



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Diseño de controladores para el  
sistema "2DOF Ball Balancer"  
utilizando modos deslizantes  
modernos**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniero Eléctrico Electrónico**

**P R E S E N T A**

Álvaro Peña de Teresa

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Rafael Iriarte Vivar Balderrama



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025**



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y  
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL  
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado DISEÑO DE CONTROLADORES PARA EL SISTEMA □2DOF BALL BALANCER□ UTILIZANDO MODOS DESLIZANTES MODERNOS que presenté para obtener el título de INGENIERO ELÉCTRICO ELECTRÓNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

Álvaro Peña

---

ALVARO PEÑA DE TERESA  
Número de cuenta: 419049283

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Índice de figuras</b>  | <b>5</b>  |
| <b>Índice de tablas</b>   | <b>7</b>  |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>11</b> |
| 1.1. Motivación y Estado del Arte . . . . .                                       | 12        |
| 1.2. Objetivos . . . . .  | 15        |
| 1.3. Contribuciones . . . . .   | 15        |
| 1.4. Estructura de la tesis . . . . .   | 15        |
| <b>2. Marco teórico</b>   | <b>17</b> |
| 2.1. Control por modos deslizantes clásico . . . . .                              | 17        |
| 2.1.1. Diseño convencional de controladores por modos deslizantes (SMC) . . . . . | 17        |
| 2.2. Concepto de control equivalente . . . . .                                    | 18        |
| 2.3. Diseño convencional de controladores Super-Twisting STA . . . . .            | 20        |
| 2.4. Diseño Variable Gain Super-Twisting Algorithm VGSTA . . . . .                | 21        |
| 2.4.1. Rediseño de Lyapunov . . . . .   | 22        |
| <b>3. Modelo del sistema</b>  | <b>25</b> |
| 3.1. Modelado matemático . . . . .  | 27        |
| <b>4. Diseño de controladores</b>   | <b>33</b> |
| 4.1. Modelo linealizado . . . . .   | 33        |
| 4.1.1. Modelo linealizado desacoplado . . . . .                                   | 34        |
| 4.1.2. Estabilidad . . . . .  | 34        |
| 4.1.3. Controlabilidad y observabilidad . . . . .                                 | 35        |
| 4.1.4. Rediseño de Lyapunov basado en control por modos deslizantes . . . . .     | 36        |
| 4.2. Regulación . . . . .   | 38        |
| 4.2.1. Diseño LQR del modelo nominal . . . . .                                    | 38        |
| 4.2.2. Rediseño . . . . .   | 38        |
| 4.2.3. Control Super-Twisting Algorithm . . . . .                                 | 40        |
| 4.2.4. Control Super-Twisting de Ganancia Variable (VGSTA) . . . . .              | 41        |
| 4.3. Seguimiento de trayectorias . . . . .  | 43        |
| 4.3.1. Dinámica de error de seguimiento . . . . .                                 | 43        |

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>5. Simulaciones</b>                                      | <b>47</b> |
| 5.1. Simulaciones regulación . . . . .                      | 48        |
| 5.2. Simulaciones de regulación con perturbación . . . . .  | 49        |
| 5.3. Simulaciones de seguimiento . . . . .                  | 52        |
| 5.4. Simulaciones de seguimiento con perturbación . . . . . | 53        |
| <b>6. Resultados experimentales</b>                         | <b>57</b> |
| 6.1. Planta física . . . . .                                | 57        |
| 6.1.1. Regulación controlador LQR . . . . .                 | 57        |
| 6.1.2. Regulación controlador STA . . . . .                 | 58        |
| 6.1.3. Regulación controlador VGSTA . . . . .               | 60        |
| 6.2. Seguimiento de trayectorias . . . . .                  | 62        |
| 6.2.1. Seguimiento de trayectorias LQR . . . . .            | 62        |
| 6.2.2. Seguimiento de trayectorias STA y VGSTA . . . . .    | 63        |
| 6.2.3. Comparación seguimiento de trayectorias . . . . .    | 64        |
| <b>7. Conclusiones</b>                                      | <b>69</b> |
| 7.1. Trabajo Futuro . . . . .                               | 70        |
| <b>A. Linealización por método del Jacobiano</b>            | <b>71</b> |
| <b>B. Derivador de Levant</b>                               | <b>75</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>78</b> |

# Índice de figuras

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Regulación del controlador de fábrica . . . . .  | 13 |
| 1.2. Seguimiento de trayectoria con controlador PD . . . . .  | 14 |
| 3.1. Imagen de la planta “2DOF Ball Balancer” . . . . .   | 25 |
| 3.2. Sistema a modelar vista aérea . . . . .  | 26 |
| 3.3. Sistema a modelar vista lateral . . . . .  | 26 |
| 5.1. Modelo de Simulink para simulaciones . . . . .   | 47 |
| 5.2. Simulaciones regulación LQR sin perturbación . . . . .   | 48 |
| 5.3. Simulaciones regulación STA sin perturbación . . . . .   | 48 |
| 5.4. Simulaciones regulación VGSTA sin perturbación . . . . .   | 49 |
| 5.5. Perturbación Simulada $\varphi = \text{Acos}(wt) + 0.5\text{Acos}(50wt) + 0.1\text{Acos}(200wt)$ . . . . . | 50 |
| 5.6. Simulaciones regulación LQR con perturbación . . . . .   | 50 |
| 5.7. Simulaciones regulación STA con perturbación . . . . .   | 51 |
| 5.8. Simulaciones regulación VGSTA con perturbación . . . . .   | 51 |
| 5.9. Simulaciones seguimiento LQR sin perturbación . . . . .  | 52 |
| 5.10. Simulaciones seguimiento STA sin perturbación . . . . .   | 52 |
| 5.11. Simulaciones seguimiento VGSTA sin perturbación . . . . .   | 53 |
| 5.12. Simulaciones seguimiento LQR con perturbación . . . . .   | 54 |
| 5.13. Simulaciones seguimiento STA con perturbación . . . . .   | 54 |
| 5.14. Simulaciones seguimiento VGSTA con perturbación . . . . .   | 55 |
| 6.1. Regulación en $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$ con controlador LQR . . . . .  | 58 |
| 6.2. Regulación en $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$ con controlador STA . . . . .  | 59 |
| 6.3. Regulación en $x_1 = 0$ y $y_1 = 0$ con controlador VGSTA . . . . .  | 60 |
| 6.4. Comparación errores de regulación con controladores LQR, STA y VGSTA . . . . .                             | 61 |
| 6.5. Seguimiento de trayectoria con controlador LQR . . . . .   | 62 |
| 6.6. Seguimiento de trayectoria con controlador STA . . . . .   | 63 |
| 6.7. Seguimiento de trayectoria con controlador VGSTA . . . . .   | 64 |
| 6.8. Comparación errores de seguimiento con controladores LQR, STA y VGSTA . . . . .                            | 65 |
| 6.9. Comparación de seguimiento con controladores PID, LQR, STA y VGSTA . . . . .                               | 66 |
| 6.10. Funcionamiento derivador de Levant LQR . . . . .  | 67 |

---

|  |    |
|--|----|
| 6.11. Funcionamiento derivador de Levant VGSTA . . . . . | 68 |
| B.1. Funcionamiento derivador de Levant LQR . . . . .    | 76 |
| B.2. Funcionamiento derivador de Levant VGSTA . . . . .  | 77 |

# Índice de tablas

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 3.1. Variables del sistema . . . . . | 27 |
| 3.2. Especificaciones . . . . .      | 28 |
| 3.3. Estados del sistema . . . . .   | 30 |



# Acrónimos

**LQR** Linear Quadratic Regulator. 3, 4, 15, 38, 45, 48, 49, 55, 57, 59, 60, 62–65

**MIMO** Multiple Input Multiple Output. 15

**SMC** Sliding Mode Controller. 3, 17, 18, 21

**STA** Super-Twisting Algorithm. 3, 4, 15, 20, 21, 24, 39, 40, 45, 48, 49, 58–60, 63, 64, 69, 70

**VGSTA** Variable Gain Super-Twisting Algorithm. 3, 4, 15, 21–24, 39, 41, 43, 45, 48, 49, 58, 60, 63, 64, 69, 70



# Capítulo 1

## Introducción

La teoría del control es un área de las matemáticas aplicadas y de la ingeniería que se encarga del estudio de sistemas dinámicos y del diseño de sistemas de control. Controlar un sistema significa realizar una acción para modificar su comportamiento de tal manera que cumpla una meta. Para lograr influir sobre un sistema se han desarrollado equipos que permiten implementar las diversas estrategias de control; por ejemplo, el regulador de velocidad de máquinas de vapor diseñado por Watt o los complejos microcontroladores que surgieron a partir del crecimiento en la computación [1].

El crecimiento exponencial que ha tenido la computación permite hoy en día aplicar leyes de control de mayor complejidad para una variedad de sistemas físicos, que van desde las hoy indispensables centrales eléctricas o el sistema eléctrico nacional, hasta las plantas industriales, la aviación, la industria aeroespacial o la robótica.

Dada la complejidad cada vez mayor de los sistemas y su enorme diversidad, uno de los problemas recurrentes a los que un ingeniero de control debe enfrentarse es el desconocimiento de los parámetros exactos de la planta, así como de las perturbaciones externas que afectan al sistema físico. Como se menciona en [2] las incertidumbres paramétricas del modelo llevan a una disminución en el rendimiento o incluso a una pérdida de estabilidad.

Los controladores robustos se encargan de lidiar con estas perturbaciones y sus efectos nocivos. Una de estas estrategias de control robusto es la conocida como control por modos deslizantes [3]. El control por modos deslizantes es un método de control no lineal discontinuo que fuerza las trayectorias de los estados de un sistema a alcanzar y permanecer, para todo tiempo, en una variedad previamente diseñada denominada superficie de deslizamiento. Por la estructura misma de esta superficie, al estar sobre ella, las diferencias en los parámetros de la planta con respecto al modelo matemático, así como cierto tipo de perturbaciones externas, no afectan al modo de deslizamiento, siendo así un control robusto.

Uno de los problemas centrales del control por modos deslizantes es el diseño de una superficie de deslizamiento apropiada. Dentro de la literatura existen varios mé-

todos, entre los que se encuentran el método basado en la fórmula de Ackermann [4] o el diseño vía LQ singular [5]. Otro método de control robusto es el llamado rediseño de Lyapunov, que también nos puede ayudar a diseñar superficies de deslizamiento.

El rediseño de Lyapunov clásico se basa en obtener un control estabilizante para el sistema nominal, para luego diseñar otro control que nos ayude con las perturbaciones. Utilizaremos una metodología similar, donde el control estabilizante del sistema nominal será un regulador cuadrático lineal, mientras que diseñaremos controladores por modos deslizantes que lidiarán con las perturbaciones. La diferencia entre la metodología que utilizaremos y el rediseño clásico de Lyapunov es que, en este último, se busca que el producto de la derivada parcial en los estados de la función de Lyapunov que encontramos al utilizar el controlador estabilizante por la parte del modelo por donde entra la perturbación y la señal de control mantenga que la derivada temporal de la función candidata de Lyapunov sea negativa definida. Mientras que en el método utilizado, desarrollado por Estrada, Fridman y Moreno [6] buscamos que ese mismo sea cero y, por lo tanto, buscamos que esta sea la superficie de deslizamiento que alcanzaremos en tiempo finito y se mantendrá en cero en todo tiempo futuro.

## 1.1. Motivación y Estado del Arte

El control automático o teoría del control se encuentra cada día más presente en nuestro día a día. Por ello, el estudio de sistemas no lineales toma especial relevancia. De estos sistemas dependen el funcionamiento de nuestra sociedad tal como la conocemos, el GPS que utilizamos todos los días para desplazarnos se sostiene en una red de satélites manejados por sistemas de control, el piloto automático de los aviones no es más que un algoritmo de control, los robots que trabajan en las fábricas también utilizan leyes de control.

Este no es sólo un tema de actualidad, hoy en día se están realizando grandes avances gracias a las nuevas metodologías de control. Robots que harán operaciones a corazón abierto en hospitales, coches con sistemas de conducción automática o cohetes con sistemas de propulsión reciclables. En definitiva, el control automático está en un punto álgido y no parece que vaya a caer pronto.

La importancia presente y futura del control de sistemas no lineales presenta una gran oportunidad de desarrollo personal y profesional, es por ello que se decidió realizar esta tesis, buscando entender el funcionamiento de estos, así como los algoritmos de control que nos permiten guiarlos, con la ambición de aplicar el conocimiento adquirido y poder seguir aprendiendo acerca de ellos.

En este trabajo abordaremos un problema de control con un sistema de bola y placa (Ball and Plate) donde el objetivo de control es la regulación en un punto de equilibrio y el seguimiento de trayectorias. Existen numerosos trabajos en control de un sistema “Ball and Plate”. En [7] y [8] encontramos el diseño de diferentes controladores por modos deslizantes para la regulación o el seguimiento de trayectorias sobre el Ball and Plate, en [9] incluso encontramos controladores de segundo orden. También se han utilizado controladores para el seguimiento de trayectorias, como en

[10] dónde utilizan un controlador PID con anti-windup.

La principal diferencia entre los controles por modos deslizantes utilizados y el nuestro es la metodología de diseño. Como mencionamos en la introducción, buscamos utilizar una metodología basada en el rediseño de Lyapunov donde, a partir de un controlador estabilizante y de la dinámica del sistema en lazo cerrado, podemos encontrar una superficie de deslizamiento para los controladores por modos deslizantes. Esto nos permite evitar diseñar la superficie de deslizamiento.

Por otra parte, utilizaremos controles por modos deslizantes. Este tipo de controladores es robusto a perturbaciones, a diferencia de controladores como el PID con anti-windup.

El equipo cuenta con un controlador PD de fábrica. Los resultados experimentales muestran resultados limitados para regulación y para el seguimiento de trayectorias. Como se observa en las figuras 1.1 y 1.2 el error de regulación es de alrededor de  $1[cm]$  sobre el eje  $y$  y de hasta  $2[cm]$  en seguimiento, donde también se puede observar que existe un desfase entre la trayectoria deseada y la obtenida.

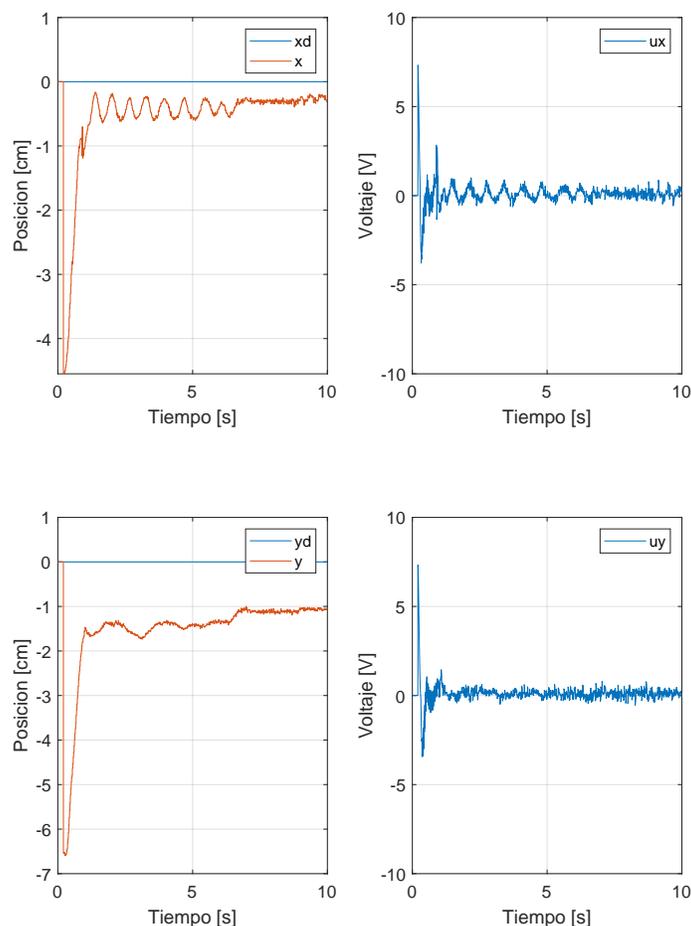


Figura 1.1: Regulación del controlador de fábrica

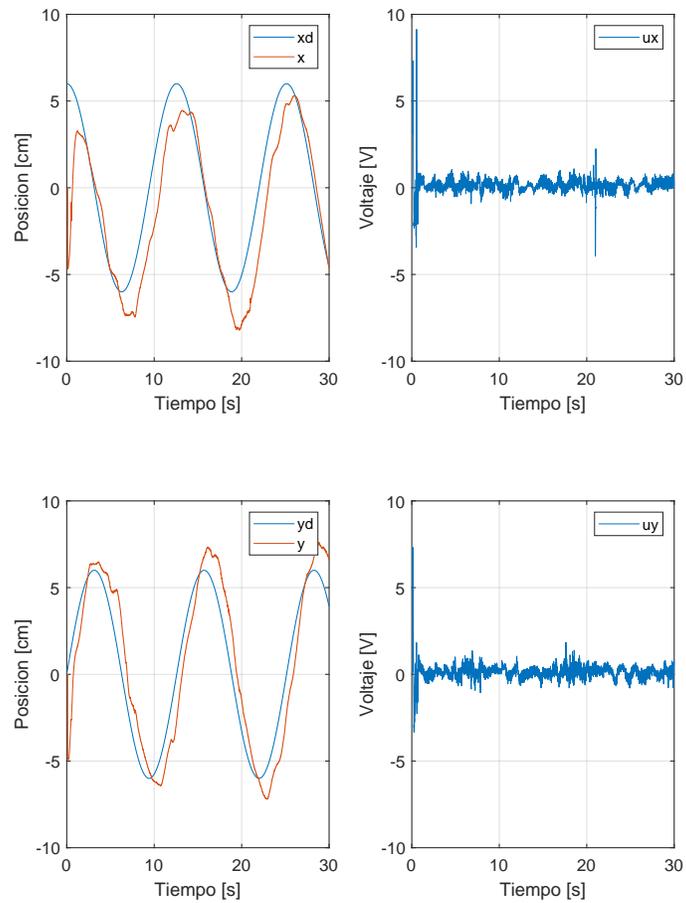


Figura 1.2: Seguimiento de trayectoria con controlador PD

Es de nuestro interés realizar el diseño de controladores por modos deslizantes a través de una metodología de rediseño novedosa que permita rechazar perturbaciones y disminuir el error de regulación y de seguimiento comparados con el controlador de fábrica.

## 1.2. Objetivos

Los objetivos que nos planteamos en este trabajo de tesis son los siguientes:

### Objetivo General:

- Implementar controladores por modos deslizantes modernos, a través de una metodología basada en el rediseño de Lyapunov que nos permita robustecer el sistema frente a perturbaciones que, a su vez, permitan realizar la regulación y el seguimiento de trayectorias para un sistema MIMO no lineal reduciendo los errores de regulación y de seguimiento en comparación con el controlador PID de fábrica.

### Objetivos Particulares

1. Modelar el sistema 2 DOF Ball Balancer de Quanser.
2. Diseñar un controlador clásico (LQR) para regulación y para seguimiento de trayectorias para el sistema nominal.
3. Verificar experimentalmente el funcionamiento de la metodología de rediseño y discutir los resultados.

## 1.3. Contribuciones

A continuación describimos las principales aportaciones de este trabajo de tesis:

- Se realizó el análisis dinámico del sistema MIMO con dos grados de libertad "2DOF Ball Balancer" para posteriormente poder diseñar controladores por modos deslizantes.
- Se linealizó dicho sistema con el fin de aplicar un controlador LQR base de nuestra metodología de rediseño y que garantizará la estabilidad del sistema nominal.
- Gracias a algoritmos de control de modos deslizantes STA y VGSTA cumplimos con las metas de control: regulación y seguimiento de trayectorias.

## 1.4. Estructura de la tesis

El **capítulo segundo** expone el marco teórico, donde se abordan los conceptos utilizados para el diseño de controladores por modos deslizantes, así como la metodología clásica de rediseño de Lyapunov.

En el **tercer capítulo** realizamos, por el método de Euler-Lagrange, el modelado matemático de nuestro sistema de pelota y placa. Presentamos los ajustes hechos al

modelo con base en las especificaciones del fabricante.

Para el **cuarto capítulo** utilizamos lo expuesto en el marco teórico para diseñar controladores por modos deslizantes, adaptándonos a la metodología de rediseño expuesta.

El **capítulo cinco** se enfoca en verificar, por medio de la simulación, que los diseños de nuestros controladores cumplen con los objetivos de control.

