



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Empleo de refinamiento automático  
tridimensional en análisis con elemento  
finito de elementos estructurales**

**TESIS**

Que para obtener el título de

**Ingeniera Civil**

**P R E S E N T A**

Xuxek Ameyalli Pérez Juárez

**DIRECTOR DE TESIS**

Dr. Armando Rafael Hermosillo Arteaga



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025**

## **AGRADECIMIENTOS**

### **A MIS PADRES**

Por ser mi guía constante y brindarme mis primeras enseñanzas que forman parte de mi aprendizaje y crecimiento.

Su apoyo incondicional, moral, económico y su esfuerzo; han sido la base principal para que hoy este cumpliendo una etapa de mi vida.

Siempre estaré agradecida y espero algún día retribuir todo su amor.

### **A MIS HERMANAS**

Con quienes he tenido la fortuna de crecer juntas y compartir cada etapa de nuestra vida siendo así mis compañeras incondicionales; siempre apoyándonos, motivándonos a perseguir nuestros objetivos, acompañándonos en incontables noches de desvelo y esfuerzo. Sin su apoyo mi camino sería difícil y siempre han alegrado mis días. Con su experiencia y consejo me han inspirado a seguir adelante a terminar mis metas y formar nuevas.

### **A OMAR**

Que me dedico su tiempo, su apoyo y me brindo su confianza en este proceso.

### **A MIS AMIGOS**

Por terminar juntos este proyecto y apoyarnos en nuestros estudios. Siempre estar moral y físicamente en las dificultades y ser siempre un equipo para poder seguir adelante.

### **A MIS PROFESORES**

Quienes a lo largo de las distintas etapas de mi formación han sido testigos de mis avances y desafíos, me han aportado su experiencia encaminándome a mejorar.

Al Dr. Hermosillo por su impulso, apoyo y conocimiento para motivarme a concluir este trabajo; al igual que su dedicación a la enseñanza y su compromiso al impulsar el estudio.

# ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	15
<b>OBJETIVOS</b> .....	17
Objetivo general.....	17
Objetivos específicos.....	17
<b>CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES</b> .....	18
<b>CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS BASICOS</b> .....	21
2.2 Esfuerzos y equilibrio.....	21
2.3 Condiciones de frontera.....	24
2.4 Relaciones de compatibilidad o relaciones deformación unitaria- desplazamiento.....	26
2.5 Relaciones esfuerzo- deformación unitaria.....	29
2.5.2 Ley de Hook.....	29
2.6 Efectos por temperatura.....	33
2.7 Energía potencial y equilibrio.....	33
2.7.2 Método de Rayleigh-Ritz.....	34
2.8 Método de Galerkin.....	35
2.8.2 Método de Galerkin en la elasticidad.....	36
2.9 Principio de Saint Venant.....	37
2.10 Esfuerzos de Von Mises.....	38
<b>CAPÍTULO 3 TÉCNICAS DE MALLADO</b> .....	39
3.2 Metodología de generación de mallas.....	39

3.2.2 Mallas estructuradas.....	40
3.2.2.2 Generación de mallas por métodos algebraicos.....	40
3.2.2.3 Generación de mallas por métodos de resolución de ecuaciones parciales.....	41
3.2.2.4 Generación de mallas por métodos de superposición- deformación de retícula...	43
3.2.2.5 Generación de mallas por métodos de crecimiento estructurado.....	43
3.2.3 Mallas no estructuradas.....	44
3.2.3.2 Generación de mallas por métodos de avance frontal.....	45
3.2.3.3 Generación de mallas por métodos de Delaunay-Voronoi.....	46
3.2.4 Métodos híbridos.....	47
3.2.4.2 Generación de mallas por métodos multibloque.....	48
3.2.5 Tetraedro.....	49
3.2.5.2 Características geométricas del tetraedro.....	49
3.3 Mallas bidimensionales.....	50
3.3.2 Malla estructurada por el método de interpolación por proyectores transfinitos en cuadriláteros.....	52
3.3.3 Malla no estructurada en cuadriláteros rectilíneos por el método de frente de avance rápido (FAR).....	52
3.3.4 Malla no estructurada en cuadriláteros arbitrarios por el método de frente de avance rápido generalizado (FARG).....	53
3.3.5 Malla estructurada interpolación por proyectores transfinitos en triángulos.....	54
3.3.6 Malla no estructurada con triángulos arbitrarios por frente de avance rápido generalizado.....	54
3.3.7 Malla con dominios arbitrarios mediante la técnica de multibloque.....	55
3.3.7.2 Técnica de polígonos convexos.....	56
3.4 Mallas tridimensionales.....	57
3.4.2 Malla estructurada por el método de proyectores transfinitos.....	58

3.4.3 Malla no estructurada por el método de frente avance.....	58
3.5 Software disponible.....	59
3.5.2 Generador de malla inicial.....	59
3.5.2.2 Módulo geométrico.....	59
3.5.2.3 Módulo de mallado.....	61
3.5.3 Programa de análisis.....	63
3.5.4 Programa para la visualización de resultados.....	63
<b>CAPÍTULO 4 ALGORITMO DE REFINAMIENTO AUTOMÁTICO.....</b>	<b>64</b>
4.2 Fundamentos del algoritmo.....	65
4.2.2 Teoría de fractales.....	65
4.2.3 Triangulo de Sierpinski.....	65
4.3 Procedimiento de refinamiento.....	67
4.3.2 Subdivisión del tetraedro.....	67
4.4 Procedimiento de refinamiento del software ARFEM3D.....	73
4.5 Procedimiento operativo para el análisis el análisis de elemento finito con el programa ARFEM3D.....	76
4.5.2 Manual de procedimiento operativo para el análisis el análisis de elemento finito con el programa ARFEM3D.....	78
4.5.2.2 Definición del problema.....	78
4.5.2.3 Discretización del medio.....	79
4.5.2.4 Procedimiento de refinamiento automático.....	83
4.5.2.5 Visualización de resultados.....	88
<b>CAPÍTULO 5 CASOS DE ESTUDIO CON APLICACIÓN DEL MÉTODO DE REFINAMIENTO.....</b>	<b>90</b>
5.2 Viga simplemente apoyada.....	90

5.2.2 Viga rectangular simplemente apoyada sin refuerzo longitudinal y con carga a dos tercios.....	91
5.2.2.2 Análisis por la doble integral.....	92
5.2.2.3 Análisis con el software ARFEM3D.....	95
5.2.3 Viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con carga a dos tercios.....	103
5.2.3.2 Análisis por la doble integral.....	105
5.2.3.3 Análisis con el programa ARFEM3D.....	107
5.3 Marco de concreto con carga distribuida.....	115
5.3.2 Marco de concreto sin refuerzo longitudinal, con carga distribuida.....	116
5.3.2.2 Análisis por la doble integral.....	116
5.2.2.3 Análisis con el programa ARFEM3D.....	119
5.3.3 Marco de concreto con refuerzo longitudinal inferior, con carga distribuida.....	127
5.3.3.2 Análisis con el programa ARFEM3D.....	128
5.4 Losa de concreto.....	133
5.4.2 Losa en una dirección.....	133
5.4.2.2 Losa en una dirección con carga concentrada.....	134
5.4.2.3 Análisis de una losa de concreto en una dirección con carga concentrada con el programa ARFEM3D.....	135
5.4.3 Losa en dos direcciones.....	140
5.4.3.2 Análisis de una losa de concreto en dos direcciones con carga en el centro con el programa ARFEM3D.....	141
5.5 Viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con incrementos de carga a dos tercios.....	147
5.5.2 Definición de la geometría de la viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con incrementos de carga a dos tercios.....	148

5.5.3. Definición de materiales y propiedades mecánicas de la viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con incrementos de carga a dos tercios.....	151
5.5.4. Definición de fuerzas aplicadas en viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con incrementos de carga a dos tercios.....	154
5.5.5. Definición de análisis de viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con incrementos de carga a dos tercios.....	155
5.5.6 Análisis de viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y con incrementos de carga a dos tercios con el programa ARFEM3D.....	156
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES.....</b>	<b>164</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>166</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Cuerpo Tridimensional.....	22
Figura 2.2 Equilibrio de un Volumen Elemental.....	23
Figura 2.3 Ejemplo de cuerpo con condiciones de frontera.....	24
Figura 2.4 Volumen Tetraédrico elemental en la superficie.....	25
Figura 2.5 Representación del Vector Desplazamiento.....	26
Figura 2.6 Representación del Vector Deformación.....	27
Figura 2.7 Comportamiento de un Cuerpo Elástico Sometido a una Fuerza.....	30
Figura 2.8 Deformación de un Cuerpo en tres direcciones.....	31
Figura 2.9 Fuerza tangencial Aplicada a un Cuerpo.....	32
Figura 2.10 Distribución de Esfuerzos Principio de Saint Venant.....	37
Figura 3.1 Mallas generadas por el método algebraico.....	41
Figura 3.2 Ejemplos del control de las funciones fuentes P y Q.....	42
Figura 3.3 Mallas bidimensionales generadas por la resolución de EDP: a) Laplace, b) Poisson, c) Hiperbólico.....	42
Figura 3.4 Proceso de generación de la malla por el método de superposición-deformación de retícula: a) Superposición de la retícula inicial b) Eliminación de cuadros, c) Ajuste de contorno mediante la deformación de cuadrados d) Ajuste de contorno por retícula jerárquica.....	43
Figura 3.5 Malla generada por métodos de crecimiento estructurado.....	44
Figura 3.6 Orientación de las curvas de definición del contorno.....	45
Figura 3.7 Actualización del frente.....	46
Figura 3.8 Evolución de malla.....	46
Figura 3.9 Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay asociada.....	47
Figura 3.10 Triangulación de Delaunay.....	47
Figura 3.11 Ejemplo de proceso de generación de malla mediante el método multibloque.....	48
Figura 3.12 Representación de un tetraedro.....	49
Figura 3.13 Cuerpo Bidimensional.....	51

Figura 3.14 Malla Generada por Interpolación por Proyectores Transfinitos. a) En Áreas Cuadriláteras con Contornos Rectos. b) En Áreas Cuadriláteras con Contornos Irregulares....	52
Figura 3.15 Proceso de Generación de Malla por el Método FAR.....	53
Figura 3.16 Ejemplo de Proceso de Mallado por el Método FARG.....	54
Figura 3.17 Ejemplo de Malla Estructurada Mixta y Triangular por el Método de interpolación por Proyectores Transfinitos.....	54
Figura 3.18 Ejemplo de Malla No Estructurada por el Método de FARG.....	55
Figura 3.19 Ejemplo de Mallas Mixtas y Triangular por la Técnica de Multibloque.....	56
Figura 3.20 Ejemplo de Malla por la Técnica Multibloque en Polígono Regula mixta y triangular.....	57
Figura 3.21 Visualización de las Entidades Elementales del Programa GMSH Presentes en el Módulo Geométrico.....	60
Figura 3.22 Visualización de Herramientas que tiene el Programa GMSH Presentes en el Módulo Geométrico.....	60
Figura 3.23 Ejemplo de Geometría de Mallado Generada desde el Mallador de Texto del Programa GMSH.....	61
Figura 3.24 Ejemplo de Malla en 3D y del Módulo de Mallado del programa GMSH.....	62
Figura 3.25 Ejemplo de Malla en 3D utilizando el archivo de texto del programa GMSH.....	62
Figura 4.1 Procedimiento Constructivo del Triángulo de Sierpinski.....	66
Figura 4.2 Ejemplo de Construcción de Tetraedro por el Triángulo de Sierpinski.....	67
Figura 4.3 Ejemplo de Malla a Remallar. a) Elementos que Componen la Malla. b) Extrapolación de los Elementos.....	68
Figura 4.4 Primer Refinamiento del elemento central a) Partición del Elemento Central. b) Extrapolación de los Elementos Generados del Refinamiento en el EC.....	69
Figura 4.5 Elementos de la Malla en el Primer Refinamiento a) Partición del Elemento Central. b) Extrapolación de los Elementos Generados del Refinamiento en el EC.....	70
Figura 4.6 Remaello considerando dos elementos centrales adyacentes. a) Elementos centrales rojo y verde sin refinar b) Elementos centrales refinados.....	71
Figura 4.7 Remaello considerando tres elementos centrales adyacentes. a) Elementos centrales rosa y azul sin refinar b) Refinación de elementos centrales, donde el elemento gris también se considera elemento central, por la regla dos.....	71

Figura 4.8 Procedimiento de técnica de Remaello. a) Elemento tetraédrico a refinar. b) Elementos alargados debido al refinamiento del elemento central. c) Búsqueda automática de elementos alargados y refinamiento para su eliminación.....	73
Figura 4.9 Diagrama de Flujo del Procedimiento de Remaello Automático.....	76
Figura 4.10 Representación del problema a analizar, con dimensiones en centímetros.....	78
Figura 4.11 Representación geométrica de los volúmenes que se desean definir en el programa GMSH.....	79
Figura 4.12 Proceso de generación de volumen para la malla.....	80
Figura 4.13 Proceso de generación de la malla inicial. a) Definición de las características de la malla. b) Malla generada.....	81
Figura 4.14 Sustracción de información de la malla inicial generada. a) Forma de guardado. b) Sustracción de información necesaria.....	82
Figura 4.15 Acomodo de la Información de la Malla Generada del GMSH.....	83
Figura 4.16 Obtención de Archivo Geometría.....	84
Figura 4.17 Generación de Archivo de Materiales. a) Ubicación del Número de Volúmenes en el Archivo de Geometría. b) Archivo del Material.....	85
Figura 4.18 Generación de Archivo de Fuerzas.....	86
Figura 4.19 Archivo de Opción.....	87
Figura 4.20 Archivo defor y plastif.....	87
Figura 4.21 Procedimiento de Corridas Para Abrir el Programa de ARFEM3D.....	88
Figura 4.22 Procedimiento de Visualización de Resultados. a) Carga del archivo. b) Selección del tipo de análisis.....	89
Figura 5.1 Viga rectangular simplemente apoyada sin refuerzo longitudinal y con carga a dos tercios a analizar.....	92
Figura 5.2 Procedimiento de la ecuación de momento en el intervalo establecido.....	93
Figura 5.3 Procedimiento de la ecuación de la curva de deflexión en el intervalo establecido..	94
Figura 5.4 Curva de deflexión de la viga obtenida por el método simplificado de la doble integral.....	95
Figura 5.5 Definición de la geometría de la malla inicial y la restricción de desplazamiento en sus nodos.....	95
Figura 5.6 Archivo fuerzas, muestra de los nodos cargados.....	96

Figura 5.7 Definición del material del problema a analizar.....	97
Figura 5.8 Criterios de análisis.....	98
Figura 5.9 Malla de viga rectangular con carga en los tercios. a) Malla inicial de la viga en estudio. b) Malla después de dos iteraciones.....	98
Figura 5.10 Visualización de distribución de desplazamiento de viga rectangular con carga en los tercios. a) Distribución de desplazamientos de la malla inicial de la viga en estudio. b) Distribución de desplazamientos de la malla después de tres iteraciones. c) Visualización de la viga deformada.....	100
Figura 5.11 Visualización de distribución de esfuerzos en un viga rectangular con carga en los tercios. a) Distribución de esfuerzos de la malla inicial de la viga en estudio. b) Distribución de esfuerzos de la malla después de tres iteraciones. c) Distribución de esfuerzos de la malla después de tres iteraciones y malla.....	102
Figura 5.12 Planteamiento del problema de viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y carga a dos tercios.....	103
Figura 5.13 Procedimiento del cálculo del momento de inercia de una sección transformada.....	105
Figura 5.14 Procedimiento de la ecuación de momento en el intervalo establecido.....	105
Figura 5.15 Procedimiento de la ecuación de la curva de deflexión en el intervalo establecido.....	106
Figura 5.16 Procedimiento de la obtención del momento de inercia de la sección transformada y curva de deflexión .....	107
Figura 5.17 Definición de las condiciones físicas y geométricas del problema.....	107
Figura 5.18 Archivos para el análisis con el programa ARFEM3D. Archivo de geometría.....	109
Figura 5.19 Archivos para el análisis con el programa ARFEM3D. Archivo de fuerza.....	109
Figura 5.20 Archivos para el análisis con el programa ARFEM3D. Archivo de materiales.....	110
Figura 5.21 Malla de viga rectangular con carga en los tercios y acero longitudinal. a) Malla inicial de la viga en estudio. b) Malla después de dos iteraciones.....	112
Figura 5.22 Visualización de distribución de desplazamiento de viga rectangular con carga en los tercios y acero longitudinal. a) Distribución de desplazamientos de la malla inicial de la viga en estudio. b) Distribución de desplazamientos de la malla después de dos iteraciones. c) Visualización de la viga deformada.....	113

Figura 5.23 Visualización de distribución de esfuerzos-normales horizontales de la viga rectangular con carga en los tercios y acero transversal. a) Contornos de esfuerzos con la malla inicial. b) Contornos de esfuerzos después de dos iteraciones. c) Malla después de dos iteraciones y contornos de esfuerzos.....	115
Figura 5.24 Marco de concreto sin refuerzo longitudinal con carga distribuida.....	116
Figura 5.25 Definición de las condiciones físicas y geométricas del problema (viga T).....	117
Figura 5.26 Procedimiento de la obtención del momento de inercia de la sección transformada de un marco sin refuerzo longitudinal. Cálculo de la ecuación de deflexión de la viga.....	118
Figura 5.27 Curva de deflexión de marco sin refuerzo longitudinal.....	119
Figura 5.28 Definición geométrica marco de concreto con carga distribuida en el programa GMSH.....	120
Figura 5.29 Archivo de geometría. Establecimiento de libertad en desplazamientos de nodos en las tres direcciones (x,y z). Marco con carga distribuida.....	120
Figura 5.30 Archivo de nodos cargados, marco con carga distribuida.....	121
Figura 5.31 Archivo de las propiedades del material de marco con carga distribuida.....	121
Figura 5.32 Visualización de marco de viga T con carga distribuida. Mallado inicial. a) Distribución de esfuerzos normales horizontales. B) Distribución de esfuerzos normales verticales.....	122
Figura 5.33 Visualización de marco de viga T con carga distribuida. Primer refinamiento a) Distribución de esfuerzos normales horizontales. B) Distribución de esfuerzos normales verticales.....	123
Figura 5.34 Visualización de marco de viga T con carga distribuida. Segundo refinamiento a) Distribución de esfuerzos normales horizontales. B) Distribución de esfuerzos normales verticales.....	124
Figura 5.35 Visualización de desplazamiento de marco de viga T con carga distribuida. a) Mallado inicial. b) Segundo mallado.....	126
Figura 5.36 Marco de concreto con refuerzo longitudinal inferior.....	127
Figura 5.37 Marco de concreto con refuerzo longitudinal inferior en ARFEM3D.....	128
Figura 5.38 Archivos de notas del marco con acero de refuerzo. a) Archivo de geometría. b) Archivo de materiales. c) Archivo de fuerzas.....	130

Figura 5.39 Visualización de esfuerzos normales horizontales del marco con acero de refuerzo. a) Malla inicial. b) Primer refinamiento. c) Segundo refinamiento.....	131
Figura 5.40 Esfuerzos de tensión y compresión con detalle en el acero. A) Malla inicial. b) Segundo refinamiento.....	132
Figura 5.41 Visualización de métodos de cálculo para losas en una dirección con carga concentrada. a) Método de ancho efectivo con carga concentrada. b) Método de líneas de fluencia.....	134
Figura 5.42 Losa de concreto en una dirección con carga concentrada. a) Losa completa de concreto a analizar. b) Cuarto de la losa de concreto analizada por el programa REM3D.....	135
Figura 5.43 Criterios de análisis de la losa de concreto.....	136
Figura 5.44 Mallado obtenido del programa ARFEM3D. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado.....	137
Figura 5.45 Visualización de los esfuerzos en $\sigma_x$ obtenidos del programa ARFEM3D. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado. e) Cuarto mallado vista inferior.....	139
Figura 5.46 Visualización de los desplazamientos en dirección al eje z.....	140
Figura 5.47 Losa de concreto en dos direcciones con carga concentrada en el centro. a) Losa completa de concreto a analizar. b) Cuarto de la losa de concreto analizada por el programa ARFEM3D.....	142
Figura 5.48 Criterios de análisis de la losa de concreto en dos direcciones.....	143
Figura 5.49 Mallado obtenido con el programa ARFEM3D de un cuarto de losa en dos direcciones. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado.....	145
Figura 5.50 Visualización de los esfuerzos en un cuarto de losa de dos direcciones obtenidos del programa ARFEM3D. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado. e) Cuarto mallado vista inferior.....	146
Figura 5.51 Visualización de los desplazamientos de un cuarto de losa de dos direcciones obtenidos del programa ARFEM3D.....	147
Figura 5.52 Viga rectangular simplemente armada con carga a los dos tercios y apoyada en sus extremos.....	147

Figura 5.53 Simplificación del análisis de la viga rectangular simplemente armada con carga a los dos tercios y apoyada en sus extremos.....	148
Figura 5.54 Malla de la viga generada en el programa GMSH.....	150
Figura 5.55 Archivo de geometría .....	150
Figura 5.56 Curva esfuerzo-deformación acero. a) Curva esfuerzo-deformación de acero. b) Curva esfuerzo-deformación de acero sección transformada.....	153
Figura 5.57 Curva esfuerzo-deformación a compresión de concreto.....	154
Figura 5.58 Archivo de fuerzas de viga simplemente apoyada con carga a dos tercios.....	155
Figura 5.59 Archivo de definición de análisis de viga simplemente apoyada con carga a dos tercios.....	155
Figura 5.60 Malla de viga simplemente apoyada con carga en los tercios y acero de refuerzo inferior. A) Malla inicial. b) Malla ciclo 8. C) Malla ciclo 56.....	157
Figura 5.61 Malla inicial visualización de esfuerzos normales en dirección longitudinal ( $\sigma_y$ ). Escala en $\text{kgf/cm}^2$ . a) Visualización de cuarto de viga en estudio. b) Corte de visualización de viga en estudio en la zona de apoyo. c) Corte de visualización de viga en la zona del centro de la viga.....	157
Figura 5.62. Malla correspondiente al ciclo 5. Esfuerzos normales en dirección longitudinal ( $\sigma_y$ ). Escala en $\text{kgf/cm}^2$ . a) Visualización de cuarto de viga en estudio. b) Corte en la zona de apoyo. c) Corte en la zona del centro de la viga.....	158
Figura 5.63. Módulo de elasticidad inicial de los materiales (acero, concreto).....	159
Figura 5.64. Generación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto.....	160
Figura 5.65. Propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto, generación de grietas horizontales.....	161
Figura 5.66. Continuación de la propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto.....	161
Figura 5.67. Propagación de grietas debidas al abatimiento del módulo del concreto. Ciclo número 83.....	162
Figura 5.68. Propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto. Inicio de fluencia del acero.....	162
Figura 5.69. Propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto. Extensión de fluencia del acero.....	163

## INTRODUCCIÓN

Con la llegada de los avances tecnológicos se ha revolucionado el campo de la ingeniería, permitiendo el desarrollo de métodos de análisis cada vez más complejos que con el uso de las computadoras, se ha vuelto más accesible y alcanzable. El uso del Método de Elemento Finito (MEF) se ha convertido en una herramienta fundamental en la ingeniería moderna debido a su capacidad para la resolución de problemas complejos de manera precisa y eficiente.

En los últimos años, con la llegada de las computadoras, se ha incrementado la creación de software, especializados que implementan el MEF. Estos programas emplean diversas técnicas de análisis y han transformado significativamente la forma en la que se abordan los problemas en distintas áreas de la ingeniería. El área de la ingeniería estructural ha utilizado esta herramienta para facilitar y expandir sus análisis, ya que permite modelar y analizar estructuras facilitando el diseño seguro de éstas.

Actualmente existen opciones diversas de software que permiten realizar estudios detallados con el análisis por el MEF y obtener el comportamiento preciso de los elementos en estudio. Con estos programas se pueden simular condiciones reales, previniendo respuestas estructurales para mejorar el diseño estructural y emplear el conocimiento del comportamiento de las estructuras antes de su construcción.

El programa ARFEM3D, creado por los doctores Armando R. Hermosillo Arteaga, Miguel P. Romo Organista, Roberto Magaña del Toro y Jorge Carrera Bolaños, se creó para mejorar la precisión en la resolución de problemas de ingeniería geotécnica.

Este algoritmo introduce un procedimiento geométrico innovador que refina automáticamente mallas de elementos tetraédricos, con un proceso iterativo de cálculo y refinamiento que se activa cuando se incumplen condiciones límite predefinidas, como criterios de falla (Hermosillo *et al.*, 2016)

En este trabajo de tesis, se utilizó esta herramienta para el análisis de problemas clásicos en la ingeniería estructural. Se hizo uso de este programa por su característica de refinamiento automático permitiendo observar mediante los resultados obtenidos un panorama más claro del comportamiento de las estructuras.

La peculiar característica de dicho software de refinamiento automático es que al aplicarlo, en zonas donde se acerquen o rebasen los criterios establecidos en el análisis, le da ventaja sobre otros programas, ya que esta cualidad induce la reducción de errores al trazar la nueva malla, ventaja que muchos otros softwares no tienen, y al realizar manualmente el refinamiento pueden generarse errores.

El procedimiento de transferencia de resultados entre un análisis y otro permite que el algoritmo realice análisis secuenciales, con incrementos de carga hasta alcanzar niveles de esfuerzos o deformaciones que rebasen las condiciones de diseño de algún problema en específico.

## **OBJETIVOS**

### **OBJETIVO GENERAL**

El propósito de esta tesis es mostrar la utilidad del Método de Elementos Finitos (MEF) utilizando el software ARFEM3D como herramienta en la solución de problemas de ingeniería para algunos casos de análisis de elementos estructurales básicos como: una viga simplemente apoyada con y sin refuerzo, conexiones viga-columna (marco rígido) y losas trabajando en una y dos direcciones. Así mismo se emplea para análisis no lineal en el que se rebasen las condiciones de diseño; tal es el caso de una viga simplemente apoyada.

### **OBJETIVOS PARTICULARES**

- Mostrar el funcionamiento del programa ARFEM3D, presentando sus características y capacidades.
- Presentar el procedimiento seguido durante el pre y post análisis, utilizando programas de apoyo para la generación de la malla inicial y para la visualización de los resultados obtenidos.
- Evaluar la efectividad del software ARFEM3D identificando las ventajas y limitaciones del programa, mediante la comparación de resultados obtenidos con este software y los obtenidos mediante los métodos tradicionales existentes en la literatura, los cuales forman parte de la formación académica de los ingenieros para la resolución de los problemas clásicos de la ingeniería, con la finalidad de ofrecer una herramienta adicional en el análisis estructural.
- Examinar la capacidad del programa ARFEM3D para abordar problemas más complejos aplicándolo a un análisis no lineal para evaluar sus capacidades y con ello aprovechar el MEF como alternativa viable en la solución de problemas más desafiantes.

# CAPÍTULO 1

## ANTECEDENTES

El análisis por el método de elementos finitos ha sido una herramienta muy importante en los últimos años para la solución de problemas de ingeniería. Actualmente se ha usado con más frecuencia este método por la efectividad de resolución de las computadoras, pero el principio de este concepto se ha usado desde hace varios siglos.

El concepto de elemento finito parte de la idea de métodos de discretización espacial y temporal, y de la aproximación numérica para problemas ingenieriles y físicos, empleados desde la antigüedad.

Los antiguos egipcios usaron métodos de discretización para determinar el volumen de las pirámides; de igual forma Arquímedes empleó este método para calcular el volumen de cualquier sólido y áreas de superficies. Sin embargo, el desarrollo del método de elementos finitos ha sido por los estudios de análisis estructural de las aeronaves. En 1941, Hrenikoff describió el método de trabajo de marco (Chandrupatla, 1999) para soluciones de problemas de elasticidad. Junto con McHenry en 1943 utilizaron de forma unidimensional barras y vigas dando solución a las tensiones en sólidos continuos. Courant por su parte, en 1943, hizo uso de la interpolación polinomial por partes sobre sub-regiones triangulares para modelar problemas de torsión, como un método especial del método de variación de Raleigh Ritz para aproximar soluciones. Levy desarrolló el método de fuerza en 1953 que retomó con la llegada de las computadoras para resolver ecuaciones grandes y complicadas (Chandrupatla, 1999).

En 1955 Argyris publicó teoremas de energía y métodos matriciales; este hecho define la importancia de los principios de la energía en el método de los elementos finitos. En 1956, Turner, Clough, Martin y Topp obtuvieron matrices de rigidez para armaduras, vigas y otros elementos y quienes presentaron el método de elemento finito tal como se conoce hoy en día. Ellos utilizaron los conceptos de discretización y funciones de forma. Fue Clough en 1960 quien empleó el término elemento finito. Fueron Zienkiewicz y Chung quienes publicaron en 1967 el primer libro sobre elementos finitos y su aplicación a cualquier problema de campo.

A principios de la década de 1960 se utilizó el MEF para tener aproximaciones en problemas de análisis de esfuerzos, flujo de fluidos, transferencia de calor, etc. A finales de esta década e inicios de la siguiente, el análisis por elemento finito se aplicó a problemas no lineales y de grandes deformaciones, en la mecánica del medio continuo (Oden, 1972).

El MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada. Actualmente los avances de las supercomputadoras y de la disponibilidad de microcomputadoras han puesto este método al alcance de los estudiantes e ingenieros de la práctica profesional y ha facilitado el estudio y uso de este método.

Existen softwares que utilizan diversas técnicas como la triangulación de Delaunay, el enfoque frontal avanzado, extracción de núcleos, entre otras para generar automáticamente mallas de elementos finitos, incluso estudios donde buscan modelar regiones de contacto. También se han propuesto técnicas de reticulado isotrópico adaptativo a la curvatura para la deformación de la malla en el tiempo. Así mismo, actualmente existen técnicas adaptativas de elementos finitos que han ido avanzando y se han utilizado durante más de veinte años (Zienkiewicz & Taylor, 1977).

A pesar de la diversa existencia de software, pocos de los disponibles en el mercado refinan automáticamente la región que excede los umbrales de comportamiento esfuerzo-deformación, haciendo que el usuario sea el que indique donde se realizara el refinamiento según su experiencia, pudiendo ocasionarse mallas poco óptimas para la obtención de resultados precisos.

En la actualidad, las metodologías que se utilizan en el diseño de vigas y marcos tienen una tendencia empírico-mecanicista: en ellas se correlacionan los aspectos teóricos de mecánica de materiales y mecánica del medio continuo que pueden ser verificados con ensayos que definen el desempeño funcional y estructural de dichos elementos durante su vida útil o vida remanente. Mediante dichas teorías es posible calcular los esfuerzos, deformaciones y deflexiones en vigas, marcos, y otros elementos estructurales. Estas metodologías son útiles para comparar los resultados obtenidos mediante los análisis con elemento finito.

En el diseño y análisis estructural el cálculo de las deflexiones es fundamental. Debe verificarse que las deflexiones en el servicio se encuentren dentro de los límites tolerables dados por las especificaciones, códigos y normas establecidos. Las condiciones de servicio quedan determinadas por las deformaciones, agrietamientos, la corrosión del refuerzo y deterioros en la superficie del concreto, por ejemplo. Tanto las deformaciones como los esfuerzos son fundamentales a la hora de revisar un proyecto, ya que sin ellos no podría saberse qué materiales son los más adecuados, mecánicamente hablando, para cubrir las necesidades de una construcción (Hibbeler, 2011).

La deflexión es la respuesta estructural expresada mediante la deformación que se presenta cuando a un elemento se le aplica una fuerza. Existen diferentes métodos para calcular las deflexiones algunos son:

- Método de trabajo real: Este método utiliza el principio de conservación de energía, que genera el trabajo externo, el cual debe ser igual al trabajo interno de deformación producto de los esfuerzos causados por las cargas. La desventaja del método radica en su limitación, porque solo analiza una incógnita, no se amplía este método a más de un desplazamiento o rotación (Timoshenko, 1976).
- Método de Castigliano (Teorema de Castigliano): es la derivada parcial del trabajo de la deformación elástica, expresada en función de la fuerza; es igual al desplazamiento de su punto de aplicación y sentido de las fuerzas (Timoshenko, 1970).
- Método de trabajo virtual: Este método es el más versátil de los tradicionales, para evaluar deflexiones elásticas de estructuras. Solo es aplicable a aquellos casos en donde está permitida la superposición de efectos, por su forma finita de análisis (Biermann & Daenzer, 2005).

- Método de la doble integración: De los métodos existentes, este método es el más general; puede ser usado para resolver diversas condiciones de cargas y apoyos en vigas. Este método permite obtener, la ecuación de curvatura de la viga, la cual resulta del análisis de la ecuación diferencial de la línea elástica de una viga a flexión pura. La primera integración de la ecuación da la pendiente de la elástica en cualquier punto; con la segunda integración se obtiene la ecuación de la elástica misma (Popov, 1990).
- Método de área de momentos: Este método se basa en dos teoremas, que resultan muy útiles, para el cálculo de pendientes y deflexiones de vigas y pórticos en un punto determinado en la curva elástica de forma semi-gráfica. Se trata de una solución rápida y sencilla ya que en lo general solo sirve para calcular la deflexión en uno o algunos puntos de la viga (Hibbeler, 2010).
- Método de la viga conjugada: Este método consiste en cambiar el problema de encontrar las pendientes y deflexiones causadas en una viga por un sistema de cargas aplicadas. Tiene la ventaja de que no necesita conocer previamente un punto de tangente cero, por lo cual se puede averiguar directamente la pendiente y deflexión en cualquier punto de la elástica (Hibbeler, 2010).

## CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS BÁSICOS

El método del elemento finito (MEF) es un método numérico general de simulación computacional para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy complejas sobre el comportamiento de un cuerpo.

El MEF a grandes rasgos consiste en la partición de un cuerpo, estructura o dominio en un conjunto de pequeños elementos finitos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las propiedades y ecuaciones que rigen en el cuerpo (medio continuo) regirán en los elementos interconectados (subdominios). De esta forma, se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones algebraicas (Zienkiewicz & Taylor, 1977).

Para poder analizar el comportamiento de un cuerpo utilizando el método del elemento finito es necesario conocer los conceptos fundamentales para su correcto desarrollo.

### 2.2 ESFUERZOS Y EQUILIBRIO

En mecánica existen dos diferentes tipos de fuerzas que actúan en un instante de tiempo y se clasifican dependiendo de su distribución en el espacio. Estas son fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie (Deméneghi *et al.*, 2000).

Las fuerzas de cuerpo actúan sobre elementos de masa o de volumen dentro del cuerpo. Estas son fuerzas de acción a distancia; usualmente se consideran por unidad de masa o en ocasiones por unidad de volumen ya que están distribuidas a través de todo el elemento. La gravedad y la inercia son ejemplos de este tipo de fuerza.

Las fuerzas de superficie son fuerzas de contacto que actúan sobre una superficie específica en el contorno del cuerpo o dentro de él. Usualmente se consideran por unidad de área de la superficie sobre la cual actúan.

Supóngase que se tiene un cuerpo con un volumen  $V$  definido en coordenadas en  $x, y, z$ , mostrado en la figura 2.1. Este cuerpo se encuentra sometido a un sistema de fuerzas de superficie en equilibrio en un determinado tiempo. La fuerza  $\bar{F}$  es resultante de las fuerzas exteriores distribuida por unidad de área.

Ahora, dividiendo la fuerza  $\bar{F}$  entre el área  $A$  en la cual esta influye. El resultado de este cociente se le llama esfuerzo medio en el área  $A$ .

$$\bar{S}_m = \frac{\bar{F}}{A} \quad (\text{Ecuación 2.1})$$

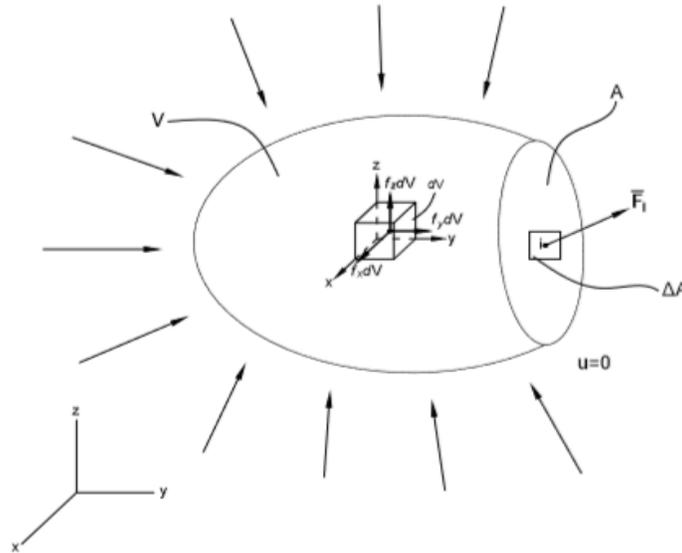


Figura 2.1 Cuerpo tridimensional (Modificada de Deméneghi *et al.*, 2000)

El esfuerzo es un vector ya que es el resultado de dividir un vector fuerza  $F = [F_x, F_y, F_z]^T$  entre un escalar que representa la magnitud área  $A$ .

Como se observa en la ecuación 2.2, el valor del esfuerzo depende del área que se considere.

$$\bar{S}_m = \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \quad (\text{Ecuación 2.2})$$

De esta forma, si se requiere obtener un esfuerzo  $\bar{P}$  en un determinado punto  $i$ , se calcula el límite cuando  $\Delta A$  tiende a cero.

$$\bar{S}_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} \quad (\text{Ecuación 2.3})$$

Es importante señalar que la fuerza  $\Delta \bar{F}$  es diferente a la fuerza  $\bar{F}$ , tanto en magnitud, dirección y sentido.

La fuerza  $\bar{F}$  se descompone en un componente normal al plano  $\bar{N}$  y un componente paralelo al plano  $\bar{T}$ . Es decir, que se tendrá un esfuerzo normal medio  $\bar{\sigma}$  y un esfuerzo cortante medio  $\bar{\tau}$ .

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{A} \qquad \bar{\tau} = \frac{\bar{T}}{A} \qquad \text{(Ecuación 2.4)}$$

Por consiguiente:

$$\Delta \bar{F} = \Delta \bar{N} + \Delta \bar{T} \qquad \text{(Ecuación 2.5)}$$

y considerando que  $\Delta A \rightarrow 0$

$$\bar{S} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} \qquad \text{(Ecuación 2.6)}$$

La deformación en un punto  $x = [x, y, z]^T$  está dada por las tres componentes de su desplazamiento  $u = [u, v, w]^T$ .

La fuerza distribuida por unidad de volumen es el vector  $f = [f_x, f_y, f_z]^T$ . En la figura 2.1 se muestra la fuerza de cuerpo actuando sobre el volumen elemental  $dV$ .

En la figura 2.2 se observan los esfuerzos que actúan sobre el volumen elemental  $dV$ . Conviene obtener entonces el vector esfuerzo en el entorno de un punto, asociado a un plano de dirección cualquiera.

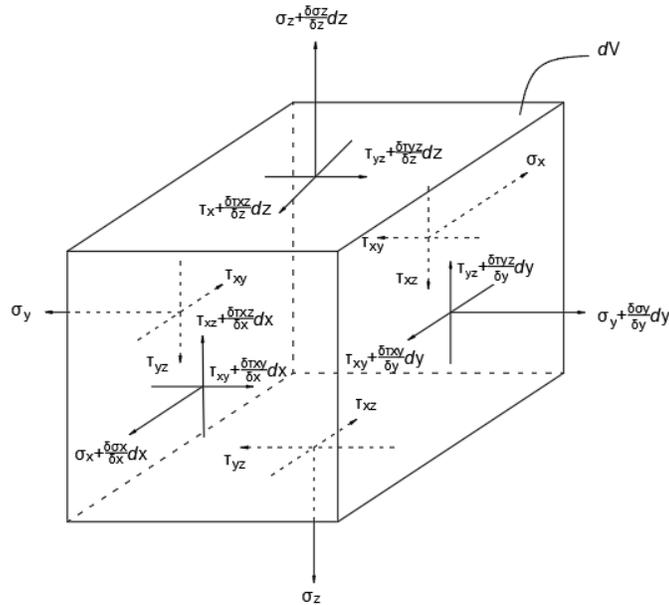


Figura 2.2 Equilibrio de un Volumen Elemental (Modificada de Chandrupatla & Belegundu, 1999)

Primero se obtiene el tensor de esfuerzos. El tensor de esfuerzos es un elemento diferencial, cuando las dimensiones  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  tienden a cero, el tensor esfuerzo es simétrico respecto a la diagonal principal. Para esto se obtienen las fuerzas sobre las caras, multiplicando los esfuerzos por las áreas correspondientes. (Zienkiewicz & Taylor, 1977) consideran que el volumen

elemental se encuentra en equilibrio, es decir que  $u = 0$ , no hay desplazamiento por lo tanto:  $\sum FX=0, \sum FY=0, \sum FZ=0$ .

El tensor de esfuerzos se representa colocando sus componentes en una matriz simétrica:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \text{(Ecuación 2.7)}$$

Recordando entonces que  $dV = dx dy dz$ . Se obtienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad \text{(Ecuación 2.8)}$$

### 2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

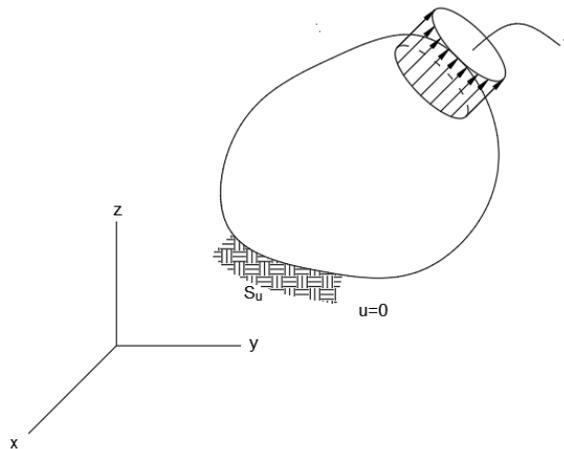


Figura 2.3 Ejemplo de cuerpo con condiciones de frontera (Modificado de Chandrupatla & Belegundu, 1999)

En el caso anterior se consideró un elemento estático. En varias ocasiones es necesario determinar solo una parte de la superficie de un cuerpo con desplazamiento igual a 0 como en la figura 2.3 o incluso considerar condiciones de frontera con un determinado desplazamiento.

Al igual que las condiciones de frontera se definen las condiciones de carga en la superficie. De igual forma, puede ser en toda la superficie como en el caso anterior o solo en una parte de ésta.

Para obtener el esfuerzo en un punto es necesario especificar en qué planos se desea calcular, ya que en un punto es posible hacer pasar una infinidad de planos, lo que ocasiona una infinidad de esfuerzos. Un plano queda determinado cuando se conoce un punto de éste y la dirección de la normal al plano, por lo tanto, es necesario conocer el vector unitario  $\bar{n}$  perpendicular a dicho plano.

Considérese que en el entorno de un punto se conocen los esfuerzos normal y cortante en tres planos respectivamente perpendiculares entre sí, mostrados en la figura 2.4. Donde  $DA, DB$  y  $DC$  son paralelas a los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. Se observa que  $dA$  es el área definida por los vértices  $ABC$ . Conociendo el vector normal unitario  $\bar{n}$  de  $dA$  se obtiene las otras tres áreas.

$$\begin{aligned}
 BCD &= n_x dA \\
 ADC &= n_y dA \\
 ADB &= n_z dA
 \end{aligned}
 \tag{Ecuación 2.9}$$

Al aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= S_x \\
 \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z &= S_y \\
 \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= S_z
 \end{aligned}
 \tag{Ecuación 2.10}$$

Las condiciones anteriormente mencionadas se deben satisfacer sobre la frontera donde se aplican las fuerzas, es decir en el área  $A$ , y las cargas puntuales se tratarán como cargas distribuidas sobre áreas pequeñas pero finitas.

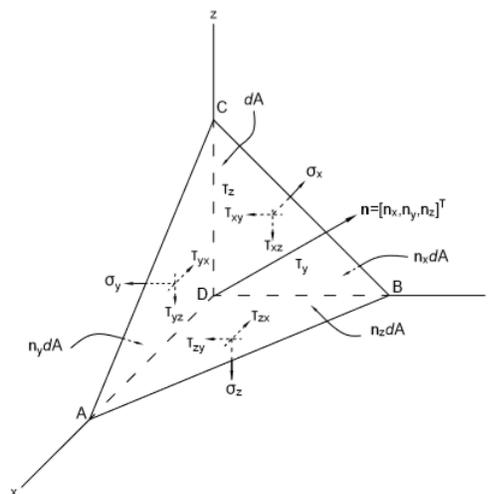


Figura 2.4 Volumen tetraédrico elemental en la superficie (Modificada de Demenéghi *et. al.*, 2000)

## 2.4 RELACIONES DE COMPATIBILIDAD O RELACIONES DEFORMACIÓN

### UNITARIA-DESPLAZAMIENTO

En la ingeniería civil se pueden estudiar las estructuras mediante el criterio de deformación. Se busca que las deformaciones que sufra una estructura o un elemento, no tenga deformaciones excesivas que logren afectar su funcionamiento e incluso su ruptura.

Los cuerpos pueden ser rígidos o deformables. Para estudiar la deformación y desplazamientos se basará en el estudio de cuerpos deformables.

El desplazamiento se define como un vector  $\bar{S}$ , cuyo punto inicial es  $P(u, v, w)$  que al ocurrir un fenómeno termina en  $P'(u_1, v_1, w_1)$ . Es decir:

$$\bar{S} = P' - P \quad (\text{Ecuación 2.11})$$

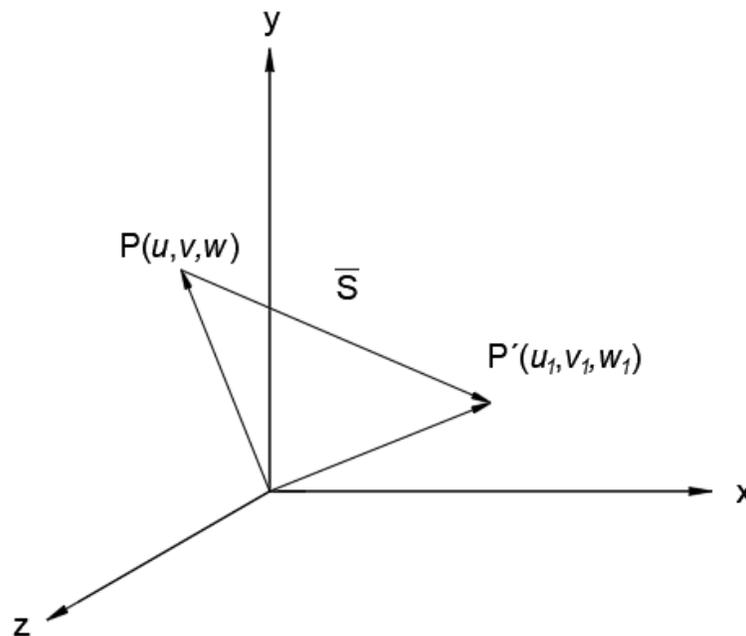


Figura 2.5 Representación del Vector Desplazamiento (Modificada de Demenéghi *et. al.*, 2000)

Se llama deformación a la diferencia entre vectores de desplazamientos  $\bar{S}$  y  $\bar{S}_1$  de un punto  $P$  con respecto a otro punto  $P_1$  (figura 2.6), es decir:

$$\Delta\bar{S} = \bar{S}_1 - \bar{S} \quad (\text{Ecuación 2.12})$$

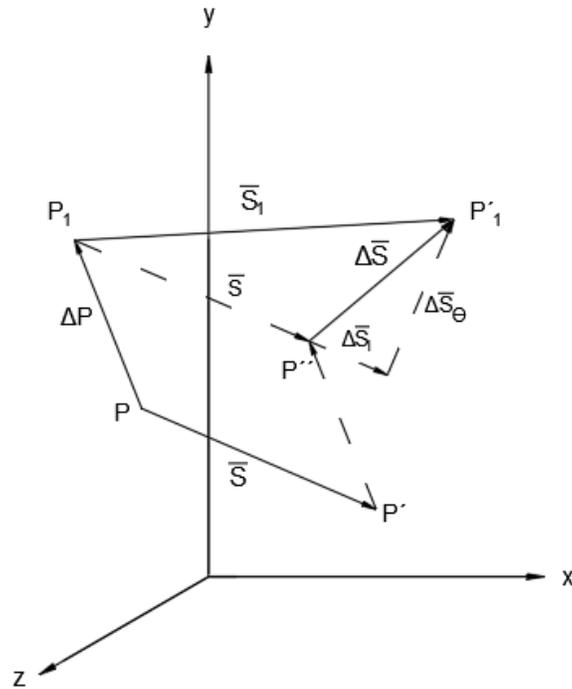


Figura 2.6 Representación del Vector Deformación (Modificada de Ortiz, 2007)

El vector deformación  $\Delta \bar{S}$  está formado por la suma de dos vectores,  $\Delta \bar{S}_l$  que mide la deformación en la dirección longitudinal y  $\Delta \bar{S}_\theta$  que mide la deformación en la dirección perpendicular.

La deformación unitaria se define como:

$$\varepsilon_{uni} = \frac{\Delta \bar{S}}{|\Delta \bar{P}|} = \frac{\Delta \bar{S}}{\Delta P} \quad (\text{Ecuación 2.13})$$

De igual forma, se tiene una deformación unitaria lineal y una deformación unitaria angular.

En el estudio del elemento como cuerpo deformable, el tensor deformación rotacional siempre valdrá cero.

Supongamos que tengamos un elemento diferencial, donde  $P$  y  $P_1$  de la figura 2.6 tienen coordenadas  $(0, 0, 0)$  por consiguiente  $\bar{S} = (u, v, w)$  y  $\bar{S}_1 = (u + du, v + dv, w + dw)$ . El vector deformación sería:

$$\Delta \bar{S} = (du, dv, dw) \quad (\text{Ecuación 2.14})$$

Ya que es un elemento diferencial, el vector deformación unitaria queda:

$$\frac{\Delta \bar{S}}{\Delta P} = \frac{d\bar{S}}{dp} = \left( \frac{du}{dp}, \frac{dv}{dp}, \frac{dw}{dp} \right) \quad (\text{Ecuación 2.15})$$

Recordando que  $u, v$  y  $w$  son función de  $x, y$  y  $z$ , se obtiene el tensor deformación  $[E]$ :

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} & \frac{du}{dz} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} & \frac{dv}{dz} \\ \frac{dw}{dx} & \frac{dw}{dy} & \frac{dw}{dz} \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 2.16})$$

Como se observa, la diagonal principal representa únicamente deformaciones lineales paralelas a los tres ejes coordenados respectivamente y las demás componentes, deformaciones angulares. Éstas representan las deformaciones angulares de los ángulos rectos originales del elemento con respecto a los ejes  $xy, xz$  y  $yz$ , respectivamente.

Ya que la matriz es simétrica con respecto a la diagonal principal:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{du}{dy} \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{du}{dz} \\ \frac{dw}{dy} &= \frac{dv}{dz} \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.17})$$

Definiendo las deformaciones angulares como:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \\ \gamma_{yz} &= \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.18})$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{xy} &= \frac{du}{dy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} &= \frac{du}{dz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} &= \frac{dv}{dz} \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.19})$$

El tensor deformación queda:

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 2.20})$$

## 2.5 RELACIONES ESFUERZO- DEFORMACIÓN UNITARIA

En el análisis de estructuras y en consecuencia en el método de elementos finitos se tiene como punto de partida la relación entre fuerzas y desplazamientos. Esta idea fundamental está relacionada con el concepto de rigidez. La constante elástica del elemento continuo resulta ser la medida cuantitativa de la rigidez del mismo; se expresa por medio de la relación entre la fuerza aplicada y el desplazamiento medido en su extremo (Pereiro, 2006). Para entender el significado de rigidez será necesario entender la Ley de Hook.

### 2.5.2 LEY DE HOOK

La Ley de Hook expresa la relación de esfuerzos y desplazamientos en un cuerpo con materiales elásticos lineales (Callister, 2007).

Supóngase que se tiene un cuerpo como el mostrado en la figura 2.7, al cual se le aplica una fuerza  $F$  con una longitud inicial  $l_0$ . El material se deformará longitudinalmente y se alargará  $l - l_0$ .

El coeficiente que relaciona la fuerza con el desplazamiento unitario, denominado módulo de elasticidad o módulo de Young,  $E$  representa la rigidez del material.

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{\frac{F_x}{S}}{\frac{\Delta x}{x}} \quad (\text{Ecuación 2.21})$$

Por lo tanto:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{Ecuación 2.22})$$

El módulo de elasticidad depende de varios factores; el tipo de material, temperatura y velocidad de carga. Dado que la deformación unitaria es adimensional, las unidades del módulo de elasticidad son unidades de esfuerzo.

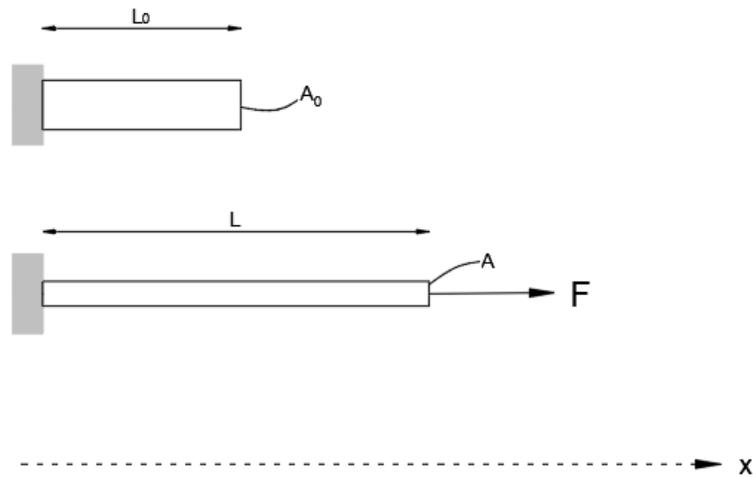


Figura 2.7 Comportamiento de un Cuerpo Elástico sometido a una fuerza (Modificada de Pereiro, 2006)

En la figura 2.7 no solo se observa la deformación unitaria longitudinal  $\varepsilon_l$  en la dirección del esfuerzo normal, si no que existe una deformación unitaria transversal  $\varepsilon_t$ . La relación entre estas deformaciones se conoce como la relación de Poisson.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} \quad (\text{Ecuación 2.23})$$

Para obtener la deformación de un cuerpo en tres direcciones como en la figura 2.8, sometido a un estado de esfuerzos triaxial, se aplica el principio de superposición. Este principio establece que el esfuerzo y la deformación resultante de un cuerpo sometido a un sistema de fuerzas corresponden a la suma de los esfuerzos que se generaron por cada una de las fuerzas aplicadas en forma individual.

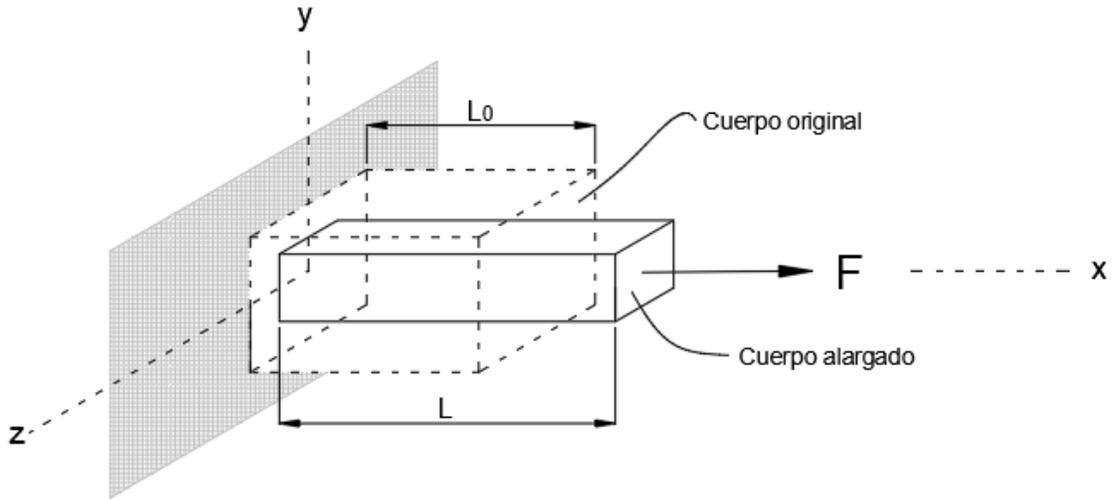


Figura 2.8 Deformación de un Cuerpo en tres direcciones (Modificada de Álvarez *et al*; 2020).

Anteriormente se definieron los conceptos de deformación y la relación de Poisson en una dirección  $x$ , a partir de un esfuerzo de tensión  $\sigma_x$ , lo que ocasionó un alargamiento en la dirección de  $x$  y contracciones en las direcciones  $y$  y  $z$ . Entonces se tiene:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (\text{Ecuación 2.24})$$

Ahora considerando la dirección  $y$  y  $z$ , y realizando la respectiva suma algebraica se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.25})$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (\text{Ecuación 2.26})$$

Resolviendo algebraicamente las relaciones inversas quedan:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (\text{Ecuación 2.27})$$

Don de D es la matriz:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .05-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (\text{Ecuación 2.28})$$

El módulo de rigidez del material  $G$  se expresa como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{Ecuación 2.29})$$

Suponiendo ahora que se tiene un cuerpo como el mostrado en la figura 2.9 y a éste se le aplica una fuerza tangencial  $F$  sobre la superficie  $A$ , lo que ocasiona deformaciones en el cuerpo.

