



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Control de un motor de
inducción por medio de un
controlador basado en
pasividad**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecatrónico

P R E S E N T A

Pablo Rodrigo Nungaray Salazar

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2025



**PROTESTA UNIVERSITARIA DE INTEGRIDAD Y
HONESTIDAD ACADÉMICA Y PROFESIONAL
(Titulación con trabajo escrito)**



De conformidad con lo dispuesto en los artículos 87, fracción V, del Estatuto General, 68, primer párrafo, del Reglamento General de Estudios Universitarios y 26, fracción I, y 35 del Reglamento General de Exámenes, me comprometo en todo tiempo a honrar a la institución y a cumplir con los principios establecidos en el Código de Ética de la Universidad Nacional Autónoma de México, especialmente con los de integridad y honestidad académica.

De acuerdo con lo anterior, manifiesto que el trabajo escrito titulado CONTROL DE UN MOTOR DE INDUCCION POR MEDIO DE UN CONTROLADOR BASADO EN PASIVIDAD, que presenté para obtener el título de INGENIERO MECATRÓNICO es original, de mi autoría y lo realicé con el rigor metodológico exigido por mi Entidad Académica, citando las fuentes de ideas, textos, imágenes, gráficos u otro tipo de obras empleadas para su desarrollo.

En consecuencia, acepto que la falta de cumplimiento de las disposiciones reglamentarias y normativas de la Universidad, en particular las ya referidas en el Código de Ética, llevará a la nulidad de los actos de carácter académico administrativo del proceso de titulación.

PABLO RODRIGO NUNGARAY SALAZAR
Número de cuenta: 315198960

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cozatl
Vocal:	Dr. Gerardo René Espinosa Pérez
Secretario:	Dr. Juan Mauricio Ángeles Cervantes
Primer suplente:	Dra. Sofía Magdalena Ávila Becerril
Segundo suplente:	M.I. Fernanda Ramos García

Esta tesis se realizó en el Laboratorio de Control perteneciente a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería en la UNAM.

Director de Tesis:

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez.

*“Lee todo, escucha todo y no creas en nada
hasta que puedas probarlo con tu propia investigación”*

William Cooper

*Con especial dedicación a mi abuelita **Josefina Sandoval Ríos**, te fuiste antes de
poder presentar este escrito, pero con el mismo amor que me brindaste en vida es que
te agradezco una vez más, ahora a través de estas palabras y este trabajo.*

Reconocimientos

Agradezco a toda mi familia, en especial a mis padres **Bernabé Nungaray** y **Josefina Salazar**, así como mis hermanas **Pilar Nungaray** y **Lupita Nungaray** por todo el amor y apoyo para cumplir el objetivo de titularme y finalizar mi primera tesis.

Al **Dr. Gerardo Espinosa** y la **M.I. Fernanda Ramos** por su tutoría y guía para la realización de este trabajo, así como el tiempo invertido, paciencia y apoyo tanto profesional como personal para seguir aprendiendo más de mi carrera y no dejarme vencer ante ninguna adversidad.

A los demás miembros del jurado **Dr. Edmundo Gabriel Rocha Cozatl**, **Dr. Juan Mauricio Ángeles Cervantes** y **Dra. Sofía Magdalena Ávila Becerril** por el tiempo invertido, las correcciones y comentarios que me ayudaron a mejorar este trabajo.

A mis compañeros del Laboratorio de Control por el tiempo, apoyo y motivación durante los ensayos de este trabajo, parte fundamental para una mejor presentación del mismo.

A mi novia **Pamela Cuevas**, por su amor, cariño e interés en saber de este proyecto. También por su paciencia en escucharme hablar constantemente sobre mi avance.

A todas mis amistades, les agradezco inmensamente a cada uno y una de ustedes por el gran apoyo durante las diferentes etapas de mi vida, tanto las académicas como de ahora en adelante profesional, confío y agradezco seguir con cada uno de ustedes con el pasar del tiempo.

A la **UNAM** y la **Facultad de Ingeniería** por la oportunidad de poder tener una formación profesional de calidad a tan bajo costo económico.

La realización de este trabajo fue posible gracias al apoyo otorgado por:

- Programa de apoyo a Proyectos de Investigación e innovación tecnológica PAPIIT IN109622

Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	X
Notación	XI
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Revisión Bibliográfica	2
1.3. Formulación del Problema	3
1.4. Contribuciones	3
1.4.1. Factibilidad de implementación	3
1.5. Organización de la tesis	4
2. Modelo Matemático	5
2.1. Sistema	5
2.1.1. Variables del sistema	6
2.1.2. Elementos ideales	6
2.2. Modelo eléctrico	8
2.2.1. Autoinductancia e inductancia mutua	8
2.3. Modelo mecánico	10
2.4. Modelo Trifásico del MI	11
2.5. Matrices transformadoras	15
2.5.1. Transformada de Clarke	17
2.5.2. Transformada de Park	18
2.5.3. Transformada de Clarke-Park	19
2.6. Modelo Bifásico del MI	19
2.6.1. Modelo ortogonal equivalente $\alpha\beta$	19
2.6.2. Modelo ortogonal equivalente x	22
2.6.3. Modelo ortogonal equivalente ab y dq	24
2.6.3.1. Agregando flujos magnéticos	24

3. Validación de modelo y esquema de control	26
3.1. Simulación del MI	26
3.1.1. Simulación del MI en dq	27
3.1.2. Simulación del MI en el marco ab	35
3.2. Metodología de control	39
3.2.1. Control basado en pasividad	39
3.3. Controlador	40
3.3.1. Trayectorias deseadas	41
3.3.2. Control de seguimiento de velocidad	42
3.3.3. Implementación	42
4. Evaluación del controlador	48
4.1. Evaluación de factibilidad	48
4.2. Evaluación de desempeño	50
4.2.1. Experimentos nominales	50
4.2.1.1. Perfil de velocidad n.º 1 - Regulación de velocidad . . .	50
4.2.1.2. Perfil de velocidad n.º 2 - Seguimiento de velocidad . .	53
4.2.1.3. Perfil de velocidad n.º 3 - Seguimiento ante cambios es-	
calón	57
4.2.2. Experimentos con perturbaciones e incertidumbres	59
4.2.2.1. Pruebas con par de carga como perturbación	60
4.2.2.2. Incertidumbre paramétrica	63
4.3. Discusión de resultados	71
5. Conclusiones	72
5.1. Trabajo Futuro	73
A. Obtención del Par eléctrico τ_e	74
B. Como se visualiza realmente la transformación dq	78
Bibliografía	83

Índice de figuras

1.1. Esquema de implementación.	3
2.1. Sistema y sus variables.	5
2.2. Elemento ideal.	7
2.3. Inductor.	7
2.4. Representación de subsistemas.	7
2.5. Inductores perpendiculares.	9
2.6. Inductores unidos de manera paralela.	9
2.7. Inductores unidos en un ángulo θ_e	10
2.8. Eje del motor.	11
2.9. Representación del motor de inducción de tres fases.	12
2.10. Representación del sistema de referencia abc	15
2.11. Representación del sistema de referencia $\alpha\beta$	16
2.12. Representación del sistema de referencia x	16
2.13. Representación del sistema de referencia dq	17
2.14. Representación del sistema de referencia ab	17
2.15. Representación del motor de inducción de dos fases.	20
3.1. Bloque de función Matlab con el modelo matemático del MI.	28
3.2. Modelo del MI en dq simulado.	29
3.3. Simulación del MI en el sistema de referencia dq	30
3.4. Voltajes de alimentación abc transformados a dq	31
3.5. Voltajes de alimentación abc	31
3.6. Voltajes de alimentación dq	32
3.7. Voltajes de alimentación dq sin fuerzas de origen mecánico.	33
3.8. Corrientes de estator en dq	33
3.9. Flujos de rotor en dq	34
3.10. Velocidad mecánica del rotor en dq	34
3.11. Par eléctrico del motor en dq	35
3.12. Simulación del MI en el sistema de referencia ab	35
3.13. Voltajes de alimentación abc transformados a dos fases ab	36
3.14. Corrientes de estator en ab	37
3.15. Flujos de rotor en ab	38

3.16. Velocidad angular del rotor en ab	38
3.17. Par eléctrico del motor en ab	39
3.18. Sistema Pasivo desde la entrada u a la salida y	39
3.19. Teorema de pasividad.	40
3.20. Ecuación y bloque Matlab de corriente i_{sq}^* deseada.	43
3.21. Ecuación y bloque Matlab de los flujos deseados ψ_{rd}^*, ψ_{rq}^*	44
3.22. Ecuación y bloque Matlab de los voltajes deseados V_{sd}^*, V_{sq}^*	45
3.23. Ecuación y bloque Matlab de la entrada de seguimiento $\tilde{u}$	46
3.24. Ecuación y bloque Matlab de la entrada de seguimiento $\tilde{u}$	47
4.1. Derivador <i>sucio</i> de primer orden.	49
4.2. Señales derivadas.	50
4.3. Perfil de velocidad n.º 1 - constante.	51
4.4. Comparación entre velocidad medida y deseada con perfil de velocidad n.º 1.	52
4.5. Error de velocidad con perfil de velocidad n.º 1.	53
4.6. Perfil de velocidad n.º 2 - Seguimiento de velocidad.	54
4.7. Comparación de velocidad medida y deseada con perfil de velocidad n.º 2.	55
4.8. Error de velocidad con perfil de velocidad n.º 2.	56
4.9. Perfil de velocidad n.º 3 - Seguimiento ante cambios escalón.	57
4.10. Comparación de velocidad medida y deseada con perfil de velocidad n.º 3.	58
4.11. Error de velocidad con perfil de velocidad n.º 3.	59
4.12. Par de carga para agregado al motor y controlador.	60
4.13. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 1 y τ_L	61
4.14. Error de velocidad con perfil de velocidad n.º 1 y τ_L	62
4.15. Comparación del par eléctrico τ_e	63
4.16. Código para variación de margen de error.	64
4.17. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y +5 % error en parámetros.	65
4.18. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y -5 % error en parámetros.	66
4.19. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y +10 % error en parámetros.	67
4.20. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y -10 % error en parámetros.	68
4.21. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y +15 % error en parámetros.	69
4.22. Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y -15 % error en parámetros.	70
A.1. Relación λ vs i	75
A.2. Par Eléctrico en Eje del MI.	76
B.1. Conjunto de bobinas en el estator.	78

B.2. Campos magnéticos del estator generados.	79
B.3. Rotor girando debido a interacción de campos magnéticos.	79
B.4. Posición eléctrica medida con y sin <i>slip</i>	80
B.5. Voltajes de alimentación dq sin fuerzas de origen mecánico.	81
B.6. Voltajes de alimentación dq sin fuerzas de origen mecánico.	82
B.7. θ_e sin ecuación mecánica completa contra θ_e con ecuación completa. . .	82

Índice de tablas

2.1. Variables de flujo y esfuerzo.	6
3.1. Especificaciones del MI ZDNM3581T.	27
3.2. Parámetros del MI ZDNM3581T a 1 HP.	27

Notación

Subíndices

e	— Variable eléctrica.
m	— Variable mecánica.
s	— Variable de estator.
r	— Variable de rotor.
sr	— Variable mutua.
d	— Variable de desplazamiento.
L	— Variable de inductor.
ls,lr	— Variable de dispersión en los devanados.
ms,mr	— Variable de magnetización en los devanados.

Superíndices

3ϕ	— Variable de tres fases.
2ϕ	— Variable de dos fases.
$\star$	— Valor deseado.

Escalares

u	— Entrada del sistema.
v	— Diferencia de Potencial o voltaje.
t	— Tiempo.
L	— Inductancia.
P	— Potencia.
i	— Corriente.
λ, ψ	— Flujo magnético.
θ	— Posición angular.
$\dot{\theta}, \omega$	— Velocidad angular.
$\ddot{\theta}, \alpha$	— Aceleración angular.
R	— Resistencia.
J	— Inercia rotacional del motor.
B	— Coeficiente de amortiguamiento mecánico
τ_L	— Par de carga externo aplicado el eje del rotor.
τ_e	— Par mecánico de origen eléctrico.

Sistemas

abc	— Sistema de referencia real de tres fases.
$\alpha\beta$	— Sistema de referencia equivalente de dos fases.
x	— Sistema de referencia de dos fases girando a velocidad arbitraria.
$dq0$	— Sistema de referencia de dos fases que gira a la velocidad del rotor.
$ab0$	— Sistema de referencia estacionario de dos fases.

Matrices

V_e	— Matriz de voltajes.
V_s	— Matriz de voltajes de estator.
V_r	— Matriz de voltajes de rotor.
R_e	— Matriz de resistencias eléctricas.
I_e	— Matriz de corrientes eléctricas.
I_s	— Matriz de corrientes de estator.
I_r	— Matriz de corrientes de rotor.
Ψ_r	— Matriz de flujos magnéticos de rotor.
D_e	— Matriz de inductancias eléctricas.
W_1	— Matriz de inductancias eléctricas derivada.
W_2	— Matriz de inductancias eléctricas derivada para subsistema mecánico.
$\mathbb{I}_3$	— Matriz identidad 3x3.
$\mathbb{I}_2$	— Matriz identidad 2x2.
$\mathbb{J}$	— Matriz antisimétrica.
E	— Matriz de error.

Introducción

1.1. Motivación

El motor de inducción trifásico (MI) es una máquina de corriente alterna (CA) asíncrona capaz de convertir la energía eléctrica en energía mecánica rotacional. Su funcionamiento es debido al fenómeno de inducción, en el que un elemento (el estator) se conecta a una fuente de energía y un devanado en forma de jaula de ardilla (el rotor) lleva la corriente inducida, generando así el movimiento angular.

Esta máquina cuenta con bastante importancia e interés teórico a la vez de un gran valor práctico [13]. Tiene un basto uso dentro de diversas industrias como la eléctrica, química, automotriz y manufacturera, entre otras; así como una variedad de aplicaciones que demandan altos desempeños a estas máquinas eléctricas, como el caso de los automóviles eléctricos. El MI es el mejor candidato para estas aplicaciones debido a su robustez, bajo costo y madurez en tecnología [9], por lo que es utilizado en grandes empresas como *Tesla*, *General Motors*, *Rivian* y *Lucid Motors*, por mencionar algunas.

Su modelo matemático ha resultado fiable desde su aplicación en los años 60s. Con el avance de la tecnología como la electrónica de potencia, se han creado diversas áreas de estudio para desarrollar esquemas de control con el fin de obtener un adecuado funcionamiento de acuerdo a la necesidad de aplicación. Por todo ello, se estima que es posible utilizar técnicas de control no lineales para diseñar controladores nuevos con posibles aplicaciones de uso industrial.

Por otro lado, el control basado en pasividad es una metodología de control en la que puede garantizarse la estabilidad del sistema, siendo esto de gran utilidad en el MI debido a que las ecuaciones matemáticas que describen el sistema garantizan pasividad desde los voltajes de estator hasta las corrientes de estator. Actualmente, en el control a nivel industrial se observa preferencia por los controladores industriales tradicionales que no toman en cuenta la estructura del sistema y son de ajuste empírico, debido a la

dificultad para obtener una descripción analítica del proceso, existiendo así un amplio nivel de oportunidad de encontrar nuevas opciones de controladores de similar o mejor implementación para la industria.

1.2. Revisión Bibliográfica

Existe una gran variedad de publicaciones respecto al control de MI. Empezando con el control por campo orientado (FOC por sus siglas en inglés), uno de los controladores más usados en la industria, mismo que es explicado en [25] y caracterizado por controlar tanto el ángulo como la magnitud de las fases de corriente y voltaje al desacoplar el flujo y par del motor. De igual manera, se tienen esquemas de control no lineal como el modelo multi-escalar en [12] que puede ser comparado con el FOC, contrastando su desempeño y funcionamiento. Por otra parte, se tienen los esquemas basados en pasividad de [19] que resuelven el problema de regulación de par analizando el sistema y sus interconexiones con un observador y control de retroalimentación de estados, garantizando estabilidad exponencial del par deseado. El tema es expandido años más tarde con el seguimiento de un par variante en el tiempo [7] definiendo una dinámica en lazo cerrado compatible con el modelo. En [6] proponen un control de seguimiento de velocidad globalmente estable por retroalimentación de la salida para el seguimiento de par, omitiendo así la reconstrucción o medición de los estados. Otra metodología utilizada es la de interconexión e inyección de amortiguamiento simultáneo (SIDA-PBC) en [3] para regular par y flujo del rotor. En [16] evalúan el rendimiento del control de seguimiento de velocidad y flujos magnéticos fundamentado en la teoría de pasividad, destacando las mejoras logradas en su dinámica, así como su sencilla implementación. De manera similar al SIDA-PBC existe la metodología de interconexión y asignación de amortiguamiento (IDA-PBC por sus siglas en inglés) que es empleada tanto en [8] sin restringir la velocidad del marco de referencia y en [2] a través del principio de intercambio de energía. Finalmente, y siendo FOC utilizado como un caso particular de la metodología del IDA-PBC, en [4] se destaca la complejidad estructural no lineal que presentan estas máquinas eléctricas.

El control del motor de inducción ha sido y sigue siendo un tema actual de gran interés, con una gran cantidad de resultados de acuerdo a [14] y con un área de estudio abierta para desarrollar nuevos esquemas de control, como las investigaciones de [26] donde usan el controlador PID para controlar la velocidad mientras que un control PID híbrido y con modos deslizantes se enfoca en el control del flujo y par del motor. Este control de modos deslizantes también es utilizado en [5] y [27], el primero para hacer control robusto ante variación paramétrica y perturbaciones en el par de carga, minimizando así dicha variación. El segundo, llamado super-twisting con acción integral (iSTSMC por sus siglas en inglés) para mejorar el control directo de par disminuyendo el flujo, par y las variaciones de corrientes, a través del modelo fijo al estator. El uso de Inteligencia Artificial (IA) también está presente en el control de MI, tal es el caso de [1] que hace

uso de un control de red neuronal para minimizar los flujos del estator y las variaciones electromagnéticas del par. Como último, en [24] trabajan con un MI de nueve fases, para explicar sus ventajas en aplicaciones con mayor fiabilidad y redundancia, aplicando un esquema de control predictivo (MPC por sus siglas en inglés). En resumen, mucho ha avanzado el desarrollo de esquemas de control para motores de inducción (MI) mediante diversas técnicas de diseño, adaptadas a objetivos y aplicaciones específicas.

1.3. Formulación del Problema

Gracias a todos los trabajos anteriormente mencionados, se ha definido como el objetivo de esta tesis utilizar un modelo de un MI real para abordar el control basado en pasividad, ya que en la literatura se han reportado excelentes resultados teóricos. Para ello, será utilizado un controlador propuesto en [23] y presentado recientemente en el Congreso Nacional de Control Automático (CNCA) bajo un nuevo artículo [22] para poder analizar desde un punto de vista ingenieril las ventajas y desventajas que se tuvieron para implementarlo, con el fin de evaluar si es viable o no su implementación desde una perspectiva industrial. Dicha implementación es descrita en la Figura 1.1 siendo detallada y explicada en los capítulos posteriores.

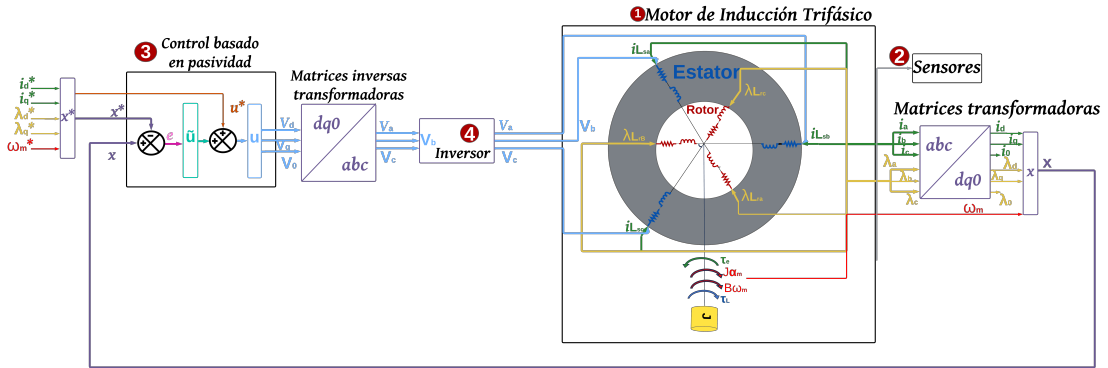


Figura 1.1: Esquema de implementación.

1.4. Contribuciones

1.4.1. Factibilidad de implementación

Después de realizar un análisis completo del esquema de control bajo estudio, se logró establecer los siguientes resultados:

1. Habiendo realizado un respectivo análisis y búsqueda presupuestal de los respectivos sensores y plataforma computacional, puede concluirse que desde un punto de

vista de implementación, el esquema mostrado en la Figura 1.1 es factible debido al costo razonable en el mercado que hay para estos elementos, al igual que se posiciona como competitivo en comparación a otros controladores, ya que se está hablando de requisitos nada extraordinarios y que serán igualmente necesarios a lo que hay en la industria.

2. Una vez se hubo concluido que la implementación es viable, se comprobó que el desempeño y estabilidad previsto por el resultado teórico son alcanzados a nivel numérico cuando se implementa. Se concluye que las salidas obtenidas son correctas a lo estimado teóricamente, tales como todos los errores tendiendo a cero.

1.5. Organización de la tesis

La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

- En el Capítulo 2 se presenta el modelo que describe al MI a utilizar a partir de la definición de sistema y elementos ideales, así como las matrices transformadoras de Clarke y Park para cambio de sistema de coordenadas, obteniendo así los modelos en sistema de referencia abc , $\alpha\beta$, dq y ab .
- El Capítulo 3 contiene la aplicación tanto la metodología de diseño así como la ley de control desde una perspectiva de implementación, simulación e instrumentación con el motor bajo estudio.
- El Capítulo 4 presenta los resultados obtenidos durante el punto anterior con diversos perfiles de velocidad y varias suposiciones, con el objetivo de evaluar el desempeño del controlador.
- Finalmente, en el Capítulo 5, con los resultados del capítulo anterior, se presentan las conclusiones finales del trabajo realizado, así como algún trabajo futuro que se tiene en mente para dar continuidad al proyecto.

Modelo Matemático

En este capítulo se describe el modelo matemático del MI en distintos sistemas de referencia, esto con base en el modelo generalizado de la máquina rotatoria, así como el modelado de sistemas físicos.

2.1. Sistema

Un sistema es una combinación de componentes que actúan conjuntamente para alcanzar un objetivo [17]. Puede verse como una caja, donde por dentro se encuentran los componentes internos interconectados que lo hacen funcionar. Este sistema interactúa con entradas y salidas mediante puertos de energía conocidos como "variables del sistema" las cuales al ingresar al sistema son transformadas para finalmente salir del sistema y ser utilizadas posteriormente.

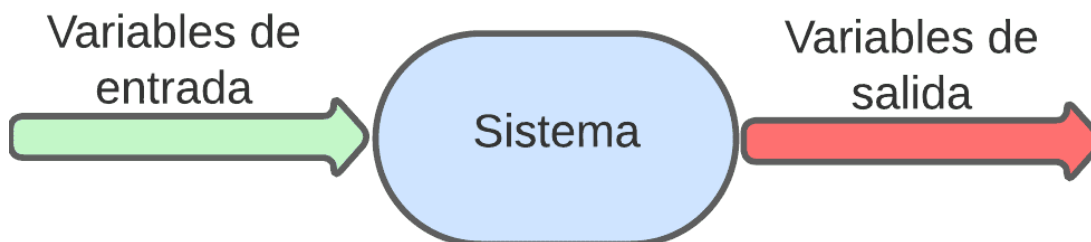


Figura 2.1: Sistema y sus variables.

Existen distintos tipos de sistemas en la naturaleza que puede clasificarse de diversas y numerosas maneras, dando algunos ejemplos de éstos, existen sistemas mecánicos, eléctricos, térmicos, hidráulicos, entre otros.

2.1.1. Variables del sistema

Las variables del sistema son valores que cambian de acuerdo a diferentes situaciones a lo largo del tiempo y que son representadas simbólicamente mediante letras. En modelado existen dos tipos de variables que representan los dos mecanismos de transferencia de energía:

- Variables de Flujo: Representada con la letra f (por su significado en inglés *flow*). Esta variable se considera una variable pasante debido a que fluye por dentro del sistema.
- Variables de esfuerzo: Se representa usualmente mediante la letra e (por *effort*). Esta variable es cruzada y necesita de una referencia de dos puntos para ser medida y así fluir a través del sistema.

En la Tabla 2.1 se presentan algunas variables de flujo y esfuerzo para cada uno de los tipos de sistemas mencionados anteriormente.

Sistema	Variable de flujo	Variable de esfuerzo
Mecánicos	Fuerza [N]	Posición [m]
Eléctricos	Voltaje [v]	Corriente [i]
Térmicos	Temperatura [T]	Transferencia de calor [q]
Hidráulicos	Presión [P]	Gasto [Q]

Tabla 2.1: Variables de flujo y esfuerzo.

2.1.2. Elementos ideales

Un elemento ideal es aquel que describe un solo y único fenómeno físico. Este elemento está estructurado por un dispositivo (D), una variable de esfuerzo y una de flujo, como se puede observar en la Figura 2.2.

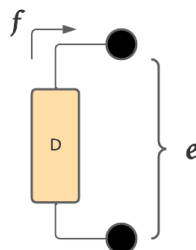


Figura 2.2: Elemento ideal.

Un ejemplo de elemento ideal es el **inductor**, el cual es un componente eléctrico que almacena y libera energía en forma de campo magnético y cuya representación se presenta en la Figura 2.3.

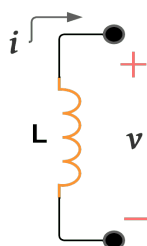


Figura 2.3: Inductor.

La unión de distintos elementos ideales forman un sistema, que forman subsistemas del sistema en general.

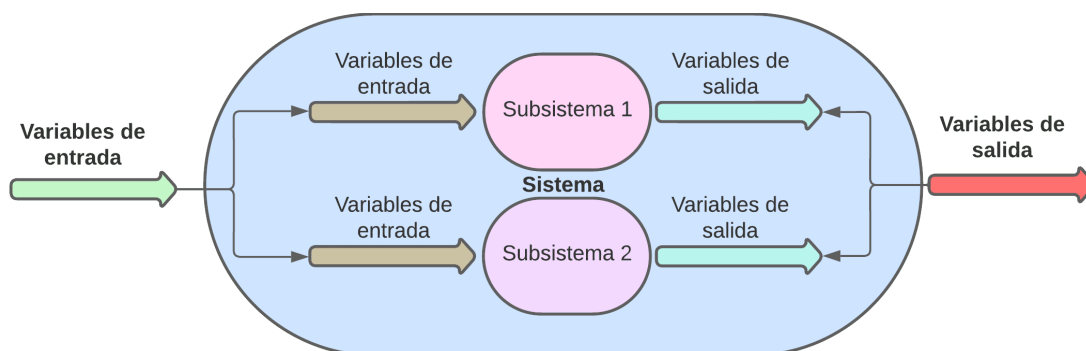


Figura 2.4: Representación de subsistemas.

El motor de inducción trifásico que se utilizará en este trabajo de tesis es un sistema compuesto por dos subsistemas, el **subsistema eléctrico** y el **subsistema mecánico**, de los cuales se obtendrá el modelo matemático para hacer uso de ellos en el siguiente capítulo.

2.2. Modelo eléctrico

Este es el subsistema del motor compuesto por variables eléctricas identificadas por el subíndice e , del cual se subdivide también por las variables determinadas por los subíndices s para el estator y r para el rotor.

2.2.1. Autoinductancia e inductancia mutua

La inductancia es la propiedad física que tiene un circuito de oponerse al flujo magnético. En un inductor estático común, como el mostrado en la Figura 2.3, puede producirse dos versiones de esta inductancia: la primera, debida al propio flujo, denominada **autoinductancia** y la **inductancia mutua**. La autoinductancia se rige a través de las ecuaciones

$$V_L = L \frac{d}{dt} i_L \quad (2.1a)$$

y

$$\lambda_L = L i_L \quad (2.1b)$$

donde V_L es el voltaje del inductor, L la inductancia, $\frac{d}{dt} i_L$ la derivada de la corriente del inductor con respecto al tiempo, i_L la corriente del mismo y λ_L corresponde al flujo del inductor.

