



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA

BIBLIOTECA CONJUNTA DEL INSTITUTO DE INGENIERIA
Y DE LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Notas para el curso introductorio: Matemáticas 0041
(octava parte)

Desarrollos en serie e integrales impropias.

Arturo Delgado R.

Agosto de 1979.

g.2.



DEPM

A 1
Pte.
277

MATEMÁTICAS 091

(CURSO INTRODUCTORIO)

INTRODUCCION: Estas notas se han elaborado con el propósito de recopilar, en un solo volumen, los conceptos matemáticos básicos esenciales, necesarios para el estudio de las asignaturas que componen los planes de estudio de diversos niveles que se ofrecen en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El estudio de estos apuntes requiere la aprobación previa de los cursos de matemáticas que se imparten a nivel de licenciatura en escuelas profesionales; por consiguiente, el alumno hallará que ciertas técnicas de cálculo se dan de hecho como ya conocidas, tales como por ejemplo: álgebra de vectores, métodos elementales de integración y derivación.

En esencia, estas notas pretenden presentar en forma concisa las temas contenidos en el programa, formando para ser cubierto en una semana. Se complementa la exposición de la teoría, mediante la resolución de algunos ejemplos y variados ejemplos.

Cualquier crítica o comentario, tendiente a mejorar posibles ediciones de estas notas, será bien recibido y agradecido por el autor.

Fernando Augusto Rodríguez

Desarrollo de funciones en series de potencias.

Anteriormente se estudió la forma de determinar los intervalos de convergencia absoluta y uniforme de series de potencias. Se demostró asimismo que el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ es único.

Nos proponemos ahora resolver el siguiente problema: Dada una función $f(x)$, con derivadas de orden n en el punto $x=a$, hallar el desarrollo en serie de potencias de $(x-a)$, que converja a la función $f(x)$ dada.

Supongamos que la función $f(x)$ dada puede desarrollarse en la siguiente serie convergente de potencias:

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

Los coeficientes C_i pueden calcularse del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \dots + nC_n(x-a)^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2!C_2 + 3 \cdot 2C_3(x-a) + \dots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 3!C_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2C_4(x-a) + \dots + n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3} + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= n!C_n + n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 C_{n+1}(x-a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

haciendo $x=a$, en ① y ②

$$f(a) = c_0$$

$$f'(a) = c_1$$

$$f''(a) = 2! c_2$$

$$f'''(a) = 3! c_3$$

$$\vdots$$
$$f^{(n)}(a) = n! c_n$$

Substituyendo estos valores en ①:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots \quad (3)$$

Este desarrollo se denomina serie de Taylor

Si $a=0$, la serie ① es $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
y la serie ③ resulta

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots \quad (4)$$

El desarrollo ④ se conoce como serie de Maclaurin.

Observación 1.- Existen funciones que no pueden desarrollarse en serie de potencias, como por ejemplo:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-a} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{x}$$

$$f_3(x) = \ln(x-a) \quad ; \quad f_4(x) = \ln x$$

$$f_5(x) = \cot x$$

No existe serie de Taylor para f_1 y f_3

No existe serie de Maclaurin para f_2 , f_4 y f_5

Observación 2.- Haciendo $x = a + h$ en ③

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots + h^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots \quad ⑤$$

Observación 3.- Dado que ③ y ④ representan series infinitas, se acostumbra escribirlas del siguiente modo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad ⑥$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad ⑦$$

$R_n(x)$ se denomina "residuo", y puede expresarse de varios modos diferentes.

Observación 4.- Aun cuando existan todas las derivadas de $f(x)$ para $x=a$, el desarrollo en serie de Taylor (ó de Maclaurin si $a=0$) puede no ser convergente a $f(x)$:

Las series de Taylor y de Maclaurin de una función $f(x)$ representan $f(x)$ únicamente para los valores de x para los cuales:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

Ejemplo 1) Hallar un polinomio $P(x)$ de grado n tal que en un entorno del punto $(x, y) = (0, 1)$, se aproxime a la curva $y = e^x$

Solución:

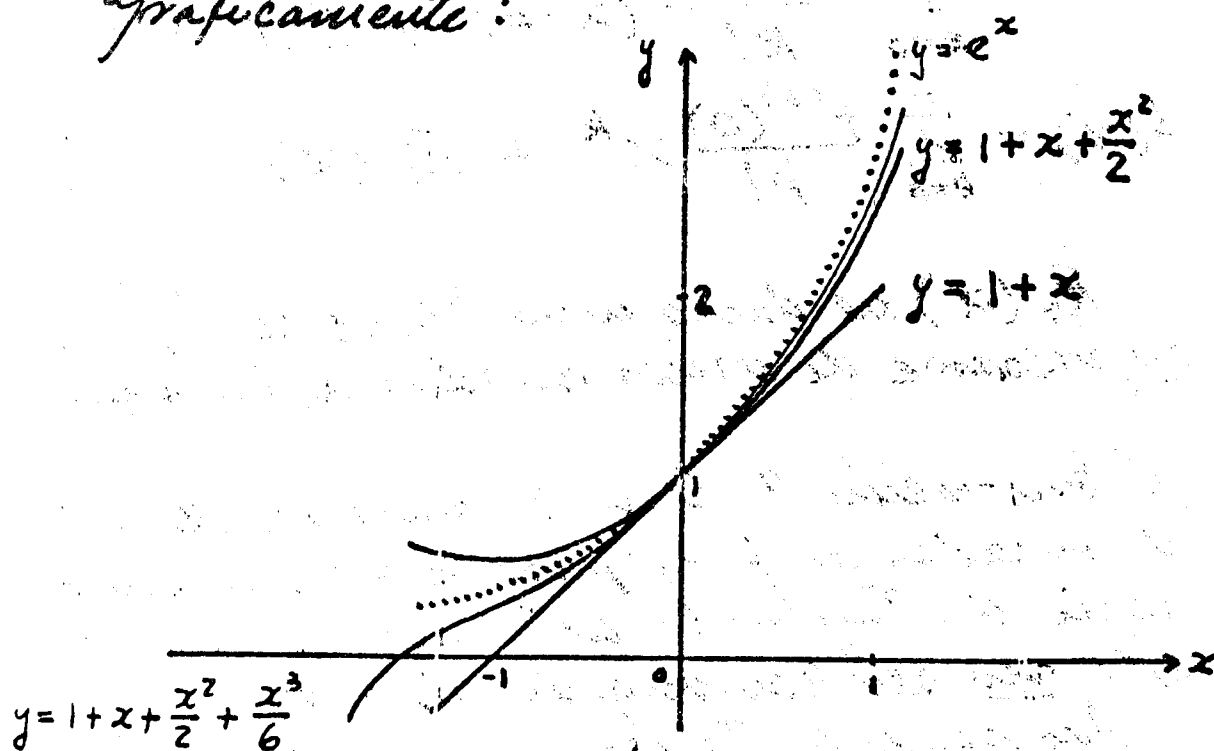
Empleando la fórmula (4)

$$f(x) = e^x ; f^{(k)}(x) = e^x \text{ para toda } k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(0) = f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Gráficamente:



2) Si en el ejemplo uno, se requiere $P(x)$ en un entorno del punto $(1, e)$:

Solución: empleando la fórmula (3):

$$a = 1 ; f(1) = f^{(k)}(1) = e$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{e}{k!} (x-1)^k$$

3) Empleando el desarrollo en serie de Maclaurin, hallar varias curvas que se aproximen a la función $y = \text{sen } x$.

Solución:

Empleando la fórmula (4)

$$f(x) = \text{sen } x \quad ; \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \quad ; \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \quad ; \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \quad ; \quad f'''(0) = -1$$

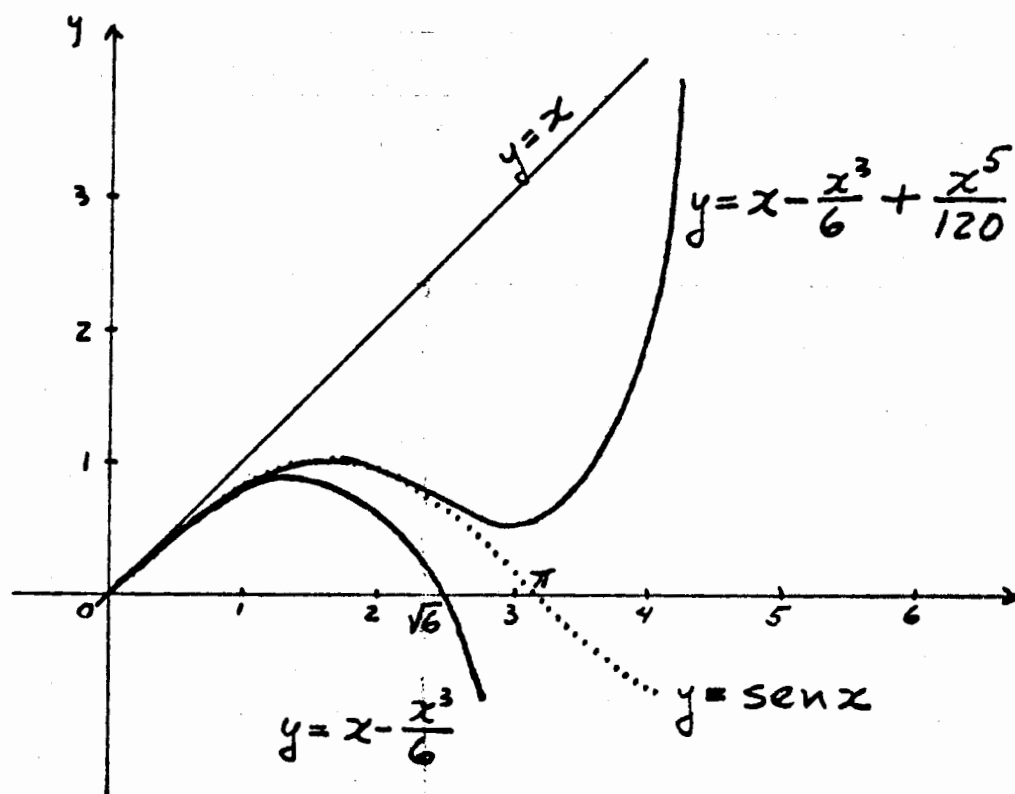
.....

.....

$$\Rightarrow \text{sen } x = 0 + 1x + x^2 \frac{0}{2!} + x^3 \frac{-1}{3!} + x^4 \frac{0}{4!} + x^5 \frac{1}{5!} + \dots$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Gráficamente:



6 4) Determinar la serie de Maclaurin que satisfice las siguientes condiciones:

i) $y = 2$, si $x = 0$.

ii) $y' = 1$, si $x = 0$

iii) $y'' + 2y' = 0$

Solución:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \dots$$

De la primera ecuación y la condición i): $c_0 = 2$

De la segunda ecuación y la condición ii)
 $c_1 = 1$

De la segunda y tercera ecuaciones y la condición 3: $2y' = -y''$

$$2c_1 + 4c_2 x + 6c_3 x^2 + 8c_4 x^3 + \dots = -2c_2 - 6c_3 x - 12c_4 x^2 - 20c_5 x^3 - \dots$$

$$\Rightarrow c_2 = -c_1 = -1$$

$$c_3 = -\frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3}$$

$$c_4 = -\frac{1}{2}c_3 = -\frac{1}{3}$$

.....

La serie de Maclaurin buscada es:

$$y = 2 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \dots$$

5) Desarrollar la función $f(x) = \ln x$ en serie de potencias de $x-2$

Solución: De la fórmula ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & ; f(2) &= \ln 2 \\ f'(x) &= x^{-1} & ; f'(2) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -x^{-2} & ; f''(2) &= -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= 2x^{-3} & ; f'''(2) &= \frac{1}{4} \\ f^{(4)}(x) &= -6x^{-4} & ; f^{(4)}(2) &= -\frac{3}{8} \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8} \frac{(x-2)^4}{4!} + \dots \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n 2^n} (x-2)^n$$

6) Obtener la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \sqrt{1+\sin x}$ sabiendo que:

i) $\sqrt{1+\sin x} = \sin \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$

ii) $\sin \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots$

Solución: De ii) derivando término a término

$$\cos \frac{x}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7 \cdot 6!} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5 \cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7 \cdot 6!} + \dots \text{ ①}$$

serie que es uniformemente convergente para $x \in \mathbb{R}$.

De i), ii) y ①:

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \dots$$

8 7) Deducir la serie de Maclaurin para la función $f(x) = e^{\cos x}$; teniendo en cuenta:

$$i) \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$ii) e^{\cos x} = e \cdot e^{\cos x - 1}$$

$$iii) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Solución:

de iii) para $x = u$

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots \quad (B)$$

de i) y ii); haciendo $u = \cos x - 1$ en (B)

$$e^{\cos x} = e \left[1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{2x^6}{2!4!} + \dots \right) + \frac{1}{3!} \left(-\frac{x^6}{(2!)^3} + \dots \right) + \dots \right]$$

$$e^{\cos x} = e \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720} x^6 + \dots \right]$$

8) Usando la fórmula (5), desarrollar en serie $\ln(a+x)$

Solución:

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$$

haciendo $h = x$; $f(x) = \ln x$; $f(a+x) = \ln(a+x)$

$$f(x) = \ln x \quad ; \quad f(a) = \ln a$$

$$f'(x) = x^{-1} \quad ; \quad f'(a) = a^{-1}$$

$$f''(x) = -x^{-2} \quad ; \quad f''(a) = -a^{-2}$$

$$f'''(x) = 2x^{-3} \quad ; \quad f'''(a) = 2a^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad ; \quad f^{(4)}(a) = -6a^{-4}$$

.....

.....

