



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

FASCICULO 12

**DINAMICA DEL
CUERPO RIGIDO.
METODOS DE
TRABAJO Y ENERGIA
E IMPULSO Y CANTIDAD
DE MOVIMIENTO**

LUIS ORDOÑEZ REYNA



FACULTAD INGENIERIA

FASC. 12
8-C

G1.-

8-C

FACULTAD DE INGENIERIA



908328

G1.-

FASC. 12
DIN. CUER. R
8-C

FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM.



908328

G1.-908328

PROLOGO

En este fascículo se desarrollan los enfoques del Trabajo y Energía, y del Impulso y Cantidad de Movimiento para el análisis dinámico del cuerpo rígido dotado de movimiento plano general, representando así un complemento del fascículo 11 en el cual se considera el mismo análisis bajo el método de las fuerzas y aceleraciones.

Sin embargo, para aprovechar de una manera más efectiva este material didáctico se recomienda al lector familiarizarse previamente con los temas relativos al Trabajo y Energía, y los Impulsos y Cantidades de Movimiento (tanto lineales como angulares) correspondientes a una partícula, y a un sistema de partículas, los cuales están desarrollados en otros fascículos.

Al final del fascículo se presenta también la bibliografía de la que se han tomado algunas ideas para la proposición de ejemplos y problemas.

Los artículos incluidos cubren adecuadamente los temas correspondientes a dichos enfoques, los cuales forman parte de los programas de algunas materias básicas de las carreras ingenieriles.

A lo largo del texto se presentan 13 ejemplos ilustrativos y se proponen 23 problemas por resolver, incluyéndose sus respuestas al final del enunciado correspondiente.

Considerando que el material incluido puede presentar errores involuntarios y omisiones, el autor agradece anticipadamente la atención de los lectores que se los indiquen, y asimismo espera las sugerencias que del mismo le hagan llegar personalmente con el objeto de mejorar adiciones posteriores.

CONTENIDO

12. DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO. METODO DEL TRABAJO Y ENERGIA, E IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO	1
12.1 METODO DEL TRABAJO Y ENERGIA	1
12.1.1 <i>Introducción</i>	1
12.1.2 <i>Energía cinética de un cuerpo dotado de movimiento plano general</i>	2
12.1.3 <i>Energía cinética de un cuerpo dotado de un movimiento de rotación no baricéntrica alrededor de un eje fijo</i>	3
12.1.4 <i>Energía cinética de un cuerpo dotado de un movimiento de rotación baricéntrica alrededor de un eje fijo</i>	4
12.1.5 <i>Energía cinética de un cuerpo dotado de un movimiento de traslación plana</i>	4
12.1.6 <i>Diferentes formas de principio del trabajo y energía para cuerpos dotados de movimiento plano general</i>	5
12.1.7 <i>Trabajo diferencial de una fuerza</i>	7
12.1.8 <i>Trabajo realizado por un par de fuerzas</i>	11
12.1.9 <i>Método del trabajo y energía para cuerpos rígidos interconectados</i>	13

CONTENIDO

12.2 METODO DEL IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO	30
12.2.1 <i>Introducción</i>	30
12.2.2 <i>Relación entre el impulso lineal de las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo rígido en un intervalo dado y la variación de su cantidad de movimiento en dicho intervalo</i>	31
12.2.3 <i>Conservación de la cantidad de movimiento</i>	31
12.2.4 <i>Relación entre el impulso angular de las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo rígido durante un intervalo de tiempo dado y la variación de su cantidad de movimiento angular en dicho intervalo</i>	32
12.2.5 <i>Conservación de la cantidad de movimiento angular</i>	33
12.3 PROBLEMAS PROPUESTOS	43
BIBLIOGRAFIA	523

12. DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO. METODOS DE TRABAJO Y ENERGIA, E IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

12.1 METODO DEL TRABAJO Y ENERGIA

12.1.1 INTRODUCCION

De manera análoga a lo que sucede en la Dinámica de la partícula, cuando las cantidades involucradas entre los datos y las incógnitas de un problema dinámico relativo a un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general (o de un caso particular de ese movimiento), son la variación de la rapidez de su centro de masa y la longitud del camino recorrido por dicho punto entre dos posiciones consecutivas del cuerpo, el método del Trabajo y Energía es el más indicado para desarrollar la solución*.

En la primera parte se procederá a establecer las expresiones que corresponden a la energía cinética de un cuerpo dotado de los siguientes movimientos específicos:

- Movimiento plano general.*
- Movimiento de rotación no baricéntrica alrededor de un eje fijo.*
- Movimiento de rotación baricéntrica alrededor de un eje fijo.*
- Movimiento de traslación plana.*

Posteriormente, y usando como base las tres formas del principio del trabajo y energía correspondiente a la partícula, se establecerán las mismas formas para un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general. Adicionalmente se desarrollarán algunos ejemplos de problemas para ilustrar los conceptos teóricos.

* En el caso de una rotación alrededor de un eje fijo esta situación se presenta cuando las cantidades involucradas son la variación de la rapidez angular del cuerpo y el ángulo descrito por este último.

12.1.2 ENERGIA CINETICA DE UN CUERPO DOTADO DE MOVIMIENTO PLANO GENERAL

La ecuación correspondiente a la energía cinética de un sistema de partículas donde se hace intervenir el centro de masa, sirve de base para obtener la expresión de la energía cinética de un cuerpo dotado de movimiento plano general.

En efecto, dicho modelo matemático indica que:

$$E.C. = \frac{M}{2} v_c^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{2} \dot{\rho}_{c_i}^2 \right) \dots 12.1$$

- Siendo: M = masa total del sistema de partículas
 v_c = rapidez del centro de masa del sistema de partículas en el instante considerado
 m_i = masa de la partícula i ésima, y
 $\dot{\rho}_{c_i}$ = rapidez relativa de la partícula i ésima con respecto al centro de masa, en el instante considerado.

De este modo, para un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general, M corresponde a la masa del cuerpo; v_c tiene el mismo significado mencionado anteriormente, y el término $\sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i}{2} \dot{\rho}_{c_i}^2 \right)$ se transforma en

$$\int \dot{\rho}_{c_i}^2 \frac{dm}{2}$$

A su vez, la cantidad $\dot{\rho}_{c_i} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{c_i}$, de acuerdo con la figura 12.1 está dada por la expresión:

$$\dot{\rho}_{c_i} = \omega \rho_{c_i} \dots 12.2$$

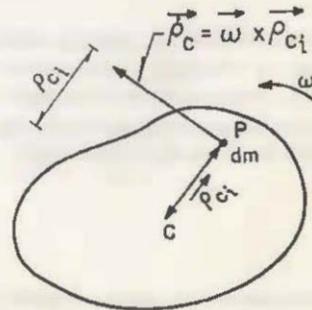


Fig 12.1

ya que los vectores $\vec{\omega}$, y $\vec{\rho}_{c_i}$ forman un ángulo de 90° .

$$\text{Así } \dot{\rho}_{c_i}^2 = \omega^2 \rho_{c_i}^2 \dots 12.3$$

Al sustituir estas cantidades en la ecuación 12.1 se obtiene:

$$E.C._{M.P.G} = \frac{M}{2} v_c^2 + \int \frac{\omega^2}{2} \rho_{c_i}^2 dm \dots 12.4$$

y como $\frac{\omega^2}{2}$ es una cantidad común a todos los términos de la integral, resulta

$$E.C._{M.P.G} = \frac{M}{2} v_c^2 + \frac{\omega^2}{2} \int \rho_{c_i}^2 dm \dots 12.5$$

$$\int \rho_{c_i}^2 dm = I_c \dots 12.6$$

A su vez,

Siendo esta expresión el momento de inercia de la masa del cuerpo rígido con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por el centro de masa.

Por lo tanto, para un movimiento plano general:

$$E.C._{M.P.G} = \frac{M}{2} v_c^2 + \frac{I_c}{2} \omega^2 \dots 12.7$$

siendo esta la expresión buscada.

12.1.3 ENERGIA CINETICA DE UN CUERPO DOTADO DE UN MOVIMIENTO DE ROTACION NO BARICENTRICA ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Para este caso particular, de acuerdo con la figura 12.2:

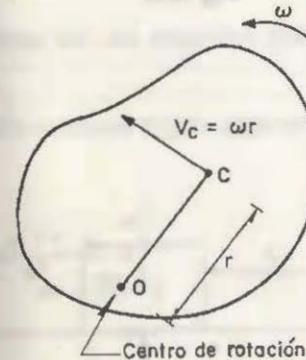


Fig 12.2

$$v_c = \omega r \dots 12.8$$

Por tanto, la ecuación 12.7 se transforma en:

$$E.C._{RNB} = \frac{M}{2} (\omega^2 r^2) + \frac{I_c}{2} \omega^2$$

que puede escribirse como:

$$E.C._{RNB} = \frac{\omega^2}{2} (I_c + Mr^2) \dots 12.9$$

y según el teorema de Steiner (de los ejes paralelos),

$$I_o = I_c + Mr^2 \dots 12.10$$

Sustituyendo 12.10 en 12.9, resulta

$$E.C._{RNB} = \frac{I_o}{2} \omega^2 \dots 12.11$$

12.1.4 ENERGIA CINÉTICA DE UN CUERPO DOTADO DE UN MOVIMIENTO DE ROTACION BARICENTRICA ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

En este caso, representado en la figura 12.3 como $V_c = 0$, la ecuación 12.7 se reduce a:

$$E.C._{RNB} = I_c \omega^2 \dots 12.12$$

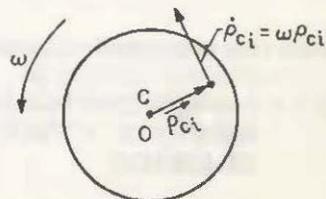


Fig 12.3

12.1.5 ENERGIA CINÉTICA DE UN CUERPO DOTADO DE UN MOVIMIENTO DE TRASLACION PLANA

Para este caso particular, representado por la figura 12.4 como $\omega = 0$, la expresión 12.7 se reduce a:

$$E.C._{T.P} = \frac{M}{2} V_c^2 \dots 12.13$$

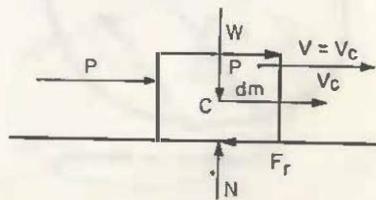


Fig 12.4

12.1.6 DIFERENTES FORMAS DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y ENERGIA PARA CUERPOS DOTADOS DE MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Las tres formas conocidas del principio del trabajo y energía aplicadas a la partícula tienen sus versiones correspondientes para un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general. Estas formas son las siguientes:

FORMA 1. FORMA GENERAL

"El trabajo realizado por el sistema de fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo rígido dotado de un movimiento plano general, entre dos posiciones consecutivas del cuerpo, es igual al incremento de su energía cinética entre dichas posiciones".

En forma simbólica esto indica que: $\sum T_{1,2} = \Delta E C_{1,2} \dots 12.14$

FORMA 2

"El trabajo realizado por las fuerzas exteriores no conservativas que actúan sobre un cuerpo rígido dotado de un movimiento plano general, entre dos posiciones consecutivas del cuerpo, es igual al incremento de su energía cinética más el incremento de las energías potenciales involucradas en el sistema, entre dichas posiciones".

Es decir: $\sum_{n.c.} T_{1,2} = \Delta E C_{1,2} + \Delta E P_{1,2} \dots 12.15$

Para la aplicación práctica de esta forma conviene tomar en cuenta los siguientes conceptos relacionados con las energías potenciales, las cuales involucran fuerzas conservativas.

a) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo rígido con respecto a un nivel de referencia arbitrario se puede calcular tomando en cuenta la posición de su centro de masa con respecto a dicho plano.

En efecto, el peso de un cuerpo es una fuerza conservativa, y por lo tanto, para la íésima partícula de peso $d\omega_i$ que está localizada a una distancia y_i sobre un plano de referencia arbitrario, (figura 12.5), su energía potencial gravitatoria relativa es:

$$d E.P.G.R = y_i d \omega_i \dots 12.16$$

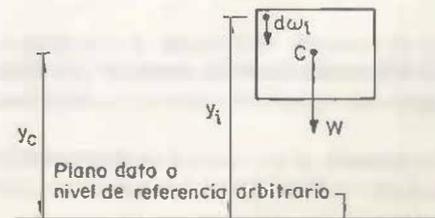


Fig 12.5

Por lo tanto, la energía potencial gravitatoria relativa del cuerpo tiene por expresión:

$$\epsilon.P.G.R. = \int y_c d\omega_c \dots 12.17$$

Por otra parte, de acuerdo con la definición de centro de masa, y considerando a g como constante, se tiene que:

$$\int y d\omega = g \int y dm = g M y_c = W y_c \dots 12.18$$

De este modo, la energía potencial gravitatoria de un cuerpo en una posición dada puede determinarse conociendo la altura y_c , de su centro de masa con respecto al plano dato, y el peso, W , del cuerpo.

Para la posición indicada en la figura 12.5 la energía potencial es positiva, ya que el peso tiene la capacidad de efectuar un trabajo positivo cuando el cuerpo se mueve hacia abajo hasta regresar al plano dato.