La otra versión, es cuando se tiene dos o más inductores y el flujo de un inductor influye sobre el otro, produciendo así la **inductancia mutua**. En el caso de inductancias que se desplazan rotacionalmente unas respecto a otras y suponiendo que ambos inductores conectados se encuentran de manera perpendicular entre ellos, esto no producirá una inductancia mutua, como se muestra en la Figura 2.5. En este caso solo se presentan autoinductancias, por lo que se tiene que

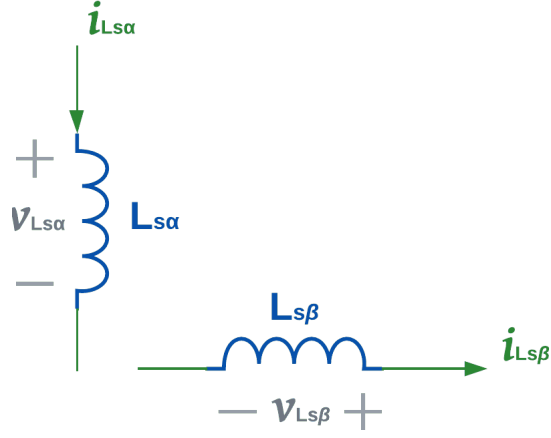


Figura 2.5: Inductores perpendiculares.

$$\lambda_{L_{s\alpha}} = L_{s\alpha} i_{L_{s\alpha}} \quad (2.2a)$$

y

$$\lambda_{L_{s\beta}} = L_{s\beta} i_{L_{s\beta}} \quad (2.2b)$$

Por el caso contrario, si se tiene un inductor paralelo al otro, se presentará la máxima inductancia mutua, como se observa en la Figura 2.6, donde sus ecuaciones de flujo están dadas como

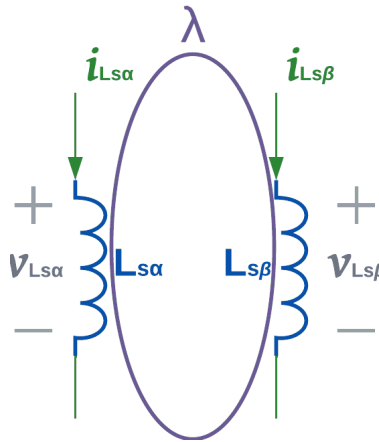


Figura 2.6: Inductores unidos de manera paralela.

$$\lambda_{L_{s\alpha}} = L_{s\alpha} i_{L_{s\alpha}} + L_{sr} i_{L_{s\beta}} \quad (2.3a)$$

y

$$\lambda_{L_{s\beta}} = L_{sr} i_{L_{s\alpha}} + L_{s\beta} i_{L_{s\beta}} \quad (2.3b)$$

donde L_{sr} es el coeficiente de inductancia mutua.

Finalmente, si la distancia entre un inductor y otro está medido por un ángulo diferente a los 0° y 90° grados, como en la Figura 2.7, se puede obtener el valor de su flujo inferido mediante las ecuaciones

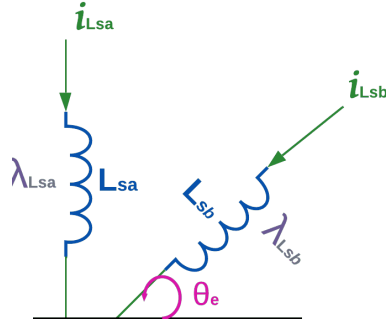


Figura 2.7: Inductores unidos en un ángulo θ_e .

$$\lambda_{L_{sa}} = L_{sa} i_{L_{sa}} + L_{sr} \sin(\theta_e) i_{L_{sb}} \quad (2.4a)$$

así como

$$\lambda_{L_{sb}} = L_{sr} \sin(\theta_e) i_{L_{sa}} + L_{sb} i_{L_{sb}} \quad (2.4b)$$

donde θ_e es el ángulo eléctrico de distancia entre ambos inductores.

2.3. Modelo mecánico

Analizando ahora el subsistema mecánico del motor, compuesto por el eje conectado al rotor, las fuerzas mecánicas y propiedades que actúan se muestran en la Figura 2.8.

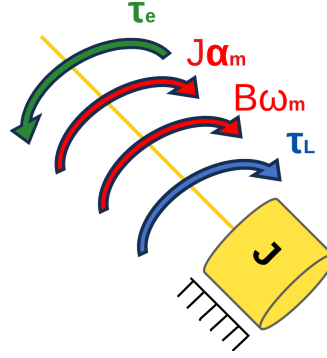


Figura 2.8: Eje del motor.

Este subsistema se rige con la ecuación

$$J\alpha_m + B\omega_m = \tau_e - \tau_L \quad (2.5)$$

donde:

- θ_m es la posición angular mecánica.
- $\omega_m = \dot{\theta}_m$ es la velocidad angular mecánica.
- $\alpha_m = \ddot{\theta}_m$ es la aceleración angular mecánica
- $J > 0$ es la inercia rotacional del rotor.
- $B \geq 0$ es el coeficiente de fricción viscosa rotacional, (o el coeficiente de amortiguamiento mecánico, visto desde el enfoque de la dinámica).
- τ_L es el par de carga externo aplicado al eje del rotor.
- τ_e es el par mecánico de origen eléctrico definido como

$$T_e = \frac{1}{2}(I_e)^T \frac{\partial W_1(\theta_m)}{\partial \theta_m} I_e, \quad (2.6)$$

donde $W_1(\theta_m)$ es una matriz de inductancias, la cual se definirá más adelante, mientras que I_e es el vector de corrientes. La obtención de T_e se encuentra detallada en el Apéndice [A](#).

2.4. Modelo Trifásico del MI

Para la obtención del modelo completo en el marco de referencia de 3 fases abc , se utilizan las definiciones previamente mencionadas para realizar la Figura [2.9](#), donde el

vector de entradas trifásico del MI está dado por

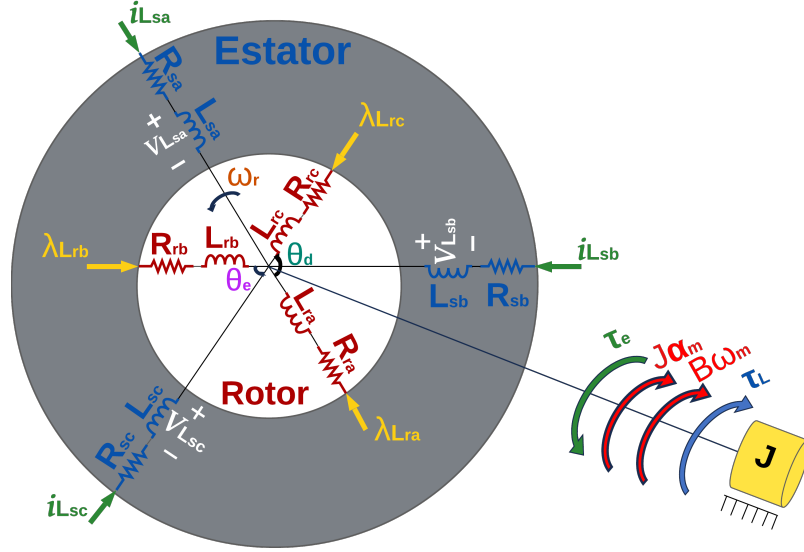


Figura 2.9: Representación del motor de inducción de tres fases.

$$V_e^{3\phi} = \begin{bmatrix} V_s^{3\phi} \\ V_r^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.7a)$$

con

$$V_s^{3\phi} = \begin{bmatrix} v_{sa}^{3\phi} \\ v_{sb}^{3\phi} \\ v_{sc}^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.7b)$$

y

$$V_r^{3\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7c)$$

con los subíndices s y r correspondiendo a las variables de estator y rotor, respectivamente. Así como los subíndices a , b y c para indicar la respectiva fase del motor.

La matriz de resistencias eléctricas se presenta como

$$R_e^{3\phi} = \begin{bmatrix} R_s \mathbb{I}_3 & 0 \mathbb{I}_3 \\ 0 \mathbb{I}_3 & R_r \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

con los escalares $R_s, R_r > 0$ como las resistencias eléctricas en estator y rotor, respecti-

vamente, definiendo $\mathbb{I}_3$ como una matriz identidad de dimensión 3×3 .

La matriz de corrientes eléctricas se compone de

$$I_e^{3\phi} = \begin{bmatrix} I_s^{3\phi} \\ I_r^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.9a)$$

donde

$$I_s^{3\phi} = \begin{bmatrix} i_{sa}^{3\phi} \\ i_{sb}^{3\phi} \\ i_{sc}^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.9b)$$

mientras que

$$I_r^{3\phi} = \begin{bmatrix} i_{ra}^{3\phi} \\ i_{rb}^{3\phi} \\ i_{rc}^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.9c)$$

La matriz de inductancias para este tipo de máquina rotatoria en particular está descrita en [11] como

$$D_e^{3\phi} = \begin{bmatrix} L_s^{3\phi} & L_{sr}^{3\phi} \\ L_{rs}^{3\phi} & L_r^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde

$$L_{sr}^{3\phi} = L_{sr3} \begin{bmatrix} \cos(\theta_e) & \cos(\theta_e + \theta_d) & \cos(\theta_e - \theta_d) \\ \cos(\theta_e - \theta_d) & \cos(\theta_e) & \cos(\theta_e + \theta_d) \\ \cos(\theta_e + \theta_d) & \cos(\theta_e - \theta_d) & \cos(\theta_e) \end{bmatrix} \quad (2.11a)$$

con

$$L_{rs}^{3\phi} = (L_{sr}^{3\phi})^T, \quad \theta_d = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_e = n_p \theta_m$$

mientras que

$$L_s^{3\phi} = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix} \quad (2.11b)$$

y

$$L_r^{3\phi} = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix} \quad (2.11c)$$

En las ecuaciones anteriores, n_p es el número de par de polos, L_{ls} , L_{ms} son las inductancias de dispersión y magnetización en los devanados del estator, respectivamente, así como L_{lr} , L_{mr} análogamente, corresponden al rotor.

Al despreciar el acoplamiento entre fases al debido a su separación en 120° , se considera que $L_{ms} = L_{mr} = 0$ quedando las matrices de inductancia de estator y rotor como

$$L_s^{3\phi} = \begin{bmatrix} L_{s3} & 0 & 0 \\ 0 & L_{s3} & 0 \\ 0 & 0 & L_{s3} \end{bmatrix}, \quad (2.12a)$$

$$L_r^{3\phi} = \begin{bmatrix} L_{r3} & 0 & 0 \\ 0 & L_{r3} & 0 \\ 0 & 0 & L_{r3} \end{bmatrix} \quad (2.12b)$$

en donde se ha definido $L_{s3}, L_{r3}, L_{sr3} > 0$ como las inductancias en estator, rotor y mutua para el modelo de tres fases, respectivamente.

De todas las ecuaciones anteriores, el modelo completo para el motor de tres fases está dado como

$$V_e^{3\phi} = R_e^{3\phi} I_e^{3\phi} + D_e^{3\phi} \dot{I}_e^{3\phi} + W_1^{3\phi} I_e^{3\phi} \dot{\theta}_m \quad (2.13a)$$

para el sistema eléctrico, mientras que la dinámica del sistema mecánico es

$$J\ddot{\theta}_m + B\dot{\theta}_m = \tau_e(I_e^{3\phi}, \theta_m) - \tau_L(\dot{\theta}_m, \theta_m), \quad (2.13b)$$

donde

$$W_1^{3\phi} = \frac{\partial D_e^{3\phi}(\theta_m)}{\partial \theta_m} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial L_{sr}^{3\phi}}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial L_{rs}^{3\phi}}{\partial \theta_m} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14a)$$

con

$$\frac{\partial L_{sr3}^{3\phi}}{\partial \theta_m} = -n_p L_{sr} \begin{bmatrix} \sin(n_p \theta_m) & \sin(n_p \theta_m + \theta_d) & \sin(n_p \theta_m - \theta_d) \\ \sin(n_p \theta_m - \theta_d) & \sin(n_p \theta_m) & \sin(n_p \theta_m + \theta_d) \\ \sin(n_p \theta_m + \theta_d) & \sin(n_p \theta_m - \theta_d) & \sin(n_p \theta_m) \end{bmatrix} \quad (2.14b)$$

y

$$\tau_e(I_e^{3\phi}, \theta_m) = \frac{1}{2} (I_e^{3\phi})^T W_1^{3\phi} I_e^{3\phi} = (I_s^{3\phi})^T \left[\frac{\partial L_{sr}^{3\phi}}{\partial \theta_m} \right] I_r^{3\phi}. \quad (2.14c)$$

Reemplazando (2.7a), (2.9a), (2.8), (2.10) y (2.14a) en (2.13a) así como (2.14) en (2.13b),

se tiene el modelo trifásico de manera matricial dado por el modelo eléctrico

$$\begin{bmatrix} V_s^{3\phi} \\ V_r^{3\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s \mathbb{I}_3 & 0 \mathbb{I}_3 \\ 0 \mathbb{I}_3 & R_r \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^{3\phi} \\ I_r^{3\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_s^{3\phi} & L_{sr}^{3\phi} \\ L_{rs}^{3\phi} & L_r^{3\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_s^{3\phi} \\ \dot{I}_r^{3\phi} \end{bmatrix} + \dot{\theta}_m \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial L_{sr}^{3\phi}}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial L_{rs}^{3\phi}}{\partial \theta_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^{3\phi} \\ I_r^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.15a)$$

y el modelo mecánico

$$J\ddot{\theta}_m = (I_s^{3\phi})^T \left[\frac{\partial L_{sr}^{3\phi}}{\partial \theta_m} \right] I_r^{3\phi} - \tau_L - B\dot{\theta}_m. \quad (2.15b)$$

2.5. Matrices transformadoras

El motor de inducción trifásico utilizado para este proyecto, como se indica en el nombre, cuenta con tres fases de inductores mutuos abc , separadas cada una 120° , como se muestra en la Figura 2.9.

Estas tres fases, como se visualiza en la Figura 1.1 del Capítulo 1, pueden ser transformadas a un marco de referencia ortogonal rotatorio $dq0$, en el que se evita la dependencia con la posición angular del rotor, pero de manera intermedia debe de pasar primero por una transformación equivalente en el marco de referencia equivalente $\alpha\beta$, posteriormente a otro aquí llamado x , que permitirá obtener el sistema dq que gira a la velocidad de giro del flujo de rotor.

De manera gráfica, la representación de estos marcos de referencia y sus señales puede apreciarse en las Figuras 2.10 a 2.14.

- La Figura 2.10 presenta al sistema de referencia abc , con sus 3 fases, así como un marco de referencia que gira a la velocidad del rotor ω_m , provocando así una salida sinusoidal.

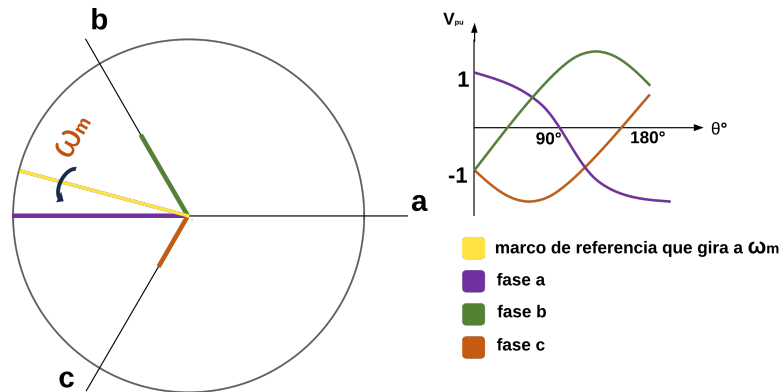


Figura 2.10: Representación del sistema de referencia abc .

- En la Figura 2.11 se presenta el sistema de referencia $\alpha\beta$, homologó al sistema abc girando a ω_m y con salida sinusoidal pero con únicamente dos fases.

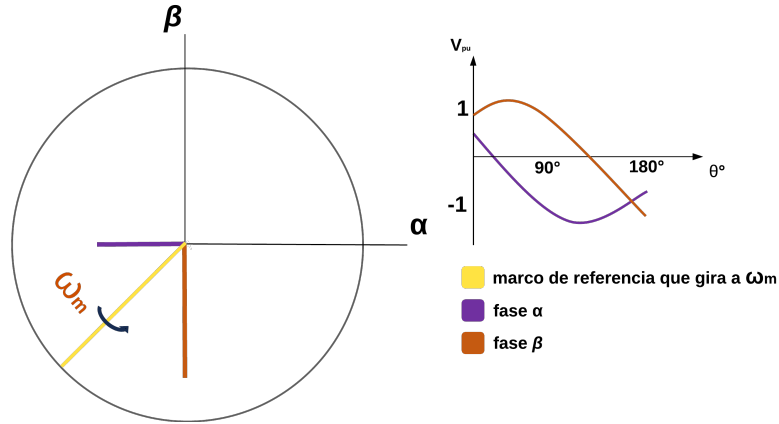


Figura 2.11: Representación del sistema de referencia $\alpha\beta$.

- El sistema de referencia intermedio x de la Figura 2.12 es también con dos fases y salida sinusoidal, pero gira a una velocidad ω_x que es distinta a la del rotor.

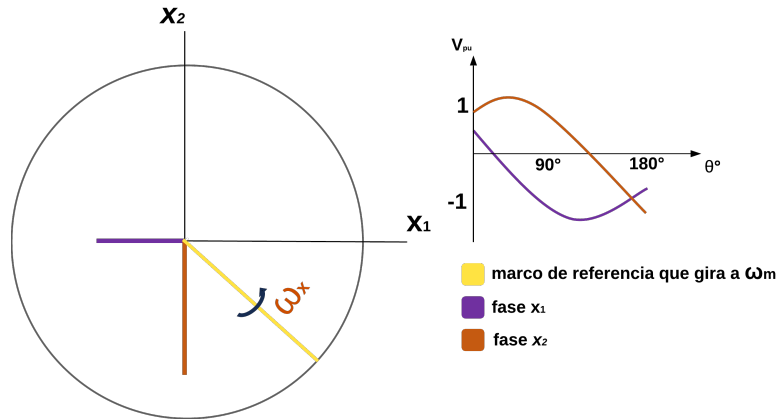


Figura 2.12: Representación del sistema de referencia x .

- En la Figura 2.13 se visualiza el sistema de referencia dq , resultado de igualar $\omega_x = \omega_m$ pero con sus dos ejes girando de igual manera a la velocidad del motor, que dará una salida de voltaje constante.

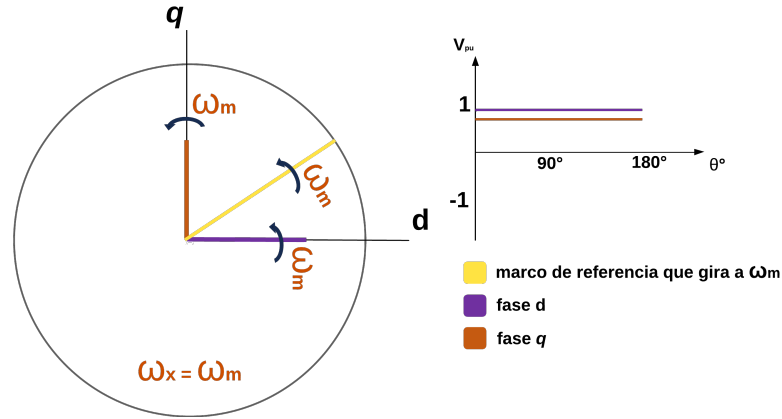


Figura 2.13: Representación del sistema de referencia dq .

- Finalmente, en la Figura 2.14 se muestra el sistema de referencia ab , cuyas fases tienen una salida sinusoidal pero con un marco de referencia estático, al igualar $\omega_m = 0$.

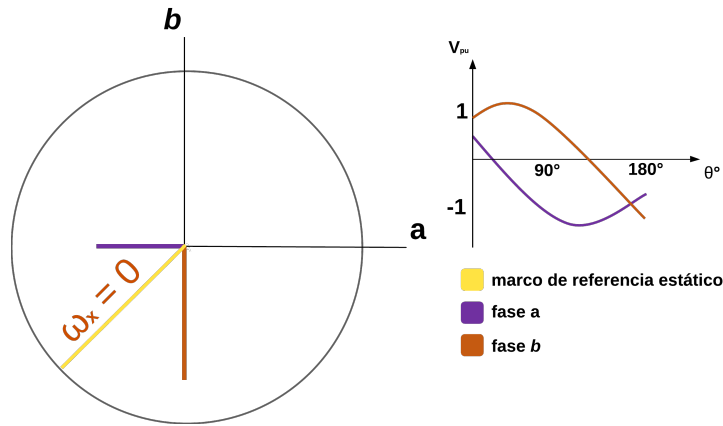


Figura 2.14: Representación del sistema de referencia ab .

Para realizar dichas transformaciones de un marco de referencia a otro se utilizan las transformadas de Clarke y Park, que permiten dichos cambios de referencia.

2.5.1. Transformada de Clarke

Esta transformada convierte las componentes de un sistema de tres fases, llamado abc , en un sistema equivalente de dos componentes, que se conocerá como $\alpha\beta$, con únicamente dos fases ortogonales para el estator y dos en el rotor. Estas matrices aplican tal y como se muestran solo en caso de tener 3 fases balanceadas, es decir, que son de la misma magnitud, misma frecuencia y cada una desfasada 120° , que es el caso del MI

utilizado (Figura 2.9).

La transformada de Clarke dada en forma matricial queda, en su forma estándar, como

$$\begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

donde el coeficiente $\frac{2}{3}$ es introducido con el fin de preservación de la amplitud de las señales luego de aplicarse la transformación. Su inversa es

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\alpha \\ f_\beta \\ f_0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

En estas matrices de transformación (2.16) y (2.17), f puede representar voltaje o corriente, tanto para sus variables de estator y rotor.

2.5.2. Transformada de Park

Esta transformada tiene como objetivo eliminar la dependencia de las inductancias respecto a la posición θ_m y representar todas las variables en un sistema común. Esto permite considerar los sistemas de referencia $\alpha\beta$ obtenidos de la transformación de Clarke, así como un tercer sistema de referencia (igualmente ortogonal) llamado x , porque gira a una velocidad arbitraria ω_x .

La posición angular de este sistema es una función del tiempo.

$$\theta_x = \omega_x t + \theta_x(0) \quad ; \quad \theta_x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{\theta}_x = \omega_x$$

Por lo que, la transformación de Park en la variable del estator se escribe como

$$\begin{bmatrix} f_{s_{x1}} \\ f_{s_{x2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x) & \sin(\theta_x) \\ -\sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s_\alpha} \\ f_{s_\beta} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

siendo su inversa

$$\begin{bmatrix} f_{s_\alpha} \\ f_{s_\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x) & -\sin(\theta_x) \\ \sin(\theta_x) & \cos(\theta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{s_{x1}} \\ f_{s_{x2}} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

A su vez, la transformación de Park en la variable del rotor se muestra como

$$\begin{bmatrix} f_{r_{x1}} \\ f_{r_{x2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x - n_p \theta_m) & \sin(\theta_x - n_p \theta_m) \\ -\sin(\theta_x - n_p \theta_m) & \cos(\theta_x - n_p \theta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{r_\alpha} \\ f_{r_\beta} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

y su inversa

$$\begin{bmatrix} f_{r\alpha} \\ f_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_x - n_p\theta_m) & -\sin(\theta_x - n_p\theta_m) \\ \sin(\theta_x - n_p\theta_m) & \cos(\theta_x - n_p\theta_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{rx1} \\ f_{rx2} \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Recordando que para todas las matrices de transformación, f puede representar voltaje o corriente, pero las matrices (2.18) y (2.19) solo es para las variables de estator. Así como las matrices (2.20) y (2.21) para las de rotor.

2.5.3. Transformada de Clarke-Park

Esta transformada es una unión de las transformadas (2.16) y (2.17) de Clarke, así como las transformadas (2.18), (2.19) de Park, lo cual convierte directamente las componentes de un sistema trifásico abc a un sistema bifásico rotacional dq .

De acuerdo con [21], la matriz Clarke-Park está dada, en su forma estándar, por

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(n_p\theta_m) & \cos(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) & \cos(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(n_p\theta_m) & -\sin(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

con su inversa

$$\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n_p\theta_m) & -\sin(n_p\theta_m) & 1 \\ \cos(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(n_p\theta_m - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(n_p\theta_m + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ f_0 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

2.6. Modelo Bifásico del MI

Para poder llegar al modelo equivalente en su forma bifásica es necesario emplear algunas de las transformaciones anteriormente mencionadas.

2.6.1. Modelo ortogonal equivalente $\alpha\beta$

Este es un modelo matemático del motor real de inducción, que tiene como objetivo simplificar sus cálculos y la simulación en software, tener únicamente dos fases pero con una separación de 90° . Una representación de cómo se vería en la realidad se muestra en la Figura 2.15.

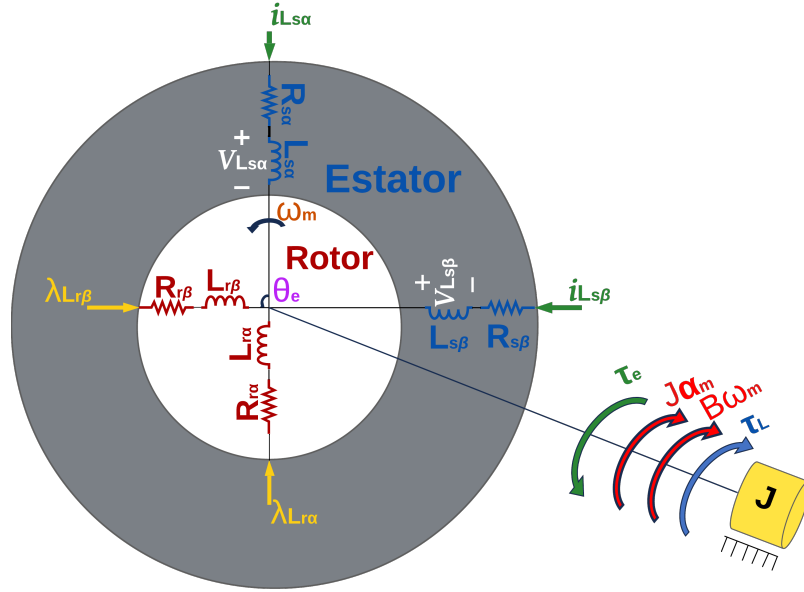


Figura 2.15: Representación del motor de inducción de dos fases.

Para obtener matemáticamente este modelo se hará uso de la transformada de Clarke, específicamente de la ecuación (2.17) pero ampliada para el estator y rotor, quedando como

$$f_e^{3\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} f_e^{2\phi} \quad (2.24)$$

donde

$$f_e^{3\phi} = \begin{bmatrix} f_s^{3\phi} \\ f_r^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.25a)$$

con

$$f_s^{3\phi} = \begin{bmatrix} f_{s_a}^{3\phi} \\ f_{s_b}^{3\phi} \\ f_{s_c}^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.25b)$$

$$f_r^{3\phi} = \begin{bmatrix} f_{r_a}^{3\phi} \\ f_{r_b}^{3\phi} \\ f_{r_c}^{3\phi} \end{bmatrix} \quad (2.25c)$$

y

$$f_e^{2\phi} = \begin{bmatrix} f_s^{2\phi} \\ f_r^{2\phi} \end{bmatrix} \quad (2.26a)$$

donde

$$f_s^{2\phi} = \begin{bmatrix} f_{s_\alpha}^{2\phi} \\ f_{s_\beta}^{2\phi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26b)$$

$$f_r^{2\phi} = \begin{bmatrix} f_{r_\alpha}^{2\phi} \\ f_{r_\beta}^{2\phi} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.26c)$$

Note que f_e tanto para tres (3ϕ) o dos (2ϕ) fases puede representar la matriz V_e de voltaje o I_e de corriente en la misma cantidad de fases.

Una vez transformados ambos vectores, se aplican a los subsistemas eléctrico (2.13a) y mecánico (2.13b) para obtener el modelo de dos fases $\alpha\beta$ [15] expresado como

$$V_e^{2\phi} = R_e^{2\phi} I_e^{2\phi} + D_e^{2\phi}(\theta_m) \dot{I}_e^{2\phi} + W_1^{2\phi} I_e^{2\phi} \dot{\theta}_m \quad (2.27a)$$

y

$$J\ddot{\theta}_m + B\dot{\theta}_m = \tau_e(I_e^{2\phi}, \theta_m) - \tau_L(\dot{\theta}_m, \theta_m). \quad (2.27b)$$

Al momento de realizar la transformación, tanto la matriz de resistencias $R_e^{2\phi}$ así como la matriz de inductancias $D_e^{2\phi}$ y su derivada $W_1^{2\phi}$ son afectadas, por lo que ahora se representan como

$$R_e^{2\phi} = \begin{bmatrix} R_s \mathbb{I}_2 & 0 \mathbb{I}_2 \\ 0 \mathbb{I}_2 & R_r \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.28a)$$

con $\mathbb{I}_2$ como la matriz identidad de dimensión 2 x 2, mientras que

$$D_e^{2\phi}(\theta_m) = \begin{bmatrix} L_{s2} \mathbb{I}_2 & L_{sr2} e^{\mathbb{J} n_p \theta_m} \\ L_{sr2} e^{-\mathbb{J} n_p \theta_m} & L_{r2} \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.28b)$$

$$W_1^{2\phi} = n_p L_{sr2} \begin{bmatrix} 0\mathbb{I}_2 & \mathbb{J} e^{\mathbb{J} n_p \theta_m} \\ -\mathbb{J} e^{-\mathbb{J} n_p \theta_m} & 0\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.28c)$$

donde

$$e^{\mathbb{J} n_p \theta_m} = \begin{bmatrix} \cos(n_p \theta_m) & -\sin(n_p \theta_m) \\ \sin(n_p \theta_m) & \cos(n_p \theta_m) \end{bmatrix},$$

con la propiedad $e^{-\mathbb{J} n_p \theta_m} = (e^{\mathbb{J} n_p \theta_m})^T$.