Finalmente, en el **capítulo seis** se discuten los resultados de los experimentos y el trabajo a futuro, dando pie a las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 2

## Marco teórico

### 2.1. Control por modos deslizantes clásico

#### 2.1.1. Diseño convencional de controladores por modos deslizantes (SMC)

En cualquier problema práctico de control van a existir discrepancias entre la planta y el modelo matemático utilizado para el diseño de controladores. Estas discrepancias existen ya sea por perturbaciones externas, porque se desconocen ciertos parámetros de la planta o por dinámicas no modeladas. Para garantizar que la planta actúe como es deseado a pesar de las perturbaciones, se han desarrollado controladores robustos que resuelven el problema. Uno de ellos se llama control por modos deslizantes y será el que desarrollaremos en este documento.

Tomando como ejemplo el sistema dinámico como el mostrado en [11] p.27 que representa la dinámica de una masa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & x_1(0) = x_{10} \\ \dot{x}_2 = u + f(x_1, x_2, t) & x_2(0) = x_{20} \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son la posición y la velocidad de la masa,  $y$  es la salida controlada,  $u$  el control y  $f(x_1, x_2, t)$  una perturbación acotada por  $|f(x_1, x_2, t)| \leq L > 0$ .

Buscamos diseñar un controlador por modos deslizantes que permita a la salida  $y$  seguir asintóticamente una referencia  $y_d$ . El controlador  $u$  debe llevar el error de seguimiento a cero ( $y_d - y = 0$ ) con la presencia de una perturbación acotada  $f(x_1, x_2, t)$ .

Para el sistema 2.1 sabemos que al derivar dos veces la salida obtenemos la entrada de control, es decir, el grado relativo del sistema es 2.

$$y^{(2)} = u + f(y, \dot{y}, t) \quad (2.2)$$

Establecemos el error de seguimiento como  $e = y_d(t) - y(t)$ , donde  $y_d(t)$  representa la trayectoria que deseamos seguir y  $y(t)$  es la salida de la planta. Definimos la superficie  $s$  como en ([11]), es decir,

$$s = \dot{e} + ce, \quad c > 0 \quad (2.3)$$

Diseñando un SMC  $u$  que lleve  $s$  a 0 en tiempo finito  $t_f$  tal que  $0 \leq t_0 < t_f < \infty$  y que lo mantenga sobre dicha superficie a partir de ese instante. Una vez  $s$  alcanza 0, el error de seguimiento  $e$  va a obedecer la ecuación diferencial de primer orden definida en (2.3) que converge a cero asintóticamente.

La dinámica de la superficie de deslizamiento está dada por

$$\dot{s} = \ddot{y}_d + c\dot{y}_d - f(y, \dot{y}, t) - c\dot{y} - u \Rightarrow \dot{s} = \varphi(y, \dot{y}, t) - u \quad (2.4)$$

$$\varphi(y, \dot{y}, t) = \ddot{y}_d + c\dot{y}_d - f(y, \dot{y}, t) - c\dot{y} \quad (2.5)$$

donde  $y_d$ ,  $\dot{y}_d$  y  $\ddot{y}_d$  son conocidas en tiempo real.

Si tenemos una perturbación  $\varphi(y, \dot{y}, t)$  acotada, es decir, existe una  $M > 0$  tal que  $|\varphi(y, \dot{y}, t)| \leq M$  se puede diseñar un control SMC convencional utilizando la condición de existencia de un modo deslizante, reescrito como:

$$s\dot{s} \leq -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|s| \quad (2.6)$$

De la definición de la perturbación y de la dinámica se tiene que (2.4)

$$s\dot{s} = s(\varphi(y, \dot{y}, t) - u) \leq |s|M - su \quad (2.7)$$

Eligiendo  $u = \rho \text{sign}(s)$  y sustituyendo en 2.7 obtenemos:

$$s\dot{s} \leq |s|(M - \rho) \quad (2.8)$$

Si igualamos el lado derecho de 2.6 y 2.7:

$$|s|(M - \rho) = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}|s| \quad (2.9)$$

Despejando  $\rho$  y conociendo  $M$  y proponiendo  $\alpha$  podemos encontrar la ganancia del controlador que nos permite alcanzar nuestra meta de control:

$$\rho = M + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \quad (2.10)$$

## 2.2. Concepto de control equivalente

Consideramos un sistema convencional en el espacio de estados:

$$\dot{x} = f(x, u, \varphi) \quad (2.11)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector que representa los estados y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  es la entrada de control. Se asume que  $f(x, u, \varphi)$  es diferenciable con respecto a  $x$  y absolutamente continua respecto al tiempo.  $\varphi \in \mathbb{R}^q$  representa las perturbaciones externas al sistema que supondremos que están acotadas, es decir, existe una  $M > 0$  tal  $|\varphi| \leq M$ . Considerando la superficie dada por:

$$S = \{x : s(x) = 0\} \quad (2.12)$$

definimos el control equivalente [11, p. 47] como la acción de control necesaria para mantener una trayectoria deslizante ideal en  $S$ . Para ello se usará que en modos deslizantes convencionales  $s = \dot{s} = 0$ . Lo anterior se puede reescribir como:

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x} f(x, u, \varphi) = 0 \quad (2.13)$$

Como ejemplo, considerando un sistema convencional afín:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \varphi \quad (2.14)$$

Sustituyendo en 2.13 el control equivalente  $u_{eq}$  es tal que

$$\frac{\partial s}{\partial x} f(x) + \frac{\partial s}{\partial x} g(x)u_{eq} + \frac{\partial s}{\partial x} \varphi = 0 \quad (2.15)$$

Si  $\frac{\partial s}{\partial x} g(x)$  es invertible, entonces:

$$u_{eq} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} f(x) - \left(\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \varphi \quad (2.16)$$

Sustituyendo 2.16 en 2.14 obtenemos la respuesta en lazo cerrado:

$$\dot{x} = \left( I - g(x) \left( \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right) f(x) + \left( I - \left( \frac{\partial s}{\partial x} g(x) \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x} \right) \varphi \quad (2.17)$$

### Observación 1

- La expresión del control equivalente 2.16 es independiente de la señal de control. Esta puede ser discontinua.
- El control equivalente  $u_{eq}$  depende de la perturbación  $\varphi$  que normalmente es desconocida. De esta manera  $u_{eq}$  no es físicamente implementable.
- Es mejor considerar al control equivalente como un concepto abstracto para facilitar la creación de una expresión de orden reducido en 2.17, estableciendo una ecuación diferencial desde la cual estudiar la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

## 2.3. Diseño convencional de controladores Super-Twisting STA

El uso de controladores por modos deslizantes de conmutación de alta frecuencia que son discontinuos y, por ende, poco prácticos hace que surja el algoritmo de Super-Twisting (STA) un controlador por modos deslizantes continuo que no tiene las desventajas de los controladores discontinuos [11]. El STA reduce el efecto del “Chattering Effect” que puede llevar a desgaste de piezas mecánicas y reducir la precisión del controlador [12].

Partiendo de la necesidad de llevar la variable de deslizamiento  $s$  (2.3) a cero en tiempo finito, proponemos el siguiente control continuo:

$$v = k_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s), \quad k_1 > 0 \quad (2.18)$$

Asumiendo que la perturbación  $\varphi = 0$  en la dinámica de la variable de deslizamiento, la dinámica compensada resulta:

$$\dot{s} = \varphi(y, \dot{y}, t) - u \quad (2.19)$$

$$\dot{s} = -k_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s), \quad s(0) = s_0 \quad (2.20)$$

Integrando la ecuación (2.20) obtenemos:

$$|s(t)|^{1/2} - |s_0|^{1/2} = -\frac{k_1}{2} t \quad (2.21)$$

Si buscamos identificar el instante de tiempo  $t = t_r$  tal que  $s(t_r) = 0$  de la siguiente manera:

$$t_r = \frac{2}{k_1} |s_0|^{1/2} \quad (2.22)$$

El control (2.18) lleva a la variable de deslizamiento a cero en tiempo finito (2.22). En el caso donde la perturbación  $\varphi(y, \dot{y}, t) \neq 0$ , la dinámica compensada de  $s$  es igual a:

$$\dot{s} = \varphi(y, \dot{y}, t) - k_1 |s|^{1/2} \text{sign}(s), \quad s(0) = s_0 \quad (2.23)$$

y la convergencia a cero no ocurre. Si encontramos un término que añadir al control tal que siga a la perturbación  $\varphi$  en tiempo finito, entonces la perturbación se compensará completamente. En cuanto la perturbación es cancelada, la dinámica de la superficie de deslizamiento coincidirá con (2.20) y  $s = 0$  en tiempo finito.

Asumiendo que  $\dot{\varphi} \leq M$  el siguiente control

$$\begin{aligned} u_{sm} &= k_1 \phi_1(s) + k_2 \phi_2 \\ &\text{donde} \\ \phi_1(s) &= |s|^{1/2} \text{sign}(s) \\ \phi_2(s) &= \text{sign}(s) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Seleccionando las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  como en Seeber y Horn [13]:

$$k_1 = 1.5\sqrt{M}; k_2 = 1.1M \quad (2.25)$$

Podemos obtener la dinámica compensada de  $s$ :

$$\begin{aligned} \dot{s} + k_1|s|^{1/2}\text{sign}(s) + \phi_2 &= \varphi \\ \dot{\phi}_2 &= k_2\text{sign}(s) \end{aligned} \quad (2.26)$$

De esta manera, (2.24) hace que  $\phi_2$  sea igual a  $\varphi(y, \dot{y}, t)$  en tiempo finito, de tal manera que (2.26) se vuelve (2.20), así  $s$  va a 0 en tiempo finito.

## 2.4. Diseño Variable Gain Super-Twisting Algorithm VGSTA

El diseño de un controlador VGSTA es similar al del STA pero está hecho de manera que se disminuyan algunos inconvenientes del STA tradicional. Los controladores VGSTA permiten reducir el “Chattering Effect” y compensar perturbaciones cuyas cotas sean dependientes de los estados, como se menciona en González, Moreno y Fridman [14].

El VGSTA propuesto en González, Moreno y Fridman [14] es el siguiente:

$$u_{sm} = -k_1(t, x)\phi_1(s) - \int_0^t k_2(t, x)\phi_2(s)dt \quad (2.27)$$

$$\text{donde} \quad (2.28)$$

$$\phi_1(s) = |s|^{1/2}\text{sign}(s) + k_3s, \quad k_3 \geq 0 \quad (2.29)$$

$$\phi_2(s) = \frac{1}{2}\text{sign}(s) + \frac{3}{2}k_3|s|^{1/2}\text{sign}(s) + k_3^2s \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

Se puede observar que al hacer  $k_3 = 0$  se obtiene el STA estándar. La ganancia  $k_3$  permite lidiar con las perturbaciones que crecen linealmente en  $s$ , es decir, afuera de la superficie de deslizamiento. Por otra parte,  $k_1$  y  $k_2$  permiten que perturbaciones acotadas por funciones conocidas sean rechazadas y no afecten a la superficie. Al igual que el STA tradicional, el control es continuo, a diferencia de SMC.

El VGSTA no es capaz de rechazar todas las perturbaciones de la forma  $|\varphi(x, t)| \leq \rho(x)$  donde  $\rho(x)$  es una función conocida y  $\varphi(x)$  es la perturbación. Esto se debe a que es un controlador continuo; sin embargo, es capaz de rechazar perturbaciones  $\varphi$  compuestas por  $d_1$  y  $\delta$  que satisfacen lo siguiente:

$$\varphi = d_1 + \delta \quad (2.32)$$

Las funciones  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son propuestas como en [14] y deben cumplir con las siguientes desigualdades:

$$|d_1(x, s, t)| \leq \rho_1(t, x) |\phi_1(s)| = \rho_1(t, x) [1 + k_3 |s|^{1/2}] |s|^{1/2} \quad (2.33)$$

$$\left| \frac{d}{dt} \delta(x, s, t) \right| \leq \rho_2(t, x) |\phi_2(s)| = \frac{1}{2} \rho_2(t, x) + k_3 \rho_2(t, x) \left[ \frac{3}{2} + k_3 |s|^{1/2} \right] |s|^{1/2} \quad (2.34)$$

dónde  $\rho_1(t, x) \geq 0$  y  $\rho_2(t, x) \geq 0$  son funciones continuas conocidas.

Las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  son variables y están definidas en ([14, p. 2102]):

$$k_1(t, x) = \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\rho_1 + \rho_2]^2 + 2\epsilon\rho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \rho_1](\beta + 4\epsilon^2) \right\} \quad (2.35)$$

$$k_2(t, x) = \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x), \quad (2.36)$$

dónde  $\beta > 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  son constantes arbitrarias positivas y que sirven como parámetros de diseño para nuestro controlador.  $\rho_1$  y  $\rho_2$  deben cumplir con ?? y con ?? respectivamente.

### 2.4.1. Rediseño de Lyapunov

En esta sección, siguiendo [15], consideramos un sistema de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)[u + \varphi(t, x, u)] \quad (2.37)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son los estados y  $u \in \mathbb{R}^p$  el control. Las funciones  $f$ ,  $G$  y  $\varphi$  están definidas para  $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times \mathbb{R}^p$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  contiene el origen. Las funciones  $f$  y  $G$  son conocidas, mientras que  $\varphi$  es una función desconocida que involucra varios valores inciertos debido a simplificaciones en el modelo, incertidumbres paramétricas, entre otros. La función  $\varphi$  está acoplada al control.

Tomando un sistema nominal sin perturbaciones:

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)u \quad (2.38)$$

Se diseña un controlador estabilizante ( $u = \psi(t, x)$ ) utilizando el modelo nominal de tal manera que el origen del sistema nominal a lazo cerrado es uniformemente estable. Así,

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)\psi(t, x) \quad (2.39)$$

Buscamos ahora construir un control robustificante. Para ello, suponemos que conocemos una función de Lyapunov  $V$  para (2.39) que satisface las siguientes desigualdades:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} [f(x) + G(x)\psi(x)] \leq -W(x), \forall x \in D, \quad (2.40)$$

dónde  $W$  es una función positiva definida. Consideramos perturbaciones que satisfagan:

$$\|\varphi(t, x, \psi(t, x) + v)\| \leq \rho(t, x) + k_0 \|v\|, \quad 0 \leq k_0 \leq 1 \quad (2.41)$$

donde la función  $\rho$  es conocida y  $k_0$  es una constante positiva. Si conocemos  $V$ ,  $\rho$  y  $k_0$ , podemos diseñar un controlador  $v$  adicional tal que el controlador total  $u = \psi(t, x) + v$  estabilice el sistema 2.37 en presencia de perturbaciones [15].

El sistema en lazo cerrado aplicando el control robustificante es de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t) + G(x, t)[v + \varphi(t, x, u)] \quad (2.42)$$

Considerando la función de Lyapunov para el sistema nominal como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[f + G\psi] + \frac{\partial V}{\partial x}G[v + \varphi], \quad (2.43)$$

aplicando un cambio de variable:

$$s^T = \frac{\partial V}{\partial x}G, \quad (2.44)$$

obtenemos

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[f + G\psi] + s^T v + s^T \varphi \quad (2.45)$$

Recordando que  $\frac{\partial V}{\partial x}[f + G\psi] \leq -W(x)$  donde  $W(x)$  es una función positiva definida y observando la ecuación 2.45 podemos escoger una  $v$  para cancelar el efecto desestabilizante de  $\varphi$  en  $\dot{V}$ . Una manera de garantizar esto es haciendo que  $s^T v + s^T \varphi \leq 0$ . De acuerdo con la hipótesis de la perturbación en 2.41 tenemos

$$s^T v + s^T \varphi \leq s^T v + \|s\|_2 \|\varphi\|_2 \leq s^T v + \|s\|_2 [\rho(x) + k_0 \|v\|_2]; \quad 0 < k_0 < 1 \quad (2.46)$$

Podemos proponer un control discontinuo de la forma:

$$v = -\eta(x) \frac{s}{\|s\|_2} \quad (2.47)$$

Con lo que:

$$s^T v + s^T \varphi \leq -\eta(x) \|s\|_2 + \|s\|_2 \rho(x) + k_0 \eta(x) \|s\|_2 = -\eta(1 - k_0) \|s\|_2 + \|s\|_2 \rho \quad (2.48)$$

Recordando que para garantizar que cancelamos el efecto desestabilizante de  $\varphi$  buscamos que  $s^T v + s^T \varphi \leq 0$  encontramos la siguiente desigualdad partiendo de 2.48

$$-\eta(1 - k_0) \|s\|_2 + \|s\|_2 \rho \leq 0 \quad (2.49)$$

Despejando  $\eta$  encontramos que:

$$\eta(x) \geq \frac{\rho(x)}{1 - k_0} \quad (2.50)$$

Por lo tanto, podemos garantizar que  $\dot{V}$ , para el sistema perturbado, es negativa definida, es decir:

$$\dot{V} \leq -W(x) \quad (2.51)$$

Por el método directo de Lyapunov podemos garantizar que el sistema en lazo cerrado perturbado es asintóticamente estable y rechaza los efectos de la perturbación. Si bien el controlador aplicado  $u = \psi + v$  es discontinuo, se pueden utilizar otros controladores por modos deslizantes como el STA o el VGSTA que también sean robustos y garanticen la estabilidad, pero que no sean discontinuos. Nuestro diseño de controladores se basa en el rediseño de Lyapunov, pero utiliza estos últimos controladores.

# Capítulo 3

## Modelo del sistema

En este capítulo describiremos y obtendremos el modelo matemático de un sistema bola y placa (“Ball and Plate”) con las especificaciones del equipo “2DOF Ball Balancer” de la compañía Quanser.

El equipo “2DOF Ball Balancer” está compuesto por un sistema de bola y placa, dos servomotores y una cámara. En las figuras 3.2 y 3.3 se pueden observar dos esquemáticos del sistema bola y placa y en la figura 3.1 una imagen de la planta de Quanser.



Figura 3.1: Imagen de la planta “2DOF Ball Balancer”

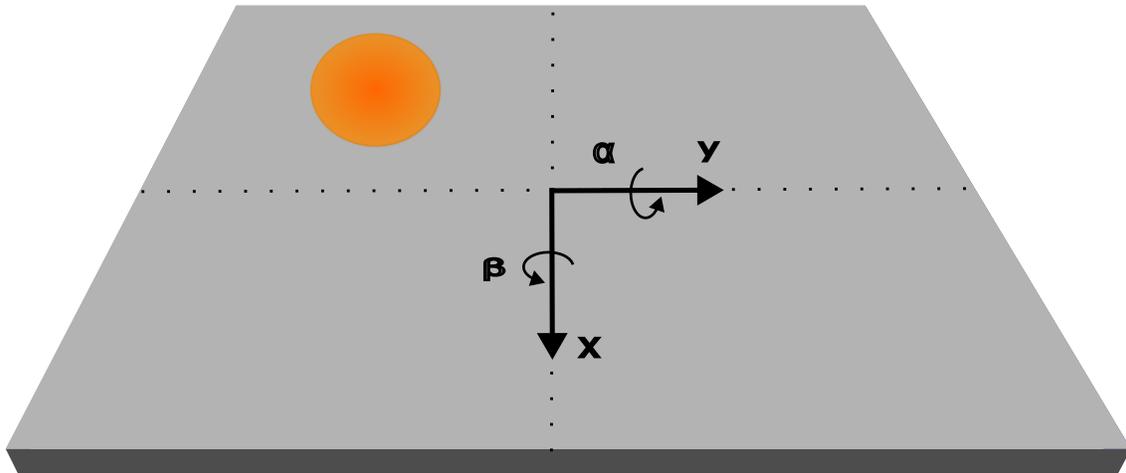


Figura 3.2: Sistema a modelar vista aérea

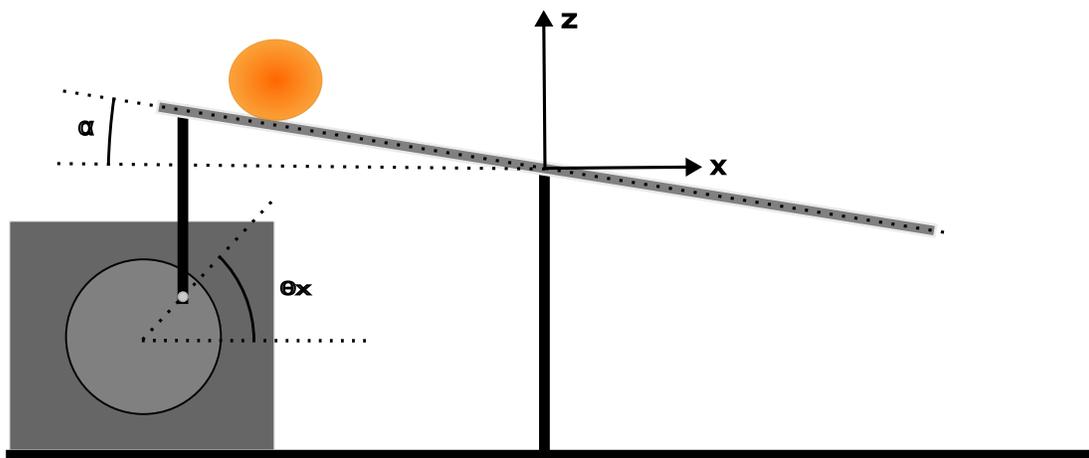


Figura 3.3: Sistema a modelar vista lateral

Utilizaremos la metodología de rediseño por modos deslizantes basada en el rediseño de Lyapunov diseñado en [6] sobre el sistema MIMO “2DOF Ball Balancer” con el fin de hacer la regulación en un punto de equilibrio y hacer seguimiento de trayectorias.

