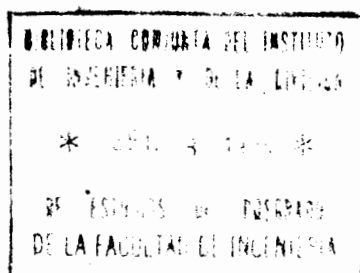


UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA



SINTESIS DE UN SISTEMA DE SUSPENSION PARA
VEHICULOS DE TRANSPORTE MASIVO CON COMPOR
TAMIENTO DINAMICO PRESCRITO.

DR. JORGE ANGELES ALVAREZ
M en C ISMAEL ESPINOSA ESPINOSA

SINTESIS DE UN SISTEMA DE SUSPENSION PARA VEHICULOS DE TRANSPORTE MASIVO CON COMPORTAMIENTO DINAMICO PRESCRITO.

JORGE ANGELES¹

ISMAEL ESPINOSA²

RESUMEN

Se presenta un procedimiento de síntesis para obtener recomendaciones de rediseño de la suspensión de vagones de transporte masivo. El objetivo de este estudio es mejorar el funcionamiento del sistema de suspensión bajo condiciones dinámicas de operación de tal manera que las velocidades críticas queden fuera del intervalo más frecuente de operación. Los resultados obtenidos indicaron que solamente una de las dos secciones de la suspensión requieren amortiguamiento, cuyo valor se obtuvo a través del método de análisis del lugar geométrico de las raíces.

NOMENCLATURA

a, b, c, a', b', c' = coeficientes de polinomios del denominador

a_i = coeficientes del polinomio característico

$\tilde{A}$ = matriz de coeficientes de 6x6 de la ecuación de estado

b_1 = amortiguamiento de la suspensión primaria, en N s/m.

b_2 = amortiguamiento de la suspensión secundaria, en N s/m.

b_{ij} = elementos de la matriz de amortiguamiento $\tilde{B}$

$\tilde{B}$ = matriz de amortiguamiento de 3x3

d, e, f, d', c', f' = coeficientes de polinomios del numerador

¹ Profesor Titular de Ingeniería Mecánica

² Profesor Asociado de Ingeniería Eléctrica

- d = diámetro de la rueda en m.
 D = función de disipación
 $\tilde{I}$ = matriz de identidad
 k_1 = rigidez de los resortes que soportan los ejes, N/m
 k_2 = rigidez de los resortes que soportan el puente motor diferencial, N/m.
 k_3 = rigidez de los resortes que soportan la mitad de la masa del cuerpo del vagón, N/m.
 k_4 = rigidez del resorte del neumático, N/m.
 k_{ij} = elementos de la matriz de rigidez $\tilde{K}$
 $\tilde{K}$ = matriz de rigidez de 3×3
 m_1 = masa del chasis (H), $N s^2/m$.
 m_2 = masa de cada puente motor diferencial, $N s^2/m$
 m_3 = mitad de la masa del cuerpo del vagón, $N s^2/m$.
 $\tilde{M}$ = matriz de inercia de 3×3
 T = energía cinética
 v = velocidad crítica en m/s
 V = energía potencial
 $\tilde{x}$ = vector de coordenadas generalizadas
 $\dot{\tilde{x}}$ = velocidad generalizada
 $\tilde{y}$ = vector característico asociado con el valor característico ω^2 .
 ω^2 = valor característico
 ω = frecuencia natural, en s^{-1}
 $|\tilde{sI} - \tilde{A}|$ = determinante de la matriz $\tilde{sI} - \tilde{A}$

INTRODUCCION

El sistema de transporte masivo en estudio ha mostrado dos velocidades críticas abajo del valor máximo de operación, de las cuales la más alta se encuentra dentro del intervalo de operación más

frecuente, lo que produce condiciones de vibración indeseables que afectan tanto la comodidad del pasajero como la vida de la estructura de la suspensión.

Algunas de las alternativas que deben tomarse en cuenta para mejorar el funcionamiento del sistema son las siguientes: (1) cambiar únicamente la rigidez de los resortes, (2) sin modificar dichas rigideces, introducir amortiguadores adecuados y, (3) usar una combinación de amortiguadores y nuevos valores de rigidez de resortes, lo cual equivaldría a obtener un diseño totalmente nuevo. Por esta razón, sólo se considerará la tercera alternativa en caso de que las dos primeras no fueran factibles.

El primer paso en el procedimiento de síntesis es el de modelar con precisión el sistema actual, como se describe a continuación:

MODELADO DEL SISTEMA

Cada tren está compuesto por nueve vagones (Fig. 1) de los cuales, seis son de tracción y los demás, de arrastre. Cada vagón, ya sea de tracción o de arrastre, está suspendido sobre dos carros localizados en sus extremos, llamados comúnmente "bogies". Cada bogie tiene dos ejes con dos neumáticos en cada eje (Fig. 2). A la vez, cada eje está acoplado al chasis del bogie, denominado "H", por medio de una suspensión llamada "suspensión primaria", compuesta por ocho resortes idénticos, a razón de cuatro por cada eje, de rigidez k_1 , y cuatro más de rigidez k_2 , de los cuales cada par soporta el "puente del motor diferencial". El "bogie" completo está esquemáticamente representado en la Fig. 3. El cuerpo del vagón se acopla a la "H" por medio de una "suspensión secundaria" compuesta de dos resortes idénticos de rigidez k_3 . Por otra parte, la rigidez del resorte de los neumáticos es k_4 . Con excepción del amortiguamiento interno del hule en el cual están vulcanizados los resortes, el sistema no cuenta con ninguna otra forma de amortiguamiento. Con referencia a la Fig. 3,

m_1 = masa de la "H"

m_2 = masa de cada puente motor diferencial

m_3 = mitad de la masa del cuerpo del vagón

El modelo icónico que corresponde al esquema de la Fig. 3 se muestra en la Fig. 4, donde

$$\underline{\tilde{x}} = [\underline{\tilde{x}}_1, \underline{\tilde{x}}_2, \underline{\tilde{x}}_3]^T$$

es el vector de coordenadas generalizadas.

Se tomaron medidas de campo [1,2]*, de las cuales se obtuvieron dos velocidades críticas. La primera tiene un valor medio 5.5 m/s, y la segunda se encuentra entre 17.5 y 18.9 m/s, de forma tal que la última se localiza dentro del intervalo de operación más frecuente, entre 5.56 m/s y 22.22 m/s. Para propósitos de diseño, este intervalo de velocidad se denominará "región prohibida".

El modelo matemático que corresponde a la Fig. 4 tiene la forma

$$\underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{\tilde{x}}} + \underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{x}} = 0 \quad (1)$$

donde $\underline{\tilde{M}}$ y $\underline{\tilde{K}}$ son, respectivamente, las matrices de inercia y de rigidez. La masa y la rigidez de los elementos involucrados es su puestamente constante, por lo cual las matrices que aparecen en la ecuación (1) se pueden obtener como las matrices hessianas de la energía cinética con respecto a la velocidad generalizada $\dot{\underline{\tilde{x}}}$, y de la energía potencial con respecto a las coordenadas generalizadas $\underline{\tilde{x}}$, respectivamente, o sea,

$$\underline{\tilde{M}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\underline{\tilde{x}}}^2}, \quad \underline{\tilde{K}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{\tilde{x}}^2} \quad (2)$$

*Los números en paréntesis rectangular indican las referencias al final del informe.

siendo T y V las energías cinética y potencial, respectivamente. Estas son

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} (2m_2) \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 \quad (3)$$

y

$$V = \frac{1}{2} (8k_1 + 4k_2 + 4k_4) x_1^2 + \frac{1}{2} (8k_1 + 4k_2 + 2k_3) x_2^2 + \frac{1}{2} 2k_3 x_3^2 - (8k_1 + 4k_2) x_1 x_2 - 2k_3 x_2 x_3 \quad (4)$$

Entonces,

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{23} & k_{33} \end{pmatrix} \quad (5)$$

donde

$$\begin{aligned} k_{11} &= 8k_1 + 4k_2 + 4k_4, & k_{12} &= -8k_1 - 4k_2 \\ k_{22} &= 8k_1 + 4k_2 + 2k_3, & k_{23} &= -k_{33} - 2k_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Las velocidades críticas se obtienen del valor característico ω^2 derivado de la ecuación (1). El problema de valores característicos correspondiente es, entonces,

$$\tilde{K} \underline{y} = \omega^2 \tilde{M} \underline{y} \quad (7)$$

en el cual $\underline{y}$ es el vector característico asociado al valor característico ω^2 . La relación entre las frecuencias naturales ω y las velocidades críticas v es

$$v = 0.5 d\omega \quad (8)$$

donde v está dado en m/s y ω en s^{-1} , siendo d el diámetro de las ruedas en m.

