característica cuando se utiliza el tensor de deformaciones referido a los ejes principales (ec. 2.9.16), quedan

$$I_E = E_1 + E_2 + E_3 \quad (2.9.23)$$

$$II_E = E_2 E_3 + E_3 E_1 + E_1 E_2 \quad (2.9.24)$$

$$III_E = E_1 E_2 E_3 \quad (2.9.25)$$

Puesto que las longitudes físicas no cambian en una transformación de coordenadas, se tendrá que los términos I_E , II_E y III_E son invariantes respecto a cualquier transformación de coordenadas.

Definición 2.9.6. Al término I_E se le llama primer invariante o invariante lineal del tensor de deformaciones E_{KL} . Al término II_E se le llama segundo invariante o invariante cuadrático del tensor de deformaciones E_{KL} y, al término III_E se le denomina tercer invariante o invariante cúbico del tensor de deformaciones.

Desde luego que existen invariantes de los tensores de deformación de Cauchy, Green y Euler y se puede demostrar que son válidas las relaciones siguientes

$$I_G = 3 + I_E \quad (2.9.26)$$

$$II_G = 3 + 4 I_E + 4 II_E \quad (2.9.27)$$

$$III_G = 1 + 2 I_E + 4 II_E + 4 III_E \quad (2.9.28)$$

$$I_e = 3 - 2 I_e \quad (2.9.29)$$

$$II_e = 3 - 4 I_e \quad (2.9.30)$$

$$III_e = 1 - 2 I_e + 4 II_e - 8 III_e \quad (2.9.31)$$

Nota 2.9.1. La representación gráfica del estado de deformación de un cuerpo en un punto, se hace mediante los conocidos círculos de Mohr. Debido a que esta representación gráfica es similar a la del estado de esfuerzos en un punto, la descripción de los círculos de Mohr se hará en el capítulo 4, para no hacer más extenso el capítulo en desarrollo.

Ejemplo 2.9.1. Dado el tensor de deformaciones de Lagrange como

$$[E_{KL}] = \begin{bmatrix} 0.0025 & -0.002 & 0 \\ -0.002 & 0.002 & -0.001 \\ 0 & -0.001 & 0.001 \end{bmatrix}$$

determinar las deformaciones y direcciones principales para esta deformación.

De acuerdo a la 2.9.6 el problema de deformaciones y direcciones principales se reduce a resolver el modelo siguiente

$$(E_{KL} - E\delta_{KL})N_L = 0$$

Una forma de encontrar los valores de E , es resolviendo la ec. característica dada por 2.9.9 como

$$-E^3 + I_E E^2 - II_E E + III_E = 0$$

Utilizando las ecs. 2.9.10 a 2.9.12

$$I_E = E_{KK} = 5.5 \times 10^{-3}$$

$$II_E = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times 10^{-3} + \begin{vmatrix} 2.5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \times 10^{-3} = 7.5 \times 10^{-3}$$

$$III_E = \begin{vmatrix} 2.5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \times 10^{-3} = 2 \times 10^{-3}$$

luego $-E^3 - 5.5 \times 10^{-3} E^2 - 7.5 \times 10^{-3} E + 2 \times 10^{-3} = 0$ (a)

haciendo $\lambda = E \times 10^3$

$$\lambda^3 \times 10^{-9} - 5.5 \times 10^{-9} \lambda^2 + 7.5 \times 10^{-9} \lambda + 2 \times 10^{-9} = 0$$

$$\lambda^3 - 5.5 \lambda^2 + 7.5 \lambda + 2 = 0$$
 (b)

Uno de los métodos utilizados para resolver la ec. (b) es el de Newton Raphson y división sintética, en donde se tiene

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5.5 \lambda^2 + 7.5 \lambda - 2 = 0$$

$$P'(\lambda) = 3\lambda^2 - 11\lambda + 7.5$$

las raíces se pueden obtener mediante

$$r_{i+1} = r_i - \frac{P(r_i)}{P'(r_i)} \quad (c)$$

Por lo tanto, sea $r_0 = 0.5$

1	-5.5	7.5	-2.0	0.5
	0.5	-2.5	2.5	
1	-5.0	5	0.5	

; $P(r_1) = 0.5$

3	-11	7.5	0.5
	1.5	-4.75	
3	-9.5	2.75	

; $P(r_2) = 2.75$

Aplicando c ; $r_2 = 0.5 - \frac{0.5}{2.75} = 0.5 - 0.18 = 0.32$

1	-5.5	7.5	-2.0	0.32
	0.32	1.67	1.87	
1	-5.18	5.83	-0.13	

; $P(r_3) = -0.13$

3	-11	7.5	0.32
	0.96	-3.2	
3	-10.0	4.3	

; $P'(r_3) = 4.3$

2-73

Aplicando C ; $\Gamma_3 = 0,32 - \frac{-0,12}{4,3} = 0,32 + 0,03 = 0,35$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -5,5 & 7,5 & -2 \\ & 0 & -1,8 & 2 \\ \hline 1 & -5,15 & 5,7 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0,35 \\ \\ \end{array}$$

Luego $\lambda_1 = 0,35$

y la ec. cúbica se reduce a una ec. de 2° grado dada por

$$\lambda^2 - 5,15\lambda + 5,7 = 0$$

resolviendo esta ecuación se tiene

$$\lambda = 2,575 \pm \sqrt{6,6 - 5,7} = 2,575 \pm 0,95$$

por lo tanto

$$\lambda_2 = 1,625 \quad ; \quad \lambda_3 = 3,525$$

Sustituyendo los valores de λ_1 , λ_2 y λ_3 en (a) se obtienen las deformaciones principales

$$E_1 = 0,35 \times 10^{-3} \quad ; \quad E_2 = 1,625 \times 10^{-3} \quad ; \quad E_3 = 3,525 \times 10^{-3}$$

Las direcciones principales asociadas a cada valor de la deformación principal, se obtienen al substituir los valores E_x en la ec. 2.9.6, es decir

Para E_1 , se forma el sistema

$$(E_{KL} - E_1 \delta_{KL}) N_{1L} = 0$$

2-74

$$\begin{bmatrix} 2,5 - 0,35 & -2 & 0 \\ -2 & 2 - 0,35 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 0,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \end{bmatrix} = 0$$

$$2,15 N_{11} - 2 N_{12} = 0 \quad (d)$$

$$-2 N_{11} + 1,65 N_{12} - N_{13} = 0 \quad (f)$$

$$-N_{12} + 0,65 N_{13} = 0 \quad (g)$$

que es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas pero sólo dos de ellas son independientes y la tercera ecuación resulta de la condición 2.9.2 dada por

$$N_{11}^2 + N_{12}^2 + N_{13}^2 = 1 \quad (h)$$

despejando de (d) y (g) N_{12} y N_{13} respectivamente y substituyendo en (h) se tiene

$$N_{12} = 1,075 N_{11} \quad ; \quad N_{13} = 1,65 N_{11} \quad (i)$$

$$N_{11} + 1,15 N_{11}^2 + 2,71 N_{11}^2 = 1$$

$$4,86 N_{11}^2 = 1 \quad ; \quad N_{11} = \sqrt{\frac{1}{4,86}} = \pm 4,55 \times 10^{-1}$$

substituyendo en (i) $N_{12} = \pm 4,86 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{13} = \pm 7,5 \times 10^{-1}$

De manera similar se obtiene

$$N_{21} = \pm 7,75 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{22} = \pm 3,4 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{23} = \pm 5,4 \times 10^{-1}$$

$$N_{31} = \pm 2,7 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{32} = \pm 4,46 \times 10^{-1} \quad ; \quad N_{33} = \pm 1,78 \times 10^{-1}$$

Existen otros métodos para resolver el problema de valores característicos, y uno de los más utilizados es el método de Jacobi. En el apéndice A se describe un programa de computadora que resuelve el problema de valores característicos por este método.

2.10 Ecuaciones de Compatibilidad.

Se ha trabajado en un espacio de tres dimensiones y se han definido los tensores de deformación de Green y de Lagrange en términos de seis componentes independientes. De acuerdo con la ecuación 2.4.15, dichos tensores se pueden expresar en términos de las tres componentes del vector desplazamiento U_k

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (G_{KL} - \delta_{KL}) = \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}) \quad (2.10.1)$$

Es fácil comprobar que si el vector desplazamiento U_k , posee derivadas parciales de primer orden continuas, entonces se podrán calcular las seis componentes independientes de los tensores E_{KL} y G_{KL} , según la ecuación 2.10.1.

También es válido plantear el problema inverso; es decir, si dadas las seis componentes del tensor de deformación E_{KL} , existe un campo de desplazamiento continuo, monovaluado asociado a dicho tensor de deformaciones. Al observar la ecuación 2.10.1 se puede concluir que es un sistema de seis ecuaciones en derivadas parciales — una para cada componente independiente del tensor — con tres incógnitas U_k . Es de afirmarse que el sistema 2.10.1 puede no tener solución para las tres incógnitas U_k , a menos que se satisfagan ciertas condiciones de integrabilidad. Las condiciones de integrabilidad constituyen un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales que involucran únicamente a las componentes de E_{KL} y se denominan ecuaciones de compatibilidad. Cuando se violan las ecuaciones de compatibilidad habrá de esperarse campos de desplazamiento que

no sean únicos como los mostrados en la fig. 2.10.1. En la fig. 2.10.1a se tiene localizado un triángulo en un cuerpo no deformado. En las figs. 2.10.1b y c se presentan posibles configuraciones deformadas asociadas a deformaciones que violan las ecuaciones de compatibilidad.



Fig 2.10.1. Ilustración esquemática de configuraciones deformadas no compatibles.

Una forma de obtener las ecuaciones de compatibilidad consiste en eliminar los desplazamientos U_k de la ecuación 2.10.1. Tal eliminación se deberá llevar a cabo mediante derivaciones parciales. Es conveniente aclarar que para el caso de deformaciones infinitesimales este proceso es relativamente simple mientras que para las deformaciones finitas el proceso resulta ser tedioso.

Otra forma para obtener las ecuaciones de compatibilidad consiste en hacer uso del teorema siguiente

Teorema 2.10.1. Teorema de Riemann. Las condiciones necesarias y suficientes para que un tensor simétrico a_{kl} sea un tensor métrico en un espacio euclídeano serán:

- i) Que a_{kl} sea un tensor no singular, positivo definido.
- ii) Que se anule el tensor de Riemann - Christoffel, $R_{klmn}^{(a)}$ formado con tal tensor.

