UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Notas para el curso introductorio: Matemáticas 0041
(décima parte)

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

Arturo Delgado R.

Agosto de 1979

Ecuaciones diferenciales ordinarias:

Definiciones preliminares:

1.- "Expresión diferencial" es aquella en la que figuran variables y sus respectivas derivadas ó diferenciales.

Ejemplos:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2} + x \operatorname{sen} xy \frac{dy}{dx} - y^2 e^x$$

b) $$dx \tan x + y\,dx + e^{xy}\,dy$$

2.- "Ecuación diferencial" es una ecuación que contiene expresiones diferenciales:

Ejemplos:

c) $$x^2 \frac{d^3x}{dy^3} + x \ln x \frac{dx}{dy} = 3 \operatorname{sen} x^2 + 5$$

d) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos 2x$$

3.- "Ecuación diferencial ordinaria" es aquella que sólo contiene una variable independiente, y las derivadas respecto a ésta.

En las ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene una función desconocida, por ejemplo: $y = f(x)$; pudiendo existir además derivadas de y con respecto a la variable independiente, digamos x:

Ejemplos:

e) $$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - x^2y = \tan x$$

f) $F: E^{n+2} \to E'$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \;;$$

ó bien: $\dfrac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$

La variable independiente x puede ser real ó compleja, y la función f está definida en un dominio D del espacio de $n+1$ dimensiones, real ó complejo.

4.- "Ecuaciones en derivadas parciales": son ecuaciones con dos ó más variables independientes, y las derivadas parciales respecto a estas variables:

Ejemplos:

g) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi f(x,y,z)$

h) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

5.- "Orden" de una ecuación diferencial, es el orden de la más alta derivada que figura en la ecuación:

Ejemplos:

i) $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = e^x$; (1^er orden)

j) $\dfrac{d^5y}{dx^5} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^6 = x$; (5° orden)

k) $x\,dy + y\,dx = \operatorname{sen} x\,dx$; (1^er orden)

6.- "Grado" de una ecuación diferencial".- Si es factible escribir la ecuación diferencial en la forma de un polinomio en las derivadas que contiene, el grado de la ecuación se define como el de la derivada de mayor orden:

Ejemplos:

l) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \sqrt[3]{\dfrac{dy}{dx} + x} = 0$

racionalizando: $\frac{d^3y}{dx^3} = -\sqrt[3]{\frac{dy}{dx} + x}$

$\therefore \left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)^3 + \dfrac{dy}{dx} + x = 0$; ($3^{\underline{er}}$ grado)

m) $x^3 \dfrac{d^4y}{dx^4} + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 = x^2$; ($1^{\underline{er}}$ grado)

7.- "Ecuación diferencial lineal".- Es aquella en la cual la variable dependiente, así como todas sus derivadas, respecto a la variable independiente, son de primer grado; no habiendo productos de la variable dependiente y las derivadas, ó producto de derivadas.

Ejemplos:

n) Forma general de la ecuación diferencial lineal:

$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = f(x)$$

donde el grado de los polinomios $a_i(x)$ puede ser cualquiera; siendo $\frac{d^0y}{dx^0} = y$

o) $x\dfrac{dy}{dx} + y\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^3$ (no es lineal)

Observación: Todas las ecuaciones diferenciales lineales son de primer grado; sin embargo, las ecuaciones de primer grado no son necesariamente lineales, como puede comprobarse en los ejemplos n) y o) últimos.

8.- "Solución de una ecuación diferencial".- Es una función, que no contiene derivadas ó diferenciales (que puede ser explícita ó implícita), la cual, substituida en la ecuación diferencial, transforma a ésta en una identidad en la variable independiente.

Ejemplo.- Dada la ecuación diferencial:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} = 0$$

comprobar que la función $y = e^{2x}$ es una solución.

Solución:

$$y = e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2e^{2x};\ \frac{d^2y}{dx^2} = 4e^{2x};\ \frac{d^3y}{dx^3} = 8e^{2x}$$

substituyendo en la ecuación diferencial:

$$8e^{2x} - 20e^{2x} + 12e^{2x} = 0 \checkmark \qquad (0=0)$$

Observación: La solución ensayada en este ejemplo no es única; pues se comprueba que son asimismo soluciones las siguientes funciones:

$$y = c_1$$
$$y = c_2 e^{2x}$$
$$y = c_3 e^{3x}$$
$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

Se considera una ecuación diferencial resuelta (ó integrada), cuando su solución puede expresarse por medio de funciones conocidas; ó bien, cuando se expresa mediante integrales cuya solución no es posible representar en término de funciones conocidas (ó elementales):

Ejemplos:

1) $$x \frac{dy}{dx} = e^x$$

Solución:

$$y = \int \frac{e^x}{x} dx + c$$

Dado que no es posible la integral en término de funciones conocidas.

Comprobación:

$$y = \int \frac{e^x}{x} dx + c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{x}$$

substituyendo en la ecuación diferencial

$$x \frac{e^x}{x} = e^x$$

$$\Rightarrow e^x = e^x \quad ✓$$

Observación: La ecuación diferencial lineal $L(y)=0$, $(f(x)=0)$ se denomina "homogénea".

2) $(y'')^2 = a y y'$

Solución:

$$x = \int \left(\sqrt{a y^3} + C_1\right)^{-\frac{2}{3}} dy + C_2$$

3) $\dfrac{y'''}{y''} + \dfrac{y''}{y'} + \dfrac{y'}{y} = 0$

Solución:

$$x = \int \left(C_1 \ln y + C_2\right)^{-\frac{1}{3}} dy + C_3$$

4) $x^2 y'' = a(xy' - y)^n$

Solución:

$$y = x \int \frac{\left[a(1-n)\ln x + C_1\right]^{\frac{1}{1-n}}}{x^2} dx + C_2 x$$

5) $x^n y'' = a(xy' - y)$

Solución:

$$y = x \int \frac{e^{\left(\frac{a}{2-n} x^{2-n} + C_1\right)}}{x^2} dx + C_2 x$$

En estos 4 últimos ejemplos, puede comprobarse que la solución exhibida efectivamente verifica la ecuación diferencial dada.

9.- "Soluciones equivalentes".- En ocasiones al resolver una ecuación diferencial por dos métodos diferentes, se obtienen funciones que, aparentemente, son distintas. En seguida se propone una manera de decidir la equivalencia de las soluciones obtenidas.

A veces basta expresar la constante c de una de las soluciones, en otra forma apropiada, lo que hace ver que ambas soluciones son idénticas.

Ejemplo: Sean las siguientes dos expresiones, soluciones de una misma ecuación diferencial:

$$x + cxy + y = 0$$

$$c_1(x+y) - xy = 0$$

Haciendo $c = -\frac{1}{c_1}$ se ve que ambas soluciones son equivalentes.

Existen otros casos en los que la relación entre las constantes no es tan obvia, como lo fue en el ejemplo anterior.

A continuación veremos como es posible establecer la equivalencia entre dos soluciones sin necesidad de hallar la relación funcional existente entre las constantes:

Sean $u(x,y) = c$; $v(x,y) = c_1$ (1) soluciones de la misma ecuación diferencial, $\Rightarrow$ ambas deben determinar el mismo valor de $\frac{dy}{dx}$; el cual puede calcularse de las ecuaciones (1):

$$du = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad ; \text{ análogamente: } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} \quad (2)$$

igualando los segundos miembros de (2):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Este resultado concuerda con el que se obtuvo en el estudio de los Jacobianos:

La condición necesaria y suficiente para que exista una relación funcional entre las funciones (1) es que se satisfaga la ecuación (3).

Ejemplos: Dada la ecuación diferencial, comprobar que las dos soluciones dadas son equivalentes:

1) $(1+y^2)dx + (1+x^2)\,dy = 0$

i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = c$

ii) $\dfrac{x+y}{1-xy} = C_1$

Solución: Haciendo: $u = \tan^{-1}x + \tan^{-1}y$; $v = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \\ \frac{1+y^2}{(1-xy)^2} & \frac{1+x^2}{(1-xy)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-xy)^2} - \frac{1}{(1-xy)^2} = 0 \checkmark$$

puede verificarse que $c = \tan^{-1} C_1$

2) $(x^2+y^2)\,dx + x^2 dy = 0$

i) $\ln x - \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+y}{\sqrt{3}\,y} = c$

ii) $\ln x + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2y+x}{\sqrt{3}\,x} = c_1$

Solución: Haciendo: $c = u$; $c_1 = v$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2}{x(x^2+xy+y^2)} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+xy+y^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(por tener columnas iguales)}$$

Relación entre las constantes:

ii) − i):

$$\tan^{-1}\frac{2y+x}{\sqrt{3}x} + \tan^{-1}\frac{2x+y}{\sqrt{3}y} = \frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c)$$

Tomando tan en ambos miembros:

$$\frac{\sqrt{3}\,(2y^2+xy+2x^2+xy)}{3xy-(2y+x)(2x+y)} = \tan\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c)$$

$$\frac{2\sqrt{3}\,(x^2+xy+y^2)}{-2\,(x^2+xy+y^2)} = -\sqrt{3} = \tan\frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(c_1-c) = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = c - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3) i) Comprobar que las siguientes funciones son dos soluciones equivalentes de la misma ecuación diferencial:

$$e^{x+y} = c_1\left(\sqrt{9+e^{2x}} - 3\right) \quad (1)$$

$$e^{x-y} = c_2\left(\sqrt{9+e^{2x}} + 3\right) \quad (2)$$

ii) Hallar la relación que existe entre las constantes c_1 y c_2.

Solución

Sean: $$u(x,y) = c_1 = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{9+e^{2x}}-3}$$

$$v(x,y) = c_2 = \frac{e^{x-y}}{\sqrt{9+e^{2x}}+3}$$

o bien, racionalizando:

$$u = \frac{e^{x+y}\left(\sqrt{9+e^{2x}}+3\right)}{e^{2x}} = e^{y-x}\left(\sqrt{9+e^{2x}}+3\right)$$

$$v = \frac{e^{x-y}\left(\sqrt{9+e^{2x}}-3\right)}{e^{2x}} = e^{-x-y}\left(\sqrt{9+e^{2x}}-3\right)$$

$$\therefore \ln u = y - x + \ln\left(\sqrt{9+e^{2x}}+3\right)$$

$$\ln v = -x - y + \ln\left(\sqrt{9+e^{2x}}-3\right)$$

Cálculo de derivadas parciales:

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{\ }+3}\,\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{\ }} \quad ; \sqrt{\ } = \sqrt{9+e^{2x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u + \frac{e^{2x}u}{\sqrt{\ }\left(\sqrt{\ }+3\right)}$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} = -1 + \frac{1}{\sqrt{}-3}\,\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -v + \frac{e^{2x}v}{\sqrt{}(\sqrt{}-3}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -v$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(-u + \frac{e^{2x}u}{\sqrt{}(\sqrt{}+3)}\right) & u \\ \left(-v + \frac{e^{2x}v}{\sqrt{}(\sqrt{}-3)}\right) & -v \end{vmatrix} =$$

$$= +uv - \frac{ve^{2x}u}{\sqrt{}(\sqrt{}+3)} + uv - \frac{ue^{2x}v}{\sqrt{}(\sqrt{}-3)}$$

$$= 2uv - uv\left(\frac{\cancel{e^{2x}}}{\sqrt{}}\cdot\frac{\sqrt{}-3+\sqrt{}+3}{\cancel{e^{2x}}}\right)$$

$$= 2uv - uv(2) = 0$$

$\Rightarrow$ *Las funciones dadas representan soluciones equivalentes*

ii) multiplicando miembro a miembro ① × ②:

$$e^{x+y}\cdot e^{x-y} = c_1 c_2\left(\sqrt{9+e^{2x}}-3\right)\left(\sqrt{9+e^{2x}}+3\right)$$

$$e^{2x} = c_1 c_2\left(9+e^{2x}-9\right) = c_1 c_2 e^{2x}$$

$$\Rightarrow c_1 c_2 = 1$$

ó bien $\quad c_1 = \dfrac{1}{c_2}$

10.- "Funciones linealmente independientes".-

Definición: El conjunto finito de n funciones: $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ definidas en un intervalo (a,b), serán "linealmente <u>dependientes</u>" en (a,b), si existen n constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, no simultáneamente nulas, tales que, para todos los valores de x en (a,b), se verifica:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0 \quad \in (a,b). \quad (1)$$

Si la identidad anterior sólo es posible cuando: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, se dice que el conjunto de funciones $y_i(x)$; $i = 1, 2, \dots, n$, son "linealmente <u>independientes</u>"

Si un conjunto de funciones es linealmente dependiente, al menos una de las funciones del conjunto puede expresarse como una combinación lineal de las otras; en efecto, sea $c_i \neq 0$ en (1)

$$\Rightarrow \quad y_i(x) = -\left(\frac{c_1}{c_i} y_1(x) + \frac{c_2}{c_i} y_2(x) + \dots + \frac{c_n}{c_i} y_n(x)\right)$$

Recíprocamente, si una función del conjunto, por ejemplo $y_i(x)$ se expresa como una combinación lineal de las otras $n-1$ funciones, entonces las n funciones del conjunto son linealmente dependientes

Ejemplo: $\{y_1(x) = 3x \, ; \, y_2(x) = e^x \, ; \, y_3(x) = -7x\}$. es un conjunto linealmente dependiente; ya que:

$$y_1(x) = 0 \cdot y_2(x) - \frac{3}{7}\, y_3(x) \quad \Rightarrow c_3 = -\frac{3}{7} \neq 0$$

ó sea:

$$3x = 0\, e^x + \left(-\frac{3}{7}\right)(-7x)$$

Dado que la última ecuación es válida para toda $x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow \{y_1(x); y_2(x); y_3(x)\}$ son linealmente en $(-\infty, \infty)$

Determinante de Wronsky (ó Wronskiano)

Definición: Sea un conjunto de n funciones $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ tal que cada una de las funciones del conjunto tiene derivadas sucesivas de orden, al menos, $n-1$. El siguiente determinante se define como "determinante Wronskiano" del conjunto de funciones.

$$W(y_1, y_2, \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

El valor de este determinante permite establecer un criterio para dependencia ó la independencia de conjuntos de funciones.

En efecto: Supongamos el conjunto: $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$. Formemos la combinación lineal, y de ella la ecuación:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

si existen todas las derivadas sucesivas, hasta al menos, la de orden $n-1$; al derivar sucesivamente la ecuación dada, resultan las siguientes n ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) &= 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) &= 0 \\ c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + \ldots + c_n y_n''(x) &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \quad \cdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

La condición necesaria para que las n funciones $y_i(x)$ sean linealmente independientes, es que el determinante $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$, llamado Wronskiano, sea diferente de cero para alguna $x \in [a,b]$

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostración: Si se consideran las constantes c_i del sistema como incognitas; siendo entonces las funciones $y_i(x)$ con sus respectivas derivadas, los coeficientes de estas incognitas, sabemos que el sistema homogéneo tiene solución diferente de la trivial si, y sólo si, el determinante del sistema es nulo. Por el contrario, si se quiere que las funciones $y_i(x)$ sean linealmente independientes, debemos buscar la solución trivial; esto es, que los únicos valores que satisfagan el sistema sean precisamente $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$; para lo cual debe verificarse:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

Observación: Un conjunto de funciones pueden ser linealmente dependientes en un intervalo dado; pero linealmente independientes en otro intervalo. En vista de ello, es esencial que se especifique el intervalo.

Teorema: Dado un conjunto de funciones linealmente "dependientes" en un intervalo (a,b), $\{y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)\}$ tales que cada una de éstas posee derivadas sucesivas de orden, al menos, $n-1$ en (a,b). Se afirma que $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \equiv 0$

Demostración:

Dado que por hipótesis las n funciones son linealmente dependientes en $(a,b) \Rightarrow$ existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas simultáneamente nulas, tales que:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0 \in (a,b)$$

Derivando sucesivamente se obtienen las siguientes ecuaciones; a partir de la primera:

$$① \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \ldots + c_n y_n'(x) \equiv 0 \\ c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + \ldots + c_n y_n''(x) \equiv 0 \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Sea x_0 cualquier x tal que $a < x_0 < b$. Al substituir x_0 en ① se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas, donde las incognitas serán las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$; pero, por hipótesis, existe al menos una $c_i \neq 0$. Observando que el sistema ① es homogéneo, $c_i \neq 0 \Rightarrow$ $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, que es el determinante del sistema en este caso. Dado que x_0 es un punto arbitrario $\in (a,b)$, $\Rightarrow W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv 0 \in (a,b)$. ✓

<u>Corolario</u>: Si $W(y_1, y_2, \ldots y_n) \neq 0$, para, al menos, <u>un</u> punto x_0 cualquiera $\in (a,b)$, $\Rightarrow$ las funciones $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ <u>son</u> linealmente <u>independientes</u>.

La afirmación anterior es cierta, porque si las funciones fueran linealmente dependientes en (a, b), del teorema, su Wronskiano sería idénticamente nulo: $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv 0$. Pero $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \Rightarrow W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \not\equiv 0$, $\Rightarrow \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son linealmente independientes en (a, b).

Es muy importante observar que el recíproco del teorema no es valido, esto es, si $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv 0 \not\Rightarrow$ que el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ sea linealmente dependiente.

En seguida se exponen algunos ejemplos para aclarar los conceptos dados.

Ejemplos: Determinar si las siguientes funciones son linealmente independientes:

1) $y_1 = x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = x^3$

Solución:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0, \text{ si } x \neq 0$$

$\Rightarrow$ sí son linealmente independientes, si $x \neq 0$

2) $y_1 = \operatorname{sen} x$; $y_2 = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{8})$; $y_3 = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{8})$

Solución:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{8}) & \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{8}) \\ \cos x & \cos(x+\frac{\pi}{8}) & \cos(x-\frac{\pi}{8}) \\ -\operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{8}) & -\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{8}) \end{vmatrix} \equiv 0$$

El determinante es nulo, por tener dos renglones proporcionales, $\Rightarrow$ las funciones son linealmente dependientes en $(-\infty, \infty)$: $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{8}) + \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{8}) - 2\cos\frac{\pi}{8}\operatorname{sen} x \equiv 0$

3) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2, \ldots, y_{n+1} = x^n$

Solución:

$$W(1, x, x^2, \ldots x^n) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots\ldots\ldots & x^n \\ 0 & 1! & 2x & 3x^2 & \ldots\ldots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & 6x & \ldots & n(n-1)x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3! & \ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & n! \end{vmatrix} =$$

$= 1 \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots n! \neq 0 \Rightarrow$ son linealmente independientes en cualquier intervalo.

4.-) $y_1 = \begin{cases} x^2 & , \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & , \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

$y_2 = \begin{cases} 0 & , \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & , \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Solución:

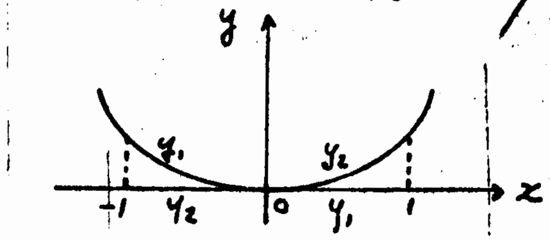
i) en el intervalo $[-1, 0]$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

ii) en el intervalo $(0, 1]$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} \equiv 0$$

A pesar de este resultado, las funciones <u>sí</u> son linealmente independientes $\in [-1, 1]$:



De la gráfica se observa que $c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$ $\Leftrightarrow$ $c_1 = c_2 = 0$; en efecto: en el intervalo $[-1, 0]$ se tiene $c_1 y_1 \equiv 0 \Rightarrow c_1 = 0$, ya que $y_1 \not\equiv 0$; en tanto que en el intervalo $(0, 1]$: $c_2 y_2 \equiv 0 \Rightarrow c_2 = 0$, dado que $y_2 \not\equiv 0$ en este intervalo.

Este ejemplo comprueba que la condición $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ es necesaria; pero <u>no</u> es condición suficiente, puesto que el determinante Wronskiano puede ser nulo, aun cuando las funciones sean linealmente independientes.

5.-) $y_1 = 1$; $y_2 = x$; $y_3 = \operatorname{sen} x$

Solución:

en $(-\infty, \infty)$:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & x & \operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & \cos x \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen} x$$

puesto que para, digamos $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W(y_1, y_2, y_3) = -1$ $\Rightarrow W(y_1, y_2, y_3) \not\equiv 0$, $\Rightarrow$ las funciones son linealmente <u>independientes</u>.

Observación: Basta que el Wronskiano de un conjunto de funciones no se anule en "algún" punto (puede ser uno solo ó varios) del intervalo $[a, b]$, para que las funciones sean linealmente independientes (véase corolario anterior).

En otras palabras, para que un conjunto de funciones sean linealmente dependientes, es necesario que el Wronskiano sea <u>idénticamente</u> nulo (para toda $x \in [a, b]$): (véase teorema anterior) pero: $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv 0 \not\Rightarrow$ las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes, como se comprueba con el ejemplo 4.-) anterior.

Un conjunto de funciones pueden ser linealmente dependientes en un intervalo dado, pudiendo ser linealmente independientes en algún otro intervalo, como puede comprobarse en el siguiente ejemplo:

6.-) Sean las siguientes funciones:

$y_1 = x \quad ; \quad y_2 = |x| .$ ①

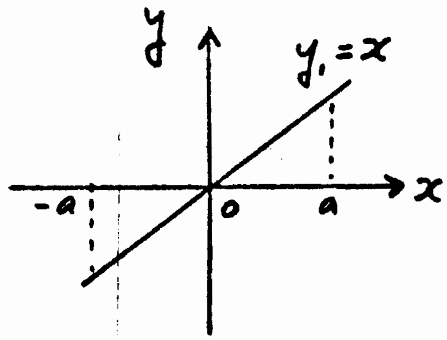
Se ve que:

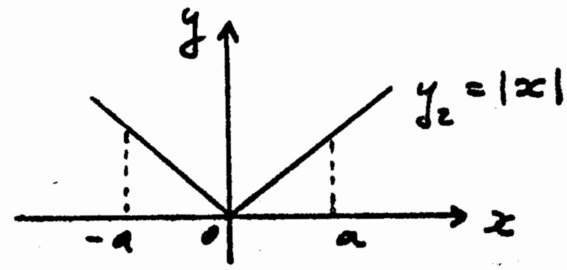
$y_1 = y_2 \quad \forall \; x \geq 0 \; ; \; x \in R^{\#} \qquad (\forall = \text{para toda})$

$\Rightarrow \; y_1 - y_2 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ se verifica si $c_1 = 1 \; ; \; c_2 = -1 \;\Rightarrow\; c_1 \neq 0 \; ; \; c_2 \neq 0 \Rightarrow y_1$ y y_2 <u>son</u> linealmente <u>dependientes</u> $\in [0, \infty)$.

Consideremos en seguida el intervalo $[-a, a]$; $a \neq 0$:

$$c_3 y_1 + c_4 y_2 = 0 \qquad ②$$





si: $|a| > 1$ ③

de ① y ②

$$c_3 x + c_4 |x| = 0$$

de ③;

si: $x = 1 \Rightarrow \quad c_3 + c_4 = 0$

si: $x = -1 \Rightarrow \quad -c_3 + c_4 = 0$

$\Rightarrow \; c_3 = c_4 = 0$

$\Rightarrow$ y_1 y y_2 <u>son</u> linealmente <u>independientes</u> en el intervalo $[-a, a]$; $a \neq 0$; ó bien, en cualquier intervalo $[a, b]$, donde: $a < 0$, $b > 0$; siendo linealmente <u>dependientes</u> $\in [a, b]$, donde: $0 < a < b < \infty$

7.-) Determinar si las siguientes funciones son linealmente independientes en $(-2,2)$:

$y_1(x) = e^x$; $y_2(x) = xe^x$; $y_3(x) = x^2 e^x$

Solución:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2 e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2 e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2 e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix}$$

Observando que para que las funciones sean linealmente independientes $\in (-2,2)$ basta que $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$ para alguna $x \in (-2,2)$, es mucho más fácil observar que: $0 \in (-2,2)$:

$$W(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Con lo cual se concluye que el conjunto de funciones $\{e^x, xe^x, x^2 e^x\}$ son linealmente independientes en cualquier intervalo que contenga al origen $(x=0)$.

8.-) $y_1(x) = x$; $y_2(x) = x^3$; $y_3(x) = \operatorname{sen} x$; $\in (-\infty, \infty)$.

Solución:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & \operatorname{sen} x \\ 1 & 2x & \cos x \\ 0 & 2 & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = (2 - x^2)\operatorname{sen} x - 2x\cos x$$

Observando que para $x_0 = \pi$

$$W(y_1(\pi), y_2(\pi), y_3(\pi)) = 0 - 2\pi(-1) = 2\pi \neq 0$$

$\Rightarrow \{x, x^2, \operatorname{sen} x\}$ son linealmente independientes $\in (-\infty, \infty)$

(basta un valor de $x_0 \in (a,b)$ donde $W(y_1, y_2, y_3) \neq 0$) $\exists$ muchos.

Otro criterio de independencia lineal que es aplicable al caso de dos funciones:

Dos funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ serán linealmente independientes en el intervalo (a,b), si:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \not\equiv \text{constante en } (a,b)$$

Si: $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \equiv \text{constante en } (a,b) \Rightarrow f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente dependientes.

Ejemplos: Empleando el último criterio, determinar si son ó no linealmente independientes las funciones:

1) $f_1(x) = \tan x \quad ; \quad f_2(x) = \operatorname{ctg} x.$

Solución:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\tan x}{\operatorname{ctg} x} = \tan^2 x \not\equiv C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow f_1(x)$ y $f_2(x)$ si son linealmente independientes.

2) $g_1(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad ; \quad g_2(x) = \cos 2x$

Solución:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x} = \frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}{\cos 2x} = \frac{1}{2\cos 2x} - \frac{1}{2} \not\equiv C$$

$\Rightarrow g_1(x)$ y $g_2(x)$ son linealmente independientes $\in (0, \pi/2)$; (obsérvese que $\cos 2x \neq 0$)

Véase la solución de estos mismos dos ejemplos más adelante, empleando el determinante Wronskiano.

Este último criterio de independencia lineal de dos funciones en un intervalo (a,b) es en realidad el mismo criterio dado anteriormente relativo al determinante Wronskiano, y puede expresarse mediante el siguiente teorema:

<u>Teorema</u>: La condición necesaria y suficiente para que $f_1 = c f_2$ ①, donde c = constante, es que el determinante Wronskiano sea nulo para toda x en el intervalo (a,b) donde se verifica ①

Demostración:

i) Hipótesis: $f_1 = c f_2 \quad \in (a,b)$.

$$\Rightarrow f_1' = c f_2'$$

$$\Rightarrow W(f_1,f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cf_2 & f_2 \\ cf_2' & f_2' \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} f_2 & f_2 \\ f_2' & f_2' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Conclusión } \; W(f_1,f_2) = 0, \; \forall x \in (a,b)$$

ii) Hipótesis: $W(f_1,f_2) = 0, \; \forall x \in (a,b)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0 = f_1 f_2' - f_1' f_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2} \Rightarrow \ln f_1 = \ln f_2 + \ln c$$

conclusión:

$$\Rightarrow f_1 = c f_2 \quad \in (a,b)$$

$\Rightarrow$ i) y ii) demuestran el teorema: $\forall x \in (a,b)$,

$$f_1 = c f_2 \iff W(f_1,f_2) = 0$$

Resolver los últimos dos problemas empleando el teorema:

1) $f_1(x) = \tan x$; $f_2(x) = \operatorname{ctg} x$

Solución:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} \tan x & \operatorname{ctg} x \\ \sec^2 x & -\csc^2 x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} & \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ \frac{1}{\cos^2 x} & -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \frac{1}{\cos x} & -\frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\operatorname{sen} x \cos x} \neq 0$$

$$\operatorname{sen} x \neq 0 \; ; \; \cos x \neq 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

---

2) $g_1(x) = \operatorname{sen}^2 x$; $g_2(x) = \cos 2x$

Solución:

$$W(g_1, g_2) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & \cos 2x \\ 2\cos x \operatorname{sen} x & -2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} & \cos 2x \\ \operatorname{sen} 2x & -2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$= -\operatorname{sen} 2x + \cancel{\cos 2x \operatorname{sen} 2x} - \cancel{\operatorname{sen} 2x \cos 2x}$$
$$= -\operatorname{sen} 2x$$

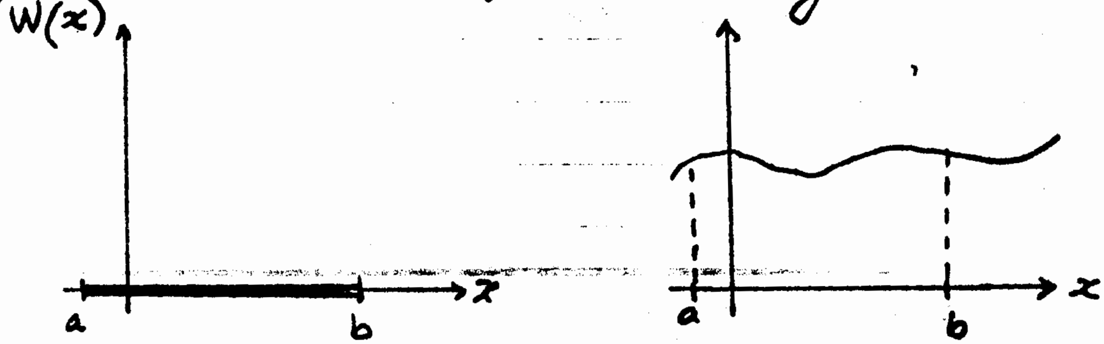
$$\therefore \; \operatorname{sen} 2x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \; ; \; 2x = \pi$$
$$\Rightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Obsérvese que las soluciones concuerdan con los resultados obtenidos anteriormente.

Teorema: El determinante Wronskiano de la solución de la ecuación diferencial:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (1) \quad a_0(x) \neq 0$$

resulta ser: ó nulo para cualquier valor de x, ó no puede ser cero para ninguna $x \in [a,b]$



Demostración:

Sean $y_1(x)$; $y_2(x)$ soluciones de la ecuación (1) $\Rightarrow$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} = y_1 y_2'' + \cancel{y_1' y_2'} - y_2 y_1'' - \cancel{y_2' y_1'} = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

por ser y_1 y y_2 soluciones de (1):

$$a_0(x) y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1 = 0 \quad (3)$$
$$a_0(x) y_2'' + a_1(x) y_2' + a_2(x) y_2 = 0 \quad (4)$$

eliminando $a_2(x)$ de (3) y (4): $-(3) y_2 + (4) \times y_1 \Rightarrow$

$$a_0(x)\underbrace{(y_1 y_2'' - y_2 y_1'')}_{W'} + a_1(x)\underbrace{(y_1 y_2' - y_2 y_1')}_{W} = 0$$

$$\Rightarrow a_0(x)\frac{dW}{dx} + a_1(x) W = 0$$

si $a_0(x) \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{dW}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)} W = 0$$

$$\frac{dW}{W} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx$$

integrando:

$$\ln W + C_2 = -\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx$$

$$C_2 = \ln c_1$$

$$c_1 W = e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

$$W(x) = C\,e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

donde C es un valor particular de W para x_0

$\Rightarrow C = W(x_0)$

$$\therefore \quad W(x) = W(x_0)\,e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$$

pero el factor exponencial nunca puede ser cero; de modo que $W(x)$ depende de $W(x_0)$: si $W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) \equiv 0$; si $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ $W(x) \not\equiv 0$. ✓

Nota: se demuestra que si las soluciones y_1 y y_2, de la ecuación ①, son linealmente independientes, en el intervalo $a \leq x \leq b$, resulta $W(x) \neq 0$, para toda x en $a \leq x \leq b$.

$$\Rightarrow \quad W(x) \not\equiv 0.$$

Si las funciones $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ son continuas en $a \leq x \leq b$; son soluciones <u>independientes</u> y_1 y y_2 de ① $\Longleftrightarrow$ $W(y_1, y_2) \neq 0$ en $a \leq x \leq b$; ó sea, la condición <u>necesaria y suficiente</u> para que y_1, y_2 sean linealmente independientes es que $W(y_1, y_2) \neq 0$ en $a \leq x \leq b$.

Problema: Si y_1, y_2, y_3 son soluciones de la ecuación diferencial:

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \quad ①$$

siendo $W(y_1, y_2) \neq 0 \in (a,b)$, demostrar que:

$$y_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2 \quad ; \ (k_1, k_2 \text{ son constantes})$$

Solución: Puesto que y_1, y_2, y_3 son todas soluciones de ①:

$$a_0(x)\,y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1 = 0$$
$$a_0(x)\,y_2'' + a_1(x)\,y_2' + a_2(x)\,y_2 = 0$$
$$a_0(x)\,y_3'' + a_1(x)\,y_3' + a_3(x)\,y_3 = 0$$

Del resultado obtenido anteriormente:

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = C_1\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \quad ②$$

$$W(y_2, y_3) = y_2 y_3' - y_2' y_3 = C_2\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \quad ③$$

$$W(y_1, y_3) = y_1 y_3' - y_1' y_3 = C_3\, e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \quad ④$$

pero por hipótesis $W(y_1, y_2) \neq 0$, $\Rightarrow C_1 \neq 0.$; multiplicando ③ $\times(-y_1)$, ④ $\times(y_2)$, y sumando:

$$(y_1 y_2' - y_1' y_2)\,y_3 = (-C_2 y_1 + C_3 y_2)\,e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \quad ⑤$$

substituyendo ② en ⑤ y cancelando $e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$.

$$y_3 = -\frac{C_2}{C_1}\,y_1 + \frac{C_3}{C_1}\,y_2$$

haciendo: $-\dfrac{C_2}{C_1} = k_1$; $\dfrac{C_3}{C_1} = k_2$

$\Rightarrow \quad y_3 = k_1 y_1 + k_2 y_2$; ó sea, sólo pueden existir 2 soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea de 2º orden ①.

Determinante de Gram (ó Gramiano).-

Sean: $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ funciones continuas en el intervalo $a \leq x \leq b$; definamos:

$$\alpha_{ij} = \int_a^b y_i(x)\, y_j(x)\, dx \quad ; \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

El determinante Gramiano se define:

$$\Gamma(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema: El conjunto $\{y_i(x)\}$ de n funciones continuas serán linealmente independientes en $[a, b] \Leftrightarrow$ el determinante Gramiano $\Gamma \neq 0$.

Demostración: a) Condición necesaria:
Hipótesis $\Gamma \neq 0$.