Si el centro de masa se localizara a una distancia y_c abajo del plano dato, la energía potencial gravitatoria es negativa, ya que el peso tiene la capacidad de efectuar un trabajo negativo cuando el cuerpo regresa a dicho nivel dato.

b) La energía potencial elástica correspondiente a un resorte elástico lineal ligado a un cuerpo rígido también proviene de una fuerza supuestamente conservativa. Así, cuando el resorte se alarga o se acorta con relación a su longitud libre, L_L , una distancia x (figura 12.6), la energía potencial elástica que el resorte transmite al cuerpo ligado a él es:

$$\epsilon.P.E. = \frac{k}{2} x^2 \dots 12.19$$

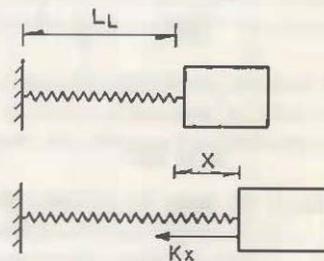


Fig 12.6

siendo k la constante del resorte.

En la posición deformada la fuerza que ejerce el resorte sobre el cuerpo tiene la capacidad de efectuar un trabajo positivo cuando el resorte regresa a su posición original no deformado.

En general, si un cuerpo se sujeta tanto a la acción de fuerzas gravitatorias como elásticas, la energía potencial total se expresa como:

$$\epsilon.P. = \epsilon.P.G. + \epsilon.P.E. \dots 12.20$$

FORMA 3.

“Si todas las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo rígido dotado de un movimiento plano general, entre dos posiciones consecutivas del mismo, son conservativas, la energía mecánica del cuerpo (o sea la suma de su energía cinética más las energías potenciales involucradas en el sistema) se conserva”; es decir:

$$\epsilon.C_1 + \epsilon.P_1 = \epsilon.C_2 + \epsilon.P_2 = C \dots 12.21$$

Antes de proceder a desarrollar algunos ejemplos numéricos aplicando el método del trabajo y energía a cuerpos rígidos dotados de movimiento plano general, se revisarán algunos conceptos relacionados con el trabajo realizado por una fuerza, y por un par de fuerzas.

12.1.7 TRABAJO DIFERENCIAL DE UNA FUERZA

Cuando el punto de aplicación de una fuerza \vec{F} se desplaza la cantidad $AA' = d\rho$ (figura 12.7), por definición:

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{\rho} \dots 12.22$$

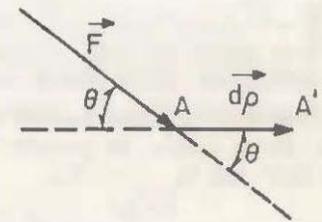


Fig 12.7

o sea: $dT = F d\rho \cos \theta \dots 12.23$

siendo θ el ángulo formado entre el vector \vec{F} y el vector $d\rho$.

El trabajo realizado por la fuerza \vec{F} en un intervalo de tiempo finito para el cual el punto de aplicación pasa de una posición A_1 a una posición A_2 , resulta:

$$T_{1,2} = \int_1^2 F \cos \theta d\rho \dots 12.24$$

El trabajo es, por supuesto, una cantidad escalar cuyo signo depende del ángulo θ , es decir:

si $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$, el trabajo resulta positivo

si $\theta = 90^\circ$, el trabajo es nulo,

y si $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ el trabajo resulta negativo.

De lo anterior puede deducirse que para que una fuerza efectúe trabajo es necesario que se cumplan dos condiciones:

- 1.- Que su punto de aplicación se desplace, y
- 2.- Que el ángulo formado entre la fuerza y el desplazamiento de su punto de aplicación sea diferente de 90°

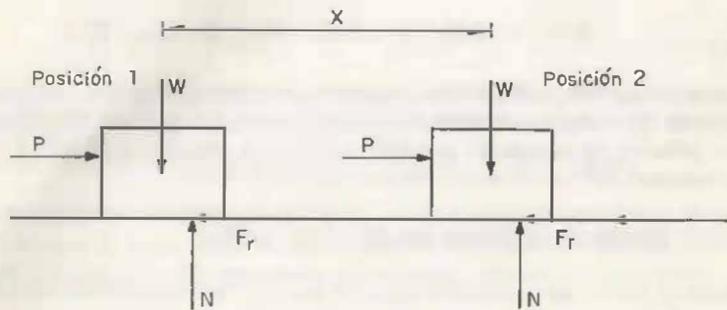


Fig 12.8

Para el caso de la figura 12.8, donde se indican las posiciones 1 y 2 de un bloque que se desliza de izquierda a derecha apoyándose sobre un plano horizontal rugoso debido a la acción de una fuerza activa P, el trabajo de esta fuerza resulta positivo, de valor $T_{P_{1,2}} = Px$, mientras que el trabajo de la fuerza de fricción F_r resulta negativo, ya que el ángulo $\theta = 180^\circ$; así $T_{F_r_{1,2}} = -F_r x$.

En cuanto a la fuerza normal, N, su trabajo es nulo pues $\theta = 90^\circ$.

En este caso el trabajo del peso también resulta nulo por la misma razón.

En el caso del rodamiento perfecto de un sólido de revolución la fuerza de fricción no trabaja porque cada instante está siendo sustituida por una nueva fricción aplicada en el centro instantáneo de rotación (i) (figura 12.9); es decir, en este caso para la fuerza de fricción $d\rho = 0$

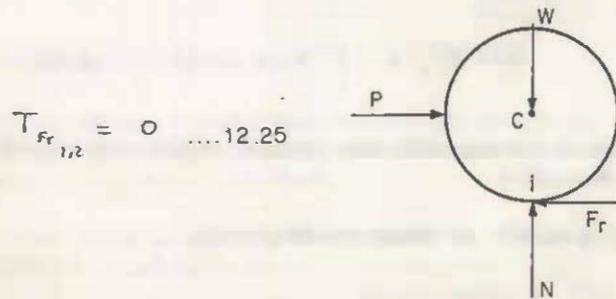


Fig 12.9

$$T_{F_r_{1,2}} = 0 \quad \dots 12.25$$

Cuando la magnitud y dirección de una fuerza se conservan constantes durante algún periodo de interés, para calcular el trabajo realizado por ella entre dos posiciones consecutivas, de su punto de aplicación, conviene usar alguna de las dos formas siguientes:

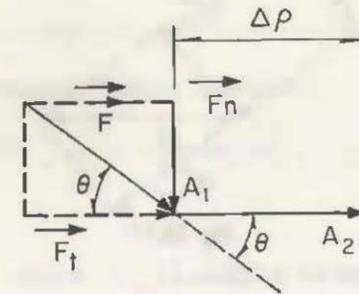


Fig 12.10

- 1.- Si se considera descompuesta la fuerza \vec{F} en una componente \vec{F}_t colineal con el desplazamiento del punto de aplicación de F (llamada componente tangencial), y una componente, \vec{F}_n , normal a dicho desplazamiento (llamada componente normal) (figura 12.10), la única componente que trabaja es la componente tangencial.

Como puede verse en la figura 12.10, el valor algebraico de la componente tangencial resulta:

$$F_t = F \cos \theta \quad \dots 12.26$$

por lo que al sustituir este valor en la ecuación 12.23 resulta:

$$dT = F_t d\rho \quad \dots 12.27.$$

y por tanto:

$$T_{1,2} = \int_1^2 F_t d\rho \quad \dots 12.28$$

Cuando F y θ se conservan constantes, resulta:

$$T_{1,2} = F_t \Delta \rho = F \cos \theta \Delta \rho \quad \dots 12.29$$

Es decir, el trabajo resulta igual al producto del valor algebraico de la componente tangencial de la fuerza por la longitud del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.

- 2.- Si se descomponen el desplazamiento $d\vec{\rho}$ en una componente colineal con la fuerza, $d\rho_t$, (llamado desplazamiento tangencial), y una componente perpendicular a la fuerza, $d\rho_n$ (llamado desplazamiento

normal), el trabajo de la fuerza lo realiza totalmente a lo largo del desplazamiento tangencial.

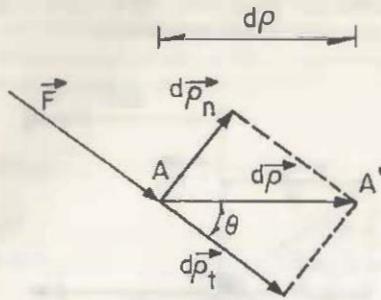


Fig 12.11

Como puede verse en la figura 12.11, el valor algebraico del desplazamiento tangencial es:

$$d p_e = d p \cos \theta \quad \dots 12.30$$

Al sustituir (12.30) en (12.23) resulta:

$$dT = F d p_e \quad \dots 12.31$$

y por tanto:

$$T_{1,2} = \int_1^2 F d p_e \quad \dots 12.32$$

De modo que cuando F y θ son constantes en el intervalo bajo consideración:

$$T_{1,2} = F \Delta p_e \quad \dots 12.33$$

Es decir, el trabajo resulta igual al producto de la fuerza por el valor algebraico del desplazamiento tangencial entre las dos posiciones del punto de aplicación de la fuerza.

Cualquiera de estos dos métodos se aplica comúnmente cuando se trata de calcular el trabajo del peso de un cuerpo cuando dicho cuerpo se desplaza a lo largo de un plano inclinado (figura 12.12).

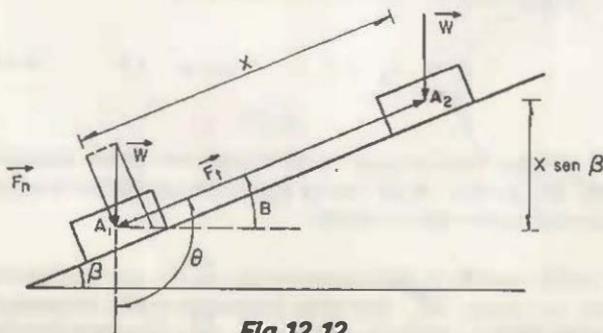


Fig 12.12

1er. Método.

El valor algebraico de la componente tangencial del peso \vec{W} es:

$$F_t = W \cos \theta = W \cos (90^\circ + \beta) = -W \operatorname{sen} \beta$$

siendo β el ángulo formado entre el plano inclinado y la horizontal.

Si x es el desplazamiento recorrido por el bloque a lo largo del plano, resulta:

$$T_{W_{1,2}} = -(W \operatorname{sen} \beta) x \quad \dots 12.34$$

2o. Método.

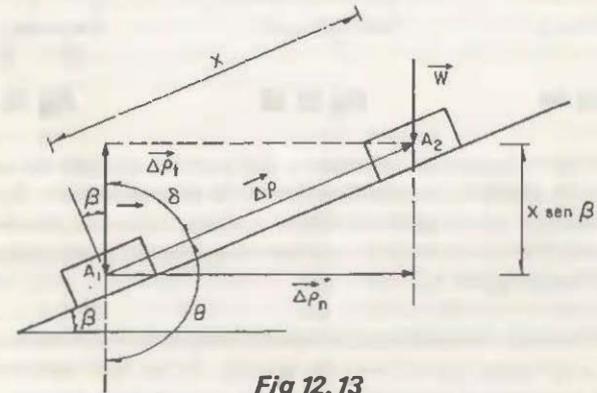


Fig 12.13

El valor algebraico del desplazamiento tangencial resulta:

$$\Delta p_e = x \cos \theta = -x \cos \delta = -x \operatorname{sen} \beta$$

por lo tanto: $T_{W_{1,2}} = W (-x \operatorname{sen} \beta) = -W x \operatorname{sen} \beta \quad \dots 12.35$

En este caso particular el trabajo efectuado por el peso del bloque resulta negativo porque la componente de la fuerza y el desplazamiento, ambos tangenciales, forman un ángulo de 180° .

Como corolario de este segundo método se puede concluir que el trabajo del peso de un cuerpo entre dos posiciones del mismo es igual al producto del peso por la diferencia de niveles entre las dos posiciones de su centro de masa, siendo positivo si el cuerpo desciende, y negativo si asciende.

12.1.8 TRABAJO REALIZADO POR UN PAR DE FUERZAS

Un par de fuerzas es un sistema formado por dos fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas, que tienen magnitudes iguales, y sentidos opues-

los. De esta manera cuando un par de fuerzas se aplica a un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general, las dos fuerzas del par trabajan solamente cuando el cuerpo experimenta una rotación. En efecto, considérese el cuerpo indicado en la figura 12.14, sobre el cual se ejerce el par mostrado, de magnitud $M = Fr$, y cuyo plano coincide con el plano de movimiento del cuerpo.

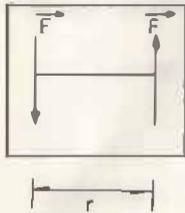


Fig 12.14

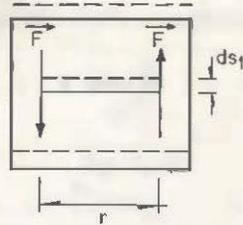


Fig 12.15

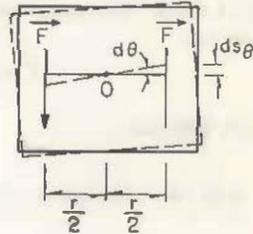


Fig 12.16

Cualquier desplazamiento diferencial del cuerpo dotado de movimiento plano general puede considerarse como la superposición del desplazamiento debido a una traslación plana y a una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por cualquier punto, como el O, de la figura 12.16.

Cuando el cuerpo se traslada, de manera que la componente del desplazamiento a lo largo de la línea de acción de las fuerzas es ds_1 (figura 12.15), se ve que el trabajo positivo de una fuerza cancela el trabajo negativo de la otra fuerza.

