VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Notas para el curso introductorio: Matemáticas 0041
(novena parte)

Jacobianos e integrales múltiples

Arturo Delgado R.

Agosto de 1979

MATEMATICAS 041
(CURSO INTRODUCTORIO)

INTRODUCCION.- El propósito de estas notas es el de recopilar, en un solo volumen, los conceptos matemáticos básicos, esenciales para el estudio de las asignaturas que componen los planes de estudios de diversas maestrías que se ofrecen en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Para el estudio de estos apuntes, se supone que el alumno ha aprobado previamente los cursos de matemáticas que se imparten a nivel de licenciatura en escuelas profesionales. Se dan por conocidas ciertas técnicas de cálculo, tales como por ejemplo: álgebra de vectores, geometría analítica, métodos elementales de derivación e integración.

En esencia, estas notas pretenden presentar en forma moderna los temas contenidos en un programa formulado para ser cubierto en un semestre. Se complementa la exposición de la teoría, mediante ejemplos resueltos en detalle.

Cualquier crítica ó comentario tendiente a mejorar posteriores ediciones de estas notas, será bien recibido y agradecido por el autor.

ARTURO DELGADO RODRIGUEZ

MARZO DE 1975

DETERMINANTE JACOBIANO:

Definición: Sean $u = f_1(x,y)$; $v = f_2(x,y)$ funciones con primeras derivadas parciales continuas en una región. Se llama determinante "Jacobiano", ó simplemente Jacobiano, de u, v respecto a x, y al determinante de derivadas parciales:

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Otras notaciones:

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = J(u,v) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

Generalizando la definición á n funciones con n variables independientes:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_n &= f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3, \ldots f_n)}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Algunas propiedades de los Jacobianos.-

1.- Sean las funciones $u = f_1(x,y)$; $v = f_2(x,y)$ con primeras derivadas parciales continuas. Si las variables x, y reciben los incrementos diferenciales: d_1x, d_2x ; d_1y, d_2y respectivamente, se verifica lo siguiente:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\begin{vmatrix} d_1u & d_2u \\ d_1v & d_2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{vmatrix}}$$

Demostración:

$$\begin{vmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}d_1x + \frac{\partial u}{\partial y}d_1y \, , & \frac{\partial u}{\partial x}d_2x + \frac{\partial u}{\partial y}d_2y \\ \frac{\partial v}{\partial x}d_1x + \frac{\partial v}{\partial y}d_1y \, , & \frac{\partial v}{\partial x}d_2x + \frac{\partial v}{\partial y}d_2y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1u & d_2u \\ d_1v & d_2v \end{vmatrix} \quad \checkmark$$

De manera análoga puede demostrarse la validez de la igualdad para funciones de tres ó más variables.

Esta propiedad da al Jacobiano el caracter de función derivada; sin embargo el concepto es más amplio y más general.

2.- La condición necesaria y suficiente para que exista una relación funcional entre las funciones $u = f_1(x,y)$; $v = f_2(x,y)$, de la forma $\phi(u,v)=0$, es que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$$

Demostración:

i) Condición necesaria; hipótesis: existe la relación funcional $\phi(u,v) = 0$

$\Rightarrow$ podemos escribir:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

puesto que, por hipótesis existe la relación funcional $\phi(u,v)=0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial u} \neq 0$; $\frac{\partial\phi}{\partial v} \neq 0$

El sistema homogéneo anterior tendrá solución distinta de la trivial $\Leftrightarrow$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \quad \checkmark$$

ii) Condición suficiente; hipótesis $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$

Si $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, el Jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$ $\Rightarrow u = c$ (constante) de modo que la relación funcional (trivial) resulta ser: $u = c$

Supongamos que las derivadas parciales son diferentes de cero; la condición de compatibilidad del sistema lineal homogéneo ⇒

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x}&=0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\quad a\neq 0\ ;\ b\neq 0$$

Multiplicando la 1ª por dx y la 2ª por dy, y sumando:

$$a\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+b\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad a\,du+b\,dv=0$$

Esta última ecuación, al verificarse, demuestra que existe entre las funciones $u=f_1(x,y)$, $v=f_2(x,y)$ una relación de la forma $\phi(u,v)=0$ ✓

3.- $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)} \cdot \frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)}$$

Demostración:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial p} \\ \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial q} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \quad \checkmark$$

4.- $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

Demostración:

Haciendo en 3.- : $p = x$; $q = y$; $x = u$; $y = v$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1 \quad \checkmark$$

Observación: Si en una región R el Jacobiano es diferente de cero, ⇒ el Jacobiano recíproco también es diferente de cero en esa misma región

5.- Si u, v son funciones compuestas de p, q, r: $u = \phi_1(p,q,r)$; $v = \phi_2(p,q,r)$; siendo las variables p, q, r funciones de x, y:
$p = f_1(x,y)$; $q = f_2(x,y)$; $r = f_3(x,y)$; resulta:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(p,q)}\frac{\partial(p,q)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(q,r)}\frac{\partial(q,r)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,p)}\frac{\partial(r,p)}{\partial(x,y)}$$

6.- Para que las ecuaciones $f(x,y,z,u,v)=0$; $g(x,y,z,u,v)=0$ puedan ser resueltas para dos de las variables independientes, digamos u, v, lo necesario y suficiente que no se anule el Jacobiano $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ en la región R, en la cual son continuas y derivables parcialmente las funciones f y g.

7.- Si: $f(x,y,u,v)=0$; $g(x,y,u,v)=0$ resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Demostración:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = 0 \quad (1)$$

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = 0 \quad (2)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \quad (3)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \quad (4)$$

(3), (4) en (1) y (2)

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = 0$$

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = 0$$

dado que x y y son independientes $\Rightarrow dx = dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Resolviendo los sistemas de ecuaciones simultáneas (5) y (6) se obtienen las cuatro derivadas parciales buscadas. ✓

8.- Si: $f(x,y,z,u,v)=0$

$g(x,y,z,u,v)=0$

$h(x,y,z,u,v)=0$

resulta:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_y = -\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,z,v)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,z,v)}} \quad ; \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x = -\frac{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,u)}}{\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(v,z,u)}}$$

Donde se ha supuesto que z, u, v son funciones de x, y.

El subíndice del primer miembro indica la variable que se ha considerado constante.

De manera análoga pueden calcularse las demás derivadas parciales.

Demostración de la segunda fórmula:
Derivando con respecto á y; manteniendo x constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas para $\frac{\partial v}{\partial y}$ resulta:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_x = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(z,u,y)}}{\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(z,u,v)}} \checkmark$$

9.- Si: $u = f(x,y)$; $v = g(x,y)$
resulta:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$$

Demostración: Derivando $u = f(x,y)$; $v = g(x,y)$ con respecto á u ; teniendo en cuenta que x, y son variables independientes, resulta:

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Resolviendo este sistema para $\frac{\partial y}{\partial u}$ y $\frac{\partial x}{\partial u}$:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial u}} \quad \checkmark \qquad ; \quad \frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial u}} \quad \checkmark \qquad ; \quad \frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$$

10.- Si: $u = f(x,y)$; $v = g(x,y)$; $w = h(x,y)$; $F(u,v,w) = 0$ resulta:

$$\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\,du + \frac{\partial(w,u)}{\partial(x,y)}\,dv + \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dw = 0$$

Demostración:

$$\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}\,du = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} du$$

$$\frac{\partial(w,u)}{\partial(x,y)}\,dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} dv$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dw = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dw$$

$$\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}du + \frac{\partial(w,u)}{\partial(x,y)}dv + \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dw = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & du \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & dv \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & dw \end{vmatrix} ①$$

pero:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy.$$

Substituyendo estos valores en ①

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy\right) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} dy = 0 \;;$$

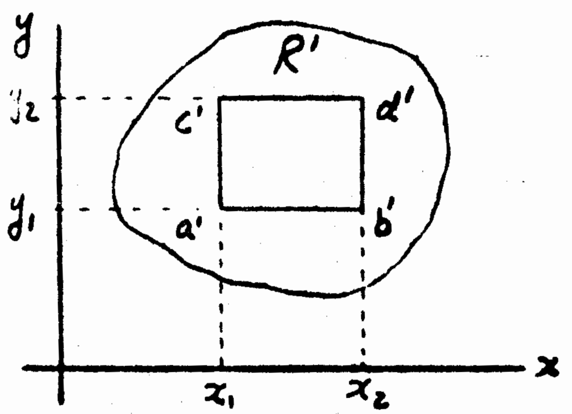
Ya que los determinantes tienen, cada uno, dos columnas iguales: $\Rightarrow$

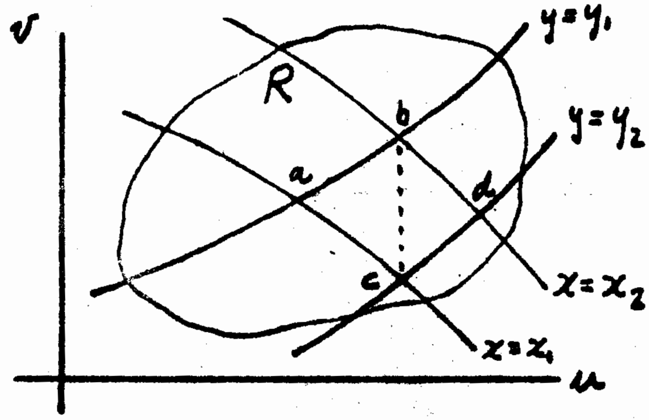
$$\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}du + \frac{\partial(w,u)}{\partial(x,y)}dv + \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dw = 0 \checkmark$$

11.- Sean: $u = f(x,y)$; $v = g(x,y)$. Si una región cerrada R del plano uv se transforma en la región cerrada R' del plano x,y; siendo las áreas ΔA_{uv} y ΔA_{xy} de las regiones R y R' respectivamente, se verifica lo siguiente:

$$\lim_{\substack{\Delta A_{xy}\to 0\\ \Delta A_{uv}\to 0}} \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|$$

Demostración:





$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = dx \\ y_2 - y_1 = dy \end{array}\right\} \Delta A_{xy} = dx\,dy$$

Sean las coordenadas del cuadrilátero curvilíneo abcd:

$a(u_1,v_1)$; $b(u_2,v_2)$; $c(u_3 v_3)$; $d(u_4,v_4)$

Estas coordenadas pueden expresarse como funciones de las variables x,y:

$u_1 = \phi(x,y)$

$u_2 = \phi(x+dx,y)$

pero:

$$\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y) \doteq \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx$$

$$\Rightarrow \phi(x+dx, y) - \phi(x,y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow u_2 = \phi(x+dx, y) = \phi(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

$$u_3 = \phi(x, y+dy) = \phi(x,y) + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$v_1 = \psi(x,y)$$

$$v_2 = \psi(x+dx, y) = \psi(x,y) + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

$$v_3 = \psi(x, y+dy) = \psi(x,y) + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Considerando el área del cuadrilátero curvilíneo abcd como dos veces el área del triángulo abc:

$$\Delta A_{uv} = \frac{2}{2} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi & \psi & 1 \\ \phi + \frac{\partial \phi}{\partial x}dx & \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx & 1 \\ \phi + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy & \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta A_{uv} = \phi\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx\right) + \left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x}dx\right)\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right) + \psi\left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy\right) -$$
$$-\left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy\right)\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx\right) - \psi\left(\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x}dx\right) - \phi\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right)$$

$$= \phi\psi + \phi\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \phi\psi + \phi\frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \psi\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}dx\,dy +$$
$$+ \psi\phi + \psi\frac{\partial \phi}{\partial y}dy - \phi\psi - \phi\frac{\partial \psi}{\partial x}dx - \psi\frac{\partial \phi}{\partial y}dy - \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}dx\,dy -$$
$$- \phi\psi - \psi\frac{\partial \phi}{\partial x}dx - \phi\psi - \phi\frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

$$\Delta A_{uv} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}dx\,dy - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\,dy$$

$$\Delta A_{uv} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy = \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\Delta A_{xy}$$

haciendo $\phi = u$; $\psi = v$

$$\lim_{\substack{\Delta A_{xy}\to 0 \\ \Delta A_{uv}\to 0}} \frac{\Delta A_{uv}}{\Delta A_{xy}} = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$$

Teniendo en cuenta la propiedad 4.- de los Jacobianos, y los Teoremas sobre límites:

$$\lim_{\substack{\Delta A_{xy}\to 0 \\ \Delta A_{uv}\to 0}} \frac{\Delta A_{xy}}{\Delta A_{uv}} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

Como en las demás propiedades de los Jacobianos, esta propiedad puede hacerse extensiva a regiones tridimensionales:

$$\lim_{\substack{\Delta V_{uvw}\to 0 \\ \Delta V_{xyz}\to 0}} \frac{\Delta V_{uvw}}{\Delta V_{xyz}} = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|$$

Ejemplos:

1) Por medio del Jacobiano, demostrar la propiedad fundamental de los logaritmos:

$$f(x) + f(y) = f(x,y)$$

Demostración: Sea $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = 1 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Siendo:

$$u = f(x) + f(y) \quad ; \quad v = x \cdot y$$

resulta:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ y & x \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ de la propiedad 2.- existe una relación funcional de la forma: $f(x) + f(y) = \phi(x,y)$

Para determinar ϕ basta hacer $y = 1 \Rightarrow$ $\phi(x) = f(x)$, puesto que $f(y) = 0$, para $y = 1$.

Dado que x es arbitraria, resulta

$$f(x) + f(y) = f(x,y) \checkmark$$

Obsérvese que la definición anterior bien pudo haber dado origen al descubrimiento de la propiedad fundamental de los logaritmos, si no se hubiera deducido por otro camino.

