

APUNTES DE PROCESAMIENTO DE  
DATOS GEOFISICOS.

Juan M. Brandi Purata  
Profesor de la Sección de Explora-  
ción de Recursos Energéticos del  
Subsuelo, Area de Ingeniería Petro-  
lera, DEPMI. UNAM.



DEPFI

F-DEPFI

D-54

1985

g.5

Con el fin de promover el proceso enseñanza-aprendizaje, de acuerdo con el Convenio establecido por la U.N.A.M.-PEMEX para los estudiantes en Ciencias de la Tierra de la Maestría en Exploración de Recursos Energéticos, se elaboraron estos apuntes cuya finalidad es introducir al lector en los métodos comunes de análisis espectral de la información geofísica. Los temas tratados siguen los lineamientos del curso impartido por el profesor P. MECHLER de la Universidad de París VI, Francia, en la cátedra de Tratamiento de Señales. En la selección del material presentado se trató de enfatizar aquellos temas que se consideraron más relevantes para su aplicación en el campo de la sismología y el procesamiento de la información potencial aplicada a la geofísica.

Es posible que algunos temas relacionados con el propósito de estos apuntes hayan sido omitidos, o bien tratados someramente, por lo que agradecería al lector emitir sus comentarios al respecto, ya que esto permitirá, en un futuro, mejorar el contenido de los mismos.

M EN C JUAN M. BRANDI PURATA



INDICE DE CONTENIDO

	PAGINA
* FUNCIONES PERIODICAS .....	1
* SERIE DE FOURIER .....	2
* TEOREMA DE FEJER .....	5
* FENOMENO DE GIBBS .....	6
* ESCRITURA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER .....	8
* CORRELACION DE FUNCIONES PERIODICAS .....	9
* METODO GRAFICO DE CALCULO DE LA AUTOCORRELACION INTERPRETACION FISICA DE LA CROSSCORRELACION .....	11
* RELACION DE PARSEVAL .....	12
* FUNCIONES TRANSITORIAS .....	14
* TRANSFORMADA DE FOURIER .....	15
* CORRELACION DE FUNCIONES TRANSITORIAS .....	17
* INTERES FISICO DE LA CORRELACION .....	19
* CONVOLUCION DE FUNCIONES TRANSITORIAS .....	20
* PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER .....	22
* LA FUNCION " $\delta$ " DE DIRAC .....	22
* LA FUNCION " $S(t)$ " ESCALON .....	24
* TRANSFORMADA DE FOURIER EN DOS DIMENSIONES .....	25
* TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCION SIMETRICA .....	25
* FILTROS .....	27
* REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL DE UN FILTRO .....	29
* EJEMPLOS DE FILTROS PASA BAJA, ALTA Y DE BANDA .....	31
* FILTRO CAUSAL .....	33
* FILTRO DE FASE MINIMA .....	37
* TRANSFORMADA EN "Z" .....	38
* CONVOLUCION Y CORRELACION DE SEÑALES DISCRETAS .....	40
* TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA .....	42
* TRANSFORMADA DE FOURIER RAPIDA .....	44
* EL FILTRO CAUSAL EN DATOS DISCRETOS .....	47
* APLICACION DE LOS FILTROS-FILTRO DE N. WIENER .....	48
* DETERMINACION DEL ERROR O DIFERENCIA ENERGETICA .....	51
* PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS EN MEDIOS ESTRATIFI- CADOS EN TERMINOS DE LA TEORIA DE COMUNICACIONES .....	54

* MODELO DE CAPA DE ESPESOR FINITO .....	61
* DECONVOLUCION PREDICTIVA .....	64
* ESTUDIO DE UN MODELO MARINO DE DOS CAPAS .....	73
* FILTRADO DIRECCIONAL O FILTRADO POR VELOCIDAD .....	76
* EL FILTRO DE RECHAZO .....	84

INDICE DE FIGURAS

	PAGINA
<u>FIG. No. 1.</u> - PRIMER TERMINO Y SUMA DE LOS 10 PRIMEROS TERMINOS DE LA SERIE DE FOURIER PARA UNA FUNCION RECTANGULAR .....	7
<u>FIG. No. 2.</u> - METODO GRAFICO DEL CALCULO DE LA AUTOCORRELACION .....	13
<u>FIG. No. 3.</u> - ETAPAS DE CALCULO DE LA CORRELACION Y LA CONVOLUCION DE UNA SEÑAL .....	21
<u>FIG. No. 4.</u> - REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL DEL FILTRO $ F(\omega) ^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$ .....	32
<u>FIG. No. 5.</u> - CONTORNO DE INTEGRACION PARA LA FUNCION "f(t)" .....	35
<u>FIG. No. 6.</u> - MODELO GENERAL DEL DISEÑO DE UN FILTRO ...	48
<u>FIG. No. 7.</u> - PROPAGACION DE UNA ONDA PLANA DESCENDEN- TE CON INCIDENCIA NORMAL, EN UN MEDIO ESTRATIFICADO .....	54
<u>FIG. No. 8.</u> - PROPAGACION DE UNA ONDA PLANA ASCENDENTE .	55
<u>FIG. No. 9.</u> - ONDAS DESCENDENTES EN UN MEDIO ESTRATI- FICADO EN EL TECHO DE LAS DIFERENTES CAPAS .....	56
<u>FIG. No. 10.</u> -ONDAS DESCENDENTES EN LA BASE DE LAS DI- FERENTES CAPAS .....	57
<u>FIG. No. 11.</u> -ESQUEMA EN LA INTERFASE ENTRE LAS CAPAS k y k+1 AL TIEMPO J .....	58
<u>FIG. No. 12.</u> -REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UN MODELO ESTRATIFICADO DE DOS CAPAS .....	61
<u>FIG. No. 13.</u> -MODELO DE FILTRADO .....	67
<u>FIG. No. 14.</u> -REVERBERACION DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN EN UN MODELO MARINO .....	73
<u>FIG. No. 15.</u> -LA FUNCION DE TRANSFERENCIA DEL FILTRO DE RECUPERACION EN EL PLANO $[f, k]$ .....	76
<u>FIG. No. 16.</u> -DISPOSICION DE LOS SISMO-DETECTORES PARA EL DISEÑO DEL FILTRADO DE VELO- CIDAD .....	77

<u>FIG. No. 17.</u> -ESQUEMA DEL FILTRO DE RECHAZO DE VELO- CIDAD EN EL PLANO $[f, k]$ .....	85
---	----

## FUNCIONES PERIODICAS

En la primera parte de estos apuntes, vamos a recordar algunas propiedades de las funciones periódicas. La función  $f(t)$  es periódica si:

Existe un número  $T$ , no nulo, tal que para todo valor del parámetro  $t$ , " $f(t+T)$ " sea igual a  $f(t)$ :

$$\exists T \neq 0, \forall t; f(t+T) = f(t) \quad \dots I$$

Interesándonos funciones utilizables en física, representando datos físicos, todas las funciones que tendremos que considerar serán continuas, derivables, integrables... salvo en puntos particulares.

Una función periódica no puede, en rigor, representar un fenómeno físico; el fenómeno debería existir desde tiempos infinitos, y por tiempos infinitos, o sobre distancias infinitas. Esto evidentemente no es posible. La representación de un fenómeno físico por una función periódica es, sin embargo, muy importante.

Remarquemos también que si  $T$  es un período,  $KT$  ( $k$  entera) es también un período. Una función periódica posee entonces una infinidad de períodos.

Si la función no es constante, existe un período positivo  $T$ , más pequeño en valor absoluto que todos los otros. Es el período en el sentido estricto de la función. Pero nosotros no haremos la distinción entre "el" período y "un" período.

Consideremos el conjunto de todas las funciones periódicas " $f$ " y " $g$ " de período  $T$ , podemos adicionar dos funciones " $f$ " y " $g$ ": " $f + g$ ".

Es evidente que esta suma es también periódica, del mismo período  $T$ .

El producto de una función periódica por una constante es también periódica. Podemos enunciar entonces:

El conjunto de las funciones periódicas del mismo período T forman un espacio vectorial.

En presencia de un espacio vectorial, debemos buscar una base simple de representación.

### SERIE DE FOURIER

Deseamos representar la función periódica (de período T) por una serie de funciones periódicas simples a utilizar en los cálculos. Las funciones sinusoidales son relativamente simples de utilización

$$\text{Considerando: } w = \frac{2\pi}{T} \quad \dots II$$

(w se llama la pulsación,  $\frac{1}{T}$  la frecuencia) es evidente que, para todo entero "n"

$$\begin{array}{l} \cos nwt \\ \text{y} \\ \sin nwt \end{array}$$

son periódicas, de período T. Es este conjunto de funciones el que va a servirnos de base para representar el espacio vectorial de las funciones periódicas de período T. Esta descomposición de f(t) sobre esta base, se llama la serie de Fourier de f(t). Buscamos entonces una representación de f(t) de la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nwt + b_n \sin nwt] \dots III$$

Las  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$

son constantes.

Admitamos que tal serie existe. Multipliquemos los 2 miembros por  $\cos(nwt)$  e integremos sobre un período T.

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos nwt dt = \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos nwt \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos pwt + b_p \sin pwt) \right] dt \dots IV$$

Admitamos además que podemos invertir el orden de la integración y de la suma:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos nwt dt &= \frac{a_0}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos nwt dt + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos nwt \cos pwt dt \\ &\quad + b_p \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos nwt \sin pwt dt \end{aligned}$$

Se demuestra que:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+t} \cos nwt \cdot \cos pwt dt = \begin{cases} 0; & p \neq n \\ \frac{T}{2}; & p = n \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+t} \sin nwt \cdot \sin pwt dt = \begin{cases} 0; & p \neq n \\ \frac{T}{2}; & p = n \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin pwt \cdot \cos nwt dt = 0$$

(excepto para  $p=n=0, T$ )

En otras palabras, la serie de los  $\sin nwt$ ,  $\cos nwt$  es una serie de vectores ortogonales.

Sustituyendo estos valores en la serie (IV), obtenemos los valores de  $a_n$  y, por un procedimiento similar, únicamente que multiplicando la serie III por  $\sin nwt$ , encontraríamos a " $b_n$ ". Luego entonces:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos nwt dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) \sin n\omega t dt \quad \dots V$$

El hecho de haber tomado el primer coeficiente de la serie igual a  $\frac{a_0}{2}$  generaliza la fórmula precedente, inclusive para  $n=0$ .

Se demuestra que, para toda función integrable periódica, tal desarrollo en serie existe y converge bien hacia la función  $f(t)$ .

Convergencia de una serie de término general  $U_n$ :

La serie de término general " $U_n$ " converge hacia el valor  $L$ , si cualquiera que sea el número positivo  $\epsilon$ , existe un número  $N$  tal que cualquiera que sea el entero  $P$  superior a  $N$ , se satisfaga siempre que:

$$\left| L - \sum_{n=1}^P U_n \right| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon, \exists N, \forall P > N$$

Prácticamente es suficiente considerar los  $N$  primeros términos de la serie, el resto es despreciable.

Convergencia de una serie de término general  $U_n(t)$ ; dependiendo del parámetro  $t$ .

Para que la serie converja hacia una función " $f(t)$ ", es suficiente que para todo valor del parámetro  $t$ , la serie numérica converja. Para un " $\epsilon$ " determinado, a priori, el número  $N$  introducido en la definición de la convergencia, puede depender del valor particular del parámetro  $t$  que se considere, pero esto no es obligatorio.

Debemos entonces distinguir 2 casos.

### Convergencia uniforme

Para cierto  $\epsilon$ , el número  $N$  no depende de  $t$ .

$$\forall \epsilon, \exists N, \forall t, \forall P > N; \left| f(t) - \sum_{n=1}^P U_n(t) \right| < \epsilon$$

La serie es llamada "uniformemente convergente"

Este caso es el más simple: si aceptamos una aproximación cercana a " $\epsilon$ ", basta con considerar las  $N$  primeros términos y esto para todos los valores del parámetro  $t$ . Limitando así la serie, la suma se extiende a un número finito de términos que son derivables, integrables, ...etc.

### Convergencia no uniforme

El número  $N$  depende del parámetro  $t$ .

$$\forall \epsilon, \forall t, \exists N, \forall P > N; \left| f(t) - \sum_{n=1}^P U_n(t) \right| < \epsilon$$

La serie es convergente; pero esta vez no se puede limitar a una suma finita conteniendo el mismo número de términos cualquiera que sea  $t$ . Esta convergencia es menos simple y menos eficaz que la convergencia uniforme.

### TEOREMA DE FEJER

Regresemos a las series de Fourier y enunciemos, simplificándolo a los casos prácticos, el teorema de Fejer.

#### 1er. Caso

La función  $f(t)$  es continua y es definida sobre  $[0, T]$  y prolongada por periodicidad; para que la función  $f(t)$  sea continua, se requiere que la serie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nwt + b_n \sin nwt$$

en donde las " $a_n$ " y las " $b_n$ " han sido calculadas por la fórmula (V) converge uniformemente hacia  $f(t)$ .

2o. Caso:

La función  $f(t)$  presenta un número finito de discontinuidades de primera especie, la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nwt + b_n \sin nwt)$$

converge pero:

- a) la convergencia no es uniforme en todo intervalo conteniendo una discontinuidad.
- b) para una discontinuidad en  $\underline{t_0}$ , la serie converge hacia:

$$\frac{1}{2} \left[ f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0) \right]$$

NOTA: discontinuidad de primera especie en  $t_0$ :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f(t_0 + \alpha) = f(t_0 + 0) \text{ existe}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^-} f(t_0 + \alpha) = f(t_0 - 0) \text{ existe}$$

pero:

$$f(t_0 + 0) \neq f(t_0 - 0)$$

FENOMENO DE GIBBS:

El enunciado del teorema de Fejer no es un escrúpulo matemático, sino que corresponde bien a un fenómeno físico. La Fig. No. 1 re presenta el primer término y la suma de los 10 primeros términos del desarrollo en serie de Fourier de una función rectangular.

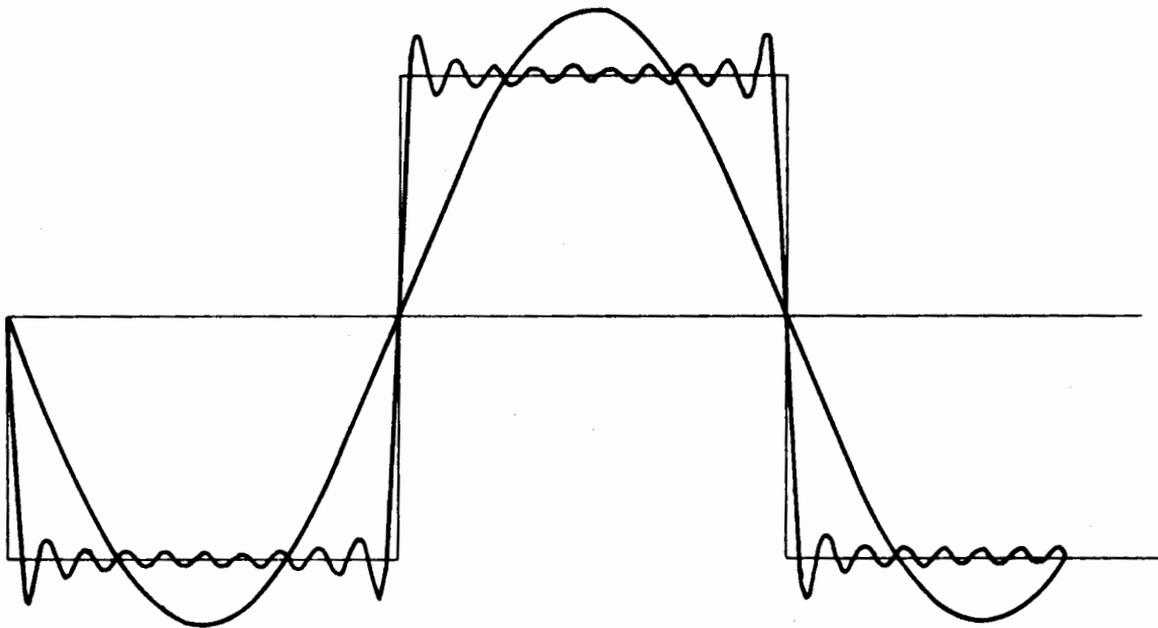


Fig 1 Primer término y suma de los diez primeros términos de la serie de Fourier , para una función rectangular

El primer término solo, es visiblemente insuficiente.

La suma de los 10 primeros términos es ya mejor, al menos lejos de la discontinuidad. Cercana de ésta, se observa un pico, la convergencia es mala.

Tan lejos como se lleve la suma, en razón de la convergencia no uniforme, la serie convergerá mal en la vecindad de la discontinuidad.

Este fenómeno ("fenómeno de Gibbs") se produce cuando una señal con principio súbito (representando una discontinuidad) es transmitido por un aparato físico. Volveremos a ver la existencia de este fenómeno en el caso de las señales transitorias.

La teoría de las distribuciones permite simplificar todos estos problemas de convergencia.

En el espacio de las distribuciones temporales, todas las series de Fourier convergen en el sentido de las distribuciones. Pero este simbolismo hace olvidar totalmente un fenómeno físico real de sobreoscilación de filtros.

### ESCRITURA COMPLEJA DE LAS SERIES DE FOURIER

Se conoce que:

$$\begin{aligned} e^{iwt} &= \cos wt + i \operatorname{sen} wt \\ \cos wt &= \frac{1}{2} ( e^{iwt} + e^{-iwt} ) \\ \operatorname{sen} wt &= \frac{1}{2i} ( e^{iwt} - e^{-iwt} ) \end{aligned}$$

sustituyendo estas expresiones en la serie:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nwt + b_n \operatorname{sen} nwt$$

obtenemos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{inwt} \quad \dots \text{VI}$$

con

$$F(0) = \frac{a_0}{2}$$

$$f(n) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \forall n > 0$$

$$F(n) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n); \forall n < 0$$

se puede verificar que:

$$f(n) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-inwt} dt \quad \dots \text{VII}$$

Las relaciones (VI) y (VII) forman una pareja de relaciones definiendo la Transformada de FOURIER de una función periódica. Esta notación compleja es mucho más cómoda de utilizar que las relaciones senos y cosenos.

"F(n)" lleva el nombre de espectro de la función "f(t)" o de Transformada de Fourier (T.F.).

Indicamos, sin demostración, propiedades inmediatas de la T.F.

- a) f(t) es real;  $F(n) = \overline{F(-n)}$  (la barra designa el complejo conjugado)
- b) f(t) par  $[f(t) = f(-t)]$ ;  $F(n) = F(-n)$ , si "f" es real; F(n) es real pura, el desarrollo no contiene más que cosenos.
- c) f(t) impar  $[f(t) = -f(-t)]$ ;  $F(n) = -F(-n)$ , si "f" es real, F(n) es imaginaria pura; el desarrollo sólo tiene senos.

"Correlación"

Sean  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  dos funciones periódicas del mismo período "T".

