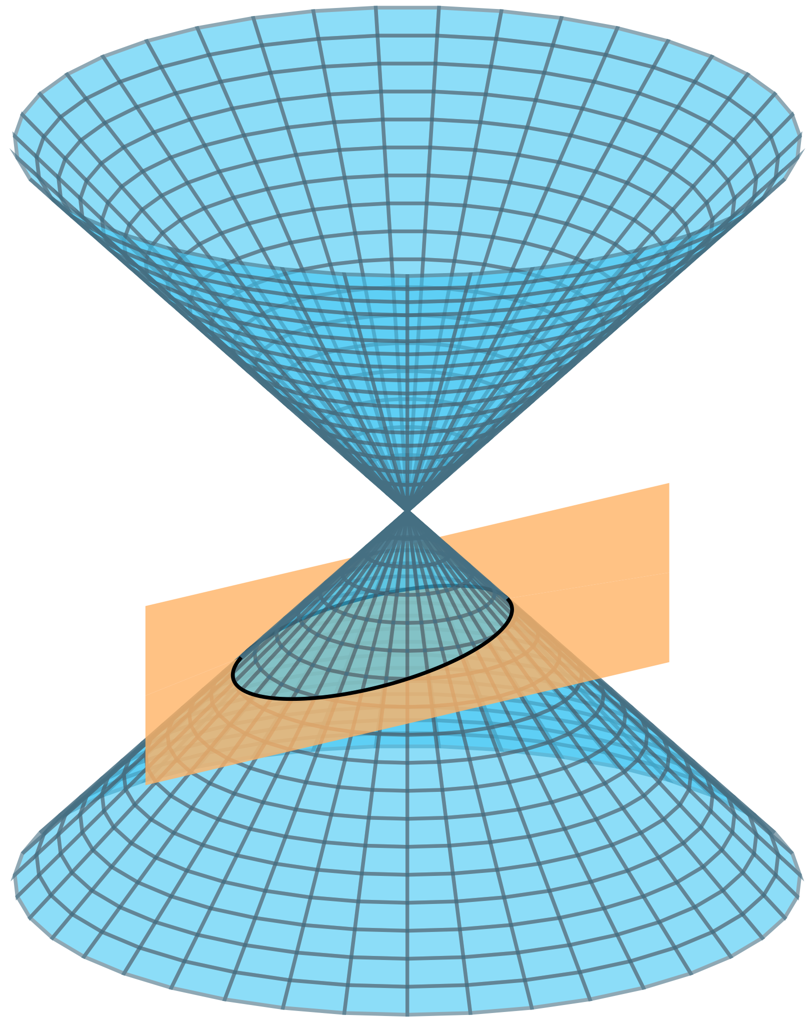
I

SECCIONES CÓNICAS



CÁLCULO
Y GEOMETRÍA
ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica
Lectura 1: Secciones Cónicas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Diciembre 2021

1. Definición de Cónica

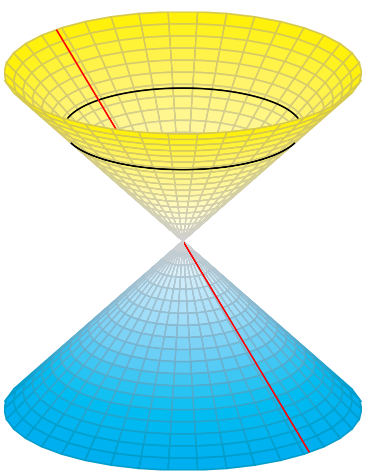


Figura 1. Cono que muestra tu recta directriz (negro) y su curva generatriz (rojo). Los conos siempre tienen dos hojas unidas por el vértice.

Dentro de la Matemática la Geometría Analítica se encarga del estudio de conjuntos de puntos que satisfacen una o varias condiciones. Uno de los tipos de lugares geométricos que existen son las curvas, las cuales son sucesiones infinitas de puntos que cambian de dirección. Dentro de las curvas son trascendentes aquéllas que se obtienen a partir del cono.

Un cono es una superficie que se genera al mover una recta que tiene un punto fijo (el vértice) y es dirigida por una curva; la recta se conoce como generatriz y la curva como directriz. En la figura 1 se observa un cono de revolución (la curva directriz es una circunferencia), el cual es una de las dos superficies que generan las curvas cónicas.

Para generar una curva se requiere de dos superficies que se corten entre sí; el lugar de intersección son los puntos que conforman la curva. Para las cónicas, el cono debe cortarse con una superficie llamada plano, el cual será estudiado a detalle más adelante en el curso.

Una cónica es una curva generada por la intersección de un plano y un cono. Dependiendo de la posición del plano la curva de intersección resultante se nombra de diferente forma.

- ❏ Circunferencia. Surge de la intersección del cono y un plano perpendicular al eje de revolución del cono.
- ❏ Elipse. Esta curva es la intersección del cono con un plano cuyo ángulo con el eje de revolución es mayor que el ángulo entre la generatriz y el eje de revolución.
- ❏ Parábola. Es la curva de intersección entre el cono y un plano paralelo a la recta generatriz.
- ❏ Hipérbola. Se obtiene al cortar el cono con un plano cuyo ángulo con el eje de revolución es menor que el ángulo formado por la generatriz y el eje de revolución.

La figura 2 muestra las cónicas generadas por la intersección.

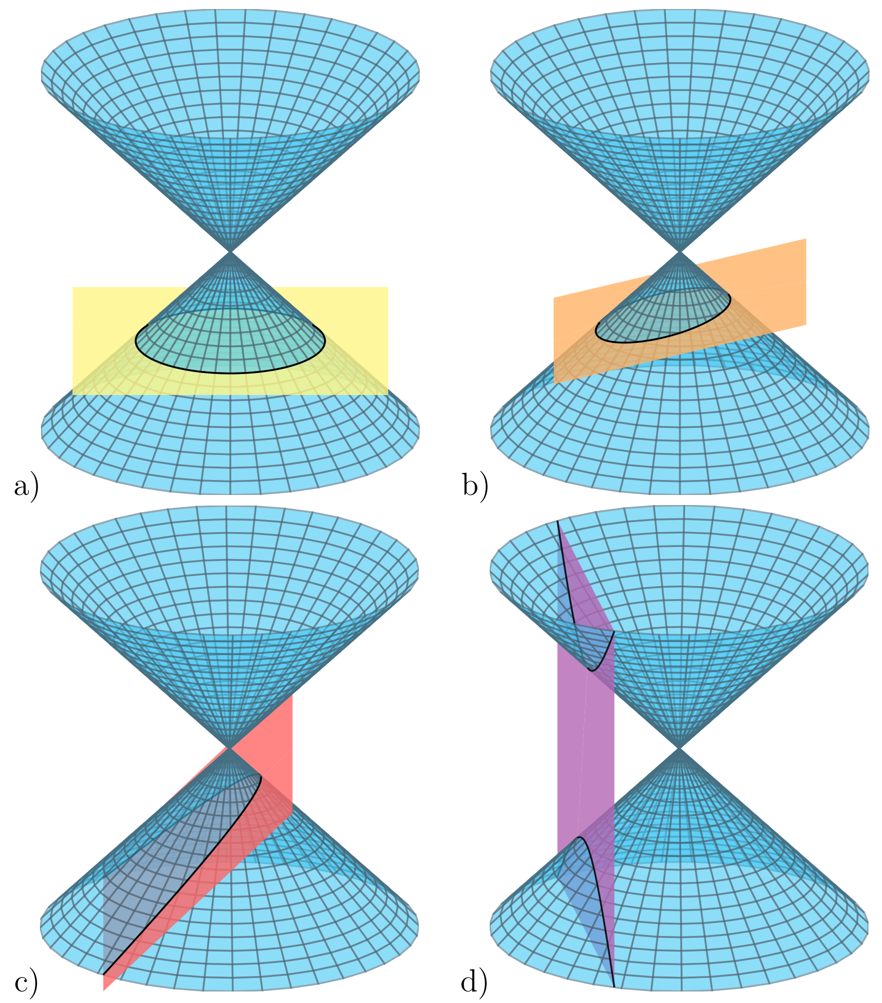


Figura 2. Curvas cónicas formadas por la intersección de un cono con un plano: a) circunferencia; b) elipse; c) parábola; d) hipérbola.

La definición mediante intersección de superficies no es la única manera de concebir a las cónicas; también existe la definición a partir de una curva plana (contenida en el plano xy). Cada una de las cónicas posee puntos de la curva y puntos fijos fuera de ella que permiten darles una clasificación.

2. Clasificación de las Cónicas

Para clasificar las cónicas hay que establecer los puntos fijos que permiten definir al lugar geométrico; estos puntos son: vértices, centros y focos. En algunas curvas estos puntos coinciden o bien no existen.

Las cónicas como ya se ha especificado, se clasifican en circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

Una circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos P equidistan de un punto fijo, fuera de la curva, conocido como centro C (véase la figura 3).

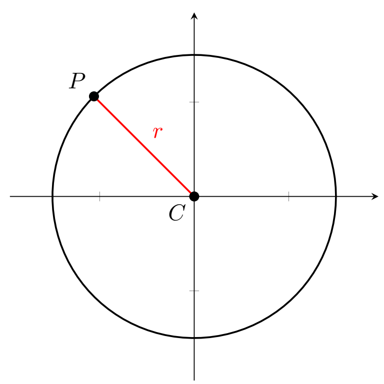


Figura 3

Una distancia trascendental en la circunferencia es el radio r, el cual se define como la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia. La figura 3 ilustra un radio en la circunferencia.

La circunferencia es la curva por excelencia. A pesar de la existencia de una infinidad de curvas, es la circunferencia la que se toma en cuenta para caracterizar al resto; a partir de la circunferencia se definen la longitud de arco, la curvatura y la torsión, que son características a estudiar en la Geometría Diferencial.

Una elipse es una curva cerrada donde la suma de distancias desde cualquiera de sus puntos P hasta dos puntos fijos fuera de la curva, llamados focos F, es constante y mayor a la distancia entre los focos (véase la figura 4).

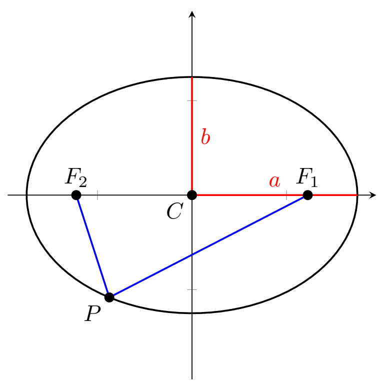


Figura 4

Las elipses poseen un centro C que se encuentra fuera de la curva y sirven para ubicarla en el plano coordenado. Las distancias máxima y mínima medidas desde el centro hasta cualquier punto P de la elipse se llaman semieje mayor a y semieje menor b, respectivamente. En la figura 4 se muestran los dos semiejes de la elipse.

La elipse y la circunferencia están relacionadas, ya que una circunferencia es una elipse cuyos focos y centro son el mismo punto. Más adelante se estudiarán las diversas ecuaciones de estas curvas, las cuales corroborarán que forman parte de la misma familia de lugares geométricos.

Una parábola es una curva donde cualquiera de sus puntos P equidista de una recta fija, llamada directriz d, y de un punto fijo, fuera de la curva y de la directriz, llamado foco (véase la figura 5).

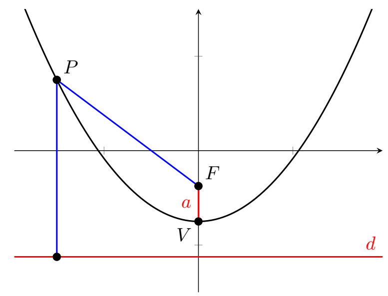


Figura 5

Todas las parábolas poseen la misma forma a diferente escala; si dos parábolas se ven diferentes se debe al acercamiento o alejamiento del espectador. La distancia trascendente es la distancia focal a.

Una hipérbola es una curva donde el valor absoluto de la resta de distancias desde cualquiera de sus puntos P hasta dos puntos fijos fuera de la curva, llamados focos F, es constante y menor a la distancia entre los focos (véase la figura 6).

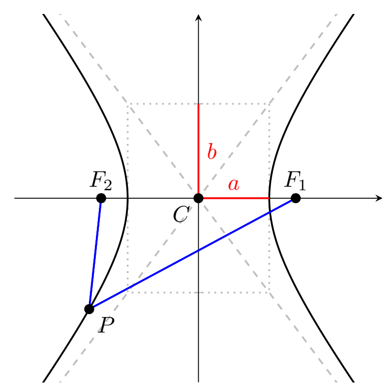


Figura 6

Al igual que la elipse y la circunferencia, la hipérbola posee un centro para ubicarla en el plano cartesiano. También posee dos distancias trascendentales:

- la menor distancia desde el centro a la curva, llamada semieje transverso a.
- el semieje conjugado b, que es una distancia perpendicular al semieje transverso y que se mide desde el centro hasta el rectángulo auxiliar de las asíntotas.

Las asíntotas son dos rectas que se cruzan en el centro de la hipérbola; son rectas a las cuales la hipérbola se acerca conforme sus ramas crecen indefinidamente. El rectángulo auxiliar es un cuadrilátero de lados $2a$ y $2b$, donde las asíntotas son sus diagonales.

3. Ecuación General de Segundo Grado

Todas las cónicas representan curvas de segundo grado; es decir, el máximo exponente en sus ecuaciones es dos. Todas las cónicas se representan mediante una única ecuación, y caracterizan a una u otra curva dependiendo de los coeficientes que estén presentes.

La ecuación general de segundo grado es la expresión en términos de x y y (en el sistema cartesiano) de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Al menos uno de los coeficientes A, B o C debe ser diferente de cero.

La expresión (1) define la posición y tipo de cónica que se esté analizando. Respecto a la posición, el coeficiente B indica si los ejes de la cónica son oblicuos al sistema de coordenadas:

- $B = 0$ indica que los semiejes o directrices de la cónica son paralelos a alguno de los ejes.
- $B \neq 0$ indica que los semiejes o directrices de la cónica son paralelos a alguno de los ejes.

Si $B = 0$, los coeficientes A y C indican el posible tipo de cónica:

- $A = C$ y ambos positivos, es una circunferencia.
- $A \neq C$ ya ambos positivos, es una elipse.
- $A = 0$ o $C = 0$, pero nunca ambos, es una parábola.
- $A > 0$ y $C < 0$, y viceversa, es una hipérbola.

Se habla del posible tipo pues con los primeros coeficientes no hay información suficiente para un dictamen certero, ya que la ausencia o signo de los coeficientes D, E y F pueden conducir a un lugar geométrico inexistente. Cuando se presenten las ecuaciones de las cónicas en forma canónica, ya se tendrán los elementos suficientes para determinar el tipo exacto de cónica.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 2: Identificación de las Cónicas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Identificador

Ya se ha comentado que la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

representa analíticamente a las cónicas. A partir de esta ecuación se deduce una expresión que permite identificar a una cónica. Lamentablemente, la justificación completa se demuestra mediante Álgebra Lineal, por lo que la demostración será breve sin abundar en conceptos avanzados.

Toda ecuación como (1) tiene una parte de segundo grado que se conoce como forma cuadrática:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \tag{2}$$

A la expresión (2) se le puede calcular un número especial llamado discriminante, el cual se calcula como

$$B^2 - 4AC$$

El discriminante de una cónica es la expresión

$$B^2 - 4AC$$

que la caracteriza según los coeficientes cuadráticos de su ecuación. La clasificación se rige por los casos siguientes:

- Si $B^2 - 4AC = 0$, la cónica puede ser una parábola.
- Si $B^2 - 4AC < 0$, la cónica puede ser una elipse.
- Si $B^2 - 4AC > 0$, la cónica puede ser una hipérbola.

Ejemplo. Determine la cónica que representan las ecuaciones:

a. $3x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$.
b. $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 113 = 0$.
c. $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$.

Para determinar el tipo de cónica, solo se aplica el discriminante.

a. Para $3x^2+2xy+y^2-6x+4y+2=0$ los coeficientes son $A=3$, $B=2$ y $C=1$, y el discriminante es

$$B^2-4AC \qquad \Rightarrow \qquad (2)^2-4(3)(1)=-8$$

Como el discriminante es negativo, la cónica es una elipse.

b. Para $9x^2-4y^2-54x-8y+113=0$ se tiene que $A=9$, $B=0$ y $C=-4$, y por lo tanto,

$$B^2-4AC \qquad \Rightarrow \qquad (0)^2-4(9)(-4)=-144$$

indica que se trata de una hipérbola.

c. Finalmente, para $4x^2-20x-24y+97=0$ los coeficientes son $A=4$, $B=0$ y $C=0$.

$$B^2-4AC \qquad \Rightarrow \qquad (0)^2-4(4)(0)=0$$

La curva es una parábola.

2. Ecuación en Forma Canónica

Una ecuación de segundo grado no surge sin incluir los puntos y distancias trascendentes en la cónica. Para encontrar dicha ecuación se recurre a las llamadas ecuaciones en forma canónica.

Las ecuaciones en forma canónica hacen uso de los centros (o vértice en el caso de la parábola) de las curvas. Además, contemplan las longitudes de los ejes asociados a cada cónica; tienen la forma

$$\frac{(x-h)^2}{u^2}\pm\frac{(y-k)^2}{v^2}=1$$

donde h y k son la abscisa y ordenada del centro de la cónica, y u y v son las longitudes de los semiejes de la respectiva cónica.

Sea una circunferencia con centro en el punto $C(h,k)$ y radio r. Su ecuación en forma canónica es

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \tag{3}$$

o bien

$$\frac{(x-h)^2}{r^2}+\frac{(y-k)^2}{r^2}=1 \tag{4}$$

La forma canónica (3) de la ecuación de la circunferencia es la expresión de la distancia entre dos puntos (el centro y cualquier punto de la circunferencia).

Ejemplo. Obtenga la ecuación en forma canónica de la circunferencia con centro en $C(2,3)$ y que contiene al punto $P(5,0)$.

El centro ya es dato, por lo que falta el radio. Para determinarlo, solo se obtiene la distancia entre ambos puntos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(2-5)^2+(3-0)^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ r &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

La ecuación en forma canónica es

$$\begin{aligned} (x-2)^2+(y-3)^2 &= \left(3\sqrt{2}\right)^2 \\ (x-2)^2+(y-3)^2 &= 18 \end{aligned}$$

Sea una elipse con centro en el punto $C(h,k)$, semieje mayor a paralelo al eje x y semieje menor b paralelo al eje y. Su ecuación en forma canónica es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el semieje mayor a es paralelo al eje y y el semieje menor b es paralelo al eje x, entonces la ecuación en forma canónica es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

La ecuación en forma canónica de la circunferencia es la misma que la de la elipse, cuando $a=b$ que es el radio r.

Ejemplo. Obtenga la ecuación en forma canónica de

$$5x^2+3y^2-40x+12y+77=0$$

Además, construya la gráfica de la cónica.

Como la ecuación en forma canónica posee binomios al cuadrado, en la ecuación de segundo grado hay que completar los binomios y simplificarlos.

$$\begin{aligned}
5x^2+3y^2-40x+12y+77&=0\\
\left(5x^2-40x\right)+\left(3y^2+12y\right)+77&=0\\
5\left(x^2-8x\right)+3\left(y^2+4y\right)+77&=0\\
5\left(x^2-8x+16\right)+3\left(y^2+4y+4\right)+77-80-12&=0\\
5(x-4)^2+3(y+2)^2-15&=0
\end{aligned}$$

Ahora solo hay que dividir entre 15 para recuperar la forma canónica.

$$\begin{aligned}
5(x-4)^2+3(y+2)^2-15&=0\\
5(x-4)^2+3(y+2)^2&=15\\
\frac{5(x-4)^2}{15}+\frac{3(y+2)^2}{15}&=\frac{15}{15}
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación en forma canónica es

$$\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{5}=1$$

Ya se obtuvo la ecuación. Ahora se requiere la gráfica.

De acuerdo a la ecuación en forma canónica, el centro de la elipse se encuentra en $x=4$ y $y=-2$; es decir, el punto $C(4,-2)$. Con respecto a los semiejes, los valores a del semieje mayor y b del semieje menor se obtienen de los denominadores de la ecuación canónica:

$$\begin{aligned}
a^2&=5 &\quad\Rightarrow\quad& a=\sqrt{5}\\
b^2&=3 &\quad\Rightarrow\quad& b=\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Con estos datos se puede dibujar la gráfica, mostrada en la figura 1

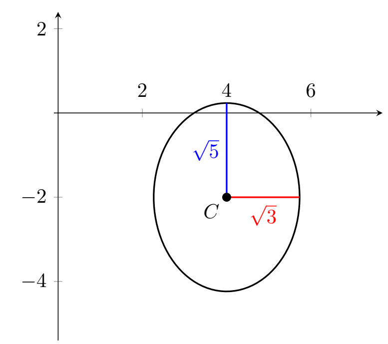


Figura 1

Sea una parábola con vértice en $V(h,k)$ y distancia focal a paralela al eje y. Su ecuación en forma canónica es

$$y-k=\frac{1}{4a}(x-h)^2$$

si la parábola es cóncava hacia arriba. Si es cóncava hacia abajo, su ecuación es

$$y-k=-\frac{1}{4a}(x-h)^2$$

Si la distancia focal es paralela al eje x y la curva es concava hacia la derecha, la ecuación corresponde a

$$x-h=\frac{1}{4a}(y-k)^2$$

Cuando la curva es cóncava hacia la izquierda, la ecuación es

$$x-h=-\frac{1}{4a}(y-k)^2$$

La ecuación de la parábola, y su respectiva concavidad, permite realizar aproximaciones a otras curvas para caracterizar sus puntos más altos y más bajos (máximos y mínimos)

Ejemplo. Determine el vértice y la distancia focal de la parábola

$$x^2+2x-4y-11=0$$

Se requiere la ecuación en forma canónica para caracterizar la curva. Al igual que el ejemplo anterior, hay que completar los cuadrados.

$$x^2+2x-4y-11=0$$

$$\begin{aligned}
x^2+2x&=4y+11\\
x^2+2x+1&=4y+11+1\\
(x+1)^2&=4y+12\\
(x+1)^2&=4(y+3)\\
\frac{1}{4}(x+1)^2&=y+3
\end{aligned}$$

El vértice se encuentra en $V(-1,-3)$. Para la distancia focal:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4a}\qquad\Rightarrow\qquad a=1$$

Sea una hipérbola con centro en el punto $C(h,k)$, semieje transverso a paralelo al eje x y semieje conjugado b paralelo al eje y. Su ecuación en forma canónica es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Si el semieje transverso a es paralelo al eje y y el semieje conjugado b es paralelo al eje x, entonces la ecuación en forma canónica es

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

La ecuación en forma canónica de la hipérbola permite definir las llamadas funciones hipérbolicas, las cuales serán estudiadas a detalle más adelante en el curso.

Ejemplo. Sea la hipérbola mostrada en la figura 2. Obtenga la ecuación de segundo grado de la cónica.

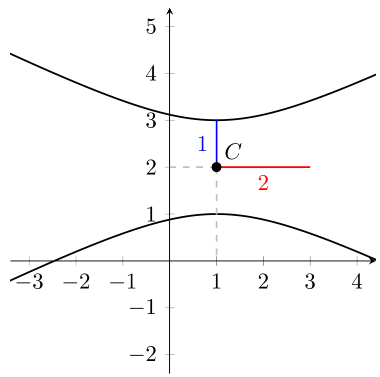


Figura 2

La figura indica que el valor del semieje transverso es $a = 1$ y es paralelo al eje y; el valor del semieje conjugado es $b = 2$. El centro de la cónica está en $C\,(1,2)$. La ecuación en forma canónica es

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$-\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1$$
$$-\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$

Ahora se desarrolla y simplifica la ecuación canónica:

$$-\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 = 1$$
$$(x-1)^2 - 4\,(y-2)^2 = -4$$
$$x^2 - 2x + 1 - 4\left(y^2 - 4y + 4\right) = -4$$
$$x^2 - 2x + 5 - 4y^2 + 16y - 16 = 0$$
$$x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 11 = 0$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 3: Traslación y Rotación de Ejes Coordenados

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Traslación

Anteriormente se ha comentado que, en la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

los coeficientes A, B y C denotan la parte cuadrática de la cónica.

Por otro lado, los coeficientes D y E denotan la parte lineal. Estos coeficientes no están presentes en todas las cónicas, cosa que sí sucede con al menos un coeficiente de la parte cuadrática.

Tomando, por ejemplo, la ecuación en forma canónica de una elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$

al desarrollarla se obtendrá el origen de los coeficientes lineales de la ecuación de segundo grado.

$$\begin{aligned}
\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \\
b^2 (x-h)^2 + a^2 (y-k)^2 &= a^2b^2 \\
b^2 \left(x^2 - 2hx + h^2\right) + a^2 \left(y^2 - 2ky + k^2\right) &= a^2b^2 \\
b^2x^2 - 2b^2hx + b^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2ky + a^2k^2 - a^2b^2 &= 0 \\
b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + \left(b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2\right) &= 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

Al comparar término a término (1) con (3) se observa que los términos lineales dependen de las coordenadas del centro de la cónica:

$$-2b^2hx = Dx \qquad\qquad -2a^2ky = Ey$$

Si la cónica tuviese su centro en el origen de coordenadas, los valores de h y k serían nulos; en consecuencia, los coeficientes D y E son

$$\begin{aligned}
-2b^2hx &= Dx & \qquad -2a^2ky &= Ey \\
-2b^2(0) &= D & \qquad -2a^2(0) &= E \\
0 &= D & \qquad 0 &= E
\end{aligned}$$

De esta forma se muestra que si la cónica está fuera del origen, entonces los términos lineales en la ecuación de segundo grado están presentes; en caso contrario, la ecuación de la cónica es puramente una forma cuadrática.

A partir de esta idea nace un procedimiento que permite trasladar los ejes coordenados al centro (o vértice) de la cónica.

Para comenzar, el nuevo sistema de coordenadas es uv, donde u es el nuevo eje x y v es el nuevo eje y. Como las proporciones de la cónica no cambian, las distancias trascendentes deben conservarse.

Tomando la ecuación (2), su representación en el sistema uv es

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

Las ecuaciones (2) y (4) son la misma cónica, por lo que pueden igualarse término a término:

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2} &= \frac{u^2}{a^2} & \qquad \frac{(y-k)^2}{b^2} &= \frac{v^2}{b^2} \\ (x-h)^2 &= u^2 & (y-k)^2 &= v^2 \\ x-h &= u & y-k &= v \end{aligned}$$

Las ecuaciones $x-h=u$ y $y-k=v$ se conocen como las ecuaciones de traslación entre el sistema xy y el sistema uv.

La traslación de ejes coordenados es el proceso por el cual el sistema de coordenadas xy se mueve hacia un punto $P(h,k)$ fuera del origen. Las ecuaciones de transformación para trasladar ejes son:

$$T:\begin{cases} u=x-h \\ v=y-k \end{cases} \qquad T^{-1}:\begin{cases} x=u+h \\ y=v+k \end{cases}$$

Las ecuaciones T cambian del sistema uv al xy, y las ecuaciones T^{-1} son su inversa (xy a uv). La figura 1 indica la traslación de ejes.

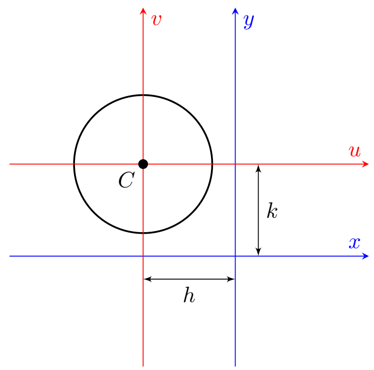


Figura 1

Ejemplo. Sea la hipérbola

$$7x^2-5y^2+42x+20y+8=0$$

cuyo centro se encuentra en $C(-3,2)$. Obtenga la ecuación de la cónica en el sistema trasladado uv.

Se requiere trasladar del sistema de coordenadas xy al sistema uv, ubicado en el punto $C(-3,2)$. En este caso se utilizan las ecuaciones inversas de traslación para pasar de xy a uv:

$$\begin{aligned} x&=u+h & \Rightarrow && x&=u-3 \\ y&=v+k & \Rightarrow && y&=v+2 \end{aligned}$$

Al sustituir estas ecuaciones en la ecuación de la cónica se obtendrá la ecuación de la hipérbola en el sistema trasladado uv.

$$\begin{aligned} 7x^2-5y^2+42x+20y+8&=0 \\ 7(u-3)^2-5(v+2)^2+42(u-3)+20(v+2)+8&=0 \\ 7(u-3)^2-5(v+2)^2+42u-126+20v+40+8&=0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
7\left(u^2-6u+9\right)-5\left(v^2+4u+4\right)+42u+20v-78&=0\\
7u^2-42u+63-5v^2-20v-20+42u+20v-78&=0\\
7u^2-5v^2+(42u-42u)+(20v-20v)+63-20-78&=0\\
7u^2-5v^2+(42u-42u)+(20v-20v)-35&=0\\
7u^2-5v^2-35&=0
\end{aligned}
$$

La nueva ecuación ratifica que la cónica está centrada en el nuevo origen de coordenadas. La figura 2 ilustra la curva situada en el sistema coordenado uv.

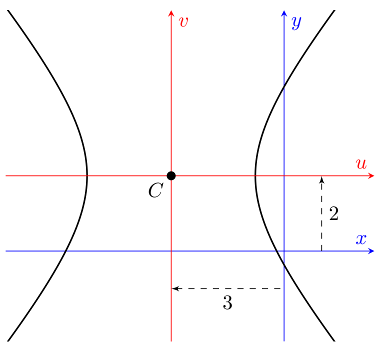


Figura 2

2. Rotación

Cuando el término B está presente en la ecuación general de segundo grado, significa que los ejes trascendentes de la cónica son oblicuos al sistema coordenado xy.

La rotación de ejes coordenados cobra importancia al momento de caracterizar la cónica en el plano de una manera eficaz. El sistema rotado se conocerá como uv, donde el eje u es el eje x rotado y el eje v es el eje y rotado. La figura 3 muestra la rotación de ejes.

De acuerdo a la figura 3, se forman dos triángulos rectángulos: el triángulo $\triangle OAP$ tiene como cateto adyacente a x_P y cateto opuesto a y_P; el triángulo $\triangle OBP$ tiene como cateto adyacente a u_P y cateto opuesto a v_P. El ángulo conocido de $\triangle OAP$ es $\varphi+\theta$, mientras que para $\triangle OBP$ el ángulo es θ. Con estos datos se aplica tanto para $\varphi+\theta$ como para *theta* la definición de las razones trigonométricas seno y coseno; debe considerarse que $\varphi+\theta$ es una suma de ángulos, por lo que debe recurrirse a las identidades trigonométricas

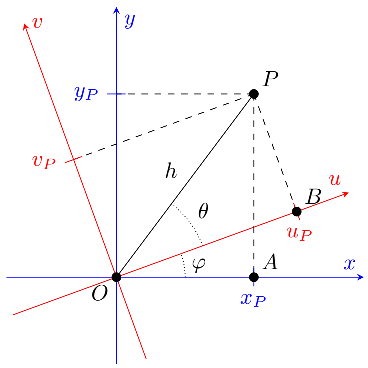


Figura 3. Transformación de ejes coordenados xy a uv mediante rotación. Nótese que el ángulo de rotación entre sistemas es φ.

$$
\begin{aligned}
\sin(a+b)&=\cos b\sin a+\sin b\cos a\\
\cos(a+b)&=\cos b\cos a-\sin b\sin a
\end{aligned}
$$

para hallar las ecuaciones de transformación. Aplicando seno y coseno para $\varphi+\theta$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\sin(\varphi+\theta)&=\frac{y_P}{h}\\
h\sin(\varphi+\theta)&=y_P\\
h\left(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi\right)&=\\
h\cos\theta\sin\varphi+h\sin\theta\cos\varphi&=y_P \qquad (5)\\
\cos(\varphi+\theta)&=\frac{x_P}{h}\\
h\cos(\varphi+\theta)&=x_P\\
h\left(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi\right)&=\\
h\cos\theta\cos\varphi-h\sin\theta\sin\varphi&=x_P \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Para θ las funciones son

$$\sin\theta = \frac{v_P}{h} \qquad \Rightarrow \qquad h\sin\theta = v_P \tag{7}$$

$$\cos\theta = \frac{u_P}{h} \qquad \Rightarrow \qquad h\cos\theta = u_P \tag{8}$$

En las expresiones (5) y (6) se sustituyen (7) y (8) para dejar a x_P y y_P en términos de u_P y v_P. La primera sustitución es

$$\begin{aligned} h\cos\theta\cos\varphi - h\sin\theta\sin\varphi &= x_P \\ (h\cos\theta)\cos\varphi - (h\sin\theta)\sin\varphi &= x_P \\ u_P\cos\varphi - v_P\sin\varphi &= x_P \end{aligned}$$

La segunda es

$$\begin{aligned} h\cos\theta\sin\varphi + h\sin\theta\cos\varphi &= y_P \\ (h\cos\theta)\sin\varphi + (h\sin\theta)\cos\varphi &= y_P \\ u_P\sin\varphi + v_P\cos\varphi &= y_P \end{aligned}$$

Ya se tiene una manera de rotar el sistema coordenado.

> La rotación de ejes coordenados es el proceso por el cual el sistema de coordenadas xy gira sobre el origen un ángulo φ en sentido antihorario, convirtiendo al punto $P(x,y)$ en el punto $P(u,v)$. Las ecuaciones de transformación para rotar ejes son:
>
> $$T : \begin{cases} u = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ v = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases} \qquad T^{-1} : \begin{cases} x = u\cos\varphi - v\sin\varphi \\ y = u\sin\varphi + v\cos\varphi \end{cases}$$
>
> Las ecuaciones T cambian del sistema uv al xy, y las ecuaciones T^{-1} son su inversa (xy a uv). La figura 1 indica la traslación de ejes.

Las ecuaciones de transformación para rotar ejes coordenados consideran que el ángulo de giro ya es conocido. Sin embargo, no siempre sucede este escenario y se requiere una manera de calcular el ángulo para rotar correctamente los ejes coordenados.

Los coeficientes de la cónica que se desea analizar aporta información suficiente para calcular el ángulo de rotación. Puesto que la parte lineal de una cónica no siempre está presente, los coeficientes de la parte cuadrática intervienen en el cálculo del ángulo buscado para realizar la rotación de ejes.

Al evaluar $Ax^2+Bxy+Cy^2$ con las ecuaciones de transformación T^{-1} se obtiene la forma cuadrática $A'u^2+C'v^2$:

$$\begin{aligned} Ax^2 &= A\left(u\cos\varphi - v\sin\varphi\right)^2 \\ &= Au^2\cos^2\varphi - 2Auv\cos\varphi\sin\varphi + Av^2\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} Bxy &= B\left(u\cos\varphi - v\sin\varphi\right)\left(u\sin\varphi + v\cos\varphi\right) \\ &= Bu^2\cos\varphi\sin\varphi - Buv\sin^2\varphi + Buv\cos^2\varphi \\ &\quad - Bv^2\cos\varphi\sin\varphi \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Cy^2 &= C\left(u\sin\varphi + v\cos\varphi\right)^2 \\ &= Cu^2\sin^2\varphi + 2Cuv\sin\varphi\cos\varphi + Cv^2\cos^2\varphi \end{aligned} \tag{11}$$

Al sumar y simplificar los términos (9), (10) y (11) se obtendrán los coeficientes de la cónica en el sistema uv.

$$\begin{aligned} A'u^2 + C'v^2 = {} & \left(A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi\right)u^2 \\ & + \left(-2A\cos\varphi\sin\varphi - B\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi \right. \\ & \left. +2C\sin\varphi\cos\varphi\right)uv \\ & + \left(A\sin^2\varphi - B\cos\varphi\sin\varphi + C\cos^2\varphi\right)v^2 \end{aligned}$$

El coeficiente B (en rojo) debe ser nulo, por lo que se convierte en una ecuación cuya única incógnita es φ. Para simplificarlo se aplican las identidades

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

La simplificación es

$$\begin{aligned} 0 &= -2A\cos\varphi\sin\varphi - B\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi \\ &= (C-A)\,2\cos\varphi\sin\varphi + B\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ 0 &= (C-A)\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi \end{aligned} \tag{12}$$

Para despejar φ de (12) se aplica la definición de tangente y de su función inversa el arco tangente:

$$\begin{aligned} 0 &= (C-A)\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi \\ (A-C)\sin 2\varphi &= B\cos 2\varphi \\ \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} &= \frac{B}{A-C} \\ \tan 2\varphi &= \frac{B}{A-C} \\ \varphi &= \frac{1}{2}\arctan\frac{B}{A-C} \end{aligned} \tag{13}$$

Con (13) se calcula el ángulo de rotación.

Ejemplo. Obtenga, en el sistema de coordenadas rotado uv, la ecuación de la cónica

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}y = 0$$

Primero se calcula φ con $A = 3$, $B = 2\sqrt{3}$ y $C = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2}\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3-1} \\ &= \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Una vez calculado el ángulo, ya puede trabajarse con las ecuaciones de transformación

$$\begin{aligned} x &= u\cos\frac{\pi}{6} - v\sin\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ y &= u\sin\frac{\pi}{6} + v\cos\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cónica en el sistema uv es

$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}y \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right)\left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v\right) + \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) \\ &= \frac{9}{4}u^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}uv + \frac{3}{4}v^2 + \frac{3}{2}u^2 + \sqrt{3}uv - \frac{3}{2}v^2 + \frac{1}{4}u^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}uv \\ &\quad + \frac{3}{4}v^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{3}{2}v \\ 0 &= 4u^2 + 2v \\ v &= -2u^2 \end{aligned}$$

La cónica es una parábola con centro en el origen, distancia focal $a = \frac{1}{8}$ y concavidad hacia abajo en el plano uv. La figura 4 muestra la geometría de este problema.

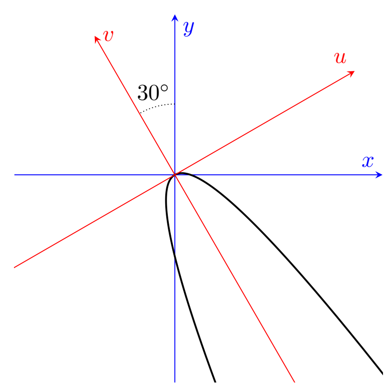
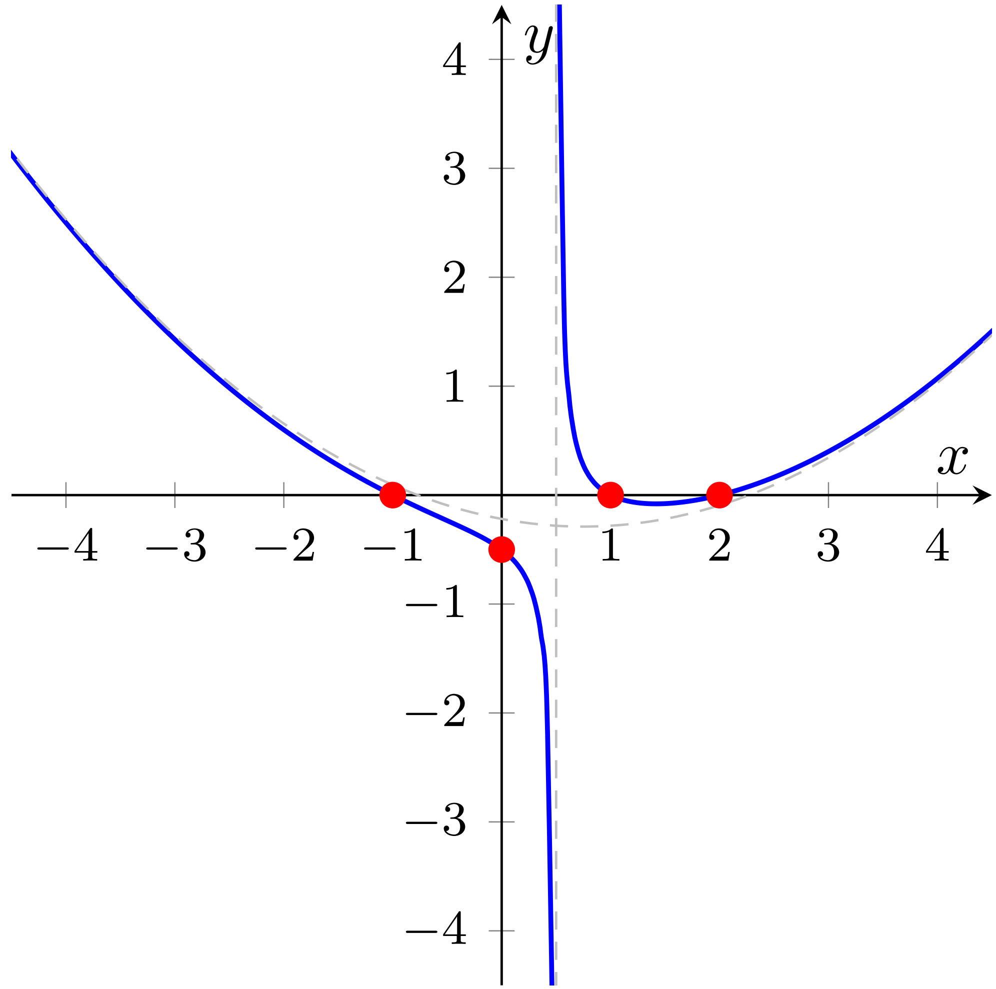


Figura 4

II

FUNCIONES



CÁLCULO
Y GEOMETRÍA
ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 5: Dominio e Imagen

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Septiembre 2021

Las funciones en Cálculo Diferencial tienen, en general, al dominio y codominio como subconjuntos de números reales. La naturaleza de los elementos del dominio y codominio designan a las funciones como reales de variable real.

1. Dominio

Se ha mencionado que una función posee dos conjuntos: el dominio y el codominio. Para definir al dominio es necesario considerar una función, como por ejemplo

$$f: D_f \to C_f \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

Como se estipuló anteriormente, x es la designación estándar de un elemento genérico del dominio; $f(x)$ es la regla que asigna a cada elemento x su correspondiente pareja en el codominio. Con esta función hay que hacerse una pregunta importante: ¿qué elementos x pueden evaluar la regla de correspondencia de f?

Puesto que la regla de correspondencia de la función f contiene un cociente y una raíz cuadrada, no es posible que cualquier elemento x pueda pertenecer al dominio. Por lo tanto, hay que analizar las restricciones que plantea la regla de correspondencia: solo pueden calcularse raíces cuadradas de números mayores a cero y el denominador no puede ser nulo. Así, el dominio de la función f es

$$D_f = \left\{ x \middle| \frac{x+1}{x-1} > 0, x-1 \neq 0; x \in \mathbb{R} \right\}$$

Esto nos indica que el dominio de una función no es cualquier conjunto, sino un subconjunto que cumpla con restricciones dadas por la regla de correspondencia.

> Sea $f: D_f \to I_f$ una función con regla de correspondencia $y = f(x)$. El dominio D_f de la función es el subconjunto de valores reales x que pueden evaluar a la regla $f(x)$ para obtener el elemento y en el codominio.

Es importante reconocer el dominio de cualquier función, ya que es el subconjunto que se puede controlar para obtener ciertos valores en el codominio. Por ello es que a los elementos del dominio se les conoce como la variable independiente, y a los elementos del codominio se les asigna el nombre de variable dependiente.

La regla de correspondencia indicará quién es la variable independiente y qué condiciones debe cumplir el dominio. El cálculo de dichas restricciones conlleva la resolución de ecuaciones y desigualdades, cuyas soluciones serán el dominio de la función.

Ejemplo. Sea la hipérbola

$$C: \quad \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Obtenga una función f a partir de C y calcule su dominio.

Una hipérbola no puede definir una función, por lo que debe acotarse para que cumpla con la definición; se restringirán los valores de y para que a cada valor x le corresponda solo un asociado. La mejor forma de hacerlo es despejar a y:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} \\ 36 &= 4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 \\ 9(y-1)^2 &= 4(x-2)^2 - 36 \\ 3(y-1) &= \pm\sqrt{4\left((x-2)^2-9\right)} \\ y-1 &= \pm\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9} \\ y &= 1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9} \end{aligned} \qquad (1)$$

Debido a la raíz cuadrada existen dos posibles valores de y. Los valores que son mayores a la ordenada del centro $C(2,1)$ están denotados por la suma

$$y = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9}$$

Mientras tanto, los valores menores a la ordenada del centro se calculan mediante la resta

$$y = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9}$$

Para que la hipérbola designe a una función, debe elegirse alguna de las dos secciones mencionadas. Como es indistinto qué sección se seleccione, se tomará a la resta como la función solicitada:

$$f: D_f \to C_f \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2-9}$$

Para calcular el dominio de la función hay que resolver la desigualdad

$$(x-2)^2 - 9 \geq 0$$

que viene de la condición del radical: solo hay raíces cuadradas de números no negativos. Para resolver la desigualdad se requiere la factorización de la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 - 9 &\geq 0 \\ (x-2-3)(x-2+3) &\geq 0 \\ (x-5)(x+1) &\geq 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

La desigualdad (1) indica que el producto de dos números es mayor que 0. De acuerdo a las reglas de los signos en la multiplicación, el producto de números positivos es un número positivo, o bien, el producto de dos números negativos es un números positivo. Estos dos casos representan que el dominio se encuentra comprendido por dos alternativas. La primera de ellas es

$$x-5 \geq 0 \qquad \cap \qquad x+1 \geq 0$$

Ambos son números positivos, por lo que su producto es positivo y satisface (2). Sus soluciones son:

$$\begin{array}{ccc} x-5\geq 0 & \cap & x+1\geq 0 \\ x\geq 5 & \cap & x\geq -1 \end{array}$$

Como ambas condiciones deben cumplirse, la intersección es la solución general. La figura 1 muestra la solución de este caso.

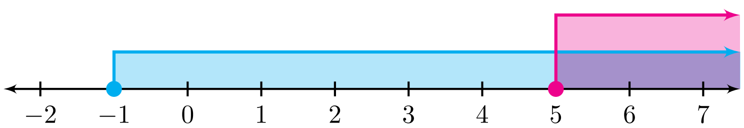


Figura 1

La segunda alternativa es

$$\begin{array}{ccc} x-5\leq 0 & \cap & x+1\leq 0 \\ x\leq 5 & \cap & x\leq -1 \end{array}$$

En la figura 2 se muestra la solución después de la intersección.

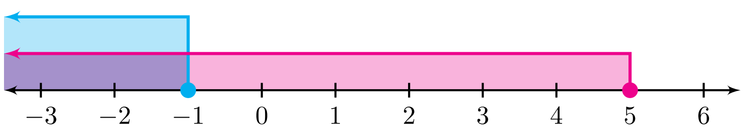


Figura 2

Al unir ambos intervalos, se obtiene el dominio de la función f:

$$D_f = \{x|x\leq -1\cup 5\leq x; x\in\mathbb{R}\}$$

Dependiendo del tipo de función, la forma de obtener el dominio puede variar. En cocientes hay que remover los denominadores nulos; o en raíces y logaritmos, se debe asegurar que los argumentos sean mayores a cero. Si no existen restricciones en las operaciones, como en las funciones polinómicas, entonces el dominio será todo el campo real.

2. Imagen

El codominio de una función es el subconjunto compañero del dominio, al cual se accede mediante la regla de correspondencia.

Sea una función $f: D_f \to C_f$ real de variable real con regla de correspondencia $y = f(x)$. El codominio C_f es el subconjunto de los posibles números reales que y puede tomar.

En general, el codominio de una función siempre es el propio conjunto de los números reales, a menos que se especifique lo contrario.

A pesar de que el codominio es una parte fundamental de la función, no presenta la misma relevancia que el subconjunto que agrupa todos los elementos que poseen un asociado en el dominio: la imagen.

Sea una función $f: D_f \to C_f$ real de variable real con regla de correspondencia $y = f(x)$. La imagen I_f es el subconjunto del codominio C_f que contiene todos los elementos $f(x)$ para todo $x\in D_f$.

En otras palabras, la imagen (también denominada como rango o recorrido) agrupa todos los elementos resultantes de evaluar la regla de correspondencia con los elementos del dominio, y siempre es parte del codominio.

El subconjunto imagen permite saber qué sucede con los elementos del dominio al aplicarse la función, lo cual corrobora el papel del dominio como variable independiente y ahora establece que la imagen es la variable dependiente. Geométricamente, la imagen está representada mediante la gráfica de la función.

La obtención de la imagen sigue procesos más variados que el cálculo del dominio: puede realizarse un análisis mediante la evaluación del dominio, dibujar la gráfica, despejar la variable independiente o analizar la variación de la función.

Ejemplo. Sea la función

$$g\left(x\right)=\frac{3x-2}{4-x}$$

Determine el dominio y la imagen de g.

Para calcular el dominio solo hay que satisfacer la condición del denominador no nulo:

$$\begin{aligned} 4-x &\neq 0 \\ 4 &\neq x \end{aligned}$$

El dominio de la función es $D_g=\{x|x\neq 4; x\in\mathbb{R}\}$.

Para calcular la imagen se despejará la variable independiente.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-2}{4-x} \\ y\left(4-x\right) &= 3x-2 \\ 4y-xy &= 3x-2 \\ 4y+2 &= xy+3x \\ 4y+2 &= x\left(y+3\right) \\ \frac{4y+2}{y+3} &= x \end{aligned} \tag{3}$$

La ecuación (3) indica todos los valores que y puede tomar al evaluar la función con el dominio:

$$\begin{aligned} y+3 &\neq 0 \\ y &\neq -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la imagen de la función es $I_g=\{y|y\neq -3; y\in\mathbb{R}\}$. La gráfica de la función se muestra en la figura 3, donde puede observarse que existe una interrupción en $x=4$ y en $y=-3$.

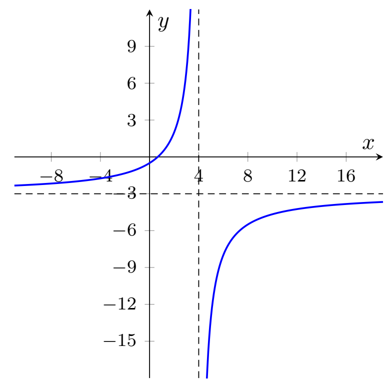


Figura 3

Para un cálculo más eficiente de la imagen es recomendable considerar los siguientes procedimientos:

- La gráfica es recomendable cuando se trata de funciones que vienen de cónicas o funciones donde x no puede ser despejada, por ejemplo $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$.
- El despeje de la variable es recomendable en funciones donde cada elemento y del codominio solo tiene un asociado x en el dominio, como en la función del ejemplo anterior.
- El análisis de elementos del dominio complementa los casos anteriores.
- La imagen es $\mathbb{R}$ en funciones como $f\left(x\right)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 6: Funciones Especiales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Funciones Constante e Identidad

Existen funciones en las cuales el valor de la imagen y está asociado con todos los elementos del dominio.

Sea $c(x)$ una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales. La función $c(x)$ es constante si la imagen de todos los elementos del dominio es $k \in \mathbb{R}$. Su regla de correspondencia es

$$c(x) = k$$

La gráfica de la función constante se muestra en la figura 1.

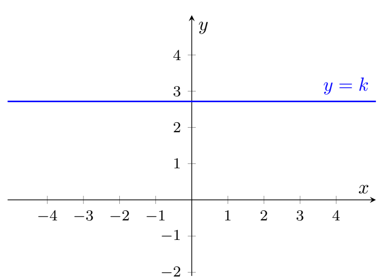


Figura 1

Otra función importante es aquélla donde cada valor del dominio está asociado con sigo mismo.

Sea $e(x)$ una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales. La función $e(x)$ se conoce como identidad si cada valor del dominio es su propia imagen. Su regla de correspondencia es

$$e(x) = x$$

La gráfica de la función identidad se muestra en la figura 2.

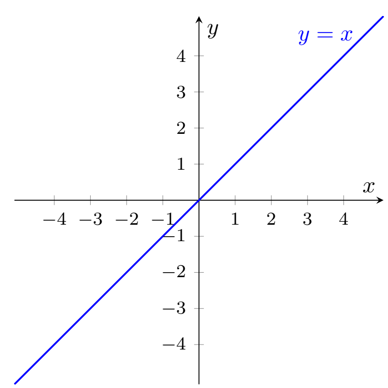


Figura 2

Este par de funciones son importantes para ciertos conceptos del Cálculo Diferencial que se revisarán más adelante.

2. Función Valor Absoluto

Otra función importante es aquella que asigna a cada elemento del dominio su valor absoluto.

La función $a(x) = |x|$ se conoce como valor absoluto, si cada elemento del dominio está asociado con su respectivo valor absoluto. Su regla de correspondencia es

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra en la figura 3.

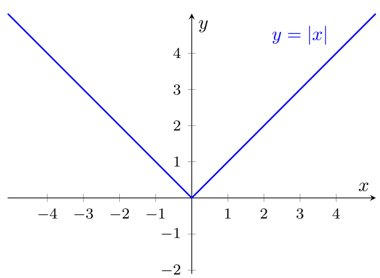


Figura 3

Por la definición algebraica de valor absoluto, la imagen de $|x|$ es el conjunto de los números reales positivos junto con el cero, $\mathbb{R}_0^+$.

Debido a sus condiciones algebraicas, el valor absoluto posee las siguientes propiedades:

1. $|x \cdot y| = |x|\,|y|$.
2. $|x|^2 = x^2$.
3. $|x| \leq \alpha \Rightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$.

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = x \quad \therefore \quad x \leq \alpha$$

o

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = -x \quad \therefore \quad \begin{aligned} -x &\leq \alpha \\ x &\geq -\alpha \end{aligned}$$

La conjunción *y* indica intersección entre intervalos, por lo que $x \in [-\alpha, \alpha]$. ■

4. $|x| \geq \alpha \Rightarrow x \leq -\alpha \cup \alpha \leq x$.

$$x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = x \quad \therefore \quad x \geq \alpha$$

y

$$x < 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = -x \quad \therefore \quad \begin{aligned} -x &\geq \alpha \\ x &\leq -\alpha \end{aligned}$$

La conjunción *o* designa unión entre intervalos, por lo que $x \in (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty)$. ■

5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad del triángulo).

Tanto las definiciones como las propiedades pueden aplicarse a funciones que contengan el valor absoluto para determinar el dominio y la imagen de las mismas.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = \sqrt{|2x - 3| - 1}$$

Obtenga el dominio, la imagen y la gráfica de f.

La raíz y el valor absoluto se trabajan juntos para obtener el dominio.

La restricción de la raíz es

$$\sqrt{|2x-3|-1} \qquad \Rightarrow \qquad |2x-3|-1 \geq 0$$

La desigualdad resultante se resuelve mediante las propiedades del valor absoluto, más específicamente mediante la propiedad 4.

$$\begin{aligned} |2x-3|-1 &\geq 0 \\ |2x-3| &\geq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

De acuerdo a la propiedad del valor absoluto, la desigualdad (1) se descompone en dos casos:

$$\begin{aligned} 2x-3 &\leq -1 & \qquad \cup \qquad & 1 \leq 2x-3 \\ 2x &\leq 2 & & 4 \leq 2x \\ x &\leq 1 & & 2 \leq x \end{aligned}$$

De esta manera el dominio de la función es $D_f = \{x | x \leq 1 \cup 2 \leq x; x \in \mathbb{R}\}$.

Para la imagen se hará un análisis de la regla de correspondencia junto con el dominio. La raíz indica que el número resultante no puede ser negativo, por lo que la imagen contiene números positivos o cero. Para determinar la cota inferior de la imagen se evalúan los intervalos del dominio en la regla de correspondencia.

$$\begin{aligned} x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f(1) &= \sqrt{|2(1)-3|-1} \\ &= \sqrt{1-1} \\ &= 0 \\ x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad f(2) &= \sqrt{|2(2)-3|-1} \\ &= \sqrt{1-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ambos valores son 0, por lo que se trata de la cota inferior.

Para determinar si existe alguna cota superior en la imagen se evaluarán dos elementos genéricos de los intervalos que componen al dominio. Primero se toma $a < 1$, el cual al evaluar la función hace que el argumento del valor absoluto se vuelva un número negativo; el valor absoluto de un número negativo es positivo que al sumarle -1 sigue siendo positivo (no puede ser negativo ya que la cota inferior de la imagen es 0).

Para los valores $2 < b$ el producto $2x$ del valor absoluto se vuelve mayor a 4, que al sumarle -3 se vuelve un número positivo mayor a 1. Al restarle -1 se conserva la naturaleza positiva del radical.

En ambos casos, conforme se acerca a los extremos de la recta real el resultado del radical aumenta, por lo que la imagen de la función parte de 0 y no tiene cota superior. La imagen de la función es

$$I_f = \{y | y \geq 0; y \in \mathbb{R}\}$$

La gráfica de la función, ilustrada en la figura 4, corrobora el dominio y la imagen encontrados.

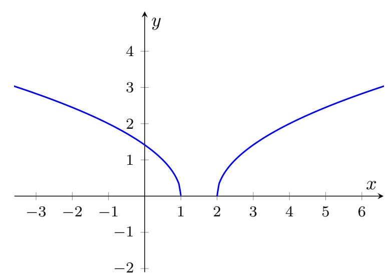


Figura 4

La función valor absoluto es el ejemplo clásico de las funciones segmentadas, en las cuales un intervalo del dominio evalúa a una regla de correspondencia y otro intervalo evalúa a otra regla.

3. Funciones Inyectivas y Suprayectivas

3.1. Función Inyectiva

El concepto de función indica que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo uno en el codominio. Esto lo cumplen todas las relaciones que son funciones.

Hay un tipo especial de función que aplica la definición en sentido recíproco; es decir, a cada elemento del codominio le corresponde un asociado, y solo uno, en el dominio. Estas funciones se conocen como inyectivas.

Sean f una función real de variable real, y los elementos $x_1, x_2 \in D_f$, donde D_f es el dominio de f. La función f es inyectiva, si $f(x_1) = f(x_2)$ tal que $x_1 = x_2$. La figura 5 muestra el diagrama de Venn de una función inyectiva.

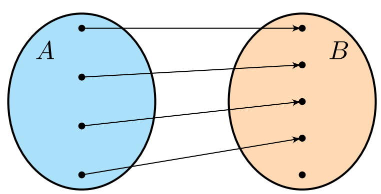


Figura 5

En otras palabras, una función es inyectiva cuando es uno a uno: cada elemento del dominio tiene una imagen y una imagen viene de un solo elemento del dominio.

