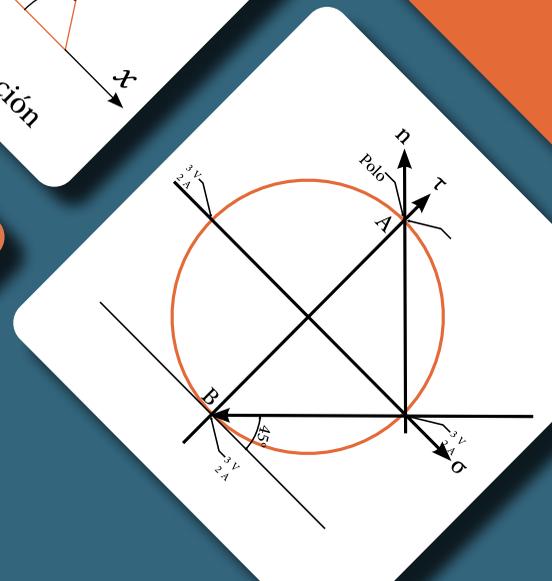
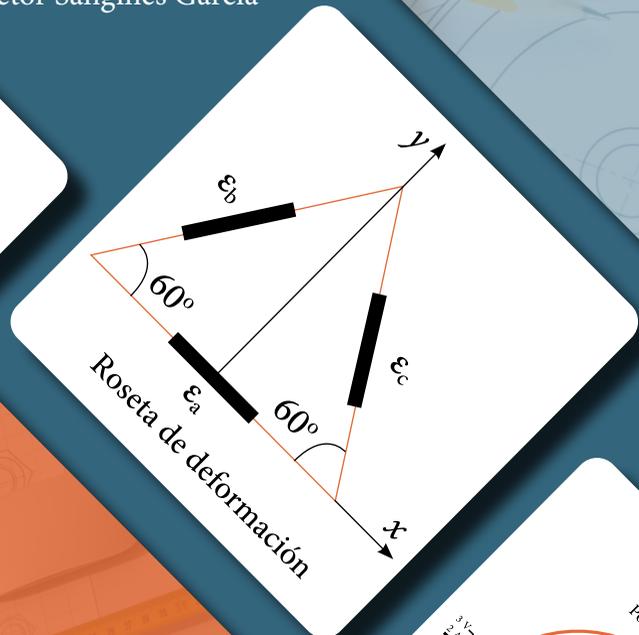
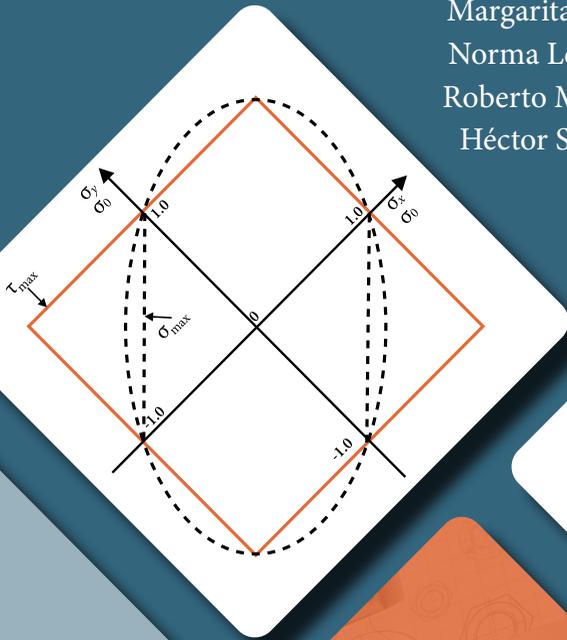


# Mecánica del medio continuo

## Estática y dinámica

Agustín Demeneghi Colina  
Armando Hermosillo Arteaga  
Margarita Puebla Cadena  
Norma Legorreta Linares  
Roberto Magaña Del Toro  
Héctor Sanginés García



Para visualizar la obra  
te sugerimos

Acrobat Reader  
Haz Click

DEMENEGHI COLINA, Agustín  
HERMOSILLO ARTEAGA, Armando  
PUEBLA CADENA, Margarita  
LEGORRETA LINARES, Norma  
MAGAÑA DEL TORO, Roberto y  
SANGINÉS GARCÍA, Héctor  
*Mecánica del medio continuo*  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ingeniería, 2025, 274 págs.

---

### ***MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO***

Primera edición electrónica de un ejemplar (16 MB) en formato PDF  
Publicado en línea: en junio de 2025

D.R. © 2025, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Avenida Universidad núm. 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma  
de México, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán,  
México, Ciudad de México, Código Postal 04510.

FACULTAD DE INGENIERÍA  
<http://www.ingenieria.unam.mx/>

Esta edición y sus características son propiedad de la Universidad Nacional Autónoma de México. Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Hecho en México.

---

### **UNIDAD DE APOYO EDITORIAL**

Cuidado de la edición: Patricia Eugenia García Naranjo  
Diseño editorial : Luis Enrique Vite Rangel

# Agradecimientos

Agradecemos el apoyo de la División de Ingenierías Civil y Geomática de la Facultad de Ingeniería de la UNAM por las facilidades dadas para la realización de este trabajo.

Asimismo, agradecemos a la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería por la revisión, edición, formación y publicación digital de este libro.

# Prólogo

En Mecánica es usual estudiar el comportamiento de un cuerpo, considerándolo como cuerpo rígido. Así, analizamos el equilibrio o el movimiento de una estructura ante la acción de cargas externas que obran sobre ella. Sin embargo, también nos interesa investigar lo que ocurre dentro de un cuerpo: cómo se distribuyen los esfuerzos y cómo ocurren las deformaciones en el interior de este. Para llevar a cabo esta investigación se hace la hipótesis de que el material que forma el elemento es un medio homogéneo y continuo, de ahí que esta materia toma el nombre de Mecánica del Medio Continuo.

Considerar que nos encontramos en un medio continuo tiene, entre otras, la ventaja de que podemos establecer que el esfuerzo o la deformación son funciones continuas y derivables, lo que nos permite llevar a cabo un análisis exhaustivo sobre dichas funciones. Asimismo, en un medio continuo podemos trazar un plano y examinar el estado de esfuerzo en dicho plano.

Con estos prolegómenos, la Mecánica del Medio Continuo estudia el estado de esfuerzo, el estado de deformación, las relaciones esfuerzo-deformación, el comportamiento elástico, viscoelástico y plástico de un cuerpo formado por un medio homogéneo y continuo.

Lo anterior es la base para el estudio en ingeniería de la resistencia y deformabilidad de las piezas estructurales (trabes, columnas, etcétera), de la masa de suelo, de un macizo rocoso, etcétera.

Como podemos apreciar, la Mecánica del Medio Continuo desempeña un papel fundamental en la ingeniería civil, ya que es un campo de estudio que abarca la comprensión y análisis del comportamiento de materiales y estructuras bajo cargas y condiciones variadas. Este enfoque, que considera los materiales como medios continuos en lugar de

elementos discretos, permite a los ingenieros modelar y predecir el comportamiento de estructuras y suelos. Desde la planificación y diseño de edificios, puentes, presas y túneles hasta la evaluación de la estabilidad de suelos y rocas, la mecánica del medio continuo proporciona las herramientas necesarias para entender cómo los materiales se deforman y responden a las fuerzas externas. Lo anterior es crucial para garantizar la seguridad, durabilidad y eficiencia de las infraestructuras civiles. Al profundizar en conceptos como el estado de deformación, el estado de esfuerzo, la elasticidad, la viscoelasticidad y los criterios de falla, los ingenieros civiles pueden tomar decisiones durante todas las etapas del ciclo de vida de un proyecto. En resumen, la mecánica del medio continuo es una piedra angular de la ingeniería civil que proporciona los fundamentos teóricos y las herramientas prácticas necesarias para el diseño y construcción de infraestructura.

En el **capítulo 1** de este trabajo, Estado de deformación, se aborda la distribución de la deformación dentro de un cuerpo, tanto en el espacio tridimensional como en el plano bidimensional. Se proporcionan ejemplos para calcular los tensores gradiente de deformación, deformación unitaria y de rotación. Además, se modelan las deformaciones unitarias, tanto lineales como angulares, en cualquier dirección. Se incluye un análisis específico con rosetas de deformación para determinar el tensor de deformación.

El **capítulo 2**, Estado de esfuerzo, se enfoca en el cálculo de los esfuerzos en planos perpendiculares a los ejes coordenados, lo que permite calcular los esfuerzos normales y de corte en cualquier plano. Se discuten estos conceptos utilizando tanto ecuaciones de equilibrio estático como dinámico, ofreciendo dos enfoques diferentes, no sólo físicos sino también matemáticos. Se incluyen ejemplos ilustrativos para una mejor comprensión.

En el **capítulo 3**, Principios generales de la mecánica, se presentan los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento, energía y aumento de entropía.

El **capítulo 4**, titulado Modelos que representan el comportamiento de los materiales, tiene como objetivo plantear las ecuaciones constitutivas de la elasticidad, la viscosidad y la viscoelasticidad. Se parte de los modelos reológicos de Hooke, Newton, Kelvin-Voigt, Maxwell y Burgers para este fin.

En el **capítulo 5**, Elasticidad Lineal, se parte de la ley de Hooke en una dimensión para generalizarla al espacio tridimensional. Se muestra cómo obtener, tanto los esfuerzos provocados por un estado de deformación, como las deformaciones causadas por un estado de esfuerzo. Se incluyen varios ejemplos de aplicación para ilustrar estos conceptos.

El **capítulo 6**, Teorías de falla y ruptura, presenta criterios de fluencia, la teoría del máximo esfuerzo (criterio de Tresca), la teoría de la energía de distorsión (criterio de Von Mises) y las teorías de las líneas de deslizamiento. Concluye con una aplicación sobre la capacidad de carga para un material cohesivo.

Finalmente, el **capítulo 7** aborda el tema de Viscoelasticidad, explorando conceptos aplicados a la teoría de ondas. Se analiza el movimiento de los cuerpos considerando la disipación de energía, estimando el movimiento de un cuerpo sólido como la suma de un componente sólido y otro viscoso que tiene en cuenta la disipación de energía mediante el uso de un coeficiente de viscosidad. Además, se presenta un programa de computadora desarrollado en Fortran para la teoría de elasticidad y para determinar esfuerzos y deformaciones.

# Índice

<b>1 ESTADO DE DEFORMACIÓN</b> .....	<b>11</b>
1.1 Deformación unitaria.....	12
1.2 Obtención de la matriz gradiente de deformación.....	13
1.3 Descomposición de la matriz gradiente de deformación en el tensor deformación unitaria y en la matriz de rotación.....	18
1.4 Cálculo de la deformación unitaria lineal y de la deformación unitaria angular en una dirección dada.....	25
1.5 Cálculo de la nueva longitud y del giro que experimenta un segmento de recta, al pasar de la configuración inicial a la configuración deformada.....	27
1.6 Deformaciones unitarias principales.....	31
1.7 Representación gráfica de Mohr.....	36
1.8 Determinación de las deformaciones unitarias lineal y angular en una dirección. Método gráfico de Mohr.....	41
1.9 Estado de deformación plana.....	46
1.10 Círculo de Mohr para el estado de deformación plana.....	54
1.11 Deformación de un ángulo.....	60
1.11.1 Deformación de un ángulo recto.....	61
1.12 Deformación unitaria natural.....	62
1.12.1 Roseta de deformación a 60°.....	64
1.12.2 Roseta a 45°.....	67
<b>2 ESTADO DE ESFUERZO</b> .....	<b>69</b>
2.1 Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie.....	70
2.2 Estado de esfuerzo en planos perpendiculares a los ejes coordenados.....	70
2.3 Definición de esfuerzo en un plano inclinado.....	76

2.4	Descomposición del vector esfuerzo en vector esfuerzo normal y vector esfuerzo cortante .....	81
2.5	El esfuerzo como la derivada de un campo vectorial.....	85
2.6	Convención de signos para el estado de esfuerzo .....	87
2.7	Simetría del tensor esfuerzo .....	90
2.8	Esfuerzos principales .....	93
2.9	Representación gráfica de Mohr.....	102
2.10	Determinación de los esfuerzos normal y cortante en una dirección. método gráfico de Mohr.....	106
2.11	Estado de esfuerzo plano.....	111
2.12	Círculo de Mohr para el estado de esfuerzo plano.....	118
2.13	Variación del esfuerzo con el área de la sección.....	125
2.14	Tensor isotrópico y tensor desviador.....	126
2.15	Convención de signos en mecánica de suelos.....	127
2.16	Aplicaciones.....	136
2.16.1	Tensión diagonal en vigas de concreto .....	136
2.16.2	Empuje de tierras .....	137
2.17	Ecuaciones de equilibrio dinámico .....	141
2.18	El área como un vector.....	143
2.19	Estado de esfuerzo en una prueba de compresión triaxial .....	148
2.20	Determinación de las direcciones principales de esfuerzo .....	151
2.21	Inclinación de las grietas de un muro de carga ante la acción de un sismo ..	155
<b>3</b>	<b>PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA .....</b>	<b>157</b>
3.1	Principio de conservación de masa .....	158
3.2	Principio de conservación de la cantidad de movimiento .....	161
3.3	Principio de conservación de la energía .....	167
3.4	Principio de aumento de entropía .....	169
3.5	Comentarios .....	170

<b>4</b>	<b>MODELOS PARA REPRESENTAR EL COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES</b>	<b>172</b>
4.1	Cuerpo de Hooke	173
4.2	Cuerpo de Newton	174
4.3	Cuerpo de Kelvin Voigt	175
4.4	Cuerpo de Maxwell	178
4.5	Cuerpo de Burgers	179
<b>5</b>	<b>ELASTICIDAD LINEAL</b>	<b>180</b>
5.1	Deformación unitaria volumétrica	190
5.2	Energía de Deformación	197
<b>6</b>	<b>TEORIAS DE FALLA</b>	<b>202</b>
6.1	Plasticidad	203
6.2	Criterios de Fluencia	205
6.3	Teoría del máximo esfuerzo cortante (criterio de Tresca)	205
6.4	Teoría de la energía de distorsión (criterio de Von Mises)	208
6.4.1	Energía de Deformación	208
6.4.2	Criterio de Von Mises	213
6.5	Teoría de las líneas de deslizamiento	215
6.5.1	Propiedades de las líneas de deslizamiento	220
6.6	Capacidad de carga de un material cohesivo	222
<b>7</b>	<b>VISCOELASTICIDAD. ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN UN MEDIO CONTINUO</b>	<b>226</b>
7.1	Comportamiento viscoelástico	227
7.2	Ecuaciones de equilibrio dinámico	229
7.3	Ecuaciones de movimiento en un material viscoelástico	232
7.4	Velocidad de las ondas sísmicas	233
7.5	Vibración de un estrato de suelo blando	239
7.6	Fracción del amortiguamiento crítico	244
7.7	Ecuaciones de movimiento considerando el movimiento de la base $u_b$	245
7.8	Onda de cortante SH	249

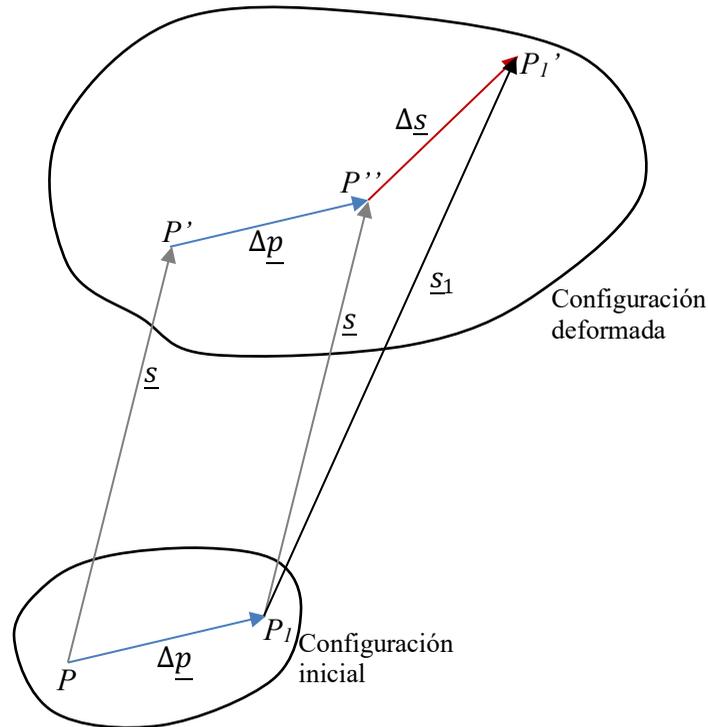
<b>ANEXOS.....</b>	<b>250</b>
A. CÁLCULO VECTORIAL.....	251
A.1 Introducción .....	251
A.2 Funciones vectoriales lineales.....	251
B. ROTACIÓN DE UN SISTEMA COORDENADO EN EL PLANO .....	254
C PROGRAMAS DE COMPUTO PARA CALCULAR ESFUERZOS, DEFORMACIONES Y ELASTICIDAD LINEAL.....	255
C.1 Código .....	255
C.2 Manual de usuario .....	269
C.2.1 Interpretación de resultados.....	269
D. BASE EN UN ESPACIO VECTORIAL .....	271
<b>BIBLIOHEMEROGRAFÍA .....</b>	<b>273</b>

# Capítulo 1

## Estado de deformación

## 1.1 Deformación unitaria

Consideremos un cuerpo que sufre un cierto estado de deformación, pasando de la configuración inicial a la configuración deformada (figura 1.1).



**Figura 1.1.** Deformación de un cuerpo

Se define el vector desplazamiento de un punto  $P$  al vector cuyo punto inicial es  $P$  y cuyo punto terminal es  $P'$ , siendo  $P$  y  $P'$  los puntos correspondientes a las posiciones antes y después de la deformación, respectivamente (Figura 1.1).

Se define el vector deformación de un punto  $P_1$  con respecto a otro punto  $P$ , como la diferencia entre los vectores desplazamiento  $\underline{s}_1$  y  $\underline{s}$ , es decir

$$\Delta \underline{s} = \underline{s}_1 - \underline{s} \quad (1.1)$$

$\Delta \underline{s}$  = vector deformación

Se define el vector deformación unitaria de la siguiente forma

$$\underline{\varepsilon}_u = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{s}}{\Delta \underline{p}} \quad (1.2)$$

O bien

$$\underline{\varepsilon}_u \cong \frac{\Delta \underline{s}}{\Delta \underline{p}} \quad (1.2a)$$

## 1.2 Obtención de la matriz gradiente de deformación

Los puntos  $P(x, y, z)$  y  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  tienen los siguientes vectores de posición (Figura 1.1)

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

$$\underline{P}_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$$

El vector  $\Delta \underline{p}$  vale

$$\Delta \underline{p} = \underline{P}_1 - \underline{P} = \begin{Bmatrix} x_1 & x \\ y_1 & y \\ z_1 & z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

Mientras que el vector  $d\underline{p}$  es

$$d\underline{p} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

Como  $x$ ,  $y$  y  $z$  son variables independientes, entonces  $dx = \Delta x$ ,  $dy = \Delta y$ ,  $dz = \Delta z$ ; por lo tanto

$$d\underline{p} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} = \Delta \underline{p}, \quad d\underline{p} \quad (1.5)$$

El módulo del vector  $\Delta \underline{p}$  toma el siguiente valor

$$|\Delta \underline{p}| = |d \underline{p}| = dp \quad (1.6)$$

El vector desplazamiento del punto P vale (Figura 1.1)

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

El vector desplazamiento del punto  $P_1$  vale

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

El vector deformación entre los puntos P y  $P_1$

$$\begin{aligned} \Delta \underline{s} &= \underline{s}_1 - \underline{s} = \begin{pmatrix} u_1 & u \\ v_1 & v \\ w_1 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} \\ \Delta \underline{s} &= \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

También

$$d \underline{s} = \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Como  $du \approx \Delta u$ ,  $dv \approx \Delta v$  y  $dw \approx \Delta w$ , entonces  $d \underline{s} \approx \Delta \underline{s}$ ,  $|\Delta \underline{p}| = dp$ , y, de acuerdo con la ecuación 1.2

$$\underline{\varepsilon}_u \cong \frac{\Delta \underline{s}}{|\Delta \underline{p}|} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta u}{|\Delta \underline{p}|} \\ \frac{\Delta v}{|\Delta \underline{p}|} \\ \frac{\Delta w}{|\Delta \underline{p}|} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \frac{du}{dp} \\ \frac{dv}{dp} \\ \frac{dw}{dp} \end{pmatrix} = \frac{d \underline{s}}{dp} \quad (1.9)$$

Por otra parte

$$\underline{\varepsilon}_u \cong \frac{\Delta s}{|\Delta p|} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\Delta u}{|\Delta p|} \\ \frac{\Delta v}{|\Delta p|} \\ \frac{\Delta w}{|\Delta p|} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \frac{du}{dp} \\ \frac{dv}{dp} \\ \frac{dw}{dp} \end{array} \right\} = \frac{d\underline{s}}{dp} \quad (1.10)$$

Para ilustrar el concepto de diferencial de una función, tomemos como ejemplo una función  $u = u(x)$ . La diferencial de la variable independiente,  $dx$ , es igual al incremento de dicha variable independiente,  $\Delta x$  (Figura 1.2). El incremento de la función,  $\Delta u$ , se toma sobre su curva de variación, como se muestra en la Figura 1.2. La diferencial de la función,  $du$ , se define

$$d\underline{s} = \left\{ \begin{array}{c} du \\ dv \\ dw \end{array} \right\}$$

La diferencial de la función,  $du$ , se mide sobre la recta tangente a la curva en el punto P (Figura 1.2). Conforme disminuye la diferencial de la variable independiente  $dx$ , se acercan más los valores de  $\Delta u$  y de  $du$ . En el límite cuando  $dx \rightarrow 0$ ,  $du = \Delta u$ .

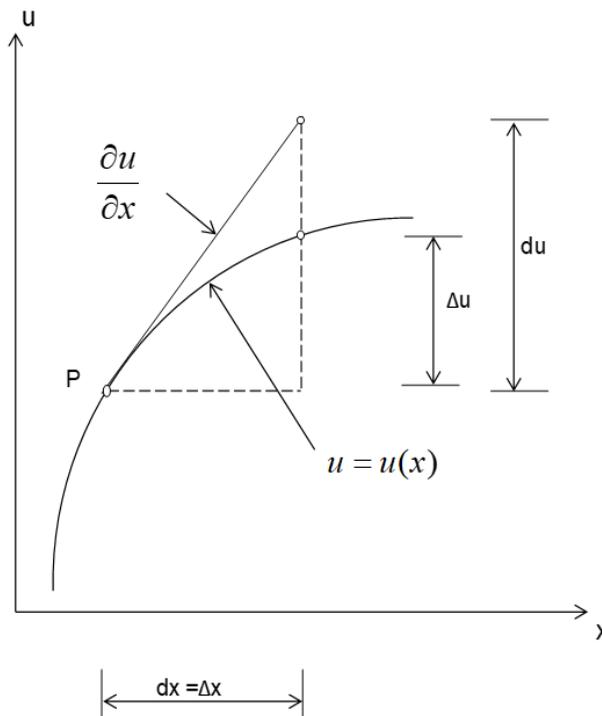


Figura 1.2. Diferencial de una función

Sustituyendo en la ecuación 1.9

$$\underline{\varepsilon}_u \cong \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dp} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dp} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dp} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dp} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dp} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dp} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dp} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dp} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dp} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\varepsilon}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dp} \\ \frac{dy}{dp} \\ \frac{dz}{dp} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Usamos el signo de igualdad en la ecuación 1.11 para fines prácticos, sabiendo que dicha ecuación sólo se cumple cuando  $dx \rightarrow 0$ ,  $dy \rightarrow 0$ ,  $dz \rightarrow 0$ , es decir

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{D} \underline{e} \quad (1.12)$$

donde

$$\underline{\varepsilon}_u = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ux} \\ \varepsilon_{uy} \\ \varepsilon_{uz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dp} \\ \frac{dy}{dp} \\ \frac{dz}{dp} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

A la matriz  $\underline{D}$  se le denomina matriz gradiente de deformación (Malvern, 1969).

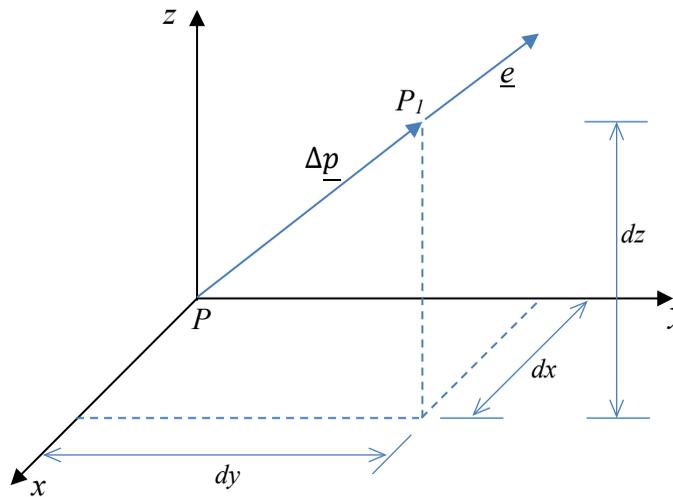
Demos una interpretación geométrica al vector  $\underline{e}$

$$\underline{e} = \frac{1}{d\underline{p}} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \frac{1}{|\Delta\underline{p}|} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{Bmatrix} = \frac{\Delta\underline{p}}{|\Delta\underline{p}|}$$

Observamos en esta ecuación que el vector  $\underline{e}$  tiene la misma dirección y el mismo sentido del vector  $\Delta\underline{p}$ , pero su tamaño es unitario (Figura 1.3)

$$|\underline{e}| = 1$$

Por lo anterior, el vector  $\underline{e}$  mide la dirección en la que se está calculando la deformación unitaria.



**Figura 1.3.** Vector de dirección  $\underline{e}$

En la ecuación 1.13 observamos que la matriz gradiente de deformación  $\underline{D}$  es la derivada del espacio vectorial del vector desplazamiento  $\underline{s} = [u, v, w]^T$ , con respecto al espacio vectorial del vector de posición  $\underline{p} = [x, y, z]^T$ . A la matriz  $\underline{D}$  se le denomina en matemáticas matriz *jacobi*ana.

### 1.3 Descomposición de la matriz gradiente de deformación en el tensor deformación unitaria y en la matriz de rotación

De la ecuación 1.13

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\underline{D} = \underline{E} + \underline{\Omega}$$

Donde:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

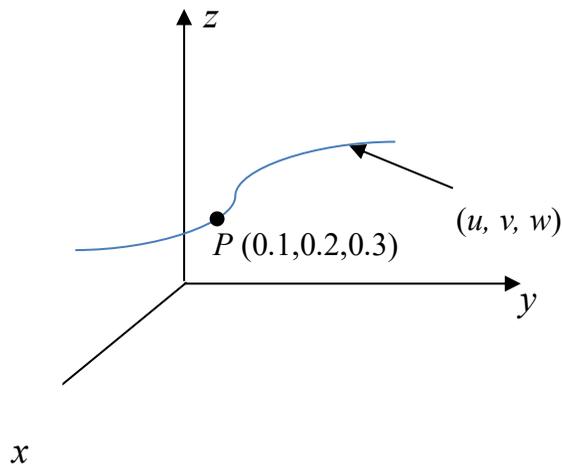
$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $\underline{E}$  es denominada tensor deformación unitaria porque tiene propiedades invariantes, relacionadas con la deformación del cuerpo. A la matriz  $\underline{\Omega}$  se le denomina matriz de rotación.

## Estado de deformación

Ejemplo E1.1 Dado el campo de desplazamientos  $u, v$  y  $w$ , determinar en el punto P (0.1, 0.2, 0.3)

- El tensor gradiente de deformación  $\underline{D}$
- El tensor deformación unitaria  $\underline{E}$
- La matriz de rotación  $\underline{\Omega}$



**Figura E1.1-1** Campo de desplazamientos

Donde

$$u=2x^2 yz$$

$$v=2y^2 xz$$

$$w=xyz$$

Solución

Obteniendo las parciales de  $u, v$  y  $w$  con respecto a  $x, y$  y  $z$ , y valuando en el punto P, resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xyz = 4(0.1)(0.2)(0.3) = 0.024$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 z = 0.006$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x^2 y = 0.004$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y^2 z = 0.024$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4yxz = 0.024$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 2y^2x = 0.008$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yz = 0.06$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = xz = 0.03$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = xy = 0.02$$

Inciso a) Tensor gradiente de deformación

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.006 & 0.004 \\ 0.024 & 0.024 & 0.008 \\ 0.06 & 0.03 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Inciso b) Tensor de deformación unitaria

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 0.024 & 0.015 & 0.032 \\ 0.015 & 0.024 & 0.019 \\ 0.032 & 0.019 & 0.02 \end{bmatrix}$$

Inciso c) Tensor de rotación

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.009 & -0.028 \\ 0.009 & 0.0 & -0.011 \\ 0.028 & 0.011 & 0.0 \end{bmatrix}$$

Consideremos por un momento que la matriz  $\underline{E} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

## Estado de deformación

Se observa que cuando  $\underline{E} = 0$  y  $\underline{\Omega} \neq 0$ , únicamente se presenta rotación del elemento, comportándose este como cuerpo rígido. Por esta razón a la matriz  $\underline{\Omega}$  se le llama matriz rotacional.

Consideremos ahora que  $\underline{E} \neq 0$  y  $\underline{\Omega} = 0$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Se observa que cuando  $\underline{\Omega} = 0$ , la matriz  $\underline{E}$  es una matriz simétrica con respecto a la diagonal principal.

En esta ocasión, veremos la mecánica de los cuerpos deformables y no vamos a estudiar la rotación como cuerpo rígido, por lo que en el resto del curso consideraremos que la matriz rotacional  $\underline{\Omega} = 0$ , y que  $\underline{D} = \underline{E}$ . Por lo tanto

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Donde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x'} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x'} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Hagamos el siguiente cambio de notación

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y'}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial y'}$ , deformación del ángulo recto  $xy$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$  es la deformación en dirección de uno de los ejes  $x$  o  $y$

## Estado de deformación

$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial z}$ , deformación del ángulo recto  $xz$ ;  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{xz}$  es la deformación en dirección de uno de los ejes  $x$  o  $z$

$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{\partial v}{\partial z}$ , deformación del ángulo recto  $yz$ ;  $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}$ , es la deformación en dirección de uno de los ejes  $y$  o  $z$

El tensor deformación queda

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Donde  $\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{yx}$ ,  $\frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{zx}$ ,  $\frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{zy}$

En las Figuras 1.4 y 1.5 se exhibe una interpretación física del tensor deformación  $\underline{E}$  dado por la ecuación 1.15. Puesto que, para deformaciones pequeñas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cong \frac{\Delta u}{\Delta x}, \text{ etcétera}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} \cong \frac{\Delta u}{\Delta y}, \text{ etcétera}$$

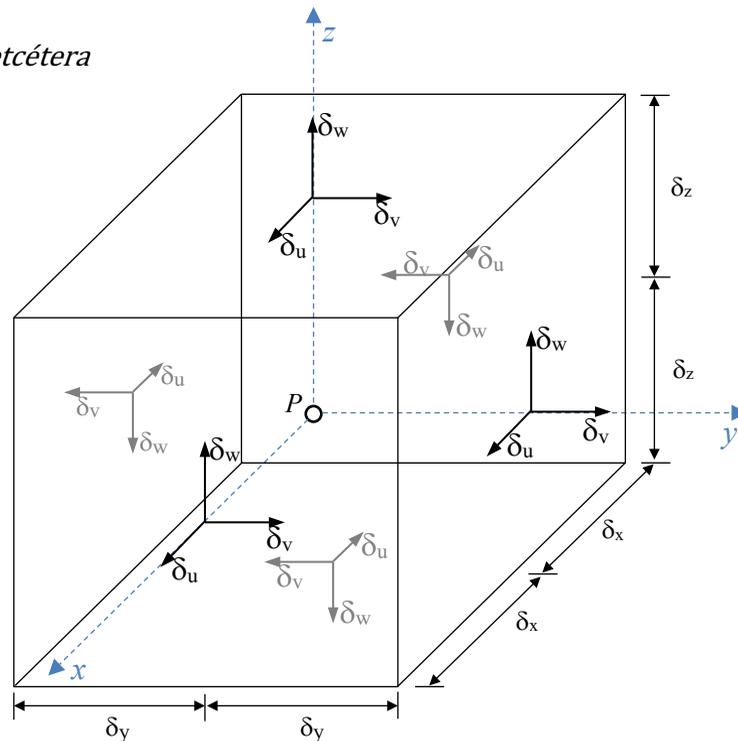
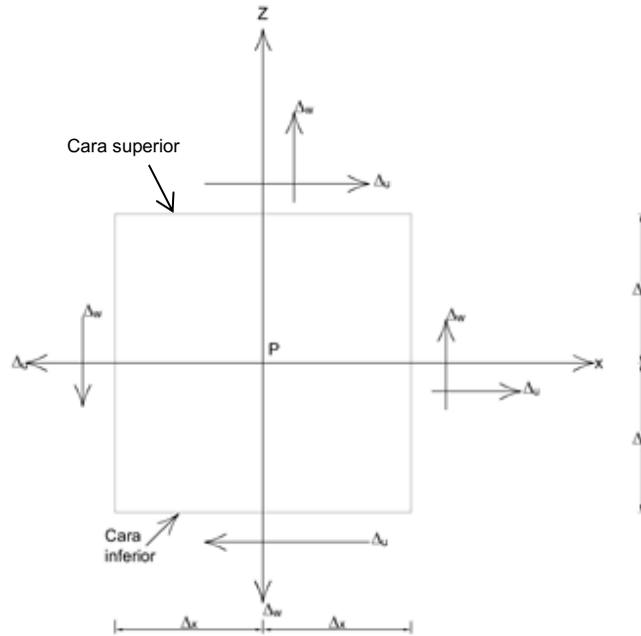


Figura 1.4. Estado de deformación en direcciones paralelas a los ejes coordenados

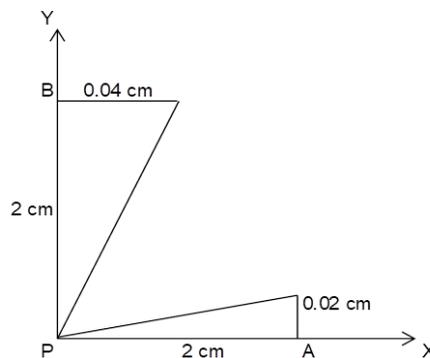
## Estado de deformación

Apreciamos que la diagonal principal de la matriz mide las deformaciones unitarias lineales de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente (alargamiento o acortamiento de dichos ejes), mientras que los elementos fuera de la diagonal principal miden las deformaciones unitarias angulares de los ejes coordenados (giros de los mismos).



**Figura 1.5.** Estado de deformación en direcciones paralelas a los ejes  $z$  y  $x$

Ejemplo E1.2. Dado el estado de deformación plana mostrado en la Figura E1.2.1, obtener la matriz de gradiente de deformación  $\underline{D}$ , el tensor deformación unitaria  $\underline{E}$  y la matriz de rotación  $\underline{\Omega}$ .



**Figura E1.2.1** Estado de deformación plana

*Solución*

Usamos las ecuaciones 13, 14' y 14''

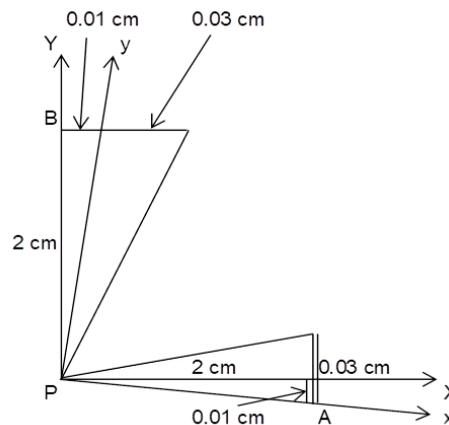
$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta u}{\Delta X} & \frac{\Delta u}{\Delta Y} \\ \frac{\Delta v}{\Delta X} & \frac{\Delta v}{\Delta Y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.04}{2.0} \\ \frac{0.02}{2.0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.015 \\ 0.015 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0.005 \\ -0.005 & 0 \end{bmatrix}$$

El desplazamiento que sufren los puntos A y B por deformación es  $0.015(2) = 0.03$  cm, y por rotación es:  $0.005(2) = 0.01$  cm. En la Figura E1.2.2 se muestran los desplazamientos por deformación y por rotación del cuerpo. Vemos que los puntos A y B sufren un desplazamiento lineal de 0.03 cm y un desplazamiento por rotación como cuerpo rígido de 0.01 cm en sentido horario.



**Figura E1.2.2.** Desplazamientos y rotaciones en el plano

## 1.4 Cálculo de la deformación unitaria lineal y de la deformación unitaria angular en una dirección dada

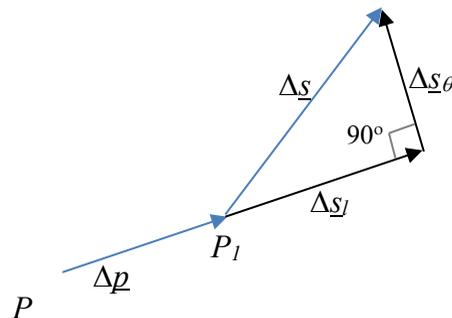
Dado que  $\underline{E} = \underline{D}$ , de la ecuación 1.12

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{E} \underline{e} \quad (1.17)$$

El vector  $\underline{D}_s$  se puede descomponer en los vectores  $\underline{\Delta s}_l$  y  $\underline{\Delta s}_\theta$ , el primero paralelo a  $\underline{\Delta p}$  y el segundo perpendicular a  $\underline{\Delta p}$  (figura 1.6). El vector  $\underline{\Delta s}_l$ , denominado vector deformación lineal o vector deformación longitudinal, mide la deformación en la dirección de los puntos  $P$  y  $P_1$ , mientras que el vector  $\underline{\Delta s}_\theta$ , denominado vector deformación angular o vector deformación transversal, mide la deformación en dirección perpendicular a la de los puntos  $P$  y  $P_1$ .

De la Figura 1.6

$$\underline{\Delta S} = \underline{\Delta S}_l + \underline{\Delta S}_\theta \quad (1.18)$$



**Figura 1.6.** Vector de deformación lineal  $\underline{\Delta s}_l$  y vector de deformación angular  $\underline{\Delta s}_\theta$

Dividamos ambos miembros de la ecuación 1.2 entre  $|\underline{\Delta p}|$

$$\frac{\underline{\Delta S}}{|\underline{\Delta p}|} = \frac{\underline{\Delta S}_l}{|\underline{\Delta p}|} + \frac{\underline{\Delta S}_\theta}{|\underline{\Delta p}|}$$

es decir

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{\varepsilon}_l + \underline{\varepsilon}_\theta \quad (1.19)$$

$$\underline{\varepsilon}_u = \frac{\Delta \underline{S}}{|\Delta \underline{p}|}$$

$$\underline{\varepsilon}_l = \frac{\Delta S_l}{|\Delta \underline{p}|} \quad (1.20)$$

$$\underline{\varepsilon}_\theta = \frac{\Delta S_\theta}{|\Delta \underline{p}|} \quad (1.21)$$

De acuerdo con la figura 1.7

$$|\underline{\varepsilon}_l| = \text{proy}_e \varepsilon = \frac{(\varepsilon \cdot e)}{|e|}$$

pero  $|e| = 1$ , por lo tanto

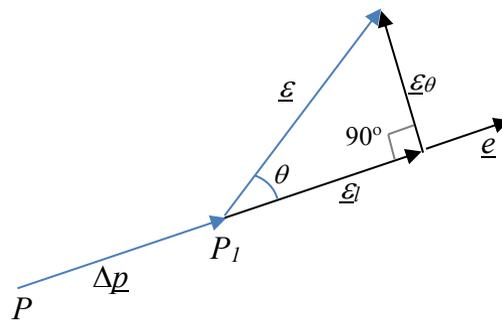
$$\varepsilon_l = |\underline{\varepsilon}_l| = (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{e}) \quad (1.22)$$

$$\underline{\varepsilon}_l = \varepsilon_l \underline{e} \quad (1.23)$$

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{\varepsilon}_l + \underline{\varepsilon}_\theta$$

$$\underline{\varepsilon}_\theta = \underline{\varepsilon}_u - \underline{\varepsilon}_l \quad (1.24)$$

La magnitud de  $\underline{\varepsilon}_\theta$  se obtiene calculando  $|\underline{\varepsilon}_\theta|$ .



**Figura 1.7.** Vector de deformación unitaria lineal  $\underline{\varepsilon}_l$  y vector de deformación unitaria angular  $\underline{\varepsilon}_\theta$

También observamos que (Figura 1.7)

$$|\underline{\varepsilon}_\theta| = |\underline{\varepsilon}_u| \operatorname{sen} \theta \quad (1.25)$$

Por otra parte, el módulo del producto vectorial tiene la siguiente propiedad

$$|\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e}| = |\underline{\varepsilon}_u| |\underline{e}| \operatorname{sen} \theta = |\underline{\varepsilon}_u| \operatorname{sen} \theta \quad (1.26)$$

Comparando las ecuaciones 1.21 y 1.22

$$|\underline{\varepsilon}_\theta| = |\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e}| \quad (1.27)$$

También se puede hallar  $\varepsilon_q = \frac{1}{2}\varepsilon_u \frac{1}{2}$  empleando el teorema de Pitágoras. De la Figura 1.7

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^2 &= \varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2 \\ \varepsilon_\theta^2 &= \varepsilon_u^2 - \varepsilon_l^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{\varepsilon_u^2 - \varepsilon_l^2} \quad (1.29)$$

## 1.5 Cálculo de la nueva longitud y del giro que experimenta un segmento de recta, al pasar de la configuración inicial a la configuración deformada

Sea un segmento de recta que va del punto  $P$  al punto  $P_1$ , y que sufre el estado de deformación indicado en la Figura 1.1. En la Figura 1.6 se muestra el vector deformación  $\Delta \underline{s}$ , así como sus componentes: el vector deformación lineal  $\Delta \underline{s}_l$  y el vector deformación angular  $\Delta \underline{s}_\theta$ .

El vector  $\underline{PP}_1$  aumenta su longitud en la configuración deformada. Su nueva longitud vale (figuras 1.1 y 1.7)

$$|\underline{P'P'_1}| = \sqrt{\left(|\underline{PP}_1| + |\Delta \underline{s}_l|\right)^2 + |\Delta \underline{s}_\theta|^2} \quad (1.30)$$

El giro del segmento de recta es

$$\tan\beta = \frac{|\Delta s_\theta|}{|\Delta p| + |\Delta s_l|} \quad (1.31)$$

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta s_l}{|\Delta p|}$$

$$|\varepsilon_l| = \varepsilon_l = \frac{1}{|\Delta p|} \Delta s_l = \frac{|\Delta s_l|}{|\Delta p|}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\Delta s_\theta}{|\Delta p|}$$

$$|\varepsilon_\theta| = \varepsilon_\theta = \frac{1}{|\Delta p|} \Delta s_\theta = \frac{|\Delta s_\theta|}{|\Delta p|}$$

$$|\Delta s_l| = \varepsilon_l |\Delta p|$$

$$|\Delta s_\theta| = \varepsilon_\theta |\Delta p|$$

Lo anterior, recordando la propiedad de álgebra lineal

Sea  $\underline{a} = \lambda \underline{b}$ , [  $\underline{a}, \underline{b} \in V$ ,  $\lambda$  un escalar ]

Se cumple que  $|\underline{a}| = |\lambda| |\underline{b}|$

Sustituyendo en las ecuaciones 1.30 y 1.31

$$|\underline{P'P'_1}| = |\underline{PP_1}| \sqrt{(1 + \varepsilon_l)^2 + \varepsilon_\theta^2} \quad (1.32)$$

Si  $\varepsilon_\theta$  es pequeño

$$|\underline{P'P'_1}| = |\underline{PP_1}| (1 + \varepsilon_l) \quad (1.32')$$

$$\tan\beta = \frac{\varepsilon_\theta |\Delta p|}{(|\Delta p| + \varepsilon_l |\Delta p|)}$$

$$\tan\beta = \frac{\varepsilon_\theta}{(1 + \varepsilon_l)} \quad (1.33)$$

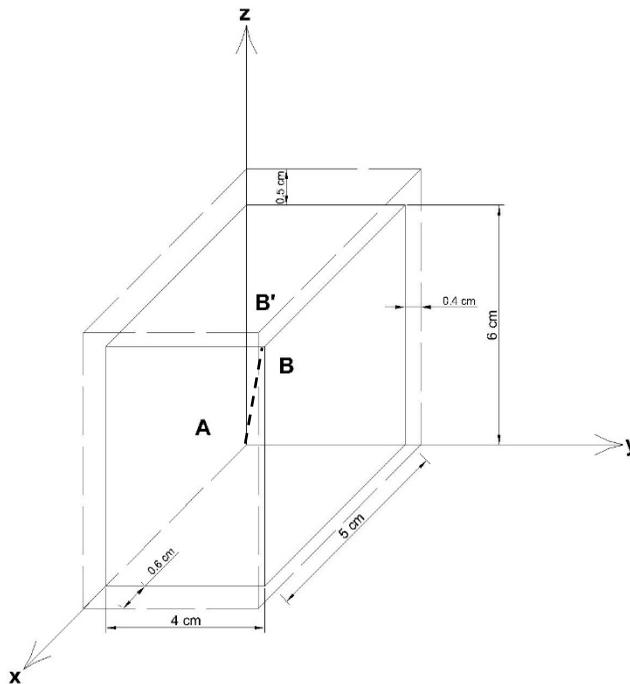
## Estado de deformación

Si  $\varepsilon_l$  es pequeño:  $\tan \beta \cong \varepsilon_0$ ;  $\beta \cong \varepsilon_0$  ( $\beta$  en radianes). Vemos que, para deformaciones pequeñas,  $\varepsilon_0$  mide el giro en radianes del segmento de recta  $PP_1$ , cuando pasa de la configuración inicial a la configuración deformada.

*Ejemplo E1.3.*

Un prisma de base rectangular experimenta las deformaciones indicadas en la Figura E1.3.1.

- Calcular las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección de la diagonal AB.
- Hallar la nueva longitud y el giro que sufre la diagonal AB, después de la deformación.



**Figura E1.3.1.** Prisma rectangular

## Solución

- El tensor deformación vale (ecuación 1.16)

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.083 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0.5698 \\ 0.4558 \\ 0.6838 \end{bmatrix}$$

De la ecuación 1.17

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{E} \underline{e} = \begin{bmatrix} 0.12 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5698 \\ 0.4558 \\ 0.6838 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06838 \\ 0.04558 \\ 0.05698 \end{bmatrix}$$

De la ecuación 1.22

$$\varepsilon_l = (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{e}) = (0.06838, 0.04558, 0.05698) \cdot (0.5698, 0.4558, 0.6838) \\ \varepsilon_l = 0.09870$$

De la ecuación 1.23

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l \underline{e} = 0.09870(0.5698 \quad 0.4558 \quad 0.6838) = \begin{bmatrix} 0.05624 \\ 0.04499 \\ 0.06749 \end{bmatrix}$$

De la ecuación 1.24

$$\underline{\varepsilon}_\theta = \underline{\varepsilon}_u - \underline{\varepsilon}_l = \begin{bmatrix} 0.06838 \\ 0.04558 \\ 0.05698 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.05624 \\ 0.04499 \\ 0.06749 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01214 \\ 0.00059 \\ -0.01051 \end{bmatrix}$$

$$|\underline{\varepsilon}_\theta| = \varepsilon_\theta = \sqrt{(0.01214)^2 + (0.01214)^2 + (-0.01051)^2} = 0.01607$$

b) Aplicando la ecuación 1.32

$$|\underline{AB}'| = |\underline{PP}_1| \sqrt{(1 + \varepsilon_l)^2 + \varepsilon_\theta^2} = 8.775 \sqrt{(1 + 0.0987)^2 + (0.01607)^2} = 9.642 \text{ cm}$$

Aplicando la ecuación 1.33

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon_\theta}{(1 + \varepsilon_l)} = \frac{0.01607}{1 + 0.01214} = 0.01462$$

$$\beta = 0.01462 \text{ rad} = 0.8378^\circ$$

Resolviendo el problema con álgebra de vectores, obtenemos

$$\cos \beta = \frac{\underline{AB} \cdot \underline{AB}'}{|\underline{AB}| |\underline{AB}'|} \quad \cos \beta = \frac{\underline{AB} \cdot \underline{AB}'}{|\underline{AB}| \cdot |\underline{AB}'|} = \frac{(5 \ 4 \ 6) \cdot (5.6 \ 4.4 \ 6.5)}{(8.7749644)(9.64209521)} = 0.999893129$$

$$\underline{AB} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{Bmatrix} [cm]$$

$$\underline{AB}' = \begin{Bmatrix} 5.6 \\ 4.4 \\ 6.5 \end{Bmatrix} [cm]$$

$$|\underline{AB}| = 8.7749644 \text{ cm}$$

$$|\underline{AB}'| = 9.64209521 \text{ cm}$$

$$\cos \beta = 0.999893129$$

$$\beta = 0.837664^\circ$$

## 1.6 Deformaciones unitarias principales

Cuando en una dirección se presenta únicamente deformación lineal y la deformación angular vale cero, a esta dirección se le llama dirección principal, mientras que a la deformación unitaria lineal que ocurre en dicha dirección se le denomina deformación unitaria principal.

De acuerdo con la Figura 1.8

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{E} \underline{e}$$

$$\underline{\varepsilon}_l = \underline{\varepsilon} \underline{e}$$

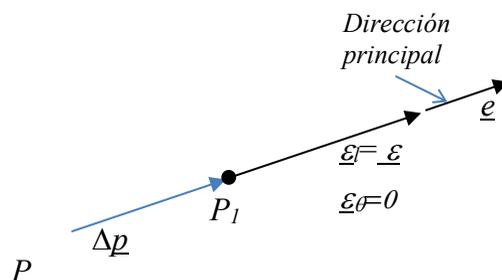


Figura 1.8. Dirección principal

## Estado de deformación

Pero, en una dirección principal

$$\underline{\varepsilon}_l = \underline{\varepsilon}_u$$

Por lo tanto

$$\underline{\varepsilon}_l = \underline{E} \underline{e} = \underline{\varepsilon} \underline{e}$$

Es decir

$$\underline{E} \underline{e} = \underline{\varepsilon} \underline{e} \quad (1.34)$$

Utilizando las ecuaciones 1.14 y 1.16

$$\varepsilon_x \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos \beta + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cos \gamma = \varepsilon_l \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{yx} \cos \alpha + \varepsilon_y \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cos \gamma = \varepsilon_l \cos \beta$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{zx} \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cos \beta + \varepsilon_z \cos \gamma = \varepsilon_l \cos \gamma$$

Es decir

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_l) \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos \beta + \frac{1}{2} \gamma_{xz} \cos \gamma = 0$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{yx} \cos \alpha + (\varepsilon_y - \varepsilon_l) \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{yz} \cos \gamma = 0 \quad (1.35)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{zx} \cos \alpha + \frac{1}{2} \gamma_{zy} \cos \beta + (\varepsilon_z - \varepsilon_l) \cos \gamma = 0$$

Despejemos los cosenos directores  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  del sistema de ecuaciones 1.35. En este caso no es aceptable la solución trivial  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 0$ , pues los cosenos directores deben cumplir la condición

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.36)$$

En consecuencia, para que haya una solución diferente de la trivial, el determinante del sistema de ecuaciones 1.31 debe ser igual a cero

$$\underline{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_l & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_l & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_l \end{vmatrix} = 0 \quad (1.37)$$

Las deformaciones unitarias principales  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  se obtienen desarrollando el determinante de la ecuación 1.37. Dado que la matriz  $\underline{E}$  es una matriz simétrica, las raíces de la ecuación son tres números reales (Apostol, 1969), los cuales miden las deformaciones unitarias principales. La ecuación característica queda

$$-\varepsilon_l^3 + I_1\varepsilon_l^2 - I_2\varepsilon_l + I_3 = 0 \quad (1.37a)$$

donde

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (1.37b)$$

$$I_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z - \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right)^2 \quad (1.37c)$$

$$I_3 = \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_x\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right)^2 - \varepsilon_y\left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_{xz}\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_{yz}\right) \quad (1.37d)$$

En otras palabras

$$I_3 = \det \underline{E} \quad (1.37e)$$

Como el tensor deformación unitaria  $\underline{E}$  mide un fenómeno físico, además de las propiedades de una matriz simétrica, tiene propiedades adicionales. Por ejemplo, las magnitudes de los coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  de la ecuación cúbica son independientes del sistema coordenado que se utilice, y, por esta razón, a los coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  se les denomina invariantes del tensor deformación.

## Estado de deformación

Las direcciones principales se hallan sustituyendo cada raíz en el sistema de ecuaciones 1.35, empleando además la ecuación 1.36. Por ser la matriz  $\underline{E}$  simétrica, las direcciones principales son ortogonales entre sí (Apostol, 1969).

*Ejemplo E1.4*

Dado el siguiente tensor deformación unitaria, hallar las deformaciones unitarias principales y las direcciones principales.

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * 10^{-4}$$

Solución

Desarrollando el determinante (ecuación 1.37)

$$I_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (2 + 4 + 3) * 10^{-4} = 9 * 10^{-4}$$

$$I_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z - \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz}\right)^2$$

$$I_2 = (2 * 10^{-4})(4 * 10^{-4}) + (2 * 10^{-4})(3 * 10^{-4}) + (4 * 10^{-4})(3 * 10^{-4}) - (3 * 10^{-4})^2 - (1 * 10^{-4})^2 - (2 * 10^{-4})^2 = 12 * 10^{-8}$$

$$I_3 = \det \underline{E} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} * 10^{-4} = -3 * 10^{-12}$$

$$\varepsilon_l^3 - 9 * 10^{-4} \varepsilon_l^2 + 12 * 10^{-8} \varepsilon_l + 3 * 10^{-12} = 0$$

Obtenemos las raíces de la ecuación:

$$\varepsilon_1 = 7.2998 * 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = 1.9148 * 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = -0.2146 * 10^{-4}$$

## Estado de deformación

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones 1.35

$$(2-7.3)\cos\alpha + 3\cos\beta + 1\cos\gamma = 0 \quad (a)$$

$$3\cos\alpha + (4-7.3)\cos\beta + 2\cos\gamma = 0 \quad (b)$$

$$1\cos\alpha + 2\cos\beta + (3-7.3)\cos\gamma = 0 \quad (c)$$

Multiplicando por (-2) la ecuación *a* y sumándola a la ecuación *b*

$$(10.6)\cos\alpha - 6\cos\beta - 2\cos\gamma = 0 \quad (a')$$

$$3\cos\alpha + (4-7.3)\cos\beta + 2\cos\gamma = 0 \quad (b)$$

$$13.6\cos\alpha - 9.3\cos\beta = 0$$

$$\cos\alpha = 0.68382\cos\beta \quad (d)$$

Multiplicando por (-3) la ecuación *c* y sumándola a la ecuación *b*

$$-3\cos\alpha - 6\cos\beta + 12.9\cos\gamma = 0 \quad (c')$$

$$3\cos\alpha - 3.3\cos\beta + 2\cos\gamma = 0 \quad (b)$$

$$-9.3\cos\beta + 14.9\cos\gamma = 0$$

$$\cos\gamma = 0.62416\cos\beta \quad (e)$$

Se debe cumplir (ecuación 1.36)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (f)$$

Sustituyendo las ecuaciones *d* y *e* en la ecuación *f*

$$0.46761\cos^2\beta + \cos^2\beta + 0.38958\cos^2\beta = 1$$

$$\cos\beta_1 = 0.73379$$

$$\cos\beta_1 = 0.73379$$

Sustituyendo en la ecuación *d*

$$\cos\alpha_1 = 0.50178$$

Sustituyendo en la ecuación  $g$

$$\cos\gamma_1 = 0.4580$$

Procedemos en forma análoga para hallar las otras direcciones principales

$$\cos\alpha^2 = -0.3892$$

$$\cos\beta^2 = -0.2813$$

$$\cos\gamma^2 = 0.8771$$

$$\cos\alpha^3 = -0.77216$$

$$\cos\beta^3 = 0.61857$$

$$\cos\gamma^3 = -0.14539$$

Nota: Se deja como ejercicio al lector verificar que las direcciones principales son ortogonales entre sí.

## 1.7 Representación gráfica de Mohr

Consideremos el siguiente tensor deformación

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Donde  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

Grafiquemos los valores de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  y tracemos los círculos indicados en la Figura 1.9. A estos círculos se les denomina *círculos de Mohr*.

Se puede demostrar que un punto de coordenadas  $P(\varepsilon, \varepsilon_\theta)$ , que mide las deformaciones unitarias lineal y angular en alguna dirección dada, tiene que quedar necesariamente dentro de la zona achurada de la Figura 1.9 (Castillo, 1985).

Procedamos a demostrar la afirmación anterior.

