

PROCESOS ESTOCASTICOS

VOL II

IIIa Parte: Procesos y Cadenas de
Markov

IVa Parte: Procesos de Renovación

G. Auvinet

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
DE LA FACULTAD DE INGENIERIA, UNAM

Notas del curso 1984

III PARTE
PROCESOS Y CADENAS DE MARKOV

1. INTRODUCCION
2. CADENAS DE PARAMETRO DISCRETO
 - 2.1 Probabilidades de transición. Ecuación de Chapman-Kolmogorov
 - 2.2 Descomposición de cadenas de Markov en clases comunicantes
 - 2.3 Tiempos de ocupación
 - 2.4 Probabilidades asociadas al número de visitas a un estado
 - 2.5 Estados y clases recurrentes y no recurrentes
 - 2.6 Probabilidades de primera visita (cálculo)
 - 2.7 Estados absorbentes
 - 2.8 Cadenas de Markov recurrentes y no recurrentes irreducibles
 - 2.9 Tiempos medios de absorción
 - 2.10 Planteamiento matricial para el cálculo de tiempos medios de ocupación y de absorción
 - 2.11 Tiempos medios de primera visita y de recurrencia
 - 2.12 Comportamiento de cadenas de Markov a largo plazo. Distribuciones estacionarias
3. CADENAS DE PARAMETRO CONTINUO
 - 3.1 Introducción
 - 3.2 Funciones de probabilidad de transición
 - 3.3 Procesos de nacimiento y muerte

IV PARTE

PROCESOS DE RENOVACION

1. INTRODUCCION
2. DEFINICIONES
 - 2.1 Procesos de renovación ordinarios
 - 2.2 Procesos de renovación generalizados
3. PROBABILIDADES ASOCIADAS A PROCESOS DE RENOVACION
 - 3.1 Densidad de probabilidad de los tiempos de renovación
 - 3.2 Distribución de probabilidad asociada al número de renovaciones
 - 3.3 Densidad de probabilidad de la edad
 - 3.4 Densidad de probabilidad de la vida residual
 - 3.5 Unicidad del proceso de renovación para una función de renovación dada
4. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LOS PROCESOS DE RENOVACION
 - 4.1 Distribución de probabilidad asintótica del número de renovaciones
 - 4.2 Teorema de Blackwell
 - 4.3 Densidades de probabilidad asintóticas de la edad y de la vida residual
5. TEORIA MARKOVIANA DE LA RENOVACION
 - 5.1 Introducción
 - 5.2 Definiciones

IIIa PARTE

PROCESOS Y CADENAS DE MARKOV

1. INTRODUCCION

Un proceso estocástico es Markoviano si, para todo entero n y valores del parámetro $t_n > t_{n-1} > \dots > t_0$, se tiene:

$$P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_0) = x_0, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

El "pasado" del proceso no afecta las probabilidades del proceso en el "futuro" bajo la condición que el "presente" es conocido (Conceptos generales, inciso 3.2).

Los procesos markovianos pueden clasificarse de acuerdo con:

- la naturaleza del parámetro (discreto o continuo)
- la naturaleza del espacio de "estados" (valores posibles del proceso)

		Espacio de estados S	
		Discreto	Continuo
Parámetro (t)	Discreto	"Cadena" de Markov de parámetro discreto	Proceso de Markov de parámetro discreto
	Continuo	"Cadena" de Markov de parámetro continuo	Proceso de Markov de parámetro continuo

Un proceso estocástico de este tipo se describe mediante funciones de probabilidad de transición $P(E, t | x, t_0)$ que representan la probabilidad de que, en el tiempo t , el estado del sistema pertenezca al conjunto E dado que en $t_0 (< t)$ el sistema se encontraba en el estado x .

El proceso es de probabilidades de transición estacionarias si éstas sólo dependen de t y t_0 a través de $(t - t_0)$.

Se pondrá énfasis en el estudio de cadenas de Markov y principalmente de los aspectos siguientes:

- a) El comportamiento transitorio de las cadenas de Markov (Estudio de sus funciones de probabilidad de transición).
- b) El comportamiento a largo plazo de las cadenas, en particular el estudio del límite $\pi(E)$, si es que existe, de $P(E, t | x, t_0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- c) El problema de los tiempos de ocupación de un estado dado, de primer paso en un estado, de paso de un conjunto de estados a otro y de recurrencia en un mismo estado.

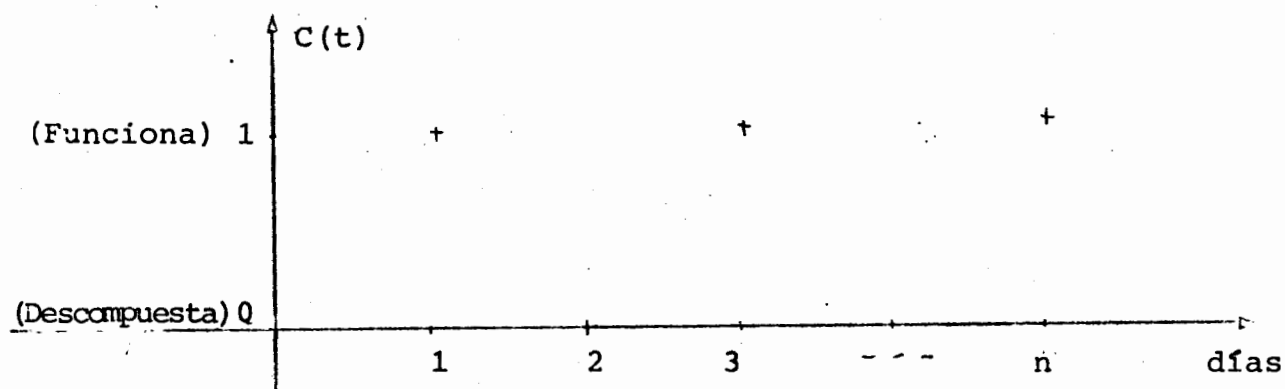
En lo que sigue, para cadenas Markovianas se usará la notación simplificada X_n en lugar de $X(t_n)$.

Ejemplo 1.1

Cadena de Markov de parámetro discreto con 2 estados posibles.

Un ejemplo de este tipo de proceso es el siguiente:

Al empezar el día, una máquina se encuentra o no en estado de funcionar. Se supondrá que si la máquina no funciona el día n , existe una probabilidad p de que haya sido reparada para el día $(n+1)$. Se supondrá además, que si la máquina funciona el día n existe una probabilidad q de que estará descompuesta el día $(n+1)$. Finalmente, se admitirá que la probabilidad de que esté descompuesta el primer día es $\pi_0(0)$.



En este caso, se pueden definir las probabilidades de transición siguientes:

$$P[X_{n+1} = 1 | X_n = 0] = p$$

$$P[X_{n+1} = 0 | X_n = 1] = q$$

$$y \quad P[X_0 = 0] = \pi_0(0)$$

También se tendrá:

$$P[X_{n+1} = 0 | X_n = 0] = 1 - p$$

$$P[X_{n+1} = 1 | X_n = 1] = 1 - q$$

$$\text{y } P[X_0 = 1] = 1 - \pi_0(0) = \pi_0(1)$$

de lo anterior, se pueden fácilmente deducir las probabilidades $P[X_n = 0]$ y $P[X_n = 1]$; se tiene:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1}=0] &= P[X_{n+1}=0, X_n=0] + P[X_{n+1}=0, X_n=1] \\ &= P[X_n=0] P[X_{n+1}=0 | X_n=0] + P[X_n=1] P[X_{n+1}=0 | X_n=1] \\ &= (1-p) P[X_n=0] + q P[X_n=1] \\ &= (1-p) P[X_n=0] + q(1-P[X_n=0]) \\ &= (1-p-q) P[X_n=0] + q \end{aligned}$$

para $n+1=1$ se tendrá:

$$P[X_1=0] = (1-p-q) \pi_0(0) + q$$

para $n+1=2$:

$$\begin{aligned} P[X_2=0] &= (1-p-q) P(X_1=0) + q \\ &= (1-p-q)^2 \pi_0(0) + q[1+(1-p-q)] \end{aligned}$$

repitiendo lo anterior n veces se ve que:

$$P[X_n=0] = (1-p-q)^n \pi_0(0) + q \sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j$$

En el caso trivial en el que $p=q=0$ se tendrá evidentemente:

$$P[X_n = 0] = \pi_0(0)$$

$$P[X_n = 1] = \pi_0(1)$$

Si se supone que $p+q>0$, entonces puede aplicarse la relación:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j = \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

y se concluye que:

$$P[X_n=0] = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left[\pi_0(0) - \frac{q}{p+q} \right]$$

y, por analogía:

$$P[X_n=1] = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left[\pi_0(1) - \frac{p}{p+q} \right]$$

si p y q no son simultáneamente nulos ni iguales a 1, entonces $0 < p+q < 2$, lo que implica $|1-p-q| < 1$ y es posible definir un límite para las probabilidades anteriores:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n=0] = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P[X_n=1] = \frac{p}{p+q}$$

otra forma de llegar a estos límites consiste en escoger $\pi_0(0)$ y $\pi_0(1)$ de tal forma que $P|X_n=0|$ y $P|X_n=1|$ sean independientes de n . Para ello, obviamente debe escogerse:

$$\pi_0(0) = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad \pi_0(1) = \frac{p}{p+q}$$

Se tiene entonces:

$$P[X_n=0] = \frac{q}{p+q} \quad \text{y} \quad P[X_n=1] = \frac{p}{p+q}$$

las probabilidades $P[X_n=0]$ y $P[X_n=1]$ permanecen constantes para cualquier n^* .

Si se quiere estimar la probabilidad:

$$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2) = P(X_0=x_0) P(X_1=x_1 | X_0=x_0) P(X_2=x_2 | X_0=x_0, X_1=x_1)$$

es posible emplear la propiedad Markoviana sustituyendo

*Nota: Si $p+q=1$ las probabilidades permanecen constantes

$P[X_n=0] = q$ y $P[X_n=1] = p$ independientemente de las probabilidades iniciales:

Si C = funciona

D = descompuesta

$$C \begin{cases} D \text{ con prob } q \\ C \text{ con prob } p \end{cases}$$

$$D \begin{cases} D \text{ con prob } q \\ C \text{ con prob } p \end{cases}$$

Vemos que en este caso $P[X_{n+1}=x_{n+1} | X_n=x_n] = P[X_{n+1}=x_{n+1}]$

El valor del proceso en el instante $n+1$ es independiente del valor del mismo en el instante n .

$$P[X_2=x_2|X_0=x_0, X_1=x_1] \quad \text{por:}$$

$$P[X_2=x_2|X_1=x_1]$$

y por ejemplo, con

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 0$$

se tendrá:

$$P[X_0=0, X_1=1, X_2=0] = \pi_0(0)pq$$

en forma similar, se obtendrá:

x_0	x_1	x_2	$P[X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2]$
0	0	0	$\pi_0(0)(1-p)^2$
0	0	1	$\pi_0(0)(1-p)p$
0	1	0	$\pi_0(0)pq$
0	1	1	$\pi_0(0)p(1-q)$
1	0	0	$(1-\pi_0(0))q(1-p)$
1	0	1	$(1-\pi_0(0))qp$
1	1	0	$(1-\pi_0(0))(1-q)q$
1	1	1	$(1-\pi_0(0))(1-q)^2$

Ejemplo 1.2

Un modelo de la teoría de colas.

Como ejemplo de cadena de Markov, se considerará el número de personas en una cola que esperan que se les atienda.

Se supone que la llegada de los consumidores es Poissoniana con intensidad λ y que los tiempos de servicio de los clientes sucesivos son idénticamente distribuidos e independientes.

Para $n \geq 1$, sea X_n el número de personas esperando en la fila cuando el cliente n acaba de ser atendido.

La secuencia $\{X_n\}$ es una cadena de Markov.

Si U_n es el número de clientes que llegan mientras se atiende al cliente n , puede escribirse:

$$X_{n+1} = X_n - \delta(X_n) + U_{n+1}$$

donde $\delta(x) = 1$ si $x \neq 0$

(δ de Kronecher)

$$\delta(x) = 0 \text{ si } x = 0$$

en efecto, se pueden presentar 2 casos:

$$X_{n+1} = U_{n+1} \text{ si el cliente } n+1 \text{ no había llegado cuando salió el cliente } n$$

$$X_{n+1} = X_n - 1 + U_{n+1} \text{ si ya había llegado.}$$

Puesto que U_{n+1} es independiente de $X_1, \dots, X_n$, no es necesario disponer de los valores de $X_1, \dots, X_{n-1}$ para que, dado X_n , se pueda estimar la distribución condicional de X_{n+1} . La cadena es por tanto Markoviana.

Esta cadena está "encajada" (imbedded) dentro del proceso $N(t)$ igual al número de personas en la cola en el instante k . Es una serie de observaciones de este proceso en los momentos $t_1, \dots, t_n$ en los cuales salen los clientes:

$$X_n = N(t_n)$$

Ejemplo 1.3

Un modelo de inventario.

Se tiene un inventario de cierto artículo con objeto de satisfacer una demanda continua. Se revisa el inventario en tiempos sucesivos $t_1, t_2, \dots$. Se supone que la demanda en el intervalo (t_{n-1}, t_n) es una variable aleatoria ξ_n cuya distribución de probabilidad es independiente del periodo considerado.

$$P[\xi_n = k] = a_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$\text{con } a_k \geq 0$$

$$\text{y } \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

El nivel del inventario se revisa al empezar cada periodo. La política de reabastecimiento se define con base en dos valores s y S ($s < S$). Si lo que queda en el inventario es $\leq s$, se reponen inmediatamente los artículos necesarios para llegar al nivel S . Si lo que queda es mayor que s , se deja el inventario tal cual.

Si X_n es el nivel del inventario antes de su revisión en el instante t_n , los estados posibles de X_n son

$$S, S-1, \dots, +1, 0, -1, -2, \dots$$

donde los números negativos representan pedidos que no han podido ser surtidos y lo serán al reponer el inventario.

De acuerdo con las reglas definidas, se tendrá:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_{n+1} & \text{si } s < X_n \leq S \\ S - \xi_{n+1} & \text{si } X_n \leq s \end{cases}$$

los valores $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ constituyen una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición podrían calcularse a partir de la distribución de probabilidad de ξ_n y de las reglas anteriores.

2. CADENAS DE PARAMETRO DISCRETO

2.1 Probabilidades de transición. Ecuación de Chapman-Kolmogorov

Para describir una cadena de Markov de este tipo, es necesario contar con:

- a) la distribución de probabilidad en cualquier instante del proceso

$$p_j(n) = P[X_n = j]$$

- b) las probabilidades de transición

$$p_{j,k}(m,n) = P[X_n = k | X_m = j] \quad \text{tiempos } n > m \geq 0 \\ \text{estados } j, k$$

- Una cadena de Markov está totalmente definida probabilísticamente por las probabilidades anteriores ya que para cualquier entero q y cualquier secuencia de tiempos $n_1 \dots n_q$ y estados $k_1 \dots, k_q$:

$$P[X_{n_1} = k_1, \dots, X_{n_q} = k_q] =$$

$$p_{k_1}(n_1) p_{k_1 k_2}(n_1, n_2) p_{k_2 k_3}(n_2, n_3) \dots p_{k_{q-1} k_q}(n_{q-1}, n_q)$$

- Se dice que la cadena es homogénea si $p_{j,k}(m,n)$ sólo depende de la diferencia $(m-n)$. Entonces:

$p_{j,k}(n) = P[X_{t+n}=k | X_t=j]$ para cualquier entero $t \geq 0$

y se llama "probabilidad de transición en n pasos"

- Generalmente $p_{j,k}(1)$ (1 paso) se escribe solamente $p_{j,k}$

Resulta cómodo presentar las probabilidades de transición de una cadena de Markov $\{X_n\}$ con espacio de estados $\{0,1,2,\dots,r\}$ en forma matricial:

$$P(m,n) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(m,n) & p_{0,1}(m,n) & \dots & p_{0,k}(m,n) & \dots & p_{0,r}(m,n) \\ p_{1,0}(m,n) & p_{1,1}(m,n) & \dots & p_{1,k}(m,n) & \dots & p_{1,r}(m,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{j,0}(m,n) & p_{j,1}(m,n) & \dots & p_{j,k}(m,n) & \dots & p_{j,r}(m,n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{r,0}(m,n) & p_{r,2}(m,n) & \dots & p_{r,k}(m,n) & \dots & p_{r,r}(m,n) \end{bmatrix}$$

Se observa que los elementos de esta matriz cumplen con las condiciones:

$$p_{j,k}(m,n) \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^r p_{j,k}(m,n) = 1$$

Las probabilidades de transición satisfacen la llamada ecuación de Chapman-Kolmogorov:

para cualquier tiempo $n > u > m \geq 0$, y estados j y k se tiene:

$$p_{j,k}^{(m,n)} = \sum_{\text{estados } i} p_{j,i}^{(m,u)} p_{i,k}^{(u,n)}$$

para demostrar lo anterior se usa la propiedad Markoviana y el hecho de que:

$$\begin{aligned} P[X_n=k | X_m=j] &= \sum_{\text{estados } i} P[X_n=k, X_u=i | X_m=j] \\ &= \sum_{\text{estados } i} P[X_n=k | X_u=i, X_m=j] P[X_u=i | X_m=j] \\ &= \sum_{\text{estados } i} P[X_n=k | X_u=i] P[X_u=i | X_m=j] \end{aligned}$$

En simbología matricial, esta relación puede escribirse:

$$P(m,n) = P(m,u)P(u,n)$$

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov es posible derivar relaciones de recurrencia que permiten obtener cualquier probabilidad de transición. Se tiene:

$$\begin{aligned} P(m,n) &= P(m,n-1)P(n-1,n) && (u=n-1) \\ &= P(m,n-2)P(n-2,n-1)P(n-1,n) \\ &= \dots \\ &= P(m,m+1)P(m+1,m+2)\dots P(n-1,n) \end{aligned}$$

Por tanto, para conocer $P(m,n)$ para cualquier $m \leq n$, basta con conocer la secuencia de matrices de transición:

$$P(0,1); P(1,2); \dots; P(n,n+1); \dots$$

Si se define ahora el vector de probabilidades incondicionales

$$p(n) = \begin{bmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ \vdots \\ p_j(n) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{con } p_j(n) = P[X_n=j]$$

Se tiene, dado que $P[X_n=j] = \sum_i P[X_0=i, X_n=j] = \sum_i P[X_0=i] P[X_n=j|X_0=i]$:

$$p(n) = p(0)^T P(0,n)^T \quad \text{donde } T \text{ significa traspuesta}$$

por tanto, una cadena de Markov está completamente definida si se conoce la secuencia de matrices de transición anterior y el vector de probabilidades incondicionales en el tiempo 0, $p(0)$.