Para argumentar el uso del teorema de Riemann conviene recordar que las configuraciones no deformadas están referidas a un sistema cartesiano. También las magnitudes al cuadrado de los vectores $d\mathbf{p}$ y $d\mathbf{p}'$ están dadas por las ecs. 2.4.1, es decir

$$(ds)^2 = \delta_{KL} dX_K dX_L = c_{kl} dx_k dx_l \quad (2.10.2a)$$

$$(ds)^2 = G_{KL} dX_K dX_L = \delta_{kl} dx_k dx_l \quad (2.10.2b)$$

Desde luego que se consideró que el cuerpo en su configuración no deformada como en su configuración deformada está en un espacio euclídeano. La ec. 2.10.2a indica que la longitud original se puede calcular en el sistema X_K siempre y cuando se conozca el tensor de deformación de Cauchy. La ec. 2.10.2b implica que la longitud deformada se puede calcular en la referencia X_K cuando se conozca el tensor de deformación de Green. Si se piensa en el movimiento definido por la ec. 2.2.1, es decir

$$x_k = x_k(X_K, t), \quad (2.10.3)$$

como una transformación de coordenadas de la referencia rectangular X_K la curvilínea x_k entonces el tensor de --

Cauchy c_{kl} juega el papel de un tensor métrico en las coordenadas curvilíneas x_k . Lo mismo es válido para el tensor de Green G_{KL} en el movimiento inverso dado por la ec. 2.2.2. Además -- conviene recordar que en un espacio euclídeano seis cantidades -- cualesquiera a_{kl} constituyen un tensor métrico si satisfacen -- el teorema de Riemann.

Conviene recordar que los tensores c_{kl} y G_{KL} satisfacen el inciso i) del Teorema de Riemann. Además el tensor de Riemann - Christoffel, $R_{klmn}^{(a)}$, formado con el tensor a_{kl} resulta ser

$$R_{klmn}^{(a)} = \frac{1}{2} (a_{kn,lm} + a_{lm,kn} - a_{km,ln} - a_{ln,km}) + a_{rs}^{-1} ([lm,s][kn,r] - [ln,s][km,r]) \quad (2.10.4)$$

donde $[kl,m]$ es el símbolo de Christoffel de primera clase -- cuya expresión está dada por

$$[kl,m] = \frac{1}{2} (a_{km,l} + a_{lm,k} - a_{kl,m})$$

y a_{rs}^{-1} es el inverso de a_{rs} de tal manera que deberá satisfacer la expresión siguiente

$$a_{ns}^{-1} a_{sl} = a_{ns} \ a_{sl}^{-1} = \delta_{nl} \quad (2.10.5)$$

Entonces para que c_{kl} y G_{KL} sean tensores métricos se requieren que satisfagan las expresiones siguientes

$$R_{KLMN}^{(G)} = 0 \quad (2.10.6)$$

$$R_{klmn}^{(c)} = 0 \quad (2.10.7)$$



El tensor de Riemann-Christoffel, R_{klmn} en un espacio de tres dimensiones posee 81 componentes pero únicamente seis son algebraicamente independientes y no representan una identidad de ceros. La ec. 2.10.6 conduce a ecuaciones en derivadas parciales en términos de G_{KL} y constituyen las ecuaciones de compatibilidad para dicho tensor. Las ecuaciones de compatibilidad para el tensor de Cauchy se obtendrán de la ec. 2.10.7. Las ecuaciones de compatibilidad para los tensores de deformación de Lagrange E_{KL} y de Euler e_{kl} se obtendrán usando las ecs. 2.10.6 y 2.10.7 junto con las ecs. 2.4.4 y 2.4.5 dados por

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (G_{KL} - \delta_{KL}) \quad (2.10.8)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (C_{kl} - \delta_{kl}) \quad (2.10.9)$$

Si se sustituye la ec. 2.10.9 en la ec. 2.10.7 se obtendrá la expresión siguiente:

$$e_{kn,lm} + e_{lm,kn} - e_{ln,km} - e_{km,ln} - C_{rs}^{-1} [(e_{kr,n} + e_{nr,k} - e_{kn,r}) (e_{ls,m} + e_{ms,l} - e_{lm,s}) - (e_{kr,m} + e_{mr,k} - e_{km,r}) (e_{ls,n} + e_{ns,l} - e_{ln,s})] = 0 \quad (2.10.10)$$

Para el caso de querer las ecuaciones de compatibilidad del tensor de deformaciones infinitesimales \tilde{e}_{kl} los términos lineales de la ec. 2.10.10. son los únicos que se conservarán, quedando:

$$\tilde{e}_{kn,lm} + \tilde{e}_{lm,kn} - \tilde{e}_{ln,km} - \tilde{e}_{km,ln} = 0 \quad (2.10.11)$$

También se presentará el método de eliminar las componentes de desplazamiento para obtener las ecuaciones de compatibilidad del tensor de deformaciones infinitesimales \tilde{e}_{kl} . De acuerdo con las ecs. 2.6.2 se tendrá:

DEPFI

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (2.10.12)$$

derivando dos veces parcialmente la ecuación anterior respecto a x_m y x_n se obtendrá

$$\tilde{e}_{kl,mn} = \frac{1}{2} (u_{k,lmn} + u_{l,mkn}) \quad (2.10.13)$$

de manera similar se podrán obtener las expresiones siguientes

$$\tilde{e}_{mn,kl} = \frac{1}{2} (u_{m,nkl} + u_{n,mkl}) \quad (2.10.14)$$

$$\tilde{e}_{ln,km} = \frac{1}{2} (u_{l,nkm} + u_{n,lkm}) \quad (2.10.15)$$

$$\tilde{e}_{km,ln} = \frac{1}{2} (u_{k,mln} + u_{m,kl n}) \quad (2.10.16)$$

Combinando las ecs. 2.10.13 a 2.10.16 se obtendrá la expresión siguiente

$$\tilde{e}_{kl,mn} + \tilde{e}_{mn,kl} - \tilde{e}_{ln,km} - \tilde{e}_{km,ln} = 0 \quad (2.10.17)$$

es fácil demostrar que

$$\tilde{e}_{kl,mn} + \tilde{e}_{mn,kl} = \tilde{e}_{kn,lm} + \tilde{e}_{lm,kn} \quad (2.10.18)$$

De las 81 ecuaciones indicadas por las ecs. 2.10.11 o 2.10.17 únicamente seis son algebraicamente independientes. Las seis ecuaciones de compatibilidad expresadas en un sistema de referen-

cia rectangular con variables x, y, z quedan

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{e}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{e}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{e}_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10.19a)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \tilde{e}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{e}_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{e}_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10.19b)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \tilde{e}_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{e}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{e}_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10.19c)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{e}_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.10.19d)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{e}_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.10.19e)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{e}_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{e}_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{e}_{zx}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.10.19f)$$

Ejemplo 2.10.1. Da-dó el tensor de deformaciones infinitesimales de un cuerpo como

$$[e_{kl}] = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xz \\ y^2 & z & z^2 \\ xx & z^2 & z \end{bmatrix}$$

verificar si es un estado compatible de deformación.

De acuerdo a las ecs. 2.10.9, representan las ecs. de compatibilidad, con las cuales, si se satisfacen, se asegura que el estado de deformación es compatible

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial xz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) = 0$$

2.10.19a se satisface

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial xz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) = 0$$

2.10.19b se satisface

$$\frac{\partial^2 (z)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial z^2}{\partial x} - \frac{\partial xz}{\partial y} + \frac{\partial yz}{\partial z} \right) = 0$$

2.10.19c se satisface

$$\frac{\partial^2 x^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 yz}{\partial x \partial y} = 0$$

2.10.19d se satisface

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (z)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z^2}{\partial y \partial z} = 0$$

2.10.19e se satisface

$$\frac{\partial^2 (z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x^2}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 xz}{\partial x \partial z} = -2$$

No se satisfacen 2.10.19f

luego el tensor \tilde{e}_{kl} no representa un estado compatible de deformación.

2.11 Deformaciones de áreas y volúmenes diferenciales.

Las expresiones de las diferenciales de área como vector da y de volumen dv , en un sistema de referencia euleriano, son de uso frecuente en la Mecánica del Medio Continuo por eso es conveniente cuantificarlas.

En las figs. 2.5.1 y 2.7.1 se ha presentado la deformación de un paralelepípedo rectangular. De nuevo se graficará este paralelepípedo en la fig. 2.11.1 con el fin de visualizar los desarro-

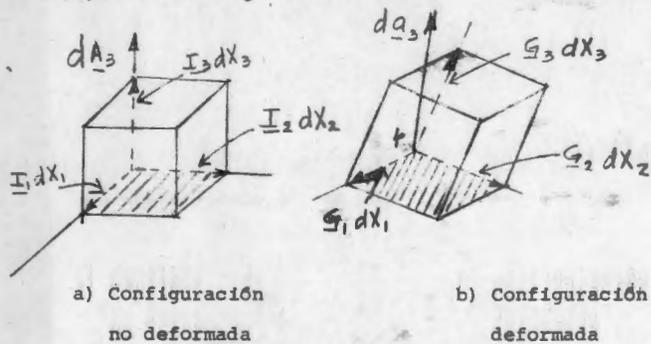


Fig. 2.11.1 Deformación de un paralelepípedo rectangular infinitesimal.

llos siguientes

El vector da_3 se calculará de acuerdo con el producto vectorial de los vectores $G_1 dx_1$ y $G_2 dx_2$.

$$da_3 = (G_1 dx_1) \times (G_2 dx_2) = G_1 \times G_2 dx_1 dx_2 \quad (2.11.1)$$

usando la ec. 2.3.7b y el hecho que $dA_3 = dx_1 dx_2$ la ec. 2.11.1 se transforma en

$$da_3 = X_{k,1} X_{l,2} \dot{i}_k \times \dot{i}_l dA_3 = e_{klm} X_{k,1} X_{l,2} \dot{i}_m dA_3 \quad (2.11.2)$$

Al desarrollar la ec. 2.3.4 se llega a la expresión

$$j = |X_{k,k}| = e_{klm} X_{k,1} X_{l,2} X_{m,3} \quad (2.11.3)$$

o bien

$$j X_{3,m} = e_{klm} X_{k,1} X_{l,2} \quad (2.11.4)$$

sustituyendo la ec. 2.11.4 en la ec. 2.11.2 se tiene que

$$da_3 = j X_{3,m} \dot{i}_m dA_3 \quad (2.11.5)$$

los valores de da_1 y da_2 serán análogos al de la ec. 2.11.5.

