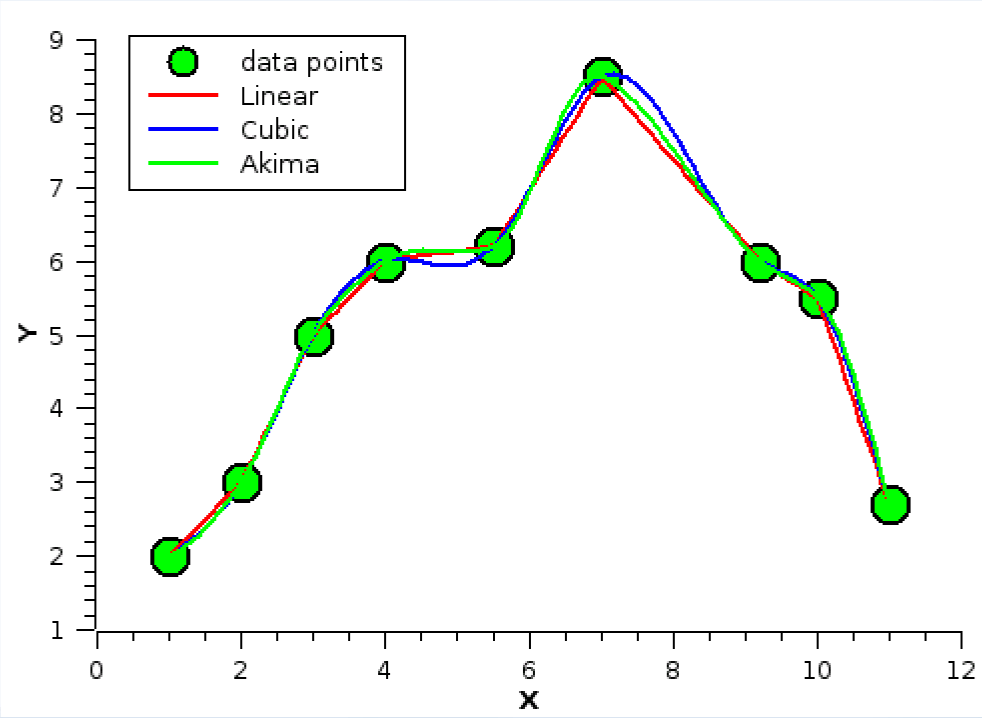
# Capítulo IV:

## Interpolación, derivación e integración numéricas

M.I. Víctor Manuel Durán Campos

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

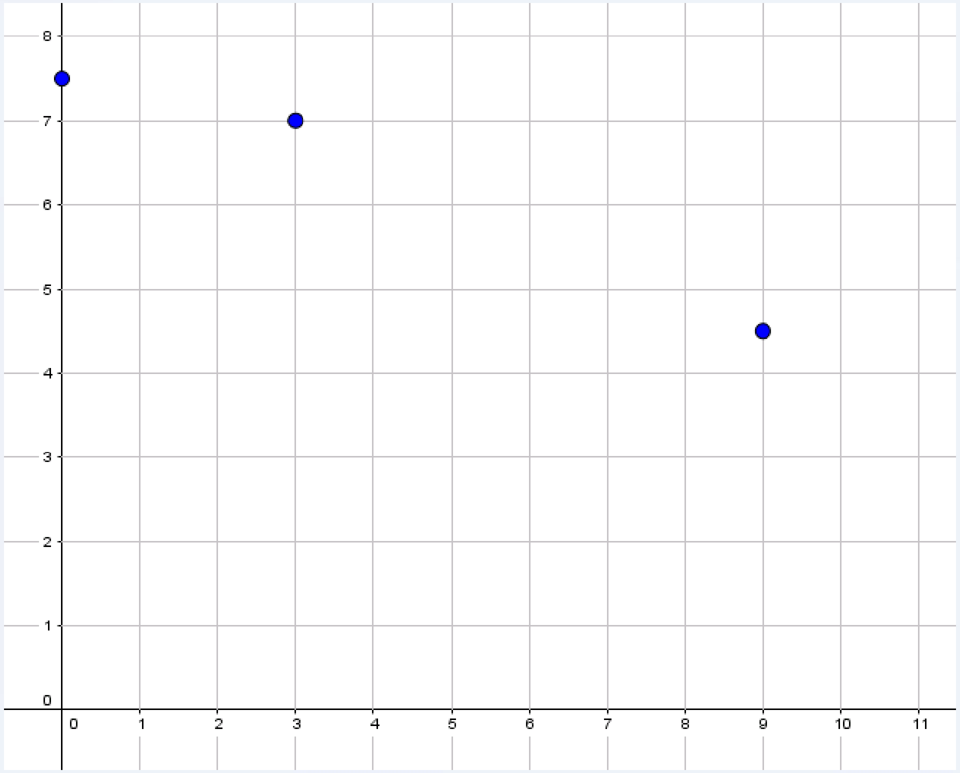
En la vida real, los datos obtenidos en algún experimento o un estudio estadístico pueden analizarse como un conjunto de puntos que nos describen un fenómeno. Existe una gran cantidad de métodos para convertir dichos puntos en una función matemática. Con dicha función pueden realizarse pronósticos para la toma de decisiones.



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

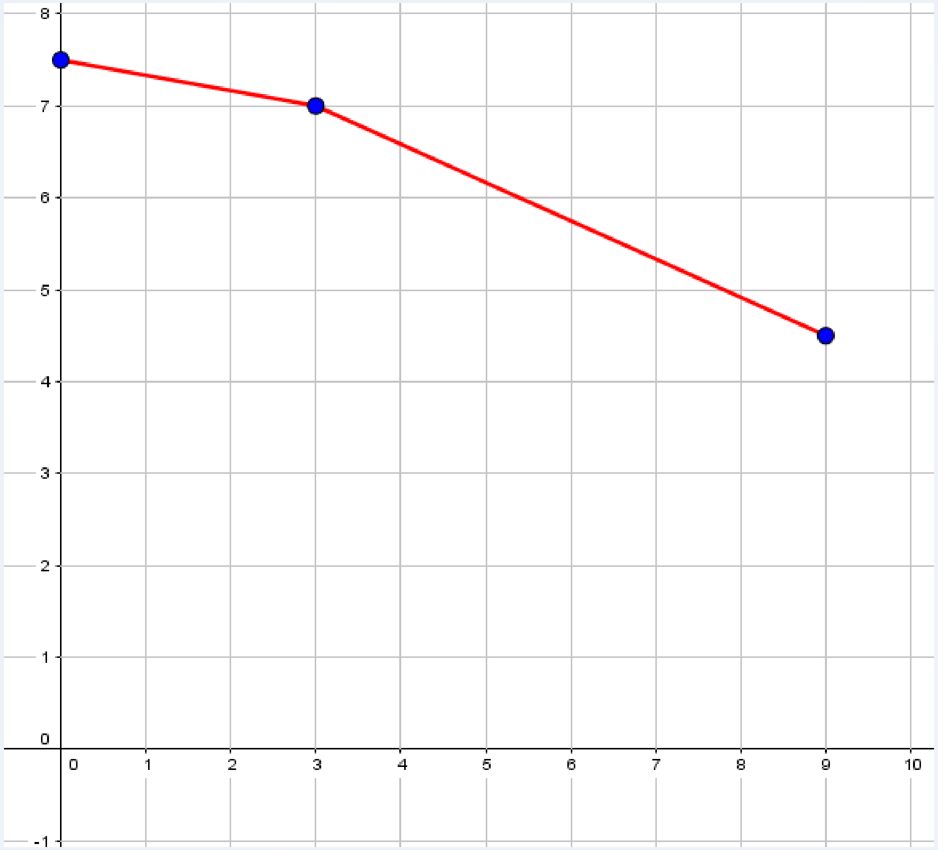
Ejemplo: Un experimento arrojo los siguientes datos: **(0,7.5), (3, 7), (9, 4.5)** La gráfica con esos datos es:



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

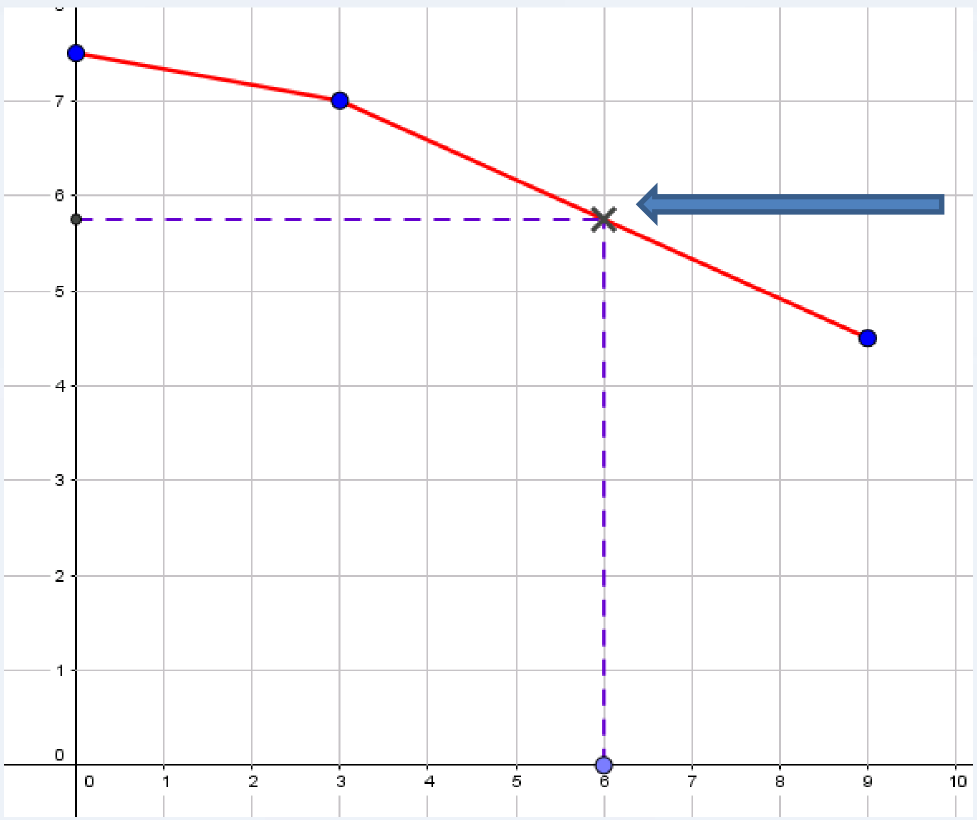
Si uniéramos los puntos con rectas tendríamos lo siguiente:



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

Si quisiéramos conocer la ordenada cuando la abscisa vale 6 podríamos obtener un valor aproximado con base en la gráfica de 5.8 unidades:




**Se interpola un dato con base en los resultados conocidos**

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

Si quisiéramos conocer no solo uno, sino todos los puntos de la curva que se originó del experimento, debemos recurrir a un método matemático.

Partiendo que tenemos 3 puntos podemos obtener como máximo un polinomio de grado 2 (número de datos menos 1)

Su ecuación tendría la siguiente estructura:

$$p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2$$

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

Evaluando el polinomio para los 3 puntos proporcionados, nos queda un sistema de 3x3 que se puede volver en uno de 2x2:

$$p(0) = a_0(0)^0 + a_1(0)^1 + a_2(0)^2 = 7.5$$
$$p(3) = a_0(3)^0 + a_1(3)^1 + a_2(3)^2 = 7$$
$$p(9) = a_0(9)^0 + a_1(9)^1 + a_2(9)^2 = 4.5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 9 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 7 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

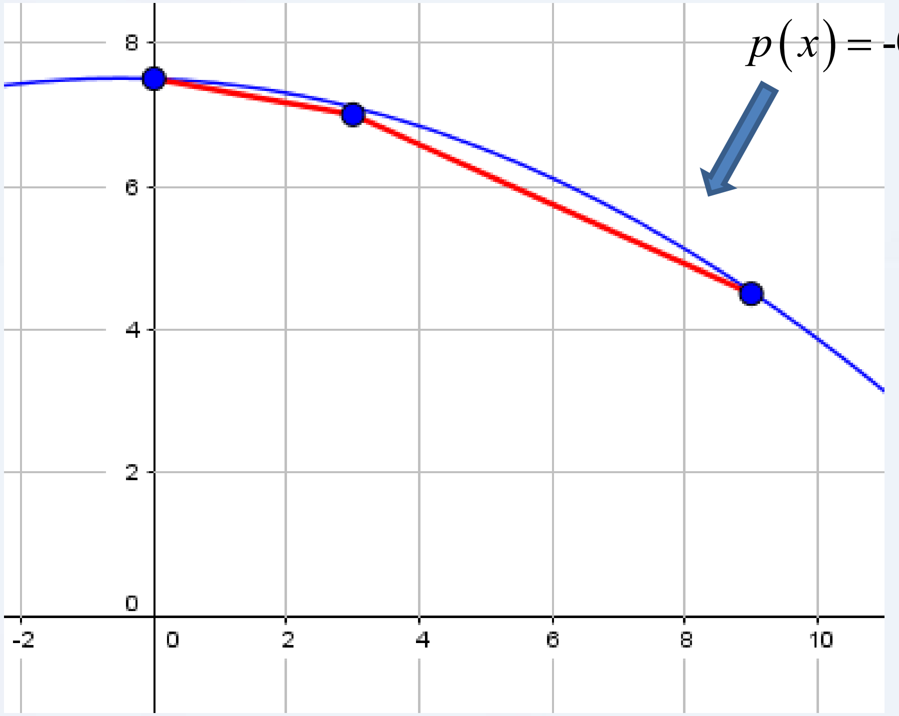
$$a_0 = 7.5 \qquad a_1 = \text{-}0.0833 \qquad a_2 = \text{-}0.0278$$

$$p(x) = \text{-}0.0278x^2 + \text{-}0.0833x + 7.5 = 0$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por sistema de ecuaciones

Si graficáramos esa curva y la sobrepusiéramos sobre la gráfica de los puntos proporcionados tendríamos:




$$p(x) = -0.0278x^2 + -0.0833x + 7.5 = 0$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de Lagrange

Si se tiene una gran cantidad de puntos proporcionados la solución de sistemas de nxn es algo complicada y requiere de más potencia de cálculo. Analizando este problema LaGrange propuso un método para interpolar datos.