Llamamos correlación de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  a la expresión:

$$c(\tau) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(u) f_2(\tau+u) du \quad \dots \text{VIII}$$

Busquemos la T.F. de  $c(\tau)$  en función de:

$F_1(n)$ : Transformada de Fourier de  $f_1(t)$

$F_2(n)$ : Transformada de Fourier de  $f_2(t)$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} c(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(u) \left[ \sum_n F_2(n) e^{inw(\tau+u)} \right] du \\ &= \sum_n F_2(n) e^{inw\tau} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(u) e^{inwu} du \end{aligned}$$

pero:

$$F_1(n) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(u) e^{-inwu} du$$

entonces:

$$F_1(\overline{n}) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f_1(u) e^{inwu} du$$

luego:

$$c(\tau) = \sum_n \overline{F_1(n)} F_2(n) e^{inw\tau}$$

Comparando con la definición de la T.F. vemos que:

$$c(n) = \overline{F_1(n)} F_2(n) \quad \dots \quad \text{IX}$$

Es evidente que la correlación depende del orden en el cual tomamos las dos funciones  $\underline{f_1}$  y  $\underline{f_2}$ .

### AUTOCORRELACION

La autocorrelación no es más que un caso particular de la correlación, en el que las dos funciones " $f_1$ " y " $f_2$ " son idénticas.

$$a_f(\tau) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(u) f(\tau+u) du \quad \dots X$$

La T.F. de "a(τ)" esto es  $A_f(n)$ , se calcula utilizando la fórmula precedente de la correlación.

$$A_f(n) = |F(n)|^2$$

$A_f(n)$  es entonces una función real.

En el caso particular donde f(t) es una función real:

$a_f(\tau) = a_f(-\tau)$ , entonces la función  $a_f(\tau)$  es par.

Si la función real está representada por una serie en senos y cosenos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nwt + b_n \sin nwt]$$

la autocorrelación es una serie en cosenos

$$a_f(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \sum (a_n^2 + b_n^2) \cos nwt$$

En el caso particular:

$$f(t) = c \cos (wt-\psi)$$

$$a_f(\tau) = c^2 \cos w\tau$$

La fase ha desaparecido.

La amplitud de la autocorrelación es igual al cuadrado de la amplitud de la función.

El máximo de la autocorrelación se encuentra en  $\tau=0$ .

Veremos una generalización de estas propiedades posteriormente.

Método Gráfico de Cálculo de la Autocorrelación-Interpretación Física de la Crosscorrelación

La función f(t) es representada sobre una gráfica. Deducimos de

ella de manera evidente "f(t+d)" por un traslado (atención: si d es positiva, el traslado se hace hacia las t negativas, hacia la izquierda como es habitual).

El producto  $f(t) \cdot f(t+d)$  es entonces inmediato. La Fig. 2 representa  $f(t)$ ,  $f(t+d)$  y  $f(t) \cdot f(t+d)$ , en un caso particularmente simple,  $f(t)$  es una serie rectangular (valor 0 ó 1).

La autocorrelación es entonces la integral del producto.

Verificamos que para un traslado nulo ( $d=0$ ) el producto  $f(t)f(t+d)$  es siempre positivo y que la integral del producto es máximo. La autocorrelación para un traslado nulo es máximo. Si el traslado aumenta en valor absoluto, la autocorrelación debe disminuir.

Este proceso de cálculo es evidentemente el mismo para la CROSS-CORRELACION. El máximo de la CROSSCORRELACION corresponde al máximo de parecido de las curvas. Podemos normalizar este producto tomando:

$$\gamma = \frac{|C_{fg}(\tau)|}{\sqrt{a_f(0) \cdot a_g(0)}} \quad \dots \text{ XI}$$

$\gamma$  es siempre inferior a 1. Si  $\gamma$  está cerca de 1 las señales tendrán mayor correlación.

### RELACION DE PARSEVAL

Para una función real, veamos el valor de la autocorrelación, para un traslado nulo de la función.

$$a_f(0) = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(u) du = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |F(n)|^2 \dots \text{ XII}$$

La igualdad entre la integral sobre el período del cuadrado de la función y de la suma de los módulos al cuadrado de la "T.F.", lleva el nombre de relación de PARSEVAL.

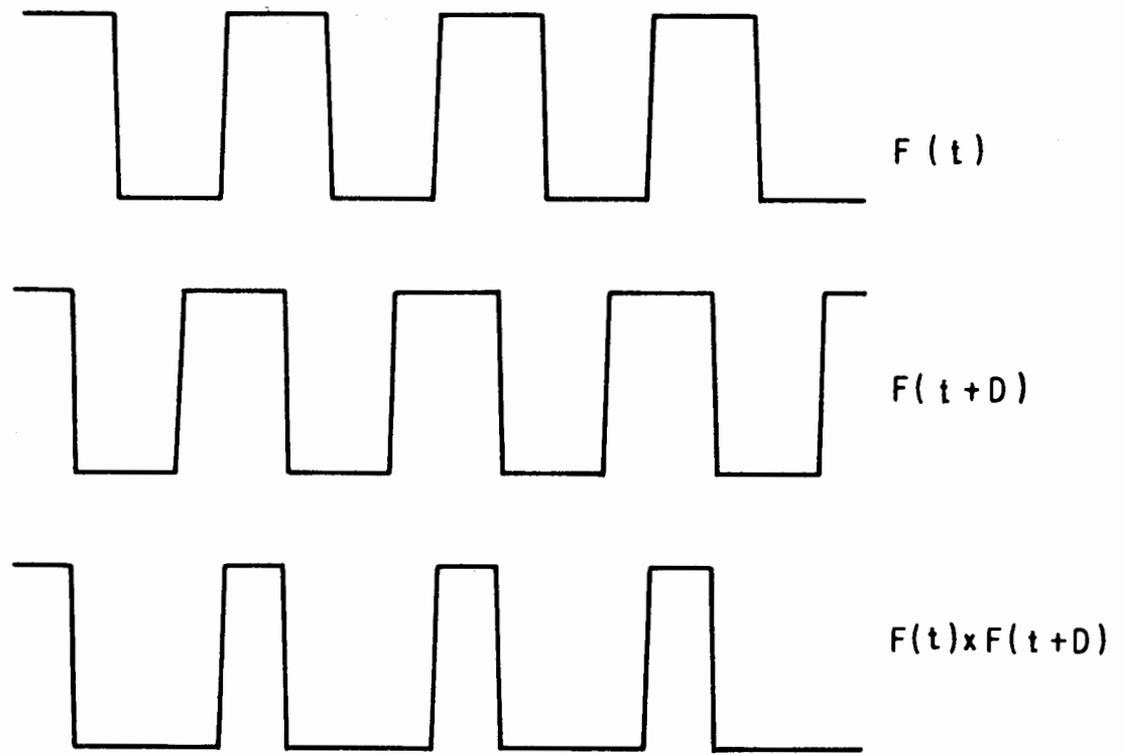


Fig 2 Método gráfico del cálculo de la auto - correlación

Si la función " $f(t)$ " representa una corriente eléctrica, caso frecuente en el tratamiento de señales, " $f^2(t)$ " es proporcional a la energía de la corriente.

La corriente periódica " $f(t)$ " puede ser considerada como la suma de corrientes sinusoidales (la serie de Fourier); la energía contenida en la corriente " $f(t)$ " es igual a la suma de las energías de cada una de las corrientes sinusoidales elementales.

Por otra parte, la energía de una corriente elemental no depende de la fase y tampoco del origen escogido para medir el tiempo.

### FUNCIONES TRANSITORIAS

Deseamos extender la noción de Transformada de Fourier a funciones no periódicas. Nos limitaremos a funciones integrables y de cuadrado integrable:

$$\left. \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \end{array} \right\} \text{ existen}$$

Esta limitación es lógica en la medida en que nosotros nos interesamos en las señales llamadas transitorias, representando la respuesta de un sistema físico determinado.

El límite " $-\infty$ " de las integrales precedentes no presenta problemas. Después de la extinción de la fuente, la respuesta del sistema debe tender hacia cero y con bastante rapidez. La integral del cuadrado de  $f(t)$  representa habitualmente la energía del fenómeno. Esta energía es forzosamente inferior a la energía liberada por la fuente, ella misma finita, luego las integrales deben converger.

Nuestra limitación a funciones integrables y de cuadrados integrables tiene un sentido físico y corresponde a la respuesta de siste

mas físicos. Al contrario, el ruido de fondo siempre presente en un aparato físico, no es representable por tales funciones.

Esta fuente de ruido tiene una potencia finita, pero una energía infinita puesto que mientras más tiempo actúe la fuente de ruido, su energía es grande. Entonces, la integral del cuadrado del ruido no converge cuando los límites de la integración tienden respectivamente hacia  $-\infty$  y  $+\infty$ .

En realidad, el ruido es un fenómeno aleatorio, del cual no podemos conocer más que una realización, el ruido ya grabado y sin poder prever el futuro, ni poder afirmar si hubiera sido idéntico sobre otro aparato instalado en paralelo al primero.

### TRANSFORMADA DE FOURIER

Consideremos la función " $f_1(t)$ " igual a  $f(t)$  para " $t$ " comprendida entre  $-T/2$  y  $T/2$  y que nosotros prolongáramos fuera de este intervalo por periodicidad.

La función " $f_1(t)$ " siendo periódica la podemos escribir:

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inw_1 t} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f_1(u) e^{-inw_1 u} du$$

Cuando  $T_1$  tiende hacia el infinito,  $w_1 = \frac{2\pi}{T_1}$  tiende hacia cero, pero no podemos decir nada del producto  $nw_1$ . ( $w_1$  pequeño, pero  $n$  tan grande como se quiera). Vamos a efectuar un cálculo al límite, considerando:

$$w_1 = dw$$

$$nw_1 = w$$

de donde:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iwt} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iwu} du$$

El cálculo al límite precedente no es evidentemente una demostración matemática rigurosa, pero admitiremos que mediante las condiciones de integrabilidad de la función "f(t)" supuesta anteriormente, esta expresión es exacta. Podemos entonces escribir:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{iwt} dw$$

$$F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad \dots \text{XVI}$$

F (w) es llamada Transformada de Fourier (T.F.) de f(t).

La descomposición de la expresión en dos ecuaciones es un poco arbitraria. El coeficiente  $\frac{1}{2\pi}$  hubiera podido ser colocado en la primera integral y no en la segunda, incluso partiéndolo en dos ( $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ), podríamos utilizar la variable f en lugar de w, poniendo  $w = 2\pi f$ ; el coeficiente  $1/2\pi$  desaparece entonces. El signo (-) negativo en el exponencial podría ser colocado en la primera integral y no en la segunda, etc....

Recordemos también que "w" se llama la pulsación y f la frecuencia cuando t representa un tiempo (t en segundo, f en Hertz=(sec)<sup>-1</sup>).

Cuando t representa una distancia, "w" o "f" portan el nombre de "número de onda" (en este caso, reemplazaremos habitualmente t por x y w por k).

Realidad de F(w):

Si f(t) es una función real, F(w) es en general una función compleja.

En el caso particular donde "f(t)" sea par:

$$f_p(t) = f_p(-t)$$

Entonces tenemos:

$$F_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \cos \omega t dt$$

$$F_p(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_p(t) \cos \omega t dt$$

La función  $F_p(\omega)$  es real.

En el caso de una función impar del tiempo

$$f_i(t) = -f_i(-t)$$

$$F_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \sin \omega t dt$$

$$F_i(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f_i(t) \sin \omega t dt$$

La función  $F_i(\omega)$  es imaginaria pura. Toda función  $f(t)$  puede ser descompuesta en una parte "par" y una parte "impar".

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

con

$$f_p(t) = \frac{1}{2} (f(t) + f(-t))$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2} (f(t) - f(-t))$$

obtenemos entonces:

$$F(\omega) \text{ es T.F. de } f(t)$$

Real de  $F(\omega)$  es T.F. de  $f_p(t)$

Imaginaria de  $F(\omega)$  es T.F. de  $f_i(t)$

### Correlación

La correlación de dos funciones transitorias reales  $f(t)$  y

$g(t)$  es definida por

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(\tau+u) du \quad \dots XV$$

Busquemos su T.F., es decir,  $c(w)$ .

El procedimiento de cálculo es similar al utilizado por las series de Fourier de las funciones periódicas.

$$\begin{aligned} c(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{+iw(\tau+u)} dw \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{iw\tau} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{iwu} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F(w)} G(w)e^{iwt} dw \end{aligned}$$

Entonces

$$c(w) = 2\pi \overline{F(w)} G(w) \quad \dots XVI$$

igualmente

$$C_{gf}(w) = 2\pi \overline{G(w)} F(w)$$

Vemos que el orden de las funciones  $f$  y  $g$  tienen importancia.

Podemos verificar también que:

$$c_{fg}(\tau) = c_{gf}(-\tau)$$

### AUTOCORRELACION

Si las dos funciones  $f$  y  $g$  consideradas en el precedente párrafo son idénticas, la correlación se vuelve una autocorrelación.

$$a_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(\tau+u) du$$

entonces la "T.F." vale

$$A_f(w) = 2\pi |F(w)|^2 \quad \dots \text{XVII}$$

$A_f(w)$  es real y  $a_f(\tau)$  es par, lo que es evidente si vemos la última relación indicada en el párrafo sobre la correlación. Es evidente que  $a_f(0)$  es un máximo de  $a_f(\tau)$ .

Es decir:

$$a_f(0) \geq |a_f(\tau)|$$

### Interés Físico de la Correlación

Vamos a utilizar la propiedad de la autocorrelación de poseer un máximo para un traslado temporal nulo.

Consideremos dos funciones:

$$f(t) \text{ y } g(t) = f(t-P)$$

Correspondiendo, por ejemplo, a una señal propagándose y grabándose en dos puntos diferentes. La diferencia de tiempos de propagación es  $P$ .

La correlación entre  $f$  y  $g$ , vale

$$c_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(\tau+u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(\tau+u-P) du$$

$$c_{fg}(\tau) = a_f(\tau-P)$$

La correlación entre "f" y "g" es entonces la autocorrelación de "f" desplazada en el tiempo "p" de propagación. El máximo de la correlación indica el valor del tiempo de propagación.

Si las señales no son ruidosas, esta relación no tiene interés.

En realidad a las señales se sobreponen siempre ruidos. La medida del tiempo de arribo de cada una de las señales puede ser difícil. La correlación permite encontrar el máximo de parecido

entre las señales; midiendo entonces la diferencia del tiempo de propagación no entre dos valores, sino sobre el conjunto de dos señales. Si la relación señal - ruido, no es muy pequeña, la correlación tendrá un máximo para  $\tau = -P$ , que es precisamente la diferencia en tiempo del arribo de las dos señales.

Como para las funciones periódicas es posible normalizar la correlación:

$$\gamma = \frac{c_{fg}(\tau)}{\sqrt{a_f(0) \cdot a_g(0)}}$$

El valor máximo de  $\gamma$  es "1" y su valor indicaría el grado de parecido entre las funciones f y g.

### Convolución:

La convolución de f(t) y g(t) es obtenida por la expresión:

$$c_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(\tau-u) du \quad \dots \text{XVIII}$$

verificamos que la T.F. vale:

$$R_{fg}(w) = 2\pi F(w) G(w)$$

Esta última fórmula muestra claramente que f(t) y g(t) juegan la misma regla en la convolución, es decir, el proceso es conmutativo.

La convolución es utilizada frecuentemente en el filtrado de señales.

Aquí sólo insistiremos sobre la diferencia entre la correlación y la convolución. El cambio, en la integral de la definición de  $\tau + u$  en  $\tau - u$ , modifica profundamente las propiedades.

La Fig. No. 3 muestra las diferentes etapas del cálculo de la correlación y de la convolución en un caso particular.

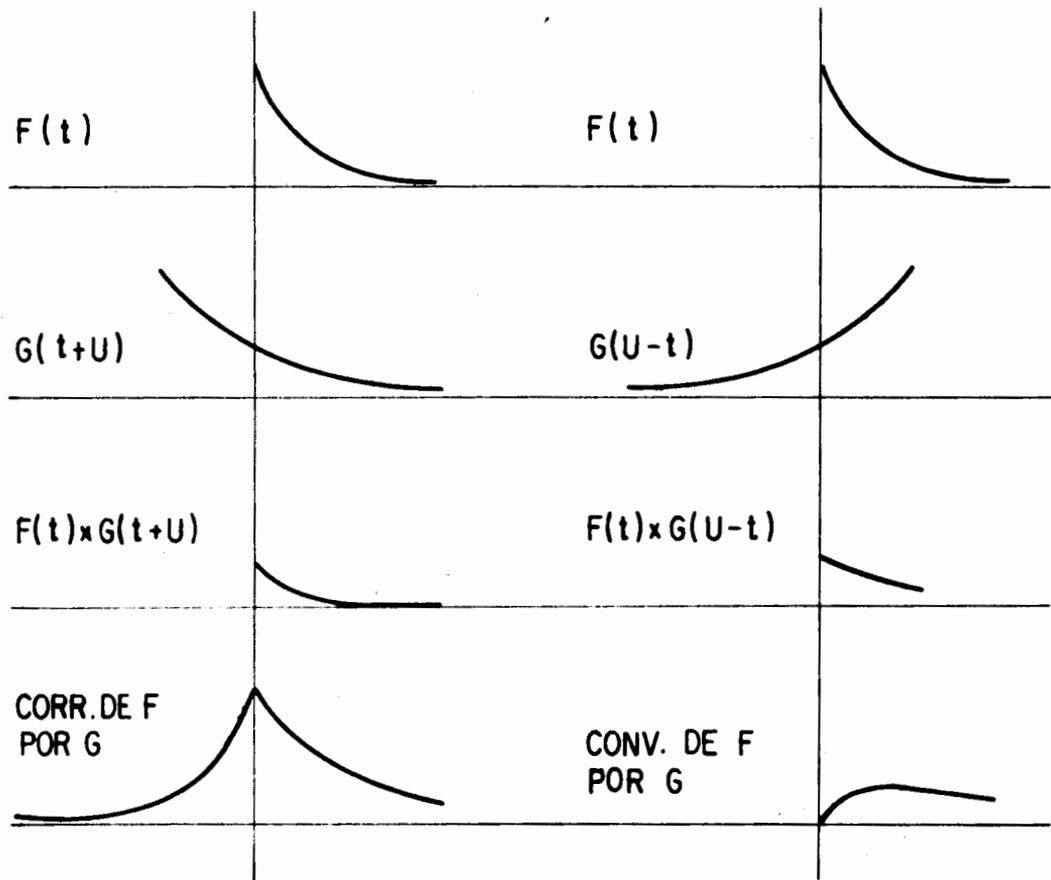


Fig 3 Etapas de cálculo de la correlación y la convolución de una señal

PROPIEDADES IMPORTANTES DE LA T.F.

Reunamos aquí, sin demostración, un pequeño número de propiedades importantes de la T.F que utilizaremos:

Traslación:

A  $f(t-t_0)$  corresponde  $F(w)e^{-iwt_0}$  ... XIX

Derivación:

$\frac{df(t)}{dt}$  corresponde  $iwF(w)$  ...XX

Convolución:

Representando:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(\tau-u) du = f(t) * g(t)$

tenemos:

$f(t) * g(t)$  corresponde  $2\pi F(w)G(w)$  ...XXI  
 $f(t) \cdot g(t)$  corresponde  $F(w) * G(w)$

LA FUNCION "δ" DE DIRAC:

El teorema de Fourier se escribe:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} dw \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iwu} du$$

Admitamos poder invertir el orden de las integraciones:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{iw(t-u)} dw$$

es decir:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(t-u) du$$

considerando que:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad \dots XXII$$

Las anteriores ecuaciones divergen; no podemos estrictamente invertir el orden de las integraciones, pues la integral que sirve de definición a  $\delta(t)$  no es convergente. La teoría de las distribuciones muestra sin embargo que es lícito utilizar tales funciones.