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{na^n} + \dots$$

1ª observación: Este desarrollo sólo converge a $\ln(a+x)$ en el intervalo: $(-a, a]$

2ª observación: Se puede obtener el mismo desarrollo empleando la fórmula (4) de la serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(a+x) & ; & f(0) = \ln a \\ f'(x) &= (a+x)^{-1} & ; & f'(0) = a^{-1} \\ f''(x) &= -(a+x)^{-2} & ; & f''(0) = -a^{-2} \\ f'''(x) &= 2(a+x)^{-3} & ; & f'''(0) = 2a^{-3} \\ f^{(4)}(x) &= -6(a+x)^{-4} & ; & f^{(4)}(0) = -6a^{-4} \\ &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \dots (-1)^{n-1} \frac{x^n}{na^n} + \dots \quad \checkmark$$

9) Empleando desarrollo en serie, calcular:

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{(x-1)^4} dx.$$

Desarrollando en serie de Taylor:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 3 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

ya que $f^{(k)}(x) = 0$ para toda $k \geq 4$, ($f^{(4)}(x) = 0$)

$$\Rightarrow \int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{(x-1)^4} = 3 \int \frac{dx}{(x-1)^4} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} + \ln(x-1) + C$$

10) Demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots ; [-1, 1)$$

Solución: Empleando la serie de Maclaurin:

$$f(x) = (1-x)^{-1/2} ; f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} (1-x)^{-3/2} (-1) ; f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^2} (1-x)^{-5/2} ; f''(0) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} (1-x)^{-7/2} ; f'''(0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!}$$

Para obtener la serie dada, es necesario demostrar que $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n$

Por inducción matemática:

$$n=1 \Rightarrow 2^n n! = 2$$

Supongamos que vale para $n=k$

$$2^k k! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k$$

multiplicando por $2(k+1)$

$$2^k k! \cdot 2(k+1) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k) \cdot 2(k+1)$$

$$2^k k! \cdot 2(k+1) = 2^k \cdot 2 \cdot k! (k+1) = 2^{k+1} (k+1)!$$

$$\Rightarrow 2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

Empleando el criterio de D'Alembert se demuestra que la serie converge en el intervalo: $-1 \leq x < 1$.

11). Con base en la serie de Taylor, expresada en la forma (5), deducir la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

Solución: Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que admiten desarrollos en serie de Taylor.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$

puesto que $f(x)$ y $g(x)$ son derivables para $x=a$
 $\Rightarrow$ son funciones continuas en $x=a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

$$\text{Si } f(a) = g(a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\text{pero: } f(a+h) = f(a) + h f'(a) + h^2 \frac{f''(a)}{2!} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a) + h \frac{f''(a)}{2!} + \dots}{g'(a) + h \frac{g''(a)}{2!} + \dots} \quad (C)$$

habiéndose cancelado en numerador y denominador el factor h ; siendo $f(a) = g(a) = 0$

$$\text{Si } g'(a) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ya que, por ser derivables, $f'(x)$ y $g'(x)$ son funciones continuas en $x=a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \checkmark$$

si $f'(a) = g'(a)$; dividiendo entre $h/2$ (C)

$$\Rightarrow \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f''(a) + h \frac{f'''(a)}{3} + \dots}{g''(a) + h \frac{g'''(a)}{3} + \dots}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f''(a)}{g''(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

puesto que $f''(x)$ y $g''(x)$ son derivables en $x=a$; por ende continuas en ese punto.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \quad \checkmark$$

La generalización se obtiene en forma análoga.

12) Si: $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$; $|x| < \frac{\pi}{2}$,
 Demostrar que:

$$\ln \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots \quad ; |x| \leq 1.$$

Solución: Sea $f(x) = \ln \sec x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sec x} \sec x \tan x = \tan x$$

Por ser uniformemente convergente la serie para $\tan x$ en $|x| \leq 1$, podemos integrar término a término:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{x^4}{4} + \frac{2}{15} \frac{x^6}{6} + \dots + C$$

$$\text{si } x=0 ; f(x) = \ln \sec x \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0, \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots \quad \checkmark$$

13) Sabiendo que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; $|x| < 1$:

- a) Hallar la serie para $\frac{x}{(x-1)(x-2)}$
 b) Determinar el intervalo de convergencia.

Solución: a)

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n - \frac{x^n}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n$$

b) Puesto que la serie $\frac{x}{x-2}$ converge en el intervalo $|x| < 2$; la serie obtenida en a) converge en:

$$\{x \mid |x| < 2\} \cap \{x \mid |x| < 1\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) x^n ; |x| < 1.$$

Nota: Una función $f(x)$ que puede representarse por una serie convergente de potencias en un entorno de $x=a$, se denomina función "analítica" en $x=a$.

14).- Demostrar que a es raíz de multiplicidad r de un polinomio $f(x) \Leftrightarrow$:
 $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0$; $f^{(r)}(a) \neq 0$.

Solución: de la serie de Taylor (3):

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + (x-a)^r \frac{f^{(r)}(a)}{r!} + \dots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \dots$$

Si a es raíz del polinomio $\Rightarrow f(a) = 0$; pero si a es raíz de multiplicidad $r \Rightarrow f(x)$ es divisible entre $(x-a)^r$; pero no es divisible entre $(x-a)^{r+1}$.

Lo anterior exige que en el desarrollo (3) se anulen los términos que contienen los factores:

$(x-a)$, $(x-a)^2$, ..., $(x-a)^{r-1}$; y no el factor $(x-a)^r$.

Recíprocamente, si se verifica lo anterior, $\Rightarrow (x-a)^r$ es divisor de $f(x)$, $\Rightarrow a$ es raíz de multiplicidad r

Ejemplo: Sabiendo que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$ son raíces de $f(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = 0$, Hallar: Solución: $f(1) = f(2) = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 20 \quad \begin{cases} f'(1) \neq 0 \Rightarrow r_1 = 1 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 42x + 36 \quad ; \quad f''(2) = 0$$

$$f'''(x) = 24x - 42 \quad ; \quad f'''(2) \neq 0 \Rightarrow r_2 = 3$$

$$\Rightarrow x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = (x-1)(x-2)^3$$

Diversas formas en que se expresa el residuo $R_n(x)$ en los desarrollos de funciones en serie de Taylor.

1.- Residuo integral.

El residuo $R_n(x)$ puede expresarse:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x [f^{(n+1)}(t)] (x-t)^n dt$$

Demostración: Dado que, por hipótesis, existen todas las derivadas de f en el punto $x=a$, de la ecuación (6)

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (8)$$

haciendo:

$$g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) ; g(a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$\Rightarrow R_n(x) = g(x) - g(a) = \int_a^x g' \quad (9)$$

Puesto que f tiene derivadas continuas (hasta las de orden $n+1$ inclusive) $\Rightarrow g'$ es continua en el intervalo cerrado $[a, x]$, $\Rightarrow \int_a^x g'$ existe.

Substituyendo (8) en (9) y derivando; siendo $g(t) = f(t)$:

$$g'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^n \left[-f^{(k)}(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + f^{(k+1)}(t) \frac{(x-t)^k}{k!} \right]$$

$$= f'(t) - f'(t) - \sum_{k=2}^n f^{(k)}(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{n+1} f^{(k)}(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow g'(t) = f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}$$

substituyendo en (8)

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x \left[f^{(n+1)}(t) \right] (x-t)^n dt \quad \checkmark$$

Ejemplo: 1) a) Considerando únicamente los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor, determinar un valor aproximado de $\sqrt{265}$

b) Calcular la magnitud del error, mediante el valor de $R_n(x)$.

Solución:

a) Sea $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 256$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad f(a) = 16$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad f'(a) = \frac{1}{32}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{x-a}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{4} \int_a^x t^{-\frac{3}{2}} (x-t) dt$$

$$= \frac{x+a}{2\sqrt{a}} - \frac{1}{4} \int_0^x t^{-\frac{3}{2}} (x-t) dt$$

$$\sqrt{265} = \frac{265+256}{32} - \frac{1}{4} \int_{256}^{265} t^{-\frac{3}{2}} (265-t) dt$$

a) $\sqrt{265} \doteq \frac{521}{32}$

$$\begin{aligned}
 |R_n(x)| &= \frac{1}{4} \int_{256}^{265} t^{-3/2} (265-t) dt \\
 &\leq \frac{1}{4(256)^{3/2}} \int_{256}^{265} (265-t) dt = \\
 &\leq \frac{1}{16384} \cdot \frac{81}{2} < 0.003
 \end{aligned}$$

Puesto que:

$$16.281 < \frac{521}{32} < 16.282$$

$$(16.281 - 0.003) < \sqrt{265} < 16.282$$

$$16.278 < \sqrt{265} < 16.282$$

$\Rightarrow \sqrt{265} = 16.28$ tiene dos cifras decimales exactas

2) Mediante inducción matemática, demostrar la validez de la fórmula del desarrollo en serie de Taylor para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o sea:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (6)$$

$$\text{donde: } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x [f^{(n+1)}(t)] (x-t)^n dt \quad (6')$$

Solución:

Si f es una función que posea derivadas de todos los órdenes $\in [a, x]$, se tiene: del teorema fundamental del cálculo:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

ó sea: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$; $f^{(0)} = f$

que es precisamente (6) y (7) para $n=0$; por lo que se ve que se cumple la primera parte de la demostración por inducción, ó sea: la fórmula (6) vale para $n=0$

2ª parte: supóngase que la fórmula (6) vale para $k = n-1$; ó sea, vale:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_{n-1} \quad (A)$$

donde: $R_{n-1} = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt \quad (A')$

Para completar la demostración, debe obtenerse (6) a partir de (A).

Oboéruse que (6) y (A) sólo difieren en los dos últimos términos, de modo que bastará hacer ver que el último término de (A) es idéntico a los dos últimos de (6) para obtener el resultado que se desea.

Aplicando integración por partes a R_{n-1} haciendo:

$$u = f^{(n)}(t) ; \quad dv = (x-t)^{n-1} dt.$$

$$v = \int (x-t)^{n-1} dt = -\frac{(x-t)^n}{n}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt &= -\frac{f^{(n)}(t)}{n(n-1)!} (x-t)^n \Big|_a^x - \\ &= -\frac{1}{(n-1)!} \int -\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n+1)}(t) dt = R_{n-1} \end{aligned}$$

pero: $n(n-1)! = n!$

por lo cual:

$$R_{n-1} = 0 - \left[-\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right] + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

ó sea:

$$R_{n-1} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Observando que la integral en la igualdad anterior es precisamente (6'), ha resultado que:

$$R_{n-1} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n \quad (B)$$

Si se substituye (B) en (A) se obtiene la ecuación (6), con lo cual se ha completado la demostración por inducción matemática:

Las fórmulas:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (6)$$

$$\text{donde: } R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (6')$$

valen para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2.- Residuo en la forma de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad ; \quad a < c < x$$

Demostración: Aplicando el teorema del valor medio para integrales a la forma integral del residuo:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x [f^{(n+1)}(t)] (x-t)^n dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \quad ; \quad a < c < x$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \checkmark$$

Ejemplo: 1) Calcular el valor del número e con cinco cifras decimales exactas.

Solución:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad ; \quad (-\infty, \infty)$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad ; \quad 0 < c < x$$

si $x=1$:

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

$$\text{puesto que } e < 3 \Rightarrow R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$R_9(1) < 1 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} = 2.71828 \text{ con cinco cifras decimales exactas.}$$

2) Hallar el intervalo para el cual $\ln(1+x)$ puede representarse por su serie de Maclaurin.
 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$

Solución:

Residuo de Lagrange: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{(1+c)^{n+1}} \quad ; \quad 0 < c < x$$

$$= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c} \right)^{n+1} \quad (1)$$

Análisis de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n-1}$

Por D'Alembert:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{n|x|}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x|$$

para convergencia: $|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

en los extremos del intervalo $x = \pm 1$:

si $x=1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ (converge)

si $x=-1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ (diverge)

$\Rightarrow$ intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ es $(-1, 1]$

Si: $0 < x \leq 1$, $\Rightarrow 0 < c < x \leq 1$

$$\Rightarrow 0 < x \leq 1+c$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+c} \leq 1 \quad (2)$$

② en ①

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+c} \right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad ③$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

$\Rightarrow \ln(1+x)$ puede representarse por su desarrollo en serie de Maclaurin en el intervalo: $-1 < x \leq 1$

$$\text{Si } -1 < x < c < 0$$

$$\Rightarrow 1+c > 1+x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+c} < \frac{1}{1+x}$$

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1} \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}$$

Observación importante:- Para que el desarrollo de una función converja a la función, es necesario que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, aun cuando la serie resulte convergente empleando otros criterios.

Por ejemplo: Sea $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0) = 0$; puede demostrarse que el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x)$ converge para toda x ; pero converge a $f(x)$ sólo cuando $x = 0$.

En síntesis, la función $f(x)$ dada, no admite ningún desarrollo en serie de potencias en intervalos que contengan el punto $x = 0$.

3) Determinar el número n de términos del desarrollo de $f(x) = \ln(1+x)$ en serie de Maclaurin que son necesarios, para obtener tres cifras decimales exactas, cuando $0 < x \leq 1$

Solución:

De la ecuación (3) obtenida en el problema 2) anterior, se tiene:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Para obtener tres cifras decimales exactas se requiere:

$$\frac{1}{n+1} \leq 0.0005$$

$$n+1 \geq 2000$$

$$n \geq 1999$$

$\Rightarrow$ Se necesitan 1999 términos de la serie para garantizar la exactitud de la tercera cifra decimal.

Evidentemente la convergencia de esta serie resulta en extremo lenta.

Obsérvese que, por ser serie alternada, podía llegarse a la misma conclusión considerando que el valor absoluto del error es menor que el valor del término $n+1$

$$\varepsilon < \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq 0.0005$$

24 24
4) Desarrollar en serie de Maclaurin:

$$f(x) = x^{5/2}$$

Solución

$$f(x) = x^{5/2} \quad ; \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{5}{2} x^{3/2} \quad ; \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{15}{4} x^{1/2} \quad ; \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} \quad ; \quad f'''(0) = ?$$

$\Rightarrow$ la serie de Maclaurin no existe; sin embargo, es correcto escribir:

$$x^{5/2} = 0 + 0 + 0 + \frac{15}{8} \frac{1}{c^{1/2}} \frac{x^3}{3!} = \frac{5}{16} \frac{x^3}{\sqrt{c}} ; \quad 0 < c < x$$

Puede comprobarse que la ecuación se verifica cuando:

$$c = \frac{25}{256} x$$

5) Demostrar que e es un número irracional.

Solución:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad (1) \quad ; \quad (-\infty, \infty)$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c \quad ; \quad 0 < c < x$$

Suponiendo $x=1$; si e fuera racional, $\Rightarrow$

$$e = \frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!} \quad (2) \quad 0 < c < 1$$

Escojamos $n > p$; multiplicando ② por $n!$:

$$n!e = n! \frac{e}{1} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + 1 + \frac{e^n}{n+1} \quad ③$$

Resultando: $0 < \frac{e^n}{n+1} < 1$; siendo todos los demás términos en ③ enteros positivos; lo cual nos lleva a la contradicción de que un número entero es igual a otro número que no es entero.

Se concluye, por lo tanto, que la hipótesis de que $e = \frac{p}{q}$ es incorrecta; de ahí que e debe ser un número irracional.

6) Otra demostración para el residuo en la forma de Lagrange: Sea la función f definida en $[a, b]$:

$$f(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \dots - (b-x)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} - (b-x)^{n+1} \frac{S}{(n+1)!}$$

donde S es un número definido cuando $f(a) = 0$.

