Apuntes de
GEOMETRIA ANALITICA

APUNTES DE GEOMETRIA ANALITICA

1234567890 8013456792

Impreso en México Printed In Mexico

Esta obra se terminó en julio de 1982
en Poligráfica, S. A.
Av. del Taller No. 9
México 8, D. F.

Se tiraron 3050 ejemplares

PROLOGO

En 1637 el filósofo francés René Descartes publicó su obra "*El Discurso del Método*", que lo habría de situar en la historia como uno de los grandes pensadores de todas las épocas. Descartes incluye en esta obra, a manera de apéndice, un escrito al que llamó *La Geometría*, en el que propone la idea de utilizar el algebra para resolver problemas geométricos. Este extenso escrito ha sido considerado como "*el mayor paso unitario jamás realizado en el progreso de las ciencias exactas*" ya que dio las bases para el desarrollo de lo que ahora se conoce como *Geometría Analítica*.

A través de la Geometría Analítica las curvas se expresan mediante ecuaciones y las ecuaciones adquieren una interpretación geométrica.

Esta importante rama de las matemáticas constituye una herramienta fundamental para el ingeniero, no sólo por ser antecedente en otras disciplinas, sino porque proporciona además los elementos básicos a partir de los cuales se pueden representar, mediante modelos matemáticos, innumerables fenómenos naturales.

Es por esto que dentro de los planes de estudio de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. se incluye, en el primer semestre, la asignatura "*Algebra y Geometría Analítica*". La finalidad de estos apuntes es presentar los temas correspondientes a la parte de Geometría Analítica. El primer capítulo contiene el estudio de las cantidades vectoriales y sus operaciones; el segundo trata la recta y el plano en el espacio, con aplicaciones de las cantidades vectoriales; y en el tercero se estudian las ecuaciones paramétricas, vectoriales y polares de las curvas cónicas y se inicia el estudio de los sistemas de referencia esférico y cilíndrico.

Es necesario que el estudiante complemente los temas aquí presentados consultando otros textos, para lo cual, al final de esta obra, se proporciona una bibliografía básica.

El mejoramiento de estos apuntes podrá lograrse con ayuda de las críticas y sugerencias de profesores y alumnos, por lo que agradeceremos las aportaciones que se hagan llegar a la coordinación de la materia con el objeto de mejorar futuras ediciones.

6

Expresamos nuestro reconocimiento a los señores profesores:

RODOLFO SOLIS UBALDO.
JESUS ELOY NOLASCO MARTINEZ.
ANGEL VICTORIA ROSALES.

por su valiosa intervención en la elaboración de estos apuntes, así como a las licenciadas:

IRMA HINOJOSA FELIX.
MARIA CUAIRAN RUIDIAZ.

por su colaboración en la adaptación pedagógica de los mismos.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS

CONTENIDO

APITULO I ALGEBRA VECTORIAL

La representación de objetos geométricos para el espacio de tres dimensiones, se simplifica grandemente si se utilizan las cantidades vectoriales (vectores) como apoyo para determinar las condiciones especiales que deberán satisfacer los puntos que pertenecen a dicho objeto.

Dado que la finalidad de estas notas, es el tratamiento de algunos elementos de la geometría analítica, desde un punto de vista vectorial; este primer tema corresponde al estudio de las cantidades vectoriales en los espacios de dos y tres dimensiones principalmente.

I.1 VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

I.1.1 SISTEMA CARTESIANO EN LOS ESPACIOS DE DOS Y TRES DIMENSIONES

En un espacio de dos dimensiones, los puntos están definidos por una pareja ordenada de números reales; tienen dos coordenadas. Pueden representarse geométricamente en un plano determinado por dos ejes perpendiculares llamados *coordenados*, que se cortan en un origen común. Por facilidad, se acostumbra dibujar los ejes con direcciones horizontal y vertical, hacia la derecha y hacia arriba respectivamente; a dichos ejes se les denomina por lo general como ejes X y Y.

A la distancia desde el eje Y a cualquier punto del plano, se llama la abscisa del punto. A la distancia desde el eje X a cualquier punto del plano se le llama ordenada del punto. Las dos distancias juntas son llamadas las coordenadas del punto y se representan por el símbolo (x,y).

La abscisa es positiva cuando el punto está a la derecha del eje Y, y negativa cuando está a la izquierda. La ordenada es positiva cuando el punto se localiza arriba del eje X, y negativa cuando se localiza abajo. En esta forma a cada punto del plano, puede hacerse corresponder una pareja ordenada de valores (x,y), y a cada pareja ordenada de valores (x,y) puede hacerse corresponder un punto del plano.

Al sistema descrito, se le conoce como *sistema cartesiano en el espacio de dos dimensiones*.

Así por ejemplo, los puntos $P(1, 3)$, $Q(-2, 0)$, $R(-1, -4)$ pueden representarse geométricamente como se muestra en la figura I.1.

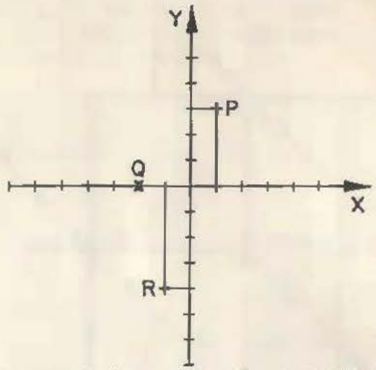


Figura I.1 Representación de puntos en el plano

En un espacio de tres dimensiones, los puntos están definidos por una terna ordenada de números reales; tienen tres coordenadas. En este caso suele utilizarse como sistema de referencia para la representación geométrica de un punto, el definido por tres ejes perpendiculares entre sí (cada uno de ellos perpendicular a los otros dos), que se cortan en un origen común. A este sistema se le conoce como *sistema cartesiano en el espacio de tres dimensiones*. Los ejes se llaman coordenados y se designan normalmente con las letras X, Y y Z. Los ejes X y Y se acostumbra dibujarlos en un plano horizontal y el eje Z queda por tanto, vertical.

Si las direcciones positivas de los ejes coordenados corresponden a las mostradas en la figura I.2 el sistema se llama derecho. Un sistema izquierdo es el de la figura I.3. En general es más común utilizar sistemas coordenados derechos.

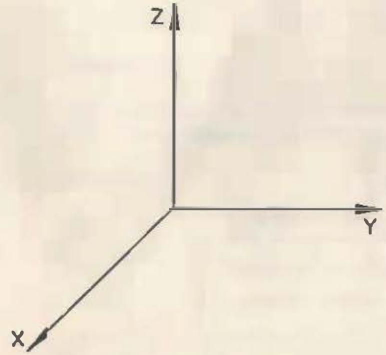


Figura I.2 Sistema Derecho

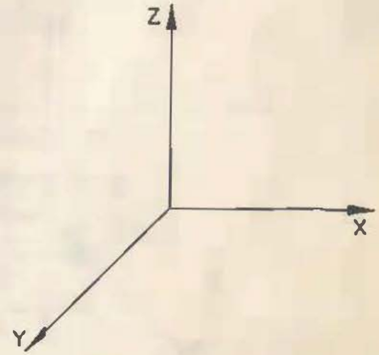


Figura I.3 Sistema Izquierdo

Los tres ejes definen tres planos, llamados *Planos Coordenados*, que dividen al espacio tridimensional en ocho partes, llamadas *octantes*. El plano XY contiene a los ejes X y Y, el plano XZ contiene a los ejes X y Z y el plano YZ contiene a los ejes Y y Z, figura I.4.

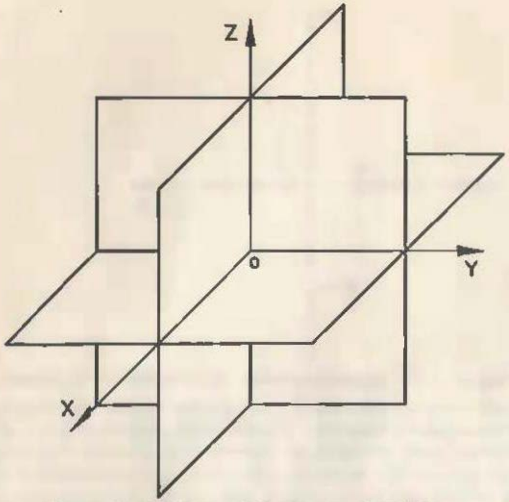


Figura I.4 Ejes y Planos coordenados

Un punto cualquiera del espacio tridimensional queda definido si se conocen sus tres distancias dirigidas a los tres planos coordenados. La distancia del punto al plano YZ se llama abscisa o coordenada X; su distancia a XZ se llama ordenada o coordenada Y; por último, su distancia al plano XY se llama cota o coordenada Z. También en esta situación a cada punto del espacio, puede hacerse corresponder una terna ordenada de valores (x,y,z), y a cada terna ordenada de valores (x,y,z) puede hacerse corresponder un punto del espacio. Así por ejemplo, la representación geométrica del punto P de coordenadas (2,3,3), puede hacerse como se muestra en la figura I.5.

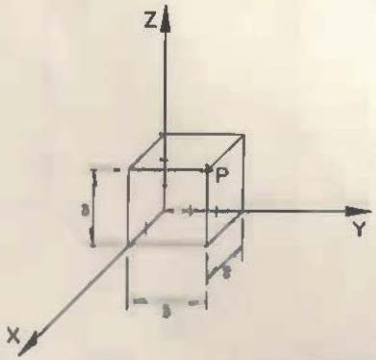


Figura I.5 Representación de puntos en el espacio

Para espacios de más de tres dimensiones, los puntos no pueden representarse geométricamente.

I.1.2 SIMETRIA DE PUNTOS

Para establecer la simetría de puntos en el espacio de tres dimensiones, es necesario revisar algunos conceptos geométricos.

DEFINICION 1. Dos puntos P y P_1 son simétricos con respecto a un tercero O, si éste es un punto medio del segmento PP_1.

Figura I.6 Simetría con respecto a un punto

DEFINICION 2. Dos puntos P y P_1 son simétricos con respecto a una recta L, si ésta es mediatriz del segmento PP_1

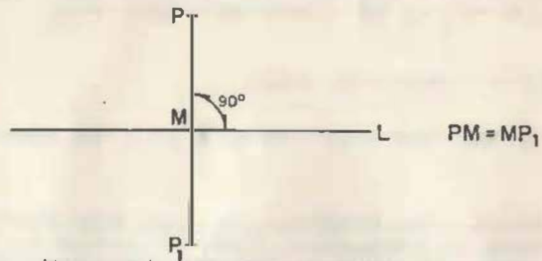


Figura I.7 Simetría con respecto a una recta

DEFINICION 3. Dos puntos P y P_1 son simétricos con relación a un plano π, si éste es normal bisector del segmento PP_1

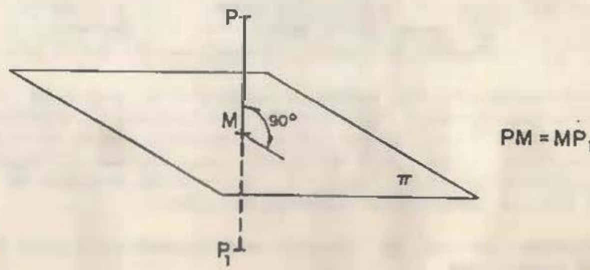


Figura I.8 Simetría con respecto a un plano

En base a la definición uno, a todo punto $P(x,y,z)$ del espacio de tres dimensiones le corresponde un simétrico $P_1(-x,-y,-z)$ con respecto al origen (figura I.9).

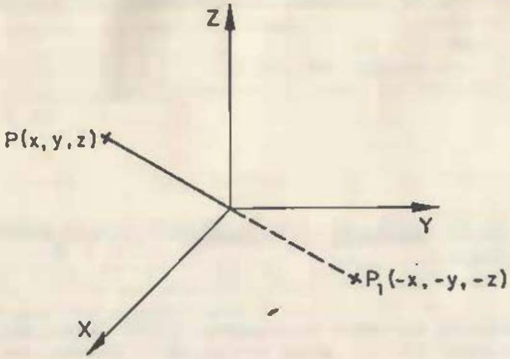


Figura I.9 Simetría con respecto al origen

Como consecuencia inmediata de la definición dos, a todo punto $P(x,y,z)$ del espacio de tres dimensiones le corresponde un simétrico $P_1(x,-y,-z)$ con respecto al eje x (figura I.10).

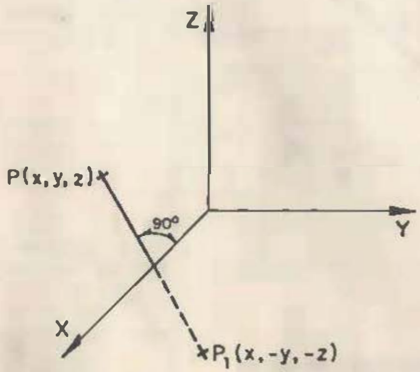


Figura I.10 Simetría con respecto al eje X

Los puntos $P(x,y,z)$ y $P_1(x,-y,-z)$ son simétricos con respecto al eje X, pues este eje es mediatriz del segmento PP_1. También el punto $P(x,y,z)$ tiene sus simétricos respecto a los ejes Y y Z que son $P_2(-x,y,-z)$ y $P_3(-x,-y,z)$.

Asimismo, como consecuencia de la definición tres a todo punto $P(x,y,z)$ del espacio de tres dimensiones le corresponde un simétrico $P_1(x,y,-z)$ con respecto al plano coordenado XY (figura I.11).

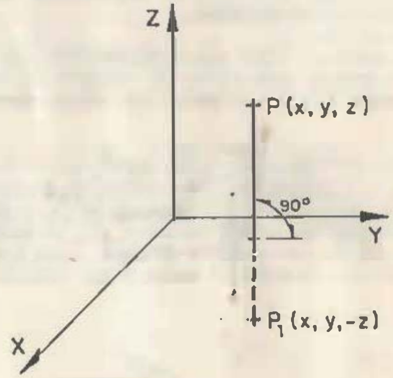


Figura I.11 Simetría con respecto al plano XY

Los puntos $P(x,y,z)$ y $P_1(x,y,-z)$ son simétricos con respecto al plano XY, pues este plano es normal bisector del segmento PP_1. Además el punto $P(x,y,z)$ tiene sus simétricos respecto a los planos YZ y XZ que son $P_2(-x,y,z)$ y $P_3(x,-y,z)$ respectivamente.

Ejemplo I.1

Dado el punto Q(-1,-4,2) encontrar sus simétricos respecto al origen, ejes y planos del sistema de referencia.

Solución:

Respecto al origen,	$Q_1(1,4,-2)$
Respecto al eje X,	$Q_2(-1,4,-2)$
Respecto al eje Y,	$Q_3(1,-4,-2)$
Respecto al eje Z,	$Q_4(1,4,2)$
Respecto al plano XY,	$Q_5(-1,-4,-2)$
Respecto al plano YZ,	$Q_6(1,-4,2)$
Respecto al plano XZ,	$Q_7(-1,4,2)$

I.1.3 SEGMENTO DIRIGIDO

En ingeniería es frecuente encontrarse con cantidades que poseen magnitud y dirección; entre éstas se tienen la fuerza, la velocidad, la aceleración, el desplazamiento, etc. A este tipo de cantidades se les denomina cantidades vectoriales o vectores.

Cabe aclarar que existen muchos entes matemáticos que también se definen como vectores, pero en este curso el concepto de vector lo restringiremos exclusivamente a las cantidades que poseen magnitud y dirección.

Para representar geométricamente a un vector se utiliza el *segmento dirigido*, el cual es un segmento de recta entre dos puntos al que se le asigna un sentido de recorrido. Por ejemplo, en la figura I.12 se muestra un segmento dirigido entre los puntos P y Q; a este segmento dirigido se le designa como $\overline{PQ}$, en donde la primera letra indica el punto inicial llamado *origen* y la segunda el punto final llamado *extremo*.

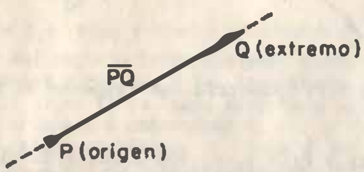


Figura I.12 Segmento dirigido

Es fácil ver que los segmentos dirigidos presentan las características de un vector a saber: dirección, dada por la dirección de la recta y por el sentido de recorrido (la flecha) y magnitud, dada por la longitud del segmento.

En adelante, por lo general, se usarán letras minúsculas con una raya encima para designar a los vectores, por ejemplo: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, etc.

Para propósitos de la descripción analítica de los vectores, se considera que dos vectores son *iguales* si tienen la misma magnitud y la misma dirección. En otras palabras, un vector no se modifica si se mueve paralelamente a sí mismo, figura 1.13.

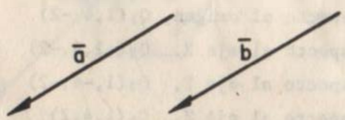
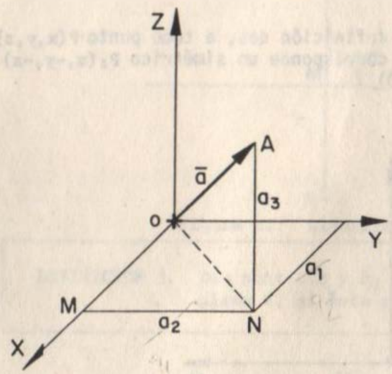


Figura I.13 $\bar{a} = \bar{b}$ porque $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tienen la misma magnitud y dirección

Con este concepto de igualdad de vectores se puede suponer, si se desea que todos los vectores tienen su origen en un punto de referencia O. Si se introduce un sistema coordenado rectangular con este punto como origen, se puede establecer una descripción analítica de un vector, esto es una descripción que se puede dar enteramente en términos de números.

I.1.4 COMPONENTES ESCALARES DE UN SEGMENTO DIRIGIDO SOBRE LOS EJES COORDENADOS

Considérese un vector $\bar{a}$ representado gráficamente por un segmento dirigido cuyo punto inicial es el origen del sistema y con punto final $A(a_1, a_2, a_3)$, véase figura I.14.



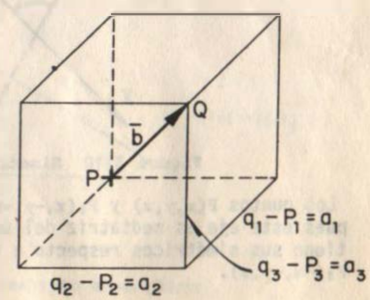


Figura I.14 Componentes de un segmento dirigido

Los tres números reales a_1, a_2, a_3 son llamados las componentes escalares del segmento dirigido $\overline{OA}$ sobre los ejes coordenados; y dado que $\overline{OA}$ representa al vector $\bar{a}$, diremos también que a_1, a_2, a_3 son las componentes escalares de $\bar{a}$ o simplemente las componentes de $\bar{a}$, de tal forma que a_1 es la primera componente o componente X, a_2 segunda componente o componente Y y a_3 tercera componente o componente Z. Consideremos ahora los puntos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ tales que el segmento dirigido $\overline{PQ}$ nos representa al vector $\bar{b}$, y consideremos también que $\bar{a} = \bar{b}$; comparando las representaciones geométricas de ambos vectores en la figura I.14, observamos que:

$$q_1 - p_1 = a_1 \qquad q_2 - p_2 = a_2 \qquad q_3 - p_3 = a_3$$

Los tres números $q_1 - p_1$, $q_2 - p_2$ y $q_3 - p_3$ son llamados las componentes de $\overline{PQ}$. En esta forma, vectores iguales tienen las mismas componentes, e inversamente, dos vectores con las mismas componentes deben necesariamente ser iguales en magnitud y dirección. Esto significa que un vector queda completamente determinado especificando los tres números que constituyen sus componentes. Si un vector $\bar{a}$ tiene por componentes a a_1, a_2, a_3, éste se indica como $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Similarmente si $\bar{b}$ tiene por componentes a b_1, b_2, b_3 se escribe como $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Una ecuación vectorial tal como $\bar{a} = \bar{b}$ es simplemente una forma breve de escribir tres igualdades para números reales:

$$a_1 = b_1, \qquad a_2 = b_2, \qquad a_3 = b_3$$

Para el caso de vectores definidos en el plano, éstos tienen dos componentes. Así por ejemplo en el vector $\bar{c} = (c_1, c_2)$: c_1 es la primera componente o componente X y c_2 es la segunda o componente Y, figura I.15.

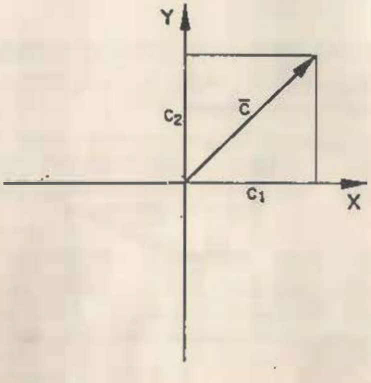


Figura I.15 Vectores en el plano

I.1.5 VECTOR DE POSICION

DEFINICION. Sea el punto A en el espacio de tres dimensiones, cuyas coordenadas son (a_1, a_2, a_3); se llama vector de posición de este punto al representado por el segmento dirigido que va del origen del sistema a dicho punto.

Designando por $\bar{a}$ al vector de posición del punto A, sus componentes son: $\bar{a} = \overline{OA} = (a_1 - 0, a_2 - 0, a_3 - 0) = (a_1, a_2, a_3)$; entonces como se ve, las componentes del vector de posición son siempre iguales a las coordenadas del punto, como se ilustra en la figura I.16.

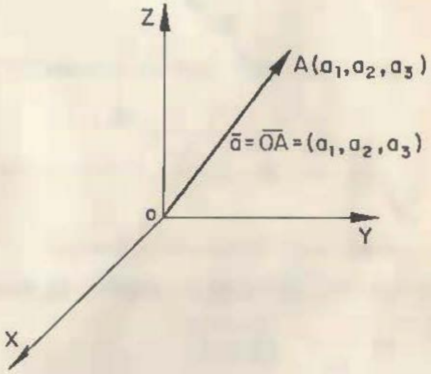


Figura I.16 Vector de posición del punto A

Entonces puede establecerse una relación de correspondencia uno a uno entre el conjunto de puntos en el espacio de tres dimensiones, y el conjunto de vectores de posición con la misma dimensión. Es decir a cada punto del espacio de tres dimensiones le corresponde uno y sólo un vector de posición, y viceversa. Esta misma situación se presenta para los conjuntos de puntos y vectores de posición en el plano. En general esta correspondencia existe, cualquiera que sea la dimensión del espacio en que se trabaje.

Es importante mencionar, que por ejemplo en el espacio de tres dimensiones, tanto los puntos como los vectores están dados por una terna ordenada de números reales. Sin embargo la terna de números reales que representa a un punto, determina la posición del punto en el sistema de referencia. Por otra parte, la terna ordenada de números reales que representa a un vector son sus componentes, es decir, las proyecciones dirigidas del vector sobre los ejes coordenados del sistema de referencia.

1.6 MODULO DE UN VECTOR

El módulo de un vector, es la magnitud del mismo. El símbolo $|\bar{a}|$ se utilizará para denotar el módulo del vector $\bar{a}$.

Es sencillo calcular el módulo de un vector a partir de sus componentes. Para el caso de un vector definido en el espacio de tres dimensiones, véase la siguiente figura I.17

Se tiene:

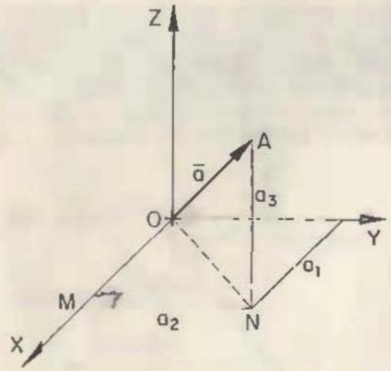


Figura I.17 Módulo de un vector

Del triángulo rectángulo OMN, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Del triángulo rectángulo OAN, por el teorema de Pitágoras:

$$|\bar{a}| = OA = \sqrt{ON^2 + NA^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Por lo tanto, el módulo del vector $\bar{a}$, es:

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Para el caso de vectores definidos en el plano, como se observa de la figura I.18, aplicando el teorema de Pitágoras, el módulo del vector $\bar{c}$ es:

$$\boxed{|\bar{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

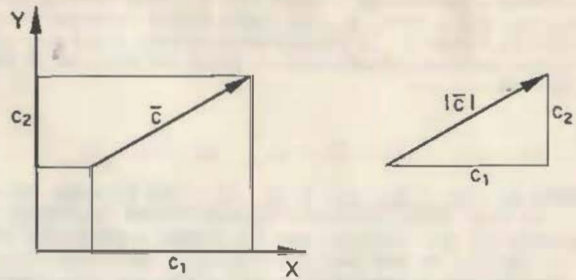


Figura I.18 Módulo de un vector en el plano

Ejemplo I.2

Determinar el módulo de los siguientes vectores: $\bar{a} = (1, -5)$,

$\bar{b} = (-1, 6, -2)$ $\qquad$ $\bar{c} = (9, 0, 0)$

Solución:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$
$$|\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$$
$$|\bar{c}| \quad \sqrt{(9)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 9$$

Ejemplo I.3

Demostrar que los puntos A(7, 5), B(2, 3), C(6, -7) son los vértices de un triángulo rectángulo, figura I.19.

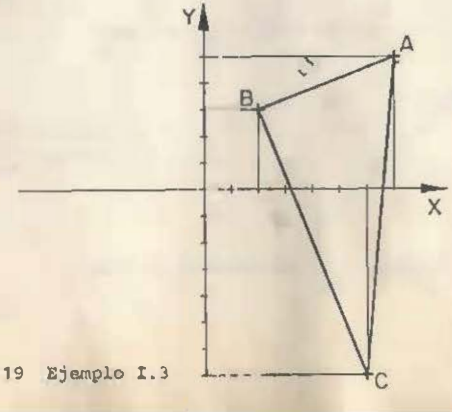


Figura I.19 Ejemplo I.3

Solución:

Definiendo los siguientes vectores sobre los lados del triángulo:

$$\bar{a} = \overline{AB} = B - A = (2, 3) - (7, 5) = (-5, -2)$$
$$\bar{b} = \overline{BC} = C - B = (6, -7) - (2, 3) = (4, -10)$$
$$\bar{c} = \overline{CA} = A - C = (7, 5) - (6, -7) = (1, 12)$$

Los módulos de estos vectores, o longitudes de los lados del triángulo, son:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$
$$|\bar{b}| = \sqrt{(4)^2 + (-10)^2} = \sqrt{116}$$
$$|\bar{c}| = \sqrt{(1)^2 + (12)^2} = \sqrt{145}$$

Como se cumple que:

$$(|c|)^2 = (|a|)^2 + (|b|)^2 \quad ó$$
$$\boxed{145 = 29 + 116}$$

Entonces de acuerdo con el teorema de Pitágoras, es un triángulo rectángulo.

1.1.7 EL VECTOR COMO CONJUNTO ORDENADO DE n NUMEROS REALES

El concepto de vector, puede extenderse a espacios con más de tres dimensiones, no así su representación geométrica. En el espacio de n dimensiones un vector se define como sigue:

DEFINICION. Un vector en el espacio de n dimensiones se define como una n-ada de números reales, es decir, un arreglo ordenado de n números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Al i-ésimo número de este arreglo, se llama la i-ésima componente del vector.

Al conjunto de todos los vectores de n dimensiones se le llama *espacio de n dimensiones* o simplemente, *espacio n*. Obsérvese que la definición dada es consistente con la descripción geométrica, mencionada previamente, para los vectores en los espacios de dos y tres dimensiones.

Asimismo el concepto de módulo de un vector que es la longitud o magnitud del mismo, se puede hacer extensivo para vectores definidos en espacios mayores de tres dimensiones. En general el módulo de un vector en el espacio de n dimensiones, $|\bar{a}|$, se obtiene como:

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}}$$

Por ejemplo supóngase que tenemos un vector $\bar{a}$ en el espacio de seis dimensiones.

$$\bar{a} = (2, -1, 3, 2, -2, 4)$$

El módulo del vector $\bar{a}$ está dado por la expresión:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (4)^2} =$$
$$= \sqrt{4 + 1 + 9 + 4 + 4 + 16} = \sqrt{38}$$
$$\boxed{\therefore \ |\bar{a}| = \sqrt{38}}$$

En espacios mayores de tres dimensiones, los vectores y sus características, no tienen interpretación geométrica.

I.2 OPERACIONES CON VECTORES

En esta parte, se tratarán solamente la suma de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar. En subtemas posteriores se analizarán las operaciones de productos entre vectores.

I.2.1 IGUALDAD DE VECTORES

> **DEFINICION.** Dados dos vectores en el espacio de n dimensiones, $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\bar{a}$ es igual a $\bar{b}$ si y sólo si, sus componentes correspondientes son iguales; es decir, $\bar{a} = \bar{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., y $a_n = b_n$

Esta definición concuerda con el concepto de igualdad considerado previamente, y que dice que dos vectores son iguales si sus respectivos segmentos dirigidos tienen la misma magnitud y dirección.

Ejemplo I.4

Verificar que los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son iguales, donde $\bar{a}$ parte del punto A y llega a B y $\bar{b}$ parte de C y llega a D; A(-1, 3, 4), B(4, 2, 6), C(1, -2, -6), D(6, -3, -4)

Solución:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (4, 2, 6) - (-1, 3, 4) = (5, -1, 2)$$

$$\bar{b} = \overline{CD} = (6, -3, -4) - (1, -2, -6) = (5, -1, 2)$$

Como las componentes correspondientes de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son iguales, entonces se satisface la definición de igualdad entre vectores.

I.2.2 ADICION DE VECTORES, PROPIEDADES

> **DEFINICION.** Dados dos vectores en el espacio de n dimensiones, $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, la suma $\bar{a} + \bar{b}$ es el vector que se obtiene sumando sus componentes correspondientes. Así se tiene:
>
> $$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Nótese que en esta definición, llamamos suma al vector que resulta de aplicar la operación de adición entre los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$; esto es que la adición de vectores es la operación descrita en la definición, y la suma de vectores es el resultado de esa operación.

Propiedades de la adición de vectores.

1) Cerradura. Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son dos vectores del espacio de n dimensiones, entonces $\bar{a} + \bar{b}$ también es un vector del espacio de n dimensiones.

2) Asociatividad. Se cumple que:

$$\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$$

3) Existencia del elemento idéntico. Para la adición de vectores existe un elemento idéntico que es el vector cero. En este vector, designado por $\bar{0}$, todas sus componentes son iguales a cero. Así $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, y tiene la propiedad que:

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a} \text{ para todo vector } \bar{a}$$

4) Existencia de los inversos. Si se tiene un vector $\bar{a}$, el negativo $-\bar{a}$, es un vector tal que:

$$-\bar{a} = (-a_1, -a_2, \ldots -a_n)$$

Entonces siempre se cumple que:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + (\bar{a}) = \bar{0}$$

O sea que para cada vector $\bar{a}$ siempre existe su inverso $-\bar{a}$, tal que al sumarles, el resultado es el vector cero (elemento idéntico).

5) Conmutatividad. Se cumple que:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

La adición de vectores en el espacio de tres dimensiones la podemos interpretar geométricamente, a partir del siguiente razonamiento.

Si un objeto es desplazado a lo largo de una línea recta desde un punto a otro, por ejemplo de P a Q, se puede designar este desplazamiento por el vector PQ. Supóngase que enseguida el objeto se desplaza de Q a R, este desplazamiento se puede denotar por el vector $\overline{QR}$, figura I.20.

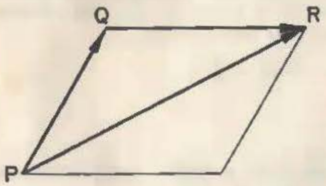


Figura I.20 Resultante

El resultado de los dos desplazamientos, es el mismo que el de un simple desplazamiento desde P a R dado por el vector $\overline{PR}$. Es común referirse al desplazamiento $\overline{PR}$ como la *resultante* de los dos desplazamientos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$. En la figura I.20 se puede observar que la resultante $\overline{PR}$, es una diagonal del paralelogramo determinado por $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$.

Si consideramos que los vectores están definidos por sus componentes, se encuentra una relación muy simple entre las componentes de los vectores involucrados. En la figura I.21, se muestran dos vectores $\overline{a} = (0, a_2, a_3)$ y $\overline{b} = (0, b_2, b_3)$, localizados en el plano definido por los ejes Y y Z, del sistema de referencia.

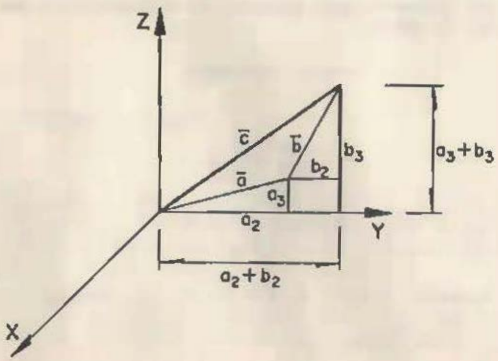


Figura I.21 Adición de vectores

Es evidente en la figura que la resultante $\overline{c}$ tiene por componentes a $(0, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. En otras palabras, las componentes de la resultante se obtienen sumando las correspondientes de los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$. Esto mismo se cumple para cualesquiera que sean los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$, sólo que en este caso se localizaron en el plano YZ para facilitar la comprensión de la figura I.21. Por esta razón la resultante corresponde a la suma de los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$.

I.2.3 MULTIPLICACION POR ESCALAR

DEFINICION. Si λ es un número real (llamado comúnmente escalar) y $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$ es un vector en el espacio de n dimensiones, el producto $\lambda\overline{a}$ es el vector obtenido multiplicando cada componente de $\overline{a}$ por λ, es decir:

$$\lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots \lambda a_n)$$

Es importante señalar que al multiplicar un vector por un escalar, da como resultado un vector de la misma dimensión, es decir se cumple la propiedad de cerradura.

Propiedades de la multiplicación por un escalar.

Se puede verificar fácilmente que si λ_1 y λ_2 son escalares y $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son vectores de la misma dimensión, se cumplen las siguientes propiedades:

1) $\lambda_1 (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda_1\overline{a} + \lambda_1\overline{b}$

2) $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\overline{a} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{a}$

3) $(\lambda_1 \lambda_2)\,\overline{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \overline{a})$

4) $|\lambda\overline{a}| = |\lambda|\,|\overline{a}|$

De donde:

$$|\lambda\overline{a}| = \sqrt{\lambda^2 a_1^2 + \lambda^2 a_2^2 + \ldots + \lambda^2 a_n^2}$$

$|\lambda|$, valor absoluto del escalar λ

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

5) $0\overline{a} = \overline{0}$, $\quad 1\overline{a} = \overline{a}$, $\quad (-1)\,\overline{a} = -\overline{a}$, $\quad -\overline{0} = \overline{0}$

Si el escalar λ es mayor que uno, el resultado de la multiplicación será un vector con la misma dirección de $\overline{a}$, pero con módulo mayor que el de $\overline{a}$.

Si el escalar es mayor que cero pero menor que uno, el resultado será un vector con la misma dirección de $\overline{a}$, pero con módulo menor.

Cuando el escalar es mayor que menos uno pero menor que cero, se obtendrá un vector paralelo al vector $\overline{a}$, pero con dirección opuesta y módulo menor.

Finalmente si el escalar es menor que menos uno, el resultado será un vector paralelo al vector $\bar{a}$, pero con dirección opuesta y módulo mayor.

Lo anterior lo podemos representar geométricamente como se muestra en la figura I.22.

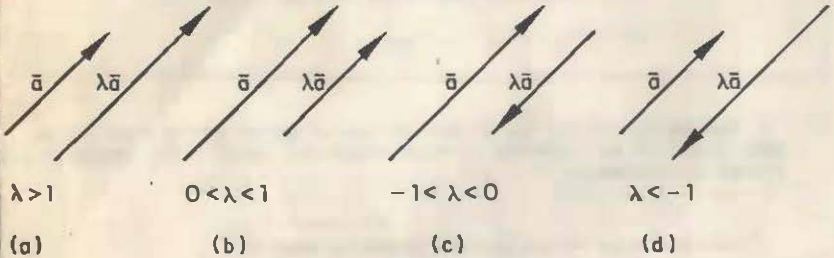


Figura I.22 Multiplicación por un escalar

Ejemplo I.5

Dados los puntos A(2, -1, 3) y B(0, -5, -4) y los vectores $\bar{p} = (2, 2, -1)$ y $\bar{q} = (-2, 0, 3)$, encontrar el vector : $3\bar{p} - 2\bar{q} + 5\overline{BA} + 3\bar{b} - 2\bar{a}$, siendo $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los vectores de posición de los puntos A y B, respectivamente.

Solución:

De acuerdo con la definición de la multiplicación de un vector por un escalar:

$$3\bar{p} = 3(2, 2, -1) = (6, 6, -3)$$

$$2\bar{q} = 2(-2, 0, 3) = (-4, 0, 6)$$

$$\overline{BA} = (2, -1, 3) - (0, -5, -4) = (2, 4, 7)$$

Por lo tanto:

$$5\overline{BA} = 5(2, 4, 7) = (10, 20, 35)$$

$$3\bar{b} = 3(0, -5, -4) = (0, -15, -12)$$

$$2\bar{a} = 2(2, -1, 3) = (4, -2, 6)$$

Entonces por la definición de suma de vectores:

$$3\bar{p} - 2\bar{q} + 5\overline{BA} + 3\bar{b} - 2\bar{a} = (6,6,-3) - (-4,0,6) + (10,20,35)$$

$$+ (0,-15,-12) - (4,-2,6) = (6+4+10+0-4,\ 6-0+20-15+2,\ -3-6+35-12-6) =$$

$$\boxed{= (16, 13, 8)}$$

Ejemplo I.6

Dados tres puntos colineales en el espacio de tres dimensiones, $P_1(-2, 1, -3)$, $P_2(1, 4, 0)$ y $P_3(2, 5, 1)$. Determinar el escalar λ que cumpla con la siguiente condición:

$$\lambda\ \overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3}$$

Solución:

Los segmentos dirigidos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$ están definidos por:

$$\overline{P_1P_2} = (1, 4, 0) - (-2, 1, -3) = (3, 3, 3)$$

$$\overline{P_1P_3} = (2, 5, 1) - (-2, 1, -3) = (4, 4, 4)$$

La condición que se busca es:

$$\lambda\ \overline{P_1P_2} = \overline{P_1P_3}$$

ó

$$\lambda\ (3, 3, 3) = (4, 4, 4)$$

Aplicando la definición de producto de un vector por un escalar, se tiene:

$$(3\lambda, 3\lambda, 3\lambda) = (4, 4, 4)$$

Para que dos vectores sean iguales, es necesario que sus componentes sean iguales, es decir:

$$3\lambda = 4, \quad \text{de donde:}$$

$$\boxed{\lambda = 4/3}$$

Ejemplo I.7

Dados los vectores $\bar{a} = (1, 3)$ y $\bar{b} = (4, 2)$, obtener $\bar{a} + \bar{b}$ gráficamente.

(5, 5)

Solución:

Aplicando la ley del paralelogramo.

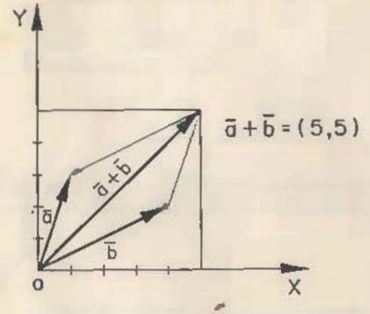


Figura I.23 Gráfica de $\bar{a} + \bar{b}$

I.2.4 VECTOR NULO Y VECTORES UNITARIOS

En el inciso I.2.2, para la tercera propiedad de la adición de vectores, mencionamos la existencia de un elemento idéntico para la adición de vectores, designado por $\bar{0}$, y que es un vector cuyas componentes son iguales a cero; esto es que $\bar{0} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$.

A este vector se le asigna por módulo cero, por lo que se le llama vector nulo; pero no se le asigna ninguna dirección particular.