Analizando el problema con el método de LaGrange:

$$\left(0, 7.5\right) \qquad \left(3,\ 7\right) \qquad \left(9,\ 4.5\right)$$

$$x_0 \quad y_0 \qquad x_1 \quad y_1 \qquad x_2 \quad y_2$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de Lagrange

El polinomio de LaGrange se define como:

$$p(x) = y_0\ell \qquad \ell \qquad \cdots \qquad \ell \qquad {}_{k=0}^{n} \qquad \ell$$

en donde $\ell \quad \ell \quad \ell$ ula de la siguiente forma:

$$\ell \qquad \prod_{j=0,\, j\neq i}^{i=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de Lagrange

Calculando las Li:

$$\ell \cancel{\left(\frac{x-x_o}{x_0-x_0}\right)}\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\right)=\left(\frac{x-3}{0-3}\right)\left(\frac{x-9}{0-9}\right)=\frac{(x-3)(x-9)}{27}$$

$$\ell \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\cancel{\left(\frac{x-x_1}{x_1-x_1}\right)}\left(\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\right)=\left(\frac{x-0}{3-0}\right)\left(\frac{x-9}{3-9}\right)=\frac{(x-0)(x-9)}{-18}$$

$$\ell \left(\frac{x-x_0}{x_2-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)\cancel{\left(\frac{x-x_2}{x_2-x_2}\right)}=\left(\frac{x-0}{9-0}\right)\left(\frac{x-3}{9-3}\right)=\frac{(x-0)(x-3)}{54}$$

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de LaGrange

Sustituyendo en la ecuación general de LaGrange

$$p(x) = y_0\ell \qquad \ell \qquad \cdots \qquad \ell \qquad \sum_{k=0}^{n} \qquad \ell$$

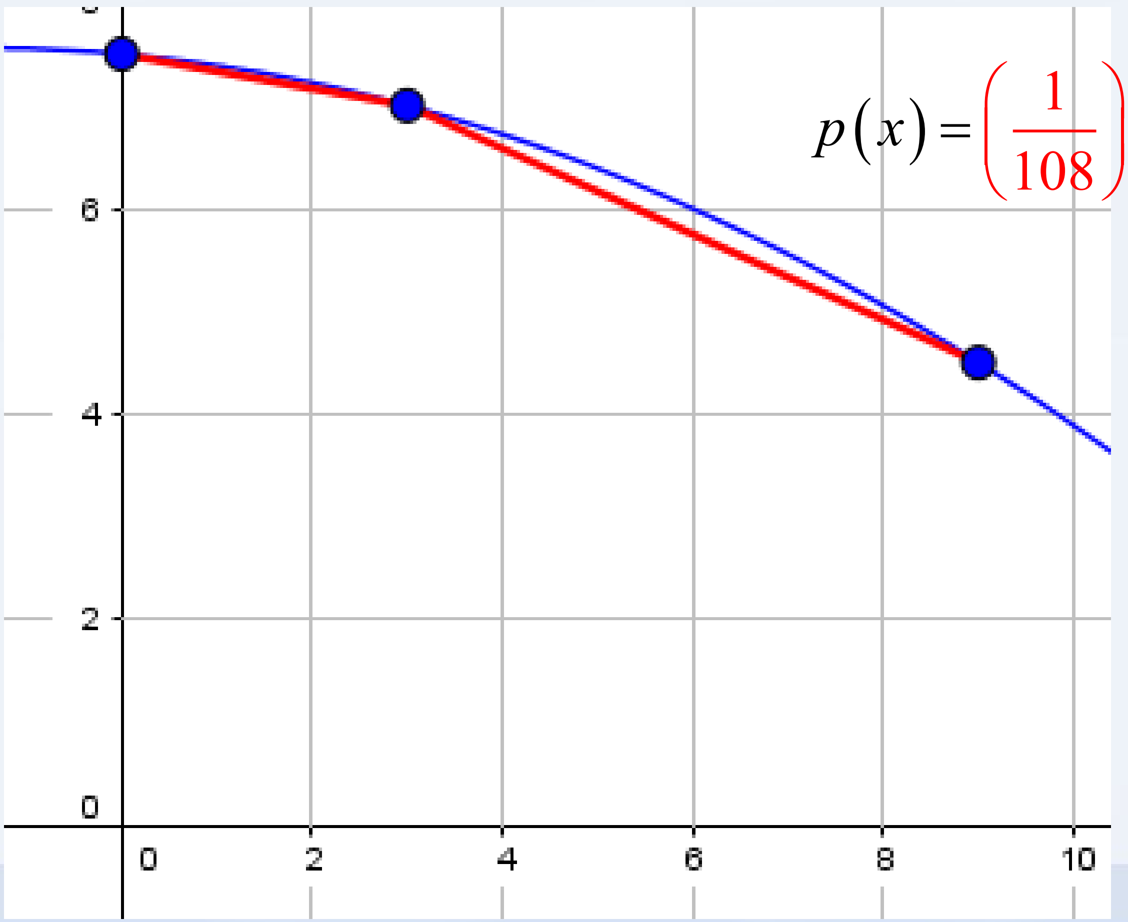
$$p(x) = (7.5)\frac{(x-3)(x-9)}{27} + (7)\frac{(x-0)(x-9)}{-18} + (4.5)\frac{(x-0)(x-3)}{54}$$

$$p(x) = \left(\frac{1}{108}\right)\left(-3x^2 - 9x + 810\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de LaGrange

Graficando




$$p(x) = \left(\frac{1}{108}\right)\left(-3x^2 - 9x + 810\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de LaGrange

Comparando ecuaciones:

Por sistema de ecuaciones

$$p(x) = -0.0278x^2 + -0.0833x + 7.5 = 0$$

Por LaGrange

$$p(x) = \left(\frac{1}{108}\right)\left(-3x^2 - 9x + 810\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables por Polinomio de LaGrange

Obtener la ordenada cuando la abscisa vale 6

$$p(x) = \left(\frac{1}{108}\right)\left(-3(6)^2 - 9(6) + 810\right)$$

$$p(x) = \left(\frac{1}{108}\right)\left(-108 - 54 + 810\right) = \frac{648}{108} = 6$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Interpolación con incrementos variables (Polinomio de LaGrange)

Tarea obtener la curva interpolada con base en los siguientes datos y calcular las ordenadas si x=1, x=2 x=0.6 x=1.6:

| x | y |
|---|---|
| 0.25 | 11.997 |
| 0.5 | 9.844 |
| 0.75 | 5.64 |
| 1.25 | -5.827 |
| 1.50 | -9.844 |
| 1.75 | -9.185 |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Análisis de diferencias para polinomios interpolantes

Par análisis de puntos equidistantes (escala constante) :

- Progresivas
- Regresivas
- Centrales

Par análisis de puntos con separaciones o escalas variables :

- Divididas

## Diferencia progresiva, regresiva y central con separación constante

***Diferencia progresiva:***

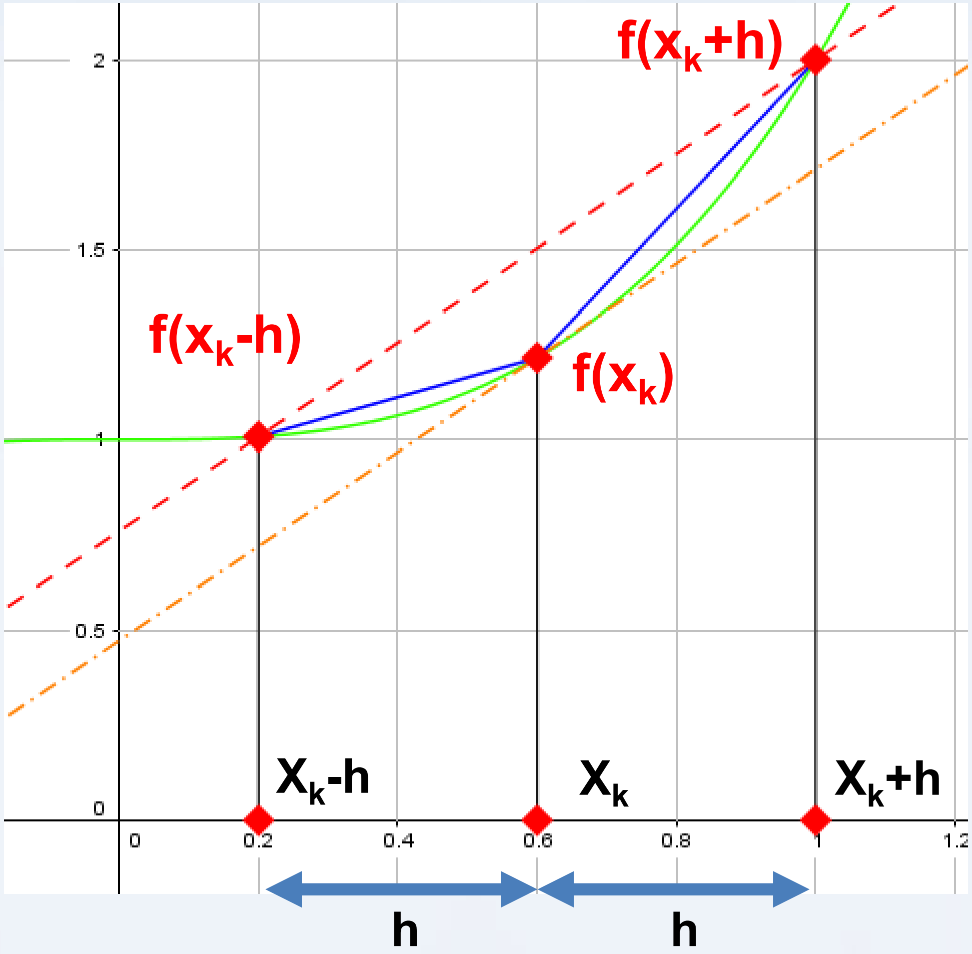
$$\Delta x_k = f(x_k + h) - f(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

***Diferencia regresiva:***

$$\nabla x_k = f(x_k) - f(x_k + h) = y_k - y_{k+1}$$

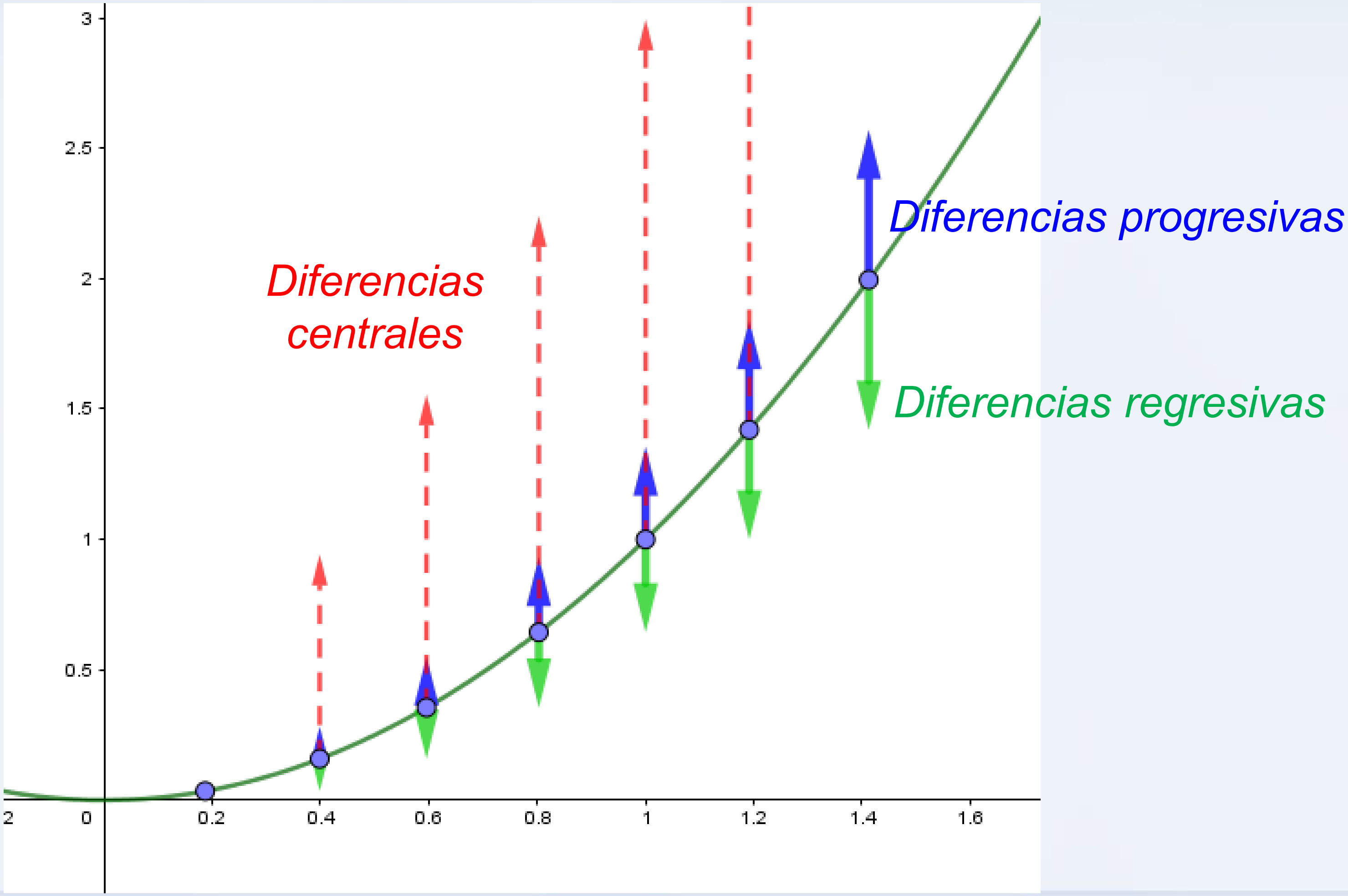
***Diferencia central:***

$$\delta x_k = \frac{f(x_k + h) - f(x_k - \mathrm{h})}{2h} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tablas de diferencias finitas progresivas con separación constante

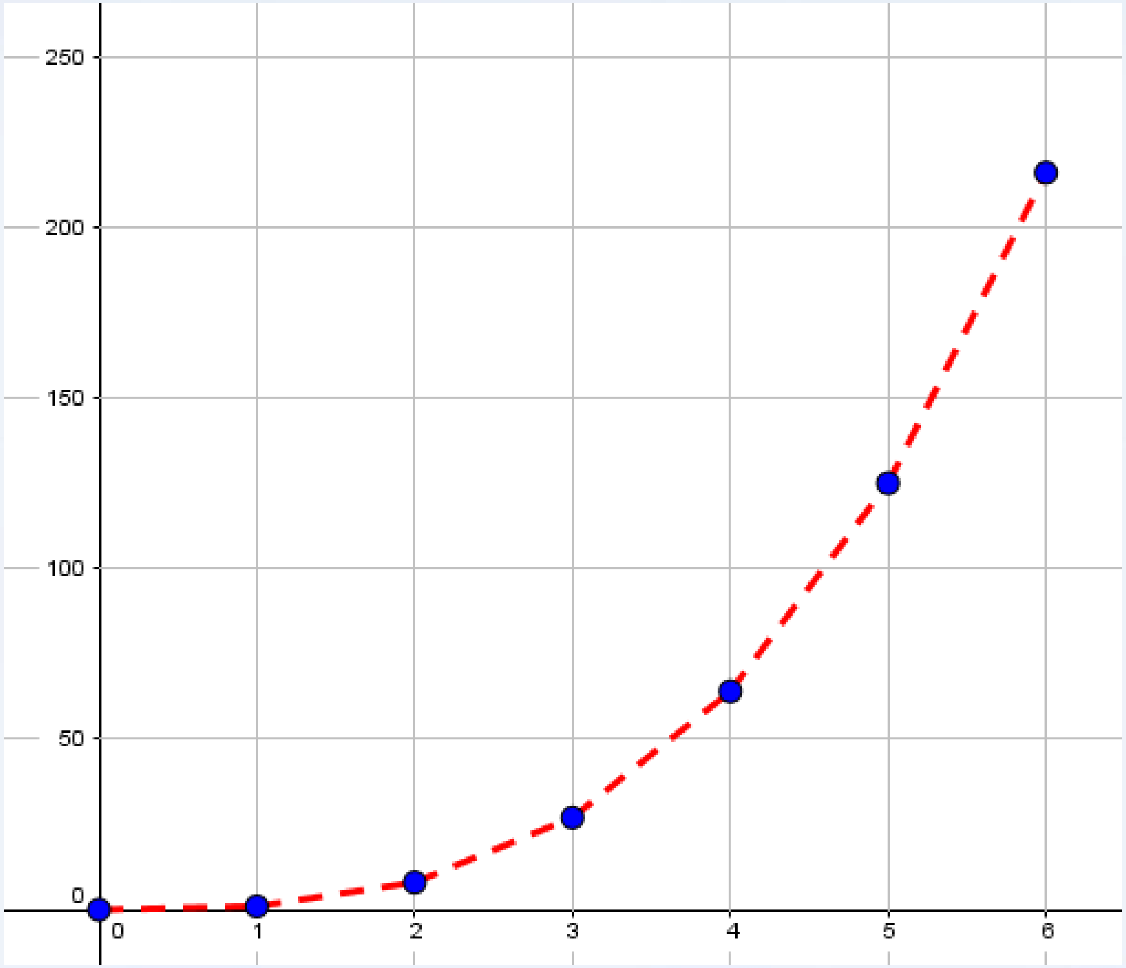


# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tablas de diferencias finitas progresivas con separación constante