Para determinar qué rigidez de resorte deberá cambiarse, se hizo un análisis de sensibilidad de las velocidades críticas relativo a la rigidez de cada resorte. Los cambios de velocidad crítica se obtuvieron por medio de un modelo de computadora de la ecuación (1) en donde se utilizaron los siguientes valores nominales

$$\begin{aligned} k_1 &= 4.9 \times 10^6 \text{ N/m} \\ k_2 &= 3.43 \times 10^6 \text{ N/m} \\ k_3 &= 8.37 \times 10^5 \text{ N/m} \\ k_4 &= 1.783 \times 10^6 \text{ N/m} \\ m_1 &= 1.971 \times 10^3 \text{ N s}^2/\text{m} \\ m_2 &= 1.628 \times 10^3 \text{ N s}^2/\text{m} \\ m_3 &= 1.578 \times 10^4 \text{ N s}^2/\text{m} \end{aligned}$$

Las figuras 5 a 7 muestran las curvas de influencia de la rigidez de cada resorte en cada valor de velocidad crítica. Estas curvas se obtuvieron utilizando un paquete IBM de sub-rutinas [3].

DETERMINACION DE LOS VALORES DE AMORTIGUAMIENTO PARA CAMBIAR LAS VELOCIDADES CRITICAS.

Los resultados obtenidos del análisis de sensibilidad establecieron que la simple modificación de rigidez no sería suficiente para cambiar las velocidades críticas en forma substancial, por lo que es indispensable adicionar amortiguadores.

A continuación, se analiza el nuevo modelo icónico, mostrado en la Fig. 8, en forma semejante a lo hecho para el modelo de la Fig. 4; pero con la inclusión de amortiguadores b_1 y b_2 en las suspensiones primaria y secundaria respectivamente.

De acuerdo con la Fig. 8, el modelo matemático toma la forma

$$\ddot{\underline{X}} + \underline{B}\dot{\underline{X}} + \underline{K}\underline{X} = \underline{0} \quad (9)$$

donde las matrices $\underline{M}$ y $\underline{K}$ son las mismas que aparecen en la ecuación (5) y $\underline{B}$ es la matriz de amortiguamiento

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (10)$$

obtenida como la matriz hessiana con respecto a $\dot{\underline{x}}$ de la función de disipación D dada como

$$D = \frac{1}{2} b_1 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2 \quad (11)$$

Los elementos de $\underline{B}$ son

$$\begin{aligned} b_{11} &= b_1, \quad b_{12} = -b_1, \quad b_{22} = b_1 + b_2 \\ b_{23} &= -b_2, \quad b_{33} = b_2 \end{aligned} \quad (12)$$

siendo b_1 y b_2 el amortiguamiento de las suspensiones primaria y secundaria, respectivamente.

La etapa inicial del proceso de solución fue tratar de determinar los valores óptimos de amortiguamiento; pero esto hizo notar que uno de los amortiguadores tenía poco o ningún efecto en las velocidades críticas. Por esta razón, se decidió analizar el efecto simple de cada uno de los amortiguadores. Para hacer esto, se consideró conveniente utilizar el método del lugar geométrico de las raíces [4].

Para efectuar tal análisis, la ecuación (9) se escribe en la

forma usual de variables de estado

$$\dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} \quad (13)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \tilde{M}^{-1} \tilde{K} & \tilde{M}^{-1} \tilde{B} \end{pmatrix} \quad (14)$$

e I es la matriz de identidad de 3×3 .

El polinomio característico asociado con la ecuación (13) es

$$|sI - A| = s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (15)$$

donde

$$a_5 = \frac{b_{11}}{2m_2} + \frac{b_{33}}{m_3} + \frac{b_{22}}{m_1}$$

$$a_4 = \frac{b_{11} b_{33}}{m_1 m_3} + \frac{b_{11}}{2m_2} \left(\frac{b_{33}}{m_1} + \frac{b_{33}}{m_3} \right) + \frac{k_{11}}{2m_2} + \frac{k_{22}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3}$$

$$a_3 = \frac{b_{23} k_{12} + b_{11} k_{33}}{m_1 m_3} + \frac{k_{11} + k_{12}}{2m_2} \left(\frac{b_{22}}{m_1} + \frac{b_{33}}{m_3} \right) + \frac{k_{12}}{2m_2} \left(\frac{b_{23}}{m_1} + \frac{b_{23}}{m_3} \right) + \frac{b_{11}}{2m_2} \left(\frac{k_{33}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3} \right)$$

$$a_2 = \frac{k_{12} k_{33}}{m_1 m_3} + \frac{k_{11} + k_{12}}{2m_2} \frac{k_{22}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3} - \frac{k_{12}}{2m_2} \left(\frac{k_{33}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3} \right) + \frac{b_{11} b_{33} (k_{11} + k_{12})}{2m_1 m_2 m_3}$$

$$a_1 = \frac{(b_{11}k_{33} + b_{23}k_{12})(k_{11} + k_{12})}{2m_1m_2m_3}$$

$$a_0 = \frac{-(k_{11} + k_{12})k_{12}k_{33}}{2m_1m_2m_3}$$

Entonces, la ecuación característica es

$$s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (16)$$

y puede ser manipulada para que adquiriera una forma adecuada para el análisis del lugar geométrico de las raíces. Se considerarán tres casos: (1) $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, (2) $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$, y (3) $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

Para el caso (1), la ecuación (16) se puede escribir como

$$\frac{b_{33}s(ds^4 + es^2 + f)}{s^6 + as^4 + bs^2 + c} = -1 \quad (17)$$

donde

$$a = \frac{k_{11}}{2m_2} + \frac{k_{22}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3}$$

$$b = \frac{k_{12}k_{33}}{m_1m_3} + \frac{k_{11} + k_{12}}{2m_2} \left(\frac{k_{22}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3} \right) - \frac{k_{12}}{2m_2} \left(\frac{k_{33}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3} \right)$$

$$c = \frac{-(k_{11} + k_{12})k_{12}k_{33}}{2m_1m_2m_3}$$

$$d = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3}$$

$$e = \frac{-k_{12}}{m_1m_3} + \left(\frac{k_{11} + k_{12}}{2m_2} \right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right) - \frac{k_{12}}{2m_2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right)$$

$$f = \frac{-k_{12} (k_{11} + k_{12})}{2m_1 m_2 m_3}$$

En la ecuación (17), usando $b_{33} = b_2$ como un parámetro que varía de 0 a ∞ , se obtienen las curvas del lugar geométrico de las raíces, que se muestran en las Figs. 3 y 10.