Formemos la ecuación:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0 \quad (1)$$

De la ecuación (1) obtendremos un sistema simultaneo de n ecuaciones multiplicando $(1) \times y_1$ para obtener la 1ª ecuación del sistema; la 2ª resulta multiplicando $(1) \times y_2$; siendo la última $(1) \times y_n$:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 y_1 y_1 + c_2 y_1 y_2 + \ldots + c_n y_1 y_n = 0 \\ c_1 y_2 y_1 + c_2 y_2 y_2 + \ldots + c_n y_2 y_n = 0 \\ \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots = 0 \\ c_1 y_n y_1 + c_2 y_n y_2 + \ldots + c_n y_n y_n = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Multiplicando cada ecuación por dx, é

integrando de a á b, resulta el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \dots + c_n\alpha_{1n} = 0 \\ c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \dots + c_n\alpha_{2n} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_1\alpha_{n1} + c_2\alpha_{n2} + \dots + c_n\alpha_{nn} = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Considerando como incognitas los coeficientes c_i; teniendo en cuenta que $\Gamma \neq 0$ $\Rightarrow$ la única solución es la trivial: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ $\Rightarrow$ las n funciones $y_i(x)$ son linealmente independientes.

b) condición suficiente:

Hipótesis: Las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ son linealmente independientes.

Puesto que los elementos del determinante Γ son constantes, si $\Gamma = 0$, $\Rightarrow$ podemos escoger n constantes c_i (no todas nulas) para formar el sistema de n ecuaciones (3)

Multiplicando la 1ª por c_1; la 2ª por c_2; la última por c_n, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} c_1^2\alpha_{11} + c_1c_2\alpha_{12} + \dots + c_1c_n\alpha_{1n} = 0 \\ c_1c_2\alpha_{21} + c_2c_2\alpha_{22} + \dots + c_2c_n\alpha_{2n} = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_nc_1\alpha_{n1} + c_nc_2\alpha_{n2} + \dots + c_nc_n\alpha_{nn} = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Sumando:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_i c_j \alpha_{ij} = 0$$

$$\therefore \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x)\right)^2 dx = 0$$

El primer miembro de la ecuacion sólo

puede anularse si el integrando es idénticamente nulo en $[a,b]$:

$\Rightarrow c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \equiv 0$

$\therefore$ Si $\Gamma = 0$, las funciones $y_i(x)$ resultan linealmente dependientes.

Ejemplo: Comprobar, mediante el determinante gramiano, que las funciones:

$y_1 = x$

$y_2 = 2x$

son linealmente dependientes en $[0,1]$.

Solución:

$$\alpha_{11} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$\Gamma(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow y_1(x)$ y $y_2(x)$ <u>son</u> linealmente dependientes.

$$(-2)y_1 + y_2 = 0$$

11.- <u>Solución general</u>.- Dada la ecuación diferencial:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

se llama "solución" general de ésta, a la función:

$$y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

definida en un intervalo I (que puede ser infinito); que posee derivadas por lo menos de orden n en el intervalo I, y que substituida en la ecuación ~~diferencial~~ $F=0$, la verifica idénticamente.

Las c_i en la función y son constantes arbitrarias independientes. Asignando valores determinados a las constantes c_i en la solución general y, se obtiene una solución "particular" de la ecuación diferencial $F=0$.

Recíprocamente, dada una familia de curvas $y=f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, mediante la eliminación de las constantes c_i del sistema de ecuaciones:

$$f=0 \;;\; \frac{df}{dx}=0 \;;\; \ldots \;;\; \frac{d^n f}{dx^n}=0$$

resulta, en general, una ecuación diferencial de la forma $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, cuya solución, en el intervalo I, es la función $y = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

La solución general de la ecuación homogénea $L(y)=0$ se denomina solución (ó función) "complementaria"

Ejemplo: 1) Hallar la ecuación diferencial de la familia de circunferencias, con centro en el eje de las abscisas; siendo de radio fijo r.

Solución:

$$(x-c)^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$

siendo c una abscisa arbitraria.

Derivando la función implícita, con respecto á x:

$$2(x-c) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \quad x - c = -y\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

eliminando c entre las ecuaciones (1) y (2):

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = r^2 \qquad (3)$$

Siendo (3) la ecuación diferencial buscada. Se comprueba fácilmente que la función (1). transforma la ecuación (3) en una identidad

---

2) Hallar la ecuación diferencial de la familia de parábolas: $y = c_1(x-c_2)^2$

Solución:

Derivando dos veces:

$$y' = 2c_1(x-c_2) \quad ; \quad y'' = 2c_1$$

Eliminando las constantes c_1 y c_2 de las tres ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$2yy'' = (y')^2$$

que es la ecuación diferencial buscada.

3) Eliminar las constantes arbitrarias c_1 y c_2 de la ecuación: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$

Solución:

Escribiendo la ecuación en la forma:

$-y + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} = 0$ ①

Derivando dos veces:

$-y' - 2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} = 0$ ②

$-y'' + 4c_1 e^{-2x} + 9c_2 e^{3x} = 0$ ③

Considerando c_1 y c_2 como incognitas en el sistema homogeneo de ecuaciones ①, ②, ③, obtenemos que el sistema tendrá solución diferente de la trivial ⇔

$$W(y, e^{-2x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} -y & e^{-2x} & e^{+3x} \\ -y' & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ -y'' & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

Puesto que $e^{-2x} \neq 0$; $e^{3x} \neq 0$ ⇒

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & -2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 = y'' - y' - 6y$$

<u>Observación</u>: La eliminación de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de la ecuación:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

siempre conduce a una ecuación diferencial <u>lineal de coeficientes constantes, homogénea</u>:

$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0 \quad ; \text{siendo: } y = \frac{d^0 y}{dx^0} ;$$

a_i son constantes

---

4) Eliminando las constantes arbitrarias C_1 y C_2, obtener la ecuación diferencial asociada a la ecuación: $y = C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx$; siendo k una constante determinada.

Solución: Derivando dos veces:

$y' = C_1 k \cos kx - C_2 k \operatorname{sen} kx$

$y'' = -C_1 k^2 \operatorname{sen} kx - C_2 k^2 \cos kx$

$= -k^2 (C_1 \operatorname{sen} kx + C_2 \cos kx) = -k^2 y.$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$, es la ecuación buscada.

---

5) Determinar la ecuación diferencial correspondiente a todas las tangentes a la parábola: $x^2 = 2y$. ①

Solución: La ecuación de la tangente a la parábola en el punto (x_0, y_0) es de la forma: $y' = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ ② ; derivando ①: $2x = 2y' \Rightarrow y' = x$ ③

③ en ② $\Rightarrow x^2 - x x_0 = y - y_0$ ④ ; de ① en ④:

$2y - x x_0 = y - y_0$ ⑤ ; derivando ⑤: $y' - x_0 = 0$

$\Rightarrow y' = x_0$ ⑥ ; eliminando x_0 y y_0 de ⑤ y ⑥; teniendo en cuenta que $x_0^2 = 2y_0$ ya que (x_0, y_0) está sobre la parábola ①, resulta:

$y - xy' = -\dfrac{(y')^2}{2}$

$\therefore (y')^2 - 2xy' + 2y = 0$, es la ecuación buscada.

Es factible demostrar que en ningún caso puede una expresión analítica, que represente la solución de una ecuación diferencial en un intervalo, contener un número de constantes independientes mayor que el que corresponde al orden de la ecuación diferencial.

Es común que una ecuación diferencial de orden n contenga en su solución n constantes arbitrarias; sin embargo, en seguida se dan ejemplos en los cuales la solución de la ecuación contiene menos constantes que el orden de ésta:

1) $\left|\frac{dy}{dx}\right| + 1 = 0$

Por no existir solución, tampoco existen constantes arbitrarias asociadas a una solución.

---

2) $\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| = 0$

La solución $y = 0$ no posee ninguna constante arbitraria.

---

3) $x\frac{dy}{dx} = 2y$

Existen dos soluciones con constantes arbitrarias diferentes; pero una de las soluciones no es analítica:

i) $y = c_1 x^2$; donde $c_1 > 0$

ii) $\ln\frac{y}{x^2} = c_2$; donde: $0 < \frac{y}{x^2} \leq 1 \Rightarrow c_2 \leq 0$

$c_2 = \ln c_1$

---

4) $x\frac{dy}{dx} = x$ ①

Las funciones $y^2 = 2axy + b^2x^2$ ② satisfacen la ecuación diferencial, siendo a y b constantes arbitrarias independientes; en efecto:

de ②: $y^2 - 2axy - b^2x^2 = 0$

$\therefore \quad y = x(a \pm \sqrt{a^2+b^2})$ ③

$\Rightarrow \quad y' = (a \pm \sqrt{a^2+b^2})$ ④

④ ÷ ③ $\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$

o bien $x\frac{dy}{dx} = y$ que es ①

$\Rightarrow$ ② satisfacen ① $\Rightarrow$ siendo ① de primer orden, se satisface con ② que contiene dos constantes arbitrarias. Este resultado puede justificarse de manera análoga a como se dijo en el problema 3) anterior; pero de forma más general, si: $F(x,y,\phi(a,b))=0$, como solución de $F(x,y,y')=0$, aparentemente depende de dos parámetros arbitrarios a, b; sin embargo, la realidad es que puede hacerse $\phi(a,b)=c$; siendo entonces, en este ejemplo, la solución de ①:

$y = cx$

12.- Condiciones iniciales (problema de Cauchy)

Si se busca la solución particular: $y=y(x)$ de la ecuación diferencial:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})$$

dadas las siguientes n condiciones iniciales:

$$y(x_0)=y_0$$
$$y'(x_0)=y_0'$$
$$\dots\dots\dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

, a este problema se le denomina, o se le conoce como "problema de Cauchy".

Conociéndose la solución general de la ecuación diferencial: $y=f(x,c_1,c_2,\dots c_n)$, entonces, generalmente es posible determinar las n constantes arbitrarias c_i, mediante el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{cases} y_0=f(x_0,c_1,c_2,\dots,c_n) \\ y_0'=f'(x_0,c_1,c_2,\dots,c_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x_0,c_1,c_2,\dots,c_n) \end{cases}$$

Ejemplo: Determinar aquella curva de la familia $y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$ para la cual: $y(0)=1$; $y'(0)=-2$

Solución:

$y=c_1e^{x}+c_2e^{-2x} \Rightarrow y'=c_1e^{x}-2c_2e^{-2x}$

para $x=0$, se obtienen las siguientes ecuaciones: $1=c_1+c_2$; $-2=c_1-2c_2$

$\Rightarrow c_1=0$; $c_2=1$

$\therefore$ $y=e^{-2x}$ es la ecuación de la curva buscada.

13.- Soluciones (ó integrales) singulares.-

Se denominan soluciones singulares de una ecuación diferencial, aquellas soluciones que, satisfaciendo la ecuación diferencial, no pueden ser deducidas de la solución general dando valores determinados a las constantes de integración; es decir, las soluciones singulares no se encuentran comprendidas en la solución general.

Soluciones singulares de una ecuación diferencial de primer orden: $F(x,y,y')=0$ ①

Siendo la integral general de ①: $\phi(x,y,c)=0$ ②; si la constante arbitraria c varía con el valor inicial x_0 de la abscisa x; resulta que para obtener todas las soluciones basta suponer $c=c(x)$; por lo que al derivar ② se obtiene:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\phi}{\partial c}\frac{dc}{dx}=0 \quad ③$$

siendo c constante en ②, resulta de ③:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \quad ④$$

despejando $\frac{dy}{dx}$ en ③ y ④ respectivamente:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial y}}-\frac{1}{\frac{\partial\phi}{\partial y}}\frac{\partial F}{\partial c}\frac{dc}{dx} \quad ⑤$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial y}} \quad ⑥$$

Puesto que ② es siempre la integral de ①, sea c variable ó constante, los valores de y' en ⑤ y ⑥ deben ser los mismos; de lo cual se deduce que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial c} = 0 \quad ó \quad \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = 0 \quad ó \quad \frac{dc}{dx} = 0$$

Por lo cual resulta que todas las soluciones de ① se obtienen de los tres sistemas siguientes:

$$\phi(x,y,c) = 0 \ ; \ \frac{\partial \phi}{\partial c} = 0 \qquad ⑦$$

$$\frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = 0 \ ; \ \phi(x,y,c) = 0 \qquad ⑧$$

$$\frac{dc}{dx} = 0 \ ; \ \phi(x,y,c) = 0 \qquad ⑨$$

Observando que el sistema ⑨ nos lleva a la solución general; deducimos que, de existir solución singular, ésta resulta de ⑦ y ⑧:

$$c = c(x) \ ; \ \phi(x,y,c(x)) = 0 \ ; \ \varphi(x,y) = 0 \qquad ⑩$$

que está libre de toda constante arbitraria.

<u>Solución singular deducida directamente de la ecuación diferencial</u>. $F(x,y,y') = 0$ ①.

Para hallar la solución singular, sin conocer la solución general, basta observar que en los puntos en que dos curvas integrales tienen la misma tangente, la ecuación ① debe tener una raíz doble en y'; por lo cual debe anularse $\frac{\partial F}{\partial y'}$; por lo que eliminando y' en el sistema: $F(x,y,y') = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ ⑪, se obtiene la solución singular, si existe:

$$\varphi(x,y) = 0 \qquad ⑫$$

Obsérvese que (12) puede contener alguna solución particular de (2); pero ésta será doble.

En los puntos de retroceso de las curvas integrales, existe asimismo una tangente doble; por lo tanto la ecuación (12) puede representar el lugar geométrico de los puntos de retroceso de las curvas integrales; siendo así, en general, que no necesariamente es una solución de la ecuación (1).

Interpretación geométrica de la solución singular:-

Observando que el procedimiento seguido para obtener el sistema (7) es idéntico en todo al método del cálculo diferencial para determinar la envolvente de una familia de curvas; se ve que la solución del sistema simultáneo (7) que da la solución singular de (1) representa la envolvente a la familia de curvas definidas por la solución general (2), cuando dicha envolvente existe (lo que en general no ocurre).

Es asimismo interesante observar que las ecuaciones (5) y (6) corroboran la conocida propiedad de que la tangente a la envolvente en un punto, es también tangente a su involuta, y viceversa. Si $\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$, resultando entonces la forma indeterminada $\frac{0}{0}$; no habiendo por lo tanto envolvente a la curva; pero la solución singular da el lugar geométrico de los puntos de retroceso de las curvas integrales, (más adelante se verán ejemplos, después del teorema IV).

Es muy importante señalar que las ecuaciones diferenciales de primer orden sólo pueden tener soluciones singulares si la función $f(x,y)$, en la forma explícita $y' = f(x,y)$, es multivaluada; esto es, la ecuación $y' = f(x,y)$ no tendrá soluciones singulares si la función $f(x,y)$ llena los requisitos exigidos en la definición moderna de función: Si para cada valor de la variable independiente x en un intervalo, la variable dependiente y adquiere sólo un valor.

Geométricamente, la ecuación $f(x,y) = c$ (constante) representa una función (función univaluada), si cualquier línea vertical (y = constante) corta la gráfica de la ecuación $f(x,y) = c$ en un solo punto. Si la línea vertical corta la gráfica en dos ó más puntos, se dice que la ecuación $f(x,y) = c$ respresenta una función multivaluada.

En la matemática moderna se prescinde de las funciones multivaluadas; ya que éstas pueden considerarse como la unión de funciones (funciones univaluadas)

Asimismo es importante observar que las ecuaciones diferenciales lineales no tienen soluciones singulares.

<u>Soluciones expresadas en forma de serie de Taylor</u>:- (Por derivación sucesiva de la E.D.)

Este método puede resultar conveniente cuando sólo interesa obtener algunos de los primeros términos de la serie de Taylor de una solución particular; en cuyo caso únicamente es necesario determinar la solución y con sus primeras derivadas, valuadas en $x=x_0$.

<u>Explicación del procedimiento</u>: Supóngase que la solución de una ecuación diferencial es tal que la variable independiente y es una función analítica alrededor del punto $x=x_0$; esto es:

$$y = y(x_0) + (x-x_0)\,y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\,y''(x_0) + \dots \quad (1)$$

Sea la ecuacion diferencial lineal, de orden n: (el método puede aplicarse a ecuaciones no-lineales)

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\,y = f(x) \quad (2)$$

donde los coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, así como $f(x)$ tienen coeficientes diferenciales finitos de todos los órdenes para $x=x_0$; siendo además $a_0(x_0) \neq 0$.

Haciendo $x=x_0$ en (2), se obtiene:

$$a_0(x_0)\,y^{(n)}(x_0) + a_1(x_0)\,y^{(n-1)}(x_0) + \dots + a_n(x_0)\,y(x_0) = f(x_0) \quad (3)$$

La ecuacion (3) da el valor de la derivada $y^{(n)}(x_0)$ en función de $y^{(n-1)}(x_0)$ y de las derivadas de orden inferior.

Derivando la ecuacion (2); haciendo $x=x_0$:

$$a_0(x_0)\,y^{(n+1)}(x_0) + [a_0'(x_0) + a_1(x_0)]\,y^{(n)}(x_0) + \dots + a_n'(x_0)\,y(x_0) = f'(x_0) \quad (4)$$

Las ecuaciones ③ y ④ definen el valor de $y^{(n+1)}(x_0)$ en función de $y^{(n-1)}(x_0)$ así como de las derivadas de orden inferior.

Mediante derivación sucesiva, es factible obtener todos los demás coeficientes de la serie de Taylor, en función de $y(x_0)$ así como de las primeras $n-1$ derivadas de y valuadas en $x=x_0$.

Se ve, por lo tanto, que puede obtenerse una solución de la ecuación diferencial ② con n constantes arbitrarias; en otras palabras; se comprueba que la solución general de la ecuación ② contiene n constantes arbitrarias.

Ejemplos: Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, expresando éstas mediante serie de Taylor, válida en la vecindad del punto indicado; el origen:

1) $y' = xy \quad ; y(0) = a \Rightarrow y'(0) = 0$

Derivando la ecuación diferencial n veces:

$y^{(n+1)} = (xy)^{(n)}$

Del teorema de Leibnitz:

$y^{(n+1)} = xy^{(n)} + ny^{(n-1)}$

$\Rightarrow y^{(n+1)}(0) = ny^{(n-1)}(0)$, si $n \geq 1$

$\Rightarrow y''(0) = y(0) = a$

$y'''(0) = y'(0) = 0 \Rightarrow$ todas las derivadas de orden impar serán nulas.

$y^{(iv)}(0) = 3y''(0) = 3a$

$$y^{(VI)}(0) = 5\,y^{(IV)}(0) = 15\,a$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = a\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{4!}x^4 + \frac{15}{6!}x^6 + \dots\right)$$

$$= a\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \dots\right)$$

$$\Rightarrow\quad y = a\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

---

2) $y' = x^2 + y^2$ (ecuación no-lineal)
condición inicial: $y(0) = 1$; $\Rightarrow$ $y'(0) = 1$

Solución.- Supongamos que sólo se requieren los primeros cinco términos del desarrollo. Derivando sucesivamente la ecuación diferencial, se obtiene:

$$y'' = 2x + 2yy' \quad\Rightarrow\quad y''(0) = 2$$
$$y''' = 2 + 2yy'' + 2(y')^2 \Rightarrow y'''(0) = 8$$
$$y^{(IV)} = 2yy''' + 6y'y'' \quad\Rightarrow\quad y^{(IV)}(0) = 28$$

$$\therefore\quad y = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + 8\frac{x^3}{3!} + 28\frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow\quad y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \dots$$

Puede demostrarse que la serie obtenida converge para alguna $h > 0$ $\in |x| < h$

---

3) $y'' + xy = 0$; $y(0) = C_1$; $y'(0) = C_2$

Solución:

$y'' = -xy \Rightarrow y''(0) = 0$

derivando n veces:

$y^{(n+2)} = -(xy)^{(n)}$

y del teorema de Leibnitz:

$$y^{(n+2)} = -(xy^{(n)} + n\,y^{(n-1)}) \quad ; n \geq 1$$

$$y^{(n+2)}(0) = -n\,y^{(n-1)}(0)$$

$\Rightarrow$ $n=1$: $y'''(0) = -C_1$

$n=2$: $y^{IV}(0) = -2C_2$

$n=3$: $y^{V}(0) = -3\,y''(0) = 0$

$n=4$: $y^{VI}(0) = -4y'''(0) = -7C_1$

... ...

$n=3m-2$ $\quad y^{(3m)}(0) = C_1(-1)(-7)\dots(-3m+2)$

$n=3m-1$ $\quad y^{(3m+1)}(0) = C_2(-2)(-5)\dots(-3m+1)$

$n=3m+2$ $\quad y^{(3m+2)}(0) = 0$

Substituyendo en (1):

$$y = C_1\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{4x^6}{6!} - \frac{28x^9}{9!} + \dots\right) + C_2\left(x - \frac{2x^4}{4!} + \frac{10x^7}{7!} - \frac{80x^{10}}{10!} + \dots\right)$$

que es la solución <u>general</u>, ya que:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$$W(y_1(0), y_2(0)) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ y_1 y y_2 son linealmente independientes en cualquier intervalo que contenga al origen; observándose que ambas series verifican la E.D.

Cada serie y_1 y y_2 converge $\in(-\infty,\infty)$, según se comprueba por el criterio de D'Alembert.

4) $xy'' + x^3y' - 3y = 0 \quad ; \; y(1) = 0 \; ; \; y'(1) = 2$

Solución:

$$y'' = -x^2y' + 3x^{-1}y \quad \Rightarrow \quad y''(1) = -(1^2)2 + 3(1)0 = -2$$

$$y''' = -x^2y'' - (2x - 3x^{-1})y' - 3x^{-2}y \Rightarrow \quad y'''(1) = 4$$

$$y^{iv} = -x^2y''' - (4x - 3x^{-1})y'' - (2 + 6x^{-2})y' + 6x^{-3}y \quad \Rightarrow \quad y^{iv}(1) = -18$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

Substituyendo en ①:

$$y = 0 + 2(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 - \frac{18}{4!}(x-1)^4 + \cdots$$

$$y = 2(x-1) - (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{3}{4}(x-1)^4 + \cdots$$

---

5) $y'' = xy \quad ; \; y(3) = 1 \; ; \; y'(3) = 2$

Solución:

Como en el problema 1) anterior, las derivadas sucesivas pueden obtenerse con auxilio del teorema de Leibnitz

$$y^{(n+2)} = (xy)^n$$

$$y^{(n+2)} = xy^{(n)} + ny^{(n-1)} \quad ; \text{ si } n \geq 1$$

$$\Rightarrow n=1 : \; y''' = xy' + y \quad ; \quad y'''(3) = (3)(2) + 1 = 7$$

$$n=2 : \; y^{iv} = xy'' + 2y' \quad ; \quad y^{iv}(3) = (3)(3)(1) + 2(2) = 13$$

$$n=3 : \; y^{v} = xy''' + 3y'' \; ; \quad y^{v}(3) = (3)(7) + 3(3) = 30$$

$$n=4 : \; y^{vi} = xy^{iv} + 4y''' \; ; \quad y^{vi}(3) = (3)(13) + 4(7) = 67$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

Substituyendo en ①:

$$y = 1 + 2(x-3) + \frac{3}{2!}(x-3)^2 + \frac{7}{3!}(x-3)^3 + \frac{13}{4!}(x-3)^4 + \frac{30}{5!}(x-3)^5 + \frac{67}{6!}(x-3)^6 + \cdots$$

$$y = 1 + 2(x-3) + \frac{3}{2}(x-3)^2 + \frac{7}{6}(x-3)^3 + \frac{13}{24}(x-3)^4 + \frac{1}{4}(x-3)^5 + \frac{67}{720}(x-3)^6 + \cdots$$

---

6) $y'' = e^x y \quad ; \quad y(0) = 1 \quad ; \quad y'(0) = 1$

Solución:

$$y''(0) = e^0 y(0) = 1$$

$$y''' = e^x(y' + y) \Rightarrow y'''(0) = 1(1+1) = 2$$

$$y^{IV} = e^x(y'' + 2y' + y) \Rightarrow y^{IV}(0) = 1(1+2+1) = 4$$

$$y^{V} = e^x(y''' + 3y'' + 3y' + y) \Rightarrow y^{V}(0) = 1(2+3+3+1) = 9$$

$$y^{VI} = e^x(y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y) \Rightarrow y^{VI}(0) = 1(4+8+6+4+1) = 23^{*}$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

Obsérvese que los coeficientes dentro del paréntesis ~~son~~ los mismos que los correspondientes al desarrollo del binomio de Newton $(1+1)^n$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Asimismo debe observarse que el orden de derivación en los términos dentro del paréntesis decrece de izquierda a derecha, terminando en $y^{(0)} = y$.

Substituyendo en ①

$$y = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4 + \frac{9}{5!}x^5 + \frac{23}{6!}x^6 + \dots$$

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{23x^6}{720} + \dots$$

---

* por Leibnitz

$$(y'')^{(n)} = y^{(n+2)} = (e^x y)^{(n)}$$
$$= e^x(y^{(n)} + C_1 y^{(n-1)} + \dots + C_{n-1} y' + y)$$

48

7) $(x-1)y''' + y'' + (x-1)y' + y = 0$

$y(0) = y''(0) = 0 \; ; \; y'(0) = 1$

Solución:

$$y''' = -(x-1)^{-1}y'' - y' - (x-1)^{-1}y \; ; \; y'''(0) = -1$$

$$y^{iv} = -(x-1)^{-1}y''' + [(x-1)^{-2} - 1]y'' - (x-1)^{-1}y' + (x-1)^{-2}y.$$

$$\therefore y^{iv}(0) = 0$$

$$y^{v} = -(x-1)^{-1}y^{iv} + [2(x-1)^{-2} - 1]y''' - [2(x-1)^{-3} + (x-1)^{-1}]y'' + 2(x-1)^{-2}y' - 2(x-1)^{-3}y$$

$$\therefore y^{v}(0) = 1$$

. . . . . .

Substituyendo en ①:

$$y = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 - \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$y = \operatorname{sen} x$

Esta es la solución buscada, ya que: $y = \operatorname{sen} x$ satisface, tanto la ecuación diferencial, como las condiciones iniciales dadas; debiendo la solución ser única, de acuerdo con el teorema de existencia y unicidad de solución, para ecuaciones diferenciales lineales, que se da a continuación.

Dada la importancia que en la práctica tienen las ecuaciones diferenciales lineales, en seguida se comentarán algunos aspectos particulares de éstas:

1.- Teorema de existencia y unicidad para E.D. lineales no-homogéneas de orden n con coeficientes variables.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = f(x) \quad ; \frac{d^0y}{dx^0} = y.$$

Si las funciones $a_i(x)$, $f(x)$ son funciones reales, continuas en un intervalo real $a \leq x \leq b$; siendo $a_0(x) \neq 0$ para toda $x \in [a,b]$, se afirma:

Existe una solución única $y = \varphi(x)$, tal que: $y(x_0) = k_0$; $y'(x_0) = k_1$, ... $y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$; donde $x_0 \in [a,b]$; $k_i \in R^{\#}$; $i = 0, 1, 2, 3, ..., n-1$

Ejemplos: Determinar si existe solución única en cada uno de los siguientes problemas de Cauchy:

1) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2+x-1)e^{2x}$

Solución:

Dado que las funciones: $a_0(x) = x$; $a_1(x) = -2x-1$; $a_2(x) = x+1$; $f(x) = (x^2+x-1)e^{2x}$ son funciones continuas para toda $x \in R^{\#}$, $\Rightarrow$ x_0 puede ser <u>cualquier</u> número real ; con lo cual el teorema de existencia y unicidad nos garantiza la solución de la ecuación propuesta. Puede comprobarse que ésta es:

$$y = c_1 x^2 e^x + c_2 e^x + x e^{2x}$$

2) $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x - 1$

Solución:

$a_0(x) = 1$; $a_1(x) = -\frac{3}{x}$; $a_2(x) = \frac{3}{x^2}$; $f(x) = 2x-1$

$\Rightarrow$ existirá solución única $\in [a,b]$ que no contenga al origen, ya que $a_1(x)$, $a_2(x)$ son funciones con discontinuidad para $x=0$.

La solución:

$$y = c_1 x^3 + c_2 x + x^3 \ln x + x^2 \quad *$$

permite determinar el valor de las constantes c_1, c_2 si se dan las siguientes condiciones iniciales:

$$y(1) = 1 \quad ; \quad y'(1) = 0 \quad ; \text{ ya que } x = 1 \neq 0$$

$y(1) = 1 = c_1 + c_2 + 1$; ① $c_1 + c_2 = 0$

$y'(1) = 0$; $y' = 3c_1 x^2 + c_2 + x^2 + 3x^2 \ln x + 2x$

$\Rightarrow 0 = 3c_1 + c_2 + 1 + 2 = 3c_1 + c_2 + 3$

② $3c_1 + c_2 = -3$

de ① y ② $c_1 = -\frac{3}{2}$; $c_2 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ la solución: $y = -\frac{3}{2} x^3 + \frac{3}{2} x + x^3 \ln x + x^2$

válida para cualquier intervalo $[a,b]$ que no contenga al origen

* Véase: Theory and problems of. Diffential equations, Frank Ayres, Jr. Edit. Schaum 1952, pagina 114, problema 2.

3.- En la ecuación diferencial lineal de orden n: $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)} = f(x)$ ①; $y^{(0)} = y$

es factible eliminar el término $y^{(n-1)}$, resultando una ecuación diferencial lineal también de orden n. Lo anterior se consigue mediante el cambio de variable:

$$y = u\, F(x) \quad ②$$

donde la función $F(x) = e^{-\frac{1}{n}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$ ③

Demostración:

Empleando la fórmula de Leibnitz para calcular la derivada enésima en ②, y substituyendo en ①:

$$a_0(x)\left[u^{(n)}F(x) + n u^{(n-1)}F'(x) + \dots + u F^{(n)}(x)\right] + a_1(x)\left[u^{(n-1)}F(x) + (n-1)u^{(n-2)}F'(x) + \dots + u F^{(n-1)}(x)\right] + \dots + a_{n-1}(x)\left[u'F(x) + uF'(x)\right] + a_n(x)\, u\, F(x) = f(x)$$

reagrupando términos:

$$\left(a_0(x)F(x)\right)u^{(n)} + \left(n a_0(x)F'(x) + a_1(x)F(x)\right)u^{(n-1)} + \dots + \left(a_0(x)F^{(n)}(x) + \dots + a_n(x)F(x)\right)u = f(x)$$

Eligiendo $F(x)$ de modo que se anule el coeficiente de $u^{(n-1)}$

$$\Rightarrow n\, a_0(x)\, F'(x) + a_1(x)\, F(x) = 0$$

Esta ecuación diferencial de primer orden tiene por solución:

$$F(x) = e^{-\frac{1}{n}\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \quad ✓$$

Observación: Como una aplicación inmediata del resultado anterior, vemos que el estudio de la ecuación diferencial lineal de orden 2:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

resulta equivalente a hacer el estudio de la ecuación diferencial lineal de 2º orden:

$$b_0(x)u'' + b_2(x)u = f(x)$$

ó bien:

$$u'' + g(x)u = h(x)$$

Ejemplo: Resolver:

$$xy'' + 2y' - xy = 0$$

Solución:

Si $x \neq 0$; de ③; $n = 2$:

$$F(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x}$$

de ②: $y = \frac{u}{x}$

$\Rightarrow y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$; $y'' = \frac{u''}{x} - \frac{2u'}{x^2} + \frac{2u}{x^3}$

substituyendo en la E.D. dada:

$$u'' - u = 0$$

$\Rightarrow \quad u = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$\Rightarrow \quad y = c_1 \frac{e^{x}}{x} + c_2 \frac{e^{-x}}{x}$

55

Teorema I.- Dada la ecuación diferencial lineal:

$$L(y) = a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \quad (1)$$

donde $a_0(x) \neq 0$, se afirma:

i) Si F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $L(y) = 0$, ($f(x) = 0$ en (1)), en un intervalo I, entonces la familia:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i \quad ; \quad (c_i \text{ son constantes})$$

es la solución general de la ecuación homogénea:

$$L(y) = a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = 0 \quad (2).$$

ii) Si se tiene la ecuación (1) $L(y) = f(x)$; $(f(x) \neq 0)$, entonces la solución general es:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i + F(x) \quad (3)$$

donde $F(x)$ es una solución particular de (1).

Demostración:

i) Sea $y(x)$ una solución de la ecuación homogénea (2) $L(y) = 0$; siendo las condiciones iniciales las siguientes:

$$y(x_0) = y_0 \;;\; y'(x_0) = y_0' \;;\; \ldots \;;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (4)$$

donde x_0 es una abscisa determinada en el intervalo I en que se busca la solución.

Substituyendo los valores (4) en la expresión:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i \quad ;$$

así como en las derivadas sucesivas de la misma:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0)$$

$$y_0' = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_0^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0)$$

Resolviendo este sistema simultáneo para las c_i, se ve que posee solución única, ya que:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

el determinante Wronskiano no puede ser nulo, dado que, por hipótesis las soluciones y_i son linealmente independientes.

Por lo anterior, se concluye que:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i$$

representa la solución general de la ecuación homogénea ② $L(y)=0$

ii) Haremos ver que la expresión ③: $y = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i + F(x)$ involucra ó contiene todas las soluciones posibles de ①: $L(y) = f(x)$.

En efecto, supongamos que existe otra solución y_2 que no está contenida en ③:

Haciendo $F(x) = y_p$; de las propiedades de las derivadas se obtiene:

$$L(y_2 - y_p) = L(y_2) - L(y_p) = f(x) - f(x) = 0$$

luego $y_2 - y_p$ es solución de la ecuación homogénea ②: $L(y) = 0$

$$\Rightarrow \quad y_2 - y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i$$

$$y_2 - F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i$$

$$\Rightarrow \quad y_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i + F(x) \quad ⑤$$

Comparando ③ con ⑤ $\Rightarrow y = y_2$

$\Rightarrow y_2$ si está contenida en ③ ✓

Ejemplo: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 2$$

i) Deberemos tener primero, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0 \ ;$$

pudiendo ser éstas:

$$y = x \quad ; \quad y = \frac{1}{x}$$

ii) Observando que $y = -2$ es una solución particular de:

$$x^2 y'' + xy - y = 2$$

$\Rightarrow$ La solución general buscada es:

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} - 2$$

Teorema II.- Superposición de soluciones particulares.

