

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

NOTAS PARA EL CURSO INTRODUCTORIO MATEMATICAS 0041

CUARTA PARTE: LIMITES Y CONTINUIDAD

PROF. ARTURO DELGADO RODRIGUEZ

ENERO 1981
(3a. reimpresión)



DEPFI

DEPFI
1.
86

INTRODUCCION- El propósito de estas notas es el de recopilar en un solo volumen, los conceptos matemáticos básicos, esenciales para el estudio de las asignaturas que componen los planes de estudios de diversas maestrías que se ofrecen en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Para el estudio de estos apuntes, se supone que el alumno ha aprobado previamente los cursos de matemáticas que se imparten a nivel de licenciatura en escuelas profesionales. Se dan por conocidas ciertas técnicas de cálculo, tales como, álgebra de vectores, geometría analítica, métodos elementales de derivación e integración.

En esencia, estas notas pretenden ^{exponer} presentar en forma moderna los temas contenidos en un ^{del} programa formulado para ser cubierto en un semestre. Se complementa la exposición de la teoría mediante ejemplos resueltos en detalle.

Cualquier crítica o comentario tendientes a mejorar posteriores ediciones de estas notas, será bien recibido y agradecido por el autor.

Límites:- El concepto de límite es fundamental en el estudio de muchos temas de las matemáticas modernas. En nuestro curso la noción de límite es básica para el desarrollo de los siguientes capítulos, a saber: Continuidad de funciones, Convergencia de sucesiones y series, y Cálculo integral y diferencial.

Límite de una función:- Sean A y B dos conjuntos métricos; siendo $a \in A$ y $b \in B$ puntos fijos. Consideremos una función

$$f: A \rightarrow B$$

Puesto que no se requiere que el punto fijo $a \in A$ esté en el dominio de f , podemos escribir:

$$f: (A - \{a\}) \rightarrow B$$

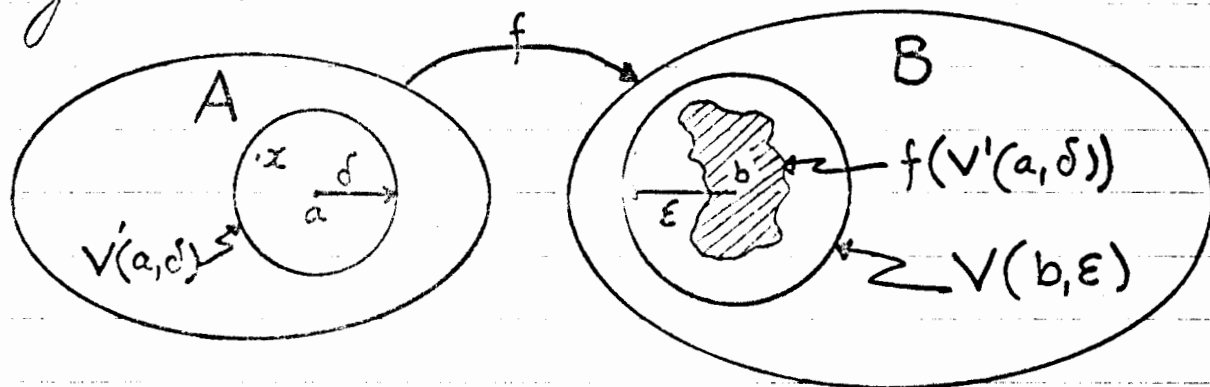
Supongamos que $V'(a, \delta) \neq \emptyset$ para toda $\delta > 0$. Decimos que límite de $f(x)$, cuando $x \rightarrow a$ es igual a $b \iff$ para cada $V(b, \epsilon)$ en B existe $V'(a, \delta)$ tal que:

$$f(V'(a, \delta)) \subset V(b, \epsilon)$$

$$\text{Notación: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Para poder determinar si el límite existe, es necesario dar una regla para determinar $\delta > 0$ (el radio de $V(a, \delta)$), para toda $\epsilon > 0$ (radio de $V(b, \epsilon)$).

Geométricamente:



Observaciones:

1.- x representa cualquier elemento del conjunto A (x es variable); en tanto que a y b son puntos fijos (Constantes)

2.- Afirmar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, establece que:

$$f(V'(a, \delta)) \subset V(b, \epsilon)$$

lo que puede expresarse en forma equivalente en cualquiera de las siguientes dos maneras:

$$\text{Si } x \in V'(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in V(b, \epsilon)$$

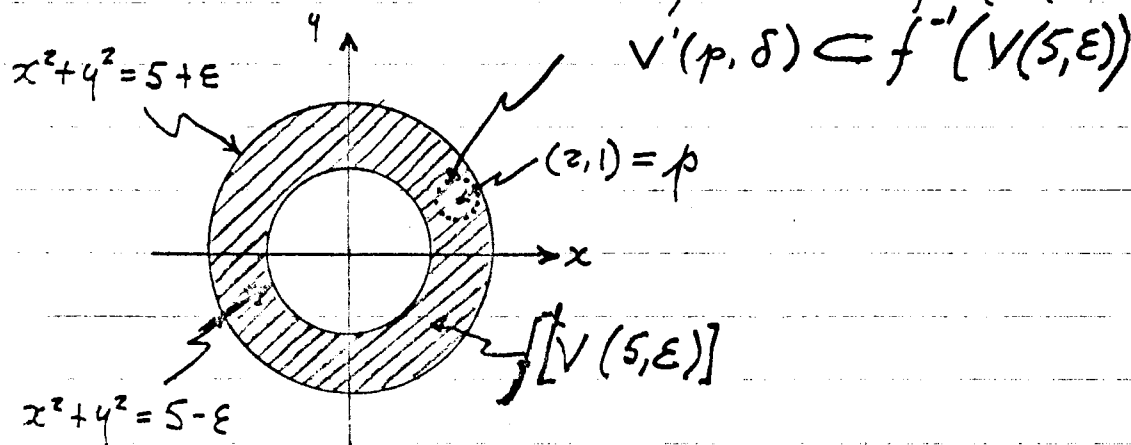
$$\text{ó } V'(a, \delta) \subset f^{-1}(V(b, \epsilon))$$

3.- El punto a debe ser un punto de acumulación (véase definición en la tercera parte) del dominio de f . Si a no es punto de acumulación, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no es único, como debe ser, pues para δ lo suficientemente pequeños, $x \notin V'(a, \delta)$; sin embargo, para cualquier $y \in f(V'(a, \delta))$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $f(V'(a, \delta)) \subset V(y, \epsilon) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$; luego el límite de $f(x)$ no es único.

Ejemplo.- $f: E^2 \rightarrow E^1$; siendo $f(x,y) = x^2 + y^2$; $6 \in E^1$:
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} f(x,y) = 5$?

Solución:

Consideremos primero $f^{-1}(V(5,\epsilon)) \in D_f$



Debemos buscar δ tal que $f(V'(p,\delta)) \subset V(5,\epsilon)$,
 ó sea el radio del círculo δ tal que el área de
 éste quede totalmente dentro de la corona cir-
 cular mostrada en la figura.

Dado que la distancia de p al origen es
 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, resulta que el punto $p = (2,1)$ está
 más cerca a la frontera exterior de la corona,
 que a la frontera interior.

$\Rightarrow$ el valor máximo de δ es $\sqrt{5+\epsilon} - \sqrt{5}$

Observación: En la definición de límite de una función $f(x)$, cuando $x \rightarrow a$, el punto a tiene que ser un punto de acumulación del dominio de la función $f(x)$; y si no es así, resultará que el límite no es único.

Si el punto a es un punto de acumulación, debe existir, por lo menos, un punto diferente del punto a en la vecindad de radio menor que δ ; pero resulta que si el punto a no es punto de acumulación, entonces no existe ningún punto en esa vecindad, y dado que a tampoco está en el dominio de la función $f(x)$, entonces esa vecindad no contiene puntos (es vacía), y su imagen bajo la función f , también es vacía; por lo cual resulta posible encontrar cualquier vecindad de radio menor que ε , que contenga la imagen de la vecindad de radio menor que δ , porque el conjunto vacío está contenido en todos los conjuntos ($\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto).

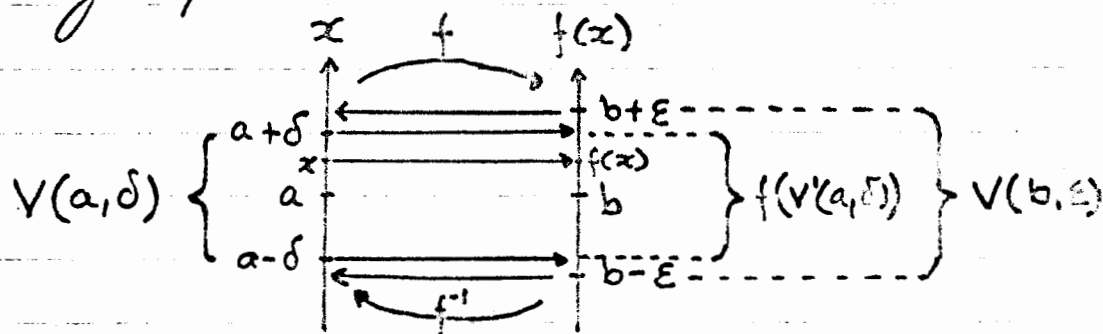
Si $A \subset E'$ y $B \subset E'$, entonces los entornos se convierten en intervalos; debiéndose modificar las expresiones anteriores de la siguiente manera:

si $x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\} \Rightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$
 ó lo que es lo mismo: para $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$

$$\text{si: } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

En resumen: Si $A \subset E'$ y $B \subset E'$, se afirma que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si para un número $\varepsilon > 0$ existe otro número $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x-a| < \delta$, se tiene $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Gráficamente:

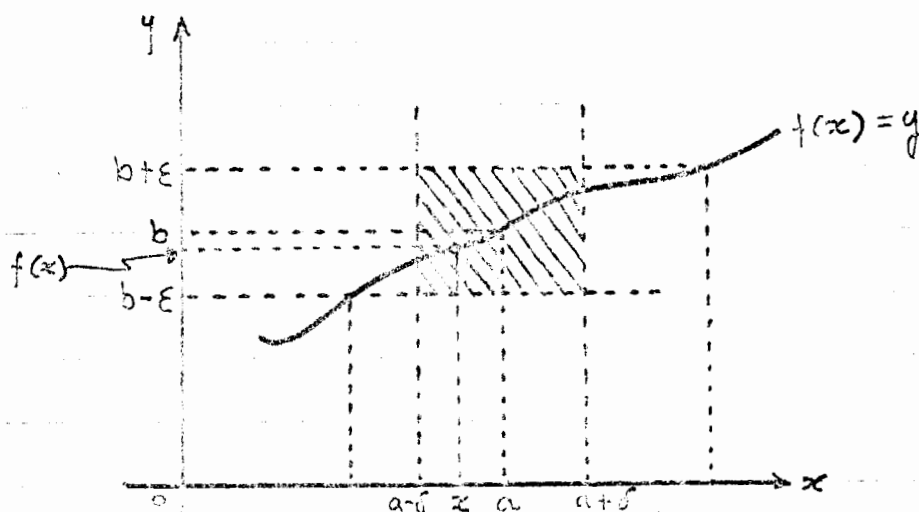


$$(0 < |x-a| < \delta) \subset f^{-1}(|f(x)-b| < \varepsilon)$$

Obsérvese que $0 < |x-a| < \delta$ es intervalo incompleto; en tanto que $|f(x)-b| < \varepsilon$ si contiene el punto b :

$$(a-\delta, a+\delta) - \{a\}: \begin{array}{c} a-\delta \quad a \quad a+\delta \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ \delta \quad \delta \end{array} : 0 < |x-a| < \delta$$

$$(b-\varepsilon, b+\varepsilon): \begin{array}{c} b-\varepsilon \quad b \quad b+\varepsilon \\ \circ \quad \circ \quad \circ \\ 2\varepsilon \end{array} \quad |f(x)-b| < \varepsilon$$



$$f'(|f(x) - b|) \supset (0 < |x - a| < \delta)$$

Gráficamente, para mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ se procede del siguiente modo:

1º Se escoge una tira horizontal de anchura 2ε alrededor de $y = b$.

2º Debemos hallar un intervalo de anchura 2δ (donde δ depende de ε) alrededor de $x = a$ tal que, para cada x ($x \neq a$) en este intervalo, el punto $(x, f(x))$ se encuentre en la tira horizontal escogida.

3º Conseguido lo anterior, para cualquier ε escogido, se tiene que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Observaciones) si $x - a = h \Rightarrow x = a + h$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$$

2) Si el dominio de una función es un intervalo, entonces todo punto del intervalo es un punto de acumulación.

3) Una vez que se ha hallado un número $\delta > 0$ correspondiente a un $\epsilon > 0$ dado, entonces cualquier número δ_1 tal que $0 < \delta_1 < \delta$ satisfará la definición de límite.

Demostración:

Si: $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$; siendo $\delta_1 < \delta \Rightarrow 0 < |x - a| < \delta_1$ por la propiedad transitiva de los números reales, entonces:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ también } \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

4) Se excluye expresamente el punto $x = a$ del intervalo $0 < |x - a| < \delta$ a fin de estar en posibilidad de calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en el punto $x = a$ aun cuando la función no esté definida para $x = a$.

Ejemplos: Dada una función $f(x)$, siendo $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, demostrar en cada caso particular que b efectivamente cumple las condiciones dadas en la definición de límite.

$$1.- f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} ; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

Solución:

En este caso el dominio de f es el conjunto: $E' = \{1\}$; o sea:

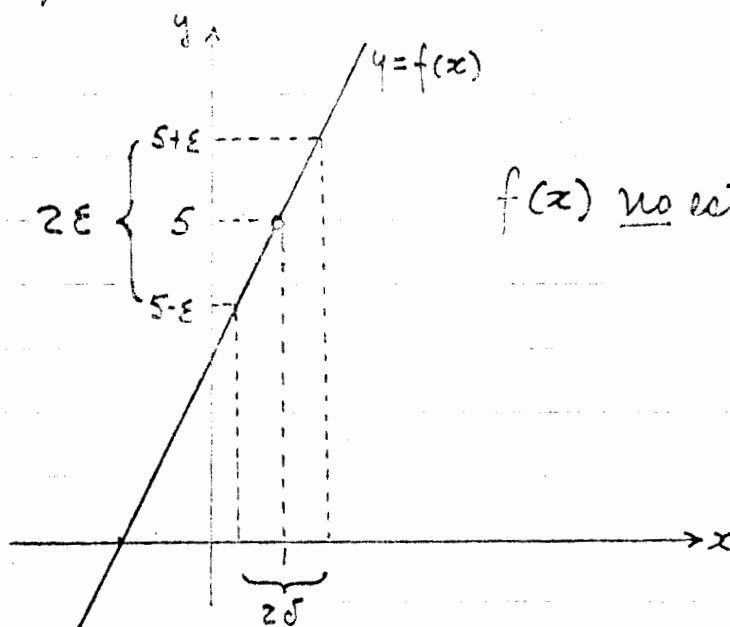
$$f: (E' - \{1\}) \rightarrow E'$$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5 \Rightarrow$$

$$f(0 < |x-1| < \delta) \subset |f(x)-5| < \varepsilon$$

veremos que la condición anterior se cumple cuando $\delta \leq \varepsilon/2$ independientemente de qué tan grande o pequeña sea ε .

Podemos confirmar esta afirmación de la siguiente gráfica:



$f(x)$ no está definido para $x=1$

En seguida haremos ver que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ es el valor máximo posible para δ :

$$\text{Si } x \neq 1: f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x-1} = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = 2x+3$$

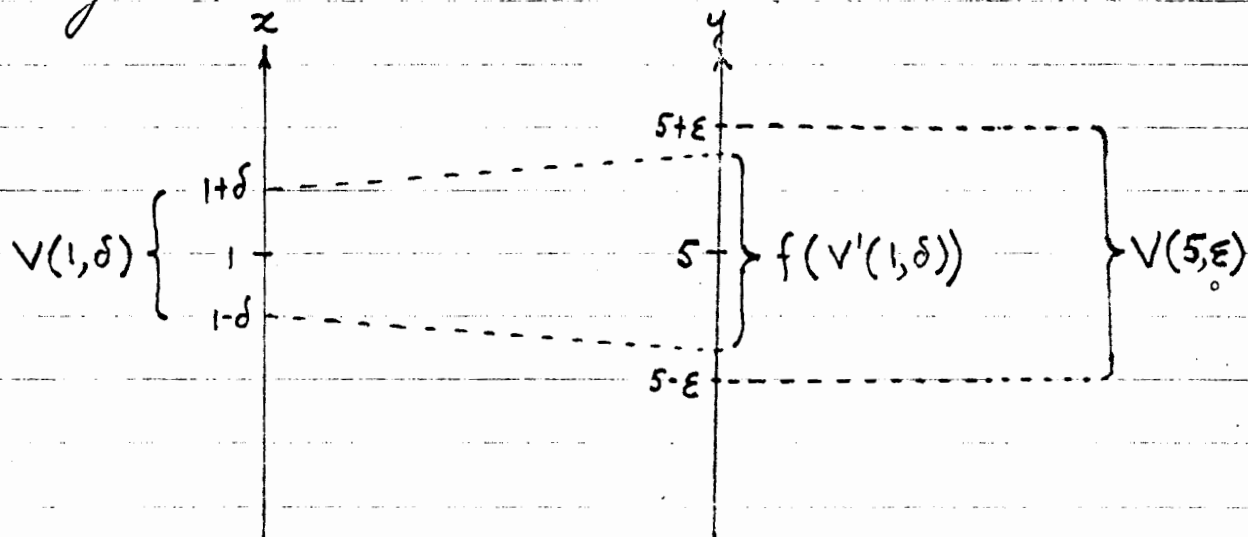
$$\text{por otro lado: } 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x)-5| = |(2x+3)-5| < \varepsilon$$

$$\text{pero: } 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 2|x-1| < 2\delta \Rightarrow |2x-2| < 2\delta$$

$$\text{pero } |(2x+3)-5| = |2x-2| < 2\delta = \varepsilon$$

si hacemos $\delta = \varepsilon/2$ queda demostrado que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

Cuando es necesario expresar δ en función de ε , es a veces conveniente dibujar los ejes x y y como líneas paralelas, en lugar de estar en ángulo recto.