Para el caso (2), la ecuación (16) se puede escribir como

$$\frac{b_{11}s (d's^4 + e's^2 + f')}{s^6 + a's^4 + b's^2 + c'} = -1$$

donde

$$a' = a$$

$$b' = b$$

$$c' = c$$

$$d' = \frac{1}{2m_2} + \frac{1}{m_1}$$

$$e' = \frac{k_{33}}{m_1 m_3} + \frac{k_{11} + k_{12}}{2m_2} \frac{1}{m_1} + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{k_{33}}{m_1} + \frac{k_{33}}{m_3} \right)$$

$$f' = \frac{k_{33} (k_{11} + k_{12})}{2m_1 m_2 m_3}$$

Ahora, $b_{33} = b_1$ es el parámetro, y la curva del lugar geométrico de las raíces se muestra en la Fig. 11.

Para hacer la curva del caso (3) se requiere de los llamados contornos de las raíces [5], puesto que hay dos parámetros que considerar. Sin embargo, el resultado en el caso (2) indica que el amortiguador b_1 casi no tiene ningún efecto en la modificación de las velocidades críticas. Por tal razón, se le dio un valor fijo a b_1 ($b_1 = 1.632 \times 10^3$ N s/m), y b_2 se tomó como el parámetro,

del cual se obtuvo la curva que se muestra en la Fig. 12.

CONCLUSIONES

Las curvas que aparecen en las Figs. 5 a 7 muestran que cambios considerables en las rigideces de los resortes no modifican substancialmente el comportamiento dinámico del sistema. De hecho, las rigideces k_1 y k_2 no tienen ningún efecto en tal comportamiento. Por esta razón, se decidió considerar la segunda alternativa.

Los lugares geométricos de las raíces, dibujados en las Figs. 9 a 12, muestran la variación de las raíces características al cambiar los valores del amortiguamiento. De los tres ramales que se muestran, sólo dos son de interés: los que se encuentran dentro de la región prohibida. Estas raíces están directamente relacionadas con las velocidades críticas por medio de la ecuación (8) y, por tanto, la posibilidad de mover las raíces características del eje imaginario a otras posiciones en el plano complejo implica la modificación de las velocidades críticas.

El amortiguamiento de la suspensión primaria (caso 2) no tiene ningún efecto en la modificación de las velocidades críticas, ya que el sistema se vuelve incontrolable y las raíces de interés permanecen en la misma posición (ver la región prohibida en Fig. 11).

Por otro lado, el amortiguamiento en la suspensión secundaria (caso 1) genera una solución comprometida puesto que las raíces de interés se mueven en direcciones opuestas, de tal manera que mientras un ramal se aleja de la región prohibida, el otro se acerca a ella (ver Fig. 10). Por tal motivo, se escogió solamente un valor de amortiguamiento como la solución más adecuada, siendo éste: $b_2 = 2.471 \times 10^6$ N s/m. Usando este valor de amortiguamiento, las raíces de interés permanecen fuera de la región prohibida y, consecientemente, generan velocidades críticas adecuadas.

Con el uso de amortiguamiento en las suspensiones primaria y secundaria (caso 3) los resultados no se alteran puesto que, como se puede ver en la Fig. 12, los ramales de interés en el lugar geométrico de las raíces no sufren ninguna variación apreciable, dado que solamente el tercer ramal, que se encuentra fuera de la región prohibida, cambia su forma. Es fácil inferir que este resultado es válido para todos los valores de b_1 en el caso (3), puesto que se requiere de valores muy altos de b_1 para obtener modificaciones muy ligeras del lugar geométrico correspondiente. Consecuentemente, la suspensión primaria no requiere amortiguamiento.

En trenes de alta velocidad, el amortiguamiento no elimina la condición vibratoria, pero se han determinado valores óptimos para disminuirla [6].

Sin embargo, en el sistema de transporte aquí presentado, el problema no es la alta velocidad y por tanto, el comportamiento dinámico del tren podría ser mejorado satisfactoriamente mediante la inclusión de amortiguadores en la suspensión secundaria. No obstante, al igual que en [6], también sería conveniente estudiar las propiedades del riel y su alojamiento, así como su influencia en la dinámica vertical del tren para poder obtener un mejor conocimiento del sistema, que permita recomendar soluciones más adecuadas.

RECONOCIMIENTO

Este proyecto de investigación fue costado conjuntamente por el Sistema de Transporte Colectivo del Distrito Federal y la División de Estudios Superiores (hoy de Posgrado) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

REFERENCIAS

- 1.- Chávez E. B., y Hernández, H. R., "Vibraciones en los carros del metro y fatiga" Primer Simposio México-Montreal, Junio 1975. (SMEMO B3-003).
- 2.- Chávez E. B., "Vibraciones sobre los carros del metro de México", Segundo Simposio México-Montreal, Montreal, Oct. 1976.
- 3.- System/360 Scientific Package Version III Programmer's Manual, IBM Technical Publications, White Plains, H20-0205-3, 1970.
- 4.- D'Azzo, J. J., and C. H. Houpis, Feedback Control System Analysis and Synthesis, McGraw-Hill, New York, 1966.
- 5.- Ogata, K., Modern Control Engineering, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1970.
- 6.- Mixson, J. S., y R. Steiner, "Optimization of a Simple Dynamic Model of a Railroad Car under Random and Sinusoidal Inputs", en Bogdanoff, J. L., y A. Piersol (Presidentes), Proc. Symp. on Stochastic Processes in Dynamical Problems, ASME, New York, 1969, pp. 29-40.