Geométricamente, el vector nulo puede ser considerado como un segmento dirigido para el cual el origen y el extremo son coincidentes, es decir, son el mismo punto. Se puede observar que todo vector diferente del vector nulo tiene un módulo positivo, esto es, $|\bar{a}| > 0$ si $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Vectores unitarios. Se dice que un vector es unitario cuando su módulo es igual a la unidad. Para cualquier vector $\bar{a} \neq \bar{0}$, siempre es posible determinar el vector unitario en su misma dirección.

Por ejemplo dado un vector en el espacio de tres dimensiones $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ el vector unitario en la misma dirección está dado por:

$$\boxed{\bar{a}_u = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}\right) = \frac{1}{|\bar{a}|}(a_1, a_2, a_3)}$$

Como se puede observar, $\bar{a}_u$ tiene la misma dirección de $\bar{a}$ ya que:

$$\bar{a}_u = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} \quad \text{y} \quad \frac{1}{|\bar{a}|} \text{ es un escalar mayor que cer}$$

Por otra parte determinando el módulo de $|\bar{a}_u|$

$$|\bar{a}_u| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\bar{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{|\bar{a}|}\right)^2}$$

Pero:

$$(|\bar{a}|)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

Por lo tanto:

$$|\bar{a}_u| = \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = |\bar{a}_u| = 1$$

Con lo que queda demostrado que:

$$|\bar{a}_u| = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}\right)$$

Es un vector unitario en la misma dirección de $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$

Ejemplo I.8

Encontrar el vector unitario en la misma dirección del vector.

$$\bar{a} = (2, -3, 7)$$

Solución:

$$|\bar{a}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (7)^2} = \sqrt{4 + 9 + 49} = \sqrt{62}$$

Por lo tanto el vector unitario es:

$$\boxed{\bar{a}_u = \left(\frac{2}{\sqrt{62}}, -\frac{3}{\sqrt{62}}, \frac{7}{\sqrt{62}}\right)}$$

Ejemplo I.9

Determinar un vector $\bar{q}$, con la misma magnitud del vector

$$\bar{p} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}$$

de la suma

y en dirección opuesta a la resultante de los vectores $\bar{d}$ y $\bar{e}$,

$\bar{a} = (2, 1, -3)$, $\bar{b} = (-1, -1, -1)$, $\bar{c} = (3, -2, 4)$, $\bar{d} = (1, -2, 8)$

y $\bar{e} = (2, -1, 3)$

Solución:

El vector $\bar{p}$ es:

$$\bar{p} = 3\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c} = 3(2, 1, -3) - 2(-1, -1, -1) + (3, -2, 4)$$

$$\bar{p} = (11, 3, -3)$$

La magnitud de $\bar{p}$ es:

$$|\bar{p}| = \sqrt{(11)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{139}$$

La resultante de $\bar{d}$ y $\bar{e}$ es:

$$\bar{d} + \bar{e} = (1, -2, 8) + (2, -1, 3) = (3, -3, 11)$$

El vector unitario en la dirección de $\bar{d} + \bar{e}$ es:

$$|\bar{d} + \bar{e}| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + (11)^2} = \sqrt{139}$$

$$(\bar{d} + \bar{e})_u = \left(\frac{3}{\sqrt{139}}, \frac{-3}{\sqrt{139}}, \frac{11}{\sqrt{139}}\right)$$

Por lo tanto el vector unitario en la dirección opuesta es:

$$-(\bar{d} + \bar{e})u = -\left(-\frac{3}{\sqrt{139}}, \frac{3}{\sqrt{139}}, -\frac{11}{\sqrt{139}}\right)$$

Y finalmente $\bar{q} = -|\bar{p}|(\bar{d} + \bar{e})u = \sqrt{139}\left(-\frac{3}{\sqrt{139}}, \frac{3}{\sqrt{139}}, -\frac{11}{\sqrt{139}}\right)$

$$\boxed{\bar{q} = (-3, 3, -11)}$$

Ejemplo I.10

Una partícula se mueve con una rapidez de 2 m/seg en la dirección del vector $\bar{a} = (5, -3, 2)$. Determinar las componentes del vector velocidad, $\bar{V}$.

Solución:

El vector $\bar{V}$ está dado por $\bar{V} = 2\,\bar{a}_u =$

$$\bar{a}_u = \frac{(5, -3, 2)}{\sqrt{(5)^2+(-3)^2+(2)^2}} = \frac{(5, -3, 2)}{\sqrt{38}} = \left(\frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

Por lo tanto:

$$\bar{V} = 2\left(\frac{5}{\sqrt{38}}, -\frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{2}{\sqrt{38}}\right)$$

$$\boxed{\bar{V} = \left(\frac{10}{\sqrt{38}}, \frac{-6}{\sqrt{38}}, \frac{4}{\sqrt{38}}\right)}$$

I.2.5 SUSTRACCION DE VECTORES

DEFINICION. La sustracción de vectores $\bar{a} - \bar{b}$, se puede definir a partir de la adición como:

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (-b_1, -b_2, \ldots, -b_n)$$

$$\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots a_n - b_n)$$

Al vector que resulta de la sustracción de dos vectores, se le conoce como la diferencia de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

La interpretación geométrica de la sustracción de dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se muestra en la figura I.24 en donde, como se observa, los vectores $\bar{a}$

y $\bar{b}$ se dibujan con origen común y la diferencia $\bar{a} - \bar{b}$ es el vector que va del extremo de $\bar{b}$ al de $\bar{a}$. Es decir se hace la adición $\bar{b} + (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}$.

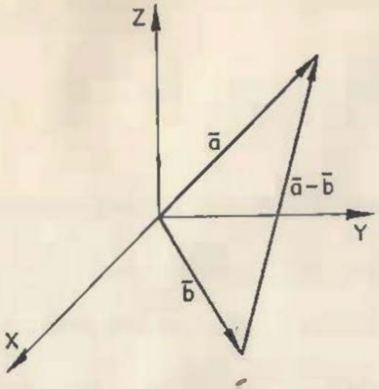


Figura I.24 Sustracción de vectores

1.2.6 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS COMO MODULO DE LA DIFERENCIA DE DOS VECTORES

Dados dos puntos en el espacio de tres dimensiones cuyas coordenadas son: $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$. Sus vectores de posición son respectivamente, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. El vector $\bar{a} - \bar{b}$, es el que va del extremo de $\bar{b}$ al de $\bar{a}$ y su módulo, $|\bar{a} - \bar{b}|$, será igual a la distancia entre A y B como puede apreciarse en la figura I.25.

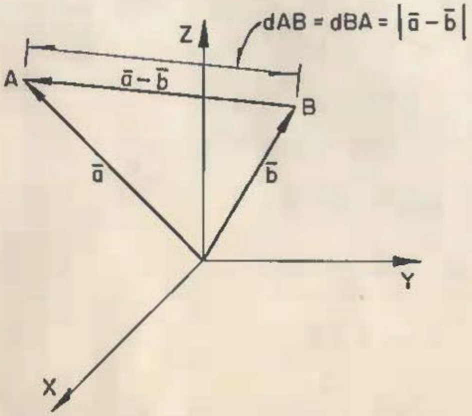


Figura I.25 Distancia entre dos puntos

Es decir:

$$\boxed{dAB = dBA = |\bar{a} - \bar{b}|}$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$dAB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Como se observa esta expresión es la misma fórmula que se obtiene a través del teorema de Pitágoras.

Ejemplo I.11

Demostrar que los puntos $P(3, 0, 3)$, $Q(-3, 0, -3)$ y $R(-3\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero.

Solución:

$dPQ = |\bar{p} - \bar{q}|$, $\bar{p} - \bar{q} = (3, 0, 3) - (-3, 0, -3) = (6, 0, 6)$

$$dPQ = \sqrt{6^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{72}$$

$dPR = |\bar{p} - \bar{r}|$, $\bar{p} - \bar{r} = (3, 0, 3) - (-3\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{3}) = (3 + 3\sqrt{3}, 0, 3 - 3\sqrt{3})$

$$dPR = \sqrt{(3 + 3\sqrt{3})^2 + 0^2 + (3 - 3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 18\sqrt{3} + 27 + 0 + 9 - 18\sqrt{3} + 27}$$

$$dPR = \sqrt{72}$$

$dQR = |\bar{q} - \bar{r}|$, $\bar{q} - \bar{r} = (-3, 0, -3) - (-3\sqrt{3}, 0, 3\sqrt{3}) = (-3 + 3\sqrt{3}, 0, -3 - 3\sqrt{3})$

$$dQR = \sqrt{(-3 + 3\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-3 - 3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 - \cancel{18\sqrt{3}} + 27 + 9 + \cancel{18\sqrt{3}} + 27}$$

$$dQR = \sqrt{72}$$

$\boxed{\therefore\ dPQ = dPR = dQR \text{ con lo que el triángulo PQR es equilátero.}}$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

1 DEFINICION Y PROPIEDADES

DEFINICION. El producto escalar de dos vectores en el espacio de n dimensiones $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ denotado por $\overline{a} \cdot \overline{b}$, que se lee $\overline{a}$ punto $\overline{b}$ se define como:

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

El resultado del producto escalar de dos vectores es precisamente un escalar (número real) y no un vector.

Al producto escalar también se le conoce como *producto interno* o *producto punto*.

Propiedades del producto escalar de dos vectores.

Dados los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ en el espacio de n dimensiones y el escalar λ, el producto escalar tiene las siguientes propiedades:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$ (propiedad conmutativa)

2) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$ (propiedad distributiva respecto a la suma de vectores)

3) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda (\overline{a} \cdot \overline{b})$, $\lambda \in R$

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$ si $\overline{a} \neq \overline{0}$

Demostraciones:

Sean $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots b_n)$ y $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k =$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Dado que la multiplicación es conmutativa para los números reales, tenemos que:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_n a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = b \cdot a$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}}$$

2) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

Expresando los vectores en funciones de sus componentes:

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot [(b_1, b_2, \ldots, b_n) + (c_1, c_2, \ldots, c_n)]$$
$$= (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots, b_n + c_n) =$$
$$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \ldots + a_n(b_n + c_n) =$$
$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + \ldots + a_n b_n + a_n c_n =$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k = (\overline{a} \cdot \overline{b}) + (\overline{a} \cdot \overline{c})$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} \cdot \overline{b}) + (\overline{a} \cdot \overline{c})}$$

3) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$, $\lambda \in R$

$$(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = [\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n)] \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$= (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$= \lambda a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 + \ldots + \lambda a_n b_n =$$
$$= \lambda [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n] =$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lambda (\overline{a} \cdot \overline{b})$$

$$\boxed{\therefore\ (\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})}$$

4) $\overline{a} \cdot \overline{a} > 0$ si $\overline{a} \neq \overline{0}$

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

Dado que $\overline{a} \neq \overline{0}$, al menos una de las componentes de $\overline{a}$ es diferente de cero; por lo que:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \neq 0 \quad \text{y como} \quad (a_k)^2 > 0 \ \forall a \in R$$

Tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 > 0$$

$$\boxed{\therefore \ \overline{a} \cdot \overline{a} > 0 \quad \text{si} \quad \overline{a} \neq \overline{0}}$$

Ejemplo I.12

Sean los vectores $\overline{a} = (2, 1, 1)$, $\overline{b} = (3, -1, -2)$ y $\overline{c} = (-1, 4, 5)$

Encontrar:

a) $\overline{a} \cdot \overline{b} =$

b) $\overline{a} \cdot \overline{c}$

c) $\overline{c} \cdot \overline{a}$

d) $3\overline{b} \cdot 2\overline{c} =$

Solución:

a) $\overline{a} \cdot \overline{b} = (2, 1, 1) \cdot (3, -1, -2) = 6 - 1 - 2 = \overline{\underline{3}}$

b) $\overline{a} \cdot \overline{c} = (2, 1, 1) \cdot (-1, 4, 5) = -2 + 4 + 5 = \overline{\underline{7}}$

c) $\overline{c} \cdot \overline{a} = (-1, 4, 5) \cdot (2, 1, 1) = -2 + 4 + 5 = \overline{\underline{7}}$

d) $3\overline{b} \cdot 2\overline{c} = 3(3, -1, -2) \cdot 2(-1, 4, 5) =$

$= (9, -3, -6) \cdot (-2, 8, 10) = -18 - 24 - 60$

$\boxed{= -102}$

I.3.2 ORTOGONALIDAD

Sean dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$, que forman los lados de un paralelogramo, como se observa en la figura I.26. Geométricamente se puede establecer que $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son ortogonales si las diagonales del paralelogramo tienen la misma longitud, o sea, si el paralelogramo resulta ser un rectángulo.

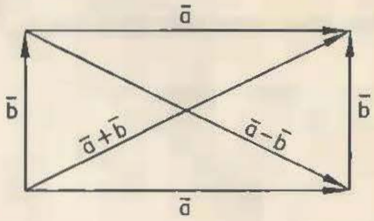


Figura I.26 Ortogonalidad de vectores

La condición anterior la podemos expresar como:

$$\boxed{\overline{a} \perp \overline{b} \quad \text{si y sólo si} \quad |\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{a} - \overline{b}|}$$

Proposición. Dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son ortogonales si y sólo si $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

Comprobación:

Sean los vectores $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son perpendiculares:

$$|\overline{a} + \overline{b}| = |\overline{a} - \overline{b}|$$

Sustituyendo a los vectores por sus componentes, tenemos:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2} =$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(a_1 + b_1)^2+(a_2 + b_2)^2+(a_3 + b_3)^2 = (a_1 - b_1)^2+(a_2 - b_2)^2+(a_3 - b_3)^2$$

Desarrollando los binomios:

$$a_1^2+2a_1b_1+b_1^2+a_2^2+2a_2b_2+b_2^2+a_3^2+2a_3b_3+b_3^2=a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2+a_3^2-2a_3b_3+b_3^2$$

Cancelando términos iguales en ambos miembros:

$$2a_1b_1+ 2a_2b_2+ 2a_3b_3= - 2a_1b_1- 2a_2b_2- 2a_3b_3$$

Es decir:

$$4a_1b_1 + 4a_2b_2 + 4a_3b_3 = 0$$

Dividiendo entre 4:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

El primer miembro de la expresión anterior es precisamente $\bar{a} \cdot \bar{b}$ por lo que se puede escribir:

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = 0}$$

Con lo que queda demostrada la proposición.

En caso de que los vectores $\bar{a}$ o $\bar{b}$ ó ambos sean iguales al $\bar{0}$, entonces necesariamente se cumple que $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. En esta situación, como se mencionó anteriormente, el vector $\bar{0}$ no tiene una dirección definida; sin embargo se ha adoptado por convención que el *vector nulo es ortogonal a todo vector*.

Ejemplo I.13

Determinar cuáles de los siguientes pares de vectores son ortogonales:

a) $\bar{a} = (-2, 6, 4)$, $\bar{b} = (3, 1/2, 1)$

b) $\bar{a} = (2, -5, 1)$, $\bar{b} = (-3, 0, 6)$

c) $\bar{a} = (3,-1)$, $\bar{b} = (4, -12)$

Solución:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-2, 6, 4)\cdot(3, 1/2, 1) = -6 + 3 + 4 = 1 \neq 0$

$\boxed{\therefore \text{ no existe ortogonalidad}}$

b) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (2, -5, 1)\cdot(-3, 0, 6) = -6 + 0 + 6 = 0$

$\boxed{\therefore\ \bar{a} \perp \bar{b}}$

c) $\bar{a} \cdot \bar{b} = (3, -1)\cdot(4, -12) = 12 + 12 = 24 \neq 0$

$\boxed{\therefore \text{ no existe ortogonalidad}}$

Ejemplo 1.14

Encontrar el valor de "m", de manera que los vectores $\bar{a} = (3, 1, 2)$ y $\bar{b} = (-2, m, 1)$ sean ortogonales.

Solución:

$$\bar{a} \cdot \bar{d} = (3, 1, 2) \cdot (-2, m, 1) = -6 + m + 2 = m - 4$$

Para que $\bar{a}$ y $\bar{d}$ sean ortogonales, se debe cumplir que: $\bar{a}. \bar{b} = 0$ de donde:

$$m - 4 = 0 \quad ó \quad \boxed{m = 4}$$

Ejemplo I.15

Demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

Solución:

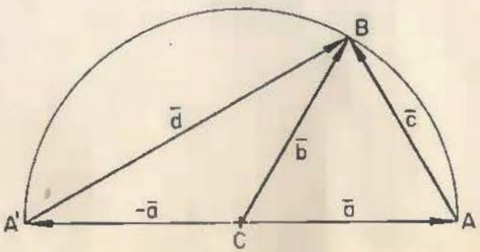


Figura I.27 Angulo $\widehat{ABA'}$: recto

23

Para que el ángulo $\widehat{ABA'}$ sea recto se debe cumplir que:

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = 0$$

De la figura I.27 y de acuerdo a la sustracción de vectores:

$$\bar{c} = \bar{b} - \bar{a}$$

Y por lo mismo:

$$\bar{d} = \bar{b} - (-\bar{a}) = \bar{b} + \bar{a}$$

Por lo tanto:

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = (\bar{b} - \bar{a}) \cdot (\bar{b} + \bar{a})$$

Por las propiedades del producto escalar de dos vectores:

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = (\bar{b} \cdot \bar{b}) + (\bar{b} \cdot \bar{a}) - (\bar{a} \cdot \bar{b}) - (\bar{a} \cdot \bar{a})$$

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = (\bar{b} \cdot \bar{b}) - (\bar{a} \cdot \bar{a})$$

Pero:

$$\bar{b} \cdot \bar{b} = b_1b_1 + b_2b_2 = (|\bar{b}|)^2 \quad y \quad \bar{a} \cdot \bar{a} = (|\bar{a}|)^2$$

Sustituyendo:

$$\bar{c} \cdot \bar{d} = (|\bar{b}|)^2 - (|\bar{a}|)^2$$

Pero como de la figura se observa que los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tienen la misma magnitud, que es la corresoondiente al radio de la circunferencia:

$$|\bar{b}| = |\bar{a}|$$

Por lo que:

$$\boxed{\bar{c} \cdot \bar{d} = (|\bar{a}|)^2 - (|\bar{a}|)^2 = 0}$$

Con lo cual, queda demostrado que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

I.3.3 COMPONENTE VECTORIAL Y ESCALAR DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Sean dos vectores cualesquiera $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en un espacio de tres dimensione Pasando por el origen del vector $\bar{a}$ un segmento dirigido paralelo a $\bar{b}$ y trazando una perpendicular a dicho segmento desde el extremo de $\bar{a}$, com se muestra en la figura I.28.

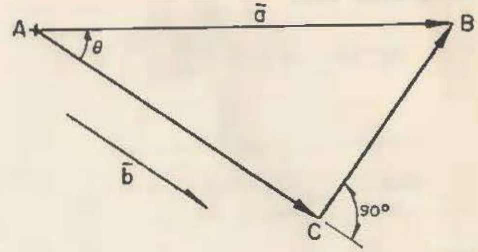


Figura I.28 Componentes de un vector sobre otro.

El vector $\bar{a}$ constituye la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC. E segmento dirigido $\overline{AC}$, dado que tiene la misma dirección de $\bar{b}$ y sólo di fiere en magnitud, puede expresarse como:

$$\overline{AC} = \lambda\bar{b}\ , \quad \lambda \text{ es un escalar mayor de } 0$$

En esta forma el segmento dirigido $\overline{CB}$ está dado por:

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} \text{ pero como } \overline{AB} \text{ nos representa al vector } \bar{a}$$

Tenemos que:

$$\overline{CB} = \bar{a} - \overline{AC} = \bar{a} - \lambda\bar{b}$$

Ahora bien $\bar{b}$ y $\overline{CB}$ son perpendiculares, por lo que debe cumplirse qu

$$\bar{b} \cdot \overline{CB} = 0$$

Pero:

$$\overline{CB} = \bar{a} - \lambda\bar{b} \qquad \text{Por lo que:}$$

$$\bar{b} \cdot (\bar{a} - \lambda\bar{b}) = 0$$

Desarrollando:

$$\bar{b} \cdot \bar{a} - \lambda\bar{b} \cdot \bar{b} = 0$$

Es decir:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda\bar{b} \cdot \bar{b}$$

El valor del escalar λ está dado por:

$$\lambda = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{(|\bar{b}|)^2}$$

El vector $\lambda\bar{b}$, correspondiente al segmento dirigido $\overline{AC}$ de la figura I.28, se llama *componente vectorial del vector* $\bar{a}$ *sobre* $\bar{b}$ y se representa como Comp. $\text{Vec}_{\bar{b}}\ \bar{a}$.

Dado que $\overline{AC} = \lambda\bar{b}$, tenemos que:

$$\text{Comp.Vec}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \lambda\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{(|\bar{b}|)^2}\ \bar{b}$$

O bien:

$$\boxed{\text{Comp.Vec}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}\ \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}}$$

Nótese que el vector $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ es un vector unitario en la dirección de $\bar{b}$, entonces el escalar $\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$ representa la magnitud dirigida del vector Comp.$\text{Vec}_{\bar{b}}\bar{a}$, a la cual se le denomina *componente escalar* de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$. se denota como Comp.$\text{Esc}_{\bar{b}}\bar{a}$; es decir:

$$\boxed{\text{Comp.Esc}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}}$$

Regresando a la figura I.28, en el triángulo rectángulo ABC se tiene que:

$$\cos\theta = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\lambda\bar{b}|}{|\bar{a}|} = \frac{\lambda|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$$

$$0 \le \theta \le 180°$$

Sustituyendo el valor de λ tenemos:

$$\cos\theta = \frac{\left[\frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{(|\bar{b}|)^2}\right]|\bar{b}|}{|\bar{a}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|} \quad \text{ó}$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|} \quad \text{ó} \quad \boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta \quad 0° \le \theta \le 180°}$$

Esto significa que el producto escalar de dos vectores diferentes del vector nulo, en el espacio de tres dimensiones, es igual al producto del módulo de $\bar{a}$, por el módulo de $\bar{b}$, por el coseno del ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Los módulos de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, son no negativos pero $\cos\theta$ puede ser positivo, negativo o cero. Por lo tanto el producto escalar $\bar{a} \cdot \bar{b}$ es negativo únicamente cuando $\cos\theta$ es negativo, es decir, únicamente cuando $90° < \theta \le 180°$.

También se debe notar que cuando $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son *ortogonales* ($\theta = 90°$), se tiene que $\cos\theta = 0$ y por lo tanto $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$. Esto coincide con la proposición enunciada previamente acerca de la *ortogonalidad* de dos vectores.

Ejemplo I.16

En cada uno de los casos siguientes calcular Com.$\text{Esc}_{\bar{b}}\ \bar{a}$ y Comp.$\text{Vect}_{\bar{b}}\ \bar{a}$

a) $\bar{a} = (-5, 8)$, $\bar{b} = (1, 1)$

b) $\bar{a} = (1, 2, -3)$ $\bar{b} = (0, 0, 1)$

Solución:

a) $$\text{Comp.Esc}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{(-5,8) \cdot (1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-5+8}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Comp.Vec}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}\ \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}\ \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}(1,1) = \boxed{(3/2,\ 3/2)}$$

b) $$\text{Comp.Esc}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{(1, 2, -3) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{0 + 0 - 3}{\sqrt{1}} = \boxed{-3}$$

$$\text{Comp.Vec}_{\bar{b}}\ \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}\ \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = -3\ \frac{(0,1,1)}{1} = -3\ (0,1,1) = \boxed{(0,\ 0,\ -3)}$$

Ejemplo I.17

El ángulo entre los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es 120°. Si $|\bar{a}| = 3$ y $|\bar{b}| = 4$ calcular:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b}$ b) $\bar{a} \cdot \bar{a}$ c) $\bar{b} \cdot \bar{b}$

Solución:

a) $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos\theta = 3 \times 4 \cos 120° = (3)(4)\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{-6}$

b) $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}||\bar{a}| \cos\theta = 3 \times 3 \cos 0° = (3)(3)(1) = \boxed{9}$

c) $\bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{b}|\ |\bar{b}| \cos\theta = 4 \times 4 \cos 0° = (4)(4)(1) = \boxed{16}$

I.3.4 ANGULO ENTRE DOS VECTORES

En el inciso anterior, llegamos a determinar la expresión:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\ |\bar{b}| \cos\theta \quad , 0 \leq \theta \leq 180°$$

En la cual el ángulo θ, es el ángulo que forman los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ al considerarlos en un origen común, figura I.29

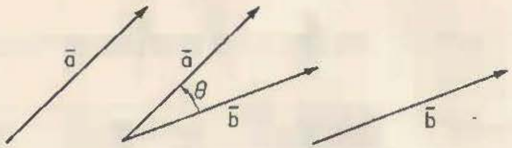


Figura I.29 Angulo entre dos vectores

Si despejamos de la expresión anterior a $\cos\theta$ tenemos:

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}$$

Es decir que:

$$\boxed{\theta = \text{ang}\cos \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}}$$

La expresión anterior nos permite calcular el ángulo que forman dos vectores, al considerarlos en un origen común.

Ejemplo I.18

Calcular el ángulo que forman los vectores:

$$\bar{a} = (3, 0, -1) \text{ y } \bar{b} = (6, -2, 0)$$

Solución:

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|} = \frac{(3, 0, -1)\cdot(6, -2, 0)}{\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}\ \sqrt{6^2+(-2)^2+0^2}} = \frac{18}{\sqrt{10}\ \sqrt{40}} = \frac{18}{\sqrt{400}} =$$

$$= \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$\boxed{\theta = \text{ang}\cos\frac{9}{10}}$$

I.3.5 VECTORES UNITARIOS i, j, k y FORMA TRINOMICA DE UN VECTOR

En algunas ocasiones es conveniente expresar un vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en términos de los vectores unitarios i, j, k, que se muestran en la figura I.30; estos vectores tienen la dirección de los ejes coordenados y su módulo es igual a 1.

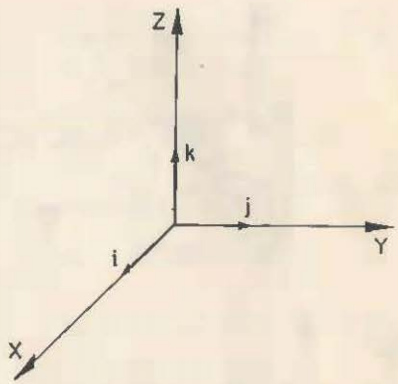


Figura I.30 Vectores unitarios i, j, k

A los vectores unitarios no se acostumbra testarlos.

En términos de sus componentes, los vectores unitarios quedan expresados como:

$$i = (1, 0, 0)$$
$$j = (0, 1, 0)$$
$$k = (0, 0, 1)$$

Ahora bien, el vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ puede expresarse como:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$

$$\bar{a} = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$$

ó

$$\boxed{\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k}$$

Esta expresión define al vector $\bar{a}$ en la llamada *forma trinómica*. Así por ejemplo, la forma trinómica de los vectores $\bar{p} = (2, -1, 0)$, $\bar{q} = (4, -10, 9)$ son respectivamente, $\bar{p} = 2i - j$, $\bar{q} = 4i - 10j + 9k$. De aquí en adelante se expresará indistintamente a un vector cualquiera $\bar{r}$, como $\bar{r} = (r_1, r_2, r_3)$ o bien $\bar{r} = r_1 i + r_2 j + r_3 k$. Ambas notaciones son equivalentes.

.6 ANGULOS Y COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Para describir la dirección de un vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ usualmente se hace considerando los tres ángulos α, β y γ determinados por el vector $\bar{a}$ y la parte positiva de los ejes X, Y y Z como se muestra en la figura I.31.

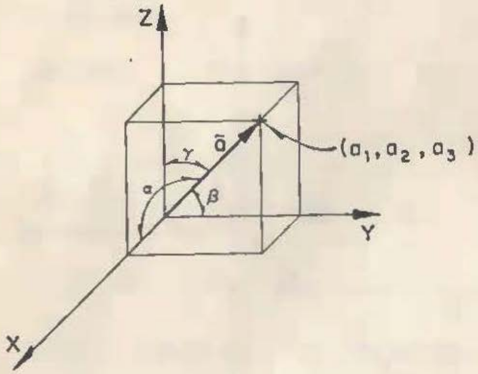


Figura I.31 Angulos directores de un vector

Algunas veces es más conveniente trabajar con los cosenos de esos ángulos, pues son proporcionales a sus componentes. En efecto, se tiene que:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}}$$

Donde $|\bar{a}|$ es el módulo de $\bar{a}$, es decir, $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

A los tres números $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ se les llama los cosenos directos de $\bar{a}$, y a los ángulos α, β y γ se les conoce como los ángulos directores. Obviamente si se conocen los cosenos directores y el módulo de $\bar{a}$, se pueden calcular sus componentes (a_1, a_2, a_3) despejándolas de las ecuaciones anteriores.

Los cosenos directores de un vector no pueden ser arbitrarios; y su relación se puede establecer como sigue:

Elevando al cuadrado las tres ecuaciones, se tiene:

$$\cos^2\alpha = \frac{a_1^2}{(|\bar{a}|)^2} = \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos^2\beta = \frac{a_2^2}{(|\bar{a}|)^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos^2\gamma = \frac{a_3^2}{(|\bar{a}|)^2} = \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sumando tenemos:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ó

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \text{ de donde:}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

Que es la expresión que relaciona a los cosenos directores del vector $\bar{a}$.

Para el caso de vectores definidos en el plano, $\bar{c} = (c_1, c_2)$, sus ángulos directores son los dos ángulos α y β determinados por el vector $\bar{c}$ y la parte positiva de los ejes X y Y. Sus cosenos directores son $\cos\alpha$ y $\cos\beta$ y están relacionados por la expresión:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1}$$

Nótese que en lo anteriormente descrito se considera que $\bar{a}$ y $\bar{c}$ son diferentes del $\bar{0}$. Al vector nulo no se le asignan ángulos ni cosenos directores.

Ejemplo I.19

Encontrar los ángulos y los cosenos directores de los siguientes vectores:

a) $\bar{a} = (-6, 2, 3)$

b) $\bar{b} = (3, 0, 0)$

Solución:

a) El módulo del vector $\bar{a}$ es: $|\bar{a}| = \sqrt{(-6)^2 + (2)^2 + (3)^2} = 7$

Por lo tanto sus cosenos directores son:

$\cos\alpha = -\frac{6}{7}, \quad \cos\beta = \frac{2}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{7}$

Y sus ángulos directores:

$\alpha = \text{ang cos } (-\frac{6}{7}) = 149°, \ \beta = \text{ang cos } (\frac{2}{7}) = 73°24'$ y

$\gamma = \text{ang cos } (\frac{3}{7}) = 64°37'$

$$\boxed{\alpha = 149°, \quad \beta = 73°24', \quad \gamma = 64°37'}$$

b) El módulo del vector $\bar{b}$ es: $|\bar{b}| = \sqrt{(3)^2 + 0^2 + 0^2} = 3$

Por lo tanto sus cosenos directores son:

$\cos\alpha = \frac{3}{3} = 1, \quad \cos\beta = \frac{0}{3} = 0, \quad \cos\alpha = \frac{0}{3} = 0$

Y sus ángulos directores:

$\alpha = \text{ang cos } (1) = 0° \quad \beta = \text{ang cos } (0) = 90°$ y $\gamma = \text{ang cos } (0) = 90°$

$$\boxed{\alpha = 0°, \quad \beta = 90°, \quad \gamma = 90°}$$

De donde se observa que el vector está localizado sobre el eje X, lo cual coincide con los valores de las componentes del vector, siendo la primera la única diferente de 0.

Ejemplo I.20

Hallar las componentes de un vector $\bar{a}$ con módulo igual a 3 y cuyos ángulos directores son iguales.

Solución:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$3\cos^2\alpha = 1, \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

De donde:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\beta = \cos\gamma$$

Lo que indica que hay dos direcciones de vectores que satisfacen la condición de que sus ángulos directores son iguales.

Tomando:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Entonces las componentes del vector $\bar{a}$ son:

$$a_1 = |\bar{a}|\cos\alpha = 3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$$

$$a_2 = |\bar{a}|\cos\beta = 3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$$

$$a_3 = |\bar{a}|\cos\gamma = 3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$$

De donde: $\boxed{\bar{a} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})}$

I.4 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

I.4.1 DEFINICION Y PROPIEDADES

Además del producto escalar de dos vectores, cuyo resultado es un escalar, hay otro producto entre vectores que es particularmente útil en las aplicaciones del análisis vectorial. A esta operación se le llama el *producto vectorial* (o producto cruz), y se le aplica a dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en el espacio de tres dimensiones, para obtener un nuevo vector designado por $\bar{a} \times \bar{b}$.

DEFINICION. Sean $\bar{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $\bar{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ dos vectores en el espacio de tres dimensiones. El producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$, que se lee "a cruz b", (en ese orden) está definido por el vector:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 + a_2 b_1)k$$

Una representación más fácil de recordar del producto vectorial $\overline{a} \times \overline{b}$ es por medio de un determinante de tercer orden:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Aquí no se discutirá más sobre los determinantes, ya que el único propósito es contar con un dispositivo útil para escribir ciertas fórmulas en forma resumida.

En el producto vectorial $\overline{a} \times \overline{b}$ si $\overline{a}$ ó $\overline{b}$, o ambos son iguales al vector $\overline{0} = (o, o, o)$ entonces:

$$\overline{a} \times \overline{b} = 0i + 0j + 0k = (0, 0, 0) = \overline{0}$$

Propiedades del producto vectorial.

Si λ es un escalar, y $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son dos vectores en el espacio de tres dimensiones, entonces se cumple que:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$ (Anticonmutatividad)

2) $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b}) + (\overline{a} \times \overline{c})$ (Ley distributiva izquierda)

También se cumple una ley distributiva derecha:

$(\overline{b} + \overline{c}) \times \overline{a} = (\overline{b} \times \overline{a}) + (\overline{c} \times \overline{a})$

3) $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b}$

Además si $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces:

$$\overline{a} \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$$

Y también:

$$\overline{b} \cdot (\overline{a} \times \overline{b}) = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

$$= b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2 + b_2a_3b_1 - b_2a_1b_3 + b_3a_1b_2 - b_3a_2b_1 = 0$$

Es decir que el vector $\overline{a} \times \overline{b}$ es perpendicular tanto a $\overline{a}$ como a $\overline{b}$.

A continuación se calculará el módulo del vector $\overline{a} \times \overline{b}$.

De acuerdo con la definición de módulo de un vector, se tiene que:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2} =$$

$$= \sqrt{a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3b_1a_1b_3 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1}$$

$$= \sqrt{a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3}$$

Sumando y restando del radical $a_1^2b_1^2$, $a_2^2b_2^2$ y $a_3^2b_3^2$:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3)}$$

$$|\overline{a} \times b| = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}$$

Pero:

$$(|\overline{a}|)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \qquad (|\overline{b}|)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

y

$$(\overline{a} \cdot b)^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

Por lo que:

$$\boxed{|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{(|\overline{a}|)^2 (|\overline{b}|)^2 - (\overline{a} \cdot \overline{b})^2}}$$

Como $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}|\ |\overline{b}| \cos \theta$, tenemos que:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{(|\overline{a}|)^2 (|\overline{b}|)^2 - (|\overline{a}|)^2 (|\overline{b}|)^2 \cos^2 \theta}$$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{(|\overline{a}|)^2 (|\overline{b}|)^2 (1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= \sqrt{(|\bar{a}|)^2 \, (|\bar{b}|)^2 \, \text{sen}^2\, \theta}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\ \text{sen}\ \theta \qquad 0° \le \theta \le 180°}$$

Estas expresiones representan el módulo del vector $\bar{a} \times \bar{b}$. En donde θ es el ángulo entre los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Cuando $\bar{a}$ o $\bar{b}$ son iguales a $\bar{0}$, el ángulo θ no tiene sentido, y en este caso el módulo de $\bar{a} \times \bar{b}$ queda determinado por la ecuación $|\bar{a} \times \bar{b}| = 0$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PRODUCTO VECTORIAL

Como ya se mencionó previamente, $\bar{a} \times \bar{b}$ es un vector perpendicular tanto a $\bar{a}$ como a $\bar{b}$ y su módulo es igual a $|\bar{a}|\ |\bar{b}|$ sen θ. Entonces, aparentemente, hay dos segmentos dirigidos con dirección opuesta que representan al vector $\bar{a} \times \bar{b}$. Sin embargo, la definición presentada del producto vectorial, está basada en *la regla de la mano derecha*, que dice:

Cuando $\bar{a}$ es girado hacia $\bar{b}$ de tal manera que los dedos de la mano derecha giran en la dirección de la rotación, entonces el dedo pulgar indica la dirección del vector $\bar{a} \times \bar{b}$, figura I.32.

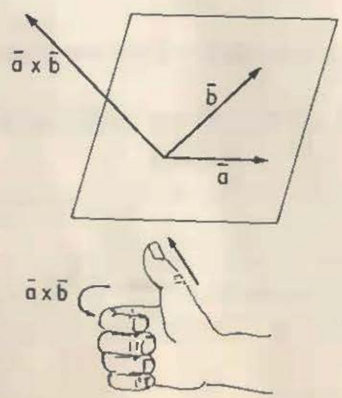


Figura I.32 Producto vectorial

Con esto, queda definido totalmente el vector $\bar{a} \times \bar{b}$ desde el punto de vista geométrico.

Ejemplo I.21

Un vector $\bar{c}$ tiene como módulo 52 y es perpendicular común a los vectores $a = 4i - 3j$ y $b = -4i + 6j + k$

Determinar sus componentes.

Solución:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3i - 4j + 12k$$

Un vector unitario en la dirección de $\bar{a} \times \bar{b}$ es:

$$(\bar{a} \times \bar{b})_u = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|}$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$(\bar{a} \times \bar{b})_u = \frac{-3i - 4j + 12k}{13} = -\frac{3}{13}\,i - \frac{4}{13}\,j + \frac{12}{13}\,k$$

Y entonces:

$$\bar{c} = \frac{-3\ (52)}{13}\,i - \frac{4\ (52)}{13}\,j + \frac{12\ (52)}{13}\,k$$

$$\boxed{\bar{c} = -12i - 12j + 48k}$$

La solución también puede ser $\bar{c} = 12i + 12j - 48k$, ya que es perpendicular a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$ y su módulo es 52.

Ejemplo I.22

Calcular las componentes de un vector $\bar{a}$, tal que sea perpendicular a los vectores $\bar{b} = (1, 0, 2)$ y $\bar{c} = (0, 2, -2)$ y que $\bar{a} \cdot \bar{d} = 1$, donde $d = (0, 1, 1)$.

Solución:

$$\bar{a} = |\bar{a}|\ \bar{a}_u$$

$$\bar{a}_u = (\bar{b} \times \bar{c})_u = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{|\bar{b} \times \bar{c}|}$$

$$|\overline{b}\times\overline{c}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 2j + 2k$$

$$|\overline{b}\times\overline{c}| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{24}$$

$$\overline{a}_u = -\frac{4}{\sqrt{24}}\, i + \frac{2}{\sqrt{24}}\, j + \frac{2}{\sqrt{24}}\, k$$

Por otra parte $\overline{a}\cdot\overline{d} = 1$ ó $|\overline{a}|\overline{a}_u \cdot \overline{d} = 1$

$$|\overline{a}| \left(-\frac{4}{\sqrt{24}}\, i + \frac{2}{\sqrt{24}}\, j + \frac{2}{\sqrt{24}}\, k\right) \cdot (0i + j + k) = |\overline{a}|\left(\frac{2}{\sqrt{24}} + \frac{2}{\sqrt{24}}\right)$$

$|\overline{a}| = \frac{\sqrt{24}}{4}$, por lo tanto:

$$\overline{a} = \frac{\sqrt{24}}{4}\left(-\frac{4}{\sqrt{24}}\, i + \frac{2}{\sqrt{24}}\, j + \frac{2}{\sqrt{24}}\right)k$$

$$\boxed{\overline{a} = -i + \frac{1}{2}\, j + \frac{1}{2}\, k}$$

I.4.2 PARALELISMO

La primera aplicación del producto vectorial que estudiaremos, es la que se refiere al paralelismo entre vectores, para lo cual planteamos la siguiente condición:

> Dos vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en un espacio tridimensional, diferentes del vector nulo, son paralelos si y sólo si su producto vectorial es igual a $\overline{0}$ o sea $|\overline{a}\times\overline{b}| = 0$

Esta afirmación se basa en que si en la expresión $|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}|\ |\overline{b}|$ sen θ, los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ no son nulos, para que $|\overline{a}\times\overline{b}|$ resulte cero, la única posibilidad es que sen θ sea igual a 0; o sea θ igual a 0° ó 180°. En ambos casos los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son paralelos, sólo que cuando θ = 0° los vectores tienen la misma dirección, y cuando θ = 180° tienen la dirección opuesta.