Sea y_{P_1} solución particular de la ecuación diferencial lineal $L(y) = f(x)$; siendo y_{P_2} solución particular de $L(y) = g(x)$. Se afirma:

i) $y_P = c_1 y_{P_1} + c_2 y_{P_2}$ es solución particular de:
$$L(y) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$
donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias

ii) Si se tienen las condiciones iniciales:
$$y(x_0) = y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$$
deberá verificarse:

I) $y_0 = 0$, ó

II) si $y_0 \neq 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$

Demostración:

i) Si y_{P_1} y y_{P_2} son soluciones de $L(y) = f(x)$, y de $L(y) = g(x)$ respectivamente:

Hagamos $y_P = c_1 y_{P_1} + c_2 y_{P_2} \Rightarrow y_P' = c_1 y_{P_1}' + c_2 y_{P_2}' \dots$
$y_P^{(n)} = c_1 y_{P_1}^{(n)} + c_2 y_{P_2}^{(n)}$

$$\Rightarrow L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\left(c_1 y_{P_1}^{(n-i)} + c_2 y_{P_2}^{(n-i)}\right) =$$
$$= c_1 \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y_{P_1}^{(n-i)} + c_2 \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y_{P_2}^{(n-i)} = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

$\Rightarrow y_P = c_1 y_{P_1} + c_2 y_{P_2}$ es solución particular de $L(y) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ ✓

ii) $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = c_1 y_0 + c_2 y_0 = (c_1 + c_2) y_0$

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 0, \text{ ó} \\ (c_1 + c_2) = 1 \end{cases}$$ ✓

Ejemplo 1) Hallar una solución particular de:

$$y'' + y = 3e^x + 5\tan x$$

Solución:

Considérense las ecuaciones:

$$y'' + y = e^x \quad (1)$$

$$y'' + y = \tan x \quad (2)$$

pudiéndose comprobar que:

$$y_{p_1} = \frac{1}{2}e^x \quad ; \quad y_{p_2} = -(\cos x)\ln|\sec x + \tan x|$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{3}{2}e^x - 5(\cos x)\ln|\sec x + \tan x|$$

---

2) $y' = 3x^2 + 2x$ (1) ; $y(0) = 1$

Considerando:

$$y' = x^2 \Rightarrow y_1 = \frac{x^3}{3} + k_1 \quad ; \quad y_1(0) = 1 = k_1$$

$$y' = x \Rightarrow y_2 = \frac{x^2}{2} + k_2 \quad ; \quad y_2(0) = 1 = k_2$$

$$\therefore \quad y = x^3 + x^2 + 3 + 2 = x^3 + x^2 + 5$$

pero $y(0) = 1 = 0 + 0 + 5$, lo cual no checa; siendo la razón que $c_1 + c_2 = 3 + 2 = 5 \neq 1$

---

3) $y' = 3x^2 - 2x$; a) $y(0) = 0$; b) $y(0) = 1$

puesto que, de 2) $y_1 = \frac{x^3}{3} + k_1$; $y_2 = \frac{x^2}{2} + k_2$

a) $k_1 = k_2 = 0$

$\Rightarrow \quad y = x^3 - x^2$ (solución válida para toda c_1 y c_2, ya que $y(0) = 0$)

b) $k_1 = k_2 = 1$

$$y = x^3 - x^2 + 3 - 2 = x^3 - x^2 + 1$$

(obsérvese que en este caso $c_1 + c_2 = 3 - 2 = 1$)

Método de variación de parámetros (ó método de Lagrange) para hallar una solución particular.-

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad ①$$

cuya solución particular se desea encontrar:

Supongamos que y_1, y_2 son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea correspondiente:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad ②$$

siendo la función complementaria (solución general de ②) la siguiente:

③ $c_1y_1 + c_2y_2$; siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

El método de variación de parámetros consiste en considerar que las constantes c_1 y c_2 en ③ son funciones de x: $V_1 = c_1(x)$; $V_2 = c_2(x)$; debiéndose determinar estas funciones, tales que:

$$y_p = V_1y_1 + V_2y_2 \quad ④$$

Derivando la ecuación ④:

$$y_p' = V_1y_1' + V_1'y_1 + V_2y_2' + V_2'y_2 \quad ⑤$$

La función y_p debe satisfacer la ecuación ①; pero en la ecuación ④ se tienen dos funciones V_1 y V_2 ; las cuales deben satisfacer una sola condición; por lo cual se está en libertad de imponer voluntariamente una segunda condición, que sea congruente con la primera condición:

Escojamos, como segunda condición, en ⑤:

$$v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \quad ⑥$$

por lo cual la ecuación ⑤ queda:

$$y_p' = v_1 y_1' + v_2 y_2' \quad ⑦$$

derivando ⑦:

$$y_p'' = v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2' \quad ⑧$$

Puesto que la primera condición exige que se verifique ①, substituyendo ⑧, ⑦ y ④:

$$a_0(x)[v_1 y_1'' + v_1' y_1' + v_2 y_2'' + v_2' y_2'] + a_1(x)[v_1 y_1' + v_2 y_2'] +$$
$$+ a_2(x)[v_1 y_1 + v_2 y_2] = f(x) \quad ⑨$$

reagrupando términos en ⑨:

⑩ $v_1[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1] + v_2[a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2] + a_0(x)[v_1'y_1' + v_2'y_2'] = f(x)$

dado que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea ②, los primeros dos paréntesis en ⑩ deben ser nulos, de ahí que ⑩ se reduce á:

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \quad ⑪ \quad ; \quad a_0(x) \neq 0$$

Se ve, por consiguiente, que las dos condiciones escogidas se traducen en la determinación de las funciones v_1 y v_2 de modo que se satisfagan las ecuaciones ⑥ y ⑪ simultáneamente:

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 & ⑥ \\ y_1' v_1' + y_2' v_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} & ⑪ \end{cases}$$

Dado que, por hipótesis y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2), queda garantizado que el determinante Wronskiano $W(y_1, y_2) \neq 0$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (13)$$

con lo cual se asegura la solución única del sistema de ecuaciones lineales (6), (11).

Resolviendo el sistema simultáneo (6),(11) se obtienen las funciones V_1' y V_2', las cuales, al ser integradas, definen V_1 y V_2; que substituidas en (4) nos dan la solución particular y_p de la ecuación (1) que se buscaba.

Ejemplos: Mediante el método de variación de parámetros, determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $(x^2+1)y''-2xy'+2y=6(x^2+1)^2$ (1)

Habiendo obtenido anteriormente como solución de la ecuación homogénea $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$, la función complementaria:

$$y_c = c_1 x + c_2(x^2-1) \quad (2)$$

Solución:

Haciendo: $y_p = V_1 x + V_2(x^2-1)$ (3)

$\Rightarrow y_p' = V_1 + V_1' x + V_2 2x + V_2'(x^2-1)$

$\therefore$ se hace $V_1' x + V_2'(x^2-1) = 0$ (4)

$\Rightarrow y_p' = V_1 + 2x V_2$ (5)

$\therefore y_p'' = V_1'' + 2V_2 + 2xV_2'$ (6)

substituyendo (3), (5), (6) en (1):

$$(x^2+1)(V_1'+2V_2+2xV_2') - 2x(V_1+2xV_2) + 2(V_1x+V_2(x^2-1)) = 6(x^2+1)^2$$

Simplificando:

$$\cancel{(x^2+1)}(V_1'+2xV_2') = 6(x^2+1)^{\cancel{2}} \quad (7)$$

del sistema de ecuaciones (4) y (7) se obtienen V_1' y V_2':

$$\left.\begin{aligned} xV_1' + (x^2-1)V_2' &= 0 \\ V_1' + 2xV_2' &= 6(x^2+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} V_1' &= -6(x^2-1) \\ V_2' &= 6x \end{aligned}$$

integrando resultan $\begin{cases} V_1 = -2x^3+6x \\ V_2 = 3x^2 \end{cases}$

substituyendo los valores V_1 y V_2 en (3)

$$y_p = (-2x^3+6x)x + 3x^2(x^2-1) = x^4+3x^2$$

puesto que la solución general es $y = y_c + y_p$:

$$y = c_1x + c_2(x^2-1) + x^4 + 3x^2$$

2) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$

siendo la función complementaria:

$$y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

Solución:

Haciendo: $y_p = V_1 e^{3x} + V_2 x e^{3x}$

$y_p' = (3V_1 + V_2) e^{3x} + 3V_2 x e^{3x} + (V_1' e^{3x} + V_2' x e^{3x})$

$\therefore$ se hace: $V_1' e^{3x} + V_2' x e^{3x} = 0$ ①

$\Rightarrow y_p' = (3V_1 + V_2) e^{3x} + 3V_2 x e^{3x}$

$$y_p'' = (9V_1 + 6V_2) e^{3x} + 9V_2 x e^{3x} + (3V_1' + V_2') e^{3x} + 3V_2' x e^{3x}$$

substituyendo estos valores en la ecuación diferencial dada, resulta:

$$(3V_1' + V_2') e^{3x} + 3V_2' x e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2} \quad ②$$

resolviendo simultáneamente ① y ②:

$$V_1' = -\frac{1}{x}$$

$$V_2' = \frac{1}{x^2}$$

integrando:

$$V_1 = -\ln x$$

$$V_2 = -\frac{1}{x}$$

$\Rightarrow y_p = V_1 e^{3x} + V_2 x e^{3x}$

$$= -e^{3x} \ln x - e^{3x}$$

$\Rightarrow \quad y = c_1' e^{3x} + c_2 x e^{3x} - e^{3x} \ln x$

(donde $c_1' = c_1 - 1$)

Variación de parámetros aplicado a ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

El método de variación de parámetros expuesto para E.D.L. de orden 2, puede ser generalizado para poder hallar una solución particular de la E.D.L.:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = f(x) \quad (1)$$

Sean: $y_1, y_2, \ldots y_n$; n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{n-i} = 0$, $\Rightarrow$ la solución general de la ecuación homogénea (función complementaria) será: $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$; siendo c_i = constantes $i = 1, 2, \ldots, n$.

Con argumentos análogos a los empleados en el caso $n=2$, suponemos:

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 + \ldots + v_n y_n$$

donde, además de que y_p debe satisfacer (1), se imponen las siguientes $n-1$ condiciones adicionales:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} v_1' y_1 + v_2' y_2 + \ldots + v_n' y_n = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' + \ldots + v_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1' y_1^{(n-2)} + v_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + v_n' y_n^{(n-2)} = 0 \end{array}\right\} n-1 \text{ condiciones} \\ v_1' y_1^{(n-1)} + v_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + v_n' y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas para v_i'; $i = 1, 2, \ldots, n$; cuya solución existe, ya que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$; pueden determinarse las funciones v_i mediante integración, como se ilustra en seguida.

1) $3y''' + 5y'' - 2y' = 14e^x$

siendo la función complementaria:

$$y_c = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x/3}$$

Solución:

Sea: $y_p = V_1 + V_2 e^{-2x} + V_3 e^{x/3}$

$$\begin{cases} V_1' + V_2' e^{-2x} + V_3' e^{x/3} = 0 \\ -2V_2' e^{-2x} + \frac{1}{3} V_3' e^{x/3} = 0 \\ 4V_2' e^{-2x} + \frac{1}{9} V_3' e^{x/3} = \frac{14}{3} e^x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$V_1' = -7e^x$$

$$V_2' = e^{3x}$$

$$V_3' = 6e^{\frac{2}{3}x}$$

integrando:

$$V_1 = -7\int e^x dx = -7e^x$$

$$V_2 = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$V_3 = 6\int e^{\frac{2}{3}x} dx = 9e^{\frac{2}{3}x}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -7e^x + \frac{1}{3} e^x + 9e^x = \frac{7}{3} e^x$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x/3} + \frac{7}{3} e^x$$

2) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{-x}$

siendo la función complementaria:

$$y_c = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

Solución:

Sea: $y_p = V_1 e^{x} + V_2 e^{2x} + V_3 e^{3x}$

$$\begin{cases} V_1' e^{x} + V_2' e^{2x} + V_3' e^{3x} = 0 \\ V_1' e^{x} + 2V_2' e^{2x} + 3V_3' e^{3x} = 0 \\ V_1' e^{x} + 4V_2' e^{2x} + 9V_3' e^{3x} = e^{-x} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultaneo de ecuaciones para V_1'; V_2'; V_3':

$$V_1' = \frac{e^{-2x}}{2}$$

$$V_2' = -e^{-3x}$$

$$V_3' = \frac{e^{-4x}}{2}$$

integrando

$$V_1 = -\frac{1}{4}\int -2e^{-2x} = -\frac{1}{4}e^{-2x}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\int -3e^{-3x} = \frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$V_3 = -\frac{1}{8}\int -4e^{-4x} = -\frac{1}{8}e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{8}e^{-x} = -\frac{1}{24}e^{-x}$$

$$y = y_c + y_p$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{1}{24}e^{-x}$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden.-

Forma general:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Si resulta posible despejar y', resulta la forma explícita:

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

Un ejemplo sencillo de ecuación diferencial de primer orden; el cual hemos resuelto ya anteriormente es:

$$y' = f(x)$$

Al estudiar el cálculo integral vimos que la solución es:

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

Donde la constante arbitraria puede determinarse, si se conocen las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0$$

$$\Rightarrow \qquad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

En ocasiones conviene considerar la variable x como función incognita, en cuyo caso resulta la forma general:

$$G(x', x, y) = 0 \qquad (3)$$

De ser posible, la forma explícita será:

$$x' = g(x,y) \qquad (4) \ ;$$

siendo:

$$g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$$

Puesto que: $y' = \frac{dy}{dx}$; $x' = \frac{dx}{dy}$;

siendo la derivada un cociente de diferenciales, de las ecuaciones ② y ④ resulta la siguiente forma "simétrica" de la ecuación diferencial de primer orden:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (5)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Comparando esta ecuación con ② se ve que:

$$f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Teorema III.- Existencia y unicidad de la solución de la ecuación: $y' = f(x,y)$:-

Dada una ecuación diferencial de primer orden en la forma $y' = f(x,y)$; estando la función $f(x,y)$ definida en una región D del plano x,y; estando el punto $(x_0, y_0) \in D$.

Se afirma que existe una, y sólo una, solución $y = y(x)$ de la ecuación dada que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$, si la función $f(x,y)$ satisface las dos condiciones siguientes:

i) $f(x,y)$ es continua en la región D

ii) $f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en la región D

Es muy importante observar que el teorema III anterior establece condiciones "suficientes" para la existencia de solución única del problema de Cauchy para la ecuación diferencial de primer orden dada; pero estas condiciones no son necesarias. A continuación se dará un ejemplo en el que se verá que una ecuación posee solución única, que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ a pesar de que no se cumple alguna ó ambas condiciones i), ii) del teorema.

Obsérvese asimismo que el teorema III se refiere a la forma explícita de la ecuación de primer orden $y' = f(x,y)$; pero no a la forma general implícita $F(x,y,y') = 0$; puesto que si se resuelve la ecuación $F(x,y,y')$ con respecto á y', en general se obtienen no una, sino varias funciones reales: $y' = f_i(x,y)$; $i = 1, 2, \ldots$

Si cada ecuación $y' = f_i(x,y)$ satisface, en un entorno del punto (x_0, y_0), la condiciones del teorema III, $\Rightarrow$ para cada ecuación existe una solución única que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo: Integrar la ecuación:

$$(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0 \quad (1)$$

Solución:

Resolviendo primero la ecuación (1) como ecuación cuadrática en y':

$$y' = \frac{(x+y) \pm \sqrt{(x+y)^2 - 4xy}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y' = x \\ y' = y \end{cases}$$

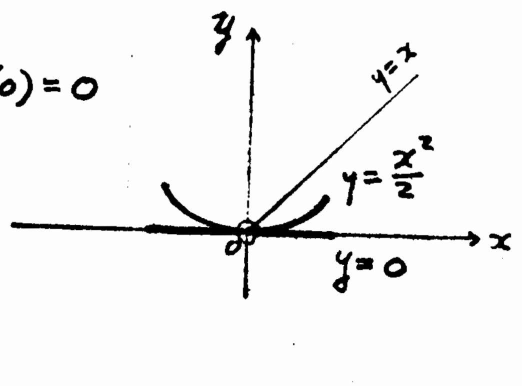
Integrando cada ecuación:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} + c & (2) \\ y = ce^x & (3) \end{cases}$$

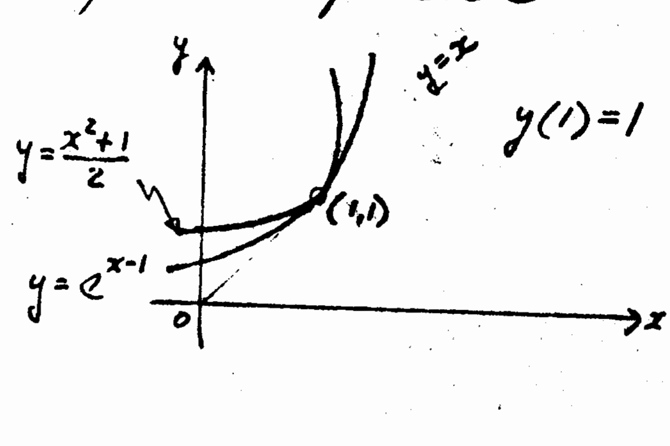
Se comprueba que ambas soluciones satisfacen la ecuación (1) dada.

Resulta que para los puntos sobre la recta $y = x$ pasan dos curvas integrales que satisfacen (1):

$y(0) = 0$



$y(1) = 1$



Ejemplos: Aplicar el teorema III a las ecuaciones:

1) $y' = xy + \frac{1}{e^y}$

Solución:

i) $f(x,y) = xy + \frac{1}{e^y}$ es continua en todo el plano x,y.

ii) $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{1}{e^y}$ es continua en todo el plano x,y.

$\Rightarrow$ La ecuación dada tiene solución única en cualquier punto del plano x,y

2) $y' = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}$

Solución:

i) $f(x,y) = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}}$ es continua en todo el plano x,y.

ii) $\frac{\partial f}{\partial y} = y^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ es discontinua para $y=0$, ó sea, para cualquier punto sobre el eje x

Por no cumplirse la condición ii) podría pensarse que no haya unicidad de solución para puntos del eje x; sin embargo, puede comprobarse que la función:

$$y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^3$$

es solución; siendo asimismo también solución: $y \equiv 0$; por lo cual se ve que por cada punto del eje x, pasan, por lo menos, dos curvas integrales, soluciones de la ecuación.

83

3) $y' = \frac{1}{y^2}$

Solución:

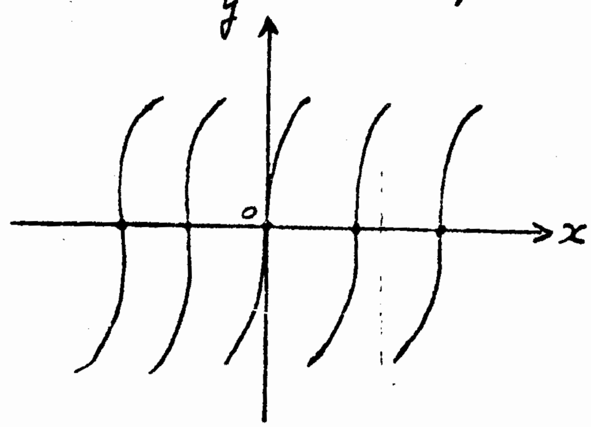
i) $f(x,y) = \frac{1}{y^2}$; discontinua para $y = 0$.

ii) $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$; discontinua para $y = 0$.

Por no cumplirse ninguna de las condiciones i), ii) del teorema III, para puntos del eje x, podría pensarse que no existen curvas integrales que pasen ó corten el eje x; sin embargo, puede probarse que la curva:

$$y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$$

es una solución única que corta al eje x:



Estos tres últimos problemas verifican que las condiciones del teorema III, aun cuando suficientes, no son condiciones necesarias.

<u>Observación</u>: La condición ii) dada en el teorema III de existencia y unicidad de la solución de la ecuación $y' = f(x,y)$ excesiva, ya que es más rigurosa de lo que se requiere, y por lo tanto puede ser cambiada por otras menos rígidas; por ejemplo, la condición conocida como "<u>Condición de Lipschitz</u>, ya que hay funciones $f(x,y)$ que satisfacen esta condición; pero $f_y(x,y)$ es discontinua en algun punto de la región D.

Definición. Sea $f(x,y)$ una función definida en una región D del plano x,y. La función $f(x,y)$ satisface la "Condición de Lipschitz" (con respecto á y) en la región D, si existe una Constante $k>0$, tal que se verifique:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2| \quad 1$$

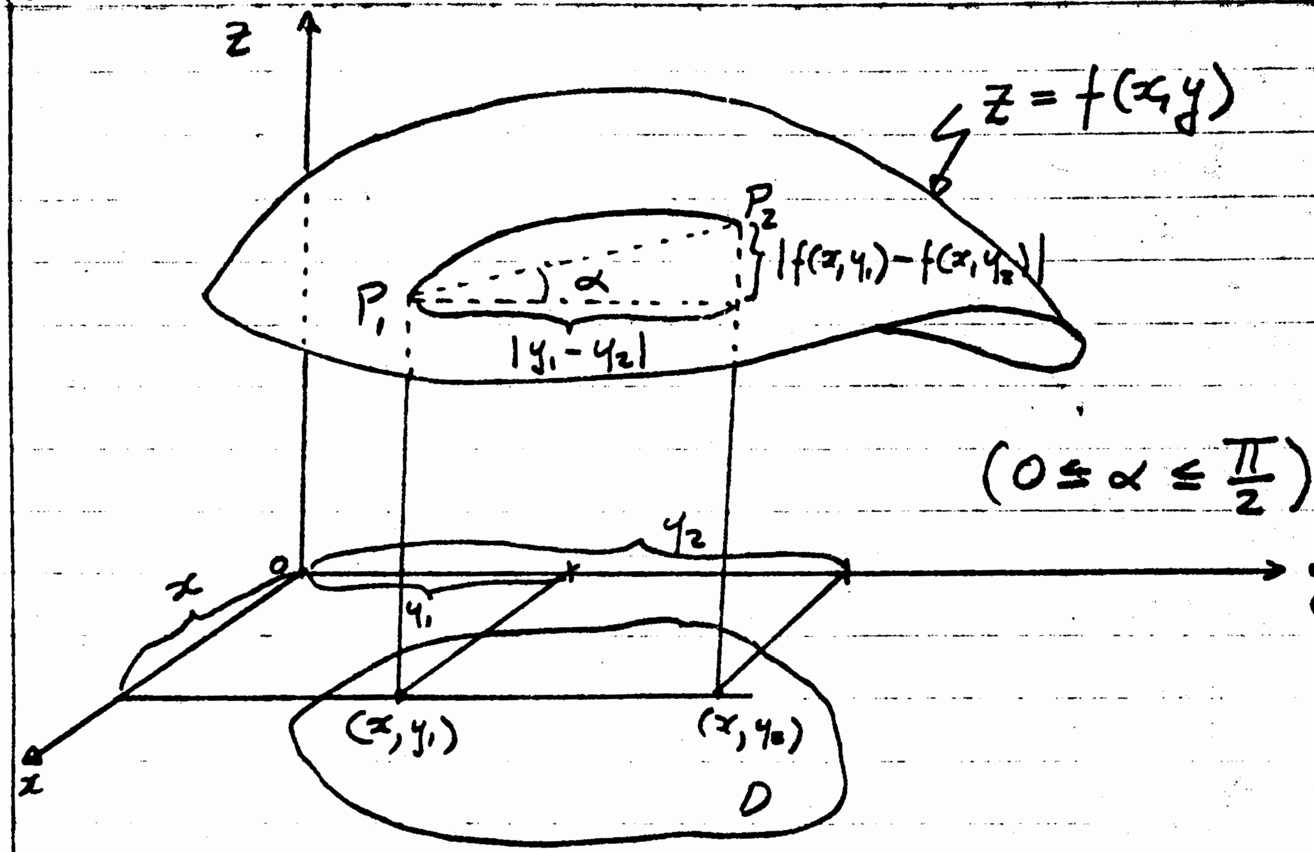
para todo $(x,y_1), (x,y_2)$ en la región D.

La constante k se conoce como "constante de Lipschitz"

Geométricamente: Sea la superficie $z = f(x,y)$; consideremos dos puntos P_1 y P_2 en D: $P_1(x, y_1, f(x,y_1))$, $P_2(x, y_2, f(x,y_2))$; el segmento $\overline{P_1P_2}$ es una cuerda a la curva que definen las superficies $z = f(x,y)$ y el plano vertical x = constante.

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} = \tan\alpha = \text{pendiente de } \overline{P_1P_2}$$

75



Si se cumple ① $\in D \Rightarrow \tan\alpha$ está acotada en valor absoluto $\Rightarrow \overline{P_1P_2}$ no puede ser perpendicular al plano x, y en ningun par de puntos P_1 y $P_2 \in D$. Además la condición ① se cumple al variar $x \in D$.

Obsérvese que ① no necesariamente implica la continuidad de f con respecto á x; por ejemplo la función:

$$f(x,y) = [x] + y$$

($[x] \Rightarrow$ valor entero $\leq x$). $f(x,y)$ satisface ① en cualquier región acotada D. Para cualquier valor constante de x, la función resultante de y es continua; sin embargo, f es discontinua con respecto á x para todo valor entero de x.

Lema: Sea f una función tal que $f_y(x,y)$ existe y está acotada para todo $(x,y) \in D$; siendo D una región cerrada convexa. Se afirma que f satisface la condición de Lipschitz ①; siendo la constante de Lipschitz:

$k = |$valor máximo de $f_y(x,y) \in D|$

Demostración: si $(x,c) \in D$:

Del teorema del valor medio para derivadas:

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = f_y(x,c)\cdot(y_1 - y_2) \quad ; \quad y_1 < c < y_2$$

tomando valor absoluto.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |f_y(x,c)|\cdot|y_1 - y_2|$$

Si k = valor absoluto máximo de $f_y(x,y) \in D$

$\Rightarrow \quad f_y(x,c) \leq k.$

$\therefore \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|$ ✓

Ejemplo 1) Sea $f(x,y) = x|y|$; siendo D el rectángulo: $|x| \leq a$; $|y| \leq b$

Conclusiones:

i) $f_y(x,y)$ no existe en ningún punto $(x,0) \in D$ tales que $x \neq 0$; luego falla el teorema III para tales puntos

ii) Dado que: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x|y_1| - x|y_2|| \leq$
$\leq |x|\,|y_1 - y_2| \leq a\,|y_1 - y_2|$ para todo $(x,y_1),(x,y_2) \in D$
$\Rightarrow$ se satisface la condición de Lipschitz ① (con respecto a y) $\in D$.

iii) Existe solución única por cada punto; siendo ésta:

$y = c\,e^{x^2/2}$; si $c \geq 0$. $y = c\,e^{-x^2/2}$; si $c < 0$.

81

Los siguientes ejemplos muestran ecuaciones diferenciales donde la solución existe, a pesar de fallar la condición de Lipschitz:

2) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$

Conclusiones:

i) La condición de Lipschitz falla en cualquier región que contenga la línea $y=0$

ii) La ecuación diferencial tiene las siguientes soluciones:

1.- $y = 0$

2.- $y = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} \,;\ si\ x \geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{4} \,;\ si\ x < 0 \end{cases}$

---

3) $\dfrac{dy}{dx} = \begin{cases} \dfrac{4x^3y}{x^4+y^2} \,;\ si\ x\ y\ y\ \text{no simultáneamente } 0 \\ 0 \,;\ si\ x = y = 0 \end{cases}$

Conclusiones:

i) $f(x,y)$ es función continua tanto de x como de y.

ii) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \dfrac{4x^3(x^4 - y_1y_2)}{(x^4+y_1^2)(x^4+y_2^2)} (y_1 - y_2) \right| =$

$= 4 \left| \dfrac{1-pq}{(1+p^2)(1+q^2)} \right| \dfrac{|y_1 - y_2|}{|x|} \,;$ donde: $\begin{cases} y_1 = qx^2 \\ y_2 = px^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ falla la condición de Lipschitz, si $(0,0) \in D$

iii) $y = C^2 - \sqrt{x^4 + C^4}$ satisface la E.D.

$\Rightarrow$ para la condición inicial: $y(0) = 0$, hay un número infinito de soluciones que satisfacen esta condición inicial.

Otra forma del teorema de existencia y unicidad de solución de la ecuación $y'=f(x,y)$

Si la función $f(x,y)$ puede desarrollarse como una serie de Taylor en $x-x_0$; $y-y_0$ (función analítica) la cual es absolutamente convergente en una región D del plano x,y, se afirma que existe una solución única $y=y(x)$ la cual satisface la condición inicial $y(x_0)=y_0$

Es importante notar que habiéndose determinado la existencia de una solución única, puede decidirse si una solución $G(x,y,c)=0$ contiene todas las soluciones posibles: Es claro que $G(x,y,c)=0$ involucrará todas las soluciones en la región D, dada la existencia de una solución única en esta región D, si resulta posible que se verifique la ecuación $G(x_0,y_0,c)=0$ mediante la elección adecuada de la constante c, para todos los puntos $(x_0,y_0)\in D$.

Dado que la propiedad de unicidad de la solución de la ecuación $F(x,y,y')=0$, que satisface la condición inicial $y(x_0)=y_0$ generalmente se interpreta en el sentido de que por el punto (x_0,y_0), en la dirección dada, solo pasa una curva integral de la ecuación implícita $F(x,y,y')=0$, en seguida se enuncia un teorema que se refiere específicamente a este problema.

Teorema IV: Existencia y unicidad de la solución de la ecuación $F(x,y,y')=0$

Existe, en el intervalo $x_0-h \leq x \leq x+h$ (donde h es suficientemente pequeño), una solución única $y=y(x)$ de la ecuación $F(x,y,y')=0$, que satisface la condición inicial $y(x_0)=y_0$, para la cual $y'(x_0)=y_0'$, siendo y_0' una de las raíces reales de la ecuación $F(x_0,y_0,y')=0$, si en un entorno cerrado del punto (x_0,y_0,y_0'), la función $F(x,y,y')$ satisface las siguientes condiciones:

1.- $F(x,y,y')$ es continua en todas las variables.
2.- La derivada $\frac{\partial F}{\partial y'}$ existe; siendo diferente de cero.
3.- La derivada $\frac{\partial F}{\partial y}$ existe; estando acotada en valor absoluto:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leq N$$

El conjunto de puntos (x,y) para los cuales se viola la unicidad de la solución de la ecuación $F(x,y,y')=0$, se llama "conjunto singular."

En los puntos del conjunto singular se viola por lo menos una de las condiciones del teorema IV. Para las ecuaciones comúnmente halladas en la práctica, es frecuente que no se cumpla la condición 2.- $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$.

Obsérvese que las condiciones del teorema IV son suficientes para la unicidad de la solución; pero no son necesarias.

Si se cumplen las condiciones 1.- y 3.- del teorema IV, deben cumplirse, en los puntos del conjunto singular, simultáneamente las ecuaciones:

$F(x,y,y')=0 \;;\; \frac{\partial F}{\partial y'}=0$ ①

Eliminando y' del sistema ① resulta: $\varphi(x,y)=0$ ② debiendo satisfacer ② los puntos del conjunto singular; sin embargo, no necesariamente en cada punto que satisface ② se viola la unicidad de la solución de la ecuación $F(x,y,y')=0$, ya que, como observamos antes, las condiciones del teorema IV son suficientes, pero no son necesarias para la unicidad de la solución; de ahí que, si no se cumple alguna de las condiciones del teorema, no necesariamente implica la violación de la unicidad de la solución.

La ecuación ② $\varphi(x,y)=0$ se denomina curva "p-discriminante", debido a que el sistema ① se acostumbra escribirlo: $F(x,y,p)=0$; $\frac{\partial F}{\partial p}=0$.

Resulta, por lo tanto, que sólo entre los puntos de la curva p-discriminante $\varphi(x,y)=0$ pueden haber puntos del conjunto singular.

Si una rama $y=y(x)$ de la curva p-discriminante $\varphi(x,y)=0$ pertenece al conjunto singular, y la ecuación $y=y(x)$ satisface $F(x,y,y')=0$, entonces $y=y(x)$ es solución singular; lo cual concuerda con lo que ya habíamos visto: para encontrar la solución singular de la ecuación $F(x,y,y')=0$, debe hallarse la curva p-discriminante $\varphi(x,y)=0$, determinada por el sistema ①: $F(x,y,p)=0$; $\frac{\partial F}{\partial p}=0$; debiéndose 79 despues determinar, por substitución directa en la ecuación $F(x,y,y')=0$, si existen, entre las ramas de la curva p-discriminante, curvas integrales, y en caso de existir éstas, debe comprobarse si se viola ó no la unicidad en los puntos de estas curvas. En caso de violarse la unicidad, la rama de la curva p-discriminante es solución singular.

Ejemplos:- Buscar la solución singular en cada uno de los siguientes casos:

1) $y = 2xy' - (y')^2$

Solución:

Se comprueba que las condiciones 1.- y 3.- del teorema IV se cumplen.

De las ecuaciones: $y = 2xp - p^2$; $2x - 2p = 0$, eliminando p, se obtiene la curva p-discriminante: $y = x^2$; pero esta parábola no es curva integral, puesto que la función $y = x^2$ no satisface la ecuación diferencial dada; por lo tanto, <u>no</u> hay solución singular.

---

2) $\frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3 = x - y$

Solución:

Se comprueba que se cumplen las condiciones 1.- y 3.- del teorema IV.

De las ecuaciones: $\frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3 = x - y$; $\frac{8}{9}(p - p^2) = 0$, eliminando p, resultan las curvas p-discriminante:

$$y = x \quad ó \quad y = x - \frac{4}{27}$$

ya que de: $\frac{8}{9}(p-p^2)=0$ resulta: $p(p-1)=0 \Rightarrow$ $p=0$ ó $p=1$; substituyendo en:

$$\frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3 = x - y$$

se obtienen las dos curvas p-discriminantes dadas; pero la segunda es la única que satisface la ecuación diferencial.

Para comprobar si la solución $y = x - \frac{4}{27}$ es ó no solución singular, es necesario integrar la ecuación diferencial, y comprobar si pasan otras curvas integrales por los puntos de la recta $y = x - \frac{4}{27}$ en la dirección de la recta.

Puesto que se comprueba que la solución general es: $(y-c)^2 = (x-c)^3$, se ve que la recta $y = x - \frac{4}{27}$ es la envolvente de la familia de parábolas semicúbicas representada por la solución general; por lo tanto, en cada punto de la recta se viola la unicidad, ya que en una misma dirección pasan dos curvas integrales: la recta $y = x - \frac{4}{27}$, y la parábola semicúbica que es tangente a la recta en el punto considerado; luego la envolvente a la familia de curvas integrales <u>es</u> solución singular.