De la ecuación 1.17:  $\underline{\varepsilon}_u = \underline{E} \underline{e}$

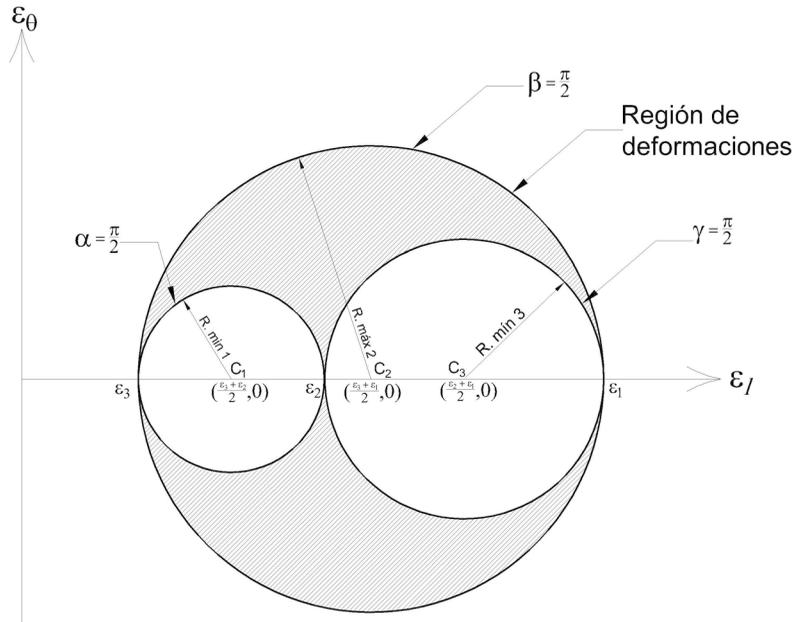


Figura 1.9. Círculo de Mohr

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon}_u = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \cos\alpha \\ \varepsilon_2 \cos\beta \\ \varepsilon_3 \cos\gamma \end{bmatrix}$$

De la ecuación 1.18:  $\varepsilon_l = (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{e})$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma \quad (1.38)$$

Aplicando la ecuación 1.28  $\varepsilon_\theta^2 = \varepsilon_u^2 - \varepsilon_l^2$

$$\varepsilon_u^2 = \varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2$$

Pero

$$\varepsilon_u^2 = \sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3^2 \cos^2 \gamma}$$

$$\varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2 = \varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3^2 \cos^2 \gamma \quad (1.39)$$

Agrupemos las ecuaciones 1.38 y 1.39 junto con la de los cosenos directores:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma &= \varepsilon_l \\ \varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3^2 \cos^2 \gamma &= \varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2 \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= 1\end{aligned}\quad (1.40)$$

Despejemos  $\cos^2 \alpha$  del sistema de ecuaciones 1.40, utilizando la regla de Cramer

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_l & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{[\varepsilon_l(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \varepsilon_2(\varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2) + \varepsilon_2\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3(\varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2) - \varepsilon_3\varepsilon_2^2]}{[\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \varepsilon_2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3\varepsilon_2^2]} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{[-\varepsilon_l(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \varepsilon_2(\varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)]}{[\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) - \varepsilon_1^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) + \varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)]} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{[(\varepsilon_l^2 + \varepsilon_\theta^2) - \varepsilon_l(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_2\varepsilon_3]}{[(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)]} \\ \varepsilon_l^2 - \varepsilon_l(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \left[\frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2}\right]^2 + \varepsilon_\theta^2 &= -\varepsilon_2\varepsilon_3 + \left[\frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2}\right]^2 + [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)]\cos^2 \alpha \\ \left[\varepsilon_l - \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2}\right]^2 + \varepsilon_\theta^2 &= \left[\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{2}\right]^2 + [(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)]\cos^2 \alpha \\ \left[\varepsilon_l - \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2}\right]^2 + \varepsilon_\theta^2 &= \left[\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{2}\right]^2 + [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)]\cos^2 \alpha\end{aligned}\quad (1.41)$$

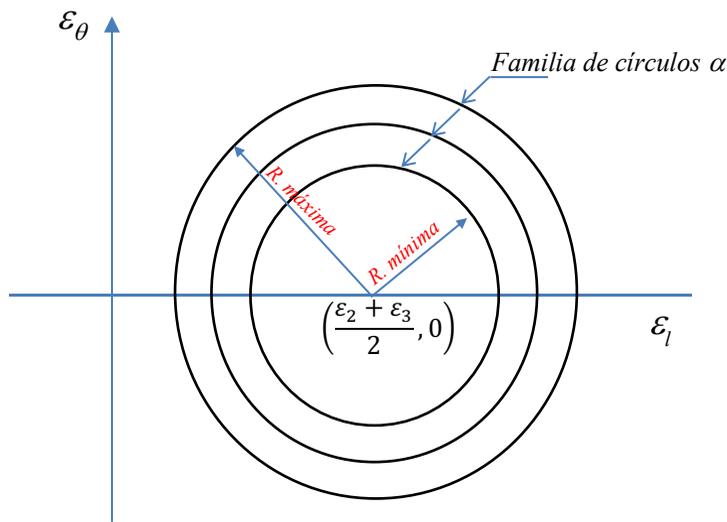
Observamos de la ecuación 1.41 que  $\varepsilon_l$  y  $\varepsilon_\theta$  están relacionados mediante la ecuación de un círculo, cuyas propiedades dependen de  $a$ . En otras palabras, la ecuación 1.41 corresponde a una familia de círculos en función de  $a$ ; el centro y los radios mínimo y máximo de esta familia son

$$C_\alpha \left[ \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2}, 0 \right]$$

$$R_{min} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{2} \quad \left[ \cos \alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$R_{max} = \sqrt{\left[ \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{2} \right]^2 + [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)]} \quad \left[ \cos \alpha = 1, \alpha = 0 \right]$$

En la Figura 1.10 se muestra la familia de círculos  $\alpha$ .



**Figura 1.10.** Familia de círculos

En forma análoga se obtienen las familias de círculos  $\beta$  y  $\gamma$ :

Familia de círculos  $\beta$

$$\left[ \varepsilon_1 - \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{2} \right]^2 + \varepsilon_\theta^2 = \left[ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{2} \right]^2 + [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)] \cos^2 \beta \quad (1.42)$$

$$C_\beta \left[ \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{2}, 0 \right]$$

$$R_{min} = \sqrt{\left[ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{2} \right]^2 + [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)]} \quad \left[ \cos \beta = 1, \beta = 0 \right]$$

$$R_{max} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}{2} \quad \left[ \cos \beta = 0, \beta = \frac{\pi}{2} \right]$$

Familia de círculos  $\gamma$

$$\left[ \varepsilon_l - \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}{2} \right]^2 + \varepsilon_\theta^2 = \left[ \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2} \right]^2 + [(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)] \cos^2 \gamma \quad (1.43)$$

$$C_\gamma \left[ \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2}, 0 \right]$$

$$R_{min} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} \quad \left[ \cos \gamma = 0, \gamma = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$R_{max} = \sqrt{\left[ \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2} \right]^2 + [(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)]} \quad \left[ \cos \gamma = 1, \gamma = 0 \right]$$

Grafiquemos ahora el círculo a de radio  $R = R_{min}$ , el círculo b de radio  $R = R_{max}$  y el círculo g de radio  $R = R_{min}$  (Figura 1.10).

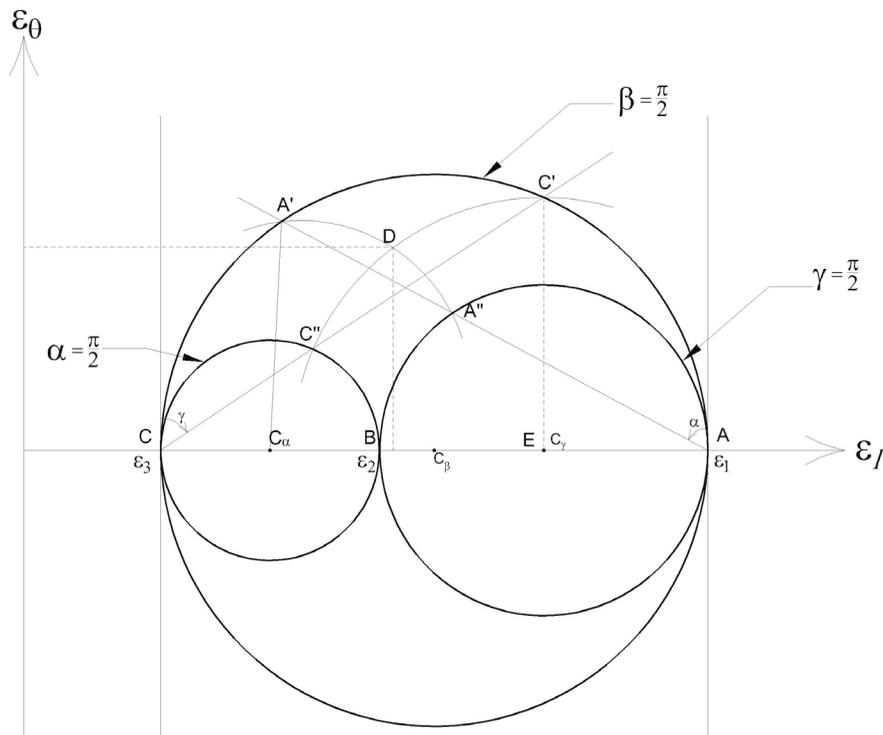


Figura 1.11. Círculo de Mohr en tres dimensiones

Debido a que  $e_l$  y  $e_q$  están relacionados entre sí mediante las ecuaciones 1.41, 1.42 y 1.43, el punto  $P(\varepsilon_p, \varepsilon_\theta)$  debe quedar en cada circunferencia  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Dado que el círculo  $a$  tiene que ser mayor o igual que el correspondiente a  $a = \pi/2$ , que el círculo  $g$  tiene que ser mayor o igual que el círculo  $\gamma = \pi/2$ , y que el círculo  $b$  tiene que ser menor o igual que el círculo  $\beta = \pi/2$ , el punto  $P(\varepsilon_p, \varepsilon_\theta)$  tiene que quedar necesariamente en la zona achurada de la Figura 1.9.

## 1.8 Determinación de las deformaciones unitarias lineal y angular en una dirección. Método gráfico de Mohr

Consideremos que deseamos determinar el estado de deformación en la dirección dada por el vector

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

El procedimiento gráfico consiste en lo siguiente:

- Tracemos a partir del tensor de deformación los tres círculos del plano de Mohr (Figura 1.11).
- A partir del punto  $A$  se traza una paralela al eje  $e_q$ ; a continuación, se traza, también a partir del punto  $A$ , una recta que forma un ángulo  $\alpha$  con la paralela al eje  $e_q$ . Esta recta corta al círculo  $b$  en el punto  $A'$  y al círculo  $g$  en el punto  $A''$ .
- A partir del centro  $C_a$  se traza un arco de circunferencia que corte los puntos  $A'$  y  $A''$ .
- Por el punto  $C$  se traza una paralela al eje  $e_q$ ; a continuación, se traza, también a partir del punto  $C$ , una recta que forme un ángulo  $\gamma$  con la paralela al eje  $e_q$ . Esta recta corta al círculo  $b$  en el punto  $C'$  y al círculo  $a$  en el punto  $C''$ .
- Por el centro  $C_g$  se traza un arco de circunferencia que corte los puntos  $C'$  y  $C''$ .
- Las coordenadas del punto de intersección  $D$  (Figura 1.11) de los dos arcos representan la deformación unitaria lineal y la deformación unitaria angular, en la dirección dada por el vector  $\underline{e}$ .

Demostremos primeramente que el punto  $C'$  (Figura 1.11) pertenece a un círculo cuyo coseno director es  $\cos\beta$ . Con el procedimiento analítico, las deformaciones lineal y angular valen (ecuaciones 1.17, 1.18 y 1.23)

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{E} \underline{e} \quad (1.44)$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_u \cdot \underline{e} \quad (1.45)$$

$$\varepsilon_\theta = |\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e}| \quad (1.46)$$

Como el punto C' está en el círculo  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos\beta = 0$ , y el vector  $\underline{e}_C$  queda

$$\underline{e}'_C = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Además, se debe cumplir

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Por lo tanto

$$\cos\alpha = \text{sen } \gamma$$

Sustituyendo en las ecuaciones 1.44 a 1.46

$$\varepsilon_l = \varepsilon_1 \text{sen}^2 \gamma + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma \quad (1.47)$$

$$\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e} = -j1(\varepsilon_1 \text{sen} \gamma \cos \gamma - \varepsilon_3 \text{sen} \gamma \cos \gamma) = [-(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \text{sen} \gamma \cos \gamma] j$$

$$\varepsilon_\theta = |\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e}| = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \cos \gamma \text{sen} \gamma \quad (1.48)$$

Obtengamos ahora gráficamente las deformaciones lineal y angular del punto C'; de la Figura 1.11

$$OE = OC + CE$$

$$CC' = CA \text{sen } \gamma$$

$$OE = \varepsilon_1 \text{sen}^2 \gamma + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma \quad (1.49)$$

También

$$EC' = CC' \cos \gamma$$

$$CC' = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \text{sen } \gamma$$

$$EC' = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \text{sen} \gamma \cos \gamma \quad (1.50)$$

## Estado de deformación

Comparando las ecuaciones 1.47 y 1.49, y las ecuaciones 1.48 y 1.50, apreciamos que en efecto las coordenadas del punto  $C'$  miden el estado de deformación en la dirección dada por el vector  $\underline{e}'_c$ . Por lo tanto, el punto  $C'$  pertenece al círculo cuyo coseno director es  $\cos \gamma$ ; cualquier circunferencia que pase por este punto, con centro en  $C_\gamma$ , representará deformaciones en una dirección con coseno director  $\cos \gamma$ .

Procediendo en forma análoga, se demuestra que el punto  $A'$  pertenece al círculo cuyo coseno director es  $\cos \alpha$ ; cualquier circunferencia que pase por este punto, con centro en  $C_\alpha$ , representará deformaciones en una dirección con coseno director  $\cos \alpha$ .

El punto de intersección de los dos arcos de circunferencia mide el estado de deformación cuyos ángulos directores son  $\alpha$  y  $\gamma$ ; ahora  $\beta$  es diferente a  $\pi/2$ , pues queda obligado por  $\alpha$  y  $\gamma$ .

Con lo anterior, hemos demostrado que las coordenadas del punto D de la Figura 1.11 miden: su abscisa la deformación unitaria lineal y su ordenada la deformación unitaria angular, en la dirección dada por el vector  $\underline{e}$ .

*Ejemplo E1.5. Dado el siguiente tensor deformación:*

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Hallar las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección dada por el vector

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

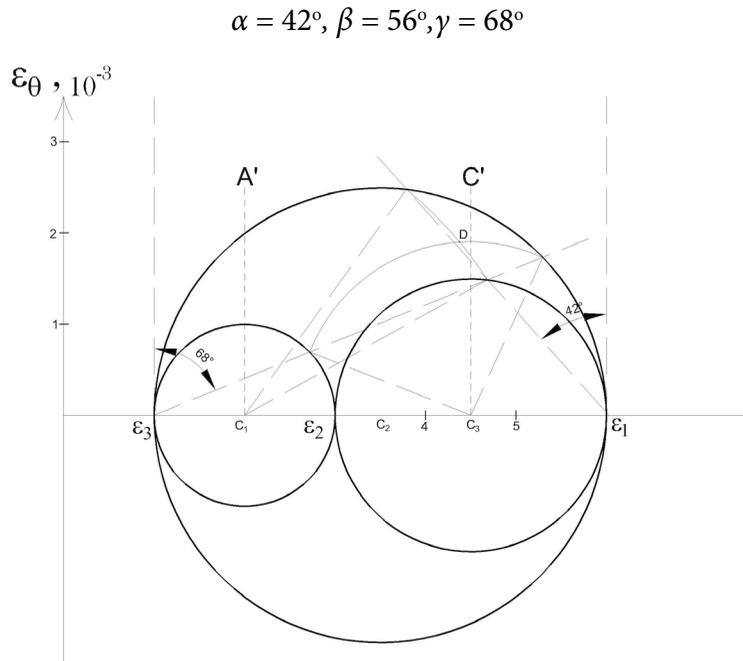
Utilizar el procedimiento gráfico de Mohr.

*Solución*

El vector unitario  $\underline{e}$  en la dirección de AB vale

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} 0.7428 \\ 0.5571 \\ 0.3714 \end{bmatrix}$$

Es decir



**Figura E1.5.1.** Círculo de Mohr en tres dimensiones

En la Figura E1.5.1 se exhibe el procedimiento gráfico para obtener el punto D, cuyas coordenadas miden las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección del vector  $\underline{e}$ . Obtenemos de la Figura E1.5.1.

$$\varepsilon_l = 0.0044 \quad \text{y} \quad \varepsilon_\theta = 0.0019$$

Ejemplo E1.6 Dado el siguiente tensor deformación unitaria

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Hallar las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección dada por el vector

$$\underline{AB} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

## Estado de deformación

Utilizar el método gráfico de Mohr.

*Solución:*

El vector  $\underline{e}$  vale

$$\underline{e} = \frac{AB}{|AB|} = \begin{bmatrix} 0.5744 \\ 0.5026 \\ 0.6462 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 54.9^\circ$$

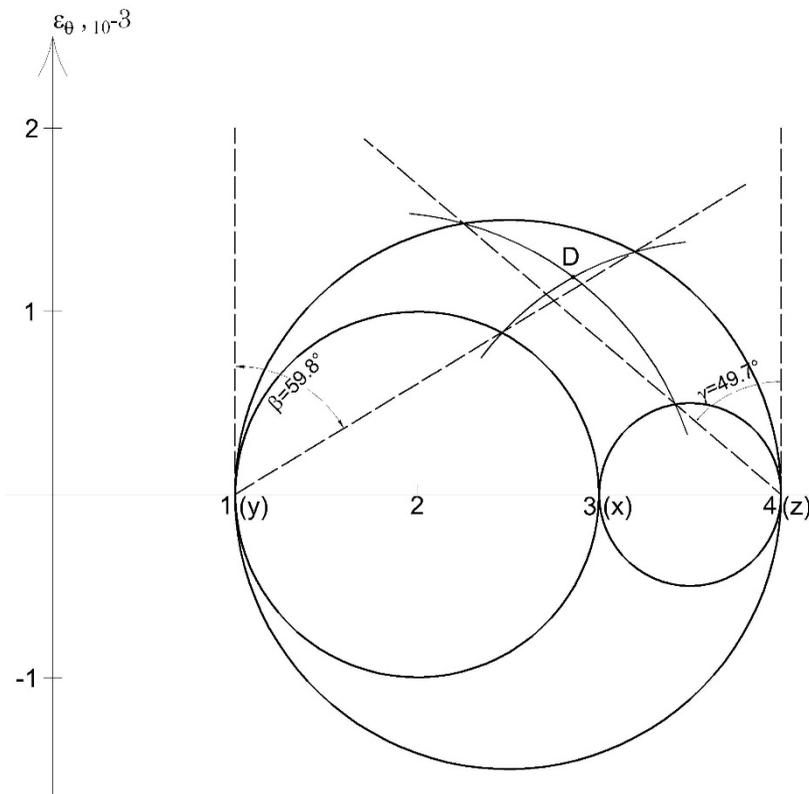
$$\beta = 59.8^\circ$$

$$\gamma = 49.7^\circ$$

En la Figura E1.6.1 se muestra la solución gráfica. Las coordenadas del punto D proporcionan las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección de vector  $\underline{e}$ . En la figura medimos:

$$\varepsilon_1 = 2.9 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_\theta = 1.2 \times 10^{-3}$$



**Figura E1.6.1** Círculos de Mohr

## 1.9 Estado de deformación plana

Se define un estado de deformación plana cuando se cumple

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz} = 0$$

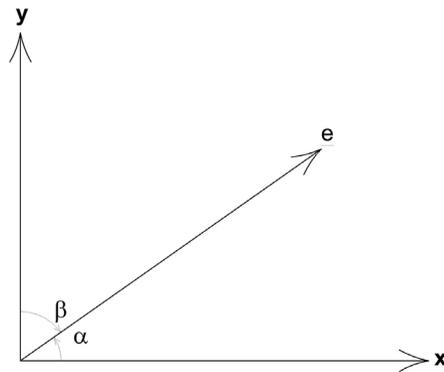
El tensor deformación queda

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

De la figura 1.12:  $\cos \beta = \text{sen } \alpha, \gamma = 90^\circ, \cos \gamma = 0$ , por lo tanto

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$



**Figura 1.12.** Vector de dirección  $\underline{e}$ . Estado de deformación plana

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen } \alpha \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

Aplicando la ecuación 1.17

$$\underline{\varepsilon}_u = \underline{E} \underline{e}$$

$$\underline{\varepsilon}_u = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon}_u = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \cos \alpha & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin \alpha \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos \alpha & \varepsilon_y \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación 1.24

$$\varepsilon_l = (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{e})$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.53)$$

Cuando la deformación unitaria lineal es de extensión, dicha deformación tiene signo positivo (ecuación 1.53). En cambio, si al aplicar la ecuación 1.53 obtenemos una cantidad negativa, la deformación unitaria es de compresión.

La deformación unitaria angular la hallamos empleando la ecuación 1.27

$$\varepsilon_\theta = |\underline{\varepsilon}_\theta| = |\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e}|$$

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (1.54)$$

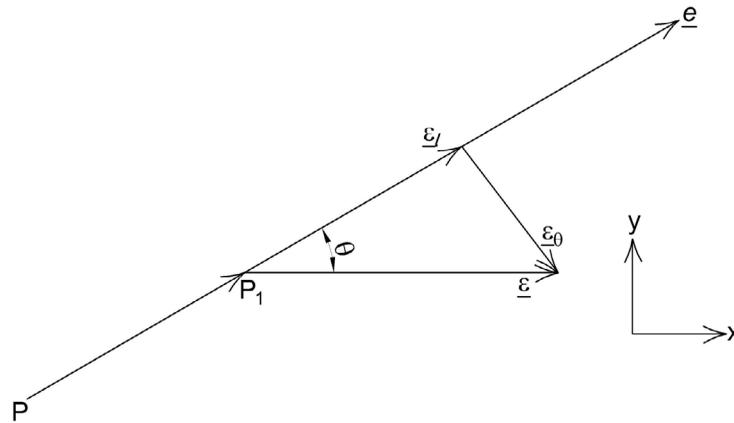
Para conocer el sentido del giro de  $\varepsilon_\theta$ , observamos que el producto  $\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e}$  es un vector perpendicular al plano  $xy$ , es decir

$$\underline{\varepsilon}_u \times \underline{e} = ck \quad (1.55)$$

En la Figura 1.13 apreciamos que, si el giro del segmento de recta  $PP_1$  es en sentido horario,  $c > 0$ ; mientras que si el giro del segmento de recta  $PP_1$  es en sentido antihorario,  $c < 0$ . Pero el valor de  $c$  de la ecuación 1.55 es la magnitud del vector  $\underline{e} \times \underline{e}$ , y la magnitud de

## Estado de deformación

este vector corresponde a la deformación unitaria angular  $\varepsilon_\theta$  de la ecuación 1.27 o de la ecuación 1.54, es decir,  $\varepsilon_\theta$  y  $c$  valen la misma cantidad; por lo tanto, si al aplicar la ecuación 1.54  $\varepsilon_\theta$  da positivo, la recta  $PP_1$  gira en sentido horario; en caso contrario, la recta  $PP_1$  gira en sentido antihorario.



**Figura 1.13.** Giro del segmento de recta  $PP_1$ . Estado de deformación plana

Las ecuaciones 1.53 y 1.54 se pueden poner en función del ángulo doble  $2\alpha$ . Empleando las identidades trigonométricas

$$\cos^2 \alpha = \frac{(1 + \cos 2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

Obtenemos

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (1.56)$$

$$\varepsilon_\theta = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \sin 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha \quad (1.57)$$

Las deformaciones unitarias principales las hallamos de la ecuación 1.37

$$\underline{E} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_l & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_l & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_l \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos que una deformación principal es  $\varepsilon_l = \varepsilon_3 = 0$ . Las otras dos deformaciones principales las hallamos con la ecuación característica reducida

$$\varepsilon_l^2 - \varepsilon_l(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x \varepsilon_y - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 = 0$$

es decir

$$\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1.58)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1.59)$$

Una dirección principal es la del eje  $z$ , dado que en ella la deformación angular vale cero. Las otras dos direcciones principales las obtenemos con el sistema de ecuaciones 1.35

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_l)\cos\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sen\alpha = 0$$

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_l)\cos\alpha = -\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sen\alpha$$

$$\frac{\sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_l)}{-\frac{1}{2}\gamma_{xy}}$$

$$\tan \alpha = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}$$

$$\alpha_1 = \text{ang tan} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\frac{1}{2}\gamma_{xy}} \quad (1.60)$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)} \quad (1.61)$$

Dado que estamos considerando  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\cos \gamma = 0$ , los resultados presentados en este inciso son *únicamente* válidos para calcular deformaciones paralelas al plano  $xy$ .

Hemos llamado  $e_1$  y  $e_2$  a las deformaciones unitarias principales en el plano  $xy$ , y  $e_3$  a la deformación unitaria principal paralela al eje  $z$ . Sin embargo, en el espacio  $e_3$  puede ser una deformación principal intermedia o mayor; por ejemplo, si  $\varepsilon_1 > 0$  y  $\varepsilon_2 < 0$ ,  $e_3$  resulta la deformación unitaria principal intermedia.

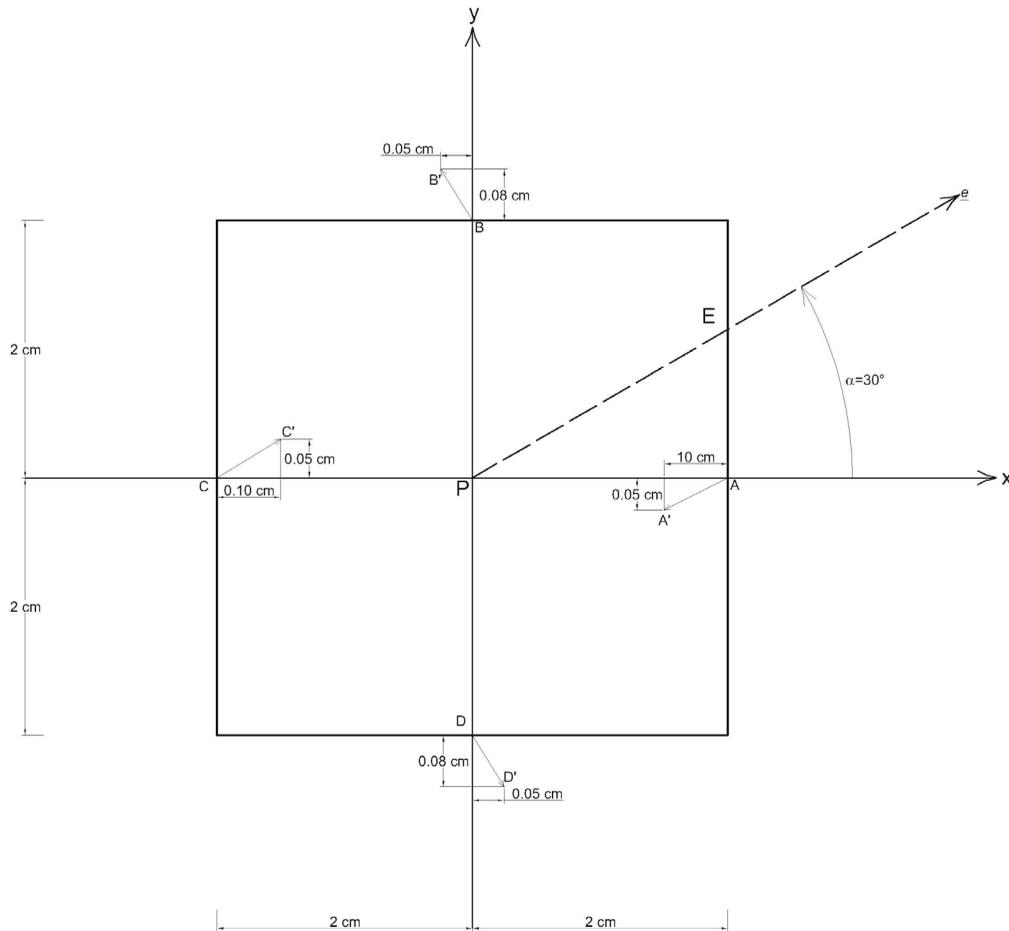
### Ejemplo 1.7.

Dado el estado de deformación plana indicado en la Figura E1.7.1, calcular:

- Las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección del vector  $\underline{e}$  ( $\alpha = 30^\circ$ )
- La magnitud y dirección de las deformaciones unitarias principales
- La nueva longitud y el giro que experimenta el segmento de recta PE

Solución

$$\varepsilon_x = \frac{-0.10}{2} = -0.05, \quad \varepsilon_y = \frac{0.08}{2} = 0.04, \quad \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{-0.05}{2} = -0.025$$



**Figura E1.7.1** Estado de deformación plana

El tensor de deformación queda

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.025 \\ -0.025 & 0.04 \end{bmatrix}$$

a) Para  $\alpha = 30^\circ$

Aplicando las ecuaciones 1.53 y 1.54

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_l = -0.05 \cos^2 30^\circ + 0.04 \sin^2 30^\circ - 0.05 \sin 30^\circ \cos 30^\circ = -0.04915$$

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$\varepsilon_\theta = (-0.05 - 0.04) \sin 30^\circ \cos 30^\circ - 0.025 (\sin^2 30^\circ - \cos^2 30^\circ) = -0.2647$$

## b) Deformaciones unitarias principales

Empleando las ecuaciones 1.58 a 1.61

$$\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(-0.05 + 0.04)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(-0.05 - 0.04)}{2}\right)^2 + (-0.025)^2} = 0.04648$$

$$\alpha_1 = \text{ang tan} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}$$

$$\alpha_1 = \text{ang tan} \frac{(0.04648 - (-0.05))}{-0.025} = -75.47^\circ$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(-0.05 + 0.04)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(-0.05 - 0.04)}{2}\right)^2 + (-0.025)^2} = -0.05648$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \frac{-\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)}$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \frac{-0.025}{(0.04 - (-0.05648))} = 14.53^\circ$$

## c) Aplicando la ecuación 1.32

$$|P'P'_1| = |PP_1| \sqrt{(1 + \varepsilon_l)^2 + \varepsilon_\theta^2}$$

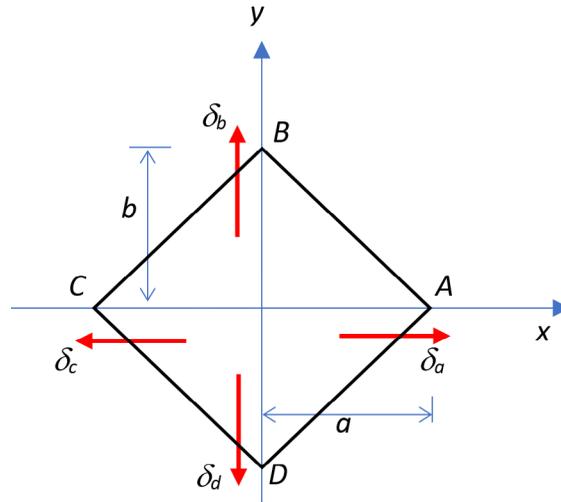
$$|PE'| = 2.309 \sqrt{(1 - 0.04915)^2 + (-0.02647)^2} = 2.1964 \text{ cm}$$

Usando la ecuación 1.33

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon_\theta}{(1 + \varepsilon_l)} = \frac{-0.02647}{1 - 0.04915} = -0.02784, \quad \beta = -1.59^\circ = -0.02783 \text{ rad}$$

**Ejemplo E1.8.**

Los puntos  $A$  y  $C$  del rombo de la Figura E1.8.1 experimentan únicamente desplazamientos lineales  $\delta_a = \delta_c$ , y los puntos  $B$  y  $D$  experimentan únicamente desplazamientos lineales  $\delta_b = \delta_d$ . Determinar la relación entre  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $a$  y  $b$ , de tal forma que no cambie la distancia  $AB$ .

**Figura** E1.8.1**Solución**

$$\varepsilon_x = \frac{\delta_a}{a}, \quad \varepsilon_y = \frac{\delta_b}{b}, \quad \frac{\gamma_{xy}}{2} = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sen \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En la dirección de la recta  $AB$  (ecuación 1.53)

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sen^2 \alpha + \gamma_{xy} \sen \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_{LAR} = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sen^2 \alpha = 0$$

Sustituyendo valores

$$0 = \frac{\delta_a}{a} \left( \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{\delta_b}{b} \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2$$

$$\frac{\delta_a}{\delta_b} = -\frac{b}{a}$$

## 1.10 Círculo de Mohr para el estado de deformación plana

Del tensor (Ec. 1.51)

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Donde  $\varepsilon_y < \varepsilon_x$ .

Las deformaciones unitarias lineal y angular están dadas por (ecuaciones 1.56 y 1.57)

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (1.56)$$

$$\varepsilon_\theta = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha \quad (1.57)$$

Demostremos a continuación que  $e_l$  y  $e_q$  están relacionados a través de la ecuación de un círculo. De la ecuación 1.56

$$\varepsilon_l - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (1.62)$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones 1.62 y 1.57

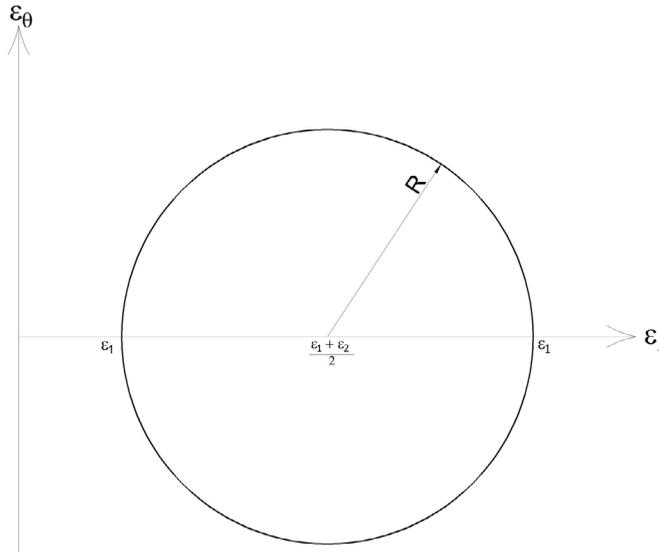
$$\left[ \varepsilon_l - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right]^2 + \varepsilon_\theta^2 = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2 \quad (1.63)$$

## Estado de deformación

La ecuación 1.63 es la ecuación de un círculo con centro  $C\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0\right)$  y radio

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1.64)$$

A este círculo se denomina *círculo de Mohr*, el cual se muestra en la figura 1.14.



**Figura 1.14.** Círculo de Mohr en el plano

Consideremos el estado de deformación indicado en la Figura 1.15a. El círculo de Mohr se exhibe en la Figura 1.15b.

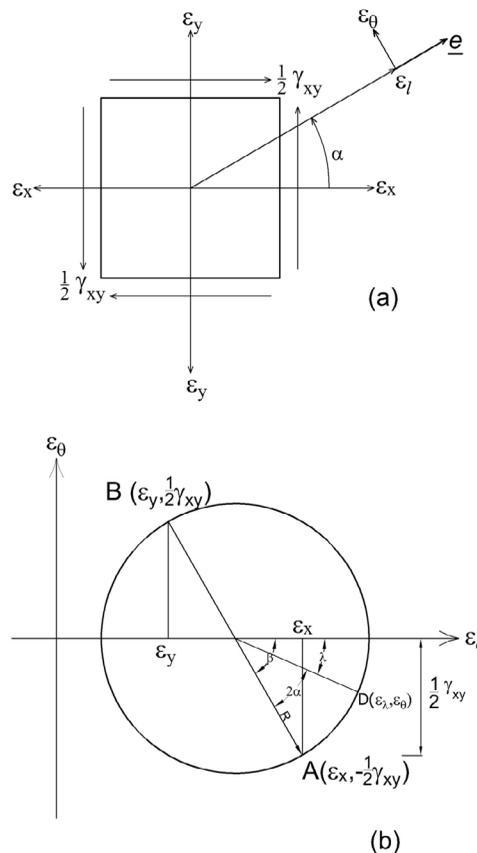
Para hallar las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección del vector  $\underline{e}$  (Figura 1.15a) se emplea el procedimiento del polo de las deformaciones, que consiste en lo siguiente (Alberro, 1970):

- A partir del punto A, que representa el estado de deformación en dirección  $x$ , se traza una recta paralela al eje  $x$  (Figura 1.16).
- A partir del punto B, que representa el estado de deformación en dirección  $y$ , se traza una recta paralela al eje  $y$ .
- El punto donde se intersecan ambas rectas corresponde a la posición del polo de las deformaciones.

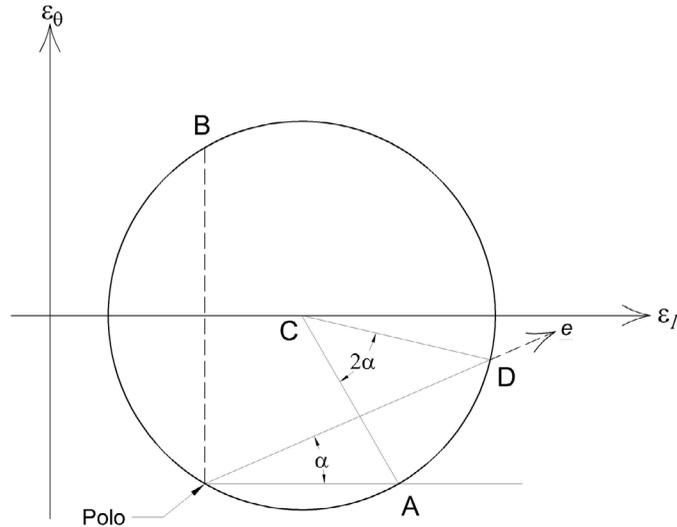
## Estado de deformación

- d) Para hallar el estado de deformación en una dirección definida por el vector  $\underline{e}$ , que forma un ángulo  $\alpha$  con el sentido positivo del eje  $x$ , a partir del polo se traza una recta paralela a dicha dirección. El punto donde esta recta corta a la circunferencia (punto D; Figura 1.16) proporciona las deformaciones buscadas: su abscisa da la deformación unitaria lineal y su ordenada la deformación unitaria angular, en la dirección del vector  $\underline{e}$ .

Demostremos que el estado de deformación en la dirección que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  está dado por el punto D del círculo de Mohr de la Figura 1.15b, es decir, por un punto que forma un ángulo  $2\alpha$  con el punto A, medido a partir del centro del círculo.



**Figura 1.15.** Estado de deformación plana. Círculo de Mohr



**Figura 1.16.** El polo. Círculo de Mohr en el plano

Con el procedimiento analítico habíamos encontrado que las deformaciones unitarias valen (ecuaciones 1.56 y 1.57)

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$\varepsilon_\theta = \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha$$

Probemos que con el método gráfico de la Figura 1.15 se llega a las deformaciones dadas por las ecuaciones 1.56 y 1.57. Las coordenadas el punto D valen (Figura 1.15b):

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R \cos \lambda \quad (1.65)$$

$$\varepsilon_\theta = -R \operatorname{sen} \lambda \quad (1.66)$$

$$\lambda = \beta - 2\alpha$$

Pero (Figura 1.15b):

$$\lambda = \beta - 2\alpha \quad (1.67)$$

Sustituyendo la ecuación 1.67 en la ecuación 1.65

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R \cos(\beta - 2\alpha)$$

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + R \cos\beta \cos 2\alpha + R \sin\beta \sin 2\alpha$$

Pero

$$R \cos\beta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \text{ y } R \sin\beta = \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon_l = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha, \text{ que es la ecuación 1.56}$$

Sustituyendo la ecuación 1.67 en la ecuación 1.66

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= -R \sin(\beta - 2\alpha) \\ \varepsilon_\theta &= -R \sin\beta \cos 2\alpha + R \sin 2\alpha \cos\beta \\ \varepsilon_\theta &= \left( \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right) \sin 2\alpha - \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha, \text{ que es la ecuación 1.57} \end{aligned}$$

Por lo tanto, con los procedimientos analítico y gráfico se llega a los mismos resultados. Con esto verificamos la validez del uso del ángulo doble del método gráfico.

En la Figura 1.16 apreciamos que con el procedimiento del polo de las deformaciones se llega al mismo resultado, pues un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad del ángulo medido a partir del centro del círculo.

Debido a que todos los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales, el polo se puede ubicar en cualquier punto de la circunferencia, y la única condición es que el ángulo a se mida a partir del punto A, en sentido antihorario.

*Ejemplo E1.9.*

Dado el siguiente estado de deformación unitaria plana:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.025 \\ -0.025 & 0.04 \end{bmatrix}$$

## Estado de deformación

hallar

- Las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección del vector  $\underline{e}$  ( $\alpha = 30^\circ$ )
- La magnitud y dirección de las deformaciones unitarias principales. Utilizar el método gráfico de Mohr

Solución

En la Figura E1.9.1 se muestra el estado de deformación unitaria del elemento, y en la Figura E1.9.2 se exhibe el círculo de Mohr correspondiente. Para hallar el polo, a partir del punto A (que representa el estado de deformación en dirección del eje x) se traza una paralela al eje x; a partir del punto B (que mide el estado de deformación en dirección del eje y) se traza una paralela al eje y (Figura E1.9.2). El punto donde se intersectan ambas rectas es el polo de las deformaciones (Figura E1.9.2). Para obtener las deformaciones en la dirección del vector  $\underline{e}$ , a partir del polo trazamos una recta paralela a dicho vector  $\underline{e}$ ; el punto donde esta recta cruza a la circunferencia proporciona el estado de deformación unitaria en la dirección del vector  $\underline{e}$ . Las deformaciones unitarias y las direcciones principales se obtienen en forma similar (Figura E1.9.2). En la Figura E1.9.2 medimos

$$\epsilon_l = -0.049, \epsilon_q = -0.026$$

$$\epsilon_1 = 0.046, \alpha_1 = -75^\circ$$

$$\epsilon_2 = -0.056, \alpha_2 = 15^\circ$$

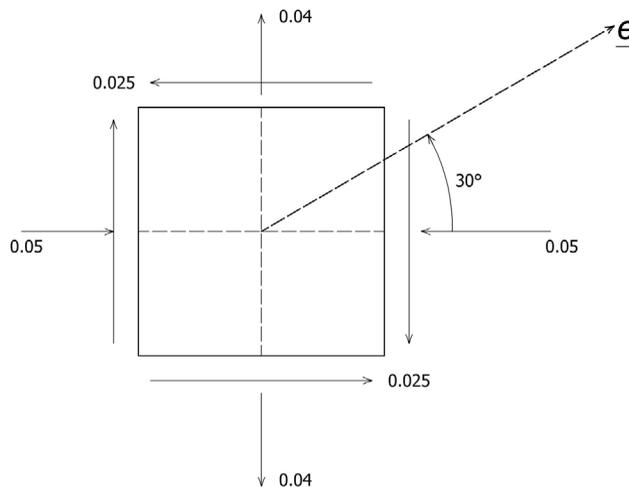
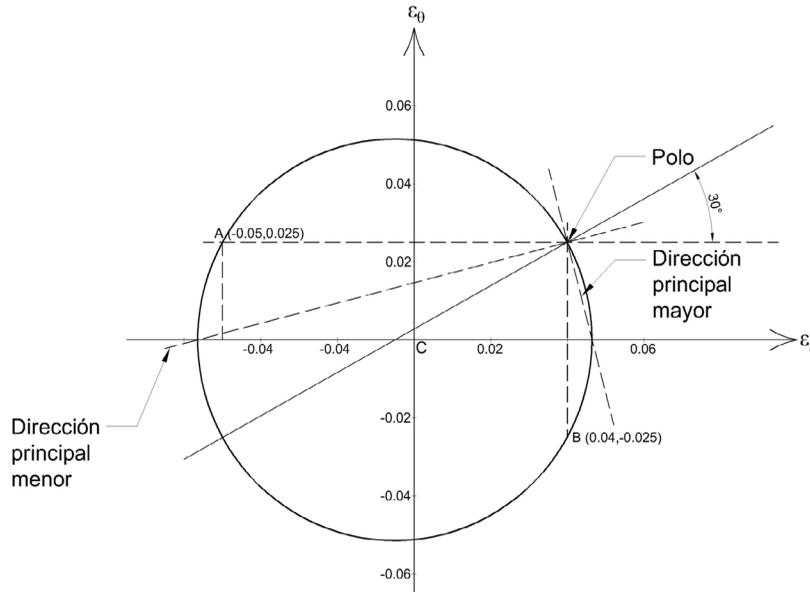


Figura E1.9.1. Estado de deformación

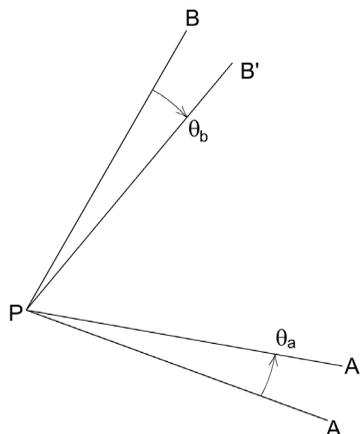


**Figura E1.9.2.** Círculo de Mohr en el plano

### 1.11 Deformación de un ángulo

Consideremos que el ángulo  $APB$  se deforma al ángulo  $A'PB'$  (Figura 1.17). Se define la deformación del ángulo  $APB$  como la suma de los ángulos  $\theta_a$  y  $\theta_b$ , es decir

$$\text{Deformación } \angle APB = \theta_a + \theta_b \quad (1.68)$$



**Figura 1.17.** Deformación en un ángulo

Supongamos que los ángulos  $\theta_a$  y  $\theta_b$  son suficientemente pequeños, entonces

$$\theta_a \cong -\varepsilon_{\theta a} \text{ y } \theta_b \cong \varepsilon_{\theta b}$$

Por lo tanto

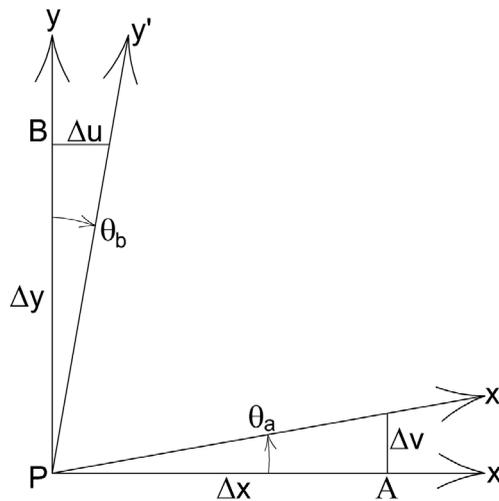
$$\text{Deformación } \angle APB \cong \varepsilon_{\theta b} - \varepsilon_{\theta a} \quad (1.69)$$

### 1.11.1 Deformación de un ángulo recto

Sea el ángulo recto APB de la Figura 1.18. Para ángulos pequeños

$$\theta_a \cong \frac{\Delta v}{\Delta x} = \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

$$\theta_b \cong \frac{\Delta u}{\Delta y} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$$



**Figura 1.18.** Deformación de un ángulo recto

## Estado de deformación

Si no se presenta rotación del cuerpo  $\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$ . Sumando las dos ecuaciones anteriores

$$\gamma_{xy} \cong \theta_a + \theta_b \quad (1.70)$$

Por la ecuación 1.68

$$\text{Deformación} \angle APB \cong \gamma_{xy} \quad (1.71)$$

También podemos obtener la deformación del ángulo recto APB usando la ecuación 1.54:

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cosen} \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{cosen}^2 \alpha)$$

$$\text{Para } a = 0 \text{ (eje } x\text{):} \quad \varepsilon_{\theta a} = -\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\text{Para } a = 90^\circ \text{ (eje } y\text{):} \quad \varepsilon_{\theta b} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$(\gamma_{xy} = \gamma_{yx})$$

Aplicando la ecuación 1.69 se llega a la ecuación 1.71

$$\text{Deformación} \angle APB \cong \varepsilon_{\theta b} - \varepsilon_{\theta a} = \gamma_{xy} \quad (1.71)$$

Por la ecuación 1.71 se dice que  $\gamma_{xy}$  mide (para pequeñas deformaciones angulares) la deformación del ángulo recto APB de la Figura 1.18.

### 1.12 Deformación unitaria natural

Consideremos una barra prismática de longitud inicial  $L_0$ , sometida a un esfuerzo normal de tensión bajo el que sufre una deformación total  $\delta$ . La deformación unitaria lineal será

$$\varepsilon_l = \frac{\delta}{L_0} \quad (1.72)$$

## Estado de deformación

A  $\epsilon_l$  se conoce como deformación unitaria de Cauchy. Sin embargo, se puede dar otra definición de deformación unitaria que tome en cuenta la variación gradual de la longitud de  $L_0$  a  $L_f$ . Así, para una longitud  $L$  entre  $L_0$  y  $L_f$ , el incremento de deformación unitaria es

$$d\epsilon_{lnat} = \frac{dL}{L} \quad (1.73)$$

y la deformación unitaria, al pasar de  $L_0$  a  $L_f$  será

$$\epsilon_{lnat} = \int_{L_0}^{L_f} \frac{dL}{L} = \ln(L_f - L_0) = \ln\left(\frac{L_f}{L_0}\right) \quad (1.74)$$

Como  $L_f = L_0 + \delta$ ,  $\frac{L_f}{L_0} = 1 + \frac{\delta}{L_0}$  entonces

$$\epsilon_{lnat} = \ln(1 + \epsilon_l) \quad (1.75)$$

A la deformación  $\epsilon_{lnat}$  se le conoce como deformación unitaria natural. Fue definida por primera vez por Ludwik en 1909. Para deformaciones pequeñas, los valores de  $\epsilon_l$  en la ecuación 1.72 y de  $\epsilon_{lnat}$  en la ecuación 1.74 prácticamente coinciden. Sin embargo, para grandes deformaciones es preferible emplear  $\epsilon_{lnat}$ .

*Ejemplo E1.10*

Una barra prismática de 15 cm de longitud se somete a un esfuerzo normal de tensión y sufre una deformación de 0.3 cm. Hallar la deformación unitaria lineal de Cauchy y la deformación unitaria lineal de Ludwik.

## Solución

Aplicando la ecuación 1.72

$$\epsilon_l = \frac{\delta}{L_0} = \frac{0.3}{15} = 0.02 \quad (\text{Cauchy})$$

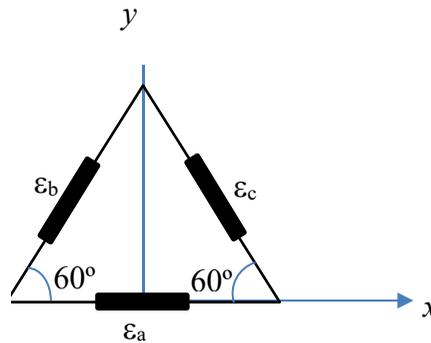
Usando la ecuación 1.75

$$\epsilon_{lnat} = \ln(1 + \epsilon_l) = \ln(1 + 0.02) = 0.0198 \quad (\text{Ludwik})$$

(La diferencia entre la deformación de Cauchy y la de Ludwik es de 1% en este caso).

### 1.12.1 Roseta de deformación a 60°

Una roseta de deformación a 60° (equiangular, Figura 1.19) consiste en producir una relajación de esfuerzos y medir las deformaciones unitarias lineales en tres direcciones  $\varepsilon_a$ ,  $\varepsilon_b$  y  $\varepsilon_c$  (Alberro, 1983).



**Figura 1.19.** Roseta de deformación equiangular

Con estas tres deformaciones se puede calcular el tensor de deformación en dirección paralela a la pared (aun cuando se trata de un estado de esfuerzo plano, se pueden aplicar las ecuaciones correspondientes a un estado de deformación plana, por la presencia de algunos ceros en el tensor de deformación unitaria y en el vector de dirección  $\underline{e}$ ). Si la dirección  $a$  coincide con el eje  $x$ , aplicando la ecuación 1.53

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

Para  $\alpha = 0$ :  $\varepsilon_a = \varepsilon_x$

$$\text{Para } \alpha = 60^\circ: \varepsilon_b = \frac{1}{4} \varepsilon_x + \frac{3}{4} \varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \quad (a)$$

$$\text{Para } \alpha = 120^\circ: \varepsilon_c = \frac{1}{4} \varepsilon_x + \frac{3}{4} \varepsilon_y - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy} \quad (b)$$

Restando (a) y (b)

$$\varepsilon_b - \varepsilon_c = \frac{1}{2} \sqrt{3} \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = 2 \left( \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \right) \quad (c)$$

Sustituyendo (c) en (a)

$$\varepsilon_b = \frac{1}{4}\varepsilon_a + \frac{3}{4}\varepsilon_y + \frac{\sqrt{3}}{4}2\left(\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\varepsilon_a + \frac{\sqrt{3}}{4}2\left(\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}}\right) - \varepsilon_b\right)$$

$$\varepsilon_y = \left(\frac{2(\varepsilon_b - \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3}\right)$$

El tensor deformación unitaria queda

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & \left(\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}}\right) \\ \left(\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}}\right) & \left[\frac{2(\varepsilon_b - \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3}\right] \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

(Cabe aclarar que  $\varepsilon_z \neq 0$ , pero al ser nulo el tercer elemento del vector  $\underline{\varepsilon}$  la magnitud de  $\underline{\varepsilon}$  no afecta los resultados del cómputo de las deformaciones unitarias).

La magnitud y dirección de las deformaciones unitarias principales se obtiene empleando las ecuaciones 1.58 a 1.61.

$$\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1.58)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (1.59)$$

$$\alpha_1 = \text{ang tan} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\frac{1}{2}\gamma_{xy}} \quad (1.60)$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \frac{-\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)} \quad (1.61)$$

### Ejemplo E1.11

Los resultados de mediciones de una roseta de deformación a  $60^\circ$  se presentan en la figura E1.11.1.

$$\varepsilon_a = 0.0002, \varepsilon_b = 0.0001, \varepsilon_c = 0.00015$$

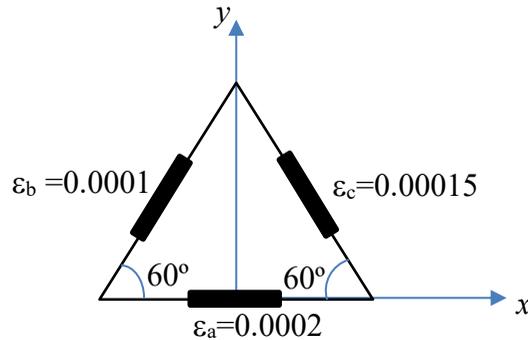


Figura E1.11.1. Roseta de deformación equiangular

Determinar la magnitud y dirección de las deformaciones unitarias principales

Solución

El tensor deformación unitaria está dado por la ecuación 1.76. Sustituyendo valores

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \left( \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \right) = \left( \frac{1 - 1.5}{\sqrt{3}} \right) \times 10^{-4} = -0.28868 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \left( \frac{2(\varepsilon_b - \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3} \right) = \left( \frac{2(1 - 1.5) - 2}{3} \right) \times 10^{-4} = -1 \times 10^{-4}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 2 & -0.28868 \\ -0.28868 & -1 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Aplicando las ecuaciones 1.58 a 1.61

$$\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} + \sqrt{\left( \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$$

$$\varepsilon_1 = \left[ \frac{(2 - 1)}{2} + \sqrt{\left( \frac{(2 + 1)}{2} \right)^2 + (-0.28868)^2} \right] \times 10^{-4} = 2.02753 \times 10^{-4}$$

$$\alpha_1 = \text{ang tan} \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\frac{1}{2} \gamma_{xy}} = \text{ang tan} \frac{(2.02753 - (2))}{-0.28868} = -5.45^\circ$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} - \sqrt{\left( \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$$

$$\varepsilon_2 = \left[ \frac{(2-1)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(2+1)}{2}\right)^2 + (-0.28868)^2} \right] x 10^{-4} = -1.02753 x 10^{-4}$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \frac{-\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)} = \text{ang tan} \frac{0.2886}{(-1 - (-1.02753))} = 84.55^\circ$$

En resumen:

$$\varepsilon_1 = 0.0002027, \alpha_1 = -5.45^\circ$$

$$\varepsilon_2 = -0.000127, \alpha_2 = 84.55^\circ$$

### 1.12.2 Roseta a 45°

En la roseta a 45° (Figura 1.20) se miden las deformaciones a 0°, 45° y 90°.

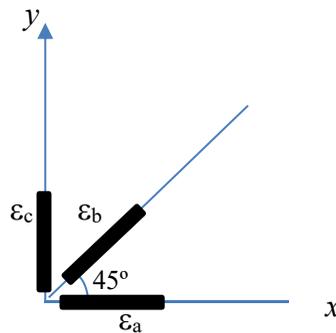


Figura 1.20. Roseta de deformación a 45°.

