

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

NOTAS PARA EL CURSO INTRODUCTORIO MATEMATICAS 0041

TERCERA PARTE: CONJUNTOS METRICOS. CONCEPTOS TOPOLOGICOS. ESTUDIOS
GENERALES DE LA FUNCION. OPERACIONES. PROPIEDADES.

PROF. ARTURO DELGADO RODRIGUEZ.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS SUPERIORES

NOTAS PARA EL
CURSO INTRODUCTORIO
MATEMATICAS 041

(TERCERA PARTE)

{ CONJUNTOS METRICOS; CONCEPTOS TOPOLOGICOS; ESTUDIO GENERAL DE LAS }
{ FUNCIONES: CLASIFICACION, OPERACIONES, PROPIEDADES. }

MARZO DE 1973

ARTURO DELGADO RODRIGUEZ

MATEMATICAS 041

(CURSO INTRODUCTORIO)

3^a PARTE.

INTRODUCCION:- Estas notas se han elaborado con el propósito de recopilar, en un solo volumen, los conceptos matemáticos básicos esenciales, necesarios para el estudio de las asignaturas que componen los planes de estudios de diversas maestrías que se ofrecen en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El estudio de estos apuntes requiere la aprobación previa de los cursos de matemáticas que se imparten a nivel de licenciatura en escuelas profesionales; por consiguiente, el alumno hallará que ciertas técnicas de cálculo se dan de hecho como ya conocidas, tales como por ejemplo: álgebra de vectores, métodos elementales de integración y derivación.

En esencia, estas notas pretenden presentar en forma moderna los temas contenidos en el programa, formulados para ser cubiertos en un semestre. Se complementa la exposición de la teoría, mediante la resolución de muy diversos y variados ejemplos.

Cualquier crítica o comentario, tendiente a mejorar posteriores ediciones de estas notas, será bien recibido y agradecido por el autor.

ARTURO DELGADO RODRIGUEZ

MARZO DE 1973



Conjuntos métricos.- Métrica.- Sea M un conjunto cualquiera. Se dice que S es una "métrica" con respecto a M si, y sólo si para dos elementos $p, q \in M$ existe un número real asociado $S(p, q)$ denominado "distancia" de p a q ; que tiene las siguientes propiedades:

- 1.- $S(p, q) \geq 0$
- 2.- $S(p, q) = 0 \iff p = q$
- 3.- $S(p, q) = S(q, p)$
- 4.- $S(p, q) + S(q, r) \geq S(p, r)$ para toda $p, q, r \in M$

Estas propiedades coinciden con el concepto intuitivo de distancia.

"Conjunto métrico" se define como el par (M, S) consistente en un conjunto M y una métrica S para M .

Los elementos de M suelen llamarse "puntos"

Ejemplos de conjuntos métricos

1) $M_1 = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$; $S_1(p, q) = |x_1 - x_2|$; $x_1, x_2 \in M_1$
 $M_1 = E^1 =$ Espacio Euclideo unidimensional

2) $M_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n\}$; para toda $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in M_2$

$$S_2(p, q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$M_2 = E^n = \text{Espacio Euclidiano } n\text{-dimensional.}$

3) $M_3 = \{x | x \in \mathbb{R}^n\} ; p = x_1, q = x_2$

$$S_3(p, q) = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}$$

Demostración de que $S_3(p, q)$ constituye una métrica. Debemos hacer ver que se cumplen las 4 propiedades que definen una métrica: (Obsérvese que $M_3 = M_1$)

1.- $S_3(p, q) \geq 0$, en efecto:
si $x_1 \neq x_2$, sea $|x_1 - x_2| = n > 0$

$$S_3(p, q) = \frac{n}{1+n} > 0$$

2.- Si $x_1 = x_2 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 0$

$$S_3(x_1, x_1) = \frac{0}{1} = 0$$

recíprocamente: $S_3(p, q) = 0 = \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|}$

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

3.- $S_3(p, q) = S_3(q, p)$

$$\frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|} = \frac{|x_2 - x_1|}{1 + |x_2 - x_1|}$$

4.- $S(p, q) + S(q, r) \geq S(p, r)$

Sea $p = x_1, q = x_2, r = x_3$

$$\begin{aligned}
& \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|} + \frac{|x_2 - x_3|}{1 + |x_2 - x_3|} \geq \\
& \geq \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|} + \frac{|x_2 - x_3|}{1 + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|} = \\
& = \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|}{1 + |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|} \geq \frac{|x_1 - x_2 + x_2 - x_3|}{1 + |x_1 - x_2 + x_2 - x_3|} = \\
& = \frac{|x_1 - x_3|}{1 + |x_1 - x_3|} \\
& \Rightarrow \frac{|x_1 - x_2|}{1 + |x_1 - x_2|} + \frac{|x_2 - x_3|}{1 + |x_2 - x_3|} \geq \frac{|x_1 - x_3|}{1 + |x_1 - x_3|} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

4) Sea M_4 cualquier conjunto; siendo $S_4(p, q)$ tal que, para toda $p, q \in M_4$:

$$S_4(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = q \\ 1, & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

Demostración de que $S_4(p, q)$ puede aceptarse como métrica válida:

1.- $S_4(p, q) \geq 0$ (por definición)

2.- $S_4(p, q) = 0$, si $p = q$ (por definición)

3.- $S_4(p, q) = S_4(q, p)$

si $p \neq q$:

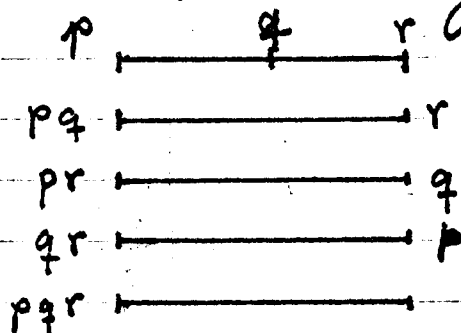
$$S_4(p, q) = S_4(q, p) = 1 \text{ (por definición)}$$

si $p = q$:

$$S_4(p, p) = S_4(q, q) = 0$$

$$4.- S_4(p, q) + S_4(q, r) \geq S_4(p, r)$$

De acuerdo con la posición relativa que ocupen los puntos p, q, r , pueden presentarse los siguientes casos:

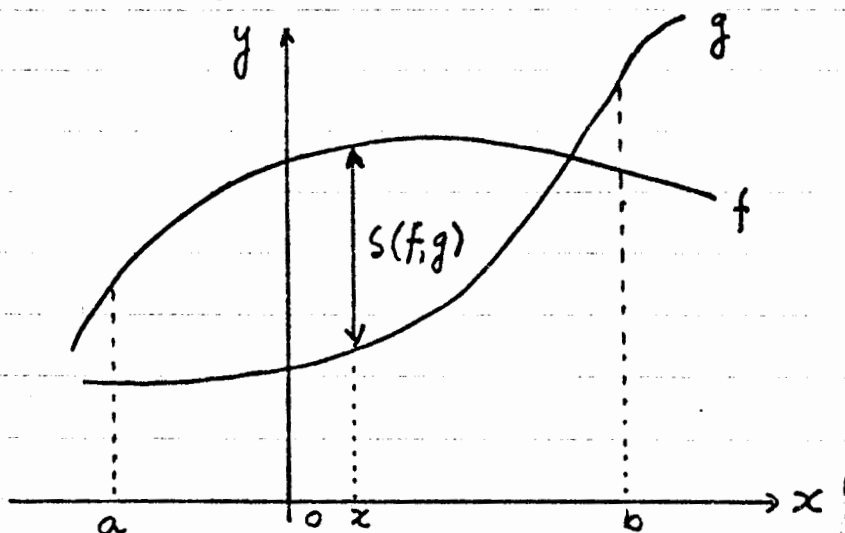


$S(p, q) + S(q, r)$				$S(p, r)$
1	+	1	>	1
0	+	1	=	1
1	+	1	>	0
1	+	0	=	1
0	+	0	=	0

$$\Rightarrow S(p, q) + S(q, r) \geq S(p, r)$$

5) Sea M_5 el conjunto de funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$; definiéndose para dos funciones $f, g \in M_5$:

$$S_5(f, g) = \max |f(x) - g(x)| ; x \in [a, b]$$



Demostración de las propiedades:

Puesto que, por definición f y g son funciones continuas $\in [a, b] \Rightarrow |f(x) - g(x)|$ es asimismo función continua, $\Rightarrow \max |f(x) - g(x)| \in [a, b]$, de ahí que tenga sentido $S_5(f, g)$ en la forma en que se define.

1.- $\max |f(x) - g(x)| \geq 0$

2.- $\max |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ para toda $x \in [a, b]$

3.- $\max |f(x) - g(x)| = \max |g(x) - f(x)|$

4.- Si $f, g, h \in M_5$:

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ \max |f(x) - h(x)| &\leq \max [|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|] \leq \\ &\leq \max |f(x) - g(x)| + \max |g(x) - h(x)| \\ \Rightarrow S_5(f, g) + S_5(g, h) &\geq S_5(f, h) \quad \checkmark \end{aligned}$$

6) Sea M_6 el mismo conjunto M_5 del problema anterior: defínase ahora para el espacio:

$$S_6(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Demostración de las propiedades:

1.- $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \geq 0$

2.- $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \equiv 0$,
puesto que $a \neq b$.

3.- $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx$

4.- $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - h(x)| dx =$
 $\int_a^b (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) dx \geq$
 $\geq \int_a^b |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| dx = \int_a^b |f(x) - h(x)| dx$

$$\Rightarrow \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_a^b |g(x) - h(x)| dx \geq \int_a^b |f(x) - h(x)| dx$$

o sea

$$S_6(f, g) + S_6(g, h) \geq S_6(f, h)$$

$$\forall f, g, h \in M_5$$

Los ejemplos anteriores hacen ver que un espacio puede ser convertido en un espacio métrico en más de una manera; esto es, para un mismo espacio, pueden existir varias métricas admisibles.

Entornos (ó vecindades). - Sea (M, s) cualquier conjunto métrico; siendo p un punto fijo en M . Sea además $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{\#}$. Definimos como entorno (ó vecindad) $V(p, \varepsilon)$ de p , con radio ε , al conjunto:

$$V(p, \varepsilon) = \{q \mid q \in M \text{ y } s(p, q) < \varepsilon\}$$

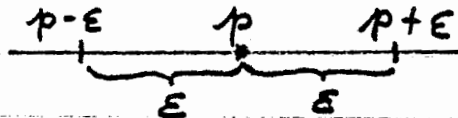
Ejemplos:

1.- En E^1 ; $V(p, \varepsilon)$ es el intervalo abierto: $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$; puesto que:

$$V(p, \varepsilon) = \{x \mid p - \varepsilon < x < p + \varepsilon\}$$

$$\text{ó } V(p, \varepsilon) = \{x \mid |x - p| < \varepsilon\}$$

Los extremos del intervalo (puntos $p - \varepsilon$ y $p + \varepsilon$) no están en el entorno



2.- En E^3 ; $V(p, \varepsilon)$ es el conjunto de puntos dentro de la esfera con centro $p = (a, b, c)$ y radio ε :

$$V(p, \varepsilon) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \varepsilon\}$$

La superficie exterior (ó frontera) de la esfera no está en el entorno $V(p, \varepsilon)$

3.- Sea A cualquier conjunto cuya métrica se define del siguiente modo:

$$S(p, q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = q \\ 1, & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(p, \epsilon) = p, & \text{si } \epsilon \leq 1 \\ V(p, \epsilon) = A, & \text{si } \epsilon > 1 \end{cases}$$

Entorno incompleto (ó vecindad reducida ó agujerada). - Es un entorno que contiene un punto menos que $V(p, \epsilon)$.

Notación: $\dot{V}(p, \epsilon)$ ó $V'(p, \epsilon)$

$$\dot{V}(p, \epsilon) = \{q \mid 0 < S(p, q) < \epsilon\}$$

$$\text{ó } \dot{V}(p, \epsilon) = V(p, \epsilon) - \{p\} = V'(p, \epsilon)$$

Punto interior. - Sea el conjunto $A = (M, S)$. Se dice que p es un punto "interior" de A , si existe $V(p, \epsilon)$ tal que $V(p, \epsilon) \subset A$.

Punto exterior. - El punto q es punto "exterior" de A , si existe $V(q, \epsilon)$ tal que:

$$V(q, \epsilon) \subset (M, S) - A$$

Haciendo, para abreviar, $(M, S) \equiv M$; resulta que un punto exterior de A es un punto interior de $M - A$.

Punto frontera:- Si todo entorno $V(p, \epsilon)$ contiene un punto de A y un punto de $M-A$, se dice que p es punto "frontera" de A . Es obvio que p es un punto frontera de A si, y sólo si es punto frontera de $M-A$.