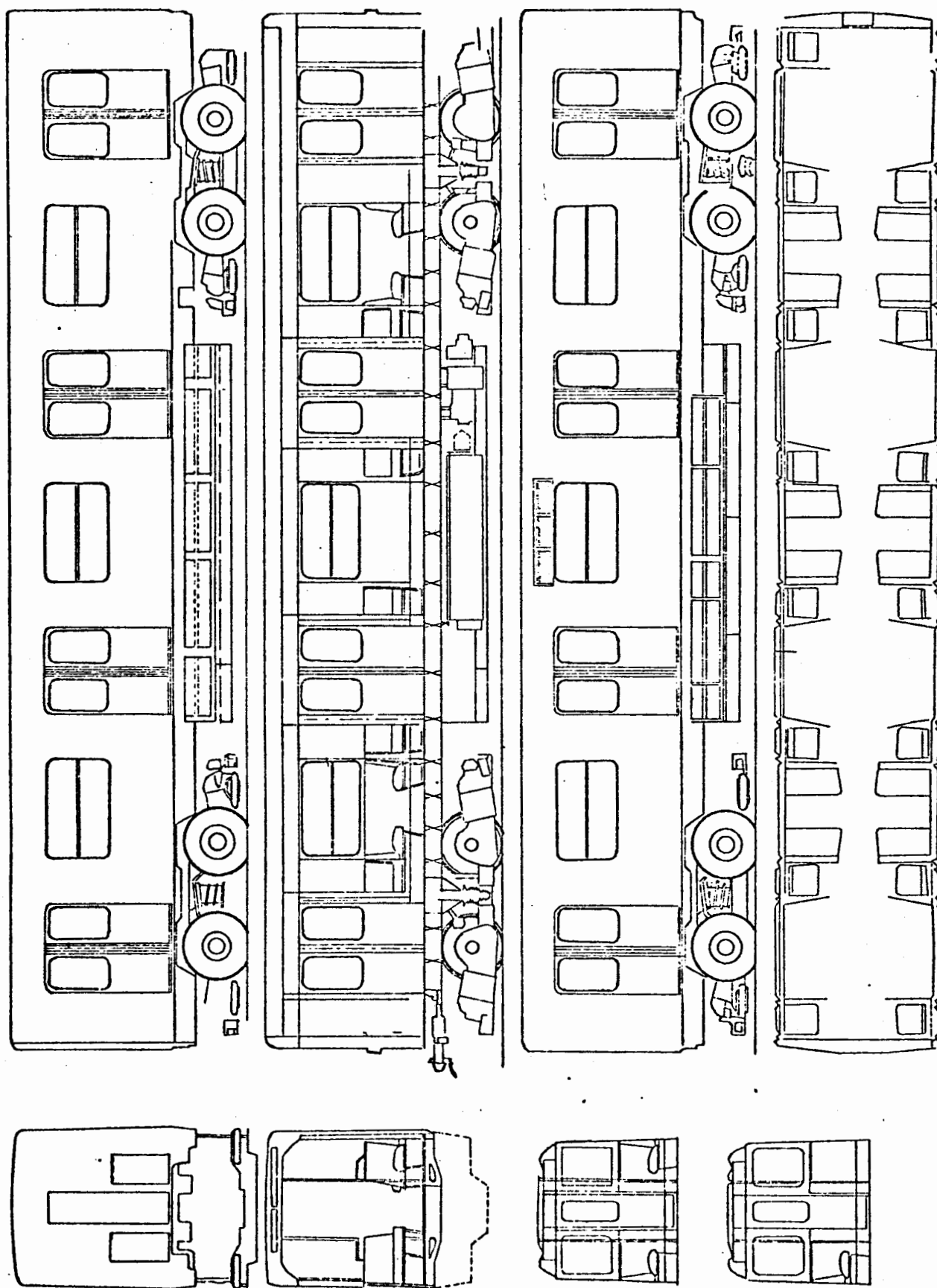


FIG. 1 VAGON DE TRANSPORTE MASIVO

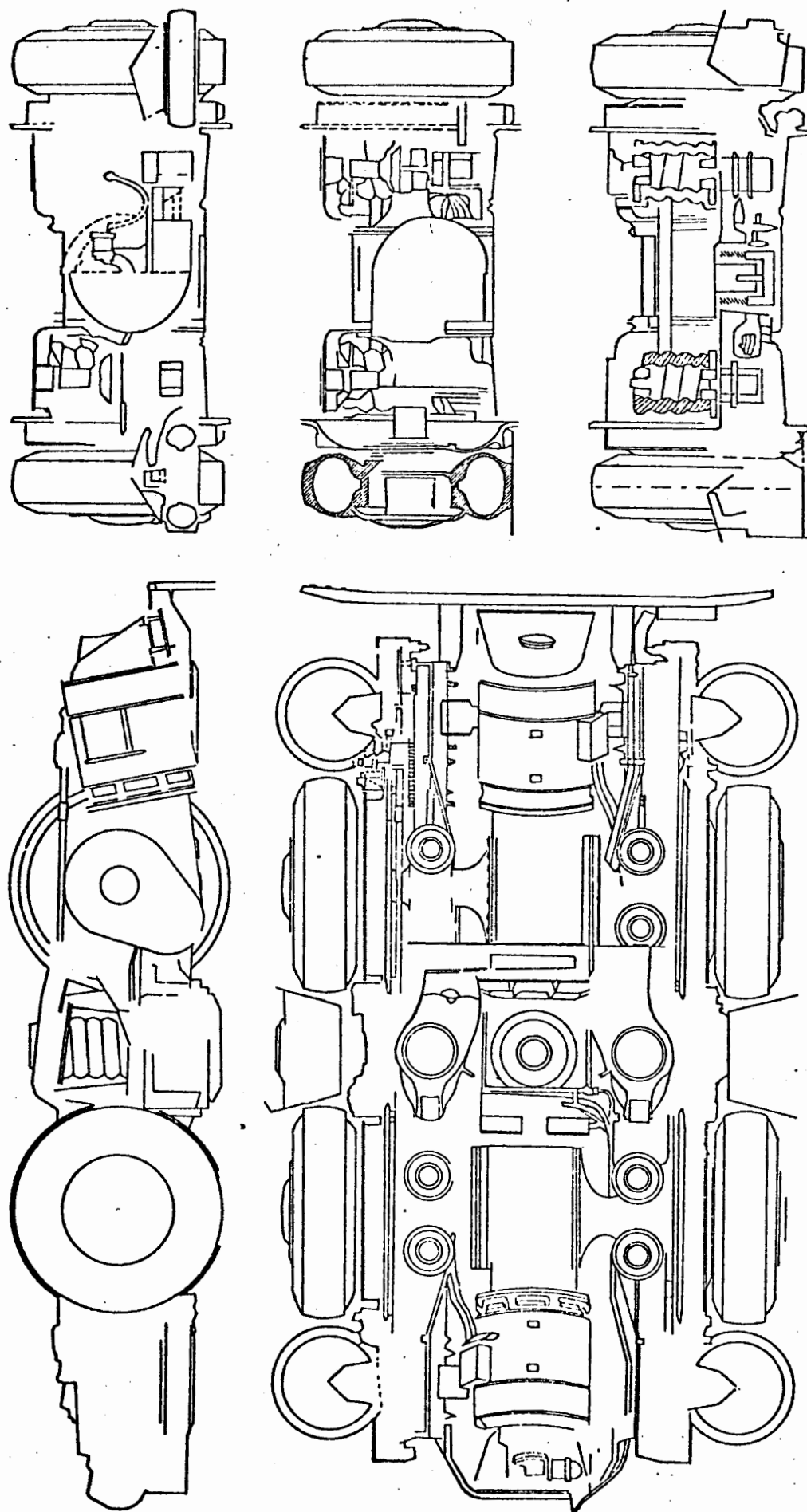


FIG. 2 "BOGIE" DE LA SUSPENSION

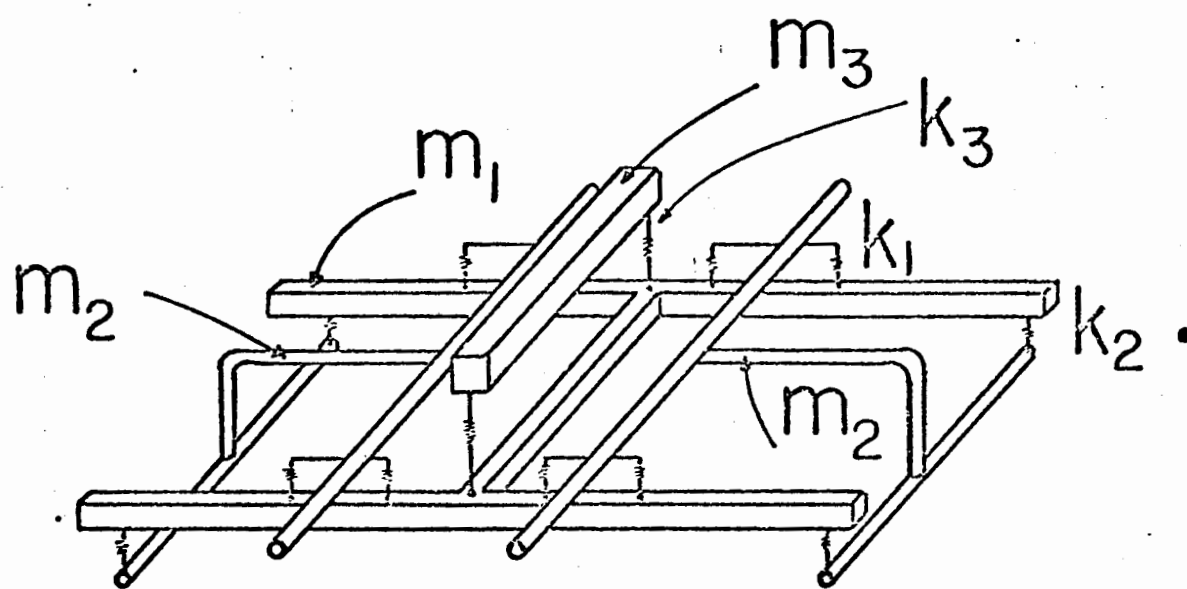


FIG. 3 DISPOSICION DE LOS ELEMENTOS DEL SISTEMA DE SUSPENSION

