

DEPFI

CONTROL DE MOVIMIENTO DE ROBOTS MANIPULADORES

Rafael Kelly Martínez



FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

D-79



DEPFI



DEPFI

F-DEPFI

D-79

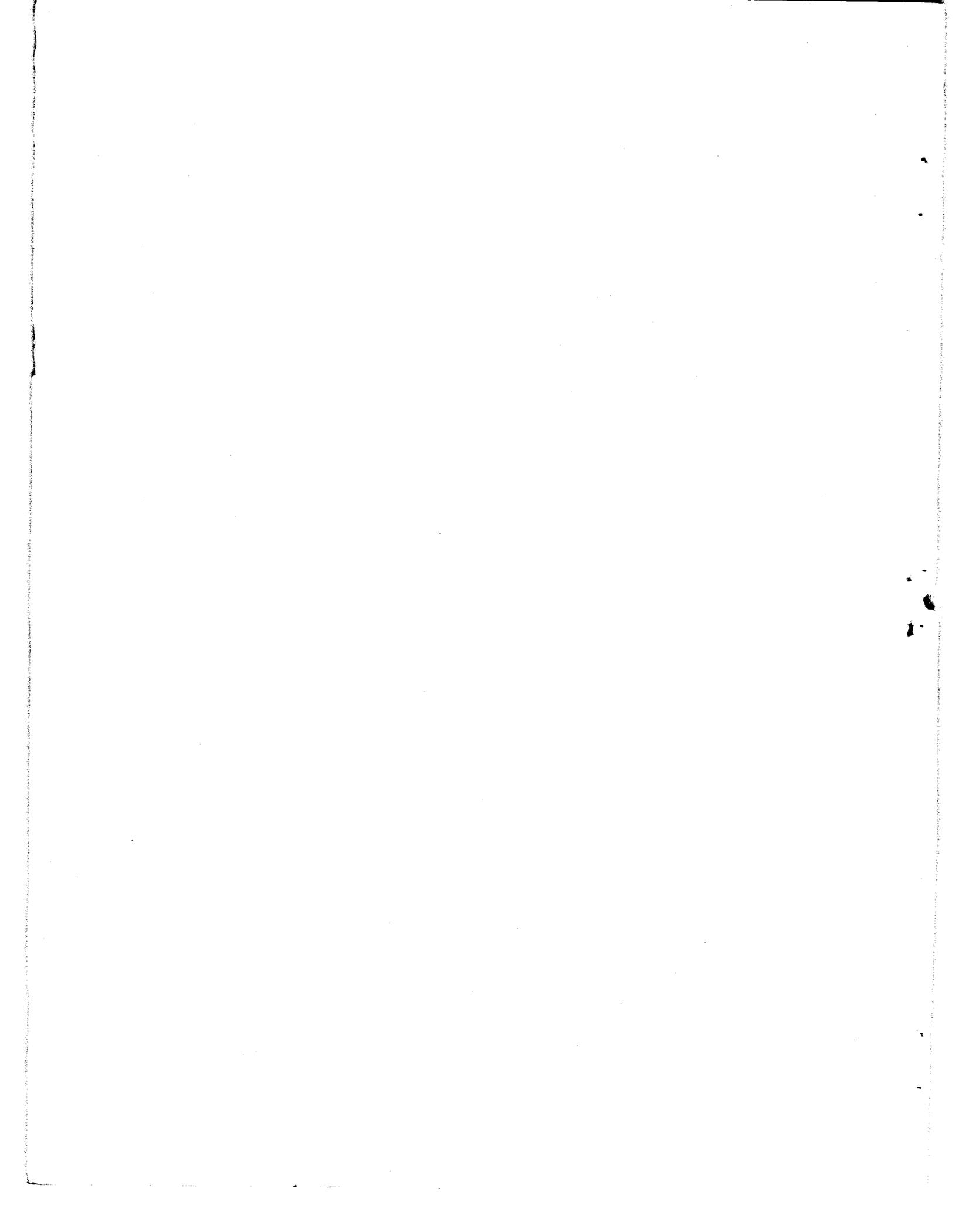
1989

95

CONTROL DE MOVIMIENTO DE ROBOTS MANIPULADORES

RAFAEL KELLY MARTINEZ

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
APDO. POSTAL 70-256
04510 MEXICO, D.F.
MEXICO



PROLOGO

La modernización del aparato productivo de los países industrializados se ha venido realizando desde principios de los años 70. Esto ha traído como resultado un avance espectacular tanto en teoría como en aplicaciones de la automática. Entre las disciplinas de la automática que más ha sido estimulada por estos acontecimientos se encuentra la robótica.

En un contexto académico, la robótica se imparte en las universidades frecuentemente en cursos de maestría y eventualmente a nivel licenciatura. Las áreas ingenieriles hacia las cuales son orientados estos cursos han sido tradicionalmente las ingenierías eléctrica, mecánica, industrial y en computación.

Los libros de textos comunmente empleados en los cursos de robótica orientado a estudiantes de ingeniería eléctrica hacen un particular incapie en los aspectos de mecánica dejando el tema de control de robots en un segundo plano. Aun los textos más recientes sólo consagran a lo más un tercio de su contenido al tema de control de robots. Asimismo, las herramientas de análisis indispensables para el estudio de los sistemas de control solamente ocupan escuetos ápendices.

La principal motivación para la redacción del presente texto fué la de incorporar los más recientes desarrollos en el área de control de robots manipuladores en un documento autocontenido que sirviera como base para un curso sobre control de robots a nivel de maestría con especialidad en ingeniería eléctrica.

El texto esta dividido en 4 capítulos. Una breve introducción a la robótica es presentada en el capítulo 1. El capítulo 2 cubre los preliminares matemáticos donde se exponen los conceptos básicos de los espacios de funciones y la teoría de estabilidad de Lyapunov. El capítulo 3 resume el tópico del modelado dinámico de los robots manipuladores. Particular atención se le dá a la formulación de Lagrange. Este tema es tratado con detalle en los libros tradicionales sobre robótica. Finalmente el problema de control de movimiento de robots es abordado en detalle en el capítulo 4. En dicho capítulo se revisa desde el popular controlador Proporcional hasta controladores de vanguardia del tipo adaptable.

La realización de la presente obra no hubiera sido posible sin la interacción del autor con colegas y estudiantes. Particularmente, el autor expresa su agradecimiento a Ricardo Carelli cuya colaboración permitió mejorar substancialmente tanto el contenido como la redacción de la obra. Asimismo, el autor manifiesta su aprecio a Romeo Ortega, Juan M. Ibarra, Carlos Canudas

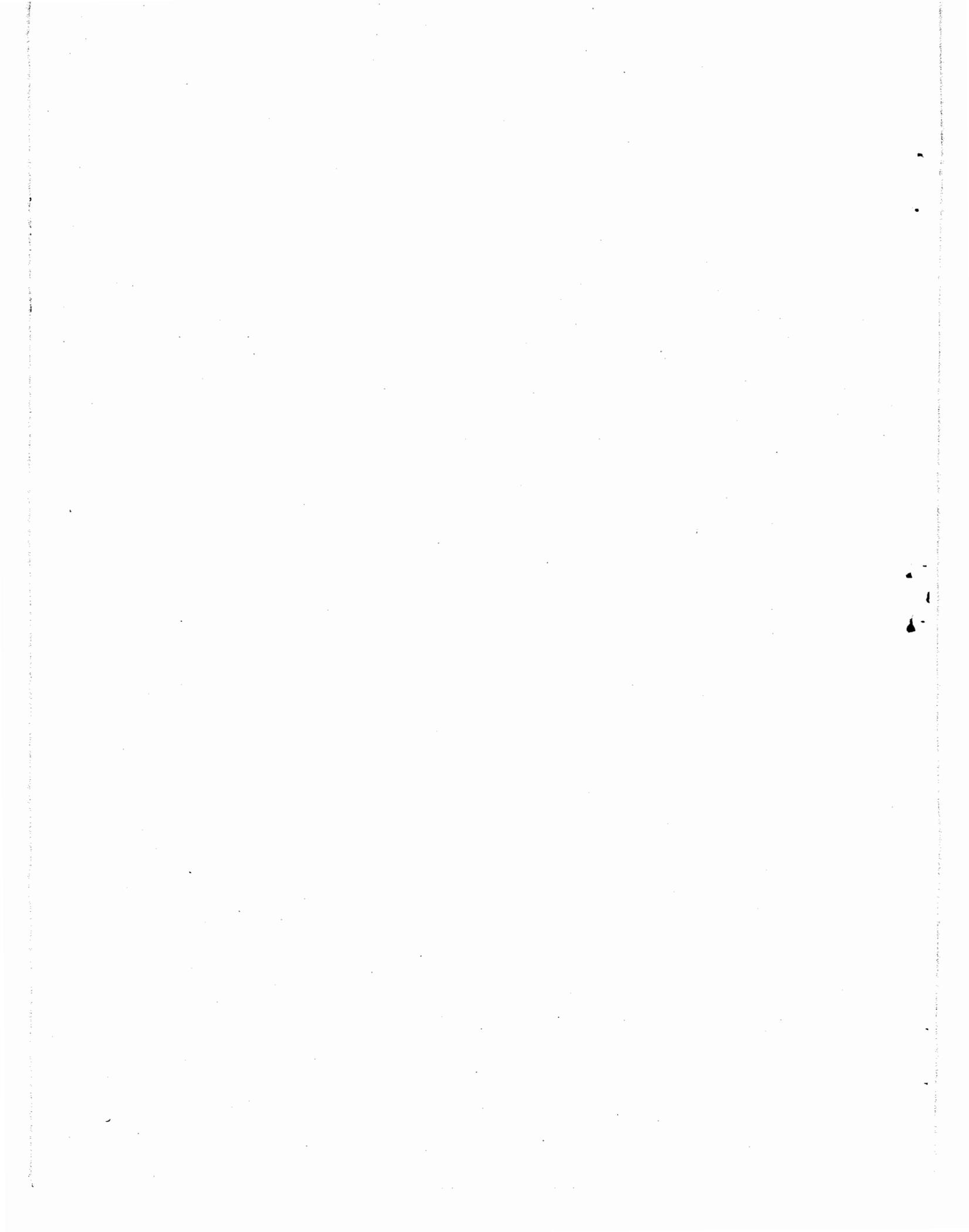
y Mauricio Améstegui con quienes el autor inició sus actividades en el área de control de robots.

El autor desea destacar la labor de Arturo Izaguirre en la realización de los experimentos presentados en la obra así como de Patricia Crespo por la realización de las figuras. Finalmente el autor agradece la labor de mecanografía realizada por Ruth Ramírez.

Rafael Kelly Martínez
México, D.F., Febrero de 1989.

CONTENIDO

1.	INTRODUCCION	7
	Referencias	9
2.	PRELIMINARES MATEMATICOS	11
	2.1 Espacios Lineales	11
	2.2 Espacios Lp	12
	2.3 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	18
	Referencias	32
3.	MODELADO DINAMICO DE ROBOTS MANIPULADORES	33
	3.1 Introducción	33
	3.2 Ecuaciones de movimiento de Lagrange	33
	3.3 Ecuación dinámica generica de un robot de n grados de libertad	42
	3.4 Propiedades	45
	Referencias	48
4.	CONTROL DE MOVIMIENTO DE ROBOTS MANIPULADORES	51
	4.1 Controladores convencionales	54
	4.1.1 Control Proporcional	54
	4.1.2 Control Proporcional más compensación de gravedad	64
	4.1.3 Control PD+	70
	4.1.4 Control PD más compensación	76
	4.1.5 Control Par-Calculado	78
	4.1.6 Control Par-Calculado +	83
	4.2 Controladores adaptables	85
	4.2.1 Control PD más compensación adaptable	87
	4.2.2 Control adaptable Par-calculado +	91
	Referencias	102
APENDICE A.	MODELADO DE MOTORES DE CORRIENTE DIRECTA	105
	Referencias	109



1. INTRODUCCION

Debido a las exigencias cada día mayores de alta calidad y rapidez en los sistemas de producción, la automatización adquirió desde la década de los 70 un valor incuestionable en la modernización industrial.

La robótica, como parte de la automática, ha ocupado un lugar destacado en el proceso de modernización de algunas industrias. Tal es el caso de la industria automotriz, la siderúrgica y la maquiladora, donde los robots manipuladores son comunmente empleados en tareas repetitivas y de precisión, así como en actividades peligrosas para operadores humanos.

La robótica es un campo nuevo de la tecnología moderna. El buen entendimiento y el desarrollo de aplicaciones de la robótica esta condicionado al conocimiento de diversas disciplinas como ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería industrial, ciencias computacionales y matemáticas.

El presente texto se centra en la intersección existente entre la robótica y la ingeniería eléctrica específicamente con el área de control automático. De dicha interacción sobresale el tema de control de robots manipuladores.

Un robot manipulador o simplemente manipulador es un brazo mecánico articulado formado de eslabones conectados a través de uniones. Tradicionalmente en cada unión se colocan actuadores electromecánicos o hidráulicos que producen el movimiento de los eslabones. El número de uniones en un manipulador determina su número de grados de libertad (g.d.l.). Típicamente, un manipulador dispone de 6 g.d.l. de los cuales 3 determinan el posicionamiento del último eslabón en el espacio y 3 especifican su orientación.

Las principales ventajas argumentadas para el uso de robots manipuladores en la industria son la reducción de costos de producción, el incremento de la precisión, calidad y productividad y mayor flexibilidad comparada con máquinas especializadas. Adicionalmente existen aplicaciones monopolizadas por los robots manipuladores tales como el trabajo en zonas radioactivas, tóxicas o explosivas y aplicaciones submarinas y espaciales. Las proyecciones realizadas a mediano plano colocan a la aplicación de ensamblado como el principal consumidor de robots manipuladores.

A pesar de la existencia de robots comerciales, el diseño de controladores para robots sigue siendo un área de intensos estudios por parte de los constructores y de los centros de investigación.

La metodología de diseño de los sistemas de control requiere en general un modelo matemático del sistema a ser controlado. El modelo matemático del sistema a controlar es obtenido tradicionalmente por una de las dos técnicas siguientes:

- Analítica. Este procedimiento se basa en las ecuaciones de la física que rigen el comportamiento del sistema. Esta metodología puede proporcionar un modelo matemático preciso a condición de dominar las leyes de la física que son involucrados en el sistema.

- Experimental. Este procedimiento requiere una serie de datos experimentales del sistema. Frecuentemente se trata de examinar el comportamiento a entradas específicas. El modelo obtenido a partir de este procedimiento es en general más impreciso que el obtenido a partir del método analítico. Su principal ventaja es sin embargo la facilidad y corto tiempo requerido para obtener el modelo.

Una vez obtenido el modelo matemático del sistema a ser controlado se procede a diseñar el sistema de control. En algunas ocasiones el diseño es precedido por una simplificación del modelo del sistema a ser controlado con miras a obtener un sistema de control relativamente sencillo. Esto puede, sin embargo, tener la desventaja de obtener un sistema de control que no funcione adecuadamente, fenómeno conocido como falta de robustez.

Cuando un robot realiza una tarea programada, se efectúan una serie de operaciones que pueden ser resumidas de la forma siguiente:

- Interpretación de la tarea programada en lenguaje robot.
- Generación de trayectorias deseadas.
- Ejecución de los algoritmos de control.

Desde un punto de vista jerárquico, los algoritmos de control ocupan la parte más baja de la escala y en general son transparentes al utilizador. Son sin embargo estos algoritmos de control los que permitirán obtener un buen desempeño al ejecutar la tarea programada.

El caso específico del diseño de los sistemas de control para robots manipuladores requiere también una primera etapa de modelado. El modelado de robots manipuladores es realizado tradicionalmente en forma analítica, esto es a partir de las leyes de la física. Debido a la naturaleza mecánica de los robots manipuladores, las leyes de la física involucradas son simplemente las leyes de la mecánica.

Los modelos dinámicos de los robots manipuladores son en general no-lineales y variantes con el tiempo. Este hecho tiene como consecuencia que las técnicas de diseño tradicionales para el control de sistemas lineales tengan una aplicación limitada en la síntesis de controladores con alto desempeño para robots manipuladores.

Debido a la naturaleza no-lineal y variante con el tiempo de los modelos de robots manipuladores, así como a los requerimientos de alta precisión y rapidez, deben ser diseñados sistemas de control más elaborados. Esta clase de sistemas de control pueden incluir por ejemplo controles no lineales y controles adaptables.

La mayoría de los robots industriales son diseñados para realizar tareas en las cuales el manipulador se desplaza libremente dentro de su espacio de trabajo sin interactuar con el medio ambiente. Ejemplos de este tipo de aplicación son las tareas de pintado, traslado de un objeto de un punto a otro, etc. El problema de controlar adecuadamente el robot para que realice este tipo de tarea se le denomina control de movimiento.

La manera más sencilla de especificar el movimiento de un robot es la denominada punto-a-punto. Esta metodología consiste en determinar una serie

de puntos en el espacio de trabajo del manipulador. Estos puntos son calculados en forma de satisfacer una cierta aplicación. El problema de control consiste en este caso en hacer pasar el extremo del manipulador por dichos puntos.

Una forma más general para especificar el movimiento de un manipulador es la llamada trayectoria continua o simplemente trayectoria. En este caso se determina una curva o trayectoria en el espacio de trabajo y el problema de control consiste en hacer pasar el extremo del manipulador por dicha trayectoria.

La primera propiedad que debe poseer un sistema de control es estabilidad. Dos técnicas de análisis han sido usadas tradicionalmente en el estudio de estabilidad de controladores para robots. La primera se basa en el enfoque de Lyapunov. La segunda es el denominado enfoque entrada-salida el cual basa su fundamento matemático en el análisis funcional. Ambas técnicas son adecuadas para el análisis de sistemas de control no lineal. En este texto se empleará la primera de ellas para desarrollar el análisis de los controladores que serán presentados.

Los modelos dinámicos de los robots manipuladores poseen parámetros o coeficientes que dependen de la masa de los objetos que dicho manipulador sujeta con su extremo terminal. En la mayoría de las aplicaciones, el manipulador suele sujetar objetos de diferentes masas que en muchas ocasiones son desconocidas. Esto tiene como resultado que los parámetros dinámicos del manipulador sea desconocidos. El problema de controlar sistemas con parámetros desconocidos es la principal vocación de los controladores adaptables. Esta es básicamente la explicación del interés del empleo de técnicas adaptables en el control de robots manipuladores.

Un gran número de trabajos han sido reportados en los últimos años sobre el empleo de técnicas adaptables de controladores para manipuladores. La principal razón por la cual estas técnicas de control han aparecido tan recientemente ha sido la gran dificultad encontrada en el análisis teórico. En efecto, los sistemas de control obtenido al emplear técnicas adaptables son relativamente complejos y no lineales.

REFERENCIAS

Diversos datos y conceptos sobre robots manipuladores pueden encontrarse en los capítulos introductorios de los siguientes textos:

Paul R., 1982, "*Robot manipulators: Mathematics programming and control*", MIT Press, Cambridge, MA.

Asada H., Slotine J.J., 1986. "*Robot analysis and control*", Wiley, New York.

Craig J., 1986. "*Introduction to robotics: Mechanics and Control*", Addison-Wesley, Reading, MA.

Spong M., Vidyasagar M., 1989, "*Robot dynamics and control*", Wiley, New

York.

2. PRELIMINARES MATEMATICOS

En este capítulo se presentan las herramientas matemáticas básicas que serán empleadas en los capítulos posteriores con el fin de analizar diversos esquemas de control de robots manipuladores. Las nociones básicas del análisis matemático son el punto de partida en el desarrollo de una serie de herramientas que serán de utilidad posteriormente.

2.1 ESPACIOS LINEALES

En esta sección se presenta el concepto de espacio lineal. La noción de campo, la cual es definida enseguida, es empleada en la definición de espacio lineal.

Definición 2.1. Campo.

Un campo consiste en un conjunto, denominado K , de elementos llamados escalares y dos operaciones llamadas suma "+" y multiplicación ".", las cuales satisfacen las siguientes condiciones $\forall \alpha, \beta, \gamma \in K$:

1. $\alpha + \beta \in K$
 $\alpha \cdot \beta \in K$
2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
3. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$
5. $\exists 0, 1 \mid \alpha + 0 = \alpha; 1 \cdot \alpha = \alpha$
6. $\exists \beta \mid \alpha + \beta = 0$
7. $\forall \alpha \neq 0 \exists \gamma \mid \alpha \cdot \gamma = 1.$

∇∇∇

Ejemplo 2.1. El conjunto de números reales \mathbb{R} y de los números complejos \mathbb{C} con la definición común de la adición y multiplicación definen un campo. El conjunto de los números reales no-negativos definido como:

$$\mathbb{R}_+ = \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \in [0, \infty) \}$$

no define un campo.

□□□

La definición de espacio vectorial lineal o espacio lineal es presentada enseguida.

Definición 2.2. Espacio lineal.

Un espacio lineal sobre un campo K denotado por la pareja (Ω, K) , consiste de un conjunto Ω de elementos denominados vectores, un campo K y dos operaciones:

- $+$: $\Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ llamada suma vectorial
- \cdot : $K \times \Omega \rightarrow \Omega$ llamada multiplicación escalar

tales que $\forall x, y, z \in \Omega$ y $\alpha, \beta \in K$, las siguientes condiciones se satisfacen

1. $x + y \in \Omega$
2. $x + y = y + x$
3. $(x+y) + z = x + (y+z)$
4. $\exists 0 \in \Omega \mid 0 + x = x$
5. $\exists y \mid x + y = 0$
6. $\alpha x \in \Omega$
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
8. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$
9. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
10. $\exists 1 \in \mathbb{K} \mid 1x = x.$

∇∇∇

Ejemplo 2.2. El conjunto de los números reales \mathbb{R} sobre los números reales \mathbb{R} define el espacio lineal (\mathbb{R}, \mathbb{R}) .

□□□

Se denota \mathbb{R}^n al conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales:

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n son las coordenadas de x y el superíndice T denota transpuesta. La norma Euclidiana se denotará por $\|\cdot\|$, esto es:

$$\|x(\cdot)\| = \left[\sum_{i=1}^n \|x_i(\cdot)\|^2 \right]^{1/2}.$$

La pareja $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es un espacio lineal llamado espacio lineal real de dimensión n o espacio vectorial real n-dimensional.

A menos que se indique lo contrario, los espacios lineales considerados en este texto serán definidos sobre el campo de los números reales, i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y sólo se hará mención de los elementos o vectores que definen al espacio vectorial.

2.2 ESPACIOS LP.

Una clase particular de espacios lineales son los denominados espacios L_p . Los elementos o vectores de los espacios L_p son funciones con propiedades particulares.

Los espacios lineales denominados L_2^n y L_∞^n son particularmente empleados en el análisis de sistemas dinámicos interconectados en la metodología denominada: enfoque entrada-salida.

Esta última metodología involucra la noción de operadores los cuales son asociados a diversas partes del sistema dinámico interconectado.

Definición 2.3. Espacio L_2 .

El espacio lineal L_2 consiste del conjunto de todas las funciones $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tales que:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

donde $|f(t)|$ denota el valor absoluto de $f(t)$.

∇∇∇

Definición 2.4. Espacio L_∞ .

El espacio lineal L_∞ consiste del conjunto de todas las funciones $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tales que sean acotadas exepo posiblemente en un conjunto de medida nula..

∇∇∇

Ejemplo 2.3. Considérese las funciones $f(t) = e^{-\alpha t}$ donde $\alpha > 0$ y $g(t) = \text{sen}(t)$. De las definiciones 2.3 y 2.4 claramente se observa que $f \in L_2 \cap L_\infty$ y $g \in L_\infty$.

□□□

El concepto de espacio lineal es de utilidad debido a que es posible usarlo para definir conceptos ingenieriles comunes como el de operador lineal, independencia lineal, etc. También es posible emplearlos en el estudio de la existencia y unicidad de las soluciones de ecuaciones lineales. Un inconveniente, sin embargo, de los espacios lineales es que no emplean la noción de proximidad o distancia. Esto hace imposible tratar tópicos como convergencia y continuidad. Esta es la principal motivación para estudiar los espacios lineales normados, los cuales consisten de un espacio lineal y una medida de la "longitud" o norma de un vector.

Definición 2.5. $\|\cdot\|_2$.

La norma L_2 o $\|\cdot\|_2$ es una función $\|\cdot\|_2 : L_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como:

$$\|f(\cdot)\|_2 = \left[\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

∇∇∇

Definición 2.6. $\|\cdot\|_\infty$;

La norma L_∞ o $\|\cdot\|_\infty$ es una función $\|\cdot\|_\infty : L_\infty \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida como

$$\|f(\cdot)\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)|$$

donde sup denota "esencialmente supremum".

vvv

Ejemplo 2.4. Considérese las funciones $f(t) = e^{-\alpha t}$ donde $\alpha > 0$ y $g(t) = \text{sen}(t)$. Claramente se tiene que $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{1/2}$, $\|f\|_{\infty} = 1$ y $\|g\|_{\infty} = 1$.

□□□

Las normas $\|\cdot\| : x \rightarrow \mathbb{R}_+$ definidas para un espacio lineal (Ω, \mathbb{R}) cumplen con las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$
2. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \Omega, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \Omega$.

Puede demostrarse que los espacios L_2 y L_{∞} provistos de las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_{\infty}$ respectivamente, definen espacios lineales normados completos, esto es, espacios de Banach.

Adicionalmente, para el espacio L_2 se define un producto escalar o producto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ definido como:

$$\langle f(\cdot), g(\cdot) \rangle_2 = \int_0^{\infty} f(t)g(t)dt$$

donde $f, g \in L_2$. El espacio lineal (L_2, \mathbb{R}) provisto de la norma $\|\cdot\|_2$ y el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ define un espacio lineal completo con producto interno, también denominado espacio de Hilbert.

Los productos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definidos para un espacio lineal (Ω, \mathbb{R}) satisfacen $\forall x, y, z \in \Omega$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ las siguientes propiedades:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
3. $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$
5. $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Para el caso n-dimensional de los espacios L_p se tiene la siguiente definición.

Definición 2.7. Espacios L_p^n .

El símbolo L_p^n para $p=2, \infty$ denotará el conjunto de n-adas $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ donde $f_i \in L_p$ para $i=1, 2, \dots, n$. La norma sobre L_p^n se define como:

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\sum_{i=1}^n \|f_i(\cdot)\|_p^2 \right]^{1/2}.$$

VVV

En otras palabras, la norma de una función vectorial es la parte positiva de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las normas de sus componentes.

En lo que resta de la presente sección serán presentados resultados a los cuales se hará referencia posteriormente.

Lema 2.1. Sea $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si

$$f \in L_2^n \text{ y } \dot{f} \in L_\infty^n$$

entonces $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

VVV

Definición 2.8. Función continua.

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua si y solo si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$$

La función $f(\cdot)$ es uniformemente continua si existe una constante positiva K tal que:

$$i) \quad \|f(x)\| \leq K < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$ii) \quad \left\| \frac{df(x)}{dx} \right\| \leq K < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

VVV

Una función continua puede no tener derivada en ciertos puntos. Tal es el caso por ejemplo de $f(x)=|x|$. Sin embargo, si una función tiene derivada en todo punto, entonces la función es continua.

Una condición necesaria para que una función sea continua es que esté definida en todo punto.

La función $f(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua si $f \in L_\infty^n$ y $\dot{f} \in L_\infty^n$.

Lema 2.2. Considérese las funciones continuas y diferenciables $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Defínase la función $V: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por:

$$V(x, f) = x(t)^T K_1 x(t) + f(t) \geq 0$$

donde $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz simétrica definida positiva. Si existe una función $z: \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ donde U es un subespacio de \mathbb{R}^m de dimensión p ($\leq m$) tal que la derivada de V con respecto al tiempo satisface:

$$\dot{V}(x, f) = -z(t)^T K_2 z(t) \leq 0$$

donde $K_2 = K_2^T > 0$, entonces:

a) $x \in L_\infty^m$

b) $f \in L_\infty$

c) $z \in L_2^p$.

vvv

Demostracion. Como $V(x, f) \geq 0$ y $\dot{V}(x, f) \leq 0$ entonces se tiene que:

$$V(x(0), f(0)) \geq V(x(t), f(t)) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Debido a que todos los términos de V son positivos, y como V está acotada entre 0 y $V(x(0), f(0))$, estos términos son en consecuencia acotados. Esto demuestra a) y b).

Para demostrar c) considérese la expresión de $\dot{V}(x, f)$:

$$\dot{V}(x, f) = -z(t)^T K_2 z(t).$$

Integrando entre 0 y T se obtiene:

$$V(x(T), f(T)) - V(x(0), f(0)) = - \int_0^T z^T(\tau) K_2 z(\tau) d\tau$$

la cual empleando $V(x(0), f(0)) \geq V(x(T), f(T))$ conduce a la desigualdad:

$$V(x(0), f(0)) \geq \int_0^T z^T(\tau) K_2 z(\tau) d\tau.$$

Finalmente usando la desigualdad $\lambda_{\min}(K) x^T x \leq x^T K x$ para todo vector x y matriz K definida positiva, se tiene:

$$\frac{V(x(0), f(0))}{\lambda_{\min}(K_2)} \geq \int_0^T z(\tau)^T z(\tau) d\tau = \|z\|_{2,T}^2$$

la cual implica que $z \in L_2^p$.

vvv

Considérese ahora un sistema dinámico lineal descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u \in \mathbb{R}^n$ es la entrada, $y \in \mathbb{R}^n$ es la salida y $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices con coeficientes reales constantes. La matriz de transferencia $H(s)$ del sistema se define como $H(s) = B(sI - A)^{-1}C$ donde $s \in \mathbb{C}$. La matriz de respuesta impulso esta dada por

$$L^{-1}(H(s))$$

donde $L^{-1}(\cdot)$ denota la transformada inversa de Laplace. Es bien sabido que $y(t)$ puede expresarse por medio de la integral de convolución, esto es:

$$y(t) = L^{-1}(H) * u = \int_0^t L^{-1}(H)(t-\tau)u(\tau) d\tau.$$

El siguiente resultado permite obtener conclusiones sobre la pertenencia de y e \dot{y} a L_2^n o L_∞^n dependiendo si u pertenece a L_2^n o L_∞^n .