Ejemplo:

| k | $X_k$ | $Y_k$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 8 |
| 3 | 3 | 27 |
| 4 | 4 | 64 |
| 5 | 5 | 125 |
| 6 | 6 | 216 |



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tablas de diferencias finitas progresivas con separación constante

Ejemplo:

| $X_k$ | $Y_k$ | $\Delta^1 Y_k$ | $\Delta^2 Y_k$ | $\Delta^3 Y_k$ | $\Delta^4 Y_k$ | $\Delta^5 Y_k$ | $\Delta^6 Y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 8 | 7 | 6 | | | | |
| 3 | 27 | 19 | 12 | 6 | | | |
| 4 | 64 | 37 | 18 | 6 | 0 | | |
| 5 | 125 | 61 | 24 | 6 | 0 | 0 | |
| 6 | 216 | 91 | 30 | 6 | 0 | 0 | 0 |

$$\Delta^1 Y_K = Y_{K+1} - Y_K$$

$$\Delta^2 Y_K = \Delta^1 Y_{K+1} - \Delta^1 Y_K$$

$$\Delta^3 Y_K = \Delta^2 Y_{K+1} - \Delta^2 Y_K$$

$$\Delta^N Y_K = \Delta^{N-1} Y_{K+1} - \Delta^{N-1} Y_K$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tablas de diferencias finitas progresivas con separación constante

Diferencias progresivas (por partes):

```
function D=DIFP(datos)
    n=size(datos,1); x=datos(:,1); y=datos(:,2);
    D(:,1)=y(2:end);
    for i=1:n-1
        D(i,2)=y(i+1)-y(i);
    end

end
```

Se ejecuta con la siguiente instrucción en la ventana de comandos:

```
datos=DIFP(datos)
```

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tabla de diferencias hacia atrás o regresivas con separación constante

| $X_k$ | $Y_k$ | $\nabla^1 Y_k$ | $\nabla^2 Y_k$ | $\nabla^3 Y_k$ | $\nabla^4 Y_k$ | $\nabla^5 Y_k$ | $\nabla^6 Y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | -1 | 6 | -6 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | -7 | 12 | -6 | 0 | 0 | |
| 2 | 8 | -19 | 18 | -6 | 0 | | |
| 3 | 27 | -37 | 24 | -6 | | | |
| 4 | 64 | -61 | 30 | | | | |
| 5 | 125 | -91 | | | | | |
| 6 | 216 | | | | | | |

$$\nabla^1 Y_K = Y_K - Y_{K-1}$$

$$\nabla^2 Y_K = \nabla^1 Y_K - \nabla^1 Y_{K-1}$$

$$\nabla^3 Y_K = \nabla^2 Y_K - \nabla^2 Y_{K-1}$$

$$\nabla^N Y_K = \nabla^{N-1} Y_K - \nabla^{N-1} Y_{K-1}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tabla de diferencias centrales con separación constante

(se utilizan en el método de Stirling que no se analizará en clase)

| $X_k$ | $Y_k$ | $\delta Y_k$ | $\delta^2 Y_k$ | $\delta^3 Y_k$ | $\delta^4 Y_k$ | $\delta^5 Y_k$ | $\delta^6 Y_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | 4 | | | | | |
| 2 | 8 | 13 | 12 | | | | |
| 3 | 27 | 28 | 18 | 6 | | | |
| 4 | 64 | 49 | 24 | | | | |
| 5 | 125 | 76 | | | | | |
| 6 | 216 | | | | | | |

$$\delta^1 Y_1 = \frac{Y_2 - Y_0}{2h} = \frac{8-0}{2(1)} = 4$$

$$\delta^1 Y_2 = \frac{Y_3 - Y_1}{2h} = \frac{27-1}{2(1)} = 13$$

$$\delta^2 Y_2 = \frac{\delta^1 Y_3 - \delta^1 Y_1}{2h} = \frac{28-4}{2(1)} = 12$$

$$\delta^N Y_K = \frac{\delta^{N-1} Y_{K+1} - \delta^{N-1} Y_{K-1}}{2h} = \frac{49-13}{2(1)} = 18$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Tabla de diferencias divididas hacia adelante con separación variable

Las diferencias se calculan de manera recurrente:

$$F^{N}\left[\mathrm{x}_{K}\right]=\frac{F^{N-1}\left[\mathrm{x}_{K+1}\right]-F^{N-1}\left[\mathrm{x}_{K}\right]}{x_{N+K}-x_{K}}$$

$$\Downarrow$$

$$F^{2}\left[\mathrm{x}_{1}\right]=\frac{F^{1}\left[\mathrm{x}_{2}\right]-F^{1}\left[\mathrm{x}_{1}\right]}{x_{3}-x_{1}}$$

## Tabla de diferencias divididas hacia adelante con separación variable

Para el caso de que la separación entre elementos sea variable, las diferencias se calculan de manera recurrente de la siguiente forma:

| K | $X_K$ | $F^0[x_K]$ | $F^1[x_K]$ | $F^2[x_K]$ | $F^3[x_K]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | |
| 1 | 1 | 1 | (1-0)/(1-0)=1 | | |
| 2 | 3 | 9 | (9-1)/(3-1)=4 | (4-1)/(3-0)=1 | |
| 3 | 4 | 16 | (16-9)/(4-3)=7 | (7-4)/(4-1)=1 | (1-1)/(4-0)=0 |

| K | $X_K$ | $F^0[x_K]$ | $F^1[x_K]$ | $F^2[x_K]$ | $F^3[x_K]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $F^0[x_0]$ | | | |
| 1 | 1 | $F^0[x_1]$ | $F^1[x_0]$ | | |
| 2 | 3 | $F^0[x_2]$ | $F^1[x_1]$ | $F^2[x_0]$ | |
| 3 | 4 | $F^0[x_3]$ | $F^1[x_2]$ | $F^2[x_1]$ | $F^3[x_0]$ |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Trayectorias en los diagramas diferencias para polinomios interpolantes

A continuación se muestra una tabla con las trayectorias de varios métodos de interpolación:

Newton-Gregory progresivo => Diagonalmente hacia abajo

Newton-Gregory regresivo => Diagonalmente hacia arriba

Gauss progresivo => En zig-zag y el primer paso hacia abajo

Gauss regresivo => En zig-zag y el primer paso hacia arriba

Stirling => Horizontal comenzando en Yo

Bessel => Horizontal comenzando entre Yo y Y1

Newton con **escala variable** => Diferencias divididas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas progresivas

Este método es llamado Interpolación de Newton-Gregory progresivo

$$P_n(x) = f_0 + s\Delta^1 f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

$$P_n(x) = fo + \sum_{i=1}^{n}\binom{s}{i}\Delta^i f_0$$

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x_{\text{punto\_interés}} - x_{\text{punto\_apoyo}}}{\text{Espaciamiento\_datos}}$$

*Donde:*
*$n$: grado del polinomio a usar,*
*$f_0$: ordenada (y) del punto de apoyo para el cálculo (normalmente el punto más cercano al punto de interés),*
*$s$: variable auxiliar,*
*$i$: índice de la sumatoria*

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas progresivas

Para determinar el grado máximo del polinomio dependerá de dos factores: Que las diferencias *ya no se puedan calcular*, o que sus valores en toda la columna *tiendan a cero*.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ | $\Delta^4 f_k$ | $\Delta^5 f_k$ | $\Delta^6 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 8 | 7 | 6 | | | | |
| 3 | 27 | 19 | 12 | 6 | | | |
| 4 | 64 | 37 | 18 | 6 | 0 | | |
| 5 | 125 | 61 | 24 | 6 | 0 | 0 | |
| 6 | 216 | 91 | 30 | 6 | 0 | 0 | 0 |

**Para este ejemplo el grado es 3.**

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas progresivas

Ejemplo: Para esta tabla el grado podría ser desde 1 o para darle más precisión podríamos llegar a un máximo grado 6.

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ | $\Delta^4 f_k$ | $\Delta^5 f_k$ | $\Delta^6 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1.01 | 1.005 | 0.005 | | | | | |
| 1.02 | 1.01 | 0.005 | 0 | | | | |
| 1.03 | 1.0149 | 0.0049 | -0.0001 | 0.0001 | | | |
| 1.04 | 1.0198 | 0.0049 | 0 | 0.0001 | 0.0002 | | |
| 1.05 | 1.0247 | 0.0049 | 0 | 0 | -0.0001 | -0.003 | |
| 1.06 | 1.0296 | 0.0049 | 0 | 0 | 0 | 0.001 | 0.004 |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas progresivas

¿Qué diferenciales tenemos que tomar en cuenta?.

$x_0 = 1$

$x = 1.5$

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ | $\Delta^4 f_k$ | $\Delta^5 f_k$ | $\Delta^6 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 8 | 7 | 6 | | | | |
| 3 | 27 | 19 | 12 | 6 | | | |
| 4 | 64 | 37 | 18 | 6 | 0 | | |
| 5 | 125 | 61 | 24 | 6 | 0 | 0 | |
| 6 | 216 | 91 | 30 | 6 | 0 | 0 | 0 |

**Dibujar las líneas que se muestran entre el punto de apoyo Xo y el punto de interés X. Las diferencias que queden por encima serán las que se tomarán en cuenta en el análisis**

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas progresivas

Aplicando el método se debe obtener un polinomio de grado 3 y luego evaluarlo en el punto de interés x=1.5

$$P_n(1.5) = fo + \frac{s}{1}\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\Delta^3 f_0$$

Sustituyendo valores:

$$s = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.5-1}{1} = 0.5$$

$$P_n(1.5) = 1 + \frac{0.5}{1}(7) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}(12) + \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{6}(6)$$

$$P_n(1.5) = 3.375$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas regresivas

Para este caso la formula es casi la misma pero la única diferencia es en el cálculo de las diferencias y en la forma en que se obtienen.

$$P_n(x) = f_0 + s\nabla f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\nabla^3 f_0 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\nabla^n f_0$$

$$P_n(x) = fo + \sum_{i=1}^{n} \binom{s}{i} \nabla^i f_0$$

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas regresivas

Por que utilizar este tipo de diferencias?. Por ejemplo si se buscará interpolar el punto X=5.5?

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\Delta f_k$ | $\Delta^2 f_k$ | $\Delta^3 f_k$ | $\Delta^4 f_k$ | $\Delta^5 f_k$ | $\Delta^6 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 8 | 7 | 6 | | | | |
| 3 | 27 | 19 | 12 | 6 | | | |
| 4 | 64 | 37 | 18 | 6 | 0 | | |
| 5 | 125 | 61 | 24 | 6 | 0 | 0 | |
| ~~6~~ | ~~216~~ | 91 | 30 | 6 | 0 | 0 | 0 |

$x_0 = 5$

$x = 5.5$

Si se utilizará el método anterior no habría datos para calcular

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas regresivas

Pero si utilizáramos las diferencias hacia atrás las rectas de apoyo las pusiéramos al revés? Tendríamos lo siguiente:

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $\nabla f_k$ | $\nabla^2 f_k$ | $\nabla^3 f_k$ | $\nabla^4 f_k$ | $\nabla^5 f_k$ | $\nabla^6 f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $-1$ | 6 | $-6$ | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | $-7$ | 12 | $-6$ | 0 | 0 | |
| 2 | 8 | $-19$ | 18 | -6 | 0 | | |
| 3 | 27 | $-37$ | 24 | -6 | | | |
| 4 | 64 | -61 | 30 | | | | |
| 5 | 125 | -91 | | | | | |
| 6 | 216 | | | | | | |

$x = 5.5$

$x_0 = 6$

**Las diferencias que queden por debajo del punto de interés serán las que se tomarán en cuenta en el análisis**

## Polinomio de interpolación basado en diferencias finitas regresivas

Aplicando el método se debe obtener un polinomio de grado 3 y luego evaluarlo en el punto de interés x=5.5 y el punto de apoyo x=6.

$$P_n(5.5) = fo + \frac{s}{1}\nabla f_0 + \frac{s\left(s-1\right)}{2}\nabla^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}\nabla^3 f_0$$

$$s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{5.5-6}{1} = -0.5$$

$$P_n(5.5) = 216 + \frac{-0.5}{1}\left(-91\right) + \frac{-0.5\left(-0.5-1\right)}{2}\left(30\right) + \frac{-0.5(-0.5-1)(-0.5-2)}{6}\left(-6\right)$$

$$P_n(5.5) = 160.75$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación basado en Diferencias Finitas Centrales
## Polinomio de Stirling

$$P_{2m}(s) = f_0 + \frac{s}{1!}\frac{\left[\delta f_{-1/2} + \delta f_{+1/2}\right]}{2} + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2-1^2)}{3!}\frac{\left[\delta^3 f_{-1/2} + \delta^3 f_{+1/2}\right]}{2} + \frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)(s^2-2^2)}{5!}\frac{\left[\delta^5 f_{-1/2} + \delta^5 f_{+1/2}\right]}{2} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$P_{2n}(s) = f_0 + \binom{s}{1}\delta_{1/2} + \binom{s}{2}\delta_0^2 + \binom{s+1}{3}\delta_{1/2}^3 + \binom{s+1}{4}\delta_0^4 + \ldots + \binom{s+n-1}{2n-1}\delta_{1/2}^{2n-1} + \binom{s+n-1}{2n}\delta_0^{2n}$$

$$P_{2n}(s) = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\binom{s+i-1}{2i-1}\delta_{1/2}^{2i-1} + \binom{s+i-1}{2i}\delta_0^{2i} \qquad s = \frac{x-x_0}{h}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Este método se aplica para datos con separación variable y se basa en la tabla de diferencias dividas.

