

**CAMBIOS QUE SUFRE UN RIO AGUAS ABAJO
DE GRANDES PRESAS**

J. ANTONIO MAZA ALVAREZ

Profesor de la División de Estudios de Posgrado
de la Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Jefe de la Unidad de Estudios de
Ingeniería Civil
Comisión Federal de Electricidad

México, D.F., Noviembre de 1988

D - 83

T-DEPFI

D-83

1988

E.8



DEPFI

PROLOGO

Este trabajo es el resultado de las pláticas que di en Sao Paulo, Brasil, en 1986, dentro del curso "Assoreamento de reservatorios e erosão do leito a jusante de barragens", que fue uno de los cuatro que se ofrecieron la semana anterior al XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica.

Los temas aquí tratados forman una unidad y abarcan los principales aspectos relacionados con la erosión y el cambio morfológico que sufre un río aguas abajo de presas.

Como cada capítulo cubre en forma didáctica el tema tratado, resultan útiles a los alumnos de posgrado que cursan las materias de Hidráulica Fluvial y el seminario de Hidráulica Fluvial. Así, el capítulo 2 se refiere a una parte del "Diseño de canales sin arrastre"; el tercero, a "Inicio de transporte de movimiento"; los capítulos 4 y 5, a "Cauces estables" y el sexto queda incluido en el tema de "Erosión".

Agradezco al Prof Giorgio Brighetti, el Coordinador del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, su amable invitación para impartir este curso. Asimismo, mi agradecimiento a los Ings Javier Espinoza, Manuel García y Moisés Berezowsky por sus comentarios y la revisión en la que participaron en forma entusiasta y desinteresada.

Las figuras fueron elaboradas en la sección de dibujo del Instituto de Ingeniería, a quien reconozco su calidad, así como su paciencia para mis urgencias y múltiples cambios.

La corrección de estilo se debe a la Sra Lia Cabib, quien tuvo la paciencia de leer el manuscrito. Las diferentes versiones mecanográficas fueron hechas por la Srita Gloria Cadena. A las dos, gracias por su ayuda y colaboración.

J. Antonio Maza Alvarez

México, D.F.

Noviembre de 1988

1. INTRODUCCION	1
1.1 Contenido y desarrollo del trabajo	5
1.2 Bibliografía	6
2. SECCION ESTABLE AL CESAR EL MOVIMIENTO DE LAS PARTICULAS	11
2.1 Equilibrio de una partícula	13
2.2 Variación del esfuerzo cortante que ejerce el flujo	17
2.3 Forma de la sección transversal	18
2.4 Dimensiones máximas de la sección	20
2.5 Area de la sección transversal	22
2.6 Perímetro mojado de la sección transversal	23
2.7 Experiencias de laboratorio	24
2.7.1 Area de la sección	25
2.7.2 Ancho de la sección	25
2.7.3 Profundidad máxima de la sección	26
2.7.4 Pendiente hidráulica	26
2.8 Relación ancho-tirante	27
2.9 Comentarios	29
2.10 Bibliografía	29

3. ACORAZAMIENTO DEL MATERIAL DEL FONDO	33
3.1 Método de Gessler	36
3.1.1 <i>Material de la coraza</i>	36
3.1.2 <i>Material arrastrado</i>	39
3.1.3 <i>Coefficiente de estabilidad</i>	40
3.2 Secuencia de cálculo del método de Gessler	43
3.3 Simplificaciones para obtener el acorazamiento máximo	47
3.4 Bibliografía	48
4. ESTABILIDAD DE CAUCES	53
4.1 Grados de libertad	54
4.2 Tipos de estabilidad	55
4.3 Gasto formativo	55
4.4 Presentación de métodos	57
4.4.1 <i>Método de Lacey</i>	57
4.4.2 <i>Criterio de Maza y Cruickshank</i>	60
4.4.2.1 <i>Fórmulas fundamentales para material arenoso</i>	60
4.4.2.2 <i>Fórmulas de diseño para material arenoso</i>	67
4.5 Comparación de métodos	72
4.6 Comentarios generales	74
4.7 Bibliografía	75
5. ESTABILIDAD DE UN RIO AGUAS ABAJO DE LAS PRESAS	77
5.1 Procedimiento general	78
5.2 Procedimiento simplificado	79
5.2.1 <i>Grupo B</i>	79
5.2.2 <i>Grupo A</i>	80
5.2.3 <i>Método de Lacey</i>	81
5.3 Comentarios	82
5.4 Bibliografía	84

6. EROSION AGUAS ABAJO DE LAS PRESAS	85
6.1 Cambios morfológicos y erosión aguas abajo de las presas	87
6.1.1 Ecuaciones de diseño	87
6.1.2 Cálculos preliminares	87
6.1.3 Hipótesis	89
6.1.4 Cálculo de la erosión	90
6.1.5 Comentarios adicionales	96
6.2 Acorazamiento en el fondo	97
6.3 Modelo matemático a partir de ecuaciones diferenciales	99
6.3.1 Ecuaciones que gobiernan el fenómeno	100
6.3.2 Ecuaciones complementarias	101
6.3.3 Esquema numérico de discretización	103
6.3.4 Procedimiento de solución	110
6.4 Aplicación y conclusiones	112
6.4.1 Hipótesis y condiciones de cálculo	112
6.4.2 Resultados obtenidos	113
6.4.3 Comentarios y conclusiones	113
6.5 Bibliografía	115
7. COMENTARIO FINAL	132

1. INTRODUCCION

Las presas, una de las obras de ingeniería de mayor provecho para el hombre, son causa de notables cambios y modificaciones en los ríos donde son construidas. En general, puede decirse que en el embalse y en el tramo de río aguas arriba ocurren diferentes procesos de sedimentación, mientras que aguas abajo de la cortina tienen lugar procesos erosivos, además de cambios morfológicos a lo largo del cauce principal. En este trabajo sólo se tratarán los fenómenos que ocurren en un río, aguas abajo de un embalse (tablas 1.1 y 1.2 y fig 1.1); entre ellos, los más importantes son:

- a. Erosión local al pie de la descarga de la obra de toma y, principalmente, de la de excedencias.
- b. Descenso del fondo del río a lo largo del tramo inmediato aguas abajo de la cortina.
- c. Cambios morfológicos del cauce principal.

a. Erosión local al pie de descargas.

Esta erosión es producida, tanto en el fondo como en las laderas del cauce, principalmente por las descargas de las obras de excedencias y, en menor grado, por las de las obras de toma. Las obras de excedencias pueden descargar directamente al río y a muy diferentes elevaciones, ya sea a través de deflectores, saltos de sky, caídas directas, tanques amortiguadores o descargas a nivel del río con o sin dientes deflectores, etc. Aunque se han propuesto algunas fórmulas para cuantificar la profundidad de la erosión producida por los saltos de sky, caídas directas de chorros concentrados sobre material no cohesivo, o flujos con alta velocidad cuando estos abandonan una zona revestida de concreto y entran en contacto con material suelto, la práctica normal para evaluar las erosiones locales es por medio de un modelo hidráulico. Esto se debe a que nunca existen dos descargas idénticas y a la cantidad de variables que intervienen en el fenómeno: gasto descargado, geometría de la obra de excedencias, velocidad del agua en la descarga, forma del chorro o del flujo al entrar nuevamente al río, granulometría del material del fondo del río, fracturamiento del maciso rocoso que forma las laderas y subyace al sedimento del río, características hidráulicas y geométricas del río, topografía del sitio, etc.

En un modelo hidráulico se representan con relativa facilidad y precisión la mayoría de las variables mencionadas y, además, su respuesta es también confiable. El modelo que se utiliza normalmente es de Froude, no distorsionado y de fondo móvil.

No se tratará aquí la erosión local por no ser el tema de este trabajo.

b. Descenso del fondo del río a lo largo del primer tramo aguas abajo de la cortina.

Esto es lo que comúnmente se conoce con el nombre genérico de EROSION AGUAS ABAJO DE PRESAS; se produce cuando las descargas de la presa están libres de sedimentos mayores de 0.062 mm y, por tanto, las partículas del fondo del río transportadas aguas abajo no son reemplazadas por otras que vengan de aguas arriba. La erosión indicada ocurre en lo que se denominará "primer tramo" del río aguas abajo de la presa.

En otras palabras, al terminar la construcción de la presa o, mejor dicho, al terminar el cierre de la obra de desvío, el tramo del río inmediato aguas abajo es el mismo que antes de la construcción y conserva su misma geometría y pendiente. Cuando posteriormente se descarga un cierto gasto, la corriente que se forma en el río tiene una determinada capacidad de transporte del material del fondo. Ese material transportado no se sustituye con el sedimento que

provenza del embalse sino que se toma del fondo de las primeras secciones del río, con lo que se produce un descenso paulatino del mismo. Ese descenso o erosión es mayor en las secciones inmediatas aguas abajo de la descarga y disminuye hacia aguas abajo hasta una sección que permanece "inalterada", en cuanto a esta erosión se refiere (fig 1.2 y tabla 1.1).

Con el transporte de sedimentos ocurre lo contrario, ya que tiende a ser mínimo o casi no existir en la primera sección aguas abajo de la descarga, y aumenta progresivamente hasta alcanzar su mayor valor en la primera sección inalterada, para permanecer constante aguas abajo de ella.

Hacia aguas abajo de esa primera sección inalterada, se considera que el material del cauce y la pendiente no varían, por lo que, si el gasto es constante, también lo es el transporte de sedimentos; es decir, hay continuidad en el transporte líquido y sólido. Al tramo donde no ocurre la erosión señalada se le denomina "segundo tramo" del río aguas abajo de la presa.

La erosión descrita se produce lenta y continuamente durante la vida de la presa, mientras la corriente que produce las descargas en el río tenga capacidad para transportar el material del fondo. Por tanto, el tramo afectado por este proceso erosivo, o primer tramo, aumenta en longitud también en forma continua y gradual, así como el descenso del fondo en cada una de las secciones del tramo afectado (fig 1.2). Por lo indicado se concluye que la erosión es máxima en la primera sección aguas abajo de la descarga y que disminuye hacia aguas abajo hasta la primera sección inalterada o no erosionada, la cual se desplaza paulatinamente hacia aguas abajo, señalando el principio del segundo tramo.

La erosión aguas abajo de presas depende principalmente de los gastos descargados, de su variación y permanencia, de las propiedades físicas del material del fondo y en consecuencia del transporte de sedimentos que tiene lugar en el tramo inalterado.

El cálculo del proceso erosivo, aunque complejo, puede llevarse a cabo con facilidad, siempre y cuando el sedimento sea el mismo a lo largo del tramo y en las profundidades afectadas por la erosión, y además si ese material es no cohesivo y la desviación estándar geométrica de sus tamaños es menor que 3.

Ese proceso se complica notablemente y, por tanto, su determinación analítica, cuando la erosión descubre materiales con diferentes granulometrías y cuando se acoraza el material del fondo o el de los estratos descubiertos por la erosión. Si en todo el tramo y en toda la profundidad el material es el mismo, pero la granulometría es extendida o bien graduada -por lo que puede acorazarse-, se debe tomar en cuenta la condición crítica máxima, ya que sólo los gastos que la sobrepasen destruyen la coraza y producen transporte de sedimentos. En algunos ríos donde esto ocurre, sólo hay transporte de sedimentos, y en consecuencia erosión, cuando se descargan grandes gastos por el vertedor. Para

las descargas pequeñas de la obra de excedencias o de la obra de toma, el fondo acorazado impide el transporte de sedimentos y la erosión del fondo.

El principal obstáculo al que hay que hacer frente al estudiar la erosión aguas abajo de embalses es la falta de observaciones sistemáticas y completas.

Existe otro fenómeno que afecta tanto al tramo mencionado como a todo el río y que se manifiesta claramente hasta donde confluye el primer afluente de importancia. Este fenómeno se describe a continuación (tablas 1.1 y 1.2).

c. Cambios morfológicos del cauce principal.

Las características geométricas de la sección de un tramo de un río y su pendiente son función de los gastos que por ella escurren y de su distribución anual, de las propiedades físicas del material del fondo y las orillas, así como del transporte de los sedimentos que pasa por dicho tramo. Al tener en mente lo expuesto se distinguen dos tramos del río aguas abajo de un embalse. El primero, donde ocurre la erosión tratada en el punto b), y el segundo, al que se ha denominado "inalterado", en cuanto a la erosión de fondo se refiere, y que se encuentra aguas abajo del primero (fig 1.1). La formación del embalse por la construcción de la presa, la regulación que tiene sobre los escurrimientos—principalmente durante la época de lluvias y grandes avenidas—, y las extracciones ya sea para riego o generación hidroeléctrica, modifican el hidrograma anual de los escurrimientos aguas abajo de la cortina, lo que cambia el gasto formativo aguas abajo de la presa. Dicha modificación repercute en un cambio en la geometría de las secciones y de la pendiente a todo lo largo del río, pero principalmente en los dos tramos mencionados (tablas 1.1 y 1.2).

Por lo señalado, en el segundo tramo puede haber una alteración notable de la geometría del cauce y, en menor grado, una modificación de la pendiente, ya que esta última requiere de mucho tiempo para producirse.

En el primer tramo, en cambio, la modificación es más compleja ya que, por un lado, hay un nuevo gasto formativo y, por otro, el gasto sólido varía de una sección a otra, desde un mínimo en la sección extrema de aguas arriba, hasta un máximo igual al del transporte de sedimentos que hay en el segundo tramo.

Puesto que el gasto sólido varía de una sección a otra, y a que, como consecuencia del proceso erosivo, la pendiente también es distinta de una sección a otra, las características geométricas, ancho y tirante, también varían en cada sección. A pesar de lo señalado, y debido a la complejidad del fenómeno, la cuantificación de la erosión aguas abajo de los grandes embalses se ha atacado en forma bidimensional, considerando un ancho constante para todo el tramo, lo cual sólo se cumple cuando éste se encuentra encañonado y las márgenes

están formadas por roca.

1.1 Contenido y desarrollo del trabajo

En el capítulo 1 se han descrito los procesos erosivos y las modificaciones morfológicas que tienen lugar aguas abajo de una presa.

En los tres capítulos siguientes se describen tres procesos fluviales relacionados con el tema. Así, en el capítulo 2 se muestra un análisis simplificado para conocer las características de una sección donde todas las partículas están a punto de moverse, y qué ocurre cuando en esa sección se ha producido erosión por transporte de sedimentos, sin que llegue material de aguas arriba. Esto corresponde a la primera sección inmediata aguas abajo de la descarga.

En el capítulo 3 se describe el método de Gessler para conocer el acorazamiento máximo en un cauce cuando el material del fondo tiene granulometría extendida. Si el tramo donde ocurre la erosión tiene material con esas características, este se acorazará, y se deberán conocer las características de la coraza máxima y del gasto que la destruye.

Las características de los cauces estables se analizan en el capítulo 4, según dos criterios: el de Lacey, por ser representativo de la teoría del régimen, y el método propuesto por Maza y Cruickshank, que tiene la ventaja sobre el primero de tomar en cuenta al gasto sólido.

Con base en lo tratado en el capítulo anterior, en el capítulo 5 se muestra el procedimiento para determinar las características geométricas a las que tenderán las secciones de un río como consecuencia de la alteración que sufre el gasto formativo después de la construcción de la presa.

Por último, en el capítulo 6 se presenta la forma de calcular la erosión aguas abajo de presas mediante dos métodos diferentes: uno que tiene en cuenta lo indicado en los capítulos 2 y 4 y es fácil de aplicar, y otro que plantea y resuelve las ecuaciones diferenciales, de cantidad de movimiento, continuidad de gasto líquido y continuidad de transporte de sedimentos.

1.2 Bibliografía

Aksoy, S., "*River-bed degradation downstream of dams*". Memorias del XIV Congreso del IAHR, Vol 4, París, 1971.

Ashida, M. y Michine, M., "*An investigation of river bed degradation downstream of a dam*". Memorias del XIV Congreso del IAHR, Vol 3, París, 1971.

Bhamidpaty, S. y Shen, H.W., "Laboratory study of degradation and aggradation". Journal of Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division. ASCE WW4, Nov 1971.

Eldarwish, A.A. y Aly, H.W., "Nile river degradation below high Aswan dam after the historical closure of the river in May 14, 1964". Memorias del X Congreso del ICOCD, punto C.2. Montreal, 1970.

Galay, V.J. "Engineering aspects of river bed degradation". Canadian Society of Civil Engineering. Conferencia anual, Winnipeg, 1980.

Garde, R.J. y Hassan, S.M., "An experimental investigation of degradation in alluvial channels". Memorias del XII Congreso del IAHR, Vol 3, Fort Collins, 1967.

Hammad, H.Y., "River bed degradation after closure of dams". Journal of the Hydraulic Division, ASCE. Paper 8814 HY4, Abr 1972.

Komura, S. y Simons, D., "River bed degradation below dams". Procs. ASCE, paper 5335 HY4, Jul 1967.

Maza Alvarez, J.A., "Erosión aguas abajo de grandes embalses". Memorias del III Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Vol II, Buenos Aires-La Plata, 1968.

Maza Alvarez, J.A., "Socavación en cauces naturales". Instituto de Ingeniería, UNAM, No 177, México 1970.

Maza Alvarez, J.A. y Espinoza Cáceres, J., "Changes undergone by a natural channel downstream of a big dam". Memorias del XX Congreso del IAHR, Vol II, Moscú 1983.

Mustafá, G.M., "River bed degradation below large capacity reservoirs". Proc. ASCE, Vol 81, Sep 1955.

Ranga Raju, K.G., "Aggradation and degradation". Proc. Int. Workshop on alluvial problems, pp 5-33 a 5-41, Roorkee, India, 1980.

Vanoni, V., "Sedimentation engineering". Publicación de ASCE, Nueva York, 1975.

Veksler, A.B. y Ponenberg, V.M., "Effects of reservoirs on downstream river bed conditions". Memorias del XIV Congreso del ICOLD, Río de Janeiro, Mayo 1982.

Yalin, M.S., "River bed degradation downstream of a dam". Memorias del XX Congreso del IAHR, Vol 11, Moscú 1983.

TABLA 1.1 Alteraciones de un río aguas abajo de grandes embalses

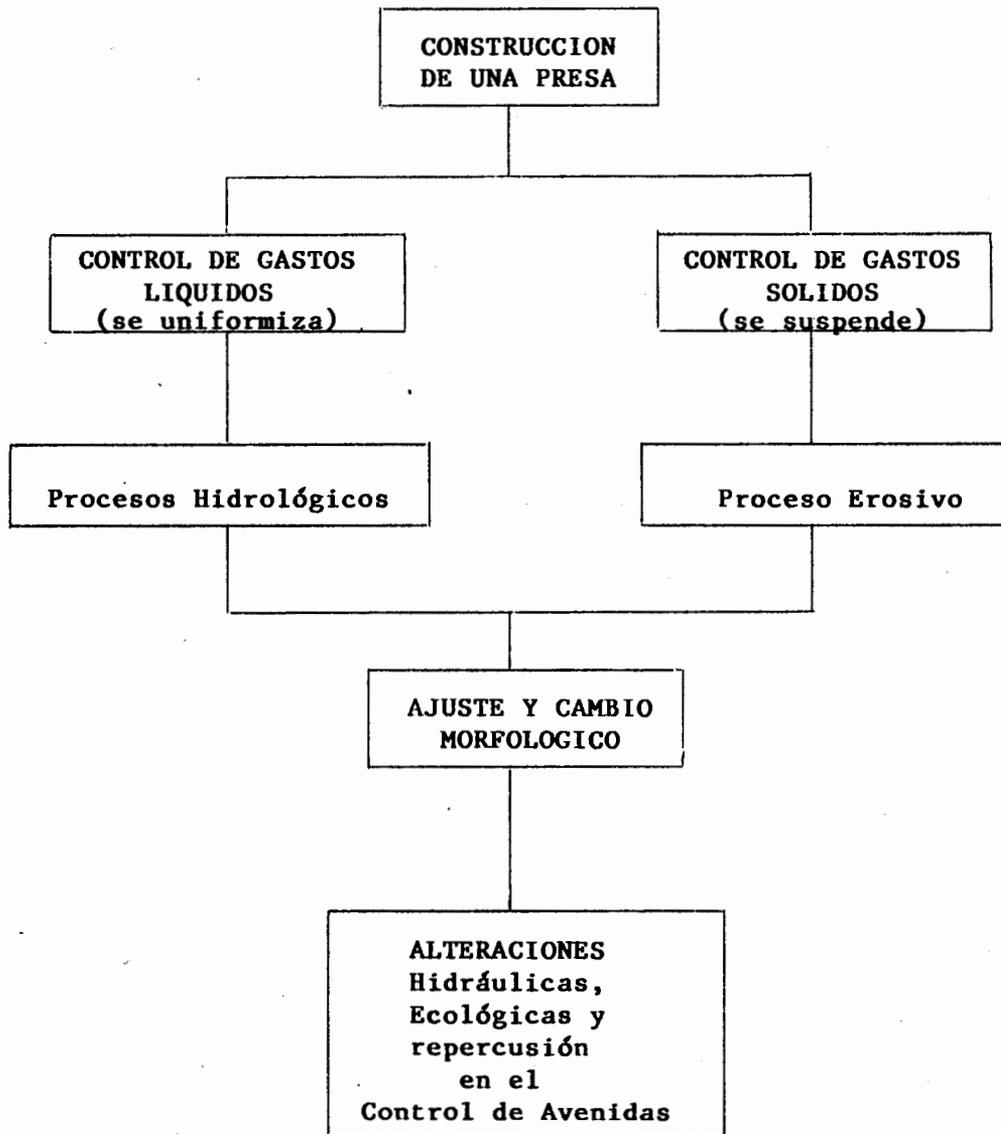


TABLA 1.2 ALTERACIONES EN LOS RIOS AGUAS ABAJO DE PRESAS

CAMBIOS	COMENTARIOS
Hidráulicos y los debidos al control de inundaciones	<ul style="list-style-type: none">— Modificación del gasto formativo.— Mayor uniformidad del hidrograma.— Incremento de los gastos mínimos.— Reducción de la frecuencia y magnitud de las avenidas.— Mayor control de los gastos máximos descargados.— Mayor seguridad contra inundaciones.— Reducción de áreas inundadas.
Morgológicos	<ul style="list-style-type: none">— Modificación del ancho y tirante de la sección transversal y pendiente del cauce.— Tendencia a formar un solo cauce estable, cuando originalmente el río es trezado o tiene islas y bifurcaciones.— Reducción de la pendiente general del "primer tramo" de río (tramo sujeto a erosión).— Modificación de la erosión lateral en las curvas.
Hidráulicos	<ul style="list-style-type: none">— Cambio de funcionamiento de las obras disipadoras de energía por descenso del nivel de la energía en el río. Cuando hay tanques amortiguadores se puede barrer el salto hidráulico si su formación depende del nivel de energía del río. Cuando el control hidráulico se tiene al final del tanque se llega a producir una nueva rápida y salto hidráulico inmediatamente aguas abajo del tanque, con la posible erosión al pie de esa estructura.— Descenso del nivel de la superficie libre del agua (y del gradiente de energía). Afecta a todas las obras hidráulicas y fluviales que dependen de ese nivel: obras de toma, muelles, estaciones de bombeo, etc.— Pérdida de la capacidad hidráulica del cauce por crecimiento de vegetación en islas y bancos, y por el cambio morgológico de la geometría de las secciones transversales y de la pendiente.

CAMBIOS

En el fondo
debidos a erosión

Ecológicos

COMENTARIOS

- Descenso del nivel del fondo del río en el "primer tramo" incremento de la erosión o socavación total en obras construidas en ese tramo: pilas y estribos de puente, obras de toma, plantas de bombeo.
 - Modificación del proceso erosivo local en las descargas de las obras de excedencias de la presa.
 - Acorazamiento del primer tramo.
 - Posible falla de protecciones marginales, sobre todo revestimientos y diques longitudinales.
 - Mayores posibilidades de navegación.
-
- Se impide el humedecimiento natural de los suelos agrícolas y el recibir nutrientes y sedimentos en suspensión, al evitar o reducir las inundaciones.
 - Se evita o reduce el llenado con sedimentos de las partes bajas de la planicie.
 - La construcción de presas para agua potable y sobre todo para uso agrícola reduce las aportaciones de agua dulce a lagunas y mares interiores.
 - Se garantizan los cultivos.
 - Cuando las presas no tienen dispositivos para que suban los peces, se interrumpe el ciclo vital de algunas especies.
 - Desaparecen o cambian de lugar espacios para recreo.
 - Se destruyen zonas adecuadas para refugio de animales.

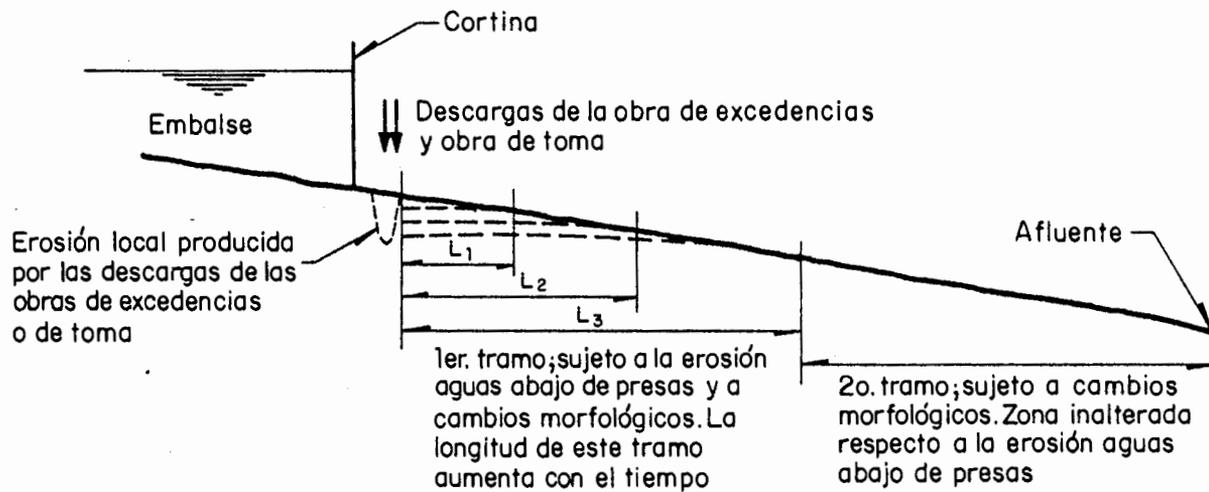


Fig 1.1 Alteraciones que sufre un río aguas abajo de una presa

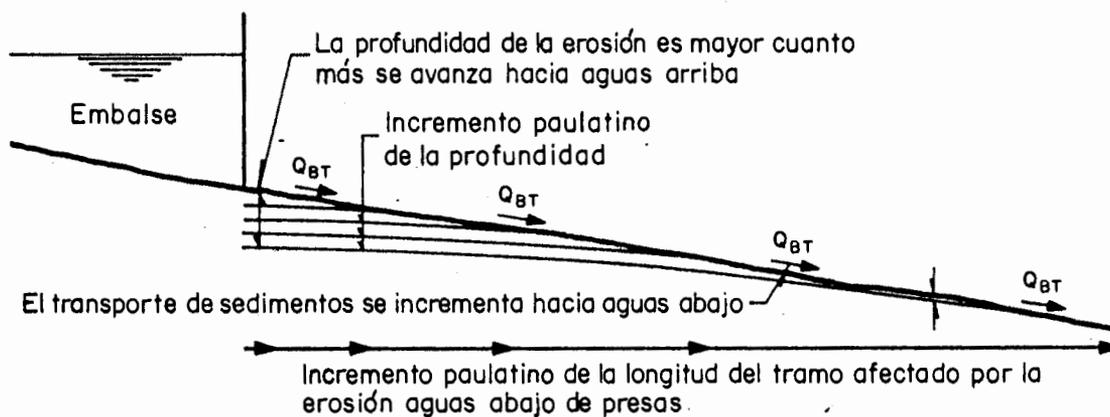


Fig 1.2 Efectos de la erosión aguas abajo de presas

2. SECCION ESTABLE AL CESAR EL MOVIMIENTO DE LAS PARTICULAS

Normalmente, en el diseño de canales donde no existe transporte de sedimentos se eligen secciones trapeciales por su facilidad de construcción. Si la sección está bien diseñada, las partículas que se encuentran sobre los taludes y a una distancia h (fig 2.1)

$$h = \frac{0.33d}{\text{sen } \phi} \quad (2.1)$$

medida desde el fondo, son las únicas que están a punto de moverse, mientras que las restantes pueden soportar en cantidad variable, mayores velocidades de la corriente antes de alcanzar esa misma condición crítica de movimiento. En la ec 2.1 el significado de las variables es el siguiente:

h distancia desde el fondo medida sobre el talud
 ϕ ángulo que forma el talud con la horizontal
 d profundidad de la corriente

A diferencia de la sección trapezoidal señalada, existe una geometría de la sección transversal para la cual todas las partículas están a punto de moverse; es decir, todas han alcanzado su condición crítica de movimiento y es por tanto la sección con mínima área capaz de conducir un gasto prefijado. Dicha sección se da en tramos donde, debido a la erosión producida, disminuye la capacidad de transporte de la corriente y tiende a cesar el movimiento de las partículas. Se considera que esto puede ocurrir en las primeras secciones de un río aguas abajo de un gran embalse.

A continuación se analizan las características de esa sección estable a partir de los estudios analíticos efectuado por Glover y Florey, así como por Lane; y los experimentos de Friedkin y de Stebbings.

Para ello considérese un tramo recto cuya sección transversal sea la de la fig 2.2. Para su análisis se seleccionó el sistema coordinado que se ve en dicha figura y se definen las siguientes variables y símbolos.

- α ángulo de la pendiente longitudinal de la corriente. En flujo uniforme coincide la pendiente de la superficie del agua con la pendiente promedio del fondo
- P un punto cualquiera de la sección donde se encuentra la partícula cuya estabilidad se desea estudiar
- y profundidad a la que se encuentra P
- z distancia, medida desde la orilla, a la que se encuentra P (fig 2.1)
- ϕ ángulo que forma con la horizontal el plano tangente a la sección en el punto P
- θ ángulo de reposo del material seco que forma la sección
- θ' ángulo de reposo del material sumergido que forma la sección
- W' peso sumergido de la partícula, cuyo valor es

$$W' = g (\rho_s - \rho) \nabla = (\gamma_s - \gamma) \nabla \quad (2.2)$$

o bien,

$$W' = \beta g (\rho_s - \rho) \frac{\pi D^3}{6} \quad (2.3)$$

donde

- ∇ volumen de la partícula
- D diámetro representativo de la partícula
- ρ_s, ρ densidad de la partícula y del agua, respectivamente
- γ_s, γ peso específico de la partícula y del agua, respectivamente
- β coeficiente que relaciona el volumen real de la partícula con el de una esfera con diámetro D . Si la partícula es esférica, $\beta = 1$

Antes de continuar conviene señalar que:

- a. La sección transversal indicada en la fig 2.2 es perpendicular a las líneas de corriente y, por tanto, a la superficie y al fondo.
- b. El material que forma la sección es igual y uniforme y tiene un diámetro representativo D .
- c. El ángulo del talud inmediatamente arriba de la superficie depende del grado de saturación del material. Puede llegar a ser de 90° (talud vertical). Sin embargo, el análisis se reduce a la sección bajo el agua.

2.1 Equilibrio de una partícula

Las fuerzas que tienden a mover la partícula, y que se muestran en las figs 2.3 y 2.4, son dos principalmente:

- a. El componente del peso de la partícula que actúa en la dirección del plano tangente y que tiende a desplazar la partícula hacia el centro del cauce resbalando o deslizando sobre el talud

$$W'_\phi = W' \text{ sen } \phi = (\gamma_s - \gamma) \forall \text{ sen } \phi \quad (2.4)$$

W'_ϕ puede descomponerse en dos fuerzas; una en el plano de la sección transversal

$$W'_{\phi y} = W' \text{ sen } \phi \cos \alpha \quad (2.5)$$

y otra en la dirección del flujo,

$$W'_{\phi \alpha} = W' \text{ sen } \phi \text{ sen } \alpha \quad (2.6)$$

- b. La fuerza producida por el esfuerzo cortante, τ , que produce el flujo en el punto P y que actúa sobre el área superficial, a , de la partícula. Su dirección es la misma que la del flujo y, por tanto, es colineal a $W'_{\phi \alpha}$ y perpendicular a $W'_{\phi y}$. Su valor es

$$f_\tau = a\tau \quad (2.7)$$

Por tanto, en la dirección del flujo se tiene la fuerza (fig 2.4)

$$f_f = a\tau + W' \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha \quad (2.8)$$

y en una dirección perpendicular a la anterior lo expresado por la ec 2.5.

Al componer estas dos fuerzas se obtiene la resultante que tiende a mover la partícula

$$F_m = [(a\tau + W' \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha)^2 + W'^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{cos}^2 \alpha]^{1/2} \quad (2.9)$$

Por otra parte, la fuerza que contribuye a mantener la partícula en su lugar y que se opone a F_m es el componente en el plano de la sección transversal del peso de la partícula en la dirección al plano tangente en P , multiplicada por el coeficiente de fricción interna que se considera igual a $\tan \theta'$

$$F_r = W' \operatorname{cos} \phi \operatorname{cos} \alpha \tan \theta' \quad (2.10)$$

La condición de equilibrio para una partícula se alcanza cuando $F_m = F_r$, esto es

$$(a\tau + W' \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \alpha)^2 + W'^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{cos}^2 \alpha = W'^2 \operatorname{cos}^2 \phi \operatorname{cos}^2 \alpha \tan^2 \theta' \quad (2.11)$$

Del análisis de la ec 2.11 se puede concluir lo siguiente

- a. Puntos de contacto con la superficie libre del agua. En esos puntos el esfuerzo cortante que produce el flujo vale cero, $\tau = \tau_f = 0$, por tanto se obtiene

$$W'^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \alpha + W'^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{cos}^2 \alpha = W'^2 \operatorname{cos}^2 \phi \operatorname{cos}^2 \alpha \tan^2 \theta' \quad (2.12)$$

$$\operatorname{sen}^2 \phi (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha) = \operatorname{cos}^2 \phi \operatorname{cos}^2 \alpha \tan^2 \theta' \quad (2.13)$$

$$\therefore \tan \phi = \operatorname{cos} \alpha \tan \theta' \quad (2.14)$$

Es decir, en el plano de la sección transversal, la inclinación máxima del talud es ligeramente menor que el ángulo de reposo del material sumergido.

Lo hasta aquí expresado se puede interpretar también como sigue: las partículas en contacto con la superficie del agua están a punto de moverse porque se

encuentran a punto de deslizar sobre el talud y no soportan ningún efecto debido al esfuerzo cortante generado por el flujo que, en esos puntos, es igual a cero.

$\tau_{sf} = 0$, donde τ_{sf} esfuerzo cortante producido por el flujo en la superficie.

b. Punto más profundo: esfuerzo cortante máximo.

El punto más profundo se encuentra a una distancia $b/2$, donde la profundidad es d_o

Ahí $\phi = 0$ y, por tanto, $\text{sen } \phi = 0$; con esto la ec 2.11 toma la forma

$$\tau = \frac{W'}{a} \cos \alpha \tan \theta' = \beta_o D \cos \alpha \tan \theta' = \tau_{or} \quad (2.15)$$

donde

β_o coeficiente de proporcionalidad
 τ_{or} esfuerzo cortante máximo que puede resistir la partícula,
antes de empezar a moverse y que debe ser igual al
esfuerzo cortante que ejerce el flujo τ_{of}

En otras palabras, la partícula situada en el centro de la sección o punto más profundo sólo se mueve por efecto del esfuerzo cortante del flujo, ya que está sobre un plano horizontal.

c. Esfuerzo cortante que resiste cualquier partícula.

En cauces arenosos se cumple que la pendiente longitudinal del río es muy reducida, por lo que si se considera que $\alpha \simeq 0$, los términos de la ec 2.11 en que aparece $\text{sen } \alpha$ y $\text{sen}^2 \alpha$ se pueden eliminar, con lo que se obtiene

$$\tau^2 = \frac{W'^2}{a^2} (\cos^2 \phi \tan^2 \theta' - \text{sen}^2 \phi) \cos^2 \alpha \quad (2.16)$$

efectuando operaciones se llega a

$$\tau = \frac{W'}{a} \cos \alpha \cos \phi \tan \theta' \left(1 - \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \theta'}\right)^{1/2} = \tau_r \quad (2.17)$$

La ec 2.17 indica el esfuerzo cortante crítico que resiste una partícula en cualquier punto de la sección y la variación del esfuerzo cortante que debe ejercer el

flujo a lo largo del perfil de la misma. Para el punto más profundo de la sección se cumple que $\phi = 0$ y, por tanto, $\tau = \tau_{or}$ (ec 2.14).