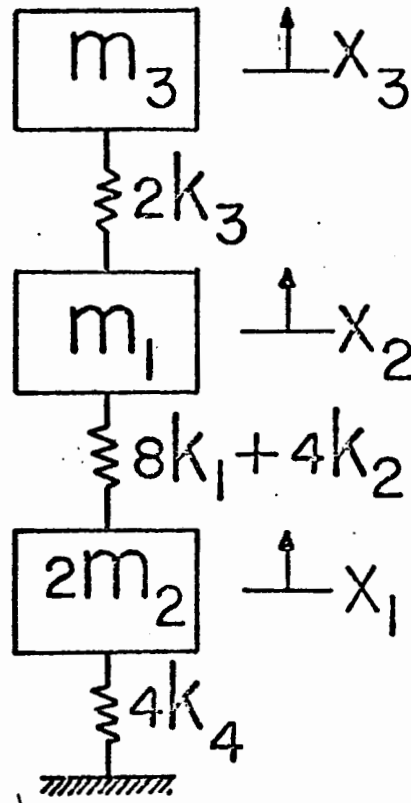


FIG. 4 MODELO ICONICO DEL SISTEMA DE SUSPENSION SIN AMORTIGUAMIENTO

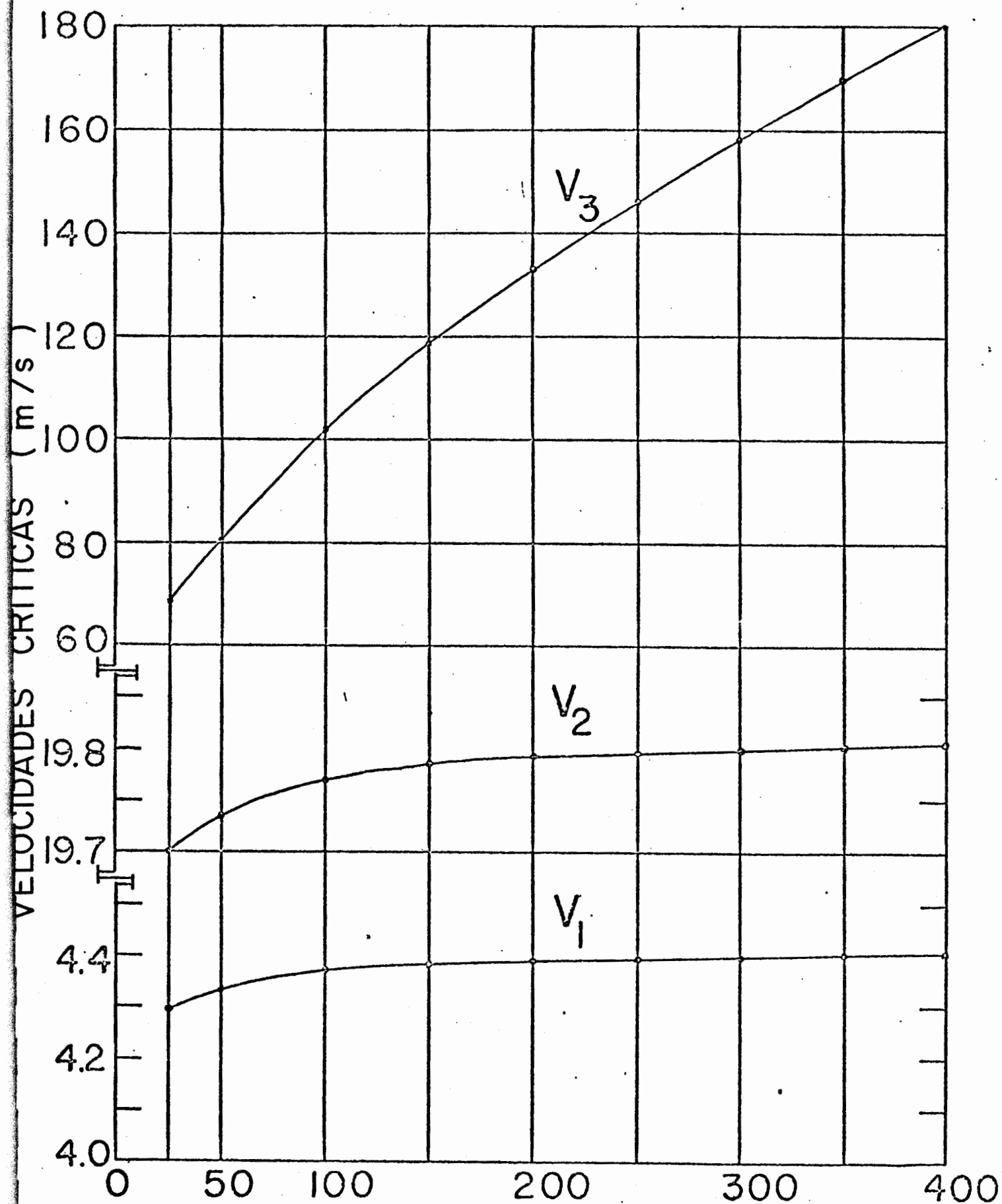


FIG. 5 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ k_1 SOBRE LOS VALORES DE LAS VELOCIDADES CRITICAS

$\%k_1$

DEPFI