La metodología mencionada utiliza un controlador LQR diseñado a partir de un sistema linealizado. Debemos entonces modelar el sistema y linealizarlo para poder implementar nuestro rediseño.

El equipo de Quanser mide cuatro variables: las posiciones de la pelota sobre el

plato gracias a la cámara y las posiciones angulares de los servomotores.

Al poder medir únicamente las posiciones, requeriremos de un observador o de un derivador para obtener las velocidades angulares y lineales. En nuestro caso, utilizaremos un derivador de Levant [Apéndice B].

### 3.1. Modelado matemático

Buscamos encontrar un modelo del sistema que nos permita realizar el diseño de controladores. Para ello, nos basaremos en el modelado de Euler-Lagrange y encontraremos las ecuaciones de movimiento del sistema.

Para de obtener las ecuaciones del sistema, tomamos en cuenta las siguientes consideraciones:

- La fricción es despreciable.
- El plato y la pelota están siempre en contacto.
- La bola rueda sobre el plato, no se desliza.
- La pelota es simétrica y homogénea.

Tabla 3.1: Variables del sistema

| Símbolo          | Descripción                       | Unidad  |
|------------------|-----------------------------------|---------|
| $x_b$            | Posición de la pelota en $x$      | [m]     |
| $\dot{x}_b$      | Velocidad de la pelota en $x$     | [m/s]   |
| $\alpha$         | Ángulo del plato sobre el eje $y$ | [rad]   |
| $\dot{\alpha}$   | Velocidad angular del plato       | [rad/s] |
| $y_b$            | Posición de la pelota en $y$      | [m]     |
| $\dot{y}_b$      | Velocidad de la pelota en $y$     | [m/s]   |
| $\beta$          | Ángulo del plato sobre el eje $x$ | [rad]   |
| $\dot{\beta}$    | Velocidad angular del plato       | [rad/s] |
| $\theta_x$       | Ángulo del servomotor             | [rad]   |
| $\dot{\theta}_x$ | Velocidad angular del servomotor  | [rad/s] |
| $\theta_y$       | Ángulo del servomotor             | [rad]   |
| $\dot{\theta}_y$ | Velocidad angular del servomotor  | [rad/s] |

Todos los parámetros de diseño utilizados a continuación fueron obtenidos del manual del equipo de Quanser y presentados en la siguiente tabla:

Para obtener la ecuación de Euler-Lagrange partimos de obtener la energía cinética de la pelota, que está compuesta de la energía de rotación respecto a su centro de masa y a su energía lineal:

Tabla 3.2: Especificaciones

| Símbolo   | Descripción                                      | Valor                 | Unidad           |
|-----------|--|-----------------------|------------------|
| $L_{tbl}$ | Longitud de la superficie                        | 27.5                  | [cm]             |
| $r_{arm}$ | Longitud del centro del SRV02 a la articulación  | 2.54                  | [cm]             |
| $r_b$     | Radio de la pelota                               | 1.96                  | [cm]             |
| $m_b$     | Masa de la pelota                                | 0.003                 | [kg]             |
|           | Altitud de la cámara                             | 69.5                  | [cm]             |
| $k_m$     | Constante emf del motor                          | $7.68 \times 10^{-3}$ | $N.m/A$          |
| $R_m$     | Resistencia del motor                            | 2.6                   | Ohms[ $\Omega$ ] |
| $K_g$     | Proporción del engranaje                         | 70                    |                  |
| $\eta_m$  | Eficiencia del motor                             | 0.69                  |                  |
| $\eta_g$  | Eficiencia del Gearbox                           | 0.9                   |                  |
| $J_{eq}$  | Momento de inercia equivalente sin carga externa | $9.76 \times 10^{-5}$ | $kg.m^2$         |
| $B_{eq}$  | Coficiente de amortiguamiento viscoso            | 0.015                 | $N.m/(rad/s)$    |

$$T_b = \frac{1}{2}m_b(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2}I_b(\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (3.1)$$

donde  $m_b$  es la masa de la pelota e  $I_b$  su momento de inercia. Además,  $\dot{x}_b$  y  $\dot{y}_b$  son las velocidades de traslación de la pelota sobre los ejes  $x$  y  $y$ ,  $w_x$  y  $w_y$  son las velocidades rotacionales.

Tomando en cuenta que no existe deslizamiento de la pelota, tenemos la siguiente relación entre velocidades de traslación y de rotación.

$$\dot{x}_b = r_b\omega_y, \quad \dot{y}_b = r_b\omega_x \quad (3.2)$$

Por otra parte, la energía cinética del plato consiste en la energía rotacional respecto a su centro de masa:

$$T_p = \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}m_b(x_b\dot{\alpha} + y_b\dot{\beta})^2 \quad (3.3)$$

La suma de las dos energías cinéticas anteriores da por resultado la energía cinética del sistema:

$$T = T_b + T_p \quad (3.4)$$

$$T = \frac{1}{2}(m_b + \frac{I_b}{r_b^2})(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2}(I_p + I_b)(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}m_b(x_b\dot{\alpha} + y_b\dot{\beta})^2 \quad (3.5)$$

La energía potencial relativa al plano horizontal en el centro del plato inclinado se puede calcular como:

$$V_b = m_bgh = m_bg(x_b \sin(\alpha) + y_b \sin(\beta)) \quad (3.6)$$

Utilizando el Lagrangiano:

$$L = T_b + T_p - V_b \quad (3.7)$$

Podemos derivar las ecuaciones del sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial x_b} = m_b \dot{\alpha} (x \dot{\alpha} + y \dot{\beta}) - m_b g \sin \alpha \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} = (m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \dot{x}_b \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_b} = m_b \dot{\beta} (\dot{\alpha} + y \dot{\beta}) - m_b g \sin \beta \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_b} = (m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \dot{y}_b \quad (3.11)$$

Por la metodología de Euler-Lagrange, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} - \frac{\partial L}{\partial x_b} = (m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \ddot{x}_b - m_b (x_b \dot{\alpha}^2 + y_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + m_b g \sin(\alpha) = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_b} - \frac{\partial L}{\partial y_b} = (m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \ddot{y}_b - m_b (y_b \dot{\beta}^2 + x_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + m_b g \sin(\beta) = 0 \quad (3.13)$$

De las dos ecuaciones anteriores complementadas con dos ecuaciones proporcionadas por el fabricante obtenemos un primer modelo no lineal. El modelo de los servomotores está realizado con el ángulo y la velocidad angular del servomotor como variables de estado por el fabricante 3.16 y 3.17.

$$(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \ddot{x}_b - m_b (x_b \dot{\alpha}^2 + y_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + m_b g \sin(\alpha) = 0 \quad (3.14)$$

$$(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \ddot{y}_b - m_b (y_b \dot{\beta}^2 + x_b \dot{\alpha} \dot{\beta}) + m_b g \sin(\beta) = 0 \quad (3.15)$$

$$\ddot{\theta}_x = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{R_m} \frac{V_{m1}}{J_{eq}} - \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_x \quad (3.16)$$

$$\ddot{\theta}_y = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{J_{eq}} \frac{V_{m2}}{J_{eq}} - \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_y \quad (3.17)$$

El modelo en este momento está dado en dos partes que aparentemente no tienen relación: las ecuaciones 3.14 y 3.15 y las ecuaciones 3.16 y 3.17. Esto se debe a que el modelo fue realizado con los ángulos del plato.

Quanser proporciona una relación entre los ángulos del plato y de los servomotores

[16], lo que permite aplicar el siguiente cambio de manera que obtenemos el modelo en términos del ángulo del servomotor.

$$\sin(\alpha) = \frac{2r_{arm} \sin(\theta_x)}{L_{plate}} \quad (3.18)$$

$$\sin(\beta) = \frac{2r_{arm} \sin(\theta_y)}{L_{plate}} \quad (3.19)$$

$\theta_x$  y  $\theta_y$  son ángulos que están acotados entre  $\pm 45$ , por lo que utilizando la aproximación de ángulo pequeño  $\sin(\theta) \approx \theta$ . Considerando esto, las relaciones 3.18 y 3.19 se traducen a:

$$\alpha = \frac{2r_{arm}}{L_{plate}} \theta_x \quad (3.20)$$

$$\beta = \frac{2r_{arm}}{L_{plate}} \theta_y \quad (3.21)$$

Se realizó el cambio de variable hacia los ángulos del servomotor, ya que son los que se ven directamente afectados por nuestra entrada de control  $V_{m_1}$  y  $V_{m_2}$ . Obtenemos el modelo con respecto a  $\theta_x$  y  $\theta_y$ :

$$(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \ddot{x}_b - m_b(x_b(c\dot{\theta}_x)^2 + y_b(c\dot{\theta}_x)(c\dot{\theta}_y)) + m_b g \sin(c\theta_x) = 0 \quad (3.22)$$

$$(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}) \ddot{y}_b - m_b(y_b(c\dot{\theta}_y)^2 + x_b(c\dot{\theta}_x)(c\dot{\theta}_y)) + m_b g \sin(c\theta_y) = 0 \quad (3.23)$$

$$\ddot{\theta}_x = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{R_m} \frac{V_{m_1}}{J_{eq}} - \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_x \quad (3.24)$$

$$\ddot{\theta}_y = \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{R_m} \frac{V_{m_2}}{J_{eq}} - \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_y \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

Donde:

$$c = \frac{2r_{arm}}{L_{plate}} \quad (3.27)$$

Finalmente, podemos obtener nuestro modelo en su espacio de estados definiendo los siguientes estados:

Tabla 3.3: Estados del sistema

| Estados del sistema eje x | Estados del sistema eje y |
|---------------------------|---------------------------|
| $x_1 = x_b$               | $x_5 = y_b$               |
| $x_2 = \dot{x}_b$         | $x_6 = \dot{y}_b$         |
| $x_3 = \theta_x$          | $x_7 = \theta_y$          |
| $x_4 = \dot{\theta}_x$    | $x_8 = \dot{\theta}_y$    |

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.28)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{m_b}{m_b + \frac{I_b}{r_b}} [x_1(cx_4)^2 + x_5cx_4cx_8 - g\sin(cx_3)] \\ x_4 \\ -\frac{B_{eqv}}{J_{eq}}x_4 \\ x_6 \\ \frac{m_b}{m_b + \frac{I_b}{r_b}} [x_5(cx_8)^2 + x_1cx_4cx_8 - gc\sin(cx_7)] \\ x_8 \\ -\frac{B_{eqv}}{J_{eq}}x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{R_m} \frac{1}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta_g k_g \eta_m k_t}{R_m} \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

El rediseño que haremos está pensado para sistemas lineales, por lo que en la siguiente sección realizaremos la linealización que, a su vez, nos permitirá realizar el diseño de los controladores por modos deslizantes.



# Capítulo 4

## Diseño de controladores

### 4.1. Modelo linealizado

El primer paso que debemos realizar para diseñar un controlador LQR que nos servirá de base para el resto de controladores es hacer una linealización del sistema alrededor de un punto de equilibrio. Se consideró la posición de la bola en el centro del plato.

La linealización por método del Jacobiano puede encontrarse en el Apéndice A. El modelo linealizado resulta en:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (4.1)$$

$$y = Cx, \quad (4.2)$$

Dónde A, B y C son las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -860.96 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.7981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -860.96 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1315.6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1315.6 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

### 4.1.1. Modelo linealizado desacoplado

De 4.3, 4.4, 4.5 podemos observar que podemos desacoplar el sistema, la dinámica de  $x_1, x_2, x_3, x_4$  por un lado y la dinámica de  $x_5, x_6, x_7, x_8$  por otro. Esto resulta en dos sistemas lineales:

$$\dot{x}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -860.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1315.6 \end{bmatrix} u \quad (4.6)$$

y

$$\dot{x}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -860.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1315.6 \end{bmatrix} u \quad (4.7)$$

Las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  son idénticas para ambos sistemas, por lo que el diseño de un controlador para 4.6 puede ser utilizado para 4.7.

### 4.1.2. Estabilidad

Recordando que nuestra metodología de rediseño utiliza un controlador estabilizante, es de suma importancia verificar la estabilidad del punto de equilibrio sobre el que linealizamos. El Método Indirecto de Lyapunov afirma que el punto de equilibrio es asintóticamente estable si todos los eigenvalores de  $A$  tienen parte real negativa. Obtenemos los eigenvalores de nuestra matriz  $A$ :

$$\lambda(A) = [0 \ 0 \ 0 \ -860.96 \ 0 \ 0 \ 0 \ -860.96]^T$$

Nuestra matriz  $A$  cuenta con eigenvalores en cero y el Método Indirecto de Lyapunov no es concluyente. Debemos recurrir al siguiente teorema:

El punto de equilibrio  $x = 0$  de  $\dot{x} = Ax$  es estable si y solo si todos los eigenvalores de  $A$  satisfacen  $Re\lambda_i \leq 0$  y por cada eigenvalor con  $Re\lambda_i = 0$  y multiplicidad algebraica  $q_i \geq 2$ ,  $rank(A - \lambda_i I) = n - q_i$ , donde  $n$  es la dimensión de  $x$ . El punto de equilibrio  $x = 0$  es global y asintóticamente estable si y solo si todos los eigenvalores de  $A$  satisfacen  $Re\lambda_i < 0$  (Khalil [15])

Valorando la multiplicidad algebraica de los eigenvalores con parte real igual a cero, obtenemos que  $q_i = 6$ . Obtenemos también que  $\text{rank}(A - \lambda_I) = \text{rank}(A) = 6 \neq n - q_i = 8 - 6 = 2$ . Por lo tanto, el punto de equilibrio es inestable.

Al tener un punto de equilibrio inestable, buscaremos un controlador LQR que nos permita estabilizar el sistema para luego robustecerlo ante perturbaciones y poder cumplir nuestra meta de regulación y de seguimiento.

Otro requerimiento para garantizar que nuestras metas de control se cumplan son los conceptos de controlabilidad y de observabilidad.

### 4.1.3. Controlabilidad y observabilidad

Se dice que una ecuación de estados (4.2), o un par de matrices  $(A, B)$ , es controlable si, para cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una entrada que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo finito [17]. Es decir, que saber si el sistema es controlable nos permite saber si podemos llevar al sistema a cualquier estado final en tiempo finito, sin importar qué trayectoria se siga, o qué entrada se use.

Una metodología para saber si un sistema es controlable es obtener su matriz de controlabilidad [17]:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (4.8)$$

Si el rango(fila) de la matriz de controlabilidad es igual a  $n$ , el sistema es controlable .

Con ayuda de MATLAB obtenemos de manera sencilla el rango de la matriz de controlabilidad. Obtenemos que  $\text{rank}(\mathcal{C}) = 8$ . Al ser el rango igual a  $n$ , podemos decir que el par de matrices  $(A, B)$  es controlable y, por lo tanto, podemos llevar al sistema a cualquier estado final en tiempo finito, lo que garantiza que podamos hacer regulación y seguimiento de trayectorias.

Como mencionamos en la sección de modelado, las salidas de nuestro sistema son las posiciones. Sin embargo, estas no son los únicos estados del sistema; debemos encontrar las velocidades para poder hacer realimentación de estados.

El concepto de observabilidad analiza la posibilidad de estimar el estado del sistema a partir de su salida. La ecuación de estado (4.2) es observable si para cualquier estado inicial  $x(0)$  (desconocido), existe un tiempo finito  $t_1$  tal que el conocimiento de la entrada  $u$  y la salida  $y$  sobre el intervalo  $[0, t_1]$  es suficiente para determinar el estado inicial  $x(0)$  [17]. Es decir, necesitamos un sistema observable para poder garantizar que podemos obtener todos los estados.

De una manera similar a la comprobación de Controlabilidad, obtenemos la matriz de observabilidad y si el rango (columna) de la matriz de observabilidad es igual a  $n$  el sistema es observable.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

En el caso de nuestro sistema, con la ayuda de MATLAB, obtenemos que  $\text{rank}(\mathcal{O}) = 8$ , es decir, es observable. Esto nos garantiza poder obtener las velocidades angulares y lineales con un derivador de Levant.

Una vez que sabemos que el punto de equilibrio sobre el que linealizamos es inestable, necesitamos un controlador que garantice su estabilidad y que nuestras metas de control se puedan cumplir. Garantizamos que nuestro sistema es observable y podemos obtener sus velocidades, lo que nos permitirá realizar realimentación de estados. Ya que el par  $(A, B)$  es controlable, podemos utilizar la metodología de rediseño propuesta para diseñar nuestros controladores estabilizantes y robustos para alcanzar nuestras metas de control.

#### 4.1.4. Rediseño de Lyapunov basado en control por modos deslizantes

En esta sección utilizaremos una metodología basada en el rediseño de Lyapunov desarrollada en Estrada, Fridman y Moreno [6] con el objetivo de poder realizar regulación y seguimiento de trayectorias con el sistema Ball Balancer. Partiendo de un sistema con la misma estructura que el sistema de Ball and Plate linealizado:

$$\dot{x} = Ax + B(u + \varphi) \quad (4.10)$$

donde  $\varphi$  es una perturbación cuya cota conocemos, nuestro primer paso es diseñar un controlador que estabilice el sistema nominal. Esto garantizará la estabilidad del punto de equilibrio de nuestro sistema “Ball Balancer” linealizado. Consideramos entonces el sistema nominal para la dinámica de  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ :

$$\dot{x}_x = Ax + Bu \quad (4.11)$$

Para el sistema nominal  $u = \psi$ , donde  $\psi$  es un controlador estabilizante. En nuestro caso, el controlador diseñado es un controlador LQR, que tiene una ganancia de la siguiente forma:

$$\psi = -R^{-1}B^T Px \quad (4.12)$$

Una vez diseñado el controlador LQR, tendremos el control estabilizante necesario y el sistema nominal tendrá la siguiente dinámica estable de lazo cerrado:

$$\dot{x}_x = Ax + B\psi \quad (4.13)$$

Para robustificar, utilizamos el control diseñado para el sistema nominal y añadimos un controlador robustificante  $v$  por modos deslizantes.

$$u = \psi + v \quad (4.14)$$

Sabemos que al haber diseñado un controlador estabilizante:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[Ax + B\psi] \leq -W(x) \quad (4.15)$$

donde  $W$  es positiva definida.

La perturbación debe cumplir con la siguiente hipótesis:

$$\|\varphi(t, x, \psi + v)\| \leq \rho(t, x) + k_0\|v\|, \quad 0 \leq k_0 \leq 1 \quad (4.16)$$

El sistema con el controlador robustificante tiene la siguiente forma:

$$\dot{x}_x = Ax + B\psi + B[\varphi + v] \quad (4.17)$$

Utilizando la función de Lyapunov del sistema nominal como candidata a función de Lyapunov del sistema perturbado:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[Ax + B\psi] + \frac{\partial V}{\partial x}B[v + \varphi] \quad (4.18)$$

$$s^T = \frac{\partial V}{\partial x}B \quad (4.19)$$

Obtenemos

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}[Ax + B\psi] + s^T v + s^T \varphi \quad (4.20)$$

En el rediseño de Lyapunov tradicional buscamos un controlador que haga que  $s^T v + s^T \varphi \leq 0$  de tal forma que también  $\dot{V} \leq -W$ .

En nuestro caso, se puede observar en 4.20 que, cuando  $s = 0$ , también la función  $\dot{V} \leq 0$ . Entonces, si definimos nuestra superficie de deslizamiento como  $s = B^T(\frac{\partial V}{\partial x})^T$  y hacemos, con un controlador por modos deslizantes, que esta se vaya a cero, obtendremos un controlador estable y robusto.

Cómo objetivos de control establecimos la estabilización en un punto de equilibrio y el seguimiento de una trayectoria senoidal.

## 4.2. Regulación

### 4.2.1. Diseño LQR del modelo nominal

En esta sección veremos el diseño de un controlador LQR para el sistema nominal. utilizaremos el modelo linealizado 4.6 para el diseño de controladores, sin embargo, el control diseñado es aplicable al sistema 4.7.

$$\dot{x}_x = Ax + Bu \quad (4.21)$$

El primer paso en la propuesta de rediseño es diseñar un controlador que estabilice el sistema nominal. El controlador elegido para este propósito es el controlador LQR. El diseño de controladores LQR se basa en determinar el control  $u(t)$  óptimo que minimice el índice de desempeño definido por:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (4.22)$$

donde  $Q$  y  $R$  son matrices reales definidas positivas.