2) Calcular el Jacobiano:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}$$

Siendo: $\begin{cases} u = x^2+y^2-z^2 \\ v = 2xy+3xz+yz \\ w = x^2-2y^2+5yz \end{cases}$

además: $\begin{cases} x = \rho\cos\phi\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ z = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

Solución:

De la propiedad 3.-

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\cdot\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 2y+3z & 2x+z & 3x+y \\ 2x & -4y+5z & 5y \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2\cos\theta$$

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = 2\rho^5\cos\theta\Big[(-38\operatorname{sen}^3\phi+6\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta+28\operatorname{sen}\phi)\cos^3\theta+(4\operatorname{sen}^2\phi-11)\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+(2\operatorname{sen}\phi+2\cos\theta)\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta-15\operatorname{sen}^3\theta\Big]$$

18

3) Comprobar que $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \cdot \dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = 1$, si:

$$u = x+y+z \;;\; uv = y+z \;;\; uvw = z$$

Solución:

De las tres relaciones dadas, se obtiene:

$$x = u - uv = u(1-v)$$
$$y = uv - uvw = uv(1-w)$$
$$z = uvw$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & wu & uv \end{vmatrix}$$

$$= u^2 v = (y+z)(x+y+z)$$

Asimismo:

$$u = x+y+z$$
$$v = \frac{y+z}{x+y+z} = 1 - \frac{x}{x+y+z}$$
$$w = \frac{z}{y+z} = 1 - \frac{y}{y+z}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -y-z & x & x \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} \frac{1}{[(y+z)(x+y+z)]^2}$$

$$= \frac{xy + xz + (y+z)^2}{[(y+z)(x+y+z)]^2}$$

$$= \frac{x(y+z) + (y+z)^2}{[(y+z)(x+y+z)]^2}$$

$$= \frac{1}{(y+z)(x+y+z)} \quad ✓$$

4) Si: $u^2 - v - 3x - y = 0$; $u - 2v^2 - x + 2y = 0$
Calcular: $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Solución:
Empleando las fórmulas de la propiedad 7:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & -4v \end{vmatrix}} = \frac{1-12v}{1-8uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{1-8uv} = \frac{2u-3}{1-8uv}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4v \end{vmatrix}}{1-8uv} = \frac{-4v-2}{1-8uv}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{1-8uv} = \frac{-4u-1}{1-8uv}$$

donde: $1-8uv \neq 0$

5) Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuaciones paramétricas $x=x(u,v)$; $y=y(u,v)$; $z=z(u,v)$, en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$, es:

$$(x-x_1)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+(y-y_1)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+(z-z_1)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=0$$

Solución:

Obsérvese primero que los Jacobianos:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \; ; \; \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \; ; \; \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

no pueden ser simultáneamente nulos, puesto que entonces la eliminación de los parámetros u, v de las ecuaciones de la superficie daría lugar a dos relaciones diferentes entre las variables x, y, z ; resultando por lo tanto que un punto de coordenadas (x,y,z) describiría una curva, y no una superficie.

Para concretar, supongamos que el Jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$; $\Rightarrow$ que las ecuaciones $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, de la propiedad 6.-, pueden ser resueltas para u y v ; valores que substituidos en $z=z(u,v)$ nos dan una ecuación de la forma $z=f(x,y)$

Sabiendo que:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

de lo cual resultan las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

De estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = \frac{\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

Substituyendo los valores de estas derivadas en la ecuación conocida del plano tangente: $z - z_1 = (x-x_1)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_1)\frac{\partial z}{\partial y}$

se obtiene:

$$(x-x_1)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (y-y_1)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (z-z_1)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 0$$

5) Demostrar que las ecuaciones de la tangente a una curva alabeada, definida por la intersección de dos superficies: $f(x,y,z)=0$; $g(x,y,z)=0$, en el punto $P(x_1,y_1,z_1)$, son:

$$\frac{x-x_1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = \frac{y-y_1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}} = \frac{z-z_1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}$$

Solución:

Dado que las ecuaciones de las superficies están expresadas en forma implícita, las ecuaciones del plano tangente a cada una de las superficies, en el punto P, será:

$$(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-z_1)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$(x-x_1)\frac{\partial g}{\partial x} + (y-y_1)\frac{\partial g}{\partial y} + (z-z_1)\frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Puesto que la intersección de estos dos planos tangentes define la tangente a la curva alabeada en el punto P; calculando los parámetros directores de esta recta tangente, y sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones generales de la recta, resultan:

$$\frac{x-x_1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}} = \frac{y-y_1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}} = \frac{z-z_1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}}$$ ✓

7) Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado en los problemas 5) y 6) anteriores pueden obtenerse, en función de Jacobianos, las siguientes ecuaciones:

a) Dadas las ecuaciones paramétricas de una superficie: $x = x(u,v)$; $y = y(u,v)$; $z = z(u,v)$, las ecuaciones de la normal a la superficie, en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$, son:

$$\frac{x - x_1}{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}} = \frac{y - y_1}{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}} = \frac{z - z_1}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

b) Si una curva alabeada se define por la intersección de las superficies: $f(x,y,z)=0$; $g(x,y,z)=0$, resulta que la ecuación del plano normal a la curva alabeada, en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$, es:

$$(x - x_1)\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} + (y - y_1)\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)} + (z - z_1)\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0$$

ó bien:

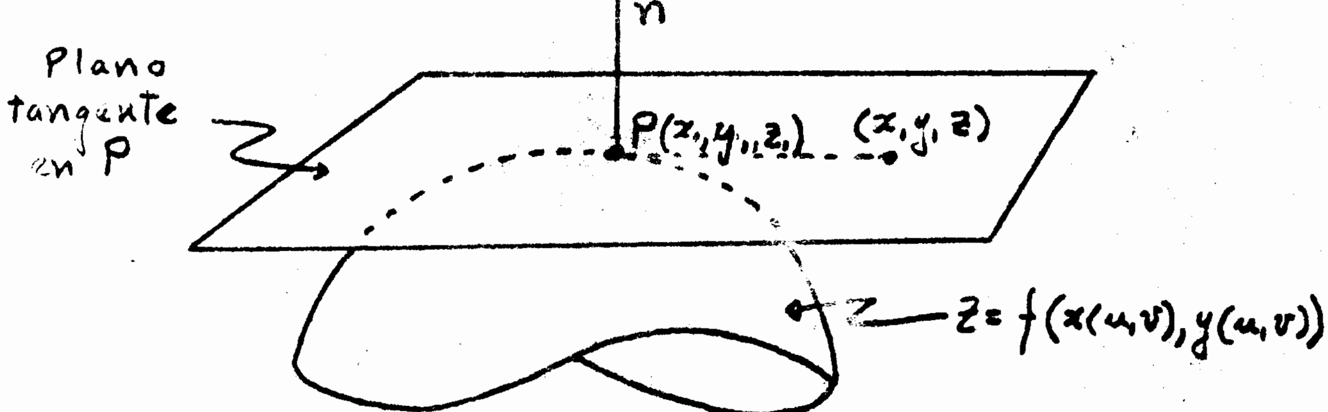
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

Nota: todas las derivadas parciales que figuran en los problemas 5), 6) y 7) deben valuarse en el punto $P(x_1, y_1, z_1)$.

Es interesante observar que los Jacobianos que figuran el los problemas 5), 6) y 7) últimos, pueden considerarse como componentes de vectores:

i) $$\bar{n} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} , \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} , \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

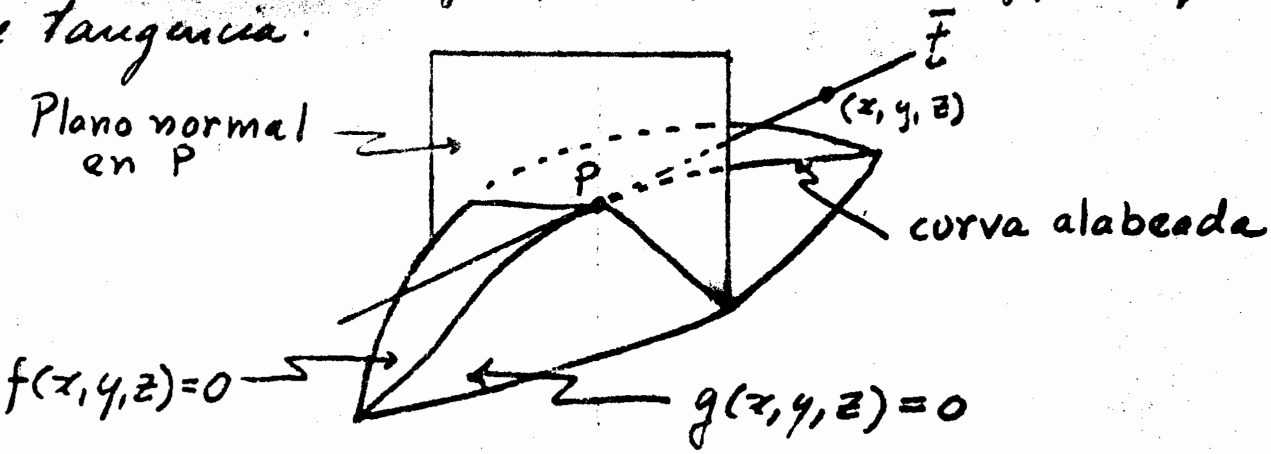
Siendo $\bar{n}$ el vector normal a la superficie $x=x(u,v)$; $y=y(u,v)$; $z=z(u,v)$, en el punto $P(x_1,y_1,z_1)$.



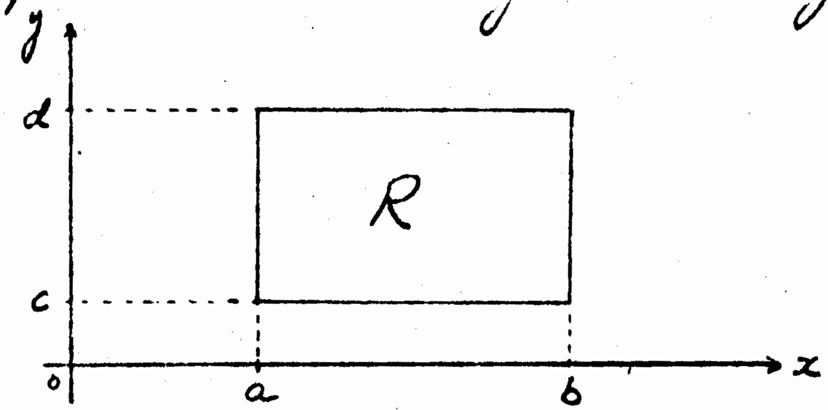
Nota: (x,y,z) está sobre $\bar{n}$ al deducir la ecuación de la normal $\bar{n}$.

ii) $$\bar{t} = \left(\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} , \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)} , \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} \right)$$

Donde $\bar{t}$ es el vector tangente a la curva alabeada, definida por la intersección de las superficies $f(x,y,z)=0$; $g(x,y,z)=0$; siendo $P(x_1,y_1,z_1)$ el punto de tangencia.



INTEGRALES DOBLES.- Funciones escalonadas, definidas en una región rectangular:



Sean las particiones:

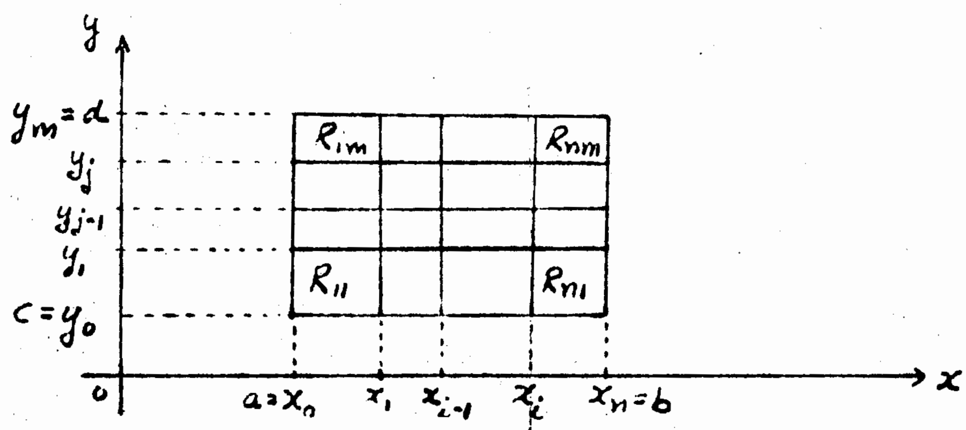
$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$

$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ de $[c, d]$

Supongamos que, mediante líneas paralelas a los ejes coordenados, dividimos la región R en subregiones R_{ij} tales que:

$$R_{ij} = \{(x,y) \mid x_{i-1} < x < x_i \,;\, y_{j-1} < y < y_j\}$$

$$\bar{R}_{ij} = \{(x,y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i \,;\, y_{j-1} \le y \le y_j\}$$



Sea: área de $R = |R| = (b-a)(d-c)$

área de $R_{ij} = |R_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

La definición de partición de un intervalo, puede hacerse extensiva a regiones $R \in E^2$:

$$P = P_1 \times P_2$$

quedando la partición P representada, en forma gráfica, por la última figura.

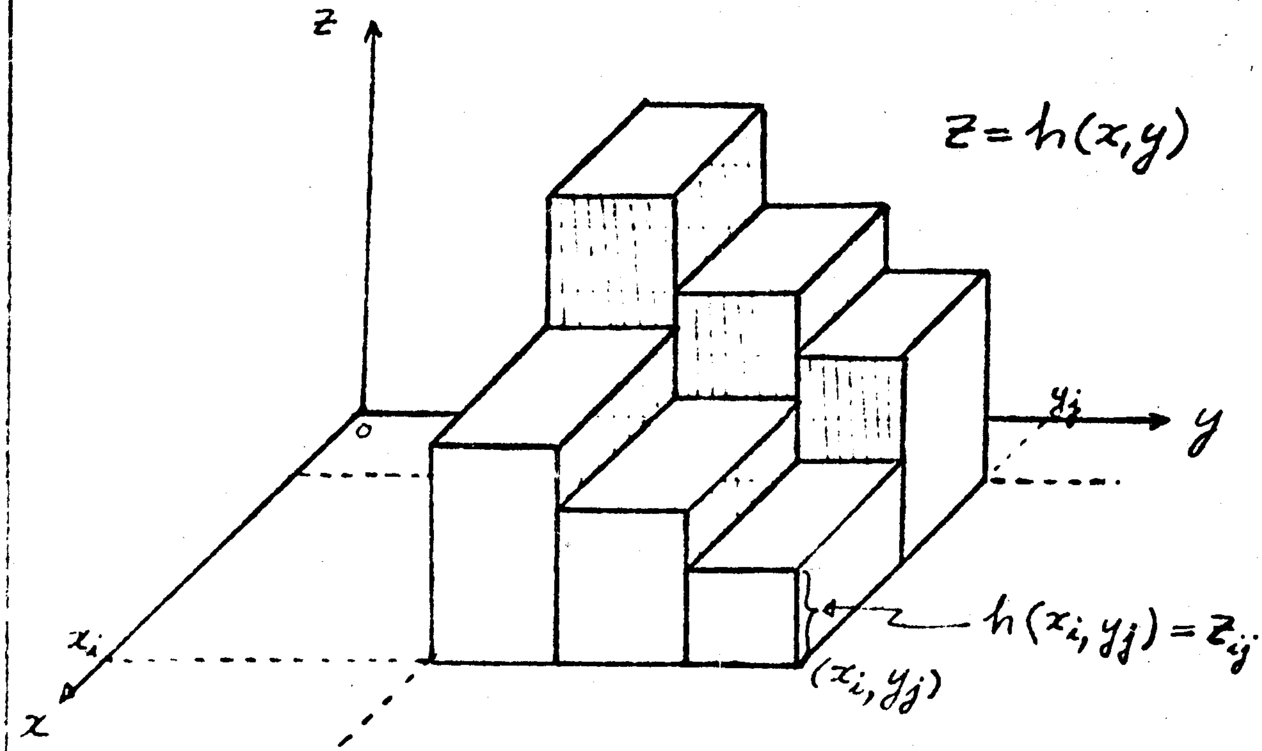
Los rectángulos R_{ij} se denominan "subconjuntos" de la partición P.