Determinar si una función es inyectiva, implica la evaluación de la función con dos elementos del dominio que son iguales, conservando la condición inicial de igualdad entre valores del dominio.

Ejemplo. Determine si las siguientes funciones son inyectivas:

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

b. $g(x) = x^2 - 2$

Para determinar si una función es inyectiva, la condición $a = b$ debe conservarse para $f(a) = f(b)$. Para determinarlo, la igualdad $f(a) = f(b)$ debe simplificarse a su mínima expresión.

Para f:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \frac{a+1}{a-2} &= \frac{b+1}{b-2} \\ (a+1)(b-2) &= (b+1)(a-2) \\ ab + b - 2a - 2 &= ab + a - 2b - 2 \\ 3b &= 3a \\ b &= a \end{aligned}$$

Después de la simplificación de las evaluaciones, se llega a la conservación de la condición inicial. La función f es inyectiva.

Para g:

$$\begin{aligned} g(a) &= g(b) \\ a^2 - 2 &= b^2 - 2 \\ a^2 &= b^2 \\ \sqrt{a^2} &= \sqrt{b^2} \\ a &= \pm b \end{aligned}$$

En este caso a resulta igual a dos valores diferentes de b. Por lo que la función g no es inyectiva. La figura 6 muestra las gráficas de ambas funciones.

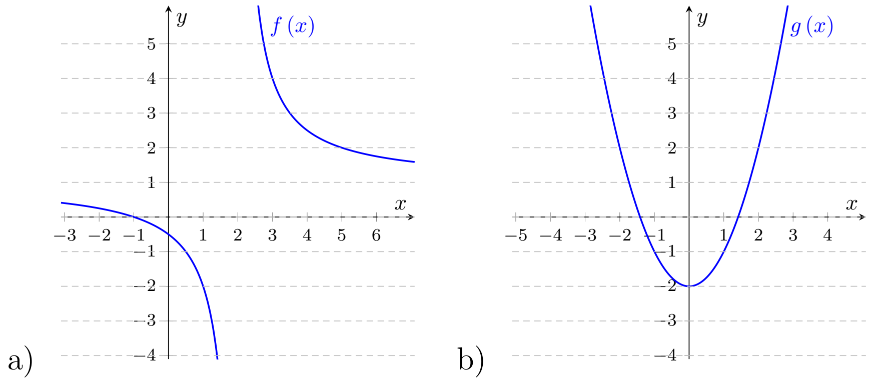


Figura 6. a) función inyectiva $f(x)$. b) función no inyectiva $g(x)$.

La gráfica de una función inyectiva se identifica mediante la intersección con rectas horizontales: si una función f es inyectiva, cada recta horizontal trazada corta una vez a la gráfica f; en caso que una recta horizontal corte en dos o más lugares a la gráfica, la función no es inyectiva. La figura 6 del ejemplo anterior muestra esta interpretación geométrica de las funciones inyectivas.

3.2. Función Suprayectiva

Otro tipo de funciones son aquéllas en las que todo elemento del codominio posee su respectivo asociado en el dominio. En ocasiones se considera que el codominio y la imagen son el mismo conjunto. Independientemente del criterio que se siga, estas funciones se llaman suprayectivas.

Para efectos de este curso, se considera que una función suprayectiva utiliza a la imagen dentro de la definición.

Sean f una función real de variable real, con dominio D_f e imagen I_f. La función f es suprayectiva, si todo elemento $y \in I_f$ posee su respectivo asociado $x \in D_f$. La figura 7 muestra el diagrama de Venn de una función suprayectiva.

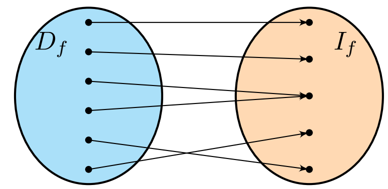


Figura 7

Debido al criterio que se seguirá de aquí en adelante, la definición de función coincide con la de función suprayectiva. Por lo tanto, toda función se considerará suprayectiva.

3.3. Función Biyectiva

Cuando se combinan la suprayectividad con la inyectividad se habla de una función conocida como biyectiva o invertible.

Sean f una función real de variable real. Si f es inyectiva y a la vez suprayectiva, se conoce como biyectiva.

Estas funciones se conocen como invertibles debido a que son la característica fundamental de la llamada función inversa. Este caso de funciones se estudiará más adelante.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 7: Igualdad y Operaciones en Funciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Igualdad entre Funciones

Las funciones, al ser expresiones matemáticas están sujetas a compararse entre sí. Como el conjunto de funciones no es ordenado, la noción de una función mayor a otra queda descartada, y en consecuencia, la comparación en funciones solo contempla la igualdad.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con dominios D_f y D_g, respectivamente. Si f es igual a g, entonces $f(x) = g(x)$ y $D_f = D_g$.

La definición de igualdad entre funciones indica que las funciones f y g deben tener el mismo dominio y la misma regla de correspondencia. Aunque parezca obvio, la igualdad en funciones es específica y a veces dos funciones parecen ser iguales, aunque no lo son.

Ejemplo. Determine si las funciones

$$f(x) = x + 2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

son iguales.

Aplicando la primera parte de la igualdad en funciones hay que verificar la igualdad entre reglas de correspondencia.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x + 2 &= \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ x + 2 &= \frac{(x+2)(x-1)}{x - 1} \\ x + 2 &= x + 2 \end{aligned}$$

Después de la simplificación algebraica se corrobora que las reglas de correspondencia son iguales. Ahora se verificará la segunda parte de la igualdad.

Para f. No existen restricciones en la función $x - 2$, por lo que su dominio es $D_f = \mathbb{R}$.

Para g. La restricción del cociente es el denominador no nulo

$$\begin{aligned} x - 1 &\neq 0 \\ x &\neq 1 \end{aligned}$$

De esta forma, el dominio de g es $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$. Como los dominios de ambas funciones son conjuntos diferentes, ambas funciones son diferentes.

A pesar de que las reglas de correspondencia del ejemplo anterior sean iguales algebraicamente, el dominio no es el mismo es el factor determinante para concluir que las funciones son diferentes.

2. Suma y Multiplicación con Funciones

Las funciones son reglas que transforman un número real en otro; es decir, toman un número real (del dominio) en otro número real (la imagen). Esta característica permite someter a las funciones a las operaciones que se realizan con los números reales.

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. La suma de ambas funciones está definida como

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

El dominio de la función suma está definido como

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

En general, toda función es el resultado de sumas de otras funciones. Por ejemplo, la función

$$h(x) = x^2 + x + 1$$

es el resultado de sumar las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x$ y $f_3(x) = 1$.

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. La multiplicación de ambas funciones está definida como

$$f(x)\, g(x) = (fg)(x)$$

El dominio de la función multiplicación está definido como

$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$

La multiplicación complementa a la suma en la creación de funciones. Por ejemplo, la función

$$g(x) = x^2 + x\sqrt{x+1}$$

está formada por la suma de las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x\sqrt{x+1}$; a su vez, $f_2(x)$ es el resultado de las funciones $h_1(x) = x$ y $h_2(x) = \sqrt{x+1}$.

Los casos especiales de las operaciones, resta y cociente, implica el uso de la propiedad de elementos inversos en la respectiva operación.

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. La resta de las funciones f y g es

$$f(x) - g(x) = (f - g)(x)$$

La división de las funciones f y g se define como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

donde $g(x) \neq 0$.

Al ser casos especiales de la suma y la multiplicación, el dominio de la función resultado es la intersección de los dominios de las funciones operando involucradas.

Debido a que solo existe una variable independiente en las funciones operando, es recomendable que la regla de correspondencia del resultado se reduzca hasta su mínima expresión.

Ejemplo. Sean las funciones

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6}, \qquad g(x) = x - 2, \qquad \text{y} \qquad h(x) = x + 3$$

Obtenga la regla de correspondencia de la función $\left(f - \dfrac{gh}{f}\right)(x)$.

De acuerdo a la operación establecida, solo la función f presenta restricciones para el dominio de la función completa. La primera de ellas es el valor del radical; la segunda es que no puede ser nulo debido a que se encuentra como denominador. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x^2 - 6 &> 0 \\ \left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right) &> 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Como la desigualdad (1) designa valores positivos, los casos que devuelven el dominio de f son

$$x > \sqrt{6} \quad \cap \quad x > -\sqrt{6} \qquad \text{ó} \qquad x < \sqrt{6} \quad \cap \quad x < -\sqrt{6}$$

Al realizar la intersección entre cada caso y la consecuente unión, f tiene como dominio a $D_f = \left\{x | x < -\sqrt{6} \cup \sqrt{6} < x; x \in \mathbb{R}\right\}$. Las funciones g y h tienen como dominio al conjunto $\mathbb{R}$. El dominio es

$$\begin{aligned} D_{f+\frac{gh}{f}} &= D_f \cap D_g \cap D_h \\ &= \left\{x | x < -\sqrt{6} \cup \sqrt{6} < x; x \in \mathbb{R}\right\} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \\ D_{f-\frac{gh}{f}} &= \left\{x | x < -\sqrt{6} \cup \sqrt{6} < x; x \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

La operación con las reglas de correspondencia es

$$\begin{aligned} \left(f - \frac{gh}{f}\right)(x) &= \sqrt{x^2 - 6} - \frac{(x-2)(x+3)}{\sqrt{x^2 - 6}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2 - 6}\right)^2}{\sqrt{x^2 - 6}} - \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 - 6}} \\ &= \frac{(x^2 - 6) - (x^2 + x - 6)}{\sqrt{x^2 - 6}} \\ \left(f - \frac{gh}{f}\right)(x) &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 6}} \end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 8: Composición de Funciones y Función Inversa

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Composición de Funciones

Las funciones toman un número y lo transforman en otro. Esto define una nueva operación: si $g(x)$ arroja un valor y, entonces se puede evaluar una función $f(y)$. Esta operación se llama composición.

Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales de variable real. La composición $f \circ g$ se define como

$$f(x) \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

donde $I_g \subseteq D_f$. La figura 1 muestra la composición de funciones.

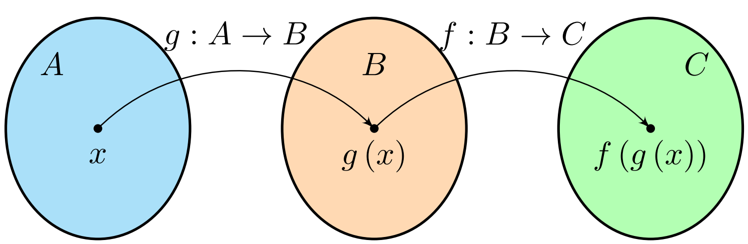


Figura 1

Como se menciona en la definición, la composición solo existe cuando el dominio de la función evaluada f es un subconjunto de la imagen de la función evaluadora g.

Para determinar si la composición existe se debe realizar la composición entre las reglas de correspondencia, y a partir de la función compuesta se calcula el dominio.

Ejemplo. Sean las funciones

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-3} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x + 2$$

Obtenga el dominio y la imagen de la función $f \circ g$.

La composición de funciones se opera de la misma forma que una evaluación usual de una función; la diferencia es que en lugar de evaluar con un número, se evalúa con una regla de correspondencia, realizando las simplificaciones pertinentes. Así es como la composición $f \circ g$ se calcula como

$$\begin{aligned} f(x) \circ g(x) &= f\big(g(x)\big) \\ &= f(x+2) \\ &= \frac{\sqrt{(x+2)+1}}{(x+2)-3} \\ (f \circ g)(x) &= \frac{\sqrt{x+3}}{x-1} \end{aligned}$$

De acuerdo a la regla de la función compuesta, las restricciones del dominio son $x - 1 \neq 0$ y $x + 3 \geq 0$. Por lo tanto, el dominio es

$$D_{f \circ g} = \{x | x \geq -3, x \neq 1; x \in \mathbb{R}\}$$

La imagen de la función se obtendrá mediante análisis del dominio, pues x no puede despejarse fácilmente.

Primero, el numerador de $f \circ g$ siempre tiene un signo positivo, por lo que debe analizarse la naturaleza del denominador. De acuerdo a las restricciones del dominio, el denominador de la función compuesta tiene los siguientes casos:

- ❏ $1 < x$. El denominador es un número positivo que divide al numerador positivo; por lo que la función arroja números mayores a cero, ya que conforme aumenta el valor del dominio el denominador aumenta y la fracción disminuye.
- ❏ $-3 \leq x < 1$. El denominador es un número negativo, que al dividir a un número positivo da como resultado un número negativo, y conforme el denominador se acerca a 0, el cociente se aleja del origen; en $x = 3$ la función se anula.

Por lo tanto, la imagen de la función es el conjunto de los números reales en su totalidad:

$$I_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

La gráfica de la función $f \circ g$ se ilustra en la figura 2.

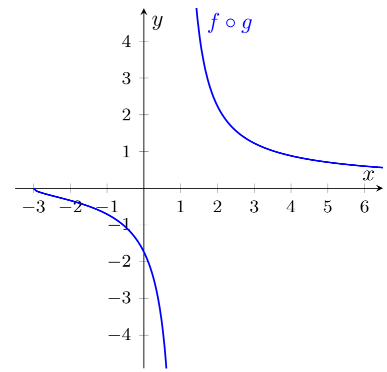


Figura 2

La composición de funciones presenta las siguiente propiedades para tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$:

- ❏ $h(x) \circ \Big(g(x) \circ f(x)\Big) = \Big(h(x) \circ g(x)\Big) \circ f(x)$.
- ❏ $g(x) \circ f(x) \neq f(x) \circ g(x)$, de manera general.
- ❏ $f(x) \circ e(x) = f(x)$.

En conjunto con la función identidad, la composición definirá una función especial que revierte los cambios hechos por una función inyectiva; es la llamada función inversa.

2. Función Inversa

Una vez que se conoce la composición, ya se tiene la noción de evaluación de una función con otra función. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$$

puede evaluar a la función

$$g(x) = \frac{x+2}{4-x}$$

y así, se obtiene una tercera función. La composición es

$$\begin{aligned} g\Big(f(x)\Big) &= g\left(\frac{4x-2}{x+1}\right) \\ &= \frac{\frac{4x-2}{x+1}+2}{4-\frac{4x-2}{x+1}} \\ &= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{4x+4-4x+2}{x+1}} \\ &= \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{4x+4-4x+2}{x+1}} \\ &= \frac{6x}{6} \\ (g\circ f)(x) &= x \end{aligned}$$

La composición $f\circ g$ también existe y dará el mismo, es decir la función identidad. Este caso en el cual la composición de funciones conmuta se conoce como función inversa.

Sean las funciones inyectivas $f(x)$ y $g(x)$, tales que $D_f = I_g$ y $I_f = D_g$. Si f y g satisfacen

$$f(x)\circ g(x) = x$$

y a la vez

$$g(x)\circ f(x) = x$$

entonces f es la inversa de g, y viceversa. Se denota como $f^{-1}(x) = g(x)$ y $f(x) = g^{-1}(x)$. La figura 3 muestra el diagrama de Venn de la función inversa.

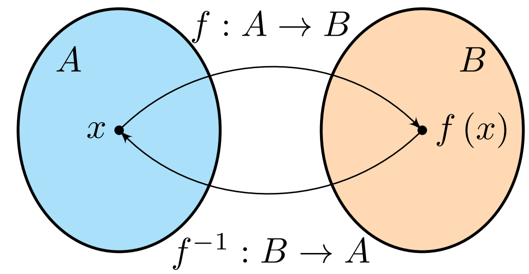


Figura 3

Como en las funciones inyectivas cada elemento de la imagen se corresponde con un solo elemento del dominio, su naturaleza permite ir del dominio a la imagen mediante la función f, y volver desde la imagen hasta el dominio a partir de la función inversa f^{-1}.

Puesto que en las funciones inversas se intercambian los papales de las variables dependiente e independiente (dominio por imagen, y viceversa), entonces el cálculo de la función inversa se basa en dejar a x en términos de la variable y.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

Obtenga el dominio, la imagen y la gráfica de la función $f^{-1}(x)$.

La imagen de la inversa se obtendrá a partir de la función original. El dominio de f se calcula mediante la restricción que aporta el cociente:

$$\begin{aligned} x-2 &\neq 0 \\ x &\neq 2 \end{aligned}$$

El dominio de la función es

$$D_f = \{x | x \neq 2; x \in \mathbb{R}\}$$

y en consecuencia es la imagen de la inversa. Para el dominio de la inversa se calculará la regla de correspondencia de la inversa. Como se comentó antes del ejemplo, el despeje de la variable independiente denotará la regla de correspondencia de la inversa.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+2}{x-2} \\ y\left(x-2\right) &= x+2 \\ yx - 2y &= x+2 \\ yx - x &= 2y+2 \\ x\left(y-1\right) &= 2y+2 \\ x &= \frac{2y+2}{y-1} \end{aligned}$$

Al intercambiar los papeles de las variables, se tiene la regla de correspondencia de la inversa:

$$f^{-1}\left(x\right) = \frac{2x+2}{x-1}$$

cuyo dominio se obtiene con la restricción

$$x - 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq 1$$

Es decir,

$$D_{f^{-1}} = \{x | x \neq 1; x \in \mathbb{R}\}$$

Resumiendo, el dominio de la función inversa es $D_{f^{-1}} = \{x | x \neq 1; x \in \mathbb{R}\}$, su imagen es $I_{f^{-1}} = \{x | x \neq 2; x \in \mathbb{R}\}$ su regla de correspondencia es

$$f^{-1}\left(x\right) = \frac{2x+2}{x-1}$$

La gráfica de la función se muestra en la figura 4 junto con la función original.

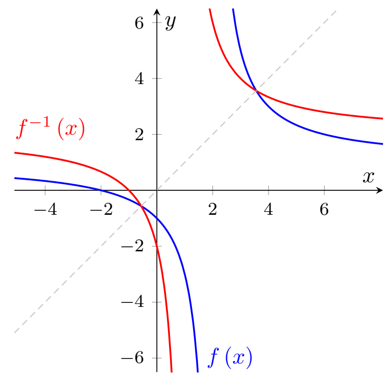


Figura 4

La geometría de la función inversa es un reflejo de la función original. Esto se debe al intercambio del dominio y la imagen, ya que el dominio de la función f se ubica en el y de la función inversa f^{-1}, y viceversa (véase las figuras 4 y 5).

Es importante destacar que toda función inyectiva posee inversa. En caso que la función no sea inyectiva, la restricción del dominio permitirá volverla inyectiva. Por ejemplo, $f\left(x\right) = x^2$ no es inyectiva, pero sí lo es cuando $x \leq 0$; su función inversa será $f^{-1}\left(x\right) = -\sqrt{x}$ (figura 5).

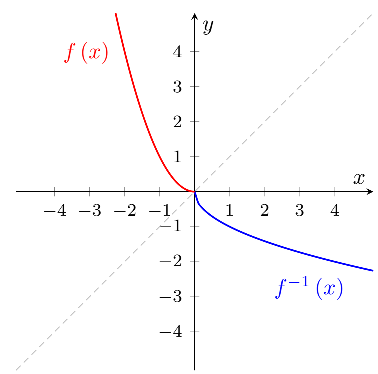


Figura 5. Las funciones $f\left(x\right) = x^2$, $x \leq 0$ y $f^{-1}\left(x\right) = -\sqrt{x}$ son simétricas respecto de la función identidad $y = x$. Esto se debe al intercambio de dominio e imagen entre una y otra.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 9: Tipos de Funciones I, Polinómicas, Racionales e Irracionales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Funciones Polinómicas

A pesar que las funciones son un conjunto infinito con múltiples formas, pueden clasificarse en seis grandes grupos. El primero de ellos son las funciones polinómicas.

La función $f(x)$ es polinómica, si solo contiene potencias enteras no nulas de la variable independiente; es decir, $f(x)$ es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

El dominio de las funciones polinómicas es $D_f = \mathbb{R}$, en tanto que su imagen depende del grado n (valor del máximo exponente):

- si n es impar, la imagen es $I_f = \mathbb{R}$.
- si n es par y $a_n > 0$, la imagen es $I_f = \{y | y \geq m; y \in \mathbb{R}\}$, donde m es la cota inferior de la gráfica (mínimo).
- si n es par y $a_n < 0$, la imagen es $I_f = \{y | y \leq M; y \in \mathbb{R}\}$, donde M es la cota superior de la gráfica (máximo absoluto).

Las funciones polinómicas son reconocidas por ser aquéllas en las cuales se obtienen las llamadas raíces. Estas raíces se observan en la gráfica del polinomio mediante los cruces con el eje de las abscisas.

Las gráficas de las funciones polinómicas presentan diversas formas, pero tienen características comunes según su grado y el signo de su coeficiente principal (de mayor grado). Para dibujar la gráfica del polinomio hay que tomar en cuenta los puntos expuestos a continuación.

- Existen desde 0 hasta n cruces con el eje x cuando $f(x) = 0$, donde n es el mayor exponente.
- Solo hay un único cruce con el eje y cuando $y = f(0)$;
- Si el exponente máximo n es impar hay dos casos:
  - la gráfica crece predominantemente de izquierda a derecha si el coeficiente principal a_n es positivo.
  - la gráfica decrece predominantemente de izquierda a derecha si el coeficiente principal a_n es negativo.
- Si el exponente máximo n es par hay dos casos:
  - la gráfica decrece por la izquierda y crece por la derecha si el coeficiente principal a_n es positivo.
  - la gráfica crece por la izquierda y decrece por la derecha si el coeficiente principal a_n es negativo.

La figura 1 muestra las gráficas de funciones polinómicas.

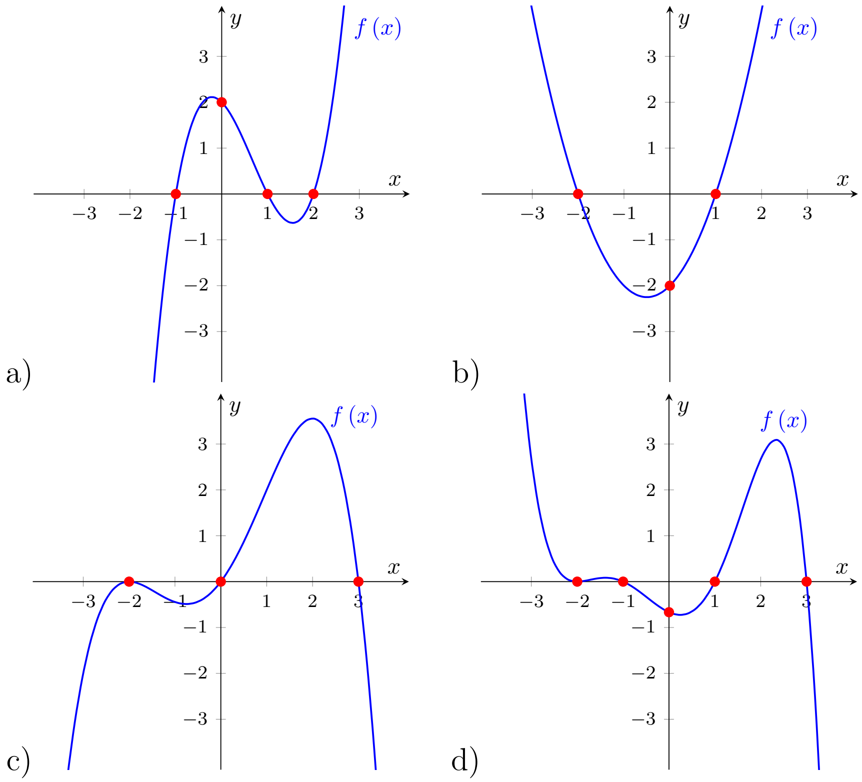


Figura 1. Gráficas de funciones polinómicas; los puntos de intersección con los ejes están en color rojo: a) función de grado 3 y coeficiente principal positivo; b) función de grado 2 y coeficiente principal positivo; c) función de grado 4 y coeficiente principal negativo; d) función de grado 5 y coeficiente principal negativo.

Ejemplo. Obtenga la gráfica de la función polinómica

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 4$$

Para encontrar los cruces con el eje x, la función se iguala a 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 4 &= \\ \frac{1}{3}(x+1)(x-3)(x+4) &= 0 \end{aligned}$$

Al igualar cada factor a cero se obtienen los valores $x = -1$, $x = 3$ y $x = -4$. Los métodos para factorizar un polinomio son propios del curso de Álgebra y no se discutirán aquí. Para el cruce con el eje y implica que $f(x)$ se evaluará en $x = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{3}x - 4 \\ f(0) &= \frac{1}{3}(0)^3 + \frac{2}{3}(0)^2 - \frac{11}{3}(0) - 4 \\ f(0) &= -4 \end{aligned}$$

El cruce con y se da en $y = -4$. Finalmente, como el grado del polinomio es 3 (impar) y tiene coeficiente principal $\frac{1}{3}$, por lo que la función crece predominantemente de izquierda a derecha como se muestra en la figura 2. El método para dibujar la gráfica de un polinomio será completado en el tema de variación de funciones.

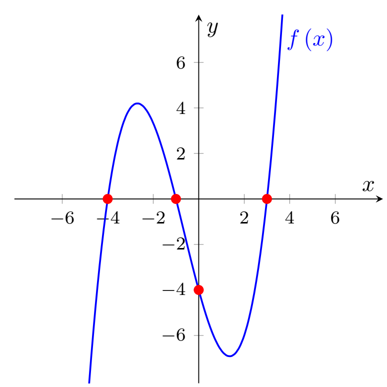


Figura 2

2. Funciones Racionales

Las funciones polinómicas están sujetas a las operaciones con funciones; al aplicarles la suma, la resta, la multiplicación y la composición el resultado es otra función polinómica. Sin embargo, al aplicar la división a dos funciones polinómicas no se obtiene una función de la misma naturaleza, sino un cociente llamado función racional.

Sean $a(x)$ y $b(x)$ dos funciones polinómicas. La función

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$$

se conoce como función racional. El dominio de la función racional es $D_f = \{x | x \neq \alpha_1, x \neq \alpha_2, \cdots, x \neq \alpha_m; x \in \mathbb{R}\}$, donde m es el grado de $b(x)$ y los valores α_i son sus raíces, llamadas polos. La imagen de la función racional depende del cociente y el residuo arrojados por la división de funciones.

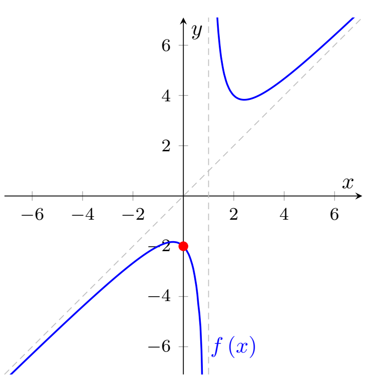


Figura 3. La función racional $f(x)$ se encuentra acotada por la asíntota vertical $x = 1$, y la asíntota no vertical $y = x$.

Los momentos en los cuales una función racional no existe se dan cuando la función denominador $b(x)$ es nula. Las raíces α_i del denominador son excluidas del dominio de la función racional, y geométricamente denotan rectas cuyas ecuaciones son de la forma

$$x = \alpha_i$$

Estas rectas se conocen como asíntotas verticales de la función racional y su desempeño geométrico es el acotar la gráfica de la función, sin cortarla; la función nunca interseca sus asíntotas verticales. La figura 3 muestra una función racional acotada por sus asíntotas verticales.

Las funciones racionales no solo poseen asíntotas verticales, también poseen asíntotas rectas que son horizontales u oblicuas, e incluso poseen curvas polinómicas asíntóticas. Al realizar la división se obtienen un cociente y un residuo; en términos de funciones polinómicas

$$\frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{b(x)}$$

donde $q(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el residuo. La función cociente $q(x)$ es la asíntota no vertical de la función racional

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$$

La figura 3 muestra una función con una asíntota no vertical. Una característica de las asíntotas no verticales es que éstas sí pueden cortar la función que acotan.

Las funciones racionales heredan de las funciones polinómicas la naturaleza de los cruces con los ejes coordenados: si $f(x) = 0$, existen cruces con el eje x; con $y = f(0)$, denota el cruce con el eje y.

Ejemplo. Obtenga el dominio, la imagen y la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{8x - 4}$$

La única restricción en el dominio de la función se da en los polos del denominador. La función f solo posee un polo:

$$8x - 4 \neq 0$$
$$x \neq \frac{1}{2}$$

Así es como el dominio de la función f es

$$D_f = \left\{ x | x \neq \frac{1}{2}; x \in \mathbb{R} \right\}$$

La imagen se determinará a partir de la gráfica de la función. Para encontrar la gráfica se recurrirá a localizar las asíntotas tanto verticales como no verticales, así como los cruces con los ejes coordenados. Los cruces con el eje x se obtienen al igualar la función a 0, y al ser una división, esto solo es posible cuando el numerador es 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{8x - 4} &= \\ \Rightarrow \qquad x^3 - 2x^2 - x + 2 &= \\ (x-1)(x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Los lugares donde la función se anula son $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$. Por otro lado, el cruce con el eje y se da en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= y \\ \frac{(0)^3 - 2(0)^2 - (0) + 2}{8(0) - 4} &= \\ -\frac{1}{2} &= y \end{aligned}$$

Ya determinados los cruces con los ejes coordenados, se calculan las asíntotas. Gracias al dominio, se conoce la asíntota vertical $x = \frac{1}{2}$. Para la asíntota no vertical se realiza la división polinómica usual.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{8x - 4} = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{7}{32} \right) + \frac{9}{64x - 32}$$

La asíntota no vertical es la curva $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{16}x - \frac{7}{32}$. Con estos elementos puede dibujarse la gráfica, que es mostrada en la figura 4.

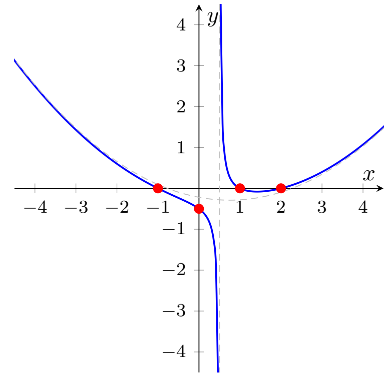


Figura 4

La gráfica indica que la imagen de la función es $I_f = \mathbb{R}$.

El tema de variación de funciones complementará la obtención de gráficas, dominio e imagen de funciones racionales.

3. Funciones Irracionales

Las funciones racionales extienden las funciones polinómicas al plantear exponentes enteros positivos o negativos para la variable independiente. Cuando en una función racional existe al menos un término donde la variable independiente posee un exponente fraccionario, se habla de las funciones irracionales.

Una función $f(x)$ es irracional cuando viene del radical de una función racional o polinómica $g(x)$; en otras palabras,

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Estas funciones tienen la particularidad de satisfacer las condiciones del radical, de acuerdo a la naturaleza del índice, para calcular el dominio. Una función $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ cumple uno de dos casos:

- Si n es impar, el dominio de $f(x)$ es igual al dominio de $g(x)$.
- Si n es par, el dominio de $f(x)$ posee las restricciones del dominio de $g(x)$ y además se cumple que

$$g(x) \geq 0$$

Las gráficas de estas funciones son más complicadas de dibujar, por lo que el análisis del comportamiento de estas gráficas se llevará a cabo más adelante mediante los métodos de límites al infinito y variación de funciones.

Ejemplo. Obtenga el dominio de la función irracional

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{x}}$$

Esta función está sujeta a las restricciones $x \neq 0$ y

$$\frac{(x+1)(x+2)}{x} \geq 0 \tag{1}$$

La restricción (1) es el producto de tres números, el cual debe resultar en un número positivo. Debido a esta característica, la desigualdad (1) se descompone en los casos enunciados a continuación.

1. Los tres factores positivos:

$$\begin{array}{ccccc} x+1 \geq 0 & \cap & x+2 \geq 0 & \cap & x > 0 \\ x \geq -1 & & x \geq -2 & & \end{array}$$

La intersección entre los tres intervalos es $x > 0$.

2. Los factores del numerador negativos y denominador positivo:

$$\begin{array}{ccccc} x+1 \leq 0 & \cap & x+2 \leq 0 & \cap & x > 0 \\ x \leq -1 & & x \leq -2 & & \end{array}$$

Aquí solo hay intersección entre $x \leq -1$ y $x \leq -2$, por lo que la solución del caso es el conjunto vacío.

3. Primer factor del numerador negativo, segundo factor del numerador positivo y denominador negativo:

$$\begin{array}{ccccc} x+1 \leq 0 & \cap & x+2 \geq 0 & \cap & x < 0 \\ x \leq -1 & & x \geq -2 & & \end{array}$$

La intersección entre los tres intervalos es $-2 \leq x \leq -1$.

4. Primer factor del numerador positivo, segundo factor del numerador negativo y denominador negativo:

$$\begin{array}{ccccc} x+1 \geq 0 & \cap & x+2 \leq 0 & \cap & x < 0 \\ x \geq -1 & & x \leq -2 & & \end{array}$$

En este caso existen la intersección entre $x \leq -2$ y $x < 0$, y por otro lado la intersección entre $x \geq -1$ y $x < 0$. Como no hay intersección entre los tres intervalos de manera simultánea, la solución de esta desigualdad es el conjunto vacío.

La solución completa a la desigualdad se da al unir las soluciones de los casos 1 y 3. Por lo que el dominio de la función es

$$D_f = \{x | x > 0 \cup -2 \leq x \leq -1; x \in \mathbb{R}\}$$

Cálculo y Geometría Analítica
Lectura 10: Tipos de Funciones II, Trigonométricas y sus Inversas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Funciones Trigonométricas

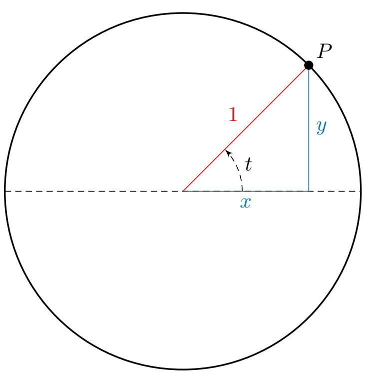


Figura 1. La altura y de un triángulo rectángulo, dentro de la circunferencia de radio 1, cambia su longitud según el arco interno t. Es el principio de las llamadas funciones circulares.

En la figura 1 se muestra una circunferencia unitaria, donde el radio denota la hipotenusa de un triángulo rectángulo con arco t, opuesto a la altura y. Esta situación geométrica define una razón llamada seno de t de la siguiente manera:

$$\frac{y}{1} = \sin t$$
$$y = \sin t \tag{1}$$

Conforme el valor del arco t varía, el valor de y también varía; es decir, si t cambia, el valor de la altura y puede aumentar o disminuir e incluso puede cambiar su dirección de crecimiento (ya sea hacia arriba o hacia abajo de la horizontal). La expresión (1), denota que la altura opuesta y depende del valor de t, por lo que se trata de una función. Ésta es la llamada función seno.

Repitiendo el razonamiento anterior, pero con la base x del triángulo (adyacente al arco t), se obtiene la función coseno:

$$x = \cos t \tag{2}$$

Tanto (1) como (2) son parte de una colección de funciones especiales que toman en cuenta la definición de las razones trigonométricas para crear funciones. Se conocen como funciones trigonométricas.

Una función trigonométrica $f(t)$ relaciona la dimensión del cateto opuesto y o el cateto adyacente x, de un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria, con el arco de circunferencia t de acuerdo a la definición de razón trigonométrica. Las funciones trigonométricas fundamentales son

$$\sin t = y$$
$$\cos t = x$$

En tanto que las funciones trigonométricas complementarias se definen a partir de las fundamentales, y son

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$
$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

La figura 2 ilustra las gráficas de las seis funciones trigonométricas.

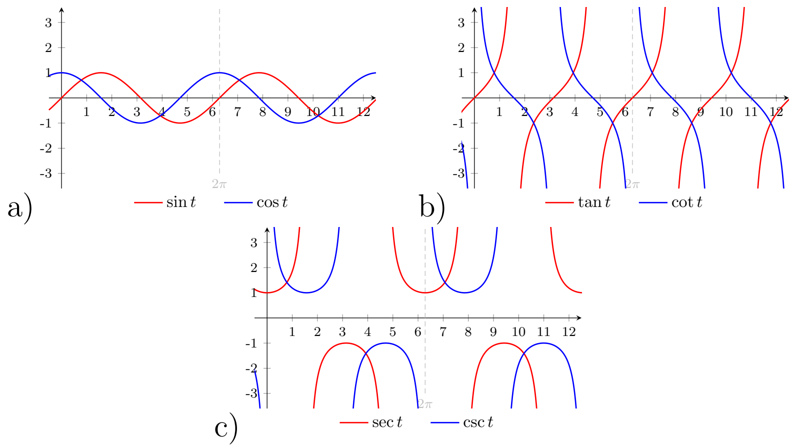


Figura 2. a) seno y coseno; b) tangente y cotangente; c) secante y cosecante.

El dominio e imagen de las seis funciones se muestran en la tabla 1.

Función	Dominio	Imagen
$\sin t$	$t \in \mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\cos t$	$t \in \mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\tan t$	$t \neq \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \forall\ n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$\cot t$	$t \neq n\pi, \forall\ n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$
$\sec t$	$t \neq \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \forall\ n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc t$	$t \neq n\pi, \forall\ n \in \mathbb{Z}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Tabla 1

Los arcos de circunferencia se miden en radianes, y esto es debido a la relación que existe entre π y el perímetro de la circunferencia (la cual es un arco completo). Es por ello que en Cálculo Diferencial siempre se utilizan radianes.

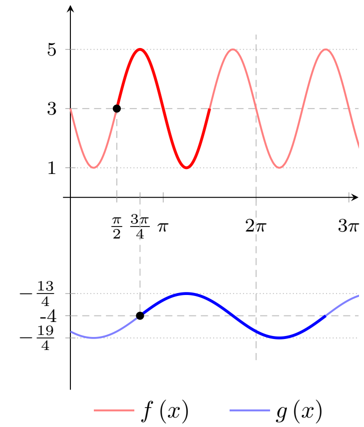


Figura 3. La función $f(x)$ se define con $A = 2$, $\omega = 2$, $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ y $B = 3$; la función $g(x)$ lo hace con $A = \frac{3}{4}$, $\omega = 1$, $x_0 = \frac{2}{3}\pi$ y $B = -4$. El ciclo principal, así como el lugar de inicio, de cada función se encuentra resaltado.

La función trigonométrica posee más elementos de los que se han mencionado. Estas funciones son periódicas; o sea, se repiten cada cierto intervalo del dominio. Cada repetición se denomina ciclo, el cual posee 4 elementos que le dan una característica única a cada función. Así, la forma completa de una función trigonométrica (en este caso el seno) es

$$f(x) = B + A\sin\big(\omega\,(x - x_0)\big)$$

donde cada coeficiente que acompaña a la función tiene un significado específico:

- ❑ ω es la frecuencia y designa cuántos ciclos de la función hay en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$;
- ❑ x_0 es el desplazamiento horizontal e indica el valor de la abscisa donde comienza el ciclo principal de la función;
- ❑ B es el desplazamiento vertical y designa el valor de la ordenada donde se ubica la recta base de la función, paralela al eje x;
- ❑ A es la amplitud e indica la distancia máxima, paralela al eje y, entre la función y el valor de desplazamiento vertical.

La figura 3 ilustra dos funciones trigonométricas con amplitud, frecuencia, desplazamiento vertical y desplazamiento horizontal diferentes. Estas características permiten a las funciones seno y coseno ser el modelo matemático para fenómenos físicos oscilatorios simples como los resortes (o muelles) o los péndulos.

Ejemplo. Dibuje la gráfica de la función coseno que cumpla con las siguientes características: amplitud igual a 3, frecuencia de $\frac{2}{3}$, desplazamiento vertical de 1 y desplazamiento horizontal $\frac{5}{6}\pi$.

La regla de correspondencia de la función que debe dibujarse es

$$f(x) = 1 + 3\cos\left(\frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{6}\pi\right)\right)$$

Para comenzar a dibujar la gráfica debe ubicarse el punto inicial del ciclo principal. En la función trigonométrica $y = \cos x$ el punto inicial se da en $x = 0$ (no hay desplazamiento), y en consecuencia $y = \cos(0)$ (no hay desplazamiento). En este ejemplo, el valor inicial se da en $x = \frac{5}{6}\pi$; por lo tanto, la función se evalúa en dicho valor.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= 1 + 3\cos\left(\frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi\right)\right) \\ &= 1 + 3\cos(0) \\ &= 4 \end{aligned}$$

El desplazamiento vertical en $y = 1$ y el punto inicial calculado, se muestran en la figura 4.

Figura 4

Para encontrar el valor x donde se cierra el ciclo principal de la función el argumento del coseno se iguala a 2π, ya que $\cos(2\pi) = \cos(0)$ y $1 + 3\cos(0)$ es el valor de inicio del ciclo, que es igual al valor final.

$$\begin{aligned} 2\pi &= \frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{6}\pi\right) \\ 3\pi &= x - \frac{5}{6}\pi \\ 3\pi + \frac{5}{6}\pi &= \\ \frac{23}{6}\pi &= x \end{aligned}$$

Por otro lado, en la figura 4 la distancia entre la ordenada de inicio del ciclo ($y = 4$) y la ordenada de la recta base ($y = 1$) es 3 (la amplitud); ese mismo valor debe verse reflejado por abajo de la recta base, por lo que el punto más bajo de la función se ubica en $y = -2$. Tanto la amplitud por debajo de la recta base como el punto de fin de ciclo principal se muestran en la figura 5.

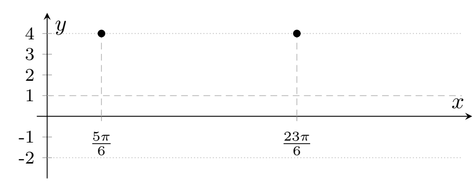


Figura 5

Todas las funciones coseno siguen el mismo ciclo: a un pico le sigue un valle y después otro pico; la abscisa del valle siempre está a la mitad de distancia entre dos picos. Por otro lado, a mitad de distancia entre un pico y un valle está el cruce de la función con la línea base. Esto indica que el valle del ciclo principal de encuentra en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{23}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{5}{6}\pi = x$$

$$\frac{1}{2}(3\pi) + \frac{5}{6}\pi =$$
$$\frac{7}{3}\pi = x$$

Mientras que los cruces con la línea base están en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{5}{6}\pi = x \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{23}{6}\pi - \frac{7}{3}\pi\right) + \frac{7}{3}\pi = x$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{6}\pi\right) + \frac{5}{6}\pi = \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{9}{6}\pi\right) + \frac{7}{3}\pi =$$
$$\frac{19}{12}\pi = x \qquad \frac{37}{12}\pi = x$$

Con estos puntos ya es posible trazar el ciclo principal de la función $f(x)$, y repetir el trazo a lo largo del eje x. La figura 6 muestra los puntos encontrados recientemente junto con la gráfica de la función.

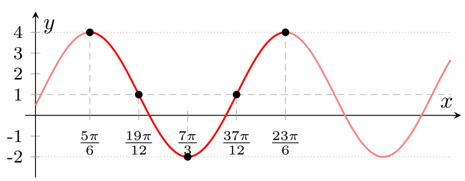


Figura 6

2. Funciones Trigonométricas Inversas

Las funciones trigonométricas pueden definir sus respectivas inversas si se acota adecuadamente el dominio.

Puesto que las funciones trigonométricas son cíclicas, un valor cualquiera y de la imagen aparece periódicamente a lo largo del dominio. Esto indica que existen múltiples valores del dominio asociados con la misma imagen, y en consecuencia una función trigonométrica no es inyectiva.

Tomando por ejemplo a la tangente, cuya gráfica se muestra en la figura 2, cada ciclo de la función puede interpretarse como una función inyectiva independiente, por lo que al acotar el dominio a un solo ciclo, la función se vuelve inyectiva y en consecuencia existirá la inversa.

Como una función trigonométrica relaciona un arco de circunferencia x con una razón trigonométrica, entonces la función inversa relacionará el valor de una razón (dominio) con un arco de circunferencia (imagen). Este tipo de funciones se conocen como funciones arco.

Sea $f(x)$ una función trigonométrica. Su función inversa, llamada función arco, es aquélla que devuelve el arco de circunferencia asociado al cociente que denota una función trigonométrica. Las funciones trigonométricas inversas son

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \sin x & \Rightarrow & f^{-1}(x) = \arcsin x \\ f(x) = \cos x & \Rightarrow & f^{-1}(x) = \arccos x \\ f(x) = \tan x & \Rightarrow & f^{-1}(x) = \arctan x \\ f(x) = \cot x & \Rightarrow & f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x \\ f(x) = \sec x & \Rightarrow & f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x \\ f(x) = \csc x & \Rightarrow & f^{-1}(x) = \operatorname{arccsc} x \end{array}$$

donde el dominio de $f(x)$ debe acotarse a $0 < x < \pi$ para las funciones coseno, cotangente y secante, y $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ para las funciones seno, tangente y cosecante, respetando las respectivas asíntotas de la secante y la cosecante.

En la figura 7 se muestran las gráficas de las funciones trigonométricas inversas, con sus respectivas funciones trigonométricas.

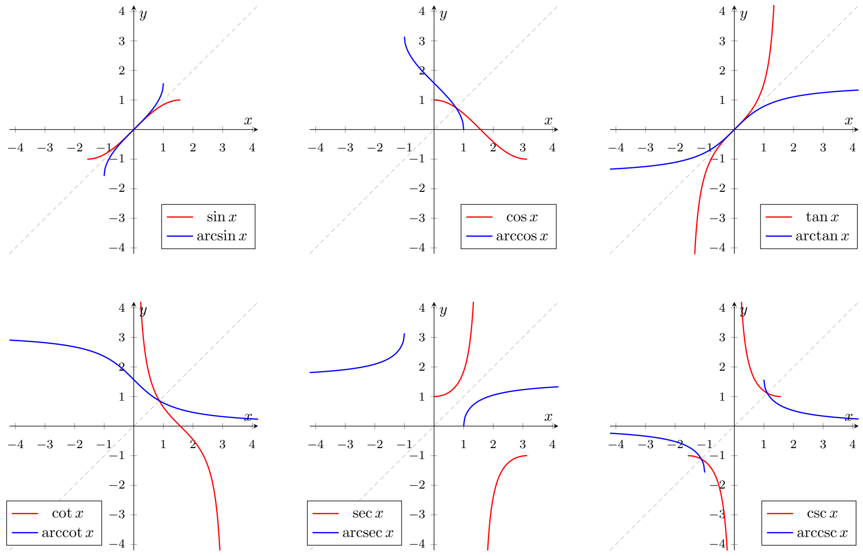


Figura 7

Usualmente a las funciones trigonométricas inversas se las denota como, por ejemplo, $\sin^{-1} x$. Sin embargo, esta notación puede llevar a confusiones con las leyes de los exponentes, ya que

$$\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x} \qquad \Rightarrow \qquad \csc x$$

es igual de válido que

$$\sin^{-1} x = \arcsin x$$

Sin embargo, arcsin no es lo mismo que csc, por igualdad de funciones.

Ejemplo. Determine la relación de la función recíproca $\csc x$ con la función inversa $\arcsin x$.

Primero, se tomará en cuenta que

$$\csc y = \frac{1}{x} \tag{3}$$

Al aplicarle a (3) la función arco cosecante se obtiene

$$y = \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} \tag{4}$$

La igualdad (3) puede reescribirse en términos del seno y despejar y mediante la función inversa arcsin:

$$\begin{aligned} \csc y &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{\sin y} &= \frac{1}{x} \\ \sin y &= x \\ y &= \arcsin x \end{aligned} \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) son la misma función, por lo que

$$\operatorname{arccsc} \frac{1}{x} = \arcsin x$$

De esta forma, la relación entre la función recíproca cosecante y la función inversa arco seno es a través de la función inversa arco cosecante, por lo que no hay igualdad entre arcsin y csc.

Para evitar la confusión debida a la notación, en este curso se utilizará arcsin, arccos, y así sucesivamente, para las funciones trigonométricas inversas.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 11: Tipos de Funciones III, Exponenciales y Logarítmicas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Función Exponencial

Como se ha estudiado anteriormente, una función $f(x)$ toma un elemento real x y lo relaciona con otro número real y. Una de estas funciones establece que existe una relación uno a uno entre $x \in \mathbb{R}$ y el resultado de $y = a^x$.

Para que la función $y = a^x$ pueda existir, a debe cumplir con características específicas:

- a^x satisface las leyes de los exponentes, aún cuando x es el argumento de una función. Como $x \in \mathbb{R}$, entonces se le pueden aplicar las operaciones de suma y multiplicación. De esta forma

$$\begin{aligned} m + x &\quad\Rightarrow\quad a^{m+x} = a^m a^x \\ mx &\quad\Rightarrow\quad a^{mx} = (a^m)^x \\ \frac{x}{m} &\quad\Rightarrow\quad a^{\frac{x}{m}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^x \\ -x &\quad\Rightarrow\quad a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \end{aligned}$$

- $a \neq 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x = 0$, entonces a^0 debe ser un resultado válido. Como se revisará posteriormente en el curso, 0^0 es una forma indeterminada, y por lo tanto a no puede ser 0.
- $a > 0$. El número a^x es un número que debe existir, por lo que si $x = \frac{1}{2b}$ con $b \in \mathbb{Z}$, entonces

$$a^{\frac{1}{2b}} = \sqrt[2b]{a}$$

  y en consecuencia a siempre es un número positivo.
- $a \neq 1$. Cuando $a = 1$, el valor 1^x tiene dos inconvenientes: 1) si $x \in \mathbb{R}$, entonces $1^x = 1$ y no se cumple la relación uno a uno entre x y $y = a^x$, pues la función $y = 1$ es contante y no es uno a uno; 2) cuando se analiza la tendencia de x hacia infinito, 1^∞ es una indeterminación (se revisará más adelante en el curso). Se concluye que a no puede tomar el valor de 1.

Al número a se le denomina base y a la función $y = a^x$ se le conoce como función exponencial.

> La función de la forma $y = a^x$ se conoce como función exponencial, donde $a > 0$ y $a \neq 1$. Su dominio es $D_f = \mathbb{R}$ mientras que su imagen es $I_f = \mathbb{R}^+$. Su gráfica (mostrada en la figura 1) se caracteriza por ser una curva que crece o decrece súbitamente.

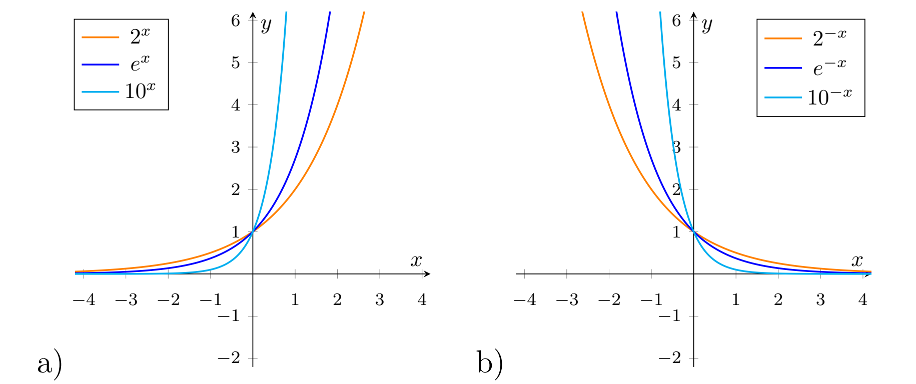


Figura 1. Gráficas de las funciones exponenciales: a) $y = a^x$, funciones crecientes; b) $y = a^{-x}$, funciones decrecientes.

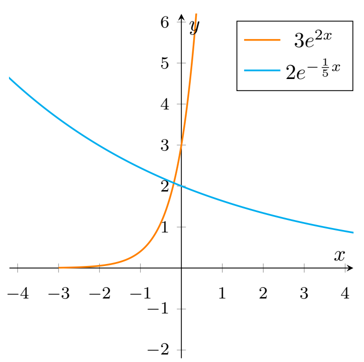


Figura 2. La función $y = 3e^{2x}$ es una exponencial creciente, cuyo ascenso se da muy cercano a $x = 0$; la función $y = 2e^{-\frac{1}{5}x}$ es decreciente, cuyo descenso se da a lo largo de todo el dominio.

Las funciones exponenciales también pueden representarse como

$$f(x) = ka^{bx}$$

donde $k, b \in \mathbb{R}$. Al evaluar una función exponencial en $x = 0$ se obtendrá el valor de la ordenada al origen; es decir,

$$\begin{aligned} f(0) &= ka^{b(0)} \\ &= ka^0 \\ f(0) &= k \end{aligned}$$

En consecuencia, el coeficiente k de una función exponencial es el valor donde la gráfica de la función corta al eje y (véase la figura 2).

Por otro lado, el coeficiente que acompaña a x establece el crecimiento o decrecimiento de la función (figura 2), además de caracterizar que tan inmediato dicho fenómeno:

- $b < 0$. La función decrece. Cuando $|b|$ se acerca a 0, entonces la función decrece lejos del eje y; en caso contrario, la función decrece súbitamente cerca y antes de $x = 0$.
- $b > 0$. La función crece. Cuando $|b|$ se acerca a 0, entonces la función crece lejos del eje y; en caso contrario, la función crece súbitamente cerca y después de $x = 0$.

La descripción anterior de las funciones exponenciales contempla $k > 0$. Cuando $k < 0$, el crecimiento se invierte; es decir, si la función $y = ka^{bx}$ crece, entonces $y = -ka^{bx}$ decrece.

Un caso especial dentro de las funciones exponenciales es aquélla que tiene como base al número irracional e. Este número fue reconocido por el matemático escocés John Napier, quien introdujo los llamados logaritmos naturales, donde estableció como base a e aún sin calcular su valor. Las funciones exponenciales con base e son de suma utilidad, pues intervienen en conceptos como el crecimiento poblacional, el interés compuesto o la desintegración atómica.

Ejemplo. El crecimiento de una población de bacterias se modela mediante una función exponencial $p = k \cdot 2^{bt}$, donde p es el número de bacterias en un determinado tiempo t en horas. Si inicialmente se tienen 5200 bacterias, y al cabo de dos horas el cultivo tiene 20800 bacterias, obtenga la función que modela la población bacteriana.

La función p es creciente, ya que en el tiempo inicial $t = 0$ hay 5200 bacterias y en el tiempo $t = 2$ la población ascendió a 20800 bacterias. Por lo tanto, $k > 0$ y $b > 0$.

Por otro lado, la ordenada al origen se obtiene cuando $t = 0$:

$$p(t) = k \cdot 2^{bt}$$

$$\begin{aligned} p(0) &= k \cdot 2^{b(0)} \\ &= k \cdot 2^{0} \\ 5200 &= k \end{aligned}$$

Ahora, cuando $t = 2$, el valor de la función es 20800. En este caso, la función arroja la ecuación siguiente.

$$\begin{aligned} p(2) &= 5200 \cdot 2^{2b} \\ 20800 &= 5200 \cdot 2^{2b} \\ 4 &= 2^{2b} \end{aligned} \tag{1}$$

La ecuación (1) se resuelve al encontrar el valor del exponente al cual se eleva 2 para obtener 4. Este razonamiento indica que

$$\begin{aligned} 4 &= 2^{2} \\ 2^{2b} &= 2^{2} \\ 2b &= 2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Así es como la función buscada es

$$p = 5200 \cdot 2^{t}$$

2. Función Logaritmo

Puesto que una función exponencial es uno a uno, se trata de una función inyectiva que posee una inversa. En el ejemplo anterior, la ecuación (1) plantea obtener un exponente a partir del resultado de la exponenciación; así es como se da a conocer la función logaritmo.

Sea $x = a^y$ una función exponencial. La función logaritmo es aquélla que obtiene el valor de x dado y; es decir,

$$x = a^y \qquad \Rightarrow \qquad y = \log_a x$$

Toda función logaritmo $f(x) = \log_a x$ siempre es inversa de la exponencial. y en consecuencia $a > 0$ con $a \neq 1$. Su dominio es $D_f = \mathbb{R}^+$ y su imagen es $I_f = \mathbb{R}$. Su gráfica (mostrada en la figura 3) es una curva que crece o decrece sosegadamente.

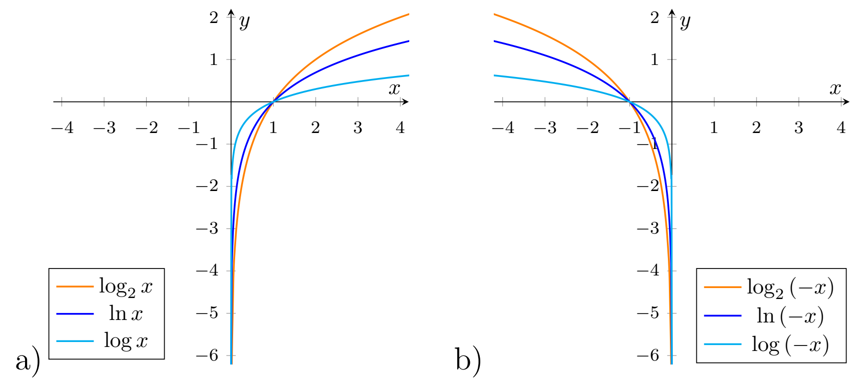


Figura 3. Gráficas de las funciones logarítmicas: a) $y = \log_a x$, funciones crecientes; b) $y = \log_a(-x)$, funciones decrecientes.

En general, una función logarítmica se representa por la regla de correspondencia

$$y = k \log_a(bx)$$

donde a es la base, b es un número real diferente de 0 y $k \in \mathbb{R}$. Al igual que la función exponencial, los valores de los coeficientes permiten caracterizar la curva logarítmica.

- ❑ $b > 0$. Implica que $x > 0$ y la función crece del cuadrante IV al I con $k > 0$; si $k < 0$, entonces la función decrece del cuadrante I al IV.

- $b < 0$. Hace que $x < 0$ y la función decrece desde el cuadrante II al III con $k > 0$; si $k < 0$, entonces la función crece del cuadrante III al II.

Las funciones logarítmicas siempre poseen una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que solo poseen un cruce con el eje x:

$$\begin{aligned} 0 &= k \log_a (bx) \\ &= \log_a (bx) \\ a^0 &= a^{\log_a (bx)} \\ 1 &= bx \\ \frac{1}{b} &= x \end{aligned}$$

De esta forma, la raíz de una función logaritmo se encuentra en el recíproco del coeficiente del argumento.