El vector da estará dado por

$$da = da_1 \dot{i}_1 + da_2 \dot{i}_2 + da_3 \dot{i}_3 = j (X_{1,k} dA_1 + X_{2,k} dA_2 + X_{3,k} dA_3) \dot{i}_k$$

$$da = j X_{k,k} dA_k \dot{i}_k \quad (2.11.6)$$

$$da_k = j X_{k,k} dA_k \quad (2.11.7)$$

La magnitud del área da se calculará mediante el producto escalar, es decir

$$|da|^2 = da^2 = da \cdot da = j^2 X_{k,k} X_{l,l} dA_k dA_l \quad (2.11.8)$$

De acuerdo con la ec. 2.3.10b y 2.11.3 y la definición del tercer invariante del tensor G_{KL} se tendrá

$$|G_{KL}| = |X_{k,jk} X_{l,L}| = |X_{k,jk}|^2 = III_G = j^2 \quad (2.11.9)$$

De la definición del inverso del tensor G_{KL} se tendrá

$$G_{KL} G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} \quad (2.11.10)$$

sustituyendo la ec. 2.3.10b en la ec. 2.11.10 se tiene

$$X_{k,jk} X_{l,L} G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} \quad (2.11.11)$$

multiplicando ambos miembros por $X_{k,jk} X_{L,jk}$ y tomando en cuenta la ec. 2.3.2b se tendrá

$$X_{k,jk} X_{l,L} X_{L,jk} G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} X_{k,jk} X_{L,jk}$$

$$G_{LM}^{-1} = \delta_{KM} X_{k,jk} X_{L,jk}$$

$$G_{KL}^{-1} = X_{k,jk} X_{L,jk} \quad (2.11.12)$$

sustituyendo las ecs. 2.11.9 y 2.11.12 en la ec. 2.11.8 se llega a la expresión siguiente

$$da^2 = III_G G_{KL}^{-1} dA_k dA_L \quad (2.11.13)$$

De la ec. 2.11.7 se tiene que

$$dA_k = j^{-1} x_{k,jk} da_k \quad (2.11.14)$$

o bien

$$d\underline{A} = j^{-1} x_{k,jk} da_k \underline{I}_k \quad (2.11.15)$$

Para calcular la diferencial de volumen euleriano dv se hará uso de la fig. 2.11.1b en donde el volumen v (paralelepípedo) estará dado por

$$dv = d\underline{a}_3 \cdot \underline{G}_3 dX_3 \quad (2.11.16)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior el valor de $d\underline{a}_3$ dado por la ecuación 2.11.5 y el valor de \underline{G}_3 dado por la ecuación 2.3.7b se obtendrá

$$dv = (j X_{3,k} \underline{i}_k dA_3) \cdot (X_{m,3} \underline{i}_m dX_3) = j X_{3,k} X_{m,3} \underline{i}_k \cdot \underline{i}_m dA_3 dX_3$$

$$dv = j X_{3,k} X_{m,3} \delta_{km} dV = j X_{3,k} X_{k,3} dV = j dV \quad (2.11.17)$$

Tomando en cuenta la ecuación 2.11.9, la ecuación 2.11.17 se puede escribir como

$$dv = j dV = \sqrt{III_G} dV \quad (2.11.18)$$

Usando las ecuaciones 2.11.18, 2.9.28 se podrá escribir la expresión siguiente

$$\frac{dv}{dV} = j = \sqrt{III_{\hat{\epsilon}}} = (1 + 2I_{\hat{\epsilon}} + 4II_{\hat{\epsilon}} + 8III_{\hat{\epsilon}})^{1/2} \quad (2.11.19)$$

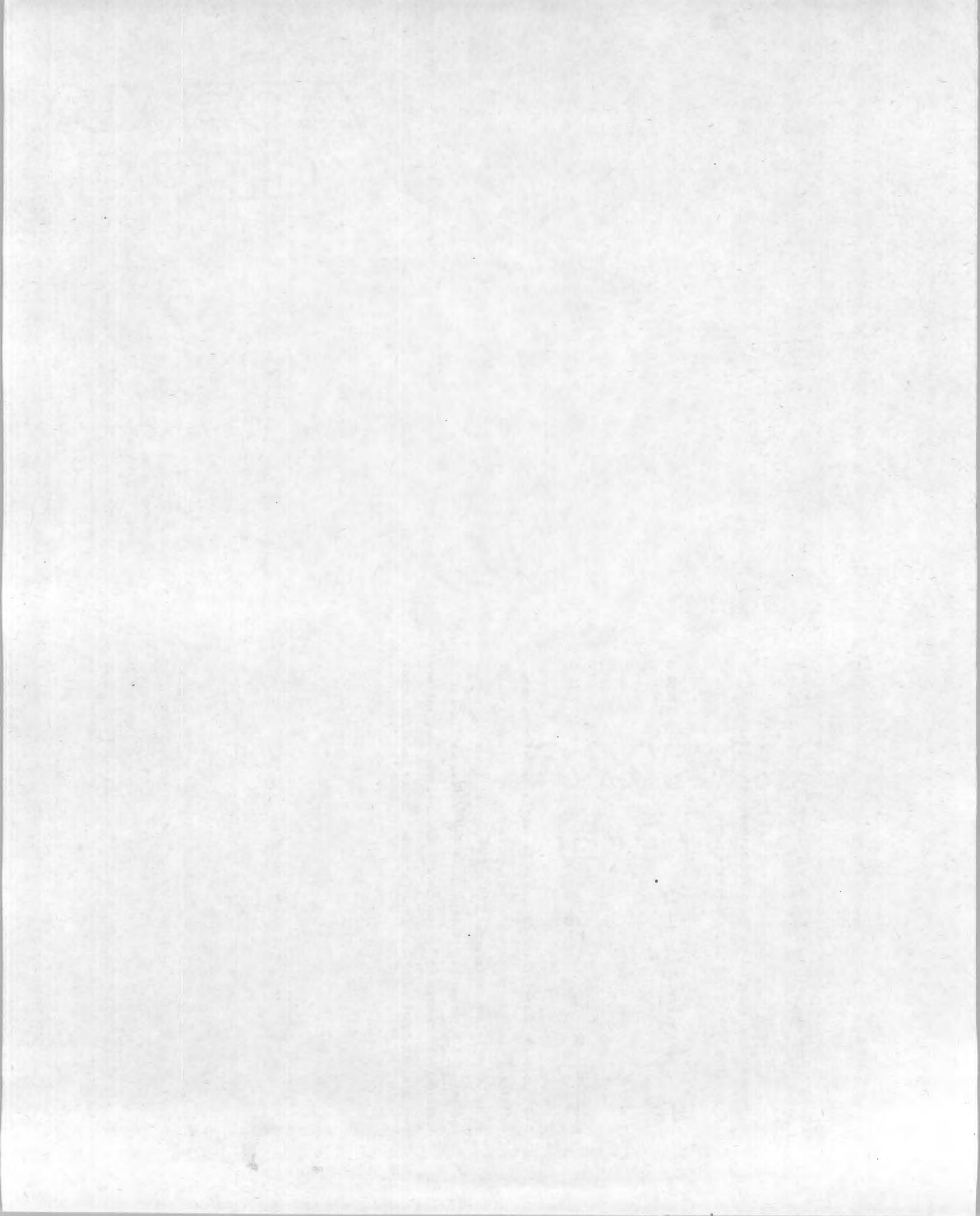
Para el caso especial de las deformaciones infinitesimales, -
la ecuación 2.11.19 se puede escribir como

$$\frac{dv}{dV} \approx (1 + 2I_{\hat{\epsilon}})^{1/2} = 1 + I_{\hat{\epsilon}} \quad (2.11.20)$$

o bien de la forma siguiente

$$\frac{dv - dV}{dV} \approx I_{\hat{\epsilon}} \approx I_{\epsilon} \quad (2.11.21)$$

La ecuación anterior indica que en la teoría de deformaciones infinitesimales el incremento de volumen entre el volumen inicial es igual al primer invariante $I_{\hat{\epsilon}} = I_{\epsilon}$, del tensor de deformaciones infinitesimales. Al término $(dv - dV)/dV$ se le llama dilatación ^{volumétrica} y únicamente en la teoría de las deformaciones infinitesimales es igual al primer invariante del tensor de deformaciones.



MECANICA DEL MEDIO CONTINUO

Notas preliminares para un primer curso.

Ramón Cervantes Beltrán *

Victor Porras Silva

* Profesores Investigadores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

CAPITULO 3
MOVIMIENTO

3.1 Introducción.

En el capítulo anterior se estudió la forma de poder relacionar dos configuraciones en dos instantes específicos del movimiento. Es decir cómo medir los conceptos de un medio continuo al pasar de una configuración no deformada a otra deformada. Es objeto de este capítulo el poder estudiar al movimiento como el cambio continuo de configuraciones respecto al tiempo. Por lo tanto en los conceptos que aquí se van a introducir juega un papel muy importante la variable tiempo.

3.2 Rapidez de Variación respecto al tiempo de Vectores.

En la cinemática de los medios continuos es usual trabajar con rapidez de variación respecto al tiempo de cantidades vectoriales asociadas a puntos materiales. En la determinación de las rapidez de variación respecto al tiempo de cantidades de

campo transportadas por un punto material se debe tener en cuenta además del cambio en un punto espacial fijo (cambio local), el cambio en el campo como el observado por la partícula debido únicamente a su movimiento (cambio convectivo).

Definición 3.2.1. La rapidez de variación material respecto al tiempo de un vector o tensor \underline{y} o derivada respecto al tiempo de un vector/tensor \underline{y} se define mediante la expresión siguiente

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \dot{\underline{y}} = \left. \frac{\partial \underline{y}}{\partial t} \right|_{\underline{x}} \quad (3.2.1)$$

Lo anterior implica que las variables \underline{x} permanecen constantes en el proceso de derivación. Si \underline{y} es una función material, es decir

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t) = y_k(\underline{x}, t) \underline{i}_k \quad (3.2.2)$$