En el caso de una cadena homogénea (probabilidades de transición estacionarias):

$$\begin{array}{ll} \text{si } P(n) = \{p_{j,k}(n)\} & \text{y } P = \{p_{j,k}\} \\ (n \text{ pasos}) & (1 \text{ paso}) \end{array}$$

se tendrá:

$$P(n) = P^n$$

$$\text{y: } p(n) = p(0)^T P^n$$

Ejemplo 2.1

Volviendo al ejemplo 1.1 (cadena con 2 estados) se observa que la matriz de transición en 1 paso es estacionaria:

$$P(0,1) = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix} = P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

y se tiene:

$$P(0,2) = P^2 = \begin{bmatrix} (1-p)^2 + pq & (1-p)p + p(1-q) \\ q(1-p) + q(1-q) & qp + (1-q)^2 \end{bmatrix}$$

El vector de probabilidades incondicionales en el tiempo $t=0$ es:

$$p(0) = \begin{bmatrix} \pi_0(0) \\ \pi_1(0) \end{bmatrix}$$

y el vector de probabilidades incondicionales en el tiempo $k=1$ puede obtenerse escribiendo que:

$${}^T p(1) = {}^T p(0) P$$

y por tanto:

$$p(1) = \begin{bmatrix} (1-p-q)\pi_0(0) + q \\ (1-p-q)\pi_1(0) + p \end{bmatrix}$$

Usando esta notación matricial, se vuelven a encontrar los resultados del ejemplo 1.1.

Ejemplo 2.2

Volviendo al modelo para colas del ejemplo 1.2 se observa que las probabilidades de transición se obtienen en forma sencilla si se supone para U_n una distribución de probabilidad

$$P\{U_n = k\} = a_k \quad \text{con } a_k > 0 \text{ y } \sum_k a_k = 1$$

donde a_k es la probabilidad de que lleguen k clientes mientras se atiende a un cliente dado.

$$\text{Para } j = 0 : \quad p_{0,k}(n, n+1) = P\{U_{n+1} = k\} = a_k$$

$$\text{Para } j > 0 : \quad p_{j,k}(n, n+1) = P\{U_{n+1} = k-j+1\} = a_{k-j+1}$$

Las probabilidades de transición son independientes de n , por tanto la cadena es homogénea. La matriz de transición en un paso será:

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_1 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}$$

NOTA: Observación respecto a los modelos de colas: notación de Kendall

Suponiendo que los tiempos de interarribo y de servicio son idénticamente distribuidos e independientes, un modelo determinado se representa como:

$$F_T / F_S / Q$$

donde:

F_T función de distribución de los tiempos de interarribo
 F_S función de distribución de tiempos de servicio
 Q número de colas

F_T { GI general
D tiempo determinista
M distribución exponencial
 E_k distribución Gamma (de Erlang)

F_S { G general
D tiempo determinista
M distribución exponencial
 E_k distribución Gamma (de Erlang)

por ejemplo:

M / G / 1

GI / M / 2

etc...

Ejemplo 2.3

Se define una cadena Markoviana en la forma siguiente:

Un número X_1 se escoge al azar entre los enteros 1 a 6, y para $n > 1$, X_n se escoge al azar entre $1, 2, \dots, X_{n-1}$.

Determine el espacio de estados y las matrices de transición de primer paso y de dos pasos.

El espacio de estados es: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

La cadena es homogénea y las matrices de transición son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & - & - & - & - \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

2.2 Descomposición de cadenas de Markov en clases comunicantes

En lo que sigue, la cadena se supondrá homogénea.

- Un estado k se considera accesible a partir de un estado j si

para algún entero $N \geq 1$, $p_{j,k}^{(N)} > 0$ (notación: $j \rightarrow k$)

- Se dice que dos estados comunican si j es accesible desde k y k es accesible desde j (notación: $j \leftrightarrow k$)

Teorema

Si $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow k$, entonces $i \rightarrow k$

En efecto, si se escogen M y N tales que $p_{i,j}^{(M)} > 0$ y $p_{j,k}^{(N)} > 0$, por el teorema de Chapman-Kolmogorov:

$$p_{i,k}^{(M+N)} = \sum_{\text{estados } h} p_{i,h}^{(M)} p_{h,k}^{(N)} \geq p_{i,j}^{(M)} p_{j,k}^{(N)} \geq 0$$

de lo anterior se deduce el teorema siguiente:

Teorema

La propiedad de comunicación entre estados es simétrica y transitiva; para cualquiera estados i , j y k :

$$j \leftrightarrow k \text{ implica } k \leftrightarrow j$$

$$i \leftrightarrow j \text{ y } j \leftrightarrow k \text{ implican } i \leftrightarrow k$$

Dado un estado j , su clase comunicante $C(j)$ se define como el conjunto de estados k que comunican con j

$$k \in C(j) \text{ si y sólo si } k \leftrightarrow j$$

Cuando el estado j no comunica con ningún otro estado (ni siquiera consigo mismo), clase $C(j)$ vacía, j se denomina estado "sin retorno".

Se observa que si $C(j)$ no está vacía, j pertenece a $C(j)$ (existe un estado k tal que $j \leftrightarrow k$ y $k \leftrightarrow j$ y, por tanto, $j \leftrightarrow j$).

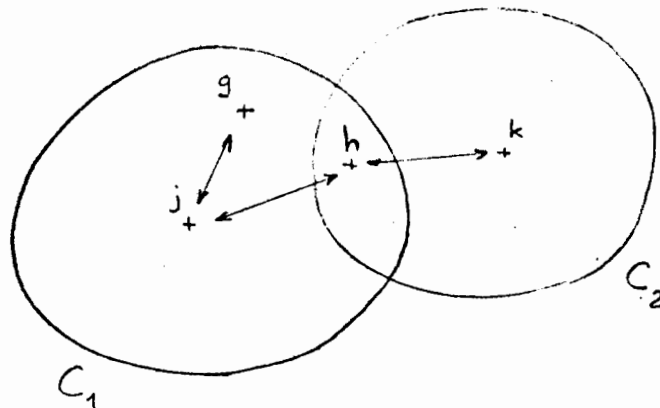
Una clase de estados C en una cadena de Markov será una clase comunicante si, para algún estado j , $C=C(j)$.

Teorema

Si C_1 y C_2 son dos clases comunicantes, entonces: $C_1=C_2$ ó $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Si C_1 y C_2 tienen un estado en común h , sean j y k 2 estados tales que $C_1=C(j)$ y $C_2=C(k)$.

Para probar que $C_1=C_2$ basta con probar que $C(j) \subset C(k)$ ya que entonces $C(k) \subset C(j)$. Sea $g \in C(j)$, ya que $g \leftrightarrow j$ y $h \leftrightarrow j$ se tiene $g \leftrightarrow h$ pero $h \leftrightarrow k$ por tanto $g \leftrightarrow k$ y g pertenece a $C(k)$, lo mismo para cualquier estado g .



Teorema

El conjunto de estados S de una cadena de Markov puede escribirse como la unión de una familia finita o infinita denumerable C_r de subconjuntos mutuamente exclusivos.

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r \cup \dots \quad \text{con } C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{para } i \neq j$$

donde cada C_r es una clase comunicante o un estado "sin retorno".

Para mostrar lo anterior, se escoge un estado j_1 y se supone $C_1 = C(j_1)$, ó $\{j_1\}$ si j_1 es un estado "sin retorno". Entonces escogiendo j_2 fuera de C_1 , sea $C_2 = C(j_2)$, ó $\{j_2\}$ si j_2 es "sin retorno". C_2 y C_1 son mutuamente exclusivos según lo que se indicó en el teorema anterior. Procediendo reiteradamente en la forma anterior se llega a la descomposición deseada.

Una clase de estados no vacía se llama "cerrada" si ningún estado fuera de la clase es accesible desde un estado de la clase. En caso contrario, la clase se llama "no cerrada" o "abierta".

Ejemplo 2.4

Sea el espacio de estados $S = \{1,2,3,4\}$. Se consideran cuatro cadenas con matrices de transición:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Se tendrá respectivamente:

1. 1 clase comunicante cerrada: $\{1\}$ y 2 clases comunicantes abiertas: $\{2\}$ y $\{3,4\}$
2. 1 clase comunicante cerrada: $\{1\}$ y 3 estados sin retorno: $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$
3. 1 clase comunicante cerrada $\{1,2,3\}$ y un estado sin retorno
4. 1 clase comunicante única

2.3 Tiempos de ocupación

Los estados de una cadena de Markov de parámetro discreto pueden generalmente dividirse en estados que el proceso visita un número infinito de veces y otros que visita sólo un número finito de veces. Para clasificar según este criterio los estados de una cadena se introduce el concepto de "tipo de ocupación" $N_i(n)$ de un estado i .

$N_i(n)$ será el número de veces que se visita al estado i en n pasos de la cadena (variable aleatoria)

$$N_i(n) = \text{No. de enteros } v \text{ tales que } 1 \leq v \leq n \text{ y } X_v = i$$

$N_i(\infty)$ será el "tiempo total de ocupación" del estado i :

$$N_i(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_i(n)$$

Si se definen las variables aleatorias $Z_i(n)$ tales que:

$$Z_i(n) = 1 \text{ si } X_n = i$$

$$Z_i(n) = 0 \text{ si } X_n \neq i$$

Se tiene:

$$N_i(n) = \sum_{m=1}^n Z_i(m)$$

y

$$N_i(\infty) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_i(m)$$

Se observa que si la cadena se encuentra inicialmente en un estado j , se tiene:

$$E\{N_i(\infty) | X_0=j\} = \sum_{m=1}^{\infty} E\{Z_i(m) | X_0=j\}$$

$$E\{N_i(\infty) | X_0=j\} = \sum_{m=1}^{\infty} |1 \times p_{j,i}(m) + 0|$$

$$E\{N_i(\infty) | X_0=j\} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{j,i}(m)$$

También es común el concepto de tiempo total de ocupación "incluyendo el estado inicial", el cual se define como sigue

$$M_i(\infty) = N_i(\infty) \quad \text{si } j \neq i$$

$$M_i(\infty) = N_i(\infty) + 1 \quad \text{si } j = i$$

siendo j el estado inicial

La esperanza del tiempo de ocupación así definido es

$$r_{j,i} = E\{M_i(\infty) | X_0=j\} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{j,i}(m)$$

con la convención de que $p_{j,i}(0) = 1$ si $i = j$
 $= 0$ si $i \neq j$

La matriz R de los tiempos medios de ocupación $r_{i,j}$ recibe el nombre de "matriz potencial".

Los elementos de esta matriz pueden calcularse en la forma indicada en el inciso 2.10.

2.4 Probabilidades asociadas al número de visitas a un estado

En la práctica resultan de interés las probabilidades siguientes:

- Prob. de primera visita: $f_{j,k}$: probabilidad de visitar en algún paso el estado k dado que inicialmente se encontraba el proceso en el estado j .

$$f_{j,k} = P[N_k^{(\infty)} - N_k^{(m)} > 0 | X_m = j]$$

- Prob. de No. ∞ de visitas: $g_{j,k}$: probabilidad de visitar un número infinito de veces el estado k dado que inicialmente el proceso se encontraba en el estado j .

$$g_{j,k} = P[N_k^{(\infty)} - N_k^{(m)} = \infty | X_m = j]$$

- Prob. de la visita en n pasos: $f_{j,k}^{(n)}$: probabilidad de que el primer paso de j a k ocurra exactamente en n pasos.

Se tiene:
$$f_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,k}^{(n)}$$

Para probar lo anterior, se define el evento:

$$V_k = [X_n = k \text{ para algún entero } n > 0]$$

V_k es la unión de los eventos mutuamente exclusivos

$$\{V_k(n), n=1, 2, \dots\}, \text{ por tanto:}$$

$$f_{j,k} = P[V_k | X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} P[V_k(n) | X_0 = j] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,k}^{(n)}$$

Las probabilidades de transición $p_{j,k}^{(n)}$ y las de primera visita en cierto número de pasos están ligadas por la relación que si-

gue:

Teorema

Para cualesquiera estados j y k y entero $n \geq 1$

$$p_{j,k}(n) = \sum_{m=1}^n f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m)$$

con, nuevamente, la convención:

$$p_{j,k}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Para probar la igualdad anterior, se escribe:

$$\begin{aligned} p_{j,k}(n) &= P[X_n = k | X_0 = j] = \sum_{m=1}^n P[X_n = k, X_m = k, X_q \neq k \text{ para } q=1, \dots, m-1 | X_0 = j] \\ &= \sum_{m=1}^n P[X_n = k | X_m = k] P[X_m = k, X_q \neq k \text{ para } q=1, \dots, m-1 | X_0 = j] \\ &\quad \text{(Markov)} \end{aligned}$$

$$f_{j,k}(n) = P[V_k(n) | X_0 = j]$$

donde, para cualquier estado k y entero $n=1,2,\dots$, el evento

$V_k(n)$ se define como:

$$V_k(n) = [X_n = k, X_m \neq k, \text{ para } m=1,2,\dots,n-1]$$

Es posible observar que:

$$f_{j,k}(n) = p_{j,k}(n) = p_{j,k} \quad \text{si } n = 1$$

$$f_{j,k}(n) = \sum_{i \neq k} p_{j,i} f_{i,k}(n-1) \quad \text{si } n \neq 1$$

Con notación matricial, para un estado k dado, el vector de las

$f_{j,k}(n)$ será:

$$\{f_{j,k}(n)\} = M_k \{f_{i,k}(n-1)\}$$

donde M_k es la matriz obtenida a partir de la matriz de transición P sustituyendo la columna k por ceros

Ejemplo 2.5

Volviendo al ejemplo 2.1 (cadena de 2 estados) se tendrá:

$$f_{0,0}(1) = p_{0,0} = 1-p$$

$$f_{0,0}(n) = p_{0,1} \{p_{1,1}\}^{n-1} p_{1,0}, \quad n \geq 2 = p(1-q)^2 q$$

$$f_{0,1}(n) = \{p_{0,0}\}^{n-2} p_{0,1}, \quad n \geq 1 = (1-p)^{n-1} p$$

$$f_{1,0}(n) = \{p_{1,1}\}^{n-1} p_{1,0}, \quad n \geq 1 = (1-1)^{n-1} q$$

$$f_{1,1}(1) = p_{1,1} = 1-q$$

$$f_{1,1}(n) = p_{1,0} \{p_{0,0}\}^{n-2} p_{0,1}, \quad n \geq 2 = q(1-p)^{n-2} p$$

Teorema

Para cualesquiera estados j y k :

$$f_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{j,k}(n)$$

$$p_{j,k}(n) = \sum_{m=1}^n f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m)$$

Ejemplo 2.6

Se considera la cadena homogénea con matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 3/5 & 1/15 \end{bmatrix}$$

Se calcularán las probabilidades $f_{j,k}(n)$ para $k = 3$ (probabilidades de primera visita al estado 3 en n pasos)

El vector $\{f_{j,3}(1)\}$ es la tercera columna de la matriz P .

Para $m \geq 2$, se tiene:

$$\{f_{j,3}(m)\} = M_3 \{f_{j,3}(n-1)\}$$

donde M_3 es una matriz obtenida a partir de P sustituyendo la columna 3 por ceros (inciso 2.3):

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

y se tiene

$$\{f_{j,3}(1)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/15 \end{bmatrix}, \{f_{j,3}(2)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/18 \\ 1/5 \end{bmatrix}, \{f_{j,3}(3)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/108 \\ 1/30 \end{bmatrix}, \{f_{j,3}(4)\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/648 \\ 1/180 \end{bmatrix}$$

y en forma general:

$$\begin{aligned} f_{1,3}(n) &= 0 & \text{para } n &= 1, 2, \dots \\ f_{2,3}(n) &= 1/3(1/6)^{n-1} & \text{para } n &= 1, 2, \dots \\ f_{3,3}(n) &= 3/5(1/6)^{n-2}(1/3) & \text{para } n &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Así, si se empieza en el estado 1, el proceso nunca visitará 3.

Empezando en 2, la probabilidad de que el proceso visite 3 por primera vez en el paso n es $(1/3)(1/6)^{n-1} = f_{2,3}(n)$

La probabilidad de no pasar nunca por 3 empezando en 2 es por tanto:

$$1 - f_{2,3} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_{2,3}(n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 1/3 (1/6)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1-1/6} = 1 - 2/5 = 3/5$$

En la misma forma, la probabilidad de no regresar a 3 en algún paso anterior después de salir de 3 es:

$$\begin{aligned} 1 - f_{3,3} &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} f_{3,3}(n) \\ &= 1 - \sum_{n=2}^{\infty} 3/5 (1/6)^{n-2} (1/3) = 1 - 1/5 = 4/5 \end{aligned}$$

Teorema

Para cualesquier estados j y k :

$$g_{j,k} = f_{j,k} g_{k,k}$$

$$g_{k,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{kk})^n$$

La primera identidad equivale a escribir que la probabilidad de visitar un número infinito de veces el estado k dado que inicialmente la cadena se encontraba en el estado j es igual a la probabilidad de pasar alguna vez por el estado k y volver a pasar por el mismo un número infinito de veces. Puede, por tanto, considerarse evidente.

La segunda identidad puede establecerse como sigue:

si $n \geq 1$, con un razonamiento similar al anterior:

$$P[N_k(\infty) \geq n | X_0 = k] = \sum_{m=1}^{\infty} f_{k,k}^{(m)} P[N_k(\infty) - N_k(m) \geq n-1 | X_m = k]$$

$$\text{pero: } P[N_k(\infty) - N_k(m) \geq n-1 | X_m = k] = P[N_k(\infty) \geq n-1 | X_0 = k]$$

$$P[N_k(\infty) \geq n | X_0 = k] = P[N_k(\infty) \geq n-1 | X_0 = k] \sum_{m=1}^{\infty} f_{k,k}^{(m)}$$

por tanto, tomando en cuenta que $\sum_{m=1}^{\infty} f_{k,k}^{(m)} = f_{k,k}$

y el hecho de que $P[N_k(\infty) \geq 1 | X_0 = k] = f_{k,k}$ (por definición)

se tiene por recurrencia:

$$P[N_k(\infty) \geq n | X_0 = k] = (f_{k,k})^n; \quad n \geq 1$$

$$P[N_k(\infty) = \infty | X_0 = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[N_k(\infty) \geq n | X_0 = k]$$

$$P[N_k(\infty) = \infty | X_0 = k] = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{k,k})^n$$

con lo que queda demostrado el teorema.