Las funciones logarítmicas definen una escala de medida de diversos fenómenos; ejemplos de escalas logarítmicas son la escala sismológica de magnitud de momento (M_W), la escala acústica en decibeles (dB), o la escala del índice de explosividad volcánica (VEI). Otras aplicaciones se encuentran en fractales, teoría de números, complejidad computacional o probabilidad; el pensamiento humano, por naturaleza, estima cantidades en forma logarítmica.

Ejemplo. Sea la función $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$. Obtenga la función logarítmica que es inversa a $f(x)$.

Como $k = 3$ y $b = \frac{1}{2}$ son positivos, entonces la función crece; puesto que b es una fracción cercana a 0, el crecimiento se da lejos del eje de las ordenadas. Con $k = 3$ se obtiene la ordenada al origen $y = 3$. La figura 4 presenta la gráfica de la función exponencial; nótese que las características enumeradas se satisfacen en la gráfica.

Para encontrar la función logarítmica, se despeja x de la función exponencial.

$$\begin{aligned} y &= 3e^{\frac{1}{2}x} \\ \frac{1}{3}y &= e^{\frac{1}{2}x} \\ \ln \frac{1}{3}y &= \ln e^{\frac{1}{2}x} \\ \ln \frac{1}{3}y &= \frac{1}{2}x \\ 2\ln \frac{1}{3}y &= x \end{aligned}$$

La inversa buscada es

$$f^{-1}(x) = 2\ln \frac{1}{3}x$$

Como $k = 2$ y $b = \frac{1}{3}$ son positivos, la función crece del cuadrante IV al I; el cruce con el eje de las abscisas se da en el recíproco de b, es decir $x = 3$. La figura 4 muestra la gráfica con las características mencionadas.

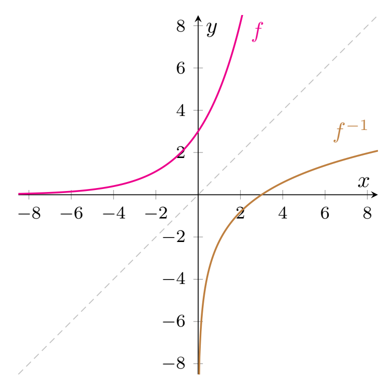


Figura 4

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 12: Tipos de Funciones IV, Hiperbólicas y sus Inversas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Funciones Hiperbólicas

1.1. Definición con la Función Exponencial

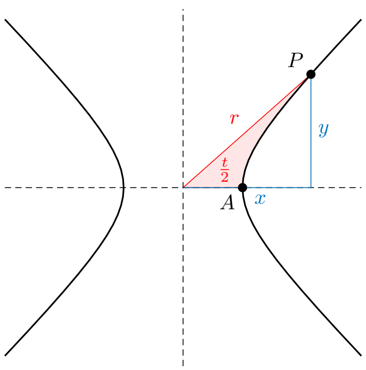


Figura 1. Las funciones hiperbólicas se definen a partir del área limitada por el arco de una hipérbola equilátera; la trigonometría hiperbólica es análoga a la trigonometría circular.

Anteriormente se definieron las funciones trigonométricas a través de una circunferencia unitaria. Existen otras funciones que, en lugar de definirse por una circunferencia, se definen mediante la hipérbola equilátera (la longitud de semiejes es la misma); dichas funciones se conocen como funciones hiperbólicas.

En la figura 1 se muestra la hipérbola equilátera (sus semiejes tienen la misma longitud)

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{1}$$

donde el punto $P(x, y)$ de la hipérbola y el origen forman el segmento de recta r. Él área encerrada por el eje horizontal, el segmento r y el arco de hipérbola AP tiene una magnitud de $\frac{t}{2}$, donde t se conoce como ángulo hiperbólico. Las coordenadas de P son el seno y el coseno hiperbólicos de t:

$$x = \cosh t \tag{2}$$
$$y = \sinh t \tag{3}$$

Para definir analíticamente a las funciones hiperbólicas, hay que considerar las funciones trigonométricas y números complejos. Primero, hay que recordar la identidad trigonométrica fundamental

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \tag{4}$$

Al sustituir las funciones (2) y (3) en la hipérbola (1) se obtiene la llamada identidad hiperbólica fundamental:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 1 \\ (\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 &= 1 \\ \cosh^2 t - \sinh^2 t &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

Las identidades fundamentales (4) y (5) tienen en común el resultado unitario, por lo que pueden igualarse seno con seno y coseno con coseno. En esta igualdad se debe considerar que $\sqrt{-1} = i$.

$$\cos^2 u + \sin^2 u = \cosh^2 t - \sinh^2 t$$
$$\cos^2 u + \sin^2 u = \cosh^2 t + \left(-\sinh^2 t\right)$$

$$\therefore \quad \cos^2 u = \cosh^2 t$$
$$\cos u = \cosh t \tag{6}$$
$$\therefore \quad \sin^2 u = -\sinh^2 t$$
$$\sin u = \sqrt{-1}\sinh t$$
$$\sin u = i\sinh t \tag{7}$$

Ahora, mediante la forma exponencial del número complejo

$$e^{ui} = \cos u + i\sin u \tag{8}$$

y de su conjugado

$$e^{-ui} = \cos u - i\sin u \tag{9}$$

se obtendrá la forma analítica de las funciones hiperbólicas. Para comenzar, se suman, término a término, (8) y (8) para despejar el coseno.

$$\begin{aligned} e^{ui} + e^{-ui} &= (\cos u + i\sin u) + (\cos u - i\sin u) \\ &= 2\cos u \end{aligned}$$
$$\frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2} = \cos u \tag{10}$$

Al sustituir (6) en (10), y considerando $u = ti$, se obtiene la expresión analítica del coseno hiperbólico:

$$\frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2} = \cos u$$
$$\frac{e^{(ti)i} + e^{-(ti)i}}{2} = \cosh t$$
$$\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

Mediante el mismo proceso, pero restando (8) y (9) antes de hacer sustituciones, se obtiene la expresión del seno hiperbólico:

$$\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

Las funciones hiperbólicas son análogas a las funciones trigonométricas, pero basadas en la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$. Se definen, con base en la función exponencial, como

$$\sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$
$$\cosh t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}$$

Las funciones hiperbólicas complementarias se definen a partir del seno y el coseno hiperbólicos.

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}, \qquad \coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$
$$\operatorname{sech} t = \frac{1}{\cosh t}, \qquad \operatorname{csch} t = \frac{1}{\sinh t}$$

En la tabla 1 se muestra el dominio y la imagen de cada función.

Función	Dominio	Imagen
$\sinh t$	$t \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh t$	$t \in \mathbb{R}$	$[1, \infty)$
$\tanh t$	$t \in \mathbb{R}$	$(-1, 1)$
$\coth t$	$t \neq 0$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\operatorname{sech} t$	$t \in \mathbb{R}$	$(0, 1]$
$\operatorname{csch} t$	$t \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Tabla 1

La figura 2 ilustra las gráficas de las seis funciones hiperbólicas.

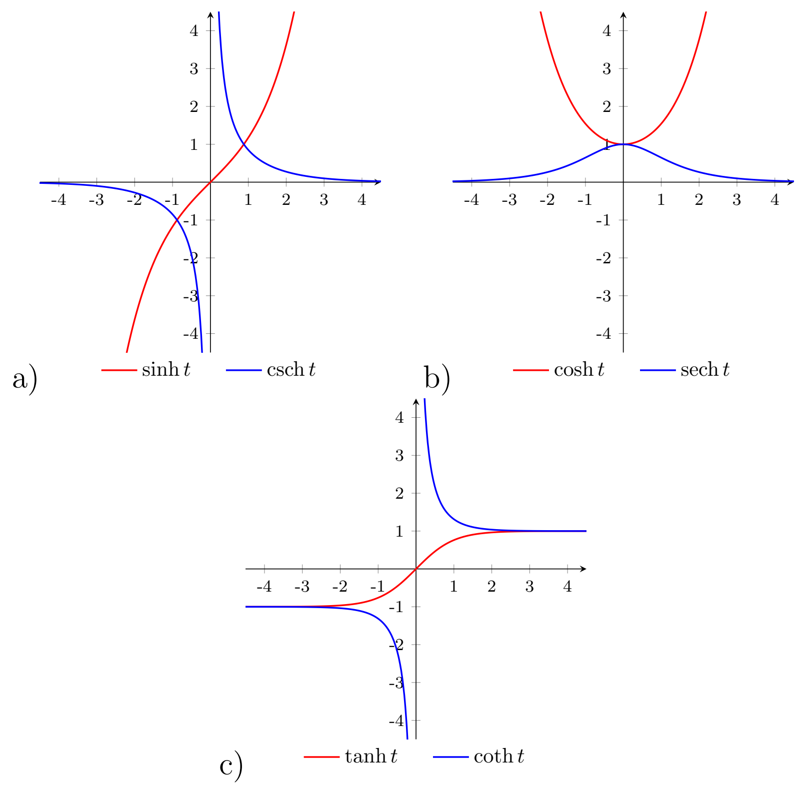


Figura 2. a) seno y cosecante; b) coseno y secante; c) tangente y cotangente.

Dentro de las funciones hiperbólicas, el coseno hiperbólico es de suma importancia. Cada que un hilo, una cadena o un cable (todos de masa distribuida uniformemente) está suspendido por sus extremos, se obtiene una curva especial llamada catenaria (del latín *catēnarĭus*, propio de la cadena).

Todas las catenarias poseen como modelo a la función

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

Este modelo se obtiene al estudiar todos los esfuerzos que presenta la cuerda suspendida por sus extremos. Las características que hacen posible esta forma son: la masa de la cuerda está distribuida uniformemente y sujeta a un campo gravitatorio uniforme (como el terrestre).

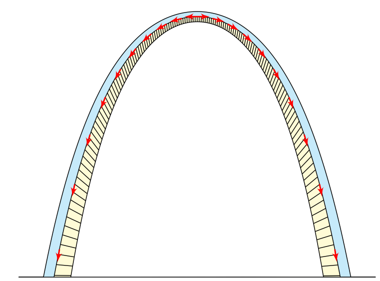


Figura 3. Un arco puede diseñarse con base en el coseno hiperbólico, pues por propiedades físicas los esfuerzos se distribuyen por la estructura (flechas rojas) soportando su propio peso.

Físicamente, la catenaria no posee tensiones laterales y minimiza los esfuerzos de tensión (o compresión cuando la cadena se convierte en un arco). Esto indica que la catenaria es un modelo de construcción para arcos, ya que no requiere de estructuras adicionales laterales para mantener la estabilidad (véase la figura 3). Ejemplos de uso de la catenaria en construcción son el arco de *Taq I Kisra* en Irak, la catedral de la Sagrada Familia en España o el *Gateway Arch* en Estados Unidos.

1.2. Identidades Hiperbólicas

Al igual que las funciones trigonométricas circulares, las funciones hiperbólicas plantean identidades que están basadas en la geometría de la hipérbola equilátera (1).

Las identidades hiperbólicas principales son:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$$
$$\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

Las identidades para la suma y resta de argumentos son:

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x
\end{aligned}$$

Ejemplo. Demuestre la identidad hiperbólica

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

La identidad se demuestra al sustituir las definiciones de seno y coseno hiperbólicos y simplificar las operaciones pertinentes.

$$\begin{aligned}
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
&= 2\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} \\
\sinh 2x &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \qquad \text{con t=2x} \\
\sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2. Funciones Hiperbólicas Inversas

Al estar basadas en funciones exponenciales, las funciones hiperbólicas poseen sus respectivas inversas, las cuales se basan en funciones logaritmo. Sin embargo, dos funciones hiperbólicas requieren restringir el dominio para volverse inyectivas: el coseno y la secante hiperbólicas.

Sea $f(x)$ una función hiperbólica. La inversa $f^{-1}(x)$, también conocida como área cuya función hiperbólica es, se define como:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sinh x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x): \quad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
f(x) &= \cosh x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x): \quad \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
f(x) &= \tanh x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x): \quad \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
f(x) &= \coth x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x): \quad \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
f(x) &= \operatorname{sech} x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x): \quad \operatorname{arsech} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \\
f(x) &= \operatorname{csch} x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x): \quad \operatorname{arcsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)
\end{aligned}$$

Tanto el coseno hiperbólico y la secante hiperbólica deben restringir su dominio al intervalo $[1, \infty)$ para que exista su inversa.

Ejemplo. Calcule la función inversa, el dominio y la gráfica de la función

$$f(x) = \tanh x$$

Por definición de f a partir de su forma exponencial se calculará la inversa, considerando que debe obtenerse una regla de correspondencia con base en logaritmos.

$$y = \tanh x$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} \\
&= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \\
y\left(e^{2x} + 1\right) &= e^{2x} - 1 \\
ye^{2x} + y - e^{2x} + 1 &= 0 \\
e^{2x}(y - 1) &= -(1 + y) \\
e^{2x} &= -\frac{1 + y}{y - 1} \\
\ln e^{2x} &= \ln\left(-\frac{1 + y}{y - 1}\right) \\
2x &= \ln\left(-\frac{1 + y}{y - 1}\right) \\
x &= \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{1 + y}{y - 1}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función inversa buscada es

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

El dominio requiere que

$$\frac{1 + x}{1 - x} > 0$$

Los casos a resolver son:

$$1 - x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + x > 0$$

cuya solución está en $1 > x \cap x > -1$; o bien,

$$1 - x < 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 + x < 0$$

cuya solución está en $1 < x \cap x < -1$.

En el primer caso la solución es el intervalo $-1 < x < 1$, mientras que en el segundo la solución es el conjunto vacío (pues no hay intersección). De esta forma, el dominio de la función inversa a la tangente hiperbólica es

$$D_{f^{-1}} = \{x| -1 < x < 1; x \in \mathbb{R}\}$$

La gráfica de la función se muestra en la figura4.

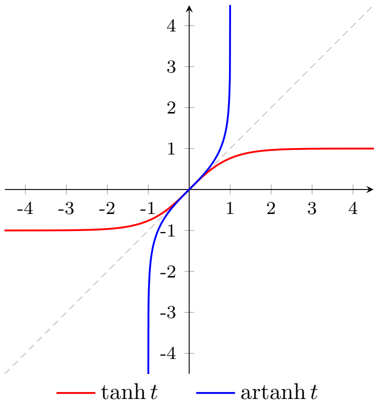


Figura 4

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 13: Otras Características de las Funciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Funciones Par e Impar

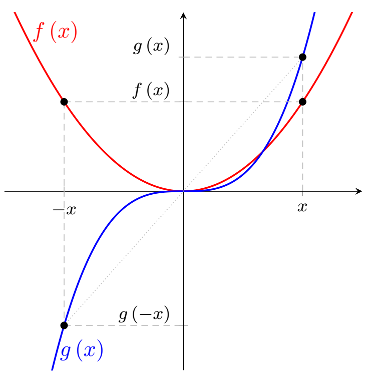


Figura 1. La función $f(x)$ presenta simetría respecto del eje y, y se le llama par; la función $g(x)$ presenta simetría respecto del origen, y se le llama impar.

Dentro de la geometría de la gráfica de una función existe una característica que la relaciona con el sistema coordenado cartesiano: la simetría.

En la figura 1 se muestra un par de funciones en las cuales se puede establecer la simetría de la gráfica con respecto del eje y o del origen.

La simetría respecto del eje de las ordenadas permite establecer que para un valor a, que pertenece al dominio, existe el valor $-a$, también perteneciente al dominio, tal que ambos poseen la misma imagen (gráfica roja de la figura 1). A las funciones que presentan esta característica se les conoce como funciones pares.

La función $f(x)$ es par, si la imagen de $a \in D_f$ es la misma que la imagen de $-a \in D_f$; es decir,

$$f(a) = f(-a)$$

La paridad de una función se refleja en una gráfica que es simétrica respecto del eje y.

Una consecuencia de las funciones pares es que no son inyectivas, y por lo tanto su dominio debe restringirse para calcular una inversa.

Por otro lado, una función con simetría respecto del origen indica que la imagen de un valor$a$ y la imagen del valor $-a$ poseen signos contrarios (gráfica azul de la figura 1). Estas funciones se llaman impares.

La función $f(x)$ es impar, si la imagen de $a \in D_f$ es el inverso aditivo de la imagen de $-a \in D_f$; es decir,

$$f(a) = -f(-a)$$

La imparidad de una función se refleja en una gráfica que es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Conmtrario a las funciones pares, las funciones impares pueden o no ser inyectivas. La funciónes x^3 es impar invertible; en cambio, la función impar $\tan x$ debe restringir su dominio para tener inversa.

Ejemplo. Determine si las funciones

$$f(x) = \cosh x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sin x$$

son pares o impares.

De acuerdo a las definiciones, las funciones deben evaluarse en x y $-x$ para determinar si sus imágenes son iguales o varían en signo. Se comenzará con la función coseno hiperbólico.

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x & \qquad f(-x) &= \cosh(-x) \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\ & & &= \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} \end{aligned}$$

La evaluación en ambos valores resultan en la misma imagen; por lo tanto, el coseno hiperbólico es una función par. Ahora se verifica el mismo concepto con la función seno.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin x & \qquad g(-x) &= \sin(-x) \\ & & &= \sin(0 - x) \\ & & &= \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x \\ & & &= -\sin x \end{aligned}$$

Las imágenes difieren en el signo, por lo que la función seno es impar.

Las funciones que no cumplen con las definiciones de función par o impar no tienen una clasificación específica.

2. Expresión de una Función

Una función siempre posee una regla de correspondencia para relacionar al dominio con la imagen. Sin embargo, esta regla no posee una única expresión; toda función f puede expresarse de tres maneras diferentes: en forma explícita, implícita y paramétrica.

2.1. Forma Explícita e Implícita

La forma explícita es la que se utiliza usualmente para denotar a una función; ésta consiste en mantener a la variable dependiente totalmente despejada.

Una función f está en forma explícita cuando la variable dependiente está expresada en términos de la variable independiente; es decir,

$$y = f(x)$$

La contraparte de la forma explícita es la manera implícita de escribir la regla de correspondencia de una función. En este tipo de expresión las variables dependiente e independiente se encuentran mezcladas, por lo que se requiere establecer las condiciones del dominio y la imagen desde un principio.

Una función f está en forma implícita cuando las variables dependiente e independiente son parte de una sola expresión:

$$f(x, y) = 0$$

Se debe aclarar que una función en forma implícita no es una función multivariable, ya que ésta última relaciona una variable dependiente z con dos (o más) variables independientes; o sea, $z = f(x, y)$ es una función multivariable y no una función en forma implícita.

En términos generales, una función en forma implícita puede expresarse en forma explícita cuando la variable y puede despejarse. El caso contrario (forma explícita a implícita) revierte el despeje de la variable dependiente.

Ejemplo. Sea la función en forma implícita

$$f: \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 - 4 = 0, \qquad y \geq -1$$

Obtenga la forma explícita de f.

El despeje de y arroja la función en forma explícita. La condición $y \geq -1$ ayuda a determinar la sección de la relación que define a la función.

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+1)^2 - 4 &= 0 \\ (y+1)^2 &= 4 - (x-2)^2 \\ y + 1 &= \pm\sqrt{4 - (x-2)^2} \\ y &= -1 \pm \sqrt{4 - (x-2)^2} \end{aligned}$$

Como las imágenes deben ser mayores a -1 la raíz negativa se descarta, arrojando la regla en forma explícita:

$$f(x) = -1 + \sqrt{4 - (x-2)^2}$$

Algunas funciones en forma implícita no poseen representación en forma explícita pues la variable dependiente no puede despejarse, por ejemplo $xe^y - y = 0$. En este caso, la función siempre se maneja de manera implícita.

2.2. Forma Paramétrica

Una tercera forma para expresar una función es aquélla en la cual tanto x como y dependen de una tercera variable, usualmente t, conocida como parámetro. Debido al nombre de la tercera variable, esta representación se conoce como forma paramétrica.

Sea $y = f(x)$ una función. La forma paramétrica de f se establece cuando tanto x como y son funciones de la variable independiente t. Su expresión es

$$f(t): \quad \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

El dominio de la función en forma paramétrica incluye todos los elementos t, tales que $t \in D_x \cap D_y$.

A diferencia de las formas explícita e implícita, la forma paramétrica no viene exclusivamente de un despeje. Para parametrizar una función puede acudirse a uno de tres métodos.

- El parámetro es igual a la variable independiente original. En este caso se establece que $x = t$, y en consecuencia la función parametrizada es

$$f(t): \quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

- El parámetro se obtiene por un cambio de variable. Es similar al método anterior, sin embargo no se trata de una igualdad directa, ya que x debe expresarse como una función inyectiva dependiente de t; es decir

$$f(t): \quad \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \qquad \forall\ t = f_1^{-1}(x)$$

- El parámetro es igual a una identidad que combina las variables dependiente e independiente originales. Para este método la función está en forma implícita y se aplica una identidad trigonométrica o una factorización con la cual incluir al parámetro.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Obtenga la forma paramétrica de f.

Mediante el primer método se establece que $x = t$, por lo que si $y = f(x)$, la función en forma paramétrica es

$$f: \quad \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t^2 - 1} \end{cases} \qquad \forall\ t \leq -1 \cup 1 \leq t$$

Con el segundo método se requiere una función inyectiva que represente al parámetro. La función original puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 1} \\ y &= \sqrt{(x-1)(x+1)} \end{aligned} \tag{1}$$

Uno de los dos binomios de (1) se establece como función inyectiva que contiene el parámetro; en este caso,

$$t = x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = t + 1 \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(x-1)(x+1)} \\ &= \sqrt{(t+1-1)(t+1+1)} \\ y &= \sqrt{t(t+2)} \end{aligned}$$

Con este método, la función f parametrizada es

$$f: \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \sqrt{t(t+2)} \end{cases} \qquad \forall\ t \leq -2 \cup 0 \leq t$$

Con el último método se requiere a la función en forma implícita:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - 1} \\ y^2 &= x^2 - 1 \\ 1 &= x^2 - y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Para parametrizar la función (3) se puede hacer uso de una identidad trigonométrica, una identidad hiperbólica o una diferencia de cuadrados. Se utilizará la identidad hiperbólica $1 = \cosh^2 t - \sinh^2 t$ para sustituirla en (3) e igualar término a término:

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 - y^2 \\ \cosh^2 t - \sinh^2 t &= x^2 - y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \cosh^2 t = x^2 \\ \sinh^2 t = y^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que la función f en forma paramétrica es

$$f: \quad \begin{cases} x = \pm\cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \qquad \forall\ t \geq 0$$

Todas las formas paramétricas de una misma función son válidas; se recomienda utilizar la parametrización que haga más eficiente el procedimiento para resolver un problema dado.

La forma paramétrica de una función es sumamente importante para la representación vectorial de lugares geométricos, la cual se estudiará en el tema de Álgebra Vectorial. Además, la representación paramétrica define las funciones vectoriales de variable escalar, las cuales definen la Geometría Diferencial que se estudia en Cálculo Multivariable.

3. Funciones Segmentadas

Una forma de representar a las funciones consiste en asignar una regla de correspondencia diferente a diversos intervalos del dominio. Por ejemplo, la función $f(x)$ puede expresarse como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < a \\ f_2(x), & a \leq x < b \\ f_3(x), & b \leq x \end{cases}$$

donde cada regla de correspondencia está asignada a un intervalo del dominio de f. Para diseñar estas funciones se debe cuidar que las cotas de los intervalos no se superpongan y asignen dos imágenes a un mismo valor del dominio.

Ejemplo. Obtenga el dominio y dibuje la gráfica de la función segmentada

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 11 & x < -3 \\ 5 - \cosh x & -3 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 - 4x} & 3 < x \end{cases}$$

Esta función se compone de tres intervalos, cada uno con una regla de correspondencia específica.

En el intervalo $x < -3$, la función es polinómica y su dominio está acotado por el mismo intervalo; es decir $D_{g_1} = \{x | x < -3; x \in \mathbb{R}\}$.

Para el intervalo $-3 \leq x \leq 3$, la función es coseno hiperbólico y, nuevamente, el dominio está acotado por el propio intervalo: $D_{g_2} = \{x | -3 \leq x \leq 3; x \in \mathbb{R}\}$.

En el intervalo $3 < x$ se debe resolver la restricción $x^2 - 4x \geq 0$.

$$x^2 - 4x \geq 0$$

$$x(x-4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \cap x - 4 \geq 0 \\ x \leq 0 \cap x - 4 \leq 0 \end{cases}$$

La solución de la desigualdad yace en $x \leq 0 \cup 4 \leq x$. Por lo tanto, tomando la restricción $3 < x$, el dominio en este segmento es el subconjunto $D_{g_3} = \{x | 4 \leq x; x \in \mathbb{R}\}$. La gráfica de la función se muestra en la figura 2, y el dominio de toda la función es

$$D_g : \quad x \in (-\infty, -3) \cup [-3, 3] \cup [4, \infty)$$

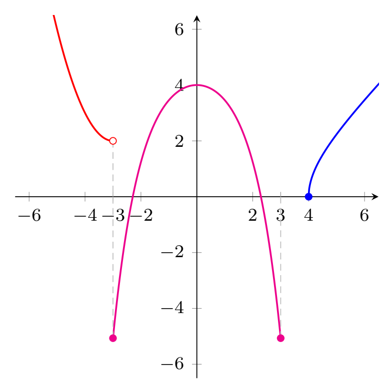


Figura 2. Gráfica de $g(x)$. La marca hueca indica que no se incluye $x = -3$.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 14: Modelado de Funciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

El modelado de funciones permite utilizar una función para representar un problema determinado. Este concepto es el principio del modelado matemáticos de diversos fenómenos conocidos, por ejemplo geométricos, físicos, financieros, computacionales, biológicos, médicos, entre otros.

Para modelar un problema a partir de una función se deben conocer todas las condiciones que relacionan una variable dependiente con la respectiva variable independiente; las relaciones pueden estar definidas por condiciones propias del problemas o por conocimiento externo (como identidades o definiciones). También debe considerarse que el dominio y la imagen de la función modelada satisfaga las condiciones o resultados del problema específico.

1. Problemas Geométricos

Los problemas geométricos son muy usuales en el modelado de funciones. Entre los problemas que pueden encontrarse incluyen longitud, superficie o volumen como dependientes de ángulos, lados o aristas.

Ejemplo. Obtenga la función que modela el área del triángulo isósceles, mostrado en la figura 1, a partir del ángulo desigual φ.

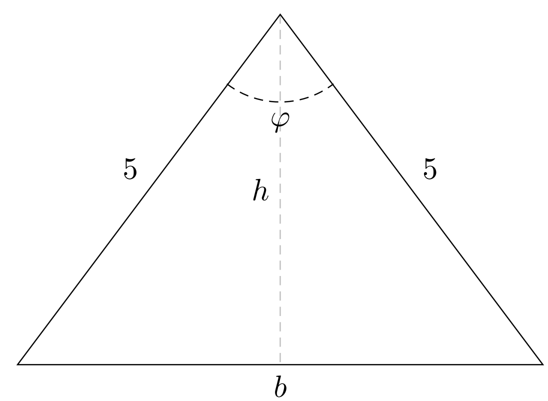


Figura 1

Como se observa en la figura, la altura h divide por la mitad al triángulo, obteniéndose dos triángulos rectángulos con la misma altura h y base $\frac{b}{2}$; además, la misma altura biseca al ángulo φ, dejando en cada triángulo rectángulo un ángulo superior igual a $\frac{\varphi}{2}$.

La relación entre la base $\frac{b}{2}$ y el ángulo $\frac{\varphi}{2}$ se establece mediante la función trigonométrica seno:

$$\begin{aligned} \sin\frac{\varphi}{2} &= \frac{\frac{b}{2}}{5} \\ &= \frac{b}{10} \\ 10\sin\frac{\varphi}{2} &= b \end{aligned} \tag{1}$$

Para la relación entre la altura h y el ángulo $\frac{\varphi}{2}$ se utiliza la función trigonométrica coseno:

$$\begin{aligned} \cos\frac{\varphi}{2} &= \frac{h}{5} \\ 5\cos\frac{\varphi}{2} &= h \end{aligned} \tag{2}$$

Las expresiones (1) y (2) se sustituyen en el área de un rectángulo para tener la función buscada.

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}\left(10\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(5\cos\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= \frac{25}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) \\ A(\varphi) &= \frac{25}{2}\sin\varphi \end{aligned}$$

Para completar el proceso de modelado se requiere definir el dominio de la función. Las condiciones a contemplar son:

- Las áreas no son negativas, por lo que $\sin\varphi$ solo toma valores positivos; en consecuencia, el ángulo toma valores entre 0 y π.
- Los valores $\sin 0$ y $\sin\pi$ son nulos, por lo que no exitiría área; por lo tanto, 0 y π quedan excluidos del dominio.

Después de este análisis, la función solicitada con su respectivo dominio es

$$A(\varphi) = \frac{25}{2}\sin\varphi \qquad \forall\ 0 < \varphi < \pi$$

2. Problemas Físicos

En el caso de los problemas físicos, el modelado de funciones permite controlar un fenómeno mediante alguna variable física, por ejemplo tiempo, temperatura, longitud, fuerza, entre otras.

Nuevamente, el dominio de la función que representa al fenómeno debe ajustarse para ser coherente con la realidad del fenómeno.

Ejemplo. Obtenga la función polinómica de primer grado que modela el cambio de grados Celsius a grados Fahrenheit.

Las equivalencias $0\ [^\circ C] = 32\ [^\circ F]$ y $100\ [^\circ C] = 212\ [^\circ F]$ permitirán calcular la función buscada. Como se desea convertir escala Celsius a Fahrenheit, la primera será la variable independiente.

Como la función solicitada es polinómica de grado uno, el modelado debe realizarse sobre una función del tipo $F = mC + b$. Al evaluar la primera condición de equivalencia se obtiene:

$$\begin{aligned} F(C) &= mC + b \\ F(0) &= b \\ 32 &= b \end{aligned}$$

La segunda condición permite encontrar la función completa:

$$\begin{aligned} F(C) &= mC + 32 \\ F(100) &= 100m + 32 \\ 212 &= 100m + 32 \\ 180 &= 100m \\ \frac{9}{5} &= m \end{aligned}$$

De esta forma, la conversión de grados Celsius a grados Fahrenheit se da mediante la función

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32 \qquad \forall\, C \in \mathbb{R}$$

Como las temperaturas pueden tomar cualquier valor, el dominio de la función modelada se establece sobre el conjunto real.

3. Otro Tipo de Problemas

Dentro de este modelado se engloban problemas de diferentes naturalezas y que pueden o no incluir características geométricas o físicas. Las funciones modelo que se obtengan en este tipo de problemas tendrán un dominio que puede satisfacer condiciones de intervalos (como en los casos anteriores), o bien, de naturaleza numérica del dominio (función con números naturales, enteros o racionales).

Ejemplo. El costo de admisión a un parque de diversiones es de \$180.00 por persona. El parque tiene una política de descuento para grupos con más de 10 y hasta 25 personas: por cada entrada adicional al grupo de 10 se hace un descuento de \$5.00 en la admisión. Exprese el importe total, que un grupo sujeto a descuento debe pagar, como función del número de personas del grupo.

El costo de la entrada individual al parque se establece como

$$180 - 5p \tag{3}$$

donde p indica el número de personas adicionales al grupo de 10. Por otro lado, el grupo tiene una base de 10 personas y se agregan p integrantes adicionales, por lo que

$$p + 10 \tag{4}$$

indica el número de personas en el grupo. Para calcular el costo que un grupo debe cubrir se multiplican (3) por (4):

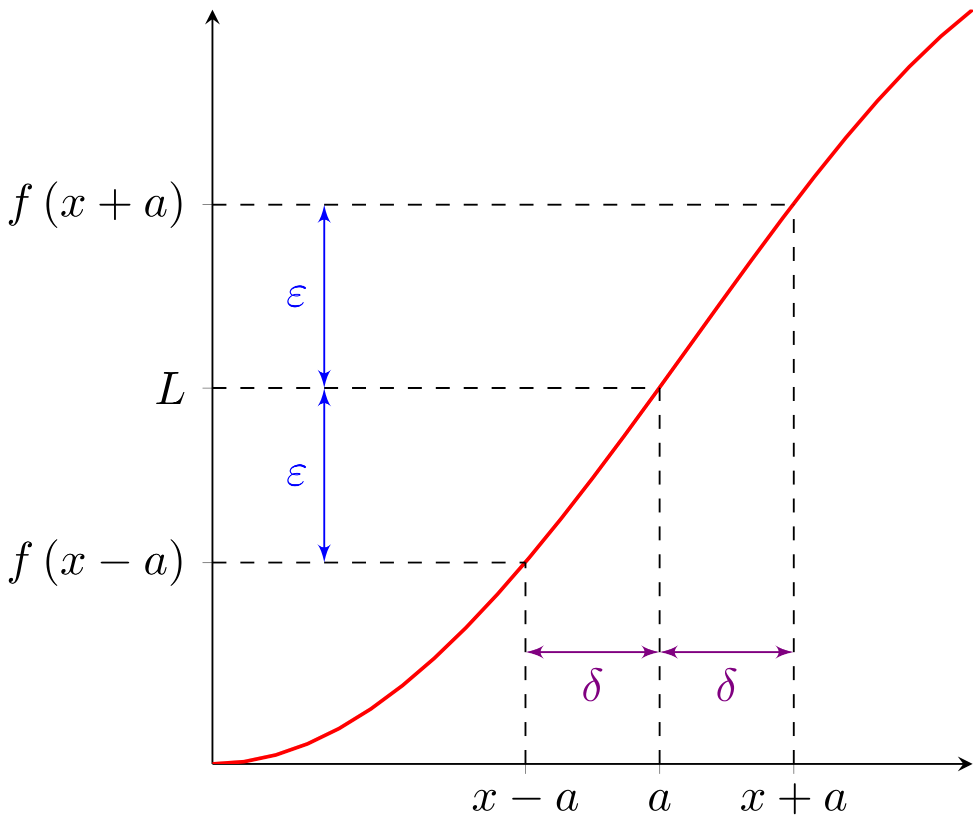
$$c(p) = (180 - 5p)(p + 10)$$

Como la política indica que el descuento es aplicable a partir de 11 y hasta 25, el número de personas adicionales al grupo de 10 va desde 1 hasta 15; por lo tanto, la función solicitada con su dominio es

$$c(p) = -5p^2 + 130p + 1800 \qquad 1 < p \leq 15; p \in \mathbb{N}$$

III

LÍMITES



CÁLCULO
Y GEOMETRÍA
ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 15: Límites

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Definición

Una vez que se ha establecido el concepto de función, así como otras de sus características, se puede investigar qué sucede con la función cuando la variable independiente se acerca a un valor específico. Es obvio que al variar un elemento del dominio, la función cambiará su salida; lo importante es dictaminar hacia dónde se dirige dicha salida con la modificación de la entrada. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

no está definida en $x = 0$, sin embargo, antes y después de 0 sí existe. Los elementos del dominio que rodean a 0 permitirán determinar qué sucede con la función conforme se acerca o se aleja del valor mencionado. Para realizar el análisis correcto, hay que definir qué valores alrededor de 0 se tomarán en cuenta; esto se conoce como entorno.

Un entorno de a es el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ tal que $|x - a| < \delta$. Se expresa como

$$E(a, \delta) = \left\{ x \big| \, |x - a| < \delta; x \in \mathbb{R} \right\}$$

La figura 1 muestra la geometría del entorno.

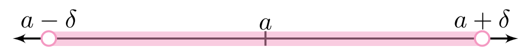


Figura 1

El entorno permite demarcar el lugar del dominio que sirve para el análisis de la salida de la función.

Al acotar el dominio de una función en un entorno se está acotando la imagen. Esta demarcación permite conocer más específicamente qué sucede con la función dentro del entorno. Al momento de recorrer los elementos del entorno hacia el centro, simultáneamente se recorre la función a lo largo de la imagen acotada; el lugar al que llega la función cuando el dominio se acerca al centro del entorno se llama límite.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de $x = a$, excepto en a. El límite de f cuando x se acerca (tiende) a a es L, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Se expresa como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

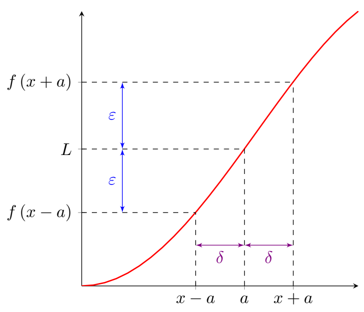


Figura 2. El límite de una función es el valor L al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a a.

Puede considerarse que la definición de límite es un tanto confusa, pero su interpretación geométrica es más clara. Cuando se define el entorno

$$0 < |x - a| < \delta \tag{1}$$

éste debe ser capaz de mapearse bajo una función f en

$$|f(x) - L| < \varepsilon \tag{2}$$

Esta correspondencia indica que si x se acerca al centro a, entonces la función $f(x)$ se acerca hacia L, independientemente si a es parte del dominio o no. En la figura 2 se muestra cómo el entorno (1) se transforma en el entorno (2), por lo que si x tiende hacia a, entonces la función $f(x)$ tiende hacia L. Se aclara que L es parte del codominio.

Ejemplo. Calcule, mediante la definición,

$$\lim_{x\to 3} 2x + 3$$

Para comenzar con el cálculo del límite se debe establecer el entorno en el dominio de la función. Como δ es desconocida, solo debe asumirse que es positiva:

$$|x - 3| < \delta \tag{3}$$

Por otro lado, en el codominio de la función, con ε positiva desconocida, se establece que

$$|(2x + 3) - L| < \varepsilon \tag{4}$$

Para calcular el límite (4) se trabaja para obtener (3).

$$\begin{aligned}
|(2x+3) - L| &< \varepsilon \\
\frac{1}{2}\,|(2x+3) - L| &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\left|\frac{2x+3-L}{2}\right| &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\left|x + \frac{3-L}{2}\right| &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\left|x - 3 + 3 + \frac{3-L}{2}\right| &< \frac{\varepsilon}{2} \\
\left|x - 3 + \frac{9-L}{2}\right| &< \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned} \tag{5}$$

Para que la expresión (5) sea la misma que (3) se requiere que

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x - 3 = x - 3 + \frac{9-L}{2}$$

Al simplificar la igualdad consecuente se obtendrá el valor del límite buscado.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{9-L}{2} \\
&= 9 - L \\
L &= 9
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3} 2x + 3 = 9$$

La función $f(x) = 2x + 3$ no tiene restricciones en su dominio, por lo que el límite debe ser parte de la imagen.

Al ser parte del codominio, el límite puede pertenecer a la imagen;

esto es de esperarse, pues el límite denota el elemento al cual se dirige la función según la variable independiente. Con esta característica se puede acelerar el cálculo del límite al evaluar la función en el elemento del dominio al cual tiende la variable independiente. Sin embargo, hay ocasiones en las cuales el límite de una función solo pertenece al codominio, debido a que el valor $x = a$ no es parte del dominio. Además, existen ocasiones en las cuales el límite no existe como tal, aún cuando $x = a$ pertenezca al dominio de la función.

2. Existencia del Límite

Para que un límite exista, debe verificarse que al recorrer un entorno alrededor de $x = a$, la función tienda al mismo valor del límite.

El entorno $E(a, \delta)$ definido para calcular un límite está compuesto por dos secciones: parte izquierda (intervalo $(a - \delta, a)$) y en parte derecha (intervalo $(a, a + \delta)$). Cuando el acercamiento a a, tanto por la derecha como por la izquierda, hacen que la función se dirija al valor L, entonces el límite existe y es L. La idea de acercarse tanto por derecha como por izquierda da origen a los límites laterales.

Sea $f(x)$ una función, donde x se acerca al valor a en el entorno

$$E(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta; x \in \mathbb{R}\}$$

Límite por la derecha

Si x toma valores mayores que a y $f(x)$ tiende al valor L^+, se dice que el límite por la derecha existe y se denota como

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L^+$$

Límite por la izquierda

Si x toma valores menores que a, entonces $f(x)$ tiende al valor L^- describiendo que el límite por la izquierda existe. Se denota como

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L^-$$

Existencia del Límite

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a existe si los límites laterales son iguales; es decir

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to x^-} f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Puede parecer obvio que si el límite de una función existe, es porque los límites laterales son iguales. Sin embargo, no siempre es trivial verificar que eso realmente suceda en una función determinada. Por ejemplo, para verificar si el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

existe, hay que verificar los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-}$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+}$$

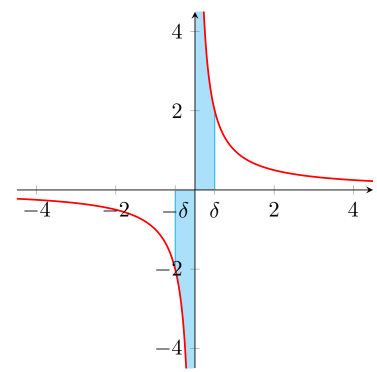


Figura 3. En la función $f(x) = \frac{1}{x}$ los límites laterales no convergen hacia $x = 0$: cuando $x \to 0^-$ la función va a $-\infty$, mientras que cuando $x \to 0^+$ va a ∞.

Analíticamente, parecería que convergen al mismo lugar $\frac{1}{0}$. No obstante, el acercamiento a 0 por la izquierda se da desde la parte negativa del eje x, lo cual hace que la función se dirija a $-\infty$; mientras tanto, el acercamiento a 0 por la derecha es desde el eje x en su parte positiva lo cual hace que la función crezca hacia ∞. Así es como el centro del entorno no tiene correspondencia en el codominio. La figura 3 muestra la geometría de la situación expuesta.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ \dfrac{4}{4x-3}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcule

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Puesto que la función es segmentada, se recurre a los límites laterales para calcular el límite general. A la izquierda de $x=1$ se encuentra la regla de correspondencia $x+1$, por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x+1 \\ &= 1+1 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 2 \end{aligned} \tag{6}$$

A la derecha de $x=-1$ se encuentra $\frac{4}{4x-3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{4}{4x-3} \\ &= \frac{4}{4-3} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= 4 \end{aligned} \tag{7}$$

Dado que los límites laterales (6) y (7) son diferentes, se concluye que el límite general no existe.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \nexists$$

La figura 4 muestra la gráfica de la función y geometría del límite inexistente.

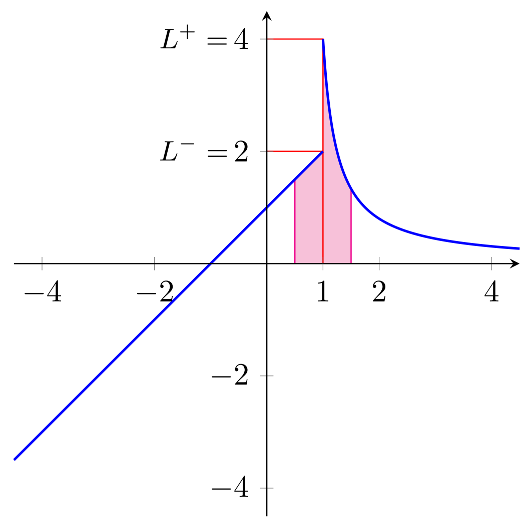


Figura 4

Una característica importante del límite lateral es que por sí mismo, siempre existe. Esto hace posible calcular el límite de funciones en las acotaciones superior e inferior del dominio, ya que la existencia del mismo se reduce a la existencia del límite lateral.

Si el dominio de la función $f(x)$ es $D_f : x < a$ entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Si el dominio de la función $f(x)$ es $D_f : b < x$ entonces

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x)$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 16: Cálculo de Límites

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Propiedades de los Límites

Al fundamentar el concepto del límite, es necesario estudiar la manera en la cual se trabaja su cálculo. Se ha establecido que para evaluar un límite en $x = a$ basta con evaluar la función en a. Sin embargo, no siempre puede realizarse este proceso, ya que a puede no pertenecer al dominio de la función analizada y en consecuencia se vuelve inviable la evaluación directa.

La manera más adecuada de evaluar límites consiste en aplicar propiedades que permitan descomponer el cálculo para evitar las llamadas formas indeterminadas (divisiones $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, entre otras) o cocientes inexistentes $\frac{c}{0}$. A continuación se listan las propiedades de los límites.

Límite de la función constante

Sea $f(x) = k$ una función constante. El límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a se define como

$$\lim_{x\to a} k = k$$

Límite de la suma de funciones

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. El límite de la suma $f(x) + g(x)$ cuando x se acerca a a es

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Límite del producto de una función por una constante

Sean la función $f(x)$ y $k \in \mathbb{R}$. El límite del producto $kf(x)$ cuando x se acerca a a es

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$$

Límite de la multiplicación de funciones

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. El límite de la multiplicación $f(x)\,g(x)$ cuando x se acerca a a se define como

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\,g(x)\big) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Límite de la división de funciones

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$. El límite de la división $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x se acerca a a es

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)};\qquad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

Límite de la potencia y la raíz de una función

Sea la función $f(x)$ y $n\in\mathbb{N}$. El límite de la potencia $\left(f(x)^n\right)$ cuando x se acerca a a se define como

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

El límite de la raíz $\sqrt[n]{f(x)}$ cuando x se acerca a a se define como

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)};\qquad \lim_{x\to a}f(x)\geq 0$$

2. Cálculo de Límites

Una vez conocidas las propiedades que rigen a los límites, el cálculo de los mismos puede tomar diversos caminos y puede hacerse más eficiente.

Además, la evasión de expresiones indeterminadas o inexistentes se vuelve más clara y eficiente mediante la aplicación de las propiedades de los límites.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}$$

Al evaluar el límite, se llega a un cociente indeterminado

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}&=\frac{\sqrt{3-0}-\sqrt{3+0}}{0}\\&=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0}\\&=\frac{0}{0}\end{aligned}$$

Es necesario recurrir a las diversas propiedades ya descritas para trabajar el límite. Algebraicamente, se puede racionalizar el numerador de la función al multiplicar y dividir por su conjugado:

$$\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}=\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}$$

Al simplificar el producto se obtendrá una regla de correspondencia equivalente a la función original.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}&=\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}\\&=\frac{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-\left(\sqrt{3+x}\right)^2}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}\\&=\frac{3-x-(3+x)}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}\\&=\frac{3-x-3-x}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}\\\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{x}&=\frac{-2x}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}\end{aligned}$$

Ahora puede calcularse el límite equivalente

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}$$

Pero, antes de realizar la evaluación, se deben aplicar las propiedades del producto y el cociente de límites para simplificar la expresión:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)} &= \frac{-2\lim\limits_{x\to 0}x}{\left(\lim\limits_{x\to 0}x\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)\right)}\\
&= \frac{-2}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}\\
&= \frac{-2}{\sqrt{3-0}+\sqrt{3+0}}\\
&= \frac{-2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}\\
\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)} &= -\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior se hizo uso de la racionalización para aplicar las propiedades y calcular el límite. Otras funciones permiten factorizar la regla de correspondencia en lugar de expandirla como en la racionalización.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2-16}$$

Al evaluar directamente el límite se obtiene uno de los cocientes indeterminados:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2-16} &= \frac{(-4)^3+64}{(-4)^2-16}\\
&= \frac{-64+64}{16-16}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2-16} = \frac{0}{0}$$

Para evitar la indeterminación se debe reescribir la regla de correspondencia mediante factorización:

$$\frac{x^3+64}{x^2-16} = \frac{(x+4)\left(x^2-4x+16\right)}{(x-4)(x+4)}$$

Por lo tanto, el cálculo adecuado para el límite es

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2-16} &= \frac{\lim\limits_{x\to -4}(x+4)\lim\limits_{x\to -4}\left(x^2-4x+16\right)}{\lim\limits_{x\to -4}(x-4)\lim\limits_{x\to -4}(x+4)}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to -4}\left(x^2-4x+16\right)}{\lim\limits_{x\to -4}(x-4)}\\
&= \frac{(-4)^2-4(-4)+16}{-4-4}\\
&= \frac{16+16+16}{-16}\\
\lim_{x\to -4}\frac{x^3+64}{x^2-16} &= -3
\end{aligned}$$

La simplificación de funciones para aplicar propiedades también es válida para las funciones segmentadas.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to 10}\frac{|x-10|}{x-10}$$

En este ejemplo se requiere de propiedades y límites laterales.

La función en su forma seccionada es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-10}{x-10}, & x \geq 10 \\ -\dfrac{x-10}{x-10}, & x < 10 \end{cases}$$

AL evaluar cada límite lateral y verificar si existe igualdad se obtendrá el valor del límite.

Límite por la izquierda:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 10^-} -\frac{x-10}{x-10} &= -\frac{\lim\limits_{x\to 10^-}(x-10)}{\lim\limits_{x\to 10^-}(x-10)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Límite por la derecha:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 10^+} \frac{x-10}{x-10} &= \frac{\lim\limits_{x\to 10^+}(x-10)}{\lim\limits_{x\to 10^+}(x-10)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como los límites laterales son diferentes entre sí, se concluye que no existe el límite de la función $f(x)$.

Cabe aclarar que la acción de aplicar la simplificación después de las propiedades, puede realizarse directamente en la función y después evaluar el límite.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 17: Formas Indeterminadas y Límites a Infinito

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Infinito

Uno de los conceptos matemáticos más importantes es el infinito. La idea de infinito se establece en diversas ramas de la Matemática (como Teoría de Conjuntos, Geometría Analítica, Cálculo, Álgebra, entre otras) o de otras ciencias como la Física y la Astronomía.

Se debe aclarar que infinito es un concepto; considerarlo como una cantidad o una ubicación es erróneo, porque no es un valor determinado. La discusión sobre el concepto de infinito queda fuera de los alcances de este curso, por lo que solo se establecerán las propiedades que le rigen en el estudio del Cálculo Diferencial, así como de las formas indeterminadas en las cuales aparece.

Las propiedades para trabajar con infinito y $x \in \mathbb{R}$ son:

- $x + \infty = \infty$
- $x - \infty = -\infty$
- Si $x > 0$, entonces $x \cdot \infty = \infty$ y $x \cdot (-\infty) = -\infty$
- Si $x < 0$, entonces $x \cdot \infty = -\infty$ y $x \cdot (-\infty) = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$
- $(-\infty)(-\infty) = \infty$
- $-\infty \cdot \infty = -\infty$
- $\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} \Rightarrow 0$

2. Formas Indeterminadas

Anteriormente se ha mencionado que al evaluar un límite es necesario evitar expresiones como $\frac{0}{0}$, ya que este valor no está determinado.

Al indicar que $\frac{0}{0}$ es un resultado no determinado, quiere decir que no se conoce el valor que se obtiene al realizar dicha operación.

Ejemplo. Muestre que $\frac{0}{0}$ es un cociente indeterminado.

La prueba usará la demostración por contradicción. Se asume que

$$\frac{0}{0} = 1 \tag{1}$$

Ahora, (1) se multiplica a ambos lados por un número cualquiera $b \in \mathbb{R}$, tal que $b \neq 1$:

$$b \cdot \frac{0}{0} = b \tag{2}$$

Por la multiplicación, la expresión (2) se reescribe como

$$\begin{aligned} b \cdot \frac{0}{0} &= b \\ \frac{b \cdot 0}{0} &= b \\ \frac{0}{0} &= b \end{aligned} \tag{3}$$

La igualdad en (3) se contradice con lo estipulado al inicio de la prueba, pues se asumió que $\dfrac{0}{0}$ solo posee el valor de 1 y como $b \neq 1$, el cociente $\frac{0}{0}$ no puede tener un valor determinado; consecuentemente, es una forma indeterminada. ■

El cociente $\frac{0}{0}$ no es la única expresión indeterminada. Existen siete principales expresiones que pueden presentarse, y que deben evitarse en el cálculo de límites.

Una forma indeterminada es un resultado que no aporta información sobre el límite al cual se acerca una función, después de haberse evaluado. Existen siete formas indeterminadas:

1. $\dfrac{0}{0}$
2. $\infty - \infty$
3. $\dfrac{\infty}{\infty}$
4. $0 \cdot \infty$
5. 0^0
6. 1^∞
7. ∞^0

A continuación se probarán algunas de las formas indeterminadas.

Ejemplo. Muestre que $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ y $0 \cdot \infty$ son formas indeterminadas.

Las pruebas se realizarán mediante la demostración por contradicción o por reducción al absurdo.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$

Se asume que

$$\frac{\infty}{\infty} = 1 \tag{4}$$

Por propiedades del uso de infinito, (4) puede reescribirse:

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{\infty} &= 1 \\ \frac{\infty + \infty}{\infty} &= 1 \\ \frac{\infty}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

(6)

Al sustituir (4) en (5) se obtiene un absurdo

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} &= 1 \\ 1 + 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{\infty}{\infty}$ no es igual a 1. Por lo tanto no puede determinarse el valor de $\frac{\infty}{\infty}$. ■

Forma $\infty - \infty$

Se asume que

$$\infty - \infty = 0 \tag{7}$$

Por propiedades del manejo de infinito

$$\begin{aligned} \infty - \infty &= 0 \\ (\infty + \infty) - \infty &= 0 \\ \infty + (\infty - \infty) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Al sustituir (7) en (8) se obtiene un absurdo:

$$\begin{aligned} \infty + (\infty - \infty) &= 0 \\ \infty + 0 &= 0 \\ \infty &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual hace concluir que es falso el asumir (7). Por lo tanto, $\infty - \infty$ no tiene un valor determinado. ■

Forma $0 \cdot \infty$

Debido a la definición de inversos aditivos, $x - x = 0$, la forma se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \infty &= (x - x) \cdot \infty \\ &= x \cdot \infty - x \cdot \infty \\ &= \infty - \infty \end{aligned}$$

Por lo que $0 \cdot \infty$ desemboca a una forma indeterminada. ■

Para evitar las indeterminaciones, se deben aplicar procedimientos algebraicos junto con propiedades de límites para remover las expresiones que crean el conflicto en el cálculo del límite.

3. Límites a Infinito

Dentro de los límites que involucran a infinito existen aquéllos que tienden a infinito, y aquéllos donde la variable independiente es quien tiende a infinito.

Ambos tipos de límites contribuyen a establecer el comportamiento de una función y su gráfica. Los límites que involucran infinito indican cuando existen asíntotas verticales u horizontales, o bien que la función crezca o decrezca hacia los extremos de los ejes coordenados.

Se hace hincapié en el hecho que los límites que involucran infinito deben manejarse con sumo cuidado, ya que la manipulación incorrecta de infinito puede dar lugar a resultados incorrectos.

3.1. Límites que Tienden a Infinito

Hay funciones que el valor de su límite, cuando x tiende a a, no se dirige hacia algún valor, sino que tiene una tendencia a crecer constantemente (tiende a infinito) o a decrecer continuamente (tiende a menos infinito) en la imagen (a lo largo del eje y).

Sea la función $f(x)$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

entonces $f(x)$ crece (o decrece) arbitrariamente para toda x suficientemente cercana al número a, por ambos lados. Geométricamente, la función posee una asíntota vertical en $x = a$.

Se recuerda que el límite, aunque tienda a infinito, existe, si los límites laterales existen. También hay que mencionar el hecho que en ciertas funciones las asíntotas verticales existen aún cuando no exista el límite, como por ejemplo en la función $\frac{1}{x}$ cuando x se aproxima a 0.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

Al observar el límite no existe simplificación alguna, por lo que se procede a evaluarlo directamente.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} &= \frac{1}{(1)^2 - 2(1) + 1} \\ &= \frac{1}{0} \end{aligned}$$

Se obtiene un cociente inexistente, por lo que se procede a analizar la gráfica de la función, mostrada en la figura (1).

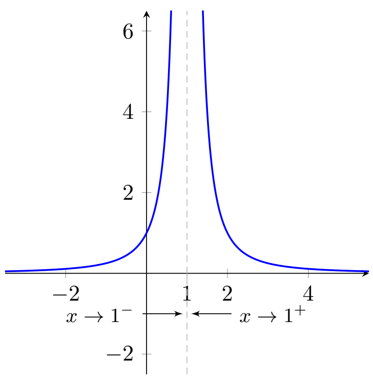


Figura 1

En la gráfica se observa que conforme x se acerca a 1, tanto por derecha como por izquierda, la función crece a lo largo del eje y.

Respecto al límite, se puede asegurar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \infty$$

Se corrobora que el lugar donde existe la asíntota corresponde con el valor para el cual el límite de la función se aproxima a infinito.

Como se observa en el ejemplo, es importante destacar que cuando el resultado de evaluar un límite es el cociente inexistente $\frac{k}{0}$, entonces el límite como tal tiende a infinito o a menos infinito.

3.2. Límites Donde la Variable Independiente Tiende a Infinito

Un límite también puede evaluarse cuando x se acerca a infinito. Conocer qué sucede con la función cuando se incrementa arbitrariamente la variable independiente, permite conocer si la función posee o no una asíntota horizontal, o bien saber si la función crece o decrece continuamente.

Sea $f(x)$. Si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

entonces $f(x)$ se acerca tanto como se desee a L mientras x se vuelve arbitrariamente grande. Geométricamente, se tiene una asíntota horizontal en $y = L$.

Dependiendo del tipo de función, la forma de analizar los límites cuando x se aproxima a infinito es diferente:

- ❑ Funciones polinómicas. Se factoriza la mayor potencia para evaluar el límite.

