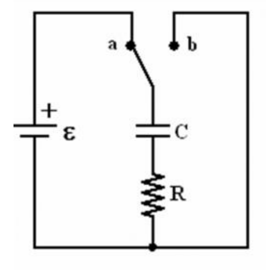
Circuito RC

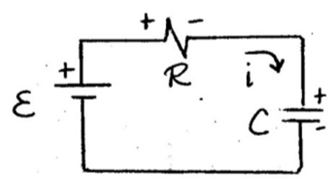
Se llama circuito RC a la combinación en serie de un capacitor y un resistor. Dicho circuito puede representar cualquier conexión de resistores y capacitores cuyo equivalente sea un solo resistor en serie con un solo capacitor.



En la figura se muestra un circuito RC conectado a una fuente de voltaje continuo. El interruptor tiene como objetivo cargar y descargar al capacitor.

CIRCUITO DE CARGA

El proceso inicia cuando el interruptor se conmuta a la posición “a” en el tiempo t=0 [s] y se considera que el capacitor se encuentra descargado. Aplicando ley de kirchhoff a la malla



$$V_R + V_c = \varepsilon$$
$$R \cdot I + V_C = \varepsilon$$
$$I = I_R = I_C = C\frac{dV_c}{dt}$$

Sustituyendo y despejando la derivada del voltaje en el capacitor con respecto al tiempo.

$$R \cdot C\frac{dV_C}{dt} + V_c = \varepsilon$$
$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R \cdot C}V_c = \varepsilon(\frac{1}{R \cdot C})$$

Se tiene una ecuación diferencial lineal de primer orden, no homogénea y de coeficientes constantes, cuya solución consta de dos partes: la solución homogénea y la solución particular.

1º. La solución homogénea

$$\frac{dV_{ch}}{dt} + \frac{V_{ch}}{RC} = 0$$
$$\frac{dV_{ch}}{V_{ch}} = -\frac{1}{RC}dt$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad.

$$\ln V_{ch} + C_1 = -\frac{t}{RC}; \qquad C_1 = -\ln K; \qquad \ln\frac{V_{ch}}{k} = -\frac{t}{RC};$$

Obteniendo el antilogaritmo en ambos miembros.

$$\frac{V_{ch}}{K} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_{ch} = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

2º. La solución particular

Debido a que el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es una constante, la solución particular será del tipo

$$V_{cp} = A$$
$$A = \text{constante}$$
$$\frac{1}{RC}A = \frac{\varepsilon}{RC}$$
$$A = \varepsilon = V_{cp}$$

La solución completa es

$$V_c(t) = V_{ch} + V_{cp} = Ke^{-\frac{t}{RC}} + \varepsilon$$
$$\text{Como } V_c(0) = 0 = ke^0 + \varepsilon$$

entonces $k = -\varepsilon$

Finalmente

$$V_c(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

la corriente

$$I_c(t) = C\frac{dV_c}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Definiendo la constante de tiempo como $\tau_c = RC$

Las ecuaciones anteriores se expresan, en función de la constante de tiempo como:

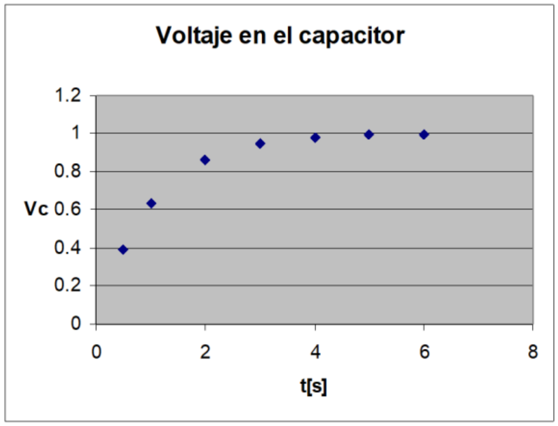
$$V_c(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right)$$

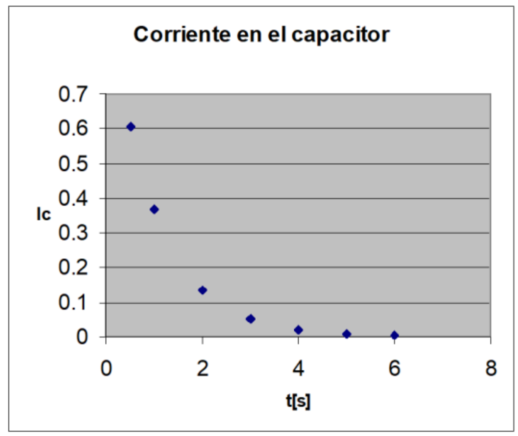
$$I_c(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{\tau_c}}$$