Nosotros hemos encontrado por el mismo procedimiento la T.F. de  $\delta(t)$ :

$$\Delta(\omega) = \text{T.F.}(\delta(t)) = \frac{1}{2\pi} \quad \dots XXIII$$

La función " $\delta$ " es nula para todo valor de la variable diferente de cero, e infinito para cero, de tal manera que su integral, entre un número negativo y un número positivo es uno.

Podemos considerarla como límite de funciones (en el sentido usual del término). Funciones tales que presentan un pico cada vez más agudo alrededor del origen.

Consideremos por ejemplo la función  $f_T(t)$  cuya T.F. vale:

$$F_T(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}; \omega \in \left[ -\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right] \\ 0; \omega \notin \left[ \frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right] \end{cases}$$

Encontramos que la Transformada Inversa es:

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$$

Si  $T$  tiende hacia cero,  $F_T(\omega)$  tiende hacia  $\Delta(\omega)$  y  $f_T(t)$  tiende hacia el infinito para  $t=0$  y hacia "0" para  $t \neq 0$

Podremos así, asimilar una función " $\delta$ ", por un pico estrecho cualquiera centrado sobre cero y cuya integral de  $-\infty$  a  $+\infty$  vale 1.

### La Función "s(t)" escalón

Vamos a introducir otra distribución que será útil posteriormente, la función "s(t)" cuya T.F. vale:

$$S(w) = \frac{1}{i\pi w}$$

Aplicando la definición de la T.F., deberíamos tener:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi w} e^{iwt} dw$$

Esta integral diverge para  $w=0$ . Pondremos entonces introducir el concepto de Valor Principal.

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi w} e^{iwt} dw = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} \left[ \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{e^{iwt} dw}{i\pi w} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{iwt} dw}{i\pi w} \right]$$

Suprimimos así la divergencia para  $w=0$ .

Este procedimiento de cálculo lleva el nombre de "valor principal de la integral". Admitiendo su validez, encontramos:

$$s(t) = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt} dw}{i\pi w} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin wt}{w} dw$$

La divergencia ha desaparecido.

Como podemos demostrar que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$$

obtenemos:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad \dots \text{XXIV}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER EN DOS DIMENSIONES:

Hasta aquí sólo hemos considerado T.F. de funciones de una sola variable "f(t)", la variable escogida ha sido el tiempo. Es posible definir las T.F. de funciones de varias variables.

Nos limitaremos a dos variables; entonces a funciones "g=g(x,y)"; las variables pueden representar:

- \* distancias, tendremos entonces una manera de tratar planos.
- \* una distancia y un tiempo, se trataría de grabaciones de una función del tiempo tomada en diferentes lugares de un "perfil".

Para hacer esta T.F. basta con tomar la transformada de Fourier respecto a una de las variables, es decir, de calcular una integral, después efectuar la T.F. con respecto a la otra variable:

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y) e^{i(xk_x + yk_y)} dk_x dk_y \quad \dots \text{XXV}$$

en donde

$$F(Kx, Ky) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(xk_x + yk_y)} dx dy$$

T.F. de una función de la forma  $g(x,y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$

$$F(Kx, Ky) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{-i(xKx + yKy)} dx dy$$

Calculemos la integral doble en polares:

$$F(K_x, K_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho g(\rho) e^{-i(\rho \cos\theta K_x + \rho \sin\theta K_y)}$$

Pongamos:

$$K_x = k \cos\psi \quad K_y = k \sin\psi$$

$$F(K_x, K_y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \rho g(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \cos(\theta-\psi)} d\theta$$

Tenemos por otra parte:

$$\int_0^{2\pi} e^{-ik\rho \cos\theta} d\theta = 2\pi J_0(k\rho)$$

Introduciendo la función de BESSEL de orden cero:

$$F(K_x, K_y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \rho g(\rho) J_0(k\rho) d\rho \quad \dots XXVI$$

"F" es una transformada de NEWMAN de "g", pero la propiedad importante que retendremos es que "F" es solamente función de  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

(Si la función f(x,y) tiene una simetría de rotación alrededor del origen, su T.F. posee la misma propiedad).

#### OBSERVACION SOBRE LAS CONVENCIONES DE SIGNOS

Por analogía entre T.F. unidimensional

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw$$

hemos puesto para dos dimensiones

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(Kx,Ky) e^{i(xKx+yKy)} dKx dKy$$

Si consideramos la T.F. de una función del tiempo y del espacio, deberemos poner:

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w,k) e^{i(wt+kx)} dw dk$$

la onda elemental sería entonces:

$$e^{i(wt+kx)}$$

Onda propagándose en la dirección de las x negativas (para w y k positivas). Es entonces más usual en este caso particular, proponer

$$f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(w,k) e^{i\epsilon(wt-kx)} dw dk$$

$\epsilon$  vale, según los autores, +1 ó -1. La onda elemental se propaga entonces en la dirección de las x positivas. Las propiedades indicadas no cambian fundamentalmente.

### FILTROS

En casi todos los problemas de la física, y también en algunas ramas de la ingeniería, se puede representar un sistema de manera general diciendo que una señal de entrada excita al sistema y sale bajo la forma de una señal modificada por el sistema.

La transformación que permite pasar de la señal de entrada a la señal de salida, se llama un filtrado y el sistema, un filtro.

Esta definición es evidentemente general e imprecisa para poder ser utilizada. Vamos entonces a limitarla imponiendo consideraciones suplementarias:

1º Nosotros nos limitaremos a sistemas lineales.

Si a la entrada "e<sub>1</sub>", corresponde la salida s<sub>1</sub>, a la entrada

$e_2$  la salida  $s_2$ , a la entrada  $\lambda e_1 + u e_2$  corresponderá la salida  $\lambda s_1 + u s_2$ .

2° En numerosos casos, el origen de los parámetros no tiene importancia "invariantes por traslación".

Si a la entrada  $e(t)$  corresponde la salida  $s(t)$ , a la entrada  $e(t+p)$  corresponderá la salida  $s(t+p)$ .

En fin, bien que esto sea mucho menos indispensable, supondremos que la entrada y por consecuencia la salida, no dependen más que de un solo parámetro, que llamaremos el tiempo. No habría cambio si el parámetro fuera por ejemplo una longitud.

Las limitaciones precedentes permiten la forma general de un filtrado.

La entrada  $e(t)$  puede ser considerada como la suma de impulsiones elementales, diferenciados en el tiempo y de amplitud conveniente; es decir:

$$e(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e(u) \delta(\tau-u) du$$

El impulso elemental  $\delta(t)$  produce una salida  $f(t)$  (llamada "respuesta impulsional del filtro"). A  $\delta(t-u)$  corresponderá entonces  $f(t-u)$  (invariabilidad por traslación). Por linealidad, la salida  $s(t)$  correspondiente a la entrada  $e(t)$  será:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(u) f(t-u) du \quad \dots XXVII$$

Constatamos entonces que la operación de filtrado corresponde a una convolución.

Por T.F. la convolución se transforma en el producto:

$$s(w) = 2\pi F(w) E(w).$$

La señal  $e(t)$  es la suma de ondas sinusoidales elementales  $E(w)e^{iwt}$  cada una de las ondas " $e^{iwt}$ " es transformada por el filtro en  $F(w)e^{iwt}$  y por superposición encontramos la igualdad precedente.

La T.F. del impulso elemental  $\delta(t)$  vale  $\frac{1}{2\pi}$ , nos encontramos evidentemente con la T.F. de la respuesta del filtro a un Dirac:

$$s(w) = F(w)$$

T.F. de la respuesta impulsiva  $f(t)$

### REPRESENTACION GRAFICA DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL DE UN FILTRO

La relación  $s(w) = 2\pi E(w) F(w)$  es particularmente simple y muestra la importancia de  $F(w)$ . En numerosos casos, bien que  $F(w)$  sea un número complejo, su módulo  $|F(w)|$  es el parámetro más importante a estudiar.

En acústica, por ejemplo, el oído sólo es sensible a la amplitud y no a la fase para una frecuencia determinada, igual en óptica, el ojo no es sensible a la fase.

Veremos también casos en los cuales el filtro es determinado por su autocorrelación; es decir, por:  $2\pi |F(w)|^2$ .

La representación gráfica de  $|F(w)|$  indicará inmediatamente si las frecuencias son reforzadas o si las frecuencias son atenuadas.

A una entrada real debe corresponder una salida real, entonces:

$$F(w) = \overline{F(-w)}$$

Basta con representar la variación de  $F(w)$  para los valores positivos de  $w$ . Es usual hacer esta representación gráfica en coordenadas bilogarítmicas.

Antes de tomar un ejemplo, recordemos dos definiciones:

Octava: la relación de frecuencia  $[w, 2w]$  lleva el nombre de octava; es evidentemente un intervalo constante ( $\log 2$ ) sobre una escala logarítmica.

El origen de este término es musical: el oído sólo es sensible a una relación de frecuencia y dos notas a la octava una de la otra, producen sensaciones musicales comparables. Este intervalo corresponde a una gama.

Dinámica: Un aparato físico es lineal en una zona dada. Si la señal es muy débil, es amortiguada en el ruido de fondo. Si la señal es muy fuerte, el aparato es saturado y la salida deformada. La relación de la señal más fuerte posible a la señal más débil posible (todo siendo utilizable) se llama la dinámica. Esta relación se expresa en decibel (dB) y se define un decibel como:

$$1\text{dB} = 10 \log \frac{E_2(f)}{E_1(f)}$$

la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de la señal, entonces también encontramos que:

$$1\text{dB} = 20 \log \frac{A_1(f)}{A_2(f)}$$

Consideremos por ejemplo el filtro cuyo cuadrado del módulo de la T.F. vale:

$$|F(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2}$$

Si "w" es pequeña frente a "w<sub>0</sub>":

$$\log \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2} \approx \log 1 = 0$$

Si "w" es grande frente a "w<sub>0</sub>":

$$\log \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^2} \approx \log \frac{1}{\left(\frac{w}{w_0}\right)^2} = -2 \log w + 2 \log w_0$$

Consideremos una frecuencia w<sub>1</sub> superior a w<sub>0</sub> y la frecuencia 2w<sub>1</sub>. Entre estas 2 frecuencias w<sub>1</sub> y 2w<sub>1</sub>, la atenuación es (endB).

$$10 \log \frac{\frac{1}{1 + \left(\frac{2w_1}{w_0}\right)^2}}{\frac{1}{1 + \left(\frac{w_1}{w_0}\right)^2}} \approx 20 \log 2 = -6 \text{dB}$$

Observación. Nosotros utilizamos el cuadrado del módulo, luego, el cuadrado de la amplitud proporcional a una energía, la dinámica en dB se expresa por  $10 \log(\text{relación})$ .

El filtro anterior es evidentemente un filtro pasa bajas (Las altas frecuencias son atenuadas). Nosotros podemos aproximar la respuesta del filtro por dos semi-rectas, una horizontal, la otra teniendo una pendiente de  $-6 \text{ dB/oct}$  de extremidad común en  $w_0$ . (Fig. No. 4.)

La atenuación a la frecuencia  $w_0$  es:

$$10 \log \frac{1}{1 + \left(\frac{w_0}{w_0}\right)^2} = -3 \text{dB}$$

Se describe el filtro por la frase: filtro pasa baja, de frecuencia de corte a  $-3 \text{ dB}$ , en  $w_0$  y de pendiente  $-6 \text{ dB}$  por octava.

#### EJEMPLOS DE FILTROS PASA BAJA, ALTA Y DE BANDA

Sea por ejemplo un filtro cuyo espectro de potencia es:

$$|F(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^{2u}}$$

que corresponde a un filtro pasa baja de frecuencia de corte  $w_0$  y de pendiente  $-6u \text{ dB/oct}$ . mientras que:

$$|F(w)|^2 = \frac{\left(\frac{w}{w_0}\right)^{2u}}{1 + \left(\frac{w}{w_0}\right)^{2u}} \text{ corresponde a un filtro}$$

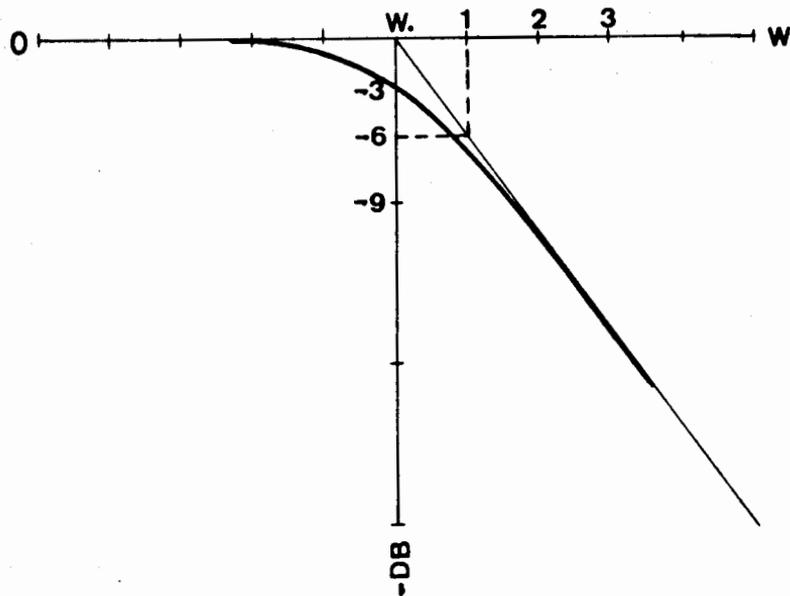


Fig 4 Representación gráfica de la respuesta frecuencial del filtro en decibeles

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

pasa alta de frecuencia de corte  $\omega_0$  y de pendiente 6u dB/oct.

Una sucesión de filtros convenientes permite realizar los filtros Pasa Banda.

### FILTRO CAUSAL

La relación entre "e(t)" y "s(t)" que nos ha servido para definir un filtro es extremadamente general.

Pero si el filtro corresponde a una realización física posible, debemos restringir las posibilidades de elección de f(t). Hemos observado ya que a una entrada "e(t)" real, debe corresponder una salida "s(t)" real; esto no es suficiente. Falta además considerar que el efecto no preceda a la causa; la salida s(t) debe ser nula para el tiempo en que la entrada es inexistente. Tal filtro es llamado "causal".

1<sup>ra</sup> Definición: Un filtro "f(t)" es causal si la salida "s(t)" es nula mientras que la entrada es nula:

$$\forall e(t); e(t) \equiv 0 \text{ para } t < t_0.$$

2<sup>da</sup> Definición: Un filtro "f(t)" es causal si  $f(t) = 0$  para  $t < 0$

3<sup>ra</sup> Definición: Un filtro f(t) es causal si su T.F. "F(w)", no tiene polo en el semi-plano complejo inferior:

### Demostración:

Puesto que: " $e^{-i\omega t}$ " es una función holomorfa derivable de la variable compleja w, entonces:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

F(w) es la suma de funciones holomorfas de w; F(w) es entonces una función holomorfa de w salvo para los valores de w tales que la integral no tenga sentido.

f(t) se calcula por la expresión ya conocida:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw$$

que podemos integrar en el plano complejo por el método de los residuos.

Podemos formar el contorno de integración "por encima" (contorno  $c_1$ ), o "por abajo" (contorno  $c_2$ ), (Fig. No.5), esto es:

$$w=x+iy$$
$$e^{iwt} = e^{ixt} e^{-yt}$$

Se requiere entonces que  $e^{iwt}$  tienda hacia cero cuando  $|y|$  aumenta indefinidamente:

Para  $t>0$  se requiere que  $y>0$  y escogeremos el contorno  $c_1$

Para  $t<0$  se requiere que  $y<0$  y escogeremos el contorno  $c_2$

finalmente

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw = \begin{cases} i\Sigma \text{ residuo (semi-plano } \text{Im}(w)>0, t>0 \\ i\Sigma \text{ residuo (semi-plano } \text{Im}(w)<0, t<0 \end{cases}$$

como  $f(t)$  debe ser nulo para  $t<0$ ,  $F(w)$  no debe tener polo, en el semi-plano  $\text{Im}(w)<0$ .

4ª Definición:  $f(t)$  es un filtro causal si  $I_m(F(w))$  es la transformada de Hilbert de  $\text{Re}(F(w))$ .

Demostración:

Una función " $f(t)$ " cualquiera puede siempre ser descompuesta en la suma de una función par y de una función impar.

$$f(t) = f_p(t) + f_I(t)$$

en donde:

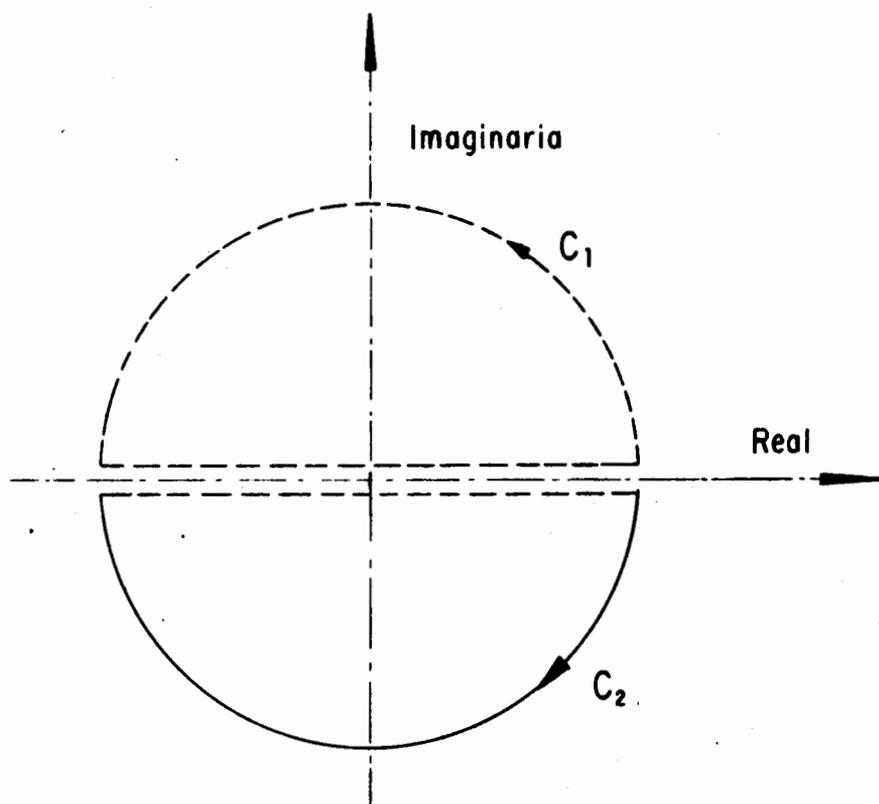


Fig 5 Contorno de integración para la función "  $f(t)$  "

$$f_p(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)]$$

$$f_I(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)]$$

en el caso particular de un filtro causal ( $f(t)=0$  si  $t<0$ )

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(t); & t>0 \\ \frac{1}{2}f(-t); & t<0 \end{cases}$$

$$f_I(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(t); & t>0 \\ -\frac{1}{2}f(-t); & t<0 \end{cases}$$

Consideremos:

$$s(t) = \begin{cases} 1; & t>0 \\ -1; & t<0 \end{cases}$$

La T.F. de  $s(t)$  es " $s(w)$ " tal que:  $s(w) = \frac{1}{i\pi w}$

Luego:

$$f_i(t) = f_p(t) \cdot s(t)$$

y entonces

$$F_i(w) = F_p(w) * s(w)$$

Denominando:

$$F_i(w) = i \operatorname{Im}(f(w))$$

y

$$F_p(w) = \operatorname{Re}(F(w))$$

vemos que:

$$\operatorname{Im}(F(w)) = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(F(u))}{w-u} du \quad \dots \text{XXVIII}$$

igualmente:

$$\operatorname{Re}(F(w)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(F(u))}{w-u} du$$

Entonces  $\operatorname{Im}(F(w))$  es la Transformada de Hilbert de  $\operatorname{Re}(F(w))$ .