- Funciones racionales. Tanto numerador como denominador se dividen por el término que posea el mayor exponente.
- Funciones irracionales. Dependiendo de su forma, se aplican las reglas de funciones polinómicas y racionales.
- Funciones trigonométricas. Los límites de este tipo no existen.
- Funciones exponenciales y logarítmicas. Por sí mismas,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

En composición con otras funciones hay que manejarlas según el argumento sea polinómico, racional o irracional.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^3+x-1}{2x^4+x^2-3} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} -x^3+2x^2-x+1$$

Para el primer límite se tiene una función racional, por lo que debe dividirse tanto el numerador como el denominador por el término de la variable independiente con mayor exponente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^3+x-1}{2x^4+x^2-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x^4}\left(x^4-2x^3+x-1\right)}{\frac{1}{2x^4}\left(2x^4+x^2-3\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{2x^4}-\frac{2x^3}{2x^4}+\frac{x}{2x^4}-\frac{1}{2x^4}}{\frac{2x^4}{2x^4}+\frac{x^2}{2x^4}-\frac{3}{2x^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2x^4}}{1+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2x^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2x^4}}{1+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2x^4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^3+x-1}{2x^4+x^2-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2x^4}}{1+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2x^4}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{2\infty^3}-\frac{1}{2\infty^4}}{1+\frac{1}{2\infty^2}-\frac{3}{2\infty^4}} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^3+x-1}{2x^4+x^2-3} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

El segundo límite es para una función polinómica, por lo que debe factorizarse la mayor potencia de la variable independiente, incluyendo al coeficiente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} -x^3+2x^2-x+1 &= \lim_{x\to\infty} x^3\left(-1+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) \\
&= (\infty)^3\left(-1+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{\infty^3}\right) \\
&= \infty\,(-1) \\
\lim_{x\to\infty} -x^3+2x^2-x+1 &= -\infty
\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 18: Límites Especiales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Límites Trigonométricos

La evaluación de límites trigonométricos se realiza de la misma forma que un límite usual.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta}$$

Al evaluar directamente el límite se obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta} &= \frac{\cos 0}{3+\sin 0}\\ &= \frac{1}{0+3}\\ \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta}{3+\sin\theta} &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

A pesar de un resultado directo en la evaluación del límite anterior, existen otros casos en los cuales se llega a una forma indeterminada que debe manipularse algebraicamente, como con cualquier otro límite, para sortearla.

Dentro de las acciones que deben considerarse existe un límite especial que incluye a la función seno:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

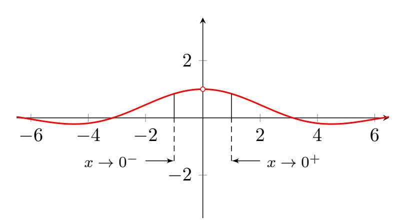


Figura 1. La función $\frac{\sin x}{x}$ presenta una singularidad en $x = 0$, ya que no existe asíntota vertical aún cuando la función no existe en dicho lugar.

La figura 1 muestra a la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Se observa que el entorno alrededor de $x = 0$ indica que el límite existe y es 1. Para demostrar el resultado del límite se acude al teorema del emparedado.

Sean las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ definidas en el entorno $E(a, r)$, excepto en a. Si en el entorno E se tiene

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

y se satisface que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) \qquad \Rightarrow \qquad L$$

entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

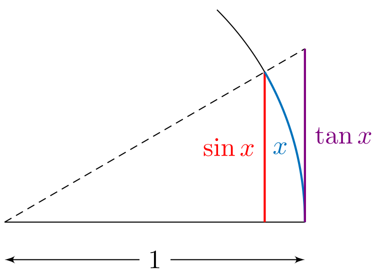


Figura 2. Tomando en cuenta que las longitudes $\sin x$, x y $\tan x$ tienen diferente magnitud, cuando x se aproxima a 0 las tres convergen al mismo punto.

En la figura 2 se muestra la trigonometría involucrada entre el seno y la tangente de una función y la longitud del arco de circunferencia. Esta relación indica que

$$\sin x \le x \le \tan x$$
$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x} \tag{1}$$

donde x es la longitud, medida en radianes, del arco de circunferencia con radio unitario. Al tomar recíprocos, la expresión (1) se convierte en

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x} \tag{2}$$

Al multiplicar (2) por $\sin x$, considerando únicamente el entorno cerca de 0, no se altera la desigualdad y se obtiene

$$\begin{aligned} (\sin x)\frac{\cos x}{\sin x} \quad &\le \quad (\sin x)\frac{1}{x} \quad \le \quad (\sin x)\frac{1}{\sin x} \\ \cos x \quad &\le \quad \frac{\sin x}{x} \quad \le \quad 1 \end{aligned}$$

Y al tomar el límite cuando x se aproxima a 0 se obtiene el límite de tres funciones convergentes al mismo valor

$$\lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1$$
$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$$

Por el teorema del emparedado

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

La figura 1 confirma este valor. Todo límite trigonométrico que pueda presentar una indeterminación puede modelarse mediante la función $\frac{\sin x}{x}$ para obtener un resultado concreto.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x \cot 3x}{2\sec x}$$

Al evaluar el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{5x \cot 3x}{2\sec x} &= \frac{0 \cdot \cot 0}{\sec 0} \\ &= \frac{0}{1} \cdot \frac{\cos 0}{\sin 0} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

se observa que debe aplicarse la manipulación de la funci on para evadir la indeterminación. Mediante equivalencias trigonométricas se simplificará el límite hasta eliminar el cociente que provoca la indeterminación.

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x \cot 3x}{2\sec x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x \frac{\cos 3x}{\sin 3x}}{2\frac{1}{\cos x}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{5x\cot 3x}{2\sec x} &= \lim_{x\to 0}\frac{5x\cos x\cos 3x}{2\sin 3x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3x}\cdot 5x\cos x\cos 3x}{\frac{1}{3x}2\sin 3x}\\
\lim_{x\to 0}\frac{5x\cot 3x}{2\sec x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{3}\cos x\cos 3x}{2\frac{\sin 3x}{3x}}
\end{aligned}$$

El fragmento del límite que puede causar incertidumbre es $\frac{\sin 3x}{3x}$. Para conocer el valor se hace el cambio de variable $3x = u$, y para saber cuál es el valor al cual tiende u se aplica la igualdad

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} 3x &= \lim_{u\to a} u\\
0 &= a
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la evaluación del límite es

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{5x\cot 3x}{2\sec x} &= \frac{\frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\cos x\cos 3x}{2\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}}\\
&= \frac{5\cos(0)\cos(3\cdot 0)}{6(1)}\\
\lim_{x\to 0}\frac{5x\cot 3x}{2\sec x} &= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

2. Límites Exponenciales

Los límites de las funciones exponenciales pueden desembocar en la indeterminación 1^∞, por lo que deben tratarse con sumo cuidado para obtener el resultado correcto.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ tales que sus respectivos límites cuando x se aproxima a a existen. Si $f(x) > 0$, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Para obtener el valor correcto de un límite exponencial, se requiere conocer el valor del límite exponencial

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3}$$

Al evaluar directamente (3) se obtiene 1^∞, por lo que deben removerse los elementos que provocan la indeterminación. Para manejar al límite se hará uso del desarrollo del binomio de Newton; en notación de suma, el desarrollo del límite es

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(1)^{n-k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{n!}{n!}+\tfrac{n!}{(n-1)!n}+\tfrac{n!}{2(n-2)!n^2}+\tfrac{n!}{3!(n-3)!n^3}+\cdots\right.\\
&\qquad \left.\cdots+\tfrac{n!}{n!n^n}\right)\\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\tfrac{n^2-n}{2n^2}+\tfrac{n^3-3n^2+2n}{6n^3}+\cdots+\tfrac{1}{n^n}\right) \qquad (4)
\end{aligned}$$

El límite (4) puede resolverse como un límite de función racional cuando la variable independiente tiende a infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\tfrac{n^2-n}{2n^2}+\tfrac{n^3-3n^2+2n}{6n^3}+\cdots+\tfrac{1}{n^n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2}+\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{6}+\cdots+\tfrac{1}{n^n}\right)
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots \tag{5}$$

El cálculo del límite llega a un valor específico, que contiene infinitas cifras decimales; se trata del número irracional e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

De esta manera, cualquier límite exponencial puede reducirse a (3) para remover las posibles indeterminaciones en el límite.

Ejemplo. Calcule

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4}$$

Para resolver este tipo de límites se requiere modelar a la función al límite (3). Este método permite saber de antemano que, mediante cambio de variable, debe obtenerse e como parte del resultado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x-5}-1\right)^{3x+4}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3}{2x-5}-\frac{2x-5}{2x-5}\right)^{3x+4}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-3-2x+5}{2x-5}\right)^{3x+4}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-5}\right)^{3x+4}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-5}{2}}\right)^{3x+4}
\end{aligned}$$

Ahora puede realizarse el cambio de variable

$$\begin{aligned}
n &= \frac{2x-5}{2}\\
\lim_{n\to b} n &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{2}\\
b &= \infty
\end{aligned}$$

Para tener el límite completo se debe multiplicar y dividir por n en el exponente.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3x+4}{n}n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3x+4}{n}n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{3x+4}{n}}
\end{aligned}$$

Mediante el límite exponencial y, volviendo del cambio de variable, se obtiene el valor del límite buscado.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{3x+4}{n}}\\
&= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3x+4}{n}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+4}{\frac{2x-5}{2}}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+8}{2x-5}}\\
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x+4} &= e^3
\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 19: Continuidad

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

Cuando se estudió el dominio de funciones, se observó que ciertos valores reales no pueden evaluar a algunas reglas de correspondencia. Geométricamente, los valores que no pertenecen al dominio de una función se reflejan como secciones donde la gráfica no existe. El fenómeno que las funciones presentan cuando existen o no secciones de su gráfica se conoce como continuidad.

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (a, b). Suponiendo que a es un punto dentro de dicho intervalo, entonces $f(x)$ es continua en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La continuidad es la propiedad de las funciones que permite predecir el comportamiento de su gráfica en un punto particular.

El caso contrario a la continuidad es la llamada discontinuidad. Todas las funciones que presentan asíntotas verticales en $x = a$ son discontinuas en dicho lugar. También existe cierto tipo de funciones que son discontinuas en algún punto $x = a$ del dominio y que no poseen asíntotas; este segundo tipo de discontinuidades se presentan frecuentemente en funciones segmentadas.

Los diversos casos de discontinuidad pueden englobarse en dos grandes grupos: las discontinuidades esenciales y removibles.

Sea la función $f(x)$ que presenta un punto de discontinuidad en $x = b$. Si $\lim_{x \to b} f(x)$ no existe, entonces la discontinuidad en $x = b$ es esencial. En cambio, si $\lim_{x \to b} f(x)$ existe, entonces la discontinuidad es evitable. La figura 1 muestra ambos tipos de discontinuidades.

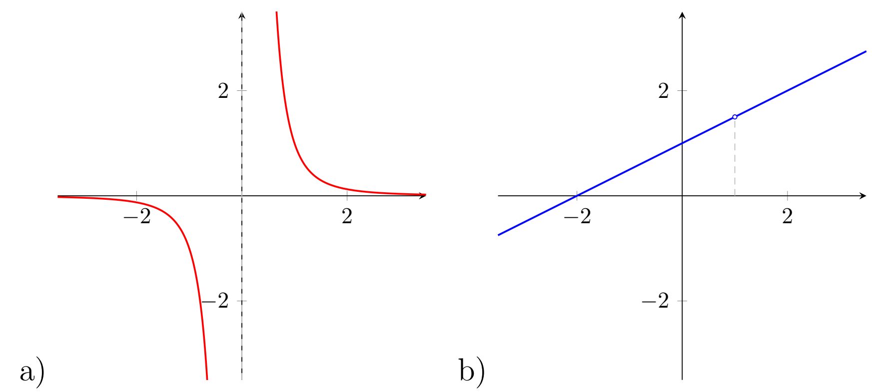


Figura 1. a) discontinuidad esencial; b) discontinuidad removible.

Una vez que se ha detectado una discontinuidad en una función, se debe investigar si se trata del tipo esencial o removible. Para ello, el límite de la función cuando x se aproxima a la discontinuidad es el criterio que permitirá conocer más a fondo a la función.

Ejemplo. Sea la función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 3, & x < -2 \\ x^2, & -2 < x < 1 \\ 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1}, & 1 < x \end{cases}$$

Determina si $f(x)$ es continua en $x = -2$ y $x = 1$.

La función es seccionada, por lo que deben analizarse los límites laterales para determinar si la función es continua.

Para $x = -2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^-} f(x) &= \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4}x + 3 \\ &= \frac{1}{4}(-2) + 3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5}{2} \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} x^2 \\ &= (-2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad 4 \end{aligned}$$

Como los límites laterales son diferentes, entonces

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \nexists$$

Se concluye que la función posee una discontinuidad esencial en $x = -2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} x^2 \\ &= (1)^2 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad 1 \end{aligned}$$

Ambos límites son iguales, por lo que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Ahora se procedería a evaluar la función en $x = 1$; sin embargo, como el dominio de la función no incluye dicho valor, se concluye que la función es discontinua en $x = 1$. La figura 2 muestra la gráfica de la función.

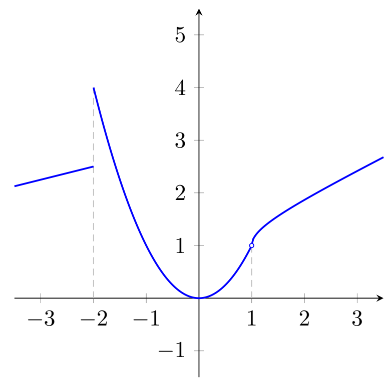


Figura 2

Algo a destacar en las discontinuidades evitables es su posible remoción. De acuerdo a la definición de continuidad, el límite de la función debe ser igual a la función evaluada en el valor $x = b$. De esta manera, la discontinuidad en la función se elimina al momento de agregar la condición de continuidad a la función; es decir, si en $x = b$ hay una discontinuidad removible, entonces la función se complementa con

$$f\left(b\right)=\lim_{x\to b}f\left(x\right)$$

Ejemplo. Sea la función

$$f\left(x\right)=\begin{cases}e^{x+1}, & x<-1\\ x^2, & -1<x\end{cases}$$

Determine si $f\left(x\right)$ es discontinua en $x=-1$; en caso de serlo, remueva la discontinuidad si se trata del tipo evitable.

De acuerdo al dominio, el valor de $f\left(-1\right)$ no está definido pues $x=-1$ no es parte del dominio. Esto indica que hay una discontinuidad en $x=-1$; para verificar su tipo se evaluarán los límites laterales.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^-}f\left(x\right)&=\lim_{x\to-1^-}e^{x+1}\\ &=e^{-1+1}\qquad\Rightarrow\qquad 1\\ \lim_{x\to-1^+}f\left(x\right)&=\lim_{x\to-1^+}x^2\\ &=\left(-1\right)^2\qquad\Rightarrow\qquad 1\end{aligned}$$

Como los límites laterales son iguales, entonces el límite de $f\left(x\right)$ cuando x se aproxima a -1 existe, y en consecuencia la discontinuidad en $x=-1$ es removible.

Para evitar la discontinuidad se debe igualar el límite a la función evaluada en $x=-1$:

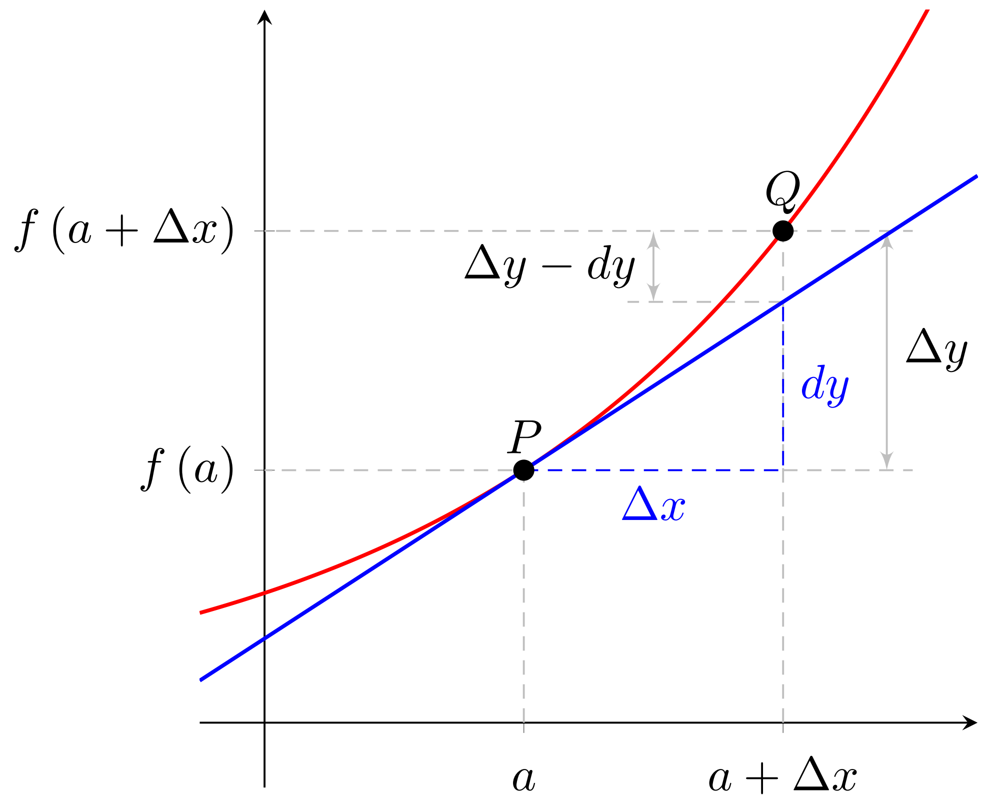
$$f\left(-1\right)=\lim_{x\to-1}f\left(x\right)$$

Finalmente, la función sin discontinuidad es

$$g_1\left(x\right)=\begin{cases}e^{x+1}, & x<-1\\ 1, & x=-1\\ x^2, & -1<x\end{cases}$$

IV

LA DERIVADA



CÁLCULO
Y GEOMETRÍA
ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 20: La Derivada

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Razón de Cambio Promedio

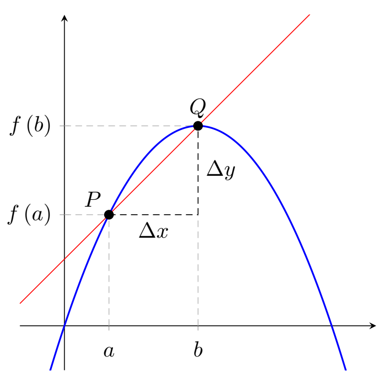


Figura 1. Al incrementar x desde a hasta b, la función también se incrementa (la gráfica va desde el punto P hasta el punto Q).

Los límites indican el valor L al cual una función $f(x)$ se aproxima conforme la variable independiente x se acerca a un valor a. Ésta es una característica importe al momento de analizar la continuidad de una función.

Otra de las características que permite definir a la función es la forma en la cual cambia; o sea, pronosticar el cambio de la función conforme cambia la variable independiente.

Suponiendo que una función $f(x)$ está definida en un intervalo $[a, b]$, se puede establecer un indicador que permita definir el cambio que sufre f desde $f(a)$ hasta $f(b)$. Cuando la variable independiente x cambia desde a hasta b, se dice que x ha sufrido un incremento, que es denotado como

$$\Delta x = b - a$$

Este incremento Δx se refleja en un cambio en la función $f(x)$, denotado como

$$\Delta y = f(b) - f(a)$$

Para medir Δy respecto de Δx, se recurre a una razón para generalizar el indicador a toda la función respecto de todo el dominio; a la división propuesta se le conoce como razón de cambio promedio.

> Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. La razón de cambio promedio de f se define como
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
>
> e indica, en promedio, la diferencia que sufre f cuando $x = a$ se incrementa hasta $x = b$.

En la figura 1 se muestra que la razón de cambio promedio representa la pendiente de una recta secante que toca a la función $f(x)$ en $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Calcule la razón de cambio promedio en el intervalo $[-1, 1]$.

Conocidos los extremos del intervalo, se evalúa la función en ambos y se tienen todos los datos necesarios para calcular la razón de cambio promedio.

$$f(-1) = \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} = -2 \qquad f(1) = \frac{4(1)}{(1)^2+1} = 2$$

Por lo tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-(-2)}{1-(-1)} = 4/2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

2. Razón de Cambio Instantáneo y Definición de Derivada

Conocida la razón e cambio promedio, cabe realizarse la siguiente pregunta: ¿qué sucede cuando el incremento Δx, en la razón de cambio promedio, es muy pequeño? La respuesta yace en la aplicación de límites.

Como se ha comentado, e ilustrado en la figura 1, la interpretación geométrica de la razón de cambio promedio es la pendiente de una recta secante que contiene a los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$. En la figura 2 se ilustra el caso de la pregunta que se realizó anteriormente, donde se observa que conforme el punto Q se acerca hacia P, el incremento Δx se aproxima a 0 y en consecuencia la recta secante tiende a ser una recta tangente. Esta idea plantea que b es a incrementada; por lo tanto, $b = a + \Delta x$, y el intervalo de la razón de cambio promedio es $[a, a + \Delta x]$. Al evaluar la razón de cambio en el intervalo reescrito se obtiene

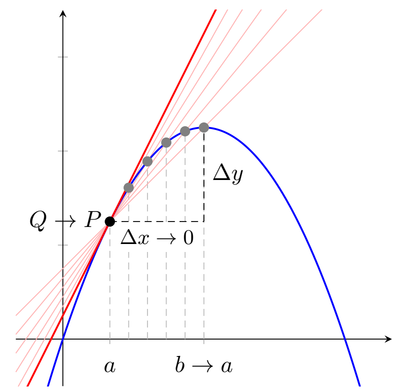


Figura 2. Al disminuir el incremento Δx, el punto Q se aproxima a P lo cual provoca que la recta secante se aproxime a una recta tangente a la curva.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1}$$

Como el incremento Δx se aproxima a 0, entonces hay que tomar el límite a la expresión (1). Este límite se conoce como la razón de cambio instantáneo.

Sea $f(x)$ una función definida en $x = a$. La razón de cambio instantáneo de f en a se define como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

La razón de cambio instantáneo indica cuál es la variación de la función $f(x)$ respecto de la variación de la variable independiente x, por lo que la definición debe ser aplicable a cualquier valor $a = x$ dentro del dominio de f. Esta generalización introduce una de las herramientas fundamentales de la Matemática, la Física y la ciencia en general: la derivada.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[x, x+\Delta x]$. La derivada de la función f se define como

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En esencia, la razón de cambio instantáneo es la derivada de una función; la deferencia radica en que la primera es la segunda evaluada en un punto, ya que la derivada de una función es otra función.

Ejemplo. Calcule la derivada de la función

$$g(x) = \sqrt{x}$$

El cálculo de la derivada requiere resolver un límite, por lo que se requiere la manipulación algebraica para evitar las indeterminaciones. El proceso comienza al aplicar la definición ala función en cuestión:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \qquad (2) \end{aligned}$$

Al evaluar directamente el límite se llega a la indeterminación $\frac{0}{0}$; para removerla se multiplicará y dividirá por el conjugado del numerador.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \qquad (3) \end{aligned}$$

La simplificación de (3) permitirá evaluar el límite.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{(\Delta x)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{(\Delta x)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{(\Delta x)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\ \frac{dg}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

La derivada representa al cambio en una función conforme se modifica la variable independiente. Este cambio se manifiesta de manera física en fenómenos mecánicos, termodinámicos o electromagnéticos. Geométricamente, la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva que representa gráficamente a la función; en Cálculo Multivariable se estudiará que la derivada es un vector tangente que dirige a la recta tangente a una curva.

Un aspecto importante de la derivada es su forma de representarla. Las diferentes notaciones existentes indican las diversas extensiones y significados que tiene la derivada en la Matemática y otras ciencias. Desde la primera notación, dada a conocer por Isaac Newton, hasta las más recientes, como la de Gustav Jacobi, la derivada siempre ha representado lo mismo: el cambio.

A continuación se expone un listado de las diversas notaciones de la derivada, así como su uso primordial:

- Notación de Isaac Newton:

$$\dot{y}$$

Se utiliza en Mecánica para denotar a la velocidad o la aceleración respecto del desplazamiento: $v = \dot{y}$, $a = \ddot{y}$.

- Notación de Gottfried Leibnitz:

$$\frac{dy}{dx}$$

Una de las notaciones más usuales. Su uso permite definir el concepto de diferencial e interpretar a la derivada como el cociente de diferenciales. Es muy usada en Matemáticas, y permite definir el método de separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales.

- Notación de Joseph Lagrange:

$$f'(x)$$

Otra de las notaciones usuales. Es utilizada en Matemáticas para representar ecuaciones diferenciales de orden n.

- Notación de Antoine Arbogast:

$$Df$$

Esta notación es utilizada para definir al operador lineal diferencial D. Se usa en Álgebra Lineal para definir un método de solución de ecuaciones diferenciales mediante el llamado polinomio característico.

- Notación de Gustav Jacobi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Es la notación por excelencia para las derivadas parciales, un tipo especial de derivada que se aplica a funciones multivariable como $f(x, y)$.

- Notación de Leonhard Euler:

$$D_x f$$

Está basada en la notación de Arbogast, con la diferencia que se escribe de manera explícita la variable sobre la cual se deriva. También fue predecesora para las notaciones

$$f_x \qquad \partial_x f$$

usadas en derivadas parciales.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 21: Reglas Básicas de Derivación

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Derivada de una Constante

La derivada constituye un indicador de cambio en una función. El único tipo de funciones que no presenta cambio alguno es una constante, ya que todos los elementos del dominio están relacionados con la misma imagen. De esta forma, cuando en una función constante $f(x) = k$ se incrementa la variable independiente x, se presenta la igualdad

$$\begin{aligned} k &= k \\ f(x + \Delta x) &= f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Al sustituir (1) en la definición de derivada se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ \frac{df}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Sea $f(x) = k$ una función constante. La derivada de una función constante siempre se calcula como

$$\frac{d}{dx} k = 0$$

debido a que esta función no presenta cambio alguno en todo su dominio.

2. La Derivada como Operador Lineal

Una de las propiedades más importantes de la derivada es su capacidad para conservar la suma de funciones y la multiplicación por un escalar.

Tomando en cuenta las propiedades de límites, al aplicar la definición de derivada a la función

$$f(x) = kg(x) + h(x)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{kg(x+\Delta x) - kg(x)}{\Delta x} + \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \right) \\
&= k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
\frac{df}{dx} &= k\frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}
\end{aligned}$$

El fenómeno de conservar la suma y la multiplicación por un escalar recibe el nombre de linealidad, que es sujeto de estudio en el Álgebra Lineal. La denominación de operador indica que la derivada toma una función y la transforma en otra función.

> Sean las funciones $g(x)$ y $h(x)$. La derivada de la suma y multiplicación por un número $k \in \mathbb{R}$ se define como
>
> $$\frac{d}{dx}(kg + h) = k\frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$$
>
> Debido a esto, la derivada es un operador lineal.

Esta propiedad aplica de la misma forma a la resta, ya que ésta es un caso especial de la suma.

3. Derivada del Producto de Funciones

Una vez que se conocen las derivadas de la suma de funciones y la multiplicación de una función por un escalar, hay que definir la regla de derivación para el producto de funciones y consecuentemente para el cociente.

Considerando que la función $f(x)$ se define como

$$f(x) = g(x)\,h(x)$$

la derivada del producto de funciones se calcula mediante la definición:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\,h(x+\Delta x) - g(x)\,h(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

En la expresión (2) no existen términos para realizar factorización alguna, por lo que debe completarse el numerador para encontrar factores comunes. El método más usual es sumar un cero que contenga una mezcla de los términos que desean factorizarse; en este caso se desea trabajar con $g(x+\Delta x)\,h(x+\Delta x)$ y $g(x)\,h(x)$, por lo que el término para factorizar debe ser $g(x+\Delta x)\,h(x)$, el cual se sumará y restará al numerador de (2) para conservar la igualdad.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\,h(x+\Delta x) - g(x)\,h(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x+\Delta x)\,h(x+\Delta x) - g(x)\,h(x)}{\Delta x} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{g(x+\Delta x)\,h(x) - g(x+\Delta x)\,h(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{g(x+\Delta x)\,h(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)\,h(x)}{\Delta x} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{g(x+\Delta x)\,h(x) - g(x)\,h(x)}{\Delta x} \right) \\
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(g(x+\Delta x)\,\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \right. \\
&\qquad \left. + h(x)\,\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Por las propiedades de los límites, la expresión (3) permite calcular dos límites, uno de ellos con base en el límite de un producto de funciones.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(g(x+\Delta x) \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \right. \\
&\quad \left. + h(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \\
&\quad + \lim_{\Delta x \to 0} h(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
\frac{df}{dx} &= g(x) \frac{dh}{dx} + h(x) \frac{dg}{dx}
\end{aligned}$$

De esta manera se obtiene la regla de derivación del producto de dos funciones.

Sean las funciones $g(x)$ y $h(x)$. La derivada del producto entre g y h se define como

$$\frac{d}{dx}(gh) = g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx}$$

La regla del producto de funciones permite deducir la forma de derivar el cociente de funciones. Sin embargo, es necesario revisar las derivadas de la función potencia x^n y de la función compuesta; ésta última regla se revisará más adelante.

4. Derivada de la Función Potencia

Después de la derivada de la función constante, la derivada de la función potencia x^n es fundamental para calcular correctamente el resto de derivadas.

Sea la función $f(x) = x^n$. La derivada de f se calcula como

$$\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$$

Al derivar la función $f(x) = x$ mediante la definición se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 1 \\
\frac{d}{dx}x &= 1 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Se observa que se satisface la regla que enunció para funciones potencia.

Para demostrar de manera completa esta regla de derivación se acudirá al método de inducción matemática, recalcando que se tomará $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo. Demuestre, mediante inducción matemática, que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^1 &= (1)\,x^{1-1} \\
&= x^0 \\
\frac{d}{dx}x &= 1
\end{aligned}$$

El caso es válido por (5).

Para $n=k$:

$$\frac{d}{dx}x^n = kx^{k-1}$$

Es la hipótesis de inducción, y por lo tanto es cierta.

Para $n=k+1$:

$$\frac{d}{dx}x^{k+1} = (k+1)\,x^{(k+1)-1}$$

Es la tesis de inducción, y se trabajará del lado izquierdo mediante las leyes de exponentes y la derivada del producto.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{k+1} &= \frac{d}{dx}\left(x^k x\right)\\ \frac{d}{dx}x^{k+1} &= x^k\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}x^k \qquad (5)\end{aligned}$$

En el primer sumando de (5) se encuentra la derivada calculada en (4), mientras que en el segundo sumando se encuentra la hipótesis de inducción.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^{k+1} &= x^k\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}x^k\\ &= x^k(1) + x\left(kx^{k-1}\right)\\ &= x^k + kx^{k-1+1}\\ &= x^k + kx^k\\ \frac{d}{dx}x^{k+1} &= (k+1)\,x^k\end{aligned}$$

Se verifica la veracidad de la regla de derivación. ■

Esta regla de derivación puede extender el exponente a cualquier número real. La demostración correspondiente se pospondrá hasta revisar reglas de derivación exponencial.

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$f(x) = 3x^4 - 2x + \left(x^2+1\right)\sqrt{x}$$

Para obtener la derivada completa se aplican las reglas revisadas.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x + \left(x^2+1\right)\sqrt{x}\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(3x^4\right) + \frac{d}{dx}(-2x) + \frac{d}{dx}\Big(\left(x^2+1\right)\sqrt{x}\Big)\\ &= 3\frac{d}{dx}x^4 - 2\frac{d}{dx}x + \left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x} + \sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)\\ &= 3\left(4x^3\right) - 2(1) + \left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} + \sqrt{x}\left(\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}(1)\right)\\ &= 12x^3 - 2 + \left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + \sqrt{x}\,(2x+0)\\ \frac{df}{dx} &= 12x^3 - 2 + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x^3}\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 22: Derivada de la Composición de Funciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. La Regla de la Cadena

Una de las operaciones importantes en las funciones es la composición:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) \circ g(x) \\ h(x) &= f(g(x)) \end{aligned} \tag{1}$$

La forma en la cual se deriva la composición involucra a las derivadas de las funciones que intervienen en la operación. Al aplicar la definición de derivada a (1)se tiene la expresión

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \tag{2}$$

Para encontrar la derivada de la función compuesta, el límite en (2) se multiplicará y dividirá por $\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$, que es el incremento de la función $g(x)$, para reorganizar los denominadores.

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x) - g(x)} \end{aligned}$$

$$\frac{dh}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

El cociente en la izquierda de (3) puede cambiar de variable, ya que el denominador es el incremento Δg:

$$\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} g(x) + \Delta g &= g(x+\Delta x) \\ \Rightarrow \quad g + \Delta g &= g(x+\Delta x) \end{aligned} \tag{5}$$

Para completar el cambio de variable, con (4) se obtiene el valor al cual Δg debe aproximarse:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta g \to ?} \Delta g &= \lim_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x) - g(x) \\ \lim_{\Delta g \to ?} \Delta g &= g(x+0) - g(x) \\ \lim_{\Delta g \to ?} \Delta g &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta g \to 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Por propiedades sobre límites, la derivada (3) se descompone en

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\delta x) - g(x)} \tag{7}$$

y en la derivada de g respecto de x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \frac{dg}{dx} \tag{8}$$

Al sustituir las expresiones (4), (5) y (6) en (7) se obtiene la derivada de f respecto de g:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\delta x) - g(x)} &= \\ \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta x) - f(g)}{\Delta g} &= \frac{df}{dg} \end{aligned} \tag{9}$$

De esta forma, al sustituir (8) y (9) en (3), se obtiene la regla de derivación buscada

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ \frac{dh}{dx} &= \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta x) - f(g)}{\Delta g} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \end{aligned}$$

Sean las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. La derivada de la función compuesta

$$h(x) = f(g(x))$$

se define como

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

Esta regla se conoce como regla de la cadena.

La regla de la cadena es una de las formas de derivación más usuales, ya que permite aplicar consecutivamente derivadas anidadas simples para obtener la derivada de una función más compleja.

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$p(x) = \sqrt{x^2 - \sqrt{x}}$$

Para derivar esta función se aplicará la regla de la cadena; es conveniente establecer cuales son las funciones que intervienen en la composición. De inicio se establece que

$$q(x) = x^2 - \sqrt{x}$$

y en consecuencia

$$p(q(x)) = \sqrt{q(x)}$$

donde puede observarse que se está aplicando la composición de funciones. Así, la derivada que se desea obtener es

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dx}$$

Derivando p respecto de q con la regla de la función potencia:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dq} &= \frac{d}{dq}\sqrt{q} \\ &= \frac{d}{dq}q^{\frac{1}{2}} \\ \frac{dp}{dq} &= \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ahora, se calcula la derivada de q respecto de x aplicando la linealidad y la regla de la función potencia:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2 - \sqrt{x}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dx} &= \frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}\\ &= 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Entonces, la derivada completa de la función p original es

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dx} &= \frac{dp}{dq}\frac{dq}{dx}\\ &= \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}}\left(2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{q}}\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}}\left(\frac{4x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\right)\\ \frac{dp}{dx} &= \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^3 - x\sqrt{x}}}\end{aligned}$$

La regla de la cadena se realiza cada ocasión que se deriva una función, no importando si se especifica o no la composición de transformaciones. Usualmente, esta regla se aplica cuando se enuncia: *la derivada se calcula como el exponente como coeficiente por la función elevada a una unidad menos por la derivada de la función dentro.*

2. Derivada del Cociente de Funciones

Ahora que ya se conoce la regla de la cadena, puede deducirse la regla que permite calcular la derivada de la función cociente. Para ello se partirá de la regla que permite derivar un producto de funciones, considerando a la división como un caso especial. Tomando la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ésta puede expresarse como

$$h = f(g)^{-1}$$

cuya derivada es

$$\frac{dh}{dx} = f\frac{d}{dx}(g)^{-1} + (g)^{-1}\frac{d}{dx}f \tag{10}$$

Para derivar $(g)^{-1}$ se aplica la regla de la cadena junto con la regla de la función potencia:

$$\frac{d}{dx}(g)^{-1} = -(g)^{-2}\frac{d}{dx}g \tag{11}$$

Para tener la derivada completa se sustituye (11) en (10) y se realiza la suma de fracciones.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{dx} &= f\frac{d}{dx}(g)^{-1} + (g)^{-1}\frac{d}{dx}f\\ &= -f(g)^{-2}\frac{d}{dx}g + (g)^{-1}\frac{d}{dx}f\\ &= -\frac{f}{g^2}\frac{d}{dx}g + \frac{g}{g^2}\frac{d}{dx}f\\ \frac{dh}{dx} &= \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}\end{aligned}$$

La regla para derivar la división de la función $f(x)$ entre la función $g(x)$ es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+2}$$

De acuerdo a la regla del cociente, la derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{dx} &= \frac{\left(x^2+2\right)\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2} \\
&= \frac{\left(x^2+2\right)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(1) - \sqrt{x+1}\,(2x)}{\left(x^2+2\right)^2} \\
&= \frac{\frac{x^2+2}{2\sqrt{x+1}} - \frac{4x^2+4x}{2\sqrt{x+1}}}{\left(x^2+2\right)^2} \\
&= \frac{x^2+2-4x^2-4x}{2\sqrt{x+1}\left(x^2+2\right)^2} \\
\frac{dh}{dx} &= \frac{-3x^2-4x+2}{2\sqrt{x+1}\left(x^2+2\right)^2}
\end{aligned}$$

3. Derivada de la Función Inversa

La regla de la cadena también permite deducir la manera de derivar una función inversa. La definición de la función inversa estipula que

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Al aplicarle la derivada, se debe aplicar la regla de la función compuesta:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} f\left(f^{-1}(x)\right) &= \frac{d}{dx}x \\
f'\left(f^{-1}(x)\right)\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= 1 \\
\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}
\end{aligned}$$

Sea $f(x)$ una función inyectiva. La derivada de la función inversa a f es

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Ejemplo. La función

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

posee como inversa a

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$$

Calcule la derivada de f^{-1} mediante la regla de la cadena.

Para calcular la derivada de la inversa primero se deriva la función original:

$$\frac{df}{dx} = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}(3x-1) - (3x-1)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}\\ \frac{df}{dx} &= \frac{4}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

Ahora se evalúa la derivada con la función inversa.

$$\begin{aligned}f'\left(f^{-1}\right) &= \frac{4}{\left(\dfrac{x+1}{3-x}+1\right)^2}\\ &= \frac{4}{\left(\dfrac{4}{3-x}\right)^2}\\ f'\left(f^{-1}\right) &= \frac{(3-x)^2}{4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la función inversa es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\right)}\\ &= \frac{1}{\frac{(3-x)^2}{4}}\\ \frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{4}{(3-x)^2}\end{aligned}$$

La derivada de la función inversa es útil cuando se emplea con funciones que no son fáciles de manejar, como lo son las funciones trigonométricas inversas o la función logaritmo.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 23: Derivada de Funciones Trigonométricas y sus Inversas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Agosto 2021

1. Derivada del Seno y del Coseno

Para calcular las derivadas de la función trigonométrica seno hay que recordar dos límites importantes:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1 \tag{1}$$

y

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u}=0 \tag{2}$$

Ejemplo. Obtenga, mediante la definición, la derivada de

$$y=\sin x$$

Por la definición de derivada, la derivada del seno se desarrolla como

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\sin\Delta x\cos x-\sin x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\sin x-\sin x\cos\Delta x)+\sin\Delta x\cos x}{\Delta x}\\
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}-\sin x\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{3}$$

Al evaluar la expresión (3) con los límites (1) y (2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}-\sin x\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&= -\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&= -\sin x\,(0)+\cos x\,(1)\\
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x
\end{aligned}$$

Una vez conocida la derivada de la función seno, mediante la identidad pitagórica fundamental

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\Rightarrow \qquad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \tag{4}$$

y la regla de la cadena, se calcula derivada de la función coseno.

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$y = \cos x$$

Mediante la identidad despejada (4) se deriva el coseno:

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x} \\
\frac{d}{dx}\cos x &= \frac{d}{dx}\sqrt{1-\sin^2 x} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}\frac{d}{dx}\left(1-\sin^2 x\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}\left(-2\sin x\right)\frac{d}{dx}\sin x \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}
\end{aligned}$$

Al aplicar nuevamente el despeje del coseno en la identidad pitagórica, se tiene la derivada buscada.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cos x &= -\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \\
&= -\frac{\sin x\cos x}{\cos x} \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x
\end{aligned}$$

De esta manera se ha establecido las derivadas de las funciones trigonométricas fundamentales.

La derivada de las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

Es importante destacar que el fenómeno circular que presentan estas derivadas permite plantear ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales pueden resolverse mediante números complejos. Incluso la equivalencia entre las funciones trigonométricas seno y coseno y la función exponencial está justificada mediante la derivada y los números complejos.

2. Derivada de Otras Funciones Trigonométricas

El resto de derivadas de las funciones trigonométricas se pueden calcular mediante las reglas de derivación ya establecidas.

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$y = \tan x$$

La tangente puede definirse a partir del seno y del coseno como

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

entonces la derivada del cociente permitirá encontrar la derivada de la tangente.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x\frac{d}{dx}\sin x - \sin x\frac{d}{dx}\cos x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x\left(\cos x\right) - \sin x\left(-\sin x\right)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x
\end{aligned}$$

Debido a que las funciones cotangente, secante y cosecante son cocientes de las funciones seno y coseno, entonces sus respectivas derivadas se calculan de manera similar.

Las derivadas de las funciones trigonométricas secundarias son:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \sec^2 x & \qquad \frac{d}{dx}\cot x &= -\csc^2 x \\
\frac{d}{dx}\sec x &= \tan x \sec x & \qquad \frac{d}{dx}\csc x &= -\cot x \csc x
\end{aligned}$$

3. Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas

Existen muchas formas de obtener las derivadas de las funciones trigonométricas inversas. En este apartado se aplicará la regla de la cadena para obtener la derivada de una función inversa:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}\left(x\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(x\right)\right)}$$

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$y = \arcsin x$$

Antes de obtener la derivada hay que recalcar que si

$$f^{-1}\left(x\right) = \arcsin x$$

entonces

$$f\left(x\right) = \sin x$$

De esta manera, la derivada de la función inversa a $\sin x$ es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)\Big|_{\arcsin x}} \\
&= \frac{1}{\cos x\Big|_{\arcsin x}} \\
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)}
\end{aligned}$$

Para simplificar lo más posible la derivada se aplicará la identidad trigonométrica fundamental:

$$\begin{aligned}
\sin^2 u + \cos^2 u &= 1 \\
\Rightarrow \qquad \cos u &= \sqrt{1-\sin^2 u}
\end{aligned}$$

En la derivada, considerando a $u = \arcsin x$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin x\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin\left(\arcsin x\right)\right)^2}} \\
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Una característica particular de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas es que no son circulares ni están relacionadas con las funciones no derivadas, cosa que sí se observa en las funciones trigonométricas directas.

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx}\arccos &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}\arctan &= \frac{1}{x^2+1} & \frac{d}{dx}\operatorname{arccot} &= -\frac{1}{x^2+1} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} &= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} & \frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 24: Derivada de Funciones Exponencial, Hiperbólicas y sus Inversas

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Derivada de Funciones Exponencial y Logarítmica

Como se estudió anteriormente, existen funciones que crecen muy rápidamente conforma se avanza en el dominio; son las llamadas funciones exponenciales

$$y = a^x$$

Este tipo de funciones poseen límites especiales, relacionados con el número e, definidos como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{m\to 0}(1+m)^{\frac{1}{m}} = e$$

Mediante estos elementos, ya conocidos, se obtendrá la derivada de la función exponencial. Para comenzar la deducción se aplica la definición de la derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}a^x$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\
\frac{dy}{dx} &= a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \qquad (1)
\end{aligned}$$

El límite en (1) se resuelve utilizando el cambio de variable

$$m = a^{\Delta x}-1 \qquad (2)$$

de donde se obtiene a Δx en términos de m:

$$\begin{aligned}
m &= a^{\Delta x}-1\\
m+1 &= a^{\Delta x}\\
\log_a(m+1) &= \Delta x \qquad (3)
\end{aligned}$$

Para completar el cambio de variable se requiere reevaluar el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x &= \lim_{m\to b}\log_a(m+1)\\
0 &= \log_a(b+1)\\
a^0 &= a^{\log_a(b+1)}\\
1 &= b+1\\
0 &= b
\end{aligned}\tag{4}$$

Al sustituir en la derivada (1) las expresiones (2) a (4), ésta se convierte en

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x\to 0}a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\
&= a^x\lim_{m\to 0}\frac{m}{\log_a(m+1)}\\
&= a^x\lim_{m\to 0}\frac{\frac{1}{m}m}{\frac{1}{m}\log_a(m+1)}\\
\frac{dy}{dx} &= a^x\lim_{m\to 0}\frac{1}{\log_a(m+1)^{\frac{1}{m}}}
\end{aligned}$$

Por propiedades de límites, éste se intercambia con el logaritmo

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= a^x\lim_{m\to 0}\frac{1}{\log_a(m+1)^{\frac{1}{m}}}\\
&= a^x\frac{1}{\lim_{m\to 0}\log_a(m+1)^{\frac{1}{m}}}\\
\frac{dy}{dx} &= a^x\frac{1}{\log_a\lim_{m\to 0}(m+1)^{\frac{1}{m}}}
\end{aligned}\tag{5}$$

En (5) se obtiene el segundo de los límites involucrados con la función exponencial, por lo que se sustituye el valor y se aplica el cambio de base a logaritmos naturales.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= a^x\frac{1}{\log_a\lim_{m\to 0}(m+1)^{\frac{1}{m}}}\\
&= a^x\frac{1}{\log_a e}\\
&= a^x\frac{1}{\frac{\ln e}{\ln a}}\\
&= a^x\frac{\ln a}{\ln e}\\
\frac{dy}{dx} &= a^x\ln a
\end{aligned}$$

Esta derivada es general para cualquier base positiva a, incluyendo el número e.

Sea la función exponencial $f(x)=a^x$. Su derivada se calcula como

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$$

El caso especial con el número e como base es

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$y = 4^{\left(1-x^2\right)\arcsin x}$$

La función en cuestión es compuesta, ya que el exponente es la función $u=\left(1-x^2\right)\arcsin x$; es necesario aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}4^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Por lo tanto, la derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}4^{\left(1-x^2\right)\arcsin x} \\
&= 4^{\left(1-x^2\right)\arcsin x}\ln 4\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\arcsin x \\
&= 4^{\left(1-x^2\right)\arcsin x}\ln 4\left(\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}\arcsin x \right. \\
&\quad \left. + \arcsin x\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\right) \\
&= 4^{\left(1-x^2\right)\arcsin x}\ln 4\left(\frac{\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\arcsin x\right) \\
\frac{dy}{dx} &= 4^{\left(1-x^2\right)\arcsin x}\ln 4\left(\sqrt{1-x^2} - 2x\arcsin x\right)
\end{aligned}$$

Por otro lado, las funciones logarítmicas, inversas a las exponenciales, pueden derivarse utilizando la definición o bien mediante la derivada de la función inversa.

Para una función exponencial $f(x) = a^x$ se tiene su inversa

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

Mediante la derivada de la función inversa por regla de la cadena, el resultado de derivar la función logarítmica es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log_a x &= \frac{d}{dx}f^{-1}(x) \\
&= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \\
\frac{d}{dx}\log_a x &= \frac{1}{a^x \ln a\Big|_{\log_a x}} \\
&= \frac{1}{a^{\log_a x}\ln a} \\
\frac{d}{dx}\log_a x &= \frac{1}{x\ln a}
\end{aligned}$$

La función logarítmica $f(x) = \log_a x$ posee como derivada a

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

Como caso especial, la derivada de la función logaritmo natural es

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

Ejemplo. Obtenga la derivada de la función

$$y = \ln\frac{\cos x}{x^2}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la derivada de esta función se obtiene por regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\log_2 u = \frac{1}{u\ln 2}\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x^2}$$

Por lo tanto, la derivada es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{\cos x}{x^2}\ln 2}\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{x^2} \\
&= \frac{x^2}{\ln 2\cos x}\frac{d}{dx}x^{-2}\cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^2}{\ln 2 \cos x}\left(x^{-2}\frac{d}{dx}\cos x + \cos x \frac{d}{dx}x^{-2}\right) \\
&= \frac{x^2}{\ln 2 \cos x}\left(-x^{-2}\sin x - 2x^{-3}\cos x\right) \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{\tan x}{\ln 2} - \frac{2}{x \ln 2}
\end{aligned}$$

2. Derivada de Funciones Hiperbólicas y sus Inversas

Debido a que las funciones hiperbólicas se definen con base en la exponencial de base e, sus respectivas derivadas deben calcularse con base en la derivada de la función exponencial.

Ejemplo. Calcule la derivada de la función

$$y = \tanh x$$

Para calcular esta derivada se recurre a la definición en términos de la función exponencial.

$$\begin{aligned}
y &= \tanh x \\
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}
\end{aligned}$$

La derivada de la función es:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) - \left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\
&= \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \operatorname{sech}^2 x
\end{aligned}$$

Al analizar las derivadas de las funciones hiperbólicas, se observa que se corresponden con sus homólogas trigonométricas, aunque algunas varían en signo.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh &= \cosh x & \frac{d}{dx}\cosh &= \sinh x \\
\frac{d}{dx}\tanh &= \operatorname{sech}^2 x & \frac{d}{dx}\coth &= -\operatorname{csch}^2 x \\
\frac{d}{dx}\operatorname{sech} &= -\operatorname{sech} x \tanh x & \frac{d}{dx}\operatorname{csch} &= -\operatorname{csch} x \coth x
\end{aligned}$$

El comportamiento circular de las derivadas de las funciones trigonométricas se debe a las funciones hiperbólicas, ya que estas últimas se definen con base en la exponencial (cuya derivada es la misma). Esta relación está ligada a la definición de un número complejo $z = e^{\varphi i}$ en su forma trigonométrica, la cual fue comentada cuando se conocieron por primera vez las funciones hiperbólicas.

En lo que respecta a las funciones hiperbólicas inversas, su derivada está relacionada con el logaritmo, ya que éstas se definen con base en la inversa de la función exponencial.

Ejemplo. Calcule la derivada de la función

$$y = \operatorname{arsinh} x$$

La definición del seno hiperbólico inverso es

$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Su derivada debe calcularse de acuerdo a la derivada de la función logaritmo, utilizando la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x &= \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Respecto a las funciones hiperbólicas inversas, también se observa que existen similitudes con sus análogas inversas trigonométricas.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas son

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & \frac{d}{dx}\operatorname{arcosh} x &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{1-x^2}, |x|<1 & \frac{d}{dx}\operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{1-x^2}, |x|>1 \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arsech} x &= -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} & \frac{d}{dx}\operatorname{arcsch} x &= -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 25: Derivabilidad; Derivadas de Orden Superior

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Septiembre 2021

1. Derivabilidad

Debido a que la derivada es un límite, ésta puede o no existir en un punto dado del dominio de la función original $f(x)$. La razón radica en que la derivada $f'(x)$ también es una función con su propio dominio que puede o no coincidir con el de f.

Ejemplo. Obtenga la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^4}$ en $x = 1$

La derivada de la función es

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{(x-1)^4} \\ &= (x-1)^{\frac{4}{5}} \\ f'(x) &= \frac{4}{5}(x-1)^{-\frac{1}{5}} \\ f'(x) &= \frac{4}{5\sqrt[5]{x-1}} \end{aligned}$$

El dominio de la función $f'(x)$ indica que el único valor no aceptado es $x = 1$. Por lo que no existe la derivada en dicho punto. La figura 1 muestra las gráficas de las funciones f y su derivada.

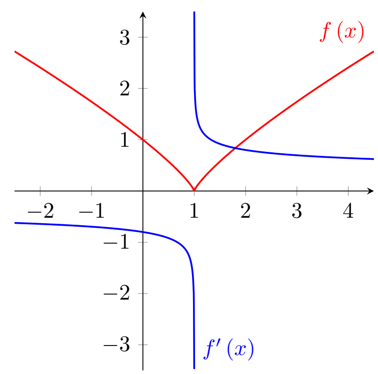


Figura 1

En la figura 1 puede apreciarse que la función f del ejemplo anterior no es suave en $x = 1$, el lugar donde la derivada no existe. Geométricamente, el *pico* de la gráfica en $x = 1$ puede tener una infinidad de rectas tangentes pues por definición cada recta tocaría a la función en ese lugar. Esto hace conjuntar tres características que influyen en la inexistencia de la derivada: no existe el límite de definición de derivada, la curva no es suave y el dominio de la derivada excluye al valor. Esta situación se conoce como derivabilidad.

Una función $f(x)$ es derivable en $x = a$ si

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

existe; esta propiedad se llama derivabilidad. Geométricamente, se expresa en una gráfica suave sin bordes.

Dos cuestiones importantes de la derivabilidad son los límites laterales y la continuidad. La primera radica en las características propias de los límites, para que la derivada exista los límites laterales deben existir y ser iguales; es decir,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Estos límites se conocen como derivadas laterales.

Sea la función $f(x)$. Los límites

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se conocen como derivadas laterales y se denotan como $f'_+(a)$ y $f'_-(a)$, respectivamente. Si f es derivable, entonces las derivadas laterales deben ser iguales.

La existencia de $f'(a)$ mediante (1) y las derivadas laterales es indicativo de continuidad en la función derivada cuando $x = a$. Esto hace tomar en cuenta la continuidad en la función $f(x)$ para saber si existe alguna relación entre la derivabilidad y la continuidad. Antes de tomar el cociente para la razón de cambio instantáneo (1) se puede plantear el límite:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) - f(a) \right] = \lim_{x \to a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Por propiedades, el límite planteado se simplifica a la definición de continuidad:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \left[f(x) - f(a) \right] &= \lim_{x \to a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} (x - a) \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= (0)\, f'(a) \\
\lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) &= 0 \\
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} f(a)
\end{aligned}$$

Esto es posible siempre y cuando la derivada exista, por lo que la derivabilidad implica que la función es continua.

Sea $f(x)$ una función definida en $x = a$. La función f es continua si la derivada $f'(a)$ existe. Es decir, una función es continua si es derivable.

Esta relación no es recíproca ya que una función continua no da certeza de su derivabilidad, tal como lo ejemplifica la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^4}$ analizada anteriormente.

Ejemplo. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2b - 2, & x < 0 \\ -x^2 + 3x + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$.

Para que exista derivabilidad, las derivadas laterales deben existir y ser iguales:

$$f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right)$$
$$\frac{d}{dx}\left(x^2+ax+2b-2\right)\Big|_{x=0^-} = \frac{d}{dx}\left(-x^2+3x+b\right)\Big|_{x=0^+}$$
$$\left[2x+a\right]_{x=0} = \left[-2x+3\right]_{x=0}$$
$$a = 3$$

Por otro lado, la derivabilidad asegura continuidad y eso permite igualar los límites laterales de f en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+ax+2b-2\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+3x+b\right)$$
$$2b-2 = b$$
$$b = 2$$

Con los valores obtenidos se corrobora que $f(0)=2$; por lo tanto, $a=3$ y $b=2$. La figura 2 muestra la situación de la función segmentada, donde se aprecia que en $x=0$ la gráfica no presenta bordes o separaciones que impidan la derivabilidad y continuidad de la función segmentada.

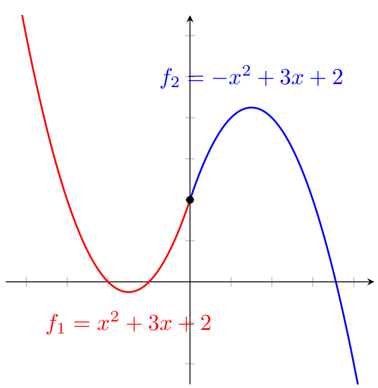


Figura 2

2. Derivadas de Orden Superior

Con la derivada se analiza el cambio en las funciones; las reglas de derivación ayudan a encontrar la expresión que estará sujeta al análisis del cambio. Sin embargo, tanto la derivada como las reglas para obtenerla tienen un efecto secundario interesante: la derivada de una función también es una función.

En esencia puede considerarse a la derivada como una función de funciones; es decir, la derivada es una función cuyo dominio e imagen contiene a las funciones reales de variable real. Esta característica también incluye la aplicación de operaciones en funciones, por lo que es común encontrar operaciones entre derivadas. Con esta idea se fundamenta en el Álgebra Lineal que la derivada es un tipo especial de función llamada transformación lineal.

Una de las operaciones específicas en funciones es la composición: la evaluación de una función con otra; un caso especial es evaluar una función consigo misma. Como se ha planteado, la derivada es una función y como tal puede aplicársele la composición con ella misma; o sea, a una derivada se le aplica la propia derivada:

$$\begin{array}{cccc} & f(x) & \Rightarrow & \dfrac{df}{dx} = g(x) \\ \therefore & g(x) & \Rightarrow & \dfrac{dg}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right) \end{array}$$

Este concepto puede simplificarse como la derivada de una derivada, lo que es conocido como derivadas de orden superior.

Sea $f(x)$ una función derivable. Una derivada de orden superior n es aplicar la derivación sobre f de manera recursiva:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right)\right)$$

La notación que describe a una derivada de orden superior tiene las formas comunes

$$\frac{d^n f}{dx^n} \qquad\qquad f^n(x)$$

En el caso de la notación de Lagrange, las primeras tres derivadas se escriben como f', f'' y f'''; a partir de la cuarta derivada n se expresa en números romanos, como f^{iv} o f^{v}, o bien en números arábigos entre paréntesis, como $f^{(4)}$ o $f^{(5)}$.

De las derivadas de orden superior, la segunda es la más destacada debido a su aplicación directa: la primera derivada indica la razón de cambio instantáneo de una función; la segunda derivada indica la razón de cambio de segundo orden, el cambio que sufre el cambio en la función. Por esta situación es que la segunda derivada describe matemáticamente a la aceleración, ya que este fenómeno mecánico es la medición del cambio en la velocidad que a su vez mide el cambio de posición respecto al tiempo. Se estudiará un poco al respecto del movimiento y la segunda derivada más adelante.

Las derivadas de orden tres en adelante tienen aplicación directa en las llamadas ecuaciones diferenciales, las cuales también hacen uso de la propiedad de linealidad en la derivada para plantear y resolver problemas diversos en termodinámica, mecánica cuántica, teoría de ondas, física nuclear o hidrodinámica entre otros. Una ecuación diferencial lineal, homogénea de orden superior con coeficientes constantes es una expresión como la siguientes:

$$\frac{d^4}{dx^4}y + 4\frac{d^3}{dx^3}y - 7\frac{d^2}{dx^2}y - 22\frac{d}{dx}y + 24y = 0$$

Ejemplo. Obtenga la segunda derivada de la función

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}$$

El cálculo de la primera derivada incluye aplicar las reglas de la cadena, del cociente y de la función potencia:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{x-1}\frac{d}{dx}(x-2) - (x-2)\frac{d}{dx}\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x-1} - \frac{x-2}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} \\ f'(x) &= \frac{x}{2\sqrt{(x-1)^3}} \end{aligned}$$

La segunda derivada se obtiene al aplicar la derivada a $f'(x)$; como dicha función sigue siendo un cociente se aplican las reglas del cociente, la cadena y la función potencia:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2\sqrt{(x-1)^3}}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{(x-1)^3}\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{(x-1)^3}\right)}{\left(2\sqrt{(x-1)^3}\right)^2} \\ f''(x) &= -\frac{x+2}{4\sqrt{(x-1)^5}} \end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 26: Derivación Paramétrica e Implícita

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

Al momento, la forma de derivación estudiada ha sido mediante funciones expresadas en forma explícita. Pero, al existir otras representaciones de la misma función, es necesario conocer el mecanismo de derivación que rige a las formas paramétrica e implícita.