- d. Relación entre los esfuerzos cortantes en el fondo y en cualquier punto del talud. Dividiendo la ec 2.17 entre la ec 2.15, se obtiene τ_r/τ_{or}

$$\frac{\tau_r}{\tau_{or}} = \cos \phi \left(1 - \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \theta'}\right)^{1/2} \quad (2.18)$$

Esta ecuación también puede transformarse a

$$\begin{aligned} \frac{\tau_r}{\tau_{or}} &= \left(\frac{\cos^2 \phi \tan^2 \theta' - \sin^2 \phi}{\tan^2 \theta'}\right)^{1/2} = \left(\frac{\cos^2 \phi \frac{\sin^2 \theta'}{\cos^2 \theta'} - \sin^2 \phi}{\frac{\sin^2 \theta'}{\cos^2 \theta'}}\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{(1 - \sin^2 \phi) \sin^2 \theta' - (1 - \sin^2 \theta') \sin^2 \phi}{\sin^2 \theta'}\right)^{1/2} = \left(\frac{\sin^2 \theta' - \sin^2 \phi}{\sin^2 \theta'}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\frac{\tau_r}{\tau_{or}} = \left(1 - \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \theta'}\right)^{1/2} \quad (2.19)$$

En la literatura se acostumbra denominar con K_o al segundo miembro de las ecs 2.19 y 2.20, por lo que se puede escribir

$$\frac{\tau_r}{\tau_{or}} = K_o \quad (2.20)$$

De esta manera, conocido τ_{or} , se puede valorar τ en cualquier punto de la sección

$$\tau_r = K_o \tau_{or} \quad (2.21)$$

Se observa que en los puntos de contacto con la superficie del agua, $\phi = \theta'$, y por tanto, $K_o = 0$, mientras que en el fondo $\phi = 0$ y con ello $K_o = 1$. Así K varía de 0 en la superficie, a 1 en el fondo.

Las ecs 2.20 y 2.21 son muy útiles ya que experimentalmente se ha obtenido el esfuerzo cortante que resisten partículas colocadas en fondos prácticamente horizontales. Es decir, se conoce τ_{or} para cualquier partícula; en función de ese valor se obtiene el esfuerzo cortante τ_r que resiste una partícula colocada en cualquier otro punto de la sección.

2.2 Variación del esfuerzo cortante que ejerce el flujo

Para valuar el esfuerzo cortante, τ_f , que el líquido ejerce en cada punto de la sección, se considera una columna de agua sobre el punto P cuyo ancho es dz y cuyo espesor en la dirección del escurrimiento es dx (fig 2.2).

El peso de esa columna vale

$$P_\gamma = \gamma y dz dx \quad (2.22)$$

Si no se considera esfuerzo cortante lateral entre esta columna y las adyacentes, el componente del peso en la dirección del escurrimiento y por tanto causante de ese movimiento es

$$P_e = \gamma y \text{sen } \alpha dz dx \quad (2.23)$$

Dicho peso se ejerce en el área de espesor dx y ancho dL , donde

$$dL = (dy^2 + dz^2)^{1/2} \quad (2.24)$$

El esfuerzo cortante producido por P_e sobre el área $ds = dx dL$ es igual a

$$\tau_f = \gamma y \text{sen } \alpha \frac{dz}{dL} \quad (2.25)$$

Pero $(dz/dL) = \cos \phi$; por tanto, la ec 2.25 queda finalmente como

$$\tau_f = \gamma y \text{sen } \alpha \cos \phi \quad (2.26)$$

Si α es muy pequeño se puede escribir

$$\text{sen } \alpha = \tan \alpha = S \quad (2.27)$$

donde S es la pendiente hidráulica del escurrimiento. Con ello la ec 2.26 toma la forma

$$\tau_f = \gamma y S \cos \phi \quad (2.28)$$

En la condición crítica, el esfuerzo cortante τ_f que ejerce el flujo debe ser igual al esfuerzo cortante τ_r que resiste la partícula y que está dado por la ec 2.17.

En el centro de la sección se cumple que $y = d_o, \phi = 0^\circ$, por lo que

$$\tau_{of} = \gamma d_o S \quad (2.29)$$

Según lo antes explicado, τ_{of} debe ser igual a τ_{or} , dado por la ec 2.15.

2.3 Forma de la sección transversal

Para obtenerla tómesese la ec 2.11. Puesto que α es muy pequeño se considera que $W' \sin \phi \sin \alpha \simeq 0$, y dicha ecuación, sin mucho error, se escribe como

$$a^2 \tau^2 + W'^2 \sin^2 \phi \cos^2 \alpha = W'^2 \cos^2 \phi \tan^2 \theta' \cos^2 \alpha \quad (2.30)$$

sustituyendo en la ec 2.30 el valor de τ dado por la ec 2.26

$$a^2 \gamma^2 y^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \phi + W'^2 \sin^2 \phi \cos^2 \alpha = W'^2 \cos^2 \phi \cos^2 \alpha \tan^2 \theta' \quad (2.31)$$

dividiendo la ec 2.31 entre $W'^2 \cos^2 \phi \cos^2 \alpha$, se obtiene

$$\tan^2 \phi = \tan^2 \theta' - \frac{a^2 \gamma^2 \tan^2 \alpha}{W'^2} y^2 = \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \quad (2.32)$$

ya que

$$\tan \phi = \frac{dy}{dz}$$

Para integrar la ec 2.32 se hará el siguiente cambio de variables

$$M = \tan \theta' \quad (2.33)$$

$$N = \frac{a \gamma \tan \alpha}{W'} \quad (2.34)$$

$$J = \frac{M}{N} = \frac{W' \tan \theta'}{a \gamma \tan \alpha} = \frac{\beta_o D \tan \theta'}{\gamma S} \quad (2.35)$$

Con ello la ec 2.32 toma la forma

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = M^2 - N^2 y^2 \quad (2.36)$$

Separando variables se llega a

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{M^2 - N^2 y^2}} = \frac{dy}{N\left(\frac{M^2}{N^2} - y^2\right)^{1/2}} \quad (2.37)$$

o bien, al tener en cuenta la ec 2.35, la ec 2.37 toma la forma

$$dz = \frac{dy}{N\sqrt{J^2 - y^2}} \quad (2.38)$$

integrando se obtiene

$$z = \int \frac{dy}{N\sqrt{J^2 - y^2}} + C = \frac{1}{N} \text{sen}^{-1} \frac{y}{J} + C \quad (2.39)$$

C es valuada al considerar el punto en el origen en que $y = 0$ si $z = 0$. Con ello se cumple que

$$C = 0 \quad (2.40)$$

y la ec 2.39 toma la forma

$$z = \frac{1}{N} \text{sen}^{-1} \frac{y}{J} \quad (2.41)$$

o bien

$$y = J \text{sen} (Nz) \quad (2.42)$$

Sustituyendo J y N por su valor en las ecs 2.41 y 2.42 se obtiene

$$z = \frac{W'}{a\gamma \tan \alpha} \text{sen}^{-1} \left(\frac{a\gamma y \tan \alpha}{W' \tan \theta'} \right) \quad (2.43)$$

$$y = \frac{W' \tan \theta'}{a\gamma \tan \alpha} \text{sen} \left(\frac{a\gamma z}{W'} \tan \alpha \right) \quad (2.44)$$

Las ecs 2.41 a 2.44 representan la forma de la sección transversal de un canal en que todas sus partículas están a punto de ser transportadas; es decir, todas ellas tienen condición crítica de arrastre. Recuérdese que se ha considerado al material como uniforme.

Como se observa en dichas fórmulas, la forma de la sección depende de las partículas que la forman e, implícitamente, del gasto que pasa por la sección ya que, y , y $\text{sen } \alpha = S$ dependen de ese parámetro.

2.4 Dimensiones máximas de la sección

Como puede observarse, las ecs 2.43 y 2.44 incluyen únicamente parámetros geométricos de la sección.

Para obtener las dimensiones máximas de la sección en estudio, se sabe que si $y = 0$, z puede ser igual a cero o al ancho de la sección, B .

Tómese la condición

$$y = 0$$

y

$$z = B$$

Para que esto se cumpla, la cantidad dentro del paréntesis de la ec 2.44 debe ser igual a π

$$\frac{a\gamma B}{W'} \tan \alpha = \pi$$

$$B = \frac{W' \pi}{a\gamma \tan \alpha} \quad (2.45)$$

Para conocer la profundidad máxima d_o , se sabe que si $z = B/2$, $y = d_o$. Por tanto, utilizando la ec 2.44 se obtiene

$$d_o = \frac{W' \tan \theta'}{a\gamma \tan \alpha} \text{sen } \frac{\pi}{2}$$

$$d_o = \frac{W' \tan \theta'}{a\gamma \tan \alpha} \quad (2.46)$$

Si ahora se sustituye lo expresado por las ecs 2.45 y 2.46 en la ec 2.44, se obtiene

$$y = d_o \operatorname{sen} \frac{\pi z}{B} \quad (2.47)$$

Si lo mismo se hace con la ec 2.43, se llega a

$$z = \frac{B}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{y}{d_o} \right) \quad (2.48)$$

Las ecs 2.47 y 2.48 también pueden expresarse sólo en función de una sola variable; para ello se divide la ec 2.45 entre la ec 2.46

$$\frac{B}{d_o} = \frac{W' \pi a \gamma \tan \alpha}{W' a \gamma \tan \alpha \tan \theta'}$$

y se llega a

$$B = \frac{d_o \pi}{\tan \theta'} \quad ; \quad d_o = \frac{B}{\pi} \tan \theta' \quad (2.49)$$

Al sustituir d_o por su valor en la ec 2.47, se obtiene la geometría de la sección sólo en función de B , es decir

$$y = \frac{B \tan \theta'}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{B} \quad (2.50)$$

Si en cambio se sustituye B dado por la ec 2.49 en la ec 2.47, se obtiene la ecuación del perfil sólo en función de d_o

$$y = d_o \operatorname{sen} \left(\frac{z \tan \theta'}{d_o} \right) \quad (2.51)$$

Si la variable z se desea expresar en forma explícita como una función de B , se obtiene

$$z = \frac{B}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \frac{\pi y}{B \tan \theta'} \quad (2.52)$$

o bien, en función de d_o

$$z = \frac{d_o}{\tan \theta'} \operatorname{sen}^{-1} \frac{y}{d_o} \quad (2.53)$$

Las ecs 2.47, 2.48 y 2.50 a 2.53 permiten obtener la forma completa de la sección transversal, conocidas las dimensiones máximas de la misma.

2.5 Area de la sección transversal

El área de la sección transversal en estudio se obtiene de la expresión

$$A = \int_0^b y dz \quad (2.54)$$

sustituyendo y por lo expresado en la ec 2.47 se tiene

$$A = d_o \int_0^B \operatorname{sen} \frac{\pi z}{B} dz$$

integrando

$$A = d_o \left[-\frac{B}{\pi} \cos \frac{\pi z}{B} \right]_0^b$$

tomando límites se llega finalmente a

$$A = \frac{2 B d_o}{\pi} \quad (2.55)$$

Si se sustituye B o d_o por su valor dado por la ec 2.49 se obtienen las siguientes relaciones

$$A = \frac{2d_o^2}{\tan \theta'} \quad (2.56)$$

y

$$A = \frac{2B^2}{\pi^2} \tan \theta' \quad (2.57)$$

Téngase en cuenta que si se desea pasar un gasto Q por la sección se cumplirá

$$A = \frac{Q}{U_c} \quad (2.58)$$

donde U_c es la velocidad media en la sección para la condición crítica de transporte, la cual deberá obtenerse en función del material que forma la sección.

2.6 Perímetro mojado de la sección transversal

La ecuación que define el perfil de la sección transversal quedó definida por la ec 2.47

$$y = d_o \operatorname{sen} \frac{\pi z}{B} \quad (\text{ec } 2.47)$$

Por otra parte, en la fig 2.2 se muestra que

$$dL = \sqrt{dy^2 + dz^2} \quad (\text{ec } 2.34)$$

dy se puede obtener al derivar la ec 2.47

$$dy = \frac{d_o \pi}{B} \cos \frac{\pi z}{B} dz \quad (2.59)$$

sustituyendo dy en la ec 2.34 se obtiene

$$dL = \left[1 + \left(\frac{d_o \pi}{B} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi z}{B} \right]^{1/2} dz \quad 2.60$$

Por tanto, el perímetro mojado, P , de la sección queda expresado por

$$P = L = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{d_o \pi}{B} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi z}{B}} dz \quad (2.61)$$

La integral de la ec 2.61 es una ecuación elíptica que no es posible calcular en forma exacta.

Para obtener L , aunque con un cierto error, se desarrollará en series la raíz cuadrada.

a. Si se consideran dos términos en la serie, resulta.

$$L = P = \frac{B^2 + \left(\frac{d_o \pi}{2} \right)^2}{B} - \epsilon \quad (2.62)$$

donde ϵ es el error y se valúa mediante la relación

$$\epsilon < \frac{3}{4B^3} \left(\frac{d_o \pi}{2} \right)^4 \quad (2.63)$$

b. Si se consideran tres términos en la serie se obtiene

$$L = P = B \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{d_o \pi}{B} \right)^2 \left(1 - \frac{3}{16} \left(\frac{d_o \pi}{B} \right)^2 \right) \right] + \epsilon \quad (2.64)$$

donde

$$\epsilon < \frac{15}{12B^5} \left(\frac{d_o \pi}{2} \right)^6 \quad (2.65)$$

2.7 Experiencias en el laboratorio

Hasta aquí se han mostrado algunas de las principales relaciones teóricas que deben cumplirse en una sección donde todas las partículas tienen condición crítica.

Experimentalmente, Friedkin y Stebbings obtuvieron algunas de las características de la sección aquí tratada. El primero utilizó tres mesas de arena (la mayor de 11.6 m de ancho por 36.6 m de largo y la menor de 2.9 x 14.6 m) y obtuvo la variación de la pendiente a lo largo de un cauce por el que dejaba pasar un gasto constante, pero sin alimentar material en la primera sección de aguas arriba y permitiendo, por tanto, la erosión de la misma, tal como ocurre en el primer tramo de un río aguas abajo de una presa. Friedkin realizó sus experiencias no tanto para estudiar la erosión mencionada, sino para observar principalmente el desarrollo y el desplazamiento de los meandros, y conocer cualitativamente el efecto que producen en ellos el gasto de la corriente, la pendiente general del valle, el ancho de la sección y el ángulo de entrada del flujo.

Por su parte, Stebbings realizó sus experiencias en una mesa de pendiente variable de 8.23 m de largo, 0.91 de ancho y con una profundidad de 0.25 m, en la que colocó arena. El 90 por ciento de los tamaños de ese material estaban comprendidos entre 0.6 y 1.2 mm. Estaba interesado en conocer la variación geométrica del cauce y de la pendiente, entre una sección con todas las partículas en condición crítica y otra sección aguas abajo donde el transporte de sedimentos era máximo.

En lo que sigue se mostrarán las principales relaciones empíricas por él obtenidas para la sección crítica. Muchas de esas fórmulas también se aplican para la sección con máximo transporte de sedimentos, y por tanto, en todas las secciones intermedias.

Entre las relaciones empíricas obtenidas por Stebbings se mostrarán las de mayor interés en este trabajo, complementadas con algunos comentarios adicionales. Todas ellas están expresadas en sistema métrico, es decir, B y d en m , Q en m^3/s y A en m^2 .

2.7.1 Area de la sección

El área de la sección obtenida experimentalmente por Stebbings, en función del gasto que escurre por ella, se expresa como

$$A = 1.831 Q^{0.90} \quad (2.66)$$

Esta ecuación se aplica a cualquier sección a lo largo del cauce.

Para canales reales de mayores dimensiones otros autores han obtenido empíricamente la relación

$$A = 1.941 Q^{0.85} \quad (2.67)$$

Como se observa, las ecs 2.66 y 2.67 son semejantes.

Por otra parte, la ec 2.55 establece teóricamente que

$$A = 0.637 B d_o \quad (2.68)$$

mientras que en forma experimental se obtuvo para transporte nulo

$$A = 0.72 B d_o \quad (2.69)$$

Según lo indicado por la ec 2.66, el área es constante en cualquier sección independientemente del transporte de sedimentos. En consecuencia, también la velocidad media debe ser constante a lo largo del cauce.

Al relacionar la pendiente de la superficie del agua con el área se obtuvo la expresión

$$A = \frac{3.936 \times 10^{-8}}{S^2} \quad (2.70)$$

2.7.2 Ancho de la sección

El ancho de la superficie libre de la sección que tiene todas las partículas a punto de iniciar su movimiento vale empíricamente

$$B = 6.275 Q^{0.5} \quad (2.71)$$

mientras que para la sección con máximo transporte

$$B = 10 Q^{0.5} \quad (2.72)$$

Nótese que el exponente del gasto es el mismo por lo que, dependiendo del transporte de sedimentos, el ancho varía entre 6.275 y 10 veces $Q^{0.5}$.

De los resultados de Stebbings se observa que la correlación entre los puntos experimentales y las ecs 2.71 y 2.72 es muy alta. No ocurre lo mismo al obtener la relación entre el ancho y la pendiente, posiblemente por la dificultad de obtener con precisión este último parámetro. Dicha relación es

$$B = \frac{1}{1575 S} \quad (2.73)$$

2.7.3 Profundidad máxima de la sección

La única relación presentada por Stebbings para la profundidad máxima de la sección con todas sus partículas en condición crítica de movimiento fue expresada en función de la pendiente.

$$d_o = \frac{1}{10361 S} \quad (2.74)$$

Sin embargo, al tener en cuenta lo expresado por las ecs 2.69 y 2.71 se obtiene, para esa misma sección

$$d = 0.405 Q^{0.4} \quad (2.75)$$

2.7.4 Pendiente hidráulica

Conviene hacer notar que hay una discrepancia entre los resultados presentados, la cual se hace evidente al obtener la pendiente en función del gasto. Así, de las ecs 2.66 y 2.70 se obtiene

$$S = 0.000147/Q^{0.45} \quad (2.76)$$

de las ecs 2.71 y 2.73

$$S = 0.000101/Q^{0.5} \quad (2.77)$$

y de las ecs 2.74 y 2.75

$$S = 0.000238/Q^{0.4} \quad (2.78)$$

Estas diferencias se deben al hecho de que la ec 2.73 fue obtenida como relación general para diferentes condiciones de transporte, y la dispersión entre los puntos y dicha ecuación es grande. En cambio, las ecs 2.71 y 2.72 tienen una muy alta correlación con los datos experimentales que muestran y separan claramente la influencia del transporte de sedimentos.

Recuérdese que las relaciones presentadas fueron obtenidas experimentalmente en un pequeño canal. Conviene notar sus diferencias y semejanzas con las ecuaciones mostradas en el capítulo 4.

2.8 Relación ancho-tirante

Se distinguen dos condiciones: una cuando el transporte de sedimentos es nulo y la otra cuando es máximo.

Según lo señalado, en ambas condiciones aparentemente se cumple que

$$A = 1.941 Q^{0.85} \quad (ec\ 2.67)$$

- a. Condición con transporte de sedimentos nulo. Para esta condición, la forma de la sección transversal, su área y el ancho de la superficie libre se expresan por las ecs 2.69 y 2.71

$$A = 0.72 B d_o \quad (ec\ 2.69)$$

$$B = 6.275 Q^{0.5} \quad (ec\ 2.71)$$

con base en las ecuaciones anteriores se obtiene

$$d_o = 0.44 Q^{0.35} \quad (2.79)$$

y, por último, la relación entre ancho y tirante máximo es

$$B^{0.7} = 8.22 d_o \quad (2.80)$$

En los cálculos hidráulicos que se efectúan en ríos se considera generalmente que el tirante medio d queda definido por

$$d = \frac{A}{B} \quad (2.81)$$

Si se obtiene el tirante máximo d_o según de expresado por la ec 2.69 se obtiene

$$d_o = \frac{A}{0.72 B} = 1.39 \frac{A}{B}$$

Por lo que, en función del tirante medio, el tirante máximo de esta sección es

$$d_o = 1.39 d \quad (2.82)$$

Al tener en cuenta este último valor, la ec 2.80 queda como

$$B^{0.7} = 11.42 d \quad (2.83)$$

expresión que permite relacionar el ancho de la superficie de la sección en estudio con su tirante medio.

- b. Condición con máximo transporte de sedimentos. En este caso la sección se puede considerar como rectangular y el área y el ancho de su superficie libre se expresan por

$$A = Bd \quad (2.84)$$

pero

$$B = 10 Q^{0.5} \quad (\text{ec } 2.72)$$

Al combinar las ecs 2.67, 2.72 y 2.84 se obtiene

$$d = 0.1941 Q^{0.35} \quad (2.85)$$

y

$$B^{0.7} = 25.82 d \quad (2.86)$$

Estos resultados se comentan en el apartado 4.5

2.9 Comentarios

Lo visto en este capítulo se refiere a una sección en la que todas sus partículas están en condición crítica a punto de moverse y a los resultados experimentales obtenidos por Friedkin y Stebbings para secciones con la misma condición, es decir, transporte nulo de sedimentos. Todo ello puede aplicarse a la primera sección aguas abajo de una presa en la que ha ocurrido la erosión aguas abajo de la misma.

Las demostraciones formuladas y los resultados obtenidos se aplican a secciones con material uniforme, lo cual no siempre ocurre en la naturaleza.

Sobre este fenómeno aún hay mucho por experimentar y estudiar, sobre todo para conocer el comportamiento de los materiales con granulometría extendida ($\sigma_g > 3$), los que tenderán a acorazarse en el fondo, a disminuir su granulometría hacia las orillas y a dejar las partículas más finas cerca de la superficie libre.

Lo obtenido en este capítulo en parte complementa a lo que se verá en el capítulo 6. Se requiere un mayor esfuerzo para incluir lo aquí presentado, sobre todo la forma senoidal de la primera sección de aguas arriba, así como la variación de la geometría de las restantes secciones, hasta alcanzar una que pueda tratarse como rectangular.

2.10 Bibliografía

Chow, V.T., "*Open-channel hydraulics*". Mc Graw-Hill. Inc, Nueva York, 1959.

Friedkin, J.F., "*A laboratory study of the meandering of alluvial rivers*". U.S. Waterways experiment station, Vicksburg Miss., May, 1945 (1a. reimpresión, Abr 1950).

Garde, R.J. y Ranga Raju, K.G., "*Mechanics of sediment transportation and alluvial stream problems*". Wiley Eastern Lt., Nueva Delhi, 1977.

Gessler, J., "*Aggradation and degradation*". Capítulo 8 del libro *River Mechanics*, editado por Shen, H.W. Fort Collins, 1971.

Glover, R.E. y Florey, Q.L., "*Stable channel profiles*". U.S. Bureau of Reclamation, Hydraulic Laboratory Report No H-325, Sep 1951.

Graf, W.H., "*Hydraulics of sediment transport*". Mc Graw-Hill Inc. Nueva York, 1971.

Lacey, G., "*A general theory of flow in alluvium*". *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol 27, pp 16-47. Londres, 1946.

Lane, E.W., Lin, P. y Liv, H., "*The most efficient stable channel for comparatively clear water in noncohesive material*". Report of Civil Engineering Department, Colorado State University, Abr 1958.

Leopold, L.B., Wolman, M.G. y Miller, J.P., "*Fluvial processes in geomorphology*". Freeman and Co., San Francisco, Calif. 1964.

Stebbins, J., "*The shapes of self-formed model alluvial channels*". Proc. Institution of Civil Engineers, Vol 25, pp 485-510.

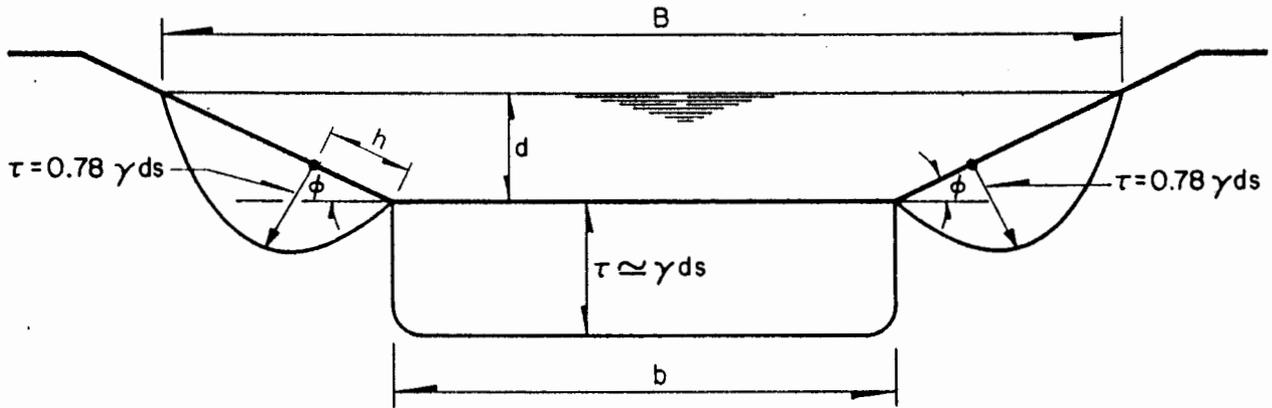


Fig 2.1. Distribución del esfuerzo cortante en una sección transversal ancha, $b/y' > 6$

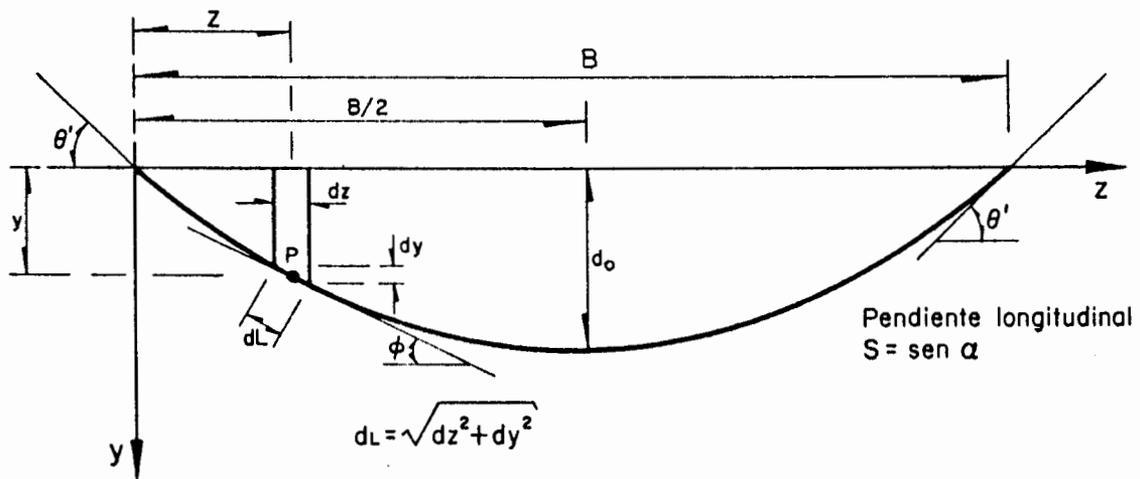


Fig 2.2. Sección de un canal sin transporte y área mínima

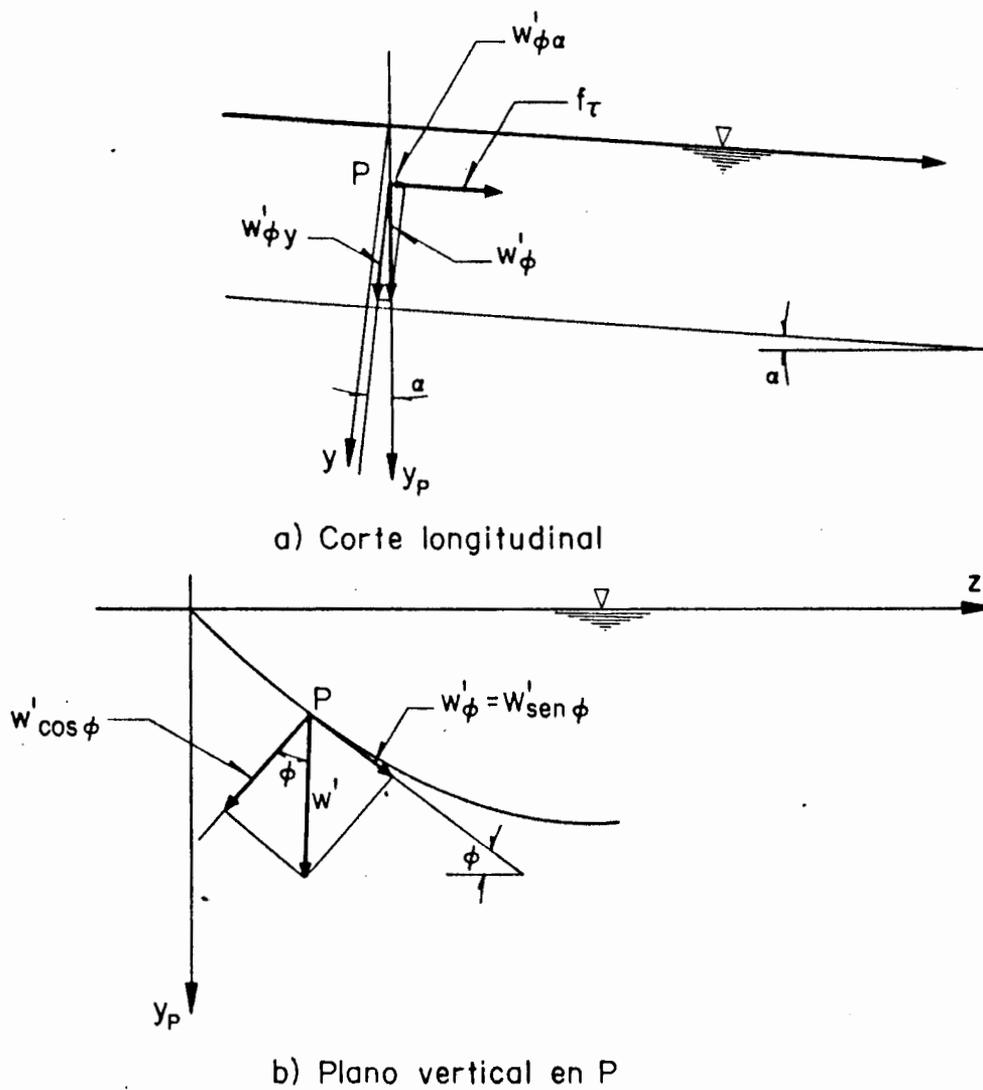


Fig 2.3. Componentes del peso sumergido de la partícula, en el punto P

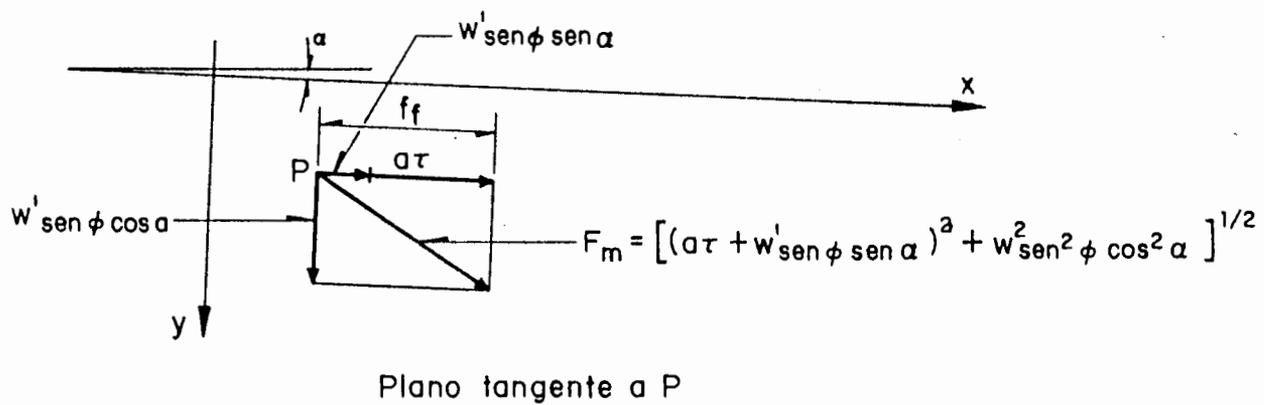


Fig 2.4. Fuerzas que tienden a mover la partícula

3. ACORAZAMIENTO DEL MATERIAL DEL FONDO

Se define con τ_g a la desviación estandar geométrica de la distribución de tamaños del sedimento que constituye el fondo o las paredes de un cauce. En la práctica se considera que si $\tau_g < 3$ la granulometría es prácticamente uniforme; es decir, la distribución de los tamaños varía entre límites estrechos. Por el contrario, si $\tau_g > 3$ se dice que el material esta bien graduado o que se trata de un sedimento con granulometría extendida.

El transporte de sedimentos mal graduados, con $\sigma_g < 3$, esto es, con diámetro casi uniforme, ha sido extensamente estudiado así como su inicio de movimiento, sobre todo para el diseño de canales de tierra sin transporte.

Sin embargo, el material que conforma el fondo y las orillas de los cauces naturales rara vez tiene la uniformidad de los materiales que se usan en los laboratorios, ya que son generalmente bien graduados o con granulometría extendida, $\sigma_g > 3$. Por ello persiste la necesidad de determinar el tamaño representativo de un material con granulometría extendida que se resiste a ser arrastrado por una corriente dada.

Así, por ejemplo, para diseñar canales estables sin arrastre, Lane y Carlson, después de analizar los datos de canales sin movimiento de partículas del fondo, adoptaron el D_{75} de la muestra original como el diámetro representativo de un material no uniforme, y con él utilizaron el criterio de movilidad de Shields, siempre y cuando se cumpliera además que $D_{75} > 5mm$. Otros autores que han trabajado el tema son Garde y Hassan; siendo Gessler y Egiazarof quienes lograron avances de gran importancia. Recientemente, Cruickshank, García y Maza, con base en el método de Gessler, obtuvieron fórmulas sencillas de utilidad para ingenieros.

Cuando el flujo arrastra materiales de granulometría extendida tiene la capacidad de lavar los finos y dejar los gruesos, acción que tiende a formar en la capa superior del fondo una coraza con las partículas más gruesas, la que protege o cubre al material original que se encuentra debajo.

Por otra parte, en cualquier punto de un flujo turbulento, la velocidad de la corriente fluctúa en el tiempo y su valor medio es la velocidad que se asocia a ese punto; es decir, se dan variaciones sobre ese valor medio. Aunque el flujo sea predominantemente unidimensional existen fluctuaciones en direcciones perpendiculares a la dirección del movimiento, aun cuando la media de la velocidad en ellas sea cero. Lo anterior se expresa como:

$$u = \bar{u} + u' \quad (3.1)$$

$$v = \bar{v} + v' = v' \quad (3.2)$$

$$w = \bar{w} + w' = w' \quad (3.3)$$

donde u , v y w son las velocidades instantáneas en un punto, en la dirección de tres ejes cartesianos, x , y , z ; \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} son las velocidades medias en el mismo punto y para las mismas direcciones, siendo además $\bar{v} = \bar{w} = 0$; u' , v' y w' son las variaciones instantáneas de la velocidad alrededor de la media.

Estas fluctuaciones de velocidad originan también variaciones en las magnitudes de las fuerzas y por tanto del esfuerzo cortante que actúa sobre las partículas del fondo y es capaz de iniciar su movimiento.

En el proceso de arrastre de sedimentos con granulometría extendida se presentan las siguientes condiciones extremas de interés:

- a. Valor o punto inferior de inicio de arrastre. Acontece cuando el esfuerzo cortante del flujo está a punto de mover las partículas más finas. Para esta condición no existe ninguna erosión o abatimiento del fondo.