Observando que $f(b) = 0$, resulta que f satisface las hipótesis del teorema de Rolle, por lo cual existe un punto c entre a y b donde $f'(c) = 0$

$$\therefore f'(c) = 0 = -(b-c)^n \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} + (b-c)^n \frac{S}{n!}$$

(todos los demás términos de $f'(x)$ se anulan, cancelándose dos a dos)

$\therefore S = f^{(n+1)}(c)$; puesto que S se define cuando $f(a) = 0$:

$$\Rightarrow 0 = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \dots - (b-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

haciendo $b = x$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad \checkmark$$

3.- Residuo en la forma de Cauchy:-

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a) \quad ; \quad a < \xi < x$$

Demostración: Si en la forma 1. residuo integral se hace:

$$F(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x [f^{(n+1)}(t)] (x-t)^n dt = \int_a^x F(t) dt$$

Aplicando el Teorema del valor medio para integrales:

$$R_n(x) = F(\xi) (x-a) \quad ; \quad a < \xi < x$$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a) \quad ; \quad a < \xi < x$$

Ejemplo: Resolver el mismo problema 2) anterior, empleando el residuo de Cauchy, en la solución, en lugar del residuo de Lagrange.

Solución:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= (-1)^n \frac{(x-\xi)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}} x \\ &= (-1)^n \frac{x(x-\xi)^n}{(1+\xi)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Si: } -1 < x < \xi < 0, \Rightarrow 0 < 1+x < 1+\xi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\xi} < \frac{1}{1+x}$$

$$\begin{aligned} \therefore |R_n(x)| &= \frac{|x-\xi|^n}{(1+\xi)^{n+1}} |x| \\ &= \left| \frac{\xi-x}{1+\xi} \right|^n \cdot \frac{|x|}{1+\xi} \\ &= \left(\frac{\xi+|x|}{1+\xi} \right)^n \cdot \frac{|x|}{1+\xi} < \left(\frac{\xi+|x|}{1+\xi} \right)^n \cdot \frac{|x|}{1+x} \end{aligned}$$

Observando que: $1 > |x|$

$$\Rightarrow \xi < \xi |x|$$

$$\Rightarrow \xi + |x| < |x| + \xi |x| = (1+\xi)|x|$$

$$\Rightarrow \frac{\xi + |x|}{1+\xi} < |x|$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{1+x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \text{ puesto que } -1 < x < 0$$

Habiendo obtenido el intervalo de convergencia de la serie: $(-1, 1]$; siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, se concluye que $\ln(1+x)$ puede representarse por su serie de Maclaurin en el intervalo $(-1, 1]$

Números de Bernoulli y de Euler: Estos números intervienen en la expresión del término general de algunas series de potencias, como por ejemplo: $\tan x$, $\sec x$, $\coth x$, $\ln |\sec x|$, etc; Asimismo para expresar la suma de series como: $\sum_{n=1}^{\infty} n^p$.

Números de Bernoulli: Se definen como los números B_n en la siguiente serie:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n x^n \quad \textcircled{1} \quad |x| < 2\pi$$

Puesto que hemos demostrado que el desarrollo en serie de potencias es único $\Rightarrow f^{(n)}(0) = B_n$; sin embargo, es más fácil calcular los números de Bernoulli del siguiente modo:

de $\textcircled{1}$:

$$\begin{aligned} x &= (e^x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n x^n \\ &= \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) \left(B_0 + B_1 x + B_2 \frac{x^2}{2} + B_3 \frac{x^3}{6} + \dots\right) \end{aligned}$$

Iguando coeficientes de potencias iguales de x .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$	0	...

Obsérvese que $B_n = 0$ para toda $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$; los signos se alternan para todo $B_n \neq 0$

Los números de Bernoulli También pueden determinarse de la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(B+1)^k - B^k = 0 \quad ; \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Donde se conviene en que $B = B'$; $B^i = B_i$

Ejemplo; Sabiendo que $B = B_1 = -\frac{1}{2}$, calcular B_2

Solución: $k=3$

$$(B+1)^3 - B^3 = 0$$

$$B^3 + 3B^2 + 3B + 1 - B^3 = 0$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{-3B - 1}{3} = \frac{-\frac{3}{2} - 1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{1}{6}$$

A fin de eliminar los números negativos y los cero, algunos autores definen los números de Bernoulli b_n del siguiente modo:

$$b_n = (-1)^{n+1} B_{2n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$\frac{174611}{330}$

Ejemplos de desarrollos en series de potencias en los que intervienen números de Bernoulli

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{b_1 p n^{p-1}}{2!} - \frac{b_2 p(p-1)(p-2) n^{p-3}}{4!}$$

La serie debe terminar en n^2 ó n según sea p impar ó par. $p \in \mathbb{N}$.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{2^{2p-1} \pi^{2p} b_p}{(2p)!}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{2p}} = \frac{(2^{2p}-1) \pi^{2p} b_p}{2(2p)!}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{(2^{2p}-1) \pi^{2p} b_p}{(2p)!}$$

$$5) \tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n}-1) b_n}{(2n)!} x^{2n-1} ; |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$6) \cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} b_n}{(2n)!} x^{2n-1} ; 0 < |x| < \pi$$

$$7) \csc x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2^{2n-1}-1) b_n}{(2n)!} x^{2n-1} ; 0 < |x| < \pi$$

$$8) \tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} (2^{2n}-1) b_n}{(2n)!} x^{2n-1} ; |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$9) \operatorname{ctgh} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} b_n}{(2n)!} x^{2n-1} ; 0 < |x| < \pi$$

$$10) \operatorname{csch} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2(2^{2n-1}-1)b_n}{(2n)!} x^{2n-1}; \quad 0 < |x| < \pi$$

$$11) \ln |\operatorname{sen} x| = \ln |x| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} b_n}{n(2n)!} x^{2n}; \quad 0 < |x| < \pi$$

$$12) \ln |\cos x| = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} (2^{2n}-1) b_n}{n(2n)!} x^{2n}; \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$13) \ln |\tan x| = \ln |x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n}-1) b_n}{n(2n)!} x^{2n}; \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$14) 1 - \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad |x| < \pi$$

$$15) \frac{x}{2} \left(\operatorname{ctgh} \frac{x}{2} - 1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B_n x^n; \quad |x| < 2\pi$$

$$16) \sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(t) dt + \frac{1}{2} [f(0) + f(n)] + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0) \right] t \\ + \frac{n B_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\theta n); \quad 0 < \theta < 1; \quad m, n \in \mathbb{N}$$

(esta última fórmula se emplea para efectuar integración numérica; suponiéndose que $f^{(2m+2)}(x)$ existe y es continua en $0 \leq x \leq n$)

$$17) \int_0^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{b_n}{4n}$$

Números de Euler: Se definen como los números E_n en la siguiente serie:

$$E_n + (-1)^n = \binom{2n}{2} E_{n-1} - \binom{2n}{4} E_{n-2} + \dots - \binom{2n}{2n} E_0$$

Siendo $E_0 = 0$; $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow E_1 + (-1)^1 = 0 \Rightarrow E_1 = 1$$

$$E_2 + (-1)^2 = \frac{2n(2n-1)}{2} = 6 \Rightarrow E_2 = 5$$

$$E_3 + (-1)^3 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} 5 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 1 ; \Rightarrow E_3 = 61$$

$$E_4 + (-1)^4 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} 61 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 5 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} 1 ; \Rightarrow E_4 = 1385$$

Resumiendo

$$E_0 = 0$$

$$E_1 = 1$$

$$E_2 = 5$$

$$E_3 = 61$$

$$E_4 = 1385$$

$$E_5 = 50521$$

$$E_6 = 2702765$$

$$E_7 = 199360981$$

$$E_8 = 19391512145$$

$$E_9 = 2404879675441$$

$$E_{10} = 370371188237525$$

$$E_{11} = 69348874393137901$$

$$E_{12} = 15514534163557086905$$

Ejemplos de series en los que intervienen números de Euler:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^{2p+1}} = \frac{\pi^{2p+1} E_p}{2^{2p+2} (2p)!}$$

$$2) \sec x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$3) \operatorname{sech} x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n E_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$4) E_n = \frac{2^{2n+2} (2n)!}{\pi^{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \dots \right)$$

Relación entre los números de Bernoulli y de Euler:

$$b_n = \frac{2n}{2^{2n} (2^{2n} - 1)} \left[\binom{2n-1}{1} E_{n-1} - \binom{2n-1}{3} E_{n-2} + \binom{2n-1}{5} E_{n-3} - \dots (-1)^{n-1} \right]$$

Ejemplo:

$$b_2 = \frac{4}{16 \cdot 15} \left[3 \cdot 1 + (-1)^1 \right] = \frac{1}{30} \checkmark$$

$$b_3 = \frac{6}{64 \cdot 63} \left[5 \cdot 5 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 + (-1)^2 \right] = \frac{3}{2 \cdot 63} = \frac{1}{42} \checkmark$$

$$b_4 = \frac{8}{256 \cdot 255} \left[7 \cdot 6 \cdot 1 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 1 + (-1)^3 \right]$$

$$b_4 = \frac{8 \cdot 272}{256 \cdot 255} = \frac{272}{32 \cdot 255} = \frac{68}{8 \cdot 255} = \frac{17}{510} = \frac{1}{30} \checkmark$$

Desarrollo de funciones de varias variables en series de potencias:

La noción de convergencia uniforme puede hacerse extensiva a series de funciones de varias variables. La prueba M de Weierstrass y otras propiedades pueden asimismo generalizarse a funciones de varias variables.

En seguida nos referiremos primero al problema concreto de buscar un desarrollo en serie de potencias para la función de dos variables $f(x, y)$

$$f(x, y) = C_{00} + C_{10}(x-a) + C_{01}(y-b) + C_{20}(x-a)^2 + C_{11}(x-a)(y-b) + C_{02}(y-b)^2 + \dots + C_{i, n-i}(x-a)^i(y-b)^{n-i} + \dots + C_{nn}(y-b)^n + \dots \quad (1)$$

Los coeficientes C_{ij} pueden determinarse del siguiente modo:

$$f(a, b) = C_{00}$$

$$f_x(x, y) = C_{10} + 2C_{20}(x-a) + C_{11}(y-b) + 3C_{30}(x-a)^2 + 2C_{21}(x-a)(y-b) + \dots$$

$$\Rightarrow f_x(a, b) = C_{10}$$

$$f_y(x, y) = C_{01} + C_{11}(x-a) + 2C_{02}(y-b) + C_{21}(x-a)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow f_y(a, b) = C_{01}$$

$$f_{xx}(x, y) = 2C_{20} + 3 \cdot 2C_{30}(x-a) + 2C_{21}(y-b) + \dots$$

$$\Rightarrow f_{xx}(a, b) = 2C_{20}$$

$$f_{xy}(x, y) = C_{11} + 2C_{21}(x-a) + \dots$$

$$\Rightarrow f_{xy}(a, b) = C_{11}$$

Substituyendo estos valores en (1)

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{f_{xx}(a, b)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

$$+ f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b) \frac{(y-b)^2}{2} + \dots + R_n \quad (2)$$

siendo R_n el residuo.

La ecuación (2) se denomina serie de Taylor para el desarrollo de la función $f(x,y)$ alrededor del punto (a,b) .

Cualquier función $f(x,y)$ que pueda ser representada por una serie de Taylor convergente alrededor del punto (a,b) , se denomina función "analítica" en el punto (a,b) .

Si hacemos en (2) $h = x - a$; $k = y - b \Rightarrow$
 $x = a + h$; $y = b + k$:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + f_{xx}(a,b) \frac{h^2}{2} + f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b) \frac{k^2}{2} + \dots + R_n \quad (3)$$

Si se adopta la siguiente convención:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) ; 0 < \theta < 1$$

La serie de Taylor de la función $f(x,y)$ para el entorno de (a,b) , puede escribirse simbólicamente:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a,b) +$$

$$\frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) + \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a,b) + \dots + R_n \quad (4)$$

Observando la similitud entre la ecuación (1) y el desarrollo en serie de e^x , podemos escribir en forma simbólica:

$$f(a+h, b+k) = e^{(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y})} f(a, b) + R_n \quad (5)$$

Si se hace $a=b=0$ en (1) se obtiene la serie de Maclaurin para dos variables:

$$f(x, y) = f(0,0) + (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) f(0,0) + \frac{1}{2!} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(0,0) + \frac{1}{3!} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})^3 f(0,0) + \dots + \frac{1}{n!} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})^n f(\theta x, \theta y) \quad | \quad 0 < \theta < 1 \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y})} f(0,0) + R_n \quad (7)$$

$$+ f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b) \frac{(y-b)^2}{2} + \dots + R_n \quad (2)$$

• donde R_n el residuo.