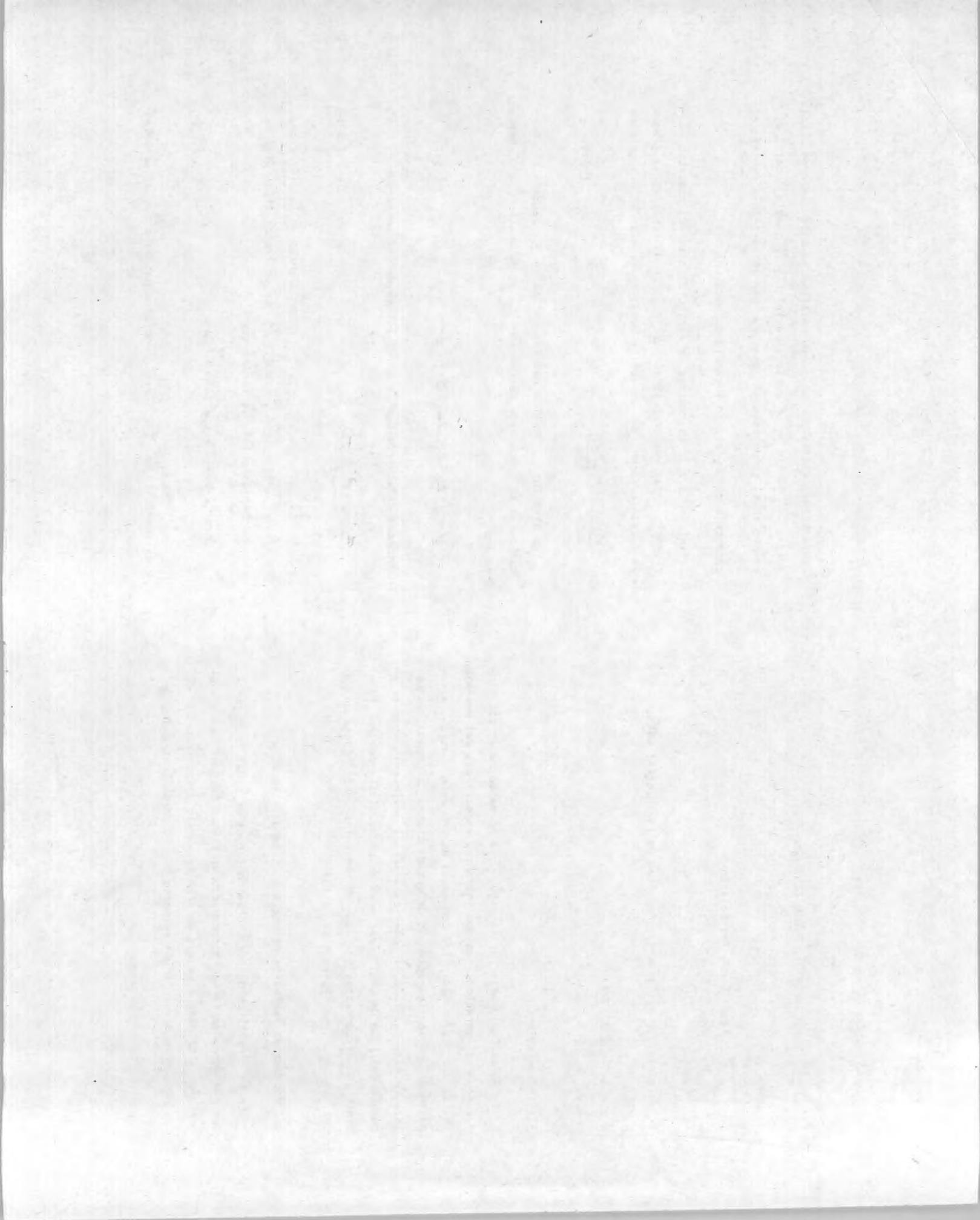
entonces de acuerdo con la ec. 3.2.1 se deberá tener que

$$\frac{d\underline{y}}{dt} = \frac{\partial y_k}{\partial t} \underline{i}_k \quad (3.2.3)$$

puesto que las variables \underline{x}, t son independientes en la referencia material o Lagrangiana y además \underline{i}_k es un vector fijo. Si \underline{y} es una función espacial, se tendrá que

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t) = y_k(\underline{x}, t) \underline{i}_k \quad (3.2.4)$$

y aplicando la ec. 3.2.1 a la función espacial anterior se obten



drá la expresión siguiente

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{\underline{x}} + \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (3.2.5)$$

lo anterior se presenta ya que de acuerdo con la ecuación de movimiento dado por la ec. 2.2.1 se tiene que la variable \underline{x} en la función y , también es función de la variable \underline{x} , es decir

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{x}, t) \quad (3.2.6)$$

$$y = y(\underline{x}, t) = y[\underline{x}(\underline{x}, t), t] \quad (3.2.7)$$

La ec. 3.2.5 se puede escribir como

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{Dy}{Dt} \underline{e}_a = \dot{y}_k \underline{e}_k \quad (3.2.8)$$

Definición 3.2.2. La derivada material de una función espacial y_k está dada por la ecuación siguiente

$$\frac{D}{Dt} y_k = \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + y_{k,i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (3.2.9)$$

Al primer término del miembro de la derecha de la ec. 3.2.9 se le llama rapidez local o estacionaria mientras que al segundo se le llama rapidez convectiva.

Se puede usar el símbolo $\frac{D}{Dt}$ para indicar la derivada material de vectores espaciales y vectores materiales de acuerdo con las expresiones siguientes

i) vectores materiales ; $y_k = y_k(\underline{x}, t)$

$$\frac{D}{Dt} y_k = \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} \quad (3.2.10)$$

ii) vectores espaciales ; $y_k = y_k(\underline{x}, t)$

$$\frac{D}{Dt} y_k = \dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial t} + y_{k,i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (3.2.11)$$

NOTA 3.2.1. Obsérvese que, en general, para un vector espacial se presenta la desigualdad siguiente entre operadores

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq \frac{D}{Dt} \quad (3.2.12)$$

Es fácil comprobar que la derivada material obedece las reglas de derivación parcial que involucran sumas y productos, es decir

$$\frac{D}{Dt} (y_k + z_k) = \frac{D}{Dt} y_k + \frac{D}{Dt} z_k \quad (3.2.13)$$

$$\frac{D}{Dt} (y_k z_k) = \frac{D}{Dt} y_k z_k + y_k \frac{D}{Dt} z_k \quad (3.2.14)$$

Definición 3.2.3. El vector Velocidad \underline{v} de una partícula ^{es la} rapidez de variación material respecto al tiempo de su vector de posición. *? será / espacial.*

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = v_k \underline{e}_k \quad (3.2.15)$$

donde $v_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} = \dot{x}_k = \frac{Dx_k}{Dt} \quad (3.2.16)$

donde \underline{x} es constante en $\underline{x}_k = \underline{x}_k(\underline{x}, t)$

De acuerdo con la ec. 2.4.7 se tiene que

$$\underline{p} = \underline{P} + \underline{u} - \underline{b} \quad (3.2.17)$$

Como \underline{b} es un vector constante y \underline{P} es independiente del tiempo se tendrá que en base a la ec. 3.2.17 la ec. 3.2.15 se reduce a

$$\underline{v} = \underline{u} \quad \text{o bien} \quad \dot{\underline{x}}_k = \frac{D}{Dt} \underline{x}_k \quad (3.2.18)$$

considerando a \underline{x} constante.

En la ec. 3.2.15 se puede considerar que se conoce la identidad de la partícula \underline{x} y tener

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad (3.2.18)$$

que puesto de acuerdo con el movimiento inverso dado por la ec. 2.2.2, es decir $\underline{x} = \underline{x}(\underline{x}, t)$, la ecuación 3.2.18 queda

$$\underline{v} = \underline{v}[\underline{x}(\underline{x}, t), t] = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad (3.2.19)$$

Entonces se puede concluir que existen dos formas para describir al vector velocidad \underline{v} : la descripción material dada por la ec. 3.2.18 y la descripción espacial dada por la ec. 3.2.19.

Definición 3.2.4. El vector aceleración \underline{a} de una partícula es la rapidez de variación respecto al tiempo del vector ve-

locidad correspondiente. Es decir

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{D\underline{v}_k}{Dt} \underline{i}_k = a_k \underline{i}_k \quad (3.2.20)$$

$$a_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v_l \quad (3.2.21)$$

NOTA 3.2.2. En la representación lagrangiana, es identificable la partícula material con una velocidad o aceleración dadas. Este esquema es una extensión inmediata de la mecánica de la partícula. Sin embargo la descripción euleriana no tiene equivalencia en la mecánica de la partícula y lo que sucede es que en un tiempo t se conocen los vectores velocidad y aceleración asociadas a cada punto espacial pero no se conoce la partícula que lo ocupa. Como el movimiento mapea puntos materiales a puntos espaciales, el punto mapeado adquirirá la velocidad y la aceleración asociadas a tal punto en tal instante.

Definición 3.2.5. Punto de estancamiento es aquel en el cual

$$\underline{v} = \underline{0}$$

Definición 3.2.6. Movimiento estacionario es aquel que su velocidad no varía con el tiempo, es decir $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x})$.

Definición 3.2.7. Movimiento unidimensional o lineal es aquel en que se anulan dos componentes del vector velocidad y la tercera componente depende de una sola variable espacial. Las ecuaciones siguientes definen a tal movimiento

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_1(\underline{x}_1, t) \quad ; \quad \underline{v}_2 = \underline{v}_3 = 0 \quad (3.2.22)$$

En forma análoga se puede definir el movimiento plano.

Una vez definido el concepto de derivada material conviene -- aplicarlo a los conceptos que están presentes en los axiomas básicos de la Mecánica. Dentro de los conceptos se cuentan las diferenciales de longitud, superficie y de volumen, las integrales -- que involucran regiones tales como líneas, superficies y volúmenes los tensores de deformación, etc. En el inciso 3.3 se presentan tales aplicaciones.

Ejemplo 3.2.1. El campo de desplazamientos de un cuerpo está dado en su forma lagrangiana como $u_i = 0$; $u_1 = e^t(x_2 - x_3)/2 + e^t(x_2 - x_3)/2 - x_2$; $u_3 = e^t(x_2 + x_3)/2 - e^t(x_2 - x_3)/2 - x_3$. Determinar las componentes de velocidad en su forma lagrangiana.

De acuerdo a la Ec. 3.2.18 se tiene que

$$\underline{v} = \underline{\dot{u}} = \frac{D \underline{u}}{Dt}$$

Como \underline{u} es una función material

$$\underline{v} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} \quad \text{or} \quad v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

entonces

$$v_1 = 0; v_2 = e^t(x_2 + x_3)/2 - e^t(x_2 - x_3)/2; v_3 = e^t(x_2 + x_3)/2 + e^t(x_2 - x_3)/2$$

Ejemplo 3.2.2. El campo de velocidades de un cuerpo está dado por las siguientes ecuaciones

$$v_1 = x_1/(1+t) \quad ; \quad v_2 = 2x_2/(1+t) \quad ; \quad v_3 = 3x_3/(1+t)$$

Determinar las componentes de aceleración para este movimiento.