El esfuerzo cortante o tangencial  $\tau$ , es la fuerza que se aplica tangencialmente a la superficie por una unidad de área, lo cual ocasiona deformaciones, se expresa como:

$$\tau = \frac{F_s}{A} \quad (\text{Ecuación 2.30})$$

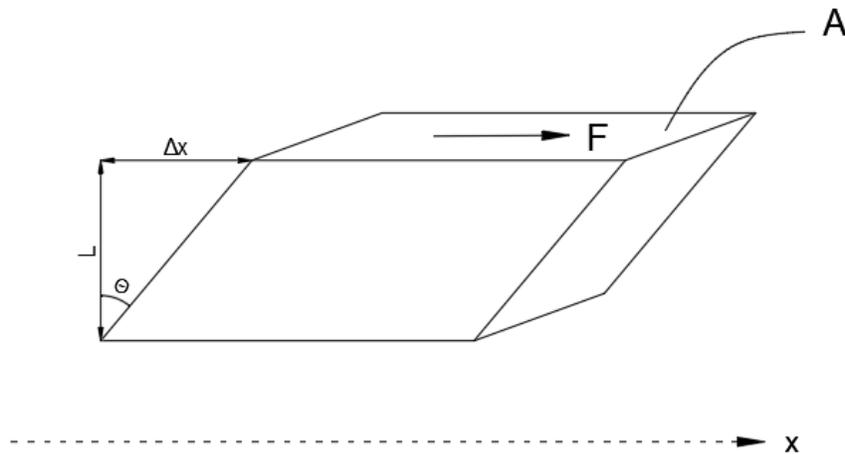


Figura 2.9 Fuerza tangencial aplicada a un cuerpo (Modificada de Deméneghi, 2000).

Como se ve en la figura 2.9, los esfuerzos cortantes deforman el cuerpo, esta deformación se denomina deformación cortante o de cizalladura  $\gamma$  y se define como:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{l} = \tan \theta = \frac{F_s}{AG} \quad (\text{Ecuación 2.31})$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (\text{Ecuación 2.32})$$

Recordando que es un cuerpo en tres dimensiones tenemos:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.33})$$

## 2.6 EFECTOS POR TEMPERATURA

El cambio de la temperatura en un cuerpo afecta las características del material del mismo. Las propiedades mecánicas, eléctricas o magnéticas sufren importantes cambios cuando la temperatura varía, por lo que los ingenieros deben considerar los efectos térmicos de los materiales que se utilizan.

Un cambio importante de un cuerpo cuando recibe energía en forma de calor es la expansión de este. Se puede calcular la deformación si se conoce el aumento de temperatura  $\Delta T(x, y, z)$ . Esta deformación unitaria uniforme depende del coeficiente de dilatación  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L \Delta T} \quad (\text{Ecuación 2.34})$$

Cuando el cuerpo tiene libertad para deformarse, esta deformación unitaria no genera ningún esfuerzo. La deformación unitaria por temperatura se presenta como una deformación unitaria inicial:

$$\varepsilon_0 = [\alpha\Delta T, \alpha\Delta T, \alpha\Delta T, 0,0,0] \quad (\text{Ecuación 2.35})$$

Por lo que la relación esfuerzo-deformación unitaria se define como:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (\text{Ecuación 2.36})$$

## 2.7 ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

Como se ha visto anteriormente, se busca obtener los desplazamientos de un cuerpo, de forma que satisfaga las ecuaciones de equilibrio por medio de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. Para cuerpos con geometría y condiciones de carga simples se obtiene una solución exacta que se obtiene con ayuda de la teoría de la elasticidad. Para cuerpos complejos y condiciones de

carga general, se usan métodos de solución aproximada como el método de energía potencial o con variación (Zienkiewicz & Taylor, 1977).

La energía es la cantidad de trabajo que un cuerpo es capaz de realizar. El trabajo es la fuerza que se aplica sobre un cuerpo a lo largo de cierta distancia. Hay diferentes formas de energía.

La energía potencial es energía que se almacena en los cuerpos cuando haces trabajo para llevarlos a una posición o un estado en particular. Se llama así porque tiene el potencial para cambiar los estados de los objetos cuando la energía se libera. La energía potencial total  $\Pi$  de un cuerpo elástico se define como la energía de deformación unitaria  $U$  más el potencial de trabajo  $WP$ :

$$\Pi = U + WP \quad (\text{Ecuación 2.37})$$

Para un material elástico lineal, la energía de deformación unitaria es la integral de la fuerza por el desplazamiento y da como resultado:

$$U = \frac{1}{2} \bar{\sigma} \varepsilon \quad (\text{Ecuación 2.38})$$

Integrado en el volumen:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \bar{\sigma} \varepsilon \, dV \quad (\text{Ecuación 2.39})$$

El potencial de trabajo  $WP$  esta dado por:

$$WP = - \int_v \bar{u} f \, dV - \int_s \bar{u} F \, ds - \sum_i \bar{u}_i P_i \quad (\text{Ecuación 2.40})$$

La energía potencial total es:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \bar{\sigma} \varepsilon \, dV - \int_v \bar{u} f \, dV - \int_s \bar{u} F \, ds - \sum_i \bar{u}_i P_i \quad (\text{Ecuación 2.41})$$

## 2.7.2 MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

Este método consiste en buscar el extremo de una función. Implica la construcción de un campo de desplazamientos supuestos, considerando sólo las combinaciones lineales posibles de funciones admisibles de la forma:

$$\begin{aligned} u &= \sum a_i \phi_i(x, y, z) & i &= \ell \\ v &= \sum a_j \phi_j(x, y, z) & j &= \ell + 1 \text{ a } m \\ w &= \sum a_k \phi_k(x, y, z) & k &= m + 1 \text{ a } n \\ & & n &> m > \ell \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.42})$$

Donde  $a_i$  son contantes y  $\phi_n$  sistemas de funciones coordenadas y son linealmente independientes. Los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  deben satisfacer condiciones de frontera específicas. Considerando las relaciones de esfuerzo-deformación unitario, deformación unitaria-desplazamiento y la energía potencial, resulta:

$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_r) \quad (\text{Ecuación 2.43})$$

El valor de  $r$  es el número de incógnitas independientes.

Para encontrar los valores de  $a_1, a_2, \dots, a_r$  cuando la función alcanza un valor extremo  $a_i (i = 1 \text{ a } r)$ , se resuelve el sistema de ecuaciones, generalmente lineales respecto a  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , dando el conjunto de  $r$  ecuaciones:

$$\frac{d\Pi}{da_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (\text{Ecuación 2.44})$$

## 2.8 MÉTODO DE GALERKIN

Es un método utilizado para convertir un problema de operador continuo a uno discreto. Consideramos un problema continuo gobernado por una ecuación diferencial del tipo:

$$L(u) - f = 0 \quad (\text{Ecuación 2.45})$$

Como la función anterior es solo una aproximación y se busca una solución aproximada de  $\tilde{u}$ , se obtiene un valor residual.

$$\varepsilon = L(\tilde{u}) - f = 0 \quad (\text{Ecuación 2.46})$$

Para determinar los parámetros desconocidos de  $C_i$  se utilizan los métodos aproximados o bien el método de los residuos ponderados, donde el valor residual se hace cero o mínimo. Se consigue realizando la integral ponderada del error sobre toda la región de análisis igualándola a cero.

$$\int_V W_i \cdot (L(\tilde{u}) - f) = 0 \quad i = 1 \text{ a } n \quad (\text{Ecuación 2.47})$$

Con el método de Galerkin las funciones ponderadas  $W_i$  se escogen a partir de las funciones base para construir  $\tilde{u}$ , es decir, que se emplea la aproximación de  $\tilde{u}$  para obtener un conjunto de  $n$  ecuaciones simultaneas, con  $n$  parámetros desconocidos  $C_i$ . En una región  $V$  rodeada por una frontera  $S$ . La variable de estado  $u$  se aproxima para una función de forma:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n N_i C_i \quad (\text{Ecuación 2.48})$$

Donde  $N_i$  son funciones de base linealmente independientes y  $C_i$  son parámetros desconocidos.

Posteriormente se considera una función arbitraria  $\phi$ :

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i N_i \quad (\text{Ecuación 2.49})$$

Los coeficientes de  $\phi_i$  son arbitrarios, excepto por el requisito de que  $\phi$  debe satisfacer condiciones de frontera homogéneas (cero). Por lo tanto, la solución de los parámetros desconocidos y  $C_i$  da la solución aproximada de  $\tilde{u}$ .

## 2.8.2 MÉTODO DE GALERKIN EN LA ELASTICIDAD

La aplicación de la aproximación de Galerkin requiere elegir las funciones de aproximación para el campo de desplazamientos. Considerando las ecuaciones de equilibrio en la elasticidad con el método de Galerkin:

$$\int_v \left[ \left( \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} + f_x \right) \phi_x + \left( \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz} + f_y \right) \phi_y + \left( \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + f_z \right) \phi_z \right] dV = 0$$

$$\phi = [\phi_x, \phi_y, \phi_z]^T \quad (\text{Ecuación 2.50})$$

Donde  $\phi$  es un desplazamiento arbitrario consistente con las condiciones de frontera de  $u$ .

Si  $n = [n_x, n_y, n_z]^T$  es una normal unitaria en un punto  $x$  sobre la superficie. La integración por partes resulta:

$$\int_v \frac{d\alpha}{dx} \theta dV = - \int_v \alpha \frac{d\theta}{dx} dV + \int_s n_x ds \quad (\text{Ecuación 2.51})$$

Usando esta fórmula e integrando por partes la ecuación anterior de esta se obtiene:

$$- \int_v \sigma^T \varepsilon(\phi) dV + \int_v \phi^T f dV + \int_s [(n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}) \phi_x + (n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \tau_{yz}) \phi_y + (n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + n_z \sigma_z) \phi_z] ds = 0 \quad (\text{Ecuación 2.52})$$

La deformación unitaria  $\varepsilon(\phi)$  corresponde al campo de desplazamiento arbitrario de  $\phi$ .

$$\varepsilon(\phi) = \left[ \frac{d\phi_x}{dx}, \frac{d\phi_y}{dy}, \frac{d\phi_z}{dz}, \frac{d\phi_y}{dz} + \frac{d\phi_z}{dy}, \frac{d\phi_x}{dz} + \frac{d\phi_z}{dx}, \frac{d\phi_x}{dy} + \frac{d\phi_y}{dx} \right]^T \quad (\text{Ecuación 2.53})$$

Considerando las condiciones de frontera, se tiene:

$$\int_v \sigma^T \varepsilon(\phi) dV - \int_v \phi^T f dV - \int_s \phi^T S ds + \sum_i \phi^T P = 0 \quad (\text{Ecuación 2.54})$$

## 2.9 PRINCIPIO DE SAINT VENANT

El principio de Saint Venant, llamado así por el físico matemático francés, establece que la equivalencia estática implica asintóticamente la equivalencia elástica. Es decir que la diferencia entre los efectos de dos sistemas de cargas estáticamente equivalentes se hace arbitrariamente pequeña a regiones bastante alejadas de los puntos de aplicación de la carga (Timoshenko & Goodier, 1970).

Frecuentemente hacemos aproximaciones al definir condiciones de frontera para representar una interfaz soporte-estructura e incluso al definir sistemas de fuerzas. Saint Venant consideró el efecto de diferentes aproximaciones a la solución de todo el problema, y determinó que estas representaciones difieren solo en la cercanía de las condiciones.

Este principio permite que se puedan calcular las tensiones en fibras y estudiar las secciones en barras, en base a los diagramas de solicitaciones (axiales, cortantes, etc.). En la figura 2.10, se puede observar la definición del principio, donde el esfuerzo se distribuye uniformemente en la distancia en la que la dimensión transversal es mayor.

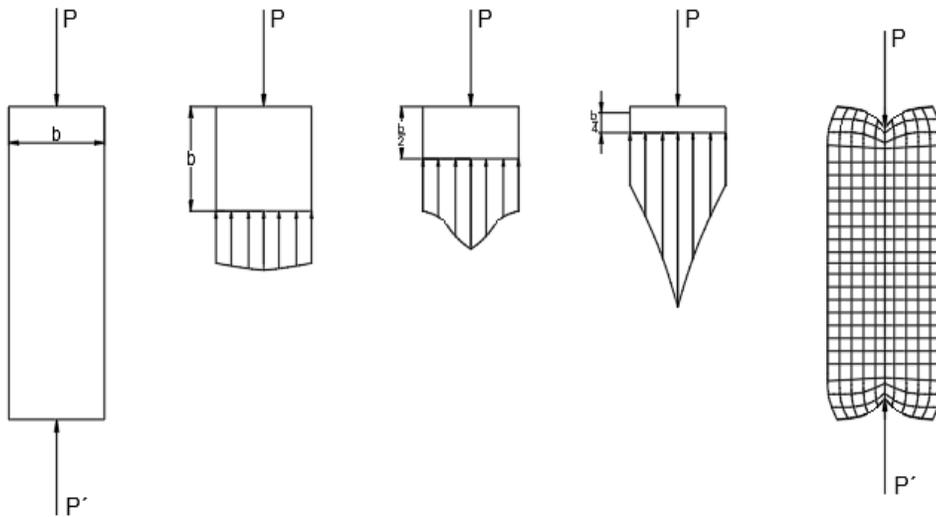


Figura 2.10 Distribución de Esfuerzos Principio de Saint Venant (Modificada de Venant, 2015).

## 2.10 ESFUERZOS DE VON MISES

El criterio de Von Mises es empleado para determinar la aparición de falla en materiales dúctiles. El principio de fluencia se produce cuando la energía de distorsión alcanza un valor crítico. Por lo que el esfuerzo de Von Mises  $\sigma_{VM}$  debe ser menor que el esfuerzo de fluencia  $\sigma_Y$  del material.

El esfuerzo de Von Mises está dado por:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \quad (\text{Ecuación 2.55})$$

Donde  $I_1$  e  $I_2$  en estado general de esfuerzo están dadas por:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.56})$$

En el estado de esfuerzo plano:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.57})$$

Para la deformación unitaria plana

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.58})$$

Donde:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{Ecuación 2.59})$$

En términos de esfuerzos principales:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \end{aligned} \quad (\text{Ecuación 2.60})$$

Y la expresión resulta:

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{Ecuación 2.61})$$

## **CAPÍTULO 3**

### **TÉCNICAS DE MALLADO**

Al realizar un análisis por elemento finito se llega a prestar poca atención a la generación de la malla ya que los programas son diseñados para considerar las características esenciales para poder resolver dichos problemas y que el usuario realice un mínimo esfuerzo para la generación de la malla, sin embargo, es importante conocer las características esenciales para reducir los errores en el análisis, aumentar la velocidad de generación de la solución y disminuir los recursos de memoria para obtener un mallado óptimo que corresponda con el fenómeno en estudio (Hermosillo *et al.*, 2018).

#### **3.2 METODOLOGÍA DE GENERACIÓN DE MALLAS**

Se han realizado clasificaciones en los distintos métodos de generación de malla. En primer lugar se clasifica el tipo de malla creada, para después clasificar el modo en que se genera y por último el tipo de elementos utilizados.

El tipo de malla se clasifica por mallas estructuradas o mallas no estructuradas (Díaz, 2000). Éstas a su vez se clasifican por distintos métodos de generación, los principales son:

Mallas estructuradas:

- Algebraicos
- Resolución de ecuaciones en derivadas parciales
- Superposición-deformación de retícula
- Crecimiento estructurado

Mallas no estructuradas:

- Avance frontal
- Delaunay-Voronoi

Híbridos:

- Multibloque

La geometría o tipo de los elementos consiste en el número de dimensión con el cual se está trabajando y de las características del problema.

Problemas unidimensionales: Segmentos de línea que forma el dominio

Problemas bidimensionales: Triángulos y cuadriláteros. Estos se diferencian por la geometría del dominio ya que si el dominio es cuadrilátero estos se ajustan con cuadriláteros, pero los triángulos se ajustan para cualquier geometría que tenga el dominio.

Problemas tridimensionales. Tetraedros, pentaedros y hexaedros. Los tetraedros como los triángulos son los elementos más simples y se ajustan a todo tipo de geometría del dominio.

### **3.2.2 MALLAS ESTRUCTURADAS**

Las mallas estructuradas son aquellas cuya conectividad de la discretización sigue un patrón reticular, sus nodos están sometidos a un posicionamiento especial.

Se usan principalmente elementos cuadriláteros o hexaédricos que a partir de estos se pueden generar triángulos y tetraedros dependiendo de la dimensión. Al usarse los elementos principales crean diferencia con la representación del cuerpo original lo que genera cierto error por tener una representación de baja calidad (López, 2016).

Ya que su conectividad es conocida los métodos de generación de la malla tienen como objetivo principal el cálculo de la posición de los nodos de modo que los elementos resultantes presenten determinadas características de tamaño y regularidad.

#### **3.2.2.2 GENERACIÓN DE MALLAS POR MÉTODOS ALGEBRAICOS**

Este método de generación de malla, es una técnica sencilla donde su cálculo es rápido. Las técnicas más usuales son las de transformación en geometrías canónicas y las de interpolación transfinita. En la figura 3.1 se observan ejemplos de mallas generadas por este método.

En la primera técnica su dominio original, es decir su contorno discretizado se transforma en un dominio canónico. En este dominio canónico se genera la retícula y los nodos generados se transforman al dominio real mediante una transformación inversa.

Para la interpolación transfinita se desarrollan funciones de interpolación entre los lados del dominio haciendo que la generación de los nodos internos sea determinada por la posición de los nodos de contorno (Díaz, 2000).

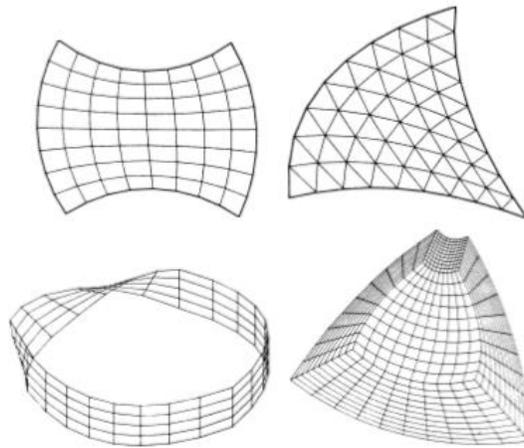


Figura 3.1 Mallas generadas por el método algebraico (López & Ruiz, 2016).

### 3.2.2.3 GENERACIÓN DE MALLAS POR MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES PARCIALES

La generación de mallas mediante la resolución por ecuaciones parciales busca obtener una mayor regularidad de los elementos, al igual que un mayor control en la densidad de estos.

Al igual que en el método algebraico, se utiliza como condición de contorno la geometría de contorno del dominio para obtener las coordenadas de los nodos internos. El método consiste en obtener funciones que relacionen las coordenadas del dominio real  $(x, y)$  con las del dominio canónico  $(\xi, \eta)$ , por medio de la inversión del sistema y resolviendo las ecuaciones diferenciales resultado del método interactivo empleado.

El tipo de ecuaciones diferenciales empleadas influye directamente en la generación de la malla (Bugada, 1990). Si se desea una obtener una malla con una buena regularidad se emplea la ecuación de Laplace. Si se pretende obtener discretizaciones con densidad de mallado variable se utiliza la ecuación de Poisson. Cuando el dominio del problema viene definido entre dos curvas o dos superficies y encontrando una de estas en el infinito es recomendable utilizar sistemas hiperbólicos ya que su costo computacional es menor.

Ecuación de Poisson:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} = P$$

$$\frac{\delta^2 \eta}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \eta}{\delta y^2} = Q$$

(Ecuación 3.1)

Las funciones  $P$  y  $Q$  son funciones fuentes que permiten el control de la forma de la malla de la siguiente forma:

- $P > 0$  Los nodos son atraídos hacia la derecha
- $P < 0$  Los nodos son atraídos hacia la izquierda
- $Q > 0$  Los nodos son atraídos hacia arriba
- $Q < 0$  Los nodos son atraídos hacia abajo

En la figura 3.2 se muestra ejemplos de la utilización de funciones  $P$  y  $Q$ .

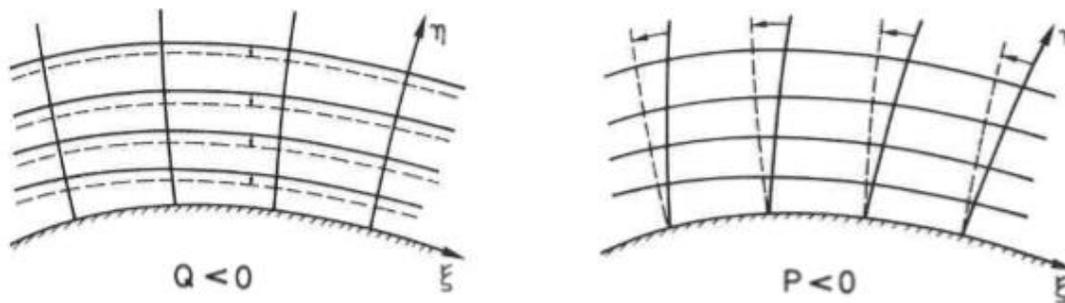


Figura 3.2 Ejemplos del control de las funciones fuentes  $P$  y  $Q$  (Bugada, 1990).

En la figura 3.3 se muestran algunas mallas obtenidas con este tipo de métodos.

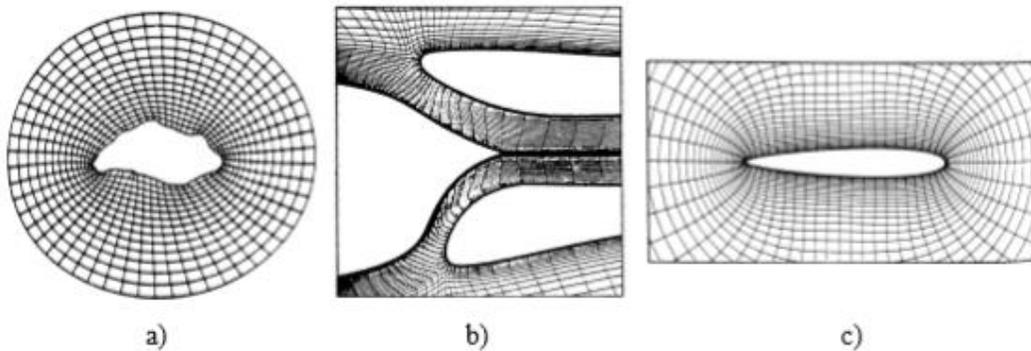


Figura 3.3 Mallas bidimensionales generadas por la resolución de EDP: a) Laplace, b) Poisson, c) Hiperbólico (Díaz, 2000).

La utilización de este tipo de generación de mallas sirve para generar mallas relativamente complejas, sin embargo, no se puede utilizar cuando se encuentre entre dominios con agujeros o en interfaces de diversos materiales.

### 3.2.2.4 GENERACIÓN DE MALLAS POR MÉTODOS DE SUPERPOSICIÓN-DEFORMACIÓN DE RETÍCULA

Este método genera la malla a partir de una retícula cuadrada o cubica. El proceso de este método consiste en los siguientes pasos:

- 1.- Generar una malla a partir de una retícula cuadrada o cubica que contenga al dominio en estudio (figura 3.4 a).
- 2.- Eliminar los cuadros o cubos que no intersecten el dominio (figura 3.4 b).
- 3.- Para mejorar el procesamiento del contorno del dominio se modificando la forma de los cuadrados o cubos de este para que se ajuste al contorno (figura 3.4 c). O bien se utiliza una retícula jerárquica (figura 3.4 a).

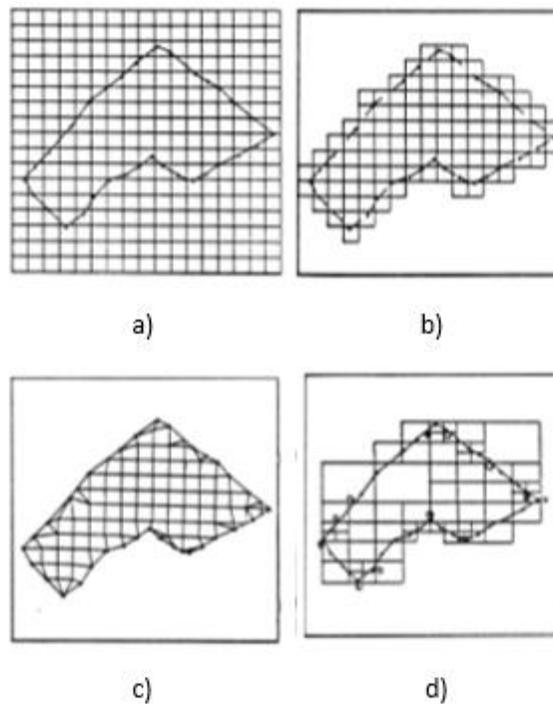


Figura 3.4 Proceso de generación de la malla por el método de superposición-deformación de retícula: a) Superposición de la retícula inicial b) Eliminación de cuadros, c) Ajuste de contorno mediante la deformación de cuadros d) Ajuste de contorno por retícula jerárquica (Díaz, 2000).

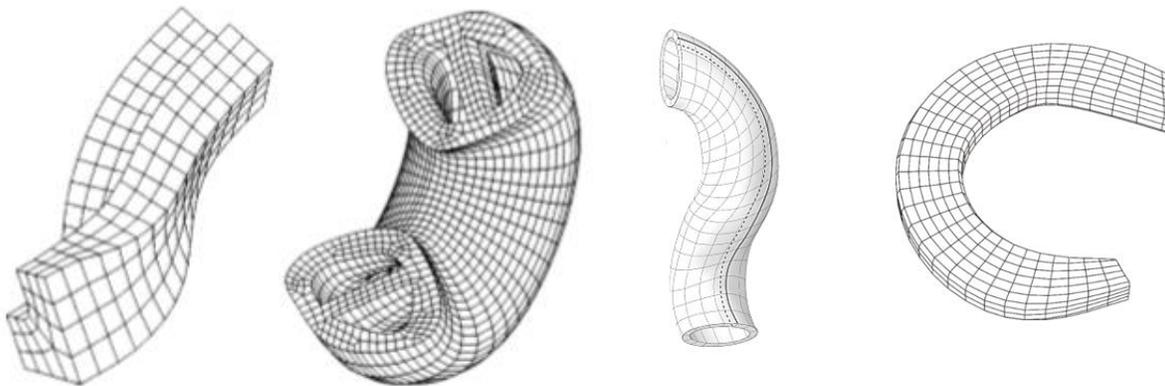
### 3.2.2.5 GENERACIÓN DE MALLAS POR MÉTODOS DE CRECIMIENTO ESTRUCTURADO

También denominados extrusión o sweeping. Es un método para geometrías 3D que se desarrollan a partir de la traslación de una superficie base, esto significa que la malla superficial de la base que puede ser estructurada o no, se repite a lo largo del dominio.

Únicamente la malla estructurada será en la dirección de crecimiento de la geometría tridimensional. Existen dos restricciones de este método si se parte de la discretización previa del contorno:

- La conectividad de las mallas bidimensionales de las dos superficies básicas debe ser la misma.
- La malla de las superficies laterales debe ser estructurada.

En la figura 3.5 se muestran ejemplos de mallado partiendo de mallas bidimensionales cuadriláteras no estructuradas.



*Figura 3.5* Malla generada por métodos de crecimiento estructurado (Díaz, 2000).

### 3.2.3 MALLAS NO ESTRUCTURADAS

Las mallas no estructuradas son aquellas que no presentan ningún tipo de estructura global. Las mallas vienen determinadas por el contorno del dominio, la situación de los nodos interiores y el método de discretización utilizado. El tipo principal de elemento utilizado en la discretización es el triangular o el tetraédrico. Esta libertad en la conectividad hace posible la discretización de cualquier dominio.

Existe una gran diversidad en los métodos de generación los cuales se clasifican en dos grupos:

- Generación simultánea de nodos y elementos: En este grupo los nodos y elementos se generan conforme la malla va creciendo. Esto quiere decir que cuando se genera un nuevo punto, este se conecta inmediatamente al resto de la malla. Los criterios de regularidad son los que determinan la posición más adecuada para el nuevo nodo y su conexión con el resto de la malla. Estas técnicas se denominan método de frente avance, pues la malla se origina



Al inicio, el frente de generación será igual al conjunto de elementos situados sobre las curvas. Después de la generación de cada triángulo será actualizado y añadirá el elemento recién generado (Figura 3.7). Este proceso continuará hasta que el frente quede vacío, es decir que el dominio quede completamente mallado.

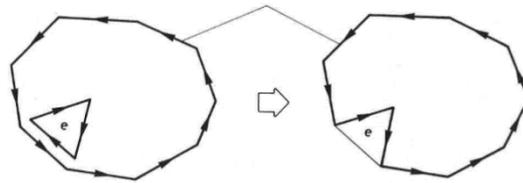


Figura 3.7 Actualización del frente (Bugada, 1990).

En la figura 3.8 se puede observar la evolución de una malla realizada con este método.

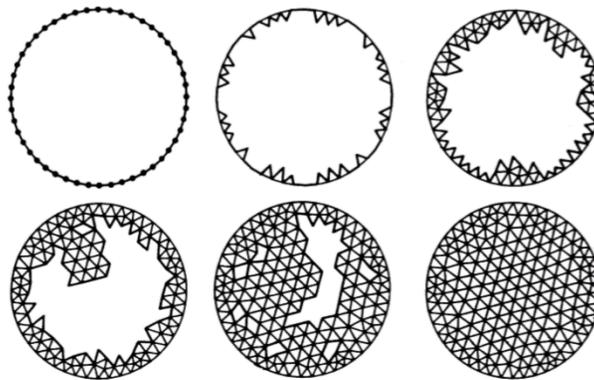


Figura 3.8 Evolución de malla (López & Ruiz, 2016).

### 3.2.3.3 GENERACIÓN DE MALLAS POR MÉTODOS DE DELAUNAY-VORONOI

El método de triangulación de Delaunay–Voronoi fue una de las primeras técnicas de discretización triangular utilizadas (López & Ruiz, 2016). Dirichlet propuso en 1855 un método mediante el cual un dominio se podía descomponer en un conjunto de polígonos convexos. Dado un conjunto de puntos  $P_i$ , se puede definir un conjunto de regiones poligonales o poliédricas  $V_i$  asociadas a cada punto. Entonces la región de Voronoi, se puede definir:

$$V_i = \{p: \|P - P_i\| < \|P - P_j\|\}, \quad \forall j \neq i \quad (\text{Ecuación 3.2})$$

Es decir, que la región de Voronoi  $V_i$  es el conjunto de todos los puntos  $p$  que están más cercanos a  $P_i$  que cualquier otro. La suma de todos los puntos  $p$  forman un polígono de Voronoi. Las líneas que forman las caras de un polígono de Voronoi son las medianas entre los dos puntos que éstas separan y por lo tanto son segmentos de la recta perpendicular por su punto medio. Si todos los

puntos que tienen en común una cara de los polígonos de Voronoi se unen, se dice que es una triangulación de Delaunay. En la figura 3.9 se muestra un esquema de un diagrama de Voronoi y la triangulación de Delaunay asociada para un pequeño conjunto de puntos.

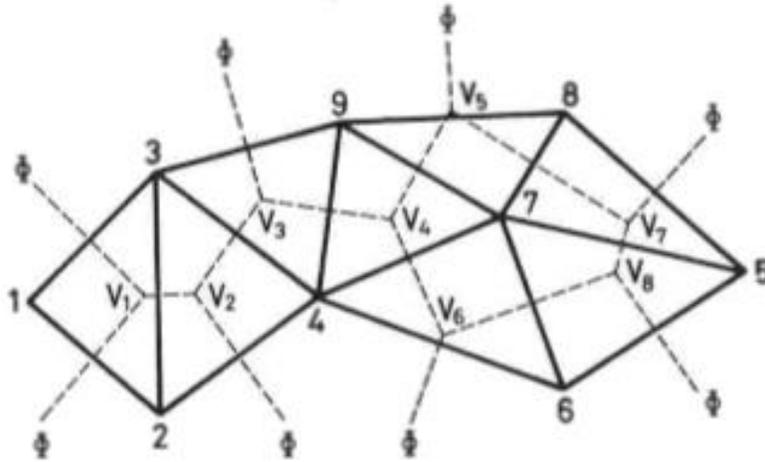


Figura 3.9 Diagrama de Voronoi y triangulación de Delaunay asociada (Bugada, 1990).

En tres dimensiones cada región de Voronoi es un poliedro convexo y cada vértice de la estructura de Voronoi está en el circuncentro de una esfera definida por los cuatro puntos que definen un tetraedro de Delaunay. En la figura 3.10 se observa el proceso de la triangulación de Delaunay.

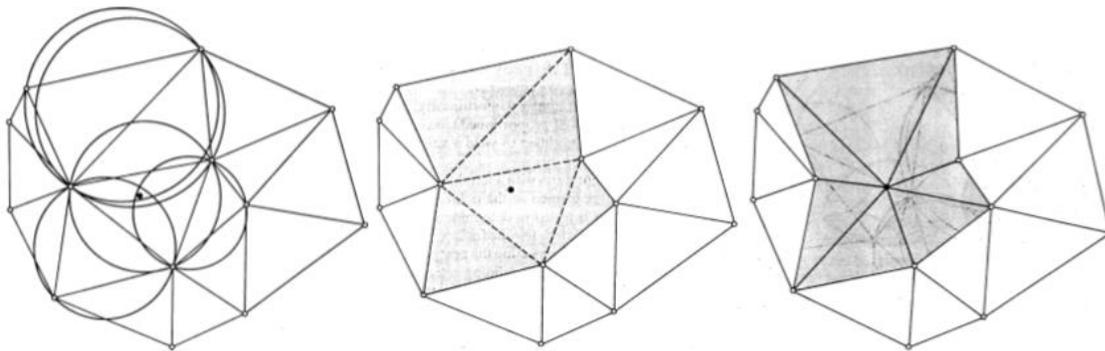


Figura 3.10 Triangulación de Delaunay (Díaz, 2000).

El costo computacional de este tipo de técnica depende del número de elementos necesarios que tiene la malla considerando que estos elementos deben presentar buen aspecto.

### 3.2.4 MÉTODOS HÍBRIDOS

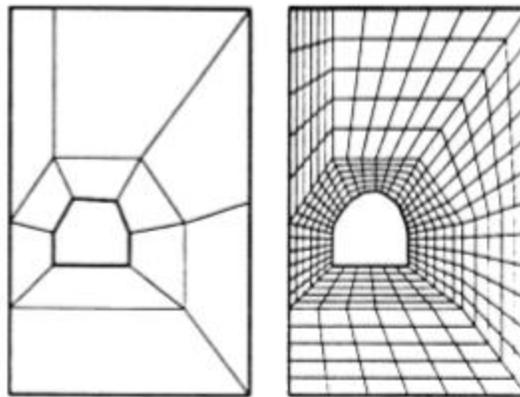
En el mallado por elemento finito existen dos requerimientos necesarios que debe tener una malla. El primero consiste en que la malla sea capaz de representar la geometría del dominio. El segundo

es que esta proporcione buenos resultados al ser utilizadas en algún cálculo por elemento finito. El primer requerimiento es más sencillo de realizar, pero para el segundo requerimiento puede utilizar alguna técnica adaptativa que pueda proporcionar buenos resultados. Sin embargo, es necesario contar con una solución previa.

El tipo de generación de malla empleado, ya sea estructurada o no estructurada, facilita la utilización de una u otra técnica.

### 3.2.4.2 GENERACIÓN DE MALLAS POR MÉTODOS MULTIBLOQUE

La idea principal de este método es que el dominio físico se subdivide en varios bloques que posteriormente se procesan con alguna técnica de las antes descritas. De esta forma, la malla de todo el dominio se obtiene uniendo las mallas de cada uno de los bloques. En la figura 3.11 se observa un ejemplo de este proceso. La flexibilidad que produce la división del dominio permite trabajar con geometrías complicadas.



*Figura 3.11* Ejemplo de proceso de generación de malla mediante el método multibloque. (Díaz, 2000).

Como se explicó antes, la malla de todo el dominio está conformada por varias mallas, lo que genera que la clasificación de malla estructurada o no estructurada dependa de las características que tienen las mallas de los bloques. Limitando el número de bloques a uno, solo se recupera una malla estructurada ya que las condiciones y propiedades del contorno de las zonas del dominio no varían entre ellas; en el caso de que las zonas presenten distintas condiciones y propiedades en sus contornos, se tendrá que utilizar un número limitado de bloques donde en cada uno se genera una malla no estructurada.

Esta técnica tiene dos importantes observaciones. La primera es que los bloques generados deben ser los suficientes y deben de tener las características necesarias para representar adecuadamente el dominio. La segunda es que la relación entre los bloques debe asegurar la correcta unión de las mallas.

Al establecer la división de los bloques se tiene que definir el número de ellos y sus conexiones. Los puntos que se encuentren sobre interfaces comunes a dos bloques deben de cumplir una condición esencial, que permita la conexión entre ellas. Cada punto de las interfaces que pertenece a un bloque debe de tener su homólogo en el otro bloque, obligando la continuidad.

### 3.2.5 TETRAEDRO

Como se mencionó antes, existen diferentes elementos para discretizar el medio. La elección del elemento a utilizar depende de la dimensión en la que se esté trabajando, la geometría del medio en el que se trabaja y el método de generación. En este trabajo de tesis se trabaja con medios de dimensión 3D, con técnicas y métodos que trabajan mediante el análisis de mallas con elementos tetraédricos, ya que estos elementos pueden definir con mayor precisión cualquier entorno.

Para obtener mejores resultados en un análisis de elemento finito la malla debe tener una determinada calidad.

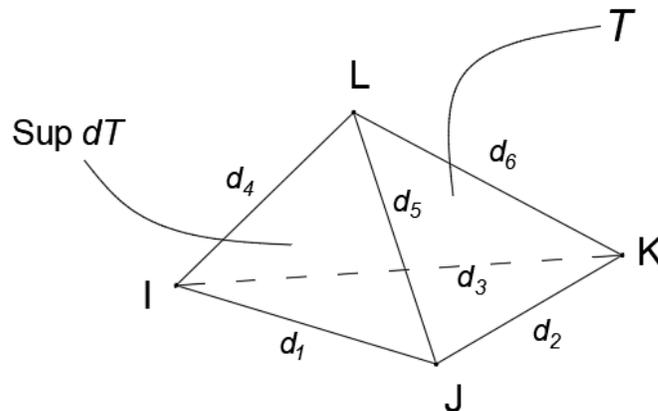


Figura 3.12 Representación de un tetraedro (Modificada de González, 2011).

#### 3.2.5.2 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DEL TETRAEDRO

El tetraedro es un poliedro con cuatro caras triangulares, seis aristas y cuatro vértices, como el mostrado en la figura 3.12. El volumen de un tetraedro  $T$  se puede calcular con las coordenadas de sus vértices; sean  $I = (I_1, I_2, I_3)$ ,  $J = (J_1, J_2, J_3)$ ,  $K = (K_1, K_2, K_3)$  y  $L = (L_1, L_2, L_3)$ , donde  $I, J, K$  y  $L$  son puntos en  $R^3$  que no están contenidos en un plano. Entonces el volumen se calcula como:

$$Vol_T = \frac{|Det_T|}{6} \quad (\text{Ecuación 3.3})$$

$$Det_T = \det \begin{vmatrix} J_1 - I_1 & J_2 - I_2 & J_3 - I_3 \\ K_1 - I_1 & K_2 - I_2 & K_3 - I_3 \\ L_1 - I_1 & L_2 - I_2 & L_3 - I_3 \end{vmatrix} \quad (\text{Ecuación 3.4})$$

A partir de una arista se puede calcular el resto de las dimensiones fundamentales en un tetraedro regular.

El radio  $rad_T$  de la circunferencia en  $T$ , se define como:

$$rad_T = \frac{3Vol_T}{surf_{\delta T}} \quad (\text{Ecuación 3.5})$$

Donde:

$surf_{\delta T}$ : Es la superficie del límite de  $T$

El radio  $R_T$  es el radio de la circunferencia sobre  $T$  y se calcula como:

$$R_T = \frac{\sqrt{Z_T}}{24Vol_T} \quad (\text{Ecuación 3.6})$$

Donde:

$$Z_T = 2d_1^2 d_3^2 d_5^2 d_6^2 + 2d_1^2 d_2^2 d_4^2 d_6^2 + 2d_2^2 d_3^2 d_4^2 d_5^2 - d_1^4 d_6^4 - d_3^4 d_5^4 - d_2^4 d_4^4 \quad (\text{Ecuación 3.7})$$

Las  $d_i$  y las  $d_{i+3}$  representan las longitudes euclidianas sobre  $T$  para  $i = 1,2,3$  y estas son:

$$d_1 = \|I - J\|, d_2 = \|I - K\|, d_3 = \|I - L\|, d_4 = \|K - L\|, d_5 = \|J - L\|, d_6 = \|J - K\| \quad (\text{Ecuación 3.8})$$

Los seis ángulos diedros que forman cada par de caras se pueden calcular mediante el producto interno de:

$$\cos(\alpha) = -n_1 \cdot n_2 \quad (\text{Ecuación 3.9})$$

Donde:

$n_1$  y  $n_2$ : Son la unidad externa normal de caras particulares

### 3.3 MALLAS BIDIMENSIONALES

En el análisis de un problema bidimensional se permite que cada nodo se desplace en dos direcciones, por ejemplo  $x$  e  $y$ ; por consiguiente, cada nodo tiene dos grados de libertad. El vector desplazamiento  $u$  esta dado como:

$$u = [u, v]^T \quad (\text{Ecuación 3.10})$$

Al igual que el desplazamiento, las componentes de esfuerzo y los valores de la fuerza de un cuerpo, son funciones de la posición indicada por  $(x, y)$ , donde  $u$  y  $v$  son las componentes en  $x$  e  $y$  respectivamente. Los esfuerzos y deformaciones unitarias están dadas por:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \quad (\text{Ecuación 3.11})$$

En la figura 3.13 se muestra un cuerpo bidimensional que representa en forma general la fuerza de cuerpo, el vector fuerza y el volumen elemental donde  $t$  es el espesor a lo largo de la dirección  $z$ .

$$f = [f_x, f_y]^T$$

$$F = [F_x, F_y]^T$$

$$dV = t dA \quad (\text{Ecuación 3.12})$$

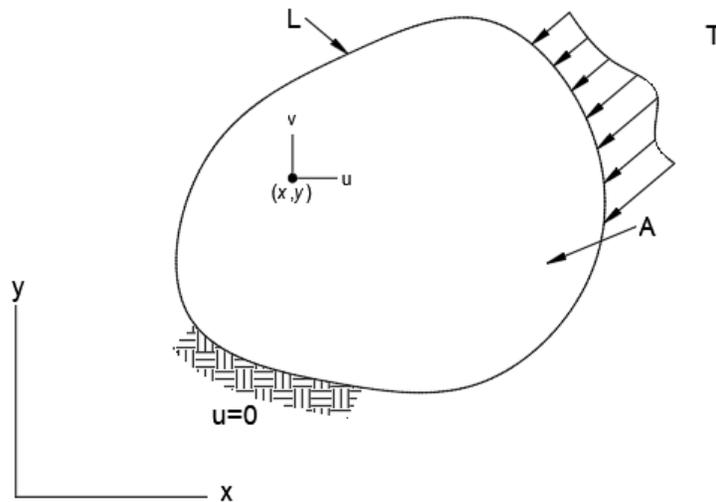


Figura 3.13 Cuerpo Bidimensional (Modificado de Deméneghi *et al.*, 2000).

Las fuerzas de cuerpo  $f$  tienen unidades de fuerza sobre volumen unitario y el vector fuerza  $F$  tiene unidades de fuerza sobre área unitaria. Las relaciones deformación unitaria y desplazamiento se define como:

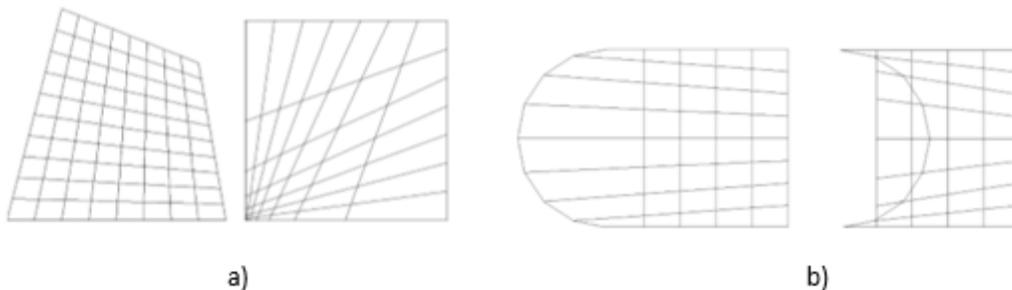
$$\varepsilon = \left[ \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \left( \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \right]^T \quad (\text{Ecuación 3.13})$$

La región se discretiza para expresar los desplazamientos en términos de valores en puntos discretos; la discretización define el tamaño y distribución de los elementos. Existen diferentes métodos para discretizar el dominio en problemas bidimensionales. Siguiendo una filosofía de generación de malla multibloque, se pretende realizar la discretización de geometrías arbitrarias mediante la descomposición de áreas como triángulos, cuadriláteros, polígonos, etc. Después se aplican los conceptos de rigidez (energía) y carga (Galerkin), (Díaz, 2000).

Para la generación de mallas bidimensionales es importante conocer los métodos desarrollados para áreas cuadriláteras y analizar los métodos desarrollados para triángulos y geometrías arbitrarias.

### 3.3.2 MALLA ESTRUCTURADA POR EL MÉTODO DE INTERPOLACIÓN POR PROYECTORES TRANSFINITOS EN CUADRILÁTEROS

Este método calcula la posición de los nodos interiores mediante la intersección de rectas opuestas entre sí. Su aplicación se recomienda para cuadriláteros con contornos rectos, ya que en geometrías con contornos irregulares la malla puede ser de baja calidad o no representar el dominio real (ver Figura 3.14).



*Figura 3.14* Malla Generada Por Interpolación por proyectores Transfinitos. a) En Áreas Cuadriláteras con Contornos Rectos. b) En Áreas Cuadriláteras con Contornos Irregulares (Díaz, 2000).

Las funciones de interpolación ayudan a veces a conseguir mejores resultados para geometrías con contornos irregulares ya que consideran la posición de los nodos del contorno al generar los nodos internos.

Este método no puede generar mallas en cuadriláteros cuyos lados enfrentados no tengan el mismo número de divisiones ya que no es posible trazar una retícula que una los nodos del contorno.

### 3.3.3 MALLA NO ESTRUCTURADA EN CUADRILÁTEROS RECTILÍNEOS POR EL MÉTODO DE FRENTE DE AVANCE RÁPIDO (FAR)

El método de frente avance rápido es parecido a los métodos de frente de avance, sin embargo, su costo computacional es menor ya que los componentes (nodos, aristas y elementos) se van

generando a cada paso del algoritmo. Debido a su proceso de generación, este método solo es para geometrías cuadriláteras. (Díaz, 2000).

En cada paso se crea una línea de un lado del cuadrilátero al otro lado que se encuentra enfrente; se generan nodos sobre esta línea que se unirán con los nodos inferiores mediante aristas creando nuevos elementos. Este proceso se repite hasta que el área quede totalmente mallada. En la figura 3.15 se muestra un ejemplo del método FAR en donde se genera una malla mixta (línea continua) o una malla triangular (línea punteada).

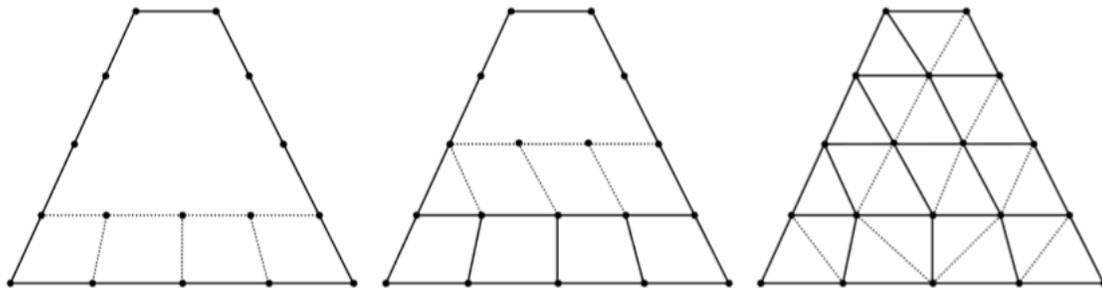


Figura 3.15 Proceso de Generación de Malla por el Método FAR (Díaz, 2000).

Este método puede generar mallas sin que sus lados opuestos del cuadrilátero tengan la misma cantidad de nodos. Para obtener una calidad aceptable se escogerá un lado llamado lado matriz que permanecerá al par de lados enfrentados con mayor diferencia de nodos entre ellos y tendrá la mayor cantidad de nodos de este par de lados. Después se busca repartir el exceso de divisiones que tenga un lado respecto a otro del otro par.

### 3.3.4 MALLA NO ESTRUCTURADA EN CUADRILÁTEROS ARBITRARIOS POR EL MÉTODO DE FRENTE DE AVANCE RÁPIDO GENERALIZADO (FARG)

A diferencia del FAR este método genera los nodos de la malla considerando la posición de los nodos del contorno. Sin embargo, los métodos interpolares para áreas cuadriláteras imponen la condición en la cual los lados opuestos debe tener el mismo número de divisiones.

Al igual que el método FAR, se escogerá un lado matriz, que marcará la dirección de avance. Se generarán nodos internos entre los nodos del contorno  $n_1$  y  $n_2$  del par de lados que no pertenece al lado matriz  $l_2$  y  $l_4$  que se encontrarán más cercanos al lado matriz  $l_1$  (figura 3.16); el número de nodos internos será el resultado de la media ponderada de los nodos del lado matriz y su lado opuesto (Díaz, 2000). Para generar los nodos internos mediante un interpolador se necesitará que el par de lados donde pertenece el lado matriz también tengan dos nodos internos por lo que se supondrá temporalmente una discretización donde se presenten estos nodos (figura 3.16b) y así generar los nuevos nodos. Este proceso se repetirá hasta que el dominio este, completamente mallado (figura 3.16c).

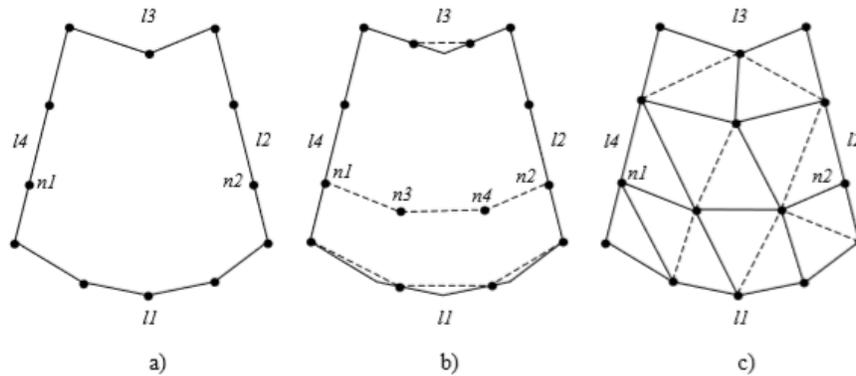


Figura 3.16 Ejemplo de Proceso de Mallado por el Método FARG (Díaz, 2000).

### 3.3.5 MALLA ESTRUCTURADA INTERPOLACIÓN POR PROYECTORES TRANSFINITOS EN TRIÁNGULOS

En un área triangular se puede usar una técnica de interpolación por proyectores transfinitos donde, a partir de los datos del contorno, se generan los nodos internos. Será necesario que los lados del triángulo presenten el mismo número de aristas. La función de interpolación debe coincidir con las funciones de contorno.

El proceso consiste en calcular los tres ángulos internos del triángulo. El mayor ángulo será de donde se partirán las funciones de contorno. Los nodos internos se generarán a partir de la función de interpolación para después generarse las aristas interiores y así los elementos.

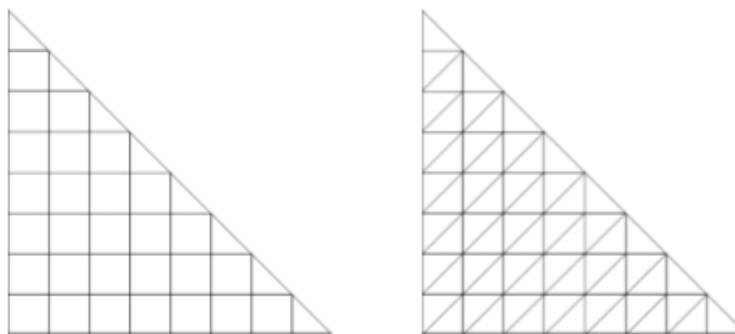


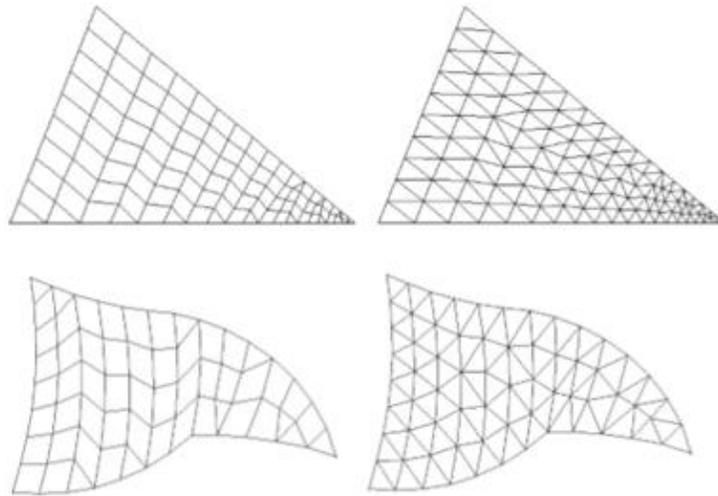
Figura 3.17 Ejemplo de Malla Estructurada Mixta y Triangular por el Método de interpolación por Proyectores Transfinitos (Díaz, 2000).

### 3.3.6 MALLA NO ESTRUCTURADA CON TRIÁNGULOS ARBITRARIOS POR FRENTE DE AVANCE RÁPIDO GENERALIZADO

Esta técnica consiste en dividir el área inicial del triángulo en un triángulo elemental  $t_1$  en una de sus esquinas y un cuadrilátero  $c_1$ ; se recomienda que sea la esquina que presente el ángulo más

diferente buscando que el cuadrilátero tenga una geometría trapezoidal. Posteriormente se genera la malla del cuadrilátero por el método FARG.

En la figura 3.18 se muestran ejemplos de Mallas por este método, en triángulos con contorno rectilíneo y en triángulos con contorno irregular, tanto en mallas mixtas como mallas triangulares.



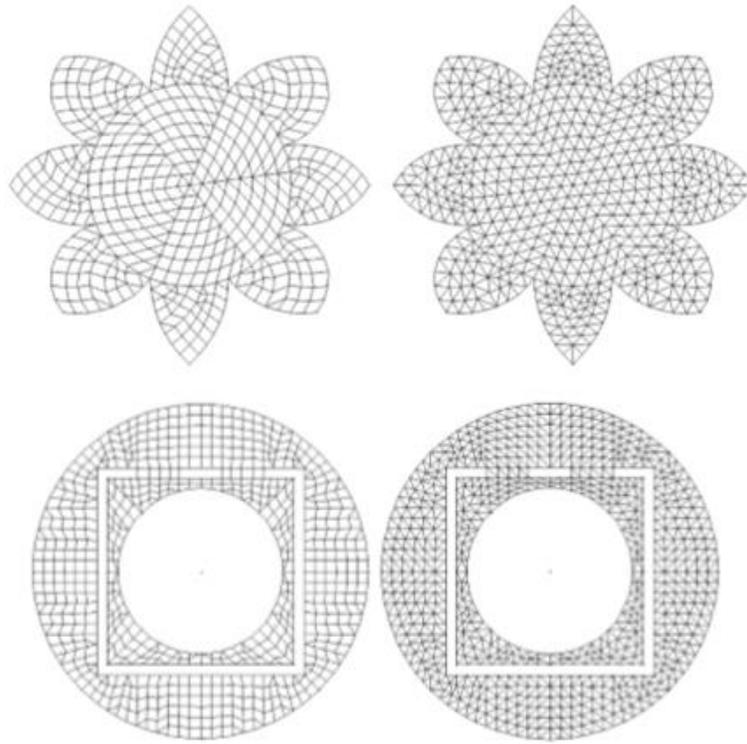
*Figura 3.18* Ejemplo de Malla No Estructurada por el Método de FARG (Díaz, 2000).

### **3.3.7 MALLA CON DOMINIOS ARBITRARIOS MEDIANTE LA TÉCNICA DE MULTIBLOQUE**

A partir de los métodos anteriormente presentados y utilizando la metodología de multibloque basada en este tipo de áreas se puede discretizar dominios arbitrarios.

Resulta complejo la realización de conectividad de los componentes ya que se busca que la división de los elementos sea sencilla y lo más regular posible, y a su vez, representen correctamente el dominio.

La descomposición del dominio puede ser manualmente buscando que las áreas triangulares y cuadriláteras sean lo más regular posible, la calidad de malla depende de la descomposición que ésta tenga; en la figura 3.19 se muestran ejemplos de esta técnica.



*Figura 3.19* Ejemplo de Mallas Mixtas y Triangular por la Técnica de Multibloque (Díaz, 2000).

Sin embargo, se pueden desarrollar técnicas que realicen la descomposición automáticamente; una de estas técnicas es la de polígonos convexos que a continuación se comentan.

### **3.3.7.2 TÉCNICA DE POLÍGONOS CONVEXOS**

El proceso de esta técnica consiste en dividir el polígono en seis triángulos de la forma que sea lo más uniforme posible. Uno de los lados de cada triángulo corresponderá al contorno del polígono, aparte los triángulos tendrán un vértice común que se encontrará en el centro del polígono. Se generará esta discretización para posteriormente generar las mallas en los triángulos utilizando el método FARG en elementos triangulares. (Díaz, 2000). En polígonos regulares la calidad del mallado es satisfactoria, sin embargo, en polígonos irregulares depende de su geometría.

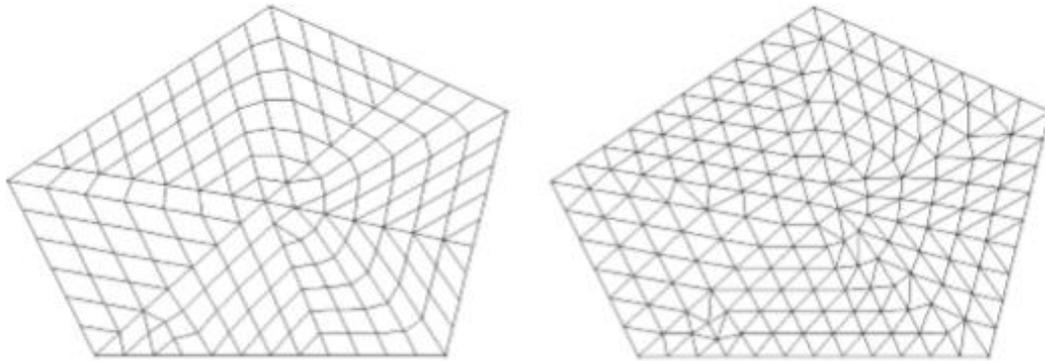


Figura 3.20 Ejemplo de Malla por la Técnica Multibloque en Polígono Regular mixto y triangular (Díaz, 2000).