1. Derivación Paramétrica

Dentro de las formas de expresar una función f existe la parametrización que, como se ha visto, permite fundamentar a las variables clásicas x y y en términos de una tercera incógnita t:

$$f: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1}$$

Para derivar a la función parametrizada (1) respecto de x, el proceso *obvio* es despejar al parámetro t para que quede en términos de x y después rearmar la función en forma explícita. Esto no es eficiente y terminaría siendo un proceso de derivación usual.

Para trabajar directamente con la función parametrizada es mejor idea derivar cada componente de (1) respecto a t:

$$x = x(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = x'(t) \tag{2}$$

$$y = y(t) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = y'(t) \tag{3}$$

Para derivar en forma paramétrica a (1) solo se dividen (3) entre (2) para simplificar los incrementos del parámetro:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \\ \frac{dy \cdot dt}{dx \cdot dt} &= \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{aligned}$$

Sea la función en forma paramétrica

$$f: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

La derivada paramétrica de f respecto de x se calcula como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

donde

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

Las derivadas de orden superior en forma paramétrica también son calculadas mediante la derivación del parámetro t pero con el uso de la regla de la cadena: la derivada $n-1$ de f respecto de x se deriva primero respecto de t y se multiplica por la derivada de t respecto de x. Por ejemplo, la derivada de segundo orden es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}}
\end{aligned}$$

Sea f una función paramétrica

$$f: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

n veces derivable. La derivada de orden n de f es

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Existe otra forma de calcular la derivada paramétrica haciendo uso de vectores para representar a la función. Sin embargo, en este curso solo se estudiará el caso de la relación entre la parametrización y los vectores; la derivada vectorial se estudia en Cálculo Multivariable.

Ejemplo. Sea la función en forma paramétrica

$$f: \begin{cases} x(t) = 3 + 2\cos t \\ y(t) = -2 + 3\sin t \end{cases}$$

Obtenga la segunda derivada de f respecto de x.

Primero se procede a calcular la primera derivada:

$$x'(t) = -2\sin t \qquad\qquad y'(t) = 3\cos t$$

$$\begin{aligned}
\therefore \qquad \frac{dy}{dx} &= \frac{y'(t)}{x'(t)} \\
&= \frac{3\cos t}{-2\sin t} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{3}{2}\cot t
\end{aligned}$$

Ahora, se calcula la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2}\cot t\right)}{-2\sin t} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{-\csc^2 t}{\sin t} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{3}{4\sin^3 t}
\end{aligned}$$

2. Derivación Implícita

No todas las funciones pueden expresarse en forma explícita o forma paramétrica, lo cual es una situación complicada al momento de calcular la derivada. Por ejemplo, $y = e^{xy}$ es una función en forma implícita en la cual y no puede ser despejada para dejarla en términos de x, por lo que no puede calcularse la derivada como hasta ahora se ha estudiado.

El escenario anterior hace que se busque una manera para derivar las funciones en forma implícita, y dicho método yace en la función compuesta. Para derivar a la función $f(y)$, donde $y(x)$ se aplica la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Esto es aplicable a las funciones en forma implícita, puesto que la variable dependiente sigue siendo función de la independiente a pesar de no poderse despejar.

Sea la función en forma implícita $f(x, y) = 0$. Para derivar a f respecto de x se hace uso de las reglas usuales de derivación, se aplica la regla de la cadena a toda función y y se despeja $\frac{dy}{dx}$.

Ejemplo. Obtenga la recta tangente a la función

$$y^2 + xy = x^2y + y$$

en $P(1, 1)$.

Antes de comenzar a derivar, la función debe escribirse en forma implícita completa.

$$\begin{aligned} y^2 + xy &= x^2y + y \\ y^2 - x^2y + xy - y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora se aplica la derivada a la igualdad y se usa la linealidad.

$$\begin{aligned} y^2 - x^2y + xy - y &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left(y^2 - x^2y + xy - y\right) &= \\ \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}x^2y + \frac{d}{dx}xy - \frac{d}{dx}y &= 0 \end{aligned}$$

Cada sumando se estará derivando con las respectivas reglas, y para y se aplica la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}x^2y + \frac{d}{dx}xy - \frac{d}{dx}y &= 0 \\ 2y\frac{dy}{dx} - \left(x^2\frac{dy}{dx} + y(2x)\right) + \left(x\frac{dy}{dx} + y(1)\right) - \frac{dy}{dx} &= \\ 2y\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + x\frac{dy}{dx} + y - \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Para encontrar la derivada es necesario despejar $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned} 2y\frac{dy}{dx} - x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + x\frac{dy}{dx} + y - \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \left(-x^2 + 2y + x - 1\right)\frac{dy}{dx} &= 2xy - y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2xy - y}{-x^2 + 2y + x - 1} \end{aligned}$$

Una vez que la derivada ha sido calculada, el punto P donde se busca la recta tangente se sustituye en la derivada para tener la pendiente; la ordenada al origen se calcula mediante la pendiente, P y la ecuación de la recta.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_P &= \frac{2(1)(1)-(1)}{-(1)^2+2(1)+(1)-1} \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_P &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad
\begin{aligned}
y &= mx+b \\
1 &= 1+b \\
0 &= b
\end{aligned}
$$

La recta tangente a la función en el punto P es $y = x$.

Se reitera que las funciones en forma implícita son diferentes de las funciones multivariable y, en consecuencia, la derivación implícita es diferente de la derivación parcial.

3. Derivación Logarítmica

Una aplicación especial de la derivación implicita yace en funciones en forma explícita que se basan en productos, cocientes, potencias, raíces o exponenciales. Cuando se tiene una función de la forma

$$y = \frac{f(x)\,g(x)}{h(x)} \tag{5}$$

la derivada por las reglas usuales es laboriosa, ya que se aplica la regla del producto dentro de la del cociente dando como resultado la expresión

$$y' = \frac{h(x)\Big(f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)\Big) - f(x)\,g(x)\,h'(x)}{h(x)^2} \tag{6}$$

El proceso de derivación de (5) es largo, pero mediante logaritmos y derivación implícita el trabajo del cálculo de la derivada se reduce.

Primero, se toman logaritmos a (5) y se aplican sus propiedades.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{f(x)\,g(x)}{h(x)} \\
\ln y &= \ln \frac{f(x)\,g(x)}{h(x)} \\
\ln y &= \ln f(x) + \ln g(x) - \ln h(x)
\end{aligned}
$$

En seguida se puede derivar a la suma de logaritmos.

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln f(x) + \ln g(x) - \ln h(x) \\
\frac{y'}{y} &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, se despeja la derivada.

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{h'(x)}{h(x)} \\
y' &= y\frac{f'(x)}{f(x)} + y\frac{g'(x)}{g(x)} - y\frac{h'(x)}{h(x)} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

A pesar de tener más términos, la derivada (7) es menos demandante que (6) debido a la facilidad de derivar el logaritmo natural. Esta forma de derivación se conoce como derivada logarítmica.

Sea $f(x)$ una función definida mediante productos, cocientes, potencias, raíces o exponenciales. La derivada de f puede calcularse mediante logaritmos y derivación implícita:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f(x)\,\frac{d}{dx} \ln f(x)$$

Ejemplo. Calcule, mediante con ayuda de logaritmos, la derivada de la función

$$f(x) = x^{\sqrt{x+1}}$$

La función en este ejemplo está definida con base en potencias y exponenciales, por lo que es candidata a la derivación logarítmica.

$$\begin{aligned}
y &= x^{\sqrt{x+1}} \\
\ln y &= \ln x^{\sqrt{x+1}} \\
\ln y &= \sqrt{x+1}\ln x \\
\frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\ln x\right) \\
\frac{y'}{y} &= \sqrt{x+1}\frac{d}{dx}\ln x + (\ln x)\frac{d}{dx}\sqrt{x+1} \\
y' &= y\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x+1}}\right) \\
y' &= x^{-1+\sqrt{x+1}}\sqrt{x+1} + \frac{x^{\sqrt{x+1}}\ln x}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

A pesar de no ser necesario, es buena práctica tratar de reducir al máximo las derivadas logaritmas. Esta conveniencia permite expresar a la derivada de la forma más compacta posible.

Cálculo y Geometría Analítica
Lectura 27: Aplicaciones Geométricas de la Derivada

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

1. La Recta Tangente a una Curva

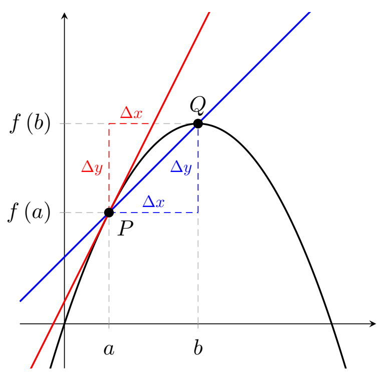


Figura 1. Geométricamente, las razones de cambio promedio (azul) y de cambio instantáneo (rojo) son pendientes de dos rectas: secante para la primera y tangente para la segunda.

La definición de razón de cambio promedio,

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1}$$

se interpreta de manera geométrica como la pendiente de una recta secante a la gráfica de una función $f(x)$, como se ilustra en la figura 1.

Dentro del intervalo, b puede alcanzarse al incrementar a; es decir, $b = a + \Delta x$. Además, el incremento Δx puede reducirse de forma que sea lo bastante pequeño para que para la recta secante se convierta en una tangente; es decir, el incremento tiende a 0. Aplicando estas observaciones, la expresión 1 se convierte en

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ \lim_{\Delta x \to 0} m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ m &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{2}$$

La expresión (2) es la razón de cambio instantáneo en a que, como indica la figura 1, geométricamente sigue siendo la pendiente de una recta pero de naturaleza tangente. Si se usa la derivada evaluada en a en lugar de la razón de cambio instantáneo, (2) se convierte en

$$m = f'(a)$$

> Sea $f(x)$ una función derivable en $x = a$. La pendiente m de la recta tangente a la curva definida por la gráfica de f en a es
>
> $$m = f'(a)$$

Dado que la derivada permite calcular la pendiente de una recta, con base en la función se puede obtener la ecuación $y = mx + b$ de la recta.

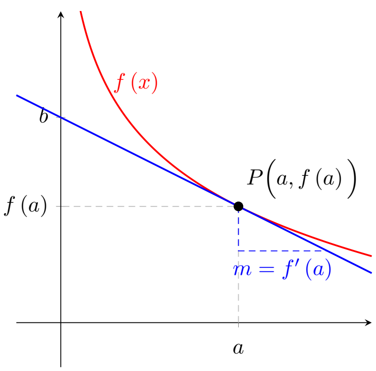


Figura 2. La recta tangente a la gráfica de una función tiene una ecuación que se calcula por el método punto pendiente: la derivada es la pendiente, y la función aporta el punto.

En la figura 2 la recta tangente tiene como pendiente m a la derivada de la función $f(x)$ evaluada en $x = a$, como ya se ha comentado. Pero también puede observarse que se conoce el punto de tangencia entre la curva que representa a la gráfica de la función y la recta.

Para calcular la ecuación de la recta tangente se requiere el valor de la ordenada al origen b. Como se conoce la pendiente $m = f'(a)$ y el punto $P\Big(a, f(a)\Big)$ de la curva, estos datos se sustituyen en la ecuación general de la recta para calcular el punto $B(0, b)$ que es la ordenada al origen de la recta tangente.

$$\begin{aligned} y &= mx + b \\ f(a) &= f'(a)\,a + b \\ f(a) - f'(a)\,a &= b \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a una curva en $x = a$ es

$$y = f'(a)\,x + \Big(f(a) - f'(a)\,a\Big)$$

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = a$. La recta tangente a la gráfica de f en $x = a$ se calcula como

$$L: \qquad y = f'(a)\,x + \Big(f(a) - f'(a)\,a\Big) \tag{3}$$

Toda función derivable tiene rectas tangentes para cada uno de los puntos que componen a su dominio. En Cálculo Multivariable se analiza esta situación desde el punto de vista de una función vectorial, donde la recta tangente se expresa en términos de un llamado vector director. Esta forma de la recta se analizará más adelante en la parte de Geometría Analítica de este curso.

Ejemplo. Sea la circunferencia

$$C: \qquad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a C que son paralelas a la recta $y = x + 2$.

La pendiente de la recta $y = x + 2$ es $m = 1$; como las rectas tangentes buscadas deben ser paralelas a $y = x + 2$, entonces la pendiente m da esa característica.

Por otro lado, la ecuación de la circunferencia se interpreta como una función en forma implícita y puede derivarse como tal:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 4 \\ 2(x+2) + 2(y-1)\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x+2}{1-y} \end{aligned}$$

Como $m = 1$, entonces $\left.\frac{dx}{dy}\right|_P = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x+2}{1-y} \\ 1 &= \frac{x+2}{1-y} \\ 1 - y &= x + 2 \\ y &= -x - 1 \end{aligned} \tag{4}$$

(4) se sustituye en la ecuación de la circunferencia para encontrar los valores de x y los de y, y con eso calcular las ecuaciones de las rectas tangentes.

$$\begin{aligned}(x+2)^2+(y-1)^2&=4\\(x+2)^2+(-x-2)^2&=4\\2(x+2)^2&=4\\x&=-2\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

En (4) se sustituyen los valores de x, dando como resultado los puntos de tangencia de la recta buscada: $P_1\left(-2-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$ y $P_2\left(-2+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$. Para la recta tangente se toma en cuenta que $y=f(a)$ y $f'(a)=1$.

Para P_1 : $\quad y=x+\left(3+2\sqrt{2}\right)$

Para P_2 : $\quad y=x+\left(3-2\sqrt{2}\right)$

La figura 3 muestra a la circunferencia con las rectas tangentes en los untos calculados.

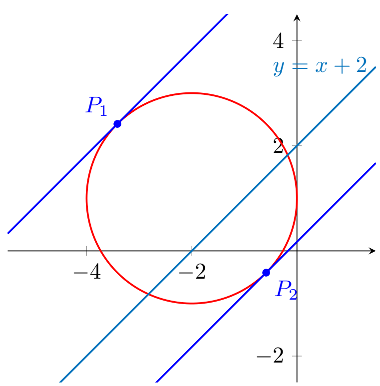


Figura 3

2. La Recta Normal a una Curva

En conjunto con la recta tangente existe otra recta que permite analizar contundentemente la geometría de cualquier curva. En la figura 4 la recta tangente a $f(x)$ tiene una acompañante perpendicular en el mismo punto $P\Big(a,f(a)\Big)$.

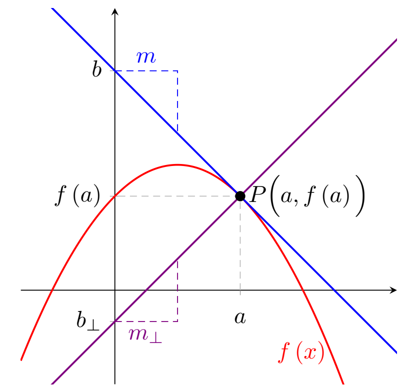


Figura 4. La recta normal es una perpendicular a la recta tangente y simultáneamente a la curva dibujada por la gráfica de la función $f(x)$.

Para calcular la recta perpendicular se hace uso de la relación entre la perpendicularidad y la pendiente:

$$m_\perp=-\frac{1}{m}\tag{5}$$

Como $m=f'(a)$, y mediante la condición de perpendicularidad en (5), con el punto conocido P la ordenada al origen de la recta perpendicular queda estipulada como

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{m}x+b\\f(a)&=-\frac{a}{f'(a)}+b\\f(a)+\frac{a}{f'(a)}&=b\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular es

$$y=-\frac{1}{f'(a)}x+\left(f(a)+\frac{a}{f'(a)}\right)$$

Esta recta se conoce como recta normal y es perpendicular tanto a la recta tangente como a la curva de la función $f(x)$.

Sea $f(x)$ una función derivable en $x = a$. La recta normal a la gráfica de f en $x = a$ se calcula como

$$L: \qquad y = -\frac{1}{f'(a)}x + \left(f(a) + \frac{a}{f'(a)}\right) \tag{6}$$

En conjunto, las rectas (3) y (6) son importantes para caracterizar geométricamente a una curva: la recta tangente permite calcular la longitud de arco, en tanto que la recta normal se utiliza para obtener la curvatura. Estas características se estudian a fondo en el Cálculo Multivariable, pues forman parte de la llamada Geometría Diferencial.

Ejemplo. Sean las funciones

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 + x + 1$$

Obtenga $x \in D_f$ para que la recta normal a f sea tangente a g.

La condición del ejemplo especifica que la tangente a $g(x)$ sea perpendicular a la tangente a $f(x)$. Esto se logra con la condifión de ortogonalidad $m_\perp = -\frac{1}{m}$, que en términos de derivadas es

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{f'(x)} \\ 2x + 1 &= -\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}+x}}} \\ 2x + 1 &= -2\sqrt{\frac{1}{4} + x} \end{aligned}$$

Al resolver esta última ecuación se obtendrá el valor buscado para x, que debe satisfacer al dominio de la función f.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= -2\sqrt{\frac{1}{4} + x} \\ (2x+1)^2 &= 4\left(\frac{1}{4} + x\right) \\ 4x^2 + 4x + 1 &= 1 + 4x \\ 4x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Como $f(0) = 0$, entonces es parte del dominio y es el valor donde la recta normal a $f(x)$ es la recta tangente a $g(x)$. La figura 5 ilustra el escenario de este ejemplo.

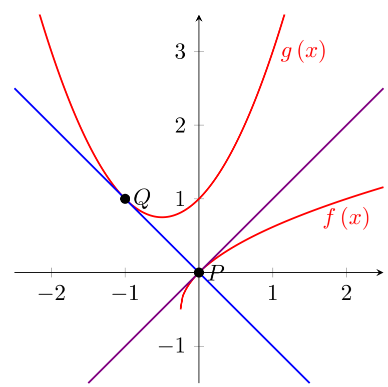


Figura 5

3. Ángulo de Intersección entre Curvas

Una de las aplicaciones más importantes de la recta tangente a una curva es el ángulo.

Para calcular un ángulo entre las rectas L y R se hace uso de las respectivas pendientes y la función tangente inversa:

$$\sphericalangle (L, R) = \arctan \left| \frac{m_R - m_L}{1 + m_R m_L} \right| \tag{7}$$

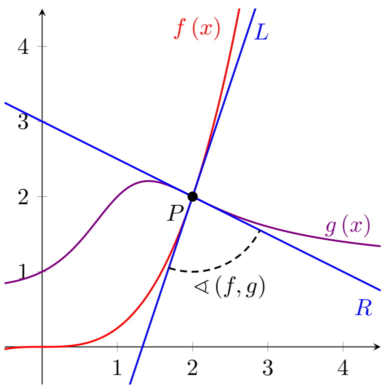


Figura 6. El ángulo entre rectas tangentes se extrapola a la curvas, y con ello existe un ángulo de intersección entre curvas.

Si L es la recta tangente a $f(x)$ y R lo es de $g(x)$, ambos en $x = a$, entonces $m_R = f'(a)$ y $m_L = g'(a)$ y en consecuencia puede calcularse el ángulo entre las curvas.

En la figura (6) se observa que las funciones f y g se intersecan en $x = a$, justo el lugar donde se mide el ángulo entre L y R. Así, el ángulo entre curvas se calcula al sustituir las respectivas derivadas en (7):

$$\sphericalangle (f, g) = \arctan \left| \frac{g'(x) - f'(x)}{1 + g'(x) f'(x)} \right|$$

A las rectas tangente y normal se añade a la geometría de curvas el ángulo de intersección. Es necesario que las funciones tengan al menos un elemento del dominio en común para que exista la intersección entre sus gráficas.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en $x = a$, que es el lugar de intersección entre las gráficas de las funciones. El ángulo de intersección se calcula como

$$\sphericalangle (f, g) = \arctan \left| \frac{g'(x) - f'(x)}{1 + g'(x) f'(x)} \right|$$

Ejemplo. Sean las funciones

$$f(x) = x^{-1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = -x^{-1} + 2$$

Calcule el ángulo de intersección entre f y g.

Para el ángulo, se requiere el lugar de intersección. En este caso

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^{-1} &= -x^{-1} + 2 \\ 2x^{-1} &= 2 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Ambas funciones están definidas en $x = 1$, por lo tanto existe un ángulo de intersección. Ahora pueden calcularse las derivadas para encontrar las pendientes de las rectas tangentes y obtener el ángulo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-1} & g(x) &= -x^{-1} + 2 \\ f'(x) &= -x^{-2} & g'(x) &= x^{-2} \\ f'(1) &= -1 & g'(1) &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sphericalangle (f, g) &= \arctan \left| \frac{g'(1) - f'(1)}{1 + g'(1) f'(1)} \right| \\ &= \arctan \left| \frac{1 - (-1)}{1 + (1)(-1)} \right| \\ &= \arctan \frac{2}{0} \\ \sphericalangle (f, g) &= 90° \end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 28: Aplicaciones Físicas de la Derivada

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Septiembre 2021

1. Movimiento

En 1665 Isaac Newton desarrollo el Método de *Fluxiones*, donde describió las variables *fluentes* representadas por x, y y z, que fluyen con el tiempo; asimismo, describió las razones de cambio de *fluentes* respecto del tiempo a las que llamó *fluxiones* y denotó como $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{z}$. Newton aplicó su Método de *Fluxiones* a diferentes cantidades en movimiento o cantidades que fluye con el tiempo (un *fluente*), como la posición de un cuerpo. Esto desembocó en la fundamentación del estudio del movimiento y la Mecánica conocida actualmente.

Sea P una partícula cuya posición está definida por el par ordenada

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$

donde t es el tiempo. La razón de cambio de la posición de la partícula respecto al tiempo es

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(t) \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{v}$ se conoce como velocidad. La razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo se define como

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f''(t) \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{a}$ se llama aceleración.

ACLARACIÓN: tanto la velocidad como la aceleración son cantidades vectoriales, las cuales son manipuladas mediante entidades algebraicas llamadas vectores. En este curso los vectores se estudiarán más adelante en el tema de Álgebra Vectorial, y la relación de velocidad y aceleración con los vectores se estudiarán en Cálculo Multivariable. Por ahora, tanto la posición como la velocidad y la aceleración simplemente se representarán como

$$f(t), \qquad v(t) = f'(t), \qquad a(t) = f''(t)$$

Cabe aclarar que en algún momento dado tanto la velocidad como aceleración podrán tener un signo negativo; esto se debe a que en las cantidades vectoriales se incluye una referencia representada por una orientación. La velocidad negativa indica que el sentido en el que se realiza el movimiento es contrario al que se estipula en el sistema de referencia utilizado; la aceleración negativa indica que la velocidad disminuye conforme se avanza en el tiempo siempre que se siga la dirección del movimiento.

Ejemplo. Una pelota es lanzada y su posición cambia con el tiempo según la función

$$f(t) = -16t^2 + 48t + 6 \quad [m]$$

donde el tiempo t está en segundos. Determine:

a. el intervalo de tiempo en el cual la velocidad del proyectil es negativa; interprete qué sucede con la pelota en este intervalo de tiempo.
b. la posición del proyectil cuando su velocidad es igual a 16 $\left[\frac{m}{s}\right]$.
c. la aceleración de la pelota.

Para responder cada uno de los puntos solicitados se necesitan las derivadas de la función de posición:

$$f(t) = -16t^2 + 48t + 6$$
$$\frac{d}{dt}f(t) = -32t + 48 \tag{1}$$
$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = -32 \tag{2}$$

Puesto que la aceleración es la segunda derivada respecto del tiempo, el tercer inciso tiene como respuesta a la ecuación (2):

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = -32 \qquad \Rightarrow \qquad a = -32 \ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

El segundo inciso se responde a partir de (1), pues se conoce la velocidad y puede determinarse en qué tiempo t se da dicho valor:

$$\frac{d}{dt}f(t) = v(t) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} v(t) &= -32t + 48 \\ 16 &= -32t + 48 \\ -32 &= -32t \\ 1 &= t \end{aligned}$$

Al sustituir el valor de t en $f(t)$ se obtiene la posición de la pelota:

$$\begin{aligned} f(t) &= -16t^2 + 48t + 6 \\ f(1) &= -16 + 48 + 6 \qquad \Rightarrow \qquad 38 \ [m] \end{aligned}$$

El primer inciso nuevamente hace uso de (1), solo que en este caso debe resolverse una desigualdad donde la derivada es menor a 0:

$$\begin{aligned} v(t) &< 0 \\ -32t + 48 &< 0 \\ 48 &< 32t \\ \frac{3}{2} &< t \end{aligned}$$

La velocidad es contraria al sistema de referencia cuando $t > \frac{3}{2}$ $[s]$.

La sitiuación de la pelota se plantea a partir de la gráfica de su posición. En esencia, puede notarse desde la definición de velocidad y aceleración que la trayectoria es una función en forma paramétrica:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Esta parametrización toma al tiempo como la variable independiente, y permite que la posición en el sistema de coordenadas xy dependa de esta magnitud física (tal como lo planteó Newton en las *fluentes*). En el caso de la pelota, la parametrización de su posisicón es:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = -16t^2 + 48t + 6 \end{cases}$$

La interpretación geométrica de la parametrización indica que, por cada t segundos que transcurren, la posición de la pelota cambia $x = t$ metros horizontalmente y $y = f(t)$ metros verticalmente.

Como la ecuación de la posición es una parábola con vértice en el punto $V\left(\frac{3}{2}, 48\right)$ y apertura hacia abajo, significa que la pelota fue lanzada hacia *arriba* y en el intervalo de tiempo a partir de $\frac{3}{2}$ $[s]$ comienza su trayecto hacia *abajo*, tal como se muestra en la figura 1. Ésta es la razón por la cual la velocidad es negativa en la segunda parte de la trayectoria.

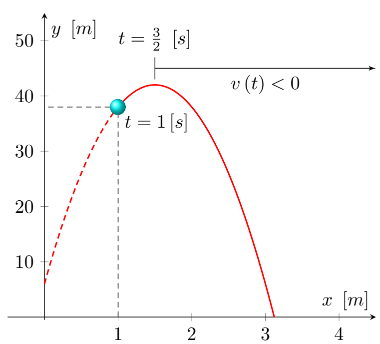


Figura 1

2. Razones de Cambio

Como el movimiento no es la única cantidad que puede variar con el tiempo, también pueden plantearse fenómenos en los cuales existe un cambio en determinado intervalo. Incluso, puede ser que alguna cantidad A varíe según otra cantidad B, que a su cambia conforme transcurre el tiempo. Este tipo de situación se conoce como razones de cambio relacionadas.

Ejemplo. El volumen de una caja rectangular es $V = xyz$. Cada arista se expande a razón de $0.5 \ \left[\frac{cm}{min}\right]$. Obtenga la razón a la cual se expande el volumen de la caja cuando $x = 50 \ [cm]$, $y = 30 \ [cm]$ y $z = 20 \ [cm]$.

En este caso las aristas cambian a razón de $0.5 \ \left[\frac{cm}{min}\right]$, lo que se expresa como

$$\frac{dx}{dt} = 0.5 \ \left[\frac{cm}{min}\right], \qquad \frac{dy}{dt} = 0.5 \ \left[\frac{cm}{min}\right], \qquad \frac{dz}{dt} = 0.5 \ \left[\frac{cm}{min}\right]$$

La razón de cambio del volumen indica su derivación respecto del tiempo:

$$\begin{aligned} V &= xyz \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dx}(xyz) \\ \frac{dV}{dt} &= xy\frac{dz}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + yz\frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

En el instante que se desea calcular el cambio del volumen las aristas tienen una longitud conocida: $x = 50 \ [cm]$, $y = 30 \ [cm]$ y $z = 20 \ [cm]$. Al sustituir estas medidas y la razón de cambio de las aristas se obtiene la razón de cambio del volumen.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= xy\frac{dz}{dt} + xz\frac{dy}{dt} + yz\frac{dx}{dt} \\ &= (50)(30)(0.5) + (50)(20)(0.5) + (30)(20)(0.5) \\ \frac{dV}{dt} &= 1550 \ \left[\frac{cm^3}{min}\right] \end{aligned}$$

Ejemplo. Un velero se dirige hacia un acantilado vertical, tal como se ilustra en la figura 2. Determine:

a. la expresión que relaciona las razones de cambio de a, h y φ.
b. la razón de cambio del ángulo φ en radianes cuando $h = 16$ $[m]$, $a = 8\sqrt{3}$ $[m]$ y las razones de cambio de h y a son, respectivamente, $\sqrt{3}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$ y 2 $\left[\frac{m}{s}\right]$.

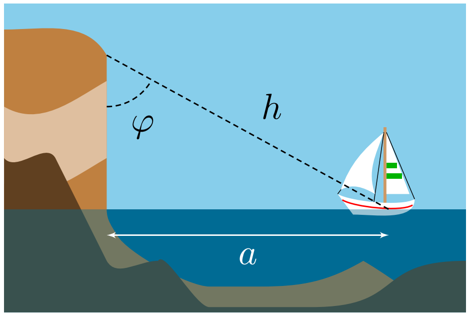


Figura 2

A partir de la figura 2 se observa que se forma un triángulo rectángulo con hipotenusa h, cateto paralelo al mar a y cateto paralelo al acantilado. El ángulo φ es opuesto a a, por lo que la relación entre ambos es mediante la función seno:

$$\sin\varphi = \frac{a}{h} \tag{3}$$

$$h\sin\varphi = a \tag{4}$$

Al derivar (4) se obtiene la relación entre las razones de cambio.

$$\begin{aligned} h\sin\varphi &= a \\ \frac{d}{dt}(h\sin\varphi) &= \frac{da}{dt} \end{aligned}$$

$$h\frac{d}{dt}\sin\varphi + \sin\varphi\frac{dh}{dt} = \frac{da}{dt}$$

$$h\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dh}{dt} = \frac{da}{dt} \tag{5}$$

Para conocer la razón de cambio en el instante solicitado se requiere calcular φ a partir de (3):

$$\sin\varphi = \frac{8\sqrt{3}}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \frac{1}{3}\pi$$

Con los datos completos, se sustituyen los valores $h = 16$, $a = 8\sqrt{3}$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, $\frac{dh}{dt} = \sqrt{3}$ y $\frac{da}{dt} = 2$ en (5) para calcular la razón de φ:

$$\begin{aligned} h\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dh}{dt} &= \frac{da}{dt} \\ (16)\left(\cos\frac{1}{3}\pi\right)\frac{d\varphi}{dt} + \left(\sin\frac{1}{3}\pi\right)\left(\sqrt{3}\right) &= 2 \\ (16)\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right) &= 2 \\ 8\frac{d\varphi}{dt} + \frac{3}{2} &= 2 \\ 8\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{2} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{16} \quad \left[\frac{rad}{s}\right] \end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 29: Diferenciales y su Aplicación

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

1. Diferenciales y Aproximaciones

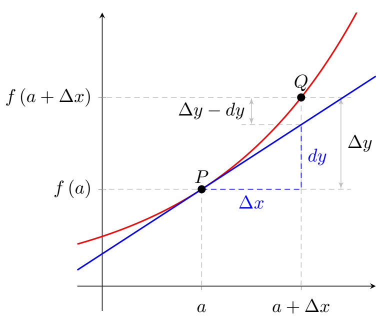


Figura 1. El cambio en la función $f(x)$ puede aproximarse mediante el cambio en la recta tangente, según la variable independiente se incrementa.

La recta tangente a una curva permite analizar la razón de cambio instantáneo de una función en un punto $P(a, f(a))$ (la derivada en $x = a$); este cambio no es constante a lo largo de toda la función. De acuerdo con la figura 1 el punto P se traslada al punto Q cuando $x = a$ se incrementa a $x = a + \Delta x$, y por lo tanto la función $y = f(a)$ cambia a

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x) &= y + \Delta y \\ f(a+\Delta x) &= f(a) + \Delta y \qquad (1) \end{aligned}$$

Como Δy varía según Δx, es poco eficiente calcular constantemente (1) cada vez que la variable independiente es modificada. Pero, puede utilizarse la recta tangente a la gráfica de la función en $x = a$. En la figura 1, la pendiente de la recta tangente se calcula como

$$\frac{dy}{\Delta x} = m$$

que en términos de la derivada es

$$\frac{dy}{\Delta x} = f'(a) \qquad (2)$$

La pendiente (2) no puede utilizarse para calcular directamente la función incrementada, pues existe una discrepancia entre Δy y dy. No obstante, esta diferencia puede minimizarse al momento de seleccionar la longitud de Δx: mientras más pequeño sea el incremento en x dy se acercará más a Δy. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\Delta x} &= f'(a) \\ dy &= f'(a)\,\Delta x \\ \Delta y &\approx f'(a)\,\Delta x \qquad (3) \end{aligned}$$

Al sustituir (3) en (1) la aproximación a la función incrementada es

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x) &= f(a) + \Delta y \\ f(a+\Delta x) &\approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \qquad (4) \end{aligned}$$

Cuando Δx posee una longitud menor, entonces dy se acerca a Δy, nunca llegan a ser iguales pero la discrepancia entre ellos se minimiza.

Estas aproximaciones son lineales, pues la recta tangente se acerca a la curva (una recta tiene una ecuación lineal), y se llaman diferenciales.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x = a$. Al incremento Δx se le conoce como diferencial dx y permite calcular la diferencial

$$dy = f'(x)\,dx$$

que es una aproximación al incremento Δy. La función incrementada $f(a + \Delta x)$ se aproxima con diferenciales mediante la expresión

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x$$

La aproximación por diferenciales puede realizarse mediante exceso o defecto; es decir, la función puede estar por arriba de la recta tangente (por defecto), o puede ser que la curva se encuentre debajo (por exceso). Ambos escenarios se muestran en la figura 2.

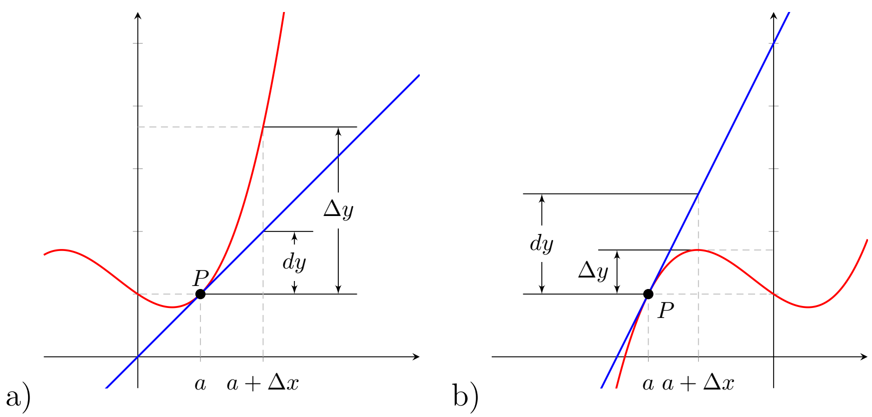


Figura 2. a) Aproximación a $f(a + \Delta x)$ por defecto, donde la curva queda por arriba de la recta tangente. b) Aproximación a $f(a + \Delta x)$ por exceso, en el cual la curva está debajo de la recta tangente.

Ejemplo. Mediante diferenciales, calcule el valor de $\sqrt[3]{9}$.

La función que debe utilizarse es $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cuya derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

La última raíz cúbica exacta antes de $\sqrt[3]{9}$ es $\sqrt[3]{8} = 2$, por lo que se toma como valor inicial $a = 8$; para alcanzar 9 se incrementa 8 en 1:

$$\begin{aligned} a + \Delta x &= 8 + \Delta x \\ 9 &= 8 + 1 \qquad \therefore \qquad \Delta x = 1 \end{aligned}$$

Con estps datos, la aproximación por diferenciales es

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x) &\approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \\ f(8 + 1) &\approx f(8) + f'(8)\,(1) \\ f(9) &\approx \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} \\ f(9) &\approx 2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Con este cálculo, $\sqrt[3]{9} \approx 2.166\overline{6}$.

2. Error Absoluto y Relativo

En el ejemplo anterior se ha obtenido un valor aproximado a partir de un valor conocido. Al ser una aproximación existe una diferencia entre el valor obtenido y el valor real. Para catalogar cuan precisa es la cantidad aproximada se la pueda comparar con el valor exacto o esperado, y así conocer el grado de separación entre ambos. Este tipo de análisis se conoce como errores absoluto y relativo.

Sean b una cantidad exacta y b' una aproximación a b. El error absoluto e_a se define como

$$e_a = b - b'$$

El error relativo se basa en el error absoluto:

$$e_r = \frac{|e_a|}{b}$$

También puede expresarse en términos de porcentaje:

$$e_r\,\% = \left|\frac{e_a}{b}\right| \times 100\,\%$$

Éstos no son los únicos tipos de errores ni las únicas formas de medir el grado de discrepancia entre la cantidad esperada y la obtenida, pero dichas técnicas son parte del curso de Estadística y escapan de los alcances de este curso.

Ejemplo. Mediante diferenciales, calcule un valor aproximado de $\cos 121°$ con $\pi = 3.1416$ y $\sqrt{3} = 1.7321$. Indique el error relativo en porcentaje de la cantidad obtenida.

El coseno exacto más cercano a $\cos 121°$ es $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, por lo que el incremento Δx a utilizar debe ser $1°$. Sin embargo, debido a que se está trabajando con funciones en números reales, $120°$ y $1°$ deben convertirse a radianes:

$$1° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{180}$$

$$120° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{2}{3}\pi$$

La derivada de $\cos x$ es $-\sin x$ y la aproximación es

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x) &\approx f(a) + f'(a)\,\Delta x \\ f\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{180}\right) &\approx f\left(\frac{2}{3}\pi\right) + f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)\frac{\pi}{180} \\ f\left(\frac{121}{180}\pi\right) &\approx \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\frac{\pi}{180} \\ &\approx -0.5 - \frac{1.7321}{2}\cdot\frac{3.1416}{180} \\ f\left(\frac{121}{180}\pi\right) &\approx -0.5151 \end{aligned}$$

La cantidad real a seis cifras es $\cos 121° = -0.515038$, por lo que el error absoluto tiene un valor de

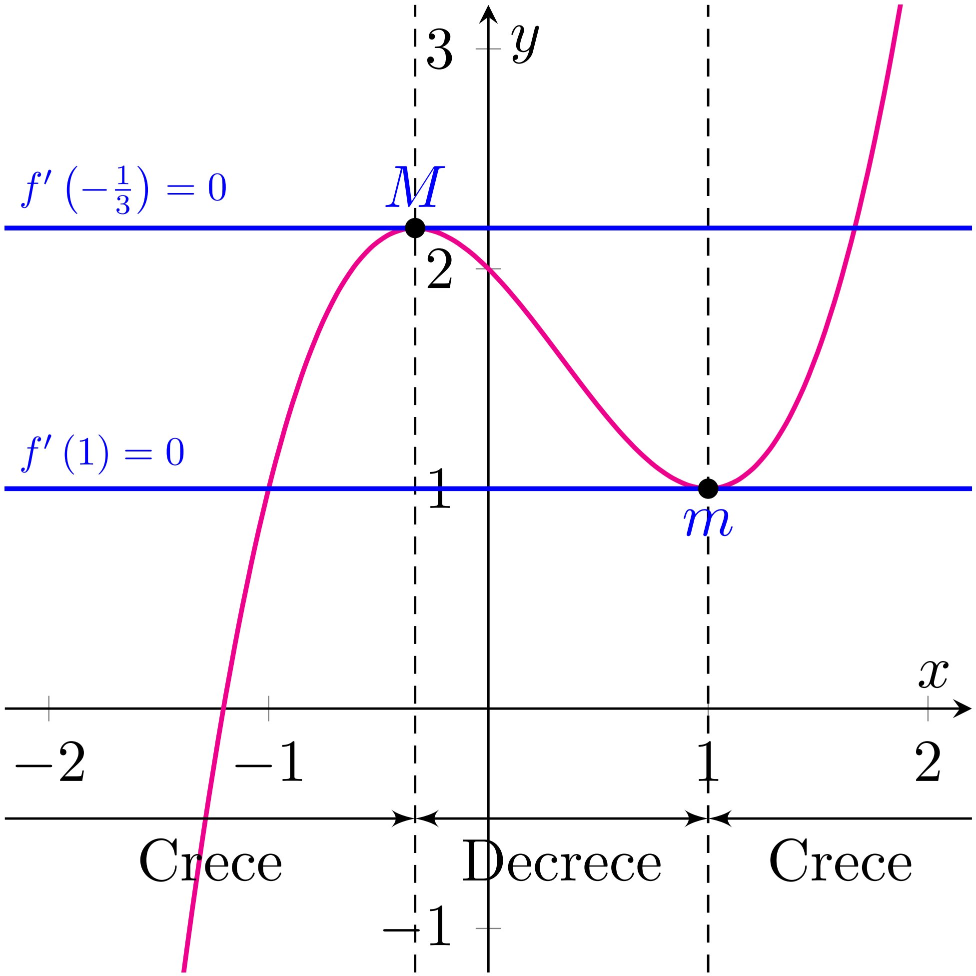
$$\begin{aligned} e_a &= -0.515038 - (-0.5151) \\ e_a &= 0.00062 \end{aligned}$$

Finalmente, el error relativo en porcentaje es

$$\begin{aligned} e_r\,\% &= \left|\frac{0.000062}{-0.515038}\right| \times 100\,\% \\ e_r\,\% &= 0.012\,\% \end{aligned}$$

V

VARIACIÓN DE FUNCIONES



CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica
Lectura 30: Teoremas sobre la Variación de Funciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Octubre 2021

1. Teoremas de Weierstraß y Bolzano

1.1. Teorema de Weierstraß

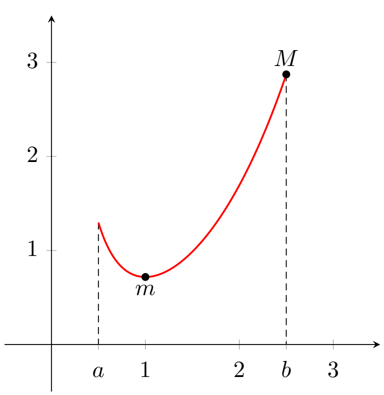


Figura 1. En un intervalo del dominio de una función existen valores máximo M y mínimo m absolutos, los cuales sobresalen del resto de imágenes.

Las funciones pueden caracterizarse por su dominio, la estructura de su regla de correspondencia (tipo de función), los valores de imagen hacia donde se dirigen (límites) o bien mediante el cambio instantáneo que sufren. Esta última situación se realiza mediante la derivada, ya que es la herramienta que describe de forma precisa el comportamiento del cambio en la función.

La primera de las caracterizaciones del cambio se da en la existencia de imágenes que poseen el mayor o menor valor en un entorno del dominio, que se reflejan en la gráfica de la función como los puntos más alto o más bajo, tal como se observa en la figura 1. El matemático alemán Karl Weierstrsßmostró que toda función en un intervalo de su dominio posee *cimas* y *valles*, llamados máximo M y mínimo m absolutos.

Teorema de Weierstraß

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$. La función f presenta, al menos, dos valores $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

donde $m = f(x_1)$ y $M = f(x_2)$ se conocen como valores mínimo y máximo absolutos, respectivamente.

1.2. Teorema de Bolzano

Otra de las situaciones involucrada con el cambio de la función es el conocer cuándo la gráfica de la función corta al eje x. Esta situación tiene dos implicaciones: analizar el cambio de la función cuando las imágenes pasan de ser negativas a ser positivas, y postular una técnica dónde se localiza la solución de ecuaciones como los polinomios.

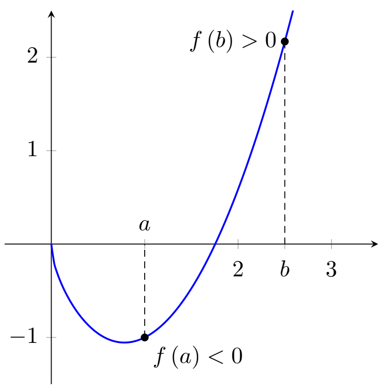


Figura 2. El cruce de una función con el eje x yace donde sus imágenes cambian de signo.

Esta nueva característica fue analizada por el matemático nacido en Bohemia (región de la actual Chequia) Bernard Bolzano, que mostró cómo el cambio de imágenes positivas a negativas, o viceversa, en una función continua indica que existe un lugar donde la gráfica cruza al eje x y es donde se encuentra la solución de una ecuación, como se ilustra en la figura 2. Esto permite fundamentar la localización de soluciones o raíces de una función como ecuación y se enuncia mediante el teorema de Bolzano.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Teorema de Rolle

Una situación interesante para el teorema de Weierstraßes cuando el valor extremo de $f(x)$ está dentro del intervalo $[a, b]$. Suponiendo que el máximo absoluto del intervalo es $M = f(c)$, donde $a < c < b$, entonces $f(a) \leq f(c)$ y $f(b) \leq f(c)$. Por otro lado, cuando c se incrementa la función incrementada será menor que el máximo $f(c)$:

$$\begin{aligned} f(c + \Delta x) &\leq f(c) \\ f(c + \Delta x) - f(c) &\leq 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Al dividir la desigualdad (1) entre el incremento Δx y aplicar el límite cuando éste tiende a cero se obtiene la definición de derivada en $x = c$:

$$\begin{aligned} f(c + \Delta x) - f(c) &\leq 0 \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &\leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ f'(c) &\leq 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

Si ahora se toma al mínimo absoluto como $m = f(c)$, también con $a < c < b$, el escenario cambia a las siguientes características: $f(c) \leq f(a)$, $f(c) \leq f(b)$ y $f(c) \leq f(c + \Delta x)$. A la última desigualdad se le divide entre Δx y aplica el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(c + \Delta x) - f(c) \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} &\leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \\ 0 &\leq f'(c) \qquad (3) \end{aligned}$$

De inicio, se hizo la suposición que en $x = c$ existe un mínimo o máximo absoluto pero cuando se desconoce la situación se deben conjuntar las desigualdades (2) y (3), resultando en un único criterio para determinar el máximo o mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$:

$$0 \leq f'(c) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad f'(c) = 0$$

Sin embargo, no todo está establecido. Lo primero que debe considerarse es que $f'(c)$ debe existir, y como $a < c < b$, entonces la función $f(x)$ debe ser derivable en (a, b). En segunda instancia también debe tomarse en cuenta que

$$f(a) \leq f(c) \text{ y } f(b) \leq f(c)$$

si se tiene un máximo, o bien

$$f(c) \leq f(a) \text{ y } f(c) \leq f(b)$$

en el caso del mínimo. En ambas situaciones puede presentarse $f(a) \leq f(b)$ o $f(b) \leq f(a)$, donde ambas se satisfacen con $f(a) = f(b)$. Este desarrollo se conoce como el teorema de Michel Rolle, y es el pilar fundamental para el cálculo de máximos y mínimos en una función.

Sea $f(x)$ una función derivable en el intervalo (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

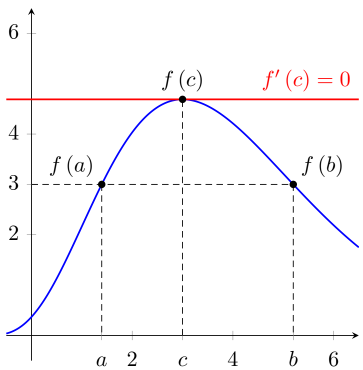


Figura 3. Por el teorema de Rolle, en una función $f(x)$ donde $f(a) = f(b)$ existe un valor $x = c$ en donde la recta tangente posee pendiente nula.

Geométricamente, el teorema de Rolle permite identificar una recta tangente con pendiente nula en el punto donde se encuentra el máximo o mínimo absoluto del intervalo tal como se muestra en la figura 3. También puede apreciarse que en camino de llegar a un máximo la gráfica de la función crece y a continuación decrece; el proceso contrario se presenta cuando se trata de un mínimo. Ese cambio de crecimiento a decrecimiento, y viceversa, permite catalogar a los máximos y mínimos como lugares donde la función no cambia, y como consecuencia se tendrá una derivada anulada.

Ejemplo. Determine si la función

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

satisface el teorema de Rolle en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

El dominio de la función establece que $1 - x^2 \geq 0$ por lo que $D_f : -1 \leq x \leq 1$ y en consecuencia la función es continua en el intervalo de análisis.

La derivada de la función es

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 - x^2} \\ f'(x) &= -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

la cual no existe en los valores $x = -1$ y $x = 1$. Se concluye que en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ la función es derivable. Para observar la aplicación del teorema de Rolle se verifica la última condición:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ \sqrt{\frac{3}{4}} &= \sqrt{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Todas las condiciones de aplicación se satisfacen, ahora solo se busca el valor en el cual la derivada es nula:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, el teorema de Rolle se satisface en $x = 0$.

3. Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial

El teorema de Rolle puede generalizarse a partir de dos valores cualesquiera $f(a)$ y $f(b)$ que no necesariamente son iguales.

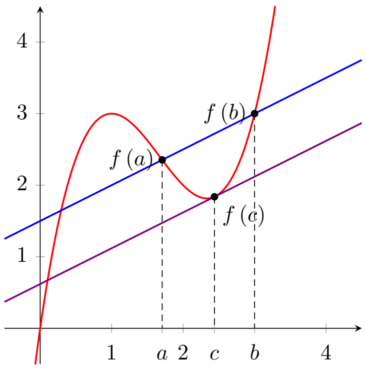


Figura 4. El teorema del valor medio muestra una recta secante y al menos una recta paralela tangente en c, donde $a < c < b$.

En la figura 4 la recta secante a la función $f(x)$ que contiene los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ tiene como pendiente

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4}$$

y su ordenada al origen con uso del punto A es

$$f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a$$

Entonces, la ecuación de la recta secante es

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a \\ y &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede definir una función que sea la resta de $f(x)$ menos la recta secante:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ g(x) &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \end{aligned}$$

Como $f(x)$ y y son dos funciones continuas y derivables en el intervalo (a, b), entonces $g(x)$ también lo es; incluso, la propia g satisface las condiciones propias del teorema de Rolle:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) - f(a) \\ &= f(a) - 0 - f(a) \\ g(a) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) - f(a) \\ &= f(b) - f(b) + f(a) - f(a) \\ g(b) &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, existe un valor c dentro del intervalo (a, b) donde $g'(c) = 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \\ g'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ g'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ 0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned} \tag{5}$$

La igualdad en (5) contiene a la pendiente (4) de la recta secante y $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a f en $x = c$. Como su resta es 0, entonces las rectas secante y tangente son paralelas; esta relación se conoce como el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial.

> Si $f(x)$ es una función derivable en el intervalo (a, b), entonces existe al menos un valor c, tal que la recta tangente a f en c es paralela a la recta secante que une los puntos $\big(b, f(b)\big)$ y $\big(a, f(a)\big)$; es decir,
>
> $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El teorema de Rolle es un caso especial del teorema del valor medio, ya que como $f(a) = f(b)$ entonces la recta secante que contiene a $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ tiene pendiente 0, que es el valor de la derivada en un valor mínimo o máximo c.

El teorema del valor medio del Cálculo Diferencial es parte esencial del teorema fundamental del Cálculo, ya que es uno de los dos pilares que lo fundamenta; el otro pilar es el teorema del valor medio del Cálculo Integral, que se estudiará en la signatura de Cálculo Integral.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Obtenga los valores de $x \in [0, 4]$ donde se satisface el teorema del valor medio.

Para obtener los valores de x primero se calcula la pendiente de la recta secante:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \\ &= \frac{4 - 0}{4} \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Ahora la derivada debe ser igual a la pendiente m encontrada:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x \\ f'(x) &= 3^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \begin{aligned} 1 &= 3x^2 - 12x + 9 \\ 0 &= 3x^2 - 12x + 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(24)}}{6} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} \\ x &= 2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Los valores que satisfacen el teorema del valor medio son $x = 2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y $x = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$. En la figura 5 se muestra la situación geometría de $f(x)$ bajo el teorema del valor medio.

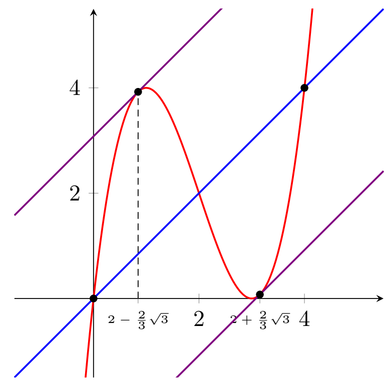


Figura 5

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 31: Crecimiento y Decrecimiento; Valores Estables

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Octubre 2021

1. Crecimiento y Decrecimiento

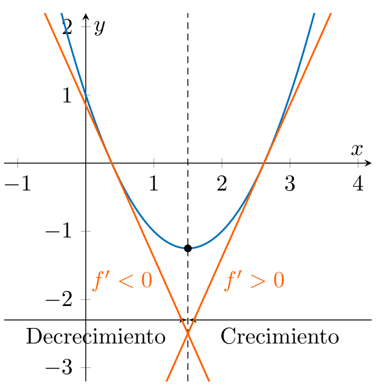


Figura 1. La derivada indica la pendiente de la recta tangente a la curva, y su signo permite identificar el crecimiento y decrecimiento de la función.

De acuerdo al teorema de Rolle, en un intervalo del dominio de una función existe un valor $x = c$ donde la derivada se anula. Geométricamente, la situación representa el lugar de la gráfica de la función donde la recta tangente posee pendiente 0.

Al recorrer todo el dominio de una función, no en todos los lugares se tendrá una derivada nula; es decir, existirán intervalos donde la pendiente de la recta tangente será positiva o negativa. Para analizar qué sucede con la función se puede tomar a la recta tangente como referencia, ya que la pendiente indica cuando la ordenada de la recta aumenta o disminuye su valor conforme la abscisa se incrementa. La forma de mostrar este comportamiento es mediante límites a infinito.

Siendo

$$y = mx + b \tag{1}$$

una recta con $m > 0$, entonces el límite cuando x tiende a infinito es

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} mx + b &= m(\infty) + b\\ &= \infty + b\\ &= \infty\end{aligned}$$

El resultado indica que conforme x aumenta su valor, entonces y también aumenta; es decir, la recta (1) crece conforme x crece. Por otro lado, si $m < 0$ entonces el límite con x hacia infinito es

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} mx + b &= m(\infty) + b\\ &= -\infty + b\\ &= -\infty\end{aligned}$$

En este caso conforme x crece, el valor de y para la recta decrece.

Dado que la recta tangente a una función posee una pendiente calculada a partir de la derivada, entonces el signo de ésta indicará cuándo la función crece y decrece, tan como se muestra en la figura 1.

Sea $f(x)$ una función derivable en todo su dominio. La función será creciente en los intervalos del dominio donde $f'(x) > 0$ y decreciente donde $f'(x) < 0$.

El conocimiento de los intervalos de creciemiento y decrecimiento de la función, en conjunto con los límites a infinito, permiten conocer de mejor forma el comportamiento de una función y así, esbozar la respectiva gráfica de forma exacta.

Ejemplo. Determine los intervalos donde la función

$$f(x) = x^3 e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

crece y decrece.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función se obtienen a partir de la derivada.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 e^{-x} + x^2 e^{-x} \\ f'(x) &= -x^3 e^{-x} + 3x^2 e^{-x} - x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} \\ f'(x) &= -x^3 e^{-x} + 2x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} \end{aligned}$$

Para los intervalos crecientes la derivada debe ser positiva:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ -x^3 e^{-x} + 2x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} &> 0 \end{aligned} \tag{2}$$

La función e^x es positiva; la desigualdad (2) se divide entre ella para resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} -x^3 e^{-x} + 2x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} &> 0 \\ -x^3 + 2x^2 + 2x &> 0 \\ -x\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right) &> 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Los tres factores de la desigualdad (3) plantean cuatro escenarios.

- Caso $-x > 0 \quad \cap \quad x - 1 - \sqrt{3} > 0 \quad \cap \quad x - 1 + \sqrt{3} > 0$, que arroja las soluciones

$$0 > x \qquad x > 1 + \sqrt{3} \qquad x > 1 - \sqrt{3}$$

donde no existe intersección de los tres intervalos.

- Caso $-x > 0 \quad \cap \quad x - 1 - \sqrt{3} < 0 \quad \cap \quad x - 1 + \sqrt{3} < 0$, dando las soluciones

$$0 > x \qquad x < 1 + \sqrt{3} \qquad x < 1 - \sqrt{3}$$

donde la intersección de las tres soluciones resulta en el intervalo $x < 1 - \sqrt{3}$.

- Caso $-x < 0 \quad \cap \quad x - 1 - \sqrt{3} < 0 \quad \cap \quad x - 1 + \sqrt{3} > 0$, cuyas soluciones son

$$0 < x \qquad x < 1 + \sqrt{3} \qquad x > 1 - \sqrt{3}$$

con una intersección en el intervalo $0 < x < 1 + \sqrt{3}$.

- Caso $-x < 0 \quad \cap \quad x - 1 - \sqrt{3} > 0 \quad \cap \quad x - 1 + \sqrt{3} < 0$, en el que las soluciones son

$$0 < x \qquad x > 1 + \sqrt{3} \qquad x < 1 - \sqrt{3}$$

mas no existe intersección.