Si se considera una rotación diferencial, $d\theta$, del cuerpo alrededor de un eje perpendicular al plano de movimiento que intersecta a dicho plano en el punto O (figura 12.16), el punto de aplicación de cada fuerza del par experimenta un desplazamiento $ds_\theta = \frac{r\theta}{2} d\theta$ en la dirección de la fuerza. Por lo tanto, el trabajo, total realizado por el par es:

$$dT_{par} = F \left(\frac{r}{2} \right) d\theta + F \left(\frac{r}{2} \right) d\theta = Fr d\theta$$

o sea:
$$dT_{par} = M d\theta \dots 12.36$$

La línea de acción del vector $d\vec{\theta}$ es paralela a la línea de acción del par \vec{M} , y este siempre es el caso para un movimiento plano general, ya que tanto \vec{M} como $d\theta$ son perpendiculares al plano de movimiento.

Además, el trabajo del par es positivo cuando \vec{M} y $d\vec{\theta}$ tienen el mismo sentido, y negativo cuando estos vectores tienen sentidos opuestos.

Cuando el cuerpo gira a través de un ángulo finito θ , desde θ_1 , hasta θ_2 , el trabajo del par es:

$$T_{par} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \dots 12.37$$

y cuando M tiene una magnitud constante: $T_{par} = M (\theta_2 - \theta_1)$ midiéndose siempre θ_1 y θ_2 en radianes. ... 12.38

12.1.9 METODO DEL TRABAJO Y ENERGIA PARA CUERPOS RIGIDOS INTERCONECTADOS

Cuando se analiza un sistema formado por varios cuerpos rígidos dotados de movimiento plano general (o alguna de sus versiones particulares), los cuales están unidos por medio de elementos flexibles, inextensibles y de peso despreciable (o bien por resortes elásticos y lineales), resulta que estos elementos se consideran interiores al sistema y por lo tanto, el trabajo total realizado por ellos entre dos posiciones consecutivas de los cuerpos conectados es nulo.

De esta manera, al efectuar el análisis solo debería tomarse en cuenta el trabajo realizado por las fuerzas y pares exteriores al sistema. Sin embargo, como se ilustrará al desarrollar algunos ejemplos de problemas, al incluir el trabajo efectuado por dichos elementos de unión, se logra contar con expresiones que permiten calcular las fuerzas ejercidas a lo largo de ellas, y posteriormente, utilizando los diagramas de cuerpo libre de esos cuerpos y el método de las ecuaciones de movimiento, se pueden obtener las aceleraciones de los puntos esenciales de los cuerpos del sistema.

De esta manera es posible comparar las respuestas obtenidas al usar ambos métodos en la solución de un problema particular que involucra un conjunto de cuerpos interconectados.

Ejemplo 12.1. La barra AB de 147 N de peso está articulada en A y sujeta a la acción de un par de magnitud $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$ en el sentido indicado. Si la barra se suelta desde el reposo cuando el resorte tiene su longitud libre en $\theta = \text{ang tan}(3/4)$, determinar la rapidez angular de la barra cuando $\theta = \text{ang tan}(4/3)$. Al girar la barra el resorte se conserva horizontal debido al apoyo de rodillo en D. (Figura 12.17).

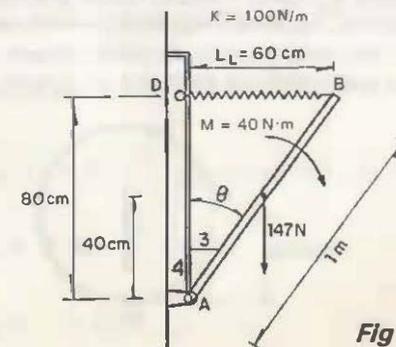


Fig 12.17

Solución.

Según los datos, para el resorte $L_1 = 60$ cm, y su longitud final (figura 12.18) es de 80 cm, luego $x = 20$ cm.

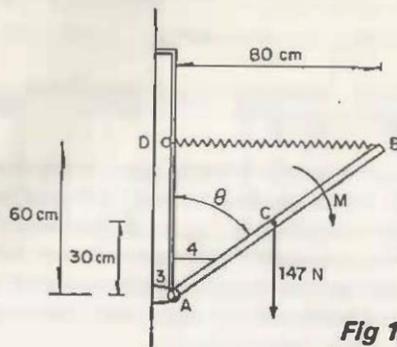


Fig 12.18

En cuanto al ángulo descrito por la barra desde una posición a otra es:

$$\Delta \theta = 53.130102^\circ - 36.869898^\circ = 16.260204^\circ$$

o sea: $\Delta \theta = 0.2838$ rad.

La diferencia de nivel entre las dos posiciones del centro de masa es de 10 cm.

Aplicando la forma 2 del principio del trabajo y energía resulta:

$$40(0.2838) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(15) l^2 \right] \omega^2 + [0 - 147(0.10)] + 50(0.10)^2$$

$$11.352 = 2.5 \omega^2 - 14.7 + 2$$

luego: $2.5 \omega^2 = 24.052$

$$\omega^2 = 9.6208 \quad ; \quad \omega = 3.1017 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 12.2. Un gran rollo de papel que tiene una masa de 10 kg y un radio $R = 20$ cm se apoya sobre el borde A, de una mesa (figura 12.19), si se le da al rollo un ligero impulso hacia la derecha perturbando su posición de equilibrio, hallar el ángulo β formado entre la vertical y la recta AC, al cual el rollo está a punto de saltar afuera del borde A de la mesa. El radio de giro centroidal del rollo es $k = 10$ cm.

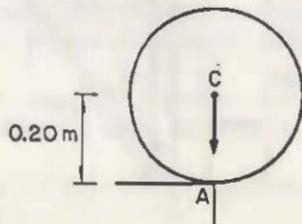


Fig 12.19

Solución.

Como se trata de un sistema conservativo primero se calcula el valor del cuadrado de la rapidez angular, ω^2 , del rollo, en función del ángulo θ formado entre la vertical y la recta AC (figura 12.20) y posteriormente se toma en cuenta que en el instante en que el rollo está a punto de saltar, $\theta = \beta$, y la magnitud A_n de la componente normal de la reacción en el borde A es nula.

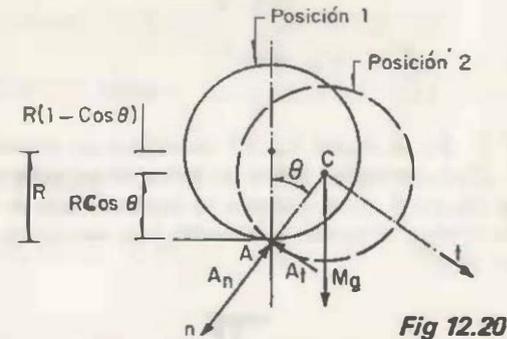


Fig 12.20

En la figura 12.20 se indican las dos posiciones del rollo que servirán de base para el análisis, así como el diagrama de cuerpo libre para una posición cualquiera de la etapa comprendida entre la iniciación del movimiento del rollo y su desprendimiento inminente con respecto al borde A.

Aplicando la forma 3 del principio del trabajo y energía a dichas posiciones, resulta:

$$Mg R (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} [M \bar{k}^2 + M R^2] \omega^2$$

Cancelando la masa en ambos miembros, y sustituyendo los datos, se obtiene:

$$9.8 (0.20) (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} (0.01 + 0.04) \omega^2$$

Despejando ω^2 resulta:

$$\omega^2 = \frac{2(9.8)(0.2)(1 - \cos \theta)}{0.05} = 78.4 (1 - \cos \theta) \quad (1)$$

Aplicando ahora la ecuación $R_n = M \bar{r} \omega^2$ a la posición 2 del rollo, se tiene:

$$Mg \cos \theta - A_n = M R \omega^2, \text{ y sustituyendo los datos:}$$

$$9.8 \cos \theta - A_n = 0.20 \omega^2; \text{ luego:}$$

$$\omega^2 = 49 \cos \theta - 5 A_n \quad (2)$$

Cuando $A_n = 0$, $\theta = \beta$, y entonces al igualar las expresiones que resultan de sustituir estas condiciones en las ecuaciones (1) y (2), resulta:

$$78.4 (1 - \cos \beta) = 44 \cos \beta$$

o sea: $(78.4 + 44) \cos \beta = 78.4$

de donde: $\cos \beta = \frac{78.4}{122.4}$

Por lo tanto: $\beta = 52.708^\circ$

Ejemplo 12.3. En la figura 12.21 se indica un cilindro sólido homogéneo de 0.20 m de radio; sobre su periferia se desenrolla un hilo delgado que se fija en A. Si el cilindro se suelta desde el reposo, hallar la rapidez de su centro de masa C, cuando este punto ha descendido una distancia $y = 2$ m.

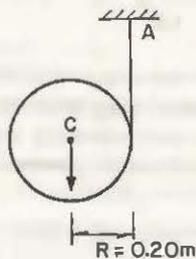


Fig 12.21

Solución.

En la figura 12.22 se indican las dos posiciones del cilindro.

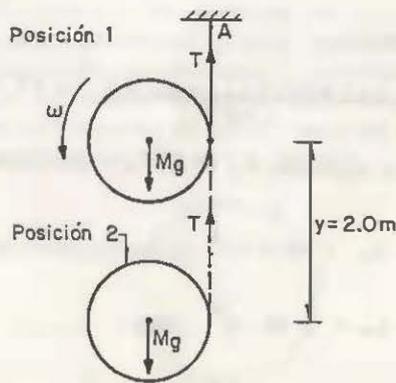


Fig 12.22

Como se trata de un caso conservativo, aplicando la forma 3 del principio del trabajo y energía, se obtiene:

$$Mg y = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{R} R^2 \omega^2$$

Cancelando la masa M en ambos miembros y multiplicando por 4, resulta:

$$4 g y = 2 v_c^2 + R^2 \omega^2 \quad (1)$$

Pero $v_c = \omega R$; luego $R^2 \omega^2 = v_c^2$ (2)

Sustituyendo (2) en (1) resulta $4 g y = v_c^2 (2+1) = 3 v_c^2$

y sustituyendo los datos:

$$4 (9.8) 2 = 3 v_c^2 ; \text{ luego } v_c^2 = \frac{78.4}{3} = 26.1333$$

Por lo que $v_c = 5.112 \text{ m/s}$

Ejemplo 12.4. La barra delgada y homogénea indicada en la figura 12.23 apoya sus extremos A y B sobre planos lisos que tienen dirección vertical y horizontal, respectivamente. La longitud de la barra es L, y su peso es $W = Mg$.

Si se suelta desde el reposo cuando el ángulo formado entre la vertical y su eje es θ_0 , usando el método del trabajo y energía, deducir la ecuación diferencial que rige su movimiento plano general en la etapa en la cual el extremo A permanece apoyado sobre el plano vertical.

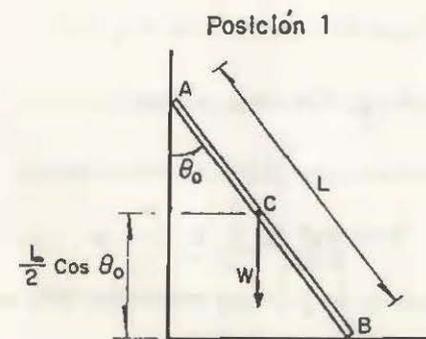


Fig 12.23

Solución.

En las figuras 12.23 y 12.24 se indican las posiciones de la barra correspondientes al comienzo y a un instante cualquiera del intervalo bajo consideración, respectivamente.

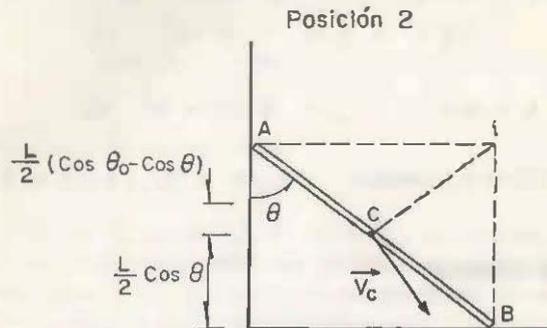


Fig 12.24

Como se trata de un sistema conservativo, usando la forma 3 del principio del trabajo y energía, se obtiene:

$$Mg \frac{L}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = \frac{M}{2} v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{12} L^2 \omega^2$$

Cancelando la masa, M, y multiplicando ambos miembros por 24, resulta:

$$12 g L (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 12 v_c^2 + L^2 \omega^2 \quad (1)$$

De acuerdo con la posición del centro instantáneo de rotación de la barra en la figura 12.24 se tiene que:

$$v_c = \omega \frac{L}{2} \quad ; \quad \text{por lo que} \quad v_c^2 = \omega^2 \frac{L^2}{4} \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) resulta:

$$12 g L (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 4 \omega^2 L^2$$

Por tanto: $\omega^2 = 3 \frac{g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$

y derivando implícitamente con respecto a θ se obtiene:

$$2\omega \frac{d\omega}{d\theta} = 3 \frac{g}{L} \sin \theta \quad (3)$$

Por lo que dividiendo entre 2 ambos miembros de la ecuación anterior, resulta:

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \sin \theta \quad (4)$$

siendo esta la ecuación diferencial pedida.

Ejemplo 12.5. un disco A de 49 N de peso y 1 m de radio que se apoya sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal está unido a un bloque B de 19.6 N de peso por medio de una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable, como se indica en la figura 12.25.

Si al soltar el sistema desde el reposo el disco A rueda sin deslizarse y el coeficiente de fricción entre el bloque B y el plano horizontal es $\mu_B = 0.10$. Determinar:

- La rapidez, V_B , del bloque B después de que ha recorrido 10 m.
- La tensión T, en la cuerda que une los cuerpos,
- El módulo de la aceleración a_C del centro de masa del disco A,
- El módulo de la aceleración angular, α del disco,
- La fuerza de fricción F_{rA} , que se desarrolla entre la periferia del disco A y el plano inclinado, y
- El coeficiente de fricción mínimo, μ_{MIN} , entre el disco A y el plano inclinado, requerido para asegurar el rodamiento perfecto del disco A.