### 3.4 MALLAS TRIDIMENSIONALES

En la ingeniería, la mayoría de los problemas que se requieren analizar son tridimensionales, por lo que es necesario implementar lo que se ha visto antes a un espacio tridimensional.

Es importante recordar algunos conceptos fundamentales en el espacio tridimensional como lo son el vector desplazamiento, donde  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ .

$$u = [u, v, w]^T \quad \text{(Ecuación 3.14)}$$

Los esfuerzos y deformaciones unitarias:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T \quad \text{(Ecuación 3.15)}$$

Las relaciones deformación unitaria –desplazamiento:

$$\varepsilon = \left[ \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}, \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}, \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right]^T \quad \text{(Ecuación 3.16)}$$

La fuerza interna de cuerpo:

$$f = [f_x, f_y, f_z]^T \quad \text{(Ecuación 3.17)}$$

El vector fuerza:

$$F = [F_x, F_y, F_z]^T \quad \text{(Ecuación 3.18)}$$

Al igual que en un espacio bidimensional para generar una malla, con los métodos de discretización previamente vistos en donde se realizó una discretización del contorno del área, lo mismo sucede con un espacio tridimensional, en donde será necesario una discretización de la superficie que delimitan el volumen para utilizar algún método de discretización y así generar la malla (Meriam & Kraige, 2016).

### **3.4.2 MALLA ESTRUCTURADA POR EL MÉTODO DE PROYECTORES TRANSFINITOS**

La generación de mallas estructuradas restringe condiciones, al igual que en el caso bidimensional, para generar una malla en un entorno tridimensional, las líneas del contorno del volumen deberán tener el mismo número de divisiones. En contornos irregulares será necesario utilizar funciones de interpolación que tenga, presente la posición de los nodos del contorno para posteriormente calcular la posición de los nodos internos.

El método basado en proyectores transfinitos consiste en construir una línea de proyección para cada par de nodos opuestos en el contorno; con la función de interpolación se obtienen las coordenadas de los nodos internos. Los nodos consecutivos son unidos mediante aristas, se crean las caras a partir de cuatro aristas, para que al final con seis caras se defina un volumen (Vásquez, 2008).

Para generar la malla se presenta una gran complejidad en la conectividad de los componentes y un mayor costo computacional.

### **3.4.3 MALLA NO ESTRUCTURADA POR EL MÉTODO DE FRENTE AVANCE**

Esta técnica permite la discretización en cuerpos arbitrarios. Como en todos los casos, este método requiere como dato de entrada la discretización del contorno, la cual deberá ser lo más regular posible ya que, este método depende totalmente de esta; a partir de la discretización del contorno se van creando nodos, aristas, caras hasta crear los elementos de la malla. Es importante mencionar que se pueden generar elementos irregulares al irse cerrando las últimas fases del mallado.

El método de frente avance es una lista que contiene todas las caras triangulares del contorno; la ordenación de las caras del contorno no sigue un orden específico. Se irán creando nuevos elementos conforme se van analizando las caras del contorno en el orden en que se generaron. Sin ninguna duda el orden que se generó influye en el resultado final de la malla. Es por ello que, se generaron criterios para ordenar las caras y así tener un mejor resultado.

Uno de estos criterios se basa en el tamaño del área de la cara. Si se inicia por las caras de mayor tamaño se genera un menor número de elementos y por lo tanto es menor el costo computacional y conecta fácilmente con zonas de caras pequeñas, sin embargo, se produce una pérdida de definición por generarse pocos elementos en las zonas de caras pequeñas (Bugeda, 1990).

### **3.5 SOFTWARE DISPONIBLE**

Para realizar un análisis por elemento finito es necesario contar con la infraestructura adecuada y suficiente para que el análisis sea correcto; esto implica que se deben utilizar los programas computacionales que puedan describir el problema físico y geométrico, ya que los errores en el análisis por elemento finito son causados principalmente por una mala descripción del problema.

En este trabajo de tesis se contó con tres programas esenciales para la resolución de los problemas; uno para la generación de la malla inicial, otro para el análisis de elemento finito y finalmente un programa para la visualización de los resultados.

#### **3.5.2 GENERADOR DE MALLA INICIAL**

Es importante que la geometría de la malla inicial que se genere sea compatible con el programa que realizará el análisis por MEF, ya que no solo garantizará mejores resultados, sino que además agilizará el proceso de análisis.

Para generar la malla inicial se utilizó el software GMSH. Este software libre es un generador de mallas bidimensionales y tridimensionales de elementos finitos. Presenta cuatro módulos: geométrico, mallado, solver y pos procesado; de los cuales solo se utilizaron el geométrico y el mallador.

##### **3.5.2.2 MÓDULO GEOMÉTRICO**

El módulo geométrico permite dibujar visualmente una figura con ciertas limitaciones.

Se pueden definir puntos en el espacio, y con ellos generar líneas, superficies y volúmenes, para finalmente formar la figura en estudio.

El programa cuenta con elementos de dibujo llamados Entidades Elementales los cuales son: punto (Point), línea (Line), arcos de círculo (Circle), elipse (Ellipse), arcos de elipse (Ellipse arc); estos y más elementos se encuentran en la barra de herramientas (Figura 3.21) que se despliegan del módulo de geometría. También se pueden utilizar herramientas como: traslación (Translate), rotación (Rotate), extrusión (Extrude), coherencia (Coherence), entre otros, como los mostrados en la figura 3.22. Estas entidades y herramientas serán necesarias para la definición geométrica del problema a analizar, por ejemplo, la herramienta Coherence ayuda a definir que un conjunto de volúmenes formen parte del cuerpo en estudio.

El programa permite definir la geometría del elemento desde un mallado de texto, con un formato propio (\*.geo), donde dependiendo de la definición de la entidad elemental será la cantidad de datos que se necesite colocar. Se puede abrir el archivo de texto con la herramienta Edit Scrip. Es recomendable utilizar el formato cuando se tenga una familiarización con el programa, ya que será

necesario conocer los datos requeridos, la posición geometría en la cual se colocan y el orden en que interpreta los datos. En la figura 3.23 se muestra un ejemplo.



Figura 3.21 Visualización de las Entidades Elementales del Programa GMSH Presentes en el Módulo Geométrico.

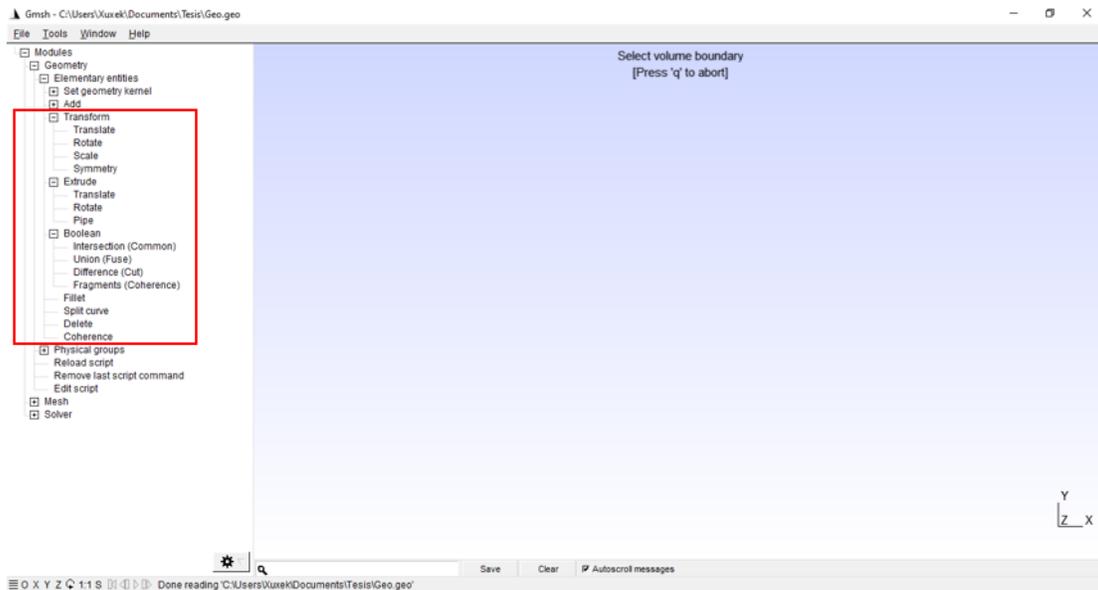


Figura 3.22 Visualización de Herramientas que tiene el Programa GMSH Presentes en el Módulo Geométrico.

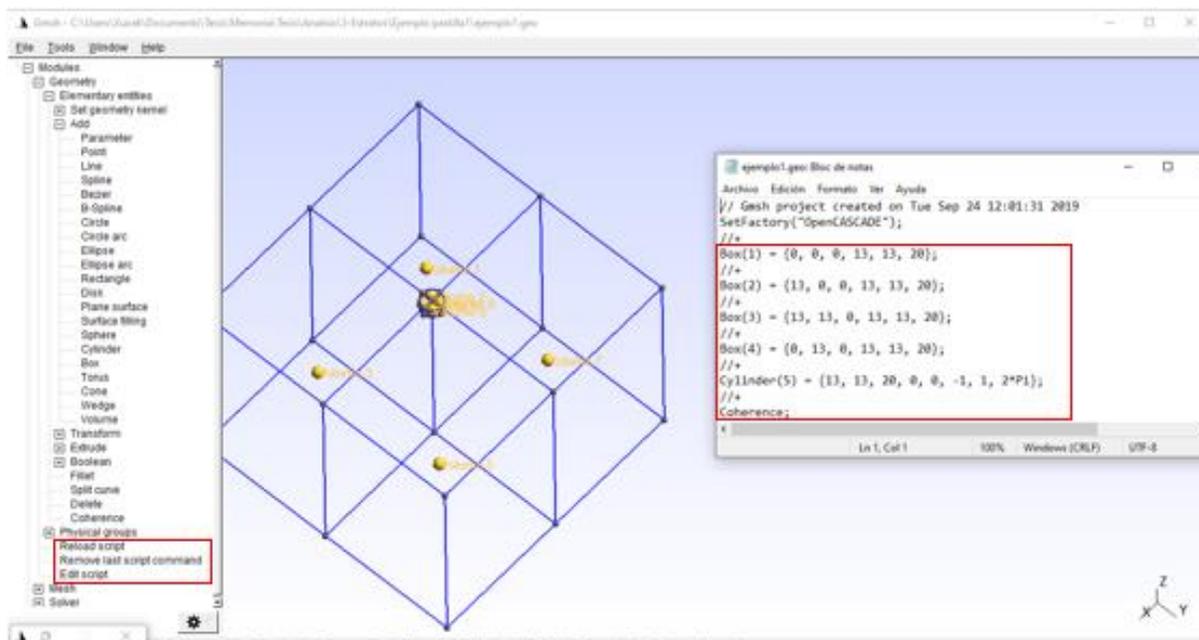


Figura 3.23 Ejemplo de Geometría de Mallado Generada desde el Mallador de Texto del Programa GMSH.

### 3.5.2.3 MODULO DE MALLADO

El módulo de mallado permite generar mallas en 1D, 2D, 3D mediante varios algoritmos de mallas con el fin de trabajar con elemento finito.

El programa genera mallas no estructuradas y mallas estructuradas a partir de las mallas no estructuradas. En algoritmos estructurados en 2D se generan por defecto triángulos, mientras que en los algoritmos estructurados en 3D se generan tetraedros, hexaedros, prismas y pirámides, en función del tipo de superficie. Los algoritmos no estructurados en 2D pueden generar triángulos o triángulos y cuadrángulos; los algoritmos no estructurados en 3D generan tetraedros. El algoritmo utilizado genera tetraedros.

Existen funciones dentro de este módulo que permiten modificar diversos parámetros para mejorar la calidad de la malla. Entre estas funciones se encuentran: definición de longitud característica, tamaño mínimo de elemento, tamaño máximo de elemento, número mínimo de puntos para mallado de un elemento curvo, factor global sobre las longitudes características, cambiar el algoritmo de mallado, eliminación de nodos asociados a pocos elementos. En la figura 3.24 se muestra un ejemplo.

Al igual que en la definición de la geometría de la malla es posible realizarla desde el archivo de texto. En la figura 3.25 se observa el archivo de texto de la malla del ejemplo anterior. Para generar la malla es necesario conocer la numeración de los nodos externos para poder definir la malla y así colocar la dimensión de los elementos.

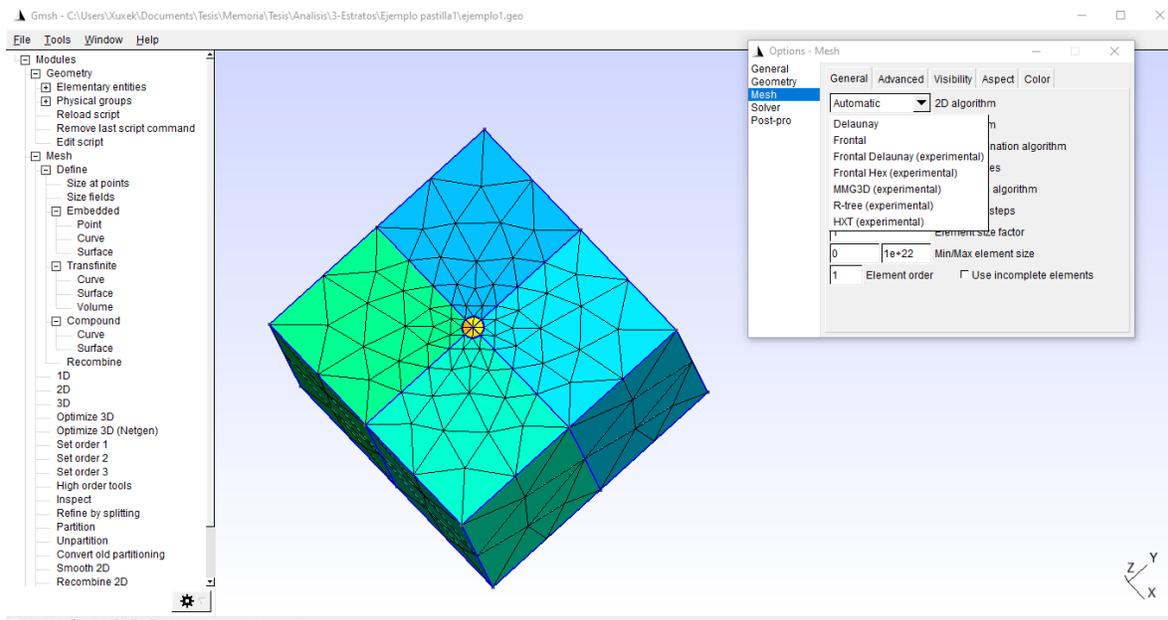


Figura 3.24 Ejemplo de Malla en 3D y del Módulo de Mallado del programa GMSH.

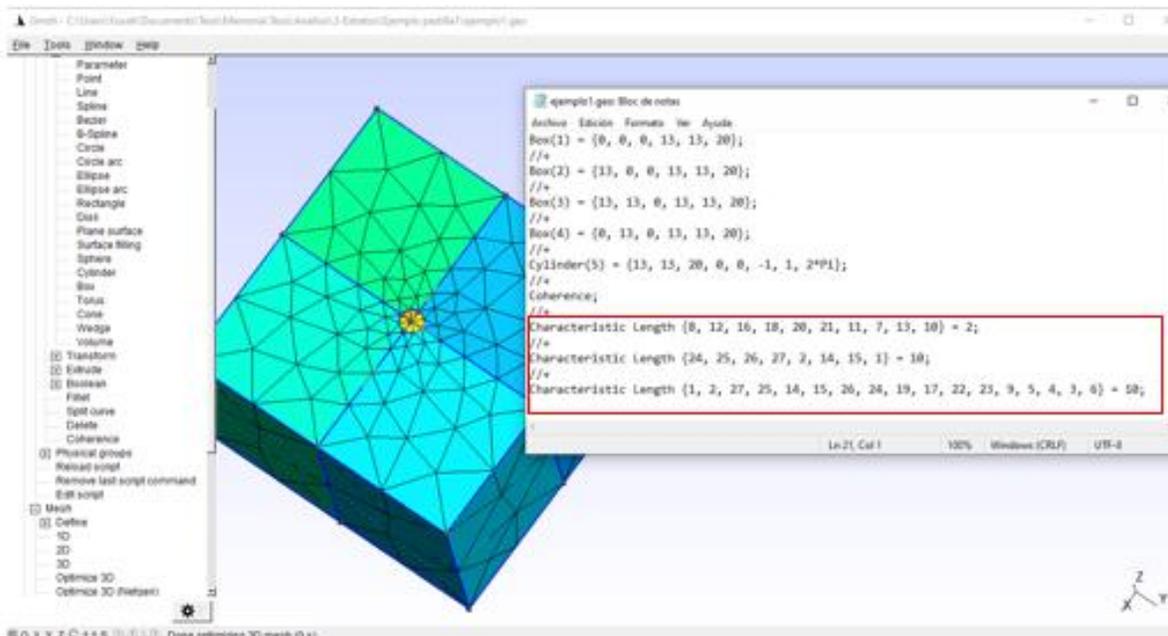


Figura 3.25 Ejemplo de Malla en 3D utilizando el archivo de texto en programa GMSH.

El programa de análisis utilizado en este trabajo de tesis, ARFEM3D, requiere de cierta información que, parcialmente el programa GMSH proporciona. Son tres archivos que contiene información sobre el problema a analizar. Los archivos contienen la geometría del medio, así como sus restricciones de movimiento, propiedades de los materiales y las fuerzas a las que está sometida.

Dichos archivos deberán de tener un formato en específico para que el programa lo pueda interpretar correctamente. Posteriormente se describirá un ejemplo detallado de la generación de la malla inicial, así como la sustracción de información y el acomodo adecuado para que el programa de análisis la pueda leer y procesar.

### **3.5.3 PROGRAMA DE ANÁLISIS**

Para la realización del análisis se cuenta con un programa de análisis de nombre ARFEM3D. Este programa leerá la información generada de la malla creada con GMSH, las propiedades de los materiales, así como características físicas del problema en estudio.

El algoritmo fue diseñado para realizar un refinamiento automático de mallas. Su refinamiento se realiza en zonas específicas que el programa considera importantes refinar, mediante ciertos criterios establecidos por el usuario. Estas zonas y otras consideraciones que toma el programa serán explicadas más adelante, al igual que el procedimiento de refinamiento.

### **3.5.4 PROGRAMA PARA LA VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS**

El software ARFEM3D genera archivos sobre la información del análisis del problema. Para poder visualizar los resultados es necesario contar con un programa que pueda leerlos y procesarlos; existen softwares libres o comerciales para este fin. En este trabajo de tesis se utilizó un software de visualización para la etapa de pos-proceso.

## **CAPÍTULO 4**

### **ALGORITMO DE REFINAMIENTO AUTOMÁTICO**

El programa de análisis ARFEM3D es un algoritmo de refinamiento para elementos finitos tetraédricos, creado por los doctores Armando R. Hermosillo Arteaga, Miguel P. Romo Organista, Roberto Magaña del Toro y Jorge Carrera Bolaños. (Hermosillo A. A. R., Romo O. M., Magaña T. R. & Carrera B. J., 2018).

Este programa fue creado para mejorar la precisión de la resolución de problemas de la ingeniería aplicada en las áreas de geotecnia y estructuras, utilizando el MEF, ya que a pesar de ser aceptado dicho método como una herramienta de análisis confiable, existen factores que disminuyen la precisión de los resultados. Uno de estos factores es la adecuada discretización del problema ya que, las condiciones internas y de frontera pueden variar con el tiempo por muchas razones. Este algoritmo utiliza un procedimiento geométrico innovador para refinar automáticamente las mallas de elementos tetraédricos 3D. El procedimiento adaptativo del programa ARFEM3D es iterativo por naturaleza. A partir de una malla inicial proporcionada, el proceso de cálculo-refinamiento-cálculo se activa cuando uno o varios elementos no cumplen la condición o condiciones definidas como límites; dichos criterios de falla pueden ser: esfuerzos octaédricos máximos, gradientes de esfuerzo máximos, esfuerzos cortantes máximos, etc.

Para ejecutar el programa se necesitan tres archivos fundamentales, los cuales contienen información de la geometría del problema, así como sus propiedades y características físicas. En un archivo DAT se define el número de ciclos que se desea realizar, también se establece el grado de distorsión de elementos generados, los factores de reducción de resistencia y el criterio de análisis que se realizará.

El algoritmo integra una serie de características organizadas en un "software" con estructura modular, siendo capaz de evitar que se generen elementos distorsionados durante el proceso de refinamiento, evitando cálculos espurios; mantiene todas las simetrías iniciales del problema y simula análisis no lineales, utilizando el modelo constitutivo de material adecuado.

Este refinamiento es adaptativo, que, en términos generales, es un proceso basado en geometría / topología y se realiza comúnmente como una función de pre / pos- procesamiento, lo que significa que el refinamiento ajusta los parámetros de la malla en función de estimaciones o atributos de error, puede eliminar la malla y generar otra nueva.

Para mejorar las aproximaciones de los resultados al realizar un análisis por elemento finito, el algoritmo reduce el tamaño de los elementos finitos, refinando zonas específicas de la malla por medio de un refinamiento automático, lo que representa un beneficio, ya que no en todos los casos es posible especificar las zonas que deberían de refinarse y resultaría tedioso hacerlo manualmente, aun estando familiarizado en este ámbito, podrían generarse errores. Las zonas

específicas involucran cambios abruptos en los esfuerzos locales y / o gradientes de deformación derivados de las heterogeneidades del material, esquinas afiladas, cambios del material originados por los esfuerzos, cercanía o rebase de los criterios de umbral establecidos, entre otros.

El procedimiento de refinamiento cuenta con un criterio de refinación de malla relacionado con un estimador de error de la precisión del cálculo, con la distorsión local de la malla o con la discretización espacial de las fronteras. Además de un generador de malla que asume la distribución del tamaño del elemento dentro del dominio o alrededor de sus fronteras, según el estimador de error elegido, el programa contiene un procedimiento de transferencia, es decir, se realiza un mapeo de las variables dependientes de la historia de la malla antigua a la nueva en cada paso del refinamiento.

## **4.2 FUNDAMENTOS DEL ALGORITMO**

El algoritmo se basa en la teoría de fractales, utilizando elementos de forma tetraédrica para discretizar un cuerpo; en lo que sigue se describe la teoría en la que se basa el análisis, al igual que el procedimiento de refinamiento.

### **4.2.2 TEORÍA DE FRACTALES**

En 1977 Benoit B. Mandelbrot mencionó el término fractal para describir ciertas irregularidades y patrones de los objetos que existen en la naturaleza. Un fractal está compuesto de fragmentos geométricos de orientación y tamaño variable, pero de aspecto similar. Todos los fractales tienen la característica de parecerse a sí mismos a diferentes escalas, características que se denomina auto similitud.

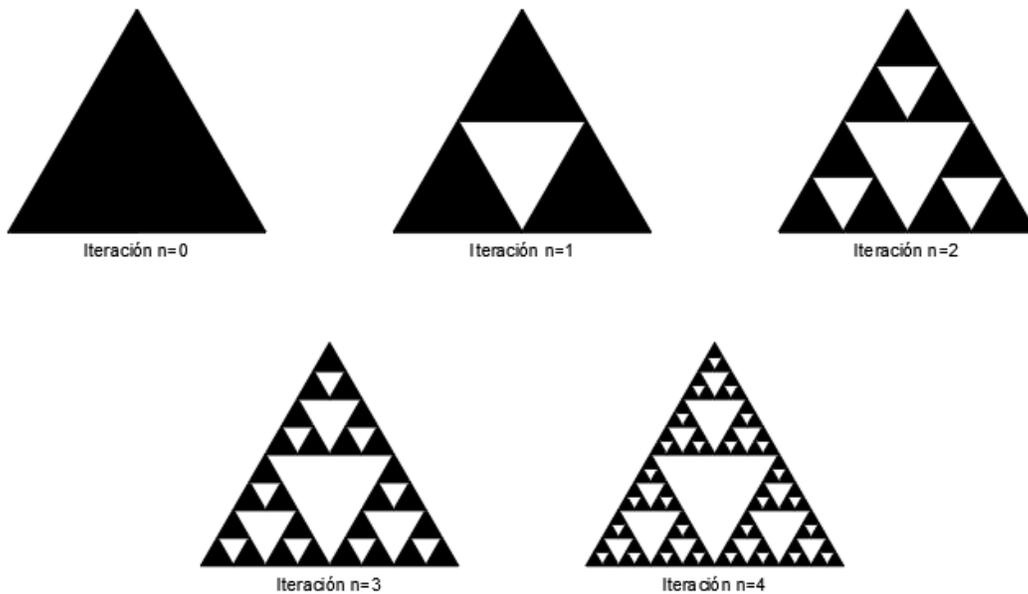
Como un fractal está compuesto de estructuras auto similares pero más finas, la longitud depende de la resolución del instrumento de medida y se llama dimensión fractal.

Para construir figuras geométricas con características de auto similitud existen reglas que, dependiendo del criterio, se deben establecer y cumplir. Los criterios de construcción de objetos fractales clásicos son: el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, la curva de Von Koch, la curva de Peano, y la curva de Hilbert. Se describirá más adelante el criterio de Sierpinski, ya que éste se consideró para el programa de análisis de refinamiento automático. Es importante mencionar que estas contribuciones no fueron relevantes hasta la llegada de computadoras y que Mandelbrot explotó el concepto de fractales.

### **4.2.3 TRIÁNGULO DE SIERPINSKI**

El triángulo de Sierpinski fue introducido por el matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1916. El triángulo de Sierpinski se descompone en tres figuras congruentes a la figura inicial, ya que cada una de ellas tiene la mitad del tamaño que la original, es decir que el triángulo de Sierpinski está formado por tres copias autosimilares (Hermosillo *et al.*, 2018).

El procedimiento de construcción del triángulo de Sierpinski parte de un triángulo donde la regla indica que se colocan tres particiones en los extremos a partir de la mitad del triángulo original, se genera un triángulo invertido y éste se extrae. Si nuevamente se aplica esta misma regla se tiene una ordenación triangular de tres ordenaciones triangulares reducidas, así sucesivamente. En la figura 4.1 se observa el procedimiento de construcción mediante iteraciones. Después de numerosas iteraciones se obtiene el resultado como el mostrado en la figura 4.1.



*Figura 4.1* Procedimiento Constructivo del Triángulo de Sierpinski (Hermosillo et al., 2018).

Al revisar detalladamente el proceso se observa que en cada nueva iteración el perímetro de los triángulos sombreados aumenta, en cambio el área de todos los triángulos disminuye. Es decir que cuando el número de iteración tienda a infinito el perímetro tenderá hacia el infinito y el área tenderá a cero.

Se pueden hacer construcciones semejantes al triángulo de Sierpinski en 3 dimensiones con los tetraedros, en la figura 4.2 se observa un ejemplo.

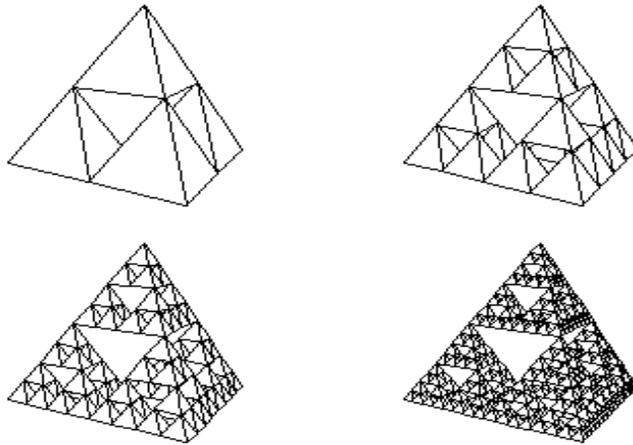


Figura 4.2 Ejemplo de Construcción de Tetraedro por el Triángulo de Sierpinski (Hermosillo *et al.*, 2020).

El algoritmo sigue reglas específicas basadas en el estudio de Sierpinski para poder dividir el elemento con la diferencia de que el tetraedro que no cumpla con los criterios de auto similitud o de umbral no serán extraídos, en cambio los tetraedros serán refinados hasta cumplir con los criterios de umbral de selección de elementos.

### 4.3 PROCEDIMIENTO DE REFINAMIENTO

Al realizar un análisis de elemento finito se generan particiones de los elementos de la malla inicial; el algoritmo analiza los elementos de forma que estos cumplan con ciertas características en su geometría y sus criterios de umbral.

#### 4.3.2 SUBDIVISIÓN DEL TETRAEDRO

Existen diferentes técnicas para dividir un elemento tetraédrico. El programa considera la interacción entre los elementos, su tamaño y su geometría. La interacción entre estos elementos puede ser de dos formas: elemento vecino tipo cara y elemento vecino tipo borde, lo que significa que comparten una cara o un borde.

La división de un elemento con respecto a la interacción entre los elementos está compuesta de tres etapas:

1. La primera etapa establece la sección de un elemento central
2. En esta etapa se selecciona un elemento de la cara vecina
3. Por último, se induce una partición del elemento vecino

Más adelante, se definirá detalladamente el método de partición del tetraedro.

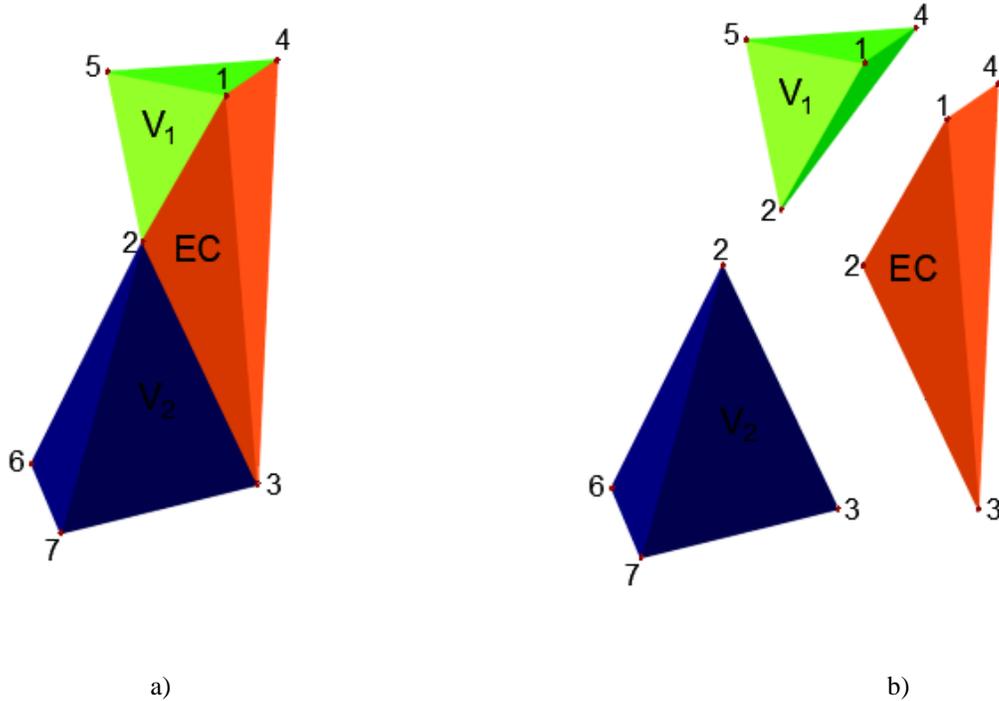


Figura 4.3 Ejemplo de Malla a Remallar. a) Elementos que Componen la Malla. b) Extrapolación de los Elementos (Modificado de Hermosillo et al., 2020).

Supóngase que se tiene una malla como la mostrada en la figura 4.3 inciso *a*. Esta malla está conformada por tres elementos, uno de estos elementos no cumple con los criterios de umbral establecidos para el análisis. Este elemento está sombreado de color naranja y definido por los nodos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ . El elemento que no cumple con los criterios se denomina elemento central  $EC$  y debe refinarse. Es importante considerar los elementos tetraédricos continuos del elemento central ya que cuando el  $EC$  se halla refinado y esté fragmentado continuamente, los elementos continuos pasaran a subdividirse. En la malla se observa que existen dos elementos continuos del  $EC$ , un elemento  $V_1$  que comparte una cara con el  $EC$ , elemento color verde, y un elemento  $V_2$  que comparte un borde, elemento color azul. El área a refinar se define enumerando nodos y elementos.

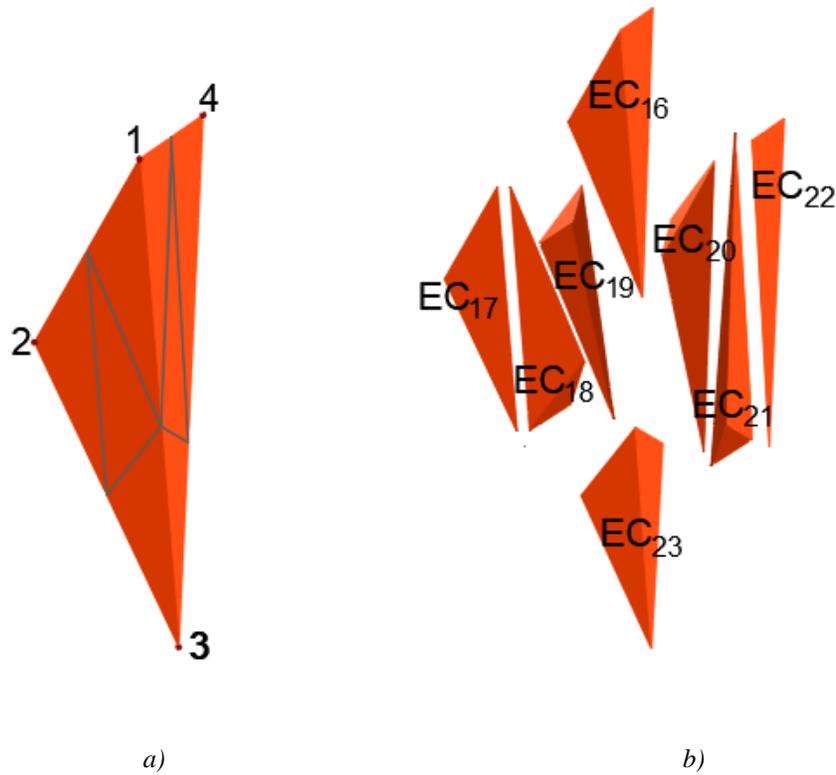


Figura 4.4 Primer Refinamiento del elemento central a) Partición del Elemento Central. b) Extrapolación de los Elemento Generados del Refinamiento en el EC (Modificado de Hermosillo et al., 2020).

El refinamiento del elemento central se llevará a cabo bisecando los cuatro bordes que se encuentran en contacto con los elementos vecinos. En la figura 4.4 inciso *a*, se muestra el primer refinamiento del elemento central. Para observar mejor los elementos generados, en la figura 4.4 inciso *b* se separaron los elementos del *EC*, donde se observa que se generaron ocho elementos auto-similares. Estos ocho elementos forman parte del *EC*, es decir:

$$EC = E_{c16} \cup E_{c17} \cup E_{c18} \cup E_{c19} \cup E_{c20} \cup E_{c21} \cup E_{c22} \cup E_{c23}$$

(Ecuación 4.1)

Se generaron ocho nodos de esta partición. Seis nuevos nodos entre los nodos iniciales  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , y  $P_4$ ; el nodo  $P_8$  entre los nodos  $P_1$  y  $P_2$ , el nodo  $P_9$  entre los nodos  $P_2$  y  $P_3$ , el nodo  $P_{10}$  entre los nodos  $P_4$  y  $P_3$ , el nodo  $P_{11}$  entre los nodos  $P_1$  y  $P_3$ , el nodo  $P_{12}$  entre los nodos  $P_1$  y  $P_4$  y el nodo  $P_{13}$  entre los nodos  $P_2$  y  $P_4$ . Entre los nodos nuevos se generaron dos más, el nodo  $P_{14}$  entre los nodos  $P_8$  y  $P_{12}$  y el nodo  $P_{15}$  entre los nodos  $P_9$  y  $P_{10}$ .

Los seis nodos de los nodos iniciales no cumplen con la regla de conectividad del MEF, por lo que la malla debe refinarse localmente, es decir que los elementos continuos del *EC*, en este caso  $V_1$  y  $V_2$  serán subdivididos, como se muestra en la figura 4.5 inciso *a*. En la figura 4.5 inciso *b*, se

observa que del volumen  $V_1$  se generaron cuatro elementos  $V_{11}$ ,  $V_{12}$ ,  $V_{13}$  y  $V_{14}$ , mientras que del volumen  $V_2$  se generaron dos volúmenes  $V_{21}$  y  $V_{22}$ . Es decir:

$$V_1 = V_{11} \cup V_{12} \cup V_{13} \cup V_{14}$$

$$V_2 = V_{21} \cup V_{22}$$

(Ecuación 4.2)

Como se observa, el refinamiento de cualquier elemento central obligará, a refinar los elementos contiguos a este. El algoritmo evita que se extienda a otros elementos cercanos generando una malla menos densa y por lo tanto se consumirá menos memoria de cálculo agilizando los análisis. Sin embargo, los elementos que se encuentren en la zona de refinamiento se pueden refinar aún más.

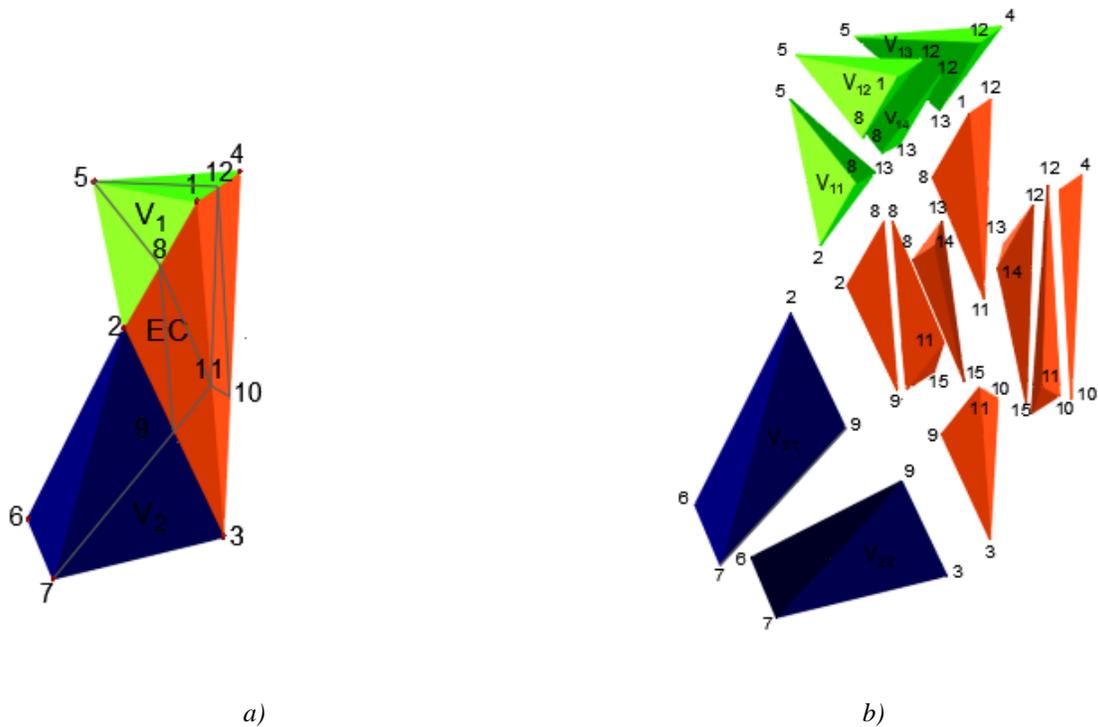


Figura 4.5 Elementos de la Malla en el Primer Refinamiento a) Partición del Elemento Central. b) Extrapolación de los Elemento Generados del Refinamiento en el EC (Modificado de Hermsillo et al., 2020).

Como se mencionó anteriormente, los nuevos elementos generados son auto-similares, sin embargo, el volumen antes y después del refinamiento no cambia. Por lo tanto, se cumplen las siguientes identidades:

$$E_c = E_{c16} + E_{c17} + E_{c18} + E_{c19} + E_{c20} + E_{c21} + E_{c22} + E_{c23}$$

$$V_1 = V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14}$$

$$V_2 = V_{21} + V_{22} \quad (\text{Ecuación 4.3})$$

En algunas situaciones es ventajoso considerar dos o más elementos centrales. El proceso se basa en dos reglas:

1. Si dos elementos comparten una de sus caras, ambos se consideran elementos centrales, el remallado procederá como si cada elemento fuera independiente. En la figura 4.6 se observa la aplicación de esta regla; donde el elemento rojo y el elemento en gris son elementos centrales.

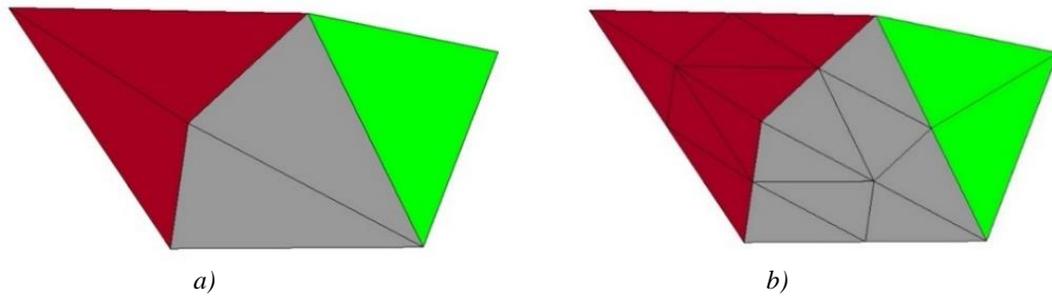


Figura 4.6 Remaello considerando dos elementos centrales adyacentes. a) Elementos centrales rojo y verde sin refinar b) Elementos centrales refinados. (Hermosillo et al., 2020).

2. Si dos o más elementos son adyacentes a otro elemento común, cada uno de ellos se puede considerar un elemento central y por lo tanto la regla 1 se aplica. Esta regla se representa en la figura 4.7, donde los elementos de color rosa y azul son elementos centrales adyacentes a un elemento en común, en este caso el elemento gris, por lo cual los elementos rosa, azul y gris se consideran centrales y se aplica la regla 1 donde cada elemento procede como si fuera independiente.

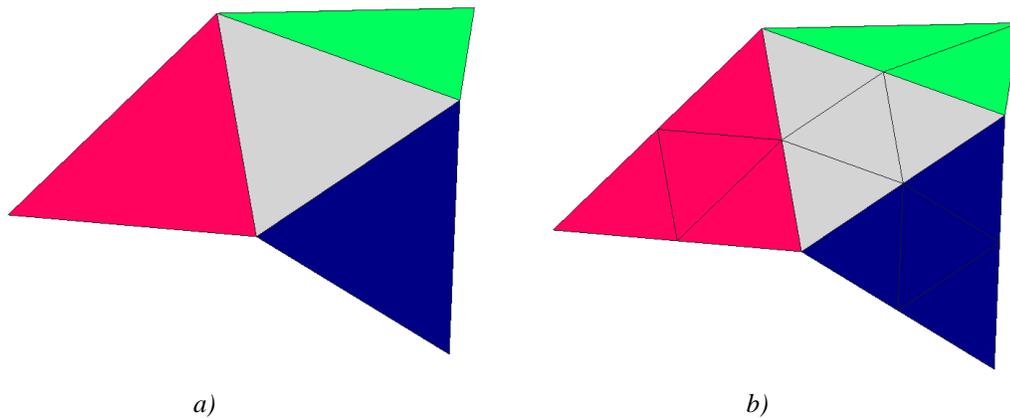


Figura 4.7 Remaello considerando tres elementos centrales adyacentes. a) Elementos centrales rosa y azul sin refinar b) Refinación de elementos centrales, donde el elemento gris también se considera elemento central, por la regla dos (Hermosillo et al., 2020).

La fragmentación de los elementos centrales podrían causar elementos tetraédricos adyacentes distorsionados. El programa utiliza una herramienta para evitar que se generen estos elementos. Se basa en un análisis previo a todos los elementos tetraédricos del grado de degeneración  $Q_T$ . (Hermosillo *et al.*, 2020). El programa permite definir la relación del umbral  $Q_T$ . Cuando se pretenda tener elementos tetraédricos equiláteros, el umbral  $Q_T$  será uno, si el análisis es menos estricto y permite elementos un poco distorsionados el  $Q_T$  será mayor o igual a 0.5. Si la relación de forma de los tetraedros rebasa los umbrales especificados estos elementos se considerarán elementos centrales y se procederá a refinar; este proceso continuará hasta que ningún elemento rebese el  $Q_T$ . Esta herramienta permite mejorar la malla, eliminando los elementos distorsionados antes de realizar los cálculos de elementos finitos.

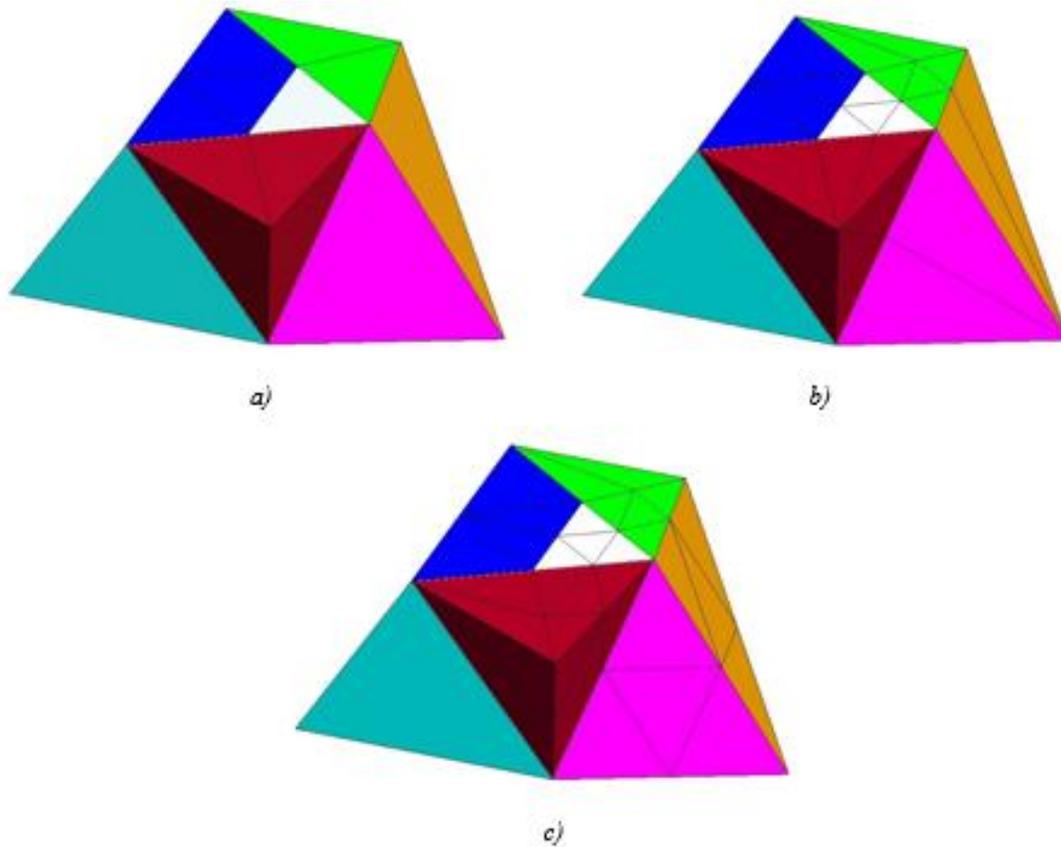
Para distinguir que tan irregular es un tetraedro se utiliza un indicador de calidad que mide la irregularidad de éste. El indicador de calidad se calcula de la siguiente forma:

$$Q_T = 3 \frac{rad_T}{R_T} \in (0,1] \quad (\text{Ecuación 4.4})$$

Cuando el indicador de calidad  $Q_T$  se encuentra cerca del 1, el tetraedro es casi regular; si  $Q_T$  esta cerca del 0 el tetraedro es irregular.

Para obtener los parámetros radio de la circunferencia en  $T(rad_T)$  y el radio de la circunferencia sobre  $T(R_T)$  se explica en el capítulo 3.2.4.2 (CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DEL TETRAEDRO).

El procedimiento de la técnica para la fragmentación de los elementos se ilustra en la figura 4.8. En el inciso *a*, se observa la malla inicial con la cual se le realizará el análisis. El elemento blanco será el que necesitará ser refinado. En el inciso *b* se observa que el refinamiento del elemento central blanco ocasionaría que se generen elementos tetraédricos adyacentes bastante alargados pudiendo ocasionar resultados erróneos al realizar el análisis, sin embargo, al contar con la herramienta del indicador de calidad, el algoritmo analiza todos los tetraedros de acuerdo con sus cocientes laterales. La malla resultante sería la que se muestra en el inciso *c*. Una malla con elementos simétricos y con una  $Q_T$  igual a 0.5. Estas características mejoran mallas apreciablemente mal diseñadas, asegurando que los resultados sean significativos.



*Figura 4.8* Procedimiento de técnica de Remaello. a) Elemento tetraédrico a refinar. b) Elementos alargados debido al refinamiento del elemento central. c) Búsqueda automática de elementos alargados y refinamiento para su eliminación (Hermosillo *et al.*, 2020).

#### **4.4 PROCEDIMIENTO DE REFINAMIENTO DEL SOFTWARE ARFEM3D**

El procedimiento del software ARFEM3D comienza suavizando la malla para eliminar los elementos distorsionados antes de realizar los cálculos de elementos finitos. Después de que la malla inicial se haya suavizado el programa genera un archivo que contiene la información del problema, es decir las condiciones de frontera presentes y futuras, propiedades de los materiales, etc.

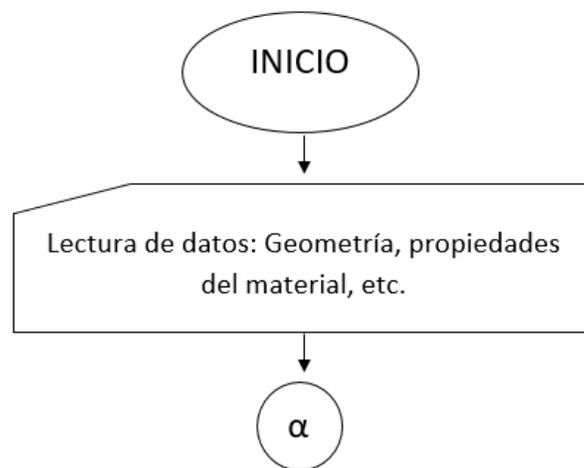
Ya definidas las condiciones iniciales del problema se inicia un ciclo donde se modifican las condiciones de frontera. Para cada condición de frontera se realiza un análisis de elementos finitos de esfuerzo-deformación; de ser necesario, al final de cada análisis del ciclo, las propiedades materiales se pueden modificar para considerar la no linealidad de su comportamiento.

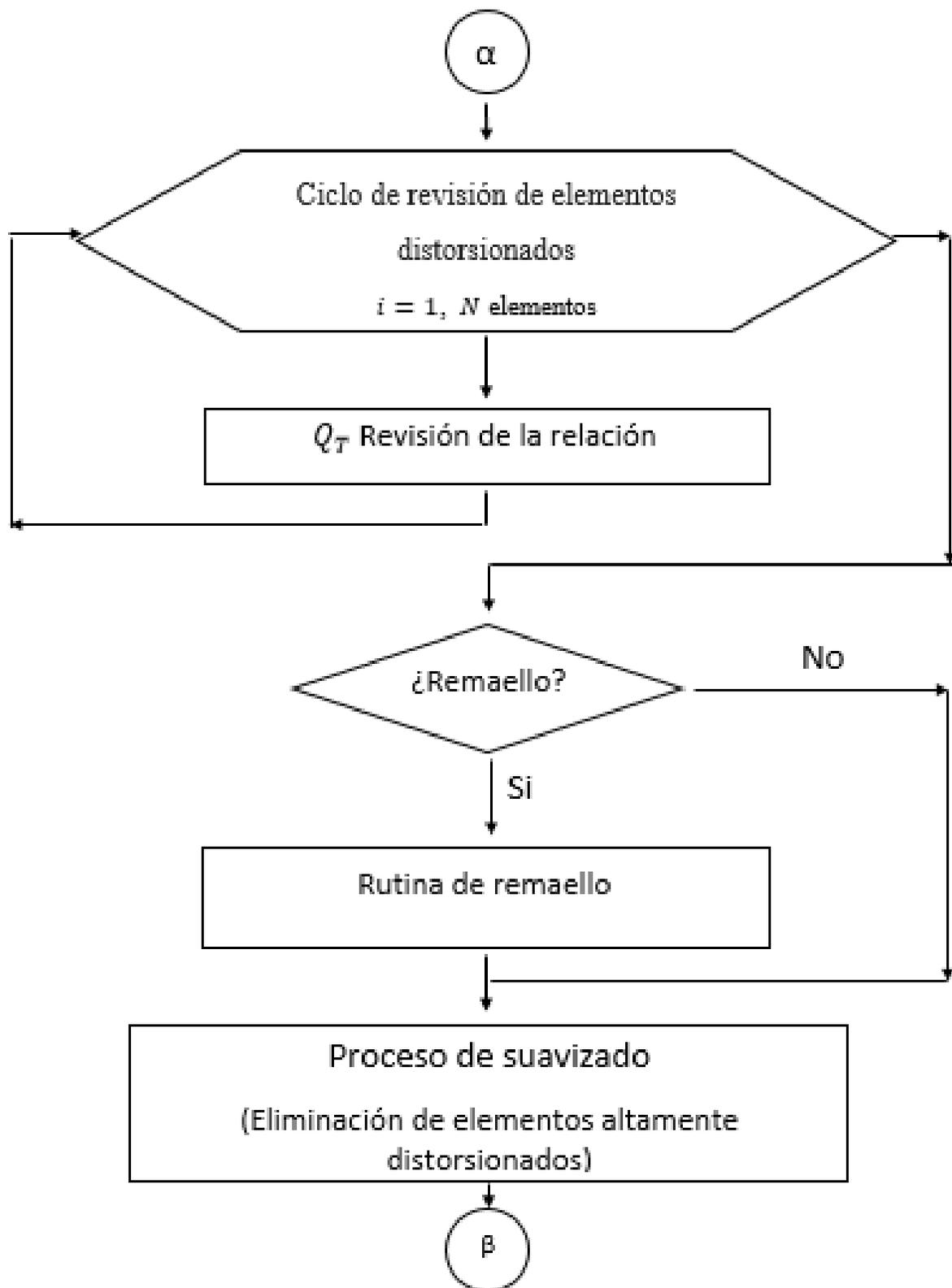
Una vez finalizado el ciclo y obtenido el nuevo estado de esfuerzos de toda la malla, comienza el refinamiento de todos los elementos que se encuentren fuera de los criterios de umbral antes definido. Los criterios de umbral se refieren en este caso a todos los elementos en donde se rebase

o se acerque al valor de capacidad del material para resistir esfuerzos de tensión, compresión, etc. El ciclo de refinamiento termina hasta que ningún elemento supere los criterios de umbral.

Todo ese proceso se repite con la nueva malla generada hasta que se complete el número de iteraciones ya definidas; de ser necesario, las condiciones de frontera se pueden modificar. En la figura 4.9 se explica el procedimiento de refinamiento en un diagrama de flujo.

El algoritmo es capaz de evitar que se generen elementos distorsionados durante el proceso de refinamiento evitando ocasionar cálculos erróneos y por ende resultados dudosos, manteniendo la geometría inicial del problema.





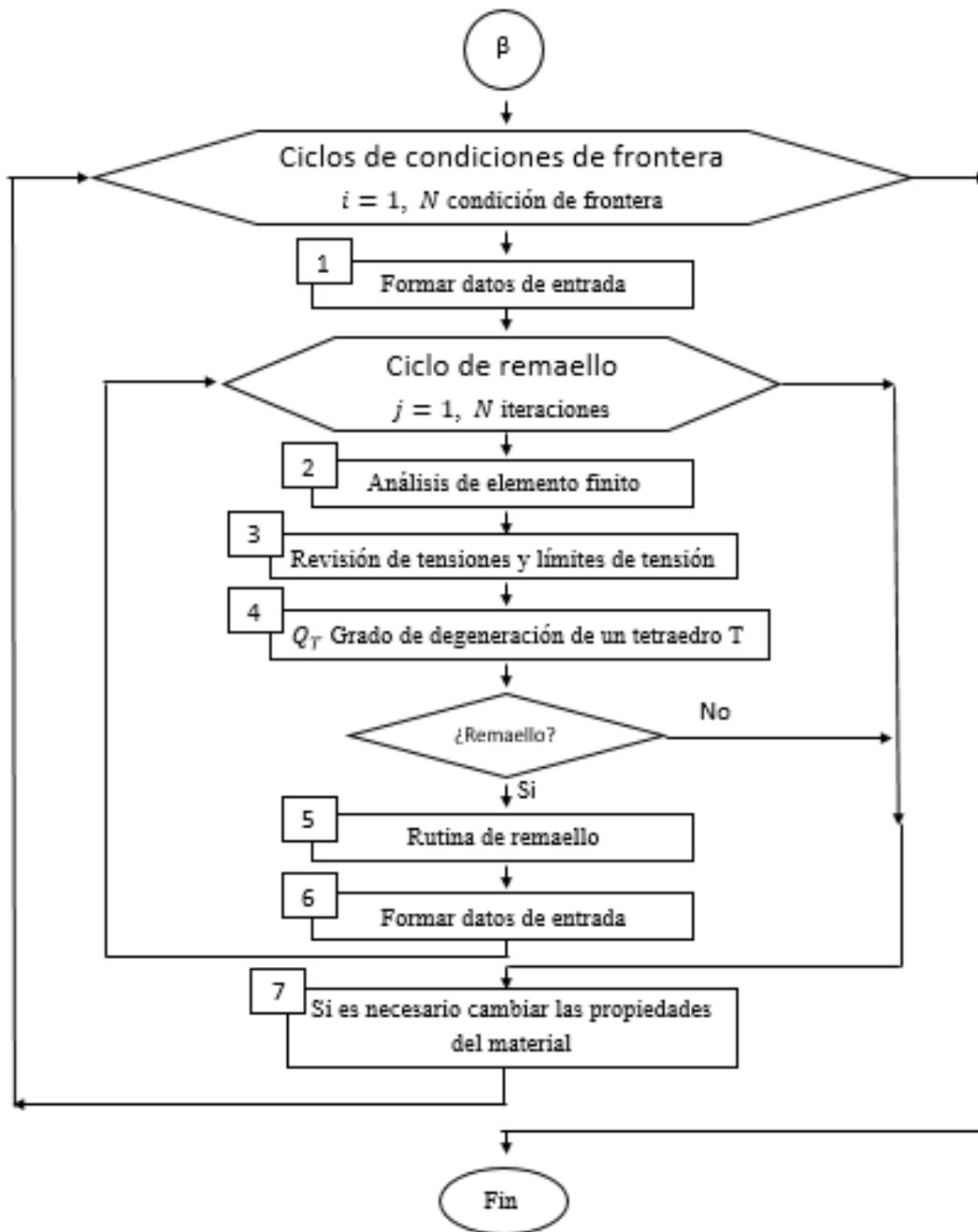


Figura 4.9 Diagrama de Flujo del Procedimiento de Remaello Automático (Modificado de Hermosillo *et al.*, 2020).