El teorema tiene como corolario que, para cualquier estado k :

$$g_{k,k} = 1 \text{ o a } 0$$

además:

$$g_{k,k} = 1 \text{ si y solo si } f_{k,k} = 1$$

$$g_{k,k} = 0 \text{ si y solo si } f_{k,k} < 1$$

Es posible demostrar por otra parte* que:

$$f_{k,k} < 1 \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) < \infty$$

$$f_{k,k} = 1 \text{ si y solo si } \sum_{n=1}^{\infty} p_{k,k}(n) = \infty$$

(la probabilidad de primera visita a un estado k es igual a 1 si y sólo si la esperanza del tiempo de ocupación de este estado es infinita).

*Parzen, p. 214

2.5 Estados y clases recurrentes y no recurrentes

Se dice que un estado k es "recurrente" si $f_{k,k} = 1$ es decir si la probabilidad de que la cadena regrese al estado k en algún paso posterior es igual a 1.

Un estado k es "no recurrente" o "transitorio" si $f_{k,k} < 1$.

Una clase C de estados se llama "recurrente" si todos los estados de C lo son.

Teorema

Si C es una clase comunicante de estado en una cadena de Markov, entonces C es recurrente o no recurrente.

En otras palabras, si un estado de C es recurrente entonces todos los estados de C son recurrentes, lo mismo si un estado es transitorio.

Para demostrar lo anterior se mostrará que si $f_{k,k} = 1$ y $j \leftrightarrow k$ entonces $f_{j,j} = 1$ o, en otra forma:

si $\sum_n p_{k,k}^{(n)} = \infty$ y si $j \leftrightarrow k$ entonces $\sum_n p_{j,j}^{(n)} = \infty$ (veáse el teorema del inciso anterior).

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov se deriva que para cualesquiera enteros N , n , y M :

$$p_{jj}^{(N+n+M)} = \sum_{a,b} p_{j,a}^{(N)} p_{a,b}^{(n)} p_{b,j}^{(M)} \geq p_{j,k}^{(N)} p_{k,k}^{(n)} p_{k,j}^{(M)}$$

y por tanto::

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(N+n+M)} \geq p_{j,k}^{(N)} p_{k,j}^{(M)} \sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}^{(n)}$$

ahora escogiendo N y M tales que $p_{j,k}^{(N)} > 0$ y $p_{k,j}^{(M)} > 0$ se ve que, ya que la serie de la derecha es divergente, también lo es la de la izquierda.

Teorema

Una clase comunicante recurrente es cerrada. Una clase comunicante cerrada no recurrente contiene un número infinito de estados.

Para demostrar que una clase recurrente es una clase cerrada basta con probar que

$$\text{si } f_{k,k} = 1 \text{ y } k \rightarrow j, \text{ entonces } f_{j,k} = 1 \text{ y } k \leftrightarrow j$$

los únicos estados accesibles desde un estado recurrente son estados que comunican con él.

Para demostrar lo anterior se usarán las identidades siguientes:

$$g_{k,k} = \sum_j p_{k,j}^{(n)} g_{j,k}$$

$$(1 - g_{k,k}) = \sum_j p_{k,j}^{(n)} (1 - g_{j,k})$$

válidas para cualquier estado k y entero n .

En el caso de un estado recurrente $g_{k,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{k,k})^n = 1$ por

tanto, $f_{j,k} = 1$ puesto que $g_{j,k} = f_{j,k}g_{k,k}$ (inciso 2.4).

Para mostrar que una clase comunicante no recurrente cerrada es infinita se observa que, para cualquier estado j :

$$g_{j,k} = 0 \text{ si } k \text{ es no recurrente}$$

es decir que si un estado k no es recurrente, entonces la probabilidad es uno de que sólo será visitado un número finito de veces a partir de un estado j . Por tanto, si C es una clase comunicante cerrada no recurrente, debe abarcar un número infinito de estados ya que la probabilidad es uno de que la cadena solo se quede un número finito de pasos en cualquier conjunto de estados no recurrentes.

Torema

Sea C una clase comunicante cerrada y k y j estados de C tal que $j \neq k$, se tiene entonces que:

$$f_{j,k} = 1$$

Para demostrar esto, es posible, por una parte, utilizar el teorema anterior (condición necesaria) y, por otra, verificar que

$$f_{k,k} = p_{k,k} + \sum_{\substack{j \in C \\ j \neq k}} p_{k,j} f_{j,k}$$

si $f_{j,k} = 1$ se tendrá :

$$f_{k,k} = p_{k,k} + \sum_{\substack{j \in C_k \\ j \neq k}} p_{k,j} = 1 \quad (\text{condición suficiente})$$

Como consecuencia de los teoremas anteriores es posible complementar el teorema de la descomposición del conjunto de estados S en clases comunicantes: Siempre será posible escribir:

$$S = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r \cup \dots$$

donde C_r será:

- a) Una clase cerrada recurrente
- b) Una clase cerrada no recurrente
- c) Una clase no cerrada, no recurrente

las clases de tipo b) solo existen si la cadena es infinita. La descomposición podrá incluir también, como se vió anteriormente, unos estados sin retorno.

2.6 Probabilidades de primera visita (cálculo)

La probabilidad de primera visita $f_{j,k}$ (de que una cadena de Markov que sale de un estado j llegue en algún paso a visitar el estado k) se determina en diversas formas según que j y k sean o no recurrentes

Dos casos son triviales:

- a) j y k recurrentes

$$f_{j,k} = 1 \text{ si y solo si } j \leftrightarrow k$$

$$f_{j,k} = 0 \text{ en caso contrario}$$

b) j recurrente, k no recurrente

$$f_{j,k} = 0 \text{ (no puede existir comunicaci6n)}$$

Otro caso tiene una soluci6n sencilla:

c) j no recurrente, k no recurrente

$$f_{j,k} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n)}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}(n)} = \begin{cases} \frac{r_{j,k}}{r_{k,k}} & \text{si } j \neq k \text{ (inciso 2.3)} \\ \frac{r_{kk}^{-1}}{r_{kk}} & \text{si } j = k \end{cases}$$

Lo anterior puede demostrarse tomando en cuenta que (inciso 2.4):

$$p_{j,k}(n) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m)$$

$$\text{con la convenci6n de que } p_{j,k}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

sumando sobre $m = 1, 2, \dots$ se obtiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n f_{j,k}(m) p_{k,k}(n-m)$$

invirtiendo el orden de las sumatorias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} f_{j,k}^{(m)} p_{k,k}^{(n-m)}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}^{(m)} \sum_{n=m}^{\infty} p_{k,k}^{(n-m)}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} f_{j,k}^{(m)} \sum_{v=0}^{\infty} p_{k,k}^{(v)}$$

$$= f_{j,k} \sum_{v=0}^{\infty} p_{k,k}^{(v)}$$

$$f_{j,k} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{j,k}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{k,k}^{(n)}}$$

El último caso es el siguiente:

d) j no recurrente, k recurrente

Sea T el conjunto de los estados no recurrentes (transitorio)

Teorema

Si k es un estado recurrente, entonces el conjunto de probabilidades de primera visita $\{f_{j,k}, j \in T\}$ satisface el sistema de ecuaciones siguiente:

$$f_{j,k} = \sum_{i \in T} p_{j,i} f_{i,k} + \sum_{i \in C} p_{j,i}; \quad j \in T$$

donde C es el conjunto de los estados que comunican con k.

Para mostrar lo anterior, podemos salir de la identidad siguiente:

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} P[X_1=i | X_0=j] P[N_k(\infty) > 0 | X_2=i]$$

por tanto:

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} p_{j,i} f_{i,k}$$

pero

$$f_{i,k} = 1 \text{ si } i \in C$$

$$= 0 \text{ si } i \notin C \text{ ni } i \notin T \text{ (otras clases recurrentes)}$$

El teorema queda demostrado.

Se observa que si k_1 y k_2 son estados comunicantes recurrentes entonces para cualquier estado j no recurrente:

$$f_{j,k_1} = f_{j,k_2}$$

esto se deduce del teorema anterior (solución idéntica $\forall k$), el cual puede entonces volverse a escribir como sigue:

$$f_{j,C} = \sum_{i \in T} p_{j,i} f_{i,C} + \sum_{i \in C} p_{j,i} j \in T$$

para que este sistema tenga solución única es posible demostrar que el sistema homogéno:

$$f_{j,C} = \sum_{i \in T} p_{j,i} f_{i,C} j \in T$$

debe tener como solución única:

$$f_{j,k} = 0$$

2.7 Estados absorbentes

Un estado k se llamará absorbente si $p_{k,k} = 1$ de tal forma que la cadena que visita k permanece ahí indefinidamente. Un estado absorbente es recurrente. En el caso de estados absorbentes las probabilidades de primer paso reciben el nombre de probabilidad de absorción.

Estas probabilidades satisfacen el sistema siguiente:

$$f_{j,k} = \sum_{i \in S} p_{j,i} f_{i,k}; \quad j \in S \quad (\text{ver arriba})$$

con las condiciones

$$f_{k,k} = 1$$

$$f_{j,k} = 0 \text{ si } j \text{ es recurrente y } j \neq k.$$

es decir

$$f_{j,k} = \sum_{i \in T} p_{j,i} f_{i,k} + p_{j,k}$$

Ejemplo 2.7

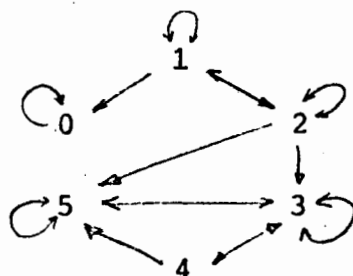
Se considera una cadena de markov con espacio de estados

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

se determinará cuales estados son recurrentes y cuales son transitorios.

El esquema de comunicación entre estados es el siguiente:



Se observa que 0 es un estado absorbente y por tanto recurrente. Por otra parte $\{3, 4, 5\}$ es una clase comunicante cerrada y por tanto recurrente ya que sólo tiene un número finito de estados.

Los estados 1 y 2 forman una clase comunicante abierta y por tanto no recurrente. Los estados 1 y 2 son transitorios.

2.8 Cadenas de Markov recurrentes y no recurrentes irreducibles

Una cadena de Markov se llama "irreducible" si todos los pasos de estados de la cadena comunican entre si de tal forma que la cadena está constituida por una clase comunicante única. Una clase comunicante cerrada puede considerarse como una cadena de Markov irreducible. Una cadena irreducible es

recurrente (no-recurrente) si cada estado de la cadena es recurrente (no-recurrente).

2.9 Tiempos medios de absorción

Si se considera una cadena de Markov con espacio de estados S y un conjunto de estados no recurrentes T , se llama tiempo antes de absorción a la variable aleatoria N' , que representa el tiempo que la cadena pasa en los estados no recurrentes:

$$N' = \sum_{i \in T} N_i(\infty)$$

$N_i(\infty)$ número de veces que la cadena pasa por i en un número infinito de pasos ("tiempo de ocupación")

Se llama tiempo de absorción a la variable aleatoria:

$$N = N' + 1$$

y su esperanza:

$$m_j = E\{N | X_0 = j\} = 1 + E\{N' | X_0 = j\}$$

será el "tiempo medio de absorción"

El tiempo medio de absorción es, por tanto, igual a la suma de los tiempos medios de ocupación de los estados transitorios más uno (el paso adicional requerido para pasar a los estados recurrentes)

$$m_j = 1 + \sum_{i \in T} E\{N_i(\infty) | X_0 = j\}$$

y, de acuerdo con el inciso 2.3

$$m_j = 1 + \sum_{i \in T} \sum_{n=1}^{\infty} p_{j,i}^{(n)} = \sum_{i \in T} \sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}^{(n)}$$

En términos de los tiempos medios de ocupación "incluyendo el estado inicial" (inciso 2.3) el tiempo medio de absorción se expresa, por tanto, simplemente como:

$$m_j = \sum_{i \in T} r_{i,j}$$

Los tiempos de absorción $\{m_j, j \in T\}$ pueden también calcularse resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$m_j = 1 + \sum_{k \in T} p_{j,k} m_k, \quad j \in T$$

para mostrar que m_j satisface este sistema de ecuaciones, es posible observar que:

$$m_j = E\{N | X_0 = j\} = \sum_{k \in S} p_{j,k} E\{N | X_1 = k\}$$

$$m_j = \sum_{k \in T} p_{j,k} \{1 + E\{N | X_0 = k\}\} + \sum_{k \in T} c p_{j,k}$$

(prob. de absor. en 1 paso)

$$m_j = 1 + \sum_{k \in T} p_{j,k} m_k$$

En una cadena finita el tiempo de absorción es finito y el sistema de ecuaciones anterior tiene solución única. En una cadena de Markov infinita, los tiempos medios de absorción pueden ser infinitos. Sin embargo, puede demostrarse que si los tiempos de absorción son finitos con probabilidad 1, entonces los tiempos medios de absorción son las soluciones únicas del sistema mencionado.

2.10 Planteamiento matricial para el cálculo de tiempos medios de ocupación y de absorción

Los tiempos medios de ocupación y de absorción pueden calcularse en forma sistemática recurriendo a un planteamiento matricial

a) Obtención de la matriz potencial

Los elementos $r_{i,j}$ de la matriz potencial R definida en el inciso 2.3 pueden obtenerse como sigue:

- Si i es un estado recurrente, entonces $q_{i,i} = 1$ (inciso 2.4)

y obviamente
$$\begin{cases} r_{j,i} = \infty & \text{si } i \text{ es accesible desde } j \text{ } (f_{ji} > 0) \\ r_{j,i} = 0 & \text{si } i \text{ no es accesible desde } j \text{ } (f_{ji} = 0) \end{cases}$$

- Si i es un estado transitorio y el estado j es recurrente, entonces no existe comunicación entre ambos estados y:

$$r_{j,i} = 0$$

- El único caso no trivial se presenta cuando i y j son ambos transitorios.

En este caso, las $r_{i,j}$ pueden obtenerse como sigue:

Si T es el conjunto de estados transitorios, supuesto finito se definen las matrices Q y S obtenidas a partir de la matriz de transición $P = \{p_{j,i}\}$ y de la matriz potencial $R = \{r_{j,i}\}$ eliminando los renglones y columnas correspondientes a estados recurrentes, es decir

$$Q = \{p_{j,i} : i, j \in T\}$$

y

$$S = \{r_{j,i} : i, j \in T\}$$

Si se reordenan los estados de tal forma que los estados transitorios vengán después de los recurrentes, la matriz de transición P puede escribirse como:

$$P = \begin{pmatrix} K & 0 \\ L & Q \end{pmatrix}$$

donde K y L son unas submatrices residuales.

Para un número de pasos dado m la matriz de transición correspondiente será:

$$p^n = \begin{pmatrix} K^n & 0 \\ L_n & Q^n \end{pmatrix}$$

donde K^n y Q^n son las enésimas potencias de K y Q y L_n una nueva submatriz residual ($\neq L^n$)

Tomando en cuenta que:

$$r_{j,i} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{j,i}^{(n)}$$

es decir que:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} K^n & 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} L_n & \sum_{n=0}^{\infty} Q^n \end{bmatrix}$$

se observa que

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} Q^n = I + Q + Q^2 + \dots = (I - Q)^{-1}$$

Esta matriz recibe frecuentemente el nombre de matriz fundamental.

b) Obtención de los tiempos medios de absorción

Tomando en cuenta que (inciso 2.9) $m_j = \sum r_{i,j}$

el vector m de los tiempos medios de absorción se obtendrá simplemente multiplicando la matriz fundamental por un vector columna cuyos elementos son todos iguales a 1.

$$\{m\} = S^{-1} \mathbf{1}$$

Ejemplo 2.8

Sea una cadena de Markov con matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los estados 1, 2, 3 forman una clase recurrente de estados positivos.

Los estados 4, 5 forman otra clase del mismo tipo.

Los estados 6, 7, 8 son transitorios, desde estos estados solamente se puede pasar a 1, 2 o 3.

En este caso la submatriz de transición correspondiente a estados transitorios es:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz fundamental S es por tanto

$$S = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.2 \\ -0.6 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{66} \begin{bmatrix} 125 & 75 & 15 \\ 15 & 75 & 15 \\ 75 & 45 & 75 \end{bmatrix}$$

y, tomando en cuenta que para estados recurrentes el tiempo medio de ocupación es infinito es posible formar la matriz potencial completa:

$$R = \{r_{i,j}\} = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & \infty & 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \frac{125}{66} & \frac{75}{66} & \frac{15}{66} \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \frac{15}{66} & \frac{75}{66} & \frac{15}{66} \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 0 & \frac{75}{66} & \frac{45}{66} & \frac{75}{66} \end{bmatrix}$$



DET 11

Los tiempos medios de absorción (paso de los estados transitorios a los estados recurrentes) pueden calcularse como sigue:

2.11 Tiempos medios de primera visita y de recurrencia

Si se considera una cadena de Markov irreducible con espacio de estados C ; para cada par de estados j y k de C la secuencia de probabilidades de primera visita condicionales $\{f_{j,k}(n), n = 1, 2, \dots\}$ constituye una distribución de probabilidades cuya esperanza:

$$m_{j,k} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{j,k}(n)$$

se llama "tiempo medio de primera visita desde j a k " si $j \neq k$ y "tiempo medio de recurrencia" si $j=k$.