Ejemplo: Para los siguientes datos:

| X | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| y | $Y_0$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |

Con un nodo:

| X | $X_0$ |
|---|---|
| y | $Y_0$ |

$$P_0(x) = F^0\left[x_0\right] = Y_0$$

Con dos nodos:

| X | $X_0$ | $X_1$ |
|---|---|---|
| y | $Y_0$ | $Y_1$ |

$$P_1(x) = P_0(x) + F^1\left[x_0\right]\left(x - x_0\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Con tres nodos:

| X | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|---|
| y | $Y_0$ | $Y_1$ | $Y_2$ |

$$P_2(x) = P_1(x) + F^2[x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Con cuadro nodos:

| X | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| y | $Y_0$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |

$$P_3(x) = P_2(x) + F^3[x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Para un polinomio de grado n, la formula seria:

$$P_n(x) = F^0[\mathrm{x}_0] + F^1[\mathrm{x}_0](x-x_0) + F^2[\mathrm{x}_0](x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$\ldots + F^n[\mathrm{x}_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

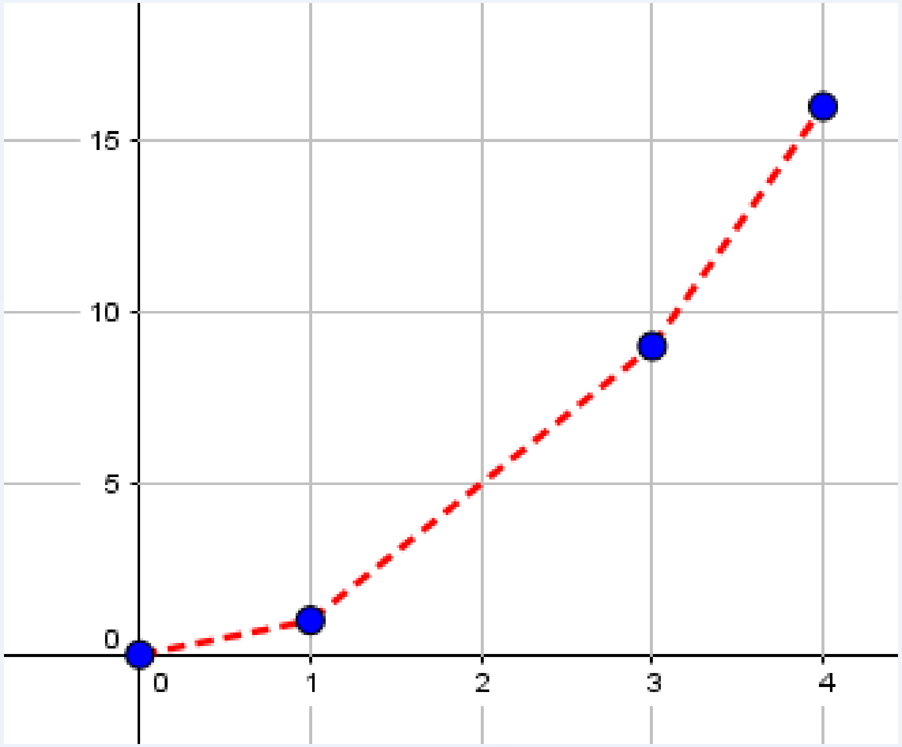
| K | $X_K$ | $F^0[x_K]$ | $F^1[x_K]$ | $F^2[x_K]$ | $F^3[x_K]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $F^0[x_0]$ | | | |
| 1 | 1 | $F^0[x_1]$ | $F^1[x_0]$ | | |
| 2 | 3 | $F^0[x_2]$ | $F^1[x_1]$ | $F^2[x_0]$ | |
| 3 | 4 | $F^0[x_3]$ | $F^1[x_2]$ | $F^2[x_1]$ | $F^3[x_0]$ |

**Grado 1** **Grado 2** **Grado 3**

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Para los siguientes datos obtener el polinomio interpolador de Newton con escala variable:

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 3 | 9 |
| 4 | 16 |



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

La tabla de diferencias divididas:

| K | $X_K$ | $F^0[x_K]$ | $F^1[x_K]$ | $F^2[x_K]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| 1 | 1 | 1 | | |
| 2 | 9 | 4 | 1 | |
| 3 | 16 | 7 | 1 | 0 |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Con cuadro nodos:

| X | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| y | $Y_0$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $Y_3$ |

$$P_n(x) = F^0[x_0] + F^1[x_0](x - x_0) + F^2[x_0](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ F^3[x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_n(x) = 0 + (1)(x - 0) + (1)(x - 0)(x - 1) + (0)(x - 0)(x - 1)(x - 3)$$

$$P_3(x) = x + (x)(x - 1) = x + x^2 - x = x^2$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Obtener el polinomio de sexto grado interpolante de Newton con escala variable para la función y=cos(x) en el intervalo de x=[0,2] con separaciones de 0.25 unidades.

| $X_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0.0000 | 1.0000 |
| 0.2500 | 0.9689 |
| 0.5000 | 0.8776 |
| 0.7500 | 0.7317 |
| 1.0000 | 0.5403 |
| 1.2500 | 0.3153 |
| 1.5000 | 0.0707 |
| 1.7500 | -0.1782 |
| 2.0000 | -0.4161 |

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

*Tabla de diferencias divididas*

| K | $X_K$ | $F^0[x_K]$ | $F^1[x_K]$ | $F^2[x_K]$ | $F^3[x_K]$ | $F^4[x_K]$ | $F^5[x_K]$ | $F^6[x_K]$ | $F^7[x_K]$ | $F^8[x_K]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 1.0000 | | | | | | | | |
| 1 | 0.2500 | 0.9689 | **-0.1244** | | | | | | | |
| 2 | 0.5000 | 0.8776 | -0.3652 | **-0.4816** | | | | | | |
| 3 | 0.7500 | 0.7317 | -0.5836 | -0.4368 | **0.0597** | | | | | |
| 4 | 1.0000 | 0.5403 | -0.7656 | -0.3640 | 0.0971 | **0.0373** | | | | |
| 5 | 1.2500 | 0.3153 | -0.9000 | -0.2688 | 0.1269 | 0.0299 | **-0.0060** | | | |
| 6 | 1.5000 | 0.0707 | -0.9784 | -0.1568 | 0.1493 | 0.0224 | -0.0060 | **0.0000** | | |
| 7 | 1.7500 | -0.1782 | -0.9956 | -0.0344 | 0.1632 | 0.0139 | -0.0068 | -0.0006 | ***-0.0003*** | |
| 8 | 2.0000 | -0.4161 | -0.9516 | 0.0880 | 0.1632 | 0.0000 | -0.0111 | -0.0028 | -0.0013 | **-0.0005** |

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

Calculando el polinomio

$$P_6(x) = 1$$ Primer grado

$$+(-0.1244)(x-0)$$ Segundo grado

$$+(-0.4816)(x-.25)(x-0)$$ Tercer grado

$$+(0.597)(x-0.5)(x-.25)(x-0)$$ Cuarto grado

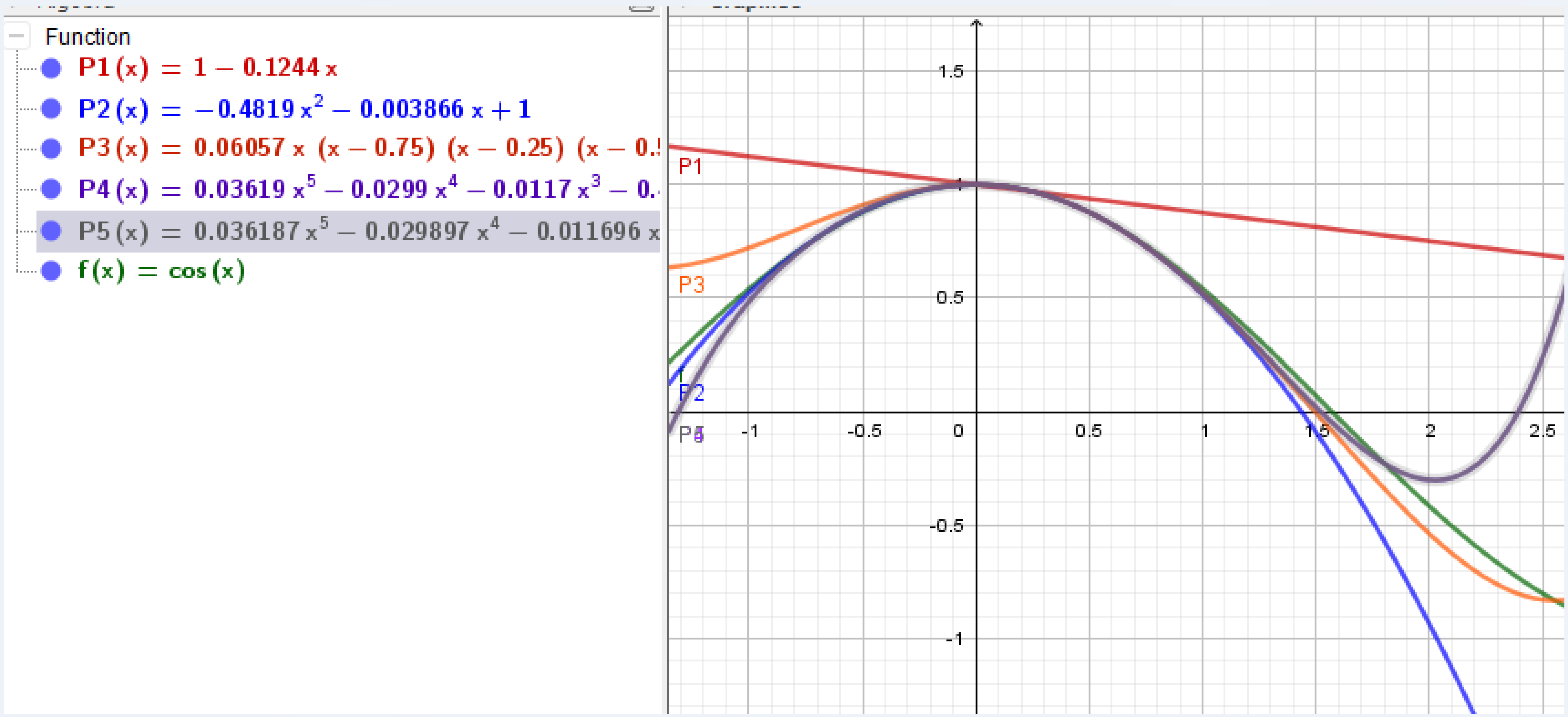
$$+(0.03173)(x-0.75)(x-0.5)(x-.25)(x-0)$$ Quinto grado

$$+(-0.0060)(x-1.00)(x-0.75)(x-0.5)(x-.25)(x-0)$$ Sexto grado

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Polinomio de interpolación de Newton con escala variable

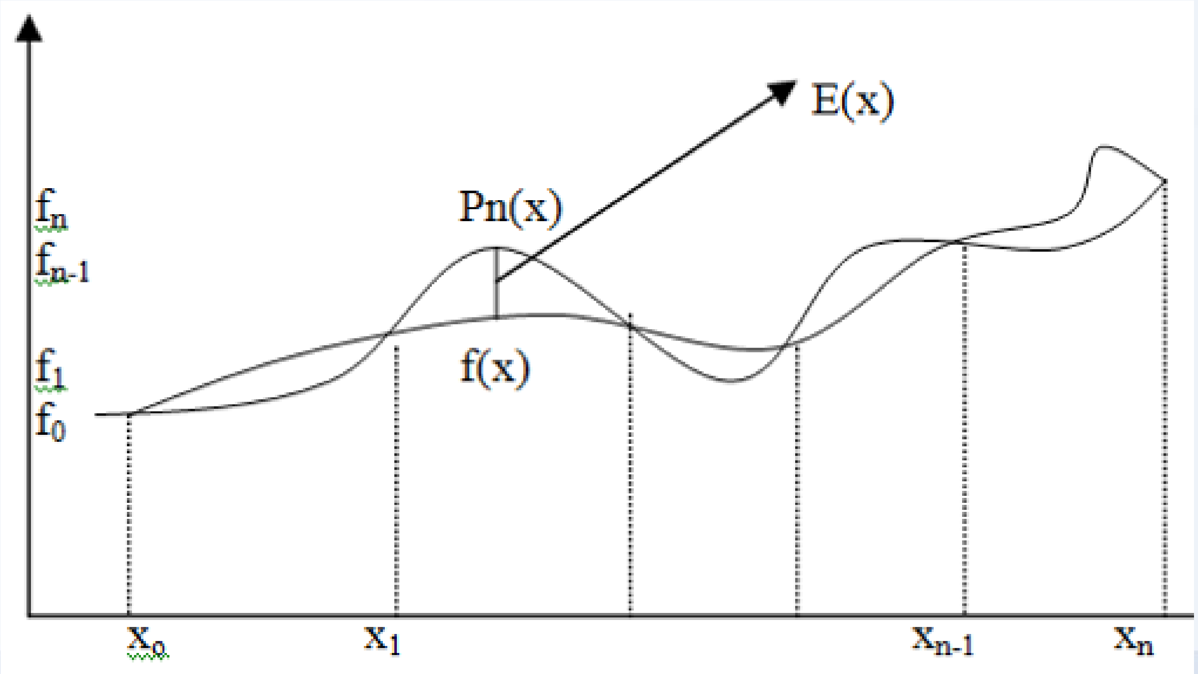
Polinomio Interpolantes



## Análisis del error

Si se conoce la función original, podemos calcular el error de la interpolación, el cual seria:

$$error = f(x) - Pn(x)$$



## Errores al calcular los polinomios interpolantes

Caso en el que se tengan solo dos puntos (interpolación Lineal)

***Teorema:*** Sea f(x) una función dos veces derivable en un abierto que contiene al intervalo (a, b). Sea $P_1(x)$ el polinomio de interpolación lineal:

$$P_1(x) = \left(\frac{x-b}{a-b}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b)$$

Existe un punto en el que se presenta el error máximo $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_1(x) = (1/2)(x-a)(x-b)f''(\xi) \qquad a < \xi < b$$

*Error en el punto x*

*Error máximo en el intervalo [a,b]*

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Errores al calcular los polinomios interpolantes

Ejemplo: Sea la función f(x)=$x^3$ y los puntos a=(1,1) y b=(3,27). Obtener el polinomio interpolante con esos dos puntos y calcular el valor de épsilon en x=2 (punto medio).

$$P_1(x)=\left(\frac{x-3}{1-3}\right)(1)+\left(\frac{x-1}{3-1}\right)(27)=13x-12$$

$$f(x)=x^3$$

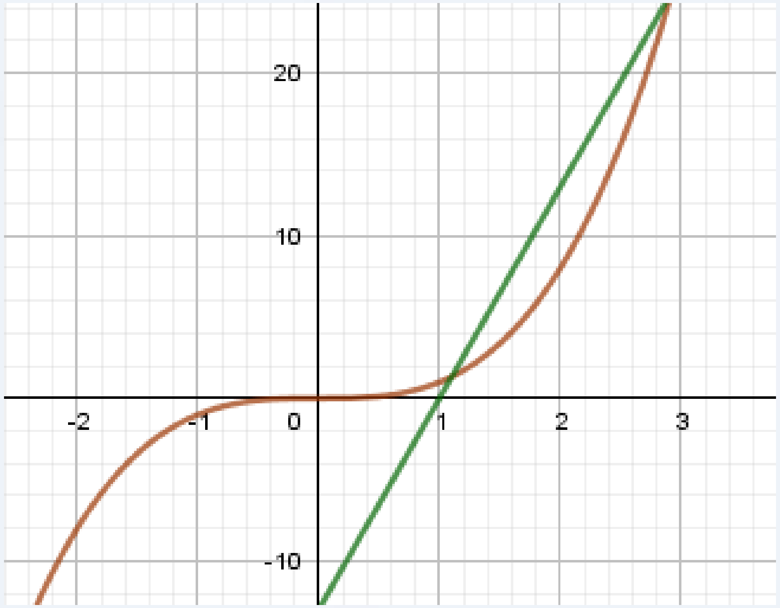
$$\varepsilon(x)=f(x)-P_1(x)$$

$$\varepsilon(x)=x^3-(13x-12)=x^3-13x+12$$

$$f(x)=x^3$$

$$f'(x)=3x^2$$

$$f''(x)=6x$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Errores al calcular los polinomios interpolantes