La figura sugiere otra manera de relacionar δ con ε :

Dado que la función es monótona creciente, y que $V(1, \delta)$ está acotado superiormente por $1+\delta$ e inferiormente por $1-\delta$ se tiene que:

$$f(1-\delta) < f(x) < f(1+\delta) \text{ para toda } x \in V'(1, \delta)$$

ó sea: $f(V'(1, \delta)) \subset (f(1-\delta), f(1+\delta))$

pero: $f(1-\delta) = 2(1-\delta) + 3 = 5 - 2\delta$

$f(1+\delta) = 2(1+\delta) + 3 = 5 + 2\delta$

$$\Rightarrow f(V'(1, \delta)) \subset (5 - 2\delta, 5 + 2\delta) = V(5, 2\delta)$$

$$\Rightarrow 2\delta \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta \text{ máximo es } \varepsilon/2$$

$$2.- f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Solución:

Debemos tener: $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$.
 si $0 < |x| < \delta \Rightarrow |x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| = |x| |\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq |x| < \delta$
 puesto que $|\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq 1$ para toda $x \neq 0$.

Por lo anterior se ve que si $\delta = \varepsilon$
 $|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}| < \varepsilon$ para $0 < |x| < \delta$

$$3.- f(x) = \sqrt{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

Solución:

Debemos tener: $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$

Observando que:

$$|\sqrt{x} - 1| = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x} + 1}$$

Haciendo $\delta = \varepsilon \Rightarrow 0 < |x - 1| < \varepsilon$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|x - 1|}{\sqrt{x} + 1} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x} + 1} < \varepsilon$$

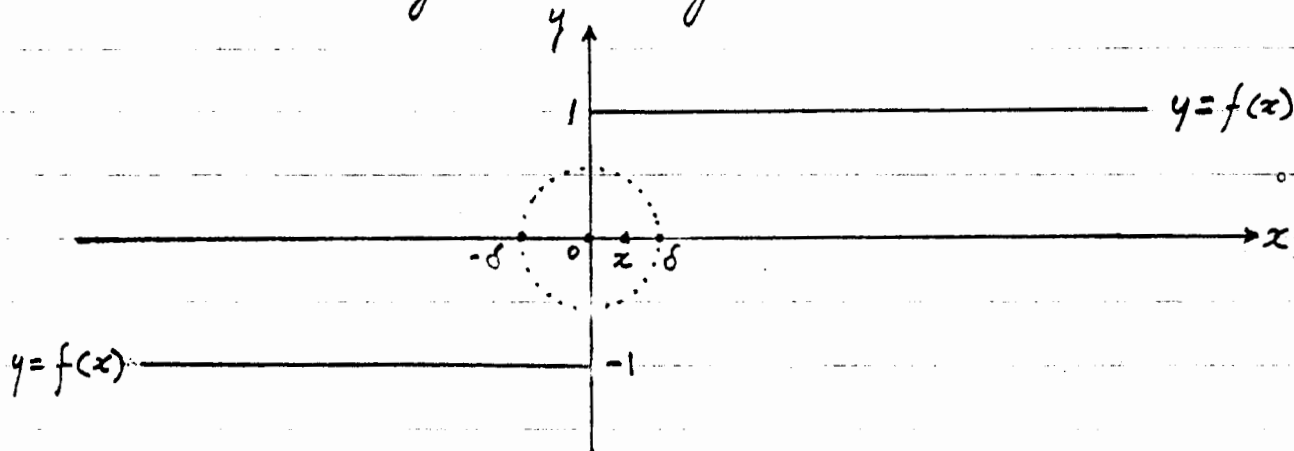
$$\Rightarrow 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 1| < \varepsilon$$

En seguida se dará un ejemplo en el cual no existe el límite para una función dada en un punto dado.

4.- $f(x) = \frac{|x|}{x}$; $(x \neq 0)$; ¿existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

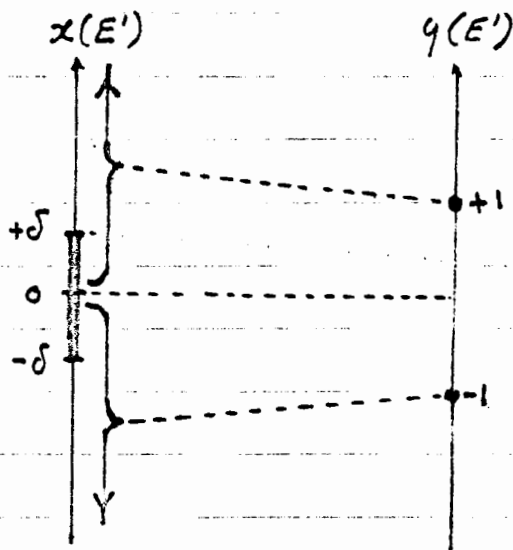
Solución:

Construyamos la gráfica de $f(x)$



Intuitivamente nos damos cuenta que no importa que tan pequeño se escoja $\delta > 0$, hay valores de x , en el intervalo $-\delta < x < \delta$, donde $f(x) = 1$ y también $f(x) = -1 \Rightarrow$ no es posible hallar una faja horizontal de ancho < 2 , de modo que, si $\epsilon < 1$, la faja horizontal definida por las rectas $y = b \pm \epsilon$ pueda incluir ambas porciones de la gráfica.

Por lo anterior se puede concluir que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ no existe.



La imagen de $V'(0, \delta) = f(V'(0, \delta)) \in y(E')$ consiste sólo de los dos puntos $y = +1, y = -1$, para toda x $(-\delta < x < \delta)$:

$$f(V'(0, \delta)) = \{1, -1\}$$

$$\Rightarrow f(V'(0, \delta)) \neq V(b, \epsilon), \forall \epsilon < 1$$

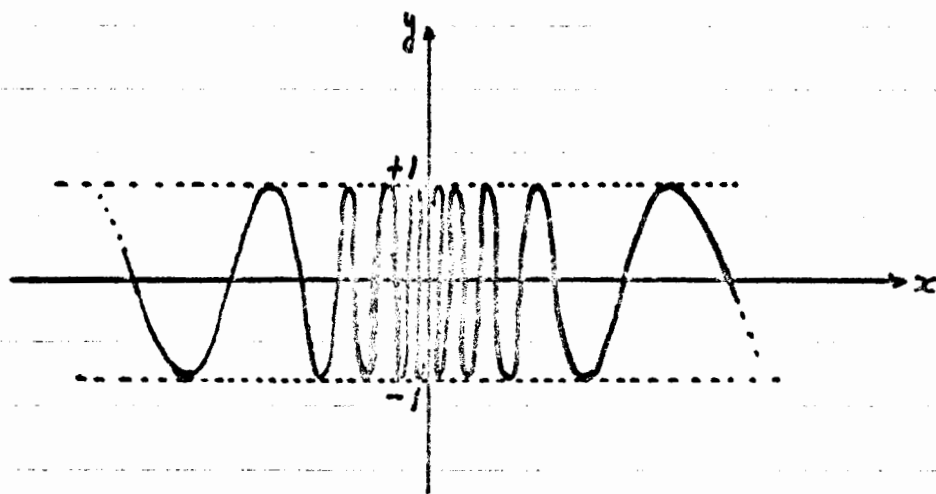
5.-

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Solución:

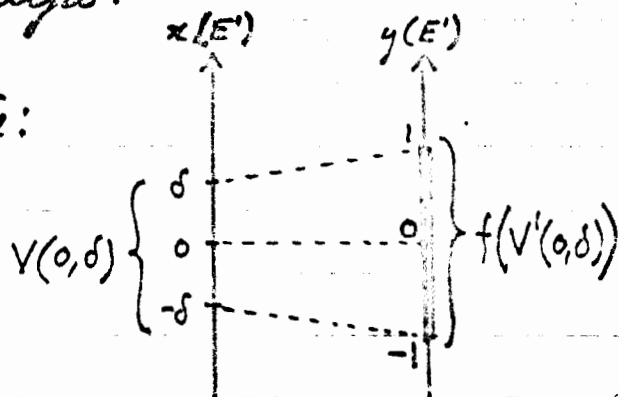
La gráfica de $f(x)$ es la que se muestra a continuación:



Obsérvese que cuando $x \rightarrow 0$, por la derecha ó por la izquierda, la función oscila más y más rápidamente entre -1 y $+1$. $\Rightarrow f(V'(0, \delta)) = [-1, 1]$ (intervalo cerrado); sin importar cuán grande ó pequeña sea δ .

$\Rightarrow f(V'(0, \delta)) \neq V(b, \epsilon)$, si $\epsilon < 1$; sin importar el punto $b \in y(E')$ que se elija.

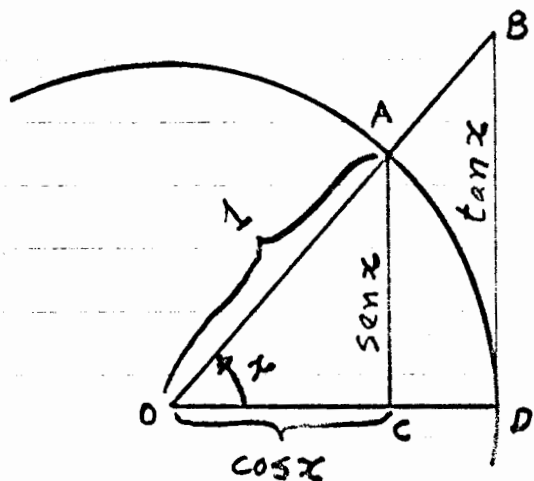
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe:



6.- Demostrar, geométicamente, que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Solución: Para $x > 0$ (La demostración vale para $x < 0$)



$1^\circ 210 < x < 72$
 $\text{área } \triangle OAC < \text{área } \text{sector } OAD < \text{área } \triangle OBD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin x \cos x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad (1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

$$\Rightarrow 1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \checkmark$$

Para el caso $x = -x$ ($\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$)

7.- Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$

Solución

$$|x^3 - 8| < \varepsilon \quad ; \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

$$|x^3 - 8| = |x - 2| |x^2 + 2x + 4|$$

$$\text{para } \delta < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow x^2 < 9, \quad 2x < 6$$

$$\Rightarrow |x^2 + 2x + 4| < 19$$

$$\Rightarrow |x^3 - 8| = |x - 2| |x^2 + 2x + 4| < 19\delta$$

$$\Rightarrow 19\delta = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \quad \checkmark$$

Obrévese que:

δ es el mínimo de 1 y $\frac{\varepsilon}{19}$

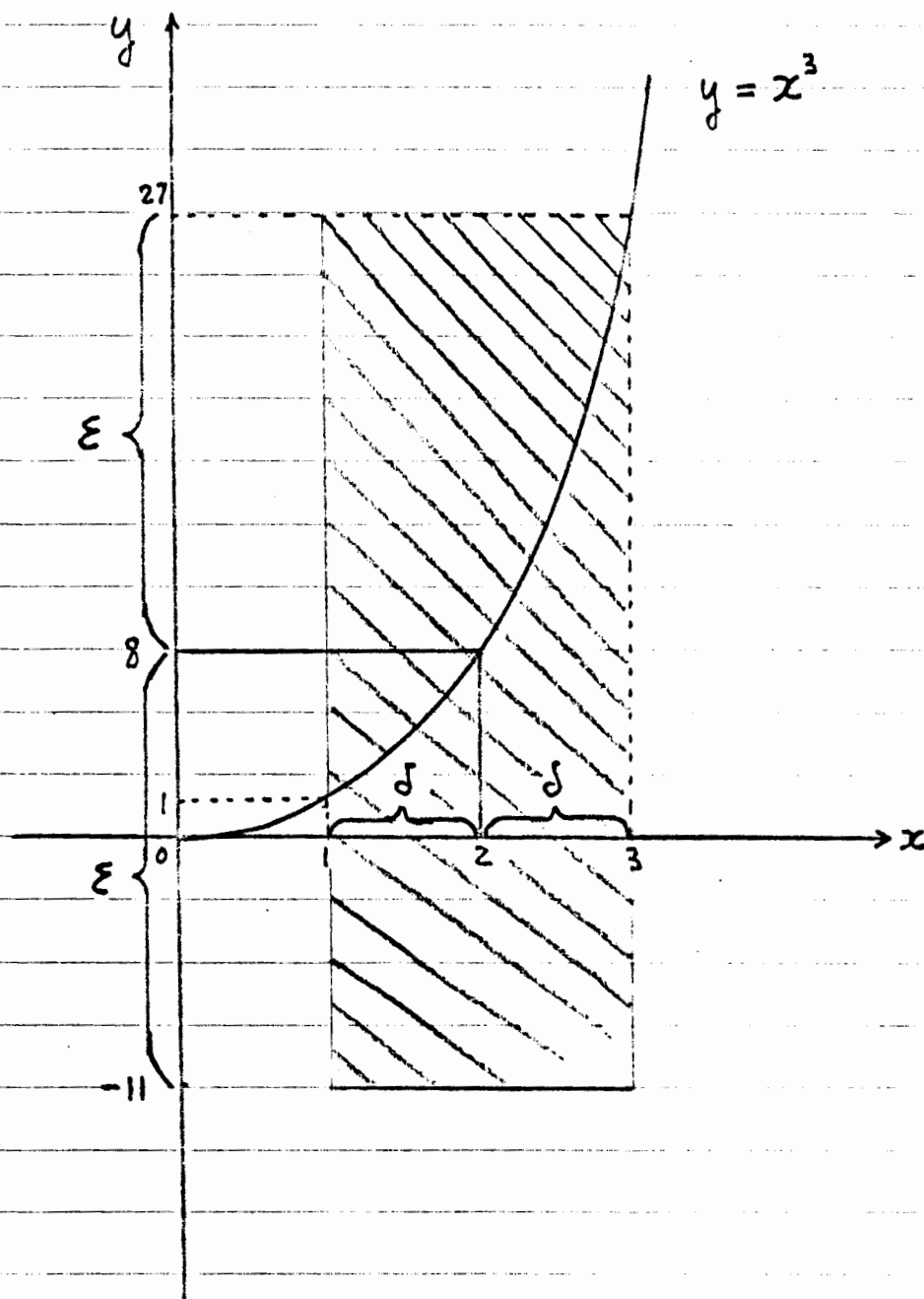
$$\forall 0 < |x - 2| < \delta < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$$

Se acostumbra escribir la condición exterior del modo siguiente:

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{19}\right)$$

Nótese que si $\delta > 1 \Rightarrow$ debemos hallar otro $\delta = \delta(\varepsilon)$, lo cual resulta siempre posible.

Si $\delta \leq 1 \Rightarrow$ cualquier $\varepsilon \geq 19\delta$ resuelve el problema.



Teorema: Dados dos conjuntos métricos X y Y , y la función $f: X \rightarrow Y$; si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

siendo a un punto de acumulación de X ; $b, c \in Y$:

Se afirma que $b = c$

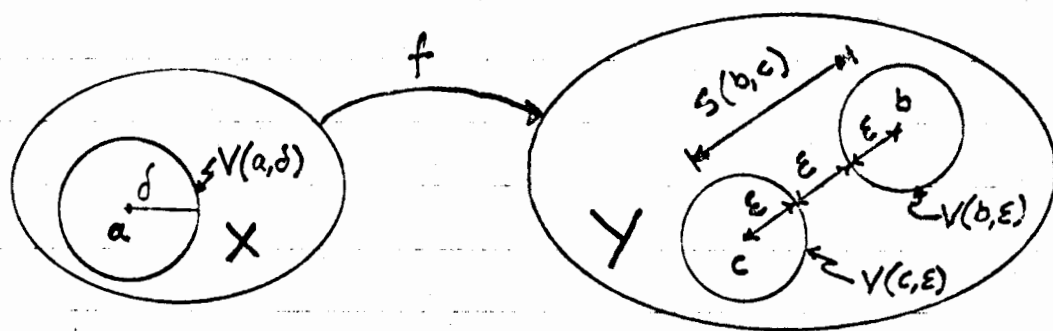
En otras palabras, si el límite existe, es único.

Demostración:

Supongamos $b \neq c$; hagamos $\varepsilon = \frac{S(b, c)}{3}$.

Puesto que, por hipótesis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\Rightarrow$ existe $V(a, \delta_1)$ tal que $f(V'(a, \delta_1)) \subset V(b, \varepsilon)$

Asimismo: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, $\Rightarrow$ existe $V(a, \delta_2)$ tal que $f(V'(a, \delta_2)) \subset V(c, \varepsilon)$



Sea $\delta =$ menor de los valores δ_1 ó δ_2

$\Rightarrow f(V'(a, \delta)) \subset V(b, \varepsilon)$; además:

$f(V'(a, \delta)) \subset V(c, \varepsilon)$; lo cual es imposible, ya

que $V(b, \varepsilon) \cap V(c, \varepsilon) = \emptyset$; siendo $V'(a, \delta) \neq \emptyset$ (por la definición de límite) $\Rightarrow b = c$

$\Rightarrow$ el límite es único.