De acuerdo a la ec. 3.2.20 se tiene $a = \frac{D \underline{v}}{Dt}$

Como \underline{v} es una función espacial por la Ec. 3.2.9

$$\frac{D \underline{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) \underline{e}_k \quad \text{[10]}$$

$$\frac{D v_k}{Dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + v_{k,l} v_l \quad v_l = \frac{\partial v_l}{\partial t} + v_{l,1} v_1 + v_{l,2} v_2 + v_{l,3} v_3 \quad \text{[10]}$$

$$a_1 = \frac{D v_1}{Dt} = \frac{-x_1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t} \left(\frac{x_1}{1+t} \right) + 0 + 0 = 0$$

$$a_2 = \frac{D v_2}{Dt} = -\frac{2x_2}{(1+t)^2} + 0 + \frac{2}{(1+t)} \left(\frac{2x_2}{1+t} \right) + 0 = \frac{2x_2}{(1+t)^2}$$

$$a_3 = \frac{D v_3}{Dt} = -\frac{3x_3}{(1+t)^2} + 0 + 0 + \frac{3}{(1+t)} \left(\frac{3x_3}{1+t} \right) = \frac{6x_3}{(1+t)^2}$$

3.3 Derivadas Materiales de diferenciales.

Se requiere este tipo de rapidez de variación ya que aparecen acompañados con los operadores de integración.

Para los desarrollos que siguen se necesita conocer la derivada material de los gradientes de desplazamiento.

La derivada material de la diferencial dx_k se obtendrá usando la ec. 2.3.1a

$$\frac{D}{Dt} (dx_k) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_k} dx_k \right) \quad (3.3.1)$$

puesto que en la definición de derivada material \underline{x} se considera fija y además los operadores $\frac{D}{Dt}$ y $\frac{\partial}{\partial X_k}$ son intercambiables, entonces la ec. 3.3.1 se reduce a

$$\frac{D}{Dt} (dx_k) = \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{D x_k}{Dt} \right) dx_k \quad (3.3.2)$$

sustituyendo la ec. 3.2.16 en la ec. 3.3.2 y usando la regla de la cadena para derivadas parciales se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (dx_k) &= \frac{\partial v_k}{\partial X_k} dx_k = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial X_k} dx_k = \\ &= v_{k,l} \frac{\partial x_l}{\partial X_k} dx_k = v_{k,l} dx_l \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Si en la ec. 3.3.2 se sustituye el valor de dx_k por el dado en la ec. 2.3.1a se tendrá

$$\frac{D}{Dt} (x_{k,m} dx_k) = \frac{D}{Dt} (x_{k,m}) dx_k = \bar{v}_{k,l} x_{l,m} dx_k \quad (3.3.4)$$

la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{D}{Dt} (x_{k,m}) = \bar{v}_{k,l} x_{l,m} \quad (3.3.5)$$

Para calcular la derivada del gradiente de deformación $\bar{v}_{k,l}$ se parte de la ec. 2.3.2a

$$\frac{D}{Dt} (\delta_{kl}) = \frac{D}{Dt} (x_{k,m} x_{m,l}) = \frac{D}{Dt} (x_{k,m}) x_{m,l} + x_{k,m} \frac{D}{Dt} (x_{m,l}) \quad (3.3.6)$$

tomando en cuenta que $\frac{D}{Dt} (\delta_{kl}) = 0$ y la ec. 3.3.5, la ec. 3.3.6 se reduce a

$$x_{k,m} \frac{D}{Dt} (x_{k,m}) + \bar{v}_{k,m} x_{m,l} x_{k,l} = 0 \quad (3.3.7)$$

tomando en cuenta que la ec. 2.3.2a establece que

$$x_{m,k} x_{k,l} = \delta_{ml} \quad (3.3.8)$$

sustituyendo la ec. 3.3.8 en la ec. 3.3.7 se tiene

$$x_{k,m} \frac{D}{Dt} (x_{k,m}) + \bar{v}_{k,m} \delta_{ml} = 0 \quad (3.3.9)$$

multiplicando la ec. 3.3.9 por $x_{k,l}$ y usando la ec. 2.3.2a se tiene

$$x_{k,l} x_{k,m} \frac{D}{Dt} (x_{k,m}) + \bar{v}_{k,l} x_{k,l} = 0$$

o bien

$$\delta_{kl} \frac{D}{Dt} (x_{k,k}) + \bar{v}_{k,l} x_{k,l} = 0 \quad (3.3.10)$$

la ec. 3.3.10 se puede escribir como

$$\frac{D}{Dt} (x_{k,k}) = -\bar{v}_{k,l} x_{k,l} \quad (3.3.11)$$

Teorema 3.3.1 La derivada material del cuadrado de la diferencial de longitud está dada por

$$\frac{D}{Dt} (ds)^2 = 2 d_{kl} dx_k dx_l \quad (3.3.12)$$

donde d_{kl} es el tensor rapidez de deformación de Euler cuya expresión estará dada por

$$d_{kl} = \bar{v}_{(k,l)} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{k,l} + \bar{v}_{l,k}) \quad (3.3.13)$$

De acuerdo con la ec. 2.2.8 y la ec. 3.3.3 se tiene el desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (ds)^2 &= \frac{D}{Dt} (dx_k dx_k) = 2 dx_k \frac{D}{Dt} (dx_k) \\ &= 2 \bar{v}_{k,l} dx_k dx_l \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Tomando en cuenta que la ec. 3.3.13 es simétrica, se podrá escribir como

$$\frac{D}{Dt} (ds)^2 = (\bar{v}_{k,l} + \bar{v}_{l,k}) dx_k dx_l = 2 d_{kl} dx_k dx_l \quad (3.3.12)$$

que es precisamente la ec. 3.3.12.

De la ec. 3.3.12 se puede aseverar que $\frac{D}{Dt}(da_k)^2 = 0$ si y sólo si $da_k = 0$. Lo anterior implica que la distancia entre dos puntos vecinos $|dx|$, no varía respecto al tiempo, que es por definición el movimiento de cuerpo rígido. Lo anterior está contemplado en el teorema de Killing.

Teorema 3.3.2. Teorema de Killing. La anulacion del tensor de deformación de Euler constituye la condición necesaria y suficiente para que el movimiento de un cuerpo sea de cuerpo rígido.

Teorema 3.3.3. La derivada material de la diferencial de área, está dada por la ecuación siguiente

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = \bar{v}_{m,m} da_k - \bar{v}_{k,m} da_m \quad (3.3.13)$$

Para demostrar la ec. 3.3.13 se requiere calcular la derivada material del jacobiano de la transformación, J .

$$\frac{D}{Dt} J = \frac{D}{Dt} |x_{k,k}|_0 = \frac{\partial J}{\partial x_{k,k}} \frac{dx_{k,k}}{Dt} \quad (3.3.14)$$

sustituyendo las ecs. 2.3.5, 3.3.5 en la ec. 3.3.14 se obtiene la expresión siguiente.

$$\frac{D}{Dt} J = \int x_{k,k} \bar{v}_{k,l} x_{l,k} = \int \delta_{kl} \bar{v}_{k,l} = \int \bar{v}_{m,m} \quad (3.3.15)$$

Para calcular $\frac{D}{Dt} da_k$ se hará uso de la ec. 2.11.7.

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = \int \bar{v}_{m,m} x_{k,k} dA_k - \int \bar{v}_{k,l} x_{k,l} dA_k \quad (3.3.16)$$

sustituyendo las ecs. 3.3.11 y 3.3.15 en la ec. 3.3.16 se obtiene

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = \int \bar{v}_{m,m} x_{k,k} dA_k - \int \bar{v}_{k,l} x_{k,l} dA_k \quad (3.3.17)$$

usando la ec. 2.11.7 se tendrá

$$\frac{D}{Dt}(da_k) = \bar{v}_{m,m} da_k - \bar{v}_{k,l} da_l \quad (3.3.13)$$

que es la ec. 3.3.13.

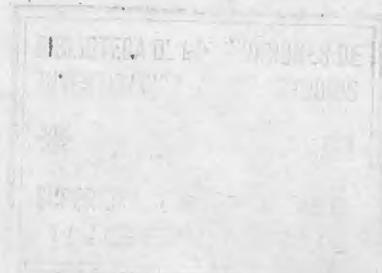
Teorema 3.3.4. La derivada material de la diferencial de volumen está dada por la expresión

$$\frac{D}{Dt}(dv) = \bar{v}_{k,k} dv = Id dv \quad (3.3.18)$$

donde Id es el primer invariante del tensor rapidez de deformación de Euler.

Para la demostración de este teorema se hará uso de las ecs. 2.11.18 y 3.3.14 obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(dv) &= \frac{D}{Dt}(J dv) \\ &= \frac{D}{Dt} J dv \\ &= \int \bar{v}_{k,k} dv \\ &= \bar{v}_{k,k} dv \\ &= Id dv \end{aligned} \quad (3.3.18)$$



3.4 Derivadas materiales de integrales.

En la Mecánica del Medio Continuo se presentan conceptos expresados a través de integrales de línea, superficie y volumen. A continuación se presentan las derivadas materiales de tales integrales.

La derivada material de la integral de línea de cualquier campo φ sobre una curva material C , está dado por

$$\frac{D}{Dt} \int_C \varphi dx_k = \int_C (\dot{\varphi} dx_k + \varphi \dot{x}_{k,l} dx_l) \quad (3.4.1)$$

Puesto que la curva C es material, la integral sobre tal curva tendrá un límite fijo en la descripción material y se podrá efectuar el intercambio de los operadores derivada material e integral. Entonces, trabajando con el término de la izquierda de la ec. 3.4.1, se tiene

$$\frac{D}{Dt} \int_C \varphi dx_k = \int_C \frac{D}{Dt} (\varphi dx_k) = \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} dx_k + \varphi \frac{D}{Dt} dx_k \right] \quad (3.4.2)$$

sustituyendo la ec. 3.3.3 en la ec. 3.4.2 se tendrá la ec. 3.4.1.

Cuando la integral se hace sobre una curva espacial fija, la derivada material resultará ser

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_C \varphi dx_k = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx_k \quad (3.4.3)$$

La derivada material de una integral de superficie de cualquier campo sobre una superficie material \mathcal{S} estará dada por las expresiones siguientes

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{S}} \varphi da_k = \int_{\mathcal{S}} [\dot{\varphi} da_k + \varphi (\dot{x}_{k,l} dx_l - \dot{x}_{l,k} da_k)] \quad (3.4.4)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{S}} q_k da_k = \int_{\mathcal{S}} (\dot{q}_k + q_k \dot{x}_{k,l} dx_l - q_l \dot{x}_{k,l} da_k) \quad (3.4.5)$$

La demostración de las ecs. 3.4.4 y 3.4.5 se hace al poder intercambiar los operadores y utilizando la ec. 3.3.13. Para el caso de la superficie de integración sea espacial y fija se deberán tener las expresiones.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} \varphi da_k = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} da_k \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} q_k da_k = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial q_k}{\partial t} da_k \quad (3.4.7)$$

La derivada material de una integral de volumen de cualquier campo sobre un volumen material estará dada por la expresión

$$\frac{D}{Dt} \int_V \varphi dV = \int_V (\dot{\varphi} + \varphi \dot{x}_{k,k}) dV = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi \dot{x}_{k,k}) \right] dV \quad (3.4.8)$$

La demostración de la ec. 3.4.8 se hace al intercambiar los operadores y al utilizar la ec. 3.3.18.