De acuerdo con Ogata [18] una forma de minimizar el índice de rendimiento es resolviendo la siguiente ecuación algebraica de Riccati:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.23)$$

Para ello proponemos dos matrices positivas definidas:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000022 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000022 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.011 \end{bmatrix}, \quad R = 0.0011 \quad (4.24)$$

Con las cuales, al resolver con MATLAB la ecuación algebraica de Riccati, obtenemos la siguiente ganancia de control.

$$K_1 = R^{-1}(B^T P) = [-300 \quad -109.016 \quad 35.6 \quad 2.58] \quad (4.25)$$

### 4.2.2. Rediseño

#### Diseño del control nominal

Partiendo del trabajo realizado por Estrada, Fridman y Moreno [6], realizando el diseño del control nominal con la perturbación igual a cero, consideramos la ganancia de control obtenida por la solución de la ecuación de Riccati 4.25 y seleccionamos una función candidata de Lyapunov de control como  $V = x^T P x$ ; la derivada temporal satisface  $\dot{V} = -x^T Q x$  [6].

### Control por modos deslizantes basado en rediseño de Lyapunov

Tomando la  $V = x^T P x$  para el sistema perturbado, la superficie de deslizamiento tiene la forma:

$$s = B^T \left( \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) = 2B^T P x \quad (4.26)$$

Y la dinámica de la misma es:

$$\dot{s} = 2B^T P [Ax + B(u + \varphi_B)] \quad (4.27)$$

Sustituyendo un nuevo controlador  $u = -R^{-1}B^T P x + v$  y obteniendo la dinámica de  $s$  en lazo cerrado:

$$\dot{s} = 2B^T P (A - BR^{-1}B^T P)x + 2B^T P B(v + \varphi_B(t, x)) \quad (4.28)$$

Podemos obtener el controlador robustificante despejando  $v$  de 4.28:

$$v = -2(B^T P B)^{-1} (2B^T P (A - BR^{-1}B^T P)x - u_{smc}) \quad (4.29)$$

sustituyendo 4.29 en 4.28:

$$\dot{s} = 2B^T P B \varphi - u_{smc} \quad (4.30)$$

donde  $u_{smc}$  corresponde a un controlador por modos deslizantes a implementar. Es importante observar que la perturbación  $\varphi$  está escalada por una constante por lo que los controladores por modos deslizantes podrán compensarla.

Los dos controladores por modos deslizantes elegidos como controladores robustificantes son el controlador Super-Twisting Algorithm y el controlador Variable Gain Super-Twisting Algorithm cuyos diseños se realizarán en las siguientes secciones.

### 4.2.3. Control Super-Twisting Algorithm

La primera generación de controladores por modos deslizantes contaba con un inconveniente, la existencia de “Chattering”. Para algunos sistemas es de suma importancia reducir el efecto “Chattering”, por ejemplo, en la industria aeroespacial donde las superficies aerodinámicas de una aeronave no pueden oscilar a frecuencias muy altas pero sigue siendo deseable mantener el aspecto robusto del control por modos deslizantes Shtessel, Edwards, Fridman et al. [11].

En la última década se desarrollaron varias estrategias de mitigación del “Chattering”, surgieron los controladores del tipo “second-order sliding mode”. El único control del tipo “second-order sliding mode” que no requiere del conocimiento de la perturbación es el controlador Super-Twisting de Pérez-Ventura, Escobar, Fridman et al. [19], un controlador por modos deslizantes absolutamente continuo.

El control Super-Twisting Algorithm no requiere el conocimiento de la perturbación, pero sí necesita que la perturbación esté acotada  $|\dot{\varphi}| \leq M$ . Las limitaciones físicas del sistema sirven para garantizar que la perturbación esté acotada.

En el caso abordado en este trabajo, los servomotores tienen una velocidad máxima de operación de  $628.3[rad/s]$ , el voltaje máximo aplicable al motor que forma los servomotores es de  $\pm 15[V]$ , la superficie del plato tiene una longitud de  $27.5[cm]$ . Todos estos límites permiten saber que la perturbación está acotada, sin necesariamente saber el valor de la cota.

El controlador Super-Twisting Algorithm está descrito de la siguiente manera

$$u_{smc} = -k_1\phi_1(s) + w \quad (4.31)$$

$$\dot{w} = -k_2\phi_2(s) \quad (4.32)$$

donde  $\phi_1(s) = |s|^{1/2}\text{sgn}(s)$  y  $\phi_2(s) = \text{sgn}(s)$ .

Escogemos  $k_1$  y  $k_2$  como en [13],

$$k_1 = 1.5\sqrt{M} \quad (4.33)$$

$$k_2 = 1.1M \quad (4.34)$$

$$(4.35)$$

para el diseño de los controladores la cota  $M$  utilizada para el diseño del controlador fue obtenida experimentalmente y tiene un valor de  $M = 100[V/s]$ . Al aplicar toda la metodología de rediseño y sustituyendo  $u_{smc}$  en 4.29 obtenemos el controlador aplicado directamente al sistema:

$$u = -R^{-1}(B^T P) - 2(B^T P B)^{-1}[2B^T P(A - BR^{-1}B^T P)x - (-k_1\phi_1 + w)] \quad (4.36)$$

#### 4.2.4. Control Super-Twisting de Ganancia Variable (VGSTA)

El segundo controlador por modos deslizantes que utilizaremos en nuestro rediseño es el Variable Gain Super-Twisting Algorithm mostrado en [14] que, como se mostró en la sección 2.4, se propone como:

$$u_{smc} = -k_1(t, x)\phi_1(s) - \int_0^t k_2(t, x)\phi_2(s)dt \quad (4.37)$$

$$\text{donde} \quad (4.38)$$

$$\phi_1(s) = |s|^{1/2}\text{sgn}(s) + k_3s, \quad k_3 \geq 0 \quad (4.39)$$

$$\phi_2(s) = \frac{1}{2}\text{sgn}(s) + \frac{3}{2}k_3|s|^{1/2}\text{sgn}(s) + k_3^2s \quad (4.40)$$

$$k_1(t, x) = \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\rho_1 + \rho_2]^2 + 2\epsilon\rho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \rho_1](\beta + 4\epsilon^2) \right\} \quad (4.41)$$

$$k_2(t, x) = \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x) \quad (4.42)$$

$$(4.43)$$

Para diseñar las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ , propondremos las constantes  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $\epsilon$  y  $k_3$ . La perturbación  $\varphi$  se debe poder descomponer como en [14] de la siguiente manera:

$$\varphi = d_1 + \delta \quad (4.44)$$

Las funciones  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son propuestas como en [14] y deben cumplir con las siguientes desigualdades:

$$|d_1(x, s, t)| \leq \rho_1(t, x)|\phi_1(s)| = \rho_1(t, x)[1 + k_3|s|^{1/2}]|s|^{1/2} \quad (4.45)$$

$$\left| \frac{d}{dt} \delta(x, s, t) \right| \leq \rho_2(t, x)|\phi_2(s)| = \frac{1}{2}\rho_2(t, x) + k_3\rho_2(t, x) \left[ \frac{3}{2} + k_3|s|^{1/2} \right] |s|^{1/2} \quad (4.46)$$

Donde  $\rho_1(t, x) \geq 0$  y  $\rho_2(t, x) \geq 0$  son funciones continuas.

En González, Moreno y Fridman [14] consideran el efecto de una parte del sistema como perturbación para el otro; de una manera análoga, consideraremos el efecto del eje  $y$  sobre el eje  $x$  como perturbación y viceversa.

Recordando que el sistema linealizado puede desacoplarse en dos 4.6 y 4.7. Partiendo de uno de los modelos lineales desacoplados 4.6 con una perturbación  $\varphi_x$  que cumple con 4.44:

$$\dot{x}_x = Ax + B(u + \varphi_x) \quad (4.47)$$

Y con una superficie de deslizamiento con la siguiente forma:

$$s = B^T \left( \frac{\partial V^T}{\partial x} \right) = 2B^T P x \quad (4.48)$$

Cuya dinámica de deslizamiento es la siguiente:

$$\dot{s} = 2B^T P B \varphi_x - u_{smc} \quad (4.49)$$

Basándonos en [20] y utilizando una perturbación como 4.44.

$$\varphi_x = d_{1x} + \delta_x \quad (4.50)$$

donde  $d_{1x} = 0$  y, entonces,  $\varphi_x = \delta_x$ .

Como sabemos que la posición está acotada por las dimensiones del plato, proponemos  $\delta_x = C_x x_1$  cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\frac{d}{dt} \delta_x = C_x x_2 \leq C_x \|x_2\| \leq \rho_2(t, x) |\phi_2(s)| \quad (4.51)$$

De esta manera, encontramos  $\rho_{1x}$  y  $\rho_{2x}$ :

$$\rho_{1x} = c_1 \quad (4.52)$$

$$\rho_{2x} = C_x \|x_2\| + c_2 \quad (4.53)$$

donde  $C_x > 0$ ,  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$ .

De manera análoga, para el control del segundo modelo lineal 4.7 del sistema “Ball and Plate”:

$$\dot{x}_y = Ax + B(u + \varphi_y) \quad (4.54)$$

proponemos una  $\varphi_y$  tal que

$$\varphi_y = d_{1y} + \delta_y \quad (4.55)$$

Donde  $d_1 = d_{1x} = d_{1y}$  y  $\delta_y = C_y x_5$  de tal manera que obtenemos  $\rho_{1y}$  y  $\rho_{2y}$  como:

$$\rho_{1y} = c_3 \quad (4.56)$$

$$\rho_{2y} = C_y \|x_6\| + c_4 \quad (4.57)$$

donde  $C_x = C_y > 0$ ,  $c_1 = c_3 > 0$  y  $c_2 = c_4 > 0$ .

Los valores propuestos de los parámetros de diseño, seleccionados de manera empírica, son los siguientes:

$$k_3 = 1, \beta = 1, \epsilon = 10, \delta = 10 \quad (4.58)$$

$$C_x = C_y = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1. \quad (4.59)$$

Con estos valores y con  $\rho_1, \rho_2$  obtenemos el controlador VGSTA diseñado y al sustituirlo en 4.29 obtenemos:

$$u = -R^{-1}(B^T P) - 2(B^T P B)^{-1}[2B^T P(A - BR^{-1}B^T P)x - (-k_1\phi_1 - \int_0^t k_2\phi_2 dt)] \quad (4.60)$$

donde

$$u_{smc} = -k_1(t, x)\phi_1(s) - \int_0^t k_2(\tau, x)\phi_2(s)d\tau \quad (4.61)$$

$$\text{donde} \quad (4.62)$$

$$\phi_1(s) = |s|^{1/2}\text{sgn}(s) + k_3 s, \quad k_3 \geq 0 \quad (4.63)$$

$$\phi_2(s) = \frac{1}{2}\text{sgn}(s) + \frac{3}{2}k_3|s|^{1/2}\text{sgn}(s) + k_3^2 s \quad (4.64)$$

$$(4.65)$$

Para el sistema desacoplado 4.47 las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  son:

$$k_1(t, x) = 10 + \left[\frac{1}{4}[40\rho_{1x} + \rho_{2x}]^2 + 20\rho_{2x} + 10 + [20 + \rho_{1x}](401)\right] \quad (4.66)$$

$$k_2(t, x) = 401 + 20k_1(t, x) \quad (4.67)$$

Mientras que para el otro sistema desacoplado 4.54 las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  son:

$$k_1(t, x) = 10 + \left[\frac{1}{4}[40\rho_{1y} + \rho_{2y}]^2 + 20\rho_{2y} + 10 + [20 + \rho_{1y}](401)\right] \quad (4.68)$$

$$k_2(t, x) = 401 + 20k_1(t, x) \quad (4.69)$$

## 4.3. Seguimiento de trayectorias

Nuestro segundo objetivo de control es el de seguimiento de trayectorias. Para realizar el diseño de los controladores para seguimiento de trayectoria es fundamental analizar la dinámica de error de seguimiento.

### 4.3.1. Dinámica de error de seguimiento

Tratando de manera independiente los ejes  $x$  y  $y$ , podemos establecer la dinámica del error de seguimiento para cada uno de ellos, considerando una referencia sinusoidal

en ambos ejes, de tal manera que al utilizar dos referencias sinusoidales adecuadas, podamos obtener una trayectoria circular en el plato.

Partiendo del sistema linealizado para el eje  $x$  con la forma siguiente:

$$\dot{x}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -860.96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1315.6 \end{bmatrix} u \quad (4.70)$$

$$a_{12} = 1$$

$$a_{23} = -1.7981$$

$$a_{34} = 1$$

$$a_{44} = -860.96$$

$$b_4 = 1315.6$$

Definiendo el error de seguimiento en  $x$  y  $y$  como  $e_{x1} = x_1 - x_{1d}$  y  $e_{y1} = y_1 - y_{1d}$  respectivamente.

Tomando las ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = a_{12}x_2$$

$$\dot{x}_2 = a_{23}\alpha_1$$

$$\dot{\alpha}_1 = a_{34}\alpha_2$$

$$\dot{\alpha}_2 = a_{44}\alpha_2 + b_4u$$

Tomando las derivadas temporales de  $e_{x1}$  hasta encontrar el error de control (grado relativo):

$$e_{x1}^{(1)} = a_{12}x_2 - x_{1d}^{(1)}$$

$$e_{x1}^{(2)} = a_{12}\dot{x}_2 = a_{12}a_{23}\alpha_1 - x_{1d}^{(2)}$$

$$e_{x1}^{(3)} = a_{12}a_{23}\dot{\alpha}_1 = a_{12}a_{23}a_{34}\alpha_2 - x_{1d}^{(3)}$$

$$e_{x1}^{(4)} = a_{12}a_{23}a_{34}\dot{\alpha}_2 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{44}\alpha_2 + a_{44}b_4u - x_{1d}^{(4)}$$

dónde  $e_{x1}^{(n)}$  representa la n-ésima derivada temporal del error  $e_{x1}$  y  $x_{1d}^{(n)}$  la n-ésima derivada temporal de la trayectoria deseada  $x_{1d}$ . El controlador  $u$  se encuentra en la cuarta derivada temporal. Por lo tanto, el grado relativo de la salida  $e_{x1}$  con respecto a la entrada es 4. Debido a que la dimensión del sistema y su grado relativo son el mismo, 4, entonces la salida  $e_{x1}$  es una transformación no lineal que toma el sistema en 4.80 en su forma no lineal de controlabilidad. Considerando el siguiente cambio de variable:

$$\dot{e}_1 = e_2 = e_{x1}^{(1)} \quad (4.71)$$

$$\dot{e}_2 = e_3 = e_{x1}^{(2)} \quad (4.72)$$

$$\dot{e}_3 = e_4 = e_{x1}^{(3)} \quad (4.73)$$

$$\dot{e}_4 = e^{(4)} = a_{12}a_{23}a_{34}a_{44}\alpha_2 + a_{44}b_4u - x_{1d}^{(4)} \quad (4.74)$$

Se puede obtener una linealización exacta donde  $u$  tiene la siguiente forma:

$$u = -\frac{1}{a_{44}b_4}(a_{12}a_{23}a_{34}a_{44}\alpha_2 - x_{1d}^{(4)} - v) \quad (4.75)$$

De esta forma, el sistema a lazo cerrado está dado por:

$$\dot{e}_1 = e_2 \quad (4.76)$$

$$\dot{e}_2 = e_3 \quad (4.77)$$

$$\dot{e}_3 = e_4 \quad (4.78)$$

$$\dot{e}_4 = v \quad (4.79)$$

Reescrito de manera convencional:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (4.80)$$

Es posible utilizar un controlador lineal LQR. Sin embargo, para conocer los términos  $a_{12}a_{23}a_{34}a_{44}\alpha_2 - x_{1d}^{(4)}$  y  $a_{44}b_4$  se requiere un conocimiento exacto de la planta, lo que es imposible en la práctica. Por esta razón, un controlador robusto es necesario; los controladores STA y VGSTA pueden compensar este error o desconocimiento de los parámetros al estar acoplados al control  $u$ .



# Capítulo 5

## Simulaciones

Los controladores por modos deslizantes, por norma general, producen “Chattering”, que a su vez puede generar vibraciones de alta frecuencia que tienen el inconveniente de reducir la precisión del controlador y aumentar el desgaste mecánico. Para intentar minimizar el daño al aplicar estos controladores a la planta y para poder sintonizar ciertas ganancias de nuestros controladores, realizamos un modelo en Simulink que se muestra en la figura 5.1

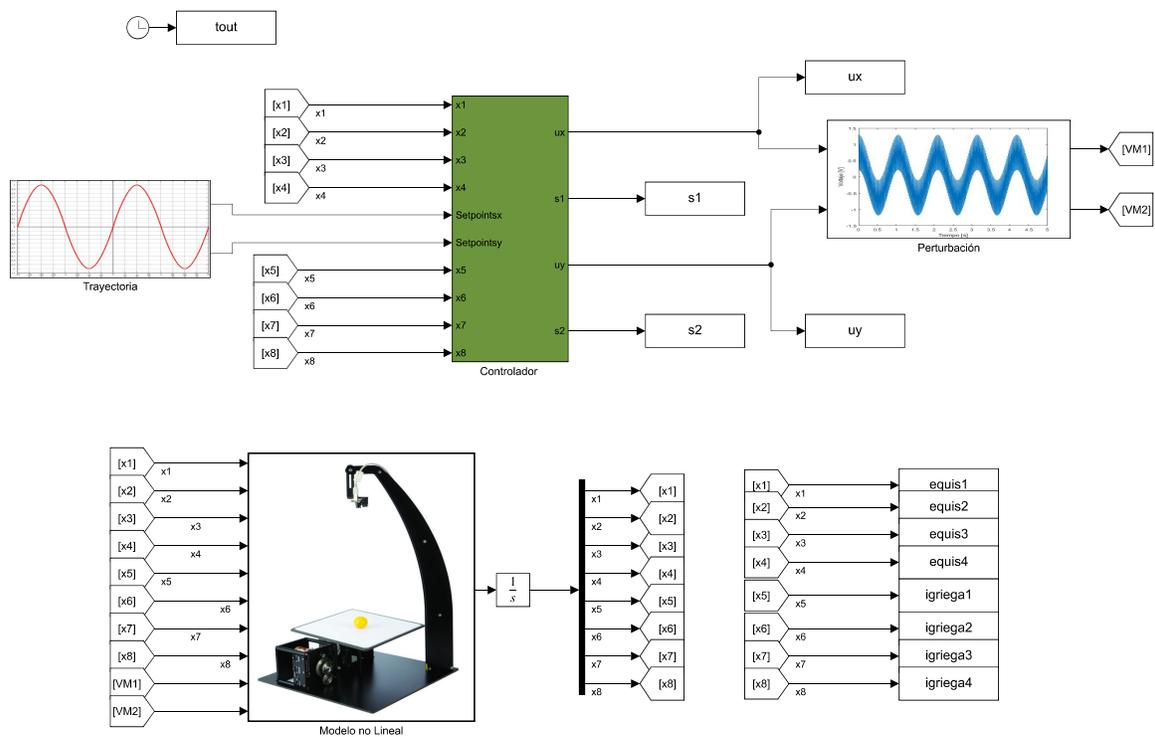


Figura 5.1: Modelo de Simulink para simulaciones

## 5.1. Simulaciones regulación

En esta sección buscamos simular la respuesta del sistema al aplicar los tres controladores diseñados (LQR, STA y VGSTA) para el primer objetivo de control, la regulación en un punto de equilibrio. Buscamos llevar la pelota a  $(x_1, x_5) = (0, 0)$ , es decir, el centro del plato.