- b. Valor o punto superior de inicio de arrastre. Ocurre cuando el esfuerzo cortante es tal que el flujo está a punto de mover las partículas de diámetro máximo.
- c. Acorazamiento máximo. Se da cuando el diámetro medio de la coraza es máximo. Esta condición se presenta por debajo del punto superior. Entre el punto superior y el acorazamiento máximo, algunas partículas de gran tamaño se mueven y descubren parte de las finas que son arrastradas. Por tanto, el máximo esfuerzo cortante que puede resistir un material de granulometría extendida en condición estable ocurre cuando alcanza su acorazamiento máximo. Ese esfuerzo cortante máximo se denomina genéricamente esfuerzo cortante crítico.

Entre el punto inferior de inicio de arrastre y el acorazamiento máximo puede existir un sinnúmero de grados de acorazamiento parcial. A partir del punto inferior, si el esfuerzo cortante aumenta, partículas de mayor tamaño son arrastradas, incrementándose así el diámetro medio de la coraza, hasta llegar al acorazamiento máximo.

Conocido el material del fondo de un canal o río, al estudiar la condición crítica del arrastre se presentan generalmente dos problemas prácticos.

El primero consiste en determinar el gasto máximo que puede pasar por un cauce que sea estable sin arrastre posterior de partículas; esto es, se requiere determinar la condición de acorazamiento máximo y conocer la granulometría de la coraza que lo forma y el esfuerzo cortante máximo que puede ejercer el flujo. El segundo problema consiste en obtener las características de acorazamientos parciales; es decir, calcular la granulometría de la coraza y su diámetro medio, dado el gasto que escurre por la sección (menor que el máximo crítico).

Las características de la coraza son función del peso específico de las partículas, de la distribución del sedimento original, de las propiedades físicas del fluido y de las características hidráulicas del flujo. Además, dado el carácter aleatorio de la turbulencia del flujo, siempre habrá una probabilidad asociada a cada partícula de ser arrastrada, la que es mayor para los granos finos que para los granos gruesos; por tanto, existe también la probabilidad asociada a cada partícula de formar parte de la coraza, que es mayor para las partículas grandes y menor para las finas.

A continuación y en forma sucinta se presenta el método de Gessler, el cual permite obtener tanto el esfuerzo cortante crítico que resiste un material con granulometría extendida, como la granulometría de la coraza máxima y del material que es arrastrado; así mismo, permite calcular las características de acorazamientos parciales. Posteriormente se presentan las contribuciones de Cruickshank-García y Maza-García que facilitan la obtención del acorazamiento máximo y del esfuerzo cortante crítico.

3.1 Método de Gessler

Al considerar el carácter aleatorio de la turbulencia de una corriente y al analizar experimentalmente el material arrastrado y el que forma coraza, Gessler obtuvo la distribución de probabilidad según la cual, dado un esfuerzo cortante medio del flujo, un determinado tamaño de grano no es arrastrado por la corriente y forma parte de la coraza. Encontró que esa probabilidad dependía principalmente del parámetro de Shields τ_* y, en mucho menor grado, del número de Reynolds de la partícula R_p . Así, la conocida curva de Shields indica la condición en la que la probabilidad de una partícula de diámetro D , a ser arrastrada es de 0.5; es decir, tiene igual probabilidad de no moverse que de ser arrastrada.

3.1.1 Material de la coraza

La probabilidad, q , que tiene un grano de no ser arrastrado se describe como

$$q = p\left[\frac{\tau_o'}{\tau_o} < \frac{\tau_c}{\tau_o}\right] = f\left(\frac{\tau_c}{\tau_o}\right) \quad (3.4a)$$

o bien como una función de τ_c/τ_o

$$q = f\left(\frac{\tau_c}{\tau_o}\right) \quad (3.4b)$$

donde

τ_o'	esfuerzo cortante instantáneo en el fondo, y producido por el flujo sobre la partícula
τ_o	esfuerzo cortante medio en el fondo, producido por el flujo
τ_c	esfuerzo cortante crítico que se requiere para mover una partícula de diámetro D . Se obtiene aceptando el valor medio dado por Meyer-Peter y Müller

$$\tau_c = 0.047(\gamma_s - \gamma)D \quad (3.5)$$

La ec 3.4 puede interpretarse también como la probabilidad que existe de que el esfuerzo cortante en el fondo, que varía en forma aleatoria, no sobrepase el valor crítico para la partícula en cuestión, esto es

$$q = p\left[\frac{\tau_c}{\tau_o} \geq 1\right] \quad (3.6)$$

es decir, si la relación τ_c/τ_o es igual o mayor que uno, la partícula no se mueve.

Con los resultados de sus experiencias, Gessler elaboró la fig 3.1, donde la ecuación de la recta tiene como variable aleatoria a la relación τ_c/τ_o , y se expresa como

$$q = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\tau_c}{\tau_o}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx \quad (3.7)$$

donde q es la probabilidad que tiene una partícula con esfuerzo cortante crítico τ_c (según la ec 3.5) de no ser arrastrada por un flujo con esfuerzo cortante τ_o . Además μ y σ son la media y la desviación estándar de la distribución de τ_c/τ_o , respectivamente, cuyos valores son $\mu = 1$ y $\sigma = 0.57$. x es la variable aleatoria, $x = \tau_c/\tau_o$

De acuerdo con lo anterior, si $\tau_o = \tau_c$, la probabilidad de que un grano de tamaño D forme parte de la coraza es de 0.5 (fig 3.1). Asimismo, si $\tau_o = 0.5 \tau_c$, la probabilidad de que permanezca en el fondo es 0.96, pero si $\tau_o = 2 \tau_c$ dicha probabilidad disminuye a 0.21.

La variable aleatoria x se puede estandarizar mediante la transformación

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (3.8)$$

o bien, según lo obtenido por Gessler

$$z = \frac{x - 1}{0.57} \quad (3.9)$$

El cambio indicado por la ec 3.8 transformará por completo cualquier variable aleatoria x a una con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Al normalizar la ec 3.7, ésta toma la forma

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_c} \exp \frac{-z^2}{2} dz \quad (3.10)$$

donde

$$z_c = \frac{\frac{\tau_c}{\tau_o} - 1}{0.57} \quad (3.11)$$

Si se desea utilizar el símbolo $N(\mu, \sigma)$ para denotar una densidad de probabilidad de tipo normal, entonces $N(0, 1)$ será la notación correspondiente a la densidad de probabilidad estándar o ley de probabilidad normal centrada y reducida. De acuerdo

con esto y teniendo en cuenta la ec 3.8, un punto en $N(\mu, \sigma)$ corresponde a un punto $z = (x - \mu)/\sigma$ en $N(0, 1)$; entonces, por analogía, un punto τ_c/τ_o en $N(1, 0.57)$ corresponde a un punto $z_c = (\tau_c/\tau_o - 1)/0.57$ en $N(0, 1)$; por tanto, si $\tau_c/\tau_o = 1$, entonces $z_c = 0$ y la probabilidad vale

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.12)$$

la que corresponde al valor $q = 0.5$, pues es la mitad del área bajo la curva normal estándar. Al proceder en forma análoga se obtiene que si $\tau_c/\tau_o = 2$, la variable aleatoria centrada y reducida toma el valor $z = 1/0.57 = 1.7544$, por lo que

$$q = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.7544} \exp^{-\frac{z^2}{2}} dz \simeq 0.96 \quad (3.13)$$

lo cual significa que si $\tau_o = 0.5 \tau_c$, una partícula de tamaño D tiene una probabilidad alta, $q = 0.96$, de no ser movida, mientras que la probabilidad de ser arrastrada es de $(1 - q) = 0.04$, tabla 3.1

Conocida la probabilidad q se pueden obtener las curvas granulométricas del material que forma la coraza y del que es arrastrado en función de la granulometría original, cuya distribución de tamaños está dada por

$$P_o(D) = \int_{D_{min}}^D p_o(y) dy \quad (3.14)$$

en la cual, $P_o(D)$ es la función de la distribución de probabilidad (función de frecuencia acumulada) de los tamaños del material original; $p_o(y)$ es la función de densidad de probabilidad (función de frecuencia o histograma) de los tamaños de las partículas del sedimento, antes de estar bajo la acción del flujo, y la variable y es una variable muda de integración.

Por otra parte, la fracción del material que se queda formando la coraza, de tamaño menor que D , está dada por

$$\int_{D_{min}}^D q p_o(y) dy \quad (3.15)$$

y la fracción del material que permanece en la coraza de tamaño menor que D_{max} se expresa como

$$\int_{D_{min}}^{D_{max}} q p_o(y) dy \quad (3.16)$$

por lo que la función de distribución de tamaños del material de la coraza debe ser

$$P_a(D) = \frac{\int_{D_{min}}^D q p_o(y) dy}{\int_{D_{min}}^{D_{max}} q p_o(y) dy} \quad (3.17)$$

Como la curva granulométrica original se divide en fracciones Δp_o que generalmente son deciles o percentiles, la función de distribución $P_a(D)$ también se puede valuar mediante esos incrementos con la expresión

$$P_a(D) = \frac{\sum_{D_{min}}^D q \Delta p_o}{\sum_{D_{min}}^{D_{max}} q \Delta p_o} \quad (3.18)$$

en la que $P_a(D)$ es la función de distribución de probabilidad o función de frecuencia acumulada de los tamaño D que forman la coraza.

La probabilidad o frecuencia de cada fracción de la coraza vale por tanto

$$\Delta P_a(D) = \frac{q \Delta p_o}{\sum_{D_{min}}^{D_{max}} q \Delta p_o} \quad (3.19)$$

En todo lo anterior el subíndice a se refiere a la coraza y el subíndice o al material original.

3.1.2 Material arrastrado

Puesto que q es la probabilidad de que una partícula de tamaño D forme parte de la coraza, se cumple que $(1 - q)$ es la probabilidad de que dicho grano sea arrastrado y no forme parte del fondo. Por tanto, la función de distribución de probabilidad de los tamaños del material arrastrado se obtiene mediante la expresión

$$P_e(D) = \frac{\int_{D_{min}}^D (1 - q) p_o(y) dy}{\int_{D_{min}}^{D_{max}} (1 - q) p_o(y) dy} \quad (3.20)$$

El subíndice e se refiere al material que es arrastrado y no forma parte de la coraza.

Si la curva granulométrica original se divide en fracciones, $P_e(D)$ se expresa como

$$P_e(D) = \frac{\sum_{D_{min}}^D (1 - q) \Delta p_o}{\sum_{D_{min}}^{D_{max}} (1 - q) \Delta p_o} \quad (3.21)$$

y la probabilidad de que el grano medio de cada fracción sea arrastrado vale

$$\Delta P_e(D) = \frac{(1 - q)\Delta p_o}{\sum_{D_{min}}^{D_{max}} (1 - q)\Delta p_o} \quad (3.22)$$

3.1.3 Coeficiente de estabilidad

Otro problema analizado por Gessler es el de la resistencia del material original. Para ello definió una probabilidad promedio \bar{q} , a la que llamó coeficiente de estabilidad, que permite analizar cuando un fondo puede ser estable debido al proceso de acorazamiento. En función de la granulometría original el coeficiente de estabilidad fue definido por Gessler como

$$\bar{q} = \frac{\int_{D_{min}}^{D_{max}} q^2 p_o(y) dy}{\int_{D_{min}}^{D_{max}} q p_o(y) dy} \quad (3.23)$$

y en función sólo del material de la coraza:

$$\bar{q} = \int_{D_{amin}}^{D_{amax}} q p_a(y) dy \quad (3.24)$$

Así, cuando $\tau_o = 0$, ninguna partícula se mueve y el coeficiente de estabilidad es $\bar{q} = 1$. Si $\tau_o \rightarrow \infty$, cuando todo el material está en movimiento, el coeficiente de estabilidad tiende aproximadamente a 0.04. Gessler encontró, basándose en algunos resultados obtenidos en laboratorio, que el esfuerzo cortante máximo al que puede estar expuesto un material no uniforme sin que se produzca erosión continua (esfuerzo cortante crítico de la mezcla original de sedimentos) es aquel para el que se tiene un coeficiente de estabilidad de $\bar{q} = 0.5$.

Por tanto, si $\bar{q} > 0.5$ (esfuerzos cortantes pequeños), se considera que el fondo es estable; pero si $\bar{q} < 0.5$ (esfuerzos cortantes altos), puede ocurrir una erosión continua hasta que el fondo se estabilice, por ejemplo, por reducción en la pendiente, con lo cual τ se reduce y \bar{q} se incrementa.

Gessler introdujo el coeficiente de estabilidad principalmente para tratar de tomar en cuenta el efecto estabilizador de cada grano y no se limita a un solo tamaño o diámetro característico, como el D_{75} que propusieron Lane y Carlson. Así, pues, el máximo esfuerzo cortante que un material de granulometría extendida puede soportar se determina por la suma de las contribuciones de cada grano individual. Un grano de tamaño D puede resistir como máximo un valor τ que corresponde a su esfuerzo cortante crítico.

$$\tau_c = \tau_{*c}(\gamma_s - \gamma)D \quad (3.25)$$

donde τ_{*c} es el parámetro adimensional de Shields para el inicio del movimiento. Si se conoce la granulometría del material del fondo expuesto al flujo, el esfuerzo cortante total que resiste es

$$\tau_c = \int_{D_{min}}^{D_{maz}} \tau_{*c}(\gamma_s - \gamma) D p_a(y) dy \quad (3.26)$$

en la cual, $p_a(y)$ es la función de frecuencia de los tamaños del sedimento expuesto al flujo, cualquiera que sea su grado de acorazamiento.

Si el peso específico γ_s de las partículas es constante y el flujo es turbulento, de tal manera que se pueda considerar $\tau_{*c} = 0.047 = \text{constante}$, para cualquier tamaño de las partículas, la ec 3.26 toma la forma

$$\tau_c = 0.047(\gamma_s - \gamma) \int_{D_{min}}^{D_{maz}} D p_a(y) dy \quad (3.27)$$

De acuerdo con Meyer-Peter y Müller, el término

$$\int_{D_{min}}^{D_{maz}} D p_a(y) dy \quad (3.28)$$

es la definición de tamaño efectivo o diámetro medio del material no uniforme, aunque ellos no consideraron la coraza sino el material original. Al dividir en fracciones una curva granulométrica, el diámetro medio vale

$$D_m = \sum_{D_{min}}^{D_{maz}} D \Delta p \quad (3.29)$$

o siguiendo la notación utilizada en este trabajo, ver cap 4.

$$D_m = \sum_{i=0}^n D_i \Delta p_i \quad (\text{ec } 4.20)$$

De acuerdo con la expresión 3.28, el diámetro medio de una coraza es

$$D_{ma} = \int_{D_{min}}^{D_{maz}} D_a p_a(y) dy \quad (3.30)$$

o bien

$$D_{ma} = \sum_{i=0}^n D_{ai} \Delta p_{ai} \quad (3.31)$$

En las ecs 3.29 y 3.31, p_i y p_{ai} están expresadas en fracción; si se expresan como porcentaje, ambas sumatorias deben multiplicarse por 0.01.

Cuando la velocidad media del flujo es pequeña, la corriente sólo arrastra las partículas más pequeñas y el tamaño de la coraza se parece al material original, aunque es un poco mayor. A medida que la velocidad del flujo aumenta, es capaz de arrastrar granos más grandes y el D_{ma} va en aumento; de esta manera se llega a una velocidad capaz de arrastrar hasta los granos más grandes, y así poner al descubierto las partículas menores, lo que hará además que el D_{ma} de la coraza empiece nuevamente a disminuir. Por tanto, se puede definir como esfuerzo cortante crítico del material original al que forma la coraza con el máximo D_{ma} ; esto es

$$\tau_o = \tau_{ca}, \text{ si } D_{ma} \text{ es máximo} \quad (3.32)$$

Gessler encontró experimentalmente que esto sucede cuando el coeficiente de estabilidad alcanza el valor $\bar{q} = 0.5$, siempre y cuando la desviación de la muestra sea mayor que 3. Para estos materiales recomienda usar como criterio de diseño $\bar{q} = 0.65$, el cual corresponde a un factor de seguridad de 1.3 en el esfuerzo cortante crítico. Sin embargo, Gessler encontró en su experiencia valores de \bar{q} tan bajos como 0.40 y 0.45 para la condición crítica. En este punto, Cruickshank y García sugieren como más razonable encontrar el esfuerzo cortante crítico mediante lo expuesto en la ec 3.31, es decir, analizar para qué τ_o se tiene en la coraza el D_{ma} máximo, y dividir dicho esfuerzo entre un factor de seguridad de 1.3 para reducirlo.

En cualquier caso, ya sea que se utilice el criterio empírico de $\bar{q} = 0.65$, o bien, el que expresan las ecs 3.30 a 3.32, se tiene que proceder por iteraciones sucesivas.

Para material uniforme, con $\sigma_g < 3$, Gessler recomienda calcular el esfuerzo cortante crítico como:

$$\tau_c = 0.024(\gamma_s - \gamma)D_{95} \quad (3.33)$$

que corresponde a una probabilidad 0.94 de que el D_{95} forme parte de la coraza. A medida que el material original se hace cada vez más y más uniforme el concepto de acorazamiento se torna dudoso. Sin embargo, el criterio expuesto para materiales con granulometría extendida, $\sigma_g > 3$, se puede aplicar a materiales más uniformes, $\sigma_g < 3$; luego el esfuerzo cortante así obtenido se compara con el criterio para material uniforme y se escoge el menor.

3.2 Secuencia de cálculo del método de Gessler

Como ya se ha mencionado, al estudiar el inicio de arrastre en fondos con granulometría extendida, se presentan dos problemas que revisten el mayor interés y que es necesario resolver:

- a. Obtener el esfuerzo cortante crítico de ese material, es decir, el que hace que el diámetro medio de la coraza sea máximo. Además, obtener la granulometría de la coraza que cumple con dicha condición.
- b. Dada una corriente cuyo esfuerzo cortante medio en el fondo es menor que el crítico, conocer la granulometría de la coraza formada, su diámetro medio y su diámetro representativo crítico.

A continuación se indican los pasos necesarios para resolver el punto b), es decir, para un τ_o conocido. El punto a) se resuelve por iteraciones sucesivas siguiendo los mismos pasos, pero incrementando τ_o en cada uno hasta obtener el diámetro medio máximo de la coraza.

Para ello se llena ordenadamente la tabla 3.2, cuyas columnas indican lo que se explica a continuación.

El cálculo se inicia conociendo $\tau_o = \gamma R S$ del flujo (problema b). Si se desea resolver el problema a), se puede iniciar el cálculo aceptando el criterio de Lane.

$$\tau_o = \tau_c f(D_{75})$$

La curva granulométrica representativa del material del cauce se divide en incrementos o intervalos p_i que, por comodidad, conviene que sean todos iguales. Si se utiliza una computadora es mejor trabajar con percentiles, $p_i = 0.01$.

Columna 1: i distribución de frecuencias relativas acumuladas (porcentaje acumulado) de la curva granulométrica original, correspondiente a cada límite de los intervalos en que se ha dividido la curva granulométrica.

Columna 2: Δp_i frecuencia relativa de cada intervalo en que se ha dividido la curva granulométrica. Este valor y los de las columnas que siguen, excepto la 12 y 17, conviene anotarlos en renglones intermedios de los valores de la columna 1.

- Columna 3: p_i distribución de frecuencias relativas acumuladas con base en la marca de clase o punto medio del intervalo correspondiente.
- Columna 4: z_n variable aleatoria estándar. Los valores de z_n se obtienen de la tabla 3.1 según el porcentaje (probabilidad) que indique la marca de clase de cada intervalo; por ejemplo, si la frecuencia relativa acumulada del primer intervalo define un porcentaje de 0.05, se busca en la tabla qué valor de z_n satisface una probabilidad de 5 por ciento; se obtiene así $z_{n1} = -1.64485$.
- Columna 5: D_i diámetro o tamaño representativo del intervalo, en mm. Se obtiene de la distribución teórica a la que se haya ajustado la curva granulométrica. Si dicha distribución teórica no existe, D_i se obtiene directamente de la curva granulométrica y no se requiere llenar la columna 4.
- Columna 6: τ_c esfuerzo cortante crítico que resiste cada partícula, en kgf/m^2 o N/m^2 . Para condiciones de flujo turbulento se calcula mediante la ec 3.5

$$\tau_c = 0.047(\gamma_s - \gamma)D_i \quad \tau_c \text{ en } kgf/m^2 \quad 3.5 \text{ a}$$

$$\tau_c = 4.523(P_s - P)D_i \quad \tau_c \text{ en } N/m^2 \quad 3.5 \text{ b}$$

El cálculo se efectúa para cada tamaño representativo, es decir, sustituyendo en las ecs 3.5 los diámetros (columna 5), expresados en m.

- Columna 7: τ_c/τ_o Se calcula la relación de esfuerzos indicada. Los valores que aparecen en esta columna se obtienen dividiendo cada valor de τ_c de la columna 6 entre el τ_o conocido.
- Columna 8: z valor de la abscisa de la distribución normal con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\tau = 1$. Se obtiene de la ec 3.11

$$z = \frac{\tau_c/\tau_o - 1}{0.57} \quad (\text{ec } 3.11)$$

Este cálculo es necesario para determinar la probabilidad que tiene cada diámetro representativo de no ser arrastrado y de formar parte de la coraza.

- Columna 9: q probabilidad que tienen las partículas de tamaño D_i de no ser arrastradas. Cada probabilidad q se determina con ayuda de la tabla 3.1 según el área bajo la curva normal estándar que define cada valor correspondiente de z . Cuando el valor de z no coincide con los dados en la tabla, la probabilidad q se determina interpolando linealmente. También se puede obtener q utilizando la fig 3.1, pero se pierde precisión.
- Columna 10: $q\Delta p$ frecuencia del material original que permanece y forma la coraza. Se obtiene multiplicando la amplitud Δp_i de cada intervalo por la probabilidad q correspondiente al diámetro representativo del intervalo en consideración. Una vez efectuados todos los productos, se suman y se conoce

$$\sum_{D_{min}}^{D_{max}} q\Delta P_a$$

- Columna 11: ΔP_a frecuencia relativa del material de la coraza o porcentaje de partículas de tamaño D_i que permanecen y forman la coraza. Se obtiene dividiendo cada valor de la columna 10 entre la suma total de la misma ec 3.19.
- Columna 12: P_a distribución de frecuencias relativas acumuladas (porcentaje acumulado que pasa) del material de la coraza. Se obtiene de la siguiente manera: en el primer renglón de la columna 12 ($i = 0$) se anota el cero y se suma al primer valor de la columna 11; el resultado se apunta en el tercer renglón de la columna 12, que corresponde al segundo i . La cantidad obtenida se adiciona a la segunda cantidad que aparece en la columna 11, y el resultado se anota en el quinto renglón de la columna 12, que corresponde al tercer i ; y así sucesivamente. En los renglones pares (2, 4, 6...) se anota el promedio de los valores extremos de cada intervalo y se asocian con los D_i de la columna (5)

Columna 13: $D_i \Delta P_{ai}$ las cantidades que forman esta columna se obtienen multiplicando los diámetros de la columna (5) por los valores correspondientes p_{ai} de la columna 11. La suma de todos estos productos da el diámetro medio de la distribución granulométrica del material de la coraza, ya que, por definición,

$$D_{ma} = \sum_{i=1}^n D_{ai} P_{ai} \quad (\text{ec 3.31})$$

Hasta aquí termina el cálculo de las características de la coraza formada con un τ_0 dado.

Si lo que se desea encontrar es el acorazamiento máximo, aquí termina lo que sería una iteración para determinar si el D_{ma} corresponde a la condición crítica, o sea, si ya no aumenta el tamaño del diámetro de la coraza.

Las siguientes iteraciones se inician en la columna 6, suponiendo otros valores de τ_0 y calculando sus respectivos D_{ma} . Se recomienda dibujar los valores supuestos de τ_0 contra los D_{ma} calculados, ya que así se puede visualizar para qué intervalo de valores de τ_0 aumenta o disminuye el D_{ma} . El cálculo termina cuando se obtiene D_{amax} , con lo que también se obtiene $\tau_c = \tau_{omax}$.

Una vez definida la condición crítica de acorazamiento máximo (problema a) o parcial (problema b), si se desea conocer la distribución granulométrica del material erosionado, se continúa con las columnas

Columna 14:	$(1 - q)$	probabilidad que tienen las partículas de tamaño D_i de ser arrastradas o de no formar parte de la coraza.
Columna 15:	$(1 - q) \Delta p$	frecuencia del material original que es erosionado o arrastrado.
Columna 16:	ΔP_e	frecuencia relativa del material erosionado o porcentaje de partículas de tamaño D_i que es arrastrado o lavado por el flujo.
Columna 17:	P_e	distribución de frecuencias relativas acumuladas del material erosionado
Columna 18:	$D_i \Delta P_{ei}$	columna para calcular el diámetro medio del material erosionado

3.3 Simplificaciones para obtener el acorazamiento máximo

Se ha mostrado que para conocer el acorazamiento máximo de un material con granulometría extendida, o, lo que es lo mismo, el esfuerzo cortante crítico máximo que puede resistir, se utiliza el método de Gessler por iteraciones sucesivas.

Para facilitar el proceso, Cruickshank y García realizaron lo ya explicado para dos distribuciones teóricas de los tamaños del material del fondo: la log-normal y la logarítmica, y encontraron el diámetro representativo de la coraza que, al ser utilizado en la ecuación de Shields, permite encontrar el esfuerzo cortante máximo que puede ejercer el flujo sobre la coraza sin que ésta pierda su estabilidad: sus resultados se presentan en gráficas (ref 6), pero su análisis fue aproximado por haberlo hecho en deciles.

Posteriormente, Maza y García continuaron esta idea analizando con mayor precisión la distribución log-normal y obtuvieron además el esfuerzo cortante crítico que resiste el acorazamiento máximo y su granulometría. Sus resultados son los siguientes:

El esfuerzo cortante máximo o crítico que es capaz de soportar un sedimento con granulometría extendida y distribución log-normal se obtiene de las expresiones

1)

$$\tau_c = 0.028(\gamma_s - \gamma) D_{50} \sigma_g^{2.042} \quad (3.34)$$

aplicable cuando $\sigma_g \geq 3$

2)

$$\tau_c = 0.0356(\gamma_s - \gamma) D_{50} \sigma_g^{1.823} \quad (3.35)$$

aplicable cuando $1.7 < \sigma_g \leq 3$

donde

D_{50} diámetro cincuenta de la muestra original en m
 σ_g desviación estándar geométrica de la muestra original

A partir del τ_{cmax} se logra obtener el diámetro representativo del material original que produce ese esfuerzo cortante crítico. Se obtiene mediante la expresión

$$D_r = \frac{\tau_c}{0.047(\gamma_s - \gamma)} \quad (3.36)$$

donde τ_c está dado por las ecs 3.34 y 3.35.

Por ejemplo, si la distribución es log-normal y $\sigma_g = 4$, D_r tiene un valor casi igual a D_{95} de la muestra original.

Todo lo anterior es teórico, por lo que conviene recordar que para diseñar canales o para estudiar el acorazamiento máximo en ríos, conviene considerar como τ_{cmax} de diseño, el teórico obtenido de las ecs 3.34 y 3.35 entre 1.50, por las incertidumbres que hay en la determinación de la curva granulométrica del material original del canal. Así

$$\tau_{diseño} = \frac{\tau_{cmax}}{1.5} \quad (3.37)$$

Por otra parte, la curva granulométrica de la coraza máxima teórica se puede obtener en forma aproximada, aunque sencilla, con ayuda de las siguientes expresiones

$$(D_{84})_a = 0.723D_{50}\sigma_g^{2.32} \quad (3.38)$$

$$(D_{70})_a = 0.674D_{50}\sigma_g^{2.03} \quad (3.39)$$

$$(D_{50})_a = 0.676D_{50}\sigma_g^{1.5} \quad (3.40)$$

$$(D_{30})_a = 0.757D_{50}\sigma_g^{0.695} \quad (3.41)$$

$$(D_{10})_a = 0.858D_{50}\sigma_g^{-0.086} \quad (3.42)$$

El subíndice a (que afecta a los paréntesis) se refiere a las partículas de la coraza.

Con las ecs 3.34 a 3.42, el ingeniero dispone de un procedimiento más expedito para obtener las características de la coraza máxima cuando la granulometría original se puede ajustar a una distribución log-normal. Cuando lo anterior no es posible, tendrá que aplicar el método de Gessler, tal como fue expuesto.

3.4 Bibliografía

Abramowitz, M. y Stegun, I., "Handbook of mathematical functions". Dover Publications Inc., Nueva York, 1972, pp 976.

Bogardi, J., "Sediment transport in alluvial stream". Akadémiai Kiadó, Budapest, 1974.

Comisión Federal de Electricidad, "Manual de diseño de obras civiles. Hidráulica Fluvia". Tomo A.2.11., México, 1981.

Cruickshank, C. y García, M., "*Determinación del inicio de arrastre para material suelto con granulometría extendida*". Memorias del IV Congreso Nacional de Hidráulica, Acapulco, México, 1976.

García Flores, M., "*Acorazamiento*". Notas de la clase de hidráulica fluvial. DEPMI, UNAM, México, 1978.

Gessler, J., "*Critical shear stress for sediment mixture*". Memorias del XIV Congreso Internacional del IAHR, París 1971, pp C1-1/C1-8

Maza Alvarez., J.A. y García Flores, M., "*Distribuciones de los tamaños de los sedimentos del fondo en cauces naturales*". Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Sao Paulo, Brasil, Sep 1986.

Maza Alvarez, J.A. y García Flores, M., "*Hidrodinámica, bases para hidráulica fluvial*". Publicación D-20 del Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D.F., Mar 1984.

Shen, H., "*River Mechanics*". Editado por Shen H. Fort Collins, EUA, 1971.

Vanoni, V., "*Sedimentation Engineering*". Publicación de ASCE, Nueva York, 1975.

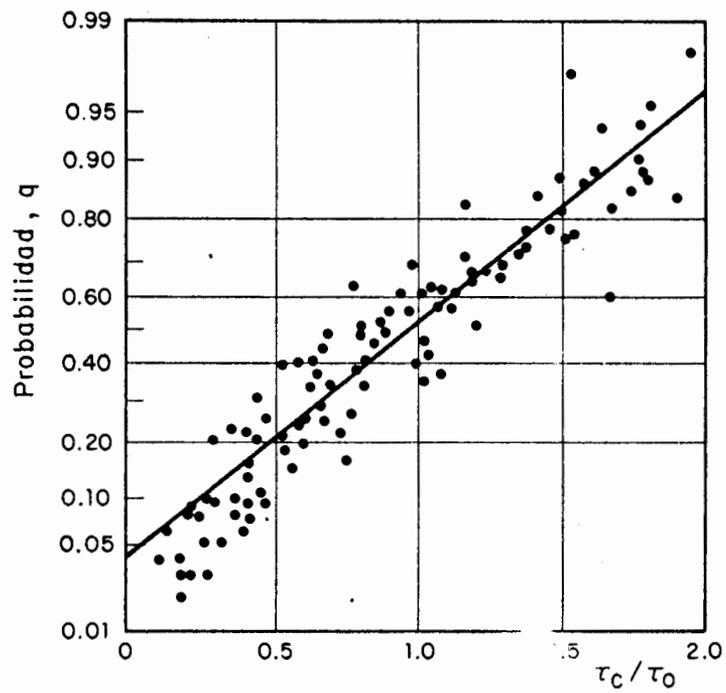


Fig 3.1 Probabilidad de que una determinada partícula no sea arrastrada y forme parte de la coraza, según Gessler

TABLA 3.2 Secuencia de cálculo para la determinación de τ_c . Método de Gessler

$$\tau_c = 0.933 \text{ kgf/m}^2$$

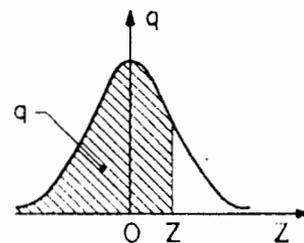
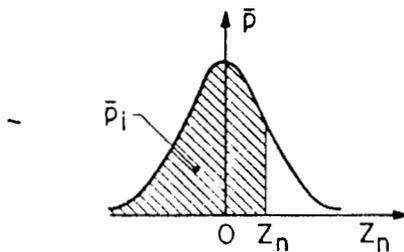
$$D_m = 4.317 \text{ mm}$$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)
i	Δp_i	\bar{p}_i	z_n	D_i en mm	τ_c' en kgf/m ²	$\frac{\tau_c}{\tau_o}$	z	q	$q\Delta p$	ΔP_a	P_a	$D_i \Delta P_a$ en mm	$1-q$	$(1-q)\Delta p$	ΔP_e	P_e	$D_i \Delta P_e$
0											0.00000						0.0000
0.10	0.10	0.05	-1.645	0.20	0.016	0.017	-1.725	0.042	0.0042	0.0239	0.01195	0.0049	0.958	0.0958	0.1163	0.0582	0.0233
											0.0239						0.1163
0.20	0.10	0.15	-1.036	0.48	0.037	0.040	-1.685	0.046	0.0046	0.0260	0.0369	0.0124	0.954	0.0954	0.1159	0.1743	0.0556
											0.0499						0.2322
0.30	0.10	0.25	-0.674	0.79	0.061	0.065	-1.640	0.051	0.0051	0.0286	0.0642	0.0224	0.949	0.0949	0.1153	0.2899	0.0911
											0.0785						0.3475
0.40	0.10	0.35	-0.385	1.17	0.091	0.098	-1.583	0.057	0.0057	0.0321	0.0945	0.0376	0.943	0.0943	0.1146	0.4048	0.1341
											0.1160						0.4621
0.50	0.10	0.45	-0.126	1.68	0.130	0.140	-1.509	0.066	0.0066	0.0372	0.1292	0.0625	0.934	0.0934	0.1135	0.5188	0.1907
											0.1478						0.5756
0.60	0.10	0.55	0.126	2.38	0.185	0.198	-1.406	0.080	0.0080	0.0452	1.1704	0.1076	0.920	0.0920	0.1118	0.6315	0.2661
											0.1930						0.6873
0.70	0.10	0.65	0.385	3.41	0.265	0.284	-1.256	0.105	0.0105	0.0592	0.2226	0.2020	0.895	0.0895	0.1088	0.7417	0.3710
											0.2522						0.7961
0.80	0.10	0.75	0.674	5.09	0.395	0.424	-1.010	0.156	0.0156	0.0884	0.2964	0.4504	0.844	0.0844	0.1025	0.8473	0.5217
											0.3406						0.8986
0.90	0.10	0.85	1.036	8.41	0.653	0.701	-0.525	0.300	0.0300	0.1697	0.4255	1.4279	0.700	0.0700	0.0850	0.9411	0.7149
											0.5103						0.9836
1.00	0.10	0.95	1.645	19.56	1.517	1.629	1.104	0.865	0.0865	0.4896	0.7552	9.5757	0.135	0.0135	0.0164	0.9918	0.3208
											1.0000						1.0000
Σ												$D_{ma} = 11.9034 \text{ mm}$					$D_{me} = 2.6893 \text{ mm}$

- La curva granulométrica del material original se construye con las columnas (3) y (5)
- La curva granulométrica de la coraza se construye con las columnas (5) y (12)
- La curva granulométrica del material arrastrado se construye con las columnas (5) y (17)