Así

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{0^\circ}, \varepsilon_b = \varepsilon_{45^\circ}, \varepsilon_c = \varepsilon_{90^\circ}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = \varepsilon_{0^\circ}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c = \varepsilon_{90^\circ}$$

## Estado de deformación

Para obtener la deformación unitaria angular  $(1/2)\gamma_{xy}$  utilizamos  $\varepsilon_b$ , con  $\alpha = 45^\circ$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \varepsilon_b = \frac{1}{2} \varepsilon_a + \frac{1}{2} \varepsilon_c + \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} * \gamma_{xy} = \varepsilon_b - \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2}$$

El tensor deformación unitaria queda

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_a & \varepsilon_b - \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} & 0 \\ \varepsilon_b - \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{2} & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

# Capítulo 2

## Estado de esfuerzo

Las cargas externas que actúan en un instante en una cierta porción de cuerpo libre, dentro de un medio continuo, se clasifican en dos clases: fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie.

## 2.1 Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

Las fuerzas de cuerpo actúan sobre elementos de masa o de volumen dentro del cuerpo, por ejemplo, la acción de la gravedad o fuerzas de origen magnético. Estas son cargas de acción a distancia; usualmente se consideran por unidad de masa o, en ocasiones, por unidad de volumen.

Las fuerzas de superficie son cargas de contacto que actúan precisamente sobre la superficie de un diagrama de cuerpo libre. Comúnmente, se consideran por unidad de área de la superficie sobre la cual actúan.

En mecánica, las cargas reales siempre se ejercen por un cuerpo sobre otro, posiblemente por una porción de un cuerpo actuando sobre una porción del otro, independientemente de si ellas son fuerzas de cuerpo o de superficie. Siempre están involucrados dos cuerpos, y por la tercera ley de Newton, la carga ejercida por un cuerpo sobre otro es igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza ejercida por el segundo cuerpo sobre el primero. Las llamadas fuerzas de inercia, empleadas para establecer un estado de equilibrio ficticio en dinámica, no son cargas reales, puesto que no son ejercidas por cuerpos; la tercera ley de Newton no se aplica a estas fuerzas ficticias. Cuando el método de las cargas dinámicas se utiliza en mecánica del medio continuo, las cargas de inercia se incluyen como fuerzas de cuerpo (Deméneghi, Magaña y Sanginés, 1986).

## 2.2 Estado de esfuerzo en planos perpendiculares a los ejes coordenados

En los siguientes párrafos consideraremos que en el entorno de un elemento de material (Figura 2.1) existe un campo vectorial de fuerzas que es una función continua y diferenciable en dicho entorno. Así

$$N_{xx} = N_x = N_x(x, y, z)$$

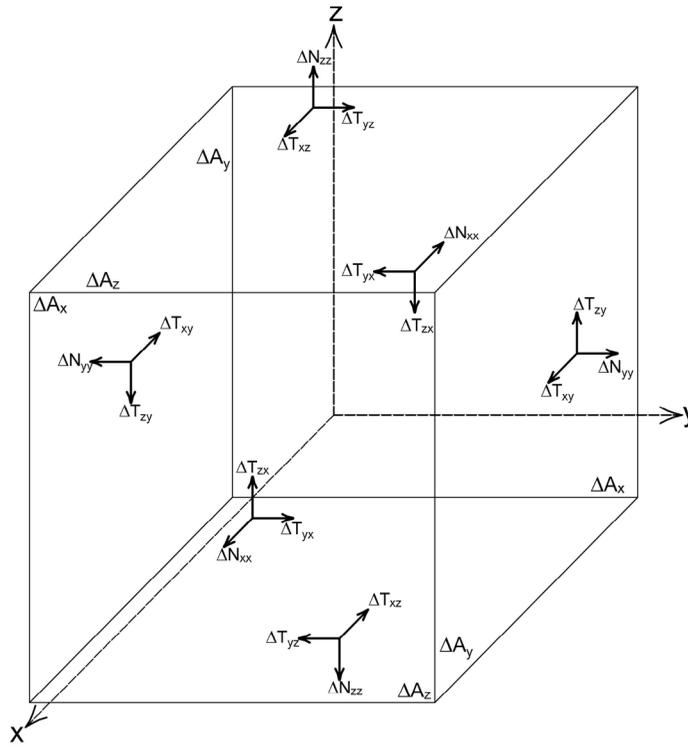
$$T_{xy} = T_{xy}(x, y, z)$$

$$T_{xz} = T_{xz}(x, y, z)$$

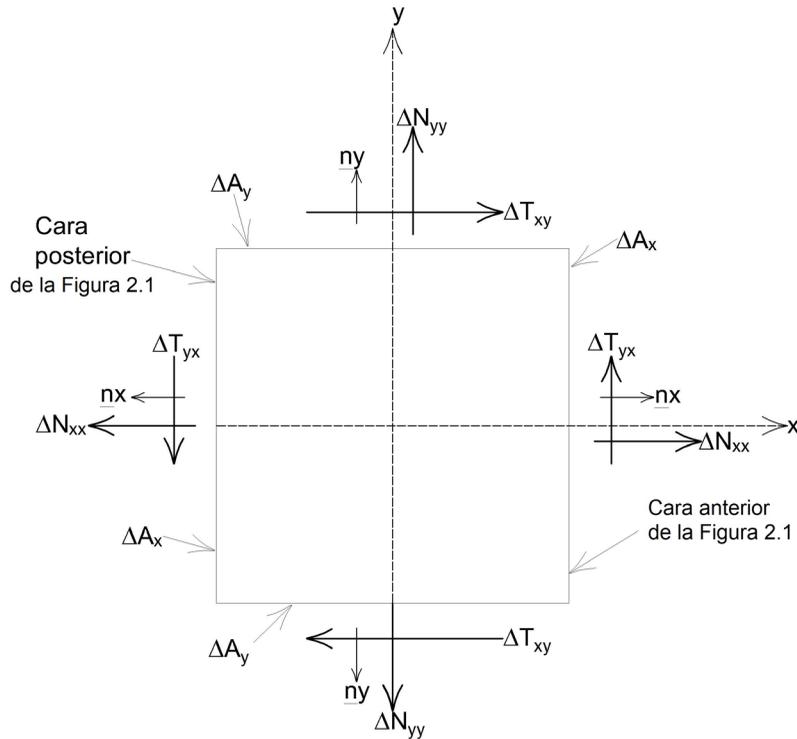
$$N_{yy} = N_y = N_y(x, y, z), \dots$$

## Estado de esfuerzo

Sea un elemento de material sometido al sistema de cargas indicado en la figura 2.1. Consideremos las caras del elemento paralelas a los planos  $xz$  y  $yz$  (Figura 2.2); para las fuerzas y áreas usaremos la siguiente convención de signos: las fuerzas son positivas, si tienen el mismo sentido del eje al que son paralelas. Para las áreas utilizamos el sentido del vector normal a la cara externa: si el vector normal tiene el mismo sentido del eje al cual es paralelo, el área es positiva. Tomemos como ejemplo la cara anterior: la fuerza  $\Delta N_{xx} = \Delta N_x$  es positiva y el área  $\Delta A_x$  es también positiva, como se aprecia en la Figura 2.2.



**Figura 2.1** Sistema de fuerzas actuando en planos perpendiculares a los ejes coordenados



**Figura 2.2.** Fuerzas actuando en planos perpendiculares a los ejes  $x$  e  $y$

Veamos el concepto de esfuerzo en la cara anterior del elemento. El esfuerzo normal medio  $\sigma_{x_m}$  lo obtenemos de la siguiente forma

$$\sigma_{x_m} = \frac{\Delta N_{xx}}{\Delta A_x} \quad (2.1)$$

Dado que  $\Delta N_{xx} > 0$  y  $\Delta A_x > 0$ , el esfuerzo  $s_{x_m}$  es positivo en la cara anterior del elemento. En la cara posterior (figura 2.2) el esfuerzo normal medio está dado también por la ecuación 2.1; como  $\Delta N_{xx} < 0$  y  $\Delta A_x < 0$ , el esfuerzo  $\sigma_{x_m}$  es también positivo. Vemos entonces que el esfuerzo normal medio  $\sigma_{x_m}$  es positivo, tanto en la cara anterior como en la cara posterior del elemento.

Definamos al esfuerzo normal  $\sigma_{xx}$  de la siguiente forma

$$\sigma_{xxm} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta N_{xx}}{\Delta A_x} = \frac{\partial N_{xx}}{\partial A_x} \quad (2.2)$$

Obtengamos a continuación el esfuerzo cortante medio  $t_{yxm}$  en la cara anterior (Figura 2.2)

$$\tau_{xxm} = \frac{\Delta T_{xx}}{\Delta A_x} \quad (2.3)$$

Como  $\Delta T_{yx} > 0$  y  $\Delta A_x > 0$ , el esfuerzo  $t_{yxm}$  es positivo. En la cara posterior el esfuerzo cortante  $t_{yxm}$  se obtiene con la ecuación 2.3; como  $\Delta T_{yx} < 0$  y  $\Delta A_x < 0$ ,  $t_{yxm}$  es también positivo. Por lo tanto, para el sistema de fuerzas actuando en el elemento de la Figura 2.2, los esfuerzos cortantes en las caras anterior y posterior, obtenidos ambos con la ecuación 3, son positivos.

El esfuerzo cortante  $t_{yx}$  se define de la siguiente forma

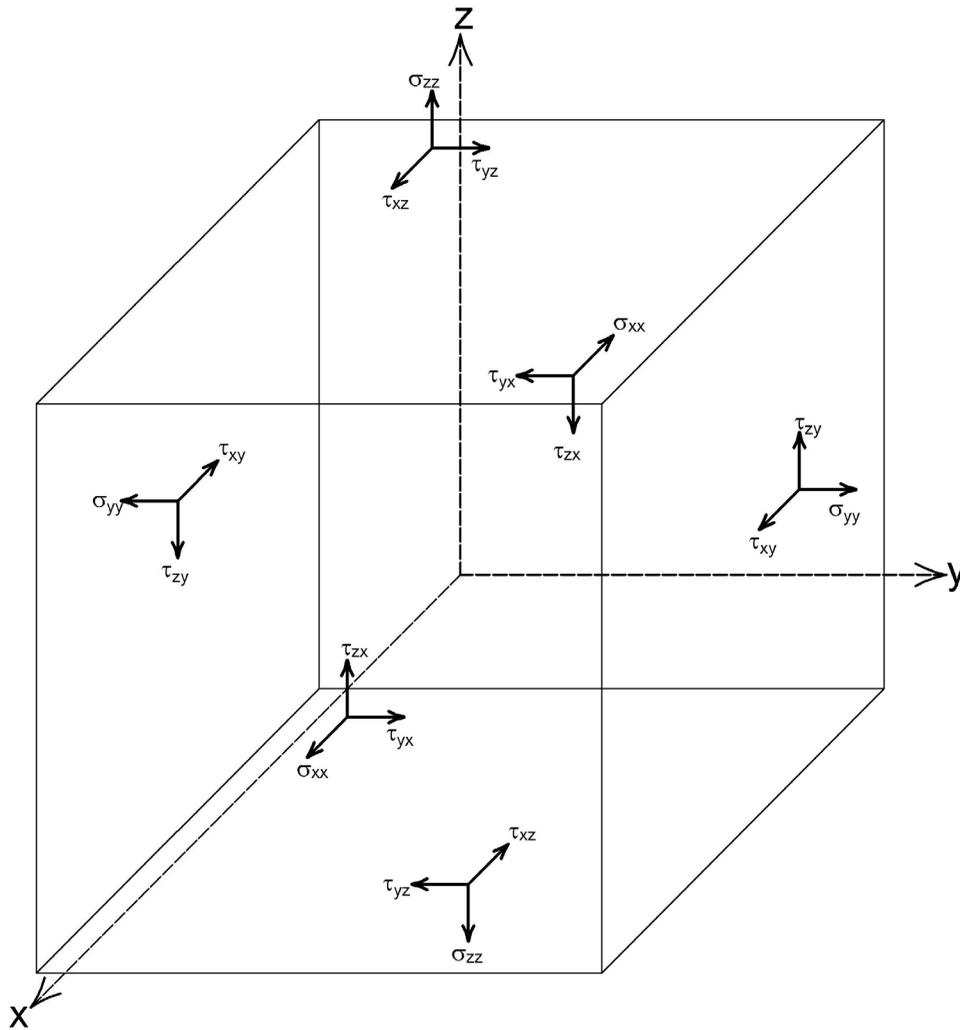
$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial A_x} \quad (2.4)$$

En forma análoga, el esfuerzo cortante  $t_{zx}$  se define

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{zx}}{\Delta A_x} = \frac{\partial T_{zx}}{\partial A_x} \quad (2.5)$$

En las caras paralelas al plano  $xz$  (Figura 2.1) los esfuerzos  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yz}$ , y en las caras paralelas al plano  $xy$  los esfuerzos  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ , se obtienen usando un criterio similar al dado por las ecuaciones 2.2, 2.4 y 2.5.

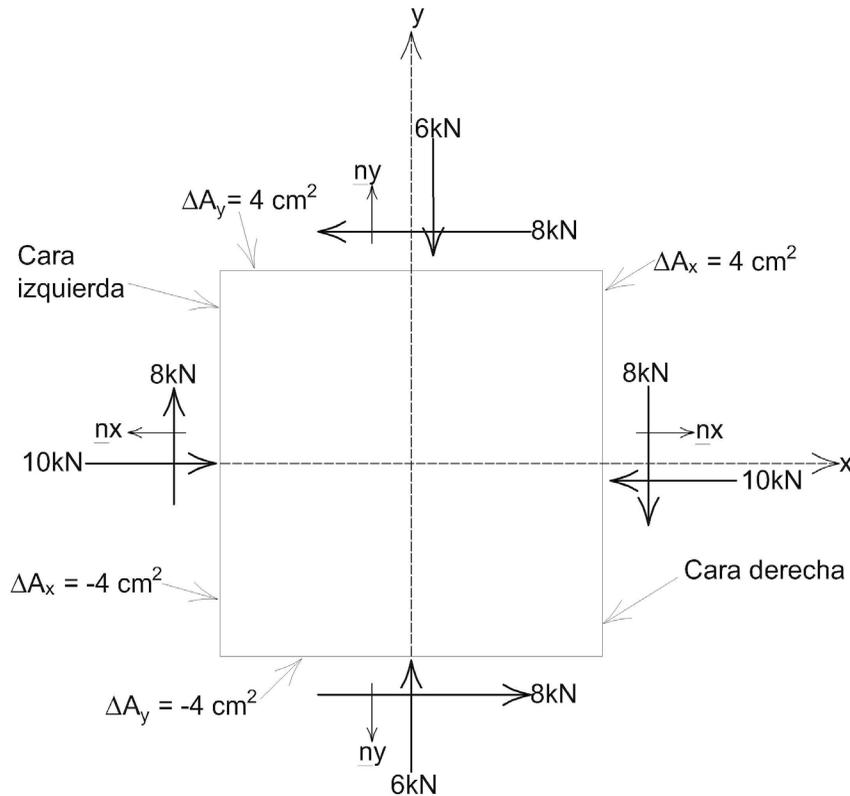
En ocasiones se grafica el estado de esfuerzo como se indica en la Figura 2.3. Cabe aclarar, sin embargo, que el sentido de los esfuerzos no corresponde necesariamente al sentido de los ejes coordenados. Por ejemplo, el esfuerzo normal  $s_{xx}$  en la cara posterior del elemento de la Figura 2.3 tiene sentido contrario al eje  $x$ , y se podría pensar que es negativo; no obstante, como ya indicamos en párrafos anteriores, el esfuerzo  $s_{xx}$  es positivo. Por lo tanto, a los esfuerzos indicados en la Figura 2.3 los podemos denominar *esfuerzos aparentes*. De hecho, el sentido de los esfuerzos aparentes corresponde en realidad al sentido de los incrementos de fuerza que actúan sobre el elemento, como se puede constatar comparando las Figuras 2.1 y 2.3.



**Figura 2.3.** Esfuerzos aparentes

### Ejemplo E-2.1

Dado el sistema de incrementos de fuerza actuando en el elemento de la Figura E-2.1.1, hallar los esfuerzos normales y cortantes en las caras de dicho elemento.



**Figura E-2.1.1.** Fuerzas actuando en un elemento

Solución

Cara derecha

$$\sigma_x = \frac{\partial N_x}{\partial A_x} \cong \frac{\Delta N_x}{\Delta A_x} = \frac{-10}{4} = -2.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial A_x} \cong \frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} = \frac{-8}{4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

Cara izquierda

$$\sigma_x = \frac{\partial N_x}{\partial A_x} \cong \frac{\Delta N_x}{\Delta A_x} = \frac{-10}{4} = -2.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial A_x} \cong \frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} = \frac{-8}{4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\text{Cara superior} \quad \sigma_y = \frac{\partial N_y}{\partial A_y} \cong \frac{\Delta N_y}{\Delta A_y} = \frac{-6}{4} = -1.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{yx} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial A_x} \cong \frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} = \frac{-8}{4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\text{Cara inferior} \quad \sigma_y = \frac{\partial N_y}{\partial A_y} \cong \frac{\Delta N_y}{\Delta A_y} = \frac{-6}{4} = -1.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{yx} = \frac{\partial T_{yx}}{\partial A_x} \cong \frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} = \frac{-8}{4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

### 2.3 Definición de esfuerzo en un plano inclinado

Consideremos un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas, como el tetraedro mostrado en la Figura 2.4. Las fuerzas de superficie en las caras verticales y horizontal del elemento las hemos traducido a esfuerzos, como se indica en la Figura 2.4.

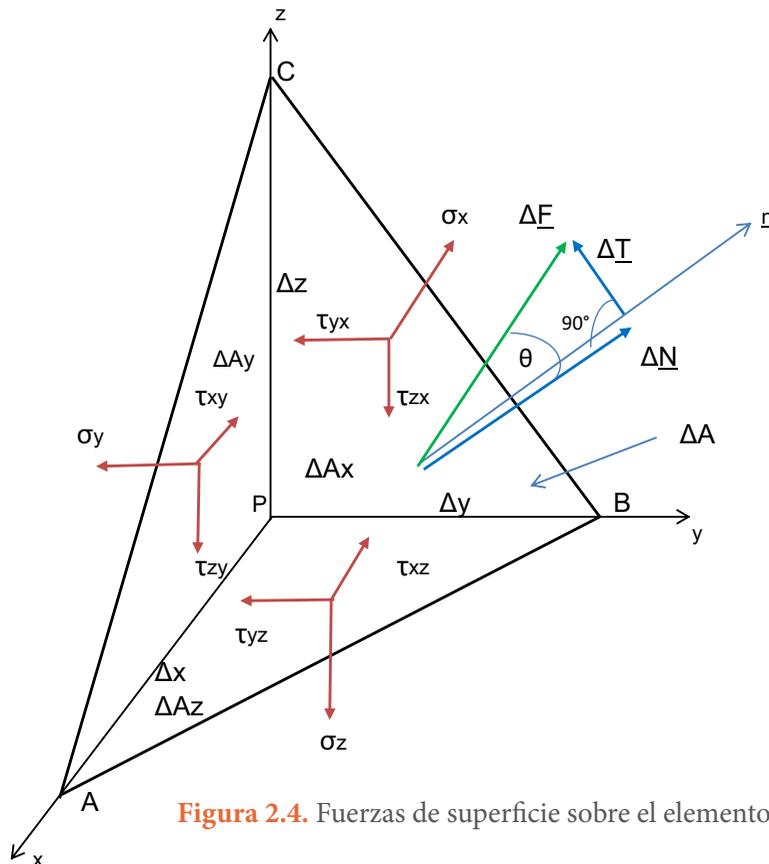


Figura 2.4. Fuerzas de superficie sobre el elemento

## Estado de esfuerzo

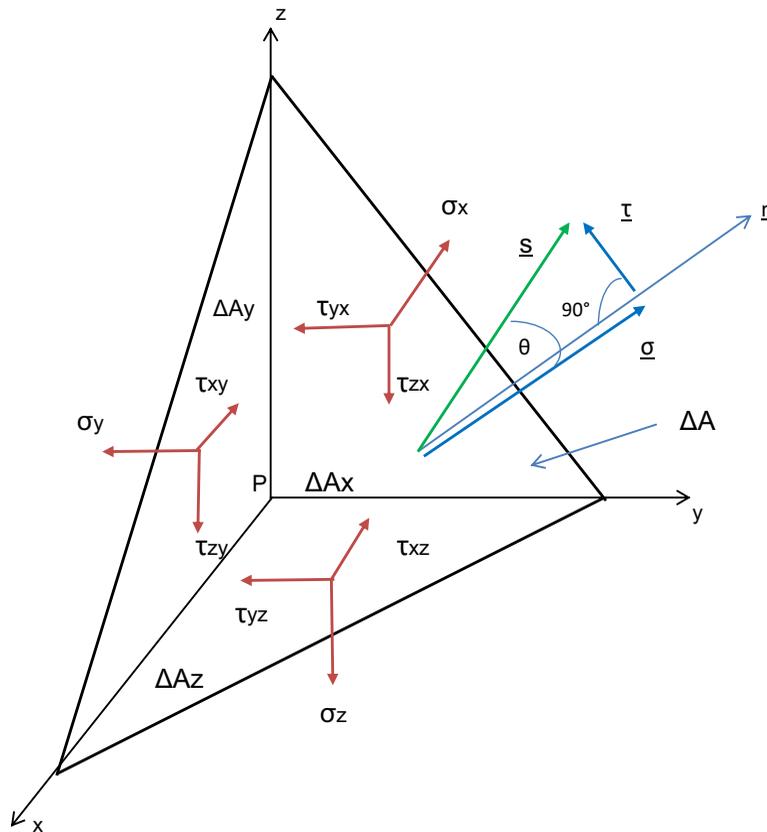
Definimos el vector esfuerzo  $\underline{S}_m$  en la cara inclinada del tetraedro de la siguiente forma

$$\underline{S}_m = \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.6)$$

Y el vector esfuerzo  $\underline{s}$

$$\underline{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.7)$$

En la Figura 2.5 mostramos al vector  $\underline{s}$  actuando sobre la cara inclinada del elemento.



**Figura 2.5.** Vector  $\underline{s}$  actuando sobre la cara inclinada del elemento

Por otra parte, la fuerza  $\Delta \underline{F}$  tiene las componentes

$$\Delta \underline{F} = \begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{Bmatrix}$$

## Estado de esfuerzo

Por lo tanto

$$\underline{S} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \begin{Bmatrix} \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \\ \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \\ \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \\ \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \\ \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Es decir

$$S_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \cong \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \quad (2.9a)$$

$$S_y = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \cong \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \quad (2.9b)$$

$$S_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \cong \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (2.9c)$$

Las fuerzas de cuerpo las tomamos en cuenta con el vector

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Donde  $\underline{b}$  está en  $\left[ \frac{kN}{m^3} \right]$

La condición de equilibrio dinámico, digamos en dirección  $x$ , establece que

$$\Sigma \Delta F_x = m a_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Donde

$m$  = masa del elemento

$a_x$  = aceleración del centro de masa del elemento, en dirección  $x$

$u$  = desplazamiento del centro de masa del elemento, en dirección  $x$

La masa la obtenemos con

$$m = \rho(Vol)$$

siendo  $\rho$  la masa específica del material, en  $\text{Mg/m}^3$

Establezcamos el equilibrio dinámico del tetraedro de la Figura 2.4 en la dirección  $x$

$$\sigma_x(\Delta A_x) - \tau_{xy}(\Delta A_y) - \tau_{xz}(\Delta A_z) + \Delta F_x + \frac{1}{3}b_x(\Delta A_x)(\Delta x) = \frac{1}{3}\rho(\Delta A_x)(\Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.12)$$

Se puede demostrar

$$\Delta A_x = (\Delta A)\cos\alpha$$

$$\Delta A_y = (\Delta A)\cos\beta$$

$$\Delta A_z = (\Delta A)\cos\gamma$$

Donde  $\Delta A$  es el área de la cara inclinada del tetraedro, y  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$  y  $\cos\gamma$  son los cosenos directores del vector normal a la cara inclinada del tetraedro.

Tomando en cuenta la primera de las ecuaciones 2.9

$$\Delta F_x \cong S_x(\Delta A)$$

y reemplazando en la ecuación 2.12

$$S_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\beta + \tau_{xz} \cos\gamma + \frac{1}{3}\rho(\Delta x)\cos\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{3}b_x(\Delta x)\cos\alpha$$

En forma análoga

$$S_y = \tau_{yx} \cos\alpha + \sigma_y \cos\beta + \tau_{yz} \cos\gamma + \frac{1}{3}\rho(\Delta y)\cos\beta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{3}b_y(\Delta y)\cos\beta$$

$$S_z = \tau_{zx} \cos\alpha + \tau_{zy} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma + \frac{1}{3}\rho(\Delta z)\cos\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{3}b_z(\Delta z)\cos\gamma$$

Es decir

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} + \frac{\rho}{3} \begin{Bmatrix} (\Delta x)\cos\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\Delta y)\cos\beta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\Delta z)\cos\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} b_x(\Delta x)\cos\alpha \\ b_y(\Delta y)\cos\beta \\ b_z(\Delta z)\cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Consideremos ahora que las dimensiones del tetraedro tienden a cero

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta y \rightarrow 0$$

$$\Delta z \rightarrow 0$$

La ecuación 2.13 queda

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Es decir

$$\underline{s} = \underline{S}\underline{n} \quad (2.15)$$

Siendo

$$\underline{s} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Observamos que la ecuación 2.15 se cumple cuando las dimensiones del tetraedro de la Figura 2.5 tienden a cero.

A la matriz  $\underline{S}$  se le conoce como tensor esfuerzo, y mide, físicamente, los esfuerzos existentes en tres planos mutuamente perpendiculares entre sí. El nombre de tensor esfuerzo se debe a que, como representa un fenómeno físico, tiene propiedades adicionales a una matriz común y corriente. Como se verá en los incisos siguientes, la matriz  $\underline{S}$  es una matriz simétrica cuando no ocurre rotación del elemento, y posee propiedades que no varían aun

cuando se cambie el sistema de coordenadas; así, por ejemplo, la suma de los elementos de la diagonal principal es siempre la misma. El tensor esfuerzo  $\underline{S}$  tiene otras propiedades más generales que no tocamos en este trabajo por tratarse de materiales que no se utilizan en ingeniería civil.

## 2.4 Descomposición del vector esfuerzo en vector esfuerzo normal y vector esfuerzo cortante

La fuerza  $\Delta F$  de la Figura 2.4 la podemos descomponer en una fuerza normal y en una fuerza cortante a la cara inclinada del tetraedro, es decir

$$\begin{aligned}\Delta \underline{F} &= \Delta \underline{N} + \Delta \underline{T} \\ \Delta \underline{N} &\perp \Delta \underline{T}\end{aligned}$$

Dividimos entre el área  $\Delta A$  de la cara inclinada

$$\frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} = \frac{\Delta \underline{N}}{\Delta A} + \frac{\Delta \underline{T}}{\Delta A}$$

Tomamos límites cuando  $\Delta A \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{F}}{\Delta A} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{N}}{\Delta A} + \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{T}}{\Delta A}$$

Es decir

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{\sigma} + \underline{\tau} \\ \underline{\sigma} &\perp \underline{\tau}\end{aligned}\tag{2.19}$$

Donde

$$\underline{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{N}}{\Delta A} \cong \frac{\Delta \underline{N}}{\Delta A}\tag{2.20}$$

$$\underline{\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{T}}{\Delta A} \cong \frac{\Delta \underline{T}}{\Delta A}\tag{2.21}$$

En la Figura 2.5 se exhiben los vectores  $s$ ,  $\sigma$  y  $\tau$ , actuando sobre la cara inclinada del tetraedro.

Cabe aclarar que, en el desarrollo de este capítulo, haremos la hipótesis de que las dimensiones de los elementos con los que trabajamos son suficientemente pequeñas, para que los esfuerzos medios son equivalentes a los esfuerzos que ocurren cuando el área en que se definen tiende a cero (es decir, se cumplen las aproximaciones de las ecuaciones 2.20 y 2.21). Esta hipótesis es necesaria en numerosas aplicaciones de la mecánica del medio continuo a la ingeniería.

Obtengamos a continuación los esfuerzos normal y cortante sobre un plano, en función del vector  $s$  y del vector normal,  $\underline{n}$ , al plano inclinado del elemento. De acuerdo con la Figura 2.5

$$|\sigma| = \text{proy}_{\underline{n}} \underline{s} = \frac{(\underline{s} \cdot \underline{n})}{|\underline{n}|}$$

pero  $|\underline{n}| = 1$ , por lo tanto

$$\sigma = |\sigma| = \underline{s} \cdot \underline{n} \quad (2.22)$$

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{n} \quad (2.23)$$

$$\underline{\tau} = \underline{s} - \underline{\sigma} \quad (2.24)$$

La magnitud de  $\underline{\tau}$  se obtiene calculando  $|\underline{\tau}|$ .

También observamos que (Figura 2.5)

$$\underline{\tau} = |\underline{s}| \text{sen} \theta \quad (2.25)$$

Por otra parte, el módulo del producto vectorial tiene la siguiente propiedad

$$|\underline{s} \times \underline{n}| = |\underline{s}| |\underline{n}| \text{sen} \theta = |\underline{s}| \text{sen} \theta \quad (2.26)$$

Comparando las ecuaciones 2.25 y 2.26

$$|\tau| = \tau = |\underline{s} \times \underline{n}| \quad (2.27)$$

También se puede hallar  $\underline{\tau} = |\underline{\tau}|$  empleando el teorema de Pitágoras. De la Figura 2.5

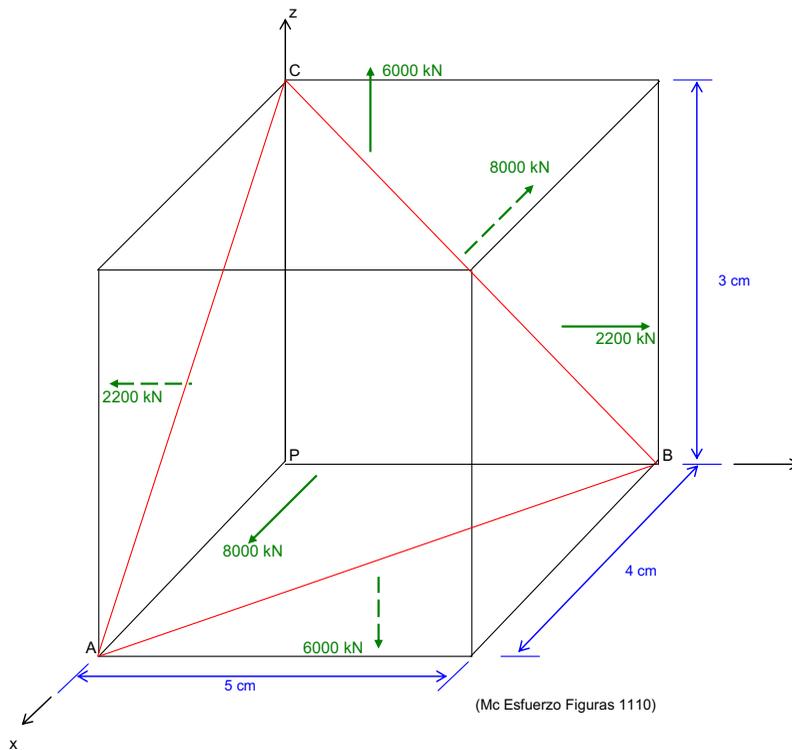
$$s^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

$$\tau^2 = s^2 - \sigma^2 \quad (2.28)$$

$$\tau = \sqrt{s^2 - \sigma^2} \quad (2.29)$$

Ejemplo E-2.2

Hallar los esfuerzos normal y cortante en el plano ABC de la Figura E-2.2.1.



**Figura E-2.2.1.** Incrementos de fuerza sobre un prisma en el espacio

## Estado de esfuerzo

Solución

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} = \frac{8000}{(3)(5)} = 533.33 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A} = \frac{2200}{(3)(4)} = 183.33 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{6000}{(4)(5)} = 300 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} 533.33 & 0 & 0 \\ 0 & 183.33 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \left[ \frac{kN}{cm^2} \right]$$

Las coordenadas de los puntos son

$$A(4,0,0)$$

$$B(0,5,0)$$

$$C(0,0,3)$$

$$AC = (-4,0,3)$$

$$AB = (-4,5,0)$$

$$AB \times AC = 15i + 12j + 20k$$

$$|AB \times AC| = 27.73 \text{ cm}$$

$$n = 0.5409i + 0.4327j + 0.7212k$$

Aplicando la ecuación 2.15

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} 0.5409 \\ 0.4327 \\ 0.7212 \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \underline{S} \underline{n} = \begin{bmatrix} 533.33 & 0 & 0 \\ 0 & 183.33 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5409 \\ 0.4327 \\ 0.7212 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 288.49 \\ 79.30 \\ 216.30 \end{bmatrix} \left[ \frac{kN}{cm^2} \right]$$

$$s = 288.49i + 79.3j + 216.3k$$

Utilizando la ecuación 2.22

$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n} = (288.49, 79.30, 216.30) \cdot (0.5409, 0.4327, 0.7212)$$

$$\sigma = 346.4 \left[ \frac{kN}{cm^2} \right]$$

Usando la ecuación 2.23

$$\underline{\sigma} = \sigma \underline{n} = 346.4 (0.5409, 0.4327, 0.7212,)$$

$$\underline{\sigma} = (187.36, 149.8, 249.8) \left[ \frac{kN}{cm^2} \right]$$

Empleando la ecuación 2.24

$$\underline{\tau} = \underline{s} - \underline{\sigma} = (288.49, 79.30, 216.30) - (187.36, 149.8, 249.8)$$

$$\underline{\tau} = (100.9, -70.6, -33.6)$$

$$|\underline{\tau}| = \sqrt{100.9^2 + (-70.6)^2 + (-33.6)^2}$$

$$|\underline{\tau}| = 127.8 \left[ \frac{kN}{cm^2} \right]$$

## 2.5 El esfuerzo como la derivada de un campo vectorial

Sean  $\underline{F}$  el campo vectorial de una fuerza:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

y  $\underline{A}$  el campo vectorial de un área:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

Sea  $\underline{n}$  el vector unitario perpendicular a cualquier área en el entorno del elemento. El esfuerzo lo definimos como la siguiente derivada

$$\underline{s} = F'(\underline{A}; \underline{n}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\underline{A} + h\underline{n}) - F(\underline{A})}{h} \quad (2.30)$$

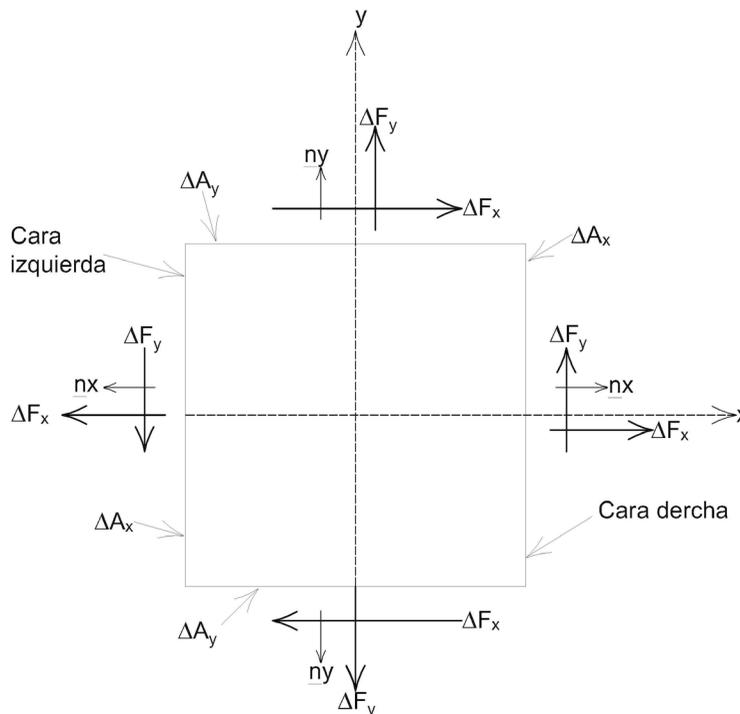
Es decir (Apostol, 1969)

$$\underline{s} = \underline{S} \underline{n}$$

donde  $\underline{S}$  es la matriz jacobiana de  $\underline{F}$  en  $\underline{A}$ , y está dada por

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial A_x} & \frac{\partial F_x}{\partial A_y} & \frac{\partial F_x}{\partial A_z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial A_x} & \frac{\partial F_y}{\partial A_y} & \frac{\partial F_y}{\partial A_z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial A_x} & \frac{\partial F_z}{\partial A_y} & \frac{\partial F_z}{\partial A_z} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Las ecuaciones 2.17 y 2.31 miden el mismo fenómeno físico y sus elementos representan esfuerzos actuando en planos perpendiculares a los ejes coordenados. En la Figura 2.6 se muestran como ejemplo incrementos de fuerza (debidos a un campo vectorial) actuando en planos perpendiculares a los ejes  $x$  e  $y$ .



**Figura 2.6.** Incrementos de fuerza en un campo vectorial

## 2.6 Convención de signos para el estado de esfuerzo

El vector esfuerzo en un plano inclinado está dado por la ecuación 2.15. Como se trata de un vector, el esfuerzo en el plano queda definido en magnitud, dirección y sentido por el vector  $s$  de dicha ecuación 2.15.

Sin embargo, para la formación de los elementos de la matriz de las ecuaciones 2.17 o 2.31, como se trata de la matriz jacobiana, usaremos la convención de signos indicada en el inciso 2.2, correspondiente al estado de esfuerzo en planos perpendiculares a los ejes coordenados.

### Ejemplo E2.3

Dado el sistema de fuerzas actuando en el elemento de la Figura E-2.3.1, hallar el vector esfuerzo en el plano inclinado mostrado en dicha figura.

### Solución

Cara derecha

$$\sigma_x = \frac{F_x}{\Delta A_x} = \frac{-10}{4} = -2.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_{xy}}{\Delta A_x} = \frac{-8}{4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

Cara izquierda

$$\sigma_x = \frac{F_x}{\Delta A_x} = \frac{10}{-4} = -2.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{yx} = \frac{F_{yx}}{\Delta A_x} = \frac{8}{-4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

Cara superior

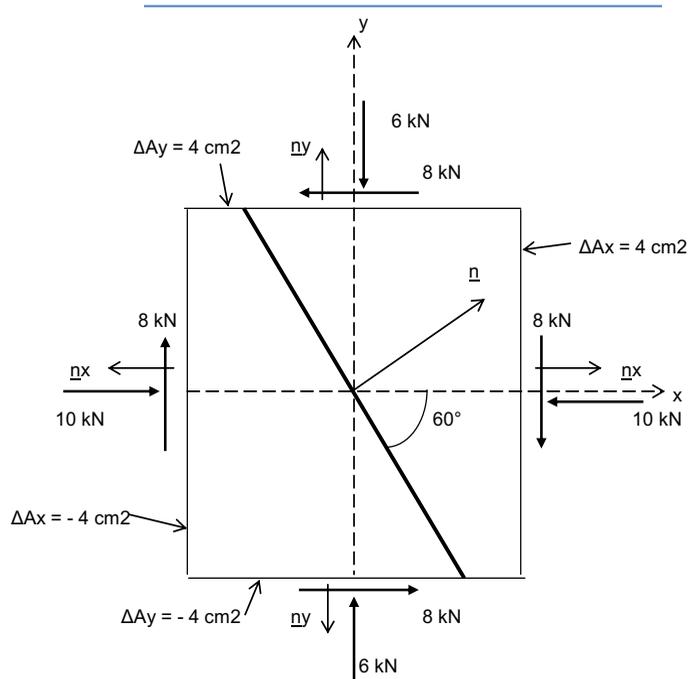
$$\sigma_y = \frac{F_y}{\Delta A_y} = \frac{-6}{4} = -1.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_{yx}}{\Delta A_y} = \frac{8}{-4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$

Cara inferior

$$\sigma_y = \frac{F_y}{\Delta A_y} = \frac{6}{-4} = -1.5 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_{yx}}{\Delta A_y} = \frac{8}{-4} = -2 \frac{kN}{cm^2}$$



**Figura E2.3.1.** Fuerzas actuando en un elemento

El tensor esfuerzo queda

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} -2.5 & -2 \\ -2 & -1.5 \end{bmatrix} \frac{kN}{cm^2}$$

El vector normal al plano vale

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ \\ \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación 2.14

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix}; \underline{s} = \begin{bmatrix} -2.5 & -2 \\ -2 & -1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.165 \\ -2.482 \end{bmatrix} \frac{kN}{cm^2}$$

Ejemplo E2.4.

Este ejemplo lo podemos resolver obteniendo la fuerza en el plano inclinado y dividiéndolo entre la magnitud del área de dicho plano (Figura E2.4.1):

$$\Delta A_x = \Delta A \cos 30^\circ = 4 \text{ cm}^2; \quad \Delta A = \frac{\Delta A_x}{\cos 30^\circ} = 4.619 \text{ cm}^2$$

En la figura E2.4.2 se muestran las fuerzas actuando en el elemento. Estableciendo el equilibrio en el mismo hallamos la fuerza  $\Delta F$

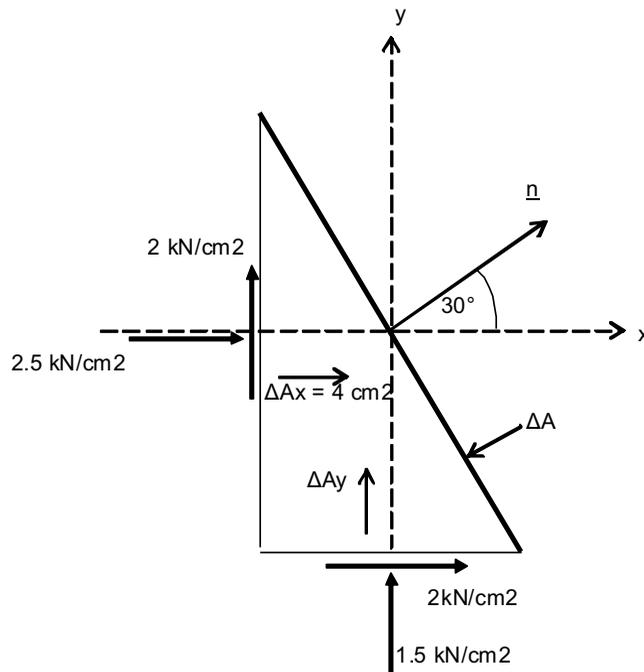


Figura E2.4.1. Esfuerzos aparentes

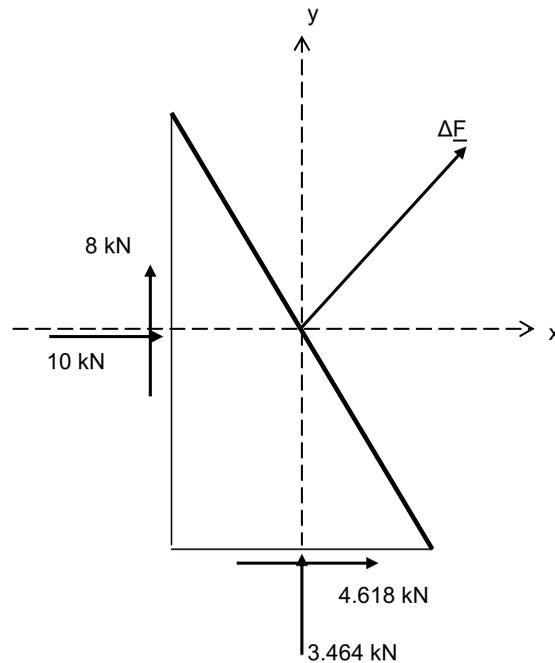


Figura E2.4.2. Sistema de fuerzas sobre el elemento

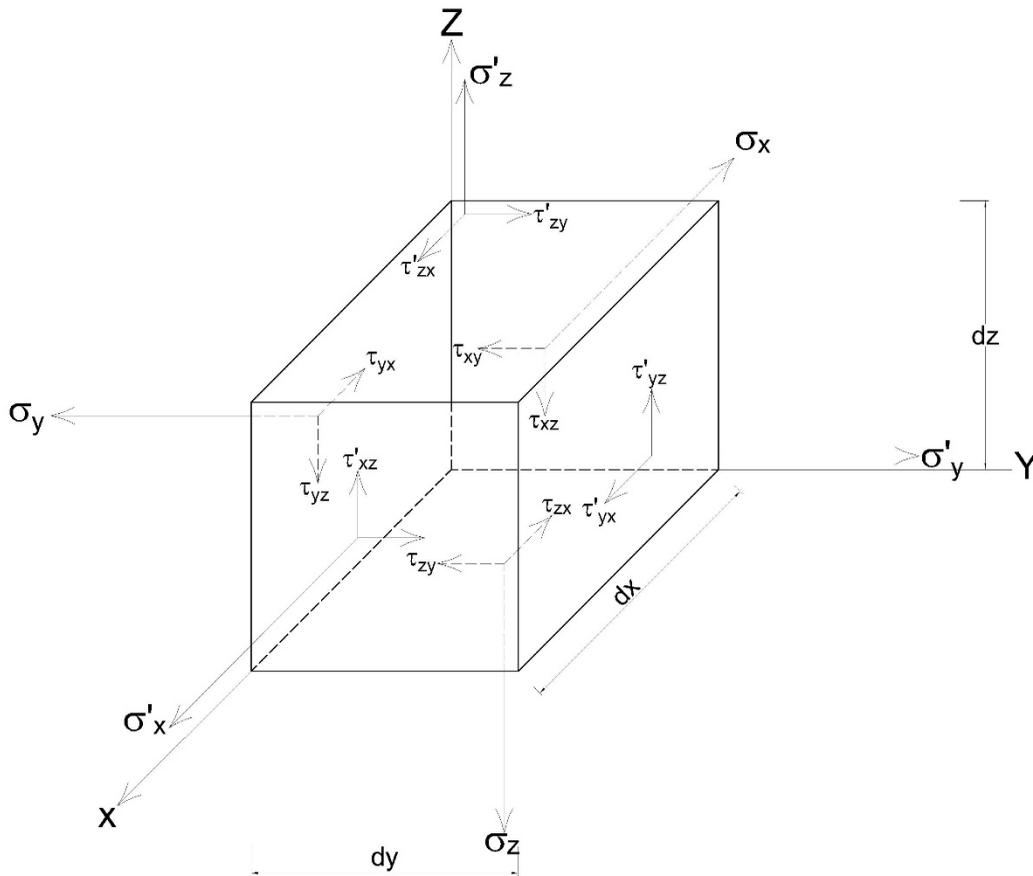
$$\underline{\Delta F} = \begin{bmatrix} -14.618 \\ -11.464 \end{bmatrix} [kN]$$

$$\underline{s} = \frac{\underline{\Delta F}}{\Delta A} = \begin{bmatrix} -14.618 \\ 4.619 \\ -11.464 \\ 4.619 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.165 \\ -2.482 \end{bmatrix} \frac{kN}{cm^2}$$

## 2.7 Simetría del tensor esfuerzo

Demostremos a continuación que cuando no existe rotación del elemento, y sus dimensiones tienden a cero, el tensor esfuerzo resulta una matriz simétrica con respecto a su diagonal principal. (Cabe aclarar que el cuerpo puede estar moviéndose, incluso con cierta aceleración, lo que no puede tener es un movimiento de rotación).

Consideremos un elemento sometido al estado de esfuerzo indicado en la Figura 2.7.



**Figura 2.7.** Estado de esfuerzo en un elemento

Tomemos momentos con respecto al centroide del elemento de la Figura 2.7:

$$\Sigma M_x = -\frac{\tau_{yz} dx dy dz}{2} - \frac{\tau'_{yz} dx dy dz}{2} + \frac{\tau_{zy} dx dy dz}{2} + \frac{\tau'_{zy} dx dy dz}{2} = 0 \quad (2.32)$$

Pero

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} + \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dy \quad (2.33)$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy} + \left( \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dz \quad (2.34)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.32 y simplificando

$$2\tau_{yz} = 2\tau_{zy} - \left(\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)dz$$

Si las dimensiones del elemento  $dy$  y  $dz$  tienden a cero

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.35)$$

Además, de las ecuaciones 2.33 y 2.34

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz}$$

$$\tau'_{zy} = \tau_{zy}$$

Procediendo en forma análoga

$$\Sigma M_y = 0$$

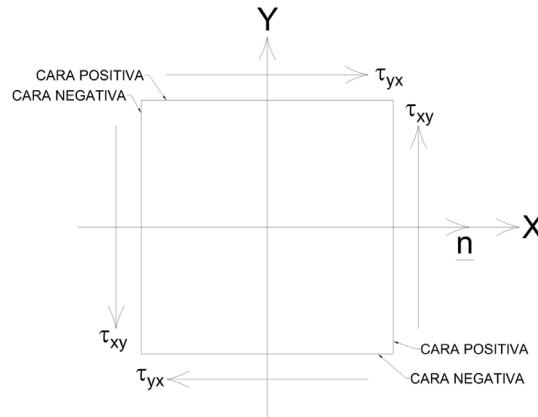
$$\Sigma M_z = 0$$

Si las dimensiones del elemento  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  tienden a cero

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2.36)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.37)$$

Vemos entonces que cuando no existe rotación (es decir, cuando hay equilibrio de momentos) y las dimensiones del elemento tienden a cero, el tensor esfuerzo es una matriz simétrica con respecto a la diagonal principal. Además, en estas condiciones, los cuatro esfuerzos cortantes (por ejemplo  $\tau'_{yx}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau'_{xy}$  y  $\tau_{xy}$ ; Figura 2.8) sobre el elemento son iguales entre sí.



**Figura 2.8.** Esfuerzos cortantes sobre el elemento

## 2.8 Esfuerzos principales

Cuando en un plano se presenta únicamente esfuerzo normal y el esfuerzo cortante vale cero, se le llama plano principal. A la dirección del vector normal al plano principal se le denomina dirección principal, y al esfuerzo normal, que ocurre en dicha dirección, se le llama esfuerzo principal.

Veamos a continuación la forma de hallar los esfuerzos y las direcciones principales. De acuerdo con la Figura 2.9

$$s = \underline{S} \underline{n}$$

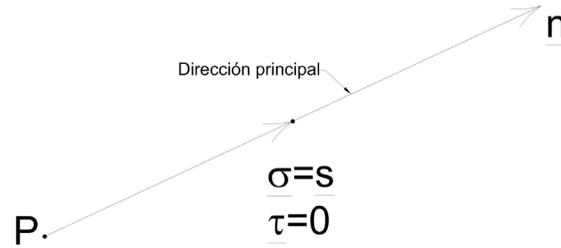
$$\sigma = \underline{\sigma} \underline{n}$$

Pero, en una dirección principal

$$\underline{\sigma} = \underline{s}$$

Por lo tanto

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{n} = \underline{\sigma} \underline{n}$$



**Figura 2.9.** Dirección principal

Es decir

$$\underline{S} \underline{n} = \underline{\sigma n} \quad (2.38)$$

Utilizando las ecuaciones 2.17 y 2.18

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma &= \sigma \cos \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma &= \sigma \cos \beta \\ \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma &= \sigma \cos \gamma \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma &= 0 \\ \tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma &= 0 \\ \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Despejemos los cosenos directores  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  del sistema de ecuaciones 2.39. En este caso no es aceptable la solución trivial  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 0$ , pues los cosenos directores deben cumplir la condición

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2.40)$$

En consecuencia, para que haya una solución diferente de la trivial, el determinante del sistema de ecuaciones 2.39 debe ser igual a cero

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

Desarrollando el determinante arribamos a

$$-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0 \quad (2.42)$$

donde

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.43)$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \quad (2.44)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{xy}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{yz}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} \quad (2.45)$$

En otras palabras

$$I_3 = \det \underline{S} \quad (2.45a)$$

A los coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  se les denomina invariantes del tensor esfuerzo. Así,  $I_1$  es el primer invariante;  $I_2$ , el segundo; e  $I_3$ , el tercero.

Los esfuerzos principales  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  se obtienen desarrollando el determinante de la ecuación 2.41, o usando las ecuaciones 2.42 a 2.45. Dado que la matriz  $\underline{S}$  es una matriz simétrica, las raíces de la ecuación son tres números reales (Apostol, 1969), los cuales miden los esfuerzos principales.

Las direcciones principales se hallan sustituyendo cada raíz en el sistema de ecuaciones 2.39, empleando además la ecuación 2.40. Por ser la matriz  $\underline{S}$  simétrica, las direcciones principales son ortogonales entre sí (Apostol, 1969).

### Ejemplo E-2.5

Dado el siguiente tensor esfuerzo, determinar

- Los esfuerzos normal y cortante actuantes en un plano cuyo vector perpendicular es  $\underline{v} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 1\hat{k}$
- Los esfuerzos y las direcciones principales aplicando el método de Durelli (1985).

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 200 & 300 & 100 \\ 300 & 400 & 200 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix} [kPa]$$

- c) Los esfuerzos normal y cortante actuantes en un plano cuyo vector perpendicular  $\underline{v} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 1\hat{k}$  es respecto a los ejes  $X Y Z$ , pero referido al tensor principal
- d) Los esfuerzos normal y cortante actuantes en el plano cuyo vector perpendicular es  $\underline{u} = 1\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$ , directamente referido tanto al tensor principal como al general

Solución

- a) Los esfuerzos normal y cortante en la dirección de la normal  $\hat{v}$   
El vector normalizado de  $\hat{v}$  es

$$\underline{n} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = 4.5826$$

$$\underline{n} = \frac{4}{4.5826}\hat{i} + \frac{2}{4.5826}\hat{j} - \frac{1}{4.5826}\hat{k} = 0.8729\hat{i} + 0.4364\hat{j} - 0.21822\hat{k}$$

De la ecuación 2.15 se tiene que

$$\underline{\sigma} = \underline{s} \underline{x} \underline{n}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 200 & 300 & 100 \\ 300 & 400 & 200 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.8729 \\ 0.4364 \\ -0.21822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 283.68 \\ 392.79 \\ 109.11 \end{bmatrix} [kPa]$$

El esfuerzo normal se obtiene aplicando la ecuación 2.22

$$|\underline{\sigma}| = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = [283.68 \quad 392.8 \quad 109.11] \cdot [0.8729 \quad 0.4364 \quad -0.2182] = 395.24 [kPa]$$

Aplicando la ecuación 2.27 se determina el esfuerzo cortante

$$|\tau| = \tau = |\underline{s} \times \underline{n}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 283.68 & 392.79 & 109.11 \\ 0.8729 & 0.4364 & -0.21822 \end{vmatrix} = 300.76 [kPa]$$

- b) Los esfuerzos principales y sus direcciones

Sustituyendo en las ecuaciones 2.42 a 2.45

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 200 + 400 + 300 = 900 \text{ [kPa]}$$

$$I_1 = 200 + 400 + 300 = 900$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$

$$I_2 = (200)(400) + (200)(300) + (400)(300) - 300^2 - 100^2 - 200^2 = -1200$$

$$I_3 = \det \underline{\underline{S}} = \begin{vmatrix} 200 & 300 & 100 \\ 300 & 400 & 200 \\ 100 & 200 & 300 \end{vmatrix} = -300$$

$$-\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - 900 \sigma^2 + (1200) \sigma + 300 = 0$$

Calculando las raíces de la ecuación:

$$\sigma_1 = 729.98$$

$$\sigma_2 = 191.48$$

$$\sigma_3 = -21.46$$

Las direcciones principales aplicando el método de Durelli (1985). De las ecuaciones 2.134-2.136 se tiene que, para el primer esfuerzo principal  $\sigma_1 = 729.98 \text{ [kPa]}$

$$A = \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 400 - 729.98 & 200 \\ 200 & 300 - 729.98 \end{vmatrix} = 101884.8$$

$$B = - \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 300 & 200 \\ 100 & 300 - 729.98 \end{vmatrix} = -148994$$

$$C = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300 & 400 - 729.98 \\ 100 & 200 \end{vmatrix} = 92998$$

Aplicando las ecuaciones 2.138 - 2.141

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{A101884.8^2 + (-148994)^2 + (92998)^2} = 203047.661$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{A}{R} = \frac{101884.8}{203047.661} = 0.501778$$

$$\cos \beta_1 = \frac{B}{R} = \frac{-148994}{203047.661} = -0.73379$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{C}{R} = \frac{92998}{203047.661} = 0.45801$$

Para el segundo esfuerzo principal  $\sigma_2 = 191.48 \text{ [kPa]}$

$$A = \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_2 & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 400 - 191.48 & 200 \\ 200 & 300 - 191.48 \end{vmatrix} = -17371.4096$$

$$B = - \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 300 & 200 \\ 100 & 300 - 191.48 \end{vmatrix} = 12556$$

$$C = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300 & 400 - 191.48 \\ 100 & 200 \end{vmatrix} = 39148$$

Aplicando las ecuaciones 2.138 - 2.141

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{(-17371.4096)^2 + (12556)^2 + (39148)^2} = 44631.65818$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{A}{R} = \frac{-17371.4096}{44631.65818} = -0.389217$$

$$\cos \beta_2 = \frac{B}{R} = \frac{12556}{44631.65818} = 0.281325$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{C}{R} = \frac{39148}{44631.65818} = 0.87714$$

Para el tercer esfuerzo principal  $\sigma_3 = -21.46 \text{ [kPa]}$

$$A = \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_3 & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 400 - (-21.46) & 200 \\ 200 & 300 - (-21.46) \end{vmatrix} = 95482.5316$$

$$B = - \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 300 & 200 \\ 100 & 300 - (-21.46) \end{vmatrix} = 76438$$

$$C = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 300 & 400 - (-21.46) \\ 100 & 200 \end{vmatrix} = 17854$$

Aplicando las ecuaciones 2.138 – 2.141

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{(95482.5316)^2 + (76438)^2 + (17854)^2} = 123606.0152$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{A}{R} = \frac{95482.5316}{123606.0152} = 0.772475$$

$$\cos \beta_3 = \frac{B}{R} = \frac{76438}{123606.0152} = 0.6184$$

$$\cos \gamma_3 = \frac{C}{R} = \frac{17854}{123606.0152} = 0.144443$$

(Se deja como ejercicio al lector verificar que las direcciones principales son ortogonales entre sí).