Calculando el valor de épsilon:

$$\varepsilon(x) = (1/2)(x-a)(x-b)f''(\xi) \qquad a < \xi < b$$

Sustituyendo valores:

$$x^3 - 13x + 12 = (1/2)(x-1)(x-3)6(\xi)$$

Despejando y evaluando en x=2:

$$x^3 - 13x + 12 = (1/2)(x-1)(x-3)6(\xi)$$

$$\xi = \frac{(x^3 - 13x + 12)}{3(x-1)(x-3)} = \frac{(2^3 - 13(2) + 12)}{3(2-1)(2-3)} = 2$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Errores al calcular los polinomios interpolantes

El error máximo al utilizar un polinomio lineal puede aproximarse a:

$$Max\left|\varepsilon(x)\right|_{a<x<b} = \frac{h^2}{8}\left|f''(x_m)\right|$$

Donde: $h = b - a$

$$Max\left|\varepsilon(x)\right|_{a<x<b} = \frac{(3-1)^2}{8}6(2) = 6$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Errores al calcular los polinomios interpolantes

Para el caso de n+1 puntos, la formula para determinar el épsilon es:

$$\varepsilon\left(x_j\right)=f\left(x_j\right)-P\left(x_j\right)=\frac{f^{n+1}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\sum_{i=0}^{i=n\ \ \mathrm{i}\neq\mathrm{j}}\left(x_j-x_i\right)$$

Para $\mathrm{a} < \xi < \mathrm{b}$ y

P(x)=Polinomio Interpolante

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

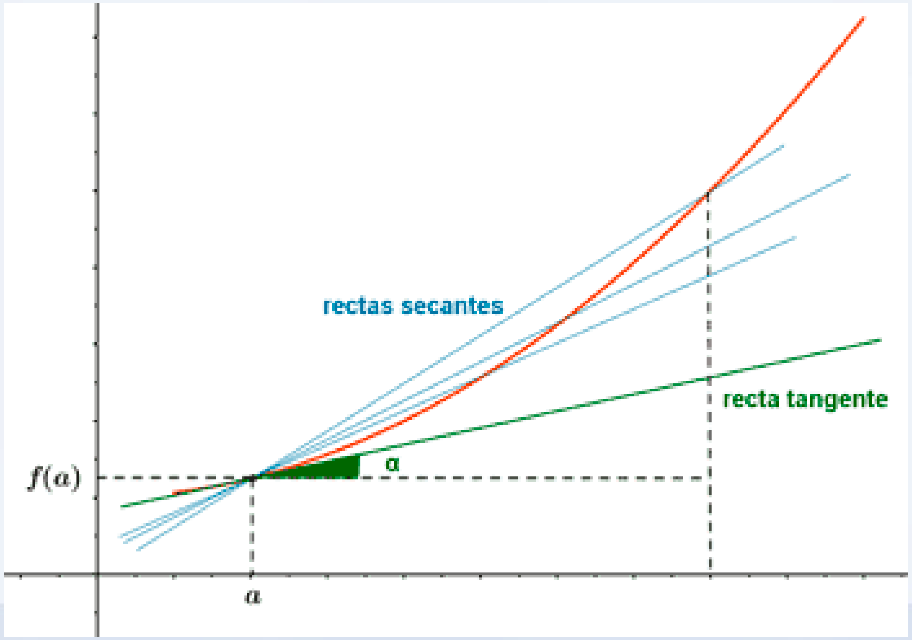
Estos métodos se aplican cuando:

- La función a derivar es muy compleja.
- No se tiene la función original y solo se cuenta con datos equiespaciados con respecto a la abscisa, y con una separación entre ellos que tiende a cero.

## Diferencia progresiva, regresiva y central con separación constante

***Definición de la derivada de una función (pendiente de la recta tangente a un punto)***

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Diferencia progresiva, regresiva y central con separación constante

***Diferencia progresiva:***
***Que representa la pendiente de la cuerda BC***

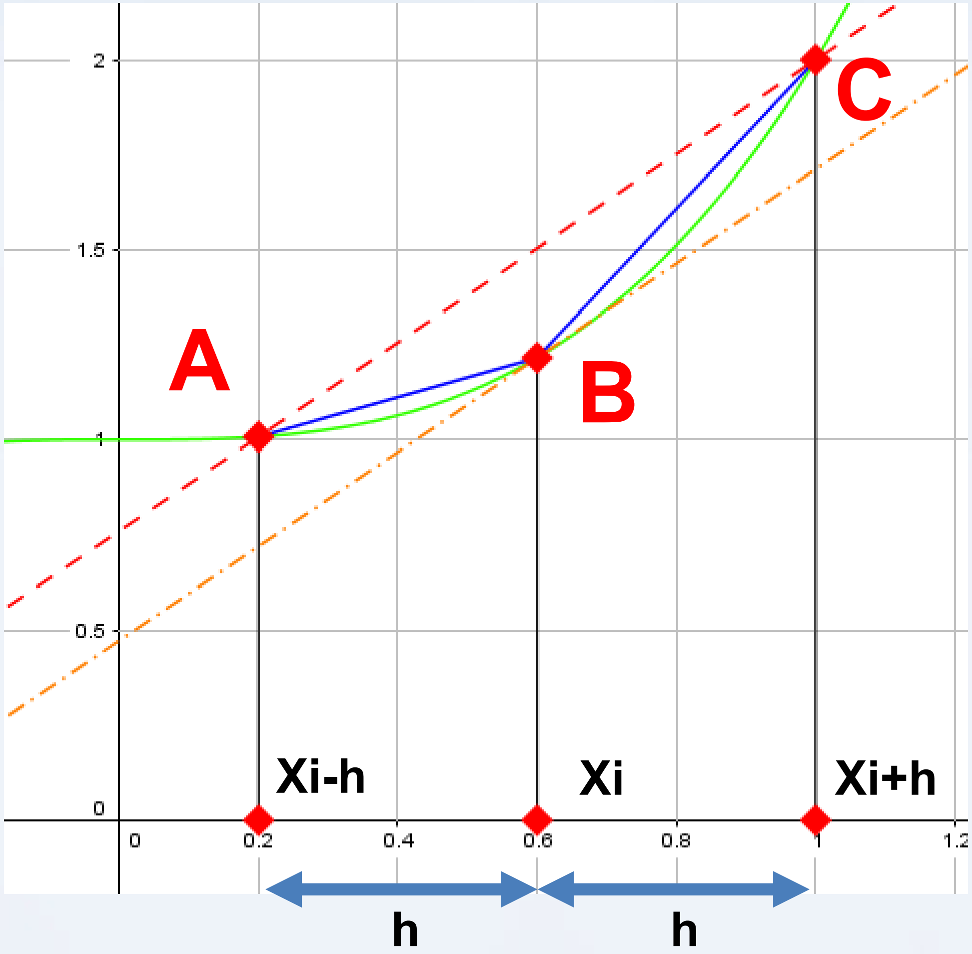
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

***Diferencia regresiva:***
***Que representa la pendiente de la cuerda AB***

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i + h)}{h}$$

***Diferencia central:***
***Que representa la pendiente de la cuerda AC***

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - \mathrm{h})}{2h}$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

Por ejemplo: si se quisiera obtener la derivada de la siguiente función cuando x=5, por medio de la formula tendríamos:

$$y = \ln(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$\Big\downarrow$$

$$y' = \frac{1}{5} = 0.2$$

## Derivación numérica

Si quisiéramos aplicar un método numérico tendríamos que basarnos en la definición formal de la derivada, la cual nos servirá para poder calcular las tablas de diferencias hacia adelante, hacia atrás o central (estas tablas tendrán una pequeña modificación en la formula del cálculo de sus elementos de las utilizadas anteriormente).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si h es muy pequeña tenemos:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \mathrm{h}) - f(x_i)}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

***Diferencia hacia adelante***

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica hacia atrás

Ejemplo: Calcular por medio de derivación numérica la derivada cuando x=5 de la siguiente función.

$$y = \ln(x)$$

Calculando puntos atrás y hacia adelante del punto de interés

| $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|
| 4.7 | 1.5476 |
| 4.8 | 1.5686 |
| 4.9 | 1.5892 |
| ***5*** | 1.6094 |
| 5.1 | 1.6292 |
| 5.2 | 1.6487 |
| 5.3 | 1.6677 |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica hacia atrás

Creando la tabla de diferencias hacia atrás con h=0.1

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ | $D^3f_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 4.7 | 1.5476 | XXX | XXX | XXX |
| 4.8 | 1.5686 | XXX | XXX | |
| 4.9 | 1.5892 | XXX | | |
| 5 | 1.6094 | | | |
| 5.1 | 1.6292 | | | |
| 5.2 | 1.6487 | | | |
| 5.3 | 1.6677 | | | |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica hacia atrás

Creando la tabla de diferencias hacia atrás con h=0.1

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ | $D^3f_k$ |
|---|---|---|---|---|
| *4.7* | *1.5476* | *0.2105* | *-0.04341* | ***0.017542*** |
| *4.8* | *1.5686* | *0.2062* | ***-0.04166*** | |
| *4.9* | *1.5892* | ***0.2020*** | | |
| ***5*** | ***1.6094*** | | | |
| *5.1* | *1.6292* | | | |
| *5.2* | *1.6487* | | | |
| *5.3* | *1.6677* | | | |

## Derivación numérica

Si calculáramos con la formula el valor exacto de las 3 primeras derivadas de la función f(x) y las comparamos con los valores obtenidos por el método numérico tendríamos:

$$y'(5) = \frac{1}{x} = \frac{1}{5} = 0.2 \Longrightarrow ERP = \left|\frac{0.2 - 0.2020}{0.2}\right|(100) = 1.01354\ \%$$

$$y''(5) = \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{(5)^2} = \frac{-1}{25} \Longrightarrow ERP = \left|\frac{(-0.04) - (-0.04166)}{0.04}\right|(100) = 4.14497\ \%$$

$$y' = \frac{2}{x^3} = \frac{2}{5^3} = \frac{2}{125} \Longrightarrow ERP = \left|\frac{0.016 - 0.017542}{0.016}\right|(100) = 9.63819\ \%$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica hacia adelante

Calcular la derivada empleando las diferencias hacia adelante

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ | $D^3f_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 4.7 | 1.5476 | | | |
| 4.8 | 1.5686 | | | |
| 4.9 | 1.5892 | | | |
| 5 | 1.6094 | | | |
| ~~5.1~~ | ~~1.6292~~ | xxx | | |
| 5.2 | 1.6487 | xxx | xxx | |
| 5.3 | 1.6677 | xxx | xxx | xxx |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica hacia adelante

Creando la tabla de diferencias hacia atrás con h=0.1

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ | $D^3f_k$ |
|---|---|---|---|---|
| *4.7* | *1.5476* | | | |
| *4.8* | *1.5686* | | | |
| *4.9* | *1.5892* | | | |
| ***5*** | ***1.6094*** | | | |
| ~~*5.1*~~ | ~~*1.6292*~~ | **0.198026** | | |
| *5.2* | *1.6487* | **0.194181** | **-0.03845** | |
| *5.3* | *1.6677* | **0.190482** | **-0.03699** | **0.014651** |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

Calculando el error para las diferencia hacia adelante

$$y'(5) = 0.2 \Rightarrow ERP = \left|\frac{0.2 - 0.198026}{0.2}\right|(100) = 0.986864\ \%$$

$$y''(5) = \frac{-1}{25} = -0.04 \Rightarrow ERP = \left|\frac{(-0.04) - (-0.03845)}{0.04}\right|(100) = 3.86464\ \%$$

$$y' = \frac{2}{125} = 0.016 \Rightarrow ERP = \left|\frac{0.016 - 0.014651}{0.016}\right|(100) = 8.434046\ \%$$

## Derivación numérica

Comparando los errores con los dos métodos:

| | Hacia atrás % | Hacia adelante % |
|---|---|---|
| F’(x) | 1.01354 | 0.986864 |
| F’’(x) | 4.14497 | 3.86464 |
| F’’’(x) | 9.63819 | 8.434046 |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

Algunos libros presentan formulas para primera, segunda y tercera derivada, pero más que formulas son en realidad los elementos de la tabla de diferencias hacia adelante o hacia atrás:

Primera derivada por diferencias hacia atrás :

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ |
|---|---|---|
| $X_{i-2}$ | $f(x_{i-2})$ | |
| $X_{i-1}$ | $f(x_{i-1})$ | $D(x_i) = \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) / h$ |
| $X_i$ | $f(x_i)$ | |

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2h}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

Segunda derivada por diferencias hacia atrás :

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

| $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ |
|---|---|---|---|
| $x_{i-2}$ | $f(x_{i-2})$ | $D(x_{i-1}) = \left(f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})\right)/h$ → | $D^2(x_i) = \left(D(x_i) - D(x_{i-1})\right)/h$ |
| $x_{i-1}$ | $f(x_{i-1})$ | $D(x_i) = \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)/h$ ↗ | |
| $x_i$ | $f(x_i)$ | | |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

Segunda derivada por diferencias hacia atrás :

$$D^2(x_i) = \frac{D(x_i) - D(x_{i-1})}{h} = \frac{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \dfrac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{h}}{h}$$

$$D^2(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}) - f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica

Primeras 3 derivadas por diferencias hacia atrás :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica central

| | $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ | $D^3f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{-3}$ | 4.7 | 1.5476 | | | |
| $F_{-2}$ | 4.8 | 1.5686 | $\left(f_{-1}-f_{-3}\right)/2h$ | | |
| $F_{-1}$ | 4.9 | 1.5892 | $\left(f_{0}-f_{-2}\right)/2h$ | $\left(D_{0}-D_{-2}\right)/2h$ | |
| $F_{0}$ | 5 | **1.6094** | $\left(f_{1}-f_{-1}\right)/2h$ | $\left(D_{1}-D_{-1}\right)/2h$ | $\left(D_{1}^{2}-D_{-1}^{2}\right)/2h$ |
| $F_{1}$ | 5.1 | 1.6292 | $\left(f_{2}-f_{0}\right)/2h$ | $\left(D_{2}-D_{0}\right)/2h$ | |
| $F_{2}$ | 5.2 | 1.6487 | $\left(f_{3}-f_{1}\right)/2h$ | | |
| $F_{3}$ | 5.3 | 1.6677 | | | |

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Derivación numérica central

Creando la tabla para h=0.1

| | $x_k$ | $f(x_k)$ | $Df_k$ | $D^2f_k$ | $D^3f_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{-3}$ | 4.7 | 1.5476 | | | |
| $F_{-2}$ | 4.8 | 1.5686 | 0.208 | | |
| $F_{-1}$ | 4.9 | 1.5892 | 0.204 | -0.0400 | |
| $F_0$ | 5 | 1.6094 | → 0.200 | → -0.0375 | → 0.0125 |
| $F_1$ | 5.1 | 1.6292 | 0.1965 | -0.0375 | |
| $F_2$ | 5.2 | 1.6487 | 0.1925 | | |
| $F_3$ | 5.3 | 1.6677 | | | |

## Derivación numérica

Calculando el error para las diferencia central

$$y'(5) = 0.2 \quad \Longrightarrow \quad ERP = \left|\frac{0.2 - 0.2}{0.2}\right|(100) = 0\ \%$$

$$y''(5) = \frac{-1}{25} = -0.04 \quad \Longrightarrow \quad ERP = \left|\frac{(-0.04) - (-0.0375)}{0.04}\right|(100) = 6.25\ \%$$

$$y' = \frac{2}{125} = 0.016 \quad \Longrightarrow \quad ERP = \left|\frac{0.016 - 0.0125}{0.016}\right|(100) = 21.875\ \%$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Extrapolación de Richardson