#### 4.5 PROCEDIMIENTO OPERATIVO PARA EL ANÁLISIS EL ANÁLISIS DE ELEMENTO FINITO CON EL PROGRAMA ARFEM3D

El proceso para el análisis de elementos finitos por medio del software ARFEM3D consta principalmente de cuatro pasos:

1. Definición del problema

Este paso es sumamente importante ya que si no se logra definir el problema correctamente se obtendrán resultados erróneos, ya que no corresponderán al problema real que se desea analizar.

Aquí es donde se obtienen las características físicas del problema, es decir se obtiene los datos de su geometría, condiciones de frontera, propiedades de los materiales, etc.

## 2. Discretización del medio

Como se ha mencionado anteriormente, para poder aplicar el análisis por elemento finito será necesario crear una malla inicial que represente correctamente las características físicas del problema.

## 3. Procedimiento de refinamiento automático

El programa necesita información para poder realizar el análisis. La información geométrica y física se prepara en tres archivos y un archivo DAT para el tipo de análisis a realizar:

- Geometría de la malla: El archivo de geometría debe contener la información de los elementos de la malla, como la posición geométrica de cada nodo, al igual que su condición de frontera en términos de los desplazamientos. Para especificar que no existe desplazamiento se colocara “1” en el grado de libertad correspondiente y “0” para indicar la libertad.
- Propiedades de los materiales: Aquí es donde se definen las propiedades de los materiales involucrados en el estudio. Para el estudio se necesitarán las propiedades que corresponden a las constantes elásticas, es decir los módulos de rigidez  $E$ , los módulos de cortante  $G$ , la relación de Poisson  $\nu$  y la curva elástica del material.
- Cargas sobre los nodos: En este archivo se encuentran los nodos que están sometidos a cargas, así como la magnitud de estas.
- Opciones para el análisis y refinamiento: Este archivo contiene las opciones disponibles para el refinamiento como: el número de iteraciones que se realizaran, los factores de umbral, el grado de distorsión de los elementos, etc.

Ya obtenida la información principal se establecen las condiciones iniciales del problema y con el formato correspondiente es posible iniciar el refinamiento automático ejecutando el programa en la computadora.

## 4. Visualización de resultados

Para verificar que los resultados del análisis sean correctos y el proceso anterior se haya realizado correctamente será necesario visualizar los resultados para así comprobar que el comportamiento y los resultados visuales sean congruentes con la realidad del problema en cuestión.

## 4.5.2 MANUAL DE PROCEDIMIENTO OPERATIVO PARA EL ANÁLISIS EL ANÁLISIS DE ELEMENTO FINITO CON EL PROGRAMA ARFEM3D

A continuación se presenta un ejemplo detallado de cómo realizar un análisis de elemento finito mediante la utilización del programa de refinamiento automático ARFEM3D, así como el procedimiento de visualización de resultados.

### 4.5.2.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El problema consiste en una viga simplemente apoyada, con carga en el centro. La viga es de concreto simple. La viga tiene dimensiones de 180 cm de largo, 12 cm de ancho y 20 cm de alto que corresponden a las coordenadas x, y, z respectivamente.

Ya que la viga estará apoyada en sus extremos se plantea que los nodos que se encuentren en las orillas inferiores de los extremos del largo de la viga tendrán restricción en las tres direcciones de desplazamiento. La carga a la cual está sometida la viga es de  $P = 1500 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  y será aplicada en el centro con una superficie de 20 cm de largo y 12 cm del ancho de la viga. Como se mencionó antes la viga es de concreto simple por lo que tiene una resistencia de  $f'c = 250 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  y por lo tanto un Módulo de Young de  $E = 221359.4 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  y una relación de Poisson de  $\nu = 0.2$ . En la figura 4.10 se muestra la representación de la definición del problema.

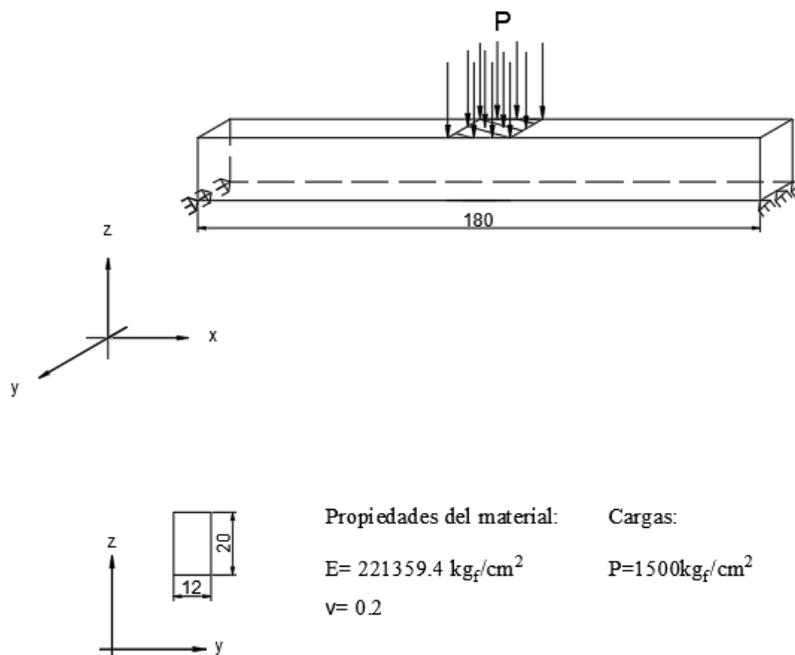


Figura 4.10 Representación del problema a analizar, con dimensiones en centímetros.

### 4.5.2.3 DISCRETIZACIÓN DEL MEDIO

Para representar correctamente el problema se optó por incluir dentro del volumen de la viga un volumen que contenga el área donde se aplica la carga; en la figura 4.11 se muestra la geometría de la viga, así como un elemento interno, (cotas en centímetros). Este elemento se coloca con el fin de especificar la existencia de nodos en los que posteriormente se definirá la carga correspondiente y así obtener un análisis correcto.

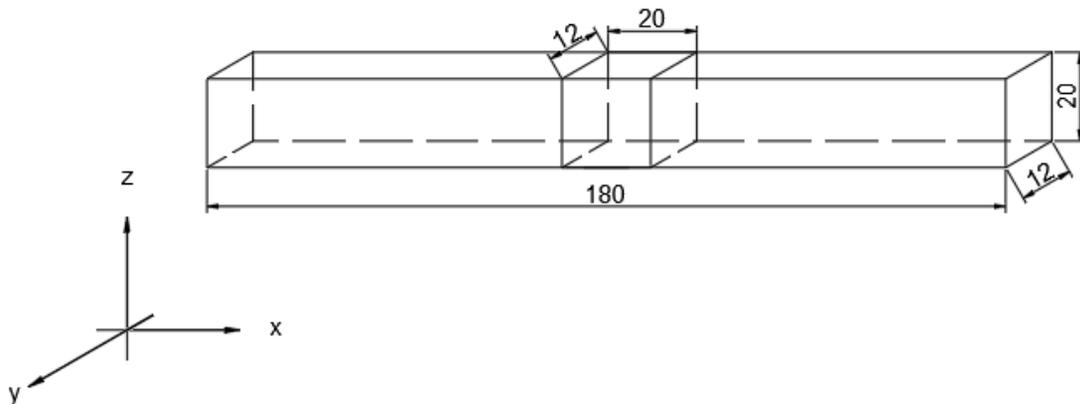


Figura 4.11 Representación geométrica de los volúmenes que se desean definir en el programa GMSH.

Al abrir el programa GMSH este se llama por defecto untitled.geo. Se guardará con el nombre Viga 1.geo.

La definición de la geometría del problema se realiza con la ayuda de las entidades elementales que ya están predeterminadas, como lo es la entidad Box. La cual nos permitirá crear el volumen de la viga y el elemento interno.

Al presionar Módulos de la barra de herramienta y desplegar el menú, se presiona en Geometry, siguiendo con Elementary entities, Add y por último Box.

Al presionar Box se abre una ventana emergente la cual pide ingresar las coordenadas iniciales en  $x, y, z$  para generar el volumen y la longitud que tendrá el volumen en su determinada dirección. Como se mencionó anteriormente, en ese problema solo se definirán dos volúmenes, de la viga y el volumen para definir el área cargada; para el volumen de la viga se tendrán las coordenadas  $(0,0,0)$  en la dirección  $(x,y,z)$ , con longitudes en centímetros de  $(180,12,20)$  en las direcciones correspondiente y para el volumen del área cargada las coordenadas serán  $(80,0,0)$  con longitudes  $(20,12,20)$  en las coordenadas  $x,y,z$ . Es importante apretar la tecla “e” para ejecutar la orden y al terminar apretar la tecla “q” para salir de la opción. En la figura 4.12 se observa el proceso

seguido. Para definir que los dos volúmenes pertenecen al mismo cuerpo usamos el comando Coherence.

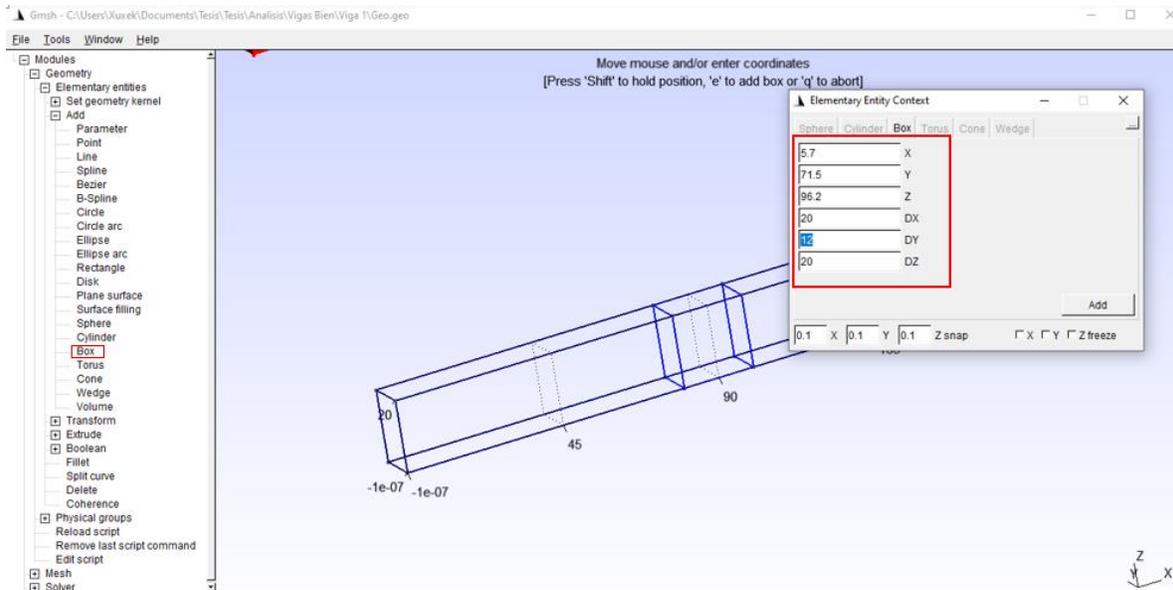
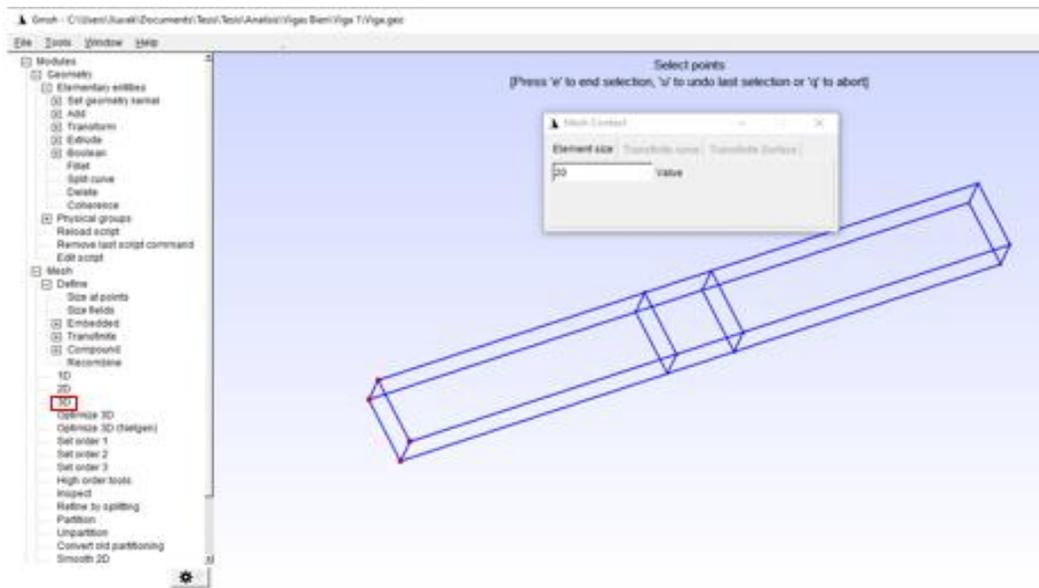


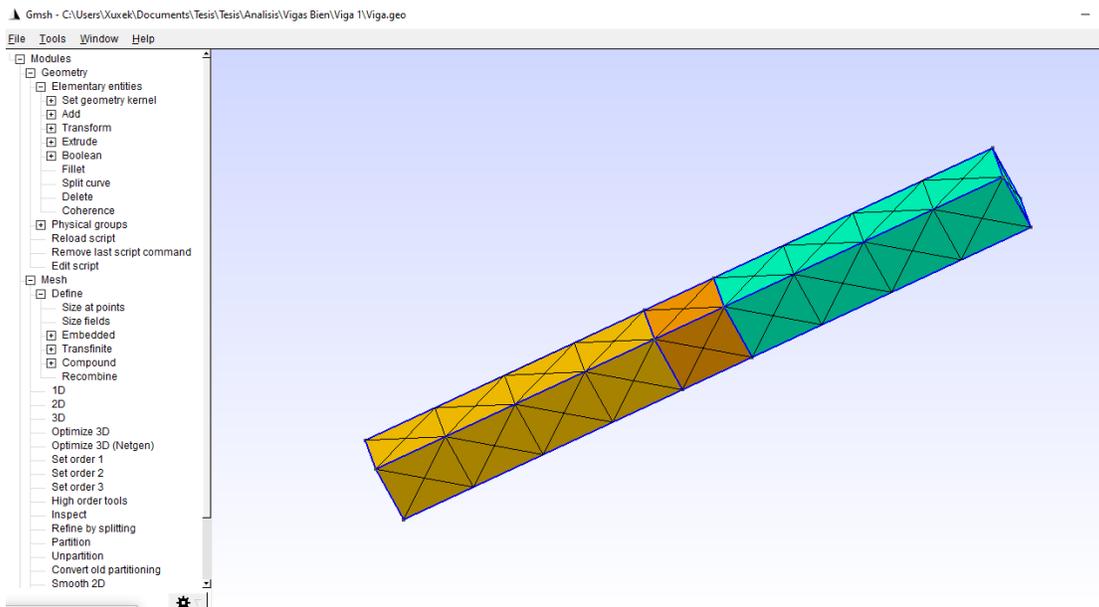
Figura 4.12 Proceso de generación de volumen para la malla.

Ya obtenida la geometría del problema se procede a generar la malla. Para generar la malla, se utiliza el módulo Mesh, en el apartado Define se despliega, para seleccionar Size at points. Esta opción permite colocar la longitud de la partición entre la distancia de los nodos, al igual que seleccionar los nodos en los que se encontraran los tetraedros con la longitud marcada. Este proceso se puede observar en la figura 4.13 inciso *a*. Por último, se selecciona la opción 3D para generar la malla con las características ya establecidas.

En este problema se colocó una longitud para los elementos entre todos los nodos de 20 centímetros ya que genera una malla regular; es cierto que se recomienda que la malla inicial tenga una estructura donde exista mayor densidad donde se pretende estudiar, sin embargo, también es importante no tener demasiados elementos, ya que se necesitará mayor memoria de almacenamiento; de igual forma se busca que estos elementos sean lo más regular posible para evitar refinamiento por irregularidad. En la figura 4.13, inciso *b*, se observa la malla inicial que se generó.



a)

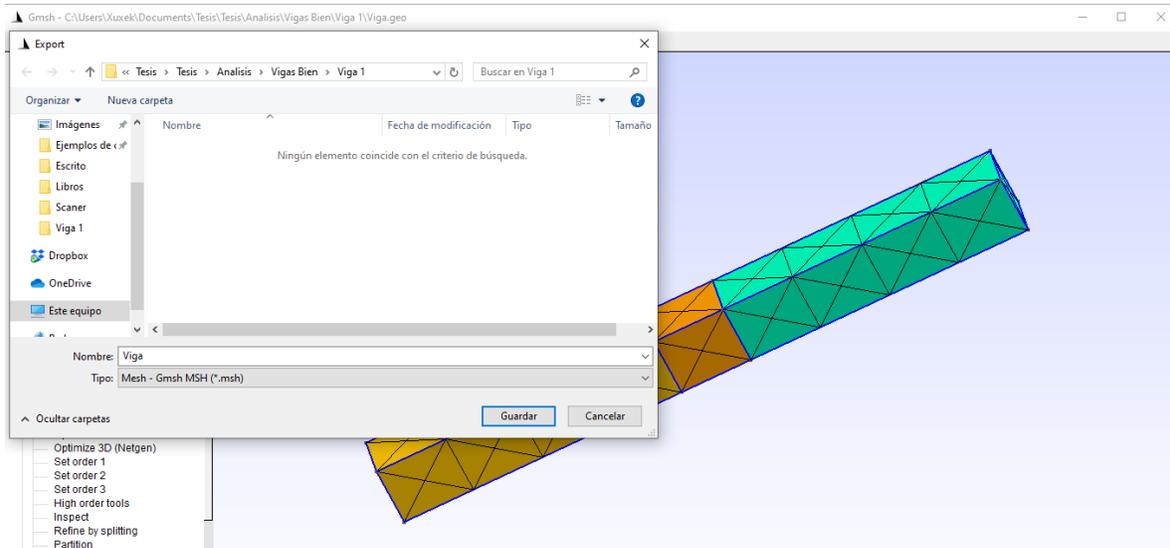


b)

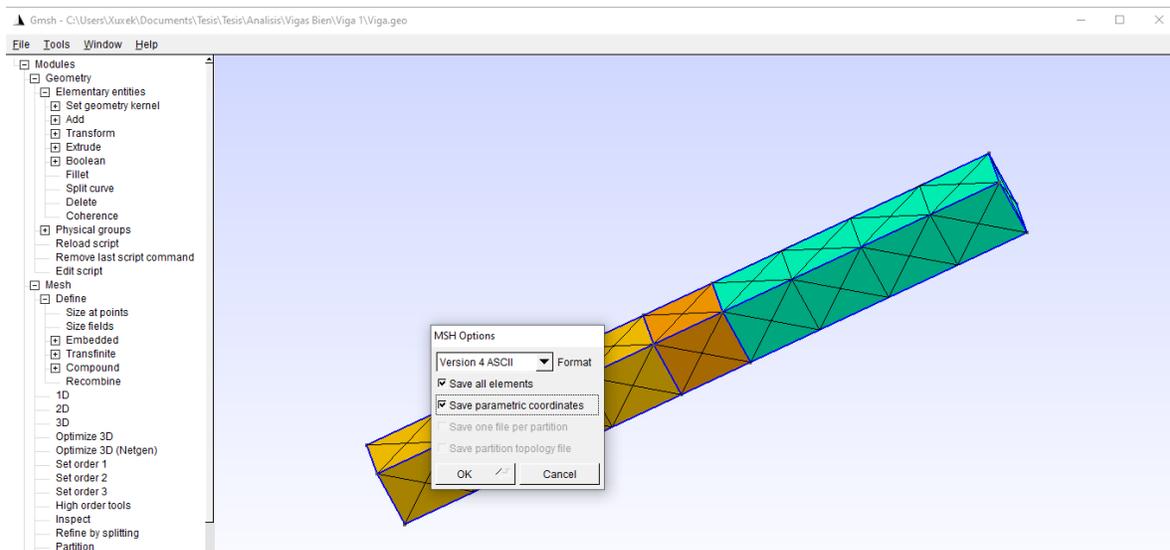
Figura 4.13 Proceso de generación de la malla inicial. a) Definición de las características de la malla. b) Malla generada.

El siguiente paso consiste en la sustracción de la información, es decir, la información de los nodos generados, así como su ubicación en el espacio y sus características. En File se selecciona Export; en la ventana emergente se observa que el documento se guarda en la ubicación ya antes seleccionada y en formato tipo Guess From Extension. Para sustraer la información se cambia el

tipo de archivo a Mesh-Gmsh MSH. Al guardar, se abre otra ventana emergente MSH Options; para obtener todos los archivos en formato Version 4ASCII y se seleccionan ambas opciones de guardado. En la figura 4.14 se observa el proceso de sustracción de información.



a)



b)

Figura 4.14 Sustracción de información de la malla inicial generada. a) Forma de guardado. b) Sustracción de información necesaria.

La información se guarda directamente donde se guardó el documento con extensión .geo, en este caso el documento Viga 1.geo.

#### 4.5.2.4 PROCEDIMIENTO DE REFINAMIENTO AUTOMÁTICO

Para correr el programa se necesitan generar los archivos que contienen la información del problema, por lo que se procede a crear el archivo geometría. Esto se obtiene acomodando la malla generada con el programa GMSH a la estructura necesaria del programa de refinamiento. Para esto se cuenta con un programa que interpreta la información de la malla y la acomoda con el formato adecuado.

Al abrir el archivo generado por el GMSH se observa que despliega cierta información antes de mostrar la información de los nodos, esta información será eliminada, ya que no es necesaria. Posteriormente se guarda como MALLA.DAT, tal como se muestra en la figura 4.15; en esta imagen también se muestra desde donde la información obtenida del programa GMSH deberá guardarse.

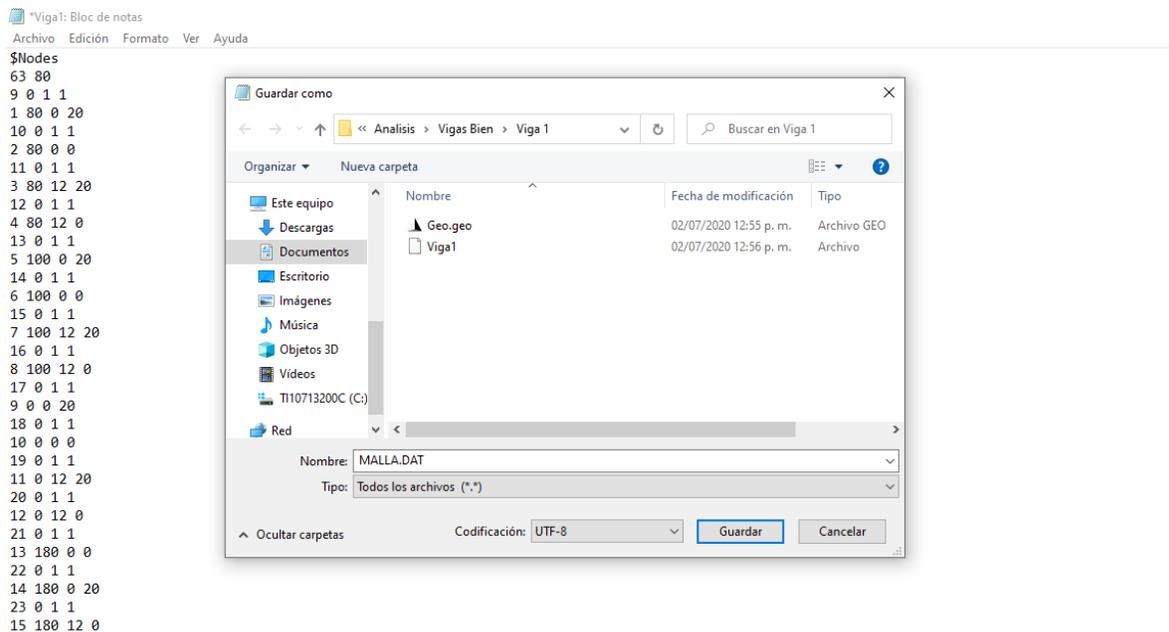


Figura 4.15 Acomodo de la Información de la Malla Generada del GMSH.

Al utilizar el programa se generan seis archivos, de los cuales se utilizará el archivo MALLA.REM. Este archivo se puede abrir como archivo de texto, para facilitar su manejo se puede utilizar algún editor de textos. El archivo MALLA.REM contiene el número de nodos, sus coordenadas en  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , así como sus restricciones; también contiene el número de elementos que se generaron en la malla inicial. Aquí es donde se definen los nodos que no tendrán desplazamientos, colocando el número “1” para especificar la restricción de desplazamiento en la dirección que corresponda y “0” para especificar la libertad. En este ejemplo se restringen los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de los nodos que se encuentren en  $x = 0$ ,  $x = 180$  y  $z = 0$ . En el archivo de texto se definirá una pequeña descripción del problema, igual se agregará el número de nodo y de elementos, tal como se muestra en la figura 4.16. Por último, se guarda como geometría\_viga1.dat, de esta forma se obtiene el archivo geometría.

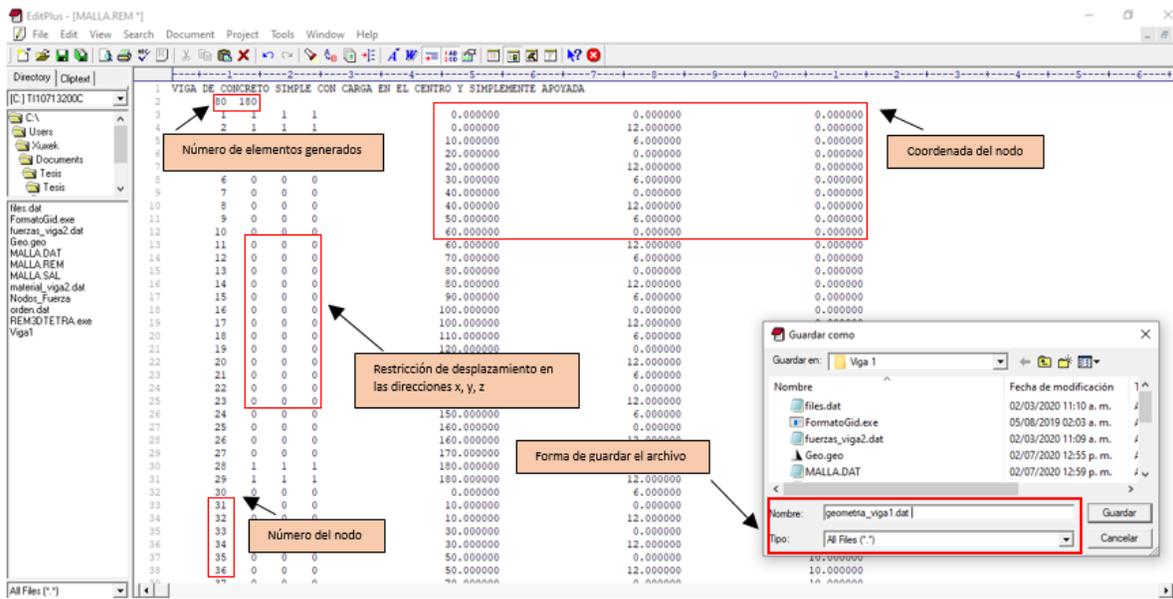


Figura 4.16 Obtención de Archivo Geometría

Ya obtenido el archivo de geometría se procede a generar el archivo de materiales. Este archivo también se genera como un archivo tipo texto.

El primer renglón debe contener el número de volúmenes que se generaron de la malla. Este número debe de estar dentro de cinco espacios; el número se encuentra en el archivo geometría, en este problema son cuatro volúmenes, en la figura 4.17 inciso *a* se muestra la ubicación del número.

Para definir el material del primer volumen este se define dentro de un espacio de cinco, en los siguientes diez espacios se coloca el módulo de Young del material, en los próximos diez espacios la relación de Poisson compresión y en otros diez espacios la relación de Poisson en tensión. En el próximo renglón dentro de los primeros cinco renglones se coloca la resistencia de concreto en compresión y en los próximos diez, en tensión. Se agrega la curva de elasticidad del material. En estos casos se usaron los datos reales de un elemento probado en el laboratorio. Este proceso continúa hasta definir los cuatro volúmenes. En el último renglón se colocará la dirección de la fuerza. El archivo se guarda como material\_viga1.dat como en la figura 4.17 inciso *b*.

227	145	73	23	45	74	4	0
228	146	20	71	70	46	4	0
229	147	73	23	74	47	4	0
230	148	73	22	23	47	4	0
231	149	20	70	19	45	4	0
232	150	71	20	70	44	4	0
233	151	22	73	23	45	4	0
234	152	20	70	44	19	4	0
235	153	47	73	75	74	4	0
236	154	24	47	23	22	4	0
237	155	24	26	48	25	4	0
238	156	21	23	45	22	4	0
239	157	49	26	27	25	4	0
240	158	71	70	69	44	4	0
241	159	71	72	70	46	4	0
242	160	45	20	21	19	4	0
243	161	18	20	44	19	4	0
244	162	73	45	72	74	4	0
245	163	77	78	76	49	4	0
246	164	76	75	77	48	4	0
247	165	51	78	50	49	4	0
248	166	18	44	42	43	4	0
249	167	44	69	44	44	4	0
250	168	27	51	44	44	4	0
251	169	44	42	44	44	4	0
252	170	29	51	50	27	4	0
253	171	18	42	16	43	4	0
254	172	78	51	79	49	4	0
255	173	49	27	51	28	4	0
256	174	69	42	68	44	4	0
257	175	80	51	78	50	4	0
258	176	69	67	42	43	4	0
259	177	27	29	51	28	4	0
260	178	78	79	51	80	4	0
261	179	42	68	67	69	4	0
262	180	16	17	42	18	4	0

a)

4 ← Número de elementos

1 203943 0.2 ← Relación de Poisson

Resistencia en compresión-tensión → 250. 15.27 0.0030 0.0030

17 14 CONCRETO

1	-0.005000	-70.00	14000.00
2	-0.003500	-180.00	51428.57
3	-0.003000	-212.50	70833.33
4	-0.002500	-245.00	98000.00
5	-0.002300	-248.00	107826.09
6	-0.002200	-250.00	113636.36
7	-0.002100	-248.00	118095.24
8	-0.002050	-245.00	119512.20
9	-0.001350	-200.00	148148.15
10	-0.000925	-150.00	162162.16
11	-0.000550	-100.00	181818.18
12	-0.000247	-44.50	180161.94
13	-0.000100	-20.00	200000.00
14	0.000000	0.00	200000.00
15	0.000060	12.00	200000.00
16	0.000065	5.00	38461.54
17	0.000300	0.00	0.00

9.81 0.00 0.00 -1.0 ← Dirección de la fuerza

b)

Figura 4.17 Generación de Archivo de Materiales. a) Ubicación del Número de Volúmenes en el Archivo de Geometría. b) Archivo del Material.

Para el archivo de fuerzas será necesario identificar a los nodos que están sometidos a la carga. Estos nodos se encuentran dentro de las coordenadas donde  $x = 80$  a  $x = 100$ ,  $y = 0$  a  $y = 12$  y a  $z = 20$ . En este problema se observan cinco nodos que están sometidos a la carga. El archivo de fuerzas también es un archivo tipo texto. Se coloca el número de nodos, en el primer renglón, en el segundo renglón se coloca el número de incrementos de la carga inicial y final, esta será 1 en este ejemplo ya que no se desea realizar un análisis de este tipo; en el tercer renglón se coloca la fuerza, así como la dirección de ésta. Los nodos se colocan de mayor a menor como se muestra en la figura 4.18.

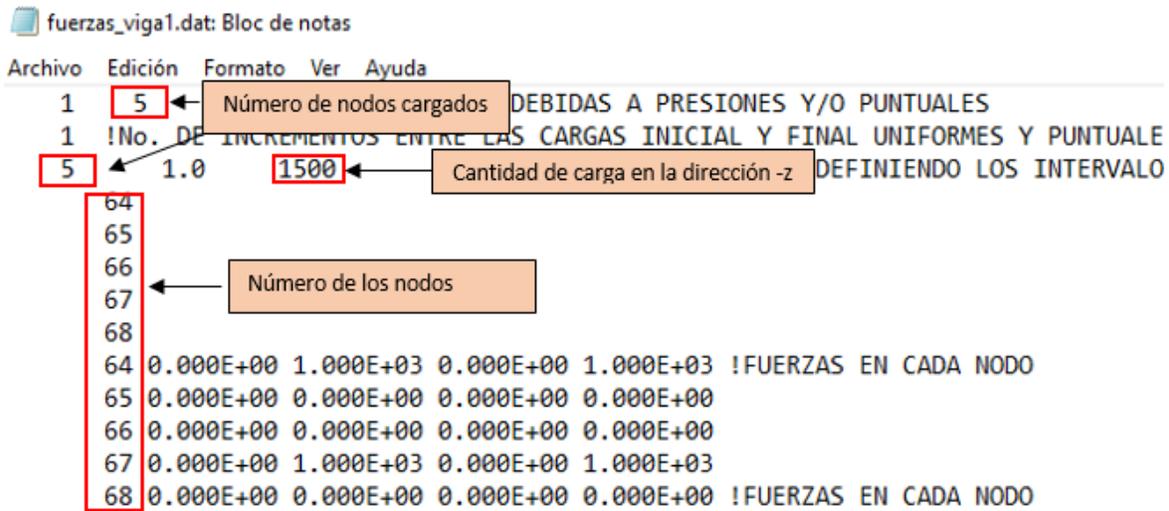


Figura 4.18 Generación de Archivo de Fuerzas

En un archivo de nombre files.dat se encuentran los nombres de geometría, materiales y fuerzas. En un archivo de nombre opcion.dat se define el número de ciclos que se realizarán, en este caso serán 4, así como el grado de distorsión de los elementos, los factores de umbral y la opción de análisis. En la figura 4.19 se visualizan las opciones elegidas. Es importante mencionar que estos documentos deben de estar guardados en la misma carpeta. En el primer renglón del archivo DAT de nombre "opcion.dat", se establece el número de ciclos que tendrá el análisis, el número de refinamiento, el número de ciclos de ajustes, fracción de la máxima deformación y la fracción de la resistencia máxima. El segundo renglón es la relación entre los lados del tetraedro, " $Q_T$ ". En el tercer renglón se establecen los factores de reducción de resistencia de cada ciclo. En el cuarto renglón se selecciona, mediante un 1, el tipo de análisis que se va a realizar; son diez tipos de caso y se pueden seleccionar varios.

```

100 4,4 20 1.0 1.0 !# CICLOS, #Ciclos REMALLEO, Lim Remalleos, #Ciclos ajuste props, Fraccion de la max deformaci
0.50 0.50 1.00 0.08 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 ! Relación LadoLargo/LadoCorto para refinar y evitar alargai
0.5 0.50 0.4 2.5 10.00 12.00 20.0 30.00 ! FACTORES DE REDUCCION DE RESISTENCIA PARA REMALLEO
0010000100 REVISAR LAS OPCIONES PARA NCASO(1)

NCASO(1)
ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS :NCASO[1]
DEFORMACIONES ANGULARES MÁXIMAS :NCASO[2]
TENSIONES MÁXIMAS :NCASO[3]
EFZO DESVIADOR MÁXIMO DE TENSIÓN :NCASO[4]
LEY DE RESISTENCIA MOHR-COULOMB :NCASO[5]
EFZO NORMAL OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[6]
EFZO CORTANTE OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[7]
EFZO CORT. OCTAEDRICO vs Resist :NCASO[8]

REMALLEO TOTAL (n veces) :NCASO[9]=n
SELECCION POR GEOMETRIA ALARGADA :NCASO[10]

```

Figura 4.19 Archivo de Opción.

El programa permite realizar análisis donde las condiciones iniciales hayan tenido cambios en sus propiedades físicas, como deformaciones iniciales. Para esto se genera un archivo de nombre defor y plastif que permiten establecer estas condiciones; para facilitar la generación de estos archivos se usa el programa Arch\_Ini.bat. Este programa genera archivos donde se establecen estas condiciones iniciales considerando deformaciones y plastificaciones nulas que pueden ser cambiadas si es que así se desee.

defor.ini: Bloc de notas							plastif_ini: Bloc de notas				
Archivo	Edición	Formato	Ver	Ayuda			Archivo	Edición	Formato	Ver	Ayuda
	1	0	0	0	0	0					
	2	0	0	0	0	0					
	3	0	0	0	0	0					
	4	0	0	0	0	0					
	5	0	0	0	0	0					
	6	0	0	0	0	0					
	7	0	0	0	0	0					
	8	0	0	0	0	0					
	9	0	0	0	0	0					
	10	0	0	0	0	0					
	11	0	0	0	0	0					
	12	0	0	0	0	0					
	13	0	0	0	0	0					
	14	0	0	0	0	0					
	15	0	0	0	0	0					
	16	0	0	0	0	0					
	17	0	0	0	0	0					
	18	0	0	0	0	0					
	19	0	0	0	0	0					
	20	0	0	0	0	0					
	21	0	0	0	0	0					

Figura 4.20 Archivo defor y plastif.

Ya con los archivos preparados es posible ejecutar el programa de análisis. Se puede realizar abriendo el programa desde la carpeta donde se encuentran todos los archivos o se puede correr desde símbolo de sistema. Si es desde el símbolo del sistema se abre por rutas; en la figura 4.21 se puede observar este proceso, donde desde el símbolo de sistema se escribe la ruta donde se

encuentra la carpeta con los archivos generados y el programa de análisis. Al escribir la ruta se puede abrir el programa al escribir REM3DTETRA. Y por consiguiente, al dar enter, el programa empezara a realizar el análisis.

```
C:\> Símbolo del sistema
Microsoft Windows [Versión 10.0.18363.900]
(c) 2019 Microsoft Corporation. Todos los derechos reservados.

C:\Users\Xuxek>cd C:\Users\Xuxek\Documents\Tesis\Tesis\Análisis\Vigas Bien\Viga 1

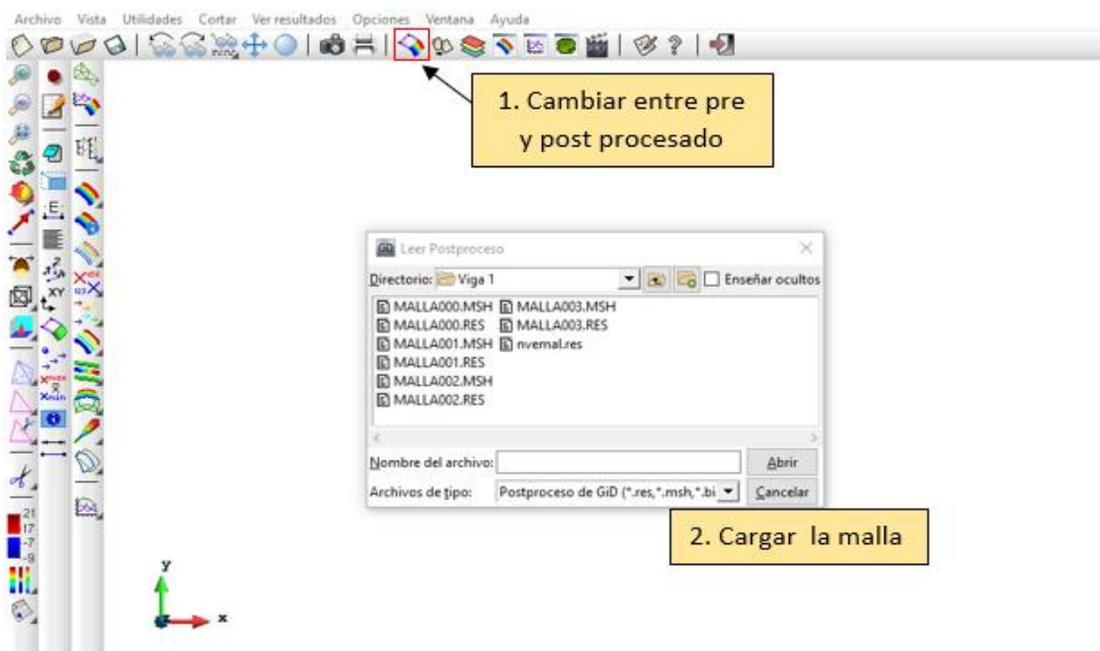
C:\Users\Xuxek\Documents\Tesis\Tesis\Análisis\Vigas Bien\Viga 1>REM3DTETRA.exe
```

Figura 4.21 Procedimiento de Corridas Para Abrir el Programa de ARFEM3D.

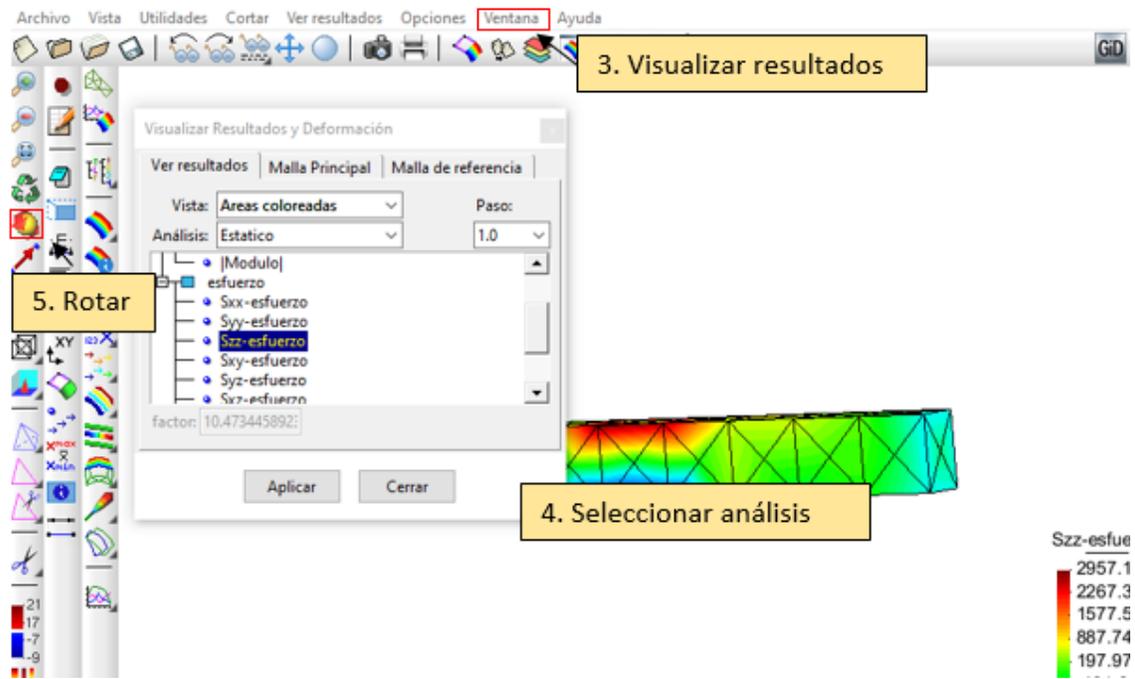
Al correr el programa de análisis por elemento finito, éste procesa la información geométrica de la malla, las fuerzas involucradas y las propiedades de los materiales. Se guarda la información de la malla inicial, al igual que una mejora de esta malla, después de realizar el primer análisis la información se guarda en archivos que genera el programa entre ellos MALLA#.MSH y MALLA#.RES. Esta información se va guardando en cada ciclo así como los resultados que se obtienen del análisis.

#### 4.5.2.5 VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS

Con el programa de visualización se observan los resultados obtenidos del análisis. El proceso se muestra en la figura 4.22. Con las herramientas podemos mover la visualización.



a)



b)

Figura 4.22 Procedimiento de Visualización de Resultados. a) Carga del archivo. b) Selección del tipo de análisis.

## **CAPÍTULO 5**

### **CASOS DE ESTUDIO CON APLICACIÓN DEL MÉTODO DE REFINAMIENTO**

Se analizaron diferentes elementos estructurales típicos, mediante el MEF utilizando el software ARFEM3D.

Se realizó una comparación, en términos de esfuerzos y desplazamientos verticales, con los resultados obtenidos aplicando el ARFEM3D con las metodologías existentes mencionadas.

La serie de problemas propuestos para los análisis lineales con elemento finito empleando refinamiento automático son:

1. VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA
  - 1.1 Sin refuerzo longitudinal
  - 1.2 Con refuerzo longitudinal
  
2. CONEXIÓN VIGA-COLUMNA (MARCO)
  - 2.1. Sin refuerzo longitudinal
  - 2.2. Con refuerzo longitudinal
  
3. LOSA DE CONCRETO
  - 3.1 Dos direcciones
  - 3.2 Una dirección

Adicional a lo anterior se propuso un ejercicio de análisis no lineal utilizando el programa ARFEM3D, donde las condiciones carga rebasan las condiciones de diseño:

4. VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE ARMADA, CON APOYOS SIMPLES EN AMBOS EXTREMOS Y CARGA A DOS TERCIOS

#### **5.2 VIGA SIMPLEMENTE APOYADA**

Se analizaron con el programa de ARFEM3D dos vigas, una sin refuerzo longitudinal y otra con refuerzo en condiciones similares; para comparar los resultados obtenidos se realizaron análisis teóricos considerando la física del programa.

Los métodos de análisis en el diseño y estudios de elementos de acero y de concreto consideran la flexibilidad del material, por lo que es importante que los análisis comparativos se basen en el cálculo de la deflexión.

Los métodos de cálculo de las deflexiones abarcan una estimación del valor medio de las deflexiones en varias vigas y se han basado en su mayoría a la limitación de las deflexiones ya que deflexiones excesivas pueden ocasionar daños a otros elementos estructurales o no estructurales. El cálculo de deflexiones se obtiene principalmente a partir de diagramas de curvatura por métodos simplificados, donde las deflexiones se calculan como si el elemento fuera de un material homogéneo y elástico. Sin embargo, no suelen ser muy útiles en elementos de concreto reforzado ya que los valores del módulo de elasticidad y momentos de inercia son diferentes a lo largo de la viga por lo cual se utilizan otros conceptos. En este análisis se considera elementos sin variación de material a lo largo de este (Arvizu, 1999).

La deformación que experimenta una viga al aplicarle una carga se llama curva de deflexión o curva elástica. Existen diferentes métodos analíticos para calcular esta deflexión, el método más utilizado es el método de la doble integral ya que es un método más general que permite obtener la ecuación de la curvatura de una viga. Las vigas se pueden encontrar en diversas condiciones de contorno y de cargas. De acuerdo con la ecuación de la mecánica de materiales se tiene:

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = M(x) \quad \text{(Ecuación 5.1)}$$

En donde:

$E$ : Módulo de Young de la viga (Modulo de elasticidad)

$I$ : Es el momento de inercia de la sección transversal de la viga

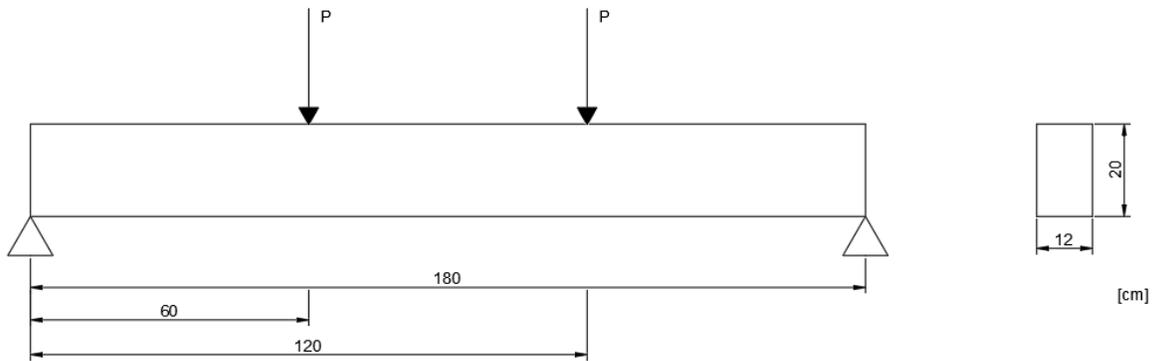
$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ : Es la curvatura de la viga

$M(x)$ : Es el momento flector en función de la posición  $x$  a lo largo de la viga

Esta ecuación se utilizó para comparar los resultados obtenidos con el programa ARFEM3D en términos de deflexión.

### **5.2.2 VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA SIN REFUERZO LONGITUDINAL Y CON CARGA A DOS TERCIOS**

En la figura 5.1 se observa el problema en estudio. Se trata de una viga de concreto rectangular de 12cm de ancho por 20 cm de altura y 180 centímetros de largo, la cual esta simplemente apoyada en sus extremos y con carga a sus dos tercios. La carga a la que está sometida es de 2750 kg/cm.



**MATERIALES**

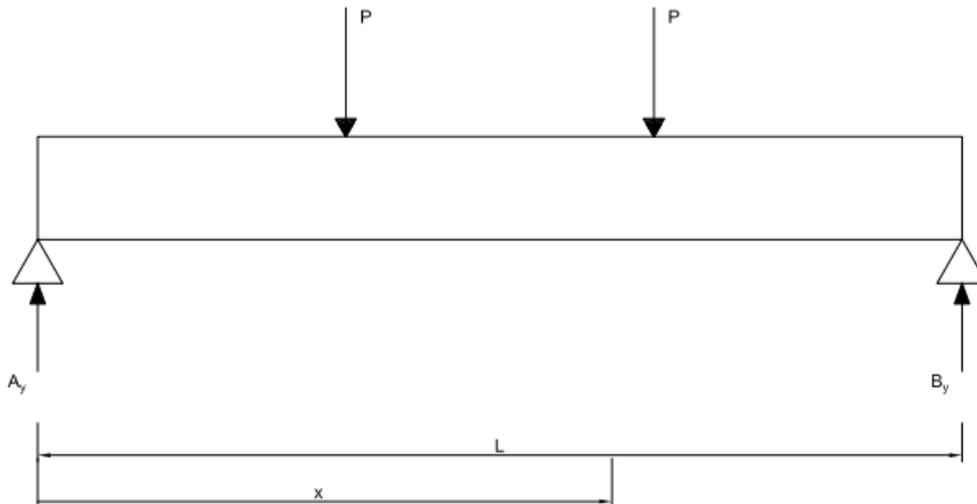
Concreto:  
 $f'_c=250 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_c=203943 \text{ kg/cm}^2$

*Figura 5.1* Viga rectangular simplemente apoyada sin refuerzo longitudinal y con carga a dos tercios a analizar

Debido a la simetría de la viga, esta puede ser analizada considerando sola la mitad de su extensión, ya sea con el análisis de la doble integral o por el método de elementos finitos. Por la simplicidad del problema se realizó completa.

**5.2.2.2 ANÁLISIS POR LA DOBLE INTEGRAL**

En la figura 5.2 se observa el procedimiento realizado para la obtención de las reacciones y la ecuación de momentos.



Cálculo de reacciones

$$A_y = B_y$$

$$A_y = P$$

Ecuación del momento de la viga

$$M(x) = P_1x - P_1\left(x - \frac{L}{3}\right) - P_1\left(x - \frac{2L}{3}\right)$$

Figura 5.2 Procedimiento de la ecuación de momento en el intervalo establecido

Con la ecuación de momento de la viga se obtiene mediante una integral la ecuación de la pendiente y consecuentemente, la ecuación de la curva de flexión. Se tomaron las condiciones de frontera conocidas para obtener la ecuación de la curva de flexión. Por último, se calculó el momento de inercia, el cual, junto con el módulo de elasticidad, se despejó de la ecuación para obtener el desplazamiento. Este proceso se observa en la figura 5.3.

Método de la doble integral

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = M(x)$$

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = P_1x - P_1\left(x - \frac{L}{3}\right) - P_1\left(x - \frac{2L}{3}\right)$$

Cálculo de la ecuación de la pendiente

$$EI \frac{\delta y}{\delta x} = \theta(x)$$

$$EI \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{P_1x^2}{2} - \frac{P_1}{2}\left(x - \frac{L}{3}\right)^2 - \frac{P_1}{2}\left(x - \frac{2L}{3}\right)^2 + C_1$$

Cálculo de la ecuación de la deflexión

$$EI y = \frac{P_1x^3}{6} - \frac{P_1}{6}\left(x - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{P_1}{6}\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_1x + C_2$$

Condiciones de contorno

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L \end{array} \right. \quad C_2 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad C_1 \left\{ \begin{array}{l} x = L/2 \\ \theta = 0 \end{array} \right.$$

Para  $C_2$

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad cm \\ x = 0 \quad cm \\ C_2 = 0 \quad kg/cm^2 \end{array}$$

Para  $C_1$

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad cm \\ x = 90 \quad cm \\ C_1 = -21600000 \quad kg/cm^2 \end{array}$$

$$EIy = \frac{P_1x^3}{6} - \frac{P_1}{6}\left(x - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{P_1}{6}\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{P_1L^2}{9}x$$

Momento de inercia

$$I_x = 8000 \quad cm^4$$

Cálculo de la deflexión

$$y(x) = \frac{\frac{P_1x^3}{6} - \frac{P_1}{6}\left(x - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{P_1}{6}\left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{P_1L^2}{9}x}{EI}$$

$$\begin{array}{l} x = 90 \quad cm \\ y \\ y = -0.32145117 \quad cm \end{array}$$

Figura 5.3 Procedimiento de la ecuación de la curva de deflexión en el intervalo establecido

En la figura 5.4 se muestra una representación de la curva de deflexión de la viga. La deflexión máxima de esta viga se encuentra a la mitad de su longitud y para obtenerla solo se sustituye el valor de  $x$  cuando esta vale  $L/2$ , es decir,  $x = 90 (cm)$  en la ecuación de flexión. La deflexión máxima de la viga es;  $y = 0.3214(cm)$ . Este valor se utilizará para comparar el valor obtenido del programa ARFEM3D.

x	y
0	0
9	-0.05012542
18	-0.09911877
27	-0.14584799
36	-0.189181
45	-0.22798575
54	-0.26113016
63	-0.28748916
72	-0.30635694
81	-0.31767761
90	-0.32145117
99	-0.31767761
108	-0.30635694
117	-0.28748916
126	-0.26113016
135	-0.22798575
144	-0.189181
153	-0.14584799
162	-0.09911877
171	-0.05012542
180	0

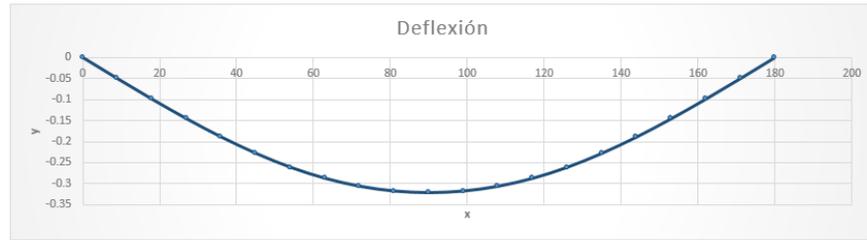


Figura 5.4 Curva de deflexión de la viga obtenida por el método simplificado de la doble integral

### 5.2.2.3 ANÁLISIS CON EL SOFTWARE ARFEM3D

Para comparar la solución analítica con la solución del programa de ARFEM3D, se realizó el análisis con los resultados obtenidos en términos de esfuerzos verticales, del cual se obtuvieron los desplazamientos que se presentan en la viga debido a la carga.

En lo sucesivo se muestra el procedimiento del análisis por el método de elemento finito utilizando el programa ARFEM3D.

El problema es el mismo, solo se adaptó para la correcta interpretación del problema con el análisis del programa ARFEM3D realizado anteriormente.

Las dimensiones geométricas son las mismas, solo que se incluyó dentro de la geometría de la viga dos cuerpos con la finalidad de facilitar la generación de nodos en el área cargada; estos cuerpos están ubicados en los tercios de la viga y se puede observar en la figura 5.5. Los nodos que se encuentran en las esquinas laterales de la viga serán restringidos en términos de desplazamiento en las tres direcciones ( $x, y, z$ ). Todas las dimensiones están en  $cm$ .