De lo anterior también se deduce lo siguiente:

> El producto vectorial de cualquier vector $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ por sí mismo es igual a $\overline{0}$; $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{0}$

Esto también es válido ya que en este caso sen θ = 0 y θ = 0°. Obviamente esta interpretación es aceptable sólo cuando $\overline{a}$ es diferente del vector nulo.

Ejemplo I.23

Usando el producto vectorial, demostrar que los vectores:

$$\overline{a} = 3i - j - 2k \quad y \quad \overline{b} = -9i + 3j + 6k$$

Son paralelos.

Solución:

Si $\overline{a}\times\overline{b} = \overline{0}$, los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son paralelos.

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ -9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 0k$$

> por lo tanto, $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son paralelos.

-6+6

Ejemplo I.24

Demostrar que si: $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ entonces:

$$\boxed{\overline{a}\times\overline{b} = \overline{b}\times\overline{c} = \overline{c}\times\overline{a}}$$

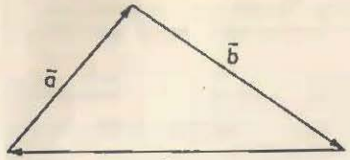


Figura I.33 $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$

Solución:

Por la propiedad de anticonmutatividad del producto vectorial:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

Como:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$$

Entonces:

$$\bar{a} = -\bar{b} - \bar{c}$$

Sustituyendo en el segundo miembro de la expresión anterior:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times (-\bar{b} - \bar{c})$$

Por la ley distributiva *izquierda*:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (-\bar{b} \times -\bar{b}) + (-\bar{b} \times -\bar{c})$$

Pero se tiene que:

$$(-\bar{b}) \times (-\bar{b}) = \bar{0} \quad y \quad -\bar{b} \times -\bar{c} = \bar{b} \times \bar{c}$$

Por lo tanto sustituyendo tenemos que:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c}$$

Por otro lado de:

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$$

Entonces:

$$\bar{b} = -\bar{a} - \bar{c}$$

Sustituyendo en:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

Se tiene que:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(-\bar{a} - \bar{c}) \times \bar{a} = (\bar{a} + \bar{c}) \times \bar{a}$$

Por la ley distributiva *derecha*:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (\bar{a} \times \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{a})$$

Pero se tiene que:

$$\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$$

Por lo tanto:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{a}$$

Con lo que queda demostrado que:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}}$$

I.4.3 AREA DE UN PARALELOGRAMO

Por medio del producto vectorial, podemos calcular el área de un paralelogramo, a partir del siguiente razonamiento:

Considérese un paralelogramo que aloja en dos de sus lados concurrentes a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, tal como se demuestra en la figura I.34.

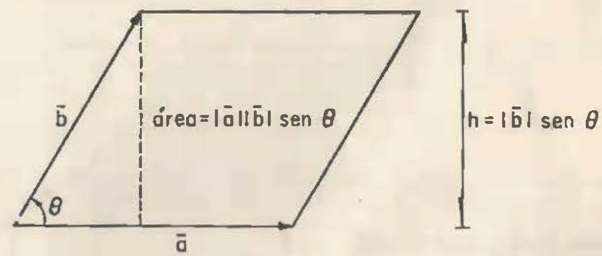


Figura I.34 Area de un paralelogramo

Se observa que la altura del paralelogramo está dada por $|\bar{b}|$ sen θ, en tanto que su base es igual a $|\bar{a}|$. El área del paralelogramo será entonces igual a $|\bar{a}|\ |\bar{b}|$ sen θ, que al relacionarla con la expresión $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\ |\bar{b}|$ sen θ, se deduce que el módulo del producto vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ es igual al área del paralelogramo en cuyos lados se alojan los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es decir:

$$\text{Area del paralelogramo} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \text{ sen } \theta$$

-3C

Ejemplo I.25

Calcular el área del triángulo cuyos vértices son:

$$A = (1, -1, 2), \quad B = (4, 5, -7) \quad y \quad C = (-1, 2, 1)$$

Solución:

Haciendo:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (4, 5, -7) - (1, -1, 2) = (3, 6, -9)$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (-1, 2, 1) - (1, -1, 2) = (-2, 3, -1)$$

Entonces:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -9 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 21i + 21j + 21k$$

De donde:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{21^2 + 21^2 + 21^2} = \sqrt{3(21)^2} = 21\sqrt{3}$$

Como el área del triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo:

$$\boxed{\text{Area triángulo } ABC = \frac{21\sqrt{3}}{2} \text{ unidades cuadradas}}$$

.4.4 PRODUCTO MIXTO, PROPIEDADES

> DEFINICION. Dados tres vectores cualesquiera $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$, se llama producto mixto de los tres vectores al escalar $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Nótese que al calcular el producto mixto, primero se debe efectuar el producto $\bar{b} \times \bar{c}$, ya que si se asocia $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \times \bar{c}$ la expresión no tiene significado alguno, dado que $\bar{a} \cdot \bar{b}$ es un escalar y el producto vectorial está definido para dos vectores.

El producto mixto, denominado también como triple producto escalar, puede expresarse en términos de un determinante de tercer orden. En efecto:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Mediante el cálculo directo se puede demostrar que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} \times \bar{a} = \bar{c} \cdot \bar{a} \times \bar{b}$$

En efecto, si en el determinante intercambiamos dos veces sus renglones obtenemos el mismo resultado; también se obtiene igual resultado al intercambiar dos veces más los renglones para calcular $\bar{c} \cdot \bar{a} \times \bar{b}$. Esto significa que el resultado del producto mixto no se altera al cambiar cíclicamente el orden de los vectores.

Ahora bien, como el producto escalar es conmutativo, se puede escribir:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c} \cdot \bar{a}$$

Cambiando cíclicamente el orden de los vectores:

$$\bar{b} \times \bar{c} \cdot \bar{a} = \bar{c} \times \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \times \bar{c} \cdot \bar{b}$$

Por lo que tenemos que:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}$$

Es decir, en el producto mixto se pueden intercambiar el punto y la cruz, sin que se altere el resultado. Por esta razón, en ocasiones se utiliza la notación $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ para indicar el producto mixto de los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, o sea:

$$\boxed{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c}}$$

1.4.5 VOLUMEN DE UN PARALELEPIPEDO

Considérense tres vectores cualesquiera $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, alojados en tres aristas concurrentes de un paralelepípedo, como se muestra en la figura I.35.

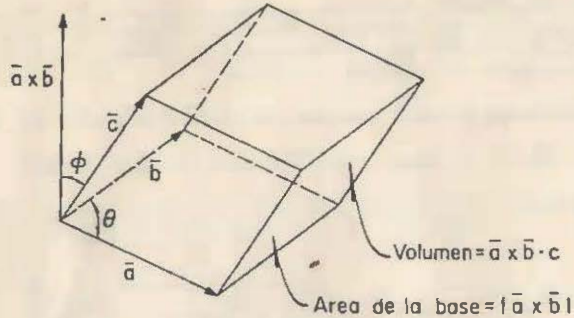


Figura I.35 Interpretación geométrica delproducto mixto

Como ya se vio el área del paralelogramo en cuyos lados concurrentes se alojan los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es igual a $|\bar{a} \times \bar{b}|$. Por otro lado la altura del paralelepípedo de la figura I.35 es: $|\bar{c}| \cos \phi$, donde ϕ es el ángulo entre $\bar{c}$ y $\bar{a} \times \bar{b}$.

En la figura $\cos \phi$ es positivo porque $0 \leq \phi < 90°$.

Entonces el volumen del paralelepípedo está dado por:

$$\text{Volumen} = \text{base} \times \text{altura} = |\bar{a} \times \bar{b}|\ |\bar{c}| \cos \phi$$

Pero como se vio en el inciso I.3.1, que el producto escalar entre dos vectores, es igual al producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo que forman, tenemos que:

$$\boxed{\text{Volumen} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

En otras palabras, el resultado del producto mixto $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ es igual al volumen del paralelepípedo en tres de cuyas aristas concurrentes se alojan los vectores $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Cuando el ángulo entre $\bar{a} \times \bar{b}$ y $\bar{c}$ denominado ϕ es tal que: $90° < \phi \leq 180°$, el producto $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ es el negativo del volumen del paralelepípedo.

La interpretación geométrica anterior conduce a la conclusión de que la condición necesaria y suficiente para que tres vectores, llevados a un origen común, estén en un mismo plano es que su producto mixto sea igual a cero.

Ejemplo I.26

Dados los puntos A(-1, 1, 2), B(0, 2, 3), C(1, 1, 1) y D(-1, 3, 3), si tres de las aristas de un paralelepípedo son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, encontrar su volumen.

Solución:

Haciendo:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (0, 2, 3) - (-1, 1, 2) = (1, 1, 1)$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (1, 1, 1) - (-1, 1, 2) = (2, 0, -1)$$

$$\bar{c} = \overline{AD} = (-1, 3, 3) - (-1, 1, 2) = (0, 2, 1)$$

Por lo tanto:

$$V = \bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - 0 - 2 + 2 = 4$$

$$\boxed{V = 4 \text{ unidades cúbicas.}}$$

Ejemplo I.27

Calcular el volumen del prisma triangular, en tres de cuyas aristas concurrentes se alojan los vectores $\bar{a} = 2i + j$, $\bar{b} = 3i - 2j + k$ y $\bar{c} = 2i + 3j - 4k$

Solución:

El volumen del prisma triangular es igual a la mitad del volumen del paralelepípedo que tiene las mismas aristas concurrentes, por lo que se puede escribir:

$$V = \frac{1}{2}(\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(16 + 2 + 0 - 0 + 12 - 6) = 12$$

$$\boxed{V = 12 \text{ unidades cúbicas.}}$$

Ejemplo I.28

Calcular el volumen del tetraedro de vértices A(1, 1, 0), B(3, 2, -1), C(-2, 1, 1) y D(2, -1, 0)

Solución:

Como el volumen del tetraedro cuyas aristas concurrentes son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, es igual a la sexta parte del volumen del paralelepípedo que tiene las mismas aristas, haciendo:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (3, 2, -1) - (1, 1, 0) = (2, 1, -1)$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (-2, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-3, 0, 1)$$

$$\bar{c} = \overline{AD} = (2, -1, 0) - (1, 1, 0) = (1, -2, 0)$$

Por lo tanto:

$$V = \frac{1}{6}\,(\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\,(0 + 1 - 6 - 0 - 0 + 4) = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{6} \text{ unidades cúbicas.}}$$

Ejemplo I.29

Demostrar que los puntos $A(2, 1, 3)$, $B(3, -5, -1)$, $C(-6, 7, -9)$ y $D(-2, 4, -3)$ son coplanares.

Solución:

Haciendo:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (3, -5, -1) - (2, 1, 3) = (1, -6, -4)$$

$$\bar{b} = \overline{AC} = (-6, 7, -9) - (2, 1, 3) = (-8, 6, -12)$$

$$\bar{c} = \overline{AD} = (-2, 4, -3) - (2, 1, 3) = (-4, 3, -6)$$

Por lo tanto:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -4 \\ -8 & 6 & -12 \\ -4 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -36 - 288 + 96 - 96 + 288 + 36 = 0$$

Por lo tanto los puntos A, B, C y D son coplanares.

I.4.6 DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Considerando los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Se puede formar el producto $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$. Es importante hacer notar que el resultado, en general, no es el mismo que si se considera el producto $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$.

Calculando el doble producto vectorial: $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, se tiene:

$$\bar{b} \times \bar{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)i + (b_3c_1 - b_1c_3)j + (b_1c_2 - b_2c_1)k$$

Entonces:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \left[a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)\right]i$$
$$+ \left[a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)\right]j$$
$$+ \left[a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\right]k$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3)i$$
$$+ (a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1)j$$
$$+ (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)k$$

Sumando y restando a la primera componente $a_1b_1c_1$, a la segunda $a_2b_2c_2$ y a la tercera $a_3b_3c_3$:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 - a_1b_1c_1)i$$
$$+ (a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2)j$$
$$+ (a_3b_3c_3 + a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 - a_3b_3c_3)k$$

Factorizando como se muestra a continuación:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1]i$$

$$+ [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_2]j$$

$$+ [(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_3]k$$

Reacomodando términos:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1i+b_2j+b_3k)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)(c_1i+c_2j+c_3k)$$

O bien:

$$\boxed{\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\, \bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\, \bar{c}}$$

De manera similar se puede demostrar que:

$$\boxed{(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\, \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\, \bar{a}}$$

Ejemplo I.30

Si $\bar{a} = (2, 1, 3)$, $\bar{b} = (1, 0, -2)$ y $\bar{c} = (3, 2, 1)$

Calcular:

a) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ y b) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$

Solución:

a) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$

$\bar{a} \cdot \bar{c} = (2, 1, 3)\cdot(3, 2, 1) = 6 + 2 + 3 = 11$

$(\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} = 11(1, 0, -2) = (11, 0, -22)$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (2, 1, 3)\cdot(1, 0, -2) = 2 + 0 - 6 = -4$

$(\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} = -4(3, 2, 1) = (-12, -8, -4)$

Por lo tanto:

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (11, 0, -22) - (-12, -8, -4) = (23, 8, -18)$$

$$\boxed{\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (23, 8, -18)}$$

b) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a}$

$(\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} = (11, 0, -22)$

$\bar{b} \cdot \bar{c} = (1, 0, -2)\cdot(3, 2, 1) = 3 + 0 - 2 = 1$

$(\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a} = 1(2, 1, 3) = (2, 1, 3)$

Por lo tanto:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (11, 0, -22) - (2, 1, 3) = (9, -1, -25)$$

$$\boxed{(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (9, -1, -25)}$$

TULO II LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO

En el capítulo anterior, se estudiaron los aspectos básicos del algebra vectorial, es decir desde el concepto de vector, hasta las operaciones que se pueden efectuar con los vectores.

En este capítulo se presenta la aplicación del algebra vectorial para la definición de la recta y el plano en el espacio de tres dimensiones, así como las relaciones entre rectas y planos.

1 LA RECTA

.1.1 ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA

La primera aplicación del algebra vectorial en este tema, será para el estudio de la recta en el espacio de tres dimensiones.

Sea $\bar{p}$ el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$; sea $\bar{p}_o$ el vector de posición de un punto dado $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y sea $\bar{u} = (a, b, c)$ un vector dado tal que $\bar{u} \neq \bar{0}$.

Si el vector $\bar{p} - \bar{p}_o$ es paralelo a $\bar{u}$, entonces por la condición de paralelismo entre vectores, existe un escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{p} - \bar{p}_o = t\bar{u}$. Figura II.1.

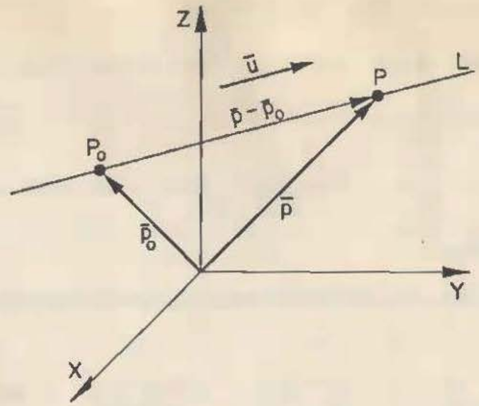


Figura II.1

Si

$$\bar{p} - \bar{p}_o = t\bar{u}$$

Entonces:

$$\boxed{\bar{p} = \bar{p}_o + t\bar{u}}$$

Considerando que P_o y $\bar{u}$ están fijos y que el escalar t, al que llamaremos parámetro, puede tomar todos los valores de $\mathbb{R}$; entonces decimos que la recta que contiene a P_o y es paralela al vector $\bar{u}$, es el conjunto de todos los puntos P para los cuales sus respectivos vectores de posición $\bar{p}$ satisfacen la expresión $\bar{p} = \bar{p}_o + t\bar{u}$. Esta expresión es una ecuación paramétrica vectorial o simplemente una *ecuación vectorial* de la recta L; figura II.1.

La condición para que un punto P pertenezca a la recta L, está dada por: $P \neq P_o$ pertenece a L si y sólo si $\bar{p} - \bar{p}_o$ es paralelo a $\bar{u}$.

El vector $\bar{u} = (a, b, c)$ determina la dirección de la recta por lo que a sus componentes a, b, c se les llama números directores de la recta. Cualquier vector paralelo a $\bar{u}$ nos determinaría también la dirección de la recta y podría utilizarse en lugar de $\bar{u}$.

Dado que para dos vectores paralelos sus componentes son proporcionales es decir $\bar{u} = (a, b, c)$ es paralelo a $\bar{v} = (c, d, e)$ si y sólo si $a = \lambda c$, $b = \lambda d$, $c = \lambda e$ en donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluimos que cualquier terna de números proporcionales a a, b y c también pueden utilizarse como números directores de la recta.

Ejemplo II.1

a) Hallar la ecuación vectorial de la recta que contiene al punto $P_0(2, -1, 2)$ y es paralela al vector $\overline{u} = (3, 1, -2)$

b) Obtener dos conjuntos de números reales que sean números directores de esta recta.

Solución:

a) $\overline{p} = (2, -1, 2) + t(3, 1, -2)$

$$\boxed{\overline{p} = (2 + 3t, -1 + t, 2 - 2t)}$$

b) Números directores dados $[3, 1, -2]$ otros números directores

$\left[-1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ ó $[6, 2, -4]$

Ejemplo II.2

Determinar si el punto $P_1(3, 7, 7)$ pertenece a la recta cuya ecuación vectorial es $\overline{p} = (5 - t, 1 + 3t, 3 + 2t)$.

Solución:

El vector de posición de P_1 es $\overline{p}_1 = (3, 7, 7)$ el cual debe satisfacer la ecuación de la recta

$$(3, 7, 7) = (5 - t, 1 + 3t, 3 + 2t)$$

Por la condición de igualdad entre vectores tenemos:

$$3 = 5 - t; \quad 7 = 1 + 3t; \quad 7 = 3 + 2t$$

Las tres ecuaciones se cumplen para $t = 2$ entonces $\overline{p}_1$ satisface la ecuación vectorial de la recta

$$\boxed{\therefore \; P_1 \text{ pertenece a la recta}}$$

ECUACION VECTORIAL DE LA RECTA QUE CONTIENE A DOS PUNTOS DADOS

Uno de los postulados de la geometría euclídea establece que:

"Por dos puntos dados cualesquiera puede hacerse pasar una recta, y sólo una". El cual tiene como consecuencia al corolario. "Dos puntos determinan una recta".

Supóngase que a partir de los puntos fijos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$, queremos determinar la ecuación vectorial de la recta L que contiene a ambos puntos. Figura II.2.

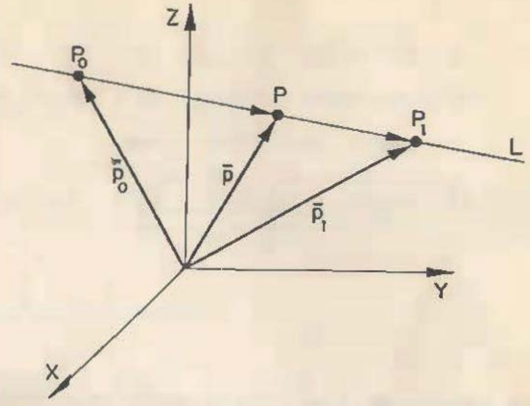


Figura II.2

Debemos obtener una ecuación de la forma

$$\overline{p} = \overline{p}_0 + t\overline{u}$$

Para este caso el vector de posición $\overline{p}_0$ ya está definido; nos falta por definir al vector $\overline{u}$ que nos determine la dirección de la recta L, para lo cual podemos tomar al vector $\overline{p}_1 - \overline{p}_0$ como vector $\overline{u}$, en donde $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_0$ son los correspondientes vectores de posición de los puntos P_1 y P_0 respectivamente.

Bajo estas condiciones la ecuación nos queda:

$$\boxed{\overline{p} = \overline{p}_0 + t(\overline{p}_1 - \overline{p}_0)}$$

La expresión anterior es la ecuación vectorial de la recta que contiene a los puntos P_0 y P_1. En esta ecuación el valor $t = 0$ corresponde al punto P_0, y el valor $t = 1$ corresponde al punto P_1; cuando t toma todos los valores en el intervalo $[0, 1]$, el punto P describe al segmento de recta que une a P_0 y P_1. Para valores de t menores que cero o mayores que uno, obtenemos los demás puntos de la recta.

Ejemplo II.3

Determinar la ecuación vectorial de la recta que contiene a los puntos $P_0(2, -1, 1)$ y $P_1(0, 1, -2)$.

Solución:

$$\overline{p} = \overline{p}_o + t\,(\overline{p}_1 - \overline{p}_o)$$

$$\overline{p} = (2, -1, 1) + t[(0, 1, -2) - (2, -1, 1)]$$

$$\overline{p} = (2, -1, 1) + t\,(-2, 2, -3)$$

$$\boxed{\overline{p} = (2 - 2t,\ -1 + 2t,\ 1 - 3t)}$$

I.1.2 ECUACIONES PARAMETRICAS Y EN FORMA SIMETRICA DE LA RECTA

Sea

$$\overline{p} = \overline{p}_o + t\overline{u}$$

la ecuación vectorial de una recta que contiene al punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y que es paralela al vector $\overline{u} = (a, b, c)$ y sean $\overline{p}$ y $\overline{p}_o$ los vectores de posición de los puntos $P(x, y, z)$ y P_o respectivamente.

Si en la ecuación sustituimos los vectores por sus respectivas componentes, tenemos:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_o, y_o, z_o) + t\,(a, b, c) = \\ &= (x_o, y_o, z_o) + (ta, tb, tc) = \\ &= (x_o + ta,\ y_o + tb,\ z_o + tc)\end{aligned}$$

De donde:

$$(x, y, z) = (x_o + ta,\ y_o + tb,\ z_o + tc)$$

Por igualdad de vectores se tiene que:

$$\boxed{x = x_o + ta, \quad y = y_o + tb, \quad z = z_o + tc}$$

Estas ecuaciones son las llamadas ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto P_o y es paralela al vector $\overline{u}$.

La recta es el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x, y, z) se determinan respectivamente por las ecuaciones paramétricas cuando t toma todos los valores reales.

Ahora bien, si ninguna de las componentes a, b, c es cero, podemos despejar a t de las ecuaciones paramétricas, obteniendo:

$$t = \frac{x - x_o}{a}, \qquad t = \frac{y - y_o}{b}; \qquad t = \frac{z - z_o}{c}$$

Igualándolas obtenemos las ecuaciones:

$$\boxed{\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}}$$

Que son las ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene a P_o y que es paralela a $\overline{u}$.

Si una o dos de las componentes de $\overline{u}$ son nulas, se presentan casos particulares en estas ecuaciones.

Por ejemplo si $a = 0$ entonces $\overline{u} = (0, b, c)$, las ecuaciones simétricas son:

$$x = x_o, \qquad \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Dado que el vector $\overline{u}$ es paralelo al plano YZ entonces la recta también es paralela al plano YZ.

Si $a = b = 0$ entonces $\overline{u} = (0, 0, c)$ las ecuaciones se reducen a:

$$x = x_o, \quad y = y_o, \quad z \in \mathbb{R}$$

El vector $\overline{u}$ es paralelo al eje Z por lo que la recta es paralela al eje Z y en consecuencia es perpendicular al plano XY

ECUACIONES PARAMETRICAS Y EN FORMA SIMETRICA DE LA RECTA QUE CONTIENE A DOS PUNTOS DADOS.

Sea:

$$\overline{p} = \overline{p}_o + t\,(\overline{p}_1 - \overline{p}_o)$$

La ecuación vectorial de la recta que contiene a los puntos $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y sean $\overline{p}$, $\overline{p}_o$ y $\overline{p}_1$ los vectores de posición de los puntos $P(x, y, z)$, P_o y P_1 respectivamente.

Si en la ecuación vectorial sustituimos los vectores por sus respectivas componentes, nos queda:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x_o, y_o, z_o) + t[(x_1, y_1, z_1) - (x_o, y_o, z_o)] \\ &= (x_o, y_o, z_o) + t(x_1 - x_o,\ y_1 - y_o,\ z_1 - z_o) = \\ &= (x_o + t(x_1 - x_o),\ y_o + t(y_1 - y_o),\ z_o + t(y_1 - y_o))\end{aligned}$$

Por igualdad de vectores se tiene:

$$\boxed{x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + t(z_1 - z_0)}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos P_0 y P_1.

Si $x_1 \neq x_0$, $y_1 \neq y_0$ y $z_1 \neq z_0$, podemos despejar a t de las ecuaciones paramétricas:

$$t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad t = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad t = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Igualando:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

Estas ecuaciones, son las ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene a los puntos P_0 y P_1.

Ejemplo II.4

Sea una recta que contiene al punto $P_0(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $\overline{u} = 2i - 4j + 3k$

a) Determinar la ecuación vectorial de la recta.

b) Hallar sus ecuaciones paramétricas.

c) Hallar sus ecuaciones en forma simétrica.

Solución:

a) $\overline{p} = (1, 2, 3) + t(2, -4, 3) =$

$= (1, 2, 3) + (2t, -4t, 3t) =$

$= (1 + 2t, 2 - 4t, 3 + 3t)$

$\boxed{\therefore\ \overline{p} = (1 + 2t, 2 - 4t, 3 + 3t)}$ vectorial

b) $(x, y, z) = (1 + 2t, 2 - 4t, 3 + 3t)$

$\boxed{\therefore\ x = 1 + 2t, \quad y = 2 - 4t, \quad z = 3 + 3t}$ paramétricas

c) Despejando a t

$t = \frac{x - 1}{2}$; $t = \frac{y - 2}{-4}$; $t = \frac{z - 3}{3}$

$\boxed{\therefore\ \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 3}{3}}$ forma simétrica

Ejemplo II.5

Determinar las ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene al punto $P_0(-5, 0, 3)$ y es paralela al vector $\overline{u} = 3j + 5k$

Solución:

Las ecuaciones son de la forma:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Pero la primera componente de $\overline{u}$ es cero, o sea que $a = 0$ por lo tanto las ecuaciones quedan:

$$\boxed{x = -5, \quad \frac{y}{3} = \frac{z - 3}{5}}$$

Ejemplo II.6

Si una recta contiene a los puntos $P_0(5, 0, 7)$ y $P_1(5, -3, 11)$ determinar sus ecuaciones:

a) Vectorial.

b) Paramétricas.

c) En forma simétrica.

Solución:

a) $\overline{p} = (5, 0, 7) + t[(5, -3, 11) - (5, 0, 7)]$

$= (5, 0, 7) + t(0, -3, 4) =$

$= (5, -3t, 7 + 4t)$

$\boxed{\therefore\ \overline{p} = (5, -3t, 7 + 4t)}$ vectorial

b) $(x, y, z) = (5, -3t, 7 + 4t)$

$\boxed{\therefore\ x = 5, \quad y = -3t, \quad z = 7 + 4t}$ paramétricas

c) $x = 5, \quad t = \frac{y}{-3}, \quad t = \frac{z-7}{4}$

$$\boxed{\therefore \; x = 5, \; \frac{y}{-3} = \frac{z-7}{4}}$$ forma simétrica

Si ahora tomamos a $P_0(5, -3, 11)$ y $P_1(5, 0, 7)$ otro conjunto de ecuaciones en forma simétrica de la misma recta será:

$$\boxed{x = 5, \quad \frac{y+3}{3} = \frac{z-11}{-4}}$$

Ejemplo II.7

Hallar las componentes de un vector $\overline{a}$ que es paralelo a la recta de ecuaciones:

$$x = 2 - 3t, \quad y = \frac{7}{3} + 2t, \quad z = 3t$$

Solución:

Las ecuaciones de la recta están dadas en forma paramétrica

$$x = x_o + ta, \quad y = y_o + tb, \quad z = z_o + tc$$

en donde a, b, c son las componentes de un vector paralelo a la recta.

Por lo tanto una solución del problema será:

$$a = -3, \qquad b = 2, \qquad c = 3$$

$$\boxed{\therefore \; \overline{a} = (-3, 2, 3)}$$

II.1.3 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea L una recta que contiene al punto P_o y es paralela a $\overline{u}$, y sea Q un punto fijo dado.

La distancia del punto Q a la recta L es igual a la longitud del segmento dirigido que es perpendicular a L y que tiene como punto inicial a Q y como punto final un punto sobre la recta L. Figura II.3.

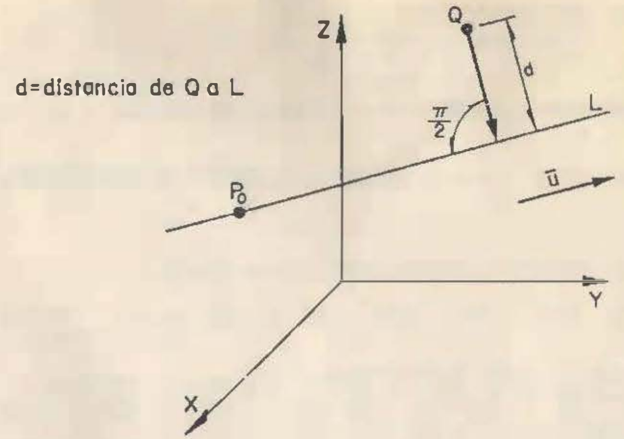


Figura II.3 Distancia de un punto a una recta

Para calcular el valor de la distancia d, lo podemos hacer por distintos procedimientos, por ejemplo considérese la figura II.4.

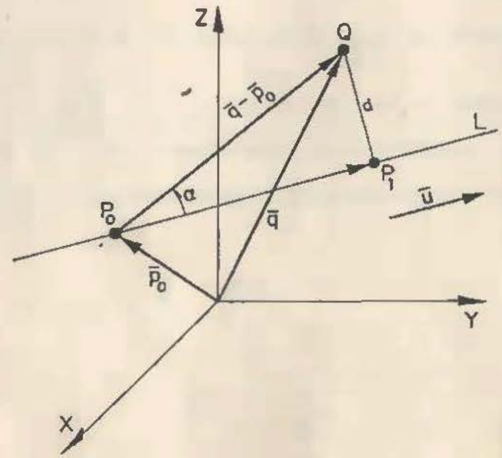


Figura II.4

En el triángulo rectángulo P_o, P_1, Q se tiene que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{d}{|\overline{q} - \overline{p}_o|}$$

en donde $\overline{q}$ y $\overline{p}_o$ son los vectores de posición de los puntos Q y P_o respectivamente.

Despejando a d tenemos $d = |\overline{q} - \overline{p}_o| \text{ sen } \alpha$

El ángulo α lo forman la recta y el segmento $\overline{P_oQ}$ y es el mismo que forma el vector $\overline{q} - \overline{p}_o$ con el vector $\overline{u}$. Como vimos en el tema I el ángulo entre dos vectores está dado por:

$$\alpha = \text{ang sen } \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_o) \times \overline{u}|}{|\overline{q} - \overline{p}_o|\ |\overline{u}|}$$

De donde:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_o) \times \overline{u}|}{|\overline{q} - \overline{p}_o|\ |\overline{u}|}$$

Sustituyendo en la expresión que obtuvimos para d:

$$d = |\overline{q} - \overline{p}_o|\ \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_o) \times \overline{u}|}{|\overline{q} - \overline{p}_o|\ |\overline{u}|}$$

La cual se reduce finalmente a:

$$\boxed{d = \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_o) \times \overline{u}|}{|\overline{u}|}}$$

Esta expresión nos permite calcular la distancia de un punto fijo Q a una recta que pasa por el punto P_o y es paralela a $\overline{u}$, aplicando el producto vectorial.

Otro procedimiento para calcular d, sería aplicando el teorema de Pitágoras por la solución del triángulo rectángulo P_o, P_1, Q de la figura II.4.

Esto es que:

$$|\overline{P_oQ}|^2 = |\overline{P_oP_1}|^2 + |\overline{QP_1}|^2$$

Pero el segmento $\overline{P_oQ}$ es la representación del vector $\overline{q} - \overline{p}_o$, el módulo de $\overline{QP_1}$ es la distancia que queremos calcular, y el segmento $|\overline{P_oP_1}|$ es la componente del segmento $\overline{P_oQ}$ sobre la recta L, que es equivalente a la componente escalar de $\overline{q} - \overline{p}_o$ sobre $\overline{u}$.

En el tema I vimos que esta componente la podemos calcular por:

$$\text{Com. Esc.}_{\overline{u}}\ (\overline{q} - \overline{p}_o) = \frac{(\overline{q} - \overline{p}_o) \cdot \overline{u}}{|\overline{u}|}$$

Por lo anterior para el triángulo P_o, P_1, Q tenemos:

$$|\overline{q} - \overline{p}_o|^2 = \left(\frac{(\overline{q} - \overline{p}_o) \cdot u}{|\overline{u}|}\right)^2 + (d)^2$$

De donde:

$$\boxed{d^2 = |\overline{q} - \overline{p}_o|^2 - \left(\frac{(\overline{q} - \overline{p}_o) \cdot \overline{u}}{|\overline{u}|}\right)^2}$$

Con esta expresión podemos calcular la distancia del punto Q a la recta L que contiene a P_o y es paralela a $\overline{u}$, aplicando el producto escalar.

Ejemplo II.8

Calcular la distancia que existe entre el punto Q(2, 1, -2) y la recta cuyas ecuaciones son:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{z - 2}{3}\ ; \quad y = 1$$

Solución:

Primer procedimiento:

De las ecuaciones de la recta obtenemos directamente un punto de ella $P_o(3, 1, 2)$ y un vector paralelo $\overline{u} = (2, 0, 3)$ por lo que la distancia d pedida está dada por:

$$d = \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_o) \times \overline{u}|}{|\overline{u}|}$$

En donde:

$$\overline{q} = (2, 1, -2), \quad \overline{p}_o = (3, 1, 2) \quad y \ \overline{u} = (2, 0, 3)$$

$$\overline{q} - \overline{p}_o = (-1, 0, -4)$$

$$(\overline{q}-\overline{p}_\circ)\times\overline{u}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 0 & -4\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-5j$$

$$|-5j|=5$$

$$|\overline{u}|=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$$

$$\boxed{\therefore\ d=\frac{5}{\sqrt{13}}}$$

Segundo procedimiento:

$$d^2=|\overline{q}-\overline{p}_\circ|^2-\left(\frac{(\overline{q}-\overline{p}_\circ)\cdot\overline{u}}{|\overline{u}|}\right)^2$$

$$|\overline{q}-\overline{p}_\circ|^2=(-1)^2+(0)^2+(-4)^2=17$$

$$(\overline{q}-\overline{p}_\circ)\cdot\overline{u}=(-1,0,-4)\cdot(2,0,3)=-2+0-12=$$
$$=-14$$

$$d^2=17-\left(\frac{-14}{\sqrt{13}}\right)^2=17-\frac{196}{13}=\frac{25}{13}$$

$$d=\sqrt{\frac{25}{13}}$$

$$\boxed{\therefore\ d=\frac{5}{\sqrt{13}}}$$

II.1.4 ANGULO ENTRE DOS RECTAS

Sea L_1 una recta que contiene al punto $P_{\circ 1}$ y es paralela a $\overline{u}_1$, y sea L_2 una recta que contiene al punto $P_{\circ 2}$ y es paralela a $\overline{u}_2$. Ver figura II.5.

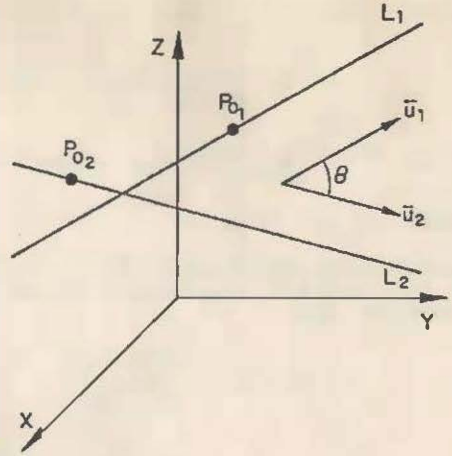


Figura II.5 Angulo entre dos rectas

DEFINICION. El ángulo θ que forman dos rectas L_1 y L_2 en el espacio de tres dimensiones, es el ángulo que forman sus respectivos vectores paralelos $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$

De acuerdo a la defininición anterior y a las vistas en el tema I sobre ángulo entre vectores, θ estará dado por las expresiones:

$$\theta=\text{ang cos}\ \frac{\overline{u}_1\cdot\overline{u}_2}{|\overline{u}_1|\,|\overline{u}_2|}$$

ó

$$\theta=\text{ang sen}\ \frac{|\overline{u}_1\times\overline{u}_2|}{|\overline{u}_1|\,|\overline{u}_2|}$$

Ejemplo II.9

Determinar el ángulo que forman las rectas L_1 y L_2, sabiendo que L_1 es paralela al vector

$$\overline{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,i-\frac{1}{\sqrt{3}}\,j+\frac{1}{\sqrt{3}}\,k$$

Y L_2 es paralela al vector $\bar{b} = \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$

Solución:

$$\theta = \text{ang cos } \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1; \qquad |\bar{b}| = \sqrt{\frac{1}{27} + \frac{25}{27} + \frac{1}{27}} = 1$$

$$\therefore\ \theta = \text{ang cos } \frac{-\frac{1}{3}}{1 \times 1} = \text{ang cos } \left(-\frac{1}{3}\right)$$

Por el producto vectorial

$$\theta = \text{ang sen } \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} i + \frac{2}{3} k$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ \theta = \text{ang sen } \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1 \times 1} = \text{ang sen } \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

De donde θ es el ángulo cuyo coseno vale $-\frac{1}{3}$ y cuyo seno vale $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\boxed{\therefore\ \theta = 109.47°}$$

II.1.5 PERPENDICULARIDAD, PARALELISMO Y COINCIDENCIA

Sean las rectas L_1 y L_2 paralelas a los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ respectivamente.

Perpendicularidad.- En el inciso anterior definimos el ángulo que forman dos rectas, como el ángulo entre sus vectores paralelos. Si decimos que dos rectas son perpendiculares nos estamos refiriendo al caso particular de que el ángulo que forman es de 90°, esto es que L_1 es perpendicular a L_2 si y sólo si el ángulo θ que forman $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es igual a 90°.

Esto nos lleva a que si en la expresión:

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1|\ |\bar{u}_2|}$$

consideramos a $\theta = 90°$, entonces $\cos\theta = 0$, de donde:

$$0 = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_1|\ |\bar{u}_2|}$$

$$\therefore\ \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$$

De aquí la siguiente condición:

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si y sólo si el producto escalar entre sus respectivos vectores paralelos es igual con cero.

$$\boxed{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0}$$

Paralelismo.- Si L_1 es paralela a $\bar{u}_1$ y L_2 es paralela a $\bar{u}_2$, y a su vez L_1 es paralela a L_2 entonces $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ son vectores paralelos, de donde el ángulo entre $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es igual a 0° ó 180°.

Si en la expresión:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|}{|\bar{u}_1|\ |\bar{u}_2|}$$

Consideramos que $\theta = 0°$ ó 180°, entonces $\text{sen}\,\theta = 0$ por lo que:

$$0 = \frac{|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2|}{|\bar{u}_1|\ |\bar{u}_2|}$$

$$|\bar{u}_1 \times \bar{u}_2| = 0$$

De donde:

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \bar{0}$$

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si el producto vectorial entre sus respectivos vectores paralelos es igual al vector cero.

$$\boxed{\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \overline{0}}$$

Si consideramos que $\overline{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\overline{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ entonces:

$$\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 0k$$

Una de las propiedades elementales de los determinantes es que si dos renglones o dos columnas de un determinante son iguales o proporcionales el determinante es nulo.