Lema 2.3. Considérese la matriz cuadrada de dimensión n , $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$ cuyos elementos son funciones racionales estrictamente propias de la variable compleja s . Supóngase que los denominadores de sus elementos tienen todas sus raíces en el semiplano complejo izquierdo.

1. Si $u \in L_2^n$ entonces $y = L^{-1}(H) * u \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{y} \in L_2^n$ y $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
2. Si $u \in L_\infty^n$ entonces $y = L^{-1}(H) * u \in L_\infty^n$, $\dot{y} \in L_\infty^n$.

vvv

Ejemplo 2.5. Considérese la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} + Ax = u$$

donde $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante definida positiva. Si $u \in L_2^n$, del lema 2.2 se concluye que $x \in L_2^n \cap L_\infty^n$, $\dot{x} \in L_2^n$ y $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

□□□

Corolario 2.1. Bajo la hipótesis del lema 2.3 sobre $H(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}(s)$, si $u \in L_2^n \cap L_\infty^n$, entonces:

$$y = L^{-1}(H) * u \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$\dot{y} \in L_2^n \cap L_\infty^n$$

$$y(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

∇∇∇

Demostracion. La prueba es trivial del lema 2.3.

□□□

2.3 ESTABILIDAD EN EL SENTIDO DE LYAPUNOV

En esta sección serán presentados los conceptos y teoremas básicos para el estudio de la teoría de Lyapunov.

La teoría de estabilidad de Lyapunov tiene como principal objetivo el estudiar el comportamiento de sistemas no-lineales descritos por ecuaciones de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0), \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^n$, es referido como el estado del sistema dinámico representado por (2.1). La función $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en t y $x(t)$ con las siguientes propiedades:

i) La ecuación (2.1) tiene una solución única en el intervalo $[0, \infty)$ correspondiente a cada condición inicial de $x(0) = x_0$.

ii) Si $x(t)$ es la solución de (2.1) correspondiente a la condición inicial $x(0) = x_0$, entonces $x(t)$ depende de una manera continua del estado inicial $x(0)$.

Si la función f no depende explícitamente del tiempo, ésto es, $f(t, x) = f(x)$ la ecuación (2.1) es denominada autónoma.

Los principales conceptos en la teoría de Lyapunov son: estabilidad, estabilidad asintótica y estabilidad exponencial. Cada uno de ellos será

tratado posteriormente. Algunas definiciones preliminares son enunciadas enseguida.

Definición 2.9. Equilibrio.

Un vector x_e es un equilibrio o estado de equilibrio del sistema (2.1) si

$$f(t, x_e) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

∇∇∇

Tradicionalmente, se supone que el origen del espacio de estado \mathbb{R}^n , ésto es $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ es un equilibrio de (2.1). Si éste no es el caso, puede demostrarse que mediante un cambio de coordenadas el equilibrio de (2.1) puede trasladarse al origen.

Definición 2.10. Estabilidad.

El origen es un equilibrio estable del sistema (2.1) si, dado cualquier número $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

∇∇∇

Se deberá interpretar claramente la definición 2.10 de estabilidad y no confundir como en ocasiones suele suceder, estableciendo que dado cualquier constante $\epsilon > 0$ se puede encontrar un número $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x_0\| < \epsilon \Rightarrow \|x(t)\| < \delta \quad \forall t \geq 0.$$

Lo anterior significaría que el origen es estable si para toda condición inicial acotada, las trayectorias también están acotadas. Esto no basta para garantizar estabilidad en el sentido de la definición 2.10. La estabilidad del origen debe ser interpretada como dada una pequeña perturbación de la condición inicial $x(0)$ alrededor del origen, la solución $x(t)$ correspondiente permanecerá acotada. Notese que se habla de una pequeña perturbación y no para toda condición inicial.

Definición 2.11. Estabilidad asintótica.

El origen es un equilibrio asintóticamente estable de (2.1) si

- i) El origen es estable
- ii) El origen es atractivo, esto es, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

∇∇∇

Definición 2.12. Estabilidad asintótica global.

El origen es un equilibrio global asintóticamente estable del sistema (2.1) si:

- i) El origen es estable
- ii) El origen es atractivo para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ésto es,

$\|x(t)\| \rightarrow 0$ para todo x_0 y $t \rightarrow \infty$.

VVV

Definición 2.13. Estabilidad exponencial global.

El origen es un equilibrio global exponencialmente estable de (2.1) si existen constantes positivas α , β y δ tales que:

$$\|x(t)\| < \alpha \|x_0\| \exp(-\beta(t)), \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

VVV

Definición 2.14. Inestabilidad.

El origen es un equilibrio inestable del sistema (2.1) si éste no es estable.

VVV

Enseguida se dan algunos ejemplos para ilustrar los conceptos presentados anteriormente.

Ejemplo 2.6. Considérese las ecuaciones que definen el oscilador de Van Der Pol:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{2.3}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1-x_1^2)x_2 \tag{2.4}$$

donde x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}$. Nótese que el origen es un estado de equilibrio de las ecuaciones (2.3)-(2.4).

Algunas soluciones para varias condiciones iniciales del sistema (2.3)-(2.4) se muestran en el espacio de estado (plano de fase) en la figura 2.1. El

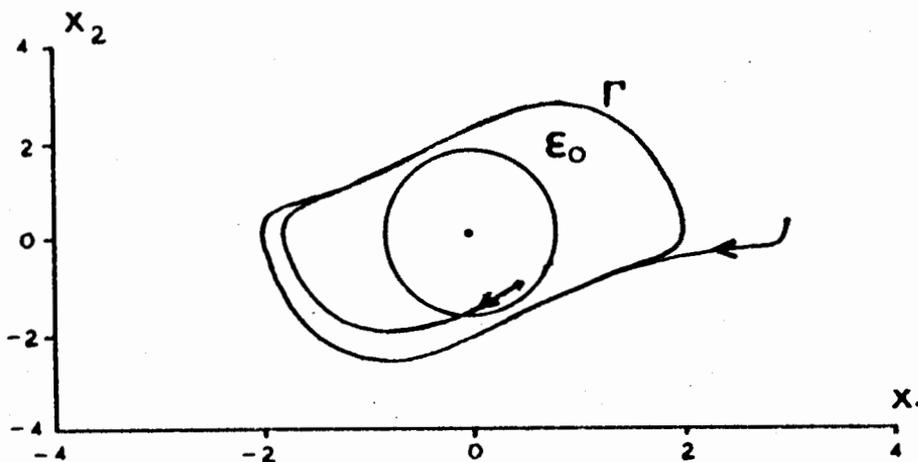


Figura 2.1

comportamiento del sistema es la siguiente. Si el estado inicial del sistema se encuentra al interior de la curva cerrada Γ , y es diferente de cero, entonces las soluciones se aproximan asintóticamente a Γ . Si el estado inicial está al exterior de la curva cerrada Γ , entonces las soluciones aproximan a Γ .

El origen del sistema (2.3)-(2.4) es un equilibrio inestable. Para demostrarlo basta con tomar $\epsilon = \epsilon_0$ (véase la figura 2.1) y claramente no existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon_0 \quad \forall t \geq 0.$$

Es importante observar que la inestabilidad de un equilibrio no implica que las soluciones del sistema crezcan indefinidamente. Tal es el caso de este ejemplo donde cada solución asociada a una condición inicial es acotada.

□□

Ejemplo 2.7. Considérese un sistema con 2 variables de estado: $x_1(t)$ y $x_2(t)$. En forma general, el comportamiento del sistema es el siguiente: todas las soluciones del sistema (a excepción de la que se inicia en el origen, el cual es un estado de equilibrio) partiendo del interior de un disco centrado en el origen y de radio c_1 salen de él y tocan la frontera de otro disco centrado en el origen de radio c_2 para finalmente dirigirse al origen. Véase la figura 2.2.

Nuevamente el origen del sistema es inestable. Esto es debido a que si se toma $\epsilon = \epsilon_0 < c_1$ no existe un número δ tal que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

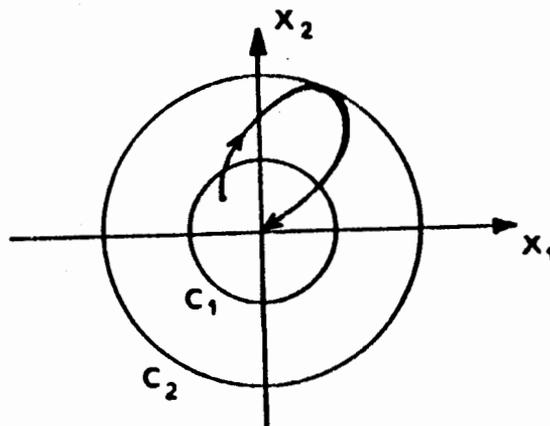


Figura 2.2

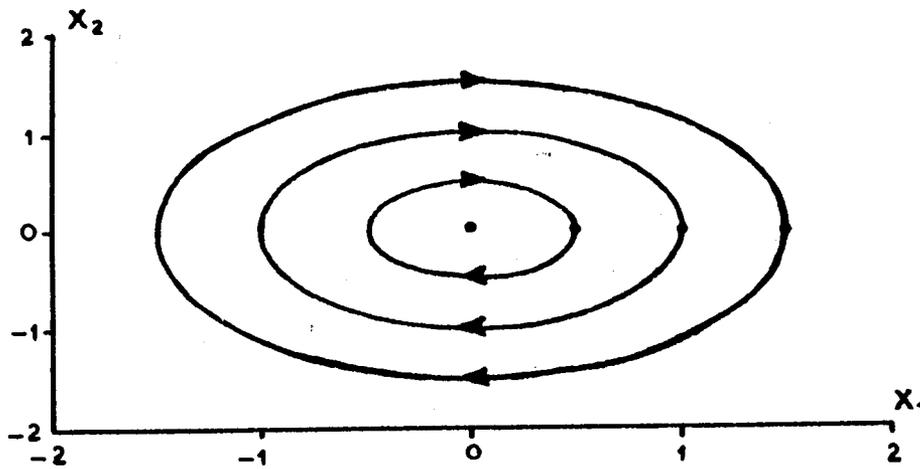


Figura 2.3

Es importante observar que el origen es un equilibrio inestable a pesar de que $\|x(t)\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

□□□

Ejemplo 2.8. Considérese el sistema descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \quad (2.6)$$

Claramente el origen es un estado o punto de equilibrio. Algunas soluciones de las ecuaciones (2.5)-(2.6) en el plano x_1 - x_2 son presentados en la figura 2.3.

Nótese que las trayectorias del sistema (2.5)-(2.6) son círculos centrados en el origen. Para este ejemplo, el equilibrio es estable ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta < \varepsilon$ tal que

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0.$$

Es importante observar que las trayectorias no convergen al origen, esto es, el equilibrio es estable pero no asintóticamente estable.

□□□

Enseguida se presenta una definición para una clase particular de funciones.

Definición 2.15. Función definida positiva.

Una función $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida positiva si y solo si:

- i) $W(x)$ es una función continua.
- ii) $W(0) = 0$
- iii) $W(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$
- iv) $W(x) \rightarrow \infty$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

VVV

A continuación se presenta un resultado concerniente a una clase más general de funciones.

Lema 2.3. Una función continua $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función definida positiva si y sólo si existe una función definida positiva $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$V(t, x) \geq W(x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

VVV

Ejemplo 2.9. La función $W(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ es una función definida positiva.

□□□

Ejemplo 2.10. La función $V(t, x_1, x_2) = (t+1)(x_1^2 + x_2^2)$ es una función definida positiva ya que $V(t, x_1, x_2) \geq x_1^2 + x_2^2$.

□□□

Definición 2.16. Función candidata de Lyapunov.

Una función $V: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función candidata de Lyapunov para la ecuación (2.1) si y solo si:

- i) $V(t, x)$ es una función definida positiva.

- ii) $\frac{\partial V(t, x)}{\partial t}$ es una función continua con respecto a t y x .

- iii) $\frac{\partial V(t, x)}{\partial x}$ es una función continua con respecto a t y x .

VVV

Ejemplo 2.11. Considérese las ecuaciones:

$$\dot{x} = -ax + u, \quad x(0), \quad t \geq 0$$

$$u = ay + \dot{y}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. Defínase e como $e = x - y$. Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en términos de e como:

$$\dot{e} = -ae.$$

El origen $e=0$ es el único equilibrio para la ecuación anterior. Considérese

ahora la siguiente función definida positiva:

$$V(e) = \frac{1}{2} e^2$$

de donde se obtiene:

$$\frac{\partial V(e)}{\partial e} = e = x - y$$

$$\frac{\partial V(e)}{\partial t} = 0.$$

Para que $V(e)$ sea una función candidata de Lyapunov se requiere que x e y sean funciones continuas con respecto al tiempo.

□□□

Definición 2.17. Derivada de una función candidata de Lyapunov.

Sea $V(t,x)$ una función candidata de Lyapunov para la ecuación (2.1). La derivada de $V(t,x)$ a lo largo de las trayectorias de (2.1), denotada por $\dot{V}(t,x)$ esta dada por:

$$\dot{V}(t,x) = \frac{d}{dt} V(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x} f(t,x).$$

▽▽▽

Obsérvese de la definición anterior que si $V(x)$ no depende explícitamente del tiempo, y la ecuación (2.1) es autónoma, entonces:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$$

la cual tampoco depende explícitamente del tiempo.

Definición 2.18. Función de Lyapunov.

Una función candidata de Lyapunov $V(t,x)$ para la ecuación (2.1) es una función de Lyapunov para (2.1) si su derivada a lo largo de las trayectorias de (2.1) satisface:

$$\dot{V}(t,x) \leq 0$$

▽▽▽

Con los anteriores preliminares ahora pueden presentarse los teoremas fundamentales de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Teorema 2.1. El origen es un estado de equilibrio estable de la ecuación (2.1) si existe una función candidata de Lyapunov $V(t,x)$ tal que su derivada

satisface:

$$\dot{V}(t, x) \leq 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

∇∇∇

Teorema 2.2. El origen es un estado de equilibrio global asintóticamente estable de (2.1) si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ tal que su derivada negativa sea definida positiva, ésto es:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, 0) &= 0 & \forall t \geq 0 \\ \dot{V}(t, x) &< 0 & \forall t \geq 0, \quad \forall x \neq 0. \end{aligned}$$

∇∇∇

Teorema 2.3. El origen es un estado de equilibrio global exponencialmente estable de (2.1) si existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x)$ y existen constantes positivas α , β y γ tales que:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \alpha \|x\|^2 &\leq V(t, x) \leq \beta \|x\|^2 \\ \text{ii)} \quad \dot{V}(t, x) &\leq -\gamma \|x\|^2 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

∇∇∇

Los teoremas anteriores son los más comunmente empleados en el análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov. Es importante decir que existen otros resultados adicionales, los cuales incluyen teoremas para estudiar inestabilidad.

El siguiente teorema es una versión particular del denominado teorema de LaSalle.

Teorema 2.4. Considérese la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad ; x(0) \in \mathbb{R}^n \quad ; \forall t \geq 0$$

con origen como equilibrio. Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(x)$ tal que:

$$\dot{V}(x) \leq 0.$$

Defínase el conjunto Ω como:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(s) = 0\}.$$

El origen será un estado de equilibrio global asintóticamente estable si:

$$\dot{s} = f(s).$$

tiene como solución única $s=0$.

∇∇∇

La aplicación del teorema de LaSalle para establecer estabilidad asintótica

no requiere que $-\dot{V}(x)$ sea una función definida positiva. Nótese sin embargo que este teorema sólo puede emplearse en ecuaciones diferenciales autónomas.

Ejemplo 2.12. Considérese la ecuación dinámica que rige el movimiento de un péndulo sin fricción sometido a la acción de la gravedad:

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0.$$

Esta ecuación puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 \end{aligned}$$

donde $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$. Nótese que el origen es un estado de equilibrio. Es importante constatar, sin embargo, que el origen no es el único estado de equilibrio. En estas circunstancias sólo se podrá hablar de propiedades locales de estabilidad. Para analizar la estabilidad del origen se propone la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = (1 - \cos x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

Tomando la derivada de V con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \sin x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0.$$

De acuerdo al teorema 2.1, el origen es entonces un equilibrio estable. □□□

Ejemplo 2.13. Considérese la siguiente ecuación escalar:

$$\dot{x} = -ax$$

donde a es una constante positiva. El origen es nuevamente un estado de equilibrio. Para demostrarlo considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{x^2}{2}$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(x) = x \dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = -ax^2.$$

El origen es entonces un equilibrio global asintóticamente estable según el teorema 2.2.

Ejemplo 2.14. Considérese las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + kx_2$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1$$

donde $k \neq 0$. El origen es el único estado de equilibrio. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov para estudiar la estabilidad del equilibrio:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

La derivada de $V(e, \theta)$ con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2.$$

Como $-\dot{V}$ es semidefinida positiva y no definida positiva, no puede aplicarse el teorema 2.2 para establecer estabilidad asintótica global sino el teorema 2.1 para garantizar estabilidad. En este caso podría tratarse de probar estabilidad asintótica global mediante el teorema de LaSalle (teorema 2.4).

El conjunto $\Omega = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(s) = 0\}$ es en este ejemplo:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{R}^2 \mid (0 \ x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Por consiguiente $\dot{s} = f(s)$ es simplemente:

$$0 = kx_2$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

cuya única solución es $x = 0$. Entonces la única solución de $\dot{s} = f(s)$ es $s = [0 \ x_2] = 0$. Esto habilita el uso del teorema de LaSalle para garantizar estabilidad asintótica global del origen $[x_1 \ x_2] = 0$.

Ejemplo 2.15. Considérese las siguientes ecuaciones:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + k_1 x_2 + k_2 x_3$$

$$\dot{x}_2 = -k_1 x_1$$

$$\dot{x}_3 = -k_2 x_1$$

donde $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Las ecuaciones anteriores tienen como equilibrio:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3] = [0 \ x_2 - \frac{k_1}{k_2} x_2].$$

Nótese que existe un número infinito de puntos de equilibrio, uno para cada $x_2 \in \mathbb{R}$. Para $x_2 = 0$, el origen es un equilibrio. Para estudiar la estabilidad del origen considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

cuya derivada temporal es:

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2.$$

El teorema 2.1 garantiza estabilidad del origen. El teorema 2.2 sobre estabilidad asintótica global no puede ser usado ya que $-\dot{V}$ no es definida positiva. El empleo del teorema de LaSalle en este ejemplo puede ser explorado. El conjunto $\Omega = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(s) = 0\}$ es para:

$$\Omega = \left\{ s \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -\frac{k_1}{k_2} x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por consiguiente $\dot{s} = f(s)$ es simplemente:

$$0 = 0 + k_1 x_2 + k_2 \left[-\frac{k_1}{k_2} x_2 \right]$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

$$-\frac{k_1}{k_2} \dot{x}_2 = 0$$

cuya solución es toda constante $x_2 \in \mathbb{R}$. Como $s = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & -\frac{k_1}{k_2} x_2 \end{bmatrix} = 0$ no es la única solución, el teorema de LaSalle no puede emplearse para concluir estabilidad asintótica global del origen $[x_1 \ x_2 \ x_3] = 0$.

□□□

El siguiente resultado presenta condiciones necesarias para la existencia de ciertas propiedades globales de estabilidad en ecuaciones diferenciales autónomas.

Teorema 2.5. Considérese la ecuación diferencial autónoma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad ; x(0) \quad \forall t \geq 0.$$

La existencia de un único estado de equilibrio es una condición necesaria

para establecer sobre éste:

- .Estabilidad asintótica global
- .Estabilidad exponencial global.

∇∇∇

La prueba del teorema 2.5 es inmediata observando que los tres conceptos de estabilidad citados implican que $\|x(t) - x_0\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ donde x_0 es el equilibrio analizado. Debido a la globalidad de las citadas propiedades de estabilidad, la convergencia de la solución $x(t)$ al equilibrio x_0 debe verificarse para toda condición inicial. Claramente éste no será el caso si además de x_0 existen más estados de equilibrio ya que si la condición inicial es exactamente otro estado de equilibrio, el estado permanecerá ahí para todo $t \geq 0$.

Nótese que el teorema 2.5 no establece como condición necesaria de estabilidad de un equilibrio la existencia de un único estado de equilibrio. Tal es el caso en el ejemplo 2.15 donde existe un número infinito de estados de equilibrios y se demostró estabilidad del equilibrio. Es importante decir que pueden coexistir equilibrios con propiedades locales de estabilidad e incluso estables con equilibrios inestables.

Enseguida se presentan un par de resultados que serán referidos frecuentemente en el análisis de controladores adaptables de robots manipuladores.

Considérese el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(t, x, y) \quad , x(0) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\dot{y} = g(t, x, y) \quad , y(0) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.8)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $g: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Lema 2.5. Considérese el sistema descrito por las ecuaciones (2.7)-(2.8). Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x, y)$ tal que su derivada satisface

$$\dot{V}(t, x, y) = -\gamma \|x\|^2$$

para algun escalar $\gamma > 0$, entonces:

i) El origen es estable

ii) $x \in L_\infty^n$, $y \in L_\infty^m$

iii) $x \in L_2^n$.

Si además $f \in L_\infty^n$, entonces:

iv) $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

∇∇∇

Demostración. El inciso i) se obtiene en forma directa del teorema 2.1 notando que $\dot{V}(t, x, y) \leq 0$. El inciso ii) sigue inmediatamente de la definición 2.10. Para demostrar iii), considérese:

$$\dot{V}(t, x, y) = -\gamma \|x\|.$$

Integrando ambos miembros de 0 a T, para $T \in \mathbb{R}_+$:

$$V(T, x(T), y(T)) - V(0, x(0), y(0)) = -\gamma \int_0^T \|x(\tau)\|^2 d\tau.$$

Como $V(t, x, y)$ es una función definida positiva, entonces

$$\frac{V(0, x(0), y(0))}{\gamma} \geq \int_0^T \|x(\tau)\|^2 d\tau$$

donde el lado izquierdo es una constante positiva finita. De la definición 2.7 se concluye que $x \in L_2^n$. Nótese que la hipótesis de acotamiento sobre f y (2.7) que $\dot{x} \in L_\infty^n$. De esto último, de iii) y el lema 2.1 se obtiene directamente iv).

□□□

Es importante notar que el lema 2.5 no establece que $y \in L_2^m$ ni que $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 2.16. Considérese la siguiente ecuación lineal variante con el tiempo:

$$\dot{x}_1 = -a x_1 + b \phi(t) x_2$$

$$\dot{x}_2 = -c \phi(t) x_1$$

donde a , b , y c son constantes positivas y $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es posiblemente no acotada. El origen es el único punto de equilibrio de la ecuación anterior. Para analizar su estabilidad se escoje la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{b}{2c} x_2^2.$$

La derivada con respecto al tiempo está dada por:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1 \dot{x}_1 + \frac{b}{c} x_2 \dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -ax_1^2.$$

Aplicando el resultado enunciado por el lema 2.5 se concluye que el origen es un equilibrio estable. Además $x_1, x_2 \in L_\infty$ y $x_1 \in L_2$. Si por otro lado se supone que $\phi \in L_\infty$, entonces por el inciso iv) del lema 2.5 se concluye que $x_1(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

□□□

Lema 2.6. Considérese el sistema descrito por las ecuaciones (2.7)-(2.8). Supóngase que existe una función candidata de Lyapunov $V(t, x, y)$ tal que su derivada satisface

$$\dot{V}(t, x, y) \leq 0 \quad \text{si} \quad \|x\| > K$$

donde $\infty > K > 0$ entonces $x \in L_\infty^n$.

□□□

Demostración. La demostración se basa en reducción al absurdo. Supóngase que $x \notin L_\infty^n$ entonces $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ para algún t . Como $V(t, x, y)$ es definida positiva, entonces $V(t, x, y) \rightarrow \infty$ lo cual no tiene sentido ya que $\dot{V}(t, x, y) \leq 0$ para valores suficientemente grandes de $\|x\|$.

□□□

Obsérvese que el lema 2.6 no establece el acotamiento de y .

Ejemplo 2.17. Considérese las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + b\phi(t)x_2 + h(t, x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -c\phi(t)x_1$$

donde a, b y c son constantes positivas. $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función posiblemente no acotada y $h(t, x_1, x_2) \in L_\infty \quad \forall x_1, x_2$. Para analizar su estabilidad se escoje la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{b}{2c}x_2^2$$

cuya derivada esta dada por:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + \frac{b}{c}x_2\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -ax_1^2 + x_1h(t, x_1, x_2).$$

Dado que $h(t, x_1, x_2) \in L_\infty$ entonces existe una constante positiva finita K tal que $\|h(t, x_1, x_2)\|_\infty \leq K$. Entonces:

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{si } |x_1| \geq \frac{K}{a}.$$

y del lema 2.6 se concluye que $x_1 \in L_\infty$.

□□□

REFERENCIAS

Gran parte del contenido del presente capítulo fue inspirado de los siguientes textos:

Desoer C., Vidyasagar M., 1975. "Feedback systems: input-output properties", Academic Press, New York.

Vidyasagar M., 1978, "Nonlinear systems analysis", Prentice-Hall, Inc., New Jersey

La definición de espacios L_p así como los conceptos de norma y producto interno son claramente expuestos en el texto de Vidyasagar (1978) capítulo 6.

Los lemas 2.1 y 2.3 son presentados en el texto de Desoer, Vidyasagar (1975) en las páginas 232 y 59 respectivamente.

Las definiciones y teoremas sobre estabilidad en el sentido de Lyapunov fueron tomados del texto de Vidyasagar (1978) capítulo 5.

El teorema de LaSalle (teorema 2.4) fue adaptado del teorema 5.87 del texto de Vidyasagar (1978). La versión general del teorema de LaSalle puede ser encontrada en:

LaSalle J., Lefschetz S., 1961, "Stability by Lyapunov's direct method with applications", Academic Press, New York.

3. MODELADO DINAMICO DE ROBOTS MANIPULADORES

3.1 INTRODUCCION

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos complejos (acoplados y no lineales) diseñados para realizar tareas específicas. Los manipuladores industriales típicos poseen 6 grados de libertad (g.d.l.) los cuales generalmente incluyen en su parte terminal una herramienta como pinza, soplete, taladro, etc. Cada grado de libertad correspondiente a cada unión dispone de sensores de posición, velocidad y eventualmente de aceleración. Adicionalmente algunos manipuladores avanzados poseen sensores de fuerza en su parte terminal.

El modelo cinemático de un robot describe las relaciones entre la geometría de la posición, la velocidad y la aceleración entre los diferentes g.d.l. El modelo dinámico de un robot describe las relaciones entre las fuerzas/torques que actúan sobre cada grado de libertad y la cinemática del robot. Tanto la cinemática como la dinámica son fundamentales para planear y llevar a término una aplicación específica para un robot manipulador. El modelado cinemático y dinámico de robots manipuladores es tratado en forma detallada en un sinnúmero de textos sobre mecánica y robótica (véase las referencias al final del capítulo).

El objetivo de este capítulo es el de presentar las ecuaciones dinámicas de los robots manipuladores así como sus principales propiedades. Aparte de la importancia incuestionable de los modelos dinámicos de los manipuladores en el diseño de controladores, los modelos dinámicos pueden también ser utilizados para simular mediante equipo de cómputo el comportamiento del robot antes de que este sea construido físicamente. Esta etapa de simulación es importante ya que puede permitir hacer mejoras en el diseño del robot de manera que puede realizar una tarea dada en forma más adecuada.

Uno de los procedimientos más empleados para la obtención de los modelos dinámicos de los robots manipuladores es basado en las ecuaciones del movimiento de Lagrange. El empleo de las ecuaciones de Lagrange para el modelado requiere la noción de dos conceptos importantes: la energía cinética y la energía potencial.

3.2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE LAGRANGE

Las ecuaciones dinámicas de un robot manipulador pueden ser obtenidos a partir de las ecuaciones del movimiento de Newton. La desventaja que presenta este método es que el análisis se complica grandemente cuando aumenta el número de g.d.l. del robot. En estos casos, resulta más conveniente emplear las ecuaciones del movimiento de Lagrange. Estas últimas ecuaciones reciben el nombre de Lagrange, debido a que fue el primero que las dió a conocer en 1788.

Los robots manipuladores consisten en eslabones rígidos conectadas por una serie de uniones. Cada unión es controlada independientemente y el

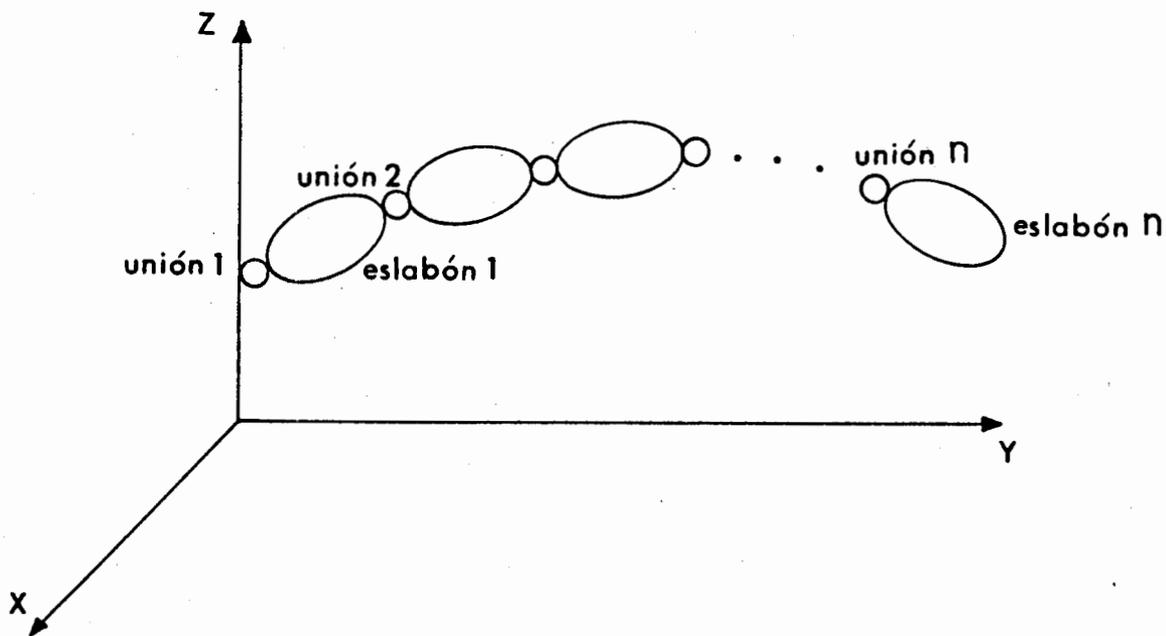


Figura 3.1

movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones. El número de uniones (el cual es típicamente de 6) es el número de grado de libertad (g.d.l.).