Así, a partir de la derivada positiva la función crece en el intervalo

$$x < 1 - \sqrt{3} \qquad \cup \qquad 0 < x < 1 + \sqrt{3}$$

Debido a que la función $f(x)$ es el producto de funciones exponenciales y polinómicas entonces es continua en todo su dominio. Por lo tanto, el intervalo donde la función decrece es el complementario al intervalo donde crece:

$$1 - \sqrt{3} < x < 0 \qquad \cup \qquad 1 + \sqrt{3} < x$$

No se incluyen los valores $1 - \sqrt{3}$, 0 y $1 + \sqrt{3}$, pues éstos anularían a la derivada. En la figura 2 se ilustra la gráfica de la función con los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

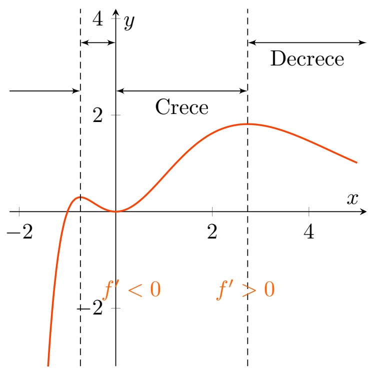


Figura 2

2. Valores Estables: Máximos y Mínimos

De acuerdo con el teorema de Weierstraßen un intervalo $[a, b]$ del dominio de una función derivable $f(x)$ existen los valores máximo M y mínimo m absolutos. Al tomar el dominio completo, M y m se convierten en relativos pues pueden existir valores mayores o menores fuera de $[a, b]$. Por lo tanto, el valor del dominio donde existen valores máximos o mínimos pueden estudiarse en un entorno a él.

Sea $f(x)$ una función derivable en todo su dominio. El valor M máximo se encuentra en x_E si en el entorno $|x - x_E| < \delta$ se satisaface

$$f(x) < f(x_E)$$

En cambio, si para x_E en el entorno $|x - x_E| < \delta$ existe un valor mínimo m entonces

$$f(x) > f(x_E)$$

Ahora puede considerarse el siguiente escenario: a partir de $x = a$ f crece indicando que la derivada es positiva; a continuación existe un valor donde el signo de la derivada cambia de positivo a negativo, indicando decrecimiento, para llegar a $x = b$. Esto involucra al teorema de Rolle, ya que el crecimiento y posterior decrecimiento es muestra que $f(a) = f(b)$ en algún momento, por lo que existe un valor $x = c$ donde $f'(c) = 0$, como se ilustra en la figura 3. Este elemento c es el lugar donde la derivada cambia de signo.

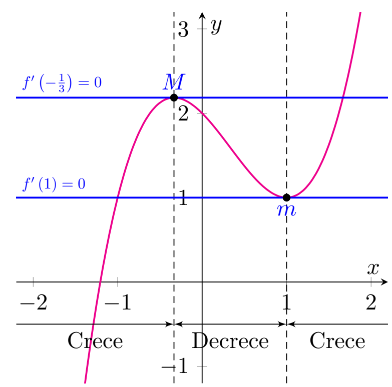


Figura 3. El cambio de signo de la derivada se da en $f'(x) = 0$, lugar del punto estable.

Como se mencionó en la interpretación geométrica de los teoremas de Rolle y Weierstraß, el valor donde $f'(c) = 0$ es donde se tiene un valor máximo o mínimo. Mediante los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el comportamiento de f se describe con dos casos:

- ❏ crece, llega a un valor alto (máximo) y después decrece.
- ❏ decrece, llega a un valor bajo (mínimo) y después crece.

Este comportamiento muestra que al crecimiento de una función le sigue un máximo y después decrecimiento, y viceversa para el mínimo. Además, los máximos o mínimos son los lugares donde hay paso de aumento a disminución en la función y justo en dicho lugar no existe cambio en la función pues la derivada es nula. Por esta situación a los máximos y mínimos se les conoce como puntos estables y para identificarlos se utiliza el signo de la primera derivada de la función.

Sea $f(x)$ una función derivable en todo su dominio. Un punto estable $(x_E, f(x_E))$ de la gráfica de f es aquél en el cual $f'(x_E) = 0$. Los puntos estables se clasifican según el criterio de la primera derivada:

- ❏ si $f'(x) > 0$ antes de x_E, entonces $f(x_E)$ es máximo.
- ❏ si $f'(x) < 0$ antes de x_E, entonces $f(x_E)$ es mínimo.

Ejemplo. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$$

Obtenga:

a. Los valores de x donde existen puntos estables.
b. Los intervalos donde la función crece y decrece.
c. la naturaleza de los puntos estables.

Para comenzar se calcula la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

Al igualarla a 0 se tienen los valores de x donde hay puntos estables:

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \\ &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$0 = (x + 3)(x - 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Para los intervalos de crecimiento se debe resolver la desigualdad

$$(x + 3)(x - 1) > 0$$

Caso 1:

$$\begin{array}{ccc} x + 3 > 0 & \cap & x - 1 > 0 \\ x > -3 & & x > 1 \end{array}$$

La intersección se da en $x > 1$.

Caso 2:

$$\begin{array}{ccc} x + 3 < 0 & \cap & x - 1 < 0 \\ x < -3 & & x < 1 \end{array}$$

La intersección se da en $x < -3$.

Los intervalos de crecimiento de la función son $x < -3$ y $1 < x$. En consecuencia los intervalos de decrecimiento son $-3 < x < -1$ y $-1 < x < 1$, pues la función no está definida en $x = -1$.

Por último, después de crecer en $x < -3$ viene un decrecimiento, por lo tanto en $x = -3$ hay un máximo. Como en $-1 < x < 1$ la función decrece, entonces en $x = 1$ hay un mínimo. En la figura 4 se muestra la gráfica de la función con sus valores estables y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

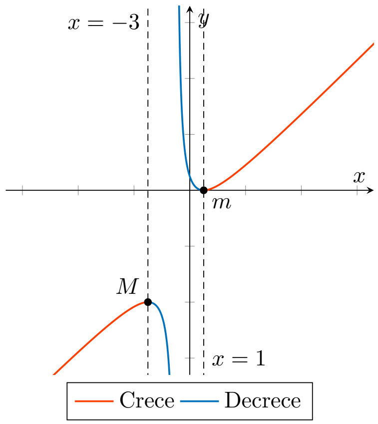


Figura 4

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 32: Criterio de la Segunda Derivada; Valores Críticos

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Noviembre 2021

1. Criterio de la Segunda Derivada

El criterio de la primera derivada para clasificar puntos estables es muy potente pues permite identificar el comportamiento casi completo de la función. Sin embargo, no es muy eficiente debido a la complejidad de resolver desigualdades.

Otro método para determinación de la naturaleza de los puntos estables incluye a la segunda derivada. Una función $f(x)$ derivable en $[a,b]$ posee una función derivada $f'(x)=g(x)$, y puede asumirse que en x_E existe un punto estable, tal que $a<x_E<b$. Tomando el intervalo $[a,x_E]$ a $g(x)$ se le aplica el teorema del valor medio del Cálculo:

$$\frac{g(x_E)-g(a)}{x_E-a}=g'(c) \tag{1}$$

donde $a<c<x_E$. Antes de simplificar (1) hay que hacer algunas especificaciones: la primera es que $f'(x)=g(x)$ y consecuentemente $f''(x)=g'(x)$; la segunda viene en el valor x_E, donde hay punto estable, que provoca $f'(x_E)=0$; la tercera es que $x_E-a>0$. Así, (1) queda simplificada como

$$\begin{aligned}\frac{g(x_E)-g(a)}{x_E-a}&=g'(c)\\ \frac{f'(x_E)-f'(a)}{x_E-a}&=f''(c)\\ -f'(a)&=f''(c)(x_E-a)\end{aligned} \tag{2}$$

Como $x_E-a>0$, el signo de $f''(c)$ depende del signo de $f'(a)$:

- si $f'(a)>0$, (2) se satisface con $f''(c)<0$. Como f' es positiva, hay crecimiento en $[a,x_E]$ y en x_E debe existir un máximo.
- si $f'(a)<0$, (2) se satisface con $f''(c)>0$. Como f' es negativa, hay decrecimiento en $[a,x_E]$ y en x_E debe existir un mínimo.

Para corroborar este planteamiento se analiza el intervalo $[x_E,b]$ de la misma forma, pero después del valor estable.

$$\begin{aligned}\frac{g(b)-g(x_E)}{b-x_E}&=g'(d)\\ \frac{f'(b)-f'(x_E)}{b-x_E}&=f''(d)\end{aligned}$$

$$f'(b) = f''(d)(b - x_E) \tag{3}$$

En esta situación con $b - x_E > 0$ los casos a analizar para (3) son:

- si $f'(b) > 0$, entonces $f''(d) > 0$. Ahora f' es positiva en $[x_E, b]$, por lo que hay crecimiento y en x_E debe existir un mínimo.
- si $f'(b) < 0$, entonces $f''(d) < 0$. Ahora f' es negativa en $[x_E, b]$, por lo que hay decrecimiento y en x_E debe existir un máximo.

Considerando el intervalo completo $[a, b]$, la segunda deriva es positiva cuando hay decrecimiento antes de x_E seguido de crecimiento (mínimo). En el caso que la segunda derivada sea negativa, entonces hay crecimiento previo a x_E y decrecimiento después (máximo). En ambos casos puede incluirse el valor de x_E para evaluar el signo de la segunda derivada, lo que es conocido como el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Sea $f(x)$ derivable en segundo orden (segunda derivada). Si en x_E existe un punto estable, entonces:

- es un mínimo si $f''(x_E) > 0$.
- es un máximo si $f''(x_E) < 0$.

Si $f''(x_E) = 0$, entonces el criterio no decide.

La razón por la que $f''(x_E) = 0$ no decide la naturaleza del extremo en x_E yace en las igualdades (2) y (3): si $f'' = 0$, entonces $f'(a)$ y $f'(b)$ serían nulas y tiene que modificarse el intervalo de aplicación del teorema del valor medio. Para evitar dicha situación se recomienda analizar la geometría de la gráfica de la función a partir del criterio de la primera derivada.

Ejemplo. Determine, mediante el criterio de la segunda derivada, la naturaleza de los valores extremos de la función

$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Se calculan los valores del dominio donde hay puntos estables.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1 \\ h'(x) &= x^2 + x \\ 0 &= x(x+1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Mediante la segunda derivada

$$\begin{aligned} h'(x) &= x^2 + x \\ h''(x) &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Al evaluar en $x = 0$ y $x = -1$:

$$\begin{aligned} h''(x) &= 2x + 1 & \qquad h''(x) &= 2x + 1 \\ h''(0) &= 1 & \qquad h''(-1) &= -1 \end{aligned}$$

La segunda derivada es positiva para $x = 0$y se concluye que existe un mínimo. Por otro lado, en $x = -1$ la segunda derivada es negativa, donde se tiene un máximo.

2. Valores Críticos

Al momento se han conocido y estudiado los valores estables (máximo y mínimo) que son trascendentes para conocer la variación de una función. Sin embargo, no son los únicos tipos de valores importantes en las funciones, ya que incluso existen máximos y minímos que no pueden calcularse mediante la derivada. Incluso, hay tipos de valores importantes para caracterizar a la función que satisfacen $f'(x) = 0$, aún cuando no son máximos o mínimos pero sí estables. En su conjunto, todos estos tipos de valores se conocen como críticos.

Sea $f(x)$ una función cualquiera. Si en $f(x)$ existen valores $x_C \in D_f$ tales que

$$f'(x_C) = 0 \qquad \text{o} \qquad f'(x_C) = \nexists$$

entonces x_C son conocidos como valores críticos.

Los valores críticos se clasifican en dos grandes grupos:

$$\text{Valores críticos}\begin{cases}\text{Valores extremos}\begin{cases}\text{Máximos}\\ \text{Mínimos}\end{cases}\\ \text{Valores de inflexión}\end{cases}$$

Ambos tipos pueden encontrarse mediante $f' = 0$ o bien $f' = \nexists$. Los extremos que se han estudiado hasta ahora son los estables, pero también pueden localizarse a partir de las funciones donde no existe la derivada. Se aclara que el criterio de la segunda derivada no es aplicable a este tipo de valores extremos, por lo que debe analizarse el crecimiento y decrecimiento mediante la primera derivada.

Ejemplo. Determine la naturaleza de los valores críticos de la siguiente función

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x}$$

Se obtiene la derivada para encontrar los valores críticos.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x} \\ f'(x) &= \frac{e^x \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2}e^x}{e^{2x}} \\ f'(x) &= \frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x}e^x} \end{aligned}$$

El valor crítico que es estable se encuentra en

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 3x \\ 3x &= 2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ahora, la naturaleza del valor crítico donde la derivada no existe y del valor estable se analiza mediante crecimiento y decrecimiento.

$$\begin{aligned} \frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x}e^x} &> 0 \\ \frac{2-3x}{\sqrt[3]{x}} &> 0 \end{aligned}$$

Caso 1:

$$\begin{aligned} 2 - 3x &> 0 & \cap \qquad \sqrt[3]{x} &> 0 \\ 2 &> 3x & x &> 0 \\ \frac{2}{3} &> x \end{aligned}$$

La intersección se tiene en $0 < x < \frac{2}{3}$.

Caso 2:

$$2 - 3x < 0 \qquad \cap \qquad \sqrt[3]{x} < 0$$

$$2 < 3x \qquad \cap \qquad x < 0$$
$$\frac{2}{3} < x$$

Aquí no existe intersección. Entonces, la función crece en el intervalo

$$0 < x < \frac{2}{3}$$

La función f posee al conjunto $\mathbb{R}$ como dominio, ya que tanto e^x como $\sqrt[3]{x}$ aceptan cualquier número real, por lo que el intervalo de decrecimiento de la función es

$$x < 0 \quad \cup \quad \frac{2}{3} < x$$

El valor donde la derivada no existe es $x = 0$; antes de 0 la función decrece y después comienza a crecer; este comportamiento ilustra que en $x = 0$ existe un mínimo. El valor $x = \frac{2}{3}$ se encuentra entre el intervalo de crecimiento y la segunda parte del intervalo de decrecimiento, por lo que aquí existe un máximo. La figura 1 indica la gráfica de $f(x)$ donde se observa la descripción de la función.

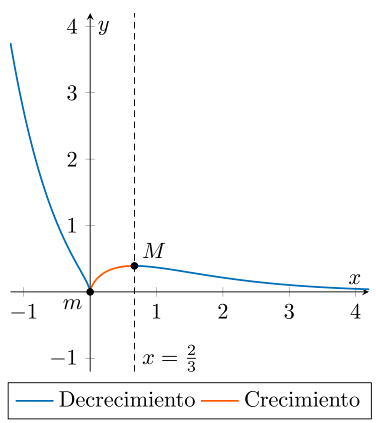


Figura 1

Hay que poner mucha atención al dominio de la función cuando se analicen los puntos críticos, ya que es fácil confundir que la derivada no exista para valores que no estén presentes en el dominio de la función. Como caso específico, la función

$$h(x) = \frac{1}{x}$$

tiene un dominio real donde $x \neq 0$. Al derivar h se tiene la función

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

donde $x \neq 0$ y en consecuencia la derivada no existe en ese valor. Sin embargo, esta función no tiene valores críticos ya que no puede igualarse a 0 y el valor donde no existe la derivada no pertenece al dominio. Por esta razón, si existen valores donde la derivada no está definida, hay que revisar el dominio de la función para verificar si dichos valores están o no presentes.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 33: Concavidad y Valores de Inflexión

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Noviembre 2021

1. Concavidad de una Función

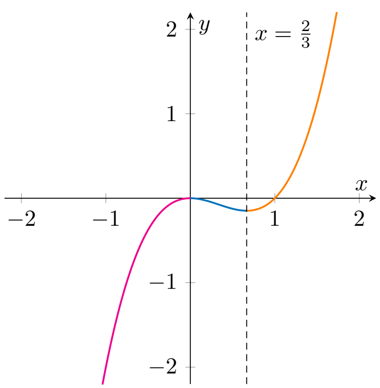


Figura 1. La función f crece de una forma en $x < 0$ (concavidad hacia abajo) y de manera completamente diferente en $\frac{2}{3} < x$ (concavidad hacia arriba).

El crecimiento y decrecimiento de una función son características imprescindibles para conocer la gráfica de una función. Sin embargo no es suficiente para caracterizar completamente el cambio de una función.

Cuando se habla de crecimiento de una función no se conoce la dirección que toma ese cambio. En la figura 1 la función muestra dos intervalos de crecimiento, no obstante la forma en la cual la función crece es diferente: en el primer intervalo el crecimiento disminuye conforme la función se acerca al máximo, en tanto que en el segundo intervalo el crecimiento aumenta conforme se aleja del mínimo. La forma en la cual *cambia el cambio* en la función se conoce como concavidad, y al ser la variación de un cambio se calcula mediante la derivada de la derivada.

Sea $f(x)$ una función continua y doblemente derivable en un intervalo $[a, b]$. La función f presenta:

- ❏ concavidad hacia arriba si $f''(x) > 0$.
- ❏ concavidad hacia abajo si $f''(x) < 0$.

Puede afirmarse que la concavidad indica la aceleración de la función, pues ambas se calculan mediante la segunda derivada y ambas miden que tan rápido aumenta el crecimiento o decrecimiento. De acuerdo a la figura 2, conforme la función decrece las pendientes de las rectas tangentes van aumentando en magnitud; es decir, al avanzar sobre el eje x la recta tangente pasa de ser una pendiente negativa a una positiva y eso se logra al incrementar la

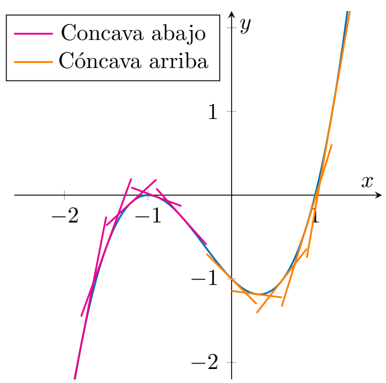


Figura 2. La concavidad ilustra el cambio en la pendiente de la recta tangente a la función.

pendiente (una derivada creciente).

Sabiendo que la pendiente de la recta tangente es $m = f'(x)$, entonces para analizar su cambio se recurre a su derivada: si la derivada de la pendiente es positiva, entonces hay crecimiento; en caso contrario hay decrecimiento.

$$
\begin{aligned}
m &= f'(x) \\
m' &= f''(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'' > 0, & m \text{ crece} \\ f'' < 0, & m \text{ decrece} \end{cases}
\end{aligned}
$$

El crecimiento en la pendiente m es indicativo que, al decrecer, la gráfica de la función adquiere una forma similar a la de un tazón en su posición natural, lo que es conocido como cancavidad hacia arriba. En cambio, cuando la pendiente m decrece (pasa de ser positiva a negativa) la gráfica toma la forma de un tazón boca abajo, siendo ésta la concavidad hacia abajo.

Ejemplo. Obtenga los intervalos de concavidad para la función

$$h(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$$

Las derivadas sucesivas de la función son:

$$
\begin{aligned}
h(x) &= x^2 + \sqrt[3]{x} \\
h'(x) &= 2x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
h''(x) &= 2 - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}
\end{aligned}
$$

Para resolver los intervalos de concavidad hacia arriba se resuelve la desigualdad siguiente.

$$
\begin{aligned}
2 - \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} &> 0 \\
\frac{18\sqrt[3]{x^5} - 2}{9\sqrt[3]{x^5}} &> 0
\end{aligned}
$$

Los intervalos donde esta segunda derivada es positiva se obtienen a partir de dos casos.

Caso 1:

$$
\begin{aligned}
18\sqrt[3]{x^5} - 2 &> 0 & \cup \qquad 9\sqrt[3]{x^5} &> 0 \\
\sqrt[3]{x^5} &> \frac{1}{9} & \sqrt[3]{x^5} &> 0 \\
x &> \frac{1}{\sqrt[5]{729}} & x &> 0
\end{aligned}
$$

La intersección de estas soluciones se obtiene en $\frac{1}{\sqrt[5]{729}} < x$.

Caso 2:

$$
\begin{aligned}
18\sqrt[3]{x^5} - 2 &< 0 & \cup \qquad 9\sqrt[3]{x^5} &< 0 \\
\sqrt[3]{x^5} &< \frac{1}{9} & \sqrt[3]{x^5} &< 0 \\
x &< \frac{1}{\sqrt[5]{729}} & x &< 0
\end{aligned}
$$

Ahora la intersección se da en $x < 0$. Por lo tanto, la función es cóncava hacia arriba en

$$x < -\frac{1}{\sqrt[5]{729}} \quad \cup \quad 0 < x$$

Como la función es continua en todo su dominio, entonces la gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo complementario a la concavidad hacia arriba.

$$-\frac{1}{\sqrt[5]{729}} < x < 0$$

En la figura 3 se muestra la gráfica de la función con sus respectivos intervalos de concavidad.

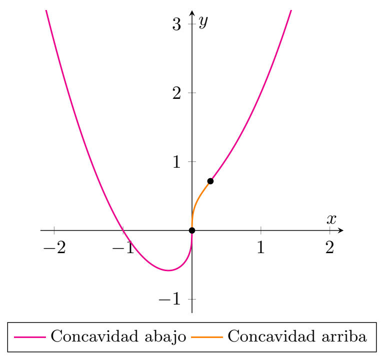


Figura 3

2. Puntos de Inflexión

Dentro de los valores críticos que se estudiaron anteriormente también se incluyeron los llamados valores de inflexión. Este tipo de valores son la frontera entre la concavidad hacia arriba y hacia abajo; en otras palabras, los valores de inflexión se presentan en los lugares donde el cambio de la pendiente de la recta tangente a la curva es estable o bien no existe.

Puede notarse que los valores de inflexión representan los extremos en la derivada, por lo cual se calculan de la misma forma que los extremos pero con la segunda derivada.

Sea $f(x)$ una función continua. Si en $f(x)$ existen valores $x_I \in D_f$ tales que

$$f''(x_I) = 0 \qquad \text{o} \qquad f''(x_I) = \nexists$$

entonces x_I son conocidos como valores de inflexión.

Ahora, los valores críticos pueden definirse como extremos donde la primera derivada es nula o no existe, y como de inflexión donde la segunda derivada es nula o no existe.

Hay ocasiones en las cuales puede confundirse un valor extremo con uno de inflexión, y esto se debe a que tanto la primera y segunda derivadas son nulas o bien ambas no existen. Para dictaminar la naturaleza se recurre al análisis de crecimiento o concavidad: un valor de inflexión está contenido en intervalos de crecimiento o decrecimiento, en tanto que un valor extremo está contenido en intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo. Sea la función

$$q(x) = \frac{1}{200}x^5 - \frac{7}{120}x^4 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x$$

Obtenga los valores de inflexión de la función.

Para los valores de inflexión se aplican las primeras dos derivadas.

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{200}x^5 - \frac{7}{120}x^4 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{10}x \\ q'(x) &= \frac{1}{40}x^4 - \frac{7}{30}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - \frac{1}{10} \\ q''(x) &= \frac{1}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

A partir de la segunda derivada se obtienen los valores de inflexión.

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}x^3-\frac{7}{10}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}&=0\\ x^3-7x^2+4x+12&=\\ (x-2)\,(x-6)\,(x+1)&=0\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio de concavidad se da en los valores $x=2$, $x=6$ y $x=-1$. En la figura 4 se muestra la gráfica de la función con los respectivos puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.

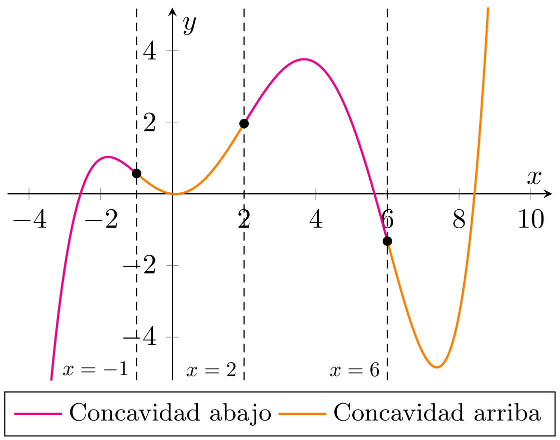


Figura 4

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 34: Optimización

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Noviembre 2021

Los máximos y mínimos son cualidades de la variación de funciones importantes para el planteamiento y resolución de problemas. La naturaleza de los extremos permite forzar una situación particular a adquirir un valor óptimo a partir de datos de acotación; este tipo de problemas se conoce como optimización de funciones.

Para establecer un buen planteamiento para la optimización de un problema se deben identificar dos datos importantes: la función objetivo a optimizar (función a maximizar o minimizar) y un conjunto de restricciones que limiten al objetivo. El uso de restricciones permite acotar a la función para obtener máximos o mínimos absolutos.

Por otro lado, el resultado del problema que se optimiza también restringe los extremos según la validez de los valores obtenidos. Por ejemplo, si se está optimizando un volumen los extremos deben fijarse a valores positivos ya que valores nulos o negativos no tendrían sentido para el problema.

Ejemplo. Se tienen 100 $[m]$ de alambre con el cual se delimitará un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que el área sea máxima?

Las dimensiones del terreno se denotan como b (base) y h (altura). La función objetivo es el área rectangular, ya que debe ser la mayor posible:

$$A = bh \tag{1}$$

La restricción está sentada por el perímetro rectangular y que no puede ser diferente de 100:

$$100 = 2b + 2h \tag{2}$$

La restricción (2) sirve para despejar una variable y sustituirla en el área (1) y así tener una función en una variable para calcular los extremos.

$$\begin{aligned} 100 &= 2b + 2h \\ 50 - b &= h \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A(b) &= b(50 - b) \\ A(b) &= 50b - b^2 \end{aligned}$$

Ahora se aplica la primera derivada para cálculo de extremos.

$$
\begin{aligned}
A(b) &= 50b - b^2 \\
A'(b) &= 50 - 2b \\
0 &= 50 - 2b \\
b &= 25
\end{aligned}
$$

Al sustituir el valor de x en (2) se obtiene y:

$$
\begin{aligned}
100 &= 2b + 2h \\
&= 2(25) + 2h \\
100 - 50 &= 2h \\
25 &= h
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el terreno debe tener una base $b = 25\ [m]$ y una altura $h = 25\ [m]$ para maximizar su área.

Ejemplo. Encuentre los puntos sobre la parábola $y = x^2$ que estén más cercanos al punto $A(0,5)$.

Al hablar de lugares más cercanos se hace referencia a minimizar la distancia recta. Por lo tanto, la función a optimizar es la distancia entre dos puntos:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Aquí se hacen varias aclaraciones. La primera es el punto $A(0,5)$, que es fijo y una restricción. La segunda es el punto $B(x,x^2)$, que pertenece a la parábola para y es la segunda restricción del problema. La tercera aclaración es la distancia, pues la raíz complica la derivada por lo que puede utilizarse la distancia al cuadrado como objetivo. Entonces, la función a optimizar es

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\
D(A,B) &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\
D(x) &= x^2 + \left(x^2 - 5\right)^2
\end{aligned}
$$

La derivada de la función es

$$D'(x) = 2x + 2\left(x^2 - 5\right)(2x)$$

Para los valores extremos se resuelve la derivada igualada a cero.

$$
\begin{aligned}
D'(x) &= 0 \\
2x + 2\left(x^2 - 5\right)(2x) &= \\
(2x)\left(1 + 2x^2 - 10\right) &= \\
(2x)\left(2x^2 - 9\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Las soluciones, que representan los valores estables son $x = 0$, $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Al ser tres se deben evaluar en la función distancia al cuadrado para conocer cuáles representa mínima distancia.

Para $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
D(0) &= (0)^2 + (0 - 5)^2 \\
D(0) &= 25
\end{aligned}
$$

Para $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$:

$$
\begin{aligned}
D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 5\right)^2 \\
D\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{19}{4}
\end{aligned}
$$

Para $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$:

$$D\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 5\right)^2$$
$$D\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{19}{4}$$

Las tres evaluaciones indican la mínima distancia se da en $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Por lo que los puntos más cercanos a $A(0,5)$ en la parábola son:

$$B_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad B_2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$$

Ejemplo. Encuentre dos números positivos a y b, cuyo producto es 400, tales que la suma del doble de a y del triple de b es mínimo.

Este problema plantea un producto de inicio que es la restricción:

$$ab = 400 \tag{3}$$

El objetivo es la suma mínima:

$$s = 2a + 3b \tag{4}$$

De (3) se despeja b y se sustituye en (4):

$$b = \frac{400}{a}$$

$$\Rightarrow \qquad s = 2a + 3b$$

$$s(a) = 2a + 3\left(\frac{400}{a}\right)$$
$$s(a) = 2a + \frac{1200}{a}$$

Al derivar se tienen los valores extremos.

$$s(a) = 2a + \frac{1200}{a}$$
$$s'(a) = 2 - \frac{1200}{a^2}$$
$$0 = \frac{2a^2 - 1200}{a^2}$$
$$0 = 2a^2 - 1200$$
$$1200 = 2a^2$$
$$10\sqrt{6}a$$

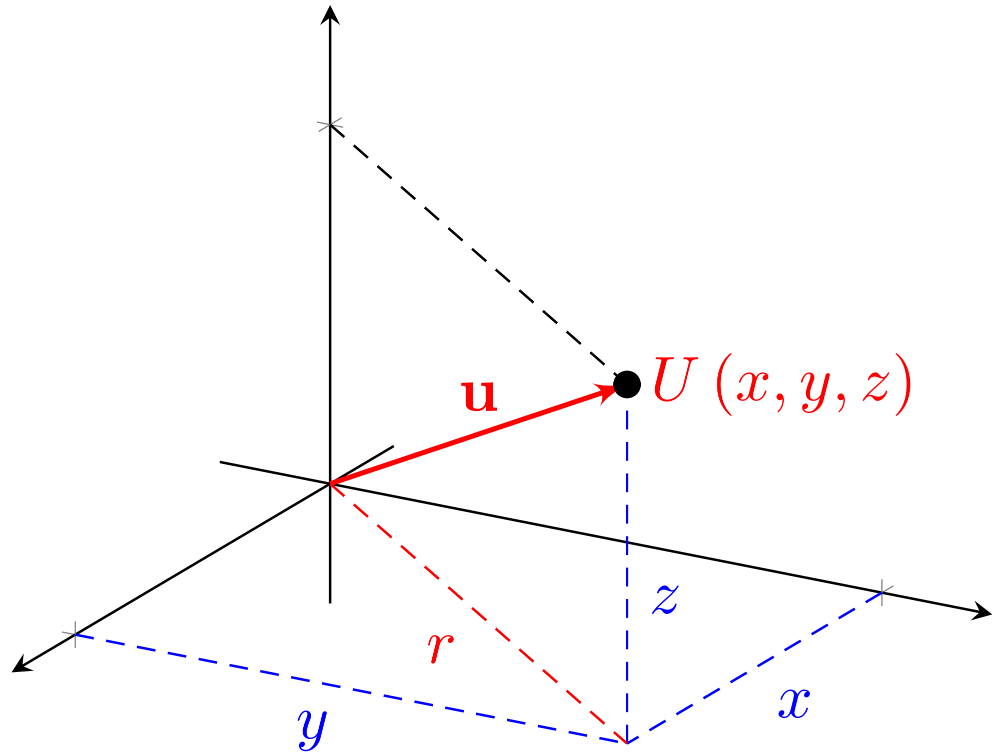
El primer valor es $a = 10\sqrt{6}$; no se considera la raíz negativa porque el problema indica que los números son positivos. Al sustituir en (3) se obtiene el segundo valor:

$$ab = 400$$
$$10\sqrt{6}b = 400$$
$$b = \frac{40}{\sqrt{6}}$$

Por lo tanto, el segundo valor es $b = \frac{40}{\sqrt{6}}$

VI

ÁLGEBRA VECTORIAL



CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 35: Vectores y Escalares

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Diciembre de 2020

1. Segmentos Dirigidos

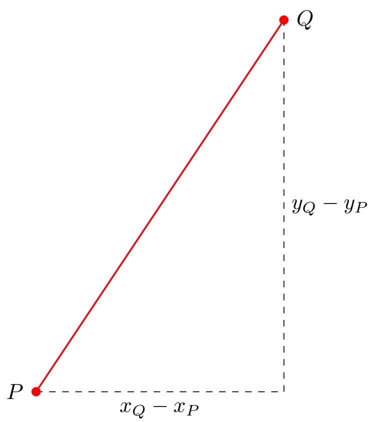


Figura 1. La distancia entre dos puntos es una aplicación del teorema de Pitágoras y permite definir al segmento dirigido.

En Geometría Analítica plana se sabe que la distancia entre dos puntos está denotada por la expresión

$$d = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

donde $P(x_P, y_P)$ y $Q(x_Q, y_Q)$ son los puntos involucrados. Los cuadrados dentro de la distancia se obtienen a partir de dos restas: una entre abscisas y otra entre ordenadas. Cabe destacar que esta distancia es una aplicación del teorema de Pitágoras (figura 1).

Debido a los cuadrados en la distancia, es indistinto que se realice la resta $Q-P$ o $P-Q$. Sin embargo, cuando se dota a esta distancia de un sentido es necesario especificar si se realiza un *viaje* de P a Q, o viceversa. Éste nuevo elemento geométrico se define como segmento dirigido.

Sean los puntos $P(x_P, y_P)$ y $Q(x_Q, y_Q)$. El segmento dirigido $\overline{PQ}$ es el segmento de recta que inicia en P y finaliza en Q. Se calcula como la resta de las coordenadas de Q menos las coordenadas de P:

$$\overline{PQ} = \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{bmatrix}$$

Éste segmento posee las características de longitud (distancia) y sentido (si la resta se realiza $Q-P$ o $P-Q$). Geométricamente, se representa mediante una flecha con base en P y señala hacia Q, como se muestra en la figura 2.

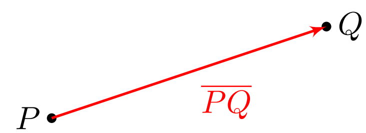


Figura 2

Los segmentos dirigidos permiten representar a una de las cantidades más importantes en la Matemática: los vectores.

2. Vectores

2.1. Definición

Usualmente se tiene la noción que un vector es un elemento con magnitud, dirección y sentido, pero eso es incorrecto ya que esas características se definen en la Física como cantidades vectoriales, cuya representación es mediante segmentos dirigidos. La definición de vector se menciona a continuación.

Sea V un conjunto de elementos. Si en V se definen

$\mathbf{u}+\mathbf{v}$	suma de vectores
$\alpha\mathbf{u}$	multiplicación de vector por escalar

donde $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces a los elementos de V se les llama vectores.

La definición matemática de vector incluye a expresiones como polinomios, matrices, funciones, entre otros. En este curso, el término vector sólo aplicará a las llamadas parejas y ternas ordenadas:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Todos los conceptos que se estudiarán son aplicables a vectores con dos o tres componentes (excepto el producto cruz que solo es aplicable a tres componentes), aunque se definan en dos o en tres dimensiones.

La representación geométrica de un vector se realizará mediante un segmento dirigido entre dos puntos. Esta representación indica que los puntos están relacionados con los vectores, de tal forma que pueden obtenerse puntos a partir de vectores y viceversa.

Ejemplo. Obtenga el vector $\mathbf{w}$ que geométricamente es igual al segmento dirigido $\overline{AB}$, donde los puntos involucrados son $A(-3,1,4)$ y $B(2,1,0)$.

El segmento dirigido se obtendrá restando coordenada a coordenada. El punto de inicio es A y el punto final es B:

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 2-(-3) \\ 1-1 \\ 0-4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{w} = \overline{AB}$, entonces

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Existe una relación muy cercana entre punto y vector, ya que las coordenadas de un punto ayudan a calcular vectores. Pero los vectores y los puntos son diferentes; entre sus diferencias se encuentran:

- los puntos poseen coordenadas; los vectores componentes.
- un punto carece de dimensiones; los vectores tienen una norma o módulo.
- un punto es fijo; un vector se mueve libremente.

- los puntos se expresan en letras mayúsculas junto a sus coordenadas, por ejemplo $A(-2,1)$; los vectores se representan con letras minúsculas en negrita e igualadas a una columna que contiene sus componentes, por ejemplo $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Otras notaciones del vector son $\overrightarrow{A} = \langle -2, 1 \rangle$ (común en la Física), o bien $\bar{a} = (-2,1)$. En este curso no se utilizarán éstas últimas notaciones, pues pueden confundirse con puntos o con el llamado producto interno.

- un vector señala a un punto.

El último punto define lo que es un vector de posición. Todos los puntos poseen un vector de posición, incluso el origen: $O(0,0,0)$ tiene como vector de posición al vector nulo $\mathbf{0}$.

Sea $P(x,y,z)$ un punto en el cubo cartesiano. El vector de posición $\mathbf{p}$ del punto P se define como el segmento dirigido que parte del origen O y llega al punto P

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2.2. Igualdad y Suma de Vectores

Como en muchos elementos matemáticos, en los vectores existe la igualdad. Hay que considerar que al tratarse de columnas, los vectores son un caso especial de las matrices y algebraicamente están sujetos a las mismas reglas de igualdad; de esta manera solo pueden sumarse vectores que tengan la misma cantidad de componentes.

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son iguales si, y solo si:

1. tienen el mismo número de componentes, y
2. la componente de $\mathbf{u}$ en la posición n es igual a la componente de $\mathbf{v}$ en la misma posición n.

De la misma forma que la igualdad, la suma de vectores se realiza siguiendo las reglas del álgebra matricial.

Sean los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. La suma vectorial se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1+v_2 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La suma entre vectores puede presentarse gráficamente mediante los segmentos dirigidos, véase la figura 3. Ésta representación gráfica es la conocida como el método del paralelogramo, donde un segmento dirigido se posiciona en el final del otro; los extremos que quedan libres forman el vector suma.

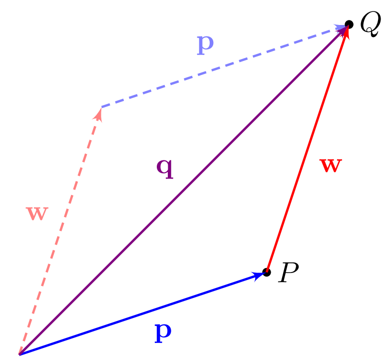


Figura 3. La suma vectorial con segmentos dirigidos permite alcanzar el punto Q desde el punto P. Nótese que se trata del método gráfico del paralelogramo.

Analíticamente, la suma vectorial involucra a las componentes. Cun segundo punto Q cuyo vector de posición es el vector suma: considerando al punto $P(x_P, y_P)$, su vector de posición es $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$; definiendo otro punto $Q\left(x_Q, y_Q\right)$, su vector de posición es $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}$. Entre los dos puntos se calcula el vector $\mathbf{w}$, que es el segmento dirigido $\overline{PQ}$:

$$\overline{PQ} = \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

Si ahora se realiza la suma entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{w}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se suman dos vectores, siendo el primero el vector de posición de un punto P, entonces se alcanzará

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$$

3. Escalares

3.1. Definición

En la definición de vector se establecieron dos operaciones; una de ellas (la suma) se estudió en la sección anterior. La segunda operación no solo involucra a un vector, también incluye un elemento diferente al vector que no posee las mismas características tanto geométricas como físicas, aunque si parte de las algebraicas.

Estos elementos se conocen como escalares; son números $\alpha \in \mathbb{R}$ que permiten modificar a los vectores para que se ajusten a las necesidades algebraicas de problemas geométricos.

Sea V un conjunto de vectores. La operación

$$\alpha \mathbf{u} \qquad \forall\ \mathbf{u} \in V$$

se denomina multiplicación por un escalar, por lo que al elemento $\alpha \in \mathbb{R}$ se le llama escalar. A diferencia del vector el escalar no tiene representación gráfica, solo modifica el sentido y tamaño del vector.

3.2. Multiplicación por un Escalar

Sea el vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. La multiplicación por un escalar se realiza al multiplicar el escalar por cada componente:

$$\alpha \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix}$$

La multiplicación por un escalar dota a los vectores de un mecanismo para cambiar su sentido, o bien, cambiar su longitud para crear los llamados efectos geométricos; los dos efectos producidos son:

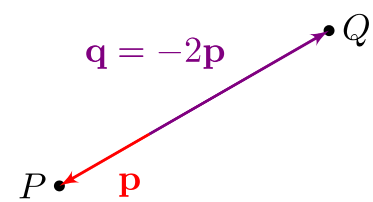


Figura 4. La multiplicación por un escalar permite aumentar o disminuir el tamaño del vector, además de permitirles cambiar su sentido.

- Escalamiento. Permite cambiar la longitud del vector, ya sea aumentando o disminuyendo su tamaño.
- Simetría. El producto de un vector por un número negativo cambia de signo a cada una de las componentes y las refleja respecto del punto $O\left(0, 0, 0\right)$.

3.3. Combinación Lineal

Cuando se aplica a los vectores las operaciones conocidas, se generan nuevos elementos; esta mezcla de vectores utilizando la suma y la multiplicación or escalar se conoce como combinación lineal.

Sean el conjunto de vectores $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ y el conjunto de escalares $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$. Una combinación lineal es una expresión de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}$$

La combinación lineal es una herramienta poderosa, pues permite plantear las ecuaciones que representan a lugares geométricos. Además, es la generalización de la regla del paralelogramo de dos a n vectores.

Ejemplo. Sean los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Exprese a $\mathbf{w}$ como combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Se plantea la combinación con los escalares α_1 y α_2 desconocidos:

$$\alpha_1\mathbf{u} + \alpha_2\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Al aplicar la multiplicación por el escalar y la suma

$$\begin{bmatrix} 3\alpha_1 \\ \alpha_1 \\ -2\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_2 \\ 4\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{bmatrix} =$$

La igualdad entre vectores arroja un sistema de ecuaciones lineales, cuya solución son los escalares buscados.

$$\begin{array}{rrcr} 3\alpha_1 & +2\alpha_2 & = & -2 \\ \alpha_1 & +4\alpha_2 & = & 1 \\ -2\alpha_1 & +2\alpha_2 & = & 3 \end{array} \qquad \therefore \qquad \alpha_1 = -1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

La expresión es $-\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Gracias a la combinación se establecen las propiedades de las operaciones, y con ellas se define al espacio vectorial.

El espacio vectorial es un conjunto de vectores, apoyado por un conjunto de escalares, donde la adición vectorial y la multiplicación por escalar cumplen las siguientes propiedades:

1.	$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$	6.	$\alpha\mathbf{u} \in V$
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	7.	$(\alpha\beta)\,\mathbf{u} = \alpha\,(\beta\mathbf{u})$
3.	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	8.	$(\alpha + \beta)\,\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
4.	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	9.	$\alpha\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
5.	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	10.	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

El vector denotado como $\mathbf{0}$ se conoce como vector nulo y representa al vector de posición del origen.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 36: Norma y Vector Unitario

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Diciembre de 2020

1. Norma de un Vector

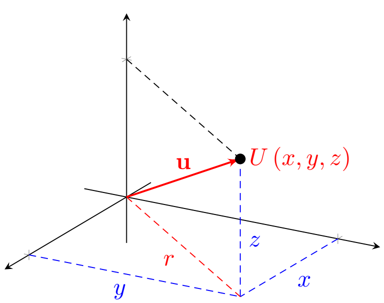


Figura 1. La distancia entre el inicio y final del segmento dirigido que representa al vector **u** se calcula a partir del teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

Un segmento dirigido posee una magnitud, la cual se calcula mediante la distancia entre los puntos que encierran al segmento. Por ejemplo, en el plano coordenado xy, para calcular la distancia entre el origen y el punto $P(x, y)$ se aplica el teorema de Pitágoras en su forma de la distancia entre puntos:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Al trasladar la distancia a tres dimensiones se obtiene un triángulo rectángulo cuyos catetos son z y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, como se muestra en la figura 1. De esta manera la magnitud del segmento entre el origen y un punto $U(x, y, z)$ se calcula como:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{r^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Esta magnitud trasladada al concepto algebraico de vector se conoce como norma o módulo.

> La magnitud del vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, denotada como $\|\mathbf{u}\|$, se conoce como norma del vector, y se calcula como
>
> $$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La norma de un vector interviene en varias propiedades geométricas de los vectores: vectores unitarios, ángulo entre vectores o productos escalar y vectorial.

La norma vectorial es la manera general de definir una magnitud. El teorema de Pitágoras es una aplicación de la norma a la Geometría Euclideana y a la Trigonometría; por ello, todo conjunto de vectores que posea una norma definida se le llama espacio vectorial euclideano.

Ejemplo. Calcule la magnitud del vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Al elevar al cuadrado cada componente, sumar y tomar la raíz cuadrada se obtiene la norma:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{9+1+16} \\ \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

2. Vector Unitario

De especial importancia son los llamados vectores unitarios. Este tipo de vectores permiten simplificar situaciones geométricas, forman lo que en Cálculo Vectorial se conocerán como el triedro móvil de la Geometría Diferencial, y la base unitaria de los sistemas de coordenadas curvilíneos.

Sea un vector cuya magnitud es igual a 1. Dicho vector, que se denotará como $\hat{\mathbf{u}}$, se conoce como unitario, donde

$$\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$$

Encontrar un vector unitario puede parecer una tarea ardua, ya que al existir una infinidad de vectores existe infinidad de magnitudes. Pero, a partir de cualquier vector puede obtenerse un vector unitario.

Considerando al vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ su norma es

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

Para que $\mathbf{u}$ sea unitario, su norma es 1; al dividir (1) entre sí misma,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ 1 &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Por álgebra de exponentes y fracciones,

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \sqrt{\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]^2 + \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]^2 + \left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]^2} \end{aligned}$$

Por la definición de norma, cada componente del vector está elevada al cuadrado; por lo tanto, el vector unitario tendrá cada una de sus componentes de $\mathbf{u}$ dividida entre su propia norma.

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Se concluye que para obtener un vector unitario se debe dividir cualquier vector entre su norma.

Sea un vector **u** de magnitud mayor a 0. Para obtener un vector unitario a partir de **u**, éste debe dividirse entre su norma:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}$$

Este proceso se conoce como normalizar, y se dice que el vector **u** ha sido normalizado.

Geométricamente, los vectores unitarios siempre definen una circunferencia o una esfera de radio unitario, dependiendo de la dimensión del vector (circunferencia en dimensión dos, esfera en dimensión tres).

Ejemplo. Calcule el vector unitario de

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y muéstre que $\hat{\mathbf{v}}$ se encuentra en una circunferencia de radio 1.

La norma de **v** es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{10}$$

El vector unitario en la dirección de **v** es

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, considerando la ecuación de una circunferencia de radio 1,

$$x^2 + y^2 = 1$$

y sustituyendo las componentes de $\hat{\mathbf{v}}$ en la ecuación,

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = 1$$
$$\frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

se observa que se satisface. Efectivamente, el vector $\hat{\mathbf{v}}$ está sobre la circunferencia unitaria, como se ilustra en la figura 2.

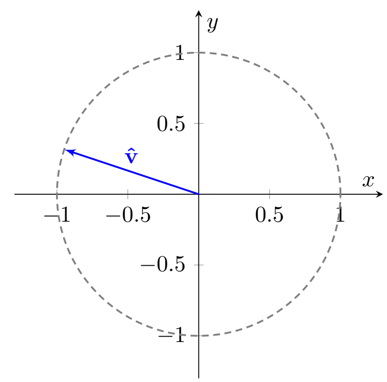


Figura 2

3. Cosenos Directores

Ya que un vector se representa con un segmento dirigido de recta, forma ángulos con cada uno de los ejes coordenados, como lo muestra la figura 3. Éstos ángulos indican la dirección del vector respecto del sistema coordenado, que en general será el sistema cartesiano xy.

Cada componente de un vector es la distancia que lo separa del origen sobre un eje coordenado en particular; es decir, si se considera al vector como una hipotenusa, las componentes son los catetos en cada una de las direcciones de los ejes coordenados (véase la figura 3).

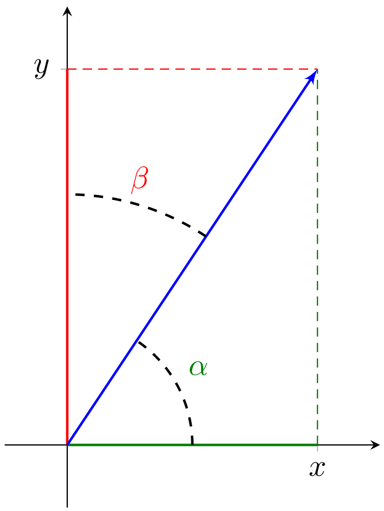


Figura 3. Las componentes de un vector son los catetos de un triángulo rectángulo, por lo que el vector forma ángulos con sendos ejes coordenados.

Mediante trigonometría, se puede calcular cada ángulo con base en el coseno: cada componente entre la longitud del vector es la definición de la razón trigonométrica coseno.

Considerando al vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ con norma $\|\mathbf{u}\|$, el ángulo que forma con el eje x se calcula como

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\|\mathbf{u}\|}$$

El ángulo formado se conoce como ángulo director, en tanto que el coseno se llama coseno director. Para cada componente de un vector, ya sea en el plano o en el espacio, existe un ángulo y un coseno director.

Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ un vector con norma $\|\mathbf{u}\|$. Sus ángulos directores son:

- α, medido desde la parte positiva del eje x hasta $\mathbf{u}$.
- β, medido desde la parte positiva del eje y hasta $\mathbf{u}$.
- γ, medido desde la parte positiva del eje z hasta $\mathbf{u}$.

Cada ángulo posee su propio coseno director calculado como

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\mathbf{u}\|}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\|\mathbf{u}\|}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\|\mathbf{u}\|}$$

Nótese que cada una de las componentes de un vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ coincide con los cosenos directores del vector $\mathbf{u}$; esto se debe a que ambos poseen la misma dirección.

4. Base Canónica

De entre los vectores unitarios, son de especial interés aquéllos que van en la dirección de los ejes coordenados. Cada eje coordenado sigue una dirección establecida y por lo tanto, es susceptible de tener un vector unitario; este vector se conoce como vector canónico.

Sean los ejes coordenados del sistema de coordenadas cartesianas. Los vectores canónicos son vectores unitarios, perpendiculares entre sí, que tienen dirección y sentido hacia la parte positiva de cada uno de los ejes coordenados. Dichos vectores son:

- $\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, en dirección del eje x.
- $\hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, en dirección del eje y.
- $\hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, en dirección del eje z.

A menudo, los vectores canónicos se llaman base canónica y pueden agruparse en el conjunto $B = \left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$. Este término es muy utilizado en Álgebra Lineal, pero también puede aplicarse a la Geometría Analítica. El término canónico quiere decir que al tomar los tres vectores juntos se obtiene la matriz identidad, que es la matriz en forma canónica escalonada:

$$I = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante combinación lineal y la base canónica, un vector puede expresarse de manera diferente a una dupla o tripleta ordenada.

Sea el vector $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. La expresión de $\mathbf{r}$ mediante combinación lineal de la base canónica es

$$\mathbf{r} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

La expresión (2) se conoce como expresión canónica del vector $\mathbf{r}$.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 37: El Producto Escalar

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Diciembre de 2020

1. Producto Escalar

Una de las operaciones especiales con vectores involucra realizar un producto entre sus componentes, de tal forma que solo se obtenga un número único que es el resultado de realizar dicha operación binaria. Este producto especial se conoce como producto escalar, producto punto o producto interior.

Sean los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Su producto escalar, punto o interior se define como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = xa + yb + zc$$

y se denota como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Una definición alternativa del producto punto es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

lo cual corrobora que los vectores son un tipo especial de matrices, y que el producto matricial es el resultado de aplicar el producto escalar varias veces dependiendo de los órdenes de las matrices involucradas.

Ejemplo. Determine el valor del producto punto entre los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Al realizar el producto punto se calcula la suma de los productos de las componentes de cada vector:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = (-3)(2) + (1)(4) + (-1)(-5)$$
$$= -6 + 4 + 5$$
$$= 3$$

Dentro de la Matemática el producto escalar permite definir muchos elementos geométricos como la norma, las proyecciones y el concepto de perpendicularidad.

Por otro lado, también posee propiedades importantes que permiten justificar el comportamiento de los lugares geométricos y las ecuaciones que los rigen. Las propiedades del producto escalar $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha$ son:

1. Linealidad

$$(\alpha \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \alpha (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$$

2. Simetría

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

3. Positividad

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad \forall\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{0}$ es el vector nulo.

Estas propiedades permiten aplicar el producto escalar a las combinaciones lineales, e incluso redefinir la norma vectorial. Bajo la positividad, la norma de un vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ se define como

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$$

La norma y las combinaciones lineales no son la única aplicación del producto escalar.

2. Ángulo entre Vectores

Considerando un triángulo cualquiera, como el mostrado en la figura 1, es posible determinar el ángulo que forman dos de sus lados cuando están definidos por vectores.

Para determinar el ángulo φ entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se partirá de la suma vectorial en la cual

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \mathbf{u} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{u} - \mathbf{v} \end{aligned} \tag{1}$$

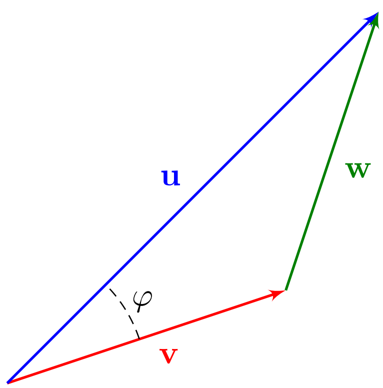


Figura 1. Para calcular el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se hace uso de la suma vectorial y de la ley del coseno.

El ángulo está entre los lados conocidos, por lo que se aplica la ley del coseno, donde las longitudes de los lados son las normas de cada vector:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\varphi \tag{2}$$

Por la expresión (1), la expresión (2) se convierte en

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\varphi \tag{3}$$

Debido a que la norma puede expresarse con base en el producto punto, la expresión (3) puede reescribirse y simplificarse. Aplicando las tres propiedades del producto punto, (3) es:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi \\
(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi \\
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi \\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi \\
-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\varphi
\end{aligned}$$

Al despejar el coseno,

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

se obtiene una manera de medir el ángulo entre vectores.

Sean **u** y **v** dos vectores que parten del mismo punto. El ángulo φ entre ambos se calcula como

$$\varphi = \arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Puesto que dos vectores pueden formar dos ángulos, por convención el ángulo de menor magnitud es el que se tomará en cuenta.

Ejemplo. Dados los vectores $\mathbf{p} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\\2\sqrt{3}\end{bmatrix}$ y $\mathbf{q} = \begin{bmatrix}-3\sqrt{3}\\-3\\-2\sqrt{3}\end{bmatrix}$, calcúlese el ángulo entre ellos.

El producto punto entre ambos vectores es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} &= \left(\sqrt{3}\right)\left(-3\sqrt{3}\right)+(1)(-3)+\left(2\sqrt{3}\right)\left(-2\sqrt{3}\right) \\
&= -9-3-12 \qquad \Rightarrow \qquad -24
\end{aligned}$$

Por otro lado, las normas de cada vector son:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}\| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad 4 \\
\|\mathbf{q}\| &= \sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2} \qquad \Rightarrow \qquad 4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Con estos datos, el ángulo entre los vectores es

$$\varphi = \arccos\frac{-24}{(4)\left(4\sqrt{3}\right)} \qquad \therefore \qquad \varphi = 150^\circ$$

3. Ortogonalidad

Una de las características más importantes del ángulo entre vectores es la ortogonalidad; es decir, el análisis de los vectores que forman ángulos rectos.

Los vectores **u** y **v** son ortogonales (perpendiculares) si

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Como el coseno de 90° es igual a 0, eso hace que el producto punto entre dos vectores sea nulo:

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} =$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$$

Un caso especial de la ortogonalidad es la base canónica $B = \left\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\right\}$, ya que se trata de vectores unitarios que son ortogonales entre sí; este tipo de conjuntos vectoriales se le llama base ortonormal.

Ejemplo. Sea el vector $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$. Obténgase el conjunto de todos los vectores ortogonales a $\mathbf{w}$.

Como no se conocen los vectores ortogonales a $\mathbf{w}$, se asume un vector genérico $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y se aplica la condición de ortogonalidad:

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{x} = 0$$
$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$
$$-2x + y + 5z = 0$$

De esta ecuación se despeja y y se sustituye en el vector $\mathbf{x}$, resultando el conjunto de vectores ortogonales buscado:

$$\mathbf{w}^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x - 5z \\ z \end{bmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

En la figura 2 se muestra la situación geométrica del vector $\mathbf{w}$ junto con sus vectores ortogonales.

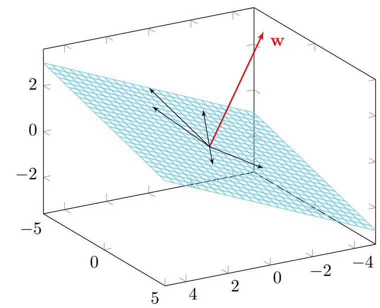


Figura 2. El conjunto de vectores ortogonales a $\mathbf{w}$ yace sobre un plano, conocido como plano normal a $\mathbf{w}$.

La ortogonalidad es parte importante de la definición para la ecuación cartesiana del plano, la cual se estudiará a fondo más adelante en el curso.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 38: Proyecciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Agosto 2020

El producto escalar es una herramienta que permite hacer mediciones entre vectores: distancias, ángulos y orientaciones. Otra herramienta fundamental, debidas al producto escalar, es la proyección.

1. Componente o Proyección Vectorial

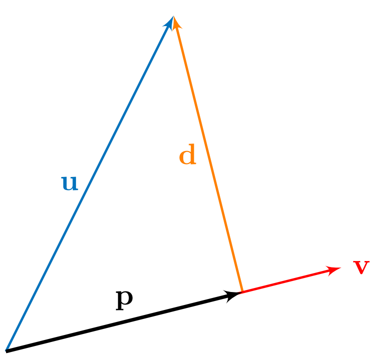


Figura 1. El cateto $\mathbf{p}$ del triángulo rectángulo es la proyección de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

Por suma de vectores mostrada en la figura 1, un vector $\mathbf{u}$ puede expresarse como $\mathbf{p}+\mathbf{d}$, donde $mathbfp$ es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre la dirección de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{d}$ es un vector perpendicular a $\mathbf{v}$; es decir,

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{d} \tag{1}$$

Como $\mathbf{p}$ se encuentra en la misma dirección que $\mathbf{v}$ se reescribe como

$$\mathbf{p} = k\mathbf{v} \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1),

$$\mathbf{u} = k\mathbf{v} + \mathbf{d} \tag{3}$$

Recordando que los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{d}$ son perpendiculares, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{d} = 0$. Al aplicar el producto punto con $\mathbf{v}$ a ambos lados de (3),

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= k\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= k\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

por lo que puede despejarse k y obtener el cálculo de la proyección $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= k\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} &= k \end{aligned}$$

que al sustituirse en (2), devuelve la proyección de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$; es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= k\mathbf{v} \\ &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v} \end{aligned}$$

La proyección del vector $\mathbf{u}$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$ se conoce como componente vectorial, y se calcula como

$$\mathrm{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

Otras formas de expresar a la componente vectorial son

$$\mathrm{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\hat{\mathbf{v}}$$
$$\mathrm{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{v}})\,\hat{\mathbf{v}}$$

Nótese que al proyectar sobre un vector unitario, el cociente de la proyección tendrá denominador unitario, al tratarse de la norma del vector sobre el cual se proyecta.