Finalmente, el par generado toma la forma

$$\tau_e(I_e^{2\phi}, \theta_m) = \frac{1}{2} (I_e^{2\phi})^T W_1^{2\phi} I_e^{2\phi} = (I_s^{2\phi})^T [\mathbb{J} e^{\mathbb{J} n_p \theta_m}] I_r^{2\phi}. \quad (2.28d)$$

En todas las expresiones anteriores $\mathbb{J}$ es una matriz antisimétrica de 2×2 de la forma

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbb{J}^T. \quad (2.29)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.28a), (2.28b) y (2.28c) en (2.27a) y (2.28d) en (2.27b) se obtiene el modelo bifásico $\alpha\beta$ de manera matricial como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_s^{2\phi} \\ V_r^{2\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_s \mathbb{I}_2 & 0\mathbb{I}_2 \\ 0\mathbb{I}_2 & R_r \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^{2\phi} \\ I_r^{2\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{s2} \mathbb{I}_2 & L_{sr2} e^{\mathbb{J} n_p \theta_m} \\ L_{sr2} e^{-\mathbb{J} n_p \theta_m} & L_{r2} \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_s^{2\phi} \\ \dot{I}_r^{2\phi} \end{bmatrix} + \\ &+ \dot{\theta}_m n_p L_{sr2} \begin{bmatrix} 0\mathbb{I}_2 & \mathbb{J} e^{\mathbb{J} n_p \theta_m} \\ -\mathbb{J} e^{-\mathbb{J} n_p \theta_m} & 0\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^{2\phi} \\ I_r^{2\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.30a)$$

y

$$J\ddot{\theta}_m = (I_s^{2\phi})^T [\mathbb{J} e^{\mathbb{J} n_p \theta_m}] I_r^{2\phi} - \tau_L - B\dot{\theta}_m. \quad (2.30b)$$

2.6.2. Modelo ortogonal equivalente x

Para la obtención de este modelo matemático intermedio entre los modelos equivalentes ab y dq es necesario hacer uso de la transformada Inversa de Park para transformar las ecuaciones (2.27a) y (2.27b), presentadas en (2.19) y (2.21).

Al transformar los subsistemas quedan como

$$V_{e_x}^{2\phi} = R_e^{2\phi} I_{e_x}^{2\phi} + D_{e_x}^{2\phi} \dot{I}_{e_x}^{2\phi} + W_{1_x}^{2\phi} I_{e_x}^{2\phi} \quad (2.31a)$$

y

$$J\ddot{\theta}_m + B\dot{\theta}_m = \tau_{e_x}(I_{e_x}^{2\phi}) - \tau_L \quad (2.31b)$$

donde para el voltaje

$$V_{e_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} V_{s_x}^{2\phi} \\ V_{r_x}^{2\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.32a)$$

con

$$V_{s_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} v_{s_{x1}}^{2\phi} \\ v_{s_{x2}}^{2\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.32b)$$

$$V_{r_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32c)$$

y para la corriente

$$I_{e_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} I_{s_x}^{2\phi} \\ I_{r_x}^{2\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.33a)$$

con

$$I_{s_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} I_{s_{x1}}^{2\phi} \\ I_{s_{x2}}^{2\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.33b)$$

$$I_{r_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} I_{r_{x1}}^{2\phi} \\ I_{r_{x2}}^{2\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.33c)$$

En este caso, se tiene que

$$D_{e_x}^{2\phi} = \begin{bmatrix} L_{s_2}\mathbb{I}_2 & L_{sr_2}\mathbb{I}_2 \\ L_{sr_2}\mathbb{I}_2 & L_{r_2}\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (2.34a)$$

mientras que

$$W_{1_x}^{2\phi} = L_{sr_2} \begin{bmatrix} L_{s_2}\mathbb{J}\omega_x & L_{sr_2}\mathbb{J}\omega_x \\ L_{sr_2}\mathbb{J}(\omega_x - n_p\dot{\theta}_m) & L_{r_2}\mathbb{J}(\omega_x - n_p\dot{\theta}_m) \end{bmatrix}. \quad (2.34b)$$

El par generado toma la forma

$$\tau_e(I_{e_x}^{2\phi}) = \frac{1}{2}(I_{e_x}^{2\phi})^T W_{2_x}^{2\phi} I_{e_x}^{2\phi} \quad (2.34c)$$

con

$$W_{2x}^{2\phi} = L_{sr} \begin{bmatrix} 0\mathbb{I}_2 & \mathbb{J} \\ -\mathbb{J} & 0\mathbb{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.34d)$$

2.6.3. Modelo ortogonal equivalente ab y dq

Como se puede observar en las ecuaciones (2.31a) y (2.31b) del modelo x , se elimina la dependencia de la posición θ_m en las matrices de inductancias, donde dependiendo de la elección del valor de la velocidad angular ω_x se determina si se trata de un sistema de referencia fijo al estator (estacionario) $\omega_x = 0$ (modelo ab) o un sistema de referencia con velocidad de giro igual al flujo de rotor $\omega_x = \omega_r$ (modelo dq).

2.6.3.1. Agregando flujos magnéticos

Para desarrollar la simulación del MI, esta comúnmente se realiza utilizando corrientes de estator y flujos de rotor. Para esto se utiliza la ecuación que representa los flujos magnéticos

$$\lambda_e^{2\phi} = D_e^{2\phi} I_e^{2\phi} \quad (2.35a)$$

que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \lambda_s^{2\phi} \\ \lambda_r^{2\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{s2}\mathbb{I}_2 & L_{sr2}\mathbb{I}_2 \\ L_{sr2}\mathbb{I}_2 & L_{r2}\mathbb{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^{2\phi} \\ I_r^{2\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.35b)$$

la cual, si se desarrolla se obtiene que

$$\begin{bmatrix} \lambda_s^{2\phi} \\ \lambda_r^{2\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{s2}I_s^{2\phi} + L_{sr2}I_r^{2\phi} \\ L_{sr2}I_s^{2\phi} + L_{r2}I_r^{2\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.35c)$$

De estas ecuaciones, despejando las corrientes de rotor queda

$$I_r^{2\phi} = \frac{\lambda_r^{2\phi} - L_{sr2}I_s^{2\phi}}{L_{r2}} \quad (2.36)$$

y derivándola respecto al tiempo

$$\dot{I}_r^{2\phi} = \frac{\dot{\lambda}_r^{2\phi} - L_{sr2}\dot{I}_s^{2\phi}}{L_{r2}}. \quad (2.37)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.36) y (2.37) en las ecuaciones (2.31a) y (2.31b) del sistema x , denotando las matrices $I_s^{2\phi} = I_s$, $\lambda_r^{2\phi} = \psi_r$ y se despejan sus derivadas, así como la variable $\dot{\theta}_m = \omega_m = \omega_r$ se obtiene:

- El modelo dq , donde $\omega_x = \omega_m$, dado por

$$\dot{I}_{sdq} = -\gamma I_{sdq} + \left(\frac{L_{sr} R_r}{\sigma L_r^2} \right) \Psi_{rdq} - \left(\frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_r} \right) \omega_m \mathbb{J} \Psi_{rdq} - (n_p \omega_m \mathbb{J}) I_s + \frac{V_s}{\sigma} \quad (2.38a)$$

para las corrientes de estator,

$$\dot{\Psi}_{rdq} = - \left(\frac{R_r}{L_r} \right) \Psi_{rdq} + \left(\frac{R_r L_{sr}}{L_r} \right) I_{sdq} \quad (2.38b)$$

para los flujos de rotor y

$$\dot{\omega}_m = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{n_p L_{sr}}{J L_r} \right) I_{sdq}^T \mathbb{J} \Psi_{rdq} - \left(\frac{B}{J} \right) \omega_m - \frac{\tau_L}{J} \quad (2.38c)$$

para el sistema mecánico.

- Alternativamente, es posible obtener el modelo *ab*, donde $\omega_x = 0$, dado por

$$\dot{I}_{sab} = -\gamma I_{sab} + \left(\frac{L_{sr} R_r}{\sigma L_r^2} \right) \Psi_{rab} - \left(\frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_r} \right) \omega_m \mathbb{J} \Psi_{rab} + \frac{V_s}{\sigma} \quad (2.39a)$$

para las corrientes de estator,

$$\dot{\Psi}_{rab} = - \left(\frac{R_r}{L_r} \right) \Psi_{rab} + (n_p \omega_m \mathbb{J}) \Psi_{rab} + \left(\frac{R_r L_{sr}}{L_r} \right) I_{sab} \quad (2.39b)$$

para los flujos de rotor y

$$\dot{\omega}_m = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{n_p L_{sr}}{J L_r} \right) I_{sab}^T \mathbb{J} \Psi_{rab} - \left(\frac{B}{J} \right) \omega_m - \frac{\tau_L}{J} \quad (2.39c)$$

para el sistema mecánico.

Para ambos modelos se tiene que

$$\sigma = L_s - \frac{L_{sr}^2}{L_r} \quad ; \quad \gamma = \frac{L_{sr}^2 R_r}{\sigma L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma} .$$

Las diferentes representaciones del modelo del MI serán utilizadas en los capítulos siguientes para desarrollar el análisis y simulación del esquema de control abordado en este trabajo de tesis.

Validación de modelo y esquema de control

En este capítulo, una vez conocidos los modelos matemáticos y la física detrás del motor estudiado en este trabajo de tesis, se abordará el tema de la simulación del mismo haciendo uso del software de MATLAB, específicamente en el entorno de bloques Simulink. De igual manera, se abordará la ley de control por analizar sobre la simulación del motor, así como su metodología de diseño y algunos de sus conceptos asociados a aquél.

3.1. Simulación del MI

La validación por simulación consiste en programar las ecuaciones diferenciales correspondientes al modelo en cuestión con uso de diagramas de bloques del software Simulink. Este trabajo se realiza con el objetivo de poder visualizar que el comportamiento del motor sea de acuerdo a lo esperado en un contexto real.

El MI trifásico del que se hace uso para este proyecto consiste en uno fabricado por la compañía Baldor, **modelo ZDNM3581T** con las especificaciones mostradas en la Tabla [3.1](#).

Característica	Valor
Velocidad nominal	$\omega_n = 1800 \text{ RPM}$
Potencia mecánica	$P = 1 \text{ HP}$
Pares de polos	$n_p = 2$
Tensión nominal fase a fase	$v_{L-L} = 230 \text{ V [RMS]}$
Tensión nominal fase a neutro	$v_{L-N} = 127 \text{ V [RMS]}$

Tabla 3.1: Especificaciones del MI ZDNM3581T.

Cabe destacar, que dado que el par de carga establece una perturbación al sistema, todos los experimentos en lazo abierto se realizaron con par de carga $\tau_L = 0$.

Respecto a los parámetros físicos del motor, con los cuales se realizará la propuesta de control y se utilizarán en los modelos simulados, fueron obtenidos de [18] y se presentan en la Tabla 3.2.

Parámetro	Magnitud
Resistor de estator	$R_s = 2.516\Omega$
Resistor de rotor	$R_r = 1.9461\Omega$
Inductor de estator	$L_{s2} = 0.2340\text{H}$
Inductor de rotor	$L_{r2} = 0.2302\text{H}$
Inductor mutuo	$L_{sr2} = 0.2226\text{H}$
Fricción viscosa	$B = 1.11 \times 10^{-4} \frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$
Coefficiente de momento de inercia	$J = 6.046751 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Tabla 3.2: Parámetros del MI ZDNM3581T a 1 HP.

Con relación a la evaluación realizada, se desarrollaron dos simulaciones del MI, una en el sistema de referencia dq , debido a que la ley de control que se estudia se diseñó en este marco, y otra en el sistema de referencia ab para observar su comportamiento de manera sinusoidal lo más cercano a un contexto real. Para ambas, se utilizó el método numérico **Runge-Kutta (ODE4)** que se encuentra dentro de la plataforma MATLAB/Simulink, con un tiempo de muestreo de $1 \times 10^{-5} \text{ s}$.

3.1.1. Simulación del MI en dq

La programación se realizó utilizando un bloque de función de MATLAB, en el cual se implementaron las ecuaciones diferenciales del modelo dq y como puertos de salida del bloque se tienen las derivadas de las variables de estado. De igual manera se agregó el par eléctrico τ_e como salida adicional para observar su comportamiento (ver Figura 3.1).

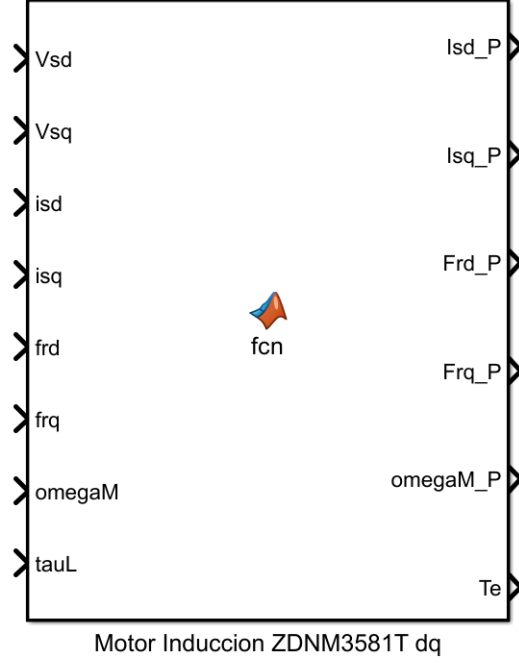


Figura 3.1: Bloque de función Matlab con el modelo matemático del MI.

Los puertos de entrada incluyen los voltajes de alimentación V_{sd} y V_{sq} , el par de carga τ_L , así como de lo que ahora se llamará vector X compuesto por

$$X = \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \\ \omega_m \end{bmatrix} . \quad (3.1)$$

El código que corresponde al modelo matemático (2.38) se presenta en la Figura 3.2. Éste se complementa con:

```
function [Isd_P, Isq_P, Frd_P, Frq_P, omegaM_P, Te] = fcn
    (Vsd, Vsq, isd, isq, frd, frq, omegaM, tauL)

%Parametros

Rs = 2.516;
Rr = 1.9461;
Lsr = 0.2226;
Ls = 0.2340;
Lr = 0.2302;
B = 0.00011;
J = 0.00604675;
np = 2;

%Simplificaciones

sigma = Ls - Lsr^2/Lr;
gamma = (Lsr^2*Rr)/(sigma*Lr^2) + Rs/sigma;

%Modelo Electrico

Isd_P = -gamma*isd + ((Lsr*Rr)/(sigma*Lr^2))*frd + (np*
    Lsr/(sigma*Lr))*omegaM*frq + np*omegaM*isq + Vsd/
    sigma;
Isq_P = -gamma*isq + ((Lsr*Rr)/(sigma*Lr^2))*frq - (np*
    Lsr/(sigma*Lr))*omegaM*frd - np*omegaM*isd + Vsq/
    sigma;
Frd_P = -(Rr/Lr)*frd + ((Rr*Lsr)/Lr)*isd;
Frq_P = -(Rr/Lr)*frq + ((Rr*Lsr)/Lr)*isq;

% Modelo Mecanico

Te = (3/2)*np*(Lsr/Lr)*(isq*frd - isd*frq);
omegaM_P = (1/J)*(Te - B*omegaM - tauL);
```

Figura 3.2: Modelo del MI en dq simulado.

- Bloques integradores para hacer la relación entre entradas y salidas del sistema, con condiciones iniciales de cero para todos los casos.
- Un bloque de transformación de señales abc a dq para los voltajes de estator, el cual hace uso de la Matriz (2.22) de Clarke-Park.
- Una ganancia equivalente al valor de n_p para obtener la posición eléctrica θ_e ,

debido a que la Matriz Clarke-Park la requiere para la conversión a dq .

- Bloques de conversión de magnitudes, ya que todas las que se ingresan y salen del MI son de acuerdo al Sistema Internacional (SI). De $\frac{rad}{s}$ a RPM para medir la velocidad del rotor ω_m , y de $lb \cdot ft$ a N para ingresar al motor, ya que suele darse este valor en la unidad del sistema inglés.
- Diversos *Scopes* y *Displays* para visualizar las señales y valores obtenidos.
- Etiquetas *Goto* y *From* para simplificar la visualización y reducir los cables de señal.

En la Figura 3.3 se muestra la simulación completa del motor en lazo abierto.

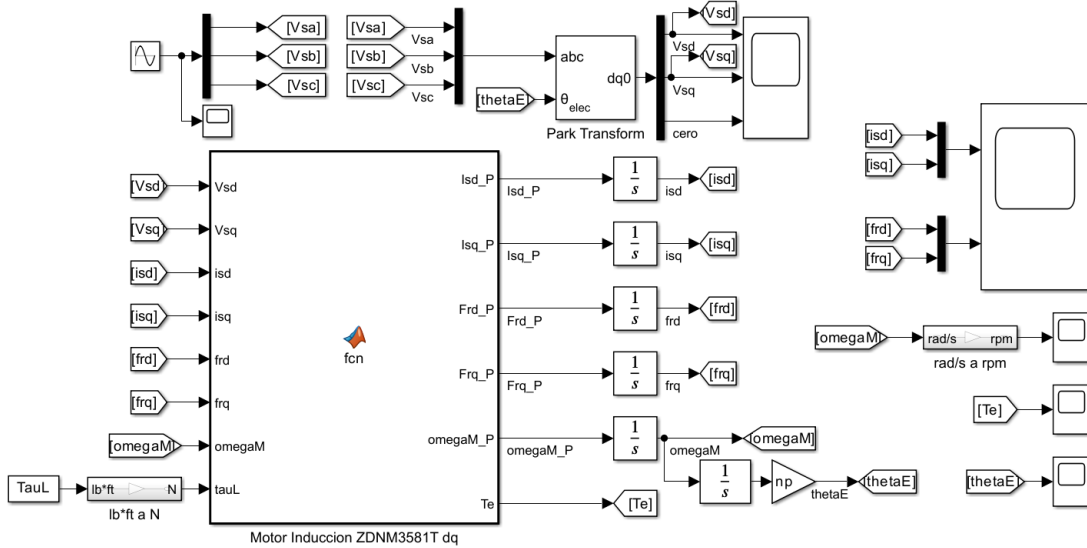


Figura 3.3: Simulación del MI en el sistema de referencia dq .

Realizando pruebas de la simulación para comprobar el correcto funcionamiento del modelo, se ingresaron condiciones iniciales en los integradores iguales a cero así como tres señales sinusoidales desfasadas a $\theta_d = \frac{2\pi}{3}$ con los valores nominales de voltaje de la Tabla 3.1 a una frecuencia de 60 Hz, los cuales se transformaron a dq con el bloque de transformación de señales (ver Figura 3.4).

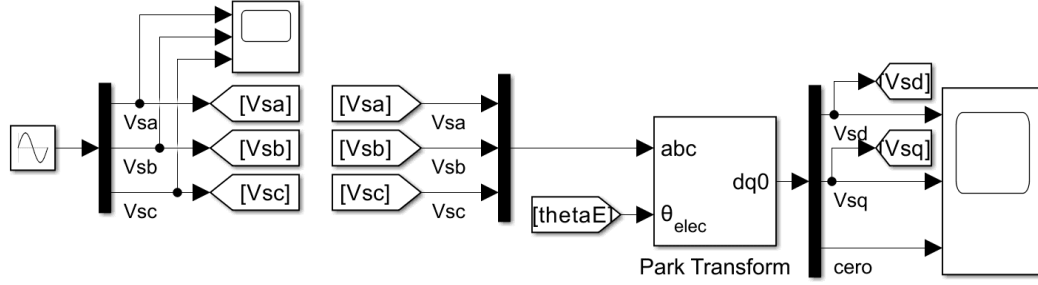


Figura 3.4: Voltajes de alimentación abc transformados a dq .

Los primeros tres voltajes se muestran en la Figura 3.5, mientras que al pasar por el bloque transformador quedan como se muestra en la Figura 3.6.

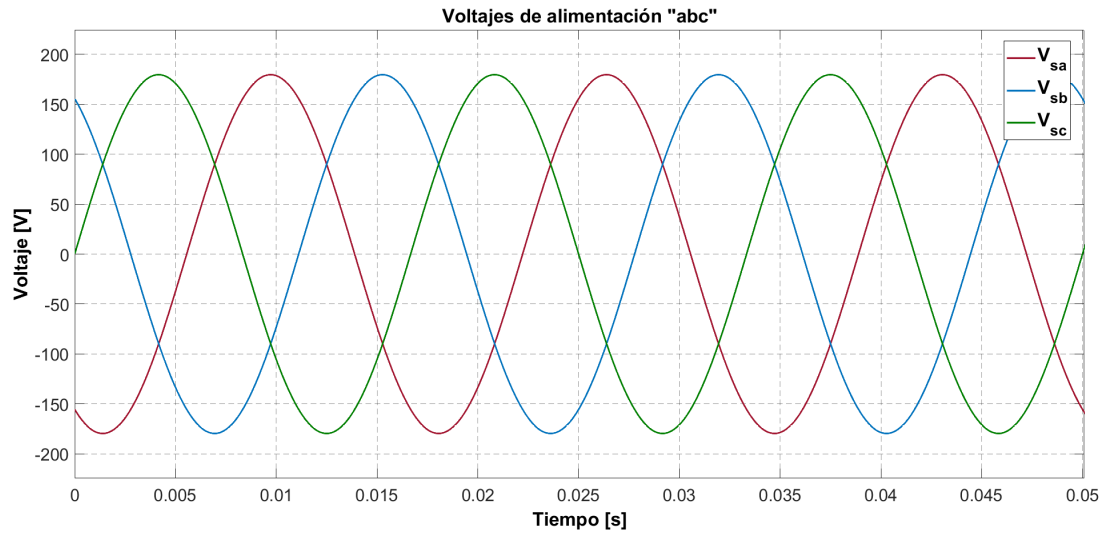


Figura 3.5: Voltajes de alimentación abc .

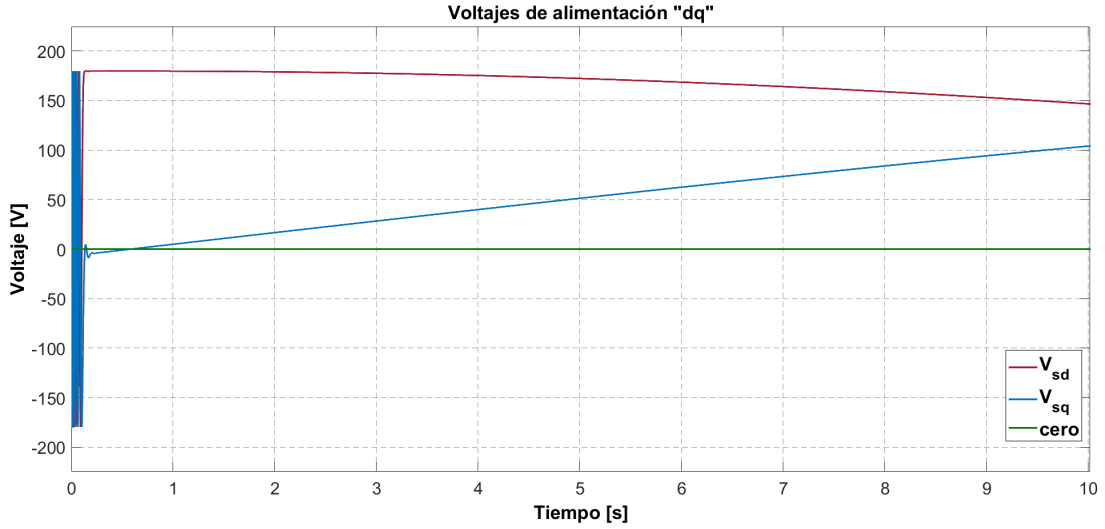


Figura 3.6: Voltajes de alimentación dq .

Como se observa en la Figura 3.6 sus señales transformadas no se visualizan como en la teoría del sistema dq en la Figura 2.13. La razón de esto es principalmente por la asincronía del motor, ya que debido a la presencia del factor $B\omega_m$ en la ecuación 2.38 del sistema mecánico, θ_m presenta un atraso en su giro respecto a la posición eléctrica θ_e . En la suposición de que $B = 0$ así como un par de carga $\tau_L = 0$, quedaría la ecuación mecánica como

$$J\dot{\omega}_m = \tau_e \quad (3.2)$$

por lo que las salidas de los voltajes transformados a dq se podrán ver totalmente constantes, como se aprecia en la Figura 3.7

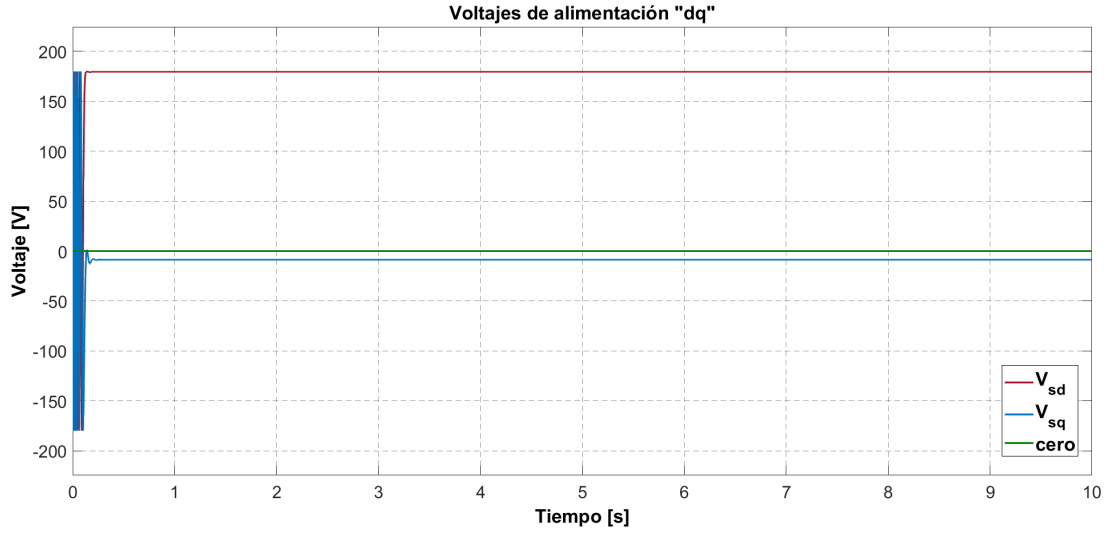


Figura 3.7: Voltajes de alimentación dq sin fuerzas de origen mecánico.

En el Apéndice B se podrá ver más información de lo mencionado anteriormente.

Respecto a las gráficas de las salidas del sistema, compuestas por el vector X en (3.1) se visualizaron como puede observarse en las Figuras 3.8 a 3.11.

- En las corrientes de estator se observa un estado transitorio de alrededor de 0.15 segundos para llegar finalmente a un estado estacionario de 0.05 A para la corriente d así como 2.05 A para la corriente q .

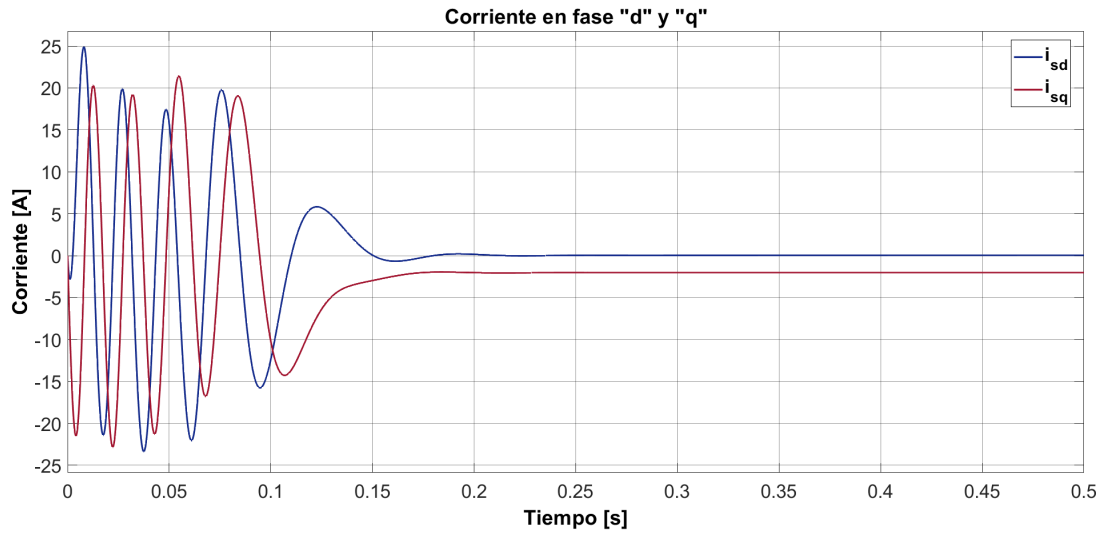


Figura 3.8: Corrientes de estator en dq .