Obsérvese que puede llegarse a la misma conclución, obteniéndose la envolvente directamente eliminando la constante c del sistema:

$$\phi(x,y,c)=0 \; ; \; \frac{\partial \phi}{\partial c} = 0,$$ como se indicó

anteriormente, (13.- Soluciones singulares):

$$(y-c)^2 = (x-c)^3 \quad ; \quad 2(y-c) = 3(x-c)^2$$

eliminando c resultan:

$$\begin{cases} y = x \\ x - y = \frac{4}{27} \end{cases}$$

siendo la recta $x - y = \frac{4}{27}$ envolvente, puesto que cumple todas las condiciones de la teoría sobre envolventes.

Como se dijo antes, la recta $y = x$ no satisface la ecuación diferencial.

La recta $y = x$ representa el lugar geométrico de los puntos de retroceso. En los puntos de esta recta se viola la condición:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0 \quad \left(\acute{o}\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0\right)$$

que es condición suficiente para que cierta rama de la curva c-discriminante sea, con seguridad, envolvente. La otra condición suficiente es: que existan derivadas parciales que estén acotadas en valor absoluto:

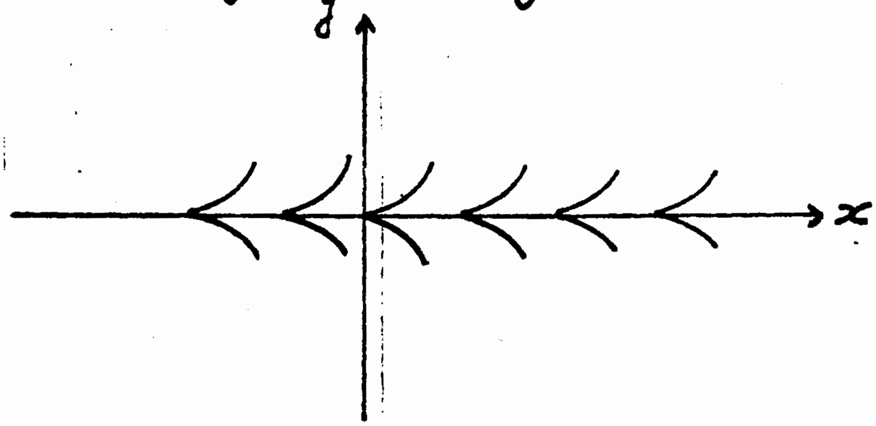
$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x}\right| \leq N_1 \quad ; \quad \left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right| \leq N_2$$

Obsérvese que por ser sólo condiciones suficientes, las curvas en las que se viola alguna de las dos condiciones, tambien pueden ser envolventes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

3) $y^2-(x-c)^3=0$ es la solución general de una ecuación diferencial de primer orden.

La curva p-discriminante se deduce de las ecuaciones: $y^2-(x-c)^3=0$; $x-c=0$, eliminando c resulta: $y=0$.

Observando que en la recta $y=0$ se tiene $\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=0$ de $\phi(x,y,c)=y^2-(x-c)^3$; de ahí que $y=0$ es el lugar geométrico de los puntos múltiples de las curvas de la familia: $y^2-(x-c)^3=0$; que, en este caso resultan puntos de retroceso; sin embargo, este lugar geométrico, sí es envolvente de las parábolas semicúbicas, como se muestra en la siguiente figura:



$y=0$ sí es envolvente y solución singular.

Obsérvese: siempre es solución singular la envolvente a la familia $\phi(x,y,c)=0$, solución general de la ecuación diferencial $F(x,y,y')=0$.

85

Solución geométrica - método de las isoclinas -

Dado que la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ establece una correspondencia entre las coordenadas de un punto, y la pendiente de la tangente a la gráfica de la solución de la ecuación en ese punto; si se conocen las coordenadas (x,y) del punto, se puede calcular y'; por lo tanto, puede decirse que la ecuación $y' = f(x,y)$ define en el plano x,y un "campo" de direcciones; esto es, a cada punto del plano x,y, se le puede asociar un número, que es el valor que toma y' en ese punto.

Se denomina "isoclina" a la curva que representa el lugar geométrico de los puntos del plano x,y, que tienen igual pendiente m.

La isoclina que corresponde a los puntos que tienen pendiente $y' = m$, tendrá por ecuación $f(x,y) = m$.

El problema de integrar la ecuación $y' = f(x,y)$ consiste en hallar las "curvas integrales" para las cuales la pendiente de la tangente a éstas, coincide en cada punto con la dirección que define el campo $y' = f(x,y) = m$; en otras palabras: si la solución general de la ecuación $y' = f(x,y)$, puede escribirse $y = F(x,m)$, entonces la solución representa una familia de curvas en el plano x,y, de un solo parámetro m; donde las pendientes de las tangentes en cada punto están definidas por la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$.

Las curvas integrales $y = F(x,m)$ cortan a las isoclinas $y' = f(x,y) = m$ de modo que formen un ángulo $\alpha = \tan^{-1} m$.

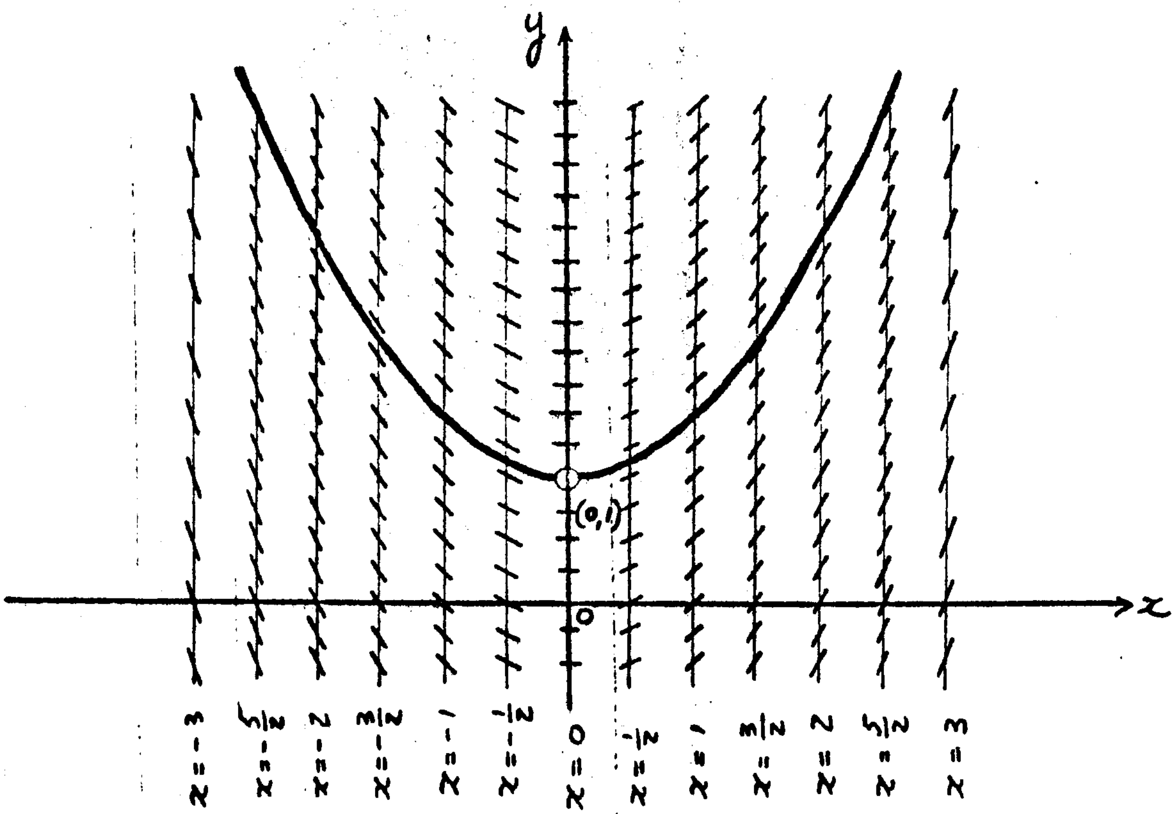
Ejemplos: Empleando el método gráfico de las isoclinas, hallar la curva integral que pasa por el punto indicado:

1.-) $y' = x$; $y(0) = 1$

Solución:

Las isoclinas tienen por ecuación $x = m$; siendo, por lo tanto, rectas paralelas al eje y.

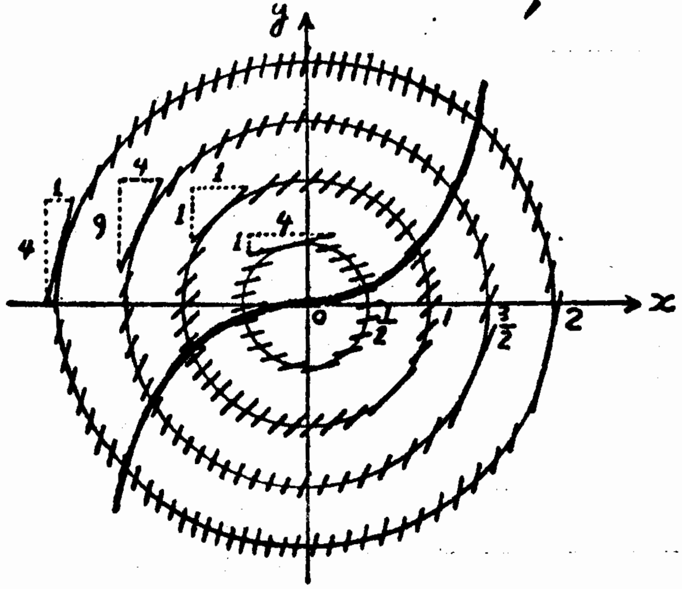
La curva integral buscada debe pasar por el punto de coordenadas $(0,1)$.



2.-) $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0$

Solución:

Las isoclinas son las circunferencias: $x^2 + y^2 = m = r^2$



$r \Rightarrow$	m
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

Observación: Dado que $x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow$ todas las curvas solución son monótonas crecientes (estrictamente), ya que $y' > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$

Obsérvese que el método gráfico de las isoclinas sólo es aplicable cuando la función $f(x,y)$, en la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$, no es multivaluada; debiendo ser función continua en ambas variables: x y y.

Se requiere un estudio especial del comportamiento de las curvas integrales en la vecindad de puntos singulares; como por ejemplo en el caso en que $f(x,y)=\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ si se tiene que tanto $g(x,y)$ como $h(x,y)$ se anulan en algún punto, resultando para ese punto: $f(x,y)=\frac{0}{0}$. Casos como éste pueden estudiarse, por ejemplo en el siguiente libro: "Mathematical Methods in Engineering" T. v. Kármán y M. A. Biot (Mc Graw-Hill, 1940; Capítulo IV; secciones 10 y 11)

Método de Picard, de aproximaciones sucesivas:

Este método iterativo permite obtener una solución aproximada al problema de Cauchy: $y'=f(x,y)$ para las condiciones: $x=x_0$; $y=y_0$.

El método consiste en lo siguiente:

La ecuación $y'=f(x,y)$; $y(x_0)=y_0$ ①

puede expresarse en la forma:

$$y'=f(x,y(x)) \; ; \; y(x_0)=y_0 \quad ②$$

usando t como variable de integración, se obtiene:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt \quad ③$$

El método de Picard consiste en suponer una solución aproximada $y^{(0)}(x)$ en ③; con lo cual ya es posible la integración.

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y^{(0)}(t))\,dt \quad ④$$

A falta de una mejor solución, puede empezarse haciendo $y^{(0)}(t) \equiv y_0$; que es la condición inicial dada.

Definido entonces $y_1(x)$, puede usarse este resultado como parte del integrando en la obtención de una 2ª aproximación á $y(x)$

$$y_2'(x) = f(x,y_1(x)) \; ; \; y_2(x_0) = y_0 \quad ⑤$$

integrando:

$$\therefore \quad y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))\,dt \quad ⑥$$

Continuando este proceso, se llega a definir una función $y_n(x)$ de modo que:

$$y'_{n+1}(x) = f(x, y_n(x)) \; ; \quad y_{n+1}(x_0) = y_0 \qquad (7)$$

que al integrar nos da:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt \qquad (8)$$

Puede demostrarse que este proceso converge a la solución, si se cumplen las condiciones exigidas a la función $f(x,y)$, por el teorema III anterior, sobre existencia y unicidad de la ecuación $y' = f(x,y)$

El método de Picard es útil en aquellos casos en que la integral en (8) es fácil de valuar. Teóricamente el método es válido aun cuando las integrales no puedan ser expresadas mediante una combinación finita de funciones elementales, en cuyo caso, podría recurrirse a integración por series.

En seguida se resolverán algunos ejemplos específicos para ilustrar las ideas expuestas:

91

Empleando el método de Picard, resolver los siguientes problemas de Cauchy:

1) $y' = x^2 + y^2$; $y(1) = 2$

Solución: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt \qquad (8)$$

Para $n = 0$:

$$y_1(x) = 2 + \int_1^x \left[t^2 + (y_0(t))^2\right] dt$$

$$= 2 + \int_1^x (t^2 + 4)\, dt = -\frac{7}{3} + 4x + \frac{x^3}{3}$$

Para $n = 1$:

$$y_2(x) = 2 + \int_1^x \left[t^2 + \left(-\frac{7}{3} + 4t + \frac{t^3}{3}\right)^2\right] dt$$

integrando y simplificando, resulta:

$$y_2(x) = \frac{39}{630} + \frac{49}{9}x - \frac{28}{3}x^2 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{7}{18}x^4 + \frac{8}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7$$

Es evidente que la complicación algebraica dificulta continuar las iteraciones; sin embargo, las integraciones subsecuentes son posibles, en caso de que alguien tuviese el deseo de continuar las iteraciones.

Obsérvese que este problema se planteó anteriormente por el método de las isoclinas; se planteó asimismo su resolución mediante serie de Taylor.

92

2) $y' = x - y \quad ; \quad y(0) = 1$

Solución: $f(x,y) = x - y$.

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1\right) dx = -\frac{x^3}{6} + x^2 - x + 1$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x - 1\right) dx = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 1\right) dx = -\frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

$$y_5(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 1\right) dx$$

$$y_5(x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1$$

. . . .

Notando que la solución exacta de la ecuación dada: $y' = x - y$ es:

$$y = Ce^{-x} + x - 1$$

siendo $C = 2$ para la condición inicial dada $y(0) = 1 \Rightarrow$ la solución exacta resulta

$$y = 2e^{-x} + x - 1$$

A fin de comparar con la solución $y_5(x)$ aproximada, obtenida por el método de Picard, podemos desarrollar en serie de potencias de Maclaurin la función e^{-x}; con lo cual resulta:

$$y = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + \ldots$$

que comparada con la solución obtenida por el método de Picard, concuerda hasta el término $-\frac{x^5}{60}$.

3) $y' = x + \operatorname{sen} y \quad ; \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$

Solución:

$$y_1(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \left(t + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) dt.$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{x^2}{2} + x$$

$$y_2(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \left[t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{t^2}{2} + t\right)\right] dt.$$

No es posible continuar por este procedimiento, ya que la integral:

$$\int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{t^2}{2} + t\right) dt$$

no puede expresarse como combinación finita de funciones elementales.

Es importante hacer notar que, aun cuando existen otros métodos muy eficientes para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales, éstos no desplazan el método de Picard, el que ha resultado de gran utilidad en el estudio teórico de las ecuaciones diferenciales, ya que se ha hecho uso de él para establecer, en forma muy general, condiciones para la existencia de soluciones.

Algunos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Tipo 1: Variables separables.-

Dada la ecuación diferencial:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ①, se dice que se han "separado" las variables, si resulta factible expresar la ecuación ① en la forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{g(y)} \quad ; \quad g(y) \neq 0 \qquad ②$$

ó bien: $$\frac{dx}{dy} = -\frac{g(y)}{f(x)} \quad ; \quad f(x) \neq 0 \qquad ③$$

Si las ecuaciones ② y ③ tienen ambas sentido, entonces son equivalentes; ya que si $y = y(x)$ es solución de ②, la función inversa $x = x(y)$ es solución de ③, ⇒ las ecuaciones ② y ③ poseen curvas integrales comunes; en cambio, si en algunos puntos la ecuación ② ó la ③ no tiene sentido, entonces en esos puntos puede substituirse una ecuación por la otra, como se ilustrará en ejemplos más adelante.

La separación de variables es posible cuando tanto $M(x,y)$ y $N(x,y)$ en ① pueden descomponerse en producto de dos factores; conteniendo uno sólo la variable x; debiendo el otro sólo involucrar la variable y:

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= F_1(x)\,G_1(y) \\ N(x,y) &= F_2(x)\,G_2(y) \end{aligned}\right\} ④$$

④ en ①:

$$F_1(x)G_1(y)dx + F_2(x)G_2(y)dy = 0$$

dividiendo entre el producto $G_1(y)\,F_2(x)$:

$$\frac{F_1(x)}{F_2(x)}\,dx+\frac{G_2(y)}{G_1(y)}\,dy=0$$

Haciendo: $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}=f(x)$; $\frac{G_2(y)}{G_1(y)}=g(y)$

$$f(x)\,dx+g(y)\,dy=0 \quad (5)$$

La ecuación (5) puede resolverse integrando término á término.

La ecuación (5) puede expresarse en la forma (2) ó en la forma (3)

Obsérvese que al dividir entre $G_1(y)F_2(x)$ pueden perderse soluciones particulares, que reducen á cero el producto $G_1(y)F_2(x)$. Si las funciones $G_1(y)$ y $F_2(x)$ son discontinuas, pueden aparecer soluciones superfluas, que hacen cero el factor $\frac{1}{G_1(y)F_2(x)}$. (Soluciones singulares).

Ejemplos: Integrar:

1) $y\,dx - x\,dy = 0$ ①

Solución:

dividiendo la ecuación entre xy:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

integrando:

$$\ln|x| - \ln|y| = \ln c_1 \quad ; \quad c_1 > 0$$

$$\Rightarrow \quad |x| = c|y|$$

Si se consideran sólo soluciones suaves (con primeras derivadas continuas), entonces la ecuación $|x| = c_1|y|$; $c_1 > 0$ es equivalente á: $x = \pm c_1 y$; ó bien:

$$x = c_2 y \; ; \text{ donde } c_2 \gtrless 0 \; ; \; c_2 \neq 0.$$

Debe tenerse en cuenta que al dividir entre x se pierde la solución $x=0$; por lo cual se puede considerar que en la solución $x = c_2 y$, la constante c_2 puede tomar el valor $c_2 = 0$, de ahí que se obtiene asimismo la solución $x = 0$

$\Rightarrow$ la solución general es: $x = cy$ ②; $c \in R^{\#}$

Si en este ejemplo se consideran equivalentes las variables x y y, entonces la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, donde $x \neq 0$, debe ser completada con la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$, la cual sí posee solución para $x = 0$.

Comprobación:

de ②: $dx = c\,dy$. ; substituyendo en ①

$$y \cdot c\,dy - cy \cdot dy = 0$$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ① ; $y(0) = 1$ ②

Solución:

de ① $y\,dy = x\,dx$

integrando:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C \quad ③$$

Substituyendo las condiciones iniciales ② en ③:

$$\frac{1}{2} = \frac{0}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2} \quad ④$$

④ en ③ $\Rightarrow$ $y^2 = x^2 + 1$ ⑤

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = \sqrt{x^2+1} \\ y_2 = -\sqrt{x^2+1} \end{cases}$$

Se comprueba que ambas soluciones verifican la ecuación ① dada; sin embargo, la solución y_2 no satisface las condiciones iniciales ②; de ahí que la solución es:

$$y = \sqrt{x^2+1}$$

Este ejemplo pone de manifiesto que la solución de una ecuación diferencial, además de satisfacer la ecuación, debe asimismo verificar las condiciones iniciales.

3) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}$ ①; $y(0)=0$ ②

Solución:

de ①: $\dfrac{dy}{\sqrt{y}} = dx$

integrando: $2\sqrt{y} = x + c$ ③

Substituyendo la condición inicial ② en ③:

$$0 = 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$\therefore \quad 2\sqrt{y} = x$

$\Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2}{4}$ ④

Se comprueba que ④ verifica ①; sin embargo la solución ④ no es única; pues $y \equiv 0$ también es solución; siendo asimismo solución la función:

$$⑤ \quad y \begin{cases} \equiv 0, & \text{si } 0 < x < 1 - 2\sqrt{k} \\ = \left(\sqrt{k} + \frac{1}{2}(x-1)\right)^2, & \text{si } (1-2\sqrt{k}) \leq x \leq 1 \end{cases}$$

puesto que ⑤ verifica ① $\Rightarrow$ el número de soluciones es infinito (uno por cada valor de k)

Este resultado puede preverse del teorema III de existencia y unicidad, puesto que:

$$\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

... es discontinua en cualquier intervalo que contenga $y=0$

4) $\frac{dy}{dx} = -y^2$ ① ; $y(x_0) = y_0$ ②

Solución:

de ①: $\frac{dy}{-y^2} = dx$

integrando: $\frac{1}{y} = x + c$ ③

de la condición inicial ② en ③

$$c = \frac{1}{y_0} - x_0 \quad ④$$

$$\therefore\ y = \frac{1}{x - x_0 + \frac{1}{y_0}} \quad ⑤$$

La solución no existe si $x = x_0 - \frac{1}{y_0}$; puesto que entonces y sería infinita en ⑤.

Si se tiene la condición inicial $y_0 = 0$, vemos de ④ que $c = \infty$, por lo cual, de ③

$$y = \frac{1}{x+c}$$

$\Rightarrow y \equiv 0$ es solución de ①, para $y(x_0) = 0$

Obsérvese que no es aplicable el teorema II de superposición de soluciones a los dos últimos ejemplos 3) y 4), por estar la y elevada a una potencia $\neq 1$; por lo cual estas ecuaciones diferenciales no son lineales.

Es común que las ecuaciones diferenciales no-lineales presenten, sin aviso previo, peculiaridades como las señaladas en estos últimos dos ejemplos, por lo cual, conviene estar prevenidos al considerar soluciones.

Tipo 2.- Homogéneas:

Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n, si se cumple la identidad:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

Por ejemplo:

1) $f(x,y)=x^2+xy\,\text{sen}\,y/x+y^2$

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(tx)(ty)+\text{sen}\,ty/tx+(ty)^2$$

$$=t^2x^2+t^2xy\,\text{sen}\,y/x+t^2y^2$$

$$=t^2(x^2+xy\,\text{sen}\,y/x+y^2)=t^2f(x,y)$$

$\Rightarrow f(x,y)$ es homogénea de grado 2

2) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2-(ty)^2}{(tx)^2+(ty)^2}=\frac{t^2(x^2-y^2)}{t^2(x^2+y^2)}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=f(x,y)$$

$\Rightarrow f(x,y)$ es homogénea de grado cero. $(t^0=1)$

La ecuación diferencial:

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ ① se llama homogénea, si las funciones $M(x,y)$, $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado.

Escribiendo la ecuación ① en la forma:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f(x,y)$$

donde $f(x,y)$ resulta ser función homogénea de grado cero.

$$\Rightarrow f(tx,ty)=t^0f(x,y)=f(x,y) \quad ②$$

haciendo en la ecuación ②:

$$t=\frac{1}{x}$$

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

De lo cual se concluye que toda función homogénea $f(x,y)$ de grado cero, puede expresarse como una función de una variable:

$$v = \frac{y}{x} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \phi(v) \quad (4)$$

puesto que de (3) $y = vx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} vx = v + x\frac{dv}{dx} \quad (5)$$

(5) en (4): $\quad v + x\dfrac{dv}{dx} = \phi(v) \quad (6)$

siendo la ecuación (6) del tipo 1 ya estudiado:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{v - \phi(v)} = 0$$

Ejemplos:- Integrar:

1) $(x^2-3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ ①

Solución: de ①

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x} - \frac{x}{2y} \quad ②$$

haciendo: $y = vx$ ③

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad ④$$

③ y ④ en ②

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3}{2}v - \frac{1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} = \frac{v^2-1}{2v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v\,dv}{v^2-1}$$

$$\therefore\ Lx + Lc = L(v^2-1)$$

$$\Rightarrow\ cx = v^2-1$$

de ③ $$cx = \frac{y^2}{x^2} - 1$$

$$\therefore\ y^2 = x^2 + cx^3$$

$$\therefore\ y = \pm\sqrt{x^2+cx^3}$$

$$y = \pm x\sqrt{1+cx}$$

Obsérvese que, por no ser ① ecuación lineal, existe la posibilidad de que puedan haber soluciones singulares

103

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ ①

Solución: de ①

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \quad ②$$

haciendo: $y = vx$ ③

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad ④$$

③ y ④ en ②

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2} \quad ⑤$$

Separando las variables:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$\therefore \ln|x| + \ln c_1 = \operatorname{sen}^{-1} v \qquad (c_1 > 0)$

ó bien:

$$\ln c_1|x| = \operatorname{sen}^{-1} v$$

puesto que $c_1|x| = \pm c_1 x$, haciendo $\pm c_1 = c$ resulta:

$$\ln cx = \operatorname{sen}^{-1} v \quad ; \text{donde } |\ln cx| \leq \frac{\pi}{2}$$

ó bien:

$$e^{-\frac{\pi}{2}} \leq cx \leq e^{\frac{\pi}{2}}$$

$\therefore$ de ③

$$\ln cx = \operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad y = x \operatorname{sen} \ln cx$$

Es importante observar que la ecuación ① dada es no-lineal; de ahí que resulte lo siguiente:

Al separar las variables y dividir

la ecuación ⑤ entre $x\sqrt{1-v^2}$ pueden perderse las soluciones que conviertan en cero sus factores. Puesto que $x=0$ no es solución, se tiene que $\sqrt{1-v^2}=0 \Rightarrow 1-\frac{y^2}{x^2}=0$, $\therefore\ y=\pm x$; resultando que ambas funciones $y=x$; $y=-x$ son soluciones de ①

---

3) $(y+x\tan y/x)\,dx - x\,dy = 0$ ①

Solución:

de ①

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x} \quad ②$$

haciendo: $y=vx$ ③

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v \quad ④$$

③ y ④ en ②:

$$x\frac{dv}{dx}+v=v+\tan v$$

Separando las variables:

$$\frac{\cos v\,dv}{\operatorname{sen} v}=\frac{dx}{x}$$

$\therefore$ integrando:

$$\ln|\operatorname{sen} v| = \ln|x| + \ln c \qquad (c>0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} v = cx$$

$$\therefore \operatorname{sen}\frac{y}{x}=cx$$

Tipo 3.- $\frac{dy}{dx} = f(ax+by)$ ①

donde a y b son constantes.

Este tipo de ecuaciones se transforman en el tipo 1 (variables separables) mediante la siguiente substitución:

$z = ax + by.$ ②

Demostración:

de ② $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$ ③

de ①, ②, ③ : $\frac{dz}{dx} = a + bf(z)$ (tipo 1)

Separando las variables:

$$dx = \frac{dz}{a+bf(z)}$$ ✓

Ejemplos:- Integrar

1) $(2x+y)\,dx - dy = 0$ ①

Solución: de ①

$$\frac{dy}{dx} = 2x+y$$

haciendo $z = 2x+y$; $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$

$\therefore \frac{dz}{dx} = z+2$ (tipo 1)

$$\frac{dz}{z+2} = dx$$

$\Rightarrow \ln|z+2| = x + \ln c$; $z = ce^x - 2$

$2x+y = ce^x - 2$

$\therefore y = ce^x - 2(x+1)$

2) $(x-y+1)\,dx + (y-x)\,dy = 0$ ①

Solución:

de ① $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x-y} + 1$ ②

haciendo $z = x-y$. ③

$\dfrac{dz}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx}$ ④

de ②, ③ y ④:

$1 - \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{z} + 1$ (tipo 1)

$\therefore \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{z}$

Separando las variables

$z\,dz = -dx$

integrando:

$z^2 = -2x + c$

de ③

$(x-y)^2 = -2x + c$

En seguida se estudiará el tipo 3' de ecuaciones diferenciales, el cual podría quedar involucrado en el tipo 3; sin embargo, en ocasiones, por facilitarse los cálculos, resulta más conveniente considerar y' como función $f(ax+by+c)$ en lugar de $f(ax+by)$, como en el tipo 3 que acaba de verse.

Tipo 3.- $\qquad \dfrac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$

donde a, b, c son constantes

Se reduce al tipo 1 mediante el siguiente cambio de variable:

$$z = ax+by+c$$

Ejemplos.- Integrar:

1) $\dfrac{dy}{dx} = 2x+3y-5 \quad (1)$

Solución:

Haciendo: $z = 2x+3y-5 \quad (2)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2+3\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx}-2\right) \quad (3)$$

de (1), (2) y (3):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx}-2\right) = z$$

$$\frac{dz}{dx} = 3z+2 \quad (\text{tipo } 1)$$

Separando variables:

$$\frac{dz}{3z+2} = dx$$

$$\therefore \quad \ln(3z+2) + \ln c_1 = 3x$$

$$\ln c_1(3z+2) = 3x$$

de (2)

$$\ln c_1(6x+9y-15+2) = 3x$$

haciendo $c_1 = \dfrac{1}{c}$ resulta:

$$6x+9y-13 = ce^{3x}$$

$$y = \frac{1}{9}\left(ce^{3x}-6x+13\right)$$

2) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2(y-x+7)$ ①

Solución:

Haciendo: $z = y-x+7$ ②

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 1$ ③

de ①, ② y ③:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 z = \frac{dz}{dx} + 1$$

$\therefore \frac{dz}{dx} = \operatorname{sen}^2 z - 1 = -\cos^2 z$ (tipo 1)

Separando variables:

$$\frac{dz}{\cos^2 z} = -dx$$

$\therefore \sec^2 z \, dz = -dx$

integrando

$$\tan z = c - x$$

$$\therefore \tan(y-x+7) = c-x$$

Tipo 4:- $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \quad ①$$

caso i) La ecuación ① se reduce al tipo 2 (homogénea) mediante un cambio de ejes, trasladándolos éstos de modo que el nuevo origen quede en la intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\} ②$$

Lo anterior es factible si el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Haciendo: $x = x_1+\alpha$; $y = y_1+\beta$, pueden calcularse las constantes α, β, tales que los términos c_1 y c_2 en ② se anulen; con lo cual la ecuación ① se transforma en:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_1+b_2y_1}\right)$$

ó bien:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y_1}{x_1}}{a_2+b_2\frac{y_1}{x_1}}\right) = \phi\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \; ; \text{(tipo 2)}$$

caso ii) Si las rectas ② son paralelas, ó sea

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \text{, ó sea: } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = n$$

$\therefore$ de ①: $$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{n(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = F(a_2x+b_2y) \; ; \text{(tipo 3)}$$

Ejemplos.- Integrar:

1). $(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0$ ①

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-2}{-x+y-4} \quad (1')$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y-2 &= 0 \\ x-y+4 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ②$$

hallamos que el punto de intersección de estas rectas es $(\alpha,\beta) = (-1,3)$

$\Rightarrow$ debemos hacer el siguiente cambio de coordenadas: $x = x_1 - 1$; $y = y_1 + 3$, con lo cual desaparecen los términos independientes $c_1 = -2$; $c_2 = 4$, en ②.

Substituyendo en (1'):

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1+y_1}{-x_1+y_1} \quad ③ \ (\text{tipo } 2)$$

haciendo $y = vx$, en ③:

$$(1+2v-v^2)\,dx_1 + x_1(1-v)\,dv = 0 \quad (\text{tipo } 1)$$

Separando las variables:

$$\frac{dx_1}{x_1} + \frac{1-v}{1+2v-v^2}\,dv = 0$$

$$\therefore \ \ln|x_1| + \tfrac{1}{2}\ln|1+2v-v^2| = \ln C$$

$$\therefore \ x_1^2(1+2v-v^2) = C$$

$$(x+1)^2\left[1 + 2\frac{y-3}{x+1} - \frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right] = c_1$$

$$\underline{x^2 + 2yx - y^2 - 4x + 8y = c_2} \quad ; \quad (c_2 = c_1 + 14)$$

2) $(x+y+1)\,dx+(2x+2y-1)\,dy=0$ ①

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Haciendo en ① $x+y=z \Rightarrow dx+dy=dz$ ②

$\therefore$ ② en ①:

$$(z-2)\,dx+(2z-1)\,dz=0 \quad \text{tipo 1}$$

Separando variables:

$$dx-\frac{2z-1}{z-2}\,dz=0$$

integrando:

$$x-\int\frac{2z\,dz}{z-2}+\int\frac{dz}{z-2}=c_1$$

haciendo $z-2=u$ en $\int\frac{2z\,dz}{z-2}=\int\frac{2u+4}{u}\,du$

$$\therefore \quad x-2(z-2)-4\ln|z-2|+\ln|z-2|=c_1$$

$$\therefore \quad x-2z-3\ln|z-2|=C_2 \quad ; \quad (C_2=c_1-4)$$

de ②

$$x-2(x+y)-3\ln|x+y-2|=C_2$$

$$x+2y+3\ln|x+y-2|=C \quad ; \quad (C=-C_2)$$

Tipo 5: Reducible a homogénea.

A veces puede ser considerada como homogénea una expresión, si se atribuye grado diferente a las variables: Si consideramos, digamos la variable x de grado uno, en tanto que suponemos que la variable y tiene grado α; siendo dx de igual dimensión que x; asimismo, dy tendrá la misma dimensión que la variable y; esto es, el grado de la derivada $\frac{dy}{dx}$ será $\alpha - 1$. La dimensión de un producto será la suma de las dimensiones de sus factores.

La expresión $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ se considera homogénea, si es una suma de términos de igual dimensión.

La ecuación se reduce al tipo 2 mediante el cambio de variable $y = z^{\alpha}$; donde el valor numérico de α debe determinarse.