Para disminuir los errores de la derivación numérica Richardson creo un método que se base en los datos obtenidos en la derivación numérica básica. Este método obtiene por así decirlo un promedio de ellas.

$$D\left(h_o\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Derivada númerica para una separación } \mathrm{h}_0$$

$$D\left(h_o/2\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Derivada númerica para una separación } \mathrm{h}_0/2$$

$$f'(x) \approx D\left(h_{0/2}\right) + \left(\frac{D\left(h_{0/2}\right) - D\left(h_0\right)}{3}\right) \approx \frac{4}{3} D\left(h_{0/2}\right) - \frac{1}{3} D\left(h_0\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Extrapolación de Richardson

Ejemplo: Calcular la primera derivada de la función f(x) en x=0.35, utilizando diferencias centradas y el método de extrapolación de Richardson con separaciones de ho=0.25 y ho/2= 0.125.

$$f(x) = 5xe^{-2x}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Extrapolación de Richardson

Para los datos del problema tenemos:

$$f(x) = 5xe^{-2x}$$

$$f'(x) = 5e^{-2x} - 10xe^{-2x}$$

$$f'(0.35) = 0.7449 \longrightarrow$$ ***Valor real de la derivada***

## Extrapolación de Richardson

Calculando las derivadas para las dos separaciones y aplicando la interpolación de Richardson:

$$D\left(x=0.35\right)_{h=0.25}=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{f(0.6)-f(0.1)}{0.25*2}=0.9884$$

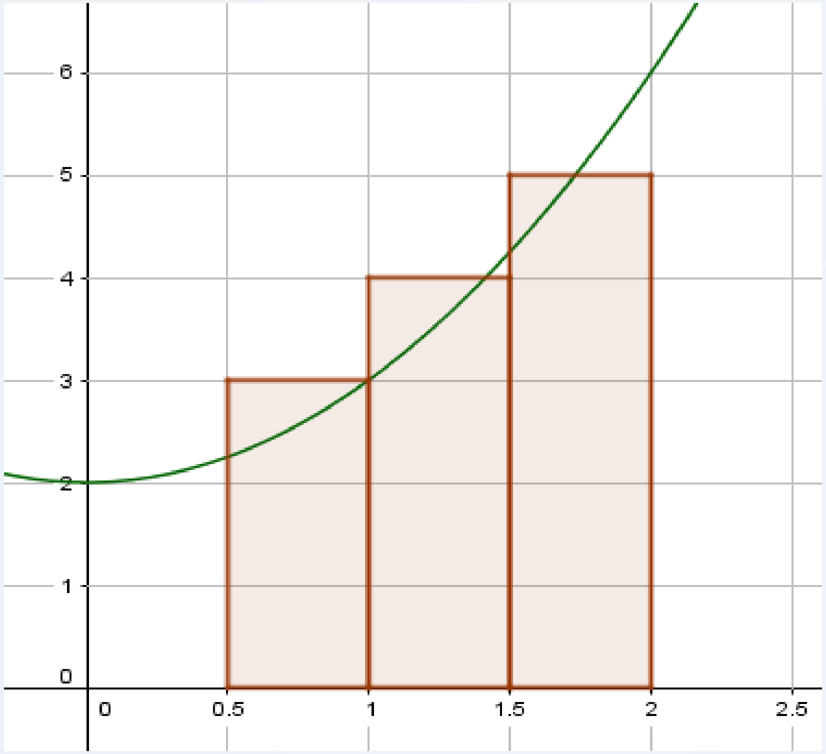
$$D\left(x=0.35\right)_{h=0.125}=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}=\frac{f(0.45)-f(0.25)}{0.125*2}=0.8047$$

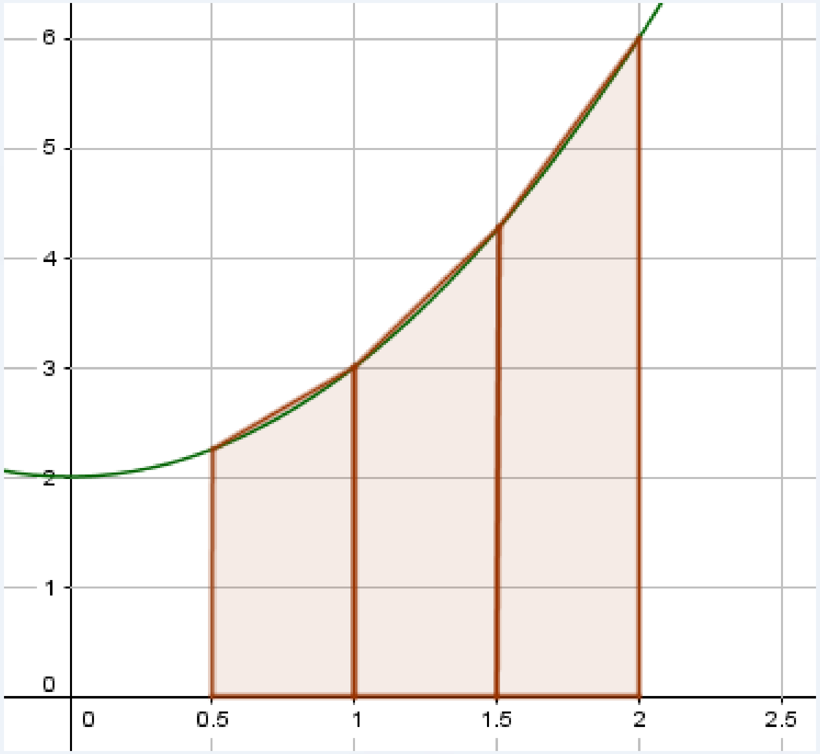
$$f'(x)\approx=\frac{4}{3}D\left(0.8047\right)-\frac{1}{3}D\left(0.9884\right)=0.7435$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica

La integración de manera geométrica se define como el área bajo la curva. La cual la podemos calcular de manera aproximada apoyándonos en figuras geométricas conocidas como rectángulos, trapecios y parábolas.



# Interpolación, derivación e integración numéricas

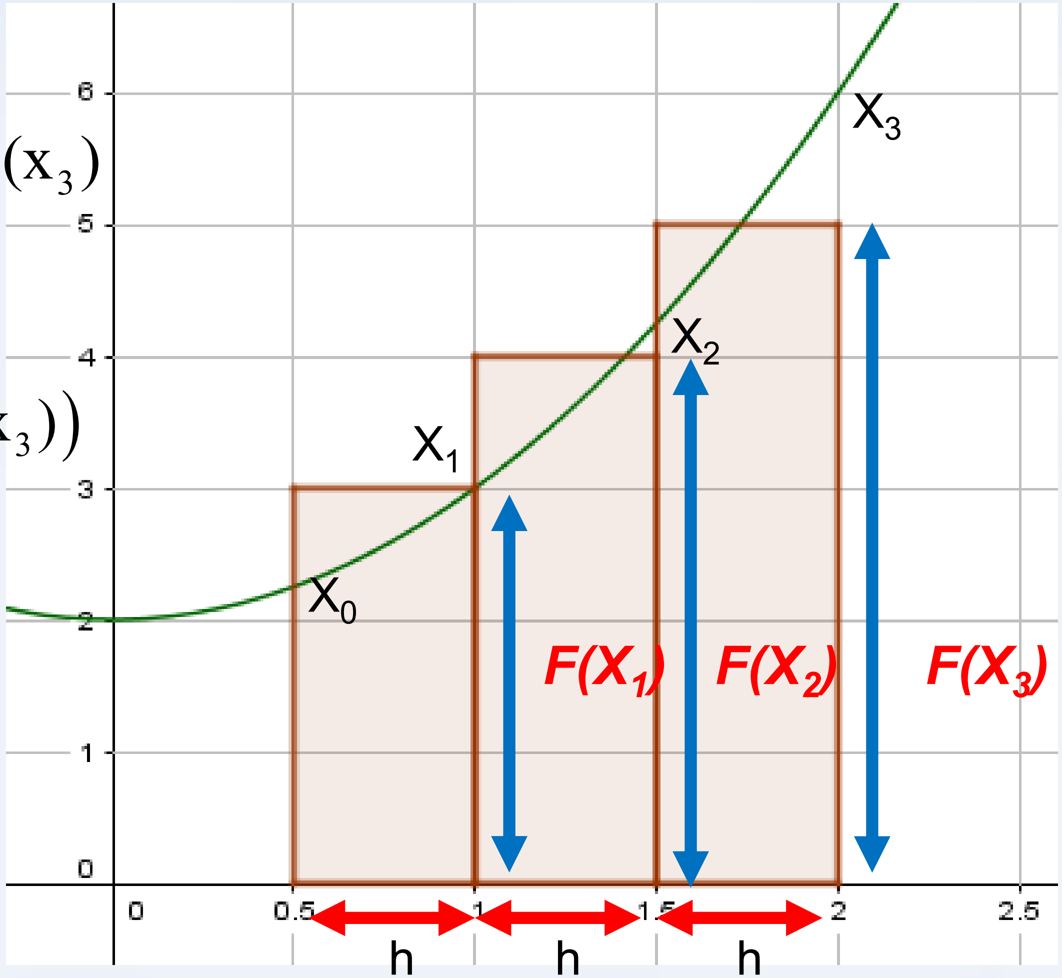
## Integración Numérica

Si utilizamos rectángulos:

$$f'(x) \approx = hf(\mathrm{x}_1) + hf(\mathrm{x}_2) + hf(\mathrm{x}_3)$$

$$f'(x) \approx = h\left(f(\mathrm{x}_1) + f(\mathrm{x}_2) + f(\mathrm{x}_3)\right)$$

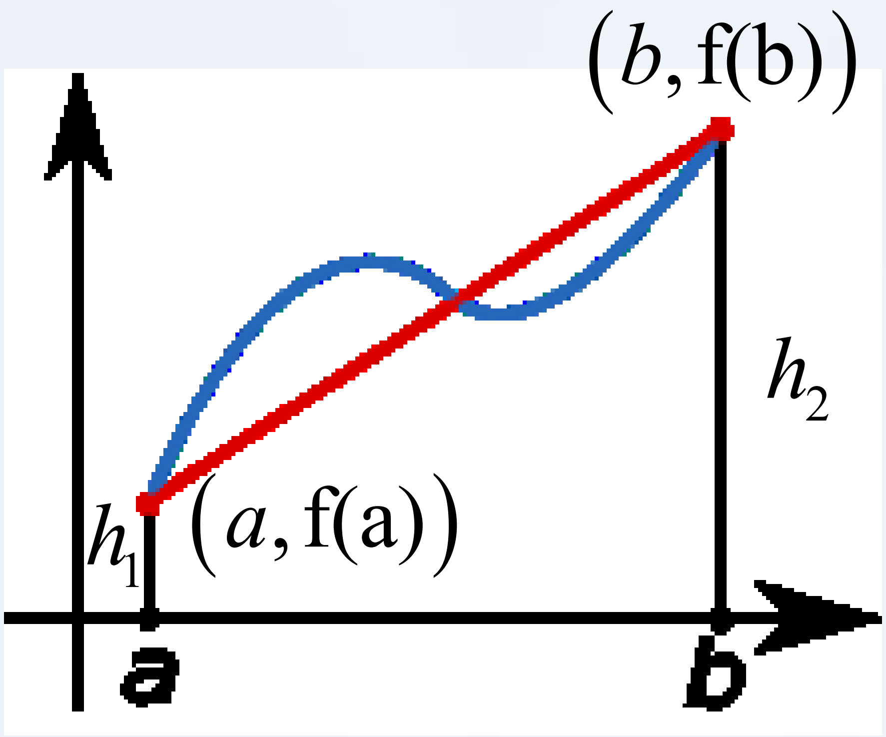
$$f'(x) \approx = h\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{x}_i)$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Regla del trapecio simple

Si utilizamos el trapecio que nos da una aproximación más cercana a la real y calculando el área de esa figura.



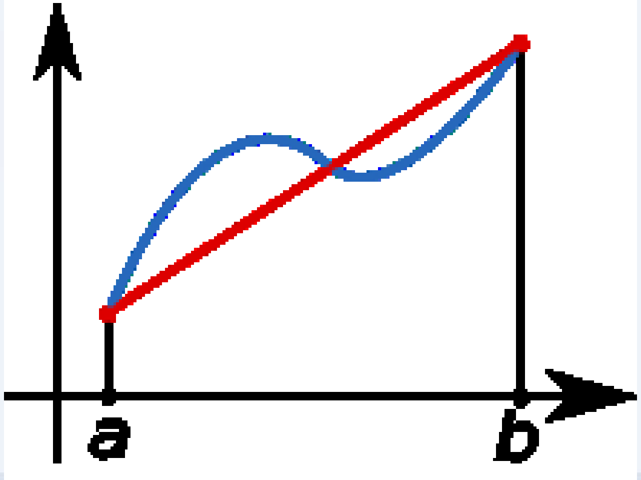

$$A = \left(b - a\right)\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

$$A = \left(b - a\right)\left(\frac{f\left(a\right) + f\left(b\right)}{2}\right)$$

## Integración Numérica – Regla del trapecio simple

Si consideramos un solo trapecio para toda el intervalo de análisis, y además que la integral es igual al área bajo la curva, tenemos

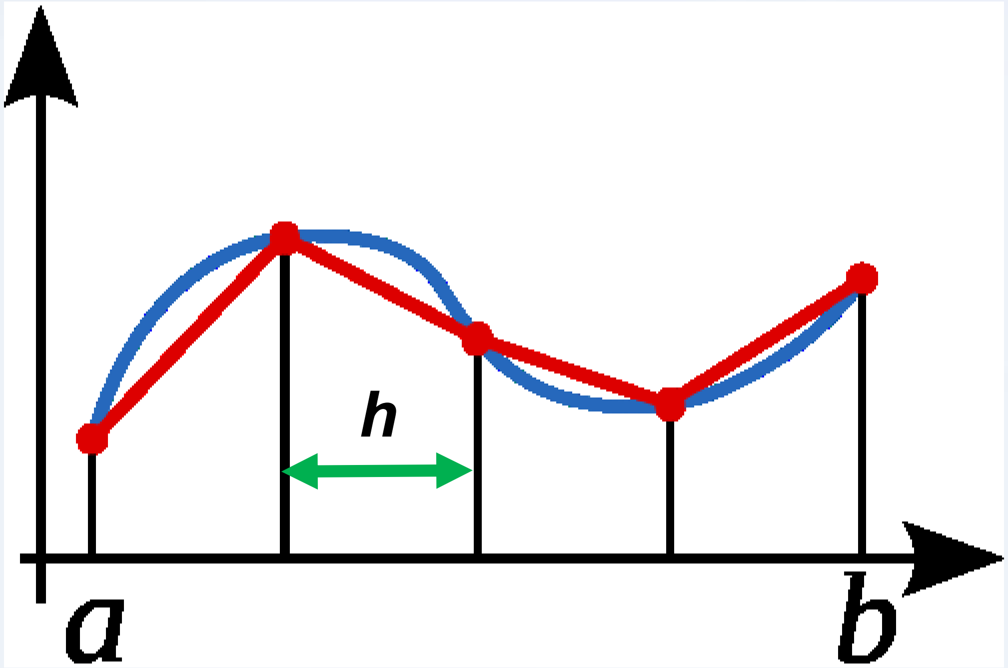
$$A = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{f(\mathrm{a}) + f(b)}{2}$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Regla del trapecio Compuesta