- c) Los esfuerzos normal y cortante actuantes en un plano cuyo vector perpendicular es  $\underline{v} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 1\hat{k}$  respecto a los ejes X Y Z, pero referido al tensor principal

En primera instancia, para referir el vector  $\underline{v}$  respecto al sistema de ejes principales, se hace uso de cambio de base de un vector respecto a otro sistema de coordenadas (Ver Apéndice D).

Para ello se establece que, el vector normalizado  $\underline{n}$

$$\underline{n} = c_1\underline{e}_1 + c_2\underline{e}_2 + c_3\underline{e}_3$$

En donde  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  es un vector de coordenadas referido a la base  $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$  y  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  son los cosenos directores correspondientes a cada uno de los esfuerzos principales. Por tanto, puede establecerse la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector referido al sistema de ejes principales basta con resolver el sistema.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5017835 & -0.3892174 & 0.7724785 \\ 0.7337860 & -0.2813247 & -0.6183968 \\ 0.4580081 & 0.8771352 & 0.1444381 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.8729 \\ 0.4364 \\ -0.21822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6583 \\ -0.6539 \\ 0.3729 \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos normal y cortante se estiman aplicando el tensor principal al vector

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 729.98 & 0 & 0 \\ 0 & 191.48 & 0 \\ 0 & 0 & -21.46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6583 \\ -0.6539 \\ 0.3729 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480.55 \\ -125.21 \\ -8.0 \end{bmatrix}$$

El esfuerzo normal se obtiene aplicando la ecuación 2.22

$$|\underline{\sigma}| = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = [480.55 \quad -125.21 \quad -8.0] \cdot [0.6583 \quad -0.654 \quad 0.373] = 395.24 \text{ [kPa]}$$

Aplicando la ecuación 2.27 se determina el esfuerzo cortante

$$|\tau| = \tau = |\underline{s} \times \underline{n}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 480.546 & -125.213 & -8.003 \\ 0.6583 & -0.6539 & 0.3729 \end{vmatrix} = 300.76 \text{ [kPa]}$$

Debe hacerse notar que los esfuerzos obtenidos en este caso son los mismos a los obtenidos en el caso (a), pues fueron obtenidos en una dirección referida, tanto al sistema de ejes generales (XYZ) y el sistema de ejes principales.

- d) Los esfuerzos normal y cortante actuantes en el plano cuyo vector perpendicular es  $\underline{u} = 1\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}$ , directamente referido tanto al tensor principal como al general

### 1) Respecto al tensor general:

El vector normalizado de  $\underline{u}$  es

$$\underline{n} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.732051$$

$$\underline{e} = \frac{1}{1.732051}\hat{i} + \frac{1}{1.732051}\hat{j} + \frac{1}{1.732051}\hat{k} = 0.577350\hat{i} + 0.577350\hat{j} + 0.577350\hat{k}$$

De la ecuación 2.15 se tiene que

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{x} \underline{n}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 200 & 300 & 100 \\ 300 & 400 & 200 \\ 100 & 200 & 300 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 346.41 \\ 519.62 \\ 346.41 \end{bmatrix} [kPa]$$

El esfuerzo normal se obtiene aplicando la ecuación 2.22

$$|\underline{\sigma}| = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = [346.41 \quad 519.62 \quad 346.41] \cdot [0.57735 \quad 0.57735 \quad 0.57735]$$

$$= 700.0 [kPa]$$

Aplicando la ecuación 2.27 se determina el esfuerzo cortante

$$|\tau| = \tau = |\underline{s} \times \underline{n}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 346.41 & 519.62 & 346.41 \\ 0.57735 & 0.57735 & 0.57735 \end{vmatrix} = 141.42 [kPa]$$

## 2) Respecto al tensor principal:

De la ecuación 2.15 se tiene que

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{x} \underline{n}$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 729.98 & 0 & 0 \\ 0 & 191.48 & 0 \\ 0 & 0 & -21.46 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.57735 \\ 0.57735 \\ 0.57735 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 421.4557 \\ 110.5510 \\ -12.39151 \end{bmatrix} [kPa]$$

El esfuerzo normal se obtiene aplicando la ecuación 2.22

$$|\underline{\sigma}| = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = [421.46 \quad 110.55 \quad -12.392] \cdot [0.5774 \quad 0.5774 \quad 0.5774]$$

$$= 300.0 [kPa]$$

Aplicando la ecuación 2.27 se determina el esfuerzo cortante

$$|\tau| = \tau = |\underline{s} \times \underline{n}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 421.456 & 110.551 & -12.392 \\ 0.5774 & 0.5774 & 0.5774 \end{vmatrix} = 316.23 [kPa]$$

Comparando los resultados en los casos (1) y (2) se observa que los esfuerzos normal y cortante son distintos, pues los tensores, general y principal, se aplicaron al mismo vector. Recordar que dicho vector es el mismo referido respectivamente a cada sistema.

## 2.9 Representación gráfica de Mohr

Consideremos el siguiente tensor esfuerzo

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

donde  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Grafiquemos los valores de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  y tracemos los círculos indicados en la Figura 2.10. A estos círculos se les denomina círculos de Mohr.

Se puede demostrar que un punto de coordenadas  $P(\sigma, \tau)$ , que mide los esfuerzos normal y cortante en alguna dirección dada, tiene que quedar necesariamente dentro de la zona achurada de la Figura 2.10 (Castillo, 1985).

Procedamos a probar la afirmación anterior.

De la ecuación 2.15:  $\underline{s} = \underline{S}\underline{n}$

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos\alpha \\ \sigma_2 \cos\beta \\ \sigma_3 \cos\gamma \end{bmatrix}$$

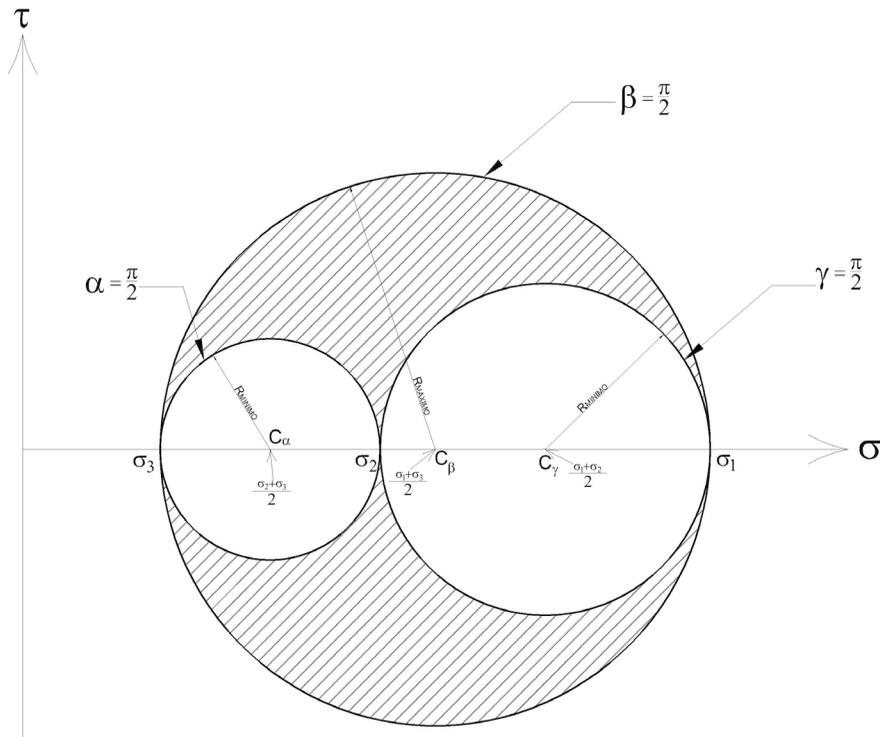
De la ecuación 2.22:  $\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n}$

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (2.46)$$

Aplicando la ecuación 2.28

$$\tau^2 = s^2 - \sigma^2$$

$$s^2 = \sigma^2 + \tau^2$$



**Figura 2.10.** Círculos de Mohr

Pero

$$s = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma}$$

$$\sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma \quad (2.47)$$

Agrupemos las ecuaciones 2.46 y 2.47 junto con la de los cosenos directores:

$$\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma = \sigma$$

$$\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2.48)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Despejemos  $\cos^2 \alpha$  del sistema de ecuaciones 2.48, utilizando la regla de Cramer

$$\cos^2 \alpha = \frac{\begin{vmatrix} \sigma & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma^2 + \tau^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{[\sigma(\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2(\sigma^2 + \tau^2) + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3(\sigma^2 + \tau^2) - \sigma_3\sigma_2^2]}{[\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2\sigma_1^2 + \sigma_2\sigma_3^2 + \sigma_3\sigma_1^2 - \sigma_3\sigma_2^2]}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{[-\sigma(\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \sigma_2(\sigma^2 + \tau^2)(\sigma_3 - \sigma_2) + \sigma_2\sigma_3(\sigma_3 - \sigma_2)]}{[\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_1^2(\sigma_3 - \sigma_2) + \sigma_2\sigma_3(\sigma_3 - \sigma_2)]}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{[(\sigma^2 + \tau^2) - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3]}{[(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)]} \quad (2.49)$$

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_2 + \sigma_3) + \left[\frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2}\right] + \tau^2 = -\sigma_2\sigma_3 + \left[\frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + [(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)]\cos^2 \alpha$$

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}\right]^2 + [(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)]\cos^2 \alpha$$

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}\right]^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)]\cos^2 \alpha \quad (2.50)$$

Observamos en la ecuación 2.50 que  $\sigma$  y  $\tau$  están relacionados mediante la ecuación de un círculo, cuyas propiedades dependen de  $\alpha$ . En otras palabras, la ecuación 2.50 corresponde a una familia de círculos en función de  $\alpha$ ; el centro y los radios mínimo y máximo de esta familia son

$$C_\alpha \left[ \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{2}, 0 \right]$$

$$R_{min} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}, \left[ \cos \alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$R_{max} = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}\right]^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)]}, \left[ \cos \alpha = 1, \alpha = 0 \right]$$

En la figura 2.11 se muestra la familia de círculos  $\alpha$ .

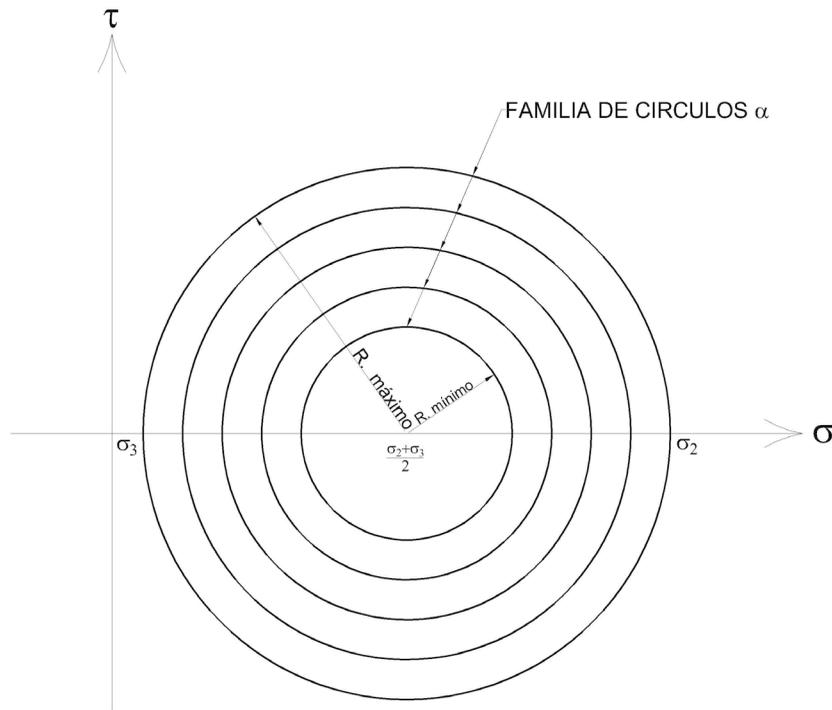


Figura 2.11. Familia de círculos  $\alpha$

En forma análoga se obtienen las familias de círculos  $\beta$  y  $\gamma$ :

Familia de círculos  $\beta$

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}\right]^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2)] \cos^2 \beta \quad (2.51)$$

$$C_\beta \left[\frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}, 0\right]$$

$$R_{min} = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}\right]^2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2)]} \quad [\cos \beta = 1, \beta = 0]$$

$$R_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \quad \left[\cos \beta = 0, \beta = \frac{\pi}{2}\right]$$

Familia de círculos  $\gamma$

$$\left[\sigma - \frac{(\sigma_2 + \sigma_1)}{2}\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2}\right]^2 + [(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)]\cos^2\gamma \quad (2.52)$$

$$C_\gamma \left[ \frac{(\sigma_2 + \sigma_1)}{2}, 0 \right]$$

$$R_{min} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \quad [\cos \gamma = 0, \gamma = \frac{\pi}{2}]$$

$$R_{max} = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2}\right]^2 + [(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)]} \quad [\cos \gamma = 1, \gamma = 0]$$

Grafiquemos ahora el círculo  $\alpha$  de radio  $R = R_{min}$ , el círculo  $\beta$  de radio  $R = R_{max}$  y el círculo  $\gamma$  de radio  $R = R_{min}$  (Figura 2.10).

Dado que  $\sigma$  y  $\tau$  están relacionados entre sí, mediante las ecuaciones 2.50-2.52, el punto  $P(s, t)$  debe quedar en cada circunferencia  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Ya que el círculo  $\alpha$  tiene que ser mayor o igual que el correspondiente a  $\alpha = \pi/2$ , que el círculo  $\beta$  tiene que ser mayor o igual que el círculo  $\gamma = \pi/2$ , y que el círculo  $\beta$  tiene que ser menor o igual que el círculo  $\beta = \pi/2$ , el punto  $P(\sigma, \tau)$  tiene que quedar necesariamente en la zona achurada de la figura 2.10.

## 2.10 Determinación de los esfuerzos normal y cortante en una dirección. método gráfico de Mohr

Consideremos que deseamos determinar el estado de esfuerzo en la dirección dada por el vector

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

El procedimiento gráfico consiste en lo siguiente:

Tracemos, a partir del tensor esfuerzo, los tres círculos en el plano de Mohr (Figura 2.12).

## Estado de esfuerzo

A partir del punto  $A$  se traza una paralela al eje  $\tau$ ; a continuación, se traza también a partir del punto  $A$  una recta que forma un ángulo  $\alpha$  con la paralela al eje  $\tau$ . Esta recta corta al círculo  $\beta$  en el punto  $A'$ , y al círculo  $\gamma$  en el punto  $A''$ .

A partir del centro  $C_\alpha$  se traza un arco de circunferencia que corte los puntos  $A'$  y  $A''$ .

Por el punto  $C$  se traza una paralela al eje  $\tau$ ; a continuación, se traza también a partir del punto  $C$  una recta que forme un ángulo  $\gamma$  con la paralela al eje  $\tau$ . Esta recta corta al círculo  $\beta$  en el punto  $C'$ , y al círculo  $a$  en el punto  $C''$ .

Por el centro  $C_\gamma$  se traza un arco de circunferencia que corte los puntos  $C'$  y  $C''$ .

Las coordenadas del punto de intersección  $D$  (Figura 2.12) de los dos arcos representan el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante, en la dirección dada por el vector  $\underline{n}$ .

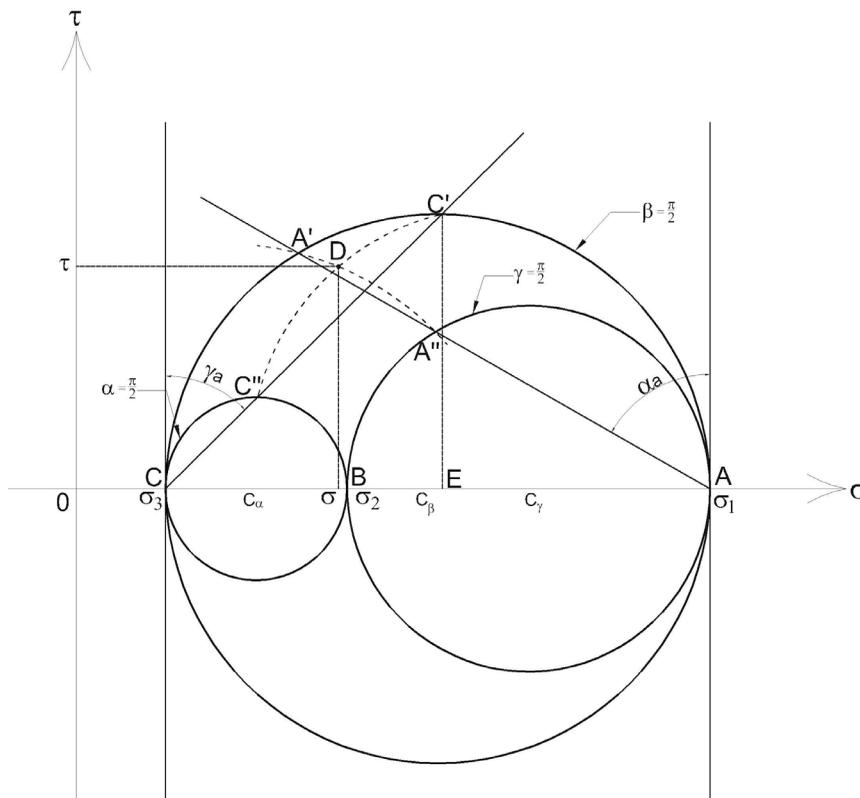


Figura 2.12. Plano de Mohr

Demostremos primeramente que el punto  $C'$  pertenece a un círculo cuyo coseno director es  $\cos \gamma$ . Con el procedimiento analítico, las deformaciones normal y cortante valen

$$s = \underline{s} \cdot \underline{n} \quad (2.53)$$

$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n} \quad (2.54)$$

$$\tau = |\underline{s} \times \underline{n}| \quad (2.55)$$

Como el punto  $C'$  está en el círculo  $\beta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \beta = 0$ , y el vector  $\underline{n}'_c$  queda

$$\underline{n}'_c = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

Además, se debe cumplir

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Por lo tanto

$$\cos \alpha = \sin \gamma$$

Sustituyendo en las ecuaciones 2.53 a 2.55

$$\sigma = \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (2.56)$$

$$\underline{s} \times \underline{n} = -j1(\sigma_1 \sin \gamma \cos \gamma - \sigma_3 \sin \gamma \cos \gamma) = [-(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma] j$$

$$\tau = |\underline{s} \times \underline{n}| = (\sigma_1 - \sigma_3) \cos \gamma \sin \gamma \quad (2.57)$$

Obtengamos ahora gráficamente los esfuerzos normal y cortante del punto  $C'$ , de la Figura 2.12

$$OE = OC + CE$$

$$CE = CC' \sin \gamma$$

$$CC' = CA \sin \gamma$$

$$OE = \sigma_3 + CA \sin^2 \gamma = \sigma_3 (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\gamma$$

$$OE = \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (2.58)$$

También

$$\begin{aligned}
 EC' &= CC' \cos \gamma \\
 C C' &= (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} \gamma \\
 E C' &= (\sigma_1 - \sigma_3) \operatorname{sen} \gamma \cos \gamma
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Comparando las ecuaciones 2.56 y 2.58, y las ecuaciones 2.57 y 2.59, apreciamos que en efecto las coordenadas del punto  $C'$  miden el estado de esfuerzo en la dirección dada por el vector  $\underline{n}'_c$ . Por lo tanto, el punto  $C'$  pertenece al círculo cuyo coseno director es  $\cos \gamma$ ; cualquier circunferencia que pase por este punto, con centro en  $C_c$ , representará esfuerzos en una dirección con coseno director  $\cos \gamma$ .

Procediendo en forma análoga, se demuestra que el punto  $A'$  pertenece al círculo cuyo coseno director es  $\cos \alpha$ ; cualquier circunferencia que pase por este punto, con centro en  $C_a$ , representará esfuerzos en una dirección con coseno director  $\cos \alpha$ .

El punto de intersección  $D$  de los dos arcos de circunferencia mide el estado de esfuerzo cuyos ángulos directores son  $\alpha$  y  $\gamma$ ; ahora  $\beta$  es diferente a  $\pi/2$ , pues queda obligado por  $\alpha$  y  $\gamma$ .

Con lo anterior, hemos demostrado que las coordenadas del punto  $D$  de la Figura 2.12 miden: su abscisa el esfuerzo normal y su ordenada el esfuerzo cortante, en la dirección dada por el vector  $\underline{n}$ .

Ejemplo E-2.6

Dado el siguiente tensor esfuerzo

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [kg/cm^2]$$

hallar los esfuerzos normal y cortante en la dirección dada por el vector

$$\underline{A B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

## Estado de esfuerzo

Utilizar el procedimiento gráfico de Mohr.

Solución

El vector unitario  $\underline{n}$  en la dirección de  $\underline{AB}$  vale

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} 0.7428 \\ 0.5571 \\ 0.3714 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\alpha = 42^\circ, \beta = 56^\circ, \gamma = 68^\circ$$

En la Figura E-2.6.1 se exhibe el procedimiento gráfico para obtener el punto  $D$ , cuyas coordenadas miden los esfuerzos normal y cortante en la dirección del vector  $\underline{n}$ . Obténmos de la figura E-2.6.1

$\sigma = 4.4 \text{ kg/cm}^2$  y  $\tau = 1.9 \text{ kg/cm}^2$ .

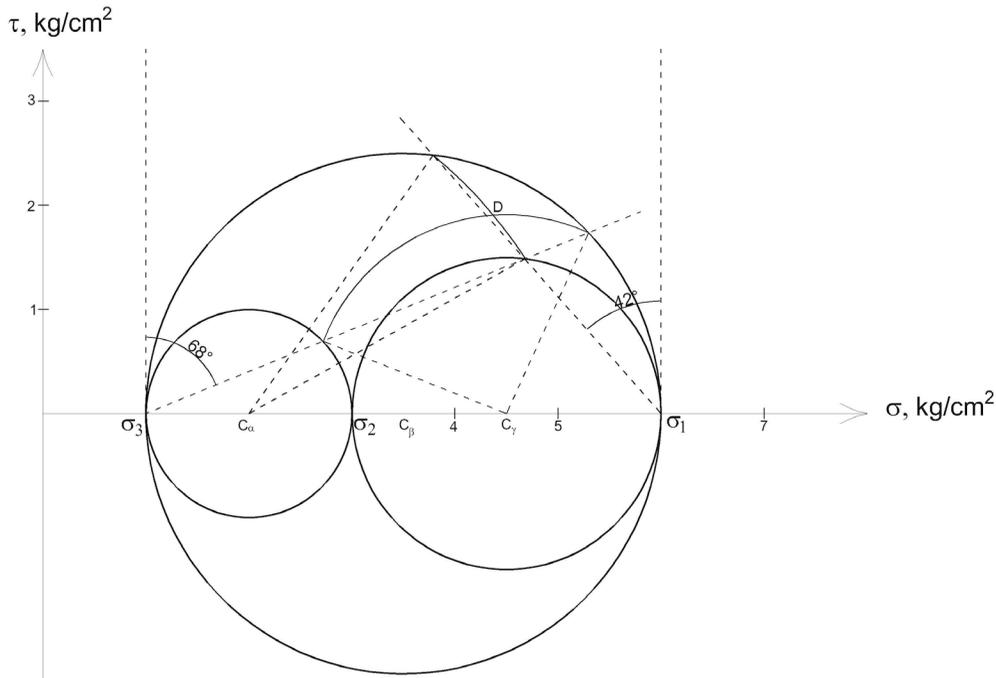


Figura E-2.6.1. Círculo de Mohr en tres dimensiones

## 2.11 Estado de esfuerzo plano

Se presenta un estado de esfuerzo plano (en el plano  $xy$ ) cuando se cumple

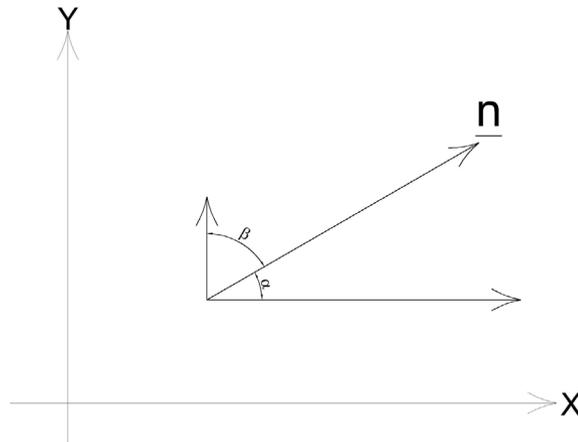
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$$

El tensor esfuerzo queda

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

De la Figura 2.13:

$$\cos \beta = \text{sen } \alpha, \gamma = 90^\circ, \cos \gamma = 0$$



**Figura 2.13.** Vector normal a un plano

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Aplicando la ecuación 2.15

$$s = Sn$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \text{sen} \alpha \\ \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \text{sen} \alpha + \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Estado de esfuerzo

Usando la ecuación 2.22

$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n}$$

Considerando que  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.62)$$

Cuando el esfuerzo normal es de tensión, dicho esfuerzo tiene signo positivo (ecuación 2.62). En cambio, si al aplicar la ecuación 2.62 obtenemos una cantidad negativa, el esfuerzo normal es de compresión.

El esfuerzo cortante lo hallamos empleando la ecuación 2.27

$$\begin{aligned} \tau &= |\underline{\tau}| = |\underline{s} \times \underline{n}| \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para conocer el sentido de  $t$  observamos que el producto  $\underline{s} \times \underline{n}$  es un vector perpendicular al plano  $xy$ , es decir

$$\underline{s} \times \underline{n} = ck \quad (2.64)$$

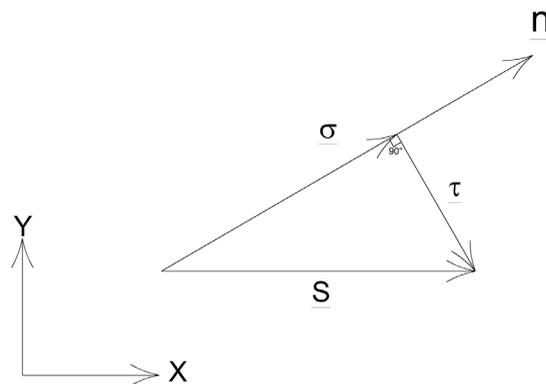
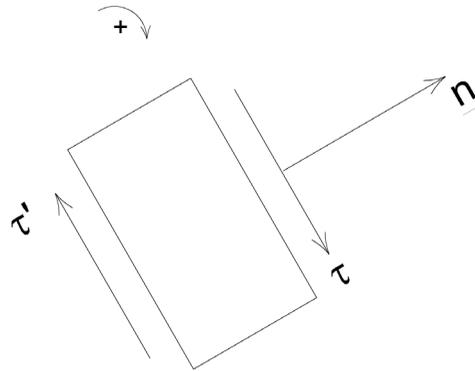


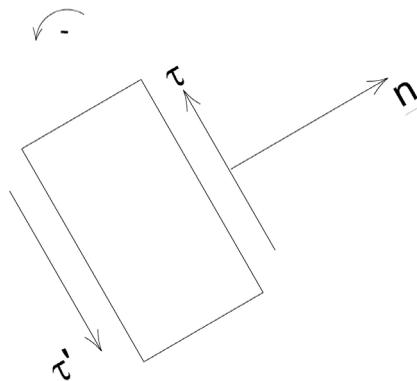
Figura 2.14. Sentido del esfuerzo cortante

Si  $c > 0$  el vector  $\underline{s} \times \underline{n}$  tiene el mismo sentido del eje positivo del eje  $z$  (Figura 2.14); en estas condiciones, el esfuerzo cortante  $\tau$  queda a la derecha de  $\underline{n}$ , es decir, produce momento positivo con su cortante paralelo asociado  $\tau'$  (Figura 2.15). Si  $c < 0$ , el vector  $\underline{s} \times \underline{n}$  tiene sentido contrario al sentido positivo del eje  $z$ , por lo que el esfuerzo cortante  $\tau$  queda a la izquierda de  $\underline{n}$ , es decir, produce momento negativo con su cortante paralelo asociado  $\tau'$  (Figura 2.16).

El valor de  $c$  de la ecuación 2.64 corresponde al cortante  $\tau$  de la ecuación 2.63, por lo que el sentido del cortante está dado por el signo de  $c$ , señalado en el párrafo anterior, de la siguiente forma: si en la ecuación 2.63  $\tau$  da positivo, su sentido será tal que provoque un momento positivo con respecto a su cortante asociado  $\tau'$  (Figura 2.15); si  $\tau$  da negativo, su sentido será tal que produzca un momento negativo con su cortante asociado (Figura 2.16).



**Figura 2.15.** Momento en sentido horario



**Figura 2.16.** Momento en sentido antihorario

Las ecuaciones 2.62 y 2.63 se pueden poner en función del ángulo doble  $2\alpha$ . Empleando las identidades trigonométricas

$$\cos^2 \alpha = \frac{(1 + \cos 2\alpha)}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{(1 - \cos 2\alpha)}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}$$

Obtenemos

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.65)$$

$$\tau = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen} 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.66)$$

Los esfuerzos principales los hallamos con la ecuación 2.41

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante obtenemos que un esfuerzo principal es  $\sigma = \sigma_3 = 0$ . Los otros dos esfuerzos principales los hallamos con la ecuación característica reducida

$$\sigma^2 - \sigma(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$$

Es decir

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.67)$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.68)$$

De acuerdo con lo anterior, una dirección principal es la del eje  $z$ , dado que en ella el esfuerzo cortante vale cero. Las otras dos direcciones principales las obtenemos con el sistema de ecuaciones 2.33

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma) \cos \alpha = -\tau_{xy} \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(\sigma_x - \sigma)}{-\tau_{xy}}$$

$$\tan \alpha = \frac{(\sigma_1 - \sigma_x)}{\tau_{xy}}$$

$$\alpha_1 = \text{ang tan} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_x)}{\tau_{xy}} \right] \quad (2.69)$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \left[ \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_y - \sigma_2)} \right] \quad (2.70)$$

Dado que estamos considerando  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\cos \gamma = 0$ , los resultados presentados en este inciso son únicamente válidos para calcular esfuerzos paralelos al plano  $xy$ .

Hemos llamado  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  a los esfuerzos principales en el plano  $xy$ , y  $\sigma_3$  al esfuerzo principal paralelo al eje  $z$ . Sin embargo, en el espacio  $s_3$  puede ser un esfuerzo principal intermedio o mayor; por ejemplo, si  $\sigma_1 > 0$  y  $\sigma_2 < 0$ ,  $\sigma_3$  resulta el esfuerzo principal intermedio.

### Ejemplo E2.7

Dado el estado de esfuerzo plano indicado en la Figura E2.7.1, calcular:

- Los esfuerzos normal y cortante en el plano inclinado  $30^\circ$  indicado en la Figura E2.7.1
- La magnitud y dirección de los esfuerzos principales
- La magnitud y dirección de los esfuerzos cortantes máximo y mínimo

## Solución

El tensor esfuerzo queda

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 21 & -19 & 0 \\ -19 & -35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [MPa]$$

Para  $\alpha = 30 + 90 = 120^\circ$

Aplicando la ecuación 2.62

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \sigma &= 21 \cos^2 120^\circ + 19 \sin^2 120^\circ - 19 \sin 120^\circ \cos 120^\circ \\ \sigma &= -4.546 [MPa] \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación 2.63

$$\begin{aligned} \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ \tau &= (21 - 35) \sin 120^\circ \cos 120^\circ - 19 (\sin^2 120^\circ - \cos^2 120^\circ) = -33.749 [MPa] \\ \tau &= -33.749 [MPa] \end{aligned}$$

**Esfuerzos principales**

Empleando las ecuaciones 2.67 a 2.70

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_1 &= \frac{(21 - 35)}{2} + \sqrt{\left(\frac{(21 + 35)}{2}\right)^2 + (-19)^2} = 26.838 [MPa] \\ \alpha_1 &= \text{ang tan} \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_x)}{\tau_{xy}} \right] \\ \alpha_1 &= \text{ang tan} \frac{(26.838 - 21)}{-19} = -17.1^\circ \\ \sigma_2 &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = \frac{(21 - 35)}{2} - \sqrt{\left(\frac{(21 + 35)}{2}\right)^2 + (-19)^2} = -40.838 \text{ [MPa]}$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \left[ \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_y - \sigma_2)} \right]$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan} \left[ \frac{-19}{(-35 - (-40.838))} \right] = 72.9^\circ$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{(21 + 35)}{2}\right)^2 + (-19)^2} = 33.838 \text{ [MPa]}$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{min} = -\sqrt{\left(\frac{(21 + 35)}{2}\right)^2 + (-19)^2} = -33.838 \text{ [MPa]}$$

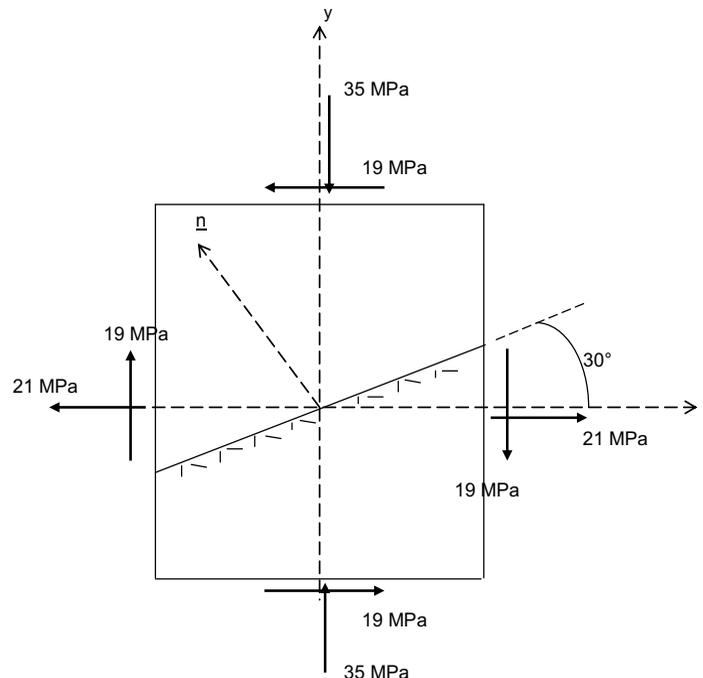


Figura E2.7.1. Estado de esfuerzo plano

## 2.12 Círculo de Mohr para el estado de esfuerzo plano

Los esfuerzos normal y cortante están dados por (ecuaciones 2.65 y 2.66)

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.71)$$

$$\tau = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen} 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.72)$$

Demostremos a continuación que  $\sigma$  y  $\tau$  están relacionados a través de la ecuación de un círculo. De la ecuación 2.71

$$\sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.73)$$

Elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones 2.73 y 2.72

$$\left[ \sigma - \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau^2 = \left[ \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2.74)$$

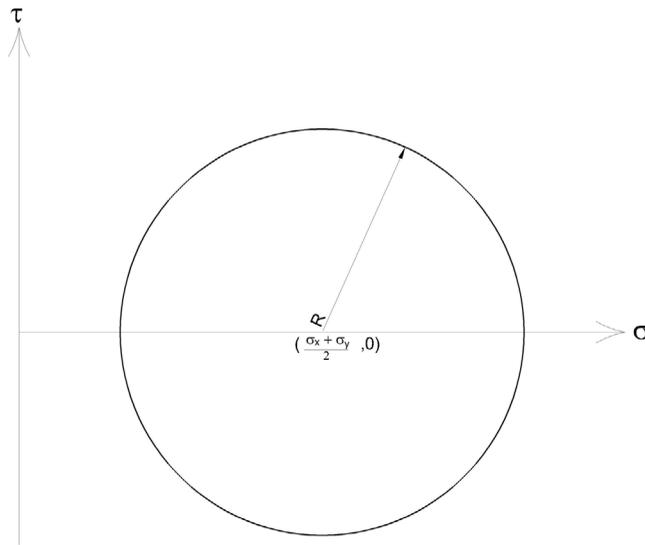
La ecuación 2.74 es la ecuación de un círculo con centro

$$C \left[ \left( \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \right), 0 \right]$$

Y radio

$$R = \sqrt{\left[ \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.75)$$

A este círculo se le denomina círculo de Mohr, el cual se muestra en la Figura 2.17.



**Figura 2.17.** Círculo de Mohr para el estado de esfuerzo plano

Consideremos el estado de esfuerzo indicado en la Figura 2.18a. El círculo de Mohr se exhibe en la Figura 2.18b.

Para hallar los esfuerzos normal y cortante en la dirección del vector  $\underline{n}$  se emplea el procedimiento del polo de los esfuerzos, que consiste en lo siguiente (Alberro, 1970):

A partir del punto A, que representa el estado de esfuerzo en dirección  $x$ , se traza una recta paralela al eje  $x$  (Figura 2.19).

A partir del punto B, que representa el estado de esfuerzo en dirección  $y$ , se traza una recta paralela al eje  $y$ .

El punto donde se intersecan ambas rectas corresponde a la posición del polo de los esfuerzos.

Para hallar el estado de esfuerzo en una dirección definida por el vector  $\underline{n}$  (Figura 2.18a), que forma un ángulo  $\alpha$  con el sentido positivo del eje  $x$ , a partir del polo, se traza una recta paralela a dicha dirección. El punto donde esta recta corta a la circunferencia (punto D, Figura 2.19) proporciona los esfuerzos buscados: su abscisa da el esfuerzo normal y su ordenada el esfuerzo cortante, en la dirección del vector  $\underline{n}$ .

## Estado de esfuerzo

Demostremos que el estado de esfuerzo en la dirección que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$  está dado por el punto D del círculo de Mohr de la Figura 2.18b, es decir, por un punto que forma un ángulo  $2\alpha$  con el punto A.

Con el procedimiento analítico habíamos encontrado que los esfuerzos valen (ecuaciones 2.71 y 2.72)

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.76)$$

$$\tau = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{sen} 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.77)$$

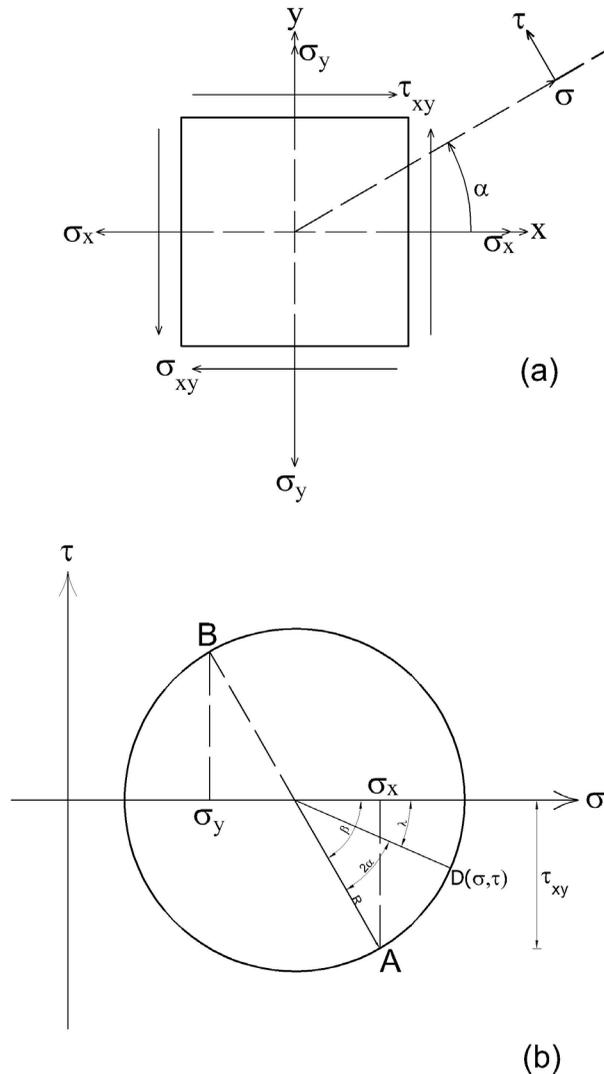


Figura 2.18. Círculo de Mohr

Probemos que con el método gráfico de la Figura 2.18 se llega a los esfuerzos dados por las ecuaciones 2.76 y 2.77. Las coordenadas del punto D valen (Figura 2.18b):

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + R \cos \lambda \quad (2.78)$$

$$\tau = -R \operatorname{sen} \lambda \quad (2.79)$$

Pero (Figura 2.18b):

$$\lambda = \beta - 2\alpha \quad (2.80)$$

Sustituyendo la ecuación 2.80 en la ecuación 2.78

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + R \cos(\beta - 2\alpha)$$

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + R \cos \beta \cos 2\alpha + R \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} 2\alpha$$

Pero

$$R \cos \beta = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \quad y \quad R \operatorname{sen} \beta = \tau_{xy}$$

Por lo tanto

$$\sigma = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (2.81)$$

Sustituyendo la ecuación 2.70 en la ecuación 2.69

$$\tau = -R \operatorname{sen}(\beta - 2\alpha)$$

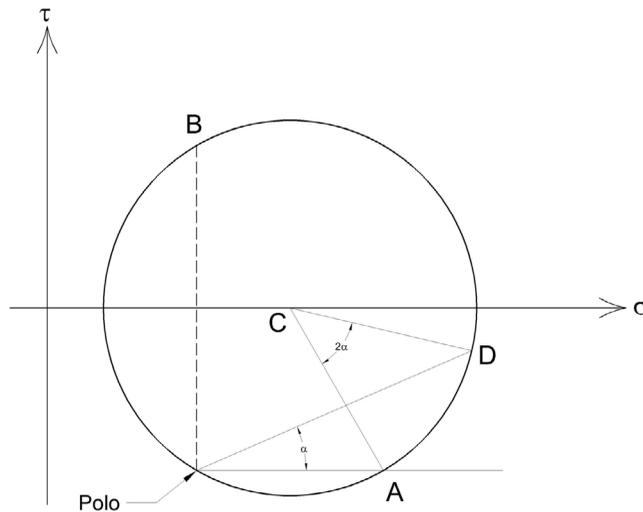
$$\tau = -R \operatorname{sen} \beta \cos 2\alpha + R \operatorname{sen} 2\alpha \cos \beta$$

$$\tau = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \operatorname{sen} 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (2.82)$$

Observamos que la ecuación 2.76 es igual a la ecuación 2.81, y que la ecuación 2.77 es igual a la ecuación 2.82, por lo que, con los procedimientos analítico y gráfico se llega a los mismos resultados. Con esto verificamos la validez del uso del ángulo doble del método gráfico.

## Estado de esfuerzo

En la Figura 2.19 apreciamos que con el método del polo de los esfuerzos se llega al mismo resultado, pues un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad del ángulo medido a partir del centro del círculo.



**Figura 2.19.** Polo de los esfuerzos

Debido a que todos los ángulos inscritos en un mismo arco son iguales, el polo se puede ubicar en cualquier punto de la circunferencia, y la única condición es que el ángulo  $\alpha$  se mida a partir del punto A, en sentido antihorario.

## Ejemplo E2.8

Dado el estado de esfuerzo plano mostrado en la Figura E-8a, hallar:

- Los esfuerzos normal y cortante en el plano inclinado de la Figura E-8a
- La magnitud y dirección de los esfuerzos principales
- Utilizar el método gráfico de Mohr

## Solución

En la Figura E2.8b se exhibe el círculo de Mohr correspondiente. Para hallar el polo, a partir del punto A (que representa el estado de esfuerzo en dirección del eje  $x$ ) se traza una

## Estado de esfuerzo

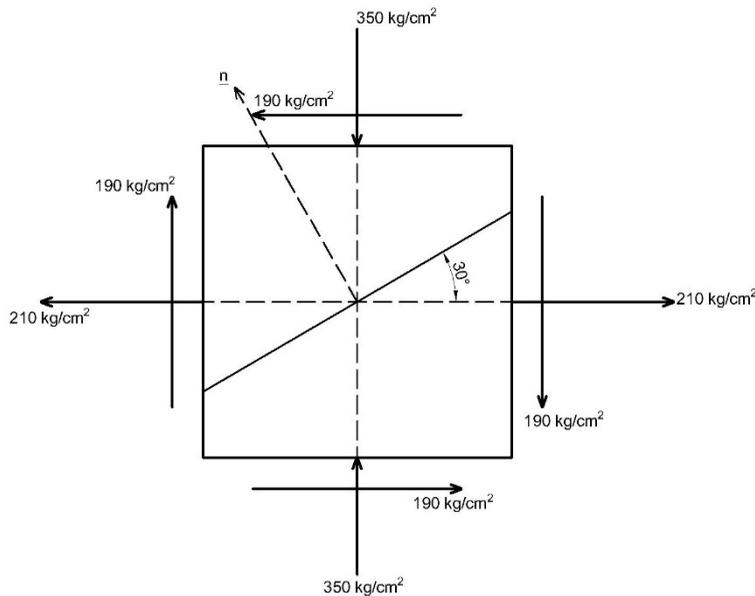
paralela el eje  $x$ ; a partir del punto B (que mide el estado de esfuerzo en dirección del eje  $y$ ) se traza una paralela al eje  $y$  (Figura E2.8b). El punto donde se intersecan ambas rectas es el polo de los esfuerzos (Figura E2.8b). Para obtener los esfuerzos en la dirección del vector  $\underline{n}$ , a partir del polo trazamos una recta paralela a dicho vector  $\underline{n}$ ; el punto donde esta recta cruza a la circunferencia proporciona el estado de esfuerzo en la dirección del vector  $\underline{n}$ . Los esfuerzos y las direcciones principales se obtienen en forma similar. En la Figura E2.8b medimos

$$\sigma = -45 \text{ kg/cm}^2$$

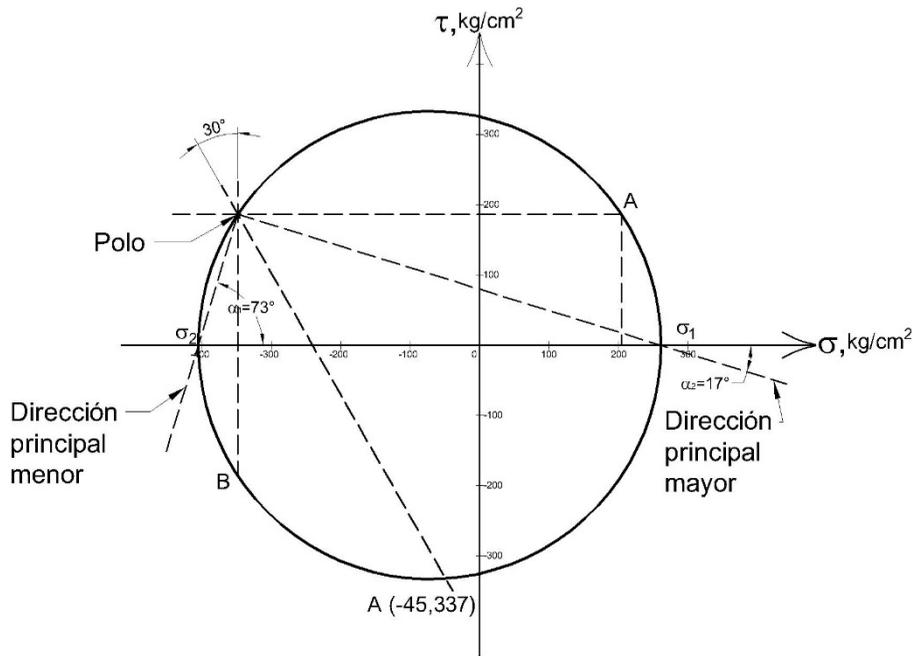
$$\tau = -337 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_1 = 268 \text{ kg/cm}^2, \alpha_1 = -17^\circ$$

$$\sigma_2 = -408 \text{ kg/cm}^2, \alpha_2 = 73^\circ$$



a) Estado de esfuerzo plano

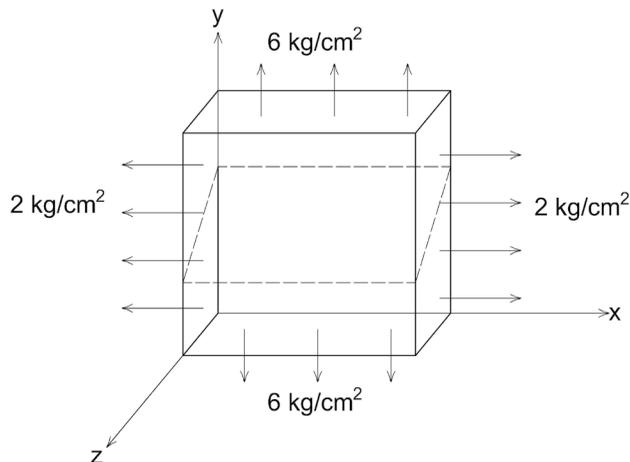


b) Círculo de Mohr en el plano

**Figura E-2.8.** Ejemplo de estado plano de esfuerzo

## Ejemplo E2.9

Dado el estado de esfuerzo indicado en la Figura E2.9, obtener la dirección del plano de máximo esfuerzo cortante. ¿Qué magnitud tiene el máximo esfuerzo cortante?

**Figura E-2.9.1.** Placa sometida a un estado de esfuerzo biaxial

## Solución

En la Figura E2.9.2 se muestran los círculos de Mohr correspondientes. Se aprecia que el máximo esfuerzo cortante vale  $t_{max} = 3 \text{ kg/cm}^2$ . De la Figura E2.9.2 obtenemos  $\beta = \gamma = 45^\circ$ .

Si este problema lo resolviéramos como un estado de esfuerzo plano, obtendríamos que el máximo esfuerzo cortante sería  $2 \text{ kg/cm}^2$ , resultado obviamente erróneo. La paradoja estriba en que los resultados de un análisis plano son únicamente válidos para planos cuyos vectores normales son paralelos al plano  $xy$ , y en este ejemplo el máximo esfuerzo cortante queda en un plano cuyo vector normal no es paralelo al plano  $xy$ .

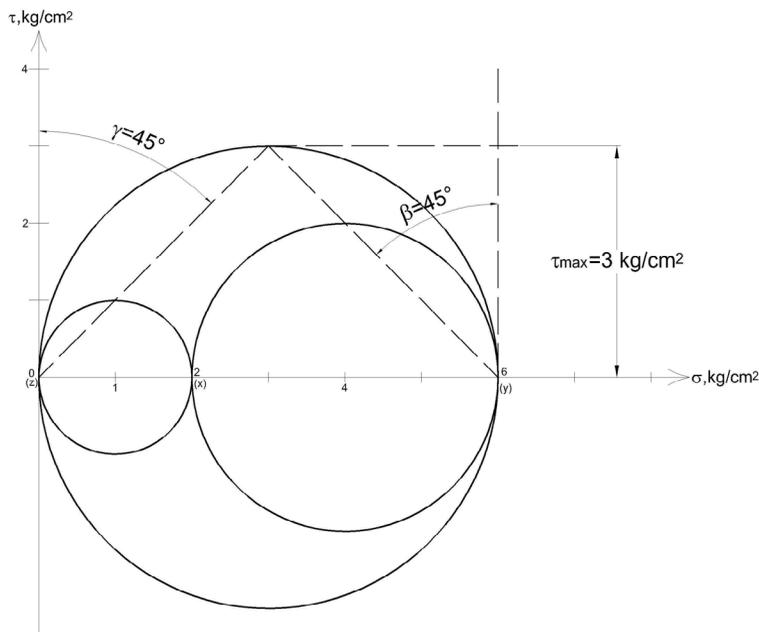


Figura E2.9.2. Círculos de Mohr

### 2.13 Variación del esfuerzo con el área de la sección

Consideremos una barra de sección circular con un área inicial  $A_o$ , y sometamos esta barra a una fuerza normal de tensión  $P$ ; el esfuerzo normal nominal vale  $\sigma_i = P/A_o$ . Sin embargo, la aplicación del esfuerzo de tensión produce una disminución del área de  $A_o$  a  $A_f$ , por lo que el esfuerzo, después de la aplicación de  $P$ , vale  $\sigma_f = P/A_f$ .

El esfuerzo  $\sigma_f$  se puede hallar en función del esfuerzo nominal  $\sigma_i = P/A_o$  y de la deformación unitaria longitudinal, despreciando el cambio de volumen que ocurre durante la deformación, es decir, suponiendo que

$$A_o L_o = A_f L_f$$

$$A_f = \frac{A_o L_o}{L_f}$$

donde  $L_o$  y  $L_f$  son las longitudes inicial y final de la barra, respectivamente. Pero, la deformación unitaria longitudinal vale

$$\varepsilon_l = \left( \frac{L_f - L_o}{L_o} \right) = \frac{L_f}{L_o} - 1$$

Es decir, el área corregida vale

$$A_f = \frac{A_o}{1 + \varepsilon_l} \quad (2.83)$$

El esfuerzo normal, después de la aplicación de la carga, es

$$\sigma_f = \frac{P}{A_f} \quad (2.84)$$

$$\sigma_f = \frac{P L_f}{A_o L_o} = \left( \frac{P}{A_o} \right) (1 + \varepsilon_l)$$

$$\sigma_f = \sigma_i (1 + \varepsilon_l) \quad (2.85)$$

La ecuación 2.84 proporciona el esfuerzo normal final, después de la aplicación de la carga, en función de la carga  $P$  y del área corregida  $A_f$ .