Dado un estado k , un tiempo medio de primera visita $m_{j,k}$ ($j \neq k$) puede ser considerado como un tiempo medio de absorción en una nueva cadena obtenida a partir de la anterior transformación de k en un estado absorbente. En forma más precisa si $P = \{p_{j,k}\}$ es la matriz de transición original se definirá una nueva matriz $P' = \{p'_{ij}\}$

La nueva cadena tiene el mismo comportamiento que la inicial antes de que ocurra la primera visita en k . Es por tanto válida la relación siguiente (inciso 2.8).

$$m_{j,k} = 1 + \sum_{i \neq j} p_{k,i} m_{i,k}$$

Los tiempos de recurrencia en cadenas irreducibles recurrentes podrán calcularse a partir de los tiempos de primera visita como:

$$m_{k,k} = 1 + \sum_{i \neq k} p_{k,i} m_{i,k}$$

ya que

$$m_{k,k} = p_{k,k} + \sum_{i \neq k} p_{k,i} \{1 + m_{i,k}\}$$

(se queda en k en 1 paso) (sale de k en el primer paso)

Se dice que un estado recurrente k es positivo si su tiempo medio de recurrencia $m_{k,k}$ es finito y que es nulo si su tiempo medio de recurrencia es infinito.

2.12 Comportamiento de cadenas de Markov a largo plazo.

Distribuciones estacionarias

En este inciso se analizará el comportamiento de las secuencias $p_{i,j}(n)$ para n grande (probabilidades de transición en n pasos) varios casos son triviales:

- Si j es transitorio, obviamente $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0$
- Si i y j son recurrentes pero pertenecen a clases diferentes entonces $p_{i,j}(n) = 0$ para cualquier valor de n y $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = 0$

El caso más interesante se presenta cuando i y j pertenecen a la misma clase recurrente, caso a partir del cual también será posible tratar el último caso posible: i transitorio y j recurrente. Se supondrá, en lo que sigue que i y j pertenecen a una cadena de Markov irreducible.

Una dificultad que se presenta inmediatamente es la de las cadenas periódicas. Se dice que los estados de una cadena tienen una periodicidad d , si existe un entero $n_1(i, j)$, tal que $p_{i,j}(n) = 0$ para todas las n que no son del tipo

$$n_1(i, j) + rd \quad r \geq 0$$

En general la subsecuencia de $p_{i,j}(n)$ correspondiente a los números anteriores tiene un límite diferente de cero. La secuencia completa $p_{i,j}(j)$ no tiene límite único sino que tiende hacia cero o hacia un valor positivo dependiendo de n ; en este caso se - -

estudia solamente el límite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n_1(i,j)+rd)}$$

2.12.1 Distribuciones estacionarias

Si existe un conjunto de números π_i asociados a cada estado i de la cadena C , no negativos, sumando uno y tales que

$$\pi_k = \sum_{j \in C} \pi_j p_{j,k}, \quad k \in C$$

donde la cadena C se supone irreducible entonces π_i se llama distribución estacionaria

Se observa en este caso que:

$$\begin{aligned} \sum_j \pi_j p_{j,k}^{(2)} &= \sum_j \pi_j \sum_l p_{j,l} p_{l,k} \\ &= \sum_l \left(\sum_j \pi_j p_{j,l} \right) p_{l,k} \\ &= \sum_l \pi_l p_{l,k} = \pi_k \end{aligned}$$

En la misma forma es posible establecer por inducción que para cualquier n :

$$\sum_j \pi_j p_{j,k}^{(n)} = \pi_k$$

2.12.2 Convergencia hacia una distribución estacionaria

A continuación se enunciarán varios teoremas que permiten definir el comportamiento a largo plazo de una cadena irreducible. Omitiremos las demostraciones (véase, Hoel p.63 y siguientes).

Teorema 1. Una cadena de Markov irreducible positiva tiene una distribución estacionaria única, dada por:

$$\pi_k = \frac{1}{m_{k,k}} \quad (k: \text{ estado de la cadena})$$

donde $m_{k,k}$ es el tiempo medio de recurrencia del estado k
(inciso 2.11)

Teorema 2. Si una cadena de Markov es positiva recurrente irreducible con distribución estacionaria π_k , es posible establecer lo siguiente:

a) Si la cadena no es periódica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,j}(n) = \pi_j$$

b) Si la cadena es periódica con periodo d , entonces, para cada par de estados (i,j) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_{i,j}(n_1(i,j) + rd) = d\pi_j$$

Ejemplo 2.9

Se analizará el comportamiento asintótico de las probabilidades de transición de la cadena con matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Se puede hacer una partición del conjunto de estados de esta cadena en 3 clases:

$$C = \{1, 2\}$$

$$C' = \{3, 4, 5\}$$

$$T = \{6, 7\}$$

donde C y C' son clases aperiódicas recurrentes y T es el conjunto de estados transitorios.

Las probabilidades estacionarias π_1, π_2 correspondientes a la clase C se obtienen resolviendo el sistema:

$$1/3 \pi_1 + 1/2 \pi_2 = \pi_1$$

$$2/3 \pi_1 + 1/2 \pi_2 = \pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

que da : $\pi_1 = 3/7$, $\pi_2 = 4/7$

Las probabilidades estacionaria (π_2 , π_4 , π_5) correspondientes a C' se obtienen resolviendo:

$$1/3 \pi_3 + 1/2 \pi_4 + 1/6 \pi_5 = \pi_3$$

$$1/2 \pi_3 + 1/6 \pi_4 + 1/3 \pi_5 = \pi_4$$

$$1/6 \pi_3 + 1/3 \pi_4 + 1/2 \pi_5 = \pi_5$$

$$\pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$$

que da $\pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = 1/3$

Las probabilidades de absorción en C y C' satisfacen respectivamente los sistemas ()

$$f_{6,C} = 1/3 + 1/3 f_{7,C}$$

$$f_{7,C} = 1/2 + 1/2 f_{7,C}$$

de donde : $f_{6,C} = 2/3$ y $f_{7,C} = 1$

y

$$f_{6,C'} = 1/3 + 1/3 f_{7,C'}$$

$$f_{7,C'} = 1/2 + f_{7,C'}$$

de donde : $f_{6,C'} = 1/3$ y $f_{7,C'} = 0$

Presentando los límites obtenidos en forma de matriz se obtiene:

$$m = S1 = \begin{bmatrix} \frac{215}{66} \\ \frac{105}{66} \\ \frac{195}{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.26 \\ 1.59 \\ 2.95 \end{bmatrix}$$

Tomando en cuenta el inciso 2.6 es posible calcular además la matriz $F = \{f_{i,j}\}$ de probabilidades de primer paso, observando que si i y j son estados transitorios (caso c del inciso 2.6)

$$f_{i,j} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j}^{(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(n)}} = \frac{r_{i,j}}{r_{j,j}} \quad \text{si } i \neq j$$

$$= 1 - \frac{1}{r_{j,j}} \quad \text{si } i = j$$

$$F = \{f_{i,j}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.472 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.12 & 0.12 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.60 & 0.60 & 0.12 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0.60 & 0.60 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} 3/7 & 4/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/7 & 8/21 & 1/9 & 1/9 & 1/9 & 0 & 0 \\ 3/7 & 4/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. CADENAS DE PARAMETRO CONTINUO

3.1 Introducción

En lo referente a cadenas de parámetro discreto la atención se ha concentrado en los cambios de estado sin que se de importancia a los tiempos en los que ocurren estos cambios o suponiendo que se presentan en tiempos deterministas. En muchos casos, para que un modelo markoviano sea de utilidad debe tomar en cuenta el carácter aleatorio de los tiempos de cambios de estados. Se recurre entonces a cadenas de parámetro continuo cuyas principales características y propiedades se discuten brevemente a continuación.

3.2 Funciones de probabilidad de transición

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso estocástico con espacio de estados numerable S y parámetro continuo t , este proceso será una cadena de Markov de parámetro continuo si

$$P\{X(s+t) = j | X(u), u \leq s\} = P\{X(s+t) = j | X(s)\}$$

Cuando la probabilidad condicional anterior es independiente de s , se dice que la cadena es homogénea. La función:

$$P_{j,k}(t) = P\{X(s+t) = k | X(s) = j\}$$

es una función de probabilidad de transición y la familia de matrices

$$P(t) = \{P_{i,j}(t)\}$$

se suele llamar "función de transición"

Se observa que:

a) $P_{j,k}(t) \geq 0$

- Si existe $t_1 : P_{j,k}(t_1) > 0$ k es accesible desde j :
 $j \rightarrow k$

- Si j es accesible desde k ; j y k comunican $j \leftrightarrow k$

b) $\sum_{k \in S} P_{i,j}(t) = 1$

c) $\sum_{k \in S} P_{i,k}(s) P_{k,j}(t) = P_{i,j}(s+t)$

La última identidad es la ecuación de Chapman-Kolmogorov para el caso del parámetro continuo. La demostración es semejante a la del inciso 2.1.

Una cadena de Markov se llama también en este caso "irreducible" si todos sus estados comunican.

Ejemplo 3.1

El proceso de Poisson puede ser considerado como una cadena de Markov de parámetro continuo.

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson

$$P[X(s+t) = j | X(u), u \leq s] = P[X(s+t) = j | X(s)]$$

ya que el proceso de Poisson tiene incrementos independientes.

El proceso de Poisson es por tanto una cadena de Markov de parámetro continuo.

Las funciones de probabilidad de transición están definidas por:

$$P[X(s+t) = j | X(s) = i] = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i \\ \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

La función de transición es la familia de matrices:

$$P(t) = \begin{bmatrix} P_0(t) & P_1(t) & P_2(t) & \dots \\ 0 & P_0(t) & P_1(t) & \dots \\ 0 & 0 & P_0(t) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}$$

donde $P(t)$ es la distribución de Poisson con parámetro λt :

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

Las cadenas de Markov usualmente consideradas presentan generalmente la propiedad de continuidad de sus funciones de probabilidad de transición para $t = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} P_{j,k}(t) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Puede mostrarse que para cada par de estados j y k , $P_{j,k}(t)$ es una función uniformemente continua de $t > 0$ y que además es siempre nula o siempre positiva. En una cadena de Markov irreducible $P_{j,k}(t)$ será por tanto > 0 para cualquier tiempo $t > 0$ y cualesquiera estados j y k .

Si se define como W_t el tiempo durante el cual el proceso permanece en el estado en el que se encuentra en el instante t , puede establecerse lo siguiente*:

Teorema:

$$P[W_t > u \mid X(t) = i] = e^{-\lambda_i u}, \quad u \geq 0$$

donde λ_i es un número comprendido entre 0 y $+\infty$

Esta propiedad, conocida para el proceso de Poisson, (El proceso de Poisson no tiene memoria, IIa parte, inciso 2.3) es

*Cinlar p. 242

por tanto válida para toda cadena de Markov de parámetro continuo.

Un estado i se llamará

- absorbente si $\lambda_i = 0$
- estable si $0 < \lambda_i < \infty$
- instantáneo si $\lambda_i = +\infty$

El comportamiento a largo plazo de una cadena de Markov irreducible de parámetro continuo está regido por ecuaciones semejantes a las aplicables en el caso de cadenas de parámetro discreto, es decir que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{j,k}(t) = \pi_k \quad k \in S$$

donde π_k es la distribución estacionaria de la cadena, la cual, si no es idénticamente nula, cumple con:

$$\pi_k = \sum_{j \in S} \pi_j p_{j,k}(t)$$

Además de los conceptos anteriores se introducen para este tipo de cadena los de intensidades de transición y de paso, definidas como derivadas para $t = 0$ de las funciones de probabilidad de transición.

Si para cualquier estado k :

$$q_k = - \frac{d}{dt} p_{k,k}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{k,k}(t)}{t}$$

existe y es finita y para cualquier par de estados j y k : $j \neq k$

$$q_{j,k} = \frac{d}{dt} p_{j,k}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{j,k}(t) - 0}{t}$$

existe y es finita

q_k se llama "intensidad de paso"

$q_{j,k}$ se llama "intensidad de transición" de j a k

Derivando la identidad anterior se obtiene:

$$\pi_k q_k = \sum_{j \neq k} \pi_j q_{j,k}; \quad k \in S$$

3.3 Procesos de nacimiento y muerte

Una cadena de Markov de parámetro continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ y probabilidades de transición homogéneas se llama proceso de nacimiento y muerte si:

$$q_{j,k} = 0 \quad \text{si } |j - k| \geq 2$$

es decir que solamente se puede pasar de un estado a sus vecinos inmediatos.

se introducen además las cantidades:

$$\lambda_j = q_{j,j+1} \text{ para } j \geq 0$$

$$\mu_j = q_{j,j-1} \text{ para } j \geq 1 \text{ con } \mu_0 = 0$$

$$\lambda_j + \mu_j = q_j \text{ para } j \geq 0$$

(Las intensidades de nacimiento λ_j^* o de muerte μ_j dependen del tamaño de la población j)

Las ecuaciones de distribución estacionaria son en este caso:

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$$

$$(\lambda_n + \mu_n) \pi_n = \lambda_{n-1} \pi_{n-1} + \mu_{n+1} \pi_{n+1} \quad n \geq 1$$

Si se define $\alpha_n = \mu_n \pi_n - \lambda_{n-1} \pi_{n-1}$ de acuerdo con la ecuación anterior $\alpha_n = \alpha_{n+1}$ para $n \geq 1$. Por tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots$. Pero de la primera ecuación se deduce que $\alpha_1 = 0$, por lo que $\alpha_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$ y se obtiene la relación recursiva:

$$\mu_n \pi_n = \lambda_{n-1} \pi_{n-1}$$

Si μ_n es > 0 de la relación anterior se deduce que:

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} \dots \frac{\lambda_0}{\mu_1} \pi_0, \quad n \geq 1$$

π_0 puede determinarse recurriendo a la condición,

$$1 = \pi_0 + \pi_1 + \dots = \pi_0 \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} + \dots \right\}$$

Es posible demostrar que la distribución estacionaria existe si la serie del segundo miembro es convergente.

Ejemplo 3.2

Cola M/M/Z

Se determinará la distribución estacionaria de la longitud de una cola de espera de consumidores atendidos por Z personas en el orden en el que llegan. Los tiempos de interarribo y de servicio se suponen independientes con densidad de probabilidad exponencial con medias $1/\lambda$ y $1/\mu$ respectivamente. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ el número de consumidores esperando o siendo atendidos.

Puede mostrarse que $N(t)$ es un proceso de nacimiento y muerte con :

$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, \dots$$

$$\mu_n = n\mu, n = 1, \dots, Z - 1, \mu_0 = 0$$

$$\mu_n = Z\mu, n \geq Z$$

Si existen, las probabilidades estacionarias están dadas por:

$$\begin{aligned} \pi_n &= \lim_{t \rightarrow \infty} P[N(t) = n] = \pi_0 \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, n < Z \\ &= \pi_0 \frac{Z^Z}{Z!} \left(\frac{\lambda}{Z\mu}\right)^n, n \geq Z \end{aligned}$$

π_0 se determina a partir de la condición:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \left[\sum_{n=0}^{Z-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{Z^Z}{Z!} \sum_{n=Z}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{Z\mu}\right)^n \right]$$

La serie del segundo miembro solo es convergente si

$$\rho = \frac{\lambda}{Z\mu} < 1$$

En caso contrario no existe distribución estacionaria

$\pi_n = 0 \forall_n$ por lo que el número de consumidores crece indefinidamente.

Si es convergente:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{Z-1} \frac{(Z\rho)^n}{n!} + \frac{(Z\rho)^Z}{Z!(1-\rho)}}$$

y

$$\pi_n = \pi_0 \frac{(Z\rho)^n}{n!}$$

$$n = 0, \dots, Z$$

$$\pi_n = \pi_Z \rho^{n-Z}$$

$$n \geq Z + 1$$

IV PARTE

PROCESOS DE RENOVACION

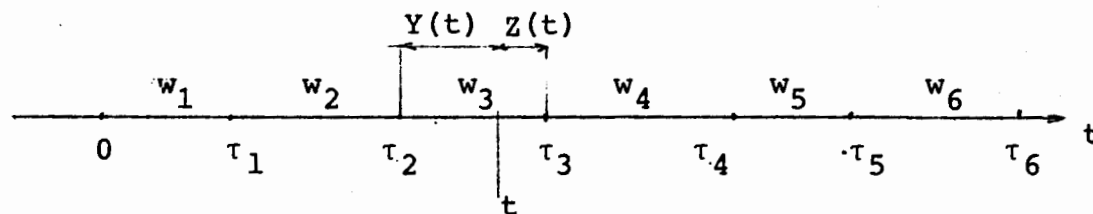
1. INTRODUCCION

La teoría de la renovación estudia las propiedades de una clase de procesos estocásticos, con valores enteros y parámetro continuo, particularmente adecuados para representar las sustituciones a través del tiempo de elementos (focos, cintas de máquinas de escribir, etc.) sujetos a falla después de un tiempo aleatorio.

2. DEFINICIONES

2.1 Procesos de renovación ordinarios

Se considera un fenómeno que ocurre en instantes τ_i separados por intervalos W_i , variables aleatorias no negativas independientes entre si y con misma densidad de probabilidad.



Los tiempos de ocurrencia τ_i se llaman entonces tiempos de renovación y el número de ocurrencias en el intervalo $|0, t|$: $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de renovación ordinario

Ejemplo 2.1

En una central telefónica las llamadas ocurren en instantes $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$, donde $0 < \tau_1 < \tau_2 \dots$. Si se admite que los tiempos entre llamadas $W_1 = \tau_1, W_2 = \tau_2 - \tau_1, \dots, W_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ son variables aleatorias independientes con misma densidad de probabilidad, el número de llamadas recibidas en el intervalo $[0, t] : \{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de renovación ordinario.

Para un tiempo dado t , la variable aleatoria

$$Y(t) = t - \tau_{N(t)}$$

recibe el nombre de edad. Por otra parte, la variable aleatoria

$$Z(t) = \tau_{N(t)+1} - t$$

se llama vida residual

La terminología anterior corresponde a las aplicaciones más usuales de los procesos de renovación en las que los tiempos W_i representan la vida, de duración aleatoria, de elementos que fallan y se sustituyen en los instantes τ_i .

