

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

Notas para el curso introductorio: Matemáticas 0041
(sexta parte)

Series infinitas

Arturo Delgado R.

Agosto de 1979.



1672
-1
p-166
1131

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

NOTAS PARA EL :

CURSO INTRODUCTORIO

MATEMATICAS-04

SEXTA PARTE

SERIES INFINITAS

CUARTA EDICION

MARZO DE 1974

ARTURO DELGADO R.

Serie infinita. Se llama "serie" a la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

Esto es, dada la sucesión:

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Podemos formar una nueva sucesión, cuyos términos sean:

$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 + u_2$$

$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

$$\dots$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$$

La nueva sucesión $\{s_n\} = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$ es una sucesión de sumas parciales; siendo la serie infinita:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ existe ($s \in \mathbb{R}^{\#}$), se dice que la serie es "convergente", y su suma es s .

Si $\{s_n\}$ es divergente, decimos entonces que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es divergente.

Algunas propiedades de las series:-

1.- No se afecta la convergencia o la divergencia de una serie si:

a) Se multiplica cada término de la serie por una constante $\neq 0$, puesto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c s_n = c S ; (c \in \mathbb{R}^{\#})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c s_n = \infty$$

b) Se agregan o suprimen un número finito de términos.

(Véase la definición de límite de una sucesión)

2.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes, siendo α y β constantes $\Rightarrow \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Esta propiedad está basada en las propiedades de los límites.

3.- Basta que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverja para que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ sea divergente, puesto}$$

$$\text{que } S + \infty = \infty$$

4.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$
puesto que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^n u_n \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{n-1} u_n \right) \\ &= S - S = 0 \end{aligned}$$

5.- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ puede ser convergente ó puede ser divergente; esto es, la Condición $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ es necesaria, pero no es suficiente para que una serie sea convergente.

6.- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es divergente.

En efecto, la serie no puede ser convergente, porque si lo fuera, entonces de 4.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Nota: Se sugiere que antes de aplicar cualquier prueba ó criterio de convergencia, se determine si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$; pues si este es el caso, quedará establecido, sin lugar a duda, que la serie es divergente.

Serie de términos positivos: - Es una serie en la cual cada término es > 0 .

Una serie de términos positivos $\sum u_n$ es convergente, si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ está acotada.

En efecto, la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos, es siempre creciente.

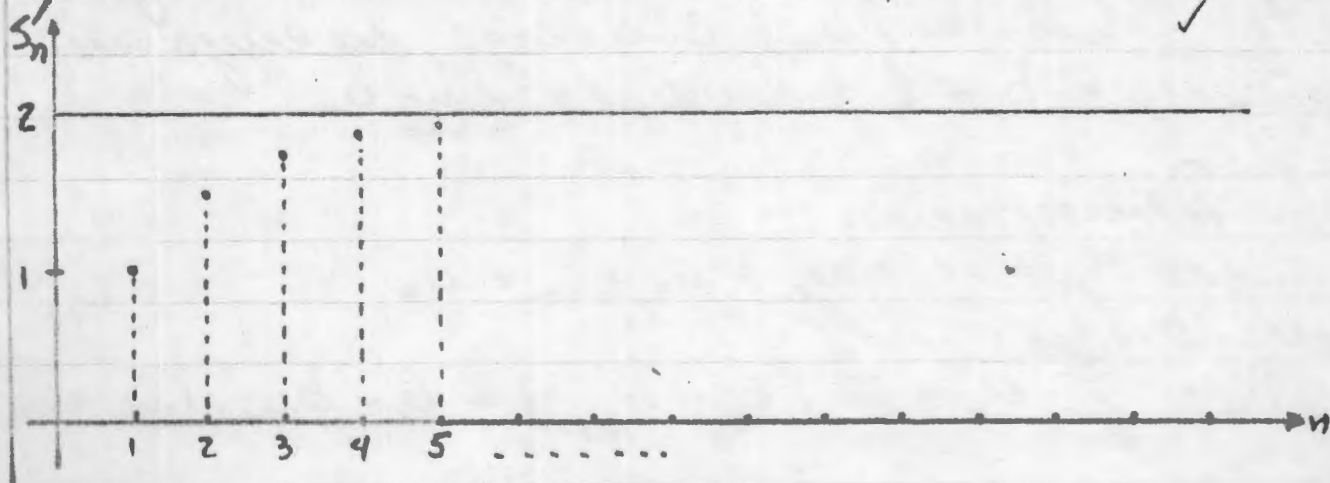
Ejemplo:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$



Geométricamente, vemos en este ejemplo que siempre es factible dividir el segmento $2 - \frac{1}{2^n}$ a la mitad, sin importar cuán

grande sea n ; por lo que se concluye que 2 es una cota $\Rightarrow s_n$ es convergente



Serie telescópicas:- El propósito de identificar las series llamadas telescópicas, es: 1º, establecer para éstas un criterio de convergencia; y, 2º, determinar el valor del límite de la suma, en caso que la serie telescópica sea convergente.

Definición: Para sumas finitas se tiene la siguiente propiedad, llamada "telescópica":

$$\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \quad ①$$

en efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} \end{aligned}$$

Consideremos ahora la serie (infinita):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n ; \text{ tal que: } u_n = b_n - b_{n+1} \quad ② \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

La serie $\sum u_n$ se denomina "telescópica", y su comportamiento se sintetiza en el siguiente teorema:

Sean $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $u_n = b_n - b_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se afirma que la serie $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la sucesión $\{b_n\}$ converge, en cuyo caso:
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = b_1 - l$; donde $l = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Demostración:

$$\text{Sea } S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

$\Rightarrow$ de ① y ②:

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \quad ③$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ y $\{b_n\}$ ambas convergen o ambas divergen. (de la tercera propiedad)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$

$\Rightarrow$ de ③: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = b_1 - l$ ✓

Observación: Toda serie es telescópica, puesto que siempre es posible satisfacer ② si se escoge b_1 en forma arbitraria; haciendo $b_{n+1} = b_1 - S_n$ para toda $n \geq 1$

Ejemplos: Hallar la suma de cada una de las siguientes series:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Solución:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n+1)-1} \right)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

Solución:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$$

Solución:

$$u_n = \ln \frac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1} \text{ es divergente.}$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} ; \text{ (la suma empieza en } n=0 \text{)}$$

Solución:

$$u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3(n+1)+1} \right)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+1} \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = b_0 = \frac{1}{3}$$

Pudimos haber resuelto el problema considerando que la suma empieza para $n=1$, si se toma en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{(3(0)+1)(3(0)+4)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = b_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \checkmark$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} \quad ; \quad k \neq 0, -1, -2, -3, \dots$$

Solución:

$$u_n = \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = \frac{1}{k+n-1} - \frac{1}{k+n}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{k+n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = b_1 = \frac{1}{k}$$

Obsérvese que, para $k=1$, se comprueba el resultado del ejemplo 2) anterior.

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+5}{7n^2(n+1)^2} \quad \textcircled{1}$$

Solución:

$$\frac{c}{n^2} - \frac{c}{(n+1)^2} = \frac{c[(n+1)^2 - n^2]}{n^2(n+1)^2} = \frac{c(2n+1)}{n^2(n+1)^2} \quad \textcircled{2}$$

de ① y ②: $c = 5/7$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+5}{7n^2(n+1)^2} = \frac{5}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

$$b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+5}{7n^2(n+1)^2} = \frac{5}{7} b_1 = \frac{5}{7}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} \quad (1)$$

Solución:

$$\frac{2}{3^{n-1}} = \frac{C}{3^{n-1}} - \frac{C}{3^n} = \frac{C - \frac{C}{3}}{3^{n-1}} \quad (2)$$

de (1) y (2):

$$C - \frac{C}{3} = 2 \Rightarrow C = 3$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$b_n = \frac{1}{3^{n-1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 b_1 = 3$$

(este problema se resolverá más adelante, considerando (1) como serie geométrica)

8) Demostrar:

$$i) f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \begin{cases} n + \frac{1}{2}, & \text{si } t = t_1 = 2m\pi; m \in \mathbb{I} \\ \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, & \text{si } t \neq t_1 \end{cases}$$

Solución:

Multiplicando por: $2 \sin \frac{t}{2}$:

$$f(t) \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \cos kt \sin \frac{t}{2} \quad (1)$$

empleando la identidad trigonométrica:

$$2 \cos kt \sin \frac{t}{2} = \sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t \quad (2)$$

Substituyendo (2) en (1):

$$\begin{aligned} f(t) \left(2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right) &= \operatorname{sen} \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{sen} \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \operatorname{sen} \left(k - \frac{1}{2} \right) t \right] \\ &= \operatorname{sen} \frac{t}{2} - \sum_{k=1}^n \left[\underbrace{\operatorname{sen} \left(k - \frac{1}{2} \right) t}_{b_k} - \underbrace{\operatorname{sen} \left(k + \frac{1}{2} \right) t}_{b_{k+1}} \right] \\ &= \cancel{\operatorname{sen} \frac{t}{2}} - \left[\underbrace{\cancel{\operatorname{sen} \frac{t}{2}}}_{b_1} - \underbrace{\operatorname{sen} \left(n + 1 - \frac{1}{2} \right) t}_{b_{n+1}} \right] \\ &= \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \quad (3) \checkmark$$

Si: $t = t_0 = 2m\pi$; $m \in I$ en (1):

$$\Rightarrow f(2m\pi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{2} + n \quad (4)$$

de (3) y (4):

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \begin{cases} n + \frac{1}{2}; & \text{si } t = t_0 = 2m\pi; m \in I \\ \frac{\operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}}; & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

Observación: la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ diverge,

ya que: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos nt$ no existe

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)} = 5 \quad (1)$$

Solución:

$$\frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n^2+3n+2)+B(n^2+2n)+C(n^2+n)}{n(n+1)(n+2)}$$

igualando numeradores:

$$3n-2 = A(n^2+3n+2) + B(n^2+2n) + C(n^2+n) \quad (2)$$

Los valores de las constantes A, B, C , dado que la descomposición en fracciones parciales es única, pueden calcularse sin necesidad de resolver el sistema simultáneo, como se indica a continuación; en (2):

$$n=0 \Rightarrow -1 = A$$

$$n=-1 \Rightarrow -B = -5 \Rightarrow B=5$$

$$n=-2 \Rightarrow -8 = 2C \Rightarrow C=-4$$

$$\therefore S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{5}{n+1} - \frac{4}{n+2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + 4 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$$

Observando que se tienen dos series telescópicas dentro de los parentesis circulares, y que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$:

$$S = -1 + 4 \frac{1}{2} = -1 + 2 = 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)} = 1$$

Sumas y series semiteléscopicas:

Si el término general de una suma u_k se puede expresar como:

$$u_k = b_k - b_{k+r}$$

entonces la suma $\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r})$ se denomina "suma (finita) semiteléscópica".

$b_k \in \mathbb{R}^{\#}$; $n, k, r, p \in \mathbb{N}$.

Las sumas semiteléscópicas pueden calcularse como r sumas teléscópicas. En efecto:

$$b_k - b_{k+r} = (b_k - b_{k+1}) + (b_{k+1} - b_{k+2}) + \dots + (b_{k+r-1} - b_{k+r})$$

Series semiteléscópicas

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k + r \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

11'

12'

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = S$$

Solución:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$u_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) = 2$$

$$\therefore S = 2$$

Sumas y series semitelescópicas

Arturo Delgado Rodríguez*

RESUMEN

Se definen sumas "semitelescópicas" y se enuncia un teorema que establece una propiedad que poseen dichas sumas. Si el término general, u_k , de una suma, puede expresarse del siguiente modo: $u_k = b_k - b_{k+r}$, se hace ver que es factible calcular el valor numérico de la suma, considerando solo $2r$ términos de ella, cuyo término general es b_k . En el caso de series infinitas, el cálculo del valor numérico de la suma resulta aún más sencillo.

Se exponen dos corolarios al teorema. El primer corolario se refiere a sumas y series "alternadas semitelescópicas". En el segundo corolario se propone un método para valorar numéricamente sumas y series en las cuales el término general es un cociente de dos polinomios, a los que se les imponen varias restricciones.

El trabajo incluye dos apéndices. El primero consiste en demostraciones al teorema propuesto y al primer corolario. En el segundo apéndice se presentan varios ejemplos numéricos específicos, cuya resolución permite apreciar la utilidad y ventaja de las fórmulas propuestas.

ABSTRACT

Semitelescopic sums are defined and a theorem is proposed which establishes a property that said sums possess. If the general term of a sum μ_k can be expressed as follows: $\mu_k = b_k - b_{k+r}$, it is shown how it is possible to calculate the numerical value of the sum, taking into account only $2r$ terms of the sum, whose general term is b_k . The numerical value of the sum of a series is found in an even easier manner.

From the theorem, two corollaries are derived. The first corollary refers to alternating telescopic sums and series. The second corollary describes a method for calculating the numerical value of sums and series in which the general term is a quotient of two polynomials, to which certain conditions are imposed. It is shown that the sum can be calculated as a linear combination of semitelescopic sums.

This paper includes two appendixes. The first one consists of demonstrations of the proposed theorem and its first corollary. In the second appendix various specific numerical examples are worked out, the solution of which is intended to provide ample proof of the usefulness and advantage of the proposed methods.

* Profesor titular de la sección de matemáticas de la División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM.

14

1. DEFINICION

Sumas finitas semitelescópicas son aquellas que pueden expresarse del siguiente modo:

$$\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r})$$

TEOREMA

Las sumas semitelescópicas tienen la siguiente propiedad:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (1)$$

$$b_k \in \mathbb{R}; n, k, r, p \in \mathbb{N}; r < \frac{n-p+1}{2}$$

Si $r = 1$, la suma se denomina telescópica (refs 1 y 2). La demostración de la igualdad 1 aparece en el Apéndice I.

La fórmula 1 permite reducir el número de sumandos en sumas finitas (o en series convergentes, como se verá en el cap 2) en todos aquellos casos en que es factible expresar el término general del siguiente modo:

$$u_k = b_k - b_{k+r} \quad (2)$$

(Véanse los ejemplos i y ii en el Apéndice II.)

2. SERIES INFINITAS SEMITELESCOPICAS:

Si: $n \rightarrow \infty$ en la ec 1 $\Rightarrow$ de la ec 2:

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \right) =$$

$$= \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (3)$$

Haciendo: $\sum_{k=p}^{p+r-1} b_k = C$

Además, si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+r} = r \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (4)$$

(Véanse los ejemplos vii, viii y ix en el Apéndice II.)

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $\Rightarrow$ de (3) y (4):

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k = C \quad (5)$$

(Véanse los ejemplos iii, iv, v y vi en el Apéndice II.)

En general:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$:

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - rL$$

$$\sum_{k=p}^{\infty} u_k = C - rL \quad (6)$$

NOTA: El ejemplo 1 presenta características muy particulares,

SUMAS Y SERIES ALTERNADAS SEMITELESCOPICAS

3. DEFINICION

Sumas alternadas finitas semitelescópicas son aquellas que pueden expresarse del siguiente modo:

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k u_k = \sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k \pm b_{k+2r}) \quad (7)$$

donde

$$b_k + b_{k+2r}, \text{ si } r \text{ es impar}$$

$$b_k - b_{k+2r}, \text{ si } r \text{ es par}$$

COROLARIO 1

Las sumas alternadas semitelescópicas tienen la siguiente propiedad:

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k \quad (8)$$

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k \quad (9)$$

$$b_k \in R; n, k, r, p \in N$$

La demostración de las fórmulas 8 y 9 se presenta en el Apéndice I. (Véanse los ejemplos xi y xii en el Apéndice II.)

4. SERIES ALTERNADAS SEMITELESCOPICAS

Si $n \rightarrow \infty$ en las ecuaciones 7, 8 y 9:

$$\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \mu_k = \begin{cases} \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k; r \text{ impar} \\ \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k; r \text{ par} \end{cases}$$

En ambos casos, $\lim \sum (-1)^k b_k = \sum \lim (-1)^k b_k$, ya que el número de sumandos es finito.

Observando que el límite de la sucesión oscilante $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k b_k$ existe, solo si $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$

$$\sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k \mu_k = \begin{cases} \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k & (10) \\ \sum_{k=p}^{\infty} (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k & (11) \end{cases}$$

(Véanse los ejemplos xiii a xviii en el Apéndice II.)

5. CALCULO DE SUMAS Y SERIES EN LAS QUE EL TERMINO GENERAL ES EL COCIENTE DE DOS POLINOMIOS

El método que se expone a continuación permite calcular el valor numérico de la suma buscada, transformándola en una combinación lineal de sumas semitelescópicas.

DESARROLLO DEL PROCEDIMIENTO PROPUUESTO

HIPOTESIS:

a) $p(n)/q(n)$ es una función racional propia en que el denominador, $q(n)$, es un polinomio de grado finito m , en tanto que el numerador, $p(n)$, es un polinomio cuyo grado es, como máximo, $m-2$. Ambos polinomios tienen coeficientes en los reales ($m-2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$)

b) El polinomio del denominador $q(n)$ debe admitir la siguiente factorización:

$$q(n) = c(n - q_1)(n - q_2) \dots (n - q_m)$$

de modo que

$$q_i \in I; q_i \neq q_j \quad \forall i \neq j; i, j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

En otras palabras: las raíces de la ecuación $q(n) = 0$ deben ser todas enteras y todas distintas

c) la suma

$$\sum_{n=k}^{n=k+s} \frac{p(n)}{q(n)} \quad (12)$$

es tal que $q(n)$ no se anula para ningún valor de n ($k \leq n \leq k+s$); esto es, n no es raíz de $q(n) = 0$; ($n \in N$).

COROLARIO 2

La suma $\sum_{n=k}^{n=k+s} \frac{p(n)}{q(n)}$ puede calcularse como una com-

binación lineal de sumas semitelescópicas (o telescópicas), o como series semitelescópicas, cuando $s \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACION:

De acuerdo con la hipótesis b):

$$q(n) = c(n - q_1)(n - q_2) \dots (n - q_m)$$

puesto que, por la misma hipótesis:

$$q_i \in I; q_i \neq q_j \quad \forall i \neq j; i, j = 1, 2, 3, \dots, m$$

$\Rightarrow$ siempre es posible la siguiente descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{A_1}{n - q_1} + \frac{A_2}{n - q_2} + \dots + \frac{A_m}{n - q_m} \dots \quad (13)$$

donde $A_i \in R; \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Pero la hipótesis a) establece que si $q(n)$ es de grado m , $p(n)$ será, como máximo, de grado $m - 2$ (puede ser $p(n)$ de cualquier grado $t \leq m - 2$), por lo cual resulta:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = 0$$

Si se considera cada A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) como una suma de números reales: $\sum C_k = A_i$, y teniendo en

cuenta que $\sum_{i=1}^m A_i = 0$, $\Rightarrow$ es siempre factible establecer una correspondencia biunívoca entre determinados C_k positivos, a los que se hacen corresponder igual número de C_k negativos, de tal modo que el segundo miembro de la ecuación 13 puede expresarse como una combinación lineal de diferencias de la forma:

$$k \left(\frac{1}{n - q_i} - \frac{1}{n - q_j} \right); k \in R$$

Por lo que se ve, al considerar la suma (12) resulta que puede calcularse como una suma finita de sumas semitelescópicas (o telescópicas). Si $s \rightarrow \infty$, la suma se convierte en serie, cuya suma es asimismo factible de ser determinada como semitelescópica (o telescópica).

Los razonamientos anteriores completan la demostración del corolario, sujeto a las hipótesis expuestas.

A fin de aclarar estas ideas, a continuación se desarrolla un ejemplo concreto.

Ejemplo: Determinar el valor numérico de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)}$$

SOLUCION

Se comprueba que en este caso se satisfacen las tres hipótesis básicas:

Se procede a la descomposición, en fracciones parciales, del término general:

$$\frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+4}$$

Dado que la descomposición es única, los valores numéricos de las constantes A, B, C se obtienen del siguiente modo:

si:

$$n=0 \Rightarrow 1=8A \Rightarrow A=\frac{1}{8}$$

$$n=-2 \Rightarrow -5=B(-2)(2) \Rightarrow B=\frac{5}{4}$$

$$n=-4 \Rightarrow -11=C(-4)(-2) \Rightarrow C=-\frac{11}{8}$$

Se comprueba que:

$$A+B+C=\frac{1}{8}+\frac{5}{4}-\frac{11}{8}=0$$

$$\frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right) + \frac{10}{8} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right)$$

Con esta transformación del término general, la serie dada puede sumarse como dos series semitelescópicas, esto es:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{12+6+4+3}{12} \right) + \frac{5}{4} \left(\frac{7}{12} \right) = \frac{25+70}{(12)(8)} = \frac{95}{96} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{95}{96}$$

APENDICE I

PRIMERA DEMOSTRACION DE LA FORMULA 1:

a)

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (1)$$

$$b_k \in R; n, k, r, p \in N; r < \frac{n-p+1}{2}$$

Por inducción sobre r :

a) si: $r = 1 \Rightarrow$ de (1):

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=p}^p b_k - \sum_{k=n+1}^{n+1} b_k \Rightarrow$$

$$(b_p - b_{p+1}) + (b_{p+1} - b_{p+2}) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_p - b_{n+1}$$

Este resultado concuerda, cuando $p = 1$, con el dado en la ref 2, pág 386, 10.7.)

b) Supóngase que la fórmula 1 se verifica para $r = m$; $\Rightarrow$ vale:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m}) = \sum_{k=p}^{p+m-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k \quad (14)$$

Con base en la fórmula 14, debe hacerse ver que vale:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m+1}) = \sum_{k=p}^{p+m} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m+1} b_k \quad (15)$$

En efecto, del primer miembro de la fórmula 15:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m+1}) &= \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p}^n b_{k+m+1} = \\ &= \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+1}^n b_{k+m} - b_{n+m+1} = \\ &= \sum_{k=p}^n b_k - \left[\left(\sum_{k=p}^n b_{k+m} - b_{p+m} \right) + b_{n+m+1} \right] = \\ &= \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p}^n b_{k+m} + (b_{p+m} - b_{n+m+1}) = \\ &= \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m}) + (b_{p+m} - b_{n+m+1}) = \\ &= \sum_{k=p}^{p+m-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k + (b_{p+m} - b_{n+m+1}) = \end{aligned}$$

De la ec 14:

$$\therefore \sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+m+1}) = \sum_{k=p}^{p+m} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+m+1} b_k$$

que es precisamente la fórmula 15, con lo cual se completa la demostración: la fórmula 1 vale $\forall r \in \mathbb{N}$.

Obsérvese que aun cuando la condición $r \leq \frac{n-p+1}{2}$

no es necesaria, ya que no interviene en la demostración anterior, ésta es una limitación de orden práctico, pues indica hasta qué valor de r resulta una ventaja emplear la fórmula 1 para lograr reducción del número de sumandos.

SEGUNDA DEMOSTRACION DE LA FORMULA 1:

Esta demostración fue propuesta por el Sr. M. en C. Julio Damy Ríos.