### FILTRO DE FASE MINIMA

Sea un filtro " $f(t)$ "; conocido  $e(t)$ , somos capaces de calcular  $s(t)$  si conocemos el filtro. Se puede resolver el problema en sentido inverso: conociendo  $s(t)$ , es posible encontrar  $e(t)$ .

La relación general

$$s(w) = 2\pi E(w)F(w)$$

nos muestra que el problema es matemáticamente posible.

Cambemos las condiciones del problema: si " $f(t)$ " es un filtro causal, el filtro inverso " $f^{-1}(t)$ " que permite determinar  $e(t)$  a partir de  $s(t)$ , es un filtro causal.

La relación  $E(w) = \frac{1}{2\pi F(w)} s(w)$  nos muestra que el filtro " $f^{-1}(t)$ " tiene por T.F:

$$F^{-1}(w) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{F(w)}$$

Primero para que " $F^{-1}(w)$ " tenga sentido para  $w$  real,  $F(w)$  debe ser diferente de cero para todo  $w$  real.

Si el filtro " $f^{-1}(t)$ " es causal,  $F^{-1}(w)$  no debe tener polo para  $\operatorname{Im}(w) < 0$ . Sabemos ya que  $F(w)$  no tiene polo para  $\operatorname{Im}(w) < 0$  (el filtro  $f(t)$  es causal).

Para que nuestro problema tenga solución, se requiere entonces que  $F(w)$  no tenga ni polo ni cero para  $\operatorname{Im}(w) < 0$ . Tal filtro es llamado de fase mínima.

## PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS FILTROS DE FASE MINIMA

Consideremos el conjunto de funciones causales "p(t)" admitiendo el mismo espectro de potencia, tales que  $|P(w)|^2$  sea el mismo para todas las funciones del conjunto (para w real solamente).

En este conjunto, la función de fase mínima es aquella cuya energía es la mayor cerca del origen; es decir, para toda T:

$$\int_0^T P^2(t)dt \text{ es máximo para la función a fase mínima}$$

La integral anterior es evidentemente una función creciente de T

y

$$\int_0^T P^2(t)dt \text{ tiene el mismo valor para todo el conjunto.}$$

La función de fase mínima es aquella para la cual

$$\int_0^T P^2(t)dt \text{ se acerca lo más rápido posible a asíntota.}$$

Las funciones "p(t)" son causales, entonces los diferentes espectros "P(w)" no tienen polos para  $\text{Im}(w) < 0$ , pero sólo la función a fase mínima no tendrá cero para  $\text{Im}(w) < 0$ .

Un cero de "P(w)" es automáticamente un cero del espectro de potencia común al conjunto  $|P(w)|^2$ , esta última función es real, el complejo conjugado de una raíz, es él mismo una raíz.

### Transformada en Z

Sea una serie de muestras correspondientes a la discretización de una función x(t) al paso  $\Delta T$ .

$$x_n = x(n\Delta T); n \text{ entera}$$

Llamaremos transformada en Z (T.Z.) de la serie  $x_n$ , a la función de Z:

$$x(Z) = \sum_n x_n Z^n \quad \dots XXIX$$

La suma se extiende de  $-\infty$  a  $+\infty$ . En la práctica, habrá siempre un límite tanto hacia los tiempos positivos como negativos. Si la función  $x(t)$  corresponde a una función transitoria, la serie anterior es convergente si  $|Z| = 1$ . Admitamos esta convergencia demostrando la necesidad de la misma:

La T.F. " $x(w)$ ", de  $x(t)$  es:

$$x(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-iwt} dt$$

pero por hipótesis,  $x(t)$  sólo es conocida en los tiempos  $n\Delta T$ , la única evaluación " $\hat{x}(w)$ " que pudiéramos hacer de  $x(w)$  es:

$$\hat{x}(w) = \frac{\Delta T}{2\pi} \sum_n x_n e^{-inw\Delta T}$$

Por un factor numérico de  $\frac{\Delta T}{2\pi}$ , pasamos de " $x(z)$ " a " $x(w)$ " por un cambio de variable, es decir:

$$x(z) \rightarrow x(w)$$

y

$$z = e^{-iw\Delta T}$$

...XXX

Esto explica la convergencia de las series  $x(Z)$ ; pero bien entendido no es válida a menos que  $\Delta T$  sea suficientemente pequeña (más exactamente, el producto  $w\Delta T$ , que es adimensional, sea pequeño).

En el cambio de variable  $z = e^{-iw\Delta T}$ , el plano complejo de los  $w$  se convierte en el plano complejo  $Z$ . Verificamos que en este cambio, el eje real de los  $w$  se convierte en el círculo (C) de radio 1, centrado en el origen del plano  $Z$ , el semi plano  $\text{Im}(w < 0)$ , se transforma en el interior de (C).

El semi plano,  $\text{Im}(w) > 0$  se transforma en el exterior de (C).

La T.F. de la  $x(t)$ , es entonces representada en el plano  $Z$ , por

la T.Z. de  $x(t)$ , que puede representarse por una serie.

Observamos entonces la simetría de la T.F. y T.Z., simetría existente tanto en las transformadas directas como sobre las transformadas inversas.

### CONVOLUCION DE DOS SEÑALES DIGITALIZADAS

La convolución para señales continuas transitorias se define como:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(\tau-u) du$$

Para señales digitalizadas, sólo podemos hacer intervenir los valores de  $u$  y de  $\tau$ , que sean de la forma  $k\Delta T$  ( $k$  entera), esto es:

$$c(n\Delta T) = \sum_k \Delta T f_1(k\Delta T) f_2(n\Delta T - k\Delta T)$$

Considerando  $\Delta T$  unitario, tenemos:

$$c(n) = \sum_k f_1(k) f_2(n-k)$$

La simetría entre T.F. y la T.Z. nos sugiere que:

$$T.Z. (c(n)) = [T.Z. (f_1)] \cdot [T.Z. (f_2)] \quad \dots XXXI$$

### Correlación-autocorrelación

La correlación de señales continuas es definida como:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(u+t) du$$

Para señales discretas es:

$$c(n) = \sum_k f_1(k) f_2(k+n)$$

y por T.Z.:

$$c(z) = F_1(z) \overline{F_2(z)} \quad \dots\text{XXXII}$$

Tendremos entonces para la autocorrelación:

$$a_f(n) = \sum_k f(k) f(k+n)$$

$$A_f(Z) = \overline{F(Z)} F(Z) = |F(Z)|^2 \quad \dots\text{XXXIII}$$

La T.Z. de la autocorrelación es evidentemente una función real positiva, verificando todas las propiedades de la autocorrelación de una función transitoria.

### Filtros Numéricos

Considerando únicamente los filtros lineales, invariantes por traslación en el tiempo:

La señal de entrada  $c(t)$  sólo es conocida en los tiempos  $K\Delta T$

$$c(k\Delta T) = c_k$$

No se podrá calcular la señal de salida  $s(t)$  más que en los tiempos  $k\Delta T$ , es decir,  $s(k\Delta T) = s_k$

Siendo el filtro lineal,  $s_k$  será representada por una combinación lineal de  $c_k$ :

$$s_k = \sum_n f_{k-n} c_n$$

Siendo el filtro invariante por traslación el tiempo.

En T.Z. tendremos evidentemente:

$$S(Z) = F(Z) E(Z)$$

El filtro en Z más simple es:

$$F(Z) = Z$$

En este caso particular:

$$S(Z) = ZE (Z)$$

Luego:

$$\sum_k s_k Z^k = Z \sum_n e_n Z^n = \sum_n e_n Z^{n+1}$$

y entonces:

$$s_k = e_{k-1}$$

el filtro  $F(Z) = Z$  corresponde a una traslación de la serie digitalizada en una unidad.

Generalizando,  $F(Z) = Z^P$  corresponderá a una traslación de P unidades:

$$s_n = e_{k-p} \quad \dots\text{XXXIV}$$

Un filtro, en general, sólo permite calcular  $s_n$  (n entera) a partir de los valores de  $e_k$  (k entera), todo filtro es pues una combinación lineal de filtros de traslación de orden variable..

La función  $F(Z)$  es una serie de la forma:

$$F(Z) = \sum_k f_k Z^k$$

### TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA

El filtro más importante en el tratamiento de señales es la Transformada de Fourier. Hasta el presente, no hemos presentado la T.F. como un filtro, pero ella constituye evidentemente un operador lineal, pudiendo ser considerado como tal.

Sea la secuencia de N Términos:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$$

la mejor aproximación que se puede hacer de la T.F. es evidentemente:

$$\hat{x}(w) = \sum_k x(k) e^{-i w k \Delta T}$$

Los valores de  $w$  que elijeremos serán de la forma:

$$w_n = n\Delta w \quad n = [0, 1, 2, \dots, N-1]$$

Debemos evaluar  $\Delta w$ :

$\Delta w$  es la pulsación más pequeña posible correspondiente al período más largo posible que pueda contener la señal.

El período más largo posible será de  $N\Delta T$  y la pulsación correspondiente:

$$\Delta w = \frac{2\pi}{N\Delta T}$$

El exponencial interviniendo en el cálculo se escribe entonces:

$$e^{-ik\frac{2\pi}{N\Delta T} n\Delta T} = e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}$$

pongamos:

$$w = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

La T.F. discreta se escribe entonces:

$$x(n) = \sum_k X(k) w_n^{nk} \quad \dots XXXV$$

$$n, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

y bajo la forma de ecuaciones, la T.F.D. es:

$$X(0) = X(0) w^0 + X(1) w^0 + X(2) w^0 + \dots + X(N-1) w^0$$

$$X(1) = X(0) w^1 + X(1) w^1 + X(2) w^2 + \dots + X(N-1) w^{(N-1)}$$

$$X(2) = X(0) w^2 + X(1) w^2 + X(2) w^4 + \dots + X(N-1) w^{2(N-1)}$$

.

.

.

.

$$X(N-1) = X(0) w^{N-1} + X(1) w^{N-1} + X(2) w^{2(N-1)} + \dots + X(N-1) w^{(N-1)^2}$$

El sistema anterior puede invertirse; entonces la T.F.I.D. es:

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & w^{-3} & \cdot & \cdot & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & w^{-1} & \cdot & \cdot & w^{-2(N-1)} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)^2} & \dots & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

Podemos verificar directamente que el producto de las dos matrices permitiendo la T.F. y la T.F. inversa es una matriz de identidad.

TRANSFORMADA DE FOURIER RAPIDA (FFT)

Un algoritmo de cálculo, publicado por Cooley y Tukey, permite hacer el cálculo de la T.F. más rápidamente que las ecuaciones anteriores. Este procedimiento es conocido con el nombre de FFT (fast Fourier Transform):

Supongamos que N sea par, vamos a efectuar el cálculo de una T.F. de N puntos:

$$X_n = \sum_k x_k w^{nk}$$

$$n=0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$k=0, 1, 2, \dots, N-1$$

formemos dos nuevas secuencias con las muestras, pares e impares de la secuencia original:

$$a_c = x_{2k}$$

$$\dots k \approx \left[ 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right]$$

$$b_c = x_{2k+1}$$

entonces:

$$X_n = \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} a_e w^{n \cdot 2k} + \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} b_e w^{n \cdot (2k+1)} \quad \dots \text{XXXVI}$$

que podemos escribir:

$$X_n = \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} a_e (w^2)^{nk} + w^n \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} b_e (w^2)^{nk}$$

La T.F. de  $a_e$ , que denominamos  $A_p$ , y la de  $b_e$  que denominamos  $B_p$  se obtiene por:

$$A_p = \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} a_e w^{pe}; \quad B_p = \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} b_e w^{pe}$$

$w'$  es  $e^{-i \frac{4\pi}{N}}$ . Los términos contenidos en  $X_n$  se parecen a las T.F. de  $a_e$  y  $b_e$ . La diferencia que existe es el dominio de variación del índice; en  $X_n$ ,  $n$  varía de 0 a  $N-1$  y en  $A_p$ ,  $p$  varía de 0 a  $\frac{N}{2}-1$ .

Debemos entonces considerar 2 casos:

1)  $n \approx [0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1]$

$$X_n = A_n + w^n B_n$$

2)  $n \approx [\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1]$

consideremos  $n = p + \frac{N}{2}$

$p$  varía evidentemente entre 0 y  $\frac{N}{2} - 1$ , entonces considerando la ecuación No. XXXVI tenemos:

$$X_n = \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} a_e w^{2k(P+\frac{N}{2})} + w^{P+\frac{N}{2}} \sum_{e=0}^{e=\frac{N}{2}-1} b_e w^{2k(P+\frac{N}{2})}$$

o sea, reemplazando  $w$  por su valor:

$$X_{p+\frac{N}{2}} = A_p + w^n B_p \quad \dots\text{XXXVII}$$

Hemos efectuado el cálculo de  $X_n$ , calculando  $A_p$  y  $B_p$ .

Si  $N$  es una potencia de 2, ( $N=2^n$ ), el mismo proceso podrá efectuarse  $n$  veces, llegando al cálculo de  $N$  veces la T.F. de una muestra. Este último cálculo es evidente, según las ecuaciones de la T.F. discreta, la T.F. de una función reducida a 1 punto vale ese punto ( $x_0=x_0$ ).

El interés de este método de cálculo es su rapidez. Evaluemos el número de multiplicaciones que demanda una T.F.:

a) T.F. discreta:

En la T.F. discreta, debemos hacer  $N$  multiplicaciones para cada índice, o sea, un total  $N \times N$  multiplicaciones.

b) T.F. rápida:

El cambio de dos T.F. con  $\frac{P}{2}$  puntos, en lugar de una T.F. con  $P$  puntos necesita  $p$  multiplicaciones. Verificamos que cada una de las operaciones de duplicación necesita  $N$  multiplicaciones, y que existe un número total de  $n=N \log_2 N$  duplicaciones. De manera aproximada, la duración del cálculo sobre una computadora es proporcional al número de multiplicaciones (más las divisiones si las hay, que no es el caso aquí).

Constatamos entonces que un programa de F.F.T. es mucho más rápido a ejecutar que la T.F. discreta, tomemos por ejemplo:

$$N = 1024 \approx 2^{10}$$

La T.F. discreta efectúa  $10^6$  multiplicaciones; La F.F.T. efectúa aproximadamente  $10^4$  multiplicaciones.

El 2o. programa es 100 veces más rápido a tratar que el primero.

Bien entendido, si el número de puntos no es una potencia de 2, podemos formular el algoritmo de la T.R.F. para otra base, siguiendo un proceso similar.

### EL FILTRO CAUSAL EN DATOS DISCRETOS

En un filtro causal, la salida " $s_n$ " del filtro, sólo depende de los valores de la señal de entrada " $e_n$ ", en los tiempos anteriores al tiempo  $n$ . La fórmula general del filtro es:

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e_{n-k}$$

y se simplifica: En efecto no deben de intervenir más que los valores de  $n-k \leq n$ ;  $f_k$  es nula si  $k$  es negativa, entonces:

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e_{n-k}$$

encontramos entonces la 2a. definición de un filtro causal:

$$f_k = 0 \text{ para } k < 0 \quad (\text{equivalente a } f(t) = 0 \text{ si } t < 0)$$

La función  $F(Z)$ , o T.Z. de " $f$ " es entonces:

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k Z^k \quad \dots\text{XXXVIII}$$

Podemos afirmar entonces que un filtro causal será de fase mínima si  $F(Z)$  no tiene polo, ni cero en el interior del círculo (C).

## APLICACION DE LOS FILTROS

N. Wiener ha desarrollado una teoría del diseño de filtros digitales que tiene una enorme aplicación en la prospección geofísica.

El problema planteado por Wiener podemos resumirlo en la pregunta siguiente:

¿Cómo diseñar un filtro real que a una entrada determinada " $x_t$ " corresponda una salida " $z_t$ " deseada? El diseño del filtro se efectúa con el criterio de mínimos cuadrados, puesto que la salida verdadera del proceso de filtrado " $y_t$ " es diferente a la salida deseada.

El problema se presenta ilustrado en la Figura No. 6.

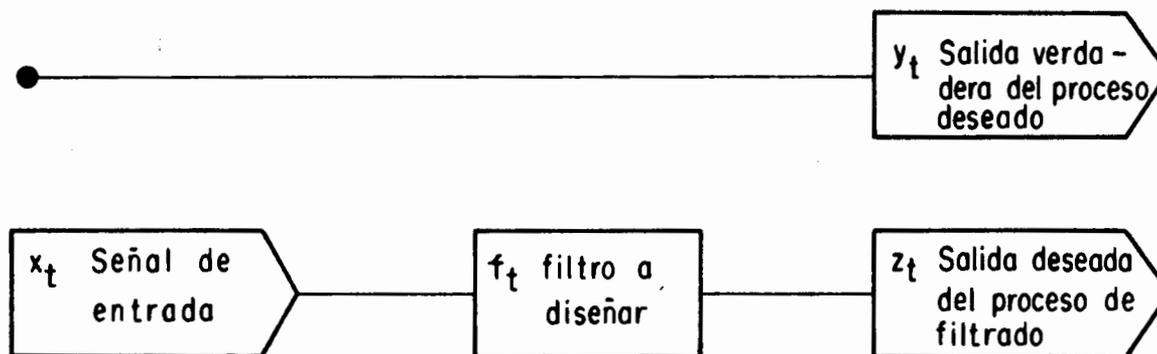


Fig 6 Modelo general del diseño de un filtro

Para resolver el problema planteado recurriremos a los siguientes conceptos que han sido estudiados anteriormente:

a) La función de Auto-Correlación " $\phi_{XX}(\tau)$ ":

La definición matemática correspondiente es:

$$\phi_{XX}(\tau) = \sum_t X_{t+\tau} X_t$$

Si consideramos la función de Autocorrelación valuada en  $\tau=0$ , tenemos:

$$\phi_{XX}(0) = \sum_t X_t^2$$

Esto es, Si  $x_t = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$

entonces:

$$\phi_{xx}(0) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \dots$$

En términos de la teoría de señales, el valor de la " $\phi_{xx}(0)$ " es llamada "Energía de la Señal".

b) Concepto del valor Esperado:

partiendo de:  $\phi_{xx}(\tau) = \sum_t X_{t+\tau} X_t$

y de la relación inversa de Fourier para " $x_t$ ":

$$x(k) = \frac{1}{N} \left[ \sum_n X^*(n) W^{nk} \right]^*$$

en donde "\*" indica el conjugado.