El concepto de "función escalonada" en R se define del siguiente modo:

Se dice que la función $h: R \to E'$ es una función "escalonada" en R si existe una partición P del rectángulo R tal que la imagen $h(x,y)$ es un valor constante en cada subconjunto R_{ij} de P.

Dicho en otras palabras, la función h es escalonada, si existe un conjunto de $n \times m$ constantes c_{ij} tales que $h(x,y) = c_{ij}$, si $(x,y) \in R_{ij}$.

En la definición anterior, se considerará que la imagen $h(x, y_j)$ es una función escalonada de la variable x en cada una de las $m+1$ rectas de ecuación $y = y_j$ correspondientes a puntos de la partición P_2; esto es, $y_j \in P_2$. Asimismo, $h(x_i, y)$ es una función escalonada de la variable y en cada una de las $n+1$ rectas $x = x_i$ $(x_i \in P_1)$. Resulta a veces conveniente definir la función escalonada $h(x,y)$ como constante a lo largo de cada una de estas rectas



Definición: La integral doble de la función escalonada $h: R \to E'$ es:

$$\iint_R h(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} |R_{ij}|$$

Observaciones:

1.- El orden en que se verifique la doble suma no afecta el valor de la integral:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} |R_{ij}| = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} |R_{ij}|$$

2.- No se altera el valor de la integral doble, si la partición P se cambia por la partición P' que contenga todas las líneas de las subdivisiones de P, teniendo además líneas adicionales paralelas a los ejes.

3.- Geométricamente, la integral doble es numéricamente igual al volumen bajo la función escalonada.

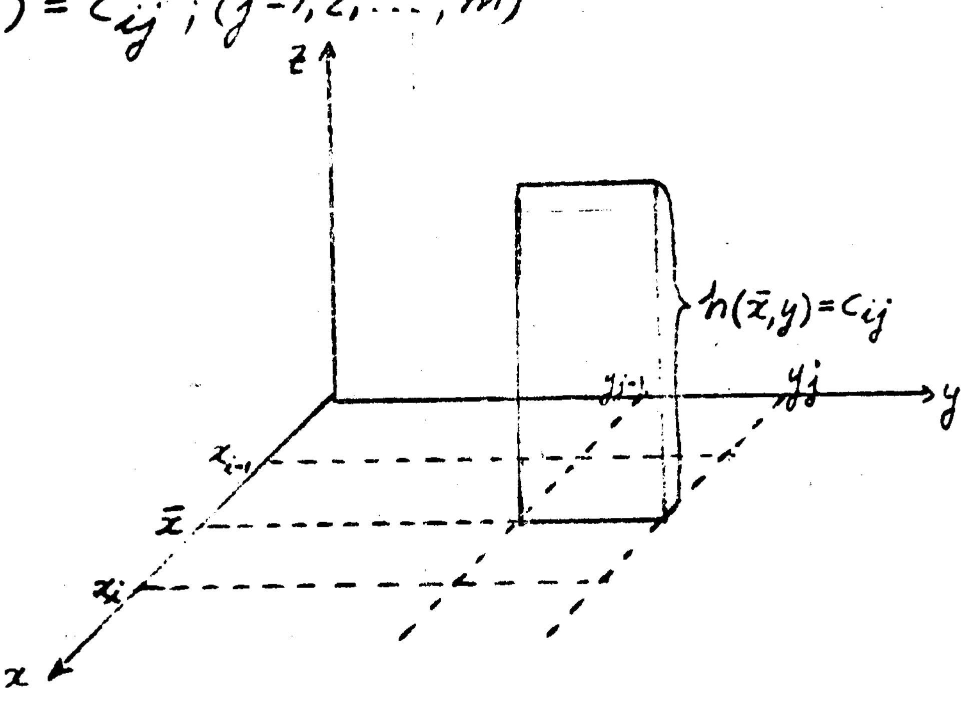
4.- Teorema.- Sea $h: R \to E^1$ cualquier función escalonada; siendo $R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$; se afirma que:

$$\int_a^b \left[\int_c^d c_{ij}\,(y_j - y_{j-1})\right](x_i - x_{i-1}) = \iint_R h(x,y)\,dA$$

Este teorema relaciona la integral iterada, con la integral doble de una función escalonada.

Demostración:

Sea $\bar{x}$ cualquier abscisa del subintervalo abierto $(x_i - x_{i-1})$ definido por la partición P_1; siendo $h(\bar{x},y)$ entonces una función escalonada únicamente de la variable real y. Si $y \in (y_{j-1}, y_j)$ $\Rightarrow h(\bar{x},y) = c_{ij}$; $(j = 1, 2, \ldots, m)$



$$\int_c^d h(\bar{x},y)\,dy = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

Sea: $g(x) = \int_c^d h(x,y)\,dy$, para toda $x \in [a,b]$

Obsérvese que $g:[a,b] \to E'$ es tambien función escalonada.

Puesto que g es constante en cada subintervalo abierto de la partición P_1; si $u_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(y_j - y_{j-1})$ $(j = 1,2,\ldots m;\ i = 1,2,\ldots n)$:

$\Rightarrow g(x) = u_i$ para toda $x \in (x_{i-1}, x_i)$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[\int_c^d h(x,y)\,dy\right] dx = \int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(y_j - y_{j-1})\right](x_i - x_{i-1})$$

$$= \iint_R h(x,y)\,dA \quad \checkmark$$

5.- A fin de simplificar la notación, puede resultar conveniente emplear subíndices sencillos en vez de usar subíndices dobles; esto es, si P es una partición del rectangulo R, pueden numerarse las subregiones con un solo subíndice: $R_1, R_2, \ldots R_n$ en cualquier orden conveniente. Nótese que ahora n representa el número total de subregiones definidas por P; independientemente del número de subintervalos sobre el eje x: $\Rightarrow \iint_R h(x,y)\,dA = \sum_{k=1}^{n} c_k |R_k|$; $k = 1,2,\ldots,n$

Integrales dobles superiores é inferiores de una función acotada:-

Sea $f: R \to E'$ una función acotada cualquiera; siendo $R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}$; $|f(x,y)| \leq M$ para todo $(x,y) \in R$. Llamemos S_f al conjunto de todas las funciones escalonadas $s: R \to E'$ tales que $s(x,y) \leq f(x,y)$ para toda $(x,y) \in R$. Designemos por T_f al conjunto de todas las funciones escalonadas $t: R \to E'$ tales que $t(x,y) \geq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$.

Se definen:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \sup\left\{\iint_R s(x,y)\,dA \;\middle|\; s(x,y) \in S_f\right\}$$

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \inf\left\{\iint_R t(x,y)\,dA \;\middle|\; t(x,y) \in T_f\right\}$$

Puesto que la función f está acotada $\Rightarrow$ ambas integrales existen

Teorema I: Dado cualquier número $\varepsilon > 0$, existe una función escalonada $s_0(x,y) \in S_f$, y otra $t_0(x,y) \in T_f$ tales que:

i) $$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA - \iint_R s_0(x,y)\,dA < \frac{\varepsilon}{2}$$

ii) $$\iint_R t_0(x,y)\,dA - \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA < \frac{\varepsilon}{2}$$

Teorema II: Para cualquier función acotada $f: R \to E'$ se verifica:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA \leq \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

Teorema III: Si: $f: R \to E'$ es una función escalonada, resulta:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA$$

Definición: Se dice de f es "integrable" en R si:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Si se verifica la ecuación anterior, puede asimismo afirmarse que la integral doble "existe", y se representa por: $\iint_R f(x,y)\,dA$.

Demostración de los teoremas I, II y III anteriores:

i) $$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \sup\left\{\iint_R s(x,y)\,dA \,\middle|\, s(x,y)\in S_f\right\}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA - \frac{\varepsilon}{2}$ no es una cota superior para el conjunto $\left\{\iint_R s(x,y)\,dA \,\middle|\, s(x,y)\in S_f\right\}$ $\Rightarrow$ existe una función escalonada $s_0(x,y)\in S_f$ tal que:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA - \frac{\varepsilon}{2} < \iint_R s_0(x,y)\,dA$$

$$\Rightarrow \underline{\iint_R} f(x,y)\,dA - \iint_R s_0(x,y)\,dA < \frac{\varepsilon}{2} \checkmark$$

ii) $$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA = \inf\left\{\iint_R t(x,y)\,dA \,\middle|\, t(x,y)\in T_f\right\}$$

$\Rightarrow$ $\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA + \frac{\varepsilon}{2}$ no es una cota inferior para el conjunto: $\left\{\iint_R t(x,y)\,dA \,\middle|\, t(x,y)\in T_f\right\}$ $\Rightarrow$ existe una función escalonada $t_0(x,y)\in T_f$ tal que:

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dA + \frac{\varepsilon}{2} > \iint_R t_0(x,y)\,dA$$

$$\Rightarrow \iint_R t_0(x,y)\,dA - \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA < \frac{\varepsilon}{2} \checkmark$$

con lo cual queda demostrado el teorema I ✓

Demostración del teorema II

Sea. $F(x) = \overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy \;;\quad x \in [a,b]$

Si: $M = \sup\{|f(x,y)| \mid (x,y) \in R\}$

$\Rightarrow |F(x)| \leq M(d-c)$

Haciendo:

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} F(x)\,dx = \overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\underline{I} = \int_a^b F(x)\,dx = \underline{\int_a^b}\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

Consideremos las particiones:

$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$

$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ de $[c,d)$

$P = P_1 \times P_2$ subdivide R en mn subrectángulos R_{ij}

Sean:

$$\overline{I}_{ij} = \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\left[\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\underline{I}_{ij} = \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\left[\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\right]dx$$

Dado que:

$$\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy = \sum_{j=1}^{m} \overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d} f(x,y)\,dy\right]dx \leq \sum_{j=1}^{m} \overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\right]dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \overline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\left[\overline{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\Rightarrow \quad \bar{I} \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ij}$$

De modo semejante se obtiene:

$$\underline{I} \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_{ij}$$

Haciendo:

$$m_{ij} = \inf \{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij} \}$$

$$M_{ij} = \sup \{ f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij} \}$$

resulta: $\quad m_{ij} \leq f(x,y) \leq M_{ij} \quad ; \quad (x,y) \in R_{ij}$

$$\Rightarrow m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

$$\Rightarrow m_{ij}\,\mu(R_{ij}) \leq \underline{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right] dx \leq$$

$$\leq \bar{\int}_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\bar{\int}_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right] dx \leq M_{ij}\,\mu(R_{ij})$$

Sumando respecto á i y á j:

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dA \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \overline{\iint_R} f(x,y)\,dA \quad \checkmark$$

Obsérvese que la demostración puede tambien conseguirse si la función $F(x)$ se define.

$$F(x) = \underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy$$

Demostración del teorema III.-

Por las definiciones de S_f y T_f ; si $f(x,y) \in S_f$ y $f(x,y) \in T_f$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } f(x,y) \in S_f : \iint_R f(x,y)\,dA \leq \underline{\iint}_R f(x,y)\,dA & (1) \\ \\ \text{Si } f(x,y) \in T_f : \iint_R f(x,y)\,dA \geq \overline{\iint}_R f(x,y)\,dA & (2) \end{cases}$$

Del teorema II:

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dA \leq \overline{\iint}_R f(x,y)\,dA \qquad (3)$$

de (2) y (3) : $\underline{\iint}_R \leq \overline{\iint}_R \leq \iint_R$ (4)

de (1) y (3) : $\iint_R \leq \underline{\iint}_R \leq \overline{\iint}_R$ (5)

de (4) y (5): $\iint_R \leq \overline{\iint}_R \leq \iint_R \Rightarrow \iint_R = \overline{\iint}_R$ (6)

de (4) y (5) : $\underline{\iint}_R \leq \iint_R \leq \underline{\iint}_R \Rightarrow \underline{\iint}_R = \iint_R$ (7)

de (6) y (7)

$$\underline{\iint}_R f(x,y)\,dA = \overline{\iint}_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \checkmark$$

Integral doble de una función acotada, definida en una región cerrada D cualquiera.

Consideremos ahora, en lugar de la región rectangular R, una función $f: D \to E^1$; donde D puede ser cualquier subconjunto cerrado de E^2, acotado; siendo asimismo el rango $f(D)$ acotado.

Sea:

$$a = \inf. \{x \mid (x,y) \in D\}$$
$$b = \sup \{x \mid (x,y) \in D\}$$
$$c = \inf \{y \mid (x,y) \in D\}$$
$$d = \sup \{y \mid (x,y) \in D\}$$

$$R_D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \,;\; c \leq y \leq d\}$$

$\Rightarrow D \subseteq R_D$

Defínase: $\tilde{f}: R_D \to E^1$ tal que:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), \text{ si: } (x,y) \in D \\ 0, \text{ si: } (x,y) \in R_D - D \end{cases}$$

Defínase asimismo:

$$\underline{\iint_D} f(x,y)\,dA = \underline{\iint_{R_D}} \tilde{f}(x,y)\,dA$$

$$\overline{\iint_D} f(x,y)\,dA = \overline{\iint_{R_D}} \tilde{f}(x,y)\,dA.$$

Por el teorema II, se tiene:

$$\underline{\iint_D} f(x,y)\,dA \leq \overline{\iint_D} f(x,y)\,dA$$

Teorema VI.- Sea D un subconjunto cerrado y acotado de E^2; que satisface la condición de Riemann.

Si: $f: D \to E'$ es continua en D se afirma que $\iint_D f(x,y)\, dA$ existe.

Teorema VII.- Sea $f(x,y)$ una función definida en un subconjunto D del plano x,y. Si $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) de D, y cada vecindad de (x_0, y_0) contiene otros puntos de D en la línea $y = y_0$, se afirma que la función $f(x_0, y)$, sólo de la variable y es tambien continua en y_0

Demostración:

Puesto que $f(x,y)$ es, por hipótesis, continua en (x_0, y_0), se sabe que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $S((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

Si $|y - y_0| < \delta$

$$\Rightarrow S((x_0,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x_0-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |y - y_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x_0,y) \text{ es continua en } y_0 \ \checkmark$$

Teorema VIII.- Si $f: [a,b] \to E'$ es una función sólo de la variable real x; teniéndose que:

i) f es continua en un subintervalo cerrado $[r_1, r_2]$ de $[a,b]$; $(a \le r_1 < r_2 \le b)$

ii) $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b] - [r_1, r_2]$.

Se afirma:

$\int_a^b f(x)dx$ existe y es igual a $\int_{r_1}^{r_2} f(x)dx$

Demostración:

Por ser, por hipótesis, f continua en $[r_1, r_2] \Rightarrow$ $\int_{r_1}^{r_2} f(x)dx$ existe.