Límites infinitos. - Se presenta frecuentemente el caso de que cuando $x \rightarrow a$, $f(x)$ crece ó decrece sin límite; en cuyo caso se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

De modo más preciso, decimos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, si para cada número $M > 0$, podemos encontrar un número $\delta > 0$ (en general δ depende de M) tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Análogamente: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, si para toda $M > 0$ puede hallarse un $\delta > 0$ tal que $f(x) < -M$ cuando $0 < |x - a| < \delta$.

A menudo se presenta la necesidad de estudiar el comportamiento de una función cuando $x \rightarrow \infty$ (x crece sin límite) ó $x \rightarrow -\infty$ (x decrece sin límite).

Se dice que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, puede hallarse un número $N > 0$ (que, en general depende de ε), tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ para toda $x > N$.

De manera semejante se define $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Ejemplo 1) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$:

Solución: haciendo $y = \frac{1}{x}$, si $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1; \text{ (del problema 6 anterior)}$$

2) Demostrar que : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \infty$.

Debemos hacer ver que para toda $M > 0$, existe un número $\delta > 0$ (que es función de M) tal que:

$$\frac{1}{(x-1)^4} > M, \text{ cuando } 0 < |x-1| < \delta$$

Demostración:

$$\text{Si } \frac{1}{(x-1)^4} > M \Rightarrow 0 < (x-1)^4 < \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow 0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt[4]{M}}.$$

Haciendo $\delta = \frac{1}{\sqrt[4]{M}}$ vemos que se cumple lo requerido.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4} = \infty$$

3) Demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$.

$$|f(x) - b| = \left| \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right| = \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{haciendo } N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

Se tiene:

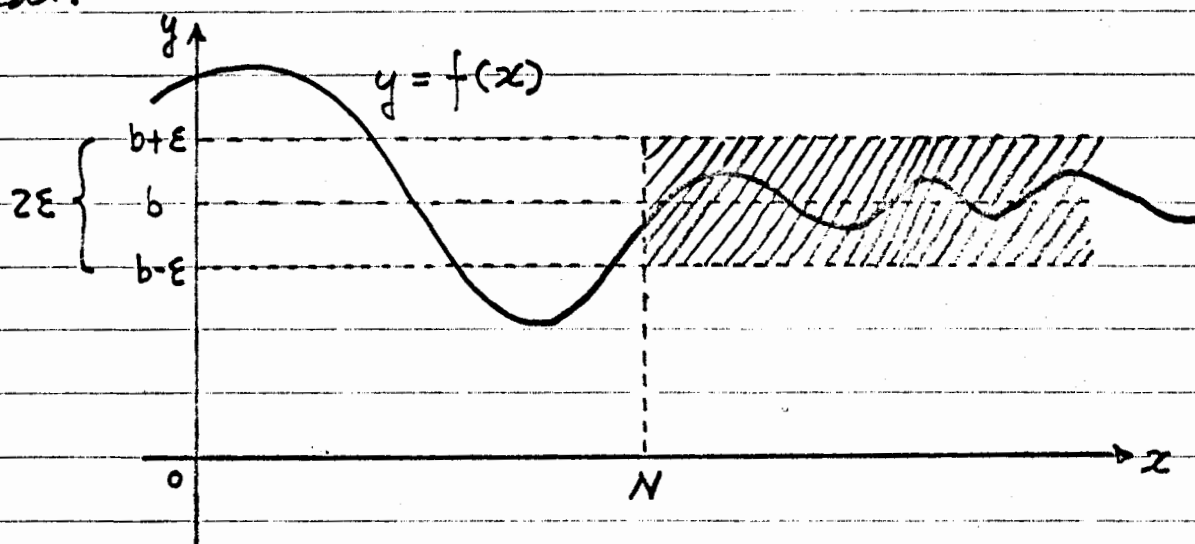
$$|f(x) - b| < \varepsilon, \text{ para toda } x > N.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

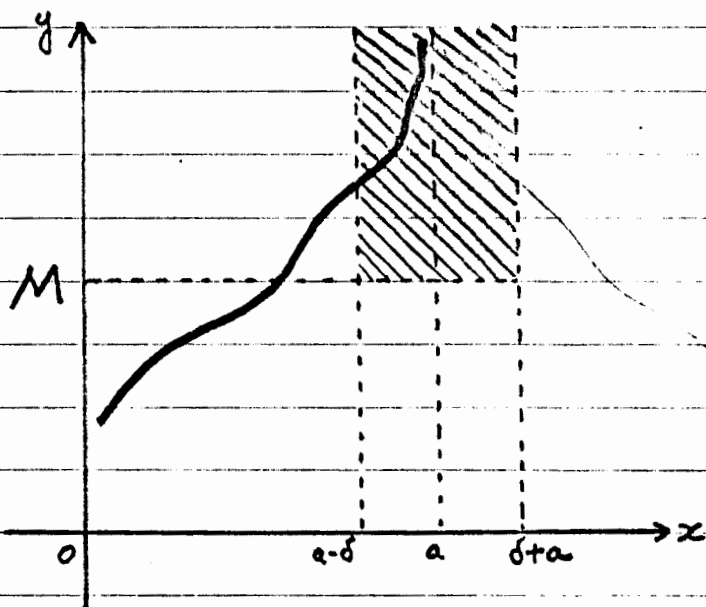
geométricamente: Decir que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b, \text{ es afirmar}$$

que, fijada una franja horizontal de anchura 2ε , simétrica respecto a la recta $y=b$, los puntos imágenes de la función, que corresponden a los valores de x , en el intervalo $x > N$, quedan todos contenidos en dicha franja horizontal.

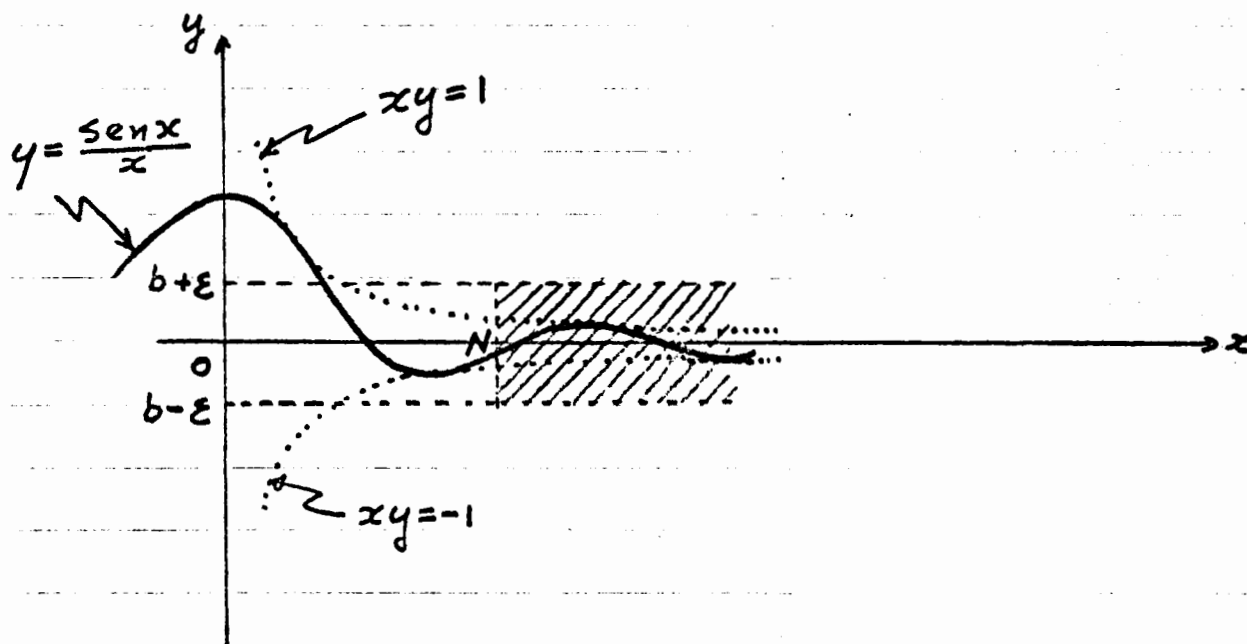


Análogamente: podemos representar gráficamente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ de la forma siguiente:



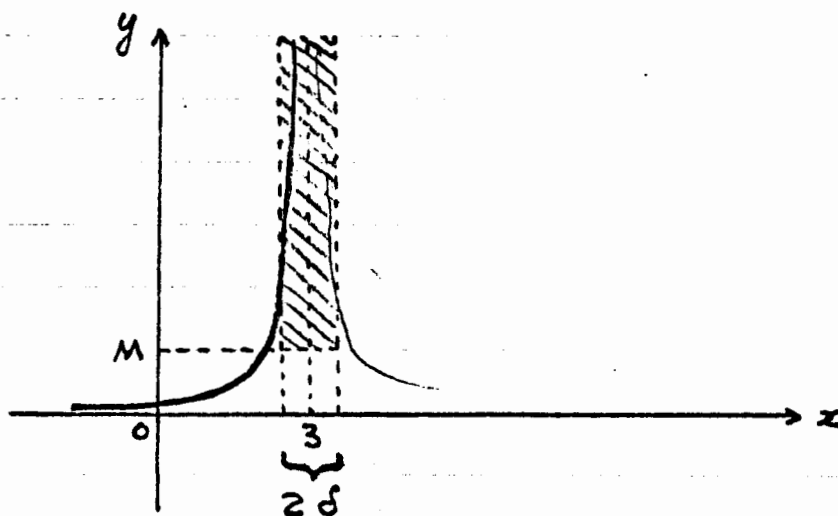
Ejemplo: Dibujando la gráfica de la función: a) $y = \frac{\text{sen } x}{x}$, hacer ver que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0$$



b) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$; $(-\infty < x < 3)$;

hacer ver que: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$



Límites laterales. - Al definir límite, no se especifica la forma en que el punto x (variable) tiende al punto fijo a . En ocasiones conviene que se restrinja el modo en que $x \rightarrow a$.

Sea $f: A \rightarrow B$; siendo $A \subset \mathbb{R}^n$; $B \subset \mathbb{R}^m$;
teniendo además: $V(a, \delta) \subset A$; se definen:

Límites por la izquierda. - Se dice que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a por la izquierda, es igual a $b \iff$ dado un número $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$, tal que: $a - \delta < x < a$, ($x \in A$)
 $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$$

Límites por la derecha. - Decimos que límite de $f(x)$, cuando x tiende a a por la derecha, es igual a $c \iff$ dado un número $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que: $a < x < a + \delta$, ($x \in A$)
 $\Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$

Notación:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$$

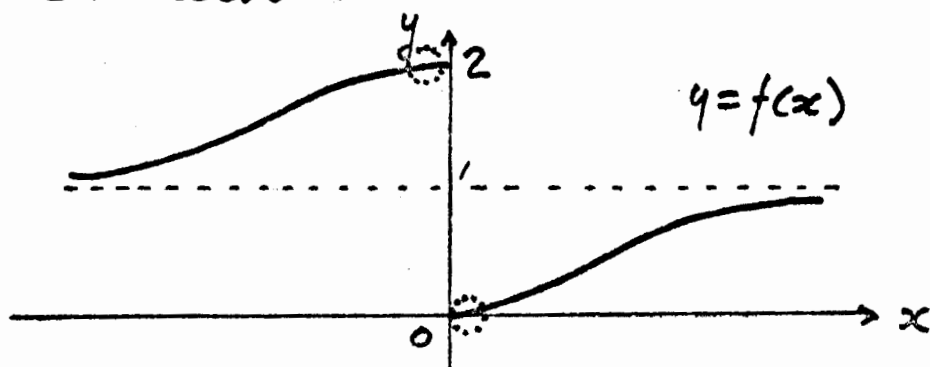
Se demuestra: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, cuando existen, y son iguales, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$; siendo valores finitos.

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe

Ejemplos: Calcular en cada uno de los siguientes problemas, los límites por la izquierda y por la derecha, en el punto que se indica:

1) $f(x) = \frac{2}{1 + e^{1/x}}$; (Cuando $x \rightarrow 0$).

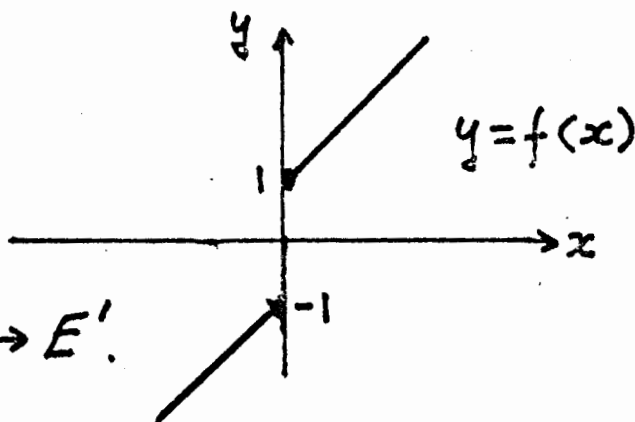
Solución:



De la gráfica se ve que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

2) $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x}$; (Cuando $x \rightarrow 0$).



$$f: (E' - \{0\}) \rightarrow E'.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

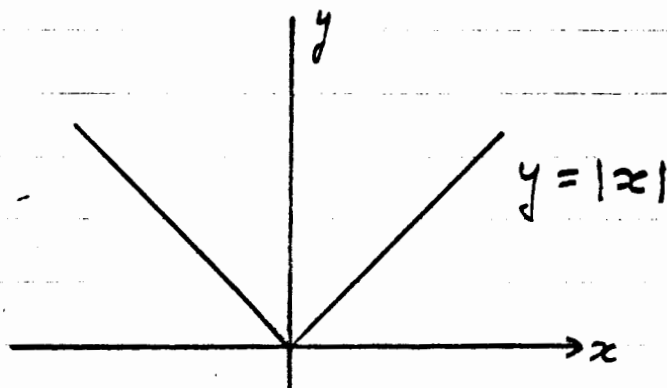
3.- $f(x) = |x|$. ; (Cuando $x \rightarrow 0$).

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

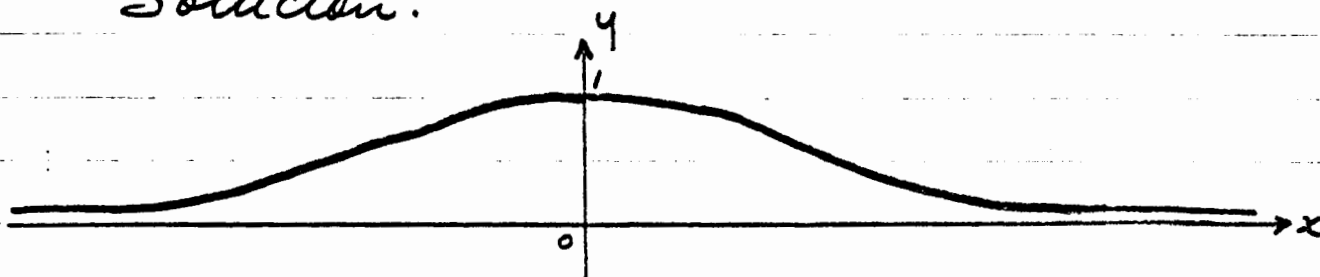
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



4.- $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; $\begin{cases} a) \text{ (Cuando } x \rightarrow \infty) \\ b) \text{ (Cuando } x \rightarrow -\infty) \end{cases}$

Solución:

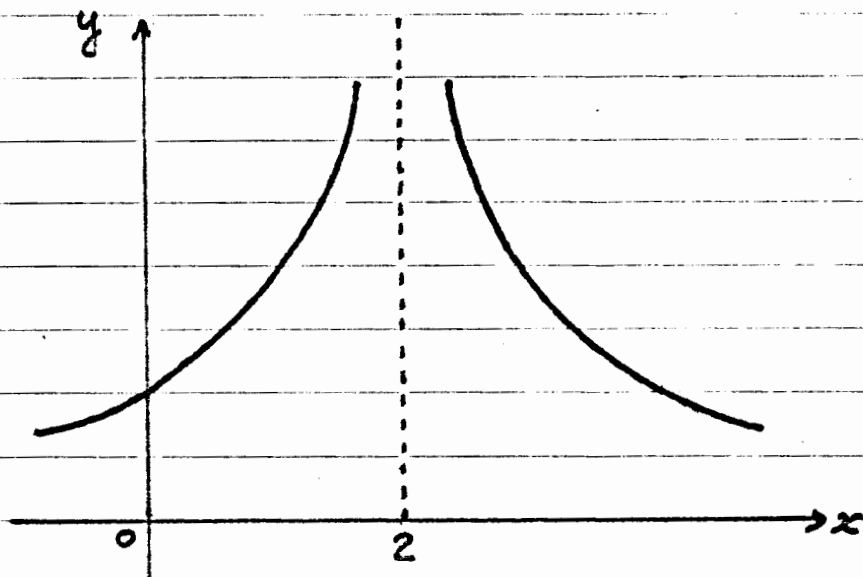


$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

5.-

$$f(x) = \frac{4}{(x-2)^2} ; (\text{Cuando } x \rightarrow 2).$$

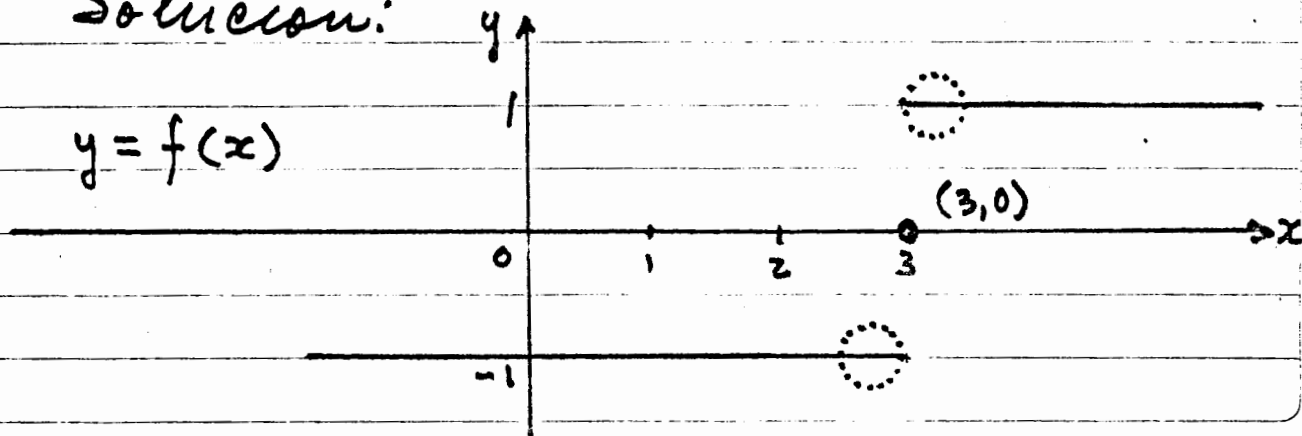


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty ;$$

sin embargo, de acuerdo con la definición de límite, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe, pues para $0 < |x-2| < \delta$, se ve que no es posible hallar un intervalo $|y-b| < \varepsilon$, independientemente de cuán pequeño se tome δ .

$$6.- \quad f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 0, & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

Solución:



$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1.$$

Demostración: puesto que $x > 3 \Rightarrow f(x) = 1$
 $|f(x) - b| = |1 - 1| < \varepsilon$, para todo: $3 < x < 3 + \delta$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1. \quad \checkmark$$

Demostración: para $x < 3 \Rightarrow f(x) = -1$
 $|f(x) - b| = |-1 - (-1)| = 0 < \varepsilon$, para todo: $3 - \delta < x < 3 \checkmark$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existe.