TABLA 1. FUNCION DE PROBABILIDAD NORMAL, VALOR DE Z_i

q, \bar{P}_i	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	1.010	q, \bar{P}_i
0.00	∞	3.09023	2.87816	2.74778	2.65207	2.57583	2.51214	2.45726	2.40892	2.36562	2.32635	0.99
0.01	2.32635	2.29037	2.25713	2.22621	2.19729	2.17009	2.14441	2.12007	2.09693	2.07485	2.05375	0.98
0.02	2.05375	2.03352	2.01409	1.99539	1.97737	1.95996	1.94313	1.92684	1.91104	1.89570	1.88079	0.97
0.03	1.88079	1.86630	1.85218	1.83842	1.82501	1.81191	1.79912	1.78661	1.77438	1.76241	1.75069	0.96
0.04	1.75069	1.73920	1.72793	1.71689	1.70604	1.69540	1.68494	1.67466	1.66456	1.65463	1.64485	0.95
0.05	1.64485	1.63523	1.62576	1.61644	1.60725	1.59819	1.58927	1.58047	1.57179	1.56322	1.55477	0.94
0.06	1.55477	1.54643	1.53820	1.53007	1.52204	1.51410	1.50626	1.49851	1.49085	1.48328	1.47579	0.93
0.07	1.47579	1.46838	1.46106	1.45381	1.44603	1.43953	1.43250	1.42554	1.41865	1.41183	1.40507	0.92
0.08	1.40507	1.39838	1.39174	1.38517	1.37866	1.37220	1.36581	1.35946	1.35317	1.34694	1.34076	0.91
0.09	1.34076	1.33462	1.32854	1.32251	1.31652	1.31058	1.30469	1.29884	1.29303	1.28727	1.28155	0.90
0.10	1.28155	1.27587	1.27024	1.26464	1.25908	1.25357	1.24808	1.24264	1.23723	1.23186	1.22653	0.89
0.11	1.22653	1.22123	1.21596	1.21072	1.20553	1.20036	1.19522	1.19012	1.18504	1.18000	1.17499	0.88
0.12	1.17499	1.17000	1.16505	1.16012	1.15522	1.15035	1.14551	1.14069	1.13590	1.13113	1.12639	0.87
0.13	1.12639	1.12168	1.11699	1.11232	1.10768	1.10306	1.09847	1.09390	1.08935	1.08482	1.08032	0.86
0.14	1.08032	1.07584	1.07138	1.06694	1.06252	1.05812	1.05374	1.04939	1.04505	1.04073	1.03643	0.85
0.15	1.03643	1.03215	1.02789	1.02365	1.01943	1.01522	1.01103	1.00686	1.00271	0.99858	0.99446	0.84
0.16	0.99446	0.99036	0.98627	0.98220	0.97815	0.97411	0.97009	0.96609	0.96210	0.95812	0.95416	0.83
0.17	0.95416	0.95022	0.94629	0.94238	0.93848	0.93458	0.93072	0.92686	0.92301	0.91918	0.91537	0.82
0.18	0.91537	0.91156	0.90777	0.90399	0.90023	0.89647	0.89273	0.88901	0.88529	0.88159	0.87790	0.81
0.19	0.87790	0.87422	0.87055	0.86689	0.86325	0.85962	0.85600	0.85239	0.84879	0.84520	0.84162	0.80
0.20	0.84162	0.83805	0.83450	0.83095	0.82742	0.82390	0.82038	0.81687	0.81338	0.80990	0.80642	0.79
0.21	0.80642	0.80296	0.79950	0.79608	0.79262	0.78919	0.78577	0.78237	0.77897	0.77557	0.77219	0.78
0.22	0.77219	0.76882	0.76546	0.76210	0.75875	0.75542	0.75208	0.74876	0.74545	0.74214	0.73885	0.77
0.23	0.73885	0.73556	0.73228	0.72900	0.72574	0.72248	0.71923	0.71599	0.71275	0.70952	0.70630	0.76
0.24	0.70630	0.70309	0.69988	0.69668	0.69349	0.69031	0.68713	0.68396	0.68080	0.67764	0.67449	0.75
0.25	0.67449	0.67135	0.66821	0.66508	0.66196	0.65884	0.65573	0.65262	0.64952	0.64643	0.64335	0.74
0.26	0.64335	0.64027	0.63719	0.63412	0.63106	0.62801	0.62496	0.62191	0.61887	0.61584	0.61281	0.73
0.27	0.61281	0.60979	0.60678	0.60376	0.60076	0.59776	0.59477	0.59178	0.58879	0.58581	0.58284	0.72
0.28	0.58284	0.57987	0.57691	0.57395	0.57100	0.56805	0.56511	0.56217	0.55924	0.55631	0.55338	0.71
0.29	0.55338	0.55047	0.54755	0.54464	0.54174	0.53884	0.53594	0.53305	0.53016	0.52728	0.52440	0.70
0.30	0.52440	0.52153	0.51866	0.51579	0.51293	0.51007	0.50722	0.50437	0.50153	0.49869	0.49585	0.69
0.31	0.49585	0.49302	0.49019	0.48736	0.48454	0.48173	0.47891	0.47610	0.47330	0.47050	0.46770	0.68
0.32	0.46770	0.46490	0.46211	0.45933	0.45654	0.45376	0.45099	0.44821	0.44544	0.44268	0.43991	0.67
0.33	0.43991	0.43715	0.43440	0.43164	0.42889	0.42615	0.42340	0.42066	0.41793	0.41519	0.41246	0.66
0.34	0.41246	0.40974	0.40701	0.40429	0.40157	0.39886	0.39614	0.39343	0.39073	0.38802	0.38532	0.65
0.35	0.38532	0.38262	0.37993	0.37723	0.37454	0.37186	0.36917	0.36649	0.36381	0.36113	0.35846	0.64
0.36	0.35846	0.35579	0.35312	0.35045	0.34779	0.34513	0.34247	0.33981	0.33716	0.33450	0.33185	0.63
0.37	0.33185	0.32921	0.32656	0.32392	0.32128	0.31864	0.31600	0.31337	0.31074	0.30811	0.30548	0.62
0.38	0.30548	0.30286	0.30023	0.29761	0.29499	0.29237	0.28976	0.28715	0.28454	0.28193	0.27932	0.61
0.39	0.27932	0.27671	0.27411	0.27151	0.26891	0.26631	0.26371	0.26112	0.25853	0.25594	0.25335	0.60
0.40	0.25335	0.25076	0.24817	0.24559	0.24301	0.24043	0.23785	0.23527	0.23269	0.23012	0.22754	0.59
0.41	0.22754	0.22497	0.22240	0.21983	0.21727	0.21470	0.21214	0.20957	0.20701	0.20445	0.20189	0.58
0.42	0.20189	0.19934	0.19678	0.19422	0.19167	0.18912	0.18657	0.18402	0.18147	0.17892	0.17637	0.57
0.43	0.17637	0.17383	0.17128	0.16874	0.16620	0.16366	0.16112	0.15858	0.15604	0.15351	0.15097	0.56
0.44	0.15097	0.14843	0.14590	0.14337	0.14084	0.13830	0.13577	0.13324	0.13072	0.12819	0.12566	0.55
0.45	0.12566	0.12314	0.12061	0.11809	0.11556	0.11304	0.11052	0.10799	0.10547	0.10295	0.10043	0.54
0.46	0.10043	0.09791	0.09540	0.09288	0.09036	0.08784	0.08533	0.08281	0.08030	0.07778	0.07527	0.53
0.47	0.07527	0.07276	0.07024	0.06773	0.06522	0.06271	0.06020	0.05768	0.05517	0.05266	0.05015	0.52
0.48	0.05015	0.04764	0.04513	0.04263	0.04012	0.03761	0.03510	0.03259	0.03008	0.02758	0.02507	0.51
0.49	0.02507	0.02256	0.02005	0.01755	0.01504	0.01253	0.01003	0.00752	0.00501	0.00251	0.00000	0.50
0.10	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	



4. ESTABILIDAD DE CAUCES

En los ríos y canales que transportan sedimentos existe una relación entre las características geométricas de la sección transversal, la pendiente hidráulica, las propiedades físicas del material de fondo y de las orillas, el gasto líquido y el transporte de sedimentos, de tal forma que al variar algunos de los parámetros mencionados, los restantes se modifican y ajustan.

Aguas abajo de una presa puede existir una modificación notable del río, hasta el primer afluente de importancia, debido a la alteración que se introduce principalmente por el cambio del gasto líquido, ya que la regulación que sufren los hidrogramas, y sobre todo las avenidas dentro del embalse, cambian el hidrograma de salida. Esta modificación es importante en presas para riego cuando la obra de toma está conectada a un canal y por tanto no descarga al río.

En este capítulo se muestran dos grupos de relaciones empíricas, que han sido propuestos para conocer la interrelación de los parámetros mencionados. Con ellos es posible predecir, dentro de la exactitud de cada método, la posible modificación esperada en los otros parámetros dependientes. Lo que aquí se explica para esas relaciones se puede

aplicar a cualquier otra de las muchas que existen en la literatura especializada. Antes de presentarlas, se describirán en forma sucinta algunos conceptos de interés dentro del campo de la estabilidad de cauces.

4.1 Grados de libertad

Una corriente puede tener uno o varios grados de libertad dependiendo de las características de sus fronteras. Diferentes autores proponen tres grados de libertad para una corriente natural, mientras otros consideran cuatro.

Un grado de libertad. Esta condición se presenta cuando en el canal, el fondo y las paredes son rígidas y por tanto no existe interacción entre el flujo y la frontera, excepción hecha de su rugosidad. Como ejemplo de lo anterior se pueden mencionar los canales de concreto y, en los ríos, los tramos donde la corriente no es capaz de mover ninguna partícula del fondo y orillas. Cuando una corriente tiene un grado de libertad, el tirante es la única incógnita, y sólo se requiere de una ecuación de fricción para obtenerlo.

Dos grados de libertad. Una corriente tiene dos grados de libertad cuando sus paredes son rígidas, pero transporta agua y sedimentos. Así, para una combinación de gasto líquido y gasto sólido se ajustará siempre la misma pendiente y el mismo tirante, por lo que se requieren dos ecuaciones para obtener esas dos variables: una de fricción para fondo móvil y una de transporte de sedimentos.

Tres grados de libertad. Esta condición se presenta cuando un flujo de agua corre o forma un cauce sobre material que puede ser transportado por dicha corriente. De esta manera, al pasar un mismo gasto líquido y sólido se ajustará el ancho, el tirante y la pendiente del cauce y se requerirán tres ecuaciones para obtener esas tres variables.

La mayoría de los métodos propuestos para obtener la estabilidad de un cauce tienen tres ecuaciones, por lo que para sus autores los grados de libertad de una corriente natural son tres.

Cuatro grados de libertad. Según los autores que defienden la existencia de cuatro grados de libertad, el cuarto se presenta cuando una corriente tiene, además de los mencionados, la posibilidad de desarrollar meandros.

Téngase en cuenta que el desarrollo de meandros es en parte consecuencia de la necesidad que tiene el río de aumentar su longitud, cuando la pendiente que requiere para transportar el líquido y los sedimentos que pasan por él, es menor que la pendiente general del valle en el sentido del escurrimiento. En este trabajo se tratará sobre las corrientes con dos o tres grados de libertad: dos, cuando el río se encuentra encañonado, o ambas orillas se han protegido artificialmente con muros marginales, diques o espigones y tres, cuando sus orillas son erosionables.

4.2 Tipos de estabilidad

Sobre este punto hay varios intentos de clasificar los tramos de los ríos según sus características, tanto por especialistas en hidráulica fluvial como por geomorfólogos. En este trabajo se propone una clasificación simplificada y se distinguen tres tipos de estabilidad: estática, dinámica y morfológica.

La *estabilidad estática* existe cuando el flujo no afecta a las márgenes, y por extensión cuando no afecta al fondo ni a las orillas. Por tanto no hay erosiones laterales y la forma del cauce no cambia con el tiempo, o sólo en forma inapreciable. En este grupo se incluyen los ríos con orillas resistentes, ya sea en forma natural o artificial, y que aunque pueden modificar su pendiente, no sufren desplazamientos laterales. Por tanto, en la práctica, los tramos de los ríos con uno y dos grados de libertad tienen estabilidad estática.

La *estabilidad dinámica* propiamente dicha coincide con lo explicado cuando hay tres grados de libertad; es decir, tenidas en cuenta las características del fondo y las orillas, el ancho, el tirante y la pendiente del cauce dependen del gasto líquido y sólido que pasan por el tramo. Esto implica que existen cambios de la sección al variar el hidrograma, y que además se producen corrimientos laterales en todas las curvas, en forma gradual pero constante.

Este tipo de estabilidad presupone que todo el flujo escurre por una única sección y por tanto coincide con la definición de "cañal en régimen" propuesto por la teoría de régimen.

La *estabilidad morfológica* se presenta en todos los tramos del río que no han sido modificados por factores humanos, cualquiera que sea la forma en que el agua y los sedimentos pasen por él. Por tanto, dentro de esta clasificación quedan involucrados los tramos que en forma natural tienen estabilidad estática o dinámica, pero además aquellos trezados, con islas y bifurcaciones.

En este trabajo se hará mención de los cauces con estabilidad dinámica con tres grados de libertad y a los que tienen estabilidad estática con dos grados de libertad.

4.3 Gasto formativo

Al hablar sobre la estabilidad de un cauce siempre se menciona un ajuste entre algunas variables geométricas o del material del fondo y un gasto líquido que permanece constante.

En los grandes canales de riego no revestidos se llegan a tener gastos que permanecen casi constantes y que, aunque varíen, lo hacen dentro de límites estrechos. No ocurre lo mismo con las corrientes naturales, donde el gasto sufre variaciones notables a lo

largo del año y de un año con respecto a otro. Sin embargo, se observa que en cada río tienen un ancho y pendiente que permanecen casi constantes y que, al variar el gasto, el parámetro más afectado es el tirante. Entonces, si se tiene una pendiente y un ancho estables, se tendrá un gasto asociado a ellos y, por supuesto, ese gasto estará asociado también a uno de los tirantes. De esta forma se puede hablar de un gasto formativo o dominante del río que, por comodidad, se considera como representativo de todo el hidrograma anual.

Existen varios criterios para definir ese gasto formativo; entre los más importantes y cuya utilización se recomienda están los siguientes:

- a. Capacidad hidráulica del cauce principal. Autores como Kellerhals, Ackers y Charton consideran como gasto formativo al gasto máximo que es capaz de escurrir por el cauce principal sin desbordar. Esta definición se aplica por supuesto a ríos de planicie, porque en los ríos encañonados esta definición no procede. Por otra parte, también Ackers y Charton relacionan el gasto formativo con el desarrollo de meandros, pero el valor encontrado está cerca del señalado.
- b. Gasto correspondiente a un periodo de retorno de 1.4 años. A partir de avenidas máximas anuales, Leopold, Wolman y Miller calcularon que los gastos que llenan el cauce principal tienen un periodo de retorno entre 1.07 y 4 años con promedio de 1.4 años. Este criterio, que para los cauces de planicie conduce a resultados similares a los dados por el punto a), es útil en aquellos tramos donde el río no puede desbordarse por escurrir entre montañas, tener márgenes muy elevadas o estar encañonado.
- c. Gasto que tiene en cuenta al transporte de sedimentos. Los métodos anteriores toman en cuenta el gasto de llenado del cauce pero no consideran el sedimento transportado. Se ha propuesto como gasto dominante a aquel gasto hipotético que al fluir en forma constante transporta el mismo volumen de sedimentos que el que el río arrastra en el mismo periodo de tiempo, generalmente un año.

Por lo anterior se deriva que el volumen de sedimentos transportados por el río en un año con gastos variables (hidrograma) es igual al volumen de material sólido transportado durante el mismo periodo de tiempo, al fluir constantemente el gasto dominante. Debido a las variaciones tan grandes que puede tener el gasto a lo largo del año, algunos autores consideran que deben tomarse varios gastos formativos. Así, si en el estiaje ocurren gastos muy pequeños con capacidad reducida de transporte, sólo intervienen en el cálculo los gastos de la época de lluvia.

Otros gastos que se recomiendan analizar son los mayores cuya ocurrencia se presenta en el 3 por ciento, o menos, de los días del año. En algunos tramos este valor es muy semejante al que llena el cauce principal.

4.4 Presentación de métodos

Aquí se presentan dos métodos de cálculo que permiten conocer las características estables de una corriente natural o las relaciones que guardan los diferentes parámetros de una corriente cuando existe equilibrio, lo que se reduce al comportamiento de los ríos formados por un solo cauce o canal. Esos criterios son el de Lacey, tomado de la teoría del régimen, y el propuesto por Maza y Cruickshank.

La teoría del régimen es completamente empírica y fue obtenida y ampliada con base en observaciones sobre el comportamiento de canales de riego que han estado en operación durante varios años y que, por tanto, se consideran estables.

Como muchos de estos canales tienen márgenes y fondos arcillosos, la teoría del régimen se recomienda para este tipo de material; sin embargo, otros autores dentro del mismo grupo han estudiado canales arenosos. Así, las fórmulas de Lacey toman en cuenta el diámetro de los sedimentos granulares pero no la resistencia de las orillas. Este último aspecto es considerado por otros autores como Blench o Simons y Albertson. Como las fórmulas de los autores mencionados conducen a resultados semejantes, en este trabajo sólo se presentan las de Lacey.

Por último se muestra lo expresado por Maza-Cruickshank que, aunque originalmente se obtuvo para arenas, posteriormente se amplió para gravas. Es un método semiempírico que tiene la ventaja de tener en cuenta el transporte de sedimentos y que por ende permite predecir las modificaciones que sufre un cauce cuando se altera el transporte de sólidos.

Después de presentar las fórmulas de diseño, en el capítulo 5 se incluye una aplicación para predecir cambios en la geometría de la sección y pendiente del cauce al modificar algunos de los parámetros.

4.4.1 Método de Lacey

El método de Lacey es uno de los innumerables métodos empíricos agrupados en la llamada teoría del régimen, que permite estudiar la estabilidad de canales y cauces naturales.

Fue en 1895 en la India cuando a Kennedy se le planteó el problema de diseñar unos canales de irrigación no revestidos. Como ya se sabía que al terminar la construcción de un canal diseñado con las fórmulas tradicionales derivadas de la de Chezy, ocurrían erosiones y cambios en su sección, Kennedy decidió observar y comparar las características hidráulicas del canal alto Bari Doab, cuyas características geométricas no variaban y por tanto se consideraba estable. Al observar 30 secciones encontró que se conservaba la relación

$$U = 0.548 d^{0.64} \quad (4.1)$$

donde U es la velocidad media del flujo en m/s y d el tirante en m. Al encontrar la relación empírica anterior, Kennedy concluyó que los nuevos canales debían cumplirla. Así nació la teoría del régimen, la cual está formada con las contribuciones de todos aquellos autores que obtuvieron una ecuación empírica basada en observaciones particulares de canales estables no revestidos.

Después de la relación propuesta por Kennedy, una pléyade de autores, sobre todo de la comunidad británica, propusieron otras relaciones empíricas para relacionar la geometría de la sección transversal y la pendiente del canal con el gasto líquido y las propiedades físicas del material del fondo y las orillas. Entre ellos se pueden citar a Lindley, Lane, Lacey, Bose y Malhotra, Chitale, Inglis, Joglekar, Blench y Simons y Albertson, quienes obtuvieron sus datos principalmente en canales de riego en la India, Paquistán y Egipto y posteriormente en arroyos y ríos.

Fue Lindley, en 1919, el primero en utilizar la palabra régimen. El indicó lo siguiente: "Se dice que un canal está en régimen cuando su sección transversal y pendiente están en equilibrio con el gasto transportado, de tal manera que aumentos y disminuciones de él, hacen que el ancho y tirante se modifiquen en función de ese gasto. Con ello, al finalizar periodos anuales, las secciones y pendientes prácticamente permanecen constantes". Como se observa, ésta es la característica principal de los cauces con estabilidad dinámica.

Como la mayoría de las observaciones efectuadas y las fórmulas empíricas propuestas dentro de la teoría del régimen corresponden a canales con material que varía de arcillas a arenas, dichos métodos tienen utilidad principal para cauces con estos materiales. Entre los resultados presentados para materiales más gruesos conviene mencionar los de Simons y Albertson.

Aunque en este trabajo se describe el método de Lacey, lo que se explica posteriormente se puede aplicar a cualquier otro método.

Lacey continuó y amplió los estudios de Lindley (quien había ya observado 4,345 km de canales de la India) y fue el primero en considerar al material del fondo por medio del parámetro f , denominado factor de sedimentación (*silt factor*). Además, prefirió utilizar en sus fórmulas el radio hidráulico y el perímetro mojado en lugar del ancho y el tirante. Aunque esto representa mayor trabajo para el proyectista, Lacey encontró que era más preciso. Téngase en cuenta que si su método se aplica a ríos, el radio hidráulico es prácticamente igual al tirante y, el perímetro mojado, al ancho de la superficie libre.

Las fórmulas fundamentales expresadas en sistema métrico son

$$B \simeq P = 4.838 Q^{1/2} \quad (4.2)$$

$$d \simeq R = 0.4725(Q/f)^{1/3} \quad (4.3)$$

$$S = 0.000302f^{5/3}/Q^{1/6} \quad (4.4)$$

donde

p	perímetro mojado, en m
B	ancho de la superficie libre en m
R	radio hidráulico, en m
d	tirante de la corriente, en m
S	pendiente hidráulica
Q	gasto de diseño, en m^3/s
f	factor de sedimentación, cuyo valor se obtiene de la expresión

$$f = 55.66D_m^{1/2} \quad (4.5)$$

donde d_m es el diámetro medio del material del fondo, en m; se obtiene de la expresión:

$$D_m = 0.01 \sum D_i p_i \quad (4.6)$$

donde D_i es el diámetro medio dentro del rango i de la granulometría y p_i es el porcentaje en peso de material en el rango i , respecto al total.

Como ecuación complementaria utiliza la ecuación de Manning, según la cual el coeficiente de rugosidad se obtiene en función del factor de sedimentación. Con ella se calcula la velocidad media de la corriente

$$U = \frac{R^{2/3} S^{1/2}}{Na}$$

donde Na es el coeficiente de rugosidad valuado según la expresión

$$Na = 0.0225f^{0.25} \quad (4.7)$$

Al sustituir en esta última ecuación el valor de f se obtiene

$$Na = \frac{D_m^{1/8}}{16.27} \quad \text{dado } D_m, \text{ en } m \quad (4.8)$$

Las fórmulas fundamentales presentadas son al mismo tiempo fórmulas de diseño, ya que en función del gasto formativo o de diseño se obtiene el perímetro mojado P , el radio hidráulico R y la pendiente del canal S . El otro parámetro que debe tomarse en cuenta es el factor f , que considera la resistencia de las partículas del fondo y las orillas.

Lacey derivó sus fórmulas principalmente de datos obtenidos en canales de riego, por lo que deben utilizarse con cuidado al aplicarse a ríos. Sin embargo muestran, aunque en forma simplificada, las tendencias de la relación entre los parámetros considerados.

4.4.2 Criterio de Maza y Cruickshank

En 1973 y basados en el concepto de los tres grados de libertad, estos autores propusieron su método para obtener las características estables de un cauce a partir de las siguientes fórmulas fundamentales: una de resistencia al flujo o fricción, una de transporte de sedimentos, y una que toma en cuenta la resistencia de las orillas.

Como se considera que en un cauce estable existe continuidad tanto del gasto líquido como de los sedimentos, las dos primeras ecuaciones deben intervenir. La tercera ecuación puede ser alguna que permita obtener el mínimo trabajo que el río tiene que realizar para transportar los sedimentos y el gasto líquido. Se ha escogido una relación empírica que relaciona el ancho y el tirante del escurrimiento y en la cual interviene la resistencia de las orillas.

4.4.2.1 Fórmulas fundamentales para material arenoso

En este trabajo se utilizan específicamente las siguientes fórmulas de resistencia al flujo, transporte de sedimentos y resistencia de las orillas.

- a. Resistencia al flujo. Se seleccionó la fórmula propuesta por Cruickshank y Maza en 1973, útil para arenas y gravas de menos de 8 mm, y que establece que

$$U = 7.58\omega_{50}\left(\frac{d}{D_{84}}\right)^{0.634}\left(\frac{S}{\Delta}\right)^{0.456} \quad (4.9)$$

Esta fórmula se aplica solo al régimen inferior, el cual se presenta si se cumple la relación

$$\frac{1}{S} \geq 83.5\left(\frac{d}{\Delta D_{84}}\right)^{0.35} \quad (4.10)$$

Téngase en cuenta que para el gasto formativo normalmente se presenta la condición de régimen inferior. Para régimen superior la expresión propuesta es

$$U = 6.25\omega_{50}\left(\frac{d}{D_{84}}\right)^{0.644}\left(\frac{S}{\Delta}\right)^{0.352} \quad (4.11)$$

ecuación que es válida si

$$\frac{1}{S} \leq 66.5\left(\frac{d}{\Delta D_{84}}\right)^{0.382}$$

En las ecuaciones anteriores el significado de las variables es

U	velocidad media del flujo, en m/s
S	pendiente hidráulica
ω_{50}	velocidad de caída de las partículas con diámetro D_{50} , en m/s
D_{84}	tamaño de las partículas del material del fondo, que en el 84 por ciento de la muestra son menores que él, en m
Δ	$(\gamma_s - \gamma)/\gamma$
d	tirante medio de la corriente, en m. Este se obtiene dividiendo el área de la sección transversal entre el ancho de la superficie libre

$$d = \frac{A}{B} \quad (4.12)$$

Para facilitar las operaciones y la presentación de las fórmulas de diseño se agrupan las variables que dependen del material en una nueva variable. Con ello la ec 4 toma la forma

$$U = \alpha d^{0.634} S^{0.456} \quad (4.13)$$

donde

$$\alpha = 7.58\omega_{50}/D_{84}^{0.634}\Delta^{0.456} \quad (4.14)$$

Por continuidad, $Q = BdU$, con lo que se obtiene la primera fórmula fundamental que se aplica en este trabajo

$$Q = \alpha Bd^{1.634} S^{0.456} \quad (4.15)$$

Conviene tener en cuenta que si existen suficientes datos del río en estudio, cuando por él escurra el gasto formativo o uno muy similar, la constante α puede derivarse directamente para que su valor se ajuste a la realidad.

En el problema central de este trabajo, que es el estudio de la erosión aguas abajo de presas, el valor de α debe expresarse por la ec 4.14 cuando la granulometría del fondo se modifique durante el proceso erosivo; si esto no ocurre se puede considerar como constante.

b. Transporte de sedimentos.

Para calcular el transporte de sedimentos en ríos formados por arenas y gravas, los autores han utilizado las fórmulas de Meyer-Peter y Müller y la de Engelund. La primera sirve específicamente para obtener el transporte en la capa del fondo mientras que la segunda permite conocer el transporte total del fondo. Sin embargo, conviene tener en cuenta que cuando $\tau_* = (DS/\Delta D_m) < 0.3$, prácticamente todo el transporte tiene lugar en la capa del fondo, y ésta es la condición que prevalece en el tramo sujeto a erosión aguas abajo de presas. Además, la fórmula de Engelund da un transporte mayor que el real para condiciones cercanas a la crítica y esta condición extrema tiene que conocerse o determinarse por separado, ya que dicha fórmula da valores de transporte de sólidos para cualquier condición hidráulica de la corriente, aún por debajo de la condición crítica. La ventaja de la fórmula de Engelund es que permite obtener el transporte total del fondo, cosa que no ocurre con la de Meyer-Peter y Müller. Por ello no debe utilizarse en ríos con mucho transporte del fondo en suspensión, esto es si $\tau_* > 0.3$. Por su parte, la fórmula de Meyer-Peter y Müller indica la condición crítica y es más precisa cuando el transporte es reducido, como acontece en muchas secciones del tramo que nos ocupa.

La dificultad que presenta la fórmula de Engelund en la solución del tema de este trabajo se supera con la fórmula de Shields. Con ella se puede determinar el transporte total del fondo cuando éste se encuentra en suspensión, y además establecer la condición crítica, como lo hace la fórmula de Meyer-Peter y Müller. Cuando $\tau_* > 0.3$, se obtienen valores del mismo orden de magnitud con los criterios de Engelund y Shields.

A continuación se presentan las fórmulas de Meyer-Peter y Müller y Shields.

b.1 Fórmula de Meyer-Peter y Müller.

La fórmula que los autores mencionados propusieron en 1948, y que sólo sirve para cuantificar el arrastre en la capa del fondo, establece que

$$Q_B = 8b'(g\Delta D_m^3)^{0.5} \left[\left(\frac{n'}{n} \right)^{1.5} \frac{dS}{\Delta D_m} - 0.047 \right]^{1.5} \quad (4.16)$$

Puesto que el transporte no tiene lugar en todo el ancho de la superficie libre se asume generalmente que el ancho del fondo donde ocurre transporte es $0.8b$, es decir

$$b' = 0.8 B \quad (4.17)$$

Hay que verificar en el campo el valor propuesto de B' y modificarlo de acuerdo con esa observación. Debe darse como una función de B para respetar las ecuaciones que se muestran adelante.

Por otra parte, conviene agrupar los términos conocidos que dependen del material del fondo, con lo que la expresión anterior también se puede escribir como

$$Q_B = \epsilon B (NdS - 0.047)^{1.5} \quad (4.18)$$

en que

$$\epsilon = 6.4 (g \Delta D_m^3)^{0.5} \quad (4.19)$$

$$N = \left(\frac{n'}{n}\right)^{1.5} \frac{1}{\Delta D_m} \quad (4.20)$$

El significado de las variables es

Q_B	arrastre en la capa del fondo, expresado en m^3/s
B	ancho medio de la superficie libre, en m
b'	ancho del fondo, donde ocurre transporte, en m
D_m	diámetro medio del material del fondo, en m. Se obtiene de la ec 4.6

$$D_m = 0.01 \sum D_i p_i \quad (ec 4.6)$$

p_i	porcentaje en peso con respecto al total del material con diámetro D_i
D_i	diámetro medio de cada franja con porcentaje p_i en que se ha dividido la curva granulométrica. Se obtiene de

$$D_i = (D_{max_i} \times D_{min_i})^{1/2} \quad (4.21)$$

donde D_{max_1} y D_{min_1} son los diámetros máximo y mínimo de cada franja

n' rugosidad asociada a las partículas que, según Meyer-Peter y Müller, vale

$$n' = \frac{D_{90}^{1/6}}{26}, \quad D_{90}, \text{ en } m \quad (4.22)$$

n rugosidad total según Manning en el tramo en estudio, que es igual a

$$n = \frac{d^{2/3} S^{1/2}}{U} \quad (4.23)$$

donde d , S y U deben ser medidos en el tramo.

En las pruebas experimentales realizadas por los autores del método se utilizaron partículas cuyos diámetros variaban entre 0.4 y 30 mm. Según la ec 4.16, si el arrastre es nulo, el término Q_B se elimina y queda la relación que establece la condición crítica de arrastre

$$\left(\frac{n'}{n}\right)^{1.5} \frac{dS}{\Delta D_m} - 0.047 = 0 \quad (4.24)$$

En estas circunstancias, y si $D_m > 0.0005m$, se puede considerar $n'/n = 1$, aceptando que las ondulaciones del fondo tienden a desaparecer. Por tanto, la ec 4.24 también se escribe como

$$\tau_* = 0.047 \quad (4.25)$$

o

$$\tau_c = 0.047(\gamma_s - \gamma) D_m \quad (4.26)$$

Por otro lado, si el transporte de sedimentos es grande o si $\tau_* > 1$, el término 0.047 se puede eliminar, con lo que la ec 4.17 se simplifica a

$$Q_B = \epsilon B (N d S)^{1.5} \quad (4.27)$$

Además, conviene tener en cuenta que al efectuar el producto $\epsilon N^{1.5}$ se simplifican los términos $D_m^{1.5}$. En esas circunstancias el transporte de sedimentos, según los autores, no depende explícitamente del diámetro medio del material del fondo.

b.2 Fórmula de Shields.

En 1936, Shields presentó los resultados que obtuvo al determinar el esfuerzo tangencial crítico τ_c necesario para iniciar el arrastre de sedimentos. Si una corriente produce un esfuerzo tangencial τ_o mayor que τ_c , se tiene arrastre y transporte de partículas del fondo. Para valuar ese transporte, Shields propuso la expresión adimensional que se indica a continuación y que permite cuantificar el transporte total del fondo

$$\frac{g_{BT}(\gamma_s - \gamma)}{g_w \gamma S} = \frac{10(\tau_o - \tau_c)}{D_{50}(\gamma_s - \gamma)} \quad (4.28)$$

donde las nuevas variables significan:

g_{BT} transporte unitario total del fondo, en kgf/s.m
 g_w gasto líquido unitario expresado en peso, en kgf/s.m

$$g_w = \gamma q \quad (4.29)$$

τ_c en que q gasto líquido unitario, en $\text{m}^3/\text{s.m}$
 esfuerzo tangencial crítico, en kgf/m^2 . Se obtiene de la curva propuesta por Shields, aunque en este trabajo por simplicidad se le da el valor promedio de

$$\tau_c = 0.047(\gamma_s - \gamma) D_m \quad (4.30)$$

τ_o esfuerzo tangencial que el flujo produce sobre el fondo en kgf/m^2

$$\tau_o = \gamma d S \quad (4.31)$$

Si en la ec 4.28 se sustituye la ec 4.29, se despeja g_{BT} , y se expresa el transporte en $\text{m}^3/\text{s.m}$, mediante la conversión $g_{BT} = \gamma_s q_{BT}$, se obtiene

$$q_{BT} = \frac{10qS}{\gamma_s \Delta^2 D_{50}} (\tau_o - \tau_c) \quad (4.32)$$

El transporte total en la sección se obtiene multiplicando el unitario por el ancho del fondo en donde ocurre transporte, y que se ha supuesto en 0.8 veces el ancho de la superficie libre. Si además se agrupan las variables que dependen de las propiedades físicas del líquido y del material del fondo, la ec 4.32 toma la forma

$$Q_{BT} = FQS(\tau_o - \tau_c) \quad (4.33)$$

donde

$$F = \frac{8}{\gamma_s \Delta^2 D_{50}} \quad (4.34)$$

Al seguir lo expuesto en b.1, al tratar el método de Meyer-Peter y Müller, las ecs 4.32 y 4.33 se simplifican cuando el transporte es nulo o muy grande.

Si el transporte es nulo, y debido al valor dado a τ_c , se llega a las mismas ecs 4.25 y 4.26.

Si el transporte es grande, lo que ocurre si $\tau_* > 1$, el término τ_c puede eliminarse, entonces se llega a

$$Q_{BT} = FQS\tau_o \quad (4.35)$$

o bien, sustituyendo τ_o por su valor, ec 4.31 obtiene

$$Q_{BT} = \gamma FQS^2 d \quad (4.36)$$

c. Relación de resistencia de las márgenes

Todas las fórmulas actuales que relacionan el ancho de la superficie libre de un cauce con su tirante son empíricas. Al seleccionar entre diferentes fuentes se escogió la fórmula de Gluschkov, que establece que

$$B^m = Kd \quad (4.37)$$

donde

m exponente que vale

$$m = 0.72 \left(\frac{\Delta D_{50}}{dS} \right)^{0.1} \quad (4.38)$$

o bien

$$m = 0.72 \tau_*^{-0.1} \quad (4.39)$$

K coeficiente. Según Altunin varía de 2 a 4 para cauces con material cohesivo, de 8 a 12 para cauces arenosos y de 16 a 20 para material arenoso muy suelto.

Si se toma cualquier autor de los incluidos dentro de la teoría del régimen, a partir de sus fórmulas de diseño se puede deducir una ecuación del tipo de la ec 4.37. Así, si se tiene en cuenta lo expresado por Lacey, Blench, Simons y Albertson, se obtienen los siguientes valores promedio

	Lacey	Blench	Simons y Albertson
K — fondo y orillas de arena	10.65	6-13	10.2
K — fondo arenoso y orillas cohesivas		4-6	6.3
K — material grueso			7.0
m	0.66	0.66	0.7

Al trabajar con material arenoso se considera en promedio para una primera aproximación $K = 10$, $m = 0.7$ para canales; $K = 18$ y $m = 0.7$ para ríos. Además, véase lo indicado en los apartados 2.8 y 4.6.

4.4.2.2 Fórmulas de diseño para material arenoso

A partir de las fórmulas fundamentales se obtuvieron las ecuaciones de diseño que se presentan adelante. Puesto que tanto las características físicas del líquido y de los sedimentos como el gasto líquido y de los sedimentos son conocidas, lo usual es que las variables dependientes sean B , d y S .

Se presentan dos grupos de fórmulas, ya que en este trabajo se han mostrado dos fórmulas de transporte.

El grupo A tiene en cuenta las ecs 4.15, 4.18 y 4.37 de Cruickshank-Maza, Meyer-Peter y Müller y Gluschkov, mientras que el grupo B utiliza las ecs 4.33, 4.15 y 4.37, o sea la fórmula de Shields, y la de fricción y resistencia de las orillas del grupo anterior.

Se recomienda aplicar el grupo A para gravas o para material arenoso siempre y cuando se tenga la seguridad de que el transporte de sedimentos se produce en la capa del fondo.

Por otra parte, se recomienda utilizar el grupo B cuando el material es arenoso y en cualquier condición de transporte.

En ambos grupos las variables dependientes se expresan en forma implícita, pero deben recordarse que se logran simplificaciones cuando el transporte de sedimentos es muy reducido o muy intenso. Cuando ello ocurre las fórmulas de diseño son explícitas.