Debido a esto precisamente es por lo que el producto vectorial entre dos vectores paralelos da por resultado al vector nulo, ya que como vimos en el tema I dos vectores son paralelos si sus componentes respectivas son proporcionales. Esto lo expresamos como:

$$\overline{u}_1 \parallel \overline{u}_2 \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overline{u}_1 = \lambda\, \overline{u}_2$$

lo que nos da por resultado que:

$$a_1 = \lambda a_2,\ b_1 = \lambda b_2,\ c_1 = \lambda c_2$$

Aplicando esto a la condición de paralelismo entre rectas, podemos afirmar también que la recta L_1 es paralela a la recta L_2, si las componentes de sus respectivos vectores paralelos, son proporcionales.

Coincidencia.- Si para las rectas L_1 y L_2 se satisface la condición de paralelismo, y además un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de L_1, pertenece también a L_2, entonces las rectas son coincidentes. Figura II.6.

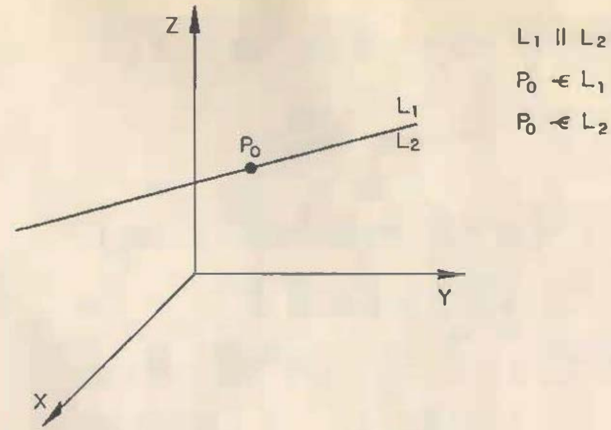


Figura II.6 Rectas coincidentes

Ejemplo II.10

Hallar la ecuación de la recta L que contiene al origen y es perpendicular a las rectas L_1 y L_2, en donde L_1 es paralela a $\overline{u}_1 = (4, 2, 1)$ y L_2 tiene la ecuación:

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Solución:

Si la recta buscada es perpendicular a L_1 y L_2, entonces será paralela a un vector perpendicular a ambas rectas.

$$L \parallel \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2+2)i - (4+3)j + (-8+6)k = 4i - 7j - 2k = \overline{u}_3$$

$\therefore$ L es paralela a $\overline{u}_3 = (4, -7, -2)$

Si además contiene a $O(0, 0, 0)$ entonces su ecuación vectorial es:

$$\overline{p} = (0, 0, 0) + t(4, -7, -2)$$

$$\boxed{\bar{p} = (4t, -7t, -2t)}$$

Ecuación vectorial de la recta que contiene al origen y es perpendicular a L_1 y L_2

Comprobación:

Si L es perpendicular a L_1 y L_2, entonces $\bar{u}_3$ debe ser perpendicular a $\bar{u}_1$ y a $\bar{u}_2$.

$$\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_1 = \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_2 = 0$$

$$(4, -7, -2) \cdot (4, 2, 1) = 16 - 14 - 2 = 0$$

$$(4, -7, -2) \cdot (-3, -2, 1) = -12 + 14 - 2 = 0$$

Ejemplo II.11

Demostrar que las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

$$L_1: \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{8-z}{-4}$$

$$L_2: \quad \frac{x}{-7.5} = \frac{y+1}{-10} = \frac{z+2}{10}$$

Solución:

Si son paralelas, sus respectivos vectores paralelos, deberán ser también paralelos y se cumplirá que:

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \bar{0}$$

$$\bar{u}_1 = (3, 4, -4) \qquad \bar{u}_2 = (-7.5, -10, 10)$$

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -4 \\ -7.5 & -10 & 10 \end{vmatrix} = (40 - 40)i - (30 - 30)j + (-30 + 30)k = 0i - 0j + 0k = \bar{0}$$

$$\boxed{\therefore \; L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas}}$$

Ejemplo II.12

Demostrar que L_1 y L_2 son coincidentes.

$$L_1: \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-8}{-4}$$

$$L_2: \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y+6}{-\frac{4}{3}} = \frac{z-12}{\frac{4}{3}}$$

Solución:

Primero se deberá cumplir la condición de paralelismo.

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \bar{0}, \qquad \bar{u}_1 = (3, 4, -4), \qquad \bar{u}_2 = -1, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$$

$$\therefore \; \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right)i - (4 - 4)j + (-4 + 4)k = 0i + 0j + 0k = \bar{0}$$

De donde se comprueba que L_1 y L_2 cumplen con la condición de paralelismo.

Segundo. Un punto cualquiera de una de las rectas deberá pertenecer a la otra recta. Esto es equivalente a que un punto de una de las rectas satisfaga las ecuaciones de la otra recta.

Un punto de L_1 es $P(2, -2, 8)$

Este punto P debe satisfacer las ecuaciones de L_2

$$\frac{2+1}{-1} = \frac{-2+6}{-\frac{4}{3}} = \frac{8-12}{\frac{4}{3}}$$

$$-3 = -3 = -3$$

La ecuación se satisface:

$$\boxed{\therefore \; L_1 \text{ y } L_2 \text{ son coincidentes}}$$

II.1.6 DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Sea L_1 una recta que contiene al punto P_{o1} y es paralela al vector $\bar{u}_1$, y sea L_2 una recta que contiene a P_{o2} y es paralela a $\bar{u}_2$. Ver figura II.7.

DEFINICION. La distancia entre dos rectas en el espacio de tres dimensiones, es la mínima longitud que existe entre ambas, medida sobre una perpendicular común.

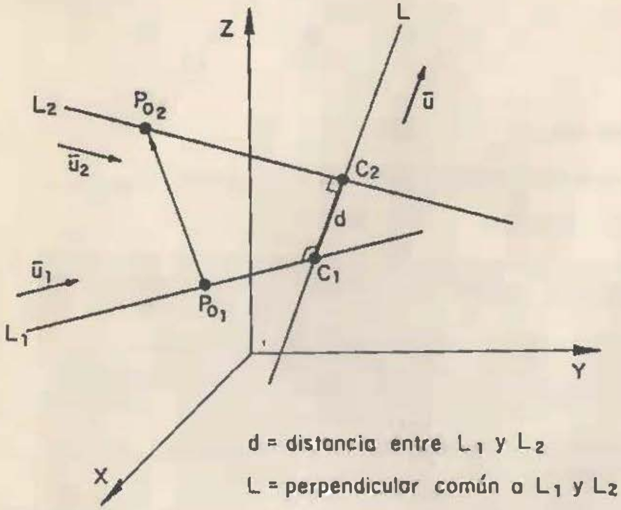


Figura II.7 Distancia entre dos rectas

Si L es perpendicular a L_1 y L_2, entonces un vector paralelo a L, que en la figura aparece como $\overline{u}$, es también perpendicular a $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$, de donde:

$$\overline{u} = \overline{u}_1 \times \overline{u}_2$$

Considérese el segmento dirigido $\overline{P_{o1}P_{o2}}$ que une los puntos conocidos de L_1 y L_2 respectivamente.

El segmento $\overline{P_{o1}P_{o2}}$ lo trasladamos paralelamente, de tal forma que su punto inicial coincida con el punto C_1 (intersección de L con L_1). Ver figura II.8.

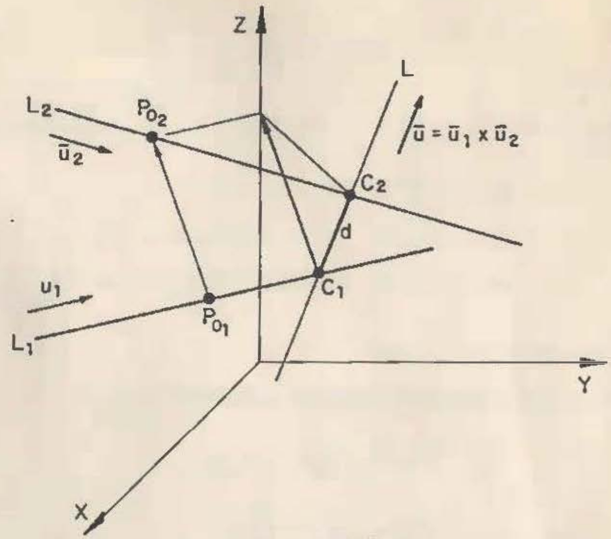


Figura II.8

Entonces resulta que la distancia d es igual al valor absoluto de la componente escalar del segmento $\overline{P_{o1}P_{o2}}$ sobre la recta L, lo que es equivalente a:

$$d = \left|\text{Comp. Esc.}_{\overline{u}}\ \overline{P_{o1}P_{o2}}\right| =$$

$$= \left|\text{Comp. Esc.}_{\overline{u}_1 \times \overline{u}_2}\ \overline{P_{o1}P_{o2}}\right|$$

De donde:

$$\boxed{d = \frac{\left|\overline{P_{o1}P_{o2}} \cdot (\overline{u}_1 \times \overline{u}_2)\right|}{\left|\overline{u}_1 \times \overline{u}_2\right|}}$$

Esta expresión nos permite calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan o se intersectan; en este último caso la distancia es cero.

Si las rectas son paralelas, la expresión no tiene solución, ya que el producto vectorial $\overline{u}_1 \times \overline{u}_2$ es igual con cero. En este caso la distancia entre las rectas es igual a la distancia de una de ellas a un punto cualquiera de la otra.

Ejemplo II.13

Calcular la distancia entre la recta L_1 cuyas ecuaciones son:

$$\frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{3} \quad \text{y } L_2 \text{ de ecuaciones } x = -8 + t,$$

$$y = -3 - 2t, \qquad z = 8 + 3t$$

Solución:

Un punto de L_1 es $P_{o1}(1, -1, 0)$ y un vector paralelo es $\overline{u}_1 = (2,1,3)$

Un punto de L_2 es $P_{o2}(-8, -3, 8)$ y un vector paralelo es $\overline{u}_2 = (1,-2,3)$

$$\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (3+6)i - (6-3)j + (-4-1)k = \\ \\ = 9i - 3j - 5k \end{matrix}$$

$\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \neq \overline{0}$ por lo tanto las rectas no son paralelas.

$\overline{P_{o1}P_{o2}} = (-8, -3, 8) - (1, -1, 0) = (-9, -2, 8)$

$$d = \frac{|\overline{P_{o1}P_{o2}} \cdot (\overline{u}_1 \times \overline{u}_2)|}{|\overline{u}_1 \times \overline{u}_2|} = \frac{|(-9, -2, 8) \cdot (9, -3, -5)|}{\sqrt{(9)^2 + (-3)^2 + (-5)^2}}$$

$$= \frac{|-81 + 6 - 40|}{\sqrt{81 + 9 + 25}} = \frac{115}{\sqrt{115}} = \sqrt{115}$$

$$\boxed{\therefore \ d = \sqrt{115} \ \text{u}}$$

Ejemplo II.14

Determinar la distancia que hay entre la recta L_1 que contiene al punto $P_{o1}(2, -1, 2)$ y es paralela al vector $\overline{u}_1 = (1, -2, 1)$ y la recta L_2 cuyas ecuaciones son:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-3}{2}$$

Solución:

De L_1 tenemos que $P_{o1}(2, -1, 2)$ y $\overline{u}_1 = (1, -2, 1)$

De L_2 obtenemos $P_{o2}(3, -9, 3)$ y $\overline{u}_2 = (2, 2, 2)$

$$\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = (-4-2)i - (2-2)j + (2+4)k \\ = -6i + 6k \end{matrix}$$

$\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \neq \overline{0}$ por lo tanto L_1 y L_2 no son paralelas.

$\overline{P_{o1}P_{o2}} = (3, -9, 3) - (2, -1, 2) = (1, -8, 1)$

$$d = \frac{|(1, -8, 1) \cdot (-6, 0, 6)|}{\sqrt{(-6)^2 + (6)^2}} = \frac{-6 + 6}{\sqrt{72}} = 0$$

$$\boxed{\text{Si } d = 0 \text{ las rectas } L_1 \text{ y } L_2 \text{ se intersectan}}$$

Ejemplo II.15

Determinar la distancia que hay entre las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$$

$$\frac{x+2}{-6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-9}$$

Solución:

De L_1, $P_{o1}(0, 1, -3)$, $\overline{u}_1 = (2, 1, 3)$

De L_2, $P_{o2}(-2, -1, 0)$, $\overline{u}_2 = (-6, -3, -9)$

Las componentes de $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ son proporcionales ya que $\overline{u}_2 = -3\,(\overline{u}_1)$.

Por lo que se concluye que $\overline{u}_1$ es paralelo a $\overline{u}_2$ y en este caso la expresión para calcular la distancia no tendría solución.

Pero en este caso podemos determinar la distancia entre las rectas como la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra recta.

Tomemos $P_{o1}(0, 1, -3)$ y calculemos la distancia a L_2. Esta distancia está dada por:

$$d = \frac{|(\overline{P}_{o1} - \overline{P}_{o2}) \times \overline{u}_2|}{|\overline{u}_2|}$$

$$P_{o1} - P_{o2} = (0,\ 1,\ -3) - (-2,\ -1,\ 0) = (2,\ 2,\ -3)$$

$$(\overline{P}_{o1} - \overline{P}_{o2}) \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -3 \\ -6 & -3 & -9 \end{vmatrix} = (-18-9)i - (-18-18)j + (-6+12)k$$

$$= -\ 27i - 36j + 6k$$

$$|(\overline{P}_{o1} - \overline{P}_{o2}) \times \overline{u}_2| = \sqrt{(-27)^2 + (-36)^2 + (6)^2} = \sqrt{2061}$$

$$|\overline{u}_2| = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{126}$$

$$d = \frac{\sqrt{2061}}{\sqrt{126}} \qquad d = \sqrt{\frac{229}{14}}$$

$$\boxed{\therefore\ \ d \doteq 4.04\ u}$$

NOTA: En este caso si la distancia fuera igual a cero, los dos rectas serían coincidentes.

I.1.7 INTERSECCION ENTRE DOS RECTAS

En el ejemplo II.14, al calcular la distancia entre dos rectas dadas, llegamos al cálculo de una distancia igual a cero, y dado que las rectas no son paralelas, concluimos que se intersectan, es decir que tienen un punto común.

En el caso de que sean paralelas y la distancia entre ellas sea igual a cero, entonces todos sus puntos son comunes, es decir las rectas son coincidentes.

Ahora bien cuando sabemos que dos rectas se intersectan, podemos determinar el punto de intersección. No existe una expresión general para hallar este punto, sin embargo a continuación se describe un método para determinarlo.

Sean las rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + t_1\, a_1 \\ y = y_1 + t_1\, b_1 \\ z = z_1 + t_1\, c_1 \end{cases} \quad ; \qquad L_2: \begin{cases} x = x_2 + t_2\, a_2 \\ y = y_2 + t_2\, b_2 \\ z = z_2 + t_2\, c_2 \end{cases}$$

Si el punto $P(x,\ y,\ z)$ es el punto de intersección, entonces sus coordenadas deben satisfacer simultáneamente a las ecuaciones de las rectas; en tal caso podemos hacer la siguiente igualación:

$$x_1 + t_1\, a_1 = x_2 + t_2\, a_2$$

$$y_1 + t_1\, b_1 = y_2 + t_2 \cdot b_2$$

$$z_1 + t_1\, c_1 = z_2 + t_2\, c_2$$

Siendo datos $x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,\ a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2$, entonces las incógnitas son los parámetros t_1 y t_2. Esto implica que tenemos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, el cual tiene solución única o no tiene solución.

Si resolvemos para dos de las ecuaciones y los valores de t_1 y t_2 satisfacen la tercera ecuación, entonces esos valores de t_1 y t_2 son la solución al sistema. Si no se satisface la tercera ecuación entonces el sistema no tiene solución y en consecuencia las rectas no se intersectan.

Si existe la solución, entonces al sustituir el valor de t_1 en las ecuaciones de L_1 o el de t_2 en las ecuaciones de L_2, obtendremos los valores de $x,\ y,\ z$ correspondientes a las coordenadas del punto de intersección.

Ejemplo II.16

Obtener el punto de intersección de las rectas del ejemplo II.14

Solución:

L_1: contiene a $P_{o1}(2,\ -1,\ 2)$ y es paralela a $\overline{u}_1 = (1,\ -2,\ 1)$

$$L_2:\ \frac{x-3}{2} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-3}{2}$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$L_1:\ (x,\ y,\ z) = (2,\ -1,\ 2) + t_1(1,\ -2,\ 1)$$

$$= (2 + t_1,\ -1 - 2t_1,\ 2 + t_1)$$

$x = 2 + t_1,\qquad y = -1 - 2t_1,\qquad z = 2 + t_1$

$L_2:\ \frac{x-3}{2} = t_2,\qquad \frac{y+9}{2} = t_2,\qquad \frac{z-3}{2} = t_2$

$x = 3 + 2t_2,\qquad y = -9 + 2t_2,\qquad z = 3 + 2t_2$

Igualando:

$$2 + t_1 = 3 + 2t_2$$
$$-1 - 2t_1 = -9 + 2t_2$$
$$2 + t_1 = 3 + 2t_2$$

Tomemos la segunda y tercera ecuación:

$$-1 - 2t_1 + 9 - 2t_2 = 0$$
$$2 + t_1 - 3 - 2t_2 = 0$$

Haciendo operaciones y multiplicando la segunda por (-1)

$$-2t_1 - 2t_2 + 8 = 0$$
$$-t_1 + 2t_2 + 1 = 0$$

Sumando:

$$-3t_1 + 9 = 0;\qquad \boxed{t_1 = 3}$$

Sustituyendo $t_1 = 3$ en la tercera:

$$-3 + 2t_2 + 1 = 0\qquad \boxed{t_2 = 1}$$

Los valores de $t_1 = 3$ y $t_2 = 1$ deben satisfacer la primera ecuación:

$$2 + (3) = 3 + 2\,(1)$$
$$5 \equiv 5$$

Sí se satisface, por lo que el sistema tiene solución. Para obtener las coordenadas del punto de intersección sustituimos t_1 o t_2 en las ecuaciones de L_1 y L_2 respectivamente.

Tomemos $t_1 = 3$

Si $x = 2 + t_1,\qquad y = -1 - 2t_1,\qquad z = 2 + t_1$

Entonces:

$x = 2 + 3,\qquad y = -1 - 6,\qquad z = 2 + 3$

Por lo tanto el punto de intersección es:

$$\boxed{P(5,\ -7,\ 5)}$$

Comprobación:

Tomemos: $t_2 = 1$ en las ecuaciones de L_2:

$x = 3 + 2t_2,\qquad y = -9 + 2t_2,\qquad z = 3 + 2t_2$

$x = 3 + 2,\qquad y = -9 + 2,\qquad z = 3 + 2$

De donde:

$x = 5,\qquad y = -7,\qquad z = 5$

$$\boxed{\therefore\ P(5,\ -7,\ 5)}$$

II.1.8 FAMILIAS DE RECTAS

En los incisos anteriores hemos visto que una recta queda definida si se conocen su dirección y un punto de ella. Incluso si conocemos dos puntos de la recta, ambos puntos nos determinan su dirección, e independientemente cualquiera de los dos lo utilizamos como *punto conocido* de la recta.

Ahora bien, si partimos de una sola de las dos condiciones que nos definen a una recta, entonces lo que definimos es un conjunto de rectas que cumplen con esa condición. Por ejemplo si tenemos el siguiente enunciado *sea la recta* L *que contiene al punto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$; dado que no estamos estableciendo la dirección, entonces nuestro enunciado no se refiere a una sola recta, sino a un conjunto infinito de rectas que cumplen con la condición dada. Figura II.9.

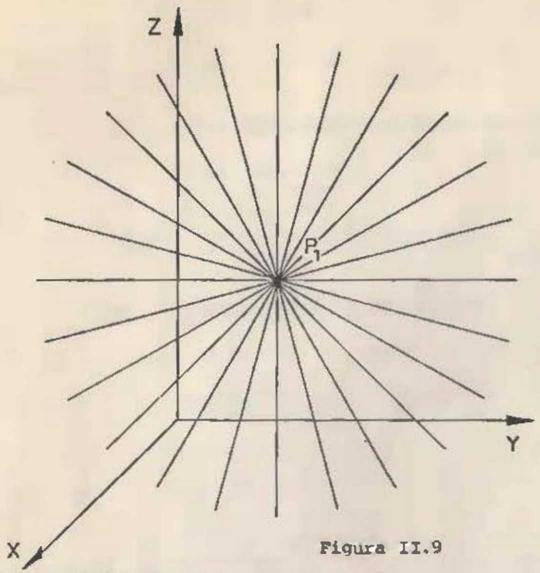


Figura II.9

Conforme a lo anterior formulamos la siguiente:

> **DEFINICION.** Se llama familia de rectas, al conjunto formado por todas las rectas que satisfacen una sola condición geométrica, de tal forma que al establecer otra condición se definirá una y sólo una de las rectas que pertenecen a la familia.

Según esto, el enunciado de nuestro ejemplo debe decir *sea L la familia de rectas que contiene al punto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Esta familia la podemos expresar con notación de conjuntos como:

$$L = \{\text{rectas que pasan por } P_0(x_0, y_0, z_0)\}$$

Analíticamente también tenemos expresiones que nos la definen. Por ejemplo las ecuaciones en forma simétrica de una recta son de la forma:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Si en estas ecuaciones sustituimos las coordenadas de P_1 entonces queda:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

que son las ecuaciones en forma simétrica de la familia de rectas que contienen a $P_1(x_1, y_1, z_1)$; en donde como a, b y c no están definidos, quedan como parámetros de la familia de rectas.

Ejemplo II.17

Determinar las ecuaciones de la familia de rectas que contienen al punto $P_1(1, -3, 2)$

Solución:

En forma simétrica $\boxed{\dfrac{x - 1}{a} = \dfrac{y + 3}{b} = \dfrac{z - 2}{c}}$

Ejemplo II.18

Hallar las ecuaciones de la familia de rectas que son paralelas al vector $\bar{u} = (3, 2, -1)$.

Solución:

En forma simétrica $\boxed{\dfrac{x - x_0}{3} = \dfrac{y - y_0}{2} = \dfrac{z - z_0}{-1}}$

Ejemplo II.19

Determinar las ecuaciones de la familia de rectas que contienen al origen.

Solución:

En forma simétrica $\boxed{\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}}$

Ejemplo II.20

¿Cuáles son las ecuaciones de la familia de rectas que son paralelas al eje X?

Solución:

Paramétricas $\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned}}$

II.2 EL PLANO

II.2.1 ECUACION VECTORIAL DEL PLANO Y ECUACIONES PARAMETRICAS

En el subtema II.1 definimos a la recta en el espacio, como el conjunto de puntos P para los cuales, el vector de posición $\bar{p}$ de cualquiera de ellos puede expresarse, como la suma del vector de posición $\overline{p}_\circ$ de un punto dado más un vector paralelo a un vector dado $\overline{u}$; lo cual expresamos analíticamente como $\overline{p} = \overline{p}_\circ + t\overline{u}$.

En forma análoga definiremos el plano, pero con la diferencia de que al vector $\overline{p}_\circ$ le sumamos dos vectores paralelos a dos vectores dados $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ respectivamente.

Partiremos de las siguientes condiciones:

Sea $P_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ un punto en el espacio y sean $\overline{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\overline{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ dos vectores *no paralelos*.

DEFINICION.	Un plano es el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ tales que el vector de posición de cualquiera de ellos se puede expresar como la suma del vector de posición $\overline{p}_\circ$ del punto $P_\circ$ más dos vectores paralelos a los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ respectivamente.

Lo anterior queda expresado por la siguiente ecuación vectorial:

$$\overline{p} = \overline{p}_\circ + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2; \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Si $r = s = 0$ entonces la ecuación se reduce a $\overline{p} = \overline{p}_\circ$, lo cual nos indica que el punto $P_\circ$ pertenece al plano.

La interpretación geométrica de la definición de plano aparece en la siguiente figura II.10.

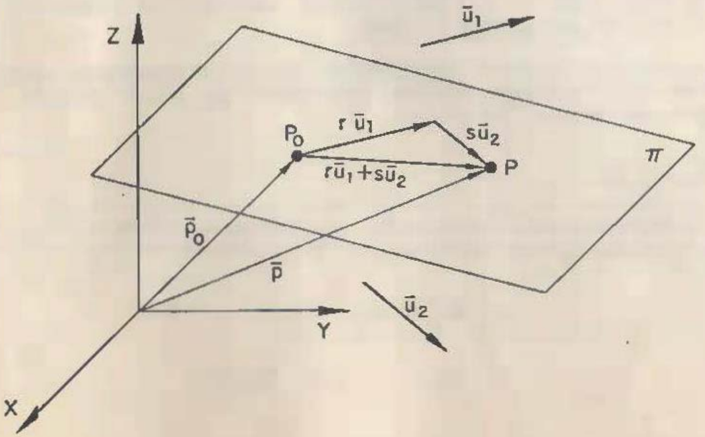


Figura II.10

Ya que el plano contiene a $P_\circ$, y todos sus puntos se pueden definir a partir de las direcciones de $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$, a la ecuación:

$$\boxed{\overline{p} = \overline{p}_\circ + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Se le llama ecuación vectorial del plano que contiene al punto $P_\circ$ y que es generado por los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$

Ejemplo II.21

Determinar la ecuación del plano π que contiene al punto $P_\circ(1,2,-1)$ y que se genera por $\overline{u}_1 = (0, 2, -2)$ y $\overline{u}_2 = (1, 1, 2)$

Solución:

$$\overline{p} = (1, 2, -1) + r(0, 2, -2) + s(1, 1, 2)$$

$$= (1, 2, -1) + (0, 2r, -2r) + (s, s, 2s)$$

$$= (1 + s, 2 + 2r + s, -1 -2r + 2s)$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{p} = (1 + s, 2 + 2r + s, -1 -2r + 2s)}$$

Ecuación vectorial del plano π

Si en la ecuación vectorial del plano $\overline{p} = \overline{p}_\circ + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2$ sustituimos los vectores por sus respectivas componentes tenemos:

$$(x, y, z) = (x_\circ, y_\circ, z_\circ) + r(a_1, b_1, c_1) + s(a_2, b_2, c_2) =$$

$$= (x_\circ, y_\circ, z_\circ) + (ra_1, rb_1, rc_1) + (sa_2, sb_2, sc_2) =$$

$$= (x_\circ + ra_1 + sa_2, y_\circ + rb_1 + sb_2, z_\circ + rc_1 + sc_2)$$

$$(x, y, z) = (x_\circ + ra_1 + sa_2, y_\circ + rb_1 + sb_2, z_\circ + rc_1 + sc_2)$$

Por igualdad de vectores tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_\circ + ra_1 + sa_2 \\ y &= y_\circ + rb_1 + sb_2 \\ z &= z_\circ + rc_1 + sc_2 \end{aligned}} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano que contiene al punto $P_\circ$ y que se genera por $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$

Ejemplo II.22

Hallar las ecuaciones paramétricas del plano π definido en el ejemplo II.21.

Si

Solución:

La ecuación vectorial es:

$$\overline{p} = (1 + s,\ 2 + 2r + s,\ -1 -2r + 2s)$$

De donde:

$$(x,\ y,\ z) = (1 + s,\ 2 + 2r + s,\ -1 -2r + 2s)$$

Por la condición de igualdad de vectores tenemos:

$$\pi: \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 2 + 2r + s \\ z = -1 -2r + 2s \end{array}} \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Ejemplo II.23

Verificar si el punto $P_1(3,\ 6,\ 1)$ pertenece al plano π cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\pi: \begin{array}{l} x = 1 + s \\ y = 2 + 2r + s \\ z = -1 -2r + 2s \end{array}$$

Solución:

Si el punto P_1 pertenece al plano, entonces sus coordenadas deberán satisfacer las ecuaciones de π:

$$3 = 1 + s$$

$$6 = 2 + 2r + s \qquad 2 = 2r$$

$$1 = -1 -2r + 2s \qquad 1 = r$$

De la primera ecuación tenemos que $s = 2$, sustituyendo en la segunda nos queda $r = 1$ y sustituyendo ambos valores en la tercera:

$$1 = -1 -2(1) + 2(2)$$

$$1 = -1 -2 + 4$$

$$\therefore\ 1 \equiv 1$$

Las coordenadas del punto satisfacen las ecuaciones del plano, por lo que concluimos:

$$\boxed{P_1(3,\ 6,\ 1) \text{ pertenece al plano } \pi}$$

Plano definido por dos rectas que se intersectan. Cuando en la ecuación vectorial del plano $\overline{p} = \overline{p}_o + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2$, s toma el valor cero entonces la ecuación se reduce a $\overline{p} = \overline{p}_o + r\overline{u}_1$ que es la ecuación de una recta que contiene a P_o, es paralela a $\overline{u}_1$ y está contenida en el plano. Si ahora r es el que se anula, entonces nos queda $\overline{p} = \overline{p}_o + s\overline{u}_2$ que es la ecuación de una recta que contiene a P_o, es paralela a $\overline{u}_2$ y también está contenida en el plano. Figura II.11.

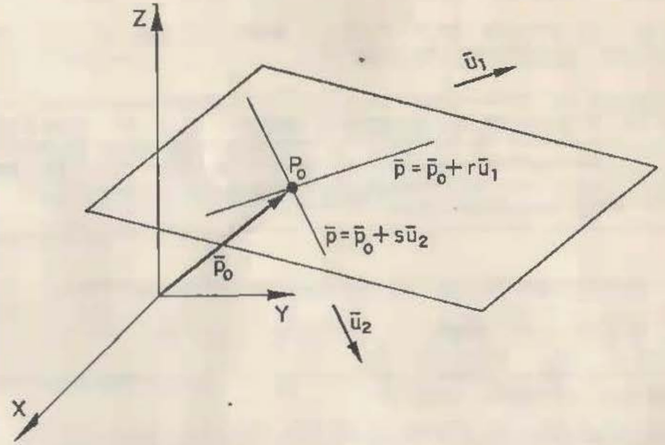


Figura II.11

En este caso se han definido dos rectas que están contenidas en el plano, que se intersectan en P_o y cuyos vectores paralelos son respectivamente los vectores que generan al plano.

Contrariamente dos rectas no coincidentes, que se intersectan en un punto, definen a un plano cuyos vectores generadores son respectivamente los vectores paralelos a las rectas.

Ejemplo II.24

Determinar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de un plano π definido por las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1: \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{2} = z - 1$$

$$L_2: \frac{x - 2}{2} = -y = \frac{z - 1}{4}$$

Solución:

De la ecuación de L_1 tenemos que $P_{o1}(2,\ 0,\ 1)$ y $\overline{u}_1 = (3,\ 2,\ 1)$

De la ecuación de L_2 $P_{o2}(2, 0, 1)$ y $\overline{u}_2 = (2, -1, 4)$

Por lo que las rectas se intersectan en $P_o(2, 0, 1)$ que es un punto también del plano π.

Los vectores $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ son dos vectores que nos generan a π, por lo que la ecuación vectorial del plano es:

$$\overline{p} = (2, 0, 1) + r(3, 2, 1) + s(2, -1, 4) =$$

$$= (2, 0, 1) + (3r, 2r, r) + (2s, -s, 4s) =$$

$$= (2 + 3r + 2s, 2r - s, 1 + r + 4s)$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{p} = (2 + 3r + 2s, 2r - s, 1 + r + 4s)}$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 + 3r + 2s \\ y &= 2r - s \\ z &= 1 + r + 4s \end{aligned}}$$

Plano definido por tres puntos no colineales. Sean tres puntos $P_o(x_o, y_o, z_o)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ que no pertenecen a una misma recta (no colineales).

> **Teorema:** Si P_o, P_1 y P_2 son tres puntos no colineales, existe un plano π y sólo uno que contiene a los tres puntos.

DEMOSTRACION

Supóngase que uno de los tres puntos es el origen, por ejemplo P_o, entonces los vectores de posición $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2$ quedan como vectores generadores de un plano π_1 que contiene al origen y que contiene a los puntos P_1 y P_2. Figura II.12.

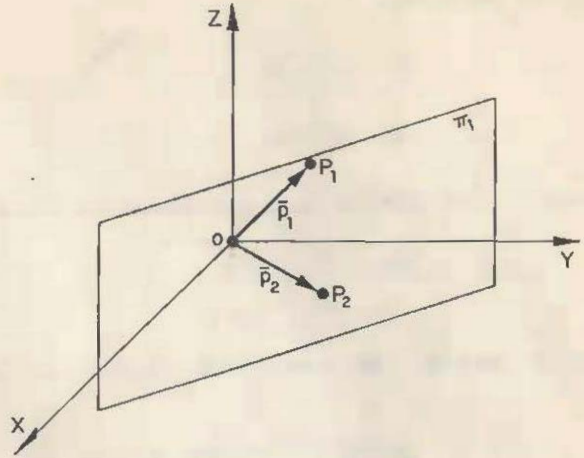


Figura II.12

La ecuación vectorial de este plano es:

$$\pi_1: \quad \overline{p} = r\overline{p}_1 + s\overline{p}_2 \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Supóngase ahora que tenemos otro plano π_2 que contiene al origen y que contiene a P_1 y P_2. Su ecuación será de la forma:

$$\pi_2: \quad \overline{p}1 = r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2 \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

Si este plano contiene a P_1 y P_2 entonces por definición:

$$\overline{p}_1 = a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2$$

$$\overline{p}_2 = c\overline{u}_1 + d\overline{u}_2 \qquad \overline{u}_1 \text{ no paralelo a } \overline{u}_2$$

en donde a, b, c, d son ciertos escalares.

De aquí que la ecuación vectorial de π_1 se puede expresar:

$$\overline{p} = r(a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2) + s(c\overline{u}_1 + d\overline{u}_2)$$

que reagrupando nos queda:

$$\pi_1: \ \overline{p} = (ra + sc)\overline{u}_1 + (rb + sd)\overline{u}_2$$

Lo que nos indica que cualquier punto de π_1 se puede definir a partir de los vectores generadores de π_2, por lo que concluimos que el plano π_1 está contenido en el plano π_2.

Ahora si en las expresiones:

$$\overline{p}_1 = a\overline{u}_1 + b\overline{u}_2$$

$$\overline{p}_2 = c\overline{u}_1 + d\overline{u}_2$$

Multiplicando la primera ecuación por d y la segunda por b tenemos:

$$d\overline{p}_1 = ad\overline{u}_1 + bd\overline{u}_2$$

$$b\overline{p}_2 = bc\overline{u}_1 + bd\overline{u}_2$$

Restándolas nos queda $d\overline{p}_1 - b\overline{p}_2 = ad\overline{u}_1 - bc\overline{u}_1$

De donde:

$$\frac{d}{ad - bc}\,\overline{p}_1 - \frac{b}{ad - bc}\,\overline{p}_2 = \overline{u}_1$$

En forma similar obtenemos:

$$\frac{c}{bc - ad}\,\overline{p}_1 - \frac{a}{bc - ad}\,\overline{p}_2 = \overline{u}_2$$

Esto implica que la ecuación vectorial de π_2 se puede expresar:

$$\pi_2 : \overline{p}' = \left(\frac{rd}{ad - bc} + \frac{sc}{bc - ad}\right)\overline{p}_1 + \left(-\frac{rb}{ad - bc} - \frac{sa}{bc - ad}\right)\overline{p}_2$$

Lo que implica que cualquier punto de π_2 se puede definir a partir de los vectores generadores de π_1, por lo que concluimos que π_2 está contenido en el plano π_1

Finalmente $\pi_1 \subset \pi_2$ y $\pi_2 \subset \pi_1 \iff \pi_1 = \pi_2$

Con lo que se completa la demostración.

Para obtener la ecuación vectorial de un plano definido por tres puntos, los vectores generadores se pueden determinar restando los respectivos vectores de posición de los tres puntos, por ejemplo:

$$\overline{u}_1 = \overline{p}_1 - \overline{p}_\circ ; \qquad \overline{u}_2 = \overline{p}_2 - \overline{p}_\circ$$

con los cuales la ecuación vectorial del plano queda:

$$\boxed{\overline{p} = \overline{p}_\circ + r(\overline{p}_1 - \overline{p}_\circ) + s(\overline{p}_2 - \overline{p}_\circ)}$$

Ejemplo II.25

Determinar la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del plano definido por los puntos

$$P_\circ(1, 0, 2), \quad P_1(1, 2, 0) \text{ y } P_2(-1, -2, -3)$$

Solución:

$$\overline{p} = (1, 0, 2) + r[(1, 2, 0)-(1, 0, 2)] + s[(-1, -2, -3)-(1, 0, 2)] =$$

$$= (1, 0, 2) + r(0, 2, -2) + s(-2, -2, -5) =$$

$$= (1 - 2s, 2r - 2s, 2 - 2r - 5s)$$

$$\boxed{\overline{p} = (1 - 2s, 2r - 2s, 2 - 2r - 5s)} \quad \textbf{Ecuación vectorial}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 - 2s \\ y &= 2r - 2s \\ z &= 2 - 2r - 5s \end{aligned}} \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

II.2.2 VECTOR NORMAL Y ECUACION NORMAL DEL PLANO

DEFINICION.	Sea $\overline{p} = \overline{p}_\circ + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2$ un plano π que contiene al punto $P_\circ$ y es generado por $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$. Un vector $\overline{N}$ que es ortogonal simultáneamente a $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ es también ortogonal al plano π; a este vector $\overline{N}$ lo llamamos vector normal al plano π. Figura II.13

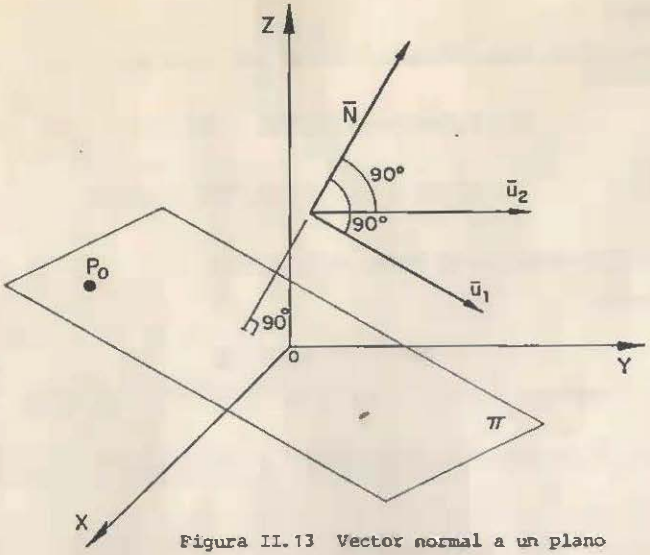


Figura II.13 Vector normal a un plano

Recuérdese que en el tema I se vio que el producto vectorial entre dos vectores, da por resultado un vector ortogonal a los vectores que se están operando. La aplicación de esto nos lleva a que podamos obtener un vector $\overline{N}$ normal al plano π como:

$$\overline{N} = \overline{u}_1 \times \overline{u}_2$$

Por definición $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ son vectores no paralelos, lo que nos garantiza que $\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \neq \overline{0}$

Con base en lo anterior se enuncia el siguiente:

> TEOREMA. Dado un plano π que contiene al punto P_o, es generado por los vectores no paralelos $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$, y cuya ecuación vectorial es $\overline{p} = \overline{p}_o + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2$. Sea $\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \overline{N}$, entonces: El plano π es el conjunto de todos los puntos P tales que sus respectivos vectores de posición satisfacen la ecuación:
>
> $$(\overline{p} - \overline{p}_o) \cdot \overline{N} = 0$$

Demostración:

$$\overline{u}_1 = (a_1, b_1, c_1), \; \overline{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\overline{N} = \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = [(b_1c_2 - b_2c_1), (a_2c_1 - a_1c_2), (a_1b_2 - a_2b_1)]$$

De la ecuación vectorial del plano tenemos:

$$\overline{p} = \overline{p}_o + r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2$$

De donde:

$$\overline{p} - \overline{p}_o = r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2 = (ra_1 + sa_2, rb_1 + sb_2, rc_1 + sc_2)$$

$$(\overline{p} - \overline{p}_o) \cdot \overline{N} = (r\overline{u}_1 + s\overline{u}_2) \cdot (\overline{u}_1 \times \overline{u}_2) =$$

$$= ra_1b_1c_2 - ra_1b_2c_1 + sa_2b_1c_2 - sa_2b_2c_1 +$$

$$+ ra_2b_1c_1 - ra_1b_1c_2 + sa_2b_2c_1 - sa_1b_2c_2 +$$

$$+ ra_1b_2c_1 - ra_2b_1c_1 + sa_1b_2c_2 - sa_2b_1c_2 = 0$$

A la ecuación:

$$\boxed{(\overline{p} - \overline{p}_o) \cdot \overline{N} = 0}$$

se le llama ecuación normal del plano que contiene al punto P_o y cuyo vector normal es $\overline{N}$.