Ejemplos: Integrar:

1) $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ ①

Solución:

Haciendo $y = z^{\alpha}$ ② $\Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$

Substituyendo en ①:

$$(x^2z^{2\alpha} - 1)\alpha z^{\alpha-1}dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0$$

$$\therefore\ (x^2z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})\alpha dz + 2xz^{3\alpha}dx = 0 \quad ③$$

Observando que:

$x^2z^{3\alpha-1}$ es de grado: $2 + 3\alpha - 1 = 3\alpha + 1$;

$z^{\alpha-1}$ es de grado: $\alpha - 1$

$xz^{3\alpha}$ es de grado: $1 + 3\alpha$

$\Rightarrow$ La ecuación ③ será homogénea si:

$$3\alpha + 1 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = -1$$

de ② $\Rightarrow$ $y = z^{-1}$ ④

substituyendo ④ en ③:

$$\left(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4}\right) dz + z\frac{x}{z^3}\,dx = 0$$

ó bien:

$$(z^2 - x^2)\,dz + 2zx\,dx = 0 \quad ⑤; \ (\text{tipo } 2)$$

haciendo $z = vx$; $dz = v\,dx + x\,dv$ ⑥

⑥ en ⑤

$$(v^2-1)(v\,dx + x\,dv) + 2v\,dx = 0$$

$$\therefore \quad v(v^2+1)\,dx + x(v^2-1)\,dv = 0 \quad (\text{tipo } 1)$$

separando las variables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{v^2-1}{v^3+v}\,dv = 0$$

integrando:

$$\ln|x| + \ln(v^2+1) - \ln|v| = \ln c$$

$$\therefore \quad \frac{x(v^2+1)}{v} = c$$

de ④ y ⑥ $\Rightarrow$ $v = \frac{1}{xy}$

resulta la solución:

$$\therefore \quad 1 + x^2y^2 = Cy$$

Si escribimos la solución en la forma $y = \frac{1+x^2y^2}{C}$, vemos que si $C \to \infty$, se tiene como solución singular: $y = 0$, ya que la ecuación ① no es lineal.

2) $(xy^2-3y)dx - x\,dy = 0$ ①

Solución:

Haciendo: $y = z^{\alpha}$ ②, $\Rightarrow$ $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$

substituyendo en ①:

$(xz^{2\alpha} - 3z^{\alpha})dx - x\alpha z^{\alpha-1}dz = 0$ ③

Observando que:

$xz^{2\alpha}$ es de grado: $1+2\alpha$

z^{α} es de grado: α

$xz^{\alpha-1}$ es de grado: $1+\alpha-1 = \alpha$

$\Rightarrow$ la ecuación ③ será homogénea si:

$1+2\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = -1$

de ② $\Rightarrow$ $y = z^{-1}$ ④

substituyendo ④ en ③:

$$\left(\frac{x}{z^2} - \frac{3}{z}\right)dx + \frac{x}{z^2}dz = 0$$

ó bien:

$(x-3z)dx + x\,dz = 0$ ⑤ (tipo 2)

haciendo $z = vx$; $dz = v\,dx + x\,dv$ ⑥

⑥ en ⑤

$(x-3vx)dx + x(v\,dx + x\,dv) = 0$

$x(1-2v)\,dx + x^2 dv = 0$ (tipo 1)

Separando variables:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dv}{1-2v} = 0$$

integrando: $\ln x - \frac{1}{2}\ln(1-2v) = \ln c$

$$\therefore \frac{x}{\sqrt{1-2v}} = c$$

puesto que $v = \frac{1}{xy}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x}{\sqrt{1-\frac{2}{xy}}} = c$ $\therefore$ $y = \dfrac{2}{x(1-cx^2)}$

solución singular: $xy = 2$

115

3) $(1+x^2y+x^4y^2)\,dy+2x^3y^3\,dx=0$ ①

Solución:

Veremos que la substitución $y=z^\alpha$ no funciona:

$$(1+x^2z^\alpha+x^4z^{2\alpha})\alpha z^{\alpha-1}dz+2x^3z^{3\alpha}dx=0$$

$\therefore$ $z^{\alpha-1}$ es de grado $\alpha-1$

$x^2z^\alpha z^{\alpha-1}$ es de grado $2\alpha+1$

$x^4z^{2\alpha}z^{\alpha-1}$ es de grado $3\alpha+3$

$x^3z^{3\alpha}$ es de grado $3\alpha+3$

Sin embargo, haciendo: $x=z^\alpha$; $dx=\alpha z^{\alpha-1}dz$:

$$(1+z^{2\alpha}y+z^{4\alpha}y^2)\,dy+2z^{3\alpha}y^3\alpha z^{\alpha-1}dz=0$$

donde resulta:

1 es de grado cero

$z^{2\alpha}y$ es de grado $2\alpha+1$

$z^{4\alpha}y^2$ es de grado $4\alpha+2$

$z^{3\alpha}y^3z^{\alpha-1}$ es de grado $4\alpha+2$

$$\therefore\quad 2(2\alpha+1)=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{z}}$$

substituyendo en ①:

$$\left(1+\frac{y}{z}+\frac{y^2}{z^2}\right)dy+2\frac{y^3}{z^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{z^{3/2}}\,dz=0$$

$$\therefore\quad (z^3+yz^2+y^2z)\,dy-y^3dz=0 \qquad \text{(tipo 2)}$$

haciendo $z=vy$; $dz=v\,dy+y\,dv$

$$(v^3y^3+v^2y^3+\cancel{vy^3})\,dy-y^3(\cancel{v\,dy}+y\,dv)=0$$

$$\cancel{y^3}(v^3+v^2)\,dy-y^{\cancel{4}}dv=0$$

$$\frac{dy}{y}-\frac{dv}{v^3+v^2}=0$$

integrando:

$$\ln y+\frac{1}{v}-\ln\left(1+\frac{1}{v}\right)=\ln C$$

teniendo en cuenta que:

$$v = \frac{1}{x^2 y}.$$

$$\ln y + x^2 y - \ln(1 + x^2 y) = \ln C$$

ó sea:

$$y e^{x^2 y} = C(1 + x^2 y)$$

Solución singular:

Si $C \to \infty$:

$$\Rightarrow 1 + x^2 y = 0$$

$\therefore$ $y = -\frac{1}{x^2}$ es solución singular de (1)

117

Tipo 6.- Ecuación diferencial exacta (ó ecuación en diferencial total)

La expresión diferencial:

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ ① es una "diferencial exacta", si la diferencial total dz de una función $z=f(x,y)$ es tal que:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= M(x,y)\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= N(x,y)\end{aligned}\right\} ②$$

Puesto que, por definición de diferencial total: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$,

si se cumplen las ecuaciones ②, resulta de ①:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = dz$$

$\Rightarrow$ la integral de ① es $z=\int dz$

Euler fue quien, por primera vez, estableció que la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ sea diferencial exacta, es que se cumpla:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

(en una región simplemente conexa D del plano x,y)

Demostración.- Condición necesaria:

Hipótesis: $M(x,y)dx + N(x,y)\,dy = dz$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = M \;;\; \frac{\partial z}{\partial y} = N$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \;;\; \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Si las funciones M y N tienen derivadas continuas, lo mismo que Z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \checkmark$$

Condición suficiente:

Hipótesis: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Debe hacerse ver que la ecuación: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta, lo cual equivale a decir que existe la función $z(x,y)$ tal que se verifiquen simultáneamente las ecuaciones (2).

Supóngase que se verifica:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} dx = M dx$$

por haberse considerado la variable y como constante al calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\Rightarrow$ al integrar la ecuación anterior, la constante de integración puede ser una función arbitraria $\phi(y)$

$$\int \frac{\partial z}{\partial x} dx = z + \phi(y) = \int M dx \quad (3)$$

Para determinar $\phi(y)$, derivamos con respecto á y la ecuación anterior:

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M dx$$

pero, de (2): $\frac{\partial z}{\partial y} = N$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M dx - N = \frac{d\phi}{dy}$$

por lo cual, mediante integración puede calcularse $\phi = \phi(y)$.

Substituyendo el valor obtenido para $\phi(y)$ en ③, con lo cual queda definida la función $z(x,y)$, completándose así la demostración.

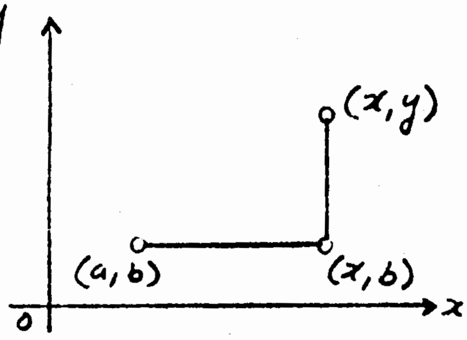
Nótese que al haber hallado la función z se ha indicado al mismo tiempo el método para integrar la ecuación diferencial exacta.

En seguida se expondrá un procedimiento mediante el cual resulta aún más fácil encontrar la función z, cuya diferencial total $dz = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

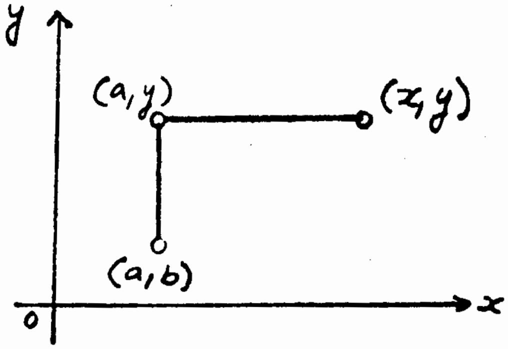
Tomando la integral "de línea" de $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ desde un punto fijo (a,b), hasta el punto de coordenadas variables (x,y), siguiendo cualquier trayectoria, se tiene:

$$z(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \left[M(x,y)dx + N(x,y)dy \right]$$

Cuando es posible, la trayectoria más conveniente á escoger (ya que la integral de línea no depende de la trayectoria elegida) es la línea quebrada, compuesta de dos segmentos respectivamente paralelos a los ejes coordenados:



ó

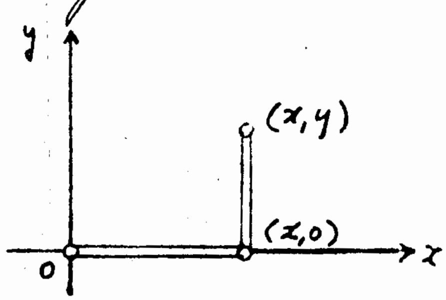


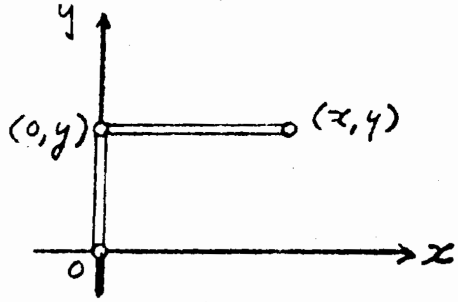
$$\int_{(a,b)}^{(x,y)} (M\,dx + N\,dy) = \begin{cases} \displaystyle\int_{(a,b)}^{(x,b)} M\,dx + \int_{(x,b)}^{(x,y)} N\,dy. \\ \text{ó} \\ \displaystyle\int_{(a,b)}^{(a,y)} N\,dy + \int_{(a,y)}^{(x,y)} M\,dx \end{cases}$$

ó bien:

$$Z = \begin{cases} \displaystyle\int_a^x M(x,b)\,dx + \int_b^y N(x,y)\,dy \\ \text{ó} \\ \displaystyle\int_b^y N(a,y)\,dy + \int_a^x M(x,y)\,dx \end{cases}$$

Siempre que se pueda, es más conveniente tomar como punto fijo, el origen: $(a,b) = (0,0)$; por ejemplo:





$$Z = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x M(x,0)\,dx + \int_0^y N(x,y)\,dy. \\ \text{ó} \\ \displaystyle\int_0^y N(0,y)\,dy + \int_0^x M(x,y)\,dx \end{cases}$$

Ejemplos: Integrar:

1) $(x+y+1)\,dx + (x-y^2+3)\,dy = 0$ ①

Solución:

Puesto que: $\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2+3) \equiv \frac{\partial}{\partial y}(x+y+1) = 1$

$\Rightarrow$ es diferencial exacta:

1er método:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x+y+1 \Rightarrow z = \frac{x^2}{2} + xy + x + \phi(y)$$

derivando z con respecto á y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{d\phi}{dy} = N = x - y^2 + 3$$

$$\therefore \frac{d\phi}{dy} = -y^2 + 3 \Rightarrow \phi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1$$

$$\therefore z = \frac{x^2}{2} + xy + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1 = 0$$

$\therefore$ la solución de ① resulta:

$$3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C$$

2º método:

$$C = z = \int_0^x (x+1)\,dx + \int_0^y (x-y^2+3)\,dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

3er método:

$$C = z = \int_0^y (-y^2+3)\,dy + \int_0^x (x+y+1)\,dx = -\frac{y^3}{3} + 3y + \frac{x^2}{2} + yx + x$$

122

Observación: No es posible tomar el origen como punto fijo en casos como los siguientes:

i) $N(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 - 2x}$; $\Rightarrow N(0,y) = \dfrac{0}{0}$

ii) $N(x,y) = y \ln x \Rightarrow N(0,y) = y \ln 0 = -\infty$

2) $$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}\right)dy = 0$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$ es exacta

Solución:

1er método:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3} \Rightarrow z = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + \phi(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4} + \frac{d\phi}{dy} = N = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 0 \Rightarrow \phi(y) = C$$

$\therefore$ la solución es: $x^2e^y + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{x}{y^3} = C$

2º método:

$$C_1 = z = \int_a^x \left(2xe^b + \frac{2x}{b} + \frac{1}{b^3}\right)dx + \int_b^y \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}\right)dy =$$

$$= \cancel{x^2}e^b + \frac{2x^2}{2b} + \cancel{\frac{x}{b^3}} - \underbrace{a^2e^b - \frac{a^2}{b} - \frac{a}{b^3}}_{c_2} + x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} - \cancel{x^2e^b} - \cancel{\frac{x^2}{b}} - \cancel{\frac{x}{b^3}}$$

$$\therefore x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$$

Nótese que en el resultado final no deben aparecer las constantes a ó b

Obsérvese que en el método anterior z, pudo haberse tomado como punto fijo, el punto $(0,b)$; con lo cual $c_2 = 0$, (cancelándose entonces todos los términos que contienen b).

3^er^ método:

$$c = z = \int_b^y (0)\,dy + \int_0^x \left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dx$$

$$c = x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3}$$

Ejemplos.- Integrar:

1) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - x^2 y} \quad (1)$$

Solución:

Con el fin de ver si es posible identificar alguna combinación integrable, la ecuación (1) se escribe:

$$(x - x^2 y)\, dy = y\, dx$$

$$x\, dy - y\, dx - x^2 y\, dy = 0$$

Dividiendo la ecuación entre x^2, los primeros dos términos son la combinación integrable d), pudiéndose entonces integrar asimismo el tercer término:

$$\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2} - y\, dy = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) - y\, dy = 0$$

integrando:

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} = c$$

Obsérvese que $x = 0$ es una solución singular de (1), lo cual se comprueba al escribir la solución en la forma:

$$\frac{2y - xy^2}{2x} = c \quad ; \quad \frac{2y - xy^2}{c} = 2x$$

haciendo que $c \to \infty$ resulta $x = 0$

Si $c_1 = \frac{1}{c}$, haciendo $c_1 \to \infty$, se obtiene, también como solución singular, la siguiente:

$$xy = 2$$

125

2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - xy^2 + y}{x}$$

Solución:

$$x\,dy - x^3 dx + xy^2 dx - y\,dx = 0$$

reordenando términos y factorizando:

$$x\,dy - y\,dx - x(x^2 - y^2)\,dx = 0$$

Dividiendo entre $x^2 - y^2$, los primeros dos términos son la combinación integrable h), pudiéndose entonces integrar el tercer término:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} - x\,dx = 0$$

de h)

$$d\,\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y} - d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

integrando:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y} - \frac{x^2}{2} = c_1$$

ó bien

$$x^2 + c = \ln\frac{x+y}{x-y}$$

Tipo 7.- Combinación integrable.

Una "combinación integrable" es una expresión diferencial que es diferencial exacta, la cual resulta facil de identificar.

Es factible, en ocasiones, mediante un reacomodo ó una reagrupación de términos en la ecuación diferencial dada, identificar una combinación integrable, que permite resolver el problema, como se ilustrará posteriormente en algunos ejemplos.

Algunas combinaciones integrables:

a) $x\,dy + y\,dx = d(xy)$

b) $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{\sqrt{1 - x^2y^2}} = d(\operatorname{sen}^{-1} xy)$; $(x^2y^2 \neq 1)$

c) $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{(xy)^n} = \begin{cases} d\left[\dfrac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right] ; \text{ si } n \neq 1 \\ d \ln xy \quad ; \text{ si } n = 1 \end{cases}$

d) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$

e) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(-\dfrac{x}{y}\right)$

f) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{xy} = d \ln \dfrac{y}{x}$

g) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1} \dfrac{y}{x}\right)$; $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1} \dfrac{x}{y}\right)$

h) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = d\left(\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+y}{x-y}\right) = d\left(\operatorname{ctgh}^{-1} \dfrac{x}{y}\right) = d\left(\tanh^{-1} \dfrac{x}{y}\right)$; $x \neq y$

i) $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{(x^2 + y^2)^n} = \begin{cases} d\left[\dfrac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right] ; \text{ si } n \neq 1 \\ d\left[\dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right] ; \text{ si } n = 1 \end{cases}$

Tipo 8 :- Factor de integración.

Si la expresión $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ no es diferencial total, ó sea $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, resulta a veces relativamente fácil encontrar una función $\mu(x,y)$, tal que:

$$dz = \mu M dx + \mu N dy$$

ó sea: $$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

con lo cual la ecuación $\mu M dx + \mu N dy = 0$ se convierte al tipo 6 (exacta).

Al factor μ se le llama "factor de integración" (ó factor integrante)

Es importante notar que al multiplicar la ecuación no exacta por el factor μ puede significar que se introduzcan soluciones singulares, que reducen este factor a cero.

El método del "factor de integración" puede considerarse como un método "general" para integrar la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, puesto que es posible demostrar la existencia del factor integrante en cierta región, si las funciones $M(x,y)$, $N(x,y)$ tienen derivadas continuas, y por lo menos una de ellas es diferente de cero; sin embargo, el hallar un factor de integración no es, en todos los casos, un problema sencillo, pese a que, como demostraremos a continuación, la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1) admite un número <u>infinito</u> de factores de integración.

Teorema V.- Para que la función $g(x,y)=c$ ② sea solución de la ecuación ① debe verificarse lo siguiente:

$$M\frac{\partial g}{\partial y}=N\frac{\partial g}{\partial x} \quad ③$$

Demostración:

Sea $g(x,y)=c$ la solución de la ecuación ①.

Calculemos la diferencial total de ②:

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy=0 \quad ④$$

puesto que ② es solución de ①, las pendientes de la tangente calculadas de ① y ④ deben ser las mismas.

de ①:
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N} \quad ⑤$$

de ④:
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \quad ⑥$$

⑤ = ⑥

$$-\frac{M}{N}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

$$M\frac{\partial g}{\partial y}=N\frac{\partial g}{\partial x}$$

Teorema VI: La ecuación diferencial ① admite un número infinito de factores de integración.

Demostración:

Dividiendo la ecuación ③ entre el producto MN:

$$\frac{1}{MN} M \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{MN} N \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{N} = \mu(x,y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \mu M \qquad (7)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \mu N \qquad (8)$$

⑦ por dx + ⑧ por dy:

$$\mu(M dx + N dy) = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = dg \qquad (9)$$

$\Rightarrow$ μ es un factor de integración de ①

Sea ahora $F(g)$ cualquier función continua de g.

de ⑨:

$$\mu F(g)(M dx + N dy) = F(g)\, dg = d\left[\int F(g)\, dg\right]$$

$\Rightarrow$ $\mu F(g)$ es tambien factor de integración; de lo cual se deduce que, por ser $F(g)$ función arbitraria de g, el número teórico posible de factores de integración es ilimitado. ✓

Puede demostrarse que $\mu F(g)$ es la forma más general en que puede expresarse el factor de integración.

Ejemplo: Comprobar que: x; $\frac{1}{xy}$; x^3y; $\frac{1}{\sqrt{y}}$ son todos factores de integración de:

$$2y\,dx + x\,dy = 0 \quad \text{(no es exacta)}$$

Solución:

i) $\mu_1 = x$

$$\Rightarrow \mu_1(M\,dx + N\,dy) = 2xy\,dx + x^2\,dy = 0 \quad \text{(exacta)}$$

$$\frac{\partial \mu_1 M}{\partial y} = \frac{\partial \mu_1 N}{\partial x} = 2x$$

solución: $x^2y = c$

ii) $\mu_2 = \frac{1}{xy}$

$$\mu_2(M\,dx + N\,dy) = 2\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \quad \text{(exacta)}$$

$$\frac{\partial \mu_2 M}{\partial y} = \frac{\partial \mu_2 N}{\partial x} = 0$$

solución: $2\ln x + \ln y = \ln c_1$; ó bien: $x^2y = c$

iii) $\mu_3 = x^3y$

$$\mu_3(M\,dx + N\,dy) = 2x^3y^2\,dx + x^4y\,dy = 0 \quad \text{(exacta)}$$

$$\frac{\partial \mu_3 M}{\partial y} = \frac{\partial \mu_3 N}{\partial x} = 4x^3y$$

solución: $\frac{x^4y^2}{2} = c_2$ ó bien $x^4y^2 = c_1 \Rightarrow x^2y = c$

iv) $\mu_4 = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\Rightarrow \mu_4(M\,dx + N\,dy) = 2\sqrt{y}\,dx + \frac{x}{\sqrt{y}}\,dy = 0 \quad \text{(exacta)}$$

$$\frac{\partial(\mu_4 M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu_4 N)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

solución: $2x\sqrt{y} = c_1$ ó bien $x^2y = c$

131

Ecuación diferencial de los factores de integración:

Para que la ecuación diferencial:

$\mu(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0$ ① sea exacta, debe verificarse lo siguiente:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad ② \quad ; \quad (\mu = \mu(x,y))$$

o sea, derivando el producto en cada miembro:

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\mu}\left(N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

puesto que: $N \frac{\partial}{\partial x} \ln \mu = \frac{1}{\mu} N \frac{\partial \mu}{\partial x}$; $M \frac{\partial}{\partial y} \ln \mu = \frac{1}{\mu} M \frac{\partial \mu}{\partial y}$:

la ecuación ② es equivalente á:

$$N \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} - M \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad ②'$$

Aparentemente se ha transformado nuestro problema original en otro más complicado, puesto que, en general, no es tan sencillo hallar la solución general de la ecuación en derivadas parciales de primer orden ②'. Sin embargo, veremos que es posible hallar algunas soluciones particulares, no nulas, de la ecuación ②', sin mayores dificultades.

Antes de proceder a la busqueda de soluciones particulares de ②', aprovecharemos ésta para demostrar el siguiente teorema, que es de gran interés:

Teorema VII.- Si μ y ν son ambos factores de integración de la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ (3), entonces $\frac{\nu}{\mu} = c$ es solución de la ecuación (3)

Demostración: de (2')

$$N \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} - M \frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2')$$

puesto que ν es, por hipótesis, factor de integración:

$$\Rightarrow \quad N \frac{\partial(\ln \nu)}{\partial x} - M \frac{\partial(\ln \nu)}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad (2'')$$

(2'') − (2'):

$$N \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \frac{\nu}{\mu}\right) - M \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln \frac{\nu}{\mu}\right) = 0 \quad (4)$$

Del teorema V, si $g(x,y) = c$ es solución, $\Rightarrow$

$$M \frac{\partial g}{\partial y} - N \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

Comparando esta última ecuación, con la ecuación (4), se concluye que $g(x,y) = \ln \frac{\nu}{\mu}$

$\Rightarrow \ln \frac{\nu}{\mu} = c$ es solución de la ecuación (3) ✓

Del último ejemplo; la ecuación: $2y\,dx + x\,dy = 0$ tendrá las siguientes soluciones:

$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{x}{\frac{1}{xy}} \Rightarrow x^2 y = c$; $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\frac{1}{xy}}{x} \Rightarrow \frac{1}{x^2 y} = c$;

$\frac{\mu_1}{\mu_3} = \frac{x}{x^3 y} \Rightarrow \frac{1}{x^2 y} = c$; $\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{x^3 y}{\frac{1}{xy}} \Rightarrow x^4 y^2 = c$;

$\frac{\mu_4}{\mu_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{xy}} \Rightarrow x\sqrt{y} = c$; $\frac{\mu_3}{\mu_4} = \frac{x^3 y}{\frac{1}{\sqrt{y}}} \Rightarrow x^3 y^{3/2} = c$;

etc, etc.

Algunas soluciones particulares de la ecuación en derivadas parciales (2'):

$$N\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}-M\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \quad (2')$$

1.- Si μ es función sólo de x : $\mu=\mu(x)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\ln\mu=0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x}\ln\mu=\frac{d}{dx}\ln\mu$$

substituyendo estos resultados en (2'):

$$\frac{d}{dx}\ln\mu=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad (5)$$

puesto que el primer miembro de (5) es función sólo de x, $\Rightarrow \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$ (6)

$$\therefore \frac{d}{dx}\ln\mu=f(x) \quad \text{(tipo 1)}$$

$$\Rightarrow d(\ln\mu)=f(x)\,dx$$

$$\ln\mu=\int f(x)\,dx+C_1$$

$$\therefore \mu=C\,e^{\int f(x)\,dx}$$

por estar la ecuación (3) igualada a cero, puede cancelarse la constante C; lo que equivale a considerar el factor de integración para el cual $C=1$:

En resumen, de (6), el factor de integración, si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$

es:

$$\mu=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

Ejemplo: Integrar como exacta, la ecuación:
$(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$

Solución

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y - y = y \neq 0 \Rightarrow \text{no es exacta:}$$

pero $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x)$

$\Rightarrow$ el factor de integración es:

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$(x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$, es exacta;

$\therefore \int_0^x (x^3+x^2)\,dx + \int_0^y x^2y\,dy = c,$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} = c,$$

$\Rightarrow 3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$

2.- Si μ es función sólo de y: $\mu = g(y)$.
De modo semejante al Caso 1.- $\Rightarrow$

$$\mu = e^{-\int g(y)\,dy}$$

Ejemplo:
$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$

Solución:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{4}{y} = g(y) \Rightarrow \mu = e^{-4\int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y^4}$$

$\therefore \left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}\right)dy = 0$, (exacta)

$\int_0^y 0 + \int_0^x \left(2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx$

$\therefore x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$

Observación: a) si

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = C = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int c\,dx} = e^{cx}$$

Ejemplo:

$$y(x+y)\,dx + (x+2y-1)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x+2y \;; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{x+2y-1}{x+2y-1} = 1$$

$$\Rightarrow \quad e^{x} = \mu$$

$$\therefore \quad (xye^{x} + y^{2}e^{x})\,dx + (xe^{x} + 2ye^{x} - e^{x})\,dy = 0$$

es exacta.

Reagrupando términos:

$$[xye^{x}\,dx + (xe^{x} - e^{x})\,dy] + (y^{2}e^{x}\,dx + 2ye^{x}\,dy) = 0$$

$\therefore$ se obtiene la solución:

$$e^{x}(x-1)y + y^{2}e^{x} = c$$

ó bien:

$$y(x+y-1) = \frac{c}{e^{x}}$$

---

b) De modo semejante se resuelven los casos en que:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = c$$

136.

De modo más general: Caso 3.-
Sea $\mu = \mu(z)$; siendo $z = z(x,y)$
teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial x} = \frac{d(\ln \mu)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\ln \mu)}{\partial y} = \frac{d(\ln \mu)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Substituyendo en (2'):

$$\left(N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{d(\ln \mu)}{dz} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\therefore \quad \frac{d(\ln \mu)}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} \qquad (A)$$

Calculando el segundo miembro de (A) en cada caso, puede definirse $z(x,y)$, con lo cual puede determinarse el factor de integración μ:

$$\frac{d(\ln \mu)}{dz} = z \qquad (\text{tipo } 1)$$

$$\mu = c\, e^{\int z\,dz}$$

para $C = 1$; de (A)

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}}\, dz}$$

donde: $N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$

Observaciones:

i) si $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mu = e^0 = 1 \Rightarrow$ la ecuación $M dx + N dy = 0$ es exacta.

ii) si: $z = x$.

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx}$$

que corresponde al caso 1.- visto anteriormente

iii) si: $z = y$

$$\Rightarrow \quad \mu = e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dy} \qquad (\text{caso } 2.-)$$

Ejemplos: Hallar el factor de integración que permita integrar, como exactas, las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $(3x + 2y + y^2)\, dx + (x + 4xy + 5y^2)\, dy = 0$

Solución: Sea $z = x + y^2$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial z}{\partial x} - M \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{1}{x + y^2} = \frac{1}{z}$$

de (A): $\frac{d(\ln \mu)}{dz} = \frac{1}{z} \Rightarrow \mu = z = x + y^2$

$\therefore (3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0$

que es del tipo 6 (exacta)

integrando:

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = c$$

ó bien:

$$(x + y)(x + y^2)^2 = c$$

---

2) $x\,dx + y\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$

Solución: Sea $z = x^2 + y^2$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial z}{\partial x} - M\dfrac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{2}{2(x^2+y^2)} = -\frac{1}{z}$$

de (A):

$$\frac{d(\ln\mu)}{dz} = -\frac{1}{z}$$

$$\therefore \quad \mu = e^{-\int\frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} \qquad ; \qquad (c=1)$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0 \quad (\text{tipo } 7, i, g)$$

$\therefore$ la solución es:

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \tan^{-1}\frac{y}{x} = c_1$$

haciendo $c_1 = \ln c$.

$$\sqrt{x^2+y^2} = c\,e^{-\tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

ó bien, en coordenadas polares:

$$\rho = c\,e^{-\theta}$$

que representa una familia de espirales logarítmicas.

Observación: Se comprobó en el problema 2) anterior que la función $z=x^2+y^2$ nos lleva a la solución. Compruébese que las funciones:

i) $z_2=\frac{y}{x}$; ii) $z_3=\frac{x}{y}$.

conducen asimismo a la solución de la ecuación $x\,dx+y\,dy+x\,dy-y\,dx=0$

Solución:

i) $z_2=\frac{y}{x}$; $M=x-y$; $N=x+y$

$$\frac{d(\ln\mu)}{dz}=\frac{-2}{(x+y)(-\frac{y}{x^2})-(x-y)\frac{1}{x}}=\frac{-2}{-\frac{y^2}{x^2}-1}=\frac{2}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow \mu_2=e^{2\int\frac{dz}{z^2+1}}=e^{2\tan^{-1}y/x}$$

Del teorema VII: la solución general de la E.D. será:
$$\frac{x^2+y^2}{e^{2\tan^{-1}y/x}}=C_1$$

ó bien:
$$\sqrt{x^2+y^2}=C\,e^{\tan^{-1}y/x}$$

ii) $$\frac{d(\ln\mu_3)}{dx}=\frac{-2}{(x+y)\frac{1}{y}-(x-y)(-\frac{x}{y^2})}=-\frac{2}{z^2+1}$$

$$\Rightarrow \mu_3=e^{-2\int\frac{dz}{z^2+1}}=e^{-2\tan^{-1}\frac{x}{y}}.$$

140

3) $(2xy^2+y)\,dx+(x+2x^2y-4x^4y^3)\,dy=0$

Solución: Sea $z=xy$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial z}{\partial x}-M\dfrac{\partial z}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}=-\frac{4}{xy}=-\frac{4}{z}$$

de Ⓐ: $$\frac{d(\ln\mu)}{dz}=-\frac{4}{z}$$

$$\therefore\ \mu=e^{-4\int\frac{dz}{z}}=\frac{1}{z^4}=\frac{1}{x^4y^4}$$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{x^3y^2}+\frac{1}{x^4y}\right)dx+\left(\frac{1}{x^3y^4}+\frac{2}{x^2y^3}-\frac{4}{y}\right)dy=0,$$ es exacta

---

4) $(5x^2+2xy+3y^3)\,dx+3(x^2+xy^2+2y^3)\,dy=0$

Solución: Sea $z=x+y$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial z}{\partial x}-M\dfrac{\partial z}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=\frac{2}{x+y}=\frac{2}{z}$$

$$\frac{d(\ln\mu)}{dz}=\frac{2}{z}$$

$$\therefore\ \mu=e^{2\int\frac{dz}{z}}=z^2=(x+y)^2$$

La solución general de 4) resulta:

$$(x^2+y^3)(x+y)^3=c$$

---

5) $(x^2y^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$

Solución: Sea: $z = xy$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial z}{\partial x} - M\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{2x^2y - 1 + 1}{-xy - (x^2y^2 - y)x} =$$

$$= \frac{2x^2y}{-x^3y^2} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z}$$

de (A): $\dfrac{d(\ln \mu)}{dz} = -\dfrac{2}{z}$

$$\mu = e^{-2\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$\therefore \left(1 - \dfrac{1}{x^2y}\right)dx - \dfrac{1}{xy^2}\,dy = 0$, es exacta.

Esta ecuación puede ponerse en la forma:

$$dx - \frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = 0$$

observando que el 2º término del primer miembro es una combinación integrable, tipo 7c $(n=2)$:

$$dx - d\left(\frac{-1}{xy}\right) = 0$$

integrando:

$$x + \frac{1}{xy} = C$$

6.-) Si: $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = f(x)N(x,y) - g(y)M(x,y)$ ①

i) Demostrar que $e^{\left[\int f(x)dx + \int g(y)dy\right]} = \mu$ ② es un factor de integración de: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

ii) Con base en el inciso i), hallar un factor de integración de la ecuación:

$$(2x^2y + y^2)\,dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$$

Solución:

i) Anteriormente obtuvimos la ecuación:

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

de ①

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = f(x)N - g(y)M \quad ③$$

Haremos ver que ② satisface está última ecuación:

$$\underbrace{e^{-\left[\int f(x)dx + \int g(y)dy\right]}}_{1/\mu}\left(N\underbrace{f(x)\,e^{\left[\int f(x)dx + \int g(y)dy\right]}}_{\frac{\partial \mu}{\partial x}} - M\underbrace{g(y)\,e^{\left[\int f dx + \int g dy\right]}}_{\frac{\partial \mu}{\partial y}}\right)$$

$= Nf(x) - Mg(y)$, lo cual checa con ③ $\Rightarrow$ ② es factor de integración.

ii) $(2x^2y + y^2)\,dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2x^2 + 2y - 6x^2 + y$$

$$= -4x^2 + 3y$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 3y = (2x^3 - xy)f(x) - (2x^2y + y^2)g(y)$$

$$-4x^2+3y = x^2(2xf(x)-2yg(y)) + y(-xf(x)-y\,g(y))$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2xf(x)-2yg(y) = -4 \\ -xf(x)-yg(y) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} g = -\dfrac{1}{2y} \\ f = -\dfrac{5}{2x} \end{array}$$

$$\rightarrow \mu = e^{\left[\frac{5}{2}\int -\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int -\frac{dy}{y}\right]} = e^{\left[\frac{5}{2}\ln\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{y}\right]}$$

$$= e^{\ln\frac{1}{\sqrt{x^5y}}} = \frac{1}{\sqrt{x^5y}} = \mu$$

Comprobación:

$$\left(\frac{2\sqrt{xy}}{x} + \frac{(xy)^{3/2}}{x^4}\right)dx + \left(\frac{2\sqrt{xy}}{y} - \frac{\sqrt{xy}}{x^2}\right)dy = 0$$

debe ser exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{2x}\frac{x}{\sqrt{xy}} + \frac{3}{2x^4}x\sqrt{xy} = \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{3}{2x^3}\sqrt{xy}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2}{2y}\frac{y}{\sqrt{xy}} - \frac{x^2\frac{y}{2\sqrt{xy}} - 2x\sqrt{xy}}{x^4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{xy}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{xy} - 2\sqrt{xy}}{x^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{3}{2x^3}\sqrt{xy} \quad ✓$$

7.-) Sabiendo que dos ecuaciones diferenciales tienen un mismo factor de integración (común a las dos), deducir un método que permita calcular éste.