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p}^n b_{k+r} \quad (16)$$

Si se hace en la segunda suma del segundo miembro de la fórmula 16

$$\text{si } k+r=t \Rightarrow k=t-r$$

$$k=p=t-r \Rightarrow t=p+r$$

$$k=n=t-r \Rightarrow t=n+r$$

Sustituyendo estos valores:

$$\sum_{k=p}^n b_{k+r} = \sum_{t=p+r}^{n+r} b_t = \sum_{k=p+r}^{n+r} b_k \quad (17)$$

Sustituyendo la fórmula 17 en la 16 y tomando en cuenta la ec 1:

$$\sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+r}^{n+r} b_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (18)$$

Para demostrar la fórmula 1, se considerarán tres casos para la ec 18

a) $p+r \leq n$; b) $p+r = n+1$; c) $p+r > n+1$

CASO a) $p + r \leq n$. Restando y sumando al primer miembro de la fórmula 18, la suma finita $\sum_{k=p+r}^n b_k$ se obtiene:

$$\left(\sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+r}^n b_k \right) - \left(\sum_{k=p+r}^{n+r} b_k - \sum_{k=p+r}^n b_k \right) \quad (19)$$

Pero:

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n b_k &= \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k + \sum_{k=p+r}^n b_k \\ \Rightarrow \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=p+r}^n b_k &= \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k \quad (20) \end{aligned}$$

Asimismo:

$$\sum_{k=p+r}^{n+r} b_k = \sum_{k=p+r}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (21)$$

Sustituyendo las ecs 20 y 21 en la 19, y tomando en cuenta las fórmulas 16 y 18, resulta:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k$$

que es precisamente la fórmula 1 para $p + r \leq n$.

Obsérvese que en el caso a la fórmula 1 reduce la suma de $2(n - p + 1)$ términos a solo $2r$ términos; pero por hipótesis $p + r \leq n \Rightarrow r \leq n - p \Rightarrow 2r \leq 2(n - p) < 2(n - p + 1) \Rightarrow$ la fórmula 1 en el caso a permite una reducción de sumandos en el desarrollo de $\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r})^*$

CASO b) $p + r = n + 1, \Rightarrow p + r - 1 = n$

Sustituyendo en la ec 18:

$$\sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k = \sum_{k=p}^n b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k$$

identidad que comprueba la validez de la fórmula 1 para $p + r = n + 1$.

En el caso b no hay ventaja en el uso de la fórmula 1, ya que:

$$\begin{aligned} p + r = n + 1 &\Rightarrow r = n - p + 1 \Rightarrow 2r = \\ &= 2(n - p + 1), \quad 2r > n - p + 1^* \end{aligned}$$

CASO c) $p + r > n + 1$

Sumando y restando al primer miembro de la fórmula 18, la suma finita $\sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k$ resulta:

$$\sum_{k=p}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k - \left(\sum_{k=p+r}^{n+r} b_k + \sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k \right) \quad (22)$$

$$\text{Pero: } \sum_{k=p}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k \quad (23)$$

$$\sum_{k=n+1}^{p+r-1} b_k + \sum_{k=p+r}^{n+r} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k \quad (24)$$

Sustituyendo las ecs 23 y 24 en la 22 y tomando en cuenta las fórmulas 16 y 18, resulta:

$$\sum_{k=p}^n (b_k - b_{k+r}) = \sum_{k=p}^{p+r-1} b_k - \sum_{k=n+1}^{n+r} b_k$$

que es precisamente la fórmula 1.

Debe hacerse notar que, en el caso c, la aplicación de la fórmula 1 aumenta en vez de reducir el número de sumandos, ya que, por hipótesis

$$\begin{aligned} p + r &> n + 1 \\ \Rightarrow r &> n - p + 1 \\ \Rightarrow 2r &> 2(n - p + 1) > n - p + 1^* \end{aligned}$$

Demostración del corolario 1**

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k + b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k \quad (8)$$

*El desarrollo de la serie dada originalmente $\sum_{k=p}^n u_k$ involucra $n - p + 1$ términos $\Rightarrow$ se logra reducción si

$$2r < n - p + 1$$

**Esta demostración está basada en una sugerencia del Sr. M. en C. Julio Dany Ríos.

$$\sum_{k=2}^{200} [\ln(k-1) - \ln(k+1)] = \sum_{k=2}^3 \ln(k-1) - \sum_{k=201}^{202} \ln(k-1) =$$

$$= \ln 1 + \ln 2 - \ln 200 - \ln 201 = \ln \frac{1}{20100}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{20100}$$

$$\sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k = \ln \sqrt{20100}$$

$$\text{iii) } \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - m^2} ; m \in \mathbb{N}$$

SOLUCION

$$\frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{k-m} - \frac{1}{k+m} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+m} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \sum_{k=m+1}^{3m} \frac{1}{k-m}$$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{1}{2m} \sum_{k=m+1}^{3m} \frac{1}{k-m}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

SOLUCION

$$\frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) - 3 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) - 3 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} - 3 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k+1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 3 \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{v) } \sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

SOLUCION

De la ref 3, página 813 (21.2 - 17):

$$\text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1} = \text{áng tan } \frac{1}{k} - \text{áng tan } \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{áng tan } \frac{1}{k} = 0$$

Tomando valor principal:

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1} = \sum_{k=1}^1 \text{áng tan } k =$$

$$= \text{áng tan } 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{áng tan } \frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{vi) } \sum_{k=2}^{\infty} \text{áng sen } \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1}$$

SOLUCION

Si se toma de la ref 3, página 813 (21.2 - 17):

$$\sqrt{(k \pm 1)^2} = \left| \sqrt{(k \pm 1)^2} \right| = k \pm 1$$

$$\text{áng sen } \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1} = \text{áng sen } \frac{1}{k-1} - \text{áng sen } \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{áng sen } \frac{1}{k} = 0$$

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k \quad (9)$$

Si en la fórmula 1 se hace:

$$b_k = (-1)^k C_f$$

$$b_{k+r} = (-1)^{f+m} C_{f+m}$$

Sustituyendo estos valores en la 1:

$$\sum_{f=p}^n \left[(-1)^f C_f - (-1)^{f+m} C_{f+m} \right] = \sum_{f=p}^{p+m-1} (-1)^f C_f - \sum_{f=n+1}^{n+m} (-1)^f C_f \quad (25)$$

Del primer miembro de la fórmula 25:

$$\sum_{f=p}^n \left[(-1)^f C_f - (-1)^m (-1)^f C_{f+m} \right]$$

$$\text{Pero: } (-1)^m = \begin{cases} -1, & \text{si } m \text{ es impar} \\ 1, & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

Haciendo $m = 2r - 1$; $f = k$; $c = b$ en (25)

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r-1}) = \sum_{k=p}^{p+2r-2} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r-1} (-1)^k b_k \quad (8)$$

Haciendo $m = 2r$; $f = k$; $c = b$ en (25)

$$\sum_{k=p}^n (-1)^k (b_k - b_{k+2r}) = \sum_{k=p}^{p+2r-1} (-1)^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+2r} (-1)^k b_k \quad (9)$$

Obsérvese que tanto la fórmula 8 como la 9 pueden demostrarse por inducción matemática sobre r ; pero es más sencilla la demostración empleando la fórmula 1, ya demostrada para toda $r \in \mathbb{N}$.

APENDICE II

DETERMINAR EL VALOR DE LAS SIGUIENTES SUMAS:

$$i) \sum_{k=1}^{99} \frac{6}{k^2 + 3k}$$

SOLUCION

$$\frac{6}{k^2 + 3k} = 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{99} \frac{6}{k^2 + 3k} = 2 \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right)$$

Aplicando la fórmula 1, para $r = 3$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} - \sum_{k=102}^{102} \frac{1}{k} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{100} - \frac{1}{101} - \frac{1}{102} = \frac{929049}{515100} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{99} \frac{6}{k^2 + 3k} = \frac{309683}{85850}$$

$$ii) \sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k$$

SOLUCION

De la ref 3, pág 817 (21.2 - 11):

$$\begin{aligned} \text{áng coth } k &= \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(k+1) - \ln(k-1) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} \text{áng coth } k = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{200} \left[\ln(k-1) - \ln(k+1) \right]$$

Aplicando la fórmula 1 para $r = 2$:

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \text{áng sen} \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1} =$$

$$= \sum_{k=2}^3 \text{áng sen} \frac{1}{k-1} = \text{áng sen } 1 + \text{áng sen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4}{6} \pi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{áng sen} \frac{\sqrt{k(k+2)} - \sqrt{k(k-2)}}{k^2 - 1} = \frac{2}{3} \pi$$

$$\text{vii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 4k + 3}$$

SOLUCION

$$\frac{6}{k^2 + 4k + 3} = \frac{3k + 6}{k + 3} - \frac{3k}{k + 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 4k + 3} = -3 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+2}{k+3} \right) \right]$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$$

Aplicando la fórmula 6:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2 + 4k + 3} = -3 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - 2(1) \right] = \frac{5}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k^2 + 4k + 3} = \frac{5}{2}$$

$$\text{viii)} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)}$$

*Obsérvese que también puede hacerse como sigue:

$$\frac{6}{k^2 + 4k + 3} = 3 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$$

SOLUCION

De la ref 3, página 810 (21.2 - 11):

$$\text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{k} - \cos \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{k} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{1}{k} - 2(1) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos 1 + \cos \frac{1}{2} - 2)$$

De la ref 3, pág. 1010:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} \doteq 1 - \frac{0.542 + 0.878}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{k+1}{k(k+2)} \text{sen} \frac{1}{k(k+2)} \doteq 0.290$$

$$\text{ix)} \sum_{k=2}^{2000} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

SOLUCION

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$\Rightarrow \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2 \ln k$$

$$\sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^n [\ln(k-1) - \ln k] - \sum_{k=2}^n [\ln k - \ln(k+1)] \quad (26)$$

$$= \ln 1 - \ln n + \ln(n+1) - \ln 2$$

$$= \ln \frac{n+1}{2n} \quad (27)$$

$$\sum_{k=2}^{2000} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \ln \frac{2001}{4000}$$

$$x) \sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

SOLUCION

De la fórmula 27 en el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{2n} \\ &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = -\ln 2$$

Observación: el segundo miembro de la fórmula 26 del ejemplo ix representa la diferencia de dos sumas telescópicas. Si $n \rightarrow \infty$ resultan dos series telescópicas, siendo cada una de ellas divergente ($\lim_{k \rightarrow \infty} \ln k = \infty$), por lo que el primer miembro de la fórmula 26 es la indeterminación $\infty - \infty$, cuyo valor, en este caso, resultó ser $-\ln 2$.

Este ejemplo proporciona una ilustración de cómo es posible que la diferencia de dos series divergentes se exprese como una serie convergente.

$$xi) \sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k}$$

SOLUCION

$$\frac{2k+3}{k^2+3k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+3}$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k} = \sum_{k=2}^{199} (-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+3} \right)$$

Aplicando la fórmula 8:

$$2r-1=3 \Rightarrow r=2$$

$$\sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k} = \sum_{k=2}^4 (-1)^k \frac{1}{k} - \sum_{k=200}^{202} (-1)^k \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{200} + \frac{1}{201} - \frac{1}{202}$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{20201}{4060200}$$

$$\sum_{k=2}^{199} (-1)^k \frac{2k+3}{k^2+3k} = \frac{557183}{1353400}$$

$$xii) \sum_{k=2}^{100} (-1)^k \ln(k^2+k-2)$$

SOLUCION

$$\sum_{k=2}^{100} (-1)^k \ln(k^2+k-2) = \sum_{k=2}^{100} (-1)^k [\ln(k-1) + \ln(k+2)]$$

Aplicando la fórmula 8 para $r=2$

$$\sum_{k=2}^{100} (-1)^k (k^2+k-2) = \sum_{k=2}^4 (-1)^k (k-1) - \sum_{k=101}^{103} (-1)^k (k-1)$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln 3 + \ln 100 - \ln 101 + \ln 102$$

$$\sum_{k=2}^{100} (-1)^k \ln(k^2+k-2) = \ln \frac{15300}{101}$$

$$xiii) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$$

SOLUCION

$$\frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}$$

$$b_k = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$$

Aplicando la fórmula 10:

$$p=0; r=1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)} = 1$$

$$xiv) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k}$$

SOLUCION

De la ref 1, pág 814 (21.2 - 25)

$$\frac{1}{2} \left(\sinh \frac{1}{k} + \sinh \frac{1}{k+3} \right) - \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sinh \frac{1}{k} = 0$$

Aplicando la fórmula 10:

$$p=1, r=2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\sinh 1 + \sinh \frac{1}{2} - \sinh \frac{1}{3} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh \frac{2k+3}{2k^2+6k} \cosh \frac{3}{2k^2+6k} = \frac{1}{2} \left(-\sinh 1 + \sinh \frac{1}{2} - \sinh \frac{1}{3} \right)$$

$$xv) \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \operatorname{áng} \coth k$$

SOLUCION

De la ref 3, pág 817 (21.2 - 11):

$$\operatorname{áng} \coth k = \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} = \frac{1}{2} \left[\ln(k+1) - \ln(k-1) \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \operatorname{áng} \coth k = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \left[\ln(k-1) - \ln(k+1) \right]$$

Aplicando la fórmula 11, (2r=2), $b_k = \ln(k-1)$

$$\sum_{k=2}^{200} \left[\ln(k-1) - \ln(k+1) \right] = \sum_{k=2}^2 (-1)^k \ln(k-1) - \sum_{k=200}^{200} (-1)^k \ln(k-1)$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln 200 - \ln 201 = \ln \frac{100}{201}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{200} (-1)^k \operatorname{áng} \coth k = -\frac{1}{2} \ln \frac{100}{201} = \ln \sqrt{\frac{201}{100}} = \ln \sqrt{2.01}$$

$$xvi) \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right)$$

SOLUCION

$$1 - \frac{4}{k^2} = \frac{k^2 - 4}{k^2} = \frac{(k-2)(k+2)}{k^2}$$

$$\ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \ln(k-2) + \ln(k+2) - 2 \ln k$$

$$\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \left[\ln(k-2) - \ln k \right] - \sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \left[\ln k - \ln(k+2) \right]$$

Aplicando la fórmula 11:

$$\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \sum_{k=3}^4 (-1)^k \ln(k-2) - \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \ln(k-2) -$$

$$- \sum_{k=3}^4 (-1)^k \ln k + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k \ln k$$

$$= \ln 1 - \ln 2 + \ln(2n-1) - \ln 2n + \ln 3 - \ln 4 - \ln(2n+1) + \ln 2(n+1)$$

$$\sum_{k=3}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 - \frac{4}{k^2} \right) = \ln \frac{3(2n-1)(n+1)}{4(2n)(2n+1)} = \ln \frac{6n^2 + 3n - 3}{16n^2 + 8n}$$

$$xvii) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+2)}$$

SOLUCION

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0; 2r = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}$$

$$xviii) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k^2 + 4k + 3}$$

SOLUCION

$$\frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} *$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0; 2r = 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-3+2}{6} = -\frac{1}{6}$$

*La descomposición $\frac{2}{k^2 + 4k + 3} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k}{k+1} = -\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+2}{k+3} \right)$

no funciona porque $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{k}{k+1}$ no existe.

SÍMBOLOS EMPLEADOS

- R = conjunto de números reales
- N = conjunto de números naturales = $\{1, 2, \dots\}$
- I = conjunto de números enteros = $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\forall$ = para todo
- $\in$ = elemento de
- $\Rightarrow$ implica que
- $\cdot$ = tiende a

REFERENCIAS

1. A. Delgado R., "Notas para el curso introductorio Matemáticas 041", División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F. (1972)
2. T. M. Apostol, "Calculus", Vol 1, 2a ed, Blaisdell Publishing Co. (1967)
3. G. A. Korn y T. M. Korn, "Mathematical Handbook", 2a ed, McGraw-Hill Book, Co. Inc., Nueva York (1968)

RECONOCIMIENTO

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento a las siguientes personas, de quienes ha recibido apoyo y consejo, así como muy valiosos comentarios, los que han sido tomados en cuenta en la presentación final de este trabajo:

Dr. Javier Salazar R.
 Dr. Octavio Rascón Ch.
 M. en C. Julio Damy Ríos
 Dr. Fernando E. Prieto C.
 Dr. Ismael Herrera
 Dr. Carlos Marín D.
 Dr. Artur Grigori
 M. en L. Carmen Meda de R.
 Act. Martha D. Delgado W.

Serie geométrica:

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

Sea S_n la suma parcial cuando $a=1$

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k$$

si $r \neq 1$

$$\Rightarrow (1-r)S_n = (1-r) \sum_{k=0}^{n-1} r^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (r^k - r^{k+1}) = 1 - r^n \quad (\text{de } \textcircled{1})$$

donde hemos invocado la propiedad telescópica.

$$\therefore (1-r)S_n = 1 - r^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r} \quad ; (r \neq 1)$$

$\Rightarrow$ al crecer n , se tiene que S_n dependerá del comportamiento de r^n ; de ahí que resulte:

Teorema: La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$

$\begin{cases} \text{converge, si } |r| < 1 \\ \text{diverge, si } |r| \geq 1 \end{cases}$

Demostración:

$$\text{Si } |r| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r} \quad \checkmark$$

$$\text{Si } |r| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1-r} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\text{Si } |r| = 1 \Rightarrow S_n = 1 + 1 + 1 + \dots \quad \checkmark$$

Si $|r| < 1$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots &= a \sum_{k=0}^{\infty} r^k \\ &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

Ejemplos: Determinar la suma de las siguientes series geométricas:

1) $r = \frac{1}{2}$; $a = 1 \Rightarrow$ la serie geométrica es:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

este resultado verifica el resultado obtenido anteriormente en forma geométrica.

2) $r = r^2$; $|r| < 1$

Solución:

$$1 + r^2 + r^4 + \dots = \frac{1}{1 - r^2}$$

Obsérvese que siendo convergente la serie:

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots ; |r| < 1$$

$\Rightarrow$ será asimismo convergente la serie:

$$1 + 0 + r^2 + 0 + r^4 + \dots ; |r| < 1$$

3) $x + x^3 + x^5 + \dots$; $|x| < 1$

Solución:

Del problema anterior: si $x = r$; multiplicando la serie $1 + r^2 + r^4 + \dots$ por r :

$$\Rightarrow x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{x}{1 - x^2} ; |x| < 1$$

4) $1 - r + r^2 - r^3 + \dots + (-1)^n r^n + \dots$; $|r| < 1$

Solución:

haciendo $r = -r$ en la serie: $1 + r + r^2 + r^3 + \dots$

$$\Rightarrow 1 - r + r^2 - r^3 + \dots + (-1)^n r^n = \frac{1}{1 + r} ; |r| < 1$$

5) $1 - r^2 + r^4 - r^6 + r^8 - \dots + (-1)^n r^{2n}; \quad |r| < 1$

Solución:

haciendo $r = -r^2$ en la serie: $1 + r + r^2 + r^3 + \dots$

$$\Rightarrow 1 - r^2 + r^4 - r^6 + r^8 - \dots = \frac{1}{1+r^2}; \quad |r| < 1$$

Obsérvese que se obtiene el mismo resultado si se hace $r = r^2$ en el problema 4) anterior.

6) Mediante una serie geométrica, determinar el número racional que representa el siguiente número:

5.7141414.....

Solución:

$$5.7141414... = 5 + .7 + .014 + .00014 + \dots$$

$$= 5 + \frac{7}{10} + \frac{14}{10^3} + \frac{14}{10^5} + \frac{14}{10^7} + \dots$$

Observando que del tercer término en adelante se tiene una serie geométrica, donde:

$$a = \frac{14}{10^3}; \quad r = \frac{1}{10^2}.$$

$$\Rightarrow 5.7141414... = 5 + \frac{7}{10} + \frac{\frac{14}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{5657}{990}$$

7) Igual que 6) para $0.235235235... = x$

Solución:

$$x = \frac{235}{10^3} + \frac{235}{10^6} + \frac{235}{10^9} + \dots$$

$$\Rightarrow a = 235 \times 10^{-3}; \quad r = 10^{-3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{235 \times 10^{-3}}{1 - 10^{-3}} = \frac{235}{999}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} \quad \textcircled{1}$$

Solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3} \quad ; \quad a = 2.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3$$

(Obsérvese que este resultado concuerda con el que se obtuvo anteriormente, al considerar la serie $\textcircled{1}$ como telescópica)

Existen series alternadas que son telescópicas, como se ve en los ejemplos 4) y 5) anteriores.

Prueba de convergencia por comparación.

Una serie de términos positivos $\sum u_n$ es convergente si cada término es $\leq$ que el correspondiente de otra serie $\sum c_n$ de términos positivos que se sabe es convergente.

Si se compara la serie de términos positivos, término a término, con una serie $\sum d_n$ divergente de términos positivos, y se verifica que los términos de $\sum u_n$ son $\geq$ que los correspondientes de $\sum d_n$, se concluye que $\sum u_n$ es divergente.

Algunas series empleadas para comparación:

1.- La serie geométrica

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ 0 < r < 1 \Rightarrow \text{converge} \\ r \geq 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$$

2.- La serie p.

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad \begin{cases} p > 1 \Rightarrow \text{converge} \\ p \leq 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$$

3.- Cualquier serie definida ya estudiada.

Ejemplos: Empleando el criterio de comparación, estudiar la convergencia o la divergencia de cada una de las siguientes series:

$$1.-) \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1}$$

Comparando con la serie $p=2$ (converge)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ la serie dada converge. $(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0)$

$$2.-) u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} ; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Comparando con la serie $p=1$ (diverge)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \text{la serie dada diverge.}$$

$$3.-) u_n = \frac{\ln n}{2n^3-1} ; \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

observando que $\ln n < n$

$$\frac{\ln n}{2n^3-1} < \frac{n}{2n^3-1} < \frac{n}{n^3} < \frac{1}{n^2} ; \forall n > 1$$

pero $\frac{1}{n^2}$ es una serie $p=2$ (converge)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3-1} \text{ es convergente.}$$

$$4.) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

Observando que: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, puesto que:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{(n+1) - n}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

pero $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{\sqrt{n} 2n} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

pero: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente (serie $p = \frac{3}{2} > 1$)

puesto que:

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} < \frac{1}{2n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \text{ es convergente}$$

$$5.) \sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$$

Si $n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow \tan \frac{1}{n} > 0$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan \frac{1}{n} = 0$

Dado que: $\sin x < x < \tan x$; ($0 < x < \pi/2$)

Si $x = \frac{1}{n} \Rightarrow \tan \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica)

$\Rightarrow$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n} \text{ es divergente}$$

6.-) Demostrar que el producto infinito:

$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$; donde $u_n > 0$; $u_n \in \mathbb{R}^{\#}$,
converge, si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente.