- Para los flujos del rotor, se visualiza el flujo en d convergiendo a aproximadamente 0.05 Wb y en q a 0.45 Wb .

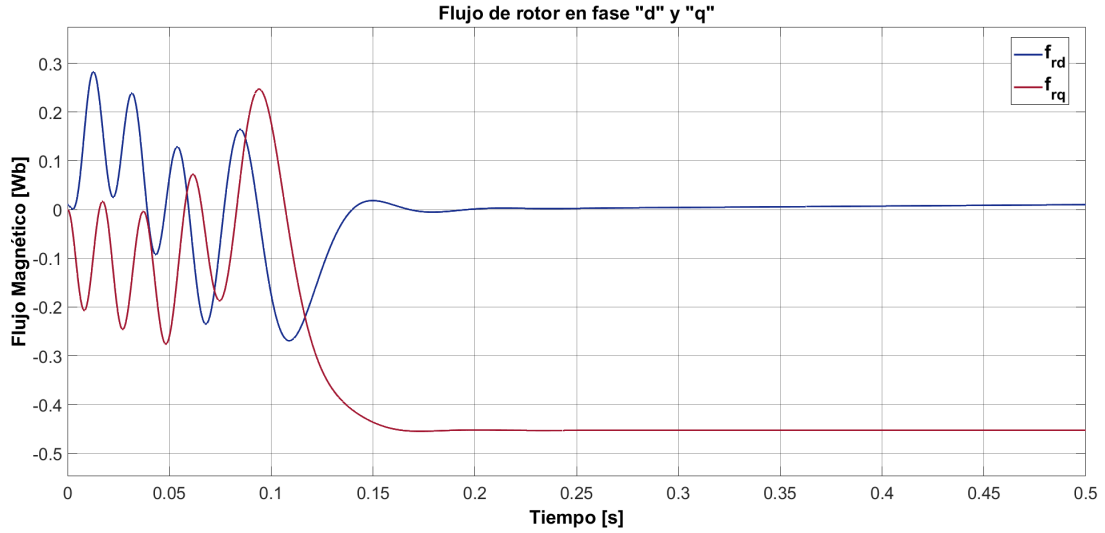


Figura 3.9: Flujos de rotor en dq .

- La velocidad mecánica puede visualizarse con un transitorio en incremento hasta llegar a su estado transitorio de 1800 rpm , que es la velocidad nominal.

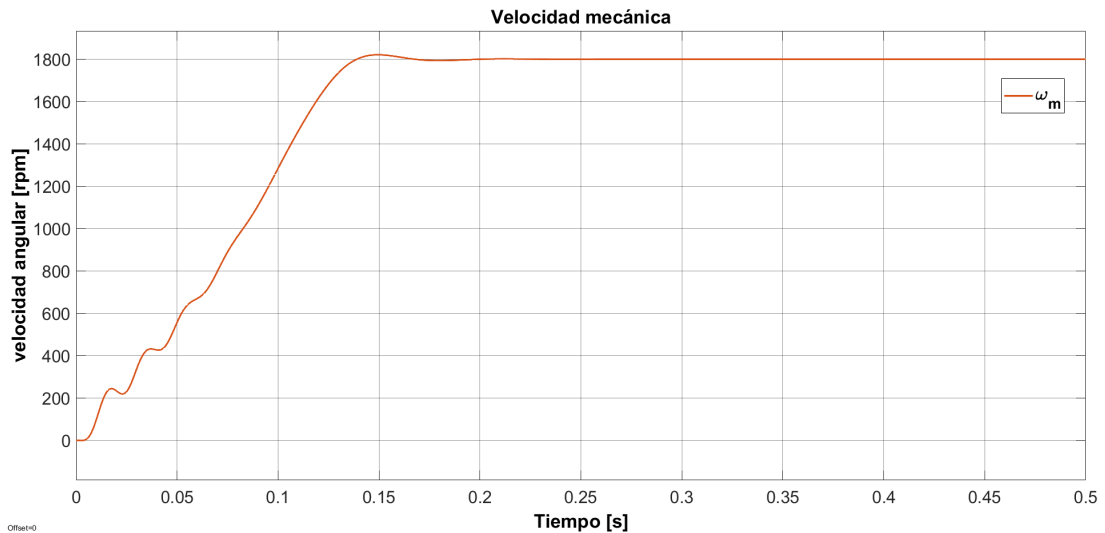


Figura 3.10: Velocidad mecánica del rotor en dq .

Como salida adicional, se visualiza a continuación el par eléctrico, tendiendo a un estacionario de 0 Nm debido a no haber un par de carga.

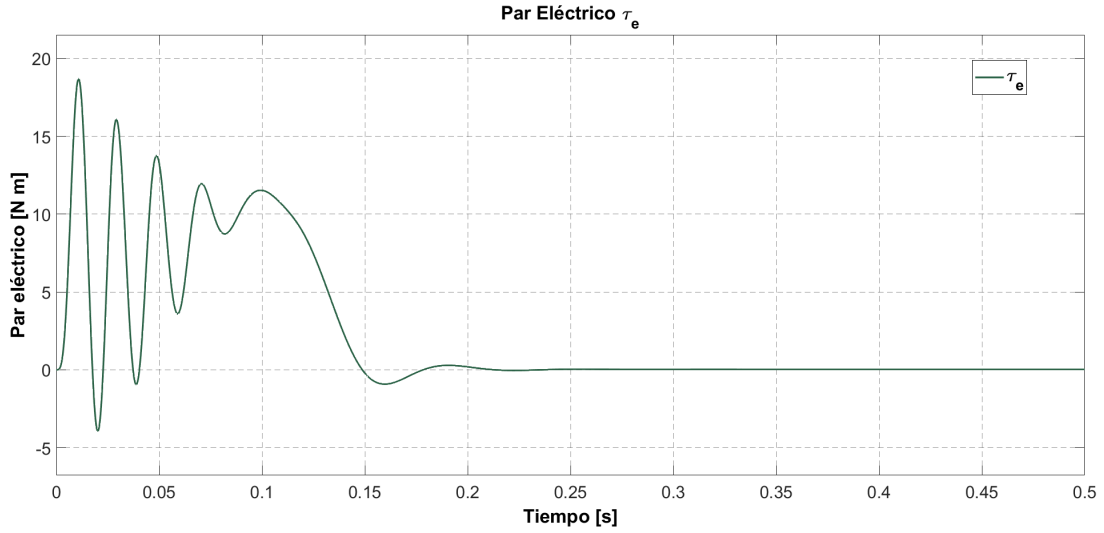


Figura 3.11: Par eléctrico del motor en dq .

3.1.2. Simulación del MI en el marco ab

De igual manera a la simulación del motor en el sistema dq de la subsección 3.1.1, para el sistema de referencia ab se programó otro Bloque de Función MATLAB, como el de la Figura 3.1, pero con el modelo matemático (2.39). El diagrama completo de programación que corresponde en este caso se muestra en la Figura 3.12.

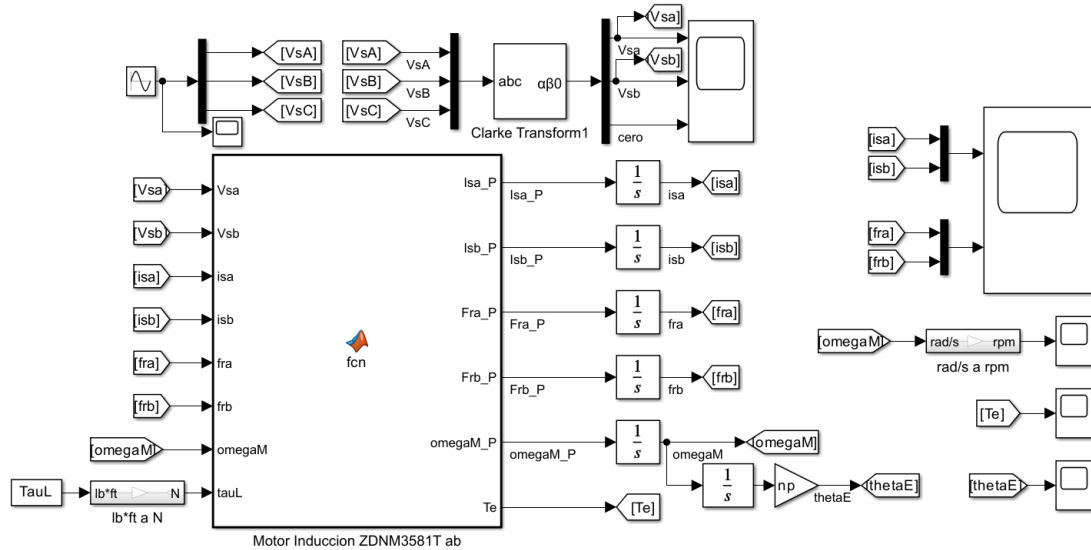


Figura 3.12: Simulación del MI en el sistema de referencia ab .

Para las respectivas pruebas se ingresan de igual manera las tres señales sinusoidales

desfasadas a 120° , pero esta vez utilizando el bloque de transformación de Clarke de la librería de Simulink (ver Figura 3.13).

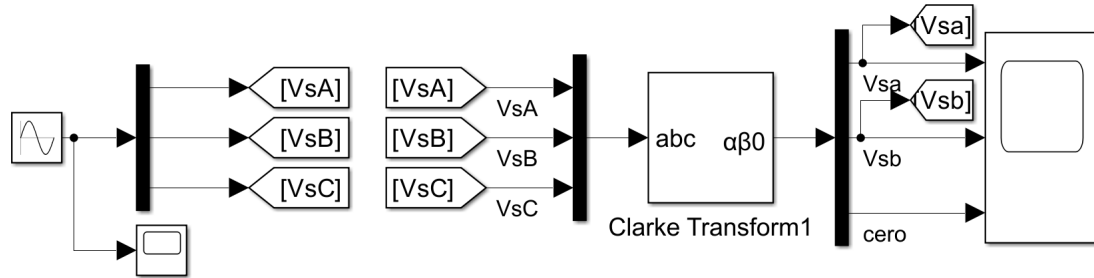
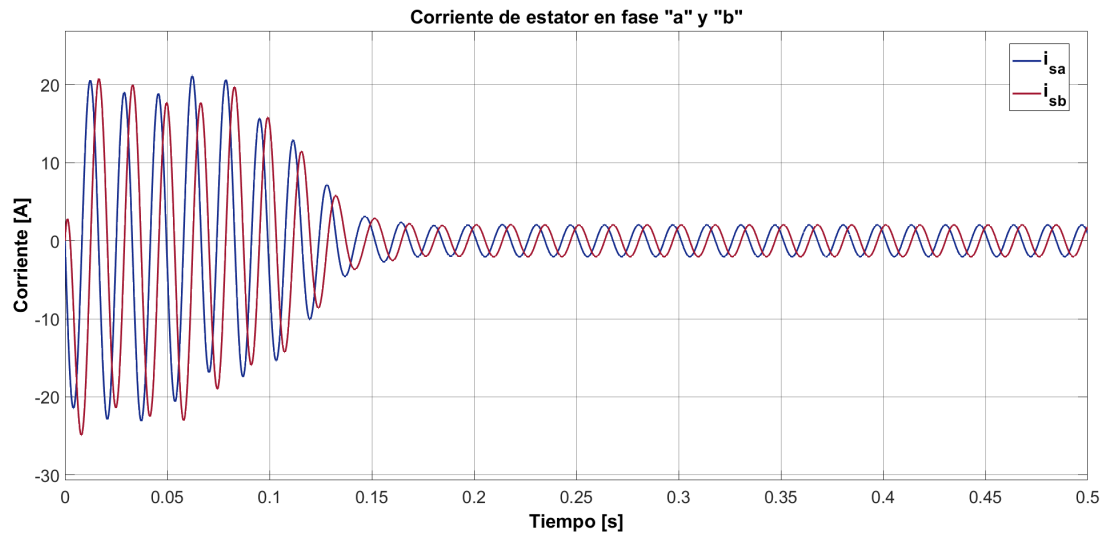


Figura 3.13: Voltajes de alimentación abc transformados a dos fases ab .

Los resultados de simulación para las corrientes de estator se presentan en la Figura 3.14. En ella se observa en primera instancia que el transitorio ocurre durante los primeros 0.15 s , al igual que en el marco dq para terminar en un estado estacionario de 2.1 A

■ Corrientes de estator



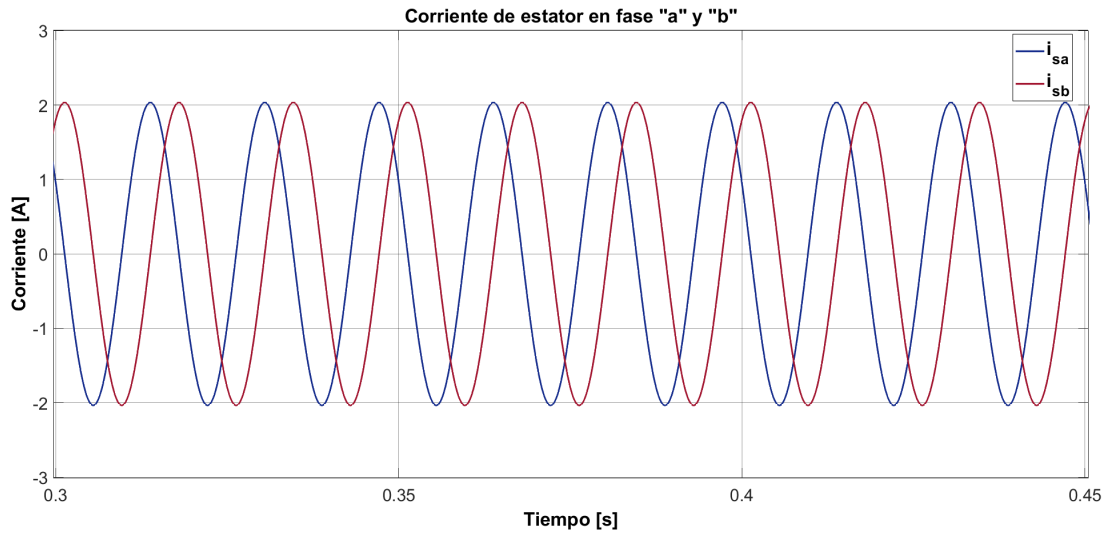
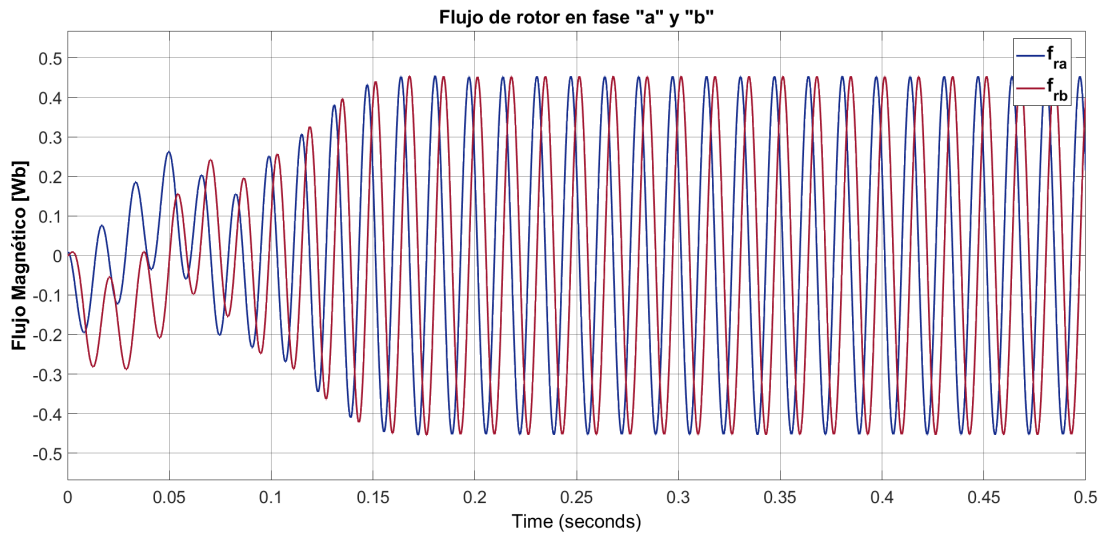


Figura 3.14: Corrientes de estator en ab .

- El comportamiento de los flujos de rotor se incluye en la Figura 3.15 donde se muestra que alcanza una amplitud de 0.455 Wb.



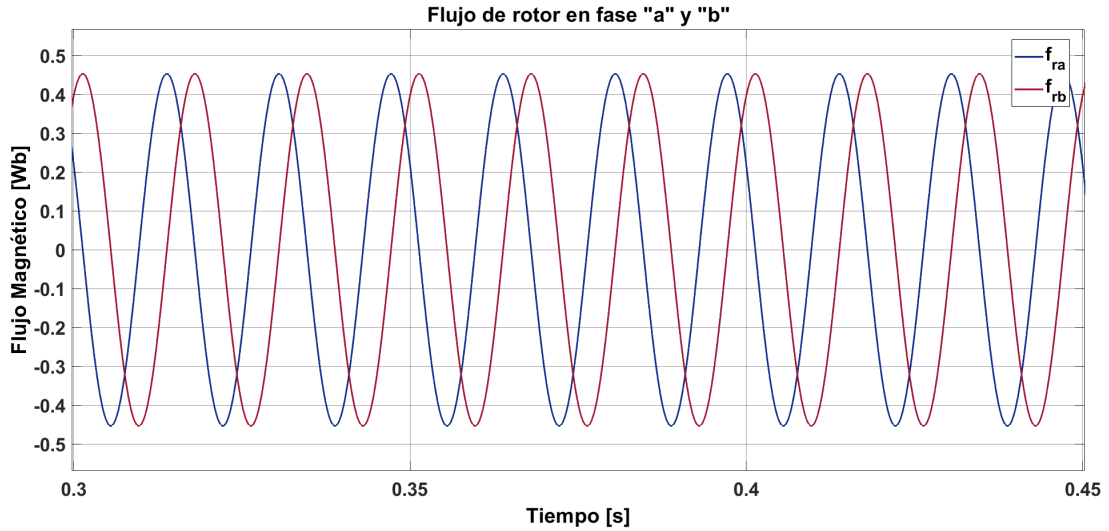


Figura 3.15: Flujos de rotor en ab .

- Con relación al sistema mecánico, en la Figura 3.16 se presenta el comportamiento de la velocidad angular del motor, en la cuál se observa que la salida es bastante similar que el marco de referencia dq , llegando de igual manera a la velocidad nominal de 1800 *rpm*.

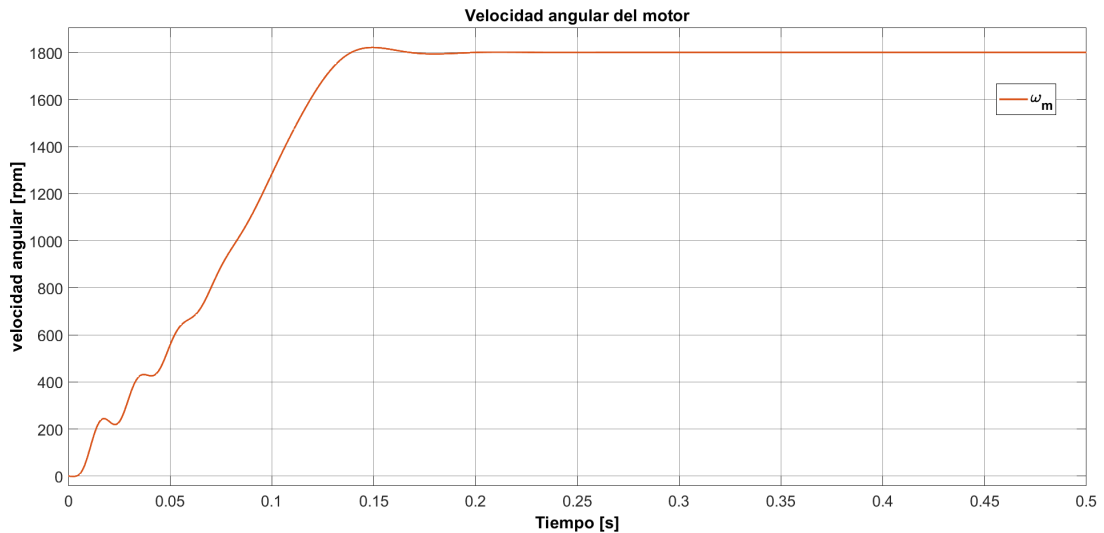


Figura 3.16: Velocidad angular del rotor en ab .

- Finalmente, se incluye el comportamiento del par generado en la Figura 3.17, en la que se destaca que esta variable tiende, después del periodo transitorio, a cero debido a que el par de carga es cero.

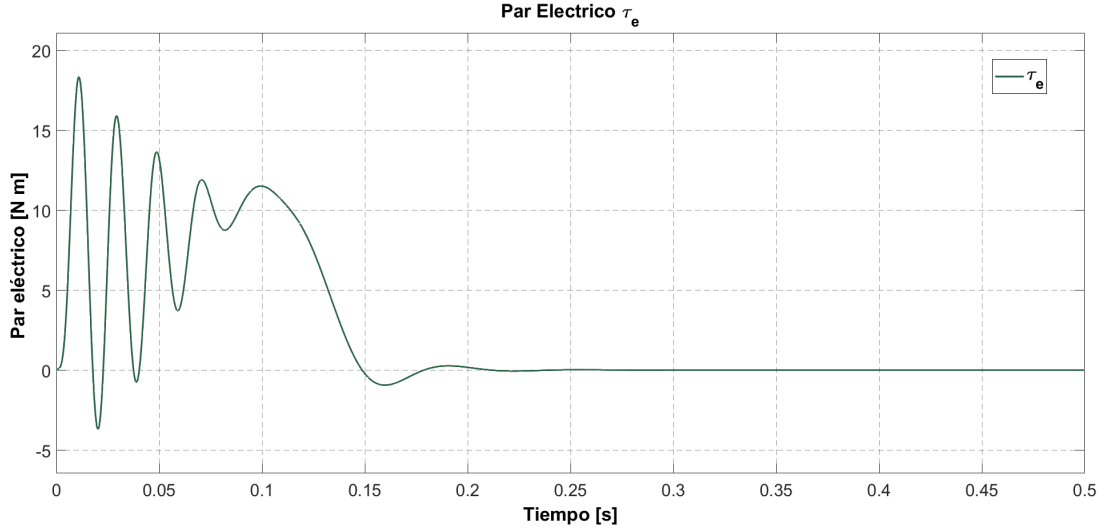


Figura 3.17: Par eléctrico del motor en *ab*.

3.2. Metodología de control

Dentro de las distintas filosofías de control, la utilizada durante esta tesis es la "basada en pasividad". En esta sección, después de mencionar brevemente el concepto de pasividad, se presenta el controlador estudiado en este trabajo.

3.2.1. Control basado en pasividad

Un sistema es denominado pasivo si no es capaz de producir energía por sí mismo y sólo puede almacenar o disipar energía. Esto puede generalizarse desde el mapeo de sistemas entradas-salida, como el de la Figura 2.1, como un sistema en el que debe de satisfacerse el balance de potencia

$$\dot{H}(x) = -P(x) + u^T y \quad (3.3)$$

donde $H(x)$ es la energía almacenada, $P(x)$ es la potencia disipada, (u, y) son las entradas y salidas del sistema y x son los estados internos del mismo.

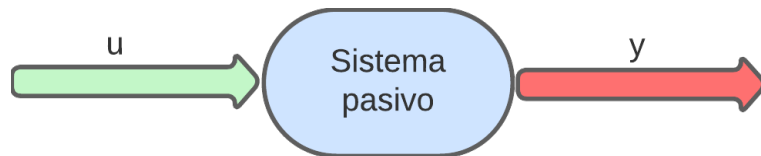


Figura 3.18: Sistema Pasivo desde la entrada u a la salida y .

Una propiedad importante desde el punto de vista de estabilidad, es que si $u = 0$ y $P(x) \geq 0$ entonces las trayectorias x tenderán al punto mínimo de $H(x)$. Por otro lado, el teorema de pasividad establece que **al colocar dos sistemas pasivos en retroalimentación negativa esto producirá un sistema de lazo cerrado estable**. [10]

Como resultado de lo anterior, si el sistema que se intenta controlar es pasivo, entonces podría diseñarse un controlador de retroalimentación pasiva que garantiza tener siempre un sistema estable, siempre y cuando no se afecte su pasividad.

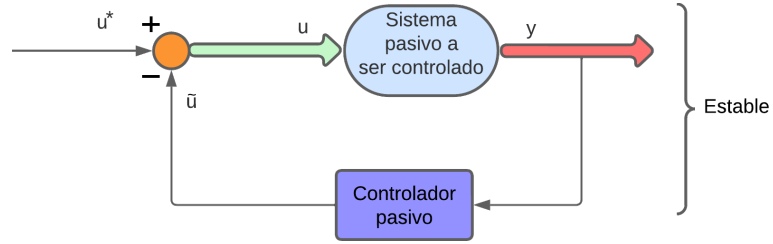


Figura 3.19: Teorema de pasividad.

Como se comentó en el Capítulo 2, el MI puede ser dividido en el subsistema eléctrico (Σ_e), que es pasivo desde sus entradas $[V_s, \omega]$ hasta sus salidas $[I_s, \tau_e]$, tal que

$$\Sigma_e : \begin{bmatrix} V_s \\ -\omega \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_s \\ \tau_e \end{bmatrix} ,$$

y el subsistema mecánico (Σ_m), que también es pasivo desde su entrada $(\tau_e - \tau_L)$ hasta la salida ω_m , tal que

$$\Sigma_m : \tau_e - \tau_L \rightarrow \omega_m ,$$

Así, usando el teorema de pasividad, ambos subsistemas preservan las propiedades de estabilidad, que al unirse en un solo sistema y combinarse con un controlador pasivo, que será visto a continuación, se garantiza la estabilidad. Los detalles de la prueba se desarrollan con mayor detalle en [20].

3.3. Controlador

El controlador en cuestión fue diseñado y presentado en [23] y [22], por lo que ahí podrá verse más detallada la información que se presentará a continuación.

3.3.1. Trayectorias deseadas

Se definen las trayectorias deseadas como el conjunto de trayectorias x^* tal que exista una entrada deseada u^* que cumple con la dinámica deseada, la cual es una copia del sistema dado en (2.38) y toma la forma

$$V_s^* = \sigma \left[\dot{I}_s^* + \gamma I_s^* - \frac{L_{sr} R_r}{\sigma L_r^2} \Psi_r^* + \frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_r} \omega_m^* \mathbb{J} \Psi_r^* + n_p \omega_m^* \mathbb{J} I_s^* \right] . \quad (3.4)$$

Para implementar estas entradas se requiere conocer la corriente I_s^* y su derivada $\dot{I}_s^*$, así como los flujos Ψ_r^* y la velocidad deseada ω_m^* .

A partir de un perfil de velocidad deseado ω_m^* se puede obtener las corrientes $I_s^* = [I_{sd}^*, I_{sq}^*]^\top$ y los flujos de referencia $\Psi_r^* = [\Psi_{rd}^*, \Psi_{rq}^*]^\top$. Esta velocidad deseada se describe como

$$\dot{\omega}_m^* = \frac{n_p L_{sr}}{J L_r} I_s^* \mathbb{J} \Psi_r^* - \frac{B}{J} \omega_m^* - \frac{1}{J} \tau_L^* . \quad (3.5)$$

Despejándola para dejarla en términos de corrientes y flujos se tiene que

$$I_s^* \mathbb{J} \Psi_r^* = \frac{J L_r}{n_p L_{sr}} \left[\dot{\omega}_m^* + \frac{B}{J} \omega_m^* + \frac{1}{J} \tau_L^* \right] , \quad (3.6a)$$

que es lo mismo a

$$i_{sq}^* \psi_{rd}^* - i_{sd}^* \psi_{rq}^* = \frac{J L_r}{n_p L_{sr}} \left[\dot{\omega}_m^* + \frac{B}{J} \omega_m^* + \frac{1}{J} \tau_L^* \right] . \quad (3.6b)$$

La ecuación (3.6b) puede ser despejada para obtener i_{sq}^* quedando así

$$i_{sq}^* = \psi_{rd}^{*-1} \left[\frac{J L_r}{n_p L_{sr}} \left[\dot{\omega}_m^* + \frac{B}{J} \omega_m^* + \frac{1}{J} \tau_L^* \right] + i_{sd}^* \psi_{rq}^* \right] \quad (3.7)$$

con (3.7) y dando un valor deseado para i_{sq}^* así como haciendo uso de la ecuación de los flujos del rotor

$$\dot{\Psi}_r^* = -\frac{R_r}{L_r} \Psi_r^* + \frac{R_r L_{sr}}{L_r} I_s^* \quad (3.8a)$$

donde $\dot{\Psi}_r^*$ también se representa como

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_{rd}^* \\ \dot{\psi}_{rq}^* \end{bmatrix} = -\frac{R_r}{L_r} \begin{bmatrix} \psi_{rd}^* \\ \psi_{rq}^* \end{bmatrix} + \frac{R_r L_{sr}}{L_r} \begin{bmatrix} i_{sd}^* \\ i_{sq}^* \end{bmatrix} . \quad (3.8b)$$

Al resolverse la ecuación diferencial (3.8) ya se cuenta con los dos flujos así como las corrientes deseadas. Por lo que ya con las cuatro señales y el perfil de velocidad deseado pueden obtenerse las entradas deseadas de (3.4).