3.5 Tensores rapidez de deformación.

Se ha definido el tensor rapidez de deformación de Euler ^{como} la parte simétrica del gradiente de velocidades y está dado por la ec. 3.3.13

$$d_{kl} = \bar{v}_{(kl)} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{k,l} + \bar{v}_{l,k}) \quad (3.5.1)$$

También se puede definir un tensor antisimétrico con la parte antisimétrica del gradiente de velocidades. Tal tensor se representa por el símbolo \bar{w}_{kl} y se denomina tensor giro (spin).

$$\bar{w}_{kl} = \bar{v}_{[kl]} = \frac{1}{2} (\bar{v}_{k,l} - \bar{v}_{l,k}) \quad (3.5.2)$$

Al sumar las ecs. 3.5.1 y 3.5.2 se obtiene la expresión

$$\bar{v}_{k,l} = d_{kl} + \bar{w}_{kl} \quad (3.5.3)$$

De manera similar a como se trabajó con el tensor de rotaciones infinitesimales, del tensor de giro se puede construir un vector axial $\bar{\omega}_k$, llamado vector de vorticidad.

$$\bar{\omega}_k = \epsilon_{klm} \bar{w}_{ml} = \epsilon_{klm} \bar{v}_{mj} \quad (3.5.4)$$

o bien

$$\bar{\omega} = \bar{v} \cdot \bar{v} \quad (3.5.5)$$

El significado físico de las componentes de los tensores rapidez de deformación y giro se entenderá tal y como se hizo para los tensores de deformación, o sea, mediante el estudio de la rapidez de variación respecto al tiempo de las longitudes y ángulos.

Para el caso del tensor rapidez de deformación de Euler, d_{kl} se definirán las cantidades físicas siguientes.

Definición 3.5.1. Se entenderá por rapidez de alargamiento en la dirección unitaria \underline{n} en un punto \underline{x} , a la cantidad $d(\underline{n})$ definida por la expresión siguiente.

$$d(\underline{n}) = \frac{1}{ds} \frac{D}{Dt} (ds) = d_{kl} n_k n_l \quad (3.5.6)$$

$$\text{donde } n_k = \frac{dx_k}{ds} \quad (3.5.7)$$

Definición 3.5.2. Se define a la rapidez de corte $\dot{\theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ a la rapidez de variación respecto al tiempo del ángulo que forman dos vectores unitarios \underline{n}_1 y \underline{n}_2 en el punto \underline{x} .

Si las direcciones unitarias \underline{n}_1 y \underline{n}_2 están dadas por la expresión

$$\underline{n}_1 = \frac{dx_1}{ds_1} \quad ; \quad \underline{n}_2 = \frac{dx_2}{ds_2} \quad (3.5.8)$$

la rapidez de corte $\dot{\theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ se obtendrá de la expresión

$$-\dot{\theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \sin \theta(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = 2 d_{kl} n_{1k} n_{2l} - [d(n_1) + d(n_2)] \cos \theta(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \quad (3.5.9)$$

Si la dirección \underline{n} de la ec. 3.5.6 se selecciona de tal manera que coincida con un eje coordenado, y sea éste el eje x_1 , entonces se tendrá que $n_1=1$ y $n_2=n_3=0$.

Con tales valores, la rapidez de alargamiento a lo largo del eje x_1 resulta ser, de acuerdo con la ec. 3.5.6,

$$d_{(1)} = d_{11} \quad (3.5.10)$$

Cuando se hace coincidir a \underline{n} con los otros ejes se tendrá que

$$d_{(2)} = d_{22} \quad ; \quad d_{(3)} = d_{33} \quad (3.5.11)$$

Si las direcciones $\underline{n}_1, \underline{n}_2$ que definen a la rapidez de corte $\dot{\theta}(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$ se hacen coincidir con algunas direcciones de los ejes coordenados, por ejemplo \underline{n}_1 con x_1 y \underline{n}_2 con x_2 se tendrá, de acuerdo con la ec. 3.5.9,

$$-\dot{\theta}(1,2) = 2d_{12} \quad (3.5.12)$$

los siguientes resultados se obtienen al tomar los pares restantes de los ejes coordenados

$$-\dot{\theta}(2,3) = 2d_{23} \quad ; \quad -\dot{\theta}(3,1) = 2d_{31} \quad (3.5.13)$$

Los resultados indicados por las ecs. 3.5.10 a 3.5.13 se resumen en el teorema siguiente.

Teorema 3.5.1. Las componentes normales del tensor rapidez de deformación de Euler son las rapidezces de alargamiento en las direcciones de los ejes coordenados y los componentes mixtos son la mitad de las rapidezces de corte de los ejes coordenados.

Para visualizar el significado físico del tensor de giro se deberá calcular la rapidez con la cual un elemento diferencial $d\underline{x}$ gira alrededor de una dirección unitaria \underline{D} .

Si $\varphi(\underline{D}, \underline{n})$ es el ángulo tal que

$$\cos \varphi(\underline{D}, \underline{n}) = \cos(\underline{D}, d\underline{x}) = \frac{d\underline{x}_k}{ds} D_k = n_k D_k \quad (3.5.14)$$

al calcular la derivada material de la ec. 3.5.14 se tiene

$$-\dot{\varphi}(\underline{D}, \underline{n}) = \sin \varphi(\underline{D}, \underline{n}) = \sqrt{D_k D_k} n_k \dot{D}_k - d(\underline{n}) \cos \varphi(\underline{D}, \underline{n}) \quad (3.5.14)$$

Si el ángulo original entre $d\underline{x}$ y \underline{D} es de $\pi/2$, la ec. 3.5.14 se transforma en

$$-\dot{\varphi}(\underline{D}, \underline{n}) = \sqrt{D_k D_k} n_k \dot{D}_k \quad (3.5.15)$$

Si \underline{D} y \underline{n} se hacen coincidir con los ejes coordenados, por ejemplo, \underline{D} con x_1 y \underline{n} con x_2 , la ec. 3.5.15 se reduce a

$$-\dot{\varphi}_{12} = \dot{v}_{12} \quad (3.5.16)$$

De acuerdo con la ec. 3.5.16 se puede afirmar que \dot{v}_{12} es la rapidez a la cual un elemento alojado en la dirección del eje x_2 , está rotando hacia la dirección alojada en el eje x_1 y con sentido contrario a las manecillas del reloj.

La fig. 3.5.1 muestra la rapidez de rotación de los ejes X_1 y X_2 . De acuerdo con el concepto de

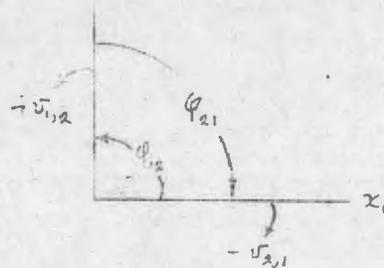


Fig. 3.5.1 Rapidezas de rotación de los ejes coordenados X_1 y X_2 .

rapidez de corte, esta se podrá calcular de acuerdo con los conceptos indicados en la fig. 3.5.1 y queda

$$-\theta_{(1,2)} = -\dot{\varphi}_{1,2} - \dot{\varphi}_{2,1} = 2d_{12} \quad (3.5.14)$$

Ahora bien, para calcular la rapidez de rotación en el sentido contrario a las manecillas del reloj, de acuerdo con la fig. 3.5.1 se tendrá que

$$\dot{\varphi}_{2,1} - \dot{\varphi}_{1,2} = v_{1,2} - v_{2,1} = 2d_{12} \quad (3.5.15)$$

Entonces la ec. 3.5.15 establece que la componente w_{12} del tensor de giro, es la mitad de la diferencia relativa de las rapidez de rotación - en sentido contrario a las manecillas del

reloj - de los ejes coordenados X_1 y X_2 . Interpretaciones enteramente análogas se podrían hacer para las componentes restantes del tensor de giro.

Otra interpretación física que puede asociarse al tensor de giro se puede concluir del desarrollo siguiente

Sea \underline{n} un vector unitario dado por la Ec. 3.5.7, su derivada material estará dada por la expresión

$$\dot{n}_i = \frac{D}{Dt} \left(\frac{dx_{ik}}{da} \right) = \frac{1}{da} \frac{D}{Dt} (dx_{ik}) = \frac{1}{(da)^2} \frac{D(dx_{ik} da)}{Dt} \quad (3.5.16)$$

la ec. 3.5.16 se transforma en base a las ecs. 3.2.3 y 3.5.5 y queda

$$\dot{n}_k = [v_{2k} - d_{21} \bar{v}_{1k}] n_1 + [d_{1k} + w_{1k} - d_{21} \bar{v}_{2k}] n_2$$

$$\dot{n}_k = [d_{2k} - d_{21} \bar{v}_{1k}] n_1 + w_{1k} n_2 \quad (3.5.17)$$

Si \underline{n} es una dirección principal del tensor rapidez de deformación de Euler, entonces debe satisfacer la expresión siguiente

$$(d_{2k} - d_{21} \bar{v}_{1k}) n_1 = 0 \quad (3.5.18)$$

Entonces para el caso de ser \underline{n}_1 las direcciones principales del tensor d_{ik} se tiene que la forma especial de la ec. 3.5.17 deberá ser la siguiente, en base a la ec. 3.5.18

$$\dot{n}_k = w_{1k} n_2 \quad (3.5.19)$$

La ec. 3.5.20 permite la interpretación física del tensor de giro contenida en el teorema siguiente

Teorema 3.5.2.

El tensor de giro es la velocidad angular de los ejes principales del tensor rapidez de deformación de Euler.

Teorema 3.5.3

Las derivadas materiales de los tensores de deformación de

Lagrange y de Euler se cuantifican de acuerdo con las expresiones siguientes

$$\dot{E}_{KL} = \frac{D}{Dt} E_{KL} = d_{kl} X_{k,K} X_{L,l} \quad (3.5.20)$$

$$\dot{e}_{kl} = \frac{D}{Dt} e_{kl} = d_{kl} - e_{mk} v_{m,l} - e_{ml} v_{m,k} \quad (3.5.21)$$

Para demostrar la ec. 3.5.20 se partirá de la definición de derivada material, es decir

$$\dot{E}_{KL} = \frac{DE_{KL}}{Dt} = \frac{\partial E_{KL}}{\partial t} \quad (3.5.22)$$

la ec. 3.5.22 se desarrollará usando la ec. 2.4.4

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (G_{KL} - g_{KL}) = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} G_{KL} \quad (3.5.23)$$

en base a la ec. 2.3.10b la ec. 3.5.23 se puede escribir como

$$\dot{E}_{KL} = \frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (X_{k,K} X_{L,l}) = \frac{1}{2} \left[\frac{D(X_{k,K})}{Dt} X_{L,l} + X_{k,K} \frac{D(X_{L,l})}{Dt} \right] \quad (3.5.24)$$

la ec. 3.5.24 se transforma en la ec. 3.5.20 al hacer uso de la ec. 3.3.5.