Solución:

Del desarrollo en serie de Maclaurin de e^x , puede concluirse que $1+x < e^x$, $\forall x > 0$

$$\Rightarrow (1+u_1)(1+u_2) \dots (1+u_n) < e^{u_1} e^{u_2} \dots e^{u_n}$$

pero:

$$e^{u_1} e^{u_2} \dots e^{u_n} = e^{u_1 + u_2 + \dots + u_n} = e^{\sum_{n=1}^n u_n}$$

$$\therefore \text{ si } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightarrow S \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow e^{\sum_{n=1}^{\infty} u_n} = e^S = C$$

$$\therefore \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) < C$$

Por lo cual, $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ define una

sucesión monótona creciente ($u_n > 0$);
además, es menor que C , $\Rightarrow$ la sucesión
es asimismo acotada, por lo cual se
concluye:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente,

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) ; u_n > 0 ; u_n \in \mathbb{R}^{\#}$$

converge ✓

Prueba de convergencia a partir de la definición de límite:

1.) Estudio de la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad (\sum u_n \text{ puede o no ser convergente})$$

te)

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} < \frac{1}{n} ; \text{ pero } \sum \frac{1}{n} \text{ es divergente,}$$

por lo tanto el criterio de comparación no nos dice nada tampoco.

$$\text{Sabemos que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| < \varepsilon \quad (\text{de la definición de límite})$$

$$\text{haciendo } \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right) < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{3}{2}$$

Tomando la primera desigualdad:

$$\frac{1}{2} < \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\text{puesto que } x > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x > \frac{x}{2}$$

$$\text{haciendo } x = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{x} ; \text{ si } x \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{n} > \frac{1}{2n} \quad \text{para cada } n > N$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\sum \frac{1}{n} \text{ es divergente})$$

$$\Rightarrow \text{por comparación, } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

2.-) Empleando el mismo sistema del ejemplo anterior, demostrar que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Solución:
puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$$\left| \frac{\tan x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

si $\varepsilon = 1$; $x > 0$; Sabiendo que $\tan x < 2x$
($x < 65^\circ$)

$$\text{si: } x = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \tan \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad ; \quad n > N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \tan \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{2}{n^{3/2}}$$

pero $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ es una serie $p = \frac{3}{2} > 1$ (Converge)

$\Rightarrow$ por Comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ es convergente}$$

Teorema:- Dada la serie $\sum u_n$; cuya convergencia se estudia. Sea $\sum v_n$ otra serie cualquiera cuya convergencia o divergencia ya ha sido establecida:

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$; siendo u_n y $v_n > 0$
 Se afirma que:

$\sum u_n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{converge si } \sum v_n \text{ converge. (A finito)} \\ \text{diverge si } \sum v_n \text{ diverge (A puede ser } \infty) \end{array} \right.$

Demostración:

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; lo cual no nos dice nada.

b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - A \right| < \epsilon$

para toda $n > N$

$\Rightarrow -\epsilon < \left(\frac{u_n}{v_n} - A \right) < \epsilon \Rightarrow A - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < A + \epsilon$

puesto que $v_n > 0$

$\Rightarrow (A - \epsilon)v_n < u_n < (A + \epsilon)v_n$

haciendo $A - \epsilon = C_1$; $A + \epsilon = C_2$ y sumando de $N+1$ a ∞ :

$C_1 \sum_{N+1}^{\infty} v_n \leq \sum_{N+1}^{\infty} u_n \leq C_2 \sum_{N+1}^{\infty} v_n$

Donde C_1 puede ser infinita; pero C_2 es finita.

Vemos de la última desigualdad, por comparación que:

$\sum u_n$ converge si $\sum v_n$ converge. ✓

$\sum u_n$ diverge si $\sum v_n$ diverge. ✓

Ejemplos: Determinar si las series dadas a continuación convergen o divergen:

1.- $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1}$

Sea $v_n = \frac{1}{n}$ ($\sum \frac{1}{n}$ es divergente)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} = A \neq 0$$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{2n-1}$ diverge.

2.- $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1}$

Sea $\sum \frac{1}{n^2} = \sum v_n$ (convergente)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 = A \neq 0$$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2+1}$ converge.

Corolario:- Dada la serie $\sum u_n$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = A$

Se afirma:

$\sum u_n$ converge si A es finito; siendo $p > 1$
 diverge si $A \neq 0$; $p \leq 1$; (A puede ser ∞)

Demostración:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\frac{1}{n^p}}$$

haciendo $v_n = \frac{1}{n^p}$ (serie p) este caso se reduce a un caso particular del teorema anterior. ✓

Ejemplos: Estudiar la convergencia de las siguientes series:

3.-) $\sum \frac{n+2}{3n^3-n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{n+2}{3n^3-n^2} = \frac{1}{3} = A ; p=2$$

$$\Rightarrow \sum \frac{n+2}{3n^3-n^2} \text{ converge}$$

4.-) $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right) \cdot \ln n = \infty ; p = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{\ln n}{\sqrt{n+1}} \text{ diverge.}$$

Criterio de D'Alembert. - Dada una serie $\sum u_n$ de términos positivos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.} \\ > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge.} \\ = 1, \text{ la prueba falla.} \end{cases}$$

Demostración:

$$\text{Sea } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = M$$

a) Si $M < 1$ se puede escoger r tal que $M < r < 1$; entonces, de la definición de límite, existe un término de la serie, digamos u_k , a partir del cual $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$

$$\Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} < r \Rightarrow u_{k+1} < u_k r$$

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < r \Rightarrow u_{k+2} < u_{k+1} r \Rightarrow u_{k+2} < u_k r^2$$

$$\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < r \Rightarrow u_{k+3} < u_{k+2} r \Rightarrow u_{k+3} < u_k r^3$$

Comparemos la serie $u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \dots$ ①

Con la serie geométrica:

$$u_k r + u_k r^2 + u_k r^3 + \dots$$
 ②

Observamos que cada término de ① es $<$ el correspondiente de ②; que es una serie convergente, puesto que $r < 1$.

Por el criterio de comparación se concluye que $\sum u_n$ es convergente ✓

b) Consideremos ahora que $M > 1$; siendo $M > r > 1$

$$\Rightarrow \frac{u_{k+1}}{u_k} > r \Rightarrow u_{k+1} > u_k r$$

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} > r \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1} \Rightarrow u_{k+2} > u_k r^2$$

$$\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} > r \Rightarrow u_{k+3} > u_{k+2} \Rightarrow u_{k+3} > u_k r^3$$

Razonando en forma análoga al caso a), queda demostrado que $\sum u_n$ diverge si $M > 1$ ✓

c) Si $M=1$, los ejemplos siguientes hacen ver que la prueba falla.

1.-) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$; (serie divergente)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

2.-) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$; (serie $p > 1 \Rightarrow$ converge)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Si $M=1$, falla el criterio de D'Alembert.

Ejemplos: Empleando el criterio de D'Alembert, estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$3.-) 1 + \frac{2!}{3} + \frac{3!}{3^2} + \frac{4!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{3^{n-1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^n}}{\frac{n!}{3^{n-1}}} = \frac{n+1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1 \Rightarrow \text{la serie diverge.}$$

4.-) Serie e :

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \dots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

En seguida comprobaremos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$; $(0! = 1! = 1)$

En efecto, en el capítulo de límites vimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{e}{x}\right)^x = e^e$

$$\Rightarrow e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

haciendo $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

desarrollando, de acuerdo con la fórmula del binomio:

$$t_n = (1+1) + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow t_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow e \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n-1)!} \geq e$$

Por otro lado, si $m \leq n$

$$t_n \geq (1+1) + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

si se mantiene m constante y $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}$$

$$\Rightarrow e \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n-1)!} \geq e$$

de (1) y (2)

$$e \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \leq e$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e \quad \checkmark$$

Podemos apreciar la rapidez con que converge la serie $\sum \frac{1}{(n-1)!}$ del siguiente modo:

$$e - \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$$

$$e - \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right) < \frac{1}{n!n}$$

$$\Rightarrow e - \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{n!n}$$

Como ejemplo:

$$e - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(n-1)!} < 0.0000001$$

Basándonos en el resultado anterior, resulta interesante demostrar que e es un número irracional:

Supongamos que e es racional:

$$e = \frac{p}{q}; \text{ siendo } p, q > 0 \text{ (enteros); } (p, q \in \mathbb{N})$$

Veamos que:

$$0 < e - \sum_{n=1}^n \frac{1}{(n-1)!} < \frac{1}{n!n} \quad (3)$$

$$\text{hagamos } \frac{1}{(n-1)!} = u_n$$

$$\text{si } n = q; \text{ de } (3)$$

$$0 < e - \sum u_q < \frac{1}{q!q}$$

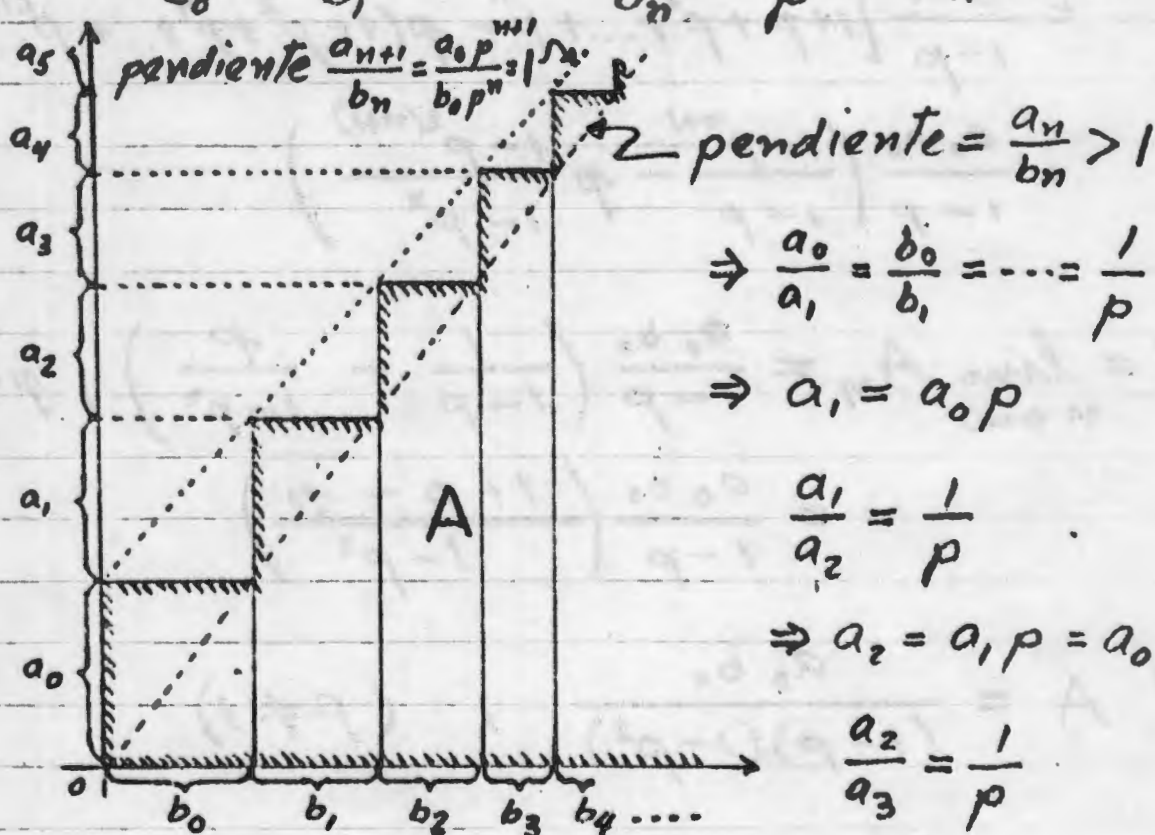
multiplicando por $q! > 0$

$$0 < q!(e - \sum u_q) < \frac{1}{q} \quad (4)$$

dado que $q \in \mathbb{N} \Rightarrow q! \in \mathbb{N}$; además, si $e = \frac{p}{q} \Rightarrow q!e \in \mathbb{N}$;
asimismo: $q! \sum u_q = q!(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(q-1)!}) \Rightarrow q! \sum u_q \in \mathbb{N}$;
 $\Rightarrow q!(e - \sum u_q) \in \mathbb{N}$.

La ecuación (4) asegura la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < \frac{1}{q}$ lo cual no es posible $\Rightarrow e \neq \frac{p}{q}$
 $\Rightarrow e$ es irracional $\checkmark$

5) Calcular el área bajo la línea quebrada y el eje x ; que se muestra en la figura; obteniendo que: $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{p}$; ($p < 1$)



$$\Rightarrow a_3 = a_0 p^3 \dots \dots a_n = a_0 p^n$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_n = a_0 p^n \\ b_n = b_0 p^n \end{array} \right\} \textcircled{1}$$

Solución:

Sea el área A .

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

$$A_n = a_0 b_0 + (a_0 + a_1) b_1 + \dots + (a_0 + a_1 + \dots + a_n) b_n$$

de ① $a_n = a_0 p^n$; $b_n = b_0 p^n$

$$\Rightarrow A_n = a_0 b_0 [1 + p(1+p) + p^2(1+p+p^2) + \dots + p^n(1+p+\dots+p^n)]$$

$$= a_0 b_0 \left(1 + p \frac{1-p^2}{1-p} + p^2 \frac{1-p^3}{1-p} + \dots + p^n \frac{1-p^{n+1}}{1-p} \right)$$

$$= \frac{a_0 b_0}{1-p} [1 + p + p^2 + \dots + p^n - p(1 + p^2 + p^4 + \dots + p^{2n})]$$

$$= \frac{a_0 b_0}{1-p} \left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} - p \frac{1-p^{2(n+1)}}{1-p^2} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{a_0 b_0}{1-p} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{p}{1-p^2} \right); p < 1$$

$$= \frac{a_0 b_0}{1-p} \left(\frac{1+p-p}{1-p^2} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{a_0 b_0}{(1-p)(1-p^2)}; (p \neq 1)$$

45 6.) Del ejemplo 4.) anterior: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$ ①

Comprobar que:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = e$; ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$

iii) ¿Será $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = ne$?

iv) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

Solución:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$ ②

Si $n-1 = p \Rightarrow$ si $n=2$, $p=1 \therefore$ de ② y ①

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} + 1 = (e-1) + 1 = e \checkmark$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{4}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 3 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!} =$

$= 3 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \right] = 3 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$

en el inciso i) anterior se vio que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e-1$.

Haciendo $n-2 = r$ en la 1ª suma:

si $n=3 \Rightarrow r=1 \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} = e-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 3 + (e-1) - 1 + (e-1) = 2e \checkmark$

iii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \neq ne$; ya que la serie diverge

iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$; ($\neq 3e$)

en efecto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2(n-1) + n^2}{n!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} - 1$$

del inciso ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} + 2e$$

Haciendo: $n-2 = q-1 \Rightarrow n = q+1$; $n=2 \Rightarrow q=1$
 substituyendo en el 2º miembro:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q+1}{(q-1)!} + 2e$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q}{(q-1)!} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(q-1)!} + 2e$$

En el segundo miembro: multiplicando y dividiendo la primera suma por q ; y observando del problema 4.-) anterior que la segunda suma es precisamente e :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{q^2}{q!} + e + 2e$$

del inciso ii) $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{q^2}{q!} = 2e$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e \quad \checkmark$$

$$7) \frac{1}{1} + \frac{2}{4} + \frac{6}{27} + \dots + \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

pero hemos ya visto que: $e \rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, cuando $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{la serie converge.}$$

Observación: puesto que la serie resulta ser convergente, $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, ó sea:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

De aquí resulta que se afirma que $n^n \rightarrow \infty$ "más rápidamente" que $n! \rightarrow \infty$, cuando n crece sin límite.

Operaciones aritméticas con series convergentes, con sólo términos positivos.

La suma, resta, multiplicación y división de dos series convergentes da lugar a nuevas series que son asimismo convergentes, y sus sumas pueden determinarse cuando se conocen las sumas de las series dadas.

Como consecuencia de lo anterior, la elevación a potencias y la extracción de raíces puede efectuarse con estas series, lo mismo que si se tratara de números ordinarios.

Demostración:

a) Sea la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S = S_n + r_n = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$
donde S_n es la suma de los primeros n términos;
siendo $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ el resto.

Consideremos otra serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma_n + p_n = \sigma$; donde p_n es el resto.

Sumando ambas series: $S + \sigma = S_n + \sigma_n + (r_n + p_n)$;
por ser ambas series convergentes:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0 ; \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S + \sigma \quad \checkmark$$

b) Se procede análogamente en la demostración del caso de la sustracción o resta de dos series convergentes $\Rightarrow \sum u_n \pm \sum v_n = S \pm \sigma$ ✓

c) Por multiplicación:

$$(S_n + r_n)(\sigma_n + p_n) = S_n \sigma_n + r_n \sigma_n + p_n S_n + r_n p_n$$

$$\text{pero: } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \sigma_n = \sigma_n \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = S_n \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n = 50 \quad \checkmark \quad (\text{ver para el problema 49, mismo día})$$

d) Por división:

$$\frac{S_n + r_n}{r_n + p_n} = \frac{\frac{S_n}{\sigma_n} + \frac{r_n}{\sigma_n}}{\frac{\sigma_n}{\sigma_n} + \frac{p_n}{\sigma_n}} = \frac{\frac{S_n}{\sigma_n} + \frac{1}{\sigma_n} r_n}{1 + \frac{1}{\sigma_n} p_n}$$

pero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n} r_n = \frac{1}{\sigma_n} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{1}{\sigma_n} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{n=1}^{\infty} u_n}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n} = \frac{5}{\sigma} \quad \checkmark$$

Ejemplo: Estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

Solución: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^n \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^n \frac{1}{2^n} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{2^n}$$

En problemas anteriores quedó establecida la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$; por lo que, por comparación resulta asimismo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. (ambas son geométricas)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} \text{ es convergente.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2} \quad \checkmark$$

Serie de términos constantes negativos:-

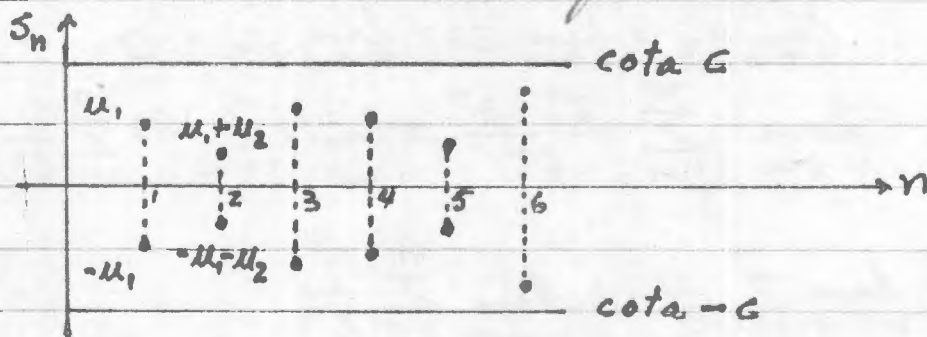
De la propiedad 1: a) vista anteriormente: No se afecta la convergencia o divergencia de una serie si se multiplica cada término de la serie por una constante $\neq 0$.

$$\Rightarrow C = -1$$

$$\text{si: } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-S_n) = -S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-S_n) = -\infty$$

Por consiguiente, el estudio de las series de términos negativos es efectiva de manera similar al estudio propuesto para series de términos constantes positivos.



Ejemplo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{1}{2^n} = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Converge: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2^n} = -1$$

Serie alternadas. - Definición: Si $u_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$$

se denomina serie "alternada"

Ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Criterio de Leibnitz. - Si $\{|u_n|\}$ es una sucesión monótona decreciente ($|u_{n+1}| \leq |u_n|$ para toda $n \in \mathbb{N}$); siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ converge.

Demostración:

La suma S_{2M} del número par $2M$ de términos es:

$$S_{2M} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2M-1} - u_{2M})$$

$$\text{Por hipótesis: } |u_{n+1}| \leq |u_n| \Rightarrow u_n - u_{n+1} \geq 0 \\ \Rightarrow S_{2M} \geq 0.$$

haciendo:

$$S_2 = u_1 - u_2$$

$$S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4)$$

$$S_{2M} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2M-1} - u_{2M})$$

$$\Rightarrow S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_{2M}$$

$\Rightarrow$ La sucesión $\{S_{2M}\}$ es monótona creciente. ①

Por otro lado, escribiendo:

$$S_{2M} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2M-2} - u_{2M-1}) - u_{2M}$$

Pero, por hipótesis la sucesión $\{u_n\}$ es monótona decreciente $\Rightarrow u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_{2M}$

$$\Rightarrow (u_n - u_{n+1}) > 0$$

$$\Rightarrow u_1 - (u_2 - u_3) < u_1$$

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) < u_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_{2M} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2M-2} - u_{2M-1}) - u_{2M} < u_1$$

$\Rightarrow$ La sucesión $\{S_{2M}\}$ está acotada ②
de ① y ② $\Rightarrow \{S_{2M}\}$ es convergente

$$\Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2M} (-1)^{n+1} u_n = 5$$

Puesto que:

$$S_{2M+1} = S_{2M} + u_{2M+1}$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M+1} = \lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M} + \lim_{M \rightarrow \infty} u_{2M+1}$$

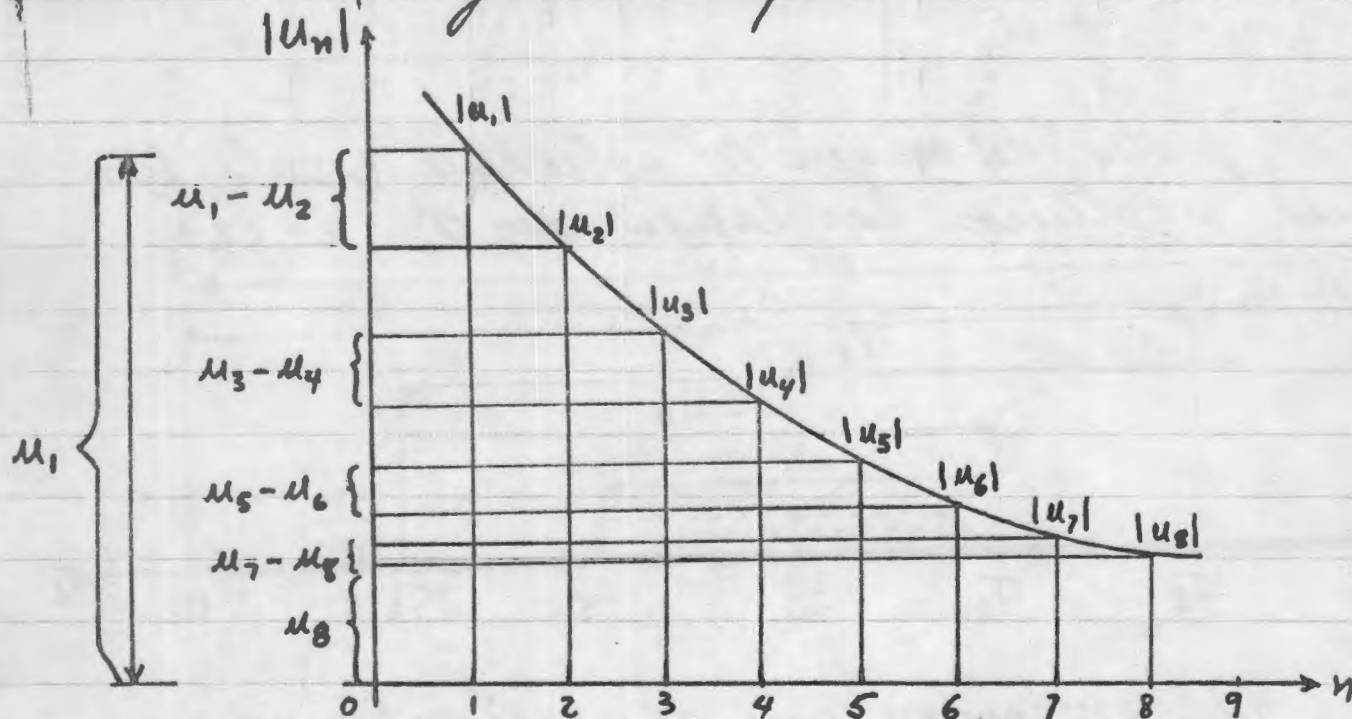
pero, por hipótesis: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 = \lim_{M \rightarrow \infty} u_{2M+1}$

$$\Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M+1} = \lim_{M \rightarrow \infty} S_{2M} = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n (-1)^{n+1} u_n = 5 \quad \checkmark$$

Interpretación geométrica del criterio de Leibnitz:

1ª.- Sea la sucesión $\{|u_n|\}$ monótona decreciente; siendo $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Representamos esta sucesión en el siguiente esquema:



Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow S_2 = u_1 - u_2$$

$$S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4)$$

... ..