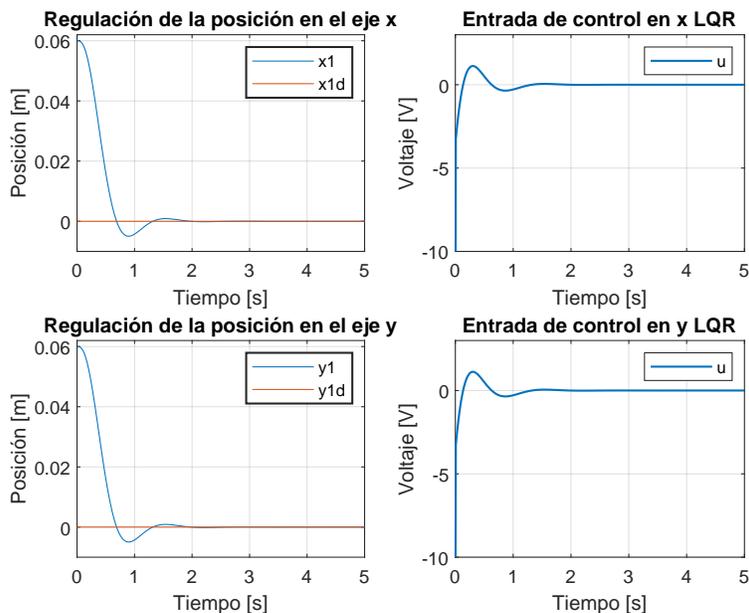


Figura 5.2: Simulaciones regulación LQR sin perturbación

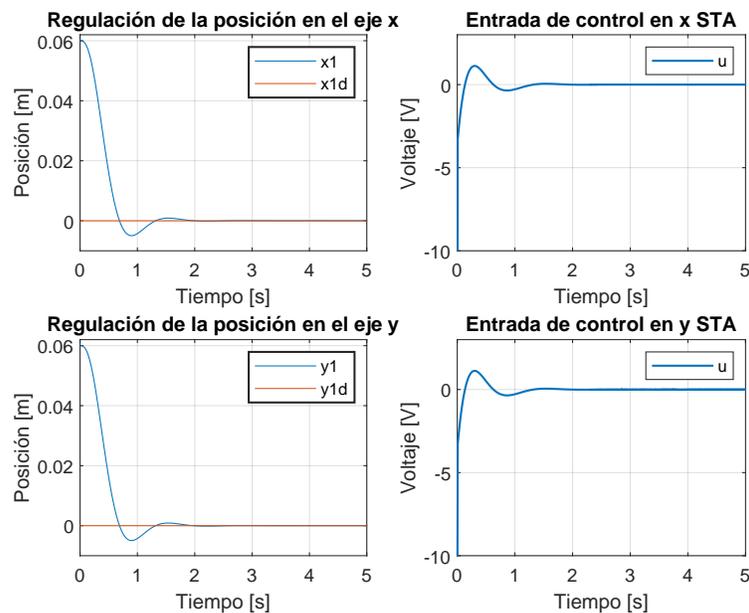


Figura 5.3: Simulaciones regulación STA sin perturbación

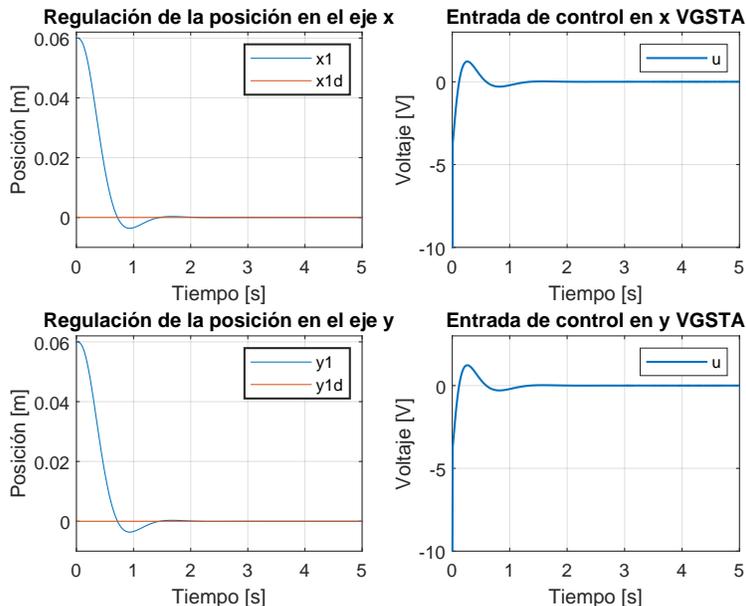


Figura 5.4: Simulaciones regulación VGSTA sin perturbación

Se puede observar que sin perturbación tanto el LQR como los controladores STA y VGSTA tienen un rendimiento similar y logran llevar la posición de la pelota a  $x_1 = 0$  y a  $y_1 = 0$  sin mayor complicación. Esto es esperado ya que el sistema sin perturbación es el sistema nominal. Además, al tratarse de simulaciones, los parámetros son exactos; es decir, no existen diferencias entre el modelo y la planta.

## 5.2. Simulaciones de regulación con perturbación

De manera análoga a la sección anterior, buscamos observar la respuesta del sistema con los tres controladores diseñados, esta vez con una perturbación. Con el fin de simular un comportamiento no ideal del sistema, añadimos una señal formada por diferentes sinusoidales que actuará como perturbación. La ecuación que define esta perturbación es la siguiente:

$$\varphi = A\cos(\omega t) + 0.5A\cos(50\omega t) + 0.1A\cos(200\omega t) \tag{5.1}$$

donde  $A = 0.7[V]$  y  $\omega = 6[rad/s]$ . En la figura 5.5 se puede observar gráficamente esta perturbación.

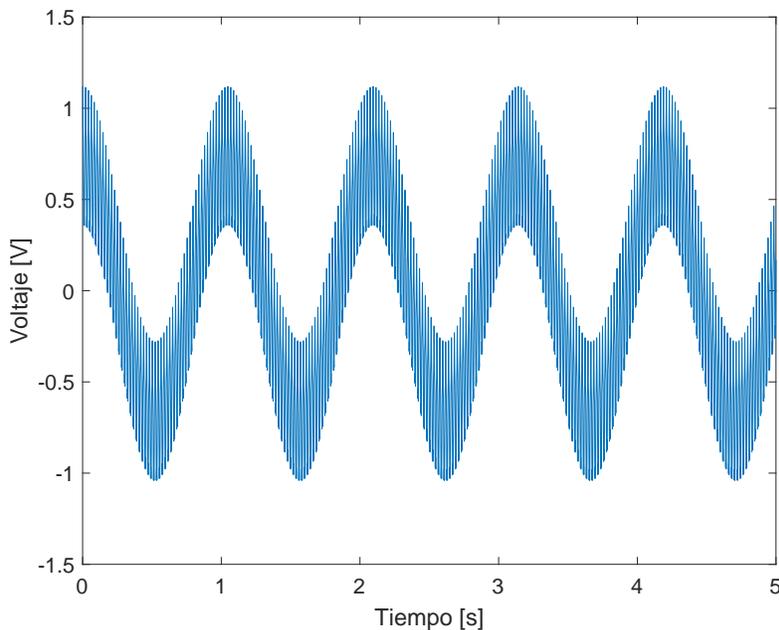


Figura 5.5: Perturbación Simulada  $\varphi = A\cos(\omega t) + 0.5A\cos(5\omega t) + 0.1A\cos(20\omega t)$

En las figuras 5.6, 5.7 y 5.8 podemos observar la dinámica de las posiciones de la pelota utilizando cada uno de los controladores diseñados.

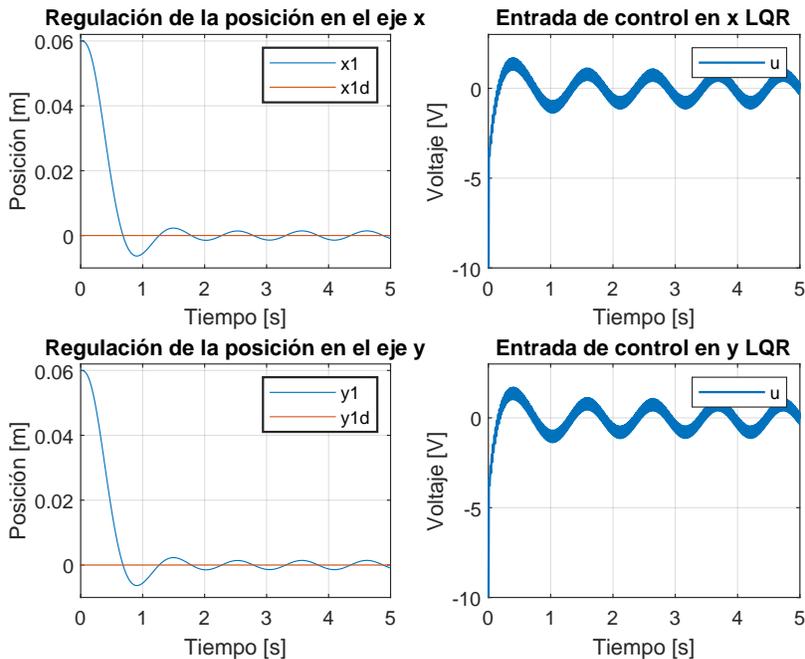


Figura 5.6: Simulaciones regulación LQR con perturbación

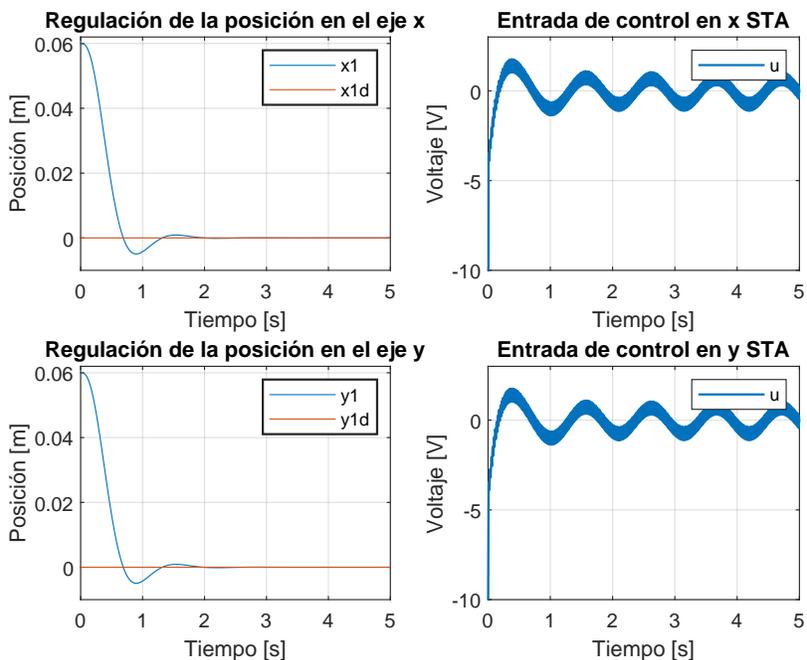


Figura 5.7: Simulaciones regulación STA con perturbación

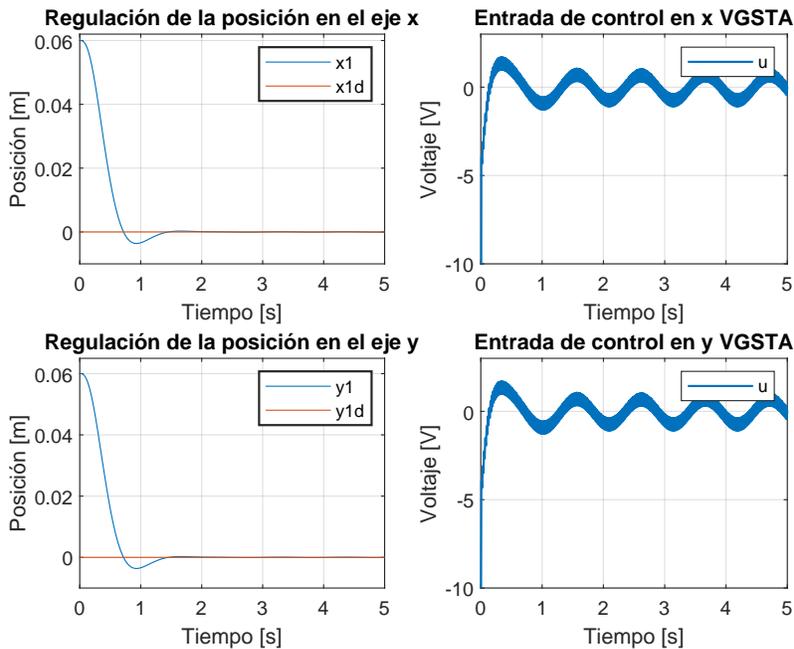


Figura 5.8: Simulaciones regulación VGSTA con perturbación

A diferencia de las simulaciones sin perturbación, se puede observar de manera clara que los controladores por modos deslizantes compensan dicha perturbación de manera que alcanzan la posición  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 0$  sin mayor complicación; son controladores robustos.

### 5.3. Simulaciones de seguimiento

De acuerdo con la sección de la dinámica de error de seguimiento 4.3, esperamos que el controlador LQR no sea capaz de compensar la cuarta derivada de la trayectoria deseada, es decir, que, sin aplicar una perturbación externa, debería existir una perturbación que el LQR no pueda compensar.

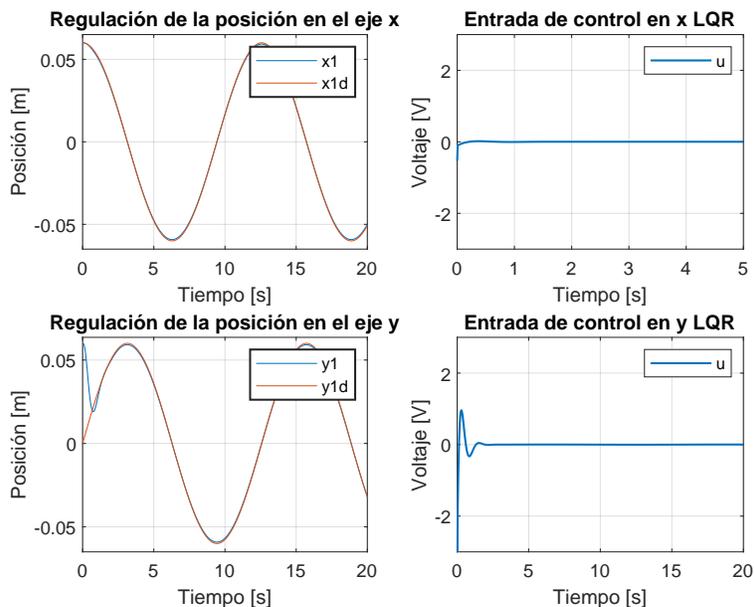


Figura 5.9: Simulaciones seguimiento LQR sin perturbación

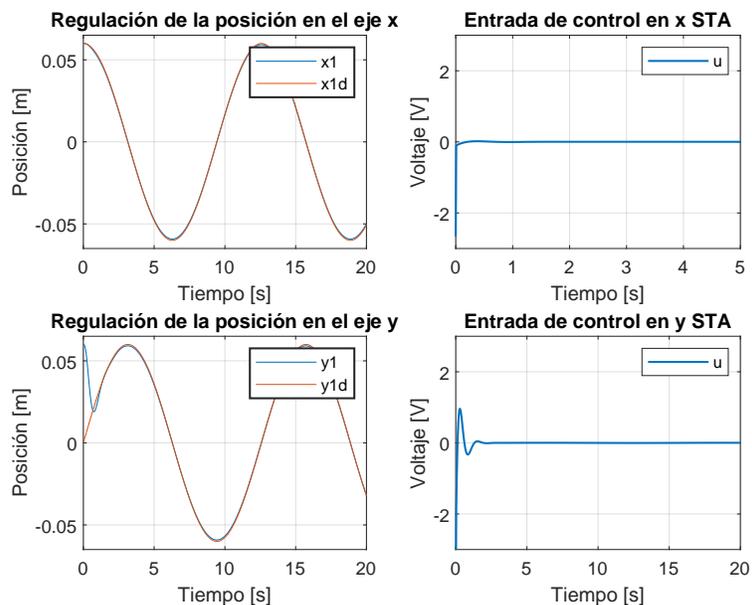


Figura 5.10: Simulaciones seguimiento STA sin perturbación

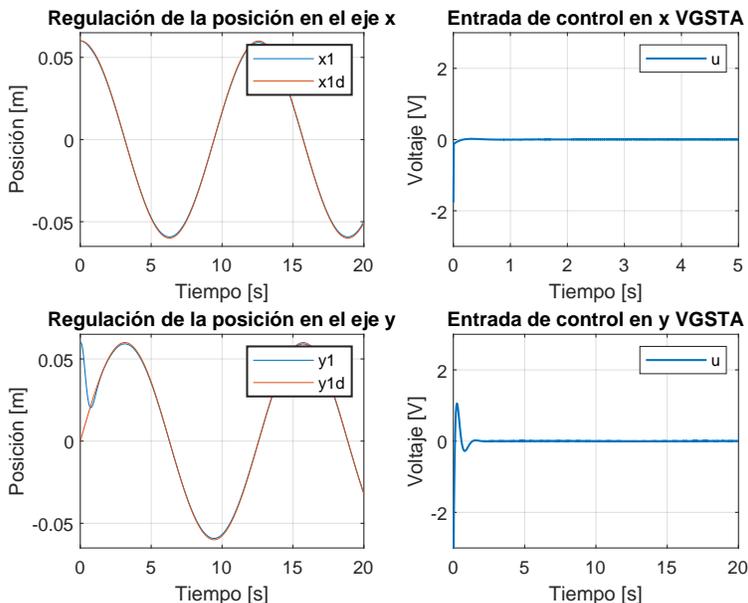


Figura 5.11: Simulaciones seguimiento VGSTA sin perturbación

Los tres controladores implementados siguen la trayectoria deseada de manera correcta; esto no es lo esperado si consideramos lo mencionado acerca del error de seguimiento que no puede compensar el LQR. Por otra parte, observamos que, en los picos de la senoidal, los tres controladores presentan un error. Esto tiene una explicación: al haber linealizado sobre un punto de equilibrio y al alejarnos de él, la linealización es menos precisa y empiezan a haber discrepancias entre la planta y el modelo linealizado.

## 5.4. Simulaciones de seguimiento con perturbación

Para realizar el seguimiento de trayectorias planteamos dos trayectorias sinusoidales que, al aplicarse independientemente a cada uno de los ejes, producen una trayectoria circular.

Las sinusoidales utilizadas tienen una amplitud de 6 [cm] y una frecuencia de  $w = 0.5$  [rad/s]. Para el caso de  $x$ , la sinusoidal tiene la forma de  $x = A \cos(wt)$ , mientras que sobre  $y$  tiene la forma de  $y = A \sin(wt)$ .