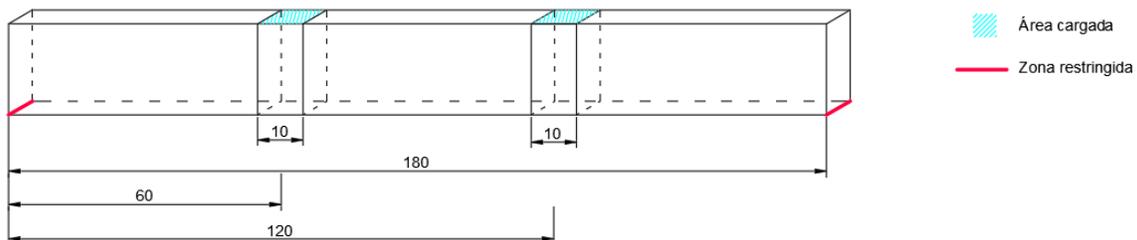


Figura 5.5 Definición de la geometría de la malla inicial y la restricción de desplazamiento en sus nodos

En el archivo de fuerzas se especifican los nodos que se generaron dentro del área de carga. Este archivo puede observarse en la figura 5.6, con la carga a la que están sometidos los nodos. La carga se dividió entre la superficie ya que no se puede representar en un solo punto como con el análisis de la doble integral dejando una carga de  $P = 275 \text{ kg/cm}$ . En este archivo se pueden definir los incrementos de carga, pero en para este problema solo se consideró un solo incremento.

```

1  10      CARGAS UNIFORMES DEBIDAS A PRESIONES Y/O PUNTUALES
1  !No. DE INCREMENTOS ENTRE LAS CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFORMES Y PUNTUALES
10  1.0    275    1.00    275    # NODOS DEFINIENDO LOS INTERVALOS + CARGA/
73
74
75
76
77
85
86
87
88
89
73 0.000E+00 1.000E+03 0.000E+00 1.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
74 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 1.000E+00
75 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 1.000E+00
76 0.000E+00 1.000E+03 0.000E+00 1.000E+03
77 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 !FUERZAS EN CADA NODO
85 0.000E+00 1.000E+03 0.000E+00 1.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
86 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
87 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
88 0.000E+00 1.000E+03 0.000E+00 1.000E+03
89 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 !FUERZAS EN CADA NODO

```

Figura 5.6 Archivo fuerzas, muestra de los nodos cargados

El material es el mismo para el número de volúmenes que se generaron, ya que es una viga de concreto. El concreto es clase 1, con  $f'_c = 250 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$  por lo que el módulo de elasticidad es de  $E = 203943 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$  y la relación de Poisson es de  $\nu = 0.2$ ; esta resistencia es para compresión, como se sabe el concreto no es un material flexible pero tiene una cierta resistencia a la flexión, y se consideró un porcentaje de la resistencia a compresión para la tensión con valor de  $15.27 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$ . El archivo de las propiedades del material se observa en la figura 5.7.

```

material_viga2.dat: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
6
1 203943 0.2 0.
250. 15.27 0.0030 0.0030
17 14 CONCRETO
1 -0.005000 -70.00 14000.00
2 -0.003500 -180.00 51428.57
3 -0.003000 -212.50 70833.33
4 -0.002500 -245.00 98000.00
5 -0.002300 -248.00 107826.09
6 -0.002200 -250.00 113636.36
7 -0.002100 -248.00 118095.24
8 -0.002050 -245.00 119512.20
9 -0.001350 -200.00 148148.15
10 -0.000925 -150.00 162162.16
11 -0.000550 -100.00 181818.18
12 -0.000247 -44.50 180161.94
13 -0.000100 -20.00 200000.00
14 0.000000 0.00 200000.00
15 0.000060 12.00 200000.00
16 0.000065 5.00 38461.54
17 0.000300 0.00 0.00
2 203943 0.2 0.
250. 15.27 0.0030 0.0030
17 14 CONCRETO
1 -0.005000 -70.00 14000.00
2 -0.003500 -180.00 51428.57

```

Figura 5.7 Definición del material del problema a analizar

Ya con los archivos principales y con el programa Arch\_Ini.bat, se generaron las condiciones iniciales de deformación del elemento que ente caso es 0. En el archivo opción se definieron los criterios del umbral, para garantizar que las zonas con singularidades de estado de esfuerzo se detecten y refinen sin necesidad de refinar de más. Los criterios de umbral utilizados fueron 0.7, 2.5, 5.0, 8.0, de la resistencia al corte octaédrico. Para la relación máxima (indicador de calidad) se utilizó  $Q_T = 0.2, 0.1, 0.08, 0.05$  con la finalidad de que no se generaran nodos extra. Este archivo se muestra en la figura 5.8. Como se mencionó anteriormente, en este archivo se define el tipo de análisis que se desea realizar.

```

opcion.dat: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
10 4,4 20 1.0 1.0 !# CICLOS, #Ciclos REMALLEO, Lim Remalleos, #Cic
    0.2 0.10 0.08 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 ! Relación L
    0.7 2.5 5.0 8.0 10.00 12.00 20.0 30.00 ! FACTORES DE RED
0010000100 REVISAR LAS OPCIONES PARA NCASO(I)

NCASO(I)
ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS :NCASO[1]
DEFORMACIONES ANGULARES MÁXIMAS :NCASO[2]
TENSIONES MÁXIMAS :NCASO[3]
EFZO DESVIADOR MÁXIMO DE TENSIÓN :NCASO[4]
LEY DE RESISTENCIA MOHR-COULOMB :NCASO[5]
EFZO NORMAL OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[6]
EFZO CORTANTE OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[7]
EFZO CORT. OCTAEDRICO vs Resist :NCASO[8]

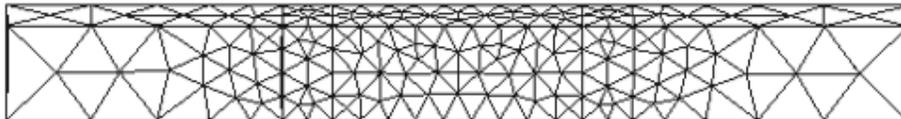
REMALEO TOTAL (n veces) :NCASO[9]=n
SELECCION POR GEOMETRIA ALARGADA :NCASO[10]

```

Figura 5.8 Criterios de análisis

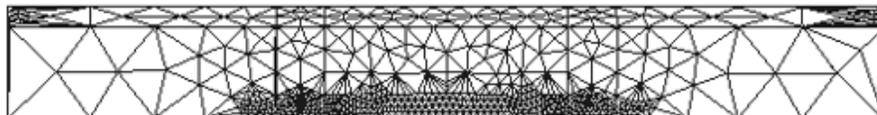
En la figura 5.9 se visualiza el mallado del problema, tanto inicial como el final; en el inciso *a* se muestra el conjunto original de elementos finitos que establece la malla inicial; en el inciso *b* se muestra la imagen después de dos iteraciones.

### MALLA INICIAL



*a)*

### MALLA DESPUES DE DOS ITERACIONES



*b)*

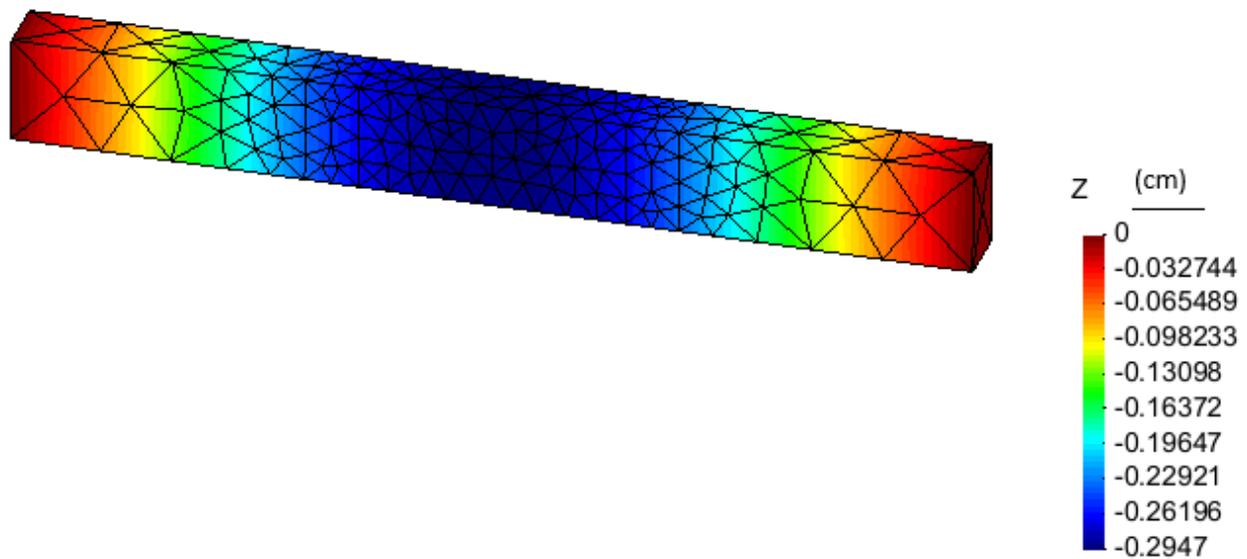
Figura 5.9 Malla de viga rectangular con carga en los tercios. a) Malla inicial de la viga en estudio. b) Malla después de dos iteraciones

Se puede observar que se generaron nuevos elementos en la zona donde se encuentra los mayores esfuerzos de tensión, este refinamiento presenta un comportamiento adecuado, dando así confianza al programa de refinamiento. Los elementos que se encuentran en los extremos de la viga presentan menores cambios en las iteraciones, lo que significa que la influencia de la carga en el estado de esfuerzo sea menor en esta zona, si la viga fuera más larga esta influencia sería menor y más visual.

El algoritmo del programa genera elementos menos distorsionados haciendo que el tamaño de los elementos finitos aumente suavemente y su relación de aspecto  $Q_T$  sea más grande; de esta forma evita cambios abruptos en las transiciones de tamaño de los elementos finitos que ocasionan errores numéricos en el análisis.

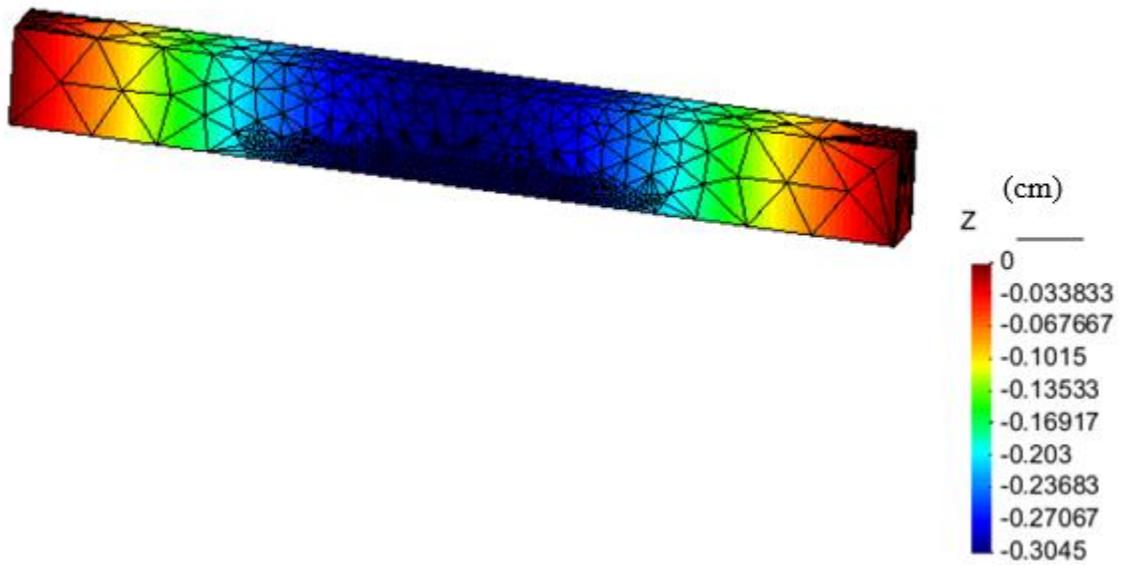
En la figura 5.10 se puede apreciar que los mayores desplazamientos se encuentran en el centro de la viga donde la teoría nos dice que ahí se encuentran la mayor deflexión y que los desplazamientos van aumentando de las esquinas al centro; de igual forma no existe desplazamiento en la zona donde se limitó el desplazamiento de los nodos. En el inciso *b* donde se muestra el resultado de la última iteración se puede visualizar que los bulbos de desplazamiento se encuentran mejor definidos que en la malla inicial. Se observa en el inciso *c* la malla deformada de la viga obtenida de la tercera iteración, aumentada por un factor de 7 con el fin de apreciar mejor los desplazamientos verticales, ARFEM3D tiene un comportamiento muy similar al de la teoría.

DESPLAZAMIENTOS EN Z DE LA MALLA INICIAL



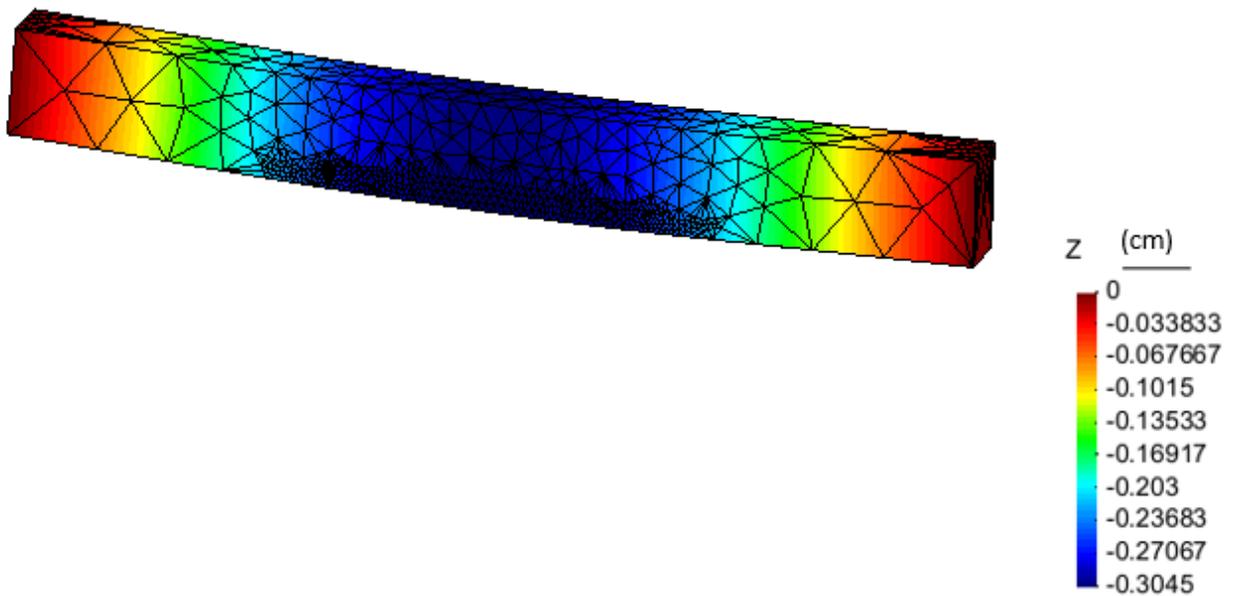
a)

DESPLAZAMIENTOS EN Z DESPUES DE DOS ITERACIONES



b)

DESPLAZAMIENTOS EN Z POR UN FACTOR DE 7

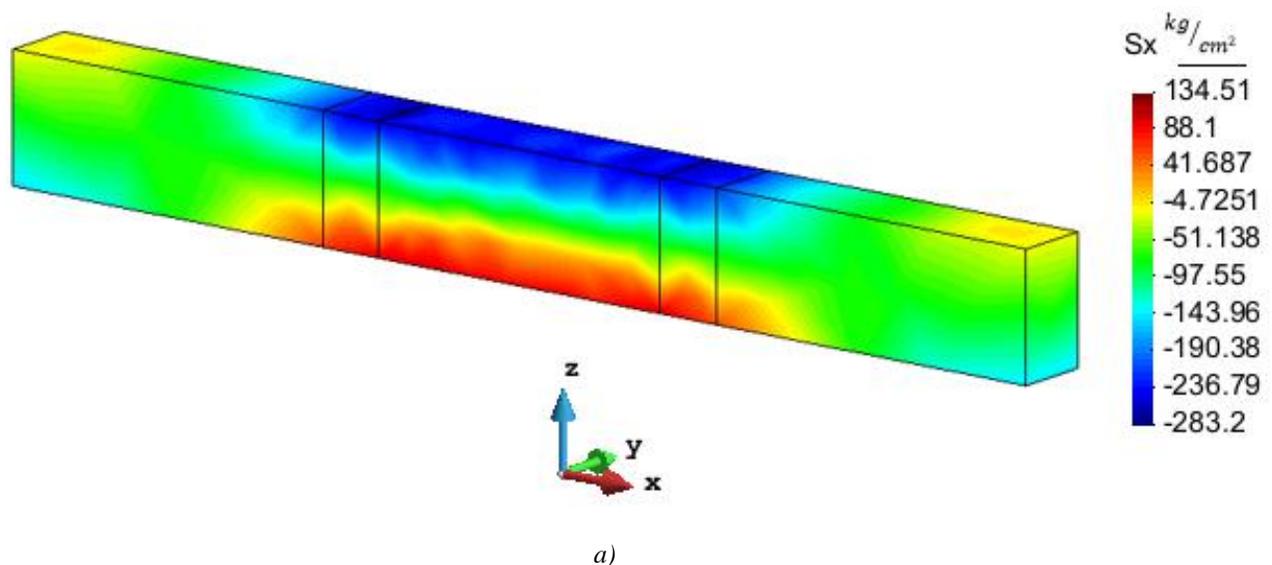


c)

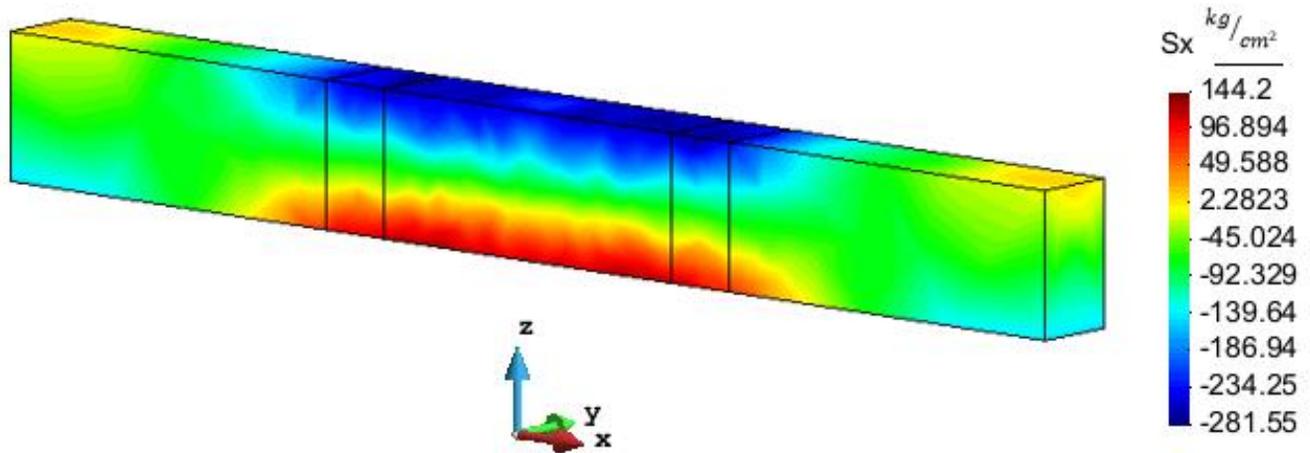
Figura 5.10 Visualización de distribución de desplazamiento de viga rectangular con carga en los tercios. a) Distribución de desplazamientos de la malla inicial de la viga en estudio. b) Distribución de desplazamientos de la malla después de tres iteraciones. c) Visualización de la viga deformada

En una viga a flexión, una parte de su sección estará sometida a compresión y otra a tensión en la figura 5.11 en ambos incisos se observa dicha característica. La visualización en el inciso *a* es menos detallada en el cambio esfuerzo y por lo tanto menos precisa en determinadas zonas, siendo complicado e impreciso el resultado. En el inciso *b* se visualizan mejor los bulbos de esfuerzos normales horizontales, mejorando la precisión de los resultados, en ambas vigas se muestran las zonas donde existen los esfuerzos con mayor tensión y compresión. La zona donde se limitó el desplazamiento también presenta una zona de compresión siendo así más clara la visualización del comportamiento de esta viga ante la carga. También se puede observar en el inciso *c*, que la zona en donde se encuentran los mayores esfuerzos de tensión fue la zona donde la malla refino más; definiendo que son los esfuerzos de mayor importancia ya que el concreto no resiste grandes esfuerzos de tensión en comparación con su resistencia a esfuerzos de compresión, por lo que la viga aunque, tenga zona con esfuerzos de compresión no serán refinados a menos que se acerque a su resistencia o sobrepase esta, mejorando así el análisis y ahorrando memoria de cálculo durante el refinamiento.

### DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS EN LA MALLA INICIAL

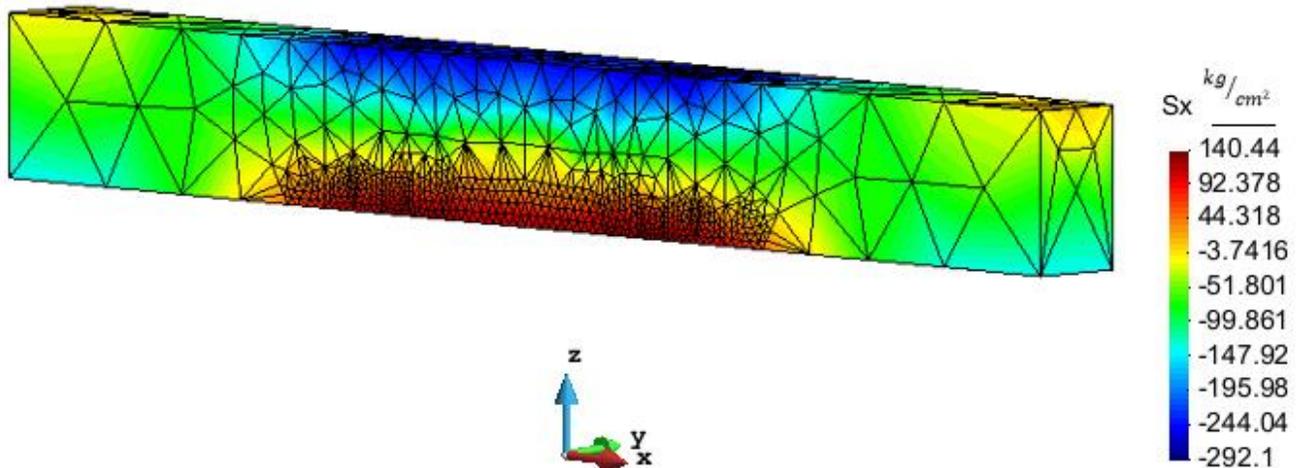


## DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS DE LA SEGUNDA ITERACIÓN



b)

## DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS DE LA TERCERA ITERACIÓN



c)

Figura 5.11 Visualización de distribución de esfuerzos en una viga rectangular con carga en los tercios. a) Distribución de esfuerzos de la malla inicial de la viga en estudio. b) Distribución de esfuerzos de la malla después de tres iteraciones. c) Distribución de esfuerzos de la malla después de tres iteraciones y malla

Los resultados obtenidos del análisis del programa ARFEM3D comparando con los resultados obtenidos analíticamente mediante el método de la doble integral son muy parecidos. Dando confiabilidad de los resultados del algoritmo de refinamiento avanzado ya que también simula mejor el comportamiento a la realidad de la viga.

Al usar el programa de refinamiento de elementos finitos nos permite obtener una visualización del comportamiento de un elemento bajo diferentes condiciones, dando facilidad a la respuesta de solución de los problemas o mejoras que se puedan presentar o realizar para dicho elemento. De igual forma visualizar los resultados da mejor interpretación del comportamiento de un elemento, ya que se pueden observar sus esfuerzos a lo largo y ancho de este, mientras que en el análisis tradicional solo se observa gráficas en una sola dirección.

### 5.2.3 VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON CARGA A DOS TERCIOS

Este análisis estará bajo las mismas condiciones que el problema anterior solo que la viga tendrá acero longitudinal. Al igual que el problema anterior se utilizara el método de la doble integral para calcular la deflexión de la viga, este caso a diferencia del anterior se considerara las propiedades de dos materiales diferentes y no de un material. El problema se visualiza en la figura 5.12.

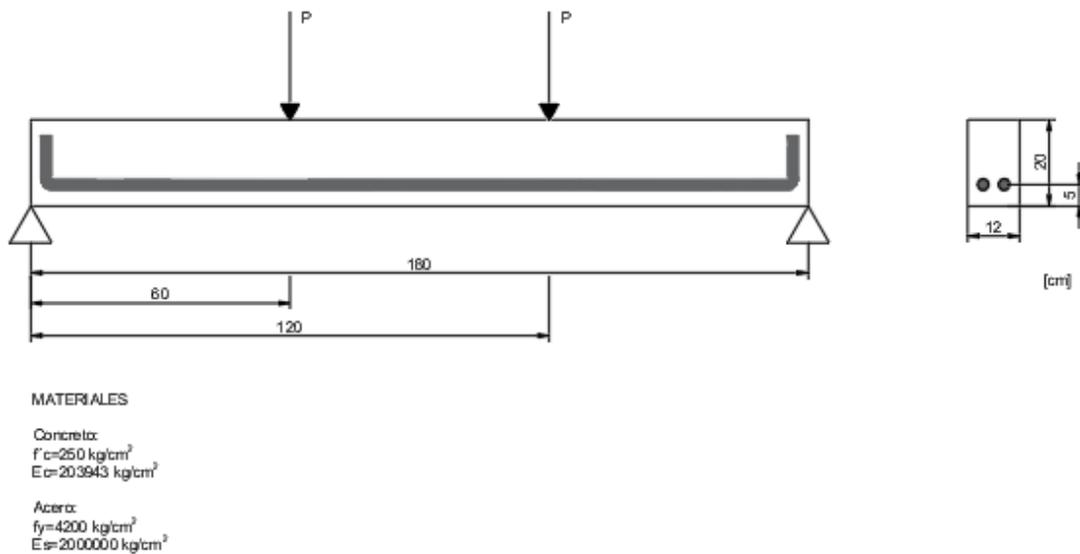


Figura 5.12 Planteamiento del problema de viga rectangular simplemente apoyada con refuerzo longitudinal y carga a dos tercios

Para calcular la deflexión de un elemento de concreto reforzado de forma analítica será necesario calcular el momento de inercia utilizando el concepto de la sección transformada. Este concepto se usa para calcular algunas propiedades geométricas y físicas para el cálculo de esfuerzos, agrietamiento y deflexiones.

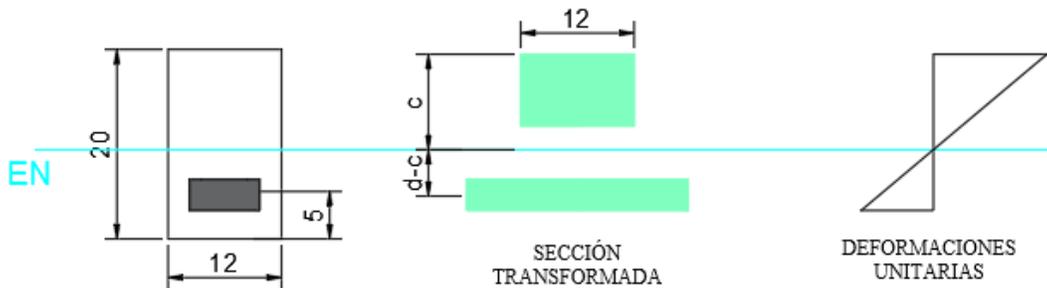
Consiste en sustituir el área de acero por una equivalente de concreto. Esto se obtiene multiplicando el área de acero por la relación entre el módulo de elasticidad del acero y el del concreto.

Considerando lo anterior se procede a calcular la curva de deflexión de la viga y el área. Se observa en la figura 5.13 el procedimiento de sección transformada.

Momento de inercia de la sección transformada

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$n = 9.80666167$$



Profundidad del eje neutro

Tomando momentos estáticos de las áreas con respecto al eje neutro

$$bc \frac{c}{2} = nA_s(d - c)$$

Sustituyendo utilizando la fórmula general de segundo grado

Terminos de la fórmula general	$\left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 99.3821762 \\ c = -1689.497 \end{array} \right.$
--------------------------------	---

$$c_1 = -26.994727$$

$$c_2 = 10.4310309$$

$$c = 10.4310309 \text{ cm}$$

Cálculo del momento de inercia con respecto al eje neutro

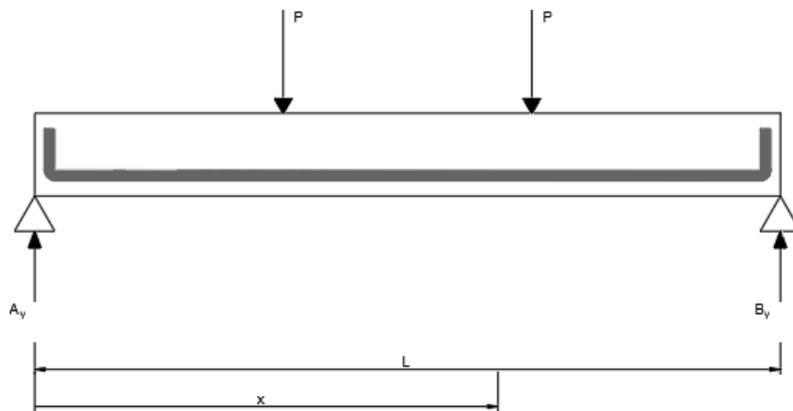
$$I_{ag} = \frac{b(c^3)}{3} + nA_s(d - c)^2$$

$$I_{ag} = 8828.32749 \text{ cm}^4$$

Figura 5.13 Procedimiento del cálculo del momento de inercia de una sección transformada

### 5.2.3.2 ANÁLISIS POR LA DOBLE INTEGRAL

Al igual que en el caso anterior, esta viga tiene carga en los tercios, por lo cual la ecuación de la curva de deflexión es la misma, solo que utilizando el concepto de la sección transformada para el cálculo del momento de inercia y así obtener la deflexión en cualquier punto. En la figura 5.15 se muestra este procedimiento.



Ecuación del momento de la viga

$$M(x) = P_1x - P_1\left(x - \frac{L}{3}\right) - P_1\left(x - \frac{2L}{3}\right)$$

Figura 5.14 Procedimiento de la ecuación de momento en el intervalo establecido

Método de la doble integral

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = M(x)$$

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = P_1 x - P_1 \left(x - \frac{L}{3}\right) - P_1 \left(x - \frac{2L}{3}\right)$$

Cálculo de la ecuación de la pendiente

$$EI \frac{\delta y}{\delta x} = \theta(x)$$

$$EI \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{P_1 x^2}{2} - \frac{P_1}{2} \left(x - \frac{L}{3}\right)^2 - \frac{P_1}{2} \left(x - \frac{2L}{3}\right)^2 + C_1$$

Cálculo de la ecuación de la deflexión

$$EI y = \frac{P_1 x^3}{6} - \frac{P_1}{6} \left(x - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{P_1}{6} \left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 + C_1 x + C_2$$

Condiciones de contorno

$$y = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = L \end{array} \right. \quad C_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad C_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = L/2 \\ \theta = 0 \end{array} \right.$$

Para  $C_2$

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad cm \\ x = 0 \quad cm \\ C_2 = 0 \quad kg/cm^2 \end{array}$$

Para  $C_1$

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad cm \\ x = 90 \quad cm \\ C_1 = -9900000 \quad kg/cm^2 \end{array}$$

$$EI y = \frac{P_1 x^3}{6} - \frac{P_1}{6} \left(x - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{P_1}{6} \left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{P_1 L^2}{9} x$$

Cálculo de la deflexión

$$y(x) = \frac{\frac{P_1 x^3}{6} - \frac{P_1}{6} \left(x - \frac{L}{3}\right)^3 - \frac{P_1}{6} \left(x - \frac{2L}{3}\right)^3 - \frac{P_1 L^2}{9} x}{EI}$$

$$x = 90 \quad cm$$

$$y = -0.31616646 \quad cm$$

Figura 5.15 Procedimiento de la ecuación de la curva de deflexión en el intervalo establecido

#	x	y
0	0	0
1	9	-0.0433
2	18	-0.09743
3	27	-0.14345
4	36	-0.18607
5	45	-0.22424
6	54	-0.25684
7	63	-0.28276
8	72	-0.30132
9	81	-0.31245
10	90	-0.31617
11	99	-0.31245
12	108	-0.30132
13	117	-0.28276
14	126	-0.25684
15	135	-0.22424
16	144	-0.18607
17	153	-0.14345
18	162	-0.09743
19	171	-0.0433
20	180	0

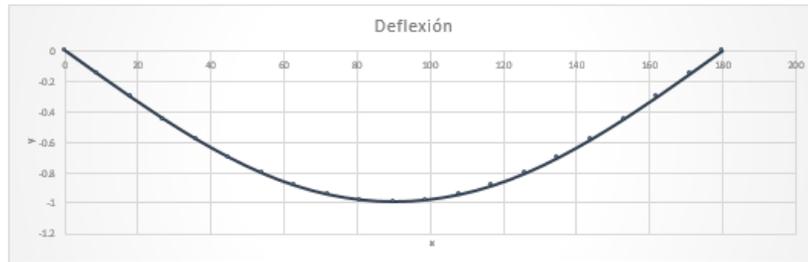


Figura 5.16 Procedimiento de la obtención del momento de inercia de la sección transformada y curva de deflexión

Con la ecuación de la curva de deflexión y utilizando el concepto de la sección transformada se obtiene la deflexión máxima que se encuentra a la mitad de la viga. Esta deflexión es  $y = -0.3162$  (cm).

### 5.2.3.3 ANÁLISIS CON EL PROGRAMA ARFEM3D

Ya que el problema es una viga simétrica, se consideró un cuarto de la viga debido a los numerosos nodos generados por el acero, facilitando así la definición del problema y optimizando el análisis. De igual forma, para agilizar el análisis del problema y evitar la generación de más nodos, el área de acero se cambió a una figura geométrica más compatible con la viga y de mayor dimensión, utilizando el mismo concepto de sección transformada para considerar la misma resistencia que tiene el material.

La definición de las características físicas y geométricas de este problema se puede visualizar en la figura 5.17.

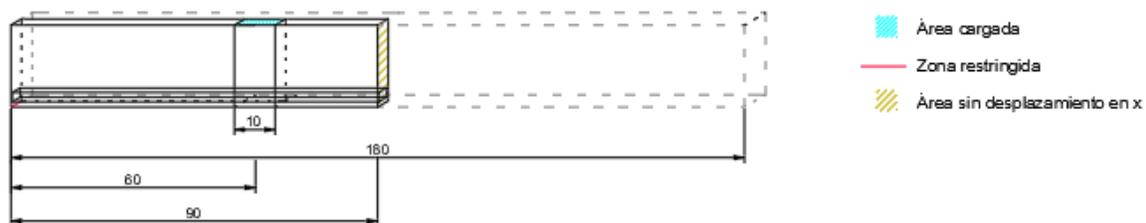


Figura 5.17 Definición de las condiciones físicas y geométricas del problema

Para el análisis con el programa ARFEM3D se crearon los archivos de geometría, fuerzas, y materiales presentados en la figura 5.18 y figura 5.19.

En el archivo de geometría al igual que en el problema anterior se colocó un cuerpo interno para definir el área cargada. Las dimensiones del volumen del acero de refuerzo se obtuvieron considerando el cambio de resistencia del material, así como el recubrimiento mínimo que se debería de dejar y se tomó en cuenta el centro del acero para evitar cambios de momentos. Al considerar las condiciones del problema se definió desde un inicio que el espacio entre los nodos sea menor en la parte inferior de la viga por el cambio de material y de dimensión entre los elementos con lo que se marcó desde un inicio que la malla se viera más regular y evitar de esta forma elementos muy asimétricos.

El comando Coherence del programa GEO fue de utilidad para definir que el volumen del acero vaya unido al volumen del concreto evitando así que exista deslizamiento entre ellos y generando un comportamiento de adherencia como teóricamente sería en un elemento de concreto con acero de refuerzo; esta herramienta fue de mucha utilidad ya que permitió definir condiciones físicas más apegadas a la realidad.

Se delimitó el desplazamiento en los nodos inferiores del extremo de la viga en las tres direcciones y los desplazamientos en la dirección  $x$  en los nodos del centro la viga para establecer que las condiciones son de una viga continua y no de un volado. Como se observa en la figura 5.18.

La carga fue aplicada a los nodos superiores definidos en el área del cuerpo generado; estos nodos se definieron en el archivo de fuerza al igual que la magnitud, figura 5.19.

Se generaron 6 volúmenes, unos pertenecientes al acero y otros al concreto; a cada volumen se le asignó su módulo de elasticidad, la relación de Poisson, así como su resistencia a tensión y compresión del material correspondiente; en el caso del acero se modificaron estas propiedades ya que el área cambió, dejando así una resistencia menor del material. Las propiedades de los materiales se observan en la figura 5.20. Como se sabe, a diferencia del concreto, el acero tiene una gran capacidad para soportar esfuerzos de tensión y poca capacidad de soportar esfuerzos de compresión, este comportamiento se pudo observar con los resultados obtenidos del programa.

geometria\_viga2.dat: Bloc de notas

Archivo Edición Formato Ver Ayuda

VIGA RECTANGULAR CON ACERO LONGITUDINAL							
670 2868							
1	1	1	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	1	1	1	0.000000	3.000000	0.000000	0.000000
3	1	1	1	0.000000	6.000000	0.000000	0.000000
4	0	0	0	2.946429	2.786139	0.000000	0.000000
5	0	0	0	3.928571	0.000000	0.000000	0.000000
6	0	0	0	3.928571	6.000000	0.000000	0.000000
7	0	0	0	6.009779	2.974540	0.000000	0.000000
8	0	0	0	7.857143	0.000000	0.000000	0.000000
9	0	0	0	7.857143	6.000000	0.000000	0.000000
10	0	0	0	9.821428	3.000000	0.000000	0.000000
11	0	0	0	11.785714	0.000000	0.000000	0.000000
12	0	0	0	11.785714	6.000000	0.000000	0.000000

geometria\_viga2.dat: Bloc de notas

Archivo	Edición	Formato	Ver	Ayuda			
71	0	0	0		79.285713	6.000000	0.000000
72	0	0	0		81.071426	3.000000	0.000000
73	0	0	0		82.857140	0.000000	0.000000
74	0	0	0		82.857140	6.000000	0.000000
75	0	0	0		84.494049	3.072846	0.000000
76	0	0	0		86.428574	0.000000	0.000000
77	0	0	0		86.428574	6.000000	0.000000
78	0	0	0		87.321426	3.437075	0.000000
79	0	0	0		88.395187	1.528444	0.000000
80	1	0	0		90.000000	0.000000	0.000000
81	1	0	0		90.000000	3.000000	0.000000
82	1	0	0		90.000000	6.000000	0.000000
83	0	0	0		72.291664	1.955247	1.591764
84	0	0	0		82.708336	1.955247	1.591764
85	0	0	0		60.000000	0.000000	1.886887
86	0	0	0		60.000000	6.000000	1.886887
87	0	0	0		0.000000	3.000000	2.100806
88	0	0	0		55.000000	3.000000	2.100806
89	0	0	0		65.000000	3.000000	2.100806
90	1	0	0		90.000000	3.000000	2.100806
91	0	0	0		84.582939	0.000000	2.164844
92	0	0	0		84.582939	6.000000	2.164844
93	0	0	0		70.000000	0.000000	2.000000

Figura 5.18 Archivos para el análisis con el programa ARFEM3D. Archivo de geometría

fuerzas\_viga2.dat: Bloc de notas

```

Archivo Edición Formato Ver Ayuda
1 8 CARGAS UNIFORMES DEBIDAS A PRESIONES Y/O PUNTUALES
1 !No. DE INCREMENTOS ENTRE LAS CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFORMES Y PUNTUALES
8 001.00 45.833 000.10 45.833 # NODOS DEFINIENDO LOS INTERVALOS + CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFORMES EN SENTIDO HORIZONTAL Y VERTICAL
651
652
653
654
655
656
657
658
651 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
652 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
653 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
654 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
655 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
656 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
657 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
658 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03

```

Figura 5.19 Archivos para el análisis con el programa ARFEM3D. Archivo de fuerza

```

material_viga2.dat: Bloc de notas
Archivo Edición Formato Ver Ayuda
6
1 203943 0.2 0.
250. 15.27 0.0030 0.0030
17 14 CONCRETO
1 -0.005000 -70.00 14000.00
2 -0.003500 -180.00 51428.57
3 -0.003000 -212.50 70833.33
4 -0.002500 -245.00 98000.00
5 -0.002300 -248.00 107826.09
6 -0.002200 -250.00 113636.36
7 -0.002100 -248.00 118095.24
8 -0.002050 -245.00 119512.20
9 -0.001350 -200.00 148148.15
10 -0.000925 -150.00 162162.16
11 -0.000550 -100.00 181818.18
12 -0.000247 -44.50 180161.94
13 -0.000100 -20.00 200000.00
14 0.000000 0.00 200000.00
15 0.000060 12.00 200000.00
16 0.000065 5.00 38461.54
17 0.000300 0.00 0.00
2 2000000.0 0.3 0.
4200. 4200. 0.0021 0.0021
71 36 ACERO
1 -0.13637 -7345.8 111.86
2 -0.12144 -7344.13 434.89
3 -0.1133 -7340.59 1670.09
4 -0.10454 -7325.96 2137.30
5 -0.09966 -7315.53 2842.72
6 -0.09451 -7300.89 4027.93
7 -0.08914 -7279.26 5725.00
8 -0.08314 -7244.91 7745.80
9 -0.07897 -7212.61 8114.82
10 -0.07418 -7173.74 10282.72
11 -0.07036 -7134.46 12569.79
12 -0.06427 -7057.91 15916.32

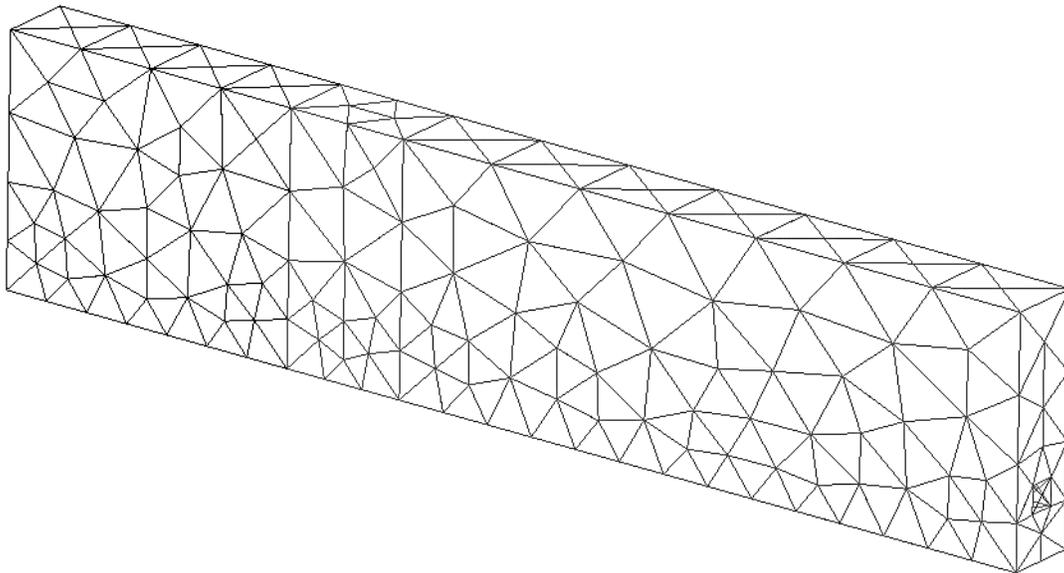
```

Figura 5.20 Archivos para el análisis con el programa ARFEM3D. Archivo de materiales

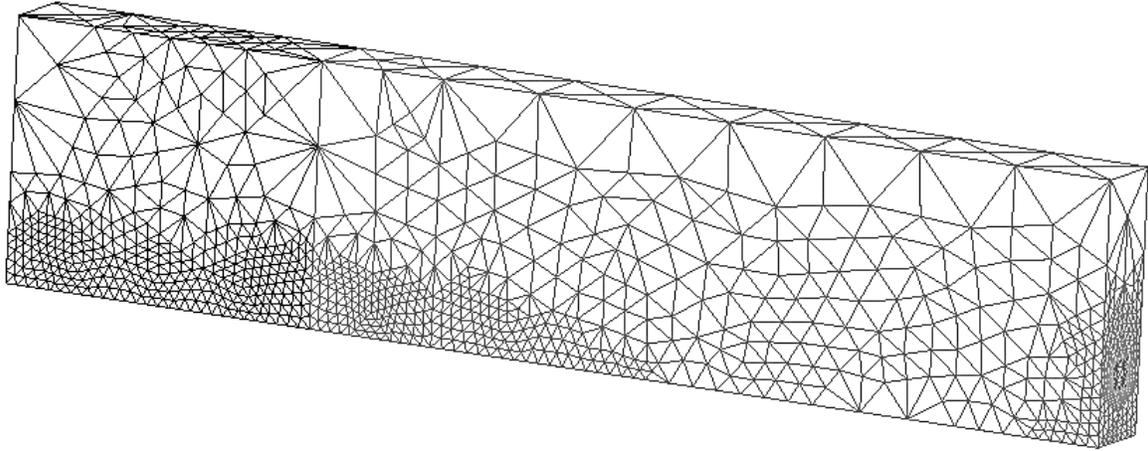
En la figura 5.21 inciso *a* se puede observar la malla inicial. Esta malla es más grande que la anterior, motivo por el cual solo se realizaron dos iteraciones, debido a que el análisis fue muy lento y pesado. La malla que se generó es menos regular que la malla de la viga anterior; esto se

debe principalmente a que existe un elemento (acero de refuerzo) dentro de la viga, generando elementos que armonicen entre ambas dimensiones de los materiales, para que de esta forma los resultados sean más finos. Sería un refinamiento aún más grande y tardado si no se hubiera utilizado la herramienta Coherence del programa GEO.

En el inciso *b* se observa la malla después de la segunda iteración; la malla aumento el número de nodos, los nuevos elementos generados son de menor tamaño en el área de la viga donde se encuentran los mayores esfuerzos de tensión, mostrando así una malla más densa en la zona inferior del centro de la viga que se encuentra en el extremo inferior del lado izquierdo de la imagen. En la primera iteración la malla se definió aún más en la zona cercana al diámetro del acero y esto es a causa de que el acero es el que recibe el esfuerzo de tensión lo que el programa automáticamente define esta zona, causando así una mayor densidad en la maya para evitar resultados erróneos.



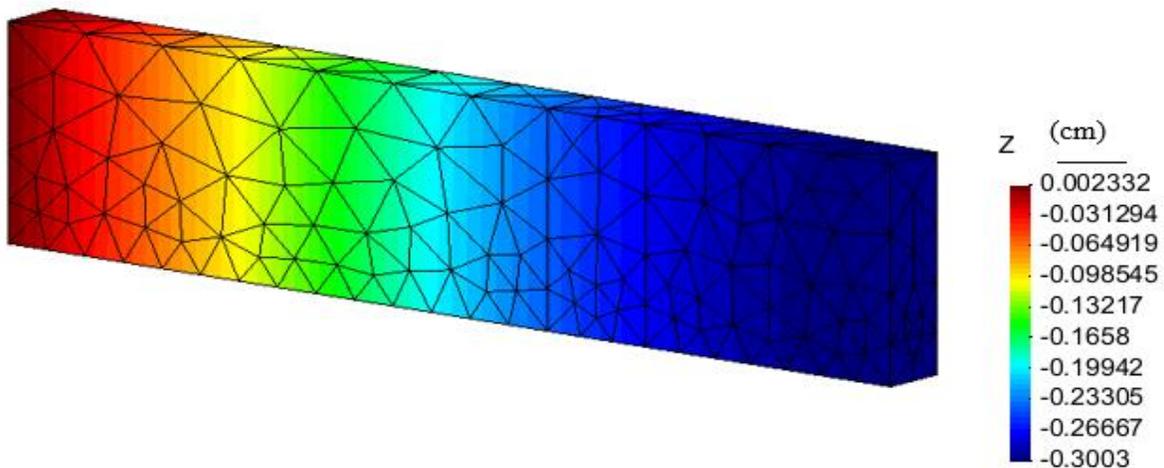
*a)*



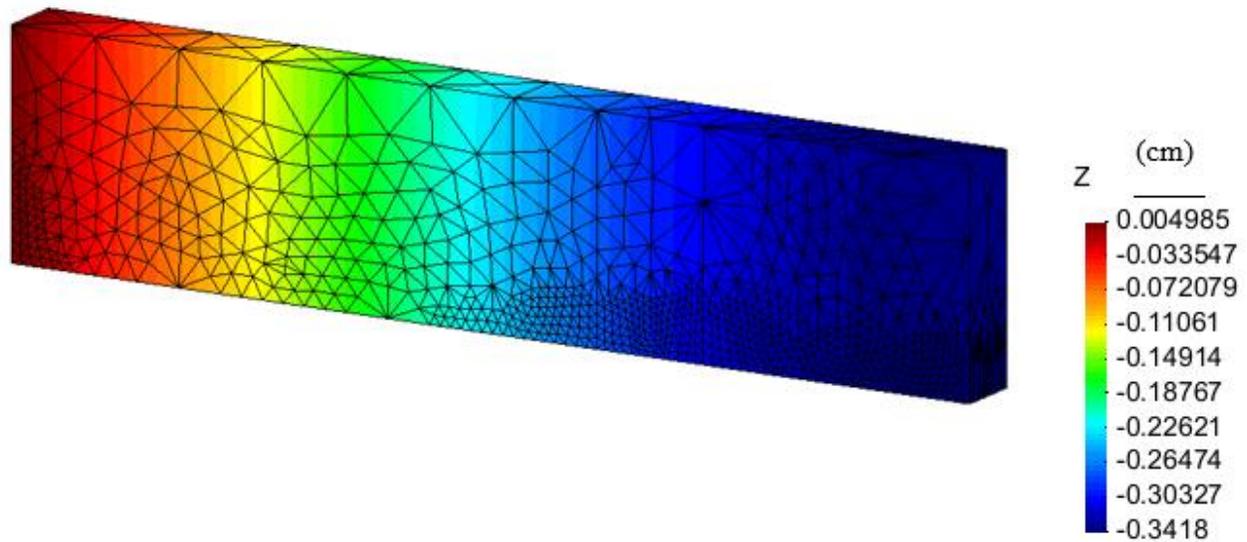
b)

Figura 5.21 Malla de viga rectangular con carga en los tercios y acero longitudinal. a) Malla inicial de la viga en estudio. b) Malla después de dos iteraciones

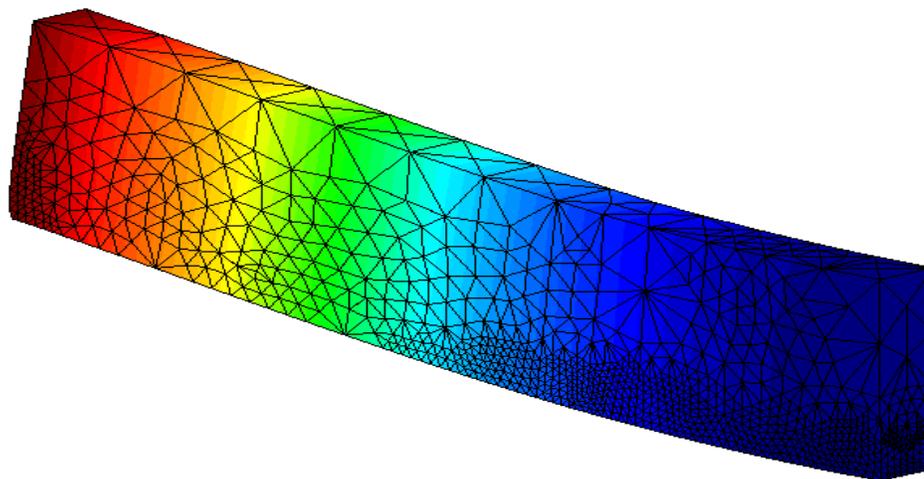
Los desplazamientos de la viga, tanto en los cálculos analíticos como en los resultados obtenidos con el programa, van aumentando de los apoyos al centro, siendo mayores al centro del claro y nulos en los apoyos. En la figura 5.22 se observan los desplazamientos estimados con el análisis por MEF; como se puede ver hay mayor definición en la segunda iteración que en la malla inicial. En el inciso c se visualiza la viga deformada, aumentando por un factor de 30. Se observa que no hay una discontinuidad de los desplazamientos por el cambio del material, esto es a causa de que se definió que los materiales trabajan como si fuera uno solo como se supone teóricamente, dando confiabilidad a los resultados obtenidos con el programa ya que los deslizamientos entre estos materiales no existen.



a)



b)

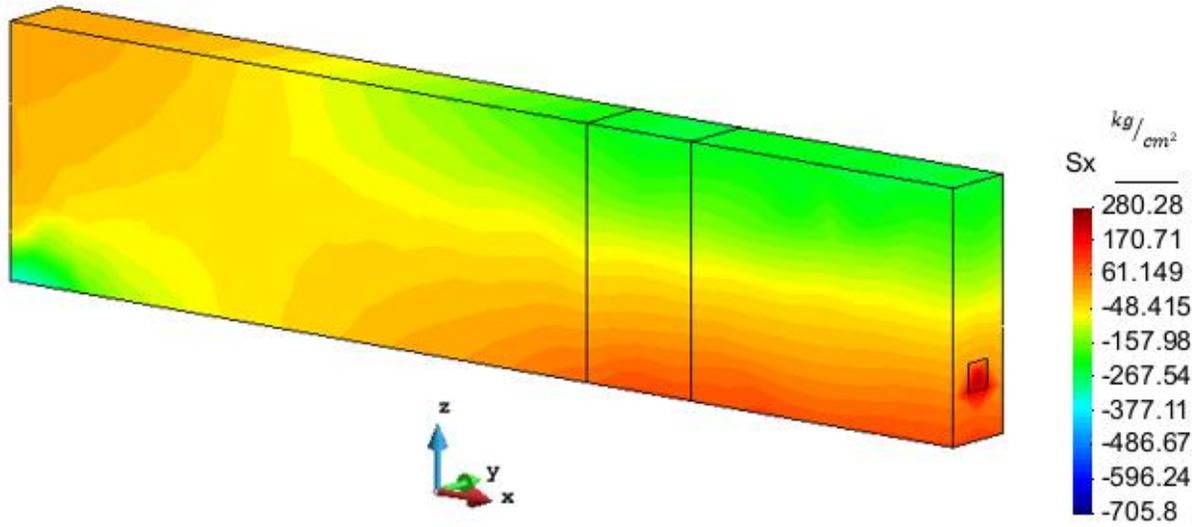


c)

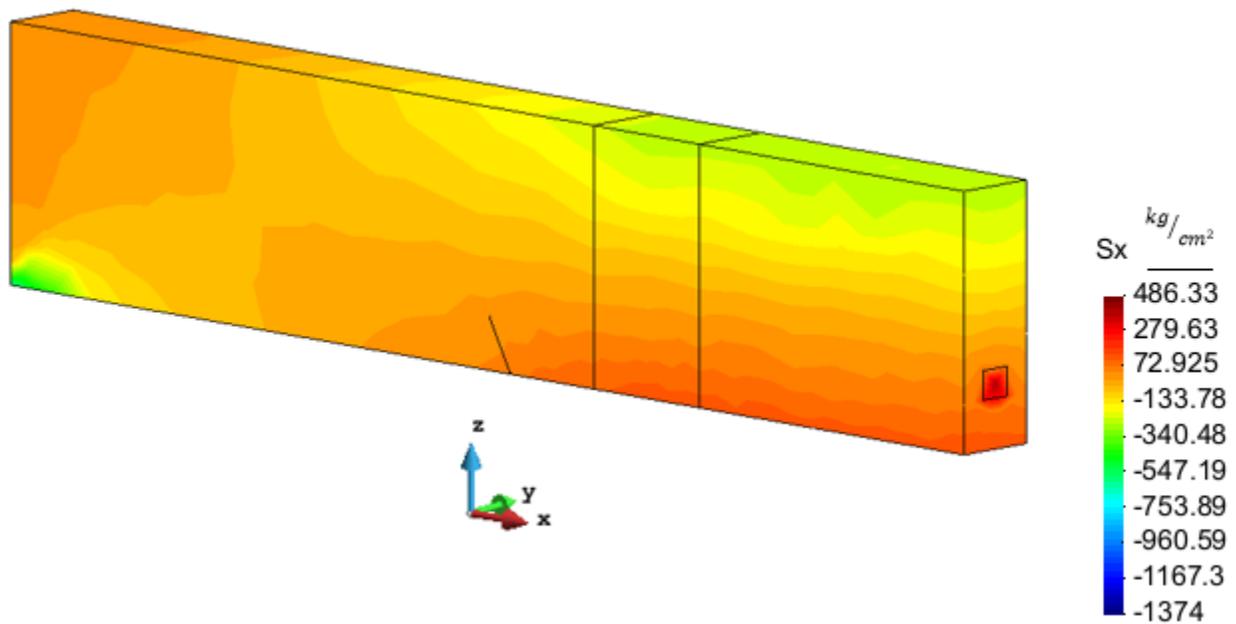
*Figura 5.22* Visualización de la distribución de desplazamientos de la viga rectangular con carga en los tercios y acero longitudinal. a) Distribución de desplazamientos de la malla inicial de la viga en estudio. b) Distribución de desplazamientos de la malla después de dos iteraciones. c) Visualización de la viga deformada

La distribución de los esfuerzos se observa en la figura 5.23. En ambos incisos los esfuerzos de tensión de mayor magnitud se encuentran en la parte inferior de la sección al centro del claro, debido a la deflexión de la viga. De igual forma, los esfuerzos en compresión se encuentran en la parte superior de dicha sección, dando así un comportamiento esperado. A diferencia de la viga

anterior, los esfuerzos de tensión se concentran más en donde se encuentra el acero, debido a su mayor rigidez. La malla después de la segunda iteración muestra resultados. Debido a la mayor precisión alcanzada con el programa, puede mejorarse el diseño de elementos, sobre todo en donde se encuentren las zonas críticas.



a)



b)

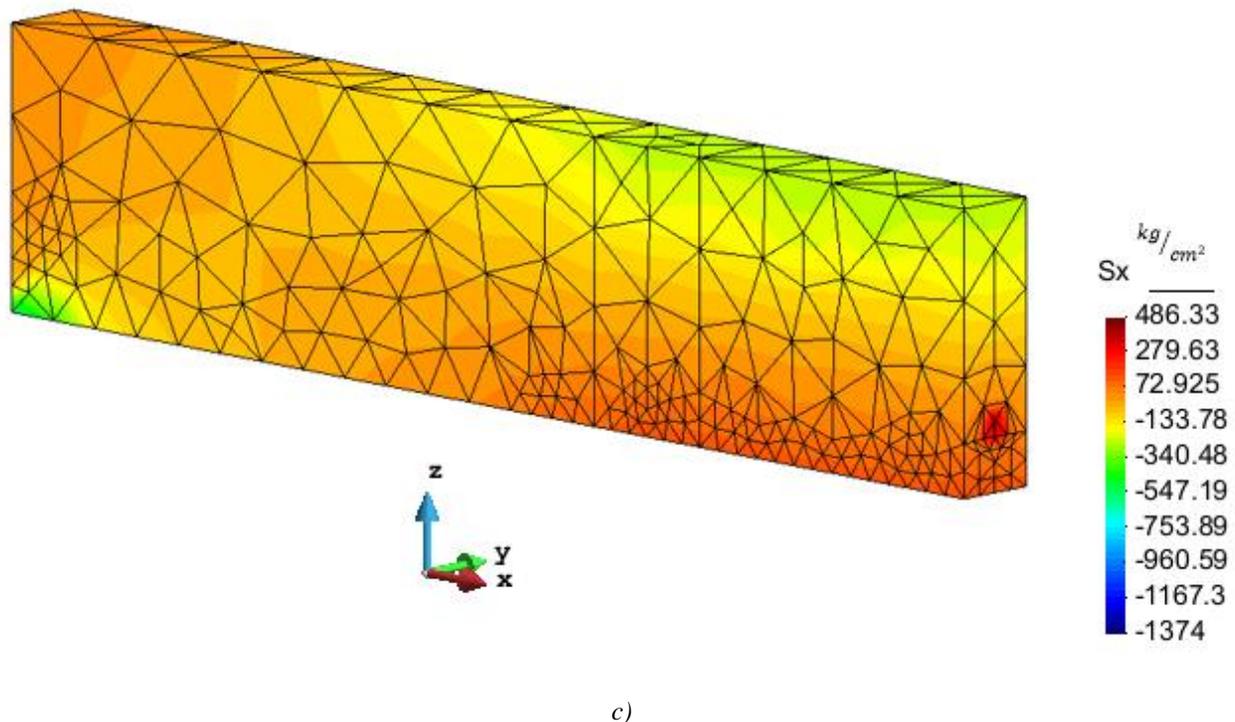


Figura 5.23 Visualización de distribución de esfuerzos-normales horizontales de la viga rectangular con carga en los tercios y acero transversal. a) Contornos de esfuerzos con la malla inicial. b) Contornos de esfuerzos después de dos iteraciones. c) Malla después de dos iteraciones y contornos de esfuerzos

### 5.3 MARCO DE CONCRETO CON CARGA DISTRIBUIDA

Un marco es un elemento estructural compuesto fundamentalmente por columnas y vigas; unidos por medio de conexiones que pueden ser rígidas o flexibles. En estas conexiones viga-columna se presentan grandes esfuerzos debido a la restricción de desplazamientos lineales y angulares en el área de contacto. Para este trabajo de tesis se escogió un marco plano debido a este tipo de singularidad para analizar los esfuerzos de tensión presentados en una viga, de igual forma se pueden observar los esfuerzos en las columnas y en el claro de la viga.