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$$

$\Rightarrow S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_{2m} \Rightarrow$ la sucesión $\{S_{2m}\}$ es monótona creciente; además $S_{2m} < u_1$

$\Rightarrow$ la sucesión $\{S_{2m}\}$ está acotada

$\Rightarrow \{S_{2m}\}$ es convergente

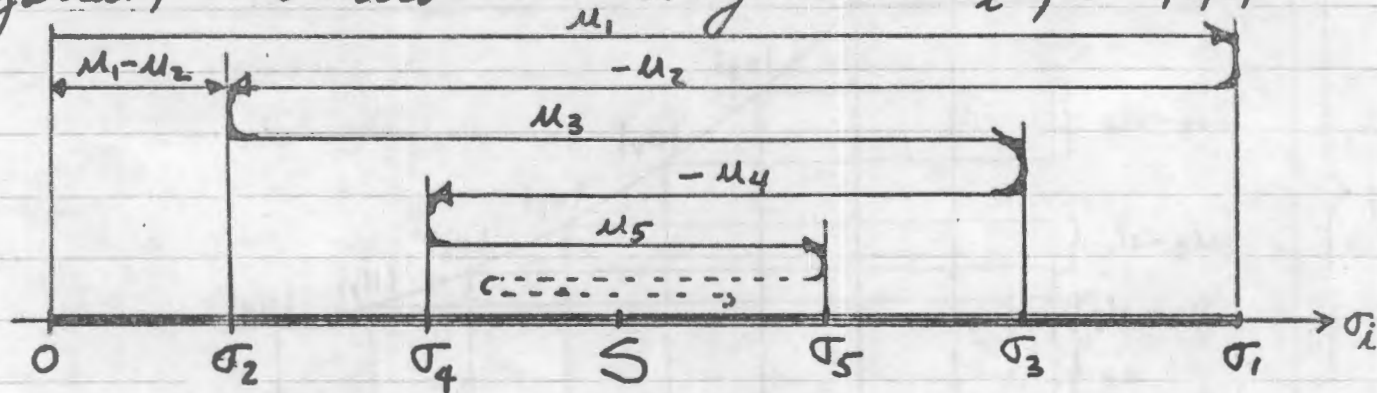
$$\Rightarrow \lim S_{2m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} u_k = S \checkmark$$

2ª interpretación geométrica del criterio de Leibnitz.

Empleando la siguiente notación:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= u_1 \\ \sigma_2 &= u_1 - u_2 \\ \sigma_3 &= u_1 - u_2 + u_3 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \text{ Sumas parciales.}$$

A partir del origen O ; sobre una escala horizontal, acostemos las longitudes σ_i ; $i = 1, 2, 3, \dots$



Observándose que al crecer el índice i de σ_i , los puntos sobre el eje oscilan alrededor del punto límite S , ya que la amplitud de la oscilación decrece en forma continua.

Obsérvese que las sumas parciales σ_i de índice par, tienden, por la izquierda, al límite S ; en tanto que las sumas parciales σ_i de índice impar, tienden, por la derecha, al mismo límite S .

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n (-1)^{n+1} u_n = S$$

Ejemplo: Empleando el criterio de Leibniz, comprobar la convergencia de la siguiente serie:

$$1) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \checkmark$$

$$b) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\frac{1}{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1} < 1$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}| < |u_n| \checkmark$$

$\Rightarrow$ la serie converge

$$2) \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)} = 0 \checkmark$$

$$b) \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}}{\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}} = \frac{2n-1}{4(2n+1)} < 1$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}| < |u_n| \checkmark$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Teorema. - Sean las series convergentes:
 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_1$; $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = S_2$; Se afirma que:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = S_1 + S_2$
 ii) $\sum_{n=0}^{\infty} c u_n = c S_1$ ($c = \text{constante}$)

Demostración:

Sean $\sum_{n=0}^n u_n = S_{n_1}$; $\sum_{n=0}^n v_n = S_{n_2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^n (u_n + v_n) = S_{n_1} + S_{n_2}$$

pero $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_1} = S_1$; $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n_2} = S_2$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n_1} + S_{n_2}) = S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = S_1 + S_2 \quad \checkmark$$

ii) $\sum_{n=0}^n c u_n = c \sum_{n=0}^n u_n$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^n c u_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^n u_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c u_n = c \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c u_n = c S_1 \quad \checkmark$$

Observación: Las series a que alude este teorema no necesariamente tienen que ser de términos positivos: pueden ser de términos cualesquiera; pero convergentes.

Teorema:- El error que se comete al tomar como suma de una serie alternada convergente* el que corresponde sólo a los n primeros términos de la serie, es, en valor absoluto, menor que el valor del término $n+1$

Demostración:

Sea:
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n (-1)^{n+1} u_n$$

siendo
$$S_n = \sum_{n=1}^n (-1)^{n+1} u_n$$

$$\Rightarrow \text{error} = |S - S_n|$$

pero:

$$|S - S_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots$$

$$= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots$$

puesto que, por hipótesis: $u_{n+2} - u_{n+3} > 0$

$$\Rightarrow u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots < u_{n+1}$$

$$\Rightarrow \text{error} < u_{n+1} \quad \checkmark$$

Observación:

$$\text{error} \begin{cases} > 0, \text{ si } n \text{ es par} \\ < 0, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

* De acuerdo con el criterio de Leibnitz

Ejemplo.- Dada la serie geométrica alter-
nada:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

a) Calcular, con base en el Teorema anterior, la magnitud del error que se comete al tomar S_4 como S .

b) Hallar el valor exacto de $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^n (-1)^n \frac{1}{2^n}$

c) Determinar exactamente $S - S_4$

Solución:

$$a) \quad S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \text{error} \doteq u_5 = \frac{1}{16}$$

b) Para una progresión geométrica:

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}; \quad a=1; \quad r=-\frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{3}$$

$$c) \quad \text{error} = S - S_4 = \frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{24} < \frac{1}{16} \quad \checkmark$$

Análisis de la monotonía de una serie mediante derivación:

Dado que el criterio de Leibnitz para series alternadas, exige que la sucesión $\{ |u_n| \}$ sea monótona decreciente, resulta en ocasiones conveniente establecer la monotonía del siguiente modo:

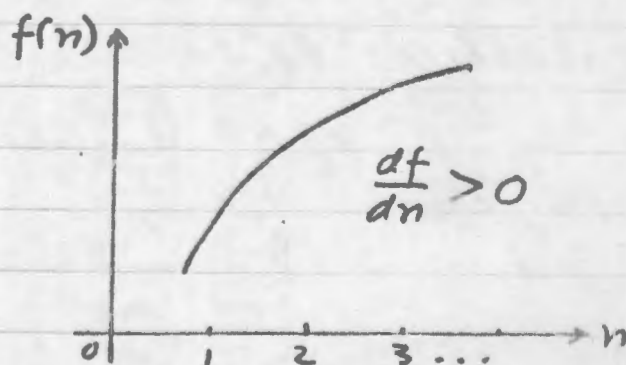
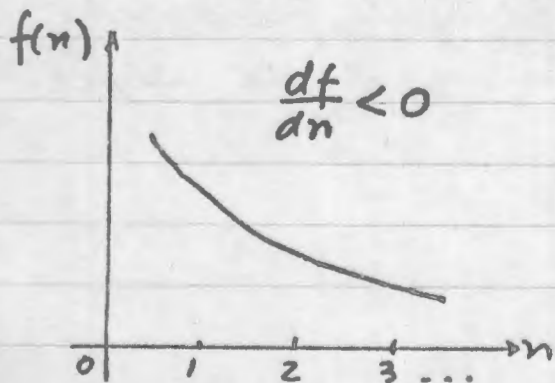
Aun cuando se sabe que la variable n tiene como dominio los números naturales, y es, por lo tanto, variable discreta, puede considerarse como si fuera continua, en cuyo caso puede derivarse la función resultante, para determinar si la función es monótona.

Sea la función continua $f(n)$.

Si $\frac{df}{dn} \neq 0$ para toda $n > 1 \Rightarrow$ la función es monótona si $\frac{df}{dn}$ conserva el mismo signo para toda $n > 1$.

Si $\frac{df}{dn} < 0$ para toda $n > 1 \Rightarrow$ la función es monótona decreciente.

Si $\frac{df}{dn} > 0$ para toda $n > 1 \Rightarrow$ la función será monótona creciente.



Ejemplo: Estudiar la convergencia de la serie alternada:

$$\frac{1}{2} \ln(\ln 2) - \frac{1}{3} \ln(\ln 3) + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} \ln(\ln n) \dots$$

Solución:

Aplicando el criterio de Leibnitz:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln n)}{n} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (indeterminado)}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0; (n \neq 1)$$

$$ii) \text{ Sea: } f(n) = \frac{1}{n} \ln(\ln n)$$

$$\frac{df}{dn} = \frac{1 - \ln n \cdot \ln(\ln n)}{n^2 \ln n}$$

$$\therefore \frac{df}{dn} < 0 \text{ para toda } n = 2, 3, 4, \dots; (n \geq 2)$$

$\Rightarrow f(n)$ es función monótona decreciente;

$\Rightarrow |u_{n+1}| < |u_n| \Rightarrow$ la serie es asimismo monótona decreciente para $n \geq 2$

$\Rightarrow$ de i) y de ii) el criterio de Leibnitz establece la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \ln(\ln n)$$

Observación: El criterio de Leibnitz exige que se cumplan simultáneamente 2 condiciones para poder asegurar que una serie alternada sea convergente.

Si no se cumple la condición i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, la serie alternada será necesariamente divergente (ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ divergencia) aun cuando si se cumple la condición ii) $|u_{n+1}| < |u_n|$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, si se cumple la condición i) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; pero no se verifica la condición ii) ($|u_{n+1}| < |u_n|$), a pesar de ello, la serie alternada puede ser convergente.

Ejemplo: $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{20} + \dots$

siendo: $u_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n^2} - \frac{2[1 + (-1)^n]}{(n+2)(n+4)}$

Solución:

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; $\Rightarrow$ se cumple la condición i); sin embargo no se cumple la condición ii) puesto que la serie no es monótona: $\frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} < \frac{1}{3^2}$.

Se comprueba que la serie converge como sigue:
La suma parcial S_{2k} es: $S_{2k} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^k \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

siendo las 2 últimas series convergentes $\Rightarrow$

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Dado que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2k+1} = S + 0 = S$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, aun cuando no se cumple la condición ii) exigida por el criterio de Leibnitz.

Constante de Euler.- Sea la sucesión:

$$a_1 = 1; a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}; a_3 = \frac{1}{2}; a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}; \dots$$

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}; a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}; n \in \mathbb{N}$$

Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; siendo la sucesión monótona decreciente $(a_n \searrow)$, por el criterio de Leibnitz, la serie $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge.

Sea S_{2n-1} la suma parcial $(2n-1)$

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &= 1 - \int_1^2 \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \frac{1}{n-1} - \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{dx}{x} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \end{aligned}$$

Haciendo: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = C$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = C \quad (1)$$

(J.C. Adams calculó C con 263 decimales)

Constante de Euler: $C = .57721566490153286061 \dots$

(Aun no se sabe si C es racional ó irracional)

De (1) se concluye que la divergencia de la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$ es muy lenta; asimilamos:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \doteq \ln n$$

puesto que: $\frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{\ln n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \rightarrow 0, \text{ si } n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + E_n \quad (2)$$

donde: $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$

Convergencia absoluta y convergencia condicional. - Definiciones:

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cuyos términos no son todos del mismo signo (la serie no necesariamente es alternada). Si: $\sum u_n$ converge; teniendo::

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \begin{cases} \text{converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ es "absolutamente" convergente.} \\ \text{diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ es "condicionalmente" convergente.} \end{cases}$$

Observaciones:

1.- Toda serie de términos positivos convergente, es asimismo absolutamente convergente.

Toda serie absolutamente convergente es a la vez convergente; esto es, basta demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ es convergente, para poder afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es también convergente.

Demostración: Al estudiar valores absolutos vimos que:

$$|\sum u_n| \leq \sum |u_n|$$

$\Rightarrow$ si $\sum |u_n|$ es convergente, por el criterio de comparación, también es convergente: $\sum u_n$

Ejemplo: Dado que la siguiente serie no es alternada, resulta que el criterio de Leibnitz no es aplicable:

$$a) 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} - \dots$$

Sin embargo, puede afirmarse que la serie es convergente; ya que es convergente la serie de términos positivos:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots$$

ya que es una serie p donde $p > 1$

$\Rightarrow$ la serie $\sum u_n$ es absolutamente convergente, dado que $\sum |u_n|$ converge.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

donde $k_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es de la forma } 2^m \\ -1, & \text{si } n \text{ no es de la forma } 2^m \end{cases}$

Para hacer ver que esta serie diverge, consideremos únicamente los términos negativos; que serán aquellos en los cuales el denominador no es potencia de 2: (cambiando signos a todo)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Dado que la 1ª serie es la armónica $\Rightarrow$ es divergente (aun cuando la 2ª serie converge a 2)
 $\Rightarrow$ La serie original: $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$
es divergente.

Ejemplos: Determinar si las siguientes series alternadas son absolutamente o condicionalmente convergentes:

$$1) \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{4}{11} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.

$$2) 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge por ser serie p ($p > 1$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3}$ converge (absolutamente)

$$3) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armónica)

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow |u_{n+1}| < |u_n|$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge (condicionalmente)

$$4) (\sqrt{2}-\sqrt{1}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \dots$$

Solución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \infty - \infty \text{ (indeterminado)}$$

$$\text{pero: } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Análisis de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ diverge. } \left(\text{comprobar como serie telescópica} \right)$$

Análisis de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Dado que se cumple la 1ª Condición del criterio de Leibnitz, comprobemos si la sucesión $\{|u_n|\}$ es monótona decreciente:

$$\sqrt{2} - \sqrt{1} = 0.4142$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 0.3178$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{3} = 0.2680$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{4} = 0.2360$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} = 0.2134$$

$$\sqrt{7} - \sqrt{6} = 0.1962$$

$$\dots \dots$$

$$\sqrt{50} - \sqrt{49} = 0.0710$$

$$\dots \dots$$

$$\sqrt{100} - \sqrt{99} = 0.0501$$

$$\dots \dots$$

Aun cuando parece evidente que la sucesión

$\{ |u_n| \}$ es monótona decreciente, Completaremos la prueba del siguiente modo:

Sea $f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ una función; que es continua.

$$\frac{df}{dn} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

puesto que: $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ para toda $n \geq 1$

$$\Rightarrow \frac{df}{dn} < 0 \text{ para toda } n: 1 < n < \infty$$

$\Rightarrow f(n)$ es función monótona decreciente

$\Rightarrow |u_{n+1}| < |u_n| \Rightarrow$ la serie es asimismo monótona decreciente.

Ya que se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$; del Criterio de Leibnitz:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ converge (condicionalmente).

5) Demostrar que la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n} + \dots$$

es absolutamente convergente.

Solución:

No puede usarse el criterio de Leibnitz, puesto que para $n > 5$ resulta:

$$\frac{1}{6^2} > \frac{1}{2^6} ; \frac{1}{2^6} < \frac{1}{7^2} ; \frac{1}{7^2} > \frac{1}{2^7}$$

$\Rightarrow$ la serie no es monótona.

Consideremos la suma S_{2n} ; tomando la serie de términos positivos:

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)$$

Las dos series entre paréntesis son convergentes: la primera es serie p ; ($p > 1$); la segunda es geométrica.

Para un número impar de términos:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}$$

$$\text{pero: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$$

$\Rightarrow$ La serie dada es absolutamente convergente.

6) Verificar que la serie p alternada es condicionalmente convergente, si $0 < p \leq 1$.

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p} \dots; 0 < p \leq 1.$$

Solución:

i) La serie p de términos positivos es divergente si $p \leq 1$, Como se vio anteriormente, por lo cual, es necesario hacer ver que la serie p alternada es convergente para valores de p : $0 < p \leq 1$

Aplicando el criterio de Leibnitz:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ (para toda $p > 0$) $p \in \mathbb{R}^{\#}$

b) Comprobaremos si la sucesión $\{u_n\}$ es una sucesión monótona decreciente, ó sea, si $|u_{n+1}| \leq |u_n|$:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^p < 1 \quad (\text{para toda } p > 0)$$

$$\Rightarrow |u_{n+1}| < |u_n| \quad \text{para toda } p: 0 < p < \infty$$

Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de Leibnitz la serie p alternada es convergente para toda $p > 0$. ($p \in \mathbb{R}^{\#}$)

En resumen, la serie p alternada es condicionalmente convergente para toda p en el intervalo $0 < p \leq 1$, ya que:

$$(0, 1] = (-\infty, 1] \cap (0, \infty)$$

7) Paradoja de Cauchy:-

Dada la serie alternada

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots = S$$

que, de acuerdo con el criterio de Leibnitz es convergente; siendo $\sum u_n = S$; resulta que la serie C obtenida como producto de la serie por si misma es ¡divergente!
En efecto:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{1}} - \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1}} \right) - \dots$$

siendo el n -ésimo término de C :

$$|C_n| = \frac{1}{\sqrt{1}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1}}$$

Sabiendo, del álgebra que:

$$\sqrt{m(n-m)} \leq \frac{1}{2}n ; \quad n \geq m > 0 ; \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m(n-m)}} \geq \frac{2}{n} \Rightarrow |C_n| > \frac{2(n-1)}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| \geq 2 \neq 0 \Rightarrow C \text{ diverge}$$

(a primera vista parecería que $(\sum u_n)^2 = S^2$)

Puede demostrarse que: si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$; $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$, resulta $\sum u_n \cdot \sum v_n = S_1 \cdot S_2$ cuando al menos una serie es absolutamente convergente. (Véase referencia 6)

En el último ejemplo 7) la serie es condicionalmente convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ es divergente. (serie $p = \frac{1}{2} < 1$)

3.- Cualquier reordenamiento de términos en una serie absolutamente convergente produce una serie que converge al mismo límite que la serie original.

Riemann demostró que si los términos de una serie condicionalmente convergente se reordenan, la serie resultante puede hacerse divergente o convergente a cualquier límite que se desee.

Ejemplos: Dada la serie condicionalmente convergente:

$$\textcircled{1} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2 = 0.69315\dots$$

a) reordenando la serie de modo que a dos términos positivos les siga un término negativo:

$$\textcircled{2} \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\textcircled{1} \times \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} S$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{1}$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{S}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = S$$

$$\textcircled{2} \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} S$$

b) Reordenando la serie ① de modo a un término positivo le sigan dos términos negativos:

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots &= \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{4n(2n-1)} \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

por otro lado, de ①

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) + \dots &= \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{2n(2n-1)} \quad \textcircled{6} \end{aligned}$$

de ⑤ y ⑥ $\Rightarrow$

$$\textcircled{4} \quad 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} 5$$

c) En seguida se deducirá una fórmula mediante la cual pueden obtenerse reordenamientos de ① cuyos límites sean cualquier número que se desee.

Solución:

Sabiendo que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, hagamos:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + E_n \quad \textcircled{7}$$

donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0 \quad (\text{véase constante de Euler})$$

Formemos las siguientes sumas:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q} \quad (9)$$

A fin de poder ^{aplicar} la ecuación (7), describamos (8) y (9) como sigue:

$$(8) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}\right) \quad (10)$$

$$(9) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q}\right) \quad (11)$$

de (7) y (10) y (11):

$$(12) \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1} = \ln 2p + C + \epsilon_p - \frac{1}{2} (\ln p + C + \epsilon'_p)$$

$$(13) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2q} = \frac{1}{2} (\ln q + C + \epsilon_q)$$

Formemos ahora una serie, los primeros p términos positivos restando a éstos los primeros q términos: de (12) y (13)

$$\sum u_n = \ln 2p + \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \ln p - \frac{1}{2} \ln q - \frac{C}{2} + \sum \epsilon$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \sum \epsilon \quad (14)$$

$$\text{haciendo } \frac{p}{q} = k$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ en (14)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n u_n = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k$$

$$S_k = \frac{1}{2} \ln 4k \quad (15) \quad \checkmark$$

Podemos darnos cuenta que los casos a) y b) anteriores pueden deducirse de la fórmula (15); en efecto:

$$a) \quad p=2; q=1 \Rightarrow k = \frac{p}{q} = 2$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \ln 8 = \frac{1}{2} \ln 2^3 = \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{3}{2} S \quad \checkmark$$

$$b) \quad p=1; q=2 \Rightarrow k = \frac{p}{q} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 4 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow S_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} S \quad \checkmark$$

de (15) resulta:

$$k = \frac{1}{4} 2^{2S_k}$$

$$\text{para } S_k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4} \Rightarrow p=1, q=4$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \dots + \dots + \dots$$

(o sea vuelta)

En seguida se dará una demostración de que si una serie es absolutamente convergente, su suma es independiente del orden en que se sumen sus términos, y si es divergente lo seguirá siendo, cualquiera que sea la forma en que se ordenen sus términos:

Sean $\sum$ y $\sum'$ la serie primitiva y la serie reordenada respectivamente; siendo S la suma de $\sum$.

Podemos elegir S_n tal que $\sum^n > S - \epsilon$; $\epsilon > 0$

Puesto que $\sum'$ tiene todos los términos de $\sum$; podemos escoger $\sum^{m'} > S - \epsilon$; pues basta que $\sum^{m'}$ contenga todos los términos de S_n y quizás algunos otros.

$\Rightarrow$ para todo $v > m'$ se verifica:

$$S \geq \sum^v > S - \epsilon$$

puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum^n = S \Rightarrow n \rightarrow \infty \Rightarrow \epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum^v > \lim_{n \rightarrow \infty} (S - \epsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S - \epsilon) = S$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum^v = S \quad ; \quad \text{puesto que si } n \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow \infty$$

Dado que si $\sum'$ converge, también $\sum$ converge; si $\sum$ diverge, $\sum'$ no puede ser convergente.

(ver Willaker and Watson pag. 4)

Teorema de Riemann. - Si una serie es condicionalmente convergente, su suma puede tomar un valor arbitrario prefijado, y hacerse divergente u oscilante con sólo alterar convenientemente el orden de sus términos.

Demostración: Sean:

$S_m = \sum$ de los m primeros términos positivos de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$T_n = \sum$ de los n primeros términos negativos de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$\Rightarrow \lim_{m, n \rightarrow \infty} (S_m + T_n) = \infty ; \lim_{m, n \rightarrow \infty} (S_m - T_n) = S$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \infty ; \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$$

Sea A una constante arbitraria; veremos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$, si se ordenan convenientemente los términos de la serie. En efecto:

Sea m , el menor índice para el cual $S_m > A$; siendo n , el menor índice tal que $S_m - T_n < A$.

Si se escriben en primer lugar los términos positivos; escribiendo a continuación los n primeros términos negativos, dejando en su lugar los términos restantes.

Haciendo A_v igual a la suma de los v primeros términos de esta serie, se tiene:

$$A_v < A \quad \text{para } v < m,$$

$$A_v > A \quad \text{para } m, \leq v < m + n,$$

En seguida puede construirse otra suma con cuyos dos primeros grupos de términos coinciden con el caso anterior; colocando en tercer lugar un grupo de $(m_2 - m_1)$ términos positivos; siendo m_2 el menor ín-

dice tal que $S_{m_2} > T_{n_1} + A$; colocando en cuarto lugar un grupo de $(n_2 - n_1)$ términos negativos; donde n_2 es el menor índice para el cual $S_{m_2} - T_{n_2} < A$; a continuación se escriben los términos restantes en el orden que ocupaban en la serie original.

Continuando en forma indefinida este proceso, resulta que, dado que el término general tiende a cero, se verifica:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} A_v = A$$

En demostración de que también es posible reordenar la serie dada para construir otra serie divergente u oscilante, se efectúa en forma análoga.

4.- Si una serie está formada por un número finito de términos negativos, puede prescindirse de ellos, quedando una serie infinita de términos positivos, la cual determinará si la serie original, completa, converge o diverge.

De modo semejante se razona si la serie contiene sólo un número finito de términos positivos; pudiéndose entonces analizar la serie de términos negativos.