Despreciar el efecto de la polea pequeña D, y considerar que el radio de giro del disco A con respecto a un eje centrodial perpendicular al plano de movimiento es $k_A = 0.6$ m.

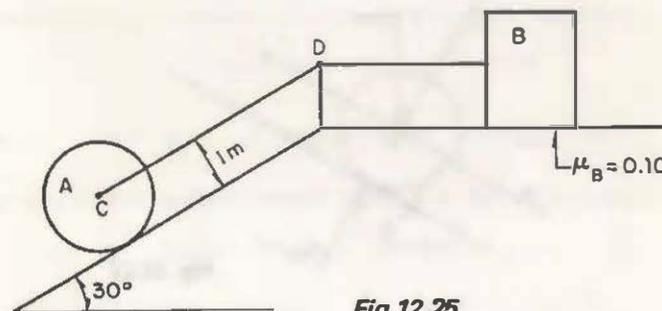


Fig 12.25

Solución.

a) y b).

En la figura 12.26 se indica el diagrama de cuerpo libre del bloque B.

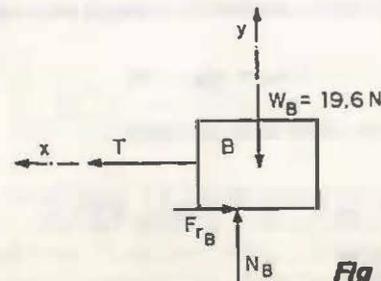


Fig 12.26

Con $R_y = 0$: $N_B = 19.6$ N

Luego $F_{r_B} = \mu_B N_B = 0.10 (19.6) = 1.96$ N

Aplicando la forma 1 del principio del trabajo y energía al bloque B, resulta:

$$\sum T_{1,2} = \Delta E C_{1,2}$$

$$10 T - 10 (1.96) = \frac{3}{2} V_B^2$$

o sea: $10 T - 19.6 = V_B^2$ (1)

En la figura 12.27 se indica el diagrama de cuerpo libre del disco A.

Aplicando la forma 1 del principio del trabajo y energía al disco, resulta:

$$\sum T_{1,2} = \Delta E C_{1,2}$$

$$-10 T + 49 (5) = \frac{5}{2} V_C^2 + \frac{1}{2} (5) (0.36) \omega^2$$

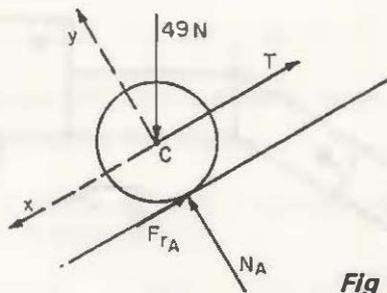


Fig 12.27

o sea: $-10 T + 245 = 2.5 V_C^2 + 0.9 \omega^2$ (2)

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2), resulta:

$$225.4 = V_C^2 + 2.5 V_C^2 + 0.9 \omega^2$$
 (3)

Según la forma en que están unidos los cuerpos es evidente que:

$$V_C = V_B$$
 (4)

y como el disco A tiene rodamiento perfecto,

$$V_C = \omega R, \text{ y siendo } R = 1 \text{ m.}$$

$$V_C^2 = \omega^2$$
 (5)

Sustituyendo (4) y (5) en (3), se tiene:

$$225.4 = V_B^2 + 2.5 V_B^2 + 0.9 V_B^2$$

Luego: $V_B^2 = \frac{225.4}{4.4} = 51.2273$ (6)

o sea: $V_B = 7.157$ m/s (7)

Sustituyendo (6) en (1) y despejando a T, resulta:

$$T = \frac{19.6 + 51.2273}{10} = 7.083$$
 N (8)

c, d), e), y f).

En el diagrama de cuerpo libre del bloque B, al aplicar la ecuación

$$R_x = M_B a_B, \text{ resulta:}$$

$$7.083 - 1.96 = 2 (a_B); \text{ luego } a_B = 2.5615 \text{ m/s}^2$$
 (9)

Por la forma en que están unidos los cuerpos; $a_C = a_B$, luego:

$$a_C = 2.5615 \text{ m/s}^2$$
 (10)

y como $\alpha = \frac{a_C}{R}$; $\alpha = 2.5615 \text{ rad/s}^2$ (11)

En el diagrama de cuerpo libre del disco A, al aplicar la ecuación:

$$R_x = M_A a_C \text{ resulta:}$$

$$49 (0.5) - 7.083 - F_{r_A} = 5 (2.5615)$$

luego $F_{r_A} = 4.61$ N (12)

Con $R_y = M_A a_y = 0$, resulta:

$$N_A = 49 (0.666) = 42.435$$
 N

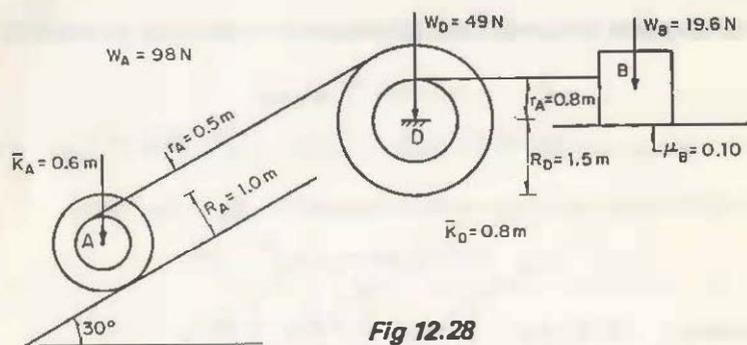
Así, $\mu_{\min} = \frac{F_{r_A}}{N_A} = \frac{4.61}{42.435} = 0.1086$

Ejemplo 12.6. En la figura 12.28 se indica un sistema de cuerpos unidos por medio de cuerdas flexibles, inextensibles, y de peso despreciable. El carrete A que se apoya sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal pesa 98 N y tiene un radio de giro centroidal de

$\bar{k}_A = 0.6 \text{ m}$. El radio del eje del carrete es $r_A = 0.5 \text{ m}$, y el radio de las ruedas es $R_A = 1.0 \text{ m}$. El carrete D, articulado a un eje que pasa por su centro de masa pesa 49 N y tiene un radio de giro con respecto al eje centroidal de rotación de $\bar{k}_D = 0.8 \text{ m}$. El radio del eje de este carrete es $r_D = 0.8 \text{ m}$, y el radio de sus ruedas es $R_D = 1.50 \text{ m}$. El bloque B pesa 19.6 N , y el coeficiente de fricción entre dicho bloque y el plano horizontal de apoyo es $\mu_B = 0.10$.

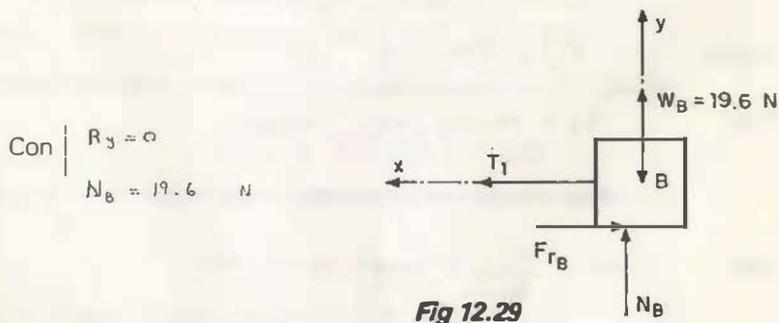
Si al soltar el sistema desde el reposo el carrete A rueda sin deslizar, determinar:

- La rapidez del bloque B después de que ha recorrido 10 m , y
- El coeficiente de fricción mínimo entre el carrete A y el plano inclinado, requerido para asegurar su rodamiento perfecto.



Solución.

- En la figura 12.29 se indica el diagrama de cuerpo libre del bloque B.



$$\text{Luego } F_{rB} = \mu_B N_B = 0.1 (19.6) = 1.96 \text{ N}$$

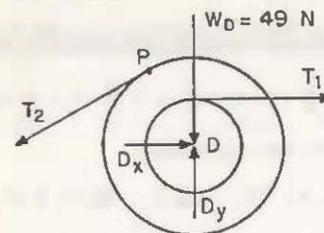
Aplicando la forma 1 del principio del trabajo y energía a este bloque, se obtiene:

$$\sum T_{1,2} = \Delta E_{c_{1,2}}$$

$$10 T_1 - 10 (1.96) = \frac{1}{2} v_B^2$$

o sea: $10 T_1 - 19.6 = v_B^2 \quad (1)$

En la figura 12.30 se indica el diagrama de cuerpo libre del carrete D.



En ángulo θ_D girado por este carrete mientras el bloque B se desplaza 10 m es:

$$\theta_D = \frac{10}{0.8} = 12.5 \text{ rad} \quad (2)$$

Así, el punto P de la periferia de las ruedas del carrete experimenta un desplazamiento de longitud:

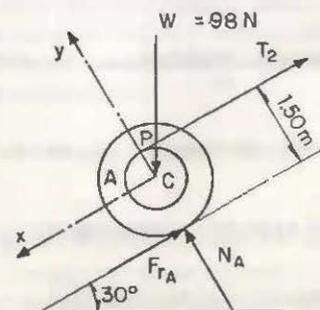
$$S_P = \theta_D R_D = 12.5 (1.5) = 18.75 \text{ m} \quad (3)$$

Así, al aplicar la forma 1 del principio del trabajo y energía a este carrete, resulta:

$$18.75 T_2 - 10 T_1 = \frac{1}{2} (5) 0.67 \omega_D^2$$

o sea: $18.75 T_2 - 10 T_1 = 1.6 \omega_D^2 \quad (4)$

En la figura 12.31 se indica el diagrama de cuerpo libre del carrete A. Por la forma en que están unidos los dos carretes y como A tiene un rodamiento perfecto la longitud del desplazamiento del centro de masa de este carrete se obtiene mediante la proporción:



$$\frac{S_E}{S_P} = \frac{1}{1.50} ; \text{ luego } S_C = \frac{S_P}{1.50} = \frac{18.75}{1.50} = 12.5 \text{ m} \quad (5)$$

Aplicando la forma 1 del principio del trabajo y energía al carrito A, resulta:

$$-18.75 T_2 + 98(6.25) = 5 v_c^2 + \frac{1}{2}(10)(0.36) \omega_A^2$$

o sea: $-18.75 T_2 + 612.5 = 5 v_c^2 + 1.8 \omega_A^2 \quad (6)$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1), (4), y (6), resulta:

$$592.9 = v_c^2 + 1.6 \omega_D^2 + 5 v_c^2 + 1.8 \omega_A^2 \quad (7)$$

puesto que A tiene rodamiento perfecto:

$$v_c = \omega_A R_A ; \text{ y como } R_A = 1.0 \text{ m}$$

$$v_c = \omega_A ; \text{ así } v_c^2 = \omega_A^2 \quad (8)$$

De acuerdo con la cinemática: $v_B = 0.8 \omega_D$

Luego $\omega_D = \frac{v_B}{0.8} = 1.25 v_B \quad (9)$

y también $1.5 \omega_D = 1.5 \omega_A ; \text{ luego } \omega_A^2 = \omega_D^2 \quad (10)$

Sustituyendo (8), (9) y (10) en (7), resulta:

$$592.9 = v_B^2 + 2.5 v_B^2 + 7.6125 v_B^2 + 2.8125 v_B^2 = 14.125 v_B^2$$

o sea: $v_B^2 = \frac{592.9}{14.125} = 41.975221 \quad (11)$

Luego: $v_B = 6.4788 \text{ m/s} \quad (12)$

Sustituyendo (12) en (1), y despejando T_1 , resulta:

$$T_1 = \frac{19.6 + 41.975221}{10} = 6.158 \text{ N} \quad (13)$$

Sustituyendo (12) en (9) obtenemos $\omega_D = 8.0985 \text{ rad/s} \quad (14)$

Sustituyendo (13) y (14) en (4), y despejando T_2 , resulta:

$$T_2 = \frac{61.58 + 1.6(8.0985)^2}{18.75} = 8.681 \text{ N} \quad (15)$$

Según el diagrama de cuerpo libre del carrito D (figura 12.30) al aplicar la ecuación $M_C = I_C \alpha_D$, resulta:

$$1.5(8.681) - 0.8(6.158) = 5(0.64) \alpha_D$$

Luego $\alpha_D = \frac{13.2715 - 4.9264}{3.2} = 2.6235 \text{ rad/s}^2$

Por la forma en que están unidos los carretes, y como A rueda sin deslizar, resulta:

$$1.5 \alpha_A = 1.5 \alpha_D ; \text{ luego } \alpha_A = \alpha_D = 2.6235 \text{ rad/s}^2$$

Así $a_C = 2.6235 \text{ m/s}^2 \quad (16)$

Según el diagrama de cuerpo libre del carrito A (figura 12.31) aplicando la ecuación $R_y = 0$, resulta:

$$N_A = 98(0.866) = 84.8705 \text{ N} \quad (17)$$

Con $R_x = M_A a_C : 49 - 8.681 - F_{rA} = 10(2.6235)$

Luego $F_{rA} = 49 - 8.681 - 26.235 = 13.684 \text{ N}$

Así $\mu_{\min} = \frac{F_{rA}}{N_A} = \frac{13.684}{84.8705} = 0.1636$

Ejemplo 12.7. En la figura 12.32 se indica el plano de movimiento de un sólido de revolución desbalanceado. Para la posición mostrada la recta que une su centro geométrico H con su centro de masa C es horizontal, siendo \bar{r} la distancia entre dichos puntos. Si el cuerpo se suelta desde el reposo en dicha posición:

- Demostrar que el cuerpo se moverá adquiriendo un movimiento plano general.
- Usando los conceptos relativos al método de las ecuaciones de movimiento y el del trabajo y energía demostrar que el cuerpo no adquirirá un rodamiento perfecto, ya que este movimiento particular requiere que los puntos H y C coincidan.