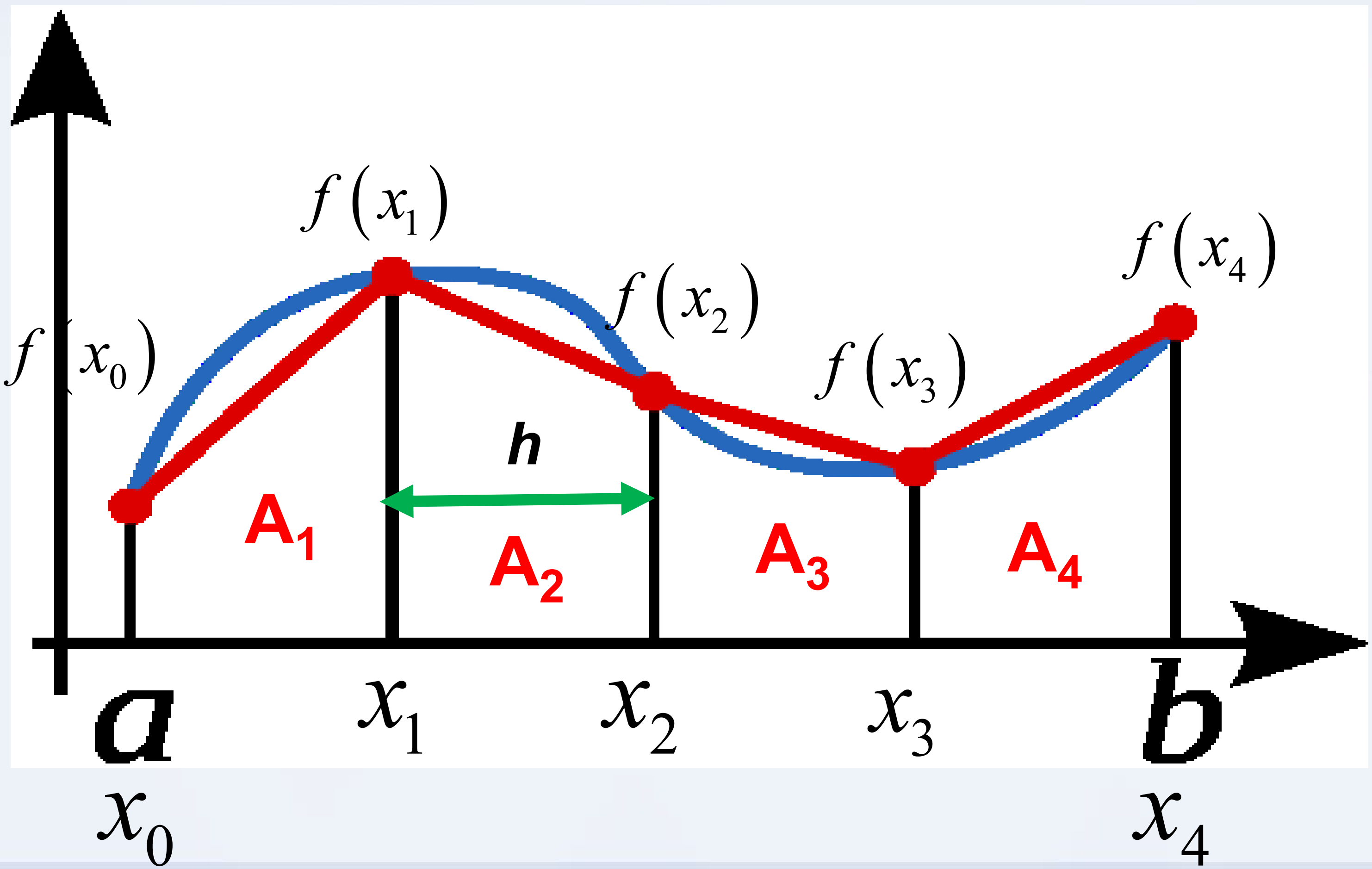
Si quisiéramos obtener la integral pero utilizando más divisiones, tendríamos:




$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

## Integración Numérica – Regla del trapecio Compuesta

Los datos que tendríamos serian:



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Regla del trapecio simple

El área para la función anterior con 4 divisiones seria:

$$A = \int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A \approx h\left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}\right) + h\left(\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}\right) + h\left(\frac{f(x_2) + f(x_3)}{2}\right) + h\left(\frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}\right)$$

***Factorizando:***

$$A \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

## Integración Numérica – Regla del trapecio simple

Agrupando términos:

$$A \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

$$A \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

$$A \approx h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}\right) + h\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Regla del trapecio simple

Factorizando y acomodando elementos tenemos:

$$A \approx \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}\right)+h\left(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\right)$$

Si $f(x_0)=f(a)$ Y $f(x_1)=f(a+1*h)$

$f(x_n)=f(b)$ $f(x_2)=f(a+2*h)$

$$A \approx \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

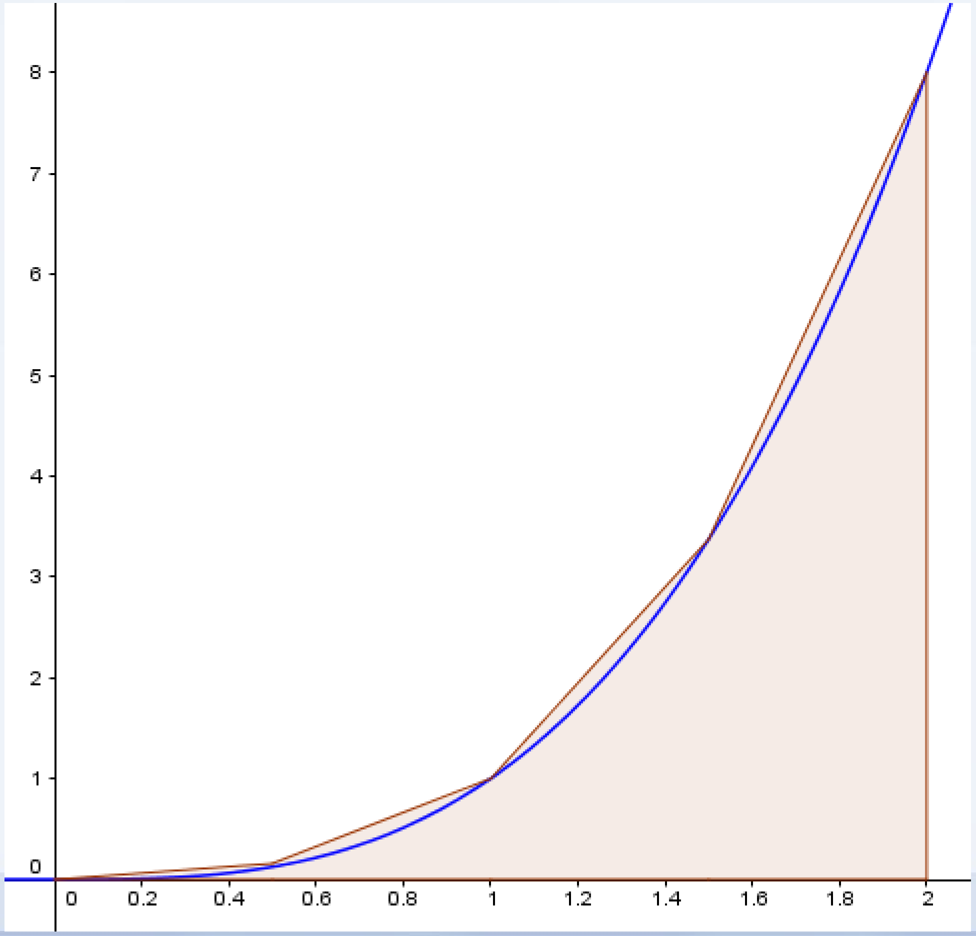
## Integración Numérica – Regla del trapecio Compuesta

Ejemplo calcular por el método del trapecio el valor de la siguiente integral para n=4:

$$f(x) = x^3$$

La integral real vale:

$$A = \int_0^2 x^3 dx = 4$$



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Regla del trapecio Compuesta

Aplicando la formula:

$$h=\frac{2-0}{4}=0.5$$

$$A\approx\int_0^2 f(x)dx\approx\frac{1}{2}\left(\frac{f(0)+f(2)}{2}+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$$

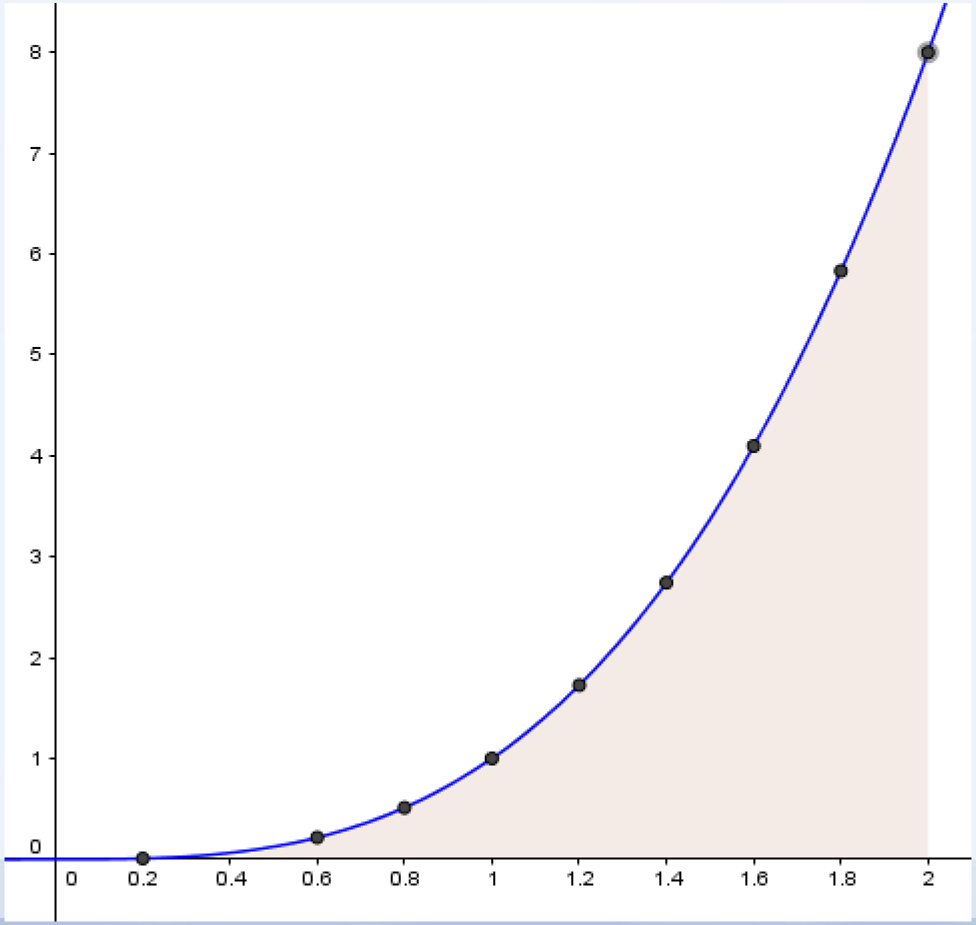
$$A\approx\int_0^2 f(x)dx\approx\frac{1}{2}\left(\frac{0+8}{2}+\left(\frac{1}{8}\right)+f\left(\frac{8}{8}\right)+\left(\frac{27}{8}\right)\right)=\frac{68}{16}=4.25$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Regla del trapecio Compuesta

Ejemplo Demostrar que si aumentamos n=10 la integral de la función calculada en el ejercicio anterior tiene un valor:

$$A_{n=10} \approx \int_0^2 x^3 dx = 4.04$$



## Interpolación, derivación e integración numéricas

### Integración Numérica – Regla del trapecio Compuesta

Tarea:

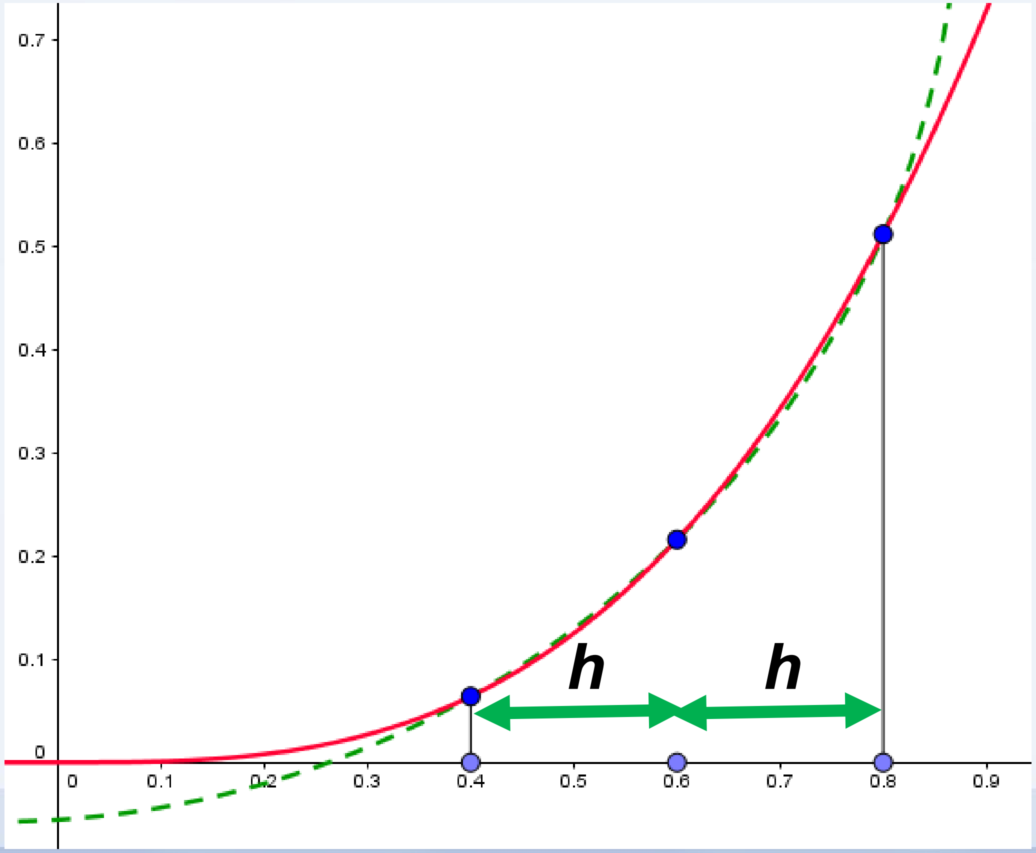
Para que valor de n la integral tiene un error de 0.001

$$A_{n=?} \approx \int_0^2 x^3 dx = 4.001$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson

Este método en lugar de tomar un trapecio para calcular el área bajo la curva utiliza una parábola que pasa por 3 puntos.