Dado cualquier $\varepsilon \in R^{\#}$; $\varepsilon > 0$, existen funciones escalonadas $s : [r_1, r_2] \to E'$; $t : [r_1, r_2] \to E'$ tales que $s(x) \leq f(x) \leq t(x)$ para toda $x \in [r_1, r_2]$; además:

$$\int_{r_1}^{r_2} t(x)dx - \int_{r_1}^{r_2} s(x)dx < \varepsilon.$$

Definamos:

$$\bar{s}(x) = \begin{cases} s(x), & \text{si } x \in [r_1, r_2] \\ 0, & \text{si } x \in [a,b] - [r_1, r_2] \end{cases}$$

$$\bar{t}(x) = \begin{cases} t(x), & \text{si } x \in [r_1, r_2] \\ 0, & \text{si } x \in [a,b] - [r_1, r_2] \end{cases}$$

De la definición de función escalonada, resulta

$$\int_a^b \bar{s}(x)dx = \int_{r_1}^{r_2} s(x)dx$$

$$\int_a^b \bar{t}(x)dx = \int_{r_1}^{r_2} t(x)dx$$

Dado que $\bar{s}(x) \leq f(x) \leq \bar{t}(x)$ para toda $x \in [a,b]$,

$$\int_a^b \bar{t}(x)dx - \int_a^b \bar{s}(x)dx = \int_{r_1}^{r_2} t(x)dx - \int_{r_1}^{r_2} s(x)dx < \varepsilon$$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ existe; puesto que las dos integrales: $\int_a^b f(x)dx$; $\int_{r_1}^{r_2} f(x)dx$ están acotadas por las integrales: $\int_a^b \bar{s}(x)dx$; $\int_a^b \bar{t}(x)dx$ ó por

$\int_{r_1}^{r_2} s(x)dx$; $\int_{r_1}^{r_2} t(x)dx$;

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad ; \text{ para toda } \varepsilon > 0$$

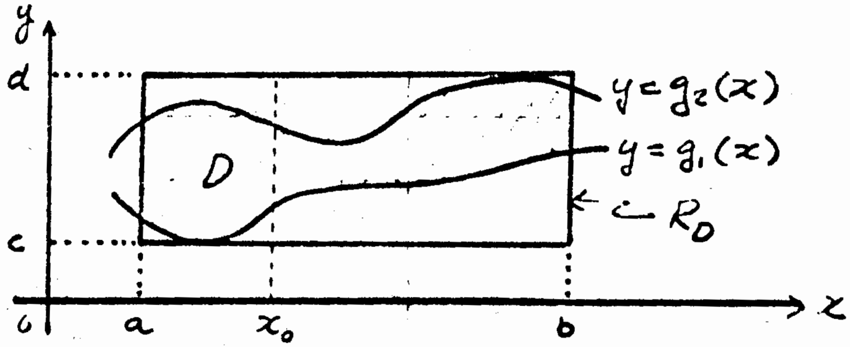
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx \quad ✓$$

Teorema IX.- Sea D un subconjunto cerrado del plano x, y; limitado por las curvas $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, y por las rectas $x = a$, $x = b$; donde las funciones $g_1 : [a,b] \to E'$, $g_2 : [a,b] \to E'$ son continuas; siendo $g_1(x) \leq g_2(x)$ para toda $x \in [a,b]$. Sea c la ordenada mínima de $g_1(x)$; siendo d la ordenada máxima de $g_2(x)$ en $[a,b]$; de modo que $R_D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Se afirma que, si $f : D \to E'$ es continua:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \right] dx$$

Demostración:



Sea $x_0 \in [a,b]$ una abscisa de valor fijo, $\Rightarrow$ $\tilde{f}(x_0, y)$ es función sólo de la variable real y; la cual es continua para toda y tal que:

$$g_1(x_0) \leq y \leq g_2(x_0) \quad \text{(del teorema VII)}.$$

$\tilde{f}(x_0, y) = 0$ para cualquier otro punto en $[c,d]$.

$\Rightarrow$ del teorema VIII que $\int_c^d \tilde{f}(x_0, y)\,dy$ existe.

De los teoremas V y VI: $\iint_D f(x,y)\,dA$ existe.

Sea un $\varepsilon>0$ dado; del Teorema IV, existen funciones escalonadas $s: R_D \to E'$, $t: R_D \to E'$ tales que $s(x,y) \le \tilde{f}(x,y) \le t(x,y)$ para toda $(x,y) \in R_D$; además:

i) $$\iint_{R_D} t(x,y)\,dA - \iint_{R_D} s(x,y)\,dA < \varepsilon.$$

Hemos visto que:

$$\int_a^b \left[\int_c^d s(x,y)\,dy\right]dx = \iint_{R_D} s(x,y)\,dA$$

$$\int_a^b \left[\int_c^d t(x,y)\,dy\right]dx = \iint_{R_D} t(x,y)\,dA$$

ii) $$\Rightarrow \int_a^b \left[\int_c^d t(x,y)\,dy\right]dx - \int_a^b \left[\int_c^d s(x,y)\,dy\right]dx < \varepsilon.$$

Puesto que $s(x,y) \le \tilde{f}(x,y) \le t(x,y)$; siendo $s(x,y)$, $t(x,y)$ funciones escalonadas para cada $x \in [a,b]$, resulta:

iii) $$\int_c^d s(x,y)\,dy \le \int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy \le \int_c^d t(x,y)\,dy$$

De la observación 4.- anterior, tanto $\int_c^d s(x,y)dy$ como $\int_c^d t(x,y)\,dy$, son funciones escalonadas de la variable x, siendo el dominio $[a,b]$. $\Rightarrow$ de ii) y iii) y de la condición de integrabilidad de Riemann, la función $\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy$ de x, es integrable en $[a,b]$; esto es:

$$\int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\right]dx \text{ existe.}$$

Además, de iii) y la definición de $\int_a^b \Rightarrow$

$$\int_a^b \left[\int_c^d s(x,y)\,dy\right]dx \le \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy\right]dx \le \int_a^b \left[\int_c^d t(x,y)\,dy\right]dx$$

$\Rightarrow$ las integrales:

$$\int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy \right] dx$$

$$\iint_{R_D} \tilde{f}(x,y)\, dA ,$$

ambas están acotadas por las integrales:

$$\iint_{R_D} s(x,y)\, dA \quad ; \quad \iint_{R_D} t(x,y)\, dA .$$

De este último hecho, y de i) se concluye que:

$$\left| \iint_{R_D} \tilde{f}(x,y)\, dA - \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x,y)\, dy \right] dx \right| < \varepsilon ,$$

para todo $\varepsilon \in R^{\#}$; $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \iint_{R_D} \tilde{f}(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx .$$

Dado que: $\displaystyle \iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{R_D} \tilde{f}(x,y)\, dA$,

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx .$$

Corolario 1.- Bajo las condiciones dadas en el teorema IX, resulta:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Demostración:

De los teoremas VII y VIII:

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \tilde{f}(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \quad (2)$$

para toda $x \in [a,b]$.

Substituyendo (2) en el resultado del teorema IX resulta:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \quad ✓$$

Corolario 2.- Si se intercambian x por y en las fórmulas anteriores, se obtiene:

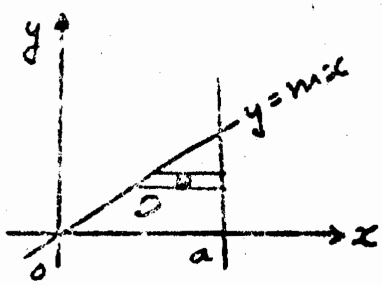
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy \quad ✓$$

Observación: En ocasiones puede resultar que al efectuar alguna de las integraciones en una integral iterada, ésta no puede ser expresada en términos de funciones elementales conocidas. En los ejemplos resueltos a continuación se comprueba que esta dificultad a veces puede ser superada si se cambia el orden en que se efectue la integración iterada.

Ejemplos: Calcular las siguientes integrales dobles:

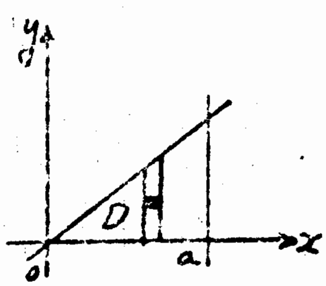
1.-) $I = \int_D \int e^{x^2}\,dx\,dy.$; siendo D la región triangular limitada por las rectas: $y = mx$; $y = 0$; $x = a$

Solución:



$$I = \int_0^{ma} \left[\int_{y/m}^{a} e^{x^2}\,dx \right] dy.$$

La integral dentro del paréntesis $\int e^{x^2}dx$ no puede ser expresada como función elemental; sin embargo, I puede calcularse si se cambia el orden de integración:



$$I = \int_0^{a} \left[\int_0^{mx} dy \right] e^{x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{a} mx e^{x^2}\,dx = \frac{m}{2}\int_0^{a} e^{x^2}(2x\,dx)$$

$$= \frac{m}{2}\left(e^{a^2} - 1\right)$$

2.-) $I = \int_D \int \operatorname{sen} x^2 \, dx \, dy$

Siendo D la misma región que en el problema anterior.

Solución

$$I = \int_0^{ma} \left[\int_{y/m}^{a} \operatorname{sen} x^2 \, dx \right] dy.$$

La integral $\int \operatorname{sen} x^2 dx$ no puede ser expresada como función elemental; sin embargo, si se cambia el orden de las diferenciales:

$$I = \int_0^a \left[\int_0^{mx} dy \right] \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

$$= \int_0^a mx \operatorname{sen} x^2 \, dx$$

$$= \frac{m}{2} \int_0^a 2x \operatorname{sen} x^2 \, dx = \frac{m}{2} \int_0^a \operatorname{sen} x^2 (2x\,dx)$$

$$= -\frac{m}{2} \cos x^2 \Big|_0^a$$

$$= \frac{m}{2} (1 - \cos a^2)$$

Algunas propiedades de las integrales dobles.-

1.- Si c es un número; siendo $f(x,y)$ integrable en una región cerrada D, entonces cf es integrable, y se verifica:

$$\iint_D c\,f(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA$$

2.- Si $f(x,y)$, $g(x,y)$ son funciones integrables, ambas en una región cerrada D:

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA \pm \iint_D g(x,y)\,dA$$

esta propiedad puede generalizarse a cualquier número finito de funciones integrables.

3.- Si $f(x,y)$ es integrable en una región cerrada D; teniéndose: $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in D$; designando por $A(D)$ el área de D, resulta:

$$m \cdot A(F) \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq M \cdot A(F)$$

4.- Si $f(x,y)$, $g(x,y)$ son funciones integrables en D; siendo $f(x,y) \leq g(x,y)$ para toda $(x,y) \in D$, se tiene:

$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$$

5.- Si la región cerrada D se divide en subregiones D_1 y D_2; siendo $f(x,y)$ continua en D:

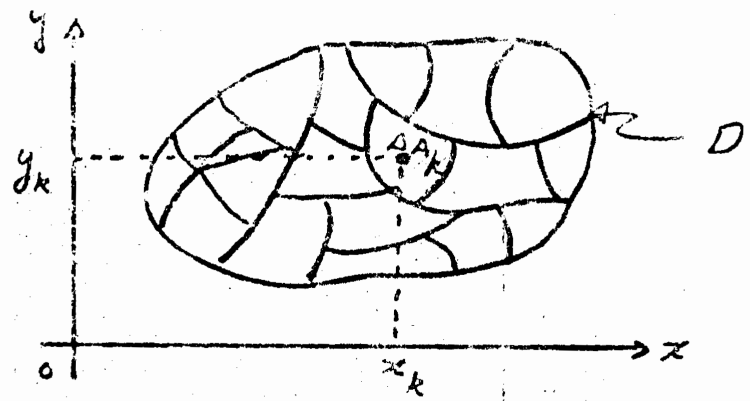
$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

Integral doble expresada como el límite de una suma.-

Definición.- Sea S un conjunto acotado en E^2. Se define como "diametro" de S; representado por:

$$\delta(S) = \sup\{\overline{Q_1Q_2} \mid Q_1 \in S;\ Q_2 \in S\}.$$

Subdividamos la región cerrada D en subregiones mediante una partición P, tal que las subregiones resultantes no sean necesariamente rectángulos.



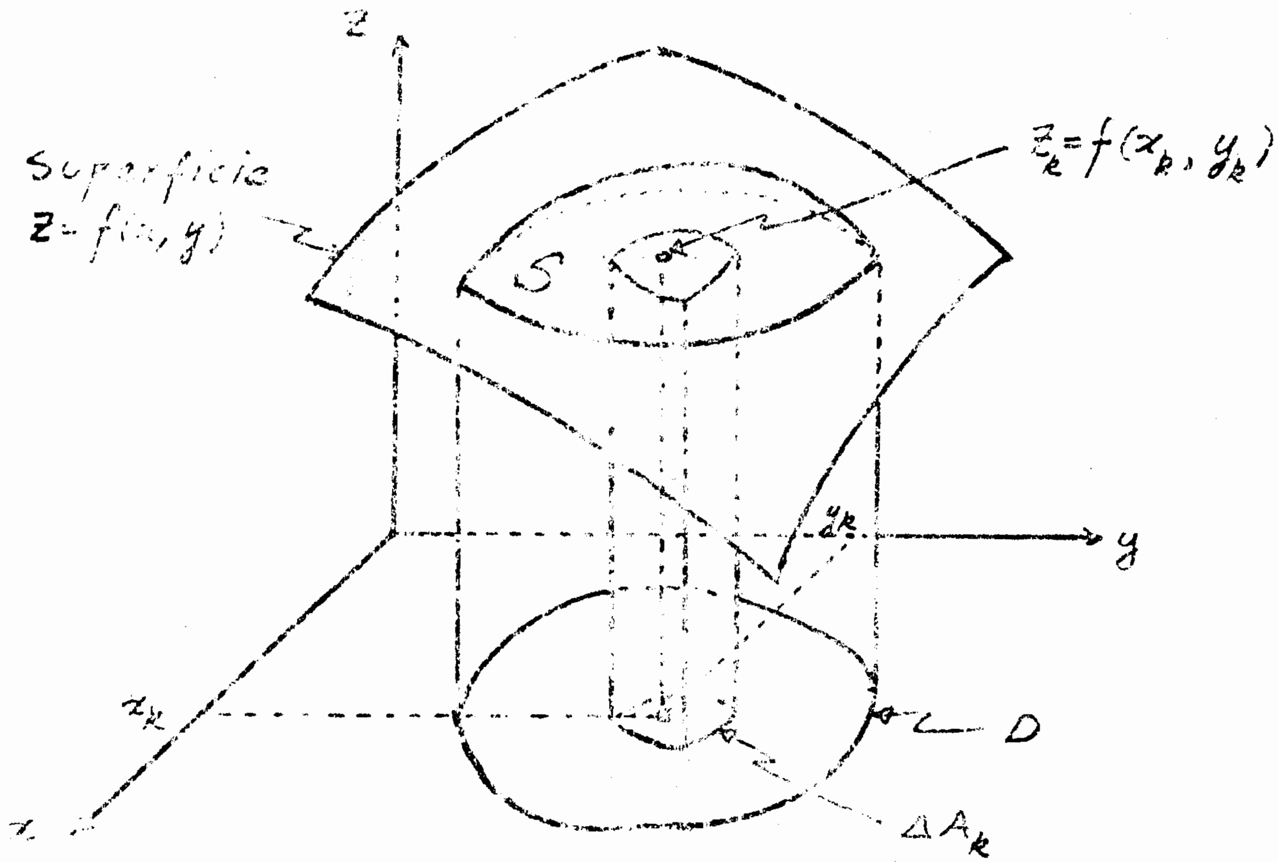
Sea $z = f(x,y)$ una función definida para todo $(x,y) \in D$. Si para cada sucesión de particiones de la región D, existe:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k \;;$$

Siendo δ el máximo diametro de las subregiones que define una partición P, este límite se define como la integral doble de f sobre la región D:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

Interpretación geométrica de la integral doble.-



$f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$ = volumen del prisma elemental

$$\Rightarrow \lim_{n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = V$$

V = volumen del cilindro limitado por la región D como base inferior, y como la base superior una porción de la superficie $z = f(x,y)$, definida por la generatriz del cilindro.