Buscamos observar la respuesta del sistema con los tres controladores y con una perturbación. Utilizando una perturbación como la de la figura 5.5 obtenemos los siguientes resultados:

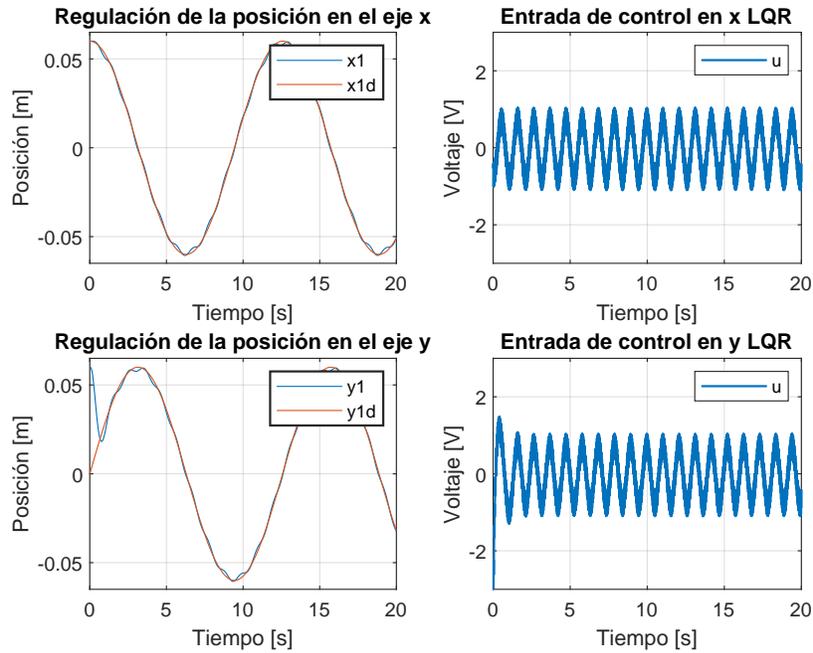


Figura 5.12: Simulaciones seguimiento LQR con perturbación

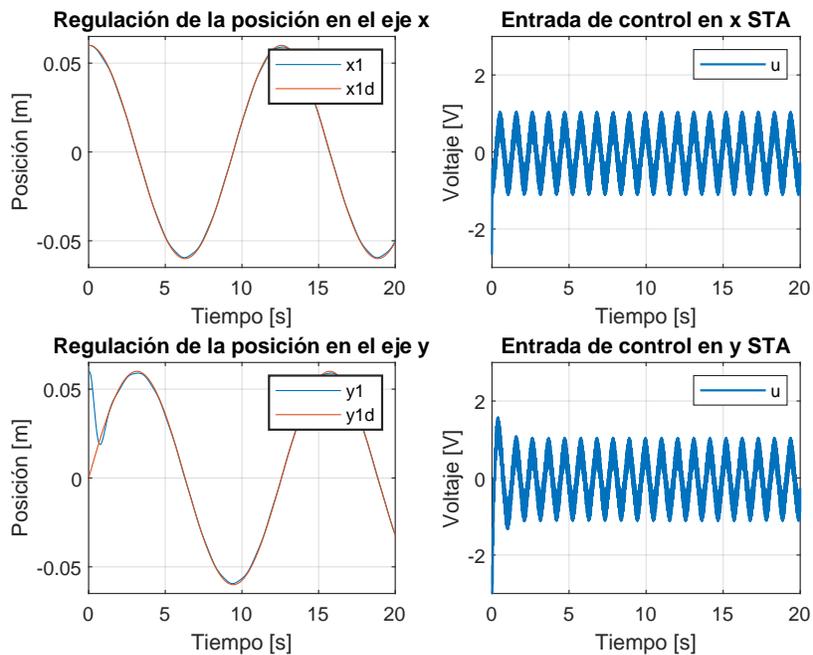


Figura 5.13: Simulaciones seguimiento STA con perturbación

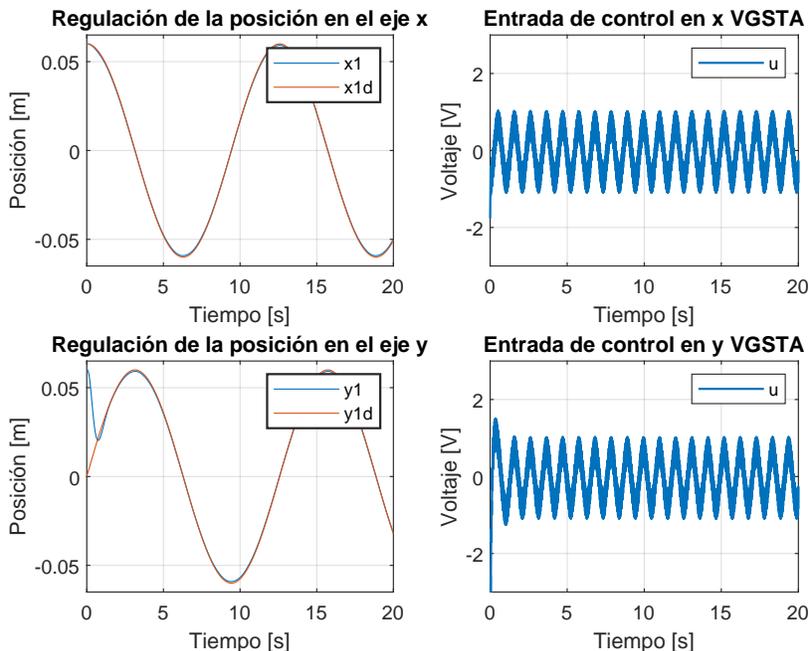


Figura 5.14: Simulaciones seguimiento VGSTA con perturbación

Al aplicar una perturbación acoplada al controlador observamos que el controlador LQR no es capaz de compensarla y tiene un error notable. Por otra parte, observamos que los controladores por modos deslizantes son capaces de compensar la perturbación y presentan errores únicamente en los picos de las senoidales que, como fue mencionado previamente, son debidos a la linealización. Este comportamiento es el esperado recordando que los controladores por modos deslizantes pueden compensar cierto tipo de perturbaciones acopladas 2.3 al canal del control.



# Capítulo 6

## Resultados experimentales

En esta sección se presentan los resultados experimentales realizados sobre la planta de la empresa Quanser. Al no tratarse de simulaciones, existen diferentes factores que influyen sobre el sistema, por mencionar algunos: ruido, dinámicas no modeladas o juego mecánico. La resolución de la cámara, así como el algoritmo de detección de la pelota, afecta a la precisión de las medidas.

Se realizaron, al igual que en las simulaciones, experimentos sobre el seguimiento de una trayectoria circular, así como sobre la regulación en un punto.

### 6.1. Planta física

Cómo se mencionó en la sección de modelado matemático, la planta con la que realizamos los experimentos es el equipo “2DOF Ball Balancer” de la compañía Quanser presentado en la figura 3.1

Esta planta cuenta con cuatro salidas, las posiciones de la pelota y los ángulos de los servomotores que mueven el plato. Buscamos la manera de encontrar las velocidades tanto de las posiciones como las angulares. Para encontrarlas, utilizamos un derivador de Levant como el mostrado en Levant [21] y utilizando un set de ganancias de los especificados en Pérez-Ventura, Escobar, Fridman et al. [19] que permitió obtener las velocidades a partir de derivar las posiciones. Los dos derivadores de Levant utilizados se pueden observar en el [Apéndice B].

#### 6.1.1. Regulación controlador LQR

Siguiendo la metodología mencionada en la sección 4 diseñamos un controlador LQR que nos permitió estabilizar el sistema nominal alrededor del punto de equilibrio. Como se puede observar en la figura (6.1) logramos la meta de regulación al posicionar la pelota alrededor de  $(0, 0)$ . Sin embargo, es claro que el error en estado estacionario es grande, de alrededor de  $1[cm]$  en  $x$  y  $0.75[cm]$  en  $y$ .

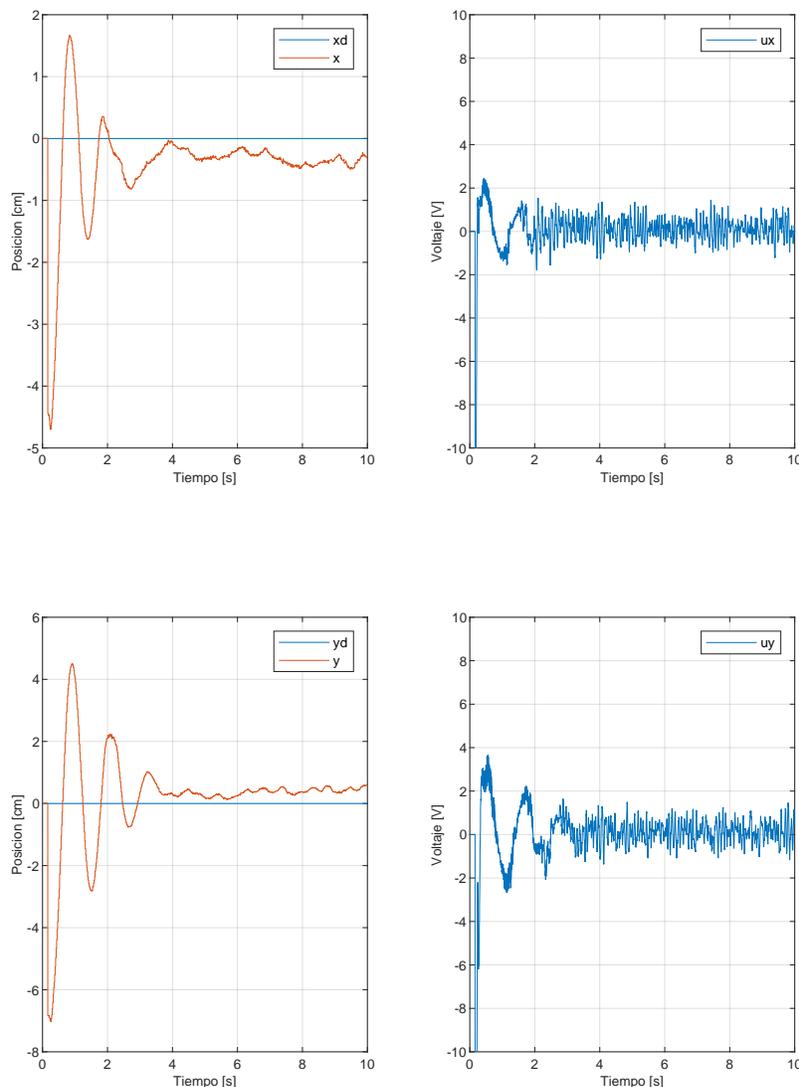


Figura 6.1: Regulación en  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 0$  con controlador LQR

Es de nuestro interés comparar el rendimiento de este controlador no robusto con el rendimiento de los controladores robustos VGSTA y STA diseñados a partir de la metodología de rediseño. Esperamos que, al aplicar controladores robustos que cuentan con una parte integral y que son robustos, se reduzca el error en estado estacionario comparado con el error utilizando únicamente el LQR.

### 6.1.2. Regulación controlador STA

El primer control diseñado con el objetivo de robustecer nuestro controlador fue el Super-Twisting Algorithm. Los resultados experimentales de la regulación alrededor de  $(0, 0)$  se muestran en la figura 6.2

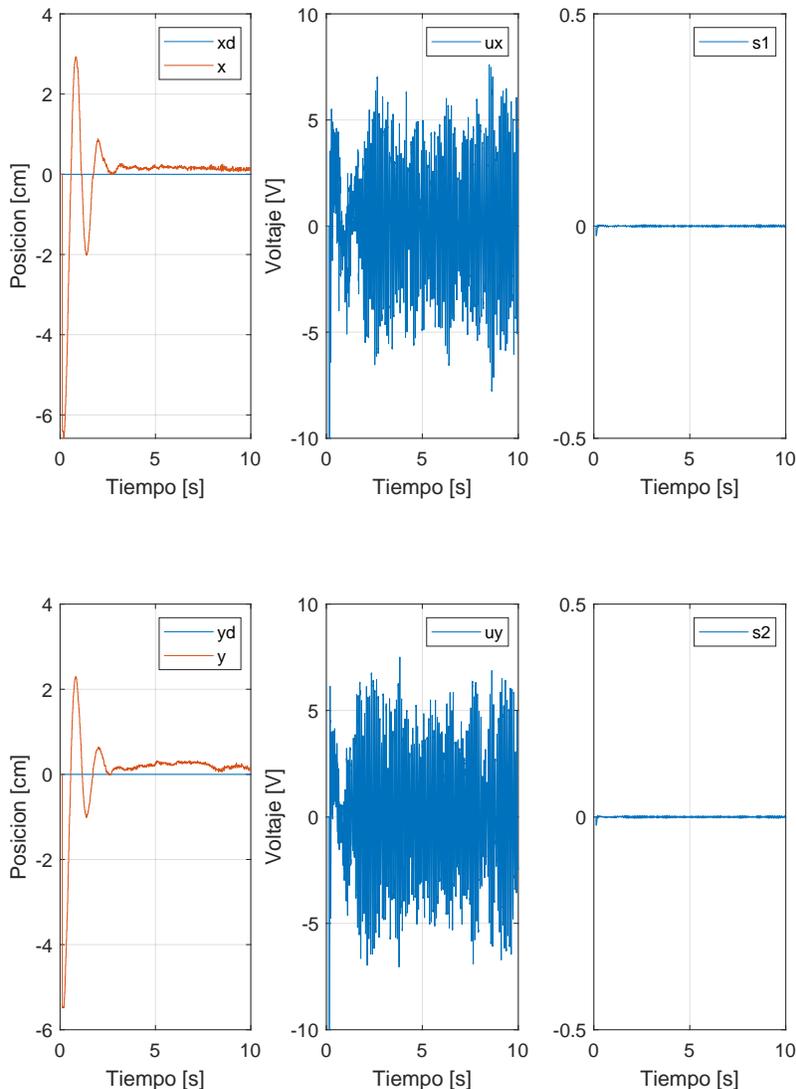


Figura 6.2: Regulación en  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 0$  con controlador STA

Los resultados experimentales muestran que el controlador STA cumple de mejor manera con la meta de regulación. Es evidente que el controlador STA reduce el error en estado estacionario; esto es esperado, puesto que el controlador STA tiene una parte integral que elimina el error. Por otra parte, el error presente en el LQR puede deberse a perturbaciones, las cuales el STA compensará siempre y cuando estén acopladas al controlador y su derivada esté acotada.

Comparando las señales de control del LQR y del STA, es importante mencionar que la señal de control del STA es de mayor amplitud que la del LQR y con cambios más abruptos. Este es el precio a pagar por tener un controlador que rechace perturbaciones y reduzca el error.

## 6.1.3. Regulación controlador VGSTA

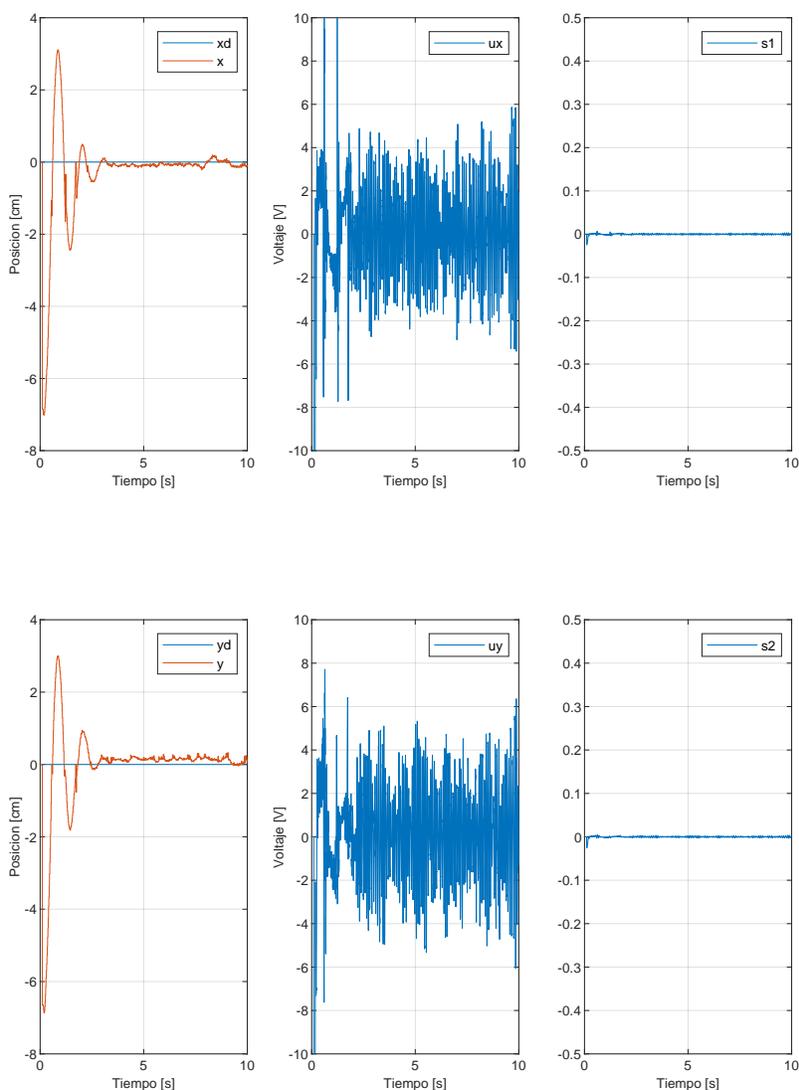


Figura 6.3: Regulación en  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 0$  con controlador VGSTA

Por su parte, el controlador VGSTA también es capaz de cumplir la meta de regulación y tener un error menor que el controlador LQR. Si observamos la gráfica 6.4 y comparamos los tres controladores implementados, resulta claro que el controlador LQR tiene un error mucho mayor que los dos controladores por modos deslizantes. Las gráficas muestran que, en el periodo de 9.8[s] a 10[s], el controlador LQR mantiene un error mayor a 0.2[cm] para el eje  $x$  y mayor a 0.5[cm] en el eje  $y$ . El controlador STA mantiene un error menor a 0.2[cm] en ambos ejes. Por su parte, el controlador VGSTA es capaz de mantener el error menor a 0.15[cm] en  $x$  y menor a 0.2[cm] en  $y$ , excepto en dos instantes donde lo supera ligeramente.

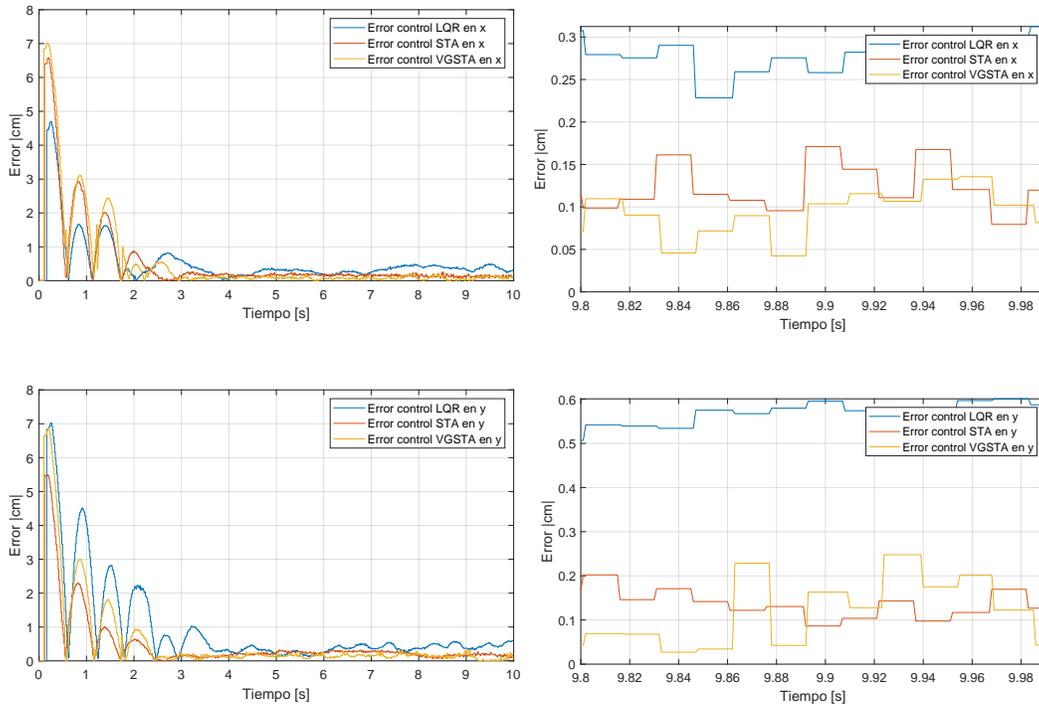


Figura 6.4: Comparación errores de regulación con controladores LQR, STA y VGSTA

## 6.2. Seguimiento de trayectorias

En esta sección se presentan los resultados de la implementación del seguimiento de una trayectoria sinusoidal sobre  $x$  y  $y$  que, al complementarse, forman un círculo. Las sinusoidales utilizadas son las mostradas en la subsección 5.4. Donde  $x = A \cos(\omega t)$  y  $y = A \sin(\omega t)$  con  $A = 6[\text{cm}]$  y  $\omega = 0.5[\text{rad/s}]$ .

Como se pudo observar en la sección 5 esperamos que el controlador LQR tenga problemas siguiendo la trayectoria debido a las perturbaciones que no pueda compensar, que los dos controladores por modos deslizantes sean capaces de compensarlas y , por lo tanto, cumplan de mejor manera con la meta de seguimiento de trayectorias y que, en los picos de las sinusoidales, tengamos un error considerable al alejarnos del punto de equilibrio de la linealización.

### 6.2.1. Seguimiento de trayectorias LQR

A continuación podemos observar los resultados experimentales para el controlador LQR.

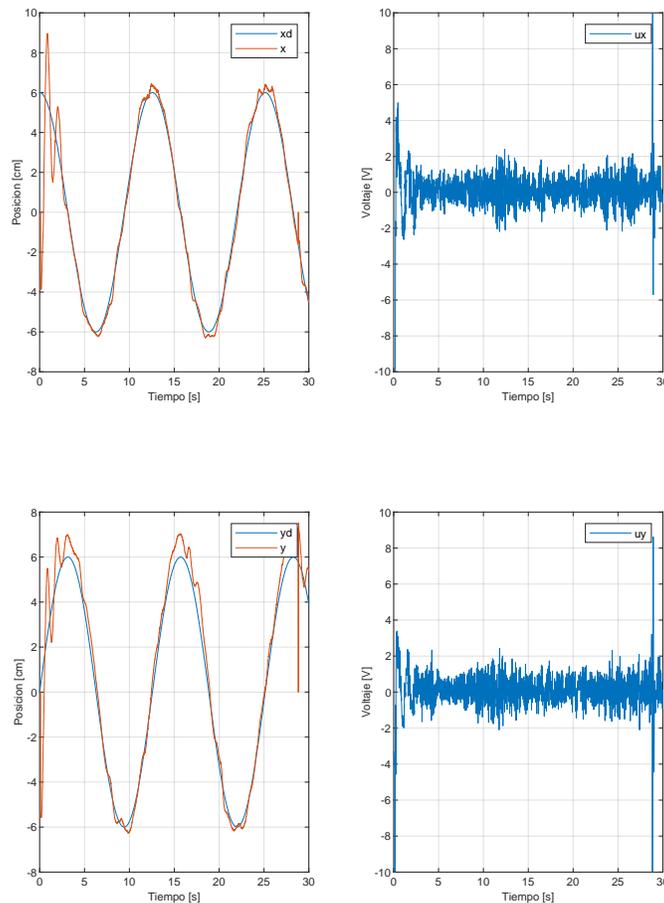


Figura 6.5: Seguimiento de trayectoria con controlador LQR

Una primera observación acerca de los resultados es que al observar el seguimiento de la trayectoria para el controlador LQR es que con este controlador, por su propia cuenta, es capaz de realizar el seguimiento de trayectorias de una manera correcta y que solamente en  $y$  contamos con un error de hasta  $1[cm]$  en el pico de la senoidal.