Ejemplos:

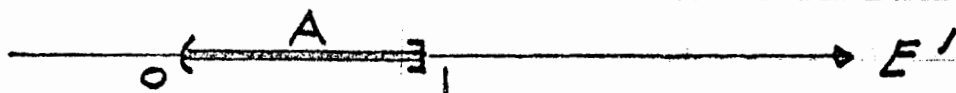
1) Sea $M = E'$; siendo $A = \{x / 0 < x \leq 1\}$

El interior de A es $(0, 1)$

La frontera de A es $\{0, 1\}$; son 2 puntos.

El exterior de A es $E' - [0, 1] =$

$$= \{x / x > 1\} \cup \{x / x < 0\}$$

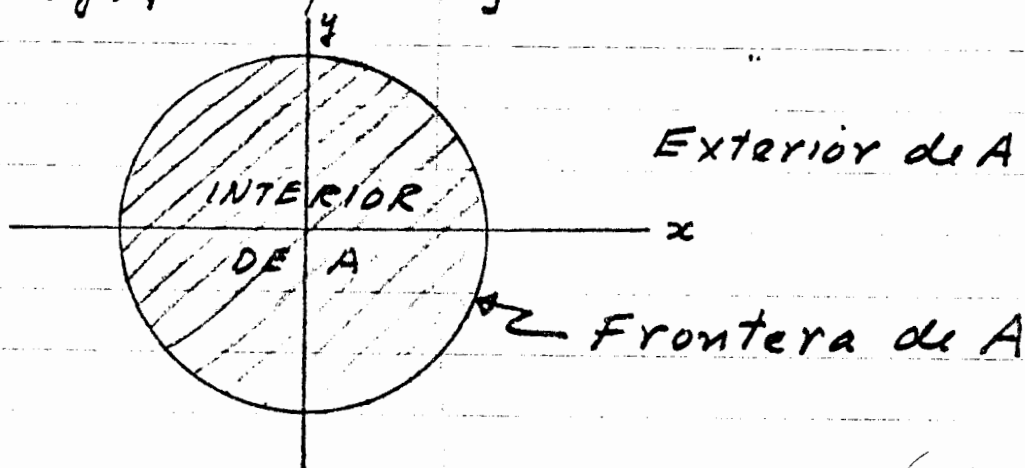


2) Sea $M = E^2$; $A = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$

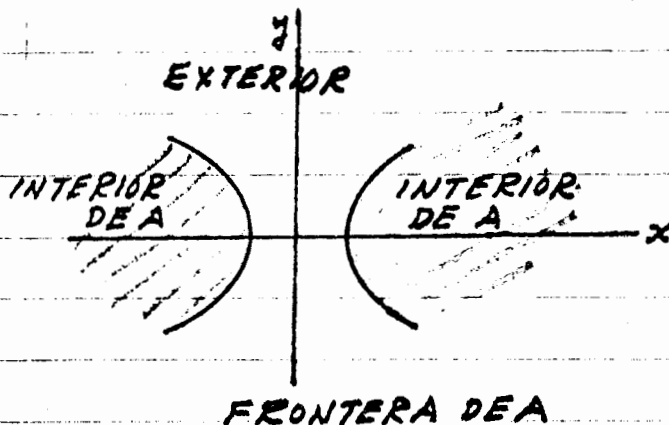
El interior de A es $\{(x, y) / x^2 + y^2 < 4\}$

El exterior de A es $\{(x, y) / x^2 + y^2 > 4\}$

La frontera de A es la circunferencia $\{(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$



3) Sea $M = E^2$; $A = \{(x, y) / x^2 - y^2 > 1\}$



EL INTERIOR DE A = $A = \{(x, y) / x^2 - y^2 > 1\}$

EL EXTERIOR DE A = $\{(x, y) / x^2 - y^2 < 1\}$

LA FRONTERA DE A = $\{(x, y) / x^2 - y^2 = 1\}$

Conjunto abierto. - Sea $A \subset M$. Se dice que el conjunto A es un conjunto "abierto" si, y sólo si no contiene ningún punto de su frontera.

Conjunto cerrado. - El conjunto A es un conjunto cerrado si, y sólo si contiene todos sus puntos frontera.

De las definiciones anteriores se deduce que A es un conjunto abierto, si todo punto de A es al mismo tiempo punto interior de A.

El conjunto del ejemplo 1) anterior no es ni conjunto cerrado ni conjunto abierto.

El Conjunto del ejemplo 2) es conjunto cerrado.
En el ejemplo 3) el conjunto es abierto.

El Complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado; siendo el complemento de un conjunto cerrado, un conjunto abierto.

Punto de acumulación (o punto límite). - Sea $A \subseteq M$, $p \in M$. Se dice que p es un punto de "acumulación" de A , si todo entorno incompleto $V'(p, \epsilon)$ contiene un punto de A . Dicho de otro modo, p es un punto de acumulación de A , si cada entorno $V(p, \epsilon)$ contiene un punto de A , que no sea el punto p .

El conjunto de puntos de acumulación en el ejemplo 1) anterior es: $[0, 1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

En el ejemplo 2), el conjunto de puntos de acumulación de A , es el mismo conjunto A

El conjunto de puntos de acumulación del conjunto A , en el ejemplo 3) es: $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 1\}$

Si p es un punto de acumulación de un conjunto $A \subseteq M$, $\Rightarrow$ que todo entorno $V(p, \epsilon)$ contiene un número infinito de puntos del conjunto A

Un conjunto cerrado contiene todos sus puntos de acumulación; recíprocamente, un conjunto que contiene todos sus puntos de acumulación, es un conjunto cerrado.

Funciones: La noción de función es uno de los conceptos básicos de mayor trascendencia en el estudio de las matemáticas.

En el capítulo anterior se precisó la idea de función describiendo ésta como una relación en la cual ningún par ordenado tiene el mismo primer elemento. En este capítulo se hará un estudio más completo de las funciones, clasificándolas y estableciendo sus propiedades.

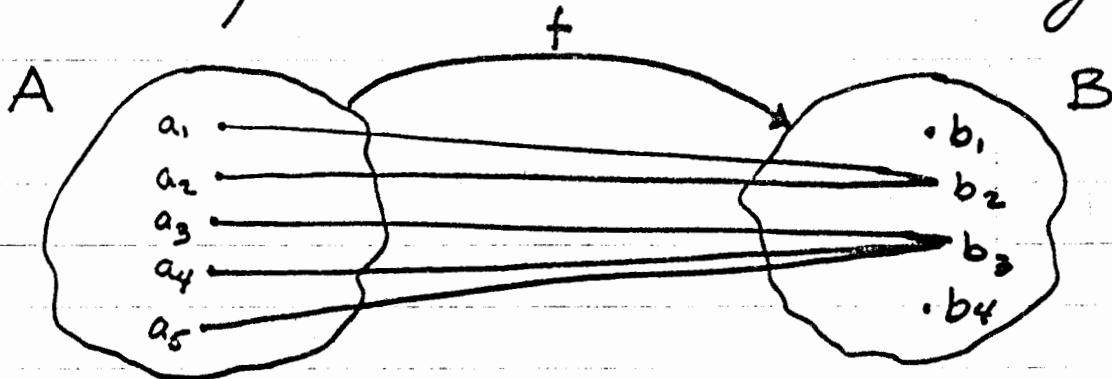
Función unívoca (ó función en). Este es el tipo más general de función. Una función unívoca de un conjunto A en un conjunto B es una regla (ó mapeo) que asocia a cada elemento $a \in A$, un único elemento $b \in B$.

Notaciones:

$$f: A \rightarrow B$$

$$\phi: A \xrightarrow{f} B$$

De manera gráfica, podemos representar la función unívoca como sigue:



Observaciones:

1.- Todos los elementos del conjunto A deben tener una imagen en el conjunto B ; pudiendo, en la función unívoca, ser un elemento $b \in B$ imagen de más de un elemento del conjunto A .

2.- La noción de función involucra:

i) Un conjunto A denominado "dominio" de f

ii) Un conjunto B denominado "codominio" (ó Contradominio de f)

iii) Una regla que establece qué elementos del conjunto B son imágenes de los elementos del conjunto A .

Se acostumbra designar las imágenes $a_i \in A$ como, $f(a_i) \in B$; esto es, de la figura en la página anterior:

$$f(a_1) = f(a_2) = b_2$$

$$f(a_3) = f(a_4) = f(a_5) = b_3$$

$$f(A) = \{b_2, b_3\}$$

$$f = \{(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_3), (a_5, b_3)\}$$

3.- Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la función f se denomina "función real de variable real".

Si el dominio y el codominio están constituidos por el mismo conjunto A , se dice que f es un "operador" (o una transformación) en A

$$A \xrightarrow{f} A$$

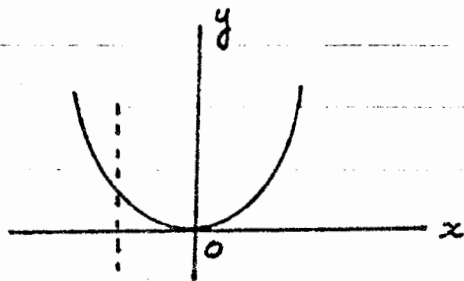
Se llama "rango" de f al conjunto constituido por todas las imágenes $f(a) \in B$ de elementos $a \in A$

$$f(A) \subseteq B$$

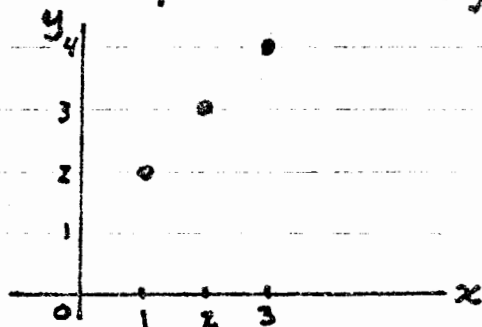
Geométricamente: Una línea vertical corta la gráfica de una función unívoca en un solo punto. ($f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$)

Ejemplo: 1) $A = B = \mathbb{R}^*$

$f: A \rightarrow B$ tal que $y = f(x) = x^2$



$$2) f = \{(x, x+1) \mid x \in \{1, 2, 3\}\}$$



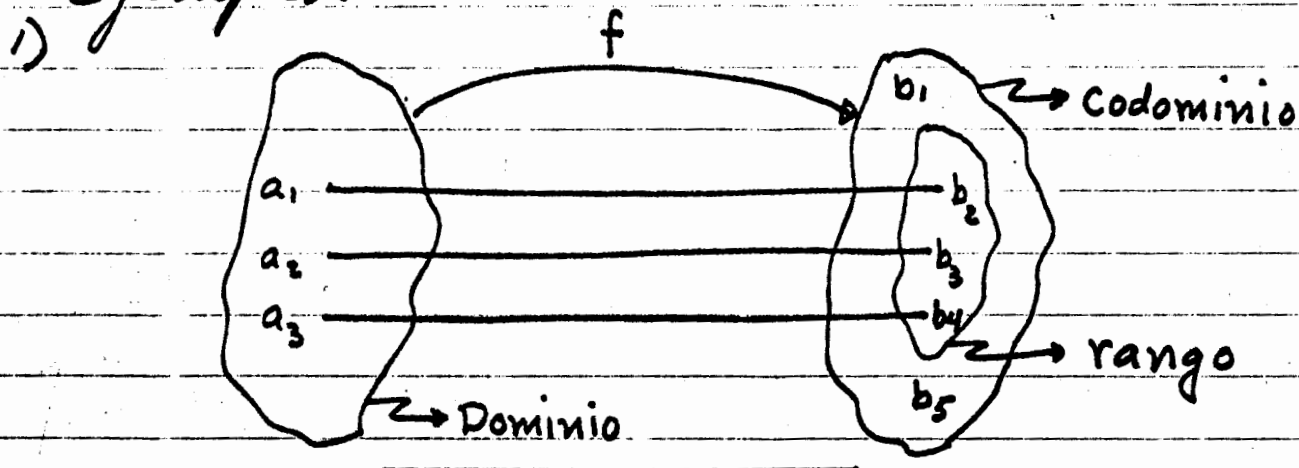
$$f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

Función biunívoca (inyectiva ó uno a uno)

Una función $f: A \rightarrow B$ se denomina biunívoca, si para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ distintos, las imágenes bajo f son asimismo distintas; esto es:

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Ejemplos:



2) $A = B = \mathbb{R}^*$

$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$; siendo $y = x^2$

f no es biunívoca, pues: $f(1) = f(-1) = 1$

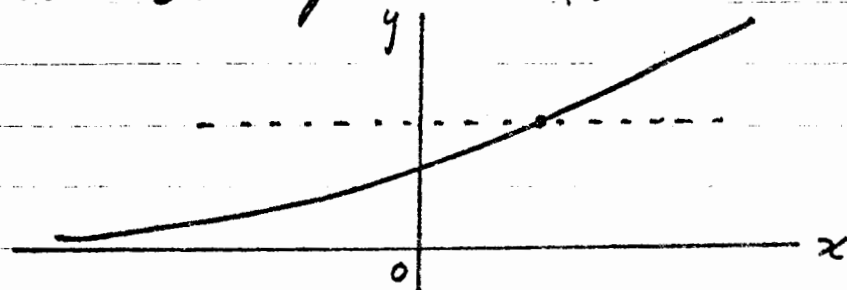
3) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, tal que $f(x) = x^3$

f si es biunívoca.

4) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, tal que $f(x) = e^x$

f si es biunívoca

Geométricamente: Una línea horizontal corta la gráfica de una función biunívoca en un solo punto. ($f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$)

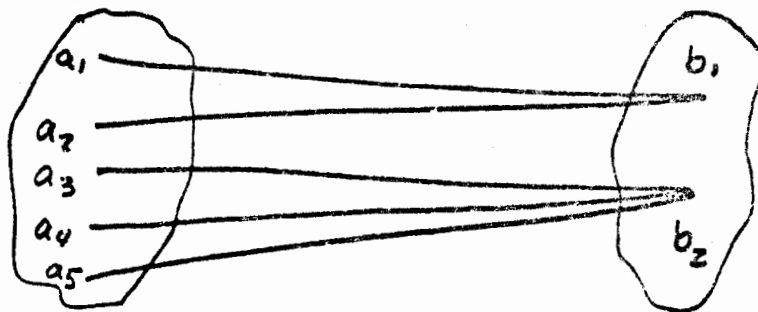


Función sobre (ó suryectiva). Una función $f: A \rightarrow B$ es "sobre" si para todo elemento $y \in B$ existe al menos un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Dicho de otro modo, una función es "sobre" cuando su rango y su codominio son el mismo conjunto; esto es:

$$f(A) = B$$

1) Ejemplos: $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$; $B = \{b_1, b_2\}$

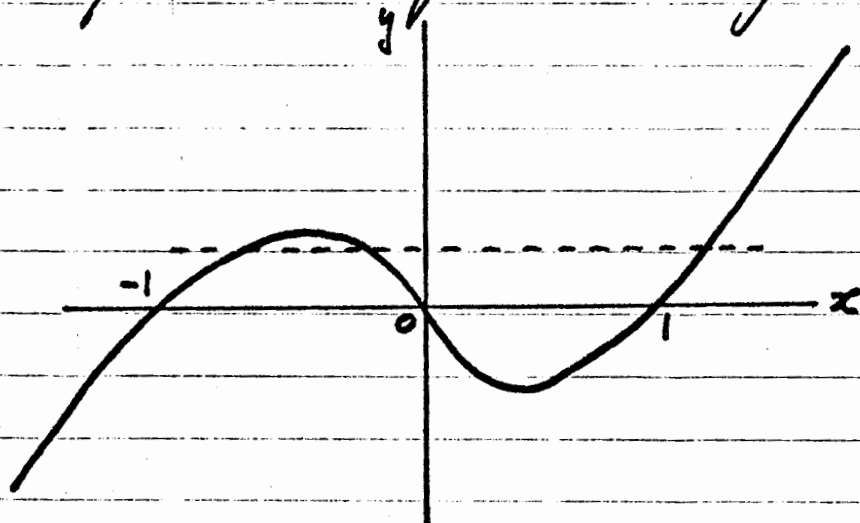


2) $f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$ tal que $f(x) = x^2$
no es sobre: $-1 \in \mathbb{R}^{\#}$; pero
 $f(x) = -1$ no existe

3) $f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$ tal que $g(x) = x^3 - x$
si es sobre; puesto que el rango es $\mathbb{R}^{\#}$

Geométricamente: No existe ninguna línea horizontal, que no corte la gráfica de una función sobre por lo menos en un punto. ($f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$)

Como ejemplo, Consideremos la gráfica que corresponde al ejercicio 3) último:



Función biyectiva: Una función $f: A \rightarrow B$ se denomina "biyectiva" si es, al mismo tiempo, inyectiva y sobre.

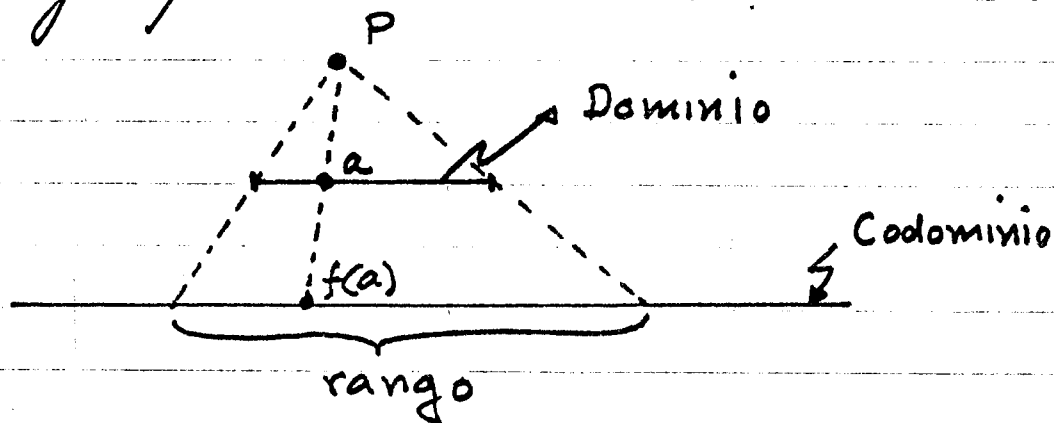
Ejemplo:

$f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$; siendo $f(x) = x^3$

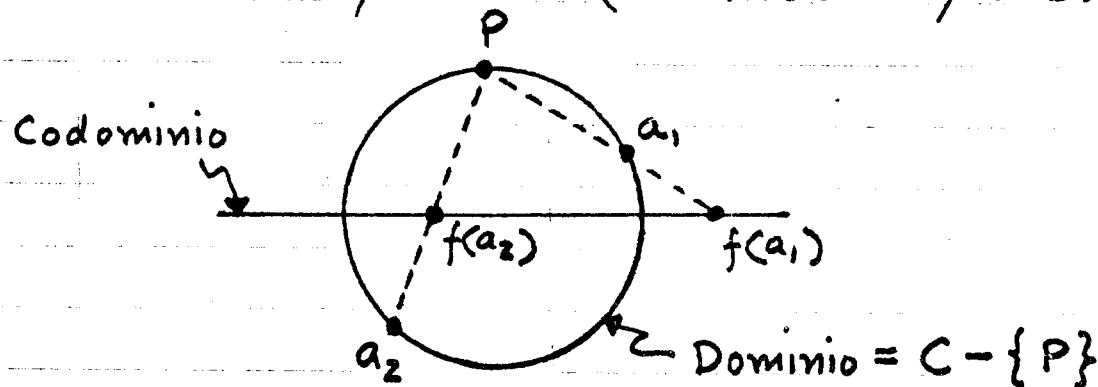
f si es biyectiva

1^a Observación: - El concepto de función que se ha expuesto es tan amplio, que permite designar (y operar) funciones de muy variada índole, que en nada se parecen a las funciones numéricas.

Ejemplo 1) Función biunívoca



2) Función biyectiva (biunívoca y sobre)

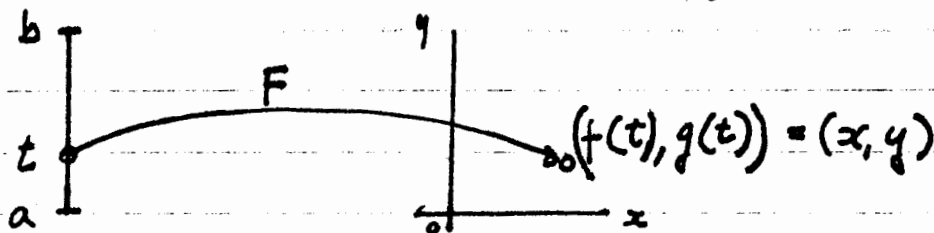


Por el punto P se traza una semirrecta, la cual, al cortar el dominio y el codominio, define los puntos a_i y $f(a_i)$ respectivamente.

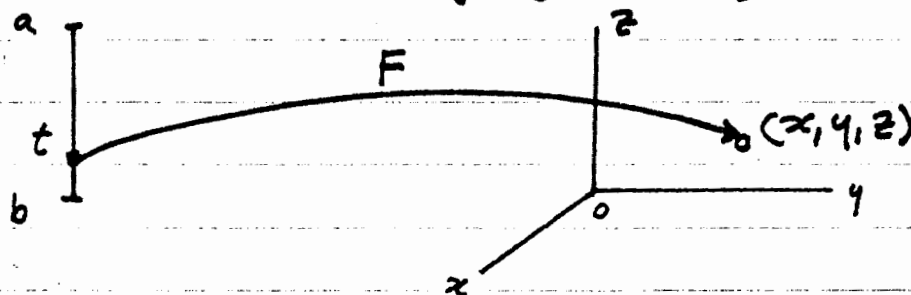
Nótese que en funciones biunívocas, dos pares ordenados distintos no pueden tener el mismo segundo elemento: si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

3) Curvas: $f: E^1 \rightarrow E^m$ (where $E^1 = \mathbb{R}$)

a) Si $m=2$; siendo: $x=f_1(t)$; $y=f_2(t)$; $a \leq t \leq b$

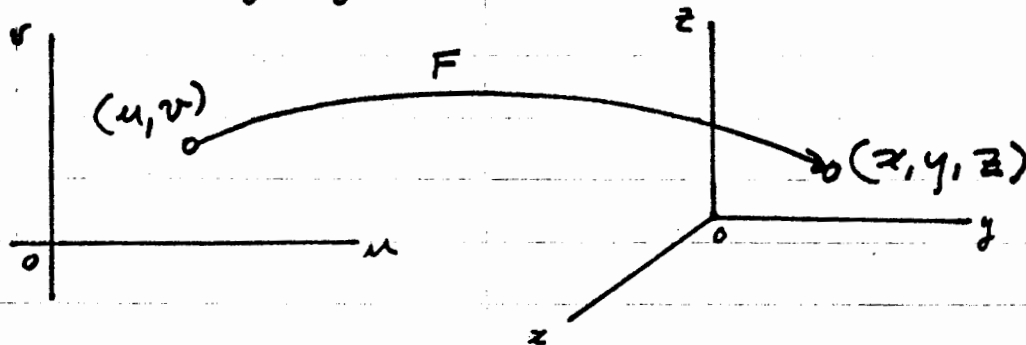


b) Si $m=3$; $x=f_1(t)$; $y=f_2(t)$; $z=f_3(t)$; $a \leq t \leq b$



4) Superficies: $f: E^2 \rightarrow E^3$

$x=f(u,v)$; $y=g(u,v)$; $z=h(u,v)$

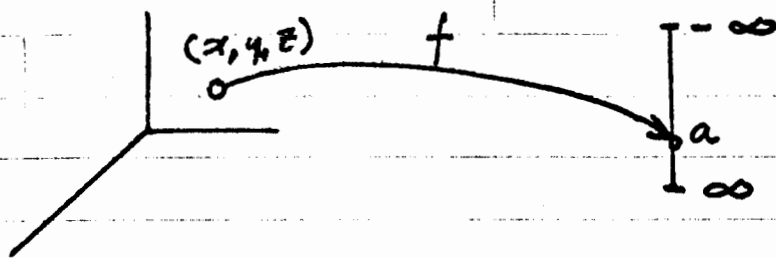


5) Generalizando:

$$f: E^n \rightarrow E^m$$

$$m \leq n$$

a) $f: E^3 \rightarrow E'$; $f(x, y, z) = a$



b) En general: a las funciones $f: E^n \rightarrow E^m$ se les puede denominar "Transformaciones".

$$f: \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Donde: $n > m$, $n = m$, ó $n < m$

2ª Observación: La gráfica de una función $f: A \rightarrow B$ se define de siguiente modo:

$$f^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

Resultando de la definición que:

- $f^* \subseteq A \times B$
- Para cada $a \in A$ existe una pareja ordenada $(a, b) \in f^*$
- Si $(a, b) \in f^*$, y $(a, c) \in f^* \Rightarrow b = c$
- La gráfica f^* puede ser un conjunto en un espacio de más de 3 dimensiones; en cuyo caso, sólo se concibe en forma abstracta.

Ejemplo: Sea $f: D \rightarrow E'$; siendo $D \subseteq E^3$

$$\Rightarrow f^* = \{(a, b) \mid a \in D, b = f(a)\}$$

$$\text{Si } a = (x, y, z) \quad ; \quad b = f(a)$$

$$\Rightarrow b = f(x, y, z) \quad \Rightarrow f^* \subseteq E^3 \times E'$$

$$\Rightarrow (a, b) = (x, y, z, b)$$

$\Rightarrow$ La gráfica f^* , de la función f , resulta ser un conjunto de un espacio tetradimensional.

$$\underline{f^* = \{(x, y, z, b) \mid (x, y, z) \in D, b = f(x, y, z)\}}$$

Aun cuando la construcción visual de la gráfica no es posible en casos como el que ilustra el ejemplo anterior, la noción de "gráfica" sigue siendo una idea útil, y muy conveniente.