3.3.2. Control de seguimiento de velocidad

De acuerdo a [23] y [22], la ley de control basada en pasividad para el MI está dada por

$$\tilde{u} = \begin{bmatrix} -K_d & 0 \\ 0 & -K_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{i_{sd}} \\ e_{i_{sq}} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde k_d , k_q son las variables de sintonización, siendo

$$e_{i_{sd}} = i_{sd} - i_{sd}^* \quad (3.10a)$$

y

$$e_{i_{sq}} = i_{sq} - i_{sq}^* \quad (3.10b)$$

Es conveniente mencionar que la estructura de esta ley de control se obtiene de demostrar que el vector de errores de corriente establece la salida pasiva del sistema de error entre x y x^* para el MI.

3.3.3. Implementación

Para obtener la entrada de control que se debe implementar en el MI para garantizar el objetivo de control se tiene que

$$u = \tilde{u} + u^* \quad (3.11)$$

donde $u = [U_d \ U_q]^T$, que de manera desarrollada se visualiza como

$$U_d = \sigma \left[\frac{d}{dt} i_{sd}^* + \gamma i_{sd}^* - \frac{L_{sr} R_r}{\sigma L_r^2} \psi_{rd}^* - \frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_r} \omega_m^* \psi_{rq}^* - n_p \omega_m^* i_{sq}^* \right] - [k_d e_{i_{sd}}] \quad (3.12a)$$

y

$$U_q = \sigma \left[\frac{d}{dt} i_{sq}^* + \gamma i_{sq}^* - \frac{L_{sr} R_r}{\sigma L_r^2} \psi_{rq}^* + \frac{n_p L_{sr}}{\sigma L_r} \omega_m^* \psi_{rd}^* + n_p \omega_m^* i_{sd}^* \right] - [k_q e_{i_{sq}}] . \quad (3.12b)$$

Para su implementación, se realizó primero en un bloque de función de Matlab la ecuación (3.7) de la corriente i_{sq}^* , como se muestra en la Figura 3.20.

```

function isq_D = fcn(frq_D,isd_D,frd_D,omegaM_DP,
    omegaM_D,tauL_D)

%Parametros

Lsr = 0.2226;
Lr = 0.2302;
B = 0.00011;
J = 0.00604675;
np = 2;

%Corriente de estator en fase q deseada

isq_D = ((2/3)*((J*Lr)/(np*Lsr))*(omegaM_DP + (B/J)*
    omegaM_D + (1/J)*tauL_D) + isd_D*frq_D)*(1/frd_D);

```

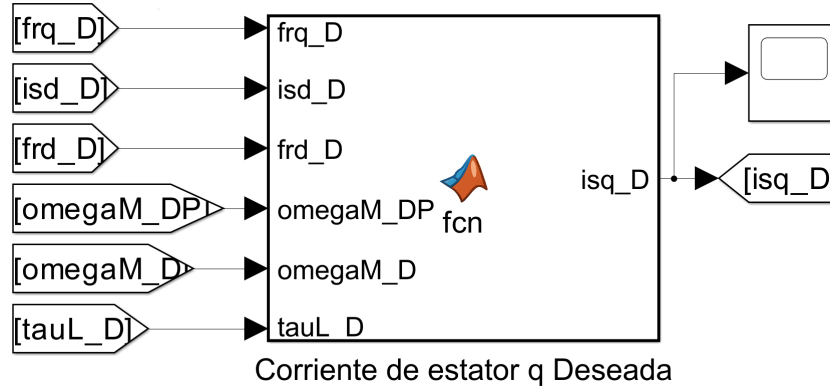


Figura 3.20: Ecuación y bloque Matlab de corriente i_{sq}^* deseada.

Seguido de esto, se hizo uso de las corrientes i_{sq}^* obtenidas del bloque de la Figura 3.20 junto con la corriente i_{sd}^* que viene de un valor dado. Con estos dos valores se calcula el otro bloque de función, programado con la ecuación (3.8) de los flujos deseados ψ_{rd}^* , ψ_{rq}^* y que se muestra en la Figura 3.21.

```

function [Frd_DP, Frq_DP] = fcn(frd_D,isd_D,ism_D,frq_D)

%Parametros

Rr = 1.9461;
Lsr = 0.2226;
Lr = 0.2302;

%Corrientes en d y q deseadas

Frd_DP = -(Rr/(Lr))*frd_D + ((Rr*Lsr)/Lr)*isd_D;
Frq_DP = -(Rr/(Lr))*frq_D + ((Rr*Lsr)/Lr)*ism_D;

```

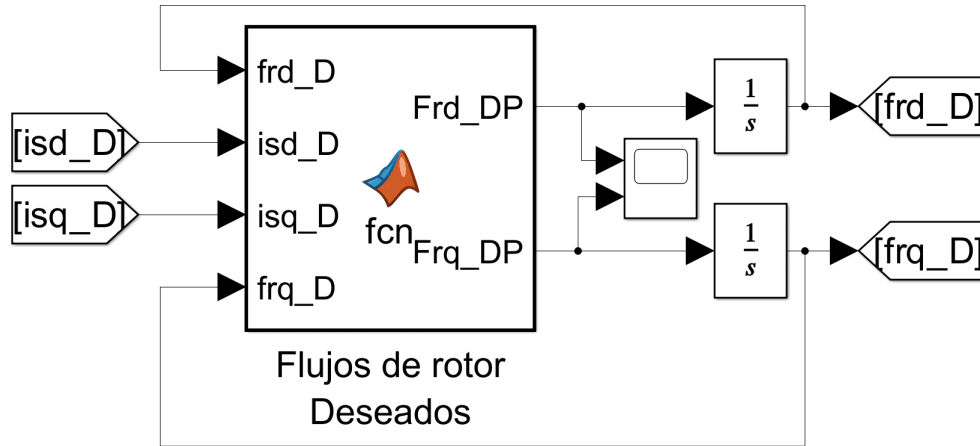


Figura 3.21: Ecuación y bloque Matlab de los flujos deseados ψ_{rd}^* , ψ_{rq}^* .

Finalmente, ya con todos los valores deseados, el vector X obtenido, así como sus respectivas derivadas, se realiza un último bloque de función con la ecuación (3.4) para la obtención de los voltajes deseados V_{sd}^* , V_{sq}^* , obteniendo así la primera parte de la implementación de la ley de control (3.11).

```

function [Vsd_D,Vsq_D] = fcn(Isd_DP,isd_D,Isq_DP,isq_D,
    frd_D,frq_D,omegaM_D)

%Parametros

Rs = 2.516;
Rr = 1.9461;
Lsr = 0.2226;
Ls = 0.2340;
Lr = 0.2302;
np = 2;

%simplificaciones

sigma = Ls - Lsr^2/Lr;
gamma = (Lsr^2*Rr)/(sigma*Lr^2) + Rs/sigma;

%Flujo del rotor en fase r deseado

Vsd_D = sigma*(Isd_DP + gamma*isd_D - ((Lsr*Rr)/(sigma*
    Lr^2))*frd_D - ((np*Lsr)/(sigma*Lr))*omegaM_D*frq_D -
    np*omegaM_D*isq_D);
Vsq_D = sigma*(Isq_DP + gamma*isq_D - ((Lsr*Rr)/(sigma*
    Lr^2))*frq_D + ((np*Lsr)/(sigma*Lr))*omegaM_D*frd_D +
    np*omegaM_D*isd_D);

```

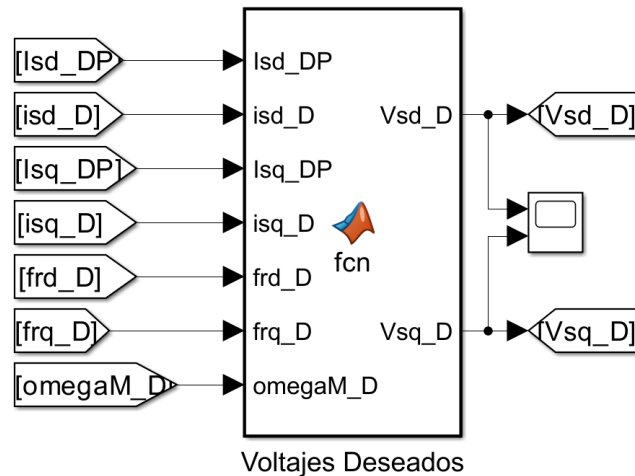


Figura 3.22: Ecuación y bloque Matlab de los voltajes deseados V_{sd}^* , V_{sq}^* .

Una vez obtenida la señal u^* , para la parte del seguimiento se hizo uso de un último bloque de función, donde se programó la ecuación (3.9) para el cálculo de $\tilde{u}$, cuya estructura se presenta en la Figura 3.23.

```
function [ud,uq] = fcn(isd,isq,isd_D,isq_D)

%Parametros

Kd = 100;
Kq = 100;

%Corrientes en d y q deseadas

ud = -Kd*(isd-isd_D);
uq = -Kq*(isq-isq_D);
```

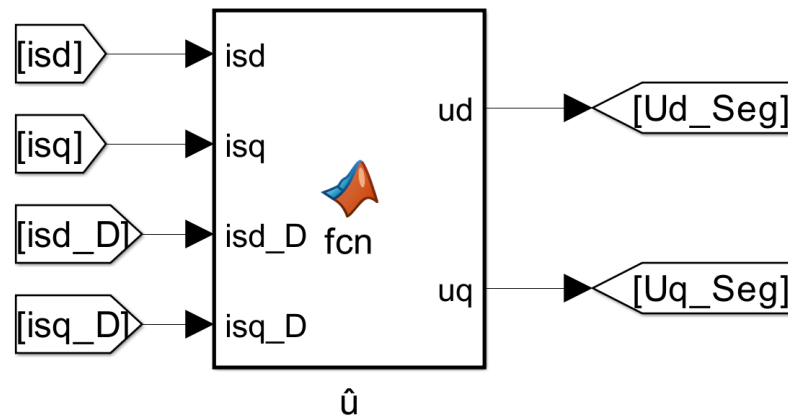


Figura 3.23: Ecuación y bloque Matlab de la entrada de seguimiento $\tilde{u}$.

De esta forma y de acuerdo a la ecuación (3.11), al sumarse con los voltajes deseados (3.4) se obtiene la ley de control completa u , cuya estructura se muestra en la Figura 3.24.

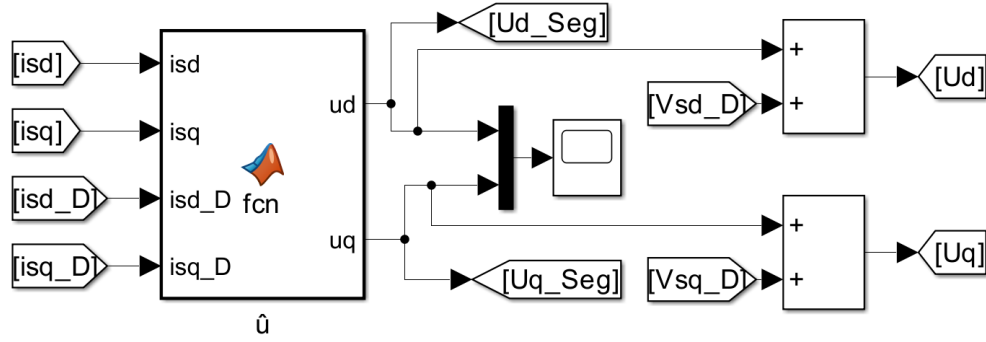


Figura 3.24: Ecuación y bloque Matlab de la entrada de seguimiento $\tilde{u}$.

Las gráficas de resultados obtenidos al ingresar las entradas de control U_{sd} , U_{sq} en la simulación del MI se mostrarán a detalle en el Capítulo 4 bajo diversos experimentos.

Evaluación del controlador

Este capítulo está dedicado a la presentación de resultados obtenidos al poner a prueba el controlador estudiado bajo diversos escenarios posibles, considerando los modelos dq y ab .

4.1. Evaluación de factibilidad

Todos los puntos comentados en el Capítulo 1.4.1 fueron puestos a evaluación a lo largo de este trabajo de tesis, concluyendo así que:

- Tarjeta de desarrollo: Para la simulación se hizo uso de los bloques de transformación Clarke y Park que vienen predeterminados por la biblioteca de simulink. Sin embargo, en el laboratorio de control se cuenta con la plataforma DSPACE DS1104, la cual sería más que suficiente para la realización de los cálculos y programación correspondiente, inclusive pudiéndose hacer uso de alguna tarjeta de desarrollo de *Texas Instruments* que están a precios más accesibles en el mercado.
- Sensores de posición y corriente: A nivel de Simulink bastó con el uso de *Scopes* para obtener las mediciones de estas señales; sin embargo, a nivel plataforma experimental es posible medirlas con el uso de un *encoder* de tipo rotativo incremental de la marca BEI MOTION SYSTEMS o un tacómetro como el de la marca UNI-T modelo UT372D para la posición mecánica, un rectificador-inversor trifásico con convertidor controlado CA/CD y un convertidor CD/CA como inversor de salida, mismos que se encuentran en el laboratorio de control así como del sensor de corriente realizado dentro del mismo.
- Aproximaciones: Como pudo observarse en las ecuaciones (3.4), (3.7) y (3.8) es necesario obtener las derivadas del vector X (3.1). Para tal propósito se propone el siguiente método de diferenciación numérica fundamentado en un sistema dinámico lineal que se llamará *diferenciador sucio de primer orden*, descrito por

$$\dot{u} = u\lambda - z, \quad (4.1a)$$

$$\dot{z} = \lambda^2 u - \lambda z \quad (4.1b)$$

y

$$z(s) = \frac{\lambda^2}{s + \lambda} u(s), \quad (4.1c)$$

donde para este trabajo se ha elegido $\lambda = 4000$, ya que es en ese valor encontrado de manera empírica donde se obtuvo el mejor desempeño en términos de suavidad y fidelidad respecto a la derivada real esperada. La forma de implementar este sistema en Simulink se presenta en la Figura 4.1.

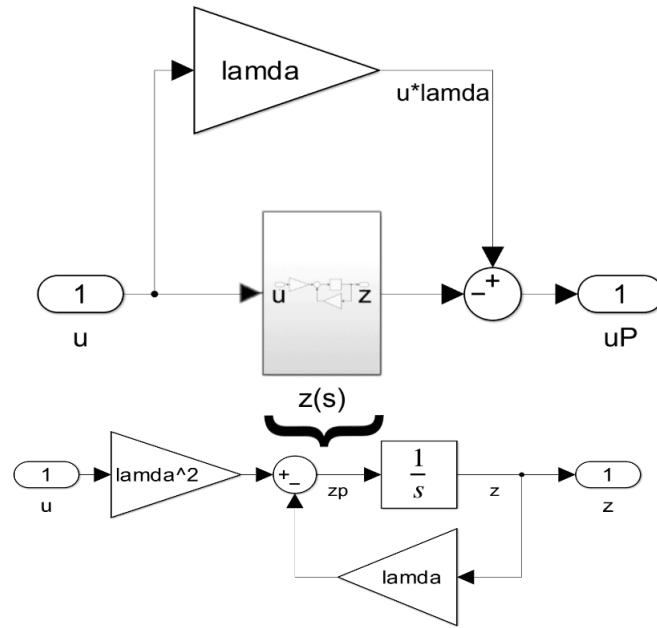


Figura 4.1: Derivador *sucio* de primer orden.

Con el diseño presentado se procede a la obtención de las derivadas de la velocidad deseada $\dot{\omega}_m^*$, las corrientes deseadas $\frac{d}{dt} i_{s_d}^*$, $\frac{d}{dt} i_{s_q}^*$ y el flujo deseado $\dot{\psi}_{r_d}^*$ que serán utilizadas más adelante. Esto se describe en la Figura 4.2.

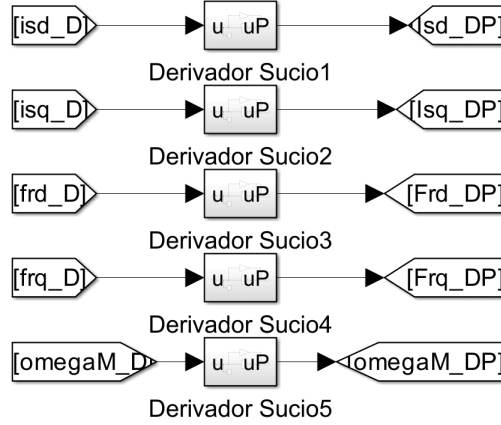


Figura 4.2: Señales derivadas.

- Conocimiento de sus parámetros: En la segunda proposición de [22] se propone que "los parámetros del motor son conocidos" mismos que fueron obtenidos y utilizados gracias a los trabajos de [18], por lo que para los experimentos realizados se obtuvo conocimiento de los mismos, inclusive, como se mostrará más adelante, se realizaron pruebas con cierta incertidumbre en el valor de éstos para evaluar su desempeño.

4.2. Evaluación de desempeño

Como segunda parte de la evaluación del controlador se comprobará el desempeño que presenta el mismo bajo ciertos perfiles de velocidad, condiciones y perturbaciones, con el objetivo de poder hacer una conclusión final sobre su viabilidad, para esto se realizaron dos clases de experimentos, los nominales y los que presentan perturbaciones e incertidumbres.

4.2.1. Experimentos nominales

Para evaluar el desempeño del controlador bajo esta condición se hará uso de tres perfiles de velocidad, tomando en cuenta que todos los parámetros son totalmente conocidos y el par de carga $\tau_L = 0$. Así mismo, los valores de las variables de sintonización y la corriente utilizadas inicialmente para las pruebas son de $k_d = 100$, $k_q = 100$ y $i_{sd}^* = -5[A]$, respectivamente

4.2.1.1. Perfil de velocidad n.º 1 - Regulación de velocidad

En esta prueba se realiza un perfil de velocidad ascendente que llega a un valor constante, el cual tiene como objetivo verificar el correcto funcionamiento del controlador sometido

a una velocidad constante. Para la prueba se decidió llegar a un valor de 1800 *rpm*, que es igual a su valor nominal. Para realizar este perfil en Simulink se hizo uso de una serie de 3 rampas que ascienden gradualmente hasta llegar a su valor final, seguido de un filtro con una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{0.12}\right)^2}{s^2 + 2\left(\frac{1}{0.12}\right)s + \left(\frac{1}{0.12}\right)^2} \quad (4.2)$$

con el objetivo de simular lo más fiel posible la curva de velocidad del motor hasta regularse. La salida con filtro que se muestra en la Figura 4.3 corresponde a la velocidad deseada ω_m^* .

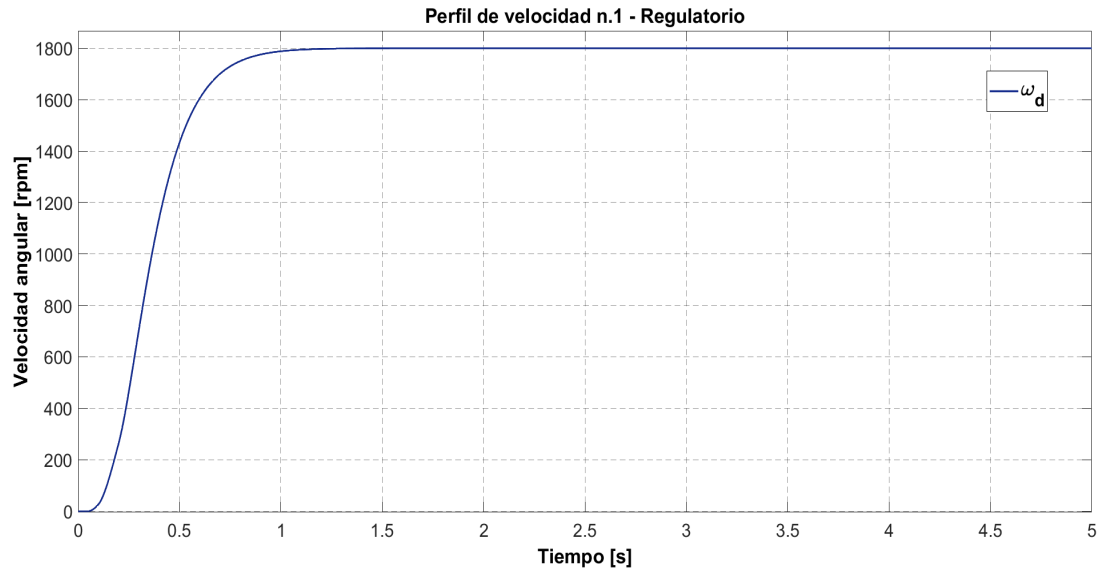
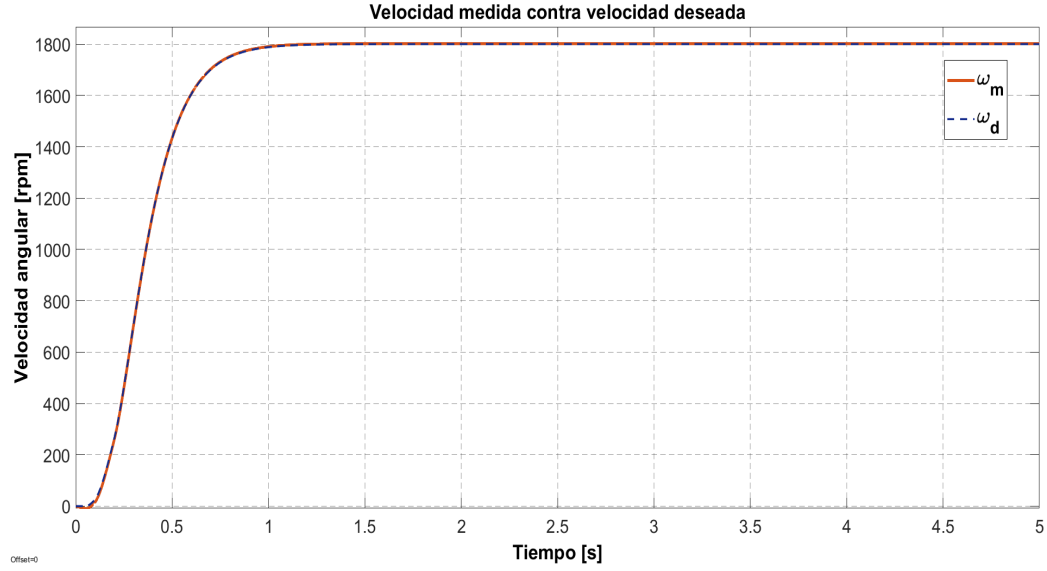
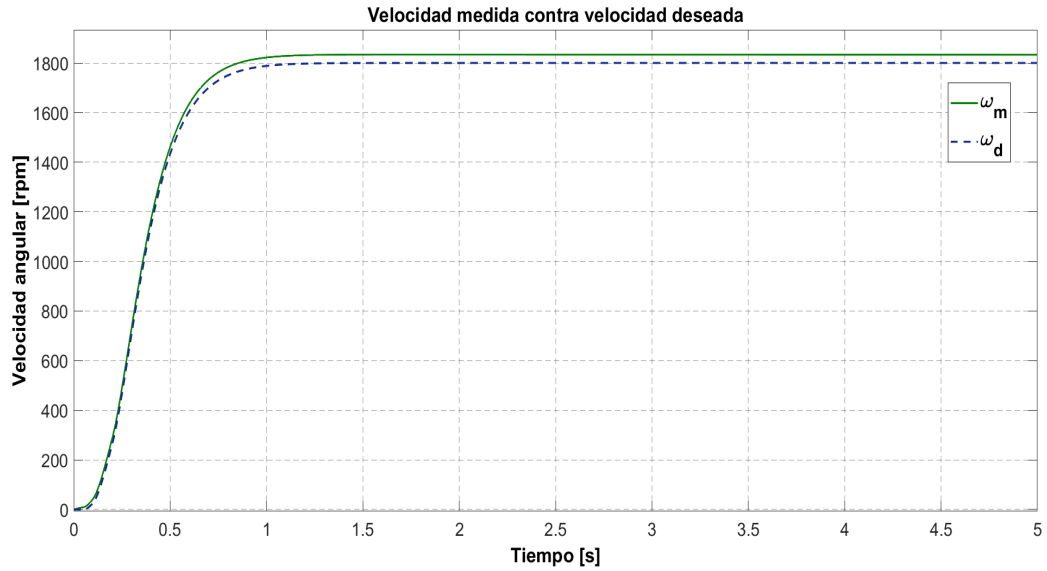


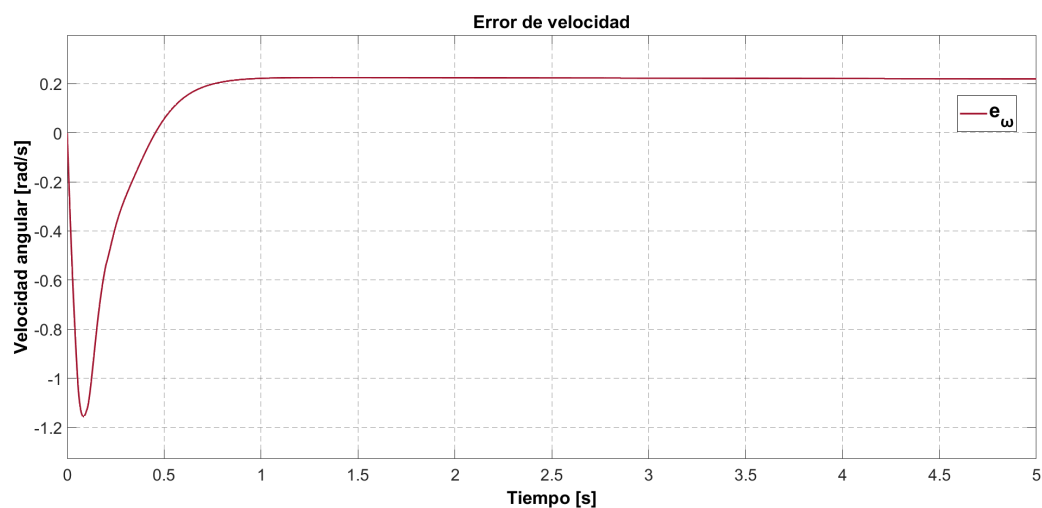
Figura 4.3: Perfil de velocidad n.º 1 - constante.

Al usar este perfil de velocidad en el controlador y ejecutar la simulación, se visualiza como en las gráficas de la Figura 4.4, donde se observa la velocidad deseada (ω_d^*) en línea discontinua y la velocidad medida del motor (ω_m) con línea continua. Se puede apreciar que el MI acelera durante el primer segundo y alcanza una velocidad relativamente estacionaria de 1802 *rpm* a los 1.5 segundos para el caso de la simulación en *dq*; así como de 1833 *rpm* para la simulación en *ab*, superando a velocidad nominal deseada de 1800 *rpm*.

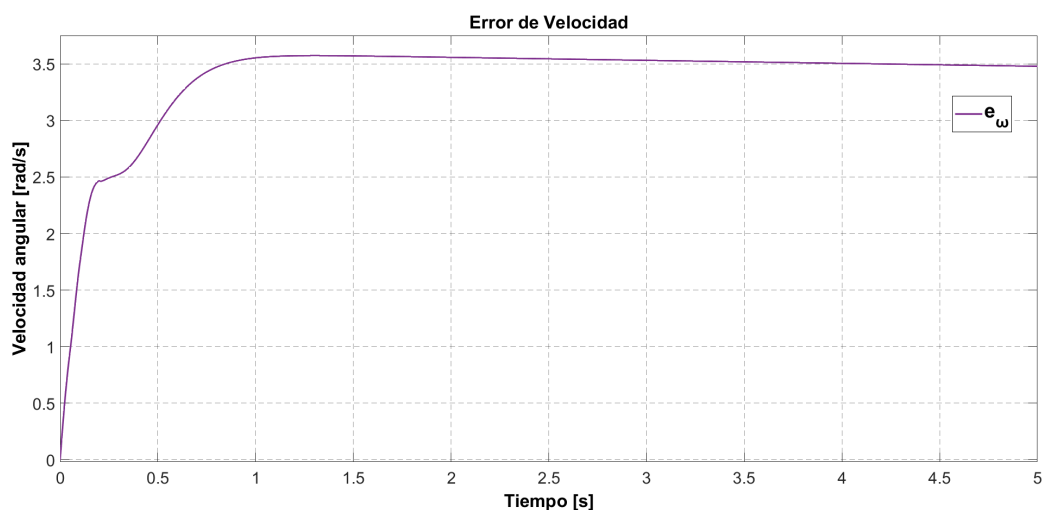
(a) Motor en dq (b) Motor en ab **Figura 4.4:** Comparación entre velocidad medida y deseada con perfil de velocidad n.º 1.