5.- El criterio de D'Alembert, expuesto anteriormente, puede emplearse para estudiar la convergencia absoluta de series:

Si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ absolutamente convergente.} \\ > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ divergente.} \\ = 1 \Rightarrow \text{criterio falla.} \end{cases}$$

6.- La siguiente serie no es alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \gamma_1 = -1-2+3+4-5-6+7+8-9-10+11+12$$

7.- $|u_n| \leq C_n \quad \forall n$, siendo $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ convergente ($C_n \geq 0 \quad \forall n$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente (por el criterio de comparación)

Criterio de la raíz n de Cauchy.-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ absolutamente convergente.} \\ > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge.} \\ = 1 \Rightarrow \text{criterio falla.} \end{cases}$$



DEFEI

Demostración:- Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = M$

a) Si $M < 1$; se puede escoger r tal que $M < r < 1$; entonces, de la definición de límite, existe un término de la serie, digamos u_k , a partir del cual $\sqrt[n]{u_n} < r$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{u_k} < r$$

$$\sqrt[k+1]{u_{k+1}} < r$$

$$\sqrt[k+2]{u_{k+2}} < r$$

$$\Rightarrow u_k < r^k$$

$$u_{k+1} < r^{k+1}$$

$$u_{k+2} < r^{k+2}$$

La serie geométrica:

$$r^k + r^{k+1} + r^{k+2} + \dots$$

Converge, puesto que $r < 1$ por hipótesis

$\Rightarrow$ Si $M < 1$, $\sum u_n$ Converge. ✓

b) Si $M > 1 \Rightarrow \sqrt[p]{u_k} > 1 \Rightarrow u_k > 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

$\Rightarrow$ Si $M > 1$, $\sum u_n$ diverge. ✓

c) Sea $u_n = \frac{1}{n^p}$; hemos visto que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = 1 = \frac{1}{(\lim \sqrt[n]{n})^p} = \frac{1}{1^p}$$

Pero la serie p converge si $p > 1$, y diverge si $p \leq 1$

$\Rightarrow$ Si $M = 1 \Rightarrow$ el criterio falla. ✓

Ejemplos.- Empleando el criterio de la raíz n de Cauchy, analizar las siguientes series:

$$1) \quad 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ La serie es absolutamente convergente.

En seguida se darán algunos ejemplos para los cuales el criterio de D'Alembert es ambiguo; no así el criterio de la raíz n de Cauchy.

$$2) \quad a + b^2 + a^3 + b^4 + a^5 + b^6 + \dots$$

$$\text{donde } 0 < a < b < 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \quad ; \quad \frac{b}{a} > 1$$

Falla el criterio de D'Alembert, porque:

Si $n = 2m$ (par)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{2m+1}}{b^{2m}} = a \left(\frac{a}{b} \right)^{2m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a \left(\frac{a}{b} \right)^{2m} = 0 \Rightarrow \text{Serie converge.}$$

Si $n = 2m+1$ (impar)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{b^{2m+2}}{a^{2m+1}} = b \left(\frac{b}{a} \right)^{2m+1}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b \left(\frac{b}{a} \right)^{2m+1} = \infty \Rightarrow \text{Serie diverge.}$$

En cambio:

$$\text{Si } n = 2m \Rightarrow \sqrt[2m]{b^{2m}} = b < 1$$

$$\text{Si } n = 2m+1 \Rightarrow \sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a < 1$$

$\Rightarrow$ La serie es absolutamente convergente.

$$3) \quad 1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + \dots$$

$$a) \quad r = \frac{2}{3}$$

$$b) \quad r = -\frac{2}{3}$$

$$c) \quad r = \frac{4}{3}$$

Falla el criterio de D'Alembert, ya que:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \begin{cases} 2|r|, & \text{si } n \text{ es par.} \\ \frac{|r|}{2}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

en cambio:

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|r^n|} = |r|\sqrt[n]{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ |r| & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} |r| 2^{1/n} = |r| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |r| = |r| \end{cases}$$

Resultados:

a) si $r = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum u_n$ absolutamente convergente.

b) si $r = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sum u_n$ absolutamente convergente.

c) si $r = \frac{4}{3} \Rightarrow \sum u_n$ divergente.

$$4) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

D'Alembert $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty \end{array} \right\}$ FALLA

Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{serie es absolutamente convergente}$

En seguida se verán ejemplos en los cuales resulta conveniente el empleo del criterio de la raíz de Cauchy.

$$5) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1 \Rightarrow \text{La serie converge absolutamente}$$

$$6) \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ La serie es absolutamente convergente.

$$7) \sum \frac{n}{2^n}$$

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ La serie es absolutamente convergente

Observación: - Generalmente es más fácil aplicar el criterio de D'Alembert que el de Cauchy, puesto que en general es más sencillo calcular cocientes que raíces n .

Sin embargo el criterio de Cauchy tiene un campo de aplicación mayor. Si el criterio de D'Alembert indica que una serie converge, el criterio de Cauchy también lo indica.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, para la misma serie resulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$; por lo cual ninguno de los dos criterios es útil para esa serie.

En los últimos cuatro ejemplos hemos podido comprobar que, en general, ambos criterios dan origen a dos límites diferentes. Llamémoslos al menor de los dos $\liminf$ (límite inferior); siendo $\limsup$ el mayor de los dos (límite superior).

Teorema: - Para cualquier sucesión $\{u_n\}$ de números positivos, se verifica:

$$a) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

$$b) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Demostración de b) (la demostración de a) se efectúa en forma análoga)

$$\text{Sea } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$$

Si $\alpha = +\infty$, la desigualdad b) es evidente.
Si α es finito, hagamos $\beta < \alpha$

$\Rightarrow$ Existe un entero M tal que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \beta$ para toda $n \geq M$

En particular, para $p > 0$

$$u_{n+k+1} \leq \beta u_{n+k} \quad ; \quad k=0, 1, 2, \dots, p-1$$

$$\text{para } \left\{ \begin{array}{l} k=0 \quad ; \quad u_{n+1} \leq \beta u_n \\ k=1 \quad ; \quad u_{n+2} \leq \beta u_{n+1} \\ \dots \dots \dots \\ k=p-1 \quad ; \quad u_{n+p} \leq \beta u_{n+p-1} \end{array} \right. \quad \text{p factores}$$

Multiplicando $u_{n+p} \leq \beta^p u_n$
puesto que $n \leq M$ (haciendo $n+p=n \Rightarrow p=n-M > 0$)

$$\Rightarrow u_n \leq u_M \beta^{-M} \beta^n \quad ; \quad (n \geq M)$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \leq \sqrt[n]{u_M \beta^{-M}} \cdot \beta$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \beta$$

$$\text{puesto que } \alpha < \beta \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \checkmark$$

Como ejercicio, se hará ver que, cuando el siguiente razonamiento es válido, y los límites existen, se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$$

Demostración: Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ de la definición de límite:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < \varepsilon$$

$$\therefore l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon \quad ; \quad \forall n \geq 0$$

$$\begin{cases} l - \varepsilon < \frac{u_1}{u_0} < l + \varepsilon \\ l - \varepsilon < \frac{u_2}{u_1} < l + \varepsilon \\ \dots \\ l - \varepsilon < \frac{u_n}{u_{n-1}} < l + \varepsilon \end{cases}$$

Multiplicando ordenadamente:

$$(l - \varepsilon)^n < \frac{u_1}{u_0} \frac{u_2}{u_1} \dots \frac{u_n}{u_{n-1}} < (l + \varepsilon)^n$$

$$(l - \varepsilon)^n < \frac{u_n}{u_0} < (l + \varepsilon)^n \Rightarrow l - \varepsilon < \sqrt[n]{\frac{u_n}{u_0}} < l + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \sqrt[n]{\frac{u_n}{u_0}} - l < \varepsilon \Rightarrow \left| \sqrt[n]{\frac{u_n}{u_0}} - l \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{u_n}{u_0}} = l = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_0}}$$

pero: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_0^{1/n} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \checkmark$$

Con base en el resultado obtenido:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$, calcular el límite de la sucesión:

1) $\{s_n\} = \left\{ \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \right\}$

Solución: Sea $u_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

2) Verificar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$

Solución: Sea $x = u_n$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x+1}{x} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \quad \checkmark$$

Estimación de la magnitud del error E que se comete al tomar como suma S , sólo la suma S_n de los primeros n términos de una serie infinita de términos positivos.

A) Supóngase que la convergencia de la serie se ha establecido por el Criterio de D'Alembert:

$$\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} < r \Rightarrow u_{k+2} < u_{k+1} r$$

$$\frac{u_{k+3}}{u_{k+2}} < r \Rightarrow u_{k+3} < u_{k+2} r \Rightarrow u_{k+3} < u_k r^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n = E < u_{k+1} (1 + r + r^2 + \dots) \quad (1)$$

$$\Rightarrow E < \frac{u_{k+1}}{1-r} \quad (\text{por ser } (1) \text{ serie geométrica})$$

Si a partir del n ésimo término: $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$
haciendo: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r \quad (2)$

$$\Rightarrow E < \frac{u_{n+1}}{1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}} \quad (3)$$

ó bien: de (2): $u_{n+1} = u_n r$
sustituyendo en (3)

$$E < \frac{u_n r}{1-r}$$

Ejemplo.-1) Dada la serie:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \dots$$

- a) Calcular la magnitud del error que se comete al tomar S_4 como S
 b) Determinar exactamente $S - S_4$

Solución:

$$1) \quad E < \frac{u_5}{1 - \frac{u_5}{u_4}} = \frac{\frac{1}{4!}}{1 - \frac{1/4!}{1/3!}} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{18}$$

$$E < 0.0555 \dots$$

b) Como se vio anteriormente: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$

$$S_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2.666 \dots$$

$$S - S_4 = e - 2.666 \dots \doteq 2.71828 - 2.666 \dots$$

$$S - S_4 \doteq 0.05162 < 0.0555 \dots$$

2) Dada la serie:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} + \dots$$

Demstrar que: $E < \frac{1}{3} u_n$.

Solución:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{1}{4} < \frac{1}{4}; \text{ si hacemos } \frac{u_{n+1}}{u_n} = r = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow E < \frac{u_n r}{1-r} = \frac{1}{3} u_n \quad \checkmark$$

B) Si se establece la convergencia de la serie mediante el Criterio de la Raíz de Cauchy:

$$\sqrt[k]{u_k} < r < 1 \Rightarrow u_k < r^k$$

$$\sqrt[k+1]{u_{k+1}} < r \Rightarrow u_{k+1} < r^{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = S - S_n = E < r^{n+1} + r^{n+2} + \dots$$

$$\Rightarrow E < r^{n+1} (1 + r + r^2 + \dots) = \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

$$\therefore E < \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Si a partir del enésimo término $\sqrt[n]{u_n}$ decrece; teniéndose $\sqrt[n]{u_n} < 1$

$$\therefore E < \frac{u_{n+1}}{1 - \sqrt[n+1]{u_{n+1}}}$$

Ejemplo: Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

a) Calcular E cuando se toma S_4 como S.

b) Determinar exactamente $E = S - S_4$

Solución:

$$a) E < \frac{u_5}{1 - \sqrt[5]{u_5}} = \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$b) E = S - S_4 = 2 - 1.875 = 0.125 = \frac{1}{8}$$

Observación: en este ejemplo, $E = 2u_{n+1}$; pero

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \Rightarrow 2u_{n+1} = u_n$; $\therefore E = u_n$, para toda n.

Criterio de Raabe (Dohamel).- Este criterio puede emplearse en los casos en que fallan los criterios de D'Alembert y Cauchy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) \begin{cases} > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ absolutamente converge} \\ < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge ó converge condicionalmente} \\ = 1 \Rightarrow \text{criterio falla.} \end{cases}$$

Demostración.- Sea $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) = M$

a) Si $M > 1$; se puede escoger p tal que $M > p > 1$; entonces, de la definición de límite, existe un término de la serie a partir del cual se verifica:

$$n \left(1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right) > p \quad (n \geq N_1)$$

$$1 - \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > \frac{p}{n}$$

$$- \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > \frac{p}{n} - 1$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 - \frac{p}{n} < 1 - \frac{p}{n+1}$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 - \frac{p}{n+1} \quad (1)$$

observando que:

$$1 - \frac{p}{n+1} < \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^p \quad (2); \text{ para toda } n \in \mathbb{N}; p > 1$$

$$\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^p = \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^p} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p} \quad (3)$$

de (1) (2) y (3)

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^p}$$

puesto que $\sum \frac{1}{n^p}$ es una serie p convergente ($p > 1$);

$\Rightarrow$ la serie $\sum u_n$ converge $\checkmark$

b) Si $M < 1$; siendo $M < p < 1$

siguiendo los mismos pasos que en el caso a),
sabiendo que la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge para $p \leq 1$

$\Rightarrow$ la serie $\sum u_n$ diverge $\checkmark$

c) La serie:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^p$$

converge, si $p > 2$

diverge, si $p \leq 2$

$$\text{pero } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right] = 1$$

$\Rightarrow$ El criterio de Raabe falla si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = 1 \quad \checkmark$$

Ver Whittaker & Watson pag 3

Ejemplos.- Mediante el criterio de Raabe, analizar las siguientes series: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

$$1) 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

$$n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = n \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)^2} = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 2 > 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge
(lo anterior se comprueba también, si se observa que la serie dada es una serie p ; ($p > 1$))

$$2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+3)}}{\frac{1}{n(n+2)}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 4n + 3} = 1$$

$$n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = n \frac{n^2 + 4n + 3 - n^2 - 2n}{n^2 + 4n + 3} = \frac{2n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n}{n^2 + 4n + 3} = 2 > 1 \Rightarrow \text{la serie converge}$$

(por el criterio de comparación también se comprueba que converge: $\frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{n^2}$)

$$3) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n)(2n+1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n)(2n+2)(2n+3)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n)(2n+1)}} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

$$\begin{aligned} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) &= n \left(1 - \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} \right) = \\ &= n \frac{4n^2 + 10n + 6 - 4n^2 - 4n - 1}{4n^2 + 10n + 6} = \frac{6n^2 + 5n}{4n^2 + 10n + 6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

$$4) \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots (3n)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots (3n-2)(3n+1)-2}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots (3n)(3n+3)}}{\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots (3n)}} = \frac{3n+1}{3n+3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

$$n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = n \left(1 - \frac{3n+1}{3n+3} \right) = n \frac{3n+3-3n-1}{3n+3} = \frac{2n}{3n+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie diverge.

$$5) \frac{a}{b} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} + \dots$$

$a > 0, b > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{a(a+1) \dots (a+n)}{b(b+1) \dots (b+n)}}{\frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{b(b+1) \dots (b+n-1)}} = \frac{a+n}{b+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

$$n \left(1 - \frac{a+n}{b+n} \right) = \frac{bn + n^2 - an - n^2}{b+n} = \frac{n(b-a)}{b+n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = b-a$$

i) Si $b-a > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

ii) Si $b-a = 1 \Rightarrow$ la serie se transforma en

$$\frac{a}{a+1} + \frac{a(a+1)}{(a+1)(a+2)} + \frac{a(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots =$$

$$a \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a+3} + \dots + \frac{1}{a+n} + \dots \right)$$

fallan los criterios de D'Alembert y de Raabe.

si $v_n = \frac{1}{n}$, aplicando el Teorema ya visto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{a+n} = a \neq 0 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge,}$$

puesto que $\sum v_n$ diverge (serie armónica)

iii) Si $b-a < 1$, por comparación con el caso ii) la serie resulta divergente.

Resumen: la serie $\begin{cases} \text{converge, si: } b-a > 1 \\ \text{diverge, si: } b-a \leq 1 \end{cases}$

Criterio de JAMET:- Este criterio puede emplearse cuando falla el criterio de Cauchy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln n} \left[\sqrt[n]{|u_n|} - 1 \right] \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ absolutamente convergente} \\ > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge o converge condicionalmente} \\ = 1 \Rightarrow \text{criterio falla} \end{cases}$$

Serie de términos complejos. - Son series de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \quad (1)$$

donde $Z_n = a_n + i b_n$ (2); $i = \sqrt{-1}$

El estudio de las series complejas se reduce de hecho al análisis de series con términos reales, en virtud de lo siguiente:

La serie compleja (1) converge $\Leftrightarrow$ las series reales siguientes son ambas convergentes

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots \end{aligned} \right\} (3)$$

En efecto; de (2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n Z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n u_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n v_n$$

Cuando los límites existen (y son finitos) -

De lo anterior se concluye asimismo que para que la serie compleja (1) converja es necesario que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| = 0$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n| \neq 0 \Rightarrow$ la serie compleja (1) es divergente.

De la última afirmación se concluye que los términos de una serie compleja convergente están acotados: ó sea, para toda n :

$$|z_n| < M; \text{ donde } M \text{ es una constante } > 0$$

Puesto que: $a_n + ib_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$ puede afirmarse lo siguiente:

La serie compleja ① será convergente cuando la serie real, formada por los módulos de todos los términos, es convergente.

Demostración:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) + \dots + r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n) + \dots$$

Si la serie de módulos $r_1 + r_2 + r_3 + \dots$ es convergente lo serán también las series

$$\begin{cases} r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + \dots + r_n \cos \theta_n + \dots \\ r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 + \dots + r_n \sin \theta_n + \dots \end{cases}$$

ya que, por el criterio de comparación

$$\begin{cases} r_j \cos \theta_j \leq r_j \\ r_j \sin \theta_j \leq r_j \end{cases} \text{ para toda } j = 1, 2, 3, \dots$$

Si la serie ① es absolutamente convergente, ó sea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ converge, } \Rightarrow$$

del criterio de comparación, que las siguientes dos series de números reales positivos, son ambas convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

$\Rightarrow$ las series ③ son absolutamente convergentes, ó sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ambas convergen.

En resumen, dado que tanto las series
 ③ como la serie ① convergen, se concluye
 que: para series de números complejos,
 la convergencia "absoluta" implica asi-
 mismo la convergencia de la serie; esto es:

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ converge.}$$

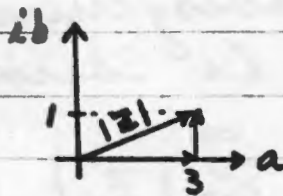
Observación: Los criterios de conver-
 gencia ya estudiados para series con
 términos de números reales, son aplicables
 a las series de términos complejos, si se
 substituye el término complejo por su
 módulo correspondiente.

Ejemplos: Estudiar la convergencia de las siguientes series complejas:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$$

Solución:

$$z: z = 3+i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$$



$$\frac{1}{n(\sqrt{10})^n} < \frac{1}{2^n}$$

$\Rightarrow$ por el criterio de comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n} \text{ converge (absolutamente)}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$$

Solución:

$$z = i \Rightarrow |z| = 1$$

puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente:

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \text{ es condicionalmente convergente.}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^n}{2^n}$$

Solución:

$$z = z+i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\sqrt{5})^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n = \infty ; \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^n}{2^n} \text{ diverge}$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^n}{3^n}$$

Solución:

$$z = 2i - 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(\sqrt{5})^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$$

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{(n+1) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n+1}}{n \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n} = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-1)^n}{3^n} \text{ converge (absolutamente)}$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+i)}$$

Solución

$$z = n+i \Rightarrow |z| = \sqrt{n^2+1} ; \sqrt{n} \sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^3+n}$$

$$\text{pero } \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} < \frac{1}{n^{3/2}} ; \left(\frac{1}{n^p} \Rightarrow p = \frac{3}{2} > 1 \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}} \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+i)} \text{ converge (absolutamente)}$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i) + 1}{n(3-2i) - 3i} \right]^n$$

Solución:

puesto que $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$$z_1 = n(2-i) + 1 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{5n^2 + 4n}$$

$$z_2 = n(3-2i) - 3i = 3n - (2n+3)i$$

$$\Rightarrow |z_2| = \sqrt{(3n)^2 + (2n+3)^2} = \sqrt{13n^2 + 12n + 9}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \sqrt{\frac{5n^2 + 4n}{13n^2 + 12n + 9}}$$

Aplicando el criterio de la raíz de Cauchy:

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2 + 4n}{13n^2 + 12n + 9} \right)^{n/2}} = \sqrt{\frac{5n^2 + 4n}{13n^2 + 12n + 9}} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i) + 1}{n(3-2i) - 3i} \right]^n \text{ converge (absolutamente)}$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + i}$$

Solución:

$$z = \sqrt{n} + i \Rightarrow |z| = \sqrt{n+1}$$

El criterio de D'Alembert falla para la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$

Empleando el criterio: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$; siendo $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; sabiendo que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (serie $p = \frac{1}{2} < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + i} \text{ diverge.}$$

Serie geométrica Compleja.

Demstrar que:

$$a + az + az^2 + \dots = \frac{a}{1-z} \quad ; \quad |z| < 1$$

Solución:

Consideremos primero la progresión geométrica compleja (suma finita):

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} \quad (1)$$

$$① \text{ por } z: \quad zS_n = z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n \quad (2)$$

$$① - ②: \quad (1-z)S_n = 1 - z^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1-z^n}{1-z}$$

En seguida haremos ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$, si $|z| < 1$.
De la definición de límite; si $\varepsilon > 0$:

$|z^n - 0| < \varepsilon$ para toda $n > J$, $\Rightarrow$ debemos encontrar $J(\varepsilon)$.

Supongamos $z \neq 0$ (ya que si $z=0$ se cumple la definición de límite para toda $\varepsilon > 0$):

Puesto que $|z^n| = |z|^n < \varepsilon$; tomando ln:
 $n \ln |z| < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|}$; ya que, si $|z| < 1$
 $\Rightarrow \ln |z| < 0$.

$\Rightarrow$ haciendo $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|} = J \Rightarrow |z^n - 0| < \varepsilon$ para toda

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

$$\Rightarrow a \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{a}{1-z} \quad ; \quad |z| < 1 \quad \checkmark$$

Si $|z| < 1$, demostrar que:

$$z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots = z \quad (1)$$

Solución:

1^{er} método:

Observando que

$$(1-z) + z(1-z) + z^2(1-z) + \dots \quad (2)$$

es una serie geométrica donde:

$$a = 1-z; \quad r = z$$

$$\Rightarrow (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n = (1-z) \frac{1}{1-z} = 1$$

Observando que la serie (2) difiere de la (1) sólo en el 1^{er} término:

$$\Rightarrow z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) = 1 - (1-z) = z \quad \checkmark$$

2^o método:

$$\begin{aligned} \text{Sea } S_n &= z(1-z) + z^2(1-z) + \dots + z^n(1-z) \\ &= z - z^2 + z^2 - z^3 + \dots + z^n - z^{n+1} \\ &= z - z^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (z - z^{n+1})$$

puesto que ya se demostró que $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} z^{n+1} = 0 \quad ; \quad |z| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = z \quad ; \quad |z| < 1 \quad \checkmark$$

Con base en la serie geométrica compleja,
comprobar lo siguiente:
Si $|a| < 1$

$$a) \quad 1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

$$b) \quad a \sin \theta + a^2 \sin 2\theta + a^3 \sin 3\theta + \dots = \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

Solución:

Dado que $|a| < 1$, si $|z| = |a| < 1$, haciendo
 $z = a(\cos \theta + i \sin \theta) = ae^{i\theta}$

Con base en la serie geométrica compleja:

$$1 + ae^{i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + a^3 e^{3i\theta} + \dots = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}}$$

ó bien; del Teorema de De Moivre:

$$(1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + \dots) + i(a \sin \theta + a^2 \sin 2\theta + \dots) = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{i\theta}} \cdot \frac{1 - ae^{-i\theta}}{1 - ae^{-i\theta}} = \frac{1 - ae^{-i\theta}}{1 - a(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + a^2}$$

$$= \frac{1 - a(\cos \theta - i \sin \theta)}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{(1 - a \cos \theta) + ia \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

igualando partes reales e imaginarias:

$$1 + a \cos \theta + a^2 \cos 2\theta + a^3 \cos 3\theta + \dots = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

$$a \sin \theta + a^2 \sin 2\theta + a^3 \sin 3\theta + \dots = \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}$$

para toda: $|a| < 1$ ✓

Serie de potencias.- Definición.- Serie de potencias es aquella que contiene términos variables, y que es de la forma: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$; ó

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

siendo: c_k Constante; $c_k = f(k)$; $a=0$

Intervalo de convergencia.- El conjunto de valores de x para los cuales la serie de potencias converge, se denomina "intervalo de convergencia". Si $x = z = \text{complejo}$, se define entonces un "radio de convergencia".