Se observa que en un proceso de renovación ordinario el tiempo correspondiente al primer intervalo W_1 , tiene la misma densidad de probabilidad que los intervalos posteriores. Esto equivale a suponer que en el instante $t = 0$ el proceso se inicia con un elemento nuevo. Para ciertas aplicaciones esta

suposición no es la más conveniente, por lo que se introducen las variantes definidas a continuación:

2.2 Procesos de renovación generalizados

2.2.1 Proceso de renovación modificado

Se llama proceso de renovación modificado a un proceso tal que las ocurrencias se presentan en instantes

$$W_1, W_1 + W_2, W_1 + W_2 + W_3, \dots$$

donde $W_1, W_2, \dots$ son variables aleatorias no-negativas y con densidades de probabilidad:

$$f_{W_1}(t) \text{ para } W_1$$

$$f_W(t) \text{ para } W_2, W_3, \dots$$

Este proceso permitirá representar situaciones en las que el primer elemento considerado en una secuencia de elementos sujetos a falla no es nuevo.

2.2.2 Proceso de renovación establecido

Como caso especial del proceso de renovación modificada conviene mencionar el proceso de renovación establecido. Este proceso corresponde a la observación a partir de un tiempo aleatorio de un proceso que se ha desarrollado desde mucho tiempo atrás.

De acuerdo con lo que se presentará en 4.3 es un proceso modificado con

$$F_{W_1}(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t [1 - F_W(u)] du$$

donde $F_W(t)$ es la función de distribución asociada a W_i y $\mu = E\{W_i\}$ para $i > 1$

3. PROBABILIDADES ASOCIADAS A PROCESOS DE RENOVACION

Los principales aspectos de la teoría de renovación se refieren a la determinación de las densidades de probabilidad asociadas a los tiempos de renovación τ_n , número de renovaciones para un tiempo t dado $N(t)$, edad $Y(t)$ y vida residual $Z(t)$

3.1 Densidad de probabilidad de los tiempos de renovación

Para procesos de renovación ordinarios un tiempo de renovación τ_n es una variable aleatoria igual a la suma de n variables aleatorias W_i idénticamente distribuidas e independientes entre si. Su función de distribución $F_{\tau_n}(t)$ es por tanto:

$$F_{\tau_n}(t) = P(\tau_n \leq t) = F_W(t) * F_W(t) * \dots * F_W(t)$$

$$F_{\tau_n}(t) = F_W(t)^n$$

y en la misma forma: $f_{\tau_n}(t) = f_W(t)^n$

donde $F_W(t)$ es la función de distribución común de los W_i y



el símbolo * significa convolución.

Nota: Para $n = 2$, lo anterior se interpretará como sigue:

$$\begin{aligned} F_{\tau_2}(t) &= P[\tau_2 = W_1 + W_2 \leq t] = E\{P[(W_1 + W_2) \leq t | W_1]\} \\ &= E\{F_{W_2}(t - W_1)\} = \int_0^t f_{W_1}(t) F_{W_2}(t - W_1) dW_1 = F_W^{(2)}(t) \end{aligned}$$

(integral de convolución)

Tomando en cuenta que las variables aleatorias W_i son no-negativas es usual recurrir a la transformada de Laplace para determinar $F_W^{(n)}(t)$ o $f_W^{(n)}(t)$ (densidad de probabilidad de τ_n). En efecto se tiene por definición:

$$\begin{aligned} L[f_{\tau_n}(t); s] &= E\{\exp[-s(W_1 + W_2 + \dots + W_n)]\} = E\{e^{-sW_1} \dots e^{-sW_n}\} \\ &= E\{e^{-sW_1}\} \dots E\{e^{-sW_n}\} \\ &= L[f_{W_1}(t), s] \dots L[f_{W_n}(t), s] \\ &= L[f_W(t), s]^n \text{ para procesos ordinarios} \end{aligned}$$

Por tanto, la transformada de Laplace de la densidad de probabilidad de los tiempos de renovación es igual al producto de las transformantes de Laplace de las densidades de probabilidad de los tiempos entre renovaciones.

En el caso de procesos de renovación modificados las relaciones anteriores se escriben:

$$F_{\tau_n}(t) = F_{W_1}(t) * F_W^{(n-1)}(t) \text{ y } f_{\tau_n}(t) = f_{W_1}(t) * f_W^{(n-1)}(t)$$

$$y L[f_{\tau_n}(t), s] = L[f_{W_1}(t); s] L[f_W(t); s]^{n-1}$$

ya que la densidad de probabilidad del tiempo W_1 es diferente de las de los tiempos entre renovación siguientes.

Para cualquier tipo de proceso se tendrá además:

$$F_{\tau_{n+m}-\tau_n}(t) = P[\tau_{n+m} - \tau_n \leq t | \tau_0, \dots, \tau_n] = F_W^{(m)}(t) \text{ para } \begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$$

3. 2 Distribución de probabilidad asociada al número de renovaciones

Para un tiempo t dado, los eventos $\{N(t) = 0\}$ y $\{N(t) > n\}$, $n \geq 0$ coinciden con los eventos $\{\tau_1 > t\}$ y $\{\tau_{n+1} < t\}$ respectivamente. Por tanto se tiene:

$$P[N(t) = 0] = P[\tau_1 > t] = 1 - F_{W_1}(t); t \geq 0$$

$$P[N(t) > n] = P[\tau_{n+1} \leq t] = F_{\tau_{n+1}}; \text{ para } n \geq 0$$

Se tiene además:

$$\begin{aligned} P[N(t)=n] &= P[N(t) > n-1] - P[N(t) > n] \\ &= F_{\tau_n}(t) - F_{\tau_{n+1}}(t) \\ &= F_W^{(n)}(t) - F_W^{(n+1)}(t) \text{ para procesos ordinarios} \end{aligned}$$

La esperanza matemática del número de renovaciones en un instante t es:

$$H(t) = E\{N(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} n P[N(t) = n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \{P[N(t) > n-1] - P[N(t) > n]\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \{P[\tau_n \leq t] - P[\tau_{n+1} \leq t]\} = \sum_{n=1}^{\infty} P[\tau_n \leq t] = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\tau_n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_W^{(n)}(t)$$

para procesos ordinarios

$$= F_{W_1}(t) * \sum_{n=2}^{\infty} F_W^{(n-1)}(t) \text{ para procesos modificados}$$

La función $H(t) = E\{N(t)\}$ se llama función de renovación.

Esta función ha sido motivo de amplias investigaciones, la mayor parte de ellas de una complejidad excesiva para ser descritas en las presentes notas. Solamente se comentarán algunos aspectos simples de las mismas a continuación.

Si se define como densidad de renovación la función:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{E\{N(t + \Delta t) - N(t)\}}{\Delta t}$$

$$= H'(t)$$

se tiene, a partir de la hoja anterior:

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\tau_n}(t) = f_{W_1}(t) * \sum_{n=2}^{\infty} f_W^{(n-1)}(t)$$

Para un proceso de renovación ordinario:

$$L[h(t); s] = \sum_{n=1}^{\infty} L[F_W(t); s]^n$$

$$= \frac{L[f_W(t); s]}{1 - L[f_W(t); s]}$$

para un proceso de renovación modificado:

$$L[h(t); s] = \frac{L[f_{W_1}(t); s]}{1 - L[f_W(t); s]}$$

Las ecuaciones anteriores pueden también escribirse como:

$$L[h(t); s] = L[f_{W_1}(t); s] + L[h(t); s]L[f_W(t); s]$$

invirtiendo esta ecuación y recordando que la transformada de Laplace de una convolución es el producto de las transformadas de cada función:

$$h(t) = f_{W_1} + \int_0^t h(t-u)f_W(u) du; t \geq 0$$

que se escribe para un proceso ordinario:

$$h(t) = f_W(t) + \int_0^t h(t-u)f_W(u)du; t \geq 0$$

Esta ecuación integral es la llamada ecuación de renovación.

Es posible dar una interpretación probabilista a la ecuación anterior: la probabilidad de que se presente una renovación en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ es la suma de:

- a) La probabilidad $f_W(t)\Delta t$ de que la primera renovación ocurra en el intervalo $(t, t + \Delta t)$
- b) La suma para $u < t$ de las probabilidades de que ocurra una renovación cerca de $(t - u)$ seguida por un tiempo de vida

de longitud u .

Es usual presentar la ecuación de renovación en la forma alternativa:

$$H(t) = F_W(t) + \int_0^t H(t-u) f_W(u) du \quad (\text{procesos ordinarios})$$

obtenida integrando ambos miembros de la ecuación anterior.

Una forma de mostrar la validez de esta última ecuación es la siguiente:

$$H(t) = \int_0^\infty E\{N(t) | W_1 = u\} f_W(u) du$$

ahora: $E\{N(t) | W_1 = u\} = 0$ para $u > t$

ya que $N(t) = 0$ si la primera renovación se presenta en un tiempo u posterior a t , mientras que:

$$E\{N(t) | W_1 = u\} = 1 + H(t-u) \quad \text{si } u \leq t$$

en efecto, dado que la primera renovación se presenta antes de t , la distribución condicional de $N(t)$ es la misma que la de $[1 + N(t-u)]$. Por tanto:

$$H(t) = \int_0^t [1 + H(t-u)] f_W(u) du$$

$$H(t) = F_W(t) + \int_0^t H(t-u) f_W(u) du$$

3.3 Densidad de probabilidad asociada a la edad

La edad se ha definido anteriormente como:

$$Y(t) = t - \tau_{N(t)}$$

En el instante t considerado existen dos posibilidades:
o bien no ha ocurrido ninguna renovación o por lo menos ha
ocurrido una, por tanto:

$$P[Y(t) \leq x] = P[Y(t) \leq x, N(t) = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[Y(t) \leq x, N(t) = n]$$

El evento $\{Y(t) \leq x, N(t) = 0\}$ ocurre si y solamente si $t \leq x$
y no hay renovación en el intervalo $[0, t]$. En este caso
 $Y(t) = t$. Por tanto:

$$\begin{cases} P[Y(t) \leq x, N(t) = 0] = 1 - F_{w_1}(t) & \text{para } x \geq t \\ P[Y(t) < x, N(t) = 0] = 0 & \text{para } x < t \end{cases}$$

Por otra parte, el evento $\{Y(t) \leq x, N(t) = n\}$, $n \geq 1$ ocurre si
y solo si la n -ésima renovación se presenta en el intervalo
 $[t-x, t]$ y la $n+1$ ocurre después de t .

Esta condición puede escribirse como sigue:

$$t - x \leq \tau_n \leq t < \tau_{n+1}$$

y la probabilidad de este último evento es:

$$\int_{t-x}^t P[W_{n+1} > t-u] f_{\tau_n}(u) du = \int_{t-x}^t [1 - F_w(t-u)] f_{\tau_n}(u) du$$

para $0 \leq x \leq t$. Finalmente se obtiene*:

$$\begin{aligned} & \text{* Introduciendo la función de Heaviside} \\ & \begin{cases} U(x-t) = 0 & \text{para } x < t \\ U(x-t) = 1 & \text{para } x \geq t \end{cases} \end{aligned}$$

$$P[Y(t) \leq x] = 0 \quad \text{para } x < 0$$

$$P[Y(t) \leq x] = [1 - F_{w_1}(t)]U(x-t) + \sum_{n=x}^{\infty} \int_{t-x}^t [1 - F_{w_1}(t-u)] f_{\tau_n}(u) du$$

$$P[Y(t) \leq x] = [1 - F_{w_1}(t)]U(x-t) + \int_{t-x}^t [1 - F_w(t-u)] h(u) du$$

para $0 \leq x \leq t$

$$P[Y(t) \leq x] = 1 \quad \text{para } x > t \text{ ya que } Y(t) \leq t$$

3.4 Densidad de probabilidad asociada a la vida residual

La densidad de $Z(t) = \tau_{N(t)+1} - t$ puede obtenerse en forma semejante:

$$\begin{aligned} P[Z(t) \leq x] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[Z(t) \leq x, N(t) = n] \\ &= P[0 \leq t < \tau_1 \leq t+x] + \sum_{n=1}^{\infty} P[\tau_n \leq t < \tau_{n+1} \leq t+x] = F_{w_1}(t+x) \\ &\quad - F_{w_1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t [F_w(t+x-u) - F_w(t-u)] f_{\tau_n}(u) du \\ P[Z(t) \leq x] &= F_{w_1}(t+x) - F_{w_1}(t) + \int_0^t [F_w(t+x-u) - F_w(t-u)] h(u) du \end{aligned}$$

Ejemplo 3.1

El Proceso de Poisson

Cuando $F_{w_1}(t) = F_w(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ el proceso de renovación es un proceso de Poisson.

Se observa que: (Parte II, inciso 2.4)

$$F_{\tau_n}(t) = F_w^n(t) = \int_0^t e^{-\lambda u} \dots$$

Se observa que la densidad de la vida residual coincide con la del tiempo entre renovaciones. Los procesos de Poisson, como ya se comentó anteriormente, "no tienen memoria".

Ejemplo 3.2

Procesos de Erlang

Si $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de renovación correspondiente a tiempos entre renovaciones con densidad de probabilidad Gamma con parámetros λ y k .

$$f_W(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda \quad t > 0 \quad \text{con } \lambda > 0$$

Se dice que el proceso de renovación es un proceso de Erlang de orden k .

El enésimo tiempo de renovación τ_n tiene también densidad Gamma ya que, como es conocido, esta densidad es regenerativa.

Es posible mostrar que, en este caso, la función de renovación es la siguiente:

$$H(t) = E\{N(t)\} \frac{\lambda t}{k} + \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\epsilon^r}{1 - \epsilon^r} \{1 - \exp[-\lambda t(1 - \epsilon^r)]\}$$

donde $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{k})$, $\epsilon^0 = 1$, $\epsilon^r = \exp(\frac{2\pi i r}{k})$

que corresponde a una densidad Gamma con parámetros λ y $(n - 1)$, también llamada densidad de Erlang de orden n y parámetro λ .

La densidad de $N(t)$ es, de acuerdo con 3.2,:

$$P[N(t) = 0] = e^{-\lambda t}$$

$$P[N(t) = m] = \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda du - \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} du$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda du + \left[\frac{(\lambda u)^n}{n!} e^{-\lambda u} \right]_0^t - \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda du$$

$$P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \text{ para } m \geq 1$$

En este caso se observa que

$$H(t) = E\{N(t)\} = \lambda t \text{ y que } h(t) = \lambda$$

La densidad de probabilidad de la edad es:

$$P[Y(t) \leq x] = \int_{t-x}^t e^{-\lambda(t-u)} \lambda du$$

$$P[Y(t) < x] = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P[Y(t) \leq x] = 1 \quad \text{para } x \geq t$$

(Densidad exponencial truncada)

En la misma forma para la vida residual:

$$P[Z(t) \leq x] = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t e^{-\lambda(t-u)} (1 - e^{-\lambda x}) \lambda du$$

$$P[Z(t) < x] = 1 - e^{-\lambda x}; \quad x \geq 0 \text{ (densidad exponencial)}$$

3.5 Unicidad del proceso para una función de renovación dada

El énfasis puesto en la teoría de la renovación sobre la función de renovación o su derivada la densidad de renovación tiene una justificación basada en la propiedad siguiente:

La función de renovación (o la densidad de renovación) define en forma única el proceso de renovación. En forma más precisa: si se conoce $H(t)$ o $h(t)$ la densidad de probabilidad $f_W(w)$ de tiempos entre renovaciones está totalmente definida.

Lo anterior puede mostrarse fácilmente. Por ejemplo, si se conoce $h(t)$, la relación:

$$L[h(t); s] = \frac{L[f_W(t); s]}{1 - L[f_W(t); s]}$$

del inciso 3.2 puede escribirse en la forma equivalente.

$$L[f_W(t); s] = \frac{L[h(t); s]}{1 + L[h(t); s]}$$

La conocida relación biunívoca entre una densidad y su transformada de Laplace tiene como consecuencia que a una misma función $h(t)$ corresponde una densidad de probabilidad $f_W(t)$ única.

Ejemplo 3.3

Se vió en el ejemplo 3.1 que un proceso de Poisson $N(t)$ tiene una densidad de renovación constante igual a λ . La

propiedad anterior permite establecer que cualquier proceso que tenga esta característica tiene una densidad de probabilidad de tiempos entre renovación $f_W(t)$ de tipo exponencial y, por tanto, es un proceso de Poisson:

$$L[f_W(t); s] = \frac{L(\lambda; s)}{1 + L(\lambda; s)}$$

$$\text{pero } L[\lambda, s] = \lambda \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{\lambda}{s} [-e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{s}$$

por tanto

$$L[f_W(t); s] = \frac{\lambda/s}{1 + \lambda/s} = \frac{\lambda}{s + \lambda}$$

esta transformada corresponde a $f_W(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (densidad exponencial) como puede fácilmente verificarse:

$$\begin{aligned} L[\lambda e^{-\lambda t}, s] &= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-st} dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + s} [-e^{-(\lambda+s)t}]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda + s} \end{aligned}$$

Todo proceso con densidad de renovación constante (o función de renovación lineal) es por tanto un proceso de Poisson.

4. COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE LOS PROCESOS DE RENOVACION

El comportamiento asintótico de los procesos de renovación puede generalmente ser descrito en forma sencilla.

4.1 Distribución de probabilidad asintótica del número de renovaciones

Un proceso de renovación $N(t)$, ordinario o modificado presenta a largo plazo una distribución de probabilidad estacionaria regida por los siguientes teoremas:

Teorema:

Si $\mu = E\{W\}$ es el tiempo medio entre renovaciones

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \text{ con probabilidad igual a uno}$$

cuando μ es infinito, el resultado sigue válido interpretando $1/\mu$ como cero.

La demostración se basa en la ley fuerte de los grandes números y puede resumirse como sigue cuando μ es finito: La desigualdad

$$\tau_{N(t)} \leq t \leq \tau_{N(t)+1}$$

permite escribir si t es suficientemente grande para que

$$\tau_{N(t)} > 0$$

$$\frac{N(t)}{\tau_{N(t)}} > \frac{N(t)}{t} > \frac{N(t)}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{\tau_{N(t)+1}}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $N(t) \rightarrow \infty$ con probabilidad uno y por tanto

$N(t)/(N(t)+1)$ tiende hacia 1 con probabilidad uno. Asimismo

mo $\tau_{N(t)}/(N(t)+1) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i / (N(t)+1)$ tiende hacia $E\{W\} = \mu$ con

probabilidad uno cuando $N(t) \rightarrow \infty$ de acuerdo con la ley fuerte de los grandes números, con lo que queda demostrado el teorema.