El desempeño del controlador bajo este perfil es mucho más exacto para el caso del motor en dq . Esto debido a que la definición de el error de velocidad como $\omega_m - \omega_m^*$ puede visualizarse en las gráficas de la Figura 4.5, con una diferencia de sólo un poco más de 0.2 rad/s en el caso del motor dq y de 3.5 rad/s en el caso ab , es decir, un 0.1% y 1.83% de porcentaje de error, respectivamente. Sin embargo, puede apreciarse mejor

en la gráfica del motor en *ab* que este error comienza a disminuir a partir del primer segundo.



(a) Motor en *dq*



(b) Motor en *ab*

Figura 4.5: Error de velocidad con perfil de velocidad n.º 1.

4.2.1.2. Perfil de velocidad n.º 2 - Seguimiento de velocidad

El segundo perfil utilizado consiste en una velocidad variante en el tiempo que cambia la dirección de giro. Con ella se verificará el funcionamiento del controlador durante variaciones leves de velocidad. Para esta prueba se realizó en Simulink una función

sinusoidal con una amplitud de 1800 *rpm* a una frecuencia de 0.1 *Hz*, es decir, un paso de pico a pico en 10 segundos. Este perfil se muestra en la Figura 4.6.

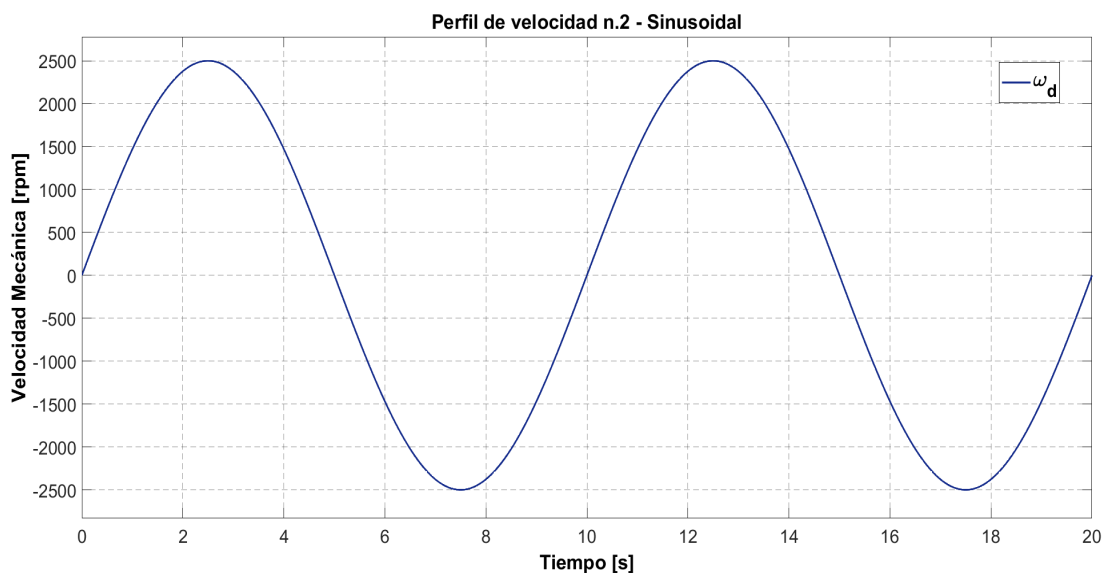
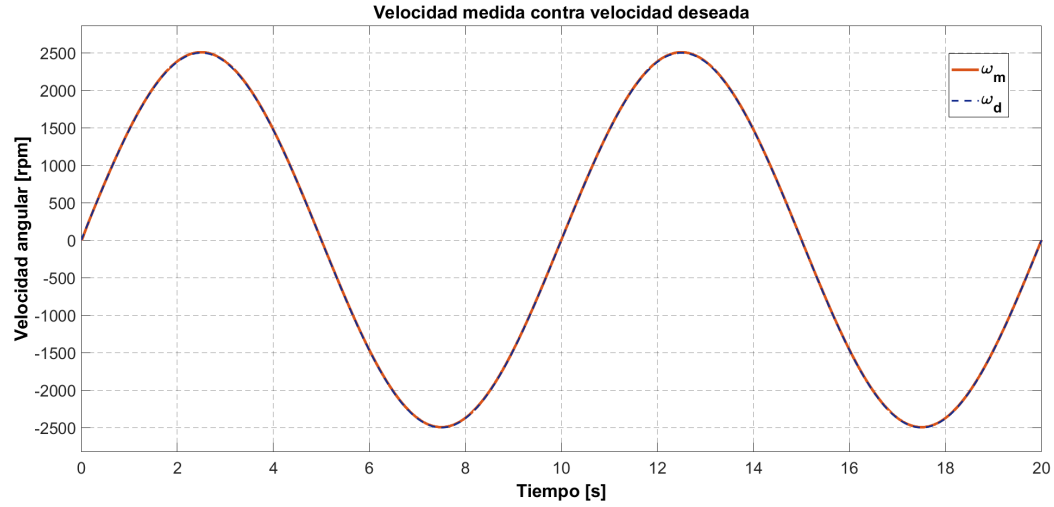
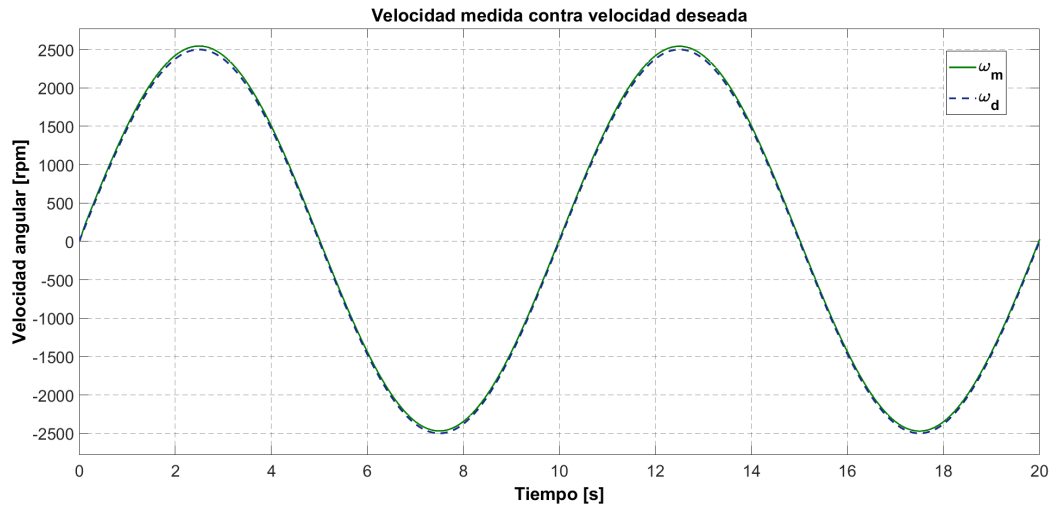


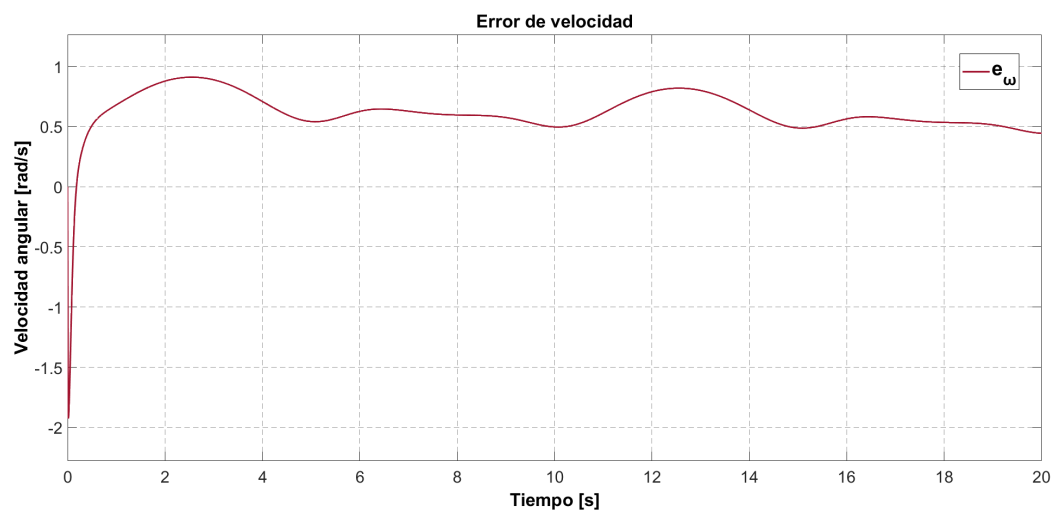
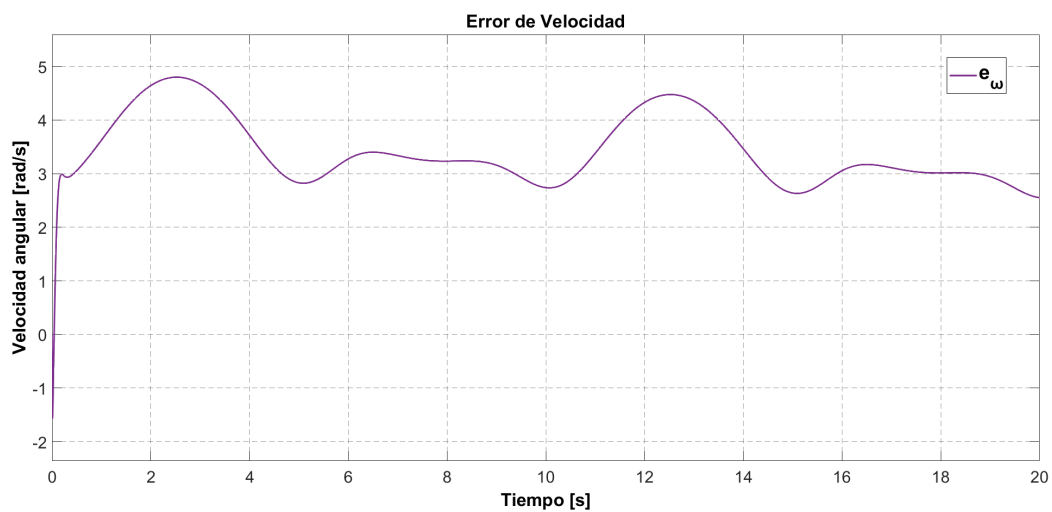
Figura 4.6: Perfil de velocidad n.º 2 - Seguimiento de velocidad.

Ejecutando la simulación con el segundo perfil de velocidad pueden apreciarse las siguientes gráficas de velocidad correspondientes a la Figura 4.7.

(a) Motor en dq (b) Motor en ab **Figura 4.7:** Comparación de velocidad medida y deseada con perfil de velocidad n.^o 2.

Se puede constatar que para este caso el controlador alcanza un alto desempeño dinámico, con trayectorias que incluyen cambios en el sentido de giro y con una velocidad que acelera de 2500 *rpm* (139 % de la velocidad nominal).

Al analizar el error de velocidad para este comportamiento, se observa un máximo de 0.4 % en el marco dq y de 1.9 % en el marco ab , alcanzándose satisfactoriamente el objetivo de control, como se muestra en las gráficas de la Figura 4.8.

(a) *Motor en dq*(b) *Motor en ab***Figura 4.8:** Error de velocidad con perfil de velocidad n.^o 2.

4.2.1.3. Perfil de velocidad n.º 3 - Seguimiento ante cambios escalón

Como tercer y último perfil se somete el controlador a variaciones notables de velocidad dados por cambios escalón aplicados de manera secuencial. En este caso se consideran velocidades positivas que van desde los 0 hasta los 3000 *rpm*. Para una mejor suavidad se hizo también se hizo uso del filtro presentado en (4.2) para el perfil visualizado en la Figura 4.9.

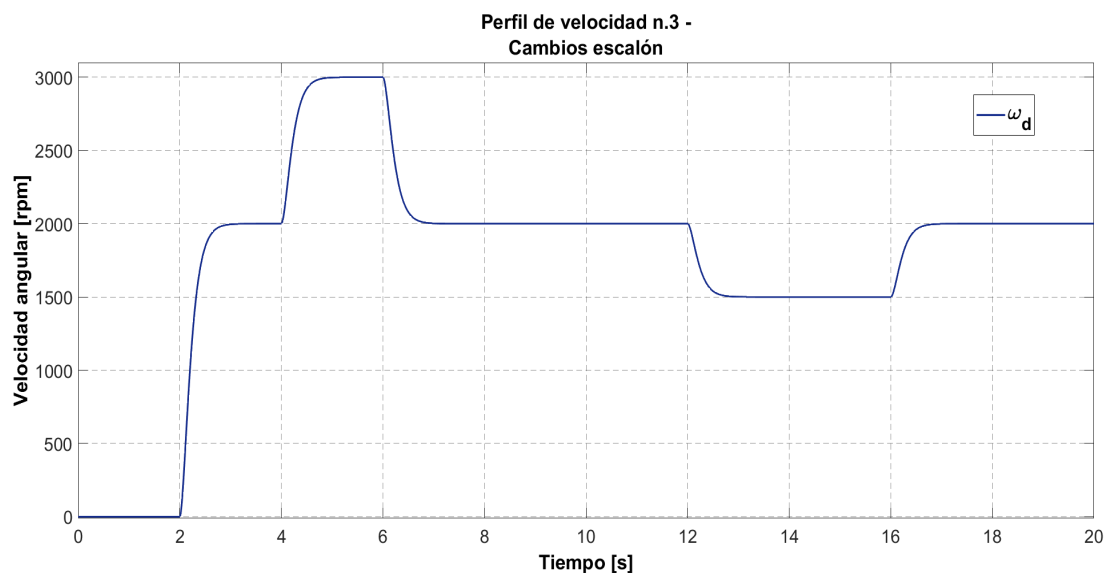
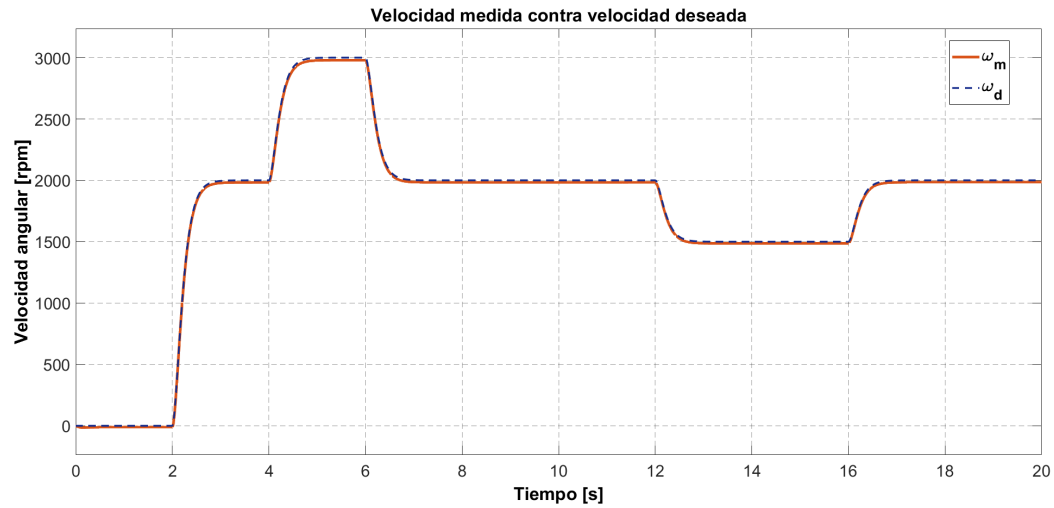
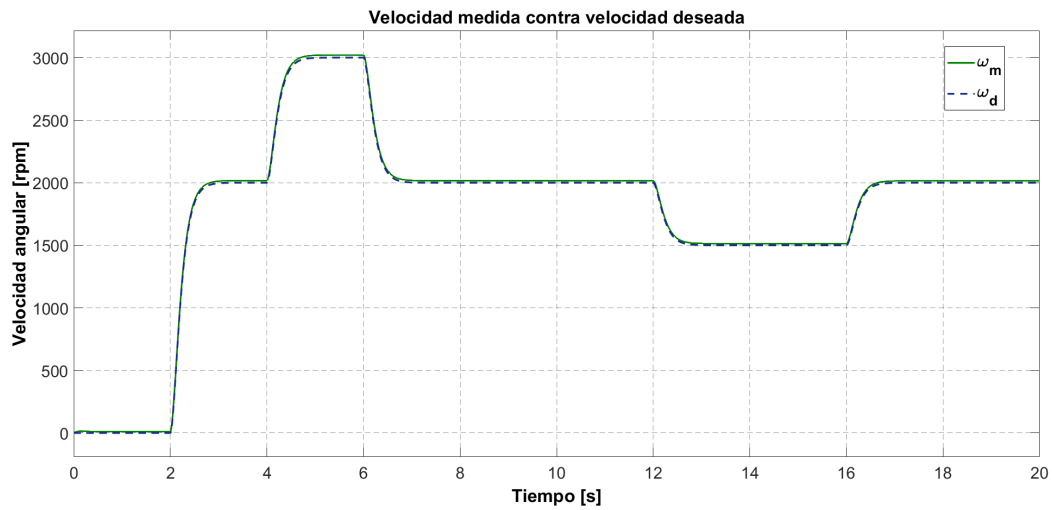
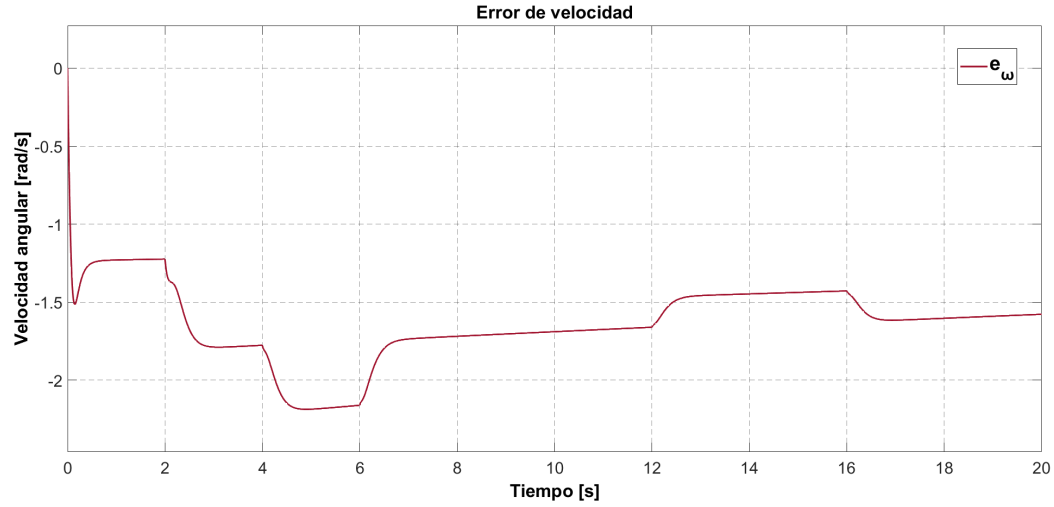


Figura 4.9: Perfil de velocidad n.º 3 - Seguimiento ante cambios escalón.

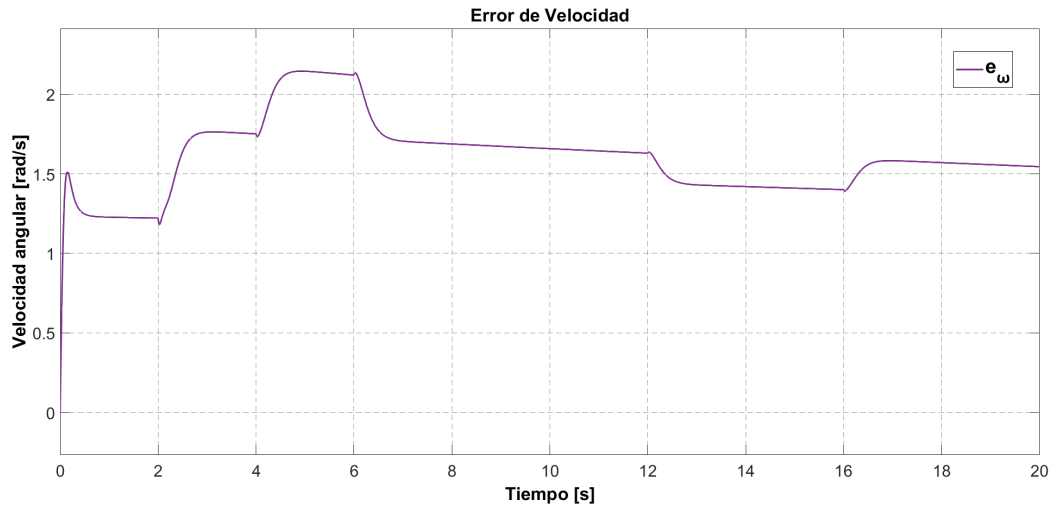
Al ejecutar el motor en lazo cerrado con este perfil se obtiene como resultado lo apreciado en las gráficas de la Figura 4.10

(a) Motor en *dq*(b) Motor en *ab***Figura 4.10:** Comparación de velocidad medida y deseada con perfil de velocidad n.º 3.

Aquí puede apreciarse en la Figura 4.10 un perfil altamente variante, que acelera de 0 a 2000 *rpm* en 600 *ms* para luego acelerar nuevamente hasta 3000 *rpm* en la misma fracción de tiempo. Posteriormente, después de descender nuevamente a los 2000 *rpm* mantiene un tiempo estabilidad durante casi 6 segundos. Tanto la velocidad del motor como la deseada evidencian un desempeño dinámico sobresaliente, con lo que puede afirmarse que el controlador define una opción viable para los movimientos de precisión. Esto igual puede observarse dentro de la Figura 4.11 con una diferencia de velocidad de máximo 2.2 *rad/s*, o bien, en un 0.67 %.



(a) Motor en dq



(b) Motor en ab

Figura 4.11: Error de velocidad con perfil de velocidad n.º 3.

4.2.2. Experimentos con perturbaciones e incertidumbres

Para evaluar controlador en esta condición se hará uso de los tres perfiles de velocidad utilizados en los experimentos nominales, pero agregando un par de carga $\tau_L \neq 0$ y con un porcentaje de incertidumbre en sus parámetros. Los valores de las variables de sintonización y corriente se mantienen igual para la realización de estos experimentos.

4.2.2.1. Pruebas con par de carga como perturbación

Como se ha mencionado anteriormente, el diseño del controlador se realizó considerando $\tau_L = 0$, por lo que es necesario evaluar su desempeño cuando existe una perturbación $\tau_L \neq 0$. Para esta prueba se hará uso del valor de par de carga nominal del valor $\tau_L = 2.97$. Este valor es agregado a la entrada del motor de la Figura 3.3 así como al bloque de función para la corriente deseada de la Figura 3.21. La forma en que se implementa en la simulación se muestra en la Figura 4.12.

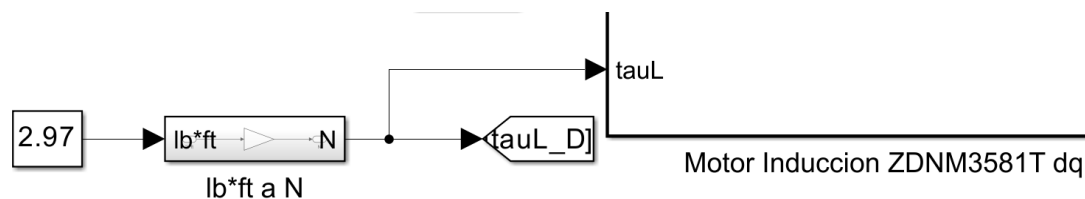
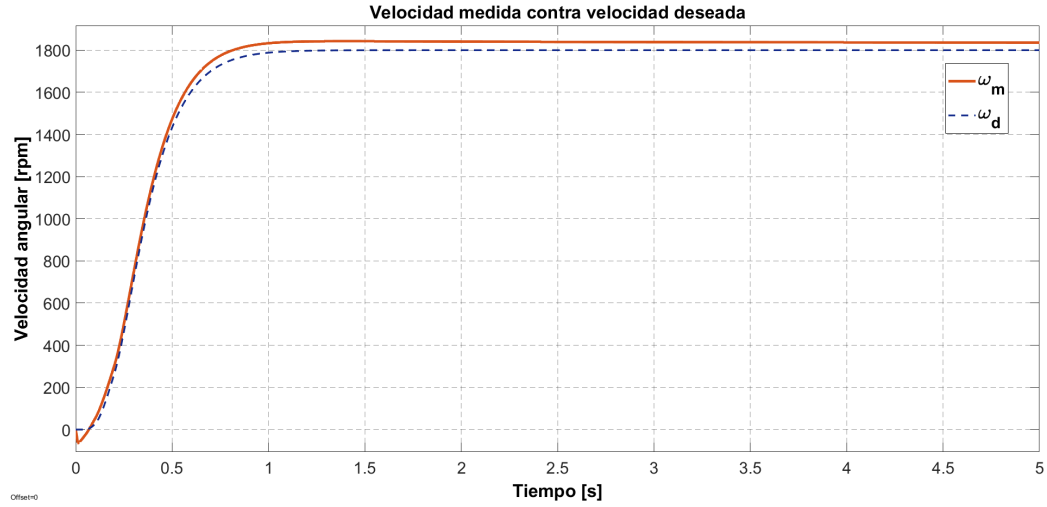
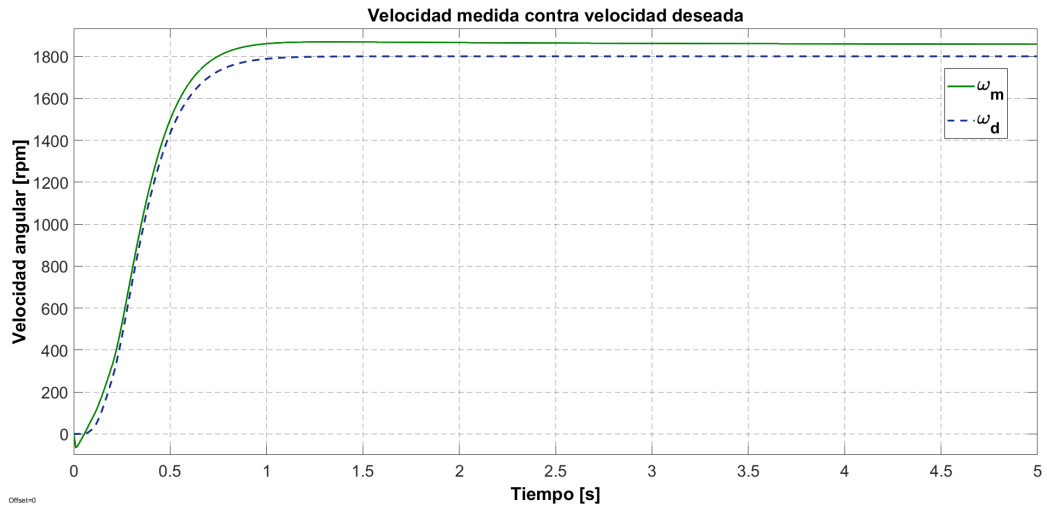
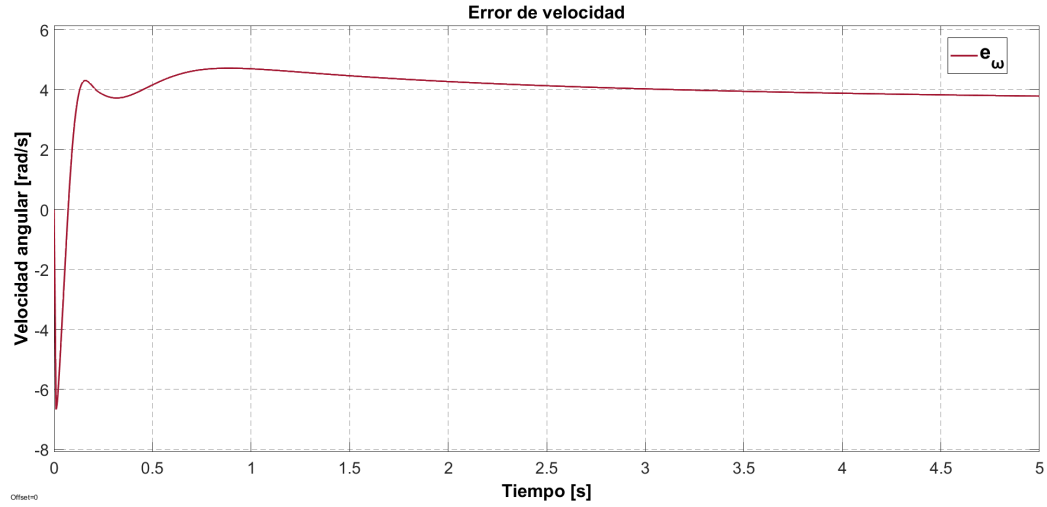
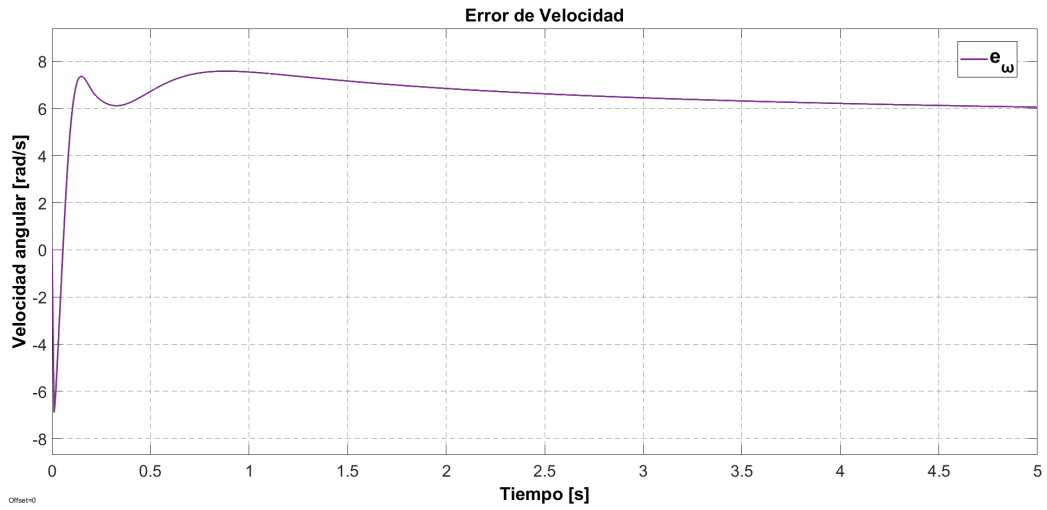


Figura 4.12: Par de carga para agregado al motor y controlador.