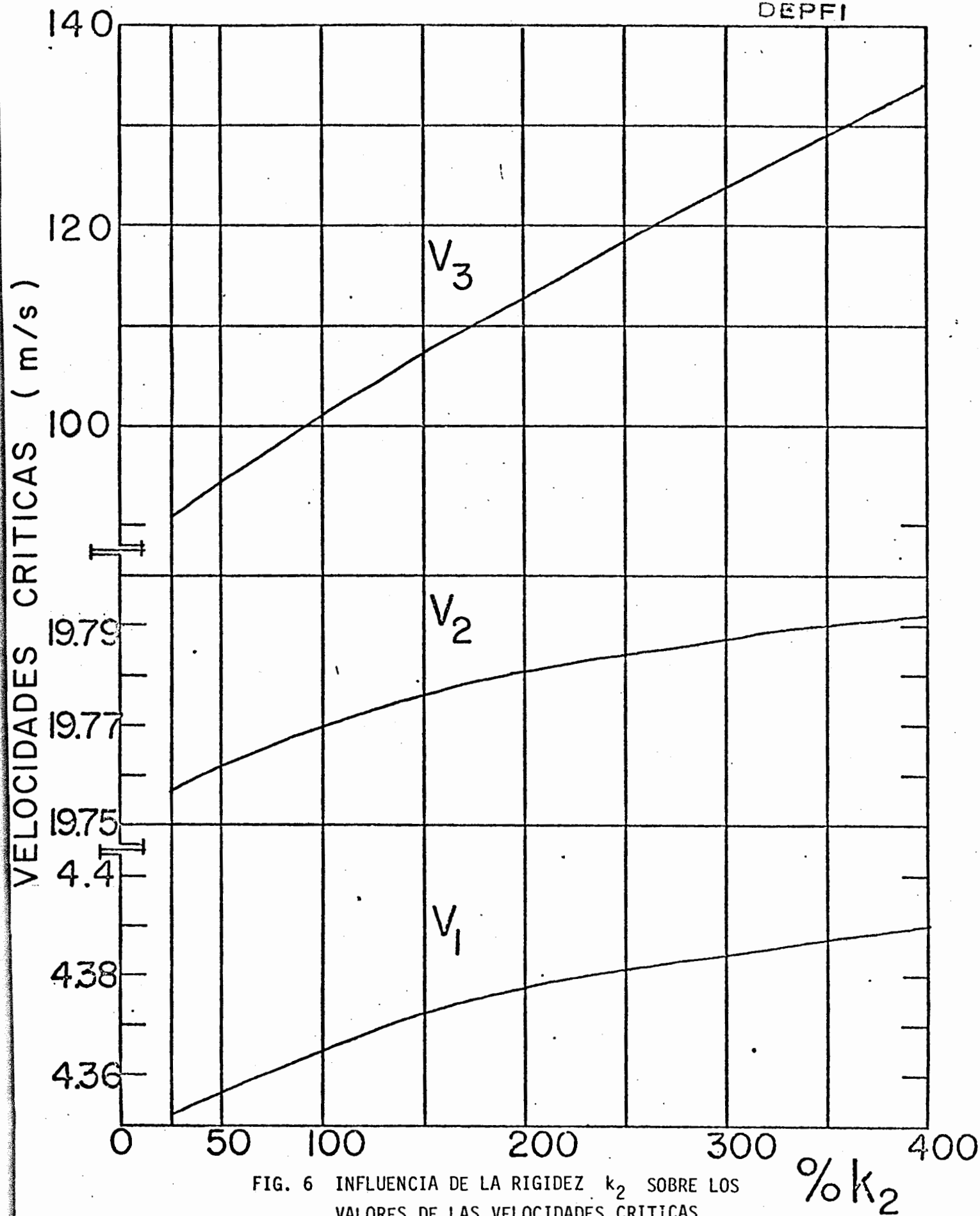


FIG. 6 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ k_2 SOBRE LOS VALORES DE LAS VELOCIDADES CRITICAS

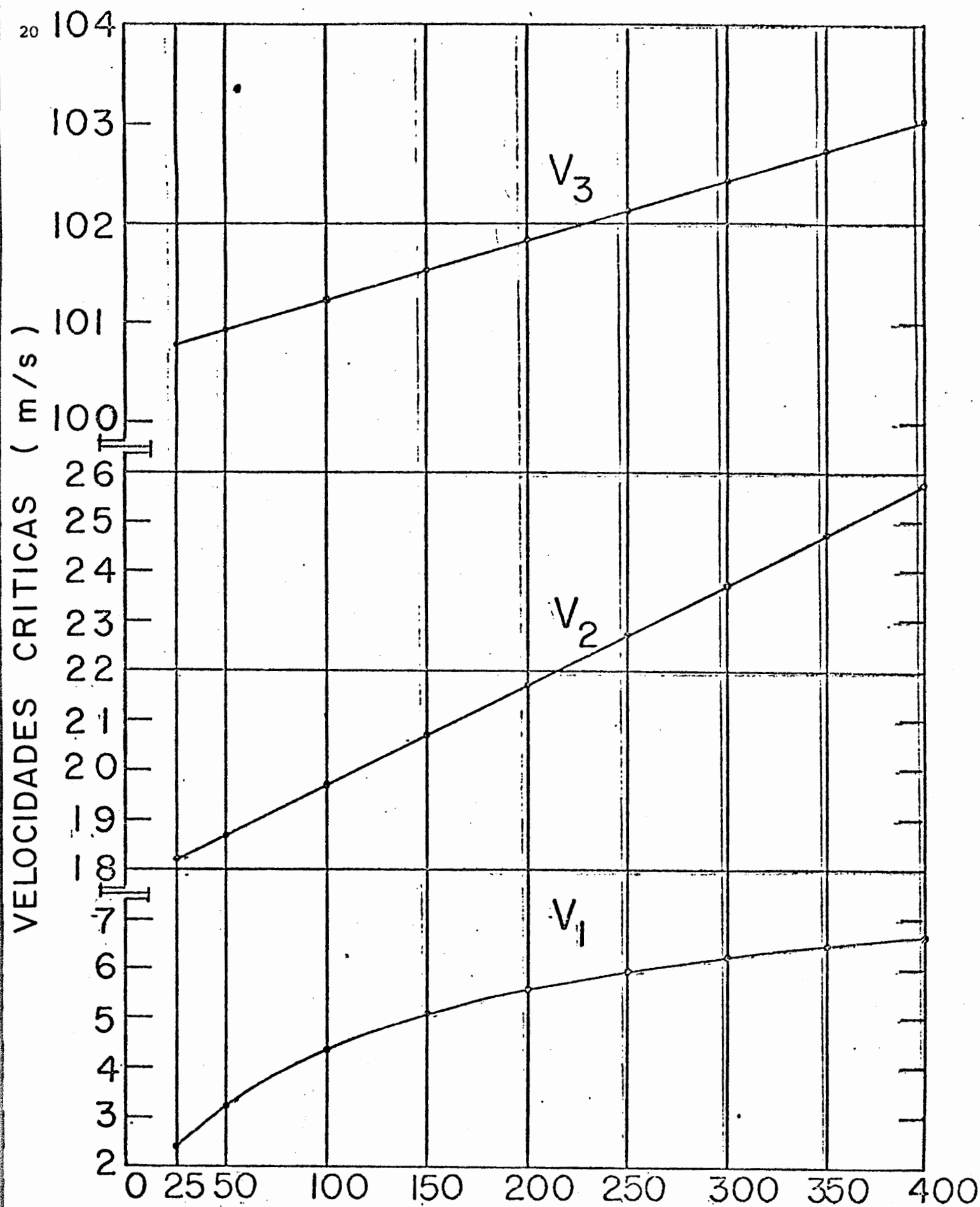


FIG. 7 INFLUENCIA DE LA RIGIDEZ k_3 SOBRE LOS VALORES DE LAS VELOCIDADES CRITICAS