Grupo A.

A partir de la fórmula de resistencia al flujo de Cruickshank-Maza, de la de transporte de sedimentos de Meyer-Peter y Müller y de la de resistencia de las orillas propuesta por Gluschkov se obtienen las siguientes ecuaciones implícitas.

Para el ancho

$$B^{(2.583m+1.526)}[Q_B^{2/3} + 0.047(\epsilon B)^{2/3}] = N\epsilon^{2/3}K^{2.583}(Q/\alpha)^{2.193} \quad (4.40)$$

Para el tirante, ya conocido B , es

$$d = B^m/K \quad (4.41)$$

Para la pendiente

$$Q_B^{2/3} = N\epsilon^{2/3}K^{\frac{0.0893}{W}}\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{2+3m}{3W}}S^{\frac{1.178m+0.696}{W}} - \frac{0.047\epsilon^{2/3}K^{\frac{1.089}{W}}}{S^{\frac{0.304}{W}}}\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3W}} \quad (4.42)$$

en que

$$\epsilon = 6.4(g\Delta D_m^3)^{0.5} \quad (ec 4.18)$$

$$N = \left(\frac{n'}{n}\right)^{1.5} \frac{1}{\Delta D_m} \quad (ec 4.19)$$

$$\alpha = 7.58\omega_{50}/D_{84}^{0.634}\Delta^{0.456} \quad (ec 4.14)$$

$$W = 1 + 1.634 m \quad (4.43)$$

A continuación se presentan las dos simplificaciones previamente mencionadas.

I. Condición con transporte de sedimentos nulo.

Si en el tramo bajo estudio Q_B tiende a cero, el término se puede eliminar de las ecuaciones generales, con lo que se llega a las siguientes relaciones simplificadas.

$$B = [21.277NK^{2.583}(\frac{Q}{\alpha})^{2.193}]^{\frac{1}{2.583m+2.193}} \quad (4.44)$$

$$d = \frac{1}{K} [21.277NK^{2.583}(\frac{Q}{\alpha})^{2.193}]^{\frac{m}{2.583m+2.193}} \quad (4.45)$$

$$S = [\frac{0.047K^{1/W}}{N} (\frac{\alpha}{Q})^{\frac{m}{W}}]^{1.178m+1} \quad (4.46)$$

Por último, si se acepta el valor promedio $m = 0.7$ se obtiene

$$B = 2.147N^{0.25}K^{0.646}(\frac{Q}{\alpha})^{0.548} \quad (4.47)$$

$$d = \frac{1.707N^{0.175}}{K^{0.452}} (\frac{Q}{\alpha})^{0.384} \quad (4.48)$$

$$S = \frac{0.0275K^{0.548}}{N^{1.175}} (\frac{\alpha}{Q})^{0.384} \quad (4.49)$$

II. Condición con transporte de sedimentos intenso.

La condición establecida se cumple si $\tau_* > 0.3$, y cuando ocurre, el término 0.047 de la ec 4.16 se elimina, con lo que se obtiene la ec 4.26. Al utilizar esta última ecuación las fórmulas de diseño son

$$B = [N(\frac{QK}{\alpha})^{2.193}(\frac{\epsilon}{Q_B})^{2/3}]^{\frac{1}{2.583m+1.526}} \quad (4.50)$$

$$d = \frac{1}{K} [N(\frac{QK}{\alpha})^{2.193}(\frac{\epsilon}{Q_B})^{2/3}]^{\frac{m}{2.583m+1.526}} \quad (4.51)$$

$$S = [\frac{Q_B^{2/3}}{N\epsilon^{2/3}K^{0.0893}} (\frac{\alpha}{Q})^{\frac{2+3m}{3W}}]^{1.178m+0.698} \quad (4.52)$$

Procediendo de igual forma a lo ya hecho en I, si se acepta $m = 0.7$, se obtiene

$$B = N^{0.3}(\frac{QK}{\alpha})^{0.658}(\frac{\epsilon}{Q_B})^{0.2} \quad (4.53)$$

$$d = \frac{N^{0.21}}{K^{0.539}} \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{0.461} \left(\frac{\epsilon}{Q_B}\right)^{0.14} \quad (4.54)$$

$$S = \frac{1}{N^{1.41} K^{0.059}} \left(\frac{Q_B}{\epsilon}\right)^{0.94} \left(\frac{\alpha}{Q}\right)^{0.899} \quad (4.55)$$

Grupo B.

En este grupo se utilizan las ecuaciones de fricción de Cruickshank-Maza, ec 4.15; la de transporte de sedimentos de Shields, ec 4.33, y la de resistencia de las orillas de Gluschkov, ec 4.37. A partir de ellas se llega a las siguientes ecuaciones generales de diseño.

Para el ancho

$$Q_{BT} = \frac{FQ^{3.193} K^{3.584}}{(\alpha B^W)^{2.193}} \left[\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{2.193} \frac{\gamma K^{2.584}}{B^{2.193+2.584m}} - \tau_c \right] \quad (4.56)$$

Para el tirante. Como B ya se conoce, se usa

$$d = \frac{B^m}{K} \quad (4.57)$$

Para la pendiente

$$Q_{BT} = FQS \left[\left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{m}{W}} \frac{\gamma S^{\frac{1+1.178m}{W}}}{K^{1/W}} - \tau_c \right] \quad (4.58)$$

en que

$$F = 8/\gamma_s \Delta^2 D_{50}. \quad (ec 4.34)$$

$$\alpha = 7.58 \omega_{50} / D_{84}^{0.634} \Delta^{0.456} \quad (ec 4.14)$$

$$w = 1 + 1.634m \quad (ec 4.43)$$

Al simplificar, para las condiciones extremas ya señaladas, queda

- a. Condición con transporte de sedimentos nulo. Cuando se presenta la condición señalada, $Q_{BT} = 0$ y las ecs 4.54 a 4.57 toman la forma

$$B = \left[\left(\frac{Q}{\alpha} \right)^{2.193} \frac{\gamma K^{2.584}}{\tau_c} \right]^{\frac{1}{2.193+2.584m}} \quad (4.59)$$

$$d = \frac{1}{K} \left[\left(\frac{Q}{\alpha} \right)^{2.193} \frac{\gamma K^{2.584}}{\tau_c} \right]^{\frac{m}{2.193+2.584m}} \quad (4.60)$$

$$S = \left[\frac{\tau_c K^{1/W}}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{Q} \right)^{m/W} \right]^{\frac{W}{1+1.178m}} \quad (4.61)$$

Una simplificación más se obtiene al aceptar $m = 0.7$

$$B = \left(\frac{\gamma}{\tau_c} \right)^{0.25} \left(\frac{Q}{\alpha} \right)^{0.548} K^{0.646} \quad (4.62)$$

$$d = \left(\frac{\gamma}{\tau_c} \right)^{0.175} \left(\frac{Q}{\alpha} \right)^{0.384} \frac{1}{K^{0.548}} \quad (4.63)$$

$$S = \left(\frac{\tau_c}{\gamma} \right)^{1.177} \left(\frac{\alpha}{Q} \right)^{0.384} K^{0.548} \quad (4.64)$$

- b. Condición con intenso transporte de sedimentos. Al existir la condición señalada el término τ_c se elimina en las ecs 4.55 a 4.57. Las ecuaciones de diseño que se obtienen son

$$B = \left[\left(\frac{\gamma F}{Q_{BT}} \right)^{0.228} \frac{Q^{1.228} K^{1.406}}{\alpha} \right]^{\frac{1}{1+1.406m}} \quad (4.65)$$

$$d = \left[\left(\frac{\gamma F}{Q_{BT}} \right)^{0.228} \frac{Q^{1.228} K^{\frac{1+2.812m}{m}}}{\alpha} \right]^{\frac{m}{1+1.406m}} \quad (4.66)$$

$$S = \left[\left(\frac{Q_{BT}}{\gamma F} \right) \frac{(K \alpha^m)^{1/W}}{Q^{\frac{1+2.634m}{W}}} \right]^{\frac{W}{2+2.812m}} \quad (4.67)$$

Para terminar, se presentan fórmulas más simples, que se obtienen al aceptar un valor dado a m , que aquí se considera $m = 0.7$

$$B = \left(\frac{\gamma F}{Q_{BT}} \right)^{0.115} \frac{Q^{0.619} K^{0.709}}{\alpha^{0.504}} \quad (4.68)$$

$$d = \left(\frac{\gamma F}{Q_{BT}} \right)^{0.081} \frac{Q^{0.433}}{\alpha^{0.353} K^{0.504}} \quad (4.69)$$

$$S = \left(\frac{Q_{BT}}{\gamma F} \right)^{0.54} \frac{\alpha^{0.177} K^{0.252}}{Q^{0.717}} \quad (4.70)$$

4.5 Comparación de métodos

Una forma de comparar estos métodos es mediante los exponentes de Q para cada una de las variables dependientes. Según Lacey se puede escribir

$$B = f(Q^{1/2})$$

$$d = f(Q^{1/3})$$

$$S = f(Q^{-1/6})$$

Para obtener el exponente de Q en las fórmulas del método de Maza-Cruickshank se da a m el valor de 0.7, el cual se considera como promedio en cauces aluviales, aunque se sabe que puede variar entre 0.5 y 1.0 cuando τ_* varía entre 0.047 y 10, respectivamente.

El segundo paso consiste en transformar a Q_{BT} o Q_B que es función de Q , mediante la relación

$$Q_{BT} = C_{BT}Q \quad (4.71)$$

$$Q_B = C_BQ \quad (4.72)$$

donde C_{BT} es la concentración promedio de las partículas del fondo transportadas en el fondo o en suspensión, por el gasto Q . En igual forma C_B es la concentración promedio de las partículas transportadas en la capa de fondo, por el gasto Q .

Al hacer lo anterior en las ecuaciones explícitas presentadas ya con $m = 0.7$, se obtienen los valores consignados en la Tabla 4.1. Los exponentes indicados corresponden a las dos condiciones señaladas: transporte de sedimentos nulo e intenso y, por tanto, se puede conocer entre qué valores extremos varían los exponentes, lo cual ocurrirá bajo

otras condiciones de transporte. No debe olvidarse que por tomar el valor medio de m ($m = 0.7$), los resultados de la Tabla 4.1 corresponden también a valores medios de esos exponentes.

TABLA 4.1 VALORES MEDIOS DE LOS EXPONENTES DE Q PARA LAS TRES VARIABLES DEPENDIENTES.

Variable	Teoría del regimen	GRUPO A		GRUPO B	
		$Q_B = 0$	Q_B Intenso	$Q_{BT} = 0$	Q_{BT} Intenso
B	0.5	0.548	0.458	0.548	0.504
d	0.333	0.384	0.321	0.384	0.352
S	-0.167	-0.384	0.041	-0.384	-0.177

Como puede observarse, en dicha tabla las mayores variaciones extremas corresponden al grupo A, aunque el valor medio se asemeja a los propuestos por la teoría del régimen. En cambio, aunque las variaciones extremas son menores en el grupo B, los valores medios entre extremos son ligeramente mayores que los establecidos por la teoría del régimen.

Lo hasta aquí presentado se puede utilizar para estudiar la estabilidad de un río aguas abajo de presas, como se verá en los capítulos 5 y 6.

La exactitud de los resultados que se obtengan de la aplicación de las fórmulas presentadas depende de los datos obtenidos en el tramo en estudio. De esos datos, si se conoce Q, d, S, B y el área A en un instante dado, además de las propiedades del material del fondo y orillas, se deben obtener entre otros el coeficiente α .

$$\alpha = \frac{d^{0.634} S^{0.456}}{U} \quad (4.73)$$

y darle preferencia al valor obtenido con la ec 4.73, al dado por la ec 4.13. En esta forma α tiene en cuenta otras pérdidas, aunque deja de cumplir con su significado original.

Conviene aplicar la ec 4.73 para un gasto igual o lo más cercano posible al gasto formativo, con lo que al mismo tiempo se podrán conocer los valores de K y m para la sección. La corrección señalada tomará en cuenta no solo las pérdidas debidas a la resistencia al flujo, sino también las irregularidades de las secciones, curvas, vegetación en las orillas, etc.

4.6 Comentarios generales

En este apartado se comparan y discuten las ecuaciones y resultados presentados en el capítulo 2 y en este capítulo.

Si por una sección se hace pasar un gasto líquido incapaz de transportar sedimentos, la sección permanece inalterada e igual a como estaba antes de conducir el gasto. Si en cambio se hace pasar un gasto líquido con capacidad de transporte y no se alimenta gasto sólido, habrá erosión y la sección transversal tenderá a la forma senoidal señalada en el capítulo 2, modificando principalmente el tirante y la pendiente y en menor grado su ancho. A esta sección tenderá la primera sección del primer tramo aguas abajo de una presa.

En este capítulo se ha mostrado que para estudiar la estabilidad de un cauce, la relación entre ancho y tirante de una sección queda definida por la fórmula de Gluschkov, ec 4.37

$$B^m = Kd \quad (\text{ec 4.37})$$

donde, según Altunin, para cauces naturales, el valor medio de m es 0.7, mientras que K varía entre 2 y 20 dependiendo de la resistencia de las orillas. Cuando el material es arenoso varía de 8 a 20.

Por otra parte, según lo explicado en el capítulo 2 y redondeando los resultados, las relaciones entre B y d fueron

$$B^{0.7} = 11d \quad \text{para } Q_{BT} = 0 \quad (\text{ec 2.83})$$

$$B^{0.7} = 26d \quad \text{para } Q_{BT} \text{ maximo} \quad (\text{ec 2.86})$$

Estos resultados sirven únicamente para arenas finas y medias ya que no se han probado para material grueso.

Al observar las dos últimas ecuaciones y si se desea hacer compatibles ambos resultados se debe seleccionar a $m = 0.7$, mientras que la mejor forma de valuar K es a partir de datos reales tomados del tramo que se desea estudiar. Una vez hecho esto último o sea conocido un K_r , y si se desea estudiar la erosión aguas abajo de presas, el coeficiente K tendrá que variar en ese primer tramo entre 10 para la primera sección de aguas arriba y K_r para la última de aguas abajo; es decir, donde empieza el segundo tramo. Cuando no se cuenta con datos se puede suponer que $K_r = 18$.

La respuesta a cuál es el mejor criterio o qué resultados y fórmulas son los correctos no se sabrá hasta que se efectúen observaciones durante un tiempo considerable, comenzando

inmediatamente después de terminar la construcción de una presa. Esas observaciones incluirán todos los parámetros hasta aquí tratados y tendrán que hacerse en ríos con diferentes características de gasto, material del fondo y orillas.

4.7 Bibliografía

Ackers, D., "*Experiments of small stream in alluvium*". Journal of the Hydraulic Division ASCE, HY4, 1964.

Blench, T., "*Mobile bed fluviology*". 2a. edición de la Universidad de Alberta Press, Edmonton, 1966.

Cruickshank, C. y Maza Alvarez, J.A., "*Flow resistance in sand bed channels*". Memorias del I Int. Symposium on river mechanics. Vol I, Sediment transportation, Bangkok, Ene 1973.

Engelund, F., "*Hydraulic resistance of alluvial streams*". J. of the Hydraulic Division, ASCE, Vol 92, No. HY2, Mar 1966.

Engelund, F., discusión final, "*Hydraulic resistance of alluvial channels*". Procs., ASCE, 93 HY4, Jul 1967.

Graf, W.H., "*Hydraulics of sediment transport*". McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1971.

Henderson, F.M., "*Open channel flow*". The Macmillan Co., Nueva York, 1966.

Knighton, D., "*Fluvial forms and processes*". Edward Arnold Ltd., Londres, 1984.

Lacey, G., "*Stable channels in alluvium*". Procs., of the Institution of Civil Engineers, Vol 229, Parte I, Londres, 1929.

Lane, E.W., "*Design of stable channels*". Trans. ASCE, Vol 120, Informe No. 2767, 1955.

Langheim, W.B., "*Geometry of river channels*". J. of the Hydraulic Division, ASCE, Vol 90, No. HY2. Informe No. 3846, Mar 1964.

Leopold, L.B., Wolman, M.G. y Miller, J.P., "*Fluvial processes in geomorphology*". Freeman and Co., San Francisco, 1964.

Maza Alvarez, J.A. y Cruickshank, C., "*Stability of sandy river beds*". Publicación del Instituto de Ingeniería, E20. México, D.F., Jun 1976.

Meyer-Peter, E. y Müller, R., "*Formulae for bed-load transport*". Memorias del II Congreso del IAHR, Estocolmo, 1948.

Raudkivi, A.J., "*Loose boundary hydraulics*". 2a edición, Pergamon Press, Ltd., Oxford, 1976.

Shen, W.H., "*River Mechanics*". Ed. Shen H.W., Fort Collins, 1971.

Simons, D.B. y Albertson, M.L. "*Uniform water conveyance channels in alluvial material*". Trans. ASCE, Vol 128, Parte I, Informe No. 3399, 1963.

Vanoni, V., "*Sedimentation engineering*". Publicación del ASCE Nueva York, 1975.

Yalin, M.S., "*Mechanics of sediment transport*". 2a edición, Pergamon Press, Ltd., Oxford 1977.

5. ESTABILIDAD DE UN RIO AGUAS ABAJO DE UNA PRESA

En el capítulo 1 se diferenciaron dos tramos en un río aguas abajo de las presas, denominándolos primer y segundo tramo; estos, una vez terminada la presa, estarán sujetos a los siguientes procesos.

Primer tramo: Erosión aguas abajo de presas y cambio morfológico.

Segundo tramo: Cambio morfológico.

Este capítulo trata exclusivamente sobre lo que posiblemente ocurre en el segundo tramo. Lo que aquí se explica es válido cuando el gasto formativo del río se modifica por la regulación de un embalse y por la forma en que los gastos se descargan. Así, por ejemplo, una pequeña presa cuya obra de toma descarga a un canal de riego y reduce el gasto líquido la mayor parte del tiempo en el río puede ocasionar mayores cambios que una gran presa con una central hidroeléctrica que descarga normalmente un gasto semejante al formativo del río antes de la construcción de esa obra. Para

cuantificar o predecir las modificaciones que puede sufrir un río debido al cambio del gasto formativo se muestran dos procedimientos: el primero y más general intenta tener en cuenta todas las variables y sólo será descrito debido a la complejidad de sus fórmulas. Para el segundo se presentan las fórmulas necesarias para estimar las modificaciones de b , d y S , pero después de introducir algunas simplificaciones que no siempre ocurren en la realidad. Además del gasto formativo obtenido de las descargas de la obra de toma, se deben considerar las descargas de la obra de excedencias, las que son de importancia si ocurren anualmente y por periodos de tiempo prolongado. Cuando esto último sucede y las descargas son prolongadas, es más fácil estudiar el problema, ya que se puede obtener el gasto promedio de esas descargas —que por su persistencia trabajan en modificar al río— y aplicar para ese gasto lo que aquí se describe para los gastos normales de la obra de toma. Por lo dicho, en esas presas se deben considerar dos gastos formativos y, por su mayor influencia, el que descarga la obra de excedencias.

5.1 Procedimiento general

Para estudiar la estabilidad del segundo tramo aguas abajo de una presa se propone utilizar las ecuaciones de los grupos A o B propuestas en el capítulo anterior; es decir, las ecuaciones generales 4.40 a 4.42, o bien las ecs 4.56 a 4.58.

El procedimiento contempla lo siguiente:

1. Conocer el tramo del río en estudio antes de la construcción de la presa, lo que obliga a obtener como mínimo los datos siguientes:
 - Secciones transversales.
 - Pendiente general del cauce.
 - Pendientes hidráulicas para diferentes gastos
 - Hidrograma medio anual
 - Temperatura del agua
 - Peso específico de las partículas del fondo correspondiente a muestras tomadas en diferentes puntos y profundidades bajo el lecho
 - Peso volumétrico del material de las muestras anteriores
 - Granulometría del material de las muestras anteriores
 - Transporte del material del fondo, tanto en la capa del fondo como en suspensión, en función de Q .

De los datos, el más difícil de obtener por el costo y el equipo que requiere es el transporte de sedimentos.

Con los datos anteriores analíticamente se calcula.

- La rugosidad total del cauce
- Los gastos formativos (obra de toma y de excedencias)
- El transporte de sedimentos



2. Con los datos del punto anterior se deben ajustar, si fuera necesario, los valores de α , ϵ , N , F , K y m , ya que se conoce B_0 , d_0 y S_0 . El subíndice 0 indica lo existente antes de la construcción del embalse. Para esto conviene operar con las fórmulas fundamentales, ecs 4.15, 4.17, 4.19, 4.23, 4.33, 4.37 y 4.38.
3. Con los coeficientes y exponentes ajustados a las condiciones reales, se obtendrán b_1 , d_1 y S_1 , que son los valores a los que tenderán B , d y S , después de un cierto tiempo a partir de la construcción de la presa.

Una hipótesis razonable consiste en aceptar que, en el segundo tramo, los coeficientes de las fórmulas, sus exponentes, y las propiedades físicas del agua y de los sedimentos son los mismos antes y después de la construcción de la presa.

Aceptando lo anterior y tomando, por ejemplo, las fórmulas generales del grupo B, se podrán estimar los valores de B_1 , d_1 y S_1 . El subíndice 1 indica la tendencia de cada variable si se deja que pase el tiempo necesario para el ajuste morfológico del río.

Teniendo en cuenta lo indicado, B_1 se obtiene de la ec 4.56 al dividir esa expresión para la condición final entre la misma expresión planteada para la condición original del río.

$$\left(\frac{B_1}{B_0}\right)^{2.193W} \left(\frac{Q_{BT1}}{Q_{BT0}}\right) \left(\frac{Q_0}{Q_1}\right)^{3.193} =$$

$$\left[\gamma \left(\frac{Q_1}{\alpha}\right)^{2.193} \frac{K^{2.584}}{B_1^{2.193+2.584m}} - \tau_c\right] / \left[\gamma \left(\frac{Q_0}{\alpha}\right)^{2.193} \frac{K^{2.584}}{B_0^{2.193+2.584m}} - \tau_c\right] \quad (5.1)$$

Conocidos B_0 , d_0 y B_1 , con ayuda de la ec 4.57 se obtiene d_1

$$\frac{d_1}{d_0} = \left(\frac{B_0}{B_1}\right)^m \quad (5.2)$$

Por último, la nueva pendiente S_1 se calcula a partir de la ec 4.58. De ella se obtiene

$$\frac{Q_{BT1}Q_0S_0}{Q_{BT2}Q_1S_1} = [\gamma(\frac{Q_1}{\alpha})^{\frac{m}{W}} \frac{S_1^{\frac{1+1.178m}{W}}}{K^{1/W}} - \tau_c] / [\gamma(\frac{Q_0}{\alpha})^{\frac{m}{W}} \frac{S_0^{\frac{1+1.178m}{W}}}{K^{1/W}} - \tau_c] \quad (5.3)$$

Como las ecuaciones anteriores son implícitas para las variables dependientes no es posible observar claramente cómo influyen en ella las demás variables.

Lo mostrado hasta ahora puede aplicarse en forma semejante a las ecuaciones del Grupo A.

Si la presa que afecta al tramo en estudio ya está construida o si los datos disponibles son limitados, se utilizan directamente las fórmulas de diseño generales de uno de los dos grupos, pero desafortunadamente sin el ajuste o calibración inicial de los coeficientes y exponentes arriba mencionados.

5.2 Procedimiento simplificado

En este apartado se muestran algunas fórmulas explícitas y sencillas, que si bien no sustituyen a las ya vistas, permiten cuantificar el efecto de las variables de importancia. Para obtenerlas se considera que antes y después de la construcción de la presa el transporte de sedimentos es intenso y se puede despreciar el término 0.047 de las fórmulas del grupo A o el τ_c de las del grupo B. En otras palabras, los gastos formativos en el río, antes y después de la presencia de la presa, producen transporte de sedimentos del fondo en suspensión.

5.2.1 Grupo B

Si se cumple lo anterior y comparando la condición inicial con la tendencia de la condición final, de las ecs 4.65 a 4.67 y también de las ecs 5.1 a 5.3, después de eliminar τ_c se llega a

$$\frac{B_1}{B_0} = [(\frac{Q_1}{Q_0})^{1.228} (\frac{Q_{BT0}}{Q_{BT1}})^{0.228}]^{\frac{1}{1+1.406m}} \quad (5.4)$$

$$\frac{d_1}{d_0} = [(\frac{Q_1}{Q_0})^{1.228} (\frac{Q_{BT0}}{Q_{BT1}})^{0.228}]^{\frac{m}{1+1.406m}} \quad (5.5)$$

$$\frac{S_1}{S_0} = [(\frac{Q_0}{Q_1})^{\frac{1+2.634m}{W}} (\frac{Q_{BT1}}{Q_{BT0}})]^{\frac{W}{2+2.812m}} \quad (5.6)$$

Si se acepta el valor promedio $m = 0.7$, para dicho exponente se obtiene

$$\frac{B_1}{B_0} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.619} \left(\frac{Q_{BT0}}{Q_{BT1}}\right)^{0.115} \quad (5.7)$$

$$\frac{d_1}{d_0} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.433} \left(\frac{Q_{BT0}}{Q_{BT1}}\right)^{0.081} \quad (5.8)$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{Q_0}{Q_1}\right)^{0.717} \left(\frac{Q_{BT1}}{Q_{BT0}}\right)^{0.54} \quad (5.9)$$

Las ecs 5.7 a 5.9 sólo son válidas si $m = 0.7$. Al conocer las propiedades físicas del material del fondo y las características hidráulicas de la corriente para el gasto formativo, m deberá valuarse con mayor precisión utilizando la ec 4.38, o ajustarse con la ec 4.37.

5.2.2 Grupo A

Procediendo en la forma descrita, con las relaciones del grupo A se obtienen expresiones semejantes a las últimas indicadas. Así de las ecs 4.50 a 4.52 se obtiene

$$\frac{B_1}{B_0} = \left[\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{2.193} \left(\frac{Q_{B0}}{Q_{B1}}\right)^{0.667}\right]^{\frac{1}{2.583m+1.526}} \quad (5.10)$$

$$\frac{d_1}{d_0} = \left[\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{2.193} \left(\frac{Q_{B0}}{Q_{B1}}\right)^{0.667}\right]^{\frac{m}{2.583m+1.526}} \quad (5.11)$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \left[\left(\frac{Q_0}{Q_1}\right)^{\frac{2+3m}{3W}} \left(\frac{Q_{B1}}{Q_{B0}}\right)^{0.667}\right]^{\frac{W}{1.178m+0.696}} \quad (5.12)$$

Y si, por ejemplo, $m = 0.7$

$$\frac{B_1}{B_0} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.658} \left(\frac{Q_{B0}}{Q_{B1}}\right)^{0.2} \quad (5.13)$$

$$\frac{d_1}{d_0} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.461} \left(\frac{Q_{B0}}{Q_{B1}}\right)^{0.14} \quad (5.14)$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{Q_0}{Q_1}\right)^{0.899} \left(\frac{Q_{B1}}{Q_{B0}}\right)^{0.94} \quad (5.15)$$

5.2.3 Método de Lacey

A partir de las ecuaciones de Lacey, y aceptando que el material es el mismo antes y después de la construcción de la presa, se llega a

$$\frac{B_1}{B_0} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.5} \quad (5.16)$$

$$\frac{d_1}{d_0} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.333} \quad (5.17)$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{Q_0}{Q_1}\right)^{0.167} \quad (5.18)$$

Con este método no es posible tener en cuenta la variación del transporte de sedimentos.

5.3 Comentarios

Los comentarios y observaciones que a continuación se expresan se basan directamente en las ecs 5.7 a 5.9 y 5.13 a 5.18.

- a. Lo primero que se observa es que la relación entre anchos y tirantes no está casi influenciada por las variaciones naturales del transporte de sedimentos, lo cual no ocurre con la relación de pendientes.
- b. Normalmente se espera que Q_1 sea menor que Q_0 , con la característica adicional de que el gasto formativo Q_1 es más persistente que Q_0 . Por tanto, la relación Q_1/Q_0 será menor que 1.0, con lo que B_1 y d_1 serán menores después de la construcción de la presa, mientras que S_1 tenderá a ser mayor que S_0 .
- c. Si ocurre que $Q_1/Q_0 < 1$, se cumple que Q_{B1}/Q_{B0} y Q_{BT1}/Q_{BT0} también son menores que 1, por lo que sus recíprocos serán mayores que 1.0. Con esto la variación del gasto sólido tenderá a atenuar la variación de B, d y S , comentada en el punto anterior.
- d. En forma muy general, las dos tendencias antes indicadas (puntos b y c) se resumen en lo expresado por las relaciones de Lacey; esto es

$$B_1 = B_0(Q_1/Q_0)^{0.5} \quad (5.19)$$

$$d_1 = d_0(Q_1/Q_0)^{0.333} \quad (5.20)$$

$$S_1 = S_0(Q_0/Q_1)^{0.187} \quad (5.21)$$

- e. Se ha indicado que la variable que más rápidamente se ajusta es el tirante; en segundo lugar, el ancho, pero requiere, en ocasiones, de procesos de sedimentación, y la última es la pendiente, que requiere de tiempos mayores para alcanzar su nuevo valor de equilibrio. Sin embargo, mientras la pendiente va variando hacia su valor de equilibrio también lo hacen B y d .

Con esta idea en mente, acéptese que la variación de la pendiente es muy lenta y por tanto que $S_1 \simeq S_0$. Mientras esto es cierto, de la ec 5.9 se obtiene que

$$\frac{Q_{BT1}}{Q_{BT0}} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{1.332} \quad (5.22)$$

Al sustituir este valor en las ecs 5.7 y 5.8, se llega a

$$B_1 = B_0(Q_1/Q_0)^{0.466} \quad (5.23)$$

$$d_1 = d_0(Q_1/Q_0)^{0.327} \quad (5.24)$$

Procediendo en igual forma con las ecs 5.13 a 5.15 se obtiene

$$\frac{Q_{B1}}{Q_{B0}} = \left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)^{0.956} \quad (5.25)$$

$$B_1 = B_0(Q_1/Q_0)^{0.466} \quad (5.26)$$

$$d_1 = d_0(Q_1/Q_0)^{0.327} \quad (5.27)$$

Como se observa, con las fórmulas de ambos grupos se ha llegado al mismo resultado, ya que la ec 5.23 es igual a la 5.26 y la 5.24 a la 5.27.

- f. La importancia que tiene el ajuste dinámico o morfológico estriba en que si $Q_1 < Q_0$, lo cual ocurre normalmente, se cumple que $B_1 < B_0$ y $d_1 < d_0$, por lo que se puede decir que la capacidad hidráulica del nuevo cauce será menor que la original.

Por ello, al tratar el río aguas abajo de una presa, se tiene que hacer referencia a la nueva capacidad hidráulica y considerar además las mayores inundaciones que puedan producirse al descargar la obra de excedencias. Si las descargas de

dicha obra son muy esporádicas, puede crecer mucha vegetación en las islas, en los bancos que se formen y en las orillas, con lo que la capacidad hidráulica decrecerá aun más para gastos grandes y las inundaciones producidas al descargar el vertedor serán todavía mayores. Resumiendo, la capacidad hidráulica de un río aguas abajo de una presa disminuye con la construcción de esa obra, por lo que se iniciarán desbordamientos e inundaciones con gastos menores.

- g. Si no se cuenta con datos de las características geométricas del cauce y su pendiente en el tramo aguas abajo de la cortina, se podrán utilizar directamente las fórmulas del capítulo 4.

5.4 Bibliografía

Garde, R.J. y Ranga Raju, K.G., "*Mechanics of sediment transportation and alluvial stream problems*". Halsted Press Book, Nueva Delhi, 1977.

Lacey, G., "*Stable channels in alluvium*". Procs. of the Institution of Civil Engineers, Vol 229, parte I, Londres, 1929.

Maza Alvarez, J.A., "*Modificaciones a la estabilidad natural de un río*". Memorias del VI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Bogotá, Jul, 1974.

Maza Alvarez, J.A., "*Stability of sandy river beds*". Publicación del Instituto de Ingeniería, No. E20, México, D.F., Jun, 1976.

6. EROSION AGUAS ABAJO DE UNA PRESA

En los capítulos precedentes se analizaron los aspectos relevantes que intervienen e influyen en los procesos erosivo y morfológico aguas abajo de las presas. En el capítulo 5 se mostró una forma de cuantificar el cambio del tirante, del ancho de la pendiente del cauce producidos por el cambio morfológico, que es el único proceso que ocurre en el llamado segundo tramo del río. En éste se pretende cuantificar la erosión aguas abajo de presas y el cambio morfológico en el primer tramo por medio de dos procedimientos: el primero es una síntesis paso a paso de todo lo explicado, y el segundo parte de las ecuaciones diferenciales del movimiento de un fluido a superficie libre y de continuidad en el transporte de sedimentos, pero al que se le ha añadido lo explicado en los capítulos 2 y 4.

La correcta solución del problema se dificulta por los siguientes aspectos:

1. No se cuenta con mediciones sistemáticas, completas y realizadas durante varios años, que permitan comparar los resultados analíticos con la realidad.

2. Se ha visto ya la cantidad de variables que intervienen en la cuantificación de la erosión y del cambio morfológico. Sin embargo, algunas de esas variables deben obtenerse a partir de datos reales pero, por no disponer de ellos, se suponen o se acepta su valor analítico sin ningún ajuste posterior, como es el caso del exponente m y del coeficiente K .
3. En el estudio del primer tramo, es decir, para cuantificar la erosión aguas abajo de las presas, se supone la existencia del mismo material tanto en el fondo del cauce como en las orillas y en toda su longitud, lo cual no es necesariamente cierto. Además, se acepta que se trata del mismo material en toda la profundidad erosionada. Téngase en cuenta que si la erosión es grande pueden descubrirse otros estratos con diferente material.
4. Lo indicado en el párrafo anterior puede también decirse del segundo tramo, sobre todo cuando su longitud es grande porque, aparte de la variación en el tamaño de las partículas, puede haber cambios en la pendiente original.
5. Al producirse un transporte limitado de sedimento, éste tiende a acorazarse, tendencia que es mayor cuanto mayor es la desviación estándar geométrica de sus tamaños. No se ha observado la variación de ese acorazamiento a lo largo del primer tramo, ni tampoco se ha medido la forma en que cambia el acorazamiento del centro de la sección hacia las orillas hasta llegar a la superficie libre del agua, sobre todo en las secciones sujetas a erosión y especialmente en las primeras del primer tramo.
6. Lo explicado en el capítulo 2 se contrapone a los primeros resultados de este capítulo; es decir, que en lugar de suponer que la sección transversal de la primera sección aguas abajo de la cortina es de forma senoidal, se acepta que es rectangular para poder aplicar el método expuesto en el capítulo 4. Lo visto en el capítulo 2, como ya se indicó, fue obtenido en el laboratorio.

Aceptadas las simplificaciones indicadas se muestra un método que conduce a resultados aceptables, los que tendrán que compararse con alguna condición real, procurando desde luego hacer intervenir dentro de las fórmulas la mayor cantidad de parámetros ajustados a esos datos. Un segundo método —que se presenta a continuación del primero— parte de las ecuaciones diferenciales de continuidad del líquido y sedimentos y de la cantidad de movimiento del líquido, con simplificaciones adicionales y añadiendo parte de lo explicado en este trabajo, sobre todo lo referente al cambio morfológico que ocurre por disminuir el transporte de sedimentos y posible variación del gasto formativo.

6.1 Cambios morfológicos y erosión aguas abajo de las presas

A continuación se hace una síntesis parcial de lo expuesto en los capítulos anteriores, principalmente en el 2 y el 4.

6.1.1 Ecuaciones de diseño

Se usan las ecuaciones generales de los grupos A o B presentadas en el capítulo 4, es decir, las ecs 4.40 a 4.42 o las ecs 4.56 a 4.58, respectivamente. Cuando en el segundo tramo se transporta material del fondo en suspensión, sólo conviene aplicar las ecuaciones generales del grupo B.

Si todo el transporte tiene lugar en la capa del fondo se pueden utilizar las ecuaciones de cualquiera de los dos grupos. Si se usaran los dos, se observarían discrepancias en los resultados provocadas por las diferencias entre los dos métodos de transporte de sedimentos. Aquí cabe señalar que si se hace intervenir cualquier otra fórmula de transporte o de fricción, otros serían los resultados que se obtengan, ya que todavía no existe un criterio único y verdadero para cuantificar el transporte de sedimentos o la resistencia al flujo. Todo lo señalado se debe al empirismo propio de la hidráulica fluvial; por tanto, se insiste en que para tener mejores resultados se debe contar con datos más precisos, sobre todo del transporte real de sedimentos, lo cual, por otro lado, no es sencillo de obtener.

