UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA

DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Notas para el curso introductorio: Matemáticas 0041

(primera parte)

Conjuntos

Arturo Delgado R.
Agosto de 1979

G.2.

MATEMATICAS 041 (CURSO INTRODUCTORIO)

INTRODUCCION.- El propósito que se ha tenido al elaborar estas notas es recopilar en un solo volumen lós conceptos matemáticos básicos esenciales, necesarios para el estudio de las asignaturas que componen los planes de estudios de diversas maestrías que se ofrecen en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El estudio de estos apuntes supone que previamente se han aprobado los cursos de matemáticas que se imparten a nivel de licenciatura en escuelas profesionales. Dado que de hecho los programas de matemáticas difieren tanto en duración como en contenido de una universidad a otra, se pretende con estas notas unificar las ideas y conceptos básicos que los alumnos deben poseer al iniciar sus estudios de postgrado en la División de Estudios Superiores.

El alumno hallará que ciertas técnicas de cálculo se dan de hecho como ya conocidas, por ejemplo, métodos del álgebra elemental, trigonometría, métodos elementales de derivación e integración, etc.

Con el propósito de mejorar posteriores impresiones de estas notas, cualquier crítica o comentario de personas que tengan a bien hacerlo, será no sólo bien recibido sino agradecido por el autor.

ARTURO DELGADO RODRIGUEZ

MARZO DE 1977

2199

CONJUNTOS.- (6 clases).- Introducción: La teoría de los conjuntos es hoy en día básica en el estudio de casi todas las ramas de las matemáticas: teoría de probabilidades, análisis matemático, circuitos eléctricos, lógica matemática, etc.

El establecimiento de la teoría de los conjuntos se atribuye a Georg Cantor (1845-1918).

El concepto de "conjunto" no se define en forma precisa. Para explicar lo que se entiende por conjunto, se da la idea intuitiva:

Un conjunto es una colección o agregado de objetos bien definidos, los cuales deben poseer una propiedad ó atributo característico que no deje lugar a duda si dicho objeto pertenece ó no a la colección *

Ejemplo: Los ex-presidentes de la República mexicana; otro ejemplo de conjunto podría ser el de los números primos mayores que 18 y menores que 211; etc.

Los elementos de un conjunto pueden quedar definidos al enumerar éstos; por ejemplo: el conjunto constituido por los tres números: 2, 5, 9,; etc.

Pueden, en otros casos, distinguirse los elementos de un conjunto, citando una propiedad común a todos ellos; por ejemplo: el conjunto de los números pares.

* Obsérvese que no se exige homogeneidad, cada objeto definido en un conjunto dado se denomina "elemento" del conjunto.

De lo anterior se infiere que los conjuntos pueden tener un número finito ó infinito de elementos.

Notación.- Se acostumbra designar los conjuntos con letras mayúsculas.

Los elementos de un conjunto se distinguen con letras minúsculas.

Cuando un conjunto queda definido al enumerar sus elementos, se escribe:

$$A = \{a,e,i,o,u\} = \{e,u,a,o,i\}, \text{etc.}$$

$$B = \{2,5,9\} = \{2,9,5\} = \{9,5,2\}, \text{etc.}$$

Para indicar que el elemento 5 está en el conjunto B se anota:

$$5 \in B$$

Si un elemento no está en un conjunto dado, se denota:

$$8 \notin B$$

Cuando el conjunto se define expresando una propiedad común de todos sus elementos, se emplea una linea vertical | (ó a veces dos puntos :) cuyo significado es "tal que".

Ejemplos:

$$C = \{x|x > 25\}$$

$D = \{l \mid l$ es un libro de la Biblioteca Nacional$\}$

Subconjunto.- Se dice que el conjunto P es un "subconjunto" del conjunto R, si cada elemento de P es también elemento de R. La misma idea se expresa diciendo que P está contenido en R; ó bien, que R contiene a P. (P está incluído en R). La noción de subconjunto se expresa en forma simbólica como sigue:

$$P \subseteq R$$

$$R \supseteq P$$

Si el conjunto P tiene menos elementos que el conjunto R, se dice que P es un subconjunto "propio" de R, y ello se indica:

$$P \subset R$$

Ejemplo: sea: A el conjunto de letras del alfabeto castellano; siendo B el conjunto de vocales del mismo alfabeto, podemos entonces escribir

$$A \supset B \quad ó \quad B \subset A$$

Después de dar estas definiciones preliminares, enfocaremos nuestra atención a la elaboración de definiciones y reglas que nos permitan construir una álgebra de conjuntos.

Igualdad.- Se afirma que dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si, ambos conjuntos consisten de los mismos elementos; esto es, cada elemento de A pertenece a B y viceversa. Ejemplo

$$A = \{a,b,c\} \; ; \; B = \{x,y,z\} = \{x,z,y,z,z,y,z\}$$

Si $A = B$, debe tenerse que el elemento a de A es exactamente el mismo que alguno de los elementos de B; así por ejemplo puede tenerse: $a = z$; $b = x$; $c = y$

Una técnica usual para demostrar la igualdad de dos conjuntos consiste en hacer ver que se cumplan las dos condiciones siguientes:

Si $A \subset B$; además $B \subset A$, entonces $A = B$

Conjunto vacío (ó nulo).- Conjunto vacío es aquel conjunto que no contiene elementos. El conjunto vacío se representa con el símbolo ϕ. Ejemplo:

$$\phi = \{ \text{ seres humanos vivos mayores de 1000 años } \}$$

Obsérvese que $\phi \neq \{\phi\}$; puesto que el conjunto ϕ del primer miembro, por definición, no contiene ningún elemento; en tanto que el conjunto $\{\phi\}$ del segundo miembro contiene un elemento.

El conjunto vacío ϕ se considera como un subconjunto de cualquier conjunto sea cual fuere este último. $\phi \subseteq A$, para todo A, Conjunto universal (ó universo).- El conjunto universal es el conjunto del cual se derivan todos los subconjuntos que pueden intervenir en un problema particular. Designaremos el conjunto universal con el símbolo $\bar{U}$.

El propósito del conjunto $\bar{U}$ es el de evitar paradojas.

Ejemplo:

Si consideramos como universo el conjunto de números reales, se tiene por ejemplo: $\ln 1 = 0$; en tanto que el logaritmo natural de un número negativo no existe. En cambio, si el universo lo constituye el conjunto de números complejos, se encuentra lo siguiente:

$$\ln 1 = 2i\pi \ ; \qquad \ln(-1) = i\pi$$

Cuando se presenta el problema de asignar valores a una variable x en una ecuación, debe decidirse qué valores de x son admisibles: este conjunto de valores constituye el universo.

Obsérvese que el conjunto $\bar{U}$ puede ser considerado como un subconjunto de si mismo. Otra observación: $\phi \subseteq A \subseteq \bar{U}$; para todo A.

Conjunto potencia.- Sea A un conjunto constituido por un número n de elementos. El conjunto potencia de A es el conjunto cuyos elementos son precisamente cada uno de los 2^n subconjuntos que es factible formar al combinar los n elementos del con junto A.

El conjunto vacío ϕ, y el conjunto universal $\bar{U}$ deben formar parte de los 2^n subconjuntos elementos del conjunto potencia; en efecto:

Sea $C_n^r = \binom{n}{r}$ las combinaciones de n objetos tomados en subconjuntos de r objetos ($r \leq n$). El número total posible de subconjuntos que resultan es: ?

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

donde: $\binom{n}{0}$ nos da el conjunto vacío ϕ en tanto que $\binom{n}{n}$ da el conjunto universal $\bar{U}$.

Notación: El conjunto potencia de A se designa 2^A. Ejemplo: Sea $A = \{a,b\}$

$$2^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

Definición simbólica de conjunto potencia:

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Ejemplos: 1) Si $A \subset B$ y $B \subset A$, demostrar que $A = B$

Solución:

Si $x \in A \rightarrow x \in B$, puesto que $A \subset B$

Por otro lado:

Si $x \in B \rightarrow x \in A$, ya que $B \subset A$

$\rightarrow$ A y B tienen los mismos elementos $\rightarrow A = B$

2) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, demostrar que $A \subset C$

Debemos hacer ver que cada elemento en A está también en C.

Solución:

Si $x \in A \rightarrow x \in B$, ya que $A \subset B$; pero por ser $B \subset C \rightarrow x \in C$; luego $x \in A \rightarrow x \in C$, por lo cual se deduce que $A \subset C$

3) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, demostrar que $A \subset C$.

Puesto que $A \subset B$ y $B \subseteq C$, resulta que, cuando más, $A \subseteq C$

Pero si $A = C$; siendo por hipótesis $B \subseteq C$, $\rightarrow B \subseteq A$, lo cual contradice la hipótesis de que $A \subset B$; por lo cual $A \neq C$ resultando, por lo tanto, $A \subset C$

4) Determinar el conjunto potencia 2^A; siendo: $A = \{\{a,b\},c\}$.

Solución

Puesto que el conjunto A tiene 2 elementos: $\{a,b\}$ y $c \rightarrow 2^A$ contendrá $2^2 = 4$ elementos:

$$2^A = \{\phi, \{\{a,b\}\}, \{c\}, \{\{a,b\},c\}\}$$

5) Diga si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas:

a) $\phi = \{0\}$

b) $0 = \{\phi\}$

c) $\{x\} \subset \{\{x\}\}$

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\phi \subset \{\{x\}\}$

f) $\{\{x\}, \{y\}\} \subset \{\{x\}, \{x,y\}\}$

Solución:

a) incorrecto: ϕ no tiene elementos; $\{0\}$ tiene un elemento.

b) incorrecto: 0 no es un conjunto.

c) incorrecto: elemento $\neq$ conjunto (ver inciso d)

d) correcto: $\{x\}$ es elemento del conjunto $\{\{x\}\}$

e) correcto: $\phi \subseteq A$, para todo conjunto A

f) incorrecto: $\{y\} \notin \{\{x\}, \{x,y\}\}$

6) Si a,b,c son elementos cualesquiera, determinar qué rela - ción debe existir entre ellos, de modo que sea cierta la igualdad:

$$\{\{a,b\}\} = \{\{a,b,c\}, \{c,b\}\}.$$

Dado que el conjunto del 1er miembro está constituido por un solo elemento que es el conjunto $\{a,b\}$, para que pueda verificarse la igualdad, debe tenerse que en el segundo miembro:

$$\{a,b,c\} = \{c,b\}$$

debiendo estos dos conjuntos ser iguales al conjunto $\{a,b\}$ del primer miembro:

$$\{a,b\} = \{a,b,c\} = \{c,b\}.$$

por lo cual debe tenerse que $a = c$

$$\{a,b\} = \{a,b,a\} = \{a,b\}.$$

En conclusión: si $a = c$:

$$\{\{a,b\}\} = \{\{a,b,c\}, \{c,b\}\}$$

Operaciones con conjuntos.-

Unión.- Se entiende por "unión" de dos conjuntos A y B, el conjunto C que resulta al considerar C constituido por los elementos que pertenecen á A ó á B ó a ambos.

Notación: $C = A \cup B$

Ejemplo: sean $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5\}$

$$C = A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Intersección.- Dados los conjuntos A y B, el conjunto "inter - sección" D tiene por elementos aquellos que son comunes a A y a B:

Notación: $D = A \cap B$

$D = A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$,

Ejemplo: $A = \{a,b,c,d\}$; $B = \{c,d,e\}$

$$D = A \cap B = \{c,d\}$$

Conjuntos ajenos (ó desunidos).- Dos conjuntos A y B son aje nos si no tienen ningún elemento común; esto es, si su intersec- ción es el conjunto vacío: $A \cap B = \phi$. Ejemplo:

$$A = \{1,2,3\}; \quad B = \{5,6\}.$$

$$A \cap B = \phi$$

Diferencia.- La "diferencia" E de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos están en A y no pertenecen á B

Notación: E = A-B

$$E = A-B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

Ejemplo: $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5\}$

$E = A-B = \{1,2\}$

Complemento.- El "complemento" del conjunto A es el conjunto A', cuyos elementos son los elementos del universo, que no pertenecen a A. (otra notación: $A' = \bar{A} = A^c$)

$$A' = \bar{U}-A = \{x | x \in \bar{U}, x \notin A\}$$

Ejemplo: Sean $\bar{U} = \{a,e,i,o,u\}$; $A = \{a,e\}$

$A' = \{i,o,u\}$

Los conceptos de unión e intersección pueden generalizarse para más de dos conjuntos:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

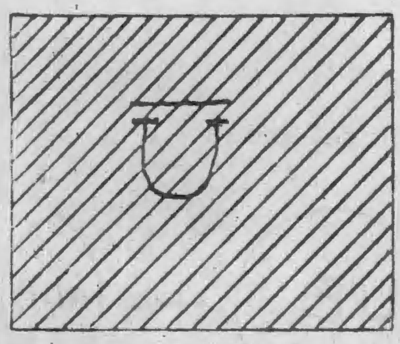
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

$$\bigcup_{S} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para al menos una } i \in S\}$$

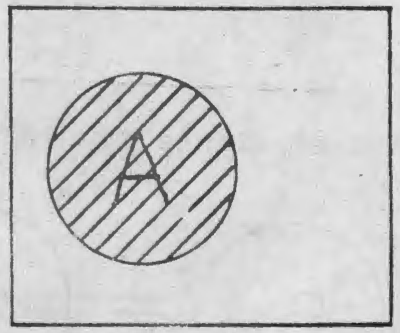
$$\bigcap_{S} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para toda } i \in S\}$$

siendo el conjunto de subconjuntos $\{A_i \mid i \in S\}$

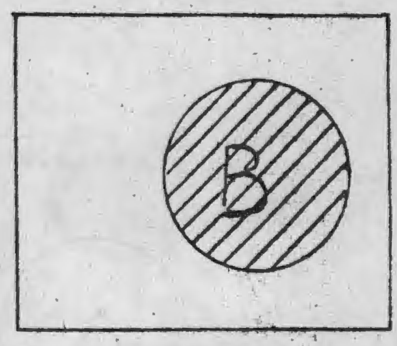
Diagramas de Venn (ó de Euler).- Son esquemas en los cuales los conjuntos se representan como áreas planas.



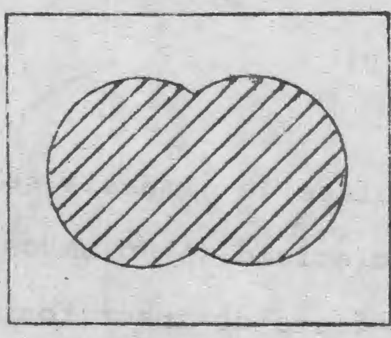
CONJUNTO UNIVERSO



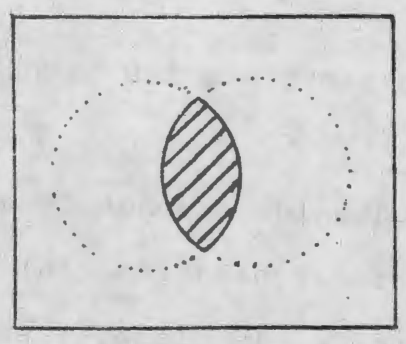
CONJUNTO A



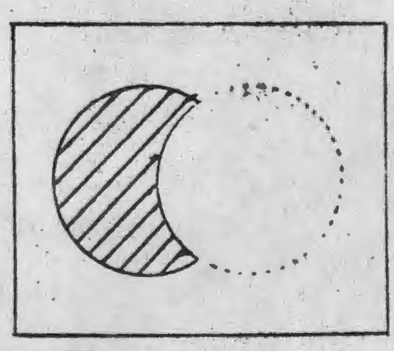
CONJUNTO B



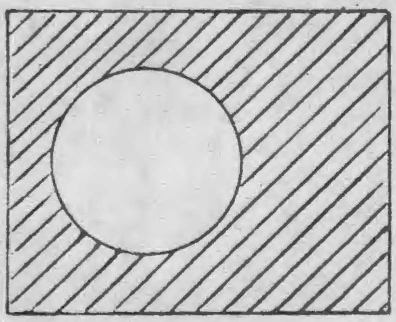
$A \cup B$



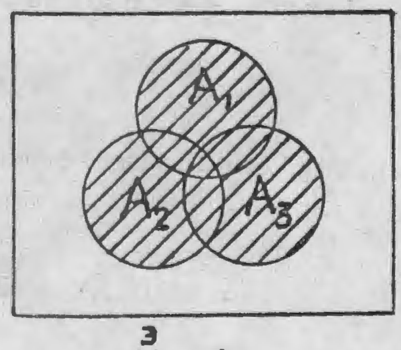
$A \cap B$



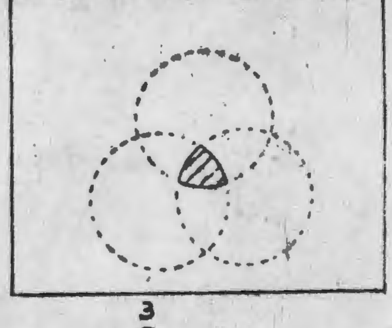
$A - B$



A'



$\bigcup_{i=1}^{3} A_i$

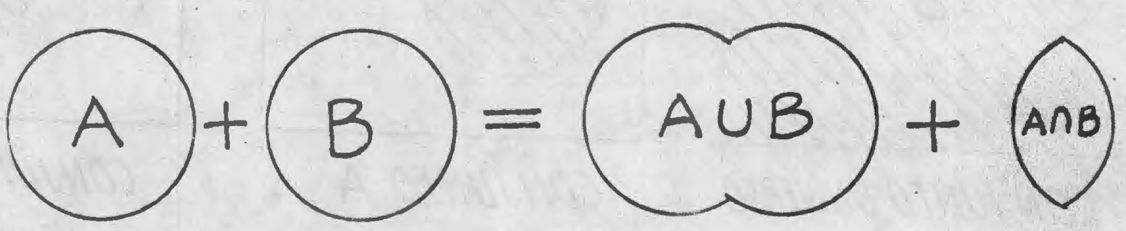


$\bigcap_{i=1}^{3} A_i$

<u>Fórmulas generales para relacionar número de elementos en conjun-tos</u>.- Relacionaremos el número de elementos que hay en dos con-juntos A y B, con el número de elementos en los conjuntos A U B y A ∩ B.

Designemos el número de elementos que hay en un conjunto, diga-mos el conjunto A como n A. (n A es un número, no un conjun-to)

Establezcamos la siguiente igualdad entre áreas:



ó sea:

$$n\,A + n\,B = n(A \cup B) + n(A \cap B)$$

Problema: Todos los alumnos de una clase de gimnasia se inscri-ben para practicar natación (N) ó atletismo (A), ó ambos. Si hay 200 alumnos en la clase, y en la lista de inscritos en nata-ción hay 104 nombres; en tanto que para atletismo hay inscritos 130 ¿cuántos alumnos se inscribieron para practicar ambos depor-tes?

Solución: a) Empleando la fórmula

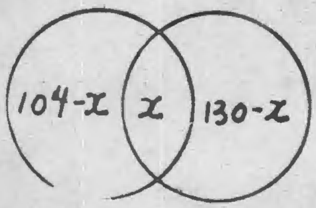
$$n(N \cup A) = 200$$

$$nN = 104; \quad nA = 130$$

$$nN + nA = n(N \cup A) + n(N \cap A)$$

$$\therefore \quad n(N \cap A) = 104+130-200 = 34$$

b) con auxilio de diagrama de Venn.



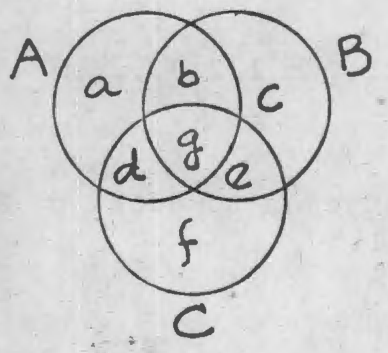
$$(104-x)+x+(130-x) = 200$$

$$234-x = 200$$

$$x = 34 = n(N \cap A)$$

Comprobar, para 3 conjuntos A, B, C, la siguiente fórmula:

$nA+nB+nC = n(A \cup B \cup C)+n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)-n(A \cap B \cap C)$ comprobación:



$$nA = a + b + d + g$$

$$nB = b + c + e + g$$

$$nC = d + e + f + g$$

$$nA+nB+nC =$$

$$= a+2b+c+2d+2e+f+3g =$$

$$= (a+b+d+g)+(b+c+e+g)+(d+e+f+g) =$$

$$= (a+b+c+d+e+f+g)+(b+g)+(d+g)+(e+g)-g$$

$$= n(A \cup B \cup C)+n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)-n(A \cap B \cap C)$$

Fórmula general para relacionar el número de elementos que existen en m conjuntos:*

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{C_m^1} n\,A_i - \sum_{i<j}^{C_m^2} n(A_i \cap A_j) + \dots$$

$$+ \sum_{i<j<k}^{C_m^3} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{p+1} \sum_{i<j<\dots<p}^{C_m^p} n(A_i \cap \dots \cap$$

$$\dots + (-1)^{m+1} \sum_{i<j<\dots<m}^{C_m^m} n(A_i \cap \dots \cap A_m)$$

donde:

$$1 < p < m; \; i,j,k\dots = 1,2,3,\dots,m$$

C_m^p = número de combinaciones de m objetos tomados p á p.

$$C_m^p = C_m^{m-p}$$

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{p!}$$ 9no

$$C_m^p = \frac{m!}{(m-p)!\,p!}$$

$$p! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot (p-1)p$$

$$C_m^m = C_m^o = 1, \text{ para toda } m = 0,1,2,\dots$$

* La fórmula se demuestra por inducción matemática en la segunda parte de estas notas.

Ejemplos:

i) $m = 3$

Solución:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = nA_1+nA_2+nA_3-n(A_1 \cap A_2)-n(A_1 \cap A_3)-n(A_2 \cap A_3)+$$

$$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Resultado que concuerda con el último problema, si $A_1 = A$; $A_2 = B$; $A_3 = C$.

ii) $m = 4$

Solución:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = nA_1+nA_2+nA_3+nA_4-n(A_1 \cap A_2)-n(A_1 \cap A_3)-n(A_1 \cap A_4)-$$

$$-n(A_2 \cap A_3)-n(A_2 \cap A_4)-n(A_3 \cap A_4)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+$$

$$+n(A_1 \cap A_3 \cap A_4)+n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

iii) $m = 5$

Solución

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = nA_1+nA_2+nA_3+nA_4+nA_5-$$

$$-n(A_1 \cap A_2)-n(A_1 \cap A_3)-n(A_1 \cap A_4)-n(A_1 \cap A_5)-n(A_2 \cap A_3)-$$

$$-n(A_2 \cap A_4)-n(A_2 \cap A_5)-n(A_3 \cap A_4)-n(A_3 \cap A_5)-n(A_4 \cap A_5)+$$

$$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_5)+n(A_1 \cap A_3 \cap A_4)+$$

$$+n(A_1 \cap A_3 \cap A_5)+n(A_1 \cap A_4 \cap A_5)+n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)+n(A_2 \cap A_3 \cap A_5)+$$

$$+n(A_2 \cap A_4 \cap A_5)+n(A_3 \cap A_4 \cap A_5)-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)-$$

$$-n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5)-n(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5)-n(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)-$$

$$-n(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

Observaciones:

1) El número de términos que debe tener el desarrollo de cada suma $\sum^{C_m^p}$ es precisamente C_m^p. Por ejemplo, la suma

$\sum_{i<j}^{C_m^2}$ tiene $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m^2-m}{2}$ términos.

2) Todos los términos que provienen del desarrollo de cualquier suma $\sum$, deben tener el mismo signo.

3) Los signos de las diversas sumas $\sum$, son alternados, y existen m sumas $\sum$ en el segundo miembro.

4) El número total de términos que se obtienen al desarrollar todas las sumas $\sum$ del segundo miembro es 2^m-1. Por ejemplo, en el desarrollo para $m = 5$ se obtuvieron: $2^5-1 = 32-1 = 31$ términos.

5) El último término del desarrollo puede escribirse:

$$\sum_{i<j<\ldots<m}^{C_m^m} n(A_i \cap \ldots \cap A_m) = n(\bigcap_{i=1}^{m} A_i)$$

6) La asociatividad de $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ y de $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ se demuestra más adelante.

Problema: En una bolsa hay 50 objetos, de los cuales:

14 son de color gris	$:nG = 14$	A_1
13 son radiactivos	$:nR = 13$	A_2
9 son en forma de cubo	$:nC = 9$	A_3
5 son grises y reactivos	$:n(G \cap R) = 5$	$A_1 \cap A_2$
7 son grises y cúbicos	$:n(G \cap C) = 7$	$A_1 \cap A_3$
4 son radiactivos y cúbicos	$:n(R \cap C) = 4$	$A_2 \cap A_3$
3 son grises, radiactivos y cúbicos	$:n(G \cap R \cap C) = 3$	

¿Cuántos objetos no son ni grises, ni radiactivos, ni cúbicos?

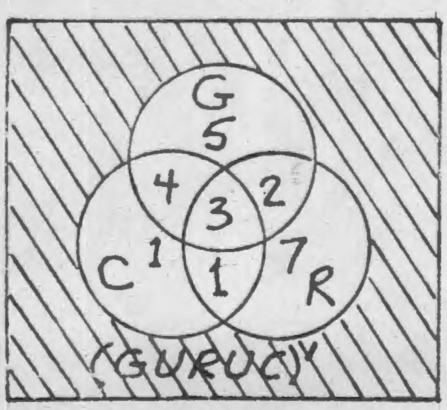
Solución: a) Se busca : $x = n(G \cup R \cup C)' \rightarrow x = n(\bar{U} - G \cup R \cup C)$

$\therefore$ aplicando la fórmula: $14+13+9 = n(G \cup R \cup C) + 5+7+4-3$

$\rightarrow n(G \cup R \cup C) = 23$

$\rightarrow x = 50-23 = 27$

b) Empleando diagramas de Venn:



$n(G \cup R \cup C) =$

$= 4+5+3+2+1+7+1 =$

$= 23$

$\bar{U} = 50$

$\rightarrow n(G \cup R \cup C)' = 50-23=27$

$\therefore$ 27 objetos (de los 50) no son, ni grises, ni radiactivos, ni cú - bicos.

Algunos métodos empleados para demostrar relaciones entre conjuntos.- Aun cuando para establecer la validez de una ecuación entre conjuntos es suficiente y basta con emplear una, cualquiera de las técnicas que se detallarán a continuación, sucede, en algunos casos, que un método en particular resulta, para determinados estudiantes, más claro o expedito que los otros métodos.

Para ilustrar los diversos métodos, nos referimos a un ejemplo concreto: supongamos que se desea probar la veracidad de la ecuación $A - B = A \cap B'$.

1^er método: A partir de las definiciones:

$$A-B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

$$= \{x | x \in A \text{ y } x \in B'\}$$

$$= A \cap B'$$

2° método: Haciendo ver que $A-B \subset A \cap B'$; además $A \cap B' \subset A-B \rightarrow$

$\rightarrow A-B = A \cap B'$.

a) Sea $x \in A-B$

$\rightarrow x \in A, x \notin B \rightarrow x \in B'$

$x \in A$ y $x \in B' \rightarrow x \in A \cap B'$

$\rightarrow A-B \subset A \cap B'$ ... (1)

b) Sea $x \in A \cap B'$

$\rightarrow x \in A$ y $x \in B'$

$\rightarrow x \in A$ y $x \notin B \rightarrow x \in A-B$

$\rightarrow A \cap B' \subset A-b$ ... (2)

de (1) y (2) resulta: $A-B = A \cap B'$

3^er^ método: Construyendo una "tabla de verdad".- Dado que un elemento x sólo puede "estar" o "no estar" en un determinado conjunto; indicamos con V (Verdad) en la tabla si x "está" en el conjunto, y con una F(Falso) si x "no está" en el conjunto.

Las combinaciones posibles para conjuntos A y B son las siguientes:

$$V \begin{cases} V \rightarrow VV \\ F \rightarrow VF \end{cases}$$

$$F \begin{cases} V \rightarrow FV \\ F \rightarrow FF \end{cases}$$

Se demuestra que la igualdad entre los dos miembros de una ecuación entre conjuntos queda establecida si las columnas correspondientes a cada miembro de la ecuación ~~que~~ en la tabla de verdad tienen las mismas entradas (V ó F) en los renglones correspondientes.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in B'$	$x \in A-B$	$x \in A \cap B'$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

1ª Observación: Una tabla de verdad debe tener 2^n renglones; siendo n el número de conjuntos diferentes involucrados en la proposición que se desea demostrar (en el ejemplo anterior, los conjuntos son A y B; por lo tanto $n = 2$; $2^n = 4$ renglones).

2ª Observación.- Las ecuaciones que relacionan operaciones entre conjuntos, en general, no admiten demostración mediante el diagrama de Venn, ya que un diagrama de Venn no puede incluir todas las situaciones posibles, como lo hace, por ejemplo, una tabla de verdad.

Más adelante se presentan ejemplos que ilustran lo expuesto en la 2ª observación.

Principio de "dualidad".- Si se intercambian las operaciones $\cap$ por $\cup$; cambiando asimismo los conjuntos $\mathcal{U}$ por ϕ en cualquier expresión entre conjuntos, la expresión que resulta se denomina "dual" de la expresión original.

Ejemplo: sea la ecuación:

$$(A \cap \overline{U}) \cap (\phi \cup A') = \phi$$

la dual es:

$$(A \cup \phi) \cup (\overline{U} \cap A') = \overline{U}$$

"Si ciertos axiomas implican sus propios duales, entonces el dual de cualquier teorema que es consecuencia de los axiomas es también consecuencia de los axiomas".

Por lo anterior, dado cualquier teorema y su demostración, el dual del teorema puede ser demostrado de manera análoga, usando el dual de cada paso sucesivo de la demostración original.

De modo que, si un teorema es verdadero, también lo es el dual de ese mismo teorema

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS

	L E Y	D U A L
1.- IDEMPOTENCIA	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
2.- CONMUTATIVIDAD	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3.- ASOCIATIVIDAD	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4.- DISTRIBUTIVIDAD	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5.- IDENTIDAD	$A \cup \phi = A$ $A \cup \overline{U} = \overline{U}$	$A \cap \overline{U} = A$ $A \cap \phi = \phi$
6.- COMPLEMENTO	$A \cup A' = \overline{U}$ $\overline{U}' = \phi$	$A \cap A' = \phi$ $\phi' = \overline{U}$
7.- DE MORGAN	$A' \cup B' = (A \cap B)'$	$A' \cap B' = (A \cup B)'$
8.- INVOLUCION	$(A')' = A$	

Enseguida daremos un ejemplo en el que se ilustra cómo, mediante la aplicación de los mismos razonamientos, es factible deducir de una ley y, en forma paralela, la dual.

Supongamos que se desea, a partir de la ley de idempotencia, deducir la ley de identidad, así como su dual:

$A = A \cup A$	hipótesis	$A = A \cap A$
$= (A \cup A) \cap \bar{U}$ $A \cap \bar{U} = A$	de 5	$= (A \cap A) \cup \phi$ A
$= (A \cup A) \cap (A \cup A')$ $A \cap \bar{U} = A$	de 6	$= (A \cap A) \cup (A \cap A')$ $A \cap A' = A$
$= A \cup (A \cap A')$ ϕ	de 4	$= A \cap (A \cup A')$
$= A \cup \phi$	de 6	$= A \cap \bar{U}$
$A = A \cup \phi$	Identidad	$A = A \cap \bar{U}$

Se comprueba que los pasos seguidos en la transformación de la columna de la izquierda son precisamente los duales de cada uno de los pasos seguidos en la deducción realizada en la columna derecha.

Obsérvese asimismo que no todas las leyes del álgebra listadas en la tabla de la página anterior son independientes.

Como ejercicio, demostraremos la ley

3.- Asociatividad:

1^{er} método:

$A\cup(B\cup C) = \{x | x \in A$ ó $x \in B\cup C\}$

$= \{x | x \in A$ ó $x \in B$ ó $x \in C\}$

$= \{x | (x \in A$ ó $x \in B)$ ó $x \in C\}$

$= (A\cup B)\cup C$

2° método:

a) Sea $x \in A\cup(B\cup C)$

$\rightarrow x \in A$ ó $x \in B\cup C \rightarrow x \in B$ ó $x \in C$

ó sea $x \in A$ ó $x \in B$ ó $x \in C$

Si $x \in A \rightarrow x \in A\cup B \rightarrow x \in (A\cup B)\cup C$

Si $x \in B \rightarrow x \in A\cup B \rightarrow x \in (A\cup B)\cup C$

Si $x \in C \rightarrow x \in C\cup(A\cup B) \rightarrow x \in (A\cup B)\cup C$ (de 2)

$\rightarrow A\cup(B\cup C) \subset (A\cup B)\cup C$ ...(1)

b) si $x \in (A\cup B)\cup C$

$x \in A\cup B$ ó $x \in C$

$\rightarrow x \in A$ ó $x \in B$ ó $x \in C$

Si $x \in A \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

Si $x \in B \rightarrow x \in (B \cup C) \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

Si $x \in C \rightarrow x \in (B \cup C) \rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$\rightarrow (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C) \quad \ldots (2)$

de (1) y (2): $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

3er método

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in A \cup B$	$x \in (A \cup B) \cup C$	$x \in B \cup C$	$x \in A \cup (B \cup C)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & V \\ & V \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & F \\ V \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\ & & V \\ & F \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & F \end{tikzcd}$$

$$F \begin{cases} V \begin{cases} V \\ F \end{cases} \\ F \begin{cases} V \\ F \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicios.- Con base en las leyes del álgebra de conjuntos, demostrar:

1.- $A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$

$$A' \cap B' \cap C' = (A' \cap B') \cap C' \qquad \text{(de 3)}$$

$$= [(A' \cap B')' \cup (C')']' \qquad \text{(de 7)}$$

$$= [(A \cup B) \cup C]' \qquad \text{(de 7 y 8)}$$

$$= (A \cup B \cup C)' \qquad \text{(de 3)}$$

2.- $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

$$A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) \qquad \text{(de 4)}$$

$$= \overline{U} \cap (A \cup B) \qquad \text{(de 6)}$$

$$= A \cup B \qquad \text{(de 5)}$$

3.- $[(A' \cup B) \cap (C \cup A')]' = A \cap (B' \cup C')$

$$[(A' \cup B) \cap (C \cup A')]' = [(A' \cup B) \cap (A' \cup C)]' \qquad \text{(de 2)}$$

$$= [A' \cup (B \cap C)]' \qquad \text{(de 4)}$$

$= (A')' \cap (B \cap C)'$ (de 7)

$= A \cap (B \cap C)'$ (de 8)

$= A \cap (B' \cup C')$ (de 7)

4.- $(A \cup B) \cup (A' \cup B') = \overline{U}$

$(A \cup B) \cup (A' \cup B') = (A \cup A') \cup (B \cup B')$ (de 2 y 3)

$= \overline{U} \cup \overline{U}$ (de 6)

$= \overline{U}$ (de 1)

5.- Con base en la fórmula dada anteriormente: $nA+nB = n(A \cup B)+ n(A \cap B)$, deducir la fórmula para relacionar el número de elementos en tres conjuntos: $nA+nB+nC$.

Solución:

Por asociatividad: $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C))$

por la fórmula dada para 2 conjuntos:

$n(A \cup (B \cup C) = nA+n(B \cup C)-n[A \cap (B \cup C)]$

aplicando nuevamente la misma fórmula:

$n(A \cup (B \cup C) = nA+nB+nC-n(B \cap C)-n(A \cap (B \cup C))$

de la distributividad:

$n(A \cap (B \cup C)) = n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

aplicando la fórmula para 2 conjuntos a este último:

$$n(A \cup B \cup C) = nA + nB + nC - n(B \cap C) - n(A \cap B) -$$

$$-n(A \cup C) + n\left[(A \cap B) \cap (A \cap C)\right]$$

$$= nA + nB + nC - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

o bien:

$$nA + nB + nC = n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

6.- En una encuesta efectuada a un grupo de 100 estudiantes universitarios acerca de qué idioma extranjero estaban estudiando en ese semestre, se obtuvieron las siguientes respuestas:

Idioma:	Número de estudiantes:
Francés (F)	26
Inglés (I)	48
Inglés (I) y Ruso (R)	8
Francés, pero no Ruso	23
Solamente Francés	18
Francés e Inglés	8
Ningún idioma	24

Se pregunta:

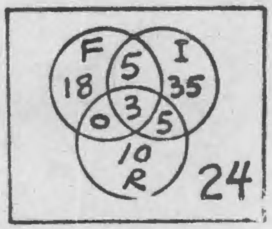
i) ¿Cuántos cursan Ruso? $nR = ?$

ii) ¿Cuántos toman Francés y Ruso, pero no llevan Inglés?

iii) ¿Cuántos cursan Francés y Ruso o Inglés, o ambos?

Solución:

Del diagrama de Venn:



i) $nR = 18$

ii) $n(F \cap R \cap I') = 0$

iii) $n(F \cap (R \cup I) = 8$

7.- Se tienen 3 objetos: A, B, C, y se sabe que ninguno de los 3 pesa más de 1 kg ni menos de 0.5 kg. Para determinar con exactitud el peso que tiene cada uno de los objetos, se emplea una balanza; pero ésta únicamente registra, con precisión, pesos entre 1 y 2 kg.

El problema consiste en determinar, con la balanza dada, con absoluta precisión, el peso de cada uno de los 3 objetos, efectuando únicamente 3 pesadas en la balanza.

Solución: Para poder emplear la balanza, deberán pesarse 2 objetos conjuntamente.

Nomenclatura: $\overline{U} = \{A, B, C\}$

nA = peso de A

nB = peso de B

nC = peso de C

$n\overline{U}$ = peso conjunto de los 3 objetos.

$S_1 = \{B,C\}$; $S_2 = \{A,C\}$; $S_3 = \{A,B\}$.

nS_1 = peso de B y C juntos = $nB+nC$

nS_2 = peso de A y C juntos = $nA+nC$

nS_3 = peso de A y B juntos = $nA+nB$

Resulta entonces:

$$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_3 = S_3 \cup S_1 = \overline{U}$$

$$S_1 \cap S_2 = C$$

$$S_2 \cap S_3 = A$$

$$S_3 \cap S_1 = B$$

Hemos visto que:

$$nS_1+nS_2 = n(S_1 \cup S_2)+n(S_1 \cap S_2)$$

$$= n\overline{U}+nC$$

$$nS_1+nS_2 = n\overline{U}+nC \quad \ldots (1)$$

$$nS_1+nS_3 = n\overline{U}+nB \quad \ldots (2)$$

$$nS_2+nS_3 = n\overline{U}+nA \quad \ldots (3)$$

$$2(nS_1+nS_2+nS_3) = 3n\overline{U}+nA+nB+nC = 4n\overline{U}$$

$$\rightarrow n\overline{U} = \frac{1}{2}(nS_1+nS_2+nS_3). \quad (4)$$

(4) en (3):

$$nS_2+nS_3 = \frac{1}{2}(nS_1+nS_2+nS_3)+nA$$

Simplificando, y despejando nA se obtiene la primera de las siguientes 3 ecuaciones; las 2 siguientes resultan de manera análoga:

$$nA = \frac{1}{2}(nS_2+nS_3-nS_1) \qquad \text{(de (4) y (3))}$$

$$nB = \frac{1}{2}(nS_1+nS_3-nS_2) \qquad \text{(de (4) y (2))}$$

$$nC = \frac{1}{2}(nS_1+nS_2-nS_3) \qquad \text{(de (4) y (1))}$$

8.- Al director de una escuela secundaria mixta (coeducacional) se le presentan los siguientes datos estadísticos tendientes a reflejar el efecto de la práctica de los deportes en el aprovechamiento académico de los alumnos:

La muestra consistió de 100 alumnos, 50 hombres y 50 mujeres. Pasó año el 60 %, del cual 28 son mujeres y 32, hombres. De los 100 que constituyen la muestra, 56 practican deporte y, de estos 56, hay 36 hombres y 20 mujeres. Se observa que de los 60 aprobados, 34 son deportistas, y de estos 34, hay 30 hombres.

El director pregunta: ¿Cuántas mujeres no-deportistas no pasaron año?

1ª Solución:

$n\bar{U} = 100$, $nH = nM = 50$; $nA = 60$;

$n(A \cap M) = 28$; $n(A \cap H) = 32$; $nD = 56$

$n(D \cap H) = 36$; $n(D \cap M) = 20$; $n(A \cap D) = 34$;

$n(A \cap D \cap H) = 30$; INCOGNITA: $N(M \cap D' \cap A')$

pero: $n(M \cap D' \cap A') = n(H' \cap D' \cap A')$

del problema 1.- anterior:

$$n(H' \cap D' \cap A') = n(HUDUA)'$$

pero $n(HUDUA)' = n\bar{U} - n(HUDUA)$

del problema 5.- anterior:

$$n(HUAUD) = nH+nA+nD-n(H \cap A)-n(H \cap D)-n(A \cap D)+n(H \cap A \cap D)$$

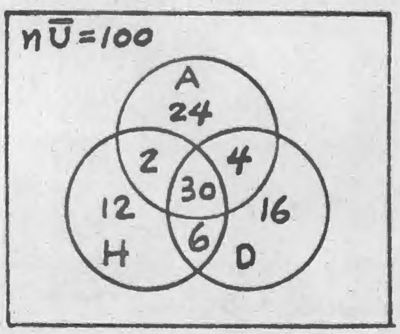
$$= 50+60+56-32-36-34+30$$

$$= 94$$

$$n(M \cap D' \cap A') = n\bar{U} - n(HUDUA) = 100-94 = 6$$

o sea: El número de mujeres, que no practican deporte y que reprobaron el año es 6.

El diagrama de Venn correspondiente a este problema es como sigue:



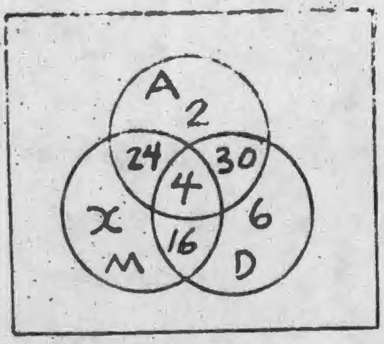
$n(HUAUD) = 94$

2^a Solución:

50 60 56 28 20 34

$$n(MUAUD) = nM+nA+nD-n(M \cap A)-n(M \cap D)-n(A \cap D)+n(M \cap A \cap D)$$

Donde se conocen todos los datos del segundo miembro. Para completar los datos, puede recurrirse al siguiente diagrama de Venn:



$\rightarrow$ n(MUAUD) = x+82

$\therefore$ x+82 = 50+60+56-28-20-34+4

x+82 = 170-82 = 88

x = 6

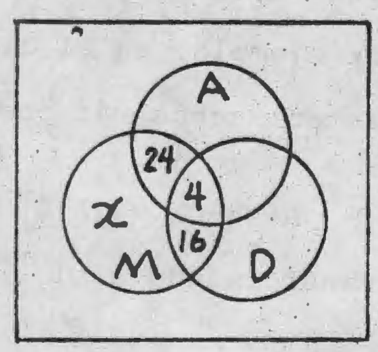
3^a. Solución:

Del diagrama de Venn se observa que:

$nM = x+n(A\cap M)+n(M\cap D)-n(M\cap A\cap D)$

50 = x+28+20-4 = x+44

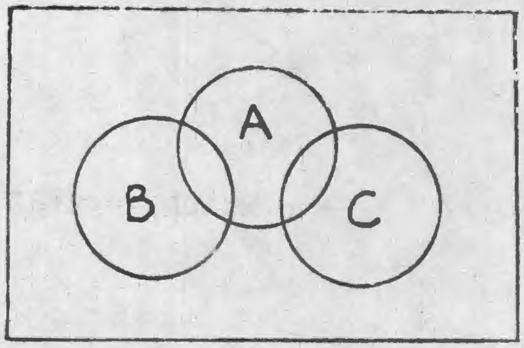
$\rightarrow$ x = 6



Dibujar diagramas de Venn, tales que verifiquen las siguientes ecuaciones:

1.- $A\cap B\cap C = (B-C)\cap (A\cap C)$

Solución:



Del diagrama:

$A \cap B \cap C = \phi$

$B - C = B$

$\rightarrow (B-C) \cap (A \cap C) = B \cap A \cap C$

$\rightarrow (B-C) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$

2.- ~~$A \cap B \cap C = A \cap A'$~~

Solución:

Dado que $A \cap A' = \phi$; (para cualquier A) $\rightarrow$ que para que se verifique la ecuación en 2, basta que $A \cap B \cap C = \phi$; como sucede, por ejemplo, en el diagrama de Venn del problema 1.- anterior (existen muchos más posibilidades)

3.- $A-(B-C) = (A-B)UC$ ...(1)

Transformando el 1^{er} miembro de (1):

$A-B = A \cap B'$

$A-(B-C) = A \cap (B-C)'$; (demostrado por 3 métodos)

$= A \cap (B \cap C')'$, (por la misma razón de antes)

$= A \cap (B'UC)$; (por De Morgan)

$= (A \cap B')U(A \cap C)$; (por distributividad)

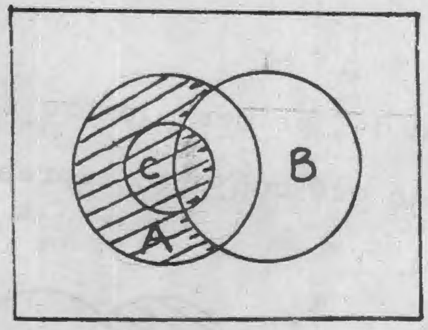
$= (A-B)U(A \cap C)$ ...(2)

Comparando los 2^{os} miembros de (1) y (2), siendo iguales los 1^{os} miembros:

Si $A \cap C = C \rightarrow (1) = (2)$

pero $A \cap C = C \rightarrow C \subseteq A$.

De ahí que el diagrama de Venn apropiado puede ser el siguiente:



Del diagrama:

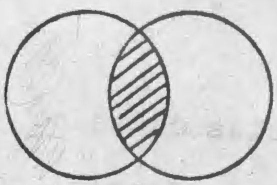
$$A-(B-C) = (A-B) \cup C$$

Es muy importante observar que las 3 fórmulas dadas <u>no</u> tienen validez general, como puede demostrarse, por ejemplo, construyendo las tablas de verdad correspondientes a cada caso.

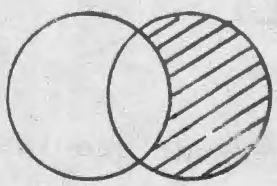
Problema: Colocar los paréntesis necesarios en el segundo miembro de modo que resulte cierta la siguiente igualdad para todo conjunto A, B:

$$A-[B-(A\cap B)] = A-B-B-A$$

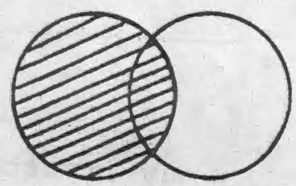
Solución: Dado que el conjunto del primer miembro sí está bien definido, se podrá tener idea de qué conjunto representa si nos auxiliamos de diagramas de Venn:



$A\cap B$



$B-(A\cap B)$



$A-[B-(A\cap B)]$

Por lo que parece ser que $A-[B-(A\cap B)] = A$.

Lo que puede comprobarse (demostrarse) con una tabla de verdad (para todo A, B)

$x\varepsilon$:

A	B	$A\cap B$	$B-(A\cap B)$	$A-[B-(A\cap B)]$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	F	F

$\rightarrow A=A-[B-(A\cap B)]$

Volviendo ahora al segundo miembro: y observando que $B-B = \phi$

$A-[(B-B)-A] = A-[\phi-A] = A-\phi = A.$

Por lo cual, la igualdad propuesta se verifica para todo conjunto A, B, si:

$$A-[B-(A\cap B)] = A-[(B-B)-A]$$

Obsérvese que no funciona ninguna de las siguientes posibilidades de colocación de paréntesis en el segundo miembro:

$$(A-B)-(B-A) = A-B \neq A$$

$$[A-(B-B)]-A = \phi \neq A$$

ϕ $A-A$

$$[(A-B)-B]-A = (A-B)-A = \phi \neq A$$

$$A-[B-(B-A)] = A-B \neq A$$

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un conjunto B sea el complemento de otro conjunto A, es que se verifiquen simultáneamente las dos condiciones siguientes:

a) $A \cap B = \phi$

y b) $A \cup B = \bar{U}$; (b) es la dual de. a))

Demostración: condición necesaria:

Hipótesis: $B = A'$

$$A \cap B = A \cap A' = \phi$$

asimismo: si $B = A' \rightarrow AUB = AUA' = \bar{U}$

condicion suficiente

Hipótesis: $A \cap B = \phi$, y $A \cup B = \bar{U}$

$$B = B \cap \bar{U}$$

$$= B \cap (AUA')$$

$$= (B \cap A) U (B \cap A')$$

$$= (A \cap B) U (B \cap A')$$

de la hipotesis: $A \cap B = \phi$

$$\rightarrow \quad B = \phi \; U (B \cap A')$$

$$= (A' \cap A) U (A' \cap B)$$

$$= A' \cap (AUB)$$

de la hipótesis: $A \cup B = \bar{U}$

$B = A' \cap \bar{U}$

$\rightarrow B = A'$

Problema.- Con base en el teorema anterior, demostrar la ley de De Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Bastará hacer ver que:

a) $(A \cup B) \cup (A' \cap B') = \bar{U}$

ó b) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \phi$

puesto que si hacemos $A \cup B = C$; $A' \cap B' = D$

$$C \cup D = \bar{U} \rightarrow C' = D$$

$$\text{ó } C \cap D = \phi \rightarrow C' = D$$

Demostración de a)

$$(A \cup B) \cup (A' \cap B') = \left[(A \cup B) \cup A'\right] \cap \left[(A \cup B) \cup B'\right]$$

$$= \left[A' \cup (A \cup B)\right] \cap \left[A \cup (B \cup B')\right]$$

$$= \left[(A' \cup A) \cup B\right] \cap \left[A \cup (B \cup B')\right]$$

$$= \left[\bar{U} \cup B\right] \cap \left[A \cup \bar{U}\right]$$

$$= \bar{U} \cap \bar{U} = \bar{U}$$

$$\rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

<u>Aplicación de la teoría de conjuntos a razonamientos lógicos.-</u>

Supongamos que se establece la siguiente relación entre varios conjuntos

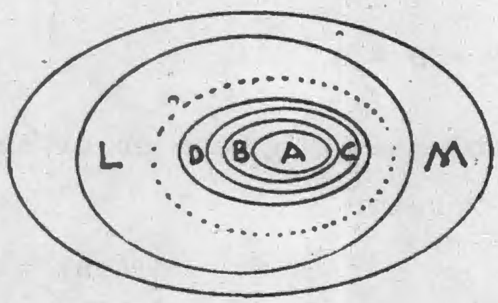
$A \subset B$

$B \subset C$

$C \subset D$

$\cdots$

$L \subset M$



La conclusión es: $A \subset M$

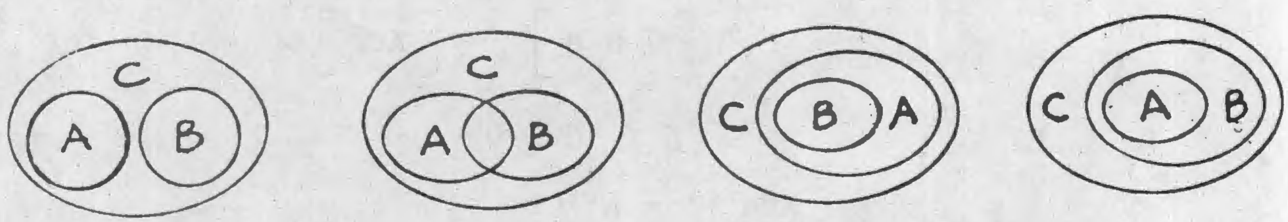
Debe observarse que la conclusión anterior es válida únicamente si cada conjunto aparece no más de una vez del lado derecho o del lado izquierdo.

No puede concluirse nada concreto acerca de los conjuntos A y B en el siguiente ejemplo:

$A \subset C$

$B \subset C$

En todos los casos siguientes se cumplen las condiciones dadas:

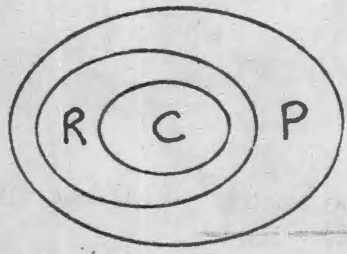


Las leyes de los conjuntos y el uso de diagramas de Venn pueden conducir a la determinación de la validez de ciertos tipos de razonamientos, como se ilustra en los ejemplos dados a continuación:

1.- Determinar si es válido el siguiente razonamiento:

Premisas: { Todos los cuadrados son rectángulos.
Todos los rectángulos son paralelogramos.

Conclusión: { Por lo tanto, todos los cuadrados son paralelogramos.



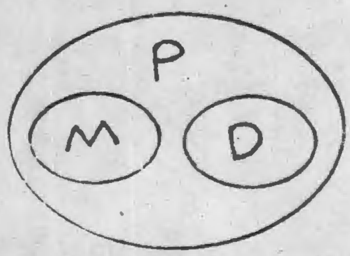
$C \subset R \subset P$

$\rightarrow$ el razonamiento es válido

2.- ¿Es válido el siguiente razonamiento?

Premisas: { Algunos problemas se resuelven matemáticamente
Algunos problemas son difíciles

Conclusión: { Por lo tanto, algunos problemas matemáticos son difíciles.



Aun cuando la conclusión es correcta, ésta se obtiene de un razonamiento falso (ó inválido)

Empleando las leyes de conjuntos es posible demostrar que los conjuntos M y D del problema anterior no necesariamente tienen intersección: Del diagrama:

$$P \cup M = P; \; P \cup D = P$$

$$(P \cup M) \cap (P \cup D) = P \cap P = P$$

$$\rightarrow \quad P \cup (M \cap D) = P \ldots (1)$$

Sabemos además que $P \cup \phi = P \ldots (2)$

Comparando (1) y (2) vemos que

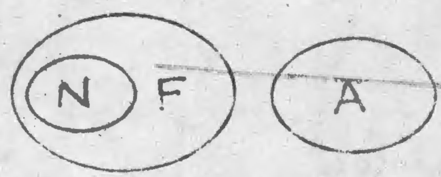
$M \cap D$ puede ser ϕ

$\rightarrow$ M y D no necesariamente tienen intersección.

3.- Analizar el siguiente razonamiento

Premisas: $\begin{cases} \text{Todos los niños son felices} \\ \text{Gentes felices no asesinan} \end{cases}$

Conclusión: $\begin{cases} \text{Por lo tanto, ningún niño es} \\ \text{asesino} \end{cases}$



Del diagrama podemos concluir que el razonamiento es válido:

Analíticamente: $N \cap F = N$; $F \cap A = \phi$

$N = N \cap F$

$N \cap A = (N \cap F) \cap A$

$= N \cap (F \cap A)$

$N \cap A = N \cap \phi$

$N \cap A = \phi$

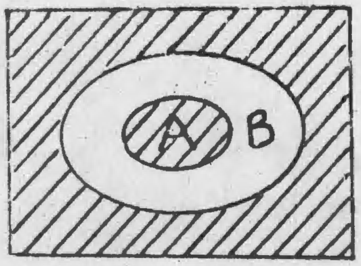
$\rightarrow$ No existen gentes que sean simultáneamente niños y asesinos

$\rightarrow$ ningún niño es asesino:

<u>Expresión de $A \subset B$ en función de las operaciones unión e intersección</u>

Dado que es válida la conclusión A C si se sabe que A B y B C, conviene expresar el símbolo en función de la unión e intersección de dos conjuntos.

Supongamos que $A \subset B$; lo cual se indica mediante el siguiente diagrama de Venn:



Puede afirmarse que, si $A \subset B$, las áreas rayadas en el diagrama no se superponen. Esta condición es equivalente a:

$$A \cap B' = \phi$$

Puesto que la recíproca tambien es cierta, se concluye que:

$$A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \phi \ldots (1)$$

así mismo, de ...(1)

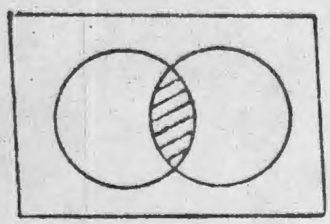
$$B' \subset A' \leftrightarrow B' \cap (A')' = \phi$$

$$B' \subset A' \leftrightarrow A \cap B' = \phi \ldots (2)$$

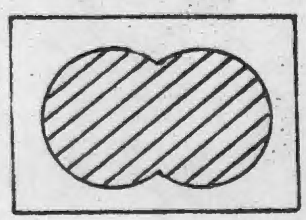
de (1) y (2)

$$A \subset B \leftrightarrow B' \subset A' \quad \ldots (3)$$

Por otro lado:



$A \cap B \neq A \rightarrow A \not\subset B$

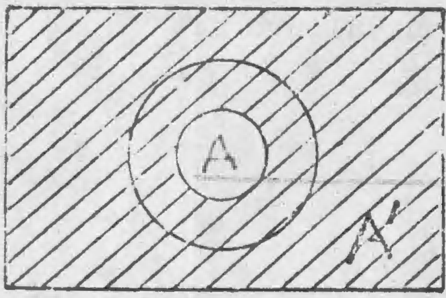


$A \cup B \neq B \rightarrow A \not\subset B$

$$A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A \qquad \ldots (4)$$

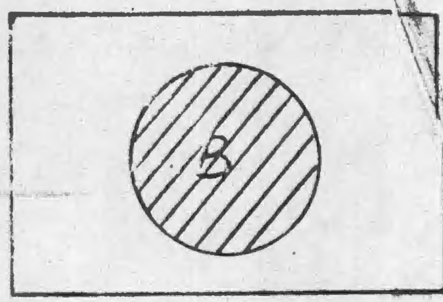
$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B \qquad \ldots (5)$$

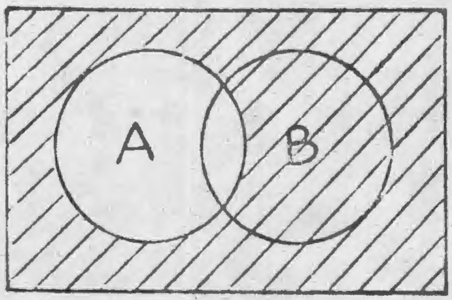
También: $A \subset B \leftrightarrow A' \cup B = \overline{U}$ ...(6) (dual de (1))



$A' \cup B = \overline{U}$

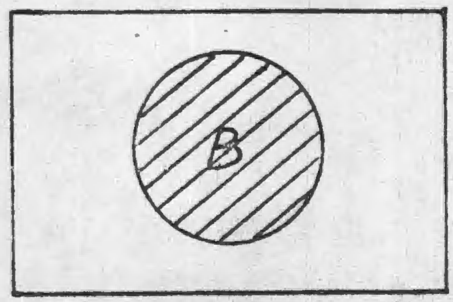
$\rightarrow A \subset B$





$A' \cup B \neq \overline{U}$

$\rightarrow A \not\subset B$



Demostraciones analíticas:

1.- Se afirma que $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$

Demostración:

1ª parte: hipótesis: $A \subset B$

$\rightarrow$ si $x \in A \rightarrow x \in B$; por lo cual, si $x \in A$ y $x \in B \rightarrow$ $x \in A \cap B \rightarrow A \subset A \cap B$ ...(i)

por otro lado, si $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ y $x \in B$ $\rightarrow x \in A \rightarrow A \cap B \subset A$ ...(ii)

de (i) y (ii) resulta: $A \cap B = A$

2^a parte: hipótesis: $A \cap B = A$

Demostración: si $A \cap B = A \rightarrow A \subset A \cap B$ ...(α)

pero, para todo $A, B \in \overline{U}$: $A \cap B \subset B$ ...(β)

de (α) y (β) se concluye que $A \subset B$

2.- Demostrar que $A \cap B = A \rightarrow A \cap B' = \phi$

en efecto: $A = A \cap B \rightarrow A \cap B' = (A \cap B) \cap B' =$

$= A \cap (B' \cap B) = A \cap \phi = \phi$

$\therefore$ $A \cap B = A$ equivale á $A \cap B' = \phi$

3.- Demostrar que $A \cap B' = \phi \rightarrow A'UB = \overline{U}$.

Aplicando la ley de De Morgan a $A \cap B' = \phi$ se obtiene: $A'UB = \overline{U}$.

4.- Demostrar que $\phi = A \cap B' \rightarrow AUB = B$.

$\phi UB = (A \cap B')UB = (AUB) \cap (B'UB) = (AUB) \cap \overline{U} = AUB$

$\therefore$ $\phi = A \cap B'$ equivale á $AUB = B$

En resumen:

$$A \subset B \equiv \begin{cases} B' \subset A' \\ A \cap B' = \phi \\ A \cap B = A \\ A\,U\,B = B \\ A'U\,B = \overline{U} \end{cases}$$

Problema:

¿Qué conclusiones pueden derivarse de las siguientes proposiciones?

a) Todos los estudiantes inscritos en deportes juegan o beisbol o futbol (o ambos).

b) No es permitido jugar beisbol y ser además miembro del equipo de natación.

c) Los que no forman parte del equipo de natación, deben practicar atletismo.

Solución: Definamos los siguientes conjuntos:

$\overline{U}$ = Todos los estudiantes inscritos en deportes

B = Conjunto que juega beisbol.

F = Conjunto que juega futbol.

N = Conjunto en el equipo de natación.

A = Conjunto en el equipo de atletismo.

Simbólicamente, las proposiciones dadas se escriben:

a) $B \cup F = \overline{U}$

b) $B \cap N = \phi$

c) $N' \subset A$

Hemos visto que a) y b) son equivalentes a:

a) $B \cup F = \overline{U} \equiv B' \subset F$ ó $F' \subset B$

b) $B \cap N = \phi \equiv B \subset N'$ ó $N \subset B'$

de lo cual tomamos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } F' \subset B \\ \text{b) } B \subset N' \end{array}\right\} \rightarrow F' \subset N' \text{ ó } N \subset F$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{b) } B \subset N' \\ \text{de c) } N' \subset A \end{array}\right\} \rightarrow B \subset A$$

puesto que

$$\left.\begin{array}{l} F' \subset B \\ B \subset A \end{array}\right\} \rightarrow F' \subset A$$

En resumen, las conclusiones son:

1.- $F' \subset N' = N \subset F$

Todos los miembros del equipo de natación juegan futbol.

2.- $B \subset A$

Todos los que juegan beisbol están en el equipo de atletismo.

3.- $F' \subset A$

Todos los que no juegan futbol están en el equipo de atletismo.

<u>Teorema</u>.- Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si, se verifica una, cualquiera, de las dos condiciones que se expre - san a continuación:

a) $(A-B) \cup (B-A) = \phi$

ó b) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = \phi$

Demostración de b)

Hipótesis: $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = \phi$

Para que la unión de dos conjuntos pueda ser igual al conjunto ϕ es necesario que cada conjunto sea ϕ, puesto que $\phi \cup \phi = \phi$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow A \cap B' = \phi \rightarrow A \subset B \\ A' \cap B = \phi \rightarrow B \subset A \end{array}\right\} A = B$$

Recíprocamente:

Hipótesis $A = B$

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) = (A \cap A') \cup (A' \cap A) =$$

$$= \phi \cup \phi = \phi$$

Problema: Con base en el último teorema, demostrar que en el problema anterior, es factible que $F = N$

Solución: Debemos buscar bajo qué condiciones se verifica la ecuación:

$$(N \cap F') \cup (N' \cap F) = \phi$$

De la 1ª conclusión obtenida:

$$N \subset F \rightarrow N \cap F' = \phi$$

$$\therefore \quad \phi \cup (N' \cap F) = \phi$$

$$\rightarrow N' \cap F = \phi$$

lo anterior se verifica si $F \subset N \rightarrow F$ puede ser igual a N

B = A	F = N

Del diagrama se comprueba que se cumplen todas las condiciones dadas y las conclusiones obtenidas, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} B \cup F = \overline{U} \\ B \cap N = \phi \\ N' \subset A \end{array}\right\} \text{DATOS}$$

$$\left.\begin{array}{l} N \subset F \\ B \subset A \\ F' \subset A \end{array}\right\} \text{CONCLUSIONES}$$

Pares ordenados.- Sean dos elementos: a y b; si designamos como primer elemento a uno de ellos, digamos a, y al elemento b como segundo, tendremos definido un par ordenado, el que se representa como: (a, b).

Igualdad.- Dos pares ordenados son iguales si, y sólo si, sus primeros elementos son iguales; siendo asimismo iguales sus segundos elementos; esto es: $(a, b) = (c, d) \longleftrightarrow a = c,\ b = d$

Observaciones:

1.- $(2, 3) \neq (3, 2)$

2.- Los pares ordenados pueden estar constituidos con el primer elemento igual al segundo: $(a, a) = (5, 5)$

$$(b, b) \neq (1, 2)$$

Los puntos del plano coordenado son ejemplos conocidos de pares ordenados.

Se da como definición de par ordenado la siguiente:

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$; en donde $\{a,b\}$ es un conjunto (par no ordenado) y el conjunto $\{a\}$ determina cuál de los elementos del conjunto $\{a,b\}$ debe considerarse como primer elemento del par.

Con base en la definición anterior, se demostrarán algunas de las afirmaciones hechas anteriormente:

I.- $(a,b) = (c,d) \longleftrightarrow a = c;\ b = d$

II.- $(a,b) \neq (b,a)$, si $a \neq b$

III.- Si un par ordenado tiene sus dos coordenadas iguales, resulta $(a,a) = \{\{a\}\}$

Demostraciones:

I.- a) Hipótesis: $(a,b) = (c,d)$

Se demostrará que $a = c;\ b = d$.

En efecto: $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$; asimismo: $(c,d) = \{\{c\},\{c,d\}\}$

por hipótesis: $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \ldots (1)$

i) si $a = b \rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{a\},\{a,a\}\} = \{\{a\},\{a\}\} = \{\{a\}\}$

(con lo cual queda demostrada la afirmación III). de (1)

$\rightarrow \{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\}\}, \rightarrow \{\{c\}\} = \{\{a\}\}; \rightarrow \{c\} = \{a\}, \rightarrow a = c.$

puesto que si $a = b \rightarrow b = a$, se obtiene asimismo $b = d$

ii) si $a \neq b$, resulta que, por tener ambos miembros de la igualdad (1) el mismo número de elementos, $\rightarrow c \neq d$; obteniéndose de (1) que:

$\{a\} \in \{\{c\},\{c,d\}\}$

puesto que: $\{a\} \neq \{c,d\} \rightarrow \{a\} = \{c\}$

$\rightarrow a = c$

Por otro lado, de (1):

$\{a.b\} \in \{\{c\},\{c.d\}\}$

pero $\{a,b\} \neq \{c\}$

$\rightarrow \{a,b\} = \{c,d\}$

puesto que resultó $a = c$, $\rightarrow b = d$; ya que $a \neq b$; con lo cual se completa la demostración de la parte I a)

I.-b) Hipótesis: $a = c$; $b = d$

Se demostrará que $(a,b) = (c,d)$

En efecto, de la hipótesis resultan:

$\{a\} = \{c\}; \{a,b\} = \{c,d\}$

$\therefore \{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$

$\rightarrow (a,b) = (c,d)$

II.- Hipótesis $a \neq b$; conclusión: $(a,b) \neq (b,a)$.

Por definición:

$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}; (b,a) = \{\{b\}, \{b,a\}\}$

si: $a \neq b$, $\rightarrow \{a\} \neq \{b\}$, $\rightarrow \{\{a\}, \{a,b\}\} \neq \{\{b\}, \{b,a\}\}$

$\rightarrow (a,b) \neq (b,a)$

Obsérvese que lo anterior se verifica aun cuando: $\{a,b\} = \{b,a\}$, para toda a, b.

<u>Producto cartesiano de conjuntos</u>.- Dados dos conjuntos A y B, el "producto cartesiano" de A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Ejemplo: Sea $A = \{a,b\}$; $B = \{x, y, z\}$

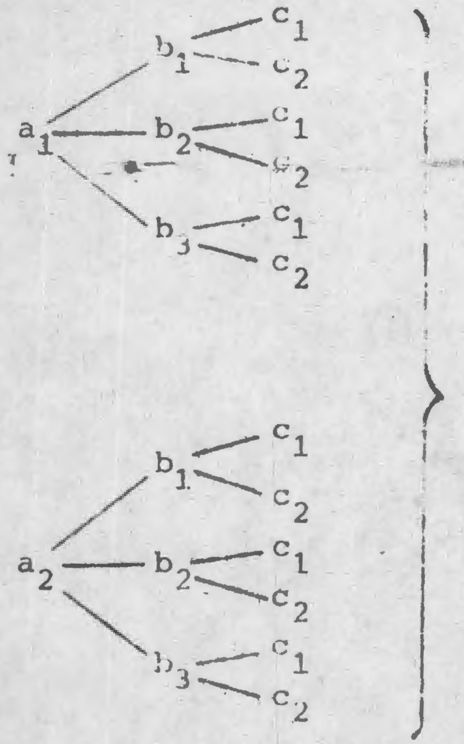
$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$

Obsérvese que: $n(A \times B) = nA \times nB$; en el ejemplo: $nA = 2$; $nB = 3 \rightarrow nA \times nB = 6 \rightarrow n(A \times B) = 6$

La definición anterior puede generalizarse para formar productos cartesianos de cualquier número de conjuntos:

$A \times B \times \ldots \times N = \{(a,b,\ldots,n) \mid a \in A, b \in B, \ldots, n \in N\}$

Ejemplo: Sean: $A = \{a_1, a_2\}$; $B = \{b_1, b_2, b_3\}$; $c = \{c_1, c_2\}$



resultan 12 ternas ordenadas

$nA \times nB \times nC = n(A \times B \times C) = 12$

$A \times B \times C = \{(a_1 b_1 c_1)(a_1 b_1 c_2)(a_1 b_2 c_1)(a_1 b_2 c_2) \ldots\ldots (a_2 b_3 c_1)(a_2 b_3 c_2)\}$

Ejercicios:

1.- Demostrar que: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

a) $A \times (B \cap C) = \{(x,y) \mid x \in A, \text{ y } y \in B \cap C\}$

$= \{(x,y) \mid x \in A, y \in B \text{ y } y \in C\}$

$= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B \text{ y } (x,y) \in A \times C\}$

$= (A \times B) \cap (A \times C)$

otro método:

b) Sea $(x,y) \varepsilon A \times (B \cap C)$

$\rightarrow x \varepsilon A,\ y \varepsilon B \cap C$

$\rightarrow x \varepsilon A,\ y \varepsilon B$ y $y \varepsilon C$

$\rightarrow (x,y) \varepsilon (A \times B)$ y $(x,y) \varepsilon (A \times C)$

$\rightarrow (x,y) \varepsilon (A \times B) \cap (A \times C)$

$\rightarrow A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C) \ldots (1)$

Sea $(x,y) \varepsilon (A \times B) \cap (A \times C)$

$\rightarrow (x,y) \varepsilon A \times B$ y $(x,y) \varepsilon A \times C$

$\rightarrow x \varepsilon A$ y $y \varepsilon B$ y C

$\rightarrow x \varepsilon A$ y $y \varepsilon B \cap C$

$\rightarrow (x,y) \varepsilon A \times (B \cap C)$

$\rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C) \ldots (2)$

de (1) y (2) :

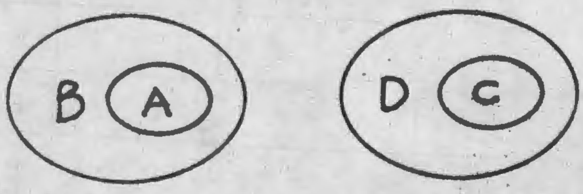
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) Tabla de verdad:

$x \in A$	$y \in B$	$y \in C$	$y \in B \cap C$	$(x,y) \in A \times (B \cap C)$	$(x,y) \in A \times B$	$(x,y) \in A \times C$	$(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

2.- Demostrar que si $A \subset B$ y $C \subset D \rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

a) Sea $(x,y) \in A \times C$



$\rightarrow x \in A$ y $y \in C$

pero, por hipótesis: $A \subset B$ y $C \subset D$

$\rightarrow$ si $x \in B$ y $y \in D \rightarrow (x,y) \in B \times D$

$\rightarrow$ si $(x,y) \in (A \times C) \rightarrow (x,y) \in (B \times D)$

$\rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

otro método:

b) $(A \times C) \subset (B \times D)$

$\rightarrow \quad (A \times C) \cup (B \times D) = B \times D$

pag 48

ó $\quad (A \times C) \cap (B \times D) = A \times C$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
				de 1 y 3						de 5 y 10
$x \varepsilon A$	$x \varepsilon B$	$y \varepsilon C$	$y \varepsilon D$	$(x,y) \varepsilon$	$(x,y) \varepsilon B \times D$				$\bigcup_{i=6}^{9} C_i$	$(x,y) \varepsilon$
$x \varepsilon B$	$x \not\varepsilon A$	$y \varepsilon D$	$y \not\varepsilon C$	A x C	1 y 3	1 y 4	2 y 3	2 y 4		(AxC) U (BxD)
V	V	V	V	V	V				V	V
V	V	V	F	V	V				V	V
V	V	F	V	F	F	V			V	V
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V				V	V
V	F	V	F	V	V				V	V
V	F	F	V	F	F	V			V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	V		V	V
F	V	V	F	F	F	F	V		V	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F

La tabla nos demuestra que

$(A \times C) \cup (B \times D) = B \times D$

$\rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

Algunos libros de referencia:

1.- "Sets, logic and axiomatic theories". R. R. Stoll, (Edit. Freeman) 1961.

2.- "Introduction to logic and sets". R. R. Christian. (Edit. Blaisdell) 1965.

3.- "Introduction to the foundation of mathematics". R. L. Wilder, (Edit. Wiley) 1952.

4.- "Set theory and related topics". S. Lipschutz, (Edit. Schaum) 1964.

5.- "Notas sobre conjuntos y números" J. Salazar R. (Edit. C.F.E.) 1967.

6.- "Foundations of modern mathematics". L. Mehlenbacher (Edit. Prindle, Weber & Schmidt) 1967.

7.- "The algebraic foundations of mathematics" R. A. Beaumont- R. S. Pierce, (Edit. Addison-Wesley) 1963.

8.- "Introducción a la teoría de conjuntos" L. Oubiña (Edit. Univ. de Buenos Aires) 1969.

9.- "Conjuntos" Aplicaciones matemáticas a la administración. Ariel Kleiman y Elena K. de Kleiman. (Edit. Limusa-Wiley, S.A., México) 1972.