La componente vectorial permite conocer la acción de un vector $\mathbf{u}$ sobre otro vector $\mathbf{v}$; es decir, la influencia de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ se mide mediante la componente vectorial.

Ejemplo. Sea el paralelogramo mostrado en la figura2.

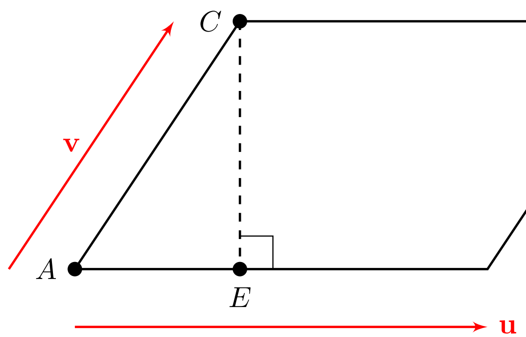


Figura 2

Calcule el punto E si $C\left(\frac{4}{5},\frac{23}{5}\right)$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\18\end{bmatrix}$.

Para encontrar el punto E, se planteará vectorialmente la estructura del paralelogramo:

1. A partir del punto A el vector $\mathbf{u}$ recorre la base del paralelogramo, mientras que $\mathbf{v}$ es el vector que va desde A hasta C.

2. La figura 2 muestra que el segmento que corre desde E hasta C es perpendicular a $\mathbf{u}$; entonces, $\triangle ACE$ es rectángulo.

3. Al redibujar el paralelogramo con vectores (véase la figura 3), se concluye que el vector que inicia en A y termina en E es la componente vectorial de $\mathbf{v}$ en la dirección de $\mathbf{u}$.

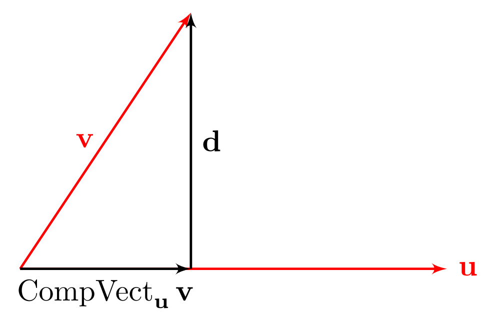


Figura 3

La componente vectorial descrita es:

$$\begin{aligned}\mathrm{CompVect}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} &= \frac{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\18\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\\ &= \frac{10}{25}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ahora, tomando los vectores de posición de los puntos A, E y C, y relacionándolos con el vector $\mathbf{v}$ y la componente vectorial calculada se obtendrán las coordenadas de E. Por suma de vectores

$$\mathbf{a} + \text{CompVect}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \mathbf{e} \tag{4}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{v} = \mathbf{c} \tag{5}$$

De (5) se despeja $\mathbf{a}$ y se sustituye en (4):

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{v} &= \mathbf{c}\\ \mathbf{a} &= \mathbf{c} - \mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \text{CompVect}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} &= \mathbf{e}\\ \mathbf{c} - \mathbf{v} + \text{CompVect}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} &=\\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\23\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\18\end{bmatrix} + \frac{1}{5}\begin{bmatrix}8\\6\end{bmatrix} &=\\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix}13\\11\end{bmatrix} &= \mathbf{e}\end{aligned}$$

Finalmente, las coordenadas buscadas son $E\left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

2. Componente o Proyeccción Escalar

En la componente vectorial se incluyen las tres características del segmento dirigido: magnitud, sentido y dirección. El sentido y la magnitud forman una parte de la componente; la dirección otra.

Se comentó que la componente vectorial mide la influencia de un vector sobre otro. Si se desea medir esa influencia en términos escalares, entonces es necesario extraer la parte que indica la magnitud y el sentido en la componente vectorial.

Partiendo de la definición de componente vectorial,

$$\text{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$$

se puede multiplicar y dividir por la norma del vector $\mathbf{v}$ para no afectar a la componente:

$$\text{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \tag{6}$$

Por definición, la norma al cuadrado del vector es $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$, por lo que la expresión (6) se reescribe como

$$\text{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \tag{7}$$

En la expresión (7) aparece la división de la norma por sí misma; de esta fracción el numerador puede asociarse al cociente con el producto punto y el denominador al vector $\mathbf{v}$; es decir,

$$\text{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^2}\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \tag{8}$$

Al simplificar (8) por leyes de exponentes y por la definición del vector unitario, se encuentran la parte escalar y la parte vectorial de la componente vectorial:

$$\text{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\hat{\mathbf{v}}$$

El cociente $\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es la parte escalar de la componente vectorial y se conoce como componente escalar.

La componente escalar de un vector $\mathbf{u}$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es

$$\text{CompEsc} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

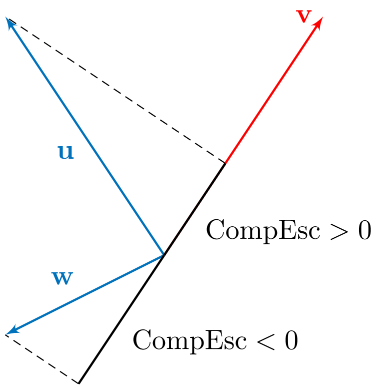


Figura 4. La componente escalar será positiva si los vectores involucrados señalan a direcciones similares; en cambio, será negativa, si los vectores involucrados señalan en direcciones opuestas.

La componente escalar es la medida de la influencia de un vector sobre otro, sin tomar en cuenta la dirección del vector sobre el cual se proyecta. Sin embargo, sí toma en cuenta el sentido: si al proyectar el vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$ la componente escalar es positiva, significa que ambos vectores apuntan hacia direcciones similares; en cambio, si la componente escalar es negativa, significa que ambos vectores apuntan en direcciones completamente contrarias. Estos casos geométricos se ilustran en la figura 4. La única manera que la componente escalar sea nula es cuando los vectores son ortogonales, ya que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ejemplo. Sea el paralelogramo del ejemplo anterior, que se ilustra en la figura 5.

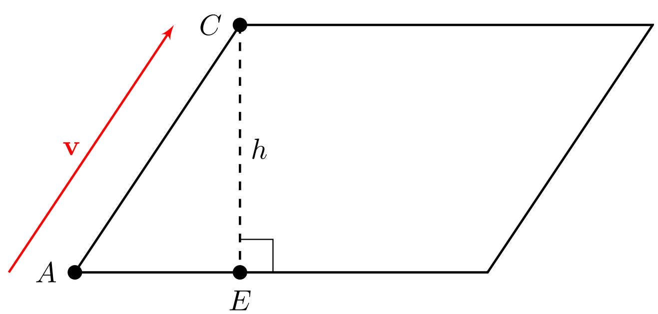


Figura 5

Mediante la componente vectorial, calcule la altura h.

Como el vector $\mathbf{v}$ y las coordenadas de los puntos C y E ya se conocen, se puede calcular la componente escalar de $\mathbf{v}$ en la dirección del vector $\mathbf{w} = \overline{EC}$, que corresponde a la altura h buscada. La componente también puede calcularse mediante el vector $-\mathbf{w} = \overline{CE}$, con la especificación que dicho resultado tendrá un valor negativo. Para evitar esta situación, se puede aplicar el valor absoluto al resultado de la componente escalar.

$$h = |\mathrm{CompEsc}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v}|$$

Calculando el vector $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 23 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Entonces, la altura es

$$\begin{aligned} h &= \left| \frac{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 18 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -9 \\ 12 \end{bmatrix}}{\frac{1}{5}\left\| \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \end{bmatrix} \right\|} \right| \\ &= \left| \frac{(9+216)}{5\sqrt{81+144}} \right| \\ &= \left| \frac{225}{5\sqrt{225}} \right| \\ &= \left| \frac{225}{5\,(15)} \right| \\ h &= 3 \end{aligned}$$

La altura del paralelogramo es $3\ \ [u]$.

En este problema puede argumentarse que mediante la norma de $\mathbf{w}$ se obtiene h; esto es correcto debido a que la componente escalar es una norma con signo.

Cálculo y Geometría Analítica
Lectura 39: El Producto Vectorial

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Agosto 2021

1. Producto Cruz

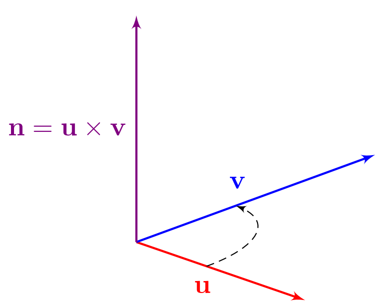


Figura 1. El producto cruz es una operación vectorial binaria cuyo resultado siempre es un vector perpendicular.

El producto escalar asocia dos vectores con un escalar; también sirve para encontrar vectores perpendiculares entre sí, entre otras utilidades.

El producto punto no es la única operación binaria vectorial denominada producto; existe un segundo tipo de producto entre vectores, el cual arroja un resultado vectorial en lugar de un escalar. Más interesante aún es que dicha operación asocia, a cada par de vectores, un resultado que es ortogonal a los elementos que se operan mediante este tipo de producto.

Este producto se conoce como producto vectorial o producto cruz y solo es aplicable a vectores del espacio $\mathbb{R}^3$, pues en $\mathbb{R}^2$ es imposible obtener un vector perpendicular a otros dos estando los tres en el mismo plano.

Sean los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ pertenecientes al espacio $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial, o producto cruz, es una función $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector perpendicular al plano que contiene a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Dentro de las propiedades del producto cruz se listan

- $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
- Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces los vectores son paralelos.
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

- $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\, \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{w}$
- $\lambda\, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v})$
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\, \|\mathbf{v}\| \sin \varphi$, siendo φ el ángulo entre los vectores involucrados.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ es el producto mixto, también expresado como $[\mathbf{uvw}]$.

Estas propiedades son consecuencia de la naturaleza algebraica del cálculo del producto cruz, ya que éste puede reescribirse como un determinante:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

Por ejemplo, si se intercambian dos renglones del determinante (1) su valor cambiara de signo; es justo lo que define la propiedad $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ del producto cruz.

Geométricamente, el producto cruz resulta en un vector perpendicular, pero el orden en el que se realiza afectará la dirección del resultado. En consecuencia, es necesario conocer con anticipación la dirección del vector resultante del producto cruz, y para ello se establece el sentido antihorario como positivo. El método para determinar la dirección del producto cruz se llama *método de la mano derecha*, ilustrada en la figura 2, y sigue los siguientes pasos:

1. La mano derecha debe tener los dedos índice a meñique extendidos hacia el frente; el pulgar debe estar perpendicular al resto de los dedos (apuntando hacia arriba). El pulgar representa el resultado de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, y los demás dedos representan el vector $\mathbf{u}$.

2. En la posición descrita en el paso 1, solo es posible girar los cuatro dedos juntos en sentido positivo (antihorario), lo cual indica que $\mathbf{u}$ gira hacia $\mathbf{v}$ y el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tiene dirección hacia arriba.

3. Si el giro descrito en el paso 2 no puede realizarse, a menos que la mano completa se gire para que el pulgar apunte hacia abajo, entonces $\mathbf{v}$ gira hacia el vector $\mathbf{u}$ (sentido negativo, horario) y producto que se realiza es $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ con dirección hacia abajo.

El uso de la regla de la mano derecha se debe a dos cuestiones principales: la primera es para determinar si un sistema de coordenadas es derecho, donde el método de la mano derecha se usa para saber la dirección del eje z cuando el eje x gira hacia el eje y; la segunda es debido al uso de la mano derecha para determinar la dirección de la corriente eléctrica generada por un campo magnético, donde la corriente es el pulgar y la dirección del campo magnético se señala con el resto de dedos.

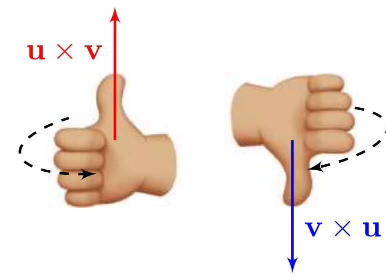


Figura 2. La regla de la mano derecha indica el sentido del vector perpendicular resultante de calcular el producto cruz.

Ejemplo. Calcule el producto cruz entre los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y muestre que el resultado es un vector perpendicular.

El cálculo se realiza con el determinante que define el producto cruz:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -2 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\hat{\mathbf{k}} \\ &= (12-2)\,\hat{\mathbf{i}} - (-8+6)\,\hat{\mathbf{j}} + (-2+9)\,\hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{u}\times\mathbf{v} &= 10\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Al realizar el producto punto entre el resultado y los operandos,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} &= (-2)(10) + (3)(2) + (2)(7) \\ &= -20 + 6 + 14 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} &= (-3)(10) + (1)(2) + (4)(7) \\ &= -30 + 2 + 28 \\ &= 0\end{aligned}$$

se corrobora que, efectivamente, hay ortogonalidad entre el plano formado por **u** y **v** y el resultado del producto cruz $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

El producto cruz se realiza mediante el cálculo de determinantes por cofactores; este método se formaliza en el curso de Álgebra.

2. Área de un Paralelogramo

Considerando un paralelogramo como el mostrado en la figura 3, donde dos de sus lados concurrentes son los vectores **u** y **v**, el producto cruz permite determinar su área. En este análisis se considerará que el paralelogramo yace sobre uno de los planos coordenados para facilitar los cálculos.

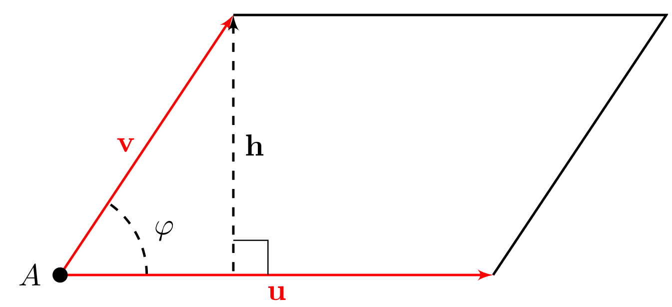


Figura 3

Tomando que el paralelogramo se encuentra sobre el plano xy, las componentes z de los vectores son nulas:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El producto cruz entre ambos vectores es

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)\,\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

cuya norma es

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = |u_1v_2 - u_2v_1| \tag{2}$$

Mediante el producto punto, el coseno del ángulo entre los vectores es

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

y mediante la identidad pitagórica fundamental, el ángulo φ puede expresarse en términos del seno:

$$\begin{aligned}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi &= 1\\ \sin^2\varphi &= 1 - \cos^2\varphi\\ \sin\varphi &= \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2}}\\ \sin\varphi &= \frac{\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\end{aligned}$$

de donde se obtiene la expresión

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\varphi = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2} \tag{3}$$

Si se obtiene la expresión (3) mediante las componentes de los vectores involucrados,

$$\sqrt{\|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2} = \sqrt{(u_1^2+u_2^2)(v_1^2+v_2^2) - (u_1v_1+u_2v_2)^2}$$

cuyo desarrollo en su parte derecha es

$$\begin{aligned}&\sqrt{u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 - (u_1^2v_1^2 + 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_2^2)}\\ &\sqrt{u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 - u_1^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2 - u_2^2v_2^2}\\ &\sqrt{u_1^2v_2^2 + u_2^2v_1^2 - 2u_1v_1u_2v_2}\\ &\sqrt{u_1^2v_2^2 - 2(u_1v_2)(u_2v_1) + u_2^2v_1^2}\\ &\sqrt{(u_1v_2-u_2v_1)^2}\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\varphi = |u_1v_2 - u_2v_1| \tag{4}$$

Puede observarse que las expresiones (2) y (4) son iguales, por lo tanto

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\varphi \tag{5}$$

De manera geométrica, el significado de la norma del producto cruz se relaciona con el paralelogramo de la figura 3. Para calcular el área de un paralelogramo se requiere multiplicar la longitud de la base por la altura, que en términos de normas es

$$A = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{h}\|$$

Pero por la definición del seno de φ, la altura se reescribe como

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \frac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{v}\|}\\ \|\mathbf{v}\|\sin\varphi &= \|\mathbf{h}\|\end{aligned}$$

Por lo tanto, el área del paralelogramo es

$$A = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\varphi \tag{6}$$

Ahora se observa que las expresiones (5) y (6) son iguales. Se concluye que el módulo del producto cruz es igual al área de un paralelogramo.

Sea el paralelogramo P cuyos lados son los vectores concurrentes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La norma del producto cruz entre ambos vectores es

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\varphi$$

y es igual al área de P.

Ejemplo. ¿Cuál es el área del paralelogramo que tiene vértices en los puntos $A(2,0,-1)$, $B(1,-1,3)$ y $C(4,3,1)$?

Para obtener el área del paralelogramo se obtendrán dos vectores concurrentes, por ejemplo al punto B. Por lo tanto

$$\mathbf{u}=\mathbf{a}-\mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{c}-\mathbf{b} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Aplicando el producto cruz

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v}=14\hat{\mathbf{i}}-10\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$$

Finalmente

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\sqrt{196+100+1}$$

y el área del paralelogramo es $A=3\sqrt{33}\ [u^2]$.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 40: El Producto Mixto

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020

1. Producto Mixto

Una vez conocidos los dos tipos de productos vectoriales, puede introducirse el concepto del producto mixto, el cual es una combinación del producto punto y el producto cruz.

Sean los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ pertenecientes al espacio $\mathbb{R}^3$. El producto mixto o triple producto vectorial es una función especial que involucra los productos escalar y vectorial de la siguiente manera:

$$[\mathbf{uvw}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$
$$[\mathbf{uvw}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Puesto que se trata de un determinante, cumple con la propiedad del cambio de signo en el intercambio de filas; si esta propiedad se aplica dos veces, el valor del producto mixto no se altera. Esta propiedad se llama relación cíclica:

$$[\mathbf{uvw}] = [\mathbf{vwu}] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{wuv}]$$

Ejemplo. Calcule el producto mixto entre los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

El producto mixto de los tres vectores es:

$$\begin{aligned} [\mathbf{uvw}] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (6) - (6) + 2\,(0) \end{aligned}$$

$$[\mathbf{uvw}] = 0$$

Como **u** es perpendicular al producto cruz entre **v** y **w**, el producto mixto es 0.

2. Volumen de un Paralelepípedo

El producto mixto está relacionado con un paralelepípedo como el mostrado en la figura 1.

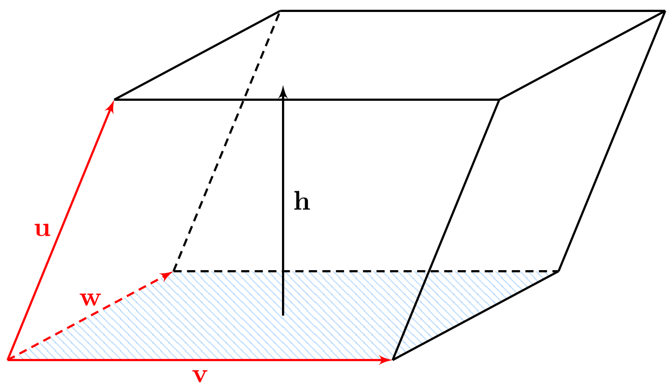


Figura 1

Los vectores **u**, **v** y **w** son tres aristas concurrentes a un vértice del cuerpo geométrico; la altura **h** del paralelepípedo es perpendicular a la base. El volumen del paralelepípedo se calcula al multiplicar el área de la base por la altura; en términos de los vectores por los que está formado, el volumen es

$$V = A_{Base} \|\mathbf{h}\| \tag{1}$$

donde el área de la base es el área de un paralelogramo cuyos lados son los vectores **v** y **w**. De esta manera, el área se calcula mediante el producto cruz:

$$A_{Base} = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \tag{2}$$

Como el vector **h** es perpendicular a la base, entonces uno de sus vectores paralelos puede calcularse mediante el mismo producto cruz que se utilizó para obtener el valor del área de la base:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \tag{3}$$

Para calcular la norma exacta del vector **h**, el vector **u** se puede proyectar sobre **n** para tener la altura correcta; como solo se requiere la magnitud, la proyección debe ser la componente escalar, considerando el valor absoluto para realizar la medición:

$$\|\mathbf{h}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Pero, al sustituir (3) en la componente escalar

$$\|\mathbf{h}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \tag{4}$$

Finalmente, se sustituyen (2) y (4) en (1),

$$\begin{aligned} V &= A_{Base} \|\mathbf{h}\| \\ &= \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \\ V &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| \end{aligned}$$

Sea el paralelepípedo P cuyas aristas son los vectores concurrentes **u v** y **w**. El volumen de P es el valor absoluto del producto mixto entre los tres vectores concurrentes:

$$V = |[\mathbf{uvw}]|$$

Ejemplo. ¿Cuál es el volumen del tetraedro cuyos vértices de la base son $A(1,1,1)$, $B(1,-2,3)$ y $C(4,3,2)$, mientras que el punto $D(-3,2,5)$ es el vértice superior?

Se tomará al punto A como concurrente, donde las aristas son los segmentos dirigidos $\mathbf{u} = \overline{AB}$, $\mathbf{v} = \overline{AC}$ y $\mathbf{w} = \overline{AD}$, por lo que

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Como el volumen a calcular es un tetraedro, hay que considerar las siguientes características: el tetraedro es una pirámide, y por lo tanto tiene un volumen que es un tercio del volumen del paralelepípedo; la base es triangular, por lo que el área de su base es la mitad del área de la base de un paralelepípedo (un paralelogramo). Se concluye que el volumen de un tetraedro es

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\left|\mathbf{u} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right| \\ &= \frac{1}{6}\left|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right| \end{aligned}$$

El producto mixto es

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(16) + 2(11) \\ &= 70 \end{aligned}$$

Y, finalmente,

$$V = \frac{1}{6}(70)$$

El volumen buscado es $\frac{35}{3}\ [u^3]$.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 41: Curvas, Ecuaciones Paramétricas y Vectoriales

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

1. Ecuaciones Paramétricas

Una de las maneras de expresar una función es mediante su forma paramétrica: las variables x y y de la función dependen de un tercer elemento t independiente llamado parámetro:

$$y = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad f: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$$

Cuando se habla de situaciones geométricas, la forma paramétrica representa a la gráfica de una función, por lo que se trata de una pareja ordenada. Esta representación de un lugar geométrico (gráfica de la función) se conoce como ecuaciones paramétricas de una curva.

Sea C la curva que representa a la gráfica de una función f. La forma paramétrica de f se conoce como las ecuaciones paramétricas de la curva C.

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de una curva permiten expresar a un lugar geométrico a partir de cada una de sus componentes.

Ejemplo. Sea la curva C cuya ecuación cartesiana es

$$y = \frac{x+3}{x-1}$$

Obtenga unas ecuaciones paramétricas de C.

Al igual que en las funciones, existen muchas formas de expresar las ecuaciones paramétricas de una curva cualquiera. Para este caso se propone que $t = x - 1$ para obtener las expresiones de x y y.

$$t = x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = t + 1$$

Al sustituir tanto $t = x - 1$ como $x = t + 1$ en la ecuación cartesiana de la curva se obtiene la expresión de y:

$$y = \frac{x+3}{x-1}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{(t+1)+3}{t} \\ &= \frac{t+4}{t} \\ y &= 1+\frac{4}{t} \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas de la curva son:

$$C: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 1+\dfrac{4}{t} \end{cases}$$

2. Ecuaciones Vectoriales

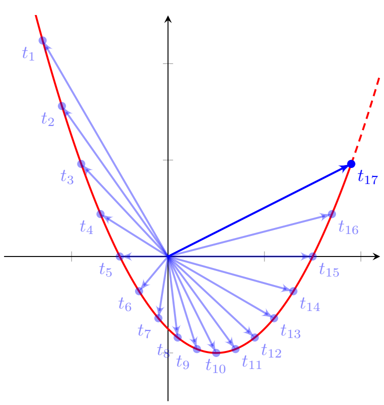


Figura 1. Las ecuaciones vectoriales y paramétricas controlan, mediante t, un vector de posición para alcanzar todos y cada uno de los puntos de una curva.

Los vectores permiten definir cuestiones geométricas como métricas y orientaciones; también pueden señalar el lugar donde se encuentran puntos. Esta característica permite realizar el siguiente planteamiento y cuestionamiento: una curva representa un conjunto de puntos que varia según cambia una variable independiente; cada punto puede tener su propio vector de posición; entonces, ¿cada vector puede cambiar de acuerdo a la variable independiente como si fuese una función? La respuesta es sí; las ecuaciones paramétricas son el vínculo entre las ecuaciones cartesianas y los vectores, tal como se ilustra en la figura 1.

Las ecuaciones paramétricas de una curva plantean a x y y como dependientes de t. Esta idea permite establecer que las ecuaciones paramétricas son un par de componentes, las mismas que posee un vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ cualquiera.

Si una curva C posee ecuaciones paramétricas

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

éstas pueden sustituirse en el vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Así, se obtiene la ecuación vectorial de una curva.

Sea C una curva con ecuaciones paramétricas

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

La ecuación vectorial de la curva se obtiene al sustituir las ecuaciones paramétricas en un vector $\mathbf{u}$ genérico:

$$C: \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

La ecuación vectorial de una curva siempre depende de la parametrización de la ecuación cartesiana, por lo que cada conjunto de ecuaciones paramétricas poseen su respectiva ecuación vectorial.

Otra forma de denotar a la ecuación vectorial de una curva es mediante la notación canónica:

$$\mathbf{u}(t) = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Generalmente, esta forma de expresión se utiliza en Cálculo Multivariable para denotar a las funciones vectoriales de variable escalar.

En tres dimensiones las ecuaciones paramétricas y vectoriales se calculan y expresan de la misma forma que en dos dimensiones; la diferencia radica en añadir la componente respectiva a z:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C: \; \mathbf{u} = x(t)\,\hat{\mathbf{i}} + y(t)\,\hat{\mathbf{j}} + z(t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Ejemplo. Obtenga la ecuación vectorial de la curva C que satisface las ecuaciones cartesianas

$$C: \begin{cases} 1 = x + y + z \\ 1 = x + yz \end{cases}$$

Este caso toma a una curva en tres dimensiones, por lo que se tienen dos ecuaciones cartesianas en lugar de una. El proceso para obtener la ecuación vectorial es el mismo tanto en dos como en tres dimensiones: se despejan x, y y z para que dependan de un solo parámetro.

Para despejar, se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$x + y + z = 1 \tag{1}$$
$$x + yz = 1 \tag{2}$$

Al despejar x de la ecuación (2) y sustituirla en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} x + yz &= 1 \\ x &= 1 - yz \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ (1 - yz) + y + z &= 1 \\ -yz + y + z &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

En la expresión (4) se despeja y para que quede en términos de z:

$$\begin{aligned} -yz + y + z &= 0 \\ y(-z + 1) &= -z \\ y &= -\frac{z}{1 - z} \\ y &= \frac{z}{z - 1} \end{aligned} \tag{5}$$

Al sustituir la expresión (5) en (3) se tiene a x en términos de z:

$$\begin{aligned} x &= 1 - yz \\ &= 1 - \frac{z}{z - 1} z \\ x &= 1 - \frac{z^2}{z - 1} \end{aligned} \tag{6}$$

Las ecuaciones paramétricas se conforman con (5) y (6) tomando a z como el parámetro:

$$C: \begin{cases} x = 1 - \dfrac{z^2}{z - 1} \\ y = \dfrac{z}{z - 1} \\ z = z \end{cases}$$

En consecuencia, la ecuación vectorial de la curva es

$$C:\ \mathbf{r}=\left(1-\frac{z^2}{z-1}\right)\hat{\mathbf{i}}+\frac{z}{z-1}\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$$

La forma de calcular la ecuación vectorial de un lugar geométrico depende de la parametrización. En el ejemplo anterior se pudo utilizar a y o a x como parámetros; las ecuaciones resultantes representan a la misma curva C, aunque su ecuación vectorial tendría diferente forma.

3. Ecuación Vectorial de las Cónicas

Para cada una de las cónicas se puede obtener las respectivas ecuaciones vectoriales. La parametrización ya conocida de la circunferencia y la elipse son generales, y puede decirse que son estándar. En cambio, la parametrización de la parábola y de la hipérbola puede cambiar y acoplarse a las necesidades del lugar geométrico estudiado.

Sea C una elipse con centro $C\,(h,k)$ y semiejes a y b. Las ecuaciones paramétricas y vectorial de la elipse son, respectivamente:

$$C:\begin{cases}x=h+a\cos t\\ y=k+b\sin t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

$$C:\mathbf{u}=(h+a\cos t)\,\hat{\mathbf{i}}+(k+b\sin t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Si C es una circunferencia con centro en $C\,(h,k)$ y radio r, entonces las ecuaciones del lugar geométrico son:

$$C:\begin{cases}x=h+r\cos t\\ y=k+r\sin t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

$$C:\mathbf{u}=(h+r\cos t)\,\hat{\mathbf{i}}+(k+r\sin t)\,\hat{\mathbf{j}}$$

Las ecuaciones paramétricas y vectoriales de la parábola y la hipérbola pueden presentarse en diferentes formas: con funciones trigonométricas, hiperbólicas, polinómicas, racionales o irracionales.

Sea C una hipérbola con centro $C\,(h,k)$ y semiejes a y b. C puede parametrizarse en términos de las funciones trigonométricas secante y tangente:

$$C:\begin{cases}x=h+a\sec t\\ y=k+b\tan t\end{cases}\qquad t\neq\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}$$

También puede parametrizarse con las funciones hiperbólicas seno y coseno:

$$C:\begin{cases}x=h\pm a\cosh t\\ y=k+b\sinh t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$

Incluso puede parametrizarse mediante funciones racionales:

$$C:\begin{cases}x=h+\frac{a}{2t}+\frac{a}{2}t\\ y=k+\frac{b}{2t}-\frac{b}{2}t\end{cases}\qquad t\neq 0, t\in\mathbb{R}$$

La parametrización preferida depende del problema en cuestión, aunque se prefiere aquélla que exprese a la curva con el menor número de ecuaciones (dos, una para x y una y) y el menor número de valores excluidos en el dominio. En la hipérbola se han descrito tres formas de parametrización, de las cuales la tercera es la que mejor se ajusta a las características mencionadas. Incluso, pensando en la utilidad de la parametrización en el Cálculo Multivariable, la tercera forma para la hipérbola es muy útil para calcular derivadas vectoriales a diferencia de las dos primeras estructuras.

El caso de la parábola es un tanto más escabroso ya que, al ser una curva que presenta linealidad con una de sus variables, ésta puede parametrizarse con mayor eficiencia y un dominio que cubra a todo el conjunto de los números reales.

4. Conversión de Ecuaciones Paramétricas a Cartesianas

La transformación de una ecuación cartesiana a parametricas puede revertirse. Dado que x y y dependen de una variable t, ésta puede ser despejada para recuperar la expresión de y en términos de x, independientemente de la parametrización que se tenga de una curva.

Ejemplo. Sea la cónica C, representada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{u} = \left(t^2 - 3\right)\hat{\mathbf{i}} + (2t+1)\hat{\mathbf{j}}$$

Determine el tipo de cónica del cual se trata.

Para caracterizar a la cónica se requiere eliminar el parámetro de la ecuación vectorial. Para ello se utilizan las ecuaciones paramétricas:

$$C : \begin{cases} x = t^2 - 3 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

De la ecuación en y se despeja t y se sustituye en x:

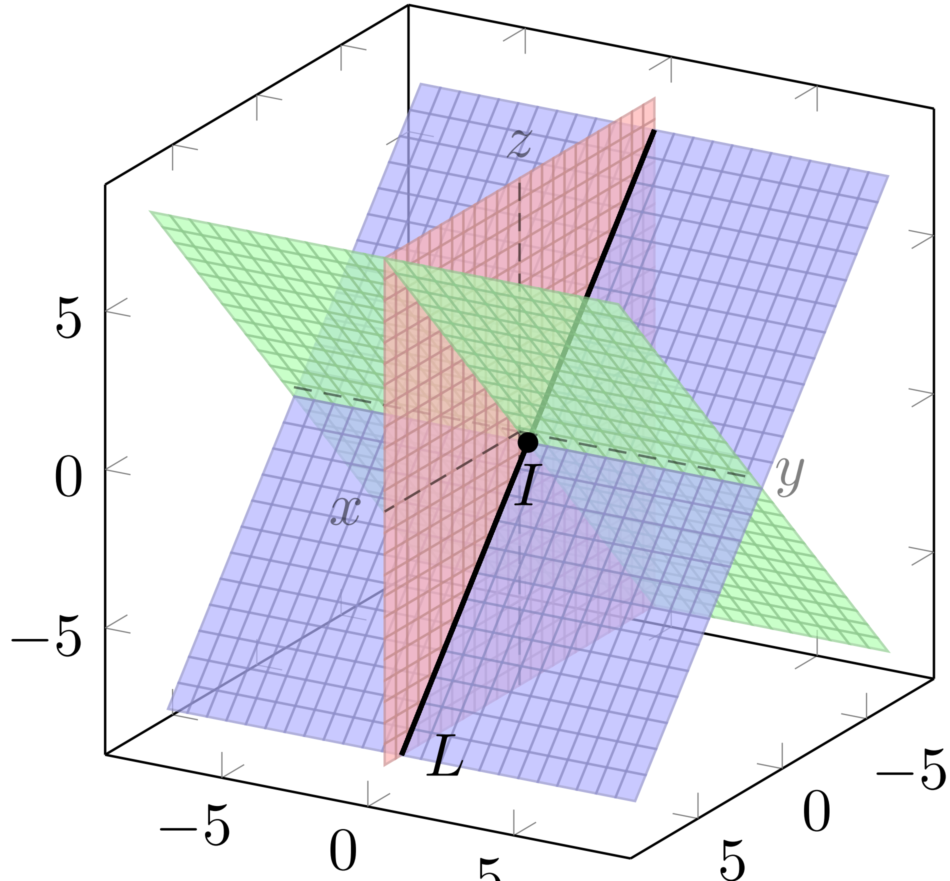
$$\begin{aligned} y &= 2t + 1 \\ y - 1 &= 2t \\ \frac{1}{2}(y-1) &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 3 \\ &= \frac{1}{4}(y-1)^2 - 3 \\ x + 3 &= \frac{1}{4}(y-1)^2 \end{aligned}$$

Se dictamina que la cónica C es una parábola con vértice en $C(-3,1)$ y distancia focal $a = 1$ paralela al eje x.

VII

RECTA Y PLANO



CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 42: La Recta y sus Ecuaciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Enero 2021

1. Definición de Recta

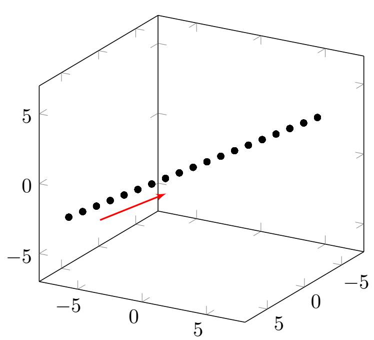


Figura 1. Una sucesión de puntos que posee una dirección es una recta; la dirección la define un segmento dirigido.

El punto es el lugar geométrico más simple ya que carece de dimensiones. Cuando se aumenta a una dimensión se habla de una sucesión de puntos que lleva una dirección. Esta idea define a los lugares geométrico de dimensión uno, y presenta dos escenarios: que al recorrer la sucesión existe un cambio de dirección, o que el recorrido se haga con dirección constante. El primer escenario se conoce como curva, el segundo caso es la llamada recta.

A pesar que existen varias definiciones de recta, se considerará la siguiente como estándar para el resto del curso.

Una recta es el lugar geométrico de la sucesión de puntos que en todo momento está orientada en una dirección constante.

En la figura 1 se observa que el conjunto de puntos mostrado siempre sigue una dirección estipulada. Esta característica define a una recta de manera geométrica a partir de un punto y un segmento dirigido.

2. Ecuación Vectorial de la Recta

Como se mencionó anteriormente, los puntos de una recta son orientados en una dirección específica y constante, especificada por un segmento dirigido.

Tomando un punto inicial P de la recta, éste posee su respectivo vector de posición $\mathbf{p}$, y como el segmento dirigido que dirige a la recta es otro vector $\mathbf{u}$, entonces se puede realizar la suma entre ambos para obtener un tercer vector $\mathbf{q}_1$, el cual señala a un punto Q_1:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{p} + \mathbf{u} \tag{1}$$

Este proceso se puede realizar para obtener otro punto Q_2 de la recta. Sin embargo para que Q_2 sea diferente de Q_1 se utilizará a este último como nuevo punto inicial:

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1 + \mathbf{u} \tag{2}$$

Este proceso se realiza reiteradamente, para nuevos puntos de la recta Q_3, Q_4, y así sucesivamente hasta Q_{t-1} y Q_t. Estos nuevos puntos se obtienen mediante las siguientes combinaciones lineales:

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{u} \tag{3}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{q}_{t-1} = \mathbf{q}_{t-2} + \mathbf{u} \tag{t-1}$$

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1} + \mathbf{u} \tag{t}$$

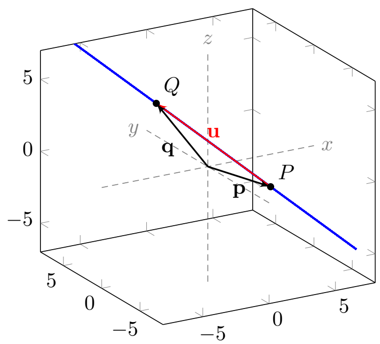


Figura 2. Cada punto de una recta puede alcanzarse mediante el segmento director que la orienta y un punto base.

Para generalizar este proceso iterativo, hay que contemplar todas las ecuaciones anteriores y realizar sustituciones sucesivas. Por ejemplo, (1) se sustituye en (2), mientras que (2) se sustituye en (3), y así sucesivamente hasta llegar a (t-1) en (t):

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{u} \\
&= (\mathbf{p} + \mathbf{u}) + \mathbf{u} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}_2 = \mathbf{p} + 2\mathbf{u} \\
\mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}_2 + \mathbf{u} \\
&= (\mathbf{p} + 2\mathbf{u}) + \mathbf{u} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}_3 = \mathbf{p} + 3\mathbf{q} \\
&\vdots \\
\mathbf{q}_{t-1} &= \mathbf{q}_{t-2} + \mathbf{u} \\
&= (\mathbf{p} + (t-1)\,\mathbf{u}) + \mathbf{u} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}_{t-1} = \mathbf{p} + (t-1)\,\mathbf{u} \\
\mathbf{q}_t &= \mathbf{q}_{t-1} + \mathbf{u} \\
&= (\mathbf{p} + (t-1)\,\mathbf{u}) + \mathbf{u} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{q}_t = \mathbf{p} + t\mathbf{u}
\end{aligned}$$

La combinación lineal obtenida al final de las sustituciones sucesivas permite calcular cualquier punto de la recta, a partir de $\mathbf{p}$ y de asignar valores arbitrarios a $t \in \mathbb{R}$ para multiplicar a $\mathbf{u}$. La expresión se conoce como la ecuación vectorial de la recta.

Sea L una recta orientada por el vector $\mathbf{u}$ y que contiene al punto conocido P. La ecuación vectorial de L es la combinación lineal

$$L : \qquad \mathbf{q} = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{q}$ es el vector de posición de cualquier punto Q de la recta, $\mathbf{p}$ es el vector de posición del punto P conocido, $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro libre y a $\mathbf{u}$ se le conoce como vector director de L.

Para calcular la ecuación vectorial de una recta se debe satisfacerse uno de los siguiente escenarios:

- conocer un punto de la recta y el vector director de la recta.
- conocer dos puntos de la recta.
- conocer un punto y la orientación de la recta respecto de ejes o planos coordenados, otras rectas, o puntos.

Ejemplo. Sea R la recta que contiene al punto $A\,(-2, 3, 1)$. R forma $30°$ con la parte positiva del eje z y está contenida en un plano paralelo al plano xz. Obtenga la ecuación vectorial de R.

Para obtener la ecuación de la recta, ya se tiene el punto base de ella. Por otro lado, el vector director debe cumplir con la condición de ser paralelo al plano xz; esta característica indica que la componente y es nula, por lo que el vector director posee componentes en x y z.

Por el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje z, es conveniente utilizar un vector unitario como director.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \cos\gamma \end{bmatrix} \\
\hat{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \cos 30° \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Para calcular la componente en x se hace uso de la norma unitaria:

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mathbf{u}}\| &= 1 \\
\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2 30°} &= 1 \\
\cos^2\alpha + \frac{3}{4} &= 1 \\
\cos^2\alpha &= \frac{1}{4} \\
\cos\alpha &= \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Se obtienen dos valores el vector unitario:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones vectoriales de las rectas que cumplen con las características descritas son:

$$L: \ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

y

$$L: \ \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

La figura 3 muestra la geometría de las dos rectas.

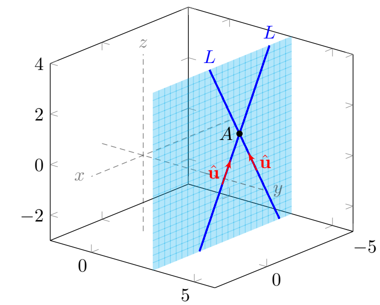


Figura 3

Se debe aclarar que la ecuación vectorial de una recta L no es única, ya que el punto base puede ser cualquiera que pertenezca a L y el vector director puede tener magnitud arbitraria.

3. Ecuaciones Paramétricas de la Recta

En la ecuación vectorial de la recta se ha introducido un parámetro t que sirve para controlar el recorrido de la recta: al variar el parámetro, la magnitud del vector director cambia y se alcanza diversos puntos.

Lo que sucede con el parámetro de la ecuación de la recta, es el mismo fenómeno que se estudio con la parametrización de funciones y curvas. Esto indica que la recta también tiene una representación mediante ecuaciones paramétricas.

Todo punto P que pertenezca a una recta L tiene vector de posición

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

El vector director también puede expresarse en términos de sus componentes:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Para que un punto $Q(x, y, z)$ pertenezca a L, su vector de posición debe satisfacer la ecuación vectorial

$$L: \ \mathbf{q} = \mathbf{p} + t\mathbf{u} \tag{6}$$

Al sustituir (4) y (5) en (6) se realiza una igualdad entre vectores:

$$\begin{aligned} L: \ \mathbf{q} &= \mathbf{p} + t\mathbf{u} \\ &= \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_1 + tu_1 \\ p_2 + tu_2 \\ p_3 + tu_3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow L: &\begin{cases} x = p_1 + tu_1 \\ y = p_2 + tu_2 \\ z = p_3 + tu_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Se observa que la igualdad entre vectores arroja a cada componente de $\mathbf{q}$ como función del parámetro de control de la ecuación vectorial; es decir, cada componente x, y y z es función de $t \in \mathbb{R}$, por lo que se tienen las ecuaciones paramétricas de la recta L.

Sea L una recta, cuyo vector director es $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y que contiene al punto $P(p_1, p_2, p_3)$. Las ecuaciones paramétricas de L se definen como

$$L: \begin{cases} x = p_1 + tu_1 \\ y = p_2 + tu_2 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = p_3 + tu_3 \end{cases}$$

Debido a que una misma recta L tiene una infinidad de ecuaciones vectoriales, también también tendra una infinidad de ecuaciones paramétricas, debido a que éstas últimas siempre estarán ligadas a las primeras.

Ejemplo. Sea L la recta que se forma al intersecar las superficies S_1 y S_2, cuyas ecuaciones respectivas son:

$$S_1: \ x + 2y - 3z = 1 \qquad\qquad S_2: \ 2x - y + z = 0$$

Obtenga las ecuaciones cartesianas de L.

Como L es resultado de la intersección de S_1 y S_2, y las superficies se definen mediante ecuaciones lineales, la intersección se logra al resolver ambas ecuaciones simultáneamente; se recurrirá al escalonamiento para resolver el sistema.

$$\begin{matrix} x & +2y & -3z & = & 1 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales equivalente es

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{5}z &= \frac{1}{5} \\ y - \frac{7}{5}z &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Al despejar x y y de la solución se obtiene $x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}z$ y $y = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}$. Puede observarse que tanto x como y dependen del valor de z, por lo que dichas incógnitas ya se encuentran en forma paramétrica. Para completar las tres ecuaciones buscadas, se asume que $z = z$, donde $z \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$L : \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}z \\ y = \frac{2}{5} + \frac{7}{5}z & z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

La situación geométrica del problema se muestra en la figura 4.

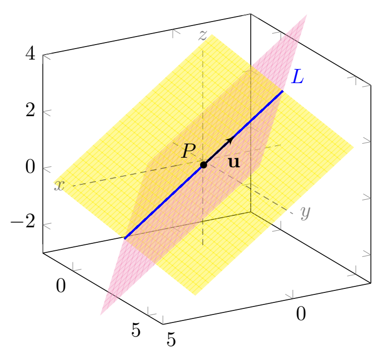


Figura 4. De las ecuaciones de L se obtiene el punto $P\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$ y un vector director $\mathbf{u} = \frac{2}{5}\hat{\mathbf{i}} + \frac{14}{5}\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ con $z = 2$.

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 43: Geometría de la Recta I

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Enero 2021

1. Pertenencia de un Punto a una Recta

Una vez que se ha definido la forma de representar a una recta, tanto vectorial como paramétricamente, es importante conocer la manera que se relaciona con su entorno geométrico.

La relación geométrica más simple se da con entre un punto y una recta: pertenencia del punto a la recta, distancia de la recta al punto, y el punto simétrico respecto de la recta.

La primera relación geométrica se da cuando un punto pertenece a la recta de estudio.

Sean P un punto y L una recta con ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. El punto P pertenece a la recta L si existe $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$$

Esto quiere decir que un punto pertenecerá a una recta, si el primero satisface las ecuaciones (vectoriales o paramétricas) de la recta. En términos algebraicos, se trata de resolver un sistema de ecuaciones lineales compatible (con solución).

Ejemplo. Sea la recta

$$R: \begin{cases} x = \frac{14}{3} - 5t \\ y = \frac{1}{3} - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Determine si el punto $P\,(3, 0, 0)$ pertenece a R.

Para determinar la pertenencia o no de P a la recta, es útil contar con las ecuaciones paramétricas de R. Esto permitirá sustituir las componentes del vector de posición del punto en las ecuaciones.

$$\mathbf{p} = \left[\ 3, 0, 0\ \right] \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, en las ecuaciones paramétricas se obtiene:

$$3 = \frac{14}{3} - 5t \tag{1}$$
$$0 = \frac{1}{3} - t \tag{2}$$
$$0 = 1 - 3t \tag{3}$$

De (3) se puede despejar el parámetro t para conocer su valor:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 3t \\ 3t &= 1 \\ t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Si el punto P pertenece a la recta, entonces el valor de t encontrado debe satisfacer a las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{14}{3} - 5t & \qquad 0 &= \frac{1}{3} - t \\ 3 &= \frac{14}{3} - \frac{5}{3} & 0 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \\ 3 &= \frac{9}{3} & 0 &= 0 \end{aligned}$$

Se observa que efectivamente las ecuaciones son resultas con $t = \frac{1}{3}$, por lo que se tiene un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado. En conclusión, el punto P pertenece a la recta R.

2. Distancia entre Recta y Punto

Se ha conocido la forma de determinar si un punto P pertenece a una recta. Ahora se analizará el siguiente caso: si el punto P no está contenido en una recta, entonces existe una distancia entre ambos.

Se hace hincapié en la siguiente cuestión: cuando se habla de distancias entre elementos geométricos, se hace referencia a la mínima separación entre estos; es decir, se toma en cuenta la distancia recta que, simultáneamente, es perpendicular a los elementos geométricos involucrados. En la figura 1 se muestra cómo la distancia entre un punto y una recta se mide en la forma descrita.

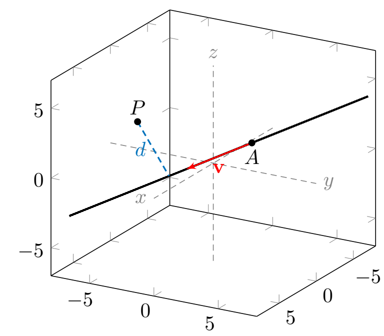


Figura 1. La distancia entre elementos hace alusión a la mínima distancia, la cual se mide de manera perpendicular.

Esto permite establecer que la mínima distancia entre un punto P y una recta L, siempre se mide a lo largo de una recta secundaria que es perpendicular a L y que contiene a P.

La distancia entre la recta L y el punto P, fuera de L, es aquélla que une a ambos elementos de manera perpendicular.

La distancia perpendicular (mínima) puede lograrse al considerar el concepto de componente vectorial o escalar ya que, en esencia, las proyecciones minimizan las distancias entre elementos geométricos.

Ejemplo. Sean el punto $P\,(3,1,2)$ y la recta L, cuya ecuación es

$$\mathbf{p} = (3-6t)\,\hat{\mathbf{i}} + (-1+3t)\,\hat{\mathbf{j}} + (-1+5t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Obtenga la mínima distancia entre P y L.

Se conoce un punto de la recta, $A\,\{3,-1,-1\}$, debido a los términos independientes de cada componente en la ecuación vectorial.

La figura 2 muestra que, con un segmento dirigido entre A y P, se forma un triángulo rectángulo, donde un cateto es la distancia.

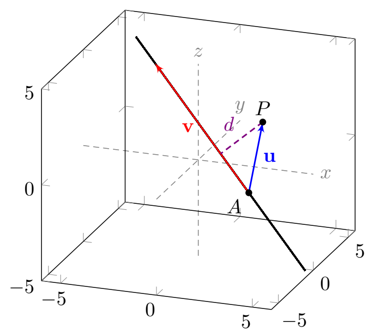


Figura 2

De acuerdo con la figura 2, el triángulo rectangulo tiene los siguientes elementos: la hipotenusa es la norma del segmento dirigido $\mathbf{u} = \overline{AP}$, uno de los catetos se encuentra sobre la recta, y el segundo cateto es la distancia que se solicita calcular. Esta situación geométrica es la definición de las componentes escalar y vectorial, las cuales pueden utilizarse para plantear el teorema de Pitágoras con todas las distancias involucradas en el triángulo rectángulo:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = d^2 + |\mathrm{CompEsc}_L\, u|^2 \tag{4}$$

La componente escalar sobre la recta L puede realizarse mediante su vector director que, de acuerdo a la ecuación vectorial de la recta, es $\mathbf{v} = -6\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$.

Por otro lado, el vector $\mathbf{u}$ se calcula como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{p} - \mathbf{a} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula la componente escalar:

$$\begin{aligned}|\mathrm{CompEsc}_L\, \mathbf{u}| &= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right| \\ &= \left|\frac{(0)(-6) + (2)(3) + (3)(5)}{\sqrt{(-6)^2 + (3)^2 + (5)^2}}\right| \\ |\mathrm{CompEsc}_L\, \mathbf{u}| &= \left|\frac{18}{\sqrt{70}}\right| \end{aligned} \tag{5}$$

La norma del vector $\mathbf{u}$ es

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (3)^2} \\ \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{13}\end{aligned} \tag{6}$$

Al sustituir (5) y (6) en (4) se despeja y obtiene la distancia.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 &= d^2 + |\mathrm{CompEsc}_L\, u|^2 \\ 13 &= d^2 + \frac{324}{70} \\ 13 - \frac{162}{35} &= d^2 \\ \frac{293}{35} &= d^2 \\ \sqrt{\frac{293}{35}} &= d\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia existente entre la recta L y el punto P es $d = \sqrt{\frac{293}{35}}\ [u]$.

La componente vectorial puede utilizarse en obtención de distancia, más aún cuando se busca el punto de la recta L más cercano a P.

3. Simétrico Respecto a una Recta

La distancia está relacionada a la simetría. Cuando se habla del punto simétrico P' del punto P respecto a una recta L, se busca el lugar geométrico que cumple con las siguientes características:

- P' y P pertenecen a la recta perpendicular a L que la interseca.
- P' está a la misma distancia que P pero en sentido opuesto.

En otras palabras, el simétrico del punto P se obtiene al reflejarlo perpendicularmente sobre la recta L.

Sean la recta L y un punto P cualquiera fuera de L. El punto P', simétrico de P respecto de L, es aquél que equidista de L y pertenece a la recta perpendicular cortante a L a la que también pertenece P.

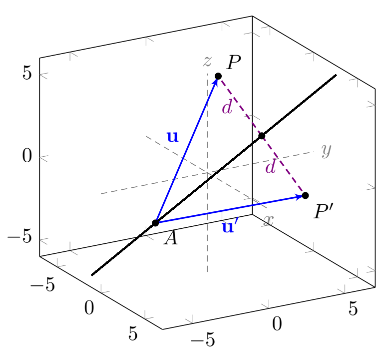


Figura 3. Puntos simétricos que forman triángulos rectángulos como las proyecciones.

El cálculo de un punto simétrico respecto de una recta es similar al cálculo de la distancia. En la figura 3 se muestra que alrededor de la recta L, se forman triángulos rectángulos congruentes con P y su simétrico P' como sendos vértices.

De acuerdo a la figura 3 se puede calcular un vector entre un punto A de la recta y el punto P. Dicho vector puede proyectarse sobre la recta, de la misma forma que se hace para conocer la distancia. La diferencia radica que ahora no se buscan magnitudes, sino puntos, por lo que se requiere a la componente vectorial para realizar los cálculos.

En la figura 4 se observa que existe un vector $\mathbf{u}$ entre los puntos A y P, el cual se proyecta sobre el vector director $\mathbf{v}$ de la recta para obtener a $\mathbf{w}$; es decir,

$$\mathbf{w} = \text{CompVect}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} \tag{7}$$

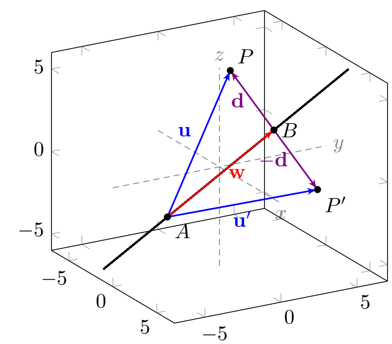


Figura 4. Con el vector distancia $\mathbf{d}$ y la componente vectorial $\mathbf{w}$ se alcanza el punto simétrico.

En la misma figura 4 se encuentra un punto B, que es el punto de intersección entre L y la recta perpendicular que contiene al punto simétrico P'. B se alcanza mediante la suma vectorial de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{w}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{w} \tag{8}$$

Mediante suma vectorial, entre el punto P y el punto B se calcula el vector distancia $\mathbf{d}$ que separa a la recta del punto, tal como lo ilustra la figura 4.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{b} + \mathbf{d} \\ \mathbf{p} - \mathbf{b} &= \mathbf{d} \end{aligned} \tag{9}$$

Al sustituir la ecuación (8) en la expresión (9) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p} - \mathbf{b} &= \mathbf{d} \\ \mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{w}) &= \mathbf{d} \end{aligned} \tag{10}$$

Para alcanzar el punto P' desde B se deben sumar los vectores $-\mathbf{d}$ y $\mathbf{b}$. Al sustituir (8) y (10), y después (7) se obtiene la expresión para calcular el simétrico de un punto.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= \mathbf{b} - \mathbf{d} \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{w}) - (\mathbf{p} - (\mathbf{a} + \mathbf{w})) \\ &= 2\mathbf{a} + 2\mathbf{w} - \mathbf{p} \\ \mathbf{p}' &= 2\mathbf{a} + 2\,\mathrm{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} - \mathbf{p}\end{aligned}$$

Con esta última expresión se calcula el simétrico con base en P, A y el vector $\mathbf{v}$ mostrados en la figura 4.

Ejemplo. Sea el punto $P(-4, 1, 5)$. Obtenga el punto simétrico de P respecto de la recta R, la cual contiene a los puntos $A(0, 0, 3)$ y B, donde el vector de posición de B tiene norma $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$ y cosenos directores iguales y positivos.

Antes de calcular el simétrico se debe obtener el punto B. Para ello, hay que considerar la definición de $\mathbf{b}$ en términos de su vector unitario:

$$\mathbf{b} = \|\mathbf{b}\|\,\hat{\mathbf{b}}$$

Ahora se considera la característica mencionada del vector unitario: cosenos directores iguales y positivos:

$$\begin{aligned}1 &= \sqrt{\cos^{\alpha} + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} \\ &= 3\cos^2\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{3}} &= \cos\alpha\end{aligned}$$

Por lo tanto, el vector de posición de B es:

$$\mathbf{b} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \qquad \Rightarrow \qquad B(1, 1, 1)$$

Con el punto B conocido, ya pueden calcularse los vectores $\mathbf{v}$ (director de la recta) y $\mathbf{u}$ (de un punto de la recta a P):

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} - \mathbf{a} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para la componente vectorial:

$$\begin{aligned}\mathrm{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} &= \frac{(-4)(1) + (1)(1) + (-2)(2)}{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}\mathbf{v} \\ &= -\frac{5}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

De esta manera, el simétrico de P, respecto de R, es:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}' &= 2\mathbf{a} + 2\,\mathrm{CompVect}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} - \mathbf{p} \\ &= 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}' &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 44: Geometría de la Recta II

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Enero 2021

1. Ángulo entre Rectas

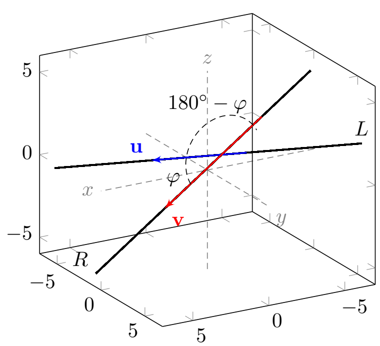


Figura 1. El ángulo entre rectas es el menor formado al cruce.

La geometría alrededor de una recta L no solo se involucra con puntos, otras rectas también intervienen.

La relación inmediata entre un par de rectas es ángulo entre ellas. Como cada recta está dirigida por un vector, entonces el ángulo entre rectas está dado por el ángulo entre vectores. Pero, las rectas se prolongan a ambos lados de su dirección, por lo que se forman dos ángulos y solo se selcciona uno (véase la figura 1).