Se estudiaron dos casos diferentes, un marco sin refuerzo longitudinal en la viga, un marco con refuerzo longitudinal en la viga. Estos casos se analizaron con el programa REM3D y se compararon con el método de la doble integral para calcular las deflexiones del primer análisis.

Estos casos permiten comprender mejor la importancia del uso del acero de refuerzo, la cantidad de este, el posicionamiento, la distancia etc. El programa REM3D permite comparar diferentes casos, con diferentes dimensiones, formas, materiales, haciendo que podamos simular y mejorar los tipos de análisis ya existentes.

### 5.3.2 MARCO DE CONCRETO SIN REFUERZO LONGITUDINAL, CON CARGA DISTRIBUIDA

Para determinar el estado de esfuerzos que genera una carga distribuida a lo largo de una viga, así como los generados en las conexiones de la viga y de las columnas, se analizó un marco plano de concreto de una crujía y un nivel.

El marco está compuesto por dos columnas y una viga T, con un claro de 1000 cm. El marco se muestra en la figura 5.24.

Este análisis no considera refuerzo longitudinal, por lo que su material se considera homogéneo siendo éste concreto clase 1, con  $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$ ;  $E_c = 203943 \text{ kg/cm}^2$ .

Como se observa en la figura 5.20, el marco es simétrico. Se puede analizar sola la mitad de éste, pero al igual que con la viga, debido a su simplicidad, se analizó completo.

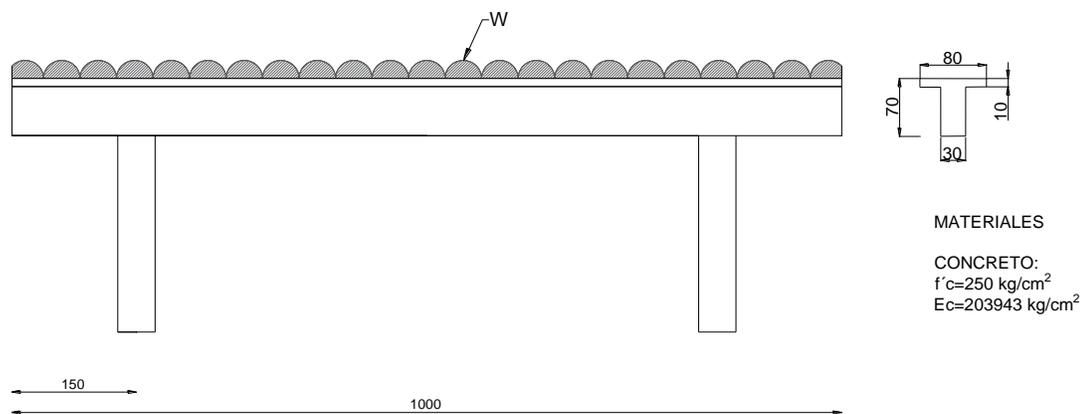
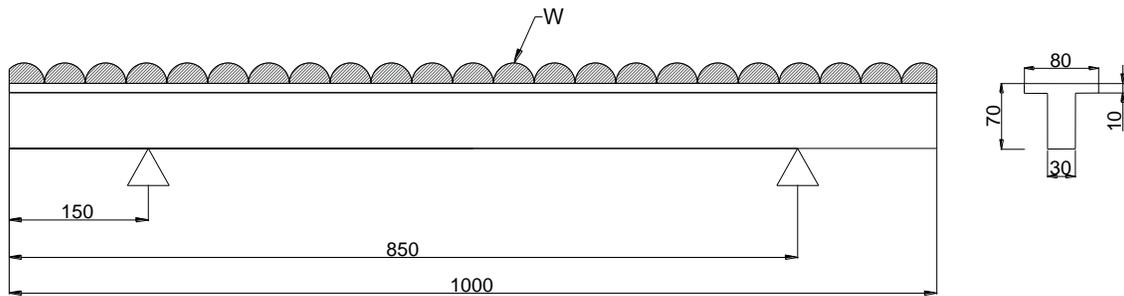


Figura 5.24 Marco de concreto sin refuerzo longitudinal con carga distribuida

#### 5.3.2.2 ANÁLISIS POR LA DOBLE INTEGRAL

Para simplificar el problema se analizó como una viga con apoyos a 150 cm de los extremos de la misma, y con una carga distribuida a lo largo de la viga; la representación del problema también se observa en la figura 5.25. El procedimiento para obtener la deflexión a lo largo de la viga T del marco se muestra en la figura 5.26.

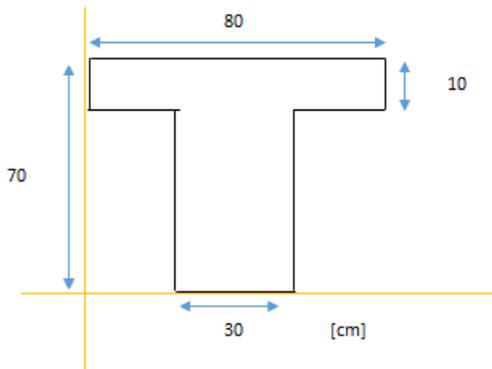


MATERIALES

CONCRETO:  
 $f'c=250 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_c=203943 \text{ kg/cm}^2$

Figura 5.25 Definición de las condiciones físicas y geométricas del problema (viga T)

Obtención del momento de inercia



MATERIALES

Concreto  
 $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$  Clase 1  
 $E = 221359.436 \text{ kg/cm}^2$

Centro de gravedad

$\bar{x} = 40$   
 $\bar{y} = 43.8461538$

Momento de inercia

$I_x = 1668205.13 \text{ cm}^4$

Ecuación del momento de la viga

$$M(x) = \frac{Wx^2}{2} - \frac{WL}{2}(x - L_1) - \frac{WL}{2}(x - L_2)$$

Método de la doble integral

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = M(x)$$

$$EI \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{Wx^2}{2} - \frac{WL}{2}(x - L_1) - \frac{WL}{2}(x - L_2)$$

Cálculo de la ecuación de la pendiente

$$EI \frac{\delta y}{\delta x} = \theta(x)$$

$$EI \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{Wx^3}{6} - \frac{WL}{4}(x - L_1)^2 - \frac{WL}{4}(x - L_2)^2 + C_1$$

Cálculo de la ecuación de la deflexión

$$EIy = \frac{Wx^4}{24} - \frac{WL}{12}(x - L_1)^3 - \frac{WL}{12}(x - L_2)^3 + C_1x + C_2$$

a)

Condiciones de contorno

$$y = 0 \left[ \begin{array}{l} x = L_1 \\ x = L_2 \end{array} \right. \quad C_2 \left[ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad C_1 \left[ \begin{array}{l} x = L/2 \\ \theta = 0 \end{array} \right.$$

Para  $C_2$

$$\begin{array}{l} y = 0 \quad cm \\ x = 150 \quad cm \\ C_2 = -3.3407E+11 \quad kg/cm^2 \\ \\ x = 850 \quad cm \\ C_2 = -3.3407E+11 \quad kg/cm^2 \end{array}$$

Para  $C_1$

$$\begin{array}{l} \theta = 0 \quad cm \\ x = 500 \quad cm \\ C_1 = 2195571429 \quad kg/cm^2 \end{array}$$

$$EIy = \frac{Wx^4}{24} - \frac{WL}{12}(x - L_1)^3 - \frac{WL}{12}(x - L_2)^3 + C_1x + C_2$$

Cálculo de la deflexión

$$y(x) = \frac{\frac{Wx^4}{24} - \frac{WL}{12}(x - L_1)^3 - \frac{WL}{12}(x - L_2)^3 + C_1x + C_2}{EI}$$

$$x = 500 \quad cm$$

$$y = -1.47993173 \quad cm$$

Figura 5.26 Procedimiento de la obtención del momento de inercia de la sección transformada de un marco sin refuerzo longitudinal. Cálculo de la ecuación de deflexión de la viga

#	x	y
0	0	0.904657486
1	50	0.607216352
2	100	0.307561407
3	150	0
4	200	-0.31863046
5	250	-0.62998696
6	300	-0.91319647
7	350	-1.151181
8	400	-1.33065771
9	450	-1.44213884
10	500	-1.47993173
11	550	-1.44213884
12	600	-1.33065771
13	650	-1.151181
14	700	-0.91319647
15	750	-0.62998696
16	800	-0.31863046
17	850	0
18	900	0.307561407
19	950	0.607216352
20	1000	0.904657486

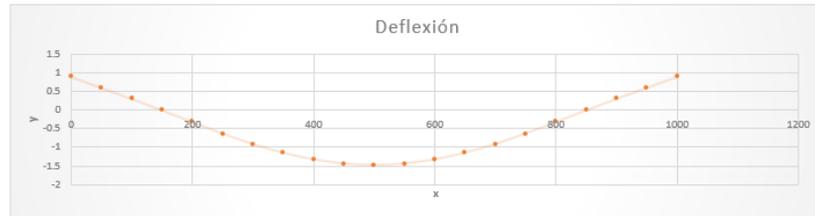


Figura 5.27 Curva de deflexión de marco sin refuerzo longitudinal

### 5.2.2.3 ANÁLISIS CON EL PROGRAMA ARFEM3D

Para la definición geométrica y física del problema se consideró para la viga una barra longitudinal de dimensiones de 1000x80x10 cm y otra de 1000x30x60cm. Para definir las columnas se colocaron dos barras con centro a los 150 cm de los extremos de la viga de dimensiones de 30x45x310 cm. En el análisis teórico, las columnas solo fueron consideradas como apoyos simples, mientras que con el programa de análisis ARFEM3D, la variación de esfuerzos en la zona de apoyos se puede apreciar mejor.

El archivo de geometría se observa en la figura 5.28; al igual que en los ejemplos anteriores, se consideró un cuerpo homogéneo, que con la herramienta Coherence del programa GMSH, puede determinarse como un solo cuerpo.

Para definir los nodos que se encuentran en los apoyos se creó el archivo de geometría visualizado en la figura 5.29; donde se especifica que en esa área no hay desplazamiento en ninguna dirección, ya que solo se está estudiando la flexión del elemento.

Los nodos a los que se le aplicaron las cargas fueron los 28 nodos de la cara superior de la viga, distribuidos en un área de 1000 cm por 80cm. Los nodos cargados se visualizan en la figura 5.30.

En la figura 5.31 se observa la propiedad del material, el cual es concreto clase 1 de  $f'c=250$  kg/cm<sup>2</sup>.

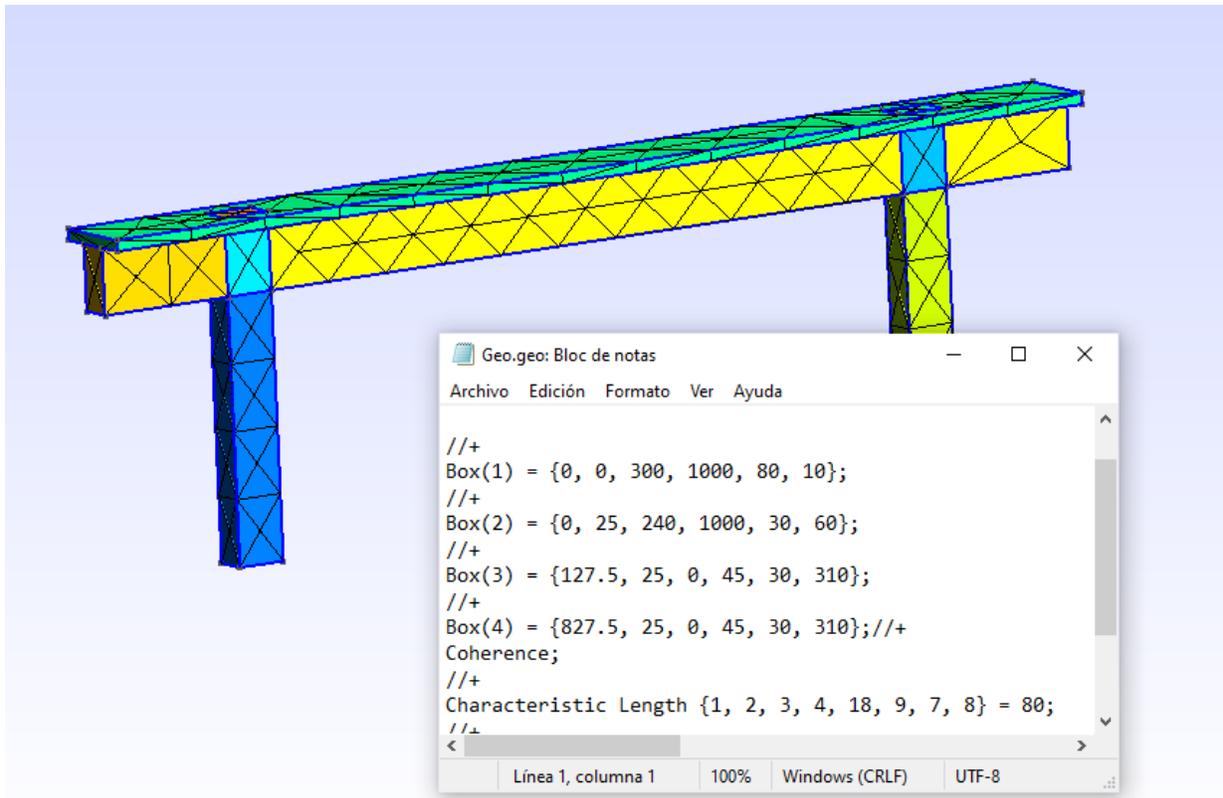


Figura 5.28 Definición geométrica marco de concreto con carga distribuida en el programa GMSH

MARCO DE CONCRETO CON CARGA DISTRIBUIDA							
1							
2	704 1989						
3	1	1	1	1	185.000000	25.000000	0.000000
4	2	1	1	1	185.000000	55.000000	0.000000
5	3	1	1	1	200.000000	40.000000	0.000000
6	4	1	1	1	215.000000	25.000000	0.000000
7	5	1	1	1	215.000000	55.000000	0.000000
8	6	1	1	1	1015.000000	25.000000	0.000000
9	7	1	1	1	1015.000000	55.000000	0.000000
10	8	1	1	1	1030.000000	40.000000	0.000000
11	9	1	1	1	1045.000000	25.000000	0.000000
12	10	1	1	1	1045.000000	55.000000	0.000000
13	11	0	0	0	185.000000	40.000000	20.000000
14	12	0	0	0	200.000000	25.000000	20.000000
15	13	0	0	0	200.000000	55.000000	20.000000
16	14	0	0	0	215.000000	40.000000	20.000000
17	15	0	0	0	1015.000000	40.000000	20.000000
18	16	0	0	0	1030.000000	25.000000	20.000000
19	17	0	0	0	1030.000000	55.000000	20.000000
20	18	0	0	0	1045.000000	40.000000	20.000000
21	19	0	0	0	185.000000	25.000000	40.000000
22	20	0	0	0	185.000000	55.000000	40.000000
23	21	0	0	0	215.000000	25.000000	40.000000
24	22	0	0	0	215.000000	55.000000	40.000000
25	23	0	0	0	1015.000000	25.000000	40.000000
26	24	0	0	0	1015.000000	55.000000	40.000000
27	25	0	0	0	1045.000000	25.000000	40.000000
28	26	0	0	0	1045.000000	55.000000	40.000000
29	27	0	0	0	185.000000	40.000000	60.000000
30	28	0	0	0	200.000000	25.000000	60.000000
31	29	0	0	0	200.000000	55.000000	60.000000
32	30	0	0	0	215.000000	40.000000	60.000000
33	31	0	0	0	1015.000000	40.000000	60.000000
34	32	0	0	0	1030.000000	25.000000	60.000000
35	33	0	0	0	1030.000000	55.000000	60.000000
36	34	0	0	0	1045.000000	40.000000	60.000000
37	35	0	0	0	185.000000	25.000000	80.000000
38	36	0	0	0	185.000000	55.000000	80.000000

Figura 5.29 Archivo de geometría. Establecimiento de libertad en desplazamientos de nodos en las tres direcciones (x,y z). Marco con carga distribuida

```

1 28 CARGAS UNIFORMES DEBIDAS A PRESIONES Y/O PUNTALES
1 INO. DE INCREMENTOS ENTRE LAS CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFORMES Y PUNTALES
28 1.0 08 0.10 08 # NODOS DEFINIENDO LOS INTERVALOS + CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFORMES EN SENTIDO HORIZONTAL Y VERTICAL
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
141 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
142 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
143 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
144 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
145 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03

```

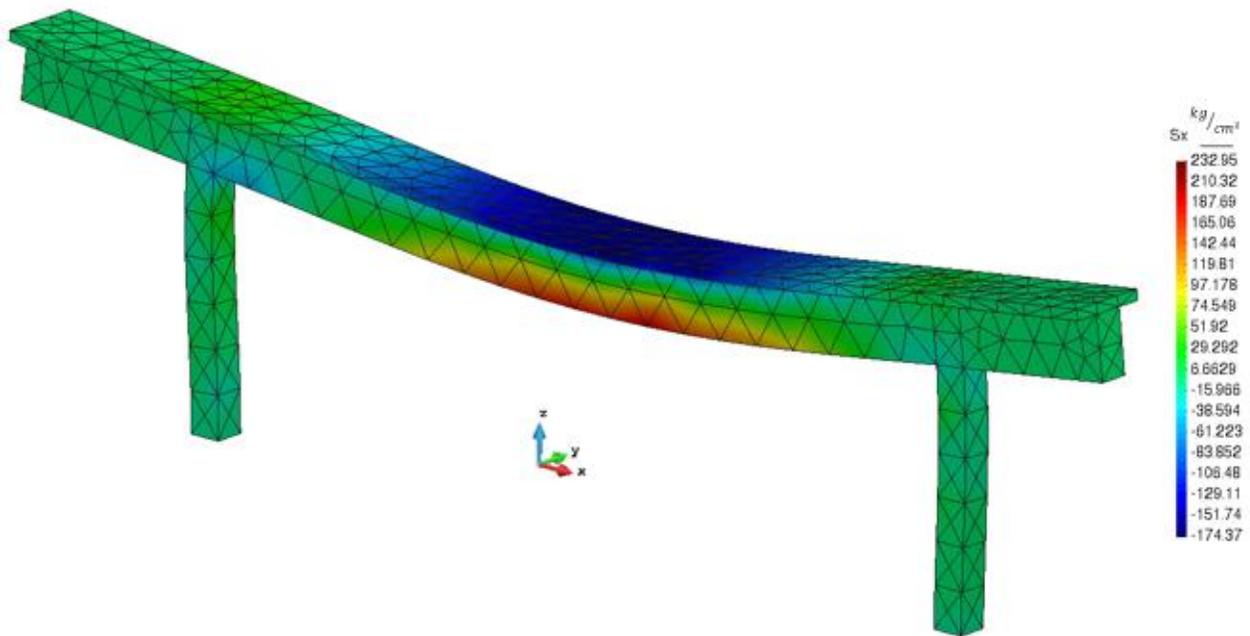
Figura 5.30 Archivo de nodos cargados, marco con carga distribuida

material\_marco2.dat: Bloc de notas

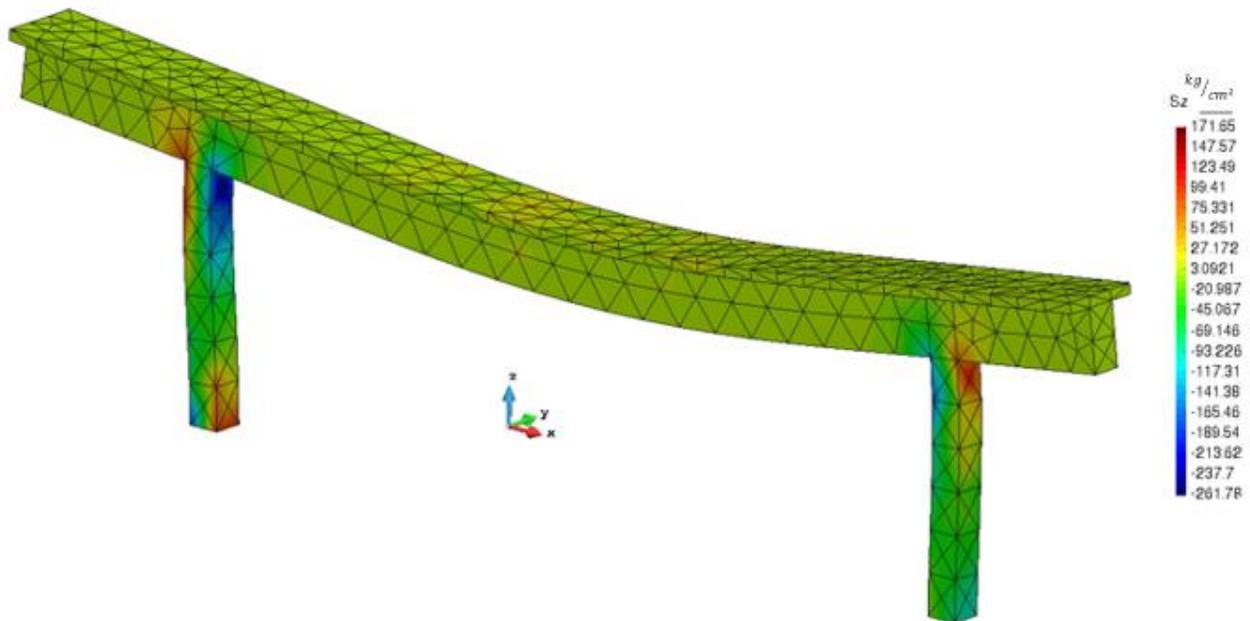
Archivo	Edición	Formato	Ver	Ayuda
10				
1	203943	0.2	0.	
250.	15.27	0.0030	0.0030	
17	14	CONCRETO		
1	-0.005000	-70.00	14000.00	
2	-0.003500	-180.00	51428.57	
3	-0.003000	-212.50	70833.33	
4	-0.002500	-245.00	98000.00	
5	-0.002300	-248.00	107826.09	
6	-0.002200	-250.00	113636.36	
7	-0.002100	-248.00	118095.24	
8	-0.002050	-245.00	119512.20	
9	-0.001350	-200.00	148148.15	
10	-0.000925	-150.00	162162.16	
11	-0.000550	-100.00	181818.18	
12	-0.000247	-44.50	180161.94	
13	-0.000100	-20.00	200000.00	
14	0.000000	0.00	200000.00	
15	0.000060	12.00	200000.00	
16	0.000065	5.00	38461.54	
17	0.000300	0.00	0.00	

Figura 5.31 Archivo de las propiedades del material de marco con carga distribuida

Es sabido que, en la zona inferior, donde se encuentran los apoyos de un marco de concreto con carga distribuida a lo largo de la viga, se presentan esfuerzos de compresión, mientras que en la zona superior, de donde se encuentran los apoyos se presentan esfuerzos de tensión. La visualización de la malla y la distribución de esfuerzos se presentan en la figura 5.32 a la figura 5.34.

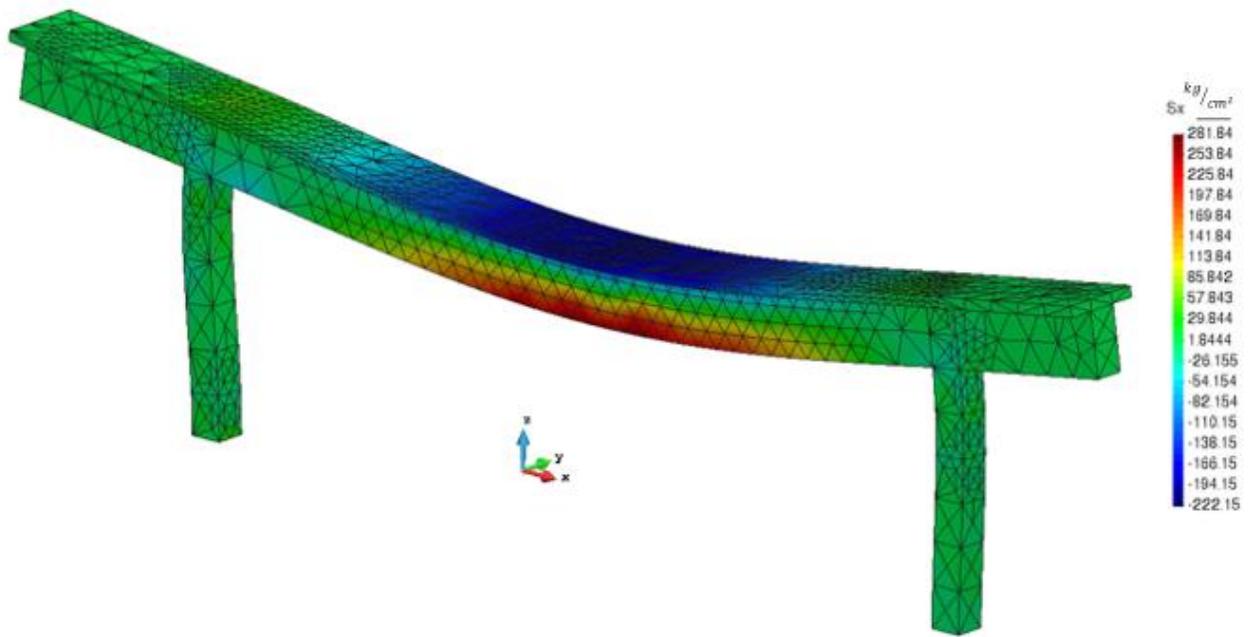


a)

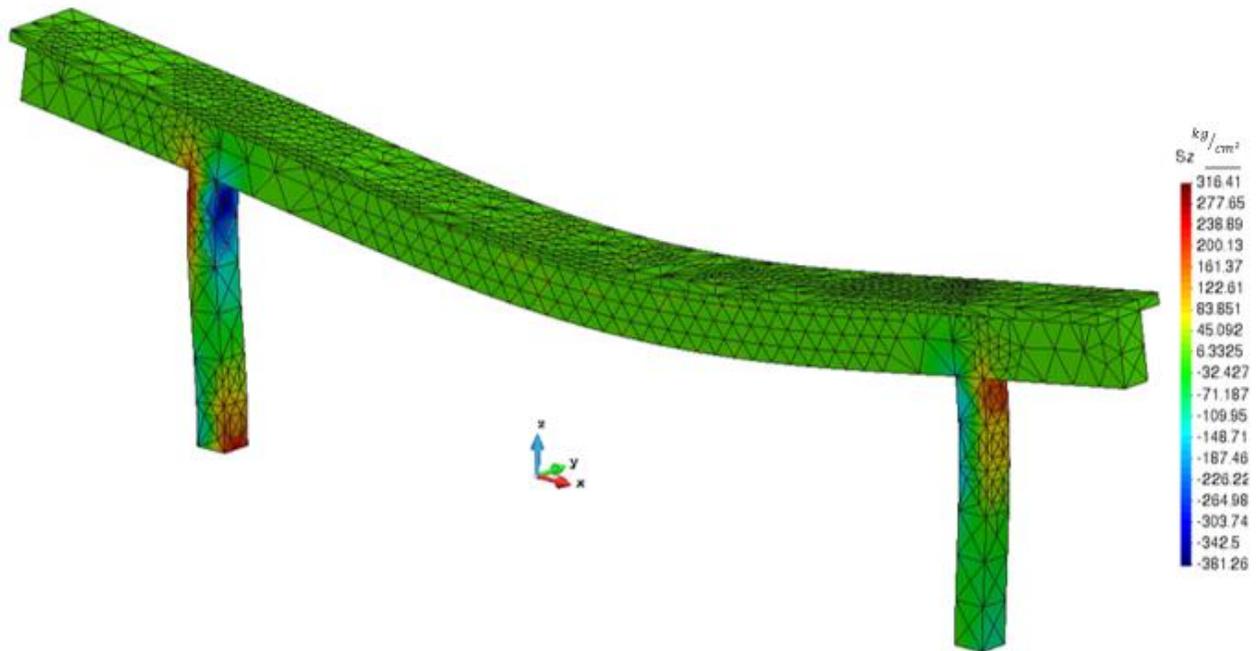


b)

Figura 5.32 Visualización de marco de viga T con carga distribuida. Mallado inicial. a) Distribución de esfuerzos normales horizontales. b) Distribución de esfuerzos normales verticales

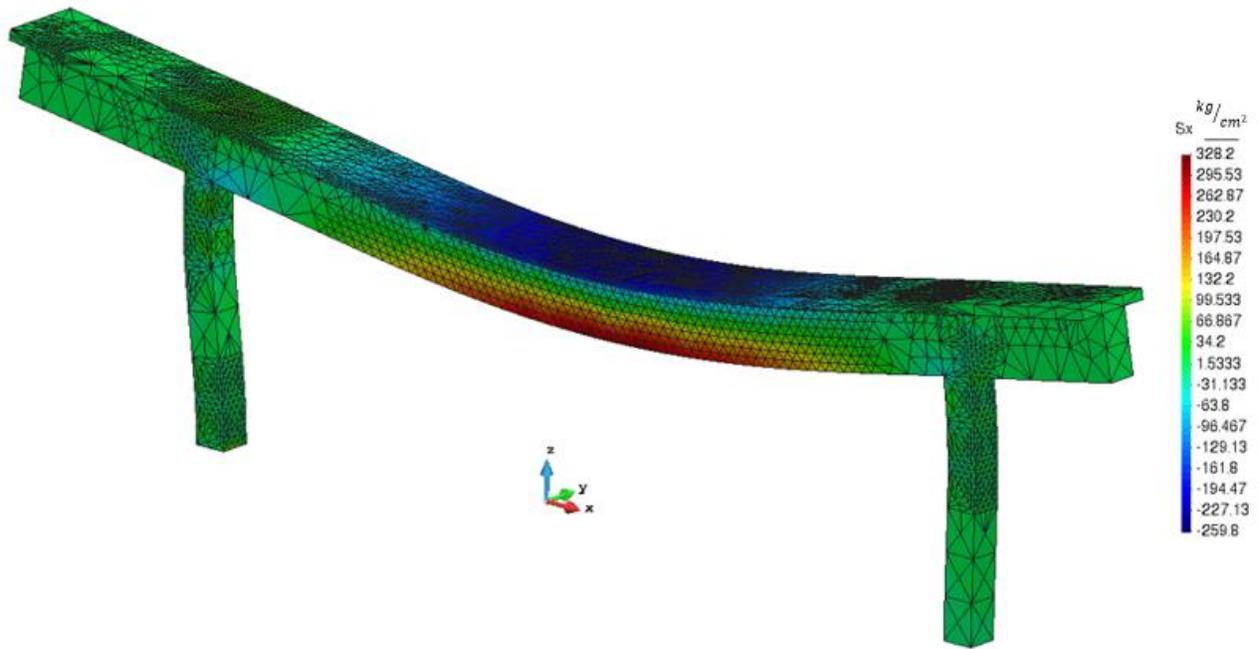


a)

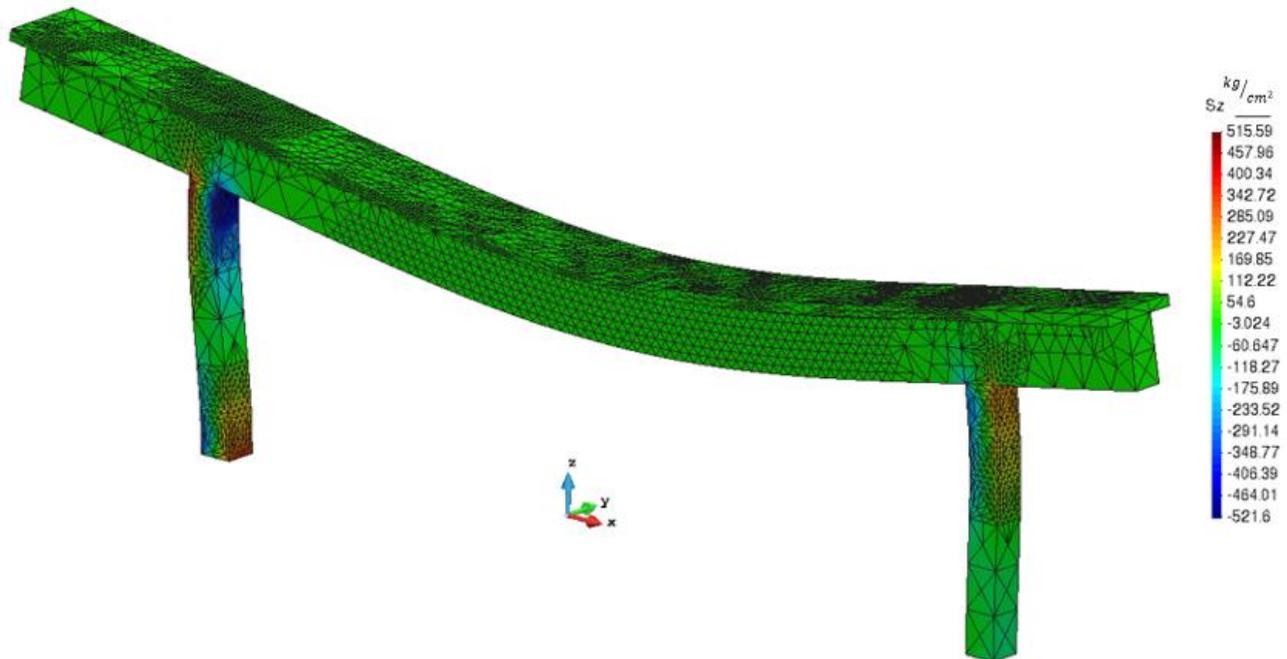


b)

Figura 5.33 Visualización de marco de viga T con carga distribuida. Primer refinamiento. a) Distribución de esfuerzos normales horizontales. b) Distribución de esfuerzos normales verticales



a)



b)

Figura 5.34 Visualización de marco de viga T con carga distribuida. Segundo refinamiento. a) Distribución de esfuerzos normales horizontales. b) Distribución de esfuerzos normales verticales

En la figura 5.32 inciso *a* se observa la malla inicial. Los elementos tienen un tamaño homogéneo a lo largo de la viga. Los esfuerzos de compresión observados en el marco de concreto se encuentran ubicados en la parte inferior de los apoyos y en la parte superior del centro de la viga; éstos están representados con el color azul y verde de mayor a menor esfuerzo de compresión.

Mientras que los esfuerzos de tensión se ubican en la parte inferior del centro de la viga, en la parte superior de los apoyos, al igual que en los volados. Los mayores esfuerzos de tensión se observan de color rojo y van de un color naranja fuerte al amarillo. La visualización de los esfuerzos muestra que la mayoría del volumen del marco de concreto se encuentra sometido a esfuerzos de tensión.

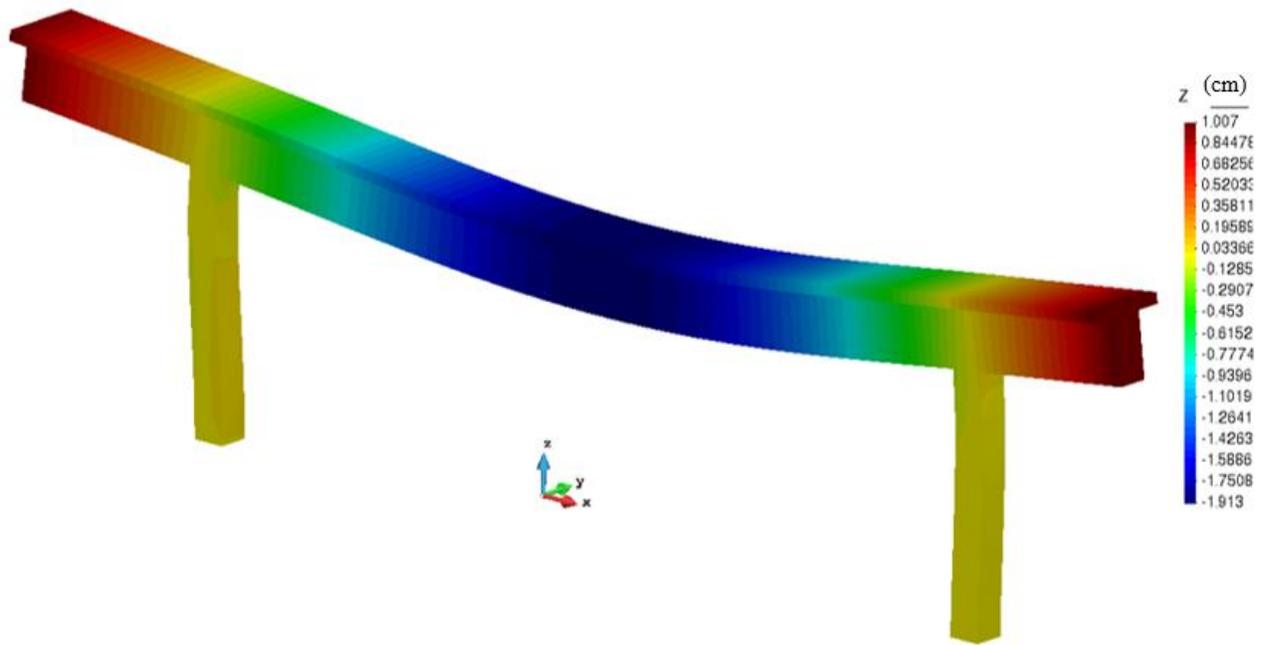
En la figura 5.33 se observa un mallado más fino en las zonas donde están los mayores esfuerzos, puesto que los elementos tetraédricos son de dimensión menor. Las áreas coloreadas están mejor definidas en el primer mallado a diferencia que en la malla inicial, mostrando mejor los puntos donde la viga del marco presenta mayor esfuerzo de tensión y es importante colocar un material que resista dichos esfuerzos para evitar la falla por flexión. De igual forma se observa el área donde están los esfuerzos de compresión los cuales el concreto puede resistir sin problema.

En el segundo mallado mostrado en la figura 5.34; se observa una malla mejor definida que en las anteriores ya que en las zonas donde se encuentran los mayores esfuerzos de tensión y de compresión los elementos tetraédricos son de menor dimensión. De igual forma las áreas coloreadas de la distribución de esfuerzos en el marco son más suaves, permitiéndonos mejorar el cambio de esfuerzos de compresión y tensión en determinadas zonas, logrando que los resultados sean más precisos con respecto a la ubicación de posibles fallas por esfuerzos superiores a la resistencia del material.

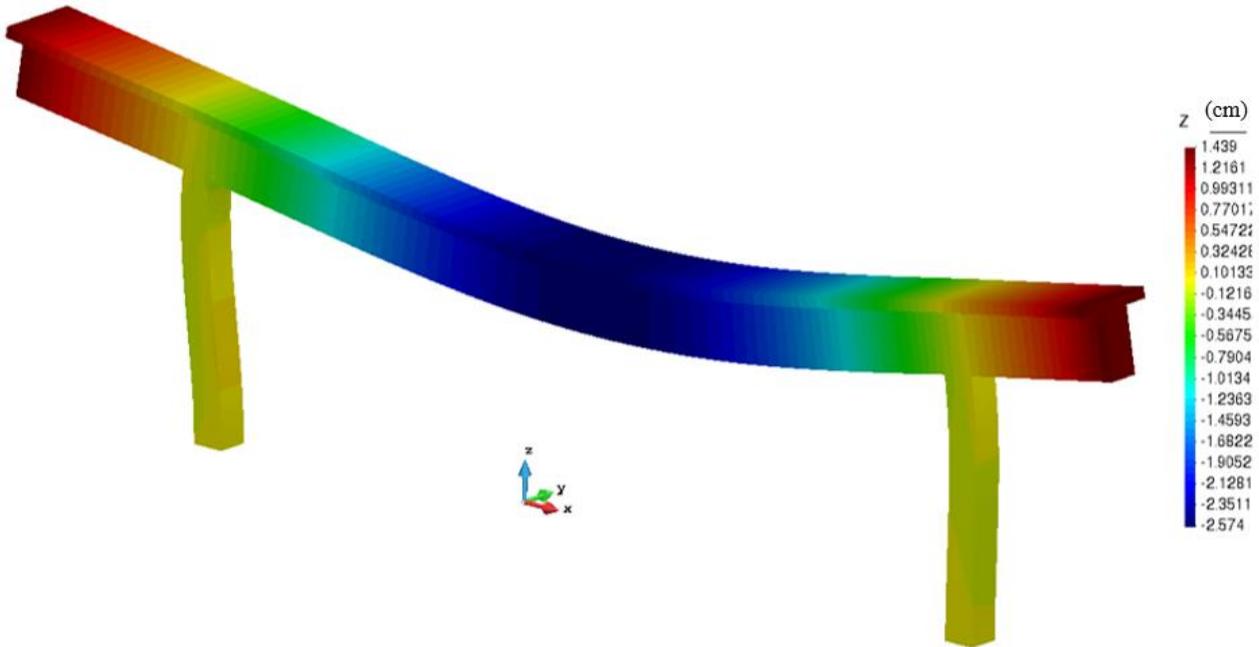
Dado que este ejemplo no rebasa las deflexiones permisibles y la carga no ocasiona daños a la viga no se consideró realizar más mallados. Ya que el resultado donde se encuentra la mayor deflexión está dentro de los parámetros establecidos con el análisis analítico y estableciendo que en ambos análisis se considera un material homogéneo los esfuerzos y desplazamientos máximos se encuentran dentro de la zona esperada.

En la figura 5.35 se puede observar los desplazamientos de la viga del marco. En ambos incisos de la figura se puede ver que no existe desplazamiento de la viga en donde se encuentran los apoyos y el mayor desplazamiento se encuentra en el centro del marco. De igual forma se observa un desplazamiento hacia arriba de los extremos del marco.

En el inciso *a* de la figura 5.35 se muestra los resultados del desplazamiento del análisis. En el segundo análisis se puede ver con mayor definición los resultados ya que el programa logra afinar estos resultados. El desplazamiento del análisis es parecido al obtenido analíticamente sin embargo el análisis muestra una mejor definición del comportamiento del que se puede ver gráficamente en el análisis tradicional.



a)



b)

Figura 5.35 Visualización de desplazamiento de marco de viga T con carga distribuida. a) Mallado inicial. b) Segundo mallado

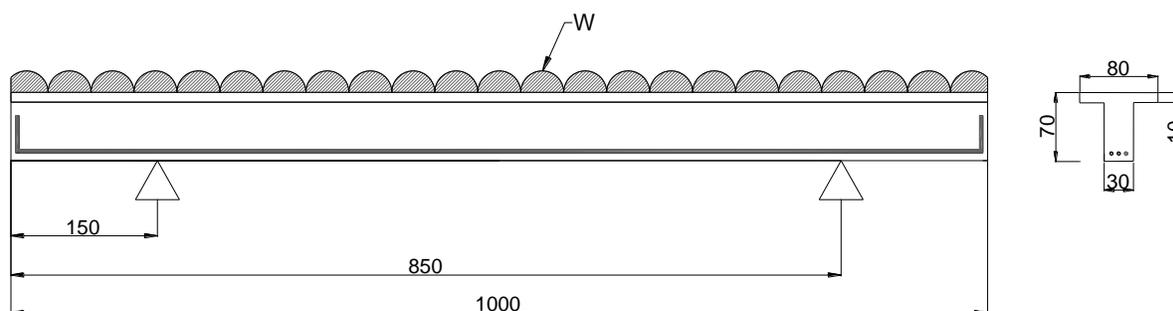
### 5.3.3 MARCO DE CONCRETO CON REFUERZO LONGITUDINAL INFERIOR, CON CARGA DISTRIBUIDA

Se analizó el marco anterior con acero de refuerzo longitudinal inferior en la viga para comparar el comportamiento del marco bajo las mismas condiciones. Este marco tiene mayor resistencia a los esfuerzos de tensión en su zona central del claro, a diferencia que el marco anterior, ya que se le agregó acero longitudinal en la parte inferior, permitiendo que el marco trabaje correctamente a flexión; pero solo en el centro de la viga, ya que en los apoyos los mayores esfuerzos de tensión se encuentran en la parte superior y en los volados se encuentra en todo el elemento sobre todo en la parte superior.

Este marco tiene dos tipos de materiales, el concreto y el acero. El concreto es clase 1, con  $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$ ;  $E_c = 203943 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.2$  mientras que el acero tiene  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ,  $E_s = 20000000 \text{ kg/cm}^2$  y  $\nu = 0.3$ .

En la figura 5.36 se observa el marco estudiado, la posición de las varillas, así como las propiedades de los materiales y las condiciones a las que está sometida.

Al igual que el marco anterior las mayores deflexiones se encuentran en el centro de la viga del marco.



#### MATERIALES

CONCRETO:  
 $f'c=250 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_c=203943 \text{ kg/cm}^2$

ACERO:  
 $f_y=4200 \text{ kg/cm}^2$   
 $E_s=2000000 \text{ kg/cm}^2$

Figura 5.36 Marco de concreto con refuerzo longitudinal inferior

### 5.3.3.2 ANÁLISIS CON EL PROGRAMA ARFEM3D

Para este análisis se hicieron modificaciones en los archivos de geometría, materiales y fuerzas. Para agilizar el análisis se utilizó el concepto de la sección transformada ya que en el archivo de geometría para añadir el acero se agregó un cuerpo cubico y no un cilíndrico; de igual forma para simplificar el análisis se hizo el estudio solo de la mitad de marco. En la figura 5.37 se muestra la representación del problema.

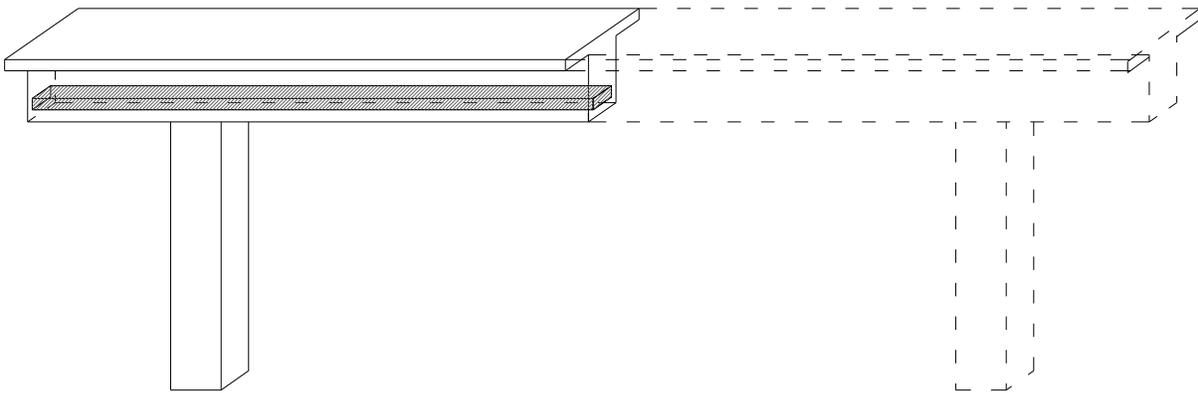


Figura 5.37 Marco de concreto con refuerzo longitudinal inferior en ARFEM3D

Debido a la condición física del problema y para la correcta definición del problema se hicieron ciertas consideraciones en las restricciones de los nodos que se encuentran en el centro del claro de la viga del marco. En el archivo de geometría se limitaron los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$ ; colocando un 1 en los espacios correspondientes, tal como se muestra en la figura 5.38, inciso  $a$ . De igual forma se limitaron los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; en los nodos que se encuentran en los apoyos de la viga. Esta delimitación de desplazamiento es para representar la continuidad del material ya que en el caso real no se podría desplazar en esas direcciones.

En el archivo de materiales se agregaron las propiedades y resistencias del acero en los volúmenes correspondientes considerando los cambios obtenidos por el uso de la sección transformada, y se agregaron las propiedades en los volúmenes correspondientes al concreto. Una parte del archivo se muestra en la figura 5.38, inciso  $b$ .

La carga está asignada a los nodos que se encuentran en la cara superior de la viga de marco. En la figura 5.38 inciso  $c$  se observan los nodos que están cargados, la dirección de la carga la carga.

1 MARCO CON ACERO DE REFUERZO							
2 439		1822					
3	1	1	1	1	127.500000	25.000000	0.000000
4	2	1	1	1	127.500000	55.000000	0.000000
5	3	1	1	1	150.000000	40.000000	0.000000
6	4	1	1	1	172.500000	25.000000	0.000000
7	5	1	1	1	172.500000	55.000000	0.000000
8	6	0	0	0	127.500000	40.000000	34.199821
9	7	0	0	0	150.000000	25.000000	34.199821
10	8	0	0	0	150.000000	55.000000	34.199821
11	9	0	0	0	172.500000	40.000000	34.199821
12	10	0	0	0	127.500000	25.000000	68.399643
13	11	0	0	0	127.500000	55.000000	68.399643
14	12	0	0	0	172.500000	25.000000	68.399643
15	13	0	0	0	172.500000	55.000000	68.399643
16	14	0	0	0	127.500000	40.000000	96.507652
17	15	0	0	0	150.000000	25.000000	96.507652
18	16	0	0	0	150.000000	55.000000	96.507652
19	17	0	0	0	172.500000	40.000000	96.507652
20	18	0	0	0	127.500000	25.000000	124.615669
21	19	0	0	0	127.500000	55.000000	124.615669
22	20	0	0	0	172.500000	25.000000	124.615669
23	21	0	0	0	172.500000	55.000000	124.615669
24	22	0	0	0	127.500000	40.000000	147.716965
25	23	0	0	0	150.000000	25.000000	147.716965
26	24	0	0	0	150.000000	55.000000	147.716965
27	25	0	0	0	172.500000	40.000000	147.716965
28	26	0	0	0	127.500000	25.000000	170.818268
29	27	0	0	0	127.500000	55.000000	170.818268
30	28	0	0	0	172.500000	25.000000	170.818268
31	29	0	0	0	172.500000	55.000000	170.818268
32	30	0	0	0	150.000000	55.000000	188.856689
33	31	0	0	0	150.000000	25.000000	189.127533
34	32	0	0	0	127.500000	40.000000	189.804657
35	33	0	0	0	172.500000	40.000000	189.804657
36	34	0	0	0	127.500000	25.000000	208.791061
37	35	0	0	0	127.500000	55.000000	208.791061
38	36	0	0	0	172.500000	25.000000	208.791061
408	406	0	0	0	434.500000	55.000000	300.000000
409	407	0	0	0	467.250000	40.000000	300.000000
410	408	1	0	0	500.000000	0.000000	300.000000
411	409	1	0	0	500.000000	25.000000	300.000000
412	410	1	0	0	500.000000	55.000000	300.000000
413	411	1	0	0	500.000000	80.000000	300.000000
414	412	0	0	0	0.000000	0.000000	310.000000
415	413	0	0	0	0.000000	80.000000	310.000000
416	414	0	0	0	39.467117	38.217167	310.000000
417	415	0	0	0	71.428574	0.000000	310.000000
418	416	0	0	0	71.428574	80.000000	310.000000
419	417	0	0	0	87.203140	40.000000	310.000000
420	418	0	0	0	127.500000	25.000000	310.000000
421	419	0	0	0	127.500000	55.000000	310.000000
422	420	0	0	0	142.857147	0.000000	310.000000
423	421	0	0	0	142.857147	80.000000	310.000000
424	422	0	0	0	150.000000	40.000000	310.000000
425	423	0	0	0	172.500000	25.000000	310.000000
426	424	0	0	0	172.500000	55.000000	310.000000
427	425	0	0	0	204.714279	36.842113	310.000000
428	426	0	0	0	214.285721	0.000000	310.000000

a)

9				
1	203943	0.2	0.	
250.	15.27	0.0030	0.0030	
17	14	CONCRETO		
1		-0.005000	-70.00	14000.00
2		-0.003500	-180.00	51428.57
3		-0.003000	-212.50	70833.33
4		-0.002500	-245.00	98000.00
5		-0.002300	-248.00	107826.09
6		-0.002200	-250.00	113636.36
7		-0.002100	-248.00	118095.24
8		-0.002050	-245.00	119512.20
4	2000000.0	0.3	0.	
4200.	4200.	0.0021	0.0021	
71	36	ACERO		
1		-0.13637	-7345.8	111.86
2		-0.12144	-7344.13	434.89
3		-0.1133	-7340.59	1670.09
4		-0.10454	-7325.96	2137.30
5		-0.09966	-7315.53	2842.72
6		-0.09451	-7300.89	4027.93
7		-0.08914	-7279.26	5725.00
8		-0.08314	-7244.91	7745.80
9		-0.07897	-7212.61	8114.82
10		-0.07418	-7173.74	10282.72
11		-0.07036	-7134.46	12569.79
12		-0.06427	-7057.91	15916.32
13		-0.0571	-6943.79	21009.33

b)

1	28	CARGAS UNIFORMES DEBIDAS A PRESIONES Y/O PUNTUAL				
1	!No.	DE INCREMENTOS ENTRE LAS CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFOF				
28	1.0	08	0.10	08	# NODOS DEFINIENDO L	
412						
413						
414						
415						
416						
417						
418						
419						
420						
421						
422						
423						

c)

Figura 5.38 Archivos de notas del marco con acero de refuerzo. a) Archivo de geometría. b) Archivo de materiales. c) Archivo de fuerzas

La malla inicial se creó con la finalidad de conseguir una malla homogénea, es decir con los elementos del mismo tamaño. Debido a los diferentes tamaños que componen el marco, tener elementos del mismo tamaño no es práctico ya que generaría demasiada memoria de cálculo. Sin embargo, en el archivo de geometría se buscó tener una armonía en el cambio del tamaño de los elementos para así agilizar los cálculos. Los resultados de esta malla inicial se muestran en la figura 5.39 inciso *a*.

En el segundo mallado inciso *b*; podemos apreciar que la malla se definió en la zona donde se encuentran los mayores esfuerzos, es decir en la parte inferior del centro del marco y en la parte inferior de la viga en la zona donde se encuentran los apoyos. Debido a que la fuerza a la que está sometida el marco es pequeña los esfuerzos de tensión generados es mínima comparada con los esfuerzos de compresión localizados en la zona de apoyo del marco.

En el tercer mallado presentado en la figura 5.39 inciso *c*; en la zona de mayor esfuerzo de tensión y compresión del marco los elementos tetraédricos presentaron mayor definición, logrando una mayor claridad en los resultados del análisis realizado por el programa.