La ecuación (2) se denomina serie de Taylor para el desarrollo de la función $f(x,y)$ alrededor del punto (a,b)

Cualquier función $f(x,y)$ que pueda ser representada por una serie de Taylor convergente alrededor del punto (a,b) , se denomina función "analítica" en el punto (a,b)

Si hacemos en (2) $h = x-a$; $k = y-b \Rightarrow$
 $x = a+h$; $y = b+k$:

$$\bullet f(a+h, b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + f_{xx}(a,b) \frac{h^2}{2} + f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b) \frac{k^2}{2} + \dots + R_n \quad (3)$$

Si se adopta la siguiente convención:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) ; 0 < \theta < 1$$

La serie de Taylor de la función $f(x,y)$ para el entorno de (a,b) , puede escribirse simbólicamente:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a,b) +$$

$$\bullet \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a,b) + \frac{1}{3!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a,b) + \dots + R_n \quad (4)$$

Observando la similitud entre la ecuación (4) y el desarrollo en serie de e^x , podemos escribir en forma simbólica:

$$f(a+h, b+k) = e^{\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)} f(a, b) + R_n \quad (5)$$

Si se hace $a=b=0$ en (1) se obtiene la serie de Maclaurin para dos variables:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) + \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) + \frac{1}{3!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0, 0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x, \theta y) \quad ; \quad 0 < \theta < 1 \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)} f(0, 0) + R_n \quad (7)$$

Ejemplo 1) Desarrollar $f(x,y) = x^2y + 3y - 5$ en serie de potencias de $(x-1)$, $(y+2)$

Solución: $a=1$, $b=-2$

$$f(a,b) = f(1,-2) = -13$$

$$f_x(x,y) = 2xy \quad ; \quad f_x(a,b) = -4$$

$$f_y(x,y) = x^2 + 3 \quad ; \quad f_y(a,b) = 4$$

$$f_{xx}(x,y) = 2y \quad ; \quad f_{xx}(a,b) = -4$$

$$f_{xy}(x,y) = 2x \quad ; \quad f_{xy}(a,b) = 2$$

$$f_{yy}(x,y) = 0 \quad ; \quad f_{yy}(a,b) = 0$$

$$f_{x^2y}(x,y) = 2 \quad ; \quad f_{x^2y}(a,b) = 2$$

Siendo todas las derivadas parciales sucesivas nulas:

$$f(x,y) = -13 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) + (x-1)^2(y+2)$$

Obsérvese que en este caso $R_n = 0 = R_3$

2-) Desarrollar $f(x,y) = \sin(x+y)$ en serie de Maclaurin, hasta las terceras potencias de las variables:

Solución

$$f(x,y) = \sin(x+y) \quad ; \quad f(0,0) = 0$$

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = \cos(x+y) \quad ; \quad f'(0,0) = 1$$

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = -\sin(x+y) \quad ; \quad f''(0,0) = 0$$

$$f_{xxx} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} = -\cos(x+y) \quad ; \quad f'''(0,0) = -1$$

$$\sin(x+y) = x+y - \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + \dots$$

3.) Obtener el desarrollo en serie de $f(x,y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ alrededor del punto $(1,1)$, hasta las terceras potencias de las variables:

Solución: i) empleando la ecuación (2)

$$f(x,y) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad ; \quad f(1,1) = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_x(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_y = \frac{x}{x^2+y^2} \quad ; \quad f_y(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$f_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad f_{xx}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$f_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad f_{xy}(1,1) = 0$$

$$f_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad f_{yy}(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^{-1} \frac{y}{x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2!} \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 \right] + \dots$$

ii) empleando la ecuación (3) ó (4):

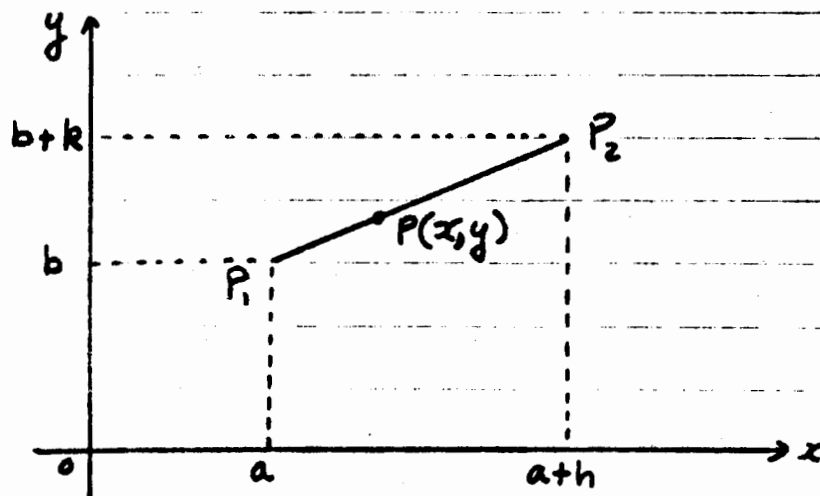
$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(1,1) = -\frac{h}{2} + \frac{k}{2}$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(1,1) = \frac{h^2}{2} - \frac{k^2}{2}$$

$$\tan^{-1} \frac{1+k}{1+h} = \frac{\pi}{4} - \frac{h}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{k^2}{2} \right) + \dots$$

Es interesante observar en serie de potencias para una función de dos variables, puede obtenerse del desarrollo en serie de Maclaurin para una sola variable. En efecto:

Si pensamos que se quiere pasar del punto de coordenadas (a, b) al punto $(a+h, b+k)$:



Considerando un parámetro t , las coordenadas de cualquier punto $P(x, y)$, sobre la recta $P_1 P_2$, serán:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + ht \\ y &= b + kt \end{aligned} \right\} \textcircled{10}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = f(a + ht, b + kt) = F(t) \textcircled{11}$$

Desarrollando $F(t)$ en serie de Maclaurin:

$$F(t) = F(0) + t F'(0) + \frac{t^2}{2!} F''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} F^{(n)}(\theta t) \textcircled{12}$$

siendo: $0 < \theta < 1$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

de (10)

$$\frac{dF}{dt} = F'(t) = h \frac{\partial F}{\partial x} + k \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$F'(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) F(0)$$

$$= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b)$$

$$F''(t) = \frac{d}{dt} \left(h f_x(x, y) + k f_y(x, y) \right)$$

$$= \left[f_{xx}(x, y)h + f_{yx}(x, y)k \right] \frac{dx}{dt} + \left[f_{xy}(x, y)h + f_{yy}(x, y)k \right] \frac{dy}{dt}$$

$$= h^2 f_{xx}(x, y) + 2hk f_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)$$

Simbólicamente:

$$F''(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y)$$

$$F''(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b)$$

$$F''(0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a, b)$$

Substituyendo en (12)

$$F(t) = f(a + ht, b + kt) = f(a, b) + t \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \\ + \frac{t^2}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \dots + \frac{t^n}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \quad (13)$$

haciendo $t=1$ en (13)

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) + \\ + \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \theta h, b + \theta k) \quad ; \quad 0 < \theta < 1 \quad (14)$$

ó de (10) y (11) en (13)

$$F(t) = f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \dots + R_n \quad (15)$$

En forma análoga puede deducirse que la serie de Taylor para tres variables es:

$$f(a+h, b+k, c+l) = e^{(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z})} f(a, b, c) \quad (16)$$

Ejemplo: Empleando la fórmula (16), demostrar que si $u = f(x, y, z)$, resulta:

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

Solución:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z) \quad (17)$$

pero: de (16)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f(x, y, z) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \dots \right] + \dots$$

Despreciando todos los términos a partir del segundo, y substituyendo en (17)

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

haciendo $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$; $\Delta z = dz$:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Desarrollo en serie de Taylor de una función real de n variables.

Sea $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con derivadas parciales de orden m continuas para $a_i \leq x_i < b_i, i \in N$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{a_1, a_2, \dots, a_n} (x_i - a_i) + \\ & + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{a_1, a_2, \dots, a_n} (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots + \\ & + R_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Entonces: $a_i \leq x_i < b_i \quad ; \quad i \in N, (i=1, 2, \dots, n)$

La función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuyo desarrollo en serie de potencias es convergente en un entorno del punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, se denomina función "analítica" en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

INTERALES IMPROPIAS:

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f$ en el intervalo $[a, b]$, quedaron impuestas las siguientes restricciones:

- Que el intervalo $[a, b]$ fuera finito.
- Que la función f fuera acotada en $[a, b]$

Definición: Integrales impropias son integrales definidas que presentan alguna de las dos características siguientes:

A- Integrales impropias de primera clase:
Límites de integración infinitos:

$$\int_a^{\infty} f \quad ; \quad \int_{-\infty}^b f \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f$$

B- Integrales impropias de segunda clase:
Integrandos discontinuos dentro del intervalo de integración:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} \quad ; \quad \int_0^{\pi} \tan x dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x dx$$

C- Integrales impropias que presentan las características A y B simultáneamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)} \quad ; \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad ; \quad \int_0^{\infty} \ln x \frac{dx}{\sin x}$$

A- Integrales impropias de primera Clase:

Es interesante observar que, en muchos aspectos, existen analogías entre $\int_a^\infty f$, y las series $\sum_{n=1}^\infty u_n$; sin embargo, no debe perderse de vista que en tanto f es una función que varía en forma continua, n varía en los números enteros solamente; de ahí que no sea posible establecer una analogía completa.

Definiciones: Se dice que la integral impropia de primera clase, converge $\Leftrightarrow$:

$$\text{I.- } \int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f = A_1$$

$$\text{II.- } \int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f = A_2$$

$$\text{III.- } \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \int_{-\infty}^\infty f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f = A_3 + A_4 \\ \quad \text{(valor ordinario)} \\ \text{ii) } \int_{-\infty}^\infty f = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f = A_5 \\ \quad \text{(valor principal de Cauchy : V.P.C)} \end{array} \right.$$

Estando $A_i \in \mathbb{R}^\#$; $i = 1, 2, 3, 4, 5$

Si una integral impropia no converge, se dice que diverge.

En las integrales impropias III i) basta

con que uno de los límites del segundo miembro no exista ó sea ∞ para que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f$ no exista:

$$A_3 + \infty = \infty + A_4 = \infty + \infty = \infty$$

Obsérvese que el valor ordinario y el valor principal de Cauchy, en las integrales impropias III, concuerdan sólo cuando ambos existen, pues puede existir VPC, en tanto que el valor ordinario no; dado que en el cálculo del límite del VPC puede producirse una compensación "automática" entre la divergencia y la convergencia.

Para distinguir los casos i) y ii) de III consideremos en que $\int_{-\infty}^{\infty} f$ representa el caso i); en tanto que el caso ii) se indicará: (VPC) $\int_{-\infty}^{\infty} f$.

Un caso en que i) y ii) coinciden es aquel en el cual el integrando es siempre positivo (ó siempre negativo).

Ejemplos: Estudiar la convergencia de cada una de las siguientes integrales impropias:

1) $\int_0^{\infty} \sin x dx$

Solución:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - \cos b) \text{ (no existe)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \sin x dx \text{ diverge.}$$

2) $\int_{-\infty}^0 e^{rx} dx$ ($r > 0$)

Solución:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{rx} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{r} (1 - e^{ra}) = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{rx} dx \text{ converge}$$

3) $\int_0^{\infty} e^{-rx} dx$ (integral geométrica o exponencial)

Solución: i) $r > 0$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-rx} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{r} (e^{-rb} - 1) = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-rx} dx \text{ converge, si } r > 0$$

ii) Si $r \leq 0$, la integral geométrica diverge

$$4) \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x+c)^n} ; n > 0 ; \left\{ \begin{array}{l} \text{si } a < 0 \Rightarrow c < a \\ \text{si } a > 0 \Rightarrow c > 0 \end{array} \right\} n \in \mathbb{N}$$

Solución: si $n \in \mathbb{Q}$, tomase $|x+c|$

i) si $n \neq 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x+c)^n} = \frac{(x+c)^{-n+1}}{-n+1} \Big|_a^b = \frac{(b+c)^{1-n}}{1-n} - \frac{(a+c)^{1-n}}{1-n}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{(x+c)^n} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{(b+c)^{1-n}}{1-n} - \frac{(a+c)^{1-n}}{1-n} \right]$$

ii) Si $n > 1 \Rightarrow 1-n < 0$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x+c)^n} = -\frac{(a+c)^{1-n}}{1-n} \Rightarrow \text{converge}$$

iii) Si $n < 1 \Rightarrow 1-n > 0$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x+c)^n} \text{ diverge}$$

iv) si $n = 1$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{(x+c)^n} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(b+c) - \ln(a+c)] = \infty$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} \frac{dx}{x+c} \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x+c)^n} \text{ converge} \Leftrightarrow n > 1$$

$$\therefore \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} \text{ converge: } n=2 > 1 \\ \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x-3|}} \text{ diverge: } n=\frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

Solución:

$$\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

dado que: $\lim_{r \rightarrow \infty} \ln(1+r^2) = \infty$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx \text{ diverge}$$

Sin embargo, obsérvese que:

$$\int_r^r \frac{1+x}{1+x^2} dx = 2 \tan^{-1} r$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2 \tan^{-1} r = 2 \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow (VPC) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$$

Nótese que la suma de dos integrales divergentes puede dar una integral convergente, si el integrando es diferente. Esto no sucede si ambas integrales tienen el mismo integrando.

Ejemplo: Dos integrales:

$$\int_0^{\infty} \frac{-1}{1+x} dx ; \int_0^{\infty} \frac{3}{2+3x} dx \text{ son ambas divergentes;}$$

Sin embargo:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+3x)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(\frac{-1}{1+x} + \frac{3}{2+3x} \right) dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \frac{2+3x}{1+x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{2+3b}{1+b} \right) - (\ln 2) \right]$$

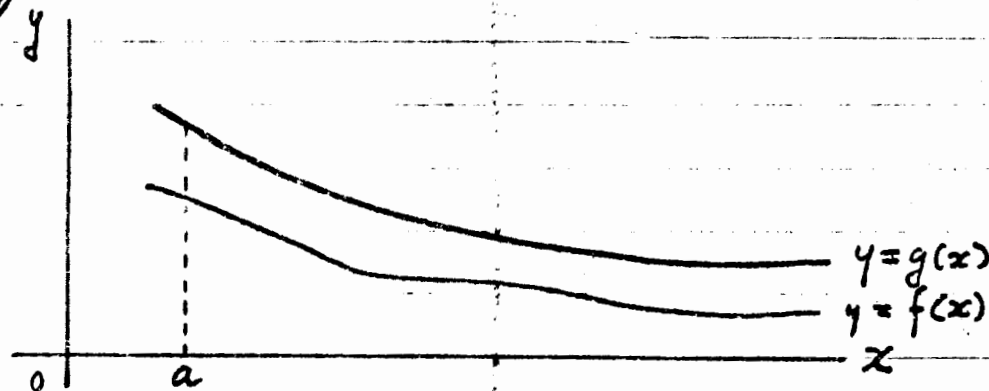
$$\lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{\frac{2}{b} + 3}{\frac{1}{b} + 1} - \ln 2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ La suma de las integrales divergentes es convergente.

Prueba de Comparación: - A semejanza de lo que sucede con las series, se puede establecer el siguiente criterio de comparación para analizar la convergencia de integrales impropios:

Supongamos que las funciones f y g son continuas en $[a, \infty)$; teniéndose que $0 \leq f \leq g$; se afirma que si $\int_a^{\infty} g$ converge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f$ también converge.

~~Simétricamente:~~



Si $\int_a^{\infty} g(x) dx$ converge,

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) dx = A$$

Siendo $\int_a^{\infty} g(x) dx$ numéricamente igual al área bajo la curva $y = g(x)$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx < A \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

De modo semejante se puede concluir que si:

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx$ también diverge
ya que: $g(x) \geq f(x) \geq 0$.