Consideremos el brazo articulado de n eslabones rígidos mostrado en la Figura 3.1.

Los eslabones son numerados consecutivamente desde la base (eslabón 0) hasta el final (eslabón n). Las uniones son los puntos de articulación entre los eslabones y son numerados de tal forma que la unión i conecta los eslabones i y $(i-1)$. No hay unión al final del último eslabón. Para describir la geometría del movimiento del robot, se asignará un marco de coordenadas cartesianas (x_i, y_i, z_i) a cada unión donde $i=1, \dots, n$. Por convención, cada eslabón se traslada o rota sobre el eje z del marco de referencia asignado al eslabón previo. El primer eslabón se mueve con respecto al eje z del marco de referencia de base (x_0, y_0, z_0) , el cual es un marco cartesiano inercial.

En consecuencia, cada marco de referencia (x_i, y_i, z_i) es definido de la forma siguiente:

- . El eje z_i esta dirigido a lo largo del eje de movimiento de la unión (i)
- . El eje x_i es normal a los ejes z_{i-1} y z_i
- . El eje y_i completa el sistema coordenado (rectangular de mano derecha).

El origen del marco inercial (x_0, y_0, z_0) puede ser colocado en cualquier lugar del soporte de base y el origen del último marco (x_n, y_n, z_n) puede ser colocado en cualquier lugar del último eslabón.

El robot manipulador puede ser expresado en término de las coordenadas de unión q_1, \dots, q_n . La coordenada de unión q_i es el desplazamiento angular alrededor de z_{i-1} si la unión i es rotacional, o el desplazamiento lineal sobre z_{i-1} si la unión i es de traslación.

Ejemplo 3.1. La figura 3.2 muestra un manipulador de 3 g.d.l.. La colocación de los marcos de referencia así como las coordenadas de unión son mostrados en dicha figura.

□□□

Considérese el robot manipulador que se compone de n eslabones rígidos mostrado en la figura 3.1. La energía total E de un robot manipulador de n g.d.l. es la suma de sus energías cinética K y potencial V :

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + V(q(t)) \quad (3.2.1)$$

donde $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$.

Los vectores $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ son denominados como las posiciones y velocidades generalizadas asociadas a cada unión.

El Lagrangiano L de un robot manipulador de n g.d.l. es la diferencia entre su energía cinética K y su energía potencial V :

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t)). \quad (3.2.2)$$

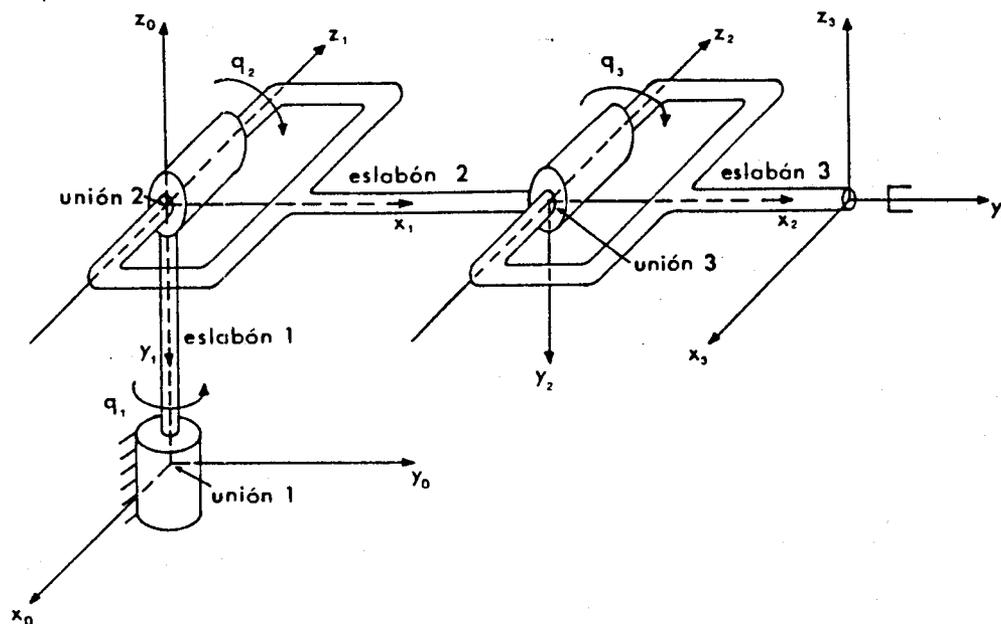


Figura 3.2

Las ecuaciones del movimiento de Lagrange para un manipulador de n g.d.l. están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \tau_1(t), \quad i=1,2,\dots,n. \quad (3.2.3)$$

donde τ_1 son las fuerza/torques actuantes sobre cada unión. Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como g.d.l. tenga el robot manipulador.

El uso de las ecuaciones de Lagrange para el modelado dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas:

1. Cálculo de la energía cinética: $K(q(t), \dot{q}(t))$
2. Cálculo de la energía potencial: $V(q(t))$
3. Cálculo de Lagrangiano: $L(q(t), \dot{q}(t))$ (3.2.2)
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange (3.2.3).

En lo que resta de esta sección serán presentados algunos ejemplos con el fin de mostrar el procedimiento de modelado de robots mediante el empleo de las ecuaciones de Lagrange.

Ejemplo 3.2. Considérese el robot manipulador mostrado en la figura 3.3. El robot consiste de dos eslabones rígidos de longitud l_1 y l_2 . Las uniones 1 y 2 son rotacionales. La unión 2 permanecerá inactiva. Se supone, por simplicidad, que las masas de los eslabones son despreciables. En la unión entre los dos eslabones, éste es la unión 2, se encuentra un actuador de masa m_1 . Esta unión, asociada al ángulo θ_2 (conocido) del segundo eslabón con respecto al plano x_0-y_0 , permanecerá inactiva. Al extremo final del segundo eslabón se encuentra una pinza sujetadora de masa m_2 .

El robot sólo posee un movimiento rotacional θ_1 alrededor del eje z_0 . Véase la figura 3.3. Para este ejemplo, el único grado de libertad es el asociado a la unión 1. Se tiene entonces que $q(t)$ es un escalar definido como $q(t) = \theta_1(t)$.

El modelo dinámico de este robot manipulador puede obtenerse fácilmente utilizando los conceptos de dinámica de cuerpos rígidos en rotación estudiados en los cursos elementales de física. Sin embargo, para fines demostrativos se emplearán las ecuaciones de Lagrange para obtener el modelo dinámico.

La energía cinética $K(q, \dot{q})$ del robot manipulador está dada por:

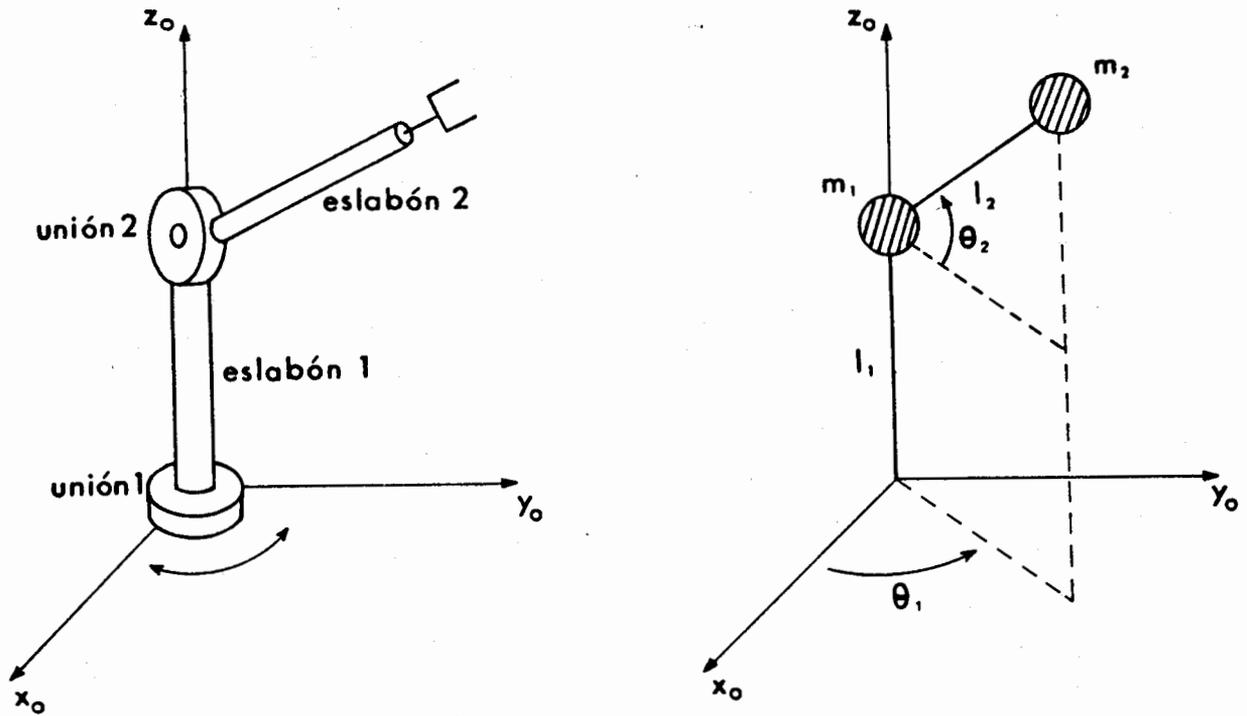


Figura 3.3

$$K(q, \dot{q}) = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{q}^2$$

y la correspondiente energía potencial $V(q)$:

$$V(q) = m_1 \ell_1 g + (m_1 + m_2) (\ell_1 + \ell_2 \text{sen } \theta_2) g$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad.

El Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ expresada por (3.2.2) es en este caso:

$$L(q, \dot{q}) = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{q}^2 - m_1 \ell_1 g - (m_1 + m_2) (\ell_1 + \ell_2 \text{sen } \theta_2) g$$

de donde puede obtenerse fácilmente las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (m_1 + m_2) \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = (m_1 + m_2) \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 \ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

La ecuación de Lagrange (3.2.3) correspondiente es entonces:

$$(m_1 + m_2) \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 \ddot{q} = \tau \quad (3.2.4)$$

donde τ es el torque aplicado a la unión 1. La ecuación (3.2.4) describe el comportamiento dinámico del robot manipulador. Nótese que el modelo dinámico es simplemente una ecuación diferencial lineal.

□□□

Ejemplo 3.3. Considérese el robot manipulador de 2 g.d.l. mostrado en la figura 3.4. El brazo manipulador consiste de 2 eslabones rígidos de longitud ℓ_1 y ℓ_2 . Las masas m_1 y m_2 de los eslabones se supondrán por simplicidad concentrados sobre los extremos. Las uniones 1 y 2 son rotacionales. Los desplazamientos del robot se llevarán a cabo en el plano x_0 - y_0 , mostrado en la figura 3.4. Los grados de libertad son asociados a los ángulos θ_1 y θ_2 , i.e.

$$q(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t)]^T$$

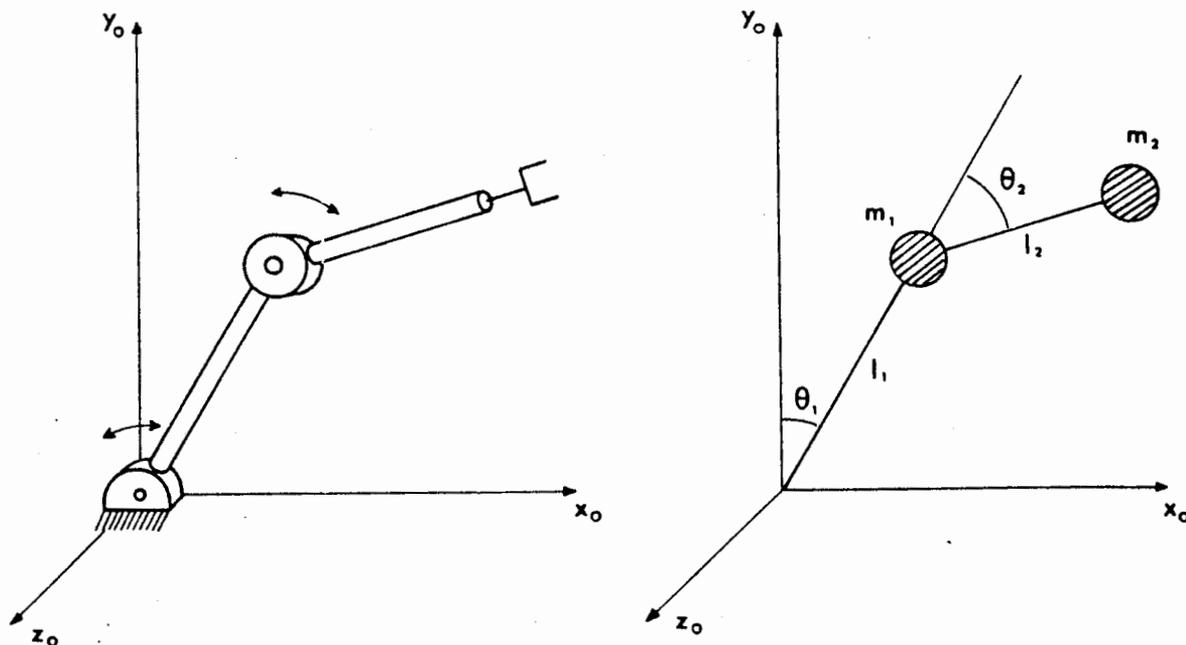


Figura 3.4

La energía cinética $K(q, \dot{q})$ para este brazo manipulador puede descomponerse en la suma de dos partes: $K(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q})$ donde $K_1(q, \dot{q})$ y $K_2(q, \dot{q})$ son las energías cinéticas asociadas a las masas m_1 y m_2 respectivamente. Se

tiene entonces: $K_1(q, \dot{q}) = \frac{m_1 v_1^2}{2}$, donde v_1 es la rapidez de la masa m_1 . En este caso:

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{m_1 \ell_1^2}{2} \dot{q}_1^2. \quad (3.2.5)$$

Por otro lado: $K_2(q, \dot{q}) = (m_2/2) v_2^2$ donde v_2 es la rapidez de la masa m_2 . Esta rapidez al cuadrado está dada por:

$$v_2^2 = \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \ell_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + 2\ell_1 \ell_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2$$

de donde:

$$K_2(q, \dot{q}) = \frac{m_2}{2} \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2} \ell_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 \ell_1 \ell_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2. \quad (3.2.6)$$

En forma similar, la energía potencial puede descomponerse como la suma de 2 partes: $V(q) = V_1(q) + V_2(q)$ donde $V_1(q)$ y $V_2(q)$ son las energías potenciales asociadas a las masas m_1 y m_2 respectivamente.

Se tiene entonces que:

$$V_1(q) = -m_1 \ell_1 g \cos q_1 \quad (3.2.7)$$

y

$$V_2(q) = -m_2 \ell_1 g \cos q_1 - m_2 \ell_2 g \cos(q_1 + q_2). \quad (3.2.8)$$

A partir de las ecuaciones (3.2.5)-(3.2.8) puede obtenerse el Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$$

$$L(q, \dot{q}) = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) - V_1(q) - V_2(q)$$

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \ell_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) \\ &\quad + m_2 \ell_1 \ell_2 \cos(q_2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) + (m_1 + m_2) g \ell_1 \cos(q_1) \\ &\quad + m_2 g \ell_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned}$$

De esta última ecuación pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = (m_1+m_2)l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = [(m_1+m_2)l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2)] \ddot{q}_1 + [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -(m_1+m_2)gl_1 \sin(q_1) - m_2 gl_2 \sin(q_1+q_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_2^2 \dot{q}_1 + m_2 l_2^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2) \dot{q}_1 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2) - m_2 gl_2 \sin(q_1+q_2).$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan el robot manipulador son obtenidas de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad ; \quad i=1,2$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} & [(m_1+m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_2 \\ & - 2m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2^2 + (m_1+m_2)gl_1 \sin q_1 \\ & + m_2 gl_2 \sin (q_1+q_2) = \tau_1 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

y

$$\begin{aligned} & [m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2] \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 \\ & - m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 gl_2 \sin(q_1+q_2) = \tau_2 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

donde τ_1 y τ_2 son los torques que actúan en las uniones 1 y 2. Nótese que las ecuaciones dinámicas del robot (3.2.9)-(3.2.10) son un conjunto de dos ecuaciones diferenciales no-lineales acopladas.

□□□

Ejemplo 3.4. Considérese el robot manipulador cartesiano de 3 g.d.l. mostrado en la figura 3.5. El manipulador consiste de tres eslabones rígidos mutuamente ortogonales. Las tres uniones del sistema son de traslación. Los desplazamientos del robot se llevan a cabo en el espacio x_0 - y_0 - z_0 mostrado en la figura 3.5. El vector de coordenadas del robot cartesiano es $q = [x \ y \ z]^T$.

La energía cinética para este brazo manipulador esta dada por (Véase la figura 3.5).

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [m_x \dot{x}^2 + (m_y + m_x) \dot{y}^2 + (m_x + m_y + m_z) \dot{z}^2]. \quad (3.2.11)$$

Por otro lado la energía potencial es igual a la siguiente expresión:

$$V(q) = - [m_x + m_y + m_z] gz. \quad (3.2.12)$$

De las ecuaciones (3.2.11) y (3.2.12) se obtiene el Lagrangiano:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [m_x \dot{x}^2 + (m_y + m_x) \dot{y}^2 + (m_x + m_y + m_z) \dot{z}^2] + [m_x + m_y + m_z] gz.$$

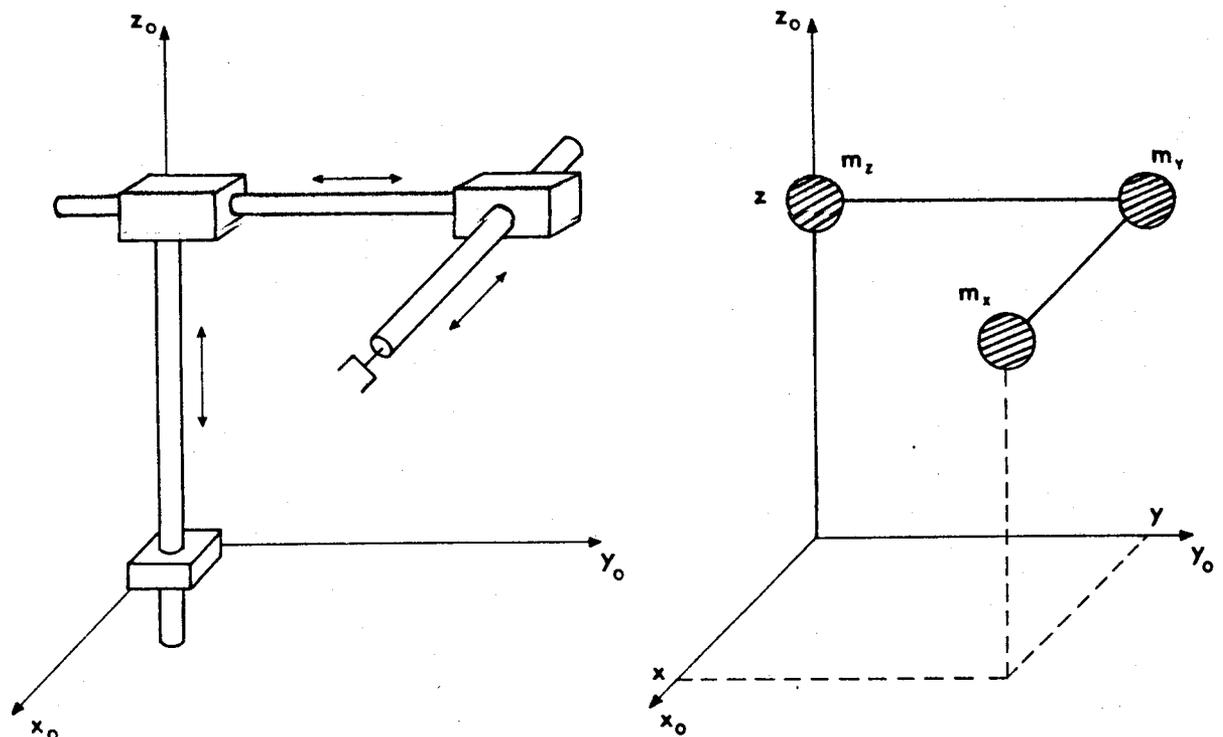


Figura 3.5

Se tiene entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_x \dot{x} \quad ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m_x \ddot{x} \quad ; \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_x + m_y) \dot{x} \quad ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = (m_x + m_y) \ddot{x} \quad ; \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = (m_x + m_y + m_z) \dot{z} \quad ; \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = (m_x + m_y + m_z) \ddot{z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = (m_x + m_y + m_z) z.$$

Las ecuaciones dinámicas que modelan al robot son obtenidas de las ecuaciones de Lagrange (3.2.3):

$$m_x \ddot{x} = \tau_x \quad (3.2.13)$$

$$(m_x + m_y) \ddot{y} = \tau_y \quad (3.2.14)$$

$$(m_x + m_y + m_z) \ddot{z} + (m_x + m_y + m_z)g = \tau_z \quad (3.2.15)$$

donde τ_x , τ_y y τ_z son las fuerzas aplicadas a cada unión. Nótese que en este ejemplo las ecuaciones (3.2.13)-(3.2.15) definen un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales.

□□□

3.3 ECUACION DINAMICA GENERICA DE UN ROBOT DE N GRADOS DE LIBERTAD.

En la sección anterior se presentaron ejemplos mostrando la aplicación de las ecuaciones de Lagrange para obtener las ecuaciones dinámicas para varios robots. La misma metodología puede emplearse para determinar el modelo dinámico de cualquier robot de n g.d.l.

Esta metodología es comunmente estudiada en los textos tradicionales de robótica y mecánica teórica por lo que no será presentada en este texto. El lector interesado en más detalles puede recurrir a los textos citados en las referencias al final de este capítulo.

El modelo dinámico de un robot de n g.d.l. formado con eslabones rígidos, sin fricción ni elasticidad en sus uniones esta dado por la siguiente ecuación diferencial vectorial no lineal:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (3.3.1)$$

donde $H(q)$ es una matriz de $n \times n$ llamada la matriz de inercias, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es un vector de $n \times 1$ llamado el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ es un vector de $n \times 1$ de fuerzas gravitacionantes y τ es un vector de $n \times 1$ llamado el vector de fuerzas generalizadas.

Cada elemento de $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ es en general función relativamente compleja de las posiciones y velocidades de todas las uniones, ésto es, de q y \dot{q} .

Los elementos de $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ son por supuesto, dependientes de la geometría del robot al cual modelan.

Ejemplo 3.5. El modelo dinámico del robot modelado en el ejemplo 3.2, ésto es, la ecuación (3.2.4) puede escribirse en la forma genérica (3.3.1) tomando:

$$H(q) = (m_1 + m_2) \ell_2^2 \cos^2 \theta_2$$

$$C(q, \dot{q}) = g(q) = 0.$$

□□□

Ejemplo 3.6. El modelo dinámico del robot modelado en el ejemplo 3.3, ésto es, las ecuaciones (3.2.9) y (3.2.10) pueden escribirse en la forma genérica (3.3.1) tomando:

$$H(q) = \begin{bmatrix} H_{11}(q) & H_{12}(q) \\ H_{21}(q) & H_{22}(q) \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$H_{11}(q) = l_2^2 m_2 + 2l_1 l_2 m_2 \cos q_2 + l_1^2 (m_1 + m_2)$$

$$H_{12}(q) = l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos q_2$$

$$H_{21}(q) = l_2^2 m_2 + l_1 l_2 m_2 \cos q_2$$

$$H_{22}(q) = l_2^2 m_2$$

$$C_{11}(q, \dot{q}) = -2m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2$$

$$C_{21}(q, \dot{q}) = -m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1$$

$$C_{22}(q) = m_2 l_2 g \sin (q_1 + q_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin q_1$$

$$g_1(q) = (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 + m g l_2 \sin (q_1 + q_2)$$

$$g_2(q) = m_2 g l_2 \sin (q_1 + q_2).$$

□□□

Referente al problema de modelado de robots manipuladores es importante hacer notar que la ecuación genérica (3.3.1) supone que los eslabones formantes del manipulador son rígidos, ésto es, no presentan fenómenos de torsión ni flexión. Por otra parte, también se consideró que las uniones entre cada eslabón estaban libres de fricciones y elasticidad.

Los efectos de fricción en sistemas mecánicos son fenómenos relativamente complicados. Tradicionalmente estos efectos son modelados sólo en forma aproximada. Estas aproximaciones son modeladas por un vector $F(\dot{q})$ dependiente solamente de la velocidad angular \dot{q} . Los efectos de fricción son locales, esto es, $F(\dot{q})$ puede expresarse como:

$$F(q) = \begin{bmatrix} f_1(\dot{q}_1) \\ f_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ f_n(\dot{q}_n) \end{bmatrix}$$

Una característica importante de las fuerzas de fricción es que éstas son disipativas, esto es:

$$\dot{q}^T F(\dot{q}) \geq 0.$$

En algunos de los análisis posteriores se tomará la siguiente forma para el vector $F(\dot{q})$:

$$F(\dot{q}) = F_{m1} \dot{q} + F_{m2} \text{sign } \dot{q}$$

donde F_{m1} y F_{m2} son matrices de $n \times n$ diagonales definidas positivas.

Considerando fricción en las uniones, la ecuación dinámica general del manipulador está dada por:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + F(\dot{q}) = \tau.$$

A menos que se indique lo contrario, en los próximos capítulos no se supondrá fricción en el modelo dinámico del manipulador.

3.4 PROPIEDADES

En esta sección serán presentadas las propiedades básicas del modelo dinámico (3.3.1) para robots de n g.d.l.

Una propiedad importante de la ecuación dinámica no lineal (3.3.1), la cual es básica para el diseño de controladores adaptables, es que puede ser expresada en términos lineales de los parámetros dinámicos, por ejemplo de las masas e inercias. Esto se enuncia en la siguiente propiedad.

Propiedad 3.1. El modelo dinámico (3.3.1) puede expresarse linealmente en términos de un vector θ dependiente exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipulador y su carga. Esto significa que (3.3.1) puede escribirse como:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(\dot{q}) \quad (3.4.1)$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es una matriz de $n \times m$ y θ es un vector de $m \times 1$ el cual contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos.

VVV

Ejemplo 3.7. El modelo dinámico del ejemplo 3.2, esto es, la ecuación

(3.2.4):

$$(m_1 + m_2) \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 = \tau$$

puede expresarse en la forma (3.4.1) donde:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \ell_2^2 \cos^2 \theta_2$$

$$\theta = m_1 + m_2.$$

□□□

Ejemplo 3.8. Considérese el manipulador de 2 grados de libertad moviéndose en un plano vertical bajo la acción de la gravedad mostrado en la figura 3.4. Por simplicidad, el manipulador es modelado como dos eslabones rígidos de longitud unitaria cuyas masas m_1 y m_2 están concentradas en sus extremos. El modelo dinámico asociado al manipulador fué obtenido en el ejemplo 3.3 y es descrito por el siguiente par de ecuaciones:

$$m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 C_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 - m_2 S_2 \dot{q}_2^2 \quad (3.4.2)$$

$$- 2m_2 S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 g S_{12} + (m_1 + m_2)g S_1 = \tau_1$$

$$m_2 C_2 \ddot{q}_1 + m_2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 S_2 \dot{q}_1^2 + m_1 g S_{12} = \tau_2 \quad (3.4.3)$$

donde $C_1 = \cos q_1$, $S_1 = \sin q_1$, $C_{12} = \cos(q_1 + q_2)$ y $S_{12} = \sin(q_1 + q_2)$. Los parámetros dinámicos en el modelo son las masas m_1 y m_2 . Defínase entonces el vector θ de parámetros dinámicos $\theta = [m_1 \ m_2]^T$.

El conjunto de ecuaciones dinámicas (3.4.2) y (3.4.3) puede expresarse en términos lineales de θ , es decir, en la forma (3.4.1):

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \tau$$

donde $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ es una matrix de 2×2 :

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} Y_{11}(q, \dot{q}, \ddot{q}) & Y_{12}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ Y_{21}(q, \dot{q}, \ddot{q}) & Y_{22}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{bmatrix}$$

con

$$Y_{11}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \ddot{q}_1 + gS_1$$

$$Y_{12}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + C_2(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + S_2 \dot{q}_2^2 - 2S_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + gS_{12} + gS_1$$

$$Y_{21}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = 0$$

$$Y_{22}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = C_2 \ddot{q}_1 + \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 + S_2 \dot{q}_1^2 + gS_2.$$

□□□

Propiedad 3.2. La matriz de inercia $H(q)$ es una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$ cuyos elementos son funciones solamente de q . Además existe una constante real positiva α tal que:

$$\alpha I \leq H(q) \quad \forall q \in \mathbb{R}^n \quad (3.4.4)$$

donde I denota la matriz identidad de dimensión $n \times n$. La matriz $H(q)^{-1}$ existe y es definida positiva.