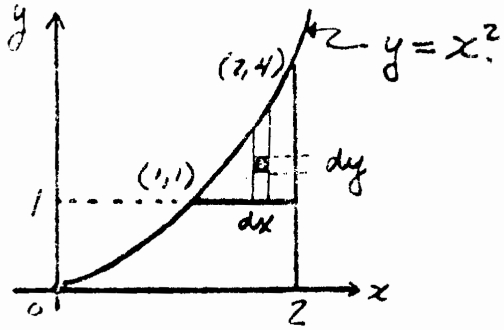
$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA$ es numéricamente igual al volumen del cilindro limitado por la superficie S, y el plano x,y

Ejemplos: Calcular las siguientes integrales dobles:

1.-) $\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\,dx\,dy$; en el plano x,y, limitada por: $y=x^2$, $x=2$, $y=1$ (empleando corolarios 1 y 2)

Solución:

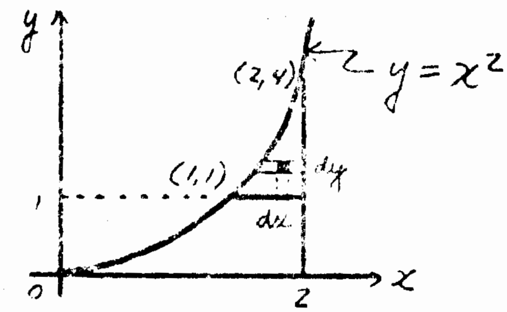
a)



$$\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=1}^{x^2} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_1^2 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_1^{x^2} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^4 - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{1006}{105}$$

b)



$$\int_{y=1}^{y=4}\int_{x=\sqrt{y}}^{2} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_1^4 \left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{\sqrt{y}}^{2} dy =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{8}{3} + 2y^2 - \frac{y^{3/2}}{3} - y^{5/2}\right) dy = \frac{1006}{105}$$

Hallar el volumen de la esfera de radio r con centro en el origen, empleando la noción de integral doble.

Solución.

$$V = \iint f(x,y)\,dx\,dy$$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \Rightarrow z = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

$$V = 8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

Por la naturaleza misma de este problema es más conveniente usar coordenadas polares

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(\rho,\theta)\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\,d\rho\,d\theta$$

$$\sqrt{r^2-x^2-y^2} = \sqrt{r^2-\rho^2} = f(\rho,\theta)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

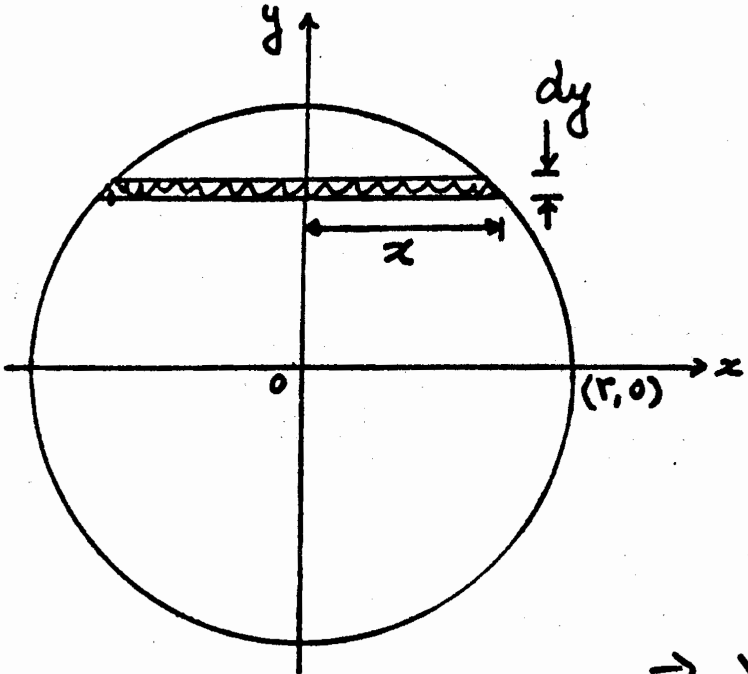
$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^r \sqrt{r^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{2}{3}(r^2-\rho^2)^{3/2}\right]_0^r d\theta$$

$$= \frac{1}{3}r^3\frac{\pi}{2} = \frac{1}{6}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

El resultado anterior, obtenido mediante una integral doble, puede calcularse con una integral sencilla, como sólido de revolución:



$$dV = \pi x^2 dy.$$

$$= \pi (r^2 - y^2) dy.$$

$$\frac{V}{2} = \int_0^r \pi (r^2 - y^2)\, dy$$

$$= \pi \left[r^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^r$$

$$= \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right]$$

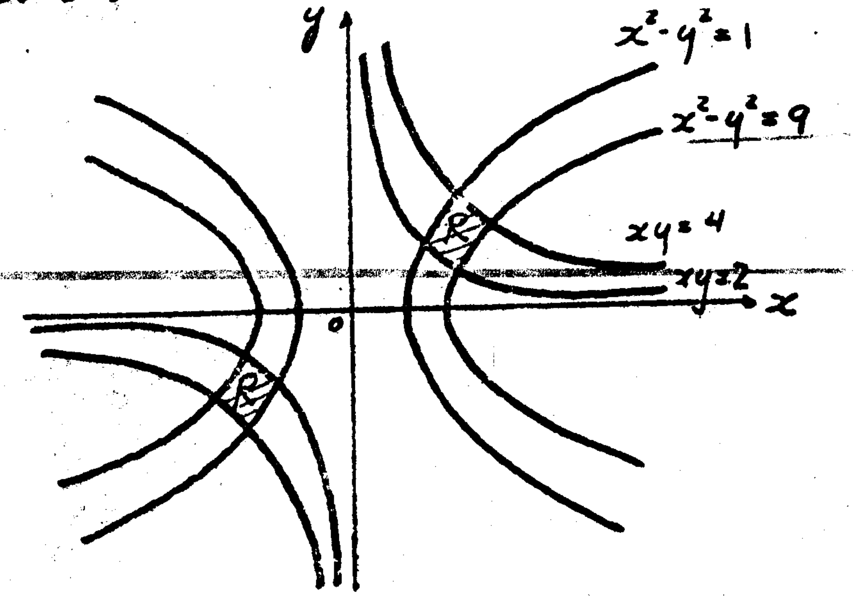
$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad ✓$$

Más adelante, al estudiar integrales triples, se podrá calcular el volumen de la esfera por un método más.

5.-) Determinar el momento polar de inercia de la región del plano xy limitada por las hipérbolas:

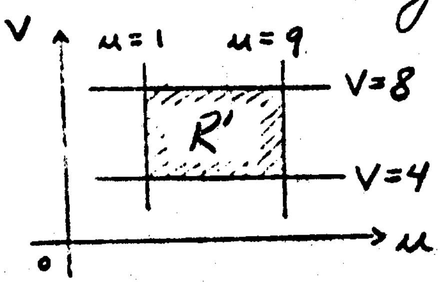
$x^2-y^2=1$; $x^2-y^2=9$; $xy=2$; $xy=4$.

Solución:



Hagamos el siguiente cambio de variable:

$x^2-y^2=u$; $2xy=v$; con lo cual u y v resultan constantes, y la región R se transforma en la región rectangular R':



$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{R'} (x^2+y^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$$

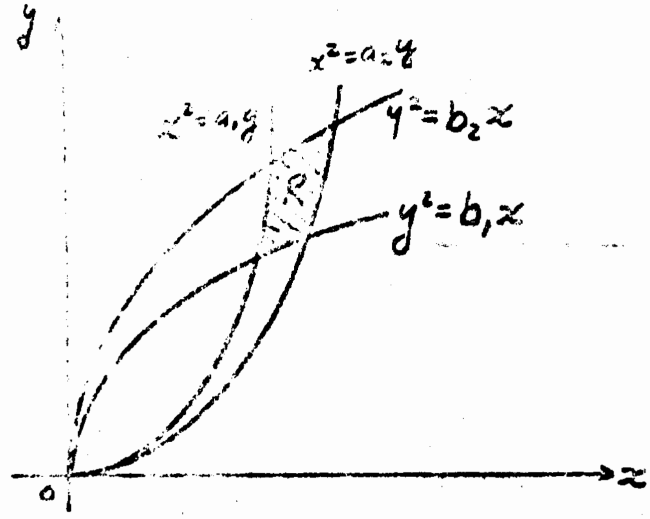
$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{u=1}^{u=9}\int_{v=4}^{v=8} (x^2+y^2)\frac{du\,dv}{4(x^2+y^2)} = \int_1^9\int_4^8 \frac{du\,dv}{4} = 8$$

4.- Calcular el área del cuadrilátero curvilíneo limitado por los arcos de parábola:

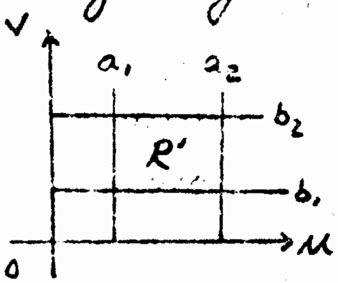
$x^2 = a_1 y$; $x^2 = a_2 y$; $y^2 = b_1 x$; $y^2 = b_2 x$.

$(0 < a_1 < a_2 \; ; \; 0 < b_1 < b_2)$

Solución:



Haciendo el siguiente cambio de variable: $x^2 = uy$; $y^2 = vx$; resultan u y v constantes.



$$\iint_R dx\,dy = \iint_{R'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$u = \frac{x^2}{y} \; ; \; v = \frac{y^2}{x} \Rightarrow \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{3} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} du\,dv = \frac{1}{3}(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

5.-) Considerando las coordenadas u, φ:

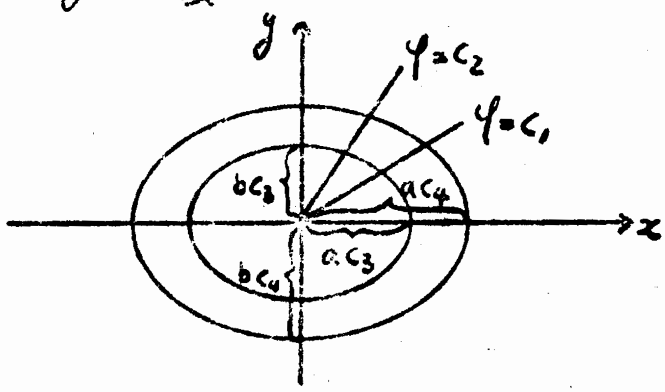
$$x = a u \cos\varphi \qquad ; \quad \begin{cases} u \geq 0 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$
$$y = b u \operatorname{sen}\varphi$$

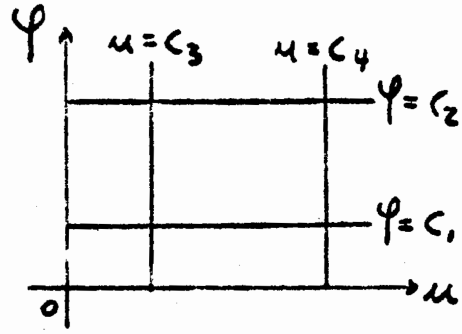
Calcular: a) area; b) momento de inercia respecto al eje x, de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ①

Solución:

Observando que las curvas u = constantes son elipses de ecuación $\frac{x^2}{(au)^2} + \frac{y^2}{(bu)^2} = 1$ ②;

asimismo: φ = constante, define las semirrectas $y = \frac{b}{a} x \tan\varphi$





$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -au\operatorname{sen}\varphi \\ b\operatorname{sen}\varphi & bu\cos\varphi \end{vmatrix} = abu(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)$$

$$\Rightarrow dA = ab\,u\,du\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = ab \iint_{R'} f(au\cos\varphi, bu\operatorname{sen}\varphi)\,u\,du\,d\varphi.$$

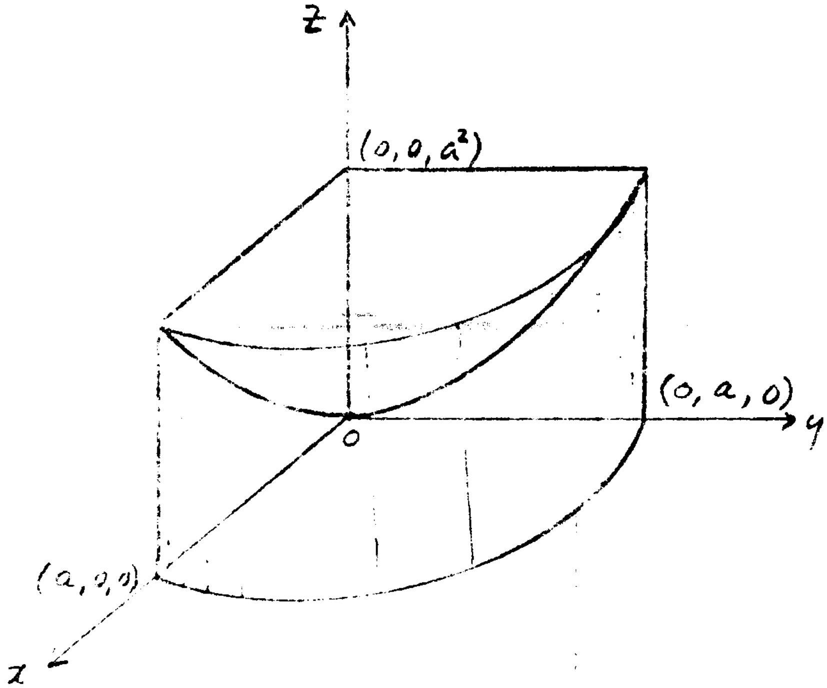
a) $A = ab\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\,du\,d\varphi = \pi ab$; (de ① y ② $\Rightarrow u = 1$)

b) $I_x = \iint y^2\,dx\,dy = \iint ab(b^2u^2\operatorname{sen}^2\varphi)\,u\,du\,d\varphi$

$$= ab^3\int_0^{2\pi}\int_0^1 u^3\,du\,\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}ab^3$$

6.-) Hallar el volumen limitado por el plano xy; el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

Solución:



$$V = \iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Empleando coordenadas polares: $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| d\rho\,d\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\,(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = \rho$$

$$\Rightarrow \frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^2\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^4}{8}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi a^4}{2}$$

Observación 1) Si la superficie $z=f(x,y)$ toma valores negativos ($z<0$) los volúmenes limitados por el plano xy, que quedan debajo de éste, se considerarán negativos.