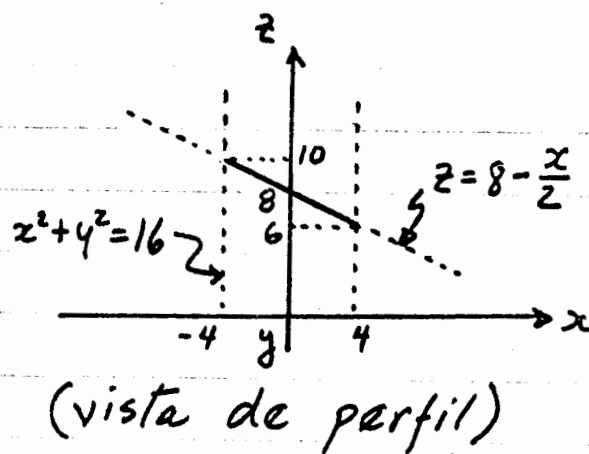
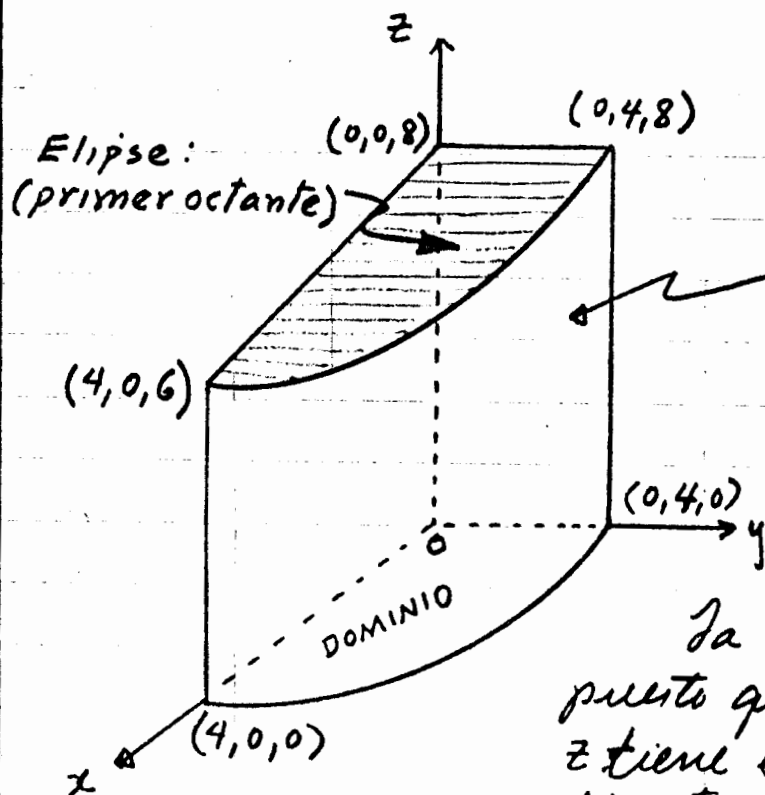
3ª Observación: Además de la forma 4) anterior para definir en forma paramétrica una superficie, la siguiente función representa una superficie:

$$f: D \rightarrow E'; \text{ donde el dominio } D \subset E^2$$

Ejemplo:

$$f(x, y) = 8 - \frac{x}{2} \quad ; \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$$

Resulta la superficie una elipse, cuyo plano está en el plano proyectante: $z = 8 - \frac{x}{2}$; estando el perímetro de la elipse definido por la intersección del plano anterior con el cilindro $x^2 + y^2 = 16$:



La función no es biunívoca, puesto que, para $x = \text{constante}$, z tiene el mismo valor, independientemente del valor de y ; por

ejemplo: $(x_1, y_1) = (2, 1) \Rightarrow z = 7$; $(x_1, y_2) = (2, 2) \Rightarrow z = 7$.

La función no es sobre, pues siendo el codominio E' , el rango es: $[6, 10] \neq E' = (-\infty, \infty)$

Desde el punto de vista geométrico, una función $f: E^2 \rightarrow E'$; $z = f(x, y)$ será biunívoca (uno a uno) si todo plano paralelo al plano x, y de ecuación $z = z_0$ ($z_0 \in \text{rango de } f$), sólo contiene un punto de la gráfica de f .

La función f será suryectiva (sobre), si el plano $z = z_0$ (donde z_0 toma todos los valores correspondientes al codominio), corta la gráfica de f , por lo menos, en un punto.

Las ideas anteriores pueden generalizarse para ser aplicadas a funciones cuyo dominio sea E^n ; siendo su codominio E' :

$$f: E^n \rightarrow E' \quad ; (n \in \mathbb{N}).$$

Igualdad de dos funciones:- Si dos funciones f y g están definidas en el mismo dominio D , y se tiene además que para toda $a \in D$, $f(a) = g(a)$, se afirma que las funciones son iguales: $f = g$

Ejemplos:

a) Sea $f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$; $g: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$

$f(x) = x^2$; $g(y) = y^2 \Rightarrow f = g$.

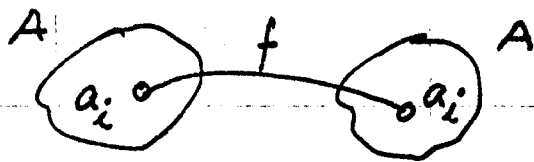
b) Sea $f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$; $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$f(x) = x^2$; $g(y) = y^2$

$f \neq g$ porque no tienen el mismo dominio.

$g(i) = -1$; $f(i)$ no existe

Función Identidad:- Sea la función $f: A \rightarrow A$ definida por la fórmula $f(x) = x$; & sea, se hace corresponder a un elemento $\underline{a}$, el mismo elemento $\underline{a}$ como su imagen.



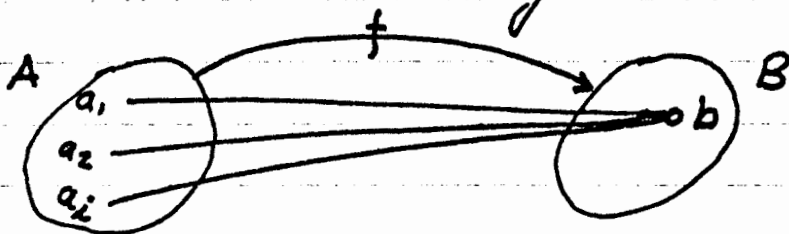
Notación:

$f = 1$ ó $f = 1_A$

$A \xrightarrow{1_A} A$

Si $F: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$; $\mathbb{R}^{\#} \xrightarrow{I} \mathbb{R}^{\#}$

Función constante:- Se dice que $f: A \rightarrow B$ es una función "constante", si todo $a_i \in A$ tiene la misma imagen $b \in B$

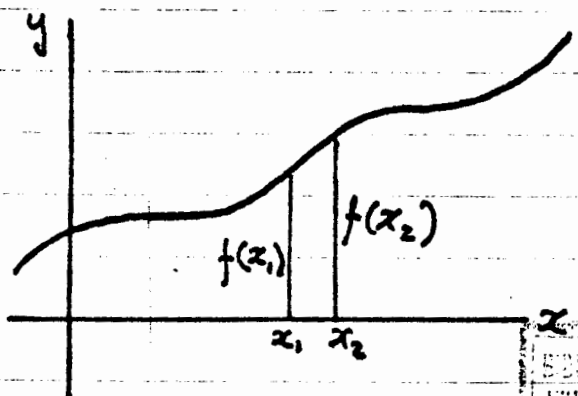


Ejemplo: Sea $f(x) = 2$; siendo $f(x) = x^2 + \sin x$
 $\Rightarrow x^2 + \sin x = 2$

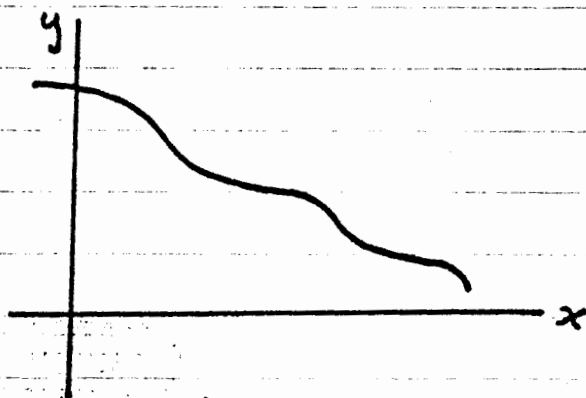
Función monótona creciente:- Se dice que una función f es "monótona creciente" en un intervalo, si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 del intervalo, tales que $x_1 < x_2$ se verifica que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Si $f(x_1) < f(x_2)$ la función se denomina "estrictamente creciente." (límonero)

Función monótona decreciente:- Su definición es semejante a la anterior.



FUNCION MONOTONA
CRECIENTE



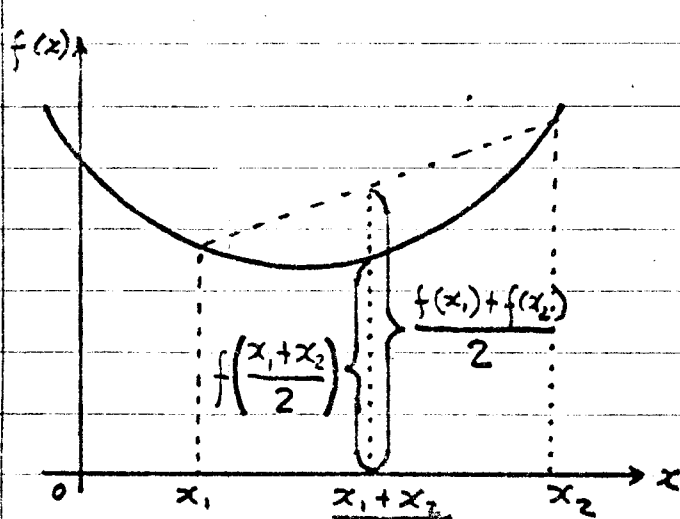
FUNCION MONOTONA
DECRECIENTE

Funciones Concavas y funciones Convexas.

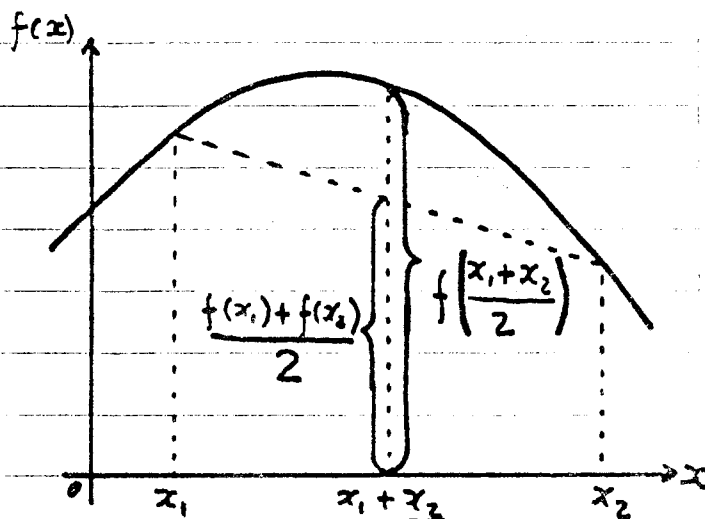
Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo (a, b) . Si para dos puntos cualesquiera $(a \leq x_1 < x_2 \leq b)$ x_1 y x_2 se verifica: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$

$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ se dice que la función es "convexa" en (a, b)

Si $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ la función se denomina "concava" en (a, b)



Función convexa



Función concava

Función inversa: Si $f: A \rightarrow B$ es una función biyectiva (biunívoca y sobre), entonces existe la función inversa f^{-1} ; la cual se define:

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

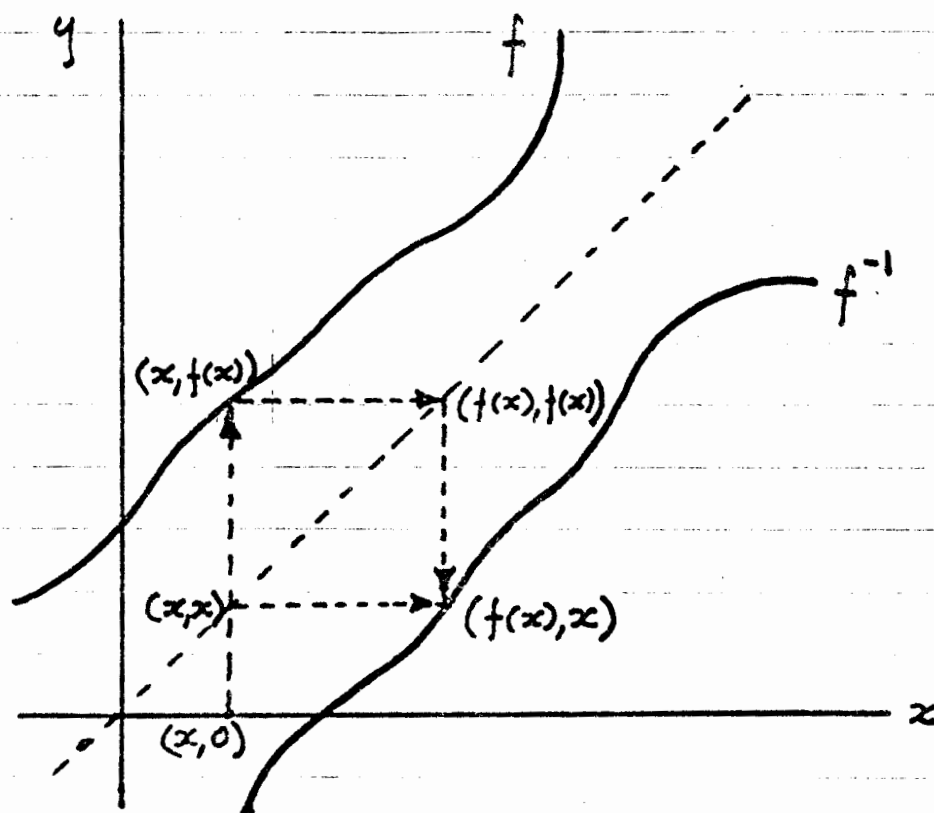
dado que para cada elemento $b \in B$, existe uno, y sólo uno de los elementos de A , tales que:

$$f^{-1}(b) \in A$$

$$f^{-1} = \{(f(a), a) / a \in A\} \quad ; \quad A = D_f$$

Es interesante observar que, en término del lenguaje de las relaciones estudiadas anteriormente, podemos decir que las funciones f y f^{-1} consideradas conjuntamente, constituyen una "relación simétrica" en la cual f no contiene dos pares ordenados con sus primeros elementos iguales, y por lo tanto, f^{-1} tampoco; asimismo, ni f ni f^{-1} deben tener pares ordenados cuyos segundos elementos sean iguales.

Ejemplo 1)



Nótese que la función inversa f^{-1} tiene como dominio al conjunto B ; siendo su codominio el conjunto A .

Ejemplo: 2) Sea $f: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$
tal que

$$f(x) = x^3$$

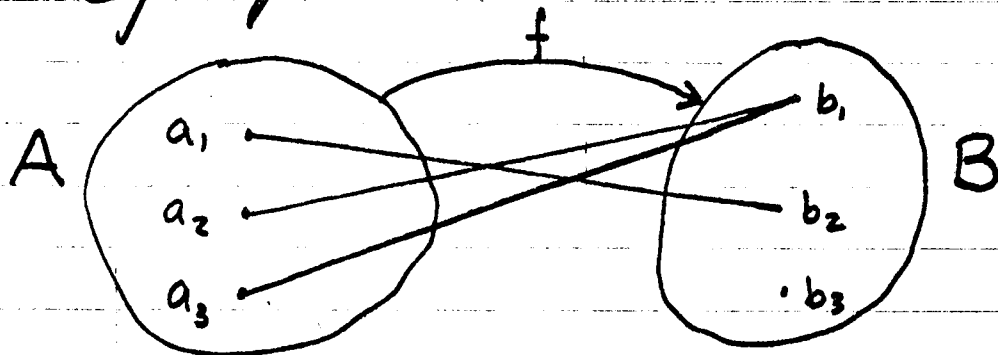
por ser f biyectiva, existe f^{-1}

$$\underline{f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}}$$

Inverso de una función. - Sea $f: A \rightarrow B$.
Se define como "inverso" de f al siguiente conjunto:

$$f^{-1}(b) = \{a \mid a \in A, f(a) = b\}$$

Ejemplo:



Resulta: $f^{-1}(b_1) = \{a_2, a_3\}$

$$f^{-1}(b_2) = \{a_1\}$$

$$f^{-1}(b_3) = \emptyset$$

Observaciones: $f^{-1}(b) \subseteq A$.

En este ejemplo la función inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$ no existe, puesto que f no es biyectiva.

Operaciones con funciones.— Definiremos, para las funciones, operaciones semejantes a las conocidas operaciones para los números reales. Estudiaremos para funciones de valores reales (funciones reales) tres operaciones básicas, a saber: Suma, multiplicación, y composición, así como las propiedades de éstas.

Suma (ó adición) de funciones.—

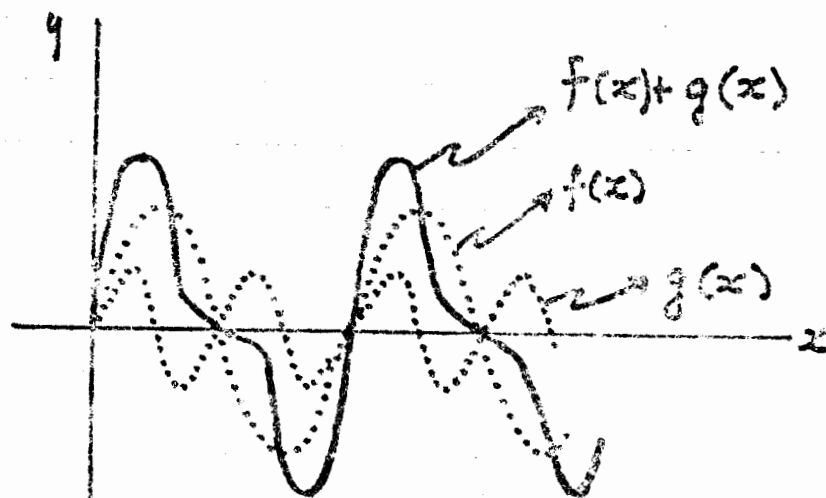
Sean f y g dos funciones reales, cuyos dominios designaremos como D_f y D_g respectivamente. Se define la suma $f+g$ como:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ó sea:

$$f+g = \{(x, f(x)+g(x)) \mid x \in D_f \cap D_g\}$$

Geométricamente:



Análogamente: $(f-g)x = f(x) - g(x)$

Ejemplo 1) Sean:

$$f = \{(1,1), (2,3), (3,3), (4,2), (5,4)\}$$

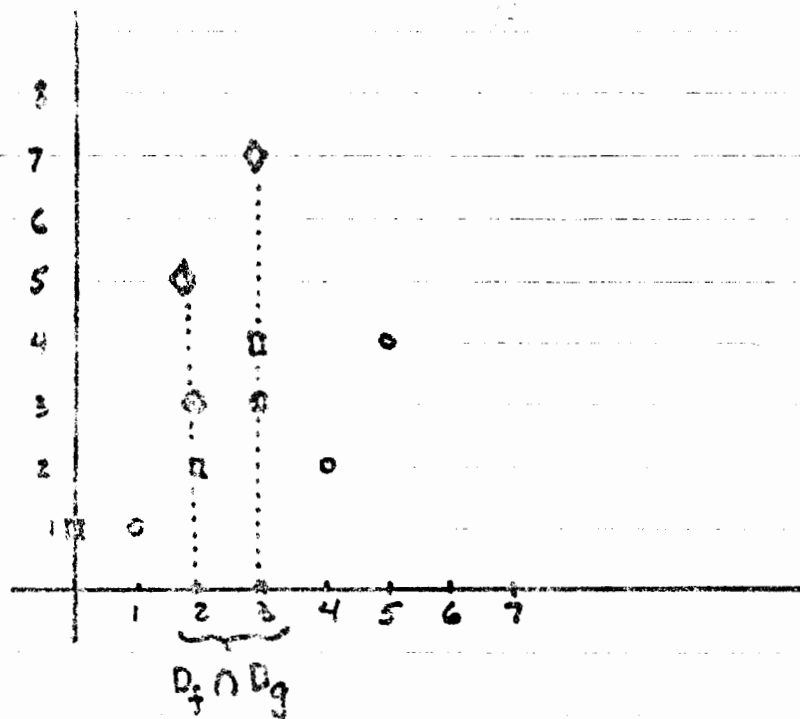
$$g = \{(0,1), (2,2), (3,4)\}$$

Hallar $f + g$:

Solución: $D_f \cap D_g = \{2, 3\}$

$$\Rightarrow f + g = \{(2,5), (3,7)\}$$

Gráficamente:



Oboérvese que la adición de funciones no es lo mismo que la suma de pares ordenados (vectores en el plano).

Ejemplo 2) Resolver la siguiente ecuación:

$$|x-a| < |x-3a| \quad (1)$$

$$a \in \mathbb{R}^+; \quad -3a < x < 4a; \quad a > 0.$$

Solución:

de (1): $|x-a| - |x-3a| < 0 \quad (2)$

Haciendo:

$$\begin{cases} |x-a| - |x-3a| = y. \\ |x-a| = y_1, \\ |x-3a| = y_2 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = y.$$

de la definición de valor absoluto:

$$y_1 = |x-a| = \begin{cases} x-a, & \text{si } x-a \geq 0 \\ -x+a, & \text{si } x-a < 0 \end{cases}$$

$$y_2 = |x-3a| = \begin{cases} x-3a, & \text{si } x-3a \geq 0 \\ -x+3a, & \text{si } x-3a < 0 \end{cases}$$

gráficamente:

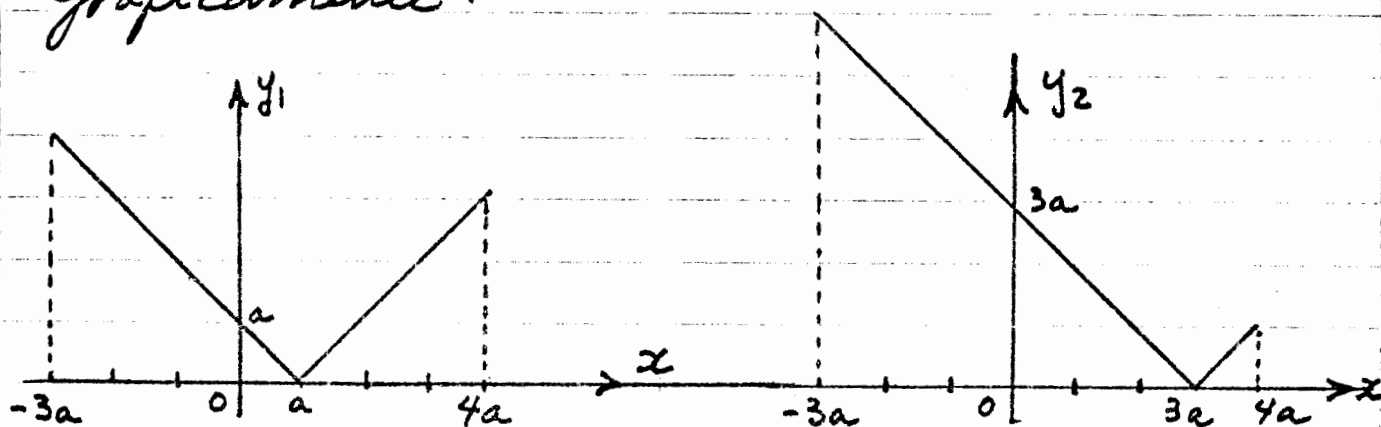


Figura (3)

Figura (4)

Restando las funciones y_1 y y_2 gráficamente, mediante la superposición de los diagramas en las figuras (3) y (4):

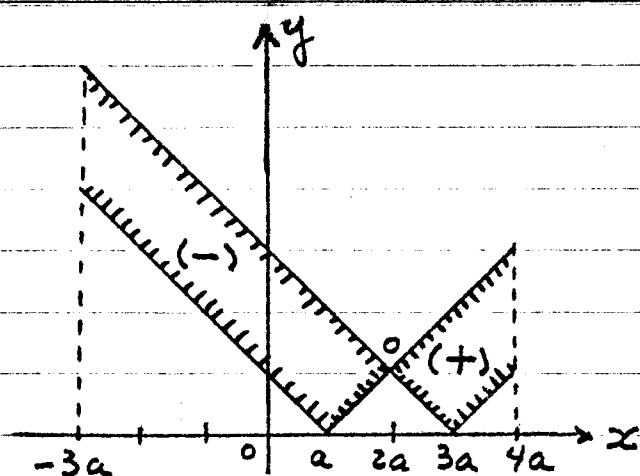


Figura ⑤

ó bien:

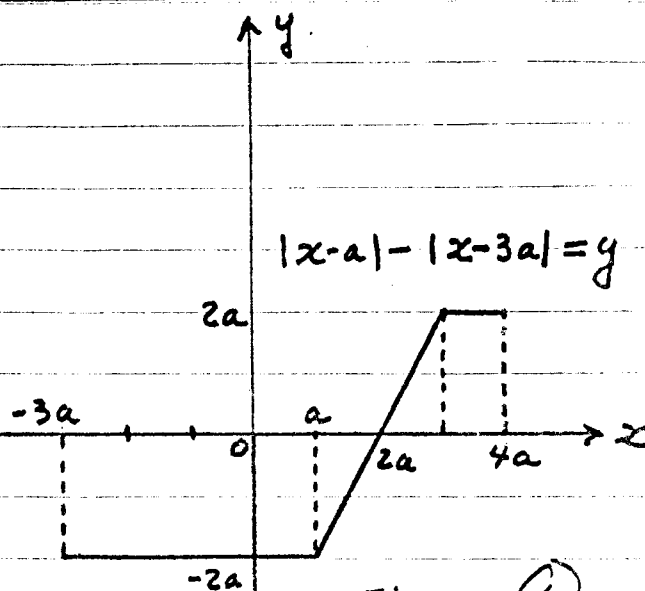


Figura ⑥

De la figura ⑥ se puede obtener la solución de la inecuación ①:

Dado que: si $x=0 \Rightarrow$ de ①

$$|0-a| - |0-3a| = |-a| - |-3a| = a - 3a = -2a = y_0 < 0$$

$\Rightarrow$ de ②, $x=0$ satisface ②

Observando de la figura ⑥ que las ordenadas son negativas ($y < 0$) en el intervalo: $-3a < x < 2a$; serán éstos los valores de x que satisfarán la desigualdad ①; esto es, la solución de la inecuación ① resulta:

$$\underline{-3a < x < 2a, \in (-3a, 4a)}$$

Ejemplo 3) Si: $f = x|x-2|$; $g = (x-2)|x|$,
Hallar todos los valores de x para los
cuales se verifica que $f = g$; $f = -g$

Solución:

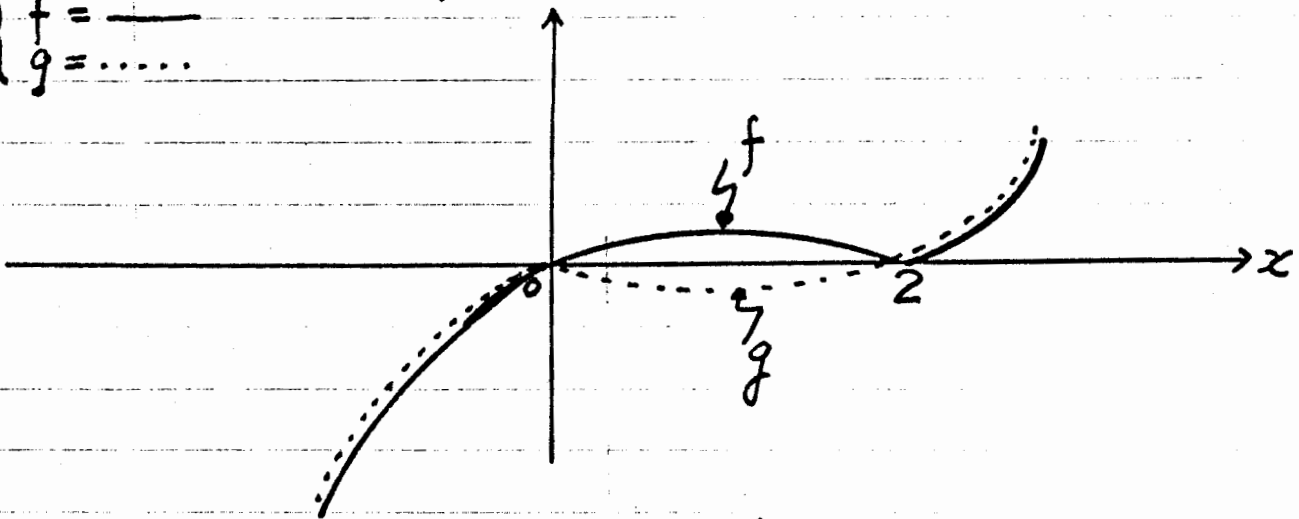
$$f = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \text{ si } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; \text{ si } x < 2 \end{cases} \quad ; \quad g = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 + 2x & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto: $f = g$ en los siguientes
intervalos: $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

$$f = -g \in (0, 2)$$

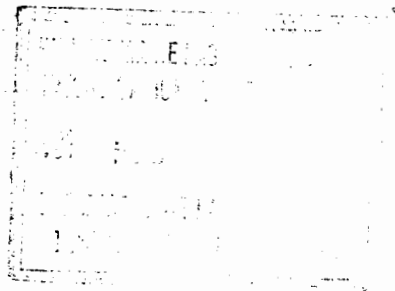
Lo anterior se visualiza fácilmente
observando las gráficas de ambas funciones:

$$\begin{cases} f = \dots \\ g = \dots \end{cases}$$



Estudio de las concavidades:

$$\text{Si: } \begin{cases} u = x^2 - 2x \Rightarrow u' = 2x - 2 \Rightarrow u'' = 2 > 0 \Rightarrow \cup \\ v = -x^2 + 2x \Rightarrow v' = -2x + 2 \Rightarrow v'' = -2 < 0 \Rightarrow \cap \end{cases}$$



Ejemplo 4) Resolución gráfica de la ecuación general de tercer grado con coeficientes $\in \mathbb{R}^\#$.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{ (1); } a, b, c \in \mathbb{R}^\#$$

Solución:

Observaciones preliminares:

1.- Aunque puede encontrarse la solución analítica empleando las fórmulas de Cardano, en la práctica se encuentra que este método presenta inconveniencias, como las que se citan a continuación:

i) La sustitución numérica en las fórmulas conduce a cálculos engorrosos.

ii) Si la ecuación tiene raíces racionales (o enteras) éstas se obtienen en forma de suma de números irracionales.

iii) Aunque siendo las tres raíces reales, éstas se presentan como sumas de números complejos.

2.- Siempre es posible, mediante un cambio de variable, eliminar de la ecuación (1), el término en x^2 ; en efecto:

Haciendo $x = z + \alpha$ (2) en (1):

$$(z^3 + 3\alpha z^2 + 3\alpha^2 z + \alpha^3) + a(z^2 + 2\alpha z + \alpha^2) + b(z + \alpha) + c = 0$$

$$= z^3 + z^2(3\alpha + a) + z(3\alpha^2 + 2\alpha a + b) + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$$

$$\text{Si: } \begin{cases} 3\alpha + a = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{a}{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 3\alpha^2 + 2\alpha a + b = p \end{cases}$$

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = q$$

Considerando (2) y (3) en (1), resulta:

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (4)$$

∴ la solución de (4) conduce a la solución de (1):

$$\text{de (4): } pz + q = -z^3 \quad (5)$$

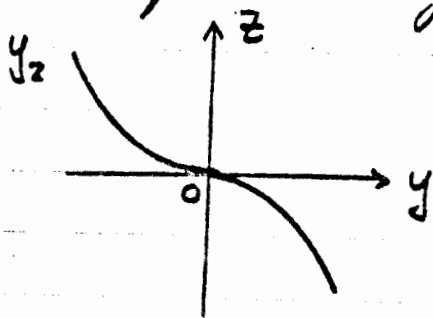
Si se hacen:

$$pz + q = y_1; \quad -z^3 = y_2 \quad (6)$$

queda resuelta la ecuación (4) si $y_1 = y_2$; pero: $pz + q = y_1$ tiene por gráfica una línea recta, de pendiente p , con ordenada al origen q ; siendo $-z^3 = y_2$ gráficamente una parábola cúbica FILA.

Los vectores anteriores sugieren el siguiente procedimiento gráfico:

I) Dibújese, con la mayor precisión posible la curva $y_2 = -z^3$ en papel milimétrico. La forma general es:



(gratificada con
utilidad de una
gráfica en milímetros)

II) A la misma escala, y sobre la gráfica que se dibujó en I), empleando los mismos ejes (y, z) trácese la recta de parámetros $p = \text{pendiente}$, $q = \text{ordenada al origen}$. Se sugiere que $y_2 = -z^3$ se trace con tinta; en tanto la recta y , puede dibujarse con lápiz; de modo que la hoja mili-

métrica pueda servir muchas veces, con sólo borrar la recta en cada caso, el diagrama queda listo para usarse con nuevos parámetros p, q .

III) Las raíces buscadas serán las abscisas de los puntos de intersección de la curva y_2 y la recta y_1 .

Si la recta corta a la curva en tres puntos, entonces la ecuación (1) tendrá tres raíces reales.

Obsérvese que la recta tiene que cortar a la curva por lo menos en un punto, puesto que y_2 es función biyectiva: $y_2: \mathbb{R}^{\#} \rightarrow \mathbb{R}^{\#}$.

Por tener (1) coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}^{\#}$, las raíces complejas tienen que ser pares conjugados; o sea, si $r + si$ es raíz, también tiene que ser raíz $r - si$, ($i = \sqrt{-1}$).

Multiplicación de funciones: Sean f y g dos funciones de valores reales, con dominios D_f y D_g respectivamente. Se define la multiplicación $f \cdot g$ como sigue:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

ó sea:

$$f \cdot g = \{(x, f(x) \cdot g(x)) \mid x \in D_f \cap D_g\}$$

Ejemplo: Sean f y g las mismas funciones definidas en el último ejemplo

$$\Rightarrow f \cdot g = \{(2, 6), (3, 12)\}$$

Propiedades de las operaciones de suma y multiplicación de funciones:

Sea S el conjunto de funciones reales de variable real: $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$

A_1) Cerradura: Si $f, g \in S \Rightarrow f + g \in S$

A_2) Conmutatividad: $f + g = g + f$; $f, g \in S$

A_3) Asociatividad: $(f + g) + h = f + (g + h)$; $f, g, h \in S$

A_4) Existe un elemento neutro único tal que: para todo $f \in S$, $f + 0 = f$

M_1) Cerradura: Si $f, g \in S \Rightarrow f \cdot g \in S$

M_2) Conmutatividad: $f \cdot g = g \cdot f$; $f, g \in S$

M_3) Asociatividad: $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$; $f, g, h \in S$

M_4) Existe un elemento neutro único en S tal que para todo $f \in S$, $f \cdot 1 = f$

D) Distributividad: $f(g+h) = fg + fh$; $f, g, h \in S$

Observaciones: $\phi \in S$, pues de otro modo no se cumplirían A_1 y M_1 .

Las funciones reales, de variable real poseen todas las propiedades de un campo, excepto la existencia de aditivo inverso único y de recíproco único (A_6 y A_7).

Si el dominio de f no es todo el conjunto de los reales, entonces no existe función g tal que $f+g=0$ ó $fg=1$, dado que el dominio de las funciones constantes 0 y 1 es $\mathbb{R}^\#$; pero D_{f+g} y D_{fg} no puede ser $\mathbb{R}^\#$.

Composición de funciones: Algunos autores consideran la composición de funciones como un producto (o multiplicación) de funciones.

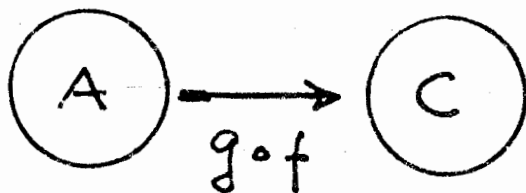
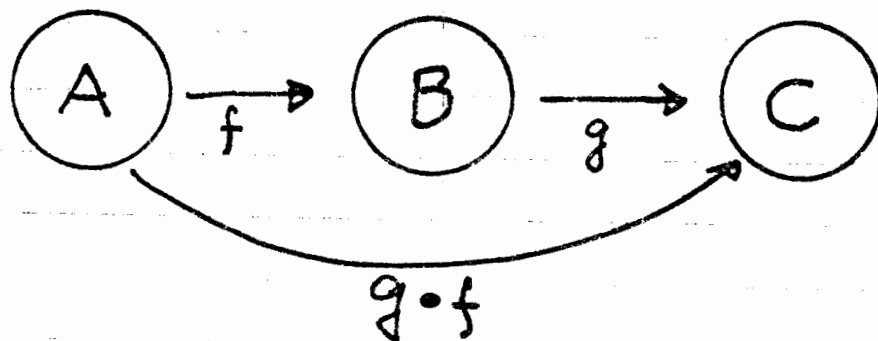
Definición: Sean $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$.
 $g \circ f$ denominada g composición f es una función cuyo dominio son los elementos $a \in A$ tales que $f(a) \in B$.

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$(g \circ f): A \rightarrow C$$

Obsérvese que para que quede definida $g \circ f$ no es necesario que f y g sean funciones reales de variable real.