Si el plano está definido por dos rectas L_1 y L_2 cuyos vectores paralelos son respectivamente $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ y que se intersectan en el punto P_o, la ecuación normal del plano estará dada por:

$$\boxed{(\overline{p} - \overline{p}_o) \cdot (\overline{u}_1 \times \overline{u}_2) = 0}$$

Finalmente si el plano está definido por tres puntos P_o, P_1, P_2 no colineales, la ecuación normal del plano la obtenemos como:

$$\boxed{(\overline{p} - \overline{p}_o) \cdot ((\overline{p}_1 - \overline{p}_o) \times (\overline{p}_2 - \overline{p}_o)) = 0}$$

II.2.3 ECUACION CARTESIANA DEL PLANO

Sea un plano π que contiene al punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y cuyo vector normal es $\overline{N} = (A, B, C)$.

La ecuación normal del plano π es de la forma:

$$(\overline{p} - \overline{p}_o) \cdot \overline{N} = 0$$

en donde $\overline{p}$ es el vector de posición de un punto cualquiera $P(x, y, z)$ que pertenece al plano π.

Por las propiedades del producto escalar, la ecuación normal la podemos expresar: $(\bar{p} - \bar{p}_0) \cdot N = 0$

$$\overline{p} \cdot \overline{N} - \overline{p}_\circ \cdot \overline{N} = 0 \qquad \bar{p} \cdot N - \bar{p}_0 \cdot N = 0$$

ó

$$\overline{N} \cdot \overline{p} - \overline{N} \cdot \overline{p}_\circ = 0 \qquad N \cdot \bar{p} - N \cdot \bar{p}_0 = 0$$

Sustituyendo a los vectores por sus respectivas componentes tenemos:

$$(A, B, C) \cdot (x, y, z) - (A, B, C) \cdot (x_\circ, y_\circ, z_\circ) = 0$$

Efectuando los productos:

$$Ax + By + Cz - (Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ) = 0$$

Si hacemos:

$$D = -(Ax_\circ + By_\circ + Cz_\circ)$$

Nos queda:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

que es la ecuación cartesiana dada en forma general del plano π.

Ejemplo II.26

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $P_\circ(2, 1, -3)$ y es normal al vector $\overline{a} = 2i - 3j + 2k$

a) En forma normal.

b) En forma cartesiana.

Solución:

a) $\overline{N} = \overline{a} = (2, -3, 2)$

$$\boxed{\therefore\ (\overline{p} - (2, 1, -3)) \cdot (2, -3, 2) = 0}$$

b) $((x, y, z) - (2, 1, -3)) \cdot (2, -3, 2) = 0$

$$2x - 3y + 2z - (4 - 3 - 6) = 0$$

$$\boxed{2x - 3y + 2z + 5 = 0}$$

Ejemplo II.27

Determinar la ecuación cartesiana del plano que está definido por las rectas

$$L_1: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{3 - z}{1}$$

y

$$L_2: 15 - 3x = \frac{y - 4}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

que se intersectan en el punto $P_\circ(5, 4, 1)$

Solución:

$$(\overline{p} - \overline{p}_\circ) \cdot (\overline{u}_1 \times \overline{u}_2) = 0$$

de L_1 tenemos que $\overline{u}_1 = (2, 3, -1)$ y de L_2, $\overline{u}_2 = (-3, 2, 3)$ por lo que:

$$((x, y, z) - (5, 4, 1)) \cdot ((2, 3, -1) \times (-3, 2, 3)) = 0$$

$$(x - 5, y - 4, z - 1) \cdot (2, 3, -1) \times (-3, 2, 3) = 0$$

Se trata de un producto mixto:

$$\therefore \begin{vmatrix} x - 5 & y - 4 & z - 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x - 5)\,11 - (y - 4)\,3 + (z - 1)\,13$$

$$= 11x - 3y + 13z - 56 = 0$$

$$\boxed{\therefore\ 11x - 3y + 13z - 56 = 0}$$

Ejemplo II.28

Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a los tres puntos no colineales $L(2, 2, 1)$, $M(3, 3, 3)$ y $Q(1, 0, 2)$.

Solución:

$$(\overline{p} - \overline{p}_\circ) \cdot ((\overline{p}_1 - \overline{p}_\circ) \times (\overline{p}_2 - \overline{p}_\circ)) = 0$$

Tomemos a Q como $P_\circ$ entonces $\overline{p}_\circ = (1, 0, 2)$

a L como P_1 entonces $\overline{p}_1 = (2, 2, 1)$

y a M como P_2 entonces $\overline{p}_2 = (3, 3, 3)$

P tiene las coordenadas (x, y, z)

$$((x, y, z) - (1, 0, 2)) \cdot (((2, 2, 1) - (1, 0, 2)) \times ((3, 3, 3) - (1, 0, 2))) =$$

$$= ((x, y, z) - (1, 0, 2)) \cdot (1, 2, -1) \times (2, 3, 1) = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)5 - 3y + (z-2)(-1) = 5x - 3y - z - 3 = 0$$

$$\boxed{5x - 3y - z - 3 = 0}$$

II.2.4 DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

Sea un plano π que contiene al punto P_o y cuyo vector normal es $\overline{N}$, y sea Q un punto que no pertenece al plano.

> DEFINICION. La distancia de un plano π a un punto Q, es la longitud del segmento dirigido ortogonal al plano π, y cuyo punto inicial es un punto del plano y punto final es Q.

Gráficamente lo representamos en la figura II.14.

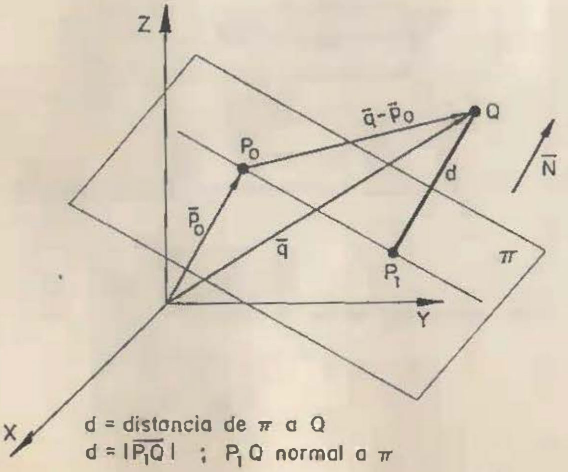


Figura II.14 Distancia de un punto a un plano

Es claro que la distancia d es igual al valor absoluto de la componente escalar del vector $\overline{q} - \overline{p}_o$ sobre el vector $\overline{N}$, o sea

$$d = |\text{Comp. Esc.}_{\overline{N}}\ \overline{q} - \overline{p}_o|$$

De donde:

$$d = \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_o) \cdot \overline{N}|}{|\overline{N}|}$$

Ejemplo II.29

Si un plano contiene al punto $P_o(1, -1, 0)$ y su vector normal es $\overline{N} = (6, 24, -8)$. Calcular la distancia del plano al punto $Q(12,2,14)$.

Solución:

$$d = \frac{|((12, 2, 14)-(1, -1, 0))\cdot(6, 24, -8)|}{\sqrt{(6)^2 + (24)^2 + (-8)^2}}$$

$$= \frac{|(11, 3, 14)\cdot(6, 24, -8)|}{\sqrt{676}} = \frac{+26}{26}$$

$$\boxed{d = 1\ u}$$

Ejemplo II.30

Si la ecuación de un plano es $6x + 24y - 8z - 78 = 0$. ¿Cuál será la d stancia del plano al punto $Q(-6, -8, 4)$?

Solución:

Para aplicar directamente la expresión de distancia de un punto a un plano, nos falta determinar un punto del plano, lo cual podemos hacer fijando el valor de dos de las variables de la ecuación del plano, y calcular el valor de la tercera variable.

Pero también podemos proceder de la siguiente manera:

El numerador de la ecuación para calcular la distancia es:

$$|(\overline{q} - \overline{p}_o) \cdot \overline{N}|$$

El cual lo podemos expresar como:

$$|\overline{N} \cdot \overline{q} - \overline{N} \cdot \overline{p}_o|$$

Recuérdese que en el inciso II.2.3 establecimos e la D de la ecuación cartesiana del plano es $D = -(\overline{N} \cdot \overline{p}_o)$: para este caso vale -78.

Por otra parte $\overline{N} \cdot \overline{q} = Aq_1 + Bq_2 + Cq_3$, que para este caso queda $\overline{N} \cdot \overline{q} = 6(-6) + 24(-8) - 8(4)$ de donde:

$$d = \frac{|6(-6) + 24(-8) - 8(4) - 78|}{\sqrt{(6)^2 + (24)^2 + (-8)^2}} = \frac{|-338|}{26} \quad \frac{-338}{26}$$

$$\boxed{\therefore \; d = 13 \text{ u}}$$

Analicemos ahora el caso particular de encontrar la distancia de un plano π al origen.

Sea π un plano que contiene al punto P_0 y cuyo vector normal es $\overline{N}$.

Si queremos determinar la distancia de π al origen, la obtendríamos por:

$$d = \frac{|(\overline{0} - \overline{p}_0) \cdot \overline{N}|}{|\overline{N}|} = \frac{|-(\overline{p}_0 \cdot \overline{N})|}{|\overline{N}|}$$

Recuérdese nuevamente que $-(\overline{p}_0 \cdot \overline{N}) = D$ lo que implica que si el plano está dado por su ecuación cartesiana, entonces la distancia del origen al plano está dada por:

$$\boxed{d = \frac{|D|}{|\overline{N}|}}$$

Ahora bien si el plano contiene al origen, entonces esta distancia vale cero, o sea que:

$$0 = \frac{|D|}{|\overline{N}|}$$

Esta expresión se cumple sólo cuando $D = 0$.

De donde concluimos que si en la ecuación cartesiana de un plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

el termino D es nulo, entonces el plano contiene al origen del sistema de referencia.

II.2.5 ANGULO ENTRE DOS PLANOS

Sea P_{01} y $\overline{N}_1$ el punto y el vector normal que definen a un plano π_1 y sea P_{02} y $\overline{N}_2$ el punto y el vector normal que definen a otro plano π_2.

DEFINICION. El ángulo entre los planos π_1 y π_2 es el ángulo θ que forman sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$

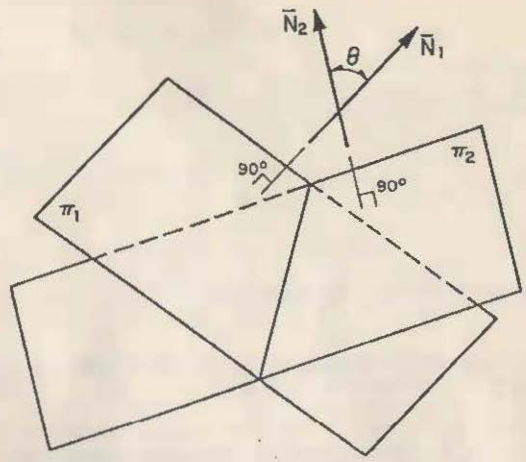


Figura II.15 Angulo entre dos planos

Por la expresión para calcular el ángulo entre dos vectores vista en el tema I, tenemos que el ángulo entre el plano π_1 y el plano π_2 está dado por:

$$\boxed{\theta = \text{ang cos} \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1|\,|\overline{N}_2|}}$$

o por:

$$\boxed{\theta = \text{ang sen} \frac{|\overline{N}_1 \times \overline{N}_2|}{|\overline{N}_1|\,|\overline{N}_2|}}$$

Ejemplo II.31

Calcular el ángulo que forman los planos

$$\pi_1: \quad 3x - 5y + 6z = 15$$

$$\pi_2: \quad x + 3y - 5z = 2$$

Solución:

$$\overline{N}_1 = (3, -5, 6), \; \overline{N}_2 = (1, 3, -5)$$

$$\theta = \text{ang cos } \frac{(3, -5, 6) \cdot (1, 3, -5)}{\sqrt{(3)^2 + (-5)^2 + (6)^2} \ \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-5)^2}} =$$

$$= \frac{3 - 15 - 30}{\sqrt{70} \ \sqrt{35}}$$

$$\theta = \text{ang cos } \frac{-42}{\sqrt{2450}} = \text{ang cos } \frac{-42}{7\sqrt{50}}$$

$$\theta = 148.05°$$

I.2.6 PERPENDICULARIDAD, PARALELISMO Y COINCIDENCIA

Sea el plano π_1 definido por el punto P_{o1} y por el vector normal $\overline{N}_1$, sea también el plano π_2 definido por el punto P_{o2} y por el vector normal $\overline{N}_2$.

PERPENDICULARIDAD

> **DEFINICION.** Dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares si y sólo si sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ son ortogonales.

De esta definición se sigue que dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares si y sólo si sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ forman un ángulo igual a $\pi/2$

De la expresión de ángulo entre planos estudiada en el inciso anterior tenemos:

$$\frac{\pi}{2} = \text{ang cos } \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \, |\overline{N}_2|}$$

o sea:

$$\cos \frac{\pi}{2} = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1| \, |\overline{N}_2|} = 0$$

$$\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$$

De donde la siguiente condición:

Dos planos π_1 y π_2 son perpendiculares si y sólo si para sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ se cumple que:

$$\boxed{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0}$$

La interpretación gráfica de la perpendicularidad entre planos está en la siguiente figura II.16.

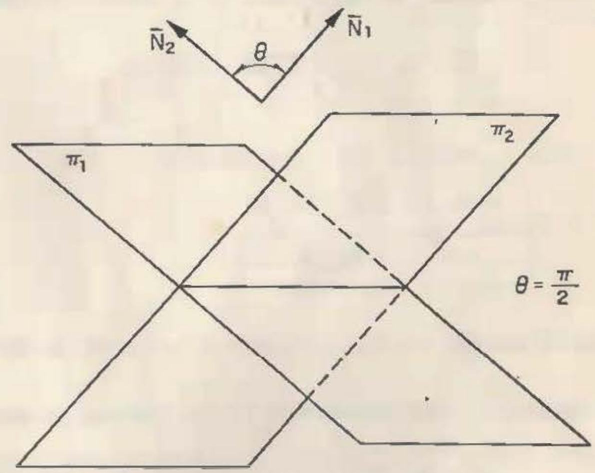


Figura II.16 Planos perpendiculares

Ejemplo II.32

Determinar la ecuación cartesiana del plano π_1 que es perpendicular simultáneamente a los planos

$$\pi_2 : \quad x - 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\pi_3 : \quad P_{o3}(1, -1, 1) \qquad \overline{N}_3 = (1, 0, 2)$$

y que contiene al punto $P_{o1}(0, 0, 2)$

Solución:

Si π_1 tiene que ser perpendicular a π_2 y π_3 simultáneamente, entonces su vector normal $\overline{N}_1$ tiene que ser ortogonal simultáneamente a los respectivos vectores normales de π_2 y π_3. El vector normal de π_2 es $\overline{N}_2 = (1, -2, 3)$ y el de π_3 es $\overline{N}_3 = (1, 0, 2)$.

Aplicando el producto vectorial:

$$\overline{N}_1 = \overline{N}_2 \times \overline{N}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4i-(-1)j + 2k$$

$$\boxed{\therefore\ \overline{N}_1 = (-4,\ 1,\ 2)}$$

Como el plano π_1 contiene al punto $P_{o1}(0, 0, 2)$ entonces su ecuación normal será:

$$(\overline{p} - (0,\ 0,\ 2)) \cdot (-4,\ 1,\ 2) = 0$$

De donde:

$$(x,\ y,\ z - 2) \cdot (-4,\ 1,\ 2) =$$

$$= -4x + y + 2z - 4 = 0$$

$$\boxed{\therefore\ -4x + y + 2z - 4 = 0}$$

Este problema lo podemos resolver aplicando la definición de perpendicularidad.

Si π_1 es perpendicular simultáneamente a π_2 y π_3 entonces se deberá cumplir:

$$\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2 = 0$$

$$\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_3 = 0$$

Supongamos que:

$$\overline{N}_1 = (a,\ b,\ c)$$

Entonces:

$$(a,\ b,\ c) \cdot (1,\ -2,\ 3) = 0$$

$$(a,\ b,\ c) \cdot (1,\ 0,\ 2) = 0$$

O sea:

$$a - 2b + 3c = 0$$

$$a + 2c = 0$$

Con lo que obtenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, el cual no tiene solución única.

Para obtener una solución del sistema fijamos una de las variables, por ejemplo:

$$a = 8$$

Y resolvemos el sistema:

$$8 - 2b + 3c = 0$$

$$+\ 8 + 2c = 0$$

De la segunda ecuación tenemos que $c = -4$, sustituyendo en la primera:

$$8 - 2b + 3\ (-4) = 0$$

$$8 - 2b - 12 = 0$$

$$-2b - 4 = 0$$

De donde:

$$b = -2$$

Por lo que:

$$\overline{N}_1 = (8,\ -2,\ -4)$$

El cual con el punto dado $P_{o1}(0, 0, 2)$ nos definen al plano cuya ecuación normal es:

$$(\overline{p} - (0,\ 0,\ 2)) \cdot (8,\ -2,\ -4) = 0$$

Y cuya ecuación cartesiana es:

$$\boxed{\therefore\ 8x - 2y - 4z + 8 = 0}$$

CASOS PARTICULARES

Sea un plano π perpendicular al plano coordenado xy. Figura II.17.

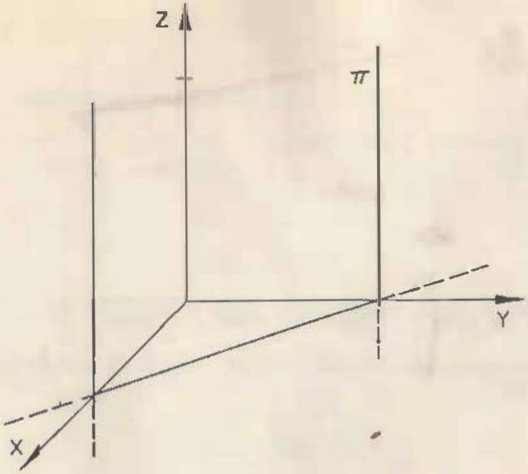


Figura II.27 Plano perpendicular al XY

Como el plano π es perpendicular al plano xy, el vector normal de π debe ser ortogonal a cualquier vector normal a xy, pero a su vez cualquier vector normal al plano xy es paralelo a la dirección del eje z. De donde el vector normal a π es ortogonal a la dirección de z, por lo que su tercera componente es nula.

Esto significa que el vector normal a π es del tipo $\overline{N} = (A, B, 0)$ por lo que la ecuación cartesiana del plano es de la forma:

$$Ax + By + D = 0$$

De donde concluimos que si en la ecuación cartesiana de un plano π, el coeficiente de la variable z es cero, entonces el plano es perpendicular al plano coordenado xy.

En forma análoga si en la ecuación cartesiana de un plano π, el coeficiente de la variable y o el de la variable x es cero, entonces el plano es perpendicular al plano coordenado xz o al yz respectivamente.

PARALELISMO

> DEFINICION.- Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si y sólo si sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ son paralelos.

En el tema I para la condición de paralelismo entre vectores se vio que dos vectores son paralelos si su producto vectorial es igual a cero, lo cual es consecuencia de que sus respectivas componentes sean proporcionales.

Aplicando esto al paralelismo entre planos, tenemos la siguiente condición:

Dos planos π_1 y π_2 son paralelos si y sólo si para sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ se cumple que:

$$\boxed{\overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \overline{0}}$$

lo cual equivale a que se cumpla también que:

$$\overline{N}_1 = k\,\overline{N}_2 \qquad k \in \mathbb{R}. \qquad k \neq 0$$

El paralelismo entre planos está representado gráficamente en la siguiente figura II.18.

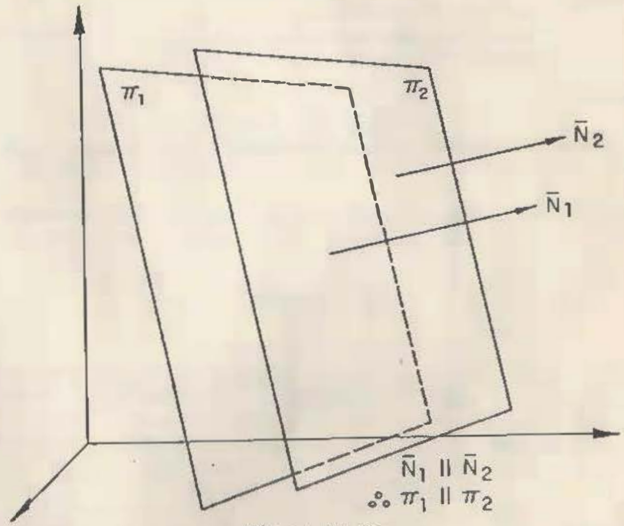


Figura II.18

Ejemplo II.33

Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $P(4, 2, -6)$ y que es paralelo al plano cuya ecuación es:

$$10x - 4y + 8z - 18 = 0$$

Solución:

La normal al plano dado es $\overline{N}_1 = (10, -4, 8)$

Suponemos la normal al plano pedido $\overline{N}_2 = (A, B, C)$

Por la condición de paralelismo:

$$A = 10k, \qquad B = -4k, \qquad C = 8k, \qquad k \neq 0$$

Si tomamos $k = 1$, entonces:

$$A = 10, \qquad B = -4, \qquad C = 8$$

De donde un vector normal al plano pedido es $\overline{N}_2 = (10, -4, 8)$ y como contiene al punto $P(4, 2, -6)$ la ecuación cartesiana del plano está dada por:

$$10x - 4y + 8z + D = 0$$

En donde:

$$D = -(40 - 8 - 48) = 16$$

Finalmente:

$$\boxed{10x - 4y + 8z + 16 = 0}$$

CASOS PARTICULARES

Sea un plano π paralelo al plano coordenado xy. Figura II.19.

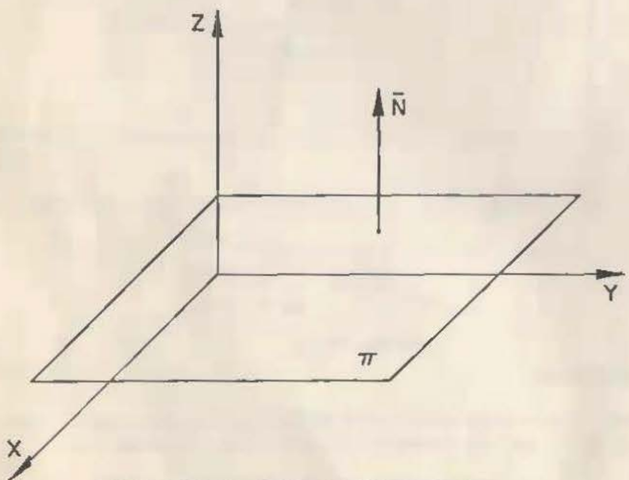


Figura II.19 Plano paralelo al XY

Dado que π es paralelo al plano xy, el vector normal a π debe ser paralelo a cualquier vector normal a xy, pero a su vez cualquier vector normal al plano xy es paralelo a la dirección del eje z. Por lo que el vector normal a π es paralelo a la dirección del eje z y como consecuencia es ortogonal a la dirección del eje x y a la dirección del eje y, de donde sus dos primeras componentes son nulas, es decir $\overline{N} = (0, 0, C)$.

La ecuación cartesiana del plano paralelo al xy, es de la forma:

$$Cz + D = 0$$

De donde:

$$z = -\frac{D}{C}$$

Pero:

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \qquad A = 0 \qquad B = 0$$

$$\therefore \quad D = Cz_0$$

Sustituyendo:

$$z = z_0$$

De donde z_0 es la cota de todos los puntos del plano.

De donde concluimos que un plano paralelo al plano xy tiene una ecuación de la forma:

$$\boxed{z = k} \qquad k \in \mathbb{R}$$

En forma análoga un plano paralelo al yz tiene una ecuación de la forma:

$$\boxed{x = k} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Y un plano paralelo al xz

$$\boxed{y = k} \qquad k \in \mathbb{R}$$

COINCIDENCIA

DEFINICION.	Dos planos π_1 y π_2 son coincidentes si y sólo si sus respectivos vectores normales $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ son paralelos, y además existe al menos un punto que está contenido en π_1 y π_2

Si sus respectivos vectores normales son paralelos entonces:

$$\overline{N}_1 = k\,\overline{N}_2 \qquad k \in \mathbb{R} \qquad k \neq 0$$

Supongamos que π_1 tiene de ecuación:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad y \qquad \pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Entonces por condición de paralelismo entre sus vectores normales tenemos que:

$A_1 = k A_2 \qquad B_1 = k B_2 \qquad C_1 = kC_2 \qquad k \neq 0$

Ahora bien supongamos que existe un punto $P_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ contenido en ambos planos.

$P_\circ$ debe satisfacer las ecuaciones de π_1 y π_2, esto es:

$$A_1x_\circ + B_1y_\circ + C_1z_\circ + D_1 = 0$$

$$A_2x_\circ + B_2y_\circ + C_2z_\circ + D_2 = 0$$

pero por la proporcionalidad de los coeficientes A, B, C, podemos escribir:

$$k A_2x_\circ + kB_2y_\circ + kC_2Z_\circ + D_1 = 0$$

$$A_2x_\circ + B_2y_\circ + C_2Z_\circ + D_2 = 0$$

De donde:

$$\frac{D_1}{k} = -(A_2x_\circ + B_2y_\circ + C_2Z_\circ)$$

$$D_2 = -(A_2x_\circ + B_2y_\circ + C_2Z_\circ)$$

Lo que implica que:

$$\frac{D_1}{k} = D_2$$

O sea:

$$\boxed{D_1 = k D_2}$$

Lo que nos lleva a la conclusión de que si en las ecuaciones cartesianas de dos planos:

$$\pi_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Se cumple que $A_1 = kA_2$, $B_1 = kB_2$, $C_1 = kC_2$, $D_1 = kD_2$ en donde k es una constante diferente de cero, entonces los planos π_1 y π_2 son coincidentes.

II.2.7 DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

En el espacio, dos planos se intersectan o son paralelos. En caso de ser paralelos, la distancia entre ambos, estará dada por la distancia de uno de los planos a un punto del otro plano, la cual podemos calcular por la expresión correspondiente estudiada en el inciso II.2.4.

En caso de intersectarse, se considera que la distancia es nula.

Ejemplo II.34

Determinar la distancia entre los planos

$$\pi_1: \; 2x - 3y + 6z = 0$$

$$\pi_2: \; -6x + 9y - 18z + 2 = 0$$

Solución:

La distancia entre un punto Q y un plano que contiene a un punto $P_\circ$ y cuyo vector normal es $\overline{N}$, está dada por:

$$d = \frac{|(\overline{q} - \overline{p}_\circ) \cdot \overline{N}|}{|\overline{N}|}$$

Para aplicarla, consideremos a Q un punto cualquiera de uno de los planos, por ejemplo π_2. Para determinar las coordenadas de Q, fijemos arbitrariamente el valor de dos de las variables en la ecuación de π_2; por simplicidad hagamos $y = 0$, $z = 0$ entonces:

$$\pi_2: \; -6x + 9(0) - 18(0) + 2 = 0$$

De donde:

$$x = \frac{1}{3}$$

De aquí:

$$Q(1/3, 0, 0)$$

Y su vector de posición es $q = (1/3, 0, 0)$

Ahora necesitamos un punto $P_\circ$ de π_1, el cual podríamos obtenerlo por el mismo procedimiento por el que obtuvimos a Q, pero nótese que en la ecuación de π_1 el término D no existe, por lo que según lo visto en el inciso II.2.4 esto significa que π_1 contiene al origen. Entonces podemos tomar $P_\circ(0, 0, 0)$ y la distancia la calculamos a partir de:

$$d = \frac{|[(1/3,\ 0,\ 0)-(0,\ 0,\ 0)] \cdot (2,\ -3,\ 6)|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} =$$

$$= \frac{|(1/3,\ 0,\ 0) \cdot (2,\ -3,\ 6)|}{\sqrt{49}} = \frac{\frac{2}{3}}{7}$$

$$\boxed{d = \frac{2}{21}\ u}$$

II.2.8 INTERSECCION DE DOS PLANOS

> DEFINICION. La intersección de dos planos π_1 y π_2 es el conjunto de todos los puntos que pertenecen al plano π_1 y al plano π_2

Si cada punto de la intersección de dos planos está contenido en ambos, entonces cualquier punto de la intersección deberá satisfacer las ecuaciones de los dos planos.

Las características de la intersección entre dos planos están dadas por el siguiente:

Teorema.- Para dos planos π_1 y π_2 se tiene que:

a) Si π_1 y π_2 son paralelos no coincidentes, entonces su intersección es el conjunto vacío

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$$

b) Si π_1 y π_2 son coincidentes entonces

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$$

c) Si π_1 y π_2 no son paralelos ni coincidentes, entonces su intersección es una recta.

DEMOSTRACION

Sea π_1: $\bar{p} = \bar{p}_1 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$; $\bar{u}_1 \nparallel \bar{u}_2$; $r,\ s \in \mathbb{R}$

y π_2: $(\bar{p} - \bar{p}_2) \cdot \bar{N}_2 = 0$

Un punto P de π_1 pertenece a π_2 si y sólo si dado por su vector de posición $\bar{p} = \bar{p}_1 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$ se cumple que:

$$((\bar{p}_1 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2) - \bar{p}_2) \cdot \bar{N}_2 = 0$$

O sea:

$$((\bar{p}_1 - \bar{p}_2) + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2) \cdot \bar{N}_2 = 0$$

Por las propiedades del producto escalar tenemos que:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \cdot \bar{N}_2 + r(\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2) + s(\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2) = 0$$

o bien:

$$r(\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2) + s(\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2) = (\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2 \qquad (1)$$

a) Si π_1 y π_2 son paralelos no coincidentes, entonces $\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$, $\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2 = 0$ y $(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2 \neq 0$, por lo que no hay ninguna pareja de números reales r, s que satisfaga la expresión (1), lo que implica que no existe ningún punto P cuyo vector de posición sea $\bar{p} = \bar{p}_1 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$ que pertenezca a π_1 y π_2 ; $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$

b) Si π_1 y π_2 son coincidentes entonces $\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2 = 0$, $\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2 = 0$ y $(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2 = 0$ por lo que cualquier pareja de números reales r, s satisfacen la expresión (1); lo que implica que cualquier punto P cuyo vector de posición sea $\bar{p} = \bar{p}_1 + r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$ y que pertenece a π_1, pertenece también a π_2 o sea $\pi_1 \subset \pi_2$. En forma análoga se demuestra que $\pi_2 \subset \pi_1$ por lo que $\pi_1 = \pi_2$

c) Si π_1 y π_2 no son paralelos ni coincidentes, al menos uno de los dos productos $\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2$ ó $\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2$ es diferente de cero. Entonces en la expresión (1) podemos suponer que $\bar{u}_1 \cdot \bar{N} \neq 0$; de donde los números reales r que la satisfacen quedan representados por:

$$r = \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2 - s(\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2)}{\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2}$$

de aquí que un punto P pertenece a π_1 y a π_2 si y sólo si su vector de posición queda expresado por:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \left[\frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2 - S\ (\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2)}{\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2}\right]\bar{u}_1 + s\bar{u}_2$$

O bien:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2}{\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2}\ \bar{u}_1 + s\left[\bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{N}_2}{\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2}\ \bar{u}_1\right] \qquad (2)$$

En donde $\frac{(\bar{p}_2 - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}_2}{\bar{u}_1 \cdot \bar{N}_2}\ \bar{u}_1$ es un vector paralelo a $\bar{u}_1$ que al sumarse al vector de posición $\bar{p}_1$ nos da por resultado otro vector de posición que llamaremos $\bar{p}_3$

Por otra parte $\overline{u}_2 - \frac{\overline{u}_2 \cdot \overline{N}_2}{\overline{u}_1 \cdot \overline{N}_2} \overline{u}_1$ nos da por resultado otro vector al que llamaremos $\overline{u}$.

Entonces la expresión (2) se reduce a:

$$\boxed{\overline{p} = \overline{p}_3 + s\overline{u}} \qquad s \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación de una recta.

Lo que completa la demostración.

Ahora bien de la demostración del teorema anterior tenemos que el vector $\overline{u}$ al cual es paralela la recta de intersección, es igual a:

$$\overline{u} = \overline{u}_2 - \frac{\overline{u}_2 \cdot \overline{N}_2}{\overline{u}_1 \cdot \overline{N}_2} \overline{u}_1$$

O sea:

$$\overline{u} = \frac{(\overline{u}_1 \cdot \overline{N}_2)\, \overline{u}_2 - (\overline{u}_2 \cdot \overline{N}_2)\, \overline{u}_1}{\overline{u}_1 \cdot \overline{N}_2}$$

Pero:

$$(\overline{u}_1 \cdot \overline{N}_2)\overline{u}_2 - (\overline{u}_2 \cdot \overline{N}_2)\overline{u}_1 = \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \times \overline{N}_2$$

De donde:

$$\overline{u} = \frac{1}{\overline{u}_1 \cdot \overline{N}_2} (\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \times \overline{N}_2)$$

Si consideramos que para el plano π_1, $\overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \overline{N}_1$

Entonces:

$$\overline{u} = k(\overline{N}_1 \times \overline{N}_2)$$

en donde k es una constante diferente de cero.

De lo anterior concluimos que si $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$ son respectivamente los vectores normales a dos planos que se intersectan; entonces el vector $\overline{u}$ al cual es paralela la recta de intersección, es ortogonal a $\overline{N}_1$ y $\overline{N}_2$

Ejemplo II.35

Determinar la ecuación de la recta de intersección de los planos no paralelos ni coincidentes:

π_1: definido por $P_1(2, 3, -2)$ y $\overline{N}_1 = (2, -3, 6)$

π_2: definido por $P_2(2, 3, -2)$ y $\overline{N}_2 = (1, -1, 2)$

Solución:

Evidentemente $P_1 = P_2$ por lo que es un punto de la intersección.

Por otra parte un vector $\overline{u}$ al cual es paralela la recta de intersección está dado por:

$$\overline{u} = \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 6)i + (6 - 4)j + (-2 + 3)k = 2j + k$$

entonces la recta de intersección tiene como ecuación vectorial:

$$\overline{p} = (2, 3, -2) + t(0, -2, 1)$$

$$\boxed{\overline{p} = (2, 3 + 2t, -2 + t)}$$

Ejemplo II.36

Determinar, si existe, la intersección de los planos:

π_1: $2x - 3y + z - 1 = 0$

π_2: $x + 3y - 2z - 5 = 0$

Solución:

Para π_1 se tiene $\overline{N}_1 = (2, -3, 1)$

Para π_2, $\overline{N}_2 = (1, 3, -2)$

Dado que $\overline{N}_1 \neq k\, \overline{N}_2$ los planos no son paralelos ni coincidentes; entonces su intersección es una recta L.

Un vector de dirección de la recta L está dado por:

$$\overline{u} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (6 - 3)i + (1 + 4)j + (6 + 3)k = 3i + 5j + 9k$$

Ahora necesitamos un punto de la intersección de π_1 y π_2; para lo cual podemos seguir el siguiente procedimiento:

En las ecuaciones de los planos fijemos arbitrariamente una de las variables, por ejemplo $z = 0$ entonces:

$$2x - 3y - 1 = 0$$

$$x + 3y - 5 = 0$$

$3x - 6 =$

$x = \frac{6}{3} = 2$

Resolviendo el sistema: $x = 2$, $y = 1$; entonces un punto de la intersección es $P(2, 1, 0)$, de donde la recta de intersección tiene como ecuación:

$$\bar{p} = (2, 1, 0) + t(3, 5, 9)$$

$$\boxed{\bar{p} = (2 + 3t, 1 + 5t, 9t)}$$

$2 + 3y - 5 = 0$

$3y = 5 - 2$

$y = \frac{3}{3} = 1$

CASOS PARTICULARES

Casos particulares de la intersección entre planos son las intersecciones de un plano cualquiera con los planos coordenados. Figura II.20.

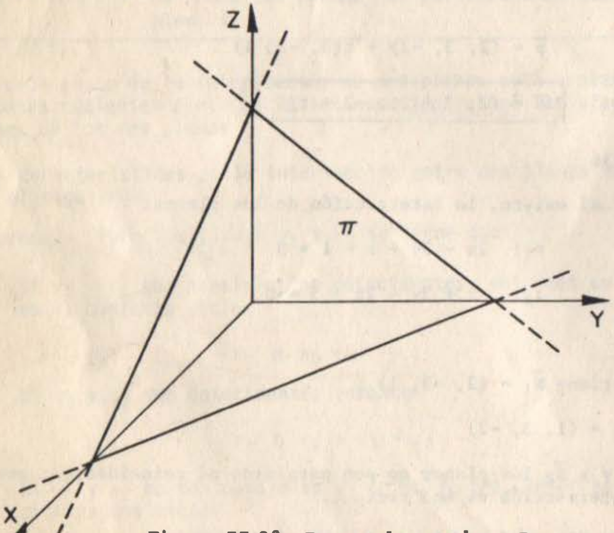


Figura II.20 Trazas de un plano π

A las intersecciones de un plano π con los planos coordenados se les llaman trazas del plano π.

Sea un plano π cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + Cz + D = 0$

La traza del plano π sobre el plano xy, es una recta contenida en el plano xy; la cota de cualquier punto contenido en xy es igual a cero, por lo que haciendo $z = 0$ en la ecuación cartesiana del plano obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} &Ax + By + D = 0 \\ &z = 0 \end{aligned}}$$

que es la ecuación de la traza del plano π sobre el plano xy.

Análogamente:

$$\boxed{\begin{aligned} &Ax + Cz + D = 0 \\ &y = 0 \end{aligned}}$$

es la ecuación de la traza del plano π sobre el plano xz.

Finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} &By + Cz + D = 0 \\ &x = 0 \end{aligned}}$$

ecuación de la traza del plano π sobre el plano yz.

II.2.9 PLANOS PROYECTANTES DE UNA RECTA

En el inciso II.2.8 vimos que la intersección de dos planos no paralelos y no coincidentes, es una recta.

Dado que en estas condiciones la recta de intersección es única, podemos considerar que otra forma de representar a una recta, es a partir de dos planos diferentes que la contengan; es decir que una recta L la definiríamos como:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

A este par de ecuaciones se le llama ecuaciones generales de la recta L.

Dado que existen una infinidad de pares de planos diferentes, que definen a la recta L como su intersección, comúnmente se escojen planos que contienen a la recta y que son perpendiculares a los planos coordenados, a estos planos se les llama planos proyectantes de la recta L. Figura II.21.