### 6.2.2. Seguimiento de trayectorias STA y VGSTA

En esta sección buscamos observar los resultados experimentales del seguimiento de trayectorias implementando el controlador STA y el controlador VGSTA.

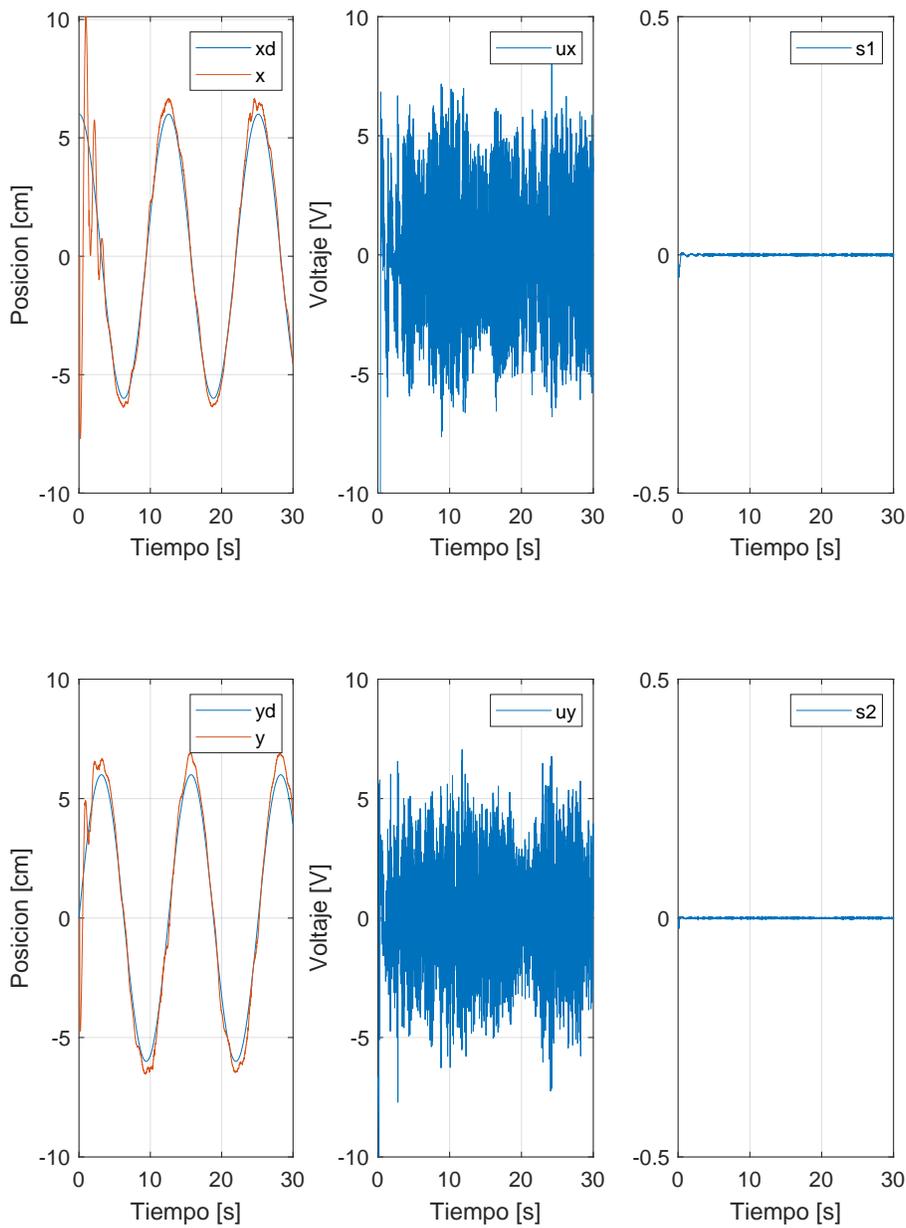


Figura 6.6: Seguimiento de trayectoria con controlador STA

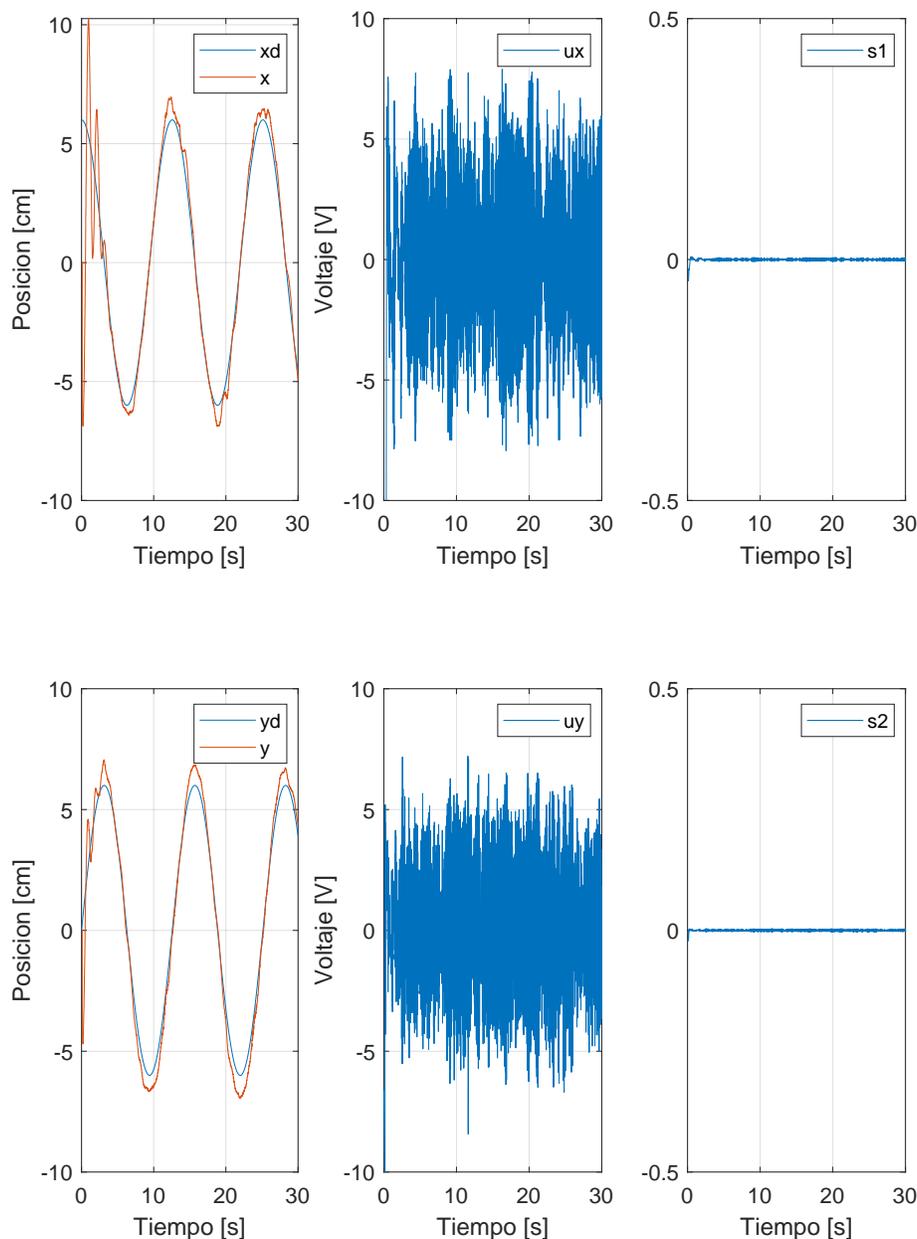


Figura 6.7: Seguimiento de trayectoria con controlador VGSTA

Ambos controladores STA y VGSTA son capaces de realizar el seguimiento de trayectorias y que, de igual manera, únicamente en los picos de las senoidales presentan errores considerables. Es importante notar que, si bien son capaces de seguir la trayectoria, las diferencias respecto al LQR no son sustanciales.

### 6.2.3. Comparación seguimiento de trayectorias

Como se muestra a continuación en las figuras 6.8 y 6.9 y comparando con el controlador PID presentado en la sección 1 es evidente que los tres controladores cumplen de mejor manera con la meta de control de seguimiento de trayectorias que

el controlador PID de fábrica, pero no es evidente el beneficio de los controladores por modos deslizantes con respecto al controlador LQR.

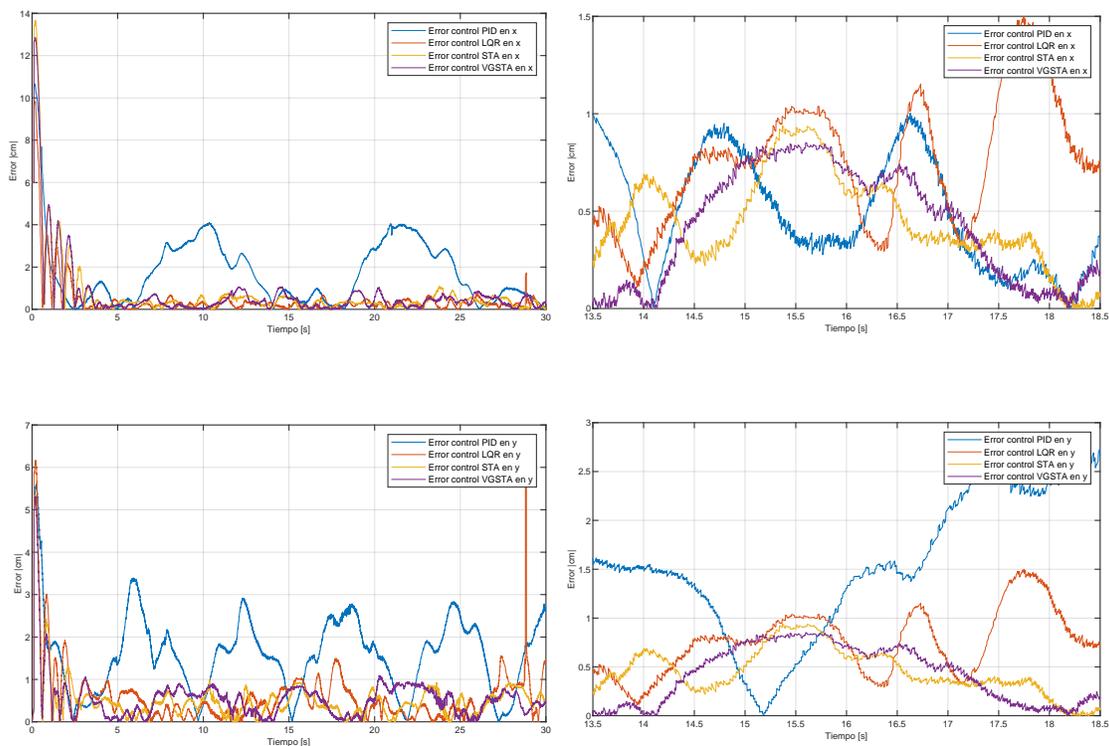


Figura 6.8: Comparación errores de seguimiento con controladores LQR, STA y VGS-TA

Esto se puede explicar de diferentes maneras; la primera es que las perturbaciones pueden no estar acopladas a la entrada del controlador de manera que los controladores por modos deslizantes no sean capaces de compensarlas, o que simplemente no sean lo suficientemente notables para que utilizar un controlador por modos deslizantes sea necesario. Por otra parte, es posible que la vibración generada por los controladores por modos deslizantes tenga un efecto perjudicial que no permita observar un beneficio claro de los controladores por modos deslizantes con respecto al controlador LQR.

Esto último es más fácil de observar en el rendimiento de los derivadores de Levant utilizados para obtener las velocidades. El diseño de derivadores de Levant se encuentra en [Apéndice B.] pero su funcionamiento es visible en las figuras 6.10 y 6.11.

Al observar las Figuras B.1 y B.2 nos podemos percatar, al fijarnos en la velocidad lineal y en el ángulo, que el derivador de Levant aplicado en el sistema con un controlador por modos deslizantes presenta vibraciones o “Chattering” que pueden explicar que el rendimiento de los controladores por modos deslizantes no sea notablemente mejor que para el LQR.