Solución.

a) En la figura 12.32 se indica el diagrama de cuerpo libre del sólido para esta posición inicial

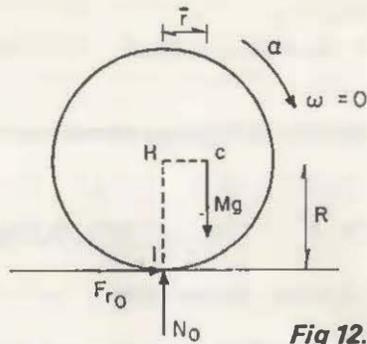


Fig 12.32

Aplicando la ecuación $(M_i)_o = I_{i_o} \alpha_o$

resulta: $Mg \bar{r} = I_{i_o} \alpha_o$, luego,

$$\alpha_o = \frac{Mg \bar{r}}{I_{i_o}} \neq 0 \quad (1)$$

Esto demuestra que el cuerpo si se mueve al soltarlo, de modo que adquirirá un movimiento plano general

b) En la figura 12.33 se indica el diagrama de cuerpo libre del sólido para una posición posterior, después de que ha girado un ángulo θ en el sentido de las manecillas del reloj.

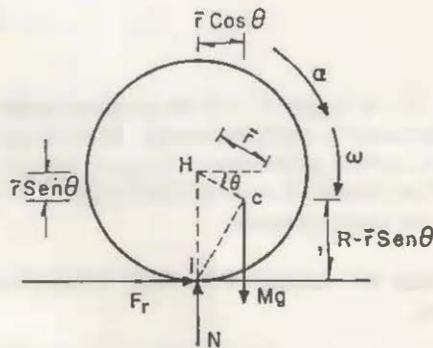


Fig 12.33

Como para cualquier posición de un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general deben cumplirse las expresiones:

$$M_i = I_i \alpha$$

$$y \quad M_c = I_c \alpha$$

despejando α de la primera de estas ecuaciones resulta

$$\alpha = \frac{M_i}{I_i} \quad (2)$$

Análogamente, despejando α de la segunda de dichas ecuaciones, se obtiene:

$$\alpha = \frac{M_c}{I_c} \quad (3)$$

Igualando (2) con (3), resulta:

$$\frac{M_i}{I_i} = \frac{M_c}{I_c}$$

o sea:

$$M_i I_c = M_c I_i \quad (4)$$

Esta condición debe cumplirse cualquiera que sea el tipo de rodamiento que adquiera el sólido.

Hay que observar que las cantidades M_i , M_c e I_i no son constantes, sino que resultan funciones del ángulo θ .

En efecto, de acuerdo con la figura 12.33.

$$M_i = Mg \bar{r} \cos \theta \quad (5)$$

$$M_c = N \bar{r} \cos \theta - F_r [R - \bar{r} \sin \theta] \quad (6)$$

$$I_i = I_c + M (R^2 + \bar{r}^2 - 2R \bar{r} \sin \theta) = I_c + M (\bar{ic})^2 \quad (7)$$

habiéndose usado para esta última expresión el valor de ic^2 obtenido a partir de la ley de los cosenos aplicada al triángulo iHc .

Para esta segunda posición, el valor de α se obtiene a partir de la ecuación $M_i = I_i \alpha$, resultando: $\alpha = \frac{M_i}{I_i}$

por lo que tomando en cuenta el valor de M_i dado por la ecuación (5) resulta:

$$\alpha = \frac{Mg \bar{r} \cos \theta}{I_i} \quad (8)$$

Así,

$$\vec{\alpha} = - \frac{Mg \bar{r} \cos \theta}{I_i} \mathbf{k} \quad (9)$$

Como la fuerza de fricción en el rodamiento perfecto no trabaja, el sistema resultaría conservativo, de modo que al aplicar la forma 3 del principio del trabajo y energía a las posiciones indicadas en las figuras 12.32 y 12.33 se obtiene:

$$EC_1 + EP_{G_1} = EC_2 + EP_{G_2}$$

$$Mg \bar{r} \sin \theta = \frac{M}{2} V_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \quad (10)$$

Tomando como base al centro instantáneo de rotación se tiene:

$$\vec{V}_c = \vec{\omega} \times \vec{i}_c$$

$$\vec{V}_c = -\omega k \times [\bar{r} \cos \theta \hat{i} + (R - \bar{r} \sin \theta) \hat{j}]$$

Luego: $\vec{V}_c = \omega [(R - \bar{r} \sin \theta) \hat{i} - \bar{r} \cos \theta \hat{j}]$

$$V_c^2 = \omega^2 (R^2 - 2R\bar{r} \sin \theta + \bar{r}^2 \sin^2 \theta + \bar{r}^2 \cos^2 \theta)$$

o sea: $V_c^2 = \omega^2 (R^2 + \bar{r}^2 - 2R\bar{r} \sin \theta) = \omega^2 (\vec{i}_c)^2 \quad (11)$

Sustituyendo (11) en (10) resulta:

$$Mg \bar{r} \sin \theta = \frac{M}{2} \omega^2 (R^2 + \bar{r}^2 - 2R\bar{r} \sin \theta) + \frac{I_c}{2} \omega^2$$

o sea: $Mg \bar{r} \sin \theta = \frac{M \omega^2}{2} [M(R^2 + \bar{r}^2 - 2R\bar{r} \sin \theta) + I_c]$

o bien $Mg \bar{r} \sin \theta = \frac{M \omega^2}{2} [M(\vec{i}_c)^2 + I_c]$

Tomando en cuenta el valor de I_i dado en la ecuación (7) resulta:

$$Mg \bar{r} \sin \theta = \frac{\omega^2}{2} I_i \quad (12)$$

Luego $\omega^2 = \frac{2Mg \bar{r} \sin \theta}{I_i} \quad (13)$

Por otra parte, de la cinemática del rodamiento perfecto se tiene que:

$$\vec{a}_H = R \alpha \hat{i} \quad (14)$$

Sustituyendo (13) en (14) resulta: $\vec{a}_H = \frac{Mg \bar{r} \sin \theta}{I_i} \hat{i} \quad (15)$

Como: $\vec{a}_c = \vec{a}_H + \vec{\alpha} \times \vec{H}_c - \omega^2 \vec{H}_c \quad (16)$

Siendo $\vec{H}_c = \bar{r} \cos \theta \hat{i} - \bar{r} \sin \theta \hat{j} \quad (17)$

Sustituyendo (14), (9), (17) y (13) en (16) se obtiene:

$$\vec{a}_c = \frac{Mg \bar{r} \sin \theta}{I_i} \hat{i} + (-\frac{Mg \bar{r} \cos \theta}{I_i} k) \times (\bar{r} \cos \theta \hat{i} - \bar{r} \sin \theta \hat{j}) - \frac{2Mg \bar{r} \sin \theta}{I_i} (\bar{r} \cos \theta \hat{i} - \bar{r} \sin \theta \hat{j})$$

Desarrollando el segundo miembro de la ecuación anterior, y simplificando:

01. 908328
 $\vec{a}_c = -\frac{Mg \bar{r} \cos \theta}{I_i} (R - 3\bar{r} \sin \theta) \hat{i} + \frac{Mg \bar{r}^2}{I_i} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \hat{j} \quad (18)$

Luego: $\vec{a}_x = a_{c_x} = \frac{Mg \bar{r} \cos \theta}{I_i} (R - 3\bar{r} \sin \theta) \quad (19)$

y $\vec{a}_y = a_{c_y} = \frac{Mg \bar{r}^2}{I_i} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad (20)$

Aplicando la ecuación $R_x = M a_x$ y tomando en cuenta la (19), resulta:

$$F_r = \frac{W}{g} \frac{\bar{r} \cos \theta}{I_i} (R - 3\bar{r} \sin \theta) \quad (21)$$

Análogamente, aplicando la ecuación $R_y = M a_y$ y tomando en cuenta la (20), se obtiene:

$$N - W = \frac{W}{g} \frac{\bar{r}^2}{I_i} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta), \text{ luego}$$

$$N = W + \frac{W}{g} \frac{\bar{r}^2}{I_i} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \quad (22)$$

Sustituyendo (21) y (22) en (6) resulta:

$$M_c = \left[W + \frac{W}{g} \frac{\bar{r}^2}{I_i} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right] \bar{r} \cos \theta - \frac{W}{g} \frac{\bar{r} \cos \theta}{I_i} (R - 3\bar{r} \sin \theta) (R - \bar{r} \sin \theta) \quad (23)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (15) y (23) en la condición (4) se tiene:

$$Mg \bar{r} \cos \theta I_c = \left[W I_i + \frac{W}{g} \bar{r}^2 (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right] \bar{r} \cos \theta - \frac{W}{g} \bar{r} \cos \theta (R - 3\bar{r} \sin \theta) (R - \bar{r} \sin \theta)$$



FACULTAD INGENIERIA

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior entre $W \bar{r} \cos \theta$, resulta:

$$I_c = I_x + M \bar{r}^2 (2 \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) - M (R - 3 \bar{r} \operatorname{sen} \theta) (R - \bar{r} \operatorname{sen} \theta)$$

y desarrollando, resulta:

$$I_c = I_x + M \left[\bar{r}^2 (2 \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) - (R^2 - 4 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta + 3 \bar{r}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \right] \quad (24)$$

Sustituyendo ahora (7) en (24), resulta:

$$I_c = I_c + M (R^2 + \bar{r}^2 - 2 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta) + M \left[\bar{r}^2 (2 \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) - (R^2 - 4 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta + 3 \bar{r}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \right]$$

Simplificando:

$$0 = R^2 + \bar{r}^2 - 2 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta + 2 \bar{r}^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \bar{r}^2 \cos^2 \theta - R^2 + 4 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta - 3 \bar{r}^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Luego:
$$0 = \bar{r}^2 - \bar{r}^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \bar{r}^2 \cos^2 \theta + 2 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta$$

Es decir:
$$0 = \bar{r}^2 (1 - 1) + 2 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta$$

Entonces
$$0 = 2 R \bar{r} \operatorname{sen} \theta \quad (25)^*$$

Con esta expresión queda demostrado que solamente para $\theta = 0$ se cumple la condición de rodamiento perfecto, y que de la posición inicial (figura 12.32) en adelante solamente puede haber rodamiento perfecto, si $\bar{r} = 0$; es decir, si el cuerpo es balanceado.

12.2 METODO DEL IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

12.2.1 INTRODUCCION

Los conceptos de impulso y cantidad de movimiento, tanto lineales como angulares, que sirven de base para el estudio dinámico de una partícula tienen sus versiones correspondientes para un cuerpo rígido dotado de un movimiento plano general, o de algún caso particular de dicho movimiento.

Como sucede en el caso de la partícula, este enfoque dinámico resulta más adecuado cuando en los datos y las incógnitas del problema bajo consideración están involucradas fuerzas, pares de fuerzas, tiempos, y variaciones de rapidez, tanto lineales como angulares.

12.2.2 RELACION ENTRE EL IMPULSO LINEAL DE LAS FUERZAS EXTERIORES QUE ACTUAN SOBRE UN CUERPO RIGIDO EN UN INTERVALO DADO Y LA VARIACION DE SU CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN DICHO INTERVALO

En el caso de un sistema de partículas se establece dicha relación y puesto que un cuerpo rígido es un caso particular de dicho sistema, las expresiones correspondientes a este caso resultan completamente válidas.

A continuación se escriben dichas ecuaciones y se hace explícita su interpretación correspondiente.

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R} \, dt = \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \right)_{t_2} - \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \right)_{t_1} \quad \dots 12.39$$

"El impulso lineal de las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo rígido en un intervalo de tiempo dado es igual a la variación de la cantidad de movimiento de dicho cuerpo en ese intervalo"

Haciendo intervenir el centro de masa la ecuación anterior se convierte en:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R} \, dt = (M \bar{V}_c)_{t_2} - (M \bar{V}_c)_{t_1} \quad \dots 12.40$$

siendo M la masa del cuerpo rígido.

12.2.3 CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Si el impulso lineal de las fuerzas exteriores durante el intervalo bajo consideración es nulo, la cantidad de movimiento del cuerpo rígido resulta idéntica al principio como al final del intervalo. Es decir, si:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{R} \, dt = \bar{0}$$

la expresión 12.39 se convierte en:

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \right)_{t_1} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{V}_i \right)_{t_2}$$

Asimismo, la expresión 12.40 se convierte en:

$$\bar{V}_c_{t_1} = \bar{V}_c_{t_2} \quad \dots 12.41$$

En el caso muy particular en el cual el impulso lineal de las fuerzas exteriores sea nulo debido a que durante todo el intervalo $\bar{R} = \bar{0}$, entonces la velocidad, \bar{V}_c , del centro de masa del cuerpo rígido se conserva constante a través de dicho intervalo.

Es decir, si $\vec{R} = \vec{O}$,

$$\vec{V}_C = \vec{c} \quad \dots 12.42$$

Esto significa que el centro de masa experimenta un movimiento rectilíneo uniforme.