## 2.14 Tensor isotrópico y tensor desviador

El tensor esfuerzo se puede descomponer tanto en el tensor esfuerzo isotrópico (o volumétrico o esférico), como en el tensor esfuerzo desviador (o distorsionante)

$$\underline{S} = \underline{S}_m + \underline{S}_d \quad (2.86)$$

donde (Deméneghi, Magaña y Sanginés, 2000)

$$\underline{S}_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.88)$$

y

$$\underline{S}_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

En ocasiones, a los elementos del tensor esfuerzo desviador se les designa de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x - \sigma_m; & S_{xy} &= \tau_{xy} \\ S_y &= \sigma_y - \sigma_m; & S_{xz} &= \tau_{xz} \\ S_z &= \sigma_z - \sigma_m; & S_{yz} &= \tau_{yz} \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\underline{S}_d = \begin{bmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

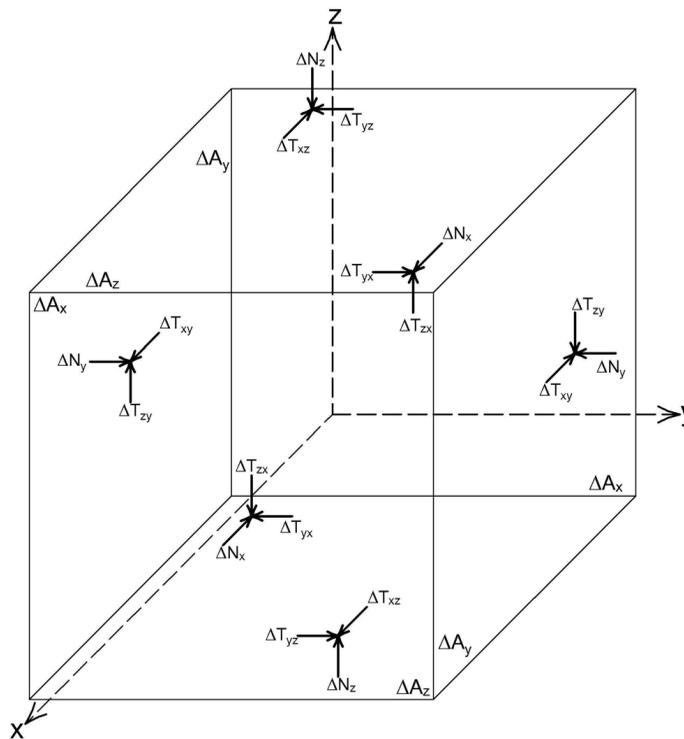
## 2.15 Convención de signos en mecánica de suelos

En los siguientes párrafos, consideraremos que en el entorno de un elemento de material (Figura 2.20) existe un campo vectorial de fuerzas que es una función continua y diferenciable en dicho entorno. Así

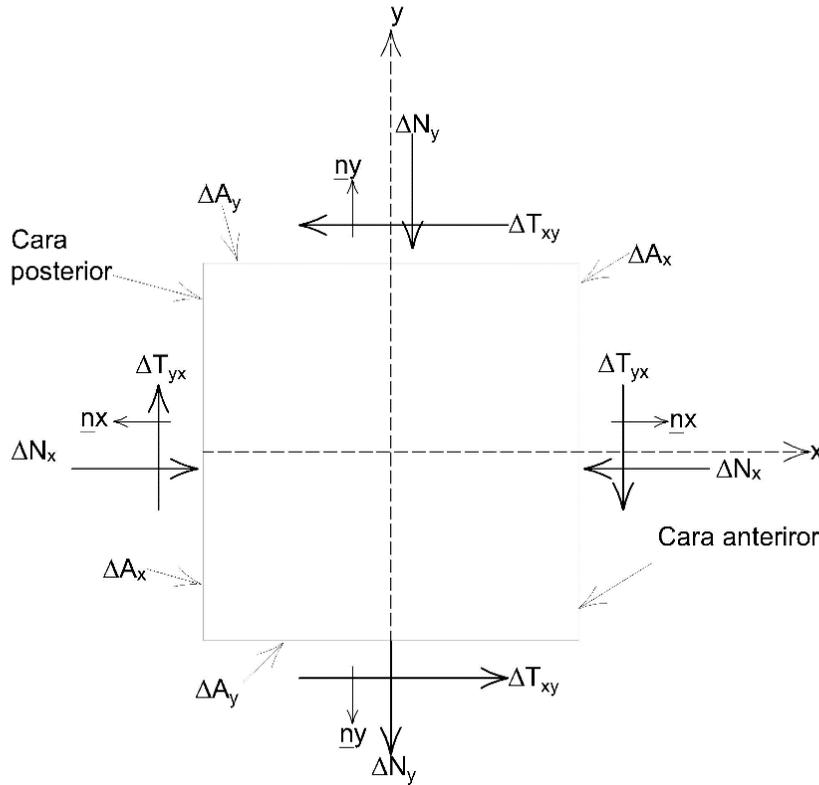
$$\begin{aligned} N_{xx} &= N_x = N_x(x, y, z) \\ T_{xy} &= T_{xy}(x, y, z) \\ N_{yy} &= N_y = N_y(x, y, z), \text{ etcétera} \end{aligned}$$

## Estado de esfuerzo

Sea un elemento de material sometido al sistema de cargas indicado en la Figura 2.20. Consideremos las caras del elemento paralelas a los planos  $xz$  y  $yz$  (Figura 2.21); para las fuerzas y áreas usaremos la siguiente convención de signos: las fuerzas son positivas si tienen el mismo sentido del eje al que son paralelas. Para las áreas utilizamos el sentido del vector normal a la cara externa: si el vector normal tiene el mismo sentido del eje al cual es paralelo, el área es positiva. Tomemos como ejemplo la cara anterior: la fuerza  $\Delta N_x$  es negativa y el área  $\Delta A_x$  es positiva, como se aprecia en la Figura 2.21.



**Figura 2.20.** Sistema de fuerzas actuando en planos perpendiculares a los ejes coordenados



**Figura 2.21.** Fuerzas actuando en planos perpendiculares a los ejes  $x$  e  $y$

Veamos el concepto de esfuerzo en la cara anterior del elemento. El esfuerzo normal medio  $s_{xm}$  lo obtenemos de la siguiente forma

$$\sigma_{xm} = -\frac{\Delta N_x}{\Delta A_x} \quad (2.92)$$

Dado que  $\Delta N_x < 0$  y  $\Delta A_x > 0$ , el esfuerzo  $s_{xm}$  es positivo en la cara anterior del elemento. En la cara posterior (Figura 2.21) el esfuerzo normal medio está dado también por la ecuación 2.92; como  $\Delta N_x > 0$  y  $\Delta A_x < 0$ , el esfuerzo  $s_{xm}$  es también positivo. Vemos entonces que el esfuerzo normal medio  $s_{xm}$  es positivo tanto en la cara anterior como en la cara posterior del elemento.

Definamos al esfuerzo normal  $s_x$  de la siguiente forma

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta N_x}{\Delta A_x} \right) = -\frac{\partial N_x}{\partial A_x} \cong -\frac{\Delta N_x}{\Delta A_x} \quad (2.93)$$

Obtenemos a continuación el esfuerzo cortante medio  $t_{yxm}$  en la cara anterior (figura 2.21)

$$\tau_{yxm} = -\frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} \quad (2.94)$$

Como  $\Delta T_{yx} < 0$  y  $\Delta A_x > 0$ , el esfuerzo  $t_{yxm}$  es positivo. En la cara posterior el esfuerzo cortante  $t_{yxm}$  se obtiene con la ecuación 2.94; como  $\Delta T_{yx} > 0$  y  $\Delta A_x < 0$ ,  $t_{yxm}$  es también positivo. Por lo tanto, para el sistema de fuerzas actuando en el elemento de la Figura 2.21, los esfuerzos cortantes en las caras anterior y posterior, obtenidos ambos con la ecuación 2.94, son positivos.

El esfuerzo cortante  $t_{yx}$  se define de la siguiente forma

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} \right) = -\frac{\partial T_{yx}}{\partial A_x} \cong -\frac{\Delta T_{yx}}{\Delta A_x} \quad (2.95)$$

En forma análoga, el esfuerzo cortante  $t_{zx}$  se define

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta T_{zx}}{\Delta A_x} \right) = -\frac{\partial T_{zx}}{\partial A_x} \cong -\frac{\Delta T_{zx}}{\Delta A_x} \quad (2.96)$$

En las caras paralelas al plano  $xz$  (Figura 2.20) los esfuerzos  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{zy}$ , y en las caras paralelas al plano  $xy$  los esfuerzos  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ , se obtienen usando un criterio similar al dado por las ecuaciones 2.93, 2.95 y 2.96.

En ocasiones se grafica el estado de esfuerzo como se indica en la Figura 2.22. Cabe aclarar, sin embargo, que el sentido de los esfuerzos no corresponde necesariamente al sentido de los ejes coordenados. Por ejemplo, el esfuerzo normal  $s_x$  en la cara posterior del elemento de la Figura 2.22 tiene sentido contrario al eje  $x$ , y se podría pensar que es positivo; sin embargo, como ya indicamos en párrafos anteriores, el esfuerzo  $s_x$  es positivo. Por lo tanto, a los esfuerzos indicados en la Figura 2.22 los podemos denominar esfuerzos aparentes. De hecho, el sentido de los esfuerzos aparentes corresponde en realidad al sentido de los incrementos de fuerza que actúan sobre el elemento, como se puede constatar comparando las Figuras 2.20 y 2.22.

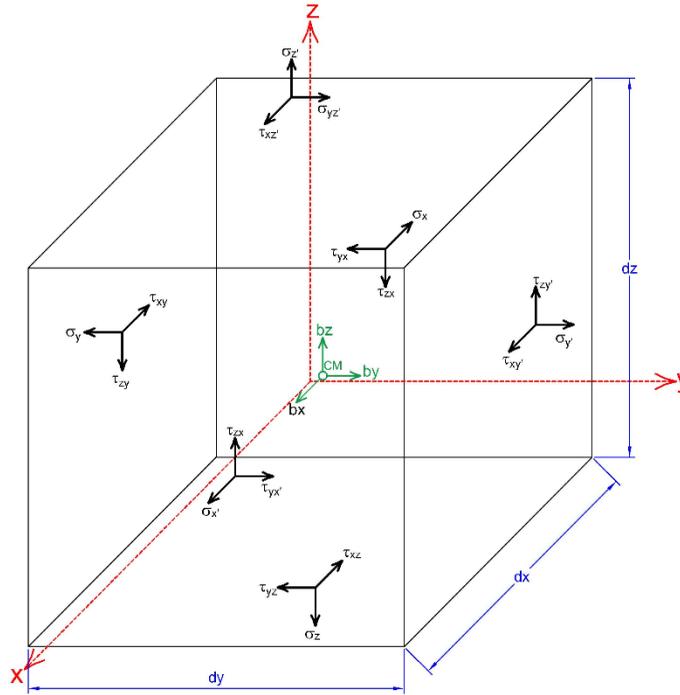


Figura 2.22. Esfuerzos aparentes

Consideremos un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas, como el tetraedro mostrado en la Figura 2.23. Las fuerzas de superficie en las caras verticales y horizontal del elemento las hemos traducido a esfuerzos, como se indica en la Figura 2.23.

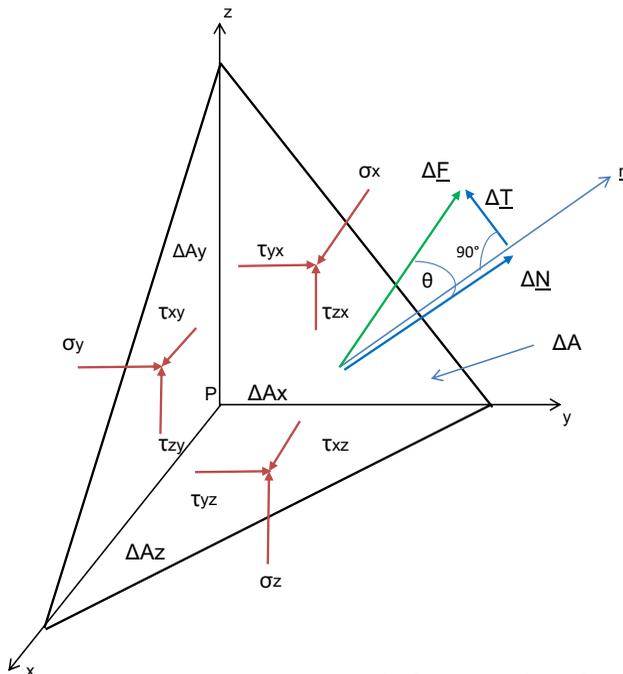


Figura 2.23. Sistema de fuerzas sobre el tetraedro

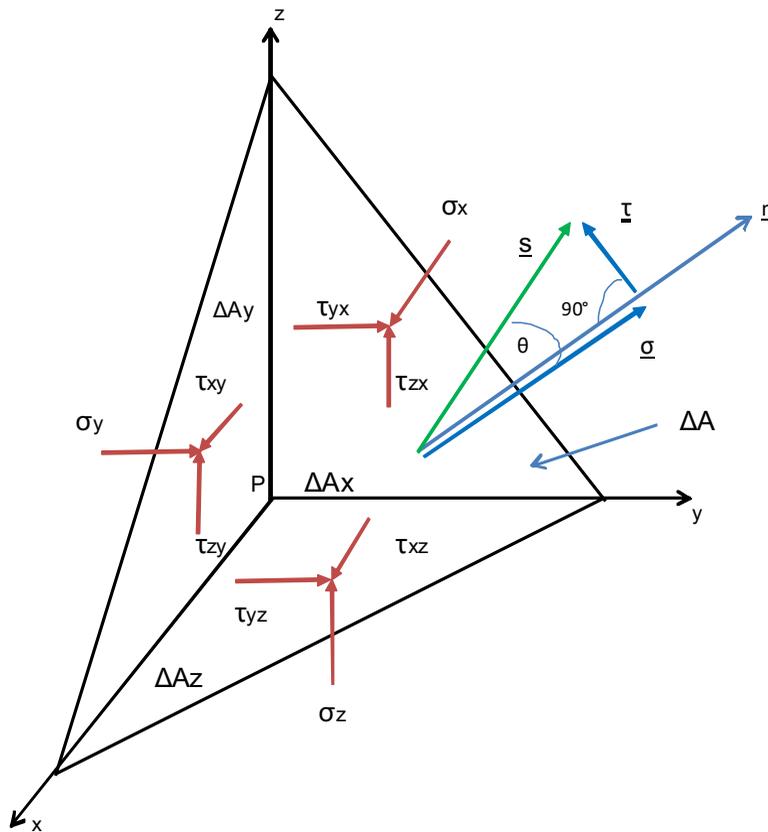
Definimos el vector esfuerzo en la cara inclinada del tetraedro de la siguiente forma

$$\underline{s}_m = -\frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2.97)$$

Y el vector esfuerzo  $\underline{s}$

$$\underline{s} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F}{\Delta A} \right) \quad (2.97)$$

En la Figura 2.24 mostramos al vector  $\underline{s}$  actuando sobre la cara inclinada del elemento.



**Figura 2.24.** Vector  $\underline{s}$  actuando sobre la cara inclinada del elemento

## Estado de esfuerzo

Por otra parte, la fuerza tiene las componentes

$$\underline{\Delta F} = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F}{\Delta A} \right) = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_x}{\Delta A} \right) \\ \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_y}{\Delta A} \right) \\ \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_z}{\Delta A} \right) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -\frac{\Delta F_x}{\Delta A} \\ -\frac{\Delta F_y}{\Delta A} \\ -\frac{\Delta F_z}{\Delta A} \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

Es decir

$$S_x = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_x}{\Delta A} \right) \cong \left( -\frac{\Delta F_x}{\Delta A} \right) \quad (2.100a)$$

$$S_y = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_y}{\Delta A} \right) \cong \left( -\frac{\Delta F_y}{\Delta A} \right) \quad (2.100b)$$

$$S_z = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \left( -\frac{\Delta F_z}{\Delta A} \right) \cong \left( -\frac{\Delta F_z}{\Delta A} \right) \quad (2.100c)$$

Las fuerzas de cuerpo las tomamos en cuenta con el vector

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (2.101)$$

donde  $\underline{b}$  está en  $\frac{kN}{m^3}$

La condición de equilibrio dinámico, por ejemplo, en dirección  $x$ , establece que

$$\Sigma \Delta F_x = m a_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.102)$$

Donde

$m$  = masa del elemento

$a_x$  = aceleración del centro de masa del elemento, en dirección  $x$

$u$  = desplazamiento del centro de masa del elemento, en dirección  $x$

La masa la obtenemos con

$$m = \rho(\text{Vol})$$

siendo  $\rho$  la masa específica del material, en  $\frac{Mg}{m^3}$

Establezcamos el equilibrio dinámico del tetraedro de la Figura 2.23 en la dirección  $x$

$$\sigma_x(\Delta A_x) + \tau_{yx}(\Delta A_y) + \tau_{zx}(\Delta A_z) + \Delta F_x + \frac{1}{3}b_x(\Delta A_x)(\Delta x) = \frac{1}{3}\rho(\Delta A_x)(\Delta x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.103)$$

Se puede demostrar

$$\Delta A_x = (\Delta A) \cos \alpha$$

$$\Delta A_y = (\Delta A) \cos \beta$$

$$\Delta A_z = (\Delta A) \cos \gamma$$

donde  $\Delta A$  es el área de la cara inclinada del tetraedro, y  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  son los cosenos directores del vector normal a la cara inclinada del tetraedro.

Tomando en cuenta la primera de las ecuaciones 2.100

$$\Sigma F_x \cong -S_x(\Delta A)$$

y reemplazando en la ecuación 2.103

$$S_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma - \frac{1}{3}\rho(\Delta x) \cos \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{3}b_x(\Delta x) \cos \alpha$$

En forma análoga

$$S_y = \tau_{yx} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma - \frac{1}{3}\rho(\Delta y) \cos \beta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{3}b_y(\Delta y) \cos \beta$$

$$S_z = \tau_{zx} \cos \alpha + \tau_{zy} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma - \frac{1}{3}\rho(\Delta z) \cos \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{3}b_z(\Delta z) \cos \gamma$$

Es decir

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} - \frac{\rho}{3} \begin{Bmatrix} (\Delta x)\cos\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\Delta y)\cos\beta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\Delta z)\cos\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} b_x(\Delta x)\cos\alpha \\ b_y(\Delta y)\cos\beta \\ b_z(\Delta z)\cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.104)$$

Consideremos ahora que las dimensiones del tetraedro tienden a cero

$$\Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta y \rightarrow 0$$

$$\Delta z \rightarrow 0$$

La ecuación 2.104 queda

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

Es decir

$$\underline{s} = \underline{S}\underline{n} \quad (2.106)$$

siendo

$$\underline{s} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{Bmatrix} \quad (2.109)$$

Observamos que la ecuación 2.106 se cumple cuando las dimensiones del tetraedro de la Figura 2.24 tienden a cero.

## 2.16 Aplicaciones

### 2.16.1 Tensión diagonal en vigas de concreto

Bajo ciertas condiciones, la aplicación de esfuerzo cortante en un medio ocasiona que se presenten esfuerzos de tensión en algunas direcciones (Deméneghi, Magaña y Sanginés, 2000). Este fenómeno es especialmente importante en una viga de concreto, debido a que su resistencia a la tensión es baja para fines prácticos.

Para ilustrar lo anterior, consideremos una viga de concreto reforzado simplemente apoyada y obtengamos el diagrama de fuerza cortante a lo largo de la viga (Figura 2.25). Obtengamos el estado de esfuerzo en una sección ligeramente a la derecha del apoyo M. En el punto D (a la mitad de la sección), los esfuerzos normales horizontal y vertical son de muy baja magnitud, por lo que los consideramos nulos; además, en mecánica de materiales se demuestra que en el punto D ocurre el máximo esfuerzo cortante, cuya magnitud es  $(3/2)(V/A)$ , donde  $V$  es la fuerza cortante y  $A = bh$  el área de la sección. Para el estado de esfuerzo en el punto D, tracemos el círculo de Mohr, encontremos el polo de los esfuerzos y localicemos el plano donde ocurre el máximo esfuerzo de tensión (Figura 2.26). Se observa que este plano tiene una inclinación de  $45^\circ$  con respecto a la horizontal (Figura 2.26).

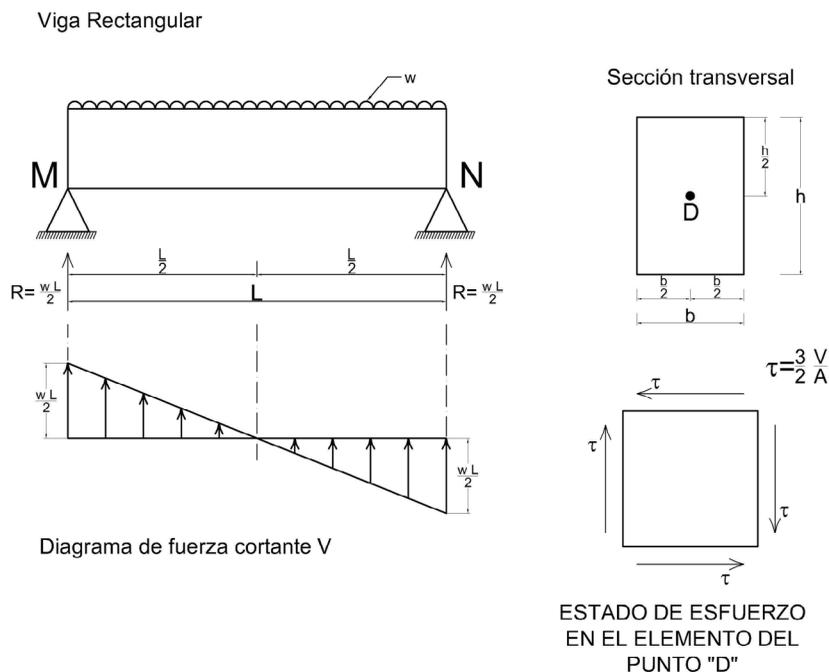
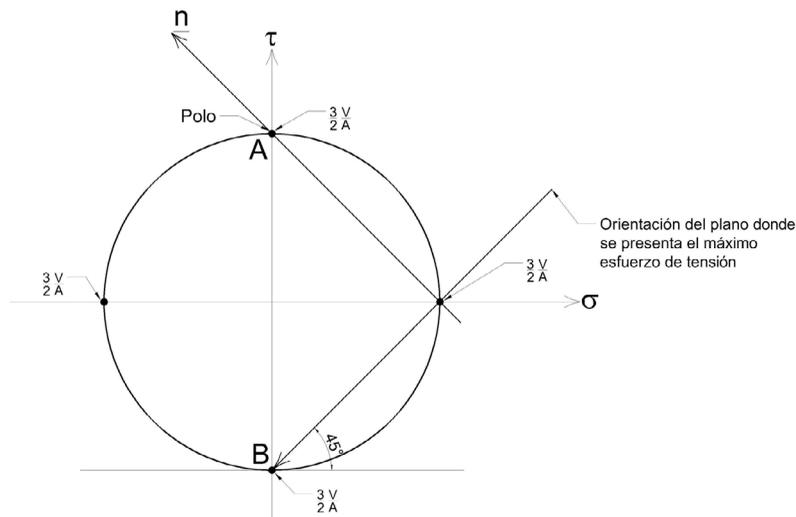


Figura 2.25. Viga de concreto simplemente apoyada



**Figura 2.26.** Círculo de Mohr

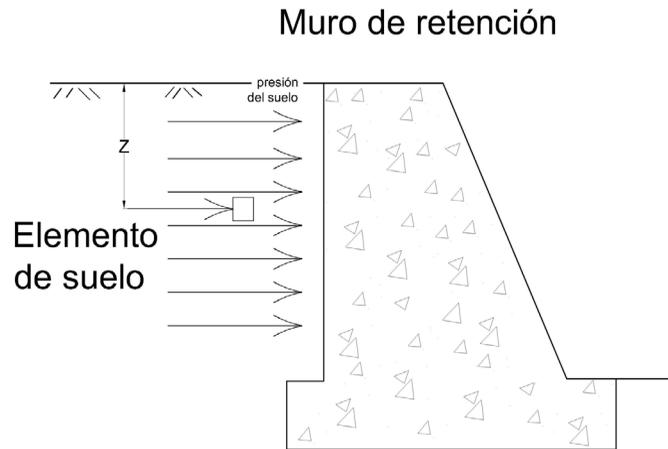
Por lo anterior, debido a un esfuerzo cortante de magnitud  $(3/2)(V/A)$  en dirección vertical, que actúa en el punto D (Figura 2.25), se produce un esfuerzo de tensión en un plano inclinado a  $45^\circ$  con respecto a la horizontal de igual magnitud  $(3/2)(V/A)$ . A este fenómeno se le conoce como tensión diagonal y puede ocasionar problemas de comportamiento en materiales de baja resistencia a la tensión, como el concreto.

En la práctica se acostumbra, en vigas de concreto, usar refuerzo transversal a base de estribos de acero, para tomar estos esfuerzos de tensión.

### 2.16.2 Empuje de tierras

Otra de las aplicaciones del conocimiento del estado de esfuerzo es la relativa al cálculo del empuje de tierras sobre muros de retención (Deméneghi, Magaña y Sanginés, 2000).

Consideremos un muro de retención como el indicado en la Figura 2.27, el cual soporta un relleno de arena seca de peso volumétrico  $\gamma_d$ .



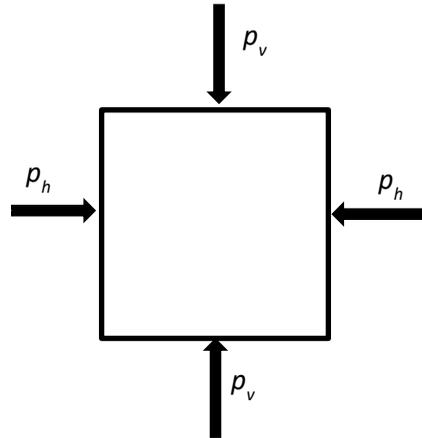
**Figura 2.27.** Empuje de tierras

El estado de esfuerzo en un elemento dentro de la masa de suelo se muestra en la Figura 2.28. La presión vertical vale  $p_v = \gamma_d z$ , donde  $z$  es la profundidad a la que se encuentra el elemento. En mecánica de suelos se observa que la presión horizontal  $p_h$  es proporcional a  $p_v$ , es decir  $p_h = K_o p_v$ , donde  $K_o$  es el coeficiente de proporcionalidad, el cual se denomina coeficiente de presión de tierra en reposo. Sin embargo, se ha observado que con frecuencia los muros de contención sufren una cierta cedencia que ocasiona una disminución de la presión horizontal (en la Figura 2.27 el muro se desplazaría hacia la derecha). Más aún, experimentalmente se ha determinado que es común que este desplazamiento sea suficiente para que el suelo alcance un estado plástico de equilibrio.

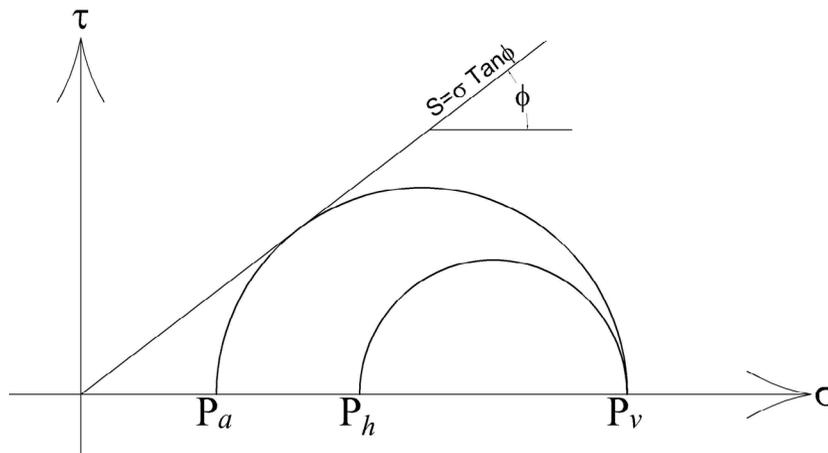
En mecánica de suelos se acepta que una arena tiene una ley de resistencia en la que la resistencia al corte es linealmente proporcional al esfuerzo normal (Figura 2.29), es decir

$$s = \mu \sigma = \sigma \tan \phi$$

donde  $\mu = \tan \phi$  = coeficiente de fricción interna del suelo



**Figura 2.28.** Estado de esfuerzo en el elemento de suelo



**Figura 2.29.** Ley de resistencia al corte de una arena

Debido a que en una masa de suelo se presentan en general esfuerzos de compresión, se utiliza en mecánica de suelos una convención de signos diferente a la que hemos venido usando. Por lo tanto, en mecánica de suelos los esfuerzos normales de compresión se consideran positivos y los de tensión, negativos. En el inciso 2.15 se detalla esta convención de signos, que será la que usaremos en los siguientes párrafos.

El estado de esfuerzo de la Figura 2.28 se muestra en la Figura 2.29. Por la cedencia del muro la presión horizontal  $p_h$  disminuye hasta que el círculo de Mohr toca la línea de

## Estado de esfuerzo

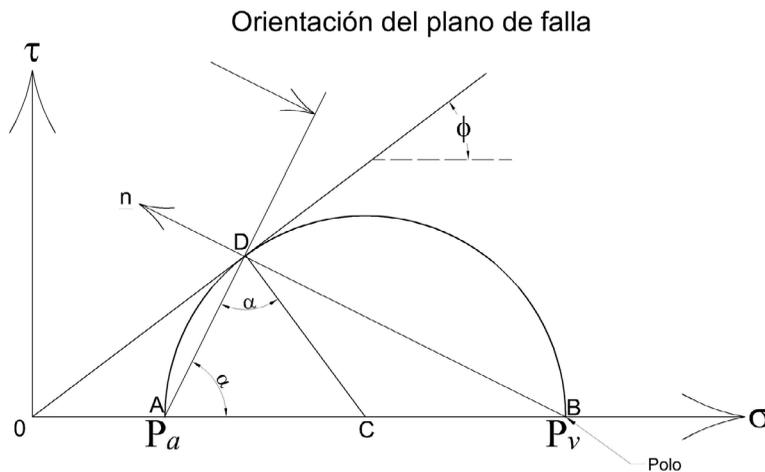
resistencia del suelo (Figura 2.29). Aceptemos que la presión activa  $p_a$  es proporcional a  $p_v$ :  $p_a = K_a p_v$ , donde  $K_a$  = coeficiente de presión activa del suelo. En el triángulo ODC de la Figura 2.30

$$\frac{(p_v - k_a p_v)}{2}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{\frac{(p_v - k_a p_v)}{2}}{\frac{p_v + k_a p_v}{2}}$$

$$\text{sen } \phi = \frac{1 - k_a}{1 + k_a}$$

$$k_a = \frac{1 - \text{sen } \phi}{1 + \text{sen } \phi}$$



**Figura 2.30.** Determinación del empuje activo

Valuemos la inclinación del plano de falla. El polo se encuentra en el punto B de la Figura 2.30. Además, el triángulo ADC es un triángulo isósceles, puesto que dos de sus lados son iguales al radio del círculo de Mohr, por lo tanto

$$2\alpha + 90^\circ - \phi = 180^\circ$$

$$a = 45^\circ + \phi/2$$

la cual es la inclinación del plano de falla.

El conocimiento de la presión activa  $p_a = K_a p_v$  es importante en la práctica, porque es la que se emplea con frecuencia para evaluar el empuje de tierras sobre muros de retención.

## 2.17 Ecuaciones de equilibrio dinámico

Consideremos un elemento sometido a fuerzas de contacto y a fuerzas de cuerpo, como se muestra en la Figura 2.31.

Las fuerzas de cuerpo las tomamos en cuenta con el vector (Figura 2.31)

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (2.110)$$

Donde

$\underline{b}$  mide una fuerza por unidad de volumen, con unidades  $\left[\frac{kN}{m^3}\right]$

Utilicemos la segunda ley de Newton en la dirección  $x$

$$\Sigma \Delta F_x = m a_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Así

$$\begin{aligned} & \sigma'_x(dy)(dz) + \tau'_{xy}(dx)(dz) + \tau'_{xz}(dx)(dy) - \sigma_x(dy)(dz) - \\ & \tau_{xy}(dx)(dz) - \tau_{xz}(dx)(dy) + b_x(dx)(dy)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Pero

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \\ \tau'_{xy} &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \\ \tau'_{xz} &= \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación 2.111

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(dx)(dy)(dz) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}(dx)(dy)(dz) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}(dx)(dy)(dz) + b_x(dx)(dy)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.112a)$$

Procediendo en forma análoga

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.112b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.112c)$$

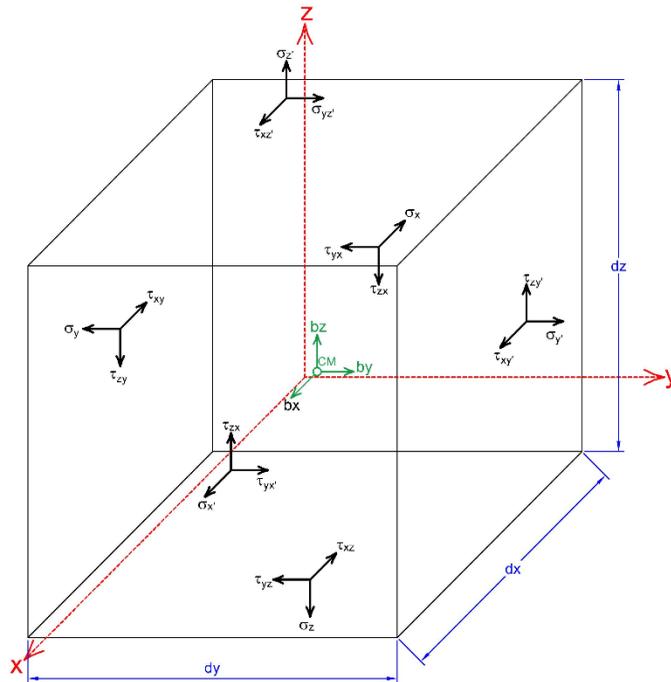


Figura 2.31. Elemento sometido a fuerzas de contacto y fuerzas de cuerpo

Hagamos

$$b'_x = b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.113a)$$

$$b'_y = b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.113b)$$

$$b'_z = b_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.113c)$$

La ecuación 2.112 queda

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b'_x = 0 \quad (2.114)$$

Procediendo en forma análoga para las direcciones  $y$  y  $z$ , arribamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b'_y = 0 \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b'_z = 0 \quad (2.116)$$

Donde

$$b'_x = b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.117)$$

$$b'_y = b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.118)$$

$$b'_z = b_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (2.119)$$

Las ecuaciones 2.114 a 2.116 son válidas para un medio continuo formado por cualquier tipo de material, y se deben cumplir en todo fenómeno perteneciente a la física newtoniana.

## 2.18 El área como un vector

Consideremos el tetraedro de la Figura 2.32 y definamos el vector área  $\Delta A$  de la cara inclinada del mismo de la siguiente forma

$$\underline{\Delta A} = \begin{Bmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix} \quad (2.120)$$

El módulo del vector  $\Delta A$  es

$$|\underline{\Delta A}| = \Delta A = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} \quad (2.121)$$

$$\frac{\underline{\Delta A}}{\Delta A} = \frac{1}{2\Delta A} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix} \quad (2.122)$$

Probemos a continuación que el vector área  $\Delta A$  tiene la misma dirección que el vector normal a la cara inclinada del tetraedro. En efecto (figura 2.32)

$$\underline{n} = \frac{\underline{AB} \times \underline{AC}}{|\underline{AB} \times \underline{AC}|}$$

$$A (\Delta x, 0, 0), B (0, \Delta y, 0), C (0, 0, \Delta z)$$

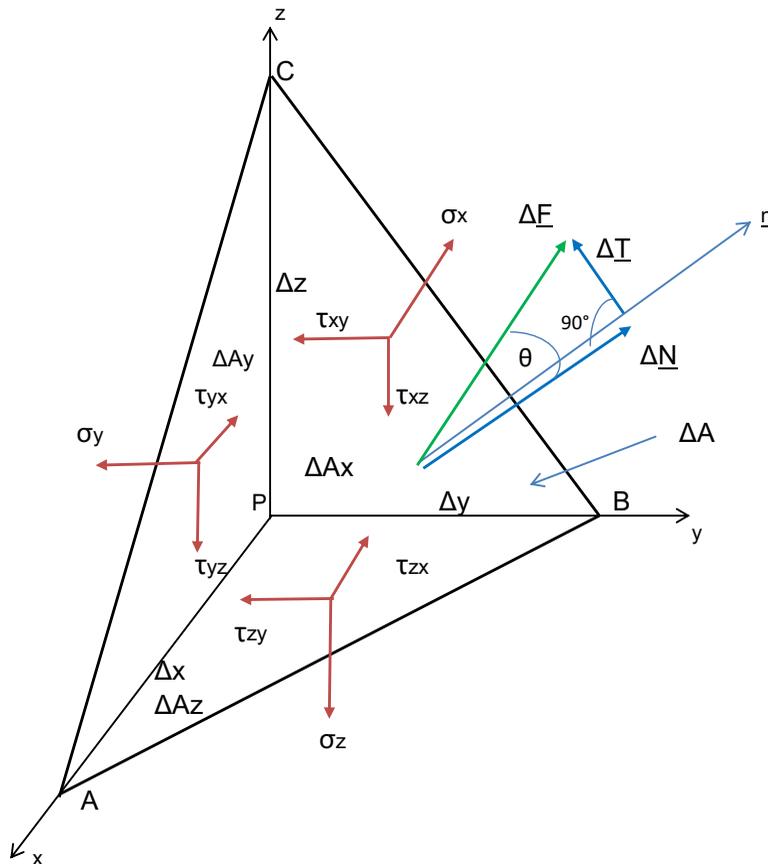


Figura 2.32. Tetraedro sometido a un estado de esfuerzo

$$\underline{AB} = \begin{Bmatrix} -\Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{AC} = \begin{Bmatrix} -\Delta x \\ 0 \\ \Delta z \end{Bmatrix}$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\Delta x & \Delta y & 0 \\ -\Delta x & 0 & \Delta z \end{vmatrix} = (\Delta y \Delta z)i + (\Delta x \Delta z)j + (\Delta x \Delta y)k$$

$$\underline{AB} \times \underline{AC} = \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix}$$

$$|\underline{AB} \times \underline{AC}| = \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} \quad (2.123)$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix}$$

Tomando en cuenta la ecuación 2.121

$$\underline{n} = \frac{1}{2\Delta A} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix} \quad (2.124)$$

Comparando las ecuaciones 2.122 y 2.124

$$\underline{n} = \frac{\Delta A}{\Delta A} \quad (2.125)$$

Observamos que el vector  $\Delta A$  tiene la misma dirección que el vector normal  $\underline{n}$  a la cara inclinada del tetraedro.

Designemos al vector normal  $\underline{n}$  por sus cosenos directores

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} \quad (2.126)$$

Pero, de acuerdo con la ecuación 2.124

$$\underline{n} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \Delta y \Delta z \\ \frac{1}{2} \Delta x \Delta z \\ \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta A_x}{\Delta A} \\ \frac{\Delta A_y}{\Delta A} \\ \frac{\Delta A_z}{\Delta A} \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

Comparando las ecuaciones 2.126 y 2.127

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\Delta A_x}{\Delta A} \\ \Delta A_x &= \Delta A \cos \alpha \end{aligned} \quad (2.128)$$

En forma análoga

$$\Delta A_y = \Delta A \cos \beta \quad (2.129)$$

$$\Delta A_z = \Delta A \cos \gamma \quad (2.130)$$

Demostremos a continuación que el área de la cara inclinada del tetraedro es igual al módulo del vector área  $\Delta A$ . En efecto, el área de un triángulo,  $\Delta A'$ , cuyos lados son los vectores  $\underline{AB}$  y  $\underline{AC}$  (Figura 2.32) vale

$$\Delta A' = \frac{1}{2} |\underline{AB} \times \underline{AC}|$$

Pero, de acuerdo con la ecuación 2.123

$$\Delta A' = \frac{1}{2} |\underline{AB} \times \underline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}$$

Habíamos obtenido el módulo del vector  $\Delta A$ , con la ecuación 2.121

$$|\underline{\Delta A}| = \Delta A = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} \quad (2.121)$$

Observamos que el área de la cara inclinada del tetraedro,  $\Delta A'$ , es igual al módulo,  $\Delta A$ , del vector área  $\Delta A$ .

Podemos entonces afirmar que el vector área  $\Delta A$ , dado por la ecuación 2.120

$$\underline{\Delta A} = \begin{Bmatrix} \frac{\Delta A_x}{\Delta A} \\ \frac{\Delta A_y}{\Delta A} \\ \frac{\Delta A_z}{\Delta A} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix}$$

representa en forma vectorial al área de la cara inclinada del tetraedro de la Figura 2.32.

Veamos otra forma de demostrar las siguientes relaciones

$$\Delta A_x = \Delta A \cos \alpha \quad (2.128)$$

$$\Delta A_y = \Delta A \cos \beta \quad (2.129)$$

$$\Delta A_z = \Delta A \cos \gamma \quad (2.130)$$

De la Figura 2.32

$$\Delta A_x = \frac{1}{2} \Delta y \Delta z \quad (2.128')$$

$$\Delta A_y = \frac{1}{2} \Delta x \Delta z \quad (2.129')$$

$$\Delta A_z = \frac{1}{2} \Delta x \Delta y \quad (2.130')$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{AB} \times \underline{AC}}{|\underline{AB} \times \underline{AC}|}$$

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}} \begin{Bmatrix} \Delta y \Delta z \\ \Delta x \Delta z \\ \Delta x \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\Delta y \Delta z}{\sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}}$$

$$\Delta y \Delta z = \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} \cos \alpha$$

$$\Delta A = \frac{1}{2} |\underline{AB} \times \underline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2}$$

$$\sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} = 2\Delta A$$

Reemplazamos en la ecuación 2.128'

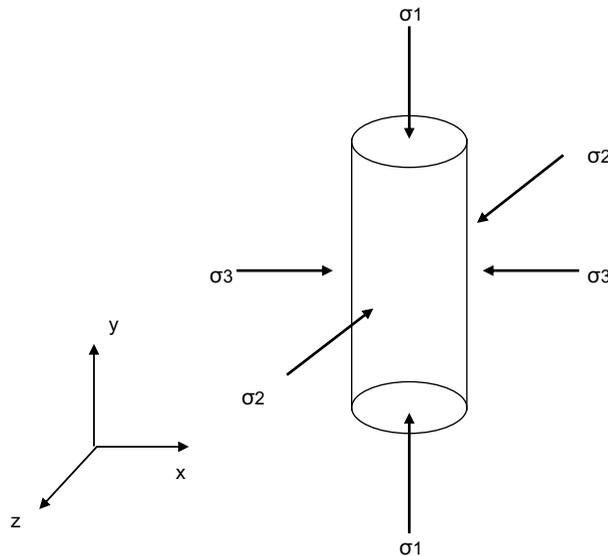
$$\Delta A_x = \frac{1}{2}(\Delta y \Delta z) = \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta y \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta z)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} \cos \alpha = \frac{1}{2} 2 \Delta A \cos \alpha = \Delta A \cos \alpha$$

Las demás ecuaciones de demuestran en forma similar.

## 2.19 Estado de esfuerzo en una prueba de compresión triaxial

El estado de esfuerzo en una prueba de compresión triaxial es como el que se muestra en la Figura 2.33. El tensor esfuerzo queda

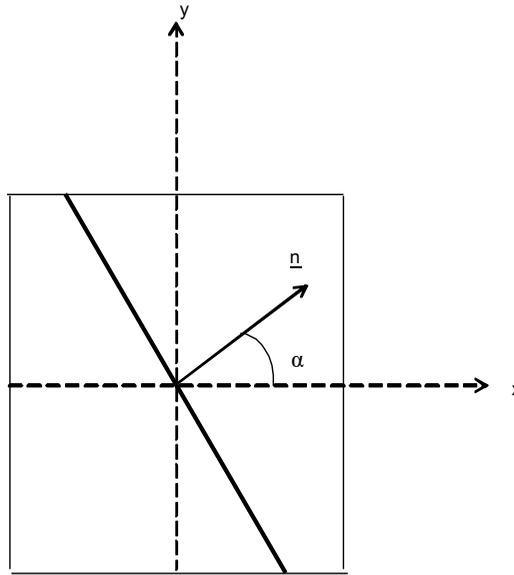
$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$



**Figura 2.33.** Estado de esfuerzo en una prueba de compresión triaxial

Hallemos el vector esfuerzo en un plano cuyo vector normal está contenido en el plano  $xy$  (Figura 2.34)

$$\underline{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$



**Figura 2.34.** Vector normal  $\underline{n}$

El vector esfuerzo  $\underline{s}$  en el plano inclinado de la Figura 2.34 vale

$$\underline{s} = \underline{S}\underline{n}$$

Es decir

$$\underline{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_3 \cos \alpha \\ \sigma_1 \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

El esfuerzo normal

$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n}$$

$$\sigma = \sigma_3 \cos^2 \alpha + \sigma_1 \sin^2 \alpha \quad (2.131)$$

Y el esfuerzo cortante

$$\tau = |\underline{s} \times \underline{n}|$$

$$\tau = (\sigma_3 - \sigma_1) \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.132)$$

## Estado de esfuerzo

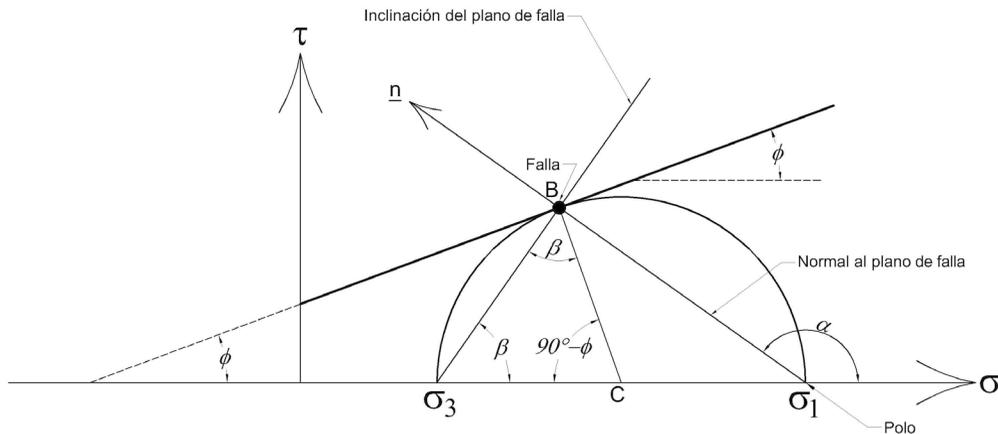
Para un estado de esfuerzo plano obtuvimos las siguientes expresiones para el cálculo de  $\sigma$  y  $\tau$  (ecuaciones 2.62 y 2.63)

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.62)$$

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (2.63)$$

Las ecuaciones 2.131 y 2.132 son iguales a las ecuaciones 2.62 y 2.63, con  $\sigma_x = \sigma_3$  y  $\sigma_y = \sigma_1$ . Por lo tanto, para la obtención del estado de esfuerzo en planos inclinados en una prueba de compresión triaxial, podemos aplicar lo estudiado para el estado de esfuerzo plano, utilizando  $\sigma_x = \sigma_3$  y  $\sigma_y = \sigma_1$

Consideremos que conocemos la ley de resistencia al corte del suelo (Figura 2.35), y que queremos conocer la inclinación del plano de falla del espécimen de suelo.



**Figura 2.35.** Determinación de la inclinación del plano de falla

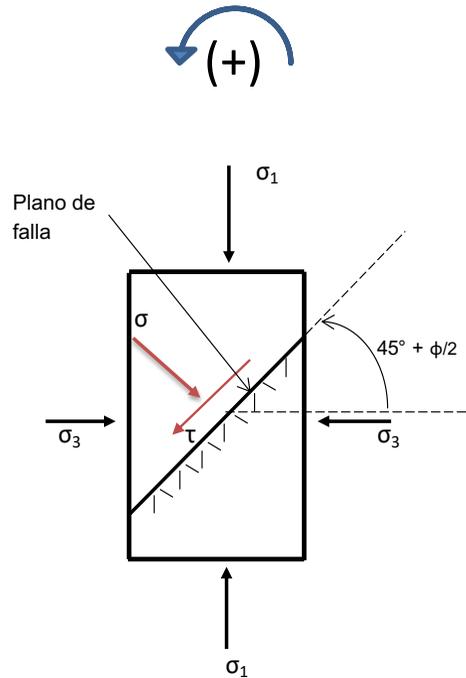
Por  $\sigma_3$  trazamos una recta horizontal y por  $\sigma_1$  una vertical; donde se cortan estas rectas queda el polo de los esfuerzos (Figura 2.35). El punto B corresponde al plano de falla del espécimen, por lo que trazamos una recta que vaya del polo al punto B. Esta recta mide la inclinación de la recta normal al plano de falla. Por lo tanto, la inclinación del plano de falla está dada por la recta que va del punto B a  $\sigma_3$ . En la Figura 2.35

$$2\beta + 90^\circ - \phi = 180^\circ$$

$$\beta = 45 + \frac{\phi}{2}$$

Por consiguiente, la inclinación del plano de falla en una prueba de compresión triaxial es  $45^\circ + \phi$ . En la Figura 2.36 se muestra el plano de falla.

Cabe aclarar que en mecánica de suelos la convención de signos de cortante es:



**Figura 2.36.** Plano de falla en una prueba de compresión triaxial

## 2.20 Determinación de las direcciones principales de esfuerzo

Habíamos establecido que en una dirección principal se debe cumplir (ecuaciones 2.39)

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x - \sigma) \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma &= 0 \\
 \tau_{xy} \cos \alpha + (\sigma_y - \sigma) \cos \beta + \tau_{yz} \cos \gamma &= 0 \\
 \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + (\sigma_z - \sigma) \cos \gamma &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

Despejemos los cosenos directores  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  del sistema de ecuaciones 2.39. En este caso no es aceptable la solución trivial  $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 0$ , pues los cosenos directores deben cumplir la condición

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (2.40)$$

En consecuencia, para que haya una solución diferente de la trivial, el determinante del sistema de ecuaciones 2.39 debe ser igual a cero

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

Para determinar las direcciones principales de esfuerzo, consideremos que los cosenos directores de una dirección principal están dados por (Durelli *et al.*, 1958)

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} = K \quad (2.133)$$

donde

$$A = \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad (2.134)$$

$$B = - \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \quad (2.135)$$

$$C = \begin{vmatrix} \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} \end{vmatrix} \quad (2.136)$$

$K$  es una constante diferente de cero, la cual determinamos en los siguientes párrafos. En la ecuación 2.67 se debe cumplir que  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ ,  $A \neq 0$  y  $C \neq 0$ , ó  $B \neq 0$  y  $C \neq 0$ .

La ecuación 2.41 queda

$$A(\sigma_x - \sigma) + B\tau_{xy} + C\tau_{xz} = 0 \quad (2.137)$$

Mientras que la primera ecuación del sistema de ecuaciones 2.39 toma la forma

$$(\sigma_x - \sigma)AK + \tau_{xy}BK + \tau_{xz}CK = 0$$

Es decir

$$(\sigma_x - \sigma) + B\tau_{xy} + C\tau_{xz} = 0$$

Que es idéntica a la ecuación 2.137. Por lo tanto, las ecuaciones 2.133 cumplen con la condición establecida de que el determinante de la expresión 2.41 debe ser igual a cero.

La magnitud de  $K$  se obtiene sustituyendo en la ecuación 2.40

$$A^2K^2 + B^2K^2 + C^2K^2 = 1$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{R}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (2.138)$$

y

$$\cos \alpha = \frac{A}{R} \quad (2.139)$$

$$\cos \beta = \frac{B}{R} \quad (2.140)$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{R} \quad (2.141)$$

Las expresiones 2.139 a 2.141 proporcionan los cosenos directores de la dirección principal que se está calculando.

En un estado de esfuerzo plano

$$A = (\sigma_y - \sigma)(-\sigma)$$

$$B = (-\tau_{yx})(-\sigma)$$

Reemplazamos en la ecuación 2.133

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = K$$

$$\tan \alpha = \frac{B}{A} = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y} \quad (2.142)$$

$$\alpha_{1,2} = \tan^{-1} \left( \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y} \right) \quad (2.143)$$

## Ejemplo E2.10

Hallar los esfuerzos y las direcciones principales para el estado de esfuerzo plano de la Figura E2.10.1.

## Solución

Empleando las ecuaciones 2.67 y 2.68

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.67)$$

$$\sigma_1 = \frac{(21 - 35)}{-19} + \sqrt{\left(\frac{21 + 35}{2}\right)^2 + (-19)^2}$$

$$\sigma_1 = 26.838 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.68)$$

$$\sigma_2 = \frac{(21 - 35)}{-19} - \sqrt{\left(\frac{21 + 35}{2}\right)^2 + (-19)^2}$$

$$\sigma_2 = -40.838 \text{ [MPa]}$$

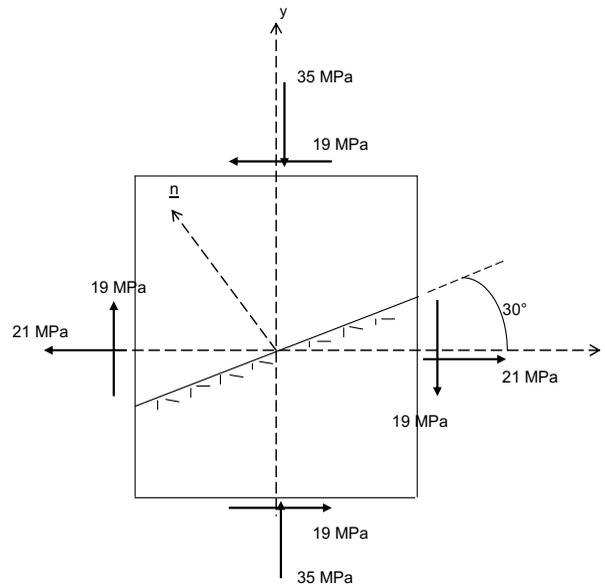


Figura E2.10.1. Ejemplo estado de esfuerzo plano

Usamos la ecuación 2.143

$$\alpha_{1,2} = \tan^{-1} \left( \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y} \right) \quad (2.143)$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left( \frac{-19}{26.838 - (-35)} \right) = -17.08^\circ$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left( \frac{-19}{-40.838 - (-35)} \right) = 72.92^\circ$$

## 2.21 Inclinación de las grietas de un muro de carga ante la acción de un sismo

La ocurrencia de un sismo produce en un elemento de un muro de carga el estado de esfuerzo mostrado en la Figura 2.37. La falla del elemento (y la aparición de grietas) ocurre cuando se alcanza la resistencia al corte de la mampostería  $v_m'$ , como se indica en la Figura 2.38.

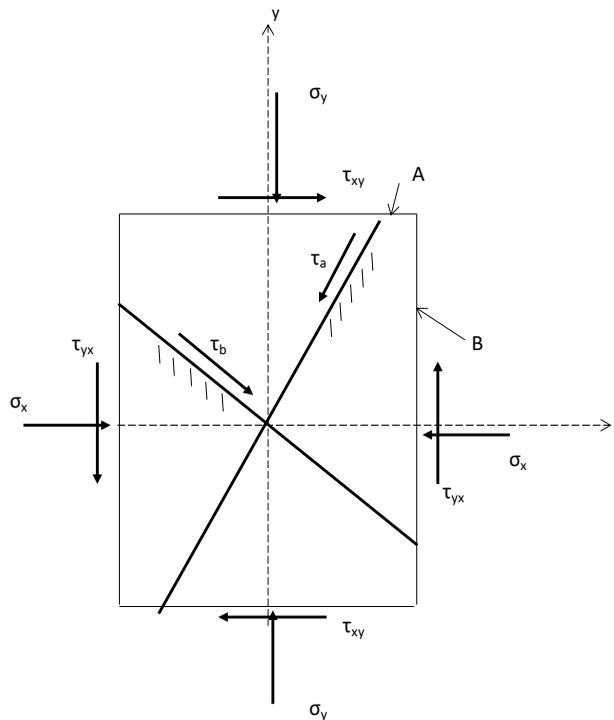
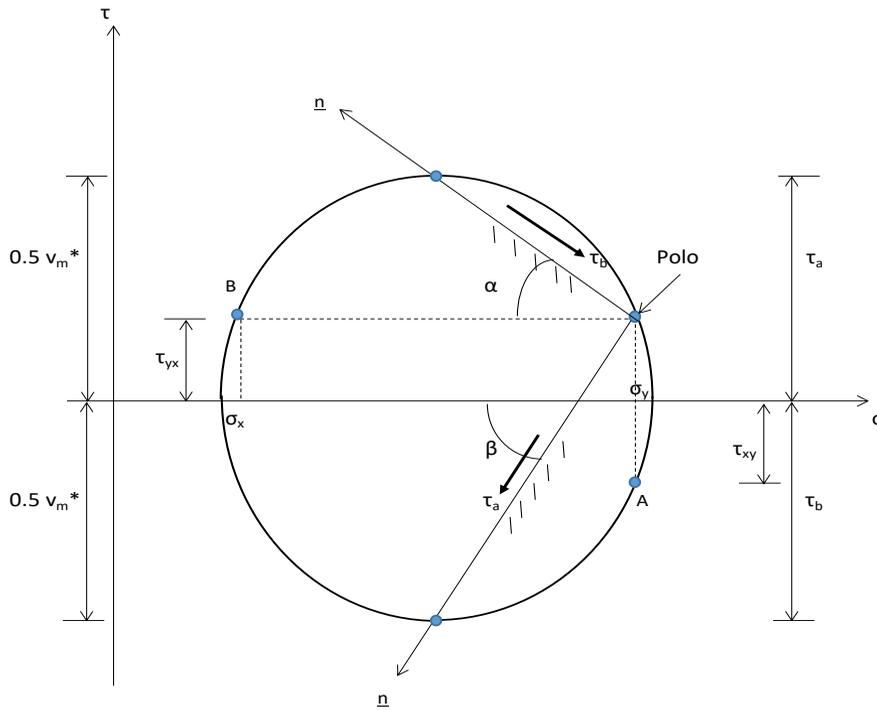


Figura 2.37. Estado de esfuerzo ocasionado por un sismo

## Estado de esfuerzo

Observamos que se forman dos grietas, con inclinaciones  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente (Figura 2.38).



**Figura 2.38.** Círculo de Mohr estado de esfuerzo plano

# Capítulo 3

## Principios generales de la mecánica

Observando los fenómenos de la naturaleza, se han encontrado leyes que son generales para toda clase de materiales. Entre estas leyes o principios generales más importantes se encuentran los siguientes:

1. Principio de conservación de masa
2. Principio de conservación de la cantidad de movimiento
3. Principio de conservación de energía
4. Principio de aumento de entropía

En los siguientes párrafos estudiaremos las leyes anteriores.

### 3.1 Principio de conservación de masa

Esta ley enuncia lo siguiente: en el interior de un volumen de control no se presenta ni creación ni destrucción de masa. Se entiende por volumen de control un cierto volumen establecido a un sistema de referencia fijo en el espacio (el cual es útil para seguir el movimiento de los fluidos). Por lo tanto, el principio expresa que, si existen cambios de masa en dicho volumen, estos serán consecuencia de un flujo de masa, a través de la superficie de control.