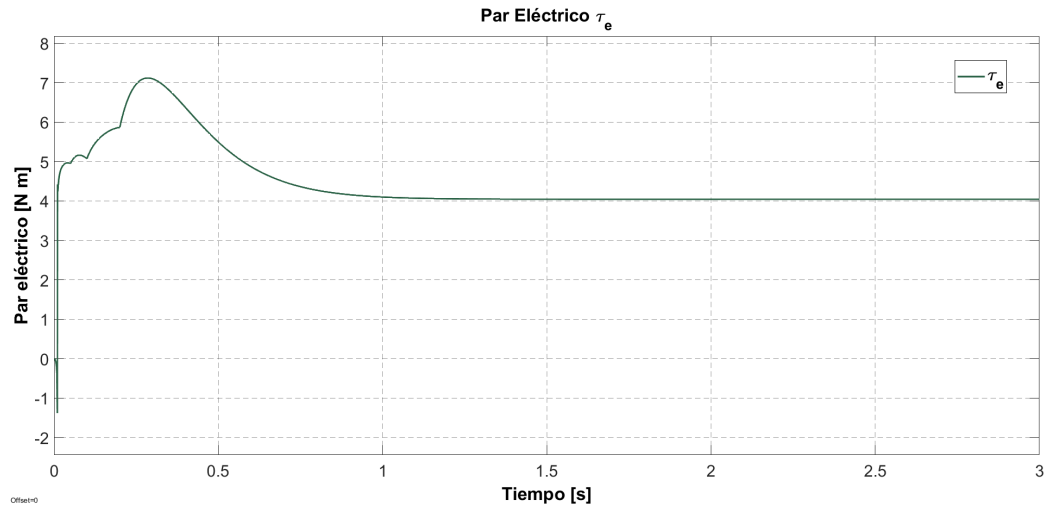
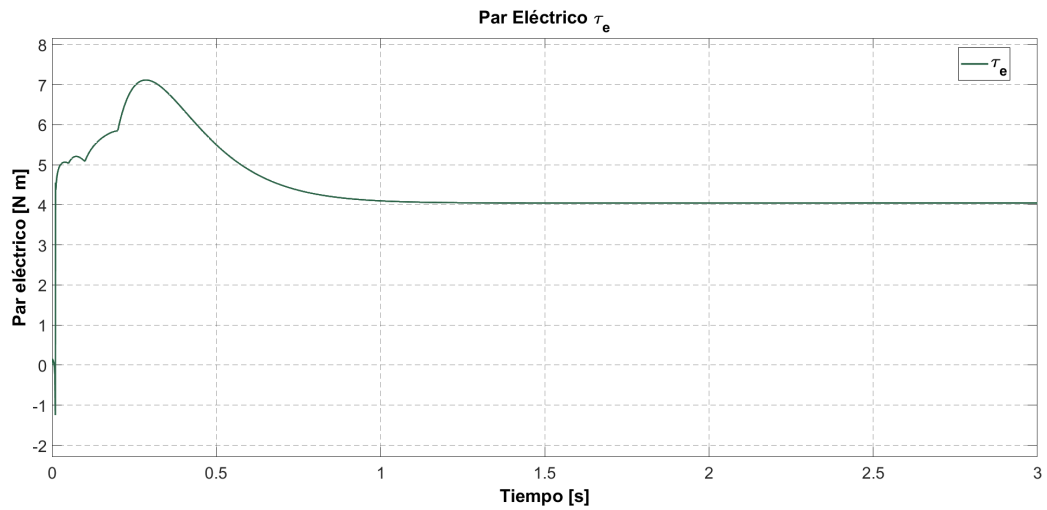
Al ejecutar la simulación utilizando el perfil de velocidad n.º 1 se obtienen las gráficas de la Figura 4.13.

(a) Motor en dq (b) Motor en ab **Figura 4.13:** Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 1 y τ_L .

En estas pruebas se observa una diferencia en comparación a su homólogo sin par de carga, alcanzando una diferencia de 40 *rpm* por encima del valor deseado para el caso *dq* así como de 60 *rpm* para el caso *ab*, es decir, un porcentaje de error de 2.22 % y 3.33 % respectivamente. Como se muestra a continuación en las gráficas de la Figura 4.14.

(a) Motor en dq (b) Motor en ab **Figura 4.14:** Error de velocidad con perfil de velocidad $n^{\circ}1$ y τ_L .

Este aumento en el error de la medición del controlador podría explicarse al observar la gráfica del par eléctrico τ_e , que, a diferencia de la Figuras 3.11 y 3.17, ahora al haber un par de carga éste aumenta su valor, como puede observarse en la Figura 4.15.

(a) $\tau_e = 2.97$ en dq (b) $\tau_e = 2.97$ en ab **Figura 4.15:** Comparación del par eléctrico τ_e .

4.2.2.2. Incertidumbre paramétrica

Para las últimas pruebas de desempeño, se optó por ver la efectividad del controlador cuando sus parámetros no son del todo exactos, algo que puede suceder cuando estos no son conocidos con exactitud y se tiene un porcentaje de error en las mediciones para su obtención. Para estas pruebas se programaron pruebas con márgenes de error desde $\pm 5\%$ hasta $\pm 15\%$. La programación de estas incertidumbres se presentan en la [Figura 4.16](#).

```
function [Vsd_D,Vsq_D] = fcn(Isd_DP,isd_D,Isq_DP,isdq_D,
    frd_D,frq_D,omegaM_D)

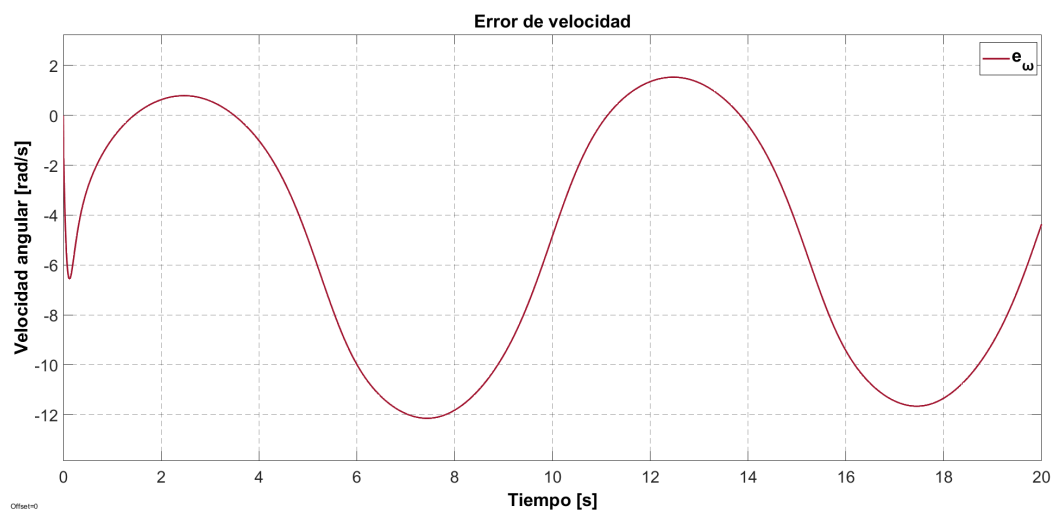
%Parametros modificados en -15%

Rs = 2.516 * 0.85;
Rr = 1.9461 * 0.85;
Lsr = 0.2226 * 0.85;
Ls = 0.2340 * 0.85;
Lr = 0.2302 * 0.85;
np = 2;
```

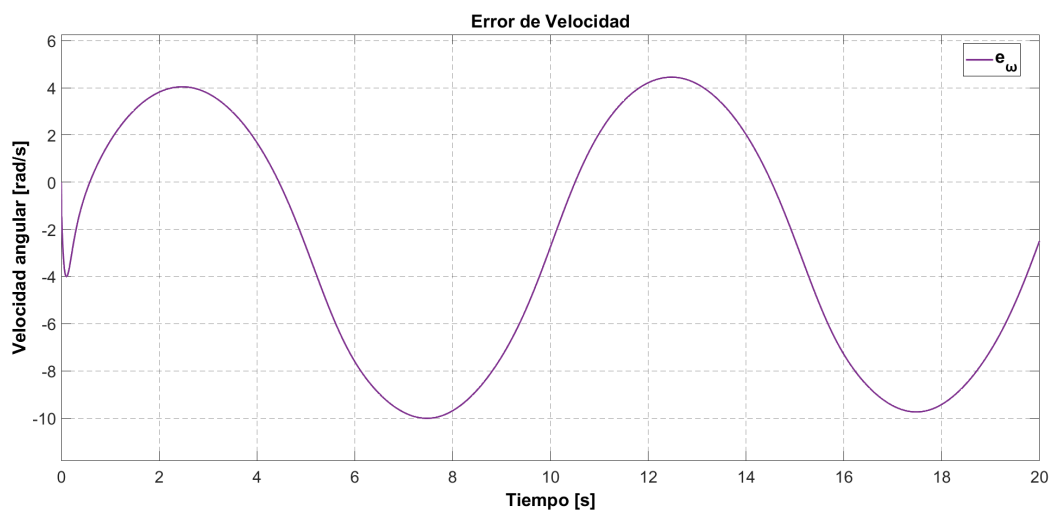
Figura 4.16: Código para variación de margen de error.

Esta prueba se realizará haciendo uso del perfil de velocidad n.º 2 y sin par de carga ($\tau_L = 0$). Para mayor ejemplificación se mostrarán a continuación las gráficas de error para la respectiva prueba.

- Incertidumbre de +5 %: Se puede visualizar en las gráficas de la Figura 4.17 que con una incertidumbre positiva se obtiene un error de no más de 2 *rad/s* en el incremento, así como un máximo de 12 *rad/s* en el decremento.



(a) Motor en dq



(b) Motor en ab

Figura 4.17: Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n°2 y +5% error en parámetros.

- Incertidumbre de -5 %: Por otro lado, como se observan en las gráficas de la Figura 4.18 que con una incertidumbre negativa se obtiene un error de menos de 10 rad/s en el incremento, así como un máximo de 30 rad/s en el decremento.

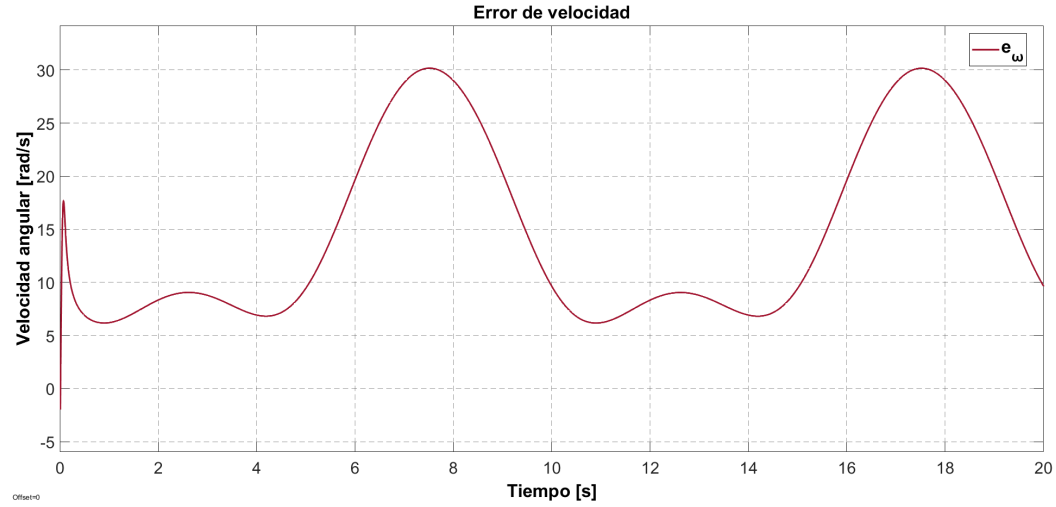
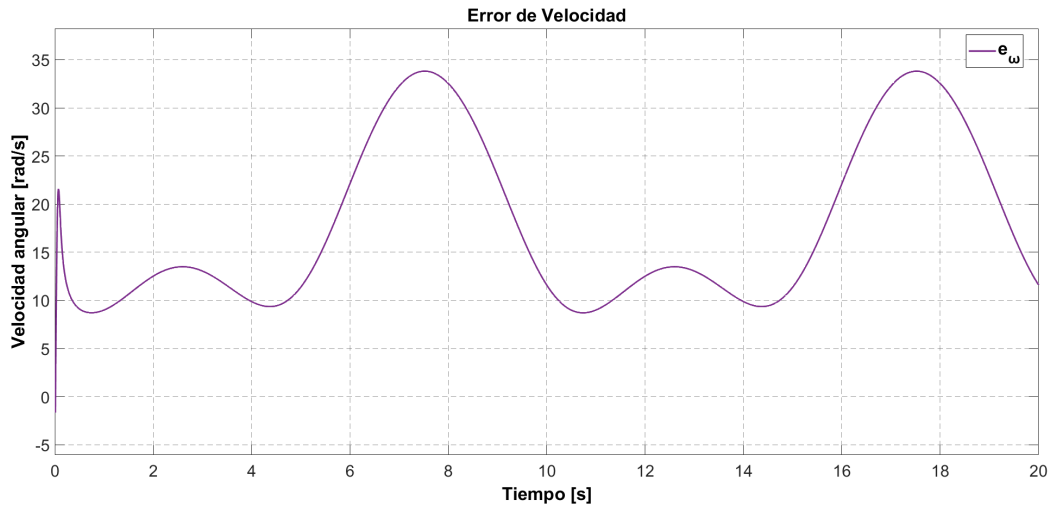
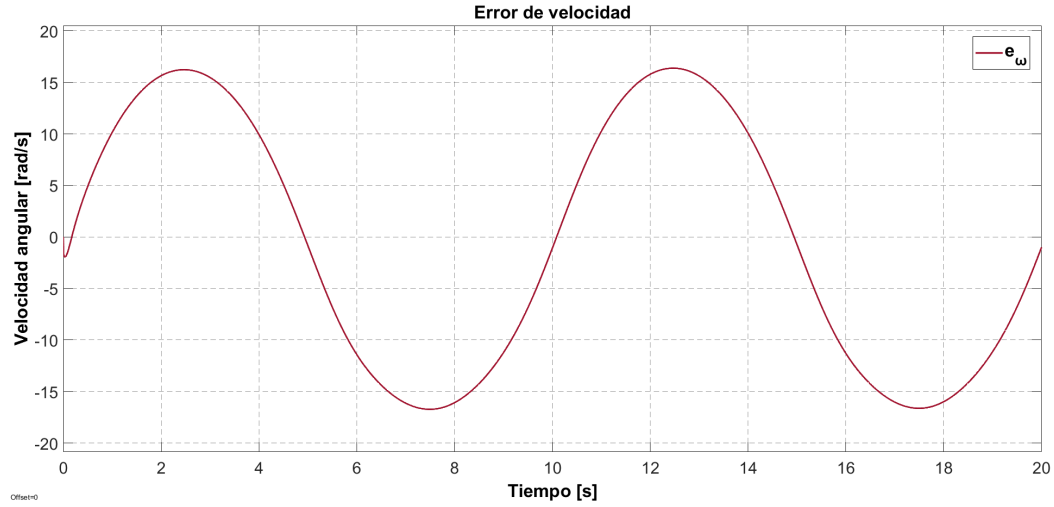
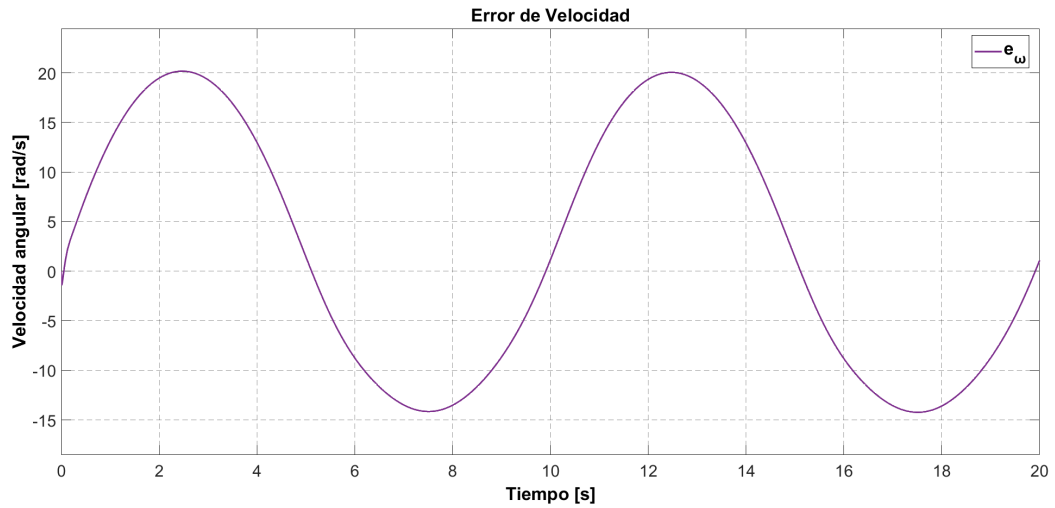
(a) Motor en dq (b) Motor en ab

Figura 4.18: Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n°2 y -5% error en parámetros.

- Incertidumbre de +10%: Al incrementar la incertidumbre al 10% se observa en las gráficas de la Figura 4.19 un incremento en el error a un poco más de 15 rad/s tanto en el incremento como el decremento para el motor en dq y 20 rad/s en ab .



(a) Motor en dq



(b) Motor en ab

Figura 4.19: Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y +10 % error en parámetros.

- Incertidumbre de -10 %: Mientras que con incertidumbre negativa de 10 % se aprecia un aumento en el error a 42.5 rad/s como máximo en el mayor punto de descenso de la velocidad.

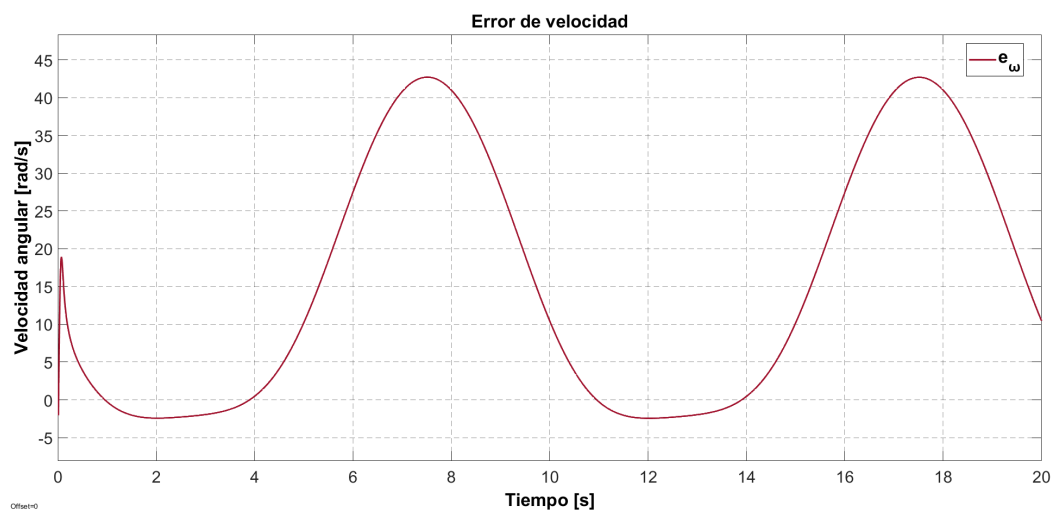
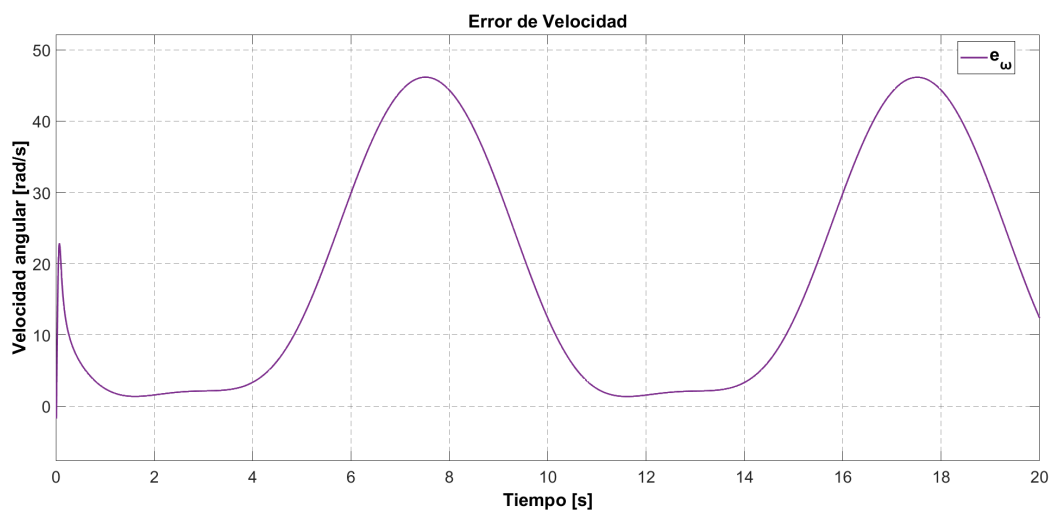
(a) Motor en dq (b) Motor en ab

Figura 4.20: Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y -10% error en parámetros.

- Incertidumbre de +15%: Como último incremento de incertidumbre se puede ver en la Figura 4.21 alcanzar errores de más de 30 rad/s en el motor ab , siendo ésta el mayor porcentaje de error con una incertidumbre positiva.

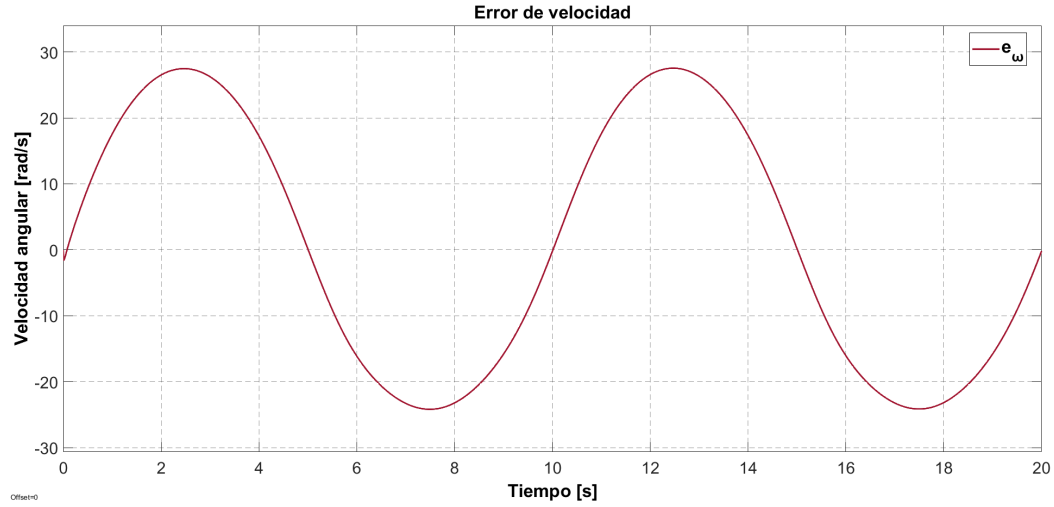
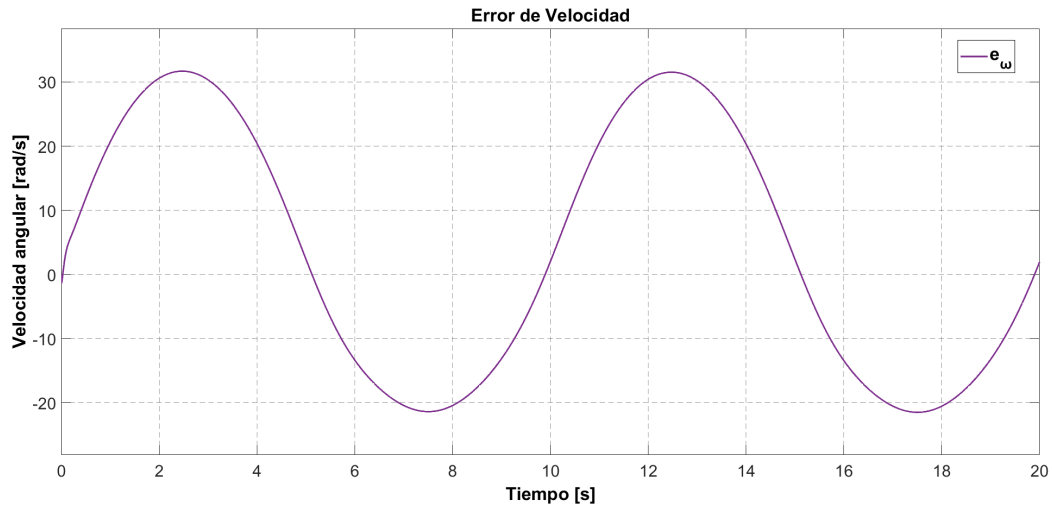
(a) Motor en dq (b) Motor en ab

Figura 4.21: Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y +15% error en parámetros.

- Incertidumbre de -15%: La mayor incertidumbre negativa genera también, como era de esperarse, la mayor cantidad de error de las 3 medidas, siendo ésta de un poco más de 60 rad/s en el motor ab como se observa en la Figura 4.22.

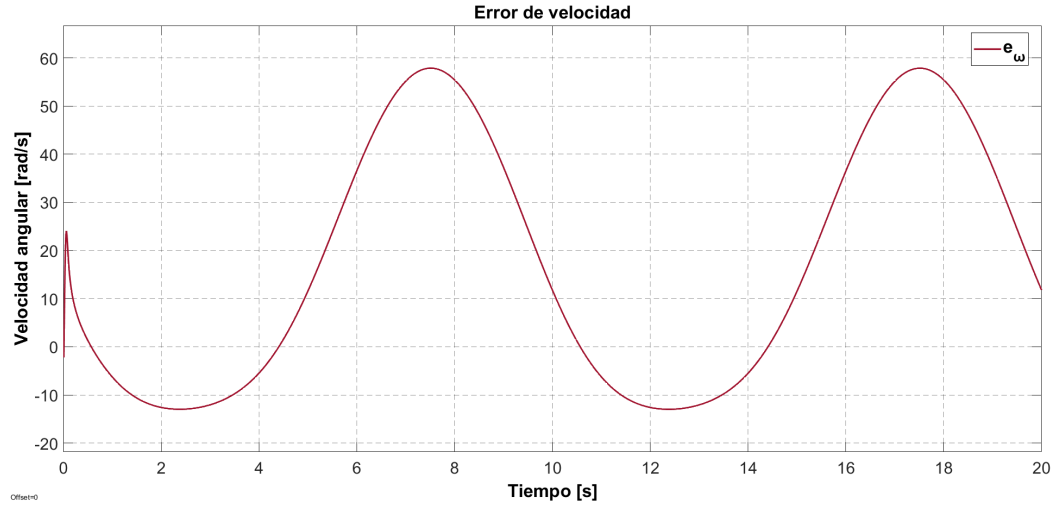
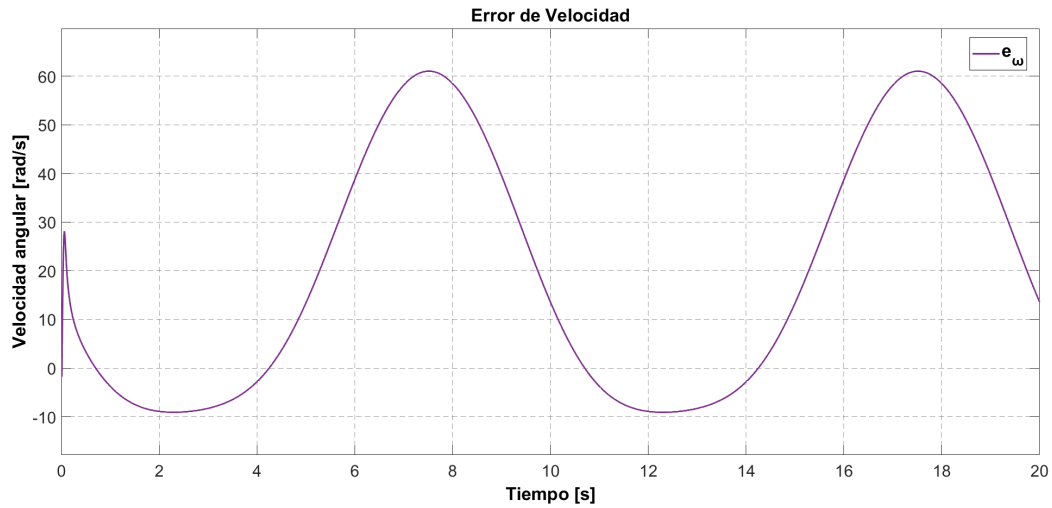
(a) Motor en dq (b) Motor en ab

Figura 4.22: Comparación entre ω_d y ω_d^* con perfil de velocidad n.º 2 y -15% error en parámetros.