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson

Sean los puntos pertenecientes a la función f(x) y por donde se quiere pasar la parábola.

$$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$$
$$\left(x_1, f\left(x_1\right)\right) \Longrightarrow y = ax^2 + bx + c$$
$$\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$$

## Integración Numérica – Simpson

Como esos puntos pertenecen a las dos funciones, podemos sustituir sus valores y obtener un sistema de 3x3 con incógnitas a, b y c que posteriormente podemos reducir a uno de 2x2.

$$f(x_0) = a(x_0)^2 + b(x_0) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1)^2 + b(x_1) + c$$

$$f(x_2) = a(x_2)^2 + b(x_2) + c$$

## Integración Numérica – Simpson

Sustituyendo valores y reduciendo tenemos:

$$f(x_0) = a(x_0)^2 + b(x_0) + c$$

$$f(x_1) = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$$

$$f(x_2) = a(x_0 + 2h)^2 + b(x_o + 2h) + c$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1) = f(x_0) + 2ahx_0 + ah^2 + bh$$

$$f(x_2) = f(x_0) + 4ahx_0 + 4ah^2 + 2bh$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson

Si se despejan los siguientes términos:

$$a = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}$$

$$2ax_0 + b = \frac{4f(x_1) - 3f(x_0) - f(x_2)}{2h}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson 1/3 Simple

Sustituyendo la curva por la porción de la parábola:

$$A=\int_{x_0}^{x_0+2h}\left(ax^2+bx+c\right)dx=\mathrm{a}\left(\frac{6\mathrm{x}^2{}_0+12\mathrm{x}_0\mathrm{h}^2+8\mathrm{h}^3}{3}\right)+\mathrm{b}\left(\frac{4\mathrm{x}_o\mathrm{h}+4\mathrm{h}^2}{2}\right)+\mathrm{c}(2\mathrm{h})$$

$$A\Big|_{x_0}^{x_0+2h}=2\mathrm{h}\left(\mathrm{ax}_{o2}+\mathrm{bx}_o+\mathrm{c}\right)+2\left(2\mathrm{x}_0+\mathrm{b}\right)\mathrm{h}^2+\frac{8}{3}\mathrm{ah}^3$$

$$A\Big|_{x_0}^{x_0+2h}=\frac{h}{3}\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right)$$

*Para un intervalo de $x_0$ a $x_2$*

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

En general el área para n divisiones esta dada por la ecuación:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\Big)+$$
$$\frac{h}{3}\Big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\Big)+\ldots.+$$
$$\frac{h}{3}\Big(f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)$$

Si se agrupan términos tendríamos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+f(x_n)\Big)+4\Big(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\Big)+2\Big(f(x_2)+4f(x4)+\ldots+f(x_{n-2})\Big)$$

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

Finalmente tendríamos:

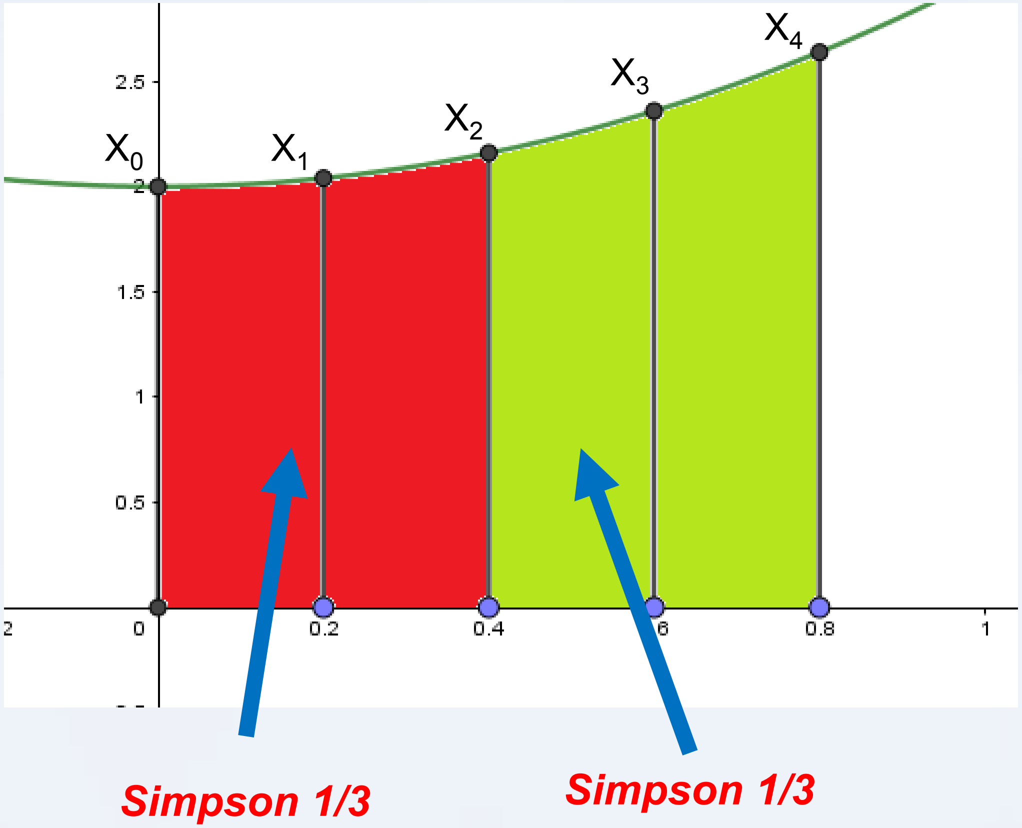
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left( f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n/2} \underbrace{f(x_{2i-1})}_{\text{Impares}} + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} \underbrace{f(x_{2i})}_{\text{Pares}} \right)$$

$$h = (b-a)/\mathrm{n}$$

***Nota: La regla 1/3 de Simpson requiere contar 3,5,7…. Puntos (que es equivalnte a n pares), en caso de que se tengan un numero diferente deberá combinarse con otra técnica.***

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

Finalmente tendríamos:



## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

En caso de solo se tengan 3 puntos, se puede obtener lo que se conoce como Simpson 1/3 simple:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0)+f(x_2)+4f(x_1)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a)+4f(x_{medio})+f(b)\right)$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

Ejemplo calcular por el método Simpson 1/3 calcular el valor de la integral para la función f(x) en el intervalo a=0 , b=2 y n=4:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow$$

Real:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{(2)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

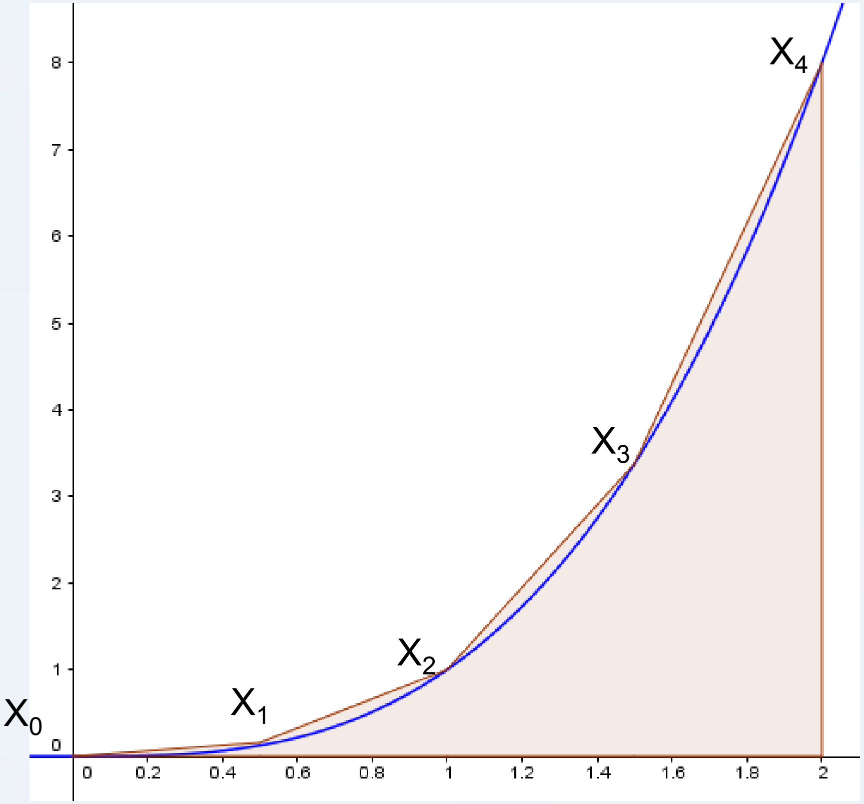
## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

La tabla que define los puntos para la aplicación del Simpson 1/3 es:

| | x | F(x) |
|---|---|---|
| $X_0$ | 0 | 0 |
| $X_1$ | 0.5 | 1/8 |
| $X_2$ | 1.0 | 1 |
| $X_3$ | 1.5 | 27/8 |
| $X_4$ | 2.0 | 8 |

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

***Puntos= n+1***



## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

Aplicando la formula tenemos:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{h}{3}\Big(\big(f(x_0)+f(x_4)\big)+4\big(f(x_1)+f(x_3)\big)+2f(x_2)\Big)$$

Sustituyendo términos:

$$\int_0^2 x^3 dx \approx \frac{1/2}{3}\Big((0+8)+4(1/8+27/8)+2(1)\Big)=\frac{1}{6}(8+14+2)=\frac{24}{6}=4$$

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

TAREA:

Calcular el valor aproximado de la integral

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$$

utilizando la regla de Simpson compuesta con $n = 8$.

## Integración Numérica – Simpson 3/8 compuesta

Si en lugar de utilizar un polinomio de grado 2, utilizáramos uno de grado 3, podemos obtener de manera similar al procedimiento utilizado para Simpson 1/3, la regla de Simpson 3/8:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left( f(x_0) + f(x_n) + 3\sum_{i=1,4,7,...}^{n-2} f(x_i) + 3\sum_{i=2,5,8,...}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=3,6,9,...}^{n-3} f(x_i) \right)$$

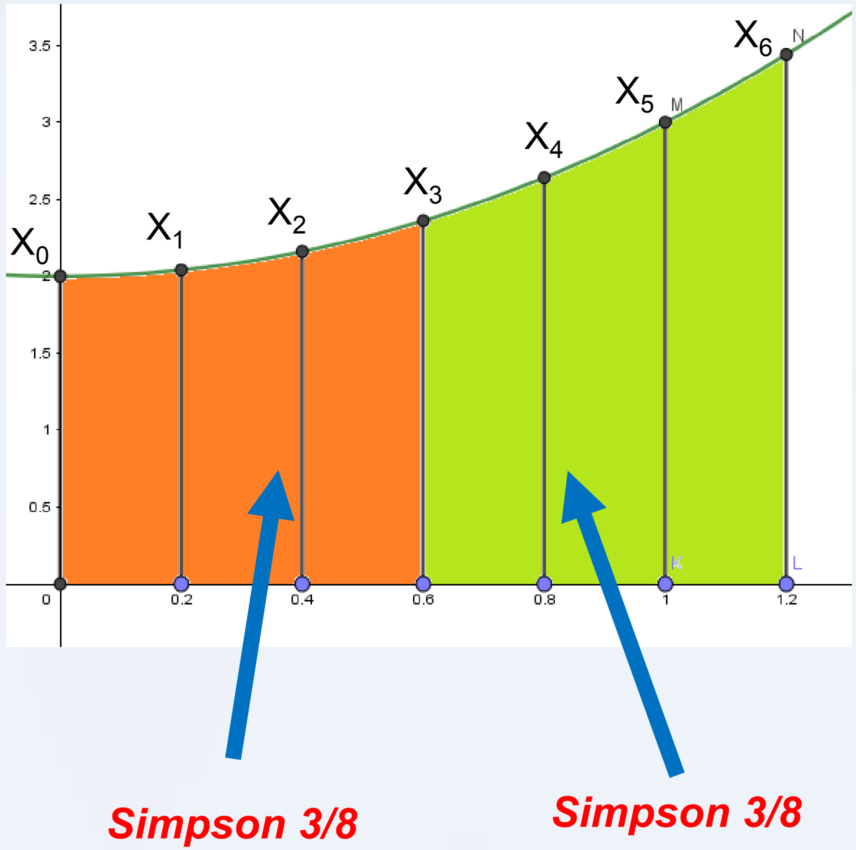
$$h = (b-a)/\mathrm{n}$$

***Nota: La regla 3/8 de Simpson requiere contar 4,7,11…. puntos, en caso de que se tengan un numero diferente deberá combinarse con otra técnica.***

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

Finalmente tendríamos:



# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

Ejemplo calcular por el método Simpson 3/8 calcular el valor de la integral para la función f(x) en el intervalo a=0 , b=2 y n=8:

$$f(x) = x^3$$

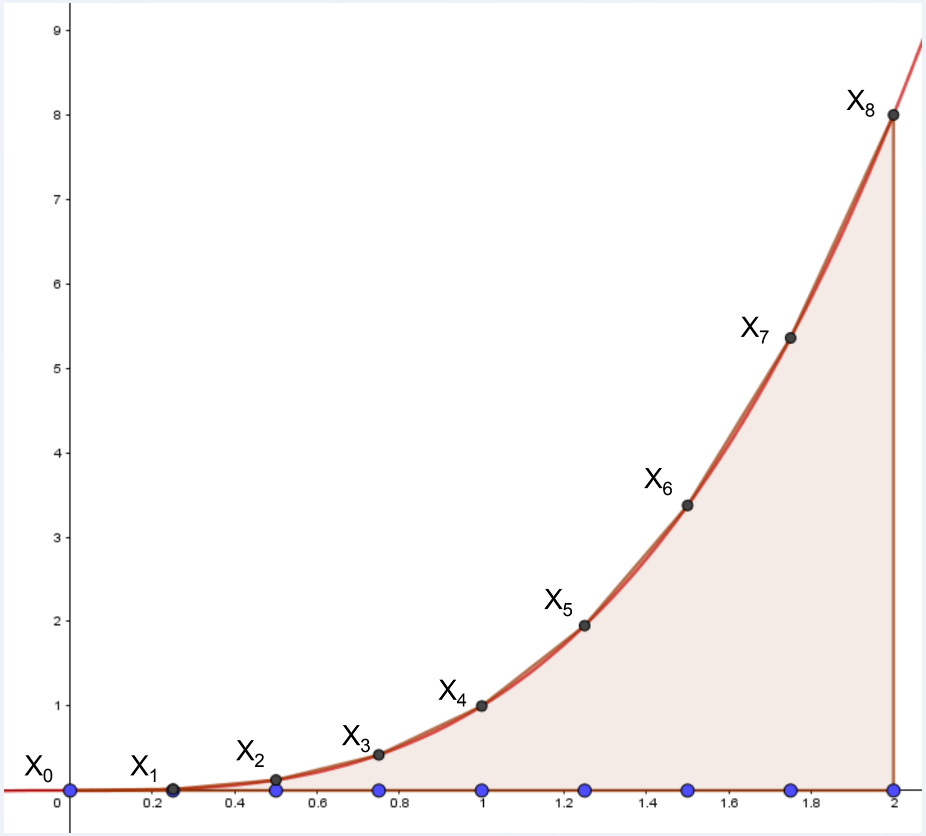
***Puntos= n+1***

***Puntos= 8+1=9***

## Integración Numérica – Simpson 1/3 compuesta

La tabla que define los puntos para la aplicación del Simpson 1/3 es:

| | x | F(x) |
|---|---|---|
| $X_0$ | 0 | 0 |
| $X_1$ | ¼ | 1/64 |
| $X_2$ | ½ | 1/8 |
| $X_3$ | ¾ | 27/64 |
| $X_4$ | 1 | 1 |
| $X_5$ | 5/4 | 125/64 |
| $X_6$ | 3/2 | 27/8 |
| $X_7$ | 7/4 | 343/64 |
| $X_8$ | 2.0 | 8 |




$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{8} = \frac{1}{4}$$

# Interpolación, derivación e integración numéricas

## Integración Numérica – Simpson combinado

En ocasiones no se cuenta con el número exacto de intervalos para poder aplicar solamente un método, sino que debe realizarse una combinación de técnicas de Simpson 1/3 y Simpson 3/8.