Solución: Sean

$$\begin{cases} M_1(x,y)\,dx + N_1(x,y)\,dy = 0 \\ M_2(x,y)\,dx + N_2(x,y)\,dy = 0 \end{cases}$$

Se sabe que:

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = F(x,y)$$

$$\therefore \begin{cases} N_1\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - M_1\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu F_1(x,y) \\ N_2\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - M_2\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = \mu F_2(x,y) \end{cases}$$

resolviendo el sistema para $\frac{\partial \mu}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mu\begin{vmatrix} F_1 & M_1 \\ F_2 & M_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N_1 & M_1 \\ N_2 & M_2 \end{vmatrix}} = \mu\, P(x,y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\, Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x}dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}dy = d\mu = \mu\left(P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\right)$$

$$\therefore \frac{d\mu}{\mu} = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

$$\ln \mu = \int(P\,dx + Q\,dy)$$

$$\therefore \mu = e^{\left[\int P(x,y)\,dx + \int Q(x,y)\,dy\right]}$$

Teorema VIII: - de Euler relativo a funciones homogéneas:-

Si la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es homogénea de grado m; teniendo primeras derivadas parciales continuas, se verifica lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Demostración:

Hagamos $y_i = t x_i$ ① ; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dado que f es función homogénea de grado m:

$$\Rightarrow f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad ②$$

de ②: $\dfrac{\partial f_1}{\partial t} = m t^{m-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ③

pero: $\dfrac{\partial f_1}{\partial t} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial t} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial t} + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}\dfrac{\partial y_n}{\partial t}$ ④

de ① $\dfrac{\partial y_i}{\partial t} = x_i$

substituyendo en ④:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} x_i \quad ⑤$$

haciendo $t = 1$ en ① $\Rightarrow y_i = x_i$

substituyendo ⑤ en ③; haciendo $f_1 = f$; $(t = 1)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \checkmark$$

ó sea:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

146

Ejemplo: Verificar el teorema de Euler para la función:

$$f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + 2xyz$$

Solución: $m = 3$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + 2xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xy.$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y + 3xy^2 + 6xyz \checkmark$$

por otro lado:

$$m\,f(x,y,z) = 3(x^2y + xy^2 + 2xyz)$$
$$= 3x^2y + 3xy^2 + 6xyz \checkmark$$

por lo cual queda comprobado el teorema de Euler para la función $f(x,y,z)$ homogénea dada.

<u>La ecuación diferencial homogénea (tipo 2) de grado n:</u>

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad ①$$

<u>admite el siguiente factor de integración:</u>

$$\mu = \frac{1}{Mx+Ny} \quad ②$$

Demostración:

Bastará hacer ver que $\mu(M\,dx + N\,dy) = 0$ es exacta; o sea:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{M}{Mx+Ny} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{N}{Mx+Ny}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{M}{Mx+Ny} = \frac{(\cancel{Mx}+Ny)\frac{\partial M}{\partial y} - M\left(\cancel{x\frac{\partial M}{\partial y}} + N + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{Ny\frac{\partial M}{\partial y} - MN - My\frac{\partial N}{\partial y}}{(Mx+Ny)^2} \quad ③$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{N}{Mx+Ny} = \frac{(Mx+\cancel{Ny})\frac{\partial N}{\partial x} - N\left(x\frac{\partial M}{\partial x} + M + \cancel{y\frac{\partial N}{\partial x}}\right)}{(Mx+Ny)^2}$$

$$= \frac{Mx\frac{\partial N}{\partial x} - MN - Nx\frac{\partial M}{\partial x}}{(Mx+Ny)^2} \quad ④$$

③ − ④:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{M}{Mx+Ny} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{N}{Mx+Ny} = \frac{N\left(x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y}\right) - M\left(x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(Mx+Ny)^2} \quad ⑤$$

Puesto que tanto M como N son funciones homogéneas de grado n, por el teorema <u>VIII</u> de Euler, el numerador del segundo miembro de ⑤ puede escribirse: $N(nM) - M(nN)$, que es cero, $\Rightarrow$ la ecuación ① es exacta. ✓

Obsérvese que la ecuación $\mu(M\,dx+N\,dy)=0$ sigue siendo homogénea; pero de grado -1; ya que $Mx+Ny$ es homogénea de grado $n+1$

Ejemplo: Integrar, como exacta, la siguiente ecuación diferencial homogénea:

$$y^2 dx + (x^2 - xy)\, dy = 0 \quad (1)$$

Solución:

Por ser (1) homogénea, pero no exacta, el factor de integración es:

$$\frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{xy^2 + x^2y - xy^2} = \frac{1}{x^2y}$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{x^2y}\, dx + \frac{x^2 - xy}{x^2y}\, dy = 0$$

ó sea:

$$\frac{y}{x^2}\, dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) dy = 0 \quad \text{es exacta.}$$

integrando:

$$\int_0^x 0 + \int_0^y \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) dy = c$$

$$\ln y - \frac{y}{x} = c,$$

$$\ln cy = \frac{y}{x}$$

$$cy = e^{y/x}$$

Solución singular: $y = 0$

149

<u>Cualquier función $\mu(x,y)$, homogénea de grado -2, con derivadas parciales continuas de primer orden, es factor de integración de la ecuación diferencial:</u>

$$y\,dx - x\,dy = 0 \quad (1)$$

Demostración:

Puesto que $M = y \; ; \; N = -x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - (-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow (1) \text{ no es exacta.}$$

Sea $\mu = \mu(x,y)$ factor de integración de (1): $\Rightarrow \mu y\,dx - \mu x\,dy = 0$

observando que

$$\frac{\partial \mu y}{\partial y} + \frac{\partial \mu x}{\partial x} = \mu + y\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu + x\frac{\partial \mu}{\partial x} =$$

$$= 2\mu + x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} \quad (2)$$

Puesto que, por hipótesis μ es función homogénea de grado -2, del teorema de Euler:

$$x\frac{\partial \mu}{\partial x} + y\frac{\partial \mu}{\partial y} = -2\mu(x,y)$$

$\Rightarrow$ de (2): $(M = y \; ; \; N = -x)$

$$2\mu - 2\mu = 0 = \frac{\partial \mu M}{\partial y} - \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ $\mu y\,dx - \mu x\,dy = 0$ es exacta, siendo μ <u>cualquier</u> función homogénea de grado -2, con derivadas parciales de primer orden continuas.

Ejemplo: Integrar:

$$(y^2+y)\,dx - x\,dy = 0 \quad (1)$$

Solución:

Puesto que: $\frac{\partial}{\partial y}(y^2+y) = 2y+1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$

$\Rightarrow$ (1) no es exacta.

Observando que (1) se puede escribir:

$$y^2\,dx + y\,dx - x\,dy = 0$$

multiplicando por y^{-2} (de grado -2)

$$dx + \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0 \quad ; \quad y \neq 0$$

resultando, por lo tanto $\mu = y^{-2}$ como factor de integración para $y\,dx - x\,dy$:

$$\Rightarrow \quad dx + d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

integrando:

$$x + \frac{x}{y} = c \quad ; \quad y \neq 0$$

Obsérvese que $y=0$ satisface (1) $\Rightarrow$ $y=0$, es solución singular.

La ecuación diferencial homogénea y exacta $M\,dx + N\,dy = 0$ ① tiene por solución general:

$$Mx + Ny = C \quad ② \quad ; \quad si \ n \neq -1$$

Demostración:

Por ser ① exacta $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ③

haciendo $Mx + Ny = z$ ④

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = M + x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial x}$$

de ③:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M + \underbrace{x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y}}$$

por ser ① homogénea de grado n, del teorema VIII de Euler:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = M + nM = (n+1)M \quad ④$$

de modo análogo resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (n+1)N \quad ⑤$$

sumando ④ por dx con ⑤ por dy.

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = dz = (n+1)(M\,dx + N\,dy) \quad ⑥$$

de ④: $M\,dx + N\,dy = \frac{1}{n+1}d(Mx + Ny)$; $n \neq -1$

integrando:

$$\int (M\,dx + N\,dy) = C_1 = \frac{Mx + Ny}{n+1}$$

haciendo $C = C_1(n+1)$:

$\Rightarrow$ la solución de ① es:

$$Mx + Ny = C$$

Ejemplos: Integrar:

1) $y\,dx + (x-y)\,dy = 0$ ①

Solución:

Observando:

i) la ecuación ① es homogénea de grado 1.

ii) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 \Rightarrow$ ① es exacta,

tendremos que la solución de ① es:

$$Mx + Ny = C = xy + xy - y^2$$

ó sea:

$$2xy - y^2 = C$$

2) $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$

Solución:

i) la ecuación es homogénea de grado 3.

ii) $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \Rightarrow$ es exacta.

$\therefore$ la solución es:

$$x^4 + 4xy^3 = C$$

3) $(6x^5y^3 + 4x^3y^5)dx + (3x^6y^2 + 5x^4y^4)\,dy = 0$

Solución:

i) la ecuación es homogénea de grado 8.

ii) $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 18x^5y^2 + 20x^3y^4$

$\therefore$ la solución es:

$$9x^6y^3 + 9x^4y^5 = C_1$$

ó $x^6y^3 + x^4y^5 = C$

Tipo 9.- Lineal de primer orden:

Su forma general es:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad ①$$

la ecuación ① puede ponerse en la forma $M dx + N dy = 0$:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

la cual no es exacta si $P(x) \neq 0$; ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P(x) \; ; \; \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad ②$$

si $Q(x) = 0$, la ecuación ① sería del tipo 1, siendo de integración inmediata.

Por ser lineal la ecuación ①, puede obtenerse la solución aplicando el teorema I; ó sea, hallaremos primero la solución de la ecuación homogénea $y' + P(x)y = 0$ ②, $(Q(x)=0)$; a la cual le sumaremos una solución particular de ①, con lo cual obtendremos la solución general buscada.

Solución complementaria:

La ecuación ② $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ es del tipo 1

Separando las variables:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \qquad (y \neq 0)$$

integrando: $\ln y + \ln c = -\int P(x)dx$

$\Rightarrow$ la solución complementaria es:

$$y_c = c\, e^{-\int P(x)dx} \quad ③$$

(si $c=0$, se recupera la solución $y \equiv 0$)

en seguida obtendremos una solución particular de ① empleando el método de variación de parámetros estudiado anteriormente:

Supondremos que:

$$y_p = c(x)\, e^{-\int P(x)dx} \quad ④$$

$$\Rightarrow \frac{dy_p}{dx} = \frac{dc}{dx} e^{-\int P(x)dx} - c(x)\, P(x)\, e^{-\int P(x)dx}$$

Substituyendo en ①:

$$\frac{dc}{dx} e^{-\int P(x)dx} - c(x) P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x) c(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\therefore \quad \frac{dc}{dx} = Q(x)\, e^{\int P(x)dx} \quad (\text{tipo } 1)$$

integrando:

$$c(x) = \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx$$

substituyendo en ④

$$y_p = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx \quad ⑤$$

Puesto que la solución general, del teorema I, es $y = y_c + y_p$, de ③ y ⑤, resulta:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx + c \right) \quad ⑥$$

Observación. Aun cuando ⑥ da la solución general de ① buscada, en vez de emplear esta fórmula, es más fácil resolver la ecuación lineal ① procediendo del modo que se indica a continuación:

La ecuación ①:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

admite un factor de integración

$$\mu = e^{\int P(x)\,dx}$$

que es precisamente el recíproco de la solución de la ecuación homogénea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$

Demostración:

Escribiendo la ecuación ① en la forma:

$$\big(P(x)\,y - Q(x)\big)\,dx + dy = 0$$

haciendo: $M = P(x)y - Q(x)$; $N = 1$

resulta $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = P(x)$; (función sólo de x)

$\Rightarrow$ de lo visto anteriormente, es factor de integración de ①:

$$\mu = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx} = e^{\int P(x)\,dx}$$

Por otro lado; la ecuación ③ anterior, para $C=1$ nos da:

$$y_c = e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y_c} = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{1}{y_c} \quad \checkmark$$

Procedimiento sugerido para hallar la solución general de la ecuación lineal de primer orden no-homogénea: $y' + P(x)y = Q(x)$ ①.

i) Intégrese la ecuación homogénea:
$y' + P(x)y = 0$, (tipo 1, variables separables) con el exclusivo propósito de definir la función $f(x) = e^{-\int P(x)dx}$; solución de la ecuación homogénea, con $C = 1$.

ii) Multiplíquese la ecuación ① por el factor de integración $\frac{1}{f(x)} = e^{\int P(x)dx}$, para convertir ésta, en su primer miembro, en una combinación integrable (tipo 7):

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x); \text{(tipo 7)}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x) \quad ; \text{(tipo 1)}$$

$$d\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$$

iii) Por último, se obtiene la solución general de la ecuación lineal no-homogénea ①, integrando ambos miembros de la última ecuación, en que se han separado las variables:

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C$$

$$\therefore \quad y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right)$$

Ejemplos: Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

1) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{x}$ ①

Solución: integrando 1º la ecuación homogénea:

i) $\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow y = f(x) = e^{-\int -2dx} = e^{2x}$

ii) $\Rightarrow e^{-2x}$ convierte la ecuación ①, al tomarse como factor de integración, en una combinación integrable:

$$e^{-2x}\frac{dy}{dx} - 2e^{-2x}y = e^{-x} \qquad \text{(tipo 7)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}y\right) = e^{-x} \qquad \text{(tipo 1)}$$

$\therefore \quad d\left(e^{-2x}y\right) = e^{-x}dx$

integrando:

$\Rightarrow$ iii) $e^{-2x}y = -e^{-x} + c$

$\therefore$ la solución general de ① es:

$$\underline{y = -e^{x} + ce^{2x}}$$

2) $\frac{dy}{dx} - (ctg\,x)y = \cos x$ ①

Solución: Integrando 1º: $y' - (ctg\,x)y = 0$:

i) $\frac{dy}{dx} = (ctg\,x)y$

$\therefore \frac{dy}{y} = ctg\,x\,dx$

integrando:

$\ln y = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx + \ln c$

$\Rightarrow cy = \ln \operatorname{sen} x$ $(\operatorname{sen} x > 0)$

si $c=1 \Rightarrow y = f(x) = e^{\ln \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$

ii) $\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ es factor de integración de ① (tipo 7)

$\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{dy}{dx} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}y = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$; $(x \neq n\pi; n=0,1,2..)$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ (tipo 1)

separando variables:

$d\left(\frac{y}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx$

iii) integrando:

$\frac{y}{\operatorname{sen} x} = \ln \operatorname{sen} x + c$

$\therefore y = \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x + c \operatorname{sen} x$

donde: $\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow 0 < x < \pi$

3) $$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$$

Solución:

i) Integrando 1º la ecuación homogénea: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x|$$

$$\Rightarrow \quad y = x$$

ii) $\Rightarrow \frac{1}{x}$ es factor de integración de la ecuación no-homogénea: $(x \neq 0)$

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = x \qquad \text{(tipo 7)}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = x \qquad \text{(tipo 1)}$$

separando variables:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = x\,dx$$

iii) integrando:

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x^3}{2} + cx$$

4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \operatorname{sen} 2y}$$

Solución: La ecuación es lineal, si se considera y como variable independiente: $x = x(y)$

$$x' = x\cos y + \operatorname{sen} 2y \quad \text{ó} \quad \frac{dx}{dy} - x\cos y = \operatorname{sen} 2y$$

obteniéndose:

$$x = Ce^{\operatorname{sen} y} - 2(\operatorname{sen} y + 1)$$

Si se conocen dos soluciones particulares diferentes y_1, y_2 de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + P(x)y = Q(x)$ ①, puede escribirse de inmediato la solución general de ① en la siguiente forma:

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1) \quad ②$$

Demostración:

Puesto que y_1 y y_2 satisfacen ①:

$$y_1' + P(x)y_1 = Q(x) \quad ③$$

$$y_2' + P(x)y_2 = Q(x) \quad ④$$

④ - ③:

$$\frac{d}{dx}(y_2 - y_1) + P(x)(y_2 - y_1) = 0$$

$\Rightarrow$ $c(y_2 - y_1)$ es solución de la ecuación homogénea $y' + P(x)y = 0$; por lo cual, del teorema I; siendo y_1 y y_2 soluciones particulares de ①, resulta que la solución general de ① es:

$y = y_1 + c_1(y_2 - y_1)$; ó $y = y_2 + c_2(y_2 - y_1)$; tambien son solución general:

$y = y_1 + c_3(y_1 - y_2)$; ó $y = y_2 + c_3(y_1 - y_2)$ ✓

La solución ② puede escribirse:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = c \quad ②'$$

La ecuación ②' permite establecer la siguiente interpretación geométrica; que resulta de gran interés:

Para dos abscisas dadas x_0, x_1, la relación de ordenadas de dos curvas integrales, respecto a una tercera curva integral, es constante.

Demostración:

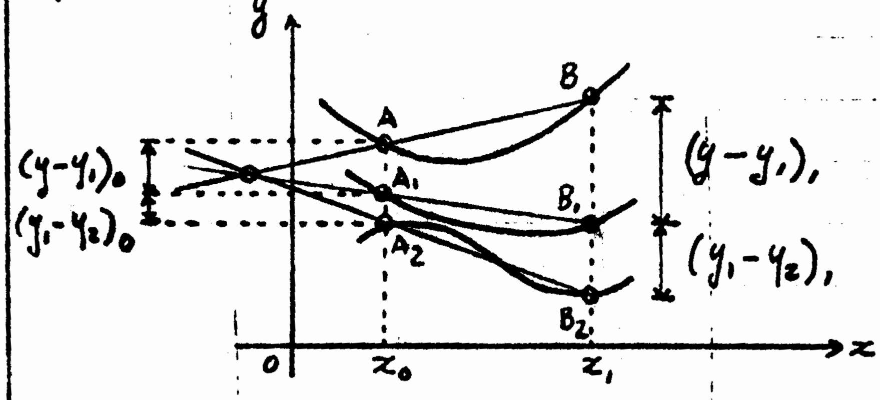
de (2')

$$\left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)_0 = \left(\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\right)_1 \quad \text{ó bien} \quad \left(\frac{y-y_1}{y_1-y_2}\right)_0 = \left(\frac{y-y_1}{y_1-y_2}\right)_1$$

intercambiando medios:

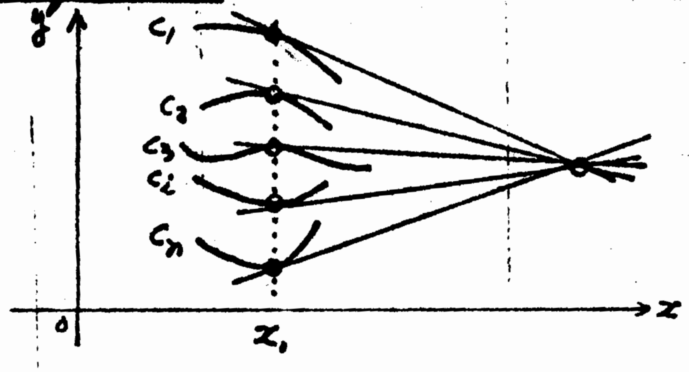
$$\frac{(y_2-y_1)_0}{(y_2-y_1)_1} = \frac{(y-y_1)_0}{(y-y_1)_1} \quad (5) \quad \text{ó bien} \quad \frac{(y_1-y_2)_0}{(y_1-y_2)_1} = \frac{(y-y_1)_0}{(y-y_1)_1}$$

gráficamente:



La proposición se comprueba comparando los triángulos semejantes.

Como corolario, en el límite, si $x_0 \to x_1$; todas las tangentes correspondientes a una misma abscisa, para todas las curvas integrales, se cortan en un mismo punto:



Tipo 10.- Ecuación de Bernoulli.

Forma general:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)\, y^n \quad ①$$

Observando que si $n=0$, la ecuación ① es del tipo 9 (lineal); si $n=1$, la ecuación ① puede escribirse $y' + [P(x) - Q(x)]y = 0$, que es de variables separables (tipo 1)

Si $n \neq 1$, la ecuación ① de Bernoulli puede reducirse al tipo 9 (lineal), mediante el siguiente cambio de variable $z = y^{1-n}$. ②

Demostración:

de ②: $$\frac{dz}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n} \frac{dz}{dx} \quad ; \quad (n \neq 1)$$

substituyendo en ①:

$$\frac{y^n}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x) y = Q(x)\, y^n$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + (1-n) P(x)\, y^{1-n} = (1-n)\, Q(x)$$

de ②:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n) P(x)\, z = (1-n)\, Q(x) \; ③; \quad (\text{tipo } 9)$$

Haciendo: $$\begin{cases} P_1(x) = (1-n)\, P(x) \\ Q_1(x) = (1-n)\, Q(x) \end{cases}$$

de ③ se obtiene:

$$\frac{dz}{dx} + P_1(x)\, z = Q_1(x)$$

ecuación lineal de primer orden. (tipo 9)

Ejemplo: Integrar:

$$\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \quad (1)$$

Solución:

Puesto que $n = 3$, la ecuación (1) se transforma en lineal (tipo 9) haciendo $z = y^{1-n} = y^{-2}$ (2)

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{2}\frac{dz}{dx}$$

substituyendo en (1)

$$-\frac{y^3}{2}\frac{dz}{dx} + y = xy^3$$

ó bien:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{y^2} = -2x$$

de (2):

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} - 2z = -2x \quad ; \text{(tipo 9)}$$

integrando la ecuación homogénea $z' - 2z = 0$

i) $z = f(x) = e^{2x}$

ii) el factor e^{-2x} convierte la ecuación (3) en una combinación integrable (tipo 7)

$$e^{-2x}\frac{dz}{dx} - 2e^{-2x}z = -2xe^{-2x}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(e^{-2x}z) = -2xe^{-2x}$$

integrando: $e^{-2x}z = \frac{1}{2}e^{-2x}(2x+1) + c$

de (2):

$$\frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + ce^{2x}$$

En general, es más conveniente resolver la ecuación de Bernoulli, empleando el método de variación de parámetros; sin necesidad de convertirla al tipo 9 (lineal):

Ejemplos: Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

1) $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$ (1)

Solución:

Resolviendo la ecuación homogénea:

$\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow y_c = e^{-x}$ (2)

haciendo: $y = e^{-x} z$ (3)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-x}\frac{dz}{dx} + z(-e^{-x})$ (4)

(3) y (4) en (1)

$$e^{-x}\frac{dz}{dx} + \cancel{e^{-x}z} = xe^{-3x}z^3 - \cancel{e^{-x}z}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = xe^{-2x}z^3 \qquad (\text{tipo } 1)$$

separando variables é integrando:

$$-\frac{1}{2z^2} = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1) + C_1$$

de (3)

$$\frac{1}{2e^{+2x}y^2} = \frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1) + C_1$$

$$\therefore \frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}$$

2) $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x \quad (1)$

Solución:

Resolviendo la ecuación homogénea:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$\Rightarrow \quad Ly = -Lx \quad \therefore \; Ly = Lx^{-1} \Rightarrow y_c = \frac{1}{x} \quad (2)$

haciendo: $y = \frac{1}{x} z \quad (3)$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} z \quad (4)$$

(3) y (4) en (1):

$$\frac{dz}{dx} - \cancel{\frac{z}{x}} + \cancel{\frac{z}{x}} = \frac{z^2}{x^2}\ln x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{x^2}\ln x \qquad (\text{tipo } 1)$$

Separando variables é integrando:

$$-\frac{1}{z} = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

$$z = \frac{x}{\ln x + 1 - cx}$$

de (3):

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 - cx}$$

Tipo 11: Ecuación de Riccati.

Forma general:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \quad (1)$$

Resulta factible hallar la solución general de (1) en aquellos casos en los cuales se conoce una solución particular de (1):

En efecto: sea $y_1 = y_1(x)$ (2) una solución particular de (1).

(2) en (1) $\Rightarrow y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 = f(x) \quad (3)$

(1)-(3):

$$y' - y_1' + P(x)(y - y_1) + Q(x)(y^2 - y_1^2) = 0 \quad (4)$$

(4) sugiere el cambio de variable: $y - y_1 = z$ (5)

$\Rightarrow \; y' - y_1' = z'$; $P_1(x) = P(x) + 2Q(x)y_1$;

substituyendo en (4):

$$z' + P_1(x)z + Q(x)z^2 = 0$$

ó bien:

$$z' + P_1(x)z = -Q(x)z^2 \quad (6); \text{ tipo } 10$$

La ecuación (6) es tipo Bernoulli con $n = 2$; $\Rightarrow$ la substitución (7): $v = \frac{1}{z}$ transforma (6) en el tipo 9 (lineal)

La ecuación (6) puede asimismo resolverse mediante variación de parámetros.

Es frecuente que para hallar la solución de (1) sea necesario recurrir a desarrollos en series.

En seguida se resolverán algunos ejemplos en los que sí es posible hallar la solución de la ecuación de Riccati mediante un número finito de integraciones.

Solución general de la ecuación de Riccati cuando se conocen más de una solución particular de la misma:

1.- Se conocen 2 soluciones particulares de (1); sean éstas $y_1 = y_1(x)$; $y_2 = y_2(x)$

$\therefore$ $y_1' + Py_1 + Qy_1^2 = f(x)$ (3)

$y_2' + Py_2 + Qy_2^2 = f(x)$ (3')

de (4): $$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} + P + Q(y + y_1) = 0 \qquad (8)$$

analogamente:

$$\frac{y' - y_2'}{y - y_2} + P + Q(y + y_2) = 0 \qquad (9)$$

(8) - (9): $$\frac{y' - y_1'}{y - y_1} - \frac{y' - y_2'}{y - y_2} + Q(y_1 - y_2) = 0$$

integrando:

$$\ln(y - y_1) - \ln(y - y_2) + \int Q(y_1 - y_2) + C_1 = 0$$

o bien:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C_2 e^{\int Q(y_2 - y_1)dx} \qquad (10)$$

(10) es solución general de (1)

2.- Se conocen 3 soluciones: y_1, y_2, y_3:

de (10): $$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C_3 e^{\int Q(y_2 - y_1)dx} \qquad (11)$$

(10) $\div$ (11):

$$\frac{(y - y_1)(y_2 - y_3)}{(y - y_2)(y_1 - y_3)} = C \qquad (12)$$

donde $\frac{C_2}{C_3} = C$

3) Si y_4 es una 4ª solución particular de ① ; resulta al substituirla en ⑫

$$\frac{(y_4-y_1)(y_3-y_2)}{(y_4-y_2)(y_3-y_1)} = C \quad (13)$$

Ejemplo: Sabiendo que: $y_1 = x$; $y_2 = -x$ son soluciones particulares de:

$$2x^2y' = (x-1)(y^2-x^2) + 2xy$$

hallar otras 2 soluciones particulares y_3 ; y_4 y comprobar la fórmula ⑬.

Solución:

i) La E.D. dada es del tipo 11 (Riccati)

$\therefore \quad y - y_1 = z \quad ; \; y - x = \frac{1}{V} \; ; \Rightarrow \; y' - 1 = -\frac{V'}{V^2}$

(véase página siguiente: solución general usando ⑩)

substituyendo en la E.D. y simplificando:

$$2x^2(V'+V) = 1-x \quad \text{(tipo 9 : lineal)}$$

$$\therefore \quad V = \frac{Cxe^{-x}-1}{2x}$$

pero: $y - x = \frac{1}{V}$

$$\Rightarrow y = x + \frac{2x}{Cxe^{-x}-1} = x\,\frac{Cxe^{-x}+1}{Cxe^{-x}-1} = x\,\frac{Cx+e^x}{Cx-e^x}$$

para: $C=1 \Rightarrow \quad y_3 = x\,\frac{x+e^x}{x-e^x}$

para $C=-1 \Rightarrow \quad y_4 = x\,\frac{x-e^x}{x+e^x}$

Substituyendo y_1, y_2, y_3, y_4 en ⑬

$$\frac{\left(x\frac{x-e^x}{x+e^x} - x\right)\left(x\frac{x+e^x}{x-e^x} + x\right)}{\left(x\frac{x-e^x}{x+e^x} + x\right)\left(x\frac{x+e^x}{x-e^x} - x\right)} = -1 = C \; ✓$$

ii) Solución general empleando fórmula (10):

$$Q = \frac{1-x}{2x^2}$$

$$\therefore \quad Q(y_2 - y_1) = \frac{1-x}{2x^2}(-x-x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\int Q(y_2-y_1)dx = x - \ln x$$

$$e^{\int Q(y_2-y_1)dx} = e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{x}$$

substituyendo en (10):

$$\frac{y-y_1}{y-y_2} = \frac{y-x}{y+x} = \frac{C_2 e^x}{x}$$

$$y - x = \frac{C_2 e^x (y+x)}{x}.$$

$$y = x + y\frac{C_2 e^x}{x} + C_2 e^x$$

$$y\left(1 - \frac{C_2 e^x}{x}\right) = x + C_2 e^x$$

$$\therefore \quad y = x\,\frac{x + C_2 e^x}{x - C_2 e^x}$$

para $C_2 = 1$: $\quad y_3 = x\,\dfrac{x+e^x}{x-e^x}$ ✓

para $C_2 = -1$: $\quad y_4 = x\,\dfrac{x-e^x}{x+e^x}$ ✓

Obsérvese que las constantes obtenidas en la parte i) y ii) de la solución general son recíprocas: $C = \dfrac{1}{C_2}$

Ejemplos:- Integrar las siguientes E.D. Riccati:

1) $\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$ ① (tipo 11)

Solución:

Se comprueba que $y_1 = \frac{1}{x}$ es solución particular de ①.

Haciendo $y = \frac{1}{x} + z$ ②, en ①:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2} = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = z^2 + \frac{2z}{x} \quad ③ \text{ (tipo 10)}$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = z^2$$

Resolviendo la ecuación homogénea:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x} \Rightarrow z_c = x^2$$

haciendo: $z = Vx^2$ ④ $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2xV + x^2\frac{dV}{dx}$ ⑤

④ y ⑤ en ③: $\cancel{2xV} + x^2\frac{dV}{dx} = V^2x^4 + \cancel{2Vx}$

$$\frac{dV}{dx} = V^2x^2 \text{ (tipo 1)} \Rightarrow \frac{dV}{V^2} = x^2dx$$

$$-\frac{1}{V} = \frac{x^3}{3} + c_1 \quad \Rightarrow \frac{1}{3}V = (c - x^3)^{-1} \quad ⑥$$

de ② y ④ $\quad V = \frac{y - \frac{1}{x}}{x^2} \quad$ ⑦

⑥ en ⑦:

$$y - \frac{1}{x} = \frac{3x^2}{c - x^3}$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c - x^3}$$

Cauchy demostró la existencia de la solución de ecuaciones del tipo II (Riccati) en cualquier intervalo abierto $(-r, r)$ que contiene al origen, en todos los casos en los cuales las funciones: $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ sean analíticas en $(-r, r)$; sin embargo existen casos en que la solución no puede ser expresada como una combinación finita de integrales de funciones elementales, como en el ejemplo siguiente:

z) $\frac{dy}{dx} + ay^2 = x^2$; $a > 0$; (tipo II)

José Liouville, en 1841, fue quien halló que la solución de este ejemplo z) no puede obtenerse en forma de una combinación finita de integrales de funciones elementales, aun cuando la solución existe, de acuerdo con Cauchy. En casos como éste lo común expresar la solución mediante series infinitas.

Existen métodos de solución llamados iterativos, por medio de los cuales se puede lograr el grado de aproximación que el problema requiera.

Resulta interesante hacer notar que el problema de cálculo aproximado de la solución de una ecuación diferencial ordinaria, con condiciones iniciales (problema de Cauchy), puede efectuarse con el auxilio de una computadora electrónica. En la actualidad existen computadoras que

112

operan con una rapidez tal, que si, por ejemplo, la computadora se programa para calcular la trayectoria de un proyectil, la máquina resuelve el problema en menos tiempo que el que le toma al proyectil para llegar al blanco.

La ecuación de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = f(x) \quad (1)$$

mediante la transformación:

$$y = \frac{1}{Qu}\frac{du}{dx} \quad (2)$$

se convierte en:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(P - \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}\right)\frac{du}{dx} - fQu = 0 \quad (3)$$

que es homogénea y <u>lineal</u>.