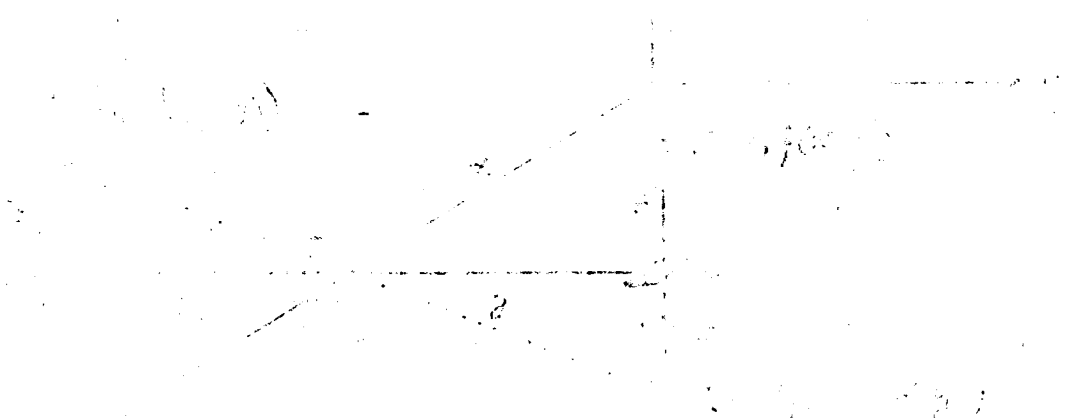
Observación 2) Considerando simetrías en [illegible] O del plano xy así como si la función $f(x,y)$ es impar en x ó en y o en ambas variables, puede llegarse a conclusiones como las [illegible]

$$\iint f(x,y)\,dA = 0$$

en uno de los siguientes casos:

	$f(x,y) \equiv$	$f(x,y)$ función impar en:	D simétrica con respecto a:
i)	$-f(-x,y)$	x	eje Oy
ii)	$-f(x,-y)$	y	eje Ox
iii)	$-f(-x,-y)$	x, y	[illegible]

[illegible] el caso [illegible]



De acuerdo con el esquema anterior, se ve que si $f(x,-y) = -f(x,y)$, resulta que los volúmenes a la izquierda del eje ox anulan a los volúmenes a la derecha del mismo eje; ya que unos serán positivos en tanto que los simétricos respecto al eje ox serán negativos. Por ser la región D simétrica respecto al eje ox, resulta que la suma total de volúmenes elementales es cero.

---

b) $$\iint_D f(x,y)\,dA = 2\iint_{D/2} f(x,y)\,dA$$

en cada uno de los siguientes casos:

$f(x,y) \equiv$	$f(x,y)$ función par en:	D simétrica con respecto a:
$f(-x,y)$	x	eje oy
$f(x,-y)$	y	eje ox
$f(-x,-y)$	x, y	ox y oy

---

c) $$\iint_D f(x,y)\,dA = 4\iint_{D/4} f(x,y)\,dA$$

si: $f(x,y) \equiv f(-x,y) \equiv f(x,-y) \equiv f(-x,-y)$; siendo la región D simétrica respecto a los ejes ox y oy.

---

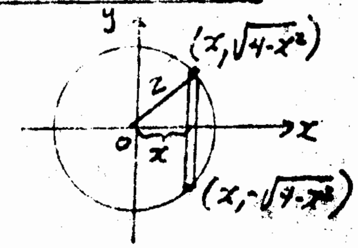
d) $$\iint_D f(x,y)\,dA = 8\iint_{D/8} f(x,y)\,dA$$

si: $f(x,y) \equiv -f(x,y) \equiv f(-x,y) \equiv -f(-x,y) \equiv f(x,-y) \equiv -f(x,-y) \equiv f(-x,-y) \equiv -f(-x,-y)$; siendo D simétrica respecto a ambos ejes ox y oy.

Ejemplo: 1) Calcular $I=\iint(21-12y)\,dA$ en la región circular $x^2+y^2=4$.

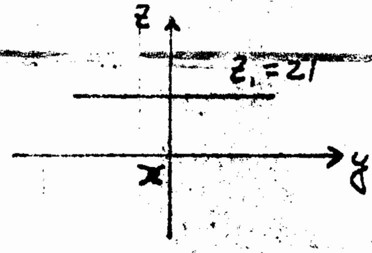
Solución:

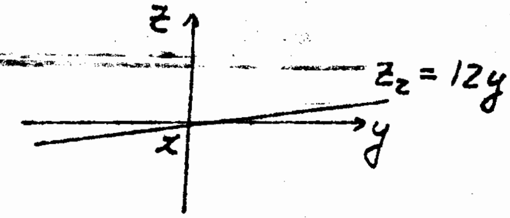
1er método:



$$\Rightarrow I=\int_{x=-2}^{2}\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(21-12y)\,dy\,dx$$

si hacemos $Z_1=21$; $Z_2=12y$





$\Rightarrow$ $Z_1=21$ es función par ; $Z_2=12y$ es función impar

$\Rightarrow \iint_D 12y\,dy\,dx=0$; $21\iint_D dy\,dx = 4\left(21\iint_{D/4}dy\,dx\right)$

$\therefore I=84\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}dy\,dx=84\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=$

$$84\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+\frac{4}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2=84\left(2\frac{\pi}{2}-0\right)=\underline{84\pi}$$

2º método: en coordenadas polares: $dA=r\,dr\,d\theta$

$$I=84\int_0^2\int_0^{\pi/2}r\,dr\,d\theta=84\frac{\pi}{2}\int_0^2 r\,dr=42\pi\frac{4}{2}=\underline{84\pi}$$

3er método:

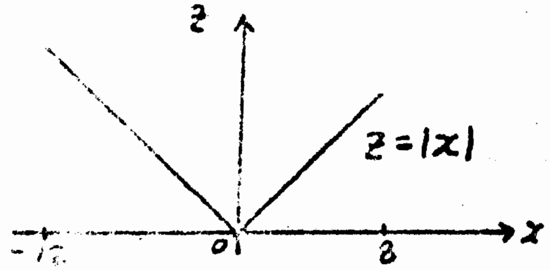
$I=84\iint_{D/4}dA = 84$ área de $D/4$

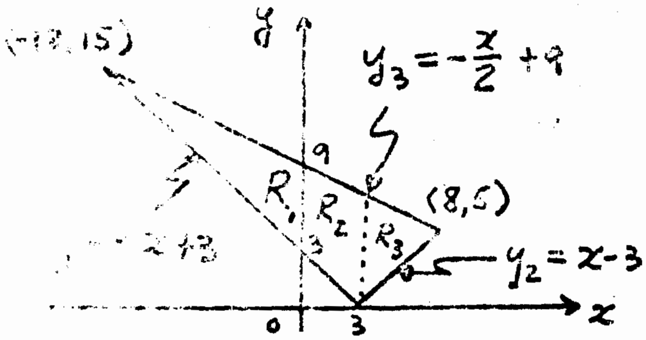
$\therefore 84\frac{\pi r^2}{4}=84\frac{\pi 4}{4}=84\pi$

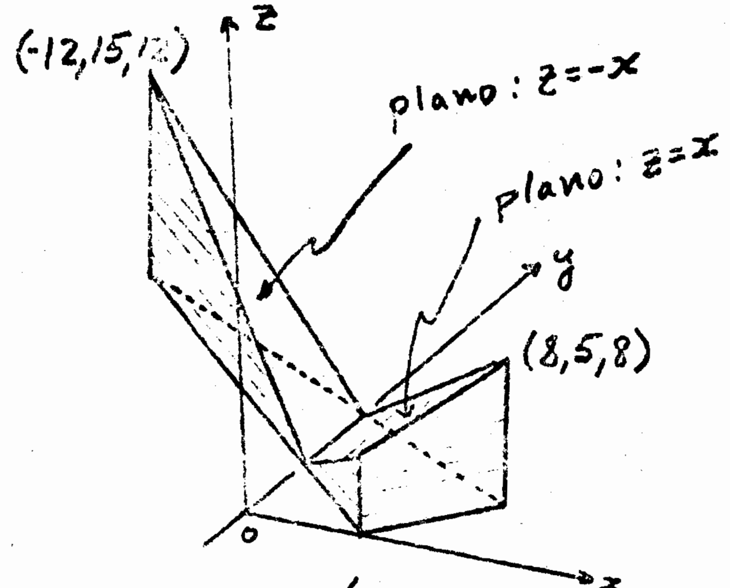
$\therefore \underline{I=84\pi}$

3). Calcular: $I=\iint_R |x|\,dA$; siendo R la región triangular arriba de: $y=|x-3|$; limitada por la recta: $y+\frac{1}{2}x=9$

Solución:







Geométricamente: I = volumen

Para poder efectuar la integración, es necesario subdividir la región R en R_1, R_2, R_3:

$$I=\int_{-12}^{0}\int_{-x+3}^{-\frac{x}{2}+9}-x\,dy\,dx+\int_{0}^{3}\int_{-x+3}^{-\frac{x}{2}+9}x\,dy\,dx+\int_{3}^{8}\int_{x-3}^{-\frac{x}{2}+9}x\,dy\,dx$$

$$I_1=\int_{-12}^{0}-x\left[-\frac{x}{2}+9+3-3\right]=\int_{-12}^{0}-\left(\frac{x^2}{2}+6x\right)dx=-\left(\frac{x^3}{6}+3x^2\right)_{-12}^{0}=144$$

$$I_2=\left(\frac{x^3}{6}+3x^2\right)_0^3=\frac{27}{6}+27=27\frac{7}{6}=\frac{63}{2}$$

$$I_3=\int_3^8 x\left(-\frac{x}{2}+9-x+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{2}+6x^2\right)_3^8=\frac{175}{2}$$

$$I=I_1+I_2+I_3=144+\frac{63}{2}+\frac{175}{2}=263$$

$$I=263$$

3) Calcular:

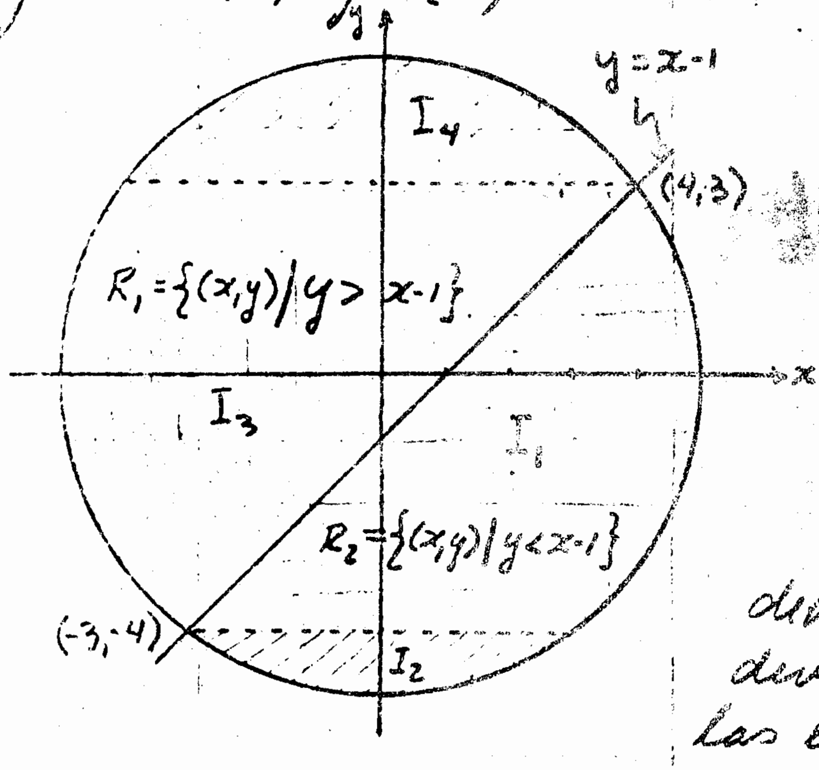
$$I = \iint_R |x-y-1| \, dA$$

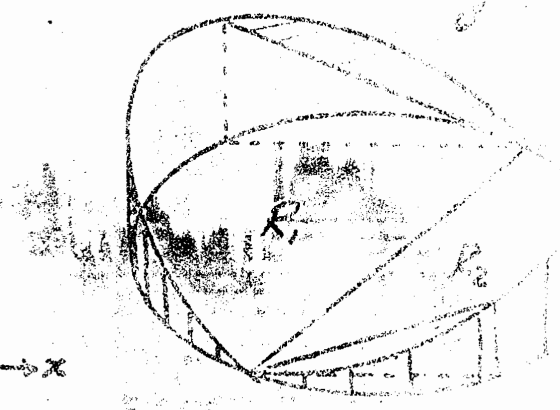
en la región : $R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 25\}$

Solución :

$$|x-y-1| = \begin{cases} x-y-1, \text{ si } x-y-1>0, \Rightarrow y<x \ldots \\ -x+y+1, \text{ si } x-y-1<0, \Rightarrow y>x \ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La región R debe dividirse en 2 sub-... giones R_1 y R_2, mediante la recta y...





(como volum...

Las regiones R... deben, a su vez, ser... divididas por medio... las líneas de puntos, a f... de poder efectuar las inte... graciones: $\iint_R |x-y-1| \, d\ldots$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$I = \int_{-4}^{4}\left(\int_{y+1}^{\sqrt{25-y^2}}(x-y-1)\,dx\right)dy + \int_{-5}^{-4}\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}}(x-y-1)\,dx\right)\ldots$$

$$+ \int_{-4}^{3}\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{y+1}(-x+y+1)\,dx\right)dy + \int_{3}^{5}\left(\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}}(-x+y+1)\ldots\right.$$

Producto de dos integrales definidas.-

Teorema:- El producto de dos integrales definidas es igual a una integral doble definida cuyo integrando es igual al producto de los integrandos de las integrales factores; siempre y cuando ninguno de éstos contenga la variable de la otra integral; siendo los límites los correspondientes de las integrales factores:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx \cdot \int_{y_0}^{y_1} G(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} F(x)G(y)\,dx\,dy.$$

$F(x)$ no es función de y.
$G(y)$ no es función de x.