6.1.2 Cálculos preliminares

Con este método se desea conocer en el primer tramo la erosión que sufre el fondo del cauce, las modificaciones de las secciones del río por el cambio del gasto formativo debido a la presencia de la presa y el cambio de pendiente producido por la erosión antes señalada, así como estimar el tiempo en que se producen esas alteraciones. De esta forma se conocerán el perfil del fondo, las variaciones en el tiempo de anchos y tirantes en cada sección y de la longitud total del primer tramo.

Para ello se efectuarán los cálculos que se indican y se tendrán en cuenta las hipótesis que se señalan a continuación. Si bien en la explicación se utilizan las ecuaciones del grupo B, el procedimiento es del todo similar para las del grupo A.

1. Antes de construir la presa conviene conocer el gasto formativo, la pendiente y las secciones transversales del tramo del río aguas abajo de la futura obra hasta una longitud aproximada de 30 km. Con ello se obtienen K , m y α para ese tramo, sin necesidad de suponerlos.

Con esos parámetros ajustados a observaciones reales, el cálculo de la socavación es más preciso.

2. Al final del primer tramo, es decir, a una cierta distancia de la presa que varía en longitud con el tiempo, el cauce no es afectado por la erosión aquí tratada. De ahí hacia aguas abajo, la pendiente hidráulica del río se conserva igual a la original S_r . Por tanto, $S = S_r$.
3. Se calcula el nuevo gasto formativo de la descarga de la presa. Cuando se tiene una planta hidroeléctrica puede considerarse el promedio de los máximos diarios. Si el vertedor descarga durante periodos largos se trabajará además con el dominante asociado a esas descargas.
4. Con S_r y el nuevo gasto formativo Q , se obtiene el ancho B_r y el tirante d_r del cauce en el segundo tramo. Esos parámetros corresponden, por supuesto, a la última sección del primer tramo. Para ello

4.1 Se calcula Q_{BT_r} con la ec 4.58, dado $S = S_r$

4.2 Conocido Q_{BT_r} , se obtiene B_r con ayuda de la ec 4.56

4.3 Conocido B_r , se obtiene d_r con ayuda de la ec 4.57

5. En la primera sección inmediata aguas abajo de la descarga de la obra de toma o de excedencias de la presa no afectada por la erosión local, el transporte de sedimentos se considera nulo, por lo que la pendiente hidráulica tenderá a ser la crítica $S = S_c$. Dicha pendiente se calcula con la ec 4.58, aceptando $Q_{BT} = 0$.
6. Para el cálculo, el primer tramo se divide en n intervalos iguales. En cada uno de ellos se aplican las ecs 4.56 a 4.58. Puede notarse que las incógnitas son cuatro: Q_{BT} , S , B y d en cada uno, pero como se dispone de sólo tres ecuaciones, se aceptarán algunas de las hipótesis que se indican en 6.1.3.
7. Si en el primer tramo del cauce las márgenes son de roca o muy resistentes, se pierde un grado de libertad, ya que el ancho, B , se considera constante durante todo el proceso erosivo, y sólo se requieren dos ecuaciones, la ec 4.9 y la 4.33, para resolver el problema. De ellas se obtiene

$$Q_{BT} = \frac{FQ^{3.193}}{(\alpha B)^{2.193} d^{3.583}} \left[\frac{\gamma}{d^{2.583}} \left(\frac{Q}{\alpha B} \right)^{2.193} - \tau_c \right] \quad (6.1)$$

$$Q_{BT} = FQS \left[\gamma S^{0.721} \left(\frac{Q}{\alpha B} \right)^{0.612} - \tau_c \right] \quad (6.2)$$

Se tienen dos ecuaciones con tres incógnitas: Q_{BT} , d y S ; entonces el procedimiento de cálculo resulta similar a lo que se explica para tres grados de libertad.

6.1.3 Hipótesis

Debido a que se tienen más incógnitas que ecuaciones y a que hay que conciliar lo visto en los capítulos 2 y 4, se establecen las siguientes hipótesis:

- a. El transporte de sedimentos varía de acuerdo con una ley preestablecida desde cero en la primera sección a Q_{BT_r} en la última sección del primer tramo. Ambas secciones están separadas una distancia L_r (medida a lo largo del río) que crece con el tiempo. Inicialmente se ha escogido en este trabajo la variación lineal, pero puede ser otra cualquiera, siempre que sea continua. Para verificar cuál es la correcta, se requiere posteriormente que se cumpla con el principio de la continuidad de sedimentos en cada tramo.

Aceptada la variación de Q_{BT} , se obtienen B , d y S para todos los intervalos en que se divide la longitud L_r (primer tramo sujeto a erosión).

- b. En lugar de la hipótesis anterior, se puede aceptar una variación conocida de S y obtener a partir de ella a B , d y Q_{BT} , dentro del primer tramo sujeto a erosión.
- c. En el capítulo 2 se mostró que el coeficiente K depende también del transporte de sedimentos, ya que se obtuvo un valor de $K_c = 11$ para $Q_{BT} = 0$ y de $K_{max} = 25$ para Q_{BT} máximo. Estos valores se obtuvieron experimentalmente y para un único material de fondo. Por tanto, se aceptará que K varía de $K_c = 10$ en la primera sección, a $K = K_r$ en la última sección. Aparentemente tal variación no es lineal, por lo que se sugiere iniciar el cálculo con

$$K_i = K_r - (K_r - K_c) \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{L} \right)^2} \right] \quad (6.3)$$

Si se desconoce K_r por falta de datos, se sugiere iniciar el cálculo de $K_r = 18$.

6.1.4 Cálculo de la erosión

Se efectúan los siguientes pasos

1. Considérese la fig 6.1. Se selecciona una longitud L para el primer tramo, un kilómetro por ejemplo, medido a lo largo del río. Se elige un sistema coordenado donde el origen coincida con la última sección del tramo erosionado (al final de L_r , medido a lo largo del río); el eje x es horizontal y dirigido hacia la presa y el eje y es vertical y dirigido hacia arriba. La distancia horizontal de la presa al origen de los ejes es L ; por tanto

$$L = L_r \cos \alpha \quad * (6.4)$$

$$S_r = \tan \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} S_r$$

2. Se divide L en n intervalos, por ejemplo, 50; $n = 50$.
3. En cada sección se supone conocido Q_{BT} , que, como primera opción, varía linealmente de cero a Q_{BT_r} . Así se cumple

$$Q_{BT_i} = \left(1 - \frac{x_i}{L}\right) Q_{BT_r} \quad (6.5)$$

o bien

$$Q_{BT_i} = \left(1 - \frac{L_{ri}}{L_r}\right) Q_{BT_r} \quad (6.6)$$

Recuérdese que hacia aguas abajo del origen se cumple que $S = S_r$ y $Q_{BT} = Q_{BT_r}$.

4. Se calcula K para cada sección con ayuda de la ec 6.3 para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
5. Conocidos Q_{BT_i} y K_i y con ayuda de las ecs 4.56 a 4.58 se obtienen B_i, d_i y S_i para cada sección.
6. Se obtiene el perfil de la línea de energía, iniciando en $x_0 = 0$ y terminando en $x_n = x_{max} = L$

$$H_i = \left(\frac{S_i + S_{i-1}}{2} \right) \Delta x + H_{i-1} \quad (6.7)$$

donde

$$\Delta x = L/n$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Para la condición $x = x_0 = 0, H_0$ vale

$$H_0 = d_0 + \frac{U_0^2}{2g} + z_0 \quad (6.8)$$

donde d_0 y U_0 son respectivamente el tirante y la velocidad media de la última sección de aguas abajo del primer tramo e iguales a la condición teórica uniforme del segundo tramo. z_0 puede tomarse como la elevación del fondo en la sección arriba indicada o se le puede asignar un valor cero.

Puesto que $S_0 = S_r$ y $S_n = S_c$.

$$H_1 = \left(\frac{S_1 + S_0}{2} \right) \frac{L}{n} + H_0$$

$$H_2 = \left(\frac{S_2 + S_1}{2} \right) \frac{L}{n} + H_1$$

$$H_n = \left(\frac{S_c + S_{n-1}}{2} \right) \frac{L}{n} + H_{i-1} = H_{max}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

7. Se calcula el perfil del fondo erosionado, midiendo su elevación sobre el eje x

$$z_i = H_i - d_i - \frac{U_i^2}{2g} \quad (6.9)$$

$i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Por tanto, $z_0 = 0$, o $z_0 =$ elevación del fondo del río en la sección cero, y

$$z_n = z_{max} = H_{max} - d_n - \frac{U_n^2}{2g} \quad (6.10)$$

Cuando la socavación progresa mucho y L es grande (más de 10 km), d_n y U_n tienden al valor de d_c y U_c , respectivamente, en régimen uniforme.

8. Conocida cada H_i , se calculan las profundidades de socavación E_i , medidas desde el fondo original

$$E_i = y_i - z_i \quad (6.11)$$

en que

$$y_i = L_i S_r + Z_o \quad (6.12)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Para la condición inicial $x_o = 0$, a Z_o se le puede asignar el valor cero o la elevación del fondo del río en ese punto. Así se cumple que $y_o = z_o =$ elevación del fondo, en $x_o = 0$.

9. Se obtiene el volumen erosionado

$$V_e = \sum_{i=0}^n \left(\frac{B_i + B_{i-1}}{2} \right) \left(\frac{E_i + E_{i-1}}{2} \right) \frac{L}{n} \quad (6.13)$$

10. Se calcula el tiempo en que el volumen V_e fue erosionado. Para ello se sabe que el volumen de sedimentos que pasa por la sección 0 en tiempo t , sin considerar huecos, es

$$V_{BT} = tQ_{BT} \quad (6.14)$$

B_{BT} es un volumen de sólidos únicamente. Si el material original en el fondo del río tiene una relación de vacíos e , o una porosidad \bar{n} , el volumen total V_T ocupado por los sedimentos es

$$V_T = (1 + e)V_{BT} \quad (6.15)$$

o bien

$$V_T = \frac{V_{BT}}{(1 - \bar{n})} \quad (6.16)$$

Como $V_t = V_e$, tomando en cuenta las ecs 6.13 a 6.16, el tiempo necesario para erosionar V_e desde el momento en que se cerró la presa vale

$$t = \frac{V_e}{(1 + e)Q_{BT}} \quad (6.17)$$

o bien

$$t = \frac{(1 - \bar{n})V_e}{Q_{BT}} \quad (6.18)$$

Recuérdese que en una muestra de suelo se cumplen las relaciones

$$\bar{n} = \frac{e}{1 + e} \quad y \quad e = \frac{\bar{n}}{1 - \bar{n}}$$

11. El mismo procedimiento se repite para otras longitudes L , pero también puede simplificarse cuando al incrementar L no se modifican las características del material del río y su pendiente, ya que tampoco hay razón para modificar la variación de Q_{BT} ni la de K . Por tanto, se cumplen las siguientes relaciones adimensionales, siempre y cuando n también sea constante

$$\frac{x_{ij}}{L_j}; \frac{F_{ij}}{L_{maxj}}; \frac{F_{ij}}{L_j}; \frac{F_{maxj}}{L_j}$$

donde j está asociada a cada nueva longitud L ; es decir, a cada tiempo t . Además, se cumple

$$F_i = H_i - d_o - \frac{U_o^2}{2g} = H_i - H_o - z_o \quad (6.19)$$

y, por tanto, si $z_o = 0$, se obtiene, $F_o = 0$

En lo anterior, F es el desnivel entre la elevación del gradiente de energía en una sección cualquiera y la elevación del gradiente de energía en la sección inicial 0.

12. Después de terminar el cálculo para la primera longitud L (paso 9), es decir, de L_j para $j = 1$, se calculan las relaciones

$$\bar{X}_i = \frac{x_{i1}}{L_1} \quad (6.20)$$

$$\bar{F}_{max} = \frac{F_{max1}}{L_1} \quad (6.21)$$

$$\bar{F}_i = \frac{F_{i1}}{F_{max1}} \quad (6.22)$$

o bien

$$\bar{\bar{F}}_i = \frac{F_{i1}}{L_1} \quad (6.23)$$

13. Se selecciona una nueva longitud L_{rj} y se trazan los ejes cartesianos adecuadamente al final de esa longitud. Al dividir nuevamente en n intervalos, siendo n igual al anterior, se cumple que cada i , B_i y S_i tiene los mismos valores anteriores

$$B_{ij} = B_{i1} \quad (6.24)$$

$$S_{ij} = S_{i1} \quad (6.25)$$

Además, se cumple

$$x_{ij} = \bar{X}_i L_j \quad (6.26)$$

$$F_{ij} = \bar{F}_i L_j \quad (6.27)$$

$$F_{maxj} = \bar{F}_{max} L_j \quad (6.28)$$

y, por tanto, también que

$$F_{ij} = \bar{\bar{F}}_i F_{maxj} \quad (6.29)$$

Los resultados de las ecs 6.27 y 6.29 deben ser iguales.

14. Se calcula la nueva H_o . Según las hipótesis aceptadas, $d_o + U_o^2/2g = cte$ para cualquier L_j . Cuando no se trabaja con elevaciones sino que $Z_o = \hat{0}$, se cumple que $H_o = cte$.

15. Se calculan las nuevas H_{ij} con la relación

$$H_{ij} = F_{ij} + H_o + z_{oj} \quad (6.30)$$

16. Se obtienen las nuevas z_{ij}

$$z_{ij} = H_{ij} - d_i - \frac{U_i^2}{2g} \quad (6.31)$$

17. Se calculan las nuevas E_{ij} y y_{ij} con ayuda de las ecs 6.11 y 6.12, respectivamente

18. Se obtienen ∇_{ej} y t_j con las ecs 6.13 y 6.17

19. Hecho lo anterior para varias longitudes L hasta unos 50 kms se procede a dibujar lo siguiente

- a) Perfil del fondo para cada longitud L
- b) Curva de L_j contra tiempo
- c) Curva de z_{maxj} contra tiempo
- d) Curva de H_{maxj} contra tiempo
- e) Para cualquier sección prefijada del río en la que se desee conocer la evolución de la erosión, y con ayuda de las primeras dos figuras a y b, se obtiene la profundidad del fondo y la elevación de la superficie libre, ambas contra el tiempo para esa sección. La elevación de la superficie libre para cualquier punto vale

$$\text{Elev superficie} = H_i - \frac{U_i^2}{2g} \quad (6.32)$$

6.1.5 Comentarios adicionales

- i. Con el procedimiento de cálculo presentado y mientras no se tengan datos preliminares de la evolución de la erosión en los primeros años, se propone utilizar los siguientes valores

$m = 0.7$ y constante en todo el tramo

$$K_r = K_o = 18$$

$$K_c = 10$$

$K_i =$ según lo expresado en la ec 6.3

- ii. Se debe revisar si hay continuidad de sedimentos en cada tramo. Para ello considérese la fig 6.3 y un tramo cualquiera comprendido entre las secciones i e $(i + 1)$, en dos tiempos diferentes: j y $(j + 1)$. Las elevaciones del fondo para cualquier punto y tiempo dado vale y_{ij} . Cuando las y_{ij} se dieron como elevación respecto a una línea horizontal común de referencia, se cumple

$$[\nabla_e]_{i,i+1}^{j,j+1} = \frac{(B_i + B_{i+1})}{2} \frac{(L_{rj} + L_{r(j+1)})}{2n} \left[(z_{i+1}^j - z_{i+1}^{j+1}) + (z_i^j - z_i^{j+1}) \right] \frac{1}{2} \quad (6.33)$$

Si en el cálculo de cada perfil se consideró $z_o = 0$ al aplicar la ec 6.33 se tendrá que considerar como nivel de referencia el eje x en el instante $(j + 1)$ y, por tanto, para el instante j , todos los valores z_{ij} deben incrementarse en $S_r[\Delta L]_j^{j+1}$, que es la diferencia de la elevación entre dos ejes x del instante j y del $(j + 1)$. Téngase en cuenta que

$$[\Delta L]_j^{j+1} = L_{j+1} - L_j \quad (6.34)$$

En cambio, todas las $z_{i,j+1}$ conservaron su valor.

Queda así definido un volumen $[\nabla_e]_{i,i+1}^{j,j+1}$ y se debe cumplir la siguiente ecuación de continuidad para el sedimento

$$(Q_{BT(i+1)} - Q_{BTi})\Delta t(i + e) - [\nabla_e]_{i,i+1}^{j,j+1} = [\Delta \nabla_e]_{i,i+1}^{j,j+1} \quad (6.35)$$

donde Δt es el tiempo transcurrido entre j y $j + 1$.

Lo indicado se hace en los n intervalos, por lo que se conocerán todas las ΔV_e . Téngase en cuenta que mientras la hipótesis a) de 6.1.3 dada por las ecs 6.5 y 6.6, se cumple, se puede escribir

$$(Q_{BTi} - Q_{BT(i+1)}) = \frac{Q_{BT}}{n}$$

Cuando la variación lineal de Q_{BT} explicada en el párrafo a) de 6.1.3 es correcta, todas las ΔV_e deben ser cero. Si ello no ocurre habrá que seleccionar otra variación de Q_{BT} , por ejemplo, exponencial, elíptica o parabólica, hasta obtener que todas las ΔV_e cumplan con la condición $[\Delta V_e]_{i,i+1}^{j,j+1} = 0$.

Como ejemplo, la variación elíptica se expresa como

$$Q_{BTi} = Q_{BTr} \sqrt{1 - \left(\frac{x_i}{L}\right)^2} \quad (6.36)$$

- iii. Debe notarse que no se ha considerado en forma explícita el cumplimiento de la ecuación de la energía expresada por la ecuación de Bernoulli entre secciones, y que se ha trabajado con flujo permanente asociado para cada sección, por lo que los resultados son erróneos cuando L es muy pequeña. A medida que L crece, los tirantes obtenidos cumplen dicha ecuación. Para satisfacer la duda razonable que pueda surgir sobre este punto, conviene obtener el perfil de la superficie libre, mediante la aplicación ordenada de la ecuación de Bernoulli que, en primera instancia, se escribe como

$$\begin{aligned} z_{i+1} + d_{i+1} + \frac{Q^2}{2gd_{i+1}^2 B_{i+1}^2} &= \\ &= z_i + d_i + \frac{Q^2}{2gd_i^2 B_i^2} + \frac{L}{2n} \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{B_{i+1} d_{i+1}^{3.583}} + \frac{1}{B_i d_i^{3.583}} \right) \right]^{2.163} \end{aligned} \quad (6.37)$$

donde d_i es la incógnita, si se aceptan las B_i ya obtenidas; α se obtiene de la ec 4.14

6.2 Acorazamiento en el fondo

Con respecto al acorazamiento que puede sufrir el primer tramo sujeto a erosión, ocurren las siguientes situaciones

a. Material uniforme.

Para calcular la erosión se considera que no hay acorazamiento y no se necesita entonces modificar lo hasta aquí expuesto por este concepto.

En este punto conviene mencionar que Maza, García y Fuentes encontraron que existe una relación entre los tamaños de las partículas en cauces naturales no perturbados por el hombre y su desviación estándar geométrica. De datos tomados por Simons *et al.*, en ríos venezolanos la relación

$$D_{84} = 0.163\sigma_g^2$$

$$D_{50} = 0.163\sigma_g$$

$$D_{16} = 0.163$$

donde los diámetros están en milímetros.

La última expresión indica que todas las curvas granulométricas giran sobre el $D_{16} = 0.163 \text{ mm}$. En los datos señalados se encontró que en el 95 por ciento de las muestras el D_{16} varía entre 0.14 y 0.40 mm, con un valor medio igual al señalado.

La importancia de lo hasta aquí expuesto consiste en asegurar que, en la naturaleza, cuando $\sigma_g < 3$, el material es arenoso, y que al encontrar gravas o boleas necesariamente, $\sigma_g > 3$, y σ_g será tanto mayor, cuanto más grande sean las partículas.

b. Material con granulometría extendida.

Ante la presencia de este material se requiere considerar que hay acorazamiento en todo el tramo erosionado. Dicho acorazamiento tiene lugar por la erosión que se produce y no tanto por los esfuerzos cortantes que se generan sobre el fondo. En este caso se distinguen dos situaciones:

- b.1 La primera, cuando el flujo de las descargas de la obra de toma no es capaz de transportar o mover las partículas de la coraza, ni siquiera en la última sección de aguas abajo del primer tramo, por tanto, el primer y segundo tramo se encuentran acorazados. En tal circunstancia no hay transporte de sedimentos ni erosión con el gasto normal de la obra de toma. Sólo podrá haber arrastre y erosión cuando descargue la obra de excedencias, por lo que se tendrá que trabajar con el hidrograma de descarga de esa obra. En los cálculos se recomienda

utilizar las fórmulas del grupo B, τ_c dado por las ecs 3.34 y 3.35 y D_{84} y D_{50} , según lo expresado por las ecs 3.38 y 3.40, respectivamente.

- b.2 La segunda, cuando el flujo de la descarga de la obra de toma arrastra sedimentos en el segundo tramo. Por la erosión que tiene lugar en el primer tramo, se produce una selección de partículas y un acorazamiento que tenderá al máximo en la primera sección.

En este trabajo no se presenta ni la variación de los tamaños a lo largo del primer tramo ni el grado de acorazamiento. Este punto debe experimentarse en el laboratorio y observarse en la naturaleza antes de dar una respuesta concluyente.

6.3 Modelo matemático a partir de ecuaciones diferenciales

Otra manera de predecir el comportamiento de los escurrimientos en cauces naturales mediante el modelado del flujo variado, ya sea permanente o transitorio, incluyendo el transporte de sedimentos. Este aspecto ha recibido un importante impulso sobre todo a partir de la década de los setenta con el desarrollo de una gran cantidad de modelos matemáticos, muchos de los cuales son presentados, resumidos y discutidos por Cunge, Holly y Verwey. En este capítulo se presenta el criterio seguido por Berezowsky y Lara y con aportaciones de Cruickshank, Gracia y Aparicio (todos ellos investigadores del Instituto de Ingeniería de la UNAM), quienes han modelado diferentes fenómenos de los cauces naturales.

Debido a las dificultades que se encuentran al modelar el transporte de sedimentos, sobre todo por su variación a lo ancho de cualquier sección transversal, y dada la lentitud con la que evolucionan algunos fenómenos morfológicos en ríos, estos puntos no se han incluido en el análisis y por lo mismo tampoco la formación y desarrollo de meandros, los cambios en la sección transversal y las variaciones en el ancho. Sin embargo, el modelo que aquí se muestra puede ser útil tanto en estudios preliminares del comportamiento de ríos como en diseño.

El régimen del flujo analizado es subcrítico con arrastre de sedimentos, y ya ha sido tratado por autores como De Vries, Cunge, Pedreau, Garde y Ranga Raju.

En el modelo se trata de predecir principalmente el cambio que sufre el perfil longitudinal del río al variar el gasto líquido y el transporte de sedimentos.

Aunque el modelo que se presenta es unidimensional, se ha forzado la variación de B según lo explicado en el capítulo 4 y su dependencia con d .

6.3.1 Ecuaciones que gobiernan el fenómeno

Las ecuaciones de partida son:

a. Continuidad del líquido

$$\frac{\partial(H-z)}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (6.38)$$

b. Ecuación dinámica

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gAS = 0 \quad (6.39)$$

c. Continuidad del sedimento

$$b' \frac{\partial z}{\partial t} + (1+e) \frac{\partial Q_{BT}}{\partial x} = 0 \quad (6.40)$$

donde, en cada sección

B	ancho de la superficie libre, en m
Q	gasto líquido, en m^3/s
A	área de la sección transversal, en m^2
H	elevación de la superficie libre, en m; tal que

$$H = z + d$$

z	elevación del fondo, en m
d	tirante, en m
S	pendiente hidráulica, adimensional
b'	ancho promedio del fondo, para el cual hay transporte de sedimentos, en m. En este trabajo se ha considerado

$$b' = 0.8 B \quad (6.41)$$

Q_{BT}	gasto total del fondo de sedimentos, en m^3/s . Si solo hay arrastre en la capa de fondo
----------	--

$$Q_{BT} = Q_B$$

e	relación de vacíos del material del fondo, adimensional
g	aceleración debida a la gravedad

En la deducción de las ecs 6.38 y 6.39 se tomaron como válidas las hipótesis de Saint-Venant; es decir, se considera que el flujo es unidimensional y por tanto que la velocidad es uniforme e igual a la media en toda la sección transversal; que la curvatura de las líneas de corriente es pequeña y que las aceleraciones verticales son despreciables, con lo que la distribución de presiones se considera hidrostática; que los efectos de la fricción en la frontera así como la turbulencia pueden cuantificarse con las fórmulas de resistencia usadas en el cálculo del flujo uniforme; y que la pendiente del fondo es pequeña, por lo que el coseno del ángulo que forma con la horizontal se toma como uno.

Además, no se toma en cuenta la presencia de corrientes secundarias y, por tanto, tampoco las erosiones ni los depósitos debidos a ellas. Por último, se acepta que las secciones transversales se desplazan verticalmente sin cambiar su forma.

En el estudio específico de la erosión aguas abajo de embalses producida por la descarga de una obra de toma, se puede emplear con éxito una versión simplificada de las ecs 6.38 y 6.39, ya que el gasto es constante en cada sección por existir flujo permanente; por tanto se cumple que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (6.42)$$

con lo que finalmente se tiene el sistema de dos ecuaciones

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} + gAS = 0 \quad (6.43)$$

$$b' \frac{\partial z}{\partial t} + (1 + e) \frac{\partial Q_{BT}}{\partial x} = 0 \quad (6.44)$$

Esta simplificación se justifica en un gran número de problemas prácticos cuando las variaciones del gasto en el tiempo no son rápidas.

Aquí se han usado las ecs 6.38 a 6.40 en su versión original, porque con ellas se puede analizar también el fenómeno de degradación cuando existen descargas variables e intensas por la obra de excedencias.

6.3.2 Ecuaciones complementarias

Las ecuaciones adicionales consideradas en este modelo son:

a. Resistencia al flujo.

Para calcular la pendiente hidráulica se ha tomado la fórmula de Cruickshank-Maza y, por tanto,

$$S = \left(\frac{Q}{\alpha B d^{1.634}} \right)^{2.193} \quad (ec \ 4.15)$$

en que

$$\alpha = 7.58 \omega_{50} / D_{84}^{0.634} \Delta^{0.456} \quad (ec \ 4.14)$$

Para conocer dicho gradiente de energía o pendiente hidráulica también se pueden utilizar ecuaciones como las de Manning y Chezy, y si se desea tener en cuenta las ondulaciones del fondo, una ecuación como la de Engelund puede servir, pero debe usarse con cuidado porque es triplemente valuada al relacionar S con d , como lo mostró ya García. Otros métodos como el de Alam Lovera y Kennedy por requerir gráficas aumentan la complejidad del cálculo.

b. Transporte de sedimentos

Se propone utilizar las ecuaciones de Shields o Engelund cuando la corriente es intensa y la de Shields o Meyer-Peter y Müller cuando es baja. Para analizar procesos de erosión (como en este trabajo) no se recomienda la de Engelund porque hay que añadirle la condición de que el transporte sea cero si se está por debajo de la condición crítica. De acuerdo con lo indicado, se puede usar una de las siguientes ecuaciones

b.1 Meyer-Peter y Müller: para arrastre en la capa de fondo

$$Q_B = \epsilon B (N d S - 0.047)^{1.5} \quad (ec \ 4.18)$$

en que

$$\epsilon = 6.4 (g \Delta D_m^3) \quad (ec \ 4.19)$$

$$N = \left(\frac{n'}{n} \right)^{1.5} \frac{1}{\Delta D_m} \quad (ec \ 4.20)$$

véase el apartado 4.4.2.1.

b.1 Shields: para transporte total del fondo

$$Q_{BT} = F Q S (\gamma d S - \tau_c) \quad (ec \ 4.33)$$

en que

$$F = \frac{8}{\gamma_s \Delta^2 D_{50}} \quad (\text{ec } 4.34)$$

c. Resistencia de las orillas

Se ha incluido la relación observada empíricamente entre el ancho y el tirante y expresada según la ec 4.37 de Glushkov

$$B^m = Kd \quad (\text{ec } 4.37)$$

donde

m exponente con valor promedio igual a 0.7

K coeficiente que depende del material de las orillas. En este trabajo se ha aceptado lo expresado al presentar la ec 6.3

6.3.3 Esquema numérico de discretización

El sistema de ecuaciones 6.38 a 6.40, 4.15, 4.18 y 4.37 sólo puede resolverse numéricamente y existen varios esquemas útiles para su solución. Aquí se sigue lo presentado por Berezowsky y Lara, quienes se basaron en esquemas del tipo Preissmann, ver Cunge et al.

El esquema usado es implícito y tiene la ventaja sobre los explícitos de permitir el uso de incrementos de tiempo relativamente grandes y de ser más preciso y flexible.

La discretización de las variables y sus derivadas con respecto al espacio y el tiempo se puede hacer mediante promedios pesados de sus valores y, puesto que las variables de las ecs 6.30 a 6.40 son función de x y t , $f = f(x, t)$, se escribe lo siguiente

$$f = \frac{\theta}{2}(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1}) + \frac{(1-\theta)}{2}(f_{i+1}^j + f_i^j) \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x}[\theta(f_{i+1}^{j+1}) - (f_i^{j+1}) + (1-\theta)(f_{i+1}^j - f_i^j)] \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}(f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^j) + (f_i^{j+1} - f_i^j) \quad (6.47)$$

donde θ es un factor de peso en el tiempo con valor entre 0.5 y 1. El superíndice j se refiere al tiempo: $j\Delta t$; $(j+1)\Delta t$, y el subíndice i se refiere al espacio: $i\Delta x$; $(i+1)\Delta x$.

Por otra parte, si se considera el incremento de la función $f(x,t)$ entre los tiempos $j\Delta t$ y $(j+1)\Delta t$, tal que Δf sea pequeño, $\Delta f \ll$, puede definirse

$$\Delta f_i = f_i^{j+1} - f_i^j \quad (6.48)$$

$$\Delta f_{i+1} = f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^j \quad (6.49)$$

Desarrollando la ec 6.45 se llega a

$$f = \frac{\theta}{2}[f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_{i+1}^j - f_i^j] + \frac{1}{2}(f_{i+1}^j + f_i^j) \quad (6.50)$$

Al tener en cuenta las ecs 6.48 y 6.49 en la ec 6.50, se obtiene

$$f = \frac{\theta}{2}(\Delta f_{i+1} + \Delta f_i) + \frac{1}{2}(f_{i+1}^j + f_i^j) \quad (6.51)$$

Si además para simplificar las notaciones se acepta que $f^j = f$, ya que es conocida, se tiene finalmente

$$f = \frac{\theta}{2}(\Delta f_{i+1} + \Delta f_i) + \frac{1}{2}(f_{i+1} + f_i) = \bar{f}_i \quad (6.52)$$

Procediendo en forma semejante, la ec 6.46 se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x}(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i) + \frac{1}{\Delta x}(f_{i+1} - f_i) \quad (6.53)$$

y la ec 6.47 toma la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\Delta f_{i+1} + \Delta f_i}{2\Delta t} \quad (6.54)$$

A continuación, y con base en lo expuesto, se transformarán las ecs 6.38 a 6.40.

a. Ecuación de continuidad del líquido, ec 6.38

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (6.55)$$

en ella cada término adquiere las expresiones que a continuación se indican:

Teniendo en cuenta la ec 6.54 se cumple

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\Delta H_{i+1} + \Delta H_i}{2\Delta t} \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\Delta z_{i+1} + \Delta z_i}{2\Delta t} \quad (6.57)$$

El ancho B en el tramo $i, i + 1$ y en el tiempo $j, j + 1$, y teniendo en cuenta la ec 6.51, queda expresado por

$$B = \frac{\theta}{2}(\Delta b_{i+1} + \Delta b_i) + \frac{1}{2}(B_{i+1} + B_i) = \bar{B}_i \quad (6.58)$$

Por último, utilizando lo indicado por la ec 6.53 se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x}(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + \frac{1}{\Delta x}(Q_{i+1} - Q_i) \quad (6.59)$$

Sustituyendo en 6.55 lo expresado por las ecs 6.56 a 6.59 se obtiene

$$\frac{\Delta H_{i+1} + \Delta H_i - \Delta z_{i+1} - \Delta z_i}{2\Delta t} + \frac{1}{\bar{b}_i \Delta x} [\theta(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i) + (Q_{i+1} - Q_i)] = 0 \quad (6.60)$$

Multiplicando por $2\Delta t$ y agrupando ordenadamente se llega a

$$k1_i \Delta Q_{i+1} + k2_i \Delta z_{i+1} + k3_i \Delta H_{i+1} = k4_i \Delta Q_i + k5_i \Delta H_i + k6_i \Delta z_i + k7_i \quad (6.61)$$

donde

$$k1_i = \frac{2\theta}{\bar{B}_i} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (6.62)$$

$$k2_i = -1 \quad (6.63)$$

$$k3_i = 1 \quad (6.64)$$

$$k4_i = \frac{2\theta}{\bar{B}_i} \frac{\Delta t}{\Delta x} = -k1_i \quad (6.65)$$

$$k5_i = 1 \quad (6.66)$$

$$k6_i = -1 \quad (6.67)$$

$$k7_i = \frac{2\theta\Delta t}{\bar{B}_i\Delta x} (Q_i - Q_{i+1}) \quad (6.68)$$

b. Ecuación de cantidad de movimiento

Con los términos de la ec 6.39 se procede en forma análoga a la mostrada.

El primer término adquiere la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\Delta Q_{i+1} + \Delta Q_i}{2\Delta t} \quad (6.69)$$

el segundo vale

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{\theta}{\Delta x} [\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1} - \Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i] + \frac{1}{\Delta x} [\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i] \quad (6.70)$$

Los términos $\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right)$ que aparecen en la ecuación anterior se obtienen con la relación

$$\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{\partial}{\partial Q} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \Delta Q + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \Delta A \quad (6.71)$$

y, por tanto,

$$\Delta \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{2Q\Delta Q}{A} - \frac{Q^2\Delta A}{A} \quad (6.72)$$

con ello, la ec 6.70 toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) = \frac{\theta}{\Delta x} \left[2 \left(\frac{Q}{A} \right)_{i+1} \Delta Q_{i+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1} \Delta A_{i+1} + 2 \left(\frac{Q}{A} \right)_i \Delta Q_i - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i \Delta A_i \right] + \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i \right] \quad (6.73)$$

En el tercer término, la primera variable se calcula en forma semejante a la señalada en la ec 6.58

$$A = \frac{\theta}{2} (\Delta A_{i+1} + \Delta A_i) + \frac{1}{2} (A_{i+1} + A_i) = \bar{A}_i \quad (6.74)$$

mientras que $\frac{\partial H}{\partial x}$ se calcula según lo expresado por la

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta H_{i+1} - \Delta H_i) + \frac{1}{\Delta x} (H_{i+1} - H_i) \quad (6.75)$$

En el último término, la variable A está dada por la ec 6.74 y S se valúa mediante la ec 6.58

$$S = \frac{\theta}{2} (\Delta S_{i+1} + \Delta S_i) + \frac{1}{2} (S_{i+1} + S_i) = \bar{S}_i \quad (6.76)$$

Como S es función del tirante y del gasto en cualquier ecuación de resistencia al flujo, se cumple

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial S}{\partial Q} \Delta Q \quad (6.77)$$

Sustituyendo 6.70 en 6.69 se llega a

$$S = \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_{i+1} \Delta d_{i+1} + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_{i+1} \Delta Q_{i+1} + \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_i \Delta d_i + \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_i \Delta Q_i \right] + \frac{1}{2} (S_{i+1} + S_i) \quad (6.78)$$

Sustituyendo todo lo mostrado en la ec 6.39, se llega finalmente a

$$m1_i \Delta Q_{i+1} + m2_i \Delta z_{i+1} + m3_i \Delta H_{i+1} = m4_i \Delta Q_i + m5_i \Delta z_i + m6 \Delta H_i + m7_i \quad (6.79)$$

donde

$$m1_i = 1 + g\theta\Delta t\bar{A}_i\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_{i+1} + 4\theta\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{Q}{A}\right)_{i+1} \quad (6.80)$$

$$m2_i = -g\theta\Delta t\bar{A}_i\left(\frac{\partial S}{\partial d}\right)_{i+1} \quad (6.81)$$

$$m3_i = g\theta\Delta t\bar{A}_i\left[\frac{2}{\Delta x} + \left(\frac{\partial S}{\partial d}\right)_{i+1}\right] \quad (6.82)$$

$$m4_i = 4\theta\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{Q}{A}\right)_i - g\theta\Delta t\bar{A}_i\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_i - 1 \quad (6.83)$$

$$m5_i = g\theta\Delta t\bar{A}_i\left(\frac{\partial S}{\partial d}\right)_i \quad (6.84)$$

$$m6_i = g\theta\Delta t\bar{A}_i\left[\frac{2}{\Delta x} - \left(\frac{\partial S}{\partial d}\right)_i\right] \quad (6.85)$$

$$m7_i = -2\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1} - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i\right] - 2g\frac{\Delta t}{\Delta x}\bar{A}_i(H_{i+1} - H_i) - \\ -g\Delta t\bar{A}_i(\bar{S}_{i+1} + \bar{S}_i) + 2\theta\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}\Delta A_{i+1} - \left(\frac{Q^2}{A}\right)_i\Delta A_i\right] \quad (6.86)$$

c. Ecuación de continuidad de sedimentos

Los términos de la ecuación de continuidad de sedimentos, ec 6.40, se transforman de la manera indicada para las ecs 6.38 y 6.39.