Para valores de x contenidos en el intervalo de convergencia, la serie es absolutamente convergente, y para valores de x fuera del intervalo de convergencia la serie es divergente.

Sea $f(x)$ una función definida.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$\text{Si: } S_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

Tenemos por lo tanto que la serie de potencias es el límite de un polinomio.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Nota: Si $c_k = a$ (constante) para toda k , $\Rightarrow$ la serie de potencias resulta ser serie geométrica: $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

El intervalo de convergencia de una serie de potencias puede determinarse aplicando los criterios estudiados para series de números.

Ejemplo: Hallar el intervalo de convergencia de la serie:

$$1) x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|$$

$\Rightarrow$ La serie converge si $|x| < 1$

Debe hacerse un análisis por separado para los extremos $x = \pm 1$ del intervalo $-1 < x < 1$
 para $x = 1$, la serie diverge (armónica)
 para $x = -1$, la serie es alternada, y ya hemos encontrado que es convergente.

$\Rightarrow$ intervalo de convergencia para la serie:

$$-1 \leq x < 1$$

ó lo que es lo mismo:

$$[-1, 1)$$

Estudio de los casos en los que al aplicar un criterio el límite resulta cero o infinito:

$$C = \begin{cases} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| & ; f_1(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} = x-a \\ \sqrt[n]{|u_n|} & ; f_1(x) = \sqrt[n]{(x-a)^n} = x-a \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = M$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C |f_1(x)| = M |f_1(x)|$$

Para que la serie resulte absolutamente convergente, se debe tener:

$$M |f_1(x)| < 1$$

$$\Rightarrow |f_1(x)| < \frac{1}{M} \quad ; \quad (M > 0)$$

$$a) \text{ Si } M \rightarrow 0 \Rightarrow |f_1(x)| \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{intervalo de convergencia es: } -\infty < f_1(x) < \infty$$

$$b) \text{ Si } M \rightarrow \infty \Rightarrow |f_1(x)| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{intervalo de convergencia: } f_1(x) = 0$$

Observación: En la determinación de intervalos de convergencia para series de potencias no hay necesidad de recurrir al criterio de Raabe, pues si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1 \Rightarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} C |f_1(x)| = |f_1(x)| = |x-a| \neq 1$; si $x \neq a \pm 1$

Del ejemplo 1) último, nos damos cuenta que la observación anterior se refiere sólo al intervalo de convergencia abierto, pues sucede que para analizar si la serie de potencias converge en el intervalo cerrado, es necesario considerar el comportamiento de dos series de constantes, que resultan al substituir x su valor en cada uno de los extremos que limitan al intervalo abierto. El estudio anterior se hace necesario en los siguientes casos:

$$\text{Si: } \lim_{n \rightarrow \infty} C = \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C |f_n(x)| = \frac{|f_1(x)|}{M} = \frac{|x-a|}{M}$$

$$\text{si } |x-a| = M \Rightarrow \begin{cases} |x-a| < M \\ (a-M) < x < (a+M) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C |f_n(x)| = 1$$

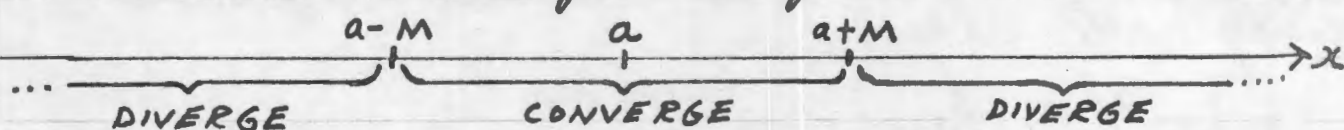
$\Rightarrow$ habrá que analizar individualmente los casos:

$$a) \quad x-a = -M$$

$$b) \quad x-a = M$$

De acuerdo con la convergencia ó divergencia de estas dos series numéricas, el intervalo de convergencia para la serie de potencias, podrá ser: i) abierto; ii) semiabierto, por la derecha ó por la izquierda; ó iii) cerrado.

En series de potencias no es posible que exista un primer intervalo de convergencia, seguido por un intervalo en que falle la convergencia, para que a este siga otro intervalo de convergencia. Además, si existe el intervalo de convergencia éste siempre será simétrico respecto al origen, para la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Para la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$ el intervalo de convergencia será simétrico respecto al punto $x=a$.



Demostración: Se tiene, del criterio de D'Alembert o de Cauchy:

$$\lim \frac{c}{|x-a|} = \frac{|x-a|}{M} \Rightarrow \text{la serie} \begin{cases} \text{converge} \Leftrightarrow < 1 \\ \text{diverge} \Leftrightarrow > 1 \end{cases}$$

$$a) \frac{|x-a|}{M} < 1 \Rightarrow \frac{1}{M} < \frac{1}{|x-a|} \Rightarrow M > |x-a| \Rightarrow M > \begin{cases} -(x-a) \\ (x-a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i) & M > -x+a \Rightarrow x > a-M \\ ii) & M > x-a \Rightarrow x < a+M \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} i) \\ ii) \end{aligned}} \right\} \text{converge} \Leftrightarrow (a-M) < x < (a+M)$$

$$b) \frac{|x-a|}{M} > 1 \Rightarrow \frac{1}{M} > \frac{1}{|x-a|} \Rightarrow M < |x-a| \Rightarrow M < \begin{cases} -(x-a) \\ (x-a) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} i) & M < -x+a \Rightarrow x < a-M \\ ii) & M < x-a \Rightarrow x > a+M \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} i) \\ ii) \end{aligned}} \right\} \text{diverge}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \begin{cases} \text{CONVERGE EN: } C_1 = \{x \mid (a-M) < x < (a+M)\} \\ \text{DIVERGE EN: } C_2 = \mathbb{R}^{\#} - \{x \mid (a-M) \leq x \leq (a+M)\} \end{cases}$$

$$2) 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{1}{n+1} |x|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ La serie converge para todos los valores de x
intervalo de convergencia: $-\infty < x < \infty$

$$3) 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{n} |x|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} |x| = |x|$$

Si $|x| < 1 \Rightarrow$ la serie converge: $-1 < x < 1$.

Análisis en los extremos del intervalo $[-1, 1]$:

Si $x = 1$, la serie diverge

Si $x = -1$, la serie diverge (criterio de Weierstrass?) no es aplicable; pero $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

$\Rightarrow$ intervalo de convergencia

$$-1 < x < 1$$

$$4) 1 + 1!x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} = (n+1)x$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty$$

$\Rightarrow$ La serie sólo converge para $x=0$

$$5) u_n = \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x-1|}{2}$$

Para convergencia $\frac{|x-1|}{2} < 1 \Rightarrow |x-1| < 2$
 $\Rightarrow -2 < (x-1) < 2$

$$\Rightarrow -1 < x < 3$$

Si $x=3$, diverge, puesto que:

$$u_n = \frac{n(3-1)^n}{2^n(3n-1)} = \frac{n}{3n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{3} \neq 0$$

Si $x=-1$, la serie alternada diverge, pues:

$$u_n = (-1)^n \frac{n(-2)^n}{2^n(3n-1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \frac{1}{3} \neq 0$$

$\Rightarrow$ intervalo de convergencia es:

$$-1 < x < 3$$

ó lo que es lo mismo: $(-1, 3)$

$$6) u_n = n^2(x+3)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} |x+3| = |x+3| (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n})^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = |x+3|$$

Para convergencia: $|x+3| < 1$; $-1 < (x+3) < 1$

$$\Rightarrow -4 < x < -2$$

si $x = -4$ ó $x = -2$; $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

$\Rightarrow$ intervalo de convergencia es: $(-4, -2)$.

$$7) u_n = \frac{x^n \operatorname{sen} n}{n^2}$$

puesto que no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} n$, los criterios de convergencia de D'Alembert y Cauchy no son aplicables a este ejemplo; sin embargo, podemos recurrir al criterio de comparación:

$$\left| \frac{x^n \operatorname{sen} n}{n^2} \right| \leq \left| \frac{x^n}{n^2} \right|$$

puesto que $\sum x^n n^{-2}$ converge en $[-1, 1] \Rightarrow \sum u_n$ también converge en $[-1, 1]$.

$\sum u_n$ diverge si $|x| > 1$, dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \infty, \text{ si } |x| > 1; \text{ teniéndose además}$$

$$\text{que: } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n \operatorname{sen} n}{n^2} \text{ no existe.} = 0$$

Algunas propiedades de las series de potencias.

i) Para cada valor de x común al intervalo de convergencia de dos series, éstas pueden sumarse o restarse término a término.

ii) Para cada valor de x común al intervalo de convergencia de dos series, éstas pueden multiplicarse de acuerdo con la siguiente regla.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

obteniéndose $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$; donde: $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$; $n=0, 1, 2, 3, \dots$

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$ (Producto de Cauchy).

iii) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se divide entre la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; siendo $b_0 \neq 0$, el cociente es una serie convergente para valores de x suficientemente pequeños.

iv) Reversión: Si $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\Rightarrow x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ puede deducirse de la serie y ; esto es, los coeficientes b_n son función de los a_n .

① $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$

② $x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots + b_n y^n + \dots$

punto que las dos series representan la

misma función; teniendo así mismo su intervalo de convergencia común:

$$\Rightarrow a_0 = b_0$$

Substituyendo ② en ① y ordenando los términos, se obtiene:

$$y = a_1 b_1 y + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) y^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) y^3 \dots$$

igualando coeficientes de potencias iguales de y :

$$a_1 b_1 = 1$$

$$a_1 b_2 + a_2 b_1^2 = 0$$

$$a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = 0$$

.....

si $a_1 \neq 0$ resultan:

$$a_1 b_1 = 1$$

$$a_1^3 b_2 = -a_2$$

$$a_1^5 b_3 = 2a_2^2 - a_1 a_3$$

$$a_1^7 b_4 = 5a_1 a_2 a_3 - 5a_2^3 - a_1^2 a_4$$

$$a_1^9 b_5 = 6a_1^2 a_2 a_4 + 3a_1^2 a_3^2 - a_1^3 a_5 + 14a_2^4 - 21a_1 a_2^2 a_3$$

$$a_1^{11} b_6 = 7a_1^3 a_2 a_5 + 84a_1 a_2^3 a_3 + 7a_1^3 a_3 a_4 - 28a_1^2 a_2 a_3^2 - a_1^4 a_6 - 28a_1^2 a_2^2 a_4 - 42a_2^5$$

.....

v) La serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, y su derivada $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, tienen ambos el mismo intervalo de convergencia. Obsérvese que

siempre es posible derivar las series de potencias término a término. La demostración de la afirmación anterior se basa en el concepto de "convergencia uniforme, que se estudiará más adelante.

vi) La serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ puede ser integrada término a término, y la serie así obtenida $H(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$

tiene el mismo intervalo de convergencia que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

Demostración: Empleando el criterio de D'Alembert a la serie $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{c_{n+1}}{(n+1)+1} x^{(n+1)+1}}{\frac{c_n}{n+1} x^{n+1}} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \frac{n+1}{n+2} |x|$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

pero el último límite es 1

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

Observando que la última ecuación es la misma que se obtiene al aplicar el criterio de D'Alembert a la serie para $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, se concluye que las series para $f(x)$ y para $H(x)$ tienen el mismo intervalo de convergencia.

Ahora sólo es necesario hacer ver que.

$$H(x) = \int_0^x f(t) dt ; \text{ en efecto:}$$

De la propiedad v) anterior:

$$H'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (n+1) x^n = \sum c_n x^n = f(x)$$

Del teorema fundamental del cálculo:

$$\text{si } H(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$\Rightarrow H'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

La conclusión anterior, puede obtenerse también empleando otro teorema del cálculo:

$$\int_0^x f(t) dt = H(x) - H(0)$$

$$\text{pero } H(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (0)^{n+1} = 0 = \int_0^0 f(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t) dt = H(x)$$

vii). Dado que la propiedad v) establece que las series de potencias son funciones derivables en su intervalo de convergencia, y derivabilidad implica continuidad, resulta que las series de potencias son funciones continuas en todo su intervalo de convergencia.

Viii) Sea: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in (-1, 1)$;
 Si la serie de constante $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge,
 se afirma que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad (1)$$

Demostración

$$\sum_{n=0}^m c_n = c_0 + c_1 + \dots + c_n = S_n \quad (2); \quad S_{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^m c_n x^n = \sum_{n=0}^m (S_n - S_{n-1}) x^n =$$

$$= (S_0 - S_{-1}) + (S_1 - S_0)x + (S_2 - S_1)x^2 + \dots + (S_m - S_{m-1})x^m =$$

$$= S_0(1-x) + S_1(1-x)x + \dots + S_m(1-x)x^m =$$

$$= \sum_{n=0}^m (1-x) S_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^m S_n x^n =$$

$$= \left[(1-x) \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n \right] + (1-x) S_m x^m.$$

Dado que $|x| < 1 \Rightarrow x^m \rightarrow 0$, si $m \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n \quad (3)$$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$; Sea $\varepsilon > 0$; haciendo,

$$N \ni n > N \Rightarrow |S - S_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{pero } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \in (-1, 1)$$

$$\Rightarrow (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \in (-1, 1)$$

resulta, de (3):

$$|f(x) - S| = \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - S)x^n \right| \leq \\ \leq (1-x) \sum_{n=0}^N |s_n - S| |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Si para $\delta > 0$, se halla $x > 1 - \delta \Rightarrow \textcircled{1}$
con lo que ha quedado demostrado que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \checkmark$$

Si: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \in (-1, 1)$; y converge $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Como aplicación de viii) puede demostrar que:

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$; $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergen

respectivamente a: s_1 ; s_2 ; s_3 ; siendo

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Entonces $s_3 = s_1 s_2$

Demostración:

Sean: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$
para $x \in [0, 1]$.

Para $x < 1$ las 3 series son absolutamente
convergentes, por lo cual $f(x) \cdot g(x) = h(x) \textcircled{4}$
 $\in [0, 1)$; pero de viii) si $x \rightarrow 1$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow s_1 \quad ; \quad g(x) \rightarrow s_2 \quad ; \quad h(x) \rightarrow s_3 \textcircled{5}$$

$$\therefore \textcircled{4} \text{ y } \textcircled{5} \Rightarrow s_1 s_2 = s_3 \quad \checkmark$$

Ejemplos:

1) Dadas las series convergentes en $-\infty < x < \infty$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Formando el producto de estas series, verificar que $2 \sin x \cos x = \sin 2x$

Solución:

$$\sin x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

de ii):

$$C_0 = a_0 b_0$$

$$C_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$C_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$C_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

.....

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
a_n	0	1	0	$-\frac{1}{3!}$	0	$\frac{1}{5!}$	0	$-\frac{1}{7!}$	0	$\frac{1}{9!}$	0	$-\frac{1}{11!}$	0	$\frac{1}{13!}$	0	$-\frac{1}{15!}$	0	$\frac{1}{17!}$	0	$-\frac{1}{19!}$	0	$\frac{1}{21!}$
b_n	1	0	$-\frac{1}{2!}$	0	$\frac{1}{4!}$	0	$-\frac{1}{6!}$	0	$\frac{1}{8!}$	0	$-\frac{1}{10!}$	0	$\frac{1}{12!}$	0	$-\frac{1}{14!}$	0	$\frac{1}{16!}$	0	$-\frac{1}{18!}$	0	$\frac{1}{20!}$	0
C_n	0	1	0	$-\frac{4}{3!}$	0	$\frac{16}{5!}$	0	$-\frac{64}{7!}$	0	$\frac{256}{9!}$	0	$-\frac{864}{11!}$	0	$\frac{2^{11}}{13!}$	0	$-\frac{2^{13}}{15!}$	0	$\frac{2^{15}}{17!}$	0	$-\frac{2^{17}}{19!}$	0	$\frac{2^{19}}{21!}$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots - (-1)^{n+1} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \sin 2x \quad \checkmark$$

2) Dadas las series:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &-\infty < x < \infty \\ &n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Hallar la serie de potencias para

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}; \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Solución: Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$
ambas convergentes; siendo $b_0 \neq 0$; resulta:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2} x + \frac{a_2 b_0^2 - a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2 - a_0 b_0 b_2}{b_0^3} x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$\Rightarrow \cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \dots$$

Aun cuando las series para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ convergen para toda $x \in \mathbb{R}^*$, el intervalo de convergencia para las series obtenidas formando sus cocientes es:

$$\begin{cases} \tan x : & |x| < \frac{\pi}{2} \\ \cot x : & 0 < |x| < \pi \end{cases}$$

3) Dada la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

absolutamente convergente en $(-1, 1)$

Determinar la serie para $\frac{1}{(1-x)^2}$

Solución: puesto que:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

de ii) observando que $a_n = b_n = 1$ para toda n :

$$c_0 = a_0 b_0 = 1$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 + 1 = 2$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 + 1 + 1 = 3$$

- - - - -

$$c_n = n+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \quad ; \quad -1 < x < 1$$

3) Obtener la serie para $(1-x)^{-3}$; $(-1, 1)$

Solución:

$$(1-x)^{-3} = (1-x)^{-2} (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$a_n = (n+1) ; b_n = 1$$

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1 + 2 = 3$$

$$c_2 = 1 + 2 + 3 = 6$$

- - - - -

$$c_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (n+1)(n+2) x^n$$

4) Dada la serie:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (1)$$

expresar x en serie de potencias de y .

Solución: de iv)

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$$

$$b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3} = -\frac{1}{2}$$

$$b_3 = \frac{1}{a_1^5} (2a_2^2 - a_1 a_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b_4 = \frac{1}{a_1^7} (5a_1 a_2 a_3 - 5a_2^3 - a_1^2 a_4) = -\frac{1}{4}$$

.....

$$\Rightarrow x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{5} + \dots \quad (2)$$

Observando que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (3) \quad -\infty < x < \infty$$

de (1) y (3) vemos que

$$y = e^x - 1$$

$$\Rightarrow e^x = y + 1$$

$$\Rightarrow x = \ln(y + 1)$$

$\Rightarrow$ (2) es el desarrollo en serie de $\ln(y + 1)$; siendo su intervalo de convergencia $(-1, 1]$

Serie Complejas de potencias:

Sea la serie:

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad ①$$

donde a_n, z, z_0 son, en general, complejos.

Si $z_0 = 0$, resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ②$$

Obsérvese que ① puede obtenerse de ② con solo cambiar las coordenadas del origen.

La serie ① converge para $z = z_0$; pero, en general, puede ser convergente también en otros puntos del plano complejo.

Si la serie ② converge para $z = z_1$, entonces la serie es absolutamente convergente para toda z tal que $|z| < |z_1|$.

En efecto, dado que la serie cuyo término general es $a_n z_1^n$ converge, $\Rightarrow$ está acotada:

$$|a_n z_1^n| < M \quad ; \quad (n=0, 1, 2, \dots); M > 0$$

$$\text{Sea: } \frac{|z|}{|z_1|} = k \quad ; \quad \text{donde } |z| < |z_1|$$

$$\Rightarrow |a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left| \frac{z}{z_1} \right|^n < M k^n$$

Puesto que la serie cuyos términos son los números reales positivos $M k^n$ es una serie geométrica, ésta es convergente, ya que $k < 1$ $\Rightarrow$ del criterio de comparación que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \text{ converge (absolutamente)}$$

para toda $|z| < |z_1|$

La región de convergencia de la serie (2) es, por lo tanto, un círculo con centro en el origen.

Se denomina "Círculo de convergencia" aquel para el cual la serie converge para todos los puntos dentro de él. La serie no podrá ser convergente para ningún punto fuera de este círculo, como se acaba de demostrar.

En el caso de la serie (1), podría considerarse $z = z - z_0$ aplicado a la serie (2); por lo cual la región de convergencia de la serie (1) es un círculo con centro en el punto z_0 del plano complejo.

De modo análogo resulta que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (3)$$

si converge para $z = z_1$, $\Rightarrow$ que es absolutamente convergente para toda z tal que:

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|$$

Resultando, por lo tanto, que la región de convergencia de la serie (3) es la parte exterior de algún círculo con centro en z_0 .

Por las razones anteriores, al hablar de convergencia de series complejas de potencias se debe definir un "Círculo de convergencia" cuyo radio se denomina "radio de convergencia".

El círculo de convergencia puede determinarse empleando algunos de los criterios de convergencia, como por ejemplo: el

de D'Alembert ó el de Cauchy, aplicado a la serie:

$$|a_0| + |a_1| \cdot |z - z_0| + |a_2| \cdot |z - z_0|^2 + \dots + |a_n| \cdot |z - z_0|^n + \dots$$

Si la serie ① diverge en el punto $z = z_1$,
 $\Rightarrow$ diverge para todo punto z para el cual se tiene:

$$|z - z_0| > |z_1 - z_0|$$

Ejemplos: Determinar el radio de convergencia de las siguientes series:

1) $1 + z + 2! z^2 + \dots + n! z^n + \dots$

Solución:

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) z = \infty$$

$\Rightarrow$ la serie sólo converge para $z=0$; siendo divergente para cualquier otro punto del plano complejo.

2) $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

Solución:

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! z^{n+1}}{(n+1)! z^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ la serie es absolutamente convergente para toda z (finita). La suma se define como e^z .