Como puede verse desde la Figura 4.17 hasta 4.22, se observa que al ir incrementando la diferencia entre los parámetros, el seguimiento de la velocidad es menos preciso, por lo que aumenta el porcentaje de error. Sin embargo, este no es proporcional e incrementó en máximo 10% durante la última prueba, por lo que el controlador continúa siendo una excelente opción, inclusive en un desconocimiento de los valores exactos de los parámetros del motor, sin embargo, recordando la evaluación de factibilidad es preferible tener el conocimiento de éstos.

4.3. Discusión de resultados

Tomando en cuenta los resultados de la evaluación del esquema de control sometido a los diversos perfiles de velocidad y pruebas, se tiene lo siguiente:

- El controlador tiene un desempeño notable bajo condiciones dinámicas como en los tres casos de perfil velocidad, convirtiéndose en una buena alternativa.
- Un factor que afecta a los valores obtenidos en la simulación es el derivador sucio utilizado, así como el valor de λ , ya que mientras más alto sea su valor más rápido se obtiene como salida la derivada de la señal, pero también provoca un mayor valor inicial durante el estado estacionario.
- El controlador presenta un buen y similar comportamiento tanto en el modelo dq como ab , ya que no se presenta alguna pérdida tan notable durante la conversión del sistema de referencia.
- Para todos los casos probados anteriormente, en la simulación en ab presenta una diferencia de 3.9 rad/s o 37 rpm como máximo comparado con su caso homólogo en dq . El cual puede deberse a que, esa simulación debe pasar por más transformaciones previo a entrar al controlador en el sistema de referencia dq .
- Los casos con algún par de carga diferente de cero no derivaron en alguna perturbación significativa al controlador, lo que le da mayor garantía de funcionamiento en condiciones reales.
- Aunque sea recomendado contar con la mayor certeza de los parámetros que rigen el motor, el controlador podría funcionar con hasta un máximo de $\pm 15\%$ de margen de error de éstos si se busca como máximo un 10% de margen de error respecto a la eficiencia de seguimiento.

Conclusiones

En este trabajo se pudo aplicar diversos temas vistos a lo largo de la carrera de una forma unificada en un solo proyecto, con el objetivo de llegar a realizar un trabajo de análisis ingenieril similar a los de tipo industrial sobre un controlador nuevo que pudiera ser candidato para su uso frente a los tradicionalmente usados.

La simulación conformada por el motor, las matrices transformadoras y la simulación se logró ejecutar apropiadamente en una serie de combinaciones diversas con el objetivo de evaluar su funcionamiento bajo ciertas condiciones que pudieran ser reales en alguna situación industrial real.

Si bien la prueba final de la plataforma experimental no fue posible debido a inconvenientes al momento de reparar el inversor, la experiencia para el armado del "mando", así como la utilización de la plataforma y software dSPACE, así como los sensores de corriente y de velocidad (*encoder*) permitieron hacer un acercamiento a la instrumentación industrial, que amplían la habilidad personal para el manejo de las mismas en el ámbito profesional y sirven como previa experiencia.

Finalmente se podría afirmar que esta metodología de control cubre en la mayoría de los casos las expectativas de desempeño esperadas para ciertos casos, teniendo errores menores al 2% en los experimentos denominados nominales. Lo cual exhibe al controlador como una propuesta viable de alto desempeño bajo ciertos términos de futuro análisis.

5.1. Trabajo Futuro

- Finalizar la reparación del rectificador-inversor con el objetivo de completar la maqueta experimental.
- Una vez terminada la maqueta experimental, evaluar experimentalmente los diversos perfiles de velocidad y pruebas con par de carga.
- Implementar el controlador en alguna otra plataforma de menor costo, haciendo más viable algún futuro uso industrial, debido al precio de la plataforma y licencia de dSPACE.
- Comparar el desempeño del controlador, bajo las mismas condiciones, con alguna otra técnica de control.

Obtención del Par eléctrico τ_e

Para obtener con la ecuación de τ_e se inicia con el planteamiento de la definición de potencia

$$P = Vi \ , \tag{A.1}$$

donde P es la potencia, i representa la corriente y V es la diferencia de potencial.

Recordando que la diferencia de potencial es igual a la diferencia de flujo respecto al tiempo, se tiene que

$$\frac{d\lambda}{dt} = V \ , \tag{A.2}$$

donde el flujo es definido como

$$\lambda = Li \ . \tag{A.3}$$

Derivando (A.3) se obtiene

$$\frac{d\lambda}{dt} = L \frac{di}{dt} \tag{A.4}$$

e igualando (A.4) con (A.2)

$$V = L \frac{di}{dt} \ . \tag{A.5}$$

Por otro lado, tomando en cuenta la definición de la energía como

$$E = \int P dt \ , \tag{A.6}$$

al sustituir (A.1) en (A.6) se obtiene

$$E = \int V i dt \quad (\text{A.7})$$

y sustituyendo (A.5) en (A.7) genera

$$E = \int L i \frac{di}{dt} dt . \quad (\text{A.8})$$

Haciendo uso de la regla de la cadena se puede obtener

$$\int L i \frac{di}{dt} dt = \int L i di , \quad (\text{A.9a})$$

$$\int L i di = \frac{1}{2} L i^2 , \quad (\text{A.9b})$$

y

$$E = \frac{1}{2} L i^2 , \quad (\text{A.9c})$$

donde (A.9c) es la definición de energía que se usará, así como la de coenergía, que de acuerdo la Figura A.1 se obtiene la ecuación

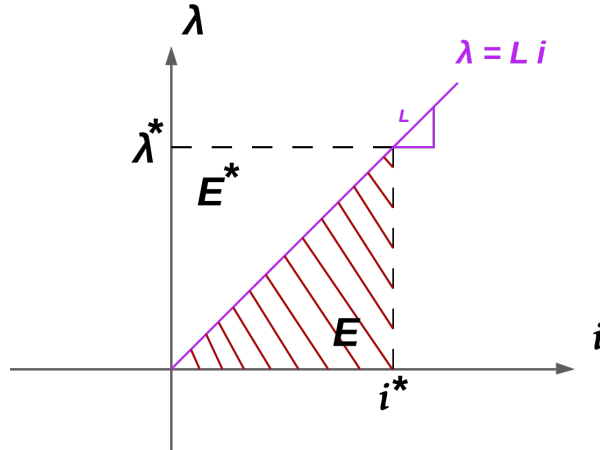


Figura A.1: Relación λ vs i .

$$\lambda^* i^* = E + E^* \quad (\text{A.10})$$

y despejando E^* en (A.10)

$$E^* = \lambda^* i^* - E , \quad (\text{A.11})$$

dado que la expresión anterior es válida para todo λ^*, i^* , se puede escribir

$$E^* = \lambda i - E \quad (\text{A.12})$$

y al sustituir la ecuación (A.9c) dentro de (A.11) se obtiene

$$E^* = \lambda i - \frac{1}{2} L i^2 . \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo (A.3) en (A.13) queda

$$E^* = L i^2 - \frac{1}{2} L i^2 , \quad (\text{A.14})$$

se realiza la operación dando así la definición de coenergía como

$$E^* = \frac{1}{2} L i^2 , \quad (\text{A.15})$$

que servirá para la obtención de la fuerza τ_e que, para el MI, por definición es

$$T_e = \frac{\partial E^*(\theta_m)}{\partial \theta_m} , \quad (\text{A.16})$$

donde E^* depende de θ_m al ser una fuerza rotacional, de acuerdo a la Figura (A.2).

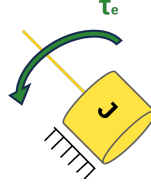


Figura A.2: Par Eléctrico en Eje del MI.

Haciendo uso nuevamente de (A.3), la ecuación (A.16) queda como

$$E^*(\theta_m) = \frac{1}{2} \lambda i , \quad (\text{A.17})$$

donde para el caso del MI:

- La variable i al ser una matriz de corrientes, es redefinida como I_e pero transpuesta, es decir $(I_e)^T$.
- El flujo λ de (A.3) es redefinido como el resultado de la matriz de inductancias por la matriz de corrientes I_e , siendo

$$\lambda = D_e(\theta_m) I_e \quad (\text{A.18})$$

y quedando $E^*(\theta_m)$ redefinida de forma matricial como

$$E^*(\theta_m) = \frac{1}{2}(I_e)^T D_e(\theta_m) I_e , \quad (\text{A.19})$$

por lo que, al derivar (A.19) parcialmente respecto a θ_m se tiene que

$$\frac{\partial E^*(\theta_m)}{\partial \theta_m} = \frac{1}{2}(I_e)^T \frac{\partial W_1(\theta_m)}{\partial \theta_m} I_e , \quad (\text{A.20})$$

dando como resultado la ecuación del par eléctrico τ_e

$$T_e = \frac{1}{2}(I_e)^T \frac{\partial W_1(\theta_m)}{\partial \theta_m} I_e . \quad (\text{A.21})$$

Como se visualiza realmente la transformación dq

Como se ha visto, el motor con el que se está trabajando es un motor de inducción trifásico, lo que significa que tiene tres conjuntos separados de bobinas en el estator.

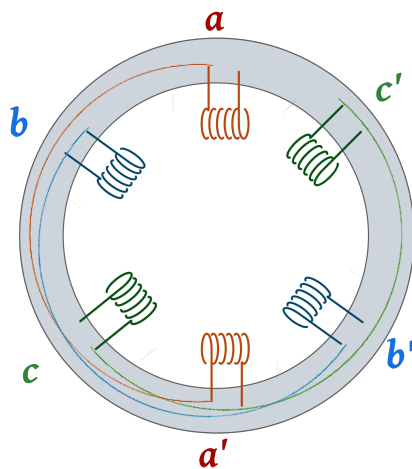


Figura B.1: Conjunto de bobinas en el estator.

Cuando se conecta a un suministro eléctrico trifásico se genera un campo electromagnético rotativo, que para distribuirlo a través de toda la circunferencia es que se le da una separación de 120° a cada fase. Ahora, si el voltaje aplicado a cada bobina es de corriente alterna, producirá un cambio de intensidad y polaridad en cada campo magnético en momentos diferentes, combinándose así para producir el efecto giratorio.

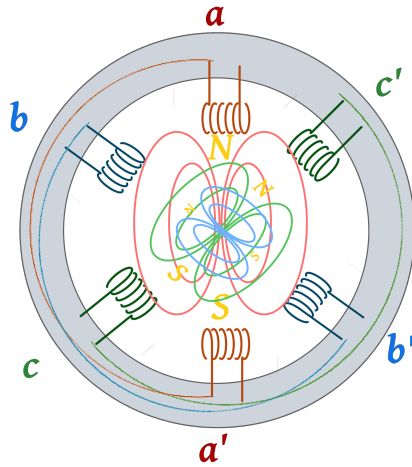


Figura B.2: Campos magnéticos del estator generados.

Por su parte, el rotor que, como se sabe, es de tipo jaula de ardilla, está compuesto por barras conectadas a dos anillos extremos y por barras de acero laminadas que ayudan a concentrar su propio campo magnético, el cual al interactuar con el campo del estator es atraído haciéndolo girar en la misma dirección para **intentar** alinearse, generando así el movimiento al rotor por medio del fenómeno de inducción.

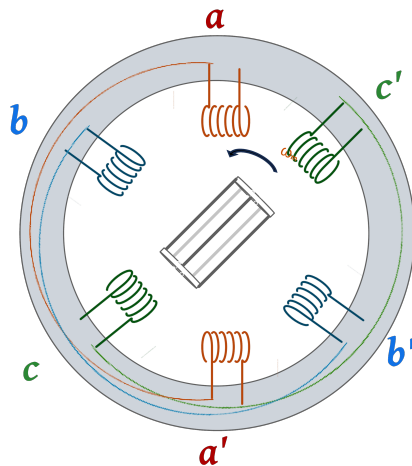


Figura B.3: Rotor girando debido a interacción de campos magnéticos.

El rotor a su vez se encuentra conectado al eje, por lo que ambos giran, pero como el MI es una máquina asíncrona esto significa que la velocidad a la que gira el rotor con el eje será menor a la del campo electromagnético. La diferencia de velocidades (también llamada *slip*) es directamente proporcional al par de polos y está dada por la ecuación

$$\omega_e = n_p \omega_m \quad (\text{B.1})$$

donde:

- ω_e es la velocidad angular eléctrica del campo del estator.
- ω_m es la velocidad angular mecánica del rotor y eje.
- n_p es el número de par de polos.

Recordando las Figuras 3.3 y 3.12, que son las simulaciones del motor en ab y dq ; se obtiene la posición eléctrica a partir de integrar la posición mecánica multiplicándola por el número de par de polos, misma que ya fue afectada por este *slip*. En la Figura B.4 puede apreciarse la diferencia entre la posición angular eléctrica con y sin afectación del *slip*

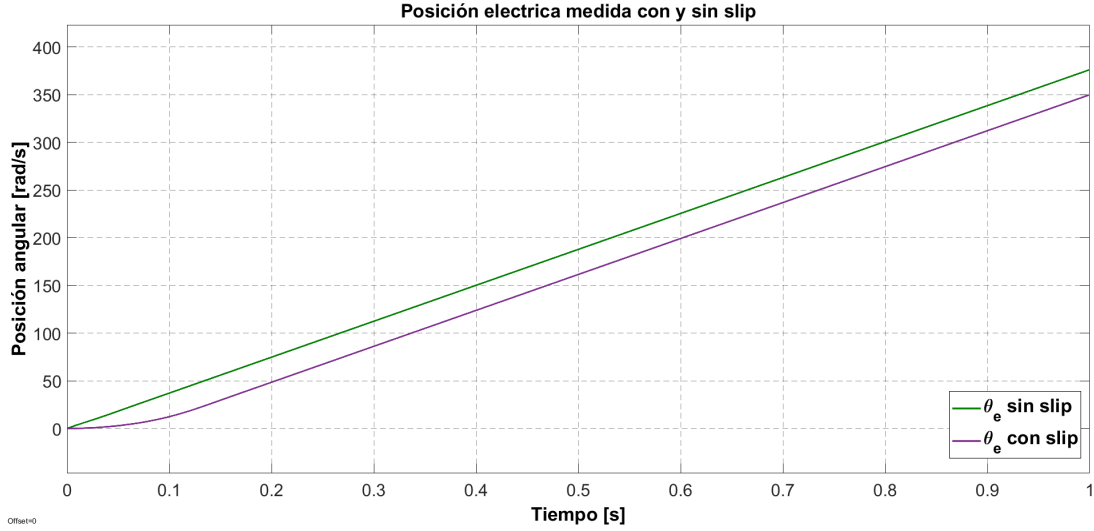


Figura B.4: Posición eléctrica medida con y sin *slip*.

Por otro lado, recordando la ecuación del subsistema mecánico

$$J\alpha_m + B\omega_m = \tau_e - \tau_L \quad (\text{B.2})$$

se puede apreciar que son dos las fuerzas de origen mecánico que, además del *slip*, también influyen en un arranque más lento al momento de ejecutar el motor, mismas que deben de ser vencidas previamente para comenzar el movimiento rotatorio. Estas fuerzas son el coeficiente de amortiguamiento B (también nombrada R_m por ser una resistencia de origen mecánica) multiplicada por la velocidad del rotor ω_m , así como el par de carga τ_L .

Al resolver la ecuación diferencial B.2 se obtiene la velocidad mecánica ω_m , que al integrarla y multiplicarla por n_p se obtiene la posición eléctrica θ_e , misma que es utilizada en la transformación de Park para transformar los voltajes que alimentan la simulación (ver Figura 3.4). Por lo que es ese retraso provocado por $B\omega_m$ y τ_L lo que provoca que las transformaciones dq que no sean totalmente rectas.

En las simulaciones en lazo abierto del Capítulo 3 ya se considera un par de carga $\tau_L = 0$, por lo que si se supone también $B = 0$ quedaría la ecuación mecánica como

$$J\alpha_m = \tau_e \quad (\text{B.3})$$

donde al no haber fuerzas de origen mecánico que vencer, la posición eléctrica de los voltajes de alimentación (que es la frecuencia de $60Hz$ multiplicada por el tiempo) se homologa de manera paralela a la posición eléctrica obtenida como salida del motor.

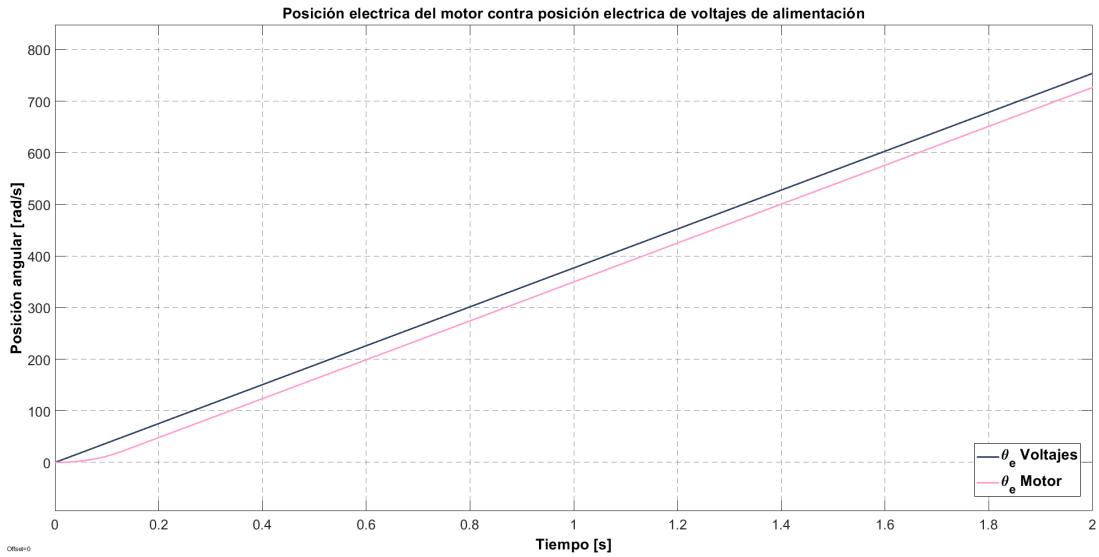


Figura B.5: Voltajes de alimentación dq sin fuerzas de origen mecánico.

Se puede apreciar en la Figura B.5 que el *slip* no desaparece de la posición eléctrica obtenida del motor, porque sigue siendo una máquina asíncrona, pero al ya no haber fricción en el rotor, las salidas de los voltajes transformados a dq se podrán ver totalmente constantes, como se aprecia en la Figura B.6.

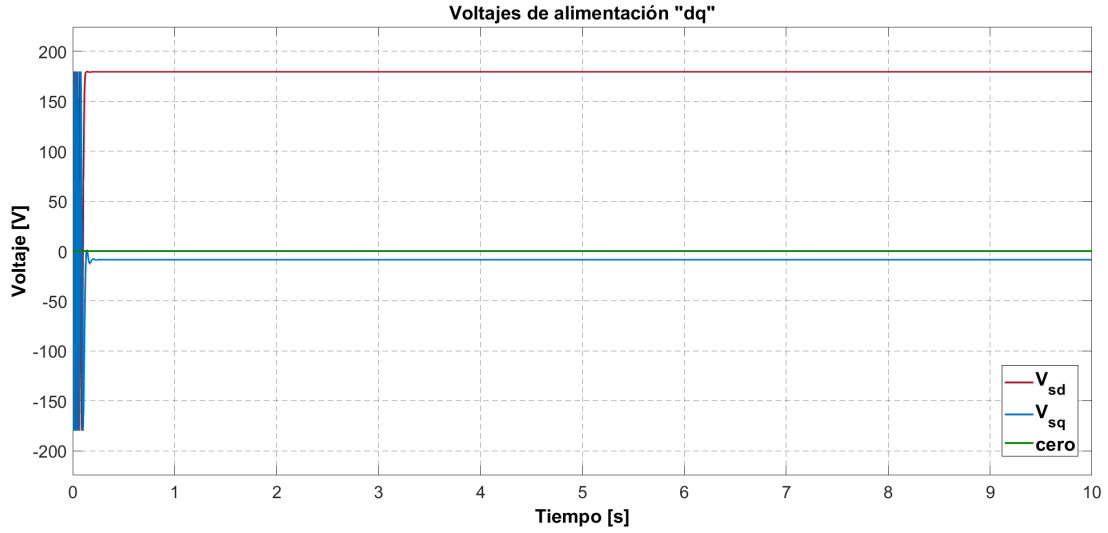


Figura B.6: Voltajes de alimentación dq sin fuerzas de origen mecánico.

Adicional a este último punto comentado, se muestra en la Figura B.7 la pequeña diferencia que hay entre las posiciones eléctricas θ_e del motor con la ecuación (B.3) que desprecia B y τ_L , representada en color azul. Así como el motor con la ecuación mecánica completa en (B.2) en color verde. Esto es lo que define si la transformación dq será totalmente constante o no.

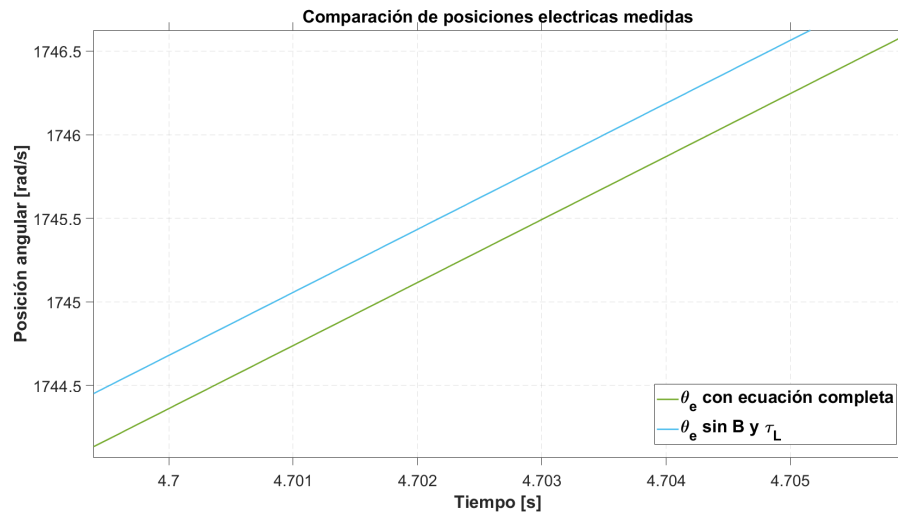


Figura B.7: θ_e sin ecuación mecánica completa contra θ_e con ecuación completa.

Como la simulación busca asemejar el comportamiento más real posible del MI es que se utiliza la ecuación completa, sin despreciar fricción, obteniendo así las gráficas como la de la Figura 3.6.

Bibliografía

- [1] Aissa, O., Reffas, A., Krama, A., Benkercha, R., Talhaoui, H., and Abu-Rub, H. (2024). Advanced direct torque control based on neural tree controllers for induction motor drives. *ISA Transactions*, 148:92–104. [2](#)
- [2] Baazouzi, K., Bensalah, A.-D., and Drid, S. (2015). The pbc technical to control the induction motor. *STA 2014 - 15th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering*, pages 7–10. [2](#)
- [3] Batlle, C., Dòria-Cerezo, A., Espinosa-Pérez, G., and Ortega, R. (2009). Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: the induction machine case study. *International Journal of Control*, 82(2):241–255. [2](#)
- [4] Becherif, M. (2019). Survey on passivity based control of induction machine. *Asian Journal of Control*, page 2137–2154. [2](#)
- [5] Belay, A., Salau, A. O., Kassahun, H. E., and Eneh, J. N. (2024). Stator flux estimation and hybrid sliding mode torque control of an induction motor. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 15(6):2541–2553. [2](#)
- [6] Espinosa, G. and Ortega, R. (1994). Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: the induction machine case study. *International Journal of Control*, page 241–255. [2](#)
- [7] Espinosa-Pérez, G., Ortega, R., and Nicklasson, P. (1997). Torque and flux tracking of induction motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages 1099–1239. [2](#)
- [8] González, H., Duarte-Mermoud, M., Pelissier, I., Travieso-Torres, J. C., and Ortega, R. (2008). A novel induction motor control scheme using ida-pbc. *Journal of Control Theory and Applications*, 6:59–68. [2](#)
- [9] Hashemnia, N. and Asaei, B. (2008). Comparative study of using different electric motors in the electric vehicles. In *2008 18th International Conference on Electrical Machines*, pages 1–5. [1](#)

- [10] Khalil, H. K. and Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ. Ver Capítulo 6: Passivity, especialmente el Teorema 6.1 y Teorema 6.3. [40](#)
- [11] Krause, P., Wasynczuk, O., and Sudhoff, S. (2002). Analysis of electric machinery and drive systems. *IEEE Press series on power engineering*. [13](#)
- [12] Krzeminski, Z. (1987). Nonlinear control of induction motor. *FAC Proceedings Volumes*, page 357–362. [2](#)
- [13] Lamme, B. G. (1921). The story of the induction motor. *Journal of the American Institute of Electrical Engineers*, 40(3):203–223. [1](#)
- [14] Marino, R., Tomei, P., Verrelli, C. M., Verrelli, C. M., and Tomei, P. (2010). *Induction Motor Control Design*. Advances in Industrial Control. Springer London, London, 1. Aufl. edition. [2](#)
- [15] Meisel, J. (1984). Principles of electromechanical-energy conversion. *R.E. Krieger*. [21](#)
- [16] Mujica, H. and Espinosa Pérez, G. (2014). Control no lineal basado en pasividad de motores de inducción para alto desempeño dinámico. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 11(1):32–43. [2](#)
- [17] Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*. PEARSON. [5](#)
- [18] Ortega, H. M. (2012). *Control no lineal basado en pasividad de motores de inducción para alto desempeño dinámico*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México. [27](#), [50](#)
- [19] Ortega, R. and Espinosa, G. (1993). Torque regulation of induction motors. *Automatica*, page 621–633. [2](#)
- [20] Ortega, R., Nicklasson, P., and Espinosa-Pérez, G. (1995). On speed control of induction motors. *American Control Conference*, 5:3521–3525. [40](#)
- [21] O’Rourke, C. J., Qasim, M. M., Overlin, M. R., and Kirtley, J. L. (2019). A geometric interpretation of reference frames and transformations: dq0, clarke, and park. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 34(4):2070–2083. [19](#)
- [22] Ramos-García, F. and Espinosa-Pérez, G. (2024). A speed tracking passivity based control of induction motors. *Automatic Control National Congress*. [3](#), [40](#), [42](#), [50](#)
- [23] Ramos-García, F., Espinosa-Pérez, G., and Avila-Becerril, S. (2021). On the trajectory tracking control of hamiltonian systems. *Automatic Control National Congress*. [3](#), [40](#), [42](#)

- [24] Singh, A. K., Dewangan, H., Venu, S., and Jain, S. (2024). Model predictive control for nine phase induction motor. *2024 Third International Conference on Power, Control and Computing Technologies (ICPC2T)*, page 657–66. [3](#)
- [25] Trzynadlowski, A. (2013). The field orientation principle in control of induction motors. *pringer, New York, NY*. [2](#)
- [26] Yadav, A., Das, R., and Roy, G. (2024). Pid-based nonlinear sliding mode control for speed regulation in induction motors: A comprehensive survey and analysis. *IEEE International Students' Conference on Electrical, Electronics and Computer Science (SCEECS)*, pages 1–7. [2](#)
- [27] Zahraoui, Y., Moutchou, M., Tayane, S., Fahassa, C., and Elbadaoui, S. (2024). Induction motor performance improvement using super twisting smc and twelve sector dtc. *International Journal of Robotics and Control Systems*, 4(1):50–68. [2](#)