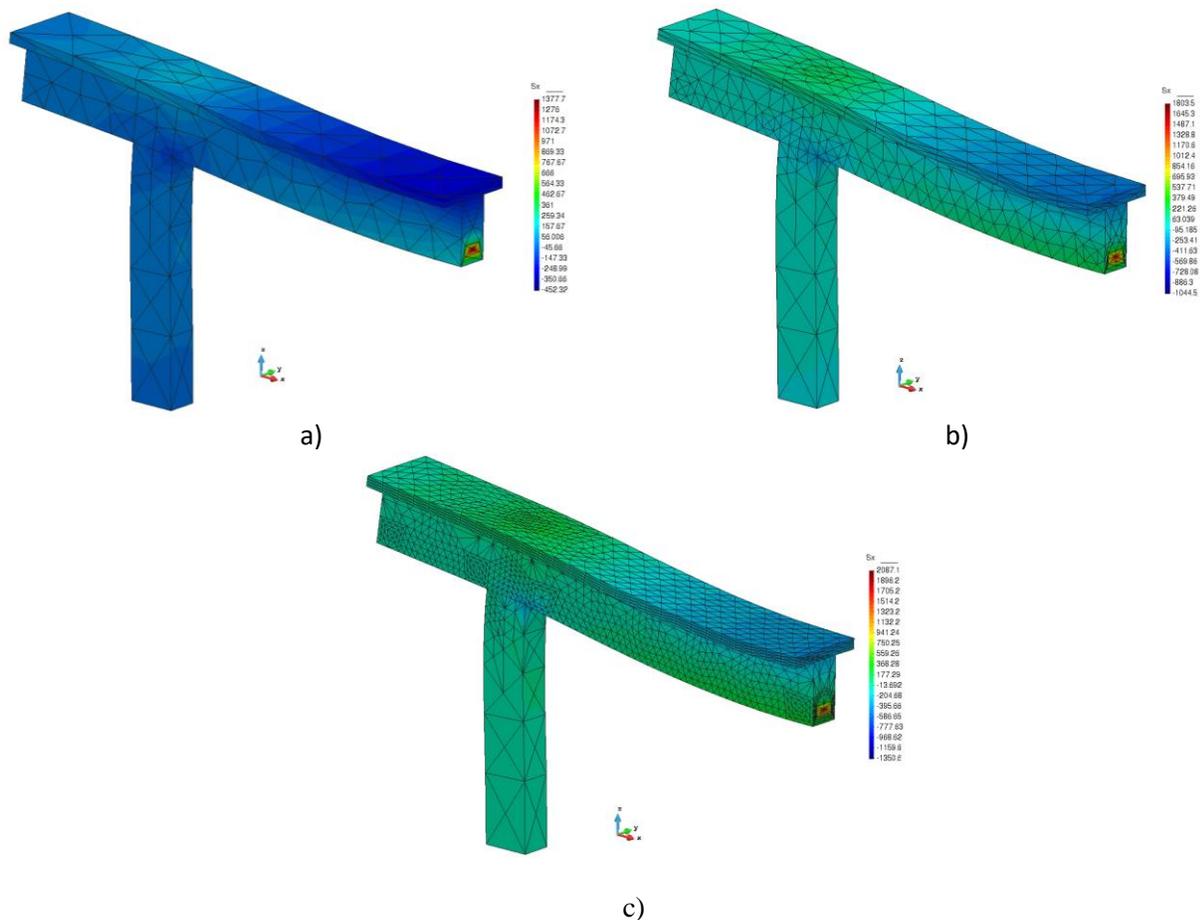
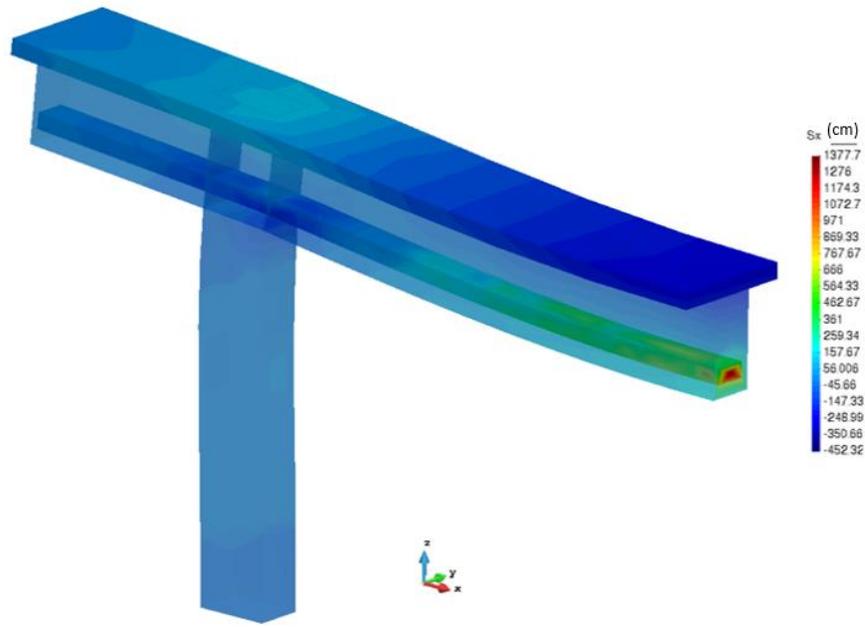
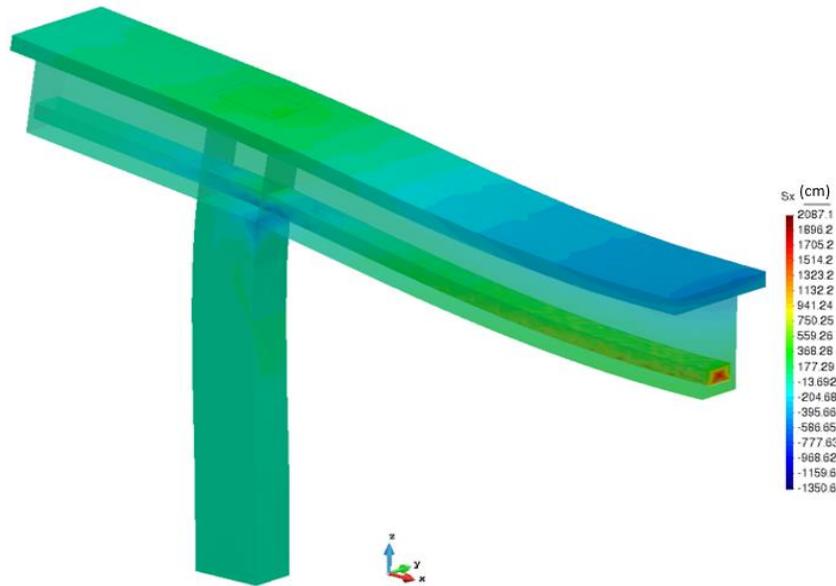


Figura 5.39 Visualización de esfuerzos normales horizontales del marco con acero de refuerzo. a) Malla inicial. b) Primer refinamiento. c) Segundo refinamiento

En la figura 5.40 se muestra en detalle la distribución de esfuerzos en el acero. En la figura 5.40 (a) se observan los esfuerzos de tensión y compresión, tanto en el acero como en el concreto usando la malla inicial. En la figura 5.40 (b) se observan los esfuerzos de tensión y compresión, tanto en el acero como en el concreto utilizando la malla refinado dos veces.



a)



b)

Figura 5.40 Esfuerzos de tensión y compresión con detalle en el acero. A) Malla inicial. b) Segundo refinamiento

## **5.4 LOSA DE CONCRETO**

Las losas de concreto son elementos estructurales que sirven para distribuir cargas verticales principalmente. La losa recibe directamente la carga normal a su plano soportando, por ejemplo: su peso propio, el peso de las personas, mobiliario, objetos, maquinaria etc.; en algunos casos actúan también cargas contenidas en su plano ya que las losas podrían no estar totalmente horizontales.

Las losas deben de estar diseñadas para soportar las cargas según su uso (cargas vivas), las cargas muertas, así como las cargas accidentales tales como las acciones sísmicas, viento, lluvia o granizo. El diseño debe garantizar también el aislamiento del ruido, vibraciones, et.; lo que se define como estado límite de servicio.

Las losas distribuyen las cargas hacia sus apoyos los cuales pueden ser vigas, muros o columnas; debido a la distribución de cargas que se realizan, se clasifica en losas que trabajan en una dirección y en dos direcciones, planas, etc.

### **5.4.2 LOSA EN UNA DIRECCIÓN**

Las losas en una dirección se diseñan como si fuera una viga cuyo ancho es la longitud del apoyo o como un conjunto de vigas que se flexionan uniformemente cuyo ancho es de un metro de ancho.

Estas losas son en general aquellas que tienen dos bordes libres sin apoyo vertical y los otros dos bordes tienen vigas o muros como apoyo. También se consideran losas en una dirección aquellas de grandes claros sensiblemente rectangulares, en donde su lado largo es dos o más veces mayor al lado corto, aun si está apoyada en todos sus extremos. De igual forma, esto se considera cuando una losa nervada tiene sus nervios principalmente en una dirección.

Como ya se comentó, una la losa en una dirección se analiza como una viga de ancho unitario y se diseña a flexión; es importante señalar que, esta técnica de diseño, donde se considera a la losa como una viga de ancho unitario es conservador, ya que en la losa se desarrollan esfuerzos de compresión normales a esta que aumentan ligeramente la resistencia de la losa.

Se recomienda iniciar el diseño fijando el valor del peralte de forma que no se presenten deflexiones excesivas. Se recomienda considerar peraltes y recubrimientos recomendados en los códigos o reglamentos de construcción y diseño. Posteriormente se calcula el refuerzo necesario con las ecuaciones de flexión usadas en vigas; cabe señalar que las losas deben diseñarse para que sean dúctiles (elementos sub-reforzados). El refuerzo estimado debe colocarse a lo largo del claro considerado. En dirección perpendicular también se coloca refuerzo para que resista principalmente los esfuerzos de contracción del concreto. En los reglamentos de construcción y diseño del ACI y de las NTC, se establecen requisitos para el diseño del armado de refuerzo para flexión, contracción, temperatura, así separación entre las barras de acero. En la literatura de

“Aspectos Fundamentales del concreto reforzado” de Gonzales Cuevas se puede detallar sobre el análisis clásico de una losa de una dirección.

### 5.4.2.2 LOSA EN UNA DIRECCIÓN CON CARGA CONCENTRADA

Existen losas en una dirección con carga concentrada, estas losas suelen fallar por penetración en el perímetro donde se encuentra la carga o por momento flexionante ocasionado bajo la carga.

Uno de los métodos más usados para el análisis por flexión es el del ancho efectivo; se diseña suponiendo una viga con ancho efectivo  $b_e$ ; este ancho se determina mediante ecuaciones que consideran el ancho del área de la carga, de las condiciones de los apoyos de la losa y de la posición de la carga con respecto a la losa.

Otro método utilizado está basado en la teoría de las líneas de fluencia y se usa en losas donde el ancho de la losa con relación al claro no es menor a un medio de  $\pi$ . Este método consiste en incrementar la suma de momentos resistentes positivos y negativos en toda la losa, en ambas direcciones por una ecuación que considera la carga, el radio de la aplicación de la carga y la distancia del centro de la carga al borde más cercano. Este incremento de momentos debe realizarse sobre todo y con más detenimiento en el área que influye la carga concentrada para evitar en específico el colapso en forma de cono. Se suelen incrementar los momentos solo a lo largo en  $1.5 L$  con centro en la carga, donde  $L$  es el claro de la losa (Gonzales, 2005).

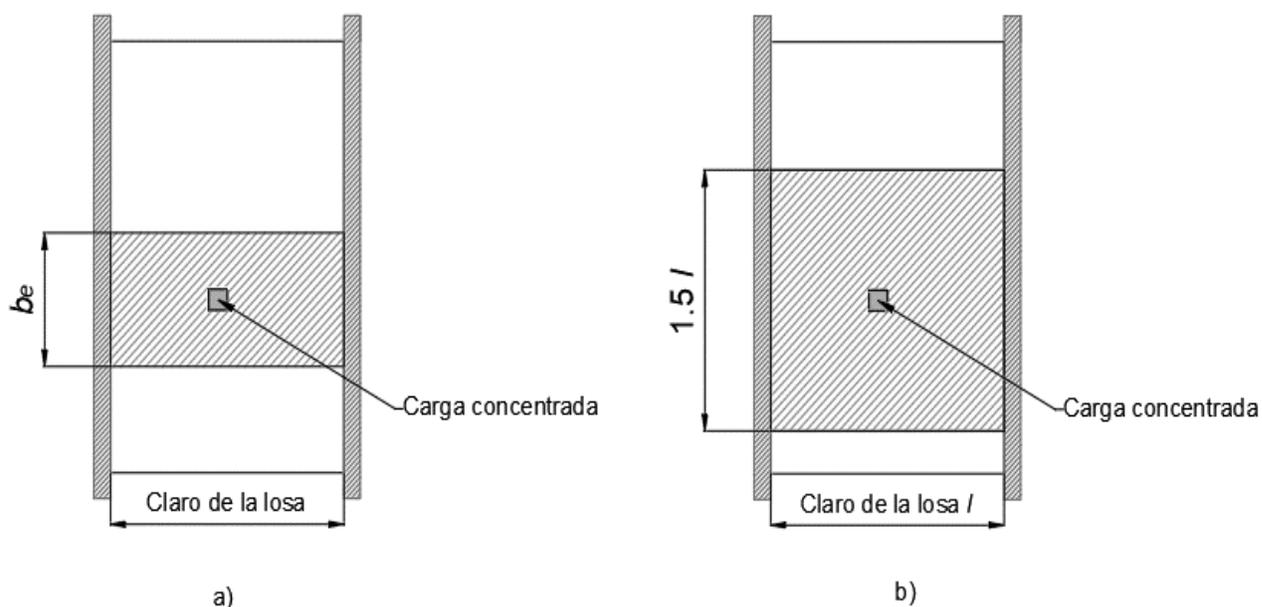


Figura 5.41 Visualización de métodos de cálculo para losas en una dirección con carga concentrada. a) Método de ancho efectivo con carga concentrada. b) Método de líneas de fluencia (Modificado de Gonzales, 2005).

### 5.4.2.3 Análisis de una losa de concreto en una dirección con carga concentrada con el programa ARFEM3D

Se analizó con el programa ARFEM3D una losa de concreto (figura 5.42 inciso a), con dimensiones de 4 x 4 metros con 20 centímetros de espesor y una carga concentrada en el centro de la losa. Esta losa está restringida en dos de sus 4 lados, lo que la hace una losa que trabaja en una dirección, ya que dos de sus lados están apoyados en forma paralela.

Debido a la simetría de este ejercicio se analizó un cuarto de esta losa (figura 5.42 inciso b), para optimizar el análisis con el programa y así poder reducir el tiempo de ejecución y la memoria del cálculo.

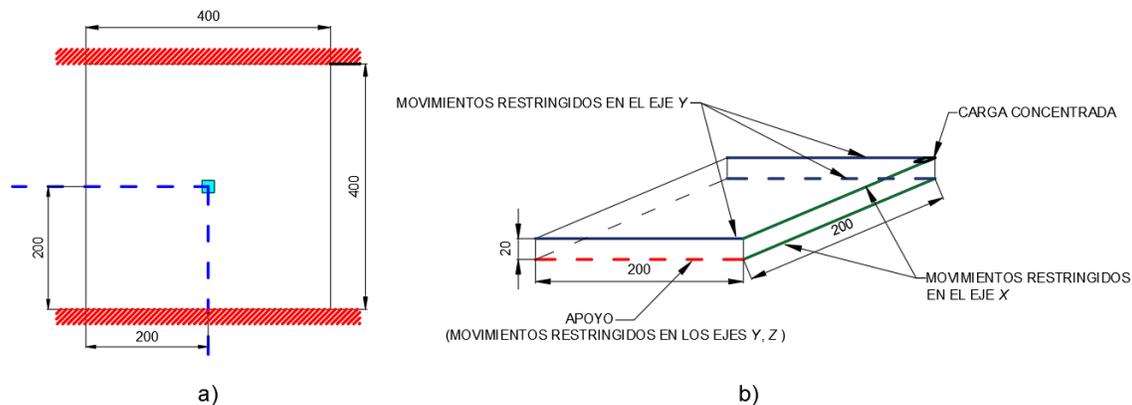


Figura 5.42 Losa de concreto en una dirección con carga concentrada. a) Losa completa de concreto a analizar. b) Cuarto de la losa de concreto analizada por el programa REM3D.

Para poder definir correctamente el problema se delimitó el desplazamiento en las direcciones y y z donde se ubica el apoyo, que sería una viga en los nodos que están en la parte inferior de uno de los extremos de la losa a lo largo del eje y donde los nodos en los eje x, z valen cero. Como se mencionó anteriormente este ejercicio representa un cuarto de una losa completa y simétrica por lo que fue necesario fijar otras condiciones adicionales de desplazamientos en los extremos continuos de la losa. Estas limitaciones de desplazamientos se aplicaron a los nodos en donde su valor en el eje y se encuentra a los 200 centímetros; de igual forma se delimitó el desplazamiento en eje x a todos los nodos donde su posición en este mismo eje tiene valor de 200 centímetros. La carga unitaria se colocó en el nodo 242 cuya coordenada es (200, 200, 20). El material considerado es de concreto clase 1 con  $f'_c = 250 (kg/cm^2)$ , un módulo de elasticidad  $E = 203943(kg/cm^2)$ , relación de Poisson de  $\nu = 0.2$  y resistencia a tensión de  $15.27 (kg/cm^2)$ .

El análisis se realizó con los criterios para obtener tensiones y compresiones máximas de la losa. Se realizaron 50 ciclos, con distintas relaciones de los elementos tetraédricos para cada nuevo mallado al igual que distintos factores de reducción; estas características propuestas se observan en

la Figura 5.43. Estos criterios se hicieron con la intención de reducir la memoria de cálculo, disminuyendo así la generación de elementos tetraédricos.

```

50 3,3 0 1.0 1.0 !# CICLOS, #Ciclos REMALLEO, Lim Remalleos, #Ciclos ajuste props, Fraccion de la max deformac
0.6 0.5 0.4 0.3 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 ! Relación LadoLargo/LadoCorto para refinar y evitar alargamier
0.25 0.45 0.6 20.00 30.00 40.0 50.00 60.00 70.0 ! FACTORES DE REDUCCION DE RESISTENCIA PARA REMALLEO
0010000000 REVISAR LAS OPCIONES PARA NCASO(I)

NCASO(I)
ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS :NCASO[1]
DEFORMACIONES ANGULARES MÁXIMAS :NCASO[2]
TENSIONES Y COMPRESIONES MÁXIMAS :NCASO[3]
EFZO DESVIADOR MÁXIMO DE TENSIÓN :NCASO[4]
LEY DE RESISTENCIA MOHR-COULOMB :NCASO[5]
EFZO NORMAL OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[6]
EFZO CORTANTE OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[7]
EFZO CORT. OCTAEDRICO vs Resist :NCASO[8]

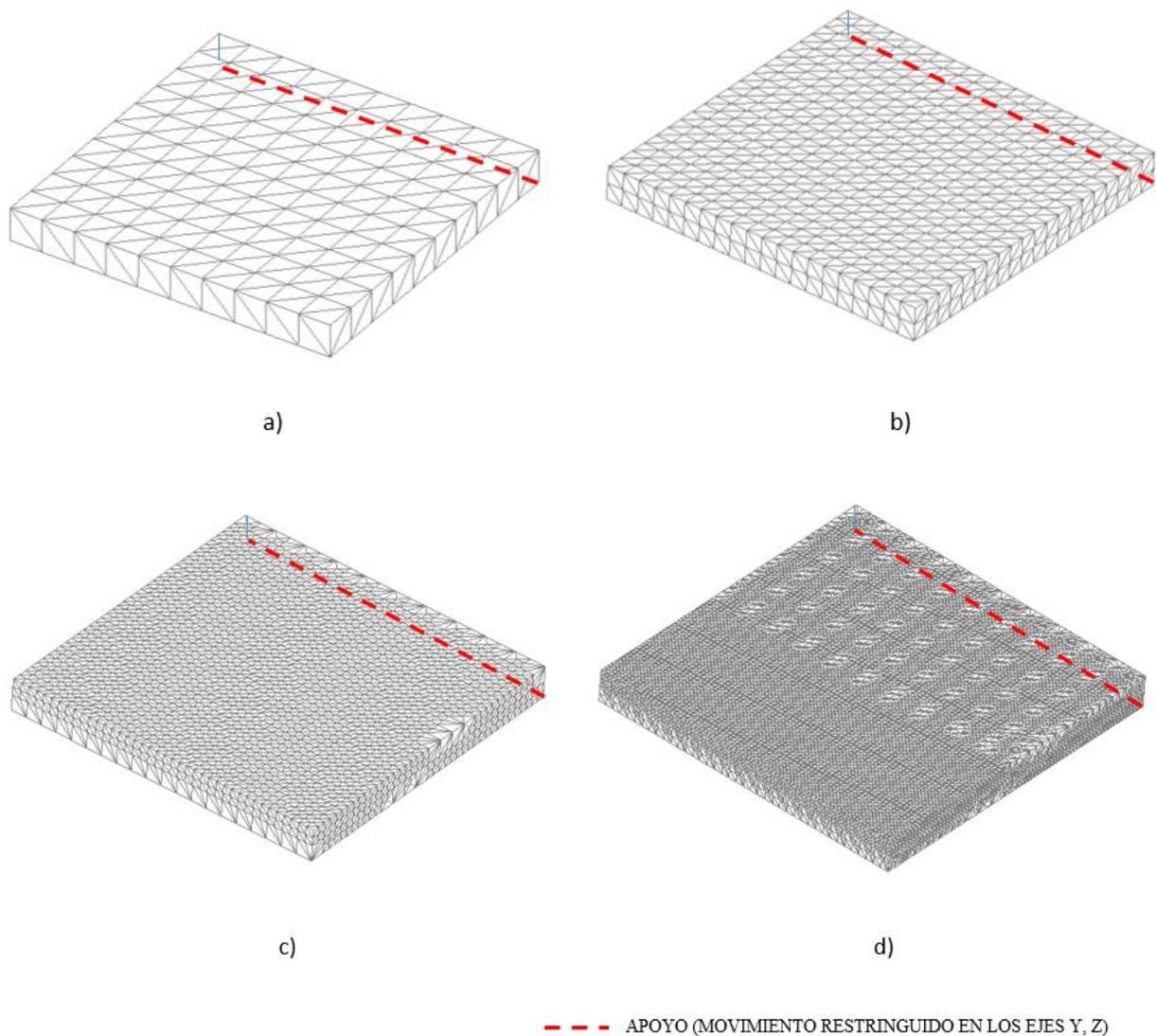
REMALEO TOTAL (n veces) :NCASO[9]=n
SELECCION POR GEOMETRIA ALARGADA :NCASO[10]

```

*Figura 5.43 Criterios de análisis de la losa de concreto*

En la figura 5.44 se observan los resultados obtenidos del análisis realizado con el programa ARFEM3D, en donde se observa en el inciso *a* la malla inicial, la cual se creó con ayuda del programa GMSH. Se observa que esta malla es simple y sus elementos tetraédricos son de tamaño similar entre ellos. En el inciso *b* se presenta una malla mucho más fina que la inicial; en este segundo mallado se observa que aun los elementos tetraédricos son homogéneos con respecto a su tamaño, por lo que en este análisis no se ve influenciado por el estado de esfuerzos.

En el tercer mallado que se muestra en el inciso *c* se observa que ciertos elementos ya tuvieron una variación de tamaño respecto al resto, debido a la influencia de la distribución de esfuerzos. En el inciso *d* se puede observar un mallado más fino y con una transición de tamaños, esto por supuesto debido a la variación de esfuerzos de tensión de la zona central a los extremos.



*Figura 5.44* Mallado obtenido del programa ARFEM3D. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado.

En la figura 5.45 se observan los esfuerzos en  $\sigma_x$ , desde la malla inicial hasta el tercer mallado. Se aprecia como el mallado se va definiendo en las zonas donde se encuentran los mayores esfuerzos de tensión y como la transición entre los esfuerzos de tensión y compresión se va clarificando.

Dicha zona de transición de esfuerzos no puede observarse en los primeros mallados, incisos *a* y *b*.

Se aprecia en las primeras cuatro imágenes que los mayores esfuerzos de tensión y compresión se ubican en la parte central de la losa, donde se encuentra la carga y donde la teoría nos indica que es la zona donde se debe reforzar con acero.

En la imagen del inciso *e* se presenta una vista de la parte inferior de la losa; se aprecia que en la esquina donde se colocó la carga se encuentran los mayores esfuerzos de tensión. Dichos esfuerzos se visualizan en color rojo, mientras que los mayores esfuerzos de compresión (color azul) se encuentran en la zona donde estaría ubicada la viga de apoyo. Se puede observar que el programa no detalla esta zona debido a que los esfuerzos de compresión no son lo suficientemente altos como para que realice un refinamiento.

Analíticamente, el ancho efectivo se obtiene con la siguiente fórmula. Como la carga se encuentra en el centro de la losa y las dimensiones de los lados de los apoyos es igual a los lados libres:

$$b_e = \frac{b_o + \beta l_y}{l_x + \beta l_y} l_x \quad (\text{Ecuación 5.2})$$

El ancho efectivo tiene un valor de 200.5 centímetros, teniendo como centro del ancho efectivo al centro de la losa; es decir que de la figura 5.45, en la esquina donde se encuentra la carga hacia la esquina donde se encontraría la viga estaría involucrada la mitad de esta losa. Las gráficas muestran que los esfuerzos de tensión causados por la carga son de menor magnitud que las obtenidas por el método del ancho efectivo; de igual forma se puede apreciar los momentos y deflexiones obtenidas en los apoyos la cual no es apreciable con el método de ancho efectivo.

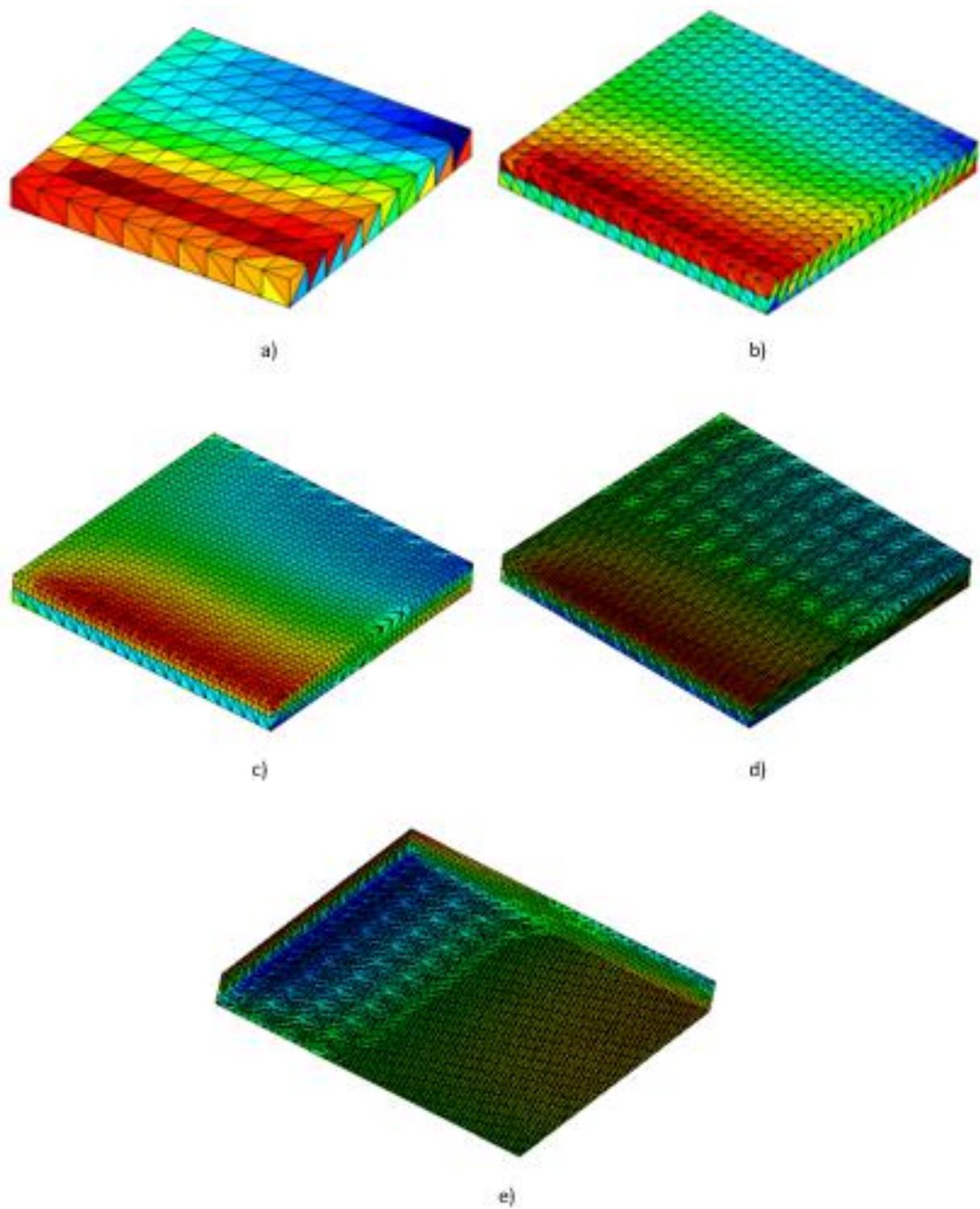


Figura 5.45 Visualización de los esfuerzos  $\sigma_x$  obtenidos del programa ARFEM3D. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado. e) Cuarto mallado, vista inferior.

Al calcular los momentos flexionantes de la losa analíticamente, como una viga de un ancho unitario y con una carga en el centro, se observa que su deflexión máxima está el centro de la losa. Debido a que la losa se analiza como una viga de ancho unitario, se considera que a lo largo de la losa en dirección paralela a los bordes de los apoyos, su desplazamiento será el mismo; sin embargo, en la vida real, en los extremos libres se incrementa el desplazamiento. Este comportamiento también se puede observar en la figura 5.46, para los resultados obtenidos por el análisis del programa ARFEM3D. Los mayores desplazamientos en la dirección z se presentan de color azul, mientras que en color rojo los desplazamientos son prácticamente nulos en esa dirección. Se puede observar una pequeña curvatura en la losa donde se muestran los bloques de desplazamiento, donde la curvatura se va abriendo mientras se aleja del centro de la losa.

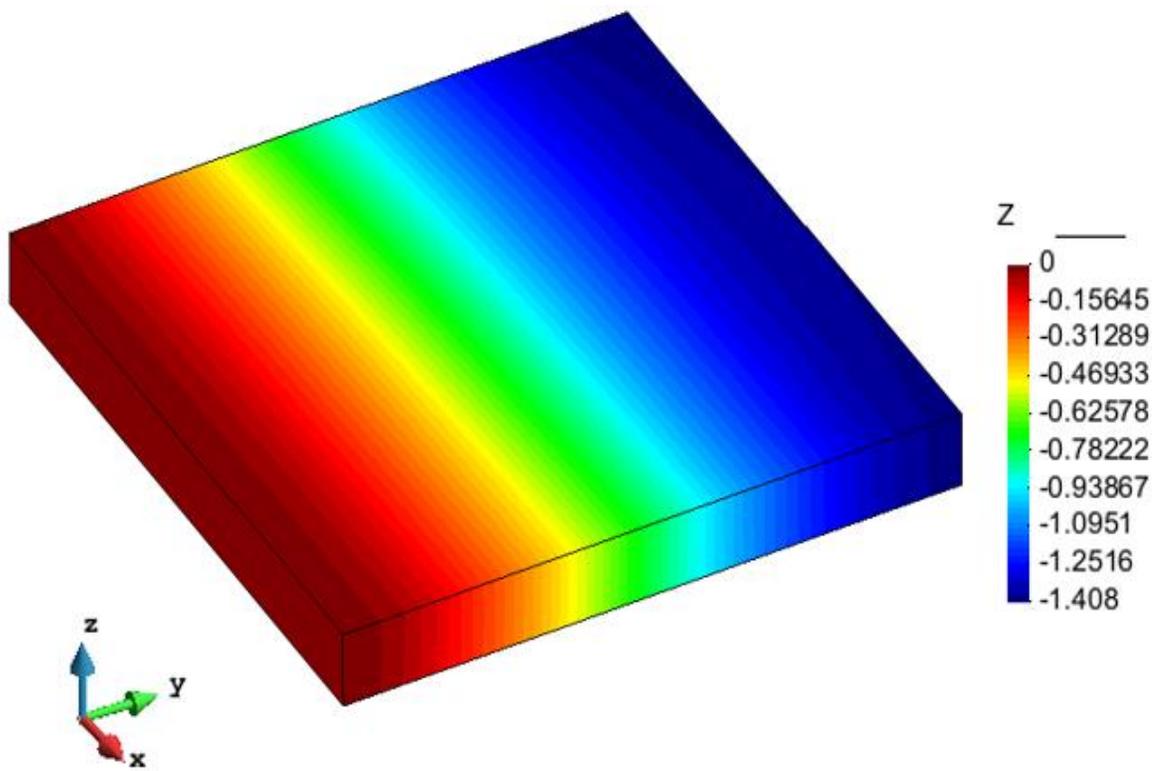


Figura 5.46 Visualización de los desplazamientos en dirección al eje z

### 5.4.3 LOSA EN DOS DIRECCIONES

Las losas en dos direcciones son aquellas losas que están apoyadas en todo su perímetro y por lo tanto trabajan en dos direcciones ya que a diferencia de las losas en una dirección donde se presenta una curvatura en una dirección, las losas en dos direcciones se encuentran sometidas a dos curvaturas.

Es importante definir que estas losas de dos direcciones forman parte de un sistema estructural formado por la losa y vigas; su estudio no puede realizarse de forma aislada sin considerar estos

otros elementos ya que cada comportamiento de cada elemento influye en todo el sistema. Debido a esta condición, estas losas presentan una condición estructural específica, en donde la rigidez a flexión de los apoyos de estas losas es mayor al de la losa. Actualmente existen programas que analizan a la losa con el método del elemento finito y que ayudan a obtener resultados más precisos que otros métodos que se usan para analizar a la losa de forma aislada y simplificada.

Los métodos aproximados para el diseño de losas de dos direcciones de forma aislada cumplen con la hipótesis de que los apoyos tengan una mayor rigidez a flexión que la misma losa. La teoría establece que la zona de momentos máximos de las losas en dos direcciones se encuentra en las diagonales trazadas a partir del centro de la losa, pero resulta difícil determinar los momentos de esta forma.

La técnica más usada es aplicando el uso de tablas de coeficientes de momentos; en las Normas Técnicas Complementarias de la CDMX se encuentra dicha tabla. Dichos momentos se obtuvieron con análisis donde se considera a la losa como una composición individual de vigas que trabajan en ambas direcciones, creando intersecciones entre ellas. Cada intersección tiene diferentes deflexiones y varían con respecto a la posición en la que se encuentran los apoyos; este análisis solo se puede hacer a losas regulares y con carga uniforme. Para el diseño de losas en dos direcciones con carga concentrada, las NTC de 2017 establecen que se realice un incremento a la suma de momentos resistentes por unidad de ancho, al igual que a las losas de una dirección. La suma de momentos se realiza tanto a momentos negativos como positivos y en cada dirección y solo se puede realizar a losas donde la carga concentrada se encuentre dentro de la zona de intersección de las franjas centrales de la losa.

Los métodos aproximados existentes, por lo general son aplicables a losas con ciertas condiciones físicas como los apoyos y la carga a la que están sometidas. Los métodos como el de diferencias finitas y elementos finitos permiten el análisis de losas con una mayor variedad de condiciones físicas, cargas y geometrías.

#### **5.4.3.2 ANÁLISIS DE UNA LOSA DE CONCRETO EN DOS DIRECCIONES CON CARGA EN EL CENTRO CON EL PROGRAMA ARFEM3D**

Se analizara con el programa ARFEM3D una losa de concreto clase 1, de dimensiones de 400 x 400 x 20 cm y con una carga concentrada en el centro de la losa. Esta losa se encuentra apoyada en sus cuatro lados haciendo que su análisis sea el de una losa de dos direcciones. Esta losa se muestra en la figura 5.47 inciso *a*.

Debido a la simetría que existe en este ejercicio, se analizó un cuarto de la losa. Esta losa tiene ciertas limitaciones de movimientos en sus extremos ya que dos de sus lados se encuentran limitados por los apoyos (vigas). Para este ejercicio se omite en el análisis a las vigas y sólo se consideran las condiciones de frontera fijas debidas a estas.

En el archivo de geometría se establecieron estas condiciones fijando el valor de uno al nodo en la dirección no podrá moverse y cero en el eje en dirección que podrá moverse. A lo largo del eje  $x$ , se limitan los desplazamientos de los nodos en las direcciones  $y$  y  $z$ , cuando ambos ejes se encuentren ubicados en la posición de cero y se limita el desplazamiento en la dirección  $y$  cuando este eje vale cero y se encuentre en el eje  $z$  con la posición de veinte centímetros. Esta limitación de movimientos se ve en el inciso *b* de la figura 5.47.

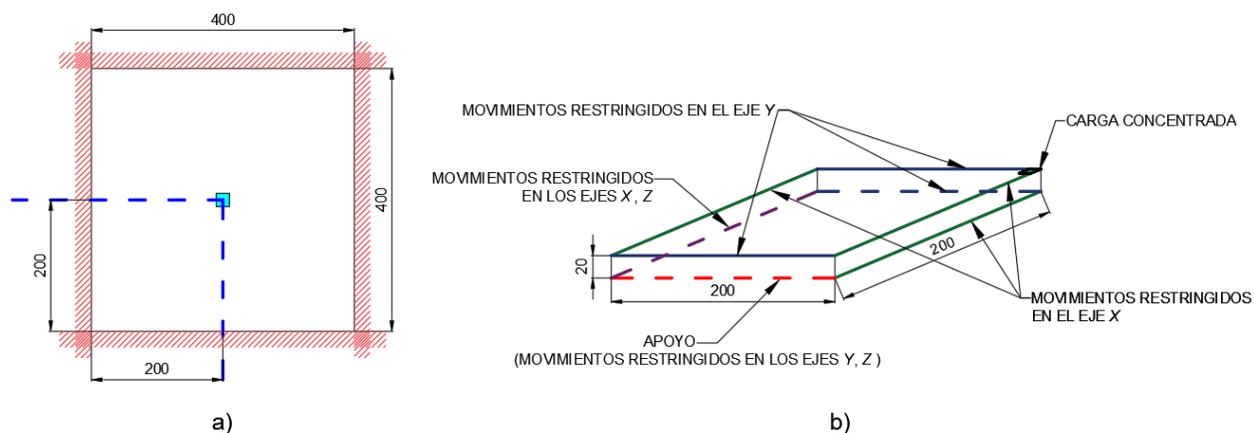


Figura 5.47 Losa de concreto en dos direcciones con carga concentrada en el centro. a) Losa completa de concreto a analizar. b) Cuarto de la losa de concreto analizada con el programa ARFEM3D

En el eje  $y$  se limitó a los nodos en la dirección  $x$  y  $z$  cuando su coordenada en ambos ejes sea cero; se limitó a los desplazamientos en el eje  $x$  a los nodos que se encuentran ubicados el eje  $x$  en cero y en el eje  $z$  en veinte centímetros. Estas condiciones corresponden a los nodos donde se encuentran los apoyos.

Para los nodos que se encuentran en los extremos donde la losa es continua, se limitó el desplazamiento a los nodos el desplazamiento en el eje  $y$  donde continúa la losa en esa dirección por lo que la coordenada de los nodos en el eje  $y$  vale 200 centímetros. Mientras que para la continuación de la losa en la dirección del eje  $x$  se restringen los movimientos en esa dirección a los nodos que se encuentran a los 200 cm en el eje  $x$ .

La carga unitaria a la que está sometida la losa se encuentra en el centro de la losa completa, por lo que en el modelo que se preparó para el programa ARFEM3D, tiene una coordenada en  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de 200, 200 y 20 centímetros respectivamente. Esta carga se encuentra en una de las esquinas superiores de la losa modelada.

El material que conforma la losa es de concreto clase 1 con  $f'_c = 250 (kg/cm^2)$ , un módulo de elasticidad  $E = 203943(kg/cm^2)$ , la relación de Poisson es de  $\nu = 0.2$  y resistencia a tensión de  $15.27 (kg/cm^2)$ .

Se colocaron los siguientes criterios de análisis de la losa (figura 5.48). Se observa que el análisis seleccionado es respecto a las tensiones y compresiones máximas de la losa. Este análisis seleccionado ayuda a determinar las áreas donde se necesite aumentar la resistencia a tensión del elemento. Se determinaron cincuenta ciclos. En los primeros tres mallados se tendrán elementos simétricos, mientras que en el cuarto mallado se tendrá mayor holgura respecto a la forma de los elementos. Los factores de reducción disminuyen con respecto a cada mallado.

```
50 3,3 0 1.0 1.0 !# CICLOS, #Ciclos REMALLEO, Lim Remalleos, #Ciclos ajuste props, Fraccion de la max deformacion, Fraccion de la resistencia máxima
0.6 0.5 0.4 0.3 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 ! Relación LadoLargo/LadoCorto para refinar y evitar alargamiento de elementos
0.25 0.45 0.6 20.00 30.00 40.0 50.00 60.00 70.0 ! FACTORES DE REDUCCION DE RESISTENCIA PARA REMALLEO
0010000000 REVISAR LAS OPCIONES PARA NCASO(I)

NCASO(I)
ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS :NCASO[1]
DEFORMACIONES ANGULARES MÁXIMAS :NCASO[2]
TENSIONES Y COMPRESIONES MÁXIMAS :NCASO[3]
EFZO DESVIADOR MÁXIMO DE TENSIÓN :NCASO[4]
LEY DE RESISTENCIA MOHR-COULOMB :NCASO[5]
EFZO NORMAL OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[6]
EFZO CORTANTE OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[7]
EFZO CORT. OCTAEDRICO vs Resist :NCASO[8]

REMALLEO TOTAL (n veces) :NCASO[9]=n
SELECCION POR GEOMETRIA ALARGADA :NCASO[10]
```

Figura 5.48 Criterios de análisis de la losa de concreto en dos direcciones

Considerando todas las características de la losa ingresadas en sus archivos correspondientes (geometría, material y fuerza) y colocando los criterios de refinamiento, se procedió a correr el programa de análisis ARFEM3D.

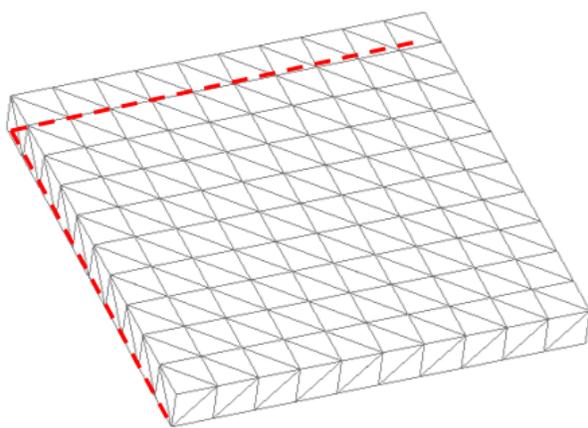
Con el programa de visualización se pueden examinar los resultados obtenidos del programa ARFEM3D, esta herramienta permite visualizar los esfuerzos, desplazamientos y deformaciones. En la figura 5.49 se presentan los esfuerzos máximos de compresión y de tensión.

Las mallas obtenidas debido al refinamiento se presentan en la figura 5.49, desde la malla inicial (a), hasta el tercer mallado (d). Se aprecia como por cada ciclo la definición de los elementos en las zonas donde se presentan las tensiones más grandes se va definiendo claramente y los elementos se van haciendo cada vez más pequeños. En la malla inicial, los elementos tetraédricos son homogéneos es su tamaño.

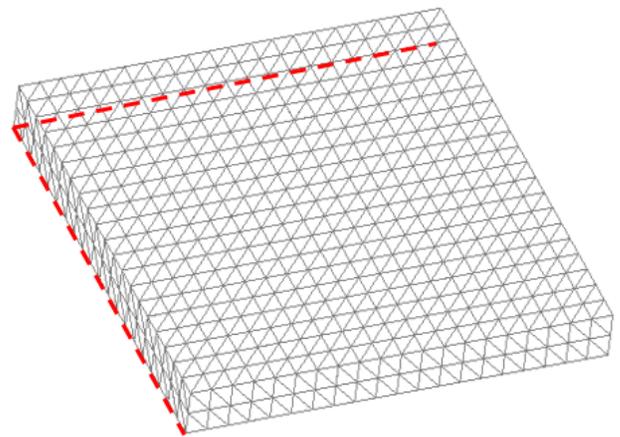
Como se generó la malla inicial sin tomar en consideración los esfuerzos que se desarrollan en la losa y considerando los criterios establecidos para el análisis, esto ocasionó en el primer mallado la disminución del tamaño de los elementos de forma homogénea en todo el cuerpo de la losa.

En el segundo ciclo de refinamiento, se estableció el doble del factor de reducción que en el primer mallado y continuó con un factor de homogeneidad entre los elementos nuevos de este ciclo. En comparación con la malla inicial y el primer mallado, en este segundo mallado se refinaron los elementos ubicados en la zona donde se encuentran los mayores esfuerzos de tensión, tanto en la parte superior de la losa como en la parte inferior. Se aprecia que la definición de los elementos se realizó en el centro de la losa que en la imagen se encontraría en la esquina derecha, tanto en la parte superior de la losa como en la parte inferior, y a lo largo del perímetro de la losa sin llegar a la esquina donde se conectan las dos traveses.

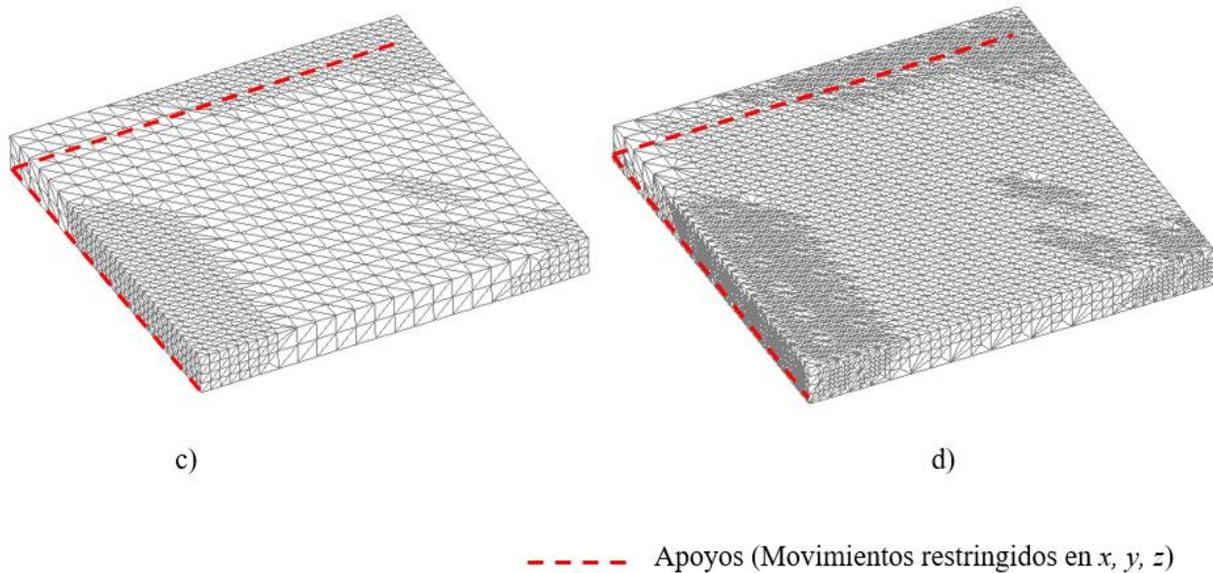
En el tercer mallado los elementos tetraédricos disminuyeron de tamaño en las zonas de mayor tensión. Estos elementos son más irregulares en cuanto a su forma, ya que en los criterios del análisis se dio libertad para reducir la regularidad de los lados de los elementos.



a)



b)



*Figura 5.49* Mallado obtenido con el programa ARFEM3D en un cuarto de losa en dos direcciones. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado.

Así mismo, el programa refina las zonas donde hay mayor compresión, aunque el concreto tenga una mayor resistencia; esto se estableció en el criterio de refinamiento.

Se observa en el segundo y tercer refinamiento que las zonas críticas son el centro de la losa completa y en los extremos donde se encuentran los apoyos, como se sabe, en estas zonas se encuentran tanto los esfuerzos máximos de tensión como los de compresión.

Estos esfuerzos se presentan en la figura 5.50. En esta imagen se muestran los esfuerzos de tensión de color rojo y los mayores esfuerzos de compresión de color azul. La zona de transición de esfuerzos de tensión a compresión va de color naranja, amarillo y luego verde.

En la figura 5.50 se muestran los esfuerzos calculados para los casos de la malla inicial y los tres refinamientos subsecuentes. Puede apreciarse que, conforme se refina más la malla, los contornos de esfuerzos se van definiendo con más claridad.

En el inciso *e* de la misma figura se presentan los esfuerzos desde una vista inferior de la losa.

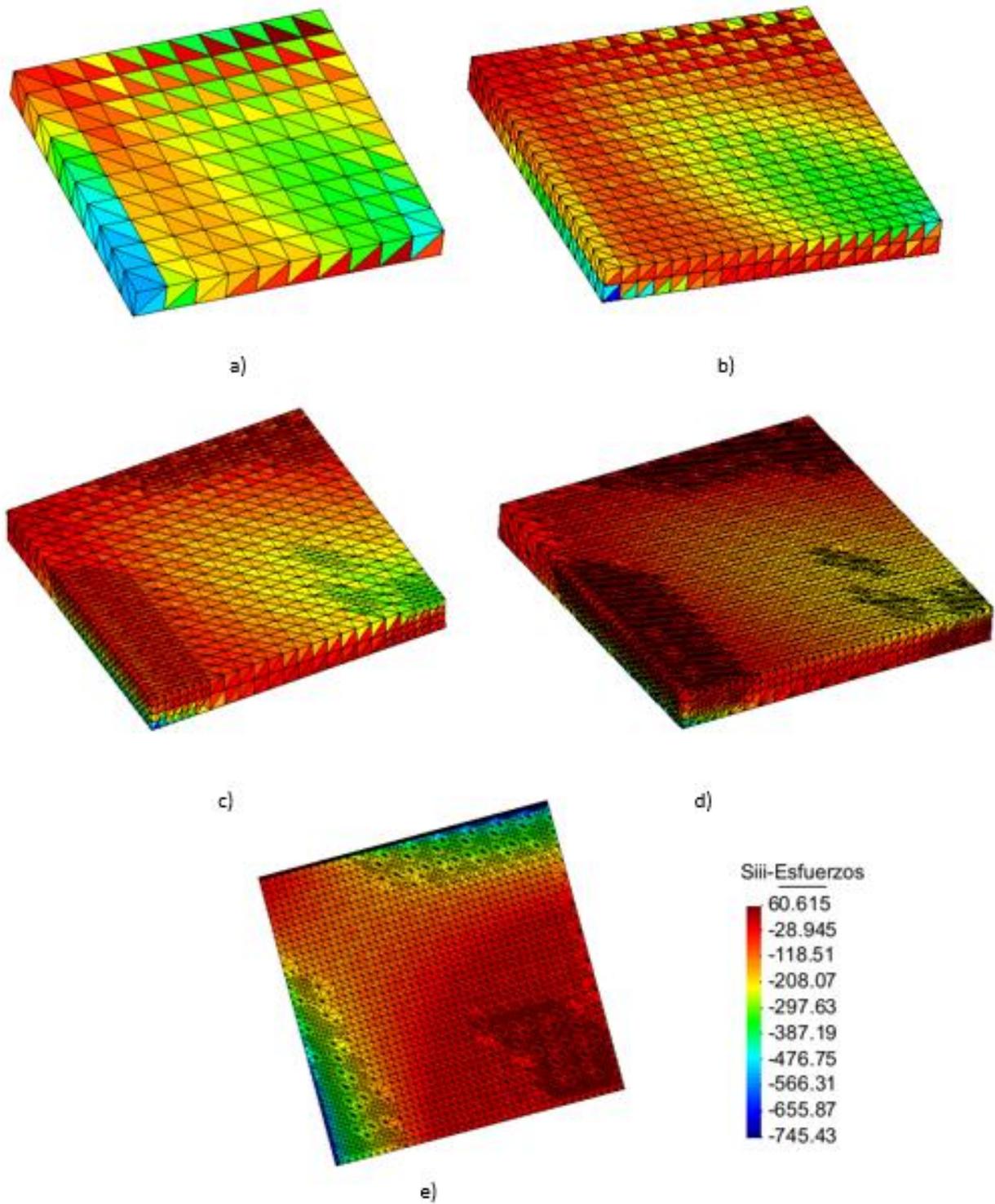


Figura 5.50 Visualización de los esfuerzos de un cuarto de losa de dos direcciones obtenido del programa ARFEM3D. a) Malla inicial. b) Segundo mallado. c) Tercer mallado. d) Cuarto mallado. e) Cuarto mallado vista inferior

Al revisar las deflexiones estimadas con los análisis de losa (figura 5.51) puede observarse que los desplazamientos van incrementando en forma circular, desde los apoyos del elemento hasta el centro del mismo.

La deflexión máxima de la losa se presenta en el centro de la misma.

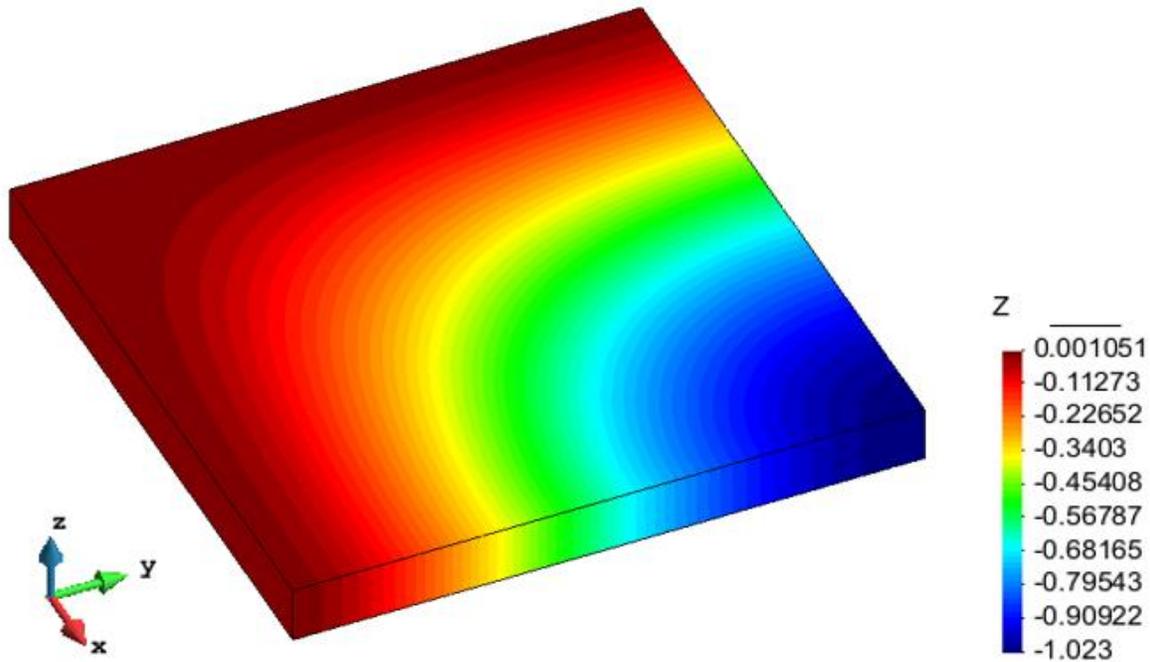


Figura 5.51 Visualización de los desplazamientos de un cuarto de losa de dos direcciones obtenidos del análisis con refinamiento utilizando el programa ARFEM3D

## 5.5 VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON INCREMENTOS DE CARGA A DOS TERCIOS

En este caso analizó una viga rectangular simplemente armada con dimensiones de 25 centímetros de ancho, por 50 centímetros de alto y con 500 centímetros de largo. Esta viga se encuentra apoyada en sus extremos como se muestra en la figura 5.52 y se mantiene sometida a incrementos de carga concentrada en ambos tercios medios de su claro.

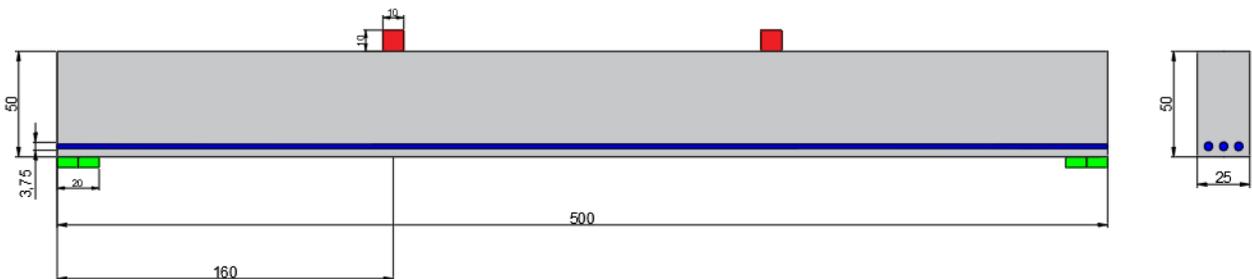


Figura 5.52 Viga rectangular simplemente armada con carga a los dos tercios y apoyada en sus extremos

Este problema se simplificó al momento de definir sus condiciones físicas y sus propiedades mecánicas para el programa ARFEM3D, ya que debido a su simetría. Estas simplificaciones son mencionadas en la descripción de la definición física, así como la definición de las propiedades mecánicas de los materiales (figura 5.53).

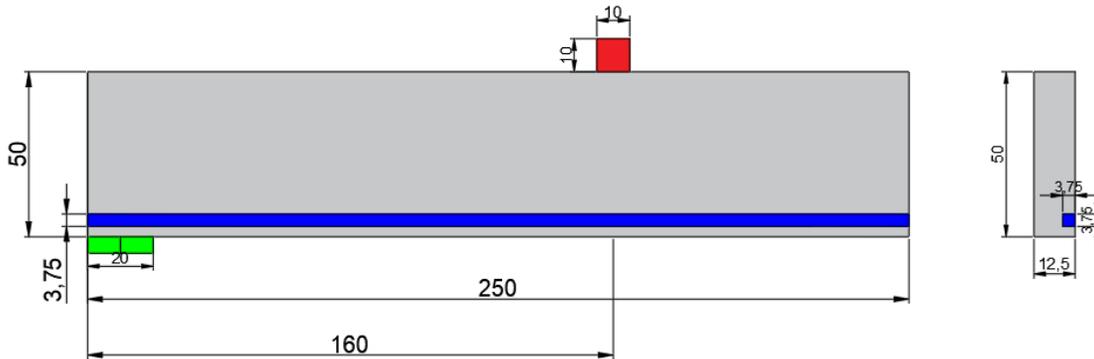


Figura 5.53 Simplificación del análisis de la viga rectangular simplemente armada con carga a los dos tercios y apoyada en sus extremos

## 5.5.2 DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LA VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON INCREMENTOS DE CARGA A DOS TERCIOS

Al definir el cuerpo de la viga en el programa Geo se generó un cuerpo simplificado de la viga completa, para así facilitar la resolución del problema, optimizar el análisis y reducir el espacio de memoria de cálculo. Esta simplificación reside en analizar un cuarto de toda la viga haciendo uso de la simetría que tiene este problema, al igual que se realizó anteriormente en los problemas presentados en este trabajo de tesis.

El área del acero se definió a lo largo de la viga en el lecho inferior. Para el armado de la viga se consideraron tres varillas, las cuales tienen un área transversal total de  $7.03 \text{ cm}^2$ . Haciendo uso de la teoría de la sección transformada se modificó el área del acero para ampliar su área; de esta forma se obtuvo una malla más simétrica, de menor número de elementos tetraédricos y una malla inicial más homogénea.

Mediante una relación de módulos de elasticidad y de esfuerzos, se usó el criterio de la sección transformada para obtener una mayor área de acero y un módulo de elasticidad correspondiente a esa nueva área. Se igualaron las ecuaciones de esfuerzo del área original con la de la sección transformada para posteriormente despejar el módulo de elasticidad de la sección transformada. Este procedimiento se muestra a continuación.