Encontramos:

$$\phi_{xx}(\tau) = \sum_n \frac{1}{N} |X(n)|^2 = E \{x_{t+\tau} x_t\} \quad \dots \text{XXXIX}$$

Entonces  $E\{ \}$  es un operador promedio, que para  $\tau=0$  representa el contenido energético de la señal.

c) De la misma forma, la función de intercorrelación entre dos señales la representaremos por:

$$\phi_{xy}(\tau) = E \{x_{t+\tau} y_t\} \quad \dots \text{XL}$$

$$\phi_{xy}(\tau) = E \{y_{t+\tau} x_t\}$$

se demuestra que:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau) \quad y \quad \phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$$

Regresando nuevamente al problema propuesto por Wiener, que matemáticamente lo podemos expresar como:

$$I = \{E (z_t - y_t)^2 \}$$

es decir, la diferencia energética deberá ser mínima.

Puesto que:

$$y_t = \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} x_{t-\tau}$$

y sustituyendo:

$$I = E \left\{ \left( z_t - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} x_{t-\tau} \right)^2 \right\}$$

minimizando la diferencia energética, usando el concepto de la derivada, tenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial f_k} = 0 \quad \dots \text{XLI}$$

consideremos por ejemplo  $\frac{\partial I}{\partial f_1}$

encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial f_1} &= E \left\{ 2 \left( z_t - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} x_{t-\tau} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial f_1} \left( z_t - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} x_{t-\tau} \right) \right\} \\ &= 2E \left\{ \left( z_t - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} x_{t-\tau} \right) \cdot x_{t-1} \right\} \\ &= 2E \left\{ \left( z_t \cdot x_{t-1} \right) - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \cdot x_{t-1} \cdot x_{t-\tau} \right\} \\ &= 2E \left\{ z_t \cdot x_{t-1} \right\} - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} E \left\{ x_{t-\tau} x_{t-1} \right\} \end{aligned}$$

$$= 2\phi_{zX}(1) - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{XX}(1-\tau)$$

por lo que:

$$\sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{XX}(1-\tau) = \phi_{zX}(1)$$

En forma general para cualquier  $f_{\tau}$ , tendremos:

$$\sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{XX}(j-\tau) = \phi_{zX}(J) \quad \dots \text{XLII}$$

$$J = 0, 1, 2, \dots, n.$$

La expresión anterior, constituyen las ecuaciones normales de Wiener. Su solución respecto a " $f_k$ " proporciona los coeficientes del filtro.

#### DETERMINACION DEL ERROR O DIFERENCIA ENERGETICA

Hemos partido de considerar la diferencia energética cuadrada como:

$$I = E \{ (z_t - y_t)^2 \}$$

$$I = E \left\{ \left( z_t - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} x_{t-\tau} \right)^2 \right\}$$

Efectuando el cuadrado indicado:

$$I = E \left\{ \left( z_t^2 - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} z_t x_{t-\tau} + \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \cdot \sum_{\sigma=0}^n f_{\sigma} x_{t-\tau} \cdot x_{t-\sigma} \right) \right\}$$

$$I = E \{ z_t^2 \} - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} E \{ z_t x_{t-\tau} \} + \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \sum_{\sigma=0}^n f_{\sigma} E \left[ x_{t-\tau} x_{t-\sigma} \right]$$

Sin embargo, sabemos que:

$$E\{z_t^2\} = \phi_{ZZ}(0)$$

$$E\{z_t x_{t-\tau}\} = \phi_{ZX}(\tau)$$

$$E\{x_{t-\tau} x_{t-\sigma}\} = E\{x_t x_{t+\tau-\sigma}\} = E\{x_{t+\sigma-\tau} x_t\} = \phi_{XX}(\sigma-\tau)$$

Sustituyendo las anteriores relaciones, tenemos:

$$I = \phi_{ZZ}(0) - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{ZX}(\tau) + \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \sum_{\sigma=0}^n f_{\sigma} \phi_{XX}(\sigma-\tau)$$

Si en la relación anterior, sustituimos el conjunto de ecuaciones normales que minimizan la diferencia energética, esto es:

$$\sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{XX}(J-\tau) = \phi_{ZX}(J)$$

y si usamos la identidad:  $\phi_{XX}(\tau) = \phi_{XX}(-\tau)$  ya que  $\phi_{XX}(\sigma-\tau) = \phi_{XX}(\tau-\sigma)$

Entonces:

$$I_{\min} = \phi_{ZZ}(0) - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{ZX}(\tau) + \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \sum_{\sigma=0}^n f_{\sigma} \phi_{XX}(\tau-\sigma)$$

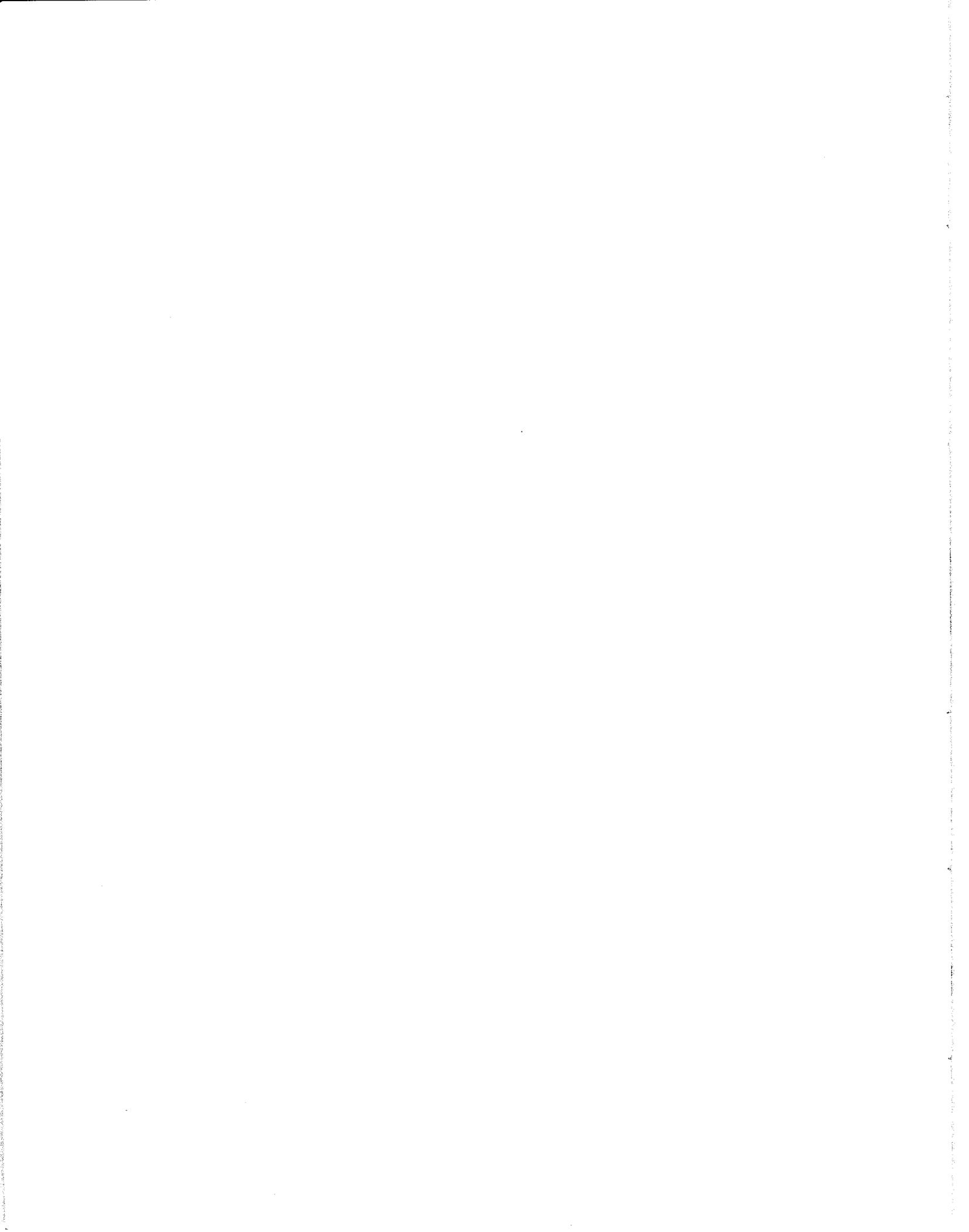
$$I_{\min} = \phi_{ZZ}(0) - 2 \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{ZX}(\tau) + \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{ZX}(\tau)$$

$$I_{\min} = \phi_{ZZ}(0) - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \phi_{ZX}(\tau)$$

$$\eta = \frac{I_{\min}}{\phi_{ZZ}(0)} = 1 - \sum_{\tau=0}^n f_{\tau} \frac{\phi_{ZX}(\tau)}{\phi_{ZZ}(0)}$$

...XLIII

La expresión anterior es llamada "Error Cuadrático medio norma lizado", su análisis indica que " $\xi$ " jamás es negativo y además varía entre "cero y uno". Mientras más cercano sea " $\xi$ " a cero, la señal deseada " $z_t$ " está en concordancia con la señal " $y_t$ ", salida real del filtro.



PROPAGACION DE ONDAS SISMICAS EN MEDIOS ESTRATIFICADOS  
EN TERMINOS DE LA TEORIA DE COMUNICACIONES.

Propagación de ondas a través de una interfase:

Consideremos dos medios: homogéneos e isotrópicos.

Imaginemos ahora que una onda plana armónica de frecuencia "f" y amplitud "A<sub>i</sub>" viaja descendentemente en el medio "1". El disturbio incidente, que asumimos, es el desplazamiento del medio de su posición de equilibrio, y es la parte real de:

$$g_i = A_i e^{i2\pi f(\tau - y/v_1)} \quad \dots \text{XLIV}$$

Mientras que la onda armónica plana reflejada es

$$g_r = A_r e^{i2\pi f(\tau + y/v_1)} \quad \dots \text{XLV}$$

y la onda armónica plana transmitida al medio "2" es:

$$g_t = A_t e^{i2\pi f(\tau - y/v_2)} \quad \dots \text{XLVI}$$

es importante notar que la misma frecuencia "f" se mantiene para las tres ondas consideradas.

La Figura No. 7 ilustra el problema considerado:

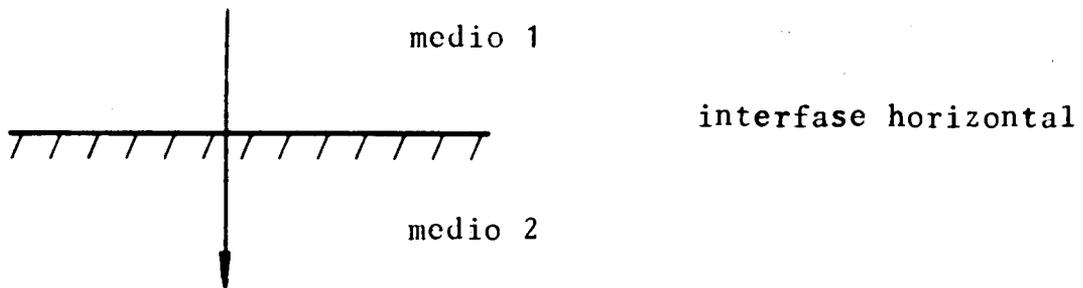
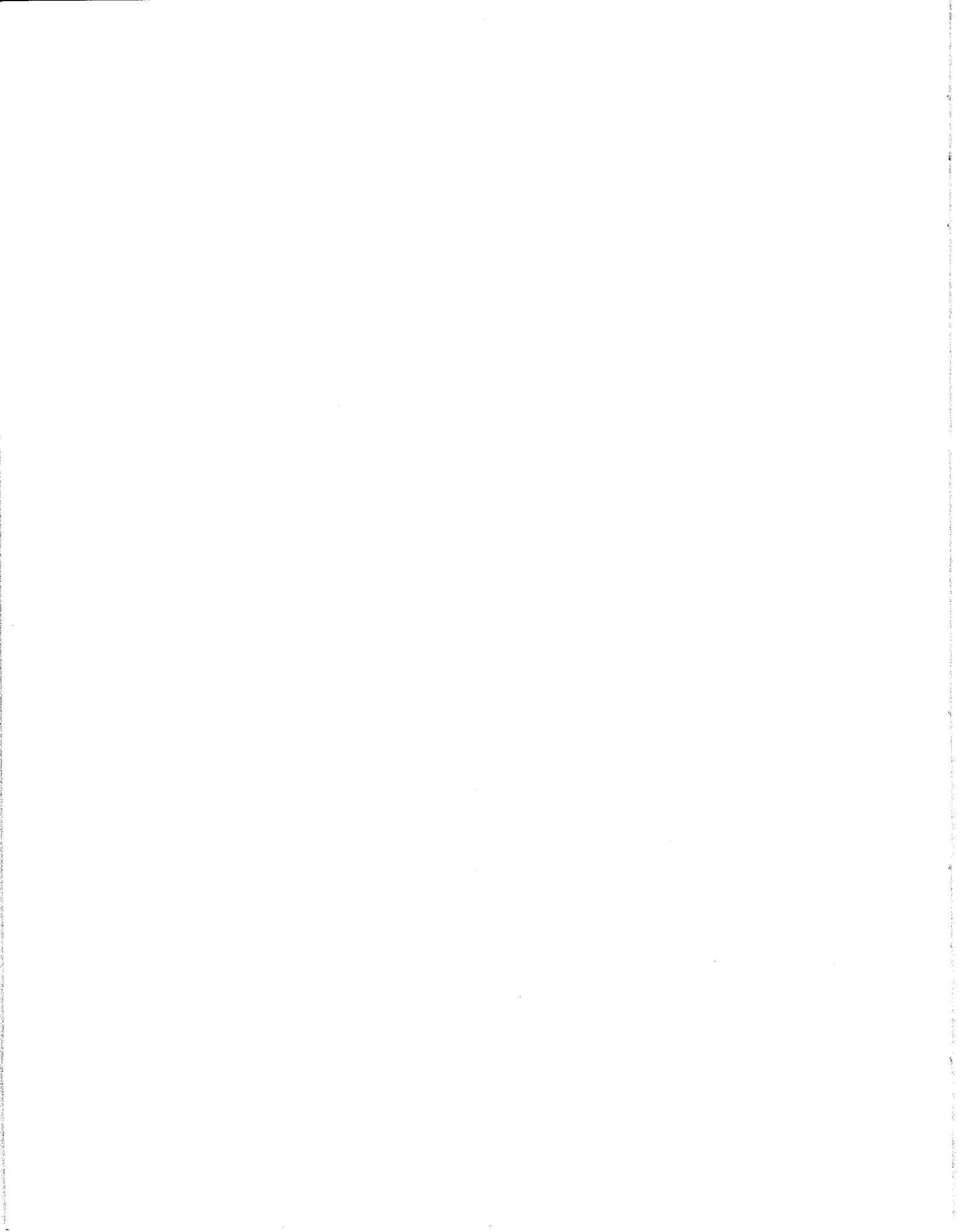


Fig 7



Por medio de dos condiciones de frontera, las cuales son:

- a) En la interfase, el coeficiente de desplazamiento deberá ser contínuo.
- b) En la interfase el coeficiente de esfuerzos deberá ser contínuo.

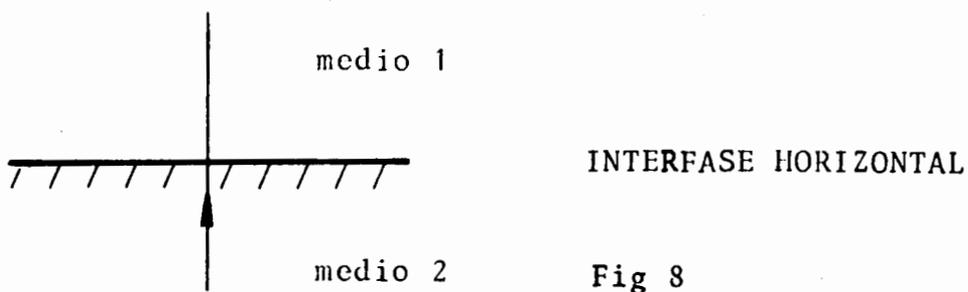
Podemos obtener las siguientes relaciones entre los coeficientes de amplitud de las ondas consideradas:

$$A_r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} A_i ; A_r = r A_i ; r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$$

$$A_t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} A_i ; A_t = t A_i ; t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$$

en donde definimos la impedancia acústica "Z" como el producto de la densidad y velocidad del medio considerado.

En el caso de tener la onda incidente propagándose ascendente hasta alcanzar la interfase tal como lo ilustra la Figura No.8:



obtendremos las siguientes relaciones entre la amplitud de los coeficientes de onda:

$$A'_r = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} A'_i ; A'_r = r' A'_i ; r' = \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}$$

$$A'_t = \frac{2z_2}{z_1+z_2} A'_i \quad ; \quad \Lambda'_t = t' A_i \quad ; \quad t' = \frac{2z_2}{z_1+z_2}$$

Es evidente que las relaciones siguientes se satisfacen para los coeficientes de transmisión y reflexión:

$$r = -r'$$

...XLVIII

$$tt' - rr' = 1$$

TRANSFORMADA "Z" DE LOS COEFICIENTES DE DESPLAZAMIENTO

Considerando el modelo de estratificación horizontal, tendremos las siguientes ondas descendentes en el techo de las diferentes capas, (Fig. No. 9).

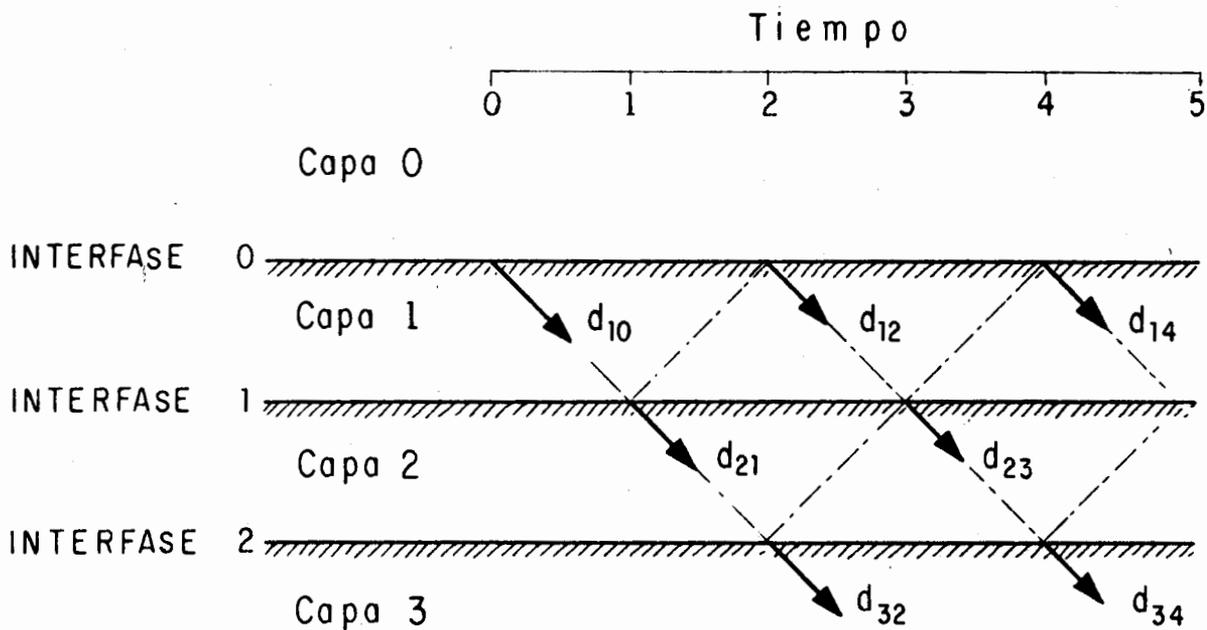


Fig 9 Ondas descendentes en un medio estratificado . Las ondas están posicionadas en el techo de las capas .