Para demostrar la ec. 3.5.21 se hace uso de la ec. 2.4.6b

Así

$$\dot{e}_{kl} = \frac{D}{Dt} (e_{kl}^{(m)} X_{k,K} X_{L,l}^{(m)}) = \dot{E}_{KL} X_{k,K} X_{L,l} + E_{KL} \frac{D(X_{k,K})}{Dt} X_{L,l} + E_{KL} X_{k,K} \frac{D(X_{L,l})}{Dt} \quad (3.5.25)$$

al sustituir las ecs. 3.5.20 y 3.3.11 en la ec. 3.5.25, ésta se transforma en la ec. 3.5.21.

También es fácil demostrar que

$$G_{KL} = 2 \dot{E}_{KL} \quad (3.5.25)$$

$$\dot{e}_{kl} = -2 \dot{e}_{kl} = c_{mk} v_{m,l} - c_{ml} v_{m,k} \quad (3.5.26)$$

De las ecs 3.5.20 y 3.5.21 se puede observar que tanto \dot{E}_{KL} como \dot{e}_{kl} son distintos de d_{kl} . Para el caso especial de tener $t=0$, es decir en la configuración no deformada se tendrá que

$$X_K = \delta_{Kk} X_k \quad (3.5.27)$$

$$\dot{E}_{KL}(\underline{X}, 0) = d_{kl} \delta_{kK} \delta_{lL} \quad (3.5.28)$$

$$\dot{e}_{kl}(\underline{X}, 0) = d_{kl} \quad (3.5.29)$$

Para el caso de la teoría de deformaciones infinitesimales los gradientes de deformación son aproximadamente iguales a los cambiadores y estos a su vez son deltas de Kronecker. Por lo tanto, de acuerdo con la ec. 3.5.20 se tendrá que

$$\dot{E}_{KL} \approx d_{kl} \delta_{kK} \delta_{lL} \quad (3.5.30)$$

Para que se presente la condición siguiente

$$\dot{e}_{kl} \approx d_{kl} \quad (3.5.31)$$

se requiere que tanto ϵ_{kl} , \dot{u}_{kl} y ω_{kl} sean infinitesimales para que de la ec. 3.5.21 se pueda pasar a la ec. 3.5.31.

Ejemplo 3.5.1. Sea la descripción euleriana del movimiento de un cuerpo

$$x_1 = X_1 + X_3 (e^{3t} - 1)$$

$$x_2 = X_2 + X_3 (e^{-2t} - 1)$$

$$x_3 = X_3$$

Considerando válida la teoría de deformaciones pequeñas, y los sistemas coordenados Ox_1, x_2, x_3 , Ox_1, X_2, X_3 superpuestos con $b=0$ calcular los siguientes conceptos

- Los campos de desplazamientos y velocidades.
- Los tensores infinitesimales de deformación $\hat{\epsilon}_{kl}$ y de rotación $\hat{\omega}_{kl}$.
- Los tensores infinitesimales rapidez de deformación d_{kl} y giro (spin) w_{kl} .
- Los tensores $\hat{\epsilon}_{kl}$ y $\hat{\omega}_{kl}$ y comparar los resultados con los obtenidos en el inciso iii).

De acuerdo con la ec. 2.4.9

$$u_k = \dot{x}_k - X_k$$

por lo tanto

$$u_1 = X_3 (e^{3t} - 1), \quad u_2 = X_3 (e^{-2t} - 1), \quad u_3 = 0$$

utilizando la ec. 3.2.18

$$\underline{v} = \frac{D\underline{u}}{Dt}$$

Como \underline{u} es una función espacial, se utiliza la ec. 3.2.11 y se tiene

$$\underline{v} = \frac{D\underline{u}}{Dt} = \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t} \right) \underline{i}_k$$

$$v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_l}{\partial x_l} v_l = \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial u_k}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial u_k}{\partial x_3} v_3$$

$$v_1 = -3X_3 e^{3t}; \quad v_2 = -2X_3 e^{-2t}; \quad v_3 = 0$$

Para resolver el inciso ii) se hace uso de la expresión 2.6.9 dada por

$$u_{k,l} = \hat{\epsilon}_{kl} + \hat{\omega}_{kl} \quad [u_{k,l}] = [\hat{\epsilon}_{k,l}] + [\hat{\omega}_{k,l}]$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = e^{3t} - 1; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = e^{-2t} - 1$$

$$[u_{k,l}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

descomponiendo la matriz en una parte simétrica y una antisimétrica

ca:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ e^{3t} - 1 & e^{-2t} - 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ -e^{3t} - 1 & -e^{-2t} - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\hat{\epsilon}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{3t} - 1 \\ 0 & 0 & e^{-2t} - 1 \\ e^{3t} - 1 & e^{-2t} - 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3-25

$$[\tilde{\Gamma}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \\ -e^{-3t} & -e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

Para resolver el inciso iii) se hace uso de la expresión 3.5.3. -
dada por

$$v_{k,l} = d_{kl} - w_{kl} \quad \text{o} \quad [v_{k,l}] = [d_{kl}] + [w_{kl}]$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -3e^{-3t} \quad ; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -2e^{-2t}$$

$$[d_{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

haciendo la descomposición de la matriz en una parte simétrica y una antisimétrica, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} & -e^{-2t} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} & e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[d_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} & -e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

3-26

$$[w_{kl}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} & e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

El inciso iv) se resuelve utilizando el concepto de derivada material, es decir $\dot{\tilde{e}} = \frac{D\tilde{e}}{Dt}$; como \tilde{e}_{kl} es una función espacial, utilizando la expresión 3.2.9, se tiene

$$\frac{D\tilde{e}_{kl}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{e}_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{e}_{kl}}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t}$$

$$\frac{D\tilde{e}_{11}}{Dt} = \frac{D\tilde{e}_{22}}{Dt} = \frac{D\tilde{e}_{33}}{Dt} = \frac{D\tilde{e}_{13}}{Dt} = \frac{D\tilde{e}_{21}}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\tilde{e}_{33}}{Dt} = \frac{D\tilde{e}_{31}}{Dt} = -3e^{-3t}$$

$$\frac{D\tilde{e}_{32}}{Dt} = \frac{D\tilde{e}_{22}}{Dt} = -2e^{-2t}$$

$$[\dot{\tilde{e}}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ -3e^{-3t} & -2e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

resultado que es de esperarse, debido a la expresión 3.3.1, mediante la cual, $du \approx \tilde{e}$; finalmente

$$[\dot{\tilde{\Gamma}}_{kl}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3e^{-3t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 3e^{-3t} & 2e^{-2t} & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{kl} \approx w_{kl}$$

3.6 Axiomas fundamentales de la Mecánica del Medio Continuo.

En este inciso se definen los elementos necesarios para enunciar cuatro de los cinco principios básicos que se van a utilizar en el desarrollo de la teoría de la Mecánica del Medio Continuo. Los principios básicos se consideran que son los resultados autoevidentes de nuestra experiencia con el mundo físico.

En la mecánica a cada cuerpo se le asocia una medida de la materia, denominada masa.

Definición 3.6.1. Se define a la masa M de un cuerpo, como una cantidad no negativa, aditiva e invariante al movimiento. Son válidas las aseveraciones siguientes

- i) La masa se define con su propia dimensión, independiente de la longitud y del tiempo.
- ii) Si la masa es absolutamente continua en las variables espaciales, existe entonces una densidad de masa ρ tal que la masa total del cuerpo se podrá calcular con la expresión,

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV \quad (3.6.1)$$

La densidad ρ tendrá unidades de masa por unidad de volumen, es decir, ML^{-3} .

- iii) La densidad de masa será tal que cumpla la condición

$$0 \leq \rho < \infty \quad (3.6.2)$$

Definición 3.6.2. La cantidad de movimiento o cantidad de movimiento lineal \underline{P} de un medio continuo de volumen total \mathcal{V} , se define mediante la expresión siguiente

$$\underline{P} = \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{v} \, dV \quad (3.6.2)$$

donde \underline{v} es el vector velocidad y ρ la densidad de masa del medio. \underline{P} es una cantidad vectorial.

Definición 3.6.3. El momento de la cantidad de movimiento o cantidad de movimiento angular \underline{H} respecto al origen O , de un medio continuo de volumen total \mathcal{V} , se define como

$$\underline{H} = \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{p} \times \underline{v} \, dV \quad (3.6.3)$$

\underline{p} es el vector de posición de la partícula con diferencial de masa, $dm = \rho dV$. También \underline{H} es una cantidad vectorial.

Definición 3.6.4. La energía cinética \mathcal{K} de un medio continuo de volumen \mathcal{V} se define mediante

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \, dV \quad (3.6.4)$$

La energía cinética es una cantidad escalar.

Las ecs. 3.6.2 a 3.6.4, expresadas en términos de las componentes en un sistema cartesiano de referencia, quedan

$$P_k = \int_{\mathcal{V}} \rho v_k \, dV \quad (3.6.5)$$

$$H_k = \int_{\mathcal{V}} \rho \epsilon_{km} x_l v_m \, dV \quad (3.6.6)$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho v_k v_k \, dV \quad (3.6.7)$$

Axioma Fundamental No. 1 - PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA MASA. La masa total del cuerpo no cambia durante el movimiento. Cuando este principio es válido para una vecindad infinitesimal

mal de cada punto material, se dice que la masa se conserva localmente.