A continuación y en forma ordenada se muestra la transformación de cada término.

En el primer término, la variable b' es el ancho del fondo en que tiene lugar el transporte de sedimentos. Cuando se estudia un tramo de río donde las secciones originales no varían durante el paso de la avenida, dicha variable se valúa con la expresión

$$b' = \frac{1}{2}(b'_{i+1} + b'_i) = \bar{b}'_i \quad (6.87)$$

En el problema que nos ocupa ocurren cambios morfológicos y, por tanto, el ancho del fondo puede reducirse o ampliarse lentamente durante el proceso de erosión; conviene entonces tomar a b como una función de B , ec 6.58. En una primera aproximación, mientras no existan datos para calibrar el modelo, se considera que

$$\bar{b}'_i = C_b \bar{B}_i \quad (6.88)$$

donde, en este trabajo, se ha supuesto $C = 0.8$.

También en el primer término aparece $\frac{\partial z}{\partial t}$, cuya expresión está dada por la ec 6.57, pero afectada por un factor ψ que puede variar entre 0.5 y 1

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} [\psi \Delta z_{i+1} + (1 - \psi) \Delta z_i] \quad (6.89)$$

En el segundo y último término interviene $\frac{\partial Q_{BT}}{\partial x} = 0$, que toma la forma

$$\frac{\partial Q_{BT}}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} (\Delta Q_{BT_{i+1}} - \Delta Q_{BT_i}) + \frac{1}{\Delta x} (Q_{BT_{i+1}} - Q_{BT_i}) \quad (6.90)$$

Como el transporte de sedimentos es función de d , Q y S , los términos ΔQ_{BT} se aproximan a

$$\Delta Q_{BT} = \frac{\partial Q_{BT}}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial Q_{BT}}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial Q_{BT}}{\partial S} \Delta S \quad (6.91)$$

Las diferencias parciales indicadas se tienen que obtener en función de las fórmulas de transporte seleccionadas, que en este trabajo son las de Meyer-Peter y Müller y la de Shields.

Teniendo en cuenta todo lo indicado, la ec 6.39 toma la forma

$$n1_i \Delta Q_{i+1} + n2_i \Delta z_{i+1} + n3 \Delta H_{i+1} = n4_i \Delta Q + n5_i \Delta z_i + n6_i \Delta H_i + n7_i \quad (6.92)$$

Para facilitar la escritura de los coeficientes se hacen las sustituciones

$$W_i = \frac{\theta \Delta t (1 + e)}{\Delta x \bar{b}'_i} \quad (6.93)$$

y

$$Q_{BT} = G \quad (6.94)$$

por tanto,

$$n1_i = W_i \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_{i+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{i+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial d} \right)_{i+1} \right] \quad (6.95)$$

$$n2_i = \psi + W_i \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{i+1} \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial G}{\partial d} \right)_{i+1} \right] \quad (6.96)$$

$$n3_i = W_i \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_{i+1} \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_{i+1} + \left(\frac{\partial G}{\partial d} \right)_{i+1} \right] \quad (6.97)$$

$$n4_i = W_i \left[\left(\frac{\partial G}{\partial Q} \right)_i + \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_i \left(\frac{\partial S}{\partial Q} \right)_i \right] \quad (6.98)$$

$$n5_i = W_i \left[- \left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_i \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_i - \left(\frac{\partial G}{\partial d} \right)_i \right] - (1 - \psi) \quad (6.99)$$

$$n6_i = W_i \left[\left(\frac{\partial G}{\partial S} \right)_i \left(\frac{\partial S}{\partial d} \right)_i + \left(\frac{\partial G}{\partial d} \right)_i \right] \quad (6.100)$$

$$n7_i = \frac{\Delta x W_i}{\theta} (G_i - G_{i+1}) \quad (6.101)$$

donde ψ es un factor de peso en el espacio y varía entre 0.5 y 1.

6.3.4 Procedimiento de solución

Al analizar un tramo de río, se divide en i intervalos. Aplicando el sistema de diferencias finitas expresado en las ecs 6.61, 6.79 y 6.92, en cada tramo se obtiene un sistema no lineal con 31 ecuaciones y 31+3 incógnitas, ya que hay que considerar las asociadas a los extremos del tramo total en estudio. El sistema se complementa con tres condiciones de frontera, dos en el extremo de aguas arriba ($i = 1$) y una en el extremo de aguas abajo ($i = N$).

Las condiciones de frontera más usuales son

- a. Frontera de aguas arriba ($x = 0, i = 1$)
 - a.1 Se conocen los gastos de entrada $Q = Q(t)$. En el estudio de socavación aguas abajo de presas $Q(t) = cte$
 - a.2 Se conoce el sedimentograma o sea los gastos sólidos de entrada $Q_{BT} = Q_{BT}(t)$ que para el problema aquí tratado vale cero

$$Q_{BT}(t) = 0$$

b. Frontera de aguas abajo

- b.1 Se conoce la elevación de la superficie libre del agua en $(x = L ; i = N)$, la cual corresponde al tirante normal.

El sistema de ecuaciones formado por las ecs 6.61, 6.79 y 6.92 es no lineal, dado que algunos de los coeficientes están expresados en función de las incógnitas al final del intervalo. Por tanto, para resolverlo hay que iterar. En la primera iteración se supone que los coeficientes son función solo de las variables en el instante j , con lo que el sistema de ecuaciones es lineal y puede resolverse. Una vez obtenida la solución de la primera aproximación, se actualizan los coeficientes y se resuelve el sistema nuevamente. Mahmood y Yevjevich han demostrado que esta forma de solución tiene la convergencia cuadrática del método de Newton-Raphson y que en la mayoría de los casos bastan dos iteraciones.

Para el programa de cómputo elaborado con base en lo aquí explicado, Berezowsky desarrolló una generalización del método del doble barrido para resolver sistemas con tres ecuaciones en cada nudo, a diferencia del doble barrido para sistemas con dos ecuaciones por nudo usado tradicionalmente.

El procedimiento de solución propuesto es el siguiente. Se conocen las condiciones iniciales; es decir, se conocen el gasto Q , la elevación de la superficie libre del agua H , y la elevación del fondo del cauce z en el instante j , para todos los tramos del cauce. Se pueden valorar entonces los coeficientes del sistema de ecs 6.61, 6.79 y 6.92 como una función de las variables valuadas en el instante j en todo el canal. Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene una primera aproximación de la solución se actualizan los coeficientes del sistema original y se resuelve el nuevo sistema hasta obtener los incrementos ΔQ , Δz y ΔH , en las variables Q , z y H , respectivamente. Conocidos estos se calculan las nuevas variables en el instante siguiente con

$$Q_i^{j+1} = Q_i^j + \Delta Q_i \quad (6.102)$$

$$z_i^{j+1} = z_i^j + \Delta z_i \quad (6.103)$$

$$H_i^{j+1} = H_i^j + \Delta H_i \quad (6.104)$$

Con estos valores se avanza al siguiente instante y así sucesivamente.

Los valores de los factores de peso utilizados son $\theta = 0.6$ y $\psi = 0.5$, en las ecuaciones de continuidad de movimiento del líquido, y $\psi = 0.8$ en las ecuaciones de continuidad del sedimento. Nótese que si en la ecuación de continuidad del sedimento, ec 6.40, el

segundo miembro es nulo y se usa $\psi = 0.5$ en la ec 6.89, resulta que $\Delta z_{i+1} = \Delta z_i$, que no corresponde al problema físico. Por ello se ha utilizado $\psi = 0.8$ en esa ecuación.

Este método de solución es aplicable siempre que no se presenten secciones de control, ya que al ocurrir esto será necesario considerar una frontera intermedia que dividiría el canal en tramos, analizándose cada uno en forma similar a la arriba descrita y acoplándose en las fronteras intermedias.

6.4 Aplicación y conclusiones

Para probar el método expuesto en 6.1 se aplicó al siguiente ejemplo.

Calcular la socavación aguas abajo de una presa, por cuya obra de toma se descargan, en forma casi constante, $300 \text{ m}^3/\text{s}$. El material del fondo del río tiene como características importantes: $\gamma_s = 2650 \text{ kgf}/\text{m}^3$; $D_{90} = 0.0009 \text{ mm}$; $D_{84} = 0.0007 \text{ mm}$; $D_{50} = 0.0005 \text{ mm}$ y $D_m = 0.0006 \text{ mm}$. El ancho inicial del cauce es de $B = 120.00 \text{ m}$ y la pendiente promedio de $S = 0.0005$. El gasto indicado escurre con un tirante medio de $d = 1.60 \text{ m}$ y $B = 120.00 \text{ m}$.

6.4.1 Hipótesis y condiciones de cálculo

El método se aplicó bajo las siguientes condiciones:

- a. En todos los cálculos se consideró que K variaba para cada sección según lo indicado en la ec 6.3. En la sección inmediata aguas abajo de la presa; es decir, en la sección crítica sin transporte de sedimentos, se consideró una $K = 10$, mientras que en el tramo de río no alterado, se tomó $K = 18$.
- b. No se consideró acorazamiento, por lo que los diámetros especificados fueron los mismos para todas las secciones y tramos del río.
- c. Se obtuvieron los perfiles erosionados del fondo, los de la superficie libre y los de la línea de energía, para diferentes variaciones del gasto sólido a lo largo de las secciones dentro del tramo erosionado (punto a del apartado 6.1.3 y punto 3 del 6.1.4). Los resultados fueron similares entre algunos de ellos. Se muestran los obtenidos para variación lineal, ec 6.5; variación elíptica, ec 6.36 y por último, una variación tal, que en cada tramo se cumpla con la continuidad de sedimentos según lo expresado por la ec 6.35. Esta última variación se obtuvo por tanteos de una sección a otra.
- d. Como se explicó en 6.1, al proceder al cálculo de la erosión se escogieron libremente las longitudes del tramo afectado por la erosión. Para cada uno de ellos,

se obtuvo el perfil del fondo erosionado y el tiempo requerido para alcanzar esa condición. Como longitudinales del tramo erosionado se seleccionaron las distancias de 5, 10, 15, 20 y 25 km.

- e. Los cálculos se efectuaron subdividiendo primero cada tramo erosionado en 10 secciones uniformemente espaciadas, y después en 50 secciones separadas uniformemente.

6.4.2 Resultados obtenidos

En las figs 6.4, 6.8 y 6.10 se muestran los perfiles erosionados obtenidos para cada una de las tres variaciones del gasto sólido indicadas en c), y utilizando 50 secciones en cada tramo mientras que en la fig 6.6 se muestra el perfil al considerar variación lineal pero utilizando sólo 10 secciones en el cálculo. En esas figuras se indica también el tiempo requerido para que el proceso erosivo alcance cada una de las etapas señaladas.

Por otra parte, en las figs 6.5, 6.7, 6.9 y 6.11 se muestra la variación de la erosión en el tiempo en cada una de las primeras 10 secciones aguas abajo de la presa, y separadas entre sí 1 km.

Por último, en la fig 6.12 se comparan entre sí las variaciones de la profundidad de la erosión contra el tiempo, que ocurren en las secciones situadas a 2, 4 y 6 km aguas abajo de la presa y obtenidas para cada una de las variaciones de gasto sólido que se señalaron en c).

Por otra parte, en la tabla 1.1 a 1.3 se muestran, para algunas secciones, los valores de los siguientes parámetros: ancho de la superficie libre, tirante, área hidráulica, pendiente hidráulica, la velocidad media del flujo, transporte de sedimentos y por último K . Se indicó que el cálculo se efectuó dividiendo el tramo en 50 secciones. Para ahorrar espacio y no considerarse necesario, no se incluyen todas, sino únicamente la tercera parte. Esos resultados son aplicables cualquiera que sea la longitud del primer tramo o tramo erosionado, ya que la localización de las secciones está en función de la distancia L , fig 6.1, según se indica en la segunda columna.

En la tabla 1.1 se muestran los resultados para cuando la variación del gasto es lineal; en la tabla 6.2 para la variación elíptica y en la tabla 6.3 para cuando se cumple continuidad en el transporte de sedimentos.

6.4.3 Comentarios y conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos y mostrados en las figuras señaladas se presentan algunos comentarios y conclusiones.

1. Existen diferencias al utilizar 10 o 50 secciones, por lo que conviene efectuar los cálculos con un mínimo de 50 secciones. Cuando se utilizaron 80 y 100 secciones los resultados no difieren en forma significativa de los obtenidos con 50 secciones.
2. Si se utiliza una variación elíptica del gasto sólido se obtiene que la longitud del tramo erosionado crece más rápidamente; es decir, se requiere de menor tiempo para que el tramo erosionado alcance una longitud prefijada.
3. El proceso erosivo es muy lento, por lo que en una situación real conviene obtener, año con año y durante el mismo mes, datos del perfil del fondo y secciones transversales, así como muestras del material del fondo en esas mismas secciones, para tomarlas en cuenta en predicciones futuras. Ello permitirá calibrar algunos coeficientes y exponentes de las fórmulas utilizadas, o bien utilizar otras fórmulas ya sea de fricción o de transporte de sedimentos. Con todo ello se mejorarán las predicciones y se podrán formular nuevas hipótesis a utilizar en problemas o situaciones semejantes.
4. De las muestras del material del fondo que se obtengan anualmente se podrá conocer el acorazamiento que pudiera estar ocurriendo, así como detectar estratos con diferente material que queden al descubierto por efecto de la erosión. Los nuevos diámetros deberán ser tomados en cuenta en cálculos posteriores.
5. Por no disponer de datos reales con los que comparar los resultados obtenidos, se aceptan a priori, como valores más confiables y por tanto como referencia, a los dados por la variación del gasto sólido que cumple con la ec 6.35. En la fig 6.12 se observa que las mayores diferencias en valor absoluto se tienen entre la variación elíptica y la de referencia e iguales a 20 cm. Esto ocurre en la sección situada a 2 km aguas abajo de la presa. Esa diferencia decrece para las secciones situadas más aguas abajo, en las que ambos resultados son muy similares, con diferencias no mayores a los 18 cm. Lo contrario ocurre cuando la variación lineal del gasto sólido y la de referencia, ya que ambos resultados son casi iguales en los primeros 4 km y aumentan hacia aguas abajo; se obtuvo una diferencia máxima de 11 cm en la sección situada a 6 km de la presa. Esa diferencia es menor que la amplitud de las posibles dunas del fondo.
6. A la vista de las diferencias señaladas, que en hidráulica fluvial son aceptables dado el carácter empírico de la mayoría de las ecuaciones de transporte de sedimentos, se puede aceptar, en una primera aproximación, que el gasto sólido varía linealmente en el tramo en proceso de erosión. Esto simplifica los cálculos y se evitan los tanteos que hay que efectuar para cumplir la ecuación de continuidad, ec 6.35.
7. La forma del perfil del fondo erosionado es similar con todas las variaciones del gasto sólido que fueron probadas.

8. En las tablas 6.1 a 6.3 se observa que el tirante y área de las secciones disminuye desde la presa hacia aguas abajo; mientras que la pendiente, la velocidad media del flujo y el transporte de sedimentos incrementan su valor hacia aguas abajo.
9. El ancho de las secciones es máximo para las tres condiciones de distribución de gasto sólido, en la primera sección aguas abajo de la presa. Con la variación lineal disminuye lentamente de valor hacia aguas abajo, hasta alcanzar el ancho del río en la zona ya no afectada por la erosión.
10. En cambio, con la variación elíptica y la que cumple continuidad de transporte de sólidos se reduce el ancho bruscamente en la segunda sección y de ahí hacia aguas abajo aumenta su valor hasta alcanzar el ancho del tramo inalterado o segundo tramo. Este resultado es consistente con lo obtenido por Stebbings en sus experimentos.
11. Lo señalado en 9 y 10 hace ver la importancia del parámetro K y su relación con el transporte de sedimentos. La relación entre ambos parámetros deberá ser estudiada con detalle en el futuro.

6.5 Bibliografía

Aksoy, S., "River-bed degradation downstream of dams". Memorias del XIV Congreso del IAHR, Vol 5, París 1971.

Ashida, K. y Michiev, M., "An investigation of river bed degradation downstream of a dam". Memorias del XIV Congreso Internacional del IAHR, Vol III, C-30, París 1971.

Berezowsky Verduzco, M. y Lara Flores, M.A. "Simulación del proceso de erosión y sedimentación en cauces considerando la variación de las formas del fondo". Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Sao Paolo, Brasil, Sep 1986.

Bhamidpaty, S. y Shen, H.W., "Laboratory study of degradation and aggradation". Journal of Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE WW4, Nov 1971.

Cruickshank, C. y Maza Alvarez, J.A., "Flow resistance in sand bed channels". Memorias del I Int. Symposium on river mechanics. Vol I, Sediment transportation, Bangkok, Ene 1973.

Eldarwish, A.A. y Aly, H.W., "Nile river degradation below high Aswan dam after the historical closure of the river in May 14, 1964". Memorias del X Congreso del ICOCD, punto C.2. Montreal 1970.

Friedkin, J.F., "A laboratory study of the meandering of alluvial rivers". U.S. Waterways experiment station. Vicksburg Miss., May 1945 (1a. reimpresión, Abr 1950).

Galay, V.J., "Engineering aspects of river bed degradation". Canadian Society of Civil Engineering. Conferencia anual, Winnipeg 1980.

Garde, R.J. y Hassan, S.M., "An experimental investigation of degradation in alluvial channels". Memorias del XII Congreso del IAHR, Vol 3, Fort Collins 1967.

Gessler, J., "Aggradation and degradation". Capítulo 8 del libro River Mechanics. Editado por Shen, H.W. Fort Collins 1971.

Gracia, J., "Modelo matemático para simular el funcionamiento hidráulico de cauces con arrastre de sedimentos". Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, México, May 1981.

Hammad, H.Y., "River bed degradation after closure of dams". Journal of the Hydraulic Division. ASCE. Paper 8814 HY4, Abr 1972.

Knighton, D., "Fluvial forms and processes". Edward Arnold Ltd., Londres, 1984.

Komura, S., "Prediction of river bed degradation below dams". Memorias del XIV Congreso Internacional del IAHR, Vol III, París 1971.

Lara Flores, M.A., "Modelo matemático para la simulación de algunos aspectos morfológicos en ríos". Tesis de Maestría, DEPFI, UNAM, México 1985.

Maza Alvarez, J.A. y Espinoza Cáceres, J., "Changes undergone by a natural channel downstream". Memorias del XX Congreso Internacional del IAHR, Vol II tema AC12, Moscú, URSS, Sep 1983.

Maza Alvarez, J.A. y García Flores, M., "Distribuciones de los tamaños de los sedimentos del fondo en cauces naturales". Memorias del XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Sao Paulo, Brasil, Sep 1986.

Ranga Raju, K.G., "Aggradation and degradation". Memorias del International Workshop in alluvial river problems, pp 5-33 a 5-41, Roorkee, India, Mar 1980.

Stebbing, J., "The shapes of self-formed model alluvial channels". Proc. Institution of Civil Engineers, Vol 25, pp 485-510.

Veksler, A.B. y Ponenberg, V.M., "Effects of reservoirs on downstream river bed conditions". Memorias del XIV Congreso del ICOLD, Río de Janeiro, Mayo 1982.

Yalin, M.S., "River bed degradation downstreams of a dam". Memorias del XX Congreso Internacional del IAHR, Vol II, tema AC1, Moscú, URSS, Sep 1983.

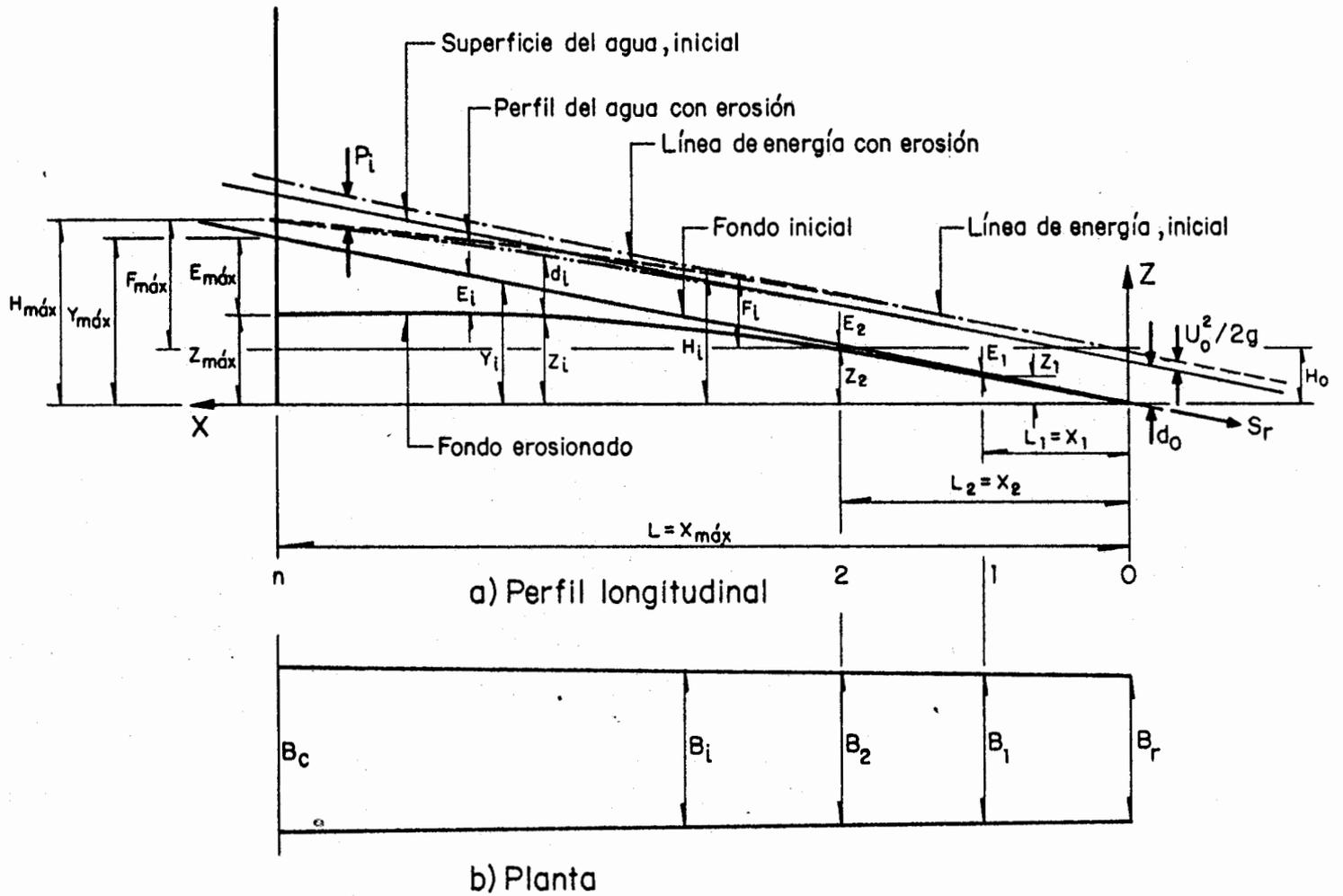


Fig 6.1. Erosión aguas abajo de presas. Variables con el eje como referencia

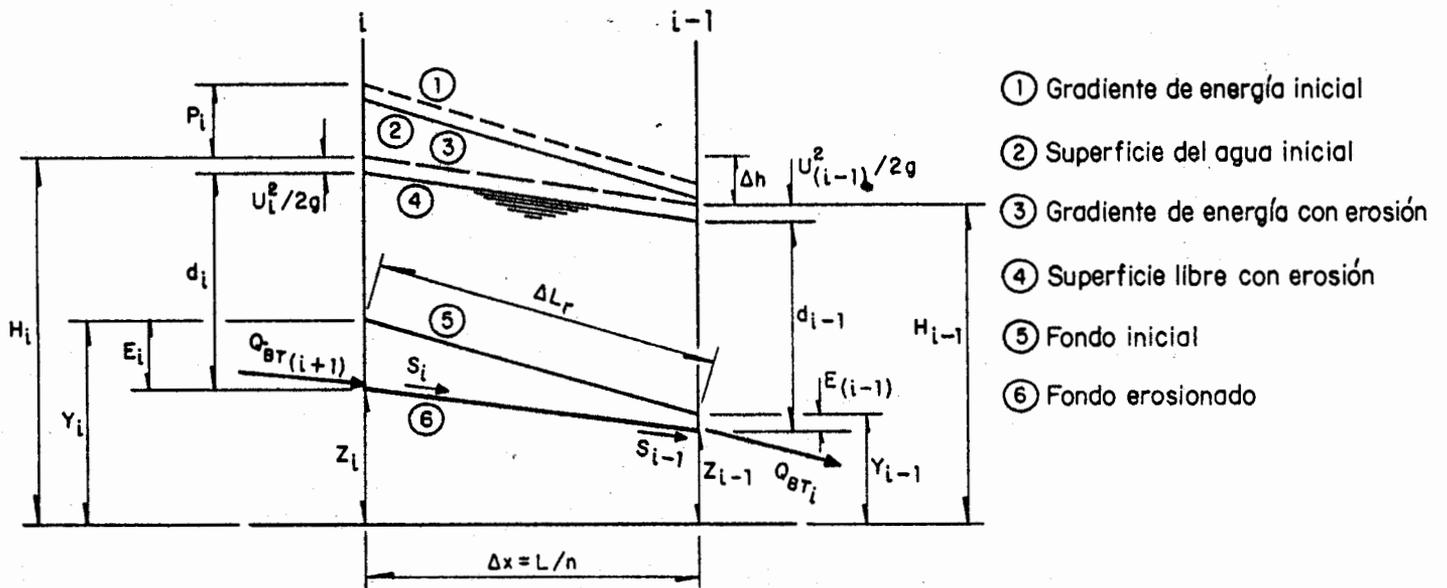


Fig 6.2. Elemento de cálculo

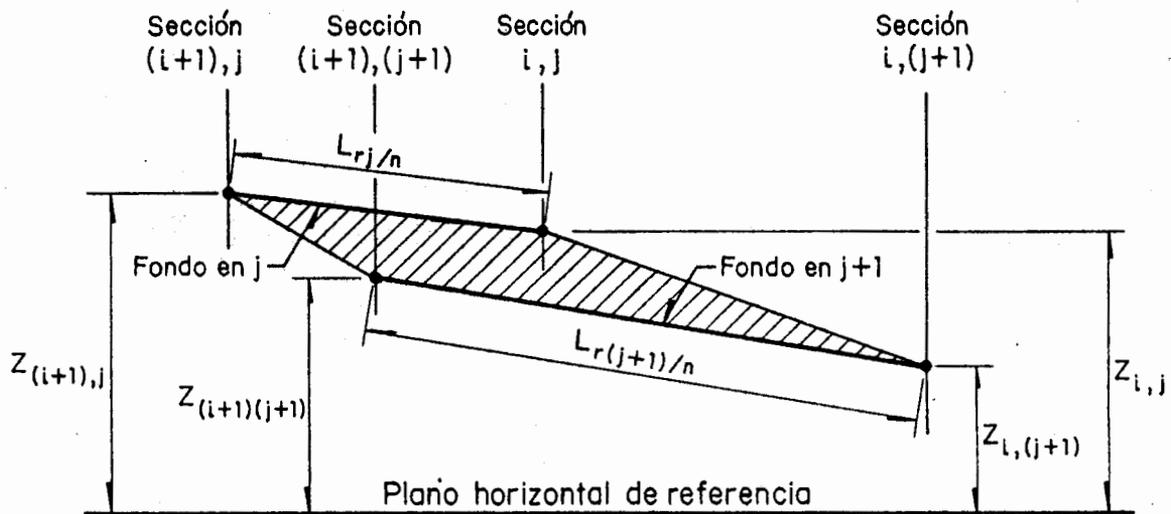


Fig 6.3. Volumen erosionado entre las secciones $i, i+1$ entre los instantes $j, j+1$

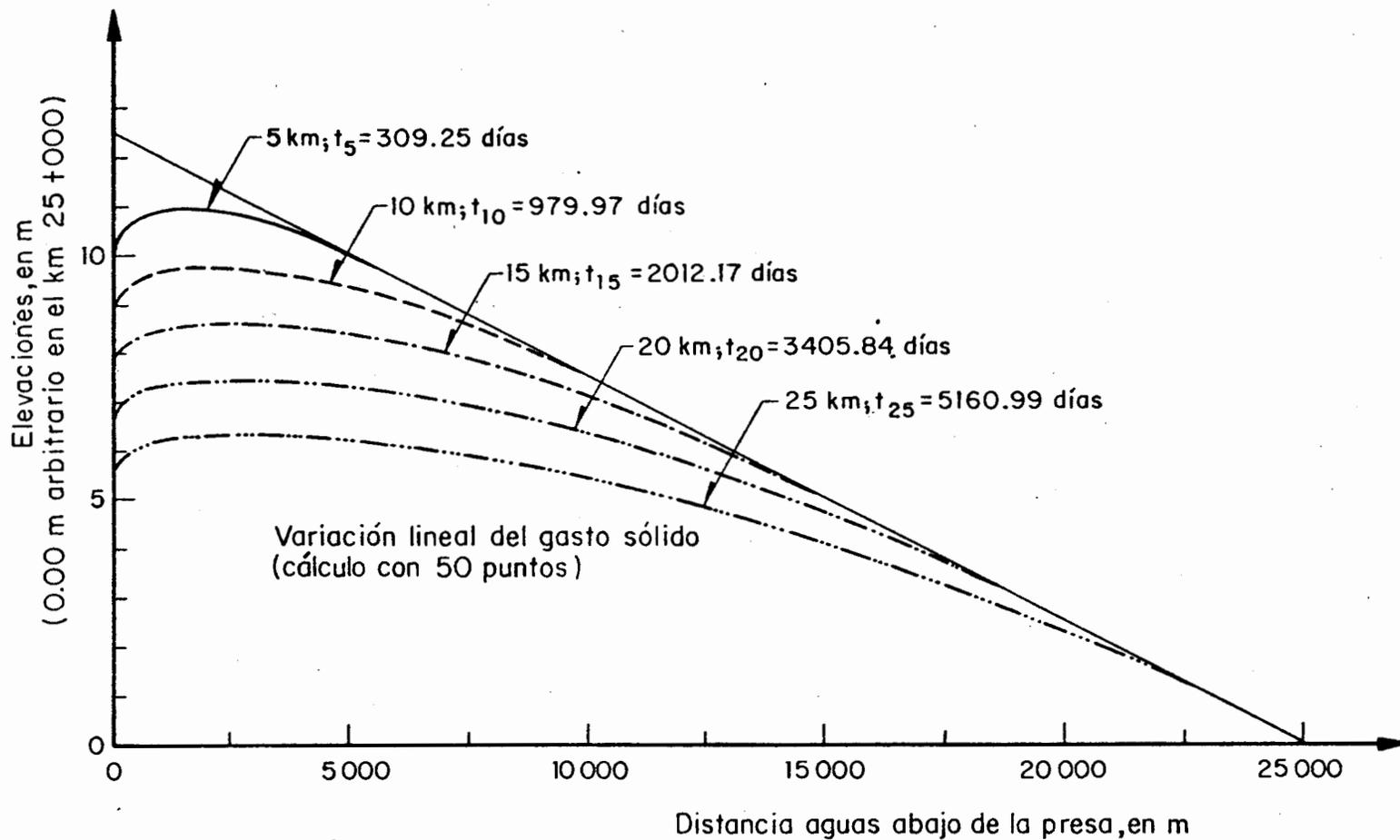


Fig 6.4 Erosión aguas abajo de presas. Perfiles del fondo obtenidos cuando la erosión alcanza las distancias indicadas y tiempos en que ello ocurre