Demostración:

de (2): $$y' = \frac{Quu'' - u'(Qu' + Q'u)}{Q^2u^2} =$$

$$= \frac{u''}{Qu} - \frac{(u')^2}{Qu^2} - \frac{u'Q'}{Q^2u} \quad (4)$$

(4) en (1):

$$\frac{u''}{Qu} - \cancel{\frac{(u')^2}{Qu^2}} - \frac{u'Q'}{Q^2u} + \frac{Pu'}{Qu} + \cancel{\frac{(u')^2}{Qu^2}} = f(x)$$

multiplicando por Qu:

$$u'' + \left(P - \frac{Q'}{Q}\right)u' - fQu = 0 \quad ✓$$

Resolver las siguientes ecuaciones de Riccati empleando la transformación ②:

3) $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + y^2 = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

$P(x) = \frac{1}{x}$; $Q(x) = 1$; $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$\Rightarrow$ de ②: $$y = \frac{u'}{u} \quad ④$$

de ③: $$u'' + \left(\frac{1}{x} - \frac{0}{1}\right)u' - \frac{1}{x^2}u = 0 \ ; x \neq 0$$

o bien: $$x^2u'' + xu' - u = 0 \quad ⑤$$

La ecuación ⑤ sugiere la solución del tipo: $u = x^m$; $u' = mx^{m-1}$; $u'' = m(m-1)x^{m-2}$;

Substituyendo en ⑤:

$$[m(m-1) + m - 1]x^m = 0 \ ; \text{ pero } x \neq 0$$

$\Rightarrow$ $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = 1$; $m_2 = -1$

$\Rightarrow$ $u_1 = x$; $u_2 = \frac{1}{x}$

$\therefore$ La solución general de ⑤ es:

$$u = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$$

de ④: $$y = \frac{u'}{u} = \frac{c_1 - c_2\frac{1}{x^2}}{c_1 x + c_2\frac{1}{x}}$$

o bien; si $k = \frac{c_1}{c_2}$:

$$y = \frac{kx^2 - 1}{kx^3 + x} \ ; \ x \neq 0$$

4) $\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{12}{x^2}$

Solución:

$P(x) = 0$; $Q(x) = 1$; $f(x) = \frac{12}{x^2}$

$\Rightarrow$ de ②: $y = \frac{u'}{u}$

de ③: $u'' + \left(0 - \frac{0}{1}\right)u' - \frac{12}{x^2}u = 0$; $x \neq 0$

o bien: $u'' - \frac{12}{x^2}u = 0$

Ensayando: $u = x^m$; $u' = mx^{m-1}$; $u'' = m(m-1)x^{m-2}$

$\Rightarrow [m(m-1) - 12]x^{m-2} = 0$; si $x \neq 0$

$\Rightarrow m_1 = 4$; $m_2 = -3$

$\Rightarrow u_1 = x^4$; $u_2 = \frac{1}{x^3}$

$\therefore$ La solución general es:

$$u = c_1 x^4 + c_2 \frac{1}{x^3}$$

pero $y = \frac{u'}{u} = \dfrac{4c_1 x^3 - 3c_2 \frac{1}{x^4}}{c_1 x^4 + c_2 \frac{1}{x^3}}$

multiplicando por x^4 ; haciendo $\frac{c_1}{c_2} = C$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{4Cx^7 - 3}{Cx^8 + x} \quad ; \; x \neq 0$$

5) $\dfrac{dy}{dx} + y - e^{x}y^{2} = e^{-x}$

Solución:

$P(x) = 1$; $Q(x) = -e^{x}$; $f(x) = e^{-x}$

de ②: $y = -e^{-x}\dfrac{u'}{u}$

de ③: $u'' + (1-1)u' + u = 0$

$\therefore \quad u'' + u = 0$

$\Rightarrow \quad u = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$

$$y = -e^{-x}\frac{c_1 \cos x - c_2 \operatorname{sen} x}{c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x}$$

haciendo: $\dfrac{c_1}{c_2} = C$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x - C\cos x}{e^{x}(C\operatorname{sen} x + \cos x)}$$

Ecuación diferencial lineal homogénea de 2º orden resuelta como ecuación de Riccati:

En ocasiones la solución de la ecuación $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ ① no es tan obvia a primera vista; sin embargo, si la ecuación ① se transforma en una ecuación de Riccati equivalente, resulta posible determinar una solución particular y, con relativa facilidad, con lo cual hemos visto, puede hallarse la solución general de la ecuación de Riccati, y de ahí se llega a la solución general de la ecuación ①.

Procedimiento: La solución general de ① tiene que ser de la forma:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad ②$$

; donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias, siendo y_1 y y_2 funciones linealmente independientes que satisfacen ambas la ecuación ①.

Haciendo la substitución:

$$y = e^{-\int v\,dx} \Rightarrow y' = -v e^{-\int v\,dx} \;;\; y'' = (v^2 - v')e^{-\int v\,dx}$$

substituyendo en ①; cancelando $e^{-\int v\,dx}$:

$$v^2 - v' + a_1(x)(-v) + a_2(x) = 0$$

ó bien: $$v' + a_1(x)v - v^2 = a_2(x) \quad ③$$

Por lo que se ve que la ecuación ① se ha transformado en la ecuación de Riccati ③: $a_1(x) = P(x)$; $-1 = Q(x)$; $a_2(x) = f(x)$ en la forma general anterior.

177

Resolver: $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2x-1)\dfrac{dy}{dx}-2y=0$

Solución:

Escribiendo la ecuación en la forma (normalizada) ①:

$$y''+\left(2-\frac{1}{x}\right)y'-\frac{2}{x}y=0$$

$\Rightarrow a_1(x)=2-\frac{1}{x}\ ;\ a_2(x)=-\frac{2}{x}$

de ③:

$$v'+\left(2-\frac{1}{x}\right)v-v^2=-\frac{2}{x} \quad ④$$

que es ecuación de Riccati.

Supongamos que la solución es de la forma: $v=ax^n$; $\Rightarrow v'=nax^{n-1}$

substituyendo en ④

$$nax^{n-1}+\left(2-\frac{1}{x}\right)ax^n-a^2x^{2n}=-\frac{2}{x}$$

$$(na-a)x^{n-1}+2ax^n-a^2x^{2n}=-2x^{-1}$$

si: $n=0 \Rightarrow -ax^{-1}+2a-a^2=-2x^{-1}$

si $a=2 \Rightarrow -2x^{-1}+4-4=-2x^{-1} \Rightarrow 0=0$

$\Rightarrow v_1=2$ es una solución particular de ④

haciendo: $v=v_1+z \Rightarrow v'=z'$; $v=z+2$

de ④:

$$z'+\left(2-\frac{1}{x}\right)(z+2)-(z+2)^2=-\frac{2}{x}$$

$$z'+2z+\cancel{4}-\frac{z}{x}-\cancel{\frac{2}{x}}-z^2-4z-\cancel{4}=-\cancel{\frac{2}{x}}$$

$$z'-\left(\frac{1}{x}+2\right)z=z^2 \quad ⑤ \text{ (tipo Bernoulli)}$$

$z=w^{-1} \Rightarrow z'=-w^{-2}w'$

en ⑤: $-w^{-2}w'-\left(\frac{1}{x}+2\right)w^{-1}=w^{-2}$

$$w'+\left(\frac{1}{x}+2\right)w=-1 \quad ⑥ \text{ (lineal de 1}^{\text{er}}\text{ orden)}$$

$$\mu = e^{\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx} = e^{\ln x + 2x} = x e^{2x}$$

$\mu \times ⑥$:

$$x e^{2x}\frac{dw}{dx} + e^{2x}w + 2x e^{2x} w = -x e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x e^{2x} w\right) = -x e^{2x}$$

$$x e^{2x} w = -\int x e^{2x}\,dx$$

$$x \cancel{e^{2x}} w = -\frac{\cancel{e^{2x}}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1-2x}{4}$$

$$z = \frac{4x}{1-2x} = V - 2$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{\cancel{4x} + 2 - \cancel{4x}}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$$

$$y_1 = e^{-\int V_1 dx} = e^{-2\int dx} = e^{-2x}$$

$$y_2 = e^{-\int V_2 dx} = e^{-\int \frac{2dx}{1-2x}} = e^{\ln(2x-1)} = 2x-1$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2(2x-1)$$

1ª Observación: La E.D. dada puede ser integrada como combinación integrable: $\frac{xy''-y'}{x^2} + \frac{2(xy'-y)}{x^2} = 0$
$\Rightarrow \frac{y'}{x} + 2\frac{y}{x} = c_1$ (lineal de 1^{er} orden): $y' + 2y = c_1 x$;
$\mu = e^{2x} \Rightarrow d(ye^{2x}) = c_1 x e^{2x} dx \Rightarrow y e^{2x} = \frac{c_1}{2} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c_2$
$\Rightarrow y = \frac{c_1}{4}(2x-1) + c_2 e^{-2x}$ ✓

2ª Observación: La solución general de una E.D. lineal homogénea de 2º orden, puede hallarse mediante reducción de orden, cuando se ha determinado previamente una solución particular de la misma y_1; para ello se hace la transformación: $y = y_1 u$. El procedimiento se ilustra en detalle más adelante bajo el título: 9) Reducción de orden.

3ª Observación: La E.D. lineal homogénea ① puede transformarse en una E.D. de 1er orden no-lineal mediante el cambio de variable

$$y = e^{\int f(x) v \, dx}$$

donde $f(x)$ es cualquier función derivable no-nula. En particular, si $f(x) = -1$, la E.D. ① se convierte en la E.D. de Riccati ③

Ejemplo: Sea la E.D.:

$$x y'' - y' + x^3 y = 0$$

Si se escoge $f(x) = x$; el cambio de variable resulta:

$$y = e^{\int v x \, dx}$$

$$\Rightarrow y' = v x e^{\int v x dx} \quad ; \quad y'' = (v^2 x^2 + x v' + v) e^{\int v x dx}$$

Substituyendo en la E.D.:

$$\cancel{e^{\int v x dx}} (v^2 x^3 + v' x^2 + \cancel{v x} - \cancel{v x} + x^3) = 0$$

$$x^3 (v^2 + 1) + x^2 v' = 0$$

$$\therefore \quad v' + x(v^2 + 1) = 0 \qquad \text{(tipo 1)}$$

$\Rightarrow$ la elección de $f(x)$ fue acertada.

Puede comprobarse que: $y = c_1 \cos \frac{x^2}{2} + c_2 \operatorname{sen} \frac{x^2}{2}$

Variación de parámetros aplicado a la solución general de la E.D. lineal no-homogénea

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x) \quad (1)$$

cuando se ha determinado previamente una solución particular (no-trivial) de la E.D. homogénea:

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \quad (2).$$

El procedimiento permite reducir la E.D. (1) a otra equivalente de 1er orden; en efecto:

Sea y_1 una solución particular de (2); supongamos que la solución general de la E.D. (1) es de la forma:

$$y = v y_1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad y' = v y_1' + v' y_1 \;;\; y'' = v y_1'' + 2v' y_1' + v'' y_1$$

substituyendo estos resultados en (1):

$$a_0(x)(v y_1'' + 2v' y_1' + v'' y_1) + a_1(x)(v y_1' + v' y_1) + a_2(x)\,v y_1 = f(x)$$

reagrupando términos:

$$a_0(x)\,y_1 v'' + (2a_0(x)\,y_1' + a_1(x)\,y_1)\,v' + (a_0(x)\,y_1'' + a_1(x)\,y_1' + a_2(x)\,y_1)\,v = f(x)$$

pero el coeficiente del término v es nulo, de la ecuación (2); siendo y_1 por hipótesis solución de (2). Haciendo $v' = w$; $\Rightarrow v'' = w'$, la última ecuación se reduce de orden:

$$a_0(x)\,y_1\,w' + (2a_0(x)\,y_1' + a_1(x)\,y_1)\,w = f(x) \quad (4)$$

Resolviendo la E.D. (4) para w; puede hallarse v; ya que $v' = w$; y de ahí se obtiene de (3) $y = v y_1$; que es la solución general de (1). Obsérvese que al haber efectuado 2 integraciones, resultan de ello las constantes requeridas en la solución general.

Resolver la E.D. :

$$x^2y'' + xy' - 4y = x + 2 \quad (1)$$

Solución:

$y_1 = x^2$ satisface la E.D. homogénea.

haciendo $y = Vx^2$ (3)

$\Rightarrow y' = 2Vx + V'x^2$; $y'' = 2V + 4V'x + V''x^2$

substituyendo en (1)

$$x^4V'' + 5x^3V' = x + 2$$

$$V' = W \Rightarrow V'' = W'$$

$$x^4W' + 5x^3W = x + 2$$

$$\therefore \quad W = \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{c_1}{x^5} \quad ; (x \neq 0)$$

$$\frac{dV}{dx} = W$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3} + c_1\int\frac{dx}{x^5} + c_2$$

$$V = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{c_1}{4x^4} + c_2$$

de (3) : $y = Vx^2$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{2} - \frac{c_1}{4x^2} + c_2x^2$$

que es la solución general de la E.D. dada

haciendo : $-\frac{c_1}{4} = c$:

$$y = \frac{c}{x^2} + c_2x^2 - \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$$

Observación: la solución complementaria:
$y_c = \frac{c}{x^2} + c_2x^2$; pudo haberse calculado, considerando
$y_c = x^n$; y substituyendo en $x^2y'' + xy - 4y = 0$

Algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma implícita $F(x, y, y') = 0$ ①

Conviene insistir en que, de ser posible despejar y', resultan una ó varias ecuaciones diferenciales explícitas de la forma:

$$y' = f_i(x, y) \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots$$

Como se vió al enunciar el teorema III de existencia y unicidad de la solución.

De modo que integrando cada una de las ecuaciones $y' = f_i(x, y)$ pueden encontrarse las soluciones de la ecuación implícita $F(x, y, y') = 0$ ① dada.

Cabe advertir, sin embargo, que, en general, no resulta fácil despejar y' de ①, y aun cuando se haya conseguido esto, las ecuaciones $y' = f_i(x, y)$ pocas veces son fáciles de integrar; de ahí que se consideren en seguida únicamente aquellos casos particulares de la ecuación ①, en que resulta relativamente sencillo llegar a un método sistemático de solución.

A continuación se estudiarán varios tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden, las cuales no están resueltas respecto a la derivada y'; siendo de grado $n > 1$.

Tipo 12.- Ecuaciones de la forma: $F(y')=0$. ②

Si existe, por lo menos, una raíz real: $y' = k_i$ ③ de esta ecuación; por no contener ② ni la variable x ni la variable y, resulta k_i = constante.

Integrando la ecuación ③ $y' = k_i$, se obtiene:

$$y = k_i x + c$$

$$\therefore \quad k_i = \frac{y-c}{x}$$

Dado que k_i es raíz de ②,

$\Rightarrow F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ es solución de ②.

Ejemplos: integrar:

1) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 5$$

Solución:

Puesto que: $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ es solución de ②, en este ejemplo la solución es:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^7 + \left(\frac{y-c}{x}\right)^3 - \frac{y-c}{x} = 5$$

---

2) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} = 6$$

Solución:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - \frac{y-c}{x} = 6$$

ó bien: $y^2 - y(x+2c) + (c^2 + cx - 6x^2) = 0$

resolviendo como ecuación cuadrática:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x + c \\ y &= -2x + c \end{aligned}\right\}$$ Para un valor dado de c, las dos rectas siempre se cortan

Tipo 13.- Ecuaciones de la forma: $F(x, y') = 0$ (2)

Cuando resulta difícil despejar y' de (2), es conveniente substituir la ecuación (2) por dos ecuaciones equivalentes mediante la introducción de un parámetro t:

$$(3) \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

puesto que: $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'dx$; por lo cual:

$$dy = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\therefore\ y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c$$

$\Rightarrow$ La solución de (2) se expresa en forma paramétrica como sigue:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + c \end{cases}$$

En caso que resulte fácil despejar x en (2), $x = \varphi(y')$, entonces, en general, es conveniente introducir el parámetro $t = y'$ con lo cual se obtiene:

$$x = \varphi(t)$$

$$dy = y'dx = t\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\therefore\ y = \int t\,\varphi'(t)\,dt + c$$

Siendo entonces la solución de (2), en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\,\varphi'(t)\,dt + c \end{cases}$$

Ejemplos.- Integrar:

1) $a\dfrac{dy}{dx}+b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-x=0$

Solución: $t=y'$

$x=ay'+b(y')^2=at+bt^2$

$\therefore\ dx=a\,dt+2bt\,dt$

$\dfrac{dy}{dx}=t\ \Rightarrow\ dy=t\,dx=a\,t\,dt+2b\,t^2\,dt$

$\therefore\ y=\dfrac{a}{2}t^2+\dfrac{2}{3}bt^3+c$

$\Rightarrow$ la solución general es:

$$\begin{cases} x=at+bt^2 \\ y=\dfrac{a}{2}t^2+\dfrac{2}{3}bt^3+c \end{cases}$$

---

2) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3-\dfrac{dy}{dx}=x+1$

Solución: $t=y'$

$\therefore\ x=t^3-t-1$

$dy=t\,dx=t(3t^2-1)\,dt=(3t^3-t)\,dt$

$\therefore\ y=\dfrac{3}{4}t^4-\dfrac{t^2}{2}+c$

$\Rightarrow$ la solución general es:

$$\begin{cases} x=t^3-t-1 \\ y=\dfrac{3}{4}t^4-\dfrac{t^2}{2}+c \end{cases}$$

Nota: la solución general puede expresarse en la forma $y=f(x)$, eliminando el parámetro t entre las ecuaciones $x=\varphi(t)$; $y=g(t)$.

3) $$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (2)$$

Solución:

Haciendo $\frac{dy}{dx} = \tan t \quad ; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ de (2):

$$\tan t = x\sqrt{1+\tan^2 t} = x \sec t$$

$$\therefore \quad x = \operatorname{sen} t$$

$$dy = y'dx = \tan t \cos t \, dt = \operatorname{sen} t \, dt$$

$$\therefore \quad y = \int \operatorname{sen} t \, dt + c$$
$$= -\cos t + c$$

$\therefore$ la solución general es:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = -\cos t + c \end{cases}$$

ó bien:

$$x = \operatorname{sen} t$$
$$y - c = -\cos t$$

elevando al cuadrado y sumando:

$$x^2 + (y-c)^2 = 1$$

que es una familia de circunferencias, con centro: $C(0,c)$ sobre el eje de las ordenadas, y de radio unitario: $r=1$.

Tipo 14.- Ecuaciones de la forma: $F(y, y') = 0$ ②

Si no es fácil despejar y', entonces, análogamente al caso anterior, puede introducirse el parámetro t, con lo cual se sustituye la ecuación ② por las ecuaciones:

$$y = \varphi(t)$$
$$y' = \psi(t)$$

puesto que $dy = y'dx$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$$

$$\therefore x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + c$$

$\Rightarrow$ La solución general de ② puede expresarse:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

En caso que pueda despejarse y fácilmente, resulta entonces, en general, conveniente introducir el parámetro: $t = y'$, con lo cual resulta:

$$y = \varphi(y')$$

haciendo $y' = t \Rightarrow y = \varphi(t)$

pero: $dx = \dfrac{dy}{y'} = \dfrac{\varphi'(t)\,dt}{t}$

$$\therefore \begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)\,dt}{t} + c \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

Ejemplos: Integrar:

1) $$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = y$$

Solución: $t = y'$

$\therefore\ y = at^2 + bt^3$

$dy = 2at\,dt + 3bt^2 dt$

ó bien: $t\,dx = 2at\,dt + 3bt^2 dt$.

$\therefore\ dx = 2a\,dt + 3bt\,dt$

$x = 2at + \frac{3}{2}bt^2 + c$

$\Rightarrow$ La solución general es:

$$\begin{cases} x = 2at + \frac{3}{2}bt^2 + c \\ y = at^2 + bt^3 \end{cases}$$

---

2) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = y - 5$$

Solución: $t = y'$

$y = t^5 + t^3 + t + 5$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{(5t^4 + 3t^2 + 1)\,dt}{t}$$

$$dx = \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t}\right)dt$$

$$\therefore\ x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + c$$

$\Rightarrow$ La solución general es:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + c \\ y = t^5 + t^3 + t + 5 \end{cases}$$

---

3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ②

Solución: Haciendo: $y = \cos^3 t$ ③

③ en ②: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2/3} + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^3 t$

$$\therefore dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-3\cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt}{\operatorname{sen}^3 t} = -3\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}dt =$$

$$= 3\operatorname{ctg}^2 t\, dt = 3(1-\csc^2 t)\,dt = 3\left(1-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\right)dt$$

$$\therefore x = \int\left(3-\frac{3}{\operatorname{sen}^2 t}\right)dt = 3t + 3\operatorname{ctg} t + c$$

$\Rightarrow$ La solución general de ② es:

$$\begin{cases} x = 3t + 3\operatorname{ctg} t + c \\ y = \cos^3 t \end{cases}$$

4) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y$ ②

Solución: Haciendo: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{senh} t$ ③

③ en ②: $y = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t} = \cosh t$

$$\therefore dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\operatorname{senh} t\, dt}{\operatorname{senh} t} = dt$$

$$\Rightarrow x = t + c$$

$\Rightarrow$ La solución general es:

$$\begin{cases} x = t + c \\ y = \cosh t \end{cases}$$

ó bien, eliminando el parámetro t:

puesto que: $t = x - c$

$$\Rightarrow y = \cosh(x-c)$$

En seguida el caso general de la ecuación
$$F(x, y, y') = 0 \quad ①:$$

Puesto que $F(x, y, y')$ depende de las variables x, y, y'; podemos introducir los parámetros u, v tales que:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \\ y' &= \theta(u,v) \end{aligned}\right\} ②$$

Dado que: $y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y'dx$; de ② resulta:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \theta(u,v)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv\right)$$

despejando $\frac{dv}{du}$:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\theta(u,v)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} - \theta(u,v)\frac{\partial \varphi}{\partial v}} \quad ③$$

Teóricamente; siendo la ecuación ③ de la forma explícita $v' = f(u,v)$, puede integrarse empleando los procedimientos estudiados anteriormente; sin embargo, en general, la integración de la ecuación ③ no es factible.

A continuación algunos casos especiales más de la ecuación ① en los cuales sí es posible obtener una solución general.

Tipo 15.- Ecuaciones de la forma:

a) $y = \psi(x, y')$

ó: b) $x = \varphi(y, y')$

a) Considerando á x y $y' = p$ como parámetros:

$$y = \psi(x, y') = \psi(x, p) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial p} dp$$

ó bien: $p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial p} \dfrac{dp}{dx} \quad (3)$

Si es posible integrar (3), se obtiene:

$\phi(x, p, c) = 0 \quad (4)$

Las ecuaciones (2) y (4) constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas en las variables x y y (donde p es un parámetro), las cuales definen la familia de curvas integrales, solución de a).

b) De modo análogo, si puede despejarse x de $F(x, y, y') = 0$: $x = \varphi(y, y')$, entonces pueden considerarse los parámetros y y $y' = p \Rightarrow x = \varphi(y, p)$ (5)

Puesto que: $dy = y' dx$:

$$dy = p\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp\right]$$

ó bien: $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p} \dfrac{dp}{dy} \quad (6)$

integrando (6) resulta $\phi(y, p, c) = 0 \quad (7)$

Considerando simultáneas (5) y (7), siendo $p = y'$ un parámetro, pueden determinarse x y y; solución paramétrica de b)

Ejemplos:- Obtener las integrales, general y singular de las ecuaciones:

1) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} = y. \quad (2) \qquad \text{tipo 15 a)}$$

Solución: Haciendo $y' = p$ en (2):

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2} \quad (3)$$

Derivando (3) con respecto á x; siendo $p = p(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = p = 2p\frac{dp}{dx} - \frac{d}{dx}(xp) + x$$

$$\therefore \; p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x$$

$$\frac{dp}{dx}(2p - x) = 2p - x$$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dx} = 1$; (al dividir entre $2p-x$ se introduce la solucion singular $2p - x = 0$, ó sea $y = \frac{x^2}{4}$)

integrando:

$$p = x + c \quad (4)$$

(4) en (3):

$$y = (x+c)^2 - x(x+c) + \frac{x^2}{2}$$

ó: $$y = \frac{x^2}{2} + cx + c^2 \quad (5) \; \text{(solución general de (2))}$$

Para obtener la solución singular, se elimina la constante c, derivando (5) con respecto á c resultando:

$$y = \frac{x^2}{4} \quad (6) \quad \text{que satisface (2)}$$

$\Rightarrow$ (6) es solución singular de (2), que corresponde a la solución de $2p - x = 0$, que se señaló anteriormente.

2) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 2x$ ② tipo 15 b)

Solución: Haciendo $y' = p$ en ②

$x = \frac{1}{2}(p^2 + 2y)$ ③

Derivando ③ con respecto á y; siendo $p = p(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = p\frac{dp}{dy} + 1$$

$$\therefore \quad \frac{p^2}{p-1}dp + dy = 0$$

ó bien:

$$\left(p + 1 + \frac{1}{p-1}\right)dp + dy = 0$$

integrando:

$$\frac{1}{2}p^2 + p + \ln|p-1| + y = c \quad ④$$

de ④ y ③:

$$\begin{cases} x = -p - \ln|p-1| + c \\ y = -\frac{1}{2}p^2 - p - \ln|p-1| + c \end{cases}$$

Al dividir entre $p-1$, se introduce la solución singular $p-1=0$; ó sea $y=x$; la cual <u>no</u> satisface la ecuación diferencial ② $\Rightarrow$ <u>no</u> es solución singular.

Tipo 16.- Ecuación de Lagrange:

Forma general:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (1)$$

La ecuación de Lagrange, lineal en x y y, se reduce a lineal con respecto á x (tipo 9).

En efecto, derivando (1) con respecto á x; haciendo $y' = p$ resulta:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore \quad [p - \varphi(p)]\frac{dx}{dp} = x\varphi'(p) + \psi'(p)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (2) \quad (\text{tipo } 9)$$

Debe observarse que, a la solución de (2), deben agregarse las soluciones singulares que se obtengan de la ecuación $p - \varphi(p) = 0$, si ésta tiene raices reales $p = p_i$; ó sean:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \quad ; \quad p = p_i$$

que representa una familia de rectas.

Ejemplos:- Hallar las soluciones general y singular de las ecuaciones:

1) $y = 2xy' + \frac{1}{y'}$ ①

Solución:

Haciendo: $y' = p$ en ①:

$y = 2px + \frac{1}{p}$ ②

derivando ② con respecto á x; teniendo en cuenta que $dy = p\,dx$:

$$2p\,dx + 2x\,dp - \frac{dp}{p^2} = p\,dx$$

$\therefore$ $\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = \frac{1}{p^3}$ ③ (tipo 9)

Resolviendo ③:

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + c)$$ ④

$\therefore$ La solución general de ① es, en forma paramétrica, de ④ y ②:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p^2}(\ln|p| + c) \\ y = 2px + \frac{1}{p} \end{cases}$$

La solución singular se obtiene de la ecuación $0 = 2x - \frac{1}{p^2}$ (que resulta de derivar ② con respecto á p) y de la ecuación ②. Al eliminar p resulta $y = \pm 2\sqrt{2x}$; pero esta función no satisface ① $\Rightarrow$ no existe solución singular de ①. De: $p = \varphi(p) = 2p \Rightarrow p = 0 \Rightarrow$ no es admisible.

2) $y = 2xy' - (y')^3$ ①

Solución:

Haciendo: $y' = p$ en ①:

$y = 2xp - p^3$ ②

derivando ② con respecto á x; teniendo en cuenta que $dy = p\,dx$:

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} - 3p^2\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 3p^2 \quad ③ \quad (\text{tipo } 9)$$

Resolviendo ③:

$$x = \frac{c}{p^2} + \frac{3}{4}p^2 \quad ④$$

$\therefore$ la solución general de ① es, de ② y ④:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{p^2} + \dfrac{3}{4}p^2 \\ y = 2xp - p^3 \end{cases}$$

Solución singular: $\varphi(p) = 2p$

$\Rightarrow p - \varphi(p) = 0 \Rightarrow p = 0 \therefore$ de ② $y = 0$

Puesto que $y = 0$ satisface ① $\Rightarrow$ la solución singular de ① es. $y = 0$

 197

Tipo 17: Ecuación de Clairaut.

Forma general:

$$y = xy' + \psi(y') \qquad (1)$$

Por lo cual se ve que la ecuación de Clairaut es un caso particular de la ecuación de Lagrange en el cual $\varphi(y') = y'$

El método para resolver la ecuación de Clairaut es el mismo que el indicado para resolver la ecuación de Lagrange:

Haciendo $y' = p$ en (1):

$$y = xp + \psi(p) \qquad (2)$$

Derivando con respecto á x:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ó sea:

$$\left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a) & \dfrac{dp}{dx} = 0 \\ ó \; b) & x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$$

Caso a) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$

Substituyendo en (2):

$$y = cx + \psi(c) \qquad (3)$$

La solución (3) representa una familia de rectas de un solo parámetro.

Caso b) $x + \psi'(p) = 0 \qquad (4)$

La solución de (4) puede obtenerse eliminando el parámetro p entre las ecuaciones (2) y (4).

Demostraremos en seguida que la solución del sistema ⑤ $\begin{cases} x + \varphi'(p) = 0 \\ y = xp + \varphi(p) \end{cases}$

es precisamente la envolvente de la familia de rectas representada por la solución ③.

En efecto, se sabe que la envolvente de la familia $\phi(x,y,c) = 0$, se obtiene eliminando el parámetro c entre las ecuaciones: $\phi(x,y,c)=0$, y $\frac{\partial\phi}{\partial c} = 0$.

Para el caso particular de la familia de rectas: $y = cx + \varphi(c)$ resulta $\frac{\partial\phi}{\partial c} = 0 = x + \varphi'(c)$.

Observando que estas dos últimas ecuaciones son precisamente el sistema ⑤ con $p=c$, se concluye: el caso a) representa la solución general de ①; en tanto que en el caso b) nos da la solución singular de ①.

Observación: Puesto que el sistema $\phi(x,y,c) = 0$, $\frac{\partial\phi}{\partial c} = 0$ ⑥, además de envolventes, puede definir lugares geométricos de puntos múltiples e inclusive algunas otras curvas, para completar el estudio, es necesario ver si, al menos una de las derivadas $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ó $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ es diferente de cero, estando ambas acotadas en los puntos que verifican el sistema ⑥; en cuyo caso el sistema ⑥ definirá únicamente la envolvente. Para el sistema ⑤ se ve que se cumplen las condiciones, puesto que $\frac{\partial\phi}{\partial x} = -c$; $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 1$, $\Rightarrow$ las ecuaciones ⑤ determinan una envolvente, la cual puede degenerar en un punto, ya que la solución general ③ es un haz de rectas.

Ejemplos: Determinar las soluciones general y singular de las ecuaciones:

1) $$y = xy' - (y')^2 \quad ①$$

Solución:

La solución general es:

$$y = cx - c^2$$

La solución singular se obtiene eliminando c entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = cx - c^2 \\ 0 = x - 2c \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$ es la solución singular.

---

2) $$y = xy' + \frac{a}{2y'} \quad ①$$

Solución:

$y = cx + \dfrac{a}{2c}$ solución general

Eliminando c entre las ecuaciones

$$y = cx + \frac{a}{2c}$$

$$0 = x - \frac{a}{2c^2}$$

se obtiene la solución singular:

$$y^2 = 2ax$$

---

3) $(x^2-1)(y')^2-2xy(y')+y^2=1$ ①

Solución:

Escribiendo ① en la forma siguiente:

$$x^2p^2-2xyp+y^2-p^2=1$$

$$\therefore\quad (xp-y)^2-p^2=1$$

$$xp-y=\pm\sqrt{1+p^2}$$

$$\therefore\quad y=xp\pm\sqrt{1+p^2} \qquad (\text{tipo } 17)$$

⇒ La solución general de ① es:

$$② \begin{cases} y=c_1x+\sqrt{1+c_1^2} \\ y=c_2x-\sqrt{1+c_2^2} \end{cases}$$

que representa dos familias de rectas.

Obsérvese que una vez que se ha determinado que la ecuación ① es del tipo 17, puede escribirse de inmediato la solución general del siguiente modo, de ①:

$$(x^2-1)c^2-2xyc+y^2=1 \quad ③$$

Al resolver como cuadrática en c á la ecuación ③, se obtienen las soluciones ②.

Eliminando c entre las ecuaciones:

$$(x^2-1)c^2-2xyc+y^2=1 \quad ③$$

$$\frac{\partial\phi(x,y,c)}{\partial c}=0=2c(x^2-1)-2xy \quad ④$$

se obtiene la solución singular:

$$x^2+y^2=1$$

Tipo 18 – Ecuación de primer orden, donde y' es de grado $n>1$, en la que es posible despejar y':

De acuerdo con el álgebra, es posible factorizar este tipo de ecuación del siguiente modo:

$$[y'-f_1(x,y)][y'-f_2(x,y)]\cdots[y'-f_n(x,y)]=0 \quad (1)$$

La solución de (1) se obtiene igualando cada factor lineal á cero, y resolviendo las ecuaciones de primer orden que resultan, empleando los métodos estudiados anteriormente; obteniéndose n soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,c)=0 \\ F_2(x,y,c)=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_n(x,y,c)=0 \end{array}\right\} (2)$$

También puede considerarse como solución general de (1) al producto de funciones:

$$\prod_{i=1}^{n} F_i(x,y,c)=0 \quad (3)$$

dado que contiene todas las curvas definidas en (2), y sólo éstas.

Puede considerarse que el tipo 12: $F(y')=0$ es un caso particular del tipo 18.

Ejemplos: Integrar:

1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} = 6 \quad ①$

Solución: Haciendo, por comodidad: $y' = p$

en ① $\quad p^2 - p - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad (p-3)(p+2) = 0$

$\therefore \quad \begin{aligned} p-3 &= 0 \\ p+2 &= 0 \end{aligned}$

integrando: $\left.\begin{aligned} y &= 3x + c \\ y &= -2x + c \end{aligned}\right\}$ solución general.

ó bien: $(3x - y + c)(2x + y - c) = 0$

Obsérvese que esta solución concuerda con la que se obtuvo en el ejemplo 2) del tipo 12: $F(y') = 0$

---

2) $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (x - 2x^2 - y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (2x^2 + y - 2xy)\frac{dy}{dx} = -2xy$

Solución: $y' = p$

$xp^3 + (x - 2x^2 - y)p^2 - (2x^2 + y - 2xy)p + 2xy = 0$

puede comprobarse que la ecuación se puede factorizar del siguiente modo:

$(p+1)(xp - y)(p - 2x) = 0$

integrando cada factor igualado a cero:

$\left.\begin{aligned} y &= -x + c \\ y &= cx \\ y &= x^2 + c \end{aligned}\right\}$ solución general

ó bien:

$(x + y - c)(y - cx)(x^2 - y + c) = 0$

Ecuaciones diferenciales de orden $n > 1$

Forma general implícita:

$$F(x, y, y', y'', y''', y^{iv}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad ①$$

En caso de que sea posible despejar $y^{(n)}$ se obtiene la forma explícita:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \quad ②$$

Teorema IX.- Existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial ②.

La solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación ② existe y es única, si la función $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, del segundo miembro de ②, cumple las siguientes condiciones

i) es continua respecto a todas las variables: $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, en una región D en que varían éstas.

ii) tiene derivadas parciales continuas f_y, $f_{y'}$, $f_{y''}, \ldots, f_{y^{(n-1)}}$ en la región D.

Si se cumplen simultáneamente las dos condiciones anteriores, entonces existe y es única la solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación ② que verifique las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ &\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad ③$$

donde los valores $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ están dentro de la región D

204

Interpretación geométrica del teorema de existencia y unicidad (teorema IX) para las ecuaciones diferenciales de segundo orden: $y'' = f(x, y, y')$

Las condiciones iniciales son:
$y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$; donde x_0, y_0, y'_0 son valores dados.

La interpretación geométrica puede ser la siguiente:

Por cualquier punto (x_0, y_0) del plano xy, pasa una sola curva integral que tiene una pendiente y'_0 dada; esto es, puesto que la solución general de la ecuación $y'' = f(x, y, y')$ depende de dos parámetros, por ejemplo y_0 y y'_0; si fijamos los valores de y_0 y y'_0, o sea, definimos el punto (x_0, y_0) y la dirección de la tangente a la curva integral buscada en dicho punto, entonces, si se cumplen las condiciones i) y ii) del teorema IX, se determina una sola curva integral.