Si ρ_0 , es la densidad de masa inicial del medio continuo, entonces su masa total M en cualquier configuración debe ser la misma. Lo anterior se expresa con

$$M = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \, dv \quad (3.6.8)$$

Otra forma de expresar la conservación de la masa consiste en hacer cero su derivada material, es decir

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = 0 \quad (3.6.9)$$

Al trabajar con el criterio dado por la ec. 3.6.8 se pueden presentar las formas siguientes para el principio de conservación de la masa.

i) Conservación global de la masa. Usando la ec. 2.11.18, la ec. 3.6.8 se transforma en

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho_0 - j\rho) \, dv = 0 \quad (3.6.10a)$$

$$\int_{\mathcal{V}} (\rho - j^{-1}\rho_0) \, dv = 0 \quad (3.6.10b)$$

ii) Conservación local de la masa. Al hacer $\mathcal{V} \rightarrow 0$ en la ec. 3.6.10a, se tendrá que

$$\rho_0 = j\rho = \rho \sqrt{III_e} = (1 + 2I_e + 4II_e + 8III_e)^{1/2} \quad (3.6.11a)$$

Al hacer $\mathcal{V} \rightarrow 0$ en la ec. 3.6.10b se obtiene

$$\rho = j^{-1}\rho_0 = \rho_0 \sqrt{III_e^{-1}} = \rho_0 (1 - 2I_e + 4II_e - 8III_e)^{1/2} \quad (3.6.11b)$$

Al trabajar con el criterio dado por la ec. 3.6.9 se llega a la forma siguiente del principio de conservación de la masa

i) Conservación global de la masa. Intercambiando operadores en la ec. 3.6.9 y usando la ec. 3.3.18 se obtendrá

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{D}{Dt} (\rho \, dv) = 0 \quad (3.6.12a)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, dv = \int_{\mathcal{V}} [\dot{\rho} + v_{k,k}] \, dv = \int_{\mathcal{V}} (\dot{\rho} + \rho v_{k,k}) \, dv = \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_k \right] \, dv = 0 \quad (3.6.12b)$$

ii) Conservación local de la masa. Al hacer $\mathcal{V} \rightarrow 0$ en las ecs. 3.6.12 se obtiene

$$\frac{D}{Dt} (\rho \, dv) = 0 \quad (3.6.13a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_k = 0 \quad (3.6.13b)$$

Algunos autores acostumbran llamar ecuaciones de continuidad a las ecuaciones resultantes del principio de conservación de la masa.

Axioma fundamental No. 2. PRINCIPIO DEL BALANCE DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. La rapidez de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza resultante $\underline{\mathcal{F}}$ que actúa sobre dicho cuerpo.

$$\frac{d\underline{\mathcal{P}}}{dt} = \underline{\mathcal{F}} \quad (3.6.14a)$$

o bien

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho v_k \, dv = \underline{\mathcal{F}}_k \quad (3.6.14b)$$

Axioma fundamental No. 3. PRINCIPIO DEL BALANCE DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO. La rapidez de cambio respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento alrededor de un punto fijo O , es igual al momento resultante $\underline{\mathcal{M}}_O$, respecto al mismo punto O , que actúa en dicho cuerpo.

$$\frac{d\underline{\mathcal{H}}}{dt} = \underline{\mathcal{M}} \quad (3.6.15a)$$

o bien

$$\frac{D}{Dt} \int \rho e_{klm} x_l v_m dv = \dot{M}_k \quad (3.6.15b)$$

Nota 3.6.1. Las ecs. 3.6.14 y 3.6.15 son las ecuaciones de Euler del movimiento y se pueden considerar como extensiones de las leyes de Newton del movimiento para una partícula.

Axioma fundamental No. 4. PRINCIPIO DE LA CONSERVACION DE LA ENERGIA. La rapidez de cambio de la energía cinética \mathcal{K} , más la energía interna \mathcal{E} , es igual a la suma del trabajo que desarrollan las fuerzas externas por unidad de tiempo \mathcal{W} más otras energías que entran o salen del cuerpo, por unidad de tiempo \mathcal{U}_α .

$$\frac{D}{Dt} (\mathcal{K} + \mathcal{E}) = \mathcal{W} + \sum \mathcal{U}_\alpha$$

Las fuentes de energía por unidad de tiempo \mathcal{U}_α pueden ser de energía calorífica, energía eléctrica, energía química, etc. Este axioma implica que las energías son aditivas y que el término que sirve para balancear todas las energías debidas a efectos externos es la energía interna \mathcal{E} . Para los Medios Continuos se supone una densidad de energía interna por unidad de masa, ε , tal que

$$\mathcal{E} = \int_V \rho \varepsilon dv \quad (3.6.16)$$

En los capítulos que siguen se estudiarán en forma minuciosa los axiomas fundamentales 2, 3 y 4 y también se plantearán las bases para el axioma fundamental No. 5.

3.7 Tensores objetivos.

Conviene introducir en este capítulo un concepto relacionado con el movimiento del observador.

Definición 3.7.1. Se llaman cantidades objetivas aquellas cuyo valor es independiente del movimiento del observador.

Ejemplos de cantidades objetivas lo son la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos direcciones, las propiedades que definen a un material, etc. Cantidades como la posición y la velocidad de un punto sí dependen de la posición del observador y por lo tanto no son cantidades objetivas.

Si se tiene que un sistema de referencia rectangular \mathcal{R} está en movimiento de cuerpo rígido respecto a otro sistema de referencia también rectangular \mathcal{R}' , entonces un punto de coordenadas rectangulares x_k en la referencia \mathcal{R} y en el tiempo t , tendrá coordenadas rectangulares x'_k en la referencia \mathcal{R}' en el tiempo t' . Puesto que ambas referencias están en movimiento de cuerpo rígido una respecto de otra, se deberá tener la relación siguiente

$$x'_k(t') = Q_{kl}(t) x_l + b_k(t); \quad t' = t - a \quad (3.7.1)$$

La constante a , permite seleccionar el origen de los tiempos en las referencias \mathcal{R} y \mathcal{R}' . Desde luego que las cantidades $Q_{kl}(t) \equiv Q_{kl}(t)$ y $b_k(t)$ son funciones del tiempo puesto que $b_k(t)$ es el movimiento del origen del sistema \mathcal{R} y $Q_{kl}(t)$ son los cosenos directores de la referencia \mathcal{R}' respecto a \mathcal{R} . Es decir

$$Q_{kl} Q_{lm} = Q_{lk} Q_{lm} = \delta_{km} \quad (3.7.2)$$

Se puede demostrar que la transformación dada por la ec. 3.7.1 con la condición indicada por la ec. 3.7.2 es la más gene-

ral en donde permanecen invariantes la longitud y el cambio de ángulo.

Un vector objetivo \underline{a} en la referencia \mathcal{R} , tendrá componentes a_k mientras que en la referencia \mathcal{R}' tendrá

$$a'_k = Q_{kl} a_l \quad (3.7.3)$$

Definición 3.7.2. Dos movimientos $x_k(\underline{X}, t)$ y $x'_k(\underline{X}', t')$ son objetivamente equivalentes si y sólo si satisfacen la expresión

$$x'_k(\underline{X}', t') = Q_{kl}(t) x_l(\underline{X}, t) + b_k(t) \quad t' = t - a \quad (3.7.4)$$

con $Q_{kl}(t)$ restringido por la ec. 3.7.2.

Dos movimientos objetivamente equivalentes difieren únicamente en la referencia y en el origen de los tiempos.

Así, si una referencia está fija y para un tiempo también fijo, los movimientos pueden hacerse coincidir mediante la superposición de un movimiento de cuerpo rígido y un movimiento del origen de los tiempos.

Definición 3.7.3. Se dice que una cantidad tensorial es objetiva si en cualquier par de movimientos, objetivamente equivalentes, obedecen las leyes de transformación apropiadas para cada tensor y para todos los tiempos.

Si a_k es un vector y S_{kl} un tensor de segundo orden, ambos objetivos, entonces, en dos movimientos objetivamente equivalentes deben satisfacer las leyes de transformación siguientes

$$a'_k(\underline{X}', t') = Q_{kl}(t) a_l(\underline{X}, t) \quad (3.7.5)$$

$$S'_{kl}(\underline{X}', t') = Q_{mk}(t) Q_{ln}(t) S_{mn}(\underline{X}, t) \quad (3.7.6)$$

Desde luego que todos los tensores que son independientes del

tiempo son objetivos pero los que sí dependen del tiempo puede que no lo sean. Por ejemplo, considérese el vector velocidad \underline{v}'_k .

Usando la ec. 3.7.4 se tendrá

$$\frac{D}{Dt'} x'_k = Q_{kl} \dot{x}_l + \dot{Q}_{kl} x_l + \dot{b}_k \quad (3.7.7)$$

o bien:

$$v'_k = Q_{kl} v_l + \dot{Q}_{kl} x_l + \dot{b}_k \quad (3.7.8)$$

desde luego se puede observar que la ec. 3.7.8 no es de la forma dada por la ec. 3.7.5 y por lo tanto, la velocidad no es un tensor objetivo.

Teorema 3.7.1. El tensor rapidez de deformación de Euler d_{kl} es un tensor objetivo.

Usando la ec. 3.7.8 y la regla de la cadena se puede obtener la expresión

$$v'_{k,l} = Q_{km} v_{m,n} \frac{\partial x_n}{\partial x'_l} + \dot{Q}_{km} \frac{\partial x_m}{\partial x'_l} \quad (3.7.9)$$

Para calcular la derivada $\frac{\partial x_m}{\partial x'_l}$ se hará uso de la ec. 3.7.1. Es decir, despejando x_k se obtiene

$$x_k = Q_{mk} (x'_m - b_m) \quad (3.7.10)$$

entonces

$$\frac{\partial x_n}{\partial x'_l} = Q_{nl} \quad (3.7.11)$$

usando la ec. 3.7.11, la ec. 3.7.9 se transforma en

$$v'_{k,l} = Q_{km} Q_{ln} v_{m,n} + \dot{Q}_{km} Q_{ln} \quad (3.7.12)$$

análogamente, se podrá obtener la expresión siguiente

$$v'_{l,k} = Q_{km} Q_{ln} v_{l,m} + \dot{Q}_{ln} Q_{km} \quad (3.7.13)$$

Sumando las ecs. 3.7.12 y 3.7.13 se obtienen

$$(v_{k,l}^i + v_{l,k}^i) = Q_{km} Q_{ln} (v_{m,n} + v_{n,m}) + \dot{Q}_{km} Q_{ln} + \dot{Q}_{ln} Q_{km} \quad (3.7.14)$$

Tomando en cuenta la ec. 3.7.2 se puede tener

$$\text{o bien} \quad \frac{D}{Dt} (\delta_{km}) = \frac{D}{Dt} (Q_{kl} Q_{ml})$$

$$0 = \dot{Q}_{kl} Q_{ml} + Q_{kl} \dot{Q}_{ml} \quad (3.7.15)$$

Usando la ec. 3.7.15 y la definición del tensor rapidez de deformación, la ec. 3.7.14 se transforma en

$$d_{kl}^i = Q_{km} Q_{ln} d_{mn} \quad (3.7.16)$$

lo cual demuestra al teorema.

También se puede demostrar que el tensor de giro w_{kl}^i no es -- objetivo. La demostración se hace al tener en cuenta la definición del tensor w_{kl}^i y las ecs. 3.7.12 y 3.7.13.

El concepto de objetividad tiene una aplicación muy importante en la teoría constitutiva de los materiales como se verá en el capítulo 6.



RECIBO DE DEPÓSITO