El coeficiente de desplazamiento "d" para las ondas descendentes en el techo de capa, están constituidas por la forma siguiente:

$$d_{k,k+2n-1}$$

Luego entonces para una capa determinada "K", la transformada en "Z" será:

$$D_k(Z) = d_{k,k-1} z^{k-1} + d_{k,k+1} z^{k+1} + d_{k,k+3} z^{k+3} + \dots$$

$$D_k(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{k,k+2n-1} z^{k+2n-1} \quad \dots \text{XLIX}$$

Consideremos ahora el caso de las ondas descendentes en la base de la capa correspondiente, (Fig. No. 10).

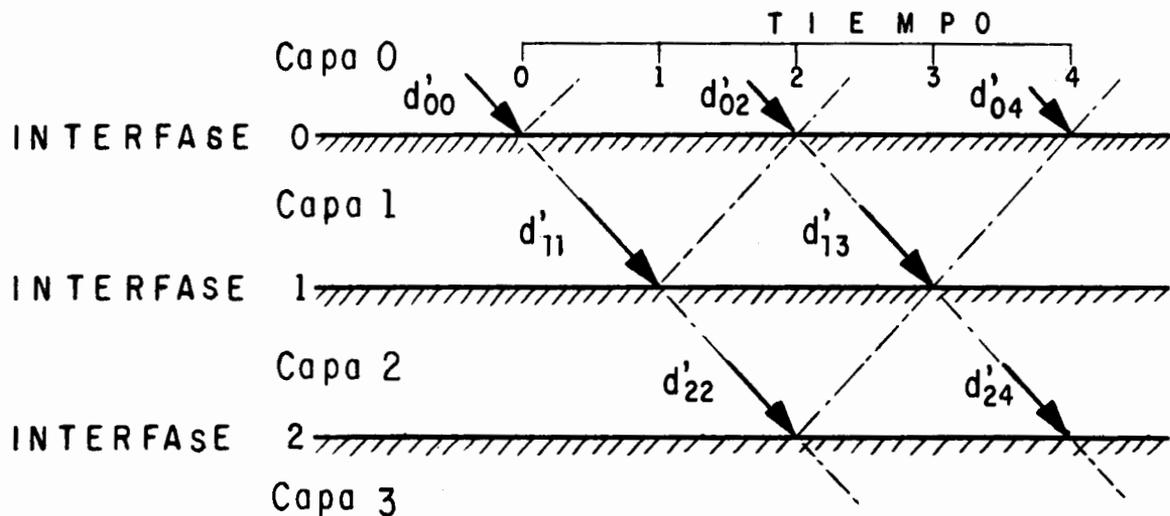


Fig 10 Ondas descendentes en la base de las diferentes capas

Busquemos generalizar el coeficiente "d'" de desplazamiento:

$$d'_{k,k+2n}$$

Entonces la transformada en "Z" será:

$$d'_{k,k} z^k + d'_{k,k+2} z^{k+2} + d'_{k,k+4} z^{k+4} \dots = D'_k(Z)$$

Es evidente que la relación entre ambas transformadas es:

$$D'_k(Z) = Z D_k(Z) \quad \dots \text{L}$$

Mediante un procedimiento similar es posible verificar que la relación entre las transformadas "Z" para las ondas Ascendentes

en el techo y base de una capa determinada, será:

$$U_k(Z) = ZU'_k(Z) \quad \dots LI$$

RELACION ENTRE LOS COEFICIENTES DE ONDA

Estudiaremos ahora la relación que existe entre los coeficientes de onda, es decir, la dependencia entre los coeficientes de reflexión y transmisión.

La Figura No. 11 indica el problema a tratar:

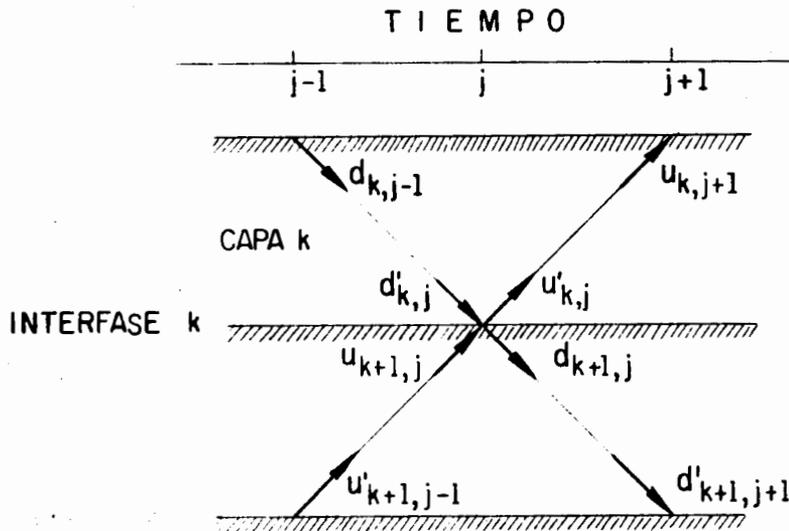


Fig 11 Esquema en la interfase entre las capas k y k+1 al tiempo j

El coeficiente  $U'_{k,j}$  está relacionado de la forma siguiente:

$U'_{k,j} = rd'_{k,j} + t'U_{k+1,j}$ , mientras que el coeficiente

$$d_{k+1,j} = r'U_{k+1,j} + t d'_{k,j}$$

por tanto, manipulando algebraicamente:

$$t d'_{k,j} = d_{k+1,j} - r'U_{k+1,j}$$

$$d'_{k,j} = \frac{1}{t} (d_{k+1,j} - r'U_{k+1,j})$$

y sustituyendo encontramos:

$$U'_{k,j} = \frac{r}{t} (d_{k+1,j} - r'U_{k+1,j}) + t'U_{k+1,j}$$

$$U'_{k,j} = \frac{r}{t} d_{k+1,j} - \frac{rr'}{t} U_{k+1,j} + t' U_{k+1,j}$$

$$tU'_{k,j} = rd_{k+1,j} - rr'U_{k+1,j} + tt'U_{k+1,j}$$

$$tU'_{k,j} = rd_{k+1,j} + (tt' - rr') U_{k+1,j}$$

$$tU'_{k,j} = rd_{k+1,j} + U_{k+1,j}$$

$$td'_{k,j} = d_{k+1,j} + rU_{k+1,j}$$

tal sistema de ecuaciones se podrá establecer para un indeseado de tiempo  $k = j, j+2, j+4 \dots$ ,

Tomando la transformada en "Z" del sistema anterior, encontramos:

$$tU'_{k,j} Z^j = rd_{k+1,j} Z^j + U_{k+1,j} Z^j$$

$$td'_{k,j} Z^j = d_{k+1,j} Z^j + rU_{k+1,j} Z^j$$

Sumando tales ecuaciones para  $k = j, j+2, j+4, \dots$  encontramos:

$$t \sum_j U'_{k,j} Z^j = r \sum_j d_{k+1,j} Z^j + \sum_j U_{k+1,j} Z^j$$

$$t \sum_j d'_{k,j} Z^j = \sum_j d_{k+1,j} Z^j + r \sum_j U_{k+1,j} Z^j$$

que en su representación por medio de la transformada "Z" quedaría:

$$t U'_k (Z) = r D_{k+1} (Z) + U_{k+1} (Z)$$

$$t D'_k (Z) = D_{k+1} (Z) + r U_{k+1} (Z)$$

Es decir:

$$U'_k (Z) = r_k/t_k D_{k+1} (Z) + \frac{1}{t_k} U_{k+1} (Z)$$

$$D'_k (Z) = 1/t_k D_{k+1} (Z) + \frac{r_k}{t_k} U_{k+1} (Z)$$

Recordando las relaciones anteriormente determinadas:

$$D'_k (Z) = Z D_k (Z)$$

$$U'_k (Z) = 1/Z U_k (Z)$$

$$U_k (Z) = Z r_k/t_k D_{k+1} (Z) + \frac{Z}{t_k} U_{k+1} (Z)$$

$$D_k (Z) = \frac{r_k}{Z t_k} U_{k+1} (Z) + \frac{1}{Z t_k} D_{k+1} (Z)$$

Por lo que se ha determinado:

$$\begin{bmatrix} D_k (Z) \\ U_k (Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Z^{-1}}{t_k} & \frac{Z^{-1} r_k}{t_k} \\ \frac{Z r_k}{t_k} & \frac{Z}{t_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{k+1} (Z) \\ U_{k+1} (Z) \end{bmatrix} \quad \dots \text{LII}$$

relación que indica la dependencia entre las transformadas en "Z" de las ondas ascendentes y descendentes en el techo de una capa determinada "k" respecto a la capa "k+1".

Es evidente que tal relación es general y podríamos establecer una serie de matrices de comunicación para relacionar la transformada en "Z" de la primera capa respecto a una capa inferior determinada.

La matriz de comunicación entre la capa "0" y la capa "1" será:

$$\begin{bmatrix} D'_0(z) \\ U'_0(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_0} & \frac{r_0}{t_0} \\ \frac{r_0}{t_0} & \frac{1}{t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix} \quad \dots \text{LIII}$$

MODELO DE CAPA DE ESPESOR FINITO

En este ejemplo se suponen dos capas homogéneas e isotrópicas, en las cuales cuando la onda iniciante penetra al segundo medio, ya no existe reflexión.

La Fig. No. 12 ilustra el problema:

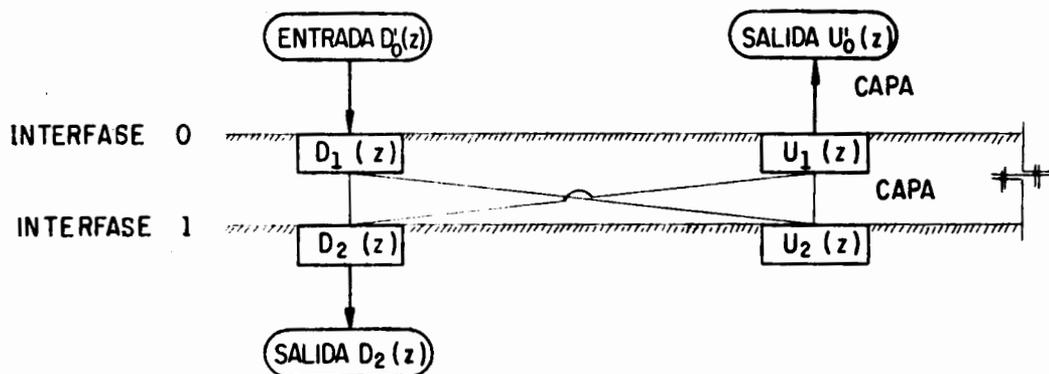


Fig 12 Representación esquemática de un modelo estratificado de dos capas

Consideramos que la transformada en "Z" de la onda o energía de excitación es:

$$D'_0(z) = d'_{00} z^0 + d'_{02} z^2 + d'_{04} z^4 + \dots = 1$$

por lo tanto, el sistema de comunicación en el dominio de la transformada "Z" será:

$$\begin{bmatrix} D_0'(Z) \\ U_0'(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_0} & \frac{r_0}{t_0} \\ \frac{r_0}{t_0} & \frac{1}{t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1(Z) \\ U_1(Z) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema entre capa "1" y "2" será:

$$\begin{bmatrix} D_1(Z) \\ U_1(Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^{-1}}{t_1} & \frac{r_1 z^{-1}}{t_1} \\ \frac{r_1 z}{t_1} & \frac{z}{t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(Z) \\ U_2(Z) \end{bmatrix}$$

pero ya indicamos que se ha supuesto la capa (2) como un semi espacio infinito, es decir:

$$U_2(Z) = 0$$

Entonces resolveremos finalmente el sistema de comunicación:

$$\begin{bmatrix} D_1(Z) \\ U_2(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{t_1} \begin{bmatrix} z^{-1} & r_1 z^{-1} \\ r_1 z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(Z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_0'(Z) \\ U_0'(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{t_0} \begin{bmatrix} 1 & r_0 \\ r_0 & 1 \end{bmatrix} t_1 \begin{bmatrix} z^{-1} & r_1 z^{-1} \\ r_1 z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(Z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales del ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U'_0(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{t_0 t_1} \begin{bmatrix} z^{-1} + r_0 r_1 z & r_1 z^{-1} + r_0 z \\ r_0 z^{-1} + r_1 z & r_0 r_1 z^{-1} + z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2(Z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U'_0(Z) \end{bmatrix} = \frac{1}{t_0 t_1} \begin{bmatrix} (z^{-1} + r_0 r_1 z) & D_2(Z) \\ (r_0 z^{-1} + r_1 z) & D_2(Z) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$1 = \frac{1}{t_0 t_1} (z^{-1} + r_0 r_1 z) D_2(Z)$$

$$\therefore D_2(Z) = \frac{t_0 t_1}{z^{-1} + r_0 r_1 z}$$

$$t_0 t_1 = (z^{-1} + r_0 r_1 z) D_2(Z)$$

$$"D_2(Z) = \frac{t_0 t_1 z}{1 + r_0 r_1 z^2} "$$

y entonces:

$$"U'_0(Z) = \frac{r_0 + r_1 z^2}{1 + r_0 r_1 z^2} " \quad \dots \text{ LIV}$$

$U'_0(Z)$  constituye la transformada en "Z" de la respuesta obtenida en un geófono situado en la superficie para una excitación normal impulsiva.

Para este modelo no se ha considerado absorción en el medio.

DECONVOLUCION PREDICTIVA:

Un método comúnmente utilizado en el tratamiento de la información geofísica es el proceso de deconvolución, medio por el cual es posible tratar una señal, y conocer su contenido de información, es decir, recuperar la señal deseada.

Podemos ilustrar el proceso de deconvolución como sigue:

sea: 
$$x_t = q_t * p_t$$

en donde:

$x_t$  = señal que contiene la información " $q_t$ "  
convuelta con datos perturbadores " $p_t$ "

" $q_t$ " = podría ser por ejemplo el contenido de los coeficientes de reflexión del subsuelo.

Entonces: en el dominio de la transformada "Z" tenemos:

$$X (Z) = Q (Z) P (Z) \quad \dots \text{LV}$$

El filtro " $f_t$ ", deberá de ser diseñado con el criterio de extraer la información " $q(t)$ ", es decir:

$$Y_t = x_t * f_t = q_t$$

esto es:

$$Y (Z) = X (Z) F (Z) = Q (Z) \quad \dots \text{LVI}$$

Sustituyendo (LV) en (LVI) tenemos:

$$Q (Z) P (Z) F (Z) = Q (Z) \\ P (Z) F (Z) = 1 \quad \dots \text{LVII}$$

Es decir, la convolución entre la señal disturbio " $p_t$ " y la función característica " $f_t$ " deberá proporcionarnos un impulso unitario de retardo cero.

Observando la expresión (LVII) bajo el criterio del filtro de Wiener, lo que requerimos es una señal deseada de longitud unitaria posicionada en  $\tau = 0$ .

Es decir, bajo el criterio de Wiener, tenemos:

$$d_t = 1, 0, 0, 0, \dots$$

$$p_t = p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$$

Por lo que el sistema de ecuaciones normales de Wiener proporciona:

$$\sum_{\tau=0}^{\tau=n-1} f_{\tau} \cdot \phi_{pp}(J-\tau) = \phi_{dp}(J) \quad \dots \text{LVIII}$$

O en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-3} \\ \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & \dots & \dots & \dots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \text{LIX}$$

En realidad, rigurosamente se obtiene:

$$\phi_{dp}(\tau) = \sum_t d_{t+\tau} \cdot p_t = p_0, 0, 0, 0, 0, \dots$$

que podemos escalar o normalizar como:

$$\phi_{dp}(\tau) = 1, 0, 0, 0, \dots$$

La solución del sistema de ecuaciones resultante de LIX nos proporciona el llamado filtro de deconvolución.

Es evidente que la aplicación práctica de LIX, implica el conocimiento de la función de Autocorrelación " $\phi_{pp}(\tau)$ " de los datos disturbios, que en realidad es desconocida, ya que solamente conocemos la señal " $X_t$ ". Sin embargo, demostraremos que bajo ciertas suposiciones consideradas llegamos a tener conocimiento de " $\phi_{pp}(\tau)$ " a partir de " $\phi_{xx}(\tau)$ ".

Se conoce que:

$$X_t = q_t * p_t$$

o en el dominio de T.Z:

$$X(Z) = Q(Z) \cdot P(Z)$$

La función de auto-correlación, en el dominio de la transformada "Z" es:

$$\phi_{xx}(Z) = X(Z) \overline{X(\overline{Z})} \quad ; \quad \overline{X(\overline{Z})} = X(1/Z)$$

$$\phi_{xx}(Z) = \begin{bmatrix} Q(Z) & P(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(1/Z) & P(1/Z) \end{bmatrix}$$

$$\phi_{xx}(Z) = \begin{bmatrix} Q(Z) & Q(1/Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(Z) & P(1/Z) \end{bmatrix}$$

$$\phi_{xx}(Z) = \phi_{qq}(Z) \phi_{pp}(Z) \quad \dots \text{LX}$$

Nuevamente en el dominio temporal, tenemos:

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{qq}(\tau) * \phi_{pp}(\tau)$$

Si partimos de la suposición de que:

$$\phi_{qq}(\tau) = \begin{cases} E & ; \quad \tau=0 \\ 0 & ; \quad \tau \neq 0 \end{cases}$$

Encontramos que:

$$\phi_{XX}(\tau) = \sum_t \phi_{qq}(t) \phi_{pp}(\tau-t) = E \phi_{pp}(\tau) \quad \dots \text{LXI}$$

o sea, las dos autocorrelaciones difieren en un factor de escala.

Ahora vamos a mostrar que el llamado filtro de predicción con distancia de predicción unitaria es en realidad un filtro de deconvolución:

El modelo general de filtrado es ilustrado en la figura No. 13:

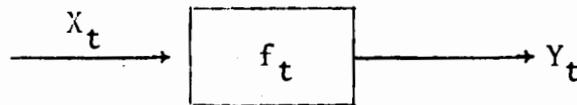


Fig 13

en donde:

$$Y_t = X_t * f_t \quad \dots \text{LXII}$$

si consideramos como salida del proceso del filtrado a:

$Y_t = \hat{X}_{t+a}$ , lo cual significa una estimación de " $X_t$ " en otra época futura, o bien una versión adelantada de " $X_t$ ".