□□□

Ejemplo 3.9. Considérese el manipulador de 2 g.d.l. mostrado en la figura 3.4. El modeo dinámico fué obtenido en el ejemplo 3.3. La matriz de inercia $H(q)$ de dicho manipulador es (véase ejemplo 3.6):

$$H(q) = \begin{bmatrix} H_{11}(q) & H_{12}(q) \\ H_{21}(q) & H_{22}(q) \end{bmatrix}$$

donde:

$$H_{11}(q) = \ell_2^2 m_2 + 2\ell_1 \ell_2 C_2 + \ell_1^2 (m_1 + m_2)$$

$$H_{12}(q) = \ell_2^2 m_2 + \ell_1 \ell_2 m_2 C_2$$

$$H_{21}(q) = \ell_2^2 m_2 + \ell_1 \ell_2 m_2 C_2$$

$$H_{22}(q) = \ell_2^2 m_2.$$

Claramente se aprecia que $H(q)$ es una matriz simétrica. Por otro lado se comprueba que $H(q)$ es definida positiva ya que $H_{11}(q)$, $H_{12}(q)$, $H_{21}(q)$ y $H_{22}(q)$ son funciones escalares positivas para todo q y además:

$$\det[H(q)] = \ell_1^2 \ell_2^2 m_2 (m_1 + m_2) - \ell_2^4 m_2^2 C_2^2 > 0.$$

Finalmente el escalar α de la propiedad 3.2 es simplemente $\alpha = \ell_1^2 \ell_2^2 m_1 m_2 > 0$.

□□□

Propiedad 3.3. La matriz de términos centrífugos y de Coriolis $C(q, \dot{q})$ posee

elementos funciones de q y \dot{q} . El acotamiento de $C(q, \dot{q})$ es independiente de q pero se incrementa cuadráticamente con \dot{q} . La matriz $C(q, \dot{q})$ adecuadamente definida está relacionada con la matriz de inercia $H(q)$ por la expresión:

$$x^T [\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})] x = 0, \quad \forall q, \dot{q}, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.4.5)$$

esto es, $\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$ es una matriz antisimétrica.

∇∇∇

Nótese que la antisimetría de $\dot{H}(q) - 2C(q, \dot{q})$ implica la antisimetría de:

$$\frac{1}{2} \dot{H}(q) - C(q, \dot{q}).$$

Las propiedades 3.2 y 3.3 anteriormente enunciadas serán empleadas extensivamente en el capítulo 4 para llevar a cabo el análisis de diversas estrategias de control. En particular la propiedad 3.2 es empleada para construir funciones no-negativas y en ocasiones funciones de Lyapunov para estudiar propiedades de convergencia y estabilidad de los sistemas de control.

REFERENCIAS

El modelo cinemático y dinámico de robots manipulador puede ser consultado en los textos:

Paul R., 1982, "Robot manipulators: Mathematics programming and control", MIT Press, Cambridge, MA.

Asada H., Slotine J.J., 1986, "Robot analysis and control", Wiley, New York.

Craig J., 1986, "Introduction to robotics: Mechanics and Control", Addison-Wesley, Reading, MA.

Spong M., Vidyasagar M., 1989, "Robot dynamics and control", Wiley, New York.

Las ecuaciones del movimiento de Lagrange son presentadas con detalle en los textos antes citados y en:

Hauser W., 1966. "Introduction to the principles of mechanics", Addison-Wesley, Reading MA.

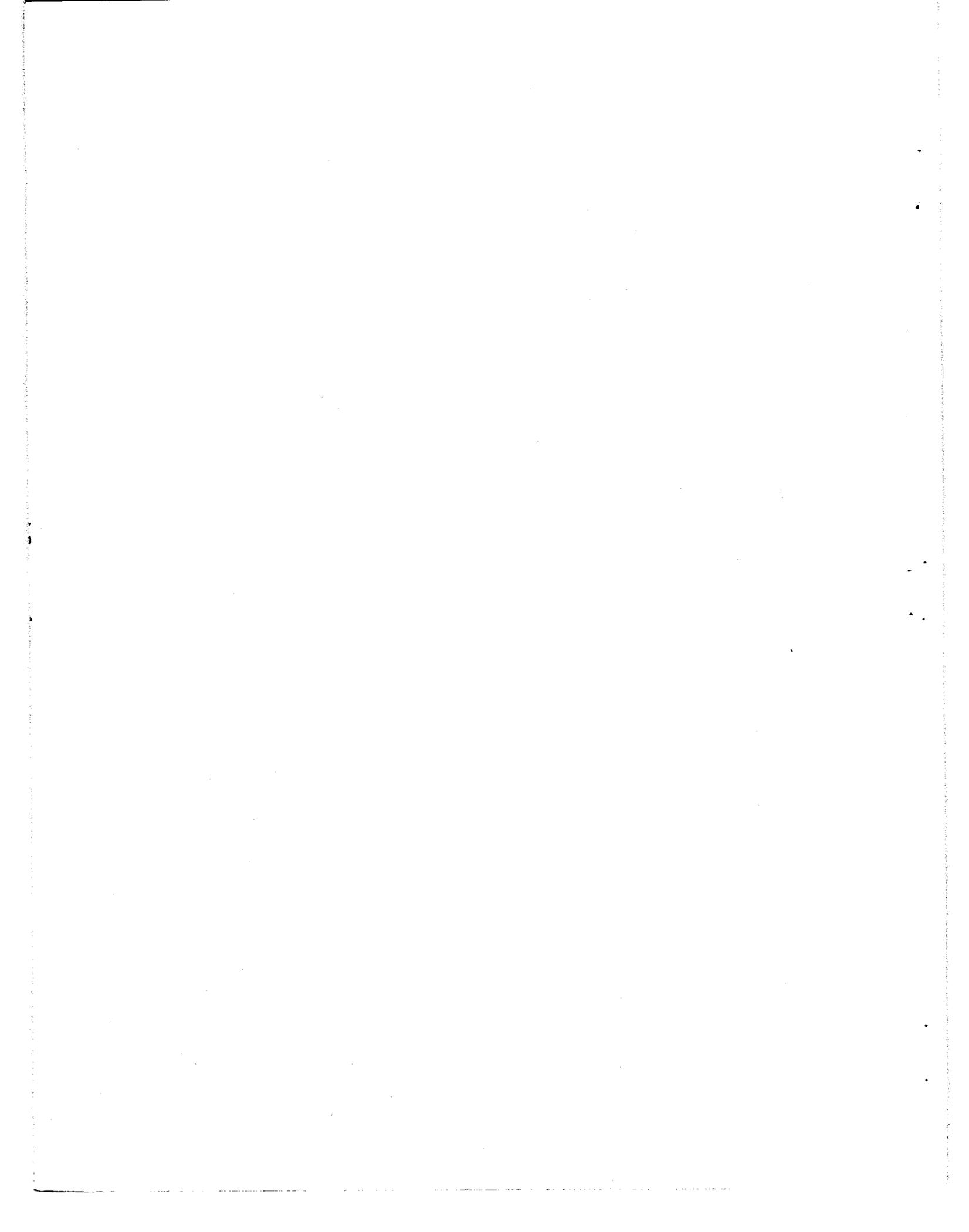
Una particularmente sencilla derivación de las ecuaciones dinámicas para robots de n g.d.l. por medio de las ecuaciones de Lagrange es presentada en el texto de Spong, Vidyasagar (1989) citado anteriormente.

La propiedad 3.1 sobre linealidad del modelo dinámico de robots en términos de sus parámetros dinámicos ha sido reportada en:

Khosla P., Kanade T., 1985, "Parameter identificacion of robot dynamics", Proceedings 24th IEEE Conference on Decision and Control, Fort Lauderdale FL, December.

Las propiedades 3.2 y 3.3 son demostradas en Spong, Vidyasagar (1989) y en:

Craig J.J., 1988. "Adaptive control of mechanical manipulators", Addison-Wesley, Reading MA.



4. CONTROL DE MOVIMIENTO DE ROBOTS MANIPULADORES

Los robots manipuladores industriales pueden ser clasificados según su aplicación en dos tipos. El primero es aquel en el cual el robot se desplaza libremente sin interacciones con el medio ambiente siguiendo una trayectoria de movimiento preestablecida en su espacio de trabajo. Tareas como el pintado y la soldadura pueden ser realizadas por esta clase de manipuladores. En la segunda categoría se encuentra aquellos robots destinados a interactuar con su medio ambiente, por ejemplo, aplicando una fuerza deseada sobre éste. Tareas como el pulido y el ensamblado de precisión son realizados por esta clase de manipuladores.

En el presente capítulo se abordará el problema de diseño de controladores de movimiento para robots manipuladores que se desplazan libremente en su espacio de trabajo sin interactuar con el medio ambiente.

Considérese el modelo dinámico de un robot manipulador de n grados de libertad con eslabones rígidos, sin fricción en sus uniones y con actuadores ideales:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (4.1)$$

donde $H(q)$ es la matriz de inercia de $n \times n$, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ es el vector de $n \times 1$ de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $g(q)$ es el vector de $n \times 1$ de pares gravitacionales y τ es un vector de $n \times 1$ de fuerzas y pares aplicados en las uniones. Los vectores de $n \times 1$: q , \dot{q} y \ddot{q} denotan la posición, velocidad y aceleración articular respectivamente.

El problema de control de movimiento de robots manipuladores puede ser formulado en los siguientes términos. Considérese la ecuación dinámica (4.1). Dado un conjunto de vectores acotados q_d , \dot{q}_d y \ddot{q}_d referidos como posiciones, velocidades y aceleraciones articulares deseadas, determinar un vector τ , función del tiempo, de tal forma que las posiciones q asociadas a las coordenadas articulares del robot sigan con precisión a q_d .

En términos más formales, el objetivo de control de movimiento consiste en determinar τ de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0 \quad (4.2)$$

donde \tilde{q} denota el vector de $n \times 1$ de errores en posiciones articulares, esto es, $\tilde{q}(t) = q_d(t) - q(t)$. Si el objetivo de control es verificado, significará que el robot manipulador se desplaza asintóticamente siguiendo la trayectoria de movimiento deseado.

Como caso particular del objetivo de control de movimiento se tiene el

objetivo de control de posición pura el cual formalmente consiste en determinar τ de tal forma que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d$$

donde q_d es un vector constante.

El cálculo del vector τ involucra generalmente una función vectorial no lineal de q , \dot{q} y \ddot{q} . Esta ecuación será denominada "ley de control" ó simplemente controlador. Genéricamente, el controlador puede expresarse como:

$$\tau = \tau(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, H(q))$$

Para fines prácticos, es deseable que el controlador no dependa de la aceleración articular \ddot{q} .

En un manipulador real el vector de pares τ es suministrado por actuadores que tradicionalmente son de tipo electromecánico o hidráulico. Dichos actuadores relacionan dinámicamente el par suministrado con la entrada de dicho actuador. Esta entrada puede ser un voltaje o corriente para el caso de actuadores electromecánicos y flujo o presión de aceite para actuadores hidráulicos. Ambos tipos de actuadores pueden ser bien modelados mediante ecuaciones dinámicas lineales de segundo orden. En el caso más común donde los n actuadores son motores de corriente directa, el modelo dinámico relacionando los n voltajes v_i aplicados a las armaduras con los n pares τ_i suministrados por dichos motores está dada por:

$$\text{diag}\{J_{m_i}\}\ddot{q} + \text{diag}\left\{f_{m_i} + \begin{pmatrix} K_a & K_b \\ R_a \end{pmatrix}_i\right\}\dot{q} + \frac{\tau_i}{r_i^2} = \begin{pmatrix} K_a \\ R_a \end{pmatrix}_i \frac{1}{r_i} v_i$$

o en forma compacta:

$$D_j \ddot{q} + D_f \dot{q} + D_n \tau = D_k v \quad (4.3)$$

con:

$$D_j = \text{diag}\{J_{m_i}\}$$

$$D_f = \text{diag}\left\{f_{m_i} + \begin{pmatrix} K_a & K_b \\ R_a \end{pmatrix}_i\right\}$$

$$D_n = \text{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ r_i^2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$D_K = \text{diag} \left\{ \left(\frac{K_a}{R_a} \right)_i, \frac{1}{r_i} \right\}$$

donde para cada motor ($i=1, \dots, n$), J_{mi} es la inercia del rotor, f_{mi} el coeficiente de amortiguamiento debido a la fricción, $(K_a K_b / R_a)_i$ es una constante electromecánica y r_i es la tasa de reducción del juego de engranes. En el apéndice A se obtiene la expresión correspondiente a un solo motor cuya extensión a n motores desacoplados dada por (4.3) es inmediata.

El modelo dinámico completo de un robot manipulador incorporando además de su propia dinámica (4.1) también la dinámica de los actuadores (4.3) puede obtenerse reemplazando τ de (4.1) en (4.3):

$$\left[D_n H(q) + D_j \right] \ddot{q} + D_n C(q, \dot{q}) \dot{q} + D_f \dot{q} + D_n g(q) = D_K v. \quad (4.4)$$

La ecuación robot-actuadores (4.4) se simplifica considerablemente cuando las relaciones de engranes r_i son suficientemente grandes. En dicho caso ($r \gg 1$), se tiene $D_n \approx 0$ y la ecuación (4.4) puede aproximarse por:

$$D_j \ddot{q} + D_f \dot{q} = D_K v \quad (4.5)$$

es decir, la dinámica no lineal del robot (4.1) puede ser despreciada. Lo anterior puede resumirse de la siguiente manera. Si la relación de reducción por el juego de engranes es elevada, entonces la dinámica asociada al modelo robot-actuadores es descrita solo por la dinámica de los actuadores. Nótese además que dicha ecuación dinámica (4.5) es lineal. Es importante resaltar que los parámetros involucrados en la ecuación (4.3) dependen exclusivamente de los actuadores y no del manipulador ni su carga. Entonces es razonable suponer conocidos y constantes dichos parámetros.

El problema de control de movimiento en estas condiciones, consiste en determinar v de tal forma que la ecuación (4.2) sea verificada. Se supondrá por simplicidad en lo que resta del capítulo que el modelo dinámico del manipulador no contempla la dinámica de los actuadores, es decir que está dado por la ecuación (4.1). Los resultados de estabilidad y convergencia que serán presentados en lo que resta del capítulo serán válidos para el caso donde se incorporan los actuadores al modelo del manipulador a condición de seleccionar v como:

$$v = D_K^{-1} D_n [\tau' + D_n^{-1} D_f \dot{q}]. \quad (4.6)$$

con $\tau' = \tau(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, H(q) + D_n^{-1} D_j)$. Finalmente, es importante recordar que los robots manipuladores están dotados con captadores de posición y velocidad para cada articulación por lo que los vectores q y \dot{q} son medibles y pueden ser empleados en los controladores.

El resto del capítulo se divide en dos partes. Primeramente será presentado un conjunto de controladores denominados convencionales. Los controladores considerados son:

- .Control Proporcional
- .Control Proporcional más compensación de gravedad
- .Control PD +
- .Control PD más compensación
- .Control par-calculado
- .Control par-calculado +.

En la segunda parte son descritos dos controladores de los denominados adaptables:

- .Control Proporcional-Derivativo con compensación adaptable
- .Control adaptable par-calculado +.

4.1 CONTROLADORES CONVENCIONALES

En esta sección se presentan los controladores clásicos empleados en el control de movimiento de robots manipuladores.

4.1.1 CONTROL PROPORCIONAL

El Control Proporcional o Control P es el controlador más sencillo que puede ser empleado en el control de robots manipuladores. La aplicación de esta estrategia de control es común en el control de posición angular de motores de corriente directa. En esta aplicación, también se le conoce con el nombre de control por realimentación tacométrica. La ecuación del controlador P está dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} \quad (4.1.1.1)$$

donde K_p y K_v son matrices de $n \times n$ definidas positivas denominadas la ganancia de posición y de velocidad respectivamente. El control P dado por la ecuación (4.1.1.1) es llamado erróneamente en la literatura como control PD. En general, el control P es local en el sentido que el par o fuerza a aplicar en una articulación sólo depende de su posición y velocidad y no de las demás articulaciones. Esto se traduce por una selección diagonal de K_p y K_v .

El controlador P dado por la ecuación (4.1.1.1) requiere de la medición de las posiciones q y velocidades \dot{q} así como de la posición articular deseada q_d (véase la figura 4.1). Nótese que no es necesario especificar la velocidad y aceleración deseadas: \dot{q}_d y \ddot{q}_d .

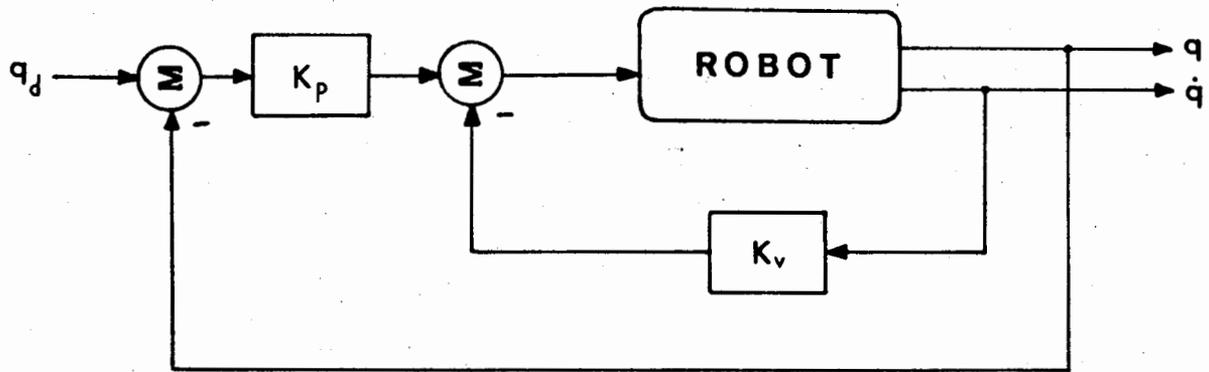


Figura 4.1

Ejemplo 4.1. Un modelo simplificado lineal de un motor de corriente directa está dado por (véase apéndice A):

$$\ddot{q} + \frac{1}{\tau} \dot{q} = \frac{K}{\tau} v \quad (4.1.1.2)$$

donde q es la posición angular del eje del motor, v es el voltaje aplicado a la armadura y τ, K son constantes electromecánicas positivas asociados al motor. El control P en este ejemplo se reduce a:

$$v = k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} \quad (4.1.1.3)$$

donde k_p y k_v son constantes escalares positivas y $\tilde{q} = q_d - q$. El comportamiento global del sistema de control es regido por la ecuación:

$$\ddot{q} + \frac{1}{\tau}(Kk_v + 1)\dot{q} + \frac{K}{\tau}k_p q = \frac{K}{\tau}k_p q_d \quad (4.1.1.4)$$

obtenida al sustituir v de la ecuación (4.1.1.3) en la ecuación (4.1.1.2). La ganancia estática de la función de transferencia estable asociada a la ecuación diferencial lineal (4.1.1.4) es igual a la unidad. Esto significa que si q_d es una constante entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d \quad (4.1.1.5)$$

Es importante recalcar que el cumplimiento del objetivo de control (4.1.1.5) no podrá garantizarse para función $q_d(t)$ variantes en el tiempo.

El control P dado por (4.1.1.3) fue realizado mediante electrónica analógica

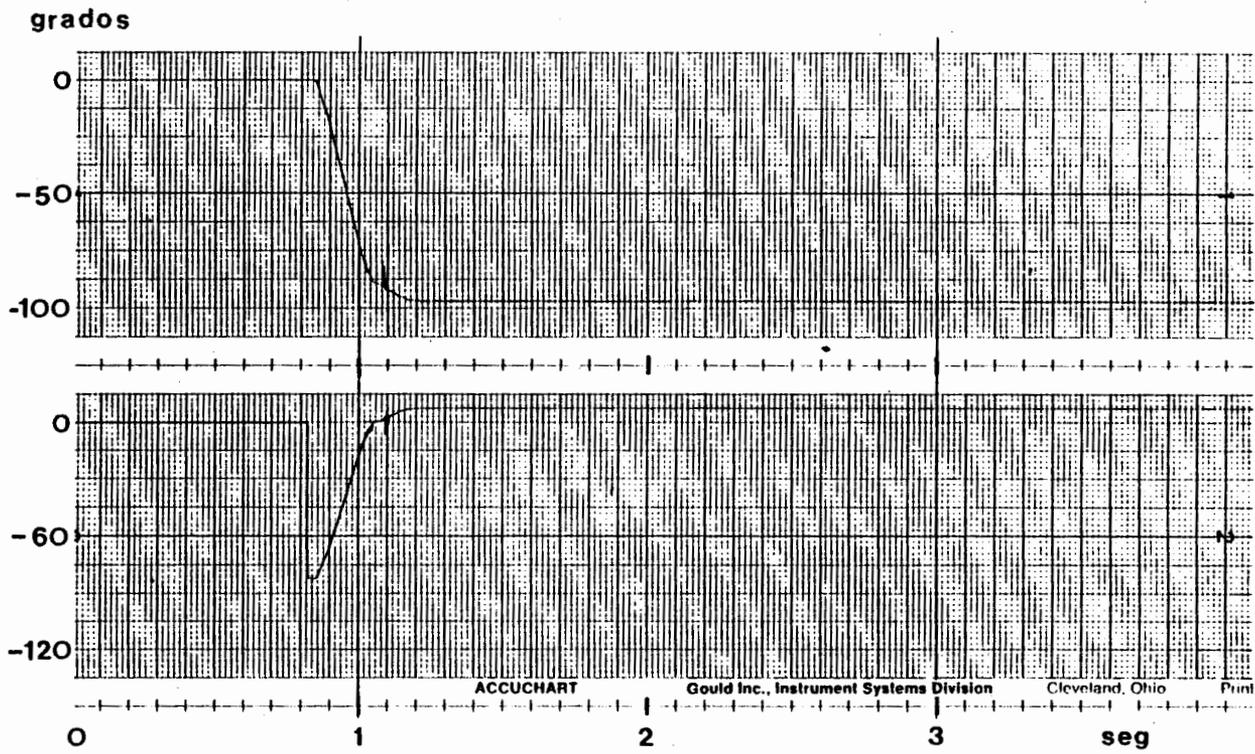


Figura 4.2

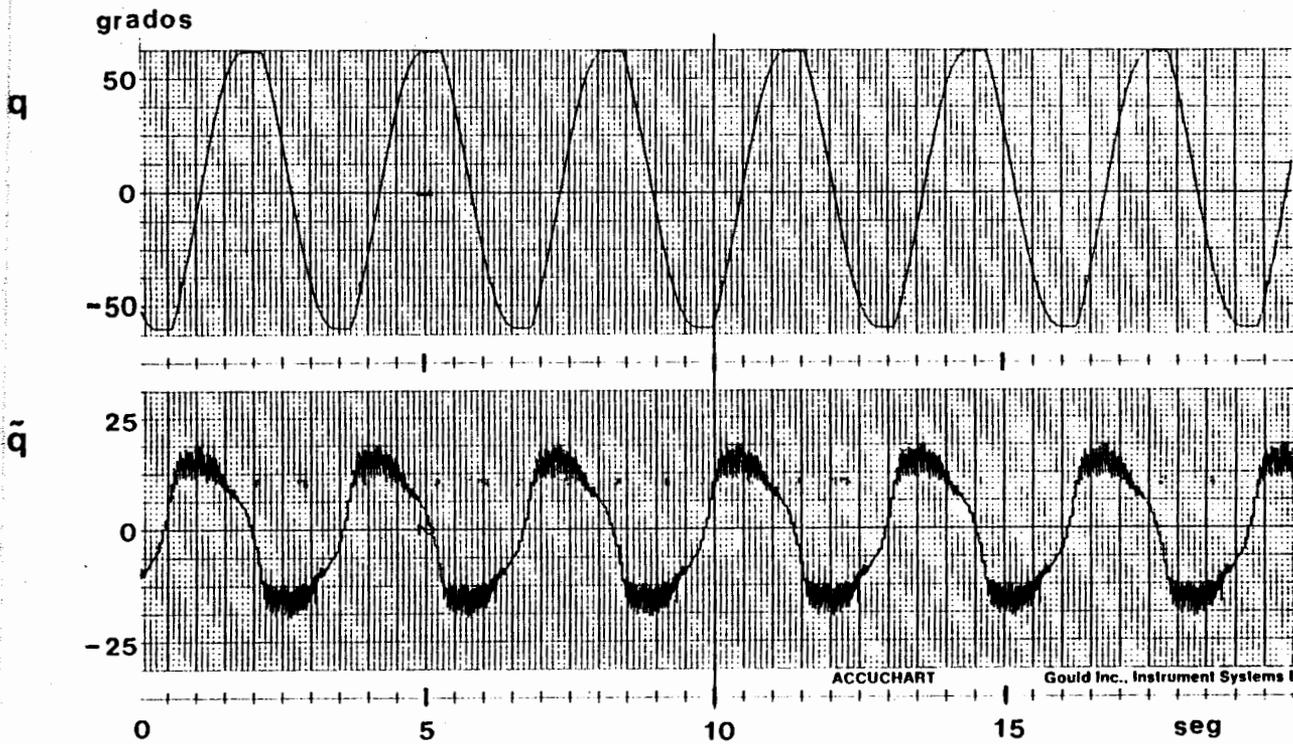


Figura 4.3

y experimentado en un motor de laboratorio. La figura 4.2 muestra los resultados experimentales obtenidos para q_d constante ($q_d = -100^\circ$). Nótese que la posición angular tiende asintóticamente a un valor constante el cual difiere ligeramente del valor deseado. En el caso de q_d variante con el tiempo, en particular $q_d = 60^\circ \sin(2\pi t/3)$, los resultados experimentales se muestran en la figura 4.3. Puede observarse en este experimento una considerable discrepancia entre las posiciones angulares reales y deseadas.

□□□

El controlador P (4.1.1.1) puede emplearse para el control de posición puro, esto es, para posiciones angulares deseadas q_d constantes, de un conjunto de n motores CD desacoplados modelados en forma lineal. Esta es la principal razón argumentada para su empleo en prototipos de robots manipuladores.

Cabe apuntar sin embargo, que los motores empleados en dichos manipuladores se encuentran en realidad sometidos a una serie de acoplamientos entre ellos los cuales repercuten en pares de perturbaciones debido a los cambios de inercia y gravitacionales dependientes de la posición del manipulador a cada instante. Esto último incluso para velocidades pequeñas. El efecto debido al par perturbador de gravedad es crítico incluso en manipuladores de 1 grado de libertad. La anterior se muestra claramente en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2. Consideren el siguiente modelo de un péndulo sometido a la acción de la gravedad:

$$\ddot{q} + \text{sen } q = \tau \quad (4.1.1.6)$$

donde τ es el par aplicado en la unión. El control P para este ejemplo, como para el ejemplo anterior es:

$$\tau = k_p \tilde{q} - k_v \dot{\tilde{q}} \quad (4.1.1.7)$$

donde k_p y k_v son constantes escalares positivas y $\tilde{q} = q_d - q$. El objetivo de control es posicionar el brazo a un cierto ángulo constante q_d . Para proceder al análisis del sistema no-lineal descrito por (4.1.1.6) y (4.1.1.7) obsérvese primeramente que la energía potencial asociada al péndulo (4.1.1.6) es simplemente:

$$U(q) = 1 - \cos q \geq 0 \quad (4.1.1.8)$$

cuya derivada temporal es:

$$\frac{d}{dt} U(q) = \frac{\partial U}{\partial q} \dot{q} = \text{sen } q \dot{q}$$

de donde $dU(q) = \text{sen } q \dot{q} dt$. Integrando esta expresión:

$$\int_{U(q(0))}^{U(q(t))} dU(q) = \int_0^t \text{sen}q \dot{q} dt$$

se obtiene:

$$U(q(t)) - U(q(0)) = \int_0^t \text{sen}q \dot{q} dt. \quad (4.1.1.9)$$

Debido a que la energía potencial $U(q(t))$ (4.1.1.8) es siempre no-negativa, entonces de (4.1.1.9) se obtiene:

$$-U(q(0)) \leq \int_0^t \text{sen}q \dot{q} dt \leq U(q(t))$$

deduciéndose la siguiente expresión importante:

$$\int_0^t \text{sen}q \dot{q} dt + U(q(0)) \geq 0. \quad (4.1.1.10)$$

Prosiguiendo con el análisis, considérese ahora la siguiente función escalar no-negativa:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}k_p \tilde{q}^2 + \int_0^t \text{sen}q \dot{q} dt + U(q(0)) \geq 0. \quad (4.1.1.11)$$

donde se ha hecho uso de (4.1.1.10) para garantizar la no-negatividad de $V(t, \tilde{q}, \dot{q})$. Derivando V con respecto a t :

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}\ddot{q} + K_p \tilde{q}\dot{\tilde{q}} + \text{sen}q \dot{q}$$

y reemplazando \ddot{q} de (4.1.1.6) y τ de (4.1.1.7) en la expresión anterior:

$$\dot{V} = -k_v \dot{q}^2 + k_p \tilde{q}\dot{q} + k_p \tilde{q}\dot{q}. \quad (4.1.1.12)$$

Nótese sin embargo que como $\tilde{q} = q_d - q$ y empleando el supuesto de q_d constante, entonces $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$. Esto último simplifica (4.1.1.12) a:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{q}) = -k_v \dot{q}^2 \leq 0. \quad (4.1.1.13)$$

Las expresiones (4.1.1.11) y (4.1.1.13) implica que V es una función no-negativa y además no-creciente, es decir $0 \leq V(t_2, \tilde{q}, \dot{q}) \leq V(t_1, \tilde{q}, \dot{q})$ para $t_2 \geq t_1 \geq 0$. De esto último y la definición (4.1.1.11) se concluye:

$$\dot{q}, \tilde{q}, \int_0^t \text{sen} q \dot{q} dt \in L_\infty. \quad (4.1.1.14)$$

Además, integrando (4.1.1.13) entre 0 y T :

$$\int_{V(0)}^{V(T)} dV = \int_0^T -k_v \dot{q}^2 dt$$

se obtiene:

$$V(T) - V(0) = -k_v \int_0^T \dot{q}^2 dt = -k_v \|\dot{q}\|_{2,T}^2. \quad (4.1.1.15)$$

Como $V(0) \leq V(T)$, entonces de (4.1.1.15):

$$\|\dot{q}\|_{2,T}^2 \leq \frac{V(0)}{k_v}$$

es decir:

$$\dot{q} \in L_2. \quad (4.1.1.16)$$

Por otro lado, despejando \ddot{q} de (4.1.1.6) y substituyendo (4.1.1.7) se obtiene:

$$\ddot{q} = -\text{sen} q + k_p \tilde{q} - k_v \dot{q} \quad (4.1.1.17)$$

la cual en vista de (4.1.1.14) asegura que $\ddot{q} \in L_\infty$. Esto último y (4.1.1.16) implican en razón del lema 2.1:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0. \quad (4.1.1.18)$$

Es importante subrayar que el limite anterior no garantiza que $q(t) \rightarrow q_d$, mas aún, ni siquiera que $q(t) \rightarrow \text{constante}$.