Entre los años de 1775 y 1780 Lavoisier estableció las bases de la química como ciencia cuantitativa, al probar que en una reacción química la masa total permanece inalterada. Por ejemplo, una ecuación química balanceada es una expresión de la ley de la conservación de la masa (Castellan, 1987).

Consideremos un volumen fijo  $V_c$ , que precisamente esté fijo en el espacio, limitado por la superficie  $S_c$ , como se muestra en la Figura 3.1 (Levi, 1980). Si un medio de densidad  $r$  llena dicho volumen en el tiempo  $t$ , la masa total dentro de  $V_c$  vale

$$\int_{V_c} \rho dV \quad (3.1)$$

La densidad  $\rho$  depende de la posición y del tiempo

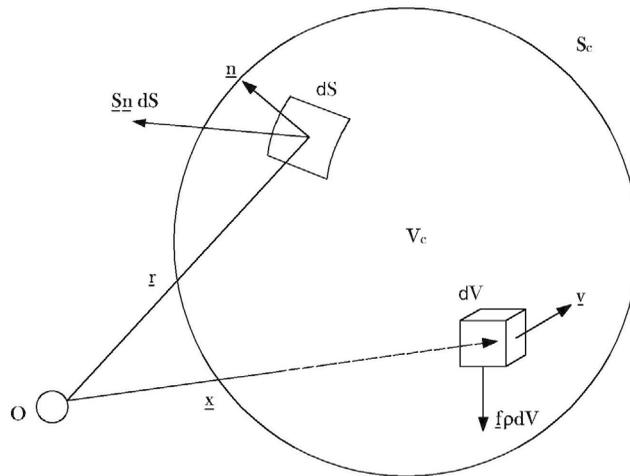
$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (3.2)$$

La rapidez de incremento de la masa total dentro del volumen es

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.3)$$

Si no hay creación ni destrucción de masa dentro de  $V_c$ , la variación de la masa de la ecuación 1 debe ser igual a la rapidez de entrada de masa, a través de la superficie  $S_c$ . La salida de volumen (por unidad de tiempo) por el elemento  $dS$  es  $(v_n dS)$ , donde  $v_n = \underline{v} \cdot \underline{n}$  es la componente normal, hacia fuera, de la velocidad; la salida de masa por unidad de tiempo es  $(\rho v_n dS)$ . En consecuencia, la velocidad de entrada de la masa, a través de  $S_c$ , está dada por (Malvern, 1969)

$$\int_{S_c} (-\rho v_n) dS = - \int_{S_c} (\rho \underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$



**Figura 3.1** Volumen de control (Levi, 1980)

El teorema de la divergencia, o teorema de Gauss, establece que

$$\int_{S_c} (\rho \underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) dV$$

Por lo tanto

$$\int_{S_c} (-\rho v_n) dS = \int_{V_c} \nabla(\rho \underline{v}) dV \quad (3.4)$$

Igualando la ecuación 3.4 con la ecuación 3.3

$$\int_{V_c} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) \right] dV = 0 \quad (3.5)$$

La ecuación 3.5 es válida para cualquier elección del volumen  $V_c$ , por lo tanto, la cantidad entre corchetes debe ser cero en cualquier condición, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0 \quad (3.7)$$

Considerando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \text{div } \underline{v} \\ &= \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{v} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación 3.6

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \underline{v} = 0 \quad (3.8)$$

La ecuación 3.7 o la ecuación 3.8, cualquiera de ellas, son conocidas como *ecuación de continuidad*, y se usa con frecuencia en mecánica de fluidos.

Si el material es incompresible, es decir, que tiene una densidad constante, la ecuación de continuidad se transforma en

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (3.9)$$

O bien

$$\text{div} \cdot \underline{v} = 0 \quad (3.10)$$

Esta es la condición de incompresibilidad, la cual es importante en hidráulica y en las teorías de plasticidad (Malvern, 1969).

Cabe aclarar que la ley de conservación de masa no se cumple para ciertos fenómenos que ocurren dentro del núcleo del átomo. Así, cuando se suma la masa de los neutrones y protones que forman un núcleo dado, siempre se obtiene un número mayor que la masa que realmente tiene ese núcleo; es decir, durante la formación de un núcleo se presenta una pérdida neta de masa. A manera de ejemplo, el defecto de masa en la formación de un deuterón (núcleo del hidrógeno -2) es de 0.0025 uma (1 uma =  $1.66 \times 10^{-24}$  g); la energía que se forma por la “desaparición” de esta cantidad de masa, utilizando la fórmula de Einstein  $E = mc^2$ , es de  $3.73 \times 10^{-13}$  J (Garritz y Chamizo, 1994).

Conviene señalar que la masa no se conserva en las reacciones del núcleo del átomo, pero sí la suma de la masa y energía. Esto significa que cualquier pérdida de masa da origen a la aparición de energía en una cantidad equivalente (Maron y Prutton, 1996).

### 3.2 Principio de conservación de la cantidad de movimiento

Esta ley expresa que la rapidez de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema mecánico es igual a la resultante de las fuerzas exteriores actuantes (Deméneghi, Magaña y Sanginés, 1986).

Una variante de este principio, cuando la masa del sistema es constante, es la segunda ley de Newton.

Consideremos un volumen de control  $V_c$  (Figura 3.1) y las fuerzas que aparecen en su interior cuando el medio está en equilibrio dinámico (Levi, 1980). La resultante de las fuerzas actuantes en todo el volumen de control vale

$$\underline{R} = \int_{V_c} \rho \underline{f} dV + \int_{S_c} \underline{S} \underline{n} dS \quad (3.11)$$

Si cada partícula del medio posee una velocidad  $\underline{v}$ , a cada elemento  $dV$  puede asociarse una cantidad de movimiento  $\rho \underline{v} dV$ , y al volumen total la siguiente cantidad de movimiento

$$\int_{vc} \rho \underline{v} dV$$

La rapidez de variación de esta cantidad de movimiento vale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \underline{v} dV = \int_{vc} \left[ \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} \right] dV$$

La cantidad de movimiento irá modificándose debido a la masa que entra o sale por la superficie de control  $S_c$ . El volumen que cruza un elemento por unidad de tiempo es  $\rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$ , y el flujo de masa vale  $\rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$ . La variación de este flujo con el tiempo se halla integrando sobre la superficie la masa  $\rho(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$  que cruza cada elemento  $dS$  por cada segundo, multiplicada por la velocidad local  $\underline{v}$

Por consiguiente, la variación con el tiempo de la cantidad de movimiento vale

$$\int_{vc} \left[ \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} \right] dV + \int_{S_c} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (3.12)$$

De acuerdo con el principio de la conservación de la cantidad de movimiento, las ecuaciones 3.11 y 3.12 deben ser iguales, es decir (Levi, 1980)

$$\int_{vc} \left[ \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} \right] dV + \int_{S_c} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{vc} \rho \underline{f} dV + \int_{S_c} \underline{S} \underline{n} dS \quad (3.13)$$

De acuerdo con el teorema de Gauss (ecuación 3.A.2, anexo 3.A.1):

$$\int_{S_c} \underline{S} \underline{n} dS = \int_{vc} \text{div } \underline{S} dV \quad (3.14)$$

donde (ecuación 3.A.1)

$$\text{div } \underline{S} = \frac{\partial S_i}{\partial x} + \frac{\partial S_j}{\partial y} + \frac{\partial S_k}{\partial z} \quad (3.15)$$

Considerando que la cantidad  $\rho \underline{v}$  ( $\underline{v}$ ) es una función vectorial lineal, se pueden aplicar las ecuaciones 3.A.2 y 3.A.1 del anexo 1

$$\int_{S_c} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{v_c} \text{div } \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{i}) dV$$

$$\int_{v_c} \left\{ \frac{\partial (\rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{i}))}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{j}))}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{k}))}{\partial z} \right\} dV =$$

(3.16)

Reemplazando las ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.16 en la ecuación 3.13

$$\int_{v_c} \left\{ \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} + \left[ \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial x} \right] v_x + \left[ \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial y} \right] v_y + \left[ \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial z} \right] v_z \right\} dV$$

$$+ \int_{v_c} \rho \underline{v} \text{div } \underline{v} dV = \int_{v_c} \rho \underline{f} dV + \int_{v_c} \text{div } \underline{S} dV$$

Pero, dada una función  $g$ , se cumple que

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right) v_x + \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right) v_y + \left( \frac{\partial g}{\partial z} \right) v_z$$

Por lo tanto

$$\int_{v_c} \left[ \frac{d(\rho \underline{v})}{dt} + \rho \underline{v} \text{div } \underline{v} - \rho \underline{f} - \text{div } \underline{S} \right] dV = 0$$

Esta integral tiene que anularse, independientemente del volumen de control que se elija, por lo tanto, la función integrando deber ser nula, es decir

$$\frac{d(\rho \underline{v})}{dt} + \rho \underline{v} \text{div } \underline{v} - \rho \underline{f} - \text{div } \underline{S} = 0$$

(3.17)

También

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} + \underline{v} \frac{d\rho}{dt} + \rho \underline{v} \text{div } \underline{v} - \rho \underline{f} - \text{div } \underline{S} = 0$$

Sea  $\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$  = aceleración

$$\rho \underline{a} + \underline{v} \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} \right) = \rho \underline{f} + \operatorname{div} \underline{S}$$

Tomando en cuenta la ecuación 3.8

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{f} + \operatorname{div} \underline{S} \quad (3.18)$$

Una variante de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento es el principio de la *conservación del momento de la cantidad de movimiento*, el cual establece que en un sistema material la variación con respecto al tiempo de dicho momento es igual a la resultante de los momentos de todas las fuerzas actuantes sobre el sistema. Estos momentos se toman con respecto a un mismo punto O, fijo en relación con el volumen de control (Levi, 1980).

A partir de la Figura 3.1, se obtiene:

$$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\int_{vc} \underline{r} \times \left[ \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} \right] dV + \int_{sc} \underline{r} \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_{vc} \underline{r} \times \rho \underline{f} dV + \int_{sc} \underline{r} \times (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS \quad (3.19)$$

Utilizando las ecuaciones 3.A.2 y 3.A.1 del anexo 1

$$\begin{aligned} \int_{sc} \underline{r} \times \underline{S} \underline{n} dS &= \int_{vc} \operatorname{div}(\underline{r} \times \underline{S}) dV = \int_{vc} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) [\underline{r} \times \underline{S} \hat{i}] + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) [\underline{r} \times \underline{S} \hat{j}] + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) [\underline{r} \times \underline{S} \hat{k}] \right\} dV \\ &= \int_{vc} \left\{ \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial x} \right) \times \underline{S} \hat{i} + \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} \right) \times \underline{S} \hat{j} + \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} \right) \times \underline{S} \hat{k} \right\} dV \\ &\quad + \int_{vc} \underline{r} \times \left\{ \frac{\partial(\underline{S} \hat{i})}{\partial x} + \frac{\partial(\underline{S} \hat{j})}{\partial y} + \frac{\partial(\underline{S} \hat{k})}{\partial z} \right\} \\ &= \int_{vc} [\hat{i} \times \underline{S} \hat{i} + \hat{j} \times \underline{S} \hat{j} + \hat{k} \times \underline{S} \hat{k}] dV + \int_{vc} (\underline{r} \times \operatorname{div} \underline{S}) dV \end{aligned}$$

Procediendo en forma análoga, y considerando que la cantidad  $\underline{r} \times \rho \underline{v}$  ( $\underline{v}$ ) es una función vectorial lineal, se pueden aplicar las ecuaciones 3.A.2 y 3.A.1 del anexo 3.A.1

$$\begin{aligned}
\int_{sc} \underline{r} \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS &= \int_{vc} \text{div } \underline{r} \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{\cdot}) dV = \\
\int_{vc} \left[ \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial x} \right) \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{i}) + \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} \right) \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{j}) + \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} \right) \times \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{k}) \right] dV \\
+ \int_{vc} \underline{r} \times \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) [\rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{i})] + \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) [\rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{j})] + \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) [\rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{k})] \right\} dV = \\
\int_{vc} \left[ \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial x} \right) \times \rho \underline{v} v_x + \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} \right) \times \rho \underline{v} v_y + \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} \right) \times \rho \underline{v} v_z \right] dV \\
+ \int_{vc} \underline{r} \times \left\{ \left( \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial x} \right) v_x + \left( \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial y} \right) v_y + \left( \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial z} \right) v_z + \rho \underline{v} \text{div } \underline{v} \right\} dV
\end{aligned}$$

La primera integral del segundo miembro es nula, porque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{r}}{\partial x} \times \rho \underline{v} v_x + \frac{\partial \underline{r}}{\partial y} \times \rho \underline{v} v_y + \frac{\partial \underline{r}}{\partial z} \times \rho \underline{v} v_z &= (v_x \underline{i} + v_y \underline{j} + v_z \underline{k}) \times \rho \underline{v} \\
\underline{v} \times \rho \underline{v} &= 0
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 3.19

$$\int_{vc} \underline{r} \times \left[ \frac{d(\rho \underline{v})}{dt} + \rho \underline{v} \text{div } \underline{v} - \rho \underline{f} - \text{div } \underline{S} \right] dV = \int_{vc} [i \times \underline{S}i + j \times \underline{S}j + k \times \underline{S}k] dV$$

La integral del primer miembro vale cero, por la ecuación 3.17, por lo tanto

$$\underline{i} \times \underline{S}i + \underline{j} \times \underline{S}j + \underline{k} \times \underline{S}k = 0 \quad (3.20)$$

Multipliquemos escalarmente la ecuación 3.20 por el vector  $i$

$$1 \cdot (\underline{j} \times \underline{S}j) + \underline{i} \cdot (\underline{k} \times \underline{S}k) = 0$$

Es decir

$$\begin{aligned}
\underline{S}j \cdot \underline{i} \times \underline{j} + \underline{S}k \cdot \underline{i} \times \underline{k} &= 0 \\
\underline{S}j \cdot \underline{k} &= \underline{S}k \cdot \underline{j} \quad (3.21)
\end{aligned}$$

En forma análoga, multiplicando escalarmente la ecuación 3.20 por los vectores  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente, arribamos a

$$\underline{S}\hat{k} \cdot \hat{i} = \underline{S}\hat{i} \cdot \hat{k} \quad (3.22)$$

$$\underline{S}\hat{i} \cdot \hat{j} = \underline{S}\hat{j} \cdot \hat{i} \quad (3.23)$$

En el capítulo de estado de esfuerzo habíamos hallado que el tensor esfuerzo vale

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}\hat{j} = \begin{bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}\hat{j} \cdot \hat{k} = \tau_{yx}$$

$$\underline{S}\hat{k} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{S}\hat{k} \cdot \hat{j} = \tau_{zy}$$

Sustituyendo en la ecuación 3.21:  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$

Procediendo en forma similar con las ecuaciones 3.22 y 3.23 arribamos a que  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  y  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ .

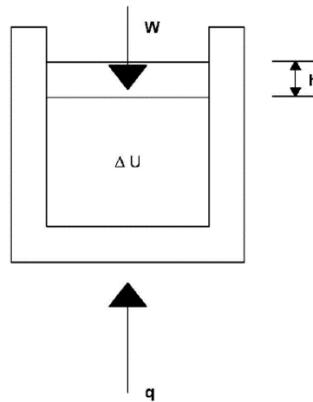
Por lo anterior, la simetría del tensor esfuerzo se debe al principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento. En consecuencia, la simetría del tensor esfuerzo, debida al equilibrio de momentos de un elemento en condiciones estáticas, es un caso particular de la ley de conservación del momento de la cantidad de movimiento.

### 3.3 Principio de conservación de la energía

La primera ley de la termodinámica establece el principio de conservación de la energía, es decir, esta ni se crea ni se destruye. En otras palabras, esta ley se formula diciendo que para una cantidad dada de una forma de energía que desaparece, otra forma de la misma aparecerá en una cantidad igual a la cantidad desaparecida. Otro enunciado de este principio es el siguiente: para que la energía se conserve en un proceso, el flujo de calor  $q$  más el de trabajo  $T$ , que atraviesan la frontera de un sistema, deben ser iguales al cambio en la energía interna o energía térmica  $\Delta U$  (Garriz y Chamizo, 1994). Consideremos el destino de cierta cantidad de calor  $q$  agregada al sistema de la Figura 3.2; por la primera ley de la termodinámica

$$q + T = \Delta U \quad (3.24)$$

$$q = \Delta U - T \quad (3.25)$$



**Figura 3.2** Sistema sometido a una cantidad de calor  $q$

El trabajo hecho sobre el contorno del sistema vale

$$T = -Wh \quad (3.26)$$

Por lo tanto

$$q = \Delta U + Wh \quad (3.27)$$

La presión sobre el sistema vale  $p = W/A$ , donde  $A =$  área de la base, y el incremento de volumen es  $\Delta V = A h$ . Sustituyendo

$$q = \Delta U + p \Delta V \quad (3.28)$$

Al segundo miembro de esta ecuación, es decir, a la suma del incremento de energía térmica y del producto de la presión por el incremento de volumen se conoce como el cambio de *entalpía*  $\Delta H$  del sistema. Así

$$\Delta H = \Delta U + p \Delta V \quad (3.29)$$

Observamos que, en un proceso a presión constante, el cambio de entalpía es igual al incremento en energía interna más cualquier trabajo de presión-volumen realizado; de aquí que a presión constante  $\Delta H$  mide el calor absorbido al pasar del estado inicial al final, con tal que sólo se efectúe trabajo debido al producto  $p \Delta V$  (Maron y Prutton, 1996).

En el caso general, la entalpía  $H$  se define como

$$H = U + p V \quad (3.30)$$

Por otra parte, apreciamos que el cambio de entalpía es igual a la cantidad del calor que entra o sale de un sistema; en la definición de entalpía se toma en cuenta que en un proceso puede haber otro destino para el calor: la realización de trabajo (Garritz y Chamizo, 1994).

La validez de la ley de conservación de la energía se ha establecido directamente por muchas experiencias cuidadosas y estrictas o indirectamente por miles de resultados experimentales que la confirman. La primera ley de la termodinámica es el enunciado más general de la ley de conservación de energía; no se conoce ninguna excepción a ella (salvo los cambios dentro del núcleo del átomo). Es una generalización de la experiencia y no es posible obtenerla por otros principios (Castellan, 1987).

Cabe señalar que, en el planteamiento de cualquier problema de mecánica de fluidos, además de imponerse una condición de equilibrio dinámico entre esfuerzos y deformaciones, hay que exigir que se respete el primer principio de la termodinámica (Levi, 1980).

Desde el punto de vista histórico, la interconvertibilidad entre calor y energía mecánica fue conocida por Carnot en 1832. Fue establecida inequívocamente y verificada experimentalmente por Joule en 1843 y 1845 (Malvern, 1969).

Como indicamos al final del inciso 3.1, en los cambios que ocurren dentro del núcleo del átomo, se puede presentar una “desaparición” de masa, que se transforma en energía según la ecuación de Einstein: ; sin embargo, conviene precisar que, aunque la masa no se conserva, sí lo hace la suma de la masa y la energía (Maron y Prutton, 1996).

### 3.4 Principio de aumento de entropía

La termodinámica es el estudio de los cambios (o transferencias) de energía que acompañan a los procesos físicos y químicos. La información termodinámica permite predecir si una reacción en particular puede llevarse a cabo en condiciones específicas; si el proceso *puede* ocurrir se dice que es *espontáneo*; cuando *no puede* ocurrir en determinadas condiciones es de tipo *no espontáneo*. La experiencia indica que en los cambios espontáneos el universo tiende hacia el estado de mayor desorden. La función de estado termodinámica entropía,  $S$ , mide el grado de desorden de un sistema. Mientras mayor sea el desorden, mayor será su entropía. La segunda ley de la termodinámica establece que la entropía del universo (no necesariamente de un sistema) aumenta durante un proceso espontáneo (Whitten *et al.*, 1992).

El cambio de entropía se define como

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T} \quad (3.30)$$

donde

$\Delta H$  = cambio en la entalpía

$T$  = temperatura absoluta

Esta ecuación dice que la entropía de un sistema crece si su entalpía también crece (se agrega calor a presión constante), pero crecerá más si la temperatura del sistema es menor (Garritz y Chamizo, 1994).

Por otra parte, cualquier proceso que se conduce de forma que, en cada etapa la fuerza impulsora es sólo infinitesimalmente mayor que la opuesta, y que puede invertirse al incrementar este un infinitésimo, se denomina proceso *reversible*; por el contrario, otro que no satisface estos requisitos se dice que es *irreversible*.

Hablando con propiedad, los procesos reversibles son imposibles en la naturaleza, ya que exigirían para su realización un tiempo infinito; en consecuencia, todos los procesos naturales deben ser irreversibles. De cualquier manera, el concepto de reversibilidad es tan valioso teórica y prácticamente, que se justifica su empleo. Además, a la reversibilidad se le puede acercar muy estrechamente (Maron y Prutton, 1996).

El incremento de entropía que tiene lugar en un ciclo irreversible es el resultado de la conversión de trabajo en calor. Al finalizar el ciclo, la sustancia que realiza el trabajo, al regresar a su estado inicial, no experimenta cambio de ninguna naturaleza.

### 3.5 Comentarios

El ingeniero civil utiliza con frecuencia los principios generales de la mecánica, pero no siempre se refiere a ellos en forma explícita.

Por ejemplo, la ecuación de continuidad en hidráulica (gasto = área por velocidad en cualquier sección), en la que la masa del agua se considera incompresible, es una manifestación del principio de conservación de masa.

Como ya lo mencionamos en el inciso 3.2, la segunda ley de Newton corresponde al principio de conservación de la cantidad de movimiento, cuando la masa del cuerpo es constante. Asimismo, la igualdad de los esfuerzos cortantes en un elemento de material en equilibrio (en una viga, en el suelo, etcétera) es un caso particular del principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento.

En hidráulica, la transformación de energía potencial en energía cinética en la ecuación de Bernoulli es un resultado del principio de conservación de energía; aun la transformación

## Principios generales de la mecánica

---

de energía en calor (denominado “pérdidas de energía”) en la ecuación de Bernoulli pertenece a la ley de conservación de energía, pues esta no se pierde, sino que se convierte en calor. Este fenómeno a su vez cae dentro del principio del aumento de entropía, pues esta disipación de energía se debe al incremento de entropía en el universo.

En ingeniería sísmica se presentan vibraciones que dan lugar a fenómenos de respuesta elástica y de disipación de energía. En la respuesta elástica la energía de deformación se transforma en energía cinética, lo cual es una consecuencia del principio de conservación de energía. La disipación de energía, que es una manifestación del principio de aumento de entropía, se considera usualmente proporcional a la velocidad del movimiento.

Por lo anterior, las leyes o principios generales de la mecánica se emplean con frecuencia en la profesión de ingeniería civil, y constituyen una parte importante de los fundamentos de esta disciplina.

# Capítulo 4

## Modelos para representar el comportamiento de los materiales

## Modelos para representar el comportamiento de los materiales

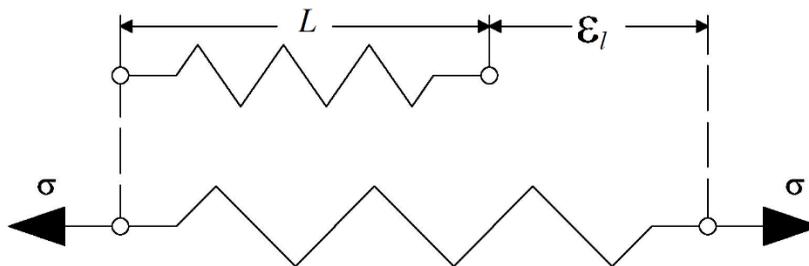
En el capítulo sobre Principios Generales de la Mecánica estudiamos leyes que se aplican a la mayoría de los materiales con los que trabaja el ingeniero. En este capítulo, trataremos de principios que se aplican a materiales específicos asociados principalmente con la relación esfuerzo-deformación unitaria de una sustancia. En general la relación esfuerzo-deformación unitaria depende del material y además de las condiciones de carga (nivel de esfuerzo, velocidad de aplicación del esfuerzo, condiciones de drenaje, etcétera). Así, algunos sólidos, bajo ciertas condiciones, se comportan siguiendo la ley de Hooke, mientras que algunos líquidos, bajo ciertas condiciones, se comportan siguiendo la ley de Newton.

El ingeniero trabaja con ciertos modelos que simplifican el comportamiento de los materiales, los cuales son útiles por su sencillez y que posteriormente se pueden modificar para adaptarlos al cálculo de casos prácticos de ingeniería.

Entre los modelos de comportamiento más conocidos se encuentran el cuerpo de Hooke, el cuerpo de Newton, el cuerpo de Kelvin, el cuerpo de Maxwell y el cuerpo de Burges, los cuales se verán en los siguientes incisos.

### 4.1 Cuerpo de Hooke

En el modelo de Hooke se considera que la deformación unitaria es linealmente proporcional al esfuerzo (Figura 4.1), es decir



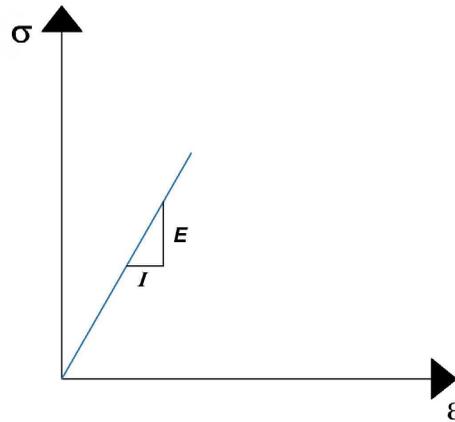
**Figura 4.1** Resorte helicoidal, como modelo analógico del cuerpo elástico (Levi, 1980)

$$\varepsilon \sim \sigma$$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \quad (4.1)$$

Donde

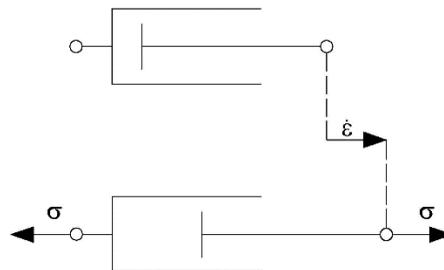
$E$  es la constante de proporcionalidad y se le conoce como módulos de elasticidad o módulo de Young. En la Figura 4.2 se muestra la variación del esfuerzo en función de la deformación unitaria.



**Figura 4.2.** Relación esfuerzo-deformación unitaria en el modelo de Hooke

## 4.2 Cuerpo de Newton

En el modelo de Newton, que se aplica a fluidos, la velocidad de la deformación unitaria es proporcional al esfuerzo (Figura 4.3), es decir



**Figura 4.3** Amortiguador como modelo analógico del cuerpo viscoso (Levi, 1980)

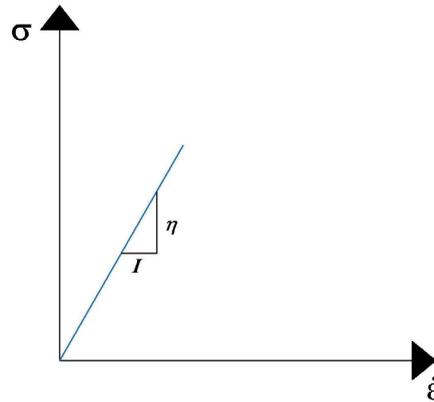
$$\dot{\epsilon} \sim \sigma$$

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma \quad (4.2)$$

Donde

$\eta$  es el coeficiente de viscosidad

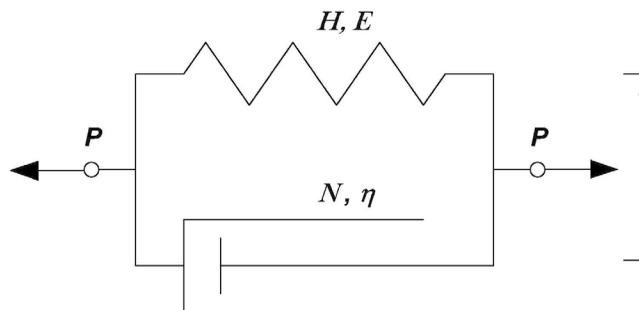
En la Figura 4.4 se exhibe la variación del esfuerzo en función de la velocidad de la deformación unitaria



**Figura 4.4.** Relación esfuerzo-velocidad de deformación unitaria en el modelo de Newton

### 4.3 Cuerpo de Kelvin Voigt

El modelo de Kelvin-Voigt consiste en un modelo de Hooke y un modelo de Newton colocados en paralelo (Figura 4.5), estableciendo el equilibrio de fuerzas



**Figura 4.5.** Modelo analógico del cuerpo de Kelvin-Voigt

$$P = P_H + P_N$$

Dividendo entre el área  $A$

$$\frac{P}{A} = \frac{P_H}{A} + \frac{P_N}{A}$$

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N \quad (4.3)$$

Como los cuerpos de Hooke y Newton están en paralelo, las deformaciones unitarias deben ser iguales

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \dot{\varepsilon}_N \quad (4.4)$$

En el resorte se cumple la ley de Hooke ecuación 4.1

$$\varepsilon_H = \frac{1}{E} \sigma_H$$

$$\sigma_H = E \varepsilon_H \quad (4.5)$$

En el amortiguador se cumple la ley de Newton, ecuación 4.2

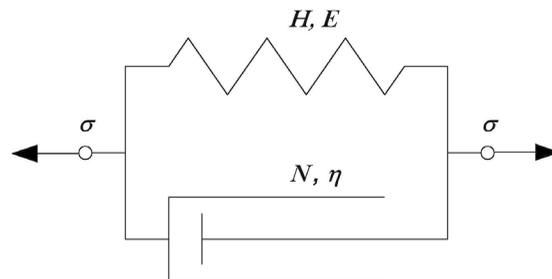
$$\dot{\varepsilon}_N = \frac{1}{\eta} \sigma_N$$

$$\sigma_N = \eta \dot{\varepsilon}_N \quad (4.6)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.5 y 4.6 en la ecuación 4.3 y tomando en cuenta la ecuación 4.4

$$\sigma = E \varepsilon_H + \eta \dot{\varepsilon}_N \quad (4.7)$$

Consideremos que el esfuerzo  $\sigma$  es constante (Figura 4.6), la ecuación 4.7 queda



**Figura 4.6.** Modelo analógico del cuerpo de Kelvin-Voigt

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\frac{E}{\eta}\right)\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\frac{d\varepsilon}{(\sigma - E\varepsilon)} = \frac{dt}{\eta}$$

Integrando

$$-\frac{\ln[\sigma - E\varepsilon]}{E} = \frac{1}{\eta}t + C$$

La condición inicial es que para  $t = 0$ ,  $\varepsilon = 0$  por lo tanto

$$-\frac{\ln(\sigma)}{E} = \frac{1}{\eta}(0) + C$$

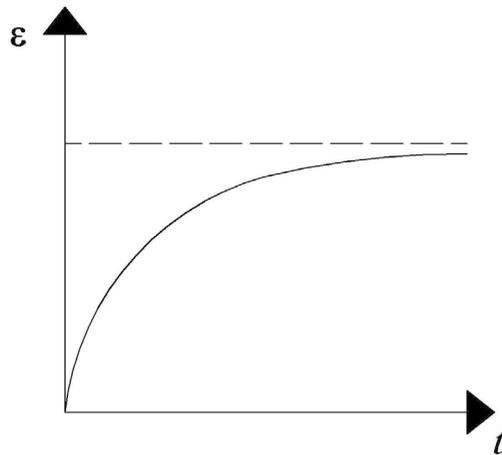
$$C = -\frac{\ln(\sigma)}{E}$$

$$-\frac{\ln[\sigma - E\varepsilon]}{E} = \frac{1}{\eta}t - \frac{\ln(\sigma)}{E}$$

Despejando  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[ 1 - e^{\left(\frac{E}{\eta}\right)t} \right]$$

En la figura 4.7 se muestra la variación de la deformación unitaria  $\varepsilon$  en función del tiempo



**Figura 4.7.** Variación con el tiempo de la deformación de un cuerpo de Kelvin, sujeto a un esfuerzo constante

## 4.4 Cuerpo de Maxwell

El modelo de Maxwell consiste en un resorte y un amortiguador colocados en serie (Figura 4.8) donde el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de deformaciones quedan



**Figura 4.8** Modelo analógico del cuerpo de Maxwell

$$\sigma = \sigma_H = \sigma_N \quad (4.9)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \dot{\varepsilon}_N \quad (4.10)$$

Por la ley de Hooke ecuación 4.1

$$\varepsilon_H = \frac{1}{E} \sigma_H$$

En el amortiguador se cumple la ley de Newton ecuación 4.2

$$\dot{\varepsilon}_N = \frac{1}{\eta} \sigma_N$$

Tomando en cuenta la ecuación 4.9 e integrando

$$\varepsilon_N = \int \left( \frac{1}{\eta} \right) \sigma dt = \frac{\sigma}{\eta} t + C$$

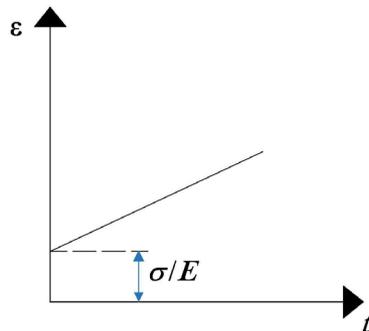
Reemplazando en la ecuación 4.10

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{\eta} \right) t + C$$

La condición inicial es que para  $t = 0$ ,  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$  por lo tanto  $C = 0$  y

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left( \frac{\sigma}{\eta} \right) t \quad (4.11)$$

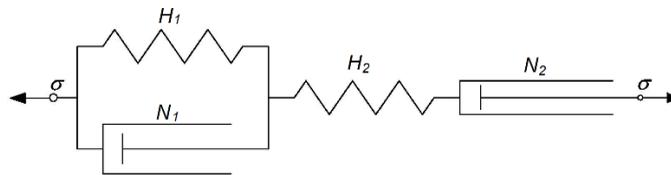
En la Figura 4.9 se muestra la variación de la deformación unitaria  $\varepsilon$  en función del tiempo.



**Figura 4.9.** Variación con el tiempo de la deformación de un cuerpo de Maxwell, sujeto a un esfuerzo constante

## 4.5 Cuerpo de Burgers

El modelo de Burgers consiste en un modelo de Kelvin-Voigt y un cuerpo de Maxwell colocados en serie (Figura 4.10).



**Figura 4.10.** Modelo analógico del cuerpo de Burgers. (Modificada de (Levi, 1980))

### Comentario

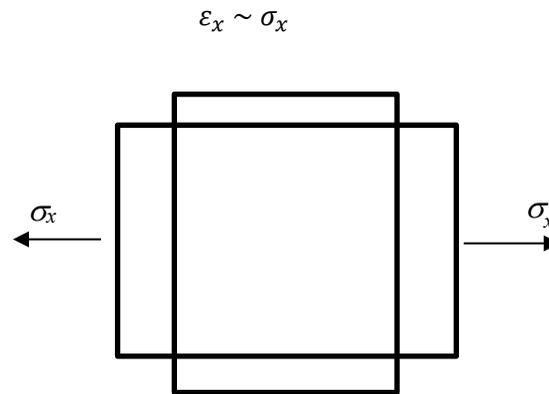
A pesar de la sencillez de los modelos indicados en los incisos anteriores, estos son de utilidad para el ingeniero porque permiten visualizar en forma esquemática el comportamiento de los materiales. Así, en mecánica de suelos se usa el cuerpo de Kelvin-Voigt, para modelar el comportamiento de las arcillas totalmente saturadas en las que el resorte representa las partículas sólidas y el amortiguador representa al agua del suelo. Por otra parte, para tomar en cuenta la disipación de energía en una vibración, se emplea el modelo de Kelvin-Voigt, siendo el resorte el que mide las fuerzas de restitución y el amortiguador el que representa las fuerzas disipativas de energía. En ocasiones, en la práctica se tienen que afinar los modelos anteriores para el cálculo de esfuerzos y deformaciones de los materiales, pero dichos modelos son la base para la resolución de los problemas de ingeniería.

# Capítulo 5

## Elasticidad lineal

Consideremos un cuerpo que se deforma al ser sometido a un cierto sistema de fuerzas. Si removemos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y este recupera totalmente su forma inicial, se dice que el cuerpo es perfectamente elástico. Sea un cuerpo que cumple esta condición; se afirma que este tiene un comportamiento elástico lineal cuando en una prueba de tensión o de compresión simple, su deformación unitaria longitudinal es linealmente proporcional al esfuerzo normal.

Consideremos un cuerpo sometido a un esfuerzo horizontal de tensión simple  $\sigma_x$  (Figura 5.1). La deformación unitaria  $\varepsilon_x$  es proporcional al esfuerzo:

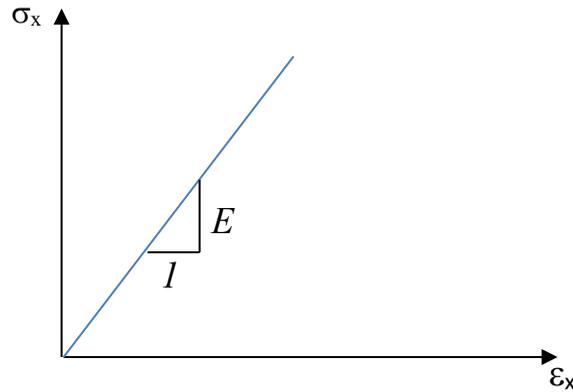


**Figura 5.1** Cuerpo sometido a un esfuerzo normal horizontal  $\sigma_x$

Introduciendo una constante de proporcionalidad, arribamos a la expresión conocida como ley de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

A  $E$  se le conoce como módulo de elasticidad, o módulo de Young. Cabe aclarar que  $E$  mide la rigidez del material: un incremento en el valor de  $E$  significa que aumenta la rigidez del material (Figura 5.2).



**Figura 5.2.** Gráfica Esfuerzo-Deformación

En la Figura 5.1 apreciamos que el cuerpo se alarga en dirección de  $x$ , pero se acorta en direcciones  $y$ ,  $y$ ,  $z$  (a este fenómeno se denomina efecto Poisson). Experimentalmente, se observa que las deformaciones unitarias  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son una fracción de  $\varepsilon_x$ , es decir

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

A  $\nu$  se le conoce como relación de Poisson. Si ahora suponemos que el cuerpo está sometido únicamente a un esfuerzo normal  $\sigma_y$ , obtenemos

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$$

En forma análoga, si el cuerpo está sujeto solamente a un esfuerzo normal  $\sigma_z$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$$

Consideremos ahora que actúan en forma simultánea los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , por el principio de superposición llegamos a las siguientes expresiones

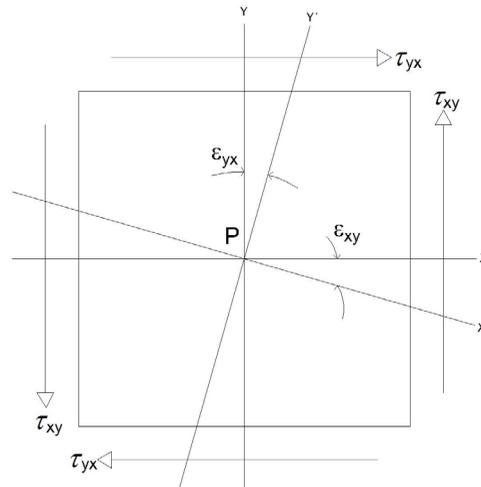
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (5.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (5.2)$$

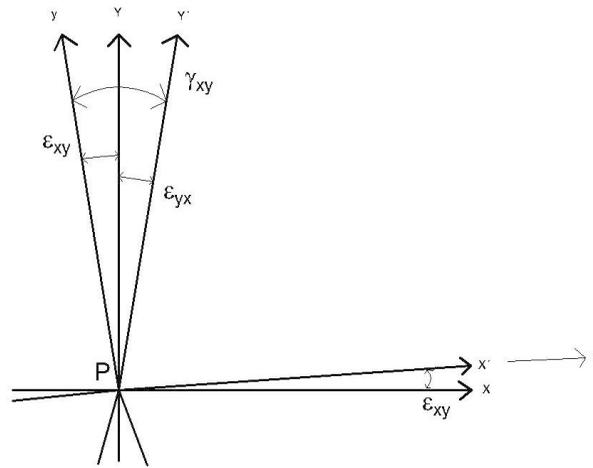
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (5.3)$$

Cabe aclarar, que el principio de superposición es válido cuando las deformaciones son pequeñas y los correspondientes pequeños desplazamientos no afectan sustancialmente la acción de las fuerzas externas. En tales casos se desprecian los pequeños cambios en las dimensiones de los cuerpos deformados y también los pequeños desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas externas, asimismo, los cálculos se realizan tomando las dimensiones iniciales y la configuración inicial del cuerpo. Los desplazamientos resultantes se obtienen por superposición en la forma de funciones lineales de fuerzas externas, como se hizo para llegar a las ecuaciones 5.1 a 5.3; sin embargo, se pueden presentar casos excepcionales en los que no es posible despreciar pequeñas deformaciones (Timoshenko y Goodier, 1970).

Supongamos al cuerpo sometido a un esfuerzo cortante puro  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  (Figura 5.3), el cual ocasiona deformaciones angulares unitarias  $\varepsilon_{xy}$  y  $\varepsilon'_{yx}$ ; el eje de las abscisas es  $x$  y el eje de las ordenadas es  $y$  (Figura 5.4). En consecuencia, observamos que si hacemos coincidir el eje  $x$

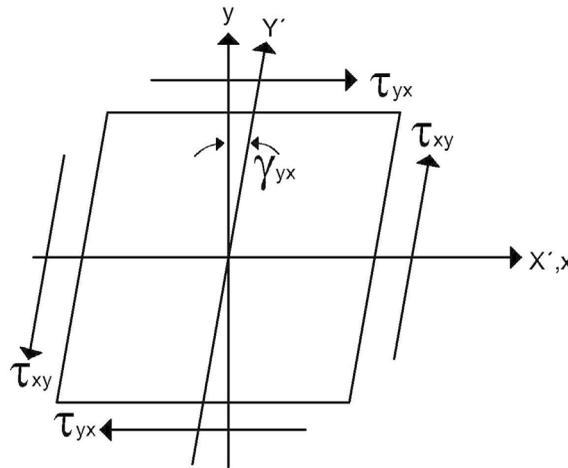


**Figura 5.3** Elemento sometido a un estado de esfuerzo cortante puro



**Figura 5.4** Cambio de sistema coordenado

Con el eje  $X'$ , el esfuerzo cortante  $\tau_{xy}$  ocasiona una deformación angular del eje  $y$  que vale (Figura 5.5).

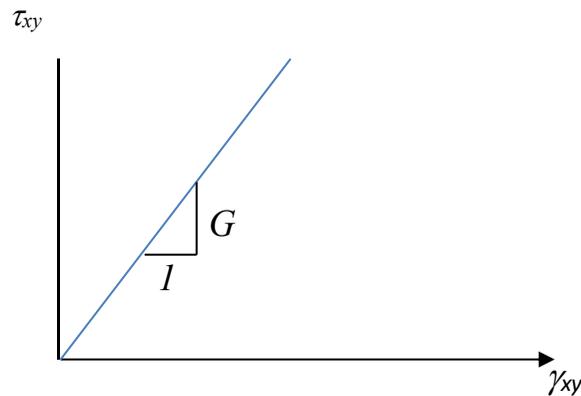


**Figura 5.5** Deformación angular ocasionada por el esfuerzo cortante

Por lo anterior, considerando nuevamente un comportamiento elástico lineal, la deformación angular  $\gamma_{xy}$  está dada por

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

Donde  $G$  es el módulo de rigidez al esfuerzo cortante del material (Figura 5.6).



**Figura 5.6.** Gráfica Esfuerzo Cortante - Deformación Angular

En forma análoga, para los esfuerzos  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$  obtenemos

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

Es decir

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (5.4)$$

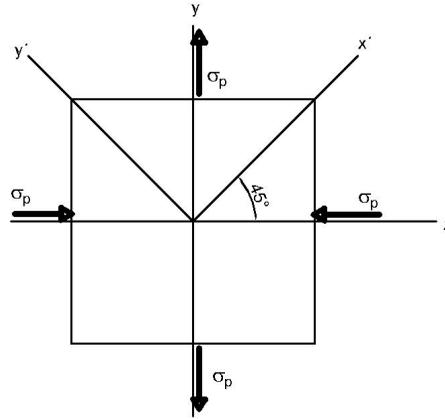
$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (5.5)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (5.6)$$

Las ecuaciones 5.1 a 5.6 se conocen como expresiones correspondientes a la ley de Hooke generalizada.

Relación entre  $E$ ,  $G$  y  $\nu$

Consideremos un estado de esfuerzo plano como el indicado en la Figura 5.7. Calculemos el estado de esfuerzo en la dirección  $x'$ .



**Figura 5.7** Elemento sometido a esfuerzos de tensión y compresión

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ \alpha &= 45^\circ, \quad \sigma = 0, \quad \tau = -\sigma_p\end{aligned}$$

La deformación unitaria angular en dirección  $x'$  la podemos hallar usando la ley de Hooke ecuación 5.4

$$\begin{aligned}\gamma'_{xy} &= \frac{1}{G} \tau'_{xy} = \frac{1}{G} (-\sigma_p) \\ \varepsilon'_{\theta xy} &= \left(\frac{1}{2}\right) \gamma'_{xy} = \left(\frac{1}{2G}\right) (-\sigma_p)\end{aligned}\quad (5.7)$$

La deformación  $\varepsilon'_{\theta xy}$  se puede obtener también en función de  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ , es decir

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \left(-\frac{\sigma_p}{E}\right) (1 + \nu) \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{\sigma_p}{E}\right) (1 + \nu)\end{aligned}$$

El estado de deformación en la dirección  $x'$  está dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon_l &= \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \varepsilon_\theta &= (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \\ \alpha &= 45^\circ, \quad \varepsilon'_{lx} = 0, \quad \varepsilon'_{\theta x} = \left(\frac{-\sigma_p}{E}\right) (1 + \nu)\end{aligned}\quad (5.8)$$

Comparando las expresiones 5.7 y 5.8:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.9)$$

### Ejemplo E-5.1

Dado el estado de esfuerzo plano mostrado en la Figura E-5.1, calcular las deformaciones unitarias lineal y angular en la dirección PA. Considerar un material elástico lineal con las siguientes propiedades

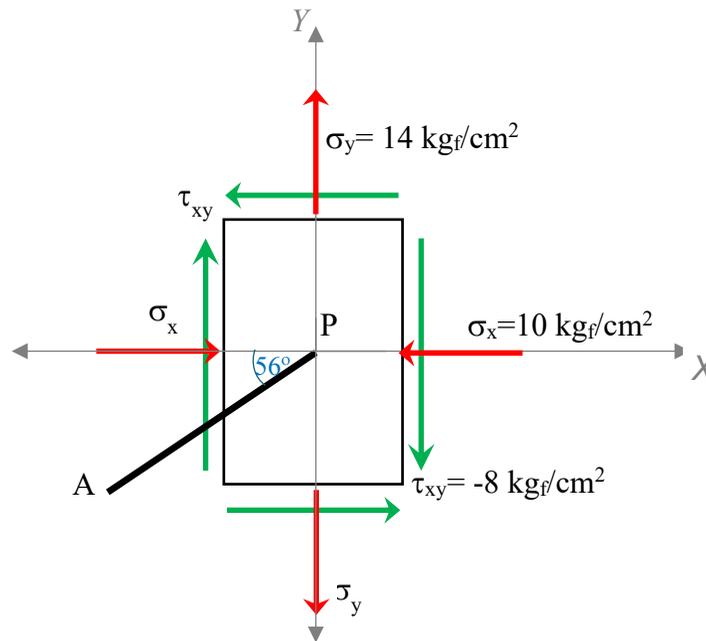


Figura E-5.1 Estado de esfuerzos plano

## Solución

Las deformaciones unitarias están dadas por las ecuaciones 5.1 a 5.3

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^6} (-10 - 0.3(14 + 0)) = -7.1 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^6} (14 - 0.3(-10 + 0)) = 8.5 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^6} (0 - 0.3(-10 + 14)) = -0.6 \cdot 10^{-6}$$

El módulo de rigidez al cortante se obtiene con la ecuación 5.9

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$G = \frac{2 \cdot 10^6}{2(1+0.3)} = 769230 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

La deformación angular está dada por la ecuación 5.4

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{769230} (-8) = -10.4 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = -5.2 \cdot 10^{-6}$$

El tensor deformación unitaria queda

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} -7.1 & -5.2 & 0 \\ -5.2 & 8.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

En la dirección PA el vector vale, siendo  $\alpha = 236.31^\circ$

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.55 \\ -0.83 \end{bmatrix}$$

Cabe aclarar que no se trata de un estado de deformación plana, pues  $\varepsilon_z \neq 0$ , pero por ser nulo el tercer elemento del vector unitario  $\underline{e}$ , se pueden emplear las fórmulas para deformación plana.

$$\varepsilon_l = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha + \gamma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\varepsilon_l = [-7.1 * \cos^2 (236.31^\circ) + 8.5 \sin^2 (236.31^\circ) - 10.4(\sin (236.31^\circ) \cos(236.31^\circ))] * 10^{-6}$$

$$\varepsilon_l = -1.10 * 10^{-6}$$

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$$

$$\varepsilon_\theta = [(-7.1 + 8.5) \sin(236.31^\circ) \cos(236.31^\circ) - 5.2(\sin^2 (236.31^\circ) - \cos^2 (236.31^\circ))] * 10^{-6}$$

$$\varepsilon_\theta = -9.2 * 10^{-6}$$

### Ejemplo E-5.2

Un cilindro de goma está comprimido dentro de un recipiente de acero (que se supone indeformable) por una fuerza  $P$  uniformemente distribuida (Figura E-5.2). Determine el esfuerzo normal entre la goma y el acero despreciando la fricción que se genera entre ambos.

Datos:  $P = 500 \text{ kg}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $\nu = 0.45$ .

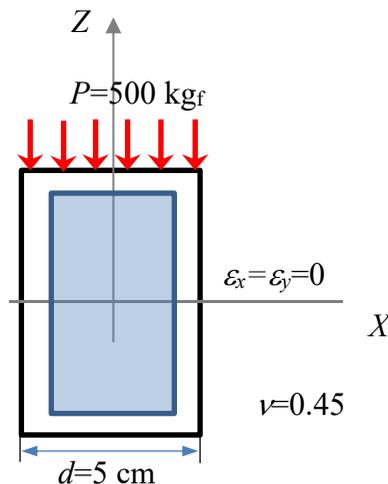


Figura E-5.2

Solución

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{500}{\pi \cdot \left[\frac{5}{2}\right]^2} = -25.46 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0; \quad \sigma_x = \sigma_y$$

$$0 = \sigma_x(1 - \nu) - \nu\sigma_z$$

$$\sigma_x = \frac{\nu\sigma_z}{(1 - \nu)}$$

Sustituyendo valores

$$\sigma_x = \frac{(0.45)(-25.46)}{(1-0.45)} = -20.83 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ (esfuerzo normal de compresión)}$$

## 5.1 Deformación unitaria volumétrica

Consideremos un cubo de lado  $l$  que experimenta deformaciones unitarias lineales  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$ . Los volúmenes inicial y final respectivamente valen

$$V = l^3$$

$$V' = (l + \varepsilon_x)(l + \varepsilon_y)(l + \varepsilon_z)$$

$$V' = l^3(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z)$$

Despreciando los productos de orden superior, en virtud de que las deformaciones unitarias son pequeñas

$$V' = l^3(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Se define deformación unitaria volumétrica de la siguiente manera

$$\varepsilon_v = \frac{V' - V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (5.10)$$

Vemos que la deformación unitaria volumétrica es igual a la suma de las deformaciones lineales.

Definamos ahora la presión media  $\sigma_m$  de la siguiente manera

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} \quad (5.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.1 a 5.3 y la ecuación 5.10 en la ecuación 5.11

$$\varepsilon_v = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m \quad (5.12)$$

Es decir

$$\varepsilon_v = \frac{1}{K} \sigma_m$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

A  $K$  se denomina módulo de rigidez volumétrica (bulk modulus)

Obtención de los esfuerzos en función de las deformaciones unitarias

En la obtención de la ley de Hooke generalizada hallamos las deformaciones unitarias en función de los esfuerzos (ecuaciones 5.1 a 5.3). Determinemos a continuación estos a partir de las deformaciones. Reordenando las ecuaciones 5.1 a 5.3

$$\frac{1}{E} \sigma_x - \left(\frac{\nu}{E}\right) \sigma_y - \left(\frac{\nu}{E}\right) \sigma_z = \varepsilon_x$$

$$-\left(\frac{\nu}{E}\right) \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y - \left(\frac{\nu}{E}\right) \sigma_z = \varepsilon_y$$

$$-\left(\frac{\nu}{E}\right) \sigma_x - \left(\frac{\nu}{E}\right) \sigma_y + \frac{1}{E} \sigma_z = \varepsilon_z$$

Despejo a  $\sigma_x$  aplicando la regla de Cramer

$$\sigma_x = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_x & -\left(\frac{\nu}{E}\right) & -\left(\frac{\nu}{E}\right) \\ \varepsilon_y & \frac{1}{E} & -\left(\frac{\nu}{E}\right) \\ \varepsilon_z & -\left(\frac{\nu}{E}\right) & \frac{1}{E} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\left(\frac{\nu}{E}\right) & -\left(\frac{\nu}{E}\right) \\ -\left(\frac{\nu}{E}\right) & \frac{1}{E} & -\left(\frac{\nu}{E}\right) \\ -\left(\frac{\nu}{E}\right) & -\left(\frac{\nu}{E}\right) & \frac{1}{E} \end{vmatrix}} =$$

$$= E \left[ \frac{\varepsilon_x \nu(1+\nu) + \varepsilon_y \nu(1+\nu) + \varepsilon_z \nu(1+\nu) + \varepsilon_x - \nu^2 \varepsilon_x - \varepsilon_x \nu - \nu^2 \varepsilon_x}{(1+\nu)(1+\nu)(1-2\nu)} \right]$$

$$= \frac{E\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x(1-\nu-2\nu^2)}{(1+\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\sigma_x = \frac{\nu E(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_x}{(1+\nu)} \quad (5.13)$$

Sea

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5.14)$$

De la ecuación 5.9

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

De la ecuación 5.10

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Sustituyendo en la ecuación 5.13

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_x$$

En forma análoga se obtienen  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ .

$$\sigma_y = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_z$$

Los esfuerzos cortantes se despejan directamente de las ecuaciones 5.4 a 5.6. Así, las fórmulas que proporcionan los esfuerzos en función de las deformaciones son

$$\sigma_x = \lambda \epsilon_v + 2G \epsilon_x \quad (5.15)$$

$$\sigma_y = \lambda \epsilon_v + 2G \epsilon_y \quad (5.16)$$

$$\sigma_z = \lambda \epsilon_v + 2G \epsilon_z \quad (5.17)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (5.18)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (5.19)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} \quad (5.20)$$

A  $\lambda$  se le conoce como constante de Lamé

### Ejemplo E-5.3

Los resultados de mediciones de una roseta de deformación a  $60^\circ$  son los siguientes.

$$\epsilon_a = 0.0002$$

$$\epsilon_b = 0.0001$$

$$\epsilon_c = -0.00015$$

El material ensayado tiene las siguientes propiedades

$$E = 180000 \text{ kg/cm}^2, \nu = 0.28$$

Determinar la magnitud y dirección de los esfuerzos principales

Solución:

El tensor deformación está dado por

El tensor deformación unitaria está dado por

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \epsilon_a & \left( \frac{\epsilon_b - \epsilon_c}{\sqrt{3}} \right) \\ \left( \frac{\epsilon_b - \epsilon_c}{\sqrt{3}} \right) & \left[ \frac{2(\epsilon_b - \epsilon_c) - \epsilon_a}{3} \right] \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores

$$\frac{\gamma_{xy}}{2} = \left( \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \right) = \left( \frac{1 + 1.5}{\sqrt{3}} \right) x 10^{-4} = 1.443 x 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \left( \frac{2(\varepsilon_b - \varepsilon_c) - \varepsilon_a}{3} \right) = \left( \frac{2(1 - 1.5) - 2}{3} \right) x 10^{-4} = -1 x 10^{-4}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1.443 \\ 1.443 & -1 \end{bmatrix} x 10^{-4}$$

Aplicando la ecuación 5.14

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \lambda = \frac{(0.28)(180000)}{(1+0.28)(1-2*0.28)}, \lambda = 89488.636 \frac{kg}{cm^2}$$

Aplicando la ecuación 5.9

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G = \frac{180000}{2(1+0.28)} \quad G = 70312.5 \frac{kg}{cm^2}$$

De la ecuación 5.17

$$\sigma_z = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_z$$

$$0 = 89488.636(2 * 10^{-4} - 1 * 10^{-4} + \varepsilon_z) + 2 * 70312.5 \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = -0.00003888$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_v = 2 * 10^{-4} + 1 * 10^{-4} - 0.3888 * 10^{-4} = 0.6111 * 10^{-4}$$

Usando las ecuaciones 5.15 y 5.16

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_x$$

$$\sigma_x = 89488.636 * 0.6111 * 10^{-4} + 2 * 70312.5 * 2 * 10^{-4} = 33.594 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_y = \lambda \varepsilon_v + 2G \varepsilon_y$$

$$\sigma_y = 89488.636 * 0.6111 * 10^{-4} + 2 * 70312.5 * (-1 * 10^{-4}) = -8.594 \frac{kg}{cm^2}$$

De la ecuación 5.18

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{xy} = 70312.5 * 0.28868 * 10^{-4} = 20.292 \frac{kg}{cm^2}$$

La magnitud y dirección de los esfuerzos principales se obtienen con las siguientes expresiones

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.67)$$

$$\sigma_1 = \frac{(33.594 - 8.594)}{2} + \sqrt{\left(\frac{33.594 + 8.594}{2}\right)^2 + (20.292)^2}$$

$$\sigma_1 = 41.77 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.68)$$

$$\sigma_2 = \frac{(33.594 - 8.594)}{2} - \sqrt{\left(\frac{33.594 + 8.594}{2}\right)^2 + (20.292)^2}$$

$$\sigma_2 = -16.77 \frac{kg}{cm^2}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x}\right)$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{20.292}{41.77 - (33.594)}\right) = 68.055^\circ$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ = 158.055^\circ$$

Rango de variación de la relación de Poisson

Consideremos el cuerpo de la Figura 5.1 sometido a un esfuerzo de tensión  $\sigma_x$ , la deformación unitaria  $\varepsilon_x$  vale

$$\varepsilon_x = \left(\frac{-\nu}{E}\right) \sigma_x$$

Suponiendo que la relación de Poisson fuera negativa entonces  $\epsilon_x$  sería positiva.