Demostración:
Por hipótesis: $\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = f(x)$ ①

$$\Rightarrow f(x)\cdot\int_{y_0}^{y_1} G(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} f(x)\,G(y)\,dy$$

de ①:

$$\int_{y_0}^{y_1} f(x)\,G(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1}\left[\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx\right]G(y)\,dy =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} F(x)G(y)\,dx\,dy \quad ✓$$

Ejemplos: Calcular las siguientes integrales:

1.) Integral de Gauss (Euler-Poisson)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = k$$

Formando el producto de las dos últimas integrales:

$$\frac{k^2}{4} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy.$$

transformando a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \ ; \ y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \iint_{R'} e^{-r^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\, d\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r$$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{4} = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\int_0^{r} e^{-r^2}(-2r\,dr) =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{r\to\infty}\left[e^{-r^2}\right]_0^r = -\frac{\pi}{4}\lim_{r\to\infty}\left[e^{-r^2} - 1\right] = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow k^2 = \pi \quad \therefore \quad k = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

2) Integrales de Fresnel:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Demostración:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$\therefore \quad e^{-ix^2} = \cos x^2 - i \operatorname{sen} x^2 \quad ①$$

haciendo $ix^2 = t^2 \Rightarrow x = \frac{t}{\sqrt{i}} = i^{-\frac{1}{2}} t$ ②

sabiendo que: $i = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

del teorema de De Moivre:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

$$\Rightarrow i^{-\frac{1}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad ③$$

de ② y ③:

$$x = \frac{1-i}{\sqrt{2}} t \Rightarrow dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} dt \quad ④$$

de ① y ④:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx - i\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt - \frac{i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt$$

igualando partes reales y complejas, y teniendo en cuenta el resultado del problema 1:) anterior:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad ✓$$

3) $\int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy$

Solución:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sen}x^2 \cos y^2\,dx\,dy + \int_0^\infty\int_0^\infty \cos x^2 \operatorname{sen} y^2\,dx\,dy$$

De acuerdo con el último teorema, podemos considerar las integrales del segundo miembro como producto de integrales:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sen}x^2 \cos y^2\,dx\,dy = \int_0^\infty \operatorname{sen}x^2\,dx \int_0^\infty \cos y^2\,dy.$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \cos x^2 \operatorname{sen} y^2\,dx\,dy = \int_0^\infty \cos x^2\,dx \int_0^\infty \operatorname{sen} y^2\,dy.$$

Sabiendo que las integrales de Fresnel:

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_0^\infty \operatorname{sen}x^2\,dx \int_0^\infty \cos y^2\,dy =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}$$

Integrales triples:-

Los conceptos estudiados anteriormente, relativos a integrales dobles pueden generalizarse para dimensiones mayores, definiéndose de este modo integrales múltiples; en particular, a continuación se define la integral triple:

$$\iiint f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \left\{ \int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{r(x,y)}^{s(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right\} dx$$

Estando la región S definida mediante las siguientes desigualdades:

$$a \leq x \leq b$$

$$p(x) \leq y \leq q(x)$$

$$r(x,y) \leq z \leq s(x,y)$$

Es importante observar que en la definición anterior se ha considerado una partición tal que al efectuar la primera integración, se considera que las variables y y x son constantes; en tanto que en la segunda integración x debe considerarse como constante.

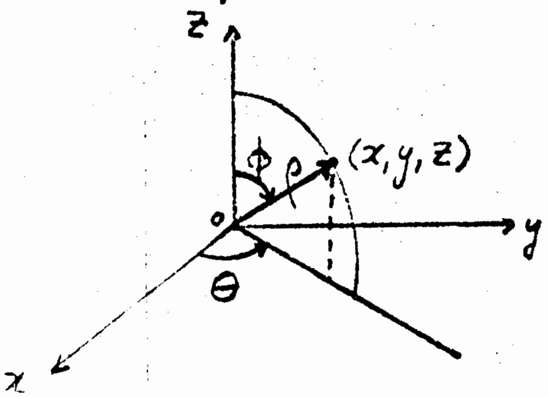
Ejemplos:

1) Mediante una integral triple, calcular el volumen de la esfera de radio r.

Solución:

$$V = \iiint_S dx\,dy\,dz$$

Empleando coordenadas esféricas:



$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$
$$z = \rho \cos\phi$$

$$\iiint_S dx\,dy\,dz = \iiint_{S'} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\operatorname{sen}\phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \operatorname{sen}\phi$$

$$\Rightarrow \frac{V}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$= \frac{r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -(0-1)\, d\theta = \frac{\pi r^3}{6}$$

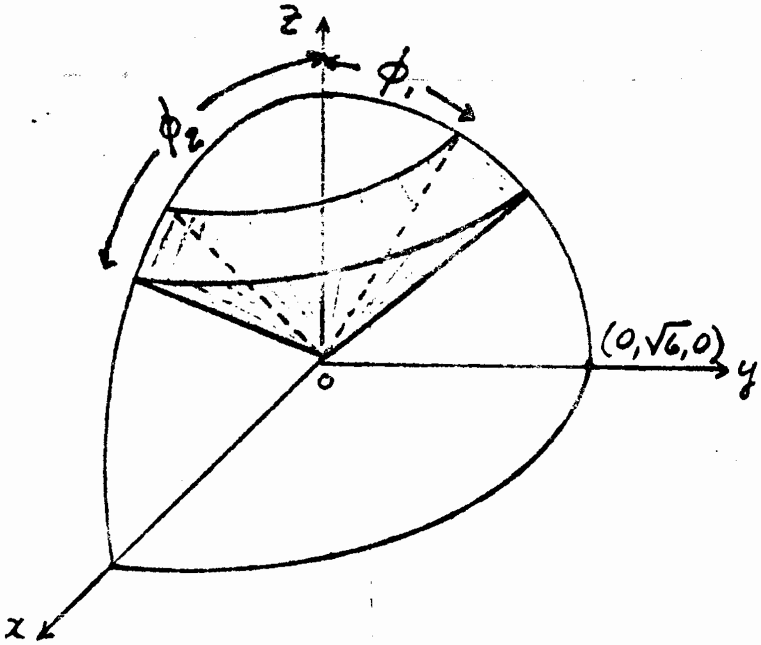
$$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2) Calcular la integral triple de:

$$f(\rho,\phi,\theta)=\frac{1}{\rho}$$

sobre la región S del primer octante, limitada por los conos $\phi=\frac{\pi}{4}$; $\phi=\tan^{-1}2$ y la esfera $\rho=\sqrt{6}$.

Solución:



$$\iiint_S \frac{1}{\rho}\,dV=\iiint_S \frac{1}{\rho}\,dx\,dy\,dz$$

$$=\iiint_{S'} \frac{1}{\rho}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan^{-1}2}\int_0^{\sqrt{6}} \rho \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\tan^{-1}2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta=-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\theta$$

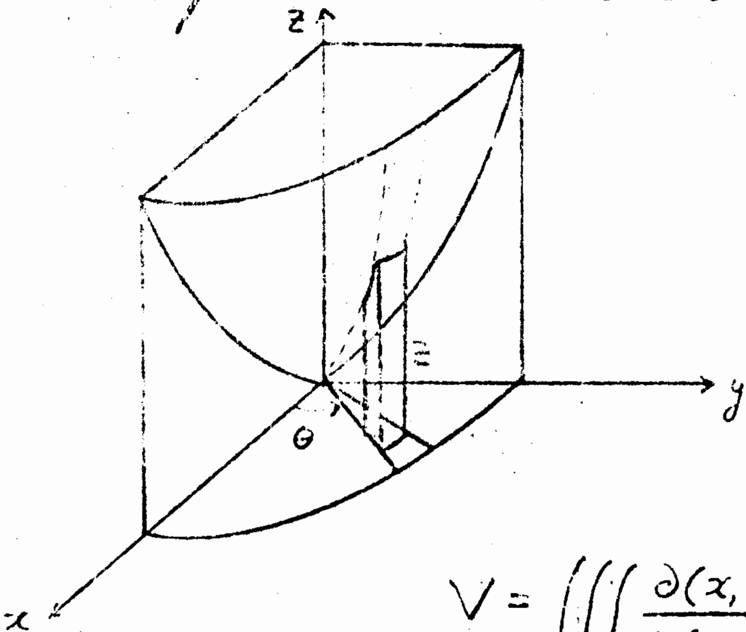
$$=\frac{3}{2}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

3) Calcular el volumen limitado por el plano xy; el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

Solución:

$$V = \iiint_S dx\, dy\, dz$$

Empleando coordenadas cilíndricas:



$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen}\theta$$
$$z = z$$

$$V = \iiint_{S'} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)}\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\frac{V}{4} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{a} \int_{z=0}^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} \rho^3\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^4}{4}\, d\theta$$

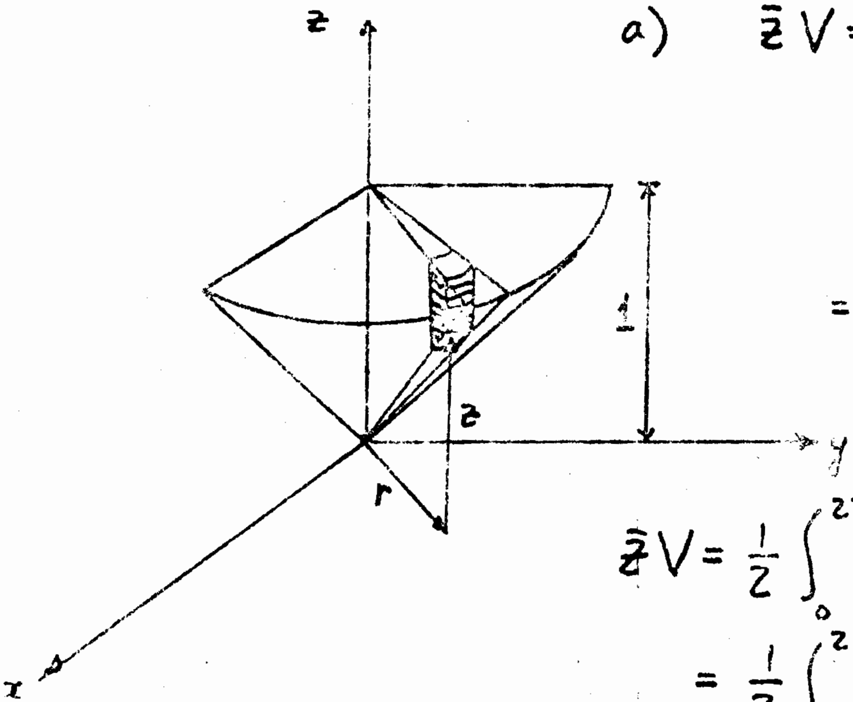
$$\Rightarrow V = \frac{\pi a^4}{2}$$

Obsérvese que el resultado de los problemas 1) y 3) concuerda con lo obtenido empleando integral doble.

4) Calcular la coordenada centroidal $\bar{z}$ del cono: $x^2+y^2=z^2$, limitado por los planos $z=0$; $z=1$:

a) empleando coordenadas cilíndricas.
b) empleando coordenadas esféricas
c) mediante una integral sencilla.

Solución:



a) $\bar{z}V = \iiint z\,dz\,dx\,dy.$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 z\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

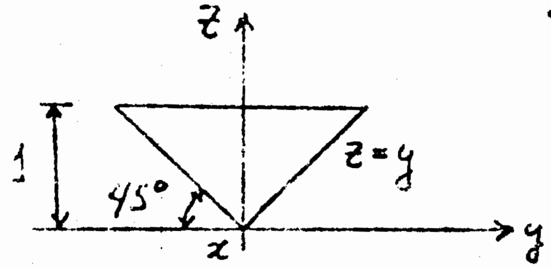
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_r^1 r\,dr\,d\theta.$$

$$\bar{z}V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_0^1 d\theta$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Cálculo del volumen V:

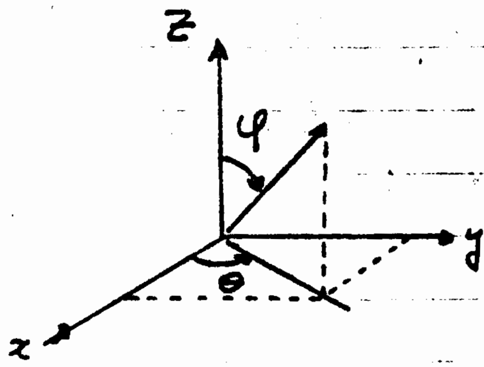


mediante integral sencilla, como sólido de revolución:

$$V = \int \pi z^2 dy = \pi\int_0^1 z^2 dz = \frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ a) $\quad \bar{z} = \dfrac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3}{4}$

b) $\bar{z} V = \iiint z \, dz \, dx \, dy.$



$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$
$y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$
$z = \rho \cos \varphi.$

$$dz\,dx\,dy = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} d\rho\, d\theta\, d\varphi = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

$$\frac{1}{4}\bar{z} V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi\, d\theta.$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos^{-2}\varphi}{-2}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\frac{2}{4}} - 1\right) d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow \bar{z} V = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \bar{z} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore \bar{z} = \frac{3}{4} \checkmark$$

$$\bar{z} V = \int z \pi z^2 \, dy = \pi \int_0^1 z^3 dz$$

$$= \pi \frac{z^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{3}{4} \checkmark$$

<u>Integrales múltiples impropias.-</u>

En la definición de las integrales múltiples dada anteriormente, se supuso que la región en que se integra es finita, y que el integrando es finito en el interior de la región.

I.- Consideraremos en seguida integrales denominadas impropias debido a que el integrando se hace infinito en un punto dentro de una región acotada.

Ejemplo:

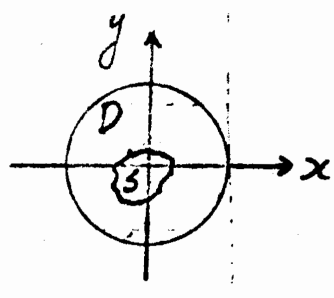
Sea: $f(x,y) = \dfrac{xy-1}{x^2+y^2}$

Considerada en la region $x^2+y^2 \leq 9$

Esta función es hace infinita en el origen.

Si S es un entorno del origen, observamos que la función $f(x,y)$ es continua en la región $D-S \Rightarrow$ puede definirse la integral:

$$\iint_{D-S} f(x,y)\,dA$$



Sea S_n una sucesión de regiones cerradas conteniendo cada una el punto de discontinuidad; tal que $\delta(S_n) \to 0$ si $n \to \infty$.

Se define la integral de $f(x,y)$ en D, como el límite L de las integrales con-

sideradas en $R-S_n$, cuando el límite existe.
Puesto que pueden existir muchas maneras de escoger la sucesión S_n, debe tenerse que el valor del límite L sea el mismo para todas las elecciones posibles de $\{S_n\}$.

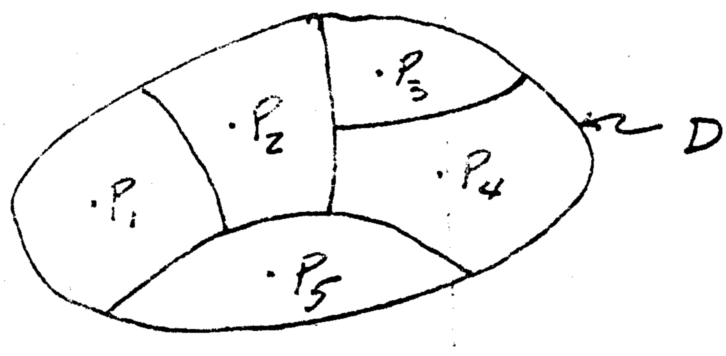
Expresando lo anterior en forma precisa: para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que:

$$\left| \iint_{D-S} f(x,y) - L \right| < \varepsilon$$

siendo S una región cerrada que contenga el punto de discontinuidad, y cuyo diámetro $\delta(S)<\delta$.