Continuando con el análisis, de (4.1.1.17) y (4.1.1.18) se tiene que

$$\ddot{q} \rightarrow -\sin q + k_p (q_d - q) \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.1.1.19)$$

Sabiendo que $\dot{q}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $q(t) \rightarrow \text{constante}$, entonces dicha constante deberá ser solución de

$$\sin q + k_p q = k_p q_d \quad (4.1.1.20)$$

la cual puede tener más de una solución. Esto se muestra en la figura 4.4 donde se tomo $k_p = 0.25$, $k_v = 1$ y $q_d = \pi/2$. Tres soluciones de (4.1.1.20) para q se aprecian en la figura 4.4 : $q_1 \approx 0.34$, $q_2 \approx 3.65$ y $q_3 \approx 5.34$.

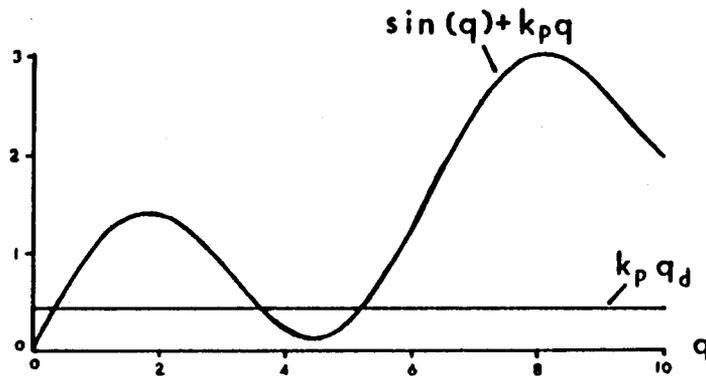


Figura 4.4

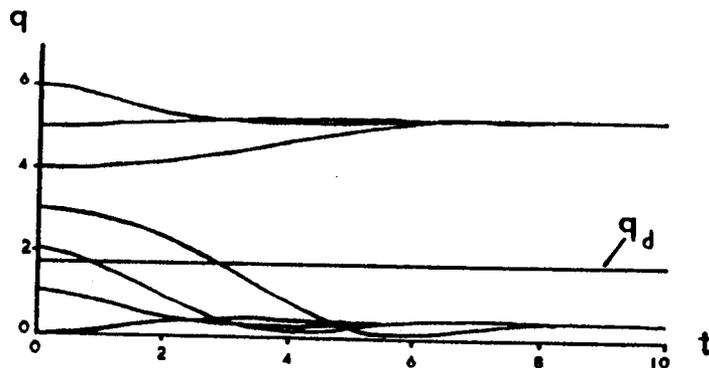


Figura 4.5

Ninguna de ellas corresponde al valor de $q_d = \pi/2$ lo cual significa que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) \neq 0. \quad (4.1.1.21)$$

Finalmente la figura 4.5 muestra los resultados obtenidos en la simulación del sistema (4.1.1.6) y (4.1.1.7) con los valores numéricos de los parámetros citados anteriormente. Nótese que para las diferentes condiciones iniciales, $q(0)$, el péndulo se desplaza a los puntos q_1 y q_3 los cuales difieren de la posición deseada q_d .

□□□

Una posible solución al problema anterior es el empleo de engranes de reducción. En efecto, en este caso la expresión (4.1.1.20) sería:

$$\frac{1}{r^2} \text{sen} q + k_p q = k_p q_d \quad (4.1.1.22)$$

donde $r(\gg 1)$ representa la relación de engranes. La solución de (4.1.1.22) para q pudieron ser múltiples pero justificadas del hecho que todas serían cercanas a q_d . Sin embargo, esto último pudiera ser la causa de eventuales oscilaciones de alta frecuencia en particular en el caso de ruido de medida o falta de precisión en la medición de q .

El ejemplo anterior pone de manifiesto la desventaja del empleo de controladores P en el control de posición puro de manipuladores robóticos en particular los de transmisión directa.

Enseguida se presenta el análisis para el caso de control P de robots manipuladores de n g.d.l.

El comportamiento en malla cerrada de un robot de n g.d.l. con control P se obtiene combinando el modelo (4.1) con la ley de control (4.1.1.1):

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} \quad (4.1.1.23)$$

o equivalentemente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\tilde{q}} \\ H(q_d - \tilde{q})^{-1} \left[K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})\dot{\tilde{q}} - g(q_d - \tilde{q}) \right] \end{bmatrix}$$

la cual es una ecuación diferencial autónoma debido a que q_d es constante.

En este punto es importante recordar que el vector de pares gravitacionales

$g(q)$ se relaciona con la energía potencial $U(q)$ del manipulador mediante:

$$\frac{\partial U(q)}{\partial q} = g(q). \quad (4.1.1.24)$$

La derivada de $U(q)$ con respecto al tiempo es entonces:

$$\frac{d}{dt} U(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \dot{q} = g^T(q) \dot{q} = \dot{q}^T g(q) \quad (4.1.1.25)$$

e integrando $dU(q)$:

$$\int_{U(q(0))}^{U(q(t))} dU(q) = \int_0^t \dot{q}^T g(q) dt$$

se obtiene

$$U(q(t)) - U(q(0)) = \int_0^t \dot{q}^T g(q) dt. \quad (4.1.1.26)$$

Como la energía potencial $U(q)$ es una función escalar no-negativa entonces:

$$-U(q(0)) \leq \int_0^t \dot{q}^T g(q) dt \leq U(q(t))$$

de donde se obtiene la siguiente importante desigualdad:

$$\int_0^t \dot{q}^T g(q) dt + U(q(0)) \geq 0. \quad (4.1.1.27)$$

El análisis de la ecuación de malla cerrada (4.1.1.23) se realiza enseguida. Haciendo uso de la desigualdad (4.1.1.27) se define la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \int_0^t \dot{q}^T g(q) dt + U(q(0)) \geq 0 \quad (4.1.1.28)$$

Nótese que $V(t, \tilde{q}, \dot{q})$ definida anteriormente es una función definida positiva de acuerdo al lema 2.3 ya que $V(t, \tilde{q}, \dot{q}) \geq W(\tilde{q}, \dot{q}) \forall t \geq 0$ donde $W(\tilde{q}, \dot{q})$ es la función definida positiva:

$$W(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q_d - \tilde{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q}.$$

La derivada temporal de V es:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T H(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H}(q) \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} + \dot{q}^T g(q). \quad (4.1.1.29)$$

Despejando $H(q)\ddot{q}$ de (4.1.1.23) y reemplazando en (4.1.1.29):

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T K_p \tilde{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}} \quad (4.1.1.30)$$

donde el término $\dot{q}^T \left(\frac{1}{2} \dot{H} - C \right) \dot{q}$ ha sido eliminado en virtud de la propiedad

3.3. Recordando que el vector q_d es constante y que $\tilde{q} = q_d - q$, entonces $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$. Incorporando esto, la ecuación (4.1.1.30) se reduce a:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0. \quad (4.1.1.31)$$

De (4.1.1.28), (4.1.1.31) y el teorema 2.1 se concluye estabilidad del origen $[\tilde{q} \ \dot{q}] = 0$. Además:

$$0 \leq V(t, \tilde{q}, \dot{q}) \leq V(0, \tilde{q}, \dot{q}) \quad (4.1.1.32)$$

y en consecuencia que:

$$\dot{q}, \tilde{q}, \int_0^t \dot{q}^T g(q) dt \in L_\infty^n. \quad (4.1.1.33)$$

Adicionalmente, integrando (4.1.1.31):

$$\int_{V(0)}^{V(T)} dV = - \int_0^T \dot{q}^T K_v \dot{q} dt.$$

donde por simplicidad de notación $V(T) = V(T, \tilde{q}, \dot{q})$. Además:

$$\int_0^T \dot{q}^T K_v \dot{q} dt \leq V(0) \quad (4.1.1.34)$$

ya que $V(T) \geq V(0)$. Recordando que $x^T K_v x \geq \lambda_{\min}(K_v) \|x\|^2$, entonces (4.1.1.35) implica

$$\|\dot{q}\|_{2,T}^2 \leq \frac{V(0)}{\lambda_{\min}(K_v)}$$

$$\dot{q} \in L_2^n. \quad (4.1.1.35)$$

Por otro lado, de (4.1.1.23) se obtiene:

$$\ddot{q} = H^{-1}(q) [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)]. \quad (4.1.1.36)$$

Como \dot{q} y \tilde{q} son vectores acotados (4.1.1.33) y $H^{-1}(q)$ es una matriz acotada en virtud de la propiedad 3.2, entonces de (4.1.1.36) se concluye:

$$\ddot{q} \in L_\infty.$$

Esto último y (4.1.1.35) implican a su vez (lema 2.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0. \quad (4.1.1.37)$$

Es importante subrayar que el límite anterior no garantiza que $q(t) \rightarrow q_d$, más aun, ni siquiera que $q(t) \rightarrow$ constante.

Continuando con el análisis, de (4.1.1.36) y (4.1.1.37) se tiene que:

$$\ddot{q} \rightarrow H(q)^{-1} [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)] \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (4.1.1.38)$$

Sabiendo que $\dot{\tilde{q}}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, si $\tilde{q}(t) \rightarrow$ constante, entonces dicho vector constante deberá ser solución de:

$$K_p q - g(q) = K_p q_d. \quad (4.1.1.39)$$

La ecuación anterior puede sin embargo tener más de una solución de las cuales ninguna será el vector q_d a menos que $g(q) = 0$.

4.1.2 CONTROL PROPORCIONAL MAS COMPENSACION DE GRAVEDAD.

El control proporcional (4.1.1.6) adolece de buen desempeño en el control de posición pura para manipuladores de n g.d.l., debido a la presencia en el modelo del término gravitacional $g(q)$. Esto último motiva la introducción

de un término de compensación adicional al controlador P. Dicho controlador P más compensación de gravedad esta dado por:

$$\tau = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q) \quad (4.1.2.1)$$

cuya única diferencia respecto al control P (4.1.1.1) es el término aditivo $g(q)$. A diferencia con el control P, el cual no requiere conocimiento alguno sobre la estructura del modelo del robot, el control (4.1.2.1) hace uso explícito del conocimiento parcial del modelo del manipulador, específicamente de $g(q)$. Este último término varía por supuesto de un manipulador a otro.

El control (4.1.2.1) requiere información sobre la posición deseada $q_d(t)$ así como medición de la posición $q(t)$ y velocidad $\dot{q}(t)$ a cada instante (vease la figura 4.6). Las matrices K_p y K_v son seleccionadas diagonales y definidas positivas. Como se demostrará en los párrafos siguientes, este controlador verifica el objetivo de posición pura, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d$$

donde q_d es un vector constante.

El análisis del sistema en malla cerrada sigue los pasos empleados para el análisis con el control P de la sección anterior. La ecuación que describe

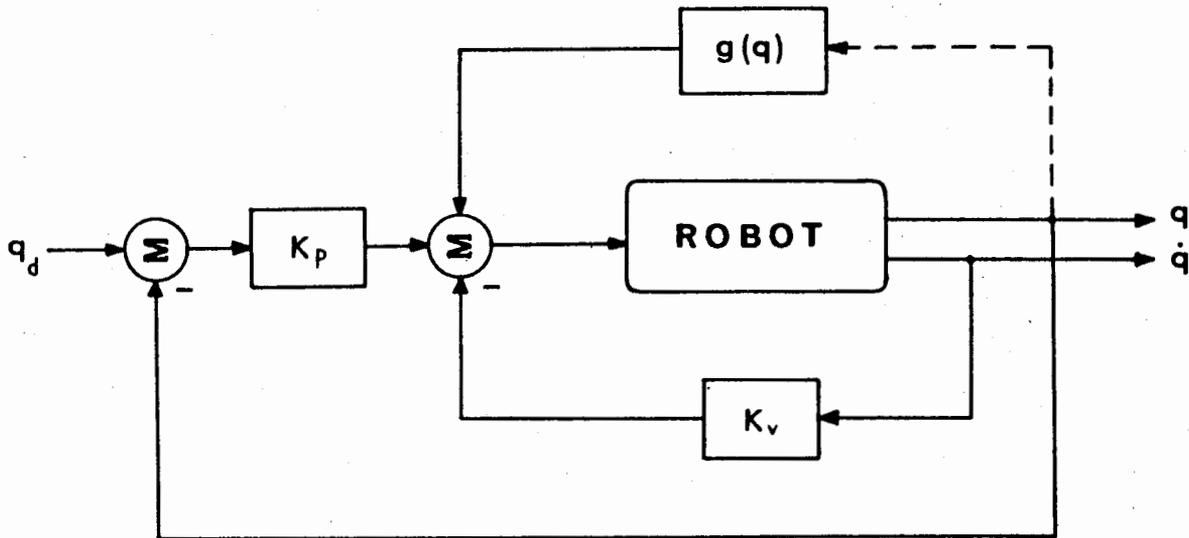


Figura 4.6

el comportamiento en malla cerrada se obtiene al combinar las ecuaciones (4.1) y (4.1.2.1):

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q). \quad (4.1.2.2)$$

Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\tilde{q}, \dot{q}) = \frac{1}{2} \tilde{q}^T H(q_d - \tilde{q}) \dot{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \geq 0 \quad (4.1.2.3)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = \dot{q}^T H(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{H}(q) \dot{q} + \tilde{q}^T K_p \dot{q} \quad (4.1.2.4)$$

la cual al reemplazar $H(q)\ddot{q}$ de (4.1.2.2) se simplifica a:

$$\dot{V}(\tilde{q}, \dot{q}) = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0 \quad (4.1.2.5)$$

donde se ha eliminado el término $\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{H} - C \right] \dot{q}$ en virtud de la propiedad 3.3 y se ha hecho uso de $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ ya que q_d es supuesto un vector constante.

La función V es entonces una función de Lyapunov en vista de que $-\dot{V} \leq 0$ y en consecuencia el origen es estable (teorema 2.1).

Nótese además que la ecuación de malla cerrada (4.1.2.2) puede expresarse en términos del estado $[\tilde{q}, \dot{q}]$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{q} \\ H(q_d - \tilde{q})^{-1} [K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}) \dot{q}] \end{bmatrix} \quad (4.1.2.6)$$

la cual en razón de q_d constante representa una ecuación diferencial autónoma. La aplicación del teorema de LaSalle (teorema 2.4) para analizar la estabilidad asintótica global del origen puede ser explorada.

El conjunto $\Omega = \{s \in \mathbb{R}^{2n} \mid \dot{V}(s) = 0\}$ es en este caso:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{R}^{2n} \mid [\tilde{q} \ 0], \quad \forall \tilde{q} \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.1.2.7)$$

Por consiguiente $\dot{s} = f(s)$ es simplemente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ H(q_d - \tilde{q})^{-1} K_p \tilde{q} \end{bmatrix} \quad (4.1.2.8)$$

cuya única solución es $\tilde{q}=0$. Entonces, la sola solución de $\dot{s}=f(s)$ es $s=[\tilde{q} \ 0]=0$. Del enunciado del teorema de LaSalle, esto basta para garantizar estabilidad asintótica global del origen y en consecuencia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0 \quad (4.1.2.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0 \quad (4.1.2.10)$$

es decir, que el objetivo de posición pura es verificado.

Para fines prácticos un controlador P con compensación de gravedad más conveniente es el siguiente:

$$\tau = K_p \tilde{q} - k_v \dot{q} + g(q_d). \quad (4.1.2.11)$$

Nótese que la sola diferencia con el controlador (4.1.2.1) es que el término $g(q_d)$ reemplaza a $g(q)$ (véase la figura 4.7). La conveniencia reside en que el vector $g(q_d)$, el cual es constante para toda q_d constante, sólo se calcula una sola vez para un q_d deseado.

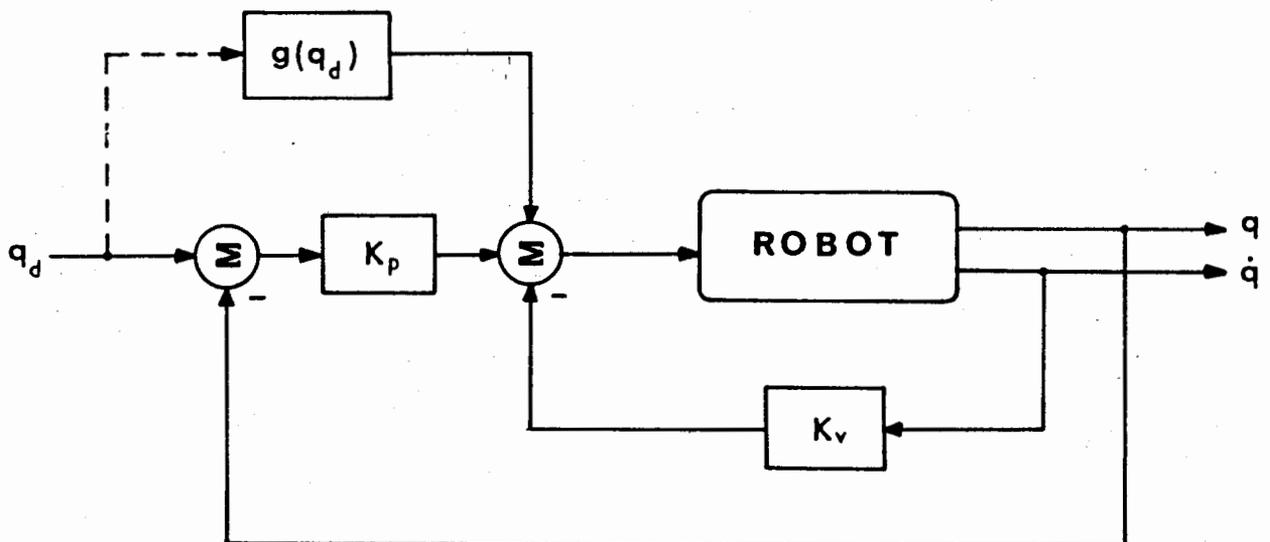


Figura 4.7

La ecuación de malla cerrada se obtiene combinando (4.1) y (4.1.2.11):

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} + g(q_d). \quad (4.1.2.12)$$

Antes de proceder con el análisis es conveniente en este punto presentar el siguiente resultado:

Lema 4.1. Dada una matriz constante $Q = Q^T \succ 0$ ($Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$) y vector $g \in \mathbb{R}^n$, existe un escalar real c^* tal que para $c \in [c^*, \infty)$:

$$x^T Q x + g^T x + c \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

donde $c^* = \frac{(\max_i |g_i|)^2}{4\lambda_{\min}(Q)}$ y g_i denota el i -ésimo componente de g .

VVV

Demostracion. Considérese la siguiente ecuación algebraica de segundo orden:

$$V(x_1) = \lambda_{\min}(Q)x_1^2 + g_1 x_1 + \frac{\bar{g}^2}{4\lambda_{\min}(Q)} \quad (4.1.2.13)$$

donde $x_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda_{\min}(Q) > 0$, g_1 es una constante real acotada para cada $i=1, \dots, n$ y $\bar{g} = \max_i |g_i|$. El valor mínimo de $V(x_1)$ ocurre en el punto de inflexión:

$$x_1 = -\frac{g_1}{2\lambda_{\min}(Q)}$$

esto es:

$$V(x_1) \Big|_{x_1 = -\frac{g_1}{2\lambda_{\min}(Q)}} = -\frac{g_1^2}{4\lambda_{\min}(Q)} + \frac{\bar{g}^2}{4\lambda_{\min}(Q)}. \quad (4.1.2.14)$$

De la definición de \bar{g} y la expresión anterior se concluye que $V(x_1) \geq 0$ para $i=1, \dots, n$. En consecuencia también es cierto que

$$\sum_{i=1}^n V(x_i) = \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{\min}(Q) x_i^2 + g_i x_i + \frac{\bar{g}^2}{4\lambda_{\min}(Q)} \right] \geq 0$$

$$= \lambda_{\min}(Q) \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n g_i x_i + \frac{\bar{g}}{4\lambda_{\min}(Q)} \geq 0.$$

La desigualdad anterior puede escribirse en términos de los vectores x y g como:

$$\lambda_{\min}(Q) x^T x + g^T x + \frac{\bar{g}}{4\lambda_{\min}(Q)} \geq 0.$$

Finalmente como $x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) x^T x$ se obtiene:

$$x^T Q x + g^T x + \frac{\bar{g}}{4\lambda_{\min}(Q)} \geq 0$$

donde se identifica el escalar c^* enunciado en el lema. □□□

En este punto se retoma el análisis de (4.1.2.12). Para ello considérese la siguiente función no-negativa.

$$V(t) = \frac{1}{2} \tilde{q}^T H(q) \dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + g^T(q_d) \tilde{q} + c + \int_0^t \dot{\tilde{q}}^T g(q) dt +$$

$$+ U(q(0)) \geq 0$$

(4.1.2.15)

donde el escalar positivo c es tal que:

$$\frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + g^T(q_d) \tilde{q} + c \geq 0.$$

Claramente del lema 4.1 basta con que:

$$c = \frac{(\max |g_1(q_d)|)^2}{4 \lambda_{\min} K_p}$$

Ahora derivando $V(t)$, (4.1.2.15) con respecto al tiempo y reemplazando $H(q)\ddot{q}$ de (4.1.2.12), resulta después de simplificar:

$$V(t) = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0 \quad (4.1.2.16)$$

donde se ha hecho uso de la propiedad 3.3 para eliminar $\dot{q}^T \left[\frac{1}{2} \dot{H} - C \right] \dot{q}$ y que $\dot{g}(q_d) = 0$. De $V(t)$ (4.1.2.15) y $\dot{V}(t)$ (4.1.2.16) y el lema 2.2 se concluye que:

$$\dot{q}, \tilde{q} \in L_\infty^n \quad (4.1.2.17)$$

$$\dot{q} \in L_2^n \quad (4.1.2.18)$$

Además, nótese de (4.1.2.12) que:

$$\ddot{q} = H(q)^{-1} \left[K_p \tilde{q} - K_v \dot{q} + g(q_d) - g(q) - C(q, \dot{q}) \dot{q} \right]$$

de donde $\ddot{q} \in L_\infty^n$. Esto último, $\dot{q} \in L_2^n$ (4.1.2.18) y lema 2.1 permiten concluir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}(t) = 0. \quad (4.1.2.19)$$

Si $q(t) \rightarrow$ constante, entonces esta deberá ser solución de:

$$K_p \tilde{q} = g(q) - g(q_d). \quad (4.1.2.20)$$

En general, ésta última ecuación pudiera tener múltiples soluciones. Sin embargo siempre existirá la solución $q = q_d$. En forma rigurosa puede demostrarse mediante el teorema de LaSalle que efectivamente el equilibrio $[\tilde{q}, \dot{q}] = 0$ es asintóticamente estable (localmente).

4.1.3 CONTROL PD+

El control Proporcional-Derivativo (PD) es una extensión inmediata del control P. La ley de control PD esta dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} \quad (4.1.3.1)$$

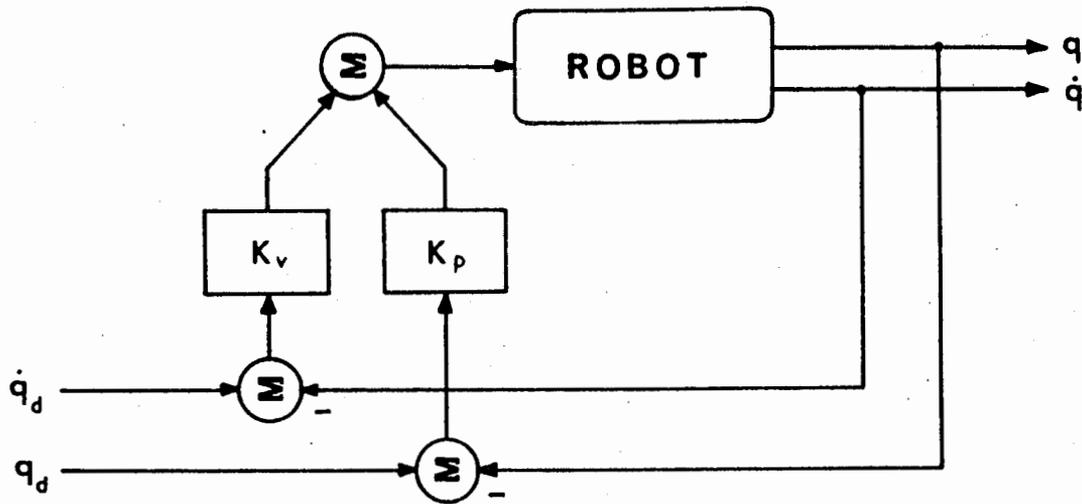


Figura 4.8

donde $\tilde{q} = q_d - q$ y K_p , K_v son matrices simétricas definidas positivas (véase la figura 4.8). Nótese que si q_d es un vector constante, entonces $\dot{\tilde{q}} = -\dot{q}$ y las expresiones (4.1.3.1) y (4.1.1.1) son idénticas. Esta última es la razón por la cual erróneamente se denomina control PD al descrito por la ecuación (4.1.1.1). El control PD (4.1.3.1) adolece en consecuencia de las mismas limitaciones que el control P.

Ejemplo 4.3. El controlador PD dado por la ecuación (4.1.3.1) fue realizado con electrónica analógica y experimentado en un motor de laboratorio. Para el caso de q_d constante ($q_d = -100^\circ$) los resultados experimentales son mostrados en la figura 4.9. Puede observarse que el error de posición tiende asintóticamente a una constante cercana a cero. Los resultados experimentales correspondientes a $q_d = 60^\circ \sin(2\pi t/3)$ son mostrados en la figura 4.10. Comparando dichos resultados con los obtenidos al emplear el control P (figura 4.3) se aprecia una mejora en el comportamiento del error de posición.

□□□

Con miras a resolver el problema de control de movimiento, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0 \quad (4.1.3.2)$$

para $q_d(t)$ no solamente constante sino variante con el tiempo, se propone el controlador denominado PD+ esta dado por:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + H(q) \ddot{q}_d + C(q, \dot{q}) \dot{q}_d + g(q). \quad (4.1.3.3)$$

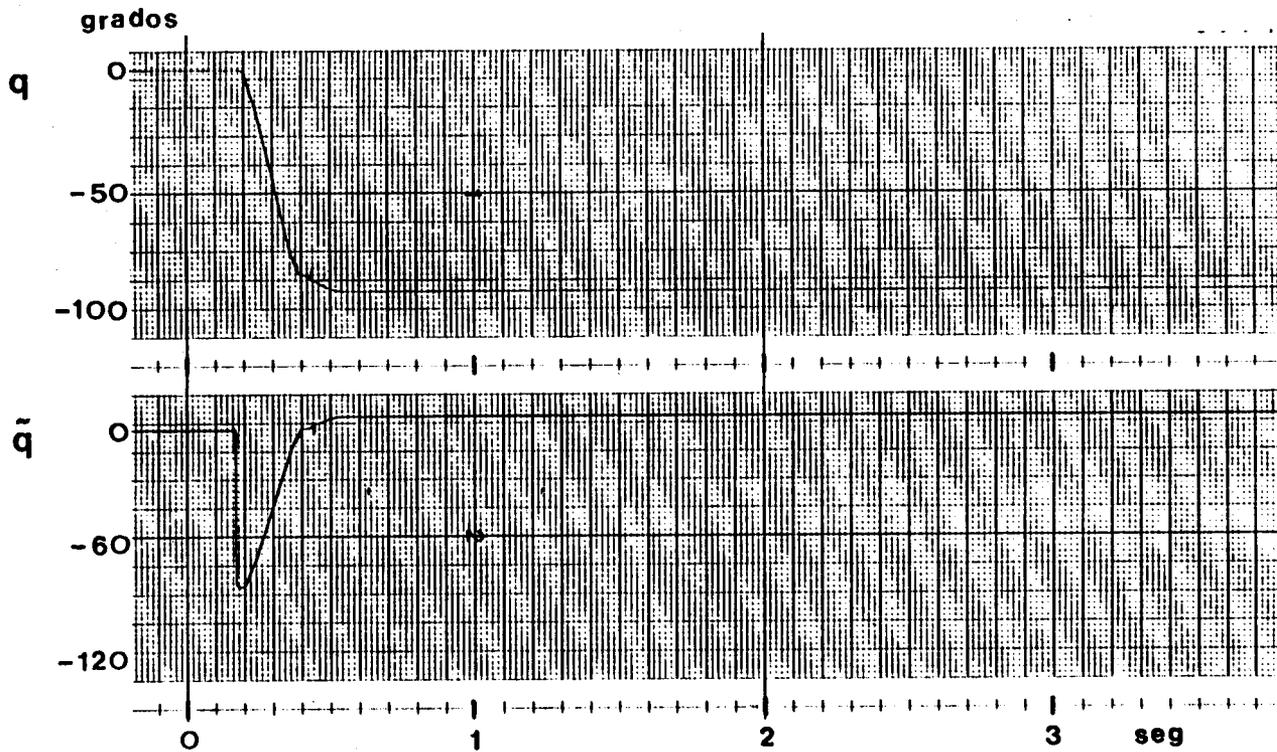


Figura 4.9

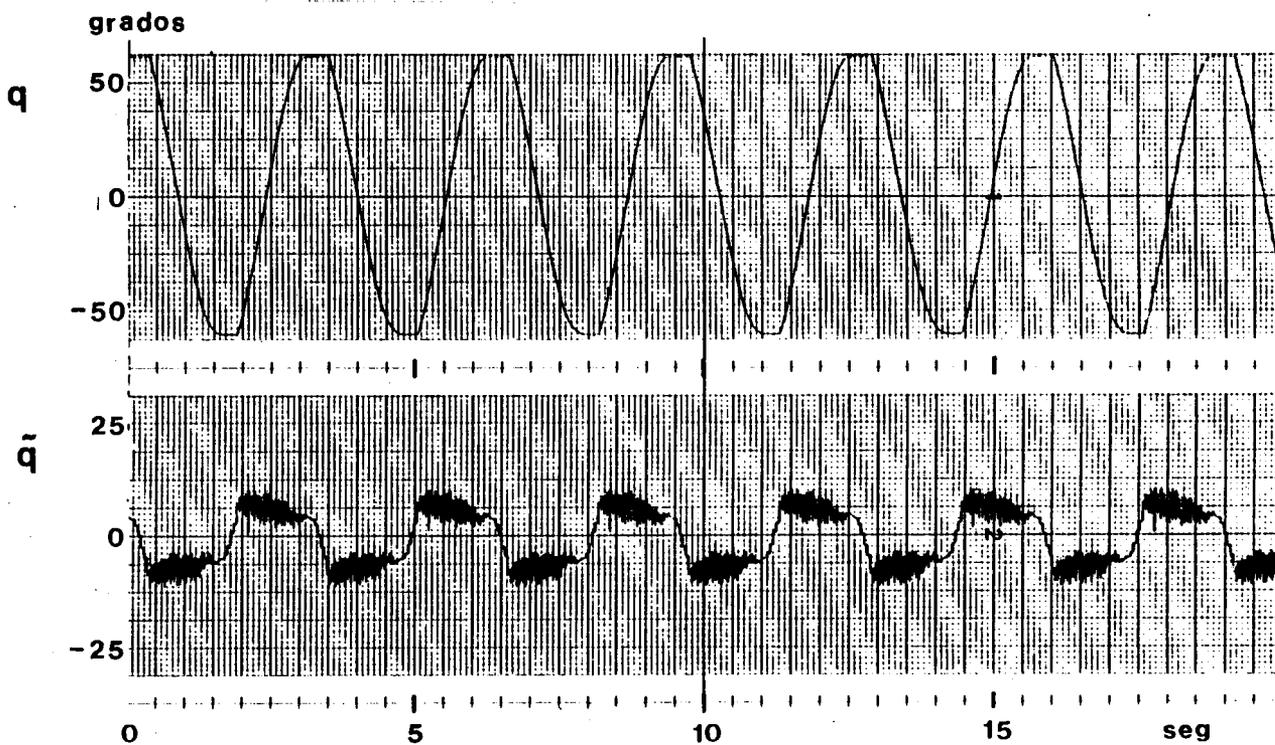


Figura 4.10

La realización práctica del control PD+ (4.1.3.3) requiere el conocimiento exacto del modelo del manipulador, esto es, de $H(q)$, $C(q, \dot{q})\dot{q}$ y $g(q)$. Adicionalmente es necesario disponer de las trayectorias deseadas $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ así como las mediciones $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ (véase la figura 4.11). Nótese que en el caso particular de control de posición, esto es $\dot{q}_d = \ddot{q}_d = 0$, el control (4.1.3.3) es equivalente a (4.1.2.1).