Suponiendo que la relación de Poisson fuera negativa entonces  $\epsilon_x$  sería positiva, lo que significa que al aplicar un esfuerzo de tensión horizontal  $\sigma_x$ , ocurre una expansión en dirección vertical, lo que es contradictorio con el fenómeno físico que se presenta en los materiales con que trabaja el ingeniero civil. Por lo tanto, para fines prácticos, la relación de Poisson no puede ser negativa.

Consideremos ahora un cuerpo sometido a esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , tal que  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \neq 0$  y cambia de volumen. En este caso la deformación unitaria volumétrica  $\epsilon_v = 0$ ; remplazando en la ecuación 5.12 y dado que  $\sigma_m \neq 0 \Rightarrow \nu = 0.5$

Por lo tanto, en los materiales que se deforman, pero que no cambian de volumen (los cuales se les denomina incompresibles), la relación de Poisson vale 0.5. Ejemplos de materiales incompresibles son el hule, el caucho, el agua, entre otros.

Supongamos que  $\nu > 0.5$  y que  $\sigma_x > 0$ ,  $\sigma_y > 0$  y  $\sigma_z > 0$ , entonces  $\sigma_m \geq 0$  y, de acuerdo con la ecuación 5.12  $\epsilon_v < 0$ , lo que conduce a la contradicción de que aplicando únicamente esfuerzos normales de tensión se produce un decremento de volumen del cuerpo, lo cual no ocurre con los materiales usuales con los que trabaja el ingeniero civil. En consecuencia, para fines prácticos la relación de Poisson no puede ser mayor que 0.5.

De lo expuesto en los párrafos anteriores se concluye que la relación de Poisson varía entre los siguientes límites  $0 \leq \nu \leq 0.5$

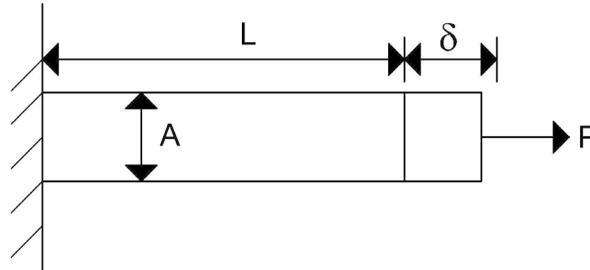
En la tabla 5.1 se exhiben valores de la relación de Poisson para diferentes materiales.

**Tabla 5.1** Valores de la relación de Poisson

Material	Rango	Promedio
Hule	0.5	0.5
Concreto	0.12-0.20	0.18
Acero	0.25-0.33	0.3
Arena	0.2-0.3	1.25
Arcilla saturada	0.38-0.48	0.45

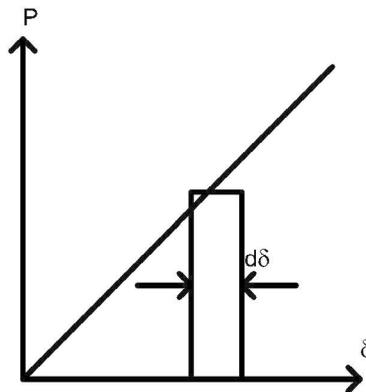
## 5.2 Energía de Deformación

Consideremos una barra prismática, a la que se aplica una carga  $P$  gradualmente, sufriendo la barra una deformación  $\delta$  (Figura 5.8).



**Figura 5.8** Barra sujeta a una fuerza axial  $P$

Aceptando que se cumple la ley de Hooke, la deformación es proporcional a la fuerza (Figura 5.9). El trabajo desarrollado, debido a un incremento de deformación, vale (Castillo, 1985).



**Figura 5.9** Trabajo de deformación

$$dU = p d\delta$$

Pero, por la ley de Hooke

$$\delta = \frac{L}{AE} P \quad (5.21)$$

$$d\delta = \frac{L}{AE} dP$$

$$U = \frac{L}{AE} \int_0^P P dP = \frac{L}{AE} \frac{P^2}{2} \quad (5.22)$$

Reemplazando la ecuación 5.21 en la 5.22

$$U = \frac{P\delta}{2} \quad (5.23)$$

Vemos que el trabajo o energía de deformación, cuando la carga se aplica gradualmente, es igual a la mitad del producto de la fuerza por la deformación de la barra.

La energía de deformación se puede poner en función de los esfuerzos (Castillo, 1985)

$$P = \sigma A$$

$$\delta = \varepsilon L$$

Sustituyendo en la ecuación 5.23

$$U = \frac{\sigma A \varepsilon L}{2}$$

Pero  $Vol = AL$

$$U = \left(\frac{\sigma \varepsilon}{2}\right) Vol \quad (5.24)$$

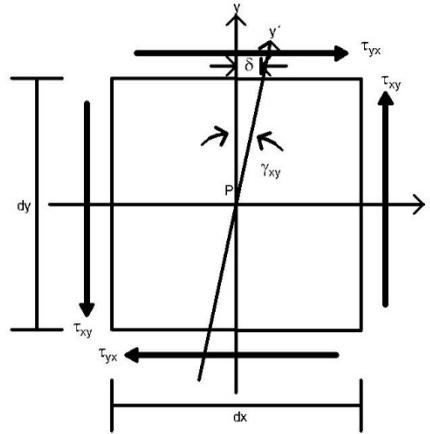
El trabajo de deformación por unidad de volumen es

$$U' = \frac{U}{Vol} = \left(\frac{\sigma \varepsilon}{2}\right) \quad (5.25)$$

Si ahora sometemos a un elemento a esfuerzos normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , aplicando la ecuación 5.25 y por el principio de superposición de causa y efectos, obtenemos el trabajo de deformación por unidad de volumen

$$U' = \left(\frac{1}{2}\right) (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) \quad (5.26)$$

Hallemos a continuación el trabajo de deformación producido por el esfuerzo cortante Figura 5.10. El Trabajo de las dos fuerzas (superior e inferior)  $2\tau_{yx} dx dz$  vale (Castillo, 1985).



**Figura 5.10** Trabajo de deformación por esfuerzo cortante

$$U = \frac{1}{2} \tau_{yx} dx dz \left( \gamma_{xy} \frac{dy}{2} \right) 2 = \frac{\tau_{yx} \gamma_{xy} dx dz dy}{2}$$

Y el trabajo por unidad de volumen

$$U' = \left( \frac{1}{2} \right) \tau_{yx} \gamma_{xy}$$

Tomando simultáneamente los esfuerzos cortantes  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{yz}$

$$U' = \left( \frac{1}{2} \right) (\tau_{yx} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (5.27)$$

Por lo anterior, el trabajo o energía de deformación por unidad de volumen, cuando las cargas se aplican gradualmente para un estado general de estado de esfuerzo, está dado por la suma de las ecuaciones 5.26 y 5.27 (Castillo, 1985)

$$U' = \left( \left( \frac{1}{2} \right) (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) + \tau_{yx} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) \quad (5.28)$$

Sustituyendo las expresiones de la ley de Hooke generalizada (ecuaciones 5.1 a 5.6)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

En la ecuación 5.28

$$U' = \left(\frac{1}{2E}\right) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{\nu}{E}\right) (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \left(\frac{1}{2G}\right) (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (5.29)$$

La teoría de fluencia de Von Mises establece que, la fluencia de un metal ocurre cuando la energía de deformación por distorsión es un estado general de esfuerzo, igual a la energía de deformación por distorsión en una prueba de tensión simple (Mendelson, 1983). El trabajo de deformación está dado por

$$U' = U'_m + U'_d$$

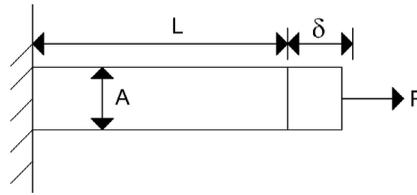
Donde

$U'_m$  = trabajo de deformación producido por el tensor isotrópico

$U'_d$  = trabajo desviador de deformación producido por el tensor

$$U'_d = U' - U'_m \quad (5.30)$$

Consideremos un estado en que únicamente se aplican esfuerzos normales  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ ,  $\sigma_z \neq 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  (figura 5.11).



**Figura 5.11** Barra sujeta a una fuerza axial  $P$

De acuerdo con la ecuación 5.29, la energía de deformación vale (Popov, 1968)

$$U' = \left(\frac{1}{2E}\right) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{\nu}{E}\right) (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \quad (5.31)$$

El trabajo de deformación producido por el tensor isotrópico está dado por

$$U'_m = \left[\frac{(1-2\nu)}{6E}\right] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2$$

Reemplazando en las ecuaciones 5.31 y 5.32 en la ecuación 5.30

$$U'_d = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right) [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)]$$

Pero

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ por lo tanto}$$

$$U'_d = \left(\frac{1}{6G}\right) [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)]$$

Es decir

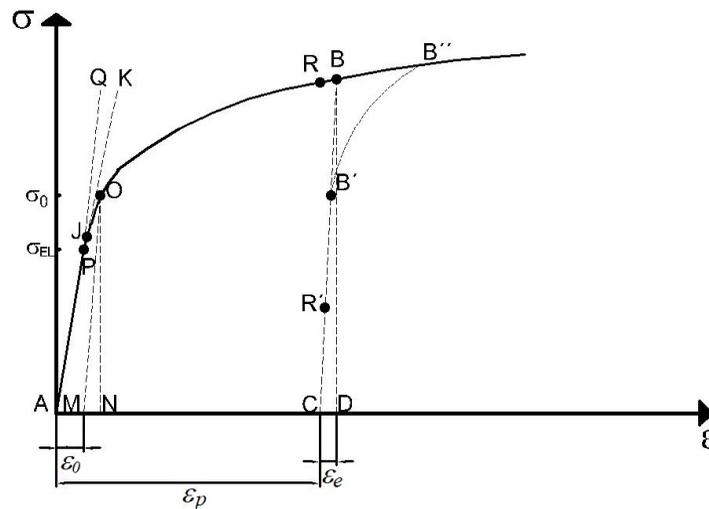
$$U'_d = \left(\frac{1}{12G}\right) [((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2)]$$

# Capítulo 6

## Teorías de fallas

## 6.1 Plasticidad

En los metales la plasticidad se manifiesta como se indica en la figura 6.1. El punto P es el límite de proporcionalidad, donde termina la línea recta, mientras el límite elástico  $\sigma_{EL}$  es el máximo esfuerzo antes del cual la deformación es recuperable. En la teoría se supone que los límites de proporcionalidad y elástico coinciden.



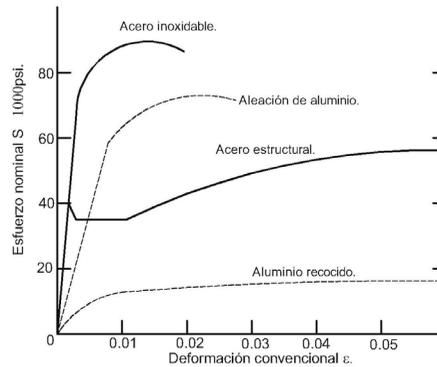
**Figura 6.1** Curva hipotética de esfuerzo-deformación a tensión (Malvern, 1969)

El esfuerzo de fluencia  $\sigma_0$  se define como se indica en la figura 6.1 (punto O); a partir del punto M [usualmente  $\epsilon_0 = 0.002$ , (0.2%)] se traza una recta paralela a la recta del tramo elástico; el punto donde esta paralela corta a la curva esfuerzo-deformación unitaria será el punto O y el esfuerzo correspondiente a este punto se denomina  $\sigma_0$  (esfuerzo de fluencia).

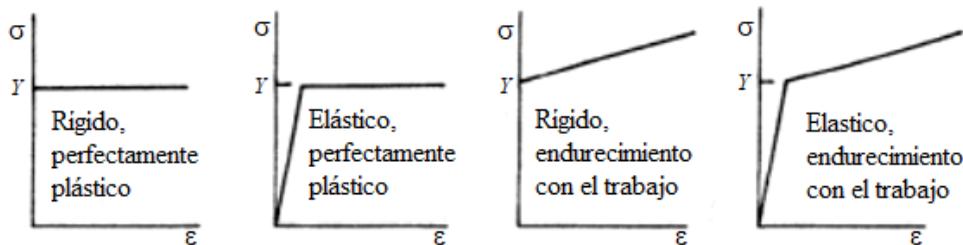
Debido a que las trayectorias de carga y descarga no siguen necesariamente la trayectoria inicial AOB, cuando ocurre una deformación plástica el esfuerzo es una función que depende de la historia de la deformación.

Por ejemplo, los puntos R y R' de la figura 6.1 tienen la misma deformación, pero diferentes esfuerzos (Malvern, 1969)

En la figura 6.2 se muestran curvas esfuerzo-deformación unitarias para distintos metales, mientras que en la figura 6.3 se exhiben curvas idealizadas que se emplean en diversas teorías (Malvern, 1969)

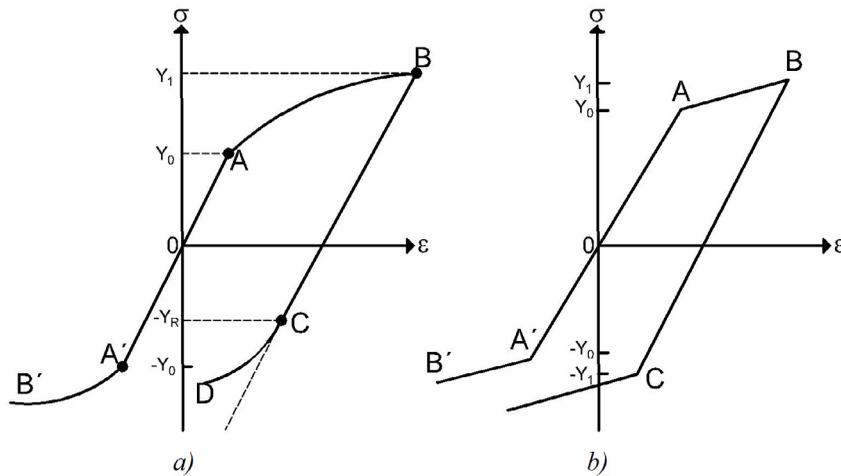


**Figura 6.2** Curvas selectas de esfuerzo-deformación a tensión (Malvern, 1969)



**Figura 6.3.** Curvas esfuerzo-deformación idealizadas (lineales por tramos)  
(Modificadas de Malvern, 1969)

Efecto Bauschinger. La figura 6.4 muestra resultados de pruebas de tensión simple y de compresión axial en un metal. Si a partir del esfuerzo  $Y_1$  se reduce el esfuerzo, el esfuerzo de fluencia en compresión,  $-Y_R$ , no es igual a  $Y_1$ , ni siquiera llega a  $Y_0$ , sino un valor bastante menor, como se indica en la figura 6.4. A este fenómeno se le conoce como efecto Bauschinger.



**Figura 6.4.** a) Ilustrando el efecto Bauschinger;

b) curva de endurecimiento lineal idealizada sin el efecto Bauschinger.

## 6.2 Criterios de Fluencia

En el inciso anterior vimos el comportamiento de los metales bajo en estado de esfuerzo uniaxial. Sin embargo, con frecuencia se presentan en los metales esfuerzos combinados, por ejemplo, se puede presentar un estado de esfuerzo biaxial  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ , o bien un estado de esfuerzo triaxial  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ ,  $\sigma_z \neq 0$ . En estas condiciones, se requiere conocer el estado de fluencia del material para estos esfuerzos combinados. Dos de los criterios cuyas estimaciones se acercan razonablemente a los datos experimentales son el de Tresca y el de Von Mises, los cuales se verán a continuación.

## 6.3 Teoría del máximo esfuerzo cortante (criterio de Tresca)

La teoría del esfuerzo cortante máximo parte de la observación de que en un material dúctil aparecen deslizamientos durante la fluencia a lo largo de planos definitivamente orientados. Por esta razón, se supone que la fluencia del material depende únicamente del máximo esfuerzo cortante que se presenta en un elemento. Por lo tanto, siempre que se alcanza cierto valor  $\tau_{cr}$  se inicia la fluencia de un elemento (Popov, 1980). Para un material dado por lo común este valor es igual al esfuerzo cortante de fluencia tensión o compresión simple  $\sigma_x = \sigma_1 \neq 0$  y  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ .

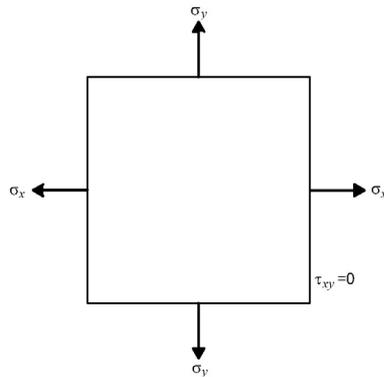
entonces

$$\tau_{max} = \tau_{cr} = \frac{\sigma_1}{2} = \sigma_o \quad (6.1)$$

Donde  $\sigma_o$  es el esfuerzo de fluencia del material, es una prueba de tensión o compresión simple.

Para aplicar el criterio del esfuerzo cortante máximo a un estado de esfuerzo triaxial, se determina dicho esfuerzo cortante y se iguala al  $\tau_{max}$  dado por la ecuación 6.1 (Popov, 1980). Sea el estado de esfuerzo plano indicado en la Figura 6.5, consideremos además que  $\tau_{xy} = 0$

Distinguimos los siguientes casos:



**Figura 6.5.** Elemento sometido a esfuerzos normales

a) Si  $\sigma_x > \sigma_y > 0$ , (Figura 6.6);  $\tau_{max} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right) = \frac{\sigma_x}{2}$

Pero  $\tau_{max} = \frac{\sigma_o}{2} \quad \therefore \sigma_x = \sigma_o$

b) Si  $\sigma_y > \sigma_x > 0$ ,  $\tau_{max} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right) = \frac{\sigma_y}{2}$

Pero  $\tau_{max} = \frac{\sigma_o}{2} \quad \therefore \sigma_y = \sigma_o$

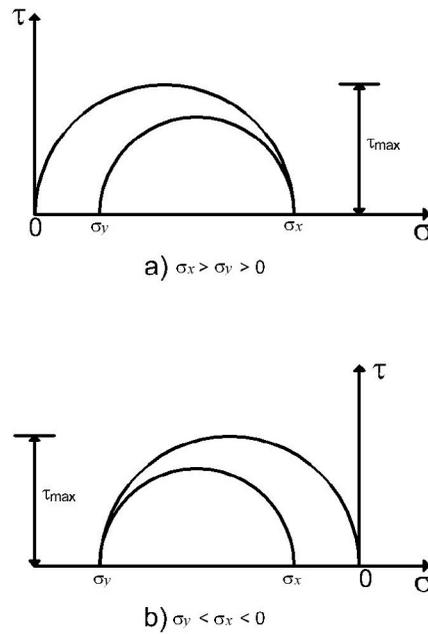


Figura 6.6. Círculos de Mohr

- c) Si  $\sigma_x < \sigma_y < 0$ , (Figura 6.6b)  $\tau_{max} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right) = -\frac{\sigma_o}{2}$   
 Pero  $\tau_{max} = \frac{\sigma_o}{2} \quad \therefore \sigma_x = -\sigma_o$
- d) Si  $\sigma_y < \sigma_x < 0$ ,  $\tau_{max} = -\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right) = \frac{\sigma_o}{2}$   
 Pero  $\tau_{max} = \frac{\sigma_o}{2} \quad \therefore \sigma_y = -\sigma_o$
- e) Si  $\sigma_x > 0$ ;  $\sigma_y < 0$ , (Figura 6.7)  $\tau_{max} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)$   
 Pero  $\sigma_x = \sigma_y + 2\tau_{max} = \sigma_y + \sigma_o$
- f) Si  $\sigma_y > 0$ ;  $\sigma_x < 0$ ,  $\tau_{max} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)$   
 Pero  $\sigma_y = \sigma_x + 2\tau_{max} = \sigma_x + \sigma_o$

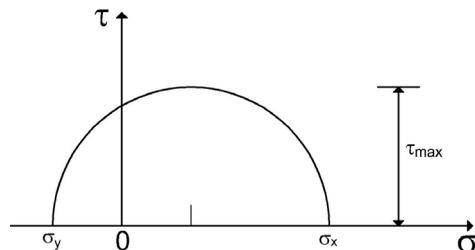


Figura 6.7. Círculo de Mohr

Si ahora graficamos los 6 casos anteriores como se indica en la Figura 6.8, obtenemos el hexágono mostrado en dicha figura. Por lo tanto, si aplicamos un estado de esfuerzo plano como el de la Figura 6.5 (con  $\tau_{xy} = 0$ ) y dicho estado cae dentro del hexágono, no se presenta fluencia del material, por el contrario, si se alcanza el perímetro del hexágono, ocurrirá la fluencia del material.

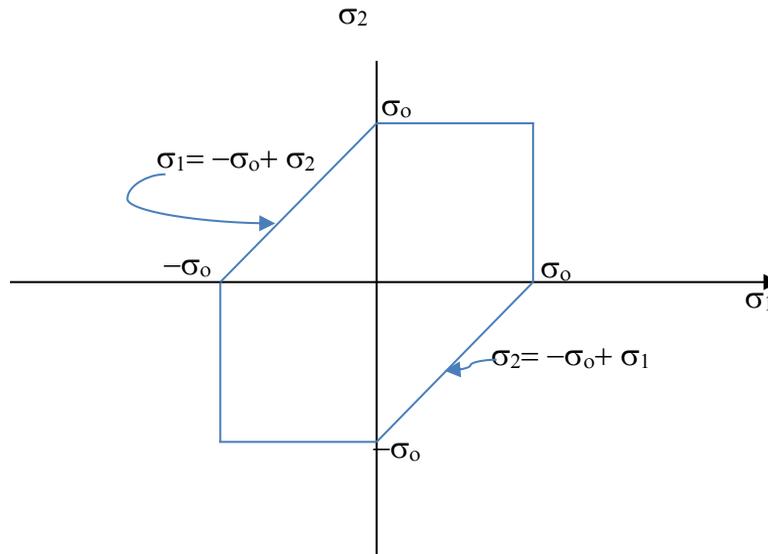


Figura 6.8. Hexágono de Tresca

## 6.4 Teoría de la energía de distorsión (criterio de Von Mises)

### 6.4.1 Energía de Deformación

Consideremos una barra prismática, a la que se aplica una carga  $P$  gradualmente, sufriendo la barra una deformación  $\delta$  (Figura 6.9).

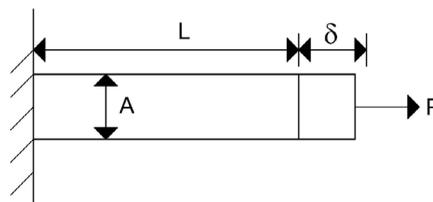
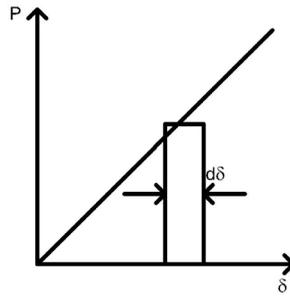


Figura 6.9. Barra sujeta a una fuerza axial  $P$

Aceptando que se cumple la ley de Hooke, la deformación es proporcional a la fuerza (Figura 6.10). El trabajo desarrollado debido a un incremento de deformación vale (Castillo, 1985)

$$dU = pd\delta \quad (6.4)$$



**Figura 6.10.** Trabajo de deformación

Pero, por la ley de Hooke

$$\delta = \frac{L}{AE} P \quad (6.4a)$$

$$d\delta = \frac{L}{AE} dP$$

$$U = \frac{L}{AE} \int_0^P P dP = \frac{L}{AE} \frac{P^2}{2} \quad (6.4b)$$

Reemplazando la ecuación 6.4a en la 6.4b

$$U = \frac{P\delta}{2}$$

Vemos que el trabajo o energía de deformación, cuando la carga se aplica gradualmente, es igual a la mitad del producto de la fuerza por la deformación de la barra.

La energía de deformación se puede poner en función de los esfuerzos (Castillo, 1985)

$$P = \sigma A \quad \text{y} \quad \delta = \epsilon L$$

Sustituyendo en la ecuación 6.4

$$U = \frac{\sigma A \epsilon L}{2}$$

Pero  $Vol = AL$

$$U = \left(\frac{\sigma \epsilon}{2}\right) Vol \quad (6.5)$$

El trabajo de deformación por unidad de volumen es

$$U' = \frac{U}{Vol} = \left(\frac{\sigma \epsilon}{2}\right) \quad (6.6)$$

Si ahora sometemos a un elemento a esfuerzos normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ , aplicando la ecuación 6.6, y por el principio de superposición de causa y efectos, obtenemos el trabajo de deformación por unidad de volumen

$$U' = \left(\frac{1}{2}\right) (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z) \quad (6.7)$$

Hallemos a continuación el trabajo de deformación producido por el esfuerzo cortante Figura 6.11. El Trabajo de las dos fuerzas (superior e inferior)  $2\tau_{yx}d_x d_z$  vale (Castillo. 1985)

$$U = \frac{1}{2} \tau_{yx} d_x d_z \left( \gamma_{xy} \frac{d_y}{2} \right) 2 = \frac{\tau_{yx} \gamma_{xy} d_x d_z d_y}{2}$$

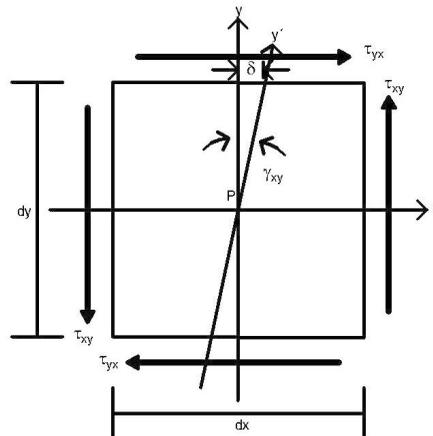


Figura 6.11. Trabajo de deformación por esfuerzo cortante

Y el trabajo por unidad de volumen

$$U' = \left(\frac{1}{2}\right) \tau_{yx} \gamma_{xy}$$

Tomando simultáneamente los esfuerzos cortantes  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{yz}$

$$U' = \left(\frac{1}{2}\right) (\tau_{yx} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (6.8)$$

Por lo anterior, el trabajo o energía de deformación por unidad de volumen, cuando las cargas se aplican gradualmente para un estado general de estado de esfuerzo, está dado por la suma de las ecuaciones 6.7 y 6.8 (Castillo, 1985)

$$U' = \left(\frac{1}{2}\right) \left( (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z) + \tau_{yx} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \right) \quad (6.9)$$

Sustituyendo las expresiones de la ley de Hooke generalizada

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

en la ecuación 6.9

$$U' = \left(\frac{1}{2E}\right) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{\nu}{E}\right) (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + \left(\frac{1}{2G}\right) (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \quad (6.10)$$

La teoría de fluencia de Von Mises establece que la fluencia de un metal ocurre cuando la energía de deformación por distorsión es un estado general de esfuerzo igual a la energía

de deformación por distorsión en una prueba de tensión simple (Mendelson, 1983). El trabajo de deformación está dado por

$$U' = U'_m + U'_d$$

Donde

$U'_m$  = trabajo de deformación producido por el tensor isotrópico

$U'_d$  = trabajo desviador de deformación producido por el tensor

$$U'_d = U' - U'_m \quad (6.11)$$

Consideremos un estado en que únicamente se aplican esfuerzos normales  $\sigma_x \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ ,  $\sigma_z \neq 0$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  (figura 6.9).

De acuerdo con la ecuación 6.10, la energía de deformación vale (Popov, 1968)

$$U' = \left(\frac{1}{2E}\right) (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \left(\frac{\nu}{E}\right) (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) \quad (6.12)$$

El trabajo de deformación producido por el tensor isotrópico está dado por

$$U'_m = \left[\frac{(1-2\nu)}{6E}\right] (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (6.13)$$

Reemplazando en las ecuaciones 6.12 y 6.13 en la ecuación 6.11

$$U'_d = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right) [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)]$$

Pero

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ por lo tanto}$$

$$U'_d = \left(\frac{1}{6G}\right) [(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] \quad (6.14)$$

Es decir

$$U'_d = \left(\frac{1}{12G}\right) [((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2)] \quad (6.15)$$

### 6.4.2 Criterio de Von Mises

Como mencionamos antes, la teoría de fluencia de Von Mises establece que la fluencia de un material ocurre cuando la energía de deformación por distorsión es un estado general de esfuerzo igual a la energía de deformación por distorsión en una prueba de tensión simple. En un ensayo de tensión simple

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_x = \sigma_o$$

Donde  $\sigma_o$  = esfuerzo de fluencia en tensión simple

Sustituyendo en la ecuación 6.15

$$U_d = \left(\frac{1}{12G}\right)(2\sigma_o^2) = \left(\frac{1}{6G}\right)\sigma_o^2 \quad (6.16)$$

El estado de fluencia se alcanza cuando se igualan las ecuaciones 6.15 y 6.16

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 = 2\sigma_o^2 \quad (6.17)$$

Una combinación de esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  tal que se satisfaga la ecuación 6.17, conduce a la fluencia del metal sometido a dichos esfuerzos.

En un estado de esfuerzo plano  $\sigma_z = 0$  Reemplazando en la ecuación 6.17

$$\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 = \sigma_o^2 \quad (6.18)$$

la cual es la ecuación de una elipse (Mendelson, 1983). Obtengamos la dirección y magnitud de los ejes de esta elipse. Reemplazando las ecuaciones de rotación de un sistema coordenado (ecuaciones A.6.3 y A.6.4 del Anexo 6.1) en la ecuación 6.18

$$\begin{aligned} (\sigma'_x \cos \theta - \sigma'_y \sin \theta)^2 - (\sigma'_x \cos \theta - \sigma'_y \sin \theta)(\sigma'_x \sin \theta + \sigma'_y \cos \theta) + (\sigma'_x \sin \theta + \sigma'_y \cos \theta)^2 &= \sigma_o^2 \\ (\sigma'_x)^2(1 - \sin \theta \cos \theta) + (\sigma'_x - \sigma'_y)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + (\sigma'_y)^2(1 + \sin \theta \cos \theta) &= \sigma_o^2 \end{aligned} \quad (6.18a)$$

Hagamos nulo el segundo término del primer miembro

$$(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{cos}^2\theta) = 0$$

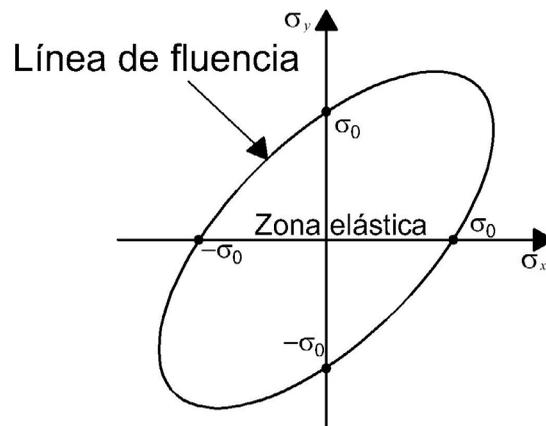
$$\tan\theta = 1, \quad \theta = 45^\circ$$

Reemplazando en la ecuación 6.18a

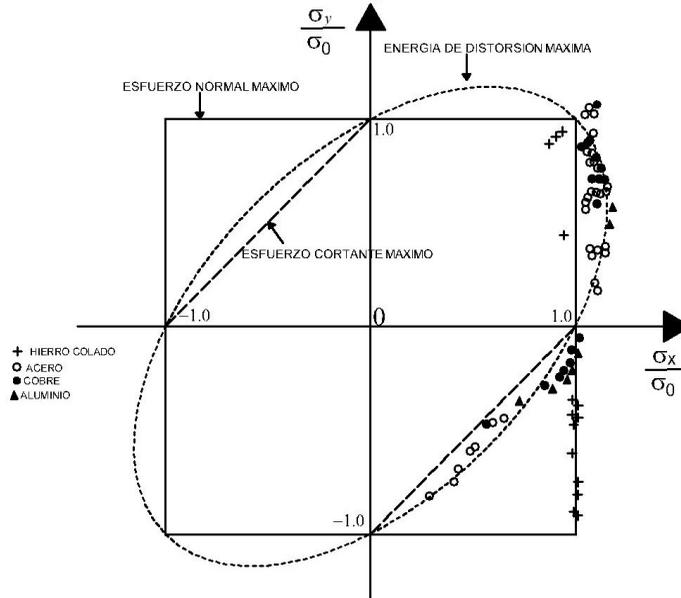
$$\left(\frac{\sigma'_x}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma'_y}{2}\right)^2 = \sigma_o^2$$

$$\frac{\sigma'_x}{2\sigma_o} + \frac{3\sigma'_y}{2\sigma_o} = 1 \quad (6.18b)$$

Por lo tanto, el eje mayor de la elipse forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $\sigma'_x$ , su semieje mayor vale  $\sqrt{2}\sigma_o$  y su semieje menor vale  $\sqrt{2/3}\sigma_o$ . En la Figura 6.12 se exhibe la elipse de Von Mises. En consecuencia, si la combinación de esfuerzos  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  cae dentro de la elipse, el material se comporta en forma elástica. Cuando esta combinación toca el perímetro de la elipse, se presenta la fluencia del material.



**Figura 6.12.** Teoría de energía de distorsión (Mendelson, 1983)

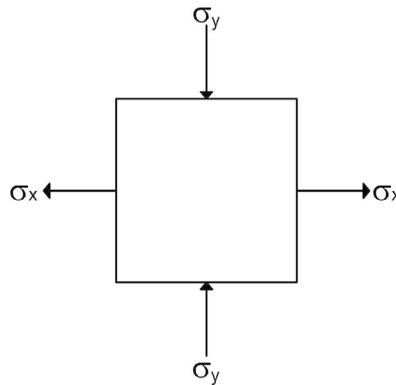


**Figura 6.13.** Comparación de los criterios de fluencia y fractura con los datos de ensayos

En la Figura 6.13 se muestran resultados de ensayos para diferentes materiales y se comparan con los criterios de Tresca y Von Mises (Popov, 1980).

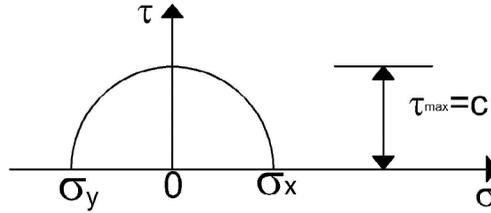
## 6.5 Teoría de las líneas de deslizamiento

Consideremos que sobre un elemento se aplican los esfuerzos indicados en la Figura 6.14.



**Figura 6.14.** Elemento sometido a esfuerzos normales

Donde  $\sigma_x = -\sigma_y = C$ , y  $\sigma_z = \tau_{xy} = 0$  (se presenta un estado de esfuerzo cortante puro en planos inclinados a  $45^\circ$  con respecto a la horizontal). El máximo esfuerzo cortante vale (Figura 6.15)



**Figura 6.15.** Círculo de Mohr

$$\tau_{max} = c = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

La energía de distorsión la hallamos reemplazando el estado de esfuerzo de la Figura 6.14 en la ecuación 6.15

$$U_d = \left(\frac{1}{12G}\right) [(2c)^2 + 2c^2] = \frac{c^2}{2G} \quad (6.19)$$

Para un estado de esfuerzo  $\sigma_x \neq 0$ ;  $\sigma_y \neq 0$ ;  $\sigma_z \neq 0$ ;  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ , la fluencia del material, según el criterio de Von Mises, se alcanza cuando se igualan las ecuaciones 6.15 y 6.19, es decir

$$\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] = c^2 \quad (6.20)$$

La ecuación 6.20 se puede poner en función de los esfuerzos principales de la siguiente forma

$$\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] = c^2 \quad (6.21)$$

Donde ahora las direcciones principales no coinciden con las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

La ecuación 6.21 representa el criterio de fluencia de Von Mises para cortante puro, en función de los esfuerzos principales.

Para el desarrollo de la teoría de las líneas de deslizamiento vamos a considerar: (1) un estado de deformación plana, (2) un material incompresible (es decir  $\nu = 0.5$ ) y (3) que dicho material exhiba un comportamiento rígido-plástico. A partir de estas condiciones obtenemos  $\varepsilon_z = 0$  y

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.22a)$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (6.22b)$$

$$\sigma_3 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \sqrt{\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.22c)$$

Sustituyendo en la ecuación 6.21

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = c^2 \quad (6.23)$$

Por otro lado, se deben satisfacer las siguientes ecuaciones de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (6.25)$$

Pongamos los esfuerzos principales en función de  $\sigma_m$  y de  $c$  (Mendelson, 1983). De las ecuaciones 6.22

$$\sigma_1 = \sigma_m + c$$

$$\sigma_2 = \sigma_m$$

$$\sigma_3 = \sigma_m - c$$

Siendo

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Designaremos por  $\varphi$  el ángulo que forma la dirección principal con el eje  $x$ ; entonces

$$\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

El esfuerzo normal en la dirección del ángulo  $\varphi$  está dado por

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cos 2\phi + \tau_{xy} \sin 2\phi$$

Para hallar la dirección del máximo esfuerzo derivamos con respecto a  $\varphi$  e igualamos a cero

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)(-\sin 2\phi) + 2\tau_{xy} \cos 2\phi = 0$$

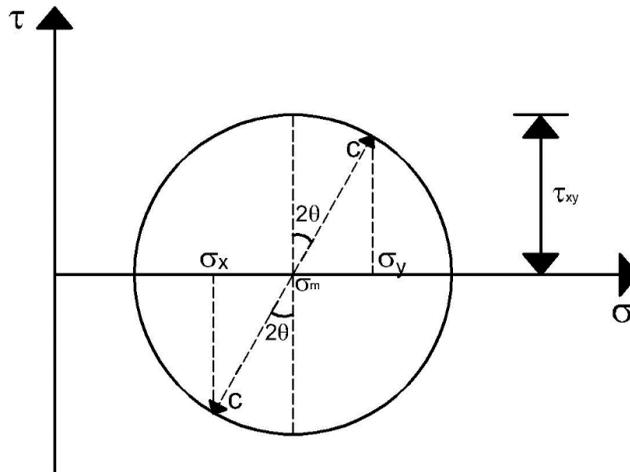
Por lo tanto  $\tan 2\phi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

Los esfuerzos cortantes máximo y mínimo valen

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Designaremos con  $\alpha$  y  $\beta$  a las direcciones de los esfuerzos cortantes máximo y mínimo. Si trazamos curvas en el plano  $xy$ , de tal forma que en cada punto de una curva la tangente coincida con una de las direcciones de máximo cortante, entonces se obtienen dos familias de curvas denominadas líneas de cortante o líneas de deslizamiento. Estas dos familias son ortogonales entre sí.

Expresemos los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en términos de  $\sigma_m$  y de  $\theta$  (Figura 6.16).



**Figura 6.16.** Círculo de Mohr

$$\sigma_x = \sigma_m - c \operatorname{sen} 2\theta \quad (6.26a)$$

$$\sigma_y = \sigma_m + c \operatorname{sen} 2\theta \quad (6.26b)$$

$$\tau_{xy} = c \operatorname{cos} 2\theta \quad (6.26c)$$

Reemplazando las ecuaciones 6.26 en las ecuaciones 6.24 y 6.25, y recordando que

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial x} - 2c \left[ \operatorname{cos} 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) + \operatorname{sen} 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial y} - 2c \left[ \operatorname{cos} 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \operatorname{sen} 2\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \right] = 0$$

Sea  $\chi = \frac{\sigma_m}{2c}$

Entonces

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} - \cos 2\theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \operatorname{sen} 2\theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.27a)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} - \operatorname{sen} 2\theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \cos 2\theta \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.27b)$$

La elección de los ejes  $x$  y  $y$  es arbitraria. Si escogemos los ejes  $x$  y  $y$  en un punto dado de tal forma que coincida con las direcciones  $\alpha$  y  $\beta$  del punto, entonces  $\theta = 0$  y las ecuaciones 6.27 quedan

$$\frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (\chi - \theta) = 0$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (\chi + \theta) = 0$$

Integrando

$$\chi - \theta = C_1, \text{ (a lo largo de la curva } \alpha) \quad (6.28a)$$

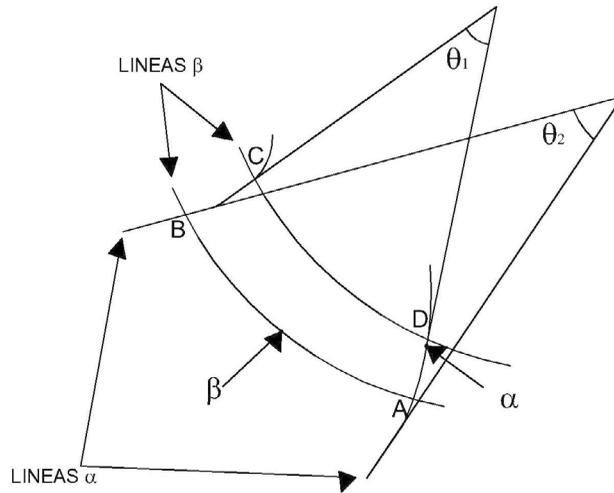
$$\chi + \theta = C_2, \text{ (a lo largo de la curva } \beta) \quad (6.28b)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes. A partir las ecuaciones 6.28 se les conoce como ecuaciones de Hencky.

### 6.5.1 Propiedades de las líneas de deslizamiento

A partir de la Figura 6.17 podemos hallar algunas propiedades de las líneas de deslizamiento. A lo largo de la línea AD (línea  $\alpha$ )

$$\chi_A - \theta_A = \chi_D - \theta_D$$



**Figura 6.17.** Demostración del primer teorema de Hencky (Mendelson, 1983)

A lo largo de la línea CD (línea  $\beta$ )

$$\chi_D + \theta_D = \chi_C + \theta_C; \chi_C + \theta_C = \chi_D + \theta_D; \chi_C - \chi_A = 2\theta_D - \theta_C - \theta_A \quad (6.29)$$

A lo largo de la línea AB  $\chi_A + \theta_A = \chi_B - \theta_B$

A lo largo de la línea BC  $\chi_B - \theta_B = \chi_C - \theta_C$

$$\chi_C - \chi_A = \theta_C - 2\theta_B + \theta_A \quad (6.30)$$

Comparando las ecuaciones 6.29 y 6.30

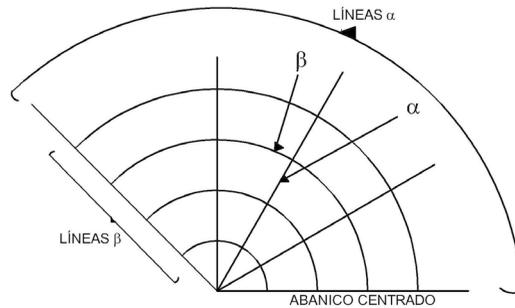
$$\theta_D - \theta_A = \theta_C - \theta_B \quad (6.31)$$

De la ecuación 6.31 se deriva la siguiente propiedad

Si una línea de deslizamiento  $\alpha$  es una recta entre dos líneas  $\beta$ , entonces todas las líneas  $\alpha$  son rectas entre estas dos líneas  $\beta$ . Además, estos segmentos de recta tienen la misma longitud.

De las ecuaciones de Hencky (ecuaciones 6.28) se obtiene otra propiedad importante. Si el estado de esfuerzo es cortante a lo largo de una curva, entonces, o bien la curva está embebida en un campo de esfuerzo cortante, o bien la curva es una línea recta de deslizamiento.

Consideremos dos familias de líneas de deslizamiento como las indicadas en la Figura 6.18.

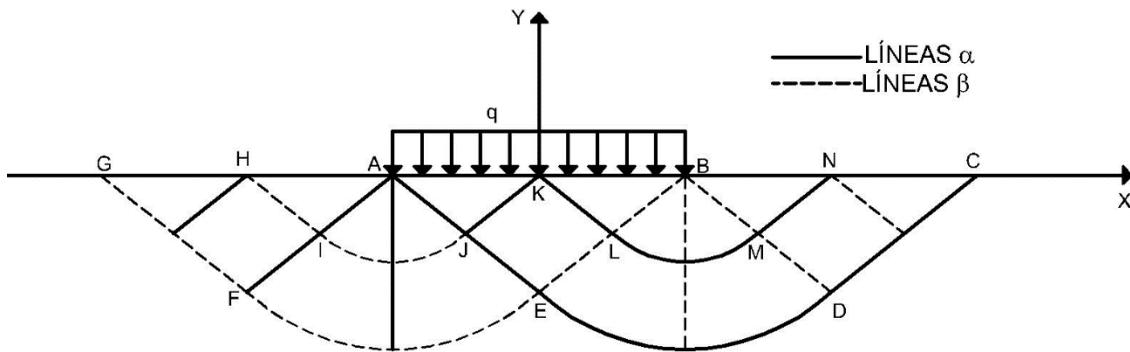


**Figura 6.18.** Familias de líneas de deslizamiento (Mendelson, 1983).

De la primera ecuación de Hencky, dado que  $\theta$  es constante a lo largo de una línea  $\alpha$ ,  $\chi$  debe ser también constante a lo largo de dicha línea. Y, de la segunda ecuación, dado que  $\theta$  varía linealmente con el ángulo a lo largo de una línea  $\beta$ ,  $X$  debe variar linealmente con el ángulo a lo largo de dicha línea. Así, el esfuerzo medio es constante en la dirección radial y varía linealmente con el ángulo (medido a partir del eje  $x$ ).

## 6.6 Capacidad de carga de un material cohesivo

Este problema fue resuelto inicialmente por Prandtl. Consideremos una carga uniforme  $q$  que se aplica sobre un medio semiinfinito (Figura 6.19); supongamos que el contacto entre la carga y el medio es perfectamente liso, es decir, no se presentan esfuerzos cortantes en dicho contacto.



**Figura 6.19.** Líneas de deslizamiento bajo el plano de punzonamiento, material saturado (Mendelson, 1983).

Consideremos sólo de condición de flujo plástico incipiente. Por condición de frontera en el segmento de recta AG.  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$

Por la condición de fluencia

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = c^2$$

Se sigue que  $\sigma_x = \pm 2c$

Intuitivamente se siente que  $\sigma_x$  debe ser de compresión y por lo tanto suponemos que  $\sigma_x = -2c$  en AG

Dado que el esfuerzo cortante es nulo, AG es una dirección principal y las líneas de deslizamiento deben quedar a  $\pm 45^\circ$ , las líneas  $\alpha$  forman  $45^\circ$  y las líneas  $\beta$  a  $135^\circ$  con AG (Figura 6.19).

Consideremos la región triangular AGF limitada por la recta AG y por las líneas de deslizamiento AF y GF. Por la propiedad (b) esta es una región de esfuerzo constante. El esfuerzo medio  $\chi$  es constante y debe satisfacer las ecuaciones de Hencky en esta área; así

$$\chi = \frac{\sigma_m}{2} = \frac{\sigma_x}{4c} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto

$$\chi = -\frac{1}{2} \quad y \quad \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{en la región AGF}$$

Observemos ahora la frontera AB:

$$\sigma_y = q \quad y \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{a lo largo de AB}$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 = c^2$$

$$y \quad \sigma_x = \sigma_y \pm 2c = -q + 2c$$

De las condiciones de frontera, en el área AEB

$$\chi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{4c} = \left[\frac{-q + 2c + (-q)}{4c}\right] = \frac{c - q}{2c} \quad y \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

AF y AE son líneas rectas de deslizamiento  $\alpha$ , y se sigue de la propiedad (a) que todas las líneas de fluencia entre estas dos son líneas rectas.

Los esfuerzos son entonces constantes a lo largo de cada línea radial de A hacia el arco FE, y varían linealmente a lo largo de cada arco -como el IJ- de los valores.

$$\chi = -\frac{1}{2} \quad \text{a lo largo de AF} \quad \chi = \frac{c - q}{2c} \quad \text{a lo largo de AE}$$

Ahora estamos en condiciones de obtener la capacidad de carga  $q$ . La línea AF es una línea  $\alpha$  y la línea HIJK es una línea  $\beta$ . De acuerdo con la segunda ecuación de Hencky

$$\chi + \theta = cte$$

A lo largo de HI

$$\chi = -\frac{1}{2} \quad y \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

A lo largo de JK

$$\chi = \frac{c - q}{2c} \quad y \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

Por lo tanto

$$-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{c-q}{2c} + \frac{3}{4}\pi$$

y

$$q = (2 + \pi)c \quad (6.32)$$

La ecuación 6.32 da la capacidad de carga última de un material puramente cohesivo.

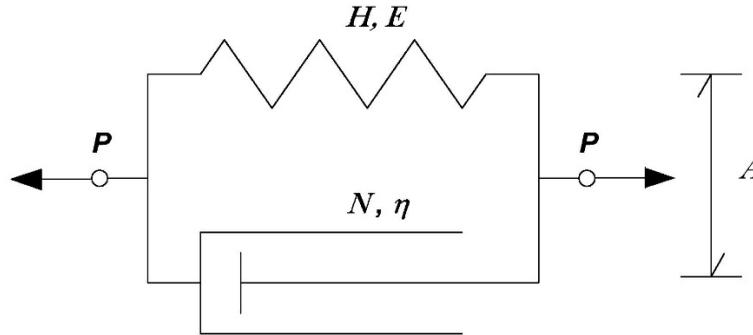
# Capítulo 7

## Viscoelasticidad. Ecuaciones de movimiento en un medio continuo

## 7.1 Comportamiento viscoelástico

El cuerpo de Kelvin-Voigt consiste en un resorte y un amortiguador colocados en paralelo (Figura 7.1). En dicho modelo, por equilibrio de fuerzas

$$P = P_H + P_N$$



**Figura 7.1** Cuerpo de Kelvin-Voigt

Dividiendo entre el área  $A$  del modelo

$$\frac{P}{A} = \frac{P_H}{A} + \frac{P_N}{A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \sigma_H = \frac{P_H}{A} \quad \sigma_N = \frac{P_N}{A}$$

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N \quad (7.1)$$

Por compatibilidad de deformaciones

$$\varepsilon = \varepsilon_H = \varepsilon_N \quad (7.2)$$

En el resorte se cumple la ley de Hooke para los sólidos

$$\varepsilon_H = \frac{\sigma_H}{E} \quad (7.3)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material.

En el amortiguador se cumple la ley de Newton para los líquidos

$$\dot{\varepsilon}_N = \frac{d\varepsilon_N}{dt} = \frac{\sigma_N}{\eta} \quad (7.4)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad del material.

Reemplazamos las expresiones anteriores en la ecuación 7.1

$$\sigma = E\varepsilon_H + \eta\dot{\varepsilon}_N = E\varepsilon_H + \eta \frac{d\varepsilon_N}{dt}$$

Es decir (ecuación 7.2)

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (7.5)$$

Apoyándose en la ecuación 7.5, Voigt consideró que las componentes de esfuerzo en un sólido son la suma de dos términos: el primero proporcional a la deformación unitaria y el segundo proporcional a la velocidad de deformación unitaria (este último para tomar en cuenta la disipación de energía). Las expresiones de la ley de Hooke generalizada quedan (Kolsky, 1963)

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_v + \lambda' \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + 2G\varepsilon_x + 2\eta \frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t} \quad (7.6a)$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_v + \lambda' \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + 2G\varepsilon_y + 2\eta \frac{\partial\varepsilon_y}{\partial t} \quad (7.6b)$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_v + \lambda' \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} + 2G\varepsilon_z + 2\eta \frac{\partial\varepsilon_z}{\partial t} \quad (7.6c)$$

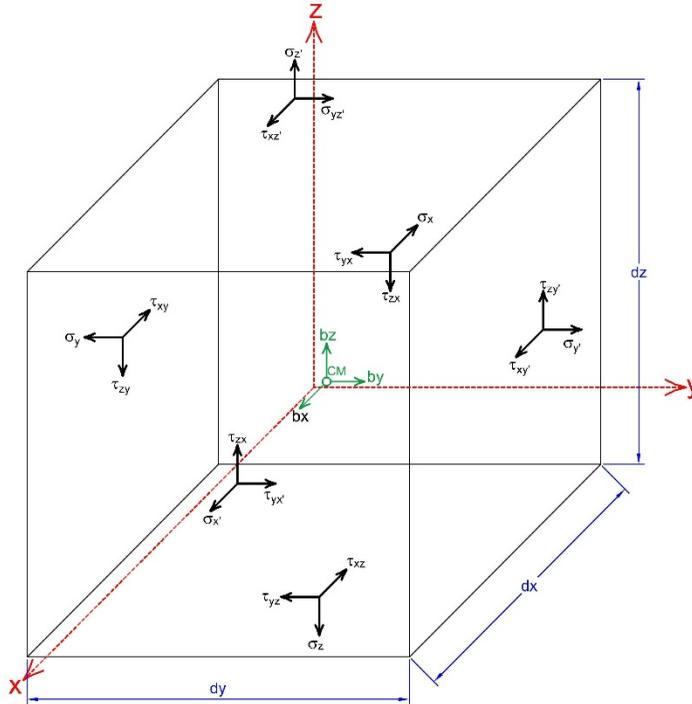
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} + \eta \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial t} \quad (7.6d)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} + \eta \frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial t} \quad (7.6e)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} + \eta \frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial t} \quad (7.6f)$$

## 7.2 Ecuaciones de equilibrio dinámico

Consideremos un elemento sometido a fuerzas de contacto y a fuerzas de cuerpo, como se muestra en la Figura 7.2.



**Figura 7.2.** Elemento sometido a fuerzas de contacto y fuerzas de cuerpo

Las fuerzas de cuerpo las tomamos en cuenta con el vector (Figura 7.2)

$$\underline{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$$

donde  $\underline{b}$  mide una fuerza por unidad de volumen, con unidades  $\left[ \frac{kN}{m^3} \right]$

Utilicemos la segunda ley de Newton en la dirección  $x$

$$\Sigma \Delta F_x = m a_x = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Sigma \Delta F_x - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Así

$$\sigma_x'(dy)(dz) + \tau_{xy}'(dx)(dz) + \tau_{xz}'(dx)(dy) - \sigma_x(dy)(dz) - \tau_{xy}(dx)(dz) - \tau_{xz}(dx)(dy) + b_x(dx)(dy)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.7)$$

Pero

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(dx)$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}(dy)$$

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}(dz)$$

Reemplazando en la ecuación 7.7

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}(dx)(dy)(dz) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}(dx)(dy)(dz) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}(dx)(dy)(dz) + b_x(dx)(dy)(dz) = \rho(dx)(dy)(dz) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.8a)$$

Procediendo en forma análoga

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (7.8b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (7.8c)$$

Hagamos

$$b_x' = b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.9a)$$

$$b_y' = b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (7.9b)$$

$$b_z' = b_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (7.9c)$$

La ecuación 7.8a queda

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x' = 0 \quad (7.9d)$$

Procediendo en forma análoga para las direcciones  $y$  y  $z$ , arribamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x' = 0 \quad (7.10a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y' = 0 \quad (7.10b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z' = 0 \quad (7.10c)$$

donde

$$b_x' = b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.11a)$$

$$b_y' = b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (7.11b)$$

$$b_z' = b_z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (7.11c)$$

Las ecuaciones 7.8 y 7.10 son válidas para un medio continuo formado por cualquier tipo de material, y se deben cumplir en todo fenómeno perteneciente a la física newtoniana.