3) $\frac{z+1}{1 \cdot 2} + \frac{(z+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(z+1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n} + \dots$

Solución:

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(z+1)^{n+1} 2^n n}{(z+1)^n 2^{n+1} (n+1)} = \frac{z+1}{2} < 1$$

$\Rightarrow z+1 < 2 \Rightarrow$ el centro del círculo de convergencia está en el punto $z=-1$; siendo el radio de convergencia $= 2$

$$4) \quad 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^6}{8} + \dots + \frac{z^{2n}}{2^n} + \dots$$

Solución:

Aplicando el criterio de la raíz de Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^2}{2} < 1$$

$$\Rightarrow z^2 < 2 \Rightarrow \text{radio de convergencia es } z < \sqrt{2}$$

5) Demostrar que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} \text{ es absolutamente convergente}$$

para $|z| \leq 1$

Solución:

Si $|z| \leq 1$:

$$\left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

puesto que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (serie $p=2$)

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n(n+1)} \right| \text{ converge, por el criterio}$$

de comparación.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)} \text{ es absolutamente convergente.}$$

para $|z| \leq 1$

$$6) \quad z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \dots + z^n(1-z) + \dots$$

Solución:

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}(1-z)}{z^n(1-z)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |z| = |z| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z^n(1-z) \text{ es absolutamente convergente para}$$

$|z| < 1$ (Como se demostró en problema anterior)

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$$

Solución:

Aplicando el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(z+2)}{4} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^3 \right| = \frac{|z+2|}{4}$$

para convergencia (absoluta):

$$\frac{|z+2|}{4} < 1 \Rightarrow |z+2| < 4$$

Debe analizarse separadamente el caso

$$\frac{|z+2|}{4} = 1 \quad (\text{ya que aquí falla el criterio})$$

observando que para $\frac{|z+2|}{4} = 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} \right| = |u_n| = \frac{1}{4(n+1)^3}$$

Comparando con la serie $p=3$ (convergente):

$$\frac{1}{4(n+1)^3} < \frac{1}{n^3} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}:$$

$\Rightarrow$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ es absolutamente

convergente para $|z+2| \leq 4$; siendo, por lo tanto, el radio de convergencia = 4

Algunas propiedades de las series complejas de potencias:-

i) Sean las series

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad ; \quad |z-z_0| < r_1$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad ; \quad |z-z_0| < r_2$$

donde r_1, r_2 son los radios de convergencia respectivos. Si $r = \min(r_1, r_2)$, resulta:

$$a) \quad f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (z-z_0)^n \quad ; \quad |z-z_0| < r$$

$$b) \quad f_1(z) f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad ; \quad |z-z_0| < r$$

siendo, como se vio antes para series de potencias reales:

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$\Rightarrow f_1(z) f_2(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(z-z_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(z-z_0)^2 + \dots + \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (z-z_0)^n + \dots$$

Obsérvese que el producto de dos series de potencias es a su vez una serie de potencias, por lo cual los coeficientes c_n pueden obtenerse empleando desarrollos en serie de Taylor.

ii) Si $f_2(z) \neq 0$ en algún entorno del origen, resulta

$$g(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$$

por ser $g(z)$ una serie de potencias, los

coeficientes δ_n resultan:

$$\delta_0 = g(0) ; \delta_1 = g'(0) ; \delta_2 = g''(0) \frac{1}{2!} ; \dots$$

Estos coeficientes pueden calcularse también en función de los coeficientes a_n y b_n mediante derivadas sucesivas del cociente $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$; o bien mediante división directa de las dos series

iii) La serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$; $|z-z_0| < r$ puede ser derivada sucesivamente, término a término para obtener $f^{(n)}(z)$:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-z_0)^n ; |z-z_0| < r \end{aligned}$$

.....

iv) La serie $f(z)$ puede integrarse término a término a lo largo de cualquier curva C (integral de línea); si C está íntegramente contenida dentro del círculo que converge de la serie $f(z)$.

v) La serie $f(z)$ representa una función continua en cualquier región contenida íntegramente dentro del círculo de convergencia de $f(z)$.

vi) El desarrollo en serie de la función $f(z)$ en serie de potencias, es único.

Ejemplos: Obtener los siguientes desarrollos en serie de potencias complejas:

1) $\ln(1+z)$; a partir de.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \quad |z| < 1$$

Solución

Integrando término a término de 0 a z :

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z} = \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

El radio de convergencia de esta serie puede determinarse mediante el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{n+1}}{\frac{z^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} z \right| = |z|$$

$\Rightarrow$ La serie es absolutamente convergente para $|z| < 1$. Resulta también convergente para $|z| = 1$; pero no para $z = -1$; puesto que $\ln 0 = -\infty$

2) $\ln \frac{1+z}{1-z}$

Solución: del problema 1) anterior:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

$$\text{si } z = -z \Rightarrow \ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \dots$$

siendo estas dos series convergentes para $|z| < 1$

$$\text{restando: } \ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

siendo convergente para $|z| < 1$; así como para $|z| = 1$, pero no para $z = \pm 1$ (valores reales).

3) $\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ Válida para $|z| < 1$

Solución:

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+3)}$$

del problema 1):

$$\frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2} + \dots \quad ; |z| < 1$$

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6(1+\frac{z}{3})} \quad ; |z| < 3$$

haciendo $z = \frac{z}{3}$ en 1):

$$\frac{1}{6(1+\frac{z}{3})} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \dots \right) = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \dots$$

De la propiedad i); siendo $l = \min(1, 3)$
 $\Rightarrow$ La serie obtenida, como resta, tiene radio de convergencia $r < 1$

Sucesiones y series de funciones. - Definición:

Se llama sucesión de funciones al conjunto de funciones

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \quad (1)$$

que están en correspondencia unívoca con el conjunto ordenado de números naturales

La sucesión de sumas parciales:

$$f_1(x) = \varphi_1(x)$$

$$f_2(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$$f_3(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x)$$

$$f_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x)$$

No permite definir "serie" de funciones del siguiente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x) + \dots \quad (2)$$

De la sucesión (1) se obtiene la serie:

$$f_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} [f_n(x) - f_{n-1}(x)] \quad (3)$$

siendo (2) = (3)

Ejemplos:

1) Sucesión de funciones reales.

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \quad ; \quad x \in E' ; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ para toda } x$$

Serie de funciones. Determinar los valores de x para los cuales convergen las siguientes series de funciones:

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} = 1 + e^x + e^{2x} + \dots$$

Aplicando el criterio de Cauchy.

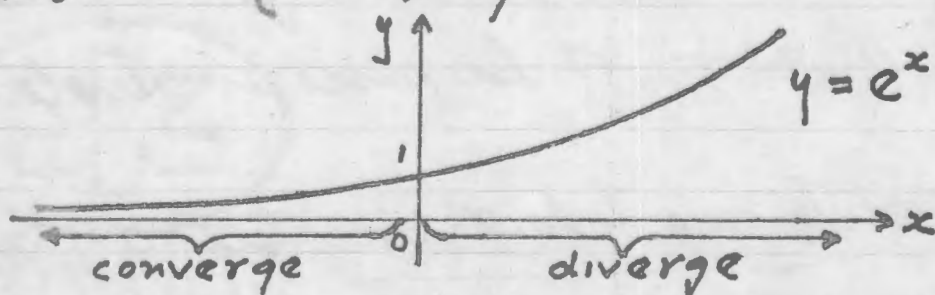
$$\sqrt[n]{e^{nx}} = e^x > 0 \text{ para toda } x$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e^x = e^x$$

para convergencia $e^x < 1$

puesto que $e^0 = 1$; sabiendo además que la serie es geométrica:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx} \begin{cases} \text{converge, si } x < 0, \text{ a } \frac{1}{1-e^x} \\ \text{diverge si } x \geq 0 \end{cases}$$



$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + 1} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{5} \cos 2x + \dots$$

Por el criterio de comparación:

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es serie p convergente ($p > 1$)

$\Rightarrow$ La serie dada es absolutamente convergente para toda $x \in \mathbb{R}^{\#}$.

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(x+n+1)(x+n)}}{\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}} = \frac{x+n-1}{x+n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{n} + 1 - \frac{1}{n}}{\frac{x}{n} + 1 + \frac{1}{n}} = 1 \text{ (criterio falla)}$$

si observamos que:

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^n u_n = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^n u_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} \quad ; \text{ si } x \neq 0, -1, -2, -3, \dots, -n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n u_n = \frac{1}{x} \Rightarrow \text{La serie es absoluta-}$$

mente convergente para Toda x , excepto $x = 0, -1, -2, -3, \dots$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(x+1)\dots(x+n+1)}{x^n} \cdot \frac{x}{x+n+1} = \frac{(x+1)\dots(x+n)}{x^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{x+n+1} \right| = 0 < 1; \text{ si } x \neq -(n+1)$$

$\Rightarrow$ La serie converge para toda $x \in \mathbb{R}^*$, excepto los números enteros negativos: $x \neq -1, -2, -3, -4, \dots, -n$

$$6) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{[x(x+1)(x+2)\dots(x+n)]^2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{[x(x+1)\dots(x+n+1)]^2} \cdot \frac{n!}{[x(x+1)\dots(x+n)]^2} = \frac{n+1}{(x+n+1)^2} ; x \neq -n-1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{x^2 + 2x(n+1) + (n+1)^2}$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{\left(\frac{x}{n+1}\right)^2 + \frac{2x}{n+1} + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 0 < 1, \text{ si } x \neq -(n+1)$$

$\Rightarrow$ La serie converge en $-\infty < x < \infty$; excepto para $x = -n$; $n \in \mathbb{N}$: $x \neq -1, -2, -3, \dots$

CONVERGENCIA UNIFORME:-

Sucesiones de funciones:-

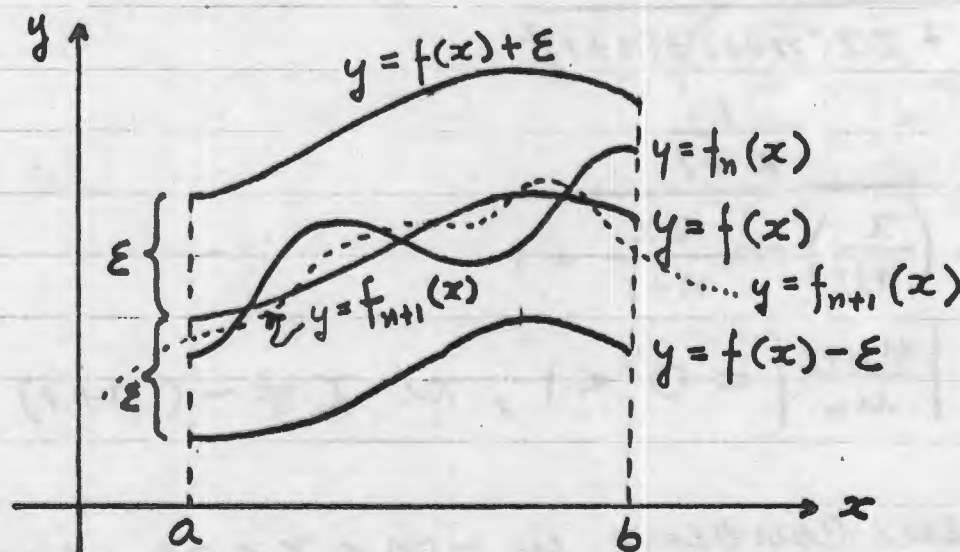
Definición:- Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ es "uniformemente" convergente, en un intervalo $[a, b]$, a la función $f(x) \Leftrightarrow$ para cada $\epsilon > 0$, existe un número $M = M(\epsilon)$, independiente de x en $[a, b]$, tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (1)$$

para toda: $x \in [a, b]$ y $n \geq M$

Es importante observar que la convergencia uniforme difiere de la convergencia ordinaria, en que en la primera M no depende de x ; dependiendo sólo de ϵ .

Interpretación geométrica:-



La Condición ① establece que para toda $n \geq M$, la gráfica de $f_n(x)$ en $[a, b]$ debe quedar contenida íntegramente en la banda curvilínea de altura 2ε

Observaciones:-

1.- Toda sucesión de funciones $\{f_n\}$ uniformemente convergente es asimismo convergente

2.- La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ es suficiente, pero no necesaria para transmitir la continuidad de cada término de la sucesión a la función límite; en otras palabras, una sucesión de funciones continuas que no sea uniformemente convergente, puede tener una función límite continua.

3.- La sucesión de funciones $\{f_n\}$, definida en $[a, b]$ converge uniformemente en $[a, b] \Leftrightarrow$ para cada $\varepsilon > 0$ existe número entero M tal que si $m, n \geq M$; $x \in [a, b] \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$$

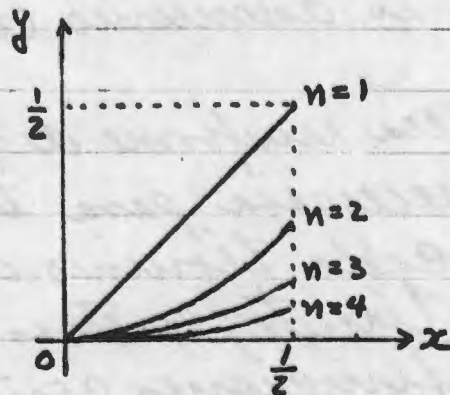
Lo anterior constituye el criterio de Cauchy para convergencia uniforme.

4.- Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ puede ser uniformemente convergente en un intervalo, pudiendo no serlo en otro intervalo diferente.

Ejemplos.- Dadas las siguientes sucesiones de funciones, determinar si son o no uniformemente convergentes en el intervalo que se indica:

1) $f_n(x) = x^n$; $[0, \frac{1}{2}]$; $n \in \mathbb{N}$

Solución:



Observamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$; además, $f_1(x) = x$ da $f(x)$ máxima para $x = \frac{1}{2}$

En general, la ordenada máxima es

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$$

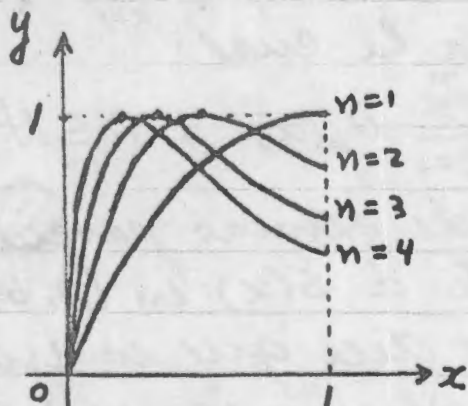
Si elegimos M de modo que $\frac{1}{2^M} < \varepsilon$ resulta que $f_n(x)$ quedara dentro de la banda para toda $n > M$, y para toda $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Nótese que la elección de M fue sólo función de $\varepsilon > 0$, y no depende de x en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow f_n(x) = x^n$ es uniformemente convergente en $[0, \frac{1}{2}]$

$$2) \quad f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} ; [0,1] ; n \in \mathbb{N}$$

Solución:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{2x}{n}}{x^2 + \frac{1}{n^2}} = 0 \quad (x \neq 0)$$

puesto que $f_n(0) = 0$ para toda $n \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \text{ para toda } x \in [0,1]$$

Cada función tiene un máximo para $x = \frac{1}{n}$ con ordenada $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Haciendo $\varepsilon = \frac{1}{2}$; para convergencia uniforme se requiere: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow f(x) - \frac{1}{2} \leq f_n(x) \leq f(x) + \frac{1}{2}$$

Dado que $f(x) = 0$ en $[0,1] \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}$; pero $f_n(x) = 1$ para alguna $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \text{ no es uniformemente}$$

convergente en $[0,1]$.

Convergencia uniforme de series: La definición de convergencia uniforme para series se deduce de la convergencia uniforme de sucesiones, puesto que si $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ es una serie de funciones para la cual:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad ; \quad n \in \mathbb{N},$$

es una sucesión de sumas parciales uniformemente convergente a $S(x)$ en $[a, b]$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ se dice que es uniformemente convergente con suma igual a $S(x)$.

En otras palabras: La serie infinita de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ converge "uniformemente" en un intervalo $[a, b] \Leftrightarrow$ la sucesión $\{S_n(x)\}$ de sumas parciales converge uniformemente en el mismo intervalo $[a, b]$.

Por consiguiente, todo lo expuesto para convergencia uniforme de sucesiones es aplicable a convergencia uniforme de series.

Es importante observar que para que una serie pueda ser uniformemente convergente en un intervalo, debe ser convergente en todos los puntos del intervalo; pero la recíproca no es cierta: una función convergente en todos los puntos de un intervalo no es necesariamente uniformemente convergente en ese intervalo.

Ejemplo 1) Determinar si es uniformemente convergente la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$$

en los siguientes intervalos:

a) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

b) $[-1, 1]$

Solución:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{n=1}^n x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + \dots + x^{n-1}(1-x) \\ &= 1-x + x - x^2 + x^2 - \dots - x^{n-1} + x^{n-1} - x^n = 1-x^n \end{aligned}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1$$

$$|S(x) - S_n(x)| = |1 - (1-x^n)| = |x^n| = |x|^n$$

$$|x|^n < \varepsilon$$

Tomando ln.

$$n \ln|x| < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} ; \text{ puesto que}$$

$$|x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \ln|x| < 0$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}} = M$$

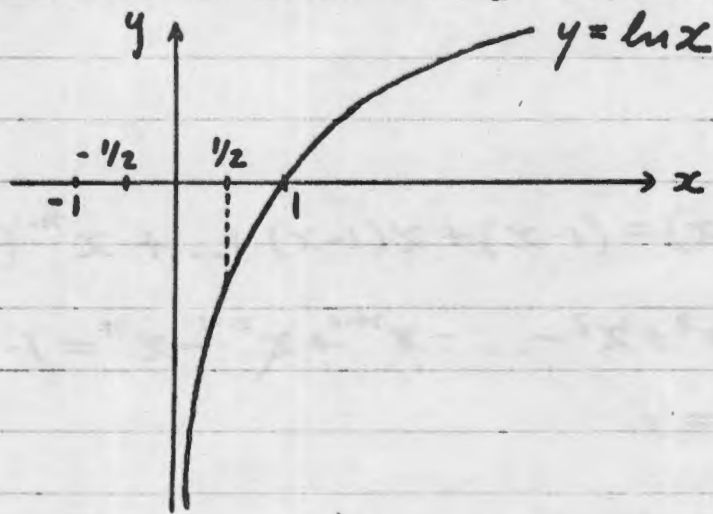
$\Rightarrow M$ es independiente de x

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$ es uniformemente convergente en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

b) Dado que:

$\frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}$ puede hacerse mayor que cualquier

número positivo, con sólo escoger $|x|$ tan próximo a $x=1$ como se quiera $\Rightarrow$ la serie no es uniformemente convergente en el intervalo $[-1, 1]$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} = \infty$$

La conclusión anterior puede obtenerse también observando que el intervalo de convergencia de la serie es semiabierto:

$$(-1, 1]$$

$\Rightarrow$ la serie no puede ser uniformemente convergente en el intervalo cerrado.

$$[-1, 1]$$

2) En este ejemplo veremos una función que converge en todos los puntos de un intervalo; pero no es uniformemente convergente en ese intervalo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{kx}{e^{kx^2}} - \frac{(k-1)x}{e^{(k-1)x^2}} \right]$$

es convergente en $[0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = 0 \quad ; x \in [0, 1]$$

Supongamos que la convergencia es uniforme en $[0, 1]$.

$\Rightarrow$ para toda $\epsilon > 0$, digamos $\epsilon = 1$, existe un entero M tal que:

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{nx}{e^{nx^2}} < 1 \quad (1) \quad ; n > M$$

Busquemos la ordenada máxima para cada curva $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}$:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{nx}{e^{nx^2}} \right) = 0 = -2nx^2 + 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$$

Substituyendo en (1) se tiene

$$\sqrt{\frac{n}{2e}} < 1$$

lo cual no se verifica si, por ejemplo $n \geq 6$

$\Rightarrow$ la serie no es uniformemente convergente en el intervalo $[0, 1]$ (a pesar de ser convergente en cada punto de ese intervalo)

3) La noción de convergencia uniforme hace posible expresar una función $f(x)$ mediante un polinomio; manteniendo el error tan pequeño como se desee.

Para ilustrar lo anterior, consideremos por ejemplo la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; que converge en $(-1, 1)$. La n -ésima suma parcial es:

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

siendo serie geométrica con $a=1$, $r=x$

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\Rightarrow S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$$

La diferencia $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ es:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \frac{|x^n|}{|1-x|}$$

Sabiendo que la serie es uniformemente convergente en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\bar{R}_n = \max |R_n(x)| = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}; \text{ puesto que:}$$

$$\begin{cases} x^n \text{ es máximo para } x = \frac{1}{2} \\ (1-x) \text{ es mínimo para } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{R}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

$\Rightarrow$ el error máximo $\rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

Puede aplicarse un razonamiento similar a cada intervalo $-a \leq x \leq a$; ($0 < a < 1$),

dentro del intervalo de convergencia

El máximo error (en valor absoluto) ocurre para $x=a$; siendo su valor:

$$\bar{R}_n = \frac{a^n}{1-a}$$

Siendo la convergencia uniforme en el intervalo:

$$|S(x) - S_n(x)| = \frac{|x^n|}{|1-x|} \leq \frac{a^n}{1-a} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow a^n < (1-a)\varepsilon$$

$$n \ln a < \ln(1-a)\varepsilon$$

$$n < \frac{\ln(1-a)\varepsilon}{\ln a}$$

$$n \geq M; \quad ; \quad \ln \frac{1}{a} = \ln 1 - \ln a = -\ln a.$$

haciendo

$$M \geq \frac{\ln(1-a)\varepsilon}{\ln \frac{1}{a}}$$

(independiente de x)

¿Cuántos términos de la serie debemos tomar de modo que el error sea < 0.01 ?

$$\bar{R}_n = \frac{a^n}{1-a} < 0.01$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} > 100$$

$$\Rightarrow n \geq 8$$

Prueba M de Weierstrass para convergencia uniforme (y absoluta).-

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ una serie de funciones tal que cada $u_k(x)$ es una función acotada de x en $[a, b]$; siendo $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ una serie convergente de constantes positivas.

Si $|u_k(x)| \leq M_k$ para toda $x \in [a, b]$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es uniformemente y absolutamente convergente en $[a, b]$

Demostración:

Por hipótesis, para toda $x \in [a, b]$ se tiene: $|u_k(x)| \leq M_k$ ①

$\Rightarrow$ por el criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es convergente (absolutamente).

$$\text{Sea: } S_n = \sum_{k=1}^n M_k ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0 \text{ ②}$$

$$\text{Dado que: } S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$$

$$\Rightarrow |S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)|$$

de ①

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = S - S_n < \varepsilon$$

pero de ② $S - S_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$; teniendo además que $S - S_n$ es independiente de $x \Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es uniformemente convergente $\checkmark$

Observaciones:

1.- Una serie de funciones puede ser uniformemente convergente sin ser necesariamente absolutamente convergente, y viceversa; esto es: un tipo de convergencia no implica la existencia de la otra convergencia. (ejemplo 8.9)

2.- La afirmación recíproca de la prueba M de Weierstrass no es válida: Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es una serie de funciones uniformemente convergente en $[a, b]$; siendo $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ una serie de constantes positivas, convergente en $[a, b]$, $\nRightarrow |u_k(x)| \leq M_k$ para toda $x \in [a, b]$.

3.- La prueba M de Weierstrass permite determinar si una serie de funciones es uniformemente convergente sin necesidad de encontrar la suma de la serie; esto es, sin necesidad de obtener el límite de la sucesión de sumas parciales.

Ejemplos: Empleando la prueba M de Weierstrass, determinar si las siguientes series son o no uniformemente convergentes:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}}$$

$$\left| \frac{x^n}{n^{3/2}} \right| = \frac{|x|^n}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow |x|^n \leq 1$$

$$\text{si: } M_n = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ ; serie } p \text{ convergente } (p > 1)$$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente en $-1 \leq x \leq 1$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \text{ ; pero } M_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Diverge}$$

$\Rightarrow$ aquí falla la prueba M ; (debe usarse otro método)

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

$$\left| \frac{1}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\text{si: } M_n = \frac{1}{n^2} \text{ ; serie } p \text{ convergente } (p > 1)$$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente para toda x : $-\infty < x < \infty$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x+nx)}{n(n+1)}$$

$$\left| \frac{\cos(x+nx)}{n(n+1)} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

Si $M_n = \frac{1}{n^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente en $(-\infty, \infty)$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(2^n)^2}$$

$$\left| \frac{\cos nx}{(2^n)^2} \right| \leq \frac{1}{(2^n)^2} < \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ la serie converge uniformemente en $(-\infty, \infty)$

6) Sea la serie de potencias $\sum C_n x^n$, convergente para $x = x_0$; demostrar que converge:
 a) absolutamente en el intervalo $|x| < |x_0|$.
 b) uniformemente en el intervalo $|x| \leq |x_1|$, siendo $|x_1| < |x_0|$.