Teorema:

Si $\mu = E\{W\}$ es finita el valor medio $H(t)$ de $N(t)$ tiende hacia un valor asintótico:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Intuitivamente, este teorema es consecuencia del anterior. Se omitirá la demostración rigurosa

Teorema

Si $E\{W\}$ y $E\{W^2\}$ son finitas, entonces para cualquier valor real x :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left[\frac{N(t) - (t/\mu)}{\sigma^2/\mu^3} \leq x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-1/2 y^2} dy$$

en otros términos, la distribución de probabilidad de $N(t)$ tiende hacia una densidad de tipo normal con media t/μ y variancia σ^2/μ^3 donde σ^2 es la variancia $\text{var}[W]$.

Esta es una consecuencia del teorema del límite central. Se omitirá la demostración en lo que se refiere al valor límite de la variancia de $N(t)$.

4.2 Teorema de Blackwell

Existen varios teoremas adicionales relativos al comportamiento de $H(t) = E\{N(t)\}$ en el límite; el más conocido es el

teorema de Blackwell:

Teorema

Si $\mu = E\{W\}$ es finita, entonces

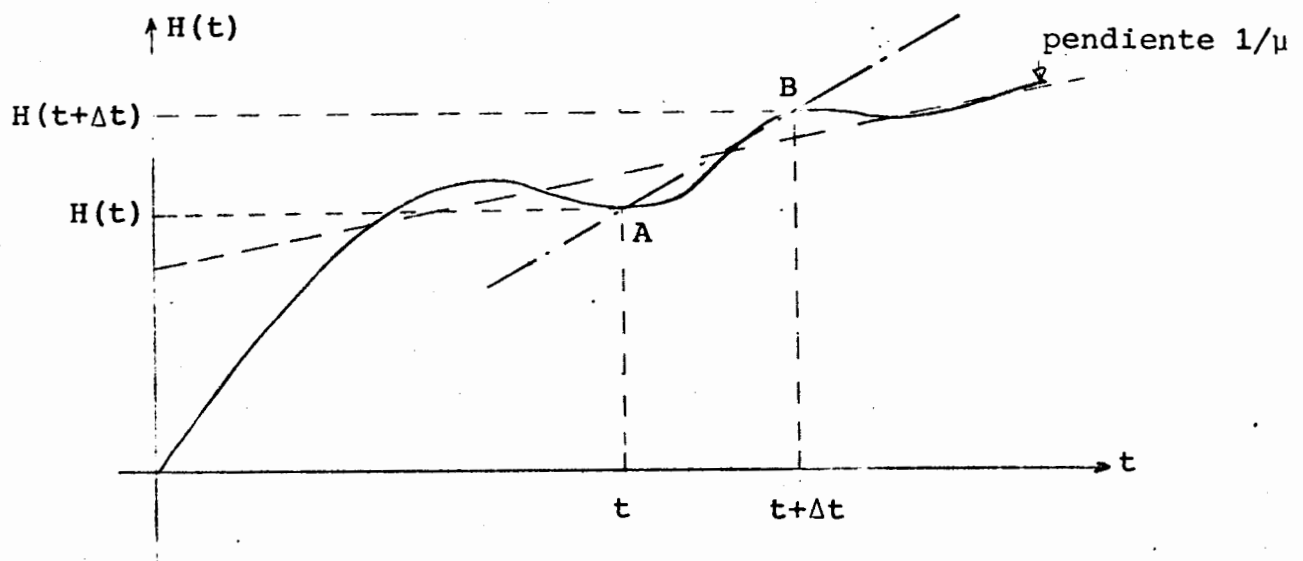
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t + \Delta) - H(t)}{\Delta} = \frac{1}{\mu}$$

para cualquier $\Delta > 0$.

Es posible dar a este teorema la interpretación gráfica siguiente:

$\frac{H(t + \Delta) - H(t)}{\Delta}$ representa la pendiente de la cuerda

AB:



la pendiente de esta cuerda tiende hacia el límite $1/\mu$
el teorema de Blackwell, cuya demostración omitiremos, es
equivalente (Neuts p.333) a un teorema más general llamado

Teorema

Cuando $\mu = E\{W\}$ es finita

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t) \leq x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z(t) \leq x) = \int_0^t \frac{1 - F_W(u)}{\mu} du$$

Demostración:

Se recuerda que (3.3):

$$F_{Y(t)}(x) = P(Y(t) \leq x) = [1 - F_{W_1}(t)]U(x - t) +$$

$$+ \int_{t-x}^t [1 - F_W(t - u)]h(u)du; \text{ para } 0 \leq x \leq t$$

y que (3.4)

$$F_{Z(t)}(x) = P(Z(t) \leq x) = F_{W_1}(t + x) - F_{W_1}(t) +$$

$$+ \int_0^t [F_W(t + x - u) - F_W(t - u)]h(u)du$$

Cuando $t \rightarrow \infty$

$$[1 - F_{W_1}(t)]U(x - t) \rightarrow 0$$

$$[F_{W_1}(t + x) - F_{W_1}(t)] \rightarrow 0$$

Ahora:

$$\int_{t-x}^t [1 - F_W(t - u)]h(u)du = \int_0^t Q_1(t - u)h(u)du$$

"clave" de la teoría de la renovación:

Teorema

Si una función $Q(t)$ satisface las condiciones:

a) $Q(t) \geq 0$ para todo $t > 0$

b) $\int_0^{\infty} Q(t) dt < \infty$

c) $Q(t)$ es no-creciente ($Q(t_1) \geq Q(t_2)$ si $t_1 \leq t_2$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-s) dH(s) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} Q(s) ds$$

en el teorema de Blackwell la función $Q(u)$ es:

$$Q(u) = \frac{1}{\Delta}; \quad 0 \leq u \leq \Delta$$

$$= 0; \quad u > \Delta$$

$$y \int_0^t Q(t-u) dH(u) = \int_{t-\Delta}^t \frac{1}{\Delta} dH(u) = \frac{H(t) - H(t-\Delta)}{\Delta}, \text{ cuyo límite}$$

$$\text{es } \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} du = \frac{1}{\mu}$$

4.3 Densidades de probabilidad asintóticas de la edad y de la vida residual

Cuando la media $\mu = E\{W\}$ es finita, el teorema "clave" de la teoría de la renovación permite establecer varias propiedades importantes de las densidades de probabilidad límite de las variables $Y(t)$ y $Z(t)$, cuando t tiende hacia el infinito:

$$\begin{aligned} \text{donde } Q_1(u) &= 1 - F_W(u) & 0 \leq u \leq x \\ &= 0 & \text{para otros valores de } u \end{aligned}$$

y de acuerdo con el teorema "clave" de la renovación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-x}^t [1 - F_W(t-u)] h(u) du = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F_W(u)] du$$

por tanto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_Y(t)(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P[Y(t) \leq x] = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F_W(u)] du$$

En la misma forma; para la vida residual

$$\begin{aligned} &\int_0^t [F_W(t+x-u) - F_W(t-u)] h(u) du = \\ &= \int_0^{t+x} F_W(t+x-u) h(u) du - \int_0^t F_W(t-u) h(u) du - \\ &\quad \int_t^{t+x} F_W(t+x-u) h(u) du \end{aligned}$$

y de acuerdo con la ecuación de renovación:

$$\begin{aligned} &H(t+x) - F_{W_1}(t+x) - H(t) + F_{W_1}(t) - \\ &\quad \int_t^{t+x} F_W(t+x-u) h(u) du \\ &= H(t+x) - F_{W_1}(t+x) - H(t) + F_{W_1}(t) - \\ &\quad - \int_t^{t+x} [1 - F_W(t+x-u)] h(u) du \end{aligned}$$

La cantidad $F_{W_1}(t) - F_{W_1}(t+x)$ tiende hacia cero cuando

$t \rightarrow \infty$ el límite de la integral se obtiene escribiendo

$y = t - x$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} F_{Z(t)}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P[Z(t) \leq x] = \int_{y-x}^y [1 - F_W(y-u)] h(u) du = \\ &= \frac{1}{u} \int_0^x [1 - F_W(u)] du \end{aligned}$$

5. TEORIA MARKOVIANA DE LA RENOVACION

5.1 Introducción

Es posible definir una clase de procesos que incluye como caso particular los procesos Markovianos y de renovación. Las propiedades de los procesos así definidos permiten extender el alcance y la generalidad de los procesos Markovianos y de renovación considerados individualmente.

5.2 Definiciones

Se considera un proceso bidimensional tal que se define para cada valor de un número entero n , una variable aleatoria X_n que toma valores dentro de un conjunto denumerable E y una segunda variable τ_n definida entre los números reales no negativos* y tal que $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \dots$

El proceso bitemensional $\{X_n, \tau_n; n \in N\}$ se define como proceso Markoviano de renovación con espacio de estados E si:

$$P\{X_{n+1} = j; \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X_0, \dots, X_n; \tau_0, \dots, \tau_n\}$$

$$= P\{X_{n+1} = j; \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X_n\}$$

Se considera siempre que el proceso $\{X_n, \tau_n\}$ es homogéneo es decir que $\forall i, j \in E$ y $\forall t$:

$P\{X_{n+1} = j; \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X_n = i\} = Q(i, j, t)$ es independiente de n .

Si se define

$$P_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(i, j, t)$$

se observa que

$$P_{i,j} \geq 0 \quad \sum_{j \in E} P_{i,j} = 1$$

de las definiciones anteriores se deduce que:

$$P\{X_{n+1} = j | X_0, \dots, X_n = i; \tau_0, \dots, \tau_n\} = P_{i,j}$$

lo que implica que:

$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ sea una cadena de Markov con espacio de estados E y matriz de transición $P = \{p_{i,j}\}$

Nota: Se introduce aquí una pequeña variante respecto a la forma en la que se han definido los procesos de renovación: se considera que en el instante $t = 0$ se presenta una renovación (proceso ordinario con función de renovación incrementada de 1)

Ahora, si se define

$$G(i, j, t) = \frac{Q(i, j, t)}{p_{i,j}} = \frac{P[X_{n+1} = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X_n = i]}{P[X_{n+1} = j | X_n = i]}$$

con la convención de que $G(i, j, t) = 1$ si $p_{i,j} = Q(i, j, t) = 0$; es posible dar la siguiente interpretación:

$$G(i, j, t) = P\{\tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X_n = i, X_{n+1} = j\}$$

a partir de lo anterior y de la primera definición que se ha dado se obtiene que:

para $n \geq 1$ y $u_1, \dots, u_n$ números reales positivos

$$\begin{aligned} &P\{\tau_1 - \tau_0 \leq u_1, \dots, \tau_n - \tau_{n-1} \leq u_n | X_0, \dots, X_n\} \\ &= G(X_0, X_1, u_1)G(X_1, X_2, u_2) \dots G(X_{n-1}, X_n, u_n) \end{aligned}$$

Los incrementos $\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_1, \dots$ son condicionalmente independientes dada la cadena de Markov $X_0, X_1, \dots$ y la distribución de probabilidad de $\tau_{n+1} - \tau_n$ depende solamente de X_n y X_{n+1}

En particular, si el espacio de estados E es un estado único, los incrementos son independientes e idénticamente distribuidos y por tanto:

Si E está constituido por un estado único entonces $\{\tau_n\}$ define un proceso de renovación.

Además de lo anterior, se observa que para un estado j dado si se definen como $s_0^j, s_1^j, \dots$ los tiempos sucesivos τ_n para los cuales $X_n = j$, entonces $\{s_n^j\}$ define también un proceso de renovación (posiblemente modificado)

No se demostrará aquí la proposición anterior (casi evidente). Sin embargo, conviene hacer notar que para establecerla es necesario introducir algunas convenciones adicionales.

En particular, se agrega un estado adicional Δ al conjunto E tal que $X_\infty = \Delta$, $\tau_\infty = +\infty$ $\forall$ realización del proceso. Estas convenciones son necesarias para poder cubrir el caso particular de los estados transitorios en los cuales la cadena entra con probabilidad 1 solamente un número finito de veces. Por tanto para casi todas las realizaciones existe una n finita tal que los tiempos de recurrencia sean infinitos; se admite en este caso que la cadena pasa al estado ficticio Δ para los valores n mayores que este límite con tiempos de renovación infinitos.

Para establecer claramente la situación anterior es conveniente introducir el proceso $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$ definido como:

$$Y(t, \omega) = \begin{cases} X_n & \text{si } \tau_n < t < \tau_{n+1} \\ \Delta & \text{si } t \geq \sup_n \tau_n \end{cases}$$

el proceso así definido se llama "proceso semi-Markoviano mínimo" asociado al proceso markoviano de renovación $\{X, \tau\}$

Del inciso 3 de la parte III se desprende que sí

$$Q(i,j,t) = p_{i,j}(1-e^{-\lambda(i)t})$$

$\forall i,j,t$ y para alguna función $\lambda(i)$, entonces Y es una cadena de Markov de parámetro continuo.

Ejemplo 5.1

Modelo para tránsito

Si $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ son las posiciones de vehículos a lo largo de una carretera y si X_n denota el tipo (coche, camión) de vehículo, es aceptable considerar que $X = \{X_n\}$ es una cadena Markoviana y que las distancias $\tau_{n+1} - \tau_n$ son variables aleatorias que dependen solamente de los tipos de vehículos X_{n+1} y X_n . En este caso $\{X_n, \tau_n\}$ es un proceso markoviano de renovación.

Ejemplo 5.2

Cola M/G/1

Se considera un modelo de la teoría de colas en el cual las llegadas de los consumidores ocurren de acuerdo con un proceso de Poisson $N(t)$ y los tiempos de servicio Z_i tienen una función de distribución arbitraria $\phi(t)$ independiente de $N(t)$. Una sola persona atiende a los consumidores.

Sea X_n el número de consumidores en la cola, inmediatamente después de la salida del cliente n° n :

X_n es una cadena de Markov con matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & - & - & - \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & - & - & - \\ & q_0 & q_1 & q_2 & - & - & - \\ & & q_0 & q_1 & - & - & - \\ 0 & & & & & & \end{bmatrix}$$

donde

$$q_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} (at)^k}{k!} d\phi(t) \quad k = 0, 1, \dots$$

siendo a la intensidad del proceso de Poisson

Para demostrar lo anterior se observa que si τ_n es el tiempo de la n -ésima salida y Z_{n+1} el tiempo de servicio del consumidor $N^\circ (n+1)$

Si $X_n > 0$ el tiempo de servicio del consumidor $n^\circ n+1$ empieza en el instante τ_n y dura hasta $\tau_n + Z_{n+1}$. Durante este tiempo habrá $N(\tau_n + Z_{n+1}) - N(\tau_n)$ llegadas y por tanto el tamaño de la cola inmediatamente después de la salida $N^\circ (n+1)$ será:

$$X_n + [N(\tau_n + Z_{n+1}) - N(\tau_n)] - 1$$

Si $X_n = 0$ el cliente dejará al salir los que hayan llegado durante el tiempo en el que lo atendieron es decir

$$N(\tau_{n+1}) - N(\tau_{n+1} - Z_{n+1})$$

por lo que:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + [N(\tau_n + Z_{n+1}) - N(\tau_n)] - 1 & \text{si } X_n > 0 \\ N(\tau_{n+1}) - N(\tau_{n+1} - Z_{n+1}) & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

Pero se sabe, por el caracter estacionario de los incrementos del proceso de Poisson, que:

$$\begin{aligned} P[N(\tau_{n+1}) - N(\tau_{n+1} - Z_{n+1}) = k | X_0, \dots, X_n; \tau_n] &= P[N(Z_{n+1}) = k] \\ &= P[N(z) = k] \end{aligned}$$

ya que todas las Z_i tienen la misma densidad de probabilidad.

Por otra parte :

$$\begin{aligned} q_k &= P[N(z) = k] = E\{P[N(z) = k | Z]\} \\ &= E\left\{\frac{e^{-az}(az)^k}{k!}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-at}(at)^k}{k!} d\phi(t) \end{aligned}$$

Ahora bien, si $i = 0$

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = 0\} = P\{N(z) = j\} = q_j$$

y si $i > 0$

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P\{N(z) = j+1-i\} = \begin{cases} q_{j+1-i} & \text{si } j \geq i-1 \\ 0 & \text{si } j < i-1 \end{cases}$$

con lo que queda establecida la matriz de transición.

Es posible observar que (X_n, τ_n) es un proceso Markoviano de renovación, la matriz $Q(t)$ cuyos elementos sean las probabilidades $Q(i, j, t)$ se definirá como sigue:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & - & - & - \\ q_0(t) & q_1(t) & q_2(t) & - & - & - \\ & q_0(t) & q_1(t) & - & - & - \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

donde

$$q_n(t) = \int_0^t \frac{e^{-as} (as)^n}{n!} d\phi(s) \quad n = 0, 1, \dots$$

$$p_n(t) = \int_0^t a e^{-as} q_n(t-s) ds \quad n = 0, 1, \dots$$

Lo anterior puede verificarse como sigue:

a) Si hay por lo menos un cliente en la cola ($i \geq 1$) se tiene:

$$Q(i, j, t) = P\{X_{n+1}=j; \tau_{n+1}-\tau_n \leq t | X_n = i\}$$

= Probabilidad de que en el tiempo t haya sido atendido el cliente $n+1$ y que durante el tiempo de atención hayan llegado $k = j-i+1$ clientes

$$Q(i, j, t) = E\{P\{N(s)=k | s < t\} = \int_0^t \underbrace{\frac{e^{-as} (as)^k}{k!}}_{\text{probabilidad de que en el intervalo } (0,s) \cap (0,t) \text{ lleguen exactamente a la cola (Poisson)}} \underbrace{d\phi(s)}_{\text{probabilidad de que en el intervalo } (s,s+ds) \cap (0,t) \text{ termine el servicio del primer cliente}}\}$$

$$= q_k(t); \quad k = j+1$$

b) Si no se encuentra ningun cliente haciendo cola

$$Q(0, j, t) = P\{X_{n+1}=j; \tau_{n+1}-\tau_n \leq t | X_n=0\}$$

= Probabilidad de que en el intervalo $(0, t)$ llegue el primer cliente y que durante su tiempo de servicio lleguen $k = j$ clientes mas

$$Q(0, j, t) = E\{P[N(t-s)=k | s < t]\} = \int_0^t \underbrace{\left[\int_0^{t-s} \frac{e^{-as}(as)^k}{k!} d\phi(s) \right]}_{\text{probabilidad de que el tiempo de servicio del primer cliente sea } \leq (t-s) \text{ y de que durante el tiempo de servicio lleguen } k \text{ clientes (vease inciso anterior)}} \underbrace{ae^{-as} ds}_{\text{probabilidad de que en el intervalo } (s, s+ds) \text{ llegue el primer cliente (densidad exponencial de un proceso de Poisson)}}$$

$$= p_k(t);$$

$$k = j$$

A N E X O S

1. Densidades y distribuciones de probabilidad usuales
2. Tablas de Pearson-Hartley
3. Tabla de transformadas de Laplace

Distribuciones y densidades de probabilidad usuales

Curiosos.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD USUALES

Nombre	Ejemplos de variables aleatorias que tienen la <u>dis</u> tribución indicada
BERNOULLI	Resultado de un experimento de Bernoulli con dos posibles resultados: éxito o falla (ej: moneda: águila = 1, sol = 0)
BINOMIAL	Número de éxitos en n experimentos independientes de Bernoulli en los cuales la probabilidad de éxito en cada experimento es p
GEOMETRICA (1)	Número de intentos necesarios para obtener el primer éxito en una secuencia de experimentos independientes de Bernoulli.
GEOMETRICA (2)	Número de éxitos antes de obtener la primera falla en una secuencia de experimentos independientes de Bernoulli
BINOMIAL NEGATIVA(1)	Número de fallas antes de obtener n éxitos en una secuencia de experimentos independientes de Bernoulli
BINOMIAL NEGATIVA(2)	Número de intentos para obtener n éxitos en una secuencia de experimentos independientes de Bernoulli
POISSON	Número de ocurrencia de eventos de un determinado tipo en un periodo de tiempo unitario cuando dichos eventos se presentan en forma aleatoria a una tasa promedio de λ por unidad de tiempo.