7.- Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = 2$

$$\text{Demostración: } |f(x) - b| = \left| \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} - 2 \right| =$$

$$= \left| \frac{2 - 2 - 2e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} \right| = \frac{2}{e^{\frac{1}{x}} + 1} < \varepsilon \text{ (1); (puesto que } e^{\frac{1}{x}} > 0).$$

por otro lado:

$$a < x < a + \delta \Rightarrow 0 < x < \delta \quad (a = 0)$$

$$\text{pero, de (1): } \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} > \ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)}; \text{ si } 0 < \varepsilon < 2$$

$$\text{haciendo } \delta = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}} = 2. \quad \checkmark$$

Observación: si $\varepsilon \geq 2$, entonces cualquier valor $\delta > 0$ sirve, puesto que: $\frac{2}{e^{\frac{1}{x}} + 1} < \varepsilon$, para toda $x > 0$.

Observación.- Al calcular el límite de una función $f: E' \rightarrow E'$, nos damos cuenta que sólo es posible que el punto móvil x se acerque al punto fijo a por la izquierda o por la derecha, lo cual condujo a la definición de límites laterales. En el caso de funciones $f: E^2 \rightarrow E'$ nos damos cuenta que existen infinitas maneras en que el punto de coordenadas variables (x, y) puede aproximarse al punto fijo (x_a, y_a) ; lo cual hace que el comportamiento de una función de dos variables pueda resultar bastante complicado.

Ejemplos: Calcular el límite de:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; \text{ cuando } (x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \neq (0, 0).$$

Siguiendo las siguientes trayectorias de (x, y) a $(0, 0)$:

- a) a lo largo de la recta $y = x$.
- b) a lo largo de cualquier recta.
- c) a lo largo de la parábola $y^2 = x$.

Solución:

$$a) \text{ si } y = x \Rightarrow f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x}{1 + x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{0}{1} = 0.$$

$$b) y = mx \Rightarrow f(x, mx) = \frac{x m^2 x^2}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{x m^2}{1 + m^4 x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{0}{1} = 0$$

$$c) \quad y^2 = x \Rightarrow f(y^2, y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} (y^2, y) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \text{ no existe.}$$

Otra observación importante es la siguiente:
 En general, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_a, y_a)} f(x,y)$, cuando $(x,y) \rightarrow (x_a, y_a)$ es
 diferente del límite iterado: $\lim_{x \rightarrow x_a} (\lim_{y \rightarrow y_a} f(x,y))$

Ejemplo: Sea: $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$; Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)).$

b) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)).$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y).$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$

b) $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2}) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$

c) Haremos ver que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe.
 Haciendo $y = mx$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + m^2} = \frac{1}{1 + m^2}.$$

Es sea, para cada valor de m , el límite de $f(x,y)$
 tendrá un valor diferente. $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ no existe.

Teoremas sobre límites:-

Sean $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$.

1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c$.

2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) (\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = bc$.

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$; $(c \neq 0)$.

4) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$; (si n es par, $b \geq 0$).

5) $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$.

6) $\lim_{x \rightarrow a} \log_p f(x) = \log_p \lim_{x \rightarrow a} f(x)$; $(p > 1)$.

7) $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$; $(c = \text{constante})$.

Nota:- Los teoremas anteriores son aplicables asimismo tanto a límites por la derecha, como a límites por la izquierda.

Como ejercicio, demostraremos el Teorema 6): Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \frac{1}{b} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{b} = 1$$

$$\text{si } \beta > 1 ; \varepsilon > 0 ; \Rightarrow \beta^\varepsilon > 1 ; \beta^{-\varepsilon} < 1 \Rightarrow \beta^{-\varepsilon} < 1 < \beta^\varepsilon$$

$$\Rightarrow \beta^{-\varepsilon} < \frac{f(x)}{b} < \beta^\varepsilon$$

tomando logaritmos base β :

$$-\varepsilon \log_\beta \beta < \log_\beta f(x) - \log_\beta b < \varepsilon \log_\beta \beta$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < \log_\beta f(x) - \log_\beta b < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\log_\beta f(x) - \log_\beta b| < \varepsilon ;$$

de la definición de límite: $|f(x) - b| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \log_\beta f(x) = \log_\beta b ;$$

$$\text{pero } b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \log_\beta f(x) = \log_\beta \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \checkmark$$

Con base en el resultado anterior, deducir el Teorema 5)

Solución:

$$\text{haciendo: } f(x) = e^{f(x)}$$

de 6) para $\beta = e$; $\log_e = \ln$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln e^{f(x)} = \ln \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ln \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)}$$

Tomando antilogaritmos:

$$e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} \quad \checkmark$$

Ejemplos: Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Solución: puesto que $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\Rightarrow 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 ; \text{ pero si } x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + 2y)$$

Solución: del Teorema 1)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + 2y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} x^2 + \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} 2y$$

del Teorema 2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = \lim_{x \rightarrow 1} x \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \cdot 1 = 1$$

del Teorema 7)

$$\lim_{y \rightarrow 2} 2y = 2 \lim_{y \rightarrow 2} y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + 2y) = 1 + 4 = 5$$

Demostración, a partir de la definición de límite:

Debe hacerse ver que dado cualquier $\varepsilon > 0$ es posible hallar $\delta > 0$ tal que $|x^2 + 2y - 5| < \varepsilon$, cuando:
 $0 < |x - 1| < \delta$; $0 < |y - 2| < \delta$.

Solución: Si $0 < |x - 1| < \delta$; $0 < |y - 2| < \delta$, $\Rightarrow$

$$1 - \delta < x < 1 + \delta ; 2 - \delta < y < 2 + \delta$$

$$\Rightarrow 1 - 2\delta + \delta^2 < x^2 < 1 + 2\delta + \delta^2 ; 4 - 2\delta < 2y < 4 + 2\delta$$

$$\text{Sumando: } 5 - 4\delta + \delta^2 < x^2 + 2y < 5 + 4\delta + \delta^2$$

$$\Rightarrow -4\delta + \delta^2 < x^2 + 2y - 5 < 4\delta + \delta^2$$

$$\text{Si } \delta \leq 1 \Rightarrow -5\delta < x^2 + 2y - 5 < 5\delta \Rightarrow |x^2 + 2y - 5| < 5\delta$$

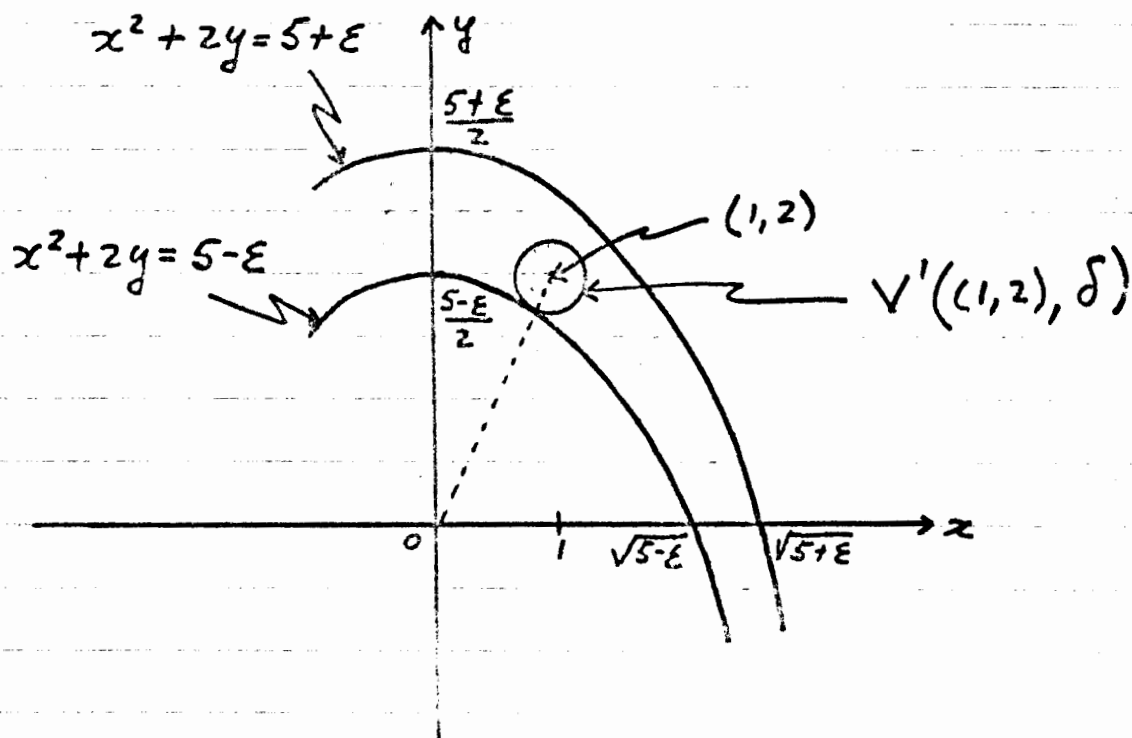
$$\text{Cuando: } 0 < |x - 1| < \delta ; 0 < |y - 2| < \delta$$

$$\Rightarrow \text{Si } \delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right) \Rightarrow |x^2 + 2y - 5| < \varepsilon \text{ cuando}$$

$$0 < |x - 1| < \delta ; 0 < |y - 2| < \delta$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + 2y) = 5$$

Geométricamente:



Se observa que el círculo, con centro en $(1,2)$, de radio δ queda íntegramente contenido en la zona comprendida entre las parábolas:

$$x^2 + 2y = 5 + \varepsilon$$

$$x^2 + 2y = 5 - \varepsilon$$

De ahí que, con auxilio de la geometría analítica, se puede suponer que es factible hallar en forma explícita la relación:

$$\delta = \delta(\varepsilon)$$

Con lo cual se demuestra que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + 2y) = 5$$

Continuidad:- Sea $f: A \rightarrow B$; siendo A y B conjuntos métricos.

Se dice que la función f es continua en el punto $a \in A \iff$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Obsérvese que la noción de continuidad de una función f en un punto a en el dominio de f , implica las siguientes tres afirmaciones:

1.- $f(a)$ existe $\Rightarrow f(x)$ está definida para $x=a$.

2.- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

3.- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si no se cumple alguna de las tres condiciones anteriores, se dice que la función f es "discontinua" en el punto a .

Geométricamente, Si $f: E' \rightarrow E'$, la función f será continua en todos los puntos de un intervalo (a, b) , si la gráfica f^* de f puede trazarse de modo que la punta del lápiz se conserve constantemente sobre la hoja de papel al recorrer el intervalo (a, b) .

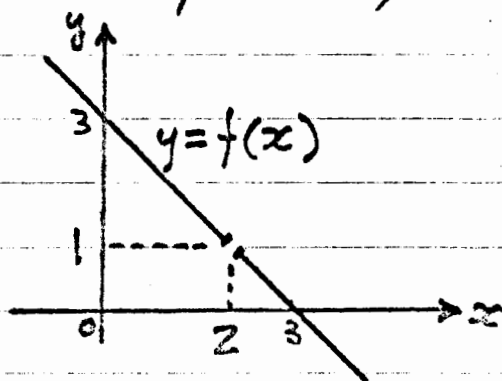
Lo anterior es imposible al trazar la gráfica de una función discontinua.

(A la hora de trazar la gráfica de una función discontinua, se debe tener en cuenta que la gráfica no puede ser una sola línea continua.)

Ejemplos: Determinar si es o no es continua la función dada, en el punto indicado, en cada uno de los siguientes ejemplos:

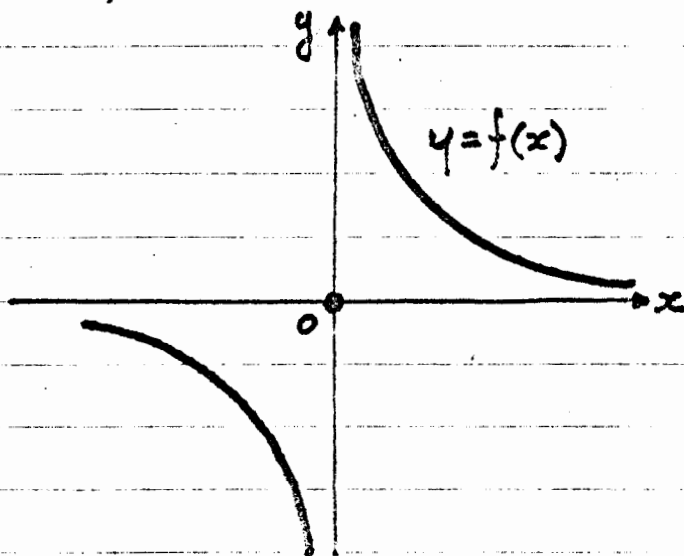
1) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}$; en: $x = 2$.

$f(x)$ no es continua en $x = 2$, pues $f(2)$ no está definido; aun cuando $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$



2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$; en: $x = 0$.

$f(x)$ no es continua en $x = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe; aun cuando $f(0) = 0$, por definición.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$3) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad \text{en: } (x,y) = (0,0)$$

Aun cuando $f(x,y)$ está definida en el punto $(0,0)$, tenemos que $\lim f(x,y)$ no existe cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

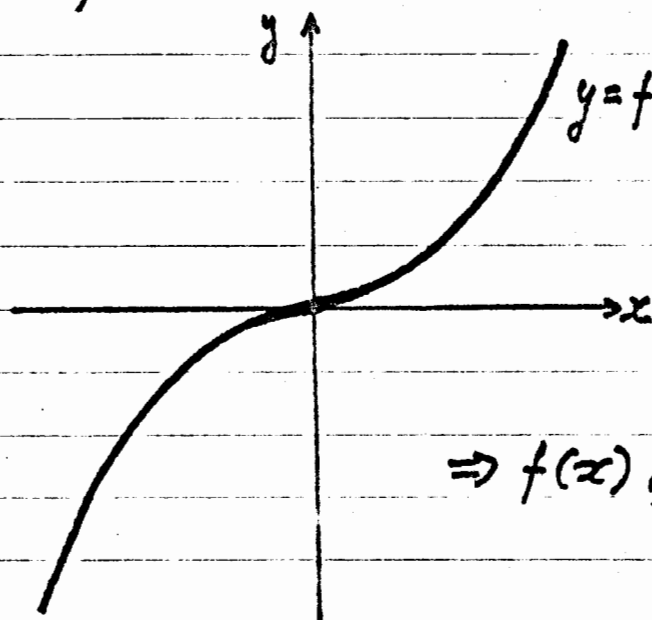
En efecto, si nos aproximamos al origen a lo largo de cualquier recta $y = mx \Rightarrow$

$$f(x,y) = f(x, mx) = \frac{2xmx}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2} \Rightarrow$$

Cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$ podemos obtener cualquier valor para $\lim f(x,y)$, con solo escoger el valor apropiado de m .