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}})$$

Gráficas de las ecuaciones anteriores en función del tiempo y con una escala en múltiplos de τ_c

t	Vc	Ic
$0.5\tau_c$	0.394	0.607
τ_c	0.632	0.368
$2\tau_c$	0.865	0.135
$3\tau_c$	0.950	0.050
$4\tau_c$	0.982	0.018
$5\tau_c$	0.993	0.007
$6\tau_c$	0.998	0.002





En las gráficas y en las ecuaciones, se observa que el capacitor, se carga y adquiere el voltaje de la fuente ε para el tiempo t infinito. No existe diferencia de potencial en las terminales del resistor, por lo que la corriente es cero, es decir,

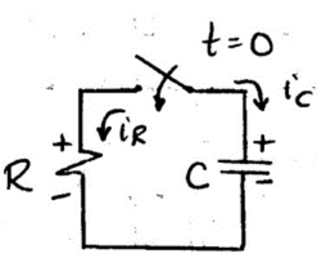
$$t \to \infty$$
$$V_c(\infty) = \varepsilon$$
$$I_c(\infty) = 0$$

En el tiempo t=0 el capacitor se comporta como un corto circuito ya que fluye la máxima corriente.

A partir de t = 5τ el capacitor se comporta como circuito abierto ya que en sus extremos tiene un voltaje, prácticamente, igual al de la fuente y ya no circula corriente.

CIRCUITO DE DESCARGA

Después de cargado, el capacitor alcanza una diferencia de potencial $V_c = V_0$ se cambia el interruptor a la posición “b”, el capacitor se descarga a través del resistor, transformando su energía almacenada en energía en forma de calor en el resistor.



Aplicando la LVK

$$V_R - V_c = 0$$
$$V_R = RI_R \quad \text{e} \quad I_C = C\frac{dV_C}{dt}$$
$$I_R = -I_C$$

el interruptor a la posición “b” el capacitor posee un voltaje $V_c = V_0$, es decir, el capacitor tiene condiciones iniciales diferentes de cero

$$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

Dividiendo entre RC

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C = 0$$

La solución de esta última ecuación es:

$$V_c(t) = V_{Ch} = ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Utilizando las condiciones iniciales para evaluar K

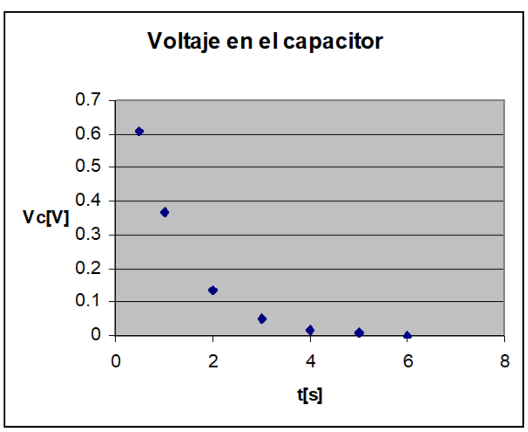
$$V_C(0) = V_0 = ke^0 = k$$

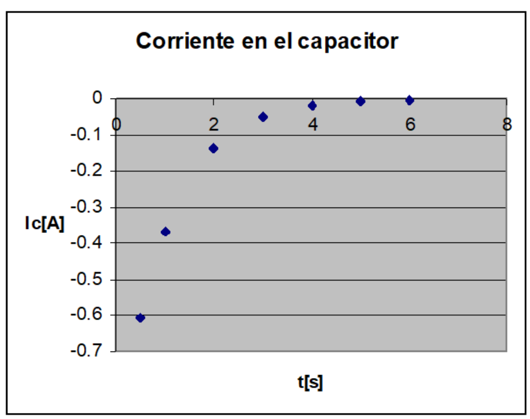
Finalmente $$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

considerando como condiciones iniciales Vc=V_0=1 [V] y Vo/R=1 [A].

t	Vc	Ic
0.5	0.607	-0.607
1	0.368	-0.368
2	0.135	-0.135
3	0.050	-0.050
4	0.018	-0.018
5	0.007	-0.007
6	0.002	-0.002





Al final de la descarga no hay ni voltaje ni corriente en el capacitor