12.2.4 RELACION ENTRE EL IMPULSO ANGULAR DE LAS FUERZAS EXTERIORES APLICADAS SOBRE UN CUERPO RIGIDO DURANTE UN INTERVALO DE TIEMPO DADO Y LA VARIACION DE SU CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR EN DICHO INTERVALO

La ecuación $\vec{M}_A = \vec{H}_A \quad \dots 12.43$

Obtenida en otro fascículo permite establecer dicha relación cuando el punto A coincide con alguno de los tres puntos especiales siguientes:

- Un punto fijo, i,
- El centro de masa, C, del cuerpo, y
- Un punto L cuya velocidad sea paralela a la de C en el instante considerado.

En efecto, la ecuación 12.43 puede escribirse como

$$\vec{M}_A = \frac{d}{dt} (\vec{H}_A)$$

o sea: $\vec{M}_A dt = d(\vec{H}_A)$

Luego: $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A dt = (\vec{H}_A)_{t_2} - (\vec{H}_A)_{t_1} \quad \dots 12.44$

Esta expresión indica que:

"El impulso angular de las fuerzas exteriores aplicadas sobre un cuerpo rígido durante un intervalo de tiempo dado, con relación a alguno de los tres puntos, i, C, o L, es igual a la variación de la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido con relación a dicho punto, en ese intervalo".

Cuando el cuerpo rígido es simétrico con respecto al plano de movimiento y está dotado de un movimiento plano general, el concepto anterior se transforma como sigue:

1.- $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A dt$ representa el impulso angular de las fuerzas exteriores con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento, que pasa por alguno de los tres puntos, i, C, ó, L.

2.- La cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido también debe considerarse con respecto a dicho eje, y en este caso adquiere alguna de las siguientes expresiones deducidas en otro fascículo:

$$\vec{H}_i = I_i \vec{\omega} \quad \dots 12.45$$

$$\vec{H}_C = I_C \vec{\omega} \quad \dots 12.46$$

$$y \quad \vec{H}_L = I_C \vec{\omega} + (\vec{LC} \times \vec{V}_C) M \quad \dots 12.47$$

De este modo, la expresión 12.44 aplicada a un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general da lugar a las tres expresiones siguientes, según sea el punto considerado:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_i dt = I_i (\vec{\omega}_{t_2} - \vec{\omega}_{t_1}) \quad \dots 12.48$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_C dt = I_C (\vec{\omega}_{t_2} - \vec{\omega}_{t_1}) \quad \dots 12.49$$

$$y \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_L dt = I_C (\vec{\omega}_{t_2} - \vec{\omega}_{t_1}) + M \left\{ (\vec{LC} \times \vec{V}_C)_{t_2} - (\vec{LC} \times \vec{V}_C)_{t_1} \right\} \quad \dots 12.50$$

Estas expresiones tienen una interpretación análoga a la 12.44.

12.2.5 CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Si durante el intervalo bajo consideración el impulso angular de las fuerzas exteriores con respecto a alguno de los ejes ya mencionados anteriormente es nulo, la cantidad de movimiento angular del cuerpo será idéntica al principio y al final del intervalo.

Esta situación particular se deduce de las expresiones anteriores y da lugar a los resultados siguientes:

a). De acuerdo con las ecuaciones 12.48 y 12.49, si

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_i dt = \vec{0} \quad ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_C dt = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_{t_2} = \vec{\omega}_{t_1} \quad \dots 12.51$$

b) Según la ecuación 12.50, si

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_L dt = \vec{0}$$

$$I_C \vec{\omega}_{t_2} + \left\{ M (\vec{LC} \times \vec{V}_C) \right\}_{t_2} = I_C \vec{\omega}_{t_1} + \left\{ M (\vec{LC} \times \vec{V}_C) \right\}_{t_1} \quad \dots 12.52$$

Ejemplo 12.8. La rueda de la figura 12.34 tiene un radio $R = 0.35$ m, una masa $M = 10$ kg, y un radio de giro con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento de $k = 0.25$ m. Si se suelta desde el reposo y gira hacia abajo del plano inclinado sin deslizar, hallar la rapidez de su centro de masa, C , en $t = 4$ segundos.

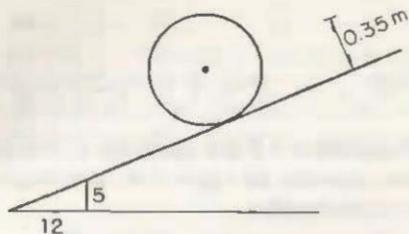


Fig 12.34

Solución.

En la figura 12.35 se indica el diagrama de cuerpo libre de la rueda para cualquier instante del intervalo comprendido entre $t = 0$ y $t = 4$ segundos. Como la única fuerza exterior que tiene impulso angular con respecto al eje que pasa por el centro instantáneo, i , es el peso de la rueda, aplicando la ecuación 12.48 en forma escalar, resulta:

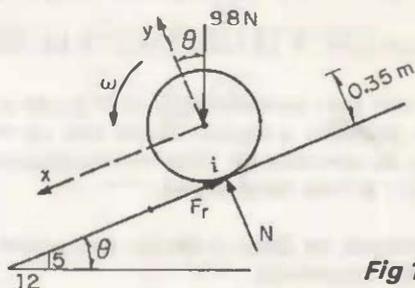


Fig 12.35

$$\int_0^4 48 \left(\frac{5}{12} \right) 0.35 dt = 10 \left[(0.25)^2 + (0.35)^2 \right] \omega_4$$

o sea: $13.142308 (t)_0^4 = 1.85 \omega_4$

Luego: $52.76923 = 1.85 \omega_4$

$\omega_4 = 28.5239 \text{ rad/s}$

Como se trata de un rodamiento perfecto:

$v_{c4} = \omega_4 R$

Luego: $v_{c4} = 28.5239 (0.35) = 9.983 \text{ m/s}$

Ejemplo 12.9. El carrete de la figura 12.36 tiene una masa $M = 15$ kg y un radio de giro con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento de $k = 0.25$ m. Alrededor del eje del carrete se enrolla una cuerda la cual se sujeta a la acción de una fuerza horizontal cuya magnitud dada en Newton es: $P = 20t + 40$, donde t está en segundos. Si el carrete rueda sin deslizar en A , determinar la rapidez del centro de masa C , del carrete, 3 segundos después de que se aplica la fuerza. El carrete está inicialmente en reposo. Considérese que $R = 0.40$ m, y $r = 0.20$ m.

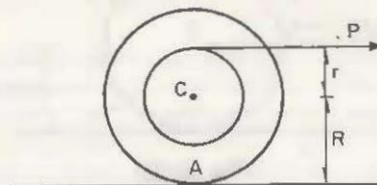


Fig 12.36

Solución.

En la figura 12.37 se indica el diagrama de cuerpo libre del carrete para cualquier instante del intervalo comprendido entre $t = 0$ y $t = 3$ segundos. Como la única fuerza exterior que tiene impulso angular con respecto al eje que pasa por i es la fuerza P , aplicando la ecuación 12.48 en forma escalar, resulta:

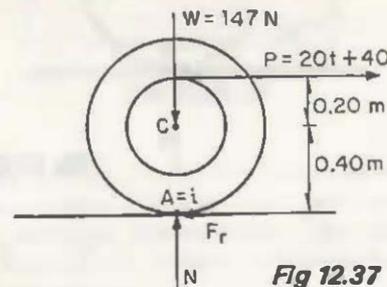


Fig 12.37

$$\int_0^3 (20t + 40)(0.10) dt = 15 \left[(0.25)^2 + (0.40)^2 \right] \omega_3$$

o sea: $0.6 (10t^2 + 40t)_0^3 = 3.3375 \omega_3$

Luego $126 = 3.3375 \omega_3$; $\omega_3 = 37.752 \text{ rad/s}$

Como se trata de un rodamiento perfecto:

$v_{c3} = \omega_3 R = 37.752 (0.40) = 15.10 \text{ m/s}$

Ejemplo 12.10. Si la pelota homogénea y maciza de la figura 12.38 tiene una masa de 1 kg y se arroja sobre una superficie rugosa con una velocidad de 0.80 m/s paralelamente a la superficie, hallar la rapidez angular, ω , en retroceso que debe dársele para que deje de girar al mismo instante en que su velocidad hacia adelante sea nula. (No es necesario conocer el coeficiente de fricción en A, para el cálculo).

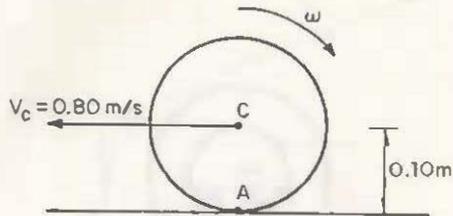


Fig 12.38

Solución.

En la figura 12.39 se indica el diagrama de cuerpo libre de la pelota para cualquier instante del intervalo bajo consideración, el cual se supone que tiene una duración de t segundos.

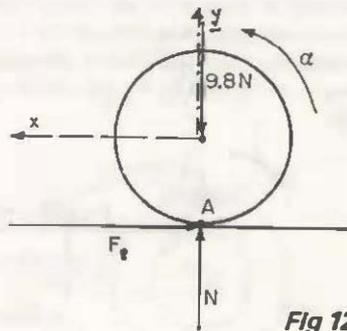


Fig 12.39

Con la ecuación $\int_{t_1}^{t_2} \vec{R} dt = M (\vec{V}_{C_{t_2}} - \vec{V}_{C_{t_1}})$ aplicada a

este caso, en forma escalar, resulta:

$$\int_0^t -F_f dt = 1(0 - 0.8); \text{ o sea } \int_0^t F_f dt = 0.8 \quad (1)$$

Usando ahora la ecuación $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_C dt = I_C (\vec{\omega}_{t_2} - \vec{\omega}_{t_1})$

en forma escalar, se obtiene:

$$\int_0^t 0.10 F_f dt = 0.4 (1)(0.10)^2 [0 - (-\omega)] = 0.004 \omega$$

o sea:

$$0.10 \int_0^t F_f dt = 0.004 \omega \quad (2)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por 0.10, resulta:

$$0.10 \int_0^t F_f dt = 0.08 \quad (3)$$

Igualando (2) con (3) se obtiene: $0.004 \omega = 0.08$

Luego: $\omega = 20 \text{ rad/s}$

Ejemplo 12.11. Deducir una expresión para calcular la mínima rapidez, V_C , que debe tener el centro de masa de una rueda homogénea como la indicada en la figura 12.40, para que pueda ascender justamente el escalón de altura h . Suponer que el radio de giro de la rueda con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento es k , que la rueda no desliza durante su rodamiento sobre el plano horizontal, y que llega al escalón con una rapidez angular constante, ω . (Despreciar el impulso angular del peso durante el ascenso de la rueda al escalón).

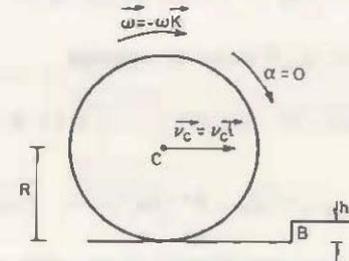


Fig 12.40

Solución.

En el preciso instante en que un punto A de la periferia de la rueda se pone en contacto con el vértice B del escalón, dicho punto se inmoviliza. En dicho instante la cantidad de movimiento angular de la rueda, con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento, que pasa por A se puede obtener con la ecuación.

$$\vec{H}_A = (\vec{AC} \times \vec{V}_C) M + \vec{H}_C \quad (a)$$

Siendo a su vez $\vec{H}_C = I_C \vec{\omega}$ (b)

En la figura 12.41 se indica el diagrama de cuerpo libre de la rueda en el instante final del impacto contra el escalón, cuando la rapidez angular de la rueda es ω_1 .

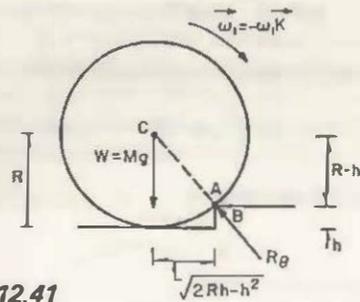


Fig 12.41

En dicha figura se puede observar que:

$$\vec{AC} = -\sqrt{2Rh-h^2} \hat{i} + (R-h) \hat{j} \quad (1)$$

Por otro lado, $\vec{v}_c = \omega R \hat{i} \quad (2)$

y $\vec{H}_c = I_c \vec{\omega} = M \bar{R}^2 (-\omega \hat{k}) = -\omega M \bar{R}^2 \hat{k} \quad (3)$

Sustituyendo (1), (2), y (3) en la (a), resulta:

$$\vec{H}_{A_{después}} = \left\{ \left[-\sqrt{2Rh-h^2} \hat{i} + (R-h) \hat{j} \right] \times (\omega R \hat{i}) \right\} M - \omega M \bar{R}^2 \hat{k}$$

o sea: $\vec{H}_{A_{después}} = - \left[R^2 - Rh + \bar{R}^2 \right] \omega M \hat{k} \quad (4)$

Al terminarse el intervalo del impacto la cantidad de movimiento angular de la rueda es:

$$\vec{H}_{A_{antes}} = I_A \vec{\omega}_1 = M (R^2 + \bar{R}^2) (-\omega_1 \hat{k})$$

o sea: $\vec{H}_{A_{después}} = - \omega_1 M (R^2 + \bar{R}^2) \hat{k} \quad (5)$

Despreciando el impulso angular del peso, se trata de un caso de conservación de la cantidad de movimiento angular de la rueda con respecto a A. Igualando (4) con (5), resulta:

$$- (R^2 - Rh + \bar{R}^2) \omega M \hat{k} = - \omega_1 M (R^2 + \bar{R}^2) \hat{k}$$

De donde simplificando y despejando ω , se obtiene:

$$\omega = \frac{R^2 + \bar{R}^2}{(R^2 - Rh + \bar{R}^2)} \omega_1 \quad (6)$$

En la figura 12.42 se indican las posiciones de la rueda justamente antes y después de ascender el escalón.