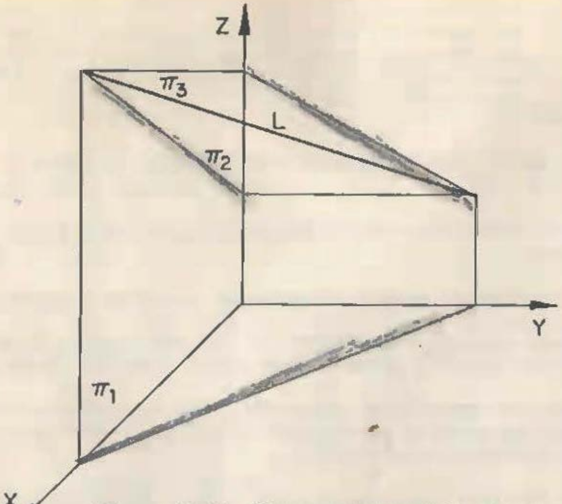


Figura II.21 Planos proyectantes de una recta

En la figura II.21 el plano π_1 es perpendicular al xy y contiene a L, el π_2 es perpendicular a xz y el π_3 es perpendicular a yz.

Ahora bien, en el inciso II.1.2 estudiamos las ecuaciones simétricas de una recta L, que son de la forma:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Las que podemos expresar como:

$x - x_0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{x - x_0}{c}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}$$

O bien:

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

$$cy - bz - cy_0 + bz_0 = 0$$

$$cx - az - cx_0 + az_0 = 0$$

Según lo visto en el inciso II.2.6, la primera ecuación corresponde a un plano perpendicular al plano xy, la segunda a un plano perpendicular al plano al yz y la tercera a un plano perpendicular al xz.

Además la recta L está contenida en cada uno de estos planos. Esto lo podemos probar de la siguiente manera:

Las ecuaciones paramétricas de L son:

$$x = x_0 + ta; \qquad y = y_0 + tb; \qquad z = z_0 + tc$$

Si L está contenida en plano $bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$, sus ecuaciones paramétricas deberán satisfacer la ecuación del plano, o sea:

$$b(x_0 + ta) - a(y_0 + tb) - bx_0 + ay_0 = 0$$

$$bx_0 + tab - ay_0 - tab - bx_0 + ay_0 = 0$$

$$0 = 0$$

En forma análoga para el plano $cy - bz - cy_0 + bz_0 = 0$ se tiene que:

$$c(y_0 + tb) - b(z_0 + tc) - cy_0 + bz_0 = 0$$

$$cy_0 + tbc - bz_0 - tbc - cy_0 + bz_0 = 0$$

$$0 = 0$$

Y para el plano $cx - az - cx_0 + az_0 = 0$

$$c(x_0 + ta) - a(z_0 + tc) - cx_0 + az_0 = 0$$

$$cx_0 + tac - az_0 - tac - cx_0 + az_0 = 0$$

$$0 = 0$$

Por lo que concluimos que los tres planos obtenidos de las ecuaciones simétricas de la recta L, son sus planos proyectantes.

Ejemplo II.37

Obtener los planos proyectantes de la recta L

$$L: \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{3} = \frac{3 - z}{2}$$

Solución:

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y}{3}; \qquad \frac{y}{3} = \frac{3 - z}{2}; \qquad \frac{x - 2}{3} = \frac{3 - z}{2}$$

$3x - 6 = 3y;$ $\quad 2y = 9 - 3z;$ $\quad 2x - 4 = 9 - 3z$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{array}{l} 3x - 3y - 6 = 0 \\ 2y + 3z - 9 = 0 \\ 2x + 3z - 13 = 0 \end{array}}$$

Ejemplo II.38

Obtener las ecuaciones simétricas de la recta definida por sus planos proyectantes

$$L: \begin{array}{l} 4x - y - 11 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{array}$$

Solución:

La dirección de la recta está dada por el vector:

$$\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + 4j + 2k$$

Haciendo $x = 2$ en las ecuaciones, tenemos:

$$4(2) - y - 11 = 0 \qquad 8 - 11 = -3 = y$$

$$2(2) - z - 2 = 0$$

de donde:

$$y = -3 \qquad z = 2$$

Un punto de la recta es $P(2, -3, 2)$ por lo que las ecuaciones simétricas de la recta son:

$$\boxed{x - 2 = \frac{y + 3}{4} = \frac{z - 2}{2}}$$

II.2.10 FAMILIAS DE PLANOS

De la misma forma que en el inciso II.1.7 consideramos familias de rectas, ahora definiremos familia de planos.

DEFINICION.	Se llama familia de planos al conjunto de planos que satisfacen una condición geométrica, de tal forma que al establecerse otra condición, se define uno y sólo un plano de la familia

Por ejemplo, sea la familia PL de planos paralelos al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$.

El conjunto de planos que forma esta familia, se puede expresar por comprensión como:

$$PL = \{\pi \,/\, \pi \text{ es un plano paralelo al plano } Ax + By + Cz + D = 0\}$$

También podemos obtener una ecuación que nos represente a esta familia de planos. Para la cual podemos razonar de la siguiente manera:

Si cada plano π es paralelo al plano dado, entonces por lo visto en el inciso II.2.6, los vectores normales de los planos π deberán ser paralelos al vector normal del plano dado.

De donde los términos A_1x, B_1y, C_1z de la ecuación de cada plano π, podemos considerarlos iguales a los términos Ax, By, Cz respectivamente de la ecuación del plano dado. Pero el término D, de las ecuaciones de los planos π, no está definido, ya que su valor depende de las componentes del vector normal y de las coordenadas de un punto del plano; por lo que este término queda como parámetro de la ecuación de la familia de planos.

$$\boxed{Ax + By + Cz + k = 0} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Cuando se le da valor a k, entonces se define uno y sólo un plano de esta familia.

Ejemplo II.39

Determinar una ecuación de la familia de planos paralelos al plano $3x - 2y + 4z + 1 = 0$

Solución:

$$\boxed{3x - 2y + 4z + k = 0}$$

Ejemplo II.40

Obtenga la ecuación de la familia de planos que contiene al origen.

Solución:

Recuérdese que si un plano contiene al origen, entonces en su ecuación cartesiana el término D vale cero.

$$\boxed{\therefore \quad Ax + by + Cz = 0}$$

En este caso, cuando determinamos el vector normal $\bar{N} = (A, B, C)$ entonces se define un solo plano de la familia.

.3 RELACIONES ENTRE PLANOS Y RECTAS

II.3.1 ANGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sea una recta L definida por un punto P_o y su vector de dirección $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, y sea un plano π definido por un punto P_1 y su vector normal $\bar{N} = (A, B, C)$.

DEFINICION.	El ángulo entre el plano π y la recta L, es el ángulo que forma la recta L con su proyección ortogonal sobre el plano π.

Entenderemos por proyección ortogonal de la recta L sobre el plano π, como la intersección de π con un plano perpendicular a π y que contiene a la recta L. Figura II.22.

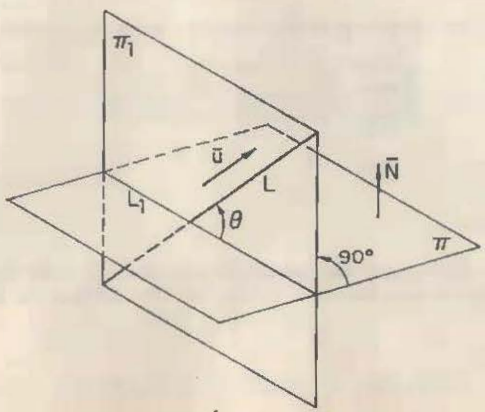


Figura II.22 Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

En esta figura π_1 es un plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta L, la intersección del plano π_1 y π se ha representado por L_1, el ángulo entre π y L es el ángulo θ que hay entre las rectas L y L_1

Nótese que el ángulo es complementario al que forman los vectores $\bar{u}$ y $\bar{N}$. Figura II.23.

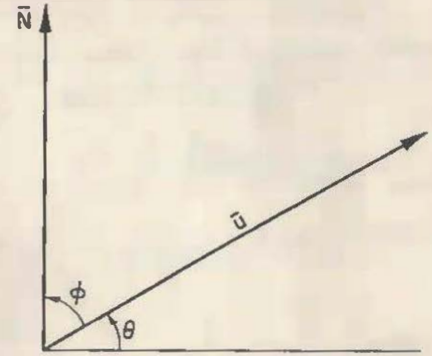


Figura II.23

Así se tiene que:

$$\phi = 90° - \theta$$

Recuérdese que para calcular ϕ se obtuvo la expresión:

$$\cos \phi = \frac{\bar{N} \cdot \bar{u}}{|\bar{N}| \; |\bar{u}|}$$

De donde:

$$\cos (90° - \theta) = \frac{\bar{N} \cdot \bar{u}}{|\bar{N}| \; |\bar{u}|}$$

Pero:

$$\cos (90° - \theta) = \cos 90° \cos \theta + \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} \theta$$

$$= \operatorname{sen} \theta$$

Finalmente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{N}\cdot\overline{u}}{|\overline{N}|\ |\overline{u}|}$$

ó:

$$\boxed{\theta = \text{ang sen}\ \frac{\overline{N}\cdot\overline{u}}{|\overline{N}|\ |\overline{u}|}}$$

Esta expresión nos permite calcular el ángulo entre una recta y un plano.

$\overline{N}_1 = (3, 2\ -3)$

$u_1 = (4\ 3\ 2)$

Ejemplo II.41

Obtener el ángulo entre el plano $3x + 2y - 3z - 5 = 0$ y la recta

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$$

Solución:

De la ecuación del plano $\overline{N} = (3, 2, -3)$

De las ecuaciones de la recta $\overline{u} = (4, 3, 2)$

$$\theta = \text{ang sen}\ \frac{(3, 2, -2)\qquad (4, 3, 2)}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-3)^2}\ \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (2)^2}}$$

$$= \text{ang sen}\ \frac{12}{\sqrt{22}\ \ \sqrt{29}} = \text{ang sen}\ \frac{12}{\sqrt{638}}$$

$$\boxed{\theta \doteq 28.36°}$$

II.3.2 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DE UN PLANO Y UNA RECTA

Sea un plano π definido por un punto P_1 y su vector normal $\overline{N} = (A,B,C)$, y sea una recta L definida por un punto P_0 y su vector de dirección $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3)$

PARALELISMO

El plano π y la recta L son paralelos si y sólo si el vector normal $\overline{N}$ del plano es ortogonal al vector de dirección $\overline{u}$ de la recta.

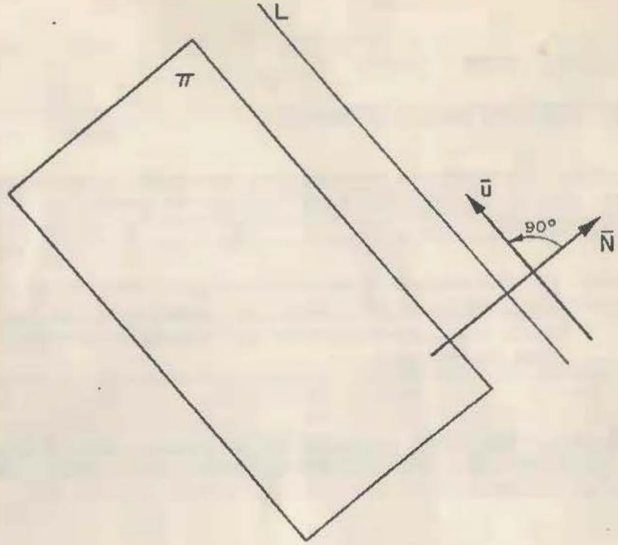


Figura II.24 Recta paralela a un plano

Por la condición de ortogonalidad entre vectores, tenemos que:

$$\boxed{\pi \parallel L \iff \overline{N}\cdot\overline{u} = 0}$$

PERPENDICULARIDAD

El plano π y la recta L son perpendiculares si y sólo si el vector normal $\overline{N}$ del plano es paralelo al vector de dirección $\overline{u}$ de la recta.

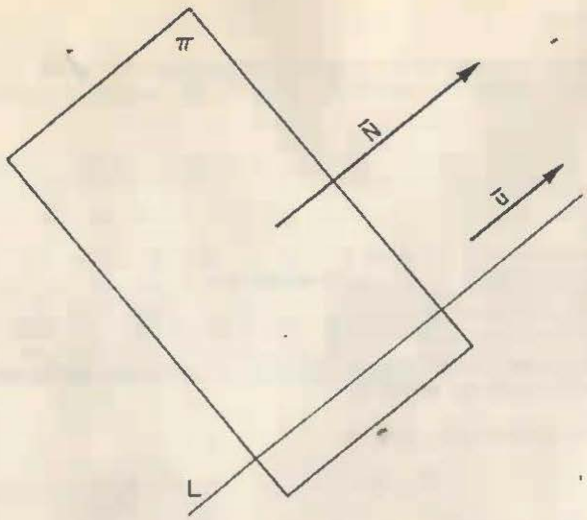


Figura II.25 Recta perpendicular a un plano

Por la condición de paralelismo entre vectores tenemos que:

$$\boxed{\pi \perp L \iff \overline{N} = k\,\overline{u}} \qquad k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

2 -1 -1

2 ,

Ejemplo II.42

Demostrar que la recta L: $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{3y+1}{-6} = \dfrac{1-z}{3}$

y el plano π: $2x - 3y + 6z + 3 = 0$ son paralelos y determinar la distancia entre ellos.

Solución:

Las ecuaciones de la recta se pueden expresar como:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+\frac{1}{3}}{-2} = \frac{z-1}{-3}$$

Por lo que el vector de dirección de la recta es:

$$\overline{u} = (6, -2, -3)$$

La normal al plano es:

$$\overline{N} = (2, -3, 6)$$

y como $\overline{u}$ y $\overline{N}$ deben ser perpendiculares, se cumplirá que $\overline{u} \cdot \overline{N} = 0$

$$\overline{u} \cdot \overline{N} = (6, -2, -3) \cdot (2, -3, 6) = 12 + 6 - 18 = 0$$

$$\boxed{\therefore \text{ la recta L y el plano } \pi \text{ son paralelos}}$$

Para determinar la distancia entre ellos, el problema se reduce a calcular la distancia de un punto de la recta L al plano π.

Un punto de la recta está dado en sus ecuaciones simétricas, y es P(2, - 1/3, 1); de donde y aplicando lo visto en el inciso II.2.4 tenemos:

$$d = \frac{2(2) - 3(-1/3) + 6(1) + 3}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2}} =$$

$$= \frac{4 + 1 + 6 + 3}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{14}{7} = 2$$

$$\boxed{\therefore \ d = 2}$$

II.3.3 INTERSECCION DE UN PLANO Y UNA RECTA

TEOREMA

Para un plano π y una recta L se tiene.

a) Si π y L son paralelos y L no está contenida en π, su intersección es el conjunto vacío.

$$\pi \cap L = \emptyset$$

b) Si π y L son paralelos y L está contenida en π, su intersección es igual a L.

$$\pi \cap L = L$$

c) Si π y L no son paralelos, su intersección es un punto.

PRUEBA

Sea: $\quad \pi: (\overline{p} - \overline{p}_0) \cdot \overline{N} = 0$

Y: $\quad L: \overline{p} = \overline{p}_1 + t\overline{u}$

Un punto P de L está contenido en π si y sólo si dado por su vector de posición $\bar{p} = \bar{p}_1 + t\bar{u}$ se cumple que:

$$((\bar{p}_1 + t\bar{u}) - \bar{p}_o) \cdot \bar{N} = 0$$

o sea:

$$((\bar{p}_1 - \bar{p}_o) + t\bar{u}) \cdot \bar{N} = 0$$

Por las propiedades del producto escalar:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_o) \cdot \bar{N} + t\,(\bar{u} \cdot \bar{N}) = 0$$

o bien:

$$t(\bar{u} \cdot \bar{N}) = (\bar{p}_o - \bar{p}_1) \cdot \bar{N} \qquad (2)$$

a) Si π y L son paralelos y L no está contenida en π, entonces $\bar{u} \cdot \bar{N} = 0$ y $(\bar{p}_o - \bar{p}_1) \cdot \bar{N} \neq 0$ por lo que no hay ningún valor real de t que satisfaga la expresión (2), lo que implica que no existe ningún punto cuyo vector de posición sea $\bar{p} = \bar{p}_1 + t\bar{u}$ y que esté contenido en π y en L.

$$\pi \cap L = \emptyset$$

b) Si π y L son paralelos y L está contenida en π, entonces $\bar{u} \cdot \bar{N} = 0$ y $(\bar{p}_o - \bar{p}_1) \cdot \bar{N} = 0$ por lo que cualquier valor real de t satisface la expresión (2) y esto implica que cualquier punto cuyo vector de posición sea $\bar{p} = \bar{p}_1 + t\bar{u}$ que pertenece a L pertenece también a π

$$\pi \cap L = L$$

c) Si π y L no son paralelos entonces $\bar{u} \cdot \bar{N} \neq 0$, y los valores de t que satisfacen la expresión (2) están dados por:

$$t = \frac{(\bar{p}_o - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}}{\bar{u} \cdot \bar{N}}$$

de aquí que un punto pertenece a π y L si y sólo si su vector de posición queda expresado por:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \left(\frac{(\bar{p}_o - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}}{\bar{u} \cdot \bar{N}} \right) \bar{u} \qquad (3)$$

en donde $\left(\frac{(\bar{p}_o - \bar{p}_1) \cdot \bar{N}}{\bar{u} \cdot \bar{N}} \right) \bar{u}$ es un vector paralelo a $\bar{u}$ que al sumarse al vector de posición de $\bar{p}$ nos da por resultado otro vector de posición que llamaremos $\bar{p}_2$.

Entonces la expresión (3) se reduce a:

$$\boxed{\bar{p} = \bar{p}_2}$$

Que nos define a un solo punto.

Lo que completa la demostración.

Ejemplo II.43

Determinar la intersección del plano definido por el punto $P_o(2, 3, -1)$ y su vector normal $\bar{N} = (4, -3, 2)$, con la recta de ecuación:

$$\frac{x - 3}{5} = -2 - y = z - 2$$

Solución:

El vector normal del plano es $\bar{N} = (4, -3, 2)$ y el vector de dirección de la recta es $\bar{u} = (5, -1, 1)$ entonces:

$$\bar{N} \cdot \bar{u} = (4, -3, 2) \cdot (5, -1, 1) = 25 \neq 0$$

lo que nos indica que el plano y la recta no son paralelos, entonces su intersección es un punto.

La ecuación normal del plano es:

$$(\bar{p} - (2, 3, -1)) \cdot (4, -3, 2) = 0$$

Y la ecuación vectorial de la recta es:

$$\bar{p} = (3, -2, 2) + t\,(5, -1, 1)$$

$$\bar{p} = (3 + 5t, -2 - t, 2 + t)$$

Al hacer simultáneas las ecuaciones del plano y la recta tenemos:

$$[(3 + 5t, -2 - t, 2 + t) - (2, 3, -1)] \cdot (4, -3, 2) = 0$$

$$(1 + 5t, -5 - t, 3 + t) \cdot (4, -3, 2) = 0$$

$$4 + 20t + 15 + 3t + 6 + 2t = 0$$

$$25t + 25 = 0 \qquad \therefore \quad t = -1$$

Sustituyendo t en la ecuación de la recta:

$$\bar{p} = (3 + 5(-1), -2 - (-1), 2 + (-1))$$

$$= (-2, -1, 1)$$

$\therefore$ el punto de intersección es:

$$\boxed{P(-2, -1, 1)}$$

ITULO III ECUACIONES PARAMETRICAS Y ECUACIONES EN COORDENADAS POLARES

En el capítulo anterior aplicamos el concepto de vector para determinar las diferentes ecuaciones de la recta y el plano (vectorial, paramétricas y cartesianas). En este capítulo extenderemos nuestro estudio a las ecuaciones vectoriales y paramétricas de las curvas cónicas, así como a las ecuaciones de curvas en coordenadas polares.

I.I ECUACIONES DE CURVAS PLANAS

III.1.1 ECUACION VECTORIAL DE UNA CURVA

Sean $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ tres funciones reales de una variable real t, cuyos dominios son δ_1, δ_2 y δ_3 respectivamente. Entonces:

$$C = \{(x,y,z)\,|\,x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t);\ t\in\delta_1\cap\delta_2\cap\delta_3\}$$

es un conjunto de ternas ordenadas con una gráfica en el sistema cartesiano x, y, z.

Para todo número t en la intersección de δ_1, δ_2 y δ_3 existe un vector $\overline{r}$ definido por:

$$\overline{r} = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$$

Para cada valor de t, $\overline{r}$ definirá el vector de posición de un punto; cuando t toma todos los valores en la intersección de δ_1, δ_2 y δ_3, el punto final de la representación de posición del vector $\overline{r}$ traza una curva C. (Figura III.1).

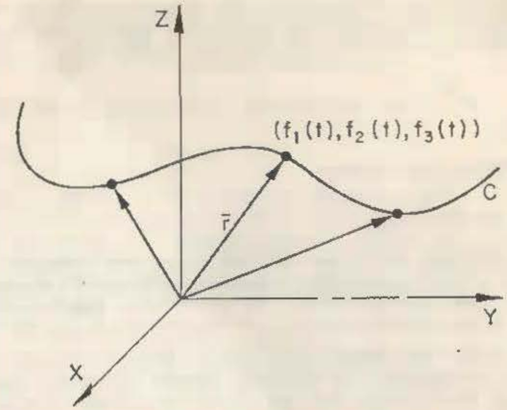


Figura III.1 Curva trazada por $\overline{r}$

La ecuación $\overline{r} = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ se denomina ecuación vectorial de la curva C. Para curvas situadas en el plano x,y la componente dada por $f_3(t)$ es siempre cero.

II.1.2 ECUACIONES PARAMETRICAS

En la figura III.1, hemos representado la gráfica de una curva C, cuya ecuación vectorial es $\overline{r} = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$. Es evidente que un punto de la curva C tiene la representación cartesiana (x, y, z), donde

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t)$$

Estas ecuaciones se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C. A la variable t en función de la cual están definidas las variables x, y y z, se le llama parámetro.

En la ecuación vectorial de una curva, así como en sus paramétricas, podemos dar al parámetro t distintas interpretaciones, por ejemplo si pensamos que la curva está trazada por una partícula en movimiento, podemos considerar la dirección positiva a lo largo de la curva como la dirección en la cual se mueve la partícula cuando el parámetro t crece. En un caso como éste, t se puede tomar como la medida del tiempo y la curva dada por las ecuaciones vectorial o paramétricas representa la trayectoria de un móvil, cuya posición en cualquier instante estará dada por el vector de posición $\overline{r}$ o por las coordenadas x, y, z dependiendo de que, para determinarlo, utilicemos la ecuación vectorial de C o las paramétricas.

En otros casos, es posible dar una interpretación geométrica al parámetro t; esto lo ilustraremos más adelante cuando veamos las ecuaciones vectoriales y paramétricas de las curvas cónicas.

III.1.3 INTERVALO PARAMETRICO

Como se mencionó en la sección III.1.1., una ecuación del tipo $\bar{r} = f_1(t)i + f_2(t)j + f_3(t)k$ se denomina ecuación vectorial de una curva C. Nótese que esta expresión nos representa una función cuyo dominio es un conjunto de números reales $D_{\bar{r}} = \{t \mid t\varepsilon\delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3, t\varepsilon \mathbb{R}\}$ en donde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ son los respectivos dominios de $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ y el rango de la función es un conjunto de vectores (estas funciones llamadas funciones vectoriales de variable escalar, serán estudiadas con detalle en el curso de cálculo vectorial).

Le llamaremos *Intervalo Paramétrico*, al conjunto de valores de t para los cuales está definida la función $\bar{r}$, es decir es el conjunto de valores de t que pertenecen al dominio de la función $\bar{r}$.

$$\boxed{\therefore \text{ Intervalo paramétrico} = \{t \mid t\varepsilon\delta_1 \cap \delta_2 \cap \delta_3, t\varepsilon \mathbb{R}\}}$$

Ejemplo III.1

Dada la ecuación vectorial $\bar{r} = \sqrt{t-2}\; i + \frac{1}{(t-3)} j$, plantear las correspondientes ecuaciones paramétricas e indicar el intervalo paramétrico.

Solución:

Ecuaciones paramétricas:

$$x = \sqrt{t-2} \qquad y = \frac{1}{t-3} \qquad z = 0$$

$f_1(t)$ está definido para $t - 2 \geq 0$ o sea $t \geq 2$

$f_2(t)$ está definido para $t - 3 \neq 0$ o sea $t \neq 3$

$f_3(t)$ está definido para $0t = 0$ o sea $t\varepsilon\mathbb{R}$

$\boxed{\therefore\ t\varepsilon\ [2, \infty),\ t \neq 3}$ intervalo paramétrico.

III.1.4 ECUACION CARTESIANA DE UNA CURVA

Hay otra manera de definir una curva en el espacio de tres dimensiones. Algunas veces se puede eliminar t entre las ecuaciones paramétricas, obteniendo dos ecuaciones en x, y y z.

$$F(x, y, z) = 0 \qquad y \qquad G(x, y, z) = 0$$

Un par de ecuaciones como éstas se denomina representación cartesiana o implícita de la curva.

Para una curva situada en el plano x, y se tiene $z = 0$ y sólo es necesario considerar las dos primeras ecuaciones paramétricas; de tal manera que eliminando t entre estas dos, se llega a una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$ que es satisfecha por todos los puntos de la curva.

Ejemplo III.2

Dada la ecuación vectorial $\bar{r} = t^2 i + 2\,t\, j$

a) Obtener las ecuaciones paramétricas.

b) Indicar el intervalo paramétrico.

c) Obtener la ecuación cartesiana

d) Indicar los intervalos de variación de las variables x y y.

e) Graficar la curva

Solución:

a) $\boxed{x = t^2}$ $\boxed{y = 2\,t}$ ecuaciones paramétricas

b) De ambas ecuaciones se obtiene que:

$$t \varepsilon \mathbb{R}$$

o sea $\boxed{t\varepsilon(-\infty, \infty)}$ intervalo paramétrico.

c) Para eliminar t, podemos despejarlo de las ecuaciones paramétricas e igualarlas:

de $x = t^2$ tenemos que $t = \pm\sqrt{x}$

de $y = 2t$ tenemos que $t = \frac{y}{2}$

igualando $\pm\sqrt{x} = \frac{y}{2}$

elevando al cuadrado $x = \frac{y^2}{4}$

finalmente $\boxed{4x = y^2}$ ecuación cartesiana.

d) Tenemos que $t = \pm\sqrt{x}$

Por lo que $\boxed{x \geq 0}$ intervalo de variación de la variable x.

Además $t = \frac{y}{2}$, por lo que y puede tomar cualquier valor real, esto es que $\boxed{-\infty < y < \infty}$ intervalo de variación de la variable y.

e) Para graficar la curva, podemos utilizar la siguiente tabla:

t	$x = t^2$	$y = 2t$
-3	9	-6
-2	4	-4
-1	1	-2
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6

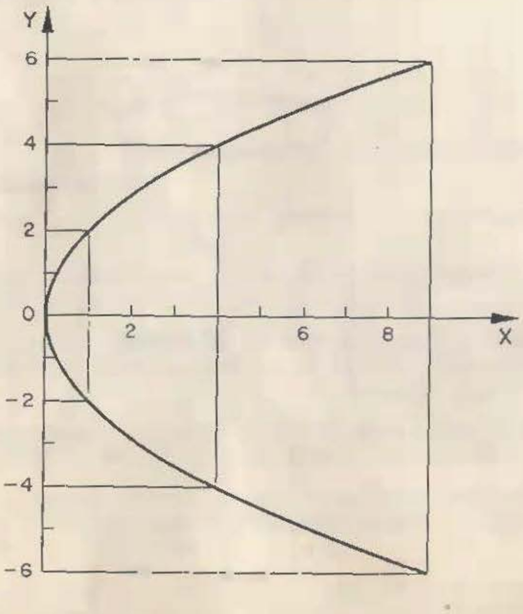


Figura III.2 Gráfica de la curva

Puede suceder que la eliminación del parámetro nos dé una ecuación cartesiana cuya gráfica contenga más puntos que la gráfica definida en la ecuación vectorial o en las ecuaciones paramétricas.

Por ejemplo, si las dos ecuaciones paramétricas son:

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t$$

la eliminación de t conduce a la ecuación cartesiana $y = x^2$. Obsérvese que la presencia de $\sqrt{t}$ implica que t sólo puede tomar valores no negativos, lo que implica que x e y tomaran también valores no negativos. A pesar de que la ecuación cartesiana $y = x^2$ es válida aun siendo x negativo; por lo tanto la ecuación cartesiana que corresponde a las paramétricas del ejemplo, será:

$$y = x^2, \quad x \geq 0$$

Ejemplo III.3

Dada la ecuación vectorial $\bar{r} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}$

a) Obtener sus ecuaciones paramétricas.

b) Obtener su ecuación cartesiana.

Solución:

a) $x = \cos t \qquad y = \sec t$ ecuaciones paramétricas.

b) Utilizando la identidad $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ tenemos que $y = \frac{1}{\cos t}$

y como $x = \cos t$ entonces $y = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad xy = 1$

Si observamos cuidadosamente las ecuaciones paramétricas del ejemplo, vemos que para cualquier valor de t, el valor de x queda comprendido entre -1 y 1 no sucediendo lo mismo con la expresión cartesiana la cual es válida para cualquier valor de x diferente de cero, dentro del conjunto de los números reales. Por lo que la ecuación cartesiana será finalmente:

$$\boxed{\begin{array}{r} xy = 1, \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{array}}$$ ecuación cartesiana.

Hasta aquí hemos planteado la transformación de ecuaciones vectoriales o paramétricas a cartesianas. Estudiemos ahora el problema inverso, esto es, la determinación de la ecuación vectorial o de las ecuaciones paramétricas de una curva plana, a partir de su ecuación cartesiana.

Podemos plantear el problema en estos términos:

Sea una curva en el plano xy, cuya ecuación cartesiana es $f(x, y) = 0$. Encontrar un par de ecuaciones paramétricas:

$$x = f_1(t) \qquad\qquad y = f_2(t)$$

o una ecuación vectorial $\bar{r} = f_1(t)i + f_2(t)j$ que representen a la misma curva.

La solución a este problema no es única, ya que el procedimiento para resolverlo, consiste en plantear una de las ecuaciones paramétricas según convenga a nuestro problema y obtener la otra por medio de la ecuación cartesiana.

Por ejemplo si la ecuación cartesiana es $x^2+y^2=25, y \geq 0$, podemos establecer la primera ecuación paramétrica simplemente como $x = t$, de donde en la ecuación cartesiana tenemos que:

$$t^2 + y^2 = 25 \qquad\qquad y \geq 0$$

Despejando a y nos queda.

$$y = \sqrt{25 - t^2}$$

En este caso las ecuaciones paramétricas son:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = t \\ y = \sqrt{25 - t^2} \end{array}}$$

La ecuación vectorial es:

$$\boxed{\bar{r} = ti + (\sqrt{25 - t^2})j}$$

Otra solución es:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{25 - t^2} \\ y = t, \quad t \geq 0 \end{array}} \quad \text{ecuaciones paramétricas.}$$

$$\boxed{\bar{r} = (\pm\sqrt{25 - t^2})i + t\,j} \quad \text{ecuación vectorial.}$$

Otra solución:

Si $x = 5 \cos t$

Tenemos que:

$$(5 \cos t)^2 + y^2 = 25$$

Despejando a y tenemos:

$$y = \sqrt{25 - 25 \cos^2 t}$$

Como $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$

Sustituyendo:

$$y = \sqrt{25 - 25(1 - \operatorname{sen}^2 t)}$$

Finalmente:

$$y = 5 \operatorname{sen} t$$

Por lo que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 5 \cos t \\ y = 5 \operatorname{sen} t \\ \quad 0 \leq t \leq \pi \end{array}} \quad \text{ecuaciones paramétricas.}$$

$$\boxed{\bar{r} = (5 \cos t)i + (5 \operatorname{sen} t)j} \quad \text{ecuación vectorial.}$$

III.1.5 DEFINICION DE CONICA

Una recta móvil G que corta a una recta fija A en un punto P, formando con ella un ángulo constante θ, siendo $0 < \theta < \pi/2$, engendra una superficie en el espacio tridimensional, llamado *cono circular recto*. La recta G es la generatriz del cono, A es su eje y P su vértice (ver figura III.3).

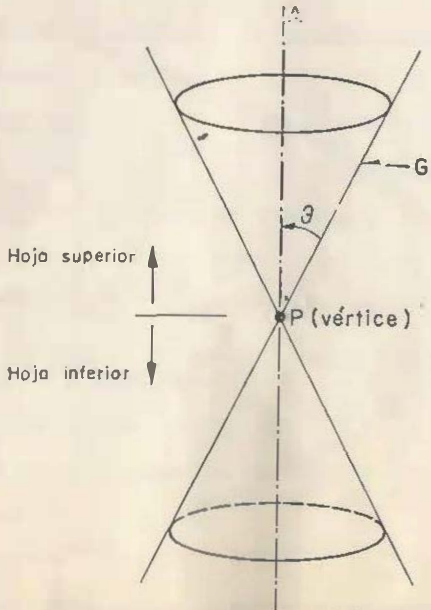


Figura III.3 Cono circular recto

Si la recta A es vertical, se tienen dos porciones del cono, una superior y una inferior unidas en el vértice. Ambas porciones del cono se llaman hojas del cono.

DEFINICION. Una sección cónica es una curva de intersección de un plano con un cono circular recto de dos hojas.

Se presentan tres tipos de curvas de intersección, que son la parábola, la elipse y la hipérbola.

gura III.4 Parábola

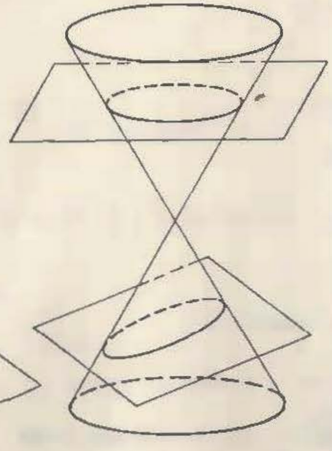


Figura III.5 Elipse

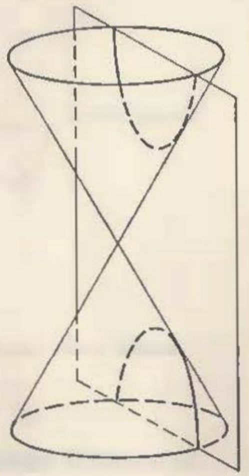


Figura III.6 Hipérbola

Si el plano es paralelo a una sola posición de la generatriz, la curva de intersección es una parábola (ver figura III.4).

Si el plano cortante contiene al vértice del cono y a la generatriz en una sola posición entonces tenemos una línea recta llamada *parábola degenerada*.

Si el plano cortante no es paralelo a ninguna posición de la generatriz, la curva de intersección es una elipse (ver figura III.5).

Si el plano cortante contiene al vértice del cono, pero no contiene a la generatriz en ninguna posición, entonces tenemos un punto que corresponde a una *elipse degenerada*.

Si el plano cortante es perpendicular al eje del cono, y no contiene al vértice, entonces tenemos un caso particular de elipse a la que llamamos circunferencia (figura III.5).

Finalmente si el plano cortante es paralelo al eje del cono circular recto, entonces intersecta al cono en sus dos hojas y la curva de intersección es la hipérbola (figura III.6).

El caso de hipérbola degenerada corresponde a dos rectas que se cortan y se presenta cuando el plano contiene al vértice de cono y a la generatriz en dos posiciones.

NOTA: La definición analítica de cada una de estas curvas, corresponde a cursos anteriores de Geometría Analítica Plana. En este capítulo definiremos en forma general a las cónicas de acuerdo a una propiedad común de todas ellas.

DEFINICION. Una *cónica* es el conjunto de todos los puntos P contenidos en un plano, tales que la distancia no dirigida de cada punto P a un punto fijo F(foco) está en razón constante a la distancia no dirigida de P a una recta fija L (directriz) que no contiene a F.

Denotaremos por e a la razón constante mencionada en la definición anterior, la cual se llama excentricidad.

La excentricidad e es un número no negativo dado que proviene de la razón de dos distancias no dirigidas. Si $e = 1$ la cónica es una parábola si $e < 1$ se trata de una elipse y si $e > 1$ es una hipérbola.

III.1.6 ECUACIONES PARAMETRICAS Y VECTORIALES DE LAS CONICAS

A continuación veremos cómo pueden deducirse parejas de ecuaciones paramétricas para algunos casos particulares de curvas cónicas en un espacio de dos dimensiones, así como sus respectivas ecuaciones vectoriales.

Elipse.- Consideremos dos circunferencias concéntricas de radios a y b con centro en el origen, siendo $a > b$. Tracemos una recta cualquiera L que pasa por el origen, formando un ángulo θ con la parte positiva del eje X. Esta recta corta a las dos circunferencias en los puntos A y B.

Bajemos desde A y B perpendiculares al eje X, definiendo así los puntos C y D. Pasemos por A una paralela al eje X, que corta al segmento $\overline{BD}$ en el punto P. Puede demostrarse que el punto P es un punto de la elipse con centro en el origen, semieje mayor (horizontal) a semieje menor b. (Ver figura III.7).

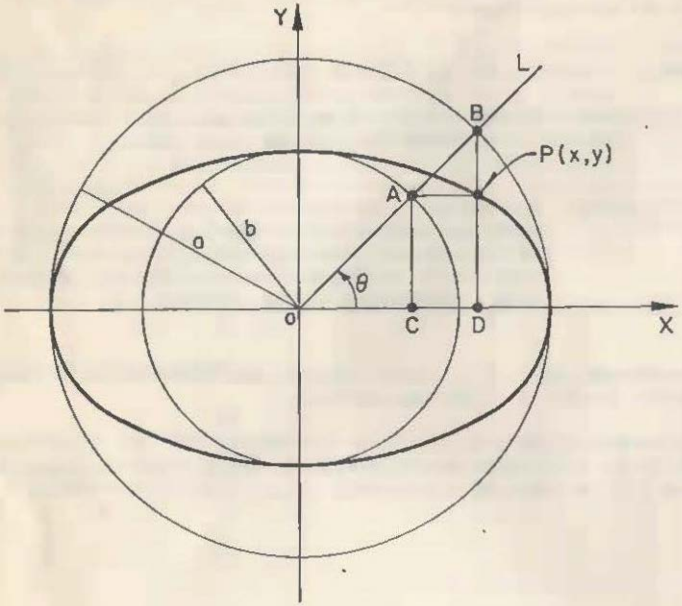


Figura III.7 Elipse

De la figura tenemos que:

$$x = \overline{OD} = \overline{OB} \ \cos\theta = a\cos\theta$$

$$y = \overline{DP} = \overline{CA} = \overline{OA} \ \operatorname{sen}\theta = b \operatorname{sen}\theta$$

O sea que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\operatorname{sen}\theta \end{array}}$$ ecuaciones paramétricas de la elipse de la figura.

Si llamamos $\overline{p}$ al vector de posición del punto P, podemos plantear la ecuación vectorial correspondiente.

$$\boxed{\overline{p} = (a\cos\theta)i + (b\operatorname{sen}\theta)j}$$

Para eliminar el parámetro de las ecuaciones paramétricas podemos proceder de la siguiente forma:

$$x = a\cos\theta$$

$$y = b\operatorname{sen}\theta$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones:

$$x^2 = a^2\cos^2\theta$$

$$y^2 = b^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Despejando: $\cos^2\theta$ y $\operatorname{sen}^2\theta$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2\theta$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \operatorname{sen}^2\theta$$

Sumando estas expresiones tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Aplicando la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ nos queda:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que es precisamente la ecuación cartesiana de la elipse con centro en el origen, semieje mayor (horizontal) a y semieje menor b.

Circunferencia.- Sea una circunferencia con centro en el origen y radio a. Sea $\overline{p}$ el vector de posición de un punto P(x, y) de la circunferencia; designemos con θ al ángulo que forma el vector $\overline{p}$ con la parte positiva del eje X (ver figura III.8).