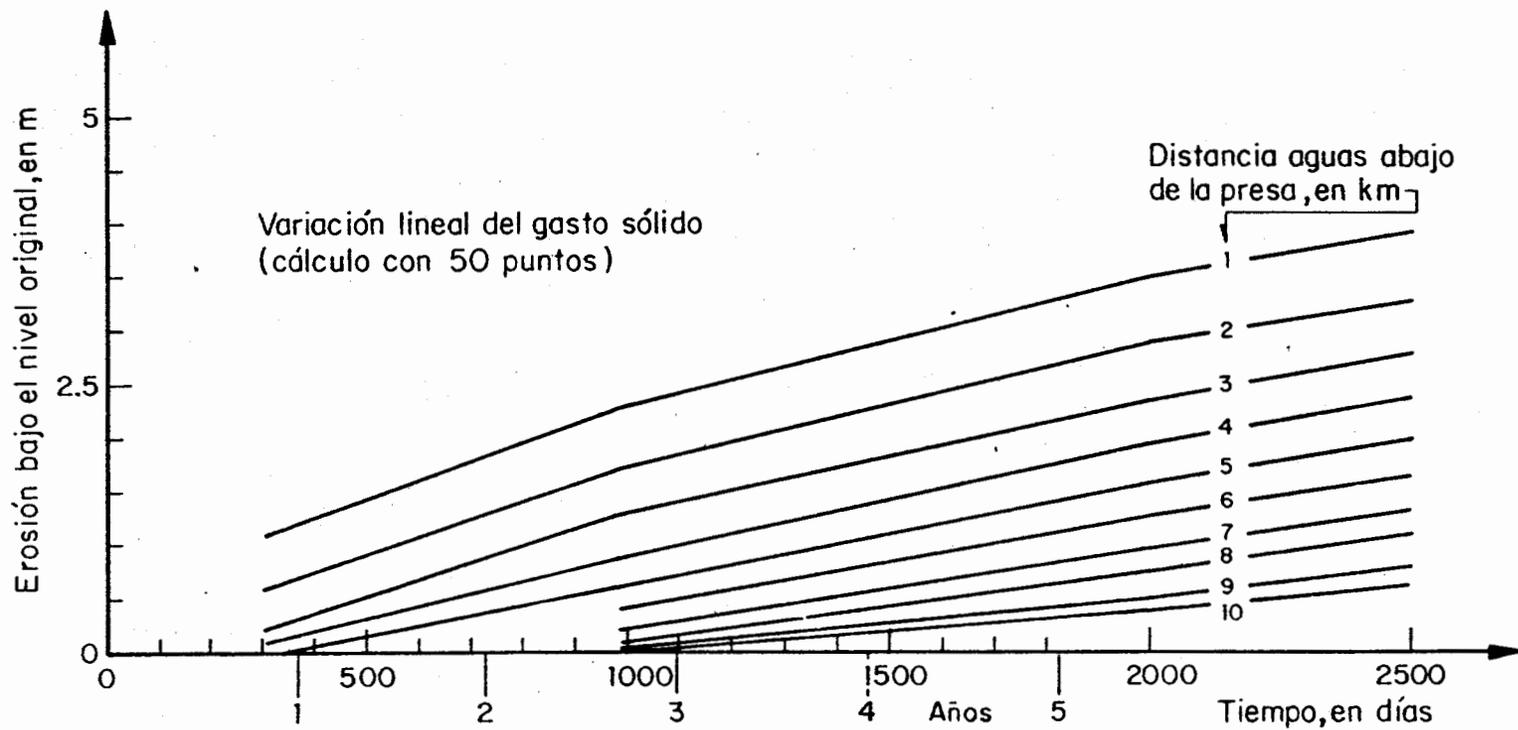


Fig 6.5 Erosión aguas abajo de presas contra el tiempo, en diferentes secciones

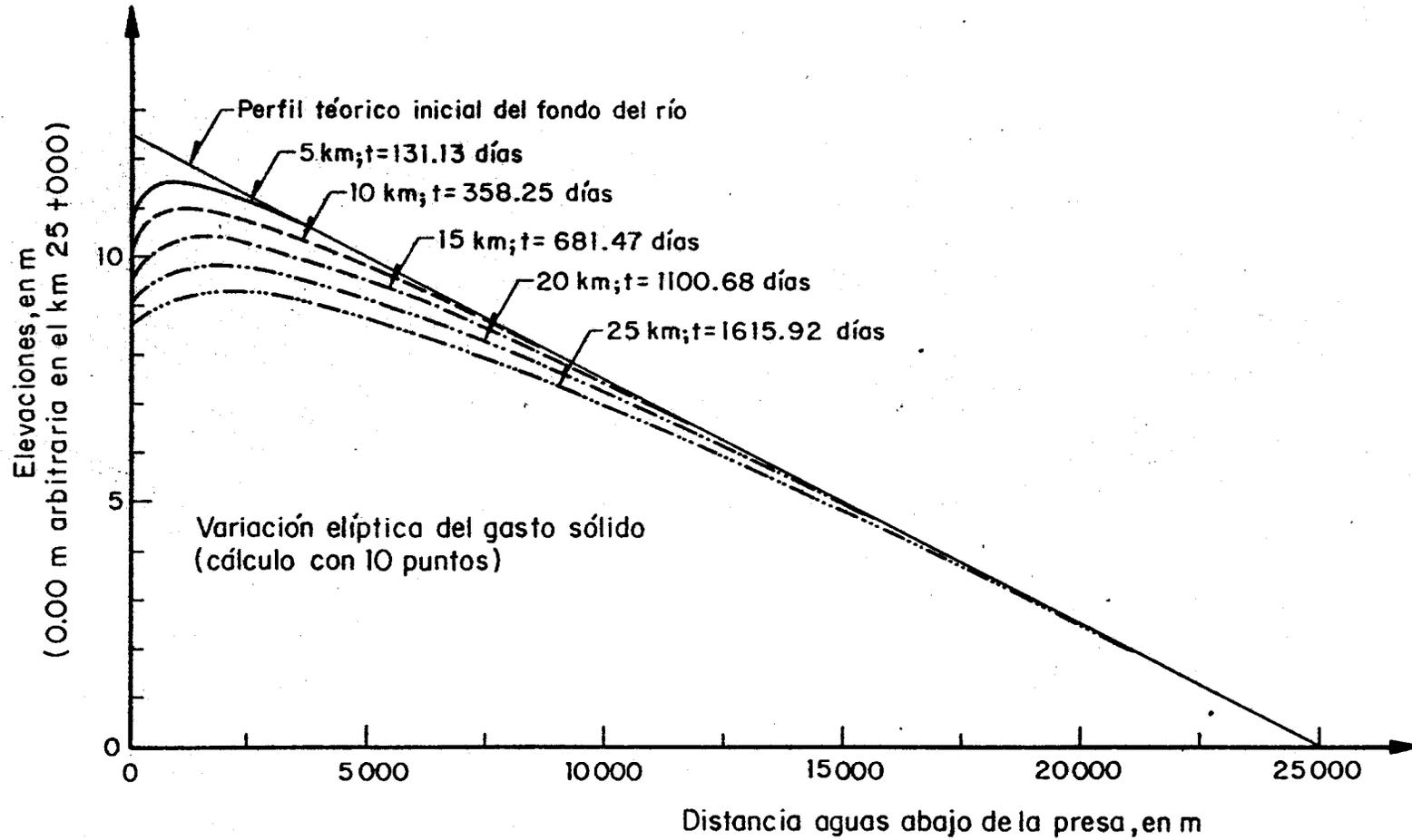


Fig 6.6 Erosión aguas abajo de presas. Perfiles del fondo obtenidos cuando la erosión alcanza las distancias indicadas y tiempos en que ello ocurre

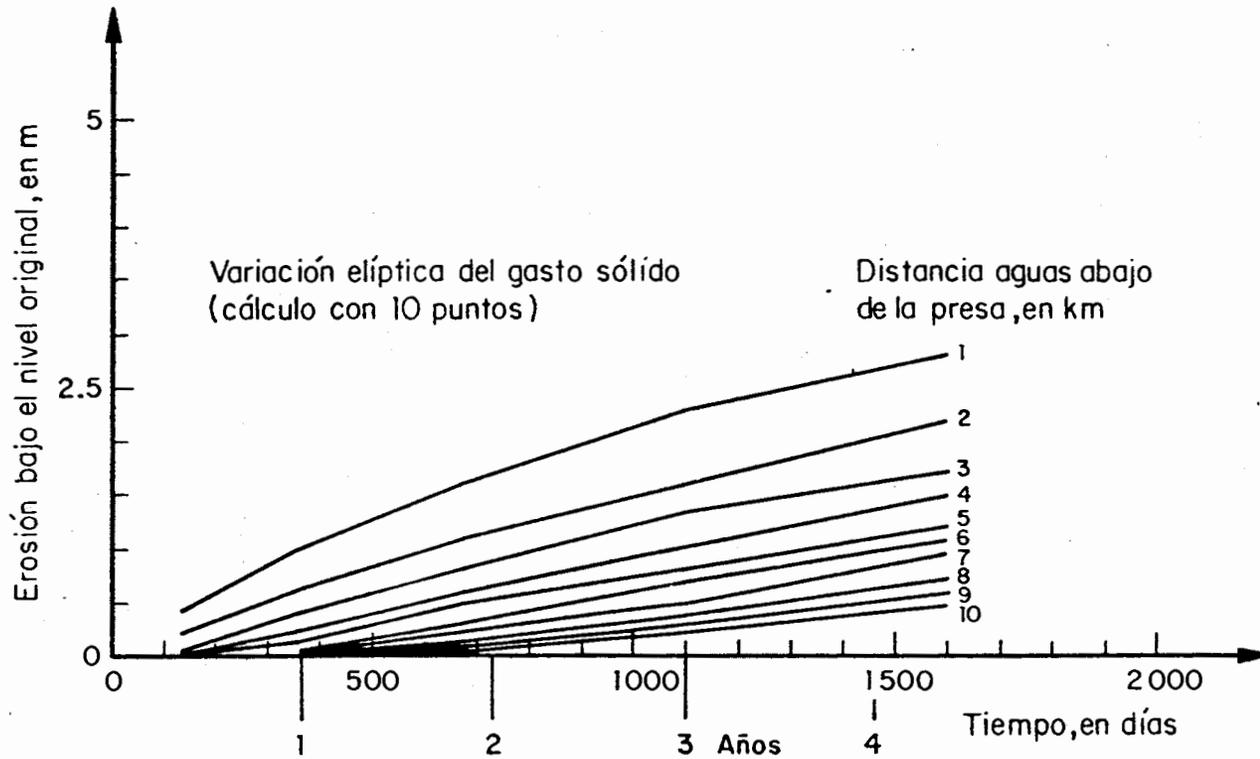


Fig 6.7 Erosión aguas abajo de presas contra el tiempo, en diferentes secciones

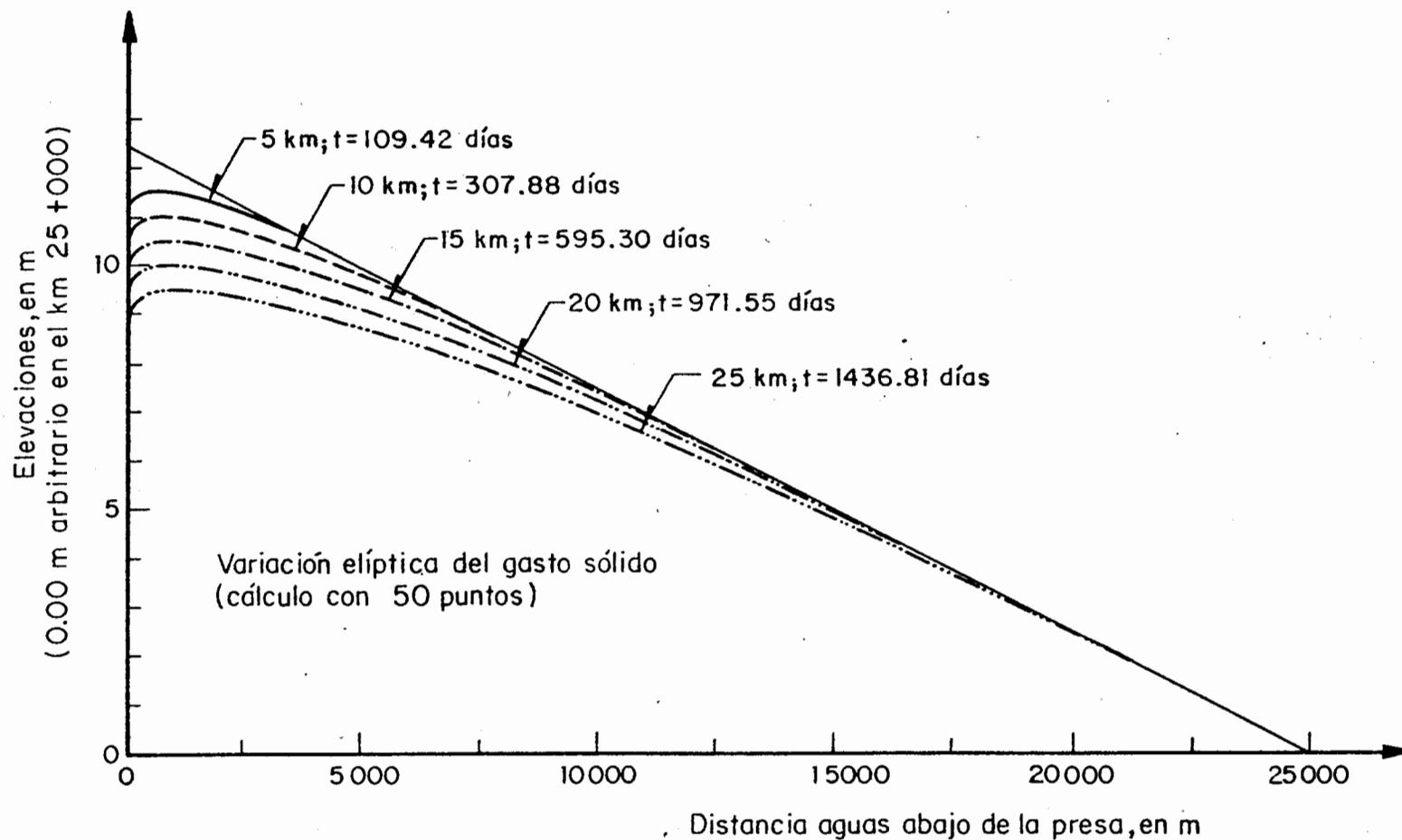


Fig 6.8 Erosión aguas abajo de Presas. Perfiles del fondo obtenidos cuando la erosión alcanza las distancias indicadas y tiempos en que ello ocurre

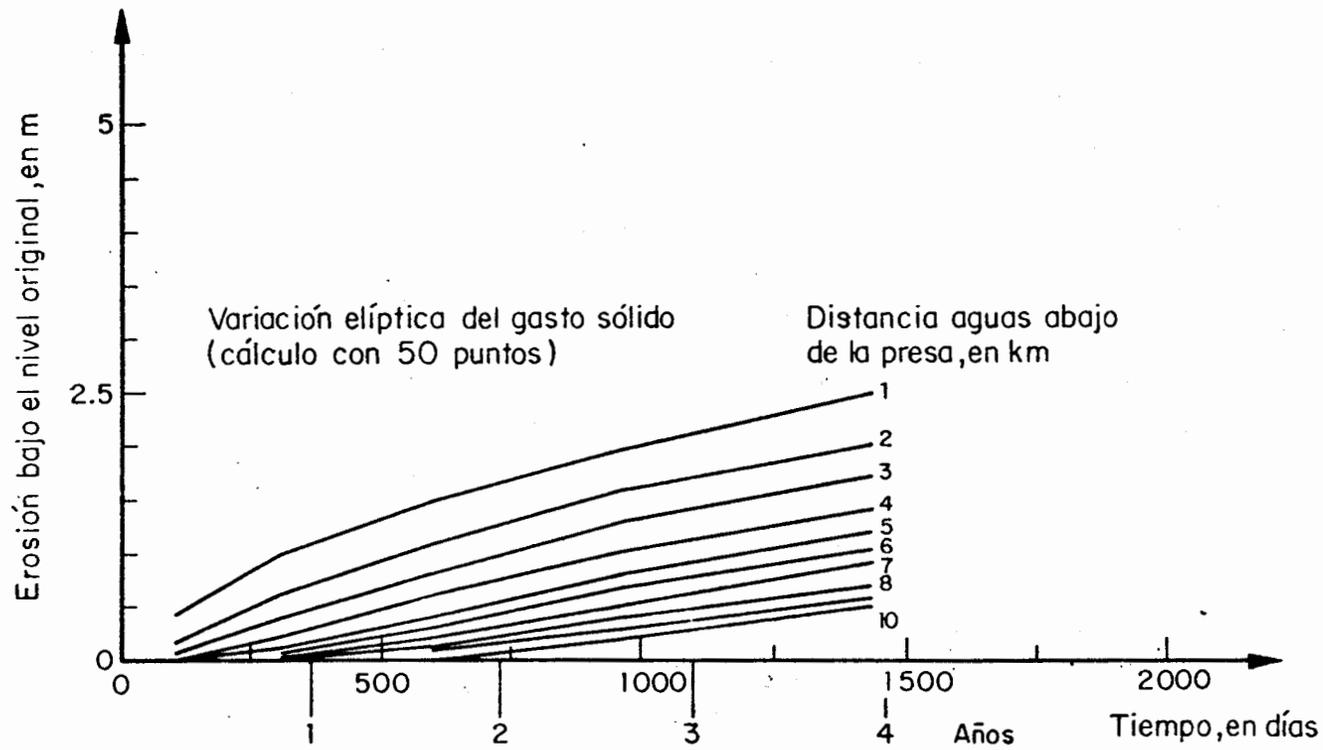


Fig 6.9 Erosión aguas abajo de presas contra el tiempo, en diferentes secciones

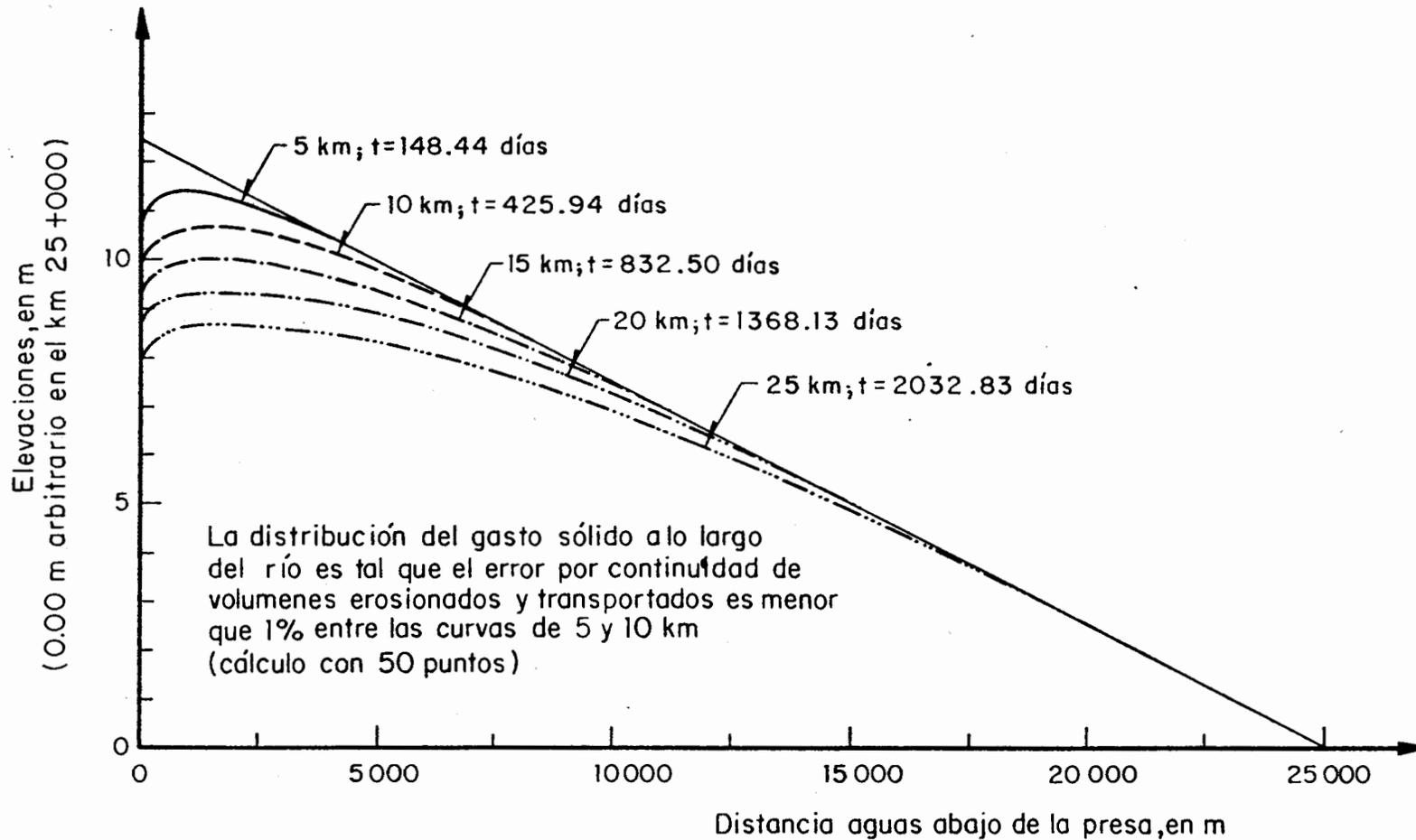


Fig 6.10 Erosión aguas abajo de presas. Perfiles del fondo obtenidos cuando la erosión alcanza las distancias indicadas y tiempos en que ello ocurre

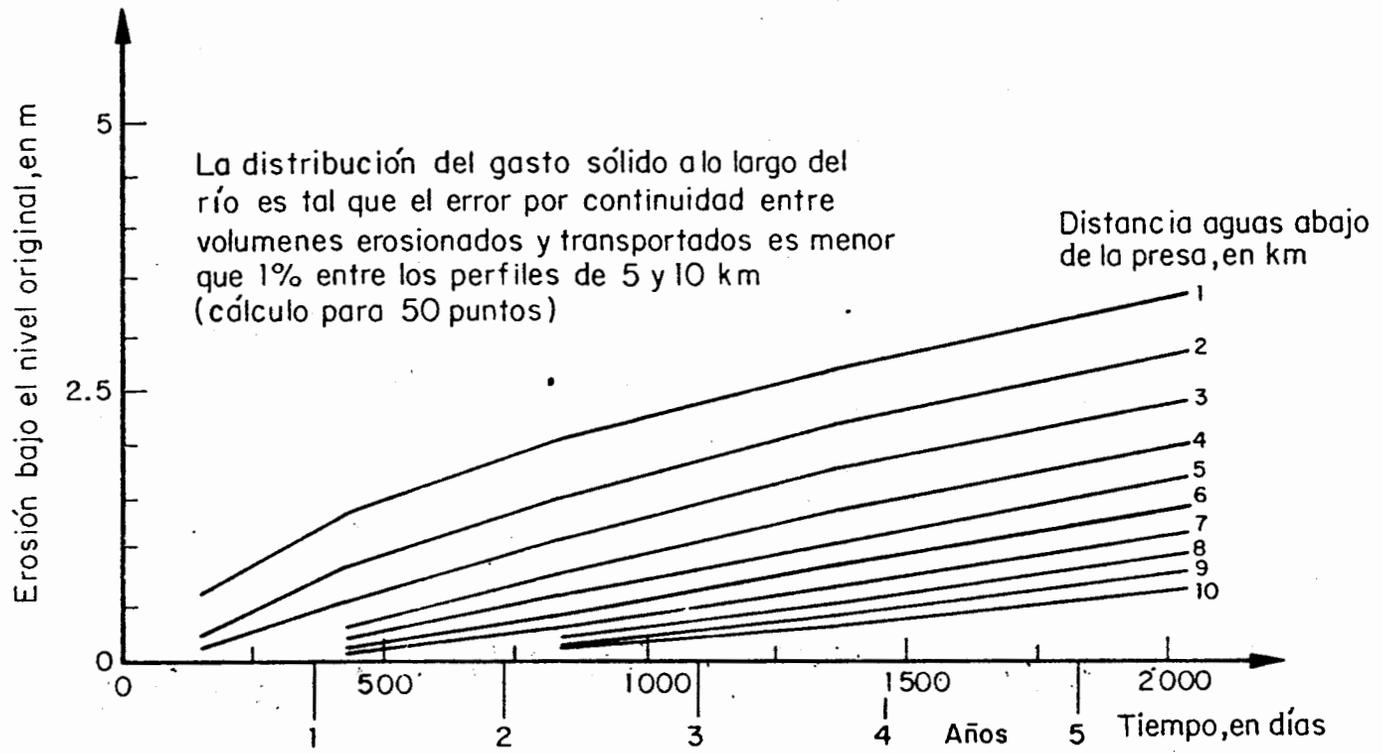


Fig 6.II Erosión aguas abajo de presas contra el tiempo, en diferentes secciones

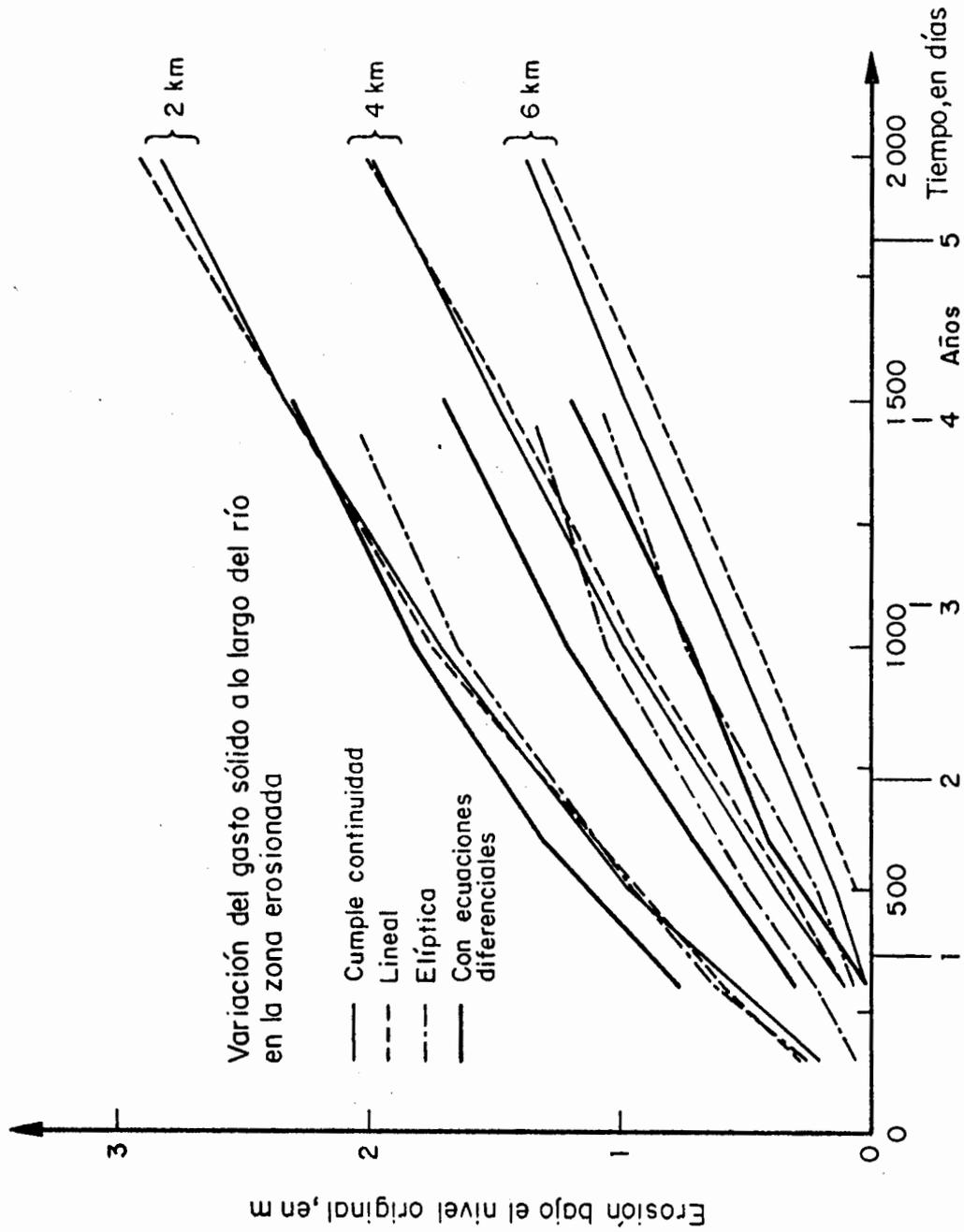


Fig 6.12 Comparación de resultados obtenidos con diferentes distribuciones del transporte de sedimentos a lo largo del tramo sujeto a erosión

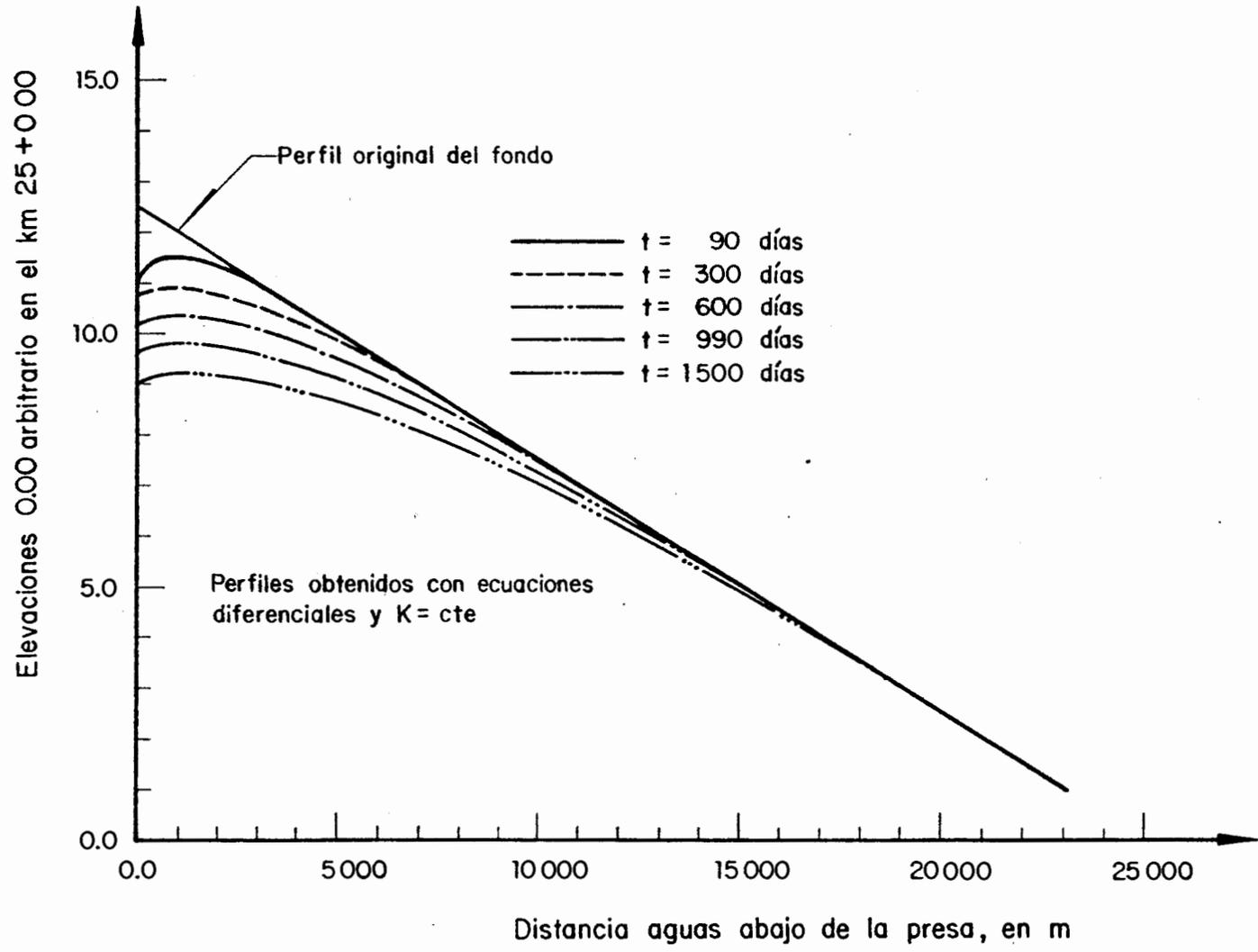


Fig 6.13 Erosión aguas abajo de presas. Perfiles del fondo obtenidos para diferentes tiempos

T A B L A 6.1

SOCAVACION AGUAS ABAJO DE PRESAS
VARIACION DEL GASTO SOLIDO EN FORMA LINEAL

No. de sección	Distancia X/L	Ancho m	Tirante m	Pendiente E-3	Q sólido E-3 m ³ /s	Area H. m ²	Velocidad m/s	K
0	0.00	120.45	1.590	0.50000	8.9558	191.48	1.567	18.000
3	0.06	121.66	1.602	0.47576	8.4185	194.91	1.539	17.986
6	0.12	122.80	1.616	0.45136	7.8811	198.51	1.511	17.942
9	0.18	123.89	1.633	0.42679	7.3438	202.33	1.483	17.869
12	0.24	124.92	1.652	0.40202	6.8064	206.40	1.454	17.766
15	0.30	125.91	1.674	0.37703	6.2691	210.77	1.423	17.632
18	0.36	126.85	1.699	0.35181	5.7317	215.50	1.392	17.464
21	0.42	127.75	1.727	0.32630	5.1944	220.68	1.359	17.260
24	0.48	128.62	1.760	0.30048	4.6570	226.41	1.325	17.018
27	0.54	129.46	1.799	0.27429	4.1197	232.84	1.288	16.733
30	0.60	130.29	1.843	0.24767	3.5823	240.16	1.249	16.400
33	0.66	131.12	1.897	0.22052	3.0450	248.68	1.206	16.010
36	0.72	131.98	1.961	0.19272	2.5076	258.86	1.159	15.552
39	0.78	132.91	2.043	0.16407	1.9703	271.49	1.105	15.006
42	0.84	133.99	2.150	0.13423	1.4329	288.04	1.042	14.341
45	0.90	135.42	2.303	0.10250	0.8956	311.83	0.962	13.487
48	0.96	137.74	2.568	0.06684	0.3582	353.67	0.848	12.240
50	1.00	139.41	3.170	0.03060	0.0000	441.89	0.679	10.000

T A B L A 6.2

SOCAVACION AGUAS ABAJO DE PRESAS
VARIACION DEL GASTO SOLIDO EN FORMA ELIPTICA

No. de sección	Distancia X/L	Ancho m	Tirante m	Pendiente E-3	Q sólido E-3 m ³ /s	Area H. m ²	Velocidad m/s	K
0	0.00	120.45	1.590	0.50000	8.9558	191.48	1.567	18.000
3	0.06	120.42	1.591	0.49926	8.9397	191.54	1.566	17.986
6	0.12	120.31	1.593	0.49704	8.8911	191.71	1.565	17.942
9	0.18	120.13	1.598	0.49331	8.8096	192.00	1.562	17.869
12	0.24	119.88	1.605	0.48803	8.6941	192.42	1.559	17.766
15	0.30	119.55	1.614	0.48111	8.5433	192.98	1.555	17.632
18	0.36	119.14	1.626	0.47247	8.3554	193.70	1.549	17.464
21	0.42	118.64	1.640	0.46196	8.1276	194.61	1.542	17.260
24	0.48	118.06	1.658	0.44942	7.8567	195.67	1.533	17.018
27	0.54	117.39	1.679	0.43460	7.5378	197.14	1.522	16.733
30	0.60	116.61	1.706	0.41716	7.1647	198.89	1.508	16.400
33	0.66	115.73	1.738	0.39663	6.7282	201.12	1.492	16.010
36	0.72	114.73	1.778	0.37230	6.2151	204.02	1.470	15.552
39	0.78	113.61	1.830	0.34303	5.6044	207.94	1.443	15.006
42	0.84	112.38	1.901	0.30682	4.8593	213.61	1.404	14.341
45	0.90	111.15	2.005	0.25943	3.9038	222.89	1.346	13.487
48	0.96	110.59	2.202	0.18764	2.5076	243.51	1.232	12.240
50	1.00	139.41	3.170	0.03040	0.0000	441.89	0.679	10.000

T A B L A 6.3

SOCAVACION AGUAS ABAJO DE PRESAS

VARIACION DEL GASTO SOLIDO EN FORMA ARBITRARIA (error < 0.01)

No. de sección	Distancia X/L	Ancho m	Tirante m	Pendiente E-3	Q sólido E-3 m ³ /s	Area H. m ²	Velocidad m/s	K
0	0.00	120.45	1.590	0.50000	8.9558	191.48	1.567	18.000
3	0.06	120.41	1.591	0.49939	8.9424	191.52	1.566	17.986
6	0.12	120.30	1.593	0.49735	8.8980	191.67	1.565	17.942
9	0.18	120.12	1.598	0.49355	8.8149	191.97	1.563	17.869
12	0.24	119.90	1.605	0.48760	8.6847	192.48	1.559	17.766
15	0.30	119.65	1.615	0.47907	8.4983	193.28	1.552	17.632
18	0.36	119.40	1.628	0.46752	8.2462	194.44	1.543	17.464
21	0.42	119.17	1.645	0.45250	7.9195	196.07	1.530	17.260
24	0.48	118.97	1.667	0.43358	7.5098	198.29	1.513	17.018
27	0.54	118.83	1.694	0.41038	7.0102	201.27	1.491	16.733
30	0.60	118.78	1.728	0.38255	6.4159	205.22	1.462	16.400
33	0.66	118.86	1.771	0.34982	5.7242	210.46	1.425	16.010
36	0.72	119.13	1.826	0.31197	4.9357	217.49	1.379	15.552
39	0.78	119.65	1.898	0.26885	4.0543	227.09	1.321	15.006
42	0.84	120.59	1.997	0.22026	3.0877	240.81	1.246	14.341
45	0.90	122.24	2.144	0.16586	2.0495	262.03	1.145	13.487
48	0.96	125.22	2.402	0.10460	0.9679	300.80	0.997	12.240
50	1.00	139.41	3.170	0.03060	0.0000	441.89	0.679	10.000

7. COMENTARIO FINAL

A lo largo de este trabajo se ha tratado la erosión aguas abajo de las presas y los cambios morfológicos que tienen lugar en el tramo del río no afectado por afluentes de importancia.

La forma de la erosión aguas abajo de las presas aparece como una idea para todos muy clara y evidente, tal vez por eso, porque es solo una idea. Sin embargo, el hecho de que casi nadie haya observado en la realidad y en forma exhaustiva y completa todos los fenómenos que involucra este proceso erosivo y que, por tanto, no podamos confrontar nuestros resultados ideales con esa realidad, no parece preocuparnos.

Por lo anterior, la mayoría de los trabajos realizados sobre el tema no dejan de ser más o menos brillantes ejercicios mentales o imaginativos. Como ejemplo de ello queda este trabajo que aquí concluye. Esperamos, en un futuro próximo, poder comparar lo aquí expuesto con las observaciones que se están llevando a cabo aguas abajo de las presas Caracol y Peñitas construidas por la Comisión Federal de Electricidad.

F-DEPFI/D-83/1988/Ej.8



711497

F-DEPFI
D-83
1988
Ej.8

~~G2~~- 11497