La ecuación que gobierna el comportamiento en malla cerrada se obtiene reemplazando τ de (4.1.3.3) en (4.1):

$$H(q)\ddot{\tilde{q}} + C(q, \dot{q})\dot{\tilde{q}} = -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} \quad (4.1.3.4)$$

Nótese que la ecuación de malla cerrada (4.1.3.4) puede expresarse en términos del estado $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}]$ como:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ H(q_d - \tilde{q})^{-1} [-K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}) (\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}})] \end{bmatrix}$$

la cual sin embargo no es una ecuación diferencial autónoma debido a que depende explícitamente de las funciones del tiempo $q_d(t)$ y $\dot{q}_d(t)$.

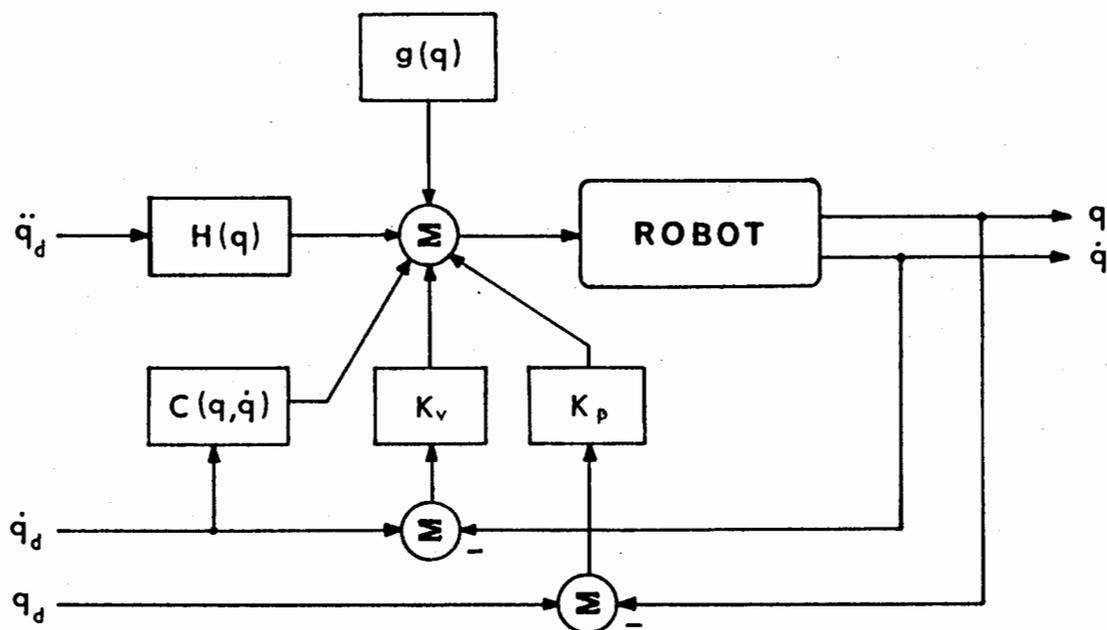


Figura 4.11

Considérese ahora la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \tilde{q}^T H(q_d - \tilde{q}) \tilde{q} + \frac{1}{2} \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \geq 0. \quad (4.1.3.5)$$

Derivando (4.1.3.5) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \dot{\tilde{q}}^T H(q) \ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T \dot{H}(q) \tilde{q} + \dot{\tilde{q}}^T K_p \dot{\tilde{q}}.$$

Despejando $H(q) \ddot{\tilde{q}}$ de (4.1.3.4) y reemplazando:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T K_p \dot{\tilde{q}} \leq 0 \quad (4.1.3.6)$$

donde el término $\dot{\tilde{q}}^T \left[\frac{1}{2} \dot{H}(q) - C \right] \dot{\tilde{q}}$ ha sido eliminado por la propiedad 3.3. Del teorema 2.1 se concluye inmediatamente estabilidad del origen $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}}] = 0$. Dado que $H(q)$, $K_p > 0$, de (4.1.3.5) y (4.1.3.6) se concluye:

$$\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in L_\infty^n. \quad (4.1.3.7)$$

Además de (4.1.3.6) se obtiene:

$$\dot{\tilde{q}} \in L_2^n. \quad (4.1.3.8)$$

Nótese de (4.1.3.4) que:

$$\ddot{\tilde{q}} = H(q)^{-1} \left[-K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q, \dot{q}) \dot{\tilde{q}} \right] \quad (4.1.3.9)$$

en donde el miembro derecho es acotado como consecuencia de (4.1.3.7) y propiedades 3.2 y 3.3. Esto significa que $\ddot{\tilde{q}} \in L_\infty^n$. Esto último, (4.1.3.8) y lema 2.1 implican:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0. \quad (4.1.3.10)$$

Desafortunadamente el teorema de LaSalle (teorema 2.4) no puede emplearse para estudiar estabilidad asintótica global del origen debido a que la ecuación de malla cerrada (4.1.3.4) no es autónoma. Sin embargo, puede demostrarse mediante el uso del teorema de Matrosov que el origen es global asintóticamente estable. Aquí no se demostrará lo anterior sino más bien que si $\tilde{q}(t)$ converge a un vector constante, entonces este es el origen. Considerando (4.1.3.10), si $q(t) \rightarrow$ constante, esta deberá ser solución de

(4.1.3.9). Claramente, esta tiene una solución única y es $\tilde{q} = 0$, ésto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0. \quad (4.1.3.11)$$

Los límites (4.1.3.10) y (4.1.3.11) significan que ambos errores, el de velocidad y el de posición convergen a cero. Es importante subrayar que esto último es válido no sólo para q_d constante sino también para $q_d(t)$ variantes con el tiempo.

Ejemplo 4.4. En el ejemplo 4.1 se abordó el problema de control P de un motor CD. En dicho ejemplo se demostró que si q_d es constante, entonces $q(t) \rightarrow q_d$. En este ejemplo se presenta el control PD+ del motor CD pero como se demostrará $q(t) \rightarrow q_d(t)$ para q_d variantes en el tiempo.

Considérese el modelo lineal de un motor CD dado por (véase ejemplo 4.1):

$$\ddot{q} + \frac{1}{T} \dot{q} = \frac{K}{T} v. \quad (4.1.3.12)$$

Haciendo analogía entre las estructuras (4.1) y (4.1.3.12), el control PD+ (4.1.3.3) para este ejemplo es:

$$v = k_p \tilde{q} + k_v \dot{\tilde{q}} + \frac{T}{K} \ddot{q}_d + \frac{1}{K} \dot{q}_d. \quad (4.1.3.13)$$

El cuarto término $\frac{1}{K} \dot{q}_d$ del miembro derecho puede reemplazarse por $\frac{1}{K} \dot{q}_d$. k_p y k_v son constantes reales positivas. Reemplazando v de (4.1.3.13) en (4.1.3.12) se obtiene la ecuación de malla cerrada:

$$\frac{T}{K} \ddot{\tilde{q}} + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = 0 \quad (4.1.3.14)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden exponencialmente estable, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0.$$

Esto significa que para todo $q_d(t)$ (no solo constante), se verifica el objetivo de control de movimiento.

4.1.4 CONTROL PD MAS COMPENSACION .

Una estructura de controlador PD más compensación , la cual difiere de la estructura PD+, fue introducida con el fin de obtener ciertas propiedades capitales para el diseño de uno de los primeros controladores adaptables propuestos en la literatura para control de movimiento de robots.

El controlador PD más compensación puede expresarse como:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + H(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \dot{\tilde{q}}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q) \quad (4.1.4.1)$$

donde K_p , K_v son matrices simétricas definidas positivas tales que $\Lambda = K_v^{-1} K_p$ sea definida positiva. Obsérvese que los dos primeros términos del miembro derecho corresponden al control PD (4.1.3.1). Este tipo de control es basado en modelo, es decir, que la ley de control emplea explícitamente los términos del modelo (4.1): $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ (véase la figura 4.12). La estructura de este controlador puede verse como una extensión del control PD+ (4.1.3.3) donde se ha introducido la matriz Λ .

La ecuación de malla cerrada se obtiene reemplazando τ de (4.1.4.1) en (4.1):

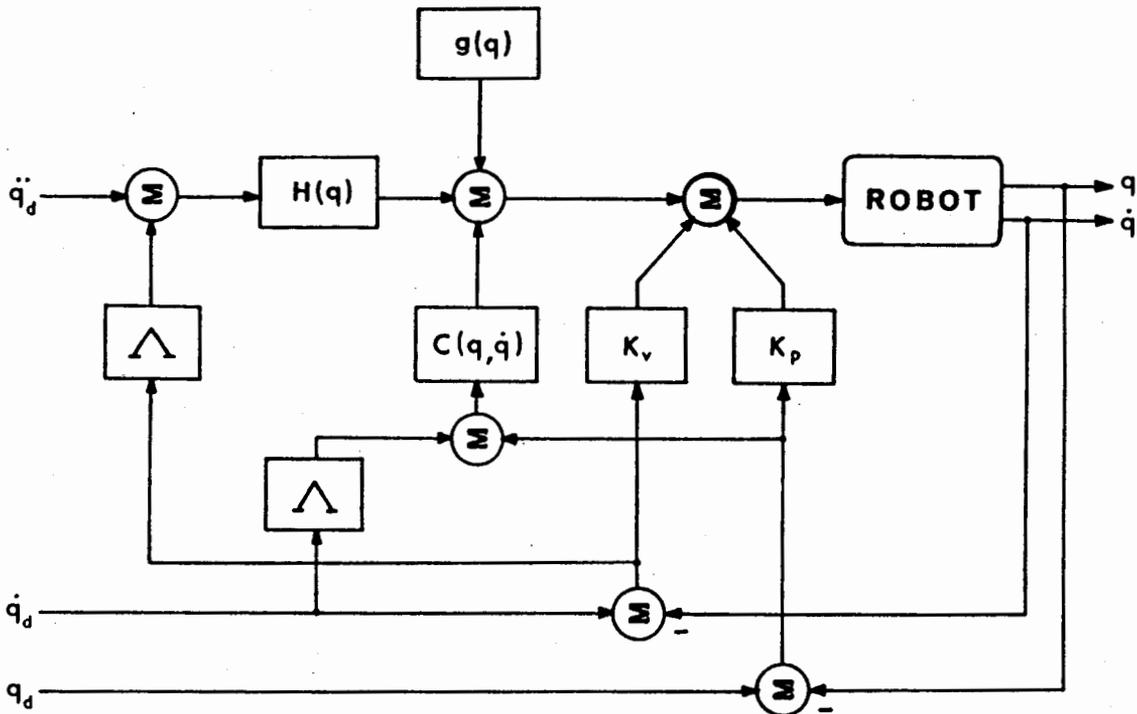


Figura 4.12

$$H(q) \left[\ddot{\tilde{q}} + \Lambda \dot{\tilde{q}} \right] + C(q, \dot{q}) \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right] = -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}}. \quad (4.1.4.2)$$

o equivalentemente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ H(q_d - \tilde{q})^{-1} \left\{ -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} - C(q_d - \tilde{q}, \dot{q}_d - \dot{\tilde{q}})(\dot{q}_d - \dot{\tilde{q}}) \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right] \right\} - \Lambda \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}$$

la cual es una ecuación diferencia no autónoma.

Defínase el vector v de $n \times 1$ como:

$$v = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = (pI + \Lambda) \tilde{q} \quad (4.1.4.3)$$

donde p es el operador diferencial ($p=d/t$). Considerando la definición de v (4.1.4.3), la ecuación de malla cerrada (4.1.4.2) puede escribirse como:

$$H(q) \dot{v} + C(q, \dot{q}) v = -K_v v \quad (4.1.4.4)$$

donde además se ha usado $K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} = K_v v$ ya que $\Lambda = K_v^{-1} K_p$.

El análisis de la ecuación anterior se realiza considerando la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right]^T H(q_d(t) - \tilde{q}) \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right] + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \geq 0 \quad (4.1.4.5)$$

o en forma equivalente:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2} v^T H(q) v + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} \geq 0$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = v^T H(q) \dot{v} + \frac{1}{2} v^T \dot{H}(q) v + 2 \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}}. \quad (4.1.4.6)$$

Despejando $H(q) \dot{v}$ de (4.1.4.4) y reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = -v^T K_v v + 2 \tilde{q}^T K_p \dot{\tilde{q}}$$

donde se eliminó el término $v^T \left[\frac{1}{2} \dot{H} - C \right] v$ en virtud de la propiedad 3.3. Ahora, empleando la definición de v (4.1.4.3) y $K_p = K_v \Lambda$, la ecuación de $\dot{V}(t)$ se reduce a:

$$\dot{V}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}) = - \dot{\tilde{q}}^T K_v \dot{\tilde{q}} - \tilde{q}^T \Lambda^T K_p \Lambda \tilde{q} \leq 0. \quad (4.1.4.7)$$

Empleando V (4.1.4.5), \dot{V} (4.1.4.7) y el teorema 2.2, se concluye inmediatamente estabilidad asintótica global del equilibrio $[\tilde{q} \ \dot{\tilde{q}}] = [0 \ 0]$, y como consecuencia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$$

esto es, que el objetivo de control de movimiento es verificado.

4.1.5 CONTROL PAR-CALCULADO.

El control denominado Par-Calculado fue una de las primeras estructuras de control de movimiento basadas en el modelo del manipulador, es decir, que hace uso explícito del conocimiento de $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$. La ley de control está dada por:

$$\tau = H(q) \left[\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) \quad (4.1.5.1)$$

donde K_v y K_p son matrices simétricas definidas positivas. La información sobre la trayectoria de movimiento deseada $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ así como medición de $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ son empleadas en la realización de (4.1.5.1) (véase la figura 4.13).

La ecuación de malla cerrada se obtiene reemplazando τ de (4.1.5.1) en (4.1):

$$H(q) \ddot{q} = H(q) \left[\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] \quad (4.1.5.2)$$

y dado que $H(q)$ es invertible (propiedad 3.2), la ecuación anterior se reduce a:

$$\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} = 0. \quad (4.1.5.3)$$

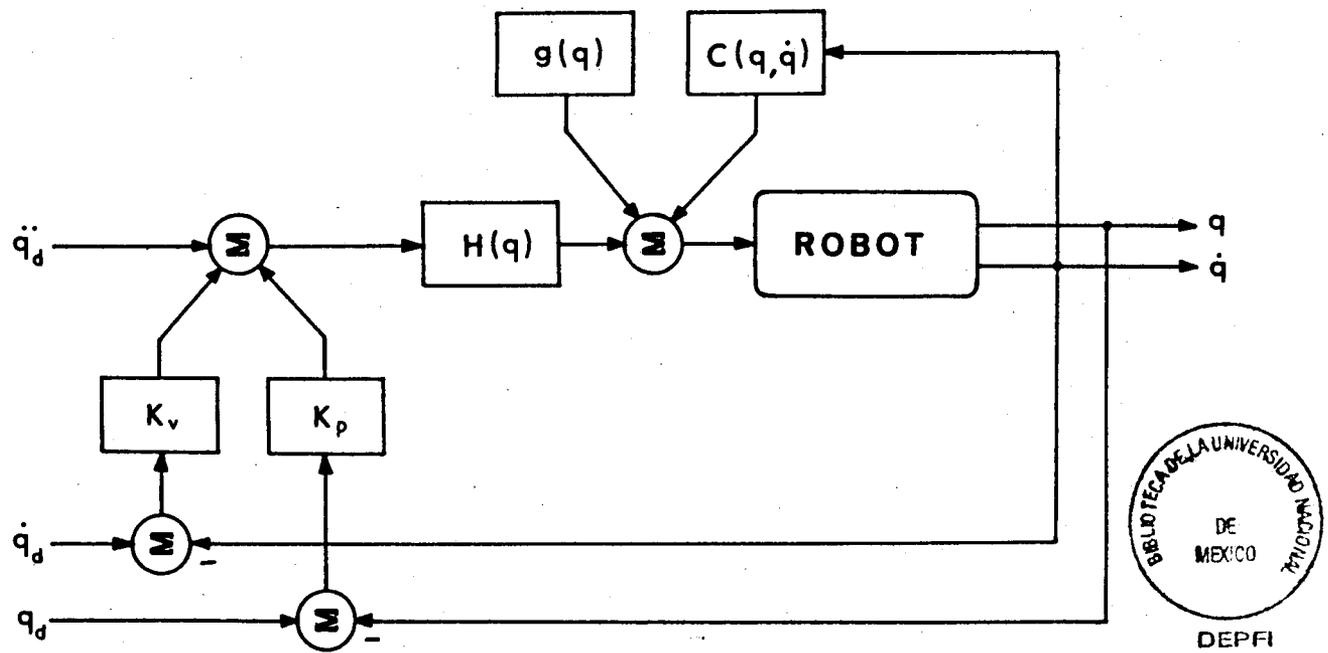


Figura 4.13

o en forma equivalente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ -K_p \tilde{q} - K_v \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}.$$

Es importante observar que la ecuación de malla cerrada representa un sistema lineal autónomo multivariable.

Dado que la matriz $K_v = K_v^T$ es seleccionada definida positiva, entonces existe un escalar real positivo c^* tal que para todo $c \in (0, c^*)$:

$$(K_v - cI) > 0. \quad (4.1.5.4)$$

Esto último y positividad de K_p implican a su vez que:

$$(K_p + cK_v - c^2I) > 0. \quad (4.1.5.5)$$

Procediendo ahora al análisis de (4.1.5.3), considérese la siguiente función candidata de Lyapunov:

$$V(\dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{q}} + c\dot{\tilde{q}})^T(\dot{\tilde{q}} + c\dot{\tilde{q}}) + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T(K_p + cK_v - c^2I)\dot{\tilde{q}} \geq 0 \quad (4.1.5.6)$$

donde el escalar $c > 0$ satisface (4.1.5.4). La expresión de $V(\dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{q}})$ (4.1.5.6) es equivalente a:

$$V(\dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T\dot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}^T(K_p + cK_v)\dot{\tilde{q}} + c\dot{\tilde{q}}^T\dot{\tilde{q}} \quad (4.1.5.7)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{q}}) = \ddot{\tilde{q}}^T\dot{\tilde{q}} + \dot{\tilde{q}}^T(K_p + cK_v)\ddot{\tilde{q}} + c\dot{\tilde{q}}^T\ddot{\tilde{q}} + c\dot{\tilde{q}}^T\ddot{\tilde{q}}.$$

Substituyendo $\ddot{\tilde{q}}$ de (4.1.5.3) en la expresión anterior y realizando simplificaciones se obtiene:

$$\dot{V}(\dot{\tilde{q}}, \dot{\tilde{q}}) = -\dot{\tilde{q}}^T(K_v - cI)\dot{\tilde{q}} - c\dot{\tilde{q}}^TK_p\dot{\tilde{q}} \leq 0. \quad (4.1.5.8)$$

Como $(K_v - cI) > 0$ (4.1.5.4) y $K_p > 0$, la función $-\dot{V}$ (4.1.5.8) es una función definida positiva. En vista del teorema 2.2, el origen $\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix} = [0 \ 0]$ es global asintóticamente estable y entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$$

ésto es, el objetivo de control de movimiento es verificado.

Para fines prácticos, la elección de las matrices K_v y K_p puede hacerse como:

$$K_v = \text{diag} \{2\omega_1, \dots, 2\omega_n\}$$

$$K_p = \text{diag} \{\omega_1^2, \dots, \omega_n^2\}.$$

Esta elección resulta en un sistema en malla cerrada desacoplado, cada unión responde igual que un sistema lineal de segundo orden críticamente amortiguado con ancho de banda ω_1 . El ancho de banda ω_1 determina la velocidad de respuesta de la unión y en consecuencia la tasa de decaimiento de los errores $\dot{\tilde{q}}(t)$ y $\tilde{q}(t)$.

Ejemplo 4.5. La estructura de control Par-Calculado para un motor CD lineal es idéntica a la obtenida con control PD+ (Ejemplo 4.4). Considérese el modelo lineal de un motor CD dado por (Apéndice A):

$$\ddot{q} + \frac{1}{T} \dot{q} = \frac{K}{T} v. \quad (4.1.5.9)$$

Por inspección entre las estructuras de (4.1) y (4.1.5.9), el control Par-Calculado (4.1.5.10) para este ejemplo es:

$$v = \frac{K}{T} \left[\ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} \right] + \frac{1}{K} \dot{q} \quad (4.1.5.10)$$

donde k_v y k_p son escalares positivos. Compare las estructuras de (4.1.3.13) y (4.1.5.10). La ecuación de malla cerrada es:

$$\ddot{\tilde{q}} + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = 0 \quad (4.1.5.11)$$

la cual es exponencialmente estable y en consecuencia $\tilde{q}(t) \rightarrow 0$ y $\dot{\tilde{q}}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

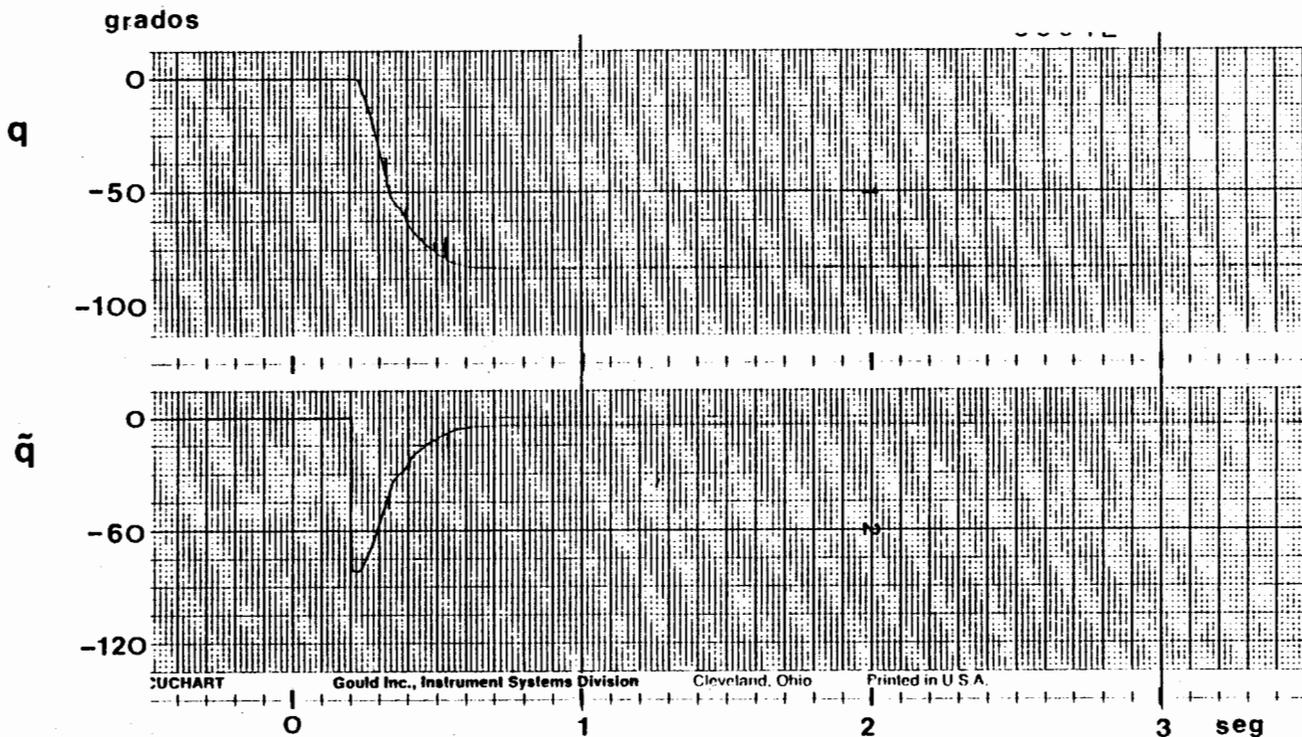


Figura 4.14

El controlador dado por la ecuación (4.1.5.10) fue realizado mediante electrónica analógica y experimentado en un motor de laboratorio. Para q_d constante ($q_d = -100^\circ$) los resultados experimentales son presentados en la figura 4.14 donde se aprecia una clara tendencia a cero del error de posición. Para el caso $q_d = 60^\circ \sin(2\pi t/3)$ los resultados se presentan en la figura 4.15 donde se observa un pequeño error remanente en posición. Esto último puede deberse al empleo de un modelo dinámico lineal (4.1.5.9) asociado al motor.

□□□

Ejemplo 4.6. La ecuación de un péndulo sometido a la acción de la gravedad es:

$$\ddot{q} + \text{sen } q = \tau \quad (4.1.5.12)$$

donde q es la posición angular con respecto a la vertical y τ es el par aplicado en la unión. Para este ejemplo se tiene $H(q) = 1$, $C(q, \dot{q}) = 0$ y $g(q) = \text{sen } q$. El control Par-Calculado (4.1.5.1) dado por:

$$\tau = \ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} + \text{sen } q \quad (4.1.5.13)$$

con $k_v > 0$, $k_p > 0$ garantiza el cumplimiento del objetivo de movimiento.

□□□

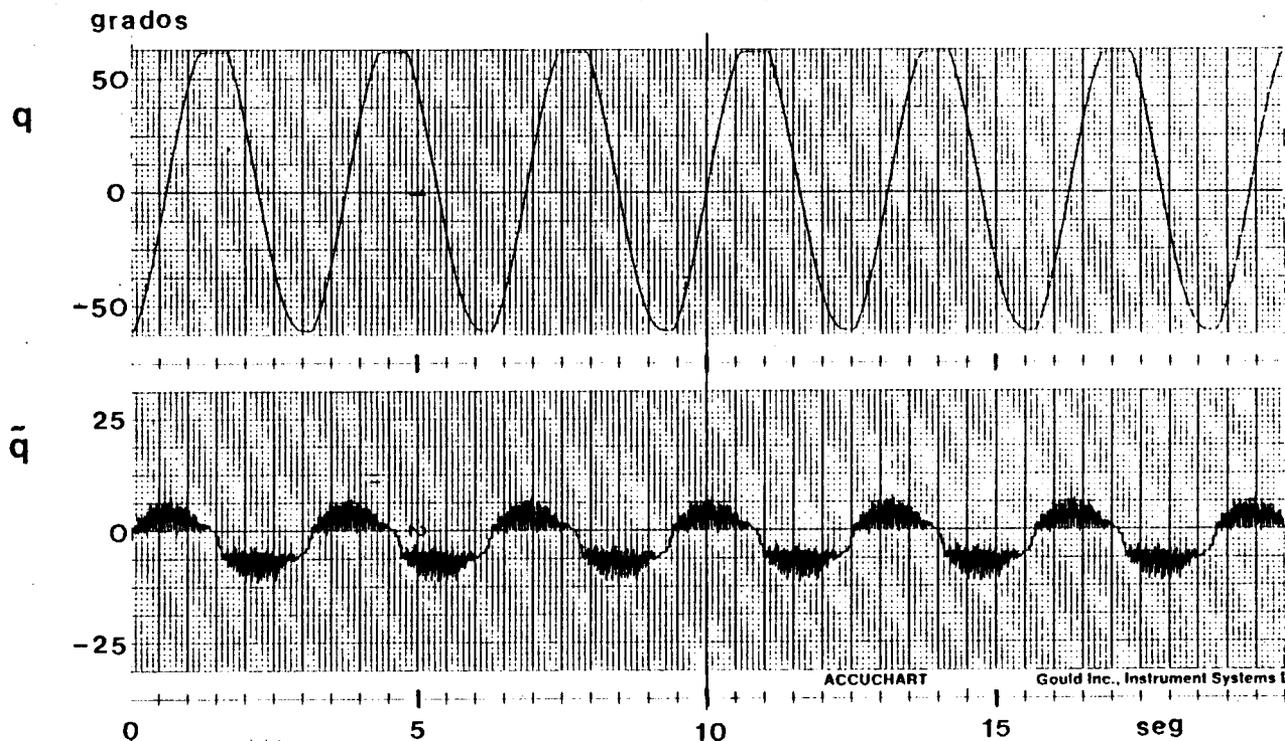


Figura 4.15

4.1.6 CONTROL PAR-CALCULADO +

El control Par-Calculado + también llamado Par-Calculado más compensación consiste en agregar un término adicional a la ley de control Par-Calculado (4.1.5.1.) para obtener ciertas propiedades adicionales útiles para el diseño de una versión adaptable del controlador.