Como ejemplo, tomemos la ecuación diferencial del movimiento rectilíneo de un punto material de masa m, el cual está sujeto a la acción de la fuerza $f(t, x, \dot{x})$:

$$m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \, ;$$

siendo $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo t respectivamente.

Las condiciones iniciales: posición inicial $x(t_0) = x_0$, y la velocidad inicial $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ determinan una solución única $x = x(t)$; esto es, una ley única de movimiento, siempre y cuando la función f satisfaga las condiciones i) y ii) del teorema IX.

En general las ecuaciones del tipo $y''=f(x,y,y')$ se resuelven transformándolas en una ecuación diferencial exacta de la forma:

$$\frac{d}{dx}u(x,y,y')=0$$

cuya solucion es: $u(x,y,y')=c_1$; la cual, siendo de primer orden, puede resolverse por alguno de los métodos estudiados anteriormente; obteniéndose: $y=F(x,c_1,c_2)$; donde c_1 y c_2 son constantes independientes. $(c_1 \neq \phi(c_2))$

Cuando la ecuación diferencial es de orden $n>1$ es factible en algunos casos, como los que se estudiarán a continuación, reducir el orden de la ecuación diferencial.

a) Reducción de orden: $y^{(n)} = f(x)$ ①

La solución general de ① se obtiene integrando n veces:

$$y = \underbrace{\iiint \cdots \int}_{n} f(x)\, \underbrace{dx\,dx \ldots dx}_{n} + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$$

Ejemplos.- Integrar:

1) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$ ①

Solución:

Multiplicando ① por dx é integrando.

$$\int \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x + c_1 \qquad (\text{tipo } 1)$$

Separando variables

$$dy = \ln x\,dx + c_1\,dx$$

integrando $\ln x\,dx$ por partes:

$\ln x = u$; $du = \frac{dx}{x}$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$y = x \ln x - x + c_1 x + c_2$$

$$y = x(\ln x - 1 + c_1) + c_2$$

haciendo $c_3 = -1 + c_1$

$$y = x(\ln x + c_3) + c_2$$

---

2) $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\ln x}{x^2}$ ①

Cuando: $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$; $y''(1) = 2$ ②

Solución:

Integrando ① tres veces sucesivas, resulta:

$$y'' = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c_1$$

$$y' = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + c_1 x + c_2$$

$$y = -\frac{x}{2}(\ln x)^2 + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \qquad (3)$$

Substituyendo las condiciones iniciales (2) en (3), se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{c_1}{2} + c_2 + c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad (4)$$

$$-1 + c_1 = 2$$

$$\therefore \; c_1 = 3 \;;\; c_2 = -2 \;;\; c_3 = \frac{1}{2}$$

Substituyendo estos valores en la tercera ecuación (3) se obtiene la solución general de (1) buscada:

$$y = -\frac{x}{2}(\ln x)^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

Observación importante: Puede evitarse el tener que resolver el sistema simultáneo de ecuaciones (4) para obtener el valor de las constantes c_1, c_2, c_3 si se resuelven individualmente las ecuaciones (3) substituyendo en cada una de (3) la condición inicial (2) correspondiente, como se hará en seguida, lo cual simplifica asimismo el sistema (3):

$$y'' = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c_1$$

de (2): $y''(1) = 2 \Rightarrow$

$$2 = -\frac{0}{1} - \frac{1}{1} + C_1 \Rightarrow C_1 = 3$$

$$\therefore \quad y' = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + 3x + C_2$$

de ②: $y'(1) = 1 \Rightarrow$

$$1 = -\frac{1}{2}0 - 0 + 3 + C_2 \Rightarrow C_2 = -2$$

$$\therefore \quad y = -\frac{x}{2}(\ln x)^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C_3$$

de ②: $y(1) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{1}{2}0 + \frac{3}{2} - 2 + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{x}{2}(\ln x)^2 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \quad ✓$$

La ventaja de este último procedimiento sugerido, se hace aun más patente, cuando se estudie el tipo de reducción c) más adelante, cuando se expondrá un ejemplo en el cual, si no se sigue el procedimiento sugerido, la integración de la ecuación resulta imposible.

b) <u>Reducción de orden: La ecuación no contiene la función y buscada, ni sus derivadas hasta el orden k-1 inclusive.</u>

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad ①$$

Mediante el cambio de variable: $y^{(k)}(x) = p(x)$ el orden de la ecuación se reduce a $n-k$; después de lo cual la ecuación ① toma la forma:

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0 \quad ②$$

De ② se obtiene: $p = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})$ ③

Integrando k veces $y^{(k)} = f(x, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k})$ se halla la solución general y.

Si la ecuación ① es de segundo orden $(n=2)$, entonces la substitución $y' = p$ conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplos.- Integrar:

1) $$\frac{d^3y}{dx^3} = \sqrt{1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \quad ①$$

Solución: La ecuación ① no contiene y ni y'; por lo cual hacemos: $\frac{d^2y}{dx^2} = p$ en ①:

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{1+p^2} \qquad (\text{tipo } 1)$$

Separando variables e integrando:

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{x+c_1} - e^{-(x+c_1)}\right)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(e^{x+c_1} - e^{-(x+c_1)}\right)$$

integrando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{x+c_1} + e^{-(x+c_1)}\right) + c_2$$

integrando nuevamente:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x+c_1} - e^{-(x+c_1)}\right) + c_2 x + c_3$$

empleando funciones hiperbólicas:

$$y = \operatorname{senh}(x+c_1) + c_2 x + c_3$$

---

2) $$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{1}{x}\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \quad (1)$$

Solución: La ecuación (1) no contiene y, y', y'', y'''; por lo cual hacemos $y^{IV} = p$ en (1):

$$\therefore \quad \frac{dp}{dx} - \frac{p}{x} = 0 \qquad (\text{tipo } 1)$$

Separando variables e integrando:

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln c_1$$

ó bien: $p = c_1' x \Rightarrow y^{IV} = c_1' x$

integrando sucesivamente:

$$y''' = c_1' \frac{x^2}{2} + c_2'$$

$$y'' = c_1' \frac{x^3}{6} + c_2' x + c_3'$$

$$y' = c_1' \frac{x^4}{24} + c_2' \frac{x^2}{2} + c_3' x + c_4'$$

$$y = c_1' \frac{x^5}{120} + c_2' \frac{x^3}{6} + c_3' \frac{x^2}{2} + c_4' x + c_5$$

o bien: $y = c_1 x^5 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$

donde:

$$c_1 = \frac{c_1'}{120}\;; \quad c_2 = \frac{c_2'}{6}\;; \quad c_3 = \frac{c_3'}{2}$$

---

c) Reducción de orden: La ecuación no contiene la variable independiente x:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

El orden de la ecuación (1) se reduce en una unidad mediante la substitución $y' = p$; considerándose p como función desconocida de y: $p = p(y)$; por lo cual, todas las derivadas $y', y'', \dots, y^{(n)}$ deben expresarse en función de las derivadas de la nueva incognita p, con respecto á y; esto es:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = p \\ y'' &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \\ y''' &= \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 \\ &\dots, \text{etc.} \end{aligned}\right\} (2)$$

Observando que las derivadas que aparecen en los segundos miembros son de un orden menor que las derivadas del primer miembro; esto es la derivada $y^{(k)}$ se expresa mediante las derivadas de p respecto á y de orden no superior a $k-1$; por lo cual, al substituir las expresiones (2) en (1) se obtiene una ecuación diferencial de orden $n-1$.

En particular, si una ecuación de segundo orden no contiene a la variable independiente, entonces este procedimiento conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplos.- Integrar:

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2}{e^y} \quad (1)$$

Solución: Puesto que la ecuación (1) no contiene la variable independiente x, hacemos:

$$\left.\begin{aligned} y' &= p \\ \therefore\ y'' &= p\,\frac{dp}{dy} \end{aligned}\right\} (2)$$

substituyendo (2) en (1)

$$p\,\frac{dp}{dy} + p^2 = \frac{2}{e^y} \quad ; \text{(tipo 10: Bernoulli)}$$

ó bien: $$\frac{dp}{dy} + p = \frac{2}{e^y p} \quad (3)$$

resolviendo la ecuación homogénea $\frac{dp}{dy} + p = 0 \Rightarrow$ $p_1 = e^{-y}$. Haciendo ahora $p = e^{-y}z$ (4) $\Rightarrow$

$$\frac{dp}{dy} = e^{-y}\frac{dz}{dy} + z(-e^{-y}) \quad (5)$$

(4) y (5) en (3): $$e^{-y}\frac{dz}{dy} + e^{-y}z = \frac{2}{\cancel{e^y}\cancel{e^{-y}}z}$$

$$\therefore \frac{dz}{dy} = 2\,\frac{e^y}{z} \quad \text{(tipo 1)}$$

$$z\,dz = 2e^y dy \Rightarrow \frac{z^2}{2} = 2e^y + c \quad (6)$$

pero, de (4) $z = pe^y$

substituyendo en (6)

$$p^2 e^{2y} = 4e^y + c_1 \quad ; \quad (c_1 = 2c)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + c_1 e^{-2y}} \quad \text{(tipo 1)}$$

Separando variables e integrando:

$$x + c_2 = \pm\,\frac{1}{2}\sqrt{4e^y - c_1} \quad ; \text{ ó bien:}$$

$\therefore \quad e^y + c_3 = (x + c_2)^2 \quad ; \left(\text{donde } c_3 = \frac{c_1}{4}\right)$

---

2) $\quad y \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \quad ①$

Solucion: puesto que no aparece la variable independiente x, hacemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= p\frac{dp}{dy} \end{aligned}\right\} ②$$

substituyendo ② en ①

$$y\,p\frac{dp}{dy} = p^2 \quad ③ \quad (\text{tipo } 1)$$

separando las variables é integrando:

$\ln|p| = \ln|y| + \ln c_1 \quad ; \quad (c_1 > 0)$

ó bien: $p = c_1 y$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = c_1 y \qquad (\text{tipo } 1)$

$\Rightarrow \quad \ln|y| = c_1 x + \ln c_2 \quad ; \quad (c_2 > 0)$

ó bien:

$$y = c_2 e^{c_1 x} \quad ④ \; ; \; (c_2 \neq 0)$$

Obsérvese que al dividir ③ entre $p \Rightarrow p \neq 0$, con lo cual se pierde la solución $p = 0 \Rightarrow y = c$; la cual puede recuperarse si se permite que $c_1 = 0$,

Nótese que $y = c$ sí satisface ①; por lo tanto debe quedar $y = c$ incluida en la solución general ④ de ①

Observación: Cuando se dan condiciones iniciales en la resolución de una ecuación de orden superior (problema de Cauchy), conviene hallar los valores de las constantes c_i a medida que estas van apareciendo en el proceso de resolución, y no esperar a tener la solución general, que involucra a todas las constantes; ya que el procedimiento sugerido permite llegar a la solución más rápidamente; pudiendo asimismo ocurrir simplificaciones importantes en el proceso de integración, dado que las constantes c_i adquieren valores numéricos fijos.

Cuando las constantes c_i son valores arbitrarios, la integración es más complicada e inclusive, en ocasiones, de no seguirse el procedimiento aquí sugerido, puede resultar imposible expresar la solución en forma de una combinación finita de funciones elementales, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

3) $y'' = 2y^3$ ①; $y(0)=1$; $y'(0)=1$ ②

Solución: Haciendo $y'=p \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$. substituyendo en ①: $p\,dp = 2y^3 dy \therefore p^2 = y^4 + c_1$; ó bien $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + c_1}$ (tipo 1); separando las variables é integrando: $x + c_2 = \int (y^4 + c_1)^{-\frac{1}{2}} dy$.

La integral de la diferencial binomia no se conoce, puesto que, en este caso: $m=0$; $n=4$; $p=-\frac{1}{2}$.

Sin embargo, substituyendo oportunamente las condiciones iniciales ②, resulta $c_1 = 0, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2$ $\therefore$ de la segunda condición inicial se obtiene que la solución buscada es: $y = \frac{1}{1-x}$

12

d) Reducción de orden: El primer miembro de $F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ ① es la derivada de una expresión diferencial de orden $n-1$: $\phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ ②.

La ecuación ① puede escribirse, en virtud de ②:

$$\frac{d}{dx}\phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=0 \quad ③$$

Con lo cual queda reducido el orden en una unidad.

Suponiendo que la solución de ③ es $y=y(x)$, entonces $\frac{d}{dx}\phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})\equiv 0$, por lo cual: $\phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=c$, que es la primera integral, de la cual, mediante integraciones puede obtenerse la solución general de ①

En ocasiones, el primer miembro de ①, puede transformarse en derivada de la expresión diferencial ②, al multiplicarlo por un factor $\mu(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$; ó sea:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\mu(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=\frac{d}{dx}\phi(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})=0$$

Debe observarse que al multiplicar por μ puede ocurrir que se introduzcan soluciones superfluas; por otra parte, si μ tiene discontinuidades puede resultar que se pierdan soluciones.

Ejemplos.- Integrar:

1) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$ ①

Solución: La ecuación ① puede escribirse:

$d(yy')=0, \Rightarrow yy'=c_1$ ó bien: $y\,dy=c_1\,dx$

$\therefore$ La solución general de ① es:

$y^2=c_1x+c_2$

Obsérvese que está ecuación puede integrarse mediante la reducción de orden c) ya que en ① no aparece la variable independiente x.

---

2) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$ ①

Solución: Multiplicando ① por $\mu=\frac{1}{y^2}$:

$\dfrac{yy''-(y')^2}{y^2}=0$

$\therefore \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{y}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=c_1$ ②

obsérvese que al multiplicar ① por $\frac{1}{y^2}$ se pierde la solución $y=0$; sin embargo, esta solución se recupera más adelante al efectuarse la segunda integración: de ②:

$\dfrac{d}{dx}\ln|y|=c_1 \Rightarrow \ln|y|=c_1x+\ln c_2$; $(c_2>0)$

$\therefore \quad y=c_2e^{c_1x}$

resultado que checa con el obtenido en el ejemplo 2) del caso de reducción c) visto anteriormente.

Para recuperar la solución $y=0$, que verifica ①, es necesario que c_2 pueda tomar el valor $c_2=0$.

---

e) <u>Reducción de orden: La ecuación diferencial: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ ① es homogénea respecto a las variables: $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$</u>.

En este caso se tendrá:

$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$; con lo cual puede reducirse en uno el orden, mediante la substitución:

$$y = e^{\int z\,dx} \quad ②$$

donde $z = z(x)$ es una función desconocida.

Demostración:

$$y = e^{\int z\,dx}$$
$$y' = e^{\int z\,dx}\, z$$
$$y'' = e^{\int z\,dx}(z^2 + z')$$
$$y''' = e^{\int z\,dx}(z^3 + 3zz' + z'')$$

- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^{(k)} = e^{\int z\,dx}\,\phi(z, z', z'', \ldots, z^{(k-1)})$$

lo cual puede demostrarse por inducción.

Substituyendo en ①; teniendo en cuenta que, en virtud de la homogeneidad puede factorizarse $e^{m\int z\,dx}$, resulta:

$$e^{m\int z\,dx} f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

puesto que $e^{m\int z\,dx} \neq 0 \Rightarrow$

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0 \quad ③$$

Una vez que se determine $z = z(x)$, se substituye su valor en ② para definir la solución general de la ecuación diferencial ① dada.

Ejemplos: Integrar:

1) $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$ ①

Solución: La ecuación ① es homogénea de grado 2 en y, y', y''; haciendo: $y = e^{\int z\,dx}$ ②

$\Rightarrow y' = e^{\int z\,dx} z$; $y'' = e^{\int z\,dx}(z^2 + z')$.

substituyendo en ①

$$\cancel{e}^{2\int z\,dx}(\cancel{z}^2 + z' - \cancel{z}^2) = 6x\,\cancel{e}^{2\int z\,dx}$$

$$\therefore \quad z' = 6x \Rightarrow z = 3x^2 + c_1$$

substituyendo en ②:

$$y = e^{\int(3x^2 + c_1)\,dx}$$

$$\Rightarrow y = c_2\, e^{(x^3 + c_1 x)}$$

---

2) $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ ①

Solución: La ecuación ① es homogénea de grado 2 respecto á y, y', y''; haciendo $y = e^{\int z\,dx}$ ②

$\Rightarrow y' = e^{\int z\,dx} z$; $y'' = e^{\int z\,dx}(z^2 + z')$

substituyendo en ①:

$$x^2(z^2 + z')e^{2\int z\,dx} = (e^{\int z\,dx} - xze^{\int z\,dx})^2$$

cancelando $e^{2\int z\,dx}$:

$$x^2(z^2 + z') = (1 - xz)^2$$

$$\therefore \quad z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \quad ③ \text{ (tipo 9, lineal)}$$

10

escribiendo la ecuación ③ en la forma:

$$x^2 z' + 2xz = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 z) = 1 \quad \Rightarrow x^2 z = x + c_1$$

$$\therefore \quad z = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}$$

Calculando: $\int z\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}\right) dx = \ln|x| - \frac{c_1}{x} + \ln c_2$

substituyendo en ②:

$$y = e^{\left(\ln|x| - \frac{c_1}{x} + \ln c_2\right)}$$

ó bien:

$$y = c_2\, x\, e^{-\frac{c_1}{x}}$$

solución singular: $y \equiv 0$.

f) Reducción de orden: Si al escribir la ecuación diferencial en la forma:

$$F(x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, \ldots, d^ny) = 0,$$

resulta F homogénea respecto a los argumentos $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$; donde se considera que x, dx son de primer grado; en tanto que $y, dy, d^2y, \ldots$ son de grado m, entonces resultan los grados de las derivadas, como sigue:

$\frac{dy}{dx}$ de grado $m-1$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ de grado $m-2$, etc.

Entonces la substitución:

$$x = e^t \; ; \; y = u e^{mt}$$

reduce el orden de la ecuación diferencial, obteniéndose una ecuación diferencial en u, t que no contiene á t explícitamente, con lo cual la reducción de orden es de una unidad.

Ejemplos- Integrar:

1) $x^3 y'' = (y - xy')^2$ ①

Solución: Suponiendo:

x de grado 1

y de grado m

y' de grado $m-1$

y'' de grado $m-2$

igualando grados en ambos miembros de ① se obtiene la ecuación:

$3 + (m-2) = 2m$ ②

$\Rightarrow m = 1$

9

221

Nótese que la resolubilidad de ② garantiza que funcione la substitución propuesta:

$$x = e^{t} \quad ; \quad y = u e^{t} \qquad ③$$

Cálculo de las derivadas y', y'' en función de las nuevas variables u,t:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{du}{dt}+u\right)e^{t}}{e^{t}} = \frac{du}{dt} + u \qquad ④$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\left(\frac{du}{dt}+u\right) = \frac{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}}{e^{t}} \qquad ⑤$$

substituyendo en ①, haciendo $\frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u}$; $\frac{du}{dt} = \dot{u}$:

$$e^{3t}e^{-t}(\ddot{u}+\dot{u}) = \left(ue^{t} - e^{t}(\dot{u}+u)\right)^2$$

$$\cancel{e}^{2t}(\ddot{u}+\dot{u}) = u^2\cancel{e}^{2t} - 2u(\dot{u}+u)\cancel{e}^{2t} + \cancel{e}^{2t}(\dot{u}+u)^2$$

$$\ddot{u}+\dot{u} = \cancel{u}^2 - 2\cancel{u\dot{u}} - 2\cancel{u}^2 + \dot{u}^2 + 2\cancel{\dot{u}u} + \cancel{u}^2$$

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \quad \text{(reducción c))}$$

Haciendo: $\dot{u} = p \Rightarrow \ddot{u} = p\frac{dp}{du}$

$$\therefore \quad p\frac{dp}{du} + p = p^2 \qquad ⑥$$

ó bien: $\frac{dp}{du} + 1 = p$. ⑦ (tipo 1)

con lo cual, por haberse dividido entre p se pierde la solución $p=0 \Rightarrow u = c \Rightarrow y = cx$; que, por verificar ① es solución singular de ①.

integrando ⑦:

$$p = 1 + c_1 e^u$$

ó bién: $\dfrac{du}{dt} = 1 + c_1 e^u$ ⑧ (tipo i)

la solución general de ⑧ es:

$$u = \ln \frac{e^t}{c_1 e^t + c_2} \quad (9)$$

de ③ en ⑨:

$$y = x \ln \frac{x}{c_1 x + c_2} \quad (10)$$

Nótese que la solución singular $y = cx$ puede obtenerse de la solución general ⑩, haciendo:

$$c_1 = e^{-c} \;;\; c_2 = 0$$

---

2) $x y y'' + x(y')^2 = y y'$ ①

Solución: Suponiendo:

x de grado 1

y de grado m

y' de grado $m-1$

y'' de grado $m-2$

vemos que ambos miembros de ① son de grado $2m-1$; ó sea: $2m-1 = 2m-1$; ecuación que se verifica para todo valor de m; por lo cual, haciendo $m=0$, nos resulta la siguiente substitución

$$x = e^t \;;\; y = y \quad (2)$$

8

Cálculo de las derivadas y', y'' en función de la nueva variable t:

$$x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt.$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = e^t \frac{dt}{dy}. \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-t}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - e^{-t}\frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= e^{-t}\left[\frac{\frac{d}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\left(\frac{dy}{dt}\right) - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = e^{-2t}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\right] =$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \quad (4)$$

(2), (3), (4) en (1):

$$y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2y\frac{dy}{dt} \quad (5) \quad (\text{reducción } c))$$

Observando que (5) puede escribirse:

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(y^2)$$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dt} = y^2 + c_1 \quad ; \ (\text{tipo } 1)$$

Separando las variables é integrando:

$$y^2 + c_1 = c_2 e^{2t}$$

puesto que $x = e^t \Rightarrow e^{2t} = x^2$

$\therefore$ La solución general de (1) es:

$$y^2 + c_1 = c_2 x^2$$

g) <u>Reducción de orden</u>.- Sea la ecuación diferencial <u>lineal</u> de segundo orden <u>homogénea</u>:

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0 \quad ①$$

Se afirma lo siguiente:

i) Si la función f es una solución conocida de ①, entonces la transformación $g = fu$ reduce á uno el orden de la ecuación ①; obteniéndose:

$$a_0(x)\,f\,\frac{dV}{dx} + \left(2a_0(x)\frac{df}{dx} + a_1(x)f\right)V = 0 \quad ②$$

donde la variable dependiente $V = \frac{du}{dx}$

ii) La solución particular de ② es:

$$V = \frac{1}{f^2}\,e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx} \quad ③$$

Obteniéndose de $V = \frac{du}{dx}$, y de ③:

$$u = \int \frac{1}{f^2}\,e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}\,dx$$

siendo entonces la función $g = fu$ una solución de ①, de ahí que la solución general de ① es:

$$y = c_1 f + c_2 g.$$

Demostración i) $g = fu \Rightarrow$

$g' = fu' + f'u$

$g'' = fu'' + 2f'u' + f''u$

substituyendo en ①

$$a_0(x)[fu'' + 2f'u' + f''u] + a_1(x)[fu' + f'u] + a_2(x)\,fu = 0$$

reordenando términos:

$$a_0(x)\,fu'' + [2a_0(x)f' + a_1(x)f]u' + [a_0(x)f'' + a_1(x)f' + a_2(x)f]u = 0$$

225

Puesto que f es, por hipótesis, solución de ①, el último paréntesis debe ser nulo:

$$a_0(x) f u'' + [2a_0(x) f' + a_1(x) f] u' = 0$$

Haciendo $v = \frac{du}{dx} = u'$

$$a_0(x) f\, v' + [2a_0(x) f' + a_1(x) f] v = 0 \quad ④ \quad ✓$$

ii) si $f \neq 0$; $a_0(x) \neq 0$, de ④ se obtiene:

$$\frac{dv}{v} = -\left[2\frac{f'}{f} + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right] dx$$

$$\Rightarrow \quad v = -\ln f^2 - \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx + \ln C$$

$$\therefore \quad v = \frac{1}{f^2} C e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \quad ⑤$$

Haciendo $C = 1$ en ⑤ se obtiene una solución particular:

$$v = \frac{1}{f^2} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \quad ✓$$

puesto que:

$$v = \frac{du}{dx} \Rightarrow u = \int v\, dx$$

$$\Rightarrow \quad u = \int \frac{1}{f^2} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} dx . \quad ✓ \quad ⑥$$

siendo: $g = f u$

$$\Rightarrow g = f \int \frac{1}{f^2} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} dx$$

Veamos si las dos soluciones f y g son linealmente independientes:

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & fu \\ f' & (fu' + f'u) \end{vmatrix} = f^2 u' \quad ⑦$$

de la ecuación ⑥

$$u' = \frac{1}{f^2} e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$$

substituyendo en ⑦

$$\Rightarrow \quad W(f,g) = e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \neq 0 \quad ⑧$$

ya que el segundo miembro de ⑧ es siempre >0, $\Rightarrow$ las soluciones f y g si son linealmente independientes $\Rightarrow$ la solución general de ① es:

$$y = c_1 f + c_2 g \quad ✓$$

Ejemplos 1) Por reducción de orden, determinar la solución general de la siguiente ecuación:

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

Sabiendo que $y_1 = x$ es una solución particular.

Solución: $y = xu$

$$\Rightarrow \quad y' = xu' + u$$

$$y'' = xu'' + 2u$$

substituyendo en la ecuación diferencial dada:

$$(x^2+1)(xu''+2u) - 2x(xu'+u) + 2xu = 0$$

reordenando y cancelando:

$$x(x^2+1)u'' + 2u' = 0$$

haciendo $V = u'$

$$x(x^2+1)V' + 2V = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{2\,dx}{x(x^2+1)}$$

$$= \left(-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad V = c\,\frac{x^2+1}{x^2}$$

6

Haciendo $c=1$; substituyendo $v=u'$; y efectuando la integración, resulta

$$u = x - \frac{1}{x}$$

puesto que $g = fu$; donde $f = y_1 = x$:

$$g = x\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - 1$$

$\Rightarrow$ la solución general buscada es:

$$y = c_1 x + c_2(x^2 - 1)$$

2) $xy'' + 2y' + xy = 0$

sabiendo que $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución particular.

Solución:

Haciendo: $\quad y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot u$

$$\Rightarrow \quad y' = y_1' u + y_1 u'$$

$$y'' = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u''$$

substituyendo en la ecuación diferencial dado:

$$(xy_1'' + 2y_1' + xy_1)u + xy_1 u'' + 2(xy_1' + y_1)u' = 0$$

reordenando, y teniendo en cuenta que: $xy_1'' + 2y_1' + xy_1 = 0$, por ser y_1 una solución,

$$xy_1 u'' + 2(xy_1' + y_1)u' = 0 \quad (1)$$

Observando que

$$y_1' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$$

resulta que

$$xy_1' + y_1 = \cos x \quad (2)$$

substituyendo ② en ①:

$$u'' \operatorname{sen} x + 2u' \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u''}{u'} + 2\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

$$\therefore \quad \left(\ln|u'| + 2\ln|\operatorname{sen} x|\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ln|u'| + 2\ln|\operatorname{sen} x| = \ln C_1$$

$$\therefore \quad u' \operatorname{sen}^2 x = C_1$$

integrando

$$u = -C_1 \operatorname{ctg} x + C_2$$

haciendo $-C_1 = 1$; $C_2 = 0$

$\Rightarrow$ $g = fu$; donde $f = y_1 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

$$\therefore \quad g = \frac{\cos x}{x}$$

$\Rightarrow$ la solución general buscada es:

$$y = \frac{1}{x}\left(A \cos x + B \operatorname{sen} x\right)$$

<u>Generalización a ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, de orden n:</u>

Si la función f es una solución no nula de la ecuación: $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\dfrac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} = 0$, entonces el cambio de variable $y = fu$ reduce la ecuación diferencial a una ecuación diferencial lineal homogénea de orden $n-1$, en la variable dependiente: $W = \dfrac{du}{dx}$

229

La ecuación diferencial lineal no-homogénea de orden n puede ser reducida a una de orden $n-1$ mediante el cambio de variable $y = fu$ indicado anteriormente; donde f es una solución particular de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

Demostración:

Sea: $L(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(n)}$ ①

siendo la E.D. no-homogénea:

$$L(y) = g(x) \quad ②$$

Supongamos que $f = f(x)$ es una solución particular de la E.D. homogénea asociada á ②:

$$\Rightarrow \quad L(f) = 0 \quad ③$$

Puesto que la solución de ② es de la forma: $y = fu$

$$\Rightarrow \quad L(fu) = g(x)$$

Empleando la regla de Leibnitz generalizada para la enésima derivada de un producto:

$$L(fu) = (L(f))u + [L'(f)]u' + \frac{1}{2!}[L''(f)]u'' + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}[L^{(n)}(f)]u^{(n)} = g(x) \quad ④$$

pero, de ③ $L(f) = 0 \Rightarrow$ ④ es una ecuación diferencial lineal no-homogénea de orden $(n-1)$ en u'. Anteriormente ya se vió que si $n=2$, este procedimiento conduce a la solución general de la E.D. (véase Variación de parámetros).

230

Integración de ecuaciones diferenciales mediante derivación

Algunas ecuaciones diferenciales se integran más fácilmente mediante derivación, que mediante reducción de orden. En seguida se darán algunos ejemplos para corroborar la afirmación anterior:

Integrar las siguientes E.D.:

1) $yy'' = \frac{1}{2}(y')^2$ ①

Solución:

derivando ①:

$$yy''' + \cancel{y'y''} = \cancel{y'y''} \Rightarrow yy''' = 0$$

donde $y \equiv 0$ es solución; si $y \neq 0 \Rightarrow y''' = 0$ ②

integrando ②:

$$y = C_1 x^2 + 2C_2 x + C_3 \quad ③$$

pero la ecuación original ① es de orden 2 $\Rightarrow$ la solución general debe contener sólo 2 constantes. Substituyendo ③ en ① y simplificando resulta:

$$C_1(C_1x^2 + 2C_2x + C_3) = (C_1x + C_2)^2 \quad ④$$

④ se verifica $\Leftrightarrow$ $C_1C_3 = C_2^2$ ⑤ ; de ⑤ y ③

$$y = C_1x^2 + 2C_2x + \frac{C_2^2}{C_1}$$

haciendo: $C_1 = A^2$; $C_2 = AB$:

$$y = (Ax + B)^2$$

Obsérvese que la ecuación ① puede resolverse también, si se escribe en la forma

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{2}\frac{y'}{y}$$

4

K TEYCO

231

2) $y(y''')^2 - y'y''y''' + \frac{1}{3}(y'')^3 = 0$ ①

Solución:

derivando ①, se obtiene, al simplificar:

$$y^{IV}(2yy''' - y'y'') = 0 \quad ②$$

La E.D. ② presenta dos alternativas:

i) $y^{IV} = 0$, $\Rightarrow y = c_0 + c_1 x + \frac{c_2}{2!}x^2 + \frac{c_3}{3!}x^3$ ③

Observando que, si $x=0 \Rightarrow y^{(n)} = c_n$ ④ ; $y^{(0)} = y$

④ en ①:

$$c_0 c_3^2 - c_1 c_2 c_3 + \frac{1}{3}c_2^3 = 0 \quad ⑤$$

Eliminando c_0 de ⑤ y ③, nos da:

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{2!}x^2 + \frac{c_3}{3!}x^3 + \frac{c_1 c_2 c_3 - \frac{1}{3}c_2^3}{c_3^2} \quad ⑥$$

Haciendo: $c_1 = A + \frac{1}{2}B^2 C$; $c_2 = BC$; $c_3 = C$

en ⑥:

$$y = \frac{C}{3!}(x+B)^3 + A(x+B) \quad ⑦$$

ii) $2yy''' - y'y'' = 0$ ⑧

Eliminando y''' entre ⑧ y ①:

$$(y'')^2\left(yy'' - \frac{3}{4}(y')^2\right) = 0 \quad ⑨$$

La solución de $y'' = 0$ se obtiene de ⑦ si $C=0$ $\Rightarrow$ está contenida en ⑦; por lo cual de ⑨ sólo hay que considerar:

$$yy'' - \frac{3}{4}(y')^2 = 0 \quad ⑩$$

Observando que al derivar ⑩ vuelve a obtenerse ⑧ $\Rightarrow$ hay que integrar ⑩ como está:

232

Puesto que (10) se puede escribir como:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{3}{4}\frac{y'}{y}$$

al integrar se obtiene:

$$y' = 4C_1 y^{3/4}$$

una segunda integración nos dá:

$$y^{1/4} = C_1 x + C_2$$

ó bien:

$$y = (C_1 x + C_2)^4$$

que es solución de (1) ya que la verifica.

3

Algunos libros de referencia:

1.- "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional"
L. ELSGOLTZ
(Edit. MIR) 1969

2.- "Elementary differential equations"
W.T. Martin, E. Reissner
(Edit. Addison-Wesley) 1961

3.- "Elementary differential equations"
E. D. Rainville
(Edit. Macmillan) 1964

4.- "Ecuaciones diferenciales ordinarias"
A. Dou
(Edit. Dossat) 1964

5.- "Differential equations"
S. L. Ross
(Edit. Blaisdell) 1965

6.- "Elementary differential equations"
L. M. Kells.
(Edit. McGraw-Hill) 1960

7.- "Ordinary differential equations"
W. Kaplan
(Edit. Addison-Wesley) 1962

8.- "Notas sobre elementos de ecuaciones diferenciales y cálculo operacional"
J. Salazar R.
(Edit. C.F.E.) 1966

9.- "Ecuaciones diferenciales ordinarias"
C. Imaz; Z. Vorel
(Edit. Limosa-Wiley) 1968

10.- "Differential equations for engineers and scientists"
C.G. Lambe; C.J. Tranter
(Edit. The english universities press) 1961

11.- "Elementary differential equations and boundary value problems"
W. E. Boyce; R.C. Di Prima
(Edit. Wiley) 1969, 2ª Edición

12.- "Differential equations"
L. R. Ford.
(Edit. Mc. Graw-Hill) 1955

13.- "Ordinary differential equations"
E.L. Ince
(Edit. Dover) 1956

14.- "Differential equations"
H. Wayland
(Edit. Van Nostrand) 1957

2

15.- "Elementary differential equations"
T.W. Chaundy
(Edit. Oxford) 1969

16.- "Elementary differential equations"
D.L. Kreider; R.G. Kuller; D.R. Ostberg
(Edit. Addison-Wesley) 1968