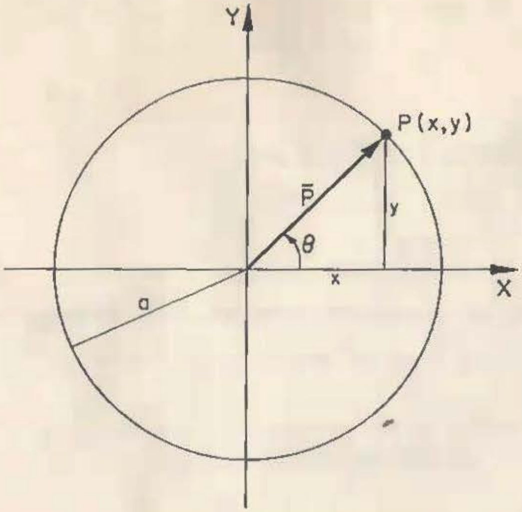


Figura III.8 Circunferencia

De la figura tenemos:

$$x = |\overline{p}| \cos \theta$$

$$y = |\overline{p}| \text{ sen } \theta$$

Pero $|\overline{p}| = a$

Por lo que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a \cos \theta \\ y = a \text{ sen } \theta \end{array}}$$ ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

La ecuación vectorial correspondiente es:

$$\boxed{\overline{p} = (a \cos \theta)i + (a \text{ sen } \theta)j}$$

Mediante un proceso similar al aplicado en las ecuaciones paramétricas de la elipse, podemos elimiar el parámetro en las ecuaciones de la circunferencia y obtener la ecuación cartesiana.

$$\boxed{x^2 + y^2 = a^2}$$

Hipérbola.- De la misma forma que para la elipse, consideremos dos circunferencias concéntricas, con centro en el origen y radio. a y b respectivamente, siendo a > b. Tracemos una recta M que pasa por el origen y que forma un ángulo θ con el eje X. Sea C el punto de intersección de dicha recta con la circunferencia de radio mayor; pasemos por C la tangente a dicho círculo, que corta al eje X en el punto D. Por el punto B tracemos una paralela al eje Y, que corta a la recta M en el punto E. Pasemos por D una paralela al eje Y y por E una paralela al eje X, rectas que se cortan en el punto P, el cual pertenece a la hipérbola con centro en el origen y eje focal coincidente con el eje X (figura III.9).

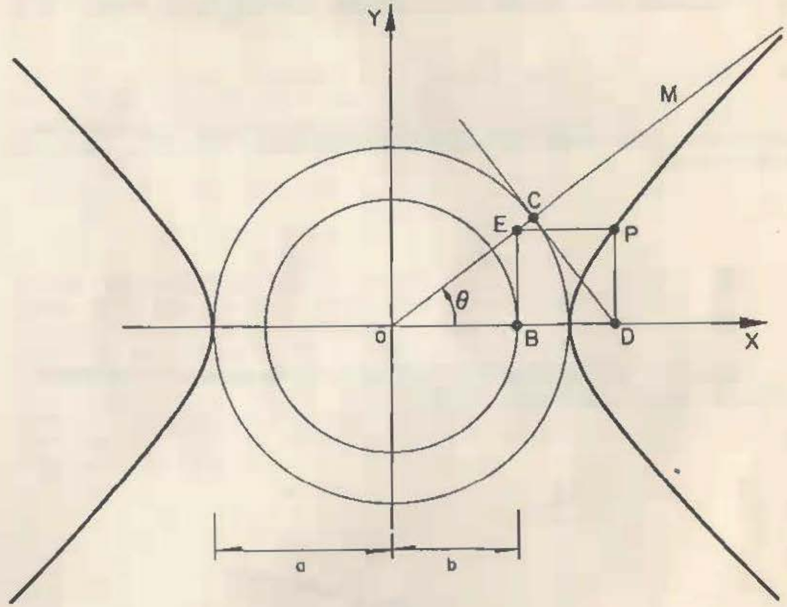


Figura III.9 Hipérbola

Del triángulo rectángulo OCD

$$x = \overline{OD} = \overline{OC} \sec \theta = a \sec \theta$$

del triángulo rectángulo OBE

$$y = \overline{DP} = \overline{BE} = \overline{OB} \tan \theta = b \tan \theta$$

Por lo que:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{array}}$$ ecuaciones paramétricas de la hipérbola.

Si $\overline{p}$ es el vector de posición del punto P, la ecuación vectorial correspondiente es:

$$\boxed{\overline{p} = (a \sec \theta)i + (b \tan \theta)j}$$

Eliminando el parámetro θ de las ecuaciones paramétricas (mediante la identidad trigonométrica $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$), se obtiene la ecuación cartesiana

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que corresponde precisamente a la hipérbola mostrada en la figura III.9.

Parábola.- Sea una parábola con vértice en el origen, cuya ecuación cartesiana es:

$$y^2 = 4p\,x \qquad\qquad y \geq 0$$

Si llamamos α al ángulo de inclinación de la tangente a la curva en cualquier punto, ver figura III.10.

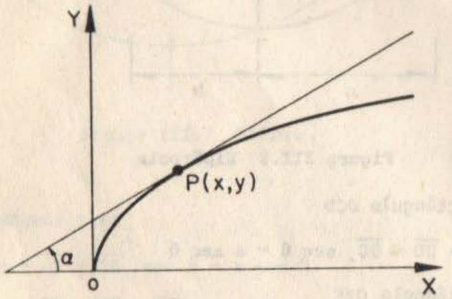


Figura III.10 Parábola

Aplicando la derivada como $\tan\alpha$, tenemos:

$$2\,yy' = 4\,P$$

$$\tan\alpha = y' = \frac{4\,P}{2\,y} = \frac{2\,P}{y}, \quad y \neq 0$$

O sea que:

$$\tan\alpha = \frac{2\,P}{y}, \quad y \neq 0$$

Despejando a y:

$$y = \frac{2\,P}{\tan\alpha} = 2\,P \cot\alpha$$

Sustituyendo en la ecuación cartesiana de la parábola, tenemos:

$$(2\,P\cot\alpha)^2 = 4\,Px$$

De donde:

$$x = \frac{4\,P^2\cot^2\alpha}{4\,P} = P\cot^2\alpha$$

Finalmente:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= P\cot^2\alpha \\ y &= 2\,P\cot\alpha \end{aligned}}$$ ecuaciones paramétricas de la parábola.

La ecuación vectorial correspondiente, está dada por:

$$\boxed{\bar{p} = (P\cot^2\alpha)i + (2\,P\cot\alpha)j}$$

III.2 ECUACIONES EN COORDENADAS POLARES

III.2.1 SISTEMA DE REFERENCIA EN COORDENADAS POLARES

Hasta ahora, hemos determinado la posición de un punto en el plano por medio de sus coordenadas cartesianas rectangulares. Pero existen otros sistemas de coordenadas que pueden ser utilizados; el siguiente en importancia, es el sistema de coordenadas polares, el cual lo podemos fundamentar utilizando el concepto de vector en el plano, de la siguiente forma:

Un vector queda determinado completamente por su magnitud y dirección las cuales se representan en un segmento dirigido por la longitud del segmento r y el ángulo de inclinación θ respectivamente. Así pues si

$r > 0$, entonces la pareja ordenada $(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta)$ son las componentes del vector de magnitud r y ángulo de inclinación θ (ver figura III.11).

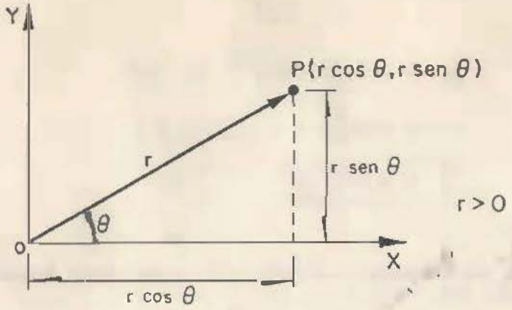


Figura III.11 Representación de la pareja $(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta)$

Ahora bien, si consideramos que $r < 0$, entonces $-r > 0$ y $(-r \cos \theta,\ -r \operatorname{sen} \theta)$ es el vector de magnitud $-r$ y ángulo de inclinación θ. Ahora bien $(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta)$ es el vector $(-r \cos \theta,\ -r \operatorname{sen} \theta)$ girado un ángulo π (ver figura III.12), es decir, si $r < 0$ entonces $(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta)$ es el vector de magnitud $-r$ y ángulo de inclinación $\theta + \pi$.

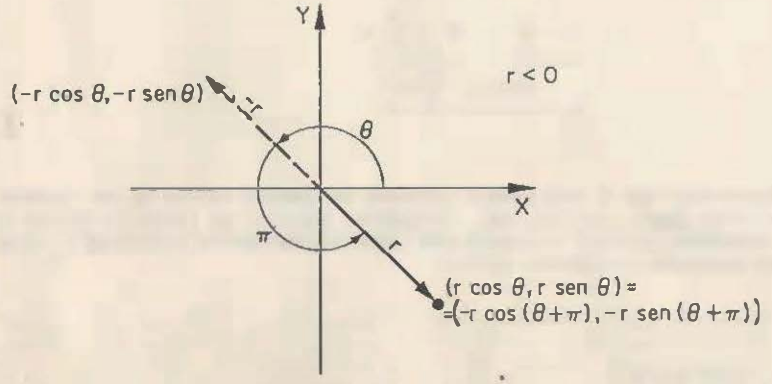


Figura III.12 Representación de la pareja $(-r \cos \theta,\ -r \operatorname{sen} \theta)$

Resumiendo tenemos:

a) $(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta)$ es el vector de magnitud r y ángulo de inclinación θ si $r > 0$.

b) $(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta)$ es el vector de magnitud $-r$ y ángulo de inclinación $\theta + \pi$ si $r < 0$.

c) Si $r = 0$, no tenemos ninguna dificultad en identificar el vector; es el vector nulo.

En las dos figuras anteriores, los vectores están en su representación de posición (definida en el tema I) por lo que si $P(x, y)$ es el punto extremo del vector representado, entonces podemos afirmar que los dos números r y θ están relacionados con x e y por medio de las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Todos los pares ordenados de números reales (r, θ) con $r > 0$ que satisfacen estas ecuaciones se denominan *coordenadas polares* de P. El número positivo r se denomina distancia radial de P y θ ángulo polar o argumento, el cual generalmente se expresa en radianes (ver figura III.13). El ángulo polar no es único, ya que si θ satisface las ecuaciones $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, también las satisfacen $\theta + 2n\pi$, $n \in Z$. Sin embargo algunas veces es conveniente restringir el valor de θ de tal manera que pertenezca al intervalo $[0, 2\pi]$, en cuyo caso a θ lo llamaremos *argumento principal*.

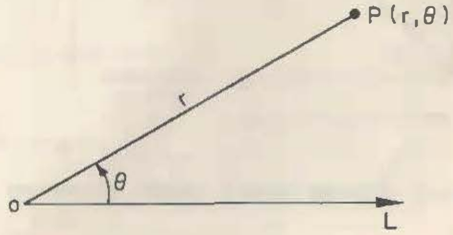


Figura III.13 Coordenadas polares

Al eje horizontal OL a partir del cual se mide el ángulo θ, se le llama *eje polar*, al origen de este mismo sistema le llamaremos *polo*.

Así por ejemplo, el punto $P(4, \frac{3}{4}\pi)$ se localiza en un sistema de coordenadas polares, dibujando primero el ángulo cuya medida en radianes es $\frac{3}{4}\pi$ a partir del eje polar, en sentido contrario al de las manecillas del reloj y con vértice en el polo; sobre esta línea, a cuatro unidades a partir del polo se localiza al punto P. (Ver figura III.14).

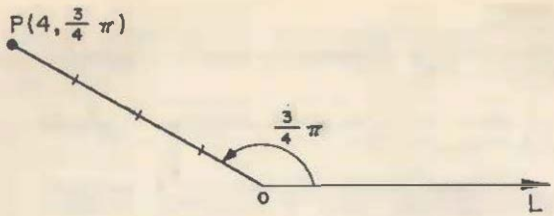


Figura III.14 Localización de P (4, $\frac{3\pi}{4}$)

Encontremos a continuación la relación entre las coordenadas polares y cartesianas. Supongamos el eje polar superpuesto con el eje X y al polo coincidiendo con el origen. Llamaremos eje copolar a la recta perpendicular al eje polar, que pasa por el polo. En este caso el eje copolar coincide con el eje Y. (Ver figura III.15).

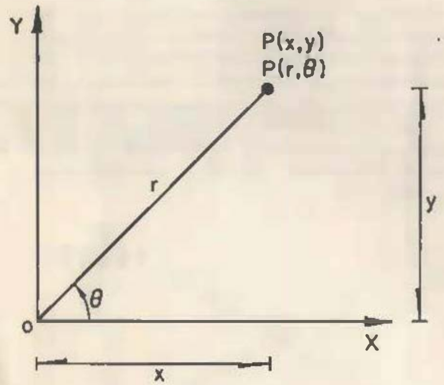


Figura III.15 Sistema polar y sistema cartesiano

De la figura se deducen las siguientes relaciones:

$$\boxed{x = r\cos\theta; \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta} \qquad (a)$$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \theta = \text{ang tan}\,\frac{y}{x}} \qquad (b)$$

Las expresiones (a) nos permiten calcular las coordenadas cartesianas de un punto a partir de sus coordenadas polares, en tanto que las expresiones (b) las utilizaremos para determinar las coordenadas polares a partir de las cartesianas.

Ejemplo III.4

Hallar las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares son P(6, 5/6 π)

Solución:

$$x = 6\cos\left(\frac{5}{6}\right)\pi = 6\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$$

$$y = 6\,\text{sen}\left(\frac{5}{6}\right)\pi = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\boxed{\therefore\; P(-3\sqrt{3},\, 3)}$$

Ejemplo III.5

Hallar un par de coordenadas polares del punto cuyas coordenadas cartesianas son P(6, -6)

Solución:

$$r = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\theta = \text{ang tan}\left(\frac{-6}{6}\right) = \frac{7}{4}\pi$$

$$\boxed{\therefore\; P(6\sqrt{2},\, \tfrac{7}{4}\pi)}$$

Otra solución:

$$r = 6\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{7}{4}\pi + 2\pi = \frac{15}{4}\pi$$

$$\boxed{\therefore\; P(6\sqrt{2},\, \tfrac{15}{4}\pi)}$$

Recuérdese que a cada pareja ordenada de números reales le corresponde un único punto, en tanto que, como hemos visto, a un punto particularen coordenadas polares le pueden ser asignadas un número ilimitado de parejas ordenadas de números reales.

Ejemplo III.6

Localizar en un sistema de coordenadas polares al punto P(-6, $\frac{5}{4}\pi$) y encontrar sus coordenadas rectangulares.

Solución:

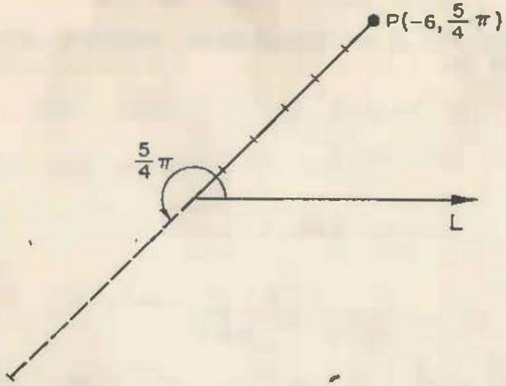


Figura III.16 Localización de P $(-6, \frac{5\pi}{4})$

$$x = -6 \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 3\sqrt{2}$$

$$y = -6 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 3\sqrt{2}$$

$$\boxed{\therefore \; P(3\sqrt{2},\; 3\sqrt{2})}$$

III.2.2 TRANSFORMACION DE ECUACIONES CARTESIANAS A POLARES Y VICEVERSA

Una curva en el plano se puede definir por medio de una ecuación polar es decir, una ecuación de la forma $f(r, \theta) = 0$ a la que han de satisfacer las coordenadas polares de cada uno de sus puntos. Para algunas curvas la ecuación polar es más fácil de obtener y más conveniente para su utilización que la ecuación cartesiana.

Por medio de las ecuaciones de transformación, es posible plantear la ecuación polar de una curva, a partir de su ecuación cartesiana, y viceversa.

Ejemplo III.7

Dada la ecuación cartesiana $x^2 + y^2 + 16x - 3y + 2 = 0$, transformarla a polar.

Solución:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

Sustituyendo:

$$\boxed{r^2 + 16r \cos \theta - 3r \operatorname{sen} \theta + 2 = 0}$$

Ejemplo III.8

Dada la ecuación polar $r = \frac{4}{6 - \cos \theta}$ obtener la ecuación cartesiana.

Solución:

$$6r - r \cos \theta = 4$$

$$r = \sqrt{x + y} \; ; \qquad x = r \cos \theta$$

Sustituyendo:

$$6\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4$$

$$6\sqrt{x^2 + y^2} = x + 4$$

Elevando al cuadrado:

$$36(x^2 + y^2) = (x + 4)^2$$

Desarrollando:

$$\boxed{35x^2 + 36y^2 - 8x - 16 = 0}$$

III.2.3 ECUACION EN COORDENADAS POLARES DE LA RECTA Y LAS CONICAS

ECUACION POLAR DE LA RECTA

Una línea recta en el plano, también se puede definir por medio de una ecuación polar. Consideremos una recta R que no pasa por el polo, y un punto P cualquiera de ella, cuyas coordenadas en el sistema de referencia polar serán (r, θ), como se muestra en la figura III.17.

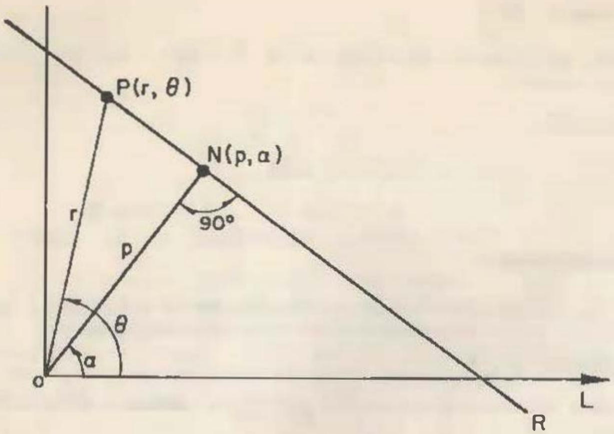


Figura III.17 La recta en el sistema polar

Para determinar la ecuación polar de R definamos al punto $N(p,\alpha)$ que es la intersección de la perpendicular a R y que pasa por el polo. Nótese que las coordenadas de N son una particularidad de la recta R que la identifican plenamente, ya que p resulta ser la distancia del polo a la recta y α es el ángulo que forma la perpendicular a R que pasa por el polo y el eje polar.

En la figura podemos observar que para el triángulo ONP se puede establecer la siguiente relación:

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{p}{r}$$

De donde:

$$\boxed{r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}}$$

La expresión anterior se conoce como ecuación general de la recta en coordenadas polares o ecuación polar de la recta.

Si la ecuación polar de la recta la transformamos a una ecuación cartesiana, obtendremos la ecuación cartesiana de una recta.

En efecto, sea: $$r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}$$

O sea: $$r\cos(\theta - \alpha) = p$$

Pero: $$\cos(\theta - \alpha) = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha + \cos\theta \cos\alpha$$

Por lo que:

$$r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha + r\cos\theta\cos\alpha = p$$

Pero por las ecuaciones de transformación de coordenadas polares a cartesianas, tenemos que:

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta$$

Sustituyendo:

$$y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha = p$$

Despejando a y:

$$y = -\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\, x + \frac{p}{\operatorname{sen}\alpha}$$

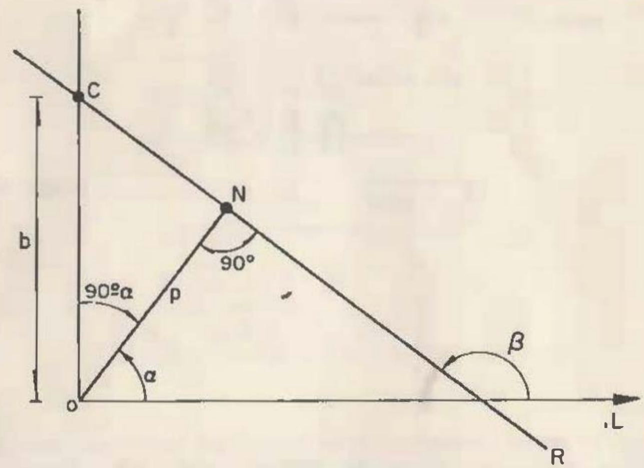


Figura III.18

De la figura III.18 se tiene:

$\beta = 90° + \alpha$ por lo que $\alpha = \beta - 90°$

Además:

$$-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = -\cot\alpha$$

Pero: $$-\cot\alpha = -\cot(\beta - 90°)$$

Utilizando la identidad:

$$-\cot(\beta - 90°) = -\frac{\cot\beta \cot 90° + 1}{\cot 90° - \cot\beta}$$

Y considerando que $\cot 90° = 0$

Nos queda: $-\cot(\beta - 90°) = -\frac{1}{-\cot\beta} = \tan\beta$

Sustituyendo este resultado en la expresión:

$$y = -\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\,x + \frac{p}{\text{sen}\,\alpha}$$

Llegamos a:

$$y = \tan\beta\, x + \frac{p}{\text{sen}\,\alpha}$$

Por otra parte en la figura III.18 para el triángulo ONC podemos establecer que:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{p}{b}$$

Pero: $\cos(90° - \alpha) = \cos 90° \cos\alpha + \text{sen}\,90°\ \text{sen}\,\alpha$

Como: $\cos 90° = 0$ y $\text{sen}\,90° = 1$

Nos queda: $\cos(90° - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

Sustituyendo en la expresión: $\cos(90° - \alpha) = \frac{p}{b}$

Nos queda:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{p}{b}$$

O sea que:

$$b = \frac{p}{\text{sen}\,\alpha}$$

Por lo que la ecuación:

$$y = \tan\beta x + \frac{p}{\text{sen}\,\alpha}$$

Finalmente nos queda:

$$y = \tan\beta\, x + b$$

Que es la ecuación cartesiana de la recta del tipo:

$$\boxed{y = mx + b.}$$

Ejemplo III.9

Determinar la ecuación de la recta paralela al eje polar, que pasa por el punto $B(-3, -\pi/6)$

Solución:

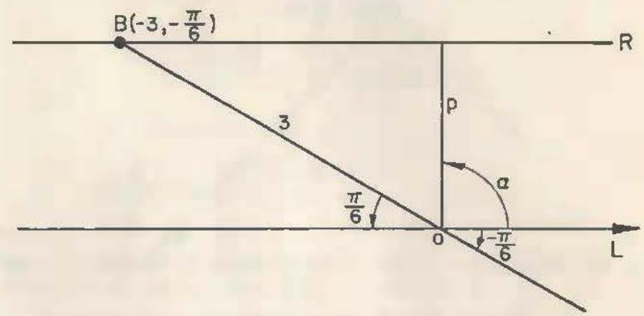


Figura III.19 Recta paralela al eje polar

Solución:

De la figura se deduce que $P = 3\ \text{sen}\,\pi/6 = 3(1/2) = \frac{3}{2}$

además: $\alpha = \pi/2$

Sustituyendo en la ecuación general de la recta:

$$r = \frac{3/2}{\cos(\theta - \pi/2)} = \frac{3/2}{\cos\theta\cos\pi/2 + \text{sen}\,\theta\ \text{sen}\,\pi/2} = \frac{3/2}{\text{sen}\,\theta}$$

$$\boxed{r = \frac{3}{2\ \text{sen}\,\theta}}$$

Ejemplo III.10

Determinar la ecuación de la recta R que pasa por el punto $C(8, 3/4\,\pi)$ si $\overline{OC}$ es perpendicular a R.

Solución:

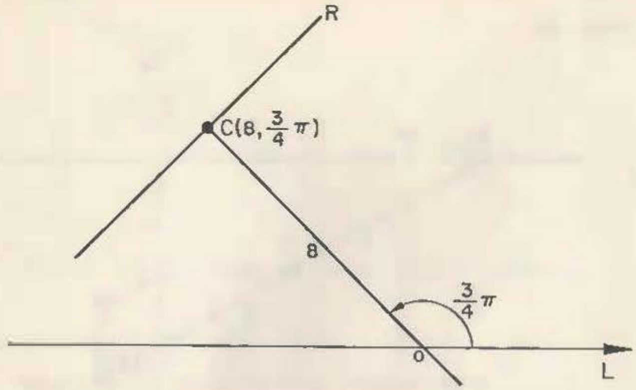


Figura III.20 Representación de la recta R

Como se observa en la figura, se tiene que:

$$p = 8, \qquad \alpha = 3/4\ \pi$$

Al sustituir en la ecuación general de la recta, queda:

$$r = \frac{8}{\cos(\theta - 3\pi/4)} = \frac{8}{\cos\theta\cos 3\pi/4 + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 3\pi/4} =$$

$$= \frac{8}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \frac{16}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2}\cos\theta} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ \frac{16}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta - \sqrt{2}\cos\theta}$$

$$\boxed{r = \frac{8\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}}$$

Veamos ahora algunos casos particulares de la ecuación polar de la recta.

Para el caso de una recta que pasa por el polo, en la figura III.21 podemos ver que $p = 0$ y α no está definido.

Por otra parte para cualquier punto $P(r, \theta)$ que pertenezca a la recta, r coincide con la recta y θ resulta ser el ángulo que la misma forma con la parte positiva del eje polar.

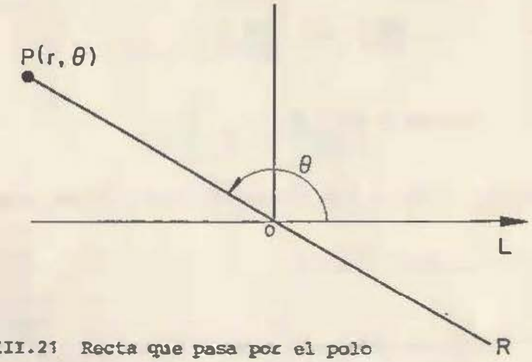


Figura III.21 Recta que pasa por el polo

De aquí que para tener definida una recta que pasa por el polo, será suficiente conocer el ángulo que forma con la parte positiva del eje polar; lo cual nos lleva a la expresión:

$$\boxed{\theta = k} \qquad k = \text{constante}$$

Esta expresión es la ecuación polar de la recta que pasa por el polo.

El siguiente caso particular es el de la recta paralela al eje polar.

Sea la recta R, paralela al eje polar y que pasa por el punto $P(r_1, \theta_1)$. (figura III.22).

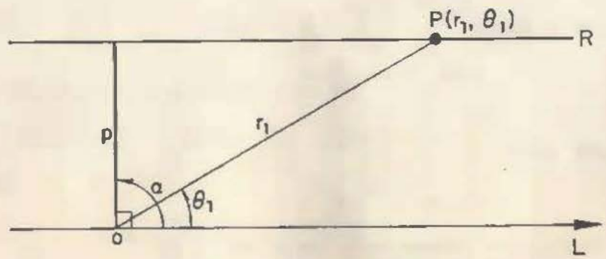


Figura III.22 Recta paralela al eje polar

En la figura se observa que:

$$p = r_1 \text{ sen } \theta_1$$

$$\alpha = \pi/2$$

Por ser perpendicular al eje polar; así que sustituyendo valores en la ecuación general de la recta, se tiene:

$$r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{r_1 \text{ sen } \theta}{\cos(\theta - \pi/2)}$$

Pero:

$$\cos(\theta - \pi/2) = \text{sen } \theta$$

$$\boxed{\therefore \quad r = \frac{r_1 \text{ sen } \theta_1}{\text{sen } \theta}}$$

Esta expresión, es la ecuación polar de la recta paralela al eje polar y que pasa por el punto $P(r_1, \theta_1)$

Ejemplo III.11

Determinar la ecuación polar de la recta, que es paralela al eje polar y que pasa por el punto $P(-2, \pi/4)$

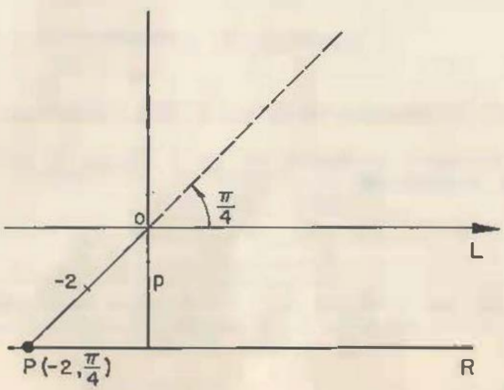


Figura III.23 Recta paralela al eje polar

Solución:

$$p = -2 \text{ sen } \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\pi$$

$$r = \frac{-2 \text{ sen } \pi/4}{\cos(\theta - 3/4\,\pi)} = \frac{-2 \text{ sen } \pi/4}{\text{sen } \theta}$$

$$r = \frac{-2/\sqrt{2}}{\text{sen } \theta} = -\frac{2}{\sqrt{2} \text{ sen } \theta}$$

$$\boxed{\therefore \quad r = -\frac{2}{\sqrt{2} \text{ sen } \theta}}$$

Veamos el caso de la ecuación polar de la recta normal al eje polar y que pasa por el punto $P(r_1, \theta_1)$. Figura III.24.

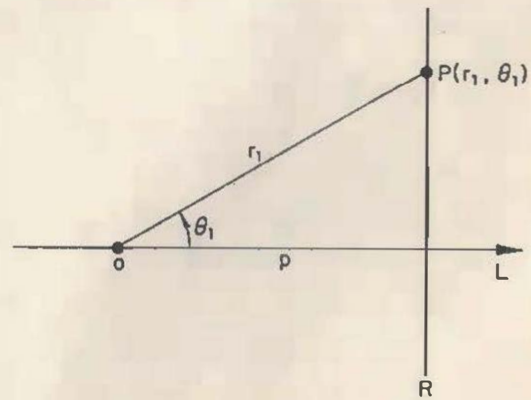


Figura III.24 Recta normal al eje polar

Para este caso:

$$p = r_1 \cos \theta_1$$

$$\alpha = 0$$

Sustituyendo en la ecuación general de la recta en coordenadas polares, tenemos:

$$r = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)} = \frac{r_1 \cos \theta_1}{\cos(\theta - 0)}$$

$$\boxed{\therefore\ r = \frac{r_1 \cos \theta_1}{\cos \theta}}$$

Que es la ecuación polar de la recta normal al eje polar y que pasa por el punto $P(r_1, \theta_1)$

Ejemplo III.12

Determinar la ecuación de la recta, que es normal al eje polar y pasa por el punto $P(-3, -\pi/4)$

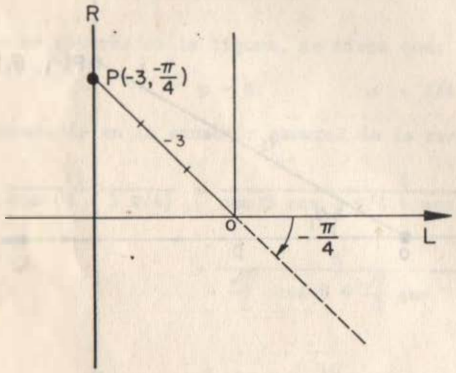


Figura III.25 Recta normal al eje polar

$$r = \frac{-3 \cos -\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos \theta} = \frac{-3\ (1/\sqrt{2})}{\cos \theta}$$

$$\boxed{r = -\frac{3}{\sqrt{2}\ \cos \theta}}$$

ECUACION POLAR DE LAS CONICAS

En el inciso III.1.5 definimos a las curvas cónicas, y en el inciso III.1.6 obtuvimos sus ecuaciones paramétricas y vectoriales.

En esta parte de nuestro tema, determinaremos las ecuaciones polares de las cónicas, es decir las ecuaciones de estas curvas referidas al sistema polar.

Ecuación polar de la circunferencia.- Consideremos primero el caso particular de la elipse, en la cual sus semiejes son iguales. A esta elipse particular la llamamos circunferencia.

Sea una circunferencia de radio a, con centro en el punto $C(c, \alpha)$. Figura III.26.

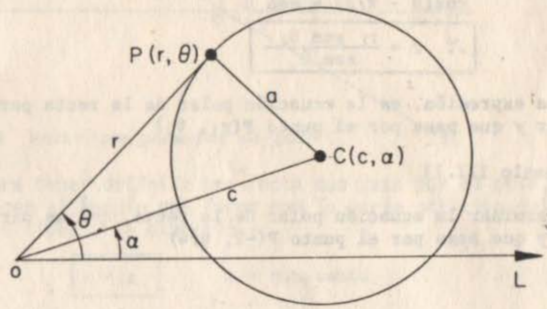


Figura III.26 Circunferencia

Sea $P(r, \theta)$ un punto cualquiera de la circunferencia.

En el triángulo rectángulo POC de la figura, si aplicamos la ley de los cosenos, tenemos que:

$$\boxed{a^2 = r^2 + c^2 - 2\ rc \cos(\theta - \alpha)}$$

Expresión que relaciona todos los datos y permite obtener r en función de θ. A esta expresión se le conoce como ecuación polar de la circunferencia.

Ejemplo III.13

Determinar la ecuación polar de la circunferencia con centro en $(5, \pi/4)$ y radio igual a 2.

Solución:

Al sustituir los datos en la ecuación general se tiene:

$$2^2 = r^2 + 5^2 - 2(5)\ r \cos(\theta - \pi/4)$$

$$4 = r^2 + 25 - 10r\ (\cos\theta\ \cos\pi/4 + \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\pi/4)$$

$$4 = r + 25 - 10r\ (\cos\theta\ (\sqrt{2}/2) + \operatorname{sen}\theta\ (\sqrt{2}/2))$$

$$4 = r^2 + 25 - 10(\sqrt{2}/2)\ r\ (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$$

Finalmente se llega a:

$$\boxed{r^2 - 5\sqrt{2}\ r\ (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + 21 = 0}$$

Ejemplo III.14

Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el polo y de radio a. Figura III.27.

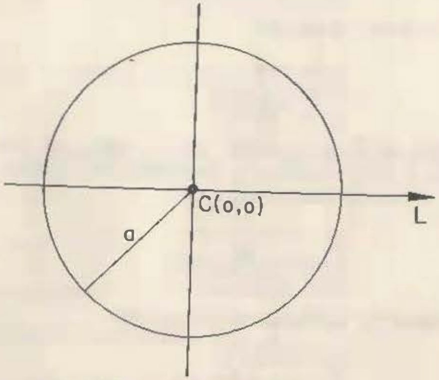


Figura III.27 Circunferencia con centro en el polo y radio a

Solución:

Sustituyendo los datos del problema en la ecuación general de la circunferencia, tenemos:

$$a^2 = r^2 + 0^2 - 2(0)\ r \cos(\theta - 0)$$

$$a^2 = r^2$$

$$\boxed{\therefore \quad r = a}$$

La expresión anterior es la ecuación polar de una circunferencia con centro en el origen y de radio a.

Ejemplo III.15

Determinar la ecuación de la circunferencia de radio a, que pasa por el polo y cuyo centro se localiza sobre el eje polar (figura III.28).

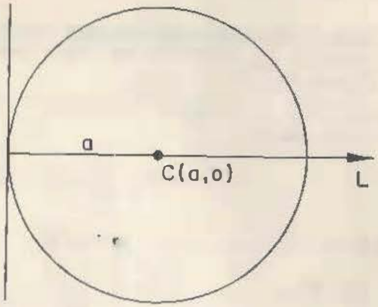


Figura III.28 Circunferencia con centro sobre el eje polar y que pasa por 0

Solución:

Para este caso tenemos:

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - 0)$$

$$0 = r^2 - 2ar\cos(\theta - 0)$$

$$r^2 = 2ar\cos\theta$$

De donde:

$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$

Ecuación polar de la circunferencia que pasa por el polo, con centro en el eje polar y radio a.

ECUACION POLAR DE LA PARABOLA, LA ELIPSE Y LA HIPERBOLA

Las ecuaciones polares de estas curvas, las obtendremos a partir de las características comunes que guardan entre ellas, es decir llegaremos a una expresión general a la que llamaremos *Ecuación Polar de las Cónicas*, de la cual obtendremos las expresiones particulares correspondientes a la parábola, la elipse y la hipérbola.

En el inciso III.1.5 definimos *cónica* como el conjunto de todos los puntos P contenidos en un plano, tales que la distancia no dirigida de cada punto P a un punto fijo F (foco) está en razón constante a la distancia no dirigida de P a una recta fija R (directriz) que no contiene a F.

La razón constante mencionada en la definición de cónica, la llamamos excentricidad, y la simbolizamos con e.

Sea una cónica en la cual un foco coincide con el polo, su eje focal coincide con el eje polar y la directriz del foco considerado está a la izquierda de él. Figura III.29.

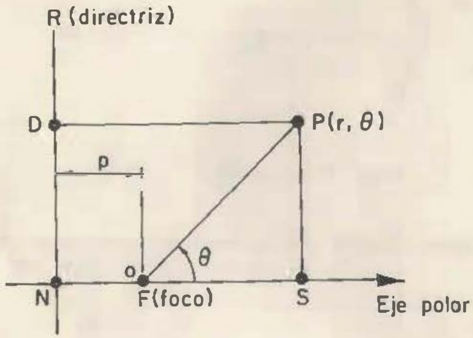


Figura III.29 Cónica en el sistema polar

Entonces de acuerdo a la definición tenemos:

$$e = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{DP}|} \quad \text{o sea que } |\overline{DP}|\, e = |\overline{OP}|$$

De la figura podemos observar que:

$$|\overline{OP}| = r \quad \text{entonces} \quad r = e\,|\overline{DP}|$$

Pero: $|\overline{DP}| = |\overline{NO}| + |\overline{OS}| = p + r\cos\theta$

De aquí que:

$$r = e(p + r\cos\theta)$$

Desarrollando:

$$r = ep + er\cos\theta$$

$$r - er\cos\theta = ep$$

Factorizando a r:

$$r(1 - e\cos\theta) = ep$$

Finalmente:

$$\boxed{r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}}$$

Esta expresión es la ecuación de una cónica en la cual un foco coincide con el polo, su eje focal coincide con el eje polar y la directriz del foco considerado está a la izquierda de él; y nos representará a una parábola, una elipse o una hipérbola, dependiendo de que $e = 1$, $0<e<1$ ó $e > 1$ respectivamente.

Para este caso, la directriz es una recta normal al eje polar, y su ecuación será:

$$\boxed{r = -\frac{p}{\cos\theta}}$$

Si en la cónica un foco coincide con el polo, su eje focal coincide con el eje polar, pero la directriz está a la derecha del foco considerado, entonces la ecuación de la cónica es:

$$\boxed{r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}}$$

Y su directriz tiene por ecuación:

$$\boxed{r = \frac{p}{\cos\theta}}$$

Ahora bien, cuando un foco coincide con el polo, el eje focal de la cónica coincide con el eje copolar, y la directriz es paralela al eje polar; la ecuación de la cónica será:

$$\boxed{r = \frac{ep}{1 \pm \operatorname{sen}\theta}}$$

Teniendo como directriz la recta de ecuación:

$$\boxed{r = \pm\frac{p}{\operatorname{sen}\theta}}$$

El signo positivo de las dos expresiones anteriores, corresponderá al caso de la directriz situada arriba del polo, y el signo negativo corresponde a la cónica cuya directriz esté situada abajo del polo.

Ejemplo III.16

Encontrar la ecuación de la elipse con foco en el origen, $e = 1/4$, y directriz.

$$r = \frac{-2}{\cos\theta}$$

Solución:

La directriz es una recta del tipo $r = -\frac{p}{\cos\theta}$ que corresponde a la recta perpendicular al eje polar, situada a 2 unidades a la izquierda del polo.

De aquí que $p = 2$ y como $e = 1/4$ la ecuación de la elipse es:

$$r = \frac{1/4\ (2)}{1 - (1/4)\cos\theta} = \frac{2}{4(1 - (1/4)\cos\theta)}$$

$$\boxed{\therefore\quad r = \frac{2}{4 - \cos\theta}}$$

Ejemplo III.17

Determinar la ecuación cartesiana de la elipse del problema anterior.