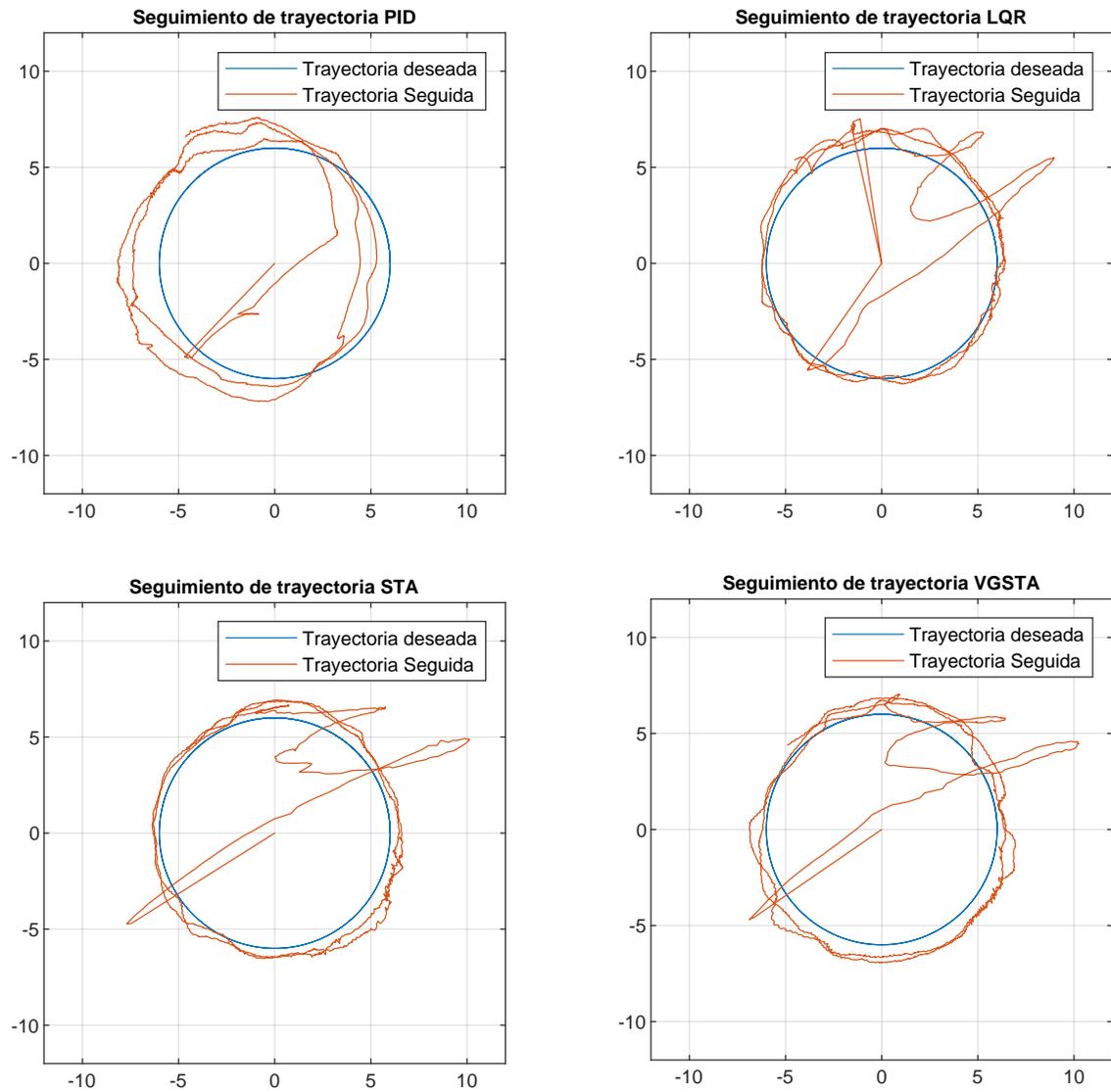


Figura 6.9: Comparación de seguimiento con controladores PID, LQR, STA y VGSTA

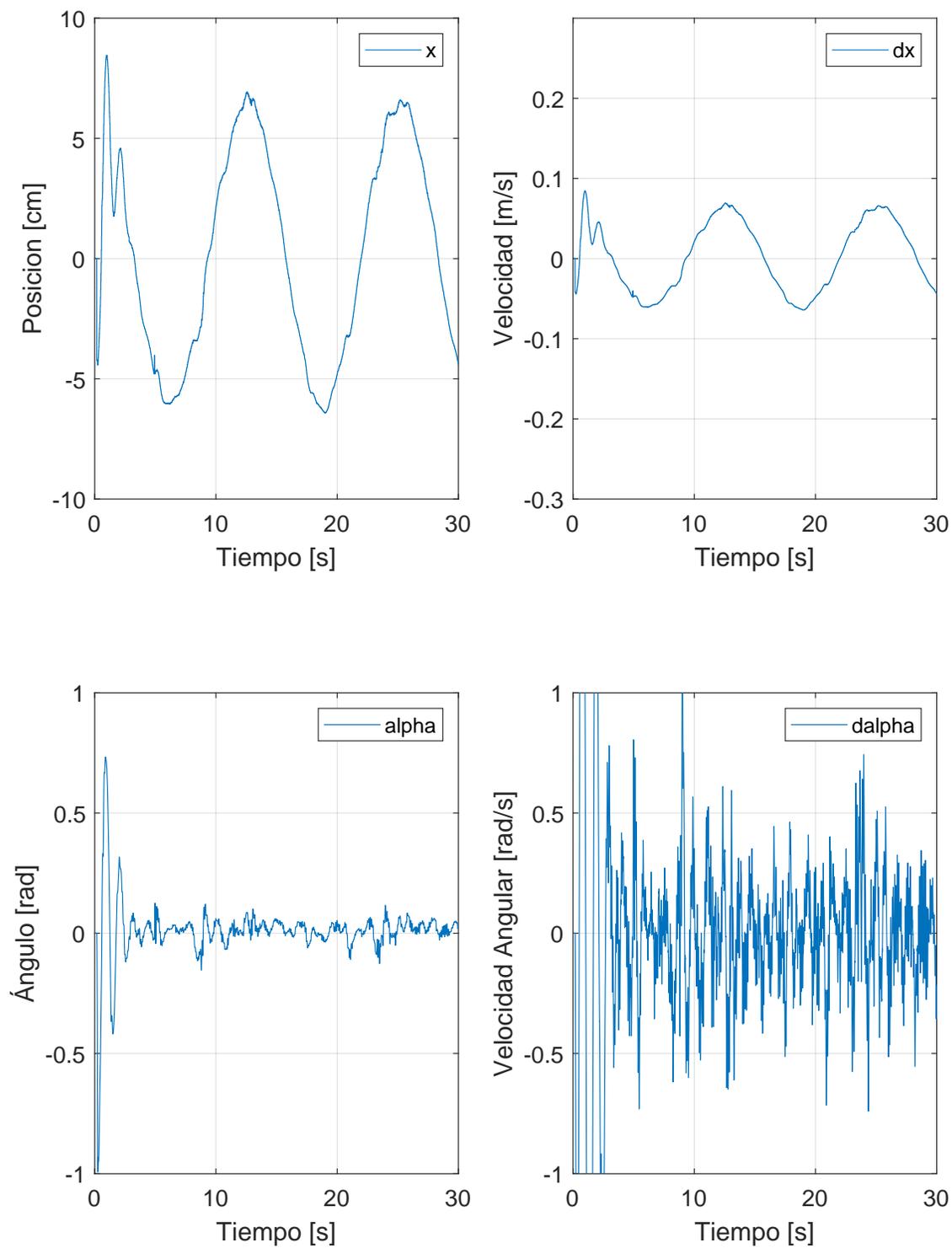


Figura 6.10: Funcionamiento derivador de Levant LQR

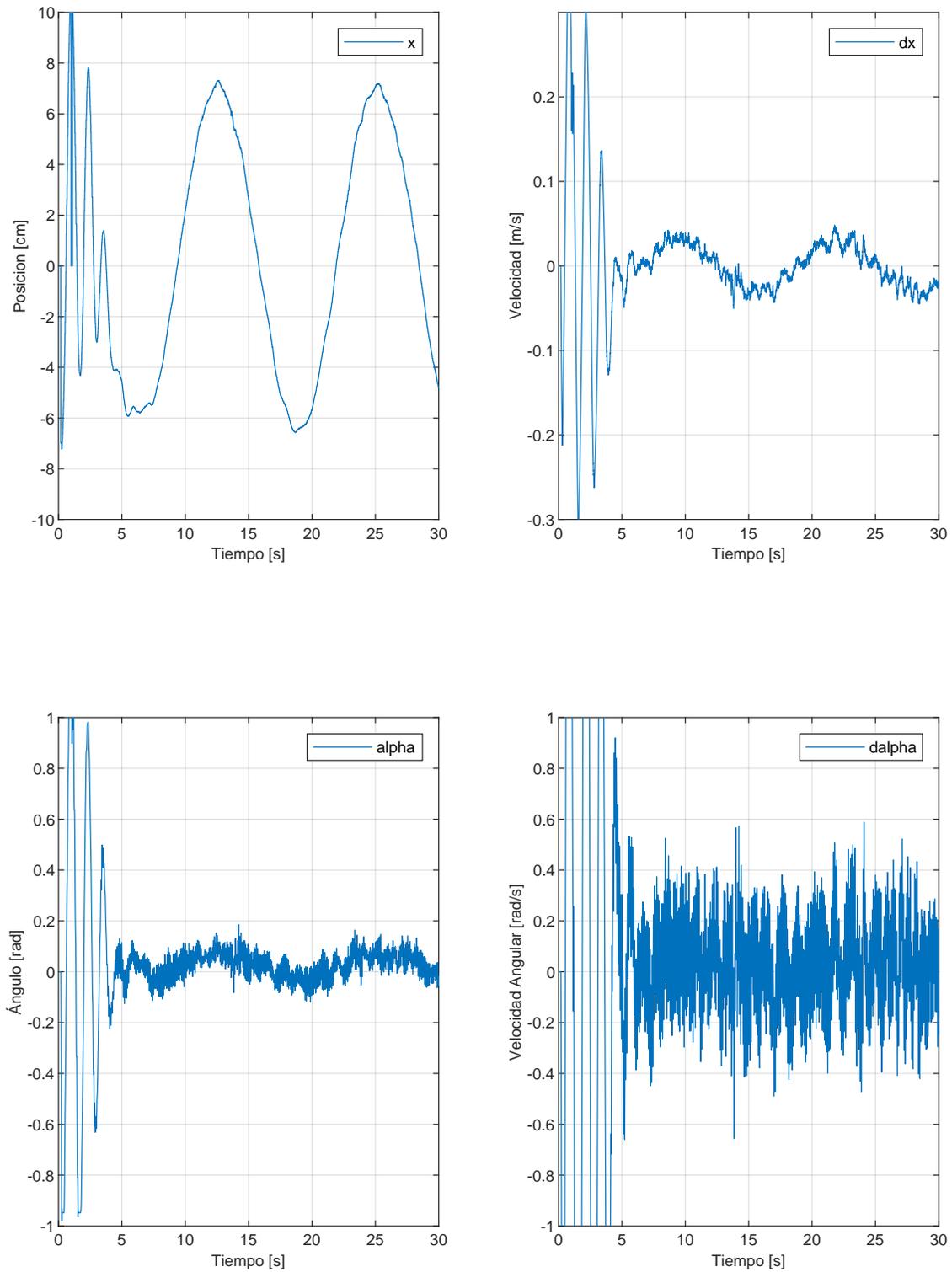


Figura 6.11: Funcionamiento derivador de Levant VGSTA

# Capítulo 7

## Conclusiones

Utilizamos un método de rediseño por modos deslizantes que nos permitió simplificar el diseño de controladores por modos deslizantes partiendo únicamente de un controlador para un sistema nominal y que evita realizar la búsqueda de una superficie de deslizamiento para el diseño de controladores por modos deslizantes. Además de esto, pudimos confirmar que esta metodología de rediseño se puede utilizar para sistemas MIMO, como el presentado en esta tesis.

Para el problema de regulación, los controladores STA y VGSTA pueden compensar perturbaciones externas y disminuyen el error de regulación en comparación con el controlador PID de fábrica. Esto es de esperar; la planta física no se comporta exactamente como el modelo realizado y los controladores por modos deslizantes rechazan las perturbaciones acopladas al canal del controlador surgidas de esta diferencia. Además, al utilizar controladores continuos, reducimos el efecto de “Chattering” mientras conservamos la robustez de los controladores por modos deslizantes.

Si bien los controladores por modos deslizantes diseñados son capaces de cumplir con la meta de seguimiento, observamos que el rendimiento de los controladores por modos deslizantes no es mucho mejor en comparación con el rendimiento del controlador LQR. Esto se debe a una restricción holonómica que no permite que el sistema siga la trayectoria exactamente y que no se puede compensar por los controladores por modos deslizantes. Además, al compensar las perturbaciones, los controladores por modos deslizantes actúan de la misma manera que el controlador LQR. El ruido producido por los controladores por modos deslizantes genera grandes vibraciones que, al existir en un sistema con tanto juego mecánico como el nuestro, pueden acoplar los ejes del sistema de manera que ya no se comporten como sistemas desacoplados y el efecto de los controladores afecte a ambos canales simultáneamente y empeore el rendimiento de dichos controladores.

## 7.1. Trabajo Futuro

Los resultados obtenidos muestran una mejora clara respecto al control de fábrica; sin embargo, existen áreas de oportunidad considerables.

- **Linealización alrededor de la trayectoria.** La linealización se realizó sobre un punto de equilibrio esperando que los controladores por modos deslizantes compensaran la diferencia entre el modelo linealizado en el punto de equilibrio y el linealizado sobre la trayectoria. Obtener la linealización sobre la trayectoria puede mejorar el rendimiento en seguimiento de trayectorias.
- **Comparación con controladores robustos.** Buscar controladores robustos para comparar con los STA y VGSTA. Controladores robustos que no sean por modos deslizantes no tienen el problema de “Chattering” y pueden tener mejor rendimiento en una planta con tanto juego mecánico.
- **Sintonización de las ganancias.** Se pueden encontrar ganancias que arrojen mejores resultados. Partimos de un controlador LQR y encontrar mejores ganancias para este afectará a los demás. El controlador VGSTA tiene cuatro variables de diseño y es posible que existan combinaciones de ellas que mejoren los resultados.
- **Sintonización o cambio de los derivadores.** Como observamos en la sección experimental los observadores aplicados al sistema con controladores por modos deslizantes presentan problemas de “Chattering”. Sintonizar de mejor manera estos derivadores o utilizar derivadores lineales puede reducir el efecto del “Chattering” y mejorar el rendimiento de los controladores por modos deslizantes al reducir las vibraciones.

# Apéndice A

## Linealización por método del Jacobiano

Una metodología para encontrar la linealización un punto de equilibrio es el de linealización por el método del Jacobiano. Este método consiste en obtener el Jacobiano de  $f$  con respecto a  $x$  y con respecto a  $u$  y de evaluarlo en el punto de equilibrio deseado.

Con MATLAB realizamos el cálculo del Jacobiano de la función  $f$  con respecto a  $x$ :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \Bigg|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}} \quad (\text{A.1})$$

El resultado del Jacobiano obtenido es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & 0 & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{61} & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & 0 & a_{67} & a_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{88} \end{array} \right] \quad (\text{A.2})$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= 0.034x_4^2 \\
 a_{23} &= -1.8\cos(x_3) \\
 a_{24} &= 0.068x_1x_4 - 0.034x_5x_8 \\
 a_{25} &= a_{61} = -0.034x_4x_8 \\
 a_{28} &= -0.034x_4x_5 \\
 a_{44} &= a_{88} = -860 \\
 a_{64} &= -0.034x_1x_8 \\
 a_{65} &= 0.034x_8 \\
 a_{67} &= -1.8\cos(x_7) \\
 a_{68} &= 0.068x_5x_8 - 0.034x_1x_4
 \end{aligned}$$

Al evaluar en el punto de equilibrio:

$$x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \quad u_e = [V_{m1eq} \ V_{m2eq}] = [0 \ 0] \quad (\text{A.3})$$

Obtenemos la siguiente matriz  $A$  de nuestro sistema lineal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -860.96 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.7981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -860.96 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Por otra parte, obtendremos la matriz Jacobiana de  $f$  con respecto a  $u$  y evaluaremos en el punto de equilibrio:

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \right|_{\substack{x = x_e \\ u = u_e}} \quad (\text{A.5})$$

El resultado de obtener el Jacobiano es:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1315.6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1315.6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Al evaluar en el punto de equilibrio obtenemos la matriz  $B$  de nuestro sistema lineal:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1315.6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1315.6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Una vez obtenidas  $A$  y  $B$  contamos con el sistema linealizado alrededor del punto de equilibrio y tiene la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{A.8})$$



# Apéndice B

## Derivador de Levant

Cómo fue mostrado en la sección de modelado matemático, nuestro sistema cuenta con únicamente cuatro salidas, las posiciones en  $x$  y en  $y$  y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Para el diseño de nuestros controladores buscamos encontrar las derivadas de estas en tiempo real.

Para obtener las señales de velocidad ( $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\alpha}$  y  $\dot{\beta}$ ) necesarias para los algoritmos de control, diseñamos un derivador de Levant de orden 3 que cuenta con la ventaja de asegurar convergencia en tiempo finito y que al tener un orden mayor reduce el efecto del “Chattering” producido por el derivador de modos deslizantes. Basándonos en el trabajo realizado por Levant [21] podemos diseñar el siguiente derivador tomando las ganancias mencionadas en Pérez-Ventura, Escobar, Fridman et al. [19]:

$$\dot{z}_0 = -k_0 L^{\frac{1}{3}} [z_0 - f]^{\frac{2}{3}} + z_1, \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{z}_1 = -k_1 L^{\frac{2}{3}} [z_0 - f]^{\frac{1}{3}} + z_2, \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{z}_2 = -k_2 [z_0 - f]^0 \quad (\text{B.3})$$

$$(\text{B.4})$$

Donde

$$k_0 = 4.52, \quad k_1 = 5.0, \quad k_2 = 1.01 \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{B.6})$$

Contamos también con un parámetro extra de diseño, la ganancia  $L$ . Esta ganancia la obtuvimos experimentalmente y es diferente para obtener las velocidades lineales  $L = 1.2$  y las angulares  $L = 20$ .

A continuación se muestran los resultados de los derivadores de Levant para el seguimiento de las trayectorias con los controladores LQR y VGSTA en el eje  $x$ .

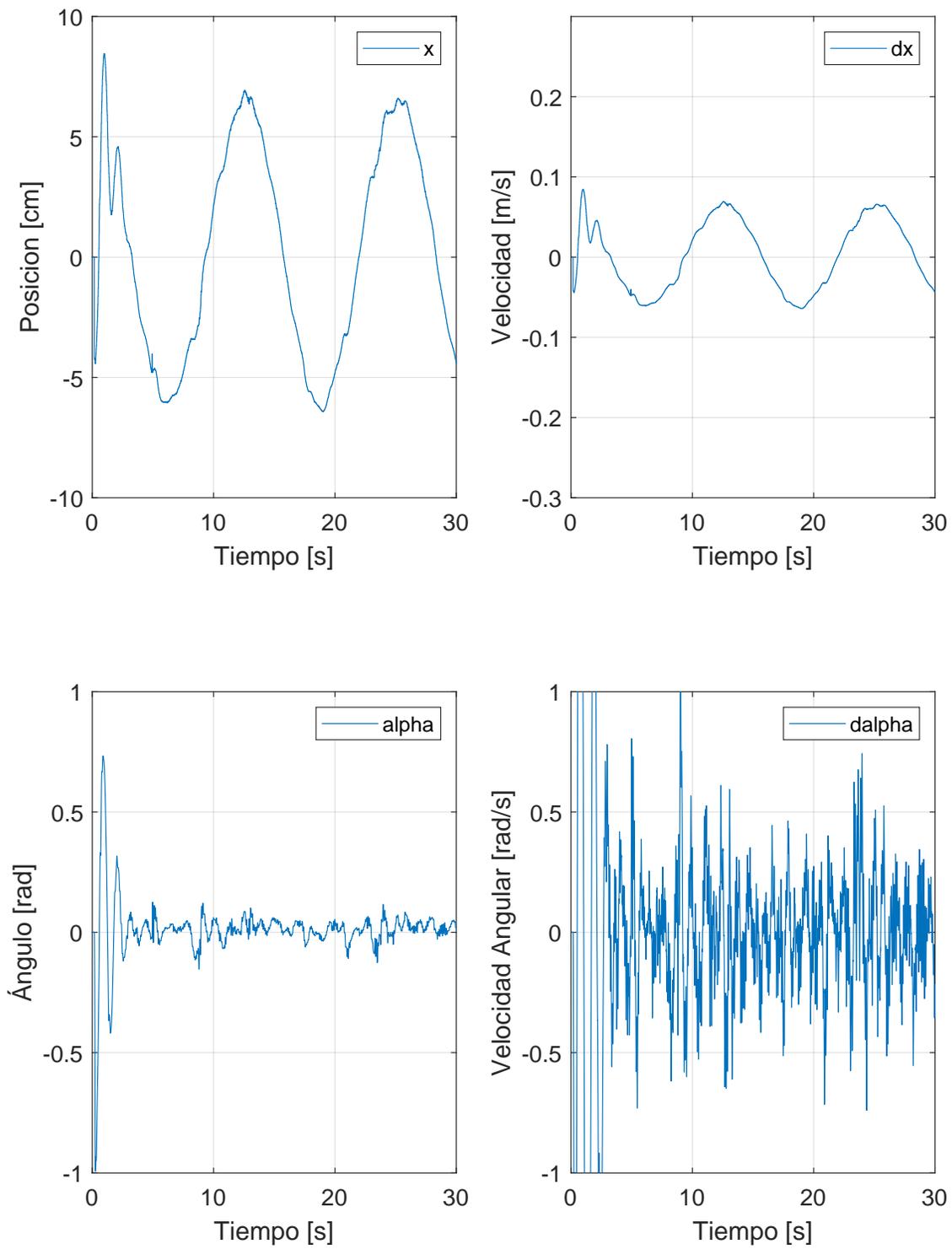


Figura B.1: Funcionamiento derivador de Levant LQR

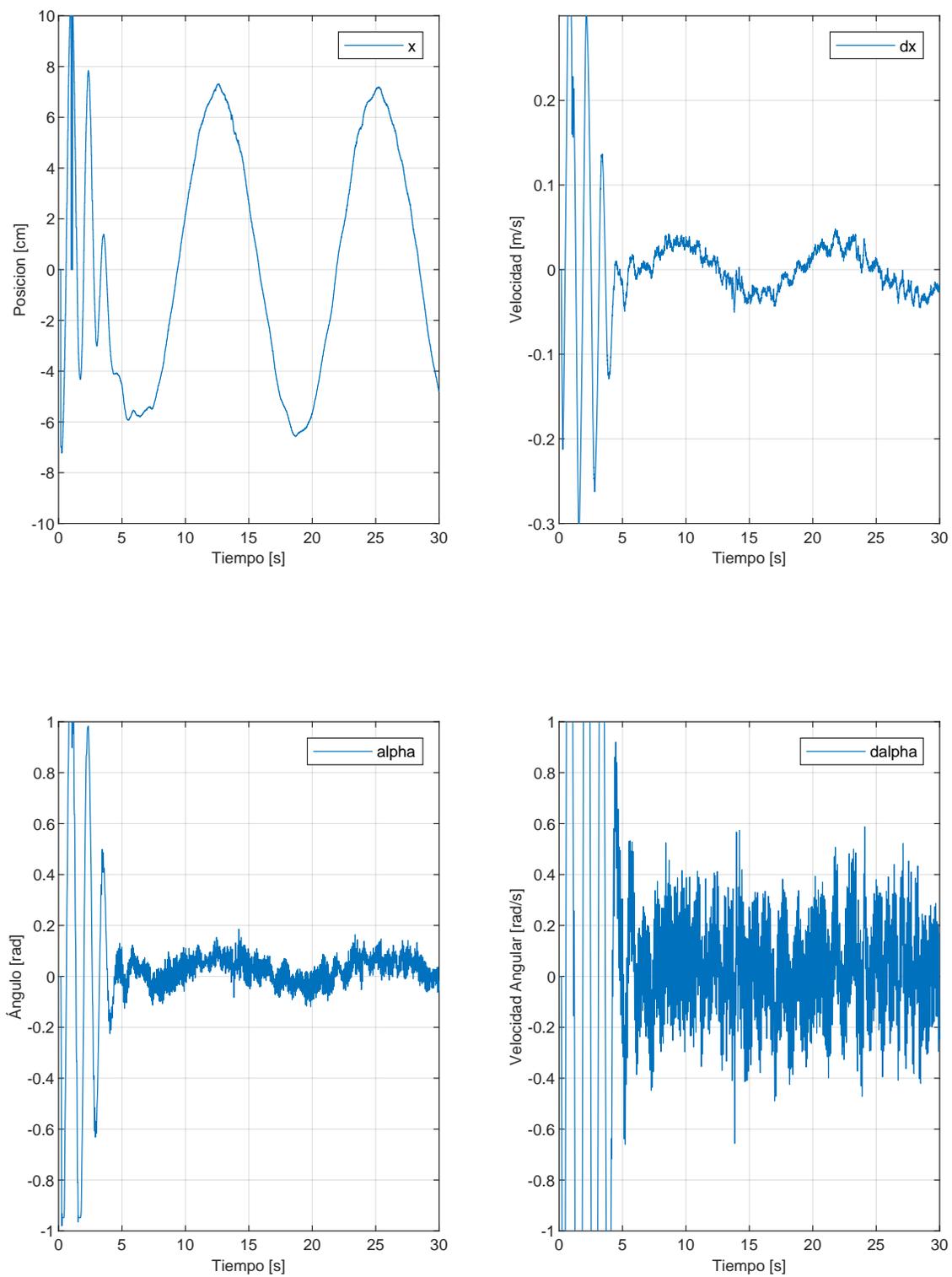


Figura B.2: Funcionamiento derivador de Levant VGSTA



# Bibliografía

- [1] E. D. Sontag, *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems*. Springer-Verlag New York Inc, 1998.
- [2] J.-J. E. Slotine y W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [3] V. Utkin, “Variable Structure Systems with Sliding Modes,” *IEEE Transactions On Automatic Control*, 1977.
- [4] J. Ackermann y V. Utkin, “Sliding mode control design based on Ackermann’s formula,” *IEEE Transactions On Automatic Control*, 1998.
- [5] I. Castillo, M. Jiménez-Lizárraga y E. Ibarra, “Higher order sliding modes manifold design via singular LQ control,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 352, n.º 7, págs. 2810-2830, 2015.
- [6] M. A. Estrada, L. Fridman y J. A. Moreno, “Passive fault-tolerant control via sliding-mode-based Lyapunov redesign,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024.
- [7] H. Bang e Y. S. Lee, “Implementation of a Ball and Plate Control System Using Sliding Mode Control,” *IEEE Access*, vol. 6, págs. 32 401-32 408, 2018.
- [8] H. Liu e Y. Liang, “Trajectory tracking sliding mode control of ball and plate system,” en *2010 2nd International Asia Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR 2010)*, vol. 3, 2010, págs. 142-145.
- [9] A. Barth, C. Weise y J. Reger, “Application of Higher-Order Sliding-Modes to a Ball and Plate System,” en *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, 2018, págs. 192-197.
- [10] B. Tomar, N. Kumar y M. Sreejeth, “Real-Time Balancing and Position Tracking Control of 2-DOF Ball Balancer Using PID with Integral ANTI-WINDUP Controller,” *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2024.
- [11] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman y A. Levant, *Sliding mode control and observation (Vol. 10)*. New York: Birkhäuser, 2014.
- [12] V. Utkin, “Chattering Problem,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, n.º 1, págs. 13 374-13 379, 2011.
- [13] R. Seeber y M. Horn, “Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting,” *Automatica*, vol. 84, págs. 241-243, 2017.

- 
- [14] T. González, J. Moreno y L. Fridman, “Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 8, pp. 2100-2105, 2012.
- [15] H. K. Khalil, *Nonlinear systems 2ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [16] *2 DOF Ball Balancer Workbook Student Version*, Quanser Inc., 2023.
- [17] J. H. Braslavsky, *Controlabilidad y Observabilidad*, <https://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut2/clases/Cap6.pdf>.
- [18] K. Ogata, *Modern control engineering*. Addison-Wesley, 2010.
- [19] U. Pérez-Ventura, J. Escobar, L. Fridman y R. Iriarte, “Design of the second-order robust exact differentiator: A describing function approach,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 33, n.º 15, págs. 8890-8910, 2023.
- [20] M. A. Estrada, L. Fridman y J. A. Moreno, “Control of Fully Actuated Mechanical Systems via Super-twisting Based Lyapunov Redesign,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, n.º 2, págs. 5117-5121, 2020.
- [21] A. Levant, “Robust exact differentiation via sliding mode technique,” *Automatica*, vol. 34, n.º 3, págs. 379-384, 1998.