Ecuaciones de esfuerzo de área de acero original y de área de sección transformada:

$$F = f_s A_s$$

$$F = f_{sT} A_{sT} \quad (\text{Ecuación 5.3})$$

Sustituyendo valores de la ecuación de módulo de elasticidad:

$$F = \varepsilon_s E_s A_s$$

$$F = \varepsilon_s E_{sT} A_{sT} \quad (\text{Ecuación 5.4})$$

Igualando ecuaciones:

$$\varepsilon_s E_s A_s = \varepsilon_s E_{sT} A_{sT} \quad (\text{Ecuación 5.5})$$

Despejando el módulo de elasticidad de la sección transformada:

$$E_{sT} = \frac{A_s}{A_{sT}} E_s \quad (\text{Ecuación 5.6})$$

Con la ecuación del módulo de elasticidad ya despejada se puede incrementar el área del acero; en este caso se incrementó cuatro veces el área original:

$$E_{sT} = \frac{A_s}{4A_s} E_s \quad (\text{Ecuación 5.7})$$

Sustituyendo los valores correspondientes se obtuvieron los siguientes valores para el área de sección transformada y del módulo de elasticidad correspondiente a esa área:

$$A_{sT} = 28.125 \text{ cm}$$

$$E_{sT} = \frac{E_s}{4} \quad (\text{Ecuación 5.8})$$

El área del acero paso de tener una forma circular a una rectangular con dimensiones de 3.75 cm por 7.50 cm. Al añadir el cuerpo del acero en la viga en el programa GMSH se respetó el centro de masa del acero en forma circular para evitar diferencias en los resultados.

Para representar los apoyos de la viga se creó un cuerpo en la esquina de la trabe, de igual forma se creó un cuerpo para definir el área de la carga concentrada. La representación del cuerpo de la viga generada en el programa GMSH se observa en la figura 5.54.

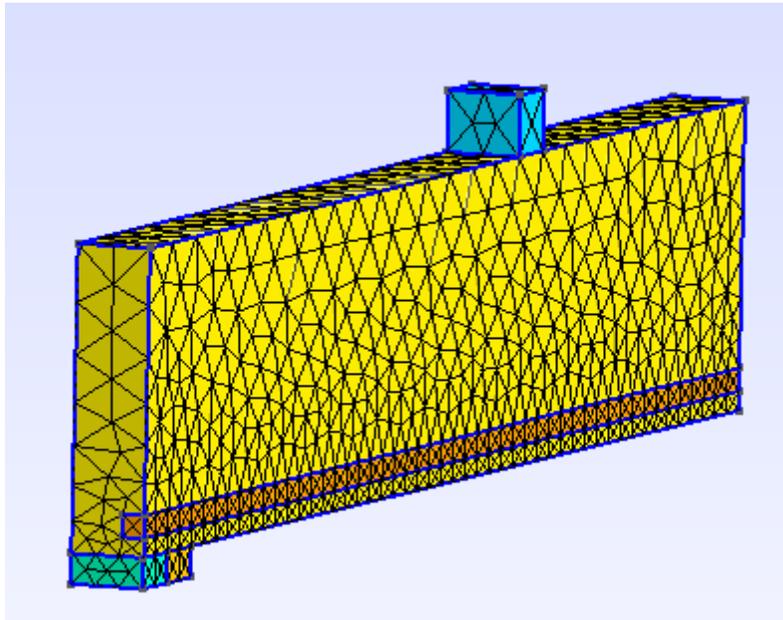


Figura 5.54 Malla de la viga generada en el programa GMSH

Se creó el archivo de geometría en donde se establecieron las condiciones de frontera para los nodos fijos y libres.

El archivo de geometría se presenta en la figura 5.55, en donde están las coordenadas de los nodos al igual que las restricciones a desplazamiento en alguna de sus tres direcciones, siendo 1 para restricción y 0 para libre.

CUARTO DE VIGA RECTANGULAR						
	1531	5535				
1	0	0	0	0.000000	0.000000	-5.000000
2	0	0	0	4.166667	0.000000	-5.000000
3	0	0	0	8.333333	0.000000	-5.000000
4	1	0	0	12.500000	0.000000	-5.000000
5	0	0	0	2.508503	0.000000	-2.500000
6	0	0	0	6.250000	0.000000	-2.500000
7	0	0	0	9.991497	0.000000	-2.500000
8	0	0	0	0.000000	0.000000	0.000000
9	0	0	0	4.166667	0.000000	0.000000
10	0	0	0	8.333333	0.000000	0.000000
11	1	0	0	12.500000	0.000000	0.000000
12	0	0	0	10.520833	0.000000	1.562500
13	0	0	0	6.250000	0.000000	1.868056
14	0	0	0	2.462186	0.000000	2.515913
15	0	0	0	8.750000	0.000000	3.125000
16	1	0	0	12.500000	0.000000	3.125000
17	0	0	0	5.241512	0.000000	4.716389
18	0	0	0	10.625000	0.000000	5.000000
19	0	0	0	0.000000	0.000000	5.204476
20	0	0	0	8.750000	0.000000	6.875000
21	1	0	0	12.500000	0.000000	6.875000
22	0	0	0	5.236884	0.000000	8.709890
23	0	0	0	9.234679	0.000000	9.468925
24	0	0	0	0.000000	0.000000	10.950684
25	1	0	0	12.500000	0.000000	12.156177
26	0	0	0	5.854109	0.000000	12.558575
27	0	0	0	8.153090	0.000000	16.770761
28	0	0	0	0.000000	0.000000	17.295012
29	1	0	0	12.500000	0.000000	18.084097
30	0	0	0	6.574358	0.000000	21.619297

Figura 5.55 Archivo de geometría.

### 5.5.3 DEFINICIÓN DE MATERIALES Y PROPIEDADES MECÁNICAS DE LA VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON INCREMENTOS DE CARGA A DOS TERCIOS

Los materiales involucrados en este problema son dos, el concreto y el acero. Como se modificó el área del acero en este problema se modificaron de igual forma las propiedades mecánicas de este.

La viga es de concreto clase 1, por lo que sus propiedades son  $f'_c = 220 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$ , módulo de elasticidad  $E_s = 200,000 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$ , y la relación de Poisson es de  $\nu = 0.2$ .

Las propiedades iniciales consideradas del acero en este problema fueron;  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$  para la resistencia a tensión y compresión,  $E_s = 518011.3625 \text{ kg/cm}^2$  y la relación de Poisson de  $\nu = 0.3$ .

Para el análisis no lineal con el programa ARFEM3D y el análisis de incremento de carga se colocaron las curvas de esfuerzo-deformación del acero y del concreto en el archivo del material.

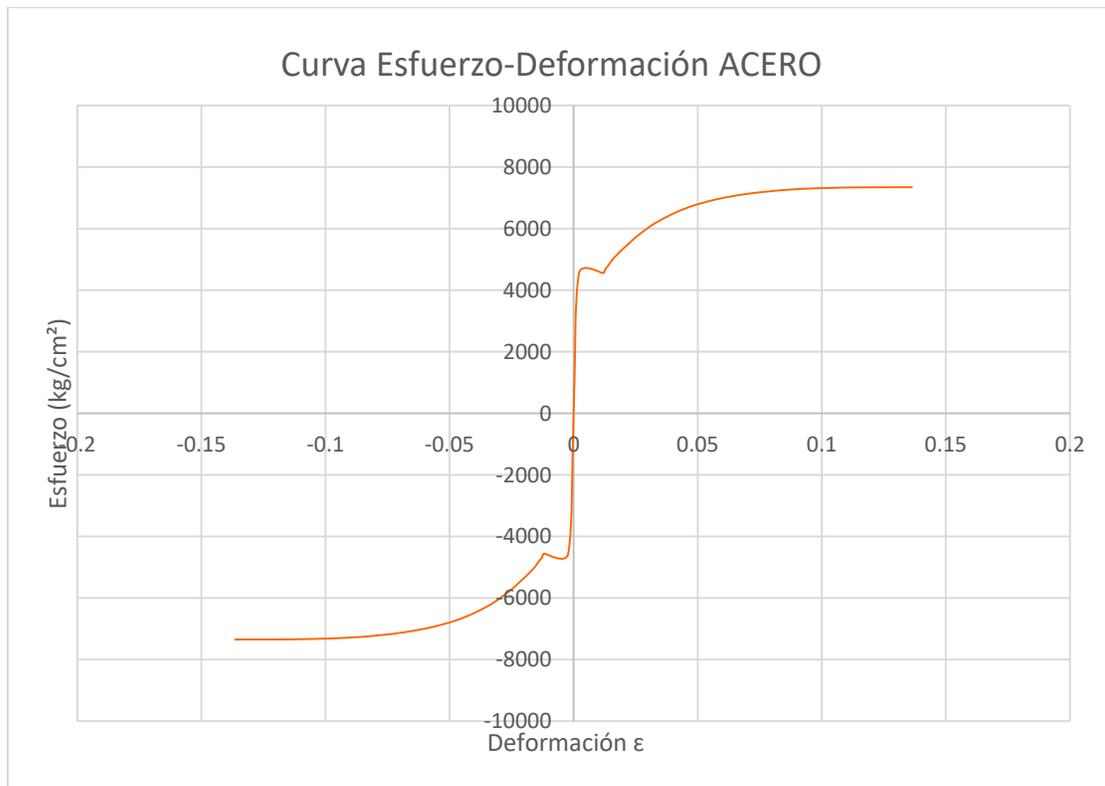
La curva esfuerzo-deformación representa los esfuerzos que sufre un material en función de la deformación que experimenta al mismo tiempo. Para el acero esta curva está compuesta principalmente por cuatro secciones. Una sección elástica, donde el material aún puede recuperar su forma original, una sección de cedencia donde es imposible que el material regrese a su forma original y se comporta plásticamente, una zona de endurecimiento donde el material fue sometido a un gran esfuerzo para sacarlo de la zona de cedencia, en esta zona el material experimenta una deformación y al mismo tiempo un endurecimiento; y una zona de estricción la cual inicia desde el punto de esfuerzo máximo hasta un esfuerzo de ruptura, donde el material ya no es capaz de soportar algún esfuerzo y empieza a fracturarse.

Se agregó en el archivo de materiales los resultados de una curva modificada de esfuerzo-deformación del acero obtenida de un conjunto de pruebas proporcionadas por el DR. Armando Hermosillo. Se modificó esta curva debido a que se transformó el área del acero y el módulo de elasticidad ya que este último resulta ser la tangente de la pendiente de la curva en la sección elástica.

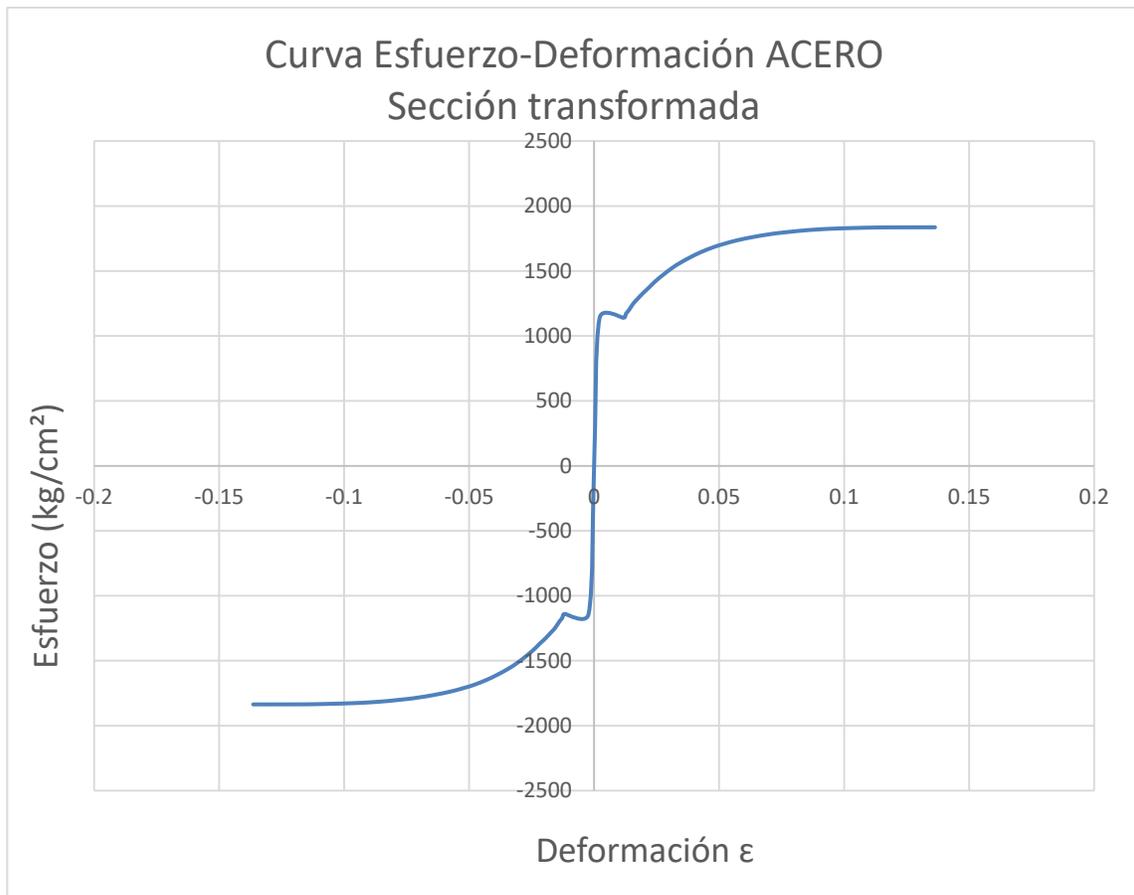
La curva esfuerzo deformación del acero y la modificada se observa en la figura 5.56. En la figura del inciso *a* se muestra la curva de esfuerzo deformación original obtenida de una prueba de laboratorio, con un módulo de elasticidad de  $E_s = 2,072,045.45 \text{ kg/cm}^2$ .

En la curva esfuerzo-deformación de la sección transformada, el módulo de elasticidad de la sección transformada, resulta en  $E_s = 518,011.3625 \text{ kg/cm}^2$ . En esta imagen se observa la zona elástica y la zona de cedencia del acero de la sección transformada; estas dos zonas están separadas por el esfuerzo de fluencia el cual tiene un valor de  $1,139.625 \text{ kgf/cm}^2$ . A partir de este

esfuerzo, el material se deforma permanentemente y es el esfuerzo que se considera para el diseño estructural como el esfuerzo de resistencia máximo.



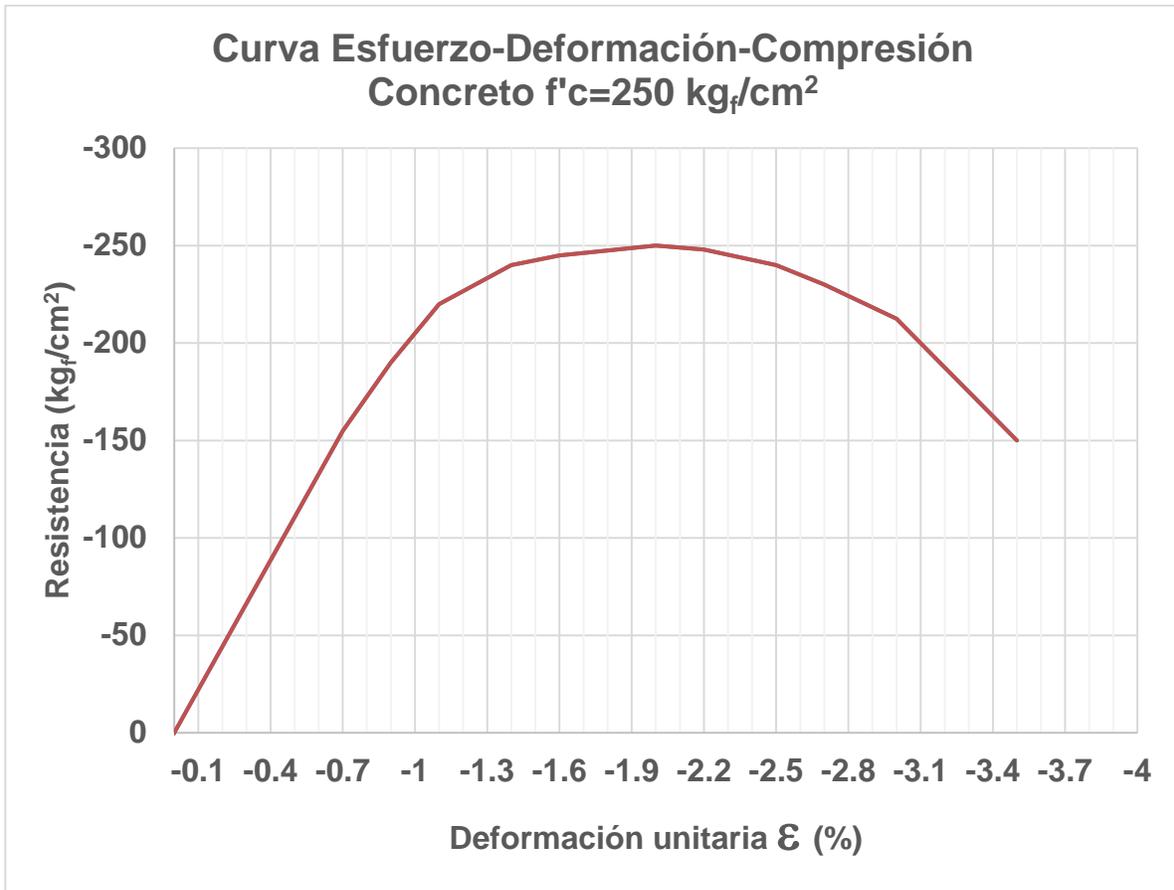
a)



b)

*Figura 5.56* Curva esfuerzo-deformación acero. a) Curva esfuerzo-deformación de acero. b) Curva esfuerzo-deformación de acero sección transformada.

En la figura 5.57, se observa la gráfica esfuerzo-deformación del concreto; se observa, que aproximadamente al 40% del esfuerzo máximo se pierde el comportamiento lineal, llegando hasta un esfuerzo máximo. El esfuerzo último es muy cercano a éste, pero de menor valor, y es donde se considera una deformación útil o ultima. Dichos dato se agregaron al archivo de materiales.



*Figura 5.57* Curva esfuerzo-deformación a compresión de concreto

#### **5.5.4 DEFINICIÓN DE FUERZAS APLICADAS EN VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON INCREMENTOS DE CARGA A DOS TERCIOS**

En el archivo de fuerzas se definieron 99 incrementos de carga en los nodos que se encuentran en el área del cuerpo diseñado para representar la carga los cuales, fueron 8 nodos y estos se pueden apreciar en el figura 5.58.

```

1      8      CARGAS UNIFORMES DEBIDAS A PRESIONES Y/O PUNTUALES
99 !No. DE INCREMENTOS ENTRE LAS CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFORMES Y PUNTUALES
8      000.00      5.00      000.00 500.00      # NODOS DEFINIENDO LOS INTERVALOS + CARGAS INICIAL Y FINAL UNIFOF
954
955
956
988
989
1022
1023
1024
954 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
955 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
956 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
988 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
989 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
1022 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03
1023 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 !FUERZAS EN CADA NODO
1024 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03 0.000E+00 0.000E+00-0.000E+03

```

Figura 5.58 Archivo de fuerzas de viga simplemente apoyada con carga en los tercios medios

En este archivo se definió la dirección de la carga, la cual coincide con la gravitatoria, la carga inicial y la carga final del análisis.

### 5.5.5 DEFINICIÓN DE ANÁLISIS DE VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON INCREMENTOS DE CARGA A DOS TERCIOS

El análisis de esta viga se realizó mediante incrementos de cargas, por lo cual en el archivo de análisis de geometría se consideró realizar 50 ciclos de refinamiento, con 20 ciclos de ajuste geométrico. En este análisis se consideró la no linealidad de los materiales, simulándose el comportamiento no lineal con cada incremento de carga.

La relación de las dimensiones de los elementos tetraédricos empezó con 0.2 a 0.05; y los factores de reducción de resistencia fueron de 0.7 a 30.

```

50 1,1 20 1.0 1.0 !# CICLOS, #Ciclos REMALLEO, Lim Remalleos, #Ciclos ajuste props, Fraccion de la max deformacion, Fraccion de la resistencia máxima
0.2 0.10 0.08 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 ! Relación LadoLargo/LadoCorto para refinar y evitar alargamiento de elementos
0.7 2.5 5.0 8.0 10.00 12.00 20.0 30.00 ! FACTORES DE REDUCCION DE RESISTENCIA PARA REMALLEO
0000010000 REVISAR LAS OPCIONES PARA NCASO(1)

NCASO(1)
ESFUERZOS CORTANTES MÁXIMOS :NCASO[1]
DEFORMACIONES ANGULARES MÁXIMAS :NCASO[2]
TENSIONES MÁXIMAS :NCASO[3]
EFZO DESVIADOR MÁXIMO DE TENSIÓN :NCASO[4]
LEY DE RESISTENCIA MOHR-COULOMB :NCASO[5]
EFZO NORMAL OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[6]
EFZO CORTANTE OCTAEDRICO MÁXIMO :NCASO[7]
EFZO CORT. OCTAEDRICO vs Resist :NCASO[8]

REMALLEO TOTAL (n veces) :NCASO[9]=n
SELECCION POR GEOMETRIA ALARGADA :NCASO[10]

```

Figura 5.59 Archivo de definición de análisis de viga simplemente apoyada con carga a dos tercios

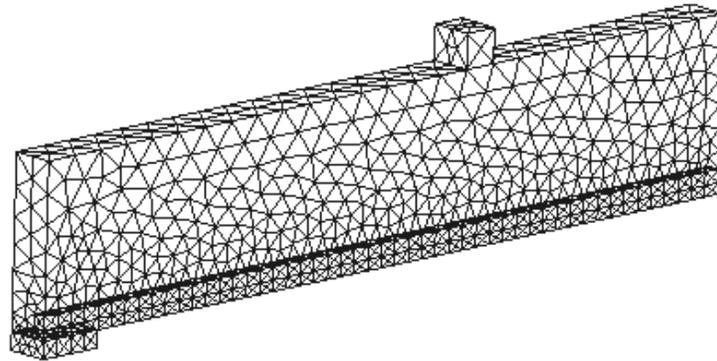
Se definió el criterio de refinamiento mediante los esfuerzos normales octaédricos máximos. El archivo de análisis se muestra en la figura 5.59. El objetivo de realizar este análisis fue con la

intención de observar cómo van cambiando las propiedades de los materiales de la viga con los incrementos de carga hasta llegar a la resistencia última de los materiales en cada elemento finito.

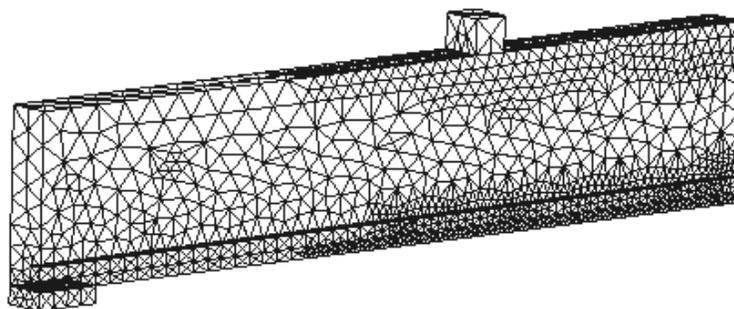
### 5.5.6 ANÁLISIS DE VIGA RECTANGULAR SIMPLEMENTE APOYADA CON REFUERZO LONGITUDINAL Y CON INCREMENTOS DE CARGA A DOS TERCIOS CON EL PROGRAMA ARFEM3D

Con los archivos ya creados de la geometría, material y fuerzas se corrió el programa con el programa Arch\_Ini.bat para que se generen los archivos de la plasticidad del material, deformación, con respecto a las propiedades de los materiales y a las cargas sometidas de la viga.

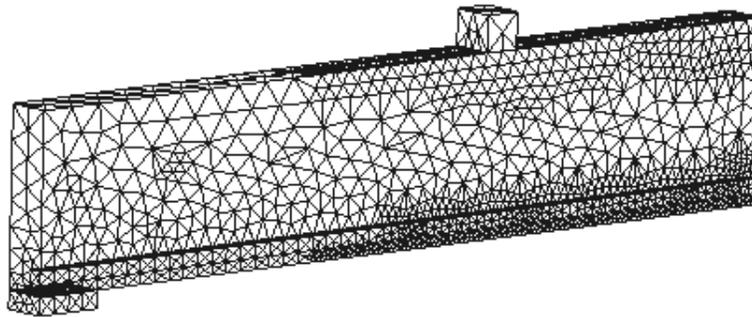
En la figura 5.60 inciso *a* se observa la malla inicial. En esta malla, el tamaño de los elementos tetraédricos no se ve influenciado por el estado de esfuerzos en el medio.



a)



b)

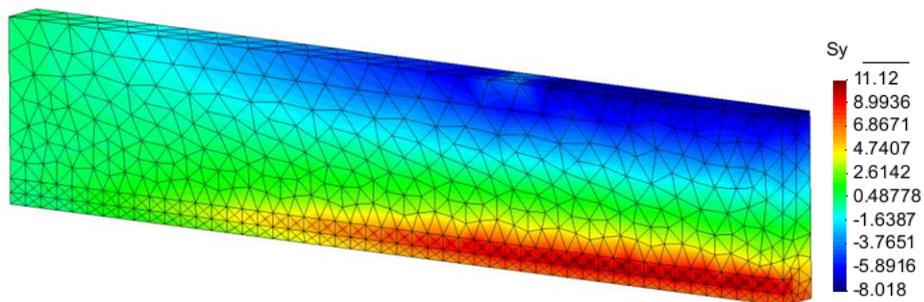


c)

Figura 5.60 Malla de viga simplemente apoyada con carga en los tercios y acero de refuerzo inferior. A) Malla inicial. b) Malla ciclo 8. C) Malla ciclo 56

En los incisos *b* y *c* de la figura 5.60 se puede observar como la malla se refinó en las zonas donde se encuentra los mayores esfuerzos de tensión (zona inferior del centro de la viga) y de compresión (zona superior del centro de la viga).

Al observar el análisis por elementos finitos de la malla inicial, se puede observar la distribución de esfuerzos correspondientes a un estado de elasticidad lineal. En la figura 5.61 se presentan los esfuerzos normales en la dirección longitudinal  $\sigma_y$ . Se aprecia que en el lecho inferior se generan esfuerzos de tensión (positivos) en tanto que en el lecho superior se generan esfuerzos por compresión (negativos). En el inciso *b* se muestra el corte de la viga en la zona del apoyo. Se observa cómo los esfuerzos normales son prácticamente nulos. En el inciso *c* se observa el corte de la viga en la sección del centro de la viga. En esta sección se nota la transición de esfuerzos de tensión en la parte inferior sobre todo en la sección del acero, a esfuerzos de compresión en la parte superior.



a)

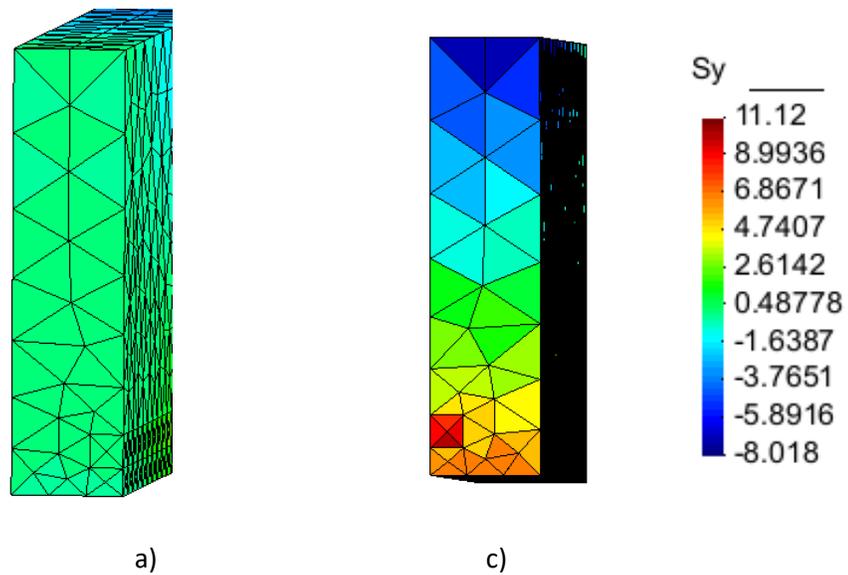
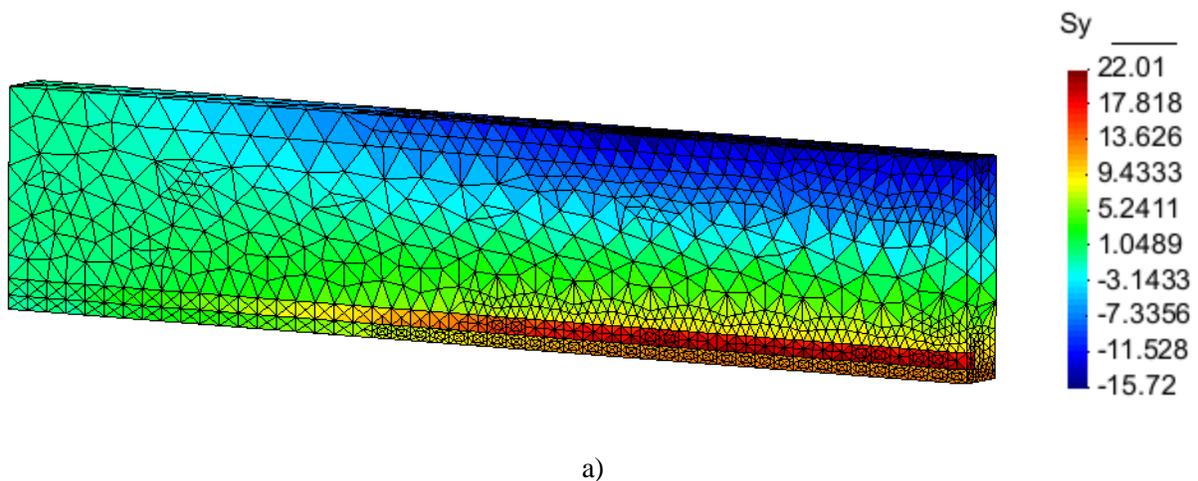


Figura 5.61. Malla inicial visualización de esfuerzos normales en dirección longitudinal ( $\sigma_y$ ). Escala en kgf/cm<sup>2</sup>. a) Visualización de cuarto de viga en estudio. b) Corte de visualización de viga en estudio en la zona de apoyo. c) Corte de visualización de viga en la zona del centro de la viga

En la figura 5.62 se muestra la malla en el ciclo 5 antes de que los materiales comiencen su etapa de comportamiento no lineal; como se mencionó anteriormente, la malla se refinó en las zonas donde se encuentran los mayores esfuerzos de compresión (zona superior del centro de la viga) y de tensión (zona inferior del centro de la viga), en el centro de la viga se ve el cambio de esfuerzos de compresión a tensión.

En el inciso *b* se observa el corte de la viga en el apoyo. En la sección mostrada en el inciso *c* se observa como en la zona inferior el acero es el que toma los mayores esfuerzos de tensión, sin embargo el concreto también se encuentra resistiendo aun estos esfuerzos. En la parte superior se ve como el concreto se encuentra sometido a esfuerzos de compresión. Con el refinamiento realizado, se mejoró la visualización de los contornos de esfuerzo.



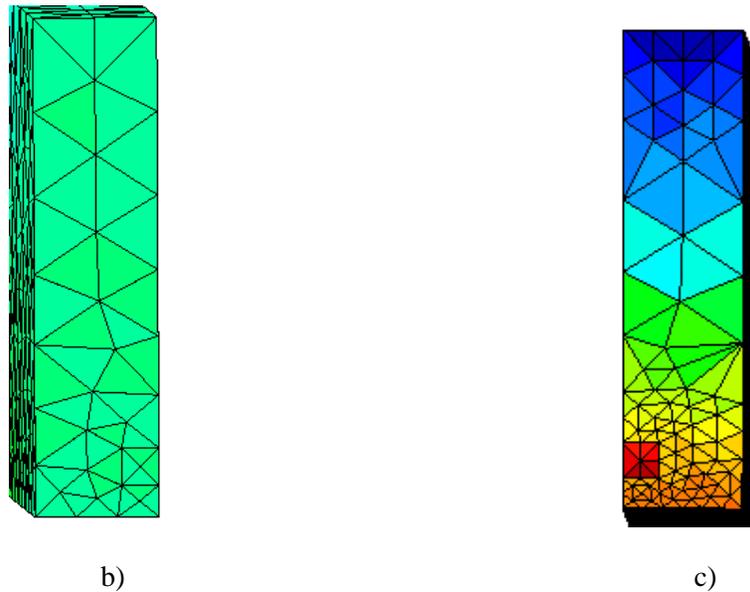


Figura 5.62. Malla correspondiente al ciclo 5. Esfuerzos normales en dirección longitudinal ( $\sigma_y$ ). Escala en  $kgf/cm^2$ . a) Visualización de cuarto de viga en estudio. b) Corte en la zona de apoyo. c) Corte en la zona del centro de la viga.

Con el programa de visualización se observa el abatimiento del módulo de elasticidad del concreto obtenido del análisis de la viga sometida a los incrementos de carga secuencial hasta sobrepasar la resistencia que ofrece el concreto a esfuerzos de tensión y posteriormente la fluidez del acero. En la figura 5.63 se puede observar el módulo de elasticidad de los materiales de la viga en estudio de acuerdo con un estado inicial de cero deformaciones. En la imagen se aprecian solo dos colores: el verde para un módulo inicial del acero con  $E_s = 518011.3625 \text{ kg/cm}^2$  y el de color azul que representa el módulo inicial del concreto de  $E_c = 2000000 \text{ kg/cm}^2$ .

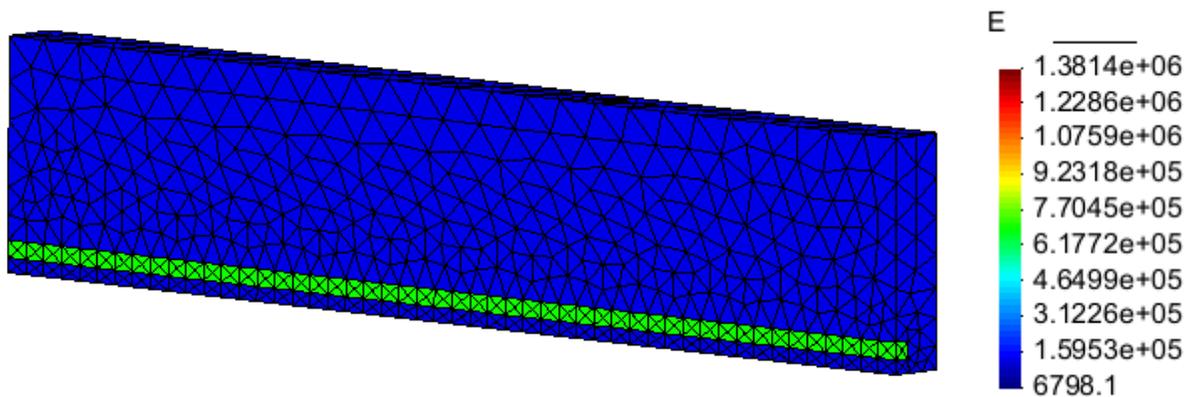
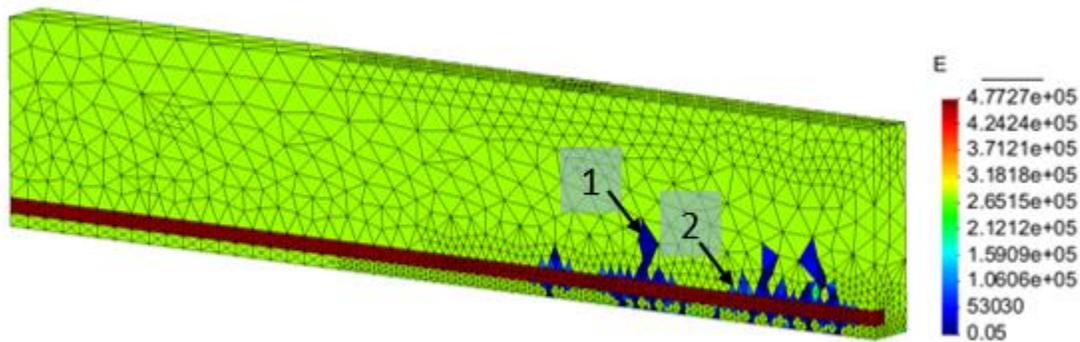


Figura 5.63. Módulo de elasticidad inicial de los materiales (acero y concreto)

En la figura 5.64 se puede apreciar la aparición de grietas en el concreto, estas grietas son perpendiculares a la dirección del refuerzo y se llaman grietas primarias ya que como se sabe suelen aparecer cerca del centro de la viga, en donde está la sección en que el concreto es más vulnerable debido a la tensión. De igual forma, se pueden apreciar grietas pequeñas entre las grietas primarias; a estas grietas las llaman secundarias y en la figurar 5.64 se señalan con el número 2. En esta etapa, el concreto en la zona de tensión aun es capaz de soportar esfuerzos de tensión mientras que los esfuerzos de compresión ubicados en la zona superior del centro de la viga son soportados sin problema.



*Figura 5.64.* Generación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto.

A medida que se va incrementando la carga, las grietas primarias van aumentando de tamaño, tal como se puede ver en la figura 5.65. Se observa que en algunas grietas primarias aumentaron su espesor como la mostrada con el número 3. Las grietas secundarias de igual forma aumentaron un poco su tamaño, pero fue menor que el de las primarias. El módulo de la elasticidad de las grietas está representado en color azul fuerte con un módulo de elasticidad nulo. El acero en esta etapa es quien soporta los esfuerzos de tensión en la zona inferior de la viga y el concreto aun soporta los esfuerzos de compresión ubicados en la zona superior de la viga, sin embargo, se aprecia cómo disminuyó el módulo de elasticidad de éste.

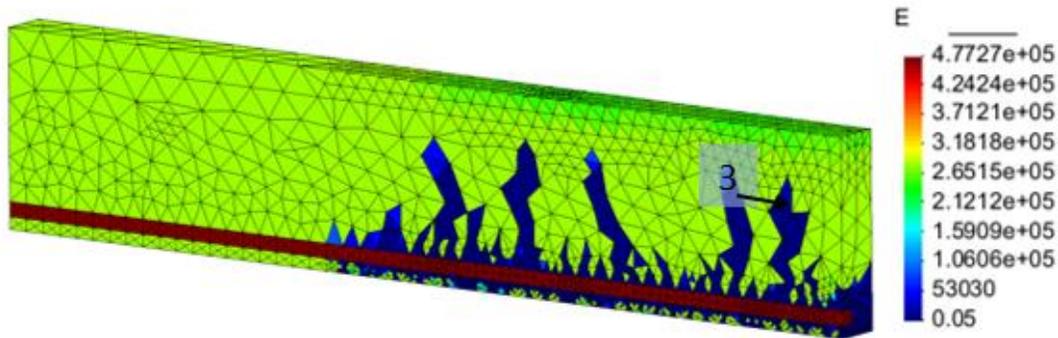


Figura 5.65. Propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto, generación de grietas horizontales

En la figura 5.66 se continúa con la propagación de las grietas debido al aumento de las cargas. En esta figura se puede observar cómo aumentó en este ciclo la longitud de las grietas primarias y como las grietas secundarias ya no incrementan de longitud. Se puede apreciar que se generaron nuevas grietas casi en los extremos de la viga.

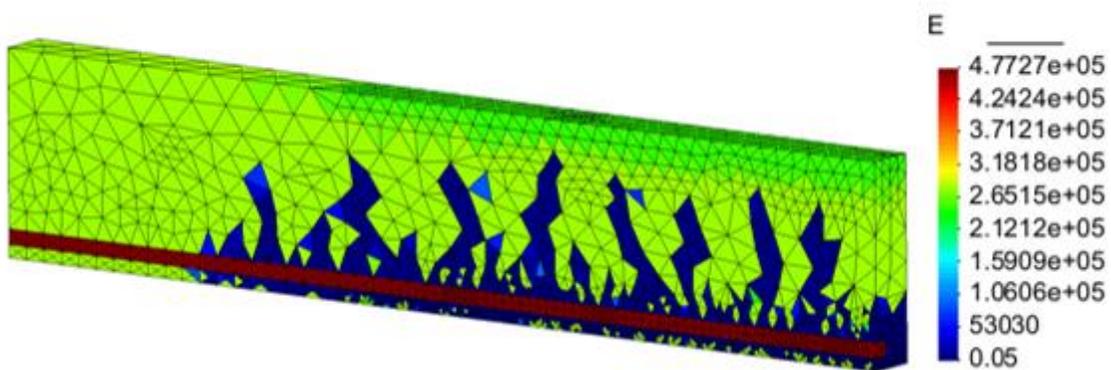


Figura 5.66. Continuación de la propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto

En la figura 5.67 se puede ver como las grietas primarias crecieron y como el concreto que se encuentra entre estas grietas está abatido y ya no es capaz de soportar más carga, principalmente por la falta de área y de continuidad del material, ya que en las figuras anteriores se podía apreciar que el concreto entre las grietas aún continuaban resistiendo los esfuerzos de tensión causados por la carga.

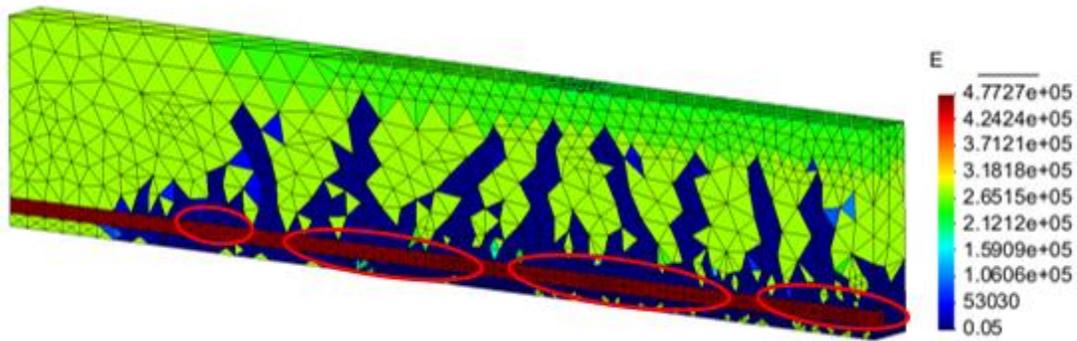


Figura 5.67. Propagación de grietas debidas al abatimiento del módulo del concreto. Ciclo número 83

En la figura 5.68 se puede apreciar el inicio de la fluencia del acero, al presentar variación en la tonalidad del módulo de elasticidad. El acero deja de ganar resistencia y la deformación de éste ya es permanente. En esta etapa, el concreto comienza a perder resistencia a compresión en la zona superior de la viga.

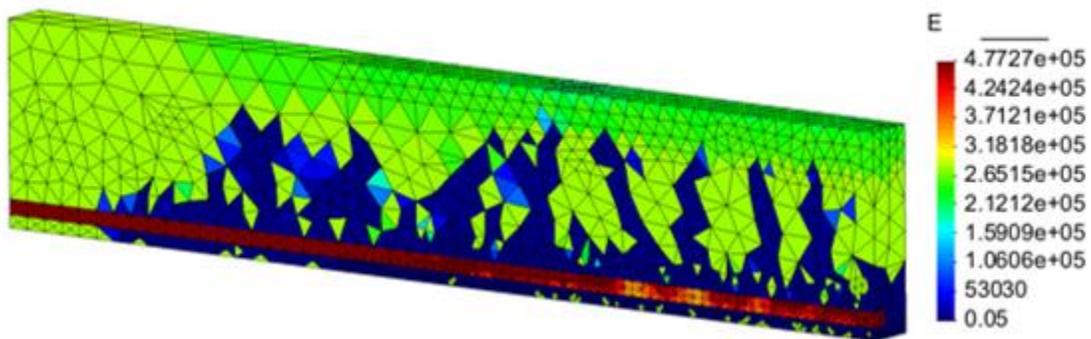
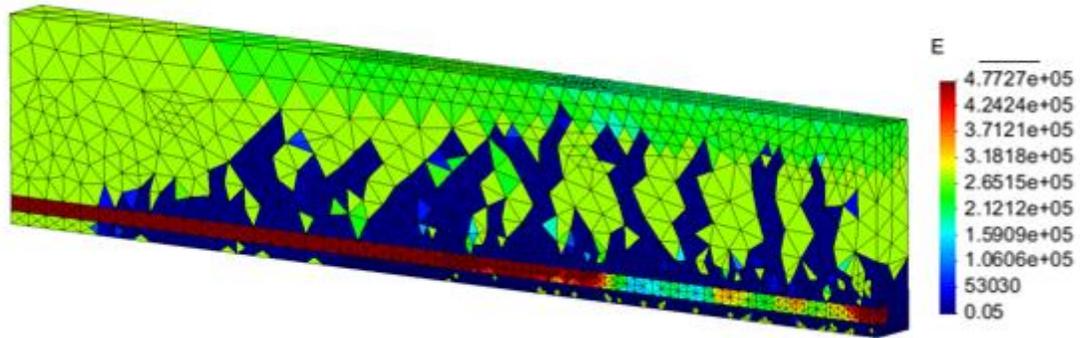


Figura 5.68. Propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto. Inicio de fluencia del acero

El incremento de cargas ocasiona que el acero pierda su resistencia, tal como se ve en la figura 5.69. En esta imagen se observa con mejor claridad como el concreto abatió su resistencia en la zona de compresión a diferencia de la figura anterior.



*Figura 5.69.* Propagación de grietas debido al abatimiento del módulo del concreto. Propagación de la fluencia en el acero

Como comentario final, puede decirse que el software ARFEM3D permite analizar con mayor precisión y realismo elementos estructurales, a diferencia de las técnicas tradicionales y/o simplificadas. Con la función de auto refinamiento permite observar las zonas propensas a agrietamiento y el proceso de abatimiento de módulos en un proceso con incrementos de carga.

## **CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES**

En este trabajo se demostró que el uso del método de elemento finito es una alternativa útil para el análisis en estructuras. Al utilizar el programa ARFEM3D en problemas clásicos de la ingeniería estructural se lograron resultados similares a los obtenidos de los métodos clásicos de la literatura especializada, sin embargo, el software ARFEM3D permite la observación tridimensional del comportamiento de dichos elementos.

El programa ARFEM3D demuestra ser una herramienta eficiente ya que está diseñado para refinar automáticamente las zonas específicas donde los esfuerzos locales experimentan cambios abruptos o cuando se rebasen los criterios de umbral establecidos en el preproceso. Esta capacidad lo convierte en una alternativa con mayor ventaja en comparación con los análisis tradicionales, los cuales tienden a ser menos detallados; con el ARFEM3D se pueden estudiar las zonas donde exista mayor riesgo de falla de los elementos y así permite un mejor diseño. Además, su característica de refinamiento automático lo posiciona por encima de otros programas de mallado, donde el refinamiento debe realizarse de forma manual y esto puede dar lugar a errores en los resultados, ofreciendo así una ventaja significativa en términos de precisión y eficiencia.

En este trabajo se describe la importancia de plantear correctamente el problema a resolver, dado que se requiere una visión clara de la correcta definición del modelo y las condiciones de frontera a las que este estará sometido, para posteriormente preparar esta información e introducirlas al programa ARFEM3D. Es por ello que, de esta tesis se derivó el “MANUAL DE PROCEDIMIENTO OPERATIVO PARA EL ANÁLISIS DE ELEMENTO FINITO CON EL PROGRAMA ARFEM3D” que se puede consultar en el capítulo 4.5.2 de esta tesis y es un manual un poco más detallado en el uso de los programas de pre y postproceso elaborados por el Dr. Hermosillo. El post proceso permite interpretar los resultados, los cuales dependen de la correcta información dada por el usuario, tal como lo es la generación correcta de la malla inicial, los criterios de umbral y las condiciones frontera.

El software ARFEM3D ofrece la ventaja de evitar que se generen elementos demasiado distorsionados. Está dentro de su procedimiento de análisis realizar un mapeo de las variables de la malla inicial a la nueva malla generada. Con ello pueden realizarse simulaciones de comportamiento del tipo no lineal.

Otra de las ventajas del ARFEM3D sobre otros softwares es la optimización de los recursos computacionales, permitiendo mayor velocidad en la obtención de resultados. Además, permite mayor precisión en los resultados, debido al refinamiento local de la malla en cada ciclo. Para profundizar en el tema y de la utilización del programa se recomienda consultar a los doctores Armando R. Hermosillo Arteaga, Miguel P. Romo Organista, Roberto Magaña del Toro y Jorge Carrera Bolaños.

Para simular el análisis no lineal, el programa ARFEM3D permite aplicar incremento de cargas de forma variable, lo que facilita la observación del comportamiento del elemento durante el análisis. Esto proporciona una representación clara y detallada de la deformación del elemento hasta alcanzar su falla, es decir, cuando se superan los criterios de umbral establecido y los materiales alcanzan su resistencia última.

Por otra parte, pueden optimizarse aún más los recursos computacionales, simplificando el problema aprovechando las simetrías que se tengan.

Los resultados del análisis mediante el MEF dependen de la correcta definición del problema, al igual que la correcta interpretación de los resultados.

Este trabajo de tesis demostró que el empleo del programa ARFEM3D es muy útil para estudiar elementos simples, pero pueden explotarse sus capacidades en la resolución de problemas estructurales más sofisticados.

## REFERENCIAS

1. Álvarez L. L., Gómez G. M. & Morales D. O. U. (2020). *Apuntes de mecánica de materiales*, (pp.8). Fes Acatlán UNAM.
2. Argyris J. H. & Kelsey S. (1960). *Energy theorems and structural analysis*. Plenum Press.
3. Arvizu G. A. (1999) *Apuntes para la materia de análisis estructural I del Instituto Tecnológico de Nogales*. Biblioteca digital Universidad de Sonora.
4. Atonal S. J., Reyes C. A. & Vázquez M. R. (2015) *Determinación de esfuerzos entre dos piezas en contacto utilizando el Método de Elementos Finitos Científica*, (Vol. 19, núm. 1, pág. 37-41). Revista Científica IPN.
5. Biermann W. & Daenzer L. (2005). *Métodos de análisis estructural: Teoría y aplicaciones* (1ª ed.). Pearson Educación.
6. Bugada C. G. (1990). *Utilización de técnicas de estimación de error y generación automáticas de mallas en procesos de optimización estructural* (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Catalunya.
7. Callister W. D. (2007). *Materiales: Introducción a la ciencia e ingeniería de los materiales* (7ª ed.). Wiley.
8. Celigüeta L. J. T. (2011). *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural*. Tecnum.
9. Chandrupatla T. R. & Belegundu A. D. (1999). *Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*. Pearson Prentice Hall.
10. Deméneghi C. A (2000) *Método del elemento finito. Análisis lineal*. División de Ingeniería Civil. Topográfica y Geodésica Departamento de Geotecnia. Facultad de Ingeniería UNAM.
11. Deméneghi C. A., Magaña D. T. R., & Sanginés G. H. (2000). Estado de Esfuerzos. En *Apuntes de mecánica del medio continuo*. División de ingeniería civil, topográfica y geodésica departamento de geotecnia UNAM.
12. Díaz M. A. (2000). *Métodos de mallado y algoritmos adaptativos en dos y tres dimensiones para la resolución de problemas electromagnéticos cerrados mediante el método de los elementos finitos*. [Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia] Departamento de comunicaciones Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación.

13. Espinoza C. & Niño (2001) *Método de elementos finitos* Recuperado el 30 de abril del 2020, en [http://ingenieroambiental.com/2020/Modelaci% f3n% 20Num% e9rica% 20en% 20Ingenier% eda% 20Hidr% e1ulica% 20y% 20Ambiental.pdf](http://ingenieroambiental.com/2020/Modelaci%f3n%20Num%e9rica%20en%20Ingenier%eda%20Hidr%e1ulica%20y%20Ambiental.pdf).
14. Esqueda O. H., Botello R. S. & Leal V. J. C. (2005) *Aplicación del Método de los Elementos Finitos en la Simulación de Cimentaciones Superficiales*. (Vol. 15, núm. 2, pp. 29-41). Revista Acta Universitaria.
15. Hermsillo A. A. R. (2006) *Refinamiento automático de mallas de elemento finito mediante teoría de fractales y su aplicación en problemas geotécnicos*. [Tesis Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México] Programa de maestría y doctorado en ingeniería. Facultad de ingeniería UNAM.
16. Hermsillo A. A. R., Romo O. M., Magaña T. R. & Carrera B. J. (2016), Automatic remeshing algorithm of triangular elements during finite element analyses, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería.
17. Hermsillo A. A. R., Romo O. M., Magaña T. R. & Carrera B. J. (2018), *Adaptive Refining Method for 2D Triangular-Element Meshes for Finite Element Analyses (Nuevo método adaptativo para el refinamiento de mallas 2D de elementos triangulares para el análisis con elementos finitos)*. Serie investigación y desarrollo de Instituto de Ingeniería UNAM.
18. Hermsillo A. A. R., Romo O. M., Magaña T. R. & Carrera B. J. (2020). *Development of a refinement algorithm for tetrahedral finite elements*. División de ingeniería civil, topográfica y geodésica departamento de geotecnia UNAM.
19. Fogg H. J., Makem J. E & Cabello J. (2000). *The generation of axially aligned seams on triangulated pipe faces*. (pag 27-39). ScienceDirect.
20. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. (s/f). Gmsh.info. Recuperado el 15 de febrero de 2020, de <https://gmsh.info/>.
21. González C. (2011) *MAT El Álgebra Geométrica Del Espacio Tiempo* SCRIBD.
22. González C. O. M., Fernández V. F. R. (2005) *Aspectos fundamentales del concreto reforzado* (4ta edición). Limusa.
23. Hibbeler R. C. (2010). *Mecánica de materiales* (7ª ed.). Pearson Educación.
24. Hibbeler R. C. (2011). *Mecánica de materiales* (8ª ed.). Pearson.

25. López A. R. & Ruíz D. C. (2016). Mallado para simulaciones. Recuperado de <https://repositorio.conacyt.gov.py/xmlui/handle/20.500.14066/2256>.
26. Maldonado J. R. (2004) Capitulo 2 Principios del método de los elementos finitos. De *Análisis y simulación del impacto frontal y lateral del auto del proyecto Minibaja* [Tesis Licenciatura, Universidad de las Américas Puebla.]. Departamento de Ingeniería Mecánica. Escuela de Ingeniería, Universidad de las Américas Puebla.
27. Márquez J. & Rafael O. (1994) *Temas de apoyo para los cursos de concreto* Biblioteca digital Universidad de Sonora.
28. Meriam J.L., & Kraige L.G. (2016). *Mecánica de materiales*. 7ª edición. Wiley.
29. Métodos de elementos finitos: aplicaciones & introducción. (s. f.). Study Smarter Recuperado el 15 de marzo del 2020. De <https://www.studysmarter.es/resumenes/ingenieria/ingenieria-mecanica/metodos-deelementosfinitos/#:~:text=El%20m%C3%A9todo%20de%20elementos%20finitos%20es%20una%20t%C3%A9cnica,modelo%20continuo%20en%20elementos%20m%C3%A1s%20peque%C3%BIos%20y%20maneja>.
30. Molina R. J. C. (1992) *Análisis estructural con Elemento Finito*. [Tesis Maestría , Universidad Autónoma de Nuevo León] Facultad de ingeniería mecánica y eléctrica. Universidad Autónoma de Nuevo León.
31. *Normas técnicas complementarias para diseño y construcción de estructuras de concreto*. Recuperado el 23 de junio de 2020, de [https://transparencia.cdmx.gob.mx/storage/app/uploads/public/83\\_N\\_C/ONC/83\\_N\\_CONC/83\\_N\\_CONCRETO.pdf](https://transparencia.cdmx.gob.mx/storage/app/uploads/public/83_N_C/ONC/83_N_CONC/83_N_CONCRETO.pdf).
32. Oden J. N., & Hinton J. R. (1972). *Finite element methods in nonlinear analysis*. Prentice-Hall.
33. Ojeda R. J. M., Parra M. A. & Sánchez V. R. (2019) *Cuadernos de apuntes Estructuras de concreto*. Facultad de ingeniería, arquitectura y diseño. Universidad Autónoma de Baja California.
34. Olivella O. X & Saracíbar B. C (2000) *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. EDICIONS UPC.
35. Ortiz B. L. (2007). El tensor de deformación. *En Resistencia de materiales*. Mcgraw-Hill.
36. Ortiz P. A., Ruiz C. O & Ortiz V. J. A. (2013) (Cap. 8). Conceptos básicos del método por elemento finito. *En Modelado de procesos de manufactura*. (pp.233-264). Facultad de ingeniería UNAM.

37. Otero P. L. L. (2006). *Aprendiendo sobre el Método de los Elementos Finitos. Ingeniería Mecánica*, Vol. 9(número 3), (pp.7 -13). Revista de Ingeniería Mecánica.
38. Popov E. P. (1990). *Mecánica de materiales* (2ª ed.). Prentice Hall.
39. Rodríguez M. R. (1995) *La teoría de fractales: aplicación experimental e implicaciones en la metodología de la ciencia*. [Tesis Maestría, Universidad Autónoma de Nuevo León] División de posgrado. Facultad de filosofía y letras Universidad Autónoma de Nuevo León.
40. Saint V. (s/f). Blogspot.com. Recuperado el 12 de marzo de 2020, de <https://criteriosdefalla.blogspot.com/2015/09/saint-venant-adhemar-jean-claude-barre.html>.
41. Salazar T. J. E. (2007). *Resistencia de materiales básica para estudiantes de ingeniería*. Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales.
42. Timoshenko S. & Goodier J. N. (1970). *Theory of Elasticity* (3rd ed.). McGraw-Hill.
43. Timoshenko, S. & Young D. H. (1976). *Mecánica de materiales* (3ª ed.). McGraw-Hill.
44. Vásquez C. M. Z. (2008). *Un sistema para la generación de mallas estructuradas armónicas*. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias UNAM.
45. Zienkiewicz O. C., & Taylor R. L. (1977). *The finite element method: Its basis and fundamentals*. McGraw-Hill