Solución:

$$r = \frac{2}{4 - \cos\theta} \quad \text{o sea } 4r - r\cos\theta = 2$$

Pero:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad y \qquad r\cos\theta = x$$

Por lo que:

$$4\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

De donde:

$$4\sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$$

Elevando al cuadrado:

$$16(x^2 + y^2) = x^2 + 4x + 4$$

$$16x^2 + 16y^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\boxed{15x^2 + 16y^2 - 4x - 4 = 0}$$

Ejemplo III.18

Dada la ecuación $r = \frac{6}{2 + 4\cos\theta}$

a) Encontrar la excentricidad.

b) Identificar la cónica.

c) Obtener la ecuación de la directriz.

Solución:

Necesitamos expresar la ecuación en la forma:

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$$

Para lo cual dividimos numerador y denominador entre dos.

$$r = \frac{(1/2)\ 6}{(1/2)(2 + 4\cos\theta)} = \frac{3}{1 + 2\cos\theta}$$

$$r = \frac{3}{1 + 2\cos\theta}$$

a) $e = 2$ (excentricidad)

b) Como $e > 1$, se trata de una hipérbola.

c) El signo positivo en la expresión nos indica que la directriz se encuentra a la derecha del polo. Por lo que su ecuación es del tipo:

$$r = \frac{p}{\cos\theta}$$

Para obtener p. tomamos el numerador de la ecuación de la cónica, esto es.

$$ep = 3 \quad \text{o sea que } 2p = 3$$

De donde:

$$p = \frac{3}{2}$$

Con lo que obtenemos la ecuación de la directriz:

$$r = \frac{3/2}{\cos\theta}$$

$$\boxed{\therefore\quad \text{directriz}\quad r = \frac{3}{2\cos\theta}}$$

En general, aplicando el concepto de excentricidad de las cónicas, podemos determinar la ecuación de una cónica con un foco en el origen, pero con la directriz correspondiente localizada en cualquier posición. Por ejemplo sea la cónica mostrada en la figura III.30.

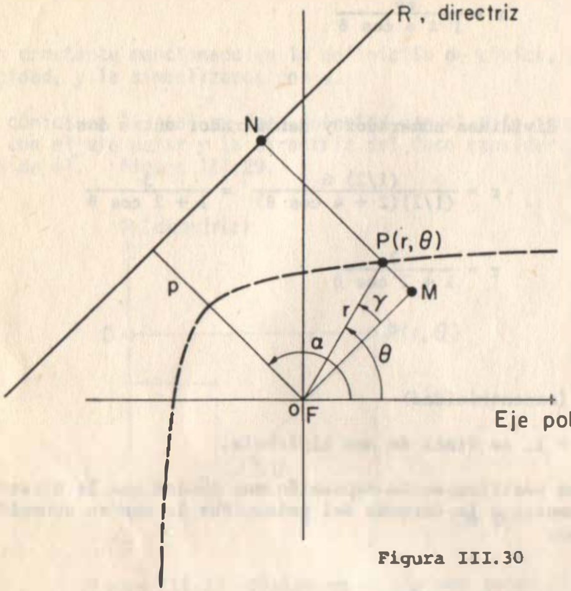


Figura III.30

Para determinar su ecuación, hagamos las siguientes consideraciones.

$$e = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{PN}|} = \frac{r}{|\overline{PN}|}$$

El problema se reduce a determinar $|\overline{PN}|$.

$$|\overline{PN}| = |\overline{MN}| - |\overline{MP}| \quad \text{pero} \quad |\overline{MN}| = p$$

Por lo que:

$$|\overline{PN}| = p - |\overline{MP}|$$

Ahora bien :

$$|\overline{MP}| = r \operatorname{sen} \gamma$$

Pero:

$$(\alpha - 90°) + \gamma = \theta \quad \text{ó sea} \quad \gamma = \theta - \alpha + 90°$$

De donde:

$$|\overline{MP}| = r \operatorname{sen}(\theta - \alpha + 90°) = r\cos(\theta - \alpha)$$

Sustituyendo:

$$e = \frac{r}{p - r\cos(\theta - \alpha)}$$

$$pe - re\cos(\theta - \alpha) - r = 0$$

$$pe = r(e\cos(\theta - \alpha) + 1)$$

$$\boxed{\therefore\ r = \frac{pe}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}}$$

III.2.4 DISCUSION DE LA ECUACION DE UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES

Como vimos en la sección III.2.2, una curva en el plano se puede definir por medio de una ecuación polar, o contrariamente si tenemos una ecuación del tipo $f(r, \theta) = 0$, podemos construir una curva, que es la gráfica de la ecuación. La relación entre esta curva y la ecuación $f(r, \theta) = 0$ es tal, que todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación, se encuentran sobre la curva, y recíprocamente, si un punto está sobre la curva, sus coordenadas satisfacen la ecuación. Para construir esta curva, tenemos que hallar un número suficiente de puntos, cuyas coordenadas satisfagan la ecuación, que indiquen su contorno. Esto puede hacerse dando arbitrariamente valores a θ, sustituyendo estos valores en la ecuación, y obteniendo así los respectivos valores de r. Antes de hacer estos cálculos es conveniente, sin embargo, tratar de establecer algunas propiedades geométricas de la curva, que nos permitan conocerla con suficiente aproximación. Esto implica el realizar algunos cálculos sistemáticos, a los cuales se les llama discusión de la ecuación de la curva.

La discusión de la ecuación de una curva comprende los siguientes puntos:

1. Determinación de las intersecciones de la curva con el eje polar y con el eje copolar.
2. Estudio de la simetría de la curva, respecto al eje polar, al eje copolar y al polo.
3. Estudio de la extensión de la curva.
4. Cálculo de las coordenadas de algunos puntos de la curva.
5. Representación gráfica de la curva.
6. Transformación de la ecuación polar $f(r, \theta) = 0$ a una en coordenadas cartesianas $f(x, y) = 0$

Antes de describir el proceso de cada uno de los puntos mencionados en el párrafo anterior, es conveniente señalar algunas particularidades que tiene la discusión de una ecuación en coordenadas polares.

En efecto, la discusión de una ecuación polar requiere de ciertas precauciones, que no son necesarias cuando se hace la discusión de una ecuación en coordenadas rectangulares. Por ejemplo, un punto en el sistema rectangular tiene un solo par de coordenadas, pero un punto en el sistema polar tiene una infinidad de pares de coordenadas. Podría suceder que para un punto P de una curva, un par de sus coordenadas polares satisfaga la ecuación de la curva, pero otro par no la satisfaga. Por ejemplo para la curva cuya ecuación es $r = 2\theta$ (llamada espiral de Arquímedes), si $\theta = \pi/2$ entonces $r = \pi$ y tenemos las coordenadas $(3.1415 \ldots, \pi/2)$ de un punto de la curva. Si asignamos al mismo punto otro par de sus coordenadas tales como $(3.1415 \ldots, 5/2\,\pi)$, vemos que este segundo par de coordenadas no satisface la ecuación de la curva.

Por otra parte, se puede presentar el caso, de que una curva, se represente por más de una ecuación polar, por ejemplo, una circunferencia cuyo centro está en el polo y que tiene de radio a, tendrá por ecuación a la expresión $r = a$, pero también podrá representarse por $r = -a$.

Las ecuaciones que representan a una misma curva, se llaman ecuaciones equivalentes.

Continuando con la discusión de una curva en coordenadas polares, se describirán a continuación cada uno de los puntos a discutir.

1.-Intersecciones.

Intersecciones con el eje polar. Estas intersecciones, cuando existen se pueden determinar calculando los valores de r que resultan cuando a θ se le asignan sucesivamente los valores $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, n\pi$; en donde n es un entero cualquiera.

Intersecciones con el eje copolar.- En este caso las intersecciones se pueden determinar calculando r para θ igual a $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots, \frac{n}{2}\pi$; en donde n es un entero impar cualquiera.

Si para algún valor de θ resulta $r = 0$, entonces la curva toca el polo.

2.- Simetrías.

Simetría respecto al eje polar. Decimos que una curva es simétrica respecto al eje polar, si para cada punto P de la curva, existe un punto P_1 que también pertenece a la curva, de tal forma que al segmento PP_1 lo bisecta perpendicularmente el eje polar.

En la figura III.31 se observa que para $P(r, \theta)$ su simétrico P_1 tiene por coordenadas $(r, -\theta)$ ó $(-r, \pi-\theta)$.

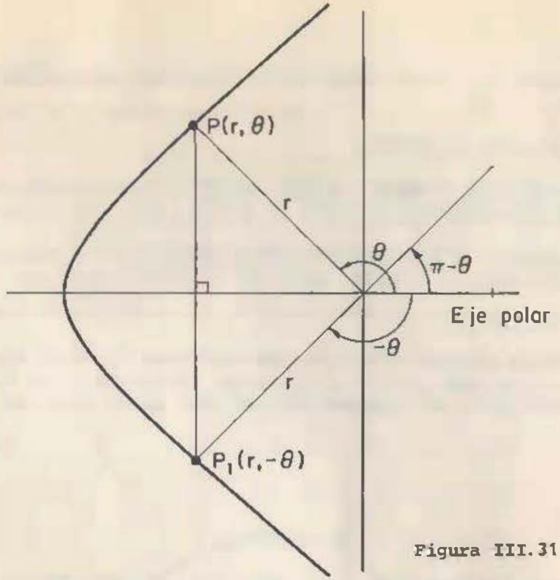


Figura III.31

Por lo que llegamos a la siguiente condición de simetría.

Una curva es simétrica con respecto al eje polar, si su ecuación polar no se altera, cuando se reemplaza θ por $-\theta$, ó θ por $\pi-\theta$ y r por $-r$.

La simetría con respecto al eje polar existe también si al reemplazar los valores indicados, la ecuación de la curva cambia a una ecuación equivalente.

Simetría con el eje copolar.- Decimos que una curva es simétrica respecto al eje copolar, si para cada punto P de la curva, existe un punto P_1 también de la curva, tal que el segmento PP_1 es bisectado perpendicularmente por el eje copolar. Figura III.32.

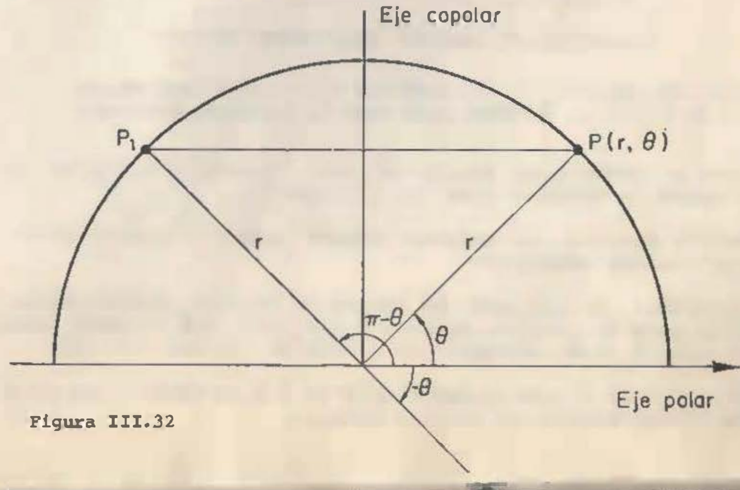


Figura III.32

En este caso para $P(r, \theta)$ su simétrico P_1 tiene por coordenadas $(r, \pi - \theta)$ ó $(-r, -\theta)$

De aquí la condición de simetría:

Una curva es simétrica respecto al eje copolar si su ecuación polar no se altera, cuando se reemplazan θ por $\pi - \theta$, ó, θ por $-\theta$ y r por $-r$.

La simetría respecto al eje copolar existe también, si al reemplazar los valores indicados, la ecuación polar de la curva cambia por una equivalente.

Simetría respecto al polo.- Decimos que una curva es simétrica respecto al polo, si para cada punto P de la curva, existe un punto P_1 también de la curva, tal que en el segmento PP_1, el polo es su punto medio. Figura III.33.

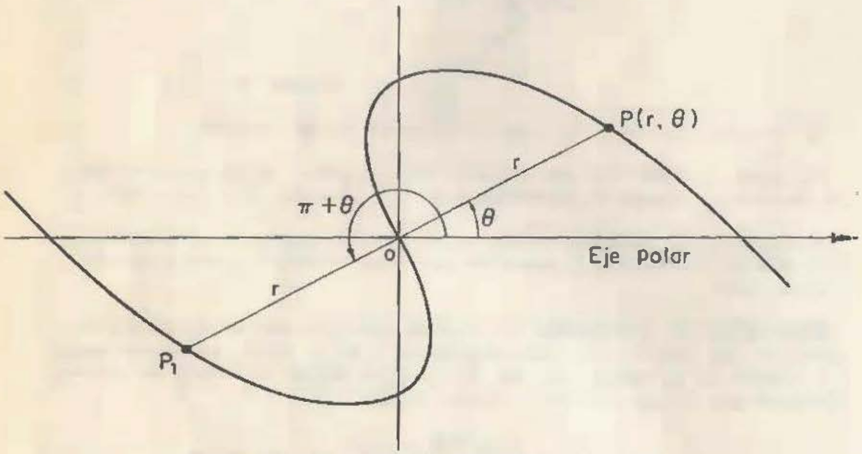


Figura III.33 Simetría con respecto al polo

En este caso para $P(r, \theta)$, su simétrico P_1 tiene por coordenadas $(r, \pi + \theta)$ ó $(-r, \theta)$; de donde observamos la siguiente condición:

Una curva es simétrica con respecto al polo si su ecuación polar no se altera, cuando se reemplaza θ por $\pi + \theta$ ó r por $-r$.

La simetría existe, si el reemplazo indicado cambia la ecuación polar de la curva en una equivalente.

3. Extensión.- En esta parte del estudio de la curva, determinaremos si la curva es cerrada o abierta; para lo cual será necesario que en su ecuación quede expresada r en función de θ es decir $r = f(\theta)$.

   En esta forma si para cualquier valor de θ la variable r toma un valor finito, entonces la curva es cerrada.

   Si para ciertos valores de θ la variable r se vuelve infinita, entonces la curva es abierta.

   Si para ciertos valores de θ la variable r se vuelve compleja, entonces no hay curva para esos valores de θ.

4. Cálculo de las coordenadas de algunos puntos de la curva. Las coordenadas polares de algunos puntos de la curva pueden obtenerse asignando valores particulares a θ en la ecuación de la curva $r = f(\theta)$, con lo que obtendremos los valores correspondientes de r cuando existen. En general será suficiente dar valores de θ a intervalos de $\pi/6$.

5. Representación gráfica de la curva. Para esto, será necesario trazar un sistema de referencia polar, y localizar, en este sistema, los puntos tabulados en el paso anterior.

   A continuación se unirán estos puntos con una curva continua, que deberá concordar con los datos obtenidos en los pasos uno, dos y tres.

6. Transformación de la ecuación polar a una en coordenadas cartesianas. Haciendo uso de las ecuaciones de transformación entre el sistema de referencia polar y el cartesiano, podemos transformar la ecuación de la curva $f(r, \theta) = 0$ a otra del tipo $f(x, y) = 0$.

Ejemplo III.19

Discutir la ecuación polar de la curva $r = 4 \cos 2\theta$

Solución:

1° Intersecciones

Con el eje polar; para:

$\theta = 0, \quad r = 4$

$\theta = \pi, \quad r = 4$

$\theta = 2\pi, \quad r = 4$

. . . .

$\theta = n\pi, \quad r = 4, \quad n = \text{un entero}$

Con el eje copolar; para:

$\theta = \pi/2, \quad r = -4$

$\theta = (3/2)\pi, \quad r = -4$

$\theta = (5/2)\pi, \quad r = -4$

. . . .

. . . .

$\theta = \frac{n}{2}\pi, \quad r = -4 \quad n = \text{impar}$

Con el polo; si en la ecuación hacemos $r = 0$ tenemos:

$$0 = 4\cos 2\theta = \cos 2\theta$$

$$2\theta = \text{ang}\cos 0$$

$$\theta = \frac{\text{ang}\cos 0}{2}$$

Por lo que:

$$r = 0 \text{ para } \theta = \pi/4,\ 3\pi/4,$$

$$5\pi/4,\ 7\pi/4,\ \ldots,\ n\pi/4 \quad n = \text{impar}$$

Concluimos que para estos valores, la curva pasa por el polo.

2° Simetrías

Con respecto al eje polar: si cambiamos θ por $(-\theta)$, tenemos:

$$r = 4\cos 2(-\theta) = 4\cos(-2\theta)$$

$$\cos(-2\theta) = \cos(0 - 2\theta) =$$

$$= \cos(0)\cos(2\theta) + \text{sen}(0)\,\text{sen}(2\theta) =$$

$$= (\cos(2\theta)) + 0 = \cos(2\theta)$$

$\therefore$ la ecuación no se altera.

Concluimos que la curva es simétrica al eje polar.

Con respecto al eje copolar; si cambiamos θ por $(\pi - \theta)$, tenemos:

$$r = 4\cos 2(\pi - \theta) = 4\cos(2\pi - 2\theta)$$

$$\cos(2\pi - 2\theta) =$$

$$= \cos(2\pi)\cos(2\theta) + \text{sen}(2\pi)\,\text{sen}(2\theta) =$$

$$= (\cos(2\theta)) + 0 = \cos(2\theta)$$

$\therefore$ la ecuación no se altera.

Concluimos que la curva es simétrica respecto al eje copolar.

Con respecto al polo; si cambiamos θ por $(\pi + \theta)$, tenemos:

$$r = 4\cos 2(\pi + \theta) = 4\cos(2\pi + 2\theta)$$

$$\cos(2\pi + 2\theta) =$$

$$= \cos(2\pi)\cos(2\theta) - \text{sen}(2\pi)\,\text{sen}(2\theta) =$$

$$= (\cos(2\theta)) - 0 = \cos(2\theta)$$

$\therefore$ la ecuación no se altera.

Concluimos que la curva es simétrica respecto al polo.

3. Extensión

La ecuación de la curva es $r = 4\cos 2\theta$

Dado que el valor de r, depende de los valores que toma la función coseno, y como sabemos que los valores de esta función están dentro del intervalo $[-1,\ 1]$, entonces concluimos que r será finita para cualquier valor θ, por lo que la curva es cerrada.

4. Cálculo de coordenada de algunos puntos de la curva; si

$\theta = \pi/6$, $r = 2$, $(2, \pi/6)$

$\theta = \pi/3$, $r = -2$, $(-2, \pi/3)$

$\theta = 2\pi/3$, $r = -2$, $(-2, 2\pi/3)$

$\theta = 5\pi/6$, $r = 2$, $(2, 5\pi/6)$

$\theta = 7\pi/6$, $r = 2$, $(2, 7\pi/6)$

$\theta = 4\pi/3$, $r = -2$, $(-2, 4\pi/3)$

$\theta = 5\pi/3$, $r = -2$, $(-2, 5\pi/3)$

$\theta = 11\pi/6$, $r = 2$, $(2, 11\pi/6)$

En el paso uno calculamos otros puntos de la curva

$(4, 0)$, $(-4, \pi/2)$, $(4, \pi)$, $(-4, 3\pi/2)$

$(4, 2\pi)$, $(0, \pi/4)$, $(0, 3\pi/4)$, $(0, 5\pi/4)$,

$(0, 7\pi/4)$

5. Representación gráfica de la curva. Figura III.34.

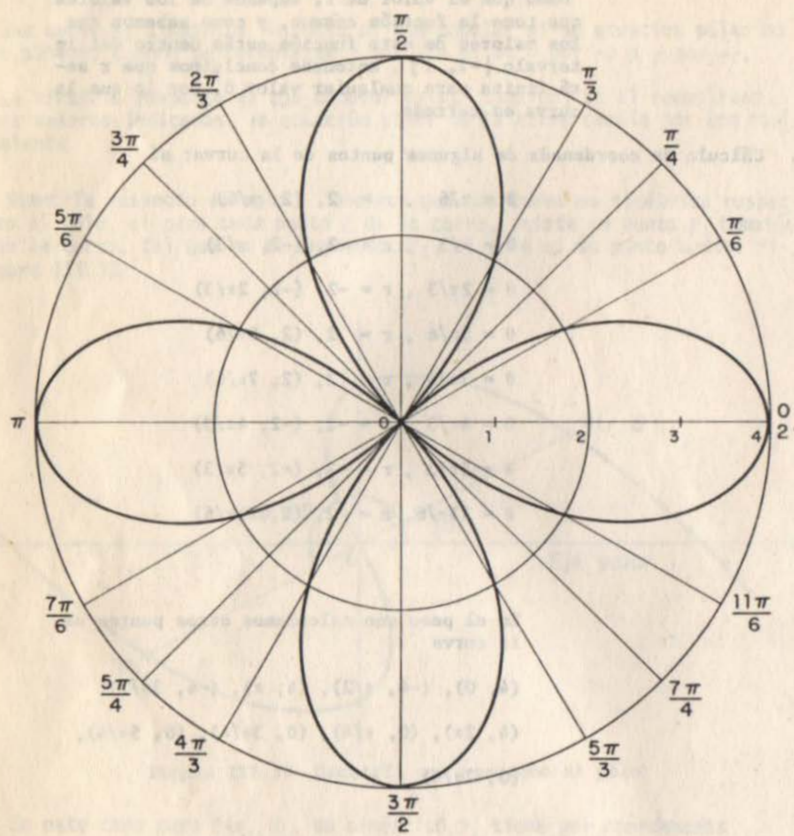


Figura III.34 Gráfica de $r = 4 \cos 2\theta$

6. Transformación de la ecuación polar, a una en coordenadas cartesianas

$$r = 4 \cos 2\theta$$

$$r = 4(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

$$r = 4\cos^2\theta - 4\,\text{sen}^2\theta$$

Por las ecuaciones de transformación tenemos:

$$r = \frac{4x^2}{r^2} - \frac{4y^2}{r^2} = \frac{4x^2 - 4y^2}{r^2}$$

$$r^3 = 4x^2 - 4y^2$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2})^3 = 4x^2 - 4y^2$$

$$\boxed{\therefore\ (x^2 + y^2)^{3/2} = 4x^2 - 4y^2}$$

III.3 COORDENADAS CILINDRICAS Y ESFERICAS

III.3.1 SISTEMA DE REFERENCIA EN COORDENADAS CILINDRICAS Y ECUACIONES DE TRANSFORMACION

El sistema de referencia polar, estudiado en el subtema anterior, corresponde a un espacio de dos dimensiones, es decir está considerado en el plano; sin embargo podemos generalizar nuestro sistema polar a un espacio de tres dimensiones.

Sea un punto P_0 en el espacio de tres dimensiones, referido a un sistema de coordenadas de tal forma que P_0 tiene por coordenadas (r_0, θ_0, z_0) es decir $P_0(r_0, \theta_0, z_0)$ en donde r_0 y θ_0 son las coordenadas polares de la proyección ortogonal de P_0 sobre un plano polar y z_0 es la distancia dirigida de P_0 al plano polar. Figura III.35.

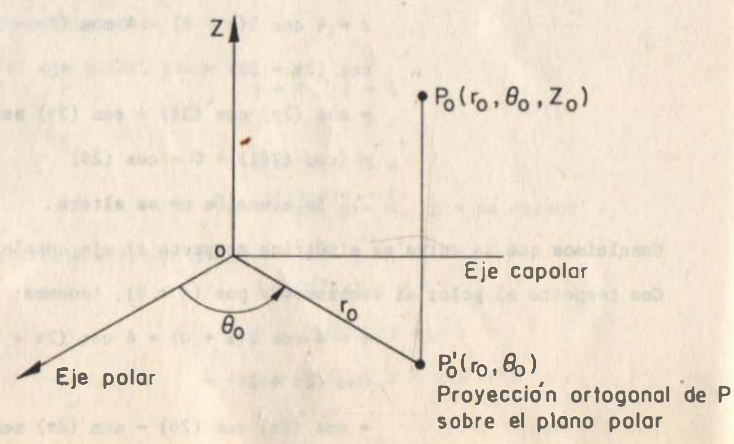


Figura III.35 Sistema cilíndrico de referencia

En la figura se han dibujado tres ejes: el polar, el copolar y el de cotas (Z). Este sistema recibe el nombre de coordenadas cilíndricas, d do a que los puntos del espacio para los que r es constante equidistan del eje z y forman un cilindro circular recto. Figura III.36.

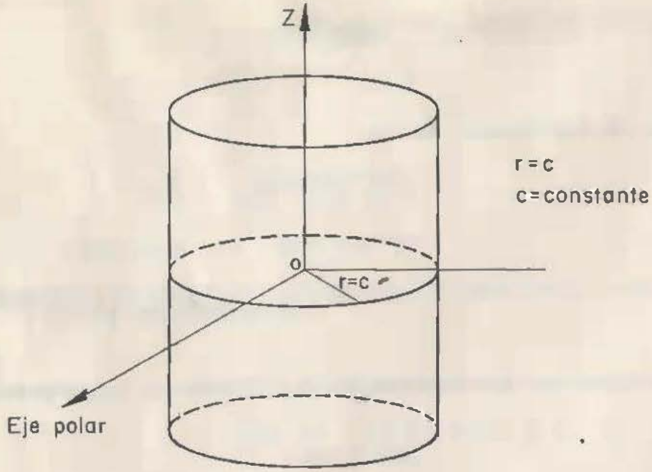


Figura III.36 Cilindro circular recto

Ejemplo III.20

Representar en un sistema de coordenadas cilíndricas a los puntos

$$P_1(2,\ \pi/4,\ 3),\quad P_2(3,\ \pi/2,\ -1)\quad y\ P_3(1,\ 7\pi/4,\ 2)$$

Solución. Figura III.37

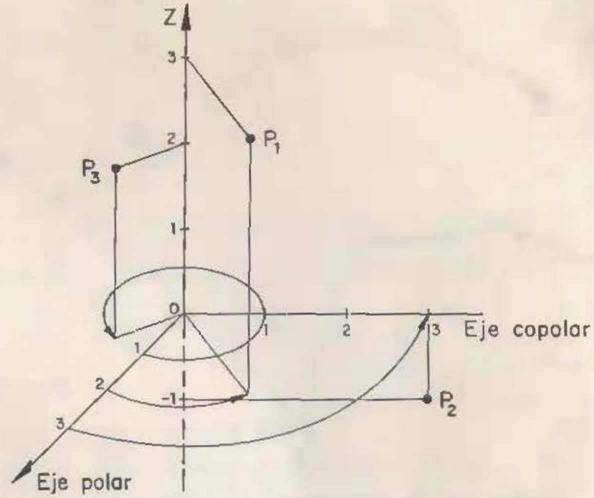


Figura III.37 Representación de puntos en el sistema cilíndrico

Dado que para el sistema de coordenadas polares un punto en el plano tiene una infinidad de coordenadas polares, en las coordenadas cilíndricas un punto en el espacio tiene una infinidad de coordenadas cilíndricas.

ECUACIONES DE TRANSFORMACION

Un punto P en el espacio lo podemos referir a un sistema de coordenadas cartesiano o a un sistema de coordenadas cilíndricas. Si conocemos las coordenadas de P en uno de los sistemas, por ejemplo en el cilíndrico, podemos determinar sus coordenadas en el sistema cartesiano siempre que conozcamos la localización relativa de un sistema con respecto al otro. Figura III.38.

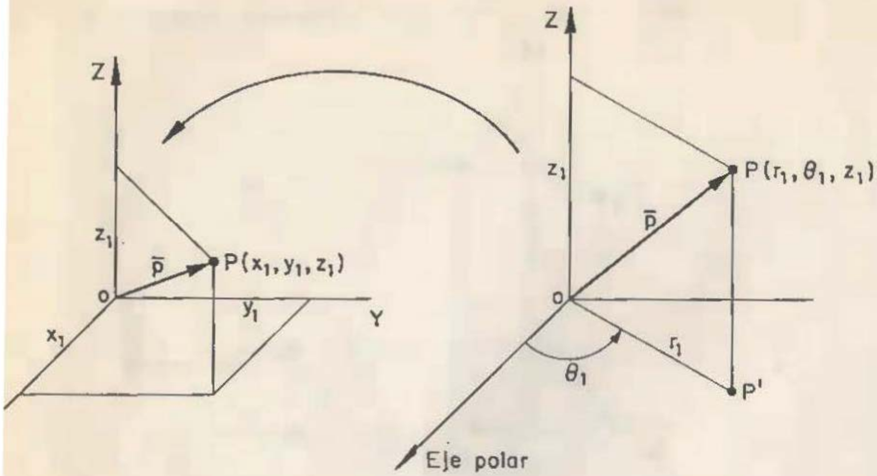


Figura III.38 Transformación de coordenadas

En la figura III.38 se han representado los vectores de posición $\overline{p}$ del punto P en cada uno de los sistemas.

En el sistema cartesiano las componentes de $\overline{p}$ son (x_1, y_1, z_1)

En el sistema cilíndrico las componentes de $\overline{p}$ sobre el eje polar, copolar y de cotas son $(r_1 \cos \theta_1, r_1 \operatorname{sen} \theta_1, z_1)$

Ahora bien, si consideramos que para estos sistemas el origen y el polo coinciden, que el eje X, el Y y el Z coinciden con el polar, copolar y de cotas respectivamente y que las escalas están referidas a la misma unidad entonces las componentes del vector $\overline{p}$ para ambos sistemas son respectivamente iguales, es decir que:

$$(x, y, z) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)$$

De donde se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z \end{aligned}}$$

Las cuales nos permiten obtener las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, a partir de sus coordenadas cilíndricas.

Si planteamos el problema inverso, esto es calcular las coordenadas polares de un punto en el espacio, a partir de sus coordenadas cartesianas; de la figura III.38 podemos observar que el triángulo OP'P es un triángulo rectángulo, ya que P' es la proyección ortogonal de P sobre el plano polar. Entonces existe la siguiente relación: .

$$|\overline{p}|^2 = r^2 + z^2$$

Pero $|\overline{p}|$ en el sistema cartesiano es:

$$|\overline{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por lo que sustituyendo, tenemos:

$$(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^2 = r^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{de donde} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De las ecuaciones de transformación de cilíndricas a cartesianas se tiene que:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

Si dividimos y entre x

$$\frac{y}{x} = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{r \cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos t} = \tan \theta$$

De donde:

$$\theta = \text{ang} \tan \frac{y}{x}$$

Finalmente tenemos que los ejes de cotas de ambos sistemas están relacionados de tal forma que:

$$z = z$$

De lo anterior concluimos que si conocemos las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, sus respectivas coordenadas cilíndricas estarán dadas por las expresiones:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{ang} \tan \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}}$$

Ejemplo III.21

Determinar las coordenadas cilíndricas del punto P(-1, 1, 4) dado en coordenadas cartesianas.

Solución:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{1}{-1} = 3\pi/4$$

$$z = 4$$

$$\boxed{\therefore \; P(\sqrt{2},\ 3\pi/4,\ 4)}$$

Ejemplo III.22

Determinar las coordenadas cartesianas del punto P(-2, - π/3, 1) dado en coordenadas cilíndricas.

Solución:

$$x = (-2)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = (-2)\text{ sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = (-2)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

$$\boxed{\therefore \; P(-1,\ \sqrt{3},\ 1)}$$

III.3.2 SISTEMA DE REFERENCIA EN COORDENADAS ESFERICAS Y ECUACIONES DE TRANSFORMACION

Existe otro sistema de referencia para el espacio de tres dimensiones, al que podemos considerar también como una generalización del sistema de coordenadas polares.

Consideremos un punto P_0 en el espacio de tres dimensiones, referido a un sistema de coordenadas tal que P_0 (ρ_0, θ_0, ϕ_0), en donde ρ_0 es el módulo del vector de posición del punto P_0, θ_0 es la segunda coordenada de la proyección ortogonal del punto P_0 sobre un plano polar y ϕ_0 es el ángulo que el vector de posición de P_0 forma con un eje normal al plano polar y que pasa por el polo. Figura III.39.

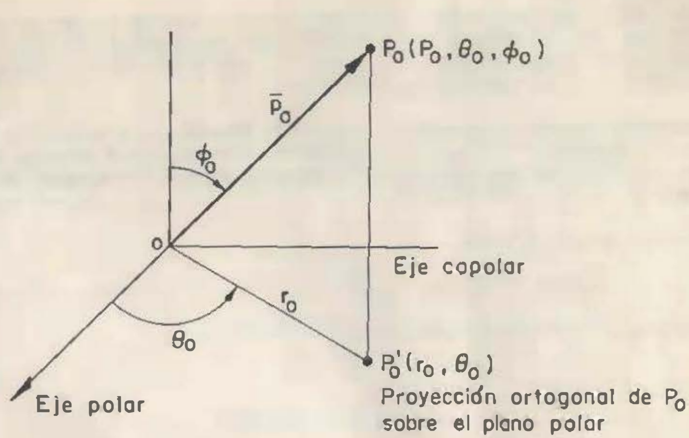


Figura III.39 Sistema esférico de referencia

A éste se le conoce como sistema de coordenadas esféricas, ya que los puntos del espacio para los que ρ es constante equidistan del polo y forman una esfera. Figura III.40.

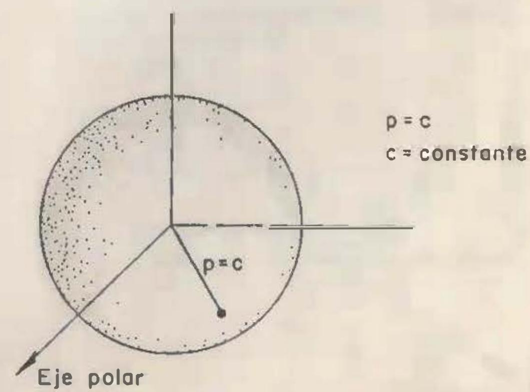


Figura III.40 Esfera

En el sistema de coordenadas esféricas al igual que en el de coordenadas cilíndricas, no existe la correspondencia uno a uno entre las ternas de coordenadas y los puntos del espacio, ya que a un punto le corresponde una infinidad de coordenadas esféricas.

Sin embargo cuando se requiere la correspondencia uno a uno entre puntos y coordenadas esféricas, se acostumbra restringir los valores de p, θ y ϕ de tal forma que sólo se utilizan valores positivos de p, valores de θ entre 0 y 2π, y de ϕ de 0 a π.

Obsérvese que el conjunto

$$\{(p, \theta, \phi) \mid 0 \leq p,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

Define todo el espacio cartesiano.

Ejemplo III.23

Representar en un sistema de coordenadas esféricas a los puntos $P_1(3, \pi/4, \pi/6)$ y $P_2(2, 3\pi/2, \pi/2)$

Solución:

Figura III.41

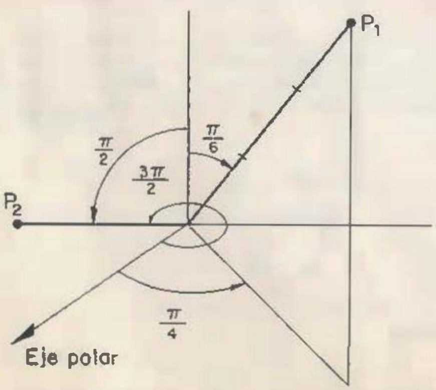


Figura III.41 Representación de puntos en un sistema esférico

ECUACIONES DE TRANSFORMACION

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas y uno de coordenadas esféricas, tales que coinciden el origen y el polo, además los ejes X, Y, Z coinciden con los ejes polar, copolar y el perpendicular al plano polar respectivamente, y en los cuales las escalas están referidas a la misma unidad.

Y sea un punto P cuyas coordenadas en el sistema polar son (p, θ, ϕ). Figura III.42.

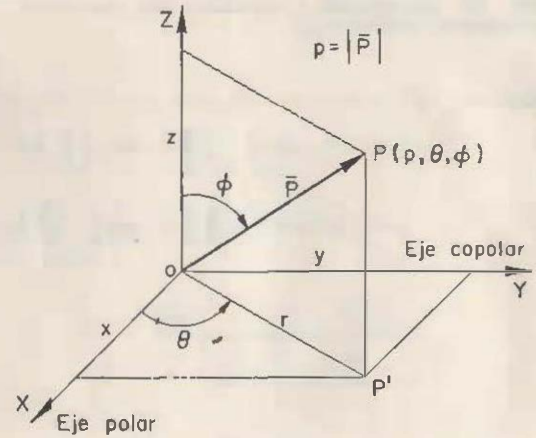


Figura III.42 Transformación de coordenadas

El vector $\bar{p}$ es el vector de posición del punto P, por lo que sus componentes son (x, y, z) en el sistema cartesiano.

Las componentes de $\bar{p}$ sobre los ejes del sistema esférico son:

$$(r \cos \theta,\ r \operatorname{sen} \theta,\ |\bar{p}| \cos \phi)$$

Pero:

$$r = |\bar{p}| \operatorname{sen} \phi$$

Como:

$$|\overline{p}| = p$$

Entonces:

$$r = p \text{ sen } \phi$$

Por lo que las componentes serán:

$$(p \text{ sen } \phi \cos \theta,\ p \text{ sen } \theta \text{ sen } \theta,\ p \cos \phi)$$

Dadas las coincidencias de los dos sistemas, las componentes de $\overline{p}$ en ambos sistemas deberán ser respectivamente iguales, por lo que:

$$(x, y, z) = (p \text{ sen } \phi \cos \theta,\ p \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta,\ p \cos \phi)$$

De donde se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= p \text{ sen } \phi \cos \theta \\ y &= p \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta \\ z &= p \cos \phi \end{aligned}}$$

Las cuales nos permiten calcular las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, a partir de sus coordenadas esféricas.

Si ahora consideramos que conocemos las coordenadas cartesianas de P, y requerimos las esféricas podemos plantear lo siguiente:

Como $p = |\overline{p}|$ y el módulo de un vector cuyas componentes son:

$$(x, y, z) \text{ es } |\overline{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Entonces:

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dado que θ es la segunda coordenada polar de la proyección de P sobre el plano polar, la relación de θ con las coordenadas cartesianas x e y, esta dada por:

$$\theta = \text{ang tan } \frac{y}{x}$$

Finalmente en la tercera ecuación de transformación de esféricas a cartesianas tenemos que:

$$z = p \cos \phi$$

Pero como ya vimos:

$$p = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por lo que:

$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \cos \phi$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos \phi$$

De donde:

$$\phi = \text{ang cos } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

De lo anterior concluimos que si conocemos las coordenadas cartesianas de un punto en el espacio, las correspondientes coordenadas esféricas del punto estarán dadas por las expresiones:

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \text{ang tan } \frac{y}{x} \\ \phi &= \text{ang cos } \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}}$$

Ejemplo III.24

Determinar las coordenadas esféricas del punto P(-1, 1, 4) dado en coordenadas cartesianas.

Solución:

$$p = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{1}{-1} = 3\pi/4$$

$$\phi = \text{ang cos } \frac{3}{3\sqrt{2}} = \text{ang cos } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\therefore \quad P(3\sqrt{2},\ 3\pi/4,\ \pi/4)}$$

Ejemplo III.25

Determinar las coordenadas cartesianas del punto $P(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ dado en coordenadas esféricas.

Solución:

$$x = 3 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{3}\right) \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$y = 3 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{3}\right) \text{sen} \left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$z = 3 \cos \left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\therefore \quad P\left(\frac{9}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{4},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)}$$

B I B L I O G R A F I A

CAPITULOS I y II

TITULO: EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA
AUTOR: Louis Leithold
EDITORIAL: Harla

TITULO: EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA
AUTOR: Johnson y Kiokemeister
EDITORIAL: CECSA

TITULO: CALCULUS WITH ANALYTIC GEOMETRY
AUTORES: Earl W. Swokowski
EDITORIAL: Prindle, Weber & Schmidt

CAPITULO III

TITULO: EL CALCULO CON GEOMETRIA ANALITICA
AUTOR: Louis Leithold
EDITORIAL: Harla

TITULO: CALCULUS
AUTOR: Tom M. Apostol Vol. I
EDITORIAL: Reverte