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD USUALES

NOMBRE Y VALORES DE LOS PARAMETROS	DISTRIBUCION $P_X(x)$ Y DOMINIO DE DEFINICION	FUNCION CARACTERISTICA	MEDIA	VARIANCIA
BERNOULLI $0 \leq p \leq 1$	$p^x(1-p)^{1-x}$; $x=0,1$ 0 otros valores x	$pe^{i\omega} + (1-p)$	p	$p(1-p)$
BINOMIAL $n = 1,2,\dots$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$; $x=0,1,\dots,n$ 0 otros valores x	$[pe^{i\omega} + (1-p)]^n$	np	$np(1-p)$
GEOMETRICA(1) $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1}$; $x=1,2,\dots$ 0 otros valores x	$\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
GEOMETRICA(2) $0 \leq p \leq 1$	$p^x(1-p)$; $x=0,1,2,\dots$ 0 otros valores x	$\frac{1-p}{1-pe^{i\omega}}$	$\frac{p}{1-p}$	$\frac{p}{(1-p)^2}$
BINOMIAL NEGATIVA (2) (PASCAL) $r=1,2,\dots$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{x-1}{r-1} p^r(1-p)^{x-r}$; $x=r,r+1,\dots$ 0 otros valores x	$\left[\frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}} \right]^r$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
BINOMIAL NEGATIVA (1) $r=1,2,\dots$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{x+r-1}{x} p^x(1-p)^r$; $x=0,1,\dots$ 0 otros valores x	$\left[\frac{1-p}{1-pe^{i\omega}} \right]^r$	$\frac{rp}{1-p}$	$\frac{rp}{(1-p)^2}$

POISSON $\lambda > 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}; x=0,1,\dots$ 0 otros valores X	$e^{\lambda(e^{i\omega}-1)}$	λ	λ
HIPERGEOMETRICA $N=1,2,\dots$ $n=1,2,\dots,N$ $a=1,2,\dots,N$	$\frac{\binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}; x=0,1,\dots,\min(n,a)$ 0 otros valores X		$\frac{na}{N}$	$\frac{an(N-n)(N-a)}{N^2(N-1)}$

DENSIDADES DE PROBABILIDAD USUALES

Nombre	Ejemplo de variable aleatoria con la densidad indicada
UNIFORME	Una variable igual a la función de distribución de una segunda variable con densidad de probabilidad cualquiera (en el intervalo $\{0,1\}$)
NORMAL	Suma de un número grande de variables aleatorias independientes con densidades de probabilidad idénticas
EXPONENCIAL	El tiempo requerido para observar el primer evento en un proceso de Poisson a partir de un tiempo arbitrario
GAMMA	El tiempo requerido para observar la ocurrencia de K eventos en un proceso de Poisson a partir de un tiempo arbitrario
LOG NORMAL	Cualquier variable positiva cuyo logaritmo tiene densidad normal
BETA	Si se tiene una muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$ de una densidad $f_X(x)$ cualquiera, clasificada por orden de magnitud creciente, la variable W_{rs} igual al área bajo $f_X(x)$, delimitada por X_r y X_s tiene densidad BETA en el intervalo $\{0,1\}$ (Ver Mood y Graybill p 405).
$\chi^2(n)$	Suma de los cuadrados de n variables independientes con densidad de probabilidad normal estándar ($N\{0,1\}$)
χ	Raíz cuadrada de la variable anterior
"t" de Student	Cociente $\frac{X}{Y/\sqrt{n}}$ donde X tiene densidad $N(0,1)$ Y tiene densidad χ con n grados de libertad

"F"

Cociente $\frac{X/m}{Y/n}$

donde X tiene densidad χ^2 con
m grados de libertad

Y tiene densidad χ^2 con
n grados de libertad

DENSIDADES DE PROBABILIDAD USUALES

NOMBRE Y VALORES DE LOS PARAMETROS	DENSIDAD $f_X(x)$ E INTERVALO DE DEFINICION	FUNCION CARACTERISTICA	MEDIA	VARIANCIA
UNIFORME sobre el intervalo $[a, b]$	$\begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & \text{para otros val. de } x \end{cases}$	$\frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
NORMAL $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ $-\infty < \mu_X < +\infty$ $\sigma_X > 0$	$\frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right]$	$\exp \left[i\omega \mu_X - \frac{1}{2} \omega^2 \sigma_X^2 \right]$	μ_X	σ_X^2
EXPONENCIAL $\lambda > 0$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{para otros val. de } x \end{cases}$	$(1 - \frac{i\omega}{\lambda})^{-k}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
GAMMA* $k > 0$ $\lambda > 0$	$\begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(k)} (\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{para otros val. de } x \end{cases}$	$(1 - \frac{i\omega}{\lambda})^{-k}$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$
LOGNORMAL $Y = \text{Log} X : N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$\begin{cases} \frac{1}{x \sigma_Y \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\text{Ln} x - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)^2 \right] & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para otros val. de } x \end{cases}$		$\exp \left[\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2} \right]$ Nota: $\text{Log } m_X = \mu_Y$ m_X : mediana de x	$\exp \left[2\mu_Y + \sigma_Y^2 \right] \left[e^{\sigma_Y^2} - 1 \right]$
BETA sobre el intervalo $[a, b]$ $r > 0$ $t - r > 0$	$\begin{cases} \frac{1}{B(b-a)^{t-1}} (x-a)^{r-1} (b-x)^{t-r-1} & \text{para } a < x < b \\ 0 & \text{para otros val. de } x \end{cases}$ con $B = \frac{\Gamma(r)\Gamma(t-r)}{\Gamma(t)}$		$a + \frac{r}{t}(b-a)$	$(b-a)^2 \frac{r(t-r)}{t^2(t+1)}$

* $\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-u} u^{k-1} du$. Si k es entero > 0 : $\Gamma(k) = (k-1)!$

DENSIDADES DE PROBABILIDADES USUALES

NOMBRE Y VALORES DE LOS PARAMETROS	DISTRIBUCION $f_x(x)$ E INTERVALO DE DEFINICION	FUNCION CARACTERISTICA	MEDIA	VARIANCIA
χ^2 (Ji Cuadrada) con n grados de libertad*	$\frac{1}{2} \frac{(x/2)^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2)} \quad x > 0$ 0 para otros val. de x	$(1-2i\omega)^{-n/2}$	n	2n
χ (Ji) con n grados de libertad	$\frac{x(x^2/2)^{n/2-1} e^{-x^2/2}}{\Gamma(n/2)} \quad x > 0$ 0 para otros val. de x		$\frac{\sqrt{2}\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}$	$n - \mu_x^2$
t de Student con n grados de libertad n > 2	$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$ $-\infty < x < +\infty$		0	$\frac{n}{n-2}$
F con m y n grados de libertad	$\frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} x^{\frac{(m-2)}{2}} (1+x)^{-\frac{(m+n)}{2}}$ $x > 0$ 0 para otros val de x		$\frac{n}{n-2}$ si n > 2	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ si n > 4

* La χ^2 es también una densidad Gamma con $k = n/2, \lambda = 1/2$

Tablas de Pearson-Hartley

Table A.2† Tables for evaluation of the CDF of the χ^2 , gamma, and Poisson distributions (Continued)

ν	$\chi^2 = 6.2$ $m = 3.1$	6.4 3.2	6.6 3.3	6.8 3.4	7.0 3.5	7.2 3.6	7.4 3.7	7.6 3.8	7.8 3.9	8.0 4.0
1	0.01278	0.01141	0.01020	0.00912	0.00815	0.00729	0.00652	0.00581	0.00522	0.00468
2	0.04305	0.04076	0.03868	0.03677	0.03500	0.03337	0.03185	0.03043	0.02910	0.02786
3	0.10228	0.09369	0.08580	0.07853	0.07190	0.06579	0.06018	0.05504	0.05033	0.04601
4	0.18470	0.17120	0.15860	0.14684	0.13589	0.12569	0.11620	0.10738	0.09910	0.09158
5	0.25721	0.23922	0.22513	0.21355	0.20264	0.19255	0.18320	0.17457	0.16661	0.15924
6	0.40116	0.37990	0.35943	0.33974	0.32085	0.30275	0.28543	0.26890	0.25313	0.23810
7	0.51660	0.49390	0.47188	0.45000	0.42888	0.40836	0.38845	0.36918	0.35056	0.33259
8	0.62154	0.60232	0.58031	0.55836	0.53663	0.51522	0.49415	0.47349	0.45325	0.43347
9	0.71975	0.69931	0.67669	0.65793	0.63712	0.61631	0.59555	0.57490	0.55442	0.53415
10	0.79619	0.76661	0.74259	0.71818	0.69254	0.66644	0.63972	0.61244	0.58467	0.55644
11	0.85969	0.82539	0.79109	0.75680	0.72250	0.68820	0.65390	0.61960	0.58530	0.55100
12	0.90567	0.86539	0.82109	0.77680	0.73250	0.68820	0.64390	0.59960	0.55530	0.51100
13	0.93857	0.89339	0.84510	0.79680	0.74850	0.69920	0.64990	0.59960	0.54930	0.49900
14	0.96130	0.91110	0.85780	0.80350	0.74920	0.69490	0.64060	0.58630	0.53200	0.47770
15	0.97619	0.92222	0.86582	0.80892	0.75152	0.69412	0.63672	0.57932	0.52192	0.46452
16	0.98579	0.93117	0.87282	0.81352	0.75322	0.69292	0.63262	0.57232	0.51202	0.45172
17	0.99174	0.93639	0.87609	0.81579	0.75449	0.69419	0.63389	0.57359	0.51329	0.45299
18	0.99532	0.93919	0.87889	0.81859	0.75729	0.69699	0.63669	0.57639	0.51609	0.45579
19	0.99741	0.94079	0.88049	0.82019	0.75889	0.69859	0.63829	0.57799	0.51769	0.45739
20	0.99860	0.94194	0.88164	0.82134	0.76004	0.69974	0.63944	0.57914	0.51884	0.45854
21	0.99926	0.94295	0.88265	0.82235	0.76105	0.70075	0.64045	0.58015	0.51985	0.45955
22	0.99962	0.94379	0.88349	0.82319	0.76189	0.70159	0.64129	0.58099	0.52069	0.46039
23	0.99981	0.94449	0.88419	0.82389	0.76259	0.70229	0.64199	0.58169	0.52139	0.46109
24	0.99990	0.94509	0.88479	0.82449	0.76319	0.70289	0.64259	0.58229	0.52199	0.46169
25	0.99995	0.94554	0.88524	0.82494	0.76364	0.70334	0.64304	0.58274	0.52244	0.46214
26	0.99998	0.94597	0.88567	0.82537	0.76407	0.70377	0.64347	0.58317	0.52287	0.46257
27	0.99999	0.94639	0.88609	0.82579	0.76449	0.70419	0.64389	0.58359	0.52329	0.46299
28	0.99999	0.94679	0.88649	0.82619	0.76489	0.70459	0.64429	0.58399	0.52369	0.46339
29	0.99999	0.94719	0.88689	0.82659	0.76529	0.70499	0.64469	0.58439	0.52409	0.46379
30	0.99999	0.94759	0.88729	0.82699	0.76569	0.70539	0.64509	0.58479	0.52449	0.46419
31	0.99999	0.94799	0.88769	0.82739	0.76609	0.70579	0.64549	0.58519	0.52489	0.46459
32	0.99999	0.94839	0.88809	0.82779	0.76649	0.70619	0.64589	0.58559	0.52529	0.46499
33	0.99999	0.94879	0.88849	0.82819	0.76689	0.70659	0.64629	0.58599	0.52569	0.46539
34	0.99999	0.94919	0.88889	0.82859	0.76729	0.70699	0.64669	0.58639	0.52609	0.46579
35	0.99999	0.94959	0.88929	0.82899	0.76769	0.70739	0.64709	0.58679	0.52649	0.46619
36	0.99999	0.94999	0.88969	0.82939	0.76809	0.70779	0.64749	0.58719	0.52689	0.46659
37	0.99999	0.95039	0.89009	0.82979	0.76849	0.70819	0.64789	0.58759	0.52729	0.46699
38	0.99999	0.95079	0.89049	0.83019	0.76889	0.70859	0.64829	0.58799	0.52769	0.46739
39	0.99999	0.95119	0.89089	0.83059	0.76929	0.70899	0.64869	0.58839	0.52809	0.46779
40	0.99999	0.95159	0.89129	0.83099	0.76969	0.70939	0.64909	0.58879	0.52849	0.46819
41	0.99999	0.95199	0.89169	0.83139	0.77009	0.70979	0.64949	0.58919	0.52889	0.46859
42	0.99999	0.95239	0.89209	0.83179	0.77049	0.71019	0.64989	0.58959	0.52929	0.46899
43	0.99999	0.95279	0.89249	0.83219	0.77089	0.71059	0.65029	0.58999	0.52969	0.46939
44	0.99999	0.95319	0.89289	0.83259	0.77129	0.71099	0.65069	0.59039	0.53009	0.46979
45	0.99999	0.95359	0.89329	0.83299	0.77169	0.71139	0.65109	0.59079	0.53049	0.47019
46	0.99999	0.95399	0.89369	0.83339	0.77209	0.71179	0.65149	0.59119	0.53089	0.47059
47	0.99999	0.95439	0.89409	0.83379	0.77249	0.71219	0.65189	0.59159	0.53129	0.47099
48	0.99999	0.95479	0.89449	0.83419	0.77289	0.71259	0.65229	0.59199	0.53169	0.47139
49	0.99999	0.95519	0.89489	0.83459	0.77329	0.71299	0.65269	0.59239	0.53209	0.47179
50	0.99999	0.95559	0.89529	0.83499	0.77369	0.71339	0.65309	0.59279	0.53249	0.47219

Table A.2† Tables for evaluation of the CDF of the χ^2 , gamma, and Poisson distributions (Continued)

ν	$\chi^2 = 10.5$ $m = 5.25$	11.0 5.5	11.5 5.75	12.0 6.0	12.5 6.25	13.0 6.5	13.5 6.75	14.0 7.0	14.5 7.25	15.0 7.5
1	0.00119	0.00091	0.00070	0.00053	0.00041	0.00031	0.00021	0.00018	0.00014	0.00011
2	0.00525	0.00409	0.00318	0.00248	0.00193	0.00150	0.00117	0.00091	0.00071	0.00055
3	0.01476	0.01173	0.00931	0.00738	0.00585	0.00464	0.00367	0.00291	0.00230	0.00182
4	0.03290	0.02656	0.02148	0.01735	0.01400	0.01128	0.00907	0.00730	0.00586	0.00470
5	0.06225	0.05138	0.04232	0.03479	0.02854	0.02338	0.01912	0.01561	0.01273	0.01036
6	0.10511	0.08838	0.07410	0.06197	0.05170	0.04304	0.03575	0.02964	0.02452	0.02026
7	0.16196	0.13862	0.11825	0.10058	0.08527	0.07211	0.06082	0.05118	0.04297	0.03600
8	0.23187	0.20170	0.17495	0.15120	0.13025	0.11185	0.09577	0.08177	0.06963	0.05915
9	0.31154	0.27571	0.24299	0.21331	0.18657	0.16261	0.14126	0.12233	0.10562	0.09091
10	0.39777	0.35752	0.31991	0.28506	0.25299	0.22367	0.19704	0.17299	0.15138	0.13206
11	0.48605	0.44326	0.40237	0.36364	0.32726	0.29333	0.26190	0.23299	0.20655	0.18250
12	0.57218	0.52892	0.48662	0.44662	0.40940	0.37504	0.34311	0.31311	0.28511	0.25911
13	0.65263	0.61082	0.56901	0.52764	0.48713	0.44781	0.40997	0.37361	0.33860	0.30515
14	0.72479	0.68604	0.64639	0.60630	0.56622	0.52652	0.48759	0.44971	0.41316	0.37815
15	0.78717	0.75256	0.71641	0.67903	0.64086	0.60230	0.56374	0.52553	0.48800	0.45142
16	0.83925	0.80949	0.77762	0.74398	0.70890	0.67276	0.63591	0.59871	0.56152	0.52464
17	0.88135	0.85656	0.82492	0.79014	0.75466	0.71851	0.68171	0.64431	0.60631	0.56871
18	0.91436	0.89436	0.87195	0.84724	0.82038	0.79157	0.76106	0.72909	0.69569	0.66197
19	0.93952	0.92384	0.90587	0.88562	0.86316	0.83857	0.81202	0.78369	0.75369	0.72260
20	0.95817	0.94622	0.93221	0.91608	0.89779	0.87738	0.85492	0.83050	0.80427	0.77641
21	0.97166	0.96279	0.95214	0.93962	0.92513	0.90862	0.89010	0.86960	0.84718	0.82235
22	0.98118	0.97475	0.96686	0.95738	0.94618	0.93316	0.91827	0.90148	0.88279	0.86224
23	0.98773	0.98319	0.97748	0.97047	0.96201	0.95199	0.94030	0.92687	0.91165	0.89463
24	0.99216	0.98901	0.98498	0.97991	0.97367	0.96612	0.95715	0.94665	0.93454	0.92076
25	0.99507	0.99295	0.99015	0.98557	0.97926	0.97150	0.96253	0.95163	0.93900	0.92502
26	0.99696	0.99555	0.99366	0.99117	0.98798	0.98397	0.97902	0.97300	0.96581	0.95733
27	0.99815	0.99724	0.99598	0.99429	0.99208	0.98925	0.98567	0.98125	0.97585	0.96943
28	0.99890	0.99831	0.99749	0.99637	0.99487	0.99290	0.98937	0.98501	0.97964	0.97324
29	0.99935	0.99899	0.99846	0.99773	0.99672	0.99538	0.99363	0.99138	0.98854	0.98502
30	0.99963	0.99940	0.99907	0.99860	0.99794	0.99704	0.99585	0.99428	0.99227	0.98974
31	0.99988	0.99966	0.99933	0.99886	0.99820	0.99730	0.99611	0.99454	0.99253	0.99000
32	0.99994	0.99972	0.99939	0.99892	0.99816	0.99716	0.99587	0.99420	0.99219	0.98966
33	0.99997	0.99975	0.99942	0.99895	0.99819	0.99719	0.99590	0.99433	0.99232	0.98979
34	0.99998	0.99977	0.99944	0.99897	0.99821	0.99721	0.99592	0.99435	0.99234	0.98981
35	0.99999	0.99978	0.99945	0.99898	0.99822	0.99722	0.99593	0.99436	0.99235	0.98982
36	0.99999	0.99979	0.99946	0.99899	0.99823	0.99723	0.99594	0.99437	0.99236	0.98983
37	0.99999	0.99980	0.99947	0.99900	0.99824	0.99724	0.99595	0.99438	0.99237	0.98984
38	0.99999	0.99981	0.99948	0.99901	0.99825	0.99725	0.99596	0.99439	0.99238	0.98985
39	0.99999	0.99982	0.99949	0.99902	0.99826	0.99726	0.99597	0.99440	0.99239	0.98986

HIPER-
GEOMETRICA

Número de elementos defectuosos en una muestra de tamaño n obtenida de una población de N elementos entre los cuales se encuentran a elementos defectuosos.