$\Rightarrow f(x,y)$ no es continua en $(x,y) = (0,0)$

$$4) \quad f(x) = x/|x| \quad ; \quad \text{en: } x=0.$$



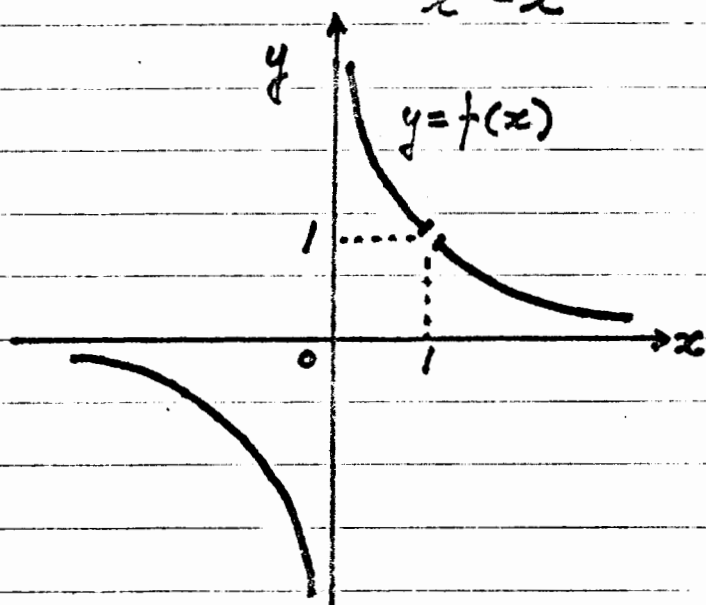
$$f(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

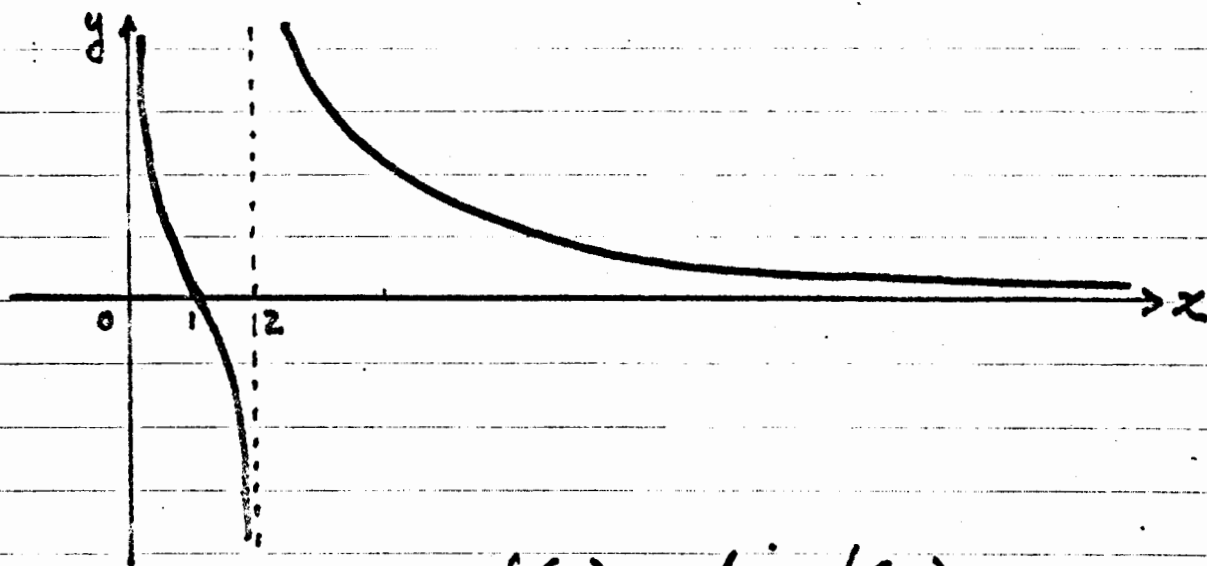
$\Rightarrow f(x)$ si es continua en $x=0$

5) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$; $\lim: x=1$



$f(x)$ no es continua en $x=1$, puesto que $f(1)$ no está definido

6) $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x}$; $\lim: x=1$



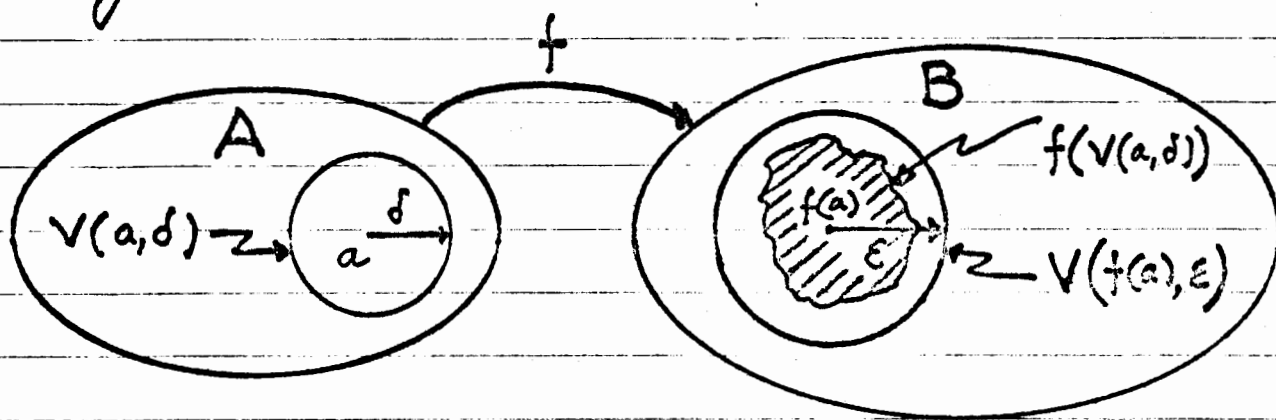
$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ si es continua en $x=1$.

Otra definición de continuidad: Se dice que la función $f: A \rightarrow B$ es continua en el punto $a \in A \iff$ por cada $V(f(a), \epsilon)$ existe $V(a, \delta)$ tal que:

$$f(V(a, \delta)) \subseteq V(f(a), \epsilon).$$

Geométricamente:



Observaciones:

1.- El punto $a \in A$ debe ser un punto de acumulación de A, pues de no serlo resulta f continua sin que se verifique que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a);$$

puesto que entonces podemos hallar, para δ lo suficientemente pequeño, una $V(a, \delta)$ que no contiene ningún otro punto, además de a ; con lo cual se satisface la condición:

$$f(V(a, \delta)) \subseteq V(f(a), \epsilon)$$

para cualquier ϵ .

2.- Si en la definición anterior:
 $A \subseteq E'$ y $B \subseteq E'$, los entornos se reducen a
 intervalos abiertos; con lo cual la defini-
 ción de continuidad resulta, para un punto
 $a \in A$:

La función f es continua en el punto
 $a \in A \iff$ para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Cuando $|x - a| < \delta$

Ejemplo: Demostrar que $f(x) = x^2$ es una
 función continua en el punto $x = 2$.

Solución:

Si $|x^2 - 4| < \varepsilon$ ①, cuando $|x - 2| < \delta$ ②, debe-
 mos hallar $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$.

Si: $|x - 2| < \delta$

$$\Rightarrow |x + 2||x - 2| = |x^2 - 4| < \delta |x + 2| \quad \text{③}$$

$$\text{pero: } |x - 2| + 4 \geq |x - 2 + 4| = |x + 2| \quad \text{④}$$

$$\Rightarrow |x - 2| + 4 < \delta + 4 \quad (\text{de } \text{②})$$

$$\Rightarrow \delta + 4 > |x - 2| + 4 \geq |x + 2| \quad (\text{de } \text{④})$$

$$\Rightarrow \delta + 4 > |x + 2| \Rightarrow |x + 2| < \delta + 4 \quad \text{⑤}$$

$$\Rightarrow \delta |x + 2| < \delta(\delta + 4) \quad (\delta > 0)$$

$$|x^2 - 4| < \delta |x + 2| < \delta(\delta + 4) \quad (\text{de } \text{③} \text{ y } \text{⑤})$$

$$\Rightarrow |x^2 - 4| < \delta(\delta + 4) = \varepsilon \quad (\text{de } \text{①})$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta^2 + 4\delta$$

3.- Puesto que f es continua en $a \in A$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$\Rightarrow$ Si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ entonces f es continua

en el punto $a \in A$, podremos calcular límites calculando el valor de la función, cuando sepamos que la gráfica de f está representada por una curva continua, y que $f(a)$ existe.

Ejemplos:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\text{sen } x)$

Solución: puesto que la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$ es continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\text{sen } x) = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Toda función polinomial $p: E' \rightarrow E'$ es continua para cualquier punto $x \in E'$

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

c) Cualquier función $h: E' \rightarrow E'$; siendo

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n}$$

es continua para toda $x \in E'$, excepto aquellos valores de x que hagan el denominador de $h(x)$ cero.

Formas indeterminadas: Al aplicar alguno de los teoremas sobre límites en el cálculo de ciertos límites, es frecuente que el resultado se manifieste en alguna de las siguientes formas, denominadas "formas indeterminadas":

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$$

A continuación se estudiará la forma de eliminar estas indeterminaciones.

1.- Formas: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

Regla de L'Hôpital:

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, la regla de L'Hôpital establece lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}; \text{ donde } f'(x) \text{ y } g'(x)$$

son derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

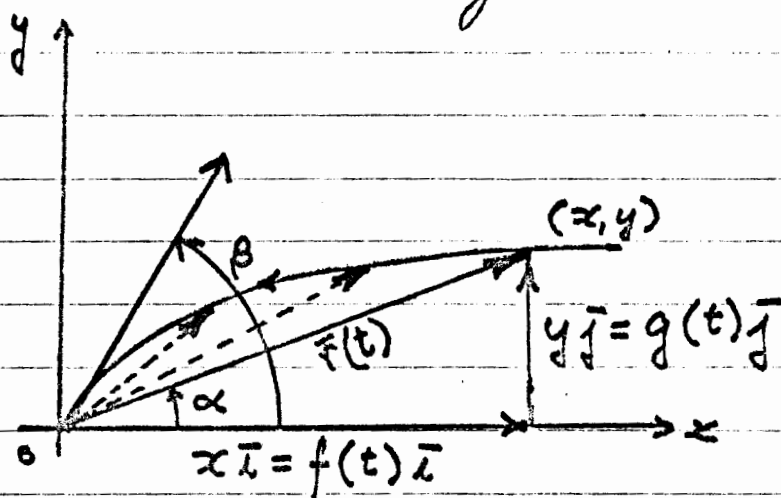
Si: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ nuevamente, se

puede entonces generalizar la regla de L'Hôpital de modo que resulta:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

siempre que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones continuas, con sus n primeras derivadas también continuas.

La regla de L'Hôpital puede justificarse geométricamente de la siguiente manera:



Sea la curva de ecuaciones paramétricas $x=f(t)$, $y=g(t)$. En forma vectorial, la ecuación de la curva es:

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

Si para un valor del parámetro $t=a$, se tiene $f(a)=g(a)=0 \Rightarrow$ la curva pasa por el origen cuando $t=a$.

Sabiendo que la tangente es la posición límite de la secante, si el punto (x, y) se desplaza sobre la curva hacia el origen, se tendrá que la relación $\frac{f(t)}{g(t)}$ y $\frac{f'(t)}{g'(t)}$, corres-

pondiente a las pendientes de los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ respectivamente, tenderá a dar el mismo cociente al acercarse (x, y) más y más al origen, de modo que cuando

$f(a) = g(a)$, será válida la siguiente ecuación:

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

En caso de que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

ó sea: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, puede reducirse

a la forma $\frac{0}{0}$ observando que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{0}} = \frac{0}{0}$$

Con lo cual queda justificada la regla de L'Hôpital tanto para la forma $\frac{0}{0}$ como para la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplos: Calcular los siguientes límites:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x a^x}{a^x - 1}$; ($a > 0, a \neq 1$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x a^x}{a^x - 1} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + x a^x \ln a}{a^x \ln a} = \frac{1+0}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x a^x}{a^x - 1} = \frac{1}{\ln a}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}.$$

Solución:

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\Rightarrow x^{1/2} = e^{\ln x^{1/2}} = e^{1/2 \ln x} = e^{\frac{\ln x}{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{2}};$$

Tomando ln. en ambos miembros de la ecuación:

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{2}};$$

del teorema 6):

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln e^{\frac{\ln x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ (por regla de L'Hôpital);} \end{aligned}$$

Tomando antilogaritmos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = e^0 = 1$$

$$3) y = \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = y_1 = \frac{3e^{3x} - 3}{10 \sin 5x \cos 5x} = \frac{3e^{3x} - 3}{5 \sin 10x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_1 = \frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla de L'Hôpital:

$$\Rightarrow \frac{f''(x)}{g''(x)} = y_2 = \frac{9e^{3x}}{50 \cos 10x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y_2 = \frac{9}{50}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x} = \frac{9}{50}$$

4) $y = \frac{\tan 7x}{\tan 3x}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y = \frac{\infty}{\infty}$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = y_1 = \frac{7 \sec^2 7x}{3 \sec^2 3x} = \frac{7}{3} \left(\frac{\cos 3x}{\cos 7x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_1 = \frac{0}{0} ;$$

puesto que: $\lim [f(x)]^2 = [\lim f(x)]^2$

$$y_2 = \frac{f_1''(x)}{g_1''(x)} = \frac{7}{3} \left(\frac{3 \sec 3x}{7 \sec 7x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} y_2 = \frac{7}{3} \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{3 \sec 3x}{7 \sec 7x} \right) \right]^2 = \frac{7}{3} \cdot \frac{3^2}{7^2} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 7x}{\tan 3x} = \frac{3}{7}$$

5) Aplicando 4 veces consecutivas la regla de L'Hôpital, se comprueba que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x^2 - 2}{x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{12}$$

$$6) \quad y = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{0}{0}$$

Demostremos que, por medio de la regla de L'Hôpital, no es posible resolver este problema; en efecto:

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{n! x^{n+1}}$$

ó sea, para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{0}{0}$$

7) Debe tenerse cuidado de no aplicar la regla de L'Hôpital a formas que no sean indeterminadas:

$$y = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 3x + 2} ; \lim_{x \rightarrow 2} y = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 4}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{2} = \underline{3}$$

El resultado es incorrecto, puesto que no es indeterminado $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 4}{2x - 3} = \frac{8}{1} = 8$

$\Rightarrow$ el resultado correcto es:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \underline{8} \quad ; \quad (\underline{\text{no } 3})$$

2.- Forma: $0 \cdot \infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$$

Este caso de indeterminación puede resolverse por la regla de L'Hôpital, si se procede como a continuación se indica:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplos:

1) $y = x^\alpha \ln x$; $(\alpha > 0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0 \cdot (-\infty) ;$$

haciendo:

$$y = \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \frac{-\infty}{\infty}$$

$$y_1 = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{x^\alpha}{\alpha} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y_1 = -\frac{0}{\alpha} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Obsérvese que si se hace: $y_2 = \frac{x^\alpha}{\frac{1}{\ln x}}$ se

obtiene, al aplicar la regla de L'Hôpital:

$$y_3 = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y_3 = -\frac{0}{\frac{1}{0 \cdot \infty}}$$

Con lo cual se ve que subsiste la indeterminación.

2) $y = x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$; ($a = \text{constante}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty \cdot 0$$

haciendo: $y = \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

$$y_1 = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a^{\frac{1}{x}} \ln a \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = a^{\frac{1}{x}} \ln a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y_1 = \ln a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1) = \ln a$$

Notese que en este problema 2), no resulta conveniente hacer: $y_2 = \frac{x}{a^{\frac{1}{x}} - 1}$

3.- Forma: $\infty - \infty$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty - \infty$$

Esta forma de indeterminación puede transformarse a la forma $\frac{0}{0}$ mediante el empleo de la siguiente identidad:

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

Ejemplo:

$$y = \cot x - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty - \infty$$

haciendo entonces:

$$\cot x - \frac{1}{x} = \frac{x - \tan x}{\frac{x}{\cot x}} = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

$$y_1 = \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \frac{-x}{1 + x \cot x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y_1 = 0, \text{ puesto que } y_1 = \frac{-x}{1 + \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) = 0$$

4: Formas: ∞^0 , 0^0 , 1^∞

Estos casos pueden transformarse a la forma $0 \cdot \infty$ (ya estudiada), empleando la siguiente identidad:

$$[f(x)]^{\phi(x)} = e^{\phi(x) \ln f(x)}$$

Ejemplos:

$$1) y = (\tan x)^{\tan 2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y = \infty^0;$$

haciendo: $y_1 = e^{(\tan 2x)(\ln \tan x)}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y_1 = e^{0 \cdot \infty};$$

puesto que $\lim_{x \rightarrow a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$ (teorema 5)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [(\tan 2x)(\ln \tan x)] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln \tan x}{\cot 2x} = \frac{\infty}{\infty};$$

Aplicando regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cot x \sec^2 x}{-2 \csc^2 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (-2 \sin x \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y_1 = e^0 = 1;$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\tan 2x} = 1.$$

2)

$$y = x^x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = 0^0 ;$$

haciendo:

$$y = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \cdot \infty ;$$

$$\text{haciendo ahora } x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} ;$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

3) Empleando la última fórmula, comprobar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$:

$$\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} ; \text{ así } x \rightarrow \infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 ; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^y} = 1 \checkmark$$

$$4) y = \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x ; k \in \mathbb{R}^{\#}$$

A primera vista puede pensarse que $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$; puesto que $\frac{k}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow 1 + \frac{k}{x} \rightarrow 1$;

$y \rightarrow 1^{\infty}$; que es una forma indeterminada.

haciendo: $y = e^{x \ln(1 + \frac{k}{x})}$ i del teorema 5:
 si: $f(x) = x \ln(1 + \frac{k}{x}) = \frac{\ln(1 + \frac{k}{x})}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{\ln(1 + \frac{k}{x})}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{\frac{x}{x+k} \cdot \frac{-k}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{kx}{x+k}$$

$$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{k}{1 + \frac{k}{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \frac{k}{x}} = k$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

5) De la fórmula anterior se obtiene, para $k=1$

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x ; \text{ ó bien:}$$

$$e = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\ldots$$

Límite de funciones que dependen de un parámetro:

$$6) \quad y = \frac{x^\alpha}{e^x} \quad ; \quad (\alpha \text{ es un parámetro})$$

Se comprende que $\lim_{x \rightarrow \infty} y$ puede depender del valor de $\alpha \in \mathbb{R}^\#$

a) Si $\alpha \leq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha e^x} = 0$$

b) Si $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \frac{\infty}{\infty}$$

Al aplicar la regla de L'Hôpital, vemos que el exponente del numerador se va reduciendo hasta hacerse 0 si $\alpha \in \mathbb{N}$; ó un número entre -1 y 0 si $\alpha \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$$