Si se verifica lo anterior, se dice que "existe" la integral impropia $\iint_D f(x,y)\,dA$; siendo su valor L.

Si una función se hace infinita en un número finito de puntos $P_1, P_2, \dots P_k$, dentro, ó en el contorno, de la región de integración; siendo continua en todos los demás puntos de D, entonces se subdivide D mediante una partición tal que cada subregión D_i contenga un punto P_i:



Si la integral impropia correspondiente a cada subregión D_i existe, el valor de la integral impropia en D será igual a la suma:

$$L = \sum_{i=1}^{k} L_i$$

Puede demostrarse que el valor de la integral no depende de la partición que se haya elegido.

En general, es muy difícil establecer la existencia de una integral impropia a partir de la definición dada. En seguida se expondrán teoremas que son útiles, no sólo para establecer la existencia de integrales impropias, sino que indican la forma de calcular la integral.

Sea D una región cerrada; siendo P un punto en D.

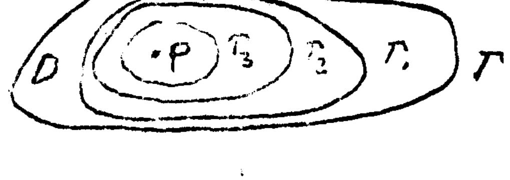
Se define una sucesión creciente de regiones envolviendo á P, como la sucesión de regiones cerradas $H_1, H_2, \ldots, H_n$ tales que:

i) toda $H_n \in D-P$

ii) $H_n \subset H_{n+1}$ para toda n

iii) Si D' es cualquier conjunto cerrado contenido en $D-P$, existe un entero n tal que $D' \subset H_n$.

Puesto que H_n es cerrada, y no contiene al punto P, tampoco contiene un entorno de P.



En la figura anterior, puede escogerse
H_1 como la parte de D entre Γ y Γ_1;
H_2 " " " " " " Γ y Γ_2;
H_3 " " " " " " Γ y Γ_3; etc.

Supondremos, en lo que sigue, que $\{H_n\}$ es una sucesión creciente de regiones envolviendo a P como se acaba de describir.

<u>Teorema I.</u> Si $f(x,y) \geq 0$ en una región D cerrada y acotada; siendo $f(x,y)$ continua en $D-P$ (donde P es un punto de D); si existe un número M tal que:

$$\iint_{D'} f(x,y)\,dA \leq M \quad \text{para toda región}$$

cerrada $D' \subset D-P$, $\Rightarrow$ la integral impropia de $f(x,y)$ en D existe; además:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{H_n} f(x,y)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA$$

Demostración:

Por ser $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow$ para cada n:

$$\iint_{H_{n+1}} f(x,y)\,dA = \iint_{H_n} f(x,y)\,dA + \iint_{H_{n+1}-H_n} f(x,y)\,dA \geq \iint_{H_n} f(x,y)\,dA.$$

$\Rightarrow \iint_{H_n} f(x,y)\,dA$ es un sucesión monótona creciente y acotada por M $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{H_n} f(x,y)\,dA = L$$

Si $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ existe un entero N tal que:

$$L - \varepsilon < \iint_{H_{N+1}} f(x,y)\,dA \le \iint_{H_n} f(x,y)\,dA \le L \quad ; \quad n \geqq N+1$$

Sea D' cualquier región cerrada tal que:

$$H_{N+1} \subset D' \subset D - P$$

Puesto que $P \notin D' \Rightarrow$ existe un H_n tal que $D' \subset H_n$ para alguna n.

$$\therefore\ L - \varepsilon < \iint_{H_{N+1}} f(x,y)\,dA \le \iint_{D'} f(x,y)\,dA \le \iint_{H_n} f(x,y)\,dA \le L$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\Rightarrow$

$$L = \iint_{D} f(x,y)\,dA \quad \checkmark$$

<u>Corolario</u>.- Si f, D, P son como en el teorema I, y si:

$$\iint_{H_n} f(x,y)\,dA \le M \quad \text{para toda } n$$

$\Rightarrow$ la integral impropia de f en D existe, y

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{H_n} f(x,y)\,dA = L.$$

Se dice que la integral converge si la integral impropia existe; si no existe, se dice que la integral diverge.

Ejemplo 1) Establecer la convergencia ó divergencia de:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^p}}\, dA \quad ; \; p>0$$

siendo D los puntos: $x^2+y^2 \leq 1$

Solución:

El integrando es discontinuo en $(0,0)$. Escojamos H_n tal que $\frac{1}{n} \leq r \leq 1$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Usando coordenadas polares:

$$\iint_{H_n} \frac{1}{r^p}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{-p}\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2-p}\left(1-\dfrac{1}{n^{2-p}}\right) ; \text{ si } p<2 \\ 2\pi \ln n ; \text{ si } p=2 \\ \dfrac{2\pi}{p-2}\left(n^{p-2}-1\right) ; \text{ si } p>2 \end{cases}$$

Por el corolario, la integral converge si $p<2$, puesto que $r^{-p}>0$.

No se cumplen las condiciones de la definición de la existencia de la integral impropia si $p \geq 2$

Las ideas expuestas pueden extenderse a integrales triples impropias, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

2) $\displaystyle\iiint_D \frac{dV}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^p}}$; $p>0$

siendo $D: x^2+y^2+z^2 \leq 1$

Solución:

Sea $R_n: \frac{1}{n} \leq \rho \leq 1$; $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Empleando coordenadas esfericas:

$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi$

$y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

$z = \rho \cos\phi$

calculando el Jacobiano, resulta:

$$\iiint_D \frac{1}{\rho^p}\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1/n}^{1} \frac{1}{\rho^p}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-p}\left(1-\dfrac{1}{n^{3-p}}\right) ; \text{ si } p<3 \\ 4\pi \ln n \ ; \text{ si } p=3 \\ \dfrac{4\pi}{p-3}\left(n^{p-3}-1\right) ; \text{ si } p>3 \end{cases}$$

Se concluye que la integral es:

$$\begin{cases} \text{convergente, si } p<3 \\ \text{divergente, si } p\geq 3 \end{cases}$$

Es posible definir integrales impropias para funciones que son discontinuas a lo largo de un arco de curva C; por ejemplo:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^3-y}}\, dA$$

Esta integral es discontinua en el arco de parábola cúbica C: $y = x^3$.

Para definir integrales impropias de este tipo, es necesario generalizar el teorema I anterior, cosa que sale del alcance del programa del curso.

Ejemplo 3) $\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}}$

Siendo D el cuadrado: $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Solución:

El integrando es discontinuo a lo largo de $x=0$. Excluyendo una pequeña franja vertical:

$$\iint_{D'} \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}} = \int_0^1 y\,dy \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 1-\sqrt{\varepsilon}$$

si $\varepsilon \to 0$ el límite es $1 \Rightarrow$

$$\iint_D \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{x}} = 1$$

II.- Integrales múltiples consideradas en regiones que no están acotadas.-

Definición.- Sea D una región no acotada en la cual f es continua. Se dice que la integral impropia de f en D existe $\Leftrightarrow$ puede hallarse un número K tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe una región acotada cerrada $D_1 \subset D$ con la siguiente propiedad:

$$\left| \iint_{D_1} f(x,y)\, dA - K \right| < \varepsilon$$ para toda región acotada cerrada D', donde $D_1 \subset D' \subset D$.

En regiones D no acotadas, $\{H_n\}$ se definen como una sucesión creciente de regiones que llenan D, a la sucesión de regiones acotadas cerradas D, con las siguientes propiedades:

i) $H_n \subset H_{n+1}$, para toda n.

ii) Si D' es cualquier región acotada en D, entonces existe un entero n tal que $D' \subset H_n$

Con esta definición de la sucesión $\{H_n\}$ puede formularse un teorema análogo al teorema I anterior, así como a sus corolarios, para integrales impropias consideradas en regiones D que no están acotadas.

Ejemplo 1) Integral de Cayley:

$$\iint_D \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Siendo D la región: limitada por el primer cuadrante círculo: $x^2+y^2 \leq R^2$; $0<R<\infty$

Solución:

a) Sea D_n el cuadrado $0 \leq x \leq n$; $0 \leq y \leq n$; siendo D' una región acotada cerrada en D

$$\iint \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^n\int_0^n (\operatorname{sen} x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \operatorname{sen} y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^n \operatorname{sen} x^2\,dx \int_0^n \cos y^2\,dy + \int_0^n \cos x^2\,dx \int_0^n \operatorname{sen} y^2\,dy$$

Sabiendo que la integral de Fresnel vale $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$;

$$\iint \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx \int_0^\infty \cos x^2\,dx = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

b) Sea D_n el círculo: $x^2+y^2 = R^2$.

Pasando a coordenadas polares

$$\iint \operatorname{sen}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int \int_0^R (\operatorname{sen} r^2)\, r\,dr = \frac{\pi}{4}(1-\cos R^2)$$

[illegible] $R \to \infty$, el límite [illegible] [illegible] integral de [illegible] [illegible]

2). Integral de Gauss: $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$

Solución:

Observando que:

$$\left(\int_0^n e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^n\int_0^n e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dA$$

Siendo R_n el cuadrado: $0 \leq x \leq n$; $0 \leq y \leq n$; si D es todo el primer cuadrante, y D' es una región cerrada acotada en D.

Para n lo suficientemente grande, $D' \subset D_n$:

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = M = \lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} e^{-(x^2+y^2)}dA$$

$$\iint_{D'} e^{-(x^2+y^2)}dA \leq M$$

Si G_n es un cuarto de círculo, en coordenadas polares: $0 \leq \theta \leq \pi/2$; $0 \leq r \leq n$:

$$\iint_{G_n} e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^n e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}\left[-e^{-r^2}\right]_0^n$$

Si $n \to \infty$, el límite es $\pi/4$

$$\Rightarrow M = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3) Determinar los valores que deben tomar $a, b, c \in R^{\#}$, de modo que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = 1$$

Solución:

Con el fin de reducir I á la forma de la integral de Gauss, hagamos:

$$u^2+v^2 = ax^2+2bxy+cy^2$$
$$= \frac{1}{a}(ax+by)^2 + \left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2$$

donde $a>0$, puesto que:

$$u = \frac{ax+by}{\sqrt{a}} \quad ; \quad v = y\sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}$$

Calculando el Jacobiano de la Transformación:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \sqrt{ac-b^2}\,.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} = 1$$

En resumen, las condiciones buscadas son:

$$\begin{cases} i) & a>0 \\ ii) & ac-b^2=\pi^2 \end{cases}$$

Criterio de comparación para convergencia y divergencia de integrales múltiples impropias.

a) Si f, D, P satisfacen las condiciones del teorema I anterior; teniéndose que $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ en $D-P$; siendo g continua en $D-P$, sabiendo que existe $\iint g$ en D, se afirma que también existe $\iint f$ en D; resultando además:

$$\left| \iint_D f(x,y)\,dA \right| \leq \iint_D g(x,y)\,dA \quad (1)$$

b) Si f y g son continuas en una región D no acotada; siendo $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ en D; sabiendo que existe la integral de g en D, se afirma que existe asimismo la integral de f en D, y que es válida la desigualdad (1).

c) Si: $0 \leq g(x,y) \leq f(x,y)$, se afirma que si $\iint_D g(x,y)\,dA$ diverge, también diverge $\iint_D f(x,y)\,dA$

d) Si D es una región no acotada; siendo $\iint_D g(x,y)\,dA$ divergente, resulta asimismo divergente la integral $\iint_D f(x,y)\,dA$

Ejemplo 1) Empleando el criterio de comparación, estudiar la convergencia ó divergencia de la siguiente integral:

$$\iint_D \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2(1+y^2)}\, dA$$

siendo D la franja semi-infinita: $1 \le x < \infty;\ 0 \le y \le 1$

Solución:

Sea D_n: $1 \le x \le n$; $0 \le y \le 1$

Hagamos: $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} xy}{x^2(1+y^2)}$; $g(x,y) = \dfrac{1}{x^2(1+y^2)}$

$$\iint_{D_n} |f(x,y)|\, dA \le \iint_{D_n} g(x,y)\, dA = \int_1^n \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+y^2}\, dy\, dx$$

$$= \Big[\tan^{-1} y\Big]_0^1 \int_1^n \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{4}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^n$$

Al $n \to \infty$ [illegible] $\pi/4$

$\iint_D g(x,y)\, dA$ [illegible]

Se [illegible] comparación

$\iint_D \dfrac{\operatorname{sen} xy}{x^2(1+y^2)}\, dA$ [illegible] converge

Es interesante observar que, en ocasiones, mediante un cambio de coordenadas conveniente, puede transformarse una integral múltiple impropia en propia.

Ejemplo:

La integral

$$\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

es impropia en cualquier región D que incluya al origen de coordenadas.

Sea $D: x^2+y^2 \le 1$

Usando coordenadas polares:

$$\iint_{D-S} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{H_n} r\ln r\,dr\,d\theta$$

Escojamos H_n tal que: $\frac{1}{n} \le r \le 1$; $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iint_{H_n} r\ln r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{n}}^{1} r\ln r\,dr$$

Por ser $\lim\limits_{n\to\infty} r\ln r = 0$, $\Rightarrow$ la última integral deja de ser impropia:

$\Rightarrow \iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ es convergente.

Algunos libros de referencia.-

1.- "Intermediate analysis".
N. B. Haaser, J.P. La Salle, J.A. Sullivan.
(Edit. Blaisdell) 1964.

2.- "Calculus", Vol. I y II.
T. M. Apostol.
(Edit. Blaisdell) 1965.

3.- "Advanced calculus".
W. Kaplan.
(Edit. Addison Wesley) 1956.

4.- "Advanced calculus."
D.V. Widder.
(Edit. Prentice Hall) 1963.

5.- "Advanced calculus".
R.C Buck.
(Edit. Mc. Graw Hill) 1965.

6.- "Advanced calculus", Vol. II.
V. I. Smirnov.
(Edit. Addison Wesley) 1964.

7.- "Modern mathematical analysis."
M. H. Protter, C. B. Morrey.
(Edit. Addison Wesley) 1964.

8.- "Mathematical analysis."
T. M. Apostol.
(Edit. Addison Wesley) 1957.

9.- "Análisis matemático", Vol II.
J. Rey Pastor, P. Pi Calleja, C. A. Trejo.
(Edit. Kapelusz) 1961.

10.- "Análisis algebraico e infinitesimal", Tomo II.
C. Mataix.
(Edit. Dossat) 1951.

11.- "Fundamental concepts of analysis".
A. H. Smith, W. A. Albrecht Jr.
(Edit. Prentice Hall) 1966.

12.- "Calculus".
F. Ayres Jr.
(Edit. Schaum) 1964.

13.- "Advanced calculus".
M. R. Spiegel.
(Edit. Schaum) 1963

118