% k_3

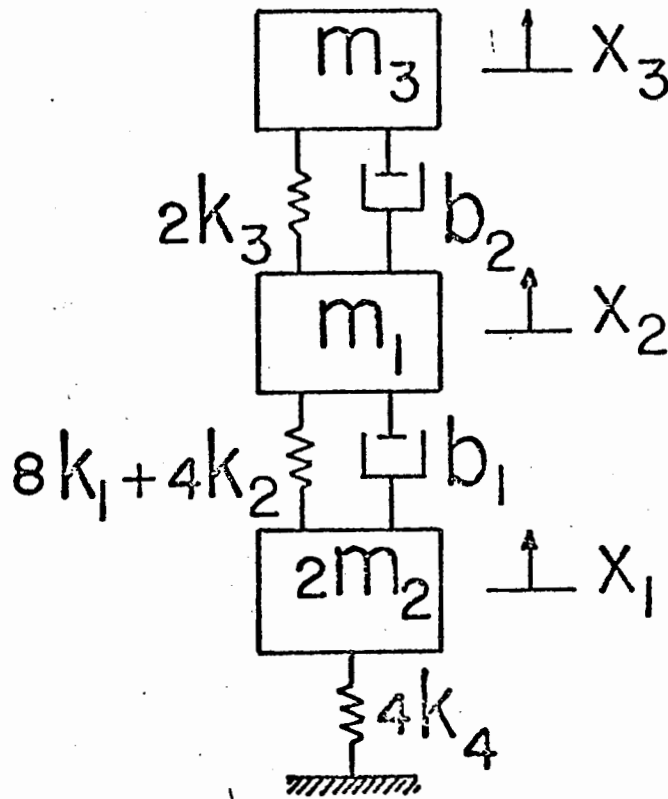


FIG. 8 MODELO ICONICO DEL SISTEMA DE SUSPENSION AMORTIGUADO

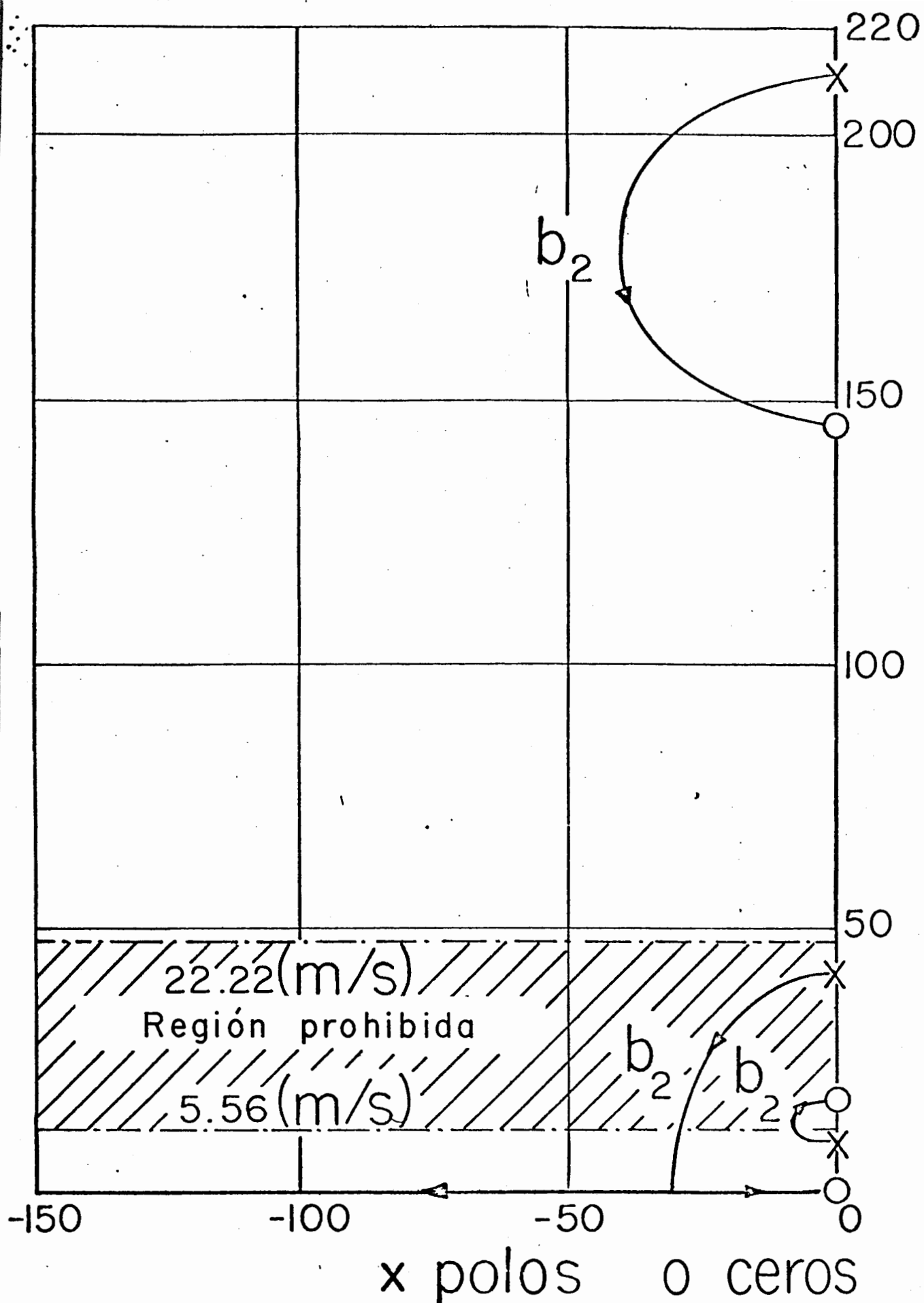


FIG. 9 LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES DE LA EC. (17)
CON $b_1 = 0$ y $0 \leq b_2 < \infty$