Se concluye de a) y b) que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0, \text{ para toda } \alpha \in \mathbb{R}^\#$$

Es interesante observar que:

$-\infty < \alpha \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y$ NO es forma indeterminada

$0 < \alpha < \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} y$ SI es forma indeterminada.

$$7) \quad y = \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \quad ; (\alpha, \beta > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\beta/\alpha}} \right)^\alpha$$

α	β	FORMA IN- DETERMINADA	$\lim_{x \rightarrow \infty} y$
> 0	> 0	SI	0
> 0	< 0	NO	∞
< 0	> 0	NO	0
< 0	< 0	SI	∞
$= 0$	$= 0$	NO	1

Observación: No son formas indeterminadas las siguientes:

$$a) \quad 0^\infty = 0$$

$$b) \quad 0^{-\infty} = \infty$$

$$c) \quad \infty^\infty = \infty$$

$$d) \quad \infty^{-\infty} = 0$$

Demostración: Sea $y = f(x)^{g(x)}$; $f(x) \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln f(x)^{g(x)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)]}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (1)$$

$$a) \quad \text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = 0^\infty$$

pero:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty(-\infty) = -\infty$$

de (1)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$$

$$\Rightarrow 0^\infty = 0 \quad \checkmark$$

b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = 0^{-\infty}$$

pero:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = (-\infty)(-\infty) = \infty$$

de ①

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^{\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow 0^{-\infty} = \infty \quad \checkmark$$

c) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = \infty^{\infty}$$

pero:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \infty = \infty$$

de ①

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^{\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow \infty^{\infty} = \infty \quad \checkmark$$

d) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} y = \infty^{-\infty}$$

pero:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ en } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = (-\infty)(\infty) = -\infty$$

de ①:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \infty^{-\infty} = 0$$

Ejemplos: 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} = 0^{\infty} = 0$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^x = \infty^{\infty} = \infty$

Cálculo de límites de la función $h(x)$

a) cuando $x \rightarrow 0$; siendo $a_0 = b_0 = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{0}$

b) Cuando $x \rightarrow \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty}$

$h(x)$ representado en pag 32 (cociente de 2 polinomios)

Caso a) Se divide el numerador y el denominador entre la menor potencia de x que haya en $h(x)$:

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 - 5x}{x^2 - 7x}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2 - 5x}{x^2 - 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 7} = \frac{5}{7}$$

Caso b) Se divide el numerador y el denominador de $h(x)$ entre la mayor potencia de x :

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x}{x^6 - 3x^5}$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x}{x^6 - 3x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^5}}{1 - \frac{3}{x}} = 0$$

Obsérvese que la regla de L'Hôpital es aplicable en ambos casos; pero el caso b) puede resultar relativamente complicado.

Continuidad en un intervalo. - Si A y B son conjuntos métricos; siendo $f: A \rightarrow B$. Se dice que f es continua "en un intervalo", si f es continua en todos los puntos del intervalo.

Teorema 1.- Sea M un conjunto métrico, dominio de las funciones $f: M \rightarrow E'$; $g: M \rightarrow E'$, que son continuas en un punto $a \in M$.

Se afirma que las siguientes funciones también son continuas en el punto a .

1) $f \pm g$

2) $f g$

3) $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$)

Demostraciones:- por hipótesis:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

1) Sabemos que: $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = \lim_{x \rightarrow a} f \pm \lim_{x \rightarrow a} g =$
 $= f(a) \pm g(a)$ (por hipótesis)

pero: $f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f \pm g) = (f \pm g)(a) \Rightarrow f \pm g$ es continua en $a \in A$. ✓

2) Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} (f g) = \lim_{x \rightarrow a} f \lim_{x \rightarrow a} g =$

$= f(a) g(a) = (f \cdot g)(a) \Rightarrow f g$ es continua en a ✓

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f}{\lim_{x \rightarrow a} g} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g}\right)(a) ; (g(a) \neq 0)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \left(\frac{f}{g}\right)(a) \Rightarrow \frac{f}{g}$ es continua en el punto $a \in A$. ✓

Algunas propiedades de las funciones continuas:

Teorema 2.- Sean A, B, C conjuntos métricos; siendo las siguientes funciones, continuas en todos los puntos de sus respectivos dominios.

$$f: A \rightarrow B$$

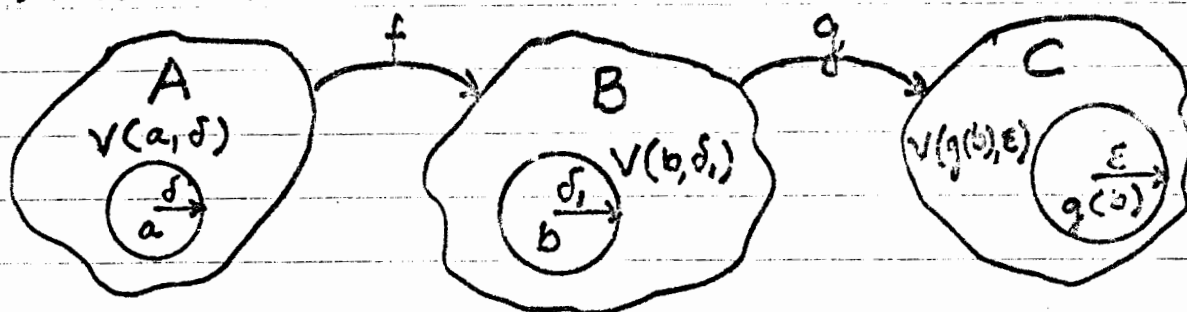
$$g: B \rightarrow C.$$

Se afirma que la función:

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

es continua en todos los puntos de su dominio.

Demostración:



por ser continua g , se tiene:

$$g(V(b, \delta_1)) \subset V(g(b), \epsilon) = V(g(f(a)), \epsilon) \quad (1)$$

además, por ser f continua en A

$$\Rightarrow f(V(a, \delta)) \subset V(f(a), \delta_1) = V(b, \delta_1) \quad (2)$$

de (1) y (2):

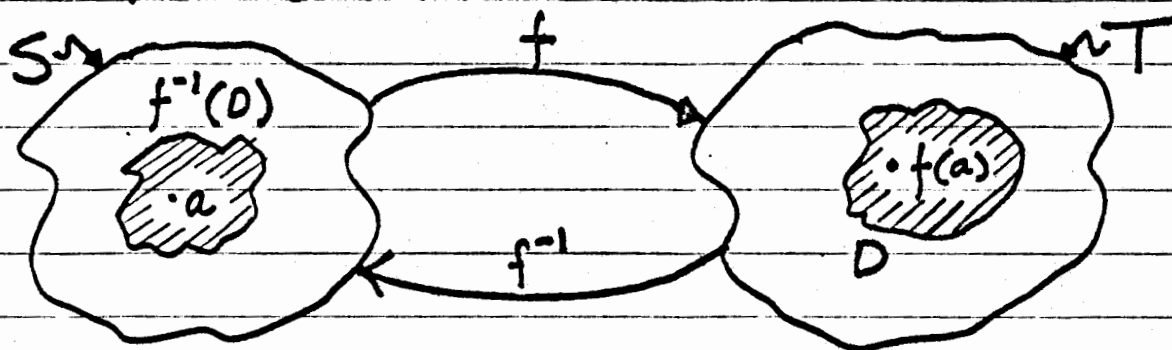
$$g \circ f(V(a, \delta)) \subset g(V(b, \delta_1)) \subset V(g(f(a)), \epsilon)$$

$\Rightarrow g \circ f$ es continua en A . ✓

Teorema 3. - La imagen inversa de un conjunto abierto, es un conjunto abierto.

Si $f: S \rightarrow T$ es una función continua siendo D un subconjunto abierto de T , entonces $f^{-1}(D)$ es un subconjunto abierto de S .

Demostración:



Sea $a \in f^{-1}(D)$

$$\Rightarrow f(a) \in D$$

puesto que, por hipótesis, D es un subconjunto abierto, y:

Existe además $V(f(a), \epsilon) \subset D$ (de ①);
y en virtud de la continuidad de f , existe asimismo: $V(a, \delta)$

tal que: $f(V(a, \delta)) \subset V(f(a), \epsilon) \subset D$; (de ①)

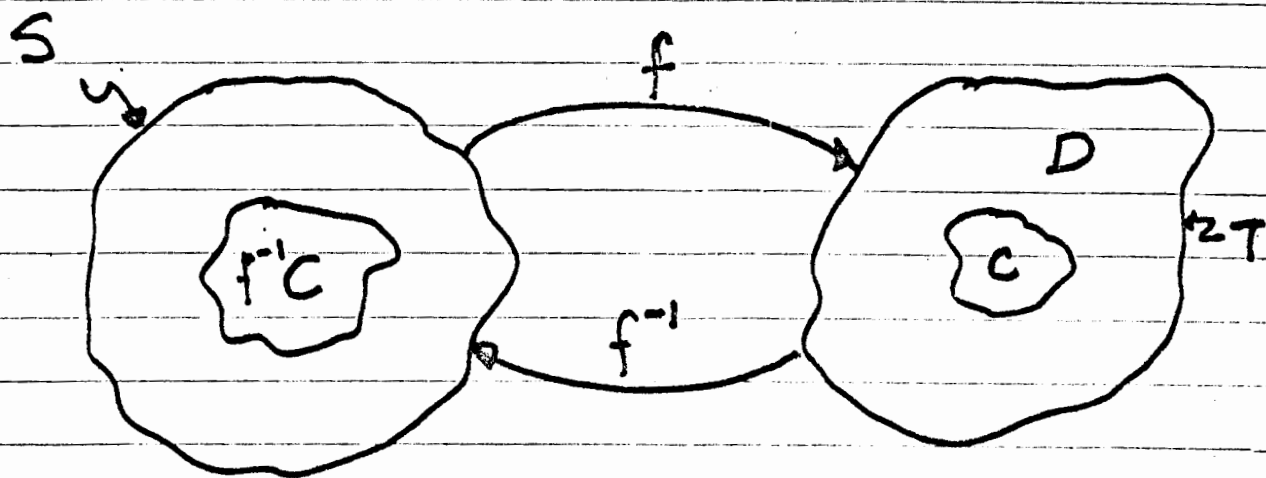
$$\Rightarrow V(a, \delta) \subset f^{-1}(D)$$

$\Rightarrow f^{-1}(D)$ es un subconjunto abierto. ✓

Teorema 4.- La imagen inversa de un conjunto cerrado es un conjunto cerrado.

Si $f: S \rightarrow T$ es una función continua, siendo C un subconjunto cerrado en T , resulta que el conjunto $f^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado de S .

Demostración:



Sea $D = T - C$

$\Rightarrow D$ es un conjunto abierto, puesto que es el complemento de un conjunto cerrado (esto quedó establecido anteriormente).

$$\Rightarrow f^{-1}(D) = f^{-1}(T - C) = f^{-1}(T) - f^{-1}(C)$$

(Lo que se demostró en un teorema anterior); puesto que $f^{-1}(D)$ es un conjunto abierto, (del teorema 3 anterior) $\Rightarrow f^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado, por ser el complemento de un conjunto abierto.

$\Rightarrow$ si C es un conjunto cerrado, $\Rightarrow$ que $f^{-1}(C)$ es también conjunto cerrado. $\checkmark$

1) Hallar todos los puntos del intervalo $(-\pi, \pi]$, en que es discontinua la función:

$$y = \sqrt[3]{2} \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| + \frac{\tan 2x}{x+1} + \sec \frac{x-1}{x-2}$$

Solución:

y puede considerarse como suma, producto, cociente y composición de funciones; por lo que, de acuerdo con los teoremas, se tiene:

$$y_1 = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \text{discontinua en } x_1 = 0$$

$$y_2 = \ln \left| \frac{x+3}{x+2} \right| \Rightarrow \text{discontinua en } \begin{cases} x_2 = -2 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

$$y_3 = \tan 2x \Rightarrow \text{discontinua si } 2x = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{ó} \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{4} ; x_5 = \frac{\pi}{4}$$

$$y_4 = \frac{1}{x+1} \Rightarrow \text{discontinua en } x_6 = -1$$

$$y_5 = \sec \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{\cos \frac{x-1}{x-2}} \Rightarrow \text{discontinua en } x_7 = 2$$

$$\text{ó } \frac{x-1}{x-2} = \begin{cases} -\pi/2 & \text{ó} \\ \pi/2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x_8-1}{x_8-2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_8 = \frac{2+2\pi}{2+\pi}$$

$$\frac{x_9-1}{x_9-2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_9 = \frac{2-2\pi}{2-\pi}$$

Resumiendo: la función y es discontinua en los nueve puntos siguientes:

$$\{0\} \cup \{-2\} \cup \{-3\} \cup \{-\frac{\pi}{4}\} \cup \{\frac{\pi}{4}\} \cup \{-1\} \cup \{2\} \cup \left\{ \frac{2+2\pi}{2+\pi} \right\} \cup \left\{ \frac{2-2\pi}{2-\pi} \right\}$$

Clasificación de discontinuidades.-

Sea f una función real de variable real. $f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$.

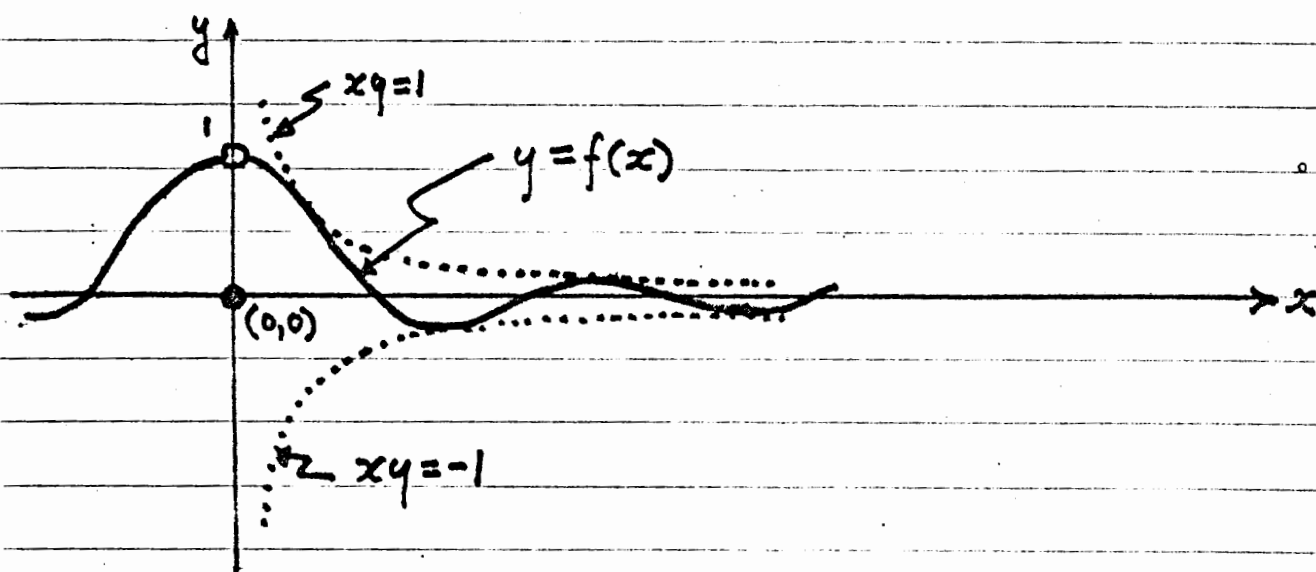
Discontinuidad evitable (ó removable).- Si la función f puede hacerse continua en un punto al asignarle un nuevo valor a la función en el punto de discontinuidad, se dice que la discontinuidad es "evitable".

Este caso se presenta cuando los límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



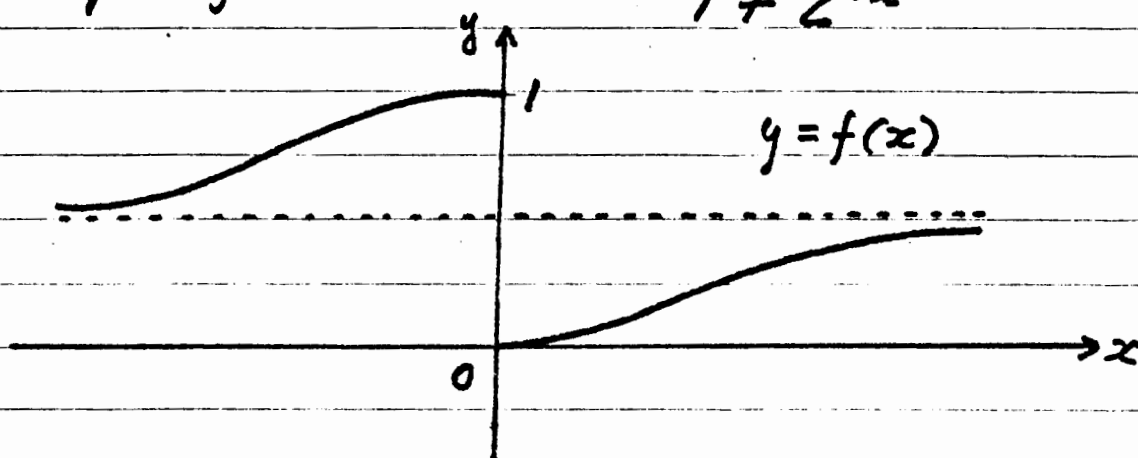
Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$,

la discontinuidad se "evita" si cambiamos la definición de $f(0)$, haciendo $f(0) = 1$ en lugar de $f(0) = 0$, como se definió originalmente.

Discontinuidad de salto (ordinaria o simple).-

Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, aun cuando ambos límites existen y son finitos, se dice que la función f tiene una discontinuidad de "salto" en el punto $x=a$.