Solución:

a) Puesto que por hipótesis $\sum C_n x_0^n$ converge:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n x_0^n = 0$$

$$\Rightarrow |C_n x_0^n - 0| < \varepsilon$$

haciendo $\varepsilon = 1$ para $n > M$

$$|C_n x_0^n| < 1$$

$$\Rightarrow |c_n| |x_0|^n < 1$$

$$|c_n| < \frac{1}{|x_0|^n} \quad ; \quad n > M$$

$$\Rightarrow \sum_{n=M+1}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=M+1}^{\infty} |c_n| |x|^n < \sum_{n=M+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

observando que si $|x| < |x_0|$, la última serie converge; se concluye, por el criterio de comparación, que la primera serie converge.

Si $\sum_{n=M+1}^{\infty} |c_n x^n|$ converge

$\Rightarrow \sum c_n x^n$ es absolutamente convergente ✓

b) Haciendo $M_n = \left| \frac{x_1}{x_0} \right|^n \Rightarrow \sum M_n$ converge; puesto que $|x_1| < |x_0|$

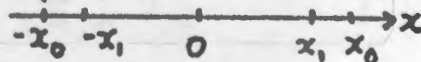
$$\Rightarrow |c_n x^n| < M_n \text{ para toda } |x| \leq |x_1|.$$

$\Rightarrow$ de la prueba M de Weierstrass:

$\sum c_n x^n$ es uniformemente convergente ✓

$\Rightarrow$ Toda serie de potencias $\sum c_n x^n$ converge uniformemente en cualquier subintervalo contenido en su intervalo de convergencia

Observa que los intervalos $|x| < |x_0|$ y $|x| \leq |x_1|$ son ambos simétricos respecto al origen:



7) Si $|x-a| < x_0$; ($x_0 \neq 0$) define el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$; demostrar que el intervalo de convergencia "uniforme" (simétrico, respecto al punto $x=a$) es: $|x-a| \leq x_1$; siendo $|x_1| < |x_0|$

Solución:

Empleando la prueba M de Weierstrass; haciendo:

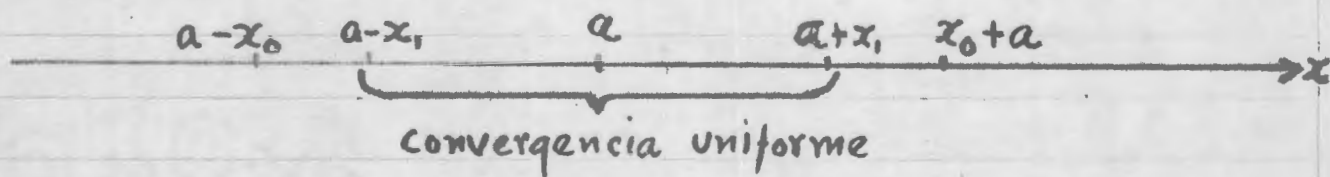
$M_n = |C_n| x_1^n$, vemos que la serie $\sum M_n$ converge; ya que el intervalo de convergencia de la serie $\sum C_n x^n$ ($a=0$) es, por hipótesis, $-x_0 < x < x_0$; siendo $|x_1| < |x_0|$

$$\text{Si } x_2 = x_1 + a \Rightarrow x_1 = x_2 - a$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| |x_2 - a|$; serie que converge, ya que, por comparación, $|x_2 - a| = |x_1| < |x_0|$

$$\text{Si } |x-a| \leq x_1 \Rightarrow |C_n| |x-a|^n \leq |C_n| x_1^n = M_n$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ es uniformemente convergente para $|x-a| \leq x_1$ ✓



8) El siguiente ejemplo muestra una serie que, siendo uniformemente convergente para toda $x \in \mathbb{R}^*$, resulta que no es absolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+x^2}$$

9) La serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

nos proporciona un ejemplo de una serie que, siendo absolutamente convergente, no es uniformemente convergente (en intervalos que contengan el origen, $x=0$)

Teorema de Abel, para series de potencias.

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergente en el intervalo $|x| < |x_0|$. Si la serie converge además en alguno de los extremos del intervalo ($x = -x_0$ o $x = x_0$), $\Rightarrow$ que el intervalo de convergencia "uniforme" también incluye ese punto extremo.

Demostración:

Para mayor sencillez en la demostración, hagamos $x_0 = 1$.

Sea $\sum c_n x^n$ convergente en $x = 1$.
Hagamos la serie de constantes $\sum_{k=n}^{\infty} c_k = B_n$; teniéndose que $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$

$\Rightarrow$ para toda $x \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k &= c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \dots \\ &= (B_n - B_{n+1}) x^n + (B_{n+1} - B_{n+2}) x^{n+1} + \dots \\ &= B_n x^n + B_{n+1} (x^{n+1} - x^n) + B_{n+2} (x^{n+2} - x^{n+1}) + \dots \\ &= B_n x^n + (x-1) x^n [B_{n+1} + B_{n+2} x + \dots] \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, escojamos M tal que $|B_j| < \varepsilon$ si $j \geq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k \right| &\leq \varepsilon x^n + (1-x) x^n [\varepsilon + \varepsilon x + \varepsilon x^2 + \dots]; \quad 0 \leq x < 1; n \geq M \\ &\leq \varepsilon x^n + \varepsilon x^n (1-x) (1+x+x^2+\dots) \\ &\leq 2\varepsilon x^n < 2\varepsilon \end{aligned}$$

La última desigualdad es válida para $x=1$; puesto que: $|B_n| < \varepsilon < 2\varepsilon$.

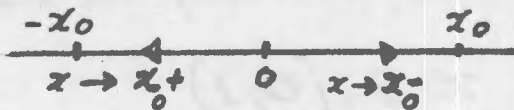
$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{\infty} C_k x^k \right| < 2\varepsilon; \text{ para toda } x \in [0, 1]; n \geq M$$

$\Rightarrow$ La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ es uniformemente convergente para $x \in (-1, 1]$ ✓

Corolario:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x_0^n$$

Siempre que $x \rightarrow x_0$ lateralmente, a lo largo del intervalo de convergencia.



Ejemplo: Calcular la serie para $\ln 2$; sabiendo que: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}; |x| < 1$

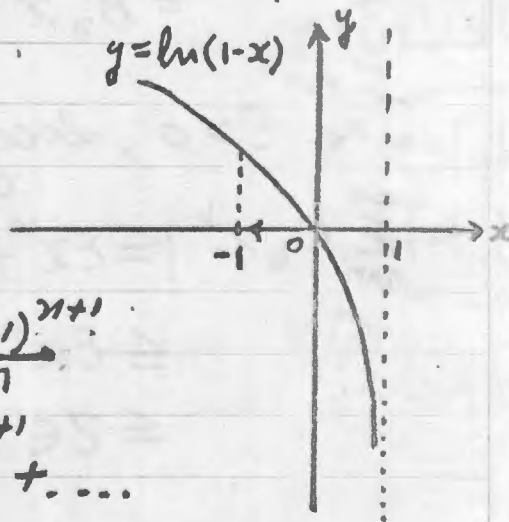
Solución: puesto que $f(x) = \ln x$ es una función continua en $(0, \infty) \Rightarrow f(x) = \ln(1-x)$ es continua en $(1, -\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1+} \ln(1-x) = \ln 2$$

pero $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ sólo vale para $|x| < 1$ (no incluye $x = -1$). Del Corolario:

$$\ln 2 = \lim_{x \rightarrow -1+} \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$



Propiedades de las series uniformemente convergentes:

1.- Una serie uniformemente convergente de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$ tiene por suma una función que es continua en el mismo intervalo.

Demostración:

$$\text{Sea } a \leq c \leq b ; S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

$$\begin{aligned} |S(x) - S(c)| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(c) + S_n(c) - S(c)| \leq \\ &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(c)| + |S_n(c) - S(c)| \end{aligned}$$

$S_n(x)$ es una función continua, por ser una suma finita de funciones continuas.

$$\Rightarrow |S_n(x) - S_n(c)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para } |x - c| < \delta$$

Por hipótesis la serie $S(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b] \Rightarrow$ podemos encontrar $n_0 = n_0(\epsilon)$; que no depende de x , tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} |S_n(x) - S(x)| < \frac{\epsilon}{3} \\ |S_n(c) - S(c)| < \frac{\epsilon}{3} \end{array} \right\} \quad \text{para toda } n > n_0$$

$$\Rightarrow |S(x) - S(c)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \text{ para } |x - c| < \delta$$

$\Rightarrow S(x)$ es continua en cualquier punto c
 $a \leq c \leq b \Rightarrow S(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. ✓

En seguida veremos algunos ejemplos de aplicación de esta propiedad.

1) El siguiente ejemplo hace ver que el recíproco de la propiedad 1.ª anterior es falso:

Vimos anteriormente que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

no es uniformemente convergente en $[0, 1]$; pero:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{2nx}{1+n^2x^2} \equiv 0$$

$\Rightarrow S(x)$ es una función continua

2) La propiedad 1.ª suele usarse para demostrar que una serie dada no es uniformemente convergente; pues basta hacer ver que la función suma $S(x)$ es discontinua en algún punto:

Sea la serie de funciones:

$$u_n = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \quad (1)$$

si $x \neq 0$, la serie es geométrica; siendo:

$$a = x^2; \quad r = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{x^2}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1+x^2 \quad (2); \quad x \neq 0$$

si $x=0$, la suma de los n primeros términos es, de (1)

$$S_n(0) = 0$$

$$\Rightarrow S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = 0$$

pero de (2):

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 1 \neq S(0)$$

$\Rightarrow S(x)$ es discontinua en $x=0$

$\Rightarrow$ aun cuando la serie es absolutamente convergente en cualquier intervalo, resulta que no es uniformemente convergente en ningun intervalo que contenga al punto $x=0$

3) Demostrar que la serie de funciones:

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ no es uniformemente convergente en $[0,1]$

Solución:

$$S_n(x) = \sum_{n=1}^n x^n - \sum_{n=1}^n x^{2n} = x \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - x^2 \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$$

puesto que ambas series $\sum x^n$ y $\sum x^{2n}$ son geométricas.

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x(1+x) - x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

Vemos que $S(x)$ es discontinua para $x=1$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ no es uniformemente convergente en $0 \leq x \leq 1$

10.1 3-3 A infinite Series Situation

4) Demostrar que la serie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$

$$f(x) = x + x(1-x^2) + x(1-x^2)^2 + x(1-x^2)^3 + \dots$$

Sólo puede ser uniformemente convergente en los siguientes intervalos abiertos:

$$\begin{cases} -\sqrt{2} < x < 0 \\ 0 < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Solución: Haremos ver que, fuera de estos dos intervalos, la función $f(x)$ es discontinua

a) Si $x=0$, $\Rightarrow f(0)=0$; luego la función está definida en el origen.

b) Si $x \neq 0$, $f(x)$ converge $\Leftrightarrow |1-x^2| < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$.

$$|1-x^2| < 1 \Rightarrow \begin{cases} -(1-x^2) < 1 \Rightarrow -1+x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 2 \\ 1-x^2 < 1 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow 0 < x^2 \end{cases}$$

$$0 < x^2 < 2$$

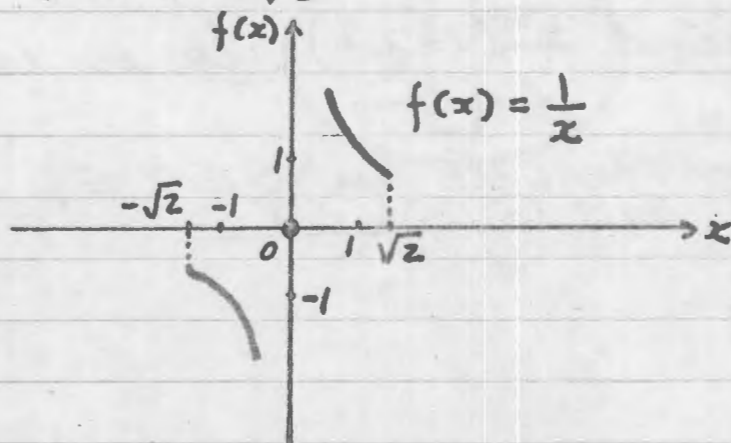
$$\Rightarrow 0 < |x| < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Puesto que $f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x=0$, la función es continua en los intervalos:

$$-\sqrt{2} < x < 0$$

$$0 < x < \sqrt{2}$$



161 5) Demostrar que el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ es único:

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$; siendo ambas series convergentes para $|x| < |x_0|$
 $\Rightarrow a_n = b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Hagamos $c_n = a_n - b_n$

Substituyendo en las series dadas resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad (1)$$

Si $|x| < |x_0|$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge uniformemente para

$|x| \leq |x_0| - |x_1|$; siendo su suma una función continua. Sea $S(x)$ la suma:

$$\Rightarrow c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0$$

dividiendo ahora (1) entre $x \neq 0$, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} = 0$$

por las mismas razones de antes, la suma de esta serie es continua para $|x| \leq |x_0| - |x_1|$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} \right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Mediante un proceso análogo se deduce que $c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$

$\Rightarrow a_n = b_n$ para toda $n \in \mathbb{N} \checkmark$

2.- Una serie de funciones continuas, uniformemente convergente, puede ser integrada término a término.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n f_n(x) \right) dx.$$

Demostración:

Puesto que $S(x)$ es continua, $\Rightarrow$ es función integrable. Sea $\sum_{k=1}^n f_k(x) = S_n(x)$

Dado que, por hipótesis la serie es uniformemente convergente en $[a, b]$

$$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ para toda } n > n_0; x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \text{pero: } \left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [S(x) - S_n(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) ; n > n_0 \end{aligned}$$

ó sea:

$$\left| \int_a^b S(x) dx - \int_a^b S_n(x) dx \right| < \varepsilon ; \text{ para toda } n > n_0$$

Además; por ser $S_n(x)$ una suma finita:

$$\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b S_n(x) dx$$

$\Rightarrow$ Una serie uniformemente convergente puede integrarse término a término en cualquier subintervalo finito contenido en el intervalo de convergencia uniforme. $\checkmark$

Ejemplos:

1) La condición de convergencia uniforme es suficiente, pero no necesaria; esto es, una serie puede integrarse término a término, resultando igual a la integral de la serie, sin que la serie sea uniformemente convergente:

$$\text{Sea } S_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} ; 0 \leq x \leq 1$$

Hemos visto que la serie no es uniformemente convergente en $[0, 1]$; sin embargo:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^n \frac{2nx}{1+n^2x^2} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 S(x) dx = 0 \quad (1)$$

por otro lado:

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{n} \ln(1+n^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(1+n^2) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{1+n^2}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+2n} = 0 \quad (2)$$

de (1) y (2)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 S(x) dx$$

aun cuando la serie no es uniformemente convergente en $[0, 1]$.

2) En general, en series no uniformemente convergentes, la integración término a término no es válida:

Sea: $S_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 nx e^{-nx^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2} \right]_0^1 = \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{2} \quad \textcircled{1}$$

por otro lado:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \frac{\infty}{\infty} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = 0; \quad x \neq 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{no}{e^{no}} = \frac{0}{1} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 S(x) dx \equiv 0 \quad \textcircled{2}$$

de ① y ② vemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 S_n(x) dx \neq \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) dx$$

Lo anterior ocurre porque, aun cuando $S_n(x)$ converge a cero, no es uniformemente convergente a cero en $[0, 1]$

3) Integrar por series:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx$$

Solución:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} ; n=0,1,\dots$$

converge para toda $-\infty < x < \infty$

Aplicando la prueba M de Weierstrass:

$$\left| \frac{x^{2n}}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!} ; |x|^{2n} \leq 1$$

$M_n = \frac{1}{n!} ; \sum \frac{1}{n!}$ converge, puesto que:

$$\left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \frac{1}{n+1} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$ es absoluta y uniforme-

mente convergente para $-1 \leq x \leq 1$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dx = \int_0^x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \right) dx =$$

$$= \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \frac{1}{2!} \int_0^x x^4 dx - \dots$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(n-1)!}$$

165 4) Si: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$; demostrar que: 165

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

Solución:

Aplicando la prueba M de Weierstrass:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \quad ; \quad (-\infty, \infty)$$

$$M_n = \frac{1}{n^3} \quad ; \quad \sum \frac{1}{n^3} \text{ converge (serie } p > 1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \text{ converge uniformemente } (x \in \mathbb{R}^{\#})$$

Tomemos, en particular $0 \leq x \leq \pi$

$$\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3} dx = \frac{1}{n^4} \int_0^{\pi} \sin nx (dx \cdot n) = \frac{1}{n^4} [-\cos nx]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3} dx = \frac{1}{n^4} [1 - \cos n\pi]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^4} = 2 \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

ya que $\cos n\pi = \pm 1 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \quad \checkmark$$

166

5) Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$;

Calcular:

$$\left. \begin{array}{l} a) \quad a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \\ b) \quad b_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \end{array} \right\} m \in \mathbb{N}$$

Solución:

De la prueba M de Weierstrass; para $M_n = \frac{1}{n^2}$ vemos que la serie dada converge uniformemente.

$$\Rightarrow a_m = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx \cos mx \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx \right)$$

$$\text{pero: } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0$$

$$\Rightarrow a_m = 0$$

b) Cálculo de b_m .

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \right)$$

$$\text{pero: } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_m = \frac{\pi}{m^2}$$

6) Calcular:

$$y = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x} \, dx$$

Solución:

$$\left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \sin^2 2x - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4 2x - \dots$$

Siendo esta serie uniformemente convergente en todo el dominio de integración, por lo cual es integrable término a término.

Observando que:

$$2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} 2x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u \, du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 - \dots \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{3} 3^2 \left(\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 8}\right)^2 - \frac{1}{5} 3^3 \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12}\right)^2 - \dots \right] \end{aligned}$$

$$y \doteq 1.22$$

Nota: Este es un ejemplo del cálculo numérico de una integral elíptica completa de segunda especie.

3.- Si la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge (no es necesario que sea uniformemente) a la suma $S(x)$; Teniéndose que para cada n , $\frac{d}{dx} f_n(x) = f'_n(x)$ es una función continua de x en $[a, b]$; siendo $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ uniformemente convergente a la suma $\phi(x)$, $\Rightarrow \phi(x) = S'(x)$; ó sea:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} f_n(x) \right]$$

Demostración:

De la propiedad 1.-, $\phi(x)$ es continua. se tiene asimismo que:

$$\int_a^x \phi(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x S'_n(t) dt$$

$$\text{donde: } S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

$$\begin{aligned} \int_a^x \phi(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x) - S_n(a)] \\ &= S(x) - S(a) \end{aligned}$$

puesto $\phi(x)$ es continua

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \phi(t) dt = \frac{d}{dx} [S(x) - S(a)]$$

$$\Rightarrow \phi(x) = S'(x) \quad \checkmark$$

Observación: Esta demostración sólo exige convergencia uniforme $\sum f'_n(x)$; y no a la serie $\sum f_n(x)$, la cual sólo necesita ser convergente en $[a, b]$, en el sentido ordinario.

Ejemplos:

1) La siguiente serie demuestra que las condiciones exigidas en la propiedad 3: (lo mismo que sucede en las propiedades 1: y 2:) son suficientes, pero no necesarias:

Sea:

$$n=2,3,4,\dots \left\{ \begin{array}{l} u_n(x) = x^2 \left(x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}} \right) \sin \frac{1}{x} ; x \neq 0 \\ u_n(0) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{si } n=1 \left\{ \begin{array}{l} u_1(x) = x^3 \sin \frac{1}{x} ; x \neq 0 \\ u_1(0) = 0 \end{array} \right.$$

Resulta lo siguiente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge para toda x a la función:
 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} ; x \neq 0$

siendo $f(0) = 0$

b) $f'(x)$ es discontinua para $x=0$; $\Rightarrow$ que

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ no converge uniformemente en ningún intervalo que contiene al origen.

c) Sin embargo,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \text{ para toda } x.$$

$$4) \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; [a, b]$$

$$\frac{d}{dx} \sinh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots; -\infty < x < \infty$$

¿Representa esta última serie $\cosh x$?

Solución: Debemos verificar que esta última serie sea uniformemente convergente en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$

Puesto que la segunda serie es absolutamente convergente para toda x ; por el teorema de Abel, se concluye que la convergencia es uniforme también en los extremos de cualquier intervalo (a, b) .

$$\Rightarrow \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots; [a, b] \checkmark$$

$$5) \text{ Sabiendo que: } \frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}; -1 < x < 1$$

demostrar que:

$$\frac{1}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{4(n-1)}; -1 < x < 1$$

Solución: Haciendo $u_n(x) = x^{4n}$, resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4nx^{4n-1} \quad ; \text{ que converge uniformemente para } |x| < 1 \Rightarrow \text{ es válida la ecuación:}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x^4} = \frac{4x^3}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^{4n} = \sum_{n=1}^{\infty} 4nx^{4n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 4nx^{4n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4nx^{4n-1}}{4x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{4(n-1)} \checkmark$$

2) Sea $f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$; $0 \leq x \leq 1$

Esta serie converge uniformemente en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$; sin embargo la serie:

$$f'(x) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (x^{n-1} - x^n) \text{ es válida sólo}$$

en el intervalo semiabierto $0 \leq x < 1$; puesto que para $x = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n-1} - x^n) = 0 \neq 1$$

3) Demostrar que:

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} ; x > 1$$

Solución: puesto que $\frac{d}{dx} n^{-x} = -n^{-x} \ln n$, debemos hacer ver que la serie:

$\sum_{n=2}^{\infty} -\frac{\ln n}{n^x}$ es uniformemente convergente:

$$\left| \frac{d}{dx} \frac{1}{n^x} \right| = \left| -\frac{\ln n}{n^x} \right| < \frac{1}{n^x}$$

puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ converge si $x > 1$ haciendo $M_n = \frac{1}{n^x}$ ($x > 1$); por la prueba

de Weierstrass queda demostrado que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \ln n$ es uniformemente convergente. $\Rightarrow \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x} ; (x > 1)$

6) Dada la serie, convergente en: $-\pi < x < \pi$:

$$f(x) = \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx + \dots$$

Demstrar que no es válido derivar término a término esta serie en ningún intervalo.

Solución: suponiendo que fuese factible derivar término a término, resulta:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots + (-1)^{n-1} \cos nx \dots$$

Esta serie no puede ser uniformemente convergente, pues ni siquiera converge para ningún valor de x ; ya que su término general no tiende a cero cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx \neq 0.$$

Veamos los siguientes resultados particulares:

$$\text{si: } x=0 \Rightarrow f'(x) = 1-1+1-1+1-1+\dots \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{si: } x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f'(x) = -1-1-1-1-1-\dots = -\infty \neq \frac{1}{2}$$

Algunos libros de referencia:

1.- "Advanced Calculus"

R.C. Buck

(Edit. Mc. Graw-Hill) 1965

2.- "Advanced Calculus"

W. Kaplan

(Edit. Addison-Wesley) 1956

3.- "Mathematics of Physics and Modern Engineering"

I.S. Sokolnikoff, R.M. Redheffer

(Edit. Mc. Graw-Hill) 1958

4.- "Advanced Calculus"

D.V. Widder

(Edit. Prentice-Hall) 1963

5.- "Modern Mathematical Analysis"

M.H. Protter, C.B. Morrey, Jr.

(Edit. Addison-Wesley) 1964

6.- "Principles of Mathematical Analysis"

W. Rudin (2ª Edición)

(Edit. Mc Graw-Hill) 1964

7.- "Mathematical Analysis"

T.M. Apostol.

(Edit. Addison-Wesley) 1957

8. "University Mathematics", Vol. II

J. R. Britton, R. B. Kriegh, L. W. Rutland
(Edit. Freeman) 1965

9. "Advanced Calculus"

M. R. Spiegel.

(Edit. Schaum) 1963

10. "Matemática Superior", Tomo 2º

R. Rothe

(Edit. Labor) 1959

F/DEPFI/A-1/Pte.6/1981/EJ.3



702213