Ejemplos: Empleando la prueba de Comparación, determinar si Convergen o no, las siguientes integrales impropias:

$$1) \int_2^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Solución:

puesto que: $0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{1}{x^{3/2}} : 2 \leq x < \infty$

veamos del ejemplo 1) anterior que:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ converge } (n = \frac{3}{2} > 1)$$

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx \text{ converge.}$$

$$2) \int_2^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}} dx$$

Solución:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\frac{1}{x^3} \sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} \sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1+3x^{-2}}}$$

puesto que $2 \leq x < \infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1+3x^{-2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1+3 \cdot 2^{-2}}} = C \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}} dx \geq C \int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ diverge } (n = \frac{1}{2} < 1)$$

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}} dx \text{ diverge.}$$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (Integral de Gauss)

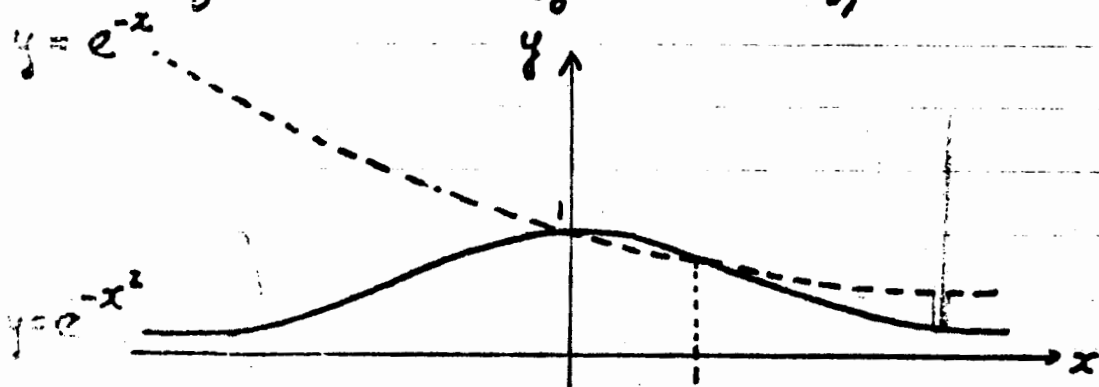
Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I \quad ; \quad (e^{-x^2} \text{ es función par})$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

observando que $e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$

$$I \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} dx$$



$$I \leq -e^{-x} \Big|_0^1 + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx$$

$$\leq -[e^{-1} - e^{-0}] + \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-b} + e^{-1}]$$

$$\leq -e^{-1} + 1 + 0 + e^{-1} = 1$$

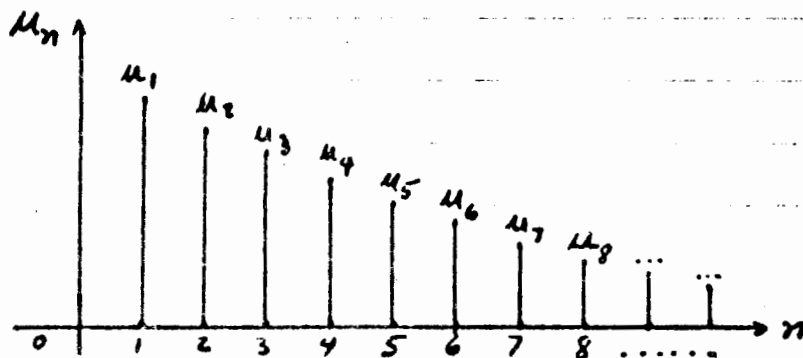
$$\Rightarrow 2I \leq 2$$

En efecto: el valor exacto de $2I$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \doteq 1.77... < 2$$

Prueba de la integral para convergencia de series:

Sea u_n el término general de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.



Consideremos una función $f(x) > 0$, continua y monótona decreciente para toda $x \geq M$.

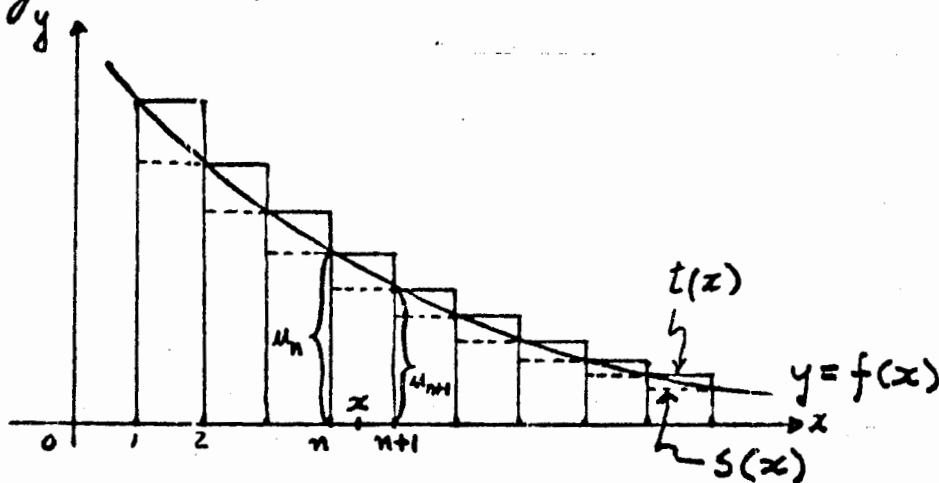
Si consideramos una partición P en el intervalo $M \leq x < \infty$, con n subintervalos iguales; siendo la norma $|P| = 1$.

Para esta partición P sean las siguientes dos funciones escalonadas:

En el subintervalo (u_n, u_{n+1})

$$S(x) = u_{n+1} \quad ; \quad t(x) = u_n$$

Hagamos: $f(n) = u_n$.



Para cualquier subintervalo en la partición:

$$u_{n+1} = S(x) \leq f(x) \leq t(x) = u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq u_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^n u_n \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{n-1} u_n$$

Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = A$, se concluye,

observando la parte izquierda de la desigualdad, que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ es monótona decreciente, y estando acotada por $A \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n$ converge.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ no existe, ó es $\pm \infty$, se observa, de la parte derecha de la desigualdad, que $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ no está acotada, y por el criterio de Comparación, $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ será divergente.

Observación 1.- Si la serie converge, el valor A no es, en general, igual al de S :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n u_n$$

2.- La prueba puede resultar particularmente útil en caso de series, como por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ donde fallan tanto el Criterio de D'Alembert, como el de Raabe.

Ejemplos: Empleando la prueba de la integral, determinar si convergen o divergen las siguientes series:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Solución:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\text{haciendo } \ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{du}{u} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(\ln u)]_2^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] = \infty$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$$

Solución:

$$\int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \int_1^b 2x e^{-x^2} dx \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e^{b^2}} \right) = \frac{1}{2e}$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

3) Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} = 1$

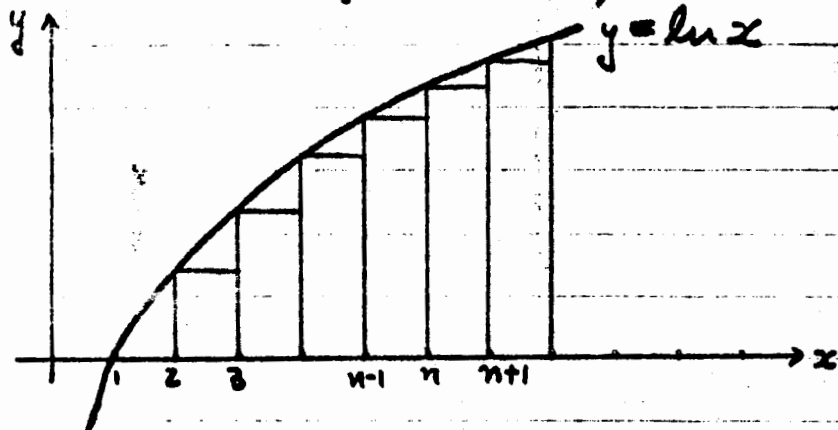
Solución:

Haremos ver primero que: $\ln(n!) = \sum_{n=2}^n \ln n$

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n$$

$$\Rightarrow \ln(n!) = \sum_{n=2}^n \ln n$$

$$\int_1^n \ln x dx < \sum_{n=2}^n \ln n < \int_1^{n+1} \ln x dx$$



$$\Rightarrow n \ln n - n < \ln(n!) < (n+1) \ln(n+1) - (n+1)$$

$$\frac{n \ln n - n}{n \ln n} < \frac{\ln(n!)}{n \ln n} < \frac{(n+1) \ln(n+1) - (n+1)}{n \ln n}$$

$$1 - \frac{1}{\ln n} < \frac{\ln(n!)}{n \ln n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\ln\left[n\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]}{\ln n} - \frac{n+1}{n \ln n}$$

$$1 - \frac{1}{\ln n} < \frac{\ln(n!)}{n \ln n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} - \frac{n+1}{n \ln n} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) - \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{n \ln n}$$

Tomando límite, cuando $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow 1 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n \ln n} = 1 \quad \checkmark$$

4) Demostrar que: $\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

Solución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^n \frac{1}{n^2+1} < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^2+1} < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{n^2+1} \quad (1)$$

pero: $\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1}x \Big|_1^n = \tan^{-1}n - \tan^{-1}1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [\tan^{-1}n - \frac{\pi}{4}] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

(2) en (1):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \right) - \frac{1}{1^2+1} \quad (4)$$

(4) en (3)

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Tomando sólo la 1ª desigualdad.

$$-\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad (5)$$

Combinando (5) con la 2ª desigualdad de (3)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Solución

i) Si $p \neq 1$, $p > 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{b^{p-1}} \right) \right]$$

Si $p > 1$, el límite existe, y vale $\frac{1}{p-1}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge, si $p > 1$

ii) Si $p < 1$, la integral diverge $\Rightarrow$ la serie diverge

iii) Si $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty \Rightarrow \text{la serie diverge}$$

iv) Si $p \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie diverge

Resumiendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{converge, si } p > 1 \\ \text{diverge, si } p \leq 1 \end{cases}$$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n} \quad ; \quad x > 2$

Solución:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} dx$$

haciendo: $u = \frac{\pi}{x}$; $du = -\frac{\pi}{x^2} dx$

$$-\frac{1}{\pi} \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} dx = \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi}{x} \Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{\infty} - \cos \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi}{n} \text{ converge}$$

Teorema de la substitución: Toda integral impropia de primera clase puede transformarse en una integral de límites finitos.

Demostración:

Se ha visto que:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ g)(u) g'(u) du$$

Aplicando esta fórmula a la integral:

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{\tan^{-1}(-r)}^{\tan^{-1}r} f(\tan u) \sec^2 u du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan u) \sec^2 u du \quad \checkmark$$

Ejemplo 1) $I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx$

Solución:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-2 \tan u}}{1+e^{-\tan u}} \sec^2 u du$$

haciendo $1+e^{-\tan u} = t$; $\Rightarrow dt = e^{-\tan u} (-\sec^2 u du)$

si $u=0 \Rightarrow t=2$; si $u \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \rightarrow 1$

$$I = - \int_2^1 \frac{t-1}{t} dt = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 1 - \ln 2$$

Obsérvese que se puede obtener, en este problema, el mismo resultado, haciendo la substitución directa:

$$1+e^{-x} = t \Rightarrow dt = -e^{-x} dx$$

si $x=0 \Rightarrow t=2$; $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 1$

$$I = - \int_2^1 \frac{t-1}{t} dt$$

B.- Integrales impropias de segunda clase.

Definiciones: Se dice que la integral impropia de segunda clase converge $\Leftrightarrow$:

I.- Si el integrando $f(x)$ es discontinuo sólo en el extremo $x=a$ del intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx = B_1$$

II.- Si el integrando $f(x)$ es discontinuo sólo en el extremo $x=b$ del intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx = B_2$$

III.- Si el integrando $f(x)$, en sólo un punto $x=c$ ($a < c < b$), se hace discontinuo:

$$i) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx = B_3 + B_4$$

(valor ordinario)

$$ii) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right] = B_5$$

(valor principal de Cauchy: VPC)

Estando $B_i \in \mathbb{R}^{\#}$; $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Las integrales impropias que no convergen, se denominan divergentes.

En las integrales III i) basta con que uno de los límites del segundo miembro no exista,

ó sea $\pm \infty$ para que la integral impropia $\int_a^b f$ no exista:

$$B_3 + \infty = \infty + B_4 = \infty + \infty = \infty$$

Obsérvese que el valor ordinario y el valor principal de Cauchy, en las integrales impropias III, concuerdan sólo cuando ambos existen, pues veremos en un ejemplo que puede existir VPC, en tanto que el valor ordinario no existe. Esto sucede cuando en el cálculo del límite del VPC se producen compensaciones "automáticas" entre la parte divergente y la convergente.

Para distinguir los casos i) y ii) de III, se conviene en que la integral impropia $\int_a^b f$ representa el caso i); en tanto que el caso ii) se indica: $(VPC) \int_a^b f$.

Pueden combinarse los casos I, II y III i) de dos en dos, ó los tres en uno: esto es, puede haber integrales impropias con discontinuidades en ambos extremos y además una discontinuidad en un punto intermedio del intervalo $[a, b]$.

Pueden asimismo considerarse funciones con un número finito cualquiera de discontinuidades en $[a, b]$, que es el intervalo de integración; por ejemplo:

$$\text{Si } a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{r=1}^n \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x) dx$$

Al calcular una integral en la cual el integrando $f(x)$ no está definido para algún valor de x , debe tenerse cuidado que la función antiderivada $F(x)$ ($F'(x) = f(x)$), además debe ser continua en todo el intervalo $[a, b]$ de integración, excepto, claro, para el punto x de discontinuidad; por ejemplo:

$$\int_0^{\pi} \sec^2 x \, dx$$

Se tiene una integral para la cual el integrando no está definido en $x = \frac{\pi}{2}$. Si no se tiene cuidado, puede calcularse la integral como cero, puesto que $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$; siendo $\tan \pi = \tan 0$. El resultado correcto es que la integral no existe, ya que $\tan x$ es discontinua en $x = \frac{\pi}{2}$, y no hay manera de evitar la discontinuidad; es decir, la discontinuidad es esencial, ya que $|\tan x| \rightarrow \infty$ si $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

En contraste con la observación anterior, la integral $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$ no es impropia, pues no hay discontinuidad en el integrando en $x=0$, puede evitarse (discontinuidad evitable) si la función se define como con valor uno, cuando $x=0$, lo cual hace el integrando continuo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ente que las discontinuidades evita-

bles no afectan el comportamiento de la integral, si el límite del integrando existe, cuando la variable tiende al punto extremo del intervalo, la integral no es impropia, sino "propia".