Ejemplo 1) $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}} ; x \rightarrow 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

Obsérvese que las discontinuidades de salto no son evitables.

Se llama "salto" a $|\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)|$

En este ejemplo el salto es $|1 - 0| = 1$

Continuidad por la derecha y por la izquierda: Sean A y B conjuntos métricos; Defínase una función $f: A \rightarrow B$:

Se dice que la función f es continua "por la derecha" en el punto $x=a$ si:

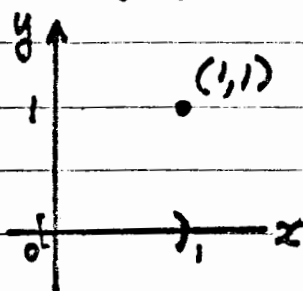
$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$$

Análogamente, la función f es continua "por la izquierda" en el punto $a \in A$, si se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a).$$

Ejemplo: Determinar en qué puntos es continua la función:

$$f = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; y = \text{valor entero máximo de } x\}$$



$$f^* = \{(x, y) \mid 0 \leq x < 1, y = 0\} \cup \{(1, 1)\}$$

para $0 < a < 1$, $y = 0$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = f(a)$

$\Rightarrow f$ es continua en el intervalo $0 < x < a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ es continua por la}$$

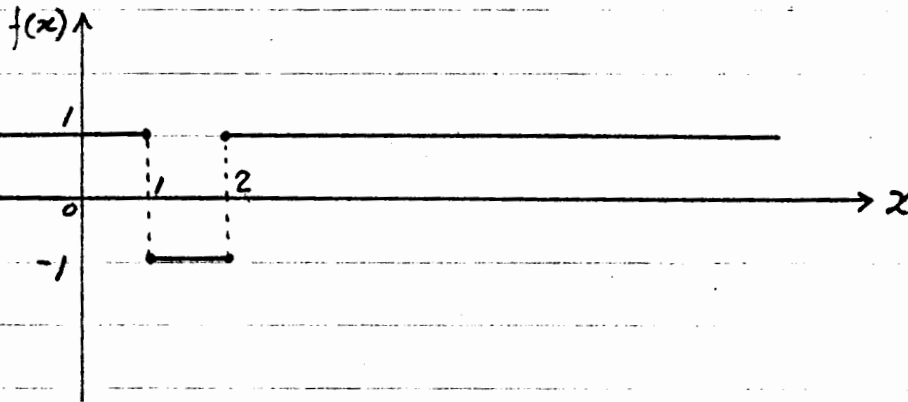
derecha en el punto $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0 \neq f(1) = 1 \Rightarrow f \text{ no es con-}$$

tinua por la izquierda en el punto $x=1$

$$2) f(x) = \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 3x + 2} ; x \neq 2 ; x \neq 1$$

Gráfica de la función:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

Se ve que la función tiene dos discontinuidades de salto: en los puntos $x=1$, y $x=2$.

Amplitud saltos son:

$$|1 - (-1)| = |-1 - 1| = 2$$

$$3) f(x) = \frac{|x^2 + x|}{x}$$

Solución:

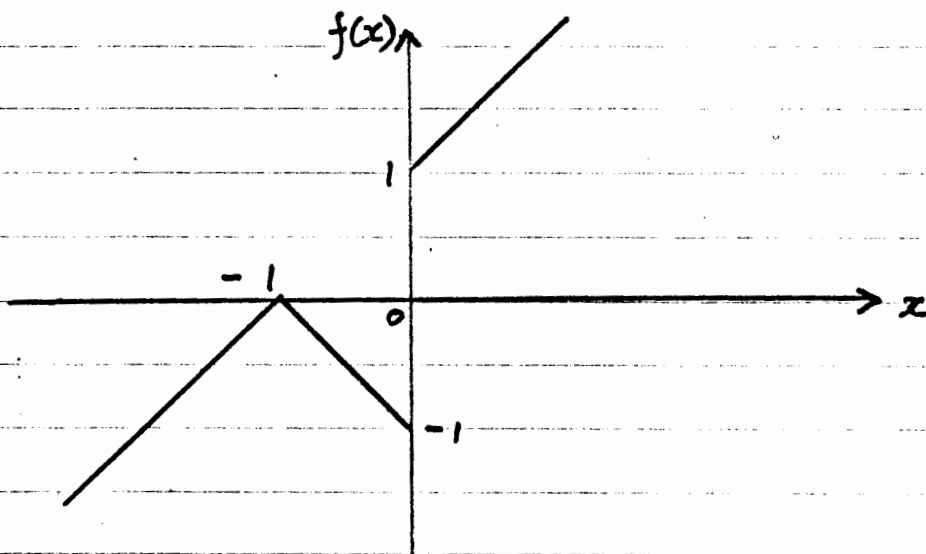
$$x f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0 \\ -x^2 - x, & \text{si } x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \end{cases}$$

$$x(x+1) > 0 \Rightarrow (x < -1) \cup (x > 0)$$

$$x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$\therefore$ la gráfica de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si: } (x < -1) \cup (x > 0) \\ -x-1, & \text{si: } -1 < x < 0 \end{cases}$$



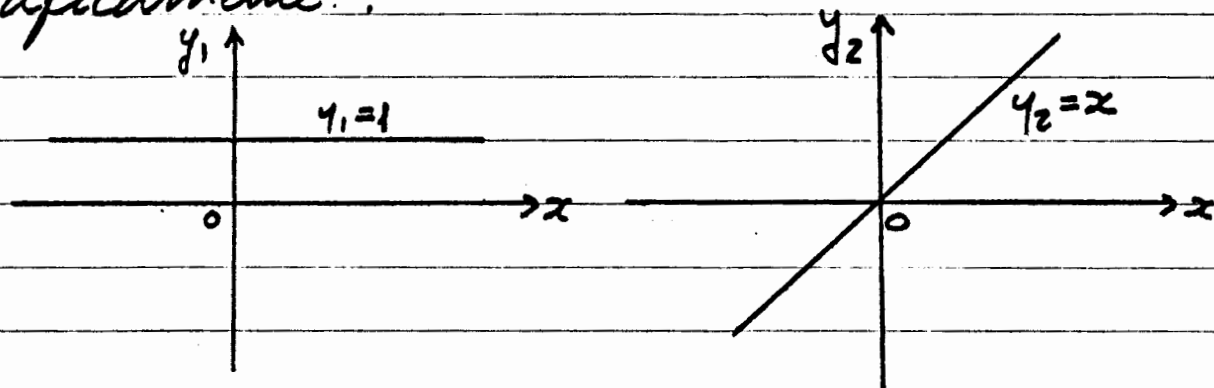
Por lo cual vemos que la función tiene una discontinuidad de salto en el origen (salto = 2); siendo continua para toda $x \in \mathbb{R}^{\#}$, excepto $x=0$

$$4) \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Solución:

haciendo: $y_1 = 1$; $y_2 = x \Rightarrow f(x) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x}$.

Gráficamente:



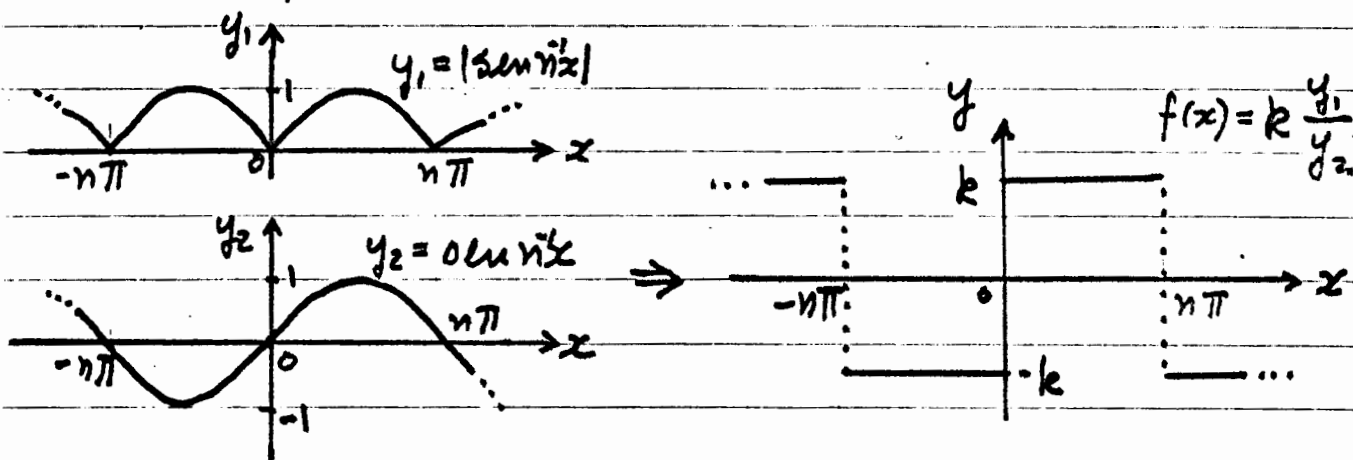
Puesto que $y_2(x) = x \Rightarrow y_2(0) = 0 \Rightarrow$
 $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R}^* - \{0\}$; ó sea
 para toda $x \in \mathbb{R}^*$, excepto $x=0$; $(-\infty < x < 0) \cup (0 < x < \infty)$

$$5) \quad f(x) = \frac{k |\operatorname{sen} n'x|}{\operatorname{sen} n'x}; \quad n \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{R}^*$$

Solución:

haciendo: $y_1 = |\operatorname{sen} n'x|$; $y_2 = \operatorname{sen} n'x$

$$\Rightarrow f(x) = k \frac{y_1}{y_2}$$



6) Determinar el valor numérico de las constantes b y c , de modo que la siguiente función sea continua $\in (-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{si } x \in (-\infty, 0] \\ x + b, & \text{si } x \in (0, 1) \\ c, & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Solución:

Por ser polinomios las funciones que definen $f(x)$ en los 3 intervalos $(-\infty, 0]$; $(0, 1)$; $[1, \infty) \Rightarrow$ la función es continua en el interior de cada uno de los intervalos; pudiendo presentarse discontinuidades de salto, lo cual se evita ajustando los valores de las constantes b y c convenientemente, lo cual se consigue del siguiente modo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 3) = 3 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + b) = b$$

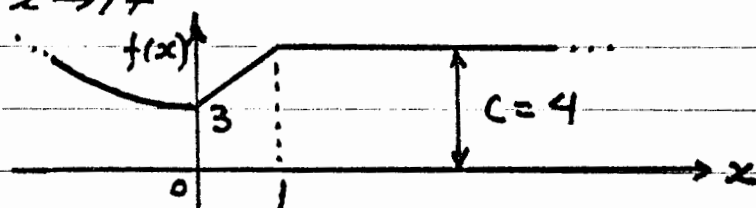
$\Rightarrow$ para continuidad $\in x = 0$ es necesario que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(x)$

$$\Rightarrow b = 3$$

análogamente:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4 = \lim_{x \rightarrow 1^+} c \Rightarrow c = 4.$$

gráficamente:



7) Redefinir las siguientes funciones, de modo que resulten continuas para toda $x \in [-1, 1]$

i) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$

ii) $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$

Solución:

i) $f(x) = x \operatorname{ctg} x = \frac{x}{\tan x} \Rightarrow f(x)$ no está de-

finita si $\tan x = 0$; o sea, para $x = 0 \in [-1, 1]$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, se necesita que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$; pero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x; & \text{si } x \neq 0 \\ 1; & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ es continua para toda $x \in [-1, 1]$

ii) $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x} \Rightarrow f(x)$ no está definida si $x = -1$

$$\text{pero: } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^3}{1+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1+x)(x^2-x+1)}{1+x} = 3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^3}{1+x}; & \text{si } x \neq -1 \\ 3; & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

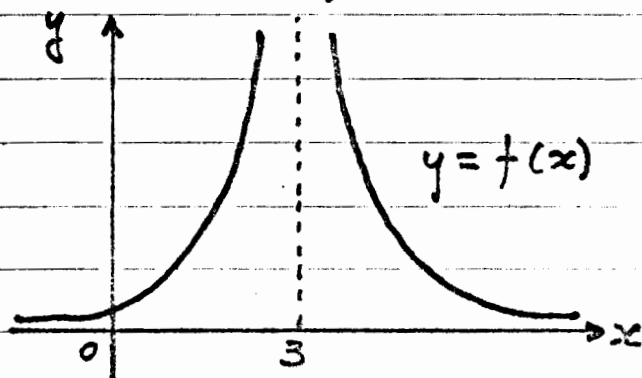
$\Rightarrow f(x)$ es continua para toda $x \in [-1, 1]$

Obsérvese que las discontinuidades, en ambos casos, son discontinuidades evitables.

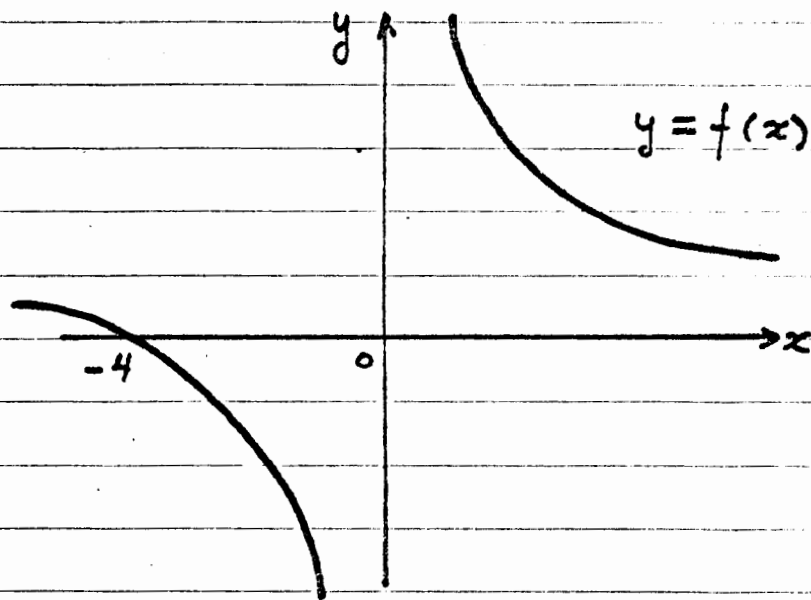
Discontinuidad infinita: Si $|f(x)|$ puede tomar valores arbitrariamente grandes en $V(a, \delta)$, se dice que existe una discontinuidad infinita en el punto $x=a$.

Ejemplos:

1) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$; $x \rightarrow 3$



2) $f(x) = \frac{x+4}{x}$; $x \rightarrow 0$

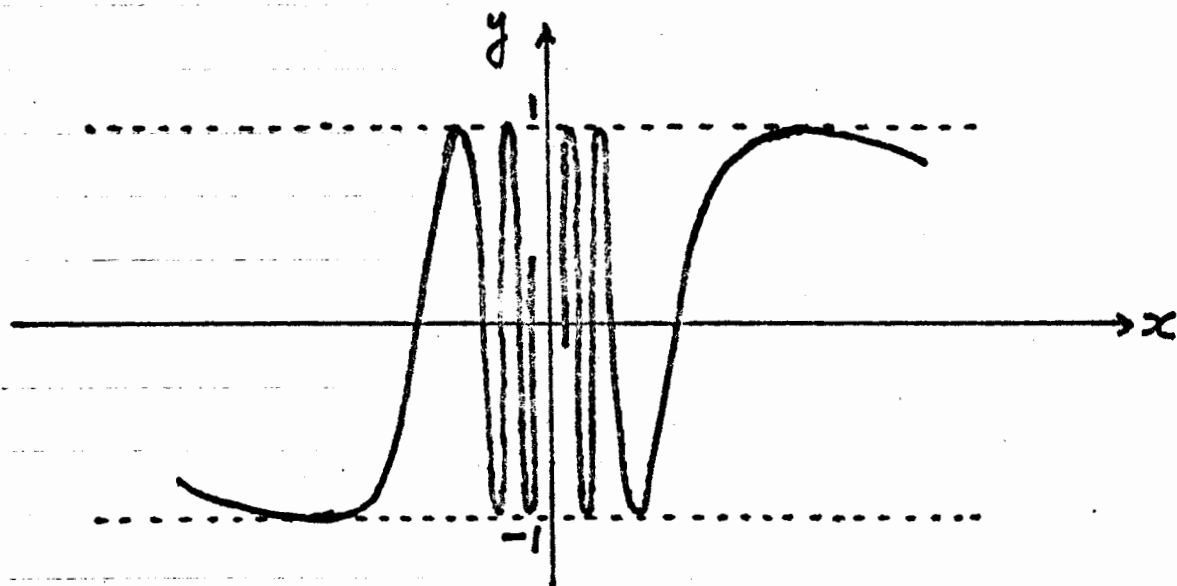


Discontinuidad oscilante (ó finita):-

Si existe un intervalo que contiene el punto a ; en el cual $f(x)$ está acotada; habiendo una discontinuidad finita en $x=a$, se dice que la función tiene una discontinuidad "oscilante" en el punto $x=a$.