Sean L y R dos rectas, cuyos vectores directores son $\mathbf{m}$ y $\mathbf{n}$, respectivamente. El ángulo entre ambas rectas se calcula como

$$\sphericalangle (L, R) = \arccos \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{m}\| \, \|\mathbf{n}\|}$$

Como se mencionó anteriormente, a diferencia del ángulo entre vectores, entre las rectas se forman dos ángulos, de los cuales solo te toma en cuenta el menor, como se muestra en la figura 1. Para asegurar esta característica, se debe tomar en cuenta el valor absoluto del producto punto entre los vectores directores; esto permite al coseno del ángulo ser positivo y en consecuencia encontrarse entre 0° y 360°.

Ejemplo. Calcule el ángulo entre las rectas L y R, tales que la ecuación vectorial de L es

$$L: \ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ 1-t \\ 1-t \end{bmatrix}$$

y R contiene a los puntos $C(1, -1, 0)$ y $D(0, 0, -1)$.

Por la ecuación de L, su vector director es $\mathbf{u} = -2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, mientras que el vector director de R es el segmento dirigido $\overline{CD}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El ángulo entre las rectas es:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(L,R) &= \arccos \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \\ &= \arccos \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} \\ \sphericalangle(L,R) &= 61.8745^\circ \end{aligned}$$

Las condiciones de perpendicularidad y paralelismo entre rectas también son heredadas a través de sus vectores directores.

Ejemplo. Calcule la recta L que contiene al punto $P(-2,1,3)$ es perpendicular a la recta

$$M: \ \mathbf{m} = t\hat{\mathbf{i}} + (-1+t)\,\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$

y paralela a la recta

$$N: \ \mathbf{n} = (-2-s)\,\hat{\mathbf{i}} + (3-s)\,\hat{\mathbf{j}} + (2+2s)\,\hat{\mathbf{k}}$$

El vector director de L, se asume como $\mathbf{w} = x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}$. Para encontrar la recta perpendicular M, se aplica la condición de ortogonalidad con su vector director, $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0$$

$$\begin{aligned} (x)(1) + (y)(1) + (z)(1) &= 0 \\ x+y+z &= 0 \qquad (1) \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar la recta paralela N, se aplica la condición de paralelismo con su vector director, $\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{w}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x & y & z \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y+z)\,\hat{\mathbf{i}} - (2x+z)\,\hat{\mathbf{j}} + (-x+y)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} 2y+z &= 0 \qquad (2) \\ 2x+z &= 0 \qquad (3) \\ -x+y &= 0 \qquad (4) \end{aligned}$$

El vector director de la recta L es la solución del sistema formado por las ecuaciones (1) a (4). De la ecuación (4) se obtiene $y = x$, mientras que de la ecuación (3) se deduce que $z = -2x$. Al sustituir estos valores en las ecuaciones (1) y (2) se satisfacen sin encontrar un valor específico, lo cual indica que que el sistema de ecuaciones es compatible indeterminado. Por lo tanto, el vector director de la recta L es:

$$\mathbf{w} = x\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}} - 2x\hat{\mathbf{k}}$$

Tomando un valor $x = 1$,

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$$

y con el punto P proporcionado, la ecuación vectorial de la recta L buscada es:

$$\mathbf{q} = (-2+t)\,\hat{\mathbf{i}} + (1+t)\,\hat{\mathbf{j}} + (3-2t)\,\hat{\mathbf{k}}$$

2. Cruce, Intersección y Distancia entre Rectas

Además del ángulo, las rectas también tienen una relación geométrica particular: el cruce o la intersección.

Sean las rectas L y R. Si las rectas no son paralelas, entonces se cumple uno de dos escenarios:

- L y R se cruzan. Quiere decir que las rectas se interponen mutuamente, pero con una distancia mínima de por medio.
- L y R se cortan. Esto indica que las rectas se interponen mutuamente, pero tienen un punto en común (de intersección).

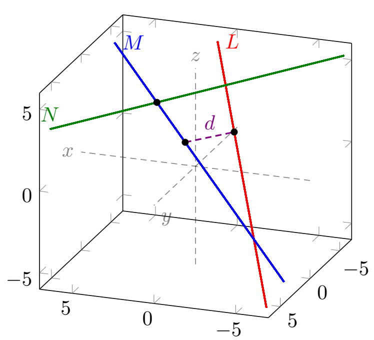


Figura 2. Las rectas L y M se cruzan, pues hay una distancia que las separa; las rectas M y N se cortan, al tener un punto en común. Ambos casos tienen disposición en forma de ”X”.

En la figura 2 se muestra la situación de tres rectas L, M y N: dos de ellas poseen un punto en común, por lo que ambas se cortan en el lugar de intersección; otro par de ellas están separadas por una distancia, por lo que ambas se cruzan. En el segundo caso hay que destacar la característica de la distancia; ésta es perpendicular a ambas rectas, y en consecuencia permite calcular una recta perpendicular a ambas.

Se debe tomar en cuenta que ambos escenarios comentados presentan la misma situación geométrica: calcular una distancia entre rectas; si las rectas se cruzan, entonces existen una distancia no nula, mientras que si se cortan la distancia entre rectas es nula.

La distancia d que se busca entre dos rectas debe ser aquélla que forma ángulos rectos, de manera simultánea, con las rectas de análisis; esto también involucra a un par de puntos (uno para cada recta) que se encuentran más cercanos entre sí, y son los extremos de un segmento de recta que representa la distancia d.

Ejemplo. Sean las rectas

$$R : \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$S : \begin{cases} x = 1 + 2\sigma \\ y = 2 + \sigma \\ z = -2 - 2\sigma \end{cases}$$

Determine si las rectas se cruzan o se cortan. Si se cortan, calcule el punto de intersección; si se cruzan, calcule la distancia entre ambas.

Para tomar en cuenta ambos casos en uno solo, se calculará directamente la distancia; si ésta es nula, entonces las rectas se cortan.

Como se ha comentado anteriormente, la distancia es perpendicular tanto a R como a S, por lo que debe calcularse un segmento dirigido d entre ambas rectas que cumpla esta condición.

Primero se asume que P pertenece a la recta R, por lo que las coordenadas de dicho punto satisfacen la ecuación vectorial respectiva:

$$P(a, b, c) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = 2 + \rho \\ b = 1 + 2\rho \\ c = 3 + 2\rho \end{cases}$$

Con el punto $Q(x, y, z)$ de S se aplica la misma idea:

$$Q(x,y,z) \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 + 2\sigma \\ y = 2 + \sigma \\ z = -2 - 2\sigma \end{cases}$$

El segmento dirigido $\mathbf{d}$ entre P y Q representa a la distancia entre rectas; no interesa el sentido, ya que lo importante es su norma:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \mathbf{q} - \mathbf{p} \\ &= \begin{bmatrix} 2+\rho \\ 1+2\rho \\ 3+2\rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+2\sigma \\ 2+\sigma \\ -2-2\sigma \end{bmatrix} \\ \mathbf{d} &= \begin{bmatrix} 1+\rho-2\sigma \\ -1+2\rho-\sigma \\ 5+2\rho+2\sigma \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

El segmento dirigido $\mathbf{d}$ debe ser perpendicular, de manera simultánea, a los vectores directores de sendas rectas: $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ de R y $\mathbf{v} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ de S.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1+\rho-2\sigma \\ -1+2\rho-\sigma \\ 5+2\rho+2\sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} &= 0 \\ 9 + 9\rho &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1+\rho-2\sigma \\ -1+2\rho-\sigma \\ 5+2\rho+2\sigma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} &= 0 \\ -9 - 9\sigma &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Al resolver las ecuaciones (6) y (7) se obtienen los valores de ρ y σ para calcular el vector distancia.

$$\begin{aligned} 9 + 9\rho = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \rho = -1 \\ -9 - 9\sigma = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \sigma = -1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1+\rho-2\sigma \\ -1+2\rho-\sigma \\ 5+2\rho+2\sigma \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector $\mathbf{d}$ no es nulo, por lo que las rectas se cruzan y existe una distancia entre ellas:

$$\begin{aligned} d(R,S) &= \|\mathbf{d}\| \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \\ d(R,S) &= 3 \ [u] \end{aligned}$$

La figura 3 muestra la situación geométrica de las rectas.

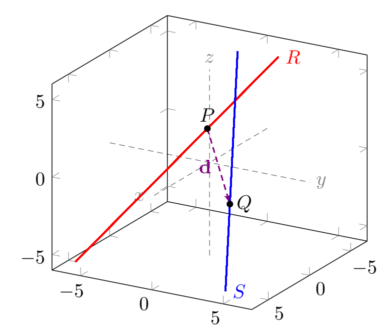


Figura 3

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 45: El Plano y sus Ecuaciones

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Enero 2021

1. Definición de Plano

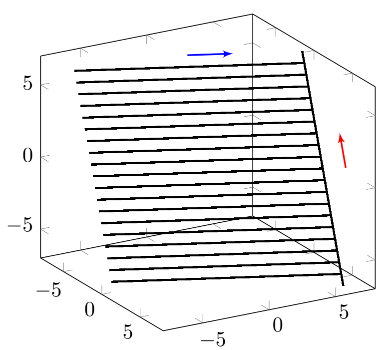


Figura 1. Una sucesión de rectas paralelas, formadas sobre una segunda dirección, generan un plano.

El punto es un lugar geométrico sin dimensiones. A partir de una sucesión de puntos que siguen una dirección se construyó una recta, la cual es un lugar geométrico cuya dimensión aumenta a uno; coloquialmente, la recta posee una longitud que denota la dimensión uno: el largo.

Puesto que la sucesión de puntos aumenta la dimensión y crea la recta, entonces una sucesión de rectas aumenta, nuevamente la dimensión, y construye un nuevo lugar geométrico; dicha dimensión sería dos y da la noción de largo y ancho. EL lugar geométrico que se describe es el plano.

> Un plano es el lugar geométrico de la sucesión de rectas paralelas G dirigida por una recta no colineal fija D.

La figura 1 ilustra cómo es que un conjunto de rectas paralelas siempre sigue una dirección estipulada, la cual se debe a un vector director (o bien, otra recta que no es paralela a la sucesión). Esto permite definir al plano de manera geométrica a partir de un par de rectas, o bien, a partir de un punto y dos segmentos dirigidos no paralelos.

2. Ecuación Vectorial del Plano

Para generar un plano se requiere una recta L y un vector director $\mathbf{v}$ que no sea paralelo a la recta, como se muestra en la figura 2. También se debe considerar que la recta posee un punto B del cual se parte y su propio vector director $\mathbf{u}$. Con estás características, la ecuación vectorial de la recta L es:

$$\mathbf{q} = \mathbf{b} + t\mathbf{u} \tag{1}$$

Para obtener un punto A_1 del plano, se suma el vector $\mathbf{v}$ a la ecuación vectorial (1), como se observa en la figura 2; es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{q} + \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{b} + t\mathbf{u}) + \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_1 &= \mathbf{b} + t\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{2}$$

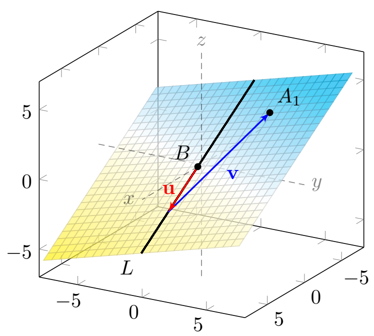


Figura 2. Un plano se genera mediante la suma de la ecuación vectorial de una recta L y un vector $\mathbf{v}$ que salga de L hacia un punto que no le pertenezca.

Para obtener un nuevo punto A_2 se puede utilizar el vector $\mathbf{v}$ y sumarlo a la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a_1} + \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{b} + t\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{b} + t\mathbf{u} + 2\mathbf{v} \qquad (3) \end{aligned}$$

Para obtener a A_3, A_4 y así sucesivamente hasta el punto A_s del plano se realiza recursivamente el proceso para calcular (3); de esta manera se llega a la combinación lineal

$$\mathbf{a}_s = \mathbf{b} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

la cual es conocida como la ecuación vectorial del plano.

Sea L la recta que tiene como vector director a $\mathbf{u}$ y contiene al punto B. El plano P orientado por L y por el vector $\mathbf{v}$, que no es paralelo a $\mathbf{u}$, tiene como ecuación vectorial a la combinación lineal

$$P: \qquad \mathbf{a} = \mathbf{b} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{a}$ es el vector de posición de cualquier punto A del plano, $\mathbf{b}$ es el vector de posición del punto B conocido, $t, s \in \mathbb{R}$ son dos parámetros libre independientes entre sí, y a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se los conoce como vectores directores de P.

Como se estudio en Álgebra Vectorial, la suma de dos vectores genera un paralelogramo, que es una figura plana; por ello, la interpretación geométrica de la ecuación vectorial del plano es correcta, pues los vectores directores son lados de un paralelogramo. Si los segmentos dirigidos que generan el plano son perpendiculares, entonces se tiene un largo y un ancho que indican la dimensión dos del lugar geométrico.

Los planos son más versátiles que las rectas al momento de calcularlos, ya que hay más escenarios geométricos que resultan en la superficie.

- ❏ una recta y un vector no paralelo a la primera.
- ❏ tres puntos del plano.
- ❏ una recta y un punto.
- ❏ un punto y dos vectores no paralelos.
- ❏ dos rectas paralelas diferentes.
- ❏ dos rectas que se crucen.

Ejemplo. Sean R, la recta que corta perpendicularmente al eje y y contiene al punto $M(1,4,1)$, y el punto $Q(2,1,-3)$. Obtenga la ecuación vectorial del plano W que contiene a R y a Q.

No se conoce completamente la recta R, pero de la información proporcionada, el punto donde corta al eje y debe ser $C(0,y,0)$, y con M se puede obtener un vector director de R:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{m} - \mathbf{c} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 4-y \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por otro lado, la recta es perpendicular al eje y, y en consecuencia, $\mathbf{u}$ es perpendicular al vector $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{j}} &= 0 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 4-y \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \\ 4-y &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Con esto, ya se tienen dos puntos de la recta: $M(1,4,1)$ y $C(0,4,0)$; no es necesario calcular su ecuación vectorial, ya que solo se requiere su vector director, el cual es $\mathbf{u}=\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}$.

Por otro lado, el segundo vector director del plano puede calcularse como el segmento dirigido entre M y Q, o bien, entre Q y C:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{q}-\mathbf{c} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando cualquier punto de los conocidos (C, M o Q) y los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, la ecuación vectorial del plano es:

$$W: \qquad \mathbf{p}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

En la figura 3 se muestra el escenario geométrico que representa al problema presente.

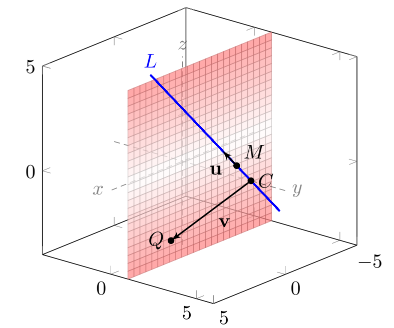


Figura 3

3. Ecuaciones Paramétricas del Plano

Como toda ecuación vectorial, la del plano tiene una representación paramétrica que le permite expresar a cada componente de un fector como una función; en este caso, se entra al terreno de las funciones multivariable. Dentro de la ecuación vectorial

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$$

cada vector puede expresarse con sus respectivas componentes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Por combinación lineal e igualdad entre vectores, las ecuaciones paramétricas del plano son:

$$P=\begin{cases} x=b_1+u_1t+v_1s \\ y=b_2+u_2t+v_2s \\ z=b_3+u_3t+v_3s \end{cases}$$

Puede observarse que las componentes son funciones que dependen de las variables t y s; por lo que son funciones multivariable.

Sea P un plano, cuyos vectores directores son $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, y que contiene al punto $B(b_1, b_2, b_3)$. Las ecuaciones paramétricas de P se definen como

$$P: \quad \begin{cases} x = b_1 + tu_1 + sv_1 \\ y = b_2 + tu_2 + sv_2 \\ z = b_3 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

4. Ecuación Cartesiana

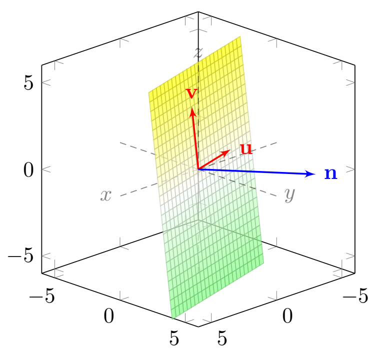


Figura 4. Todo plano posee un vector $\mathbf{n}$, el cual es perpendicular a la superficie y da origen a la ecuación cartesiana del plano.

Debido a que un plano P, como el mostrado en la figura 4, es dirigido por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, son susceptibles de involucrarse con el producto cruz; como no son paralelos, entonces el vector resultado será no nulo:

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

Se recalca que $\mathbf{n}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Por otro lado, la ecuación vectorial del plano P es

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \tag{4}$$

El producto punto entre (4) y $\mathbf{n}$ arroja una ecuación muy particular:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{b} + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} + t\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + s\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Con las componentes de los vectores involucrados, la ecuación (5) es

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} &= \\ (x - b_1) n_1 + (y - b_2) n_2 + (z - b_3) n_3 &= \\ n_1x + n_2y + n_3z - (b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores de posición del punto $A(x, y, z)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ del plano, y $\mathbf{n} = n_1\hat{\mathbf{i}} + n_2\hat{\mathbf{j}} + n_3\hat{\mathbf{k}}$. La expresión (6) resultante es una ecuación lineal conocida como ecuación cartesiana del plano P, mientras que $\mathbf{n}$ es el vector normal a P.

Sea P un plano, donde $\mathbf{n} = n_1\hat{\mathbf{i}} + n_2\hat{\mathbf{j}} + n_3\hat{\mathbf{k}}$ es un vector perpendicular a él, llamado vector normal. La ecuación cartesiana del plano es

$$n_1x + n_2y + n_3z - n_4 = 0$$

donde $n_4 = b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3$ viene del punto $B(b_1, b_2, b_3)$ conocido del plano. Otra forma de la ecuación cartesiana es

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

donde $\mathbf{a}$ es el vector de posición del punto $A(x, y, z)$ del plano.

Como se habrá notado, la ecuación cartesiana del plano es lineal y objeto de estudio de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales; al resolver un sistema de este tipo se busca la intersección entre planos.

Ejemplo. Sea V un plano que contiene a las rectas paralelas

$$M: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad N: \begin{cases} x = -3\sigma \\ y = 2 + 2\sigma \\ z = 1 - \sigma \end{cases}$$

Obtenga la ecuación cartesiana del plano que contiene a M y a N.

Las rectas son paralelas, y no es posible utilizar sus respectivos vectores directores para calcular la ecuación cartesiana. Lo que sí puede realizarse es obtener un segmento dirigido entre M y N para tener un vector no paralelo a las rectas. La figura 5 muestra esta situación.

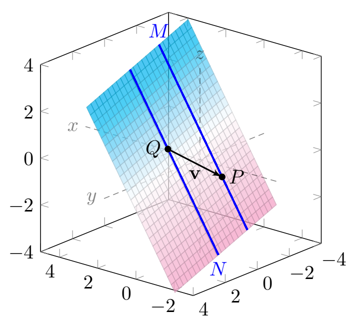


Figura 5

Con $P(-2, 1, 0)$ de M y $Q(0, 2, 1)$ de N, el vector entre ambos es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{p} - \mathbf{q} \\ &= \left(-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right) - \left(2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \\ \mathbf{v} &= -2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Tomando al vector director de M, $\mathbf{u} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, se calcula el producto cruz entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para obtener al vector normal a V.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \mathbf{n} &= 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 7\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Entonces, para la ecuación cartesiana se toma el punto $Q \in N$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \begin{bmatrix} x \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} &= \\ 3x + (y-2) - 7(z-1) &= \\ 3x + y - 7z + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la ecuación pertenece al plano al sustituir el punto P en ella:

$$\begin{aligned} 3x + y - 7z + 5 &= 0 \\ 3(-2) + (1) - 7(0) + 5 &= \\ -6 + 1 + 5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación se satisface y en consecuencia, en forma cartesiana, el plano se presenta por

$$V: \quad 3x + y - 7z + 5 = 0$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 46: Geometría del Plano I

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

El plano puede relacionarse geométricamente con puntos, rectas y otros planos; la geometría con el punto es la más básica.

1. Pertenencia de un Punto a un Plano

La pertenencia de un punto a un plano se analiza de la misma forma que cuando un punto pertenece a la recta: satisfacción de las respectivas ecuaciones. La ventaja del plano es su ecuación cartesiana, que no requiere de la solución de un sistemas de ecuaciones lineales.

Un punto Q pertenece a un plano P, si el primero satisface todas las ecuaciones del segundo. Dependiendo del tipo de ecuación del plano, se tienen dos escenarios:

- ❏ Las coordenadas de Q son una combinación lineal de las ecuaciones vectorial o paramétricas de P, que plantean un sistema de ecuaciones lineales compatible determinado si $Q \in P$.
- ❏ Las coordenadas de Q son una solución de la ecuación cartesiana de P, si $Q \in P$.

Ejemplo. Sea el plano P que contiene al punto $A(-2,3,1)$ y a la recta

$$L: \ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine si $Q(-5,1,0)$ pertenece a P.

Para determinar si el punto pertenece al plano se requiere alguna de sus ecuaciones. Se obtendrá una ecuación vectorial y después la ecuación cartesiana para verificar los dos escenarios comentados en la definición.

Para la ecuación vectorial del plano, uno de los vectores es el director de la recta, mientras que el otro puede partir del punto base $B(2,3,1)$ de la recta al punto A.

$$\mathbf{v} = \overline{BA}$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomando al punto A y los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$, la ecuación vectorial del plano es

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir el vector de posición de Q en la ecuación vectorial se plantea un sistema de ecuaciones lineales.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \sigma \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - \lambda - 4\sigma \\ 3 + 2\lambda \\ 1 + \lambda \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{array}{rrcr} -\lambda & -4\sigma & = & -3 \\ 2\lambda & & = & -2 \\ \lambda & & = & -1 \end{array}$$

El sistema de ecuaciones obtenido arroja como solución a $\lambda = -1$ y $\sigma = 1$, por lo que existe solución y en consecuencia el punto Q pertenece al plano.

Un segundo proceso es obtener la ecuación cartesiana del plano.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{n} &= -4\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Mediante el punto A, la ecuación cartesiana del plano es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-1 \end{bmatrix} &= 0 \\ -4y + 12 + 8z - 8 &= 0 \\ -y + 2z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Al sustituir las coordenadas de Q en la ecuación cartesiana se observa que la satisface; es decir, el punto Q es la representación geométrica de una solución particular de la ecuación cartesiana.

$$\begin{aligned} -y + 2z + 1 &= 0 \\ -(1) + 2(0) + 1 &= \\ -1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Se reitera que el punto Q pertenece al plano.

2. Distancia entre Plano y Punto

Cuando un punto está fuera de un plano, entonces existe una distancia que separa ambos lugares geométricos. Al igual que con la recta, la distancia que debe medirse es la mínima posible; es decir, la distancia entre punto y plano se mide de manera perpendicular a ambos.

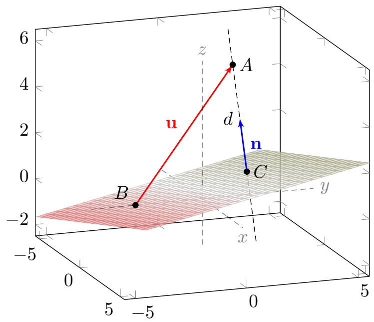


Figura 1. Para calcular la distancia entre un punto A y un plano se hace uso del vector normal $\mathbf{n}$; el punto C del plano minimiza la distancia al punto A.

La figura 1 muestra que la distancia entre un punto A y un plano P es perpendicular, y en consecuencia es paralela al vector normal al plano.

Si se selecciona un punto B cualquiera del plano y se calcula el segmento dirigido $\overline{BA}$, se forma un triángulo rectángulo donde uno de sus catetos es la distancia que separa a A y al plano P (véase la figura 1).

$$\overline{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \tag{1}$$

Para calcular el cateto $\mathbf{d}$ que denota a la distancia, hay que proyectar (1) sobre el vector normal $\mathbf{n}$ al plano.

$$\mathbf{d} = \text{CompVect}_{\mathbf{n}}\, \overline{BA} \tag{2}$$

El vector distancia permite calcular el punto del plano que se encuentre más cercano al punto A, su magnitud es la mínima distancia, que también puede obtenerse mediante la componente escalar.

$$\|\mathbf{d}\| = \left|\text{CompEsc}_{\mathbf{n}}\, \overline{BA}\right|$$

Sean un punto A y un plano P cuyo vector normal es $\mathbf{n}$. La distancia entre A y P está definida como

$$d(A, P) = \left|\text{CompEsc}_{\mathbf{n}}\, \overline{BA}\right|$$

donde $\overline{BA}$ es el segmento dirigido que inicia en un punto B conocido del plano y termina en A. El punto $C \in P$ más cercano a A se calcula como

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \text{CompVect}_{\mathbf{n}}\, \overline{BA} \tag{3}$$

Ejemplo. Determine la distancia entre el plano

$$P: \qquad 3x - 2y + 4z = 4$$

y el punto $B(3, -2, 5)$.

Para seleccionar un punto cualquiera del plano basta con proponer dos coordenadas y despejar la tercera; es decir, resolver la ecuación lineal.

$$\begin{aligned} z &= 1 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \\ &= 1 - \frac{3}{4}(4) + \frac{1}{2}(2) \\ z &= -1 \end{aligned}$$

El punto del plano a utilizar, $A(4, 2, -1)$, es el inicio del segmento dirigido que se proyectará sobre el vector normal para calcular la distancia.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{b} - \mathbf{a} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tomando al vector $\mathbf{n} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$, normal al plano, y al vector $\mathbf{u}$ calculado, la distancia entre el punto B y el plano P es:

$$d(B, P) = |\text{CompEsc}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{u}|$$

$$\begin{aligned} d(B,P) &= \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}\right| \\ &= \left|\frac{-3+8+24}{\sqrt{9+4+16}}\right| \\ d(B,P) &= \frac{29}{\sqrt{29}} \end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia entre el punto y el plano es $\sqrt{29}\ [u]$. En la figura 2 se muestra que el punto B, efectivamente, está fuera del plano y existe una distancia.

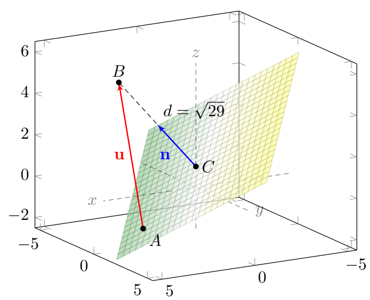


Figura 2

3. Simétrico Respecto a un Plano

Ya se ha estudiado que todo punto A tiene su simétrico A', respecto de una recta. Si se sustituye la recta por un plano P, se preserva la simetría entre A y A'. En este caso, ambos puntos pertenecen a una recta perpendicular a P que es guíada por el vector normal al plano.

De acuerdo con la figura 3, el vector $\mathbf{n}$ normal a P será el director de la recta L que contiene a A y su simétrico A', donde

$$d(A,P) = d(A',P)$$

Como la recta que contiene a A y a A' corta al plano, el punto de intersección será el más cercano a A en P (y por simetría, también lo es a A'). Siguiendo la figura 3, el punto A' se obtiene a partir de C en dirección de $-\mathbf{d}$, que son las expresiones (3) y (2) en sentido contrario, respectivamente. Así, el punto simétrico es

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= -\mathbf{d}+\mathbf{c} \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - 2\,\mathrm{CompVect}_{\mathbf{n}}\,\overline{BA} \qquad (4) \end{aligned}$$

tomando en cuenta que B es un punto conocido del plano.

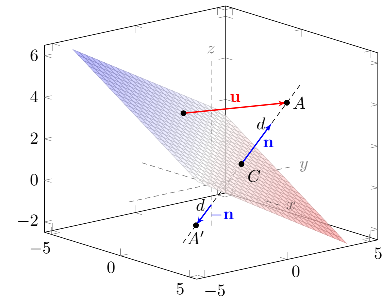


Figura 3. El cálculo de puntos simétricos A y A' respecto de un plano hace uso del vector normal. El punto C del plano es el más cercano a A; ambos definen una recta perpendicular al plano.

Sean P un plano y A un punto tal que $A \notin P$. El punto A', simétrico de A respecto de P, se calcula como

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\,\mathrm{CompVect}_{\mathbf{n}}\,\overline{BA}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a P, y $\overline{BA}$ es el segmento dirigido que une al punto $B \in P$ con el punto A.

Se observa que la expresión (4) es la misma expresión que se dedujo para obtener el punto simétrico respecto de una recta, salvo que el vector sobre el cual se obtiene la componente vectorial es el vector normal al plano, en lugar de algún vector director.

Ejemplo. Sean el punto $A(4,-3,1)$ y el plano

$$5x-3y-2z=-11$$

Determine:

a. el punto C del plano, más cercano a A.
b. el punto A', simétrico de A respecto al plano.

Nuevamente, se requiere un punto cualquiera del plano, que puede obtenerse arbitrariamente:

$$\begin{aligned} z &= \frac{11}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ &= \frac{11}{2} + \frac{5}{2}(1) - \frac{3}{2}(2) \\ z &= 5 \end{aligned}$$

El punto conocido del plano es $B(1,2,5)$. Para trabajar se requiere el vector $\mathbf{w} = \overline{BA}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} \\ \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora puede calcularse el punto C, mediante la componente vectorial sobre el vector normal $\mathbf{n} = 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} - \operatorname{CompVect}_{\mathbf{n}} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{15+15+8}{25+9+4} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El punto en el plano más cercano a A es $C(-1,0,3)$.

Por suma vectorial, el simétrico es

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{c} - \operatorname{CompVect}_{\mathbf{n}} \mathbf{w} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{15+15+8}{25+9+4} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{a}' &= \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto simétrico son $A'(-6,3,5)$. En la figura 4 se ilustra el escenario geométrico resuelto.

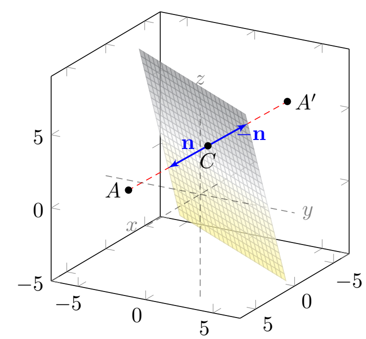


Figura 4

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 47: Geometría del Plano II

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

Dentro de la geometría entre planos y rectas se considera la extensión infinita de ambos lugares geométricos; esto se traduce en solo dos posibles escenarios: la intersección o el paralelismo. La intersección entre plano y recta se presenta cuando la segunda pertenence al primero, o bien, existe un ángulo diferente de 0° entre ambos.

1. Pertenencia de una Recta a un Plano

Todo plano está formado por una infinidad de rectas, por lo que cada una de ellas estará contenida en el plano. Tomando una recta R, con punto base $Q\left(x_0, y_0, z_0\right)$ y vector director $\mathbf{v}$, que está contenida en el plano P, de ecuación cartesiana $Ax + By + Cz + D = 0$ y un vector director $\mathbf{u}$, entonces las siguientes condiciones deben satisfacerse:

1. Q satisface la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$. Como R está contenida en P, entonces cada punto de ella es un punto del plano; en consecuencia, Q satisface a todas las ecuaciones de P.
2. $\mathbf{v}$ es perpendicular al vector $\mathbf{n} = A\hat{\mathbf{i}} + B\hat{\mathbf{j}} + C\hat{\mathbf{k}}$. Como R está contenida en P, entonces su vector director puede ser uno de los directores del plano junto con $\mathbf{u}$; por lo tanto, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{n}$.

La recta R, con ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$, estará contenida en el plano P, con ecuación cartesiana $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, si

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{q}) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Se debe hacer la diferencia entre una recta contenida y una recta paralela a un plano, ya que ambos deben satisfacer la ortogonalidad con el vector normal plano, mas no la satisfacción de ecuaciones; la figura 1 muestra las dos situaciones de paralelismo entre recta y plano.

Ejemplo. Sea el plano W que contiene a los puntos $D\,(2, -1, 1)$, $E\,(-1, 3, 0)$ y $F\,(-1, -1, -1)$. Determine si la recta L, con punto base $A\,(5, -9, 1)$ y paralela al eje y, pertecence a W.

En el escenario planteado se requiere de la ecuación cartesiana del plano, que puede calcularse con base en los puntos E, D y F: entre los tres puntos se calculan los vectores directores, y a partir de ellos el vector normal.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{e} - \mathbf{d} \\
&= -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \\
\mathbf{v} &= \mathbf{f} - \mathbf{d} \\
&= -3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{k}} \\
\therefore \qquad \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\
&= -8\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

Con el vector normal, se calcula la ecuación cartesiana del plano tomando como punto base a D y un punto cualquiera a $B(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{d}) &= 0 \\
-8x - 3y + 12z + 1 &= 0
\end{aligned}$$

Al evaluar la ecuación cartesiana del plano con el punto A, éste la satisface, de tal manera que el primer requisito para la pertenencia al plano se cumple:

$$\begin{aligned}
-8x - 3y + 12z + 1 &= 0 \\
-8(5) - 3(-9) + 12(1) + 1 &= \\
-40 + 27 + 13 &= 0
\end{aligned}$$

Sin embargo, el vector director de la recta L es $\hat{\mathbf{j}}$, que no es perpendicular al vector normal de W. Esto indica que la recta en cuestion no puede pertenecer al plano:

$$\begin{aligned}
\left(\hat{\mathbf{j}}\right) \cdot \left(-8\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}}\right) &\neq 0 \\
-3 &\neq 0
\end{aligned}$$

Se concluye que la recta L no está contenida en el plano W, pues solo satisface una de las dos características necesarias para cumplir con la condición de pertenencia.

2. Distancia entre Recta y Plano

La figura 1 muestra como un par de rectas paralelas se encuentran en diferente situación respecto a un plano. La recta R se encuentra contenida en el plano P, en tanto que la recta L no lo está. Ya se conoce la manera de determinar la pertenencia de una recta a un plano; ahora, es necesario conocer qué sucede cuando una recta es paralela al plano, pero existe una distancia entre ambos. Para ello, es necesario considerar que una recta está compuesta por una infinidad de puntos, cada uno de ellos a la misma distancia del plano. Esta idea permite deducir que al calcular la distancia entre el plano P y cualquier punto Q de la recta, se tendrá la distancia entre ambos lugares geométricos; el que todos los puntos de la recta equidisten del plano también es indicativo del paralelismo entre la recta y el plano, y enfatiza la característica enunciada en la pertenencia: el vector director de L y el normal a P son perpendiculares.

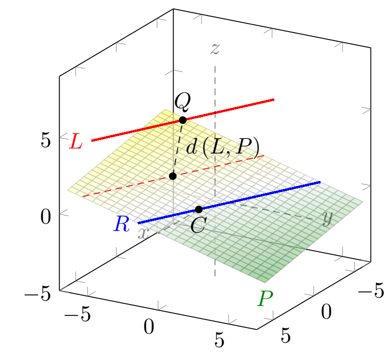


Figura 1. La recta R está contenida en el plano P; la recta L es paralela a P, por lo que existe una distancia entre ambos.

Sean L una recta con vector director $\mathbf{v}$ y punto base Q, y P un plano con vector normal $\mathbf{n}$. L y P son paralelos si

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{y} \qquad Q \notin P$$

La distancia entre L y P es igual a la distancia entre Q y P.

Se aclara que esta situación geométrica no arroja un punto del plano más cercano a la recta; en su lugar, existe una recta sobre el plano que es la proyección de la recta paralela.

Ejemplo. Sean el plano $P: \; x+y+3z=-5$ y la recta

$$R: \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determina si P y R son paralelos. En caso afirmativo, calcula la distancia entre ellos, y la recta en P que es la proyección de R.

Para verificar si ambos lugares geométricos son paralelos se verificará si el vector director de R y el vector normal a P son perpendiculares y se calculará la distancia. La segunda acción tiene el objetivo de catalogar simultáneamente al paralelismo o la pertenencia al plano: si la distancia es nula, entonces la recta está sobre el plano.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= -1+1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

Se confirma que existe paralelismo, aunque no se sabe si la recta está sobre el plano o no. Para calcular la distancia se hace uso de la distancia plano-punto mediante la norma de la componente vectorial:

$$d(B,P) = \left\| \mathrm{CompVect}_{\mathbf{n}} \overline{AB} \right\|$$

donde A es un punto del plano y B el punto base de la recta. Para calcular a A solo deben asignarse valores aleatorios a x y y para sustituirse en la ecuación cartesiana del plano, y así despejar z. Una opción puede ser $x=2$, $y=2$, por lo que

$$\begin{aligned} x+y+3z &= -5 \\ (2)+(2)+3z &= -5 \\ 3z &= -9 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, con el punto $A(2,2,-3)$ y $B(-3,5,5)$ se calcula la distancia entre lugares geométricos.

$$\begin{aligned} \overline{BA} &= -5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 8\hat{\mathbf{k}} \\ \Rightarrow \qquad d(B,P) &= \left\| \frac{\mathbf{n}\cdot\overline{BA}}{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\| \\ d(B,P) &= 2\sqrt{11} \end{aligned}$$

La distancia no es nula y como el vector director de R es perpendicular al vector normal del plano, significa que R y P son paralelos; existe una distancia $d(R,P) = 2\sqrt{11}$ entre ellos.

La recta L que R proyecta sobre el plano posee las siguientes características: ambas son paralelas y mediante un vector perpendicular cada punto de L se obtiene a partir de cada punto de R. La figura 2 muestra el escenario las carcaterísticas de las rectas L y R.

Como la distancia entre R y el plano es fija, entonces la componente vectorial calculada en la distancia permitirá calcular L mediante R:

$$\begin{aligned} L: \quad \mathbf{p} &= \mathbf{r} - \mathrm{CompVect}_{\mathbf{n}} \overline{AB} \\ &= \mathbf{b} + \lambda\mathbf{v} - \mathrm{CompVect}_{\mathbf{n}} \overline{AB} \\ &= \mathbf{q} + \lambda\mathbf{v} \end{aligned}$$

$$L: \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$L: \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ésta es la recta R proyectada sobre el plano P.

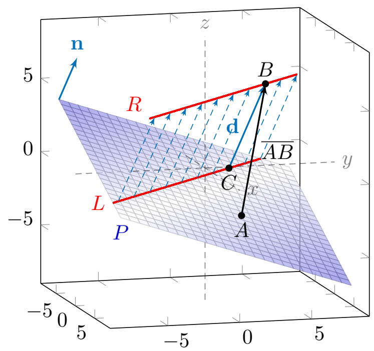


Figura 2

3. Intersección entre Recta y Plano

Cuando un plano y una recta son paralelos, entonces no existe algún punto en común entre ambos lugares. En otra circunstancia, debido a que tanto el plano y la recta se extienden indefinidamente, existe un punto en común entre ambos. No importa dónde se encuentre la intersección, un plano y una recta siempre se cortarán en algún momento.

La intersección entre un plano y una recta se da en el punto que satisface, simultáneamente, las ecuaciones de ambos lugares geométricos.

Si el plano P tiene ecuación cartesiana $Ax + By + Cz = D$ y la recta L posee ecuaciones paramétricas

$$L: \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

entonces, el punto de intersección se da en la solución de la ecuación cartesiana con las ecuaciones paramétricas. El cálculo de la intersección se obtiene al sustituir cada ecuación paramétrica en la ecuación cartesiana y resolver una ecuación lineal para el parámetro t:

$$Ax + By + Cz = D$$
$$A\big(f_1(t)\big) + B\big(f_2(t)\big) + C\big(f_3(t)\big) = D$$

4. Ángulo entre Recta y Plano

La intersección entre planos y rectas no es el único fenómeno que se da cuando ambos no son paralelos; la falta de paralelismo muestra que existe un ángulo diferente de 0 que se forma entre el plano y la recta, tal como se muestra en la figura 3.

En la figura 3 se observa que existe un ángulo α entre la recta L y el vector $\mathbf{n}$ normal al plano P. Este ángulo puede calcularse mediante el ángulo obtuso θ que forman la recta y el plano y el vector normal:

$$\theta = \alpha + 90° \tag{1}$$

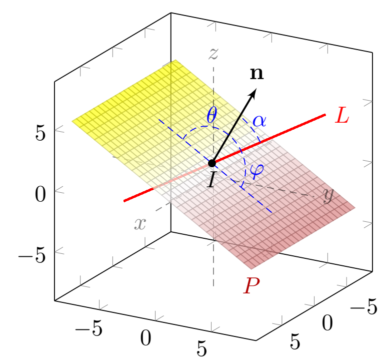


Figura 3. Ángulo e intersección entre plano y recta. Los ángulos θ y φ son suplementarios, y α es parte de θ pero se encuentra entre la recta y el vector normal.

Al igual que en el ángulo entre rectas, se toma como ángulo entre recta y plano al de menor magnitud, que en el caso de al figura 3 es φ:

$$\varphi = 180^\circ - \theta \tag{2}$$

Al sustituir (1) en (2), se tiene la expresión para calcular el ángulo entre la recta L y el plano P

$$\begin{aligned}\varphi &= 180^\circ - \theta \\ &= 180^\circ - (\alpha + 90^\circ) \\ \varphi &= 90^\circ - \alpha\end{aligned}$$

donde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{n}, L)$. El ángulo entre la recta y el vector normal es el mismo que el ángulo entre los vectores normal y director de la recta; para asegurar un ángulo agudo, debe contemplarse el valor absoluto en el cálculo del ángulo entre vectores.

Sean L una recta y P un plano no paralelos. El ángulo entre L y P se calcula como

$$\sphericalangle(L, P) = 90^\circ - \sphericalangle(\mathbf{n}, \mathbf{v})$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal a P y $\mathbf{v}$ es el vector director de L.

Ejemplo. Obtenga el punto y ángulo de intersección entre el plano

$$P: \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la recta

$$R: \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como la ecuación del plano se encuentra en su forma vectorial hay que calcular la ecuación cartesiana, pues se requiere el vector normal para calcular el ángulo.

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}} \\ \Rightarrow \qquad 0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{bmatrix} \\ 0 &= x + 3y + 2z + 2\end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son $R: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$, las cuales se sustituyen en la ecuación cartesiana para encontrar el punto de intersección.

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z + 2 &= 0 \\ (-1 - 2t) + 3(2 + 3t) + 2(1 + t) + 2 &= 0 \\ 9t + 9 &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, $t = -1$. Al sustituir el valor del parámetro en las ecuaciones paramétricas de la recta se tiene como punto de intersección a $I(1, -1, 0)$. Para el ángulo se hace uso del vector normal $\mathbf{n}$ y el vector director de la recta $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}\sphericalangle(P, R) &= 90^\circ - \arccos \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{n}\| \, \|\mathbf{v}\|} \\ &= 90^\circ - \arccos \frac{9}{14} \\ \sphericalangle(P, R) &= 49.99^\circ\end{aligned}$$

Cálculo y Geometría Analítica

Lectura 48: Geometría del Plano III

Ing. Aldo Jiménez Arteaga

Julio de 2020, Rev. Julio 2021

1. Distancia entre Planos Paralelos

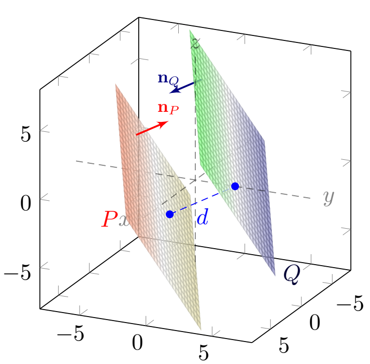


Figura 1. Planos paralelos con sus vectores normales, también paralelos. La distancia entre planos se mide con el vector normal.

El paralelismo entre rectas describe dos rectas que se ubican en diferente lugar, pero que llevan la misma orientación; es decir, el paralelismo entre rectas se da mediante el paralelismo entre sus vectores directores.

Para saber cuándo dos planos son paralelos, se enuncian las mismas características que en el parelelismo entre rectas, solo que esta vez la orientación común se da en dos direcciones, y para englobarlas simultáneamente se hace uso de los vectores normales (véase la figura 1).

> Los planos V y W son paralelos si sus respectivos vectores normales $\mathbf{n}_V$ y $\mathbf{n}_W$ son paralelos entre sí.

El fenómeno derivado del paralelismo es la distancia entre lugares geométricos, que en el caso de los planos se calcula de manera similar que entre rectas: se traza un segmento dirigido entre los planos que se proyecta sobre el vector, en este caso, normal; la norma de la proyección es la distancia entre planos (véase la figura 1).

> Sean V y W dos planos paralelos con vector normal $\mathbf{n}$, donde A es un punto de V y B es un punto de W. La distancia $d(V, W)$ entre los planos se calcula como
>
> $$d(V, W) = \left\| \text{CompVect}_{\mathbf{n}} \overline{AB} \right\|$$

Al momento, puede notarse que prácticamente la distancia entre lugares geométricos se calcula del mismo modo en todos los escenarios geométricos descritos al momento.

> ***Ejemplo***. Sea el plano $V: \; 4x + y + z = 18$. Obtén la ecuación cartesiana de un plano W, que es paralelo a V y dista $6\sqrt{2}$ $[u]$ de él.
>
> ---
>
> El vector normal a V también normal a W:

$$V \parallel W \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{n}_V \parallel \mathbf{n}_W \qquad \therefore \qquad \mathbf{n}_V = \mathbf{n}_W$$

Como cada punto A de V se encuentra a $6\sqrt{2}$ unidades de distancia de W, entonces un vector normal con magnitud $6\sqrt{2}$ puede restarse de A y así determinar un punto del plano W. Para calcular el vector normal con la longitud adecuada, se hace uso del vector unitario y la magnitud de la distancia.

$$\mathbf{n} = 4\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \qquad \therefore \qquad \hat{\mathbf{n}} = \frac{4}{3\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{d} = 6\sqrt{2}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{d} = 8\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$$

A se calcula asignando arbitrariamente valores a la ecuación cartesiana del plano. Si se toma $x = 2$ y $y = 3$, entonces $z = 7$ y el punto es $A\,(2, 3, 7)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{d} \\ &= \left(2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}\right) - \left(8\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}\right) \\ \mathbf{b} &= -6\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}} \qquad \therefore \qquad B\,(-6, 1, 5) \end{aligned}$$

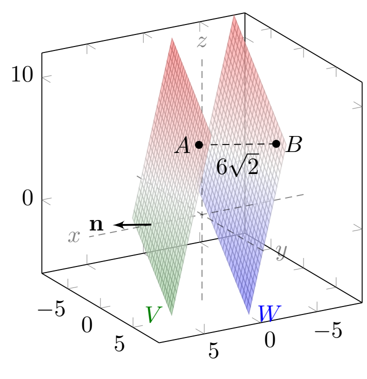


Figura 2

Finalmente, con el vector normal $\mathbf{n} = 4\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ y el punto $B\,(-6, 1, 5)$ se calcula la ecuación cartesiana solicitada:

$$\left(4\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left((x+6)\,\hat{\mathbf{i}} + (y-1)\,\hat{\mathbf{j}} + (z-5)\,\hat{\mathbf{k}}\right) = 0$$

$$4x + y + z + 18 = 0$$

La figura 2 muestra los planos paralelos. Si en lugar de restar **a** menos **d** se suman, también se encuentra el punto de un plano paralelo que satisface las condiciones establecidas en el ejemplo.

2. Intersección entre Planos

2.1. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Cuando dos planos no son paralelos, al extenderse infinitamente a lo largo de dos direcciones, en algún momento se cortarán y producirán un nuevo lugar geométrico. Si dos planos o más planos no paralelos

$$\begin{aligned} P_1 &: \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ P_2 &: \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ P_3 &: \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

se intersecan, entonces existe un lugar geométrico formado por un conjunto S de puntos $A\,(x, y, z)$ que satisface simultáneamente las ecuaciones cartesianas de los planos. Algebraicamente, este escenario describe a un sistema de ecuaciones lineales (SEL).

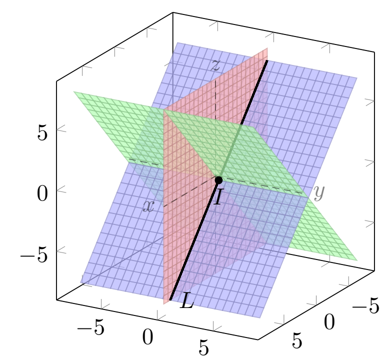


Figura 3. La intersección entre planos define un sistema de ecuaciones lineales. La solución del SEL será una recta o un punto.

Si el SEL (1) es compatible indeterminado (múltiples soluciones), entonces la solución tendrá un parámetro libre y geométricamente, definirá una recta. Por otro lado, si (1) es un SEL compatible determinado (una solución), la solución definirá un punto. La figura 3 ilustra los dos casos mencionados.

El caso de un SEL incompatible para (1), muestra que no existe intersección entre los planos. Un SEL de este tipo denota paralelismo entre planos o falta de concurrencia al mismo conjunto de puntos.

Las ecuaciones cartesianas de dos o más planos definen un sistema de ecuaciones lineales, donde la solución es la intersección entre los planos. Si el sistema es:

- ❏ compatible indeterminado, la intersección es un punto.
- ❏ compatible determinado, la intersección es una recta.
- ❏ incompatible, no hay intersección.

2.2. Ecuaciones Cartesianas de la Recta

Como la solución de un SEL compatible indeterminado es una recta, entonces existe una nueva expresión algebraica que se une a las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta: las ecuaciones cartesianas.

Sea L la recta de intersección entre dos planos. Las ecuaciones cartesianas de los planos también son las ecuaciones cartesianas de L:

$$L: \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases} \tag{2}$$

El SEL indeterminado (2) tiene como solución a un conjunto de elementos que puede representarse como

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x = q_1 + tu_1 \\ y = q_2 + tu_2 \\ z = q_3 + tu_3 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \tag{3}$$

El conjunto (3) contiene ecuaciones paramétricas, y en consecuencia, para transformar las ecuaciones cartesianas de una recta en ecuaciones paramétricas solo se obtiene la solución al SEL (2).

La transformación inversa (de ecuaciones paramétricas a cartesianas), se da con la eliminación del parámetro. Las ecuaciones paramétricas

$$L: \quad \begin{cases} x = q_1 + tu_1 \\ y = q_2 + tu_2 \\ z = q_3 + tu_3 \end{cases}$$

de la recta L poseen al parámetro $t \in \mathbb{R}$, el cual puede despejarse de cada ecuación y así dejar expresiones en términos de x, y y z:

$$\begin{aligned} x &= q_1 + tu_1 & \Rightarrow \quad & t = \tfrac{x-q_1}{u_1} \\ y &= q_2 + tu_2 & \Rightarrow \quad & t = \tfrac{y-q_2}{u_2} \\ z &= q_3 + tu_3 & \Rightarrow \quad & t = \tfrac{z-q_3}{u_3} \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones están igualadas al mismo valor t, por lo que pueden igualarse entre sí:

$$\begin{matrix} t = \tfrac{x-q_1}{u_1} \\ t = \tfrac{y-q_2}{u_2} \\ t = \tfrac{z-q_3}{u_3} \end{matrix} \quad \therefore \quad \frac{x-q_1}{u_1} = \frac{y-q_2}{u_2} = \frac{x-q_3}{u_3} \tag{4}$$

La igualdad puede tomarse en pares, es decir $\frac{x-q_1}{u_1} = \frac{y-q_2}{u_2}$ y $\frac{y-q_2}{u_2} = \frac{x-q_3}{u_3}$. Estas son dos ecuaciones cartesianas que en conjunto representan a la recta L. La particular expresión (4) de las ecuaciones cartesianas de una recta se conocen como ecuaciones en forma simétrica.

Sea la recta L con vector director $\mathbf{u} = u_1\hat{\mathbf{i}} + u_2\hat{\mathbf{j}} + u_3\hat{\mathbf{k}}$ y punto base $Q\left(q_1, q_2, q_3\right)$. Las ecuaciones cartesianas de L en forma simétrica son:

$$\frac{x - q_1}{u_1} = \frac{y - q_2}{u_2} = \frac{x - q_3}{u_3}$$

Ejemplo. Obtenga las ecuaciones en forma simétrica de la recta L de intersección entre los planos $P_1 :\ x+3y+2z = 0$ y $P_2 :\ x+2y+z = 0$.

El primer paso para obtener la recta es resolver el sistema de ecuaciones lineales definido por las ecuaciones cartesianas de los planos.

$$\begin{array}{r} x + 3y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{array}{ccr} x & & -z = 0 \\ & y & +z = 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \end{array}$$

Para tener las ecuaciones paramétricas de la recta z se iguala a t, se sustituye en la solución del sistema. Las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección son

$$L : \quad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

El parámetro t ya está despejado de las ecuaciones en x y z; para la ecuación y se obtiene $-y = t$. Finalmente, las ecuaciones en forma simétrica de la recta de intersección entre P_1 y P_2 son

$$L : \qquad x = -y = z$$

3. Ángulo entre Planos

La intersección entre dos planos arroja dos elementos geométricos importantes: una recta y un ángulo de intersección.

En la figura 4 se ilustra que la intersección entre los planos V y W arroja dos ángulos suplementarios, uno agudo φ (ángulo principal entre planos) y uno obtuso θ:

$$180^\circ = \varphi + \theta \tag{5}$$

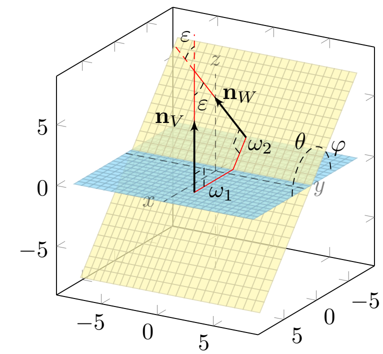


Figura 4. El ángulo entre vectores se calcula con el ángulo entre sus vectores normales, tomando el de menor magnitud.

También se observa que los vectores normales $\mathbf{n}_V$ y $\mathbf{n}_W$, y los planos forman un cuadrilátero. Puesto que los ángulos internos de todo cuadrilátero suman 360°, entonces puede plantearse la ecuación

$$360^\circ = \theta + \omega_1 + \omega_2 + \varepsilon \tag{6}$$

Los ángulos ω_1 y ω_2 son rectos, ya que están formados por V y W con sus respectivos vectores normales. Se sustituyen estos datos en (6):

$$\begin{aligned} 360^\circ &= \theta + \omega_1 + \omega_2 + \epsilon \\ &= \theta + \epsilon + 180^\circ \\ 180^\circ &= \theta + \varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

Las ecuaciones (5) y (7) son la misma pues ambas expresan al ángulo llano como la suma de θ más otro ángulo que debe ser $\varphi = \varepsilon$. Por ángulos opuestos por el vértice, ε es el ángulos entre vectores normales, y también es el ángulo φ entre planos.

El ángulo de intersección entre los planos V y W, cuyos vectores normales respectivamente son $\mathbf{n}_V$ y $\mathbf{n}_W$, es

$$\sphericalangle(V, W) = \arccos \frac{|\mathbf{n}_V \cdot \mathbf{n}_W|}{\|\mathbf{n}_V\| \|\mathbf{n}_W\|}$$

Puede notarse que el ángulo entre lugares geométricos (par de rectas, par de planos, recta y plano) está ligado a los vectores que les definen (vector director, vector normal), y en consecuencia, el álgebra vectorial es la mejor herramienta disponible al momento.

Ejemplo. Calcule el ángulo de intersección entre los planos $P: y - z + 2 = 0$ y $Q: y + 2 = 0$.

Cada plano tiene su respectivo vector normal:

$$P: \ y - z + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{n}_P = \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$$

$$Q: \ y + 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{n}_Q = \hat{\mathbf{j}}$$

Una vez obtenidos los vectores normales se procede a calcular el ángulo entre planos.

$$\begin{aligned}
\sphericalangle(P, Q) &= \arccos \frac{|\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{n}_Q|}{\|\mathbf{n}_P\| \|\mathbf{n}_Q\|} \\
&= \arccos \frac{\left|\left(\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{j}}\right)\right|}{\left\|\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}\right\| \left\|\hat{\mathbf{j}}\right\|} \\
&= \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sphericalangle(P, Q) &= 45^\circ
\end{aligned}$$

4. Los Planos Coordenados

Un caso especial de los planos y las rectas es el cubo cartesiano (figura 5). Cuando se habla del sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas se especifica que hay planos y ejes que permiten ubicar cada punto; es decir, los planos y ejes sirven como un sistema de referencia. Para calcular las ecuaciones de dichos planos se analiza qué coordenada (abscisa, ordenada o cota) es nula.

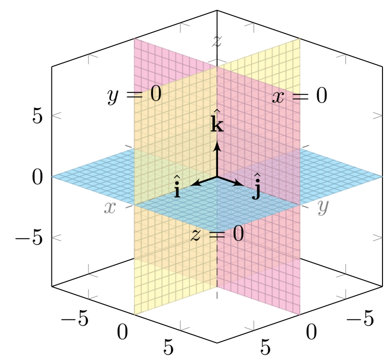


Figura 5. El cubo cartesiano está formado por tres planos coordenados, cuyos vectores normales son los vectores canónicos.

Por ejemplo, un punto en el espacio $\mathbb{R}^3$ se expresa como $P(x, y, z)$; si P está sobre el plano xy, entonces $z = 0$ y por lo tanto

$$z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0x + 0y + z = 0 \qquad \therefore \qquad \mathbf{n}_{xy} = \hat{\mathbf{k}}$$

En consecuencia, la ecuación cartesiana del plano xy es $z = 0$ y su vector normal es $\hat{\mathbf{k}}$, como efectivamente se sabe. Este razonamiento es aplicable a los planos restantes, así como a los planos paralelos sobre cada uno de los ejes coordenados. En la tabla 1 se condensan las características de los planos coordenados.

Plano	Ecuación	Vector Normal	Planos Paralelos
xy	$z = 0$	$\hat{\mathbf{k}}$	$z = k$
yz	$x = 0$	$\hat{\mathbf{i}}$	$x = k$
xz	$y = 0$	$\hat{\mathbf{j}}$	$y = k$

Tabla 1. Descripción de los planos coordenados con $k \in \mathbb{R}$.