Gráficamente:



Ejemplos: Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$ en cada uno de los siguientes ejemplos:

1) $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$

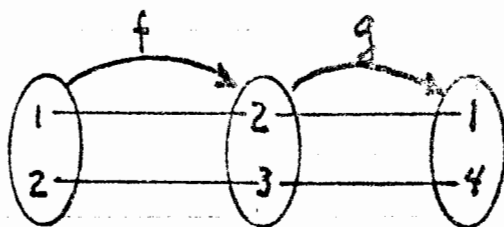
$g = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,4)\}$

a) Cálculo de $g \circ f$:

Determinación del dominio $D_{g \circ f}$:

$1 \in D_{g \circ f}$ puesto que $f(1) = 2 \in D_g$

$2 \in D_{g \circ f}$ ✓ ✓ $f(2) = 3 \in D_g$



$\Rightarrow g \circ f = \{(1,1), (2,4)\}$

b) Cálculo de $f \circ g$

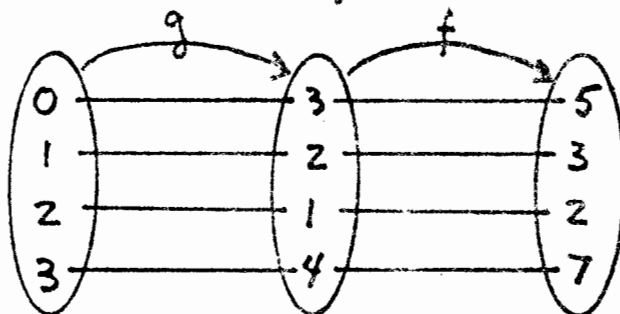
Determinación del dominio $D_{f \circ g}$:

$0 \in D_{f \circ g}$ porque $f(0) \in D_f$

1 ✓ ✓ ✓ $f(1)$ ✓ ✓

2 ✓ ✓ ✓ $f(2)$ ✓ ✓

3 ✓ ✓ ✓ $f(3)$ ✓ ✓



$\Rightarrow f \circ g = \{(0,5), (1,3), (2,2), (3,7)\}$

$$2) f(x) = x^3 ; g(x) = x + 3$$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^3 + 3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^3$$

Vemos que, en general, la composición de funciones no es una operación conmutativa.

$$3) f: E' \rightarrow E^2 ; \text{ donde } f(t) = (1+t, 2-t)$$

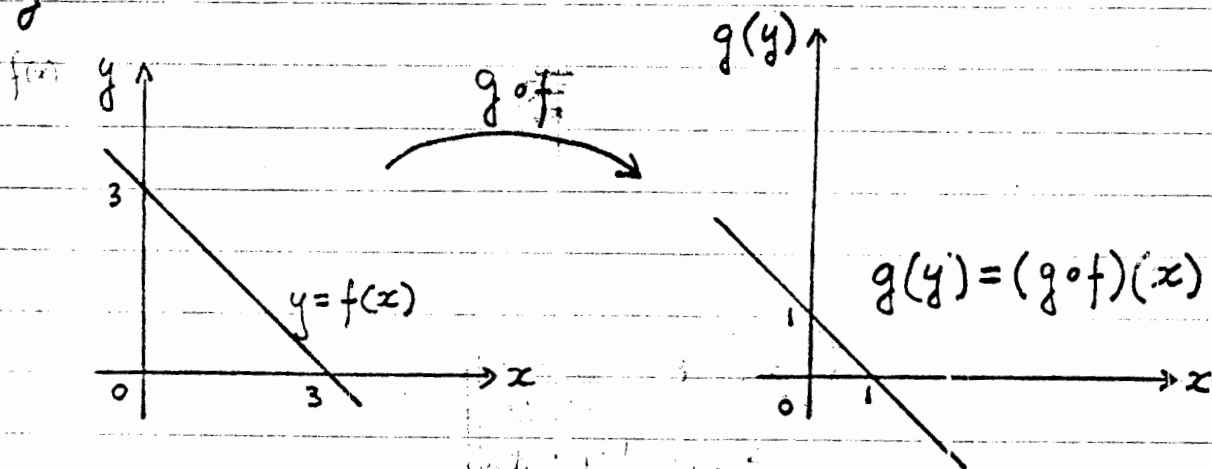
$$g: E^2 \rightarrow E^2 ; \text{ siendo } g(x, y) = (x-1, y-1)$$

Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(t)) = g(1+t, 2-t) = (t, 1-t)$$

Nótese que $(f \circ g)(t)$ no existe, puesto que el dominio de f no es igual al codominio de g .

Geométricamente: $f(t) = (1+t, 2-t)$ representa una recta, cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = 1+t$, $y = 2-t$; siendo la recta $x+y=3$; en tanto que $(g \circ f)(t) = (t, 1-t)$ nos da las ecuaciones paramétricas $x=t$; $y=1-t$, que corresponden a la recta $x+y=1$.



$$4) f(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad g(x) = 3x+1$$

Solución:

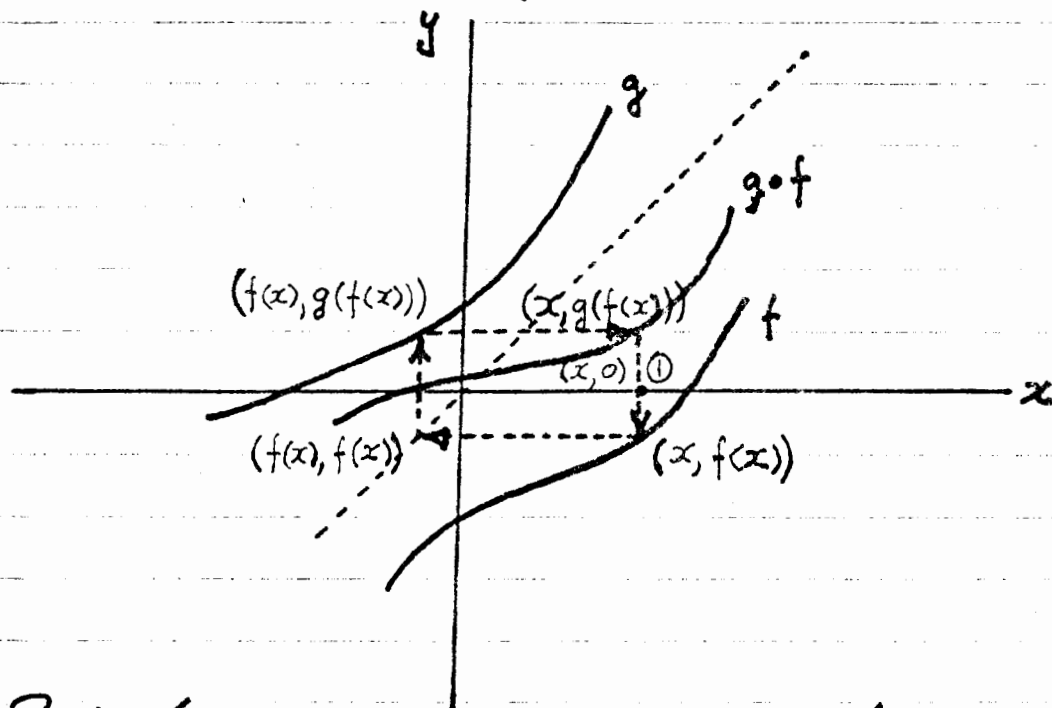
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 1$$

por lo cual $D_{g \circ f} = [0, \infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = \sqrt{3x+1}$$

por lo cual $D_{f \circ g} = [-\frac{1}{3}, \infty)$

Construcción de la gráfica de la función compuesta $g \circ f$ a partir de las gráficas de f y g .
 Sean f y g ambas funciones reales de variable real; siendo sus gráficas las curvas que se muestran en la siguiente figura:



Principíese a construir la gráfica de $g \circ f$ en el punto ① de coordenadas $(x, 0)$ de f .

Observación:

Si f es una función monótona, y además $f = f^{-1} \Rightarrow$ una de dos posibilidades:

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ para toda } x; \text{ ó} \\ f(x) = -x \text{ para toda } x \end{cases}$$

Demostración:

Aun cuando la intuición geométrica parece corroborar la afirmación, ésta se justificará mediante el siguiente razonamiento, ya que, como se comprobará en un ejemplo después de éste, la intuición geométrica puede fallar:

1º: Supóngase que f es monótona creciente:

a) Si $f(x) < x \Rightarrow f(f(x)) < f(x) < x$
 $\Rightarrow f(f(x)) < x$; pero $f(f(x)) = f(f(x)) = x$ por hipótesis; de aquí que $f(f(x)) < x$ es imposible

b) Si $f(x) > x \Rightarrow f(f(x)) > f(x) > x$
 $\Rightarrow f(f(x)) > x$; lo que por la misma razón anterior es imposible

Por lo tanto se concluye: Si f es monótona creciente; siendo $f = f^{-1} \Rightarrow f(x) = x$

2º: Considérese que f es monótona decreciente:

Razonamientos similares a los anteriores nos llevan a la conclusión que: Si f es monótona decreciente; teniendo además que $f = f^{-1} \Rightarrow f(x) = -x$ para toda x .
 (puede hacerse $f = -f$ en el caso 1º para demostrar el 2º)

Otra observación importante:

Aun cuando la intuición sugiere que sólo las funciones estrictamente monótonas, $f: A \rightarrow B$; donde $A \subseteq E'$; $B \subseteq E'$, pueden tener inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$; el siguiente ejemplo nos demuestra que existen funciones que, sin ser monótonas, tienen inversa; en efecto:

Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}' \end{cases}$$

Demostrar:

- i) f no es monótona en ningún intervalo.
- ii) $f = f^{-1}$

Solución:

Sea I cualquier intervalo con más de un punto
escójanse $\begin{cases} x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \ni x_1 < x_2 \\ x_3, x_4 \in \mathbb{Q}' \ni x_3 < x_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 < 0 \quad \rightarrow \text{Creciente} \\ f(x_3) - f(x_4) = -x_3 + x_4 > 0 \quad \rightarrow \text{Decreciente} \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ no es monótona en I ✓

$$\begin{aligned} \text{ii) } & \text{Si } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x \Rightarrow f = f^{-1} \\ & \text{Si } x \in \mathbb{Q}' \Rightarrow f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x \Rightarrow f = f^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Para toda } x: f(f(x)) = x$$

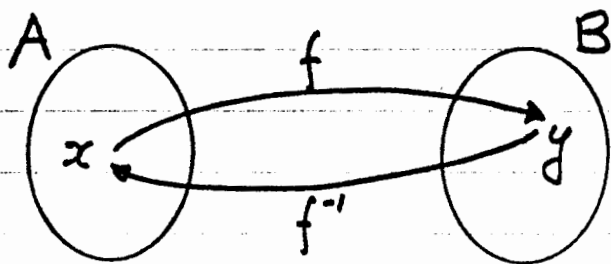
$$\Rightarrow f = f^{-1} \quad \checkmark$$

(Del ejemplo anterior, puede concluirse que la f de este ejemplo no puede ser monótona, ya que f no es tal que $f(x) = x$; ni $f(x) = -x$ para toda x)

Teorema: - Sea f una función biyectiva, tal que: $f: A \rightarrow B$; $f^{-1}: B \rightarrow A$; se afirma que:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

Demostración:



Sea $x \in A$; siendo $f(x) = y \in B \Rightarrow f^{-1}(y) = x$
 $\Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f = I$$

Asimismo:

si: $f(x) = y$; $x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = y$.

$$\Rightarrow f \circ f^{-1} = I$$

$$\therefore f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I$$

Ejemplo: Sabiendo que si: $f(x) = e^x$; $f^{-1}(x) = \ln x$; con base en el teorema anterior, demostrar que: $\ln e^x = e^{\ln x} = x$

Solución: del teorema anterior:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = f(f^{-1}(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} \quad \checkmark$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(e^x) = \ln e^x$$

$$\therefore x = e^{\ln x} = \ln e^x \quad \checkmark$$

Teorema: Sea S el conjunto de funciones reales de variable real. Se verifica lo siguiente: Para toda $f, g, h \in S$

$$C_1) \text{ Si } f \text{ y } g \in S, f \circ g \in S$$

$$C_2) \text{ En general, } f \circ g \neq g \circ f$$

$$C_3) (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$C_4) \text{ Existe un \u00fanico elemento } I \in S \text{ tal que:}$$

$$f \circ I = I \circ f = f$$

$$D_1) (f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

pero $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$, en general.

$$D_2) (f \cdot g) \circ h = (f \circ h)(g \circ h)$$

pero $f \circ (g \cdot h) \neq (f \cdot g)(f \circ h)$, en general.

Demostraciones:

C_1) Es una consecuencia de la definici\u00f3n de composici\u00f3n de funciones.

C_2) Esto qued\u00f3 evidenciado en los ejemplos resueltos anteriormente.

C_3) Demostraremos primero que los dominios son iguales: $D_{(f \circ g) \circ h} = D_{f \circ (g \circ h)}$

$$D_{(f \circ g) \circ h} = \{x \mid x \in D_h \text{ y } h(x) \in D_{f \circ g}\}$$

$$= \{x \mid x \in D_h, h(x) \in D_g \text{ y } g(h(x)) \in D_f\}$$

$$= \{x \mid x \in D_{g \circ h} \text{ y } (g \circ h)(x) \in D_f\}$$

$$= D_{f \circ (g \circ h)}$$

En seguida se demostrará C_3 . En efecto, para toda x en el dominio común de las funciones se tiene:

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) \\ &= f(g \circ h)(x) \\ &= (f \circ (g \circ h))(x) \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrada la asociatividad en la composición de funciones.