### 7.3 Ecuaciones de movimiento en un material viscoelástico

Obtengamos a continuación las ecuaciones de movimiento para un sólido que cumple las leyes de comportamiento viscoelástico de Voigt. Habíamos encontrado (ecuación 7.8a)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Reemplazamos las ecuaciones 7.6 en la ecuación 7.8a

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \varepsilon_v + \lambda' \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + 2G \varepsilon_x + 2\eta \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \gamma_{xy} + \eta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \gamma_{xz} + \eta \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} \right)$$

Pero

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b_x = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[ G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 u \quad (7.12a)$$

Procediendo en forma similar

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - b_y = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + \left[ G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 v \quad (7.12b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b_z = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + \left[ G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right] \nabla^2 w \quad (7.12c)$$

Consideremos un movimiento en que no se presenta rotación, entonces

$$w_x = w_y = w_z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \nabla^2 u$$

Despreciando la fuerza de cuerpo, reemplazamos en la ecuación 7.12a

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + 2 \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 u \quad (7.13a)$$

En forma similar

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + 2 \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 v \quad (7.13b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + 2 \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 w \quad (7.13c)$$

Las ecuaciones 7.13 representan un movimiento consistente en ondas irrotacionales (Kolsky, 1963). Se conocen también como ondas longitudinales de dilatación o de compresión, ondas primarias u ondas P.

Consideremos ahora un movimiento en el que no se produce cambio de volumen

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Sustituimos en las ecuaciones 7.12 (despreciamos las fuerzas de cuerpo)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u \quad (7.14a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v \quad (7.14b)$$

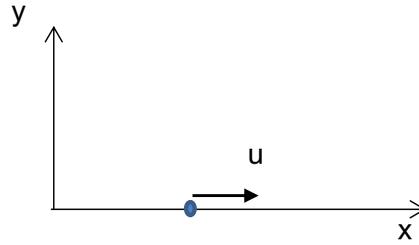
$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 w \quad (7.14c)$$

Las ecuaciones 7.14 miden el movimiento de ondas de cortante que se propagan en el medio continuo. A estas ondas se les denomina también ondas secundarias u ondas S.

## 7.4 Velocidad de las ondas sísmicas

Atendamos una onda de compresión que se transmite a lo largo del eje  $x$  (Figura 7.3). Supongamos que únicamente ocurren desplazamientos  $u$  en la dirección  $x$ . La ecuación 7.13a queda

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + 2 \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \nabla^2 u \quad (7.15)$$



**Figura 7.3.** Onda de compresión en dirección  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Despreciando el amortiguamiento, la ecuación 7.15 queda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( \frac{\lambda + 2G}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.16)$$

Por otra parte, dada una ecuación diferencial del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7.17)$$

su solución está dada por

$$u = u_a(x - ct) + u_b(x + ct) \quad (7.18)$$

Probemos que la función  $u$  dada por la ecuación 7.18 satisface la ecuación 7.17

Hagamos

$$f = x - ct, \quad g = x + ct$$

$$u_a = u_a(f) + u_b(g)$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial u_a}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} = -cu_a'$$

donde

$$u'_a = \frac{\partial u_a}{\partial f}$$

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (-c u'_a) =$$

siendo

$$u_a'' = \frac{\partial u'_a}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial u_a}{\partial f} = \frac{\partial^2 u_a}{\partial f^2}$$

Procediendo en forma análoga

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} = c^2 u_b''$$

siendo

$$u_b'' = \frac{\partial u'_b}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial u_b}{\partial f} = \frac{\partial^2 u_b}{\partial f^2}$$

Es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 u_a'' + c^2 u_b'' = c^2 (u_a'' + u_b'') \quad (7.19)$$

Por otra parte

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_a}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} = u'_a$$

donde

$$u'_a = \frac{\partial u_a}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (u'_a) = \frac{\partial u'_a}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u'_a}{\partial f} = u_a''$$

siendo

$$u_a'' = \frac{\partial u'_a}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial u_a}{\partial f} = \frac{\partial^2 u_a}{\partial f^2}$$

Procediendo en forma análoga

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} = u_b''$$

siendo

$$u_b'' = \frac{\partial u_b'}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} \frac{\partial u_b}{\partial f} = \frac{\partial^2 u_b}{\partial f^2}$$

Es decir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_a'' + u_b'' \quad (7.20)$$

Reemplazando las ecuaciones 7.19 y 7.20 en la ecuación 7.17, apreciamos que esta se satisface idénticamente (Levy, 1980).

Ejemplo E7.1 Encontrar una función que satisfaga la ecuación 7.17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Solución

Sea la función

$$u = u_a + u_b$$

donde

$$u_a = Ae^{\frac{x-ct}{a}i} = Ae^f$$

$$u_b = Be^{\frac{x+ct}{b}i} = Be^g$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial u_a}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{c}{a} i u_a'$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{c}{a} i$$

$$u_a' = \frac{\partial u_a}{\partial f} = Ae^f$$

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = -\frac{c}{a} i A e^f$$

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{c}{a} i u_a' \right) = -\frac{c}{a} i \frac{\partial u_a'}{\partial t} = -\frac{c}{a} i \frac{\partial u_a'}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{\partial u_a'}{\partial f} = -\frac{c^2}{a^2} A e^f$$

En forma análoga

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{c}{b} i u_b' \right) = -\frac{c^2}{b^2} B e^g$$

Por otra parte

$$\frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_a}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{i}{a} u_a'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{i}{a}$$

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i}{a} u_a' \right) = \frac{i}{a} \frac{\partial u_a'}{\partial x} = \frac{i}{a} \frac{\partial u_a'}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{a^2} \frac{\partial u_a'}{\partial f} = -\frac{1}{a^2} A e^f$$

De manera similar

$$\frac{\partial^2 u_b}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{i}{b} u_b' \right) = -\frac{1}{b^2} B e^g$$

Sustituimos en la ecuación 7.17

$$-\frac{c^2}{a^2} A e^f - \frac{c^2}{b^2} B e^g = c^2 \left( -\frac{1}{a^2} A e^f - \frac{1}{b^2} B e^g \right)$$

La cual se cumple idénticamente.

Veamos a continuación que la ecuación 7.18 representa dos ondas que se transmiten a lo largo de los sentidos positivo y negativo del eje  $x$ . Tomemos la función  $u_a(x - ct)$  de la ecuación 7.18. Para el tiempo  $t_1$  la distancia recorrida es  $x_1$  (Figura 7.4). La función  $u_a$  vale

$$u_a = u_a(x_1 - ct_1)$$

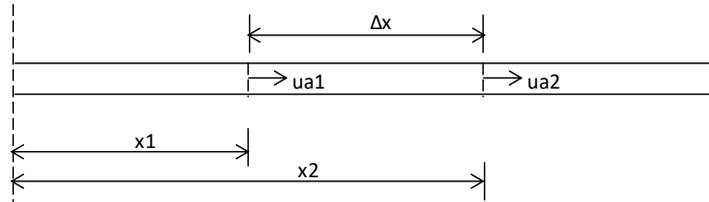
Supongamos que la velocidad de la onda es  $c$ , entonces

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \Delta x = c \Delta t$$

## Viscoelasticidad. Ecuaciones de movimiento en un medio continuo

Para  $t = t_2 = t_1 + \Delta t$ ,  $x = x_2 = x_1 + \Delta x$  (Figura 7.4), y la función  $u_a$  es

$$u_a = u_a(x_2 - ct_2) = u_a(x_1 + \Delta x - c(t_1 + \Delta t)) = u_a(x_1 + c\Delta t - ct_1 - c\Delta t) = u_a(x_1 - ct_1)$$



**Figura 7.4.** Velocidad de la onda

Puesto que la función  $u_a$  es la misma en los puntos 1 y 2, se demuestra entonces que la velocidad de la onda es la magnitud de  $c$  de la ecuación 7.18.

Comparando las ecuaciones 7.16 y 7.17

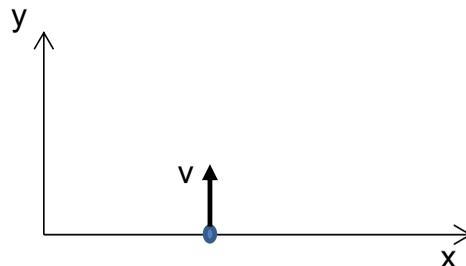
$$c^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}$$

Por lo tanto, la velocidad de una onda de compresión vale

$$c_p = V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (7.21)$$

Sea ahora una onda de cortante que se transmite en la dirección del eje  $x$  (Figura 7.5). Consideremos que únicamente ocurren desplazamientos  $v$  a lo largo de la onda. La ecuación 7.22a es

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v \quad (7.22a)$$



**Figura 7.5.** Onda de cortante en dirección  $x$

Pero

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

La ecuación 7.22a queda

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7.22b)$$

Comparamos las ecuaciones 7.22b y 7.17

$$c^2 = \frac{G}{\rho}$$

Por lo tanto, la velocidad de la onda de cortante es

$$c_s = V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7.22c)$$

## 7.5 Vibración de un estrato de suelo blando

Sea un estrato de suelo blando de espesor  $H$ , como el indicado en la Figura 7.6, y consideremos una onda de cortante que se propaga en dirección vertical, con desplazamiento de partículas sólo en la dirección del eje  $x$  (onda  $SH$ ). De acuerdo con la ecuación 7.14a, la ecuación de movimiento es

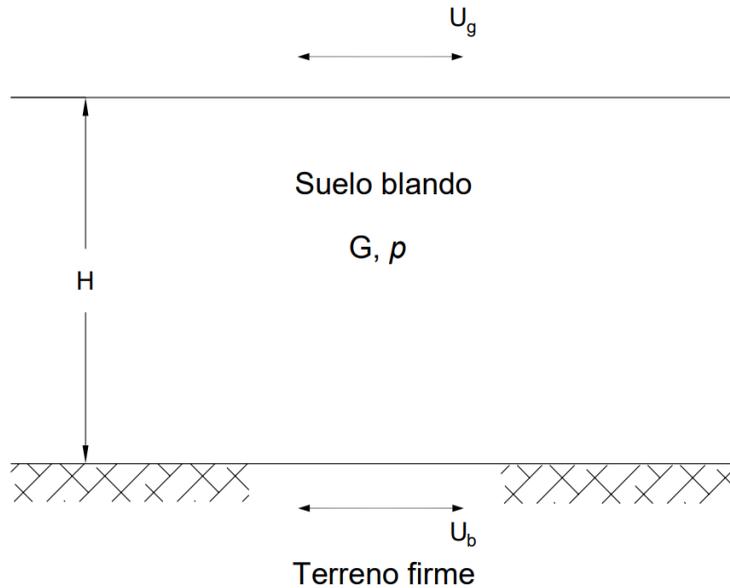
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u \quad (7.23)$$

Como el desplazamiento horizontal  $u$  sólo varía en la dirección  $z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Entonces

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$



**Figura 7.6.** Vibración de un estrato de suelo blando

Por lo tanto

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \quad (7.24)$$

Supongamos ahora que el desplazamiento de la base rígida está dado por

$$u_b = C e^{i\Omega t} = C (\cos \Omega t + i \operatorname{sen} \Omega t) \quad (7.25)$$

Lo que implica que la base tiene un movimiento armónico de frecuencia circular  $\Omega$ .

Definamos la función de amplificación  $f_a$  como el cociente del máximo valor absoluto de la aceleración en la superficie del estrato, entre el máximo valor absoluto de la aceleración de la base rígida. La solución de la ecuación 7.24 conduce a (Roesset, 1969)

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \alpha \cos^2 \beta + \operatorname{senh}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}} \quad (7.26)$$

siendo

$$\alpha = \frac{H\Omega}{\sqrt{2}c_s} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\eta\Omega}{G}\right)^2}-1}{1+\left(\frac{\eta\Omega}{G}\right)^2}} \quad (7.27)$$

$$\beta = \frac{H\Omega}{\sqrt{2}c_s} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\eta\Omega}{G}\right)^2}+1}{1+\left(\frac{\eta\Omega}{G}\right)^2}} \quad (7.28)$$

donde

$\eta$  es el amortiguamiento en el suelo blando

$\Omega$  es la frecuencia circular de la base rígida

$H$  es el espesor del suelo blando

$G$  es el módulo dinámico de rigidez al cortante, del suelo blando

La respuesta del sistema depende de la hipótesis que se haga respecto al amortiguamiento. Se puede considerar que la viscosidad es inversamente proporcional a la frecuencia, de tal modo que  $\eta\Omega/G = 2\zeta$  sea una constante. Aplicando las ecuaciones 7.26 a 7.28 se obtiene la respuesta del estrato.

Las frecuencias correspondientes a los modos naturales de vibrar del estrato se hallan con la siguiente expresión

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7.29)$$

$\omega_i$  = frecuencia circular del modo  $i$  de vibrar

Los períodos de vibración del estrato son dados por

$$T_{si} = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{4H}{2i-1} \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (7.30)$$

$i = 1, 2, \dots$

El período para el primer modo de vibrar, o modo fundamental, se obtiene con  $i = 1$

$$T_{s1} = 4H \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (7.31)$$

## Viscoelasticidad. Ecuaciones de movimiento en un medio continuo

Ejemplo E7.2. Para el estrato de arcilla blanda de la Figura E-7.1, determinar

El período natural de vibración del estrato, correspondiente el primer modo.

El factor de amplificación de la aceleración,  $f_a$ , para un espesor  $H$  del estrato de 30 m.

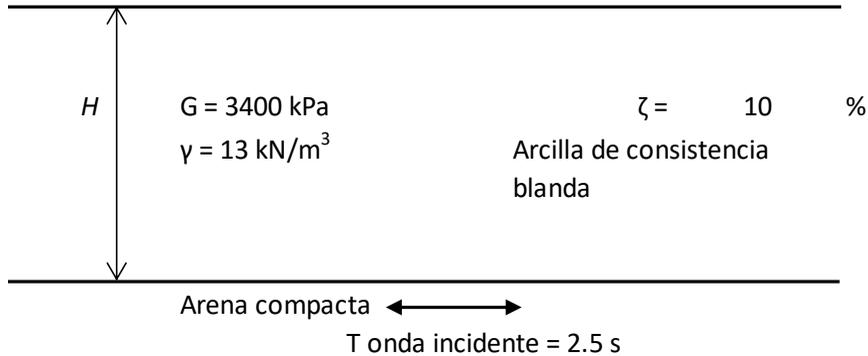


Figura E7.1. Vibración de un estrato de suelo blando

Solución

Usamos la ecuación 7.31

$$T_{s1} = 4(30) \sqrt{\frac{\left(\frac{13}{9.81}\right)}{3400}} = 2.369 \text{ s}$$

$$\frac{\eta\Omega}{G} = 2\zeta$$

$$\frac{\eta\Omega}{G} = 2(0.10) = 0.2$$

$$\left(\frac{\eta\Omega}{G}\right)^2 = 0.04$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.5} = 2.513 \text{ rad/s}$$

$$C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{3400}{\frac{13}{9.81}}} = 50.653 \text{ m/s}$$

Aplicamos las ecuaciones 7.27 y 7.28

$$\alpha = \frac{(30)(2.513)}{\sqrt{2}(50.653)} \sqrt{\frac{\sqrt{1+0.04}-1}{1+0.04}} = 0.14523$$

$$\beta = \frac{(30)(2.513)}{\sqrt{2}(50.653)} \sqrt{\frac{\sqrt{1+0.04}+1}{1+0.04}} = 1.46667$$

$$\cosh \alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = 1.01056$$

$$\cosh^2 \alpha = 1.02124$$

$$\sinh \alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = 0.14574$$

$$\sinh^2 \alpha = 0.021240$$

$$\cos^2 \beta = 0.010803$$

$$\sin^2 \beta = 0.98920$$

Reemplazamos en la ecuación 7.26

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{1.02124(0.010803) + 0.021240(0.98920)}} = 5.586$$

Ejemplo E7.3. Para el estrato de arcilla blanda de la Figura E7.2, hallar los factores de amplificación para espesores  $H$  de 20, 30, 40 y 50 m

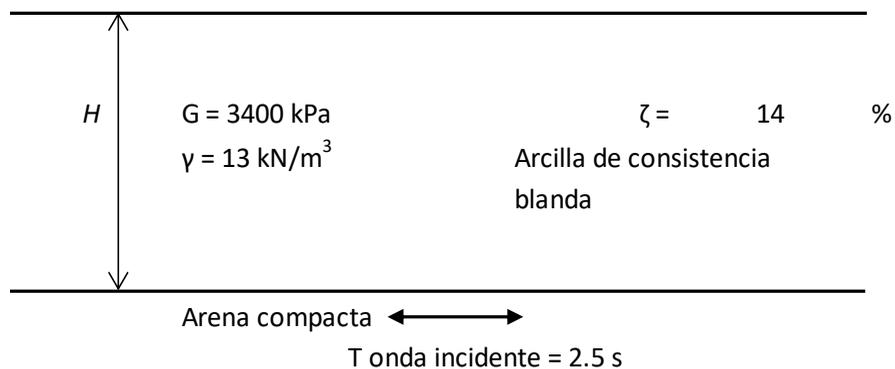
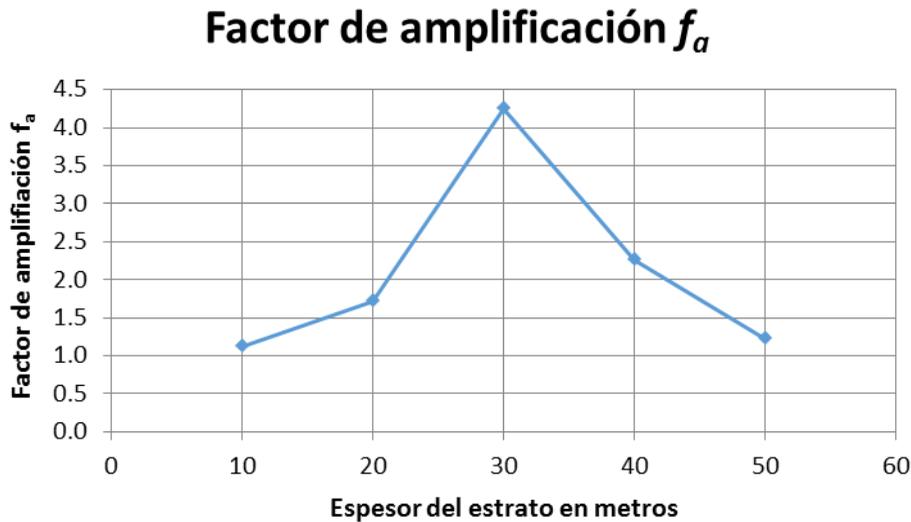


Figura E7.2. Estrato de arcilla blanda

## Solución

Usando la ecuación 7.26, en la Figura E7.3 se muestra la variación de las magnitudes del factor de amplificación de la aceleración  $f_a$  con el espesor  $H$  del suelo blando.



**Figura E7.3.** Factor de amplificación

## 7.6 Fracción del amortiguamiento crítico

En un sistema de un grado de libertad

$$\zeta = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2\sqrt{MK}} = \frac{c}{2\sqrt{MK}} \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}} = \frac{c}{2K} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{c\Omega}{2K}$$

En un medio continuo elástico

$$\zeta = \frac{\eta\Omega}{2G}$$

## 7.7 Ecuaciones de movimiento considerando el movimiento de la base $u_b$

$$u_g = u_b + u$$

En donde

$u_b$  es el desplazamiento de la base

$u$  es el desplazamiento del elemento con respecto a la base

$u_g$  es el desplazamiento general del elemento

Utilicemos la segunda ley de Newton en la dirección  $x$

$$\Sigma \Delta F_x = m a_x = m \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2}$$

Así (Figura 7.7)

$$\begin{aligned} & \sigma_x'(2dy)(2dz) + \tau_{xy}'(2dx)(2dz) + \tau_{xz}'(2dx)(2dy) - \sigma_x(2dy)(2dz) \\ & - \tau_{xy}(2dx)(2dz) - \tau_{xz}(2dx)(2dy) + b_x(2dx)(2dy)(2dz) = \rho(2dx)(2dy)(2dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7.32)$$

Pero

$$\sigma_x' = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} (2dx)$$

$$\tau_{xy}' = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} (2dy)$$

$$\tau_{xz}' = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} (2dz)$$

Reemplazando en la ecuación 7.32

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} (2dx)(2dy)(2dz) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} (2dx)(2dy)(2dz) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} (2dx)(2dy)(2dz) + b_x(2dx)(2dy)(2dz) \\ & = \rho(2dx)(2dy)(2dz) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad (7.33a)$$

Procediendo en forma análoga

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y = \rho \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} \quad (7.33b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = \rho \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} \quad (7.33c)$$

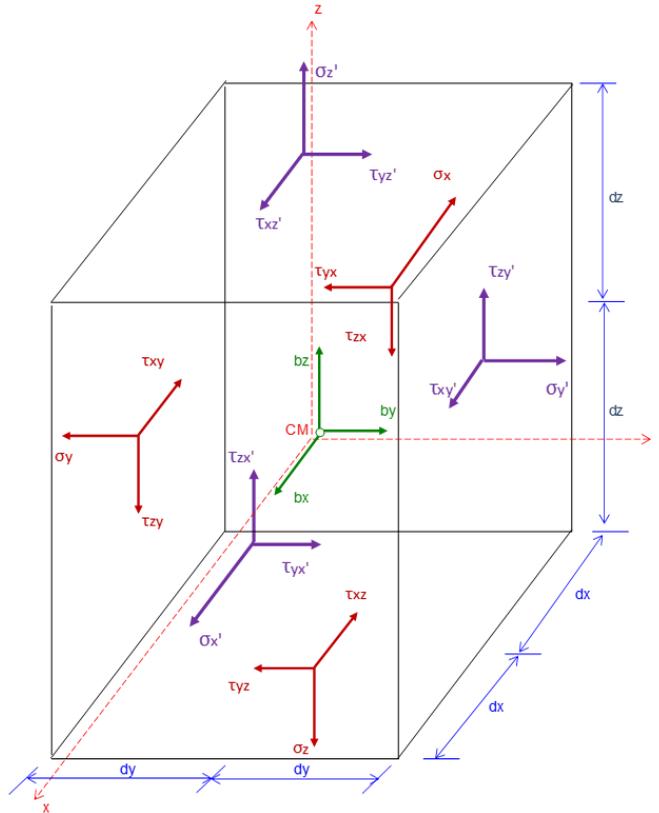


Figura 7.7. Elemento sometido a fuerzas de contacto y fuerzas de cuerpo

Hagamos

$$b_x' = b_x - \rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad (7.34a)$$

$$b_y' = b_y - \rho \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} \quad (7.34b)$$

$$b_z' = b_z - \rho \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} \quad (7.34c)$$

La ecuación 7.33a queda

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x' = 0 \quad (7.35)$$

Procediendo en forma análoga para las direcciones  $y$  y  $z$ , arribamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x' = 0 \quad (7.36a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y' = 0 \quad (7.36b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z' = 0 \quad (7.36c)$$

donde

$$b_x' = b_x - \rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad (7.37a)$$

$$b_y' = b_y - \rho \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} \quad (7.37b)$$

$$b_z' = b_z - \rho \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} \quad (7.37c)$$

Las ecuaciones 7.36 son válidas para un medio continuo formado por cualquier tipo de material, y se deben cumplir en todo fenómeno perteneciente a la física newtoniana.

Por otra parte

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_v + \lambda' \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + 2G \varepsilon_x + 2\eta \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} + \eta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} + \eta \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t}$$

Reemplazamos en la ecuación 7.33

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = \rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial x^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} - b_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} - b_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \varepsilon_v + \lambda' \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + 2G \varepsilon_x + 2\eta \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( G \gamma_{xy} + \eta \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \gamma_{xz} + \eta \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} - b_x = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u \quad (7.38a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} - b_y = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 v \quad (7.38b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} - b_z = \left[ \left( \lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 w \quad (7.38c)$$

$$\lambda \text{ y } G \text{ en } \frac{kN}{m^2}$$

$$\lambda' \text{ y } \eta \text{ en } \frac{kN \cdot s}{m^2}$$

En las ecuaciones anteriores

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Las ecuaciones 7.38 se pueden poner

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} - b_x = \left[ \left( \lambda \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t \partial x} \right) + \left( G \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t \partial x} \right) \right] + \left[ G(\nabla^2 u) + \eta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 u) \right] \quad (7.39a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} - b_y = \left[ \left( \lambda \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t \partial y} \right) + \left( G \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t \partial y} \right) \right] + \left[ G(\nabla^2 v) + \eta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 v) \right] \quad (7.39b)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_g}{\partial t^2} - b_z = \left[ \left( \lambda \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + \lambda' \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t \partial z} \right) + \left( G \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t \partial z} \right) \right] + \left[ G(\nabla^2 w) + \eta \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w) \right] \quad (7.39c)$$

## 7.8 Onda de cortante SH

Se trata de una onda de cortante que viaja en dirección vertical, con desplazamiento únicamente en la dirección  $x$ . La ecuación de movimiento es (ecuación 7.14a)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left( G + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 u$$

Como consideramos que el movimiento ocurre sólo en dirección vertical

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \end{aligned} \quad (7.40)$$

La ecuación 7.40 mide el movimiento de una onda de cortante con desplazamiento horizontal, que viaja sólo en dirección vertical.

# ANEXOS

## A. Cálculo vectorial

### A.1 Introducción

Presentamos a continuación algunas expresiones útiles de cálculo vectorial para la mecánica del medio continuo.

### A.2 Funciones vectoriales lineales

Se denominan funciones vectoriales lineales u homografías vectoriales a aquellos operadores que transforman vectores en vectores, y operan linealmente sobre ellos. Si  $\underline{H}$  es una función vectorial lineal,  $\underline{u}$  y  $\underline{v}$  dos vectores y  $m$  un escalar, entonces (Levi, 1980)

$\underline{H} \underline{u}$  es un vector

$$\underline{H}(\underline{u} + \underline{v}) = \underline{H} \underline{u} + \underline{H} \underline{v}$$

$$\underline{H}(m \underline{u}) = m \underline{H} \underline{u}$$

Si

$$\underline{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$$

Se tiene que

$$\underline{H} \underline{u} = u_x \underline{H} \hat{i} + u_y \underline{H} \hat{j} + u_z \underline{H} \hat{k}$$

Teorema de la divergencia para funciones vectoriales lineales

Se define la divergencia de una función vectorial lineal  $\underline{H}$  de la siguiente forma

$$\text{div } \underline{H} = \frac{\partial H_i}{\partial x} + \frac{\partial H_j}{\partial y} + \frac{\partial H_k}{\partial z} \quad (\text{A.1})$$

Con las definiciones anteriores, el teorema de Gauss queda (Levi, 1980)

$$\int_{v_c} \text{div } \underline{H} \, dV = \int_{s_c} \underline{H} \underline{n} \, dS \quad (\text{A.2})$$

Demostremos a continuación la ecuación A.2. El teorema de Gauss para vectores establece que

$$\int_{vc} \operatorname{div} \underline{u} dV = \int_{sc} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS \quad (\text{A.3})$$

Aplicando esta ecuación a los vectores  $u_x \hat{i}$ ,  $u_y \hat{j}$  y  $u_z \hat{k}$ , respectivamente, obtenemos

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dV = \int_{sc} u_x (\hat{i} \cdot \underline{n}) dS$$

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dV = \int_{sc} u_y (\hat{j} \cdot \underline{n}) dS$$

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dV = \int_{sc} u_z (\hat{k} \cdot \underline{n}) dS$$

Multiplicando las igualdades anteriores por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente, y sumándolas

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} \right) dV = \int_{sc} \underline{u} (\hat{i} \cdot \underline{n}) dS$$

Aplicando la ecuación A.3 a los vectores  $v_x \hat{j}$ ,  $v_y \hat{j}$  y  $v_z \hat{j}$ , y después a los vectores  $w_x \hat{k}$ ,  $w_y \hat{k}$  y  $w_z \hat{k}$ , obtenemos

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV = \int_{sc} v (\hat{i} \cdot \underline{n}) dS$$

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_{sc} v (\hat{j} \cdot \underline{n}) dS \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{vc} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = \int_{sc} w (\hat{k} \cdot \underline{n}) dS$$

Además

$$\underline{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k} = (\hat{i} \cdot \underline{n}) \hat{i} + (\hat{j} \cdot \underline{n}) \hat{j} + (\hat{k} \cdot \underline{n}) \hat{k}$$

$$\underline{H} \underline{n} = (\hat{i} \cdot \underline{n}) \underline{H} \hat{i} + (\hat{j} \cdot \underline{n}) \underline{H} \hat{j} + (\hat{k} \cdot \underline{n}) \underline{H} \hat{k}$$

Sean

$$\underline{u} = H\hat{i}$$

$$\underline{v} = H\hat{j}$$

$$\underline{w} = H\hat{k}$$

Reemplazando estas expresiones en el sistema de ecuaciones A.4 y sumando miembro a miembro

$$\left[ \int_{vc} \left( \frac{\partial H_i}{\partial x} \right) + \int_{vc} \left( \frac{\partial H_j}{\partial y} \right) + \int_{vc} \left( \frac{\partial H_k}{\partial z} \right) \right] dV = \int_{sc} H \underline{n} dS$$

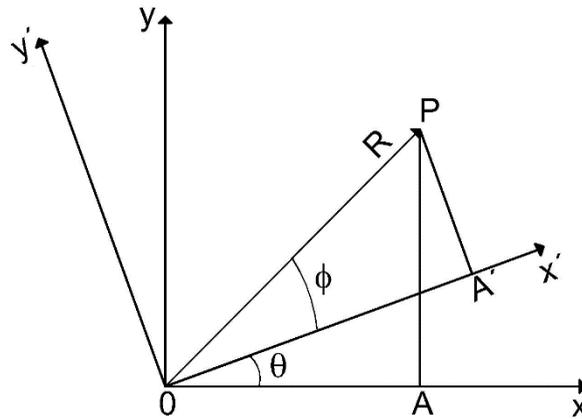
Considerando la ecuación 3.A.1 arribamos a

$$\int_{vc} \text{div } H dV = \int_{sc} H \underline{n} dS$$

que es justamente la ecuación A.2 (Levi, 1980).

## B. Rotación de un sistema coordenado en el plano

Consideremos que el sistema de coordenadas  $xy$  de la Figura B.1 gira un ángulo  $\theta$ , dando lugar a un nuevo sistema de coordenada  $x'y'$ . Obtengamos las coordenadas  $x$  y  $y$  en función de las coordenadas  $x'$  y  $y'$  de la Figura B.1.



**Figura B.1.** Sistema de coordenadas  $xy$

$$x = OA = R \cos(\theta + \phi) \quad (B.1)$$

$$y = AP = R \sin(\theta + \phi) \quad (B.2)$$

$$x' = OA' = R \cos \phi$$

$$y' = A'P = R \sin \phi$$

Sustituyendo en la ecuación B.1

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad (B.3)$$

Sustituyendo en la ecuación B.2

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad (B.4)$$

## C. Programa de cómputo para calcular esfuerzos, deformaciones y elasticidad lineal

En esta sección se presenta un código en lenguaje FORTRAN para resolver problemas de estados de esfuerzo-deformación, incluyendo elasticidad lineal. Para compilarlo, se debe considerar que está escrito en formato fijo (Fix Format), lo cual debe respetar las reglas para códigos del 77 (con extensión .FOR, .F o .F77).

### C.1 Código

Columnas		
1-5	6	7-72
C		Realizado por los profesores:
C		Armando hermosillo arteaga
C		Héctor sanginés garcía
C		Febrero de 2024
C		Asignatura: fundamentos de mecánica del medio continuo
C		Programa para calcular esfuerzos/deformaciones a partir de un
C		Tensor tridimensional
C		Variables:
C		Sx=sigma x
C		Sy=sigma y
C		Sz=sigma z
C		Taoxy= esfuerzo cortante xy
C		Taoxz= esfuerzo cortante xz
C		Taoyz= esfuerzo cortante yz
C		S1= esfuerzo principal 1
C		S2= esfuerzo principal 2
C		S3= esfuerzo principal 3
C		Sn : esfuerzo normal al plano cuya normal es n
C		Tn : esfuerzo cortante en el plano cuya normal es n
C		A=alpha
C		B=beta
C		G=gama

C	E: matriz , tensor de esfuerzos
C	Sn: esfuerzos normales de esfuerzos actuando en la direccion n
C	Nvec:vector de cosenos directores
	Program tensor
	Integer np
	Real pi
	Parameter(np=10,pi=3.14159265359)
	Real sx,sy,sz,taoxy,taoxz,taoyz,s1,s2,s3
	Real i1,i2,i3
	Real nvec(np),nmag,vec(np),vec2(np)
	Real ratio,d(np),v(np,np),r(np)
	Real e(np,np),sn(np,np),e2(np,np)
	Real c(np,np)
	Character *13 texto1,texto2
	Real emod,nu,gmod,lam
	Integer norden(3)
	Character *10 unid
	Integer flag
	Open(1,file="datos.Dat",status='old')
	Open(2,file="results.Dat",status='unknown')
	Read(1,*)
	Read(1,*) ncaso
	Read(1,*)
	Read(1,*) unid
	Flag=0
	If(ncaso.Eq.1) Then
	Texto1='esfuerzos'
	Texto2='deformaciones'
	Else
	Texto2='esfuerzos'
	Texto1='deformaciones'
	Endif
	Read(1,*)

		Do i=1,3
		Read(1,*) (e(i,j),j=1,3)
		Enddo
C		Impresion del tensor de esfuerzos
		Write(2,*) 'resolviendo para el tensor 'texto1
		If(ncaso.Eq.1) Then
		Write(2,*) "unidades:",unid
		Endif
		Do i=1,3
		Write(2,101) (e(i,j),j=1,3)
		Enddo
		Write(2,*) 'vector unitario'
		Read(1,*)
		Read(1,*) vec(1),vec(2),vec(3)
		Read(1,*)
		Read(1,*) vec2(1),vec2(2),vec2(3)
		Nmag=(vec(1)**2.+Vec(2)**2.+Vec(3)**2.)**0.5
		Nvec(1)=vec(1)/nmag
		Nvec(2)=vec(2)/nmag
		Nvec(3)=vec(3)/nmag
		If(ncaso.Eq.1) Then
		Write(2,*) 'vector normal al plano n'
		Else
		Write(2,*) 'vector dirección e'
		Endif
		Write(2,(3(f10.6,A3))) nvec(1),i+',nvec(2),j+',nvec(3),k'
C		Multiplicacion del tensor por el vector nvec
C		Obtención de deformaciones o esfuerzos en la dirección
C		Del vector normal o dirección
		Read(1,*)
		Read(1,*) emod,nu
		Gmod=emod/(2.*(1.+Nu))
1	1	Continue

	$S_x=e(1,1)$
	$T_{aoxy}=e(1,2)$
	$T_{aoxz}=e(1,3)$
	$S_y=e(2,2)$
	$T_{aoyz}=e(2,3)$
	$S_z=e(3,3)$
	$C(1,1)=nvec(1)$
	$C(2,1)=nvec(2)$
	$C(3,1)=nvec(3)$
	Call mulmat(e,3,3,c,1,sn)
	If(ncaso.Eq.1) Then
	Write(2,*) 'vector esfuerzo 'unid,
1	' En la direccion normal al plano n'
	Else
	Write(2,*) 'vector deformación en la direccion de e'
	Endif
	Do i=1,3
	Write(2,*) (sn(i,j),j=1,1)
	Enddo
	$S=(sn(1,1)**2.+Sn(2,1)**2.+Sn(3,1)**2.)**0.5$
	$Sigman=sn(1,1)*nvec(1)+sn(2,1)*nvec(2)+sn(3,1)*nvec(3)$
	$Taon=(s**2.0-Sigman**2.0)**0.5$
	If(ncaso.Eq.1) Then
	Write(2,*) 'los esfuerzos normal y cortante
&	Actuando en el plano cuya normal es n :
	Write(2,*) 'magnitud del vector esfuerzo s=',s,unid
	Write(2,*) 'sigma n=',sigman,unid
	Write(2,*) 'tao n=',taon,unid
	Else
	Write(2,*) 'las deformaciones lineal y angular
&	Actuando en la dirección e:
	Write(2,*) 'def=',s
	Write(2,*) 'def normal=',sigman

	Write(2,*) 'etheta=',taon,; def angular=',2.*Taon
	Endif
C	Calculo de los esfuerzos/deformaciones principales
	Write(2,*)
	Write(2,*) 'polinomio caracteristico'
	I1=sx+sy+sz
	I2=sx*sy+sx*sz+sy*sz-taoxy**2.0-Taoxz**2.0-Taoyz**2.0
	I3=sx*(sy*sz-taoyz*taoyz)-taoxy*(taoxy*sz-taoxz*taoyz)+
&	Taoxz*(taoxy*taoyz-sy*taoxz)
C	Write(2,*) 'polinomio:'
	Write(2,100) '-s^3+',i1,' s^2 +',-i2,' s +',i3
C	Calculo de las raices (esfuerzos principales)
C	Calculo de los esfuerzos principales y sus direcciones
C	Llamada a subrutina que calcula los valores y
C	Vectores caracteristicos de la matriz e
C	Subrutina programada con el método de jacobi
	Call jacobi(e,3,np,d,v,nrot)
C	Write(2,*) 'eigenvalores ('texto1,' principales):'
C	Do j=1,3
C	Write(2,(1x,5f12.6)) D(j)
C	Enddo
C	Write(2,(/1x,a)) 'eigenvectores (cosenos directores):'
C	Do j=1,3
C	Write(2,(1x,t5,a,i3)) 'numero',j
C	Write(2,(1x,5f12.6)) (V(k,j),k=1,3)
C	Enddo
	!Ordenamiento de esfuerzos/deformaciones principales
	If((d(1).Gt.D(2)).And.(D(1).Gt.D(3))) then
	Norden(1)=1
	If(d(2).Gt.D(3)) then
	Norden(2)=2
	Norden(3)=3
	Else

	Norden(2)=3
	Norden(3)=2
	Endif
	Else
	If((d(2).Gt.D(1)).And.(D(2).Gt.D(3))) then
	Norden(1)=2
	If(d(1).Gt.D(3)) then
	Norden(2)=1
	Norden(3)=3
	Else
	Norden(2)=3
	Norden(3)=1
	Endif
	Else
	If((d(3).Gt.D(1)).And.(D(3).Gt.D(2))) then
	Norden(1)=3
	If(d(1).Gt.D(2)) then
	Norden(2)=1
	Norden(3)=2
	Else
	Norden(2)=2
	Norden(3)=1
	Endif
	Endif
	Endif
	Endif
	Write(2,*)
C	Write(2,*) norden(1),norden(2),norden(3)
	Write(2,*) texto1,' principales ordenados'
	S1=d(norden(1))
	S2=d(norden(2))
	S3=d(norden(3))
	If(ncaso.Eq.2) Then

		Write(2,(f10.4,A17,3f10.4)) S1, en la direccion ‘
	1	Acos(v(1,norden(1)))/pi*180,
	2	Acos(v(2,norden(1)))/pi*180,acos(v(3,norden(1)))/pi*180
		Write(2,(f10.4,A17,3f10.4)) S2, en la direccion,’
	1	Acos(v(1,norden(2)))/pi*180,
	2	Acos(v(2,norden(2)))/pi*180,acos(v(3,norden(2)))/pi*180
		Write(2,(f10.4,A17,3f10.4)) S3, en la direccion,’
	1	Acos(v(1,norden(3)))/pi*180,
	2	Acos(v(2,norden(3)))/pi*180,acos(v(3,norden(3)))/pi*180
		Else
		Write(2,(f10.4,A8,a17,3f10.4)) S1,unid, en la direccion,’
	1	Acos(v(1,norden(1)))/pi*180,
	2	Acos(v(2,norden(1)))/pi*180,acos(v(3,norden(1)))/pi*180
		Write(2,(f10.4,A8,a17,3f10.4)) S2,unid, en la direccion,’
	1	Acos(v(1,norden(2)))/pi*180,
	2	Acos(v(2,norden(2)))/pi*180,acos(v(3,norden(2)))/pi*180
		Write(2,(f10.4,A8,a17,3f10.4)) S3,unid, en la direccion,’
	1	Acos(v(1,norden(3)))/pi*180,
	2	Acos(v(2,norden(3)))/pi*180,acos(v(3,norden(3)))/pi*180
		Endif
C		Tensor principal
		Write(2,*)
		If(ncaso.Eq.1) Then
		Write(2,*) ‘esfuerzo,’ cortarte max,(s1-s3)/2.,Unid
		Else
		Write(2,*) ‘deformación,’ angular max,(s1-s3)/2.
		Endif
		Write(2,*)
		Write(2,*) ‘_____’
		Write(2,*) ‘a partir del tensor principal’
		E(1,1)=s1
		E(1,2)=0.
		E(1,3)=0.

	$E(2,1)=e(1,2)$
	$E(2,2)=s2$
	$E(2,3)=0.$
	$E(3,1)=e(1,3)$
	$E(3,2)=e(2,3)$
	$E(3,3)=s3$
	$Nmag=(vec2(1)**2.+Vec2(2)**2.+Vec2(3)**2.)**0.5$
	$Nvec(1)=vec2(1)/nmag$
	$Nvec(2)=vec2(2)/nmag$
	$Nvec(3)=vec2(3)/nmag$
	If(ncaso.Eq.1) Then
	Write(2,*) 'vector normal al plano'
	Else
	Write(2,*) 'vector en la dirección'
	Endif
	Write(2;(3(f10.6,A3))) nvec(1),i+',nvec(2),j+',nvec(3),k'
<b>C</b>	Multiplicacion del tensor por el vector nvec
	$C(1,1)= nvec(1)$
	$C(2,1)= nvec(2)$
	$C(3,1)= nvec(3)$
	Call mulmat(e,3,3,c,1,sn)
	If(ncaso.Eq.1) Then
	Write(2,*) texto1,' en la direccion normal al plano'
	Else
	Write(2,*) texto1,' en la direccion de e'
	Endif
	Do i=1,3
	Write(2,*) (sn(i,j),j=1,1)
	Enddo
	$S=(sn(1,1)**2.+Sn(2,1)**2.+Sn(3,1)**2.)**.5$
	$Sigman=sn(1,1)*nvec(1)+sn(2,1)*nvec(2)+sn(3,1)*nvec(3)$
	$Taon=(s**2.0-Sigman**2.0)**0.5$

	If(ncaso.Eq.1) Then
	Write(2,*) 'los esfuerzos normal y cortante
&	Actuando en el plano n:'
	Write(2,*) 'sigma n=',sigman,unid
	Write(2,*) 'tao n=',taon,unid
	Else
	Write(2,*) 'las deformaciones lineal y angular
&	Actuando la dirección e:'
	Write(2,*) 'def normal=',sigman
	Write(2,*) 'etheta=',taon,; def angular=',2.*Taon
	Endif
	Write(2,*) '_____'
	Write(2,*) 'con teoria de elasticidad'
	Write(2,*)
	Write(2,*) 'propiedades elasticas:'
	Write(2,*) 'modulo de elasticidad:',emod,unid
	Write(2,*) 'modulo de rigidez al cortante:',gmod,unid
	Write(2,*) 'relacion de poisson:',nu
	Lam=nu*emod/((1.+Nu)*(1.-2.*Nu))
	Write(2,*) 'lamda=',lam,unid
	Write(2,*)
	If(ncaso.Eq.1) Then
	Write(2,*) 'deformaciones a partir de esfuerzos'
	Ex=(1./Emod)*(sx-nu*(sy+sz))
	Ey=(1./Emod)*(sy-nu*(sx+sz))
	Ez=(1./Emod)*(sz-nu*(sx+sy))
	Gxy=(1./Gmod)*(taoxy)
	Gxz=(1./Gmod)*(taoxz)
	Gyz=(1./Gmod)*(taoyz)
C	Write(2,*) e(1,2),e(1,3),e(2,3),gxy,gxz,gyz
	E2(1,1)=ex
	E2(1,2)=gxy/2.
	E2(1,3)=gxz/2.

	$E2(2,1)=e2(1,2)$
	$E2(2,2)=ey$
	$E2(2,3)=gyz/2.$
	$E2(3,1)=e2(1,3)$
	$E2(3,2)=e2(2,3)$
	$E2(3,3)=ez$
<b>C</b>	Impresion del tensor
	Write(2,*) 'tensor 'texto2
	Do i=1,3
	Write(2,102) (e2(i,j),j=1,3)
	Enddo
	Ncaso=2 !Invierte el caso para calcular de esfuerzos a deformaciones
	Else
	Write(2,*) 'esfuerzos a partir de deformaciones'
	$Ev=sx+sy+sz$
	Write(2,*) 'ev=',ev
	$Sx=lam*ev+2.*Gmod*sx$
	$Sy=lam*ev+2.*Gmod*sy$
	$Sz=lam*ev+2.*Gmod*sz$
	$Txy=2.*Gmod*(taoxy) !2*G*exy$
	$Txz=2.*Gmod*(taoxz)$
	$Tyz=2.*Gmod*(taoyz)$
<b>C</b>	Write(2,*) e(1,2),e(1,3),e(2,3),gxy,gxz,gyz
	$E2(1,1)=sx$
	$E2(1,2)=txy$
	$E2(1,3)=txz$
	$E2(2,1)=e2(1,2)$
	$E2(2,2)=sy$
	$E2(2,3)=tyz$
	$E2(3,1)=e2(1,3)$
	$E2(3,2)=e2(2,3)$
	$E2(3,3)=sz$
	Ncaso=1 !Invierte el caso para calcular de deformaciones a esfuerzos

C		Impresion del tensor
		Write(2,*) 'tensor 'texto2 , unid
		Do i=1,3
		Write(2,102) (e2(i,j),j=1,3)
		Enddo
		Endif
		Flag=1+flag
		If(flag.Eq.1) Then
!		Write(2,102) 'guardando tensor en e'
		Do i=1,3
		Do j=1,3
		E(i,j)=e2(i,j)
		Enddo
!		Write(2,102) (e2(i,j),j=1,3)
		Enddo
		Goto 1
		Endif
100	0	Format(a5,e15.8,A6,e15.8,A4,e15.8)
101	1	Format(3f18.8)
102	2	Format(3e20.8)
		Endprogram tensor
		Subroutine jacobi(a,n,np,d,v,nrot)
		Integer n,np,nrot,nmax
		Real a(np,np),d(np),v(np,np)
		Parameter (nmax=500)
		Integer i,ip,iq,j
		Real c,g,h,s,sm,t,tau,theta,tresh,b(nmax),z(nmax)
		Do 12 ip=1,n
		Do 11 iq=1,n
		V(ip,iq)=0.
11		Continue
		V(ip,ip)=1.

12	Continue
	Do 13 ip=1,n
	B(ip)=a(ip,ip)
	D(ip)=b(ip)
	Z(ip)=0.
13	Continue
	Nrot=0
	Do 24 i=1,50
	Sm=0.
	Do 15 ip=1,n-1
	Do 14 iq=ip+1,n
	Sm=sm+abs(a(ip,iq))
14	Continue
15	Continue
	If(sm.Eq.0.)Return
	If(i.Lt.4)Then
	Tresh=0.2*Sm/n**2
	Else
	Tresh=0.
	Endif
	Do 22 ip=1,n-1
	Do 21 iq=ip+1,n
	G=100.*Abs(a(ip,iq))
	If((i.Gt.4).And.(Abs(d(ip))+
	G.Eq.Abs(d(ip))).And.(Abs(d(iq))+g.Eq.Abs(d(iq))))then
	A(ip,iq)=0.
	Else if(abs(a(ip,iq)).Gt.Tresh)then
	H=d(iq)-d(ip)
	If(abs(h)+g.Eq.Abs(h))then
	T=a(ip,iq)/h
	Else
	Theta=0.5*H/a(ip,iq)
	T=1./(Abs(theta)+sqrt(1.+Theta**2))

		If(theta.Lt.0.)T=-t
		Endif
		$C=1./\text{Sqrt}(1+t**2)$
		$S=t*c$
		$\text{Tau}=s/(1.+C)$
		$H=t*a(ip,iq)$
		$Z(ip)=z(ip)-h$
		$Z(iq)=z(iq)+h$
		$D(ip)=d(ip)-h$
		$D(iq)=d(iq)+h$
		$A(ip,iq)=0.$
		Do 16 j=1,ip-1
		$G=a(j,ip)$
		$H=a(j,iq)$
		$A(j,ip)=g-s*(h+g*tau)$
		$A(j,iq)=h+s*(g-h*tau)$
16		Continue
		Do 17 j=ip+1,iq-1
		$G=a(ip,j)$
		$H=a(j,iq)$
		$A(ip,j)=g-s*(h+g*tau)$
		$A(j,iq)=h+s*(g-h*tau)$
17		Continue
		Do 18 j=iq+1,n
		$G=a(ip,j)$
		$H=a(iq,j)$
		$A(ip,j)=g-s*(h+g*tau)$
		$A(iq,j)=h+s*(g-h*tau)$
18		Continue
		Do 19 j=1,n
		$G=v(j,ip)$
		$H=v(j,iq)$
		$V(j,ip)=g-s*(h+g*tau)$

	$V(j,iq)=h+s*(g-h*\tau)$
19	Continue
	Nrot=nrot+1
	Endif
21	Continue
22	Continue
	Do 23 ip=1,n
	B(ip)=b(ip)+z(ip)
	D(ip)=b(ip)
	Z(ip)=0.
23	Continue
24	Continue
	Pause 'too many iterations in jacobi'
	Return
	End
	Subroutine mulmat(a,m,l,b,n,c)
C	Subrutina para multiplicar dos matrices de
C	M renglones por n columnas
	Real a(10,10),b(10,10),c(10,10)
C	Producto de matrices
	Do 6 i=1,m
	Do 6 j=1,n
	C(i,j)=0.0
	Do 6 k=1,l
	C(i,j)=a(i,k)*b(k,j)+c(i,j)
6	Continue
	End subroutine mulmat

## C.2 Ejemplo

### C.2.1 . Dado un tensor deformación

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0.0 \\ 0.02 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{bmatrix}$$

Determinar:

- a) Las deformaciones unitarias lineal y angular, en la dirección

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} -0.7709 \\ 0.9148 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- b) Determinar las deformaciones unitarias principales  
 c) Si el material es elástico lineal, con un módulo de elasticidad de  $E=2000 \text{ kgf/cm}^2$ , y una relación de Poisson de  $\nu=0.28$ , determinar los esfuerzos normal y cortante en el plano octaédrico.

El archivo de datos lo muestra la Figura C.2.1

```

1  CASO: ESFUERZOS -> DEFORMACIONES (1),  DEFORMACIONES->ESFUERZOS (2)
2      2
3  Sistema de Unidades
4      "kgf/cm2"
5  TENSOR
6      2e-2    2e-2    0.0
7      2e-2    5e-2    0
8      0      0      -4e-2
9  VECTOR PERPENDICULAR AL PLANO (RESPECTO A TENSOR)
10     -0.7709  0.9148  0
11  VECTOR PERPENDICULAR AL PLANO (RESPECTO A TENSOR PRINCIPAL)
12     0.547    0.547    0.547
13  PROPIEDADES ELASTICAS  E, NU
14     2000    0.28
15  |

```

Figura C.2.1. Archivo de datos para ejecutar el programa para el ejemplo

## Anexos

Los resultados para cada inciso se presentan a continuación.

Inciso a)

```
| RESOLVIENDO PARA EL TENSOR DEFORMACIONES
      0.02000000      0.02000000      0.00000000
      0.02000000      0.05000000      0.00000000
      0.00000000      0.00000000     -0.04000000
VECTOR UNITARIO
VECTOR DIRECCIÓN e
-0.644401 i+ 0.764688 j+ 0.000000 k
Vector Deformación EN LA DIRECCION DE e
 2.4057403E-03
 2.5346378E-02
 0.0000000E+00
LAS DEFORMACIONES LINEAL Y ANGULAR ACTUANDO EN LA DIRECCIÓN e:
def= 2.5460292E-02
DEF NORMAL= 1.7831806E-02
ETHETA= 1.8172869E-02 ; DEF ANGULAR= 3.6345739E-02
```

Inciso b)

```
POLINOMIO CARACTERISTICO
☐ -S^3+ 0.30000001E-01 S^2 + 0.22000000E-02 S +-0.24000003E-04
☐ DEFORMACIONES PRINCIPALES ORDENADOS
      0.0600 EN LA DIRECCION      63.4350      26.5651      90.0000
      0.0100 EN LA DIRECCION      26.5651     116.5650     90.0000
     -0.0400 EN LA DIRECCION     90.0000     90.0000      0.0000
```

Inciso c)

```
LOS ESFUERZOS NORMAL Y CORTANTE ACTUANDO EN EL PLANO n:
SIGMA n= 45.45454      kgf/cm2
TAO n= 63.78879      kgf/cm2
```

## D. Base en un espacio vectorial

**Definición.** Si  $V$  es cualquier espacio vectorial y  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto de vectores en  $V$ , entonces se llama base de  $V$  si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- a)  $S$  es linealmente independiente
- b)  $S$  genera a  $V$

Una base es una generalización de espacio vectorial de un sistema de coordenadas en espacios  $n$ -dimensionales.

**Teorema.** Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base de un espacio vectorial  $V$ , entonces todo vector  $v$  en  $V$  se puede expresar en forma única como  $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$ , en donde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  son escalares.

### Coordenadas respecto a una base

Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para un espacio vectorial  $V$  y  $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n$  es la expresión de un vector  $v$  en términos de la base  $S$ , entonces los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$

Se denominan coordenadas de  $v$  respecto a la base  $S$ . El vector  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  en  $\mathbb{R}^n$  que se obtiene a partir de estas coordenadas se llama vector de coordenadas de  $v$  con respecto a  $S$ . Se denota por:

$$(v)_S = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

**Observación.** Se debe notar que los vectores de coordenadas no sólo dependen de la base  $S$ , sino también del orden en que se escriben los vectores básicos; un cambio en el orden de los vectores básicos da por resultado un cambio correspondiente en el orden de los elementos en los vectores de coordenadas.

**Ejemplo D.1**

Dado el vector  $\underline{u} = 0.8729\hat{i} + 0.4364\hat{j} - 0.21822\hat{k}$  referido al sistema de coordenadas cuya base es  $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ , determinar el vector  $\underline{u}'$  referido al sistema coordenado cuya base es  $S' = \{(0.5018, 0.73379, 0.458), (-0.38922, -0.281325, 0.87714), (0.7725, -0.6184, 0.14444)\}$

Solución

Para ello se establece que, el vector normalizado  $\underline{u}$  referido al sistema  $S'$  es

$$\underline{u} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + c_3 \underline{e}_3$$

En donde  $\underline{u}' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  es un vector de coordenadas referido a la base  $S' = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ . Estableciendo la siguiente ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Para obtener el vector  $\underline{u}$  referido al sistema de ejes principales basta con resolver el sistema.

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5018 & -0.38922 & 0.7725 \\ 0.7338 & -0.281325 & -0.6184 \\ 0.458 & 0.87714 & 0.14444 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.8729 \\ 0.4364 \\ -0.21822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6583 \\ -0.6539 \\ 0.3729 \end{bmatrix}$$

## Bibliohemerografía

- Alberro, J, Apuntes de Mecánica del Medio Continuo, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1970
- Alberro, J, “Propiedades mecánicas de las rocas”, cap 11 del libro *Presas de Tierra y Enrocamiento*, de Marsal, R J y Reséndiz, D, Limusa, 1983
- Anton Howard (2010). *Introducción al álgebra lineal*. Editorial Limusa. México.
- Apostol, T M, Calculus, Vol II, 2nd ed, Wiley, 1969
- Castellan, G W, *Fisicoquímica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987
- Castillo, H, Análisis y Diseño Estructural, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1985
- Deméneghi, A, Magaña, R y Sanginés, H, *Apuntes de Introducción del Comportamiento de los Materiales*, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1986
- Deméneghi, A, Magaña, R y Sanginés, H, Apuntes de Mecánica del Medio Continuo, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2002
- Durelli, A J, Philips, E A y Tsao, C H, Introduction to the Theoretical and Experimental Analysis of Stress and Strain, McGraw-Hill, New York, 1958
- Garritz, A y Chamizo, J A, *Química*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1994
- Kolsky, H, Stress Waves in Solids, Dover, 1963
- Levi, E, *Elementos de Mecánica del Medio Continuo*, Limusa, 1980
- Malvern, L E, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, 1969
- Maron, S H y Prutton, C F, *Fundamentos de Fisicoquímica*, Limusa Noriega Editores, 1996
- Mendelson, A. Plasticity. Theory and Application. Krieger. 1983
- Popov, E.P, Introducción a la Mecánica de Sólidos. Limusa. 1968
- Roesset, J M, “Fundamentals of soil amplification”, Departament of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1969
- Timoshenko, S.P. y Goodier, J.N. Theory of Elasticity. 3raed. McGraw-Hill. 1970
- Whitten, K W, Gailey, K D y Davis, R E, *Química General*, 3ra ed, Mc-Graw Hill, 1992



## *MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO*

---

se publicó digitalmente en el repositorio de la Facultad de Ingeniería en junio de 2025. Primera edición electrónica de un ejemplar (16 MB) en formato PDF.

El cuidado de la edición y diseño estuvieron a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad de Ingeniería.

La familia tipográfica utilizada fue *Minion Pro* para títulos y textos con sus respectivas variantes.