Es evidente que existe una secuencia de errores, la cual es:

$$E_{t+a} = X_{t+a} - \bar{X}_{t+a} \quad \dots \text{LXIII}$$

Si sustituimos en LXIII la expresión LXII, tenemos:

$$E_{t+a} = X_{t+a} - \sum_t X_t f_{\tau-t}$$

que en el dominio de la transformada "Z", es:

$$Z^{-a} E(Z) = Z^{-a} X(Z) - X(Z) F(Z)$$

o sea:

$$E(Z) = X(Z) - Z^a X(Z) F(Z)$$

$$E(Z) = \left[ 1 - Z^a F(Z) \right] X(Z) \quad \dots \text{LXIV}$$

desde el punto de vista de un proceso de filtrado la expresión LXIV indica la presencia del llamado filtro de error de predicción:

Si  $f_t = f_0, f_1, f_2, f_3, \dots, f_{n-1}$ , son los coeficientes del filtro de predicción, tenemos que:

$$E_t = 1, 0, 0, 0, \dots, -f_0, -f_1, -f_2, -f_3 \dots -f_{n-1}$$

son los coeficientes del filtro de error de predicción.

Ahora demostraremos, que el filtro de error de predicción, con distancia de predicción " $a = 1$ ", es similar al filtro de deconvolución:

El diseño del filtro de Wiener para el filtro de predicción implica, el cálculo de las siguientes correlaciones:

$$\phi_{XX}(\tau) = \sum_t X_{t+\tau} X_t = r_n$$

$$\phi_{dX}(\tau) = \sum X_{t+a+\tau} X_t = r_{a+\tau} \quad \dots \text{LXV}$$

Luego en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-3} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & r_0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a \\ r_{a+1} \\ r_{a+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{a+n-1} \end{bmatrix} \quad \dots \text{ LXVI}$$

por lo que, para una distancia de predicción unitaria, queda:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-3} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & r_0 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ r_n \end{bmatrix} \quad \dots \text{ LXVII}$$

Expresando tal sistema en forma explícita y agregando al sistema original "-B", tenemos:

$$-r_0 + r_1 f_0 + r_2 f_1 + r_3 f_2 + r_4 f_3 + \dots + r_n f_{n-1} = -B$$

$$-r_1 + r_0 f_0 + r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 \dots + r_{n-1} f_{n-1} = r_1 - r_1$$

$$-r_2 + r_1 f_0 + r_0 f_1 + r_1 f_2 + r_2 f_3 + \dots + r_{n-2} f_{n-1} = r_2 - r_2$$

$$-r_3 + r_2 f_0 + r_1 f_1 + r_0 f_2 + r_1 f_3 \dots r_{n-3} f_{n-1} = r_3 - r_3$$

.

.

.

$$-r_n + r_{n-1} f_0 + r_{n-2} f_1 + r_{n-3} f_2 + \dots r_0 f_{n-1} = r_n - r_n$$

Lo que resulta:

$$r_0 - r_1 f_0 - r_2 f_1 - r_3 f_2 - r_4 f_3 - \dots - r_n f_{n-1} = B$$

$$r_1 - r_0 f_0 - r_1 f_1 - r_2 f_2 - r_3 f_3 - \dots - r_{n-1} f_{n-1} = 0$$

$$r_2 - r_1 f_0 - r_0 f_1 - r_1 f_2 - r_2 f_3 - \dots - r_{n-2} f_{n-1} = 0$$

$$r_3 - r_2 f_0 - r_1 f_1 - r_0 f_2 - r_1 f_3 - \dots - r_{n-3} f_{n-1} = 0$$

.

.

.

$$r_n - r_{n-1} f_0 - r_{n-2} f_1 - r_{n-3} f_2 - r_{n-4} f_3 - \dots - r_0 f_{n-1} = 0$$

que en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_n \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n & r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -f_0 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

... LXVIII

El filtro inverso normal o standard, "estrecha" la información disturbio, en un impulso situado en  $t=0$ .

Demostraremos a continuación que el filtro de predicción con distancia predictiva "a" estrecha la información disturbio de longitud "a+n" en una señal de longitud "a".

La ecuación matricial del filtro de predicción de longitud "n" y distancia predictiva "a" está dada por:

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & \dots & \dots & \dots & r_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_a \\ r_{a+1} \\ r_{a+2} \\ \dots \\ r_{a+n-1} \end{bmatrix} \dots \text{LXIX}$$

La cual suministra en forma de ecuaciones simultáneas el filtro de error de predicción, con distancia predictiva "a"; nótese la adición de otras ecuaciones al sistema original a fin de obtener el sistema de un filtro de error de predicción, luego entonces:

$$\begin{aligned} -r_0 \cdot 1 - r_1 \cdot 0 & \dots -r_{a+n-1} f_{n-1} = \rho_0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ -r_{a-2} \cdot 1 - r_{a-3} \cdot 0 & \dots -r_2 f_0 - r_3 f_1 - r_4 f_2 - r_5 f_3 - \dots - r_{n-1} f_{n-1} = -\rho_{a-2} \\ -r_{a-1} \cdot 1 - r_{a-2} \cdot 0 & \dots -r_1 f_0 - r_2 f_1 - r_3 f_2 - r_4 f_3 - \dots - r_n f_{n-1} = -\rho_{a-1} \\ -r_a \cdot 1 - r_{a-1} \cdot 0 & + \dots + r_0 f_0 + r_1 f_1 + r_2 f_2 + r_3 f_3 + \dots + r_{n-1} f_{n-1} = r_a - r_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -r_{a+1} \cdot 1 - r_a \cdot 0 + \dots + r_1 f_0 + r_0 f_1 + r_1 f_2 + r_2 f_3 + \dots + r_{n-2} f_{n-1} = r_{a+1} - r_{a+1} \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & -r_{a+n-1} \cdot 1 + \dots + r_{n-1} f_0 + r_{n-2} f_1 + r_{n-3} f_2 + \dots + r_0 f_{n-1} = r_{a+n-1} - r_{a+n-1}
 \end{aligned}$$

La ecuación matricial asociada es:

$$\begin{bmatrix}
 r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & \dots & r_{a+n-1} \\
 r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{a+n-2} \\
 r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{a+n-2} \\
 r_3 & r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & \dots & r_{a+n-3} \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 r_a & r_{a-1} & r_{a-2} & r_{a-3} & r_{a-4} & \dots & r_{n-1} \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 \cdot & & & & & & \\
 r_{a+n-1} & r_{a+n-2} & r_{a+n-3} & \dots & r_0 & & 
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 -a_0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 -a_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \rho_0 \\
 \rho_1 \\
 0 \\
 0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \rho_{a-1} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \dots \text{LXX}$$

Interpretando la ecuación anterior en términos del filtro de Wiener, tenemos que la matriz de autocorrelación, significa una señal fuente de longitud "a+n". Mientras que la señal deseada, debería de haber sido diseñada con una longitud de "a", puesto que no hay que olvidar que el vector de intercorrelación es precisamente entre la señal entrada y la señal deseada.

De acuerdo a lo anterior, el filtro de predicción suministra una forma más generalizada del proceso de deconvolución puesto que mediante su aplicación se puede gobernar el grado de resolución o contracción de las señales.

Estudio de un Modelo Marino de Dos Capas.- Ejemplo de Aplicación:

Sea que mediante el proceso de deconvolución predictiva se requiere eliminar la reverberación de primer orden, producida por la incidencia normal de un impulso unitario a un sistema de estratificación horizontal de dos capas, tal como lo ilustra la figura No. 14.

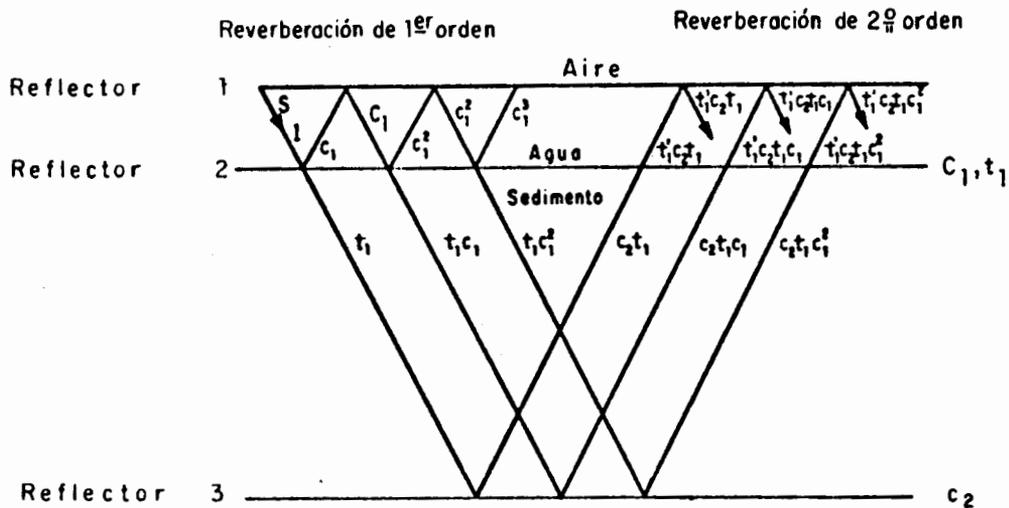


Fig 14 Reverberación de primero y segundo orden en un modelo marino

La transformada en "Z" de la reverberación de primer orden es:

$$R_1(Z) = 1 - C_1 Z^{\tau_1} + C_1^2 Z^{2\tau_1} - \dots \quad \dots \text{LXXI}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $C_1 Z^{\tau_1}$ , resulta:

$$C_1 Z^{\tau_1} R_1(Z) = C_1 Z^{\tau_1} - C_1^2 Z^{2\tau_1} + C_1^3 Z^{3\tau_1} - \dots$$

$$R_1(Z) + C_1 Z^{\tau_1} R_1(Z) = 1 \dots$$

$$R_1(Z) = \frac{1}{1 + C_1 Z^{\tau_1}} \quad \dots \text{LXXII}$$

que representa la transformada en "Z" de la reverberación del primer orden.

Busquemos ahora el filtro de predicción requerido para su eliminación:

Asumiremos que el tiempo de doble recorrido a través de la capa de agua sea " $\tau_1$ ", unidades de muestreo. Entonces la señal de entrada en el diseño del filtro será:

$$X_1(t) = 1, \underbrace{|0, 0, 0, \dots, 0|}_{\tau_1 - 1 \text{ ceros}}, -C_1, \underbrace{|0, 0, 0, 0, \dots, 0|}_{\tau_1 - 1 \text{ ceros}}, C_1^2, 0, 0$$

Con el objeto de obtener el filtro predictivo, es indispensable determinar la función de autocorrelación " $\phi_{XX}(\tau)$ ", la cual será:

$$r_\tau = 1 + C_1^2 + C_1^4 + \dots \quad \text{para } \tau=0$$

$$r_\tau = 0 \quad \text{para } 0 < \tau < \tau_1 \quad \text{y}$$

$$r_\tau = -C_1 - C_1^3 - C_1^5 + \dots = -C_1 (1 + C_1^2 + C_1^4 + \dots)$$

$$r_\tau = -C_1 r_0 \quad \text{para } \tau = \tau_1$$

Entonces la función de autocorrelación es:

$$r_\tau = E_X, 0, 0, 0, 0 \dots 0, -C_1 E_X, 0, 0, 0, \dots, C_1^2 E_X, 0, 0, 0 \dots \dots \text{LXXIII}$$

De donde el sistema de ecuaciones normales es:

$$\begin{vmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{n-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n-1} & r_{n-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & r_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_a \\ r_{a+1} \\ r_{a+2} \\ \dots \\ r_{a+n-1} \end{vmatrix}$$



ALGUNOS ASPECTOS DEL FILTRADO POR VELOCIDAD:

En el procesado de datos sísmicos, sobre todo en el V.S.P., además de su uso en los métodos de prospección gravimétrica y magnética, el filtrado por velocidad ha adquirido especial importancia por su capacidad o propiedad de eliminar o rescatar aquellos eventos de velocidad o dirección que por alguna circunstancia son de interés particular.

El filtro de velocidad, llamado también "Fan", se representa en el dominio del plano  $[f,k]$  por la expresión siguiente:

$$Y(f,k) = \begin{cases} +1; & -\frac{|f|}{v} \leq k \leq \frac{|f|}{v} \\ 0; & \text{para cualquier otro valor de } k \end{cases} \quad \dots \text{LXXV}$$

en donde:

"f" es la frecuencia temporal, "k" la frecuencia espacial y "v" es la velocidad de un evento sísmico determinado.

Observemos su forma en el plano  $|f,k|$ ; por medio de la figura No. 15.

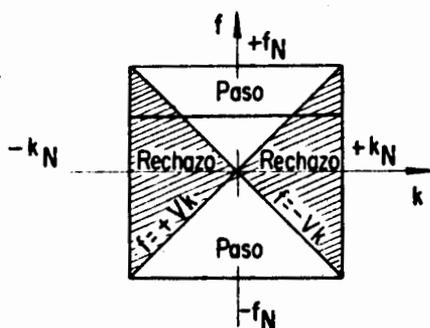


Fig 15 La función de transferencia del filtro de recuperación en el plano (f, k) Es evidente que su aplicación consiste en pasar eventos de velocidad de la traza sísmica comprendidos en la zona achurada de la figura anterior.

Podríamos también diseñar el filtro de velocidad complementario, es decir, rechazar eventos de velocidad comprendidos en la misma zona.

Para determinar la función característica del filtro en el dominio del plano  $[\bar{t}, x]$ , usaremos por supuesto la doble transformada de Fourier, esto es:

$$Y(t, x) = \int_{-f_N}^{+f_N} \int_{K=-\frac{|f|}{v}}^{K=\frac{|f|}{v}} c 2\pi i (ft - Kx) dk df$$

en donde:

" $f_N$ " indica la frecuencia de Nyquist:

$$f_N = \frac{1}{2\Delta T} ; \quad \Delta T \approx \text{intervalo de muestreo en la traza sísmica}$$

En la solución de la integral anterior tendremos que usar evidentemente datos discretos, puesto que en la práctica únicamente conocemos la amplitud de la traza sísmica a cierto intervalo temporal ( $\Delta T$ ) y por otra parte se está muestreando en diferentes sitios el desplazamiento del terreno por medio de cada una de las trazas sísmicas, tal como se ilustra en la figura No. 16

INDICE  $m$            ....., -2   -1   0   0   +1   +2,.....

INDICE  $\mu = -l, \dots, -5$    3   1   1   3   5, ..... , +l



Fig 16 Disposición de los sismo - detectores para el diseño del filtrado de velocidad

$X_m$   $\approx$  distancia desde el centro del arreglo a cualquier sismo-detector

$\Delta_x$   $\approx$  distancia entre los sismo-detectores

$M$   $\approx$  número total de estaciones de detección

$T_n$   $\approx$  valor discreto de una determinada traza sísmica para un cierto incremento temporal.

Por lo tanto, la solución de la integral anterior es:

$$Y(T_n, X_m) = \int_{-f_N}^{f_N} \int_{K=-\frac{|f|}{v}}^{K=\frac{|f|}{v}} e^{2\pi i f T_n} \cdot e^{-2\pi i K X_m} dK df$$

Resolviendo primero para la variable espacial, tenemos:

$$Y(f, X_m) = \int_{K=-\frac{|f|}{v}}^{K=\frac{|f|}{v}} e^{-2\pi i K X_m} dK$$

$$Y(f, X_m) = \frac{1}{\pi X_m} \text{Sen} \left[ 2\pi \frac{|f|}{v} X_m \right]$$

Considerando ahora la otra variable de integración tendremos:

$$Y(T_n, X_m) = \int_{-f_N}^{f_N} e^{2\pi i f T_n} \cdot \frac{\text{Sen} \left[ 2\pi X_m \frac{|f|}{v} \right]}{\pi X_m} df$$

y si recordamos que:

$$T_n = n \Delta T \quad \text{y} \quad v = \frac{\Delta X}{\Delta T}$$

podremos demostrar que la función filtro en el dominio de la variable temporal y espacial es:

$$Y(T_n, X_m) = \frac{1}{\pi^2 \left[ \left( \frac{X_m}{\Delta X} \right)^2 - n^2 \right]} \quad \dots \text{LXXVI}$$

Es conveniente efectuar un cambio de notación para manipular más fácilmente al operador:

recordemos el arreglo de sismo-detectores dispuesto en la figura No. 16.

Ordenamos cada uno de los detectores por medio de una numeración impar, considerando un signo positivo o negativo según la posición relativa del sismo-detector respecto al centro del arreglo, es decir:

$$\mu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9 \dots$$

es evidente que:

$$\frac{\mu}{2} = \frac{X_m}{\Delta X} \dots \text{LXXVII}$$

introduciendo tal igualdad en la ecuación No. LXXVI obtenemos:

$$Y(n, \mu) = \frac{1}{\pi^2 \left[ \frac{\mu^2}{4} - \eta^2 \right]} \dots \text{LXXVIII}$$

La cual podría escribirse como:

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi^2 \left[ \frac{\mu^2}{4} - \eta^2 \right]} \dots \text{LXXIX}$$

$$\mu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9, \dots \pm P$$

$$\eta = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5 \dots$$

por el tipo de notación adoptada es evidente que:

$$M = P + 1$$

en donde:

"M" es el número total de trazas sísmicas que es par, puesto que "P" es impar.



La señal resultante "h<sub>n</sub>", que se obtiene por el filtrado de velocidad sobre las "M" trazas individuales, puede escribirse en la forma:

$$h_n = \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} v_n^\mu * Y_n^\mu$$

es decir:

$$h_n = \dots v_n^{-3} * Y_n^{-3} + v_n^{-1} * Y_n^{-1} + v_n^{+1} * Y_n^{+1} + v_n^{+3} * Y_n^{+3} + \dots$$

en donde:

"v<sub>n</sub>" indica el muestreo de una traza sísmica determinada.

Entonces el resultado obtenido sería una señal "h<sub>n</sub>" que obtendremos como la suma de "M" convoluciones con "M" trazas sísmicas.