La ley de control Par-Calculado + está dada por:

$$\tau = H(q) \left[\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) + C(q, \dot{q}) \nu \quad (4.1.6.1)$$

donde K_v y K_p son matrices simétricas definidas positivas. Nótese que sólo el último término $C(q, \dot{q}) \nu$ del miembro derecho hace la diferencia con el control Par-Calculado (4.1.5.1). El vector de $n \times 1$ $\nu(t)$ se obtiene de filtrar los errores de posición $\tilde{q}(t)$ y velocidad $\dot{\tilde{q}}(t)$ de la manera siguiente:

$$\nu = -\frac{p}{p+\lambda} \dot{\tilde{q}} - \frac{1}{p+\lambda} \left[K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] \quad (4.1.6.2)$$

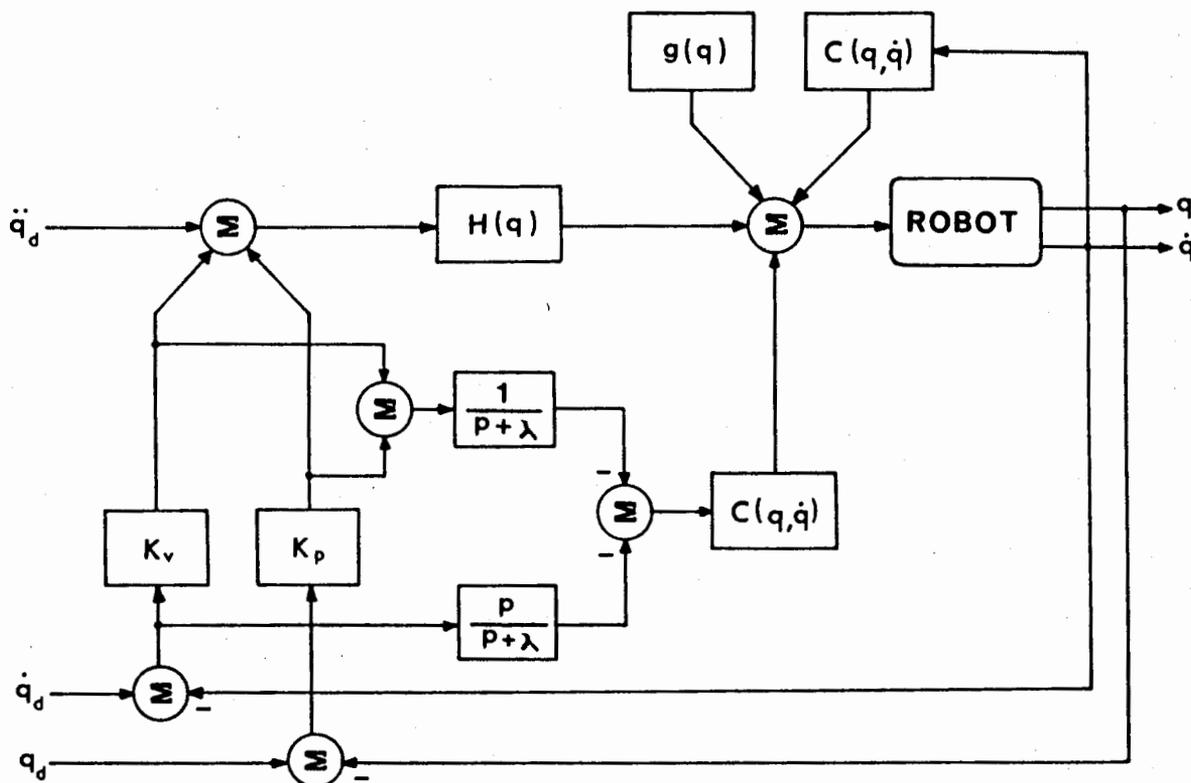


Figura 4.16

donde p es el operador diferencial ($p=d/dt$) y λ es un escalar positivo. El primer término del miembro derecho de (4.1.6.2) puede obtenerse mediante el filtrado de \tilde{q} por un filtro CR mientras que el segundo miembro a través de un filtro RC de $K_v \tilde{\dot{q}} + K_p \tilde{q}$. La realización de (4.1.6.1) requiere el conocimiento de $H(q)$, $C(q, \dot{q})$ y $g(q)$ así como de la trayectoria de movimiento deseada $q_d(t)$, $\dot{q}_d(t)$ y $\ddot{q}_d(t)$ y medición de $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ (véase la figura 4.16).

Para analizar el sistema en malla cerrada primeramente note que la expresión de v (4.1.6.2) permite obtener la siguiente ecuación:

$$\dot{v} + \lambda v = - \left[\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right]. \quad (4.1.6.3)$$

Combinando las ecuaciones del manipulador (4.1) y del controlador (4.1.6.1) se obtiene la ecuación de malla cerrada:

$$H(q) \left[\ddot{\tilde{q}} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] - C(q, \dot{q})v = 0 \quad (4.1.6.4)$$

la cual, mediante (4.1.6.3), se reduce a:

$$H(q) \left[\dot{v} + \lambda v \right] + C(q, \dot{q})v = 0. \quad (4.1.6.5)$$

Considérese ahora la siguiente función no-negativa:

$$V(v, q) = \frac{1}{2} v^T H(q) v \geq 0 \quad (4.1.6.6)$$

cuya derivada con respecto al tiempo es:

$$\dot{V}(v, q) = v^T H(q) \dot{v} + \frac{1}{2} v^T \dot{H}(q) v.$$

Despejando $H(q)\dot{v}$ de (4.1.6.5) y substituyendo en la ecuación anterior:

$$\dot{V}(v, q) = - \lambda v^T H(q) v \leq 0 \quad (4.1.6.7)$$

donde el término $v^T \left[\frac{1}{2} \dot{H} - C \right] v$ ha sido eliminado en virtud de la propiedad

3.3. Ahora, considerando $V(v, q)$ (4.1.6.5), $\dot{V}(v, q)$ (4.1.6.7) y el lema 2.2 se concluye:

$$v \in L_\infty^n \cap L_2^n. \quad (4.1.6.8)$$

Por otro lado, la ecuación (4.1.6.3) puede expresarse como:

$$(p+\lambda) = - \left[p^2 I + pK_v + K_p \right] \tilde{q}$$

o en forma equivalente por:

$$\tilde{q} = - (p+\lambda) \left[p^2 I + pK_v + K_p \right]^{-1} v. \quad (4.1.6.9)$$

Debido a que $\lambda > 0$, K_v y K_p son matrices simetricas definidas positivas, la matriz:

$$(p+\lambda) \left[p^2 I + pK_v + K_p \right]^{-1}$$

define un sistema dinámico lineal multivariable exponencialmente estable y además estrictamente propio. La entrada de dicho sistema es v y su salida \tilde{q} . Haciendo uso de esto último, de $v \in L_\infty^n \cap L_2^n$ (4.1.6.8) y del corolario

2.1 se concluye:

$$\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in L_2^n \cap L_\infty^n \quad (4.1.6.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0 \quad (4.1.6.11)$$

esto es, el objetivo de control de movimiento es verificado.

Es interesante observar que el control Par-Calculado + (4.1.6.1) se reduce al control Par-Calculado (4.1.5.1) en el caso de manipuladores sin término $C(q, \dot{q})$. Tal es el caso por ejemplo de manipuladores de 1 g.d.l. y manipuladores Cartesianos.

4.2 CONTROLADORES ADAPTABLES

El control adaptable es una técnica de diseño ideada para aplicaciones de alto desempeño donde la incertidumbre del objeto de control es caracterizada por un conjunto de parámetros constantes desconocidos. Información sobre la estructura del objeto de control es sin embargo requerida para la síntesis del controlador adaptable. Los robots manipuladores pertenecen a esta clase de objetos de control debido a que los modelos dinámicos de los mismos son descritos por ecuaciones diferenciales no-lineales con estructura bien conocida y algunos parámetros inciertos o de difícil medición como inercias y masa de objetos manipulados por el robot. Las técnicas avanzadas para el control de movimiento de manipuladores se basan en el conocimiento del modelo, tanto estructural como paramétrico. Estas técnicas poseen sin embargo, la desventaja de ser poco robustas. En efecto, incertidumbre en alguno de los parámetros puede producir mal desempeño e incluso inestabilidad. Esta situación es la principal motivación del desarrollo de controladores adaptables de movimiento para robots manipuladores.

El primer sistema de control adaptable estable para control de movimiento de robots fue reportado en 1986. Un paso clave en el desarrollo de dicho trabajo y en los subsiguientes fue el uso de una parametrización de las ecuaciones dinámicas no-lineales del modelo del robot en términos de una regresión lineal de un conjunto de parámetros del robot y la carga manipulada. Este primer controlador adaptable requería el conocimiento a-priori de cotas sobre dichos parámetros así como la medición del vector de aceleraciones. La eliminación del conocimiento de cotas sobre los parámetros así como la medición de aceleración fue hecha posteriormente.

Así, fueron propuestos controladores adaptables haciendo uso de una importante relación entre la derivada de la matriz de inercia y el vector de pares centrífugos y de Coriolis.

El tópico de análisis de robustez de los controladores adaptables desarrollados para el control de movimiento de robots frente a incertidumbre no-estructurada del modelo más que paramétricas es actualmente un área de investigación. Este tópico no será abordado en el presente texto.

En la presente sección se describen y analizan dos controladores adaptables para el control de movimiento de robots. El primero de ellos corresponde a la versión adaptable del controlador PD mas compensación y el segundo es el controlador adaptable Par-Calculado +.

Antes de presentar dichos controladores es importante considerar los siguientes comentarios.

Recordando la propiedad 3.1 se tiene:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta \quad (4.2.1)$$

donde $Y(\ddot{q}, \dot{q}, q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\theta \in \mathbb{R}^m$. El vector θ contiene elementos constantes los cuales dependen exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipuladores y su carga (véase ejemplos 3.7 y 3.8). Dado un vector $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$, la expresión $Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\hat{\theta}$ denotara:

$$\hat{H}(q)\ddot{q} + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q) = Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\hat{\theta} \quad (4.2.2)$$

Los controladores adaptables que serán presentados, así como los reportados en la literatura, suponen que la incertidumbre en el modelo del manipulador consiste en el desconocimiento de los valores numéricos de los elementos del vector θ . La forma estructural del modelo del manipuladores es supuesta exactamente conocida, esto es, la matriz $Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ es conocida.

El desconocimiento del vector θ y en consecuencia de:

$$Y(\ddot{q}, \dot{q}, q)\theta = H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

imposibilita el uso de los controladores basados en modelo como los presentados en las secciones 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5 y 4.1.6. Esta ha sido la principal razón que ha motivado el desarrollo de los controladores

adaptables.

4.2.1 CONTROL PD MAS COMPENSACION ADAPTABLE

En esta sección se presenta la versión adaptable del controlador PD más compensación adaptable. Adicionalmente a la compensación de gravedad, este controlador compensa los pares de inercia, centrífugos y de Coriolis. Este corresponde a la versión adaptable del controlador (4.1.4.1). La ley de control está dada por:

$$\tau = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + \phi(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, \dot{q}, q) \hat{\theta} \quad (4.2.1.1)$$

donde K_p , K_v son matrices simétricas definidas positivas tales que $\Lambda = K_v^{-1} K_p$ sea también definida positiva. La matriz $\phi(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, \dot{q}, q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ o por simplicidad de notación ϕ es tal que:

$$H(q) [\ddot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + C(q, \dot{q}) [\dot{q}_d + \Lambda \tilde{q}] + g(q) = \phi \theta \quad (4.2.1.2)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipulador y su carga. El vector $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ es solución de la siguiente ley de adaptación:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \phi^T [\tilde{q} + \Lambda \tilde{q}], \quad \hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m \quad (4.2.1.3)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es la matriz definida positiva de ganancias de adaptación. El vector $\hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m$ es un vector arbitrario. La ley de adaptación (4.2.1.3) corresponde a la llamada integral o tipo gradiente.

Nótese que el controlador adaptable (4.2.1.1) y (4.2.1.3) no depende del vector desconocido θ .

Antes de proceder al análisis del sistema en malla cerrada defínase el vector de errores paramétricos $\tilde{\theta}$ como:

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta \quad (4.2.1.4)$$

en consecuencia:

$$\phi \hat{\theta} = \phi \tilde{\theta} + \phi \theta.$$

Considerando esto último y substituyendo τ de (4.2.1.1) en (4.1) se obtiene:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = K_p \tilde{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + \phi \tilde{\theta} + \phi \theta. \quad (4.2.1.5)$$

Substituyendo $\phi \theta$ de (4.2.1.1) en (4.2.1.5) y simplificando se llega a:

$$H(q) \left[\ddot{\tilde{q}} + \Lambda \dot{\tilde{q}} \right] + C(q, \dot{q}) \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right] = -K_v \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right] - \phi \tilde{\theta} \quad (4.2.1.6)$$

donde se ha hecho uso de $\Lambda = K_p^{-1} K_v$. Defínase el vector $\nu \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\nu = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} = (pI + \Lambda) \tilde{q}. \quad (4.2.1.7)$$

Con esta definición, (4.2.1.6) puede escribirse como:

$$H(q) \dot{\nu} + C(q, \dot{q}) \nu = -K_v \nu - \phi \tilde{\theta}. \quad (4.2.1.8)$$

Por otro lado, dado que el vector desconocido θ es supuesto constante, entonces de (4.2.1.4) $\dot{\tilde{\theta}} = \hat{\tilde{\theta}}$. De esto último, (4.2.1.3) y (4.2.1.7) se tiene que:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \Gamma \phi^T \nu. \quad (4.2.1.9)$$

Las ecuaciones (4.2.1.8) y (4.2.1.9) definen las llamadas ecuaciones del modelo del error.

Considérese ahora la siguiente función no-negativa:

$$V(\nu, q, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \nu^T H(q) \nu + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \geq 0 \quad (4.2.1.10)$$

cuya derivada temporal es:

$$\dot{V}(\nu, q, \tilde{\theta}) = \nu^T H(q) \dot{\nu} + \frac{1}{2} \nu^T \dot{H}(q) \nu + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}.$$

Al reemplazar $H(q) \dot{\nu}$ de (4.2.1.8) y $\dot{\tilde{\theta}}$ de (4.2.1.9) en la ecuación anterior resulta:

$$\dot{V}(\nu, q, \tilde{\theta}) = -\nu^T K_v \nu \leq 0 \quad (4.2.1.11)$$

donde el término $\nu^T \left[\frac{1}{2} \dot{H}(q) - C \right] \nu$ fue eliminado en virtud de la propiedad 3.3.

De V (4.2.1.10), \dot{V} (4.2.1.11) y el lema 2.2 se concluye:

$$v \in L_2^n \cap L_\infty^n \quad (4.2.1.12)$$

$$\tilde{\theta} \in L_\infty^m \quad (4.2.1.13)$$

Por otro lado de (4.2.1.7) se obtiene:

$$\tilde{q} = (pI + \Lambda)^{-1} v \quad (4.2.1.14)$$

y debido a que $\Lambda > 0$, (4.2.1.14) representa un sistema lineal multivariable exponencialmente estable con entrada v y salida \tilde{q} . Además dicho sistema es estrictamente propio. Esto permite hacer uso del corolario 2.1 el cual, considerando (4.2.1.12) permite finalmente concluir:

$$\dot{\tilde{q}}, \ddot{\tilde{q}} \in L_\infty^n \cap L_2^n \quad (4.2.1.15)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0. \quad (4.2.1.16)$$

El límite anterior significa cumplimiento del objetivo de control de movimiento. Esto último a pesar de desconocer el vector de parámetros dinámicos θ .

Puede demostrarse adicionalmente que el equilibrio $[\tilde{q} \quad \dot{\tilde{q}} \quad \ddot{\tilde{q}} \quad \tilde{\theta}] = 0$ es estable. La función de Lyapunov adecuada es la siguiente:

$$V(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, \ddot{\tilde{q}}, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right]^T H(q_d(t) - \tilde{q}) \left[\dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right] + \tilde{q}^T K_p \tilde{q} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}.$$

Ejemplo 4.7. En este ejemplo se considera el control PD más compensación adaptable del manipulador de 2 g.d.l. mostrado en la figura 4.20.

El modelo dinámico del manipulador planar de 2 g.d.l. considerado está dado por:

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + (\theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21}) \ddot{q}_2 - \theta_3 S_{21} \dot{q}_2^2 + \theta_4 C_{21} \dot{q}_2^2 = \tau_1 \quad (4.2.1.17)$$

$$(\theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21}) \ddot{q}_1 + \theta_2 \ddot{q}_2 + \theta_3 S_{21} \dot{q}_1^2 - \theta_4 C_{21} \dot{q}_1^2 = \tau_2 \quad (4.2.1.18)$$

donde $C_{21} = \cos(q_2 - q_1)$, $S_{21} = \sin(q_2 - q_1)$. Es fácil comprobar que el modelo anterior puede ponerse en la forma estándar (4.1) donde

$$H(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 C_{21} + \theta_4 S_{21} \\ \theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21} & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.1.19)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & (\theta_4 C_{21} - \theta_3 S_{21}) \dot{q}_2 \\ (\theta_3 S_{21} - \theta_4 C_{21}) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.1.20)$$

$$g(q) = 0. \quad (4.2.1.21)$$

A partir de (4.2.1.19) y (4.2.1.20) se puede verificar que $1/2 \dot{H} - C$ es una matriz antisimétrica (propiedad 3.3).

Los cuatro parámetros dinámicos θ_1 , θ_2 , θ_3 y θ_4 dependen de las características físicas como masas del manipulador. El vector $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$ será considerado desconocido.

Después de algunas operaciones algebraicas puede verificarse (4.2.1.1) donde los componentes de la matriz $\phi \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ son:

$$\phi_{11} = \ddot{q}_{r1} \quad \phi_{13} = C_{21} \ddot{q}_{r2} - S_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_{r2} \quad \phi_{14} = S_{21} \ddot{q}_{r2} + C_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_{r2}$$

$$\phi_{21} = \ddot{q}_{r2} \quad \phi_{23} = C_{21} \ddot{q}_{r2} + S_{21} \dot{q}_1 \dot{q}_{r1} \quad \phi_{14} = S_{21} \ddot{q}_{r1} - C_{21} \dot{q}_1 \dot{q}_{r1}$$

$$\phi_{12} = \phi_{22} = 0$$

donde

$$q_r = \begin{bmatrix} q_{r1} \\ q_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_d + \lambda \tilde{q} \end{bmatrix}.$$

Considerando por simplicidad $\Gamma = \text{diag} \{ \gamma \}$ con $\gamma > 0$, la ley de adaptacion (4.2.1.2) puede escribirse explícitamente como:

$$\dot{\theta}_1 = \gamma \phi_{11} v_1$$

$$\dot{\theta}_2 = \gamma \phi_{22} v_2$$

$$\dot{\theta}_3 = \gamma(\phi_{13} v_1 + \phi_{23} v_2)$$

$$\dot{\theta}_4 = \gamma(\phi_{14} v_1 + \phi_{24} v_2)$$

La ley de control (4.2.1.1) puede expresarse entonces como:

$$\tau_1 = k_{p11} \tilde{q}_1 + k_{p12} \tilde{q}_2 + k_{v11} \dot{\tilde{q}}_1 + k_{v12} \dot{\tilde{q}}_2 + \phi_{11} \hat{\theta}_1 + \phi_{13} \hat{\theta}_3 + \phi_{14} \hat{\theta}_4$$

$$\tau_2 = k_{p21} \tilde{q}_1 + k_{p22} \tilde{q}_2 + k_{v21} \dot{\tilde{q}}_1 + k_{v22} \dot{\tilde{q}}_2 + \phi_{22} \hat{\theta}_2 + \phi_{23} \hat{\theta}_3 + \phi_{24} \hat{\theta}_4$$

donde $k_{p_{ij}}$ y $k_{v_{ij}}$ son los elementos de las matrices definidas positivas K_p y K_v ($\in \mathbb{R}^{2 \times 2}$).

□□□

4.2.2. CONTROL ADAPTABLE PAR-CALCULADO +

En esta sección se presenta la versión adaptable del controlador Par-Calculado + analizado en la sección 4.1.6. La ley de control puede expresarse como:

$$\tau = \phi(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, q, \dot{q}, v) \hat{\theta} \quad (4.2.2.1)$$

donde la matriz $\phi(\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, q, \dot{q}, v) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, denotada por simplicidad ϕ , es tal que:

$$H(q) \left[\ddot{q}_d + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) - C(q, \dot{q}) v = \phi \theta \quad (4.2.2.2)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^m$ depende exclusivamente de los parámetros dinámicos del manipulador y su carga. La matriz ϕ será acotada si $\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, q, \dot{q}, v$ son vectores acotados.

El vector $v \in \mathbb{R}^n$ se obtiene de filtrar los errores de posición \tilde{q} y velocidad $\dot{\tilde{q}}$ de la manera siguiente:

$$v = -\frac{p}{p+\lambda} \dot{\tilde{q}} - \frac{1}{p+\lambda} \left[K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] \quad (4.2.2.3)$$

donde λ es un escalar positivo. K_v y $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son matrices simétricas

definidas positivas.

El vector $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^m$ empleado en la ley de control (4.2.2.1) es seleccionado de manera a satisfacer la siguiente ley de adaptación integral:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \phi^T \nu \quad \hat{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m \quad (4.2.2.4)$$

donde $\Gamma = \Gamma^T > 0$. Nótese que el controlador adaptable formado por la ley de control (4.2.2.1) y la ley de adaptación (4.2.2.4) así como el vector ν (4.2.2.3) y la matriz ϕ (4.2.2.2) no dependen del vector desconocido θ de parámetros dinámicos.

Definiendo el vector de errores paramétricos $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^m$ como $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, la ley de control (4.2.2.1) se puede expresar como $\tau = \phi \tilde{\theta} + \phi \theta$. Substituyendo esta última en la ecuación del modelo del manipulador (4.1) se obtiene:

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \phi \tilde{\theta} + \phi \theta$$

la cual reemplazando $\phi \theta$ de (4.2.2.2), se simplifica a:

$$H(q) \left[\ddot{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] - C(q, \dot{q})\nu = -\phi \tilde{\theta}. \quad (4.2.2.5)$$

Por otro lado, la definición de ν (4.2.2.3) es equivalente a:

$$\dot{\nu} + \lambda \nu = - \left[\ddot{q} + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} \right] \quad (4.2.2.6)$$

por lo que (4.2.2.5) puede escribirse como:

$$H(q)[\dot{\nu} + \lambda \nu] + C(q, \dot{q})\nu = \phi \tilde{\theta}. \quad (4.2.2.7)$$

Ahora considérese la ley de adaptación (4.2.2.4). Debido a que θ es un

vector constante, $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\hat{\theta}}$, esto es:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\Gamma \phi^T \nu \quad \tilde{\theta}(0) \in \mathbb{R}^m. \quad (4.2.2.8)$$

Las ecuaciones (4.2.2.7) y (4.2.2.8) definen las ecuaciones del modelo del error.

Considérese ahora la siguiente función no-negativa:

$$V(\nu, q, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \nu^T H(q) \nu + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \geq 0 \quad (4.2.2.9)$$

cuya derivada temporal es:

$$\dot{V}(\nu, q, \tilde{\theta}) = \dot{\nu}^T H(q) \nu + \frac{1}{2} \nu^T \dot{H}(q) \nu + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}.$$

Al reemplazar $H(q)\dot{\nu}$ de (4.2.2.7) y $\dot{\tilde{\theta}}$ de (4.2.2.8), la expresión para $\dot{V}(t)$ resulta:

$$\dot{V}(\nu, q, \tilde{\theta}) = -\lambda \nu^T H(q) \nu \leq 0 \quad (4.2.2.10)$$

donde se ha eliminado $\nu^T \left[\frac{1}{2} \dot{H} - C \right] \nu$ en virtud de la propiedad 3.3.

De V (4.2.2.9), \dot{V} (4.2.2.10) y el lema 2.2 se concluye:

$$\nu \in L_2^n \cap L_\infty^n \quad (4.2.2.11)$$

$$\tilde{\theta} \in L_\infty^m. \quad (4.2.2.12)$$

Por otro lado de (4.2.2.6) se tiene que:

$$\tilde{q} = -(p+\lambda) \left[p^2 I + pK_v + K_p \right]^{-1} \nu \quad (4.2.2.13)$$

el cual representa un sistema lineal multivariable exponencialmente estable y estrictamente propio con entrada ν y salida \tilde{q} . Esto permite hacer uso del corolario 2.1 del cual junto con (4.2.2.11) se obtiene:

$$\tilde{q}, \dot{\tilde{q}} \in L_2^n \cap L_\infty^n \quad (4.2.2.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0 \quad (4.2.2.15)$$

ésto es, cumplimiento del objetivo de control de movimiento.

Adicionalmente, si \ddot{q}_d , \dot{q}_d y q_d son vectores acotados, entonces de (4.2.2.14) se concluye:

$$q, \dot{q} \in L_\infty^n.$$

Lo anterior y acotamiento de v (4.2.2.11) permiten concluir acotamiento de la matriz ϕ .

Ahora despejando \ddot{q} de (4.2.2.5):

$$\ddot{q} = H(q)^{-1} [\phi\ddot{\theta} - C(q, \dot{q})v] + K_v \dot{\tilde{q}} + K_p \tilde{q} + \ddot{q}_d.$$

Nótese que todos los términos del miembro derecho son acotados por lo que:

$$\ddot{q}, \dot{\tilde{q}} \in L_\infty^n.$$

Esto último, $\dot{\tilde{q}} \in L_2^n$ (4.2.2.14) y lema 2.1 permiten concluir:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{q}}(t) = 0$$

es decir, el error de velocidad también tiende asintóticamente a cero. Esta misma propiedad puede demostrarse, empleando los mismos argumentos, para el controlador PD mas compensación adaptable (sección 4.2.1).

Ejemplo 4.8. En este ejemplo se presenta un controlador adaptable para compensación de los pares de fricción (no lineales) en motores CD. Este controlador se obtiene en forma inmediata del controlador adaptable Par-Calculado +.

Considérese el modelo no lineal de un motor CD (véase apéndice A):

$$J_{eff} \ddot{q} + a\dot{q} + b \text{sign}(\dot{q}) = k v$$

donde q es la posición angular y los términos $a\dot{q}$ y $b\text{sign}(\dot{q})$ representan el par debido a la fricción. Las constantes positivas a y b dependen de diversos factores como lubricación y características microscópicas del rotor y sus soportes. Las constantes a y b toman valores diferentes para cada motor, incluso para motores del mismo modelo y fabricante.

El comportamiento del modelo no lineal del motor CD para una entrada $v = \text{sen } t$ y con valores para sus parámetros: $J_{eff} = K = b = 1$ y $c = 0.4$ es mostrado en la figura 4.17. Nótese de la figura 4.17 que aparece una zona muerta en la gráfica de q debido al fenómeno de fricción.

En este ejemplo se supondrá que las constantes a y b son desconocidas. El objetivo de control consiste en determinar el voltaje de armadura v de tal forma que:

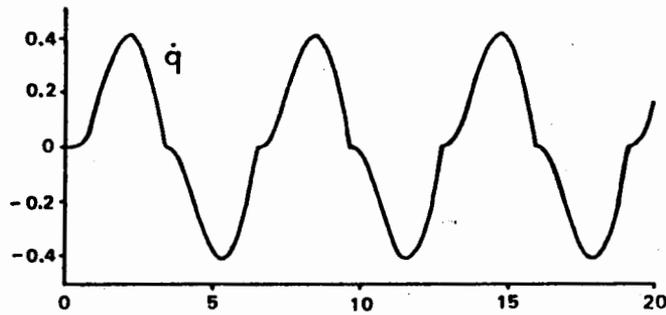
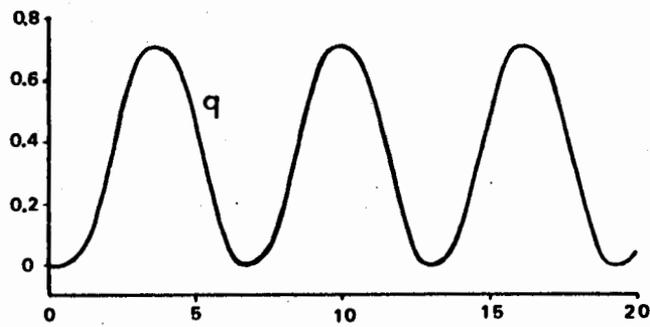


Figura 4.17

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0.$$

Para resolver este problema se propone la siguiente ley de control tipo Par-Calculado:

$$v = \phi (\ddot{q}_d, \dot{q}_d, q_d, q, \dot{q}) \quad \hat{\theta} = \phi \hat{\theta}$$

donde:

$$\phi = \begin{bmatrix} \ddot{q}_d + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} \\ \text{sign}(\dot{\tilde{q}}) \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_3 \end{bmatrix}^T.$$

Las constantes positivas k_v y k_p pueden seleccionarse como $k_v^2 - 4k_p = 0$ de manera a obtener asintóticamente un sistema de segundo orden críticamente amortiguado.

Es importante observar que el vector $\theta \in \mathbb{R}^3$ dado por

$$\theta = \left[\begin{array}{ccc} \frac{J_{eff}}{K} & \frac{b}{K} & \frac{a}{K} \end{array} \right]^T$$

es tal que reemplazando $v = \phi\theta$ en el modelo no lineal del motor resulta en la ecuación de malla cerrada:

$$\ddot{\tilde{q}} + k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} = 0$$

de donde $\tilde{q}(t) \rightarrow 0$ exponencialmente cuando $t \rightarrow \infty$.