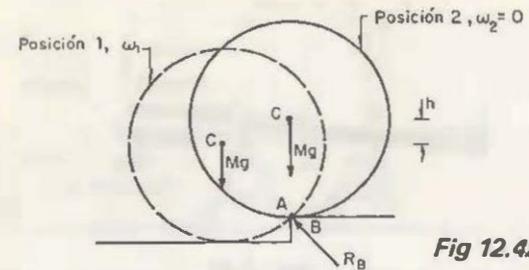


Fig 12.42

Usando ahora la forma 3 del principio del trabajo y energía para las dos posiciones indicadas en dicha figura, resulta:

$$\frac{1}{2} I_A \omega_1^2 = Mgh \quad ; \text{ o sea:}$$

$$\frac{1}{2} M (R^2 + \bar{R}^2) \omega_1^2 = Mgh$$

Luego: $\omega_1^2 = \frac{2gh}{R^2 + \bar{R}^2}$

o sea: $\omega_1 = \sqrt{\frac{2gh}{R^2 + \bar{R}^2}} \quad (7)$

Como $v_c = \omega R \quad (8)$

al sustituir (7) en (6), y después dicho resultado en (8), se obtiene:

$$v_c = \frac{R (R^2 + \bar{R}^2)}{(R^2 - Rh + \bar{R}^2)} \sqrt{\frac{2gh}{R^2 + \bar{R}^2}}$$

y simplificando: $v_c = \frac{R \sqrt{2gh (R^2 + \bar{R}^2)}}{R^2 - Rh + \bar{R}^2} \quad (9)$

Ejemplo 12.12. El tablón de la figura 12.43 tiene una masa de 10 kg, centro de masa en C, y se apoya sobre dos "burros" en A y B. Si el extremo D se levanta 20 cm sobre la parte superior de los "burros" y se suelta desde el reposo, hallar que tan alto se levantará el extremo E con respecto a la parte superior de los "burros", después de que el tablón cae de modo que gira, en sentido de las manecillas del reloj, alrededor

de A, choca y pivotea sobre el "burro" en B, y gira en sentido de las manecillas del reloj fuera del "burro" en A.

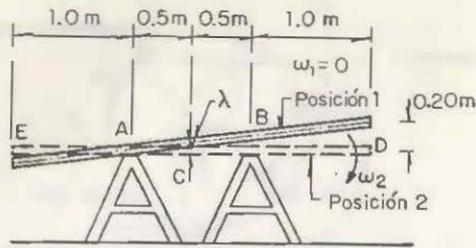


Fig 12.43

Solución.

Según triángulos semejantes, la altura, λ , del centro de masa, C, del tablón con respecto a la parte superior de los "burros" está involucrada en la relación:

$$\frac{\lambda}{0.20} = \frac{0.5}{2} \quad \therefore \lambda = 0.05 \text{ m.}$$

Aplicando la forma 3 del principio del trabajo y energía a las posiciones 1 y 2 indicadas en la figura 12.43, resulta:

$$\epsilon C_1 + \epsilon P G_1 = \epsilon C_2 + \epsilon P G_2$$

$$10(9.8)0.05 = \frac{1}{2} 10 \left[\frac{3^2}{12} + (0.50)^2 \right] \omega_2^2$$

o sea: $0.46 = \omega_2^2$; luego: $\omega_2 = 0.99 \text{ rad/s}$

$$\vec{\omega}_2 = -0.99 \text{ k}$$

Siendo esta la velocidad angular que tiene el tablón cuando está a punto de ponerse en contacto con el "burro", en B.

La cantidad de movimiento angular del tablón con respecto a B, un instante antes de que este punto se inmovilice se obtiene a partir de la expresión:

$$\vec{H}_{B \text{ ANTES}} = (\vec{BC} \times \vec{V}_C) M + \vec{H}_C \quad (1)$$

Pero $\vec{BC} = -0.5 \text{ j} \quad (2)$

$$\vec{V}_C = \vec{AC} \times \vec{\omega}_2 = 0.5 \text{ j} \times (-0.99 \text{ k}) = -0.495 \text{ j} \quad (3)$$

$$\text{y } \vec{H}_C = I_C \vec{\omega}_2 = 10 \left[\frac{3^2}{12} \right] (-0.99 \text{ k}) = -7.425 \text{ k} \quad (4)$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$\vec{H}_{B \text{ ANTES}} = \left[-0.5 \text{ j} \times (-0.495 \text{ j}) \right] 10 - 7.425 \text{ k}$$

$$\vec{H}_{B \text{ ANTES}} = 2.475 \text{ k} - 7.425 \text{ k} = -4.95 \text{ k}$$

o sea: $\vec{H}_{B \text{ ANTES}} = -4.95 \text{ k} \quad (5)$

Inmediatamente después del impacto contra el "burro" en B, la cantidad de movimiento angular se obtiene con la expresión

$$\vec{H}_{B \text{ DESPUES}} = I_B \vec{\omega}_3 = 10 \left[\frac{3^2}{12} + (0.50)^2 \right] \vec{\omega}_3$$

o sea: $\vec{H}_{B \text{ DESPUES}} = 10 \vec{\omega}_3 \quad (6)$

Despreciando el impulso angular del peso del tablón y de la reacción en A durante el impacto en B, se trata de un caso de conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto a este punto; luego, al igualar (5) con (6), se obtiene:

$$-4.95 \text{ k} = 10 \vec{\omega}_3$$

Por lo que: $\vec{\omega}_3 = -0.495 \text{ k} \quad (7)$

Aplicando nuevamente la forma 3 del principio del trabajo y energía a las posiciones 3 y 4 indicadas en la figura 12.44, se obtiene:

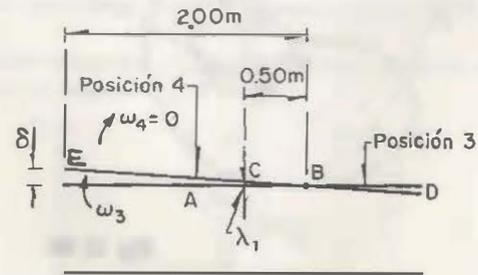


Fig 12.44

$$10(9.8)\lambda_1 = \frac{1}{2} 10 \left[\frac{3^2}{12} + 0.25^2 \right] 0.245025$$

De donde resulta que $\lambda_1 = 0.0125$ m. Según triángulos semejantes la altura δ , que se levanta el extremo E con respecto a la parte superior de los "burros" es:

$$\frac{\delta}{\lambda_1} = \frac{2}{0.5} ; \delta = 4 \lambda_1 = 4 (0.0125)$$

o sea: $\delta = 0.05$ m.

Ejemplo 12.13. Una placa delgada y homogénea de cualquier forma experimenta un movimiento plano definido, en un instante dado, por la velocidad v_C de su centro de masa C, y su velocidad angular $\vec{\omega}$ (figura 12.45). Si repentinamente un cierto punto O de la placa, situado a una distancia b de C, se fija mediante una articulación, deducir una expresión para hallar la nueva velocidad angular, ω_1 , de la placa, alrededor de este punto.

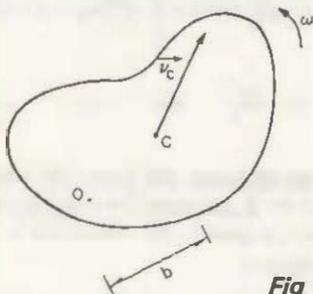


Fig 12.45

Solución.

Seleccione un sistema de ejes coordenados x,y, con origen en O (figura 12.46) en el plano de movimiento, de tal manera que el eje x coincida con la recta OC en el instante en que el punto O se inmoviliza.

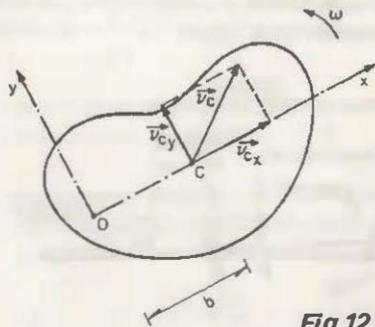


Fig 12.46

La cantidad de movimiento angular de la placa, justamente antes de que O quede fijo, está dada por la expresión:

$$\vec{H}_{O \text{ ANTES}} = (\vec{OC} \times \vec{V}_C) M + I_C \vec{\omega} \quad (1)$$

Denotando a ω como el módulo de la velocidad angular $\vec{\omega}$, \bar{k} al radio de giro de la placa con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento, y V_{Cx} y V_{Cy} a las componentes axiales de la rapidez de C justamente antes de que O quede fijo, el desarrollo de la ecuación (1) resulta como sigue:

$$\vec{H}_{O \text{ ANTES}} = (b \hat{i} + 0 \hat{j}) \times (V_{Cx} \hat{i} + V_{Cy} \hat{j}) M + M \bar{K}^2 \omega \cdot \bar{k}$$

o sea: $\vec{H}_{O \text{ ANTES}} = b V_{Cy} M \bar{k} + M \bar{K}^2 \omega \bar{k}$

$$\vec{H}_{O \text{ ANTES}} = M (b V_{Cy} + \bar{K}^2 \omega) \bar{k} \quad (2)$$

Cuando el punto O queda fijo, se desarrollará una fuerza de magnitud considerable en O. Sin embargo, el momento de esta fuerza con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento, que pase por O será nulo, y por tanto la cantidad de movimiento angular de la placa con respecto a dicho eje se conserva. Dicha cantidad de movimiento angular resulta:

$$\vec{H}_{O \text{ DESPUES}} = M (\bar{K}^2 + b^2) \vec{\omega}_1$$

o sea: $\vec{H}_{O \text{ DESPUES}} = M (\bar{K}^2 + b^2) \omega_1 \bar{k} \quad (3)$

siendo ω_1 el valor algebraico de $\vec{\omega}_1$

Iguando (2) con (3), y despejando ω_1 , resulta:

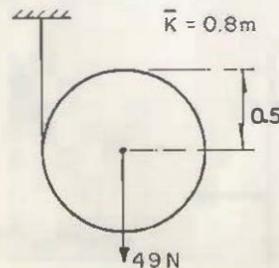
$$\omega_1 = \frac{b V_{Cy} + \bar{K}^2 \omega}{\bar{K}^2 + b^2} \quad (4)$$

Luego: $\vec{\omega}_1 = \frac{b V_{Cy} + \bar{K}^2 \omega}{\bar{K}^2 + b^2} \bar{k} \quad (5)$

12.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

12.1 El carrito de la figura pesa 49 N y tiene un radio de giro de 0.8 m con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento, y se suelta desde el reposo en la posición indicada.

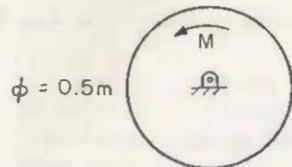
Encontrar la rapidez angular del carrito después de que su centro de masa ha descendido 3 metros.



Resp. $\omega_{x=3} = 8.128$ rad/s.

- 12.2 El disco de la figura está sujeto a la acción de un par M de magnitud constante, de $20 \text{ N} \cdot \text{m}$. La masa del disco es de 10 kg .

Hallar la rapidez angular del disco después de que ha completado 4 revoluciones, partiendo del reposo.

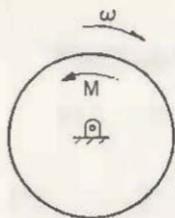


Resp. $\omega = 56.72 \text{ rad/s}$

- 12.3 En la figura se indica un volante que gira a una rapidez constante de 180 rev/min . Para frenar el volante se usa un sistema de frenado por fricción. Cuando se frena, el volante experimenta un momento constante de $8 \text{ N} \cdot \text{m}$.

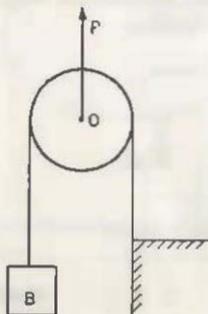
El momento de inercia del volante con respecto al eje centroidal de rotación es de $8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

¿En cuántas revoluciones el volante llegará al estado de reposo?



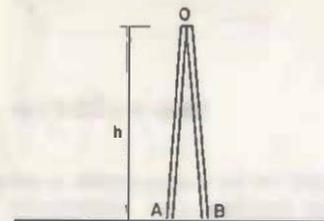
Resp. $\Delta\theta = 28.27 \text{ rev.}$

- 12.4 Una fuerza vertical de magnitud $P = 1000 \text{ N}$ se usa para levantar una rueda de 10 kg de masa y el huacal de 20 kg de masa. Suponiendo que la cuerda no desliza sobre la rueda, hallar la rapidez del cuerpo B después de que el centro O de la rueda sube 2 m a partir del reposo. El radio de giro de la rueda con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento es $k_O = 0.2 \text{ m}$.



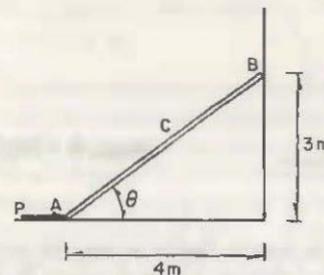
Resp. $V_B = 7.923 \text{ m/s}$

- 12.5 Dos barras delgadas y homogéneas idénticas, OA y OB teniendo cada una, una longitud L y un peso $W = Mg$ están articuladas mediante un pasador liso en O , y apoyadas sobre un plano horizontal perfectamente liso, de tal manera que los puntos A , O , y B se localizan en un plano vertical. El sistema está inicialmente en reposo y la altura inicial de O es h . Hallar la rapidez V_O con la que la articulación O choca contra el plano horizontal suponiendo que los extremos A y B se deslizan apartándose, y que las barras caen en un plano vertical.