El filtro de velocidad es una función par, esto es:

$$Y_n^\mu = Y_n^{-\mu}$$

entonces es factible reducir el tiempo de cálculo a la mitad usando tal propiedad:

$$h_n = \dots (v_n^{-3} + v_n^{+3}) * Y_n^3 + (v_n^{-1} + v_n^{+1}) * Y_n^1 + \dots$$

o en forma general:

$$h_n = \sum_{\mu=1}^{\mu=P} (v_n^{-\mu} + v_n^{+\mu}) * Y_n^\mu$$

μ = siempre impar

Aún es posible reducir el número de convoluciones de  $\frac{"M"}{2}$  a una sola, usando el algoritmo desarrollado por S. TREITEL, J.L. SHANKS y W. FRASLER. El procedimiento es el siguiente:

Se demuestra que:

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi\mu} \left[ \frac{1}{\frac{\mu}{2} - n} + \frac{1}{\frac{\mu}{2} + n} \right] \quad \dots \text{LXXX}$$

y nombrando:

$$r_n^\mu = \frac{1}{\frac{\mu}{2} - n} \quad \text{y} \quad q_n^\mu = \frac{1}{\frac{\mu}{2} + n}$$

podemos escribir:

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi^2\mu} \left[ r_n^\mu + q_n^\mu \right] \quad \dots \text{LXXXI}$$

existe la posibilidad de relacionar a  $r_n^\mu$  con  $q_n^\mu$ , puesto que se puede demostrar:

$$r_{n+\mu}^\mu = \frac{1}{-\frac{\mu}{2} - n} = -q_n^\mu$$

usando tal consideración el operador tendrá la siguiente expresión:

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi^2\mu} \left[ r_n^\mu - r_{n+\mu}^\mu \right] \quad \dots \text{LXXXII}$$

Hasta el momento la función filtro  $Y_n^\mu$  deberá de ser valuada para cada valor que adquiriera la variable  $\mu$ . Sin embargo es factible hacer uso de la siguiente consideración y escribir:

$$r_{n - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{\frac{1}{2} - n + \frac{\mu}{2} - \frac{1}{2}}$$

$$r_{n - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{\frac{\mu}{2} - n}$$

Entonces:

$$r_{n-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}}^1 = r_n^\mu$$

y luego el operador puede escribirse como:

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi^2 \mu} \left[ r_{n-\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}}^1 - r_{n+\frac{\mu}{2}+\frac{1}{2}}^1 \right]$$

por lo que:

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi^2 \mu} \left[ r_{n-\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}^1 - r_{n+\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}^1 \right] \quad \dots \text{LXXXIII}$$

si sustituimos la expresión No. LXXXIII en la ecuación de convolución obtenemos:

$$h_n = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} \frac{1}{\mu} v_n^\mu * \left[ r_{n-\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}^1 - r_{n+\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}^1 \right] \quad \dots \text{LXXXIV}$$

puesto que la convolución es independiente de cual señal sea la trasladada temporalmente, podemos entonces escribir:

$$h_n = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} \frac{1}{\mu} \left[ v_{n-\frac{\mu-1}{2}}^\mu * r_n^1 - v_{n+\frac{\mu+1}{2}}^\mu * r_n^1 \right]$$

y por consiguiente:

$$h_n = \frac{1}{\pi^2} r_n^1 * \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} \frac{1}{\mu} \left[ v_{n-\frac{\mu-1}{2}}^\mu - v_{n+\frac{\mu+1}{2}}^\mu \right] \quad \dots \text{LXXXV}$$

en donde:

$$r_n^1 = \frac{1}{\frac{1}{2} - n} \quad \dots \text{LXXXVI}$$

La expresión No. LXXXV expresada en términos de la transformada "Z" sería de la forma:

$$H(Z) = \frac{1}{\pi^2} R(Z) \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} \frac{1}{\mu} \left[ v_n^\mu \cdot Z^{\frac{\mu-1}{2}} - v_n^\mu Z^{-\frac{\mu+1}{2}} \right]$$

Esto es:

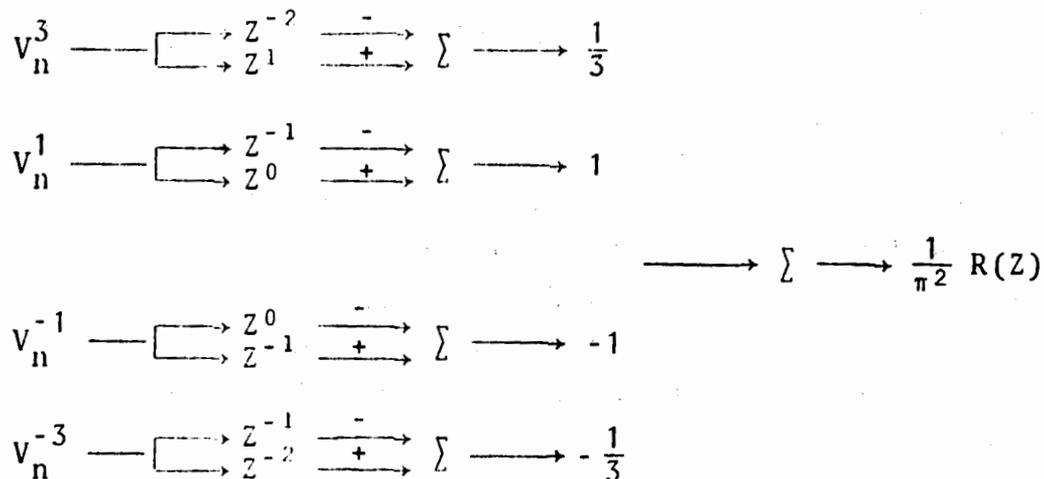
$$H(Z) = \frac{1}{\pi^2} R(Z) \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} \frac{1}{\mu} v_n^\mu(Z) \left[ Z^{\frac{\mu-1}{2}} - Z^{-\frac{\mu+1}{2}} \right] \dots \text{LXXXVII}$$

Como indica la expresión No. LXXXVII, ahora el proceso de filtrado por velocidad ha sido reducido a una sola convolución, lo cual evidentemente reduce en mucho el tiempo de cálculo.

Suponiendo por ejemplo que el número de trazas sísmicas sea igual a cuatro, es decir,  $M=4$ , el proceso de filtrado por velocidad estará dado en el dominio de la transformada  $Z$  por:

$$H(Z) = \frac{1}{\pi^2} R(Z) \left\{ \frac{v_n^{-3}(Z)}{-3} (Z^{-2} - Z^{-1}) + \frac{v_n^{-1}(Z)}{-1} (Z^{-1} - Z^0) + \frac{v_n^1(Z)}{1} (Z^0 - Z^{-1}) \right. \\ \left. + \frac{v_n^3(Z)}{3} (Z^1 - Z^2) \right\}$$

La cual en forma esquemática será:



Como puede notarse el algoritmo estudiado reduce el tiempo de cálculo, ya que únicamente es necesario adelantar o retardar temporalmente las trazas sísmicas y efectuar solamente una convolución, con la función filtro,  $r'_n$  en donde:

$$r'_n = \frac{1}{\frac{1}{2} - n}$$

o bien en el dominio de T.Z como:

$$R(Z) = \sum_n \frac{1}{\frac{1}{2} - n} Z^n \quad \dots \text{LXXXVIII}$$

se demuestra que la función filtro  $r'_n$  es antisimétrica respecto a un eje situado en  $n = \frac{1}{2}$  y esto significa que para una señal de entrada determinada, el filtro suministra una respuesta retardada temporalmente igual a  $1/2$  el intervalo de muestreo seleccionado y un traslado de fase igual a  $90^\circ$  para todas las frecuencias contenidas en la señal de entrada.

El filtro, calculando algunos términos, podría expresarse como:

$$R(Z) = \dots 0.2857Z^{-3} + 0.4Z^{-2} + 0.6666Z^{-1} + 2Z^0 - 2Z^1 - 0.6666Z^2 - 0.4Z^3 - 0.2857Z^4 \dots$$

TREITEL sugiere que un resultado satisfactorio se obtiene usando 22 pesos del filtro.

### El filtro de Rechazo:

La función de transferencia del filtro de velocidad en el plano  $[f, k]$  ha sido diseñada para recuperar aquellos eventos grabados en una traza sísmica cuyo rango de velocidad se encuentre comprendido entre  $-V$  y  $+V$ . En algunos casos es deseable considerar la operación complementaria, es decir, rechazar aquellos eventos comprendidos entre  $-V$  y  $+V$ .

La función de transferencia en el plano  $[f, k]$  del filtro de rechazo por velocidad sería:

$$W(f, k) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\frac{f}{V} \leq K \leq +\frac{f}{V} \\ 1 & ; \quad \text{en cualquier otra posición} \end{cases} \quad \dots \text{LXXXIX}$$

En forma gráfica, la figura No. 17 muestra la zona de rechazo en achurado.

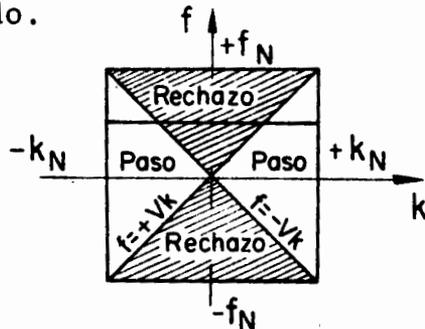


Fig 17 Esquema del filtro de rechazo en el plano  $[f, k]$

Es evidente que existe una relación entre la función característica del filtro de rechazo "W(f,k)" y el filtro de recuperación. "Y(f,k)", por medio de la expresión siguiente:

$$W(f, k) = A(f, k) - Y(f, k) \quad \dots \text{XC}$$

en donde:

A(f,k) es la representación en el dominio del plano  $[f, k]$  de la celda completa, es decir:

$$W(f, k) = \begin{cases} 1 & ; \quad f_N \leq f \leq f_N \\ 1 & ; \quad K_N \leq K \leq K_N \end{cases}$$

en donde:

$f_N$  = frecuencia de Nyquist temporal

$K_N$  = frecuencia de Nyquist espacial

$$f_N = V K_N$$

Entonces en el dominio del plano  $[\bar{t}, \bar{x}]$  el filtro de rechazo podremos expresarlo como:

$$\omega(T_n, X_m) = \int_{-f_N}^{+f_N} \int_{-K_N}^{+K_N} e^{2\pi i (f T_n - K X_m)} df dk$$

$$= \int_{-f_N}^{+f_N} \int_{-\frac{f}{K}}^{+\frac{f}{K}} e^{2\pi i (f T_n - K X_m)} df dK \quad \dots \text{ XCI}$$

Nombrando:

$$\omega(T_n, X_m) = I_1 - I_2$$

en donde:

$$I_1 = \int_{-f_N}^{+f_N} \int_{-K_N}^{+K_N} e^{2\pi i (f T_n - K X_m)} df dK$$

$$I_2 = \int_{-f_N}^{+f_N} \int_{-\frac{f}{K}}^{+\frac{f}{K}} e^{2\pi i (f T_n - K X_m)} df dK$$

Puesto que "I<sub>2</sub>" es la integral ya determinada cuyo resultado es:

$$I_2 = \frac{1}{\Delta T \Delta X} \frac{1}{n^2 \left[ \left( \frac{X_m}{\Delta X} \right)^2 - n^2 \right]} \quad \dots \text{ XCII}$$

mientras que para " $l_1$ " encontramos:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta T \Delta X} \cdot \frac{\text{sen } \pi \left( \frac{T_n}{\Delta T} \right)}{\pi T_n} \cdot \frac{\text{sen } \pi \left( \frac{X_m}{\Delta X} \right)}{\pi X_m} \quad \dots \text{XCIII}$$

si como anteriormente reemplazamos

$$\frac{\mu}{2} = \frac{X_m}{\Delta X} \quad \text{y} \quad T_n = n \Delta T$$

tenemos que:

$$I_1 = \frac{1}{\Delta T \Delta X} \frac{\text{sen } \pi n}{\pi n} \cdot \frac{\text{sen } \pi \frac{\mu}{2}}{\pi \frac{\mu}{2}}$$

Ahora usando XCII y XCIII, podemos finalmente escribir la función de transferencia como:

$$\omega(T_n, X_m) = \frac{\text{sen } n\pi}{n\pi} \cdot \frac{\text{sen } \pi \frac{\mu}{2}}{\pi \frac{\mu}{2}} \cdot \frac{1}{\pi^2 \left[ \left( \frac{X_m}{\Delta X} \right)^2 - \eta^2 \right]} \quad \dots \text{XCIV}$$

nótese que se ha considerado en la expresión No. XCIV un muestreo temporal y espacial unitario.

Si nombramos:

$$a_n^\mu = \frac{\text{sen } n\pi}{\pi n} \cdot \frac{\text{sen } \pi \frac{\mu}{2}}{\pi \frac{\mu}{2}}$$

$$Y_n^\mu = \frac{1}{\pi^2 \left[ \left( \frac{X_m}{\Delta X} \right)^2 - \eta^2 \right]}$$

Luego:

$$\omega_n^\mu = a_n^\mu - Y_n^\mu$$

Es evidente que  $a_n^\mu = 0$ ,  $\forall n \neq 0$ , puesto que

$$\frac{\text{sen } n\pi}{n\pi} = \delta_n ; \quad \delta_n = \begin{cases} 1 ; & n=0 \\ 0 ; & n \neq 0 \end{cases} \quad \dots \text{ XCV}$$

en donde:

" $\delta_n$ " es la llamada impulsión de DIRAC.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, podemos escribir:

$$a_n^\mu = a_0^\mu = \frac{\text{sen } \pi \frac{\mu}{2}}{\pi \frac{\mu}{2}}$$

y entonces el filtro de rechazo es:

$$\omega_n^\mu = a_0^\mu - Y_n^\mu \quad \dots \text{ XCVI}$$

Consideremos ahora la señal resultante del proceso de filtrado por medio del operador de rechazo y nombrando " $g_n$ " la señal de salida, tenemos:

$$g_n = \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} V_n^\mu * \omega_n^\mu$$
$$g_n = \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} V_n^\mu * (a_0^\mu - Y_n^\mu)$$

o sea:

$$g_n = \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} V_n^\mu * a_0^\mu - \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} V_n^\mu * Y_n^\mu \quad \dots \text{ XCVII}$$

Sin embargo  $a_0^\mu$  es una expresión que no depende de la variable temporal, es decir, de "n". Luego tenemos:

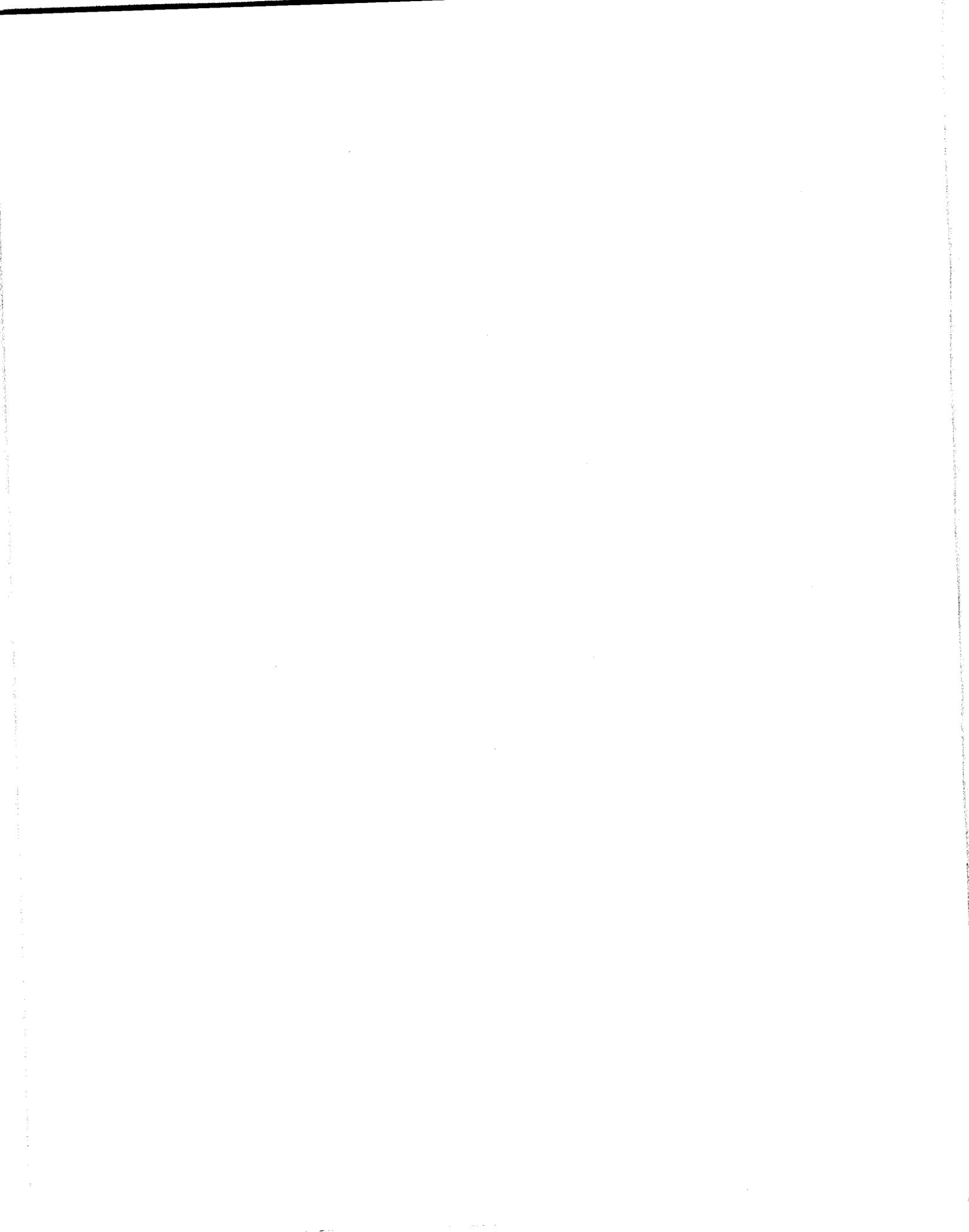
$$g_n = \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} a_0^\mu V_n^\mu - h_n$$

$$g_n = \sum_{\mu=-P}^{\mu=+P} \frac{\text{sen } \pi \frac{\mu}{2}}{\pi \frac{\mu}{2}} V_n^\mu - h_n \quad \dots \text{XCVIII}$$

en donde:

$h_n$  corresponde a la salida del operador de pase, esto es, el filtro de recuperación.

El proceso geofísico mencionado anteriormente reduce considerablemente el tiempo de cómputo usado comúnmente en el filtrado por velocidad. TREITEL indica que aún es posible aumentar la rapidez del algoritmo determinando los filtros recursivos correspondientes al operador de rechazo y al operador de recuperación.



## BIBLIOGRAFIA

- BATH, M., 1974. Spectral Analysis in Geophysics: Elsevier Scientific Publishing Company.
- BEAUCHAMP, K.G. and YUEN, C.K., 1979. Digital Methods for Signal Analysis: George Allen and Unwin LTD.
- BRIGHAM, O.E. and MORROW, 1967. The Fast Fourier Transform: IEEE Spectrum, 4, 63-70.
- HWEI, P.H., 1970. Fourier Analysis: Simon and Schuster, New York.
- LEE, W.Y., 1960. Statistical Theory of Communication: John Wiley and Sons, Inc.
- LIFERMANN, J., 1977. Theorie et Applications de la Transformation de Fourier Rapide: Masson, Paris, Francia.
- OPPENHEIM, V.A., 1975. Digital Signal Processing: Prentice-Hall Inc.
- ROBINSON and SILVIA, 1981. Digital Foundations of Time Series Analysis: Holden Day.

Este libro se terminó de imprimir  
en mayo de 1985, siendo Jefe de  
la DEPMI, el Dr. Rolando Springall  
Galindo, y de la Sección Editorial,  
la Lic. Eugenia M. de Lizalde.

Tiraje: 200 ejs.

F-DEPFI/D-54/1985/Ej.5



711481