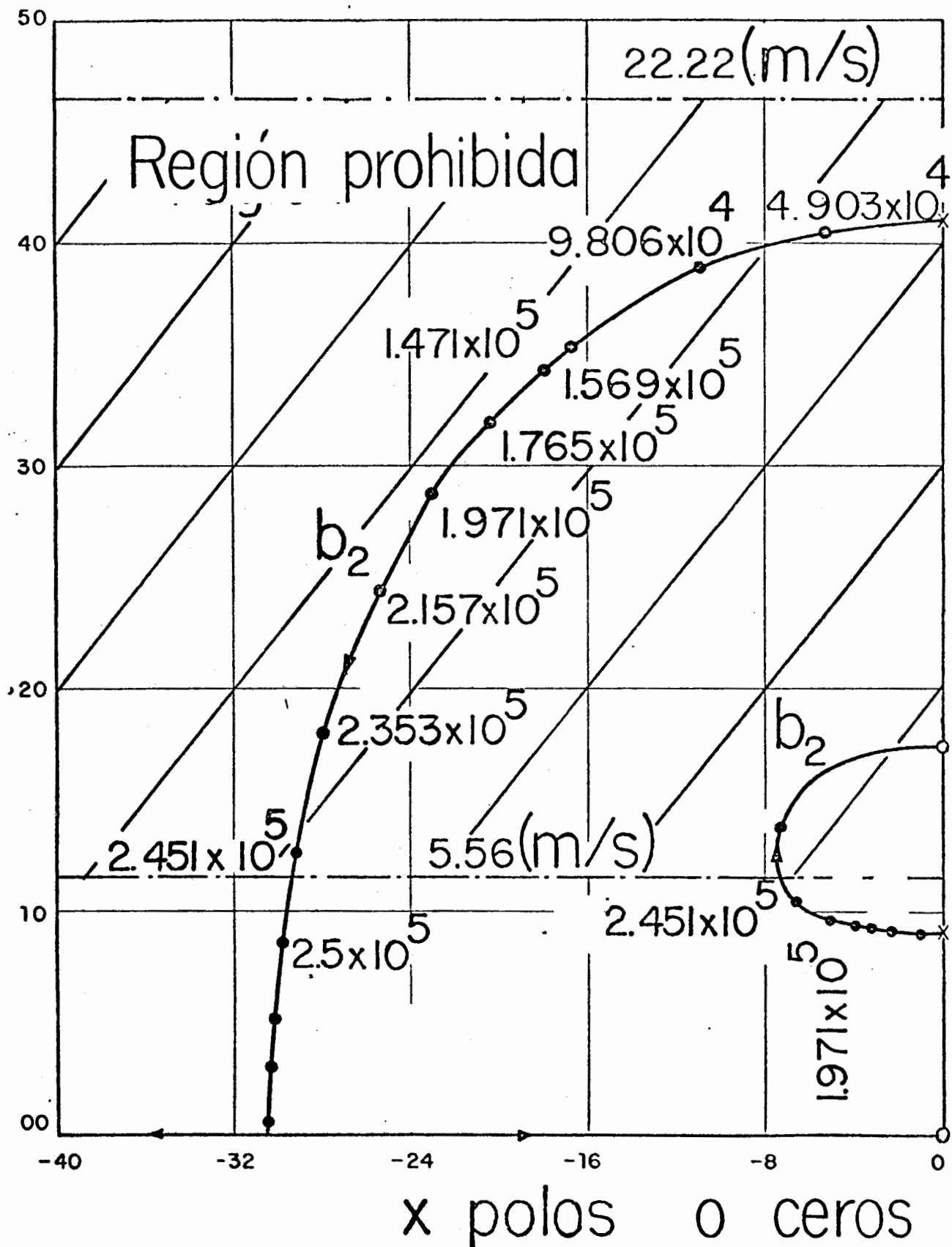


FIG. 10 DETALLE DEL LUGAR GEOMETRICO DE LA FIG. 9

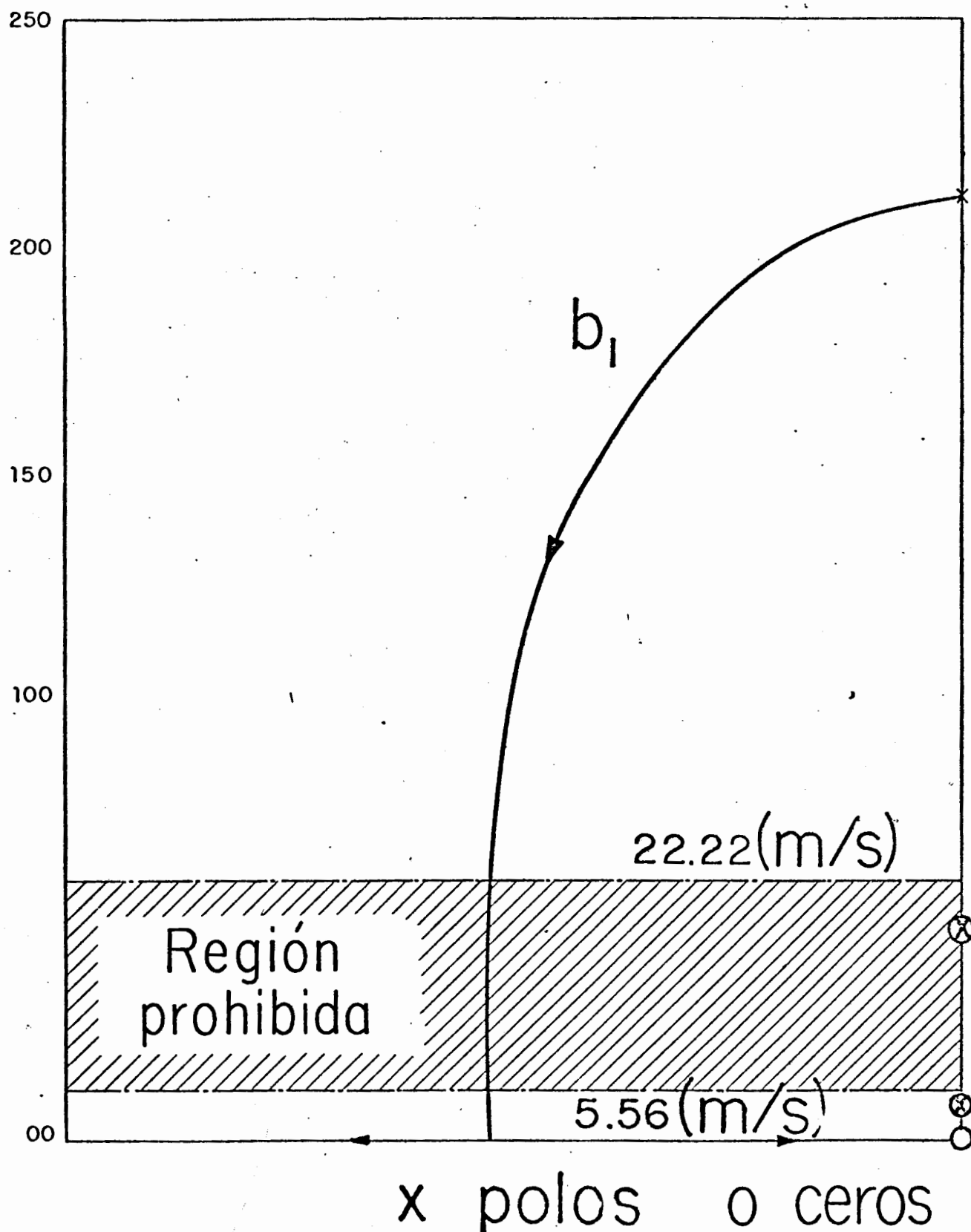


FIG. 11 LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES DE LA EC. (18)
CON $0 \leq b_1 < \infty$ Y $b_2 = 0$.

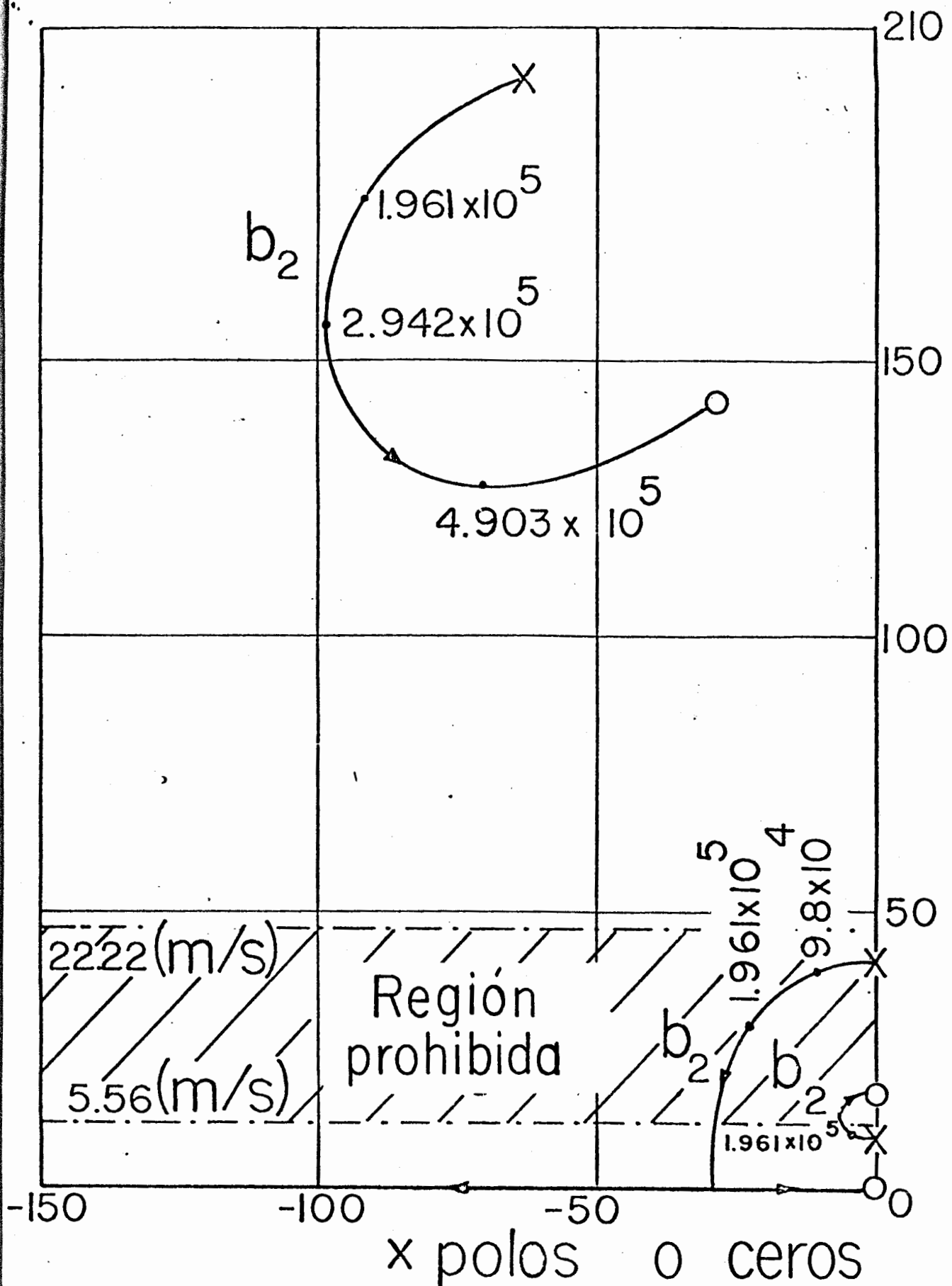


FIG. 12 LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES PARA
 $b_1 = 1.569 \times 10^5$ Y $0 \leq b_2 < \infty$

F/DEPFI/D-22/1981



702254