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ converge; ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

De ahí que: para analizar la convergencia de la integral:

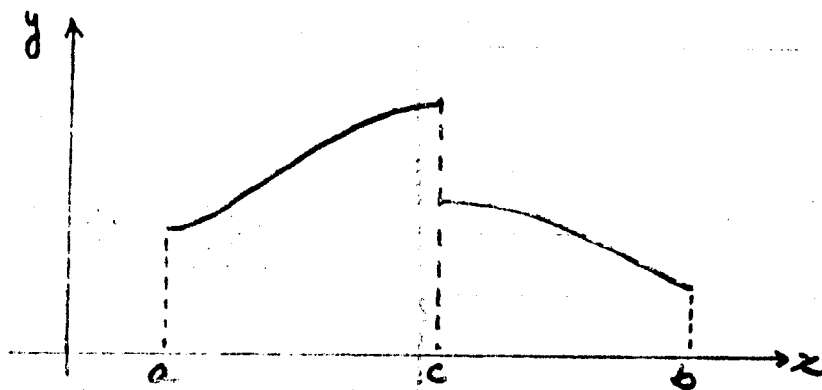
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

sólo será necesario estudiar la convergencia de la integral:

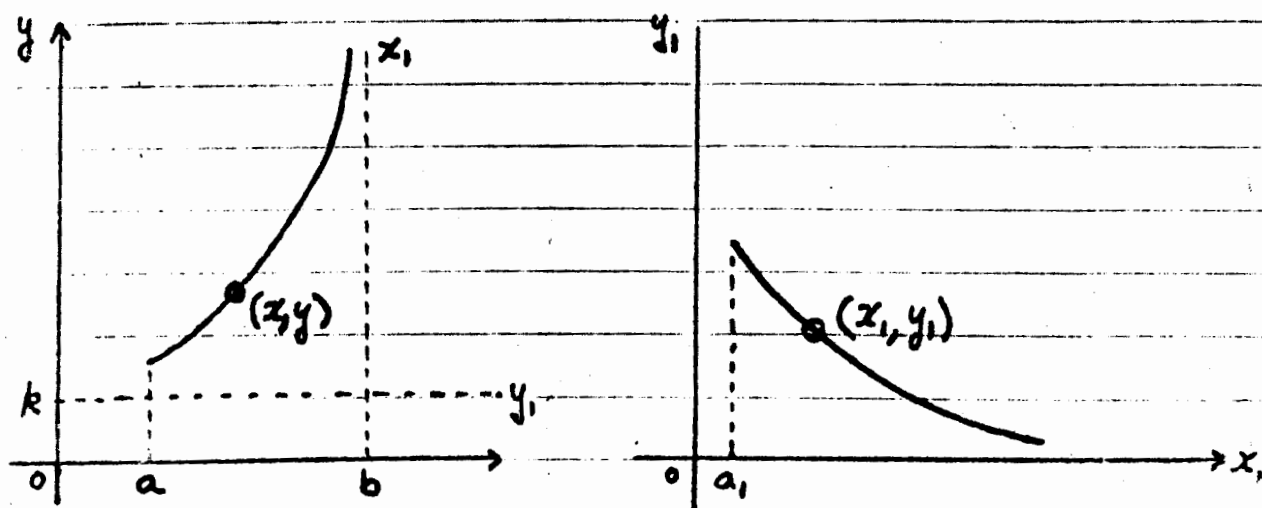
$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(esta integral se analizará más adelante).

Si una función $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x=c$ ($a < c < b$), puede dividirse el intervalo de integración $[a, b]$ en dos subintervalos $[a, c]$, $[c, b]$



Mediante un cambio de variable, es posible transformar integrales impropias de segunda clase en integrales impropias de primera clase, por ejemplo:



Habiendo girados 90° los ejes y trasladado éstos, como se indica en la figura anterior, se tiene:

$$x_1 = y - f(a) + a,$$

$$y_1 = x - b$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{a_1}^{\infty} f_1(x_1) dx_1 + k(b-a)$$

Una integral impropia de segunda clase siempre puede transformarse en otra integral impropia de primera clase.

Es a veces tambien factible transformar una integral impropia en integral propia.

- 2) Transformar la integral: $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ en:
- Integral impropia de primera clase
 - Integral propia.

Solucion:

i) Sea: $I = \int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$; supongamos: $0 < \epsilon < 1$

Haciendo: $\frac{1}{y} = 2-x \Rightarrow I = \int_1^{1/\epsilon} \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$

Si $\epsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \int_1^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{2y-1}}$$

ii) Haciendo: $v^2 = 2-x \Rightarrow 2v dv = -dx$

en $x = 2-\epsilon \Rightarrow v^2 = 2-2+\epsilon \Rightarrow v = \sqrt{\epsilon}$

en $x = 1 \Rightarrow v^2 = 2-1 \Rightarrow v = 1$

$$I = \int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{-2v dv}{\sqrt{(2-v^2)v^2}} = 2 \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{dv}{\sqrt{2-v^2}}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{2-v^2}}$$

Siendo la integral en el segundo miembro continua en $[0,1]$; por lo tanto, es una integral propia.

Ejemplos: Estudiar la convergencia de cada una de las siguientes integrales impropias:

i) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ ①; ($a < b$)

Solución:

ii) $p \neq 1 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p} \Big|_c^b = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{(b-a)^{1-p} - (c-a)^{1-p}}{1-p}$

$\therefore$ si: $p < 1 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ ($p > 0$)

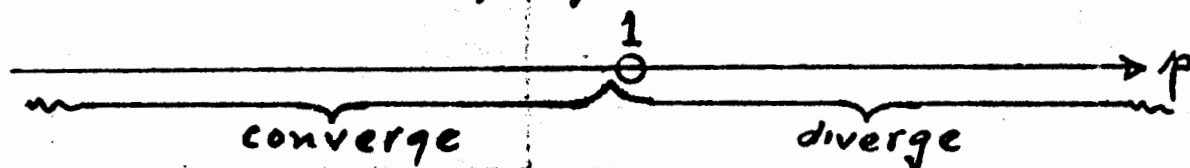
$\therefore$ si $p > 1 \Rightarrow$ la integral diverge. ($p > 0$)

iii) $p = 1 \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{c \rightarrow a^+} \ln(x-a) \Big|_c^b = \lim_{c \rightarrow a^+} [\ln(b-a) - \ln(c-a)] = \infty$

Observación 1: La condición $a < b$ es innecesaria, pues si se hace $u = -x$, el caso $a > b$ se transforma en el caso $a < b$; $\Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$; ($a < b$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{converge, si } p < 1 \\ \text{diverge, si } p \geq 1 \end{array} \right.$

Observación 2: La integral es propia (no impropia) en el intervalo $(-\infty, -a)$, si ($a > 0$); o de $(+a, \infty)$, si ($a < 0$) en ①; por ejemplo: las siguientes integrales son propias: $\int_{-5}^{-3} \frac{dx}{(x-2)^2}$; $\int_{-2}^2 \frac{dx}{(x+3)^4}$; para toda $p \in \mathbb{R}^+$.

El siguiente diagrama resume las conclusiones para las integrales: $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$; $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$; ($a < b$), cuando son impropias:



2) Paradoja Matemática:

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$$

pero $x^2 > 0$, $dx > 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ debe ser > 0

El absurdo se explica al observar que se trata de una integral impropia, pues el integrando es discontinuo para $x = 0$.

Del ejemplo 1) anterior se concluye que la integral diverge: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \infty$; ($p=2 > 1$)

3) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^2} (x^3 + x^2)}$

Solución:

Observando que: $1-x^2 = (1-x)(1+x)$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2} (x^3 + x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} f(x)$$

donde $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+x} (x^3 + x^2)}$

pero $f(x)$ es continua en $[0, 1] \Rightarrow$ está acotada:

$$|f(x)| \leq A \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} \right| \leq \frac{A}{\sqrt{1-x}} ; 0 \leq x \leq 1$$

pero $\int_0^1 \frac{M dx}{\sqrt{1-x}}$ converge, del problema 1) $p = \frac{1}{2} < 1$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^2} (x^3 + x^2)} \text{ Converge.}$$

4) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$

Solución:

El integrando se hace discontinuo en $x=2$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

Del problema 1) se ve que ambas integrales divergen ($p=2>1$) $\Rightarrow$ la integral $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$ diverge.

Nótese que de no haber observado que la integral es impropia, la integral definida ordinaria hubiese resultado erróneamente $= -\frac{3}{2}$

5) $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$

Solución:

El integrando es discontinuo en $x=-1$

$$\int_{-1+\epsilon}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left. \frac{(x+1)^{2/3}}{2/3} \right|_{-1+\epsilon}^7 = 6 - \frac{3}{2} \epsilon^{2/3}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(6 - \frac{3}{2} \epsilon^{2/3} \right) = 6$$

$$\therefore \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = 6$$

$$6) \int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

Solución:

Discontinuidad en $x=1$

$$\int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_1^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

Del problema 1) ambas integrales en el segundo miembro divergen.?

$\Rightarrow \int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3}$ diverge (valor ordinario)

Sin embargo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\epsilon}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{32} \right] = \frac{3}{32}$$

$$\Rightarrow (VPC) \int_{-1}^5 \frac{dx}{(x-1)^3} = \frac{3}{32}$$

Nótese que la suma de dos integrales divergentes puede dar una integral convergente, si el integrando en ambas no es el mismo. Esto no sucede si ambas integrales tienen igual integrando. Ejemplo: Las siguientes dos integrales impropias son ambas divergentes:

$$\int_0^1 \frac{1+x}{x} dx, \int_0^1 \frac{2x-1}{x} dx; \text{ en tanto que:}$$

$$\int_0^1 \frac{1+x}{x} dx + \int_0^1 \frac{2x-1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1+x+2x-1}{x} dx = \int_0^1 3 dx = 3$$

$\Rightarrow$ La suma de dos integrales divergentes resulta ser una integral que es convergente.

Convergencia absoluta - definición:

$$\text{Si } \int_a^b f \text{ converge} \Rightarrow \begin{cases} \text{converge absolutamente} \Leftrightarrow \int_a^b |f| \text{ converge} \\ \text{converge condicionalmente} \Leftrightarrow \int_a^b |f| \text{ diverge} \end{cases}$$

que: $\text{Si } \int_a^b |f| \text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f \text{ converge, puesto}$

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f| + f \leq 2|f|$$

$$\Rightarrow \text{Si } \int_a^b |f| \text{ converge, por comparación} \Rightarrow$$

$$\int_a^b (f + |f|) \text{ converge; por lo que si le restamos}$$

$$\text{la integral convergente } \int_a^b |f| \Rightarrow \int_a^b f \text{ converge.}$$

De aquí que para establecer si una integral impropia es absolutamente convergente, basta analizar la convergencia de la $|f|$.

Si $\int |f|$ diverge, se hace necesario estudiar la convergencia de $\int f$.

Nótese que los razonamientos anteriores concuerdan en todo con lo que se estudia para convergencia absoluta y condicional de series.

Ejemplos: Estudiar la convergencia absoluta o condicional de las siguientes integrales impropias:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

Solución:

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

dado que $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge ($n=2>1$)

$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ es absolutamente convergente.

$$2) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Solución:

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$$

pero $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ es divergente, por lo cual no se puede concluir nada concreto.

Demostremos que $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ es divergente:

$$\int_1^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

Observando que el valor mínimo de $\frac{1}{x}$ en

$$[n\pi, (n+1)\pi] \text{ es } \frac{1}{(n+1)\pi}$$

$$\Rightarrow \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx \geq \frac{2}{(n+1)\pi} \geq \frac{2}{\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{m-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{m-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x} \geq \frac{2}{\pi} \int_2^{m\pi} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{m+1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^m \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \frac{2}{\pi} \ln \frac{m+1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ diverge}$$

Debemos por consiguiente proceder a analizar

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_1^r \frac{\sin x}{x} dx &= \int_1^r \frac{1}{x} d(-\cos x) \\ &= \left(-\frac{\cos x}{x} \right)_1^r + \int_1^r \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\cos r}{r} + \cos(1) - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

puesto que $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\cos r}{r} = 0$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos(1) - \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Del mismo modo que en el problema 1) se demuestra que $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ es convergente}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ converge condicionalmente.}$$

$$3) \int_0^{\pi} \frac{1}{x} \operatorname{Sen} \frac{1}{x} dx$$

Solución:

Haciendo $x = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \pi, \Rightarrow y = \frac{1}{\pi}; x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{x} \operatorname{Sen} \frac{1}{x} dx = \int_{1/\pi}^{\infty} \frac{\operatorname{Sen} y}{y} dy$$

Se ve del problema 2) anterior, que la integral propuesta es condicionalmente convergente.

$$4) \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Solución:

$$\frac{|\cos \frac{1}{x}|}{\sqrt{x}} \leq x^{-\frac{1}{2}}; \text{ siendo } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ convergente}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx \text{ es absolutamente convergente.}$$

Teorema I Sean $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$; $a \leq x < b$;
 Si $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A$; $0 < A < \infty$

$\Rightarrow$ Las integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son ambas convergentes o ambas son divergentes.

Demostración:

Si $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow$ existe un punto x_0

$a < x_0 < b$ tal que cuando $x_0 < x < b$

$$\frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2A$$

$\Rightarrow f(x) < 2A g(x) \Rightarrow \frac{2}{A} f(x) > g(x)$ para toda x
 $x_0 < x < b$.

Por comparación:

Si $\int_a^b g$ converge, también converge $\int_a^b f$
 recíprocamente:

Si $\int_a^b f$ diverge, también diverge $\int_a^b g(x)$

Ejemplo: Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ diverge.

Solución:

Dado que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge ($n=1$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}} = 1$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$ diverge ✓

74

Teorema II: Si $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p f(x) = A \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{converge, si } p < 1; A \neq \pm \infty \\ \text{diverge, si } p \geq 1; A \neq 0; (A \text{ puede ser } \pm \infty) \end{cases}$$

Si el integrando $f(x)$ se hace discontinuo sólo para $x=b$, entonces se tiene:

Teorema III: Si $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^p f(x) = B \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx \begin{cases} \text{converge, si } p < 1; B \neq \pm \infty \\ \text{diverge, si } p \geq 1; B \neq 0; (B \text{ puede ser } \pm \infty) \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

Solución:

La integral converge, puesto que: $(p = \frac{1}{2} < 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x^4-1)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^4-1}} = \frac{1}{2} = A \neq \infty$$

2) $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$

Solución:

La integral diverge, puesto que: $(p = 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) \cdot \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = B \neq 0$$

Corolario: Si $f(x)$ es continua en $a \leq x < \infty$,
siendo $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = A$

Se afirma:

- i) $\int_a^{\infty} |f|$ converge si $p > 1$
- ii) $\int_a^{\infty} f$ diverge si $p \leq 1$, $A \neq 0$ (A puede ser 0)
- iii) La prueba falla si $A = 0$ y $p = 1$

Ejemplos:

1) Demostrar la convergencia de la integral de Gauss $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Solución:

Si tomamos $p = 2 > 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

de i) $\Rightarrow$ la integral de Gauss converge. ✓

2) Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt{x^3+1}}$ converge absolutamente.

Solución:

Basta elegir p tal que $1 < p < \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^{1/4} (1+x^3)^{1/2}} = 0 \quad \checkmark$$

de i) $\Rightarrow$ $\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{\sqrt{x^3+1}}$ es absolutamente convergente.

$$3) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$$

Solución: si $p=1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}} \text{ diverge}$$

$$4) \int_0^{\infty} \frac{7e^{-x}-1}{\sqrt[3]{2x^2+1}} dx$$

Solución: si $p=1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/3}(7e^{-x}-1)}{\sqrt[3]{2+x^{-2}}} = -\infty$$

de ii) $\Rightarrow$ la integral diverge.