Ejemplo :

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad ; \quad x \rightarrow 0$$

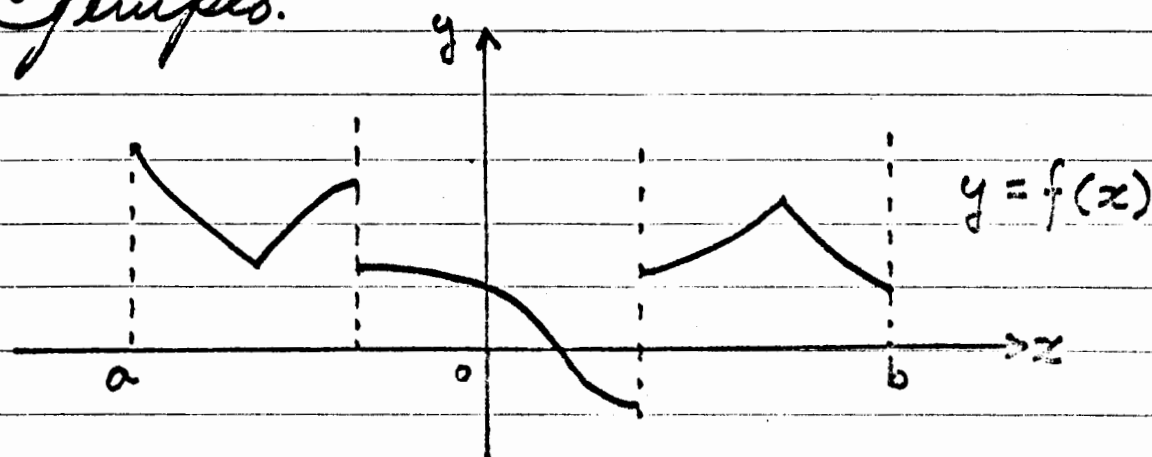


$f(x)$ oscila entre $+1$ y -1 más y más rápidamente a medida que $x \rightarrow 0$, por lo cual el $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ NO existe.

Se dice $f(x)$ tiene una discontinuidad "oscilante" en el punto $x=0$

Continuidad seccional. - Se dice que una función $f: E' \rightarrow E'$ es "seccionalmente" continua en un intervalo $[a, b]$, si dicho intervalo puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales la función f es continua; teniendo además cada subintervalo, límites laterales finitos en cada uno de sus extremos.

Ejemplo:



Función suave. - La función $f: E' \rightarrow E^n$ se denomina función "suave", si su gráfica f^* admite una sola tangente en cada punto. Una curva suave puede representarse en forma paramétrica.

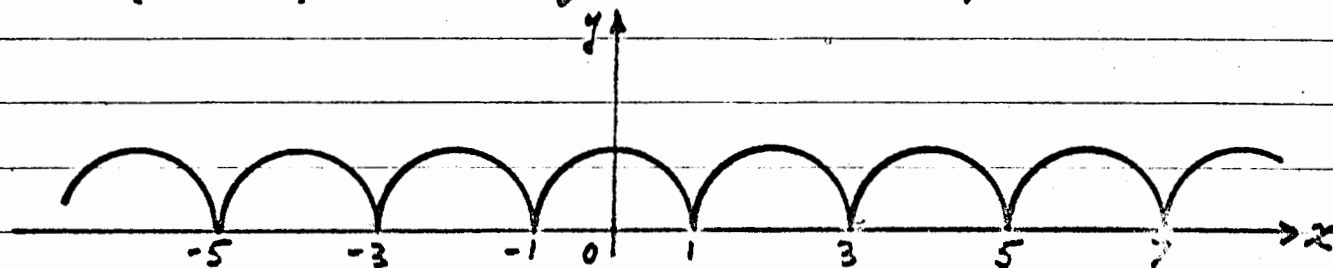
Ejemplo: Sea $f: E' \rightarrow E^3$; siendo

$$\begin{cases} x = 2 \sin t \\ y = 2 \cos t \\ z = 3t \end{cases}$$

Función seccionalmente suave: Decimos que la función $f: E' \rightarrow E'$ es "seccionalmente suave", si siendo seccionalmente continua, es además función suave en cada uno de sus subintervalos.

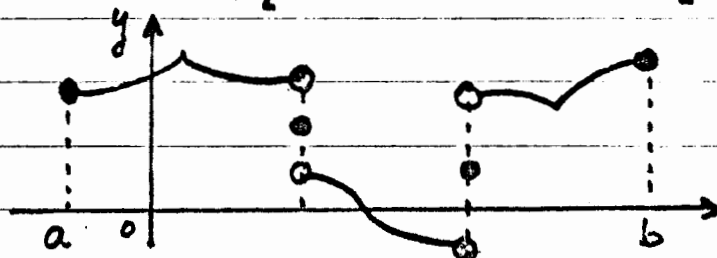
Ejemplo: Sea:

$$f = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{\#}; y \geq 0; (x - 2n)^2 + y^2 = 1; n \in \mathbb{I}\}$$



Normalización de discontinuidades: Se dice que una función seccionalmente continua ha sido "normalizada" $\Leftrightarrow$ el valor de la función en cada discontinuidad de salto, se define de la siguiente manera:

$$f(x_i) = \frac{1}{2} [f(x_i^-) + f(x_i^+)] ; \text{ para todo salto.}$$



En cada discontinuidad de salto, el valor de la función se considera como la ordenada media entre los valores límites en los extremos de dos subintervalos contiguos.

Continuidad uniforme.- Sean S y T dos conjuntos métricos; siendo $A \subseteq S$.

Consideremos la función $f: S \rightarrow T$. Se dice que f es "uniformemente continua" en A , si cada punto $a \in A$ es un punto de acumulación, y si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, donde δ sólo depende de ε (y no del punto particular $a \in A$) tal que:

$$f(V(a, \delta)) \subseteq V(f(a), \varepsilon) \text{ para todo } a \in A.$$

La continuidad uniforme puede también definirse del siguiente modo:

La función $f: S \rightarrow T$ es "uniformemente continua" en A si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que depende sólo de ε , tal que $S(a_1, a_2) < \delta \Rightarrow S(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$ para todo par de puntos $a_1, a_2 \in A$.

Observaciones.-

1).- La continuidad de una función en un punto difiere de la continuidad uniforme que se acaba de definir, en que en la primera δ no sólo depende de ε , sino también del punto que se está considerando; en tanto que en la continuidad uniforme δ sólo depende de ε , y no del punto particular $x \in A$.

2).- La continuidad uniforme siempre está referida a un conjunto, y no a un punto

3).- La continuidad uniforme en un conjunto A siempre implica continuidad en cada punto de A ; sin embargo, la recíproca no es cierta: Continuidad en cada punto de A no implica necesariamente continuidad uniforme en A .

4).- Si $f: E' \rightarrow E'$, las vecindades ó entornos se reducen a intervalos abiertos, en cuyo caso f es uniformemente continua en un intervalo si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo x en el intervalo se tiene; siendo $a_1 \neq a_2$:

$$|f(a_1) - f(a_2)| < \epsilon \text{ cuando } |a_1 - a_2| < \delta$$

5).- Una función determinada puede ser uniformemente continua en cierto intervalo de su dominio; en cambio puede resultar que la misma función no es uniformemente continua en un intervalo del dominio diferente al que se consideró primero.

Ejemplos: Dada una función y un intervalo del dominio de la misma, determinas, en cada uno de los problemas siguientes, si la función es o no es uniformemente continua en el intervalo especificado.

1) Sea $f: E' \rightarrow E'$; siendo $f(x) = x^2$; $0 < x < 1$

Solución:

$$|f(a_1) - f(a_2)| = |a_1^2 - a_2^2| = |(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)|$$

$$\text{puesto que } 0 < x < 1 \Rightarrow a_1 < 1, a_2 < 1 \Rightarrow |a_1 + a_2| < 2$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| |a_1 + a_2| < 2 |a_1 - a_2| \Rightarrow |f(a_1) - f(a_2)| < 2 |a_1 - a_2|$$

$$\text{si } |a_1 - a_2| < \delta \Rightarrow |f(a_1) - f(a_2)| < 2\delta$$

$\Rightarrow$ Dado ε basta suponer $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para poder asegurar que $|f(a_1) - f(a_2)| < \varepsilon$ para todo par a_1, a_2 con tal que $|a_1 - a_2| < \delta$

$\Rightarrow f(x) = x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $0 < x < 1$

2) $f(x) = x^2$; $0 < x < \infty$

Haremos ver que $f(x)$ no es uniformemente continua en $(0, \infty)$.

Solución:

$$\text{Sea } a_2 = \frac{\varepsilon}{\delta}; \quad a_1 = a_2 + \frac{\delta}{2}$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| = |a_2 + \frac{\delta}{2} - a_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\begin{aligned} \text{pero: } |f(a_1) - f(a_2)| &= |a_1^2 - a_2^2| = |a_1 + a_2| |a_1 - a_2| = \\ &= \left(2a_2 + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta}{2} = a_2 \delta + \frac{\delta^2}{4} = \frac{\varepsilon}{\delta} \delta + \frac{\delta^2}{4} = \\ &= \varepsilon + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(a_1) - f(a_2)| \not< \varepsilon, \text{ cuando } |a_1 - a_2| < \delta$$

$\Rightarrow f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en el intervalo $(0, \infty)$.

3) $f(x) = x^2$. Haremos ver que $f(x)$ si es uniformemente continua en cualquier subconjunto S de E' ; siempre y cuando S esté acotado.

Demostraremos primero que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$ para toda $a \in \mathbb{R}^\#$; resultando

$$\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - |a|$$

En efecto:

$$\text{si } a \geq 0; |f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a| |x + a| < \varepsilon$$

$$\text{pero si } |x - a| < \delta \Rightarrow -\delta < (x - a) < \delta$$

$$\Rightarrow (2a - \delta) < (x + a) < (2a + \delta)$$

$$\text{puesto que } a \geq 0 \Rightarrow -2a \leq 2a$$

$$\Rightarrow -(2a + \delta) < (x + a) < (2a + \delta) \Rightarrow |x + a| < 2a + \delta \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow |x - a| < \delta, \text{ ya que } |x + a - 2a| \leq |x + a| + |-2a| < \delta.$$

$$\text{de } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} \quad |x - a| |x + a| < \delta (2a + \delta)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2a\delta + \delta^2 \Rightarrow \delta^2 + 2a\delta - \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow \delta = -a \pm \sqrt{a^2 + \varepsilon}; \text{ pero } \delta > 0 \Rightarrow \delta = -a + \sqrt{a^2 + \varepsilon}$$

$$\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$$

por otro lado:

$$\text{si } a < 0 \Rightarrow -2a > 2a$$

$$\Rightarrow -(\delta - 2a) < (x+a) < (\delta - 2a) \Rightarrow |x+a| < \delta - 2a \quad (3)$$

$$|x+a| + 2a < \delta$$

$$\text{pero } a < 0 \Rightarrow |x+a| + 2a = |x+a| - |2a| \leq |x+a-2a|$$

$$\Rightarrow |x-a| < \delta \quad (4)$$

de (3) y (4)

$$\Rightarrow |x-a||x+a| < \delta(\delta - 2a)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta^2 - 2a\delta \Rightarrow \delta^2 - 2a\delta - \varepsilon = 0$$

$$\Rightarrow \delta = a \pm \sqrt{a^2 + \varepsilon}; \text{ pero } \delta > 0 \Rightarrow \delta = a + \sqrt{a^2 + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \text{si } a \leq 0$$

$$\sqrt{a^2 + \varepsilon} - |a| = \begin{cases} \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a, & \text{si } a \geq 0. \\ \sqrt{a^2 + \varepsilon} + a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ es continua en todo punto $a \in E'$

Para demostrar la continuidad uniforme en S , consideremos $S \subset V(0, r); r \in \mathbb{R}^+$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, hagamos:

$$\delta_1 = \sqrt{r^2 + \varepsilon} - r$$

Puesto que $|a| \leq r$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \varepsilon} - |a| \geq \sqrt{r^2 + \varepsilon} - r$$

de modo que

$$f(V(a, \delta_1)) \subset V(f(a), \varepsilon) \text{ para toda } a \in S$$

$\Rightarrow \delta_1$ no depende del punto a

$\Rightarrow f(x)$ es uniformemente continua en cualquier conjunto $S \subset E''$, si S está acotado. $\checkmark$

Teorema: Si A es un conjunto cerrado y acotado; siendo $A \subseteq E^n$, entonces si $f: A \rightarrow B$ es una función continua, también será uniformemente continua.

Ejemplo:

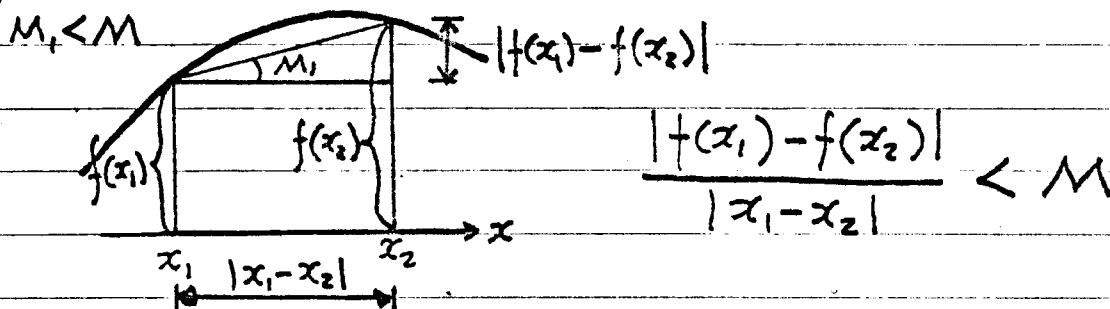
Sea $f(x) = x^3$; ¿es $f(x)$ uniformemente continua en $[0,1]$?

Solución:

Puesto que $f(x)$ es continua en todos los puntos de $[0,1] \Rightarrow$ que es uniformemente continua en $[0,1]$

Interpretación geométrica de la continuidad uniforme para $f: E' \rightarrow E'$:

Sea f^* la gráfica de f , tal que toda cuerda, uniendo dos puntos $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, tenga pendiente menor que algún número $M > 0$ (tal como sucede, por ejemplo, en las funciones polinómicas).



$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon < M |x_1 - x_2| < M \delta$$

$$\Rightarrow \varepsilon < M \delta \Rightarrow \frac{\varepsilon}{M} < \delta \Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{M} < \delta$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ cuando } |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Algunas propiedades de las funciones uniformemente continuas:

1.- Si f es uniformemente continua en S ; siendo $T \subseteq S \Rightarrow f$ es uniformemente continua en T

Demostración:

Puesto que f es uniformemente continua en $S \Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que si $a_1, a_2 \in S$, teniendo en cuenta que $|a_1 - a_2| < \delta \Rightarrow |f(a_1) - f(a_2)| < \varepsilon$; ($\varepsilon > 0$).

Para la misma δ , sean $x_1, x_2 \in T$, siendo $|x_1 - x_2| < \delta$; pero, por hipótesis $T \subseteq S \Rightarrow x_1, x_2 \in S$; siendo $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f$ es uniformemente continua en T ✓



DEPFI

2.- Si f es uniformemente continua en S ; siendo c una constante, $\Rightarrow cf$ es uniformemente continua en S

Demostración:

Si $c = 0 \Rightarrow cf$ es la función constante nula, de modo que $|(cf)(x_1) - (cf)(x_2)| = 0 < \varepsilon$ para toda δ

Si $c \neq 0$, hagamos $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$; puesto que f es uniformemente continua, por hipótesis, en S , $\Rightarrow$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in S$, siendo $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$.

Para la misma δ , si $x_1, x_2 \in S$, y se tiene $|x_1 - x_2| < \delta$, resulta $|(cf)(x_1) - (cf)(x_2)| =$

$$= |c| |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{|c|} |c| = \varepsilon$$

$\Rightarrow cf$ es uniformemente continua en S ✓

3.- Si f y g son uniformemente continuas en $S \Rightarrow f+g$ es uniformemente continua en S .

Demostración:

Puesto que f es uniformemente continua en $S \Rightarrow$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in S$, siendo $|x_1 - x_2| < \delta_1$, resulta $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$; ($\varepsilon > 0$)

De modo análogo, si g es uniformemente continua en $S \Rightarrow$ existe un $\delta_2 > 0$, tal que cuando $x_1, x_2 \in S$, teniendo que $|x_1 - x_2| < \delta_2$, entonces $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon/2$

Tomemos $\delta = \text{menor de } \delta_1 \text{ y } \delta_2$

$\Rightarrow$ si $x_1, x_2 \in S$, siendo $|x_1 - x_2| < \delta$, se tiene

$$\begin{aligned} |(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)| &= |f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)| = \\ &= |f(x_1) - f(x_2) + g(x_1) - g(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(f+g)(x_1) - (f+g)(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \checkmark$$

4.- Si f y g son uniformemente continuas, fg no necesariamente es una función uniformemente continua

Demostración: Daremos un ejemplo en el que se comprueba lo dicho:

Sabemos que $f(x) = x$ es uniformemente continua en $(0, \infty)$. Si hacemos $\delta = \varepsilon \Rightarrow$ para toda x_1, x_2 tal que $|x_1 - x_2| < \delta$ se tiene: $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$ pero: $(ff)(x) = f(x)f(x) = x^2$, y ya hemos visto en un ejemplo anterior que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $(0, \infty)$ $\checkmark$

Algunos libros de referencia:

- 1.- "Fundamental concepts of analysis."
A. H. Smith, W. A. Albrecht.
(Edit. Prentice Hall) 1966.
- 2.- "Introduction to analysis" Vol. I.
N. B. Haaser, J. P. LaSalle, J. A. Sullivan.
(Edit. Blaisdell) 1959.
- 3.- "Advanced calculus".
R. C. Buck.
(Edit. Mc. Graw-Hill) 1965.
- 4.- "A programmed course in Calculus" Vols I & II.
(18 autores).
(Edit. W. A. Benjamin, Inc) 1968.
- 5.- "Calculus with analytic geometry."
M. H. Protter, C. B. Morrey Jr.
(Edit. Addison-Wesley) 1963.
- 6.- "Advanced calculus."
M. R. Spiegel.
(Edit. Schaum) 1963.
- 7.- "Functions, limits and continuity"
P. Ribenboim
(Edit. Wiley) 1964

F/DEPFI/A-1/Pte.4/1981/EJ.3



702207