La ley de adaptación se obtiene de (4.2.3.4):

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \phi^T v$$

donde $\Gamma = \Gamma^T > 0$ y v (4.2.3.3) es:

$$v = -\frac{p}{p+\lambda} \dot{\tilde{q}} - \frac{1}{p+\lambda} \left[k_v \dot{\tilde{q}} + k_p \tilde{q} \right]$$

con $\lambda \in \mathbb{R}_+$. El análisis del sistema en malla cerrada se realiza obteniendo las ecuaciones del modelo del error y considerando la función no-negativa:

$$V(v, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{J}{K} v^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \geq 0$$

cuya derivada con respecto al tiempo puede expresarse como:

$$\dot{V}(v, \tilde{\theta}) = -\frac{J}{K} v^2 \leq 0.$$

Haciendo uso del lema 2.2 se demuestra que:

$$v \in L_2 \cap L_\infty$$

$$\tilde{\theta} \in L_\infty^3.$$

Además, nótese de la definición de ν que \tilde{q} puede expresarse como:

$$\tilde{q} = - \frac{p+\lambda}{p^2 + k_v p + k_p} \nu.$$

Como k_v y k_p son positivas, la función de transferencia anterior es exponencialmente estable y estrictamente propia. Finalmente, de esto último, $\nu \in L_2 \cap L_\infty$ y corolario 2.1 se concluye que $\tilde{q}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para motivos de simulación se consideraron los siguientes valores numéricos del controlador $k_v=2$, $k_p=1$ y $\lambda=1$. La posición angular deseada fue tomada como $q_d(t) = \sin t$. Los resultados mostrando la posición q y velocidad \dot{q} son dados en la figura 4.18. Es importante observar que conforme pasa el tiempo, tanto la posición q como la velocidad \dot{q} convergen a las trayectorias deseadas. Finalmente, la figura 4.19 muestra la evolución de los parámetros

$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ y $\hat{\theta}_3$.

□□□

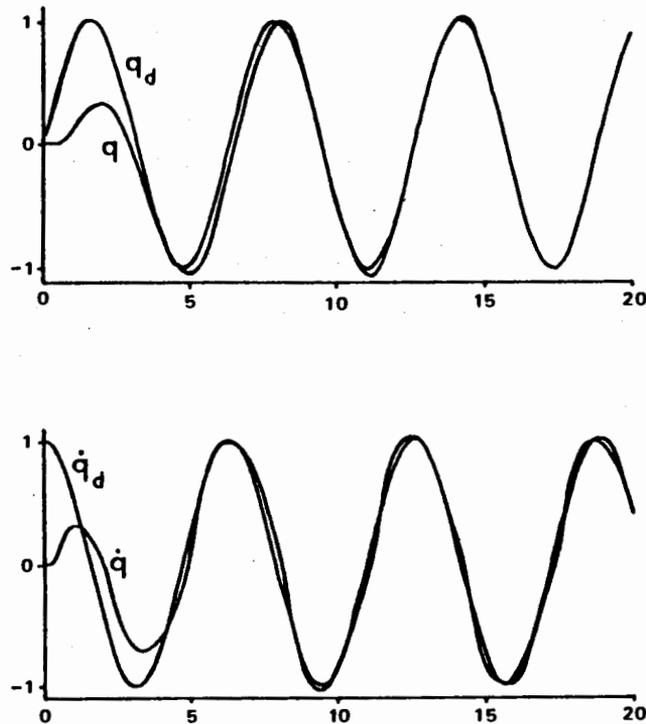


Figura 4.18

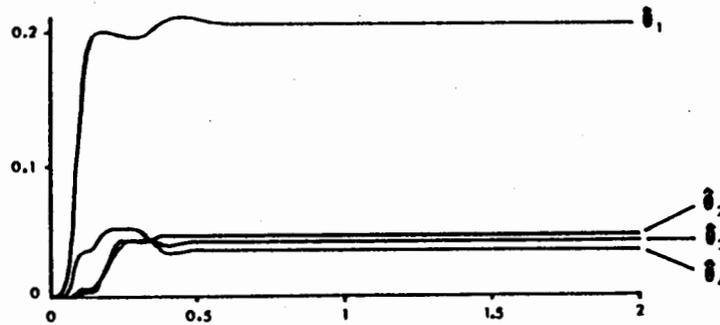


Figura 4.19

Ejemplo 4.9. Este ejemplo presenta las simulaciones del control adaptable de un manipulador rotacional de 2 g.d.l. ($n=2$) moviéndose en un plano horizontal (Figura 4.20). El modelo dinámico correspondiente puede escribirse como:

$$\theta_1 \ddot{q}_1 + (\theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21}) \ddot{q}_2 - \theta_3 S_{21} \dot{q}_2^2 + \theta_4 C_{21} \dot{q}_2^2 = \tau_1 \quad (4.2.2.16)$$

$$(\theta_3 C_{21} + \theta_4 S_{21}) \ddot{q}_1 + \theta_2 \ddot{q}_2 + \theta_3 S_{21} \dot{q}_2^2 - \theta_4 C_{21} \dot{q}_2^2 = \tau_2 \quad (4.2.2.17)$$

donde $C_{21} = \cos(q_2 - q_1)$, $S_{21} = \sin(q_2 - q_1)$. Obsérvese que este modelo es idéntico al considerado en el ejemplo 4.7. Los valores numéricos en este ejemplo para los 4 ($m=4$) parámetros dinámicos son:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0.15 & \theta_2 &= 0.04 \\ \theta_3 &= 0.03 & \theta_4 &= 0.025. \end{aligned}$$

Para motivar el uso de un controlador adaptable se supondrá que el vector $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]^T$ es desconocido.

La ley de control (4.2.2.1) puede expresarse como:

$$\tau_1 = \hat{\phi}_{11} \theta_1 + \hat{\phi}_{12} \theta_2 + \hat{\phi}_{13} \theta_3 + \hat{\phi}_{14} \theta_4 \quad (4.2.2.18)$$

$$\tau_2 = \hat{\phi}_{21} \theta_1 + \hat{\phi}_{22} \theta_2 + \hat{\phi}_{23} \theta_3 + \hat{\phi}_{24} \theta_4 \quad (4.2.2.19)$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas puede verificarse de

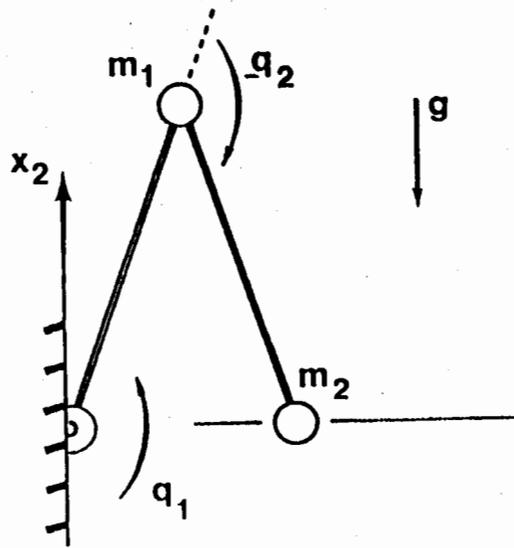


Figura 4.20

(4.2.2.2), (4.2.2.16) y (4.2.2.17) que:

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= f_{11} & \phi_{13} &= C_{21} f_{12} - S_{21} \dot{q}_2 f_{22} & \phi_{14} &= S_{12} f_{12} + C_{21} \dot{q}_2 f_{22} \\ \phi_{22} &= f_{22} & \phi_{23} &= C_{21} f_{11} + S_{21} \dot{q}_1 f_{21} & \phi_{24} &= S_{21} f_{11} - C_{21} \dot{q}_1 f_{21} \\ \phi_{12} &= \phi_{21} = 0 \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \ddot{q}_{d1} + k_{v1} \dot{\tilde{q}}_1 + K_{p1} \tilde{q}_1 \\ f_{12} &= \ddot{q}_{d2} + k_{v2} \dot{\tilde{q}}_2 + k_{p2} \tilde{q}_2 \\ f_{21} &= \dot{\tilde{q}}_1 - v_1 \\ f_{22} &= \dot{\tilde{q}}_2 - v_2 \end{aligned}$$

donde por simplicidad las matrices K_v y K_p han sido seleccionados diagonales:

$$K_v = \text{diag}(2k_1, 2k_2) \quad K_p = \text{diag}(k_1^2, k_2^2)$$

con valores numéricos $k_1 = 20$ y $k_2 = 30$.

Considerando por simplicidad $\Gamma = \text{diag}(\gamma)$ con $\gamma = 0.2$, la ley de adaptación (4.2.2.4) puede escribirse explícitamente como:

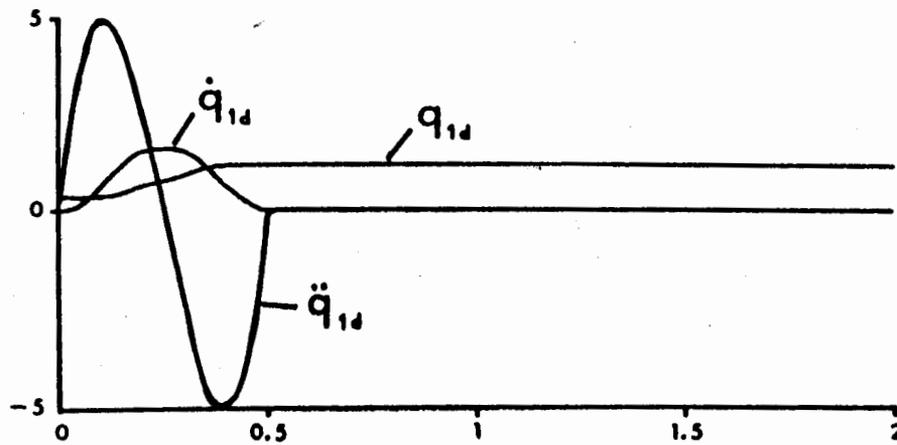


Figura 4.21

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_1 &= -\gamma \phi_{11} v_1, & \hat{\theta}_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_2 &= -\gamma \phi_{22} v_2, & \hat{\theta}_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_3 &= -\gamma(\phi_{13} v_1 + \phi_{23} v_2), & \hat{\theta}_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_4 &= -\gamma(\phi_{14} v_1 + \phi_{24} v_2), & \hat{\theta}_4(0) &= 0. \end{aligned}$$

Las trayectorias de movimiento deseadas q_{d12} se muestran en la figura 4.21 (q_{d2} fue seleccionada igual a π). Las figuras 4.22 y 4.23 muestran la evolución en el tiempo de los errores de posición \tilde{q} y velocidad $\dot{\tilde{q}}$. Nótese que ambos convergen a cero. Finalmente, la figura 4.24 muestra la evolución de los parámetros estimados $\hat{\theta}$.

□□□

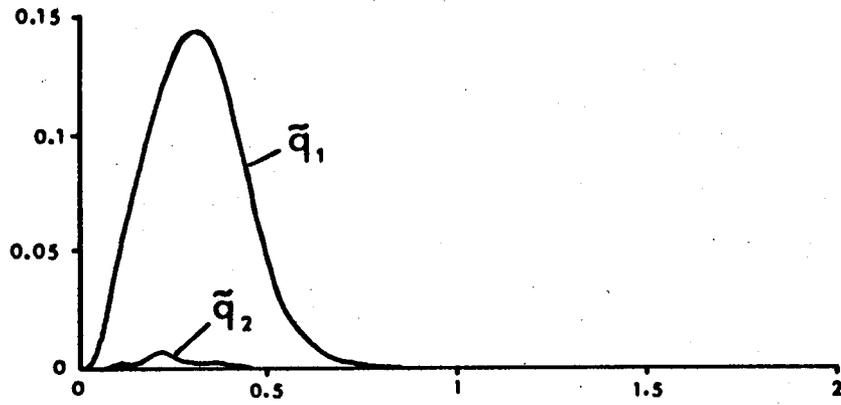


Figura 4.22

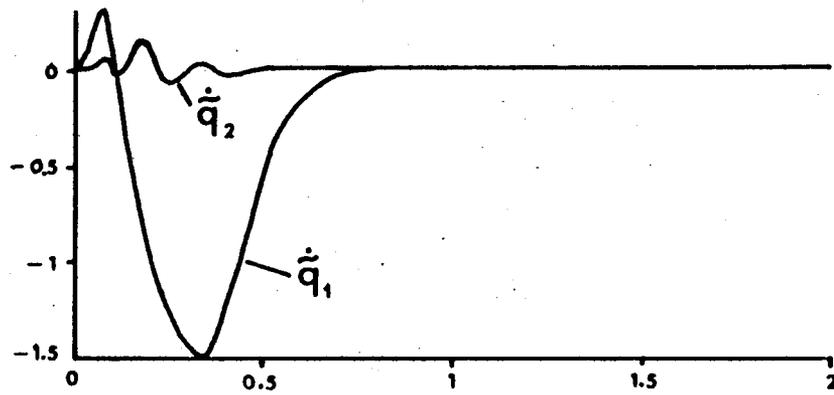


Figura 4.23

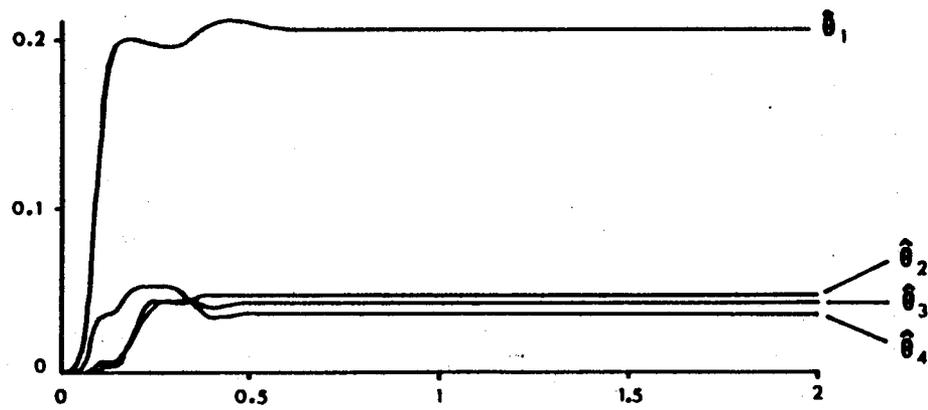


Figura 4.24

REFERENCIAS

El t3pico de modelado de actuadores electromec3nicos y de su inclusi3n a la din3mica de manipuladores es tratado en :

Tourassis V., 1988, "Principles and design of model-based robot controllers", International Journal of Control, Vol. 47, No. 5, pp. 1267-1275.

Spong M., Vidyasagar, M., 1989, "Robot dynamics and control", Wiley, New York.

El controlador P m3s compensaci3n de gravedad fue propuesto originalmente en:

Takegaki M., Arimoto S., 1981, "A new feedback Method for dynamic control of manipulators", Transactions ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 103, pp. 119-125.

Una demostraci3n de estabilidad particularmente sencilla del controlador P mas compensaci3n de gravedad haciendo uso del teorema de LaSalle es presentada en:

Paden B., Panja R., 1988, "Globally asymptotically stable PD+ controller for robot manipulators", International Journal of Control, Vol. 47, No. 6, pp. 1697-1712.

El controlador P m3s compensaci3n de gravedad, empleando en el t3rmino gravitacional la posici3n deseada en lugar de la posici3n medida fue analizado mediante el teorema de LaSalle por:

Khorrami F., Ozguner U., 1988, "Decentralized control of robot manipulators via state and Proportional-Integral feedback", Proceeding 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 24-29, Philadelphia, PA, Vol. 2, pp. 1198-1203.

El controlador PD+ fue propuesto y analizado mediante el teorema de Matrosov en Paden, Panja (1988) (ver referencias anteriores)

La estructura del controlador PD mas compensaci3n ha sido estudiada en:

Slotine J.J., Li W., 1987. "On the adaptive control of robot manipulators", The International Journal of Robotics Research, Vol. 6, No. 3, pp. 49-59.

Slotine J.J., Li W., 1988. "Adaptive manipulator control: A case study", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-33, No. 11, November, pp. 995-1003.

La demostraci3n de estabilidad asint3tica global el controlador PD m3s compensaci3n fue desarrollada en:

Spong M., Ortega R., Kelly R., 1989, "Comments on "Adaptive manipulator control: A case study"", Reporte tecnico, DEPTI-UNAM, Enero.

El análisis del controlador Par-Calculado sigue las ideas reportadas en:

Wen J., Bayard D., 1988. "New class of control law for robotic manipulators. Part 1: Non-adaptive case", International Journal of Control, Vol. 47, No. 5, pp. 1361-1385.

La estructura del controlador Par-Calculado + fue propuesta en:

Kelly R., Carelli R., 1988. "Unified approach to adaptive control of robotic manipulators", Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX., Diciembre, Vol. 1, pp. 1598-1603.

Kelly R., Carelli R., Ortega R., 1989. "Adaptive motion control design of robot manipulators: An input-output approach", International Journal of Control. (En prensa).

Una excelente revisión sobre controladores adaptables de movimiento es presentada en:

Ortega R., Spong M. 1988. "Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial" Proceedings of the 27th, IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX, Diciembre, Vol. 1, pp. 1575-1584.

El primer trabajo formal presentando un control adaptable de movimiento para robots fue:

Craig J.J., Hsu P., Sastry S., 1986. "Adaptive control of mechanical manipulators" Proceedings of the 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco, CA., Abril, pp. 190-195.

Diversos controladores adaptables de movimiento para manipuladores robóticos han sido propuestos y analizados en:

Middleton R., Goodwin G., 1986. "Adaptive computed torque control for rigid link manipulators", Proceedings of the 25th Conference on Decision and Control, Athens, Greece, Diciembre, pp. 68-73.

Sadegh N., Horowitz R., 1987. "Stability analysis of an adaptive controller for robotic manipulators", Proceedings of the 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Raleigh CN., April, pp. 1223-1229.

Bayard D., Wen J., 1988. "New class of control law for robotic manipulators. Part 2: Adaptive case", International Journal of Control, Vol. 47, No. 5, pp. 1387-1406.

El controlador PD más compensación adaptable fue originalmente propuesto por Slotine, Li (1987) (ver referencias anteriores). El controlador adaptable Par-Calculado + fue propuesto por Kelly, Carelli (1988). (Ver referencias

anteriores).

Los ejemplos 4.7 y 4.9 fueron tomados de Slotine, Li (1988) y Kelly, Carelli, Ortega (1989) respectivamente.

Una detallada descripción del concepto de las ecuaciones del modelo del error así como de leyes de adaptación, en particular del tipo integral (o pseudo-gradiente), puede encontrarse en:

Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D., 1986, "Stability of adaptive systems: Passivity and averaging analysis", The MIT Press, Cambridge, MA.

Un excelente texto introductorio al control adaptable es:

Astrom K.J., Wittenmark B., 1989, "Adaptive control", Addison-Wesley Pub. Co.

APENDICE A

MODELADO DE MOTORES DE CORRIENTE DIRECTA

Los actuadores de robots manipuladores pueden ser eléctricos, hidráulicos o neumáticos. Los actuadores eléctricos son generalmente motores de corriente directa (CD) con imán permanente.

El modelo matemático de un motor CD con imán permanente controlado con la armadura es descrito típicamente por el siguiente conjunto de ecuaciones (véase figura A.1):

$$\tau_m = K_a i_a \quad (A.1)$$

$$v = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \quad (A.2)$$

$$e_b = K_b \dot{\theta}_m \quad (A.3)$$

$$\theta_m = r \theta$$

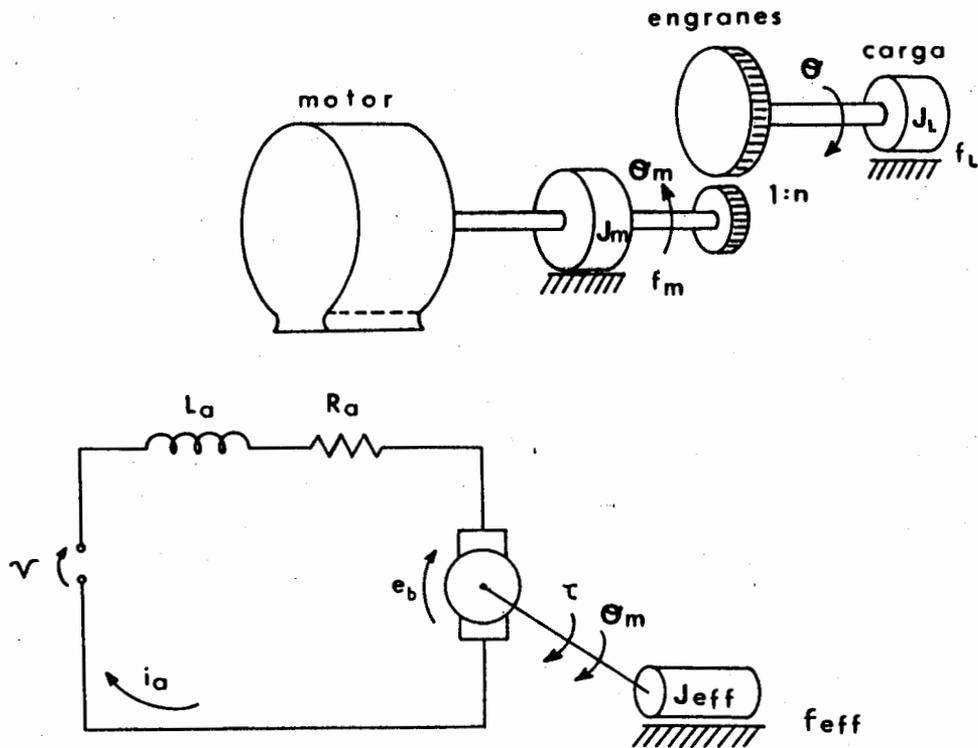


Figura A.1

donde

- K_a constante motor-par (N m / A)
- R_a resistencia de armadura (Ω)
- L_a inductancia de armadura (H)
- K_b constante de contrareacción electromotriz (V s)
- τ_m par en el eje del motor (N m)
- i_a corriente de armadura (A)
- e_b fuerza electromotriz (V)
- θ_m posición angular del eje del motor (rad)
- θ posición angular del eje de la carga (rad)
- r relación de reducción de los engranes (en general $r \gg 1$)
- v voltaje de armadura (V)

Por otro lado, la ecuación de movimiento para el sistema es:

$$J_m \ddot{\theta}_m = \tau_m - f_m(\dot{\theta}_m) - \frac{\tau}{r} \quad (\text{A.4})$$

donde τ es el par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga, J_m es la inercia del rotor y $f_m(\dot{\theta}_m)$ es el par debido a la fricción del rotor con sus soportes.

Debido a que la constante de tiempo eléctrica es mucho más rápida que la constante de tiempo mecánica, tradicionalmente la inductancia de armadura L_a es despreciada ($L_a \approx 0$) en la ecuación (A.2). Tomando en consideración lo anterior, reemplazando i_a de (A.2) en (A.1) y a su vez τ_m de (A.1) en (A.4) se llega a la siguiente ecuación:

$$J_m \ddot{\theta}_m + f_m(\dot{\theta}_m) + \frac{K_a e_b}{R_a} + \frac{\tau}{r} = \frac{K_a}{R_a} v. \quad (\text{A.5})$$

Finalmente haciendo uso de la relación $\theta_m = r\theta$ y de (A.3), la ecuación (A.5) se reescribe como:

$$J_m \ddot{\theta} + \frac{1}{r} f_m(r\dot{\theta}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{\theta} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.6})$$

Esta importante ecuación relaciona el voltaje v aplicado a la armadura del

motor con el par τ aplicado a la carga en términos de la posición, velocidad y aceleración angular de la misma.

En el caso particular donde la carga es modelada simplemente por una inercia J_L con pares de fricción $f_L(\dot{\theta})$ tal como se muestra en la figura A.1, entonces el par τ se obtiene a partir de la ecuación de movimiento asociada a la carga:

$$J_L \ddot{\theta} = \tau - f_L(\dot{\theta}). \quad (\text{A.7})$$

El modelo motor-carga para este caso se obtiene reemplazando τ de (A.7) en (A.6):

$$J_{\text{eff}} \ddot{\theta} + f_{\text{eff}}(\dot{\theta}) + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{\theta} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (\text{A.8})$$

donde:

$$J_{\text{eff}} = J_m + \frac{J_L}{r^2} \quad (\text{A.9})$$

$$f_{\text{eff}}(\dot{\theta}) = \frac{1}{r} f_m(r\dot{\theta}) + \frac{1}{r^2} f_L(\dot{\theta}) \quad (\text{A.10})$$

A pesar de la extrema complejidad de los fenómenos de fricción, tradicionalmente se emplean modelos lineales para caracterizar el comportamiento de los pares de fricción:

$$f_m(\dot{\theta}_m) = f_m \dot{\theta}_m \quad (\text{A.11})$$

$$f_L(\dot{\theta}) = f_L \dot{\theta} \quad (\text{A.12})$$

donde f_m y f_L son constantes. Eventualmente suelen considerarse modelos no lineales del tipo:

$$f_m(\dot{\theta}_m) = f_m \dot{\theta}_m + C_1 \text{sign}(\dot{\theta}_m) \quad (\text{A.13})$$

$$f_L(\dot{\theta}) = f_L \dot{\theta} + C_2 \text{sign}(\dot{\theta}) \quad (\text{A.14})$$

donde f_m , f_L , C_1 y C_2 son constantes.

A.1 Modelo lineal

Considerando el modelo lineal para los pares de fricción (A.11) y (A.12), la ecuación (A.6) que relaciona el voltaje aplicado a la armadura del motor con el par ejercido sobre la carga toma la forma:

$$J_m \ddot{\theta} + \left[f_m + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{\theta} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.15})$$

Así mismo, el correspondiente modelo motor-carga (A.8) es simplemente:

$$J_{\text{eff}} \ddot{\theta} + \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right] \dot{\theta} = \frac{K_a}{r R_a} v. \quad (\text{A.16})$$

o en forma equivalente:

$$T \ddot{\theta} + \dot{\theta} = K v \quad (\text{A.17})$$

donde

$$T = \frac{J_{\text{eff}}}{f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a}} \quad (\text{A.18})$$

$$K = \frac{K_a}{r R_a \left[f_m + \frac{f_L}{r^2} + \frac{K_a K_b}{R_a} \right]} \quad (\text{A.19})$$

A.2 Modelo no lineal

En este apartado se considerara el caso de fricción no lineal (A.13) y (A.14) y por simplicidad $r=1$, esto es, $\theta=\theta_m$. En estas circunstancias el modelo motor-carga (A.8) es descrito por:

$$J_{\text{eff}} \ddot{\theta} + a \dot{\theta} + b \text{sign}(\dot{\theta}) = K v \quad (\text{A.16})$$

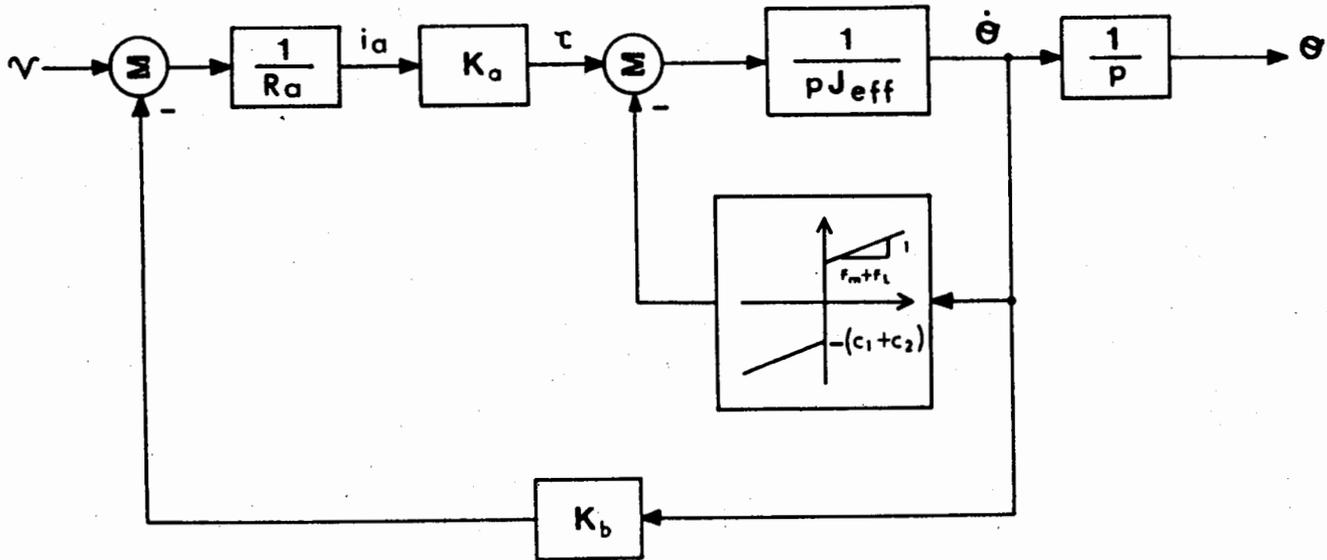


Figura A.2

donde

$$K = K_a / R_a \quad (A.17)$$

$$a = f_m + f_L + (K_a K_b / R_a) \quad (A.18)$$

$$b = C_1 + C_2 \quad (A.19)$$

La figura A.2 muestra un diagrama de bloques equivalente al modelo (A.16).

■■■

REFERENCIAS

La obtención del modelo dinámico lineal de motores de corriente directa puede encontrarse en:

Ogata K., 1970. "Modern Control Engineering", Prentice-Hall.

Spong M., Vidyasagar M., 1989. "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, Inc.

Varios modelos no-lineales de fricción en motores de corriente directa son presentados en:

Canudas C., Astrom K., Braun K., 1987. "Adaptive friction compensation in DC-motor drives", IEEE Journal of Robotics and Automation, Vol. RA-3, No. 6, December.

**La presente publicación se
terminó de imprimir en
Impresores Profesionales
el día 2 de marzo de 1989.**

**La edición constó de
100 ejemplares. Y estuvo a
cargo de la misma la
Lic. Elsa Martínez Bremont.**

F-DEPFI/D-79/1989/Ej.5



702474