5) Para demostrar que la prueba iii) falla,
Sea $p=1$; Teniéndose que:

$$\begin{cases} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ converge.} \\ \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \text{ diverge} \end{cases}$$

aun cuando para ambas integrales $A=0$,
puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

6) Demostrar que $\int_{1/2}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[p]{x^3+1}} dx$ converge absolutamente para $0 < p < 3$ (diverge para cualquier otra p excepto $p=0$, que no tiene sentido)

Solución:

Si $0 < p < 3$, escojamos q tal que $p < q < 3$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/q} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{3(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \sqrt[p]{1+x^{-3}}} = 0$$

Dado que $\frac{3}{q} > 1 \Rightarrow$ convergencia absoluta

Si $p \geq 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \infty \Rightarrow$ diverge

($p=0$ no tiene sentido: $(x^3+1)^{\frac{1}{0}}$)

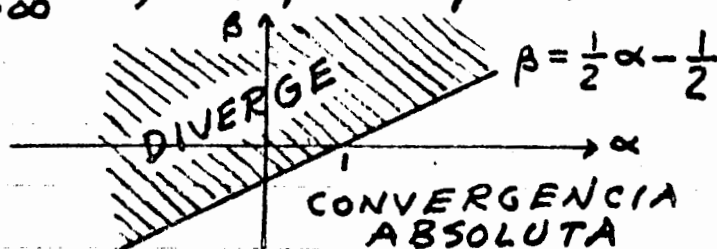


7) Demostrar que $\int_1^{\infty} \frac{(e^{1/x}-1)^{\alpha}}{\ln(1+x^{-1})^{2\beta}} dx$, diverge si: $0 < -2\beta \leq 1$.

Solución: Dado que el integrando puede escribirse:

$$f(x) = \left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x} \right)^{\alpha} \left(\frac{\ln(1+x^{-1})}{1/x} \right)^{-2\beta} x^{2\beta-\alpha}$$

puesto que cada factor $\rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$, puede calcularse $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x)$ para $p \geq 1$



3) Integral o función β

$$I_{\beta} = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad ; \quad m \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{R}^*$$

Solución:

i) $m \geq 1$; $n \geq 1$ simultáneamente: I_{β} converge, puesto que no hay discontinuidades en el integrando en $[0, 1]$.

ii) $0 < m < 1$ y $0 < n < 1$: El integrando presenta discontinuidad en $[0, 1]$; podemos escribir

$$I_{\beta} = \int_0^{1/2} x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = I_1 + I_2$$

puesto que la 1ª integral tiene una discontinuidad evitable en $x=0$; siendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-m} \cdot x^{m-1} (1-x)^{n-1} = 1 ; (p=1-m, a=0)$$

$\Rightarrow$ converge la 1ª integral.

De modo semejante semejante, la 2ª integral converge, puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{1-n} \cdot x^{m-1} (1-x)^{n-1} = 1 ; (p=1-n, b=1)$$

iii) Si $m \leq 0$, la integral I_1 diverge para todo valor de n ; puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \infty ; (p=1, a=0)$$

iv) De manera análoga, si $n \leq 0$, I_2 diverge, para cualquier valor de m .

Resumen:

$$I_{\beta} = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \text{ converge} \Leftrightarrow m > 0, n > 0, \text{ simultáneamente.}$$

9) Función gamma Γ

$$I_r = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} dx \quad ; \quad n \in \mathbb{R}^{\#}$$

Solución:

$$I_r = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{e^x} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} dx$$

i) si $n \geq 1 \Rightarrow I_1$ converge, pues no hay discontinuidades en $[0, 1]$.

ii) si $0 < n < 1 \Rightarrow I_1$ es impropia de segunda clase, siendo convergente, puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-n} \cdot x^{n-1} e^{-x} = 1 \quad ; \quad (p=1-n, a=0)$$

$\Rightarrow I_1$ converge si $n > 0$

ii) Si $n > 0 \Rightarrow I_2$ es impropia de primera clase, y es convergente, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot x^{n-1} e^{-x} = 0 \quad ; \quad (p=2)$$

$\Rightarrow I_r$ converge, si $n > 0$

iii) Si $n \leq 0 \Rightarrow I_1$ diverge, puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot x^{n-1} e^{-x} = \infty$$

Si $n \leq 0$, I_r diverge

Resumen:

$$I_r = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} dx, \text{ converge} \Leftrightarrow n > 0$$

Mediante cambios de variable las integrales I_β y I_τ pueden expresarse en formas más convenientes para demostrar propiedades y relaciones entre ellas:

$$i) \quad x = \sin^2 \theta \Rightarrow dx = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

$$\Rightarrow I_\beta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

$$ii) \quad x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$\Rightarrow I_\beta = \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

$$iii) \quad e^{-x} = y \Rightarrow x = \ln \frac{1}{y} \Rightarrow dx = -\frac{dy}{y}$$

$$I_\tau = - \int_1^0 y \left(\ln \frac{1}{y} \right)^{n-1} \frac{dy}{y} = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{y} \right)^{n-1} dy$$

$$iv) \quad x = y^2 \Rightarrow dx = 2y dy$$

$$\Rightarrow I_\tau = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2n-1} dy.$$

Puesto que I_β e I_τ dependen de parámetros, se acostumbra expresarlas del siguiente modo:

$$\left. \begin{array}{l} I_\beta = \beta(m, n) \\ I_\tau = T(n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{En ocasiones, se denominan a} \\ \text{estas funciones como "integrales} \\ \text{Eulerianas"} \end{array}$$

Algunas propiedades de las integrales Eulerianas:

1.- $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

Demostración:

Haciendo: $x = 1 - z \Rightarrow dx = -dz$

$$\begin{aligned}\beta(m, n) &= - \int_1^0 (1-z)^{m-1} z^{n-1} dz \\ &= \int_0^1 z^{n-1} (1-z)^{m-1} dz = \beta(n, m) \checkmark\end{aligned}$$

2.- Fórmula de reducción para I_β :

$$\beta(m, n) = \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)} \beta(m-1, n-1)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\text{De i): } \beta(m, n) &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \\ &= \frac{2n-2}{2m+2n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-3} \theta d\theta = \\ &= 2 \frac{n-1}{m+n-1} \cdot \frac{m-1}{m+n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-3} \theta \cos^{2n-3} \theta d\theta \\ \Rightarrow \beta(m, n) &= \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)} \beta(m-1, n-1) \checkmark\end{aligned}$$

3.- Cálculo directo de β :

Siendo $\beta(1, 1) = 1$; aplicando reiteradamente la propiedad 2 resulta:

$$\beta(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

$$4.- \beta(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

Demostración:

$$\text{de ii): } \beta(m, n) = \int_0^1 \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy + \int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

Haciendo $y = \frac{1}{x}$ en la 2ª integral:

$$\int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

$$\Rightarrow \beta(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \checkmark$$

5.- Cálculo de $\Gamma(n)$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Demostración:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x} dx$$

Integrando por partes:

$$u = x^{n-1}; \quad dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \Gamma(n) = -x^{n-1} e^{-x} \Big|_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{e^x} dx$$

$$= 0 + (n-1) \Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2) \Gamma(n-2) \dots$$

$$\Gamma(n-m+1) = (n-m) \Gamma(n-m)$$

$$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)(n-2) \dots (n-m) \Gamma(n-m)$$

$$\text{puesto que } \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \quad \checkmark$$

$$6.- \beta(m, n) = \frac{(m-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(n+1)n}$$

Demostración:

de ii): $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy = \frac{(m-1)(m-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(n+1)n} \quad \checkmark$$

7.- Relación entre $\beta(m, n)$ y $\Gamma(n)$:

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

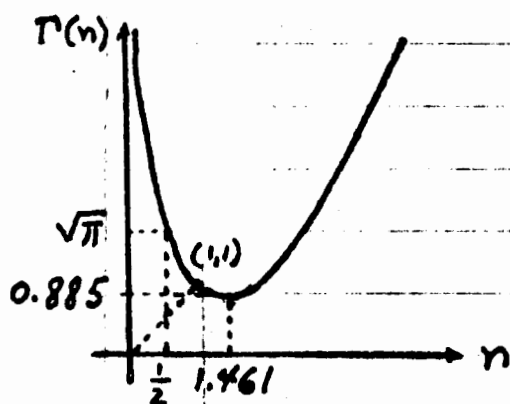
Demostración: (de 3.- y 5.-); ó bien:
De 6.-

$$\begin{aligned} \beta(m, n) &= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\dots(n+1)n(n-1)!} \\ &= \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \end{aligned}$$

De 5.-

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad \checkmark$$

8.- Curva Γ



Puesto que: $\Gamma(0) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x e^x} = \infty$.

$\Rightarrow x=0$ es asíntota a la curva.

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Ejercicios:

- 1) Calcular: a) $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; b) $\Gamma(\frac{1}{2})$

Solución:

- a) $m = n = \frac{1}{2}$ en i):

$$\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

- b) de 7.-

$$\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{1}$$

$$\Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

- 2) Calcular la integral de Gauss: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

Solución:

de iv) para $n = \frac{1}{2}$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^0 dy.$$

del problema 1) b) anterior:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

- 3) Integrales de Fresnel: $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$; $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$.

Demstrar que:

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Solución:

Puesto que:

$$e^{-ix^2} = \cos x^2 - i \sin x^2 \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$$

resulta:

$$\int_0^{\infty} e^{-ix^2} dx = \int_0^{\infty} (\cos x^2 - i \sin x^2) dx$$

haciendo $ix^2 = t^2$ en la 1ª integral.

$$\Rightarrow x = \frac{t}{\sqrt{i}}$$

$$\text{pero } \frac{1}{\sqrt{i}} = i^{-\frac{1}{2}} = \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-i}{\sqrt{2}} t \Rightarrow dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \cos x^2 dx - i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

igualando partes reales e imaginarias, y teniendo en cuenta que $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \checkmark$$

4) Calcular: $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$

Solución:

Haciendo $x = y^4 \Rightarrow dx = 4y^3 dy$

$$\Rightarrow I = 4 \int_0^1 y^3 (1-y)^{-\frac{1}{2}} dy = 4 \beta\left(4, \frac{1}{2}\right)$$

de la propiedad 7.-

$$I = 4 \frac{\Gamma(4) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{128}{35}$$

5) Calcular: $I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x^2+1)(x+1)^2} dx$

Solución:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right]$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\infty} x^{-9/5} (x^2+1)^{-1} dx - \int_0^{\infty} x^{-9/5} (x+1)^{-2} dx = I_1 - I_2$$

Haciendo, en I_1 : $x^2 = \frac{t}{1-t} \Rightarrow x^2+1 = \frac{1}{1-t}$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-1/2} (1-t)^{-3/2} dt; \text{ si } x \rightarrow \infty, t \rightarrow 1:$$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-9/10} (1-t)^{-1/10} dt = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{10}\right) \Gamma\left(\frac{9}{10}\right)$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}}$$

Haciendo, en I_2 : $x = \frac{z}{1-z} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{1-z}$

$$\Rightarrow dx = \frac{dz}{(1-z)^2}; \text{ si } x \rightarrow \infty, z \rightarrow 1$$

$$I_2 = \int_0^1 z^{-4/5} (1-z)^{4/5} dz = \beta\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(\frac{9}{5}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{4}{5} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{5}}$$

$$\Rightarrow I = \pi \left(\frac{1}{4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}} - \frac{2}{5 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}} \right)$$

Prueba de Comparación para integrales impropias de segunda clase.

i) Sean f y g funciones continuas en $(a, b]$; siendo $0 \leq f \leq g$ en $(a, b]$.

Se afirma: Si $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge.

Demostración:

Si $\varepsilon > 0$

$$\int_{a+\varepsilon}^b f \leq \int_{a+\varepsilon}^b g \leq \int_a^b g$$

Si $\varepsilon \rightarrow 0$, la primera integral se incrementa, pero permanece acotada, $\Rightarrow$ tiende a un límite, $\Rightarrow \int_a^b g$ converge.

ii) Si $0 \leq g \leq f$ en $(a, b]$.

Se afirma: $\int_a^b g$ diverge $\Rightarrow \int_a^b f$ diverge

La demostración es análoga a la del caso i)

Ejemplos: Empleando la prueba de comparación, determinar si convergen o divergen las siguientes integrales impropias:

i) $\int_0^1 \frac{|\cos 3x|}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

$$\frac{|\cos 3x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq x^{-\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{|\cos 3x|}{\sqrt{x}} dx$ converge, puesto que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge ($p = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ integral propia)

$$2) \int_3^6 \frac{\ln x}{(6-x)^2} dx.$$

Solución:

$$\text{Si } x \geq 3 \Rightarrow \ln x > 1; (\ln 3 = 1.09861)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{(6-x)^2} > \frac{1}{(6-x)^2}$$

por tanto que

$$\int_3^6 \frac{dx}{(6-x)^2} \text{ diverge } (p=2>1)$$

$$\Rightarrow \int_3^6 \frac{\ln x}{(6-x)^2} dx \text{ diverge.}$$

Convergencia uniforme en integrales impropias

Las definiciones, propiedades o teoremas que se darán a continuación se refieren a integrales impropias de primera clase; sin embargo pueden formularse resultados análogos para integrales impropias de las Clases B o C.

Habiéndose establecido una analogía entre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, y la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx$ y habiéndose establecido condiciones bajo las cuales es posible derivar o integrar series término a término, en forma natural surge la pregunta: ¿Cuándo es permisible derivar o integrar bajo el signo de integral en una integral impropia?

Anteriormente dedujimos la manera de derivar:

$$\phi(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha) dx \quad (1) \quad [\alpha_1, \alpha_2]$$

Nos proponemos ahora determinar cuando es admisible o válido el resultado obtenido para $\phi'(\alpha)$.

Definición: Se dice que la integral (1), que converge en $[\alpha_1, \alpha_2]$ es "uniformemente" convergente en $[\alpha_1, \alpha_2]$, si es posible hallar para cada $\epsilon > 0$, un número $M_1 = M_1(\epsilon)$; pero que no depende de α , tal que

$$\left| \phi(\alpha) - \int_a^u f(x, \alpha) dx \right| < \epsilon, \text{ para toda } \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]; u > M_1 \quad (2)$$

Si se observa que:

$$\left| \phi(\alpha) - \int_a^u f(x, \alpha) dx \right| = \left| \int_u^\infty f(x, \alpha) dx \right|$$

lo que viene a corresponder en una serie al residuo, después de M , términos.