Table A.2† Tables for evaluation of the CDF of the χ^2 , gamma, and Poisson distributions (Continued)

ν	$\chi^2 = 21$ $m = 10.5$	22 11.0	23 11.5	24 12.0	25 12.5	26 13.0	27 13.5	28 14.0	29 14.5	30 15.0
1	0.00001									
2	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001						
3	0.00011	0.00007	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001			
4	0.00032	0.00020	0.00013	0.00008	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	
5	0.00091	0.00052	0.00034	0.00022	0.00014	0.00009	0.00006	0.00004	0.00002	0.00002
6	0.00184	0.00121	0.00080	0.00052	0.00034	0.00022	0.00015	0.00009	0.00006	0.00004
7	0.00377	0.00234	0.00171	0.00114	0.00076	0.00050	0.00033	0.00022	0.00015	0.00010
8	0.00715	0.00492	0.00336	0.00229	0.00155	0.00105	0.00071	0.00047	0.00032	0.00021
9	0.01265	0.00868	0.00620	0.00430	0.00297	0.00204	0.00140	0.00095	0.00065	0.00044
10	0.02109	0.01511	0.01075	0.00760	0.00535	0.00374	0.00260	0.00181	0.00125	0.00086
11	0.03337	0.02437	0.01768	0.01273	0.00912	0.00649	0.00460	0.00324	0.00227	0.00159
12	0.05038	0.03752	0.02773	0.02034	0.01482	0.01073	0.00773	0.00553	0.00394	0.00279
13	0.07293	0.05336	0.04168	0.03113	0.02308	0.01700	0.01244	0.00905	0.00655	0.00471
14	0.10163	0.07561	0.06027	0.04582	0.03457	0.02589	0.01925	0.01423	0.01045	0.00763
15	0.13683	0.10780	0.08414	0.06509	0.04994	0.03802	0.02874	0.02157	0.01609	0.01192
16	0.17851	0.14319	0.11374	0.08950	0.06982	0.05403	0.04148	0.03162	0.02394	0.01800
17	0.22829	0.18472	0.14925	0.11944	0.09471	0.07446	0.05807	0.04494	0.03453	0.02635
18	0.27941	0.23199	0.19039	0.15503	0.12492	0.09976	0.07900	0.06206	0.04838	0.03745
19	0.33680	0.28426	0.23734	0.19615	0.16054	0.13019	0.10465	0.08313	0.06599	0.05180
20	0.39713	0.34051	0.28680	0.24239	0.20143	0.16581	0.13526	0.10940	0.08776	0.06985
21	0.45894	0.39951	0.34398	0.29306	0.24716	0.20645	0.17085	0.14015	0.11400	0.09199
22	0.52074	0.45989	0.40173	0.34723	0.29707	0.25168	0.21123	0.17568	0.14486	0.11846
23	0.58109	0.52025	0.46077	0.40381	0.35029	0.30087	0.25597	0.21578	0.18031	0.14940
24	0.63573	0.57527	0.51950	0.46160	0.40576	0.35317	0.30445	0.26004	0.22013	0.18175
25	0.69261	0.63574	0.57756	0.51937	0.46237	0.40760	0.35588	0.30785	0.26392	0.22420
26	0.75196	0.68870	0.63295	0.57597	0.51898	0.46311	0.40933	0.35846	0.31108	0.26761
27	0.81299	0.73738	0.68501	0.63032	0.57446	0.51860	0.46379	0.41097	0.36090	0.31415
28	0.87533	0.79129	0.73304	0.68154	0.62784	0.57305	0.51825	0.46445	0.41253	0.36322
29	0.93915	0.85019	0.78654	0.72893	0.67625	0.62549	0.57171	0.51791	0.46507	0.41400
30	0.98789	0.89404	0.81526	0.77203	0.72503	0.67513	0.62327	0.57044	0.51780	0.46566
31	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
32	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
33	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
34	0.00014	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
35	0.00030	0.00020	0.00013	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
36	0.00059	0.00040	0.00027	0.00019	0.00012	0.00008	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002
37	0.00110	0.00076	0.00053	0.00036	0.00025	0.00017	0.00012	0.00008	0.00005	0.00004
38	0.00197	0.00138	0.00097	0.00068	0.00047	0.00032	0.00022	0.00015	0.00011	0.00007
39	0.00337	0.00240	0.00170	0.00120	0.00085	0.00059	0.00041	0.00029	0.00020	0.00014
40	0.00554	0.00401	0.00288	0.00206	0.00147	0.00104	0.00074	0.00052	0.00036	0.00026
41	0.00878	0.00644	0.00469	0.00341	0.00246	0.00177	0.00127	0.00090	0.00064	0.00045
42	0.01346	0.01000	0.00739	0.00543	0.00397	0.00289	0.00210	0.00151	0.00109	0.00078
43	0.01997	0.01505	0.01127	0.00840	0.00622	0.00459	0.00337	0.00246	0.00179	0.00129
44	0.02879	0.02199	0.01689	0.01260	0.00945	0.00706	0.00524	0.00387	0.00285	0.00209
45	0.04037	0.03125	0.02404	0.01838	0.01397	0.01056	0.00793	0.00593	0.00442	0.00327
46	0.05519	0.04330	0.03374	0.02613	0.02010	0.01538	0.01170	0.00886	0.00667	0.00500
47	0.07366	0.05853	0.04622	0.03624	0.02824	0.02187	0.01683	0.01289	0.00981	0.00744
48	0.09912	0.07740	0.06187	0.04912	0.03875	0.03037	0.02366	0.01832	0.01411	0.01081
49	0.12279	0.10014	0.08107	0.06516	0.05202	0.04125	0.03251	0.02547	0.01984	0.01537
50	0.15378	0.12699	0.10407	0.08467	0.06840	0.05489	0.04376	0.03467	0.02731	0.02139
51	0.18902	0.15501	0.13107	0.10791	0.08820	0.07160	0.05774	0.04626	0.03684	0.02916
52	0.22827	0.19312	0.16210	0.13502	0.11165	0.09167	0.07475	0.06056	0.04875	0.03901
53	0.27114	0.23208	0.19707	0.16605	0.13887	0.11530	0.09507	0.07786	0.06336	0.05124
54	0.31708	0.27451	0.23574	0.20087	0.16987	0.14260	0.11886	0.09840	0.08092	0.06613
55	0.36542	0.31987	0.27774	0.23926	0.20454	0.17358	0.14622	0.12234	0.10168	0.08394
56	0.41541	0.36753	0.32254	0.28053	0.24264	0.20808	0.17714	0.14975	0.12573	0.10486

TABLES

Table A.2† Tables for evaluation of the CDF of the χ^2 , gamma, and Poisson distributions (Continued)

ν	$\chi^2 = 42$ $m = 21$	44 22	46 23	48 24	50 25	52 26	54 27	56 28	58 29	60 30
10	0.00001									
11	0.00002	0.00001								
12	0.00003	0.00002	0.00001							
13	0.00006	0.00003	0.00001	0.00001						
14	0.00012	0.00006	0.00003	0.00001	0.00001					
15	0.00023	0.00011	0.00005	0.00003	0.00001	0.00001				
16	0.00040	0.00020	0.00010	0.00005	0.00002	0.00001	0.00001			
17	0.00067	0.00034	0.00017	0.00009	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001		
18	0.00111	0.00058	0.00030	0.00015	0.00008	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001	
19	0.00177	0.00094	0.00050	0.00026	0.00013	0.00007	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
20	0.00277	0.00151	0.00081	0.00043	0.00022	0.00011	0.00006	0.00003	0.00001	0.00001
21	0.00421	0.00234	0.00128	0.00069	0.00036	0.00019	0.00010	0.00005	0.00002	0.00001
22	0.00625	0.00355	0.00198	0.00109	0.00059	0.00031	0.00016	0.00009	0.00004	0.00002
23	0.00908	0.00526	0.00299	0.00167	0.00092	0.00050	0.00027	0.00014	0.00007	0.00003
24	0.01291	0.00763	0.00443	0.00252	0.00142	0.00078	0.00043	0.00023	0.00012	0.00006
25	0.01797	0.01085	0.00642	0.00373	0.00213	0.00120	0.00066	0.00036	0.00020	0.00011
26	0.02455	0.01512	0.00912	0.00540	0.00314	0.00180	0.00102	0.00056	0.00031	0.00017
27	0.03292	0.02068	0.01272	0.00768	0.00455	0.00265	0.00152	0.00086	0.00048	0.00026
28	0.43386	0.27779	0.01743	0.01072	0.00647	0.00384	0.00224	0.00129	0.00073	0.00041
29	0.05616	0.03670	0.02346	0.01470	0.00903	0.00545	0.00324	0.00199	0.00109	0.00062
30	0.07157	0.04769	0.03107	0.01983	0.01240	0.00762	0.00460	0.00273	0.00160	0.00094
31	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
32	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
33	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
34	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
35	0.00006	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
36	0.00009	0.00005	0.00003	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
37	0.00014	0.00008	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
38	0.00023	0.00012	0.00007	0.00004	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
39	0.00035	0.00019	0.00011	0.00006	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001
40	0.00052	0.00029	0.00016	0.00009	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001

† Compiled from E. S. Pearson and H. O. Hartley (eds.) [1954], "Biometrika Tables for Statisticians," vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, England (by permission).

Note: See Sec. 3.4.2 for illustrations of application. Tables yield:

1. $1 - F(x^2)$ for a χ^2 distribution with ν degrees of freedom.
2. $1 - F(y)$, where $y = x^2/2\lambda$, for a gamma distribution with parameters $k = \nu/2$ and λ . Enter table with $\nu = 2k$ and $x^2 = 2\lambda y$.
3. $F(u)$, where $u = (1/2)\nu - 1$, for a Poisson distribution with mean $m = 1/2 x^2$. Enter table with m and $\nu = 2(u + 1)$.

For $\nu \geq 30$, the χ^2 distribution is approximately normal, with mean ν and variance 2ν . Somewhat more accurately (Hald [1952]) for $\nu \geq 30$, the value x_p^2 such that $F(x_p^2) = p$ is approximately $x_p^2 = 1/2(\sqrt{2\nu} - 1 + u_p)^2$, in which u_p is the value from the standardized normal Table A.1 such that $F(u_p) = p$.

Transformada de Laplace

TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Notación y Definición

Sea x una variable real no negativa y $f(x)$ una función de orden exponencial.

Su función transformada de Laplace se denota $L\{f(x);s\}$, $s \in \mathbb{C}$ y se define

$$L\{f(x);s\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx = E[e^{-sx}]$$

2. Propiedades importantes

$$1. L\{af(x)+bg(x);s\} = aL\{f(x);s\}+bL\{g(x);s\}$$

$$2. L\{f^{(n)}(x);s\} = s^n L\{f(x);s\} + \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i} f^{(i)}(0^+)$$

$$3. L\{\int_0^t f(x)dx;s\} = \frac{1}{s} L\{f(x);s\}$$

$$4. L\{\int_0^t f(t-x)g(x)dx;s\} = L\{f(x);s\}L\{g(x);s\}$$

$$5. L\{(-1)^n x^n f(x);s\} = L^{(n)}\{f(x);s\}$$

$$6. L\{\frac{1}{x} f(x);s\} = \int_s^{\infty} L\{f(x);t\}dt$$

$$7. L\{\frac{1}{c} e^{b/c} f(\frac{x}{c});s\} = L\{f(x);cs-b\} \quad c > 0$$

$$8. L\{f(x-b)\delta(x-b);s\} = e^{-bs} L\{f(x);s\} \quad b > 0$$

3. Tabla de transformadas de algunas funciones básicas

	Función	Transformada
1.	1	$1/s$
2.	x	$1/s^2$
3.	$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n=1,2,\dots)$	$1/s^n$

	Función	Transformada
4.	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
5.	$x^{r-1} \quad (r>0)$	$\frac{\Gamma(r)}{s^r}$
6.	e^{-ax}	$\frac{1}{s+a}$
7.	xe^{-ax}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8.	$\frac{x^{n-1} e^{-ax}}{(n-1)!} \quad (n=1,2,\dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9.	$x^{r-1} e^{-ax} \quad (r>0)$	$\frac{\Gamma(r)}{(s+a)^r}$
10.	$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{b-a} \quad (b \neq a)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11.	$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
12.	$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
13.	$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
14.	$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
15.	$x \sin x$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
16.	$x \cos x$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
17.	$e^{-ax} \sin bx$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$

	Función	Transformada
18.	$e^{-ax} \cos bx$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
19.	$\delta(x-r)$	$\frac{1}{s} e^{-rs}$
20.	$\frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}$	$\ln \frac{s+a}{s+b}$

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA BASICA

1. CINLAR, E. INTRODUCTION TO STOCHASTIC PROCESSES, Prentice Hall, 1975
2. PARZEN, E. STOCHASTIC PROCESSES, Holden Day, 1962
3. PAPOULIS, A. PROBABILITY, RANDOM VARIABLES AND STOCHASTIC PROCESSES, Mc Graw Hill, 1965
4. FELLER, W. AN INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY AND ITS APPLICATIONS, Vol I y II, Wiley 1970, 1971
5. ROSS, S.M. INTRODUCTION TO PROBABILITY MODELS, Academic Press, 1972
6. HOEL, PORT, STONE INTRODUCTION TO STOCHASTIC PROCESSES, Edit Houghton Mifflin, 1971
7. KARLIN S and TAYLOR, H. A FIRST COURSE IN STOCHASTIC PROCESSES, 2nd Edition, Academic Press, 1975
8. NEUTS, M.F., PROBABILITY, Allyn and Bacon, 1973

Nota: Las referencias 1,2, 3,4,6,8 constituyeron las principales fuentes para la elaboración de los apuntes.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

1. ATHREYA, K.B., BRANCHING PROCESSES, Springer-Verlag, 1972
2. CHUNG, K.L., ELEMENTARY PROBABILITY THEORY WITH STOCHASTIC PROCESSES, Springer-Verlag, 1974
3. CHUNG, K.L., MARKOV CHAINS WITH STATIONARY TRANSITION PROBABILITIES, Second Edition, Springer-Verlag, 1967
4. COX, D.R., RENEWAL THEORY, Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics, Wiley, 1962
5. HARRIS, T.E., THE THEORY OF BRANCHING PROCESSES, Springer-Verlag, 1963
6. KHINTCHINE, A.Y., MATHEMATICAL METHODS IN THE THEORY OF QUEUING, Griffin, London, 1960
7. PRABHU, N.U. STOCHASTIC PROCESSES, Mac Millan 1965
8. ROSS, S.M. APPLIED PROBABILITY MODELS WITH OPTIMIZATION APPLICATIONS, Holden Day, 1970
9. RENNENBURG, J. Th. ON THE USE OF THE METHOD OF COLLECTIVE MARKS IN QUEUING THEORY. Artículo en el libro: SIMPOSIUM ON CONGESTION THEORY, North Carolina Press (Chape Hill), 1964

10. SMITH, W.L., REGENERATIVE STOCHASTIC PROCESSES, *Pro.Roy. London, Ser. A. Vol 232*, pp 6-31, 1955
11. SMITH, W.L., RENEWAL THEORY AND ITS RAMIFICATIONS *J Roy Statist. Soc. Vol 20*, pp 243-302, 1958
12. TAKACS, L., STOCHASTIC PROCESSES, *Methuen Monographs on Applied Probability and Statistics*, Wiley, 1960
13. TAKACS, L., INTRODUCTION TO THE THEORY OF QUEUES, *Methuen Monographs on Applied Probability*
14. DUBES, R.C., THE THEORY OF APPLIED PROBABILITY *Prentice Hall*, cap 9 a 12, 1968
15. MEIROVITCH, L., ANALYTICAL METHODS IN VIBRATION, *Mac-Millan*, Cap. 1 y 11, 1967