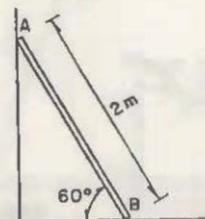
Resp. $V_O = \sqrt{3gh}$

- 12.6 La barra delgada y homogénea AB está apoyada sobre planos lisos, horizontal y vertical. Su peso es de 98 N y parte del reposo cuando $\theta = 36.87^\circ$. Hallar su rapidez angular cuando el extremo A se ha desplazado 1 metro bajo la acción de la fuerza horizontal de magnitud constante $P = 100 \text{ N}$.



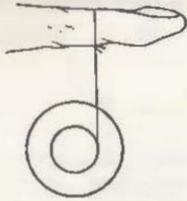
Resp. $\omega = 1.1063 \text{ rad/s}$

- 12.7 La barra delgada y homogénea AB , de 9.8 N de peso y 2 m de longitud se suelta desde el reposo a partir de la posición indicada. Si los planos de apoyo son lisos, hallar la rapidez del extremo B después de que este último se ha desplazado 0.5 m hacia la derecha.



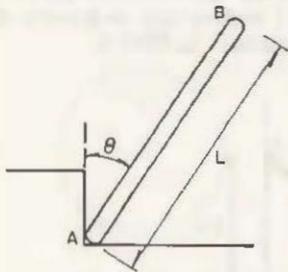
Resp. $V_B = 1.734 \text{ m/s}$

- 12.8 Un yoyo cuyo radio de giro con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento es de $\bar{k} = 2$ cm se suelta desde el reposo. Hallar la distancia vertical que debe recorrer su centro de masa, C, para adquirir una rapidez de 100 cm/s. Desprecie la masa de la cuerda y suponga que ésta se desenrolla alrededor del eje del yoyo de manera que el radio medio según el cual se desenreda es de $r = 1$ cm.



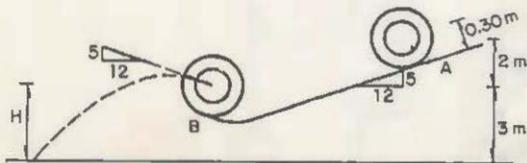
Resp. $h = 25.5$ cm

- 12.9 Una barra delgada y homogénea se suelta desde el reposo cuando su eje es vertical. Si se le permite caer libremente, obtener el ángulo θ para el cual la normal vertical en el plano horizontal de apoyo se anula. Para el análisis suponer que se desprecia la fricción en los puntos de contacto.



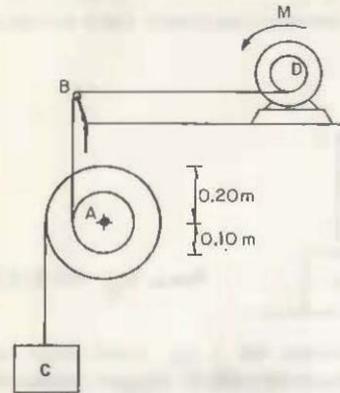
Resp. $\theta = 70.53^\circ$

- 12.10 Una llanta de automóvil se suelta desde el reposo en A sobre el plano inclinado y rueda sin deslizar hasta el punto B, donde sale disparada de modo que su centro de masa experimenta un tiro parabólico. Calcular la máxima altura H que adquiere el centro de masa de la llanta después de que ha salido disparada. El radio de giro de la llanta con respecto a su eje centroidal perpendicular al plano de movimiento es $\bar{k} = 0.25$ m, y el radio de la llanta es $R = 0.30$ m.



Resp. $H = 3.1746$ m

- 12.11 Un motor suministra al sistema un par motriz constante de magnitud $M = 50$ N.m. a un disco "D" acoplado, de masa despreciable. Si el tambor A tiene una masa de 15 kg y un radio de giro con respecto a su eje centroidal perpendicular al plano de movimiento de $\bar{k} = 0.15$ m, hallar la rapidez que adquiere el cuerpo C, de 30 kg. masa después de que asciende 4 m partiendo del reposo. Despreciar la masa de los cables y de la clavija B.



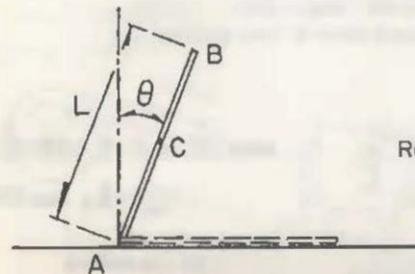
Resp. $V_C = 6.548$ m/s

- 12.12 Con los resultados del ejemplo 12.11 (ecuación 9), hallar el valor de V_C tomando en cuenta los siguientes datos:

$$\bar{R} = 0.20 \text{ m}; R = 0.30 \text{ m} \text{ y} \\ h = 0.10 \text{ m.}$$

Resp.: $V_C = 1.514$ m/s.

- 12.13 Una barra delgada, homogénea, de sección uniforme y de longitud L se suelta en caída libre de tal manera que durante su descenso experimenta un movimiento de traslación plana, existiendo un ángulo θ entre la vertical y el eje de la barra. Si v es la rapidez de cualquier punto de la barra antes de que su extremo A choque contra el piso, y si dicho extremo pivotea alrededor de su punto de contacto con el piso durante el resto del movimiento de la barra, determinar la rapidez V_B del extremo B de la barra cuando dicho extremo está a punto de chocar contra el piso. (Despreciar el impulso angular del peso de la barra durante la rotación de ésta).

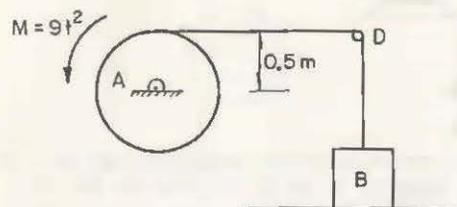


$$\text{Resp. } V_B = \sqrt{3gL \cos \theta + \frac{9}{4} v^2 \sin^2 \theta}$$

- 12.14 Para levantar el bloque B de 5 kg de masa se le aplica a la rueda homogénea y maciza, A, de masa 2 kg un par cuya magnitud es: $M = 9 t^2$ (N·m), donde t está en segundos. Calcular la rapidez del bloque B a los 4 segundos. El bloque está originalmente en reposo apoyado sobre el plano horizontal, y el cable de unión no se encuentra tenso. Despreciar el efecto de la clavija D.

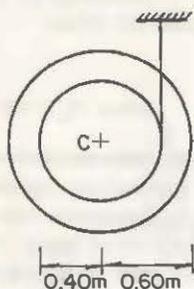
(Sugerencia: Determinar el tiempo necesario para poner al bloque B en movimiento).

$$M = 9 t^2$$



Resp. $v_{B_4} = 40.3162$ m/s

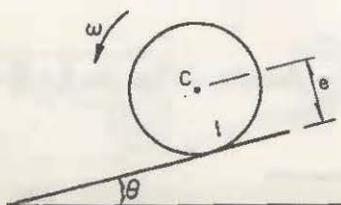
- 12.15 Una polea escalonada de masa de 2 kg, cuyo radio de giro centroidal es de 50 cm, se suelta desde el reposo. Hallar la rapidez de su centro de masa 10 segundos después.



Resp. $v_{C_{10}} = 38.2439$ m/s

- 12.16 Un cilindro homogéneo macizo y una esfera homogénea maciza que tienen el mismo radio ruedan sin deslizar hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, partiendo del reposo.

- Hallar las expresiones para la rapidez del centro de masa de cada cuerpo, después de t segundos.
- ¿Cuál de los dos cuerpos rodará más aprisa?

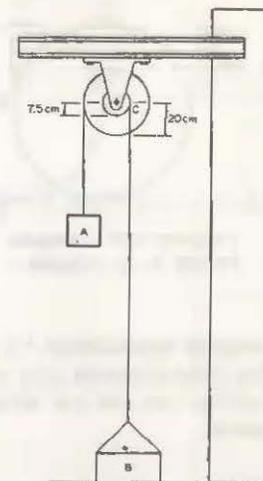


Resp. a) $v_{cyl} = (\frac{2}{3} g \text{ Sen } \theta) t$

$v_{esf} = (\frac{5}{7} g \text{ Sen } \theta) t$

- La esfera.

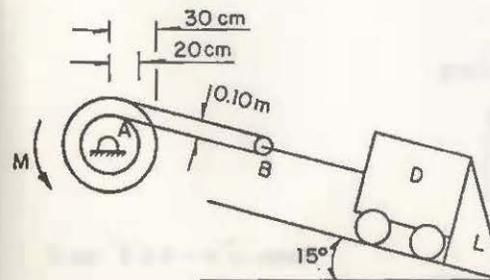
- 12.17 La doble polea consiste de dos ruedas que están solidariamente unidas y giran con la misma rapidez angular. La polea tiene una masa de 1 kg y un radio de giro con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento de $k = 0.10$ m. Si el bloque A tiene una masa de 5 kg y el bloque B tiene una masa de 8 kg obtener la rapidez del bloque B, 2 segundos después de que el sistema se suelta desde el reposo. Despreciar la fricción en el eje de la polea, y el peso de los cables.



Resp. $v_{B_2} = 2.3059$ m/s

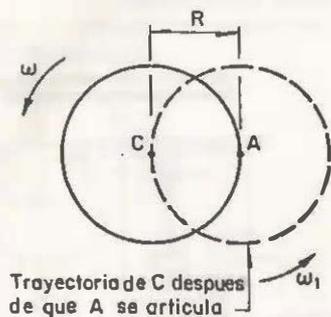
- 12.18 El tambor A tiene una masa de 98 kg y un radio de giro centroidal de $k = 0.25$ m. Si se aplica al tambor un par motriz de $M = 40 t$ (N·m), donde t está en segundos, calcular la rapidez del carro de mina, D, de 490 kg a los 10 segundos. El carro está originalmente en reposo sostenido por el tope L y los cables están sueltos. Despreciar la fricción y la masa, tanto de la polea B como de las ruedas del carro.

Sugerencia: Determinar el tiempo necesario para poner el carro en movimiento.



Resp. $v_{D_{10}} = 0.6769$ m/s

- 12.19 Un disco circular homogéneo macizo de radio R apoyado sobre una mesa horizontal perfectamente lisa está girando con una velocidad angular $\vec{\omega} = \omega \mathbf{k}$ alrededor de su eje geométrico vertical. Determinar la nueva velocidad angular, $\vec{\omega}_1$, que adquirirá el disco si un punto A de su periferia se articula repentinamente a la mesa.

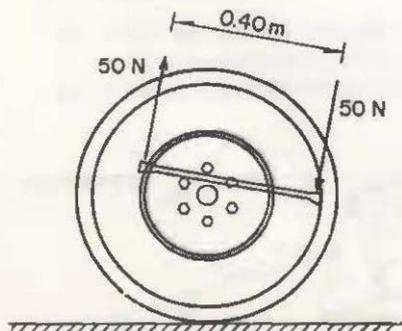


Resp. $\omega_1 = \frac{\omega}{3} \mathbf{k}$

- 12.20 Resolver el problema 12.19 para el caso de una placa cuadrada que originalmente gira alrededor de un eje vertical centroidal, cuando uno de los vértices de la placa se articula repentinamente.

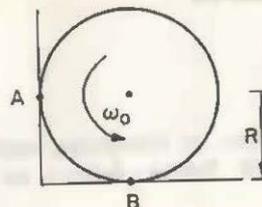
Resp. $\vec{\omega}_1 = \frac{\omega}{4} \mathbf{k}$

- 12.21 Una tuerca localizada a 6 cm del centro del eje de una rueda de un automóvil se aprieta aplicando el par indicado durante 0.2 segundos. Suponiendo que la rueda está libre para girar y se encuentra inicialmente en reposo, hallar la velocidad angular resultante de la rueda, la cual es de 20 kg y tiene un radio de giro centroidal de 0.25 m.



Resp. $\vec{\omega} = -3.2 \mathbf{k} \text{ rad/s}$

- 12.22 Un cilindro homogéneo macizo de radio R y masa M se coloca en un rincón con una velocidad angular inicial $\vec{\omega}_0$. Si μ es el coeficiente de fricción en A y B deducir la expresión del tiempo necesario para que el cilindro llegue al reposo.



Resp. $t = \frac{\omega_0 R (1 + \mu^2)}{2\mu g (\mu + 1)}$

- 12.23 Resolver el problema 12.22 si la superficie en A es lisa.

Resp. $t = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}$

BIBLIOGRAFIA

1. Beer, Ferdinand P, y Russell Johnston, Jr. Mecánica vectorial para Ingenieros, Dinámica. Mc. Graw Hill, Tercera Edición en Español, 1984.
2. Ordóñez Reyna Luis. Cinética y Problemas Selectos. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., 1977.
3. Meriam, J. L. Mechanics, Part II, Dynamics, John Wiley & Sons, Inc. Second Edition, 1960.
4. Ginsberg Jerry, H, y Genin Joseph, Dinámica. Editorial Interamericana. Primera Edición en Español, 1980.
5. Hibbeler Russell, C. Mecánica para Ingenieros: Dinámica. C.E.C.S.A. Tercera Edición en Español, 1982.
6. T.C. Huang. Mecánica para Ingenieros. Representaciones y Servicios de Ingeniería. Primera Edición en Español, 1976.

*El apoyo gráfico y la impresión se realizaron
en la Unidad de Difusión de
la Facultad de Ingeniería*

1987