Si se cumple la desigualdad (2) se dice que la integral impropia (1) converge "uniformemente" a $\phi(\alpha)$.

Ejemplo 1) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$ converge uniformemente a $\frac{1}{\alpha}$ en el intervalo $[1, 2]$; puesto que:

$$\left| \frac{1}{\alpha} - \int_0^u e^{-\alpha x} dx \right| = \frac{e^{-\alpha u}}{\alpha} \leq e^{-\alpha u} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow u > \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad ; \quad M_1 = \ln \frac{1}{\varepsilon} \text{ (independiente de } \alpha \text{)}$$

2) Si: $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = 1$, si $\alpha > 0$, $\alpha \in (-\infty, \infty)$

Demstrar que $\phi(\alpha)$ converge uniformemente a 1 en $\alpha \geq \alpha_1 > 0$

Solución:

$$\left| 1 - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = \left| 1 - (1 - e^{-\alpha u}) \right| = e^{-\alpha u} \leq e^{-\alpha_1 u} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow u > \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad ; \quad M_1 = \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{\varepsilon} \quad (3)$$

$\Rightarrow \phi(\alpha)$ converge uniformemente a 1 en $\alpha \geq \alpha_1 > 0$

3) $\phi(\alpha) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx$ no converge uniformemente en $x \in [0, 1]$, aun cuando converge (en el sentido ordinario) en cada punto de ese intervalo.

Demostración:

$$\phi(\alpha) = 1, \text{ si } \alpha > 0$$

$$\phi(\alpha) = 0, \text{ si } \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \left| \phi(\alpha) - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = e^{-\alpha u} \quad ; \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$\text{si } \alpha = 0 \Rightarrow \left| \phi(\alpha) - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = 0$$

escogiendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$, si existiera M_1 , se debería tener para $u > M_1$,

$$\left| \phi(\alpha) - \int_0^u \alpha e^{-\alpha x} dx \right| = e^{-\alpha u} < \frac{1}{2} \quad \forall \alpha \in (0, 1]$$

lo cual es falso, puesto que para cada $u > 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} e^{-\alpha u} = 1$$

Si se observa la ecuación (3) del problema 2) anterior, se comprueba que si $\alpha_i \rightarrow 0 \Rightarrow M_i \rightarrow \infty$, por lo cual $\phi(\alpha)$ en el problema 3) no puede ser uniformemente convergente para $\alpha > 0$

Prueba M de Weierstrass para convergencia uniforme de integrales impropias:

Si para toda $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ resulta $|f(x, \alpha)| \leq M(x)$, siendo la función $M(x) \geq 0$; $\int_a^\infty M(x) dx$ converge:

Se afirma que $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ es absolutamente y uniformemente convergente en α , $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

Demostración:

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x, \alpha) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x, \alpha)| dx \quad ; \quad x_2 > x_1$$

$$< \int_{x_1}^{x_2} M(x) dx$$

Dado que $\int_a^\infty M(x) dx$ converge por hipótesis;

$\Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $M_1 = M_1(\varepsilon)$ tal que:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) dx < \varepsilon \quad \text{para } x_2 > x_1 > M_1; \text{ siendo}$$

M_1 independiente de α .

$\Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon$ para $x_2, x_1 > M_1$ (independiente de α), $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ es absolutamente y uniformemente convergente en α , $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ ✓

Ejemplos: Empleando la prueba M de Weierstrass, estudiar la convergencia uniforme y absoluta de las siguientes integrales:

$$1) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx$$

Solución:

Sea $M(x) = e^{-cx}$; $\int_0^{\infty} e^{-cx} \, dx$ converge

$$|e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-cx} \text{ para toda } \alpha \geq c > 0$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x \, dx$ converge uniformemente y absolutamente en $c \leq \alpha < \infty$

$$2) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \, dx$$

Solución:

Sea $M(x) = e^{-x}$; $\int_0^{\infty} e^{-x} \, dx$ converge

$$|e^{-\alpha x}| \leq e^{-x} \quad ; \quad \alpha \in [1, 2]$$

$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \, dx$ es absoluta y uniformemente convergente en $1 \leq \alpha \leq 2$

$$3) \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \, dx$$

Solución:

Sea $M(x) = x^{-2}$; $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge

$$|\alpha e^{-\alpha x}| < x^{-2} \text{ para } x \text{ lo suficientemente grande,}$$

digamos $x \geq x_0 \Rightarrow \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} \, dx$ converge uniformemente para $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

4) Si en el ejemplo anterior $x > 0$; $\frac{d}{dx} \alpha e^{-\alpha x} = 0$
 $\Rightarrow \alpha x = 1$; $\alpha = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq \alpha \leq 1} f(x, \alpha) = \frac{1}{xe}$$

Dado que $\int_1^{\infty} \frac{1}{xe} dx = \infty$

$\Rightarrow$ falla la prueba M de Weierstrass, lo cual no significa que la integral no sea uniformemente convergente: para determinar si es o no uniformemente convergente debe recurrirse a otro método.

5) $\int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{\alpha}}{\sqrt{x}} dx$

Solución:

Sea: $M(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$$\left| \frac{\sin \frac{x}{\alpha}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad 0 < A \leq \alpha \leq B$$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin \frac{x}{\alpha}}{\sqrt{x}} dx$ converge absoluta y uniformemente

te en el intervalo $0 < A \leq \alpha \leq B$

Propiedades de las integrales uniformemente convergentes:

1.- Si: $\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x, \alpha) dx$

converge uniformemente en $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, entonces $\phi(\alpha)$ es continua en ese mismo intervalo.

Demostración:

Sea: $\phi(\alpha) = \int_a^u f(x, \alpha) dx + R(u, \alpha)$

siendo: $R(u, \alpha) = \int_u^\infty f(x, \alpha) dx$

$$\Rightarrow \phi(\alpha+h) = \int_a^u f(x, \alpha+h) dx + R(u, \alpha+h)$$

$$\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha) = \int_a^u [f(x, \alpha+h) - f(x, \alpha)] dx + R(u, \alpha+h) - R(u, \alpha)$$

$$\Rightarrow |\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| \leq \int_a^u |f(x, \alpha+h) - f(x, \alpha)| dx + |R(u, \alpha+h)| + |R(u, \alpha)| \quad (1)$$

Dado que, por hipótesis $\phi(\alpha)$ es uniformemente convergente en $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\Rightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$, puede encontrarse M_1 (independiente de α) tal que para $u > M_1$: $|R(u, \alpha+h)| < \frac{\varepsilon}{3}$; $|R(u, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (2)

Puesto que $f(x, \alpha)$ es continua, se puede hallar $\delta > 0$, correspondiendo a cada $\varepsilon > 0$, tal que

$$\int_a^u |f(x, \alpha+h) - f(x, \alpha)| dx < \frac{\varepsilon}{3} ; |h| < \delta \quad (3)$$

(2) y (3) en (1) $\Rightarrow$

$$|\phi(\alpha+h) - \phi(\alpha)| < \varepsilon, \text{ para } |h| < \delta$$

$\Rightarrow \phi(\alpha)$ es continua. $\checkmark$

Obsérvese que se ha supuesto en la demostración que: $\alpha_1 \leq \alpha < \alpha + h \leq \alpha_2$

$\Rightarrow$ si $\alpha = \alpha_1$ ($h > 0$), supone entonces continuidad por la derecha.

Esta demostración es análoga a la que se expuso en el caso de series. Es interesante observar la analogía que existe entre diversas otras propiedades de las integrales impropias y las series uniformemente convergentes.

2.- Si $f(x, \alpha)$ es continua para $x \geq a$; $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$; siendo $\int_a^\infty f(x, \alpha) dx$ uniformemente convergente para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\Rightarrow$ para $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \phi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_a^\infty f(x, \alpha) dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f(x, \alpha) dx$$

Si α_0 es uno de los extremos del intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$, los límites serán laterales.

Esta propiedad justifica la aplicación de la regla de Leibnitz a integrales impropias de primera clase, cuando $\int_a^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$ converge uniformemente en $[\alpha_1, \alpha_2]$.

3.- Bajo las mismas condiciones de la propiedad 2. anterior, se verifica lo siguiente:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha) d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^\infty f(x, \alpha) dx \right] d\alpha = \int_a^\infty \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha) d\alpha \right] dx$$

ó sea, se puede cambiar el orden de integración.

4.- Si $f(x, \alpha)$ es continua; siendo $f_\alpha(x, \alpha)$ continua para $x \geq a$ y $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$; teniendo además que $\int_a^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$ converge uniformemente en $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, $\Rightarrow a \neq f(\alpha)$

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_a^\infty f_\alpha(x, \alpha) dx$$

Si $a = f(\alpha)$, entonces debe aplicarse la regla de Leibnitz.

Ejemplos

1) Demostrar que: $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \neq \int_0^{\infty} (\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha e^{-\alpha x}) dx$

Solución:

Puesto que $\phi(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ no converge uniformemente para $\alpha \geq 0$, como se vio en un ejemplo anterior, no puede afirmarse que $\phi(\alpha)$ sea continua para $\alpha \geq 0 \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \phi(\alpha)$ puede no ser $= \phi(0)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-\alpha x} \right]_{x=0}^b \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\lim_{b \rightarrow \infty} [1 - e^{-\alpha b}]) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

por otra parte:

$$\int_0^{\infty} (\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha e^{-\alpha x}) dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0 \neq 1 \quad \checkmark$$

2) Demostrar que: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (1 - \cos x) \frac{dx}{x^2} = \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln(\alpha^2 + 1); \alpha > 0$

Solución:

De la propiedad 3.:

$$\int_0^r \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos rx dx \right] dr = \int_0^{\infty} \left[\int_0^r e^{-\alpha x} \cos rx dr \right] dx \quad (1)$$

pero: $\int_0^r e^{-\alpha x} \cos rx dr = \left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \sin rx \right]_0^r = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \sin rx$

substituyendo en (1)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \sin rx dx = \int_0^r \left[\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos rx dx \right] dx \quad (2)$$

pero: $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos rx dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\alpha x} \cos rx dx =$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-\alpha x} (r \sin rx - \alpha \cos rx)}{\alpha^2 + r^2} \Big|_0^b = \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}$$

Substituyendo en (2):

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin rx dx = \int_0^r \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2} dr = \tan^{-1} \frac{r}{\alpha} \quad (3)$$

Integrando (3) con respecto a r ; de 0 a r :

$$\int_0^r \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin rx dx \right] dr = \int_0^r \tan^{-1} \frac{r}{\alpha} dr \quad (4)$$

Aplicando la propiedad 3:-

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[\int_0^r \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin rx dr \right] dx &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x}}{x^2} [-\cos rx]_0^r \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^2} (1 - \cos rx) dx \quad (5) \end{aligned}$$

por otra parte:

$$\int_0^r \tan^{-1} \frac{r}{\alpha} dr = r \tan^{-1} \frac{r}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln(\alpha^2 + r^2) \quad (6)$$

(5) y (6) en (4) para $r=1$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^2} (1 - \cos x) dx = \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln(\alpha^2 + 1) \quad \checkmark$$

3) Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{\pi}{2}$

Solución:

Dado que para $\alpha \geq 0$; $x \geq 0$:

$$e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\text{siendo: } \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx + \int_{\pi}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

La primera integral de 2º miembro es integral propia, puesto que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

La segunda integral del 2º miembro es también convergente, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = 0 ; (A=0, p=3/2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ De la prueba M de Weierstrass que:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \text{ converge uniformemente;}$$

$\Rightarrow$ de la 1ª propiedad, representa una función continua de α para $\alpha \geq 0$

Aprovechando los resultados del problema anterior; empleando la propiedad 2:-

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (1 - \cos x) \frac{dx}{x^2} = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\tan^{-1} \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln(\alpha^2 + 1) \right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \checkmark$$

4) Calcular $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx = \phi(\alpha)$

Solución:

Empleando la propiedad 4:-

Integrando por partes:

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_0^{\infty} -x e^{-x^2} \sin \alpha x dx$$

$$= \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \sin \alpha x \right]_0^{\infty} - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx = -\frac{\alpha}{2} \phi(\alpha)$$

veremos que queda justificado el uso de la

propiedad 4.- ya que $\int_0^\infty x e^{-x^2} \sin \alpha x dx$ converge uniformemente para toda α ; lo cual puede comprobarse mediante la prueba de Weierstrass, observando que:

$$|x e^{-x^2} \sin \alpha x| \leq x e^{-x^2};$$

$$\text{siendo: } \int_0^\infty x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-x^2} \text{ (converge)}$$

por otro lado:

$$|e^{-x^2} \cos \alpha x| \leq e^{-x^2}$$

$$\text{siendo: } \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (integral de Gauss)}$$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x dx = \phi(\alpha)$ es uniformemente convergente; $\Rightarrow$ de la propiedad 1.- $\phi(\alpha)$ es una función continua.

Observando que, de la propiedad 2.- resulta:

$$\phi(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

habiendo obtenido:

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = -\frac{\alpha}{2} \phi \Rightarrow \frac{d\phi}{\phi} = -\frac{1}{2} \alpha d\alpha$$

$$\ln \phi + \ln c = -\frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow c\phi = e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$c\phi(0) = c \frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^0 = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Rightarrow \phi(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Algunos libros de referencia:-

- 1- "Introduction to analysis" Vol. I y II
N. B. Haaser, J. P. F. Gale, J. A. Sullivan.
(Edit. Blaisdell) 1959.
- 2- "Calculus" Vol. I y II.
T. M. Apostol.
(Edit. Blaisdell) 1965
- 3- "University Mathematics". Vol. II.
J. R. Britton, P. B. Krieger, L. W. Rutland.
(Edit. Freeman) 1965
- 4- "Advanced Calculus"
E. V. Widder
(Edit. Prentice Hall) 1963
- 5- "Advanced Calculus"
W. Kaplan
(Edit. Addison Wesley) 1956
- 6- "Advanced Calculus"
R. C. Buck
(Edit. McGraw Hill) 1965
- 7- "Mathematics of physics and modern engineering"
I. S. Sokolnikoff, R. M. Redheffer.
(Edit. McGraw Hill) 1958
- 8- "Modern mathematical analysis"
M. H. Protter, C. B. Morrey
(Edit. Addison Wesley) 1964
- 9- "Advanced Calculus"
L. Brand
(Edit. John Wiley) 1958

10.- "Advanced Calculus"

M. R. Spiegel.

(Edit. Schaum) 1963

11.- "Numerical analysis"

F. Scheid

(Edit. Schaum) 1968

F/DEPFI/A-1/Pte.8/1979/EJ.2



702218

BIBLIOTECA CORRIENTA DEL INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
Y DE LA DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO EN INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA