

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

NOTAS PARA EL CURSO INTRODUCTORIO MATEMATICAS 0041

SEGUNDA PARTE: NUMEROS. DESIGUALDADES. VALOR ABSOLUTO. INTERVALOS.
RELACIONES. FUNCION. INDUCCION MATEMATICA.

PROF. ARTURO DELGADO RODRIGUEZ.

g.2.

ENERO 1981
(3a. reimpresión)

Conjuntos de números:

Introducción: El estudio de la matemática moderna se funda en el concepto de número. A través de los tiempos han surgido diversos sistemas de numeración. Uno de estos sistemas con el que el estudiante se familiariza desde la escuela primaria es, por ejemplo, el sistema de números romanos.

Puede afirmarse, sin lugar a duda, que el grado de avance de la matemática actual, se debe a la elección de un sistema conveniente de números. Para justificar la aseveración anterior, basta considerar el caso de los números romanos: La multiplicación de dos cantidades relativamente grandes empleando números romanos resulta en extremo complicada y laboriosa; en tanto que hay quienes afirman que la extracción de raíces cuadradas, empleando numeración romana, es imposible. Baste este ejemplo para hacer resaltar la importancia que tiene la selección de un sistema apropiado de numeración.

Campo - Definición - Un conjunto K en el que se definen las operaciones de suma y producto para dos elementos cualesquiera del conjunto; estando estas operaciones sujetas a las siguientes reglas, se denominan "campo" (o cuerpo).

Para toda $a, b, c \in K$

A_1) Cerradura: $a + b \in K$; $ab \in K$

A_2) Conmutatividad: $a + b = b + a$; $ab = ba$

A_3) Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a(bc) = (ab)c$

A_4) Distributividad: $a(b + c) = ab + ac$

A_5) Existencia del elemento identidad, tanto para la suma como para el producto (elemento NEUTRO)

$$a + 0 = a \quad ; \quad 1 \cdot a = a$$

$1 = u$

A_6) Existencia del elemento aditivo inverso

$$a + (-a) = 0$$

A_7) Existencia del recíproco $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$a a^{-1} = 1 \quad ; \quad a \neq 0$$

Adoptando estos axiomas, podemos construir, de manera lógica, un sistema de numeración:

Definimos el conjunto de números naturales como aquel cuyos elementos cumplen con los axiomas A_1 a A_5 ; excepto

to que no existe el elemento identidad (ó elemento neutro) cero en este conjunto, que denominaremos N

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Al aceptar los axiomas A_1 a A_6 se define el conjunto de los números enteros, el que se designa con la letra I

$$I = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$$

El conjunto de números racionales Q con todos los postulados de un campo

$$Q = \{x \mid x = \frac{p}{q}; p, q \in I, q \neq 0\}$$

Existe otro conjunto de números llamados "irracionales", tales como por ejemplo: $\sqrt{2}$, π , e los cuales no es posible expresar como un cociente $\frac{p}{q}$ de dos enteros. Este conjunto de números irracionales no constituye un campo, pues podemos ver por ejemplo que:

$$\sqrt{2} \sqrt{2} = 2 \quad ; \quad (\text{falla } A_1)$$

$$1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad ; \quad (1 \text{ no es irracional})$$

$$\pi + 0 = \pi \quad ; \quad (\text{cero es entero})$$

4

Números reales. El conjunto de números reales $R^{\#}$ está definido por la unión de los conjuntos de racionales e irracionales; por lo cual podemos designar al conjunto de los irracionales por Q' (complemento de Q)

$$R^{\#} = Q \cup Q' \Rightarrow Q' = \{x | x \in R^{\#}, x \notin Q\}$$

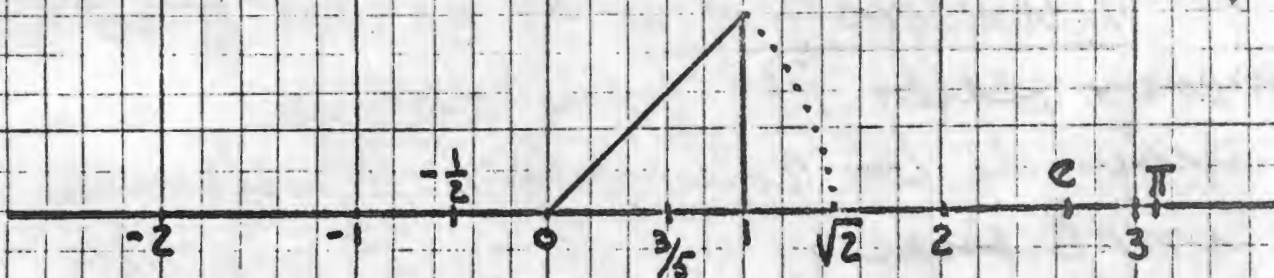
Los conjuntos Q y Q' son ajenos

$$Q \cap Q' = \emptyset$$

Interpretación geométrica de $R^{\#}$.

Si sobre una línea recta de longitud indefinida, elegimos arbitrariamente un punto, que llamaremos origen, y que haremos corresponder al cero, resulta que todos y cada uno de los demás puntos de la recta representan un número real, y sólo uno, cuyo valor es, a una cierta escala, la distancia de dicho punto al origen.

Se establece de este modo, una correspondencia biunívoca entre todos los puntos de la recta y el conjunto de números reales.



Puede demostrarse que no existen números reales que no estén en alguno de los subconjuntos que hemos definido.

Suele considerarse como subconjunto de los números naturales, al conjunto P de los números llamados "primos", que son aquellos números cuyos factores enteros sólo son ellos mismos y la unidad:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

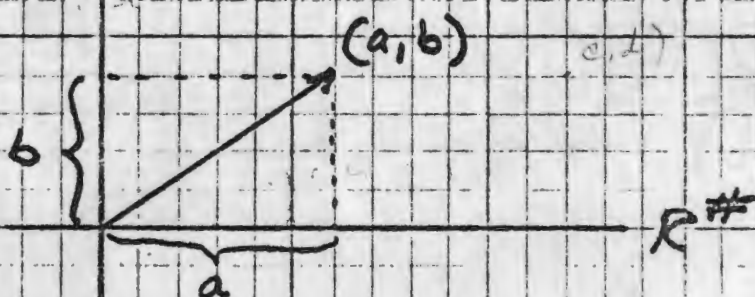
Formando el producto cartesiano $R^{\#} \times R^{\#}$ se define un conjunto cuyos elementos constituyen un campo denominado campo de los números complejos, estando definida la suma y el producto del siguiente modo:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\mathbb{R}^{\#} \times \mathbb{R}^{\#} = \mathbb{C} = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}^{\#}, b \in \mathbb{R}^{\#}\}$$

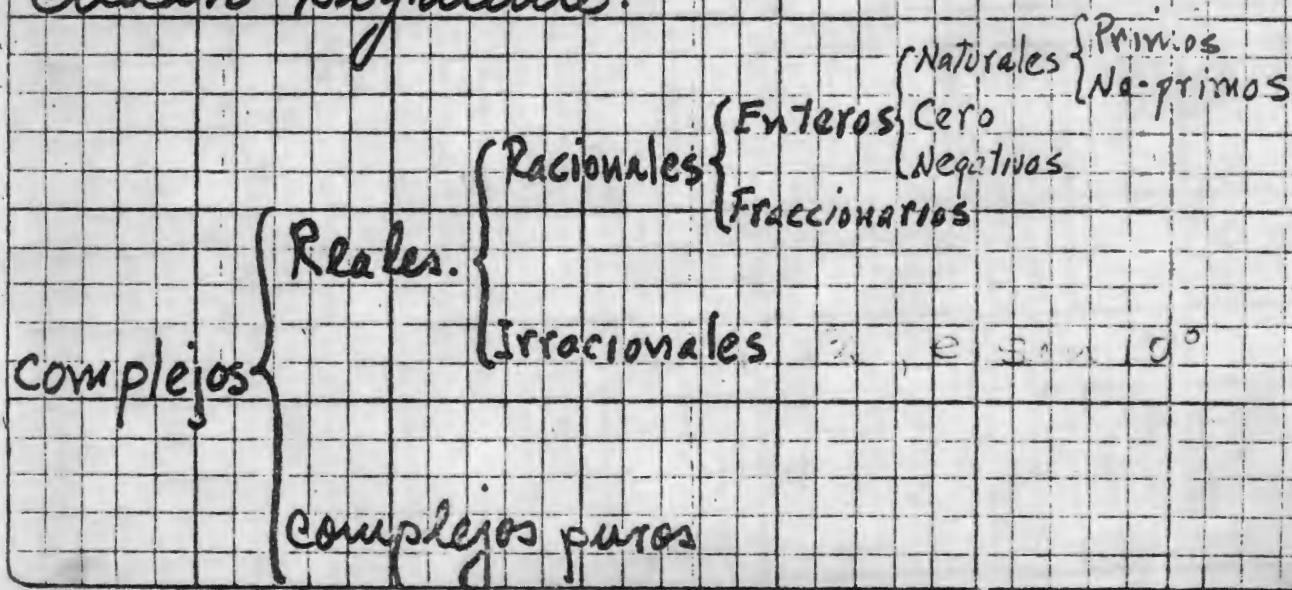
Representación gráfica de $(a, b) \in \mathbb{C}$



Obsérvese que $\mathbb{R}^{\#} \subset \mathbb{C}$; esto es, todo número real puede expresarse como un complejo, donde el segundo elemento del par ordenado es Cero:

$$a \equiv (a, 0)$$

Podemos sintetizar la clasificación del sistema de números mediante el cuadro siguiente:



COMPLEJOS
(a, b)

RACIONALES **IRRACIONALES**

NATURALES	CERO	NEGATIVOS

REALES
(a, 0)

COMPLEJOS (a, b)

COMPLEJOS PUROS
(0, b)

ENTEROS

FRACCIONARIOS

PRIMOS	NO-PRIMOS

Propiedades de las operaciones para los diversos conjuntos de números.

AXIOMA	OPERACION	NATURALES	ENTEROS	RACIONALES	IRRACIONALES	REALES	COMPLEJOS	
CERRADURA	+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A ₁
CERRADURA	x	✓	✓	✓	No	✓	✓	A ₁
CONMUTATIVIDAD	+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A ₂
CONMUTATIVIDAD	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A ₂
ASOCIATIVIDAD	+	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A ₂
ASOCIATIVIDAD	x	✓	✓	✓	✓	✓	✓	A ₃
DISTRIBUTIVIDAD		✓	✓	✓	✓	✓	✓	A ₄
IDENTIDAD	+	No	✓	✓	No	✓	✓	A ₅
IDENTIDAD	x	✓	✓	✓	No	✓	✓	A ₅
ADITIVO INVERSO	+	No	✓	✓	✓	✓	✓	A ₆
RECIPROCO	x	No	No	✓	✓	✓	✓	A ₇
CAMPO		No	No	SI	No	SI	SI	

Problemas sobre Campos.

1) Demostrar que en cualquier campo:

$$xy = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \quad ; x, y \in K.$$

Demostración:

i) Hagamos ver que para todo $x \in K$.

$$x0 = 0x = 0. \quad ; \text{ en efecto:}$$

$$\begin{aligned} x0 &= x(0+0) && (\text{de } A_5 \Rightarrow 0+0=0) \\ &= x0 + x0 && (\text{de } A_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x0 - x0 &= x0 + (x0 - x0) && (\text{de } A_6 \text{ y } A_3) \\ 0 &= x0 && (\text{de } A_6) \end{aligned}$$

de modo que de A_2 . $x0 = 0x = 0$. ①

ii) Si $xy = 0$; pero $x \neq 0 \Rightarrow$ existe x^{-1} (A_7)

$$\therefore x^{-1}xy = x^{-1}0 \Rightarrow y = 0 \quad (\text{de } A_7 \text{ y de } ①)$$

Si $x = 0 \Rightarrow$ de ① $0y = 0$, para toda $y \in K$

análogamente: $y \neq 0$; $xy = 0 \Rightarrow x = 0$,
ya que existe y^{-1} tal que: $xyy^{-1} = 0y^{-1} = 0$
 $\Rightarrow x = 0$

2) Demostrar que ningún elemento de un campo K puede tener más de dos raíces Cuadradas en el campo K .

Demostración:

Sean $x, y \in K$ con ambas raíces Cuadradas del mismo elemento $\in K$:

$$\Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{de } A_6)$$

$$\therefore (x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 0 \quad (\text{de } A_4)$$

del problema 1) anterior.

$$x+y=0, \text{ ó } x-y=0$$

$$\text{Si } x \neq y \Rightarrow x+y=0 \text{ ó } x=-y \quad (\text{de } A_6)$$

$$\text{Si } x=y \Rightarrow \text{sólo existe una raíz cuadrada.}$$

$\Rightarrow$ No existe elemento $\in K$ que tenga más de dos raíces Cuadradas en K .

3) El campo más pequeño sólo contendrá dos elementos diferentes: $\{a, b\}$. Comprobar todos los axiomas de un campo, si se definen las operaciones mediante las tablas:

+	a	b
a	a	b
b	b	a

·	a	b
a	a	a
b	a	b

Solución:

A₁) Cerradura. Se comprueba de cada una de las tablas, pues en éstas los únicos elementos que aparecen son a y b .

A₂) Conmutatividad: Esta se verifica, ya que cada tabla es simétrica respecto a la diagonal que corre del ángulo superior izquierdo, al ángulo inferior derecho (diagonal principal).

A₃) Asociatividad:

$$a + (a + b) = a + b \checkmark; (a + a) + b = a + b \checkmark$$

$$a + (b + b) = a + a = a \checkmark; (a + b) + b = b + b = a \checkmark$$

(las demás se comprueban por conmutatividad, o de manera análoga)

A₄) Distributividad: (deben chequearse 8 casos)

$$a \cdot (a + b) = a \cdot b = a \checkmark; a a + a b = a + a = a \checkmark$$

$$b \cdot (a + b) = b \cdot b = b \checkmark; b a + b b = a + b = b \checkmark, \text{etc.}$$

(para comprobar las demás, puede hacerse uso de las conmutatividades)

A₅) Existencia de elementos identidad (ó neutro).

De la tabla respectiva:

$$a + a = a; b + a = b \Rightarrow \text{identidad para } + = a$$

$$b \cdot a = a; b \cdot b = b \Rightarrow \text{identidad para } \cdot = b$$

* VEASE PROBLEMA 1) ANTERIOR: a es equivalente a 0

A₆) Existencia del elemento aditivo inverso:

$$a + a = a; b + b = a; \text{ pero la identidad para la suma es } a \Rightarrow \text{Cada elemento es su propio aditivo inverso: } a = -a; b = -b;$$

$$\text{es decir: } a + a = a + (-a) = a; b + b = b + (-b) = a$$

A₇) Existencia del recíproco:

$$b \cdot b = b, \text{ pero } b \text{ es la identidad para } \cdot \Rightarrow$$

$b = 1$. No existe inverso de a, ya que a es la identidad para + (a es equivalente al cero)

Los números pueden también clasificarse como: algebraicos o trascendentes: Los números que pueden ser solución de una ecuación polinomial con coeficientes racionales y exponentes enteros positivos, se llaman "algebraicos".

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Los números que no pueden ser solución de ecuaciones de la forma anterior se llaman "trascendentes".

Ejemplos:

- 1) $\sqrt{3}$ es número algebraico porque

$$x^2 - 3 = 0 \text{ se satisface para}$$

$$x = \sqrt{3}$$

- 2) π es número trascendente porque

$$\pi^n + a_1 \pi^{n-1} + a_2 \pi^{n-2} + \dots + a_{n-1} \pi + a_n \neq 0$$

para toda $a_i \in \mathbb{Q}$; $(i = 1, 2, \dots, n)$

- 3) Puede demostrarse que e es trascendente.

- 4) No ha sido aún posible determinar si ciertos números, como πe son trascendentes.

5) Demostrar que el número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es algebraico.

Solución:

Se buscará una ecuación polinomial, con coeficientes $\in \mathbb{Q}$ y exponentes $\in \mathbb{I}$, que tenga como raíz al número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

$$\text{Sea } x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = x - \sqrt{3}$$

elevando al cuadrado:

$$2 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$$

$$\therefore 2\sqrt{3}x = x^2 + 1$$

elevando al cuadrado:

$$12x^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

o bien:

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

Puesto que una de las raíces de esta última ecuación es $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3}$ es un número algebraico ✓

6) Demostrar que $i = \sqrt{-1}$ es un número algebraico.

Solución:

Bastará ver que la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0 \text{ admite como raíz } x = \pm i$$

14 14
Teorema: Una expresión decimal representa un número racional $\Leftrightarrow$ es expresión decimal periódica.

Demostración: hipótesis $a = \frac{m}{n}$

Si dividimos m entre n el número de restos que pueden resultar es, a lo más n , dado que cada residuo es $< n$; lo cual garantiza que a partir de cierto momento el residuo se repite; resultando, por consiguiente, el cociente un decimal periódico. Ejemplo

$$a = \frac{1}{7}$$

$\Rightarrow$

$$7 \overline{) 1}$$

$$0.142857 \dots$$

$$7 \overline{) 10}$$

$$30$$

$$20$$

$$60$$

$$40$$

$$50$$

$$1$$

(el residuo es < 7)

(aquí aparece el número repetido $\Rightarrow$ se va a ir repitiendo el período)

Recíprocamente, $a =$ una expresión decimal, en la cual puede haber un número n de cifras que no forma un período; pero a estas n cifras les sigue un período constituido por p cifras:

$$a = 0.\underbrace{x_1 x_2 \dots x_n}_{n \text{ cifras}} \underbrace{y_1 y_2 \dots y_p}_{p \text{ cifras}} \underbrace{y_1 y_2 \dots y_p}_{\text{período}} \dots$$

o sea x_i son cifras que no integran un período
($i = 1, 2, \dots, n$)

y_j con las cifras que integran el período
($j = 1, 2, \dots, p$)

En forma abreviada podemos escribir:

① $a = 0.npp\dots$; (el 2º miembro no es producto)

Podemos recorrer el punto decimal
 n lugares a la derecha, resultando

② $10^n a = n.p.p\dots$

Corriendo nuevamente el punto decimal
 p lugares de modo que quede
ahora precisamente donde termina el
primer período y empieza el segundo:

③ $10^{n+p} a = np.p.p\dots$

Para eliminar las cifras decimales en

③ restemos la ecuación ② de la ③

④ $(10^{n+p} - 10^n) a = np - n$

∴ ⑤ $a = \frac{np - n}{10^{n+p} - 10^n}$

Lo cual demuestra que a es
racional.

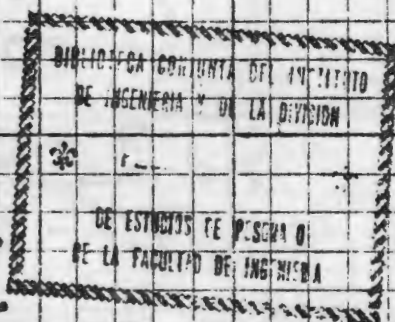
Al haber hecho la demostración del Teorema, hemos, al mismo tiempo, hallado la fórmula para determinar a qué número racional corresponde una fracción decimal periódica. Ejemplos: Hallar el número racional al que equivale la fracción periódica:

1) $0.490909090\dots$

$$n = 4 \quad ; \quad n_1 = 1$$

$$np = 490 \quad ; \quad p_1 = 2$$

$$a = \frac{490 - 4}{10^{1+2} - 10^1} = \frac{486}{990} = \frac{27}{55}$$



2) $5.7141414\dots$

$$a = 5 + 0.7141414\dots$$

$$0.7141414\dots = \frac{714 - 7}{990} = \frac{707}{990}$$

$$a = 5 + \frac{707}{990} = \frac{5657}{990}$$

3) $a = 0.142857142857\dots$

$$np = 142857 \quad ; \quad n_1 = 0$$

$$n = 0 \quad ; \quad p_1 = 6$$

$$a = \frac{142857 - 0}{10^6 - 10^0} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

$$4) a = 0.125000 \dots$$

$$np = 1250 ; n_1 = 3$$

$$n = 125 ; p_1 = 1$$

$$a = \frac{1250 - 125}{10^4 - 10^3} = \frac{1125}{9000} = \frac{1}{8}$$

$$5) a = 0.333 \dots$$

$$np = 3 ; n_1 = 0$$

$$n = 0 ; p_1 = 1$$

$$a = \frac{3 - 0}{10^1 - 10^0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$6) a = 0.0777 \dots$$

$$np = 07 ; n_1 = 1$$

$$n = 0 ; p_1 = 1$$

$$a = \frac{07 - 0}{10^2 - 10^1} = \frac{7}{90}$$

Observaciones:

1.-) No es necesario saber de memoria la fórmula; pues sólo se busca, mediante una resta, eliminar el período. Veámos nuevamente el ejemplo 2):

$$b = 0.7141414 \dots$$

Puesto que el período que se repite está después del 7:

$$10b = 7.1414 \dots$$

Para eliminar el período, que es de 2 cifras, se tiene:

$$\begin{array}{r} 1000b = 714.1414 \dots \\ - 10b = 7.1414 \dots \\ \hline \end{array}$$

$$990b = 707 \Rightarrow b = \frac{707}{990}$$

2.-) Si en lugar de multiplicar por 1000 se multiplica por cualquier otra potencia de 10 que corra el punto a la derecha a una posición que quede después de cualquier 4, el resultado es el mismo; por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 100000b = 71414.1414 \dots \\ - 10b = 7.1414 \dots \\ \hline \end{array}$$

$$99990b = 71407 \Rightarrow b = \frac{71407}{99990}$$

$$b = \frac{71407}{99990} = \frac{707}{990}$$

Problemas con números irracionales:

1) Demostrar que $\sqrt[r]{n}$ es irracional, si n no es una potencia entera de r .

Solución: $r \in \mathbb{N}$

Supóngase que $\sqrt[r]{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[r]{n} = \frac{p}{q}$; donde p y q son primos entre sí; $p, q \in \mathbb{I}$

Si $q \geq 1 \Rightarrow n = \frac{p^r}{q^r} \therefore nq^r = p^r$; pero esta última igualdad sólo puede verificarse si $n = a^r$, ya que $p^r = p \cdot p \cdots p$ (r factores) $\Rightarrow r(qq \cdots q) = p \cdot p \cdots p$.

Pero $n = a^r$ contradice la hipótesis de que n no es potencia entera de $r \Rightarrow \sqrt[r]{n} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt[r]{n} \in \mathbb{Q}'$

2) Demostrar que si $a \in \mathbb{Q}$; $x \in \mathbb{Q}'$

i) $a+x \in \mathbb{Q}'$

ii) $ax \in \mathbb{Q}'$; si $a \neq 0$

iii) $\frac{a}{x} \in \mathbb{Q}'$

iv) $\frac{x}{a} \in \mathbb{Q}'$

v) $a+bx \in \mathbb{Q}'$; $b \in \mathbb{Q}$

Solución:

i) Suponer: $a+x = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{p-aq}{q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$, Contrario a la hipótesis $\therefore a+x \in \mathbb{Q}'$ ✓

ii) Suponer: $ax = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{p}{aq}$
 $\Rightarrow x \in Q$, contrario a la hipótesis
 $\therefore ax \in Q' \checkmark$

iii) Suponer $\frac{a}{x} = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{aq}{p} \in Q$

Contrario a la hipótesis: $\therefore \frac{a}{x} \in Q'$

iv) Suponer $\frac{x}{a} = \frac{p}{q} \Rightarrow x = \frac{ap}{q} \in Q$

Contrario a la hipótesis: $\therefore \frac{x}{a} \in Q'$

v) $bx \in Q'$ de ii); $a+bx \in Q'$ de i)

3) mediante un ejemplo concreto,
 hacer ver que si $x \in Q'$; $y \in Q' \nRightarrow$
 $x+y \in Q'$ (ó sea: $x+y \in Q$ ó $x+y$ puede estar $\in Q'$)

Solución

$$\text{Sea } x = 3 + \sqrt{2} \in Q'$$

$$y = 3 - \sqrt{2} \in Q'$$

$$x+y = 6 \in Q$$

por otro lado:

$$x_1 = \sqrt{2} - 3 \in Q'$$

$$y_1 = \sqrt{2} + 3 \in Q'$$

$$x_1 + y_1 = 2\sqrt{2} \in Q'$$

Por lo tanto, la suma de dos números irracionales puede ser en algunos casos racional, en otros irracional.

4) Demostrar que el conjunto Q' de números irracionales es infinito, haciendo ver que entre dos números racionales cualesquiera $a, b \in Q$, existen un número infinito de números irracionales.

Solución:

Sean $a, b \in Q$; $a < b$;

$x \in Q'$; $a < y < b$; si $x > 1$

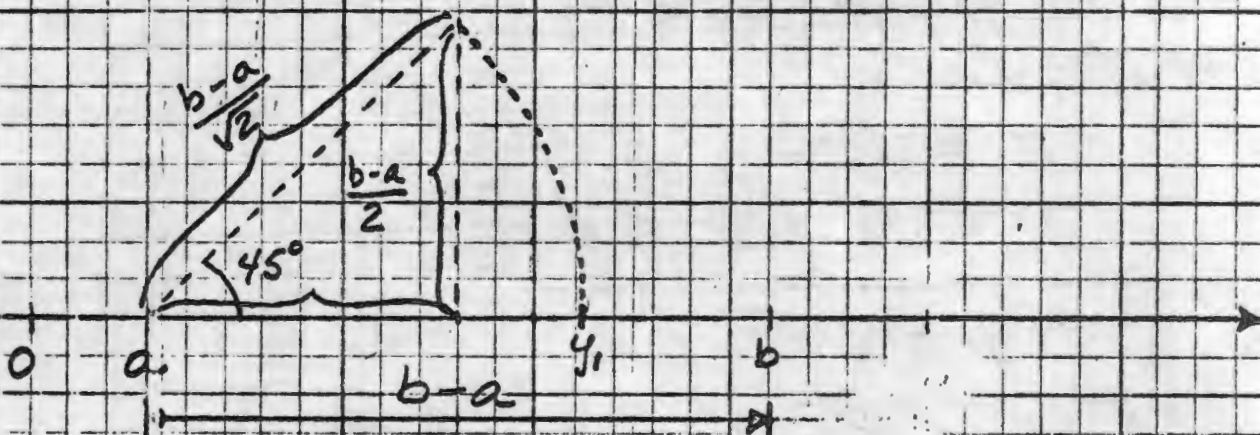
$$y = a + \frac{b-a}{x} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ para todo $x > 1$, existe $y \in Q'$ tal que $a < y < b$.

$\Rightarrow$ en el intervalo (a, b) pueden colocarse tantos irracionales y como racionales $x > 1$ se substituyan en la fórmula (1)

Ejemplo: Sea $x = \sqrt{2} \in Q'$; $x > 1$

de (1) $y_1 = a + \left(\frac{b-a}{2}\right)\sqrt{2} \Rightarrow y_1 \in Q'$



- 5) i) Comprobar que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \in \mathbb{Q}'$
 ii) Demostrar de modo más general, que
 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$; si $a > 0, b > 0; a, b \in \mathbb{Q};$
 $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'; \mathbb{Q} = \mathbb{R}^\#$.

Solución: Sean $p, q \in \mathbb{I}; q \neq 0$:

i) Supóngase que $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$
 $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - \sqrt{3}; \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} + 3 - \frac{2p}{q}\sqrt{3}$

resultando que el segundo miembro es irracional, lo cual implica que $2 \in \mathbb{Q}'$; de lo cual se deduce que la hipótesis de que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ es falsa.

ii) Siguiendo el mismo razonamiento que el empleado en el inciso i) anterior:

Si: $a > 0, b > 0; a, b \in \mathbb{Q}; \sqrt{b} \in \mathbb{Q}'; \mathbb{Q} = \mathbb{R}^\#$.

Supóngase que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{p}{q}$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{p^2}{q^2} + 3 \right) - \frac{2p}{q}\sqrt{b}$$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Q}';$ Contrario a la hipótesis.

$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}';$ si $a > 0, b > 0; a, b \in \mathbb{Q};$
 $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'; \mathbb{Q} \in \mathbb{R}^\#$

Obsérvese que basta con que alguna de las dos raíces: $\sqrt{a}$ o $\sqrt{b}$ sea irracional, pues la hipótesis $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{p}{q}$ también implica: $b = \left(\frac{p^2}{q^2} + 3 \right) - \frac{2p}{q}\sqrt{a}; \Rightarrow b \in \mathbb{Q}'$

6.) Demostrar que:

i) $x_1 = \log_{81} 3$ es racional

ii) $x_2 = \log_6 2$ es irracional

iii) $x_3 = \log_3 \sqrt{\log_4 64}$ es racional.

Solución:

i) Se tiene, de la definición de logaritmo:

$$\log_{81} 3 = x_1 \Rightarrow 81^{x_1} = 3$$

$$\Rightarrow 3^{4x_1} = 3^1 \Rightarrow 4x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

ii) Supóngase que: $\log_6 2 = \frac{p}{q}$; $p, q \in \mathbb{I}$,

observando que $\log_6 2 > 0 \Rightarrow p \neq 0, p > 0$

$q \neq 0, q > 0$. Sólo pueden suceder tres casos:

$p = q$; $p > q$; $p < q$

a) Caso $p = q$:

$$\log_6 2 = \frac{p}{q} \Rightarrow 6^{p/q} = 2 \Rightarrow 6^p = 2^q \Rightarrow 6^p = 3^p 2^p$$

$$\Rightarrow 3^p = 2^{q-p} \text{ pero } p = q \Rightarrow q - p = 0 \Rightarrow 3^p = 1$$

lo cual es imposible si $p \in \mathbb{I}$; $p > 0$

b) Caso $p > q \Rightarrow p/q > 1$

$\Rightarrow 6^{p/q} = 2$ es imposible, ya que $6^1 = 6 > 2$.

c) Caso $p < q \Rightarrow q - p = r > 0$ ($r \in \mathbb{I}$).

$3^p = 2^r$ es imposible, pues impar $\neq$ par.

$$\Rightarrow \log_6 2 \neq \frac{p}{q} \Rightarrow \log_6 2 \text{ es irracional}$$

$$\text{iii)} \quad x_3 = \log_3 \sqrt{\log_4 64} = \log_3 \sqrt{u}$$

$$u = \log_4 64 \Rightarrow 4^u = 64 = 4^3 \Rightarrow u = 3$$

$$\therefore x_3 = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x_3 = \frac{1}{2} \text{ es racional}$$

7) La raíz cuadrada de un número racional no puede expresarse como la suma de un número racional y la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto.

Demostración:

Sean: $a \in \mathbb{Q}$; $c \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$; $a \neq b \in \mathbb{Q}$

Supongamos cierta la igualdad:

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \pm c$$

llevando al cuadrado ambos miembros:

$$a = b + c^2 \pm 2c\sqrt{b}$$

$$\therefore \sqrt{b} = \pm \frac{a - b - c^2}{2c}$$

La última igualdad no es posible, pues resulta $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, lo que contradice la hipótesis de que $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}'$; $\Rightarrow$ la suposición original es falsa.

$$\therefore \sqrt{a} \neq \sqrt{b} \pm c$$

8) Demostrar que si: $a, c \in \mathbb{Q}; \sqrt{b}, \sqrt{d} \in \mathbb{Q}'$
 entonces: $a \pm \sqrt{b} = c \pm \sqrt{d} \Rightarrow a = c; \sqrt{b} = \sqrt{d}$

Demostración: si $q \in \mathbb{Q}$:

Supóngase que: $a \neq c$; ó sea $c = a \pm q$
 $\Rightarrow a \pm \sqrt{b} = a \pm q \pm \sqrt{d}$

$$\therefore \pm \sqrt{b} = \pm q \pm \sqrt{d}$$

pero, por el problema 7) anterior, la última igualdad es imposible: $a \pm \sqrt{b} = c \pm \sqrt{d}$
 $\Rightarrow a = c \Rightarrow \sqrt{b} = \sqrt{d}$

9) Demostrar que si: $a, c \in \mathbb{Q}; \sqrt{b}, \sqrt{d} \in \mathbb{Q}'$
 y: $a \pm \sqrt{b} = c \pm \sqrt{d} \Rightarrow \pm \sqrt{d} \mp \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$

Demostración:

$$\text{Si } a \pm \sqrt{b} = c \pm \sqrt{d}$$

$$\Rightarrow a - c = \pm \sqrt{d} \mp \sqrt{b}$$

pero $a - c \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pm \sqrt{d} \mp \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \checkmark$

10) Generalización del resultado anterior:
 Si $a, c \in \mathbb{Q}; x, y \in \mathbb{Q}';$ además: $a \pm x = c \pm y$

$$\Rightarrow \pm y \mp x \notin \mathbb{Q}'; \text{ sino: } \pm y \mp x \in \mathbb{Q}$$

Demostración:

$$\text{Si } a \pm x = c \pm y \Rightarrow a - c = \pm y \mp x$$

puesto que $a - c \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pm y \mp x \in \mathbb{Q} \checkmark$

Observación: De 8), en 9) y 10): $\pm y \mp x = 0 \in \mathbb{Q}$

11) Demostrar que $\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

Solución

Supóngase que: $\sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = q_1 \in \mathbb{Q}$ ①

$\Rightarrow [\sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})]^2 \in \mathbb{Q}$; pero:

$$[\sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2})]^2 = 11 + 2\sqrt{6}[1 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})] \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6}[1 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})] \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{6}[1 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})])^2 \in \mathbb{Q}$$

$$(\sqrt{6}[1 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})])^2 = 6[6 + \sqrt{6} - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})] \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow = q_2 \in \mathbb{Q}$$

• sea:

$$\sqrt{6} - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = q_2 \in \mathbb{Q}$$
 ②

de ① y ②:

$$q_1 - q_2 = \sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

pero del problema 5)i) anterior: $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

$\therefore$ ① es falso, $\therefore \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$ ✓

Observación importante:

Aun cuando la suma algebraica de un número finito de números racionales nos da un número racional, la afirmación anterior no es cierta cuando la suma de racionales es infinita: la suma de un número infinito de números racionales puede dar: o un racional o un irracional.

al.

Ejemplos:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \in \mathbb{Q}'$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \in \mathbb{Q}'$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{2k}} = \frac{25}{26} \in \mathbb{Q}$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$e) e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Si $x \neq 0; x \in \mathbb{Q}$
 $\Rightarrow$ Cada una
 de estas fun-
 ciones es irra-
 cional; por
 ejemplo: $x=1 \in \mathbb{Q}$
 $\sin 1 \in \mathbb{Q}'$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{95}{96} \in \mathbb{Q}$$

Operación con números complejos:

Además de las operaciones cerradas de suma y producto de dos números complejos, se define el producto de un real (o número real) por un número complejo, del siguiente modo:

$$m(a, b) = (ma, mb)$$

Igualdad de dos complejos:

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d.$$

Observaciones:

$$(0, 1)(0, 1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0)$$

es decir: el cuadrado del complejo puro $(0, 1)$ es el número real $(-1, 0)$

$$\text{Haciendo } (0, 1) \equiv i; (-1, 0) \equiv -1$$

$$i^2 = ii = -1.$$

El complejo (a, b) puede expresarse como la suma de número real y de un complejo puro; en efecto:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

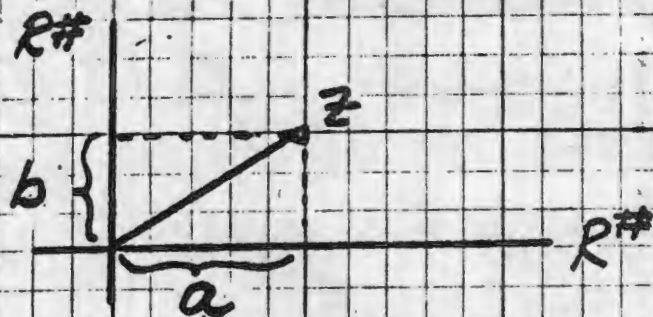
$$= a(1, 0) + b(0, 1)$$

$$\Rightarrow (a, b) = a + bi$$

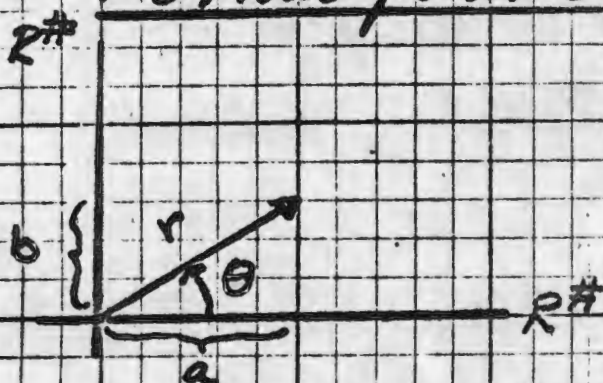
Los dos términos del segundo número

Lo deben interpretarse cada uno como una componente del vector z

$$z = (a, b) = a + bi$$



Forma polar de un número complejo:



$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = \text{módulo de } z$$

$$\theta = \text{argumento de } z$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

Inverso de $z = (a, b)$; ($z \neq (0, 0)$)

$$z z^{-1} = (1, 0)$$

$$\text{Sea } z^{-1} = (x, y)$$

$$(a, b)(x, y) = (1, 0)$$

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \begin{cases} (a, b) \neq (0, 0) \\ \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{a^2 + b^2} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} (a, -b) \quad \bar{z}^+ = \frac{1}{r^2} (a, -b) \quad \bar{z} = (a, -b)$$

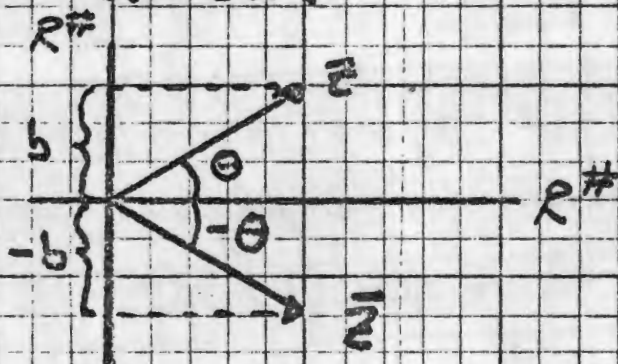
en forma polar:

$$z^{-1} = \frac{r}{r^2} [\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$$

Conjugado de $z = a + bi$: Se define

como $\bar{z} = a - bi$.



$$\Rightarrow \bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} (a, -b) \cdot r^2 z^{-1} = \bar{z} = |z|^2 z^{-1}$$

$\Rightarrow z^{-1}$ y $\bar{z}$ son vectores paralelos.

Relaciones entre números complejos y sus conjugados:

$$1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$3) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$4) \overline{az} = a \overline{z}$$

$$5) z \overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$$

$$6) \overline{z} = |z|^2 z^{-1}$$

$$7) z = \overline{\overline{z}}$$

Demstraciones: Sean $z_1 = (a, b)$; $z_2 = (c, d)$:

$$1) \overline{z_1 + z_2} = (a+c, -b-d) = (a, -b) + (c, -d) = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \checkmark$$

$$2) \overline{z_1 z_2} = (a, -b)(c, -d) = (ac-bd, -ad-bc) = \overline{z_1} \overline{z_2} \quad \checkmark$$

$$3) \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \overline{z_2}^{-1} = \overline{z_1 z_2^{-1}} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

$$4) \overline{az} = \overline{a} \overline{z} = a \overline{z}$$

$$5) z \overline{z} = (a, b)(a, -b) = (a^2+b^2, -ab+ab) = a^2+b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$$

6) quedó demostrado en la página anterior

$$7) z = (a, b); \overline{z} = (a, -b); \overline{\overline{z}} = (a, -(-b)) = (a, b) = z$$

Observación: de 6) $\overline{z} = |z|^2 z^{-1}$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}, \text{ lo que verifica}$$

el resultado obtenido anteriormente.

Determinar las condiciones que deben imponerse al número $n \in \mathbb{R}^*$; de modo que se verifique la siguiente ecuación:

$$z^3 = n \bar{z} \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad ; \quad z \neq (0,0)$$

donde $\bar{z}$ es el conjugado del complejo z .

Solución:

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi \quad ; \quad (a,b) \neq (0,0)$$

$$z^3 = n \bar{z} \Rightarrow (a + bi)^3 = n(a - bi)$$

$$a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = na - nbi$$

igualando partes reales y complejas:

$$\left. \begin{array}{l} a^3 - 3ab^2 = na \\ 3a^2b - b^3 = nb \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 3b^2 = n \quad \textcircled{1}; a \neq 0 \\ 3a^2 - b^2 = -n \quad \textcircled{2}; b \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\textcircled{1} - (\textcircled{2} \times 3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - 3b^2 = n \\ -9a^2 + 3b^2 = 3n \end{array} \right\} \Rightarrow -8a^2 = 4n.$$

$$\therefore a^2 = -\frac{n}{2} \Rightarrow n < 0 \quad \textcircled{A}$$

$$\text{substituyendo en } \textcircled{1}: -\frac{n}{3} - \frac{n}{6} = b^2 \quad \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{3} + \frac{n}{6} < 0 \Rightarrow 3n < 0 \Rightarrow n < 0 \quad \checkmark$$

$$\text{de } \textcircled{3} \Rightarrow b^2 = -\frac{n}{2} \quad \textcircled{B}$$

Resumen; de $\textcircled{A}$ y $\textcircled{B}$; si: $a \neq 0, b \neq 0$:

$$a^2 = b^2 = -\frac{n}{2} \quad ; \quad n < 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{R}^*$$

Observación: la ecuación $z^3 = \bar{z}$ no tiene solución, puesto que $a^2 = b^2 \neq -\frac{1}{2}$; $z \neq (0,0)$

Si en el problema anterior se permite que $a=0$, $b=0$, (o ambas), se obtienen los siguientes resultados:

i) Si: $a=0$ y $b=0 \Rightarrow z_1=(0,0); \bar{z}_1=(0,0)$
 $\therefore z_1^3=(0,0); n\bar{z}_1=(0,0) \Rightarrow z_1^3=n\bar{z}_1$

ii) Si: $a \neq 0; b=0 \Rightarrow z=(a,0); \bar{z}=(a,0)$
 $\therefore z^3=(a^3,0); n\bar{z}=(na,0)$

$$z^3=n\bar{z} \Rightarrow a^3=na \Rightarrow a^2=n$$

$\Rightarrow$ habrá las 2 soluciones siguientes:

$$z_2=(\sqrt{n},0); z_3=(-\sqrt{n},0) \quad (\text{reales})$$

iii) Si: $a=0; b \neq 0 \Rightarrow z=(0,b)=bi$
 $\bar{z}=-bi$

$$z^3=(bi)^3=-b^3i; n\bar{z}=-nbi$$

$$z^3=n\bar{z} \Rightarrow -b^3i=-nbi \Rightarrow b^2=n$$

$\Rightarrow$ resultan 2 soluciones complejas:

$$z_4=\sqrt{n}i; z_5=-\sqrt{n}i \quad (\text{complejos puros})$$

Obsérvese que en este caso ($a=0$, $b=0$, o ambas simultáneamente cero), la ecuación: $z^3=\bar{z}$ tiene las siguientes 5 soluciones:

$$z_1=0; z_2=1; z_3=-1; z_4=i; z_5=-i$$

Forma exponencial de z :-

Dada la serie:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Sea $x = i\theta \Rightarrow x^2 = -\theta^2; x^3 = -i\theta^3; x^4 = \theta^4 \dots$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} \dots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots\right)$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$e^{i\theta} = \operatorname{cis} \theta$$

$$z = (a, b) = r \operatorname{cis} \theta = r e^{i\theta}$$

pero $\theta = \theta + 2\pi = \theta + 4\pi = \dots = \theta + 2\pi k$
 $(k = 0, 1, 2, \dots)$

$$z = r \operatorname{cis} (\theta + 2\pi k) = r e^{i(\theta + 2\pi k)}$$

Ejercicio 1) Deducir las fórmulas:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Solución:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1)$$

$$\text{si } \theta = -\theta \Rightarrow$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

FORMULAS DE
EULER

25

35

Ejercicio 2) Demostrar que: $(e^{tz}) = e^{t\bar{z}}$

Solución:

$$\begin{aligned} e^{tz} &= e^{t(a+ib)} = e^{ta} \cdot e^{itb} = e^{ta} \cos tb \\ &= e^{ta} (\cos tb + i \sin tb) \\ \Rightarrow (\overline{e^{tz}}) &= e^{ta} (\cos tb - i \sin tb) \end{aligned}$$

pero:

$$\begin{aligned} \cos tb &= \cos(-tb) \\ -\sin tb &= \sin(-tb) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\overline{e^{tz}}) &= e^{ta} (\cos(-tb) + i \sin(-tb)) \\ &= e^{ta} e^{-itb} \\ &= e^{ta - itb} \\ &= e^{t(a - ib)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\overline{e^{tz}}) = e^{t\bar{z}} \quad \checkmark$$

si: $t = 1$

$$(\overline{e^z}) = e^{\bar{z}}$$

Ejercicio 3) Demostrar que: $e^{tz_1} \cdot e^{tz_2} = e^{t(z_1 + z_2)}$

Solución.

$$\begin{aligned} e^{tz_1} e^{tz_2} &= e^{t(a+ib)} e^{t(c+id)} = e^{ta} e^{tib} e^{tc} e^{tid} = \\ &= e^{t(a+c + i(b+d))} = e^{t(z_1 + z_2)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Teorema de "De Moivre":

$$Z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

Demostración:

$$\text{Sean } z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

generalizando el producto para n factores:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

$$\text{si } z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$$

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

$$\begin{aligned} z &= a + bi & a &= r \cos \theta \\ & & b &= r \sin \theta \\ \cos \theta &= \frac{a}{r} & \sin \theta &= \frac{b}{r} \end{aligned}$$

Ejemplo 1) para $n = -1$

$z^{-1} = r^{-1} \operatorname{cis} (-\theta)$ (lo que concuerda con la fórmula obtenida anteriormente)

2) Si $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 2 - 2i$

Calcular: a) $z_1 z_2$

b) $\frac{z_1}{z_2}$

Solución: a) $z, z_2 = r, r_2 \operatorname{cis}(\theta, + \theta_2)$

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \pi/4 ; z_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis}(-\pi/4)$$

$$z, z_2 = (\sqrt{2})(2\sqrt{2}) \operatorname{cis}(\pi/4 - \pi/4)$$

$$z, z_2 = (4, 0) ; (\text{real})$$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = (0, \frac{1}{2}) ; (\text{Complejo puro})$$

3) Con base en la fórmula de De Moivre, deducir las fórmulas:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Solución: $\operatorname{cis} n\theta = (\operatorname{cis} \theta)^n ; (r=1)$

$$\cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$= \cos^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta.$$

igualando partes reales y partes complejas:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

4) Con base en el problema 1) resulta:

$$z^{-n} = r^{-n} \operatorname{cis}(-n\theta)$$

5) Calcular: $\cos n\theta$ y $\sin n\theta$, ($n \in \mathbb{N}$) en función del ángulo θ .

Solución:

Desarrollando $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$, según la fórmula del binomio de Newton, para el primer miembro; e igualando las partes reales e imaginarias de este desarrollo con el segundo miembro, se obtienen las siguientes dos fórmulas:

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

siendo los números combinatorios:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

Para $n=2$, se chequean las fórmulas del problema 3) anterior.

Para $n=3$:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

$$n=2: \cos 2\theta + i \sin 2\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^2$$

$$\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)^2$$

$$0.5 + i 0.866 = 0.75 + 0.866i + (-1)0.25 = 0.5 + 0.866i$$

6.) Demostrar las siguientes fórmulas:

$$i) \sum_{k=1}^n r^k \sin k\theta = r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta + \dots = \frac{r \sin \theta}{r^2 + 1 - 2r \cos \theta}$$

$$ii) \sum_{k=0}^n r^k \cos k\theta = 1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \dots = \frac{1 - r \cos \theta}{r^2 + 1 - 2r \cos \theta}$$

Solución:

Dada la identidad:

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{1}{1-z}$$

Si: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow$ del teorema de De Moivre

$$1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + r^3 \cos 3\theta + \dots = \frac{1}{1 - r \cos \theta} \quad (1)$$

pero: $\frac{1}{1 - r \cos \theta} = \frac{1}{(1 - r \cos \theta) - i r \sin \theta}$

multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - r \cos \theta} &= \frac{(1 - r \cos \theta) + i r \sin \theta}{(1 - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \\ &= \frac{(1 - r \cos \theta) + i r \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad (2) \end{aligned}$$

separando partes reales y complejas en (1), y teniendo en cuenta (2):

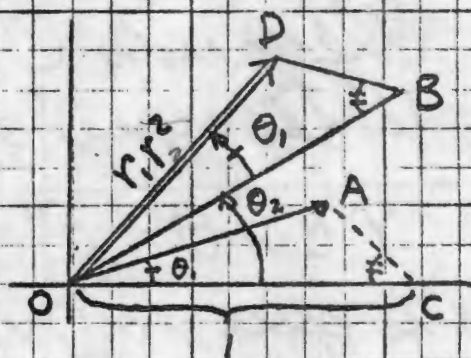
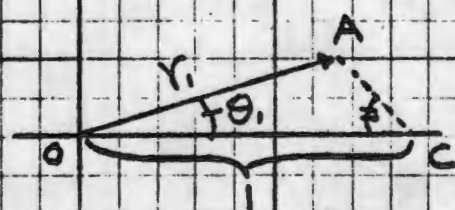
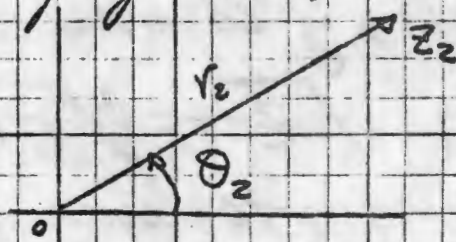
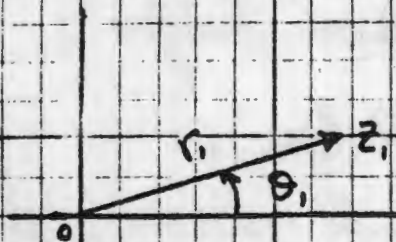
$$\begin{aligned} (1 + r \cos \theta + r^2 \cos 2\theta + \dots) + i(r \sin \theta + r^2 \sin 2\theta + r^3 \sin 3\theta + \dots) &= \\ = \frac{(1 - r \cos \theta) + i r \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad (3) \end{aligned}$$

igualando partes reales y complejas en (3):

$$i) \sum_{k=1}^n r^k \sin k\theta = \frac{r \sin \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \quad ; \quad ii) \sum_{k=0}^n r^k \cos k\theta = \frac{1 - r \cos \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta}$$

Representación gráfica del producto y del cociente de dos números complejos:

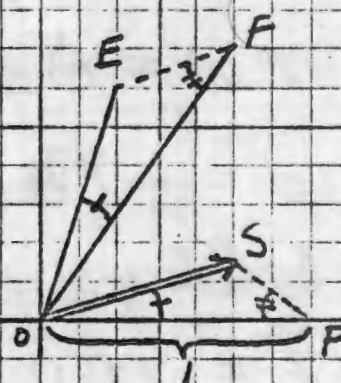
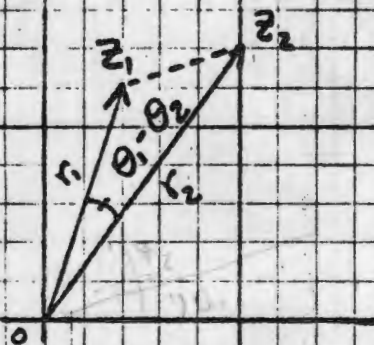
Sean los números complejos z_1, z_2 :



Por construcción: $\triangle OCA$ semejante $\triangle OBD$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OA} ; \frac{|z_2|}{1} = \frac{OD}{|z_1|} \Rightarrow |OD| = |z_1| |z_2| = r_1 r_2$$

$$\angle ODC = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow \vec{OD} = r_1 r_2 \text{ Cis}(\theta_1 + \theta_2) = z_1 z_2 \checkmark$$



$$\overline{OE} = r_1$$

$$\overline{OF} = r_2$$

Por construcción: $\triangle OEF$ semejante a $\triangle OSP$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{|OS|}{1} \Rightarrow |OS| = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \vec{z} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \text{ Cis}(\theta_1 - \theta_2) \checkmark$$

Raíces de un número complejo:

Sea $z = (a, b) = r \operatorname{cis} \theta$, $\theta < 2\pi$

Suponiendo que la raíz n de z existe, y es un número complejo:

$$\textcircled{1} \quad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \operatorname{cis} \theta} = \rho \operatorname{cis} w$$

nuestro problema es hallar el módulo ρ y el argumento w del complejo $\sqrt[n]{z}$

Elevando $\textcircled{1}$ a la n , de acuerdo con el teorema de De Moivre:

$$r \operatorname{cis} \theta = \rho^n \operatorname{cis} nw$$

puesto que los módulos deben ser iguales:

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \quad ; \quad (\rho > 0)$$

Los argumentos, como hemos visto, pueden diferir en $2\pi k$; $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

$$nw = \theta + 2\pi k$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{n} (\theta + 2\pi k)$$

$\therefore$ Substituyendo en $\textcircled{1}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{1}{n} (\theta + 2\pi k) \quad ; \quad k \in \mathbb{I}$$

En forma exponencial:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{1}{n} (\theta + 2\pi k)}$$

en n partes iguales.

5.- Para llevar un número complejo a una potencia fraccionaria, se procede como se indica a continuación:

$$z^{p/q} = (r \operatorname{cis} \theta)^{p/q} = [(r \operatorname{cis} \theta)^p]^{1/q}$$

$$= \sqrt[q]{r^p} \operatorname{cis} \frac{p(\theta + 2\pi k)}{q} = r^{p/q} \operatorname{cis} \frac{p(\theta + 2\pi k)}{q}$$

Ejemplo: Calcular cuánto vale $(z + zi)^{0.8}$

$$(z + zi)^{0.8} = (2\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ)^{4/5}$$

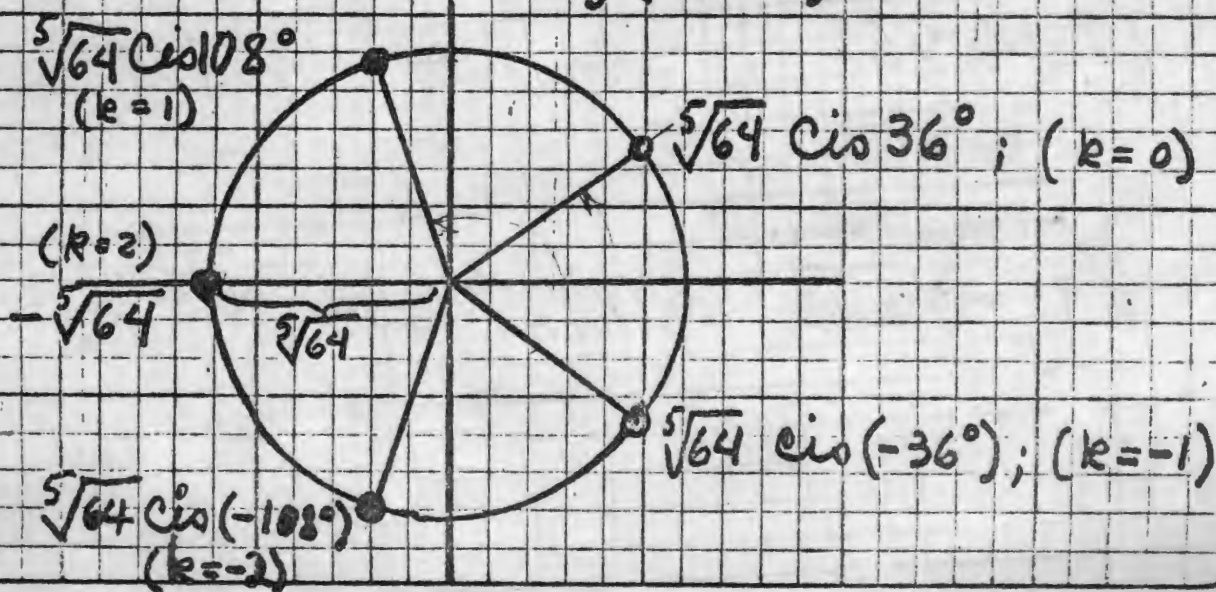
$$= [(2\sqrt{2})^4 \operatorname{cis} (45 \times 4)^\circ]^{1/5}$$

$$= (64 \operatorname{cis} \pi)^{1/5}$$

Por lo cual vemos que el resultado va a constar de 5 valores distintos.

$$(z + zi)^{0.8} = \sqrt[5]{64} \operatorname{cis} \frac{\pi + 2\pi k}{5}$$

$$= 2\sqrt[5]{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{5}(1 + 2k)$$



6.- Según sea el índice del radical en par o impar; considerando que haya o no una raíz real, se presentan las siguientes combinaciones de casos:

	UNA RAIZ REAL	NINGUNA RAIZ REAL
n par	Necesariamente otra raíz es real, las demás raíces son complejos conjugados.	Las raíces pueden o no ser pares de números complejos conjugados.
n impar	No existe ninguna otra raíz real. Las demás raíces son complejos conjugados.	Todas las raíces son complejas, pero no hay un solo par de complejos conjugados.

Ejemplos: Hallar las raíces:

a) $\sqrt[3]{9 \text{ cis } 20^\circ}$; Solución: $\begin{cases} 3 \text{ cis } 10^\circ \\ 3 \text{ cis } 190^\circ \end{cases}$

b) $\sqrt[4]{\text{cis } \pi}$; Solución: $\begin{cases} \text{cis } 45^\circ \\ \text{cis } (-45^\circ) \\ \text{cis } 135^\circ \\ \text{cis } (-135^\circ) \end{cases}$

c) $\sqrt[3]{2 \text{ cis } 45^\circ}$; Solución: $\begin{cases} 2 \text{ cis } 15^\circ \\ 2 \text{ cis } 135^\circ \\ 2 \text{ cis } 255^\circ \end{cases}$

d) $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\text{cis } 0}$; Solución: $\begin{cases} \text{cis } 0 \text{ (real)} \\ \text{cis } 120^\circ \\ \text{cis } (-120^\circ) \end{cases}$

7.- Para obtener las raíces de un complejo z , su argumento θ puede considerarse mayor o menor que cero. Si $\theta > 0$, los valores de k que van dando cada raíz, serán, siempre, diferentes de los valores k , que dan la misma raíz, si $\theta < 0$, siendo $k, -1 = k$. En efecto:

$$\frac{\theta + 2\pi k}{n} = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \quad (1)$$

de la figura: $\theta_1 = \theta - 2\pi$



de (1):

$$(\theta - 2\pi) + 2\pi k_1 = \theta + 2\pi k$$

$$\Rightarrow 2\pi(k_1 - 1) = 2\pi k$$

$$\therefore k_1 - 1 = k \quad \checkmark$$

Ejemplo: Si $z = -i$, calcular las raíces cúbicas de z

Solución: $|z| = 1 \Rightarrow |\sqrt[3]{z}| = 1$

Argumentos w de la raíz cúbica de z

k	$\theta = 270^\circ$	$k_1 = k+1$	k	$\theta = -90^\circ$
0	$\frac{270}{3} = 90^\circ$	$k_1 = 0+1$	1	$\frac{-90+360}{3} = 90^\circ$
z_2	$\frac{270+360}{3} = 210^\circ$	$k_1 = 1+1$	2	$\frac{-90+720}{3} = 210^\circ$
z_3	$\frac{270-360}{3} = -30^\circ$	$k_1 = -1+1$	0	$\frac{-90}{3} = -30^\circ$

z_1

$$k=0$$

$$z_1 = \sqrt[3]{z}$$

$$z_1 = \cos 90^\circ$$



$$k_1 = 0$$

$$z_3 = \sqrt[3]{z}$$

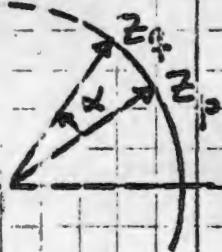
$$z_3 = \cos(-30^\circ)$$

8.- La suma $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ de las n raíces n -ésimas de un número complejo z es precisamente cero; esto es:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n = (0, 0)$$

La afirmación anterior puede verificarse del siguiente razonamiento:

Por encontrarse uniformemente distribuidos los extremos de los vectores z_k ($k=1, 2, \dots, n$) sobre la circunferencia de radio $|z|$ ($|z_k| = |z|$); resulta que el ángulo que 2 vectores consecutivos cualesquiera z_p, z_q forman, es: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$



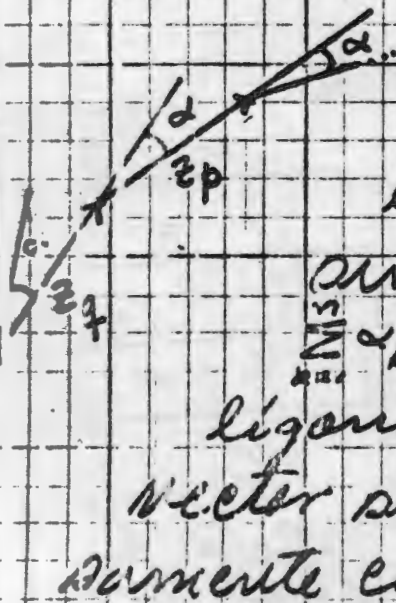
Gráficamente, el vector suma se forma colocando los n vectores z_k uno a continuación del otro, con lo

cual puede construirse un polígono regular de n lados y n vértices. Por ser la

suma de los n ángulos exteriores

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n\alpha = \frac{2\pi}{n} n = 2\pi \Rightarrow \text{que el po-}$$

lígono es cerrado; por lo tanto, el vector suma (resultante) es precisamente cero.



Demostración analítica de que:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = (0, 0) = 0$$

Solución:

Sea $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ ①
donde $a_i \in \mathbb{C}$.

Sean $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{C}$ las n raíces del polinomio $f(z) = 0$

$$\Rightarrow f(z) = (z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$$

Puede comprobarse que: (Fórmulas de Vieta)

$$a_1 = -(r_1 + r_2 + \dots + r_n) \quad ②$$

$$a_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n$$

$$a_3 = -(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n)$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1} + r_1 r_2 \dots r_{n-2} r_n + \dots + r_2 r_3 \dots r_n)$$

$$a_n = (-1)^n r_1 r_2 \dots r_n \quad ③$$

Consideremos el caso particular:

$\sqrt[n]{q} = z \therefore q = z^n \therefore z^n - q = 0$; $q \in \mathbb{C}$; de ①; puesto que no existe término en $z^{n-1} \Rightarrow a_1 = 0$ ó sea; de ②:

$$0 = a_1 = -(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n r_i = 0$$
 ; donde cada r_i es

una de las raíces n -ésimas del número complejo q . Obsérvese asimismo de ③: $\prod_{i=1}^n r_i = (-1)^n q$

19

Logaritmo natural de un número complejo - Definición: Sea z un número complejo ($z \neq (0,0)$). Se define como $\ln z$ al número complejo w tal que se verifique la ecuación $e^w = z \Rightarrow w = \ln z$

$$z = r e^{i(\theta + 2\pi k)}$$

$$\ln z = \ln r e^{i(\theta + 2\pi k)}$$

$$= \ln r + \ln e^{i(\theta + 2\pi k)}$$

$$= \ln r + i(\theta + 2\pi k) \ln e$$

$$\text{pero } \ln e = 1$$

$$\Rightarrow \ln z = \ln r + i\theta + i2\pi k \quad i \quad (k \in \mathbb{I})$$

De la última ecuación vemos que el logaritmo natural de un número complejo dado, no es único, sino que pueden haber tantos valores como se quieran (uno por cada valor de k)

Se llama valor principal de $\ln z$ el que corresponde a $k=0$:

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

Ejemplos: a) Calcular $\ln(-1)$.

$$-1 \equiv (-1, 0) = r \operatorname{cis} \pi = \operatorname{cis} \pi \Rightarrow r=1; \theta=\pi$$

$$\Rightarrow \ln(-1) = 0 + i\pi; (k=0)$$

b) Sabiendo que $1 = (-1)(-1)$, calcular $\ln 1$.

$$\ln(-1) + \ln(-1) = \ln((-1)(-1)) = \ln 1 = i\pi + i\pi$$

$$\Rightarrow \ln 1 = i2\pi; \text{ no resulta valor principal, } (k=1)$$

c) Calcular el valor principal de: $\ln(4+2i)$:

$$4+2i = \sqrt{20} \operatorname{cis}\left(\tan^{-1}\frac{2}{4}\right)$$

$$\sqrt{20} = 4.47214$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} = 0.46365 \text{ radianes}$$

$$\ln \sqrt{20} = 1.49787$$

$$\Rightarrow \ln(4+2i) = 1.49787 + 0.46365i$$

Números complejos elevados a potencias

Complejos - Sea $z \neq (0,0)$; $z = e^{\ln z}$

$$z^{a+bi} = e^{(a+bi)\ln z}$$

Puesto que $\ln z$ hemos visto puede asumir un número infinito de valores $\Rightarrow z^{a+bi}$

no es un valor único

$$z^{a+bi} = e^{(a+bi)(\ln r + i\theta + i2\pi k)}$$

Para valor principal $k=0$

$$z^{a+bi} = (re^{i\theta})^{a+bi}$$

$$= r^{a+bi} e^{i\theta(a+bi)}$$

$$= r^a r^{ib} e^{i\theta a} e^{-\theta b}$$

puesto que $r = e^{\ln r} \Rightarrow r^{ib} = e^{ib \ln r}$

$$z^{a+bi} = r^a e^{-b\theta} e^{i(a\theta + b \ln r)}$$

$$z^{a+bi} = r^a e^{-\theta b} \operatorname{cis}(a\theta + b \ln r)$$

Ejemplo: 1) Calcular $(2+3i)^{0.3+0.2i}$, para $k=2$

$$r = \sqrt{13}; \ln r = 1.28247; \theta = \tan^{-1}\frac{3}{2} = 56^\circ 18' 35''$$

$$\theta + 4\pi = 786^\circ 18' 35'' = 13.5416 \text{ rad}$$

$$(2+3i)^{0.3+0.2i} = -e^{-2.32509} \operatorname{cis} 68^\circ 9' 43'' = -0.0364 - 0.09076i$$

Logaritmo de un número complejo en base compleja: Sean $Z = a+bi$, $W = c+di$

$$\log_Z W = x \Rightarrow Z^x = W$$

Tomando $\ln$ en ambos miembros de $Z^x = W$

$$\ln Z^x = \ln W$$

$$x \ln Z = \ln W \Rightarrow x = \frac{\ln W}{\ln Z} \quad ; \text{ ó sea}$$

$$\log_Z W = \frac{\ln W}{\ln Z}$$

$$\log_{a+bi} (c+di) = \frac{\ln(c+di)}{\ln(a+bi)} = \frac{\ln r_2 + i\theta_2 + i2\pi k_2}{\ln r_1 + i\theta_1 + i2\pi k_1}$$

donde $k, k_2 \in \mathbb{I}$

Ejemplo 1) Calcular $\log_{(2+3i)} (4+3i)$, para $k_1 = k_2 = 1$

Solución:

$$r_1 = \sqrt{13} ; \ln \sqrt{13} = 1.28247 ; \theta_1 + 2\pi = \tan^{-1} \frac{3}{2} + 2\pi = 7.26598$$

$$r_2 = 5 ; \ln 5 = 1.60944 ; \theta_2 + 2\pi = \tan^{-1} \frac{3}{4} + 2\pi = 6.92669$$

Substituyendo en la fórmula:

$$\log_{2+3i} (4+3i) = \frac{1.60944 + 6.92669i}{1.28247 + 7.26598i}$$

$$\log_{2+3i} (4+3i) = -0.962 - 0.051i$$

2.- Demostrar que $\log_i i^i = i ; (k=0)$

Solución: $\log_i i^i = \frac{\ln i^i}{\ln i}$, $i = (0,1) = \cos \frac{\pi}{2}$

$$i^i = e^{i \ln i} ; \ln z = \ln r + i\theta + i2\pi k \Rightarrow \ln i = i \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow i^i = e^{-\pi/2} \Rightarrow \ln i^i = -\pi/2$$

$$\Rightarrow \log_i i^i = \frac{-\pi/2}{i \pi/2} = -\frac{1}{i} = i$$

3.- Hallar el valor de $\log_i i^i$, para $k=1$

a) Cálculo de i^i para $k=1$

$$z^{a+bi} = e^{(a+bi)(\ln r + i\theta + i2\pi k)}$$

$$z=i, a=0, b=1, r=1, \theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow i^i = e^{i(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-1.5708}$$

$$b) \log_i i^i = \frac{\ln r_2 + i\theta_2 + i2\pi k_2}{\ln r_1 + i\theta_1 + i2\pi k_1}$$

puesto que $e^{-1.5708} \in \mathbb{R}^+$

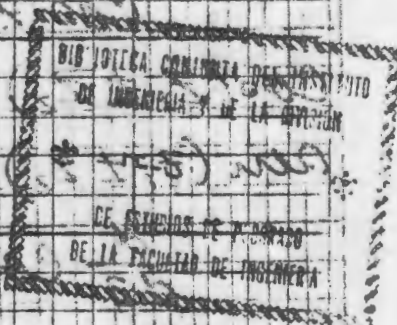
$$\Rightarrow r_1=1, \theta_1=\frac{\pi}{2}, k_1=1$$

$$r_2 = e^{-1.5708}, \theta_2=0, k_2=1$$

$$\log_i i^i = \frac{-1.5708 + i2\pi}{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\log_i i^i = +i + 0.8$$

$$\log_i i^i = 0.8 + i \quad (k_2=k_1=1)$$



Sen y Cos de un número complejo:-

Con base en las fórmulas de Euler:-

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad ;$$

se definen las siguientes funciones.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

De estas definiciones se establecen fácilmente las siguientes fórmulas:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

Derivados pueden definirse:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z}$$

$$= \frac{\cos z}{\sin z} \Rightarrow \frac{d}{dz} \cot z = -\operatorname{cosec}^2 z$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} \sec z = \sec z \tan z$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} \operatorname{cosec} z = -\operatorname{cosec} z \cot z$$

Funciones hiperbólicas de variable real:

Desarrollando:

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \\ &= \frac{e^{-y}e^{ix} + e^ye^{-ix}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^y(\cos x - i\sin x)}{2} \\ &= \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i\sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}\end{aligned}$$

Se definen $\cosh y$, y $\sinh y$:

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}; \quad \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

∴ resulta la fórmula:

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

de modo análogo puede obtenerse:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

haciendo $x=0$:

$$\cos iy = \cosh y$$

$$\sin iy = i \sinh y$$

Ejemplo: Calcular $\cos(1+2i)$

Solución:

$$\begin{aligned}\cos(1+2i) &= \cos 1 \cosh 2 - i \sin 1 \sinh 2 \\ &= (0.5403)(3.7622) - i(0.8415)(3.6269) \\ &= 2.033 - 3.052i\end{aligned}$$

Se definen Tanchens:

$$\tanh y = \frac{\sinh y}{\cosh y}$$

$$\coth y = \frac{1}{\tanh y} = \frac{\cosh y}{\sinh y}$$

$$\operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}$$

$$\operatorname{csch} y = \frac{1}{\sinh y}$$

Resultando las siguientes relaciones:

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

$$\operatorname{sech}^2 y + \tanh^2 y = 1$$

$$\coth^2 y - \operatorname{csch}^2 y = 1$$

$$\sinh(-y) = -\sinh y$$

$$\cosh(-y) = \cosh y$$

$$\tanh(-y) = -\tanh y$$

$$\operatorname{csch}(-y) = -\operatorname{csch} y$$

$$\operatorname{sech}(-y) = \operatorname{sech} y$$

$$\coth(-y) = -\coth y$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\coth(x \pm y) = \frac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}$$

De las relaciones dadas anteriormente, se deducen fácilmente las siguientes:

$$\operatorname{sen} \bar{z} = \overline{\operatorname{sen} z}$$

$$\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$$

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$$

$$\cos(-z) = \cos z$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$$

$$\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$$

Las funciones $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ no están acotadas en valor absoluto, como se deduce de las siguientes dos fórmulas:

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y.$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 y.$$

Las funciones trigonométricas de z son periódicas:

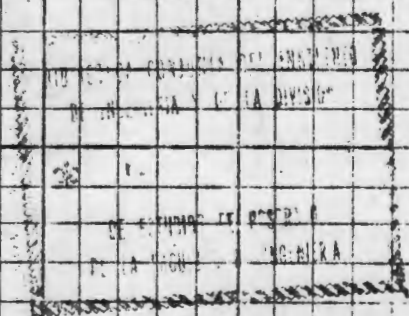
$$\cos(z + \pi) = -\cos z$$

$$\operatorname{sen}(z + \pi) = -\operatorname{sen} z$$

$$\tan(z + \pi) = \tan z$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$$



Funciones hiperbólicas con argumento complejo - Se definen del siguiente modo:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$$\coth z = \frac{1}{\tanh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}$$

$$\operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

De las definiciones anteriores se deducen las siguientes fórmulas:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z$$

$$\sinh(-z) = -\sinh z$$

$$\cosh(-z) = \cosh z$$

$$\sinh(iz) = i \sin z ; \cosh(iz) = \cos z$$

$$\sin(iz) = i \sinh z ; \cos(iz) = \cosh z$$

$$\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

$$\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$$

⇒ Las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ no están acotadas en valor absoluto; siendo éstas periódicas, con período $2\pi i$.

Debe observarse que $\tanh z$ tiene período πi .

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

$$\frac{d}{dz} \tanh z = \operatorname{sech}^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \coth z = -\operatorname{csch}^2 z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$$

$$\frac{d}{dz} \operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$$

Funciones trigonométricas inversas de argumento complejo.

Se define: $w = \operatorname{sen}^{-1} z$

$$\therefore z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$\therefore e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0$$

$$\therefore e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$$

Tomando logaritmos:

$$w = \operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

Dado que el logaritmo es una función multivaluada, resultan infinitos valores para $\operatorname{sen}^{-1} z$.

De modo semejante se obtienen:

$$\operatorname{Cos}^{-1} z = -i \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{tan}^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right) = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)$$

Funciones hiperbólicas inversas de argumento complejo.

$$\operatorname{senh}^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\operatorname{cosh}^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{tanh}^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Una vez definidos los valores principales, las fórmulas de derivaciones se pueden obtener sin ninguna dificultad.

Ejercicio: Si $\cos Z = 2$, determinar el valor de Z .

Solución:

$\cos Z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
pero $\cos Z = 2 \Rightarrow$ igualando partes reales y complejas:

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 2 & (1) \\ \sin x \sinh y = 0 & (2) \end{cases}$$

Observando que (2) se verifica si $\sinh y = 0$
lo cual $\Rightarrow y = 0$; pero de (1) $\Rightarrow \cosh 0 = 1$
 $\Rightarrow \cos x = 2$ lo cual no es posible, si $x \in \mathbb{R}$,
de modo que $y \neq 0$.

Si se considera nuevamente (2) para
 $\sin x = 0$, o sea $x = \pm n\pi$, $\Rightarrow \cos x = \pm 1$;
descartando -1 , $\Rightarrow$ si $\cos x = 1$, de (1) $\Rightarrow$
 $\cosh y = 2$, $\therefore y = \cosh^{-1} 2$; pero de
 $\cosh^{-1} z = \ln(z \pm \sqrt{z^2 - 1})$

$\Rightarrow y = \ln(2 + \sqrt{3})$; ya que $z \pm \sqrt{z^2 - 1}$
debe ser tal que $\cosh^{-1} z > 0$ (Valor principal)

$$\Rightarrow Z = x + iy$$

$$= \pm 2n\pi + i \ln(2 + \sqrt{3}) \quad \checkmark$$

(se considera $x = \pm 2n\pi$ puesto que
 $\cos x = +1$; puesto que $\cosh y > 1 \in (-\infty, \infty)$)
Ver Mathematical Handbook, Schaum; pag 29.

Teorema fundamental del álgebra:
Sea la ecuación:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad ; \quad a_i \in \mathbb{C}$$

Si $a_0 \neq 0$, $n > 0$, se afirma que existe un $z \in \mathbb{C}$ que satisface la ecuación.

Si $z_1, z_2, \dots, z_r$ ($r \leq n$) son todos números complejos diferentes, que satisfacen la ecuación, se afirma que existen enteros positivos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = n$) tales que

$$a_0 z^n + \dots + a_n = a_0 (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_r)^{\alpha_r}$$

Ejercicio: Demostrar que si z_i es raíz de la ecuación, también lo es $\bar{z}_i$; siempre y cuando los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}^\#$. ($i = 1, 2, \dots, n$)

1ª Demostración:

$$a_0 z^n + \dots + a_n = a_0 (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_r)^{\alpha_r}$$

$$\Rightarrow a_0 \bar{z}^n + \dots + a_n = a_0 (\bar{z} - \bar{z}_1)^{\alpha_1} \dots (\bar{z} - \bar{z}_r)^{\alpha_r}$$

$$= a_0 (\bar{z} - \bar{z}_1)^{\alpha_1} \dots (\bar{z} - \bar{z}_r)^{\alpha_r}$$

haciendo: $\bar{z} = z$

$$a_0 z^n + \dots + a_n = a_0 (z - \bar{z}_1)^{\alpha_1} \dots (z - \bar{z}_r)^{\alpha_r}$$

$\Rightarrow \bar{z}_i$ satisfacen la ecuación, si $a_i \in \mathbb{R}^\#$ ✓

2ª Demostración:

Sea $f(z) = a_0 z^n + \dots + a_n = 0 = f(a + bi)$

Desarrollando según la fórmula de Taylor

$$f(a+bi) = f(a) + f'(a)bi + \frac{f''(a)}{2!}(bi)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(bi)^3 + \dots$$

$$= f(a) + f'(a)bi - \frac{f''(a)}{2!}b^2 + \frac{f'''(a)}{3!}b^3i + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}b^4 + \dots$$

$$= f(a) - \frac{f''(a)}{2!}b^2 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}b^4 \dots + i \left[f'(a)b - \frac{f'''(a)}{3!}b^3 + \frac{f^{(5)}(a)}{5!}b^5 \dots \right]$$

$$f(a+bi) = f(a) - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} b^{2n}}_A + i \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{f^{(2n-1)}(a)}{(2n-1)!} b^{2n-1}}_B$$

$$f(a+bi) = A + Bi = 0$$

$$\Rightarrow A = 0, B = 0$$

observando que:

$$f(a-bi) = A - Bi$$

ya que A sólo contiene potencias pares de $b \Rightarrow$ su signo no cambia.

puesto que $A = B = 0 \Rightarrow f(a-bi) = 0 \Rightarrow a-bi = \bar{z}$ es también raíz de la ecuación ✓

Observaciones: Si los coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$:

1.- Toda ecuación de grado impar tiene, por lo menos, una raíz real.

2.- Si una ecuación de grado $2n$ par tiene una raíz real, puede afirmarse que existe, por lo menos, otra raíz, también real.

Ejemplos: Hallar todas las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + 2\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 9 = 0$

b) $z^4 - 8z^3 + 34z^2 - 72z + 65 = 0$; sabiendo que $z_1 = 2 - i$ es una de las raíces.

Solución:

a) Si se hace $z = a + bi$, la ecuación puede escribirse:

$$(a^2 - b^2 + 2abi) + 2(a^2 - b^2 - 2abi) + 2bi + 9 = 0$$

igualando a cero partes reales y partes complejas:

① $\begin{cases} 3(a^2 - b^2) + 9 = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} -2ab + 2b = 0 \Rightarrow \{a = 1 \text{ o } b = 0, \text{ (o ambos)}\} \end{cases}$

si $a = 1$, de ① $\Rightarrow b = \pm 2$

si $b = 0$, de ① $\Rightarrow 3a^2 + 9 = 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^\#$

$\Rightarrow z_1 = 1 + 2i; z_2 = \bar{z}_1 = 1 - 2i$

b) Si $z_1 = 2 - i; \Rightarrow z_2 = 2 + i = \bar{z}_1$

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = 0$$

$$(z - 2 + i)(z - 2 - i)(z - z_3)(z - z_4) = 0$$

pero $(z - 2 + i)(z - 2 - i) = (z - 2)^2 + 1 = z^2 - 4z + 5$

$$\therefore \frac{z^4 - 8z^3 + 34z^2 - 72z + 65}{z^2 - 4z + 5} = z^2 - 4z + 13$$

$\Rightarrow z^2 - 4z + 13 = (z - z_3)(z - z_4) = (z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i)$

$\Rightarrow z_3 = 2 + 3i; z_4 = \bar{z}_3 = 2 - 3i$

Demstrar que si en la ecuación:

$a_0 z^n + \dots + a_n = 0$ se substituye cada uno de los coeficientes a_i por el conjugado correspondiente $\bar{a}_i$, las raíces de la ecuación $\textcircled{1}$ z_i deberán ser entonces las conjugadas $\bar{z}_i$.

Demstración:

$$a_0 z^n + \dots + a_n = a_0 (z - z_1)^{\alpha_1} + \dots + (z - z_r)^{\alpha_r}$$

$$\overline{a_0 z^n + \dots + a_n} = \bar{a}_0 (\bar{z} - \bar{z}_1)^{\alpha_1} + \dots + (\bar{z} - \bar{z}_r)^{\alpha_r}$$

.....

.....

$$\bar{a}_0 \bar{z}^n + \dots + \bar{a}_n = \bar{a}_0 (\bar{z} - \bar{z}_1)^{\alpha_1} + \dots + (\bar{z} - \bar{z}_r)^{\alpha_r}$$

haciendo $\bar{z} = z$

$$\bar{a}_0 z^n + \dots + \bar{a}_n = \bar{a}_0 (z - \bar{z}_1)^{\alpha_1} + \dots + (z - \bar{z}_r)^{\alpha_r} \quad \checkmark$$

Obsérvese que el ejercicio anterior puede considerarse como un caso particular de este último, puesto que si los coeficientes a_i son reales $\Rightarrow \bar{a}_i = a_i$

Si los coeficientes $a_i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ las raíces complejas de $\textcircled{1}$ no son necesariamente conjugadas; pudiendo ser todas complejas, cualquiera que sea el grado de la ecuación (par ó impar).

Ejemplos: Hallar todas las raíces de las ecuaciones:

a) $z^3 + 27i = 0$

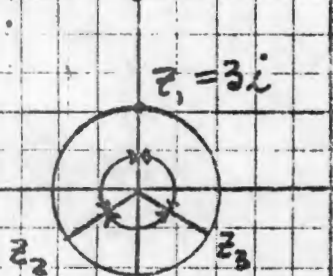
b) $z^3 + 3z^2i^3 - 3z + i = 0$

Solución:

a) La ecuación $z^3 + 27i = 0$ es equivalente a la ecuación $z^3 + (-1)(i^2)27i = 0$; ó sea $z^3 - 27i^3 = 0$

$\Rightarrow z^3 = 27i^3 \Rightarrow$ una raíz es $z_1 = 3i$.

Sabiendo que la ecuación debe tener 3 raíces, del siguiente diagrama se deducen las otras z :



$$z_2 = \frac{3}{2}(-\sqrt{3} - i)$$

$$z_3 = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$$

b) $z^3 + 3z^2i^3 - 3z + i = 0$; puede escribirse:

$$z^3 + (i^2)3z^2i - (-1)z3i^2 + i(-1)(i^2) = 0$$

$$\Rightarrow z^3 - 3z^2i + 3zi^2 - i^3 = (z-i)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (z-i)(z-i)(z-i) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = i$$

Fórmulas de Vieta. - Sea el polinomio:

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

obsérvese que el coeficiente $a_0 = 1$. Lo anterior siempre es posible en cualquier polinomio, pues si $a_0 \neq 1$, bastará dividir todos los términos entre a_0 para conseguir que el coeficiente de z^n sea precisamente $a_0 = 1$.

Del teorema fundamental del álgebra:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_r)^{\alpha_r}$$

Tomando cada raíz múltiple el número correspondiente de veces al efectuar los productos indicados en el segundo miembro de la última ecuación, resultan, al igualar coeficientes en ambos miembros, las siguientes fórmulas, conocidas como "fórmulas de Vieta":

$$a_1 = -(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$$

$$a_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n + z_2 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n$$

...

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (\underbrace{z_1 z_2 \dots z_{n-1}}_{\text{Cada término con } n-1 \text{ factores}} + \underbrace{z_1 z_2 \dots z_{n-2} z_n}_{\text{Cada término con } n-1 \text{ factores}} + \dots + \underbrace{z_2 z_3 \dots z_n}_{\text{Cada término con } n-1 \text{ factores}})$$

$$a_n = (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n$$

Resultando, por lo tanto, en el 2º miembro de la k -ésima igualdad ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) una suma de todos los productos posibles de k raíces,

cuyo signo correspondiente es +, si k es par,
 ó - si k es impar; por ejemplo:

1) Si $n = 3$

$$a_1 = -(z_1 + z_2 + z_3)$$

$$a_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

$$a_3 = -z_1 z_2 z_3$$

2) Determinar los coeficientes del polinomio
 $f(x)$, sabiendo que la ecuación $f(x) = 0$ tie-
 ne las siguientes raíces: $-2, 3, -4$.

Solución:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (-1)(-2 + 3 - 4) = 3$$

$$a_2 = (-1)^2 [(-2)(3) + (-2)(-4) + (3)(-4)] = -10$$

$$a_3 = (-1)^3 (-2)(3)(-4) = -24$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$$

3) Igual que 2) : $z_1 = 5; z_2 = -2; z_3 = z_4 = 3$

Solución:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (-1)(5 - 2 + 3 + 3) = -9$$

$$a_2 = (-1)^2 [(5)(-2) + (5)(3) + (-2)(3) + (-2)(3) + (5)(3) + (3)(3)] = 17$$

$$a_3 = (-1)^3 [(5)(-2)(3) + (5)(-2)(3) + (5)(3)(3) + (-2)(3)(3)] = 33$$

$$a_4 = (-1)^4 (5)(-2)(3)(3) = -90$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90 = 0$$

4) Hallar las raíces de la ecuación:
 $z^4 - 8z^3 + 34z^2 - 72z + 65 = 0$; sabiendo
que $z_1 = 2 - i$ satisface la ecuación.

Solución:

Este problema fue resuelto ya por
otro método. Emplearemos ahora las fór-
mulas de Vieta:

De la ecuación vemos que:

$$a_1 = -8 = -(z_1 + z_2 + z_3 + z_4)$$

$$a_4 = 65 = (-1)^4 (z_1 z_2 z_3 z_4)$$

$$\text{pero } z_1 = 2 - i \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = 2 + i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 4 \Rightarrow z_3 + z_4 = 8 - 4 = 4 \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = (2 - i)(2 + i) = 5$$

$$\Rightarrow z_3 z_4 = \frac{65}{5} = 13 \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) pueden resolverse
simultáneamente:

$$\text{de (1): } z_3 = 4 - z_4 \quad (3)$$

$$\text{de (3) y (2): } z_4(4 - z_4) = 13$$

$$\therefore z_4^2 - 4z_4 + 13 = 0$$

$$\Rightarrow z_4 = 2 \pm 3i$$

$$\therefore z_3 = 2 \mp 3i$$

$\Rightarrow z_3 = \bar{z}_4 = 2 + 3i$; lo cual verifica el
resultado obtenido anteriormente.

57

Desigualdades. - La noción de desigualdad resulta al comparar dos números a y b . El símbolo $<$ (menor que) establece una relación de orden entre dos números. Decimos que $a < b$, ó $b > a$ (b mayor que a) si $b - a > 0$.

Esta relación introduce el concepto de "orden" al comparar dos números reales a y b . Puede demostrarse que no es posible definir una relación de orden semejante en el conjunto C de los números complejos.

La relación $a < b$ tiene las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^{\#}$

1.- $a < b$, $a = b$ ó $a > b$ (Tricotomía).

2.- $a < b$, y $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitividad).

3.- $a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$.

4.- $a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

5.- $a < b$, $c < 0 \Rightarrow ac > bc$.

6.- $a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$; ($a > 0$; $b > 0$)

7.- No se altera el sentido de una desigualdad si se eleva a una potencia $2n-1$; $n \in \mathbb{N}$.

8.- Se preserva el sentido de una desigualdad al extraerle raíz de índice $2n-1$; $n \in \mathbb{N}$.

1ª Observación: Si el polinomio:

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$; $n \in \mathbb{N}$; $a_i \in \mathbb{R}^\#$,
tiene raíces repetidas; esto es:

$f(x) = a_0 (x-r_1)^{\alpha_1} (x-r_2)^{\alpha_2} \dots (x-r_k)^{\alpha_k}$; $\alpha_k \in \mathbb{N}$;
donde $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$, la gráfica de la
función $f(x) = y$ tendrá las siguientes caracte-
rísticas:

Si $\alpha_i = \begin{cases} 1 \Rightarrow r_i \text{ corta al eje } x \text{ en un ángulo.} \\ 2n \text{ (par)} \Rightarrow r_i \text{ no corta al eje } x; \text{ sino que es} \\ \text{tangente a éste (máximo o mínimo).} \\ 2n-1 \text{ (impar)} \Rightarrow r_i \text{ corta al eje } x; \text{ pero con} \\ \text{pendiente horizontal (punto de inflexión).} \end{cases}$

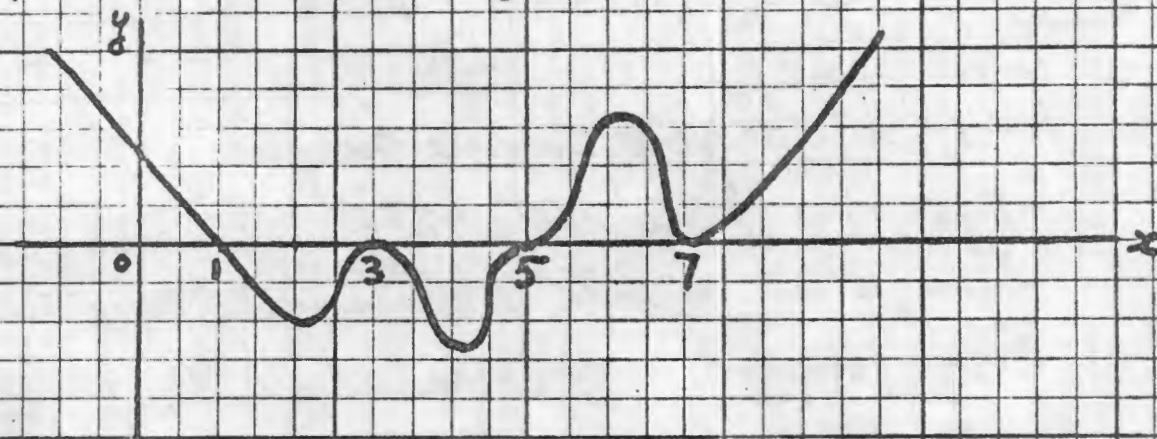
Si las raíces r_i son complejas ($r_i = a \pm bi$)
éstas serán en número par (complejos conju-
gados) por ser los coeficientes a_i números rea-
les. Las raíces complejas no influyen en la
forma en la cual la gráfica corta al eje de
las x , pues sólo las raíces reales determi-
nan los puntos en los cuales la gráfica corta
el eje de las abscisas. Las raíces complejas
pueden afectar, sin embargo, la forma
general de la curva.

Ejemplos: Dibujar en forma esquemática la gráfica de las siguientes ecuaciones:

$$1) y = (x-1)(x-3)^2(x-5)^3(x-7)^4$$

Solución:

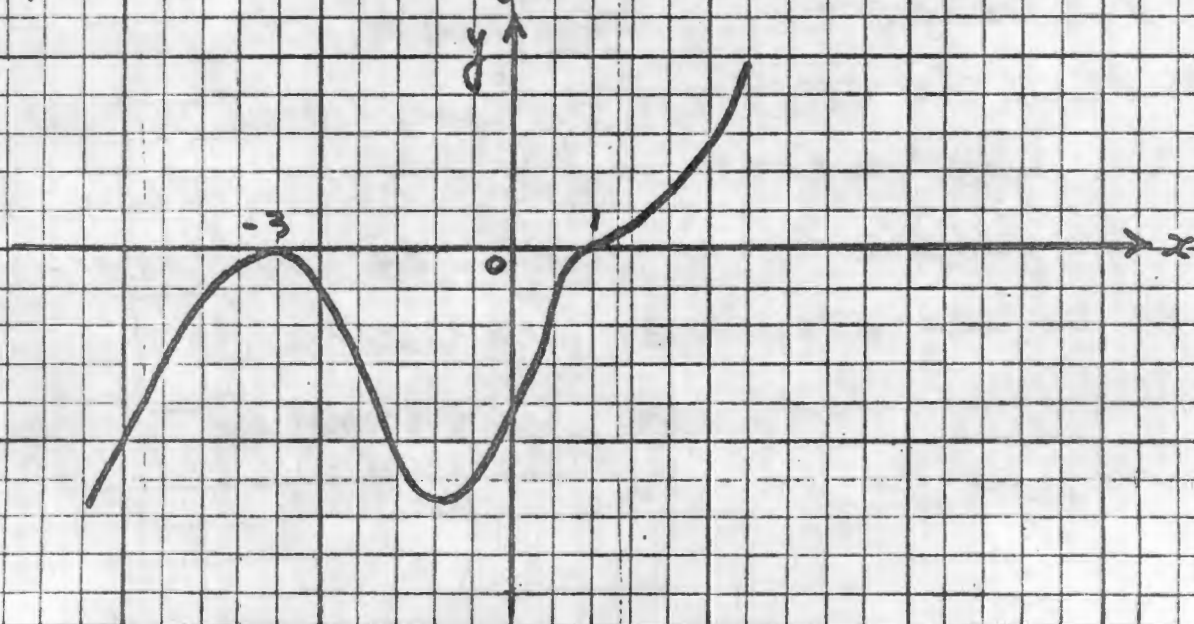
$$\text{para } x=0 \Rightarrow y = (-1)(-3)^2(-5)^3(-7)^4 > 0$$



$$2) y = (x-1)^3(x+3)^2$$

Solución:

$$\text{para } x=0 \Rightarrow y = (-1)^3(3)^2 = -9 < 0$$

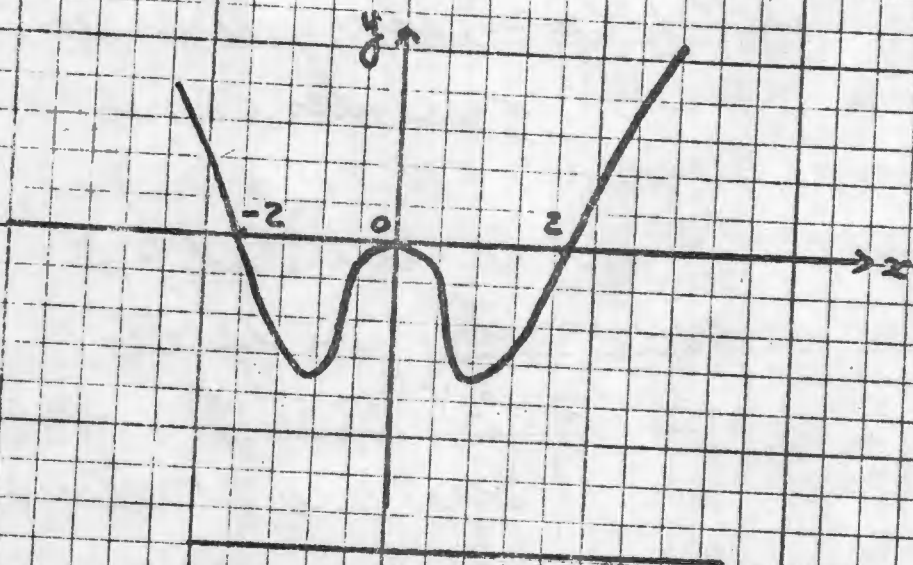


3) $y = x^2(x^2 - 4)$

Solución:

si $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = x^2(x+2)(x-2)$



4) $y = x^2 + 2x + 2$ ①

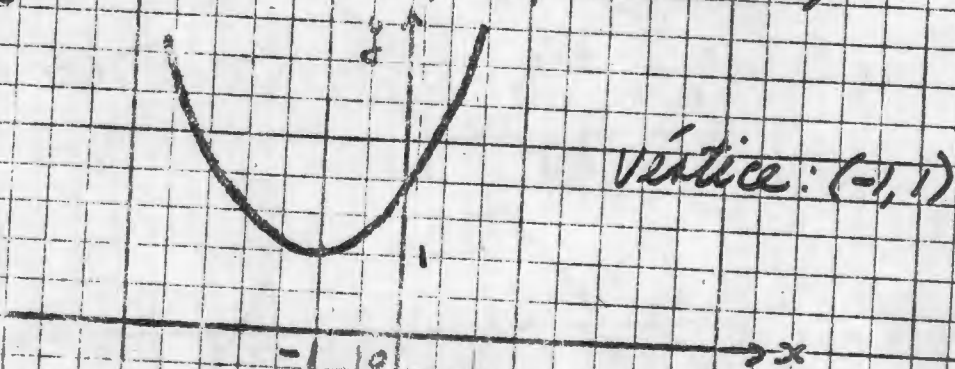
Solución:

para $x = 0, \Rightarrow y = 2$

② $y = (x+1+i)(x+1-i)$ (raíces complejas)

① puede escribirse:

$y - 1 = (x+1)^2$ (parábola)



Se ve de ② que la curva no corta el eje x .

2ª Observación - Toda inecuación cuyo primer miembro es de la forma:

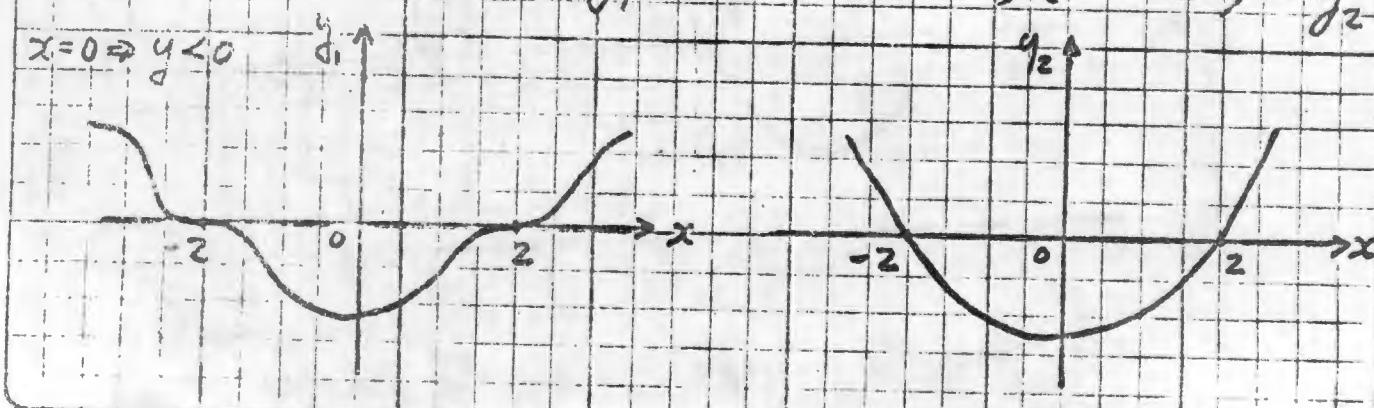
$a_0(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_2)^{\alpha_2}\dots(x-r_k)^{\alpha_k}$; siendo el segundo miembro de la inecuación cero, puede simplificarse, sin que se altere su solución en los siguientes casos:

i) Si $\alpha_i = 2n+1$; $n \in \mathbb{N}$ ($\alpha_i = \text{impar}$), puede cambiarse α_i por la unidad; es decir, se suprime el exponente. En efecto:

$(x-r_i)^{2n+1} = (x-r_i)^{2n}(x-r_i)$; pero $(x-r_i)^{2n} > 0$, por lo cual no se altera la solución de la inecuación si se divide ésta entre $(x-r_i)^{2n}$. La supresión del exponente impar cambia la gráfica, de modo que ésta sigue cortando el eje de las x ; pero en vez de hacerlo con tangente horizontal, lo hace formando un ángulo θ ($0 < \theta < \pi$)

Ejemplo:

$$(x-2)^3(x+2)^5 = y_1 \quad ; \quad (x-2)(x+2) = y_2$$



70

Inecuaciones. - Son desigualdades en las que intervienen incógnitas.

Ejemplos: Resolver las siguientes inecuaciones:

$$1) \frac{2}{x-1} < \frac{3}{x+2} \quad (x \neq 1 \text{ ó } -2)$$

$$\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} < 0$$

Para eliminar los denominadores podemos multiplicar por $(x-1)^2(x+2)^2 > 0$

$$2(x+2)^2(x-1) - 3(x+2)(x-1)^2 < 0$$

$$(x+2)(x-1)[2(x+2) - 3(x-1)] < 0$$

$$(x+2)(x-1)[2x+4-3x+3] < 0$$

$$(x+2)(x-1)(-x+7) < 0$$

$$(x+2)(x-1)(x-7) > 0$$

Podemos determinar los valores de x que satisfacen la inecuación representando en forma esquemática la ecuación

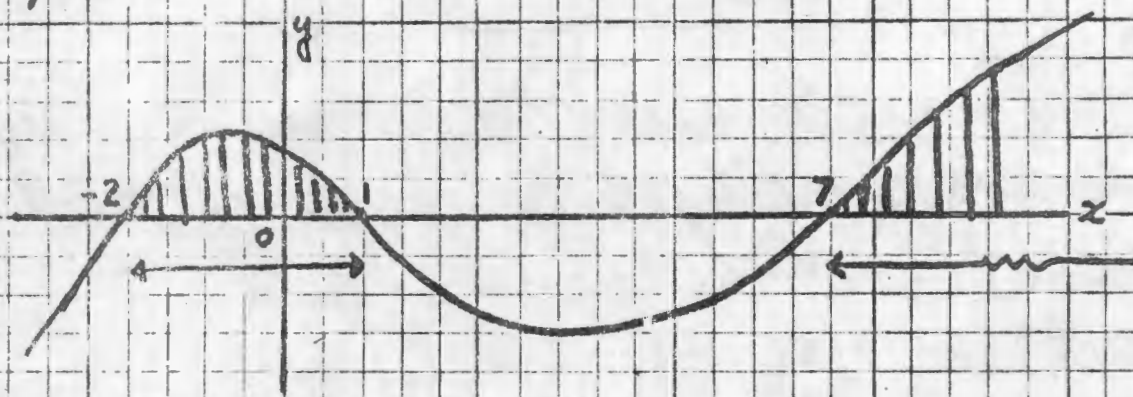
$$(x+2)(x-1)(x-7) = y$$



Escogamos cualquier valor de x , digamos $x=0$, y calculemos el que corresponde a y en la última ecuación:

$$(0+2)(0-1)(0-7) = 14 > 0$$

⇒ la inequación se satisface para todas las ordenadas positivas mostradas en la gráfica



Juego la inequación se satisfará para los siguientes valores de x :

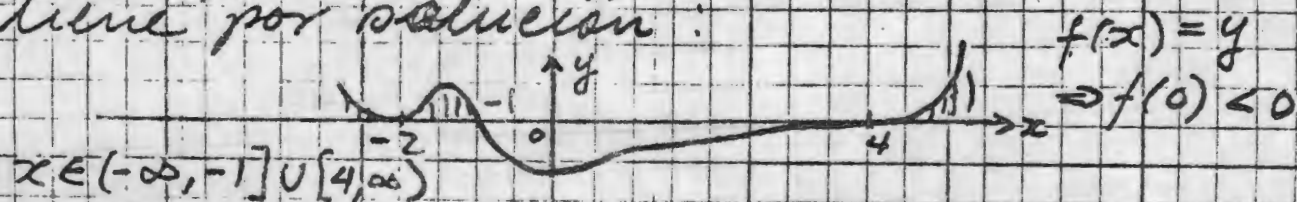
$$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > 7 \end{cases}$$

Obsérvese que para trazar la gráfica basta determinar los puntos en que ésta corta al eje x , para poder así definir las zonas en que la y cambia de signo. No importa ningún valor particular de y ; bastando el signo de un valor de y para distinguir las zonas.

ii.) Si $\alpha_i = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ (ó sea, α_i es par), teniendo en cuenta el segundo miembro ≤ 0 ó ≥ 0 es decir, se incluye la posibilidad de la igualdad a cero, entonces la solución debe incluir $x = r_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$, ya que $x = r_i \Rightarrow (x - r_i)^{\alpha_i} = 0$; de modo que, tomando en cuenta lo anterior, no se afecta la solución de la inequación si se suprimen todos los factores cuyo exponente es par; ya que $(x - r_i)^{2n} > 0$, pero agregando a la solución el punto $x = r_i$, ya que entonces $x - r_i = 0$, si $a_0 (x - r_1)^{\alpha_1} (x - r_2)^{\alpha_2} \dots (x - r_k)^{\alpha_k} \leq 0$ ó ≥ 0 .

La supresión de los factores con exponente par cambia la configuración de la gráfica de la ecuación $f(x) = y$, pues suprime los puntos en que la gráfica es tangente al eje x , sin cortar a éste.

Ejemplo 1. $(x+1)(x+2)^4(x-4)^3 \geq 0$
tiene por solución:



$$x \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$$

La solución de: $(x+1)(x-4) \geq 0$ más el punto $x = -2$ es asimismo: $x \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$

$$2.- (x+1)(x-2)^4(x-4)^5 \geq 0$$

Solución:

$$f(x) = y \Rightarrow f(0) < 0$$



$$x \leq -1 ; x = 2 ; x \geq 4$$

ó bien: $(x+1)(x-4) \geq 0$ a cuya solución debe agregarse el punto $x=2$

En conclusión: Las desigualdades de la forma:

a) $f(x) \leq 0$, ó

b) $f(x) \geq 0$

Pueden descomponerse en:

a) $f(x) > 0$; $f(x) = 0$

b) $f(x) < 0$; $f(x) = 0$

Inecuaciones simultáneas. - Así como en la práctica suelen presentarse problemas cuya solución se consigue resolviendo un sistema de ecuaciones simultáneas, hay ciertos problemas, como por ejemplo en "programación lineal", donde la respuesta involucre un sistema de "inecuaciones" simultáneas.

En este último caso, la solución requiere que se defina un intervalo (o la unión de varios intervalos) o regiones en las cuales se verifiquen simultáneamente todas las inecuaciones del sistema. Puede suceder que el sistema no tenga solución.

Cuando se tiene un sistema de inecuaciones simultáneas, puede procederse a la resolución de cada inecuación en forma independiente, obteniéndose la solución al sistema por la intersección de todos los intervalos (o las regiones) que satisfacen las inecuaciones en forma individual.

En seguida veremos primero ejemplos de inecuaciones, con una variable.

Ejemplos: Resolver los siguientes sistemas de inequaciones simultáneas:

$$1.) \begin{cases} \frac{2}{x-1} < \frac{3}{x+2} & \textcircled{1} \\ x^2 > 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Solución:

La solución individual de cada inequación es:

de $\textcircled{1}$: $(-2 < x < 1) \cup (x > 7)$

de $\textcircled{2}$: $(x < -1) \cup (x > 1)$

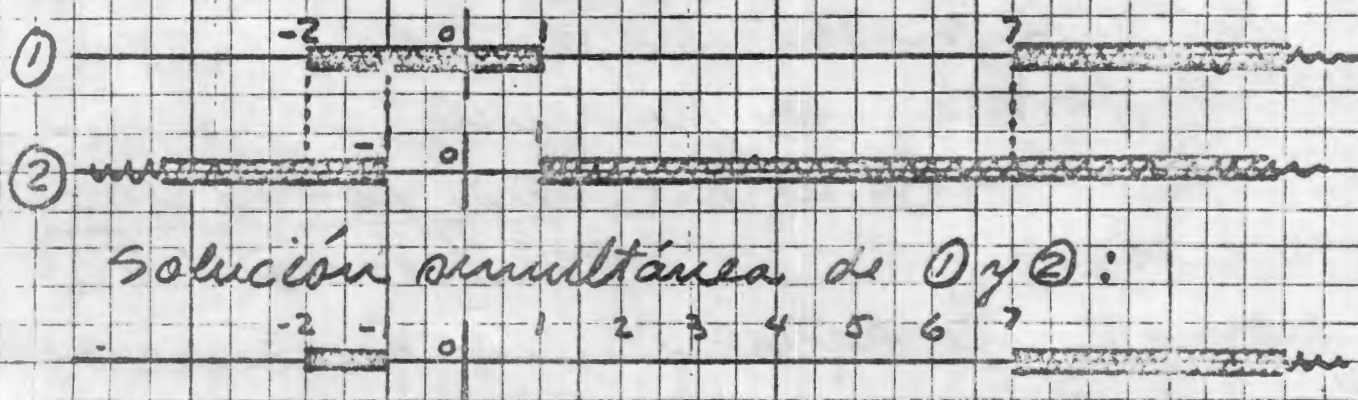
$\Rightarrow$ La solución simultánea es:

$$[(-2 < x < 1) \cup (x > 7)] \cap [(x < -1) \cup (x > 1)]$$

que al simplificarse da:

$$(-2 < x < -1) \cup (x > 7)$$

En forma gráfica:



Solución simultánea de $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$:

Este último diagrama muestra los intervalos en los cuales se satisfacen ambas inequaciones.

$$2.-) \quad x < (x^2 - 12) < 4x$$

Solución:

Deben considerarse las siguientes inecuaciones:

$$a) \quad x < x^2 - 12$$

$$b) \quad x^2 - 12 < 4x$$

Solución de a) $x < x^2 - 12$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 > 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) > 0$$

$$\therefore (x < -3) \cup (x > 4)$$

Solución de b): $x^2 - 12 < 4x$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 < 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6$$

Solución simultánea:

$$[(x < -3) \cup (x > 4)] \cap [-2 < x < 6]$$

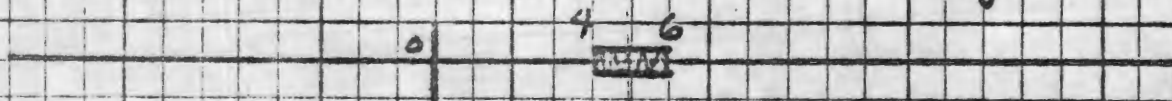
que al simplificarse da:

$$4 < x < 6$$

En forma gráfica:



Solución simultánea de a) y b):

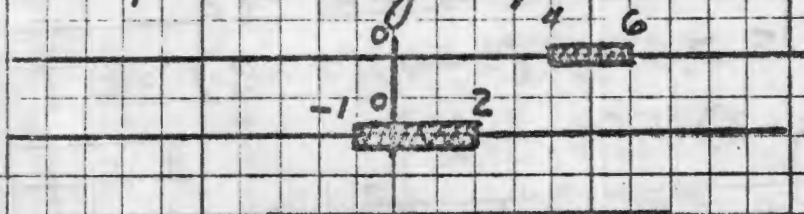


$$3.) \begin{cases} 4 < x \leq 6 \\ -1 \leq x < 2 \end{cases}$$

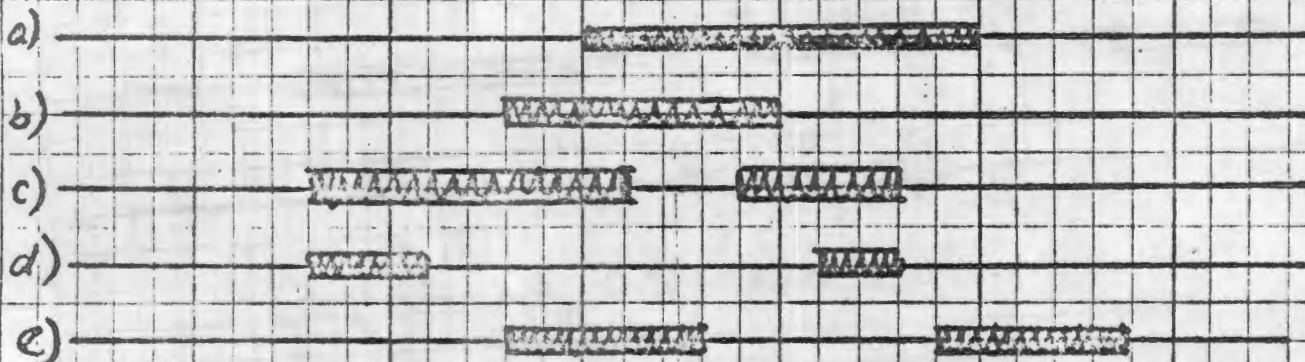
Este sistema no tiene solución, ya que la intersección de las soluciones es $\emptyset$

$$(4 < x \leq 6) \cap (-1 \leq x < 2) = \emptyset$$

En forma gráfica:



4.) Obsérvese que si se tienen n inecuaciones simultáneas, el procedimiento consiste en hallar la intersección de las soluciones individuales. Basta que una cualquiera de las inecuaciones no tenga solución común, para que todo el sistema no tenga solución:



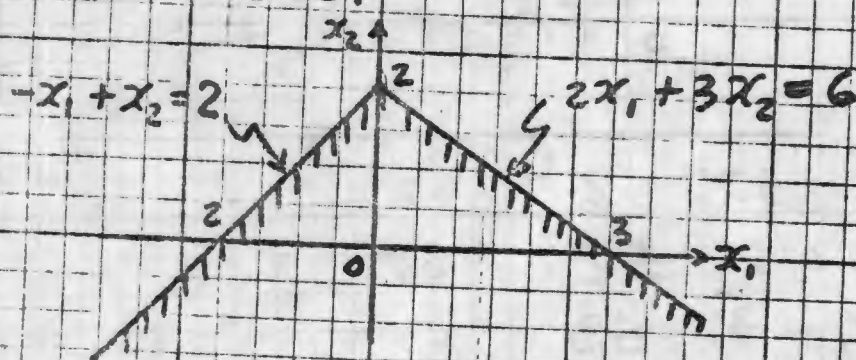
El sistema a)b)c)d)e) no tiene solución.

Sistemas de inecuaciones con 2 variables. - Este caso difiere del anterior en que la solución de cada inecuación define una región en el plano, y la solución simultánea es la intersección de las regiones que definen cada una de las inecuaciones individuales.

Ejemplos: - Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones simultáneas:

$$1.) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Solución: -



La figura anterior se obtuvo considerando las ecuaciones:

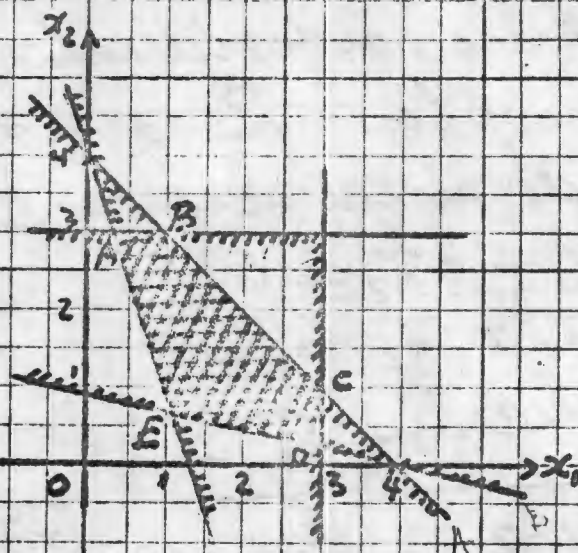
a) $2x_1 + 3x_2 = 6$

b) $-x_1 + x_2 = 2$

Cada una de ellas divide al plano en 2 regiones: si en a) $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow 0 < 6 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ está en la región que verifica a). De igual modo $(0,0) \Rightarrow -x_1 + x_2 < 2$.

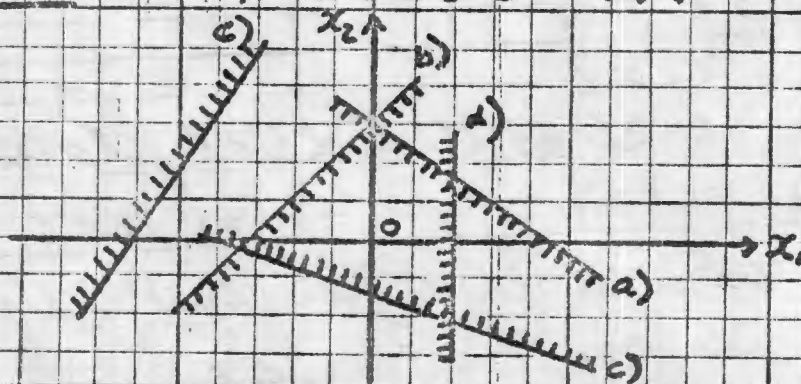
$$2.-) \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Solución: POLIGONO ABCDE



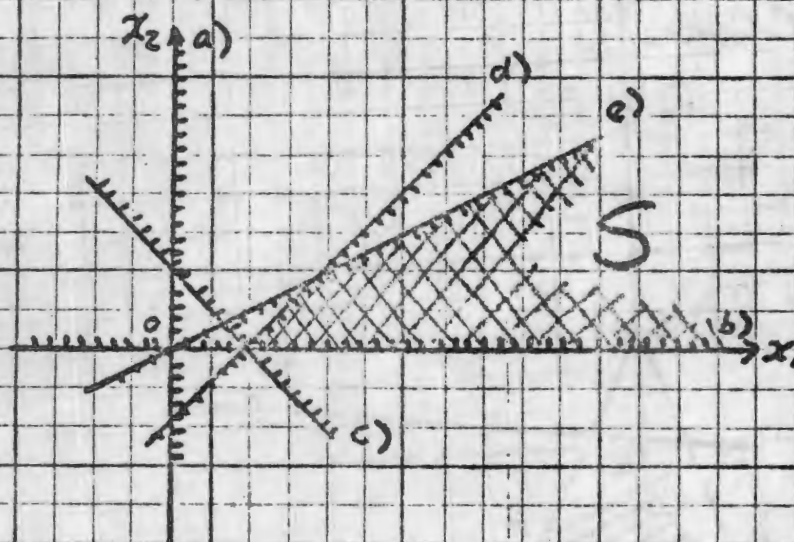
$$3.-) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 & a) \\ -x_1 + x_2 \leq 2 & b) \\ -x_1 - 3x_2 \leq 3 & c) \\ 2x_1 \leq 3 & d) \\ 3x_1 - 2x_2 \leq -12 & e) \end{cases}$$

NO HAY SOLUCION.



$$4.) \begin{cases} x_1 \geq 0 & a) \\ x_2 \geq 0 & b) \\ x_1 + x_2 \geq 1 & c) \\ x_1 - x_2 \geq 1 & d) \\ -x_1 + 2x_2 \leq 0 & e) \end{cases}$$

Solución: REGION S

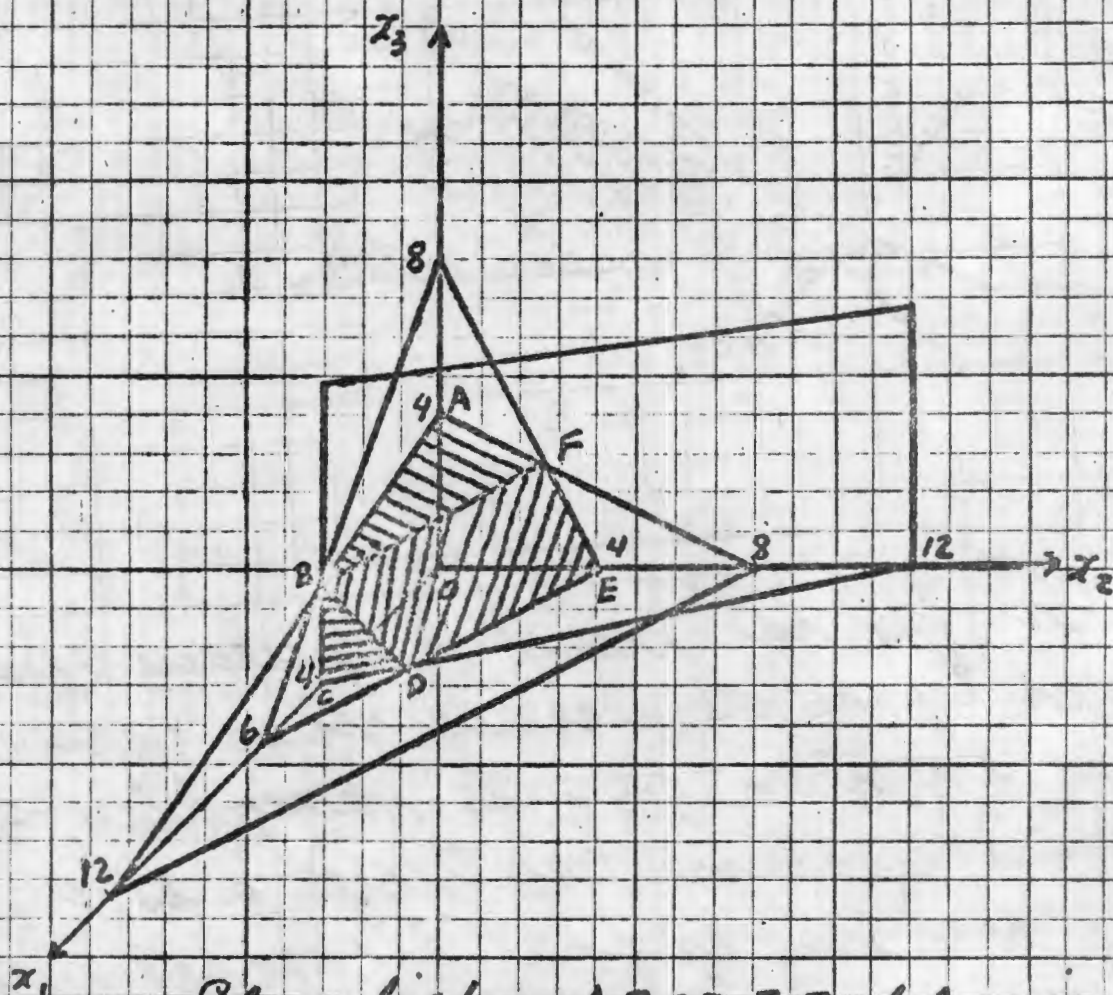


En forma análoga pueden resolverse sistemas de inequaciones simultáneas en tres o más variables. Si cada inequación contiene a lo más tres variables, es factible representar en forma gráfica la intersección de las soluciones. Cuando alguna o todas las inequaciones involucran cuatro o más variables no es posible la representación gráfica de la solución.

5.-)

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\leq 24 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leq 24 \end{aligned}$$

Solución:



El poliedro ABCDEF del primer octante, representa el conjunto de puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfacen simultáneamente las seis inequaciones dadas.

Valor absoluto: - El valor absoluto de un número $a \in \mathbb{R}^{\#}$ se define:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos: $|-3| = 3$; $|7| = 7$; $|0| = 0$

Geométricamente: $|a|$ es la distancia entre el punto a (marcado sobre el eje real $\mathbb{R}^{\#}$) y el origen. La distancia entre dos puntos a y b es: $|a-b| = |b-a|$

Propiedades de los valores absolutos:

- 1) $-|a| \leq a \leq |a|$
- 2) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$
- 3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 4) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad ; \quad b \neq 0$

Demostraciones: 1) $-|a| \leq a \leq |a|$

Caso i) $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$$-a \leq 0 \leq |a| \Rightarrow -a \leq |a| \Rightarrow a \geq -|a|$$

$$\Rightarrow -|a| \leq a \quad \textcircled{1}$$

Caso ii) $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

$$a < 0 \leq |a| \Rightarrow a \leq |a| \quad \textcircled{2}$$

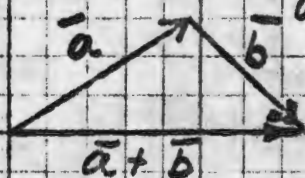
$$\text{de } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} \Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$$

$$2) ||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

Dividiremos la demostración en cuatro casos:

Caso a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

A esta desigualdad se le conoce como desigualdad del triángulo, pues geométricamente significa que en todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado



Analíticamente:

$$a_1) |a+b| = \begin{cases} a+b, & \text{si} \\ -(a+b) & \end{cases}$$

$$a_2) |a| \geq a ; |b| \geq b \Rightarrow |a| + |b| \geq a+b$$

$$a_3) |a| \geq -a ; |b| \geq -b \Rightarrow |a| + |b| \geq -(a+b)$$

Combinando los tres incisos a_i , resulta:

$$\begin{aligned} |a| + |b| &\geq |a+b| \\ \Rightarrow |a+b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

Caso b) $|a-b| \leq |a| + |b|$

haciendo $b = -b$ en el caso a):

$$|a+(-b)| \leq |a| + |(-b)|$$

$$\Rightarrow |a-b| \leq |a| + |b|$$

Ejemplo. Demostrar, que cada una de las raíces de la ecuación:

$$z^3 + 3z + 5 = 0$$

tiene módulo $|z| > 1$

Solución:

Supongamos $|z| \leq 1$:

$$|z^3 + 3z| \leq |z^3| + 3|z| \leq 4 \quad ; \text{ de 2):}$$

$$\Rightarrow |z^3 + 3z + 5| \geq ||5| - |z^3 + 3z|| \geq 5 - 4 = 1$$

pero vemos que no hay valor de z tal que $|z| \leq 1$, que pueda satisfacer la última ecuación; lo cual indica que las tres raíces de la ecuación dada deben todas tener módulo mayor que la unidad:

$$\Rightarrow |z_1| > 1; |z_2| > 1; |z_3| > 1.$$

Intervalos: Son conjuntos de números reales, cuyos elementos satisfacen ciertas desigualdades.

Geométricamente, un intervalo comprendido entre los puntos a y b es el segmento de recta $|b-a|$.

Intervalo abierto: Es el conjunto de números reales x , para los cuales $a < x < b$ ($a \leq b$). El intervalo abierto no incluye los extremos $x=a$, $x=b$; Notación: (a, b) .

$$(a, b) = \{x / a < x < b\}, x \in \mathbb{R}^{\#}$$

Intervalo cerrado: Se define como el conjunto de números reales x , tales que $a \leq x \leq b$; ($a \leq b$). Los intervalos cerrados sí incluyen los puntos extremos $x=a$, $x=b$.

Notación: $[a, b]$

$$[a, b] = \{x / a \leq x \leq b\}; x \in \mathbb{R}^{\#}$$

Intervalos semiabiertos: Son intervalos en los cuales sí incluye sólo un punto extremo.

$$(a, b] = \{x / a < x \leq b\}; x \in \mathbb{R}^{\#}$$

$$[a, b) = \{x / a \leq x < b\}; x \in \mathbb{R}^{\#}$$

92

Intervalos infinitos. - Para $x \in \mathbb{R}^\#$:

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^\#\}$$

Observación: los símbolos $-\infty$ e ∞ no son números reales ($-\infty, \infty \notin \mathbb{R}^\#$); de ahí que los intervalos que contengan estos símbolos no pueden ser cerrados.

Propiedades de los intervalos: Sea F la familia de todos los intervalos que se hallan sobre el eje real. Queda incluido en F el conjunto vacío $\emptyset$; así como el punto $a = [a, a]$. Para todo $A \in F$, $B \in F$:

- 1.- $A \cap B \in F$
- 2.- si $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cup B \in F$
- 3.- si $A \neq B$; $B \neq A \Rightarrow A - B \in F$
- 4.- La intersección de dos intervalos abiertos es un intervalo abierto ($\emptyset$ puede considerarse como un intervalo abierto)

5- Si la intersección de dos intervalos abiertos es distinta de $\emptyset \Rightarrow$ la unión de los intervalos es un intervalo abierto.

Ejemplo: Sea $A = [2, 4)$; $B = (3, 8)$

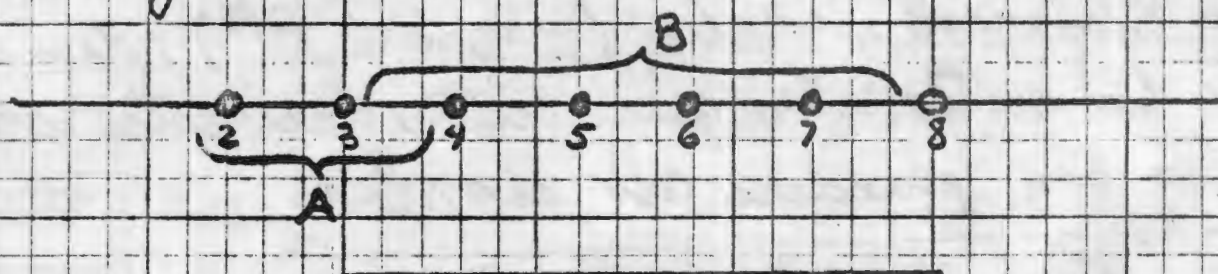
$$A \cap B = (3, 4)$$

$$A \cup B = [2, 8)$$

$$A - B = [2, 3]$$

$$B - A = [4, 8)$$

Geométricamente:



Intervalo reducido (o con excepción):

Es un intervalo en el que queda excluido un punto c interior del intervalo:

Ejemplo: $0 < |x - c| < h$; haremos ver que $c = [c, c]$ no está incluido en el intervalo abierto dado:

$$0 < |x - c| < h \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - c < h \Rightarrow c < x < (c + h) \\ 0 < -(x - c) < h \Rightarrow (c - h) < x < c \end{cases}$$

$$\text{ó sea: } 0 < |x - c| < h = [(c - h) < x < c] \cup [c < x < (c + h)]$$

Gráficamente:

De lo anterior se concluye que:

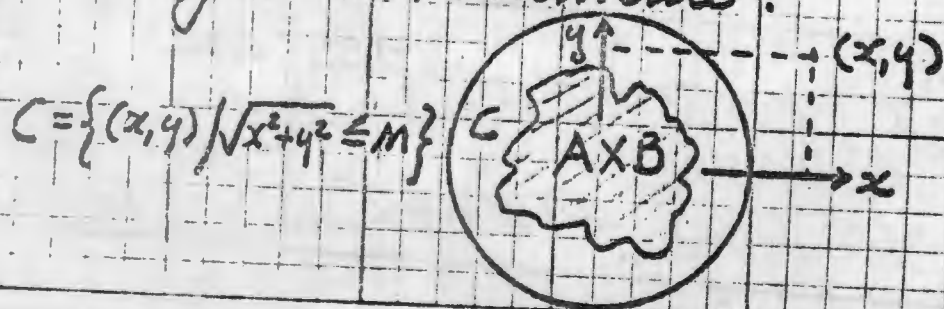
$$\{x \mid 0 < |x - c| < h\} = \{x \mid (c-h) < x < (c+h)\} - \{c\}$$

Conjuntos acotados: Se dice que un conjunto A de números reales, está acotado, si existe un $m \in \mathbb{R}^+$, $m > 0$, tal que $|x| \leq m$ para toda $x \in A$.

El número $m \in \mathbb{R}^+$ se denomina "cota".

Observaciones:

- 1.- $A \subseteq B$; siendo $B = \{x \mid -m \leq x \leq m\}$
- 2.- Todo conjunto finito está acotado.
- 3.- Los conjuntos infinitos no necesariamente están acotados (pueden o no estarlo).
- 4.- La noción de conjunto acotado puede hacerse extensiva a conjuntos de pares ordenados (a, b) del producto cartesiano $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, debiendo entonces existir un número $M \in \mathbb{R}^+$ ($M > 0$), tal que el módulo (ó la norma) de (a, b) sea $\leq M$ para toda $(a, b) \in A \times B$ geométricamente:



5.- De manera análoga, se pueden definir conjuntos acotados que sean subconjuntos del producto cartesiano $A \times B \times C \times \dots \times R^n$, de cualquier número finito n de conjuntos.

Ejemplos: Determinar si están, o no, acotados cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $A = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

$\Rightarrow 1 \geq x > 0 \Rightarrow A$ si está acotado, ($x \in \mathbb{Q}$)

2) $A = \{x \mid x = n^2 + 2; n \in \mathbb{N}; n < 4\}$

$\Rightarrow n_1 = 1; n_2 = 2; n_3 = 3$

$\Rightarrow A = \{3, 6, 11\} \Rightarrow A$ está acotado.

3) $A = \{1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, \dots\}$

puesto que $1.1111\dots < \frac{10}{9}$

$\Rightarrow A$ está acotado.

4) $A = \{x \mid x = 2^n, n \in \mathbb{R}^{\#}\}$

A no está acotado

Conjuntos acotados superiormente.

Sea $A \subset \mathbb{R}^{\#}$ ($A \neq \emptyset$); supongamos que existe un número b tal que $x \leq b$ para toda $x \in A$ (Obsérvese que b no necesariamente tiene que ser elemento de A).

Se dice entonces que el conjunto A está acotado "superiormente" por el número b .

El número b es una cota superior de A . Cualquier número $> b$ será asimismo una cota superior; de modo que el número de cotas superiores es infinito.

Si una cota superior b es un elemento de A , entonces b se denomina elemento máximo de A . Sólo existe un elemento máximo; si éste existe, se escribe $b = \max A$.

Los conjuntos que no tienen cota superior, se dice que no están acotados superiormente; siendo el ejemplo 4) anterior un caso de conjunto no acotado superiormente.

En el ejemplo 2) $n=4$ es una cota superior; pero $4 \notin A$.

Inecuaciones conteniendo valor absoluto.-

Dado que: Si $b > 0$, y si $|a| < b$;
la segunda inecuación se verifica $\Leftrightarrow$
 $-b < a < b$ (asimismo: $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$),
con base en ello, pueden resolverse pro-
blemas como los siguientes:

$$1) |3x - 12| \leq 3$$

Solución

$$-3 \leq (3x - 12) \leq 3$$

$$9 \leq 3x \leq 15 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5$$



$$2) |3x - 12| > 3$$

Obsérvese que la solución de este pro-
blema 2) debe ser precisamente el comple-
mento que la solución del problema 1):

$$\Rightarrow R^* - [3, 5] = (x < 3) \cup (x > 5)$$



Conclusión: Si $b > 0$; y si $|a| > b$
esto se verifica $\Leftrightarrow a < -b$ ó $a > b$
(asimismo: $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ ó $a \geq b$)

Ejemplo 3) Hallar todos los intervalos en que se verifican las siguientes inequaciones:

$$0 < |x^2 - x - 2| < 10 \quad (1)$$

Solución: Haciendo: $|x^2 - x - 2| = |(x-2)(x+1)| = y$

Se observa que

$$0 < |x^2 - x - 2| \text{ ó sea}$$

$$|x^2 - x - 2| > 0 \text{ se verifica}$$

$$\text{si } x \in (\mathbb{R}^{\#} - \{-1, 2\}) \quad (2)$$



Para la parte derecha de (1) $|a| \geq b$

$$|x^2 - x - 2| < 10 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 < 10; \text{ si } x^2 - x - 2 \geq 0 & (3) \\ -x^2 + x + 2 < 10; \text{ si } x^2 - x - 2 < 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{de (3)} \quad x^2 - x - 12 < 0; \text{ si } (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow (x < -1) \cup (x > 2)$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+3) < 0 \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$$

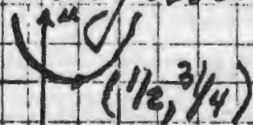
$$\text{ó sea, la solución de (3) es } (-3, -1) \cup (2, 4) \quad (5)$$

$$\text{de (4)} \quad x^2 - x + 8 > 0 \in (-1, 2)$$

pero $x^2 - x + 8 > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^{\#}$; ya que

$x^2 - x + 8 = u$ tiene la siguiente gráfica:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = u - \frac{31}{4}$$



$$\Rightarrow u > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{\#}$$

$$\Rightarrow \text{La solución de (4) es } (-1, 2) \quad (6)$$

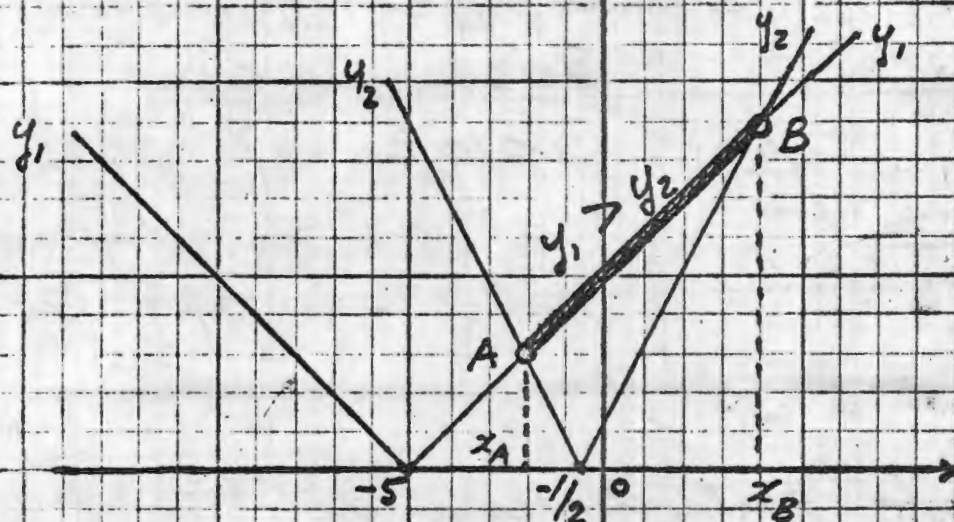
$\Rightarrow$ La solución general de (1) es, de (2), (5) y (6)

$$(-3, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 4)$$

$$4) - |x+5| > |2x+1| \quad (1)$$

Solución:

Haciendo: $|x+5| = y_1$; $|2x+1| = y_2$



Determinación de x_A :

$$x+5 = -2x-1$$

$$3x = -6$$

$$\therefore x_A = -2$$

Determinación de x_B :

$$x+5 = 2x+1$$

$$-x = -4$$

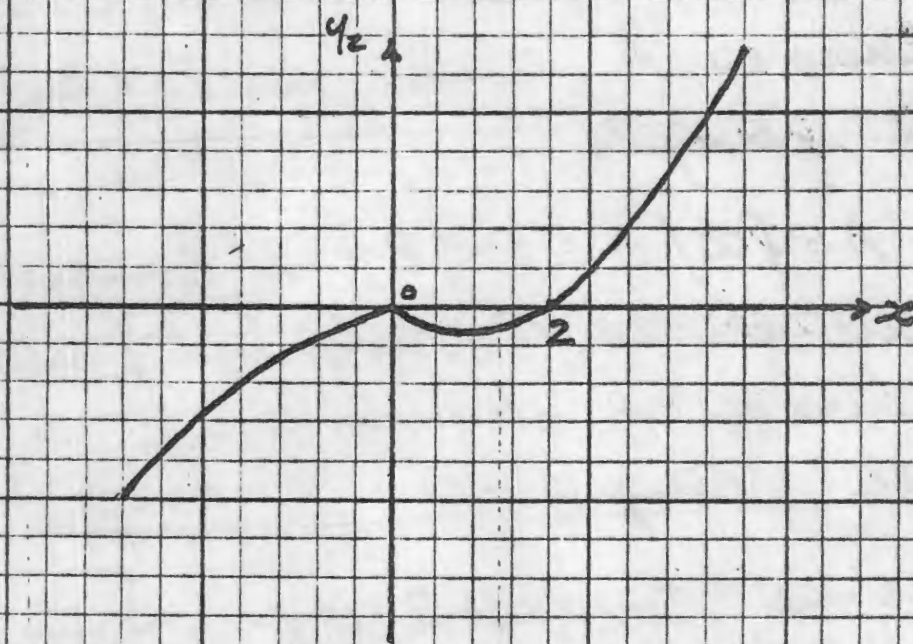
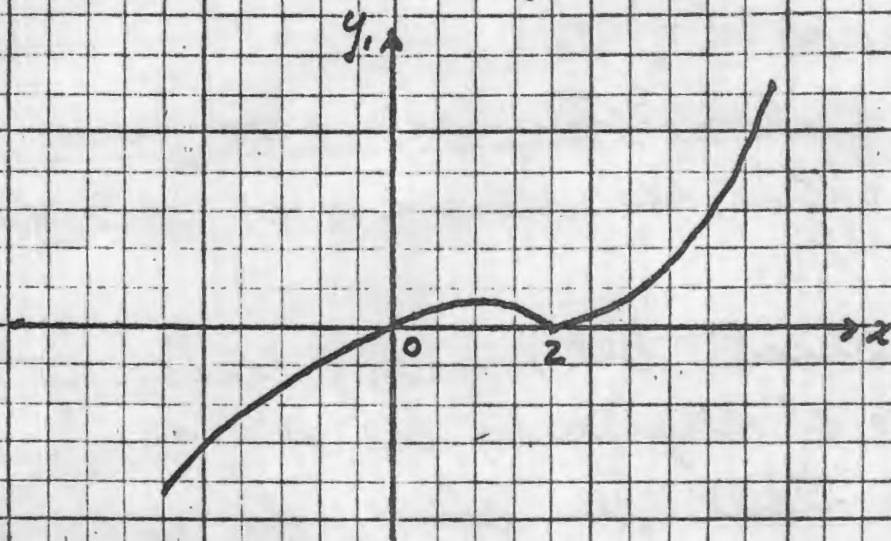
$$\therefore x_B = 4$$

$\therefore$ La solución general de (1) es:
 $(-2, 4)$

5) $x|x-2| = (x-2)|x|$

Solución:

Haciendo $x|x-2| = y_1$; $(x-2)|x| = y_2$



De las gráficas se observa que $y_1 = y_2$
 en:
 $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

Supremo. (ó mínima cota superior)

Se llama supremo de un conjunto $A \neq \emptyset$ a un número b con las siguientes 2 propiedades:

- i) b es una cota superior para A
- ii) ningún número $< b$ es cota superior para A .

Si existe $b = \max A$, entonces b es asimismo el supremo de A . Sin embargo si A no tiene un elemento máximo, es factible que, a pesar de ello, exista el supremo de A , como sucede en el siguiente ejemplo:

Si $A = \{x / 0 \leq x < 2\}$ el conjunto A no tiene elemento máximo; siendo el supremo de A el número 2, lo cual se escribe: $\sup A = 2$

Teorema: Si existe el supremo de un conjunto, este supremo es único.

Demostración:

Sean $b = \sup A$; $c = \sup A$
 de la propiedad ii) $c \geq b$ por ser $b = \sup A$
 análogamente: $b \geq c$ por ser $c = \sup A$ o lo
 $\Rightarrow b = c \Rightarrow \sup A$ es único.

Axioma de completitud (del supremum)

Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}^{\#}$ ($A \neq \emptyset$) que está acotado superiormente tiene supremo; esto es, existe $b \in \mathbb{R}^{\#}$ tal que $b = \sup A$.

Este axioma es de gran importancia en la matemática moderna, pues con base en éste (o alguna propiedad equivalente) se establece la existencia del conjunto de números irracionales $\mathbb{Q}'$.

El axioma de completitud da al conjunto de números reales $\mathbb{R}^{\#}$ una propiedad de "continuidad", que es básica para estructurar, en forma lógica, el estudio del cálculo diferencial e integral.

Conjuntos acotados inferiormente.

Sea $A \subset \mathbb{R}^{\#}$ ($A \neq \emptyset$); se dice que A está acotado inferiormente por el número c , si para toda $x \in A$, $c \leq x$.

En forma paralela a lo expuesto anteriormente se define el elemento mínimo de A , si éste existe: $c = \min A$.

Ínfimo (o máxima cota inferior)

- i) $c = \inf A$, si c es una cota inferior, y.
- ii) $c = \inf A$, si $x > c$; siendo x cota inferior para A .

Teorema: Para todo conjunto $A \neq \emptyset$ que esté acotado inferiormente, existe $c \in \mathbb{R}^{\#}$ tal que $c = \inf A$

Demostración:

Sea $-A$ el conjunto formado con los negativos de números en A , por lo cual $-A \neq \emptyset$; estando $-A$ acotado superiormente.

El axioma de completez permite afirmar que existe $c = \sup(-A)$



Puesto que existe $c = \sup(-A)$
 $\Rightarrow -c = \inf A$ ✓

Ejemplo: Sea A el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ x \mid x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Puesto que $x > 1$ para toda $x \in A \Rightarrow A$ está acotado inferiormente, y de acuerdo con el teorema existe $c = \inf A$; resultando ser $2 = \inf A = \min A$. Más adelante se Comprobará que A está acotado superiormente, y por el axioma de completez $b = \sup A$; resultando ser: $c = \sup A$.

Algunas propiedades de $\mathbb{R}^{\#}$ que son consecuencia del axioma de completitud.

1.- El Conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales no posee cota superior. En efecto, supongamos que la cota superior sí existe, $\Rightarrow$ del axioma de completitud que existe $b = \sup \mathbb{N}$; pero entonces $b-1 \neq \sup \mathbb{N}$, ya que $b-1 < b$, lo cual no cumple la propiedad ii) de la definición de $\sup A$. Por lo anterior, $\Rightarrow$ existe, al menos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > b-1$, de lo cual resulta $n+1 > b$; pero $n+1 \in \mathbb{N}$, lo cual contradice la propiedad ii), por lo que se concluye que la hipótesis $b = \sup \mathbb{N}$ no es correcta, $\Rightarrow$ no existe $\sup \mathbb{N}$.

2.- Para toda $x \in \mathbb{R}^{\#}$, existe una $n > 0$, ($n \in \mathbb{N}$) tal que $n > x$.

Si lo anterior no fuera cierto, resultaría que $x = \sup \mathbb{N}$, lo cual viola la propiedad 1.- anterior.

3.- Si $x \in \mathbb{R}^{\#}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > x$, ($a > 0$). Esto puede comprobarse haciendo $x = \frac{x}{a}$ en la propiedad 2.- anterior.

Es interesante observar que la pro-

propiedad 3.- última permite afirmar que, si x representa, por ejemplo, una distancia en línea recta (no importando que ésta pueda ser muy grande), la longitud x es susceptible de ser medida con una unidad de longitud arbitraria, tan pequeña como se desee: a

4.- Si los números $a, x, y \in \mathbb{R}^*$ satisfacen las relaciones:

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n} \quad (1)$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, se afirma que $x = a$

En efecto, si $x > a$, la propiedad 3.- anterior $\Rightarrow$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(x-a) > y$
 $\Rightarrow x - a > \frac{y}{n} \Rightarrow x > a + \frac{y}{n}$ lo cual contradice (1); pero (1) establece asimismo que $a \leq x \Rightarrow$ si $x \neq a$, todo lo anterior sólo es posible cuando $x = a$, ya que se tiene: $a \leq x < a$; y la propiedad de tricotomía ($a < x$, $a = x$, ó $a > x$) establece como única posibilidad que $x = a$ ✓

Algunas propiedades del $\sup A$ é $\inf A$.

1.- Sea $A \subset \mathbb{R}^{\#}$, si existe $\sup A$, se verifica, para alguna $x \in A$:

$$x > \sup A - h \quad ; \quad h > 0$$

Efectivamente, supongamos lo contrario: $x \leq \sup A - h$, para toda $x \in A$
 $\Rightarrow \sup A - h$ es una cota superior para A que resulta menor que $\sup A$, lo que contradice la definición. $\Rightarrow x > \sup A - h$ por lo menos para una $x \in A$ ✓

2.- De modo análogo a 1.- resulta que si existe $\inf A$, entonces para alguna $x \in A$

$$x < \inf A + h \quad ; \quad h > 0$$

3.- Sean $A \subset \mathbb{R}^{\#}$; $B \subset \mathbb{R}^{\#}$ ($A \neq \emptyset$; $B \neq \emptyset$), siendo: $C = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$

i) Si existen $\sup A$ y $\sup B$, se afirma: existe: $\sup C = \sup A + \sup B$

ii) Si existen $\inf A$ é $\inf B$, se afirma: existe: $\inf C = \inf A + \inf B$.

Demostración:

Si existen $\sup A$ y $\sup B$; siendo $c \in C$; $c = a+b$:

$\Rightarrow$ si $c = \sup A + \sup B$, $\Rightarrow \sup A + \sup B$ es una cota superior para $C \Rightarrow$

$$\sup C \leq \sup A + \sup B \quad (2)$$

De la propiedad 1 anterior: haciendo $h = \frac{1}{n}$; $n \in \mathbb{N}$:

$$a > \sup A - \frac{1}{n}; \quad b > \sup B - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}$$

$\therefore$ por ser: $a + b \leq \sup C$, resulta:

$$\sup C \geq a + b > \sup A + \sup B - \frac{2}{n}$$

o lo que es lo mismo:

$$\sup A + \sup B < a + b + \frac{2}{n} \leq \sup C + \frac{2}{n} \quad (3)$$

de (2) y (3):

$$\sup C \leq \sup A + \sup B < \sup C + \frac{2}{n} \quad (4)$$

puesto que las desigualdades (4) valen para toda $n \in \mathbb{N}$, de la ecuación (1) (propiedad 4.)

$$\Rightarrow \sup C = \sup A + \sup B \quad \checkmark$$

La demostración de ii) se efectúa en forma análoga: $\inf C = \inf A + \inf B$.

4.- Sean $A \subset \mathbb{R}^*$; $B \subset \mathbb{R}^*$ ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$) si $a < b$ para toda $a \in A$ y $b \in B$, se afirma que existen $\sup A$ y $\sup B$, y en su satisfacción la desigualdad:

$$\sup A \leq \inf B$$

Con efeito: cada $b \in B$ resulta ser
uma cota superior para A , $\Rightarrow$ existe
 $\sup A$ tal que $\sup A \leq b$ para toda
 $b \in B$. $\Rightarrow \sup A$ é uma cota inferior para
 B , $\Rightarrow$ existe $\inf B \geq \sup A$, é seja:

$$\sup A \leq \inf B. \quad \checkmark$$

Relaciones:- Definición: Una "relación" es un conjunto de pares ordenados, tales que a cada primer elemento le corresponde por lo menos un segundo elemento.

Una relación binaria (o simplemente una relación) R de un conjunto A a un conjunto B , asigna a cada par ordenado (a, b) del producto cartesiano $A \times B$ una, y sólo una de las siguientes afirmaciones:

- i) a está relacionado con b , notación: $a R b$
- ii) a no está relacionado con b , notación: $a \not R b$

De lo anterior, vemos que una relación R de un conjunto A a un conjunto B involucra lo siguiente:

- 1) Un conjunto A
- 2) Un conjunto B
- 3) Una afirmación $P(x, y)$ tal que $P(a, b)$ es verdadera o falsa para todo par ordenado (a, b) perteneciente al producto cartesiano $A \times B$

Una relación R de un conjunto A a un conjunto B , define en forma única un subconjunto R^* de $A \times B$, cuyos elementos son los pares ordenados, para

los cuales $P(a, b)$ es cierta:

$$R^* = \{(a, b) \mid a R b\}$$

Obsérvese que R^* representa el conjunto de soluciones de la relación $a R b$.

$\Rightarrow R^* \subseteq A \times B$; ejemplos; Hallar R^* :

a) Sea $A = \{\text{elefante, ratón, león}\}$

$B = \{\text{hombre, pulga}\}$; $P(x, y) \equiv "x \text{ pesa más que } y"$

1º Definamos $A \times B$:

$$A \times B = \{(e, h), (e, p), (r, h), (r, p), (l, h), (l, p)\}$$

2º Analizamos para qué pares (x, y) es P cierta:

$e R h, e R p, r \not R h, r R p, l R h, l R p$

$$R^* = \{(e, h), (e, p), (r, p), (l, h), (l, p)\}$$

b) $A = \{4, 9\}$; $B = \{6, 2, 5\}$; $P(x, y) \equiv x < y$.

$$A \times B = \{(4, 6), (4, 2), (4, 5), (9, 6), (9, 2), (9, 5)\}$$

$4 R 6, 4 \not R 2, 4 R 5, 9 \not R 6, 9 \not R 2, 9 \not R 5$

$$\Rightarrow R^* = \{(4, 6), (4, 5)\}$$

c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $P(x, y) = \frac{5x+1}{2y+1} \in \mathbb{I}$

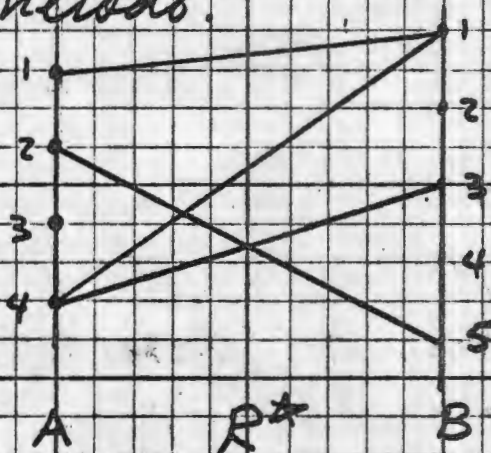
$1 R 1, 2 R 5, 4 R 1, 4 R 3$

$$\Rightarrow R^* = \{(1, 1), (2, 5), (4, 1), (4, 3)\}$$

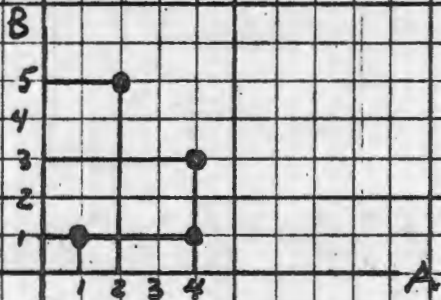
Gráfica de una relación: La gráfica de la relación R del conjunto A al conjunto B es el conjunto de puntos que representan en forma gráfica, los pares ordenados que pertenecen al conjunto R^* .

Ejemplos: 1) Dibujar la gráfica correspondiente a R^* en el problema c) anterior:

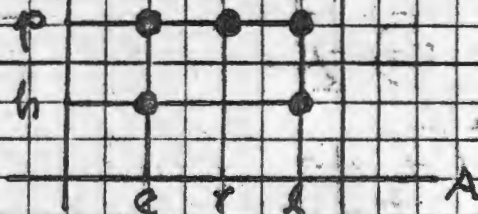
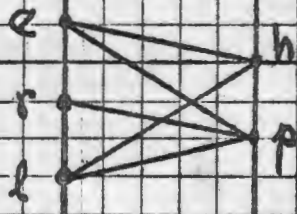
1º método:



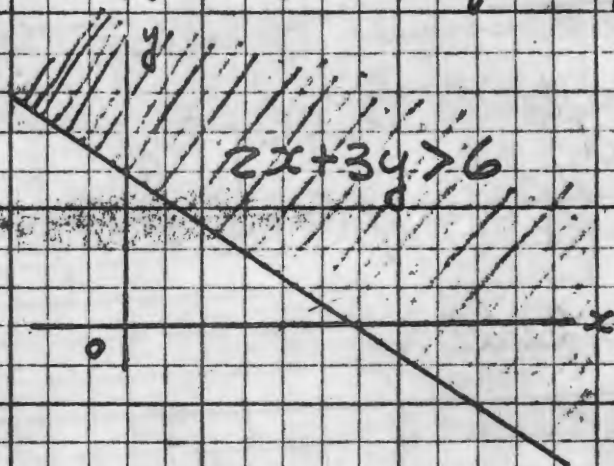
2º método:



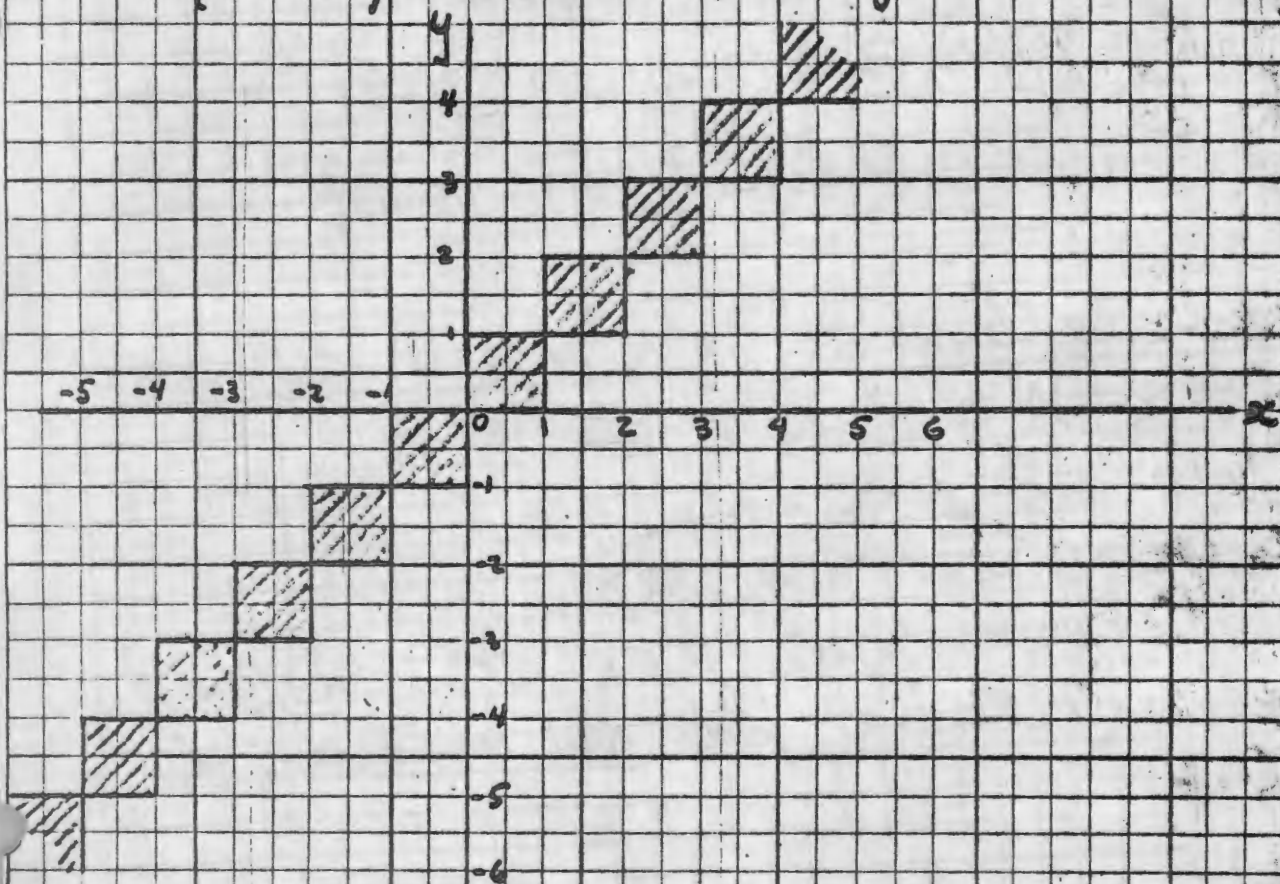
2) Dibujar la gráfica correspondiente al problema a) A R^* B



3.- Si $A \times B = R^* \times R^*$, siendo:
 $R^* = \{(x, y) \mid 2x + 3y > 6\}$; dibujar la gráfica de R^*



4.- Sea $A \times B = R^* \times R^*$; sabiendo que:
 $R^* = \{(x, y) \mid n \leq x \leq n+1; n \leq y \leq n+1; n \in \mathbb{I}\}$

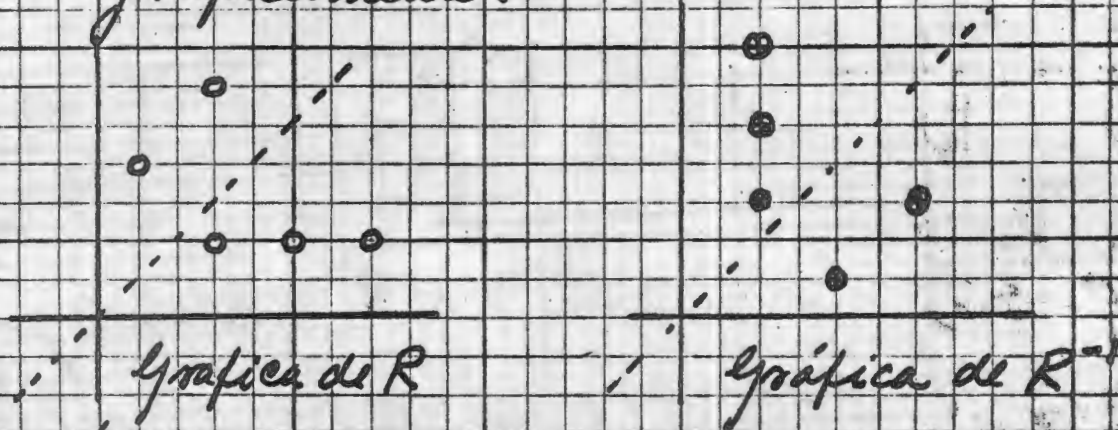


Relaciones especiales:

Relación inversa: Toda relación R de un conjunto A a un conjunto B tiene relación "inversa" del conjunto B al conjunto A .

$$R^{-1} = \{(b, a) / (a, b) \in R\}$$

Gráficamente:



Ejemplo:

$$R = \{(1, 4), (3, 2), (3, 6), (5, 2), (7, 2)\}$$

$$R^{-1} = \{(4, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (6, 3)\}$$

Relación reflexiva: Se dice que una relación R de A a A es reflexiva si:

$$(a, a) \in R \text{ para toda } a \in A$$

Ejemplo: 1) Sea $\{a, b, c, d\}$

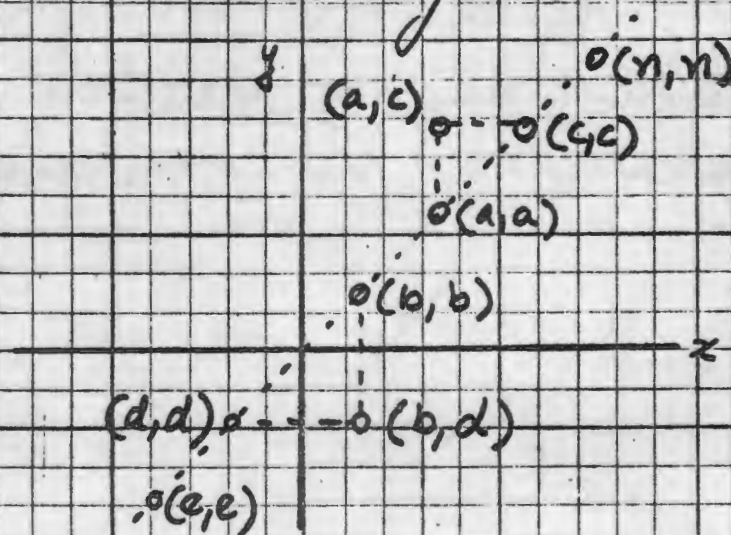
$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (a, c), (c, d), (d, d)\}$$

R no es reflexiva, pues no contiene el par (c, c)

2) $A = \{\text{todos los triángulos del plano}\}$
 $R(x, y) = x \text{ es semejante a } y.$

R si es reflexiva, puesto que todo triángulo es semejante a si mismo.

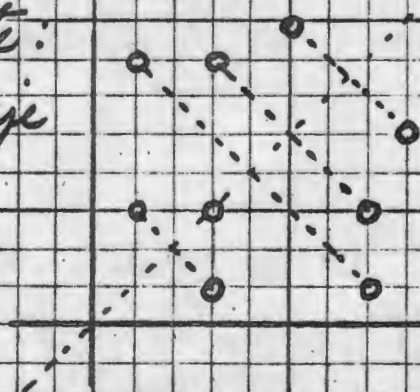
3) Sea $A = \{a, b, c, \dots, n\}$. Para que R sea reflexiva, su gráfica deberá necesariamente contener n puntos sobre la línea a 45° que pasa por el origen. R podrá constar además de algunos otros puntos.



Relación simétrica. - Una relación R es simétrica si: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

Geométricamente:
 Línea a 45° es eje de simetría

$$R \subseteq A \times A$$



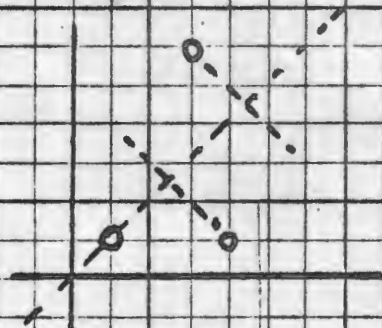
De la gráfica se puede ver que R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

Ejemplo: Sea $R = \{(1,2), (2,1), (1,1)\}$
 $\Rightarrow R^{-1} = \{(1,2), (2,1), (1,1)\} = R \Rightarrow R$ es simétrica

Relación antisimétrica: Se dice que $R \subseteq A \times A$ es antisimétrica, si:

$(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R \Rightarrow a=b$; esto es, si $a \neq b$, puede tenerse que $a R b$ ó quizás $b R a$; pero no ambas, si $a \neq b$.

Geométricamente, la relación antisimétrica es aquella que no es simétrica



Si existe $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$; ($a \neq b$)

Ejemplos: 1) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$; siendo $R = \{(1,3), (4,2), (4,4), (2,4)\}$; R no es antisimétrica, puesto que $(4,2) \in R$ y $(2,4) \in R$ pero $4 \neq 2$.

2.- Sea A una familia de conjuntos; siendo R una relación de A a A ,

definida de modo que $X \subset Y$.

Solución: si $X, Y \in A$, y se tiene que:

$$X \subset Y ; Y \subset X \Rightarrow X = Y$$

$\Rightarrow R$ es Antisimétrica.

Relación Transitiva: Se afirma que $R \subseteq A \times A$ es transitiva, si se verifica lo siguiente:

$$\text{Si } (a, b) \in R, \text{ y } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

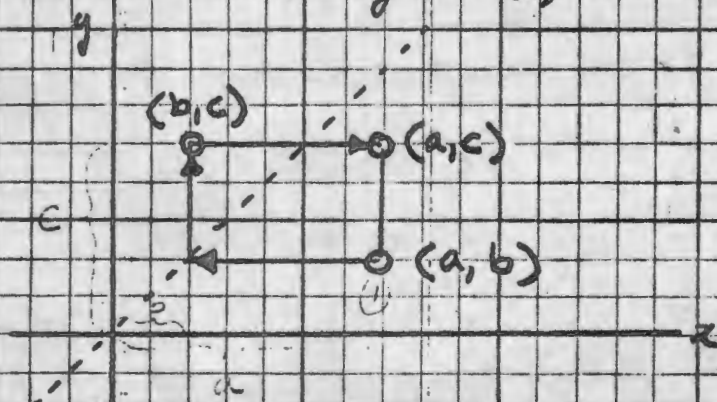
Ejemplo: Sea A una familia de conjuntos; siendo $R = \subset$.

$$\text{Si } X \in A ; Y \in A ; Z \in A ;$$

$$X \subset Y ; Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z \Rightarrow R \text{ es transitiva.}$$

2) Sea $R = \{(a, b), (c, b), (b, a), (a, a), (a, c)\}$
 R no es transitiva, puesto que: $(c, b) \in R$;
 $(b, a) \in R$; pero $(c, a) \notin R$.

Construcción gráfica de una relación transitiva: Dados (a, b) y (b, c) , Construir (a, c) :



Relación de equivalencia: Decimos que $R \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia, si R es:

- $$\begin{cases} 1. \text{ Reflexiva. } (a, a) \in R \text{ para toda } a \in A \\ 2. \text{ Simétrica; } (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \\ 3. \text{ Transitiva; } (a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R \end{cases}$$

Ejemplos:

1) Sea $A = \{\text{personas que viven en México}\}$
 $R^* = \{\text{personas que viven en la misma casa}\}$

2) Sea $A = \{x / x \in \mathbb{R}^*\}$

$R =$ relación de igualdad.

Demostración: $a = a \Rightarrow$ reflexiva

$a = b \Rightarrow b = a$; simétrica

$a = b, b = c \Rightarrow a = c$; transitiva.

3) Sea $A = \{x / x \in \mathbb{N}\}$

$R = \cong$ definida de modo que:

$$(a, b) \cong (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Demostración

$(a, b) \cong (a, b)$ porque $ab = ba \Rightarrow$ reflexiva

$(a, b) \cong (c, d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da$

$\Rightarrow (c, d) \cong (a, b) \Rightarrow$ es simétrica

$(a, b) \cong (c, d)$ y $(c, d) \cong (e, f) \Rightarrow ad = bc, cf = de \Rightarrow$

$(ad)(cf) = (bc)(de) \Rightarrow af = be \Rightarrow$

$(a, b) \cong (c, d) \Rightarrow$ es transitiva.

Obsérvese que este ejemplo es semejante a la igualdad entre quebrados:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

4) $A = \{\text{todos los triángulos del plano}\}$

$R =$ semejanza.

Demostración:

$\underline{a}$ es semejante a $\underline{a} \Rightarrow$ reflexiva.

$\underline{a}$ es semejante a $\underline{b} \Rightarrow \underline{b}$ es semejante a $\underline{a}$
 $\Rightarrow$ simétrica.

si $\underline{a}$ es semejante a $\underline{b}$, y $\underline{b}$ es semejante a $\underline{c}$
 $\Rightarrow \underline{a}$ es semejante a $\underline{c} \Rightarrow$ transitiva.

5) $A = \{\text{rectas en el plano}\}$

$R = x$ es paralela a y .

$x \parallel x \Rightarrow$ reflexiva.

$x \parallel y \Rightarrow y \parallel x \Rightarrow$ simétrica.

$x \parallel y, y \parallel z \Rightarrow x \parallel z \Rightarrow$ transitiva.

Dominio y Rango de una relación:

Sea $R \subseteq A \times B$. El dominio D de la relación R es el conjunto constituido por todos los primeros elementos de los pares ordenados en R :

$$D = \{a \mid a \in A, (a, b) \in R\}$$

El rango E de la relación R es el conjunto conteniendo todos los segundos elementos de los pares ordenados en R

$$E = \{b \mid b \in B, (a, b) \in R\}$$

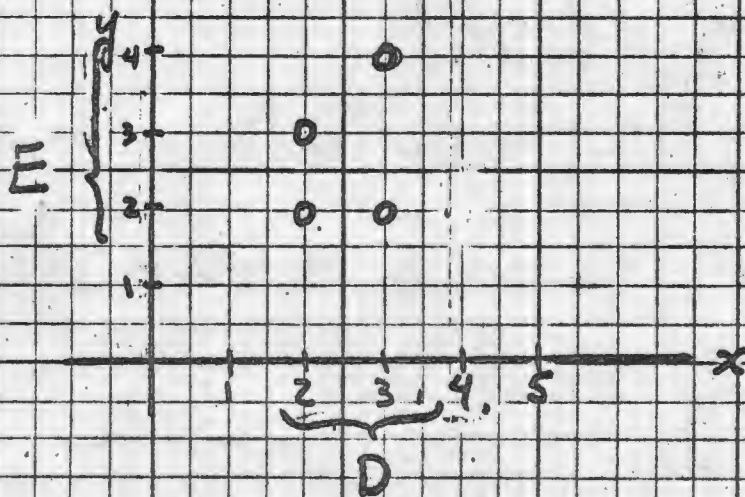
Ejemplo 1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$;

$$R = \{(2, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 4)\}$$

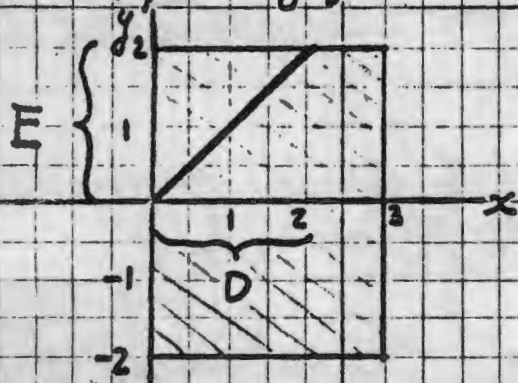
Determinar: el conjunto D y el rango E :

Solución: $D = \{2, 3\}$; $E = \{2, 3, 4\}$

Gráficamente:



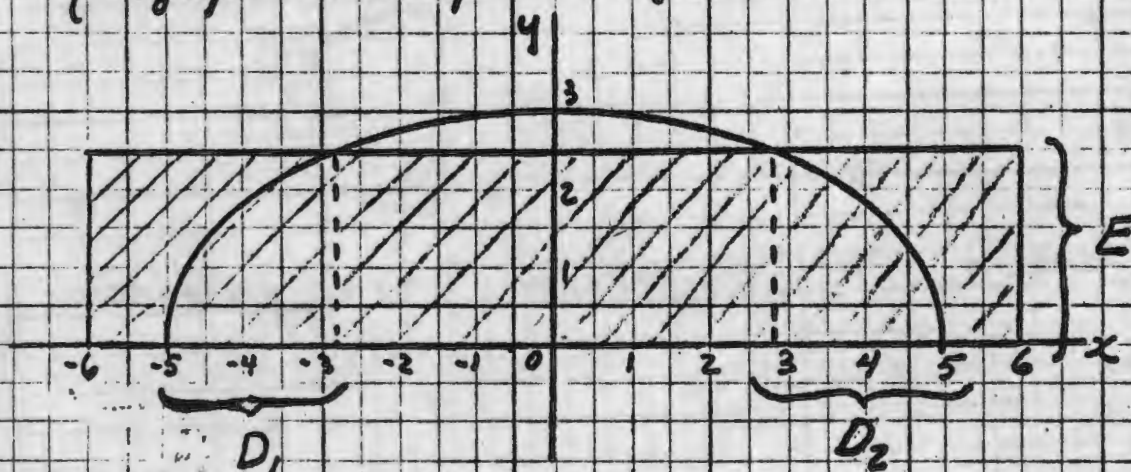
2) $A = \{a \mid 0 < a < 3\}$; $B = \{b \mid -2 < b < 2\}$
 $R^* = \{(a, b) \mid x = y\}$



$$D = \{x \mid 0 < x < 2\}$$

$$E = \{y \mid 0 < y < 2\}$$

3.- $A = \{x \mid -6 < x < 6\}$; $B = \{y \mid 0 < y < 5/2\}$
 $R^* = \{(x, y) \mid 9x^2 + 25y^2 = 225\}$



$$D = D_1 \cup D_2$$

$$E = \{y \mid 0 < y < 5/2\}$$

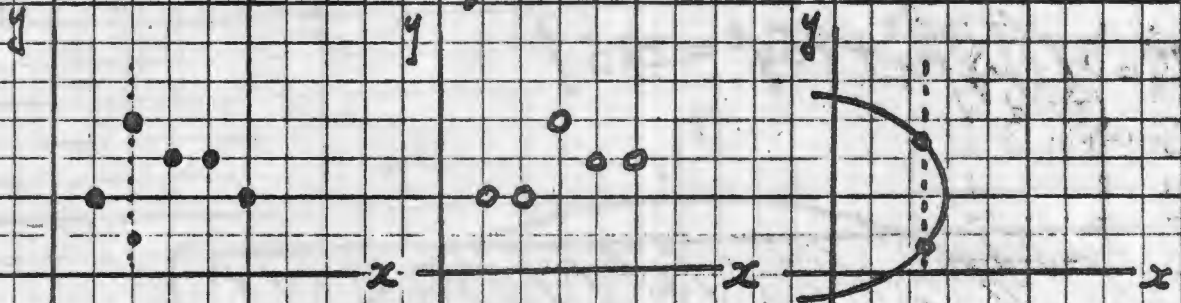


A/B

Función - Definición: Una relación en la cual no haya pares ordenados que tengan el mismo primer elemento, se llama función.

Una relación se llama función $\Leftrightarrow$
 $(a, b) \in R$ y $(a, c) \in R \Rightarrow b = c$

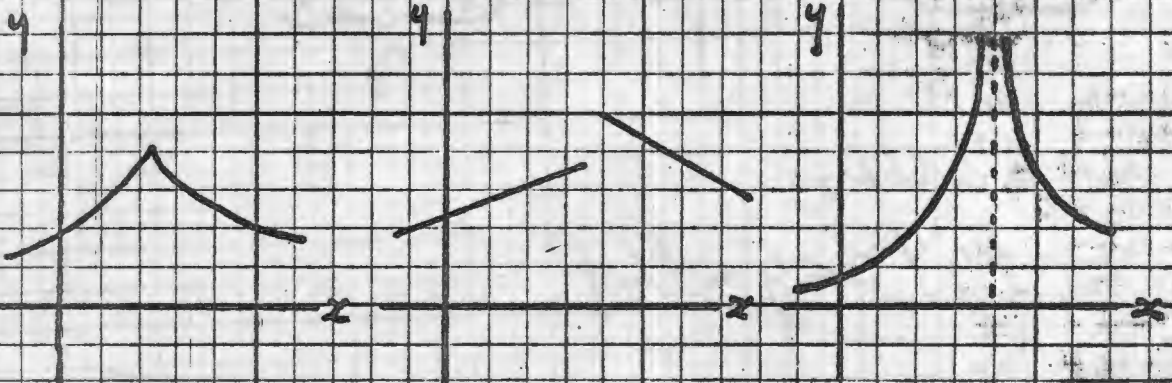
Geométricamente: Cualquier línea vertical sólo corta la gráfica de R^* en un solo punto. Ejemplos: 1) $R \subset R^* \times R^*$



a) No es función

b) Es función

c) No es función



d) Es función

e) Es función

f) Es función

Se llama variable "independiente" aquella cuyo universo lo constituye el dominio de la función dada; siendo la variable "dependiente" la que tiene como universo el rango de la función.

En los últimos ejemplos la variable x es la variable independiente; siendo y la variable dependiente.

Hasta ahora se han considerado funciones cuyo dominio y rango son ambos conjuntos de números reales; este tipo de funciones se llaman funciones reales de una variable independiente real.

En seguida se considerarán funciones cuyo dominio no está constituido por números reales, sino por secuencias ordenadas de números reales.

2) Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2\}$
 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$

Determinar cuales de los siguientes subconjuntos es función:

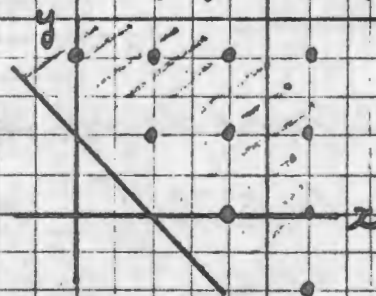
$R_1^* = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}$; No es función

$R_2^* = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$; Es función

$R_3^* = \{(b, 1), (c, 1), (c, 2)\}$; No es función

3) Sea $R^* = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1\}$
 R^* si es función.

4) Sea $R^* = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{N}, x + y > 1\}$



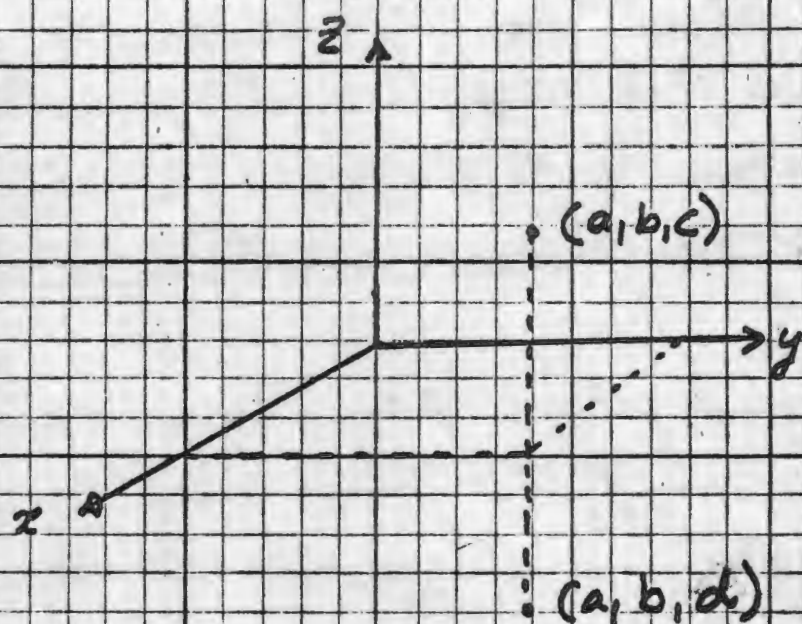
R^* no es función

5) Sea $A = \{a / |a| \leq 2\}$; $B = \{b / 0 < b < 2\}$
 $R^* = \{(a, b) / a^2 + b^2 = 1\}$



R^* si es función

de F en un solo punto.



$$\text{Si } (a, b, c) \in F \Rightarrow (a, b, d) \notin F$$

Ejemplo:

$$F = \{(1, 1, 0), (3, 1, 2), (1, 3, 2), (-1, 1, 0)\}$$

$$\text{dominio de } F = \{(1, 1), (3, 1), (1, 3), (-1, 1)\}$$

$$\text{rango de } F = \{2, 0\}$$

Obsérvese que en la definición de la función F no se exige que los pares ordenados que constituyen el dominio de F sean a la vez una función de una variable independiente. En el ejemplo anterior los pares $(1, 1)$ y $(1, 3)$ tienen el mis-

Funciones de más de dos variables independientes: La definición de función dada anteriormente puede ser generalizada para ensadas ordenadas en la forma que se indica a continuación:

Consideremos primeramente una función F cuyo dominio esté constituido por pares ordenados de números reales; siendo en origen el conjunto de números reales. Resulta la función F de dos variables independientes y una variable dependiente.

$$F = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*; z \in \mathbb{R}^* \}$$

$$F: (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \rightarrow \mathbb{R}^*$$

Obsérvese que la función F de dos variables independientes y una variable dependiente puede considerarse como el conjunto de "triadas" (o ternas) ordenadas (x, y, z) tales que si:

$$(a, b, c) \in F \text{ ; } (a, b, d) \in F$$

$$\Rightarrow c = d$$

Geométricamente: Cualquier línea paralela al eje z sólo corta la gráfica

Inducción matemática. - En los casos en que es necesario demostrar que una proposición debe verificarse para todo $n \in \mathbb{N}$, es frecuente recurrir a la prueba denominada "inducción matemática".

Postulados (ó axiomas) de Peano. - El matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) estableció los cinco axiomas siguientes, que son la base del principio de inducción matemática, que más adelante se expondrá:

Postulados de Peano: Sea $N \neq \emptyset$, tal que:

$P_1)$ $1 \in N$.

$P_2)$ Para todo $n \in N$ existe una, y sólo una $n^* \in N$ denominada "sucesor" de n .

$P_3)$ Para toda $n \in N$ se tiene $n^* \neq 1$.

$P_4)$ Si $m, n \in N$, y $m^* = n^* \Rightarrow m = n$.

$P_5)$ Cualquier subconjunto $K \subseteq N$, con las propiedades:

a) $1 \in K$

b) $k^* \in K$ para $k \in K$.

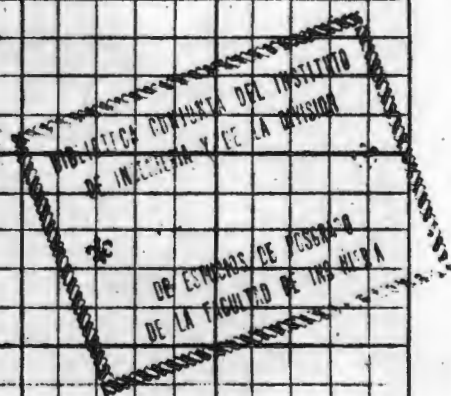
$\Rightarrow K = N$.

no primer elemento; sin embargo F sí representa una función de dos variables independientes.

De manera análoga, una función cuyo dominio es un conjunto de ternas ordenadas del producto cartesiano $R^* \times R^* \times R^*$; siendo el rango de la función un subconjunto de R^* , se denomina función real de tres variables independientes reales.

Asimismo, cuando el dominio lo constituye un conjunto de n -tuplas ordenadas, se dice que la función es una función de n variables independientes.

$$F: R^* \times R^* \times \dots \times R^* \rightarrow R^*$$



$$2) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Demostración: a)

$$n=1 \Rightarrow 1 = \frac{1(1+1)}{2} \Rightarrow P(1) \text{ es verdadera } \checkmark$$

b) supongamos que la fórmula vale para $n=k$; ¿vale para $n=k+1$?

$$\text{Hipótesis} \quad 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

puesto que la última igualdad es válida, lo seguirá siendo si sumamos $k+1$ a ambos miembros.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

si hacemos $k+1 = n$, en la última ecuación, que sabemos que es válida, resulta:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \checkmark$$

fórmula cuya validez hemos establecido por inducción matemática.

Obsérvese que la técnica para poder establecer la parte b) del principio de inducción consiste en que, una vez establecida la parte a), debe manipularse algebraicamente (ó en cualquier

Principio de inducción matemática:-

Dada una proposición $P(n)$, ésta es verdadera para toda $n \in \mathbb{N}$, si se cumple lo siguiente:

- $P(1)$ es verdadera
- $P(k)$ verdadera $\Rightarrow P(k^*)$ verdadera, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:- Demostrar, por inducción matemática, cada una de las siguientes proposiciones:

- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son subconjuntos finitos de un conjunto A , entonces: $A, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ es un conjunto finito. ($\infty \notin \mathbb{N}$)

Demostración:

- $A, A_1 \cup A_2$ es finito ✓
- Supongamos $A, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ es finito
 $\Rightarrow (A, A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \cup A_{k+1}$ es un conjunto finito, pues la unión de dos conjuntos finitos es un conjunto finito. ✓

Habiéndose establecido la validez de los incisos a) y b) del principio de inducción matemática, se concluye que:

$\bigcup_{i=1}^n A_i$ es un conjunto finito, si cada A_i es finito; siendo $n \in \mathbb{N}$.

4) Desigualdad de Bernoulli:

$$(1+x)^n > 1+nx$$

para toda $n=2,3,4,\dots$; $x \neq 0$; $x > -1$

a) para $n=2$

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x \quad \checkmark$$

b) supongamos que la fórmula vale para $n=k$

$$(1+x)^k > 1+kx$$

multiplicando por $1+x > 0$

$$(1+x)^{k+1} > (1+x)(1+kx) = 1+(k+1)x+kx^2$$

$$\text{pero: } 1+(k+1)x+kx^2 > 1+(k+1)x$$

$$\Rightarrow (1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x \quad \checkmark$$

5) $\frac{x^n - y^n}{x - y} = C$ (sin residuo); $x \cdot y \neq 0$

a) $n=1 \Rightarrow C=1 \quad \checkmark$

Supongamos que vale para $n=k$

$$\frac{x^k - y^k}{x - y} = p$$

$$\text{puesto que } x^{k+1} - y^{k+1} = x(x^k - y^k) + y^k(x - y)$$

$$\frac{x(x^k - y^k) + y^k(x - y)}{x - y} = px + y^k$$

$$\Rightarrow \frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} = C, \text{ (sin residuo)} \quad \checkmark$$

forma matemáticamente lícita) la expresión para $P(k)$ a fin de Transformarla en la proposición $P(k+1)$, y poner así, en forma manifiesta la validez de la fórmula propuesta $P(n)$, que se pretende demostrar.

3) Demostrar que:

$$\frac{9^{n+1} - 8n - 9}{64} = C \quad ; \text{ donde } C \in \mathbb{N}.$$

Demostración: a) para $n=1$

$$\Rightarrow \frac{9^2 - 8 - 9}{64} = 1 \quad \checkmark$$

b) supongamos que la fórmula vale para

$$n=k \Rightarrow \frac{9^{k+1} - 8k - 9}{64} = C.$$

multiplicando por 9:

$$\frac{9(9^{k+1} - 8k - 9)}{64} = 9C$$

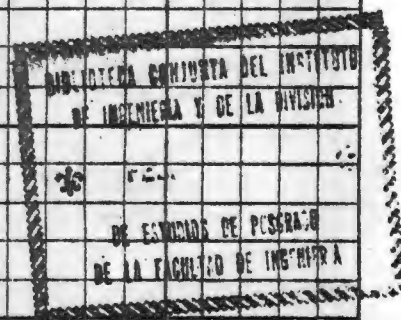
$$9^{k+2} - 72k - 81 = 64(9C)$$

sumando $64(k+1)$

$$9^{k+2} - 72k - 81 + 64k + 64 = 64(9C + k + 1)$$

$$9^{k+2} - 8k - (8+9) = 64(9C + k + 1)$$

$$\frac{9^{k+2} - 8(k+1) - 9}{64} = 9C + k + 1 = C, \quad ; C, \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$



6) Demostrar que el número d de diagonales en un polígono plano convexo de n lados es: $d_n = \frac{1}{2} n(n-3)$

donde $n = 3, 4, 5, \dots$

a) para $n = 3$ (triángulo)

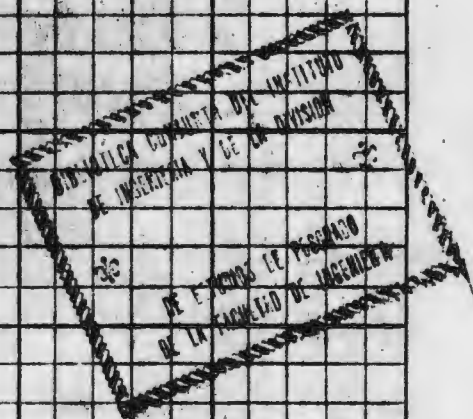
$$d_1 = \frac{1}{2} 3(3-3) = 0 \quad \checkmark$$

b) supongamos que la fórmula vale para $n = k$

$$d_k = \frac{1}{2} k(k-3)$$

Observando que por cada lado que se agrega al polígono, las diagonales se incrementan al valor $k-1$

n	d_n	diferencia
3	0	
4	2	$2 - 0 = 2$
5	5	$5 - 2 = 3$
6	9	$9 - 5 = 4$
...	...	...



$$\begin{aligned}
 d_{k+1} &= \frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} \\
 &= \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \\
 d_{k+1} &= \frac{(k+1)[(k+1)-3]}{2} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

7) Fórmula de De Moivre:

$$[r \operatorname{cis} \theta]^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

a) para $n=1$ $r \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis} \theta \checkmark$

b) supongamos que vale para $n=k$

$$(r \operatorname{cis} \theta)^k = r^k \operatorname{cis} k\theta$$

$$(r \operatorname{cis} \theta)^k r \operatorname{cis} \theta = r \operatorname{cis} \theta r^k \operatorname{cis} k\theta$$

$$\begin{aligned} (r \operatorname{cis} \theta)^{k+1} &= r^{k+1} [\cos \theta \cos k\theta + i^2 \sin \theta \sin k\theta + \\ &\quad + i(\sin \theta \cos k\theta + \cos \theta \sin k\theta)] \\ &= r^{k+1} [\operatorname{cis}(\theta + k\theta)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (r \operatorname{cis} \theta)^{k+1} = r^{k+1} \operatorname{cis}(1+k)\theta \checkmark$$

Obsérvese que deben cumplirse ambas condiciones a) y b) del principio de inducción para que pueda afirmarse que las proposiciones son válidas para toda $n \in \mathbb{N}$. No basta con hacer ver que se cumple a) ó b).

Ejemplos:

8) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 + (n-1)(n-2) \dots (n-10^6)$

La fórmula es válida para toda $n \leq 10^6$; pero falla para $n = 10^6 + 1 \Rightarrow$ la fórmula no es válida (no se cumple la parte b))

$$9) \quad 2+4+6+8+\dots+2n = n^2+n+1$$

Supongamos que la fórmula vale para $n=k$.
Sumemos $2(k+1)$

$$\begin{aligned} 2+4+6+\dots+2k+2(k+1) &= k^2+k+1+2(k+1) = \\ &= (k^2+2k+1)+(k+1)+1 \\ &= (k+1)^2+(k+1)+1 \end{aligned}$$

Luego se cumple el inciso b); pero la fórmula no es válida ¿por qué?

La respuesta es no se cumple a):

$$n=1 \quad ; \quad 2 \neq 1+1+1$$

$$10) \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

Supongamos que la fórmula vale para $n=k$. Sumemos $k+1$

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 \end{aligned}$$

venos que se verifica la parte b);
pero no se verifica a); en efecto:
para $n=1$ $1 \neq 1+1$

11) $nA_1 + nA_2 + \dots + nA_p = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p)$
 si $A_i \cap A_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$; $i, j \in N$.

Demostración:

a) para $i=1, j=2$: sabemos que:

$$nA_1 + nA_2 = n(A_1 \cup A_2) + n(A_1 \cap A_2) \quad (1)$$

pero, por hipótesis $A_1 \cap A_2 = \emptyset$; $n\emptyset = 0$

$$\Rightarrow nA_1 + nA_2 = n(A_1 \cup A_2) \quad \checkmark$$

b) Supongamos que la fórmula es válida para $p=k$

$$\Rightarrow nA_1 + nA_2 + \dots + nA_k = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)$$

Sumemos a cada miembro nA_{k+1} :

$$nA_1 + nA_2 + \dots + nA_k + nA_{k+1} = n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) + nA_{k+1}$$

debemos hacer ver que: $n(\bigcup_{i=1}^k A_i) + nA_{k+1} = n(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i)$.

en efecto, de la fórmula (1)

$$n(\bigcup_{i=1}^k A_i) + nA_{k+1} = n\left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cup A_{k+1}\right] + n\left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cap A_{k+1}\right]$$

de la ley distributiva:

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cap A_{k+1} &= (A_1 \cap A_{k+1}) \cup (A_2 \cap A_{k+1}) \cup \dots \cup (A_k \cap A_{k+1}) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset \quad (\text{por hipótesis}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\Rightarrow nA_1 + nA_2 + \dots + nA_{k+1} = n\left[\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right]$$

$\Rightarrow$ la fórmula vale para toda $p \in N$.

$$\begin{aligned}
 12) \quad n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) &= \sum_{i=1}^m n A_i - \sum_{i < j}^m n(A_i \cap A_j) + \\
 &+ \sum_{i < j < k}^m n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{p+1} \sum_{i < j < \dots < p}^m n(A_i \cap \dots \cap A_p) + \\
 &+ (-1)^{m+1} \sum_{i < j < \dots < m}^m n(A_i \cap \dots \cap A_m) \quad (1)
 \end{aligned}$$

donde $i, j, k, \dots = 1, 2, 3, \dots, m$; $1 < p < m$.

Demostración: $m \in \mathbb{N}$

a) En la parte de conjuntos (1ª parte) se demostró que:

$$n(A_1 \cup A_2) = n A_1 + n A_2 - n(A_1 \cap A_2) \quad (2)$$

$\Rightarrow$ La fórmula (1) vale para $m=2$

b) Supongamos que la fórmula (1) es válida para $k=m+1$:

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m+1} n A_i - \dots + (-1)^m \sum_{i < j < \dots < m+1}^{m+1} n(A_i \cap \dots \cap A_{m+1}) \quad (3)$$

Aplicando la fórmula (2) a $\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i$ con A_m :

$$\begin{aligned}
 n\left[\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) \cap A_m\right] &= n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \cap A_m = n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) + n A_m - \\
 &- n\left[\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \cap A_m\right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

Pero de la ley distributiva:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m+1}) \cap A_m = (A_1 \cap A_m) \cup (A_2 \cap A_m) \cup \dots \cup (A_{m+1} \cap A_m)$$

Aplicando la fórmula (3) que se ha supuesto válida, a la ecuación (5) (2º miembro)

$$\begin{aligned}
 n\left[\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m\right] &= \sum_{i=1}^{C_{m-1}^1} n(A_i \cap A_m) - \\
 &- \sum_{\substack{i < j \\ C_{m-1}^2}} n[(A_i \cap A_m) \cap (A_j \cap A_m)] + \\
 &+ \sum_{\substack{i < j < k \\ C_{m-1}^3}} n[(A_i \cap A_m) \cap (A_j \cap A_m) \cap (A_k \cap A_m)] + \dots \\
 &\dots + (-1)^m n[(A_1 \cap A_m) \cap (A_2 \cap A_m) \cap \dots \cap (A_{m-1} \cap A_m)] \quad (6)
 \end{aligned}$$

En virtud de la asociatividad, la conmutatividad, y la idempotencia, resultan:

$$(A_i \cap A_m) \cap (A_j \cap A_m) = A_i \cap A_j \cap A_m.$$

$$(A_i \cap A_m) \cap (A_j \cap A_m) \cap (A_k \cap A_m) = A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m$$

...

...

...

$$(A_1 \cap A_m) \cap (A_2 \cap A_m) \cap \dots \cap (A_{m-1} \cap A_m) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1} \cap A_m$$

Substituyendo en (6)

$$\begin{aligned}
 n\left[\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m\right] &= \sum_{i=1}^{C_{m-1}^1} n(A_i \cap A_m) - \sum_{\substack{i < j \\ C_{m-1}^2}} n(A_i \cap A_j \cap A_m) + \\
 &+ \sum_{\substack{i < j < k \\ C_{m-1}^3}} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m) + \dots + (-1)^m n\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

Substituyendo (7) y (3) en (4) se obtiene la fórmula (1), con lo cual queda demostrado, por inducción, que la fórmula (1) vale para toda $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, $m > 1$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 n\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) &= \sum_{i=1}^{C_{m-1}'} n A_i - \sum_{i < j}^{C_{m-1}^2} n(A_i \cap A_j) + \dots \\
 &+ (-1)^m \sum_{i < j < \dots < m-1}^{C_{m-1}^m} n(A_i \cap \dots \cap A_{m-1}) + n A_m - \\
 &- \sum_{i=1}^{C_{m-1}'} n(A_i \cap A_m) + \sum_{i < j}^{C_{m-1}^2} n(A_i \cap A_j \cap A_m) - \\
 &- \sum_{i < j < k}^{C_{m-1}^3} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m) + \dots + (-1)^{m+1} n\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right)
 \end{aligned}$$

CONSIDERANDO:

1º: Los términos con una raya abajo:

$$\sum_{i=1}^{C_{m-1}'} n A_i + n A_m = \sum_{i=1}^{C_m'} n A_i$$

2º: Los términos con ondulación abajo:

$$- \sum_{i < j}^{C_{m-1}^2} n(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{C_{m-1}'} n(A_i \cap A_m) = - \sum_{i < j}^{C_m^2} n(A_i \cap A_j)$$

ya que: $C_{m-1}' + C_{m-1}^2 = C_m^2$

etc., etc.

Por último:

$$\sum_{i < j < \dots < m}^{C_m^m} n(A_i \cap \dots \cap A_m) = n\left(\bigcap_{i=1}^m A_i\right)$$

ya que $C_m^m = 1$

$$13) \quad \bigcap_{i=1}^n A_i' = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)' \quad (1); \quad n \in \mathbb{N}; \quad n > 1$$

Generalización de la ley de De Morgan
Demostración:

a) En la 1ª parte de las notas (Conjuntos) se demostró que:

$$A_1' \cap A_2' = (A_1 \cup A_2)' \quad (2)$$

$\Rightarrow$ La fórmula (1) vale para $n=2$

b) Supóngase que (1) vale para $n=k$:

$\Rightarrow$ es válida la fórmula:

$$\bigcap_{i=1}^k A_i' = \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right)' \quad (3)$$

Debe hacerse ver que la fórmula vale para $n=k+1$; a partir de (3); en efecto:

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i=1}^k A_i' \right) \cap A_{k+1}' &= \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right)' \cap A_{k+1}' \\ &= \left[\left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) \cup A_{k+1} \right]' \quad (\text{de (2)}) \end{aligned}$$

En virtud de la ley asociativa:

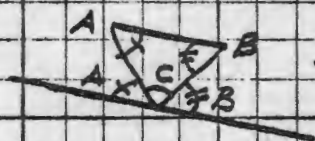
$$\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i' = \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right)' \quad (4)$$

Por lo tanto, queda demostrado, por inducción, que la fórmula (1) es válida para toda $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ ✓

14) La suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo de n lados es: $(n-2)\pi$; $n > 2$.

Demostación:

a) $n = 3 \Rightarrow (3-2)\pi = \pi$; lo cual es cierto, ya que en este caso el polígono es un triángulo.



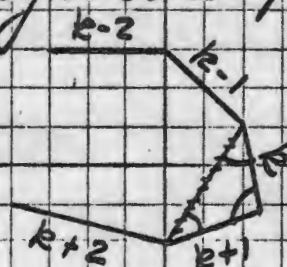
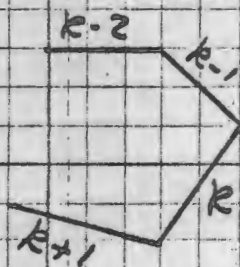
$$4A + 4B + 4C = \pi$$

b) Supóngase que la fórmula ① es válida para $n = k \Rightarrow (k-2)\pi$. ② es cierta.

Debe obtenerse, a partir de ②, que la suma de los ángulos interiores de un polígono de $n = k+1$ lados es:

$$[(k+1)-2]\pi; \text{ en efecto:}$$

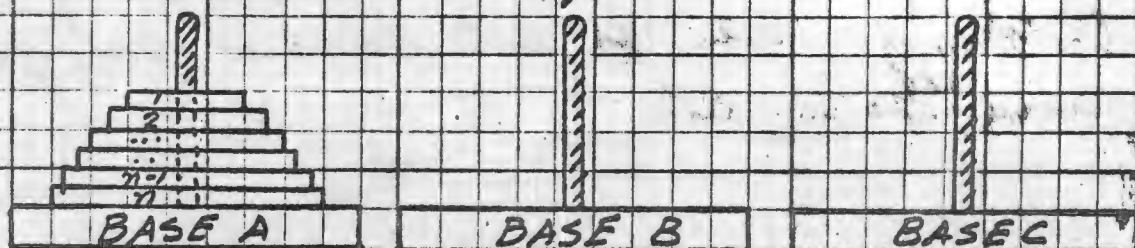
Observando que si se agrega un lado más al polígono de k lados, la suma de los ángulos interiores se incrementa en π , de acuerdo con la siguiente figura:



$$(k-2)\pi + \pi = [(k+1)-2]\pi \checkmark$$

$\Rightarrow$ La fórmula ① es válida para toda $n \in \mathbb{N}$; $n > 2$

15) Se tienen 3 bases: A, B, C; habiendo en la base A, n discos, todos de diferente diámetro, colocados de modo que ningún disco de diámetro menor queda abajo de alguno de diámetro mayor.



- i) Demostrar que es posible cambiar todos los n discos de la base A a otra base, sin poner en ningún momento un disco de diámetro mayor sobre otro de diámetro menor.
- ii) Hacer ver que es factible verificar el cambio de base de todos los discos descritos en i) en $2^n - 1$ movimientos.

Demostración:

i) a) Puesto que siempre es posible pasar el disco de diámetro menor de la base A a la base B $\Rightarrow$ i) vale para $n=1$

b) Supóngase que es posible cambiar k discos de la base A a la base B. Debe entonces hacerse ver que, sin violar la regla, es posible pasar $k+1$ discos de la base A a la base C; empleando la base B

como base auxiliar. En efecto:

Dado que por hipótesis es posible cambiar k discos, éstos se pasan a la base B . En seguida se pasa el disco $k+1$ de la base A a la base C , para luego pasar los k discos de la base B a la base C ; con lo cual quedan debidamente acomodados $k+1$ discos que originalmente estaban en la base A , y han pasado a la base C ; respetándose la regla de no poner discos de mayor diámetro sobre discos de menor diámetro. Queda, por lo tanto, demostrado por inducción, el inciso i), para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii) a) Para cambiar $n=1$ disco $\Rightarrow 2^1 - 1 = 1$; ó sea se cambia en un movimiento, $\Rightarrow$ la fórmula vale para $n=1$.

b) Supongamos que k discos se pueden cambiar de base en $2^k - 1$ movimientos. Debe verificarse, a partir de la suposición anterior, que $k+1$ discos es posible cambiarlos en $2^{k+1} - 1$ movimientos. En efecto:

Para pasar $k+1$ discos de la base A a la base C , se pasan previamente k discos

de la base A a la base B. En seguida se pasa el disco $k+1$ de la base A a la base C, y por ultimo se pasan los k discos de la base B a la base C, quedando el disco $k+1$ hasta abajo en la base C. El número total de movimientos M resulta ser:

$$M = \underbrace{(2^k - 1)}_{\substack{\text{A a B} \\ (k \text{ discos})}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{A a C} \\ (\text{disco } k+1)}} + \underbrace{(2^k - 1)}_{\substack{\text{B a C} \\ (k \text{ discos})}}$$

$$M = 2^k + 2^k - 1 = 2(2^k) - 1 = 2^{k+1} - 1 \quad \checkmark$$

Dado que el número total de movimientos para cambiar $k+1$ discos de la base A a la base C fue $2^{k+1} - 1$, queda completa la demostración, por inducción, del inciso ii), para toda $n \in \mathbb{N}$.

16) Si: $a, b, p, q \in \mathbb{Q}$; $n \in \mathbb{N}$, demostrar:

i) $(p + \sqrt{q})^n = a + b\sqrt{q}$

ii) $(p - \sqrt{q})^n = a - b\sqrt{q}$

Solución:

i) para $n=1$: $a=p$; $b=1$ ✓

Suponemos que vale para $n=k$; pero:

$$\Rightarrow (p + \sqrt{q})^{k+1} = (p + \sqrt{q})(a + b\sqrt{q})$$

$$= (ap + b) + (a + pb)\sqrt{q}$$

haciendo: $ap + b = a, \in \mathbb{Q}$; $a + pb = b, \in \mathbb{Q}$ ①

$$\Rightarrow (p + \sqrt{q})^{k+1} = a + b\sqrt{q}$$

$\Rightarrow$ Existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que.

$$(p + \sqrt{q})^n = a + b\sqrt{q} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \checkmark$$

ii) para $n=1$; $a=p$; $b=1$ ✓

Suponemos que vale para $n=k$; pero:

$$\Rightarrow (p - \sqrt{q})^{k+1} = (p - \sqrt{q})(a - b\sqrt{q})$$

$$= (ap + b) - (a + pb)\sqrt{q}$$

de ①

$$(p - \sqrt{q})^{k+1} = a - b\sqrt{q}$$

$\Rightarrow$ Existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tales que:

$$(p - \sqrt{q})^n = a - b\sqrt{q} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \checkmark$$

Observación: si $\sqrt{q} \in \mathbb{Q}' \Rightarrow p \pm \sqrt{q} \in \mathbb{Q}'$

$$\Rightarrow (p \pm \sqrt{q})^n \in \mathbb{Q}'; \text{ ya que } a \pm b\sqrt{q} \in \mathbb{Q}'$$

Algunos libros de referencia:

- 1.- "Notas sobre conjuntos y números".
J. Salazar R. (Edit. C.F.E) 1967
- 2.- "Álgebra y cálculo numérico"
A. F. Sagastume B. y G. Fernández
(Edit. Kapelusz) 1960
- 3.- "Temas de álgebra". H. Cárdenas, E. Illius,
F. Raggi, F. Tomás (Edit. Trillas) 1969
- 4.- "Set theory and related topics"
S. Lipschutz (Edit. Schaum) 1967
- 5.- "Calculus". T. M. Apostol. Vol. I
(Edit. Blaisdell) 1967
- 6.- "Finite mathematics". S. Lipschutz.
(Edit. Schaum) 1966
- 7.- "The algebraic foundations of mathematics"
R. A. Beaumont-R. S. Pierce (Edit. Addison-
Wesley) 1963