Obsérvese que en la demostración de C_3 no ha sido necesario estipular que las funciones f , g y h sean funciones reales de variable real; por consiguiente, la ley asociativa en la composición de funciones es cierta para funciones en general.

C_4) La función identidad I es la función neutra con respecto a la composición de funciones. Es necesario demostrar tanto que $f \circ I = f$ como también que $I \circ f = f$; puesto que no es válida la conmutatividad para la composición de funciones.

Los dominios de $f \circ I$ e $I \circ f$ son el mismo; siendo en ambos casos D_f .

Para toda $x \in D_f$ se tiene:

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$$

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)$$

$$\Rightarrow f \circ I = I \circ f = f$$

En seguida se demostrará que I es único en S .

Supongamos que existe otro elemento neutro I' :

$$\Rightarrow I' = I' \circ I = I$$

Juego I es único.

D.) Demostremos primero que los dominios son los mismos: $D_{(f+g) \circ h} = D_{f \circ h + g \circ h}$.

$$D_{(f+g) \circ h} = \{x \mid x \in D_h \text{ y } h(x) \in D_{f+g}\}$$

$$= \{x \mid x \in D_h \text{ y } h(x) \in D_f \cap D_g\}$$

$$= \{x \mid x \in D_h \text{ y } h(x) \in D_f\} \cap \{x \mid x \in D_h \text{ y } h(x) \in D_g\}$$

$$= D_{f \circ h + g \circ h}$$

Establecido lo anterior, procedemos a demostrar D_1 .

Sea x en el dominio común de las funciones:

$$((f+g) \circ h)(x) = (f+g)(h(x))$$

$$= f(h(x)) + g(h(x))$$

$$= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x)$$

$$= (f \circ h + g \circ h)(x)$$

La Composición de funciones no sólo se circunscribe a funciones reales de variable real; de ahí resulta, por ejemplo, que:

$$\text{Si } f: A \rightarrow B$$

$$\Rightarrow a) I_B \circ f = f \circ I_A = f$$

b) si f es biyectiva, existe f^{-1}

$$\Rightarrow f^{-1} \circ f = I_A \quad ; \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

siendo asimismo válida la proposición recíproca:

c) Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow A$, satisfacen

$$g \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ g = I_B$$

Entonces existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ y $g = f^{-1}$

d) Si $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ y $h: C \rightarrow D$ se verifica la ley asociativa:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demostración:

Para toda $a \in A$:

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

$$\Rightarrow (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

(independientemente de que A y B sean iguales a $\mathbb{R}^{\#}$)

D_2) La demostración de esta segunda ley distributiva se efectúa de manera semejante a la seguida en la demostración de la primera ley distributiva D_1).

Ejemplo en el que se hace ver que:

$$f \circ (g+h) \neq f \circ g + f \circ h$$

$$f \circ (gh) \neq (f \circ g)(f \circ h)$$

Sea $f=z$, $g=h=I$

$$\Rightarrow z = z \circ (I+I), \text{ en tanto que}$$

$$4 = z \circ I + z \circ I = z + z$$

por otro lado:

$$z = z \circ (II) \quad ; \text{ pero,}$$

$$4 = (z \circ I)(z \circ I) = z \cdot z$$

En cambio:

$$(z+I) \cdot I = z+I$$

$$z \cdot I + I \cdot I = z+I$$

$$(zI) \cdot I = zI$$

$$(z \cdot I)(I \cdot I) = (z)(I) = zI$$

e) Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son funciones biyectivas, entonces: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
ó sea:

$$(g \circ f)^{-1}: C \rightarrow A \text{ existe, y es igual a } f^{-1} \circ g^{-1}: C \rightarrow A$$

Demostración: de c) haremos ver que:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_A ;$$

además:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_B .$$

En efecto, de d):

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) \\ &= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (I \circ f) \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= I_A \end{aligned}$$

Asimismo:

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \\ &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (I \circ g^{-1}) \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= I_B \end{aligned}$$

$$(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = (g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = I_B \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

f) Generalización del resultado e) anterior:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)^{-1} = f_n^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$$

Demostración: por inducción matemática:

i) vale para $n=2$: $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ según problema e) anterior

ii) supongamos que vale para $n=k$:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k)^{-1} = f_k^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$$

Sea l el sucesor de k ; debemos hacer ver que la siguiente igualdad es válida:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k \circ f_l)^{-1} = f_l^{-1} \circ f_k^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$$

En efecto; por asociatividad:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k \circ f_l)^{-1} = [(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k) \circ f_l]^{-1} \quad (1)$$

de i):

$$[(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k) \circ f_l]^{-1} = f_l^{-1} \circ (f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k)^{-1} \quad (2)$$

de ii):

$$f_l^{-1} \circ (f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k)^{-1} = f_l^{-1} \circ f_k^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \quad (3)$$

de ①, ② y ③:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_k \circ f_l)^{-1} = f_l^{-1} \circ f_k^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$$

$\Rightarrow$ Por el principio de inducción matemática:

$$(f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n)^{-1} = f_n^{-1} \circ \dots \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \quad \checkmark$$

Teorema: Sea $f: X \rightarrow Y$; Si $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, se verifican las siguientes expresiones:

$$1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$2) f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$3) f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$$

$$4) A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

Si $A \subseteq Y$, $B \subseteq Y$:

$$5) f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$6) f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$7) f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

$$8) A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$$

$$9) f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))', \text{ si } A \subseteq Y$$

Si $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$:

$$10) A \subseteq (f^{-1} \circ f)(A)$$

$$11) B = (f \circ f^{-1})(B)$$

Demostraciones:

1) Hagamos ver que $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$
y que $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

Solución:

a) Sea $y \in f(A \cup B) \Rightarrow$ existe $x \in A \cup B$ tal
que $f(x) = y \Rightarrow x \in A$ ó $x \in B$, pero:

$$x \in A \Rightarrow f(x) = y \in f(A)$$

$$\text{ó } x \in B \Rightarrow f(x) = y \in f(B)$$

En cualquiera de los dos casos:

$$y \in f(A) \cup f(B)$$

b) Sea $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ ó $y \in f(B)$
pero: $y \in f(A) \Rightarrow$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$

$$y \in f(B) \Rightarrow \text{existe } x \in B \text{ tal que } f(x) = y$$

En cualquiera de los dos casos:

$$y = f(x) \text{ con } x \in A \cup B \Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

$$\Rightarrow \underline{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$$

2) Sea $y \in f(A \cap B) \Rightarrow$ para alguna $x \in A \cap B$,
 $(x, y) \in f$; pero $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ y $x \in B$

$$\begin{cases} x \in A \text{ y } (x, y) \in f \Rightarrow y \in f(A) \\ x \in B \text{ y } (x, y) \in f \Rightarrow y \in f(B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

$$\Rightarrow f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

$$\begin{aligned}
 5) \ a) \quad & \text{Si } x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \\
 & \Rightarrow f(x) \in A \text{ o } f(x) \in B \\
 & \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ o } x \in f^{-1}(B) \\
 & \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\
 & \Rightarrow f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \text{Si } x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\
 & \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ o } x \in f^{-1}(B) \\
 & \Rightarrow f(x) \in A \text{ o } f(x) \in B \\
 & \Rightarrow f(x) \in A \cup B \\
 & \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cup B) \\
 & \Rightarrow f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B)
 \end{aligned}$$

de a) y b)

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$\begin{aligned}
 6) \ a) \quad & \text{Si } x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow \\
 & f(x) \in A \text{ y } f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ y } x \in f^{-1}(B) \\
 & \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \text{Si } x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A \text{ y } f(x) \in B \\
 & \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cap B) \\
 & \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)
 \end{aligned}$$

55

Para hacer ver que, en general,
 $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ se dará un
ejemplo concreto:

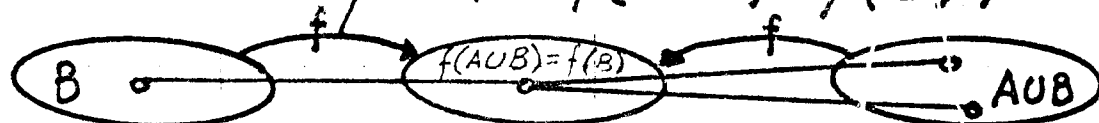
Sea $X = \{a, b, c\}$; $Y = \{d, e\}$
Hagamos $A = \{a, b\}$; $B = \{b, c\}$

Definamos $f: X \rightarrow Y$ del siguiente modo:
 $f(a) = d$; $f(b) = e$; $f(c) = d$
 $\Rightarrow f(A \cap B) = \{e\}$; en tanto que:
 $f(A) \cap f(B) = \{d, e\}$

3) Sea $y \in f(A) - f(B) \Rightarrow$ existe $x \in A$ tal que
 $f(x) = y$; pero $y \notin \{f(x) | x \in B\}$
 $\Rightarrow x \notin B$ ó $x \in B - A \Rightarrow y \in f(A - B)$
 $\Rightarrow f(A - B) \supset f(A) - f(B)$

4) Sea $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow$
 $f(A \cup B) = f(B)$; pero de 1)
 $f(A) \cup f(B) = f(B)$
 $\Rightarrow f(A) \subset f(B)$

Obsérvese que si $f(A \cup B) = f(B) \nRightarrow A \cup B = B$



10) Sea $x \in A$; para alguna $y \in Y$ se tiene $(x, y) \in f \Rightarrow$

si $x \in A$ y $(x, y) \in f \Rightarrow y \in f(A)$; pero,

$y \in f(A)$ y $(x, y) \in f \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

$$\Rightarrow A \subset (f^{-1} \circ f)(A)$$

Para hacer ver que, en general,

$A \neq f^{-1}(f(A))$ nos referiremos

al siguiente caso concreto:

Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$
definamos $f: X \rightarrow Y$ como sigue:

$$f(x_1) = y_1 ; f(x_2) = y_1 ; f(x_3) = y_1 ; f(x_4) = y_3$$

Sea $A = \{x_1, x_2\} \Rightarrow f(A) = \{y_1\}$; en tanto
que $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y_1\}) = \{x_1, x_2, x_3\} \neq A$

11) a) Sea $y \in B$; para alguna $x \in X$ se tiene
 $(x, y) \in f \Rightarrow$ si $(x, y) \in f$ y $y \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(B)$;
pero $f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))$

$$\Rightarrow B \subset f(f^{-1}(B))$$

b) Si $f(x) = y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow$
 $f(x) \in B$

$$\Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$$

$$\Rightarrow B = (f \circ f^{-1})(B)$$

7) a) Sea $x \in f^{-1}(A-B) \Rightarrow f(x) \in A-B \Rightarrow$
 $f(x) \in A$ y $f(x) \notin B \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$, pero
 $x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$

b) Sea $x \in f^{-1}(A) - f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ pero
 $f(x) \notin B \Rightarrow f(x) \in A-B \Rightarrow x \in f^{-1}(A-B)$
 $\Rightarrow \underline{f^{-1}(A-B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)}$

8) Sea $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow$
 $f(A \cup B) = f(B)$

por ser f biyectiva existe $f^{-1} \Rightarrow$
 $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(B)$

de 5) $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$
 $\Rightarrow \underline{f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)}$

9) a) Sea $x \in f^{-1}(A') \Rightarrow f(x) \in A' \Rightarrow$
 $f(x) \notin A \Rightarrow x \notin f^{-1}(A) \Rightarrow x \in [f^{-1}(A)]'$
 $\Rightarrow f^{-1}(A') \subset (f^{-1}(A))'$

b) Sea $x \in (f^{-1}(A))' \Rightarrow x \notin f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \notin A$
 $\Rightarrow f(x) \in A' \Rightarrow x \in f^{-1}(A')$
 $\Rightarrow (f^{-1}(A))' \subset f^{-1}(A')$
 $\Rightarrow \underline{f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))'}$

Algunos libros de referencia:

1.- "Fundamental Concepts of analysis".

A. H. Smith, W. A. Albrecht.

(Edit. Prentice Hall) 1966

2.- "Introduction to analysis" Vol. I

N. B. Haaser, J. P. LaSalle, J. A. Sullivan.

(Edit. Blaisdell) 1959

3.- "General Topology"

S. Lipschutz

(Edit. Schaum) 1965

4.- "Advanced Calculus"

R. C. Buck

(Edit. McGraw-Hill) 1965

5.- "Set theory and related topics"

S. Lipschutz

(Edit. Schaum) 1964

6.- "Notas sobre conjuntos y números"

J. Salazar R.

(Edit. C.F.E.) 1967

F/DEPFI/A-1/Pte.3/1981/EJ.1



702204